La notion d'indéfini en lambda-calcul

Yves Bertini

UNIVERSITÉ DE SAVOIE

UFR Sciences Fondamentales et Appliquées

La notion d'indéfini en λ-calcul

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 1*er* *juillet 2005*
en vue de l'obtention du grade de Docteur de l'Université de Savoie

Spécialité : Mathématiques et Informatique

par

YVES BERTINI

devant le Jury composé de :

Rapporteurs	Alessandro BERARDUCCI, Professore - Università di Pisa
	Antonio BUCIARELLI, Maître de conférences - Université Paris VII
Examinateurs	Mariangiola DEZANI, Professore - Università di Torino
	Laurent REGNIER, Professeur - Université de la Méditerrannée
Directeur de thèse	René DAVID Professeur - Université de Savoie, Chambéry

De mes années de thèse, ce sont mes rencontres, toutes très diverses, qui vont me laisser les meilleurs souvenirs. J'aimerais ici être reconnaissant de tout ce que vous m'avez apporté.

En premier, je tiens à remercier vivement mon directeur René David pour avoir accepté d'encadrer ma thèse. Je sais à quel point il t'aura fallu de la patience pour supporter mes retards et pour me soutenir sans faille jusqu'au bout. Enfin, on est arrivé en haut de l'Iseran ?

Combien de fois ai-je feuilleté les articles d'Alessandro Berarducci au cours de ma thèse ? Ce fût vraiment un plaisir de pouvoir enfin discuter ensemble. Merci d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Merci également à Antonio Bucciarelli pour ses remarques pertinentes. Tous deux ont largement contribué à l'amélioration du manuscrit.

Merci à Mariangiola Dezani et Laurent Regnier d'être examinateurs de cette thèse.

Mon passage au LRI d'Orsay n'aura pas été très long, pourtant je me souviens d'un accueil très chaleureux. Merci à Christine Paulin de m'avoir initié à l'univers passionnant des algorithmes aléatoires.

Je tiens à remercier les membres de l'Équipe de Logique du LAMA dans laquelle j'ai été parfaitement intégré. Karim, tes explications ont toujours été très claires. Capt'n Raffalli, mais combien de domaines m'as-tu fait découvrir ? De *bindlib* au maniement de tangon, je te dois énormément. Salutations à Khelifa (Aix les Bains te manque pas trop ?), Frédéric et Patrick.

Dans ce rez-de-chaussée du bâtiment du Chablais ça se bouscule. Parmi les visages récurrents qu'il me plaisait de rencontrer, sans aucun doute c'est celui du père Didier qui revenait le plus souvent, promis on ira au Sporting avec φanie pendant la canicule. Merci au chef Abdelhak et à Brahim gastronome en Tajine, à Mouadh *(le Sacré)* à Vincent *(Belle balade de Vinimes à Aix-les-Bains).*

Enfin, je salue Sylvain pour ses éclairages sur la structure du nombre Π et à Guillaume pour ses échanges à propos de géométrie des surfaces. Je salue également Thierry de Mulhouse qui m'a soutenu dans les tous derniers mois, va falloir tester du nouveau matériel.

Enfin, j'ai une pensée pour ma famille, mon père, mes frères, la moyenne Léa et Virginie qui ont compté pour moi bien avant la thèse et qui compteront longtemps après.

Table des matières

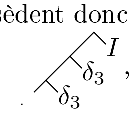
Introduction

En 1930, Alonzo Church propose la théorie du λ-calcul afin de formaliser la notion de calcul en mathématiques. Comme le précise le théorème de Church-Kleene [14], toutes les fonctions récursives partielles de l'arithmétique trouvent une représentation dans cette théorie. Dans celle-ci, l'indéfini des fonctions partielles est traduit par un terme non résoluble. Ici, l'association indéfini-non résoluble convient parfaitement. Plus tard cette association sera aussi à l'origine des arbres de Böhm.

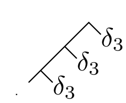
Peut-on pour autant conclure que tout terme non résoluble est dépourvu de contenu opératoire ? Cela paraît clair pour un terme comme $\Omega = (\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)$ dont les seuls réductions bouclent sur lui-même $\Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \cdots$ Mais ça l'est moins pour un terme qui par exemple égrènerait au fur et à mesure toutes les décimales de $\sqrt{2}$: ce calcul ne se terminerait pas et pourtant il produirait bel et bien un résultat. C'est pourquoi nous trouvons dans le λ-calcul des notions plus fines d'indéfinis. La *facilité* compte parmi les plus fines. Un terme est facile s'il peut être égalé à tout autre terme clos arbitraire sans soulever de contradiction. Cette nouvelle notion d'indéfini se justifie ainsi : comme les termes faciles peuvent être échangés par n'importe quel autre sans en bouleverser complètement le calcul, ils ne possèdent aucune propriété essentielle qui leur est propre.

L'origine de cette notion remonte à 1975. À cette époque, Jacopini [11] avait montré que Ω pouvait être identifié à tout autre terme de manière consistante. Depuis en collaboration avec Venturini-Zilli [12], ils décidèrent d'étudier systématiquement la classe de tous les termes faciles. À l'heure actuelle, nous savons que les faciles sont inclus dans les non résolubles. Et grâce aux travaux de Berarducci [5], nous savons également qu'ils contiennent les termes muets. Ces deux inclusions étant strictes. Les termes muets sont définis à la façon des non résolubles : ce sont des termes qui ne se réduisent ni à une variable, ni à une abstraction $\lambda x.u$, ni à une application $(u\ v)$ où u ne se réduit pas à une abstraction.

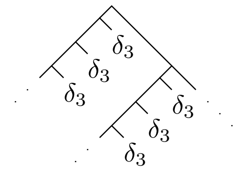
Que connaissons-nous des termes non résolubles et non muets ? Ils se divisent en trois parties : les termes qui se réduisent à une abstraction, les zéro-termes forts de degré fini et ceux de degré infini. Les premiers ne seront pas étudiés dans cette thèse bien qu'ils existent. Les seconds s'écrivent sous la forme $(m\ v_1 \cdots v_n)$ où m est muet. Ils sont tous faciles. Les derniers sont des termes non résolubles qui ne se réduisent pas à une abstraction et qui ne sont pas de degré fini. Pour ces termes il n'existe pas de généralité. Par exemple, $(\delta_3\ \delta_3)$ où $\delta_3 = \lambda x.(x\ x\ x)$ n'est pas facile tandis que $(P\ (\Omega\ \Omega))$ l'est. P étant un combinateur de point fixe décrit à la page 68.

Toutefois, un autre résultat dû à Berarducci précise que les zéro-termes forts de degré infini non auto-similaires sont faciles : un terme est auto-similaire si son arbre de Berarducci apparaît comme un sous-arbre propre à lui-même. Les arbres de Berarducci étant construits sur le même modèle que ceux de Böhm à la différence que les termes muets jouent le rôle des non résolubles. Les arbres de Berarducci des termes auto-similaires possèdent donc une structure qui se répète indéfiniment.
Ainsi $(\delta_3\ \delta_3\ I)$, dont l'arbre est 

, n'est pas auto-similaire. Il est donc facile.

En revanche $(\delta_3\ \delta_3)$ noté Ω_3 dont l'arbre est 

est auto-similaire. Celui-ci n'est pas facile. Les exemples de zéro-termes forts de degré infini auto-similaires et faciles sont rares. Intrigila [10] a le premier établi la facilité de $(P\ \Omega\ \Omega)$. Ce résultat fut ensuite étendu par Berarducci et Intrigila [4] à une infinité d'autres termes construits à l'aide du combinateur de point fixe P. Néanmoins, il n'existe pas de méthode générale pour déterminer si un zéro-terme fort auto-similaire est facile ou non. L'étude de la facilité est donc concentrée sur cette classe de termes. Ils sont en effet plus difficiles à traiter que les autres : comme leurs arbres se répètent indéfiniment à l'intérieur d'eux mêmes, les cas d'application d'une équation portant sur ces arbres sont automatiquement multipliés.

Le terme $Y_t\,\Omega_3$ où Y_t est le combinateur de Turing représente un exemple typique de zéro-terme fort de degré infini et auto-similaire dont la facilité demeure un mystère. Son arbre de Berarducci est  . Ce problème a été posé pour la première fois en 1985 par Jacopini et Venturini-Zilli [13]. $Y_t\,\Omega_3$ possède la particularité d'avoir un arbre de Berarducci T construit suivant un schéma $T = (\Omega_3\,T)$ dans lequel Ω_3 n'est pas facile. Aujourd'hui, la question de sa facilité reste toujours ouverte. Néanmoins en vertu des travaux de Berarducci et Intrigila [4], nous savons que $Y_t\,\Omega_3$ peut être identifié de manière consistante à δ_3 ainsi qu'à tout autre terme dont l'arbre de Böhm n'est pas compatible avec δ_3. En conséquence, pour compléter la preuve de la facilité il ne reste plus qu'à étudier les termes qui s'écrivent sous la forme $\lambda x.(x\ b_1\ b_2)$ où b_1 et b_2 sont soient non résolubles soient égaux à la variable x. Un résultat complémentaire dû à Kuper [17] assure que la théorie T issue du λ-calcul auquel est ajouté l'équation $(\Omega_3\,m) = m$ demeure consistante si T n'entraîne pas l'égalité $m = \delta_3$. Il ne reste donc plus qu'à examiner le cas où $m = \lambda x.(x\ b_1\ b_2)$ et $T \vdash m = \delta_3$.

Nous avons donc cherché à résoudre ce cas, sans y parvenir. Toutefois nous avons réussi à montrer plusieurs résultats qui nous éclaircissent sur l'ensemble des termes m qu'il restent à étudier. Ces résultats ont tous été obtenus par la technique des classes confinantes infinies. Cette méthode due à Berarducci [4, 5] repose sur le $\lambda\bot$-calcul infini. Dans ce calcul, tout terme t est normalisable sous une forme notée t^∞ qui s'identifie à son arbre de Berarducci et qui peut éventuellement être infinie. Elle fait également intervenir la notion de classe des échangés : si A et B sont deux classes de termes, la classe des échangés stricts de A par (B, m), notée $A[B \to_\infty m]^s$, est l'ensemble des termes de A dans lesquels nous avons échangé les sous-termes éléments de B par m. Autrement dit $A[B \to_\infty m]^s$ est l'ensemble des termes $(C[m])^\infty$ où C est un contexte infini tel qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ vérifiant $a = C[b]$. La méthode des classes confinantes revient alors à montrer que la clôture de $(Y_t\,\Omega_3)$ par échanges infinis stricts par m n'est composée que de zéro-termes i.e. des termes qui ne s'écrivent pas $\lambda x.v$. Ce que nous notons $Cl_m(Y_t\,\Omega_3) \subseteq \mathrm{OT}$.

Grâce à cette méthode, nous avons montré que les seuls termes m qu'il restait à étudier s'écrivent sous la forme $\lambda x.(x\ b_1\ b_2)$ où b_1 et b_2 sont soit des zéro-termes forts de degré infini soit la variable x. Ensuite, nous avons établi dans le cas où m s'écrit $\lambda x.(x\ b\ x)$, que si b ne s'échange pas en x i.e. $x \notin \{b\}[Cl_m(Y_t\,\Omega_3) \to_\infty m]$, alors m peut être identifié à $(Y_t\,\Omega_3)$. Ce cas s'apparente à celui de Kuper puisque si b s'échange en x, alors m s'échange en δ_3. Néanmoins, la condition $x \notin \{b\}[Cl_m(Y_t\,\Omega_3) \to_\infty m]$ est plus simple à vérifier que celle de Kuper $T \vdash m = \delta_3$. Le dernier résultat concerne le cas où b s'échange en x et donc m s'échange en δ_3. Dans ce cas, sous une hypothèse H_2 d'échange direct, nous montrons que : 1) m possède lui même une composante auto-similaire 2) $Cls_m(Y_t\,\Omega_3) \subseteq \mathrm{OT}$ où $Cls_m(Y_t\,\Omega_3)$ représente la clôture par échange simple i.e. celle obtenue par des contextes à un seul trou. Le deuxième point ne nous permet cependant pas de conclure quant à la consistance de l'équation $(Y_t\,\Omega_3) = m$. En effet, la méthode des classes confinantes réclame que le clôture infinie soit composée de zéro-termes. Or, la clôture simple est plus petite. Néanmoins, les moyens mis en œuvre pour montrer ce résultat fournissent une description intéressante des échanges qui peuvent avoir lieu dans ce cas particulier.

Cette thèse se découpe en deux parties. La première est consacrée à la notion d'indéfini. Nous y décrirons en détail les non résolubles, les zéro-termes forts et les termes muets. Nous verrons pourquoi tous sont candidats pour la notion d'indéfini. Les derniers, les termes muets, permettront d'introduire le λ-calcul infini. Ce sera l'objet du chapitre deux. Le dernier chapitre se concentrera sur la notion de facilité. Nous y présenterons la technique des classes confinantes qui sera illustrée de nombreux exemples.

La seconde partie est consacrée à la facilité de $(Y_t\,\Omega_3)$. Après avoir rappelé les résultats connus à ce jour, nous présenterons la preuve de nos nouveaux résultats.

Première partie

Notion d'indéfini

Introduction

Les non résolubles sont des termes sans forme normale de tête. Ils possèdent cette propriété remarquable : si nous ajoutons au λ-calcul les équations qui les identifient à la constante $\perp$, alors la nouvelle théorie obtenue reste consistante. Cette théorie est appelée la théorie de Böhm et sa consistance sert de fondement à la construction des arbres de Böhm. Il existe d'autres termes qui possèdent cette même propriété. Dans cette partie, nous évoquerons les zéro-termes forts et les termes muets. Les zéro-termes forts sont des non résolubles qui ne se réduisent pas à une abstraction. Les muets sont des zéro-termes forts qui ne se réduisent pas à une application $(u\ v)$ où u est un zéro-terme. Tous deux permettent de construire des arbres à la manière de Böhm. Aux premiers correspondent les arbres de Lévy-Longo et aux seconds, ceux de Berarducci. Les inclusions entre ces trois classes de termes se répercutent par des arbres aux descriptions plus ou moins fines. À titre d'exemple, le terme $\lambda x.\Omega\ (x\ x)$ où $\Omega = (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$ se voit associer les trois arbres suivants :

Böhm *non résolubles*	Lévy-Longo *zéro termes forts*	Berarducci *muets*
$\perp$	λx $\mid$ $\perp$	λx $\perp$ $\quad x \quad x$

La preuve de la consistance de la relation $\rightarrow_m$ qui associe $\perp$ à tout terme muet repose sur un constat : les termes muets sont des zéro-termes forts, ils n'apparaissent donc jamais comme la partie $\lambda x.a$ d'un redex $(\lambda x.a\ b)$. En conséquence, les termes muets ne joueront pas plus de rôle dans une réduction qu'une simple constante. Nous appellerons cette propriété l'inactivité des zéro-termes forts. Elle sera à l'origine de la proposition 1.3.36 de généricité concernant les termes muets : échanger un sous-terme muet dans un terme muet ne modifie pas son caractère muet.

La preuve de la consistance s'inspire de la méthode des extensions confluentes. Cette technique consiste à trouver une relation confluente $\rightarrow_\mu$ qui étend $\rightarrow_m$. Pour prouver la confluence de $\rightarrow_\mu$, nous étudierons ses diagrammes commutatifs. Pour cela nous serons amenés à examiner ce que devient le résidu d'un sous-terme muet après $\rightarrow_{\beta m}$-réduction. La proposition 1.3.36 permettra alors de conclure.

Les deux propriétés, consistance et généricité des termes muets sont des aspects fondamentaux qui unissent les diverses notions d'indéfini. Nous les retrouverons également pour les non résolubles et les zéro-termes forts. L'une représente l'indéfini d'un point de vue dénotationnel, l'autre d'un point de vue opératoire.

La consistance de $\rightarrow_m$ justifiera par la suite la construction des arbres de Berarducci. Ceux-ci serviront de modèle pour le $\lambda\perp$-calcul infini. Ce sera l'objet du deuxième chapitre. Ce calcul nous permettra de manipuler des arbres infinis comme de simples termes.

À partir du $\lambda\perp$-calcul infini, des extensions confluentes et de l'inactivité des zéro-termes forts naîtra la notion de classe confinante infinie [4, 5]. Posséder une classe confinante constituera une condition suffisante pour obtenir une extension confluente.

Le chapitre trois sera consacré à la notion de facilité, une autre notion d'indéfini. Les classes confinantes constitueront alors un outil puissant pour exhiber des exemples de termes faciles.

Chapitre 1

Le λ-calcul fini

1.1 Le λ-calcul

1.1.1 Notions de base

◄ **Syntaxe du λ-calcul** ►

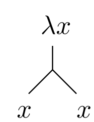
Les *termes du λ-calcul* s'obtiennent par induction en utilisant un nombre fini de fois les règles suivantes :

- toute variable x est un terme du λ-calcul ;
- si t et u sont des termes du λ-calcul, alors $(u\ v)$ est un terme du λ-calcul ; v s'appelle alors l'argument de l'application $(u\ v)$.
- si x est une variable et t un terme du λ-calcul, alors $\lambda x.t$ est un terme du λ-calcul. $\lambda x.t$ s'appelle alors une abstraction.

La *complexité d'un terme* est la mesure du nombre de règles qu'il a fallu employer pour le construire.

Un terme pourra être écrit sous forme d'un mot ou représenté sous une forme équivalente d'arbre étiqueté.

Exemple 1.1.1

Le terme écrit $\omega = \lambda x.(x\ x)$ peut aussi se représenter par l'arbre  .

L'ensemble des λ-termes finis ainsi créé est noté Λ. Sauf mention contraire, ils sont définis à α-équivalence près.

Pour tout terme t, $FV(t)$ désigne l'ensemble des *variables libres* de t. Un terme sans variables libres est dit *clos* et l'ensemble des termes clos est noté Λ^0 .

Afin d'alléger les écritures, l'application $(\cdots(r_1\ r_2)\cdots r_n)$ est abrégée en $(r_1\ r_2 \cdots r_n)$.

Pour tous termes t et u et pour toute variable x, la *substitution* $u[t/x]$ désigne le terme u dans lequel toute occurrence libre de la variable x est remplacée par t avec renommage des variables liées de u.

Si la *substitution a lieu simultanément sur plusieurs variables*, par exemple $u[a/x, b/y, c/z, \cdots]$, on notera σ la substitution des variables $x, y, z, \cdots$ par les termes $a, b, c, \cdots$ et $u(\sigma)$ désignera $u[a/x, b/y, c/z, \cdots]$.

Exemple 1.1.2 Si $u = \lambda y.x$ et $t = \lambda x.(x\ y)$ alors $u[t/x] = \lambda z.\ \lambda x.(x\ y)$.

Définition 1.1.3 *Une propriété P sur les termes passe au contexte si :*
- *pour tout terme u, $P(u)$ entraîne $P(\lambda x.u)$*
- *pour tous termes u et v, $P(u)$ et $P(v)$ entraînent $P(\,(u\ v)\,)$*
- *pour tous termes u et v, $P(u)$ et $P(v)$ entraînent $P(\,u[v/x]\,)$*

◄ Les suites ►

Le vecteur $\vec{t}$ désigne une *suite de termes* $(t_1, \cdots, t_p)$ où p est un entier positif ou nul. La *longueur de la suite* $\vec{t}$ représente son nombre d'éléments. Elle est notée $l(\vec{t})$. Par convention la suite est vide si p est inférieur au premier indice de la suite.

Le vecteur $\vec{\lambda}.$ désigne une suite de variables mises en abstraction $\lambda x_1\ \lambda x_2\ \cdots \lambda x_n$.

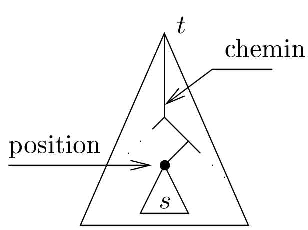
Pour toute classe de termes A, $\vec{t} \in A$ indique que $t_1 \in A, t_2 \in A, \cdots, t_n \in A$ où n est la longueur de la suite.

La concaténation de deux suites $\vec{s_1}$ et $\vec{s_2}$ se note $\vec{s} =< \vec{s_1}, \vec{s_2} >$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés elle est simplement notée $\vec{s_1}\vec{s_2}$.

◄ Les sous-termes ►

Définition 1.1.4
- *Pour tout terme t, l'ensemble des* sous-termes *de t est construit par induction sur t :*
  - *si $t = x$ alors son seul sous-terme est x.*
  - *si $t = (u\ v)$ alors ses sous-termes sont ceux de u et v ainsi que t lui-même.*
  - *si $t = \lambda x.u$ alors ses sous-termes sont ceux de u ainsi que t lui-même.*
- *La relation* "s est un sous-terme de t" *est noté $s \leq t$. Elle induit un ordre partiel sur les termes.*
- *Un sous-terme propre s de t se note $s < t$.*
- *Soit $\vec{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ une suite de termes, $s \leq \vec{t}$ signifie que s est le sous-terme d'un des éléments de la suite $t_1, \cdots, t_n$.*
- *La* position *d'un sous-terme s dans un terme t est définie par le chemin dans l'arbre de t qui relie la racine de t à celle de s.*

Exemple 1.1.5



◄ Les contextes et substitutions ►

Les contextes à un trou permettent de positionner les sous-termes à l'intérieur d'un autre (cf. proposition 1.1.9) et les contextes à plusieurs trous de positionner les sous-termes les uns par rapport aux autres (cf. remarque 1.1.12).

Définition 1.1.6

- *Un* contexte C *est un terme du λ-calcul qui possède la variable* $[]$ *comme variable libre en plusieurs occurrences éventuellement.* $[]$ *est appelé un* trou *du contexte C. Le contexte $C = []$ est dit* trivial.
- *Un* contexte simple *est un contexte qui ne possède qu'un seul trou* $[]$.
- *Pour tout contexte C et pour tout terme t, $C[t]$ représente la* substitution *de* ***chacun*** *des trous* $[]$ *de C par le terme t sans renommage des variables de C ni de t.*
- *Si C est un contexte simple, la* longueur du contexte C, *notée $l(C)$, représente la longueur du chemin qui relie la racine de l'arbre de C à son trou $[]$. Si C ne possède pas de trou, $l(C)$ est considérée comme infinie.*

Exemple 1.1.7

1. Si $C = \lambda x.(x\ []\ x)$ et $t = (x\ \lambda y.y)$ alors $C[t] = \lambda x.(x\ (x\ \lambda y.y)\ x)$.
2. Si $C = \lambda x.(x\ []\ [])$ et $t = (x\ \lambda y.y)$ alors $C[t] = \lambda x.(x\ (x\ \lambda y.y)\ (x\ \lambda y.y))$.

Définition 1.1.8 *Soit C un contexte dont les trous sont numérotés $[]_1, []_2, \cdots, []_n$. Pour toute suite de termes $\vec{u} = u_1, \cdots, u_n$, $C[\vec{u}]$ représente la* substitution *des trous $[]_1, []_2, \cdots, []_n$ de C par les termes $u_1, \cdots, u_n$ sans renommage des variables.*

Proposition 1.1.9 *Pour tous termes u et v, si $u \leq v$, alors il existe un contexte C tel que $v = C[u]$.*

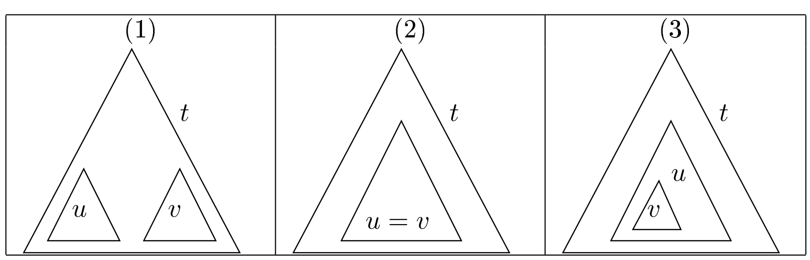
Preuve Par induction sur la définition de v. □

Définition 1.1.10 *Deux sous-termes u et v d'un terme t sont* disjoints *s'il existe un contexte C tel que $t = C[u, v]$.*

Proposition 1.1.11 *Si u et v sont des sous-termes de t, alors trois cas peuvent se présenter :*

1. *u et v sont disjoints.*
2. *u et v représentent le même sous-terme.*
3. *u est un sous-terme strict de v (ou inversement).*

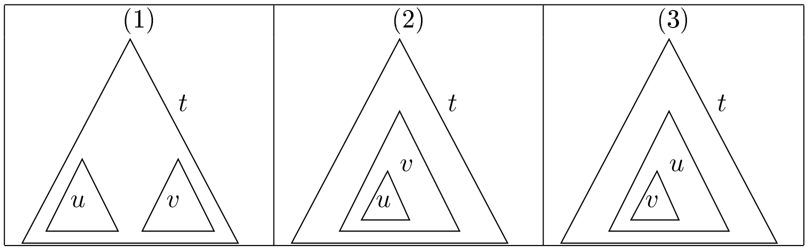
Remarque 1.1.12 Graphiquement les trois cas des deux sous-termes, u et v, de t se représentent ainsi :



En terme de contextes, ils s'expriment ainsi :

1. il existe un contexte C à deux trous tel que $t = C[u, v]$.
2. il existe un contexte C tel que $t = C[u]$
3. il existe deux contextes simples C et $D \neq []$ tels que $t = C[u]$ et $u = D[v]$ (ou inversement $t = C[v]$ et $v = D[u]$).

Remarque 1.1.13 Ces trois cas apparaîtront chaque fois que nous étudierons la confluence de paires commutatives concernant deux sous-termes u et v. Nous utiliserons également une variante qui distingue : (1) u et v sont disjoints, (2) u est un sous-terme large de v et (3) v est un sous-terme strict de u.



Preuve La preuve est immédiate par induction sur la complexité du terme. □

1.1.2 La β-réduction

Nous rappelons ici la définition de la β-réduction et la distinction qui est faite entre réductions de têtes et internes.

Définition 1.1.14

- *Pour tous termes t et u et pour toute variable x, le terme de la forme $(\lambda x.u\ v)$ est appelé* redex *et le terme $u[v/x]$ son* contracté.
- *La β-réduction est la plus petite relation binaire sur Λ qui passe au contexte, et qui relie tout redex à son contracté. Autrement dit, pour tout contexte C, $C[(\lambda x.u\ v)]$ possède $C[\,u[v/x]\,]$comme β-réduit.*
- *Pour tous termes t et t', la flèche $t \rightarrow_\beta t'$ (resp. $t \rightarrow_{\beta}^{=} t'$, $t \rightarrow_\beta^* t'$) indique que t' dérive de t après une étape de β-réduction (resp. après au plus une étape, après plusieurs étapes).*
- *Si la réduction de t réduit un redex r sous-terme de t, on la note $\rightarrow_{\beta:r}$.*
- *La β-équivalence est la clôture réflexive, symétrique et transitive de $\rightarrow_\beta$. Elle est notée $\simeq_\beta$*
- *Un terme t est dit* sous forme normale *s'il ne contient plus de redex.*

Définition 1.1.15 *Soit t un terme et s un sous-terme de t. On dit que :*

- *s est un* sous-terme de tête *de t si t s'écrit $\lambda x_1 \cdots \lambda x_p.(s\ r_1 \cdots r_q)$ où $x_1, \cdots, x_p$ sont des variables, $r_1, \cdots, r_q$ des termes et p et q des entiers positifs ou nuls.*
- *s est un* sous-terme interne *de t s'il n'est pas de tête.*

Proposition 1.1.16 *Si s est un sous-terme interne de t, alors t s'écrit $\lambda x_1 \cdots \lambda x_p.(u\ r_1 \cdots r_q)$ où s apparaît soit comme sous-terme de r_1, soit comme sous-terme strict de u.*

Preuve Soit s un sous-terme interne de t, notons que s est nécessairement un sous-terme strict de t. Par induction sur t :

- Si $t = x$ il n'y a pas de sous-terme interne.
- Si $t = \lambda x.t'$, comme un sous-terme en tête de t' est aussi en tête pour t, alors s est un sous-terme interne de t'. On conclut donc par induction sur t'.
- Enfin, si $t = (u\ r_1)$, soit s est sous-terme de r_1 ce qui donne le résultat, soit s est sous-terme strict de u. □

Proposition 1.1.17 *[14] Tout terme du λ-calcul s'écrit de manière unique $\lambda x_1 \cdots \lambda x_p.(r_1 \cdots r_q)$ où $p \geq 0$ et $q \geq 1$, $x_1, \cdots, x_p$ sont des variables, $r_2, \cdots, r_q$ sont des termes et r_1 est soit une variable, soit un redex.*

Remarque 1.1.18 Autrement dit, tout terme s'écrit $\vec{\lambda}.(r\ \vec{s})$

Preuve Par induction sur la complexité du terme. □

Définition 1.1.19 *L'écriture unique $t = \lambda x_1 \cdots \lambda x_p.(r_1 \cdots r_q)$ de 1.1.17 s'appelle* la forme de tête *du terme t. Si r_1 est un redex, on dira que r_1 est le* redex de tête *de t.*

Définition 1.1.20
- *Une β-réduction $t \to_\beta t'$ est dite de* tête *si le redex contracté dans t est en tête. Elle est notée $t \to_\beta^h t'$.*
- *Une β-réduction $t \to_\beta t'$ qui n'est pas de tête sera dite* interne *et elle est notée $t \to_\beta^i t'$.*

Définition 1.1.21
- *Un terme t est dit* sous forme normale de tête *s'il ne contient plus de redex de tête.*
- *On dit que t possède* une forme normale de tête *s'il se réduit à une forme normale de tête.*

Proposition 1.1.22
1. *Un terme sous forme normale de tête s'écrit $\lambda x_1 \cdots \lambda x_p.(x\ r_1 \cdots r_q)$ où x est une variable.*
2. *Les réductions internes conservent la structure de la forme de tête (en nombre de variables mises en abstractions et en nombre d'arguments).*

Preuve
1. De la proposition 1.1.17. □
2. Si la tête est une variable, c'est clair. Sinon, la tête est un redex, mais les réductions internes ne modifient pas ce redex. Le nombre d'arguments reste donc identique.

1.1.3 Les résidus

Les *résidus de sous-termes* vont nous permettre de répondre à la question suivante : que devient un sous-terme s de t, après une réduction $t \to_\beta^* t'$? Disparaît-il ou bien réapparaît-il ? Et s'il réapparaît, en combien d'exemplaires ? L'étude des résidus d'un sous-terme au cours d'une β-réduction revient à lui poser un marqueur dont on suivra l'évolution tout au long de la réduction. Grâce à l'analyse des résidus d'un sous-terme, nous pourrons d'une part mesurer l'importance qu'il joue dans une réduction et d'autre part réorganiser cette réduction dans l'ordre qui nous conviendra (cf. proposition 1.1.29).

Définition 1.1.23
Pour éviter les renommages, les variables liées sont toutes distinctes.
Soient s un sous-terme et $r = (\lambda x.a\ b)$ un redex de t. Considérons la β-réduction $t \to_{\beta:r} t'$.
Les résidus de s dans t' *après la β-réduction de r sont :*

1. *Si s et r sont disjoints, alors il existe un contexte C tel que $t = C[s, r]$ et tel que $t' = C[s, a[b/x]\ ]$. Le résidu de s dans t' est alors le sous-terme s à la position donnée par le contexte C.*

2. *Si $r \leq s$, alors il existe deux contextes simples C et D tels que $t = C[s]$ et $s = D[r]$. Dans ce cas $t = C[s] = C[\ D[(\lambda x.a\ b)]\ ] \to_\beta C[\ D[a[b/x]]\ ]$. Le résidu de s dans t' est alors $s' = D[\ a[b/x]\ ]$ à la position définie par le contexte C.*

3. *Si $s < r = (\lambda x.a\ b)$, on distingue encore trois cas :*

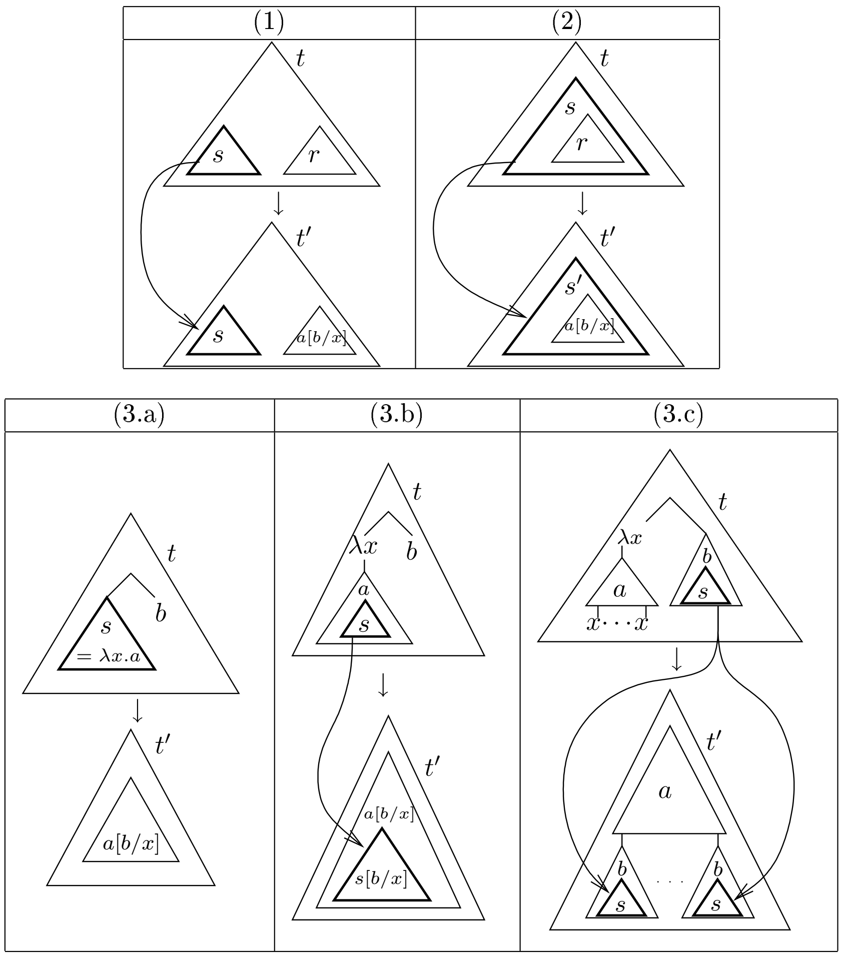
   (a) si $s = \lambda x.a$, alors s n'a pas de résidu dans t'.

   (b) si $s \leq a$ alors il existe deux contextes C et D tels que $a = D[s]$ et $t = C[\,(\lambda x.a\ b)\,] = C[\,(\lambda x.D[s]\ b)\,]$. t se réduit ainsi en $t' = C[\ D[b/x]\,[\,s[b/x]\,]\ ]$. Le résidu de s dans t' est alors le terme $s[b/x]$ à la position définie par les contextes C et D.

(c) $s \leq b$, *alors il existe des contextes* C, D *et un contexte simple* E *tels que* $b = E[s]$ *et* $t = C[\,(\lambda x.D[x, \cdots, x]\ \ E[s])\,]$. t *se réduit ainsi en* $t' = C[\,D[E[s], \cdots, E[s]\,]\,]$. *Les résidus de* s *dans* t' *sont alors les sous-termes* s *aux places définies par les contextes* C, D *et* E.

De même, les résidus d'un sous-terme après plusieurs réductions *se définissent par induction sur la longueur de la réduction. Les résidus de* s *après* n *réductions sont les résidus des résidus* $s_1, s_2, \cdots, s_{p_{n-1}}$ *de* s *après* $n-1$ *réductions.*

Remarque 1.1.24 Les cinq cas de la définition 1.1.23 peuvent se représenter ainsi :



Remarque 1.1.25 Le résidu d'un sous-terme s'appelle également *résidu étendu* [5]. Le résidu étendu se distingue d'un résidu de redex. En effet, dans le cas particulier où s est le redex contracté, i.e. $s = r = (\lambda x.a\ b)$, le terme $s' = a[b/x]$ est encore considéré comme un résidu du sous-terme s tandis qu'il n'est pas considéré comme un résidu du redex r.

Exemple 1.1.26 Les résidus du sous-terme $(\lambda z.z\ x)$ sont marqués d'un cadre noir.

$$\lambda x.(\,\lambda y.(y\ y)\ \boxed{(\lambda z.z\ x)}\ x) \to_\beta \lambda x.(\boxed{(\lambda z.z\ x)}\ \boxed{(\lambda z.z\ x)}\ x) \to_\beta \lambda x.(\,\boxed{x}\ \boxed{(\lambda z.z\ x)}\ x)$$

Proposition 1.1.27

1. *Si* $t \to_\beta^* t'$ *et* $s \leq t$, *alors les résidus* $s_1, \cdots, s_n$ *de* s *sont tous disjoints.*

2. *Si s' est un résidu de s dans la réduction $t \to_\beta^* t'$, alors il existe une substitution σ ne concernant pas les variables libres de t telle que $s(\sigma) \to_\beta^* s'$.*

Preuve

1. Nous allons montrer que les résidus de s sont *bien disjoints*. Pour cela, nous allons établir un fait qui nous permettra d'achever la preuve par récurrence. En appliquant la convention de Bahrendregt, il n'y aura pas de confusions entre les différents noms des variables. Introduisons la notion suivante : *on dira que deux sous-termes u et v de t sont* bien disjoints *si :*
   (a) u et v sont disjoints
   (b) Pour toute variable x libre dans u (resp. v). Si x est liée dans t i.e. $\exists\, \lambda x.a \leq t$ tel que $u \leq a$, alors $v \leq a$ (resp. $u \leq a$)

   Fait *Si $t \to_\beta t'$ et si u et v sont deux sous-termes* bien disjoints *de t alors les résidus de u et v sont* bien disjoints.

   Preuve Soit $r = (\lambda x.a\ b)$ le redex contracté dans $t \to_\beta t'$. Nous devons discuter suivant la position des sous-termes u et v par rapport au redex r. Traitons le cas le plus complexe où $u \leq a$ et $v \leq b$. Comme $u \leq a$, il existe un contexte C tel que $a = C[u]$. De même $b = D[v]$. Comme u et v sont *bien disjoints*, la variable x de $(\lambda x.a\ b)$ n'est ni libre dans u, ni dans v. Ainsi, $(\lambda x.\, C[u]\ D[v]) \to_\beta C[D[v]/x]\,[u]$. Les résidus de u et v sont donc disjoints. Vérifions qu'ils sont *bien disjoints*. Soit z une variable libre de u et soit $\lambda z.w'$ un sous-terme de t' tel que u soit sous-terme de w'. Montrons que $v \leq w'$. Comme $u \leq \lambda z.w'$ et $u \leq C[D[v]/x]\,[u]$ alors soit $C[D[v]/x]\,[u] \leq \lambda z.w'$ soit $\lambda z.w' \leq C[D[v]/x]\,[u]$. Dans le premier cas, $C[D[v]/x]\,[u] \leq \lambda z.w'$. On en déduit $D[v] \leq \lambda z.w'$ et donc $v \leq \lambda z.w'$. Comme u et v sont disjoints, on a forcément $v \leq w'$. Dans le deuxième cas $\lambda z.w' \leq C[D[v]/x]\,[u]$. On peut alors trouver un terme w tel que $w[D[v]/x] = w'$ et tel que $u \leq w$. Comme u et v sont deux sous-termes bien disjoints de t, on en déduit $v \leq w$. Et puisque $x \notin v$, $v \leq w[D[v]/x] = w'$. Les autres cas d'inclusion entre u, v et r sont similaires.

   Selon la définition 1.1.23, les résidus d'un seul sous-terme après une β-réduction sont deux à deux *bien disjoints*. Grâce au fait précédent et par récurrence sur le nombre de réductions dans $t \to_\beta^* t'$, les résidus de s dans t sont deux à deux *bien disjoints*. Ils sont donc disjoints.
2. D'après la définition 1.1.23, le résidu s' d'un sous-terme s ne subit, au cours d'une réduction, que des substitutions des variables liées dans t et des réductions. □

Remarque 1.1.28 En particulier si x est une variable libre dans un terme t, alors ses résidus sont x.

1.1.4 Propriétés classiques du λ-calcul

Nous rappelons ici trois résultats classiques du λ-calcul muni de la β-réduction. En premier nous montrons la commutativité de la réduction simple, qui s'obtient grâce à l'étude des diagrammes commutatifs dits élémentaires. Nous évoquons ensuite le théorème de Church-Rosser qui établit la commutativité dans le cas de réductions multiples, propriété également appelée confluence globale. Enfin, nous citons le théorème de standardisation qui assure que tout résultat obtenu par β-réductions peut l'être en suivant uniquement la stratégie des réductions standard. Ces trois résultats visent chacun le même objectif : celui de pouvoir modifier l'ordre dans lequel s'enchaînent les réductions au sein d'une séquence.

Proposition 1.1.29 *[3] Soient deux réductions : $\rho : a \to_\beta b$ et $\sigma : a \to_\beta c$. On appelle* la projection de σ sur ρ *la réduction obtenue en réduisant d'abord le redex de ρ puis en réduisant les résidus du redex de σ.*

On obtient ainsi un diagramme *commutatif dit* élémentaire *:*

$$\begin{array}{ccc} a & \rightarrow_\rho & b \\ \downarrow_\sigma & & \downarrow^*_{\sigma/\rho} \\ c & \rightarrow^*_{\rho/\sigma} & d \end{array}$$

Preuve La preuve se fait en distinguant les trois cas d'inclusions de la proposition 1.1.11, entre le redex de ρ et celui de σ. Pour une preuve détaillée, voir [3]. □

Théorème 1.1.30 *[14]*
La β-réduction du λ-calcul est confluente. On dit également qu'elle est Church–Rosser, notée CR. Autrement dit, pour tous termes t, t_1 et t_2, tels que $t \rightarrow^*_\beta t_1$ et $t \rightarrow^*_\beta t_2$, il existe un terme v tel que $t_1 \rightarrow^*_\beta v$ et $t_2 \rightarrow^*_\beta v$.

Preuve Voir [14]. □

Proposition 1.1.31 *La forme normale de tête est unique.*
En ce sens que si $t \simeq_\beta \lambda x_1 \cdots \lambda x_p.(x\ r_1 \cdots r_q) \simeq_\beta \lambda y_1 \cdots \lambda y_m.(y\ s_1 \cdots s_n)$, alors $p = m$, $q = n$, $r_i \simeq_\beta s_i$ et au renommage près des variables liées, on a $x_i = y_i$ et $x = y$.

Preuve C'est une conséquence du théorème de Church-Rosser 1.1.30. □

Définition 1.1.32 *Une suite de réductions $t \rightarrow^*_\beta t'$ est dite* standard, *notée $t \rightarrow^{st,*}_\beta t'$, si :*
- ▷ $t = \lambda x.a$, $t' = \lambda x.a'$ *et* $a \rightarrow^{st,*}_\beta a'$
- ▷ $t = (x\ c_1 \cdots c_n)$, $t' = (x\ c'_1 \cdots c'_n)$ *et* $c_i \rightarrow^{st,*}_\beta c'_i$ *pour tout* i
- ▷ $t = (\lambda x.a\ b\ \vec{c})$, $t_1 = (a[b/x]\ \vec{c})$ *et* $t_1 \rightarrow^{st,*}_\beta t'$.
- ▷ $t = (\lambda x.a\ b\ \vec{c})$, $t_1 = (\lambda x.a_1\ b_1\ \vec{c_1})$ *et* $a \rightarrow^{st,*}_\beta a_1$, $b \rightarrow^{st,*}_\beta b_1$ *et* $c \rightarrow^{st,*}_\beta c_1$.

Lemme 1.1.33 *La réduction standard passe au contexte.*

Preuve Le cas non trivial est celui où $u \rightarrow^{st,*}_\beta u'$, $a \rightarrow^{st,*}_\beta a'$, et qu'il s'agit de montrer $u[a/x] \rightarrow^{st,*}_\beta u'[a'/x]$. On le fait par induction conjointe sur la longueur de la réduction $u \rightarrow^{st,*}_\beta u'$ et sur la complexité de u. Traitons le cas où $u = (\lambda y.\, b\ c\ \vec{d})$. Si le redex $(\lambda y.\, b\ c)$ n'est pas réduit, alors on construit clairement la standardisée en réduisant, bout à bout, le terme b puis c et $\vec{d}$. S'il est réduit, alors $u \rightarrow_\beta (b[c/y]\ \vec{d})$. Ainsi, $u[a/x] \rightarrow_\beta (b[c/y][a/x]\ \vec{d}[a/x])$. On construit la réduction standardisée en commençant par réduire le redex de tête $(\lambda y.\, b\ c)\ [a/x]$, puis on continue par induction sur la standardisée de $(b[c/y][a/x]\ \vec{d}[a/x]) \rightarrow^*_\beta u'[a'/x]$, qui est plus courte. □

Lemme 1.1.34 *Si $t \rightarrow^{st,*}_\beta t_1 \rightarrow_{\beta:r} t_2$ alors $t \rightarrow^{st,*}_\beta t_2$.*

Preuve Par induction sur la longueur de la réduction et sur la complexité de t. Grâce au lemme de passage au contexte 1.1.33, le cas non trivial est celui où t possède un redex de tête. Soit $t = (\lambda x.a\ b\ \vec{c})$. Posons $s = (\lambda x.a\ b)$.
- Si s n'est pas réduit dans $t \rightarrow^{st,*}_\beta t_1$, alors $t_1 = (\lambda x.a_1\ b_1\ \vec{c_1})$ avec $a \rightarrow^{st,*}_\beta a_1$, $b \rightarrow^{st,*}_\beta b_1$ et $\vec{c} \rightarrow^{st,*}_\beta \vec{c_1}$.
  ▷ si r est le résidu de s alors la réduction $t \rightarrow^h_\beta (a[b/x]\ \vec{c}) \rightarrow^{st,*}_\beta (a_1[b_1/x]\ \vec{c_1}) = t_2$ est standard. La deuxième suite de réductions étant obtenu grâce au lemme 1.1.33.
  ▷ sinon r est un redex de a_1, b_1 ou c_1. Traitons $r \leq a_1$. Dans ce cas, $a \rightarrow^{st,*}_\beta a_1 \rightarrow_{\beta:r} a_2$ et $t_2 = (\lambda x.a_2\ b_1\ \vec{c_1})$. D'après l'hypothèse d'induction, on peut standardiser $a \rightarrow^{st,*}_\beta a_2$ et on conclut alors grâce au lemme 1.1.33.
- Enfin, si s est réduit dans $t \rightarrow^{st,*}_\beta t_1$, alors il a été réduit en premier, donc $t \rightarrow_\beta (a[b/x]\ \vec{c}) \rightarrow^{st,*}_\beta t_1$. On obtient donc la standardisée en réduisant ce redex de tête suivie de la standardisée de la réduction plus courte, $(a[b/x]\ \vec{c}) \rightarrow^{st,*}_\beta t_1 \rightarrow_{\beta:r} t_2$. □

Corollaire 1.1.35 [Théorème de standardisation] *Si $t \to_\beta^* t'$ alors $t \to_\beta^{st,*} t'$.*

Preuve La preuve se fait par induction sur la longueur de la réduction $t \to_\beta^* t'$ et en appliquant le lemme 1.1.34. □

Corollaire 1.1.36 *Si $t \to_\beta^* t'$ alors il existe u tel que $t \to_\beta^{h,*} u \to_\beta^{i,*} t'$.*

Preuve Dérive de la définition d'une réduction standard.

Remarque 1.1.37 Ce corollaire n'est pas démontrable directement. Cependant c'est la forme sous laquelle nous utiliserons la standardisation en permanence.

1.1.5 Les termes non résolubles

Définition 1.1.38 *Un terme t du λ-calcul est dit* résoluble *si la réduction de tête du terme se termine (et ce, sur un forme normale de tête). Dans le cas contraire, il est dit* non résoluble.

Exemple 1.1.39
- $\Omega = (\omega\ \omega)$ où $\omega = \lambda x.(x\ x)$ est non résoluble. Ses réductions sont : $\Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \cdots$
- $\Omega_3 = (\delta_3\ \delta_3)$ où $\delta_3 = \lambda x.(x\ x\ x)$ est non résoluble. Ses réductions sont : $\Omega_3 \to_\beta (\Omega_3\ \delta_3) \to_\beta (\Omega_3\ \delta_3\ \delta_3) \to_\beta \cdots$
- $\lambda x.\Omega$ est également non résoluble.

Proposition 1.1.40 *[14] Les non résolubles sont stables :*

1. *par β-équivalence.*
2. *par substitution i.e. si σ est une substitution et si t est non résoluble, alors $t(\sigma)$ est également non résoluble.*
3. *par application à un argument.*
4. *par mise en abstraction, i.e. si u est non résoluble, alors $\lambda x.u$ l'est aussi.*

Preuve Voir [14]. □

Proposition 1.1.41 *Tout résidu d'un terme non résoluble est non résoluble.*

Preuve Conséquence des propositions 1.1.27 et 1.1.40. □

Lemme 1.1.42 [de généricité] *[3] Soient t, u et f des termes tels que t soit normal et u non résoluble. Si $(f\ u) \simeq_\beta t$ alors pour toute variable neuve x, $(f\ x) \simeq_\beta t$.*

Preuve Voir [21]. □

Remarque 1.1.43 Ce lemme devient faux si t n'est pas normal. Il suffit de prendre $f = \lambda x.x$ l'identité , u un non résoluble et $t = u'$ un de ses réduits.

1.2 Les théories équationnelles du λ-calcul

La théorie du λ-calcul a été créée par Alonzo Church afin de formaliser la notion de calculabilité en mathématiques. Dans celle-ci, un calcul se traduit par une β-réduction et l'issue d'un calcul correspond à un terme sous forme normale. Toutes les fonctions primitives récursives de l'arithmétique trouvent ainsi une représentation. La question de la réciproque se pose alors : pouvons-nous associer un contenu opératoire à toute réduction du λ-calcul ? Pour répondre à cette question nous présentons dans cette section d'autres théories qui dérivent du λ-calcul. En premier, nous décrivons l'exemple de la théorie de Böhm. Celle-ci exploite la généricité des termes non résoluble afin de construire des arbres de description. Ces derniers s'obtiennent en remplaçant les sous-termes non résolubles par une constante $\perp$. Puis nous généralisons aux extensions du λ-calcul. Celles-ci s'obtiennent en ajoutant un ensemble d'équations au λ-calcul. Après avoir posé les notations, nous soulèverons le problème de leur consistance. Ce dernier problème est récurrent tout au long de cette thèse. En guise de réponse, nous citerons des conditions suffisantes pour rendre consistantes des extensions du λ-calcul. Les deux outils à disposition seront la confluence, avec le lemme 1.2.12, et l'inclusion avec le lemme 1.2.16. Le corollaire 1.2.21 fournira lui, un argument de contradiction.

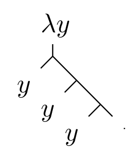
1.2.1 Arbres de Böhm

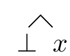
Définition 1.2.1 *L'arbre de Böhm d'un terme t, notée $BT(t)$, est un arbre finitaire étiqueté, construit comme suit :*

- *si t a une forme normale de tête $\vec{\lambda}.(y\ r_1 \cdots r_n)$, alors $BT(t)$ possède une racine étiquetée $\vec{\lambda}.y$ suivi des sous-arbres $BT(r_1), \cdots, BT(r_n)$.*
- *sinon t est non résoluble et $BT(t) = \perp$.*

Remarque 1.2.2

1. Les arbres de Böhm peuvent être infinis. Par exemple, le combinateur de point fixe de Turing $Y_t = (Q\ Q)$ où $Q = \lambda xf.\ (f\ (x\ x\ f))$ se réduit en $Y_t \rightarrow_\beta \lambda y.(y\ (Y_t\ y)) \rightarrow_\beta \cdots \rightarrow_\beta \lambda y.(y\ (y\ \cdots))$. Ainsi, même représenté à la façon des arbres de termes, les arbres de Böhm sortent de la définition de Λ. À la manière des arbres de λ-termes, l'arbre de Böhm d'Y_t se dessine ainsi :



2. Tous les arbres ne sont pas des arbres de Böhm. En effet, l'arbre 

, qui pourrait s'apparenter à celui d'un terme non résoluble, ne peut pas être obtenu car il ne possède pas de tête.

Définition 1.2.3 *Soient deux termes u et v, on écrira $BT(u) \subseteq BT(v)$ s'il existe un troisième arbre commun obtenu à partir de celui de u et à partir de celui de v en échangeant certains $\perp$ par d'autres arbres de Böhm.*
On dit alors que l'arbre de Böhm de u est compatible *avec celui de v.*

Exemple 1.2.4

- Selon cet ordre, le plus petit arbre en quantité d'informations est donc $\perp$ qui se retrouve compatible avec tout les autres arbres.
- Pour tout terme t, $BT(\Omega) = \perp \subseteq BT(t)$.
- $BT(\lambda x.\ (x\ \Omega)) = \lambda x.\ (x\ \perp) \subseteq BT(\lambda x.\ (x\ x))$

Proposition 1.2.5 *[7] Soient C un contexte. Pour tous termes u et v, si $BT(u) \subseteq BT(v)$, alors $BT(C[u]) \subseteq BT(C[v])$.*

Remarque 1.2.6 Autrement dit, la compatibilité entre arbres de Böhm passe au contexte.

Preuve Voir [7] corollaire 14.3.20 (iii). □

1.2.2 Extensions du λ-calcul

Notation 1.2.7 Pour toute règle de réécriture $\rightarrow_\gamma$, on notera :

$\rightarrow_\gamma^=$	la clôture réflexive de $\rightarrow_\gamma$, i.e. une ou aucune réécriture
$\rightarrow_\gamma^*$	la clôture transitive et réflexive de $\rightarrow_\gamma$, i.e. plusieurs réécritures
$\rightarrow_{\gamma:u}$	la règle de réécriture appliquée précisément au terme u
$\simeq_\gamma$	la clôture transitive, symétrique et réflexive de $\rightarrow_\gamma$
$\rightarrow_\gamma^h$	la règle de réécriture appliquée précisément à un sous-terme de tête
$\rightarrow_\gamma^i$	la règle de réécriture appliquée précisément à un sous-terme interne
$l(\rightarrow_\gamma^*), l(\simeq_\gamma)$	le nombre de réécritures

Définition 1.2.8 *Une* théorie T du λ-calcul *est un ensemble d'équations entre termes du λ-calcul.*

Définition 1.2.9 *La* $\lambda\beta$-théorie *est la théorie T tel que $u = v \in T$ ssi $u \simeq_\beta v$.*

Notation 1.2.10 Soit T une théorie, $u = v \in T$ sera également noté $T \vdash u = v$ ou $u =_T v$.

Définition 1.2.11 *Soit T une théorie du λ-calcul.*
- *On dit que T est* contradictoire *si pour tous termes u et v, $T \vdash u = v$.*
- *Sinon, T est dite* consistante *ce qu'on note $Cons(T)$.*

Lemme 1.2.12 *Soit $\rightarrow_\gamma$ une règle de réécriture. Si $\rightarrow_\gamma^*$ est confluente et s'il existe deux termes normaux distincts pour $\rightarrow_\gamma$ alors $\simeq_\gamma$ est consistante.*

Remarque 1.2.13 Autrement dit, pour prouver la consistance de la clôture symétrique, il suffit d'exhiber la confluence de la clôture transitive ainsi que deux termes normaux distincts.

Preuve Comme $\rightarrow_\gamma^*$ est confluente, on montre par induction sur le nombre de règles utilisées que pour tous termes s et t, si $s \simeq_\gamma t$ alors il existe un troisième terme u auquel $s \rightarrow_\gamma^* u$ et $t \rightarrow_\gamma^* u$.

Soient a et b deux termes normaux pour $\rightarrow_\gamma$, montrons que $a \not\simeq_\gamma b$. Par l'absurde, si $a \simeq_\gamma b$, par le fait précédent il existe u tel que $a \rightarrow_\gamma^* u$ et $b \rightarrow_\gamma^* u$. Or a et b sont normaux, ce qui entraîne $a = u = b$, contradiction. $\simeq_\gamma$ n'identifie donc pas a à b, elle est consistante. □

Corollaire 1.2.14 *La $\lambda\beta$-théorie est consistante.*

Preuve Les termes $0 = \lambda xy.y$ et $1 = \lambda xy.x$ sont normaux et distincts. D'après le théorème de Church-Rosser 1.1.30, $\rightarrow_\beta^*$ est confluente. On conclut donc grâce au lemme 1.2.12. □

Définition 1.2.15 *Pour tout ensemble E d'équations entre termes, on note $\lambda\beta+E$ la théorie du λ-calcul muni de la β-réduction à laquelle sont ajoutées les équations de E. Une telle théorie $\lambda\beta + E$ est appelée* extension *du λ-calcul.*

Lemme 1.2.16 *Soient E_1 et E_2 deux ensembles d'équations, et soient $T_1 = \lambda\beta+E_1$ et $T_2 = \lambda\beta + E_2$ les deux théories issues de E_1 et E_2. Si $T_1 \vdash E_2$, alors $T_2 \subseteq T_1$.*

Remarque 1.2.17 Autrement dit, pour prouver qu'une extension est consistante, il suffit de trouver une autre théorie consistante qui la contienne.

Preuve Pour tous termes u et v, si $T_2 \vdash u = v$, alors il existe une suite de termes $u_1, u_2, \cdots, u_n$ et tels que $T_2 \vdash u = u_1 = \cdots = u_n = v$, et tels que u_{i+1} s'obtienne à partir de u_i, soit par β-équivalence ($\simeq_\beta$), soit par l'utilisation simple d'une équation de E_2 sur un sous-terme de u_i ($=_{E_2}$) . Or, par définition, $\simeq_\beta \subseteq T_1$ et par hypothèse, $=_{E_2} \subseteq T_1$. Ainsi $T_1 \vdash u_i = u_{i+1}$ et donc $T_1 \vdash u = v$. □

Définition 1.2.18 *[14] On note $BT = \lambda\beta + \{u = v | BT(u) = BT(v)\}$ la théorie construite à partir des arbres de Böhm.*

Théorème 1.2.19 *[7]*

1. *Toute extension du λ-calcul qui identifie deux termes aux arbres de Böhm incompatibles est contradictoire.*
2. *BT est une extension consistante du λ-calcul.*

Remarque 1.2.20 Non seulement BT est consistante mais elle est aussi maximale. En effet, toute équation supplémentaire ajoutée à BT produirait une contradiction.

Preuve Voir [7]. □

Corollaire 1.2.21 *[14] Soit E un ensemble d'équations. L'extension $\lambda\beta + E$ est contradictoire ssi il existe deux termes u et v aux arbres de Böhm incompatibles tels que $\lambda\beta + E \vdash u = v$.*

Preuve Voir [14]. □

Remarque 1.2.22

1. Le théorème 1.2.19 assure que la théorie identifiant simultanément chaque terme non résoluble à une même constante $\perp$ est consistante.
2. Le corollaire 1.2.21 est un critère très pratique pour montrer la contradiction d'une théorie. Généralement nous l'utiliserons avec u et v deux termes normaux différents. Dans ce cas, les arbres de Böhm sont clairement incompatibles car maximaux au sens de la compatibilité.

Exemple 1.2.23 Soient $\delta_3 = \lambda x.(x\ x\ x)$, $\Omega_3 = (\delta_3\ \delta_3)$ et $I = \lambda x.x$. La théorie $T = \lambda\beta + \{\Omega_3 = I\}$ est inconsistante. En effet, $T \vdash I = \Omega_3 \to_\beta (\Omega_3\ \delta_3) = (I\ \delta_3) \to_\beta \delta_3$, contradiction !

1.3 Diverses notions d'indéfini

Au cours des sections précédentes, nous avons découverts deux propriétés essentielles des termes non résolubles. La première concerne la généricité des termes non résolubles. Cette dernière est de type opératoire (cf. lemme 1.1.42). La seconde, la consistance de la théorie BT où tout non résoluble est identifié à $\perp$, est de type dénotationnelle (cf. théorème 1.2.19). En conséquence les termes non résolubles peuvent être éliminés du λ-calcul sans pour autant le rendre trivial. Ces deux propriétés caractérisent la *notion d'indéfini* en λ-calcul. Toutefois, comme le suggère l'aspect maximal du théorème 1.2.19, beaucoup de termes se retrouvent identifiés dans la théorie BT. En particulier, tous les termes dont la réduction de tête ne termine pas sont confondus. Dans cette théorie, le terme Ω dont la réduction boucle désespérément sur lui-même est mis à égalité avec un terme qui, par exemple, égrènerait successivement toutes les décimales de $\sqrt{2}$. Il est donc légitime de se demander si les arbres de Böhm ne masquent pas dans leur description simplifiée des informations pertinentes ? Pour répondre à cette question, nous allons explorer trois autres sortes de termes susceptibles d'être candidat à la notion d'indéfini : les zéro-termes, les zéro-termes forts et les termes muets. Ces trois classes incluses strictement les unes par rapport aux autres suggèrent qu'il existe une hiérarchie entre les diverses formes d'indéfini. Malgré leurs différences, les classes des zéro-termes forts, des termes muets et des termes non résolubles, satisfont toutes trois les mêmes propriétés de stabilité par β-équivalence et par substitution. Ces deux dernières caractéristiques constitue le cœur même de la β-réduction. Toute classe qui vérifie des telles conditions formera un candidat privilégié à la notion d'indéfini. Cette section montrera en premier la généricité des sous-termes inactifs. Puis elle exploitera ce résultat pour établir divers résultats concernant les zéro-termes, les zéro-termes forts et les termes muets.

1.3.1 Généricité des sous-termes inactifs

La généricité d'un sous-terme lors d'une réduction est sa capacité à pouvoir être échangé sans perturber le résultat. Nous avons déjà vu à travers le lemme 1.1.42 que tout terme résoluble est générique lorsque la réduction se termine sur une forme normale. Dans cette section nous verrons que l'inactivité est une condition suffisante pour garantir la généricité d'un sous-terme en un sens plus faible.

Définition 1.3.1 *[5]*
- *Une réduction $a \to_\beta^= b$ est dite* similaire *à $s \to_\beta t$ si $a \to_\beta^= b$ est vide i.e $a = b$ ou bien si le redex contracté dans $a \to_\beta b$ est à la même position que celui réduit dans $s \to_\beta t$.*
- *La notion s'étend à plusieurs réductions entre a et b.*

Remarque 1.3.2 En particulier, toute réduction similaire à une réduction de tête est de tête. De même pour les réductions internes.

Définition 1.3.3 *[5] Un sous-terme s est* inactif *dans une réduction si aucun de ses résidus n'est égal à $\lambda x.a$ où $(\lambda x.a\ b)$ est un des redex contractés lors de la réduction.*

Exemple 1.3.4 Le sous-terme $(\lambda z.z\ x)$ est *inactif* dans la réduction suivante :

$$\lambda x.(\,\lambda y.(y\ y)\boxed{(\lambda z.z\ x)}\,x) \to_\beta \lambda x.(\boxed{(\lambda z.z\ x)}\boxed{(\lambda z.z\ x)}\,x) \to_\beta \lambda x.(\boxed{x}\boxed{(\lambda z.z\ x)}\,x)$$

Après échange par la variable ν, la réduction reste *similaire* :

$$\lambda x.(\,\lambda y.(y\ y)\boxed{\nu}\,x) \to_\beta \lambda x.(\boxed{\nu}\boxed{\nu}\,x) \to_\beta^= \lambda x.(\boxed{\nu}\boxed{\nu}\,x)$$

ν peut de nouveau être substituée par $(x\ x)$, et la réduction reste *similaire* :

$$\lambda x.(\,\lambda y.(y\ y)\boxed{(x\ x)}\,x) \to_\beta \lambda x.(\boxed{(x\ x)}\boxed{(x\ x)}\,x) \to_\beta^= \lambda x.(\boxed{(x\ x)}\boxed{(x\ x)}\,x)$$

Lemme 1.3.5 *[5] Soient T un contexte, C un contexte simple et s un terme.*
- ▷ *Si $C \to_\beta^* T$ alors $C[s] \to_\beta^* T[s_1, \cdots, s_n]$ où $s_i = s(\sigma_i)$ et σ_i est une substitution portant uniquement sur des variables liées dans C.*
  De plus la deuxième réduction est similaire à la première.
- ▷ *Inversement, si s est inactif dans la réduction $C[s] \to_\beta^* T[s_1, \cdots, s_n]$ où $s_1, \cdots, s_n$ sont les résidus de s alors $C \to_\beta^* T$.*
  De plus la deuxième réduction est similaire à la première ôtée des réductions internes aux résidus de s.

Preuve Par induction sur la longueur des réductions et des termes. □

Définition 1.3.6 *Soient $s_1, \cdots, s_n$ et s des sous-terme de t. On dira que s est* maximal *si $s \leq s_i$ entraîne $s_i = s$.*

Lemme 1.3.7 *[5] Soient C et T des contextes et $s_1, \cdots, s_n$ des termes.*
- ▷ *Si $C[[]_1, []_2, \cdots, []_n] \to_\beta^* T[[]_1, \cdots, []_1, []_2, \cdots, []_2, \cdots, []_n, \cdots, []_n]$ alors $C[s_1, \cdots, s_n] \to_\beta^* T[s_1^1, \cdots, s_1^{p_1}, s_2^1, \cdots, s_2^{p_2}, \cdots, s_n^1, \cdots, s_n^{p_n}]$ où $s_i^j = s_i(\sigma_j^i)$ et σ_i^j est une substitution portant sur des variables liées dans C.*
  De plus la deuxième réduction est similaire à la première.

▷ *Inversement, si* $s_1, \cdots, s_n$ *sont inactifs dans la réduction* $C[s_1, \cdots, s_n] \to_\beta^* T[s'_1, \cdots, s'_p]$ *où* $s'_1, \cdots, s'_p$ *sont les résidus* maximaux *de* $s_1, \cdots, s_n$ *alors* $C \to_\beta^* T$.
De plus la deuxième réduction est similaire à la première ôtée des réductions internes aux résidus de $s_1, \cdots, s_n$.

Preuve Analogue à 1.3.5 □

Exemple 1.3.8 Soient $s_1 = (y\ \lambda z.z)$ et $s_2 = x$ deux sous-termes de $\lambda x.(\ \lambda y.s_1\ s_2)$. Dans la réduction suivante, s_1 et s_2 sont *inactifs* :

$$\lambda x.(\ \lambda y.\boxed{s_1}\ \boxed{s_2}) \to_\beta \lambda x.\boxed{(\boxed{s_2}\ \lambda z.z)}$$

Des deux résidus $(s_2\ \lambda z.z)$ et s_2, seul $(s_2\ \lambda z.z)$ est maximal. L'échange de s_1 et s_2 par une variable neuve ν aboutit donc à une réduction similaire suivante :

$$\lambda x.(\ \lambda y.\boxed{\nu}\ \boxed{\nu}) \to_\beta \lambda x.\boxed{\nu}$$

Définition 1.3.9 *[5] Soit* $s \le t$. *On dit que* s passe en tête *dans la réduction* $t \to_\beta^* t'$ *si un des résidus de* s *se retrouve en tête au cours de la réduction. Autrement dit, s'il existe un résidu* s' *de* s *tel que* $t \to_\beta^* \vec{\lambda}.\ (s'\ \vec{r})$.

Lemme 1.3.10 *[5] Soit* $s \le t$. *Si* s *ne passe pas en tête dans la réduction de tête de* t, *alors* s *est inactif.*

Preuve La réduction étant de tête, pour qu'un résidu soit actif il faudrait qu'il soit la partie $\lambda x.a$ du redex de tête. Or dans ce cas, ce résidu se retrouverait également en tête. Contradiction. □

Corollaire 1.3.11 *[5] Soit* C *un contexte et* $\vec{u}$ *une suite de termes tels que* $C[\vec{u}] \to_\beta^{h,*} t$.

1. *Si un terme de* $\vec{u}$ *passe en tête dans la réduction, alors* $C \to_\beta^{h,*} \vec{\lambda}.\ ([]\ \vec{s})$.
2. *Si aucun terme de* $\vec{u}$ *ne passe pas en tête, alors* $\vec{u}$ *est inactif dans la réduction* $C[\vec{u}] \to_\beta^{h,*} t$. *Il existe alors un contexte* D *dont chaque trou est interne, tel que* $C \to_\beta^{h,*} D$ *et tel qu'il existe une suite de termes* $v_k = u_{i_k}(\sigma_k)$ *assurant* $D[\vec{v}] = t$.

Preuve

1. Considérons la première fois où u passe en tête dans $C[\vec{u}] \to_\beta^{h,*} t$. Il existe alors un résidu u' de u, des termes $\vec{s}$ et une réduction $C[\vec{u}] \to_\beta^{h,*} \vec{\lambda}.\ (u'\ \vec{s})$ dans laquelle u ne passe pas en tête. On conclut alors par les lemmes 1.3.10 et 1.3.5.
2. Dérive des lemmes 1.3.10 et 1.3.5. □

1.3.2 Zéro termes et zéro termes forts

Le lemme 1.3.5 affirme que les sous-termes inactifs au cours d'une réduction sont génériques. Or, être inactif au sens de 1.3.3 c'est précisément ne pas avoir de résidus de la forme $(\lambda x.a)$ quand le redex $(\lambda x.a\ b)$ se trouve contracté. Peut-on en déduire dès lors que tout terme qui ne se réduit jamais à $(\lambda x.a)$ est inactif ? De tels termes appelés *zéro termes* font l'objet de cette section.

Définition 1.3.12 *Un terme* u *est un* zéro-terme (OT) *ssi il n'existe pas de terme* v *tel que* u *se réduise à* $\lambda x.v$.

Exemple 1.3.13

– Ω et Ω_3 sont des OT non résolubles.
– $\lambda x.\Omega$ n'est pas un OT.
– $(x\ \vec{t})$ est un OT.

Lemme 1.3.14 *[5]*

1. *u est un OT ssi $\nexists v | u \rightarrow_{\beta}^{h,*} \lambda x.v$.*
2. *Soit u un OT et v un terme. Si $(u\ v) \rightarrow_{\beta}^{*} b$, alors b s'écrit $(u'\ v')$ où $u \rightarrow_{\beta}^{*} u'$ et $v \rightarrow_{\beta}^{*} v'$.*

Preuve

1. Résulte du corollaire de standardisation 1.1.36 et du fait que les réductions internes préservent la forme de tête. Si une abstraction apparaît lors d'une réduction, la réduction de tête la fera apparaître également.
2. Le terme $(u\ v)$ n'aura jamais de redex à sa racine car précisément u est un OT. Les réductions se font donc à l'intérieur de u ou de v. □

Proposition 1.3.15 *[5]*

1. *Les OT sont stables par β-équivalence.*
2. *Les OT sont stables par application à un terme.*
3. *Pour tout contexte C et tout terme u, si $C[u]$ est un OT alors C est un OT.*

Preuve

1. Si u n'est pas un OT, alors $u \simeq_{\beta} \lambda x.a$. Si $u \simeq_{\beta} v$ alors $v \simeq_{\beta} \lambda x.a$. Grâce au théorème de confluence globale (théorème 1.1.30), v et $\lambda x.a$ ont un réduit comment $\lambda x.a'$. v est donc également un OT.
2. Soit u un OT. Montrons induction sur la longueur de la réduction que si $(u\ v) \rightarrow_{\beta}^{*} t$ alors t est une application. Si $(u\ v) \rightarrow_{\beta} t$, comme u est un OT, alors le redex de $(u\ v)$ n'est pas à la racine du terme. Ainsi $(u\ v) \rightarrow_{\beta} (u'\ v')$ où $u \rightarrow_{\beta}^{=} u'$ et $v \rightarrow_{\beta}^{=} v'$. D'après le point (1), u' est un OT tel que $(u'\ v') \rightarrow_{\beta}^{*} t$. On conclut alors par induction.
3. Par l'absurde, si C n'est pas un OT, alors il existe un contexte D tel que $C \rightarrow_{\beta}^{*} \lambda y.D$. D'après le lemme 1.3.5, $C[u] \rightarrow_{\beta}^{*} \lambda y.D[u_1, \cdots, u_n]$. Contradiction. □

Remarque 1.3.16

1. Les termes qui possèdent une forme normale de tête sans abstraction, comme $(x\ \vec{t})$, sont des OT. Mais ils ne sont pas stables par substitution. En effet, $(x\ \vec{t})[\vec{\lambda}.I/x] \rightarrow_{\beta}^{*} I$ qui n'est plus un OT.
2. Les OT ne constituent pas de bons candidats pour l'indéfini. En effet, identifier simultanément tous les OT conduirait à identifier les deux variables x et y, ce qui est contradictoire d'après le corollaire 1.2.21.

La possibilité pour un zéro-terme d'avoir une forme normale de tête lui empêche donc de pouvoir être égalé à un autre zéro-terme arbitraire. Les zéro-termes forts viennent combler cette faiblesse.

Définition 1.3.17 *Un terme u est un* zéro-terme fort (OTF) *ssi u est un zéro-terme et s'il n'existe pas de variable x ni de termes $\vec{t}$ tels que $u \rightarrow_{\beta}^{*} (x\ \vec{t})$.*

Exemple 1.3.18
Ω et Ω_3 sont des OTF.

Lemme 1.3.19 *[5] Les OTF sont les OT non résolubles.*

Preuve Les OTF sont les OT sans forme normale de tête, il sont donc non résolubles. □

Lemme 1.3.20 *u est un (OTF) ssi $\not\exists v|u \rightarrow_\beta^{h,*} \lambda x.v$ et $\not\exists \vec{v}|u \rightarrow_\beta^{h,*} (x\ \vec{v})$ où x est une variable.*

Preuve Preuve similaire à 1.3.14. □

Proposition 1.3.21 *[5]*

1. *Les OTF sont stables par β-équivalence.*
2. *Les OTF sont stables par application à un terme.*
3. *Les OTF sont stables par substitutions i.e. si u est un OTF, pour tout terme v et toute variable x, $u[v/x]$ est un OTF.*

Preuve Les points (1) et (2) se montrent comme pour la proposition 1.3.15. Prouvons le point (3).
Soient u un OTF, v un terme et x une variable. Montrons que $u[v/x]$ est un OTF. Réécrivons la substitution de termes $u[v/x]$ sous la forme de substitution de contexte. Il existe un contexte C sans variable libre x tel que $C[x]$ soit α-équivalent à u et tel que $C[v]$ soit α-équivalent à $u[v/x]$. Montrons maintenant que $C[v]$ est un OTF.
$C[v]$ est encore non résoluble par stabilité des non résolubles après substitution.

- ▷ Montrons d'abord que $C[v]$ est un OT. Par l'absurde, si $C[v] \rightarrow_\beta^{h,*} \lambda y.s$, on distingue alors deux cas :
  - Si v passe en tête, on a $C[v] \rightarrow_\beta^* \vec{\lambda}.(v'\ \vec{t})$ où v' un résidu de v. Alors, selon le corollaire 1.3.11, $C[x] \rightarrow_\beta^* \vec{\lambda}.(x\ \vec{t'})$ ce qui contredit $C[x]$ est un OTF, quels que soient $\vec{\lambda}$. et $\vec{t}$.
  - Sinon v ne passe pas en tête et $C[v] \rightarrow_\beta^* \lambda y.s$. Dans ce cas, les résidus $v_1, \cdots, v_n$ de v ne sont pas en tête, et en particulier, il ne peuvent pas toucher la racine λy. Il existe donc un contexte D tel que $s = D[v_1, \cdots, v_n]$ et tel que $C[v] \rightarrow_\beta^* \lambda y.D[v_1, \cdots, v_n]$. Selon le corollaire 1.3.11, on obtient alors $C[x] \rightarrow_\beta^* \lambda y.D[x, \cdots, x]$, contradiction.
- ▷ Montrons maintenant que $C[v]$ est un OTF. Comme $C[x]$ est un OTF, il est non résoluble, d'après le lemme 1.3.19. Il en est donc de même pour $C[v]$ qui est un substitué de non résoluble. $C[v]$ est donc un OT non résoluble, c'est un OTF. □

Corollaire 1.3.22 *[5] u est un OTF ssi toute substitution de u est un OT.*

Preuve La proposition 1.3.21 point (3) montre le sens direct. Réciproquement, si u est un OT stable par substitution, montrons que c'est un OTF. Par l'absurde, si $u \rightarrow_\beta^* (x\ \vec{t})$, alors $u[\vec{\lambda}.\lambda y.y/x] \rightarrow_\beta^* (x\ \vec{t})[\vec{\lambda}.\lambda y.y/x] \rightarrow_\beta^* \lambda y.y$. Contredit $u[\vec{\lambda}.\lambda y.y/x]$ un OT. □

Corollaire 1.3.23 *[5]*

1. *Les résidus de OTF sont des OTF.*
2. *Les OTF sont inactifs lors des β-réductions*
3. *Soient u un OTF et C un contexte simple, si $C[u] \rightarrow_\beta^* v$ alors il existe un contexte D et des résidus $u_1, \cdots, u_n$ de u tels que $D[u_1, \cdots, u_n] = v$ et tels que $C \rightarrow_\beta^* D$.*

Preuve

1. D'après la proposition 1.1.27 (2), les résidus sont des substitutions et des réduits du sous-terme initial. La proposition 1.3.21 permet donc de conclure.
2. Les résidus de OTF sont des OTF et donc des OT. Ils ne peuvent donc pas être la première partie $\lambda x.a$ d'un redex.
3. Dérive du lemme 1.3.7 □

Remarque 1.3.24

1. La généricité des termes non résolubles avait été obtenue dans le cas restreint des réductions se terminant sur des formes normales. Concernant les zéro-termes forts, ce corollaire montre que la généricité s'étend à tous les types de réductions.
2. En identifiant tous les OTF à $\perp$, on obtient la théorie de Lévy-Longo basée sur les arbres de Lévy-Longo.

1.3.3 Termes muets

Les termes muets [4, 5] sont des zéro termes forts particuliers. À l'instar des non résolubles qui sont dépourvus de forme normale de tête, les termes muets sont privés de *Top Normal Form*. En conséquence, leurs réductions de tête modifient en permanence la racine de leur arbre (cf. proposition 1.3.30). Elles n'engendrent donc jamais la moindre structure stable dans leur arbre. Inversement, celles de Ω_3, qui n'est pas muet, empilent en permanence des termes δ_3 en position d'argument. Comme deuxième conséquence, l'absence de *Top Normal Form* rend les termes muets identifiables de manière consistante à n'importe quel autre terme. Autrement dit, ils satisfont $Cons(\lambda\beta + \{\text{Muet} = t\})$ pour tout terme t arbitraire. Les termes muets semblent donc atteindre la notion d'indéfini la plus forte qui soit : être échangeable à tout moment dans un calcul par n'importe quel terme sans en modifier ni le cours ni le résultat. Autant dire que les termes muets sont totalement dénués de sens opératoire, d'où leur appellation.

Définition 1.3.25 *[5]*

- *Un terme est en* Top Normal Form (TNF) *s'il est dans l'une des trois formes suivantes :*
  1. *une variable x.*
  2. *une abstraction $\lambda x.v$.*
  3. *une application $(v\ t)$ où v un zéro-terme.*
- *Un terme u possède une TNF s'il se réduit à une TNF.*
- *Deux termes u et v possèdent des TNF* similaires *s'ils se réduisent à des TNF de même forme.*

La terminologie de *Top Normal Form* a été choisie du fait qu'elle ne fait intervenir que la racine du terme. C'est également une forme normale au sens où sa forme – une variable, une abstraction ou une application – ne varie pas à l'issue d'une réduction. Les formes normales de tête sont des cas particuliers de Top Normal Form. Elles ont en commun d'ailleurs d'être caractérisables uniquement grâce aux réductions de tête et d'être stables par β-équivalence.

Proposition 1.3.26 *[5]*

1. *Si u a une TNF, alors les réductions de tête de u aboutissent à une TNF similaire.*
2. *Si u est une TNF et $u \to_\beta^* v$, alors v est une TNF similaire. Autrement dit, les TNF sont stables par β-réduction.*
3. *Pour tout contexte C et pour toute suite de termes $\vec{u}$, si $C[\vec{u}]$ est une TNF alors C est une TNF.*

Preuve

1. Examinons le cas où u possède une TNF de la forme $(v\ \ t)$ où v est un OT. Si $u \to_\beta^* (v\ \ s)$, alors par standardisation, il existe des termes v' et s' tels que $u \to_\beta^{h,*} (v'\ s') \to_\beta^{i,*} (v\ s)$ où $v' \to_\beta^* v$ et $s' \to_\beta^* s$. Or, $v' \simeq_\beta v$ entraîne v' OT. $(v'\ s')$ est donc bien une TNF de type applicative.

   Les deux autres formes se montrent de manière analogue.
2. Les deux premières formes sont claires. Pour la forme applicative, si $(v\ \ s) \to_\beta^* b$, d'après Church-Rosser, $(v\ s)$ et b se réduisent alors à un même troisième terme. La conclusion dérive alors du lemme 1.3.14 point (2) et de la proposition 1.3.15 point (1) .

3. Montrons dans le cas d'un contexte simple. Soit C un contexte simple et u un terme tels que $C[u]$ soit une TNF. Montrons que C est une TNF. Dans le cas où $C[u] = (v\ t)$ avec v un OT, si $C = []$, alors C est bien une TNF. Sinon C n'est pas trivial et il existe deux contextes D et E tels que $D[u] = v$ et $E[u] = t$ et tels que $C = (D\ E)$. Or, selon la proposition 1.3.15, D est un OT. C est donc une TNF applicative. Les deux autre formes de TNF se prouvent de manière analogue.
   Le cas d'un contexte à plusieurs trous est similaire. □

Définition 1.3.27 *[5] Un terme est* muet *s'il n'a pas de TNF.*

Exemple 1.3.28
- Ω est muet car $\Omega \to_\beta^* \Omega = (\lambda x.(x\ x)\ \omega)$ où $\lambda x.(x\ x)$ n'est pas un OT.
- $(\Omega\ I)$ n'est pas muet. C'est une TNF applicative.
- Ω_3 n'est pas muet. En effet, Ω_3 est un OT et $\Omega_3 \to_\beta (\Omega_3\ \delta_3)$ qui est une TNF applicative.

Proposition 1.3.29 *Les termes muets sont des OTF.*

Preuve Par définition, si un terme n'est pas un OTF alors il se réduit soit à $(x\ \vec{v})$ qui est une TNF, soit à $\lambda x.v$ qui est également une TNF. □

Proposition 1.3.30 *[4] u est muet ssi la réduction de tête de u passe indéfiniment à la racine.*

Preuve Montrons la contraposée : si u a une TNF, alors la réduction de tête ne passe plus à la racine après une certain nombre d'étapes. En effet, si u a une TNF, selon la proposition 1.3.26, u se réduit de tête en une TNF t. Examinons t :
- si t est une variable, il n'y a plus de réductions possibles donc le résultat est vrai.
- si t est une abstraction, la racine est alors un λ qui est stable par β-réductions. Le redex de tête est alors sous ce λ et il n'est donc plus à la racine.
- si t est une application $(u\ v)$ où u est un OT, alors les réductions de u ne feront pas apparaître de λ. Ainsi la réduction de tête a lieu à l'intérieur du terme u ou v et non à la racine.

Montrons le sens direct. Si u est muet, alors u est un OTF. Il s'écrit donc de la forme $(a\ b)$. Raisonnons par l'absurde. En sautant les premières étapes, on peut supposer que la réduction de tête ne passe jamais à la racine. Dans ce cas, la réduction de tête de u (qui est celle de a) ne fait jamais apparaître de λ. Le terme a est donc un OT. Contradiction. □

Remarque 1.3.31 La réduction de tête d'un terme muet fait remonter en permanence le redex de tête à la racine. La racine de l'arbre est donc constamment modifiée par ces réductions qu'on qualifie de *Top reduction*.

Exemple 1.3.32 Pour Ω, on pourrait dire que la réduction ne modifie pas la racine du terme puisque tout réduit de Ω est Ω lui-même. En fait, quant $\Omega \to_\beta (\omega\ \omega)$ le premier ω n'est qu'une copie et ne correspond pas au ω initial. Le terme est donc bien en perpétuel renouvellement.

Proposition 1.3.33 *[5]*

1. *Les muets sont stables par β-équivalence.*
2. (a) *Les muets sont stables par substitution.*
   (b) *Si C est un contexte muet, pour toute suite $\vec{u}$, $C[\vec{u}]$ est muet.*

Preuve Le premier point découle directement de la proposition 1.3.26 point (2). Pour le second point, comme dans la preuve de la proposition 1.3.15, montrons que pour tout contexte simple C et pour tout terme u, si $C[u]$ a une TNF, alors C en a une aussi. Les points (a) et (b) seront ainsi démontrés. Examinons la réduction de tête de $C[u]$ qui se termine sur une TNF. Selon le corollaire 1.3.11, on distingue deux cas :

- si u passe en tête, alors C se réduit de tête à une TNF.
- si u ne passe pas en tête, alors il existe un contexte D tel que $C \rightarrow_\beta^* D$ et $C[u] \rightarrow_\beta^* D[u_1, \cdots, u_n]$ où $D[u_1, \cdots, u_n]$ est une TNF. D'après la proposition 1.3.26 point (3), D est aussi une TNF. C a donc bien une TNF.

Les deux lemmes suivant résument le comportement opératoire des sous-termes muets dans des réductions terminant vers des Top Normal Form.

Lemme 1.3.34 *[5] Soient un contexte C tel que $C \not\rightarrow_\beta^* []$ et u un terme muet. On a l'équivalence suivante :*

1. *C a une TNF*
2. *$C[u]$ a une TNF*

Preuve Nous devons distinguer trois cas suivant le type de TNF.

1. Pour le cas des variables c'est immédiat.
2. Montrons que C a une TNF abstraction ssi $C[u]$ a une TNF abstraction.
Si $C \rightarrow_\beta^* \lambda y.v$ alors $C[u] \rightarrow_\beta^* \lambda y.v'$. Pour la réciproque, si $C[u] \rightarrow_\beta^* \lambda y.v$ d'après la proposition 1.3.23 (3), il existe un contexte D et des résidus u_1,...,u_n de u tels que $D[u_1, \cdots, u_n] = \lambda y.v$ et tels que $C \rightarrow_\beta^* D$. Comme u_1,...,u_n sont des résidus d'un OTF u, alors ils sont également des OTF. Ainsi, D ne peut être trivial si bien que $D = \lambda y.E$ et $C \rightarrow_\beta^* \lambda y.E$.
3. Montrons que C a une TNF applicative ssi $C[u]$ a une TNF applicative.
L'implication est immédiate. Montrons la réciproque, si $C[u] \rightarrow_\beta^* (a\ b)$ alors il existe un contexte D et des résidus de u tels que $D[u_1, \cdots, u_n] = (a\ b)$ et $C \rightarrow_\beta^* D$. Par hypothèse, D est non trivial d'où $D = (E\ F)$. Ainsi $E[\vec{u}] = a$ un OT, d'après le point 1, E est un OT. C se réduit donc à un TNF applicative. □

Lemme 1.3.35 *[5] Soient C un contexte simple et u un terme muet. Si $C[u]$ est muet alors :*
- *soit $C \rightarrow_\beta^* []$.*
- *soit $C[v]$ est muet pour tout terme v.*

Preuve Si $C \not\rightarrow_\beta^* []$, d'après le lemme 1.3.34, comme u et $C[u]$ sont muets, alors C est également muet. On conclut alors grâce à la proposition 1.3.33 point (2). □

Proposition 1.3.36 *[5] Soit C un contexte simple et m_1, m_2 deux termes muets.*

1. *$C[m_1]$ est muet ssi $C[m_2]$.*
2. *$C[m_1]$ a une TNF ssi $C[m_2]$ a une TNF et les deux formes sont similaires.*

Preuve Pour le premier point : d'après le lemme 1.3.35, soit $C[m_1]$ est muet soit $C \rightarrow_\beta^* []$. Dans tous les cas $C[m_2]$ est muet. Pour le second point, l'argument est analogue. □

1.3.4 Consistance de $\lambda\beta$+{Muet = m} pour tout terme clos m

La preuve complète de la consistance est présente dans [5]. Ici nous n'en fournirons qu'une ébauche afin d'exhiber les techniques employées. La preuve est basée sur l'étude de la $\rightarrow_{\beta m}^*$ réduction qui est la réunion de la β-réduction et de la relation $\rightarrow_m$ qui associe m à tout terme muet. En vertu du lemme 1.2.12, la consistance sera établie si nous parvenons à montrer la confluence de la relation $\rightarrow_{\beta m}^*$ et si nous trouvons deux formes normales pour $\rightarrow_{\beta m}^*$. Pour cela, d'après le lemme de Hindley-Rosen, il suffirait de prouver la confluence de $\rightarrow_m$ et d'établir la commutativité de $\rightarrow_\beta^*$ et $\rightarrow_m^*$. Or, la relation $\rightarrow_m$ n'est pas localement confluente, cf. lemme 1.3.47. La solution consiste alors à introduire une troisième relation, la *réduction évanouissante* qui rétablit la confluence locale tout en commutant parfaitement avec la β-réduction et la m-réduction.

Définition 1.3.37 *[5]*
- *Pour tout terme m, la m-*réduction *est la relation qui pour tout contexte simple C et pour tout terme muet u, réduit $C[u]$ en $C[m]$.*
- *On note $C[u] \to_m C[m]$ cette réduction dans laquelle u est appelé le m-*redex.

Il s'agit donc de prouver la consistance de la réunion des relations $\to_\beta$ et $\to_m$. Pour cela nous utilisons le lemme de Hindley-Rosen.

Lemme 1.3.38 de Hindley-Rosen *Soient deux relations $\to_{\gamma_1}$ et $\to_{\gamma_2}$ confluentes. Si $\to^*_{\gamma_1}$ commute avec $\to^*_{\gamma_2}$, alors $(\to_{\gamma_1 \cup \gamma_2})^*$ est confluente.*

Preuve Par induction sur la longueur des suites de relations. □

Remarque 1.3.39 Deux relations $\to_{\gamma_1}$ et $\to_{\gamma_2}$ commutent si tous les diagrammes $\begin{array}{ccc} a & \to_{\gamma_1} & b \\ \downarrow_{\gamma_2} & & \\ c & & \end{array}$ peuvent être complétés en $\begin{array}{ccc} a & \to_{\gamma_1} & b \\ \downarrow_{\gamma_1} & & \downarrow_{\gamma_2} \\ c & \to_{\gamma_1} & d \end{array}$.

Ainsi, pour montrer la confluence de $\to_\beta \cup \to_m$, il suffit de montrer la confluence de $\to_\beta$ et de $\to_m$ et la commutativité entre $\to^*_\beta$ et $\to^*_m$. La β-réduction étant confluente, il ne reste que deux points à vérifier. Le dernier résulte du fait que $\to_\beta$ et $\to_m$ commutent de manière contrôlée, i.e. en n'augmentant pas le nombre de réductions sur l'un des axes du diagramme commutatif .

Lemme 1.3.40 *[5] Tout diagramme $c \leftarrow_m a \to_\beta b$ peut être complété en* $\begin{array}{ccc} a & \to_\beta & b \\ \downarrow_m & & \downarrow^*_m \\ c & \to^=_\beta & d \end{array}$

Preuve On étudie les différentes inclusions possibles entre le m-redex u et le β-redex $r = (\lambda x.S[x, \cdots, x]\ t)$. On distingue trois cas :

1. u et r sont disjoints et alors $\begin{array}{ccc} a & \to_{\beta:r} & b \\ \downarrow_{m:u} & & \downarrow_{m:u} \\ c & \to_{\beta:r} & d \end{array}$ en réduisant les résidus intacts.
2. $r \le u$ et alors $\begin{array}{ccc} A[u] & \to_{\beta:r} & A[u'] \\ \downarrow_{m:u} & & \downarrow_{m:u'} \\ A[m] & \equiv & A[m] \end{array}$

   (u' étant encore un muet par stabilité des muets après β-réductions)
3. si $u < r$ on a deux cas :

   (a) $\begin{array}{ccc} r = (\lambda x.S[u, \vec{x}\,]\ t\,) & \to_{\beta:r} & S[\,u[t/x], \vec{t}\,] \\ \downarrow_{m:u} & & \downarrow_{m:u[t/x]} \\ (\lambda x.S[m, \vec{x}\,]\ t\,) & \to_{\beta:r} & S[\,m[t/x], \vec{t}\,] = S[m, \vec{t}\,] \end{array}$

   ($u[t/x]$ étant encore muet comme substitué d'un muet)

   (b) $\begin{array}{ccc} r = (\lambda x.S[x, \cdots, x]\ T[u]) & \to_{\beta:r} & S[\,T[u], \cdots, T[u]\,] \\ \downarrow_{m:u} & & \downarrow^*_{m:u} \\ (\lambda x.S[x, \cdots, x]\ T[m]\,) & \to_{\beta:r} & S[\,T[m], \cdots, T[m]\,] \end{array}$ (toutes les copies de u)

□

Lemme 1.3.41 *[5] $\to^*_\beta$ et $\to^*_m$ commutent, i.e si $c \leftarrow^*_m a \to^*_\beta b$, alors on a :*

1. $\begin{array}{ccc} a & \to^*_\beta & b \\ \downarrow^*_m & & \downarrow^*_m \\ c & \to^*_\beta & d \end{array}$
2. *et de plus $l(c \to^*_\beta d) \le l(a \to^*_\beta b)$*

Preuve
À partir du lemme 1.3.40, on montre par induction sur $l(a \to_m^* c)$ le diagramme suivant : $\begin{array}{ccc} a & \to_\beta & a_1 \\ \downarrow_m^* & & \downarrow_m^* \\ c & \to_\beta^= & c_1 \end{array}$. On conclut alors par induction sur $l(a \to_\beta^* b)$. □

Corollaire 1.3.42 *[5] $\to_\beta^*$ et $\to_{\beta m}^*$ commutent.*

Preuve Dérive du théorème de Church-Rosser et du lemme 1.3.41. □

À partir de ce résultat, le lemme de Hindley-Rosen n'est pas applicable tout simplement parce que $\to_m$ n'est pas confluente. Les diagrammes commutatifs font apparaître des β-réductions comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.3.43 Prenons un contexte simple C tel que $C \to_\beta^* []$ et un terme muet u. Comme $C[u] \simeq_\beta u$, alors $C[u]$ est muet. u et $C[u]$ forment donc deux m-redex inclus l'un dans l'autre. Nous avons donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C[u] & \to_{m:u} & C[m] \\ \downarrow_{m:C[u]} & & \downarrow_{m:?} \\ m & \to_{m:?} & ? \end{array}$$

Pour compléter ce diagramme il faudrait que $C[m]$ soit muet. Par analogie avec les résidus de β-réductions, $C[m]$ est le résidu du m-redex $C[u]$. Or, comme m est clos, $C[m]$ est β-équivalent à m. Donc, demander à $C[m]$ d'être muet revient à demander à m d'être muet. Ce qui n'a aucune raison d'être.

Lemme 1.3.44 *[5] Tout diagramme $c \leftarrow_m a \to_m b$ peut être étendu en un des trois schémas suivants :*

$$(1)\ \begin{array}{ccc} a & \to_m & b \\ \downarrow_m & & \downarrow_\beta^{h,*} \\ c & = & d \end{array} \qquad (2)\ \begin{array}{ccc} a & \to_m & b \\ \downarrow_m & & = \\ c & \to_\beta^{h,*} & d \end{array} \qquad (3)\ \begin{array}{ccc} a & \to_m & b \\ \downarrow_m & & \downarrow_m^= \\ c & \to_m^= & d \end{array}$$

Preuve La preuve se fait par analyse des cas d'inclusions entre les deux m-redex. Le cas (3) correspond à des m-redex disjoints ou confondus, tandis que (1) et (2) correspondent au cas d'inclusion (exemple 1.3.43) qui se complète en $\begin{array}{ccc} C[u] & \to_{m:u} & C[m] \\ \downarrow_{m:C[u]} & & \downarrow_{\beta:h}^* \\ m & \equiv & m \end{array}$ ou en $\begin{array}{ccc} C[u] & \to_{m:u} & C[m] \\ \downarrow_{m:C[u]} & & \downarrow_{m:C[m]} \\ m & \equiv & m \end{array}$ suivant les cas du lemme 1.3.35. □

Remarque 1.3.45 Sans la confluence de $\to_m$, la commutativité entre $\to_m^*$ et $\to_{\beta m}^*$ n'est pas garantie, même si $\to_\beta^*$ et $\to_{\beta m}^*$ commutent. Le diagramme suivant est un exemple possible de commutation entre quatre m-réductions. La complexité ne décroît pas forcément dans le dernier carré en raison du nombre non contrôlé des m-réductions. L'induction n'est pas possible.

$$\begin{array}{ccccc} a & \to_m & b & \to_m & c \\ \downarrow_m & & \downarrow^= & & \downarrow^= \\ d & \to_\beta^* & e & \to_m & f \\ \downarrow_m & & \downarrow_m^* & & \downarrow_? \\ g & \to_\beta^* & h & \to_? & i \end{array}$$

Comme le montre le lemme 1.3.44, cas (1) et (2), l'absence de commutativité des m-réductions survient uniquement lorsqu'un m-redex se trouve inclus dans un contexte tel que $C \to_\beta^* []$. En déclarant *évanouissantes* de telles réductions, cette difficulté va disparaître grâce à la commutativité parfaite des réductions évanouissantes avec la βm-réduction.

Définition 1.3.46 *[5] Soit $\sigma : a \to_\beta^* b$ une réduction. On dit que σ est une* réduction évanouissante *s'il existe :*
- *un contexte simple C*
- *un contexte simple H tel que $H \to_\beta^* []$*
- *v un terme clos*

tels que $a = C[H[v]]$ et $b = C[v]$.

*On dit alors que $\sigma : a \to_c b$ est la c-*réduction *du c-*redex *(H, v).*
(Le "c" vient de l'anglais collapsing*)*

Lemme 1.3.47 *[5] Tout diagramme $c \leftarrow_m a \to_m b$ peut être étendu en un des trois schémas suivants :*

$$(1)\ \begin{array}{ccc} a & \to_m & b \\ \downarrow_m & & \downarrow_c \\ c & \equiv & d \end{array} \qquad (2)\ \begin{array}{ccc} a & \to_m & b \\ \downarrow_m & & \equiv \\ c & \to_c & d \end{array} \qquad (3)\ \begin{array}{ccc} a & \to_m & b \\ \downarrow_m & & \downarrow_m^= \\ c & \to_m^= & d \end{array}$$

Preuve Dérive du lemme 1.3.44 et de la définition des réductions évanouissantes. □

Lemme 1.3.48 *[5] Tout diagramme $c \leftarrow_c a \to_\beta b$ se complète en :*

$$\begin{array}{ccc} a & \to_\beta & b \\ \downarrow_c & & \downarrow_c^* \\ c & \to_\beta^= & d \end{array}$$

Preuve Par analyse des cas d'inclusions. Voir [5] □

Lemme 1.3.49 *[5] Tout diagramme $c \leftarrow_c a \to_m b$ se complète en :*

$$\begin{array}{ccc} a & \to_m & b \\ \downarrow_c & & \downarrow_c^= \\ c & \to_m^= & d \end{array}$$

Preuve Par analyse des cas d'inclusions. Voir [5] □

Lemme 1.3.50 *Tout diagramme $c \leftarrow_c a \to_c b$ se complète en :*

$$\begin{array}{ccc} a & \to_c & b \\ \downarrow_c & & \downarrow_c^= \\ c & \to_c^= & d \end{array}$$

Preuve Par analyse des cas d'inclusions. □

Lemme 1.3.51 *[5] Tout diagramme $c \leftarrow_c^* a \to_{\beta mc}^* b$ se complète en :*

$$\begin{array}{ccc} a & \to_{\beta mc}^* & b \\ \downarrow_c^* & & \downarrow_c^* \\ c & \to_{\beta mc}^* & d \end{array} \qquad \text{et de plus} \qquad l(c \to_{\beta mc}^* d) \leq l(a \to_{\beta mc}^* b)$$

Preuve Par induction sur le nombre de βmc-réductions et en se servant des lemmes 1.3.48, 1.3.49 et 1.3.50 qui n'augmentent pas le nombre de βmc-réductions. □

Lemme 1.3.52 *[5] $\to_{mc}^*$ et $\to_{\beta mc}^*$ commutent.*

Preuve Dans un premier temps, on montre par induction sur $l(a \to_{mc}^* c)$ le diagramme suivant : $\begin{array}{ccc} a & \to_{\beta mc} & b \\ \downarrow_{mc}^* & & \downarrow_{mc}^* \\ c & \to_{\beta mc}^= & d \end{array}$. Ce résultat découle du lemme 1.3.51 pour les c-réductions et des lemmes 1.3.41, 1.3.47 et 1.3.49 pour les m-réductions. □

Corollaire 1.3.53 *[5] $\to_{\beta m}^*$ est confluente.*

Preuve Comme $\to_c$ est incluse dans $\to_\beta$, les deux réductions $\to^*_{\beta m}$ et $\to^*_{\beta mc}$ sont identiques. D'après le corollaire 1.3.42, $\to^*_\beta$ commute avec $\to^*_{\beta m}$. $\to^*_\beta$ commute donc aussi avec $\to^*_{\beta mc}$. De plus, grâce au lemme 1.3.52 $\to^*_{mc}$ commute avec $\to^*_{\beta mc}$. On en déduit donc $\to^*_{\beta mc}$ commute avec elle-même. D'où $\to^*_{\beta m}$ commute. □

Remarque 1.3.54 Grâce aux c-réductions, le diagramme de la remarque 1.3.45 se complète par exemple en :

$$\begin{array}{ccccc}
a & \to_m & b & \to_m & c \\
\downarrow_m & & \downarrow^= & & \downarrow^= \\
d & \to_c & e & \to_m & f \\
\downarrow_m & & \downarrow^*_m & & \downarrow_{mc} \\
g & \to_c & h & \to^=_m & i
\end{array}$$

Chaque colonne peut être complétée à l'aide des c-réductions.

Chapitre 2

Le λ-calcul infini

Le λ-*calcul infini* étend le λ-calcul ordinaire aux termes infinis. Les termes tels que $(x\ x \cdots)$ ou $(\cdots x\ x)$ y sont autorisés. Loin de vouloir compliquer le λ-calcul, cette extension vise à le simplifier. En effet, *la β-réduction infinie* définie comme une limite de réductions finies permettra d'écrire que les deux combinateurs de points fixes $(Y_t\ \Omega) = (\lambda xf.(f\ (x\ x\ f))\ (\lambda xf.(f\ (x\ x\ f)))\ \Omega)$ et $F_\Omega = (\lambda x.(\Omega\ (x\ x))\ \lambda x.(\Omega\ (x\ x)))$ se réduisent à un même troisième terme $(\Omega\ \Omega \cdots)$. Cette plus grande capacité de normalisation est exploitée pour créer le *modèle de Berarducci*. Dans ce modèle, chaque terme se voit attribuer une forme normale infinie unique appelée *l'arbre de Berarducci*. Ces formes normales sont obtenues en exploitant la consistance des théories $\lambda\beta + \{\text{Muets} = m\}$. Elles sont construites à la manière des arbres de Böhm, à la différence près que les termes muets jouent le rôle des non résolubles et les Top Normal Form celui des formes normales de tête. Dans ce modèle, tous les termes aux formes normales infinies se trouvent confondus, si bien que les deux exemples $(Y_t\ \Omega)$ et F_Ω cités plus haut représenteront le même élément. Comme les muets sont plus restreints que les non résolubles, les arbres de Berarducci gagneront donc en précision sur ceux de Böhm.

Pour parvenir à ce modèle, les termes infinis sont définis comme des limites de termes finis au sens de la topologie usuelle. C'est d'ailleurs le sens que prennent les points de suspensions $(\cdots)$ dans le terme $(x\ x \cdots)$. Aux termes infinis, nous associons la β-réduction simple. Celle-ci dérive naturellement du cas fini. Cependant, les réductions simples en nombre fini ne parviennent pas à établir la confluence du calcul infini. Par exemple, si r se réduit à r', alors $(\lambda x.(\cdots x\ x)\ r) \rightarrow^h_\beta (\cdots r\ r)$ et $(\lambda x.(\cdots x\ x)\ r) \rightarrow_{\beta:r} (\lambda x.(\cdots x\ x)\ r')$ sans que $(\cdots r\ r)$ ne puisse se réduire même en plusieurs étapes à $(\cdots r'\ r')$. La confluence est une propriété indispensable qui garantit la consistance du calcul. Pour la rétablir, la solution consiste à autoriser les *réductions infinies*. Celles-ci sont définie comme la une limite d'une suite infinie de réductions simples dont les *profondeurs* des redex tendent vers l'infini dans l'arbre de terme. Cette contrainte des réductions infinies s'appelle la *convergence forte*. Elle leurs garantit de bien converger vers un terme limite. Néanmoins, la confluence fait toujours défaut comme le montre l'exemple 2.1.39. Dans cet exemple, l'impossibilité de joindre les deux extrémités du diagramme commutatif est provoquée par le présence du terme Ω, qui est muet. Dans le $\lambda\perp$-calcul infini, les termes muets, dont la définition est la même qu'en fini, sont identifiés à la constante $\perp$. Le calcul devient alors confluent et il servira de base pour construire les arbres de Berarducci. Ainsi l'arbre de Berarducci de $(Y_t\ \Omega)$ sera $(\perp\ \perp \cdots)$.

Les arbres de Berarducci nous intéresseront pour trois raisons. Comme les arbres de Böhm, ce sont des formes normales. Nous n'aurons donc plus à nous préoccuper des redex. De plus, ils ne contiennent qu'une information partielle du terme initial : tous les sous-termes muets ont disparu. Cette propriété conduit les indéfinis, vus au chapitre précédent, à posséder des arbres très caractéristiques. Enfin, à l'opposé des arbres de Böhm, ceux de Berarducci sont en correspondance directe avec les termes du calcul infini. Nous aurons donc la possibilité de faire des calculs avec les arbres de Berarducci.

À l'origine, dans l'article [5], certains résultats ne s'appliquaient qu'à des termes infinis issus d'une réduction partant d'un terme fini. Les preuves présentes ici généralisent tous les résultats aux termes infinis quelconques.

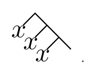
2.1 Extension du λ-calcul au calcul infini

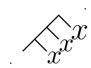
2.1.1 Termes et contextes infinis

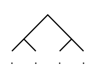
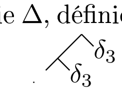
Les termes infinis n'ont plus de définitions inductives comme pour le cas fini. Ici nous les présenterons sous la forme d'arbre infinis étiquetés. La correspondance entre arbre de termes et terme se fera suivant les mêmes principes que dans le cas fini. Seule différence, des points de suspensions $(\cdots)$ apparaîtront aux nœuds où l'arbre sera infiniment profond.

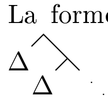
Définition 2.1.1 *Les arbres des* λ-termes infinis *sont des arbres étiquetés finis ou infinis. Leurs feuilles sont étiquetées par des variables. Les nœuds internes peuvent être soient :*
- *binaires et sans étiquette. Ce sont alors des nœuds d'application.*
- *unaires et étiquetés par un λx, où x est une variable. Ce sont alors des nœuds d'abstraction.*

L'ensemble des variables est considéré infini et dénombrable.
Les termes sont définis à α-équivalence près.

Exemple 2.1.2
- $(x\ x\ \cdots)$ a pour arbre 

- $(\cdots\ x\ x)$ a pour arbre 

. Il est sans tête.
- L'arbre effeuillé  est un terme infini. Il serait la forme normale infinie du terme $u = (v\ v)$ où $v = \lambda x.(x\ x)\ (x\ x)$.
- La forme normale infinie Δ, définie par $\Delta = (\cdots \delta_3\ \delta_3)$ où $\delta_3 = \lambda x.(x\ x\ x)$, possède comme arbre 

. Ce terme vérifie l'égalité syntaxique $\Delta = (\Delta\ \delta_3)$ ce qui est impossible en fini.
- La forme normale infinie Δ_∞ définie par $\Delta_\infty = (\Delta\ \Delta \cdots)$ a pour arbre 

. Ici, on vérifie que $\Delta_\infty = (\Delta\ \Delta_\infty)$.

Remarque 2.1.3 Si le nombre de nœuds d'un arbre infini est dénombrable, son nombre de branches ne l'est pas nécessairement. C'est le cas de l'arbre effeuillé dont le nombre de branches n'est plus dénombrable. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'une branche est définie par une suite de bifurcations, à gauche ou à droite. On compte donc autant de branches que d'éléments de $\{g, d\}^{\mathbb{N}}$. Les récurrences sur les branches des arbres infinis sont donc nécessairement transfinies.

Remarque 2.1.4 Sauf mention contraire, désormais *les termes seront tous considérés comme potentiellement infinis.*

Définition 2.1.5

- *Un* contexte *est un terme éventuellement infini qui possède la variable* [] *comme variable libre en quantité éventuellement infinie.*
- *Un* contexte simple *est un contexte qui ne possède qu'un seul trou* [].
- *Pour tout contexte C et pour tout terme t, $C[t]$ représente la* substitution *de chacun des trous de C (en quantité éventuellement infinis) par le terme t sans renommage des variables de C, ni de t.*
- *Si C est un contexte simple, la* longueur du contexte C, *notée $l(C)$, représente la longueur du chemin qui relie la racine de l'arbre de C à son trou* []. *Si C ne possède pas de trou, $l(C)$ est considérée comme infinie.*

Exemple 2.1.6

1. $(\cdots\ x\ x\ [])$ est un contexte simple (et infini).
2. Soit $C = (\cdots\ []\ [])$. C est un contexte (infini) qui possède un nombre infini de trous. $C[x] = (\cdots\ x\ x)$.

Remarque 2.1.7 Une suite $\vec{s}$ de termes infinis pourra éventuellement être de longueur infinie : $\vec{s} = s_1, s_2, \cdots$

2.1.2 Réductions infinies

◄ **RÉDUCTIONS FINIES SUR TERMES INFINIS** ►

Définition 2.1.8 *Soient a et b deux termes infinis. La β*-réduction simple *,notée $\rightarrow_\beta$, du redex $(\lambda x.a\ b)$ s'étend aux termes infinis en la relation $(\lambda x.a\ b) \rightarrow_\beta a[b/x]$, dans laquelle $a[b/x]$ est un arbre obtenu par substitution de toutes les variables libres x dans l'arbre a par l'arbre b.*

Exemple 2.1.9 $(\lambda x.(\cdots x\ x)\ a) \rightarrow_\beta (\cdots\ a\ a)$. Le nombre des substitutions dans le terme $(\cdots x\ x)$ est ici infini.

Remarque 2.1.10 Comme le montre l'exemple précédent, le terme a possède à l'issue de la réduction $(\lambda x.(\cdots x\ x)\ a) \rightarrow_\beta (\cdots a\ a)$ une infinité de résidus. Si a se réduit en a', pour fermer le diagramme commutatif ci-dessous il faudrait procéder à une infinité de réductions du type $a \rightarrow_\beta a'$.

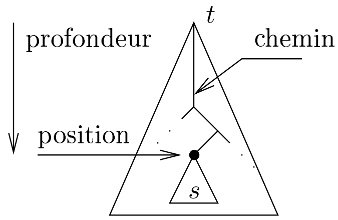
$$\begin{array}{ccccc}
(\lambda x.(\cdots x\ x)\ a) & & \rightarrow_\beta & & (\lambda x.(\cdots x\ x)\ a') \\
\downarrow^h_\beta & & & & \downarrow^h_\beta \\
(\cdots a\ a) & \rightarrow_\beta (\cdots a\ a') \rightarrow_\beta & & \cdots & \rightarrow_\beta (\cdots a'\ a')
\end{array}$$

◄ **TOPOLOGIE** ►

Définition 2.1.11 *Soient deux termes a et b.*

- *La* profondeur d'un sous-terme b de a *est la longueur du chemin qui relie la racine de l'arbre de a à celle de son sous-terme b.*
- *Pour tout entier n, on écrit $a \equiv_n b$ ssi les arbres de a et de b coïncident, en type de nœuds et en étiquettes jusqu'à une profondeur au moins n.*
  On dira également que b est une approximation de a *à profondeur n.*
  Plus précisément :
  - *$a \equiv_0 b$ ssi a et b ont une racine commune.*
  - *$a \equiv_{n+1} b$ ssi a et b ont même racine, et tout sous-terme immédiat de a est en relation $\equiv_n$ avec son correspondant dans l'arbre de b.*

Remarque 2.1.12



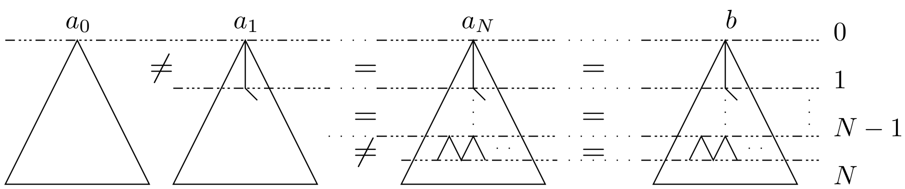
Exemple 2.1.13 $(a\ b) \not\equiv_0 \lambda xy.(u\ v) \equiv_2 \lambda xy.c \not\equiv_2 \lambda x.(s\ t)$

Définition 2.1.14 *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de termes, on écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ ssi il existe un terme a tel que $\forall N \geq 0$, $\exists n \geq 0$ tel que $\forall p \geq n$, $a_p \equiv_N a$.*

Remarque 2.1.15 C'est la topologie usuelle sur les arbres finitaires infinis.

Lemme 2.1.16 *Si $(a_i)_{i\geq 0}$ est une suite de termes telle que $a_i \equiv_i a_{i+1}$, alors il existe un terme b tel que $\lim\limits_{i\to+\infty} a_i = b$.*

Preuve Pour tout $j > p$, $a_p \equiv_p a_j$. On construit alors le terme b par induction sur la profondeur p de ses sommets de sorte que $b \equiv_p a_p$.



On vérifie bien que pour tout p, $a_p \equiv_p b$. La suite $(a_i)_{i\geq 0}$ tend donc vers b. □

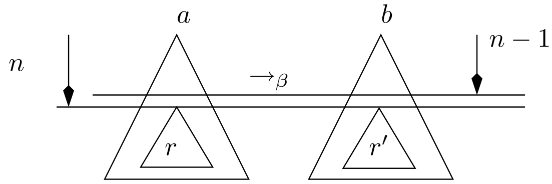
◀ Réductions infinies convergentes ▶

Définition 2.1.17 *Soit $\sigma : a \to_\beta a_1 \to_\beta \cdots \to_\beta a_n \to_\beta b$ une séquence finie de β-réductions simples. La* profondeur de la réduction, *notée* $\mathrm{prof}(a \to_\beta^* b)$ *désigne le minimum de la profondeur des redex contractés dans cette séquence.*
Par convention, la profondeur d'une réduction vide est infinie.

Lemme 2.1.18 *Si* $\mathrm{prof}(a \to_\beta^* b) > n$ *alors* $a \equiv_n b$.

Preuve On procède par récurrence sur la longueur de la réduction $a \to_\beta^* b$.

Pour une seule réduction telle que $\mathrm{prof}(a \to_{\beta:r} b) = n$, seul le redex contracté r à la profondeur n est modifié, le reste qui se situe à profondeur inférieure ou égale à n est inchangé.



□

Définition 2.1.19 *Soit $\sigma : a \to_\beta a_1 \to_\beta \cdots \to_\beta a_n \cdots$ une séquence infinie de réductions.*

Si la suite $(\mathrm{prof}(a_i \to_\beta a_{i+1}))_{i\geq 0}$ *tend vers l'infini avec i, alors on dira que la* séquence infinie de réductions *converge fortement.*

Notation 2.1.20 À part la convergence forte, aucune autre forme de convergence ne sera considérée ici : lorsque nous parlerons de convergence de séquences de réductions il faudra donc lire convergence forte.

Lemme 2.1.21 *Si $\sigma : a \to_\beta a_1 \to_\beta \cdots \to_\beta a_n \to_\beta \cdots$ est une séquence infinie de réductions fortement convergente, alors il existe un terme b tel que la suite de termes $(a_i)_{i\geq 0}$ converge vers b.*

Preuve La suite des réductions convergeant fortement, pour une profondeur N fixée il existe une étape i_N à partir de laquelle toutes les réductions sont plus profondes que N. Ainsi, d'après le lemme 2.1.18, $\forall i > i_N$, $a_i \equiv_N a_{i_N}$. Définissons la suite de termes $(b_N = a_{i_N})_{N\geq 0}$. D'après le lemme 2.1.16 il existe une limite b à la suite $(b_N)_{N\geq 0}$. On vérifie ensuite facilement que $(a_i)_{i\geq 0}$ tend bien vers b. □

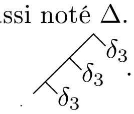
Définition 2.1.22 *[5] Soit $\sigma : a \to_\beta a_1 \to_\beta \cdots \to_\beta a_n \to_\beta \cdots$ une séquence infinie de réductions fortement convergente et soit b sa limite.*
On dira que σ converge vers *b et on le notera $a \to_{\infty\beta} b$.*

Remarque 2.1.23 Les réductions finies sont des cas particuliers de réductions infinies. En effet comme la réduction vide est de profondeur infinie, la profondeur de $a \to_\beta^* b$ tend bien vers l'infini.

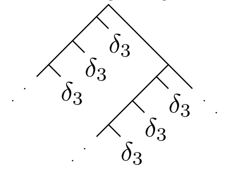
Remarque 2.1.24

1. Les termes d'une séquence de réductions peuvent converger sans que la séquence converge fortement. Prenons $\omega = \lambda x.(x\ x)$ et considérons la séquence $\sigma : (\omega\ \omega) \to_\beta (\omega\ \omega) \to_\beta \cdots$. Les termes de σ convergent bien vers $(\omega\ \omega)$ mais σ ne converge pas vers b car les profondeurs de ses réductions restent constamment à 1.
2. Néanmoins, on peut écrire $(\omega\,\omega) \to_{\infty\beta} (\omega\,\omega)$ en ne considérant plus la réduction précédente mais la réduction vide.

Exemple 2.1.25

1. Soient $\delta_3 = \lambda x.(x\ x\ x)$ et $\Omega_3 = (\delta_3\ \delta_3)$, qui se réduit en $\Omega_3 \to_\beta (\Omega_3\ \delta_3)$.
   Notons $\Omega_3^n = (\Omega_3\ \delta_3 \cdots \delta_3)$ le terme comportant n fois δ_3.
   La séquence $\sigma : \Omega_3 \to_\beta \Omega_3^1 \to_\beta \cdots \to_\beta \Omega_3^n \to_\beta \cdots$ est convergente et sa limite est $\Omega_3^\infty = (\cdots \delta_3\ \delta_3)$. Ω_3^∞ est aussi noté Δ.
   Sous forme d'arbre, Δ s'écrit : 

   .
2. Soit Y_t le combinateur de point fixe de Turing. Les réductions de $(Y_t\ \Omega_3)$ conduisent au terme $(\Omega_3\ \Omega_3 \cdots)$ qui se réduit en $(\Omega_3^\infty\ \Omega_3^\infty \cdots)$. Cette réduction $(Y_t\ \Omega_3) \to_{\infty\beta} (\Omega_3\ \Omega_3 \cdots) \to_{\infty\beta} (\Omega_3^\infty\ \Omega_3^\infty \cdots)$ n'est cependant pas une séquence. Une solution consiste à opérer dans l'ordre suivant :
   $$\begin{array}{ll} \sigma : (Y_t\ \Omega_3) & \to_\beta^* (\ \Omega_3(Y_t\ \Omega_3)\ ) \to_\beta^* (\ \Omega_3^1(Y_t\ \Omega_3^1)\ ) \\ & \to_\beta^* (\ \Omega_3^1(\Omega_3^1(Y_t\ \Omega_3^1))\ ) \to_\beta^* (\ \Omega_3^2(\Omega_3^2(Y_t\ \Omega_3^2))\ ) \\ & \to_\beta^* \cdots \end{array}$$
   σ est alors bien une séquence convergente dont la limite est $(\Omega_3^\infty\ \Omega_3^\infty \cdots)$.

   Cette limite est notée Δ_∞ et s'écrit sous forme d'arbre : 

.

2.1.3 Propriétés de la réduction infinie

Cette section projette au calcul infini des résultats classiques du λ-calcul fini. Ainsi nous verrons que la β-réduction infinie est transitive. Qu'elle se standardise et que les termes infinis possède au plus une forme normale. En plus des propriétés classiques, nous citerons des théorèmes d'approximation. Ceux-ci permettent de passer du calcul infini au calcul fini. Par exemple, pour une profondeur p donnée, à partir d'une réduction $a \to_{\infty\beta} b$ on peut exhiber des termes finis a_1 et b_1 dont les arbres coïncident respectivement avec ceux de a et b à profondeur p, et tels que $a_1 \to_\beta^* b_1$ en une réduction finie (cf. lemme 2.1.28).

◄ **Approximations** ►

L'origine de ces deux lemmes d'approximation réside dans le fait qu'une β-réduction fait remonter la profondeur d'un sous-terme d'au plus deux positions.

Lemme 2.1.26 *Si $a \to_{\infty\beta} b$, alors pour toute profondeur p il existe un terme b' tel que $a \to_\beta^* b'$ et b coïncide avec b' à profondeur p.*

Preuve Soit $\sigma : a \to_\beta a_1 \to_\beta \cdots \to_\beta a_k \to_\beta \cdots$ la séquence des réductions de a vers b. Comme la séquence converge, on trouve une étape i_p à partir de laquelle les profondeurs des réductions restent supérieures à $p+1$. On a alors $a \to_\beta^* a_{i_p}$ et $a_{i_p} \equiv_p b$ (cf. lemme 2.1.18). □

Remarque 2.1.27

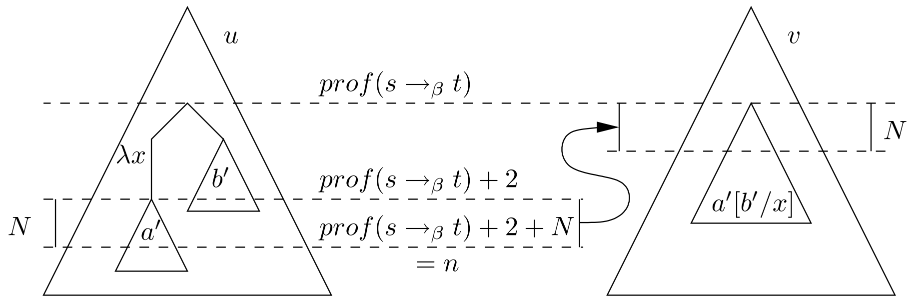
Grâce à ce résultat de nombreuses définitions sont équivalentes entre le cas fini et infini. En particulier toutes celles ne faisant intervenir qu'une partie fini des termes.

Par exemple, la proposition a *n'est pas un zéro-terme* s'exprime de la même façon en fini et en infini. En effet dans le cas fini, elle s'écrit $a \to_\beta^* \lambda x.v$. En infini, elle devient $a \to_{\infty\beta} \lambda x.v$. Or par approximation, si $a \to_{\infty\beta} \lambda x.v$ alors il existe v' tel que $a \to_\beta^* \lambda x.v'$. a se réduit donc bien à une abstraction en un nombre fini de réductions.

Lemme 2.1.28 *Soient s et t deux termes tels que $s \to_\beta^* t$. Pour tout entier N il existe un entier n tel que tout terme u vérifiant $u \equiv_n s$ puisse se réduire en un nombre fini d'étapes vers un terme v vérifiant $v \equiv_N t$.*

Remarque 2.1.29 Autrement dit, seule une profondeur finie d'un terme suffit à faire apparaître une partie finie du résultat d'une réduction.

Preuve Le résultat s'obtient par induction sur le nombre de réductions de $s \to_\beta^* t$. Pour une seule réduction, il existe un contexte C et un redex $(\lambda x.a\ b)$ tels que $s = C[(\lambda x.a\ b)]$ et tels que $t = C[a[b/x]]$. Posons $n = \mathrm{prof}(s \to_\beta t) + N + 2$ et prenons un terme u tel que $u \equiv_n s$. Comme $n > \mathrm{prof}(s \to_\beta t)$ alors le redex $(\lambda x.a\ b)$ apparaît dans u. Il existe donc un contexte C' et deux termes a' et b' tels que $u = C'[(\lambda x.a'\ b')]$ et tels que $C' \equiv_n C$, $a' \equiv_{n-\mathrm{prof}(s\to_\beta t)-2} a$ et $b' \equiv_{n-\mathrm{prof}(s\to_\beta t)-1} b$. Ainsi $a' \equiv_N a$ et $b' \equiv_{N+1} b$. Comme $n > N$ on conclut $u \to_\beta C'[a'[b'/x]]$. En posant $v = C'[a'[b'/x]]$ on obtient bien $u \to_\beta v$ et $v \equiv_N C[a[b/x]] = t$.



□

Remarque 2.1.30 Ce résultat s'applique en particulier si $s \to_\beta^* t = (\lambda x.v)$. Seule une partie finie de s suffit pour faire apparaître le λx à la racine de t.

Définition 2.1.31 *On dira qu'un terme infini est un zéro terme s'il ne se réduit pas à une abstraction en un nombre fini d'étapes.*

Remarque 2.1.32 La définition des OT s'écrit donc de la même manière en fini et en infini.

◀ Résidus ▶

Les résidus de sous-termes sont définis pour les *réductions simples* comme dans le cas fini (cf. définition 1.1.23). Les projections (cf. lemme 1.1.29) sont définies de la même manière. Au diagramme commutatif élémentaire on substitue sa version infinie.

Proposition 2.1.33 *[5] Soient deux réductions* simples $\rho : a \to_\beta b$ *et* $\sigma : a \to_\beta c$ *et soient* σ/ρ la projection de σ sur ρ.

1. *On a alors le* diagramme *commutatif* élémentaire *:*

$$\begin{array}{ccc} a & \to_\beta^\rho & b \\ \downarrow_\beta^\sigma & & \downarrow_{\infty\beta}^{\sigma/\rho} \\ c & \to_{\infty\beta}^{\rho/\sigma} & d \end{array}$$

2. *De plus les profondeurs des projections sont contrôlées de sorte que :*
   - $\text{prof}(\rho/\sigma) \geq \text{prof}(\rho) - 2$
   - *Si* $\text{prof}(\rho) \geq n$ *et* $\text{prof}(\sigma) \geq n$ *alors* $\text{prof}(\rho/\sigma) \geq n$ *et* $\text{prof}(\sigma/\rho) \geq n$
   - *Si* $\text{prof}(\rho) \geq \text{prof}(\sigma)$ *alors* ρ *et* ρ/σ *sont similaires*

Preuve Identique au cas fini du lemme 1.1.29. □

Remarque 2.1.34 Pour illustrer ce diagramme, donnons un exemple. Soit S un contexte. Soit ρ la réduction du redex $p = (\lambda x.S[x, \cdots]\ q)$ et σ celle du sous-terme q en q'.
Comme S est un contexte infini, $S[x, \cdots]$ peut contenir une infinité de fois la variable x. Comme l'arbre d'un terme est finitaire, les occurrences de x apparaissent forcément à des profondeurs de plus en plus grande.
On construit alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} p = (\lambda x.S[\,x, \cdots]\ q\,) & \to_\rho & S[\,q, \cdots] \\ \downarrow_\sigma & & \downarrow_{\beta\infty}^{\sigma/\rho} \\ (\lambda x.S[\,x, \cdots]\ q'\,) & \to_\beta^{\rho/\sigma} & S[\,q', \cdots] \end{array}$$

La réduction $S[\,q, \cdots]\rightarrow_{\infty\beta} S[\,q', \cdots]$ est bien convergente du moment qu'on choisit de réduire les résidus de q dans l'ordre des profondeurs croissantes.

Notons qu'une réduction peut faire "descendre" un sous-terme autant que possible dans un arbre, alors qu'elle ne peut le faire "monter" qu'au plus de deux positions.

◀ Transitivité et limites de réductions ▶

Théorème 2.1.35 *[5] Soient s, t et u des termes. Si $s \rightarrow_{\infty\beta} t \rightarrow_{\infty\beta} u$, alors $s \rightarrow_{\infty\beta} u$.*

Preuve La preuve se fait en trois étapes.

◁ **Étape 1** ▷

Si $s_0 \rightarrow_{\infty\beta} s$ et $t_0 \rightarrow_{\infty\beta} t$, alors $s_0[t_0/x] \rightarrow_{\infty\beta} s[t/x]$.

Preuve Il va s'agir d'organiser les réductions des résidus de t_0 et s_0 dans l'ordre des profondeurs croissantes. Soit $t_0 \rightarrow_\beta t_1 \rightarrow_\beta \cdots \rightarrow_{\infty\beta} t$ la séquence de $t_0 \rightarrow_{\infty\beta} t$.

Soient S un contexte tel que $s = S[x, \cdots]$. Distinguons chaque occurrence de x dans s et notons les $x_1, x_2, \cdots$ dans l'ordre des profondeurs croissantes. Notons $\tilde{s} = S[x_1, x_2, \cdots]$, on a bien $\tilde{s}[t/x_1, t/x_2, \cdots] = s[t/x]$. Notons $n_1, n_2, \cdots$ les profondeurs des occurrences de $x_1, x_2, \cdots$ dans $\tilde{s}$. Comme la réduction $s_0 \rightarrow_{\infty\beta} s$ converge, on peut la décomposer suivant les profondeurs $n_1, n_2, \cdots$ de sorte à faire apparaître progressivement les occurrences de x dans les termes s_i aux positions des variables $x_1, x_2, \cdots$ dans $\tilde{s}$. Soient $s_1, s_2, \cdots$ des termes extraits de la séquence $s_0 \rightarrow_{\infty\beta} s$ tels que $s_i \equiv_{n_i} s$ et tels que $s_0 \rightarrow^*_\beta s_1 \rightarrow^*_\beta \cdots \rightarrow_{\infty\beta} s$. Pour tout i il existe un contexte S_i tel que $s_i = S_i[x, \cdots]$ et tel que $S_i[x, \cdots] \equiv_{n_i} S[x, \cdots]$. Notons $\tilde{s_i} = S_i[x_1, x_2, \cdots]$ où les variables $x_1, x_2, \cdots$ apparaissent dans l'ordre des profondeurs croissantes. Comme les x_i sont à des profondeurs croissantes, on a $\tilde{s} = S[x_1, x_2, \cdots] \equiv_{n_i} S_i[x_1, x_2, \cdots] = \tilde{s_i}$. À partir de la réduction $s_i \rightarrow^*_\beta s_{i+1}$ on tire donc une réduction similaire $S_i \rightarrow^*_\beta S_{i+1}$ pour former ainsi une séquence $S_0 \rightarrow^*_\beta S_1 \rightarrow^*_\beta \cdots$ convergente.

Nous pouvons maintenant construire notre réduction $s_0[t_0/x] \rightarrow_{\infty\beta} s[t/x]$ avec des profondeurs tendant vers l'infini. La réduction simple passant trivialement au contexte, on a $s_0[t_0/x] \rightarrow^*_\beta s_1[t_0/x]$. Ce qui s'écrit également $S_0[t_0, t_0, \cdots] \rightarrow^*_\beta S_1[t_0, t_0, \cdots]$. On continue alors la réduction par celle du premier t_0 : $S_1[t_0, t_0, \cdots] \rightarrow_\beta S_1[t_1, t_0, \cdots]$. Puis on réduit $S_1 \rightarrow^*_\beta S_2$ ce qui donne $S_1[t_1, t_0, \cdots] \rightarrow_\beta S_2[t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots]$ où t_{i_1} peut être soit t_0, soit t_1 puisque les résidus de t_1 peuvent se retrouver à la place de n'importe quelle variable x_i. On poursuit alors la réduction des deux premiers résidus t_{i_1} et t_{i_1} de t : $S_2[t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots] \rightarrow^*_\beta S_2[t_2, t_2, \cdots]$. Et ainsi de suite en alternant entre réductions de s et de t. □

◁ **Étape 2** ▷

Si $s_0 \rightarrow_{\infty\beta} s \rightarrow_\beta t$, alors, en posant $n = \mathrm{prof}(s \rightarrow_\beta t)$, on a le diagramme commutatif suivant dans lequel les exposants sur les flèches indiquent les profondeurs des réductions :

$$\begin{array}{llll} s_0 \rightarrow^*_\beta & d_0 & \rightarrow^{\mathrm{prof}>n}_{\infty\beta} & s \\ & \downarrow^{\mathrm{prof}=n}_\beta & & \downarrow^{\mathrm{prof}=n}_\beta \\ & e_0 & \rightarrow^{\mathrm{prof}\geq n}_{\infty\beta} & t \end{array} \qquad \text{et de plus} \qquad e_0 \equiv_{n-1} t.$$

Preuve Soit $r = (\lambda x.u\ v)$ le redex contracté dans $s \rightarrow_\beta t$. Soit C le contexte de profondeur au plus n et $b_1, \cdots, b_p$ des sous-termes de s tels que $C[r, b_1, \cdots, b_p] = s$. On a donc $t = C[u[v/x], b_1, \cdots, b_p]$. Comme $s_0 \rightarrow_{\infty\beta} s$, par approximation, il existe un terme d_0 extrait de la séquence tel que $s_0 \rightarrow^*_\beta d_0 \rightarrow_{\infty\beta} s$ et tel que $\mathrm{prof}(d_0 \rightarrow_{\infty\beta} s) > n$. Il existe donc des sous-termes $r_1 = (\lambda x.u_1\ v_1)$, $a_1, \cdots, a_p$ de d_0 tels que $C[r_1, a_1, \cdots, a_p] = d_0$ et tels que $u_1 \rightarrow_{\infty\beta} u$, $v_1 \rightarrow_{\infty\beta} v$ et $a_i \rightarrow_{\infty\beta} b_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$. D'après l'étape 1, $C[u_1[v_1/x], a_1, \cdots, a_p] \rightarrow_{\infty\beta} C[u[v/x], b_1, \cdots, b_p] = t$. Il suffit alors de considérer la réduction $s \rightarrow_\beta^* d_0 \rightarrow_\beta e_0 = C[u_1[v_1/x], a_1, \cdots, a_p] \rightarrow_{\infty\beta} C[u[v/x], b_1, \cdots, b_p] = t$. La profondeur de $e_0 \rightarrow_{\infty\beta} t$ vient du fait que les réductions ont lieu dans les trous du contexte C. □

◁ $\boxed{\textbf{Étape 3}}$ ▷

Posons $t = t_0 \rightarrow_\beta t_1 \rightarrow_\beta t_2 \rightarrow_\beta \cdots \rightarrow_{\infty\beta} u$ et $n_i = \text{prof}(t_i \rightarrow_\beta t_{i+1})$. La suite $(n_i)_{i\geq 0}$ tend donc vers l'infini. Appliquons l'étape 2 à $s \rightarrow_{\infty\beta} t_0 \rightarrow_\beta t_1$, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{llll} s_0 \rightarrow_\beta^* & d_0 & \rightarrow_{\infty\beta}^{\text{prof}>n_0} & t_0 \\ & \downarrow_\beta^{\text{prof}=n_0} & & \downarrow_\beta^{\text{prof}=n_0} \\ & e_0 & \rightarrow_{\infty\beta}^{\text{prof}\geq n_0} & t_1 \end{array}$$

On continue alors avec $e_0 \rightarrow_{\infty\beta} t_1 \rightarrow_\beta t_2$ et ainsi de suite :

$$\begin{array}{lllllllll} s & \rightarrow_\beta^* & d_0 & \text{————————} & \text{———————} & \text{————————} & \text{—} & \rightarrow_{\infty\beta}^{\text{prof}>n_0} & t_0 \\ & & \downarrow_\beta^{\text{prof}=n_0} & & & & & & \downarrow_\beta^{\text{prof}=n_0} \\ & & e_0 & \rightarrow_\beta^{\text{prof}\geq n_0,*} & d_1 & \text{————————} & \text{—} & \rightarrow_{\infty\beta}^{\text{prof}>n_1} & t_1 \\ & & & & \downarrow_\beta^{\text{prof}=n_1} & & & & \downarrow_\beta^{\text{prof}=n_1} \\ & & & & e_1 & \rightarrow_\beta^{\text{prof}\geq n_1,*} & d_2 & \rightarrow_{\infty\beta}^{\text{prof}>n_2} & t_2 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

La réduction en diagonale convient donc : $s \rightarrow_\beta^* d_0 \rightarrow_\beta e_0 \rightarrow_\beta^* d_1 \rightarrow_\beta e_1 \cdots \rightarrow_{\infty\beta} u$ avec $\text{prof}(d_i \rightarrow_\beta e_i) = n_i$, $\text{prof}(e_i \rightarrow_\beta^* d_{i+1}) \geq n_i$ et avec $e_i \equiv_{n_i - 1} t_i$. □

Théorème 2.1.36 *Soit la séquence de réductions $t_0 \rightarrow_{\infty\beta} t_1 \rightarrow_{\infty\beta} t_2 \rightarrow_{\infty\beta} \cdots$. Si $\lim\limits_{i\rightarrow+\infty} \text{prof}(t_i \rightarrow_{\infty\beta} t_{i+1}) = \infty$, alors la suite de termes $(t_i)_{i\geq 0}$ converge vers un terme u tel que $t_0 \rightarrow_{\infty\beta} u$. On dit alors que la séquence de réductions est* convergente.

Preuve On remarque que le théorème 2.1.35 conserve les étapes de la première réduction tant que ses profondeurs sont inférieures à celle de la seconde. En appliquant le théorème 2.1.35 plusieurs fois, on obtient donc une suite de réductions $\sigma_i : t_0 \rightarrow_{\infty\beta} t_i$ telles que le nombre d'étapes semblables en début de séquence entre σ_i et σ_{i+1} tend vers l'infini comme $\text{prof}(t_i \rightarrow_{\infty\beta} t_{i+1})$. En ne conservant que les étapes semblables à σ_i et σ_{i+1}, on obtient donc la réduction $t_0 \rightarrow_{\infty\beta} u$. □

Remarque 2.1.37 Ce théorème constitue un résultat de limite de réductions. Kennaway propose dans son article [15] une notion similaire appelée *compression*.

◀ ABSENCE DE LA CONFLUENCE GLOBALE ▶

Si la réduction infinie commute avec la réduction de tête (cf. lemme 2.1.38), ce résultat devient faux lorsqu'il s'agit d'une réduction quelconque (cf. exemple 2.1.39).

Proposition 2.1.38 *Soient u, v et t trois termes. Si $v \leftarrow_\beta^h u \rightarrow_{\infty\beta} t$, alors il existe un terme w tel que*
$$\begin{array}{lll} u & \rightarrow_{\infty\beta} & t \\ \downarrow_\beta^h & & \downarrow_\beta^{h,=} \\ v & \rightarrow_{\infty\beta} & w \end{array}$$

Preuve Notons $u = t_0 \rightarrow_\beta t_1 \rightarrow_\beta \cdots \rightarrow_{\infty\beta} t$ les termes de la séquence $u \rightarrow_\infty t$. Nous distinguons deux cas :

- si cette séquence possède une réduction de tête, par exemple $t_n \to_\beta^h t_{n+1}$ alors, grâce aux projections (proposition 2.1.33) on construit les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{lllllllllll} u = & t_0 & \to_\beta^i & t_1 & \cdots & \to_\beta^i & t_n & & \to_\beta^h & t_{n+1} & \to_{\infty\beta} t \\ & \downarrow_\beta^h & & \downarrow_\beta^h & & & \downarrow_\beta^h & & & & \\ v \equiv & v_0 & \to_{\infty\beta} & v_1 & \cdots & \to_{\infty\beta} & v_{n+1} = t_{n+1} & \text{——} & \text{——} & & \to_{\infty\beta} t \end{array}$$

Par transitivité de $\to_{\infty\beta}$ on conclut : $v \to_{\infty\beta} t$.

- sinon la séquence est purement interne : $u \to_{\infty\beta}^i t$. Dans ce cas, on raisonne avec le redex de tête de $u = (\lambda x.a\ b_1\ b_2 \cdots b_n)$ comme à l'étape 1 du théorème 2.1.35 et on obtient le diagramme recherché. □

Exemple 2.1.39 Soient $I = \lambda x.x$, $\omega = \lambda x.(x\ x)$ et $Q = \lambda x.\ (I\ (x\ x))$.

$$\begin{array}{lllllll} (Q\ Q) & \to_\beta & (I\ (Q\ Q)\,) & \to_\beta & \cdots & \to_{\infty\beta} & (I\ (I \cdots)) \\ \downarrow_\beta^* & & \downarrow_\beta^* & & & & \\ (\omega\ \omega) & \to_\beta & (\omega\ \omega) & \to_\beta & \cdots & & \end{array}$$

Or $(\omega\ \omega)$ et $(I\ (I \cdots))$ ne se réduisent qu'à eux-mêmes. Il n'y a donc pas confluence.

Dans cet exemple, on observe que le sous-terme $(Q\ Q)$ présent à chaque étape de la première ligne de réduction disparaît à la limite. C'est lui qui rend impossible la confluence. Or, on remarque en déroulant sa réduction de tête que le terme $(Q\ Q)$ est muet. En les identifiant tous à la constante $\perp$ la confluence va être rétablie.

◄ Standardisation ►

La standardisation au sens du calcul fini ne s'étend pas directement comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.1.40 Soient $Q = \lambda x.\ (x\ x\ (I\ I)\,)$ et $F = (Q\ Q)$. Considérons la réduction :

$$F \to_\beta^h (F\ (I\ I)\,) \to_\beta^i (F\ I) \to_\beta^h (F\ (I\ I)\ I) \to_\beta^h \cdots \to_{\infty\beta}^h (\cdots (I\ I)\ (I\ I)\ I)$$

Pour la standardiser nous ne pourrions faire mieux qu'une première séquence de réductions de têtes $F \to_{\infty\beta}^h F_1 = (\cdots (I\ I)\ (I\ I)\ (I\ I))$ suivie d'une réduction interne $F_1 \to_\beta^i (\cdots (I\ I)\ (I\ I)\ I)$. Une seule séquence infinie ne permettrait faire précéder les réductions de tête aux réductions internes.

Théorème 2.1.41 *Soient s et t deux termes.*
- *Si $s \to_\beta^* t$ alors il existe s_0 tel que $s \to_\beta^{h,*} s_0 \to_{\infty\beta}^i t$.*
- *Si $s \to_{\infty\beta} t$ alors il existe s_0 tel que $s \to_{\infty\beta}^h s_0 \to_{\infty\beta}^i t$.*

Preuve Pour une preuve détaillée, on pourra consulter l'article [15]. □

Remarque 2.1.42 Le résultat de ce théorème n'est que partiel : il n'indique rien sur les réductions internes qui suivent. Pour le démontrer, il est nécessaire de donner une définition complète d'une réduction standard. Intuitivement, une telle réduction se décompose héréditairement en des réductions de tête suivies d'internes. Or, la complexité d'une telle réduction, qui s'apparente alors à un arbre, sort du cadre dénombrable (cf. remarque 2.1.3). La démonstration se fait donc de manière analogue au cas fini (théorème 1.1.35), mais au travers d'une induction transfinie.

◀ FORME NORMALE, UNICITÉ ▶

Les formes normales infinies sont définies comme pour le cas fini. En λ-calcul ordinaire, leur unicité se déduisait grâce à la confluence. L'absence de confluence dans le cas infini, nous oblige à procéder par approximations. L'argument principal de la preuve repose sur le fait que les réductions au voisinage des formes normales sont nécessairement profondes (Étape 1 du théorème 2.1.45).

Lemme 2.1.43 *Soient C et D des contextes finis et $\vec{s}$ une suite de termes. Si $C \to_\beta^* D$, alors il existe une suite de termes $\vec{t}$ telle que $C[\vec{s}] \to_\beta^* D[\vec{t}]$ en une réduction similaire à la première. En particulier,* $\mathrm{prof}(C \to_\beta^* D) = \mathrm{prof}(C[\vec{s}] \to_\beta^* D[\vec{t}])$.

Preuve La preuve est analogue au cas fini. Voir le lemme 1.3.5.

Lemme 2.1.44 *Si $a \to_{\infty\beta} b$, alors a est un zéro terme ssi b est un zéro-terme.*

Preuve Si a n'est pas un zéro terme, alors $a \to_\beta^* \lambda x.d$. D'après le lemme 2.1.26, on peut extraire un contexte fini C et une suite $\vec{\sigma}$ tels que $C[\vec{\sigma}] = a$, et tels que $C \to_\beta^* \lambda x.D_1$. En vertu du lemme 1.3.14 du λ-calcul fini, $C \to_\beta^{h,*} \lambda x.D'$. D'après le lemme 2.1.43, il existe une suite $\vec{\rho}$ telle que $C[\vec{\sigma}] \to_\beta^{h,*} \lambda x.D'[\vec{\rho}]$. Ainsi $a \to_\beta^{h,*} \lambda x.d'$. On conclut alors grâce à la commutativité des réductions de tête, proposition 2.1.38.

La réciproque s'obtient grâce à la transitivité. □

Théorème 2.1.45 *Soient u un terme et s, t des formes normales. Si $s \leftarrow_{\infty\beta} u \to_{\infty\beta} t$ alors $s = t$.*

Preuve

◁ $\boxed{\textbf{Étape 1}}$ ▷

Soient t une forme normale et $(t_i)_{i\geq 0}$ une suite de termes telle que $t_i \to_{\infty\beta} t$ pour tout i. Si la profondeur des réductions infinies $\mathrm{prof}(t_i \to_{\infty\beta} t)$ tend vers l'infini quand $i \to +\infty$, alors pour toute suite de termes $(r_i)_{i\geq 0}$ telle que $t_i \to_{\infty\beta} r_i$, on a $\lim\limits_{i\to+\infty} \mathrm{prof}(t_i \to_{\infty\beta} r_i) = +\infty$.

Graphiquement :

$$\begin{array}{ccc} t & t & \cdots \\ \uparrow^{\infty\beta} & \uparrow^{\infty\beta} & \mathrm{prof} \to +\infty \\ t_0 & t_1 & \cdots \\ \downarrow_{\infty\beta} & \downarrow_{\infty\beta} & \mathrm{prof} \to +\infty \\ r_0 & r_1 & \cdots \end{array}$$

Preuve Montrons que pour tous entiers N et p, si $\forall i > N \ \ \mathrm{prof}(t_i \to_{\infty\beta} t) > p$, alors pour tout terme r, et pour tout $i > N$, si $t_i \to_{\infty\beta} r$ alors $\mathrm{prof}(t_i \to_{\infty\beta} r) > p$. On montre le résultat pour $p = 1$, les autres valeurs se déduisent par induction sur les sous-termes de t.

Fixons $i > N$. Comme $p = 1$, il suffit de montrer que t_i ne fait pas apparaître de redex à sa racine lors des β-réductions. Par approximation, comme $\mathrm{prof}(t_i \to_{\infty\beta} t) > p$, on a $t_i \equiv_1 t$. Suivant la forme de la racine de t, on distingue :

- si $t = x$ ou $t = \lambda x.u$, alors $t_i = x$ ou $t_i = \lambda x.u_i$. Dans les deux cas, t_i ne fera jamais apparaître de redex à sa racine.
- si $t = (u\ v)$. Alors u est un OT normal. Comme $t_i \equiv_1 t$ alors $t = (u_i\ v_i)$ et $u_i \to_{\infty\beta} u$. D'après le lemme 2.1.44, u_i est un OT donc b_i ne fera pas apparaître de redex à sa racine. □

◁ $\boxed{\textbf{Étape 2}}$ ▷

Si $s \leftarrow_{\infty\beta} u \to_{\infty\beta} t$ où s et t sont deux formes normales, alors montrons que $s = t$.

Notons $u = t_0 \to_\beta t_1 \to_\beta t_2 \to_{\infty\beta} t$ et $u = s_0 \to_\beta s_1 \to_\beta s_2 \to_{\infty\beta} s$, les deux séquences de réductions.

Par l'absurde, si $s \neq t$, alors il existe un entier N tel que $s \not\equiv_N t$. Pour toute profondeur $p > N$, on peut donc choisir un entier i, tel que $s_i \equiv_p s$ et $t_i \equiv_p t$ et tel que toute réduction issue de s_i et t_i soit plus profonde que p. En vertu du lemme 2.1.26, on peut extraire des contextes finis U, S et T ainsi que des suites $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$ tels que $S \equiv_p s$ et $T \equiv_p t$, tels que $S \leftarrow^*_\beta U \to^*_\beta T$ et tels que $s_i = S[\vec{\sigma}]$ et $t_i = T[\vec{\tau}]$.

En particulier, on a $S \not\equiv_p T$, puisque $S \equiv_p s_i \equiv_p s$, $T \equiv_p t_i \equiv_p t$ et que $s \not\equiv_N t$.

Comme U, S et T sont finis, d'après le théorème de Church-Rosser, il existe un réduit commun W tel que $S \to^*_\beta W \leftarrow^*_\beta T$. Or, comme $S[\vec{\sigma}] = s_i$ et que toute réduction issue de s_i est plus profonde que p, on en déduit $\mathrm{prof}(S \to^*_\beta W) > p$, ce qui entraîne $S \equiv_p W$. De même $T \equiv_p W$, ce qui donne $S \equiv_p T$, contradiction. □

2.2 Le $\lambda\bot$-calcul infini, arbres de Berarducci

Comme le suggère l'exemple 2.1.39, la confluence globale n'est plus vérifiée en λ-calcul infini. Dans cet exemple, le responsable de l'absence de confluence semble être le terme $(Q\ Q)$. Or $(Q\ Q)$ est un terme muet. Dans le *$\lambda\bot$-calcul infini*, tous les muets seront identifiés à $\bot$. En conséquence, ce calcul récupère la confluence et devient même normalisant. À partir du $\lambda\bot$-calcul on construit les *arbres de Berarducci* : ce sont des versions enrichies des arbres de Böhm dans lesquels les formes normales de tête sont remplacées par les Top Normal Form.

Cette section commencera par introduire les notions de base du $\lambda\bot$-calcul. Ensuite, nous présenterons les lemmes qui permettent de faire le lien avec le λ-calcul infini, notamment celui de factorisation 2.2.9. Grâce à ces lemmes, la transitivité et l'unicité des formes normales seront étendues au $\lambda\bot$-calcul. Puis, nous prouverons la normalisation et la confluence. Ces dernières permettront d'introduire les arbres de Berarducci. Enfin, nous présenterons les formes $\bot$-normales infinies bien caractéristiques des indéfinis tels les non résolubles, les zéro-termes, les zéro-termes forts et les termes muets.

2.2.1 Définitions et approximations du $\lambda\bot$-calcul infini

Définition 2.2.1

- *Les termes du $\lambda\bot$-calcul sont des termes infinis construits en utilisant la constante $\bot$.*
- *La* $\bot$-réduction *est la relation qui pour tout contexte simple C et pour tout terme muet u réduit $C[u]$ en $C[\bot]$.*
- *On notera $C[u] \to_\bot C[\bot]$ cette réduction et u sera appelé le* $\bot$-redex.
- *La* $\beta\bot$-réduction *est notée $\to_{\beta\bot}$.*
- *La* $\beta\bot$-réduction infinie convergente *est notée $\to_{\infty\beta\bot}$.*
- *Λ^∞ représente l'ensemble des λ-termes infinis sous forme $\beta\bot$-normale.*

Remarque 2.2.2 Comme $\bot$ est une constante et non une variable, $\bot$ est également un terme muet.

Exemple 2.2.3

- $\Omega \to_\bot \bot$ qui est une forme normale.
- $(\Omega\ \Omega) \to_\bot (\bot\ \Omega) \to_\bot (\bot\ \bot)$
- En reprenant l'exemple 2.1.39, $(Q\ Q) \to_\bot \bot$

Lemme 2.2.4

1. *Toute $\bot$-réduction infinie est convergente.*
2. *Les $\bot$-réductions infinies sont transitives.*

Preuve Ces deux points proviennent du fait qu'une $\bot$-réduction remplace uniquement un nœud de l'arbre par un $\bot$. Les $\bot$-réductions peuvent donc être effectuées dans un ordre quelconque. Comme l'arbre d'un terme est finitaire, les réductions peuvent être ordonnées suivant les profondeurs croissantes. □

Lemme 2.2.5 *La $\beta\bot$-réduction est localement confluente. Le diagramme commutatif ci-dessous est valide. De plus, la projection de la β-réduction conserve la profondeur.*

$$\begin{array}{ccc} u & \to_\bot & v \\ \downarrow_\beta^{\mathrm{prof}=n} & & \downarrow_\beta^{=,\ \mathrm{prof}=n} \\ s & \to_{\infty\bot} & t \end{array}$$

Preuve Elle se fait par examen des cas d'inclusion entre un $\bot$-redex w, i.e. entre un terme muet, et un redex $(\lambda x.a\ b)$. On utilise quatre faits : (Voir la section 1.3.3 sur les termes muets)

1. les muets sont des OT, ainsi $w \neq \lambda x.a$
2. les muets sont stables par β-réductions
3. les muets sont stables par substitution d'une variable par un terme
4. les muets sont stables par échange d'un sous-terme muet par $\bot$. □

Lemme 2.2.6 *Toute réduction $u \to_\bot^* v \to_\beta t$ peut être échangée en $u \to_\beta s \to_{\infty\bot} t$. Et de plus,* $\mathrm{prof}(u \to_\beta s) = \mathrm{prof}(v \to_\beta t)$.

Preuve Par induction sur $l(\to_\bot^*)$ à partir du lemme 2.2.5. □

Proposition 2.2.7

1. *Soient u et v deux termes tels que $u \to_{\infty\beta} v$, alors :*
   - *u est un OT ssi v l'est*
   - *u est un OTF ssi v l'est*
   - *u est muet ssi v l'est*
2. *Soient a un terme et t une* top normal form. *Si $a \to_{\infty\beta} t$ alors il existe une* top normal form *similaire t' telle que $a \to_\beta^{h,*} t'$.*

Remarque 2.2.8 Les β-réductions infinies n'ont donc pas d'influence ni sur la Top Normal Form ni sur le caractère OTF ou le caractère muet d'un terme.

Preuve Les preuves sont toutes analogues au lemme 2.1.44. □

Les preuves du $\beta\bot$-calcul infini sont semblables à celle du β-calcul infini dès lors que le lemme d'approximation 2.2.9 suivant est prouvé. Ce lemme garantit qu'un $\bot$-redex, i.e un terme muet, qui apparaît à l'issue d'une $\beta\bot$-réduction infinie apparaît également à partir d'une $\beta\bot$-réduction finie. Ce lemme s'obtenait directement pour le β-calcul infini grâce au lemme d'approximation 2.1.26 et du fait qu'un redex se repère grâce à sa structure finie $(\lambda x.[]\ [])$.

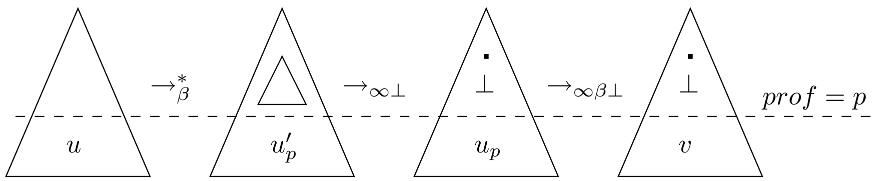
Lemme 2.2.9 *Soient C un contexte simple, v un terme muet. Si $u \to_{\infty\beta\bot} C[v]$ alors il existe un contexte simple C' et un muet v' tels que $u \to_\beta^* C'[v']$ et tels que $C' \to_{\infty\beta\bot} C$.*

Preuve Cette preuve exploite les lemmes 2.2.10 et 2.2.12 qui seront démontrés immédiatement après. En vertu du lemme 2.2.10, le réduction $u \to_{\infty\beta\bot} C[v]$ peut se factoriser en $u \to_{\infty\beta} u_1 \to_{\infty\bot} C[v]$. Comme $u_1 \to_{\infty\bot} C[v]$ et comme la $\bot$-réduction ne fait qu'échanger des sous-termes en $\bot$, on vérifie aisément qu'il existe un contexte C_1 et un terme v_1 tels que $C_1 \to_{\infty\bot} C$, $v_1 \to_{\infty\bot} v$ et tels que $u_1 = C_1[v_1]$. En approchant la réduction $u \to_{\infty\beta} C_1[v_1]$ à une profondeur supérieure à celle du sous-terme v_1, on exhibe un contexte C' et un terme v' tels que $u \to_\beta^* C'[v']$ et tel que $C' \to_{\infty\beta} C_1$ et $v' \to_{\infty\beta} v_1$. Grâce à la réciproque du lemme 2.2.10, on obtient $C' \to_{\infty\beta\bot} C$ et $v' \to_{\infty\beta\bot} v$. Le terme v' étant alors muet selon le lemme 2.2.12. □

Lemme 2.2.10 *Soient u et v deux termes. Si $u \to_{\infty\beta\perp} v$ alors il existe u' tel que $u \to_{\infty\beta} u' \to_{\infty\perp} v$. Réciproquement, si $u \to_{\infty\beta} u' \to_{\infty\perp} v$, alors $u \to_{\infty\beta\perp} v$*

Preuve

Dans un premier temps, fixons une profondeur p. À partir de la réduction convergente $u \to_{\infty\beta\perp} v$, on peut extraire une séquence finie $u \to^*_{\beta\perp} u_p$ telle que $u_p \equiv_p v$ et telle que $u_p \to_{\infty\beta\perp} v$. En appliquant plusieurs fois le lemme 2.2.6 à $u \to^*_{\beta\perp} u_p$, on construit une réduction $u \to^*_\beta u'_p \to_{\infty\perp} u_p \to_{\infty\beta\perp} v$, dans laquelle $u \to^*_\beta u'_p$ est similaire à $u \to^*_{\beta\perp} u_p$. Selon la définition de la $\perp$-réduction, l'arbre de u_p se déduit de u'_p en échangeant certains de ses sous-arbres par la constante $\perp$. De plus, comme u_p et v coïncident à profondeur p, la partie supérieure de l'arbre de v se déduit également de celle de u'_p en échangeant certains de ses sous-arbres par la constante $\perp$. Autrement dit, il existe une $\perp$-réduction qui fait coïncider u'_p et v à profondeur p.



En faisant varier p, on extrait une réduction $u \to_{\infty\beta} u'$ de la réduction $u \to_{\infty\beta\perp} v$ telle que v se déduise entièrement de u' par $\perp$-réductions. D'où le résultat : $u \to_{\infty\beta} u' \to_{\infty\beta\perp} v$. □

La réciproque s'obtient en intercalant les $\perp$-réductions de profondeur p dans la β-réduction immédiatement après les étapes où la profondeur reste constamment supérieure à p. Ici la proposition 2.2.7 garantit l'apparition des $\perp$-redex avant la fin de la β-réduction infinie. □

À partir du lemme de factorisation 2.2.10, la proposition 2.2.7 s'étend aux $\beta\perp$-réductions.

Lemme 2.2.11

1. *Soient u et v deux termes tels que $u \to_{\infty\perp} v$:*
   - *u est un OT ssi v l'est*
   - *u est un OTF ssi v l'est*
   - *u est muet ssi v l'est*
2. *Soient a un terme et t une* top normal form. *Si $a \to_{\infty\perp} t$ alors a est une* top normal form *à t.*

Preuve $\perp$ est un terme muet. Les $\perp$-réductions échangent donc des termes muets en des termes muets. Ces trois résultats sont donc immédiats en étudiant les positions des échanges des $\perp$-réductions, et en se servant du lemme 1.3.36. □

Lemme 2.2.12

1. *Soient u et v deux termes tels que $u \to_{\infty\beta\perp} v$:*
   - *u est un OT ssi v l'est*
   - *u est un OTF ssi v l'est*
   - *u est muet ssi v l'est*
2. *Soient a un terme et t une* top normal form. *Si $a \to_{\infty\beta\perp} t$ alors il existe une* top normal form *similaire t' telle que $a \to^{h,*}_\beta t'$.*

Preuve En vertu des lemmes 2.2.10 et 2.2.11. □

2.2.2 Propriétés du $\lambda\bot$-calcul et arbres de Berarducci

Théorème 2.2.13 *[5] La réduction $\rightarrow_{\infty\beta\bot}$ est transitive.*

Preuve La preuve est semblable à celle du théorème 2.1.35. Celle-ci consistait, en partant du schéma $u \rightarrow_{\infty\beta} s \rightarrow_{\beta} t$, à faire apparaître les deux premiers nœuds $(\lambda x.[]\ [])$ du redex de $s \rightarrow_{\beta} t$ grâce à une réduction finie issue de u. C'est le même principe pour $\rightarrow_{\infty\beta\bot}$, mais pour faire apparaître le $\bot$-redex on utilise le lemme 2.2.9. □

Théorème 2.2.14 *[5] Si un terme du $\lambda\bot$-calcul infini possède une forme normale, alors elle est unique.*

Preuve La preuve s'apparente à celle du théorème 2.1.45. □

Définition 2.2.15 *[5] Pour tout terme a.*

- ▷ *Le terme a^∞ est construit par induction sur la profondeur de ses sous-termes de la façon suivante :*
  - *Si $a \rightarrow_\beta^* x$, alors $a^\infty = x$*
  - *Si $a \rightarrow_\beta^* \lambda x.b$, alors $a^\infty = \lambda x.b^\infty$*
  - *Si $a \rightarrow_\beta^* (u\ v)$ où u est un OT, alors $a^\infty = (u^\infty\ v^\infty)$*
  - *Sinon a est muet et alors $a^\infty = \bot$*
- ▷ *Le terme a^∞ est unique. Il est sous forme $\beta\bot$-normale et $a \rightarrow_{\infty\beta\bot} a^\infty$.*
- ▷ *a^∞ est appelé* l'arbre de Berarducci *du terme a.*

Preuve Les étapes de l'induction définissent bien une séquence convergente de réductions. On obtient donc $a \rightarrow_{\infty\beta\bot} a^\infty$. Les $\beta\bot$-réductions conservant les OT, les applications des sous-termes de a^∞ sont composées de OT à gauche. a^∞ ne possède donc pas de redex. □

Corollaire 2.2.16 *Tout terme du $\lambda\bot$-calcul infini possède au moins une forme normale.*

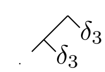
Preuve Pour tout terme a, a^∞ est une forme normale. □

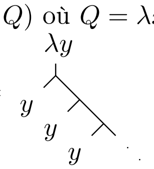
Remarque 2.2.17 Pour tout terme t, il existe une séquence de réductions $t \rightarrow_{\infty\beta\bot} t^\infty$ qui est induite par la définition de t^∞.

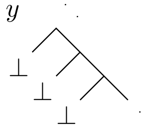
Théorème 2.2.18 *[5] Le $\lambda\bot$-calcul infini est confluent.*

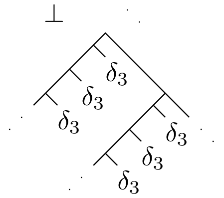
Preuve C'est une conséquence de la transitivité 2.2.13, de l'unicité des formes normales 2.2.14 et de la normalisation 2.2.15. Cette dernière étant spécifique à $\rightarrow_{\infty\beta\bot}$. □

Exemple 2.2.19

1. $\Omega_3^\infty =$ 

2. $Y_t = (Q\ Q)$ où $Q = \lambda xf.\ (f\ (x\ x\ f))$
   - $Y_t^\infty =$ 

   - $(Y_t\ \Omega)^\infty =$ 

   - $(Y_t\ \Omega_3)^\infty =$ 

3. On constate que la description des arbres de Berarducci est plus précise que celle des arbres de Böhm.

Théorème 2.2.20 *[5] Le $\lambda\perp$-calcul infini est consistant.*

Preuve Comme 0 et 1 sont deux formes normales distinctes et comme le calcul est confluent, la consistance dérive donc du lemme 1.2.12. □

Proposition 2.2.21 *Pour tous termes a et b, $a[b/x]^\infty = (a^\infty[b^\infty/x])^\infty$.*

Remarque 2.2.22 Autrement dit, la forme normale infinie passe au contexte.

Preuve La $\beta\perp$-réduction simple passe au contexte, il en est donc de même pour la version infinie. Comme $a \to_{\infty\beta\perp} a^\infty$ et $b \to_{\infty\beta\perp} b^\infty$, il vient $a[b/x] \to_{\infty\beta\perp} a^\infty[b^\infty/x]$. On conclut alors grâce à la confluence. □

Remarque 2.2.23

1. Selon la proposition 2.2.21, pour une suite de termes $(a_1, \cdots, a_n)$ la forme normale infinie $(a_1\ a_2 \cdots a_n)^\infty$ est égale à $(a_1^\infty\ a_2^\infty \cdots a_n^\infty)^\infty$.
2. En pratique, pour étudier la forme normale infinie d'un terme, il peut être plus simple de normaliser au préalable ses sous-termes.

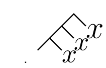
Corollaire 2.2.24 *Le triplet $(X, \cdot, [[\cdot]])$ défini comme suit, est un modèle du λ-calcul qui n'identifie pas tous les termes non résolubles.*
- *X est l'ensemble des formes normales infinies.*
- *pour tous termes a et b, $\cdot$ vérifie $a \cdot b = (a\ b)^\infty$.*
- *pour tout terme a, $[[a]] = a^\infty$.*

2.2.3 Arbres de Berarducci des indéfinis

Cette section décrit la forme normale infinie des différentes formes d'indéfini qui ont été introduites à la section 1.3 .

Définition 2.2.25 *Un terme t possède une* branche infinie gauche *s'il s'écrit $t = (\cdots v_n \cdots v_2\ v_1)$ pour certains termes $(v_i)_{i\geq 1}$.*

Exemple 2.2.26

$(\cdots x\ x)$ possède une branche infinie à gauche. Il a pour arbre 

Les branches infinies à gauche n'ont pas de tête.

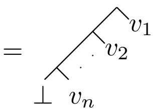
◀ **Termes muets** ▶

Si m est muet, alors $m^\infty = \perp$.

◀ **Zéro termes forts** ▶

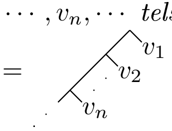
Un zéro terme fort est un zéro terme non résoluble. On rappelle que la constante $\perp$ n'est pas considérée comme une variable.

Proposition 2.2.27 *Si u est un OTF, sa forme normale infinie u^∞ peut revêtir deux aspects :*
- *Soit il existe un entier n et des termes $v_1, v_2, \cdots, v_n$ tels que*

$u^\infty = (\perp v_n \cdots v_1) =$ 

On dira alors que u est un zéro-terme fort de degré fini n. *[5]*

– *Soit il existe une infinité de termes $v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$ tels que*

$u^\infty = (\cdots v_n \cdots v_1) =$ 

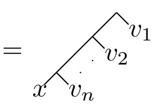
On dira alors que u est un zéro-terme fort de degré infini.*[5]*

Preuve Si u est un OTF, alors, d'après le lemme 2.2.12, il en est de même pour u^∞. Sa racine est donc une application. Si u^∞ possède une tête, elle ne peut être que $\perp$, une variable x est contradictoire et une abstraction λx induirait un redex. D'où $u^\infty = (\perp v_n \cdots v_1)$. Si u^∞ n'a pas de tête il s'écrit alors $u^\infty = (\cdots v_n \cdots v_1)$. □

◀ **Zéro termes** ▶

Proposition 2.2.28 *Si u est un OT, sa forme normale infinie u^∞ peut revêtir plusieurs aspects :*

– *Si u est un OTF, alors elle revêt une des formes de la proposition 2.2.27*
– *Sinon u est résoluble ; il existe alors une variable x ainsi que des termes $v_1, v_2, \cdots, v_n$ tels que*

$u^\infty = (x\, v_n \cdots v_1) =$ 

Preuve Par définition des zéro termes : ce sont des zéro termes forts éventuellement résolubles. □

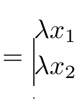
◀ **Non résolubles** ▶

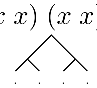
Proposition 2.2.29 *Soit u un terme non résoluble.*

– *Si u est un OTF, alors il revêt l'une des formes de 2.2.27*
– *Sinon u se réduit à un terme commençant par une abstraction et dans ce cas :*
  – *soit il existe un nombre fini de variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ telles que $u^\infty = (\lambda x_1 x_2 \cdots x_n.v)$ où v est la forme normale infinie d'un OTF.*
  – *soit $u^\infty = \lambda x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ une infinité de fois.*

Preuve Par définition. □

Exemple 2.2.30

1. Soit $t = \lambda xy.(x\ x)$ alors $(t\ t)^\infty = \lambda x_1 x_2 \cdots x_n \cdots =$ 

2. Soit $t = \lambda x.(x\ x)\ (x\ x)$ alors $(t\ t)^\infty = ((t\ t)^\infty\ (t\ t)^\infty) = ((\cdots)(\cdots))$.
   Son arbre est  . Il est auto-similaire car $(t\ t)^\infty = ((t\ t)^\infty\ (t\ t)^\infty)$ et il s'écrit sans la moindre variable ni abstraction.

2.2.4 Inactivité en infini

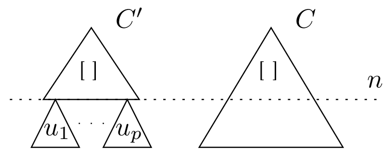
Cette section donne des conditions suffisantes pour qu'un sous-terme soit inactif en infini. Le premier concerne les zéro termes forts. Le second concerne les zéro termes résolubles. Ces résultats seront exploités dans la deuxième partie.

Proposition 2.2.31 *Soit C un contexte simple et a un OTF. Si $(C[a])^\infty$ est fini et sans $\perp$, alors $C^\infty = (C[a])^\infty$.*

Preuve Notons $t = (C[a])^\infty$. t est donc fini.

D'après le lemme 2.2.10, comme t est sans $\perp$, $C[a]$ se réduit directement vers t à l'aide de β-réductions. Autrement dit, $C[a] \to_{\infty\beta} t$.

Pour tout entier n, on peut choisir un contexte C' approchant C jusqu'à profondeur n, i.e. $C' \equiv_n C$, de sorte qu'il existe une suite $\vec{u}$ telle que $C'[[], \vec{u}] = C$.



Comme $C' \equiv_n C$, alors $C'[a] \equiv_n C[a]$.

Comme t est fini, nous pouvons choisir n suffisamment grand de sorte que le lemme 2.1.28 soit applicable à t entièrement. Nous obtenons donc $C'[a] \to_\beta^* t$.

Comme a est un OTF, ses résidus le sont aussi. Selon la proposition 2.2.27, comme t est fini et sans $\perp$, alors t ne possède pas de résidu de a. En vertu du corollaire 1.3.23, on en déduit donc $C' \to_\beta^* t$.

D'autre part comme t est sans trou $[]$, d'après le lemme 1.3.7, on obtient finalement $C'[[], \vec{u}] \to_\beta^* t$ et donc $C \to_\beta^* t = (C[a])^\infty$. On conclut alors grâce à l'unicité des formes normales infinies. □

Proposition 2.2.32 *Soit z une variable libre d'un terme t et C un contexte simple tel que $t = C[z]$. Pour toute suite de termes $\vec{v}$, si $(C[(z\ \vec{v}\,)])^\infty$ est fini et ne contient pas de sous-termes de la forme $(z\ \vec{v'}\,)$ où $\vec{v'}$ a la même longueur que $\vec{v}$, alors $C^\infty = (C[(z\ \vec{v}\,)])^\infty$.*

Preuve Comme la variable z de $C[z]$ est libre, elle se comporte comme une constante. Le sous-terme $(z\ \vec{v}\,)$ se comporte donc comme un OTF : ses résidus sont tous de la forme $(z\ \vec{v'}\,)$, qui sont des OT et donc inactifs dans toute réduction. On conclut alors comme pour la preuve de la proposition 2.2.31. □

Chapitre 3

La facilité

3.1 Introduction

Avant de donner des exemples de termes faciles, nous posons les définitions et notations. Puis, nous préciserons les choix que nous avons fait en matière de techniques de preuves.

Notation 3.1.1 Pour tous termes f et m, $Cons\{f = m\}$ désigne que la théorie $\lambda\beta + \{f = m\}$ est consistante.

Définition 3.1.2 *[12] Un terme f est* facile *si pour tout terme clos m, on a $Cons\{f = m\}$.*

Remarque 3.1.3 On parle également de η-facilité lorsque la théorie $Cons\{f = m\}$ est consistante pour tout terme clos m. La η-facilité entraîne la facilité.

Notation 3.1.4 Dans la suite, m symbolisera le terme arbitraire auquel sera identifié le terme candidat à la facilité.

Exemple 3.1.5

- Pour donner un exemple de terme facile il faudrait montrer la consistance d'une théorie. Or, la preuve de cette dernière n'est généralement pas aisée. Ce sera l'objet des chapitres suivants. Les contre-exemples sont plus courants. Le non résoluble $\Omega_n = (\delta_n\ \delta_n)$ où $\delta_n = \lambda x.(\underbrace{x\ x \cdots x}_{n})$ n'est pas facile lorsque $n \geq 3$. On remarquera que $\Omega_2 = \Omega$. Pour $n \geq 3$, la théorie $T = \lambda\beta + \{\Omega_n = \lambda x_1 \cdots x_{n-2}.x_1\}$ n'est pas consistante. En effet :

  $$\lambda x_1 \cdots x_{n-2}.x_1 =_T \Omega_n \to_\beta (\Omega_n\ \delta_n \cdots \delta_n) =_T (\lambda x_1 \cdots x_{n-2}.x_1\ \delta_n \cdots \delta_n) \to_\beta \delta_n$$

  Ainsi, $T \vdash \lambda x_1 \cdots x_{n-2}.x_1 = \delta_n$ qui sont deux formes normales différentes. En vertu du corollaire 1.2.21, T est inconsistante.
- Pour $n = 3$, la réduction $\Omega_3 \to_\beta (\Omega_3\ \delta_3)$, qui fait seulement apparaître un δ_3 en argument, suffit pour distinguer Ω_3 de son semblable Ω. Au sens de la facilité, faire apparaître un argument δ_3 est donc déjà considéré comme un contenu algorithmique.

Pour prouver qu'un terme est facile il faut donc établir la consistance d'une théorie. Pour cela, il existe quatre voies différentes :

- La méthode syntaxique. Développée par Jacopini [11], elle consiste à observer une preuve d'une contradiction, typiquement $0 = 1$, dans la théorie équationnelle

$\lambda\beta + \{f = m\}$ afin d'en construire une autre plus courte. Le raccourcissement de la preuve est en général dû à un lemme de généricité tels ceux cités dans la première partie. De proche en proche on obtient alors $0 = 1$ en une seule étape, ce qui est impossible.

- Extension Church-Rosser. Cette technique a été imaginée par Berarducci et Intrigila [4, 5, 10]. Elle consiste à inclure la théorie qui identifie nos termes dans une autre plus large et issue d'une extension confluente de la β-réduction. Grâce à la confluence, pour prouver la consistance seule l'existence de deux termes normaux distincts suffit à garantir la consistance.

- La théorie des modèles. La première preuve de facilité sémantique est due à Baeten et Boerboom [2]. Elle concernait le terme $\Omega = (\omega\ \omega)$. Dans ce terme, ω est à la fois la fonction et l'argument. Cette propriété se traduit par une équation sur les éléments de l'interprétation de Ω dans tout modèle d'Engeler. Par *forcing*, de proche en proche, on réussit à étendre le modèle de sorte à faire coïncider l'interprétation de tout terme m avec celle de Ω.

- La théories des types. Dans le système de Curry, Ω n'est pas typable du fait que δ est à la fois la fonction et l'argument. Zylberach [21] a montré qu'en rajoutant un type récursif X défini par l'équation $X = X \to A$, il devient alors typable. Dans ce système, tous les termes d'un certain type peuvent être identifiés simultanément à n'importe quel autre. Ainsi, ces preuves par la théorie des types caractérisent non seulement des termes mais aussi des *ensembles faciles* de termes.

Parmi elles, seule la méthode des extensions Church-Rosser sera approfondie ici. Elle nous paraît la plus appropriée pour l'étude de cas particuliers d'égalité entre termes comme nous allons le faire. Grâce à elle, nous établirons la preuve fondamentale de la facilité du terme Ω. Nous l'exploiterons également pour exhiber tout une classe de termes faciles : celle des zéro termes forts de degré fini. Enfin, elle nous servira de socle pour introduire la méthode des classes confinantes. Cette dernière méthode sera riche en applications. Nous commencerons par la décrire dans le cas fini puis nous formulerons sa version infinie. Elle sera également utilisée dans la partie suivante.

3.2 Résultats directs

Notation 3.2.1 On rappelle la définition des termes suivants :
- $I = \lambda x.x$
- $1 = \lambda xy.x$
- $0 = \lambda xy.y$

Proposition 3.2.2 *Les termes faciles sont :*

1. *non résolubles*
2. *stables par β-équivalence i.e. si f est facile et si $f' \simeq_\beta f$ alors f' est facile*
3. *stables par substitution i.e. pour tout terme u, si f est facile alors $f[u/x]$ est facile*
4. *stables par application à un autre terme i.e. si f est facile, $(f\ u)$ est facile quel que soit u*
5. *non stables par abstraction i.e. si f est facile, $\lambda x.f$ n'est pas facile en général.*

Preuve

1. Si f est résoluble, alors son arbre de Böhm n'est pas trivial. Selon le corollaire 1.2.21, il suffit de prendre pour m une forme normale dont l'arbre est incompatible avec $BT(f)$, et on obtiendra une contradiction.

2. Comme m est clos alors $m[u/x] = m$. Par définition, la théorie $T = \lambda\beta + \{f = m\}$ est consistante. Or, $(\lambda x.f\ u) \simeq_\beta f[u/x]$ et $(\lambda x.m\ u) \simeq_\beta m[u/x] = m$. Comme $T \vdash (\lambda x.f\ u) = (\lambda x.m\ u)$ on en déduit $T \vdash f[u/x] = m$. La théorie $T = \lambda\beta + \{f[u/x] = m\}$ est donc consistante car incluse dans T qui est elle-même consistante. (cf. lemme 1.2.16)
3. Soit f' un terme tel que $f' \simeq_\beta f$ et soit m un terme. Considérons les théories $T' = \lambda\beta + \{f' = m\}$ et $T = \lambda\beta + \{f = m\}$. Par hypothèse T est consistante et $T \vdash f = f' = m$. En vertu du lemme 1.2.16, $T' \subseteq T$ d'où T' est consistante et f' est facile.
4. Soit m un terme et $m_1 = \lambda x.m$. Par définition, $T = \lambda\beta + \{f = m_1\}$ est consistante. De plus $T \vdash (f\ u) = (m_1\ u) = m$. La théorie $T' = \lambda\beta + \{(f\ u) = m\}$ est incluse dans T, elle est donc consistante.
5. Voir exemples 3.2.4.

Remarque 3.2.3 Le point (4) permet de construire de nombreux termes faciles à partir d'un seul. Il suffit en effet de lui appliquer un autre terme quelconque.

Exemple 3.2.4
- Le terme $\lambda x.u$ n'est pas facile si u ne possède pas la variable libre x.
  En effet, considérons $T = \lambda\beta + \{\lambda x.u = 1\}$. On a $(\lambda x.u\ 0) \simeq_\beta u \simeq_\beta (\lambda x.u\ 1)$. Or, $T \vdash (\lambda x.u\ 0) = (1\ 0) = 0$ et $T \vdash (\lambda x.u\ 1) = (1\ 1) = 1$ d'où $T \vdash 1 = 0$, contradiction.
  Intuitivement, la non facilité de $\lambda x.u$ vient du fait qu'il fait disparaître tous les arguments auquel il est appliqué.
- Le terme $t = \lambda x.(\Omega\ (x\ x))$ n'est pas facile, mais appliqué à un autre, il le devient.
  En effet, $(t\ 0) \simeq_\beta (t\ I)$, d'où $T = \lambda\beta + \{t = I\} \vdash (I\ 0) = (I\ I)$ et donc $T \vdash 0 = I$, contradiction.
  Cependant, pour tout terme u, $(t\ u)$ est β-équivalent à $(\Omega\ u)$ qui est facile d'après par le point (4) de la proposition 3.2.2.
- Ce dernier contre-exemple réfute une éventuelle réciproque au point (4). Il est faux de croire qu'un terme est facile si le devient après avoir été appliqué à un autre terme. Dans [10], il est montré qu'un terme P est facile lorsqu'il est appliqué à $(\Omega\ \Omega)$ tandis qu'il ne l'est plus appliqué à Ω. (cf. propositions 3.4.35 et 3.4.36)

3.3 Preuves par extension Church-Rosser

Étudier les termes faciles, c'est tenter de caractériser leur forme. Dans cet esprit, les exemples qui suivent tenteront de leur donner un visage [4, 5, 6]. Notons qu'à part quelques cas triviaux, la facilité sera cantonnée aux zéro-termes.

3.3.1 Facilité de Ω

Théorème 3.3.1 *[12, 2, 5] Ω est facile.*

Preuve Soit m un terme clos. Introduisons la relation $\rightarrow_m$ qui pour tout contexte simple C associe $C[\Omega] \rightarrow_m C[m]$. Soit $\rightarrow_{\beta m}$ la réunion des deux relations. D'après le lemme 1.2.12, pour établir la facilité, il suffit de montrer que $\rightarrow_{\beta m}$ est confluente et qu'elle possède deux termes normaux. Tout terme β-normal étant $\rightarrow_{\beta m}$ normal, vérifions que $\rightarrow_{\beta m}$ est confluente. Pour cela, d'après le lemme de Hindley-Rosen 1.3.38 il suffit de montrer que $\rightarrow_\beta$ est confluente (ce qui est acquis), que $\rightarrow_m$ est confluente et que $\rightarrow_\beta^*$ et $\rightarrow_m^*$ commutent.

▷ $\to_m$ est confluente car deux m-redex, qui sont deux sous-termes Ω, sont nécessairement disjoints. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lcl} C[\Omega,\Omega] & \to_m & C[m,\Omega] \\ \downarrow_m & & \downarrow_m \\ C[\Omega,m] & \to_m & C[m,m] \end{array}$$

▷ Pour la commutativité de $\to_\beta^*$ et $\to_m^*$, il suffit de montrer que les réductions simples $\to_\beta$ et $\to_m$ commutent suivant un diagramme $\begin{array}{lcl} a & \to_\beta & b \\ \downarrow_m & & \downarrow_m^* \\ c & \to_\beta^= & d \end{array}$ ne faisant pas augmenter le nombre de β-réductions. On conclura alors par induction sur le nombre de β-réductions.
Soit t un terme possédant un redex $r = (\lambda x.a\ b)$ et Ω comme sous-terme. On distingue 3 cas d'inclusions entre r et Ω.

1. Si r et Ω sont disjoints, il existe un contexte C tel que $t = C[r,\Omega]$ et le diagramme est le suivant :

$$\begin{array}{lcl} C[(\lambda x.a\ b),\Omega] & \to_\beta & C[a[b/x],\Omega] \\ \downarrow_m & & \downarrow_m \\ C[(\lambda x.a\ b),m] & \to_\beta & C[a[b/x],m] \end{array}$$

2. Si r est inclus dans Ω, alors $r = \Omega$ car Ω n'a qu'un redex. D'où le diagramme :

$$\begin{array}{lcl} C[r=\Omega] & \to_\beta & C[\Omega] \\ \downarrow_m & & \downarrow_m \\ C[m] & = & C[m] \end{array}$$

3. Si Ω est inclus strictement dans $r = (\lambda x.a\ b)$, alors comme Ω est un zéro-terme $\Omega \neq \lambda x.a$ et donc $\Omega \leq a$ ou $\Omega \leq b$. Traitons $\Omega \leq b$. Dans ce cas, il existe deux contextes C et D tels que $b = D[\Omega]$ et $t = C[r] = C[(\lambda x.a\ D[\Omega])]$. Comme tout se passe dans r, le contexte C n'intervient pas. D'où le diagramme :

$$\begin{array}{lcl} (\lambda x.a\ D[\Omega]) & \to_\beta & a[D[\Omega]/x] \\ \downarrow_m & & \downarrow_m^* \\ (\lambda x.a\ D[m]) & \to_\beta & a[D[m]/x] \end{array}$$

Remarque 3.3.2 La généralisation de cette preuve de consistance basée sur l'étude d'une extension confluente $\to_{\beta m}$ de la β-réduction aboutira à la méthode des *classes confinantes.*

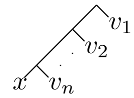
3.3.2 Facilité des zéro-termes de degré fini

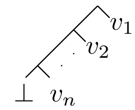
Proposition 3.3.3 *[5] Les termes muets (déf. 1.3.25) sont simultanément facile i.e. ils peuvent tous être identifiés en même temps à un autre terme sans soulever de contradiction.*

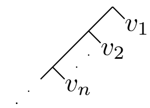
Preuve Voir la section 1.3.4 du chapitre 1.

Remarque 3.3.4 Cette preuve plus complexe suit finalement le même principe d'extension Church-Rosser que celle utilisée pour la facilité de Ω. Notons qu'être simultanément faciles est une propriété vraiment plus forte comme le montrent les exemples suivant :
- Ω est facile.
- $(\Omega\ I)$ est facile puisque Ω est facile.
- Mais ces deux termes ne sont pas simultanément identifiables. Soit $T = \lambda\beta + \{\Omega = (\Omega\ I) = 0\}$. On a $T \vdash (\Omega\ I) = (0\ I)$ et $T \vdash (\Omega\ I) = 0$. Or, $(0\ I) \simeq_\beta I$ d'où $T \vdash 0 = I$, contradiction.

Définition 3.3.5 *Selon les propositions 2.2.27 et 2.2.28 les zéro-termes se divisent en trois catégories suivant leur forme normale infinie :*

– *les* zéro-termes résolubles *de forme normale* 

– *les* zéro-termes forts de degré fini *de forme normale* 

– *les* zéro-termes forts de degré infini *de forme normale* 

dans laquelle tous les termes $(\cdots v_n \cdots v_2)$, $(\cdots v_n \cdots v_3), \cdots$ *sont des OTF.*

Proposition 3.3.6 *[5] Les zéro-termes forts de degré fini sont faciles.*

Preuve Soit f un zéro terme fort de degré fini. $f^\infty = (\perp v_n \ \cdots \ v_1)$. D'après la remarque 2.2.17, $f \to_{\infty\beta\perp} (\perp v_n \ \cdots \ v_1)$. En vertu du lemme 2.2.9, f se réduit donc à un terme de la forme $(u \, v_n \ \cdots \ v_1)$ où u est un terme muet. Selon les propositions 3.3.3 et 3.2.2, point (2) et (4), tous ces termes sont faciles. □

Remarque 3.3.7 Les zéro-termes résolubles ne sont pas faciles puisque les faciles sont non résolubles. L'étude de la facilité des zéro-termes se voit donc limitée aux zéro-termes forts de degré infini.

Définition 3.3.8 *[12] Un terme u est dit* récurrent *si pour toute réduction $u \to_\beta^* v$ il en existe une autre telle que $v \to_\beta^* u$.*

Proposition 3.3.9 *[12, 5] Les zéro termes clos et récurrents sont faciles.*

Preuve Soit u un zéro terme clos et récurrent, montrons qu'il est un zéro terme fort de degré fini. u est un zéro terme fort car il est clos. Par l'absurde, montrons qu'il ne peut être de degré infini. Comme u n'est pas résoluble, sa tête est donc un redex et il s'écrit $u = (\lambda x.a \ b \ v_n \cdots v_1)$. u ne possède donc que n arguments. Or, si u est un zéro terme fort de degré infini, sa forme normale infinie peut s'écrire $u^\infty = (d \, r_{n+1} \cdots r_1)$ où d est un OTF. En vertu du lemme 2.2.12, u se réduit donc à un terme $v = (c \, w_{n+1} \cdots w_1)$ où c est un OTF. Comme c est un OTF, les seuls réduits de v sont de la forme $v' = (c' \ w'_{n+1} \cdots w'_1)$ qui possède $n+1$ arguments. Contredit $v \to_\beta^* u$. □

Remarque 3.3.10 Cette proposition révèle une caractéristique essentielle des termes faciles : celle de pouvoir apparaître comme sous-terme propre à l'un de ses réduits. Ce résultat fût montré pour la première fois par Venturini et Jacopini [12]. La preuve reposait alors sur la méthode syntaxique de Jacopini dans la $\lambda\beta\eta$-théorie. Cette preuve récente est due à Berarducci [5].

3.3.3 Facilité des termes avec abstraction

La facilité des termes avec abstraction est envisageable. La $\beta\eta$-facilité de Ω fût montrée dans [1], [12] et [21]. Ainsi, le terme $\lambda x.(\Omega \ x)$ qui est η-équivalent à Ω est $\beta\eta$-facile et a fortiori facile. Malheureusement, à part des η-expansions de termes faciles, je ne connais pas d'autres exemples de termes faciles avec abstraction. De plus les méthodes présentées ici seront toutes inefficaces pour traiter de tels termes. Cette question posée dans [5] reste donc ouverte et ne sera pas traitée ici.

3.4 Classes Confinantes

L'idée des *classes confinantes* dérive de la preuve de la facilité du terme Ω (cf. théorème 3.3.1). Cette preuve, qui établit la commutativité entre les relations $\rightarrow^*_{\Omega=m}$ et $\rightarrow^*_\beta$, utilise deux propriétés concernant le terme Ω :

1. les β-réduits de Ω étant Ω lui-même, ils se réduisent encore via $\rightarrow_{\Omega=m}$ à m
2. les β-réduits de Ω étant Ω lui-même, qui est un zéro-terme, ils ne formeront jamais la partie $\lambda x.a$ d'un redex

À partir de ces deux propriétés, on en déduit une condition suffisante de consistance : si la clôture d'un terme f par $\rightarrow_{\beta\cup f=m}$-réductions est composée de zéro-termes, alors la théorie $\lambda\beta + \{f = m\}$ est consistante. Cette condition servira de fondement aux classes confinantes finies et infinies.

Cette section débutera par la présentation des classes confinantes en configuration finie. Les termes et les réductions feront alors partis du λ-calcul ordinaire. Lorsque nous décrirons les classes confinantes infinies, les termes seront alors tous considérés comme potentiellement infinis.

3.4.1 Classes et échanges finis

Définition 3.4.1 *Soient $A, B \subseteq \Lambda$, on définit les classes de λ-termes :*
- $(A\ B) = \{(a\ b)$ *où* $a \in A$ *et* $b \in B\}$.
- $\lambda x.A = \{\lambda x.a$ *où* $a \in A\}$.
- *Soit C un contexte,* $C[A] = \{C[a]$ *où* $a \in A\}$

Définition 3.4.2 *Soient m un terme et A une classe de termes.*
- *On dit qu'un terme u* s'échange simplement en v (de A par m) *s'il existe $a \in A$ et un contexte simple C tels que $u = C[a]$ et $v = C[m]$.*

On distingue :
- échange de tête *: si le trou du contexte C est en tête, i.e. $C = ([]\ \vec{t}\,)$ où $\vec{t}$ est une suite de termes.*
- échange interne *: si le trou du contexte C n'est pas en tête, i.e. $C = (h\ D\ \vec{t}\,)$ où h est un terme, $\vec{t}$ une suite de termes et D un contexte.*

Définition 3.4.3 *Soient A et B deux classes de termes et m un terme. On définit les classes suivantes :*
- $A[B \to m]_1 = \{C[m]$ *où C est un contexte simple tel qu'il existe $b \in B$ tel que $C[b] \in A\}$. On l'appelle la* classe des échanges *de B par m dans A.*
- $A[B \to m]_1^s = \{C[m]$ *où C est un contexte simple non trivial tel qu'il existe $b \in B$ tel que $C[b] \in A\}$. On l'appelle la* classe des échanges stricts *de B par m dans A.*

Remarque 3.4.4 Les échanges se font sans renommage des variables liées. Il y a donc un risque de capture de variables. Par exemple, $(\lambda x.b\ c)\ [b \to x] = (\lambda x.x\ c)$. Ce risque disparaît si le terme de l'échange est clos.

Définition 3.4.5 *[6] Soit m un terme et A un classe de termes. La clôture $Cl^1_m(A)$ est la plus petite classe de termes finis contenant A, stable par β-réductions et close par échanges simples stricts de ses termes par m.*

Autrement dit, si $B = Cl^1_m(A)$, alors B est la plus petite classe qui contient A et qui vérifie :
- *pour tout terme $b \in B$, si $b \rightarrow^*_\beta b'$ alors $b' \in B$*
- $B[B \to m]_1^s \subseteq B$

Remarque 3.4.6 Un moyen d'obtenir la clôture $Cl^1_m(A)$ consiste à partir de la classe A pour y ajouter tous les β-réduits de A et tous les échanges simples des termes de A par m. On obtient alors une classe A_1. On répète ensuite le procédé sur A_1, ce qui donne une classe A_2, ... La classe $A_\infty = \bigcup_{i\geq 1} A_i$ est alors la clôture $Cl^1_m(A)$.

3.4.2 Classes confinantes finies

Les *classes confinantes* vont transformer la résolution du problème de la consistance de l'équation $\{f = m\}$. La solution va consister dès lors à trouver des classes $\mathcal{C}$ composées de zéro-termes, stables par β-réductions et par échanges simples des termes de $\mathcal{C}$ par m. La condition de stabilité soulève deux types de difficultés suivant la composition des classes. Si l'échange est interne (cf. déf. 3.4.2) i.e. de la forme $(h\ \cdots [\,] \cdots)$, et si h est un zéro-terme alors l'échangé $(h\ \cdots m \cdots)$ sera clairement un zéro-terme. En revanche, si le contexte est en tête, i.e. $([\,]\ a \cdots)$, il faudra en plus vérifier que l'échange $(m\ a \cdots)$ reste bien un zéro-terme. Parmi toutes les classes que nous examinerons dans cette partie, seules celles des théorèmes 3.4.14 et 4.2.5 sont du second type. Ces preuves font parti des plus difficiles à établir en matière de classes confinantes.

Définition 3.4.7 *[4, 6] Soit m un terme clos fini. Une classe $\mathcal{C}$ de termes clos et finis est dite* confinante finie *pour m si :*
- *les éléments de $\mathcal{C}$ sont des zéro-termes*
- *$\mathcal{C}$ est close par β-réductions*
- *$\mathcal{C}$ est close par échange simple de $\mathcal{C}$ par m i.e. $\mathcal{C}[\mathcal{C} \to m]^s_1 \subseteq \mathcal{C}$*

Théorème 3.4.8 *[4, 6] Soit m un terme clos fini et $\mathcal{C}$ une classe confinante finie pour m. Si $t \in \mathcal{C}$ alors la théorie $\lambda\beta + \{t = m\}$ est consistante.*

Preuve Introduisons la relation qui associe m à tout terme b élément de $\mathcal{C}$. Elle sera notée $b \to_m m$. En particulier, $t \to_m m$. À l'instar de la preuve de la facilité de Ω (cf. th. 3.3.1), montrons que la relation $\to^*_{\beta m}$ réunion de $\to^*_\beta$ et $\to^*_m$ est confluente. Grâce au lemme de Hindley-Rosen, il suffit d'établir que $\to_m$ est confluente et que $\to^*_m$ commute avec $\to^*_\beta$.

- ▷ Soit u un terme et b_1, b_2 deux éléments de $\mathcal{C}$ tels que $v \leftarrow_{m:b_2} u \to_{m:b_1} w$. Pour fermer le diagramme, il faut étudier la position relative des deux sous-termes b_1 et b_2. Le seul cas non trivial est celui où $b_2 < b_1$. Il existe alors un contexte simple non trivial C tel que $b_1 = C[b_2]$. Ainsi, comme $\mathcal{C}$ est une classe confinante pour m, $C[m] \in \mathcal{C}[\mathcal{C} \to m]^s_1 \subseteq \mathcal{C}$. D'où le diagramme :

$$\begin{array}{lcl} b_1 = C[b_2] & \to_{m:b_1} & m \\ \downarrow_{m:b_2} & & || \\ C[m] & \to_{m:C[m]} & m \end{array}$$

- ▷ Montrons maintenant que $\to^*_m$ et $\to^*_\beta$ commutent. Pour cela, on montre que la β-réduction commute avec la m-réduction sans augmenter le nombre de β-réductions. Soit u un terme, $r = (\lambda x.e\ \ f)$ un redex et b un élément de $\mathcal{C}$ tels que $v \leftarrow_{\beta:r} u \to_{m:b} w$. Pour fermer le diagramme, il faut étudier la position relative des deux sous-termes r et b. Hormis le cas des sous-termes disjoints qui est trivial, on distingue 4 cas :
  - $b = r$. Dans ce cas, $r \in \mathcal{C}$, et donc si $r \to_\beta r'$ alors $r' \in \mathcal{C}$ en vertu de la clôture des classes confinantes par β-réductions. D'où le diagramme :

$$\begin{array}{lcl} r & \to_{m:b} & m \\ \downarrow_{\beta:r} & & || \\ r' & \to^*_{m:r'} & m \end{array}$$

– $b \leq f$. Dans ce cas, $f = C[b]$, et on a le diagramme :

$$\begin{array}{lll} (\lambda x.e\ C[b]) & \rightarrow_{m:b} & (\lambda x.e\ C[m]) \\ \downarrow_{\beta:r} & & \downarrow_{\beta:r'} \\ e[C[b]/x] & \rightarrow^*_{m:b} & e[C[m]/x] \end{array}$$

– $b \leq \lambda x.e$. Comme b est un zéro-terme, $b \leq e$ et donc $e = C[b]$. Comme m et b sont clos, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lll} (\lambda x.C[b]\ f) & \rightarrow_{m:b} & (\lambda x.C[m]\ f) \\ \downarrow_{\beta:r} & & \downarrow_{\beta:r'} \\ C[f/x][b] & \rightarrow_{m:b} & C[f/x][m] \end{array}$$

– $r < b$. Dans ce $b \rightarrow_{\beta:r} b'$ et $b' \in \mathcal{C}$. On conclut comme pour $b = r$. □

Remarque 3.4.9 La preuve montre en fait un résultat plus fort que l'énoncé du théorème. En effet, on obtient la consistance de $\lambda\beta + \{\mathcal{C} = m\}$ où la classe $\mathcal{C}$ est simultanément identifié à m.

Corollaire 3.4.10 *Pour toute classe de termes clos finis A et pour tout terme clos fini m, si $Cl^1_m(A)$ est composée de zéro-termes, alors pour tout terme $a \in A$, la théorie $\lambda\beta + \{a = m\}$ est consistante.*

Preuve $Cl^1_m(A)$ est clairement une classe confinante pour m. On conclut alors grâce au théorème 3.4.8. □

Remarque 3.4.11 Si $\mathcal{C}$ est une classe confinante pour m qui contient t, alors $Cl^1_m(\{t\}) \subseteq \mathcal{C}$. Pour montrer la consistance de $\lambda\beta + \{t = m\}$, il faut donc chercher une classe de termes comprise entre $Cl^1_m(\{t\})$ et la classe des zéro-termes. Cette classe devra être suffisamment grande pour être clairement close par échanges et par β-réductions, sans toutefois exagérer au risque de la voir sortir du cadre des zéro-termes.

Remarque 3.4.12
La méthode des classes confinantes a ses limites.

– La condition qui impose aux classes confinantes de n'être composées que de zéro-termes sert uniquement à simplifier la preuve. Elle n'est pas nécessaire. En conséquence, les classes confinantes ne permettent pas de montrer la facilité des non zéro-termes alors qu'ils existent comme en témoigne la section 3.3.3.
– Les classes confinantes ne traitent pas du cas de la η-facilité qui a été prouvée par ailleurs pour les termes récurrents dans [12] et pour les termes non pliés (une variante des récurrents) dans [13, 21].

Exemple 3.4.13
Pour tout terme clos m, $\mathcal{C} = \{\Omega\}$ est une classe confinante pour m. En effet, les trois points suivants sont vérifiés.

– $\mathcal{C}$ est clairement composée de zéro-termes clos
– $\mathcal{C}$ est close par β-réductions vu que Ω ne se réduit qu'à lui même
– $\mathcal{C}$ est également close par échanges simples vu que Ω n'est pas un sous-terme propre à lui-même.

D'où la consistance de $\lambda\beta + \{\Omega = m\}$ pour tout terme m. Ainsi, Ω est facile.

Théorème 3.4.14 *[6]*

– *Soit Q l'ensemble des termes :*
  1. *s'écrivant avec la seule variable liée et libre y*
  2. *ne possédant pas $\lambda y.y$ comme sous-terme*
  3. *sans abstraction ne liant aucune variable*

- *Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des zéro-termes de $\mathcal{Q}$*
- *Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des termes de $\mathcal{Q}$ commençant pas une abstraction*

$\mathcal{C}$ est une classe confinante pour tout terme de $\mathcal{M}$.

Preuve Voici un schéma de la preuve présentée en détails dans [6].

$\triangleleft$ $\boxed{\textbf{Étape 1}}$ $\triangleright$

$\mathcal{Q}$ est close par β-réductions. De même pour $\mathcal{C}$.

Preuve Dérive de la définition de $\mathcal{Q}$ qui s'apparente à celle du λI-calcul. $\mathcal{C}$ est composée de zéro-termes. Comme les zéro-termes sont stables par β-réductions, on obtient le résultat.

$\triangleleft$ $\boxed{\textbf{Étape 2}}$ $\triangleright$

$\mathcal{C} = (\mathcal{Q}\ \mathcal{Q})$ et $\mathcal{M} = \mathcal{Q} - \mathcal{C}$

Preuve Les termes de $\mathcal{C}$ sont des applications, on en déduit l'inclusion $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{Q}\ \mathcal{Q})$. Pour la réciproque, avec l'aide de l'étape 1, on vérifie que $(\mathcal{Q}\ \mathcal{Q})$ est stable par β-réductions, ce qui lui garantit d'être composée de zéro-termes. Le deuxième point se déduit du constat qu'un terme de $\mathcal{C}$ est soit une application soit une abstraction.

$\triangleleft$ $\boxed{\textbf{Étape 3}}$ $\triangleright$

$\mathcal{M}[\mathcal{C} \to \mathcal{M}]_1 \subseteq \mathcal{M}$ et $\mathcal{C}[\mathcal{C} \to \mathcal{M}]_1^s \subseteq \mathcal{C}$

Preuve Les deux points sont montrés simultanément par induction sur la longueur des termes. Selon l'étape 1, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}$ forment une partition de $\mathcal{Q}$. Ainsi $\mathcal{C} = (\mathcal{M}\ \mathcal{M}) \cup (\mathcal{M}\ \mathcal{C}) \cup (\mathcal{C}\ \mathcal{M}) \cup (\mathcal{C}\ \mathcal{C})$. On conclut alors par analyse des cas.

□

Remarque 3.4.15 Concernant les classes confinantes, cette preuve est classique. Notamment l'étape (3) qui montre la clôture de $\mathcal{C}$ par échange à l'aide d'une induction sur la taille des termes. Il est alors nécessaire d'écrire la classe $\mathcal{C}$ en fonction d'elle-même et d'autres classes qui sont clairement closes par échanges.

Corollaire 3.4.16 *Il est consistant d'égaler tout zéro-terme clos écrit avec une seule variable et ne contenant pas $\lambda x.x$ comme sous-terme à tout terme écrit avec une seule variable et commençant par une abstraction.*

Preuve Immédiat à partir des théorèmes 3.4.8 et 3.4.14. □

Corollaire 3.4.17 *[6] Soit $\Omega_3 = (\delta_3\ \ \delta_3)$ où $\delta_3 = \lambda x.(x\ \ x\ \ x)$ et soit $Y_c = (\lambda y.(\Omega_3\ (y\ y))\ (\lambda y.(\Omega_3\ (y\ y)))\ )$ le combinateur de Curry de Ω_3. La théorie $\lambda\beta + \{Y_c = \delta_3\}$ est consistante.*

Preuve $Y_c \in \mathcal{C}$ et $\delta_3 \in \mathcal{M}$. Le résultat découle du théorème 3.4.14. □

Remarque 3.4.18 Ce résultat de consistance ne s'étend pourtant pas au combinateur de point fixe de Turing qui s'écrit lui avec deux variables : $Y_t = (\lambda xf.(f\ (x\ x)\ f)\ (\lambda xf.(f\ (x\ x)\ f))\ )$.

3.4.3 Grammaires de classes

Les grammaires permettent de construire des classes qui serviront de candidates aux classes confinantes. Les propriétés de stabilité pourront alors être démontrées par induction sur les règles de la grammaire.

Définition 3.4.19 *Soit $\vec{C}$ une suite finie de contextes finis et $\mathcal{A}$ une classe de termes infinis. On appelle* clôture de $\mathcal{A}$ par $\vec{C}$ *la classe $\mathcal{M} = \bigcup_{i\geq 0} M_i$ où $(M_i)_{i\geq 0}$ est la suite de classes définie par $M_0 = \mathcal{A}$ et $M_{i+1} = M_i \cup C_1[M_i] \cup \cdots \cup C_n[M_i]$ pour tout $i \geq 0$.*

Proposition 3.4.20 *Soit $\vec{C}$ une suite finie de contextes finis et $\mathcal{A}$ une classe de termes infinis. Si $\mathcal{M}$ est la clôture de $\mathcal{A}$ par $\vec{C}$ alors $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup C_1[\mathcal{M}] \cup \cdots \cup C_n[\mathcal{M}]$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est la plus petite classe de termes infinis vérifiant $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ et $C_k[\mathcal{M}] \subseteq \mathcal{M}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.*

Preuve Par induction sur la définition de $\mathcal{M}$.

Définition 3.4.21 *Soit $\vec{C}$ une suite finie de contextes finis et $\mathcal{A}$ une classe de termes infinis. Écrire $\mathcal{M} = \mathcal{A} \mid C_1[\mathcal{M}] \mid \cdots \mid C_n[\mathcal{M}]$ signifiera que $\mathcal{M}$ est la clôture de $\mathcal{A}$ par $\vec{C}$.*

3.4.4 Classes confinantes infinies

Les *classes confinantes infinies* ont l'avantage sur les finies de ne contenir que des formes normales infinies. En conséquence, la condition de stabilité par β-réductions disparaît. De plus, la classe est plus restreinte du fait qu'elle ne possède plus tous les réduits intermédiaires entre le terme et sa forme normale. L'étude des échanges s'en trouve ainsi simplifiée même sans contrepartie, les contexte peuvent désormais être quelconque. Ce point fort est toutefois compensé par l'apparition de termes supplémentaires qui sont propres au $\lambda\bot$-calcul infini. Notamment des termes *auto-similaires* qui apparaissent comme des sous-termes propres à eux-mêmes. Cette situation n'existait pas dans le cas fini. Dernier atout, en infini les zéro-termes sont parfaitement caractérisés comme le montre la proposition 3.3.5. La contrainte des zéro-termes est donc elle aussi simplifiée.

Notation 3.4.22 Désormais nous nous plaçons dans le cadre du $\lambda\bot$-calcul infini. Les termes seront donc potentiellement infinis.

- Pour tout terme u, u^∞ désigne sa forme normale infinie.
- Pour tout contexte C (éventuellement infini avec une infinité de trous) et pour tout terme m, $C[m]^\infty$ désigne la forme normale infinie de $C[m]$.

Définition 3.4.23 *Soient m un terme et A une classe de termes. On dit qu'un terme u* s'échange en v (de A par m) *s'il existe $a \in A$ et C un contexte (éventuellement avec une infinité de trous) tel que $u = C[a]$ et $v = C[m]^\infty$.*

Définition 3.4.24 *Soient A et B deux classes de termes et m un terme. On définit les classes suivantes :*

1. - *$A[B \to m] = \{C[m]^\infty$ où C est un contexte simple tel qu'il existe $b \in B$ tel que $C[b] \in A\}$. On l'appelle la* classe des échanges simples infinis *de B par m dans A.*
   - *$A[B \to m]^s = \{C[m]^\infty$ où C est un contexte simple tel que $C^\infty \neq []$ et tel qu'il existe $b \in B$ tel que $C[b] \in A\}$. On l'appelle la* classe des échanges simples stricts et infinis *de B par m dans A.*

2. – $A[B \to_\infty m] = \{C[m]^\infty$ *où* C *est un contexte éventuellement avec une infinité de trous tel qu'il existe* $b \in B$ *tel que* $C[b] \in A\}$. *On l'appelle la* classe des échanges infinis *de* B *par* m *dans* A.
– $A[B \to_\infty m]^s = \{C[m]^\infty$ *où* C *est un contexte éventuellement avec une infinité de trous tel que* $C^\infty \neq []$ *et tel qu'il existe* $b \in B$ *tel que* $C[b] \in A\}$. *On l'appelle la* classe des échanges stricts infinis *de* B *par* m *dans* A.

Remarque 3.4.25 La condition de contexte non trivial des classes confinantes finies devient ici $C^\infty \neq []$. En vertu des lemmes 2.1.28 et 2.2.9, cette condition s'écrit également $C \not\to_\beta^* []$ ou encore C n'est pas évanouissant (cf. définition 1.3.46).

Définition 3.4.26 *[6] Soit* m *un terme clos et* A *un classe de termes clos.*
– *La clôture simple* $Cls_m(A)$ *est la plus petite classe de termes sous forme normale infinie contenant* A *et close par échanges* simples *stricts de ses termes par* m *c'est-à-dire* $Cls_m(A)\,[Cls_m(A) \to m]^s \subseteq Cls_m(A)$.
– *La clôture* $Cl_m(A)$ *est la plus petite classe de termes sous forme normale infinie contenant* A *et close par échanges stricts de ses termes par* m *c'est-à-dire* $Cl_m(A)\,[Cl_m(A) \to_\infty m]^s \subseteq Cl_m(A)$.

Définition 3.4.27 *[4] Soit* m *un terme clos. Une classe* $\mathcal{C}$ *de termes clos sous forme normale infinie est dite* confinante infinie *pour* m *si :*
– *les éléments de* $\mathcal{C}$ *sont des zéro-termes*
– $\mathcal{C}$ *est close par échanges stricts de* $\mathcal{C}$ *par* m, *i.e.* $\mathcal{C}[\mathcal{C} \to_\infty m]^s \subseteq \mathcal{C}$
La deuxième propriété sera appelée la condition de stabilité *d'une classe confinante infinie.*

Théorème 3.4.28 *[4] Soient* m *et* t *deux termes finis et* $\mathcal{C}$ *une classe confinante infinie pour* m^∞. *Si* $t^\infty \in \mathcal{C}$ *alors la théorie* $\lambda\beta + \{t = m\}$ *est consistante.*

Preuve Voici un schéma de la preuve présentée en détail dans [6]. L'idée consiste à ramener le problème infini à celui d'une classe confinante finie d'un type légèrement différent de celui défini en 3.4.7.

◁ **Étape 1** ▷

Soit $\mathcal{D}$ une classe de termes clos finis qui vérifie :
– les éléments de $\mathcal{D}$ sont des zéro-termes
– $\mathcal{D}$ est close par β-réductions
– pour tout contexte simple C tel que $C \not\to_\beta^* []$, si $C[b] \in \mathcal{D}$ et $b \in \mathcal{D}$ alors $C[m] \in \mathcal{D}$.
(Autrement dit, $\mathcal{D}$ est close par échange de $\mathcal{D}$ par m suivant des contextes C non évanouissants.)

Alors la théorie $\lambda\beta + \{t = m\}$ est consistante.

Preuve Comme pour la preuve du théorème 3.4.8, il s'agit de montrer la confluence de la $\to_{\beta m}$ réduction. Cette fois $\to_m$ ne commute plus avec elle-même. En effet, si C est un contexte tel que $C \to_\beta^* []$, le diagramme suivant n'est plus possible car rien ne garantit l'appartenance de $C[m]$ à $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{lcl} b_1 = C[b_2] & \to_{m:b_1} & m \\ \downarrow_{m:b_2} & & || \\ C[m] & \to_{m:??} & m \end{array}$$

Cependant, nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lcl} b_1 = C[b_2] & \to_{m:b_1} & m \\ \downarrow_{m:b_2} & & || \\ C[m] & \to_\beta^* & m \end{array}$$

On récupère donc la confluence, comme à la section 1.3.4, en introduisant la réduction évanouissante $\to_c$ qui commute parfaitement avec $\to_\beta$ et $\to_m$.

◁ **Étape 2** ▷

La classe $\mathcal{E}$, définie comme l'ensemble des termes v tels que v^∞ appartienne à $\mathcal{C}$, est confinante au sens de l'étape 1.

Preuve $\mathcal{E}$ est stable par β-réductions. D'après le lemme 2.2.12, elle est composée de zéro-termes clos comme $\mathcal{C}$. Montrons que $\mathcal{E}$ est stable par échanges. Soient $v, w \in \mathcal{E}$ et C un contexte simple et fini tel que $C \not\to^*_\beta []$. Montrons que $C[m] \in \mathcal{E}$. Comme v est un zéro-terme clos, c'est aussi un OTF. D'après le corollaire 1.3.23, $C[v]^\infty = C^\infty[v^\infty]$. D'autre part, comme m est clos $C[m]^\infty = C^\infty[m^\infty]$. Comme C^∞ n'est pas trivial, que $v^\infty \in \mathcal{C}$ et que $\mathcal{C}$ est une classe confinante infinie pour m^∞, on en déduit que $C^\infty[m^\infty] \in \mathcal{C}$. Par définition, on obtient donc $C[m] \in \mathcal{E}$.

□

Corollaire 3.4.29 *Pour toute classe de termes clos A et pour tout terme clos fini m, si $Cl_m(A)$ est composée de zéro-termes, alors pour tout terme fini $a \in A$, la théorie $\lambda\beta + \{a = m\}$ est consistante.*

Preuve $Cl_m(A)$ est clairement une classe confinante infinie pour m. On conclut alors grâce au théorème 3.4.28. □

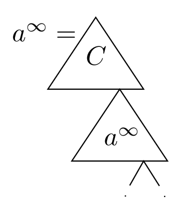
Remarque 3.4.30 La clôture $Cls_m(A)$ est incluse dans $Cl_m(A)$. À priori cet inclusion est stricte. En effet, être clos par échanges simples entraîne la clôture par échanges selon des contextes qui possèdent un nombre fini de trous. Ce qui devient faux pour un nombre infini de trous. En particulier si nous considérons le terme $t = (\cdots I\ I\ I)$, alors $(\cdots 0\ 0\ 0)$ apparaît dans la classe $t[I \to_\infty 0]$ tandis qu'il est absent de $t[I \to 0]$. À ce jour, il n'existe pas de résultat de consistance concernant les clôtures simples infinis $Cls_m(A)$.

3.4.5 Auto-similarité

Cette section développe l'intuition selon laquelle les termes faciles seraient périodiques. Cette idée était déjà suggérée par la définition des termes récurrents introduite dans [12].

Définition 3.4.31 *[4] Un terme est dit* auto-similaire *si son arbre de Berarducci apparaît comme un sous-arbre propre de lui-même.*

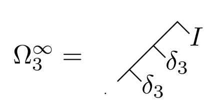
Exemple 3.4.32



Proposition 3.4.33 *[4] Les zéro-termes non auto-similaires sont faciles.*

Preuve Si f est un OT non auto-similaire, alors la classe $\mathcal{C} = \{f^\infty\}$ est confinante infinie pour tout terme m. □

Exemple 3.4.34 Ω et $(\Omega_3\ I)$ sont non auto-similaires et donc faciles.
À noter que l'argument I qui est appliqué à Ω_3 rompt sa symétrie, le faisant ainsi passer de non facile à facile.



Si les zéro-termes non auto-similaires sont faciles, ceux auto-similaires sont quant à eux dépourvus de généralités. Pour s'en convaincre, étudions les deux plus simples façons d'être auto-similaire pour un zéro-terme. À savoir :

1. $a^\infty = (a^\infty\ v)$
2. $a^\infty = (v\ a^\infty)$

Pour le premier point, posons $V = \lambda xy.(x\ x\ \Omega\ (x\ x\ y))$ et $P = (V\ V)$ où $\Omega = (\lambda x.(x\ x))\ (\lambda x.(x\ x))$. Avec ces notations nous déduisons : $(P\,\Omega) \simeq_\beta (P\,\Omega)(P\,\Omega)$ et $(P\,(\Omega\ \Omega)) \simeq_\beta (P\,\Omega)(P\,(\Omega\ \Omega))$. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que pour toute variable neuve z, $(P\,z) \to_\beta^* (P\,\Omega)(P\,z)$. Ces deux termes $(P\,\Omega)$ et $(P\,(\Omega\ \Omega))$ sont donc auto-similaires du premier type. Les deux propositions suivantes sont dues à Intrigila, dans son article [10].

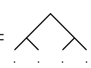
Proposition 3.4.35 *[10]* $(P\,\Omega)$ *n'est pas facile.*

Preuve Soit $0 = \lambda xy.y$. Dans la théorie $T = \lambda\beta + \{(P\,\Omega) = 0\}$, comme $(P\,\Omega) \simeq_\beta (P\,\Omega)(P\,\Omega)$, nous obtenons $(0\ 0) = 0$, et après β-réduction $\lambda x.x = \lambda xy.y$. D'après le corollaire 1.2.21, T est contradictoire. □

Proposition 3.4.36 *[10]* $(P\,(\Omega\,\Omega))$ *est facile.*

Preuve La preuve se fait par extension Church-Rosser. Voir [10]. On trouve également une preuve utilisant la technique de Jacopini [17]. □

De ces deux exemples nous tirons deux conclusions. Premièrement, il n'existe pas de généralités concernant la facilité des termes auto-similaires de type 1. Ensuite, nous découvrons d'autres limites aux classes confinantes infinies. En effet, les termes $(P\,\Omega)$ et $(P\,(\Omega\,\Omega))$ ont tous l'arbre binaire infini comme arbre de Berarducci.

$(P\,\Omega)^\infty =$  $= (P\,(\Omega\,\Omega))^\infty$

La technique des classes confinantes infinies ne fait donc pas la différence entre ces termes dont l'un est facile et l'autre non. Les classes confinantes finies permettent cependant de traiter ce cas. En effet, $P\,(\Omega\ \Omega)$ est non résoluble. Selon le théorème 1.2.19, si m est non résoluble alors on a $Cons\{P\,(\Omega\ \Omega) = m\}$. Si m est une forme normale de tête, on introduit les classes suivantes :

- $\mathcal{N} = \{$ termes sous forme normale de tête $\} \cup (P\,(\Omega\,\Omega)\,)$
- $\mathcal{P} = \{(P\,\Omega)\} \mid (\mathcal{P}\ \mathcal{P})$
- $\mathcal{C} = (\mathcal{P}\ \mathcal{N}) \mid (\mathcal{P}\ \mathcal{C})$

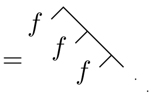
La classe $\mathcal{C}$ sert de base à la preuve écrite en détails dans [4]. On vérifie alors que $\mathcal{C}$ est stable par échanges par m et qu'elle contient $P\,(\Omega\ \Omega)$. Cependant, $\mathcal{C}$ n'est pas confinante puisqu'elle n'est pas close par β-réductions. En effet, $(P\,\Omega)$ ne se réduit pas directement à $(P\,\Omega)\ (P\,\Omega)$: $(P\,\Omega) \to_\beta^h (\lambda y.(P\,\Omega)\ (P\,y))\ \Omega \to_\beta^h (P\,\Omega)\ (P\,\Omega)$. C'est pourquoi la preuve de [4] est complétée par des discussions supplémentaires.

On notera également que la technique des classes confinantes infinies échoue en général pour les termes auto-similaires de type 1. La raison est la même que celle exploitée dans la preuve de la proposition 3.4.35.

Pour le deuxième type d'auto-similarité, il n'y a pas de généralité. Les deux propositions suivantes exhibent des exemples aux conclusions opposées.

Proposition 3.4.37 *Pour tout terme facile* f *et pour tout combinateur de point fixe* Y, $(Y\ f)$ *est facile. Si de plus* f *est un zéro-terme, alors l'arbre de Berarducci de* $(Y\ f)$ *se représentera ainsi :*

$$(Y\ f)^\infty =$$



Preuve $(Y\ f) \to_\beta^* (f\ (Y\ f))$ qui est facile selon la proposition 3.2.2 point (2) et (4). □

Proposition 3.4.38 *[4] Soient $K_1 = \lambda xyz.(x\ z)$, $H = \lambda x.(x\ x\ K_1)$ et $\Omega_{K_1} = (H\ H)$ et Y un combinateur de point fixe, alors le terme $(Y\,\Omega_{K_1})$ n'est pas facile.*

Preuve Posons $m = K_1$ et vérifions que la théorie $T = \lambda\beta + \{(Y\,\Omega_{K_1}) = m\}$ n'est pas consistante. La preuve se fait en deux étapes. Montrons que $m = \Omega_{K_1}$ pour en déduire $(K_1\ K_1) =_T K_1$ ce qui constitue une contradiction puisque ces deux termes n'ont pas la même forme normale.

$m = \Omega_{K_1}$			$(K_1\ K_1) = K_1$		
$\Omega_{K_1}\ (Y\,\Omega_{K_1})$	$\leftarrow_\beta$	$(Y\,\Omega_{K_1}) \to_{(Y\,\Omega_{K_1})=m} m$	K_1	$\to_{K_1=m}$	Ω_{K_1}
$\downarrow_{(Y\,\Omega_{K_1})=m}$					$\downarrow_\beta^*$
$\Omega_{K_1}\ m$					$\Omega_{K_1}\ K_1$
$\downarrow_{m=K_1}$					$\downarrow_{\Omega_{K_1}=m}$
$\Omega_{K_1}\ K_1$	$\leftarrow_\beta^*$	Ω_{K_1}	$(K_1\ K_1)$	$\to_{K_1=m}$	$m\ K_1$

□

Remarque 3.4.39

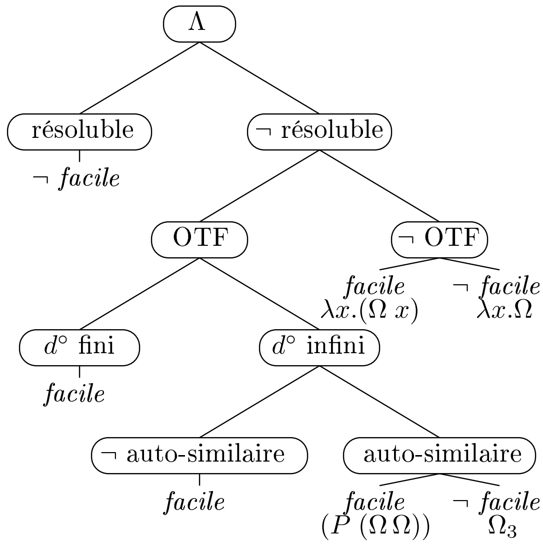
1. Intuitivement, la différence entre $(Y\,\Omega_{K_1})$ et $P\,(\Omega\ \Omega)$ provient des sous-termes K_1 et δ. K_1 possède une forme normale de tête à deux variables $(x\ z)$ tandis que δ a deux variables identiques $(x\ x)$. Cette différence confère à K_1 plus de contenu opératoire que les sous-termes de $P\,(\Omega\ \Omega)$ qui s'écrivent eux de la forme $(x\ x)$.
2. Dans l'exemple $(Y\,\Omega_{K_1}) = m$ où $m = \lambda xyz.(x\ ((Y\,\Omega_{K_1})\ 0\ 0\ 0\ z))$, nous pouvons apprécier toute la complexité des classes d'échanges lorsque le terme à étudier apparaît comme un sous-terme de propre de m.

Deuxième partie

La facilité de $(Y_t\,\Omega_3)$

Introduction

Le diagramme suivant résume les classes de termes explorées jusqu'ici :



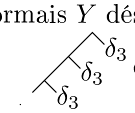
Quels termes reste-il à examiner ? Si on laisse de côté les non zéro-termes, seuls les zéro-termes forts de degré infinis et auto-similaires demeurent indéterminés. Or, d'après la proposition 3.3.5 point (3), les OTF de degré infini sont β-équivalents à un terme de la forme $(u\ v)$ où u est aussi un OTF de degré infini. Si u est facile, selon la proposition 3.2.2 point (4), $(u\ v)$ est également facile. Si u n'est pas facile, alors c'est un OTF de degré infini. Ainsi, il ne reste à traiter que les termes auto-similaires qui s'écrivent $(u\ v)$ où u est un OTF de degré infini auto-similaire et non facile.

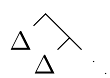
Or, l'exemple le plus simple de OTF de degré infini auto-similaire et non facile est Ω_3 et la façon la plus simple de créer un terme auto-similaire consiste à utiliser un combinateur de point fixe. Partant de ces deux constats la question de la facilité du terme $(Y_t\ \Omega_3)$ où Y_t est le combinateur de Turing semble un passage obligé. Ce problème fût posé par Jacopini et Venturini-Zilli [13] il y a 20 ans. Depuis de nombreux résultats partiels ont été obtenus notamment grâce à Berarducci [4, 5, 6]. Mais la question de sa facilité reste toujours ouverte.

Chapitre 4

Résultats connus

Ce chapitre est consacré aux résultats partiels déjà connus concernant la facilité de $(Y\,\Omega_3)$. Il fournit un ensemble de cas pour lesquels $(Y\,\Omega_3)$ peut effectivement être identifié à m de manière consistante. Le premier théorème établira la consistance de $\lambda\beta + \{(Y\,\Omega_3) = m\}$ pour tous les termes m sous formes normales. La preuve de ce résultat se fera en deux étapes. D'abord, nous montrerons $Cons\{(Y\,\Omega_3) = m\}$ pour toute forme normale différente de δ_3. Puis, nous résoudrons le cas où $m = \delta_3$. Enfin, nous conclurons par un théorème de Kuper qui réduit l'étude de la facilité de $(Y\,\Omega_3)$ aux termes m vérifiant $\lambda\beta + \{(\Omega_3\; m = m)\} \not\vdash m = \delta_3$.

Notation 4.0.1
- Désormais Y désigne un combinateur de point fixe.
- $\Delta =$ 

est la forme normale infinie de Ω_3.
- $\Delta_\infty =$ 

est la forme normale infinie de $(Y\,\Omega_3)$.

4.1 $Cons\{(Y\,\Omega_3) = m\}$ si m est une forme normale finie autre que δ_3

Notation 4.1.1 En utilisant les notations de la section 1.2.1 de la première partie, on introduit les classes suivantes :
- $\mathcal{N}$ est la classe des termes non résolubles
- $\mathcal{M}$ est la classe des termes clos t sous forme normale infinie qui s'écrivent soit :
  1. $\vec{\lambda}.(x\;\vec{v})$ où $l(\vec{\lambda}.) \geq 2$
  2. $\lambda x.(x\;\vec{v})$ où $l(\vec{v}) \geq 2$
  3. $\lambda x.(x\;v\;w)$ où v (ou bien w) est une forme normale de tête autre que x
- $\mathcal{C}_1 = (\Delta\;\mathcal{M}) \mid (\Delta\;\mathcal{C}_1)$.
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \{\Delta_\infty\}$

Remarque 4.1.2 $\mathcal{M}$ représente la classe des termes incompatibles au sens de Böhm avec δ_3.

Fait 4.1.3

1. $\delta_3 \notin \mathcal{M}$

2. $\Delta \notin \mathcal{C}$

3. $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \emptyset$

4. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$ sont composées de OTF sous forme normale. En particulier, $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{N}$

Preuve

1. Immédiat.
2. Sinon, comme $\Delta = (\Delta\ \delta_3)$, on aurait δ_3 est un élément de $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{C}_1$.
3. Les termes de $\mathcal{M}$ sont tous résolubles
4. Par induction sur la grammaire, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$ sont composées de zéro-termes forts sous forme normale puisque leurs éléments sont formés de zéro-termes forts sous forme normale appliqués à des formes normales.

Proposition 4.1.4 *[4] $\mathcal{C}$ est une classe confinante pour tout terme fini et clos m dont l'arbre de Böhm est incompatible avec δ_3.*

Preuve La preuve se fait en quatre étapes.

$\lhd$ $\boxed{\textbf{Étape 1}}$ $\rhd$

$m^\infty \in \mathcal{M}$

Preuve Si m est incompatible avec δ_3 alors m est résoluble (cf. déf. 1.2.3). Il possède donc une forme normale de tête. Les trois cas de $\mathcal{M}$ sont les trois façons possibles de rendre incompatibles deux termes entre eux :

1. avoir des formes normales de tête distinctes (cas (1) pour le nombre d'abstractions, cas (2) pour le nombre d'arguments).
2. avoir des formes normales de tête identiques mais des arguments incompatibles.

$\lhd$ $\boxed{\textbf{Étape 2}}$ $\rhd$

$\mathcal{M}[\mathcal{N} \to_\infty m] \subseteq \mathcal{M}$

Preuve Soit t un terme de $\mathcal{M}$, C un contexte infini et u un élément de $\mathcal{N}$ tels que $t = C[u]$. Montrons que $C[m]^\infty \in \mathcal{M}$. Par définition, on distingue trois cas pour t :

1. si $t = \vec{\lambda}.(x\ \vec{v})$ où $l(\vec{\lambda}.) \geq 2$, alors comme u est non résoluble, il ne peut être qu'un sous-terme de $\vec{v}$. En conséquence, $C[m]^\infty$ s'écrit $\vec{\lambda}.(x\ \vec{v'})$ qui appartient à $\mathcal{M}$.
2. si $t = \lambda x.(x\ \vec{v})$ où $l(\vec{v}) \geq 2$, alors u est un sous-terme de $\vec{v}$. En conséquence, $C[m]^\infty$ s'écrit $\lambda x.(x\ \vec{v'})$ qui appartient à $\mathcal{M}$.
3. si $t = \lambda x.(x\ v\ w)$ où v (ou bien w) est une forme normale de tête autre que x, la conclusion est identique.

$\lhd$ $\boxed{\textbf{Étape 3}}$ $\rhd$

$\mathcal{C}_1[\mathcal{C}_1 \to_\infty m]^s \subseteq \mathcal{C}_1$

Preuve Soient t et u des éléments de $\mathcal{C}_1$ tels que u soit un sous-terme de t.

- Si $t \in (\Delta\ \mathcal{M})$ alors il existe $b \in \mathcal{M}$ tel que $t = (\Delta\ b)$. Comme $u \in \mathcal{C}_1$, alors u est un OTF différent de Δ. Il n'est donc pas un sous-terme de Δ puisque ses seuls sous-termes sont Δ lui-même et des formes normales finies. Ainsi, u est un sous-terme de b. Il existe donc un contexte C tel que $b = C[u]$. D'après l'étape 2, comme $u \in \mathcal{N}$, $C[m]^\infty \in \mathcal{M}$ et donc $(\Delta\ C[m]^\infty) \in \mathcal{C}_1$.
- Si $t \in (\Delta\ \mathcal{C}_1)$ alors il existe $b \in \mathcal{C}_1$ tel que $t = (\Delta\ b)$. Si $u = b$, alors $C[m]^\infty = (\Delta\ m^\infty)$ qui appartient bien à $\mathcal{C}_1$ puisque $m^\infty \in \mathcal{M}$. Sinon, $u < b$ et on conclut par induction sur la grammaire de $\mathcal{C}_1$.

$\lhd$ $\boxed{\textbf{Étape 4}}$ $\rhd$

$\mathcal{C}[\mathcal{C} \to_\infty m]^s \subseteq \mathcal{C}$

Preuve $\mathcal{C}$ diffère de $\mathcal{C}_1$ uniquement parce qu'elle possède l'élément Δ_∞. Or, $\Delta_\infty = (\Delta\ \Delta_\infty)$, on conclut alors par le même argument qu'à l'étape 3.

□

Théorème 4.1.5 *[4] Tout terme m clos et fini ayant un arbre de Böhm incompatible avec δ_3, vérifie $Cons\{(Y\,\Omega_3) = m\}$.*

Preuve $(Y\,\Omega_3)^\infty \in \mathcal{C}$ qui est une classe confinante pour m selon la proposition 4.1.4. □

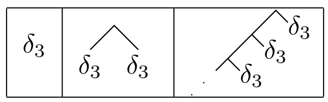
4.2 $Cons\{(Y\,\Omega_3) = \delta_3\}$

Pour ce résultat, on trouve deux preuves différentes. La première consiste à utiliser la classe confinante des termes écrits avec une seule variable (cf. théorème 3.4.14). Ce résultat ne s'applique alors qu'au combinateur de Curry et à δ_3 et non au combinateur de Turing. La seconde utilise la classe confinante des δ_3-termes et s'applique sur tous les combinateurs. Cette dernière preuve est l'objet de cette section.

Définition 4.2.1 *[4] Un δ_3 terme est un terme clos infini dont tous les sous-termes clos sont soit des applications soit le terme δ_3.*

Exemple 4.2.2

- Les arbres des δ_3 termes sont composés de branches auxquelles sont accrochées le terme δ_3.



- $(Y\,\Omega_3)^\infty$ est un δ_3 terme.

Remarque 4.2.3 Les sous-termes des δ_3-termes sont soit des sous-termes de δ_3, soit des applications.

Notation 4.2.4 Introduisons les classes suivantes :

- $\mathcal{D}$ est la classe des δ_3 termes applicatifs i.e. s'écrivant $(a\ b)$
- $\mathcal{D} \cup \{\delta_3\}$ est la classe des δ_3 termes
- $\mathcal{D}^\infty$ est la classe des formes normales infinies de $\mathcal{D}$

Proposition 4.2.5 *[4] $\mathcal{D}^\infty$ est une classe confinante infinie pour δ_3.*

Preuve La preuve se fait en cinq étapes. D'abord, nous devons établir des résultats concernant $\mathcal{D}$.

◁ **Étape 1** ▷

Les redex des éléments de $\mathcal{D}$ sont de la forme $r = (\delta_3\ b)$ avec $b \in \mathcal{D} \cup \{\delta_3\}$. En particulier r appartient à $\mathcal{D}$

Preuve Soit u un élément de $\mathcal{D}$ et r un redex de u. Montrons d'abord que r est clos. Par l'absurde, soit w le plus profond sous-terme clos de u qui contienne r. Comme w est le plus profond alors sa racine est une abstraction. Comme w est clos, par définition des δ_3-termes, $w = \delta_3$, contredit $r \leq w$.

r est donc clos et il s'écrit $(\lambda x.a\ \ b)$. Par définition des δ_3-termes, $\lambda x.a = \delta_3$ et $b \in \mathcal{D} \cup \{\delta_3\}$.

◁ **Étape 2** ▷

Si u est un δ_3-terme applicatif et $u \to_\beta u'$ alors u' est un δ_3-terme applicatif.

Preuve Soit r un redex de u. Il existe donc un contexte C tel que $u = C[r]$. Selon l'étape 1, $r = (\delta_3\ b)$ avec $b \in \mathcal{D} \cup \{\delta_3\}$. D'où, $r \to_\beta (b\ b\ b)$ avec $(b\ b\ b) \in \mathcal{D}$. Ainsi, $u' = C[(b\,b\,b)]$ qui est bien un élément de $\mathcal{D}$.

◁ **Étape 3** ▷

Les sous-termes applicatifs des éléments de $\mathcal{D}$ sont des OTF de degré infini. En particulier $\mathcal{D}$ est composée de OT.

Preuve

Montrons que tout terme de $\mathcal{D}$ se réduit à un terme $(a\ b)$ dans lequel $a \in \mathcal{D}$ et b est un δ_3-terme. On en déduira alors le résultat par induction sur a.

Si $u \in \mathcal{D}$ alors $u = (a\ b)$ avec a et b des δ_3-termes. a peut donc être : soit élément de $\mathcal{D}$ et dans ce cas le résultat est montré, soit le terme δ_3. Si $a = \delta_3$ alors $u \to_\beta (b\ b\ b)$ avec b un δ_3-terme et $(b\ b) \in \mathcal{D}$, et on obtient bien le résultat.

$\triangleleft$ $\boxed{\textbf{Étape 4}}$ $\triangleright$

Si $u \in \mathcal{D}$ alors $u^\infty \in \mathcal{D}$.

Preuve

Montrons d'abord que u^∞ est sans $\perp$ i.e. que u ne contient pas de sous-terme muet. En effet, un sous-terme de u est soit un sous-terme de δ_3 qui est normal, soit un sous-terme applicatif. S'il est applicatif, selon l'étape 3, c'est un OTF de degré infini. D'après l'étape 2, les réduits de $\mathcal{D}$ sont encore des éléments de $\mathcal{D}$. Aucun sous-terme de u n'est donc muet, on en déduit que u^∞ est sans $\perp$.
Selon l'étape 2, comme tout réduit des termes de $\mathcal{D}$ est un élément de $\mathcal{D}$, et comme u ne contient pas de sous-termes muets, u^∞ est un élément de $\mathcal{D}$.

$\triangleleft$ $\boxed{\textbf{Étape 5}}$ $\triangleright$

$\mathcal{D}^\infty[\mathcal{D}^\infty \to_\infty \delta_3]^s \subseteq \mathcal{D}^\infty$

Preuve δ_3 est un δ_3-terme, les échanges dans $\mathcal{D}^\infty$ de $\mathcal{D}^\infty$ par δ_3 sont donc encore des δ_3-termes. Les échanges sont stricts, les termes restent donc des applications. On conclut alors grâce à l'étape 4 : les δ_3-termes applicatifs sont stables par passage à la forme normale infinie. $\square$

Corollaire 4.2.6 *[4] La théorie $\lambda\beta + \{(Y\,\Omega_3) = \delta_3\}$ est consistante.*

Preuve $(Y\,\Omega_3)^\infty$ est élément de la classe confinante $\mathcal{D}^\infty$. $\square$

Théorème 4.2.7 *[4] Tout terme m clos et fini, qui possède une forme normale finie vérifie $Cons\{(Y\,\Omega_3) = m\}$.*

Preuve Dérive du théorème 4.1.5 et du corollaire 4.2.6. Si m a une forme normale finie : soit c'est δ_3, soit elle appartient à $\mathcal{M}$. $\square$

La facilité de $(Y\,\Omega_3)$ pour les formes normales finies n'entraîne pourtant pas sa facilité. Dans son article [6], Berarducci et Intrigila fournissent un théorème de séparation qui permet de construire des termes non faciles mais faciles pour les formes normales.

Exemple 4.2.8 Soit $a = \lambda z.Y_t$ où Y_t est le combinateur de point fixe de Turing. Soient $V = \lambda x, y.(x\ x\ a\ (x\ x))$, $P = (V\ V)$ et $X = (\lambda x.(P\ (x\ x)))\ (\lambda x.(P\ (x\ x)))$. Le terme P étant le même que celui de $(P\ \Omega)$ de la section 3.4.5. D'après le théorème de séparation [6], X est facile pour les formes normales. Pourtant, la théorie $\lambda\beta + \{X = a\}$ est contradictoire. En effet, $X \to_\beta^* (V\ V\ X)$ et $(V\ V\ X) \to_\beta^* (V\ V\ a)\ (V\ V\ X)$. De $X = a$, on en déduit donc $a = (a\ a)$, ce qui est contradictoire.

4.3 $Cons\{(Y\,\Omega_3) = m\}$ si $\lambda\beta + \{(\Omega_3\ m) = m\} \not\vdash m = \delta_3$

D'après la proposition 4.1.4, les seuls termes m dont la consistance de $\lambda\beta + \{\,(Y\,\Omega_3) = m\}$ n'ait pas encore été prouvée ont leur arbre de Böhm compatible avec δ_3. Le résultat suivant dû à Kuper [17] renforce encore plus le lien qui unit m à δ_3.

Théorème 4.3.1 *[17] Soit $T = \lambda\beta + \{(\Omega_3\ m) = m\}$. Si $T \not\vdash m = \delta_3$, alors $Cons\{(Y\,\Omega_3) = m\}$.*

Preuve La preuve repose sur la technique de Jacopini. Pour la preuve complète voir [17]. $\square$

D'après le théorème précédent, pour contredire la facilité de $(Y\,\Omega_3)$, non seulement m doit être compatible avec δ_3 mais encore il doit pouvoir s'y dériver suivant les règles de la théorie $T = \lambda\beta + \{(\Omega_3\ m) = m\}$ i.e. $m =_T \delta_3$. Si ce cas se présente, nous obtenons les égalités suivantes : $\Omega_3\ (Y\,\Omega_3) =_T (\Omega_3\ m) =_T (\Omega_3\ \delta_3) \simeq_\beta \Omega_3$. À partir de $\Omega_3\ (Y\,\Omega_3) =_T \Omega_3$, on en déduit $\Omega_3\ (Y\,\Omega_3) =_T (m\ m)$, et donc, $(m\ m) =_T (m\ (m\ m)\,) =_T \cdots$ ce qui peut être une source de contradiction puisque m est arbitraire. Bien entendu, en ajoutant l'hypothèse $m \vdash_T \delta_3$ on a imposé à m d'avoir une forme particulière. La description de cette forme sera l'objet de la partie suivante.

Chapitre 5

Nouveaux résultats

La proposition 4.1.4 montre qu'il ne reste à prouver la consistance de $\lambda\beta + \{(Y\ \Omega_3) = m\}$ seulement dans le cas où m possède un arbre de Böhm compatible avec δ_3. Le théorème 6.0.2 réduira ces termes à ceux dont l'arbre de Berarducci s'écrit $\lambda x.(x\ \ b_1\ \ b_2)$ où $b_{1,2}$ sont soient des zéro-termes forts de degré infinis, soient la variable x. Partant de ce résultat, nous nous intéresserons plus particulièrement aux termes $m = \lambda x.(x\ \ b\ \ x)$ où b est un zéro-terme fort de degré infini (cf. hypothèse 1). Le cas $m = \lambda x.(x\ \ b_1\ \ b_2)$ s'en déduirait sans difficultés particulières. Dans la suite m sera noté $\delta[b]$ où $\delta = \lambda x.(x\ \ []\ \ x)$. Pour prouver la consistance de $(Y\ \ \Omega_3) = m$ nous devons donc trouver une classe confinante pour m qui contient Δ_∞. La plus petite de telles classes est celle obtenue par induction en composant successivement les échanges, à savoir : $A_0 = \{\Delta_\infty\}$, $A_1 = A_0 \cup A_0[A_0 \to_\infty m]^s$ ... Si nous appelons A la réunion de toutes les classes $(A_i)_{i\geq 0}$, A est bien évidemment stable par échanges. Il ne reste donc plus à montrer qu'elle est composée uniquement de zéro-termes.

Pour montrer que A n'est composée que de zéro-termes nous devons décrire la syntaxe de ses éléments. Celle-ci est malheureusement trop complexe en général. Pour nous simplifier la tâche nous inclurons A dans une autre classe F qui sera définie explicitement au moyen d'une grammaire et qui sera clairement composée de zéro-termes. Cette inclusion sera montrée de proche en proche pour chaque classe A_i. La succession des classes A_0, A_1, $A_2 \cdots$ induisant un ordre sur les échanges des termes de A par m, nous allons voir que cette suite peut se découper en deux parties.

Tout d'abord, regardons A_1. Par définition, $A_1 = A_0 \cup A_0[A_0 \to_\infty m]^s$ et $A_0 = \{\Delta_\infty\}$. Comme $\Delta_\infty = (\Delta\ \Delta_\infty) = (\Delta\ (\Delta\ \Delta_\infty)) = \cdots$, nous pouvons donc écrire $A_1 = \{\Delta_\infty\} \cup \{\ (\Delta\ m)\ ,\ (\Delta\ (\Delta\ m))\ ,\ \cdots\}$ qui se notera $A_1 = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+[m]$. Comme $m = \delta[b]$, la classe s'écrit finalement $A_1 = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+[\,\delta[b]\,]$. A_1 est donc bien une classe de zéro-termes. Pour A_2, comme $\Delta \notin A_1$, selon le lemme de filtrage 7.2.4, les échanges ne peuvent avoir lieu qu'à l'intérieur du terme b. En introduisant les classes B_i des échangés de b par $(A_i\ ,\ m)$ (définition 7.4.2), il est alors permis d'écrire la classe A_i en fonction de celle de B_i, du moins tant que $\Delta \notin A_i$ (proposition 8.0.8). Cette description montre alors clairement que A est composée de zéro-termes : en effet, tous ses termes possèdent Δ en tête, et comme Δ n'appartient pas à A, il reste intact au fur et à mesure des échanges. Cette partie pendant laquelle $\Delta \notin A_i$, et qui correspond aussi à celle pendant laquelle $x \notin B_i$ sera appelée *la partie avant* n_x (cf. définition 8.0.5). Elle est plus ou moins longue et peut même être infinie. Dans ce dernier cas, A_i est constituée de zéro-termes à chaque étape. Il en est donc de même pour A. Ce cas correspond à celui de Jan Kuper [17] qui assure la consistance de $\{(Y\,\Omega_3) = m\}$ si $\lambda\beta + (\Omega_3\ m) = m \not\vdash m = \delta_3$.

Il reste donc à traiter le cas où n_x est fini. Autrement dit, celui où $x \in B$ i.e. celui où b s'échange en x, ou encore celui où $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m \vdash m = \delta_3$.

Il est alors naturel d'étudier la façon dont b peut s'échanger en x. À priori, cela peut se faire en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous avons voulu nous limiter à un seul échange dans l'espoir de poursuivre au cas général (cf. hypothèse 2). Or, ce cas s'est révélé être riche. Nous avons donc décidé de caractériser tous les termes qui satisfont cette propriété, appelés les termes $\vec{t}$-définissables (définition 9.1.12 et théorème 9.1.15). Malheureusement, si le cas n_x infini a lui été traité avec la bonne définition des échanges infinis $[A \rightarrow_\infty m]$, suite à une erreur le cas n_x fini a été traité avec la définition des échanges *simples* $[A \rightarrow m]$ (cf. définition 3.4.26). Or, les échanges *simples* infinis sont plus faibles que les échanges infinis (cf. remarque 3.4.30). En conséquence, les deux résultats essentiels de cette thèse s'expriment ainsi : sous les hypothèses H_1 et H_2, qui induisent $m \vdash \delta_3$, le terme m est lui-même auto-similaire et la clôture $Cls_m(Y\,\Omega_3)$ n'est composée que de zéro-termes. Si les échanges infinis avaient été utilisés, nous aurions obtenus que $Cl_m(Y\,\Omega_3)$ n'est composée que de zéro-termes ce qui aurait entraîné $Cons\{(Y\,\Omega_3) = m\}$.

Afin d'illustrer le schéma de la preuve, manipulons un exemple. Notons $=_\mu$ la relation d'échange $\Delta_\infty = m$. Avant tout, si b s'échange en x en une étape, cet échange doit nécessairement se situer en tête puisque le résultat x n'a pas de tête (proposition 9.1.1). Le terme b s'écrit donc $(u \quad \vec{t})$, avec u sa tête et $\vec{t}$ ses arguments. Prenons par exemple $b = (\Delta_\infty \quad (\lambda wyz.x) \;\; \Delta_\infty)$. Alors $b =_\mu (m \quad (\lambda wyz.x) \;\; \Delta_\infty) \rightarrow^*_\beta x$. Ainsi, x apparaît dans B_2 et Δ dans A_2. En fait, si l'on veut décrire B_2 avec plus de précisions, le mieux est de remarquer que Δ_∞, qui est élément de A_0, apparaît plusieurs fois dans b, ce qui constitue autant d'échanges possibles. Ainsi, une solution consiste à exprimer B_2 en fonction de A_2, ce qui donne ici : $B_2 \subseteq \{x\} \cup (A_2 \; (\lambda wyz.x) \; A_2)$. Si nous pouvions ensuite garantir que les classes B_i garderont bien ces formes, et si nous pouvions exprimer A_i à l'aide de contextes de zéro-termes dans lesquels seraient substitués des éléments de B_i, du genre $A_i \subseteq G[B_i]$, nous pourrions alors inclure la classe A_i dans une classe de zéro-termes définie à l'aide d'un point fixe.

Les classes B_i garderont bien cette forme. C'est une conséquence des lemmes de non-capture (7.5.6 et 9.2.26) et de l'utilisation des *parties utiles*, variantes des arbres de Böhm, issues du λ-*calcul dirigé* de David et Nour [8, 9] (proposition 9.1.6) appliquées à la réduction $(m \;\; \vec{t}) \rightarrow^*_\beta x$. La non-capture nous assurera que les échanges dans B_2 se feront soit dans la tête A_2, soit dans les arguments $(\lambda wyz.x)$ et Δ_∞. Elle permettra ainsi de séparer l'étude des échanges entre ceux de la tête u et ceux des arguments $\vec{t}$.

Les parties utiles permettront quant à elles de traiter la classe des arguments. Des termes initiaux ne seront conservés qu'un squelette “intouchable” par les échanges de zéros-termes tels ceux contenus dans A_2. Les trous du squelette seront alors comblés par l'ensemble des tous les termes Λ^∞ afin de constituer une classe $\mathbb{T}$. Ainsi, B_2 se retrouvera incluse dans la classe $(A_2 \;\; (\lambda wyz.x) \;\; \Lambda^\infty)$, puisque dans la réduction $(m \quad (\lambda wyz.x) \;\; r) \rightarrow_\beta x$, l'argument r ne *sert à rien*. La classe Λ^∞ possédant l'avantage d'être clairement stable par tout échange.

Pour exprimer A en fonction de B, regardons l'effet que produit un échange par m du sous-terme Δ en tête des termes de A_2. Par exemple, $(\Delta_\infty \;\; \delta[b]) =_\mu (m \;\; \delta[b]) \rightarrow^*_\beta \Big(b\big[\,\delta[b]\,\big] \quad b\big[\,b[\,\delta[b]\,]\,\big] \quad b\big[\,\delta[b]\,\big] \quad \delta[b]\Big)$. Les termes de A semblent alors se construire à l'aide de classes de contextes —D pour les arguments, E et F pour la tête— qui sont elles-mêmes définies par un point fixe (définition 9.2.9) et auxquelles sont substitués des éléments de B. F étant alors clairement composée de zéro-termes, on en déduira que A l'est aussi.

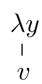
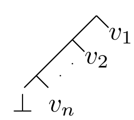
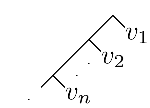
L'exemple $m = \delta[b]$ qui vient d'être traité s'échange dès la deuxième étape et en une seule fois en δ_3. Si nous examinons tous les termes b qui peuvent donner x en un seul échange, alors nous remarquons qu'il faut parfois attendre une étape supérieure à la deuxième pour qu'il se produise. C'est le cas par exemple pour le terme $m = \delta\big[(u\ (\lambda wyz.x)\ \Delta_\infty)\big]$ où $u = \Big(\Delta\ \ \delta\big[(u\ (\lambda wyz.x)\ m)\big]\Big)$. Autrement dit, $u = \Big(\Delta\ \ \delta\Big[\big(u\ (\lambda wyz.x)\ \delta\big[(u\ (\lambda wyz.x)\ \Delta_\infty)\big]\big)\Big]\Big)$. Nous remarquons alors que $A_1 = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+[m]$ et que $u \notin \Delta_+[m] = \Delta_+\Big[\delta\big[(u\ \ (\lambda wyz.x)\ \Delta_\infty)\big]\Big]$. En effet, l'un possède m comme dernier argument dans son contexte δ, l'autre Δ_∞. Cependant, au bout du deuxième échange, $m = \delta\big[(u\ (\lambda wyz.x)\ \Delta_\infty)\big] =_\mu \delta\big[(u\ (\lambda wyz.x)\ m)\big] = u$. D'où $u \in A_2$ et $x \in B_3$. Enfin, remarquons que cet exemple de terme m, dans lequel b s'échange en x au bout de plusieurs étapes à priori “administratives”, est défini à l'aide d'un point fixe. Le théorème 9.1.15 nous montrera que de tels termes s'écrivent tous de cette façon. Encore une fois, nous vérifions que le caractère auto-similaire dans l'étude des termes faciles est essentiel.

Les chapitres suivants sont consacrés à la preuve de ces résultats.

Chapitre 6

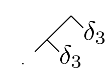
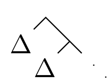
Réduction des termes m compatibles avec δ_3

Selon la proposition 4.1.4, les seuls termes m dont la consistance de $\lambda\beta + \{\, (Y\,\Omega_3) = m\}$ n'ait pas encore été prouvée ont leur arbre de Böhm compatible avec δ_3. Comme tous les non résolubles peuvent être identifiés sans contradiction (cf. théorème 1.2.19), m est résoluble et il s'écrit donc sous la forme $m = \lambda x.(x\; b_1\; b_2)$ où $(b_i)_{i=1,2}$ peuvent être non résolubles ou égaux à la variable x. De plus, le corollaire 4.2.6, assure la consistance de $\lambda\beta + \{(Y\,\Omega_3) = \delta_3\}$. Le cas $m = \delta_3$ est donc exclu. Parmi les non résolubles, nous pouvons faire la distinction entre ceux avec abstractions et les zéro-termes forts. Et parmi les zéro-termes forts, nous pouvons encore séparer ceux de degré fini des autres. Au total nous avons trois cas :

1. b_i n'est pas un zéro-terme et $b_i^\infty =$ 
2. b_i est un zéro terme fort de degré fini et $b_i^\infty =$ 
3. b_i est un zéro terme fort de degré infini et $b_i^\infty =$ 

Nous allons montrer la consistance pour les cas (1) et (2). Pour cela, dans les deux cas nous construirons des classes confinantes dont les échanges ne pourront être effectués qu'à droite de l'application située à la racine de ces zéro-termes. Dans de telles classes, les conditions pour être confinantes sont rapides à montrer.

Notation 6.0.1
Les termes
Ils seront considérés comme potentiellement infinis et Λ désignera l'ensemble des termes infinis.

- $\Delta = (\cdots \delta_3\; \delta_3) =$ 
- $\Delta_\infty = (\Delta\; (\Delta \cdots)\,) =$ 

Théorème 6.0.2 *Soient b_1 et b_2 deux termes finis et $(b_i^\infty)_{i=1,2}$ leur forme normale infinie. Soit $m = \lambda x.(x\; b_1\; b_2)$ un terme clos. Si l'un des deux $(b_i^\infty)_{i=1,2}$ n'est ni x ni un OTF de degré infini, alors on a $Cons\{(Y\,\Omega_3) = m\}$.*

Preuve Nous allons supposer que b_1 est différent de x et n'est pas un zéro terme fort de degré infini.

Notons γ le contexte $\lambda x.(x\ [\,]\ [\,])$.

Introduisons les classes :

- $\mathcal{B}$ est l'ensemble des formes normales infinies ne possédant que x comme variable libre et commençant soit par une abstraction $\lambda y.w$, soit par une variable $(x\ \vec{w})$.
- $\mathcal{D}$ est l'ensemble des OTF de degré fini sous forme normale infinie ne possédant que x comme variable libre.
- $\mathcal{C}_1 = (\Delta\ \gamma[\mathcal{B}, \Lambda^\infty])\ |\ (\Delta\ \gamma[\mathcal{D}, \Lambda^\infty])\ |\ (\Delta\ \mathcal{C}_1)$
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \{\Delta_\infty\}$

Montrons que $\mathcal{C}$ est une classe confinante pour m. Pour cela, nous allons établir que $\mathcal{C}[\mathcal{C} \to m]^s \subseteq \mathcal{C}$ en 8 étapes. Au préalable, remarquons que les termes de $\mathcal{C}$ s'écrivent tous sous la forme $(\Delta\ v)$ qui sont des OT.

$\triangleleft$ **Étape 1** $\triangleright$

$\mathcal{B}[\mathcal{C} \to_\infty m] \subseteq \mathcal{B}$

Preuve Les termes de $\mathcal{B}$ s'écrivent soit $\lambda y.w$ soit $(x\ \vec{w})$, alors que ceux de $\mathcal{C}$ s'écrivent $(\Delta\ v)$. Les seuls sous termes de $\lambda y.w$ qui appartiennent à $\mathcal{C}$ sont donc dans w. Après échange, $\lambda y.w$ s'écrit donc $\lambda y.w'$ qui est encore un élément de $\mathcal{B}$. De même pour $(x\ \vec{w})$.

$\triangleleft$ **Étape 2** $\triangleright$

$\mathcal{D}[\mathcal{C} \to_\infty m] \subseteq \mathcal{D}$

Preuve La preuve est identique à l'étape 1 en remarquant que les termes de $\mathcal{D}$ s'écrivent tous sous la forme $(\perp\ \vec{v})$ (cf. proposition 3.3.5).

$\triangleleft$ **Étape 3** $\triangleright$

Pour toutes classes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, $\gamma[\mathcal{U}, \mathcal{V}]\,[\mathcal{C} \to_\infty m] \subseteq \gamma[\,\mathcal{U}[\mathcal{C} \to_\infty m]\,,\, \mathcal{V}[\mathcal{C} \to_\infty m]\,]$

Preuve Les termes de $\mathcal{C}$ sont tous non résolubles. Les seuls sous-termes non résolubles de $\gamma[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ se situent dans $\mathcal{U}$ ou dans $\mathcal{V}$. D'où le résultat.

$\triangleleft$ **Étape 4** $\triangleright$

Pour toute classe $\mathcal{U}$, $(\Delta\, \mathcal{U})\,[\mathcal{C} \to_\infty m]^s \subseteq (\Delta\ \ \mathcal{U}[\mathcal{C} \to_\infty m]^s)$

Preuve L'échange étant strict, il a soit lieu dans Δ soit dans $\mathcal{U}$. Or, il ne peut avoir lieu dans Δ. En effet, les termes de $\mathcal{C}$ sont de deux sortes :

- soit Δ_∞ qui possède une branche infini à droite alors que les sous-termes de Δ n'en possèdent pas.
- soit ils possèdent un sous-terme de la forme $\gamma[u, v]$ avec $u \neq x$, alors que le seul sous-terme de Δ est δ_3 qui s'écrit $\gamma[x, x]$.

$\triangleleft$ **Étape 5** $\triangleright$

$(\Delta\ \gamma[\mathcal{B},\ \Lambda^\infty])\,[\mathcal{C} \to_\infty m]^s \subseteq \mathcal{C}_1$ et $(\Delta\ \gamma[\mathcal{D},\ \Lambda^\infty])\,[\mathcal{C} \to_\infty m]^s \subseteq \mathcal{C}_1$

Preuve Dérive des 4 étapes précédentes.

$\triangleleft$ **Étape 6** $\triangleright$

$(\Delta\, \mathcal{C}_1)\,[\mathcal{C} \to_\infty m]^s \subseteq (\Delta\ \ \mathcal{C}_1[\mathcal{C} \to_\infty m]^s) \cup \mathcal{C}_1$.

Preuve D'après l'étape 4, $(\Delta\ \mathcal{C}_1)\,[\mathcal{C} \to_\infty m]^s \subseteq (\Delta\ \ \mathcal{C}_1[\mathcal{C} \to_\infty m]\,)$. En distinguant échanges stricts et triviaux, il vient $(\Delta\ \ \mathcal{C}_1\,[\mathcal{C} \to_\infty m]\,) \subseteq (\Delta\ \ \mathcal{C}_1\,[\mathcal{C} \to_\infty m]^s\,) \cup (\Delta\ m^\infty)$. Or, $m^\infty = \gamma[b_1^\infty, b_2^\infty]$ et $\gamma[b_1^\infty, b_2^\infty]$ appartient à $\gamma[\mathcal{B}, \Lambda^\infty]$ ou à $\gamma[\mathcal{D}, \Lambda^\infty]$. On en déduit donc $(\Delta\ m^\infty) \in \mathcal{C}_1$.

$\triangleleft$ **Étape 7** $\triangleright$

$\mathcal{C}_1\,[\mathcal{C} \to m]^s \subseteq \mathcal{C}_1$.

Preuve Par induction sur la grammaire de $\mathcal{C}_1$. Les cas atomiques se déduisent de l'étape 5. Le cas d'induction se déduit de l'étape 6.

$\triangleleft$ $\boxed{\textbf{Étape 8}}$ $\triangleright$

$\mathcal{C}\,[\mathcal{C} \to m]^s \subseteq \mathcal{C}$.

Preuve D'après l'étape 7, il nous reste à établir que $\{\Delta_\infty\}\,[\mathcal{C} \to m]^s \subseteq \mathcal{C}$. Comme $\Delta_\infty = (\Delta\ \Delta_\infty)$, d'après l'étape 4, les échanges ont lieu dans le sous-terme Δ_∞. Si cet échange est trivial, le résultat est $C[m]^\infty = (\Delta\ m^\infty)$ qui appartient à $\mathcal{C}$. Sinon, on conclut par induction sur la profondeur du premier l'échange.

$\mathcal{C}$ forme donc une classe confinante pour m qui contient $\Delta_\infty = (Y\ \Omega_3)^\infty$ et qui est composée de zéro-termes. Nous obtenons donc $Cons\{(Y\ \Omega_3) = m\}$ grâce au théorème 3.4.28. $\square$

Jusqu'à présent, les classes confinantes que nous avons exhibées étaient toutes formées de termes s'écrivant $(\Delta\ v)$. Terminons cette partie en signalant les limites de cette technique.

Fait 6.0.3 *Soit $\mathcal{C}$ la classe des termes s'écrivant $(\Delta\ v)$. Alors $\mathcal{C}$ n'est pas confinante.*

Preuve Non seulement la classe n'est pas confinante mais en plus nous pouvons montrer que des termes avec abstraction apparaissent dans $\mathcal{C}[\mathcal{C} \to m]^s$.

En effet, prenons $m = \delta_3$ et notons $0 = \lambda xy.y$. Comme $\Delta = (\Delta\ \delta_3)$ alors Δ appartient à $\mathcal{C}$. Les échanges dans $\mathcal{C}$ peuvent donc se faire en tête. Ainsi, $(\Delta\ 0) \to_{\Delta=m} (\delta_3\ 0) \simeq_\beta (0\ 0\ 0) \to_\beta^* 0$. Or, 0 n'est pas un élément de $\mathcal{C}$. $\square$

Chapitre 7

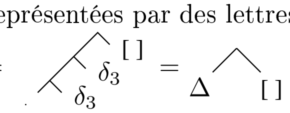
Notations, définitions et résultats liminaires

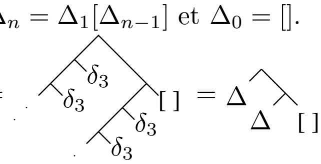
Ce chapitre à pour but de fournir les outils nécessaires à la description des classes d'échangés. En premier, nous examinerons comment un contexte peut filtrer les termes Δ et $\delta[b]$ qui composent les termes $(Y\,\Omega_3)^\infty$ et m. Puis, nous étudierons en détails les réductions $(c\ \vec{s}) \to_{\infty\beta\perp} x$ qui se terminent vers la variable x. Ces réductions apparaîtront lorsque m, qui s'écrit $\delta[b]$, s'échangera en δ_3. Dans ce cas, il apparaîtra une réduction $b \to_{(Y\,\Omega_3)=m} x$ qui fera intervenir une réduction $(c\ \vec{s}) \to_{\infty\beta\perp} x$. À propos de ces réductions, nous établirons deux résultats que nous appliquerons à b :

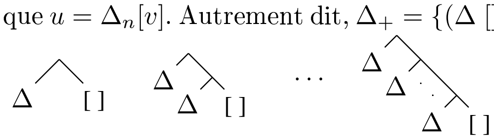
- *le lemme de non-capture* : si b s'écrit $(u\ \vec{t})$ alors les échanges de $(Y\,\Omega_3)$ par m s'effectuent soit à l'intérieur de u, soit dans $\vec{t}$.
- *la partie utile de $\vec{t}$* : si $b \to_{(Y\,\Omega_3)=m} (m\ \vec{t}) \to_{\infty\beta\perp} x$ alors nous pouvons extraire de $\vec{t}$ un squelette invariant par échanges de $(Y\,\Omega_3)$ par m.

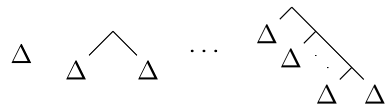
7.1 Rappel des notations

Notation 7.1.1
Les classes

- Elles seront représentées par des lettres capitales $A, B, \cdots$
- $\Delta_1 = (\Delta\ [])=$ 
- Pour tout $n \geq 1$, $\Delta_n = \Delta_1[\Delta_{n-1}]$ et $\Delta_0 = []$.

  Par exemple : $\Delta_2 =$ 
- Δ_+ désigne la classe de contextes $\bigcup_{n\geq 1} \Delta_n$. Ainsi, $u \in \Delta_+[v]$ signifie qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $u = \Delta_n[v]$. Autrement dit, $\Delta_+ = \{(\Delta\ []\ ), (\Delta\ (\Delta\ []) \ ), \cdots\}$.

  Graphiquement : 
- Δ_* désigne la classe des contextes $\{[]\} \cup \Delta_+$.
- $\widehat{\Delta_+}$ représente la classe des termes $\Delta_+[\delta_3]$.

Graphiquement : 

Remarque 7.1.2
- $\Delta = \Delta_1[\delta_3]$.
- $\Delta_n[t]$ est non-résoluble pour tout terme t et pour tout entier $n \geq 1$.

7.2 Les filtrages

Les lemmes suivant décrivent comment les termes présentés à la section précédente peuvent s'inclure les uns dans les autres.

Lemme 7.2.1 *Soient w un terme et a un OTF.*

1. *Si $a \leq (\Delta\ w)$, alors soit $a = (\Delta\ w)$, soit $a = \Delta$, soit $a \leq w$.*
2. *Si $a \leq \delta[w]$, alors $a \leq w$.*

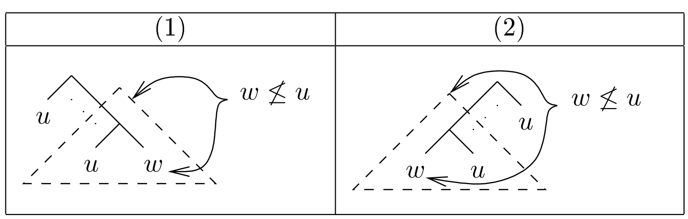
Preuve

1. Le cas trivial est $a = (\Delta\ w)$. Si $a < (\Delta\ w)$, les sous-termes immédiats de $(\Delta\ w)$ étant Δ et w, alors $a \leq \Delta$ ou $a \leq w$. Si $a \leq \Delta$, alors $a = \Delta$ qui est le seul sous-terme non-résoluble de Δ.
2. Le résultat découle du fait que le seul sous-terme éventuellement non-résoluble de $\delta[w]$ est w. □

Lemme 7.2.2

1. *Soit t un terme qui s'écrit $t = (u(u \cdots (u\ v) \cdots))$ avec n fois u et w un terme tel que $w \not\leq u$. Si $w \leq t$, alors :*
   - *soit $t = (u \cdots (u\ w) \cdots)$ avec $p \leq n$ fois u*
   - *soit il existe un contexte non trivial C tel que $t = (u \cdots u\ C[w])$*
2. *On a le résultat symétrique si $t = (v\ u \cdots u)$*

Remarque 7.2.3 Graphiquement, ce lemme se représente ainsi :



Preuve Traitons le premier point. La preuve se fait par induction sur la profondeur du sous-terme w de t. Si $w = t$, c'est le premier cas. Si $n = 0$, c'est le deuxième cas. Sinon $n \geq 1$ et $w < t = (u\ \underbrace{(u \cdots (u}_{n-1}\ w) \cdots))$. Comme $w \not\leq u$, alors $w \leq \underbrace{(u \cdots (u}_{n-1}\ w) \cdots)$ et on conclut par induction. □

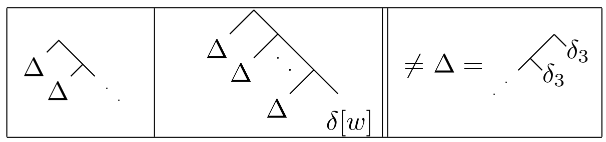
Lemme 7.2.4 *Soient u et w des termes et p un entier strictement positif. Si $u = \Delta_p \circ \delta[w]$ et $u \neq \Delta$ ou $u = \Delta_\infty$, alors :*

1. *$u \not\leq \Delta$.*
2. *Si $u \leq \delta[v]$, alors $u \leq v$.*
3. *Si $t = \Delta_q \circ \delta[v]$ et si $u \leq t$, alors :*
   (a) *soit $u \leq v$*

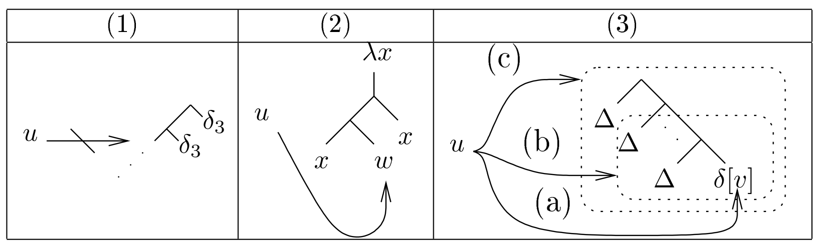
(b) *soit il existe* $r > 0$ *tel que* $q = p + r$ *et tel que* $\Delta_q \circ \delta[v] = \Delta_r[u]$*. Dans ce cas* $v = w$*.*

(c) *soit* $u = t$*.*

Remarque 7.2.5 Graphiquement, ce lemme s'exprime ainsi.
Si u est de l'une de ces deux formes :



Alors :



Remarque 7.2.6

- La condition $u \neq \Delta$ interdit à u d'être un sous-terme de tête.
- Les cas (b) et (c) pourraient se résumer en un seul. Mais dans les preuves nous serons souvent amenés à les distinguer. C'est pourquoi ils sont traités séparément dans ce lemme.

Preuve Remarquons que u est un OTF dans les deux cas.

1. Par définition, $\Delta = (\Delta\ \delta_3)$. D'après le lemme 7.2.1 point (1), si $u \leq (\Delta\ \delta_3)$ alors $u = \Delta$, ce qui contredit les hypothèses, ou bien $u \leq \delta_3$ qui constitue aussi une contradiction puisque u est non-résoluble.
2. $\delta[v] = \lambda x.(x\ v\ x)$. D'après le lemme 7.2.1 point (2), on a nécessairement $u \leq v$.
3. Montrons le résultat par récurrence sur q :
   - ▷ Si $q = 1$, alors $u \leq (\Delta\ \delta[v])$. D'après le lemme 7.2.1 point (1), nous devons traiter trois cas.
     - Soit $u = (\Delta\ \delta[v])$ et c'est le cas (3)(c)
     - Soit $u \leq \Delta$ ce qui est impossible par (1)
     - Soit $u \leq \delta[v]$ et dans ce dernier cas, le point (2) entraîne $u \leq v$ et c'est le cas (3)(a)
   - ▷ Si $q \geq 2$, alors $u \leq (\Delta\ \Delta_{q-1} \circ \delta[v])$. De même, le seul cas non-trivial correspond à celui où $u \leq \Delta_{q-1}[\delta[v]]$. Par hypothèse de récurrence :
     - si $u \leq v$, alors c'est le cas (3)(a)
     - si $u = \Delta_{q-1}[\delta[v]]$ dans ce cas $\Delta_{q-1} \circ \delta[v] = (\Delta\ u) = \Delta_1[u]$ et c'est le cas (b)
     - enfin, si $\Delta_{q-1} \circ \delta[v] = \Delta_{q-1-p}[u]$ où $v = w$ et $p < q - 1$, alors $\Delta_q \circ \delta[v] = \Delta_{q-p}[u]$ où $p < q - 1 < q$. □

7.3 Les contextes

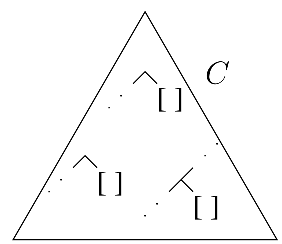
Cette section est consacrée aux contextes *normaux à droite*. De tels contextes possèdent la propriété suivante : $C[t]^\infty = C[t^\infty]$ pour tout terme t . Ils sont donc idéaux pour servir de constructeurs aux classes de termes normaux telles les classes confinantes.

Définition 7.3.1

1. *Un* contexte C filtre un terme v *s'il existe une suite de termes* $\vec{w}$ *telle que* $C[\vec{w}\,] = v$. *On le notera* $C \preceq v$.
2. – *Un trou* [] *d'un contexte* C *est* à droite *s'il existe un contexte* D *et un terme* v *tel que* $C = D[\,(v\ [])\,]$.
   – *Un contexte est à droite si toutes les occurrences des trous sont à droites.*

Remarque 7.3.2

– Les contextes à droite sont de la forme :



– Un contexte C qui n'est pas à droite possède un trou qui est, soit à gauche d'une application soit sous une abstraction. Dans les deux cas, il existe un contexte D, des suites éventuellement vides d'abstractions $\vec{\lambda}.$ et de termes $\vec{v}$ tels que $C = D[\,\vec{\lambda}.([]\ \vec{v})\,]$.

Proposition 7.3.3 *Soient* C *un contexte normal à droite et* $\vec{t}$ *une suite de termes. Alors* $C[\,\vec{t}\,]^\infty = C[\,\overrightarrow{t^\infty}\,]$.

Preuve La preuve est faite pour un seul trou. Par définition des contextes à droite, il existe un contexte D et un terme v tels que $C = D[\,(v\ [])\,]$. Comme C est normal, il en est de même pour v et D. De plus v est un zéro-terme sinon C posséderait un redex. Ainsi, $C[t]^\infty = D[\,(v\ t)\,]^\infty = D[\,(v\ t)^\infty\,]$ et $(v\ t)^\infty = (v\ t^\infty)$. Finalement, $C[t]^\infty = D[\,(v\,t^\infty)\,] = C[t^\infty]$. □

Lemme 7.3.4 *Soient* u *un terme sous forme normale infinie,* v *un OTF et* C *un contexte normal, à droite, fini et sans* $\bot$ *. Si* $v \leq C[u]$*, alors* $v \leq u$ *.*

Preuve u et v sont deux sous-termes du même terme $t = C[u]$. Étudions la position relative de u et v dans ce troisième terme t. Selon la proposition 1.1.11, on distingue trois cas :

▷ si $v \leq u$ on a le résultat.

▷ si u et v sont disjoints, alors il existe un contexte D tel que $D[u, v] = C[u]$. Ainsi, $C = D[\,[], v]$. C contient donc le terme v qui est un OTF. D'après la définition 3.3.5, C n'est donc pas normal, fini et sans $\bot$, contradiction.

▷ si $u < v$, alors il existe un contexte D non trivial tel que $v = D[u]$. Par hypothèse, $v \leq C[u]$, il existe donc un contexte E tel que $C[u] = E[v]$. Ainsi, $C = E \circ D$. Or, v est un OTF non nécessairement sous forme normale, sa forme de tête est donc soit un redex, soit $(\bot\ \vec{w})$, soit une branche infinie gauche.

- Si v est un redex, il existe des termes a, b et $\vec{c}$ tels que $v = (\lambda x.a\ b\ \vec{c})$. Comme C est un contexte à droite, u est à droite dans $C[u]$, et comme $C = E \circ D$, u est également à droite dans $D[u]$. Comme $D[u] = v$, il en résulte donc que u est un sous-terme à droite de $v = (\lambda x.a\ b\ \vec{c})$. Comme D est non trivial, u se trouve soit dans a, soit dans b, soit dans $\vec{c}$. Dans les trois cas D contient le redex de tête de v. De même pour $C = E \circ D$, ce qui contredit C est sous forme normale.
- Si $v = (\bot\ w_n \cdots w_1)$. Comme C est à droite, de même que pour le cas précédent, u est sous-terme de l'un des w_i. Il en résulte que $\bot$ apparaît dans D et donc également dans C, contradiction.
- Pour la branche infinie un raisonnement analogue permet de conclure, sachant qu'il n'existe pas de branches infinies dans C. □

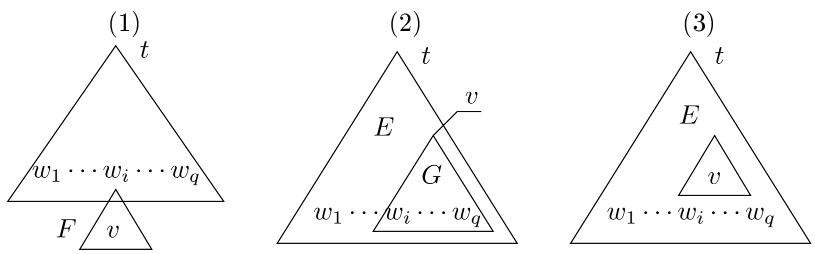
Deux sous-termes à l'intérieur d'un autre ont trois positions relatives possibles (proposition 1.1.11) : ils peuvent être disjoints, ou inclus l'un dans l'autre. La proposition suivante exprime le même résultat mais pour des contextes à trous multiples.

Proposition 7.3.5 *Soient C et D deux contextes, v un terme et $\vec{w}$ une suite de termes. Si $C[v] = D[\vec{w}\,]$, alors on a l'un des trois cas suivants :*

1. *il existe un entier i et un contexte $F \preceq w_i$ tels que $w_i = F[v]$ et tel que $C = D[w_1, \cdots, w_{i-1}, F, w_{i+1}, \cdots, w_q]$.*
2. *il existe un contexte G tel que $v = G[\vec{w}\,]$ et un contexte E tels que $C = E[\vec{w}, [\,]\,]$ et $D = E[\,\vec{[\,]}, G\,]$.*
3. *il existe un contexte E tels que $C = E[\vec{w}, [\,]\,]$ et $D = E[\,\vec{[\,]}, v\,]$.*

Preuve Le sous-terme v de $D[\vec{w}\,]$ peut se positionner de trois manières différentes. Soit v est un sous-terme de l'un des w_i et c'est le cas (1). Soit il est disjoint de tous les w_i, c'est le cas (3). Soit enfin ce sont des termes w_i qui sont sous-termes de v et c'est le cas (2). □

Remarque 7.3.6 Graphiquement, ces trois cas se représentent ainsi où $t = C[v] = D[\vec{w}]$:



7.4 Échanges de classes

Dans cette section, nous verrons la notion *d'échanges d'une classe* (E) suivant une suite croissante de classes $(A_i)_{i\geq 0}$ (cf. définition 7.4.2). Cette définition rejoint celle de la clôture $Cl(E)_{\bigcup A_i}$ (cf. définition 3.4.26) tout en imposant un ordre, celui induit par $A_0, A_1, \cdots$ dans la façon dont elle sera construite : $Cl(E)_{\bigcup A_i} = E_0 \cup E_1 \cup \cdots$. Cette ordre permettra d'établir des résultats grâce à une induction sur les classes $E_0, E_1, \cdots$

Définition 7.4.1 *Soit A une classe de termes.*

- *On dit qu'un terme u* s'échange en v (de A par m) *s'il existe $a \in A$ et C un contexte tel que $u = C[a]$ et $v = C[m]^\infty$.*

On distingue deux sortes d'échanges :

- *l'*échange de tête *: si le trou du contexte C est en tête, i.e. $C = ([\,]\ \vec{t}\,)$ où $\vec{t}$ est une suite de termes.*
- *l'*échange interne *: si le trou du contexte C n'est pas en tête, i.e. $C = (h\ D\ \vec{t}\,)$ où h est un terme, $\vec{t}$ une suite de termes et D un contexte.*

Définition 7.4.2 *Soit $(A_i)_{i\geq 0}$ une suite croissante de classes de termes, E une classe de termes sous forme normale, p un entier positif et m un non zéro-terme.*

1. *La* suite des échangés (resp. échangés stricts) *de E par $(\,(A_i)_{i\geq 0}\,, m)$ d'indice p est une suite $(E_i)_{i\geq 0}$ de classes telle que :*
   - $E_p = E$
   - $\forall i \geq p\ ,\ E_{i+1} = E_i \cup E_i[A_i \to_\infty m]$ *(resp. $E_i \cup E_i[A_i \to_\infty m]^s$)*
   - $\forall i < p\ ,\ E_i = \emptyset$

2. *Si la classe E est réduite à un seul terme ϵ, on parlera directement de la suite des échangés de ϵ plutôt que de la suite des échangés dans $E = \{\epsilon\}$.*

Remarque 7.4.3 Par définition des échanges, les termes des classes $(E_i)_{i\geq 0}$ sont tous sous forme normale. Lors d'échanges stricts, les classes se trouvent occupées de la façon suivante :

E_0	E_1	$\cdots$	E_p	E_{p+1}	$\cdots$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\cdots$	E	$E_{p+1} = E_p \cup E_p[A_p \to m]^s$	$\cdots$

Lemme 7.4.4 *Soit B une classe de termes.*

1. *pour toute variable z, $\{z\}\,[B \to_\infty m]^s = z$. Autrement dit les variables sont conservées par échanges stricts.*
2. *pour tout terme $(\lambda x.a)$, $\{(\lambda x.a)\}\,[B \to_\infty m]^s = \lambda x.(a\,[B \to_\infty m])$. Autrement dit les abstractions sont conservées par échanges stricts.*
3. *Si B est composée de zéro-termes, alors pour tout terme $(u\ \ v)$, $\{(u\ \ v)\,[B \to_\infty m]^s = (u\,[B \to_\infty m]\ \ v\,[B \to_\infty m])$. Autrement dit les applications sont conservées par échanges stricts selon des classes de OT.*

Preuve Immédiate. Le dernier est faux si B n'est pas composée de OT. Par exemple, $\{(u\ x)[u \to_\infty I]\}$ contient le terme x qui n'est pas une application. □

Notation 7.4.5 Comme les premières classes de la suite $(E_i)_{i\geq p}$ sont vides, on notera également $(E_i)_{i\geq p}$, la suite des classes en commençant directement à l'indice p.

Proposition 7.4.6 *Les suites des échangés sont croissantes par inclusion.*

Preuve Par définition des suites des échangés. □

Lemme 7.4.7
Soit η et ϵ deux termes tels que $\eta = D[\epsilon]$ où D est un contexte normal.
Soit m un non zéro-terme et $(A_i)_{i\geq 0}$ une suite croissante de classes de termes.
Soient deux entiers p_η et p_ϵ tels que $p_\eta \geq p_\epsilon$.
Soit $(E_i)_{i\geq p_\epsilon}$ la suite des échangés de ϵ par $(\,(A_i)_{i\geq 0}\,,\,m)$ et soit $(F_i)_{i\geq p_\eta}$ celle des échangés de η par $(\,(A_i)_{i\geq 0}\,,\,m)$.
Alors, pour tout entier i et pour tout zéro-terme e appartenant à E_i, on a $D[e] \in F_{i+p_\eta-p_\epsilon}$.

Remarque 7.4.8

- Les deux classes $(E_i)_{i\geq p_\epsilon}$ et $(F_i)_{i\geq p_\eta}$ évoluent ainsi :

$$\begin{array}{ccccc}
\epsilon \in E_{p_\epsilon} & & \longrightarrow & & e \in E_i \\
& \searrow & & & & \searrow \\
& & \eta = D[\epsilon] \in F_{p_\eta} & \longrightarrow & & & D[e] \in F_{i+p_\eta-p_\epsilon}
\end{array}$$

- Sous conditions, ce lemme montre que les échanges passent au contexte.
- Les indices ont pour but de définir un ordre dans lequel sont effectués les échanges. Cette ordre se révélera utile lorsque nous appliquerons ces échanges étape par étape.

Preuve Si $i < p_\epsilon$, alors E_i est vide et le résultat est trivial.
Pour $i \geq p_\epsilon$, on procède par récurrence sur i.
▷ Pour $i = p_\epsilon$. Si e appartient à E_{p_ϵ}, alors $e = \epsilon$. Or, par hypothèse, $\eta = D[\epsilon]$ qui appartient à $F_{p_\eta} = F_{p_\epsilon+p_\eta-p_\epsilon}$ d'où le résultat.
▷ Pour $i > p_\epsilon$. Si $e \in E_i$, alors $e \in E_{i-1} \cup E_{i-1}[A_{i-1} \to_\infty m]$. On distingue donc deux cas.

- Si $e \in E_{i-1}$, on conclut par récurrence.

– Si $e \in E_{i-1}[A_{i-1} \to_\infty m]$ il existe alors des termes $a \in A_{i-1}$ et $e_1 \in E_{i-1}$ ainsi qu'un contexte C tels que $e_1 = C[a]$ et tels que $e = C[m]^\infty$. C n'est pas trivial sinon $e = m^\infty$ qui n'est pas un OT.
Montrons que e_1 est un OT. Sinon, comme e_1 est normal, e_1 posséderait une abstraction à sa racine. D'après la remarque 7.4.4, et comme C n'est pas trivial, il en serait de même pour e, contradiction.
Par hypothèse de récurrence appliquée à e_1, $D[e_1] \in F_{i-1+p_\eta-p_\epsilon}$. Comme les classes $(A_j)_{j\geq 0}$ sont croissantes, $A_{i-1} \subseteq A_{i-1+p_\eta-p_\epsilon}$ et donc $a \in A_{i-1+p_\eta-p_\epsilon}$. Ainsi, comme $D[e_1] = D[C[a]]$, par définition des classes d'échanges, $D[C[m]]^\infty$ appartient à $F_{i-1+p_\eta-p_\epsilon}[A_{i-1+p_\eta-p_\epsilon} \to_\infty m]^s$ lui-même inclus dans $F_{i+p_\eta-p_\epsilon}$. Or, D et e sont normaux et e est un OT, $D[e]$ est donc également sous forme normale. Ainsi, $D[e] = D[e]^\infty = (D[C[m]^\infty])^\infty = (D[C[m]])^\infty$. On obtient donc bien $D[e] \in F_{i-1+p_\eta-p_\epsilon}[A_{i-1+p_\eta-p_\epsilon} \to_\infty m]^s \subseteq F_{i+p_\eta-p_\epsilon}$ □

7.5 NON CAPTURE ET PARTIE UTILE DE $\vec{s}$ SI $(c\,\vec{s})^\infty = x$

L'étude des réductions $(c\,\vec{s}) \to_{\infty\beta\perp} x$ s'apparente à celui des réductions évanouissantes dans lesquels des contextes C se réduisaient à une variable [] (cf. définition 1.3.46). Cette étude sera approfondie tant d'un point de vue opératoire, avec l'extraction de la *partie utile minimale* aux arguments $\vec{s}$ (définition 7.5.11), que du point des filtrages avec le *lemme de non capture* 7.5.6. La non-capture se déduira de la proposition 7.5.5. Celle-ci énumère les différentes façons de réduire les termes $(\delta[u]\ \delta[v])$. La partie utile de $(c\ \vec{s}\,) \to_{\infty\beta\perp} x$, sera une transposition au calcul infini de celle exposée dans le lambda-calcul dirigée [9]. Cette transposition étant possible grâce aux lemmes d'approximation de la section 2.1.3 et du lemme 2.2.9.

Définition 7.5.1 *Soient $v, w, \vec{s}$ des termes tels que $v \leq (w\ \vec{s}\,)$.*
On dit que v capture *$\vec{s}$ s'il existe deux suites de termes $\vec{s_1} \neq \emptyset$ et $\vec{s_2}$ telles que $v = (w\ \vec{s_1})$ et telles que $\vec{s} = <\vec{s_1}, \vec{s_2}>$.*

Remarque 7.5.2 Si v capture $(w\ \vec{s})$ alors $(\underbrace{w\ s_1 \cdots s_i}_{v}\ s_{i+1} \cdots s_n)$.

Lemme 7.5.3 *Soient $v, w, \vec{s}$ des termes tels que $v \leq (w\ \vec{s}\,)$, alors :*
- *soit $v \leq w$*
- *soit $v \leq \vec{s}$ i.e. il existe $s_i \in \vec{s}$ tel que $v \leq s_i$*
- *soit v capture $\vec{s}$*

Preuve Immédiate par récurrence sur $l(\vec{s}\,)$ le nombre d'éléments de la suite. □

Définition 7.5.4 *Un* OTFx *est un terme qui est soit la variable x soit un OTF.*

Proposition 7.5.5 *Si $a, b \in \delta[OTFx] \cup OTF$, alors $(a\ b)^\infty$ est un OTF.*

Preuve a peut revêtir trois formes : δ_3 , $\delta[u]$ où u un est OTF ou bien simplement u un OTF. De même pour b qui peut être δ_3 , $\delta[o]$ ou o, o étant un OTF. Il y a donc en tout 9 cas.

On rappelle d'abord que si o est un OTF, pour tous termes w et $\vec{s}$, $o[w/x]$ et $(o\ \vec{s}\,)$ restent des OTF.

▷ Si a est un OTF, le résultat est vrai. On élimine 3 cas.
▷ Si $a = \delta[u]$ où u est un OTF :
  – Si $b = o$ un OTF. Ainsi, $(\delta[u]\ o) \to_\beta (o\ \ u[o/x]\ o)$ qui est un OTF.
  – Si $b = \delta[o]$ où o est un OTFx alors $(\delta[u]\ \delta[o]) \to_\beta (\delta[o]\ \ u[\delta[o]/x]\ \delta[o]) \to_\beta (u[\delta[o]/x]\ \ o[u[o/x]/x]\ u[o/x]\ \delta[o])$ qui est bien un OTF par stabilité des OTF vis-à-vis des substitutions
▷ Si $a = \delta_3$:
  – Si $b = o$ un OTF, alors $(\delta_3\ o) \to_\beta (o\ o\ o)$ qui est un OTF.

– Si $b = \delta[o]$ où o est un OTF alors $(\delta_3\ \delta[o]) \to_\beta (\delta[o]\ \delta[o]\ \delta[o])$ qui est bien un OTF puisque o est un OTF, voir cas $a = \delta[u]$
– Si $b = \delta_3$, $(\delta_3\ \delta_3) \to_{\infty\beta\perp} \Delta$ un OTF. □

Lemme 7.5.6
Soient $c \in \delta[OTFx]$ et $\vec{s}$ une suite de termes telles que $(c\ \vec{s}\ )^\infty = x$.
Si $a_1 \in \Delta_* \circ \delta[OTFx] \cup \Delta_+[OTF]$, et si $a_1 \leq (a_2\ \vec{s})$, alors a_1 ne capture pas $\vec{s}$.

Preuve Par l'absurde, si a_1 capture $\vec{s}$, alors il existe deux suites de termes, $\vec{s_1}$ et $\vec{s_2}$, telles que $a_1 = (a_2\ \vec{s_1})$ et telles que $\vec{s} =< \vec{s_1}, \vec{s_2} >$. Pour toute suite $\vec{s_1} = s_{1,1} \cdots s_{1,n}$ et pour tous termes a_1, a_2 vérifiant les conditions de l'énoncé, montrons par récurrence sur n le nombre de termes de $\vec{s_1}$, que si $a_1 = (a_2\ \vec{s_1})$ alors $(c\ s_{1,1})$ est un OTF. Il en résulte une contradiction puisque dans ce cas $(c\ \vec{s}\ )^\infty = (c\ s_{1,1} \cdots s_{1,n})^\infty = (c\ s_{1,1})^\infty s_{1,2}^\infty \cdots s_{1,n}^\infty \vec{s_2}^\infty \neq x$ puisque $(c\ s_{1,1})^\infty$ est un OTF.

Par hypothèse de l'énoncé, le terme a_1 peut revêtir trois formes : soit $\delta[w]$ où w est un OTFx, soit $(\Delta\ (\Delta_* \circ \delta[w]))$ où w un OTFx, soit $(\Delta\ u)$ où u est un OTF.

▷ Si $n = 1$, alors $a_1 = (a_2\ s_{1,1})$. Examinons les trois cas possibles de a_1 :
  – $a_1 = \delta[w]$ est écarté puisqu'alors a_1 ne peut être l'application $(a_2\ s_{1,1})$.
  – Si $a_1 \in (\Delta\ (\Delta_* \circ \delta[w]))$, alors $s_{1,1} \in \Delta_* \circ \delta[w]$. Selon la proposition 7.5.5, $(c\ s_{1,1})^\infty$ est un OTF, il est donc différent de x.
  – Si $a_1 \in (\Delta\ u)$ où u est un OTF, alors $s_{1,1} = u$ est également un OTF. Selon la proposition 7.5.5, $(c\ s_{1,1})^\infty$ est un OTF.

▷ Si $n > 1$, alors $a_1 = (a_2\ s_{1,1} \cdots s_{1,n})$.
De même, on exclut $a_1 = \delta[w]$, il reste donc $a_1 \in \Delta\ (\Delta_* \circ \delta[w])$ ou $a_1 \in (\Delta\ u)$. Dans les deux cas on a $\Delta = (a_2\ s_{1,1} \cdots s_{1,n-1})$. Or, $\Delta = (\Delta\ \delta_3) \in \Delta_* \circ \delta[OTFx]$, par récurrence sur n appliquée à $a_1' = \Delta$, $a_2' = a_2$ et $\vec{s_1'} = s_{1,1} \cdots s_{1,n-1}$, on obtient donc $(c\ s_{1,1})^\infty$ est un OTF. □

Remarque 7.5.7 Ce lemme de non capture permet d'affirmer que les échanges dans $(c\ \vec{s}\ )$ se font ou bien dans c, ou bien dans $\vec{s}$. L'étude des échanges peut donc se séparer en deux : celle de c d'une part, et celle de $\vec{s}$ d'autre part.

Lemme 7.5.8 *Soit r un terme qui s'écrit soit $(\Delta\ \vec{u}\ )$, soit $\delta[e]$.*
Si C filtre r, i.e. $r \in C[\Lambda]$, alors pour toute suite de termes $\vec{v}$ et pour toute variable neuve z, $(\delta\ C[z]\ \vec{v}\ ) \not\to_{\infty\beta\perp} z$.

Remarque 7.5.9 Autrement dit, si $(c\ \vec{s})^\infty = x$, alors s_1 ne peut être seul "responsable" de la réduction vers x de $(c\ \vec{s})$ si, après substitution, il peut s'écrire sous la forme $(\Delta\ \vec{u}\ )$ ou bien $\delta[e]$.

Preuve Un premier calcul donne : $(\delta\quad C[z]\ \vec{v}\ ) \to_\beta (C[z]\quad []\ C[z]\ \vec{v}\ )$. Notons $d = (C[z]\ \ []\ C[z]\ \vec{v}\ )$.

Examinons les différentes formes normales de tête possibles pour $C[z]$: sans, avec une ou avec deux abstractions.
 – Si $C[z]$ est non-résoluble, alors d est aussi non-résoluble et donc $d^\infty \neq z$.
 – Si $C[z] \to_\beta^* (y\ \vec{w}\ )$ où $\vec{w}$ est une suite de termes et y une variable, alors $d \to_\beta^* (y\ \ \vec{w}\ []\ C[z]\ \vec{v}\ ) \neq z$.
 – Si $C[z] \to_\beta^* \lambda y.(z\ \vec{w}\ )$, alors pour une certaine substitution σ, $d \to_\beta^* (z\ \ \vec{w}(\sigma)\ []\ C[z]\ \vec{v}\ ) \neq z$.
 – Si $C[z] \to_\beta^* \lambda y.(y\ \vec{w}\ )$, alors pour une certaine substitution σ, $d \to_\beta^* ([]\ \ \vec{w}(\sigma)\ C[z]\ \vec{v}\ ) \neq z$.
 – Sinon $C[z] \to_\beta^* \lambda xy.w$. Dans ce cas $C \to_\beta^* \lambda xy.D$ où D est un contexte. Comme C filtre r, la forme normale de tête de r possède aussi deux abstractions. Ce qui est incompatible avec l'hypothèse r s'écrit $(\Delta\ \vec{u}\ )$ ou $\delta[e]$. Contradiction. □

Lemme 7.5.10 *Soit x une variable, r un terme clos et $(s_1, \cdots, s_n)$ des termes normaux. Si $(r\ s_1 \cdots s_n) \to_\infty x$, alors il existe une suite $(C_1, \cdots, C_n)$ de contextes à droite, finis, normaux et sans $\perp$ ainsi qu'une suite de substitutions $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$, tels que :*

1. *$\forall 1 \leq i \leq n,\ s_i = C_i[\sigma_i]$.*
2. *$(r\ C_1 \cdots C_n)^\infty = x$.*
3. *Pour toute variable neuve z , pour tout $i \leq n$ et pour tout contexte D, s'il existe un contexte non-trivial E tel que $D \circ E = C_i$, alors il existe une suite de termes $\vec{w}$ telle que $(r\ \ C_1 \cdots D[z] \cdots C_n)^\infty = (z\ \vec{w}\ )$.*
4. *Il existe un unique indice $i_0 \leq n$ et un contexte normal et clos D tel que :*
   - *pour tout $i \neq i_0$, C_i est clos*
   - *$FV(C_{i_0}) = \{x\}$ et $C_{i_0} = D[x]$*
   - *pour toute variable neuve z, $(r\ \ C_1 \cdots D[z] \cdots C_n)^\infty = z$*
   - *pour tout terme w, $D[w]^\infty = D[w^\infty]$.*

Définition 7.5.11 *En prenant les notations du lemme 7.5.10, la suite de contextes $(C_1 \cdots C_n)$ est appelée la* partie utile *de $\vec{s}$ dans la réduction $(r\ \vec{s}\ )^\infty = x$.*

Preuve Si $(r\ s_1 \cdots s_n) \rightarrow_{\infty\beta\perp} x$, d'après le lemme 2.2.10, il existe un terme u' tel que $(r\ s_1 \cdots s_n) \rightarrow_{\infty\beta} u' \rightarrow_{\infty\perp} x$. Comme x est sans $\perp$, alors $(r\ s_1 \cdots s_n) \rightarrow_{\infty\beta} x$. Comme x est fini, d'après le lemme 2.1.26, $(r\ s_1 \cdots s_n) \rightarrow_\beta^* x$.

D'après le lemme 2.1.28, il existe un entier p tel que tout terme $(r'\ \ s'_1 \cdots s'_n)$ qui satisfait $(r'\ \ s'_1 \cdots s'_n) \equiv_p (r\ \ s_1 \cdots s_n)$ vérifie $(r'\ \ s'_1 \cdots s'_n) \rightarrow_\beta^* x$, et par standardisation, $(r'\ s'_1 \cdots s'_n) \rightarrow_\beta^{h,*} x$. En particulier, tout contexte $F' = (R'\ C'_1 \cdots C'_n)$ qui filtre $(r\ s_1 \cdots s_n)$ et dont les trous sont à des profondeurs supérieures à p vérifient $F' \rightarrow_\beta^{h,*} x$.

Fixons $F = (R\ C_1 \cdots C_n)$ le plus petit de tels contextes F' selon l'ordre $\preceq$ entre contextes. Montrons que $(C_1, \cdots, C_n)$ satisfait les conditions de l'énoncé.

Par symétrie des rôles, les preuves ne sont faites que pour C_1.

Remarquons d'abord que tout sous-terme de C_1 passe en tête (cf. définition 1.3.9) dans la réduction $F \rightarrow_\beta^{h,*} x$. Sinon, si G est un sous-terme de C_1, alors il existe un contexte D tel que $C_1 = D \circ G$. D'après le lemme 1.3.11, comme x n'a pas de sous-terme interne, $(R\ D \cdots C_n) \rightarrow_\beta^{h,*} x$ ce qui contredit la minimalité de F.

- C_1 est normal car il filtre s_1 un terme normal.
- C_1 est sans $\perp$ car $\perp$ ne peut passer en tête dans une réduction qui se termine sur x.
- Si C_1 possède un trou qui n'est pas à droite, selon la remarque 7.3.2, il existe un contexte D tel que $C_1 = D[\vec{\lambda}.[]\ \vec{v}]$. Comme le sous-terme $\vec{\lambda}.([]\ \vec{v})$ passe en tête dans la réduction $F \rightarrow_\beta^{h,*} x$, alors il existe une suite de termes $\vec{w}$ telle que $F \rightarrow_\beta^{h,*} (\vec{\lambda}.\ []\ \vec{w})$, contradiction quelles que soient les suites $\vec{\lambda}.$ et $\vec{w}$.

Vérifions les 4 points :

1. est vrai car C_1 filtre s_1
2. par définition de $(C_1\ \cdots\ C_n)$
3. si $C_1 = D[E]$ alors E passe en tête. Ainsi, $(R\ D[z]\ C_2 \cdots C_n) \rightarrow_\beta^{h,*} \vec{\lambda}.(z\ \vec{w})$. Comme $(R\ \ D[E]\ \ C_2 \cdots C_n) \rightarrow_\beta^{h,*} x$ qui est sans abstraction, finalement $(R\ D[z]\ C_2 \cdots C_n) \rightarrow_\beta^{h,*} (z\ \vec{w})$.
4. Par définition des contextes $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$, il existe un terme fini r' tel que $(r'\ \ C_1 \cdots C_n) \rightarrow_\beta^{h,*} x$. x est donc libre dans au moins un de ces termes.

   r' étant clos, x se situe nécessairement dans les contextes $(C_1, \cdots, C_n)$. Si la variable x apparaît dans le contexte C_1, alors ce ne peut être qu'en un exemplaire. En effet, s'il existe un contexte D tel que $C_1 = D[x, x]$, en isolant la première des deux occurrences qui passe en tête dans la réduction $(r'\ \ C_1 \cdots C_n) \rightarrow_\beta^{h,*} x$, on constate que la seconde est inactive. Elle peut donc être remplacée par la variable $[]$, sans perturber la réduction $(r\ \ C_1 \cdots C_n) \rightarrow_\beta^{h,*} x$. Ce qui contredit la minimalité de C_1.

   À l'aide d'un raisonnement similaire, on conclut que la variable x n'est présente que dans un des contextes $(C_1, \cdots, C_n)$.

   On en déduit donc que D existe, qu'il est clos et que pour toute variable neuve z, $(r\ \ C_1 \cdots D[z] \cdots C_n)^\infty = z$

   Il est également normal comme sous terme d'un des contextes normaux $(C_1, \cdots, C_n)$.

Montrons le dernier point. Soit z une variable neuve et soient $\vec{\lambda}.$ et $\vec{e}$, les plus longues suites d'abstractions et de termes telles que $D[z]$ s'écrive $G[\vec{\lambda}.(z\ \vec{e})]$. Ainsi $D[w] = G[\vec{\lambda}.(w\ \vec{e})]$. Comme les termes de $\vec{e}$ sont des sous-termes de D, ils sont normaux.

D'après la remarque 7.3.2, et par maximalité de $\vec{\lambda}.$ et $\vec{e}$, G est un contexte à droite. De plus il est normal comme D. D'après la proposition 7.3.3, on a donc $G[\vec{\lambda}.(w\ \vec{e})]^\infty = G[\vec{\lambda}.(w\ \vec{e})^\infty]$.

– Si $\vec{e}$ est vide nous obtenons l'égalité $D[w]^\infty = G[\vec{\lambda}.w]^\infty = G[\vec{\lambda}.w^\infty] = D[w^\infty]$.

– Montrons que $\vec{e}$ ne peut être que vide. Posons $a = \vec{\lambda_1}.(z\ \vec{e})$ où $\vec{\lambda_1}$ est une suite d'abstractions de même longueur que $\vec{e}$. Ainsi, $(a\ \vec{e})^\infty = (z\ \vec{e})$. Comme $(r\ C_1 \cdots C_n)^\infty = x$, alors $(r[a/x]\ C_1[a/x] \cdots C_{i_0}[a/x] \cdots C_n[a/x])^\infty = a$. Puisque ces termes sont clos, $r[a/x] = r$, $C_1[a/x] = C_1, \cdots, C_n[a/x] = C_n$ et $C_{i_0}[a/x] = D[a]$. D'où la réduction $(r\ C_1 \cdots D[a] \cdots C_n)^\infty = a$.

Or, nous venons de montrer que pour toute variable neuve z, $(r\ C_1 \cdots D[z] \cdots C_n)^\infty = z$. D'autre part, comme G est normal et à droite, $D[a]^\infty = G[\,\vec{\lambda}.(a\ \vec{e})\,]^\infty = G[\,\vec{\lambda}.(a\ \vec{e})^\infty\,] = G[\,\vec{\lambda}.(z\ \vec{e})\,]$. Ainsi, $D[a]^\infty = D[z]$. Il vient donc, par passage au contexte de la forme normale infinie, $(r\ C_1 \cdots D[a] \cdots C_n)^\infty = (r\ C_1 \cdots D[a]^\infty \cdots C_n)^\infty$ qui est égale à $(r\ C_1 \cdots D[z] \cdots C_n)^\infty$ lui-même égale à z. On obtient donc l'égalité $a = z$ ce qui entraîne $\vec{e} = \emptyset$.

Pour une définition plus détaillée de la notion de partie utile voir [8]. □

Remarque 7.5.12

- ▷ Les contextes $(C_1, \cdots, C_n)$ ne gardent des arbres des termes $s_1 \cdots s_n$ que le strict minimum afin de garantir la réduction $(r\ C_1 \cdots C_n) \rightarrow_{\infty\beta\perp} x$ (point 2). Tous les nœuds de l'arbre des contextes $(C_1, \cdots, C_n)$ sont utiles dans ce calcul, au sens où ils sont passés en tête, ce que dit le point (3). Ils forment donc un "squelette" idéal pour analyser le comportement des arguments $(s_1, \cdots, s_n)$ (point 1).
- ▷ Les parties utiles $(C_1, \cdots, C_n)$ sont plus sélectives que les arbres de Böhm. Par exemple, pour $r = \lambda xy.x$, $s_1 = \lambda x.x$ et $s_2 = x$, dans la réduction $(r\ s_1\ s_2) \rightarrow^*_\beta x$, la partie utile de :
  - r est r,
  - s_1 est vide i.e. $C_1 = []$,
  - s_2 est s_2 i.e. $C_2 = x$.

  La partie utile de s_1 est vide dans $(r\ s_1\ s_2) \rightarrow^*_\beta x$ tandis que l'arbre de Böhm de s_1 est s_1 lui-même. Cet exemple montre bien le caractère plus sélectif de la partie utile sur l'arbre de Böhm.

Définition 7.5.13 *Soit x une variable et r un terme clos, on note $\mathcal{T}^r_x$ l'ensemble des suites de termes normaux $\vec{s}$ telles que $(r\ \vec{s}\,)^\infty = x$.*

Définition 7.5.14 *Soit x une variable et r un terme clos. Pour toute suite $\vec{s}$ de $\mathcal{T}^r_x$:*

- *on note $(C^{\vec{s}}_1, \cdots, C^{\vec{s}}_n)$ la partie utile de la suite de termes $\vec{s}$ dans la réduction $(r\ \vec{s}\,) \rightarrow_{\infty\beta\perp} x$.*
- *pour tout entier $1 \leq k \leq n$ on pose $T^{\vec{s}}_i = C^{\vec{s}}_i[\overrightarrow{\Lambda^\infty}]$.*
- *on note $\mathbb{T}^{\vec{s}}$ l'ensemble des suites $T^{\vec{s}}_1 \times T^{\vec{s}}_2 \times \cdots \times T^{\vec{s}}_n$*

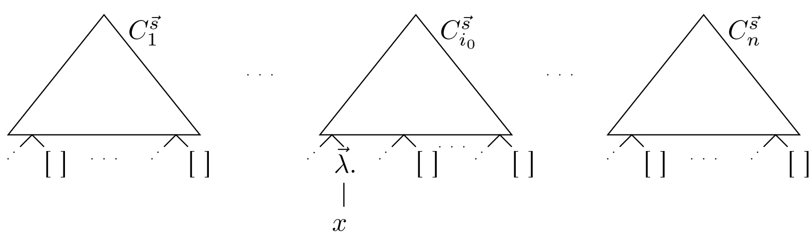
Notation 7.5.15 Dans la suite, $\vec{v} \in \mathbb{T}^{\vec{s}}$ signifie que $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ et que $v_i \in T^{\vec{s}}_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Proposition 7.5.16 *Soit x une variable et r un terme clos. Toute suite $\vec{s} \in \mathcal{T}^r_x$ vérifie :*

1. *pour tout $1 \leq i \leq n$, $T^{\vec{s}}_i \in \Lambda^\infty$.*

2. *pour toute suite de termes* $\vec{v}$ *de* $\mathbb{T}^{\vec{s}}$, $(r\ \vec{v}\ )^\infty = x$.
3. *soit* a *un OTF,* v *un terme et* D *un contexte. Si* $D[a] \in T_i^{\vec{s}}$, *alors* $D[v]^\infty \in T_i^{\vec{s}}$. *Autrement dit,* $\mathbb{T}^{\vec{s}}[OTF \to_\infty v] \subseteq \mathbb{T}^{\vec{s}}$ *pour tout terme* v.
4. *Pour tout terme* w *:*
   ▷ *si* $i \neq i_0$, *alors* $(T_i^{\vec{s}}[w/x])^\infty \subseteq T_i^{\vec{s}}$
   ▷ *si* $i = i_0$, *alors il existe un contexte clos et normal* $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}$ *tel que :*
   (a) $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[x, \vec{[]}\ ] = C_{i_0}^{\vec{s}}$,
   (b) *pour tous termes* a *et* $\vec{b}$, $(\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a, \vec{b}])^\infty = \widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a^\infty, \vec{b}^\infty]$.
   (c) *si* $x \notin FV(w)$, *alors* $(T_{i_0}^{\vec{s}}[w/x])^\infty \subseteq T_{i_0}^{\vec{s}}[w^\infty/x] \subseteq \widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[w^\infty, \overrightarrow{\Lambda^\infty}\ ]$,
5. *pour tout terme* w *et pour toute variable* z *:*
   ▷ *si* $z \neq x$, *alors* $(\mathbb{T}^{\vec{s}}[w/z])^\infty \subseteq \mathbb{T}^{\vec{s}}$
   ▷ *si* $z = x$ *et si* $x \notin FV(w)$, *alors* $(\mathbb{T}^{\vec{s}}[w/x])^\infty \subseteq\ \mathbb{T}^{\vec{s}}[w^\infty/x]$
   où $(\mathbb{T}^{\vec{s}}[w/x])^\infty$ *dénote* $(\ (T_1^{\vec{s}}[w/x])^\infty, \cdots, (T_n^{\vec{s}}[w/x])^\infty\ )$.

Remarque 7.5.17 Les contextes $(C_1^{\vec{s}}, \cdots, C_{i_0}^{\vec{s}}, \cdots, C_n^{\vec{s}})$ peuvent se représenter ainsi :



La propriété (4)(b) impose à x d'être soit à droite soit sous des $\vec{\lambda}.$ dans $C_{i_0}^{\vec{s}}$.

Preuve

1. D'après le lemme 7.5.10, les contextes $(C_i^{\vec{s}})_{1 \le i \le n}$ sont normaux et à droite. On conclut donc grâce au lemme 7.3.3.
2. Soit $(v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{T}^{\vec{s}}$. Par définition de $\mathbb{T}^{\vec{s}}$, il existe une suite de substitutions $(\sigma_i)_{1 \le i \le n}$ telles que pour tout $1 \le i \le n$, $C_i^{\vec{s}}[\sigma_i] = v_i$. Or, d'après le lemme 7.5.10 (2) , $(r\ \ C_1^{\vec{s}} \cdots C_n^{\vec{s}})^\infty = x$. x ne contenant pas la variable $[]$, par le lemme 1.3.5 on en déduit $(r\ \ C_1^{\vec{s}}[\sigma_1] \cdots C_n^{\vec{s}}[\sigma_n])^\infty = x$.
3. Selon la définition de $T_i^{\vec{s}}$, $D[a] = C_i^{\vec{s}}[\vec{u_i}\ ]$ où $\vec{u_i} \in \overrightarrow{\Lambda^\infty}$. Examinons d'abord le cas où D est simple. D'après la proposition 7.3.5, on doit traiter trois cas pour D :
   (a) $D = C_i^{\vec{s}}[u_i^1, \cdots, u_i^{j-1}, F, u_i^{j+1}, \cdots, u_i^q]$ avec $F[a] = u_j$. Dans ce cas, comme $C_i^{\vec{s}}$ est un contexte à droite, grâce au lemme 7.3.3, $D[v]^\infty = C_i^{\vec{s}}[u_i^1, \cdots, u_i^{j-1}, F[v]^\infty, u_i^{j+1}, \cdots, u_q]$ qui appartient bien à $C_i^{\vec{s}}[\overrightarrow{\Lambda^\infty}] = T_i^{\vec{s}}$.
   (b) $a = G[\vec{u_i}]$, $D = E[\vec{u_i}, []\ ]$ et $C_i^{\vec{s}} = E[\vec{[]}, G]$. D'après le lemme 7.5.10 (2), $(r\ C_1^{\vec{s}} \cdots C_i^{\vec{s}} \cdots C_n^{\vec{s}})^\infty = x$. Comme $[]$ n'apparaît pas dans x, en vertu du lemme 1.3.5 on a $(r\ C_1^{\vec{s}} \cdots E[\ \vec{[]}, G[\vec{u_i}\ ]\ ], \cdots C_n^{\vec{s}})^\infty = x$. Comme $G[\vec{u_i}\ ] = a$, on a donc $(r\ C_1^{\vec{s}} \cdots E[\ \vec{[]}, a\ ], \cdots C_n^{\vec{s}})^\infty = x$. Puis, selon la proposition 2.2.31, comme a est un OTF, $(r\ C_1^{\vec{s}} \cdots E[\ \vec{[]}, []\ ], \cdots C_n^{\vec{s}})^\infty = x$. Or, $E[\ \vec{[]}, []\ ]$ filtre $C_i^{\vec{s}}$, ce qui contredit la minimalité de $C_i^{\vec{s}}$, lemme 7.5.10 (3).
   (c) $D = E[\ \vec{u}, []\ ]$ et $C_i^{\vec{s}} = E[\ \vec{[]}, a\ ]$. Par analogie avec le cas précédent, selon la proposition 2.2.31, $(r\ C_1^{\vec{s}} \cdots E[\ \vec{[]}, []\ ], \cdots C_n^{\vec{s}})^\infty = x$, contradiction.

   Si D contient plusieurs trous, les positions (b) et (c) pour les sous-termes a restent toujours exclues. Ces sous-termes se situent donc uniquement à l'intérieur des u_i. On conclut alors comme au cas (a).

4. ▷ Pour $i \neq i_0$.
   Si $v \in T_i^{\vec{s}}[w/x]$, alors il existe un terme $v' \in T_i^{\vec{s}}$ tel que $v = v'[w/x]$. Par définition de $T_i^{\vec{s}}$, il existe une substitution σ telle que $v' = C_i^{\vec{s}}[\sigma]$. Or, d'après le point (4) du lemme 7.5.10, $C_i^{\vec{s}}$ est clos, nous déduisons donc $v'[w/x] = C_i^{\vec{s}}[\sigma[w/x]]$.
   D'après le lemme 7.5.10, $C_i^{\vec{s}}$ est normal et à droite, en vertu du lemme 7.3.3, nous obtenons $(C_i^{\vec{s}}[\sigma[w/x]])^\infty = C_i^{\vec{s}}[(\sigma[w/x])^\infty]$.
   Finalement, nous aboutissons à l'égalité $v^\infty = C_i^{\vec{s}}[(\sigma[w/x])^\infty]$ qui appartient bien à $T_i^{\vec{s}}$.
   ▷ Pour $i = i_0$. $v = v'[w/x]$ où $v \in T_{i_0}^{\vec{s}}$
   (a) D'après le lemme 7.5.10 point (4), il existe un contexte D clos tel que $D[x] = C_{i_0}^{\vec{s}}$. Prenons $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}} = D$. On a bien $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[x, \vec{[]}\,] = C_{i_0}^{\vec{s}}$.
   (b) D'après le point (4) du lemme 7.5.10,
   $(\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a, \vec{[]}\,])^\infty = D[a]^\infty = D[a^\infty] = \widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a^\infty, \vec{[]}\,]$.
   Or, $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[x, \vec{[]}\,]$ est égal à $C_{i_0}^{\vec{s}}$ qui est à droite. Il en est donc de même de $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a^\infty, \vec{[]}\,]$ qui est une simple substitution. De plus $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a^\infty, \vec{[]}\,]$ est normal car égal à $D[a]^\infty$. En vertu du lemme 7.3.3, nous obtenons donc $(\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a^\infty, \vec{b}])^\infty = \widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a^\infty, \vec{b}^\infty]$.
   Enfin, comme la forme normale infinie passe au contexte, nous en déduisons le résultat : $(\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a, \vec{b}])^\infty = \widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[a^\infty, \vec{b}^\infty]$.
   (c) Soit $v' \in T_{i_0}^{\vec{s}}$ et soit $v = v'[w/x]$. Par définition de $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}$, il existe une substitution σ telle que $v' = \widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[x, \sigma]$, et donc telle que $v^\infty = \widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[w^\infty, (\sigma[w/x])^\infty]$.
   Comme $x \notin FV(w)$, alors $x \notin FV(\sigma[w/x]^\infty)$. Ainsi, v^∞ peut s'écrire $\widetilde{C}_{i_0}^{\vec{s}}[x, \sigma[w/x]^\infty]\ [w^\infty/x]$ qui est égal à $C_{i_0}^{\vec{s}}[\sigma[w/x]^\infty]\ [w^\infty/x]$ lui même élément de $T_{i_0}^{\vec{s}}[w^\infty/x]$.
5. Pour $z \neq x$ c'est immédiat puisque z n'est pas libre dans les contextes $(C_i^{\vec{s}})_{1 \leq i \leq n}$.
   Pour $z = x$, le point (4) de ce lemme nous donne le résultat $(T_{i_0}^{\vec{s}}[w/x])^\infty \subseteq T_{i_0}^{\vec{s}}[w^\infty/x]$. Pour $i \neq i_0$, d'après le point (4), $(T_i^{\vec{s}}[w/x])^\infty \subset T_i^{\vec{s}}$. Or, comme x n'est pas libre dans w, il n'est pas libre également dans les termes de $(T_i^{\vec{s}}[w/x])^\infty$, et donc $(T_i^{\vec{s}}[w/x])^\infty\ [w^\infty/x] = (T_i^{\vec{s}}[w/x])^\infty$.
   Ainsi $(T_i^{\vec{s}}[w/x])^\infty = (T_i^{\vec{s}}[w/x])^\infty\ [w^\infty/x] \subseteq T_i^{\vec{s}}\ [w^\infty/x]$. □

Remarque 7.5.18 Pourquoi les points (4) et (5) de la proposition 7.5.16 imposent-ils à w de ne pas contenir la variable libre x ? Prenons un contexte $C_1^{\vec{s}} = []$ et $v = (x\ I)$. On a donc $C_1^{\vec{s}}[v] \in T_1^{\vec{s}}$. Soit $w = \lambda y.(y\ (x\ x))$. Ici, $w^\infty = w$. Alors, $v[w/x]^\infty = (\lambda y.(y\ (x\ x))\ I)^\infty = (x\ x)$. Or, aucune substitution σ ne peut satisfaire l'égalité $C_1^{\vec{s}}[\sigma]\ [w^\infty/x] = (x\ x)$. D'où $v[w/x]^\infty \notin T_1^{\vec{s}}[w^\infty/x]$.

Chapitre 8

UN CAS SIMPLE

Dans ce chapitre, nous montrerons la consistance de la théorie $\lambda\beta+\{(Y\,\Omega_3)=m\}$ dans le cas où *m ne s'échange pas en δ_3* (cf. corollaire 8.0.13). Ce résultat sera obtenu sous l'hypothèse H_1 décrite plus bas. En fin de chapitre, nous verrons en quoi ce résultat rejoint le théorème de Kuper [17].

Afin d'alléger les notations, le terme fini m sera noté m_1, et sa forme normale infinie m. Nous avons donc $m_1^\infty = m$.

Formulons la première hypothèse.

Hypothèse 1 *$m=\delta[b]$ où b est un zéro-terme fort de degré infini sous forme normale.*

Remarque 8.0.1 En particulier $b \neq x$.

Notation 8.0.2 Fixons les termes m et b de l'hypothèse H_1 pour le reste du chapitre 8.

Nous allons utiliser la méthode des classes confinantes infinies de Berarducci (cf. définition 3.4.27). Il va donc s'agir de trouver une telle classe confinante $\mathring{A}$ pour m qui contient Δ_∞. Comme candidat, on pourrait prendre la plus petite classe $\mathring{A}$ contenant Δ_∞ et close par échanges stricts, notée $Cl_m(\{\Delta_\infty\})$. Dans ce cas, il ne resterait alors plus à montrer que A n'est composée que de zéro-termes. Il faut remarquer que si $\mathring{A}$ contient un non zéro-terme, on ne peut pas conclure pour autant que $\{\Delta_\infty = m\}$ est contradictoire. Seulement la méthode deviendrait caduque.

Nous allons présenter un candidat canonique pour la classe $\mathring{A}$.

Définition 8.0.3

- *Soit $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$ la suite de classes définie par :*
  $\mathring{A}_0 = \{\Delta_\infty\}$ *et* $\mathring{A}_{i+1} = \mathring{A}_i \cup \mathring{A}_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]^s$ *pour tout entier* $i \geq 0$.
- *Notons $(\mathring{B}_i)_{i\geq 1}$ la classe des échangés de b par $((\mathring{A}_i)_{i\geq 0}\,,\,m)$ d'indice 1.*
  Autrement dit : $\mathring{B}_0 = \emptyset$, $\mathring{B}_1 = \{b\}$ *et pour tout* $i \geq 1$, $\mathring{B}_{i+1} = \mathring{B}_i \cup \mathring{B}_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]$

On pose :

- $\mathring{A} = \bigcup_{i\geq 0} \mathring{A}_i$ *et* $\mathring{B} = \bigcup_{i\geq 1} \mathring{B}_i$

La classe A vérifie la condition de stabilité par échanges finis. Montrons qu'elle n'est composée que de zéro-termes. Plus simplement, il suffit de montrer que les classes $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$ ne contiennent chacune que des zéro-termes. Pour cela, il faut décrire la forme de ses éléments.

Proposition 8.0.4 *Les classes* $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$ *et* $(\mathring{B}_i)_{i\geq 1}$ *sont croissantes.*

Preuve De la proposition 7.4.6. □

On va distinguer deux étapes dans la description des classes $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$. La première est simple à décrire (cf. proposition 8.0.8) ; elle permet de poser des équations sur le terme m et par la même, de détailler sa syntaxe (cf. section 9.1.2). Dans la deuxième, on précise la grammaire des classes $\mathring{A}_i$ grâce à la connaissance de la syntaxe de m (cf. section 9.2). La transition entre les deux étapes se fait à l'indice n_x que nous définissons maintenant.

Définition 8.0.5 *Si pour tout* $i \geq 0, x \notin \mathring{B}_i$*, on posera* $n_x = \infty$*, sinon on notera* n_x *le premier indice* $n \geq 0$ *pour lequel* $x \in \mathring{B}_n$.

Lemme 8.0.6 $n_x \geq 2$.

Preuve En effet, si $n_x = 1$, alors $x \in \mathring{B}_1 = \{b\}$. On obtient donc $b = x$ qui est contraire à H_1. □

Fait 8.0.7 $\Delta_+[m] = \Delta_+\circ\delta[b] \subseteq \mathring{A}_1$

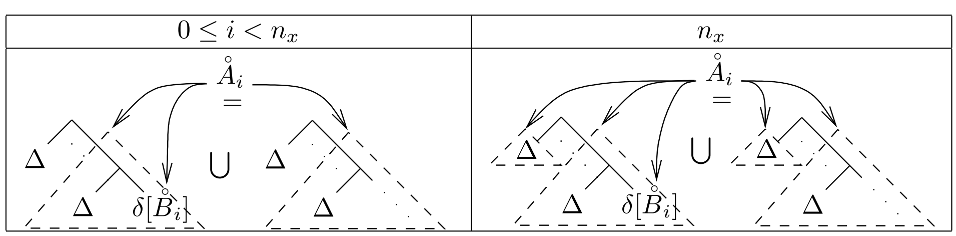
Preuve Pour tout entier n, $\Delta_\infty = (\Delta \cdots (\Delta\ \Delta_\infty)\cdots) = \Delta_n[\Delta_\infty] \in \mathring{A}_0 = \{\Delta_\infty\}$. Ainsi, pour tout n, $\Delta_n[m] \in \mathring{A}_0[\mathring{A}_0 \rightarrow_\infty m]^s \subseteq \mathring{A}_1$. On en déduit donc $\Delta_+[m] \subseteq \mathring{A}_1$. □

Proposition 8.0.8

1. *Pour tout* $0 \leq i < n_x$ $\mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s = \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\,] \cup \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_1]$
2. *Pour tout* $0 \leq i \leq n_x$, $\mathring{A}_i = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_i]$

Remarque 8.0.9

- Intuitivement les échanges qui précèdent l'étape n_x ont lieu dans la classe $\mathring{B}_i$ de b. La classe de termes $\mathring{A}_i$ peut donc être écrite à partir de celle de $\mathring{B}_i$.
- Graphiquement, les classes $\mathring{A}_i$ et $\mathring{B}_i$ se présentent ainsi :



Preuve Montrons les deux points simultanément par récurrence sur i. En fait nous devons décaler les points (1) et (2) :
Pour tout $0 \leq i < n_x$:

1. $\mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s = \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\,] \cup \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_1]$
2. $\mathring{A}_{i+1} = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_{i+1}]$

Au préalable, on vérifie bien que pour $i = 0$ le point (2) de l'énoncé est vrai du fait que $\mathring{A}_0 = \{\Delta_\infty\}$ et $\mathring{B}_0 = \emptyset$.

▷ Pour $i = 0$. Traitons séparément chacun des deux points :

1. $\mathring{A}_0 = \{\Delta_\infty\}$. Pour tout $n \geq 1$, $\Delta_\infty = (\Delta \cdots (\Delta\ \Delta_\infty) \cdots) = \Delta_n[\Delta_\infty]$. Or, $\Delta_\infty \not\leq \Delta$, en vertu du lemme 7.2.2 on a donc :
$\{\Delta_\infty\}[\{\Delta_\infty\} \rightarrow_\infty m]^s = \bigcup_{n\geq 1} \Delta_n[m] = \Delta_+[m]$. Comme $m = \delta[b]$ et $\mathring{B}_1 = \{b\}$ on en déduit $\Delta_+[m] = \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$. Ainsi, $\mathring{A}_0[\mathring{A}_0 \rightarrow_\infty m]^s = \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$. Comme $\mathring{B}_0 = \emptyset$, on en déduit alors le résultat $\mathring{A}_0[\mathring{A}_0 \rightarrow_\infty m]^s = \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_0[\mathring{A}_0 \rightarrow_\infty m]\ ] \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$.
2. Par définition, $\mathring{A}_1 = \mathring{A}_0 \cup \mathring{A}_0[\mathring{A}_0 \rightarrow_\infty m]^s$. D'après le point (1), $\mathring{A}_0[\mathring{A}_0 \rightarrow_\infty m]^s = \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$ et comme $\mathring{A}_0 = \{\Delta_\infty\}$, on en déduit $\mathring{A}_1 = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$

▷ Pour $1 \leq i < n_x$. Par hypothèse de récurrence, on a $\mathring{A}_i = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i]$. Traitons séparément chacun des deux points :

1. Montrons l'inclusion $\Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\ ] \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1] \subseteq \mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s$.
Comme $\mathring{A}_0 = \{\Delta_\infty\} \subseteq \mathring{A}_i$ alors $\mathring{A}_0[\mathring{A}_0 \rightarrow_\infty m]^s \subseteq \mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s$. D'après le point (1) cas $i = 0$, on obtient donc $\Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1] \subseteq \mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence point (2) nous donne $\Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i] \subseteq \mathring{A}_i$. Par définition des échanges de classes, on obtient ainsi $\Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\ ] \subseteq (\Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i])[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s \subset \mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s$. Finalement, on aboutit à l'inclusion $\Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\ ] \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1] \subseteq \mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s$.

   Réciproquement, soit $d \in \mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s$. Par définition des classes d'échanges, il existe un contexte non trivial C et un terme $a \in \mathring{A}_i$ tel que $C[a] \in \mathring{A}_i$ et tel que $d = C[m]^\infty$. Comme $\mathring{A}_i = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i]$, on distingue deux cas pour $C[a]$:

   – Si $C[a] = \Delta_\infty$, comme $x \notin \mathring{B}_i$, alors $\Delta \notin \mathring{A}_i = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i]$ et donc a n'est pas un sous-terme de Δ qui sont soit des sous-terme de δ_3 soit Δ lui-même. On conclut alors, comme au cas $i = 0$ point (1), que $C[m]^\infty \in \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$.
   – Sinon, $C[a] \in \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i]$. Il existe donc un entier n et un terme $b_1 \in \mathring{B}_i$ tels que $C[a] = \Delta_n \circ \delta[b_1]$. Comme $a \in \mathring{A}_i = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i]$ on peut appliquer le lemme de filtrage 7.2.4 point (3) à $a \leq C[a] = \Delta_n \circ \delta[b_1]$. C étant non trivial, il ne reste que deux cas :
     (a) si $a \leq b_1$, alors l'échange a lieu dans b_1 et donc $C[m]^\infty \in \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\ ]$
     (b) dans ce cas il existe un entier p tel que $C[a] = \Delta_p[a]$ et donc $C[m]^\infty = \Delta_p[m]$. Or, $m = \delta[b]$, on en déduit donc $C[m]^\infty = \Delta_p \circ \delta[b] \in \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$
2. Par définition, $\mathring{A}_{i+1} = \mathring{A}_i \cup \mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s$, selon l'hypothèse de récurrence $\mathring{A}_i = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i]$ et d'après le point (1) de ce lemme, $\mathring{A}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]^s = \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\ ] \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$. On en déduit donc $\mathring{A}_{i+1} = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i] \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\ ] \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_1]$. Par croissance des classes, $\mathring{B}_1 \subseteq \mathring{B}_i$, on obtient donc $\mathring{A}_{i+1} = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i] \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]\ ]$. On conclut alors par la définition de $\mathring{B}_{i+1}$ qui est égale à $\mathring{B}_i \cup \mathring{B}_i[\mathring{A}_i \rightarrow_\infty m]$, d'où $\mathring{A}_{i+1} = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}_{i+1}]$ □

Corollaire 8.0.10 *Pour tout* $0 \leq i \leq n_x$, $\Delta \notin \mathring{A}_i$.

Preuve Sinon, comme $\Delta \in \Delta_+ \circ \delta[x]$, d'après l'égalité de la proposition 8.0.8 point (2), on aurait $x \in \mathring{B}_i$. Contredit la définition de n_x. □

Proposition 8.0.11 *Soit E une classe.*

Soient $(E_i)_{i\geq 1}$ la suite des échangés dans E de $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$ par m et $(F_i)_{i\geq 1}$ la suite des échangés stricts dans $\Delta_+\circ\delta[E]$ de $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$ par m.

Alors pour tout $0 \leq i \leq n_x$, $F_i \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_i] \cup \mathring{A}_i$.

Preuve Le résultat se montre par récurrence sur i.

- ▷ Il est vrai pour $i = 0$ et $i = 1$ vu que $E_0 = F_0 = \emptyset$ et que $E_1 = E$ et $F_1 = \Delta_+\circ\delta[E]$.
- ▷ Pour $2 \leq i < n_x$. Par hypothèse de récurrence $F_i \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_i] \cup \mathring{A}_i$, montrons que $F_{i+1} \subset \Delta_+\circ\delta[E_{i+1}] \cup \mathring{A}_{i+1}$.

  Par définition, $F_{i+1} = F_i \cup F_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]^s$,

  il faut donc montrer que $F_i \cup F_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subset \Delta_+\circ\delta[E_{i+1}] \cup \mathring{A}_{i+1}$.

  On a déjà $F_i \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_i] \cup \mathring{A}_i$, ce qui donne par croissance, proposition 7.4.6, $F_i \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_{i+1}] \cup \mathring{A}_{i+1}$.

  Il nous reste donc à montrer que $F_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subset \Delta_+\circ\delta[E_{i+1}] \cup \mathring{A}_{i+1}$. Par récurrence, $F_i \subset \Delta_+\circ\delta[E_i] \cup \mathring{A}_i$, $F_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]^s$ se divise donc en deux sous-ensembles $\Delta_+\circ\delta[E_i]\ [\mathring{A}_i \to_\infty m]^s$ et $\mathring{A}_i\ [\mathring{A}_i \to_\infty m]^s$.

  - Prouvons d'abord que $\Delta_+\circ\delta[E_i]\ [\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]\ ] \cup \mathring{A}_i$.

    Selon la proposition 8.0.8 point (2), pour tout $i \leq n_x$, $\mathring{A}_i = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_i]$.

    Comme $x \notin \mathring{B}_i$, $\Delta \notin \mathring{A}_i$, on peut donc appliquer le lemme de filtrage point (3). L'échange étant strict, seul les cas (a) et (b) apparaissent ce qui donne $\Delta_+\circ\delta[E_i]\ [\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]\ ] \cup (\Delta_+\ [m])$.

    Et comme $m = \delta[b]$, $(\Delta_+\ [m]) \subseteq \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_1]$, il en résulte

    $\Delta_+\circ\delta[E_i]\ [\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]\ ] \cup \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_1]$.

    D'après la proposition 8.0.8 point (2), $\Delta_+\circ\delta[\mathring{B}_1] \subseteq \mathring{A}_1 \subset \mathring{A}_i$. Finalement $\Delta_+\circ\delta[E_i]\ [\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]\ ] \cup \mathring{A}_i$.
  - par définition de la suite $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$, $\mathring{A}_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subseteq \mathring{A}_{i+1}$.

  On aboutit donc à $F_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]\ ] \cup \mathring{A}_{i+1}$. Enfin, par définition de la suite $(E_i)_{i\geq 0}$ $E_i[\mathring{A}_i \to_\infty m] \subseteq E_{i+1}$, ce qui entraîne :

  $F_i[\mathring{A}_i \to_\infty m]^s \subseteq \Delta_+\circ\delta[E_{i+1}] \cup \mathring{A}_{i+1}$. D'où le résultat. □

Proposition 8.0.12 *Si $n_x = \infty$, alors $\mathring{A}$ est une classe confinante infinie pour m qui contient $(Y\,\Omega_3)^\infty$.*

Preuve En effet, dans ce cas pour tout $i > 0$, $x \notin \mathring{B}_i$. D'après la proposition 8.0.8 point (2), $\mathring{A} = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+\circ\delta[\mathring{B}]$ est uniquement composée de zéro-termes. Ainsi, $\mathring{A}$ est une classe confinante infinie pour m qui contient Δ_∞, la forme normale infinie de $(Y\,\Omega_3)$. □

Corollaire 8.0.13 *Si $n_x = \infty$, alors on a $Cons\{Y\,\Omega_3 = m_1\}$ où m_1 est un terme fini tel que $m_1^\infty = \delta[b]$.*

Preuve En vertu de la proposition 8.0.12, $\mathring{A}$ est une classe confinante infinie pour $m = m_1^\infty$ et qui contient $(Y\,\Omega_3)^\infty$. On conclut alors grâce au théorème 3.4.28. □

Terminons en faisant le lien avec le théorème de Kuper [17]. Sous réserve de l'hypothèse H_1 qui impose à m_1^∞ de s'écrire $\lambda x.(x\ b\ x)$ au lieu de $\lambda x.(x\ b\ b')$, montrons que $n_x = \infty$ entraîne l'hypothèse de Kuper $\lambda\beta + (\Omega_3\ m_1) = m_1 \vdash m_1 = \delta_3$

Proposition 8.0.14 *Si $m_1 \to_\beta^* \lambda x.(x\ b_1\ x)$ alors $x \in \bigcup_{i\geq 1} \mathring{B}_i$ équivaut à $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \vdash m_1 = \delta_3$*

Preuve Comme $m_1 \rightarrow_\beta^* \lambda x.(x\ b_1\ x)$, alors $m_1^\infty = \lambda x.(x\ b_1^\infty\ x)$. H_1 est donc vérifiée. Notons $b = b_1^\infty$ et $m = m_1^\infty$. Au préalable, introduisons les classes d'échanges *finis* suivantes :
- Soit $(A_i^1)_{i\geq 0}$ la suite de classes définie par :
  $A_0^1 = \{Y\,\Omega_3\}$ et $A_{i+1}^1 = A_i^1 \cup A_i^1[A_i^1 \rightarrow m_1]_1^s$ pour tout entier $i \geq 0$.
- Notons $(B_i^1)_{i\geq 1}$ la suite de classes définie par :
  $B_0^1{=}\emptyset$, $B_1^1{=}\{b\}$ et pour tout $i \geq 1$, $B_{i+1}^1 = B_i^1 \cup B_i^1[A_i \rightarrow m_1]_1$

Fait 8.0.15 *Pour tout terme fini t :*

1. $t \in \bigcup\limits_{i\geq 1} B_i^1$ ssi $t^\infty \in \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathring{B}_i$
2. *Si* $t \in \bigcup\limits_{i\geq 1} B_i^1$ *alors* $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \vdash b_1 = t$

Preuve Les deux preuves sont immédiates par induction sur i. □

Montrons que $x \in \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathring{B}_i$ entraîne $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \vdash m_1 = \delta_3$. D'après le fait 8.0.15 (1), si $x \in \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathring{B}_i$, alors $x \in \bigcup\limits_{i\geq 1} B_i^1$. D'après le fait 8.0.15 (2), on obtient donc $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \vdash b_1 = x$, ou encore $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \vdash \lambda x.(x\ b_1\ x) = \lambda x.(x\ x\ x)$, soit $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \vdash m_1 = \delta_3$.

Réciproquement, montrons que $x \notin \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathring{B}_i$ entraîne $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \not\vdash m_1 = \delta_3$. Soit $\rightarrow_{m_1}$ la réduction qui associe pour tout contexte C, $C[\,(Y\,\Omega_3)\,] \rightarrow_{m_1} C[m_1]$. Introduisons la réduction $\rightarrow_\mu = \rightarrow_\beta \cup \rightarrow_{m_1}$.

Fait 8.0.16 *Pour tous termes finis u et v :*

1. $b_1 \rightarrow_\mu^* u$ *entraîne* $u \in \bigcup\limits_{i\geq 1} B_i^1$
2. $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \vdash u = v$ ssi $u \simeq_\mu v$

Preuve Les deux preuves sont immédiates par induction sur la longueur de la réduction ou celle de la preuve. □

Comme $x \notin \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathring{B}_i$, alors $n_x = \infty$ (cf. définition 8.0.5). En vertu de la proposition 8.0.12, la classe $\mathring{A}$ est donc confinante infinie pour m et contient $(Y\,\Omega_3)^\infty$. En conséquence $A^1 = \bigcup\limits_{i\geq 1} A_i^1$ est donc confinante finie pour m_1 et contient $(Y\,\Omega_3)$ cf. étape 2 théorème 3.4.28. En suivant la preuve du théorème 3.4.8, on en déduit donc que $\rightarrow_\mu$ est confluente.

Si $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \vdash m_1 = \delta_3$, on aurait alors $m_1 \simeq_\mu \delta_3$ et donc $\delta[b_1] \simeq_\mu \delta_3$. Comme $\rightarrow_\mu$ est confluente et que δ_3 est une forme normale, on en déduit donc $\delta[b_1] \rightarrow_\mu^* \delta_3$. Enfin, comme δ est un contexte normal, on en déduit $b_1 \rightarrow_\mu^* x$. D'où $x \in \bigcup\limits_{i\geq 1} B_i^1$ en vertu du fait 8.0.16 (1). Ce qui entraîne $x \in \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathring{B}_i$ (fait 8.0.15 (2)). Contradiction. □

Corollaire 8.0.17 *Sous H_1, $n_x = \infty$ entraîne l'hypothèse de Kuper :* $\lambda\beta + (\Omega_3\ m_1) = m_1 \not\vdash m_1 = \delta_3$

Preuve Par définition 8.0.5, si $n_x = \infty$ alors $x \in \bigcup\limits_{i\geq 1} \mathring{B}_i$. D'après la proposition 8.0.14, c'est équivalent à $\lambda\beta + (Y\,\Omega_3) = m_1 \not\vdash m_1 = \delta_3$. Ce qui entraîne $\lambda\beta + (\Omega_3\ m_1) = m_1 \not\vdash m_1 = \delta_3$. □

Chapitre 9

Théorèmes essentiels sous deux hypothèses H_1 et H_2

Désormais, nous ne considérerons que des échanges simples (cf. définition 3.4.24). Ainsi, les classe $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$ et $(\mathring{B}_i)_{i\geq 0}$ vont être remplacées par $(A_i)_{i\geq 0}$ et $(B_i)_{i\geq 0}$. Ces dernières seront définies à l'aide d'échanges simples.

Définition 9.0.1

- *Soit* $(A_i)_{i\geq 0}$ *la suite de termes définie par :*
  $A_0 = \{\Delta_\infty\}$ *et* $A_{i+1} = A_i \cup A_i[A_i \to m]^s$ *pour tout entier* $i \geq 0$.
- *Notons* $(B_i)_{i\geq 1}$ *la classe des échangés de* b *par* $(\,(A_i)_{i\geq 0}\,,\, m)$ *d'indice* 1.
  Autrement dit : $B_0 = \emptyset$, $B_1 = \{b\}$ *et pour tout* $i \geq 1$, $B_{i+1} = B_i \cup B_i[A_i \to m]$

On pose :

- $A = \bigcup_{i\geq 0} A_i$ *et* $B = \bigcup_{i\geq 1} B_i$

Les lemmes démontrés aux chapitres précédents s'appliquent toujours aux classes définies par échanges simples puisque leur définition est plus faible.

Prenons $m = \delta[b]$ un terme vérifiant l'hypothèse H_1. Le chapitre précédent nous a montré qu'il ne restait à traiter que le cas où m s'échange en δ_3. Ce que nous reformulons par b s'échange en x. À priori, b peut s'échanger en x de nombreuses façons. Les plus riches en propriétés sont bien entendu les plus directes. Or, si b s'échange en x, il est clair que nous pouvons considérer ces échanges en se limitant aux classes $(A_i)_{i\leq n_x-1}$. Ces classes correspondent en effet aux étapes antérieures à celle où x va apparaître dans B_{n_x}. Dans ce chapitre nous nous intéresserons au cas où cet échange se fait en une seule étape. Ce qu'on formule par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2

Avec les notations des définitions 9.0.1 et 8.0.5 : $x \in \{b\}[A_{n_x-1} \to m]$

Sous les hypothèses H_1 et H_2 nous montrerons :

- m possède une composante auto-similaire
- la clôture $Cls_m(Y\,\Omega_3)$ est formée de zéro-termes

Le dernier résultat sera montré en exploitant le premier. Cependant, il ne nous permettra pas de conclure quant à la consistance de $\lambda\beta + \{(Y\,\Omega_3) = m\}$. En effet, le corollaire 3.4.29 réclame la clôture infinie $Cl_m(Y\,\Omega_3)$ et non la simple.

Remarque 9.0.2

- La terminologie *"cas à une étape"* vient du fait que la variable x est obtenue à partir de b par un seul échange d'un terme de A_{n_x-1} par m.

– L'hypothèse H_2 n'est pas équivalente à $x \in \{b\}[A \to m]$ où $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$. En effet, pour $n_x = 3$, il se pourrait que b *s'échange en* x *en deux étapes* i.e. qu'il existe $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$ tels que $b = C[a_1]$, $C[m]^\infty = D[a_2]$ et $D[m]^\infty = x$ sans que b *ne puisse s'échanger en* x *en une seule étape*, autrement dit sans qu'il existe $a \in \bigcup_{i \geq 0} A_i$ tel que $b = E[a]$ et $E[m]^\infty = x$. Voir l'exemple suivant.

Exemple 9.0.3 Soient $t = \lambda yz.x$, $u = (\Delta_\infty\ (\lambda yz.\delta_3)\ \delta_3\ \delta_3\ \Delta_\infty)$ et $m = \delta[\,(u\ t)\,]$.
Alors, $x \in B$, $u \in A$ mais $u \notin A_{n_x-1}$.
Ces résultats découlent des sept points suivants :

1. $(m\ t) \to_\beta^* x$

   Preuve Immédiate.

2. u s'échange en Δ_∞.

   Preuve En effet, u s'échange en $(m\ (\lambda yz.\delta_3)\ \delta_3\ \delta_3\ \Delta_\infty)^\infty$. Or,

$$\begin{array}{rcl} (m\ (\lambda yz.\delta_3)\ \delta_3\ \delta_3\ \Delta_\infty)^\infty & = & (\delta_3\ \delta_3\ \delta_3\ \Delta_\infty)^\infty \\ & = & (\Delta\ \delta_3\ \Delta_\infty) \\ & = & \Delta_\infty \quad \text{(en utilisant } (\Delta\ \delta_3) = \Delta \text{ et } (\Delta\ \Delta_\infty) = \Delta_\infty\ ) \end{array}$$

3. m s'échange en δ_3.

   Preuve Dérive du point (1), du fait que Δ_∞ s'échange en m, et de (2).

4. Δ_∞ s'échange en Δ.

   Preuve Comme $\Delta_\infty = (\Delta\ \Delta_\infty)$ et que Δ_∞ s'échange en m, on conclut grâce au point (3).

5. Δ_∞ s'échange (au sens large) en δ_3.

   Preuve Comme Δ_∞ s'échange en m, on conclut grâce à (3).

6. $(u\ \lambda yz.\Delta_\infty)$ s'échange en δ_3

   Preuve De (2), on tire $(u\ \lambda yz.\Delta_\infty)$ s'échange en $(\Delta_\infty\ \lambda yz.\Delta_\infty)$ qui s'échange lui-même en $(m\ \lambda yz.\Delta_\infty)^\infty = \Delta_\infty$. Le point (5) permet de conclure.

7. Δ_∞ s'échange en u.

   Preuve D'après (4), Δ appartient à A. Comme Δ_∞ s'écrit $(\Delta\ \Delta_\infty)$, alors Δ_∞ s'échange en $(m\ \Delta_\infty)^\infty = (\Delta_\infty\ (u\ \lambda yz.\Delta_\infty)\ \Delta_\infty)$ qui s'échange, d'après (5), en $(\delta_3\ (u\ \lambda yz.\Delta_\infty)\ \Delta_\infty)^\infty = (u\ \lambda yz.\Delta_\infty\ (u\ \lambda yz.\Delta_\infty)\ (u\ \lambda yz.\Delta_\infty)\ \Delta_\infty)$ qui s'échange finalement, selon les points (2), (5) et (6), en $(\Delta_\infty\ (\lambda yz.\delta_3)\ \delta_3\ \delta_3\ \Delta_\infty) = u$

Du point (7), on obtient $u \in A$.
De (1) et (2), $x \in B$.
Et selon la proposition 8.0.8, vu la forme de u, $u \notin A_{n_x-1}$.

9.1 AUTO-SIMILARITÉ DE m

Détaillons les conséquences de H_2 sur la syntaxe de b.

Proposition 9.1.1

1. *b s'échange de tête en x.*
2. *Il existe des termes u et $\vec{t}$ tels que :*
   (a) $b = (u\ \vec{t}\,)$
   (b) $u \in A_{n_x-1}$
   (c) $(m\ \vec{t}\,)^\infty = x$

Preuve

1. Les échanges peuvent être de tête ou internes. Or, par la remarque 7.4.4, les échanges internes conservent la forme de tête. Comme $b \neq x$, l'échange est donc nécessairement de tête.
2. On a donc, par définition des échanges de tête, $b = (u\ \vec{t}\ )$ pour $u \in A_{n_x-1}$ et $(m\ \vec{t}\ )^\infty = x$. □

Notation 9.1.2 Fixons les termes u et $\vec{t}$ de la proposition 9.1.1 pour le reste de cette section 9.1.

Analyser en détail A est trop complexe. Pour simplifier, nous construirons une classe F qui contiendra A et qui ne sera composée que de zéro-termes. Pour cela nous devons d'abord décrire avec suffisamment de précision la forme du terme m ce qui revient à étudier les arguments $\vec{t}$ et la tête u de b.

Les deux prochaines sections visent justement à caractériser ces termes $\vec{t}$ et u. Nous verrons que $\vec{t}$ peut être défini indépendamment de m et des problèmes d'échanges (définition 7.5.13). Une fois caractérisés, nous en déduirons une classe $\mathbb{T}$ suffisamment large pour rester stable après tout échange de OTF (proposition 9.1.6).

Quant à la forme de u , elle apparaîtra grâce à la résolution d'un système d'équations contextuelles issu de la proposition 9.1.32. u se révélera alors être auto-similaire. Plus précisément, il sera $\vec{t}$-définissable c'est-à-dire qu'il s'exprimera en fonction de $\vec{t}$ (théorème 9.1.15).

9.1.1 Étude de $\vec{t}$

Nous donnerons ici quelques caractéristiques de $\vec{t}$ fixée à la proposition 9.1.1. Puis, nous proposerons une classe de suites de termes contenant $\vec{t}$ et possédant une propriété de stabilité forte.

Proposition 9.1.3 $\vec{t} \in \mathcal{T}_x^m$.

Preuve Par la proposition 9.1.1 (2) (c), $(m\ \vec{t}\ )^\infty = x$. Or $m = \delta[b]$ et b est un OTF. Par la proposition 2.2.31 pour $\delta = \lambda x.(x\ []\ x)$, on a bien $(\delta\ \vec{t}\ )^\infty = x$. □

Notation 9.1.4 Les notations suivantes sont fixées une fois pour toute, pour éviter les surcharges en indices.

- on note $(C_1, \cdots, C_n)$ la partie utile (cf. définition 7.5.11) de la suite de termes $\vec{t}$ dans la réduction $(m\ \vec{t}\ ) \to_{\infty\beta\perp} x$.
- Pour tout entier $1 \leq k \leq n$ on pose $T_i = C_i[\Lambda^\infty]$.
- On note $\mathbb{T}$ l'ensemble des suites $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$

Notation 9.1.5 Dans la suite, $\vec{v} \in \mathbb{T}$ signifie que $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ et que $v_i \in T_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Proposition 9.1.6

1. *pour tout* $1 \leq i \leq n$, $T_i \in \Lambda^\infty$.
2. *pour toute suite de termes* $\vec{s}$ *de* $\mathbb{T}$, $(\delta\ \vec{s}\ )^\infty = x$.
3. *soit* a *un OTF sous forme normale,* v *un terme et* D *un contexte. Si* $D[a] \in T_i$, *alors* $D[v]^\infty \in T_i$. *Autrement dit* $\mathbb{T}[OTF \to v] \subseteq \mathbb{T}$ *pour tout terme* v.
4. *Pour tout terme* w *:*
   - ▷ *si* $i \neq i_0$, *alors* $(T_i[w/x])^\infty \subseteq T_i$
   - ▷ *si* $i = i_0$, *alors il existe un contexte clos et normal* $\widetilde{C}_{i_0}$ *tel que :*
     - $\widetilde{C}_{i_0}[x, \vec{[]}\ ] = C_{i_0}$,

– *si* $x \notin FV(w)$, *alors* $(T_{i_0}[w/x])^\infty \subseteq \widetilde{C}_{i_0}[w^\infty, \overrightarrow{\Lambda^\infty}] = T_{i_0}[w^\infty/x]$,
– *pour tous termes* a *et* $\vec{b}$, $(\widetilde{C}_{i_0}[a, \vec{b}])^\infty = \widetilde{C}_{i_0}[a^\infty, \vec{b}^\infty]$.

5. *pour tout terme* w *et pour toute variable* z *:*
   ▷ *si* $z \neq x$, *alors* $(\mathbb{T}[w/z])^\infty \subseteq \mathbb{T}$
   ▷ *si* $z = x$ *et si* $x \notin FV(w)$, *alors* $(\mathbb{T}[w/x])^\infty \subseteq \mathbb{T}[w^\infty/x]$
   où $(\mathbb{T}[w/x])^\infty$ *dénote* $(\,(T_1[w/x])^\infty, \cdots, (T_n[w/x])^\infty\,)$.

Preuve Compte tenu de la proposition 9.1.3, les points (1), (3) (4) et (5) découlent directement de la proposition 7.5.16.

Montrons le point (2). Pour toute suite $\vec{v}$ de $\mathbb{T}$, par la proposition 7.5.16 point (2), $(m\ \vec{v}\ )^\infty = x$. Or, $m = \delta[b] = \lambda x.(x\ b\ x)$ et b est non résoluble. Par la proposition 2.2.31, comme x ne possède pas de résidus de b qui sont tous non résolubles, on a $(\lambda x.(x\ []\ x)\ \vec{v}\ )^\infty = x$. □

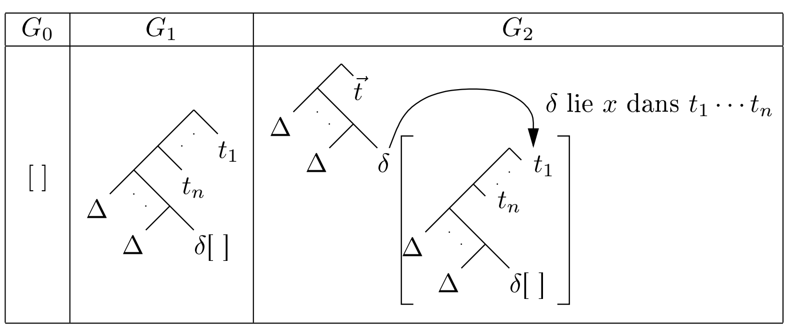
9.1.2 Auto-similarité de u

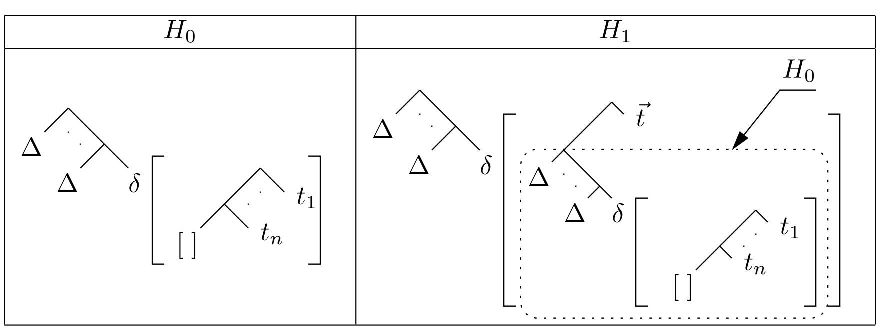
On rappelle que le terme u a été fixé à la proposition 9.1.1.

Nous montrerons dans cette section que u est auto-similaire : son arbre se construit en fonction de lui-même à partir d'une grammaire de contexte définie à l'aide des termes $\vec{t}$ (définition 9.1.12). Que u soit son propre sous-terme est une particularité du λ-calcul infini. La grammaire, construite par point fixe, provient de la résolution d'un système d'équations (définition 9.1.13). Cette boucle du point fixe sera la conséquence du fait que $(A_i)_{i \leq n_x}$ s'exprime grâce à u et réciproquement.

Définition 9.1.7 *À partir de la classe* $\mathbb{T}$ *définie à partir de* $\vec{t}$ *9.1.4, nous introduisons les classes* H *et* G *de contextes :*
– *Posons* $G_0 = \{[]\}$, $G_{n+1} = (\Delta_+ \circ \delta[G_n]\ \ \mathbb{T})$ *et* $G = \bigcup_{n \geq 0} G_n$.
– *Posons* $H_0 = \Delta_+ \circ \delta[([]\ \mathbb{T})]$, $H_{n+1} = (\Delta_+ \circ \delta[(H_n\ \mathbb{T})])$ *et* $H = \bigcup_{n \geq 0} H_n$.

Remarque 9.1.8





Remarque 9.1.9

1. Les contextes de G et H ne contiennent qu'un seul trou $[]$. Pour G, sauf G_0, ce trou apparaît dans un contexte $\delta = \lambda x.(x\ []\ x)$. Pour H, il apparaît dans un contexte $\Delta_+ \circ \delta[([]\ \mathbb{T})]$. Dans la suite les renommages de la variable x dans les contextes δ et $\Delta_+ \circ \delta[([]\ \mathbb{T})]$ seront interdits. Si bien que la substitution $\delta[x]$ sera égale à $\lambda x.(x\ x\ x)$ et non $\lambda y.(y\ x\ y)$. (cf. exemple 1.1.7)
2. Comme le montre le graphe de G_2 dans la remarque 9.1.8, plusieurs contextes δ peuvent s'emboîter. Comme pour un contexte $D = (\lambda x\ \lambda x\ [])$ pour qui $D[x]$ est α-équivalent à $(\lambda y\ \lambda x\ x)$, la variable x de $G_n[x]$ est liée par le λx qui le précède immédiatement dans l'arbre du contexte.

Remarque 9.1.10

1. Tout contexte de $H[\Lambda]$ et $G[\Lambda]$ est un OTF de degré infini.
2. Les contextes de G sont normaux et à droite. En vertu du lemme 7.3.3, pour tout contexte g de G et tout terme v, $g[v]^\infty = g[v^\infty]$.
3. Si v est un OT, pour tout contexte h de H et tout terme v, $h[v]^\infty = h[v^\infty]$.

Notation 9.1.11 Lorsque la classe X est restreinte à un seul terme $X = \{s\}$, la classe $H[\{s\}]$ sera simplement notée $H[s]$.

Définition 9.1.12 *Un terme w est dit* $\vec{t}$-définissable*, si $w \in \{\Delta_\infty\} \cup \widehat{\Delta_+} \cup H[\widehat{\Delta_+}] \cup \{H[v]$ tel que $v \in H[v]\ \}$.*

Définition 9.1.13 *Soit w un terme.*

1. *Le quadruplet $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$ forme un* système *pour w si $\vec{a}$ est une suite de k termes de A_{n_x-2} , $\vec{D}$ une suite de k contextes et $\vec{g}$ une suite de k contextes de G non tous triviaux telles que :*
   – $D_1[a_1] = g_1[D_k[m]^\infty]$ *et pour tout* $2 \leq i \leq k$, $\quad D_i[a_i] = g_i[D_{i-1}[m]^\infty]$
   – $w \in \Delta_+ \circ \delta[G[D_k[m]^\infty]\ ]$
2. *On appellera taille du système le couple $(k, \sum_{1\leq i\leq k} l(D_i))$.*

   Il sera ordonné lexicographiquement.

Remarque 9.1.14

– Pour $k = 3$ ce système s'écrirait :

$$\begin{aligned} D_1[a_1] &= g_1[D_3[m]^\infty] \\ D_2[a_2] &= g_2[D_1[m]^\infty] \\ D_3[a_3] &= g_3[D_2[m]^\infty] \end{aligned}$$

– La première équation du système $D_1[a_1] = g_1[D_3[m]^\infty]$ constitue une boucle qui permettra de le résoudre.

Théorème 9.1.15 *Sous H_2 , les termes u et $\vec{t}$ de la proposition 9.1.1 sont tels que u soit $\vec{t}$-définissable.*

Remarque 9.1.16 Les termes u et $\vec{t}$ qui ont été fixés d'après la proposition 9.1.1 ne dépendent que de m. Le théorème précédent peut donc être exprimé plus généralement de la façon suivante :

Théorème 9.1.17 *Si m vérifie les hypothèses H_1 et H_2, alors il existe une suite de termes $\vec{t}$ de $\mathcal{T}_x^m$ et un terme u qui est $\vec{t}$-définissable tels que $m = \delta[\ (u\ \vec{t}\ )\ ]$.*

Preuve du théorème

La preuve se fait en 5 étapes.

Étape 0

On distingue deux cas pour u :
- *soit $u = \Delta_\infty$ et alors $n_x = 2$*
- *sinon $u \neq \Delta_\infty$ et alors $u \in A_{n_x-1} - A_{n_x-2}$*

Preuve Par la proposition 9.1.1 $u \in A_{n_x-1}$.
- Si $u = \Delta_\infty$ montrons que $n_x = 2$. Par le lemme 8.0.6, $n_x \geq 2$. Comme $b = (u\ \vec{t}\,)$, alors $b = (\Delta_\infty\ \vec{t}\,)$. D'autre part comme $A_0 = \{\Delta_\infty\}$, alors Δ_∞ appartient également à A_1 qui contient A_0. Ainsi, $(m\ \vec{t}\,)^\infty \in \{b\}[A_1 \to m]$. Or, $(m\ \vec{t}\,)^\infty = x$, comme $B_1 = \{b\}$, on en déduit $x \in B_1[A_1 \to m] \subseteq B_2$ et donc $n_x = 2$.
- Sinon, $u \neq \Delta_\infty$. Montrons que $u \notin A_{n_x-2}$. Si $n_x = 2$, alors $A_{n_x-2} = A_0 = \{\Delta_\infty\}$, d'où $u \notin A_{n_x-2}$. Si $n_x \geq 3$. Par l'absurde, si $u \in A_{n_x-2}$, alors, comme $b = (u\ \vec{t}\,)$, $(m\ \vec{t}\,)^\infty \in \{b\}[A_{n_x-2} \to m]$. Or, $n_x - 2 \geq 1$, d'où $B_1 \subseteq B_{n_x-2}$ et comme $b \in B_1$,on a $b \in B_{n_x-2}$. Finalement, comme $(m\ \vec{t}\,)^\infty = x$, on obtient $x \in B_{n_x-2}[A_{n_x-2} \to m] \subseteq B_{n_x-1}$, ce qui contredit la minimalité de n_x. □

► Comme Δ_∞ est clairement $\vec{t}$-définissable, désormais on supposera que $u \neq \Delta_\infty$.

Étape 1 : quelques lemmes utiles sur G et H.

Proposition 9.1.18
1. *$G[G] = G$*
2. *$H[H] \subseteq H$*
3. *$\forall X \subseteq \Lambda,\ \Delta_+ \circ \delta[G[\ (X\ \ \mathbb{T})\ ]\ ] = H[X]$*
4. *$\forall X \subseteq \Lambda,\ (H[\ \Delta_+ \circ \delta[X]\ ]\ \ \mathbb{T}) \subseteq G[X]$*
5. *$\Delta_+ \circ \delta[G[x]\ ] \subseteq \{\widehat{\Delta_+}\} \cup H[\widehat{\Delta_+}]$*

Preuve
1. Comme $[] \in G$, alors $G \subseteq G[G]$. Pour la réciproque, $G = \bigcup_{n\geq 0} G_n$. $G_1[G] = (\Delta_+ \circ \delta[G]\ \ \mathbb{T}\ ) = (\Delta_+ \circ \delta[\bigcup_{i\geq 0} G_i]\ \ \mathbb{T}\ ) = \bigcup_{i\geq 0}(\Delta_+ \circ \delta[G_i]\ \ \mathbb{T}\ ) = \bigcup_{i\geq 0} G_{i+1} \subset G$. Puis, par récurrence sur n, $G_{n+1}[G] = (\Delta_+ \circ \delta[G_n]\ \mathbb{T})\ [G] = (\Delta_+ \circ \delta[G_n[G]\ ]\ \ \mathbb{T}\ ) \subseteq (\Delta_+ \circ \delta[G]\ \ \mathbb{T}\ ) = G_1[G] \subseteq G$.
2. On conclut comme pour G. On a pas $H \subseteq H[H]$ car $[] \notin H$.
3. Dans un premier temps, montrons par induction sur n que $\Delta_+ \circ \delta[G_n[(X\ \ \mathbb{T})]\ ] = H_n[X]$.
   Pour $n = 0$, $\Delta_+ \circ \delta[G_0[(X\ \ \mathbb{T})]\ ] = \Delta_+ \circ \delta[(X\ \ \mathbb{T})] = H_0[X]$. Pour $n > 0$, $\Delta_+ \circ \delta[G_{n+1}[(X\ \ \mathbb{T})]\ ] = \Delta_+ \circ \delta[\ (\Delta_+ \circ \delta[G_n[(X\ \ \mathbb{T})]\ ]\ \ \ \mathbb{T})] = \Delta_+ \circ \delta[(H_n[X]\ \ \ \mathbb{T})] = \Delta_+ \circ \delta[(H_n\ \mathbb{T})]\ [X] = H_{n+1}[X]$.
   On conclut ensuite par la définition de G et H : $G = \bigcup_{n\geq 0} G_n$ et $H = \bigcup_{n\geq 0} H_n$.
4. Preuve par induction similaire au point précédent.
5. Comme précédemment, on va montrer le résultat pour tout G_n de G. Pour $n = 0$, $\Delta_+ \circ \delta[G_0[x]\ ] = \Delta_+ \circ \delta[x] = \Delta_+\ [\delta_3] = \widehat{\Delta_+}$. Pour $n > 1$, une induction sur n montre que $G_n[x] = G_{n-1}[(\widehat{\Delta_+}\ \mathbb{T})$. D'après le point (3) de la proposition 9.1.18, on en déduit donc $G_n[x] \subseteq H[\widehat{\Delta_+}]$. □

Proposition 9.1.19 *Si $w \neq \Delta_\infty$ et w est $\vec{t}$-définissable, alors $H[w]$ l'est aussi.*

Preuve On distingue 3 cas :
- si $w \in \widehat{\Delta_+}$, alors $H[w] \subset H[\widehat{\Delta_+}]$ qui sont bien $\vec{t}$-définissables.
- si $w \in H[\widehat{\Delta_+}]$, on conclut grâce au point (2) de la proposition 9.1.18

– si $w = H[v]$ pour $v \in H[v]$, alors $H[w] \subseteq H[H[v]]$ par le point (2) de la proposition 9.1.18 on a $H[H[v]] \subseteq H[v]$ d'où $H[w] \in \{H[v]$ tel que $v \in H[v]\}$. w est donc bien $\vec{t}$-définissable. $\square$

Lemme 9.1.20 *Soit w un terme qui s'écrit $w = \Delta_\infty$ ou $w \in \Delta_+ \circ \delta[c]$ pour c un OTF. Soient v un terme, $g \in G$ et C des contextes tels que $C[w] = g[v]$. Alors $C[m]^\infty$ peut s'écrire de l'une des quatre manières suivantes :*

1. *$g'[x]$ avec $g' \in G$ et, si $g \neq []$, $l(g') < l(g)$*
2. *$g'[v]$ avec $g' \in G$ et $l(g') = l(g)$*
3. *$g[E[m]^\infty]$ pour E un contexte tel que $E[w] = v$ et tel que $C = g \circ E$.*
4. *$g'[(u\ \vec{t}\ )]$ avec $g' \in G$ et, si $g \neq []$, $l(g') < l(g)$*

Preuve Comme $C[w] = g[v]$, alors w est un sous-terme de $g[v]$. De plus comme $g \in G$ et $G = \bigcup_{n \geq 0} G_n$, il existe $n \geq 0$ tel que $g \in G_n$. Le résultat se montre par induction sur n. Si $g = []$, on obtient clairement le cas (3) en prenant $E = C$. On supposera donc $g \neq []$. Dans le cas où $w \in \Delta_+ \circ \delta[c]$, on prendra $w = \Delta_p \circ \delta[c]$. Regardons les positions possibles de w dans $g[v]$:

1. Pour $n = 0$, g est trivial. C'est donc le cas (3).
2. Pour $n = 1$, soit $g = ((\Delta_q \circ \delta[]\ )\ \vec{s}\ )$ avec $\vec{s} \in \mathbb{T}$. Comme $w = \Delta_p \circ \delta[c]$ ou $w = \Delta_\infty \subseteq (\Delta_+ \Delta_\infty)$ et que $w \leq g[v] = (\Delta_q \circ \delta[v]\ \ \vec{s})$, par le lemme 7.5.6 de non-capture on a :
   - soit $w \leq \vec{s}$. Dans ce cas il existe un contexte D tel que $\vec{s} = (s_1, \cdots, D[w], \cdots, s_n)$. Comme w est un OTF, par la proposition 9.1.6 point (3), la suite $\vec{s'} = (s_1, \cdots, D[m]^\infty, \cdots, s_n)$ appartient à $\mathbb{T}$. Ainsi, en posant $g' = (\Delta_q \circ \delta[]\ \ \vec{s'})$, on a $C[m]^\infty = g'[v]$ avec $l(g') = l(g)$ et $g' \in G$. C'est le cas (2).
   - soit $w \leq \Delta_q \circ \delta[v]$. Dans ce cas, comme c est un OTF, alors $c \neq x$. En particulier $w \neq \Delta$. Par le lemme de filtrage 7.2.4, appliqué à $w \leq \Delta_q \circ \delta[v]$:
     (a) dans le cas où $w \leq v$, il existe un contexte E tel que $E[w] = v$ et tel que $C = g \circ E$. Ainsi $\Delta_q \circ \delta[v] = \Delta_q \circ \delta[E[w]\ ]$ et comme $\Delta_q \circ \delta[]$ est un contexte normal à droite, par le lemme 7.3.3, $C[m]^\infty = ((\Delta_q \circ \delta[E[m]^\infty\ ])\ \ \ \vec{s}\ ) = g[E[m]^\infty]$. C'est le cas (3).
     (b) dans le cas où $\Delta_r[w] = \Delta_q \circ \delta[v]$ avec $r < q$, alors $C[m]^\infty = (\Delta_r[m]\ \ \vec{s})^\infty$. Comme Δ_r est un contexte normal à droite, par le lemme 7.3.3, $\Delta_r[m]^\infty = \Delta_r[m^\infty] = \Delta_r[m]$ car m est normal. Comme $m = \delta[(u\ \vec{t}\ )]$, alors $C[m]^\infty = (\Delta_r \circ \delta[(u\ \vec{t}\ )]\ \ \vec{s})$. En posant $g' = ((\Delta_r \circ \delta[])\ \vec{s})$ on obtient $C[m]^\infty = g'[(u\ \vec{t}\ )]$ avec $l(g') < l(g)$. C'est le cas (4).
     (c) dans le cas où $w = \Delta_q \circ \delta[v]$, alors $C[m]^\infty = (m\ \vec{s}\ )^\infty = x$. C'est cas (1) pour $g' = [] \in G_0$. $l(g') < l(g)$ car on a supposé $g \neq []$.
3. Pour $n \geq 2$. Soit $g = (\Delta_q \circ \delta[g']\ \ \vec{s})$ avec $\vec{s} \in \mathbb{T}$ et $g' \in G_{n-1}$. D'après le lemme 7.5.6 de non-capture, w est soit sous-terme d'un des éléments de la suite $\vec{s}$ soit sous-terme de la tête $\Delta_q \circ \delta[g']$. Ce qui s'écrit :
   - soit $g[v] = (\Delta_q \circ \delta[g'[v]\ ]\ \ \ s_1 \cdots E[w] \cdots s_n\ )$ et alors $C[m]^\infty = (\Delta_q \circ \delta[g'[v]\ ]\ \ \ \overrightarrow{s'})$ avec $\vec{s'} \in \mathbb{T}$. C'est le cas (2).
   - soit $g[v] = (F[w]\ \vec{s}\ )$ avec $F[w] = \Delta_q \circ \delta[g'[v]\ ]$. Par le lemme 7.2.4 de filtrage on distingue :
     (a) dans le cas où $w \leq g'[v]$ il existe un contexte D tel que $D[w] = g'[v]$. Par hypothèse de récurrence appliquée à w, $g' \in G_{n-1}$ et D, comme $D[w] = g'[v]$, on en déduit $D[m]^\infty = g''[r]$ avec g'' et r correspondant à un des 4 cas de l'énoncé.
     Or, $g[v] = (\Delta_q \circ \delta[g'[v]\ ]\ \ \vec{s}\ ) = (\Delta_q \circ \delta[D[w]\ ]\ \ \vec{s}\ )$. En posant $g_1 = (\Delta_q \circ \delta[]\ \ \vec{s}\ ) \in G_1$, l'égalité $C[w] = g[v]$ s'écrit donc $C[w] = g_1[\ D[w]\ ]$.
     On obtient ainsi $C[m]^\infty = (g_1[\ D[m]\ ])^\infty$. Comme g_1 est un contexte normal à droite, par le lemme 7.3.3, $C[m]^\infty = g_1[\ (D[m])^\infty\ ] = (g_1 \circ g'')[r]$.
     Par la proposition 9.1.18 point (1), $g_1 \circ g'' \in G$. On obtient donc bien le résultat, le cas solution étant celui correspondant à g'' et r.

(b) et (c) dans les cas où $F[w] = \Delta_r[w]$ ou $F[w] = w$, les preuves se font comme pour $n = 1$. □

Étape 2 : précision sur la classe de u
Trouvons un système d'équations satisfaites par u.

Définition 9.1.21 *Notons $(U_i)_{i\geq 1}$ la classe des échangés de u par $(\,(A_i)_{i\geq 0}\,, m)$.*

Lemme 9.1.22 *Pour tout $0 \leq i \leq n_x - 2$, $U_i \cap A_i = \emptyset$.*

Preuve Comme la classe des échangés $(U_i)_{i\geq 1}$ commence à l'indice 1, par la définition 7.4.1, $U_0 = \emptyset$. Si $n_x = 2$, comme $U_0 = \emptyset$, le résultat est immédiat. Sinon, $n_x \geq 3$. Soit $1 \leq i \leq n_x - 2$. Par l'absurde, prenons u' dans $U_i \cap A_i$. Notons que u est un OT car le terme $b = (u\ \vec{t})$ est une forme normale. Comme $(B_i)_{i\geq 1}$ est la suite des échangés de $b = (u\ \vec{t}\,)$ par $(\,(A_i)_{i\geq 0}\,, m)$ comme u est un OT et comme les suites $(U_i)_{i\geq 1}$ et $(B_i)_{i\geq 1}$ ont même indice, par le lemme 7.4.7 on en déduit $(u'\ \vec{t})$ appartient à B_i. Or, $u' \in A_i$, il vient donc $(m\ \vec{t}\,)^\infty \in \{(u'\ \vec{t}\,)\}[A_i \to m]$. Comme $(m\ \vec{t}\,)^\infty = x$ et comme $(u'\ \vec{t}\,) \in B_i$ on obtient donc $x \in B_i[A_i \to m] \subseteq B_{i+1}$. Or, $i + 1 < n_x$ ce qui contredit la minimalité de n_x. □

Lemme 9.1.23 *Pour tout $0 \leq i \leq n_x - 1$, U_i est composée de zéro-termes sous forme normale.*

Preuve Par définition 7.4.1 des classes d'échangées, $(U_i)_{i\geq 1}$ est bien composée de termes sous forme normale.

On a supposé $u \neq \Delta_\infty$. Par la proposition 9.1.1, $u \in A_{n_x-1}$ et par la proposition 8.0.8 point (2), $A_{n_x-1} = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[B_{n_x-1}]$. Il existe donc un terme $c \in B_{n_x-1}$ tel que u appartienne à $\Delta_+ \circ \delta[c]$.

Soient $(C_i)_{i\geq 1}$ la suite des classes des échangés de c par $(\,(A_i)_{i\geq 0}\,, m)$. Notons $(\widetilde{U_i})_{i\geq 0}$ la classe des échanges *stricts* de u d'indice 1 de $(A_i)_{i\geq 0}$ par m. Puisque pour tout $0 \leq i \leq n_x - 2$, $U_i \cap A_i = \emptyset$ (lemme 9.1.22), les échanges stricts et larges sont identiques et les classes $(U_i)_{i\geq 0}$ et $(\widetilde{U_i})_{i\geq 0}$ coïncident donc jusqu'au rang $n_x - 1$. Par la proposition 8.0.11 appliquée à $C = \{c\}$ et $D = \{u\} \subseteq \Delta_+ \circ \delta[c]$, pour tout $0 \leq i \leq n_x - 1$, la classe $\widetilde{U_i}$ est incluse dans $\Delta_+ \circ \delta[C_i] \cup A_i$ qui est une réunion de deux des classes de zéro-termes. Il en est donc de même pour U_i pour tout $0 \leq i \leq n_x - 1$. □

Lemme 9.1.24 *Pour tout $0 \leq i \leq n_x - 1$, $(U_i\ \mathbb{T})$ est une classe de termes normaux et $B_i \subseteq (U_i\ \mathbb{T})$.*

Preuve Par le lemme 9.1.23, pour $0 \leq i \leq n_x - 1$, U_i est composée de OT sous forme normale. Les termes de $(U_i\ \mathbb{T})$ ne possèdent donc pas de redex, ils sont bien sous forme normale comme U_i et $\mathbb{T}$ le sont.

Montrons le résultat par récurrence sur i.

- pour $i = 0$. B_0 et U_0 sont vides et le résultat est immédiat.
- pour $i = 1$. $B_1 = \{u\ \vec{t}\}$ et $U_1 = \{u\}$. Clairement, $B_1 \subseteq (U_1\ \mathbb{T})$.
- pour $2 \leq i \leq n_x - 1$. Nous allons montrer que les échanges de B_i de A_i par m se font soit dans U_i soit dans $\mathbb{T}$. C'est une conséquence de la non-capture.
  D'après la définition 9.0.1, $B_i = B_{i-1} \cup B_{i-1}[A_{i-1} \to m]$ et par hypothèse de récurrence, $B_{i-1} \subseteq (U_{i-1}\ \mathbb{T})$. Ainsi, $B_i \subseteq (U_{i-1}\ \mathbb{T}) \cup (U_{i-1}\ \mathbb{T})[A_{i-1} \to m]$.
  D'autre part, comme $i \leq n_x - 1$, le point (2) de la proposition 8.0.8 assure que $A_{i-1} = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[B_{i-1}]$ et donc $A_{i-1} \subseteq \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\ (U_{i-1}\ \mathbb{T})\ ]$. La classe A_{i-1} vérifie donc l'inclusion : $A_{i-1} \subset \Delta_+[OTF] \cup \Delta_+ \circ \delta[OTFx]$.
  D'après le lemme 7.5.6 de non-capture, les échanges de A_i par m dans $(U_i\ \mathbb{T})$ se font soit dans U_i soit dans $\mathbb{T}$, ce qui s'écrit :
  $(U_{i-1}\ \mathbb{T})\ [A_{j-1} \to m] = (\ U_{i-1}\ [A_{i-1} \to m]\quad \mathbb{T}\ [A_{i-1} \to m]\ )$. Or, par définition de U_i, $U_{i-1}\ [A_{i-1} \to m] \subseteq U_i$ et selon la proposition 9.1.6 point (3), comme $A_{i-1} \subseteq OTF$, $\mathbb{T}[A_{i-1} \to m] \subseteq \mathbb{T}$.
  Finalement, on obtient l'inclusion $B_i \subseteq (U_{i-1}\ \mathbb{T}) \cup (U_i\ \mathbb{T})$ et par le lemme 7.4.6, comme $U_{i-1} \subseteq U_i$, $B_i \subseteq (U_i\ \mathbb{T})$. □

Corollaire 9.1.25 *Pour tout* $0 \leq i \leq n_x - 1,\ A_i \subseteq \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\ (U_i \ \ \mathbb{T})\ ]$.

Preuve Se déduit de la proposition 8.0.8 point (2) et du lemme 9.1.24. ◻

Étape 3 : mise en équations de u

Lemme 9.1.26 *Il existe un système pour* u *au sens de la définition 9.1.13.*

Remarque 9.1.27 Résumons d'abord le schéma de la preuve de cette étape. Par la proposition 9.1.1 et le corollaire 9.1.25, $u \in A_{n_x-1} \subseteq \Delta_+ \circ \delta[\ (U_{n_x-1} \ \ \mathbb{T})\ ]$. Il existe donc en particulier un élément $w \in U_{n_x-1}$ tel que $u = \Delta_p \circ \delta[\ (w \ \ \vec{s})\ ]$. D'après le fait 9.1.28, comme $w \in U_{n_x-1}$, on peut construire une chaîne d'échanges partant de u et se terminant sur w. Cette chaîne introduit des contextes $(C_1, \cdots, C_k)$ que le fait 9.1.30 transforme en $(D_1, \cdots, D_k)$ afin de supprimer des $\Delta_+ \circ \delta$ inutiles. La première équation du système, qui constitue la boucle, s'obtient alors du fait que u s'écrive de deux manières $u = C_1[a_1]$ et $u = \Delta_p \circ \delta[\ (w \ \ \vec{s})\ ]$ et du fait que w est en fin de chaîne i.e. $w = C_k[m]^\infty$. La boucle du système vient donc du fait que w se trouve à la fois au début et à la fin de la chaîne. Les autres équations du système et l'appartenance dérivent alors naturellement.

$$\boxed{\begin{array}{c}
\text{Proposition 9.1.1} \oplus \text{Corollaire 9.1.25} \\
\Downarrow \\
u = \Delta_p \circ \delta[\ (w \ \ \vec{s})\ ] \\
\bigoplus \\
u \text{ s'échange en } w \\
\text{i.e. } u = C_1[a_1] \text{ et } w = C_k[m]^\infty \\
\Downarrow \\
C_1[a_1] = \Delta_p \circ \delta[\ (C_k[m]^\infty \ \ \vec{s})\ ]
\end{array}}$$

Preuve

Nous allons écrire deux systèmes, fait 9.1.28 et fait 9.1.30, dont chacun dérive l'un de l'autre pour finalement obtenir le résultat recherché.

Fait 9.1.28 *Soit* $1 \leq j \leq n_x - 1$. *Pour tout terme* $w \in U_j$ *il existe* $k \leq j$ *contextes non triviaux* $C_1, \cdots, C_k$ *et des termes* $a_1, \cdots, a_k \in A_{j-1}$ *tels que :*

$$u = C_1[a_1]\ ,\ w = C_k[m]^\infty$$

$$\textit{et pour tout } 2 \leq i \leq k,\ C_i[a_i] \in U_{j-1} \textit{ et } C_i[a_i] = C_{i-1}[m]^\infty$$

Remarque 9.1.29 On forme ainsi une chaîne d'échanges :

$u = C_1[a_1]$	$C_1[m]^\infty = C_2[a_2]$	$C_2[m]^\infty = C_3[a_3]$	$\cdots$	$C_k[m]^\infty = w$
$\in U_1$	$\in U_{j-1}$	$\in U_{j-1}$	$\cdots$	$\in U_j$

Preuve Par récurrence sur j :

- Pour $j = 1$, $w \in U_1 = \{u\}$ et donc $w = u$. On obtient alors le résultat pour $k = 1$ et $C_1 = C_k = u$ un contexte sans trou.
- Soit $2 \leq j \leq n_x - 1$ et soit $w \in U_j$. Par définition de U_j, $U_j = U_{j-1} \cup U_{j-1}[A_{j-1} \to m]$ et par le lemme 9.1.22 comme $j - 1 \leq n_x - 2$, alors $U_{j-1} \cap A_{j-1} = \emptyset$, on a donc $U_j = U_{j-1} \cup U_{j-1}[A_{j-1} \to m]^s$. On distingue deux cas suivant les membres de l'union.
  Si $w \in U_{j-1}$, alors on conclut par récurrence.
  Sinon, $w \in U_{j-1}[A_{j-1} \to m]^s$. Par définition de $U_{j-1}[A_{j-1} \to m]^s$, il existe w' dans U_{j-1}, a' dans A_{j-1} et un contexte non trivial C' vérifiant $w' = C'[a']$ et tels que $w = C'[m]^\infty$. Par l'hypothèse de récurrence sur $w' \in U_{j-1}$, il existe $k \leq j - 1$ contextes non triviaux $C_1, \cdots, C_k$ et des termes $a_1, \cdots, a_k \in A_{j-2}$ vérifiant les conditions de l'énoncé et tels que $w' = C_k[m]^\infty$. On obtient donc le résultat en prenant $C_{k+1} = C'$, $a_{k+1} = a' \in A_{j-1}$, $k + 1 \leq j$ et en ajoutant l'équation $w = C_{k+1}[m]^\infty$. ◻

Fait 9.1.30 *Soient un entier $k \leq n_x - 1$, des termes $a_1, \cdots, a_k \in A_{n_x-2}$, une suite $\vec{s} \in \mathbb{T}$, un terme w et des contextes $C_1, \cdots, C_k$.*
Si :

$$\textit{pour tout } 1 \leq i \leq k, \quad C_i[a_i] \in U_{n_x-2}$$

$$C_1[a_1] \in \Delta_+ \circ \delta[\ (w\ \vec{s}\ )\ ] \textit{ et pour tout } 2 \leq i \leq k, \quad C_i[a_i] = C_{i-1}[m]^\infty,$$

Alors il existe des contextes $D_1, \cdots, D_k$ tels que

$$\textit{pour tout } 1 \leq i \leq k, \quad C_i \in \Delta_+ \circ \delta[D_i]$$

$$D_1[a_1] = (w\ \vec{s}\ ) \textit{ et pour tout } 2 \leq i \leq k, \quad D_i[a_i] = D_{i-1}[m]^\infty$$

Remarque 9.1.31 Ce fait permet la transformation des C_i en D_i en supprimant le contexte $\Delta_+ \circ \delta[]$ en tête des C_i qui n'intervient pas dans la chaîne d'échanges :

$C_1[a_1] \in \Delta_+ \circ \delta[\ (w\ \vec{s}\ )\ ]$	$C_1[m]^\infty = C_2[a_2]$	$\cdots$	$C_{k-1}[m]^\infty = C_k[a_k]$
$D_1[a_1] = (w\ \vec{s}\ )$	$D_1[m]^\infty = D_2[a_2]$	$\cdots$	$D_{k-1}[m]^\infty = D_k[a_k]$
$C_1 \in \Delta_+ \circ \delta[D_1]$	$C_2 \in \Delta_+ \circ \delta[D_2]$	$\cdots$	$C_{k-1} \in \Delta_+ \circ \delta[D_{k-1}]$ et $C_k \in \Delta_+ \circ \delta[D_k]$

Preuve Par récurrence sur k.
- Pour $k = 1$, $C_1[a_1] \in \Delta_+ \circ \delta[\ (w\ \vec{s}\ )\ ]$. Prenons $C_1[a_1] = \Delta_q \circ \delta[(w\ \vec{s}\ )\ ]$. Ainsi, $a_1 \leq \Delta_q \circ \delta[\ (w\ \vec{s}\ )\ ]$. Par la proposition 8.0.8 point(2), comme $a_1 \in A_{n_x-2}$, $a_1 = \Delta_\infty$ ou $a_1 \in \Delta_+ \circ \delta[\Lambda]$ et par le corollaire 8.0.10 $a_1 \neq \Delta$, on peut donc appliquer le lemme 7.2.4 de filtrage à $a_1 \leq \Delta_q \circ \delta[\ (w\ \vec{s}\ )\ ]$. Il vient donc les cas suivants :
  (a) $a_1 \leq (w\ \vec{s}\ )$. Il existe alors un contexte D_1 tel que $D_1[a_1] = (w\ \vec{s}\ )$. Dans ce cas, $C_1 = \Delta_q \circ \delta[D_1]$ et on vérifie bien que $C_1 \in \Delta_+ \circ \delta[D_1]$.
  (b) et(c) $C_1[a_1] = a_1$ ou $C_1[a_1] = \Delta_r[a_1]$. Ce cas est exclu sinon $C_1[a_1]$ appartiendrait à $\Delta_+[A_{n_x-2}]$ qui coïncide avec A_{n_x-2} par le proposition 8.0.8 point (2). On aurait donc $C_1[a_1] \in A_{n_x-2} \cap U_{n_x-2}$ ce qui contredirait le lemme 9.1.22.
- Pour $k > 1$. Par hypothèse d'induction appliquée au $k-1$ premier contextes, on trouve des contextes $D_1, \cdots, D_{k-1}$ qui vérifient les conditions de l'énoncé et en particulier $C_{k-1} \in \Delta_+ \circ \delta[D_{k-1}]$. Ainsi, comme $\Delta_+ \circ \delta[]$ sont des contexte normaux à droite, par le lemme 7.3.3, $C_{k-1}[m]^\infty \in \Delta_+ \circ \delta[D_{k-1}[m]^\infty]$. Notons $w'_k = D_{k-1}[m]^\infty$. On obtient $C_k[a_k] \in \Delta_+ \circ \delta[w'_k]$. Par un raisonnement de filtrage analogue au cas $k = 1$ appliqué à $a_k \leq C_k[a_k] \in \Delta_+ \circ \delta[w'_k]$, a_k est nécessairement sous-terme de w'_k. On trouve donc un contexte D_k tel que $D_k[a_k] = w'_k$. D_k vérifie ainsi $C_k \in \Delta_+ \circ \delta[D_k]$ et $D_k[a_k] = w'_k = D_{k-1}[m]^\infty$. □

Fin de la preuve du lemme 9.1.26.

Par la proposition 9.1.1 $u \in A_{n_x-1}$. Comme on a supposé $u \neq \Delta_\infty$, selon le corollaire 9.1.25 il existe un terme $w \in U_{n_x-1}$ et une suite $\vec{s} \in \mathbb{T}$ tels que $u \in \Delta_+ \circ \delta[\ (w\ \vec{s}\ )\ ]$.

D'après le fait 9.1.28 appliqué à w, il existe $k \leq n_x - 1$ contextes non-triviaux $C_1, \cdots, C_k$ et des termes $a_1, \cdots, a_k \in A_{n_x-2}$ tels que $u = C_1[a_1]$, $w = C_k[m]^\infty$, pour tout $2 \leq i \leq k$, $C_i[a_i] = C_{i-1}[m]^\infty$ et $C_i[a_i] \in U_{n_x-2}$. En particulier, comme $u \in \Delta_+ \circ \delta[\ (w\ \vec{s}\ )\ ]$, $u \in \Delta_+ \circ \delta[\ (C_k[m]^\infty\ \ \vec{s}\ )\ ]$.

Par le fait 9.1.30, on trouve des contextes $D_1, \cdots, D_k$ tels que $D_1[a_1] = (w\ \vec{s}\ )$ et tels que pour tout $2 \leq i \leq k$, $D_i[a_i] = D_{i-1}[m]^\infty$ et $C_i \in \Delta_+ \circ \delta[D_i]$. Montrons qu'à partir de $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_k)$ et $\vec{D} = (D_1, \cdots, D_k)$ on peut construire un système pour u. Pour cela, construisons une suite de contexte $\vec{g}$ non tous triviaux.

En effet, comme $w = C_k[m]^\infty$, alors $D_1[a_1] = (C_k[m]^\infty\ \vec{s}\ )$. De plus $C_k \in \Delta_+ \circ \delta[D_k]$ il vient donc $D_1[a_1] \in (\Delta_+ \circ \delta[D_k[m]^\infty]\ \ \ \vec{s}\ )$. Par définition de G_1, on peut donc trouver un contexte $g_1 \in G_1$ non trivial tel que $D_1[a_1] = g_1[D_k[m]^\infty]$. Puis, en posant $g_2 = g_3 = \cdots = g_k = []$, on obtient pour tout $2 \leq i \leq k$, $D_i[a_i] = g_i[D_{i-1}[m]^\infty]$.

Enfin, $u \in \Delta_+ \circ \delta[\ (w\ \vec{s}\ )\ ]$. Comme $w = C_k[m]^\infty$, alors $u \in \Delta_+ \circ \delta[\ (C_k[m]^\infty\ \ \vec{s}\ )\ ]$. De plus $C_k \in \Delta_+ \circ \delta[D_k]$, il vient donc $u \in \Delta_+ \circ \delta[\ (\ \Delta_+ \circ \delta[D_k[m]^\infty]\ \ \ \vec{s}\ )\ ]$ qui peut également s'écrire $u \in \Delta_+ \circ \delta[G[D_k[m]^\infty]\ ]$.

Le quadruplet $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$ forme donc un système pour u. □

Étape 4 : Résolution du système

Lemme 9.1.32 *Soit $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$ un système pour u, minimal au sens de l'ordre lexicographique sur sa taille $(k, \sum_i l(D_i))$. Tout terme de $\Delta_+ \circ \delta \circ G[\ D_k[m]^\infty\ ]$ est alors soit $\vec{t}$-définissable soit il appartient à $H[u]$.*

Preuve

Soit $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]$, montrons qu'il est $\vec{t}$-définissable.

▷ Pour $k = 1$, on a une seule équation : $D_1[a_1] = g[D_1[m]^\infty]$ avec $g \in G$ un contexte non trivial.

– Si D_1 est trivial, comme $k = 1$, $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]$ s'écrit $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[m^\infty]$. Or, $m^\infty = m = (u\ \vec{t})$ d'où $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[\ (u\ \vec{t})\ ]$. D'après la proposition 9.1.18 point (3), comme $\vec{t} \in \mathbb{T}$, on en déduit $w \in H[u]$.

– Traitons le cas où D_1 est non-trivial. Selon le corollaire 9.1.25, $a_1 \in \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[\ (U_{n_x - 2}\ \mathbb{T})\ ]$. On peut donc appliquer le lemme 9.1.20 sur les échanges dans G à l'égalité $D_1[a_1] = g[D_1[m]^\infty]$. Il vient alors quatre cas :

1. si $D_1[m]^\infty = g'[x]$ avec $l(g') < l(g)$. Alors $\Delta_+ \circ \delta \circ G[\ D_1[m]^\infty\ ] \in \Delta_+ \circ \delta \circ G \circ g'[x]$. Par la proposition 9.1.18 point (1), $G \circ g' \subseteq G$, d'où $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[x]$.

   Ainsi, par la proposition 9.1.18 point (5), il vient $w \in \widehat{\Delta_+} \cup H[\widehat{\Delta_+}]$. w est donc bien $\vec{t}$-définissable.

2. si $D_1[m]^\infty = g'[D_1[m]^\infty]$ avec $l(g') = l(g)$. g' reste donc non-trivial tout comme g. Par construction de G, il existe $g'' \in G$, une suite $\vec{s} \in \mathbb{T}$ et un entier p tels que $g' = g''[\ (\ (\Delta_p \circ \delta)\quad \vec{s})\ ]$.

   Ainsi, $D_1[m]^\infty = g''[\ (\Delta_p \circ \delta[D_1[m]^\infty\ ]\quad \vec{s}\ )\ ]$. En posant $v = \Delta_p \circ \delta \circ D_1[m]^\infty$ cette équation devient :

   $v = \Delta_p \circ \delta \circ g''[\ (\Delta_p \circ \delta \circ D_1[m]^\infty\quad \vec{s}\ )\ ] = \Delta_p \circ \delta \circ g''[\ (v\ \vec{s})\ ]$ qui appartient à $H[v]$ par la proposition 9.1.18 point (3).

   Finalement comme $D_1[m]^\infty = g''[\ (v\ \vec{s}\ )\ ]$ et comme $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[D_1[m]^\infty]$, on en déduit $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G \circ g''[\ (v\ \vec{s}\ )\ ]$. Par la proposition 9.1.18 point (1), on obtient $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[\ (v\ \vec{s}\ )\ ]$ et par le point (3) on conclut enfin $w \in H[v]$ qui est bien $\vec{t}$-définissable.

3. si $D_1[m]^\infty = g[E_1[m]^\infty]$ avec $E_1[a_1] = D_1[m]^\infty$ et $l(E_1) < l(D_1)$, alors on a l'équation $E_1[a_1] = g[E_1[m]^\infty]$. De plus $u \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[D_1[m]^\infty] \subseteq \Delta_+ \circ \delta \circ G \circ g[E_1[m]^\infty]$ ce qui, par la proposition 9.1.18 point (1), s'écrit également $u \in \subseteq \Delta_+ \circ \delta \circ G[E_1[m]^\infty]$.

   $(\vec{a}, \vec{E}, \vec{g}, 1)$ forme donc un système pour u plus petit que $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, 1)$. Ce qui contredit la minimalité de $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, 1)$.

4. si $D_1[m]^\infty = g'[\ (u\ \vec{t}\ )\ ]$, alors $\Delta_+ \circ \delta \circ G[D_1[m]^\infty] \subseteq \Delta_+ \circ \delta \circ G \circ g'[\ (u\ \vec{t}\ )\ ]$. En appliquant le point (1) de la proposition 9.1.18, il vient $\Delta_+ \circ \delta \circ G \circ g'[\ (u\ \vec{t}\ )\ ] \subseteq \Delta_+ \circ \delta \circ G[\ (u\ \vec{t}\ )\ ]$, et par le point (3) $\Delta_+ \circ \delta \circ G[\ (u\ \vec{t}\ )\ ] \subseteq H[u]$. Tout terme w élément de $\Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]$ est donc élément de $H[u]$.

▷ Pour $k > 1$.

Dans la suite, si $i = 1$, $i - 1$ désignera k et non zéro.

Soit $1 \leq i \leq k$ un indice tel que g_i soit non trivial. Considérons l'équation $D_i[a_i] = g_i[D_{i-1}[m]^\infty]$. D'après lemme 9.1.20, on a quatre cas possibles pour la valeur de $D_i[m]^\infty$. Commençons par le dernier cas.

4. $D_i[m]^\infty = g'[(u\ \vec{t}\ )]$.

   Comme $u \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]$, alors $D_i[m]^\infty \in g'[\ (\Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]\quad \vec{t}\ )\ ]$. Or, par définition de G, $(\Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]\quad \vec{t}\ ) \subseteq G_1 \circ G[\ D_k[m]^\infty\ ]$. Par la proposition 9.1.18 point (1), il existe donc un contexte g_1, non trivial car $G_1 \circ G \neq \{[]\}$, tel que $D_i[m]^\infty = g' \circ g_1[D_k[m]^\infty]$. Par le point (1) de 9.1.18 on peut donc trouver un contexte $g'' \neq []$ tel $g'' = g' \circ g_1$ et tel que $D_i[m]^\infty = g''[D_k[m]^\infty]$.

   – Si $i = k$, l'équation devient $D_k[m]^\infty = g''[D_k[m]^\infty]$. On conclut alors comme pour le cas d'une seule équation ($k = 1$) point (2).

– Sinon $i < k$. L'équation $D_{i+1}[a_{i+1}] = g_{i+1}[D_i[m]^\infty]$ peut alors s'écrire $D_{i+1}[a_{i+1}] = g_{i+1} \circ g''[D_k[m]^\infty]$. Par le point (1) de 9.1.18, il existe un contexte g'_{i+1} élément de G tel que $g'_{i+1} = g_{i+1} \circ g''$. g'_{i+1} est de plus non trivial.
Considérons le système suivant :

$$\begin{array}{rcl} D_{i+1}[a_{i+1}] & = & g'_{i+1}[D_k[m]^\infty] \\ & \vdots & \\ D_k[a_k] & = & g_k[D_{k-1}[m]^\infty] \end{array}$$

Soient $\vec{\alpha} = (a_{i+1}, \cdots, a_k)$, $\vec{E} = (D_{i+1}, \cdots, D_k)$ et $\vec{g'} = (g'_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_k)$. Le quadruplet $(\vec{\alpha}, \vec{E}, \vec{g'}, k-i)$ forme alors un système pour u plus petit que $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$ ce qui contredit la minimalité de $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$.

1. $D_i[m]^\infty = g'[x]$.
   – Si $i = k$, comme $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]$, alors $w \in \Delta_+ \circ \delta \circ G \circ g'[x]$. Par 9.1.18 point (1) et (3), on en déduit $w \in \widehat{\Delta_+} \cup H[\widehat{\Delta_+}]$ qui est bien $\vec{t}$-définissable.
   – Si $i < k$, $D_{i+1}[a_{i+1}] = g_{i+1}[D_i[m]^\infty\ ] = g_{i+1} \circ g'[x]$. Posons $g'_{i+1} = g_{i+1} \circ g'$. Par 9.1.18 point (1), $g'_{i+1} \in G$. Appliquons le lemme 9.1.20 à l'équation $D_{i+1}[a_{i+1}] = g'_{i+1}[x]$. Le cas (3) est exclu car $a_{i+1} \not\leq x$, il reste trois cas qui peuvent se résumer ainsi : pour (1) et (2) $D_{i+1}[m]^\infty = g''[x]$ ou pour (4) $D_{i+1}[m]^\infty = g^3[(u\ \vec{t}\,)]$ avec $g'', g^3 \in G$ et $l(g''), l(g^3) \leq l(g'_{i+1})$.
   Si $D_{i+1}[m]^\infty = g''[x]$, ce même raisonnement peut être poursuivi aux équations suivantes. Ainsi, :
   – soit il est poursuivi jusqu'au bout. Dans ce cas pour tout entier $i < j \leq k$, $D_j[m]^\infty = g'_j[x]$, et alors $D_k[m]^\infty = g'_k[x]$ qui vient d'être traité pour $i = k$
   – soit il existe un entier $j > i$ tel que $D_j[m]^\infty = g'[\ (u\ \vec{t}\ )]$ et on est alors ramené au cas (4.) traité au paragraphe précédent.
2. $D_i[m]^\infty = g'[D_{i-1}[m]^\infty]$ avec $l(g') = l(g_i)$. g' est donc non trivial.
   – Si $i = k$, alors $D_k[m]^\infty = g'[D_{k-1}[m]^\infty]$. Ainsi la première équation $D_1[a_1] = g_1[D_k[m]^\infty]$ du système pour u devient $D_1[a_1] = g_1 \circ g'[D_{k-1}[m]^\infty]$.
   De plus u est bien élément de $\Delta_+ \circ \delta \circ G[D_{k-1}[m]^\infty]$ puisque $u \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]$ et que $\Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty] \subseteq \Delta_+ \circ \delta \circ G \circ g'[D_{k-1}[m]^\infty]$ lui-même inclus dans $\Delta_+ \circ \delta \circ G[D_{k-1}[m]^\infty]$ en vertu de 9.1.18 point (1).
   En posant $\vec{\alpha} = (a_1, \cdots, a_{k-1})$, $\vec{E} = (D_1, \cdots, D_{k-1})$ et $\vec{g'} = (g_1 \circ g', \cdots, g_{k-1})$ le quadruplet $(\vec{\alpha}, \vec{E}, \vec{g'}, k-1)$. forme un système pour u plus petit que $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$. Contradiction.
   – Si $i < k$, la $(i+1)^e$ équation $D_{i+1}[a_{i+1}] = g_{i+1}[D_i[m]^\infty\ ]$ devient $D_{i+1}[a_{i+1}] = g_{i+1} \circ g'[D_{i-1}[m]^\infty\ ]$. En vertu de 9.1.18 point (1), le contexte $g'_{i+1} = g_{i+1} \circ g'$ est un élément non-trivial de G.
   Soient $\vec{\alpha} = (a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_k)$, $\vec{E} = (D_1, \cdots, D_{i-1}, D_{i+1}, \cdots, D_k)$ et $\vec{g'} = (g_1, \cdots, g_{i-1}, g'_{i+1}, \cdots, g_k)$, alors $(\vec{\alpha}, \vec{E}, \vec{g'}, k-1)$ forme un système pour u plus petit que $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$. Contradiction.
3. $D_i[m]^\infty = g_i[E_i[m]^\infty]$ avec $E_i[a_i] = D_{i-1}[m]^\infty$ et $D_i = g_i \circ E_i$. En particulier, $l(E_i) < l(D_i)$ puisque $g_i \neq []$.

   En posant $g'_{i+1} = g_{i+1} \circ g_i$, qui est un élément non-trivial de G en vertu de 9.1.18, l'équation $D_{i+1}[a_{i+1}] = g_{i+1}[D_i[m]^\infty]$ devient $D_{i+1}[a_{i+1}] = g'_{i+1}[E_i[m]^\infty]$.

   Dans le système, on remplace alors la i^e équation par $E_i[a_i] = D_{i-1}[m]^\infty$ et la $(i+1)^e$ par $D_{i+1}[a_i] = g'_{i+1}[E_i[m]^\infty]$.
   – Si $i = k$, comme $D_k = g_k \circ E_k$, et comme $u \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[D_k[m]^\infty]$, par 9.1.18 point (1), $u \in \Delta_+ \circ \delta \circ G[E_k[m]^\infty]$.
   En posant $\vec{E} = (D_1, \cdots, D_{k-1}, E_k)$, le quadruplet $(\vec{a}, \vec{E}, \vec{g}, k)$ forme donc un système pour u plus petit que $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$.
   – Si $i < k$, pour $\vec{E} = (D_1, \cdots, D_{i-1}, E_i, D_{i+1}, \cdots, D_k)$ le quadruplet $(\vec{a}, \vec{E}, \vec{g}, k)$ également un système pour u plus petit que $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$.
   Dans les deux cas on obtient une contradiction par minimalité de $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$.

□

Étape 5 : Fin de la preuve du théorème 9.1.15

En vertu du lemme 9.1.26, il existe $(\vec{a}, \vec{D}, \vec{g}, k)$ un système pour u. Prenons le minimal.

D'après la définition 9.1.13, u est un élément de $\Delta_+ \circ \delta[G[D_k[m]^\infty]\ ]$. Par le lemme 9.1.32 u est donc soit $\vec{t}$-définissable, soit il appartient à $H[u]$ ce qui le rend également $\vec{t}$-définissable. $\square$

9.2 $Cls_m(Y\,\Omega_3)$ est composée de zéro-termes

Prenons un terme fini dont la forme normale infinie m vérifie les hypothèses H_1 et H_2. Sous ces conditions, en vertu du théorème 9.1.17 il existe une suite de termes $\vec{t}$ de $\mathcal{T}_x^m$ et un terme $\vec{t}$-définissable u tels que $m = \delta[\ (u\ \vec{t}\,)\ ]$.

Nous allons alors montrer que $A = Cls_m(Y\,\Omega_3)$ n'est composée que de zéro-termes. En vertu de la définition 9.1.12, nous avons trois situations à traiter : $u = \Delta_\infty$, $u \in \widehat{\Delta_+} \cup H[\widehat{\Delta_+}]$ et $u \in \{H[v] \text{ tel que } v \in H[v]\}$.

Commençons par le dernier et le plus intéressant des cas.

9.2.1 Cas : $\mathbf{u \in \{H[v] \text{ tel que } v \in H[v]\}}$

Théorème 9.2.1 *Soit $m = \delta[\ (u\ \vec{t}\,)\ ]$ une forme normale infinie où $\vec{t}$ est une suite de $\mathcal{T}_x^m$. Soit H la classe de contextes définie à partir de $\vec{t}$ au sens de 9.1.7. S'il existe un terme v tel que $u \in H[v]$ et $v \in H[v]$, alors $Cls_m(Y\,\Omega_3)$ n'est composée que de zéro-termes.*

Preuve La preuve consiste à inclure pour tout $i \geq 0$ la classe A_i des échangés de Δ_∞ par (A_i, m) dans une classe A_i^* (proposition 9.2.7). Cette classe A_i^* étant bâtie à partir d'un squelette H et de la classe A_i qui correspond à sa partie utile lors des échanges de A_i par m.

La première difficulté consiste à choisir un bon candidat pour la classe A_1^*. Ce candidat doit vérifier le lemme 9.2.5, la proposition 9.2.7 et le lemme 9.2.21.

Puis, on montre que A_i^* est contenue dans une classe $\hat{\overline{F_i}}$ (proposition 9.2.31) construite sur la base d'une grammaire et dont les termes sont clairement des zéro-termes (corollaire 9.2.15) car ils sont de la forme $(\Delta\ \vec{v})$.

On notera dans cette preuve, que seuls les lemmes 9.2.3 , 9.2.5, 9.2.21 et la proposition 9.2.7 se réfèrent à l'hypothèse de l'énoncé, selon laquelle $u \in H[v]$ et $v \in H[v]$. $\square$

Comme u appartient à $H[v]$ alors u est un OTF de degré infini en vertu de la remarque 9.1.10. Le terme $m = \delta[\ (u\ \vec{t}\,)\ ]$ satisfait donc l'hypothèse H_1. De plus, v est sous forme normale puisque $u \in H[v]$, et que u est sous forme normale en tant que sous-terme de m.

▶ Notons $\mathbb{T}$ la partie utile de $\vec{t}$ au sens de 7.5.14.

Définition 9.2.2 *Soit $(A_n^*)_{n\geq 0}$ la suite de classes définie par $A_0^* = \{\Delta_\infty\}$, $A_1^* = \{\Delta_\infty\} \cup H[v]$ et pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1}^* = A_n^* \cup A_n^*[A_n^* \to m]^s$.*

Lemme 9.2.3 *Les classes $(A_n^*)_{n\geq 0}$ sont composées de termes sous forme normale qui ne possèdent pas x comme variable libre.*

Preuve Par induction sur n.

- A_0 est composée de Δ_∞ qui est clos et normal.
- Pour A_1, d'après la remarque 9.1.10, les éléments de $H[v]$ sont de la forme $\Delta_+ \circ \delta[w]$, qui est un OTF. Comme le terme Δ et clos et que le contexte δ lie la variable x, x n'est pas libre dans les termes de $H[v]$.
  De plus comme v est un OTF, alors $H[v]$ ne possède pas de redex (cf. remarque 9.1.10).

– Si les termes de A_n^* sont privés de la variable libre x, alors il en est de même pour $A_n^* \cup A_n^*[A_n^* \to m]^s$ puisque m est clos.
De plus, d'après la définition des échanges 3.4.24, $A_n^*[A_n^* \to m]^s$ est composée de termes normaux. Si A_n^* est composée de termes normaux, alors la classe $A_{n+1}^* = A_n^* \cup A_n^*[A_n^* \to m]^s$ l'est aussi. □

Remarque 9.2.4 Pour un autre candidat de A_1^*, ce lemme reste vrai si A_1^* est composée de terme normaux et si x n'est pas libre dans les éléments de A_1^*.

Lemme 9.2.5 $A_1^* \subseteq (\Delta\ \ \delta[(A_1^*\ \mathbb{T})]\ ) \cup (\Delta\ \ A_1^*)$.

Remarque 9.2.6 Les termes de A_1^* sont donc de la forme $(\Delta\ v)$.

Preuve Soit $a_1 \in A_1^*$:

1. si $a_1 = \Delta_\infty$, alors $a_1 = (\Delta\ a_1) \in (\Delta\ A_1^*)$.
2. sinon, $a_1 \in H[v]$. Par définition de H, en distinguant H_0 des autres classes, $H[v] = \Delta_+\circ\delta[\ (v\ \mathbb{T})\ ]\ \cup\ \Delta_+\circ\delta[\ (H[v]\ \mathbb{T})\ ]$. Or, par hypothèse, $v \in H[v]$ d'où $\Delta_+\circ\delta[(v\ \mathbb{T})] \subseteq \Delta_+\circ\delta[\ (H[v]\ \ \mathbb{T})\ ]$.
On se ramène donc à $a_1 \in \Delta_+\circ\delta[\ (H[v]\ \ \mathbb{T})\ ]$
Or, par définition $\Delta_+\circ\delta = (\Delta\ \ \delta) \cup (\Delta\ \ (\Delta_+\circ\delta\ ))$.
Ainsi, $a_1 \in (\Delta\ \ \delta[(H[v]\ \mathbb{T})]\ ) \cup (\Delta\ \ \ (\Delta_+\circ\delta[(H[v]\ \mathbb{T})])\ )$.
Comme $H[v] \subseteq A_1^*$, on a $(\Delta\ \ \delta[(H[v]\ \mathbb{T})]\ ) \subseteq (\Delta\ \ \delta[(A_1^*\ \ \mathbb{T})]\ )$. Et d'après la définition 9.1.7 de H, $\Delta_+\circ\delta[(H[v]\ \mathbb{T})] \subseteq H[v]$. On en déduit donc $(\Delta\ \ (\Delta_+\circ\delta[(H[v]\ \mathbb{T})]\ )\ ) \subseteq (\Delta\ \ H[v]) \subseteq (\Delta\ \ A_1^*)$.
Ce qui entraîne finalement $a_1 \in (\Delta\ \ \delta[(A_1^*\ \mathbb{T})]\ ) \cup (\Delta\ \ A_1^*)$ □

Proposition 9.2.7 $\forall n \geq 0,\ A_n \subseteq A_n^*$

Preuve Par induction sur n.

▷ Pour $n = 0$, $A_0 = A_0^*$.

▷ Pour $n = 1$, comme m vérifie H_1, par la proposition 8.0.8, $A_1 = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+\circ\delta[B_1]$.
Comme $B_1 = \{\ (u\ \vec{t})\ \}$, on a $A_1 = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+\circ\delta[\ (u\ \vec{t}\ )\ ]$.
Par définition de H, $\Delta_+\circ\delta[(u\ \vec{t}\ )] \subseteq H[u]$. Ainsi $A_1 \subseteq \{\Delta_\infty\} \cup H[u]$.
Or, par hypothèse du théorème 9.2.1, $u \in H[v]$, ce qui entraîne $A_1 \subseteq \{\Delta_\infty\} \cup H[H[v]\ ]$.
Finalement, par la proposition 9.1.18 point (2), $H[H] \subseteq H$, ce qui donne $A_1 \subseteq \{\Delta_\infty\} \cup H[v]$ qui est égale à A_1^* par définition.

▷ Pour $n > 1$, l'induction sur n est immédiate du fait que, pour toutes classes A et B, $A \subseteq B$ entraîne $A[A \to m]^s \subseteq B[B \to m]^s$, que $A_{n+1} = A_n \cup A_n[A_n \to m]^s$ et que $A_{n+1}^* = A_n^* \cup A_n^*[A_n^* \to m]^s$ par définition. □

Remarque 9.2.8 Pour $m = \delta[\ (u\ \vec{t})\ ]$. Si $A_0 \subseteq A_0^*$, si $\Delta_\infty \in A_1^*$ et si $\Delta_+\circ\delta[\ (u\ \vec{t}\ )\ ] \subseteq A_1^*$, alors cette proposition 9.2.7 reste vraie.

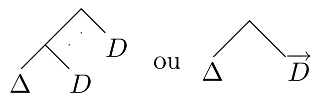
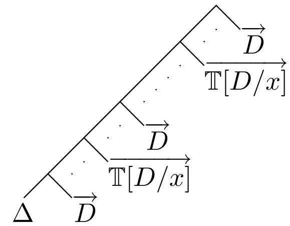
Définition 9.2.9 *On note :*

– $D = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{D}_k$ *où* $\mathcal{D}_0 = \{[], \delta_3\} \cup \delta[([]\ \mathbb{T})]$ *et pour tout* $k \geq 1$, $\mathcal{D}_{k+1} = ([]\ \ \mathbb{T}[\mathcal{D}_k/x])$

– $E = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{E}_k$ *où* $\mathcal{E}_0 = \{\Delta\}$ *et pour tout* $k \geq 1$, $\mathcal{E}_{k+1} = (\mathcal{E}_k\ D)$

– $F = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_k$ *où* $\mathcal{F}_0 = E$ *et pour tout* $k \geq 0$, $\mathcal{F}_{k+1} = (\mathcal{F}_k\ D) \cup (\mathcal{F}_k\ \ \mathbb{T}[D/x]\ \ D)$

Remarque 9.2.10 La classe de contextes, F, permet de décrire la forme des échangés de la classe A_i par $(\ A_i\ ,\ m)$ dans le cas particulier où Δ appartient à A_i. Sous ces conditions, comme les termes de A_i s'écrivent $(\Delta\ v)$, les échanges peuvent avoir lieu en tête. Dans cette description, les contextes de D entrent en position d'argument dans la construction de ceux des classes E et F ; ces derniers commençant toujours par un Δ. Graphiquement :

D	E	F
– [] – δ_3 – $\delta[\,([]\ \ \mathbb{T})\,]$ – $([]\ \ \mathbb{T}[D/x])$		

Notation 9.2.11

- $\mathbb{T}[D/x]$ est l'ensemble des suites de termes $\vec{s} \in \mathbb{T}$ auxquels un élément de D à été substitué à la place de la variable libre x.
- D, E et F contiennent des contextes (avec plusieurs trous) et des termes.
- Quand les termes de la substitution appartiennent tous à la même classe, comme Λ ou A_n^*, on notera simplement $D[\Lambda]$ ou $D[A_n^*]$ au lieu de $D[\Lambda, \cdots, \Lambda]$ ou $D[A_n^*, \cdots, A_n^*]$.

Lemme 9.2.12

1. *Pour tout $e \in E$, il existe une suite de contextes $\vec{d}$ composée d'éléments de la classe D telle que $e = (\Delta\ \ \vec{d}\,)$.*
2. *Pour tout $f \in F$, il existe des suites non vides de contextes $(\vec{d_0}, \vec{d_1}, \cdots, \vec{d_k})$ et $(\vec{c_1}, \cdots, \vec{c_k})$ composées d'éléments de la classe D ainsi que des suites non vides de termes $(\vec{t_1}, \cdots, \vec{t_k})$ toutes éléments de $\mathbb{T}$ telles que $f = (\Delta\ \ \vec{d_0}\ \ \vec{t_1}[\vec{c_1}/x]\ \ \cdots\ \ \vec{t_k}[\vec{c_k}/x]\ \ \vec{d_k})$.*

   Autrement dit, les contextes de F commencent par Δ et sont suivis d'arguments qui alternent entre D et $\mathbb{T}[D/x]$.

Preuve Les deux points se déduisent par une induction immédiate sur l'indice k des classes $\mathcal{E}_k$ et $\mathcal{F}_k$ qui composent E et F. □

Lemme 9.2.13 *La variable x n'est pas libre dans les éléments des classes D, E et F.*

Preuve

- Pour D, la preuve se fait par induction sur k. Pour $\mathcal{D}_0$: [] et δ_3 sont clos ; x n'est pas libre dans $\delta[([]\ \mathbb{T})]$ puisque δ lie la variable x. Pour $\mathcal{D}_{k+1}$, comme les termes de $\mathcal{D}_k$ sont privés de la variable x, alors il en est de même pour ceux des suites de $\mathbb{T}[\mathcal{D}_k/x]$. Les éléments de $\mathcal{D}_{k+1} = ([]\ \ \mathbb{T}[\mathcal{D}_k/x])$ sont donc privés de la variable libre x.
- Pour E, c'est immédiat puisque Δ est clos et que D est privé de la variable libre x.
- Pour F, comme les termes de D sont privé de la variable libre x, il en est de même pour ceux des suites de $\mathbb{T}[D/x]$. On conclut alors grâce au lemme 9.2.12 point (3).

□

Lemme 9.2.14

1. *Pour tout $d \in D$ et pour toute suite de zéro-termes $\vec{v}$ ne possédant pas x comme variable libre, $d[\vec{v}\,]^\infty \in D[\,\vec{v}^{\,\infty}\,]$.*
2. *Pour tout $e \in E$ et pour toute suite de termes $\vec{v}$, il existe une suite de termes normaux $\vec{s}$ telle que $e[\vec{v}\,]^\infty = (\Delta\ \vec{s}\,)$.*

   De plus si $\vec{v}$ est composée de zéro-termes qui ne possèdent pas x comme variable libre, alors $e[\vec{v}\,]^\infty \in E[\,\vec{v}^{\,\infty}\,]$.
3. *Pour tout $f \in F$ et toute suite de termes $\vec{v}$, il existe une suite de termes normaux $\vec{s}$ telle que $f[\vec{v}\,]^\infty = (\Delta\ \vec{s}\,)$.*

   De plus si $\vec{v}$ est composée de zéro-termes qui ne possèdent pas x comme variable libre, alors $f[\vec{v}\,]^\infty \in F[\,\vec{v}^{\,\infty}\,]$.

Preuve Pour chaque cas, on procède par récurrence sur l'indice k des classes $\mathcal{D}_k$, $\mathcal{E}_k$ et $\mathcal{F}_k$ qui composent les classes D, E et F.

1. – Soit $d \in \mathcal{D}_0 = \{[], \delta_3\} \cup \delta[([]\ \mathbb{T})]$.
   Si $d = \delta_3$ ou $d = []$, c'est immédiat.

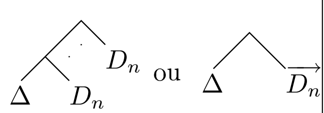
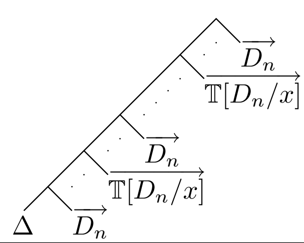
   Si $d = \delta[\ ([]\ \vec{s}\ )\ ]$ pour $\vec{s} \in \mathbb{T}$, alors $d[v] \in \delta[(v\ \mathbb{T})]$.
   Comme v est un OT, alors $(v\ \vec{s}\ )^\infty = (v^\infty\ \vec{s}\ )$. Ainsi $d[v]^\infty = \delta[(v^\infty\ \vec{s}\ )] = d[v^\infty] \in D[v^\infty]$.
   – Soit $d \in \mathcal{D}_{k+1} = ([]\ \ \mathbb{T}[\mathcal{D}_k/x])$.
   On peut donc extraire $d_k \in \mathcal{D}_k$ et $\vec{s} \in \mathbb{T}$ tels que $d = ([]\ \vec{s}\ [d_k/x])$, et un terme v_i de la suite $\vec{v}$ tel que $d[\vec{v}\ ] = (v_i\ \ \vec{s}\ [d_k[\vec{v}]/x])$.
   Comme x n'est libre, ni dans $\vec{v}$, ni dans d_k d'après le lemme 9.2.13, selon la proposition 9.1.6 point (5), il existe $\vec{s}_1 \in \mathbb{T}$ tel que $\vec{s}\ [d_k[\vec{v}\ ]/x]^\infty = \vec{s}_1[d_k[\vec{v}\ ]^\infty/x]$.
   De plus, par hypothèse de récurrence, $d_k[\vec{v}\ ]^\infty \in D[\vec{v}^{\ \infty}]$. Il existe donc un entier $k_1 \geq 0$ et un contexte $d_{k_1} \in \mathcal{D}_{k_1}$ tels que $d_k[\vec{v}\ ]^\infty = d_{k_1}[\vec{v}^{\ \infty}]$.
   Finalement, comme $\vec{v}$ est composée de zéro-termes, $d[\vec{v}\ ]^\infty = (v_i^\infty\ \ \vec{s}_1[d_{k_1}[\vec{v}^{\ \infty}]/x]) \in \mathcal{D}_{k_1}[\vec{v}^{\ \infty}] \subseteq D[\vec{v}^{\ \infty}]$.
2. Immédiat à partir du lemme 9.2.12 point (1) et du point (1) de ce lemme.
3. Le premier point est immédiat à partir du lemme 9.2.12 point (2). Pour le second, d'après le lemme 9.2.12 point (2), il suffit de montrer que $(D[\vec{v}])^\infty \subseteq D[\vec{v}^\infty]$, ce qui est déjà fait, et que $(\mathbb{T}[D/x]\ [\vec{v}])^\infty \subseteq \mathbb{T}[D/x]\ [\vec{v}^\infty\ ]$.
   Or, comme x n'est libre, ni dans $\vec{v}$, ni dans D , alors elle n'est pas libre dans $D[\vec{v}]$. Dans un premier temps, remarquons que $\mathbb{T}[D/x]\ [\vec{v}] = \mathbb{T}[D[\vec{v}]/x]$. Puis, d'après le point (5) de la proposition 9.1.6, on obtient $(\mathbb{T}[D[\vec{v}]/x])^\infty \subset \mathbb{T}[D[\vec{v}]^\infty/x]$ qui est incluse, d'après le point (1), dans $\mathbb{T}[D[\vec{v}^\infty\ ]/x]$ elle-même égale à $\mathbb{T}[D/x]\ [\vec{v}^\infty\ ]$. □

Corollaire 9.2.15 *$E[\Lambda]$ et $F[\Lambda]$ sont composées de OTF de degré infini qui s'écrivent sous la forme $(\Delta\ \vec{v})$.*

Preuve En vertu du lemme 9.2.14 point (2) et (3), les formes normales infinies des termes de $E[\Lambda]$ et de $F[\Lambda]$ s'écrivent sous la forme $(\Delta\ \vec{v})$ qui sont des OTF de degré infini du fait que Δ en est un. Les termes de $E[\Lambda]$ et de $F[\Lambda]$ sont donc des OTF en vertu du lemme 2.2.12. □

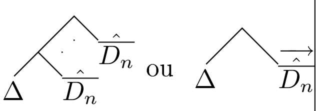
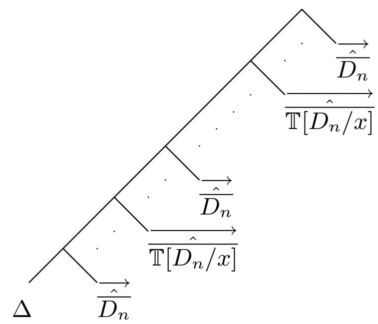
Notation 9.2.16 Notons : $D_n = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{D}_k[A_n^*]$, $E_n = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{E}_k[A_n^*]$ et $F_n = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_k[A_n^*]$.

Remarque 9.2.17 Autrement dit : $D_n = D[A_n^*]$, $E_n = E[A_n^*]$ et $F_n = F[A_n^*]$.
Graphiquement :

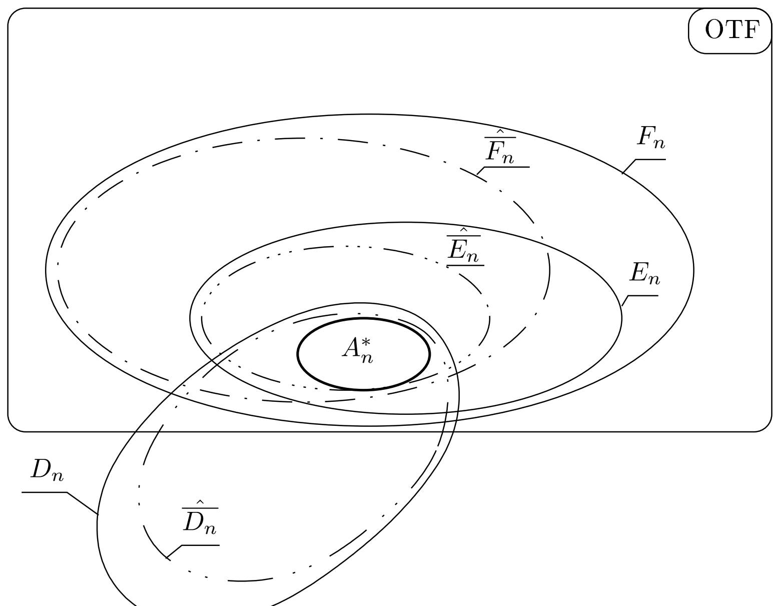
D_n	E_n	F_n
– A_n^* – δ_3 – $\delta[\ (A_n^*\ \ \mathbb{T})\ ]$ – $(A_n^*\ \ \mathbb{T}[D_n/x])$		

Définition 9.2.18 *Pour toute classe de terme A, $\hat{\overline{A}}$ dénote la restriction de A aux termes normaux de A. Autrement dit, $\hat{\overline{A}} = A \cap \Lambda^\infty$.*

Remarque 9.2.19 Les sous-termes de formes normales étant eux mêmes des formes normales, nous en déduisons le tableau de construction des classes $\hat{\overline{D_n}}$, $\hat{\overline{E_n}}$ et $\hat{\overline{F_n}}$:

$\overline{\hat{D}_n}$	$\overline{\hat{E}_n}$	$\overline{\hat{F}_n}$
– A_n^* – δ_3 – $\delta[\ (A_n^*\ \ \mathbb{T})\ ]$ – $(A_n^*\ \ \overline{\mathbb{T}[\hat{D}_n/x]})$		

Remarque 9.2.20 Nous pouvons déjà représenter les différentes inclusions entre les classes D_n, E_n et F_n, dans le cas où $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F}_n}$:



Lemme 9.2.21 $m \in \overline{\hat{D}_1}$.

Preuve m est sous forme normale, il suffit donc de montrer qu'il appartient à D_1.

Par hypothèse du théorème 9.2.1, u appartient à $H[v]$. D'après la définition de A_1^*, le terme u appartient donc à A_1^*. Puisque $m = \delta[\ (u\ \vec{t}\ )\ ]$ et que $\delta[\ ([]\ \vec{t}\ )\ ]$ est un élément de D, on en conclut que m appartient à $D[A_1^*]$ qui est égale à D_1. □

Remarque 9.2.22 Si $m = \delta[\,(u\ \vec{t})\,]$ et si $u \in A_1^*$, alors ce lemme 9.2.21 reste vrai.

Corollaire 9.2.23 *E_n et F_n sont composées de OTF de degré infini qui s'écrivent sous la forme $(\Delta\ \vec{v})$. De même pour $\overline{\hat{E}_n}$ et $\overline{\hat{F}_n}$.*

Preuve De la remarque 9.2.17 et du corollaire 9.2.15. □

Lemme 9.2.24 *Soit n un entier tel que $A_n^* \subset \overline{\hat{F}_n}$. Alors $D_n^\infty \subseteq \overline{\hat{D}_n}$, $E_n^\infty \subseteq \overline{\hat{E}_n}$ et $F_n^\infty \subseteq \overline{\hat{F}_n}$ et leurs éléments ne possèdent pas x comme variable libre.*

Preuve Les termes de D_n^∞, E_n^∞ et F_n^∞ étant clairement sous forme normale, il suffit donc de montrer les inclusions $D_n^\infty \subseteq D_n$, $E_n^\infty \subseteq E_n$ et $F_n^\infty \subseteq F_n$.

D'après le lemme 9.2.3, x n'est pas libre dans les termes de A_n^*. D'après le lemme 9.2.13, x n'est pas libre dans D, E et F, il en est de même pour D_n, E_n et F_n.

D'après le corollaire 9.2.23, si $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, alors ses éléments sont des zéro-termes. On conclut alors grâce à la remarque 9.2.17 et au lemme 9.2.14 qui nous assure $D[A_n^*]^\infty \subseteq D_n$, $E[A_n^*]^\infty \subseteq E_n$ et $F[A_n^*]^\infty \subseteq F_n$. □

Lemme 9.2.25 *Soit n un entier tel que $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, f_1 et f_2 des termes de la classe F_n, $\vec{r} \neq \emptyset$ et $\vec{v}$ des suites de termes et w un terme tel que $x \notin FV(w)$.*

Si la suite $< \vec{r}, \vec{v} >$ appartient à $\mathbb{T}[w/x]$ ou à $\mathbb{T}$, alors $(f_1\ \vec{r}\ ) \neq f_2$.

Preuve Nous allons raisonner par l'absurde. Commençons par décrire f_1 et f_2.
$f_1 \in F_n = F[A_n^*]$. Il existe donc un contexte $\tilde{f_1}$ de F et des termes $\vec{a_1}$ de A_n^* tels que $f_1 = \tilde{f_1}[\vec{a_1}]$.
D'après le lemme 9.2.12 appliqué à $\tilde{f_1}$, il existe des suites non vides de contextes $(\vec{d_i^1}\ )_{0\le i\le k}$ et $(\vec{c_i^1}\ )_{1\le i\le k}$ composées d'éléments de la classe D ainsi que des suites non vides de termes $(\vec{t_i^1}\ )_{1\le i\le k}$ composées d'éléments de $\mathbb{T}$ telles que $\tilde{f_1} = (\Delta\ \ \vec{d_0^1}\ \vec{t_1^1}[\vec{c_1^1}/x]\ \cdots\ \vec{t_k^1}[\vec{c_k^1}/x]\ \vec{d_k^1}\ )$.
Selon le corollaire 9.2.15, $\hat{\overline{F_n}}$ est composée de OTF qui sont sous forme normale. Comme $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, il en est donc de même pour les termes de la suite $\vec{a_1}$. Enfin, en vertu du lemme 9.2.14 point (1), pour tout $0 \le i \le k$, $d_i^1[\vec{a_1}\ ] \in D[A_n^*] \subseteq D_n$.
Pour ne pas surcharger les notations, on confond $d_i^1[\vec{a_1}\ ]$ et d_i^1, ainsi que $c_i^1[\vec{a_1}\ ]$ et c_i^1. d_i^1 et c_i^1 sont donc des éléments de D_n.
En résumé, il existe une suite $\vec{a_1} \in A_n^*$ et un entier k tels que $f_1 = (\Delta\ \ \vec{d_0^1}\ \vec{t_1^1}[\vec{c_1^1}/x]\ \cdots\ \vec{t_k^1}[\vec{c_k^1}/x]\ \vec{d_k^1}\ )$.
De même, il existe une suite $\vec{a_2} \in A_n^*$ et un entier j tels que $f_2 = (\Delta\ \ \vec{d_0^2}\ \vec{t_1^2}[\vec{c_1^2}/x]\ \cdots\ \vec{t_k^2}[\vec{c_j^2}/x]\ \vec{d_j^2}\ )$.
L'égalité $(f_1\ \vec{r}\ ) = f_2$ entraîne donc $\left\{ \begin{array}{c} \Delta\ \ \vec{d_0^1}\ \vec{t_1^1}[\vec{c_1^1}/x]\ \cdots\ \vec{t_k^1}[\vec{c_k^1}/x]\ \vec{d_k^1}\ \vec{r} \\ \shortparallel \\ \Delta\ \ \vec{d_0^2}\ \vec{t_1^2}[\vec{c_1^2}/x]\ \cdots\ \vec{t_k^2}[\vec{c_j^2}/x]\ \vec{d_j^2} \end{array} \right\}$.
Nous récupérons ainsi des égalités, terme à terme, entre les suites

$$< \vec{d_0^1}\,,\ \vec{t_1^1}[\vec{c_1^1}/x]\,, \cdots ,\ \vec{t_k^1}[\vec{c_k^1}/x]\ \ \vec{d_k^1}\ ,\ \vec{r}\ > \text{et} < \vec{d_0^2}\,,\ \vec{t_1^2}[\vec{c_1^2}/x]\,, \cdots ,\ \vec{t_k^2}[\vec{c_j^2}/x]\,,\ \vec{d_j^2}\ >$$

Comme $\Delta = (\Delta\ \delta_3 \cdots \delta_3)$, on peut compléter la plus courte des deux suites, en son début, par des termes δ_3, éléments de D_n, afin qu'elles aient toutes deux le même nombre d'éléments.
Notons l ce nombre d'arguments. Puisque $\vec{r}$ est non vide, l est supérieur à 1. Nous allons montrer la contradiction d'un tel système d'égalités par récurrence sur l. .
Le principe consiste à remarquer que les arguments de type "d" ne peuvent s'égaler à ceux de type "t". Ils se retrouvent donc tous en vis-à-vis entre la suite (1) et la (2). En partant du début de la suite, on peut remonter les égalités pour aboutir finalement à une égalité du type $r = d$, ce qui est contradictoire puisque r est de type t.

▷ Si $l = 1$.
On a une seule équation $r = d^2$ avec $d^2 \in D_n$. Ainsi, $r \in D_n$. Par hypothèse de l'énoncé, $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, d'après le lemme 9.2.24, r^∞ appartient donc à D_n.
D'après la remarque 9.2.17, r^∞ peut donc s'écrire de quatre façons : $A_n^*, \delta_3, \delta[(A_n^*\ \ \mathbb{T})]$ et $(A_n^*\ \ \mathbb{T}[D_n]/x])$. Dans tout les cas r^∞ s'écrit soit $(\Delta\ \vec{v})$, soit $\delta[e]$.
Or, par hypothèse, si $r \in T_1[w/x]$, en utilisant les notations de la proposition 9.1.6, $r^\infty \in (T_1[w/x])^\infty$. En appliquant le point (4) de 9.1.6, on distingue deux cas :
- si $i_0 > 1$, alors $r^\infty \in T_1$ et donc, d'après le point (2) de 9.1.6, pour toute suite $\vec{s}$ de $(T_2, \cdots, T_n)$, $(\delta\ r^\infty\ \vec{s})^\infty = x$. Ce qui contredit le lemme 7.5.8 en prenant $C = r^\infty$ et $z = x$.
- si $i_0 = 1$, il existe une suite $\vec{u}$ telle que $r^\infty = \widetilde{C}_{i_0}[w^\infty, \vec{u}\,]$ et telle que $C_{i_0}[x, \vec{u}\,] \in T_1$. On obtient alors la même contradiction que pour $i_0 = 1$ en prenant $C = C_{i_0}[\ [], \vec{u}]$ et $z = x$.

Si $r \in T_1$, d'après le point (1) de 9.1.6, $r^\infty = r$. On conclut alors de la même façon que pour $i_0 > 1$.

▷ Si $l > 1$.
Montrons que $\vec{d_0^1}$ et $\vec{d_0^2}$ ont même nombre d'éléments.
Par l'absurde, si par exemple, $\vec{d_0^2}$ avait plus d'arguments que $\vec{d_0^1}$, les première égalité entre les termes des deux suites se présenteraient ainsi :

$d^1_{0,1}$	$d^1_{0,2}$		$d^1_{0,p}$	$t^1_{1,1}[c^1_1/x]$
$=$	$=$	$\cdots$	$=$	$=$
$d^2_{0,1}$	$d^2_{0,2}$		$d^2_{0,p}$	$d^2_{0,p+1}$

À partir des égalités entre termes des suites $<\ \vec{d_0^1}\ ,\ \vec{t_1^1}[\vec{c_1^1}/x]\ , \cdots ,\ \vec{t_k^1}[\vec{c_k^1}/x]\ \ \vec{d_k^1}\ ,\ \vec{r}\ >$ et $<\ \vec{d_0^2}\ ,\ \vec{t_1^2}[\vec{c_1^2}/x]\ , \cdots ,\ \vec{t_k^2}[\vec{c_j^2}/x]\ ,\ \vec{d_j^2}\ >$, on obtiendrait donc une égalité $t^1_{1,1}[c^1_1/x] = d^2_{0,p+1}$, où $t^1_{1,1}[c^1_1/x]$ représente le premier terme de la suite $\vec{t_1^1}[\vec{c_1^1}/x]$.
Autrement dit, on en déduirait que $t^1_{1,1}[c^1_1/x] \in D_n$.
Or, d'après le lemme 9.2.24, c^1_1, qui appartient à D_n, ne possède pas x comme variable libre. À partir de $t^1_{1,1}[c^1_1/x] \in D_n$ on tirerait donc la même contradiction que pour $l = 1$.
En conséquence, les suites $\vec{d_0^1}$ et $\vec{d_0^2}$ ont même nombre d'éléments. Les suites, $\vec{t_1^1}[\vec{c_1^1}/x]$ et $\vec{t_1^2}[\vec{c_1^2}/x]$ ont elles aussi le même nombre d'éléments car elles sont tous deux éléments de $\mathbb{T}[\Lambda/x]$.
À partir des égalités entre termes des suites $<\ \vec{d_0^1}\ ,\ \vec{t_1^1}[\vec{c_1^1}/x]\ , \cdots ,\ \vec{t_k^1}[\vec{c_k^1}/x]\ ,\ \vec{d_k^1}\ ,\ \vec{r}\ >$ et $<\ \vec{d_0^2}\ ,\ \vec{t_1^2}[\vec{c_1^2}/x]\ , \cdots ,\ \vec{t_k^2}[\vec{c_j^2}/x]\ ,\ \vec{d_j^2}\ >$, en supprimant respectivement les suites $< \vec{d_0^1}, \vec{t_1^1}[c_1^1/x] >$ et $< \vec{d_0^2}, \vec{t_1^2}[c_1^2/x] >$ qui ont même longueur, on récupère un système plus petit d'égalités entre $<\ \vec{d_1^1}\ ,\ \vec{t_2^1}[\vec{c_2^1}/x]\ , \cdots ,\ \vec{t_k^1}[\vec{c_k^1}/x]\ ,\ \vec{d_k^1}\ ,\ \vec{r}\ >$ et $<\ \vec{d_1^2}\ ,\ \vec{t_2^2}[\vec{c_1^2}/x]\ , \cdots ,\ \vec{t_k^2}[\vec{c_j^2}/x]\ ,\ \vec{d_j^2}\ >$. On conclut finalement par récurrence. □

Corollaire 9.2.26 *Soit w un terme tel que $x \notin FV(w)$, soit $f_1, f \in F_n$ et $\vec{s} \in \mathbb{T}$ ou $\vec{s} \in \mathbb{T}[w/x]$. Si $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, et si $f \leq (f_1\ \vec{s})$ alors $f \leq f_1$ ou bien $f \leq \vec{s}$.*

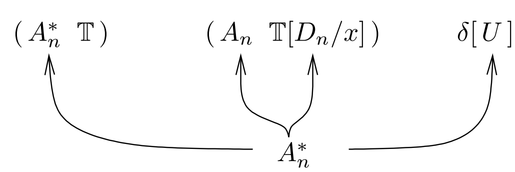
Preuve C'est une conséquence du lemme 9.2.25 et du lemme de capture 7.5.3. □

Lemme 9.2.27 *Si $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, alors, pour toute classe A incluse dans $\hat{\overline{F_n}}$:*

1. $(A\ \mathbb{T})\ [A_n^* \to m] \subseteq (A[A_n^* \to m]\ \ \mathbb{T})^\infty \cup (A\ \mathbb{T})$
2. $(A\ \ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]})\ [A_n^* \to m] \subseteq$
   $((A[A_n^* \to m])\ \ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]})^\infty \cup (A\ \ \overline{\mathbb{T}[D_n[A_n^* \to m]/x]}^{\wedge}) \cup (A\ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]})$
3. *Pour toute classe de termes U,* $\ (\delta[U])\ [A_n^* \to m] \subseteq \delta[U[A_n^* \to m]\ ]$

Remarque 9.2.28 Ce lemme nous permettra de positionner les échanges qui sont permis dans les classes D_n, E_n et F_n. Par exemple, le point (2) peut se lire ainsi : sous réserve qu'on ait déjà montré $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, tous les échanges de A_n^* dans $(A_n^*\ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\,)$ ont lieu soit dans A_n^* soit dans D_n. On remarquera que les classes à droite de l'inclusion ne sont pas sous forme normale, c'est pourquoi il reste l'opérateur $^\infty$.

Graphiquement :



Preuve

1. Soient $(a_1\ \vec{s}\ ) \in (A\ \mathbb{T})$ où $a_1 \in A$ et $\vec{s} \in \mathbb{T}$. Soit $a \in A_n^*$ tel que $a \leq (a_1\ \vec{s})$. Il existe donc un contexte C tel que $C[a] = (a_1\ \vec{s})$. Comme $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, en vertu du corollaire 9.2.26, on distingue deux cas :

– soit $a \leq a_1$, et dans ce cas il existe un contexte E tel que $E[a] = a_1$. Par définition des échanges, $E[m]^\infty$ appartient à $A[A_n^* \to m]$. Ainsi, $C[m]^\infty = (E[m]^\infty \ \vec{s})^\infty$ qui appartient à $(A[A_n^* \to m] \ \mathbb{T})^\infty$.
– soit $a \leq \vec{s}$, et dans ce cas il existe un entier $1 \leq i \leq n$ et un contexte D tel que $\vec{s} = (s_1, \cdots, E[a], \cdots, s_n)$. Comme $A_n^* \subseteq \widehat{\overline{F_n}}$, d'après le corollaire 9.2.23, a est un OTF. Selon la proposition 9.1.6, point (3), $E[m]^\infty \in T_i$. D'où $C[m]^\infty = (a \ \ s_1 \cdots E[m]^\infty \cdots s_n)^\infty$.
Or, d'après le point (1) de 9.1.6, $\vec{s}$ est composée de termes normaux. De plus a est un OTF, qui est sous forme normal d'après le lemme 9.2.3. Nous concluons donc $C[m]^\infty = (a \ \ s_1 \cdots E[m]^\infty \cdots s_n)$ qui appartient à $(A\ \mathbb{T})$.

2. Soit $(a_1\ \vec{s}[d/x]) \in (A\ \widehat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}})$ où $a_1 \in A$, $\vec{s} \in \mathbb{T}$ et $d \in D_n$.
Soit $a \in A_n^*$ tel que $a \leq (a_1\ \vec{s}[d/x])$. Il existe donc un contexte C tel que $C[a] = (a_1\ \vec{s}[d/x])$. Comme $A_n^* \subseteq \widehat{\overline{F_n}}$, grâce au lemme 9.2.24, d ne possède pas x comme variable libre. En vertu du corollaire 9.2.26, on distingue deux cas :
   ▷ soit $a \leq a_1$ et dans ce cas, comme précédemment, on obtient $C[m]^\infty = (E[m]^\infty\ \vec{s}[d/x])^\infty$ qui appartient à $((A[A_n^* \to m])\ \ \widehat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}\,)^\infty$.
   ▷ soit $a \leq \vec{s}[d/x]$ et dans ce cas il existe un entier $1 \leq i \leq n$ et un contexte D tel que $\vec{s}[d/x] = (s_1[d/x], \cdots, E[a], \cdots, s_n[d/x])$ et tel que $s_i[d/x] = E[a]$.
   Comme $\vec{s}[d/x] \in \widehat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}$, alors ses termes sont sous forme normale. De plus $a_1 \in A \subseteq \widehat{\overline{F_n}}$, d'après le corollaire 9.2.23, a_1 est un OTF sous forme normale. Ainsi, $(a_1\ \vec{s}[d/x])$ est également sous forme normale. Nous en déduisons donc $C[m]^\infty = (a_1\ \ s_1[d/x] \cdots E[m]^\infty \cdots s_n[d/x])$.
   En utilisant les notations de la proposition 9.1.6, distinguons les valeurs de i :
   □ si $i \neq i_0$, d'après la proposition 9.1.6 point (4), $(s_i[d/x])^\infty \in T_i$. Or, $s_i[d/x]$ est sous forme normale, on en déduit donc $s_i[d/x] \in T_i$.
   Comme $A_n^* \in \widehat{\overline{F_n}}$, d'après le corollaire 9.2.23, a est un OTF. D'après le point (3) de 9.1.6, on en déduit $E[m]^\infty \in T_i$.
   D'autre part, d'après le lemme 9.2.24, $x \notin FV(d)$, x n'est donc pas libre dans $s_i[d/x]$ qui est égal à $E[a]$. De plus m est clos, d'où $x \notin FV(E[m]^\infty)$. Ainsi, $E[m]^\infty\,[D_n/x] = E[m]^\infty$. Comme $E[m]^\infty$ appartient à T_i, on en déduit donc $E[m]^\infty \in \widehat{\overline{T_i[D_n/x]}}$.
   Finalement, il vient $C[m]^\infty = (a_1\ \ s_1[d/x] \cdots E[m]^\infty \cdots s_n[d/x]) \in (A\ \widehat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}})$.
   □ si $i = i_0$, d'après le point (4) de 9.1.6, $x \in FV(s_{i_0})$. Comme $s_{i_0}[d/x]$ est sous forme normale, il en est de même pour d. Selon le point (4) de 9.1.6, il existe une substitution σ de termes normaux telle que $(s_i[d/x])^\infty = \widetilde{C}_{i_0}[d^\infty, \sigma]$. Comme $s_i[d/x]$ et d sont normaux, on obtient $s_i[d/x] = \widetilde{C}_{i_0}[d, \sigma]$.
   Distinguons les trois positions relatives possibles entre les sous-termes a et d de $\widetilde{C}_{i_0}[d, \sigma]$ (cf. proposition 1.1.11) :
   ◇ si $a \leq d$.
   Alors il existe un contexte F tel que $F[a] = d$ et tel que $C[m]^\infty = (a\ \ s_1 \cdots \widetilde{C}_{i_0}[F[m], \sigma]^\infty \cdots s_n)$.
   D'autre part $F[m]^\infty \in D_n[A_n^* \to m]$. D'après le point (4) de 9.1.6, $(\widetilde{C}_{i_0}[F[m], \sigma])^\infty = \widetilde{C}_{i_0}[F[m]^\infty, \sigma]$ qui appartient à $\widehat{\overline{T_{i_0}[D_n[A_n^* \to m]/x]}}$.
   Enfin, comme il a été prouvé dans le cas $i \neq i_0$, on montre que $s_i \in \widehat{\overline{T_i[D_n[A_n^* \to m]/x]}}$ pour tout $i \neq i_0$.
   On en déduit donc $C[m]^\infty \in (A\ \ \widehat{\overline{\mathbb{T}[D_n[A_n^* \to m]/x]}})$.
   ◇ si a et d sont disjoints.
   Alors il existe un contexte F tel que $F[d, a] = s_i[d/x] = \widetilde{C}_{i_0}[d, \sigma]$ et tel que $C[m]^\infty = (a\ \ s_1 \cdots F[d, m]^\infty \cdots s_n)$.
   Ainsi, $F[x, a] = \widetilde{C}_{i_0}[x, \sigma]$ qui appartient, d'après le point (4) de 9.1.6, à T_{i_0} . Comme a est un OTF, d'après le point (3) de 9.1.6, $F[x, m]^\infty$ est un élément de T_{i_0}. Il existe donc un terme $w \in T_{i_0}$ tel que $F[x, m]^\infty = w$
   De plus comme $x \notin FV(s_i[d/x])$, alors $x \notin FV(F)$. m étant clos et x n'étant pas libre dans F, on peut écrire $F[x, m]\,[d/x] = F[d, m]$. Nous obtenons donc

$F[d,m]^\infty = (F[x,m]^\infty\,[d/x])^\infty = w[d/x]^\infty$ qui, d'après le point (4) de 9.1.6, appartient à $T_{i_0}\,[d^\infty/x]$

Finalement, comme d est normal, nous obtenons $F[d,m]^\infty \in T_{i_0}\,[d/x]$ et par la même, $C[m]^\infty \in (A\ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]})$.

◇ si $d < a$ alors il existe un contexte F tel que $F[a] = d$ et tel que $\widetilde{C}_{i_0}[d,\sigma] = E{\circ}F[d]$. Comme $\widetilde{C}_{i_0}[d,\sigma]$ appartient à $\overline{T_{i_0}[\hat{D_n}/x]}$, et il est sous forme normale, il en est donc de même pour F. Examinons les différentes formes normales de tête possible pour F. Comme F filtre a un OTF, alors F ne possède pas d'abstraction à sa racine. On distingue donc deux catégories : soit $[]$ est en tête de F, et dans ce cas $F = (\,[]\ \vec{v})$, soit $[]$ est interne à F et dans ce cas il existe un contexte G tel que $F = (u\ G\ \vec{v})$. Montrons qu'aucun de ces deux cas n'est possible :

– si $F = (\,[]\ \vec{v})$ alors $\widetilde{C}_{i_0}[x,\sigma] = E\circ F[x] = E[(x\ \vec{v})]$. Or, d'après le point (4) de 9.1.6, $\widetilde{C}_{i_0}[x,\sigma] \in T_{i_0}$ d'où $E[(x\ \vec{v})] \in T_{i_0}$. D'autre part nous avons montré que s_i appartient à T_i pour tout $i \neq i_0$.

Notons $\vec{s'} = (s_1, \cdots, E[(x\ \vec{v})], \cdots, s_n)$. Nous avons $\vec{s'} \in \mathbb{T}$ et donc d'après le point (2) de 9.1.6, $(\delta\ \ \vec{s'})^\infty = x$.

Or, selon le lemme 7.5.10 et la proposition 9.1.6 point (3), les contextes $C_1, \cdots, \widetilde{C}_{i_0}, \cdots, C_n$ vérifient $(\delta\ \ C_1 \cdots \widetilde{C}_{i_0}[x, \vec{[]}] \cdots C_n) \to_\beta^* x$. Comme δ est clos on en déduit donc que x est libre dans $\widetilde{C}_{i_0}[x,\vec{[]}]$, ainsi que dans $E[(x\ \vec{v})]$.

D'après la proposition 2.2.32, appliquée au sous-terme $(x\ \ \vec{v})$ dans le contexte E de $(\delta\ \ s_1 \cdots E[(x\ \vec{v})] \cdots s_n)$, on a $(\delta\ \ s_1 \cdots E \cdots s_n)^\infty = (\delta\ \ s_1 \cdots E[(x\ \vec{v})] \cdots s_n)^\infty$ qui est égale à x.

Prenons z une variable neuve différente de x. Comme x est sans trou, à partir de $(\delta\ \ s_1 \cdots E \cdots s_n)^\infty = x$, nous pouvons écrire $(\delta\ \ s_1 \cdots E[(z\ \vec{v})] \cdots s_n)^\infty = x$. Or, $E[(z\ \vec{v})] = \widetilde{C}_{i_0}[z,\sigma]$, grâce à la définition de $\widetilde{C}_{i_0}$, lemme 7.5.10 et proposition 9.1.6, il est facile de vérifier que $(\delta\ \ s_1 \cdots \widetilde{C}_{i_0}[z,\sigma] \cdots s_n)^\infty = z$. Contradiction.

– si $F = (u\ G\ \vec{v})$. Comme $F[d] = a$ et que a est un OTF sous forme normale, grâce à la proposition 2.2.27, on en déduit que u est un OTF et que F l'est aussi. On conclut alors comme précédemment grâce à la proposition 2.2.31.

3. Si $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$ alors les éléments de A_n^* sont des OTF. Le résultat est alors immédiat en constatant que les seuls sous-termes OTF de $\delta[u]$ ne peuvent être que dans u. ☐

Lemme 9.2.29 *Si $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$, alors $(D_n\ \overrightarrow{D_n})^\infty \subseteq \overline{\hat{F_n}}$*

Preuve Montrons d'abord que $(D_n\ D_n)^\infty \subseteq \overline{\hat{F_n}}$.

Si $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$, d'après la remarque 9.2.17, les termes de D_n peuvent s'écrire de quatre façons :

$\delta_3, \delta[(A_n^*\ \mathbb{T})], A_n^*$ et $(A_n^*\ \mathbb{T}[D_n/x])$

▷ Commençons par A_n^*.

Comme $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$, alors $(A_n^*\ D_n) \subseteq (\overline{\hat{F_n}}\ D_n)$ qui, par construction de F, est incluse dans F_n. Grâce au lemme 9.2.24, $F_n^\infty \subseteq \overline{\hat{F_n}}$, on conclut alors que $(A_n^*\ D_n)^\infty \subseteq \overline{\hat{F_n}}$.

▷ De même $((A_n^*\ \mathbb{T}[D_n/x])\ D_n) \subseteq ((\overline{\hat{F_n}}\ \mathbb{T}[D_n/x])\ D_n)$ qui, par construction de F est incluse dans F_n. On conclut alors comme précédemment.

▷ Pour $\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]$, nous avons quatre cas à étudier suivant l'élément de D_n auquel il est appliqué :

– $(\,\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\ \ A_n^*)^\infty \subseteq (A_n^*\ \ (A_n^*\ \mathbb{T}[A_n^*/x])\ A_n^*)^\infty$.

Comme $A_n^* \subseteq \overline{\hat{D_n}}$ (cf. remarque 9.2.20) et $(A_n^*\ \ \mathbb{T}[A_n^*/x]) \subseteq D_n$, alors $(A_n^*\ \ (A_n^*\ \mathbb{T}[A_n^*/x])\ A_n^*) \subseteq (A_n^*\ D_n\ D_n)$ qui, par construction de F est incluse dans F_n. On conclut alors comme précédemment.

– Pour $(\,\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\ \ (A_n^*\ \mathbb{T}[D_n/x])\,)^\infty$, les calculs sont semblables.

– Pour $(\,\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\ \ \delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\,)^\infty$, pour tout terme d de D_n :

$(\,\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\ \ d)^\infty \subseteq (\,d\ \ (A_n^*\ \mathbb{T}[D_n/x])\ D_n)^\infty$.

Appliqué à $\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]$, nous récupérons :
$(\,\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\ \ \delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\,)^\infty \subseteq (\,\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\ \ (A_n^*\ \mathbb{T}[D_n/x])\ D_n)^\infty$. On conclut alors grâce au point précédent.

– Pour $(\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]\ \ \delta_3)^\infty$, les calculs sont semblables aux précédents.

▷ Pour δ_3, les calculs sont semblables à $\delta[(A_n^*\ \mathbb{T})]$. À noter que $(\delta_3\ \delta_3)^\infty = \Delta \in \overline{\hat{E_n}}$ qui est incluse dans $\overline{\hat{F_n}}$.

Pour conclure, comme $(D_n\ D_n \cdots D_n)^\infty \subseteq ((D_n\ D_n)^\infty \cdots D_n)^\infty$, si $(D_n\ D_n)^\infty \subseteq \overline{\hat{F_n}}$, alors $((D_n\ D_n)^\infty \cdots D_n)^\infty$ est incluse dans $(\overline{\hat{F_n}}\ D_n \cdots D_n)^\infty$. On conclut alors par construction de F et grâce au lemme 9.2.24. □

Définition 9.2.30 *Soient A et B deux classes de termes et l un entier positif. La* classe des échanges à profondeur limitée dans A de B par m, *notée $A[B \to m]_l$, est l'ensemble :*
$A[B \to m]_l = \{C[m]^\infty |$ *il existe* $b \in B$ *et* C *un contexte tel que* $l(C) \le l$ *et* $C[b] \in A\}$.

Proposition 9.2.31 $\forall n \ge 0,\ A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$

Preuve On procède par induction sur n.

□ Pour $n = 0$.
$A_0^* = \{\Delta_\infty\}$. Par construction, $A_0^* \subseteq \overline{\hat{D_0}}$ et $\Delta \in \overline{\hat{E_0}}$. Comme Δ_∞ s'écrit $(\Delta\ \Delta_\infty)$, on en déduit $\Delta_\infty \in (\overline{\hat{E_0}}\ \overline{\hat{D_0}})$ qui est incluse dans $\overline{\hat{F_0}}$.

□ Pour $n = 1$.
Soit $a_1 \in A_1^*$. D'après le lemme 9.2.5, $A_1^* \subseteq (\Delta\ \delta[A_1^*\ \mathbb{T}]\,) \cup (\Delta\ A_1^*)$.
Si $a_1 \in (\Delta\ \delta[A_1^*\ \mathbb{T}]\,)$, comme $\Delta \in \overline{\hat{E_1}}$ et $\delta[A_1^*\ \mathbb{T}] \in \overline{\hat{D_1}}$, alors $a_1 \in (\overline{\hat{E_1}}\ \overline{\hat{D_1}})$ qui est incluse dans $\overline{\hat{F_1}}$.
Sinon $a_1 \in (\Delta\ A_1^*)$ qui est incluse dans $(\overline{\hat{E_1}}\ \overline{\hat{D_1}})$ qui est incluse dans $\overline{\hat{F_1}}$, elle même incluse dans $\overline{\hat{F_n}}$.

□ Pour $n > 1$.
Supposons que $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$ et montrons que $A_{n+1}^* \subseteq \overline{\hat{F_{n+1}}}$.
Par définition, $A_{n+1}^* = A_n^* \cup A_n^*[A_n^* \to m]^s$. Comme les classes $(A_n^*)_{n\ge 0}$ sont croissantes, il nous suffira d'établir $A_n^*[A_n^* \to m]^s \subseteq \overline{\hat{F_{n+1}}}$. Pour cela, nous allons procéder par récurrence sur la profondeur des échanges qui sont effectués dans A_n^* .
En effet, comme $A_n^*[A_n^* \to m]^s = \bigcup_{l\ge 0} A_n^*[A_n^* \to m]_l^s$, il suffit de montrer que pour tout entier $l \ge 0$, $A_n^*[A_n^* \to m]_l^s \subseteq \overline{\hat{F_{n+1}}}$.

En fait nous allons montrer, simultanément, et par récurrence sur l, que si $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_N}}$, alors $\overline{\hat{D_n}}[A_n^* \to m]_l \subseteq \overline{\hat{D_{n+1}}}$, que $\overline{\hat{E_n}}[A_n^* \to m]_l^s \subseteq \overline{\hat{E_{n+1}}} \cup \overline{\hat{F_n}}$ et que $\overline{\hat{F_n}}[A_n^* \to m]_l^s \subseteq \overline{\hat{F_{n+1}}}$.
Du dernier résultat, comme $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$, on déduira $A_n^*[A_n^* \to m]_l^s \subseteq \overline{\hat{F_{n+1}}}$.
Rappelons que les classes d'échanges, à profondeur limitée ou non, sont composées uniquement de termes sous formes normales (cf. définition 3.4.23 et 9.2.30).

▷ Pour $l = 0$.
Les échanges à profondeur 0 se font uniquement suivant le seul contexte de longueur 0 qui est trivial []. Ainsi, pour toute classe A et B, $A[B \to m]_0 = \{m\}$. Pour les échanges stricts, le contexte trivial étant proscrit, nous avons $A[B \to m]_0^s = \emptyset$
En conséquence :
– $\overline{\hat{D_n}}[A_n^* \to m]_0 = \{m\}$ qui, d'après le lemme 9.2.21, appartient à $\overline{\hat{D_1}}$. Les suites $(D_n)_{n\ge 0}$ étant croissantes, tout comme $(A_n^*)_{i\ge 0}$, nous obtenons donc le résultat.
– $\overline{\hat{E_n}}[A_n^* \to m]_0^s = \emptyset$, $\overline{\hat{F_n}}[A_n^* \to m]_0 = \emptyset$ et $A_n^*[A_n^* \to m]_0^s = \emptyset$, ce qui entraîne clairement le résultat.

▷ Pour $l \ge 1$.
L'hypothèse de récurrence se formule ainsi :

– $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$

– $\forall p < l \begin{cases} D_n[A_n^* \to m]_p \subseteq \overline{\hat{D}_{n+1}} \\ E_n[A_n^* \to m]_p^s \subseteq \overline{\hat{E}_{n+1}} \cup \overline{\hat{F_n}} \\ F_n[A_n^* \to m]_p^s \subseteq \overline{\hat{F}_{n+1}} \\ A_n^*[A_n^* \to m]_p^s \subseteq \overline{\hat{F}_{n+1}} \end{cases}$

Nous allons montrer en quatre étapes ces résultats pour la profondeur l. Au préalable, rappelons quelques résultats sur les classes d'échanges :

Fait 9.2.32

– *Pour toute classe A et B, $A[B \to m]_p = A[B \to m]_p^s \cup \{m\}$*

– $A_n^*[A_n^* \to m] = A_{n+1}^* \cup \{m\}$

Preuve Par définition des classes d'échanges et de la classe A_{n+1}^*. □

◁ $\boxed{\textbf{Étape 1}}$ ▷

$\overline{\hat{D_n}}[A_n^* \to m]_l \subseteq \overline{\hat{D}_{n+1}}$

Preuve

Par hypothèse, $A_n^* \subseteq \overline{\hat{F_n}}$, d'après la remarque 9.2.19, les termes de A_n^* sont donc des OTF normaux de la forme $(\Delta\ \vec{v}\ )$.

Soit $d \in \overline{\hat{D_n}}$.

D'après la remarque 9.2.19, on distingue 4 cas :

– soit $d = \delta_3$. Il n'y a alors pas de substitutions possibles, car aucun des sous-termes de δ_3 n'est un OTF.

– soit $d \in A_n^*$.
Alors $\{d\}[A_n^* \to m] \subseteq A_n^*[A_n^* \to m]$ qui, d'après le fait 9.2.32 est incluse dans $A_{n+1}^* \cup \{m\}$. Par définition de D_{n+1}, $A_{n+1}^* \subset \overline{\hat{D}_{n+1}}$ et d'après le lemme 9.2.21, $m \in \overline{\hat{D_1}}$, qui est incluse dans $\overline{\hat{D}_{n+1}}$. D'où le résultat.

– soit $d \in \delta[\,(A_n^*\ \mathbb{T})\,]$.
Selon la proposition 9.2.27 points (3), les échanges de A_n^* dans $\delta[\,(A_n^*\ \mathbb{T})\,]$ se font dans les termes de $(A_n^*\ \mathbb{T})$ à une profondeur moindre. Ainsi, :
$\delta[\,(A_n^*\ \mathbb{T})\,]\,[A_n^* \to m]_l \subseteq \delta[\,(A_n^*\ \mathbb{T})\,[A_n^* \to m]_{l-1}]$.
En appliquant de nouveau la proposition 9.2.27 point (1), il vient :
$\delta[\,(A_n^*\ \mathbb{T})\,]\,[A_n^* \to m]_l \subseteq \delta[\,(A_n^*[A_n^* \to m]_{l-2}\quad \mathbb{T})^\infty]$.
D'après le fait 9.2.32,
$(A_n^*[A_n^* \to m]_{l-2}\ \mathbb{T})^\infty \subseteq (A_n^*[A_n^* \to m]_{l-2}^s\ \mathbb{T})^\infty \cup (m\ \mathbb{T})^\infty$.
Or, d'après, par définition de $\mathbb{T}$, nous avons $(m\ \mathbb{T})^\infty = \{x\}$.
D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, et par définition de A_n^* ,
$A_n^*[A_n^* \to m]_{l-2}^s \subseteq A_{n+1}^* \cap \overline{\hat{F}_{n+1}}$.
La classe $\overline{\hat{F}_{n+1}}$ étant composée de OTF sous forme normale (cf. corollaire 9.2.23), nous en déduisons :
$(A_n^*[A_n^* \to m]_{l-2}\ \mathbb{T})^\infty \subseteq (A_{n+1}^*\ \mathbb{T}) \cup \{x\}$.
Finalement, $\{d\}[A_n^* \to m]_l \subseteq \delta[\,(A_{n+1}^*\ \mathbb{T}) \cup \{x\}]$ qui est incluse dans $\overline{\hat{D}_{n+1}}$.

– soit $d \in (\ A_n^*\ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ )$.
D'après la proposition 9.2.27 point (2) :
$(A_n^*\ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ )\ [A_n^* \to m]_l \subseteq$
$((A_n^*[A_n^* \to m])_{l-1}\ \ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ )^\infty \cup (A_n^*\ \ \overline{\mathbb{T}[D_n[\hat{A_n^*} \to m]_{l-1}/x]}\ ) \cup (A_n^*\ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ )$
D'après la remarque 9.2.19, le dernier membre de la réunion est clairement dans $\overline{\hat{D_n}}$. Pour le deuxième, par hypothèse de récurrence, $\overline{\hat{D_n}}[A_n^* \to m]_{l-1} \subseteq \overline{\hat{D}_{n+1}}$, ce qui entraîne :
$(A_n^*\ \overline{\mathbb{T}[D_n[\hat{A_n^*} \to m]_{l'}/x]}) \subset (A_n^*\ \overline{\mathbb{T}[\hat{D}_{n+1}/x]}\ )$ elle même incluse dans $\overline{\hat{D}_{n+1}}$.
Enfin, pour le premier membre, $(A_n^*[A_n^* \to m]_{l-1}\ \ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ )^\infty$, comme précédemment, en distinguant échanges stricts et larges, nous obtenons :
$(A_n^*[A_n^* \to m]_{l-1}\ \ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ )^\infty \subset (A_{n+1}^* \cap \overline{\hat{F}_{n+1}}\quad \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ )^\infty \cup (m\ \ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ )^\infty \subseteq$
$(A_{n+1}^*\ \overline{\mathbb{T}[\hat{D_n}/x]}\ ) \cup D_n^\infty$ qui sont toutes deux incluses dans $\overline{\hat{D}_{n+1}}$.

◁ **Étape 2** ▷

$\hat{\overline{E_n}}[A_n^* \to m]_l^s \subset \hat{\overline{E_{n+1}}} \cup \hat{\overline{F_n}}$

Preuve
Soit $e \in \hat{\overline{E_n}}$.
Par construction de E, on distingue deux cas (cf. remarque 9.2.10 et 9.2.19) :

– soit $e = \Delta$.
  A_n^* est incluse dans $\hat{\overline{F_n}}$, elle est donc composée de OTF. Comme $\Delta = (\Delta\ \delta_3)$ et comme $\delta_3 = \delta[x]$, alors, en vertu du lemme 7.2.1 points (1) et (2), $\{\Delta\}\ [A_n^* \to m]^s \subseteq (m\ \vec{\delta_3}\,)^\infty$. Or, d'après le lemme 9.2.21, $m \in \hat{\overline{D_1}}$ d'où, $(m\ \vec{\delta_3}\,)^\infty$ appartient à $(D_n\ \overrightarrow{D_n})^\infty$ qui d'après le lemme 9.2.29 est incluse dans $\hat{\overline{F_n}}$.
– soit $e \in (\hat{\overline{E_n}}\ \hat{\overline{D_n}})$.
  Les sous-termes stricts de e appartiennent, soit à $\hat{\overline{E_n}}$, soit à $\hat{\overline{D_n}}$. Ainsi, :
  $\{e\}[A_n^* \to m]_l^s \subseteq (\hat{\overline{E_n}}[A_n^* \to m]_{l-1}\ \ \hat{\overline{D_n}})^\infty \cup (\hat{\overline{E_n}}\ \ \hat{\overline{D_n}}[A_n^* \to m]_{l-1}\,)$.
  Pour le premier membre, d'après l'hypothèse d'induction, $\hat{\overline{D_n}}[A_n^* \to m]_{l-1} \subset \hat{\overline{D_{n+1}}}$, ce qui entraîne :
  $(\hat{\overline{E_n}}\ \hat{\overline{D_n}}[A_n^* \to m]_{l-1}) \subseteq (\hat{\overline{E_n}}\ \hat{\overline{D_{n+1}}})$ qui est incluse dans $\hat{\overline{E_{n+1}}}$.
  Pour l'autre membre, en distinguant échanges stricts et triviaux :
  $(\hat{\overline{E_n}}[A_n^* \to m]_{l-1}\ \hat{\overline{D_n}}) \subseteq (\hat{\overline{E_n}}[A_n^* \to m]_{l-1}^s\ \hat{\overline{D_n}})^\infty \cup \{(m\ \hat{\overline{D_n}})^\infty\}$.
  Or, nous avons déjà vu que $(m\ D_n)^\infty$ appartient à $\hat{\overline{F_n}}$.
  D'autre part, l'hypothèse d'induction entraîne :
  $(\hat{\overline{E_n}}[A_n^* \ \to\ m]_{l-1}^s \quad \hat{\overline{D_n}})^\infty \ \subseteq\ (\,(\hat{\overline{E_{n+1}}} \cup \hat{\overline{F_n}}) \quad \hat{\overline{D_n}})^\infty$ qui est égale à $(\,(\hat{\overline{E_{n+1}}} \cup \hat{\overline{F_n}})\ \hat{\overline{D_n}})$ puisque $\hat{\overline{E_{n+1}}}$ et $\hat{\overline{F_n}}$ sont composées de OTF d'après le lemme 9.2.14.
  Finalement, par construction de E, nous avons $(\hat{\overline{E_{n+1}}}\ \ \hat{\overline{D_n}}\,) \subseteq \hat{\overline{E_{n+1}}}$ et par construction de F , $(\hat{\overline{F_n}}\ \hat{\overline{D_n}}) \subseteq \hat{\overline{F_n}}$.
  D'où le résultat recherché : $\{e\}[A_n^* \to m]_l^s \subseteq \hat{\overline{E_{n+1}}} \cup \hat{\overline{F_n}}$.

◁ **Étape 3** ▷

$\hat{\overline{F_n}}[A_n^* \to m]_l^s \subseteq \hat{\overline{F_{n+1}}}$

Preuve
Soit $f \in \hat{\overline{F_n}}$.
Par construction de la classe F, on distingue trois cas pour f :

– soit $f \in \hat{\overline{E_n}}$.
  Alors $\{f\}[A_n^* \to m]_l^s \subseteq \hat{\overline{E_n}}[A_n^* \to m]_l^s$ qui, en vertu de l'étape 3, est incluse dans $\hat{\overline{E_{n+1}}} \cup \hat{\overline{F_n}}$ elle-même incluse dans $\hat{\overline{F_{n+1}}}$, par construction de F.
– soit $f \in (\hat{\overline{F_n}}\ \ \hat{\overline{D_n}})$.
  Le résultat découle alors comme pour $(\hat{\overline{E_n}}\ \ \hat{\overline{D_n}})$, en faisant jouer l'induction et le lemme 9.2.29.
– soit $f \in (\,(\hat{\overline{F_n}}\quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}\,)\ \ \hat{\overline{D_n}}\,)$.
  Dans ce cas, les sous-termes stricts de f se situent, soit dans la partie gauche de l'application, avec $(\hat{\overline{F_n}}\quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}\,)$, soit dans la partie droite, avec $\hat{\overline{D_n}}$. Ce qui s'écrit : $\{f\}[A_n^* \to m]_l^s \subseteq$
  $(\,(\hat{\overline{F_n}}\quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}\,)\,[A_n^* \to m]_{l-1}\ \ \hat{\overline{D_n}}\,)^\infty \cup (\hat{\overline{F_n}}\quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}\quad \hat{\overline{D_n[A_n^* \to m]_{l-1}}}\,)$.
  Pour le second membre de la réunion, l'inclusion dans $\hat{\overline{F_{n+1}}}$ dérive de l'hypothèse de récurrence, $\hat{\overline{D_n}}[A_n^* \to m]_{l-1} \subseteq \hat{\overline{D_{n+1}}}$ et de la définition de $\hat{\overline{F_{n+1}}}$.
  Pour le membre de gauche, puisque $\hat{\overline{F_n}} \subseteq \hat{\overline{F_n}}$, selon le lemme 9.2.27 point (2),
  $(\hat{\overline{F_n}}\quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}\,)\ [A_n^* \to m]_{l-1} \subseteq$
  $(\hat{\overline{F_n}}[A_n^* \to m]_{l-1}\quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}\,)^\infty \cup (\hat{\overline{F_n}}\quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n[A_n^* \to m]_{l-1}/x]}}\,) \cup (\hat{\overline{F_n}}\quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}}\,)$.
  Or, d'après l'hypothèse de récurrence, d'une part :

$(\hat{\overline{F_n}} \quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n[A_n^* \to m]_{l-1}/x]}}\,) \subseteq (\,\hat{\overline{F_n}} \quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_{n+1}/x]}}\,)$
D'autre part, en distinguant les échanges stricts des triviaux :
$\hat{\overline{F_n}}[A_n^* \to m]_{l-1} \subseteq \hat{\overline{F_n}}[A_n^* \to m]_{l-1}^s \cup \{m\}$ qui est incluse dans $\hat{\overline{F_{n+1}}} \cup \{m\}$.
Finalement,
$\{f\}[A_n^* \to m]_l^s$
$\subseteq (\hat{\overline{F_n}} \quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}} \quad \hat{\overline{D_{n+1}}}) \cup (\hat{\overline{F_n}} \quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_{n+1}/x]}} \quad \hat{\overline{D_n}}\,) \cup (\hat{\overline{F_n}} \quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}} \quad \hat{\overline{D_n}}\,) \cup$
$(\hat{\overline{F_{n+1}}} \quad \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}} \quad \hat{\overline{D_n}}\,) \cup (m \; \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}} \; \hat{\overline{D_n}}\,)^\infty$
Par construction de F, les quatre premières classes sont dans $\hat{\overline{F_{n+1}}}$. Pour $(m \; \hat{\overline{\mathbb{T}[D_n/x]}} \; \hat{\overline{D_n}})^\infty$, comme elle est incluse dans $(D_n \; D_n \; D_n)^\infty$, d'après le lemme 9.2.29, elle est incluse dans $\hat{\overline{F_n}}$. On conclut $\{f\}[A_n^* \to m]_l^s \subseteq \hat{\overline{F_{n+1}}}$.

$\triangleleft$ **Étape 4** $\triangleright$

$\hat{\overline{A_n^*}}[A_n^* \to m]_l \subseteq \hat{\overline{F_{n+1}}}$

Preuve Immédiat grâce à l'étape 3 et du fait que $A_n^* \subseteq \hat{\overline{F_n}}$.

□

9.2.2 Cas : $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Delta}_\infty$

Théorème 9.2.33 *Soit $m = \delta[\;(\Delta_\infty \; \vec{t}\;)\;]$ une forme normale infinie où $\vec{t}$ est une suite de $\mathcal{T}_x^m$. Alors $Cls_m(Y\,\Omega_3)$ n'est composée que de zéro-termes.*

Preuve Dans la preuve précédente, seuls les lemmes 9.2.3, 9.2.5, 9.2.7 et la proposition 9.2.21 utilisent l'hypothèse $u \in H[v]$ et $v \in H[v]$, les autres résultats de la preuve conservent leur validité du moment que ces trois là sont vérifiés.

la validité des lemmes 9.2.3, 9.2.5, 9.2.21 et de la proposition 9.2.7 repose essentiellement sur le bon choix de A_1^*. Pour $m = \delta[\;(\Delta_\infty \; \vec{t}\;)\;]$, posons : $A_0^* = \{\Delta_\infty\}$, $A_1^* = \{\Delta_\infty\} \cup H[\Delta_\infty]$ et pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1}^* = A_n^* \cup A_n^*[A_n^* \to m]^s$.

Vérifions les quatre points :

- $\triangleright$ **Lemme** *(9.2.3) Les classes $(A_n^*)_{n\geq 0}$ sont composées de termes sous forme normale qui ne possèdent pas x comme variable libre.*
  Preuve Ce résultat découle de la remarque 9.2.4 et du fait que les termes de A_n^* sont normaux et privés de la variable libre x. □
- $\triangleright$ **Lemme** *(9.2.5) $A_1^* \subseteq (\Delta \;\; \delta[(A_1^* \; \mathbb{T})]\;) \cup (\Delta \;\; A_1^*)$*
  Preuve La preuve est la même. Nous pouvons dire des termes de A_1^* :
  – qu'ils commencent soit par deux Δ, i.e. ils s'écrivent de la forme $(\Delta \; \Delta \; \vec{v})$ et dans ce cas nous vérifions qu'ils appartiennent à $(\Delta \;\; A_1^*)$.
  – soit qu'ils s'écrivent $(\Delta \;\; \delta[\,(\,H[\Delta_\infty] \quad \mathbb{T}\,)\,]\,)$ et dans ce cas ils appartiennent à $(\Delta \;\; \delta[\,(\,A_1^* \;\; \mathbb{T}\,)\,]\,)$ puisque par définition, $H[\Delta_\infty] \subseteq A_1^*$. □
- $\triangleright$ **Proposition** *(9.2.7) $\forall n \geq 0,\; A_n \subseteq A_n^*$*
  Preuve À partir de la remarque 9.2.22, le résultat découle du fait que $m = \delta[\,(\Delta_\infty \;\, \vec{t})\,]$, que $A_0 \subseteq A_0^*$, que $\Delta_\infty \in A_1^*$ et que $\Delta_+ \circ \delta[\;(\Delta_\infty \;\, \vec{t}\;)\;] \subseteq H[\Delta_\infty]$ qui est incluse dans A_1^*. □
- $\triangleright$ **Lemme** *(9.2.21) $m \in \hat{\overline{D_1}}$.*
  Preuve D'après la remarque 9.2.22 et du fait que $\Delta_\infty \in A_1^*$. □

□

9.2.3 Cas : $\mathbf{u} \in \widehat{\boldsymbol{\Delta}_+} \cup \mathbf{H}[\widehat{\boldsymbol{\Delta}_+}]$

Cette situation est un cas pathologique. Elle ne correspond pas à une solution du système d'équation pour u (définition 9.1.13). Elle apparaît uniquement parce que l'analyse syntaxique n'a pas été poussée jusqu'au bout lors de la résolution du système pour u. Dans cette situation, si nous détaillons les classes $(A_i)_{i\geq 0}$ et $(B_i)_{i\geq 0}$, nous nous rendons compte que x n'apparaît jamais dans les classes $(B_i)_{i\geq 0}$. C'est donc un cas où $n_x = \infty$.

Théorème 9.2.34 *Soit $m = \delta[\ (u\ \vec{t}\ )\ ]$ une forme normale infinie où $\vec{t}$ est une suite de $\mathcal{T}_x^m$. Soit H la classe de contextes définie à partir de $\vec{t}$ au sens de 9.1.7. Si $u \in \widehat{\Delta_+} \cup H[\widehat{\Delta_+}]$, alors $Cls_m(Y\,\Omega_3)$ n'est composée que de zéro-termes.*

Preuve Nous allons montrer par l'absurde que $n_x = \infty$.

Notons $\mathbb{T}$ la partie utile de $\vec{t}$ au sens de 9.1.4.

Comme $B_1 = \{(u\ \vec{t})\}$ et $u \in \widehat{\Delta_+} \cup H[\widehat{\Delta_+}]$, alors :

– soit $u \in \widehat{\Delta_+}$ et $B_1 \subseteq (\widehat{\Delta_+}\ \ \mathbb{T}\,)$.

– soit $u \in H[\widehat{\Delta_+}]$ et il existe un entier $r \geq 0$ tel que $B_1 \subseteq (H_r[\widehat{\Delta_+}]\ \ \mathbb{T}\,)$.

En notant H_{-1} le contexte trivial, nous en déduisons que dans tous les cas, il existe un entier $r \geq 0$ tel que $B_1 \subseteq (H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]\ \ \mathbb{T}\,)$.

D'après la proposition 8.0.8 et comme $n_x \geq 2$ (cf. lemme 8.0.6), $A_1 = \{\Delta_\infty\} \cup \Delta_+ \circ \delta[B_1]$. Ce qui entraîne, d'après la définition 9.1.7 de H, $A_1 \subseteq \{\Delta_\infty\} \cup H_r[\widehat{\Delta_+}]$.

Soit $p \geq 1$ le plus petit entier tel que :

– A_p n'est pas incluse dans $\{\Delta_\infty\} \cup H_r[\widehat{\Delta_+}]$ *et* B_p n'est pas incluse dans $H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]$

Si $p > n_x$, alors B_{n_x} est incluse dans $(H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]\ \ \mathbb{T}\,)$ qui ne contient pas x, contradiction.

Si $p \leq n_x$, alors $A_{p-1} \subseteq \{\Delta_\infty\} \cup H_r[\widehat{\Delta_+}]$ et $B_p \subseteq (H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]\ \ \mathbb{T}\,)$.

D'après la proposition 8.0.8, $A_{p-1}[A_{p-1} \to m]^s = \Delta_+ \circ \delta[B_{p-1}[A_{p-1} \to m]\ ] \cup \Delta_+ \circ \delta[B_1]$. Or, par croissance des échanges, $B_{p-1}[A_{p-1} \to m] \subseteq (H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]\ \ \mathbb{T}\,)\ [A_{p-1} \to m]$. D'après le lemme de non capture 7.5.6, les échanges se scindent en deux :

$(H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]\ \ \mathbb{T}\,)\ [A_{p-1} \to m] \subseteq (H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]\ [A_{p-1} \to m]\ \ \mathbb{T}[A_{p-1} \to m]\,)$.

Comme A_{p-1} est incluse dans $\{\Delta_\infty\} \cup H_r[\widehat{\Delta_+}]$ qui est composée de OTF, d'après la proposition 9.1.6 point (2), $\mathbb{T}[A_{p-1} \to m] \subseteq \mathbb{T}$. Et d'après le fait 9.2.35 ci-après, $H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]\ [A_{p-1} \to m] = \emptyset$.

D'où $A_{p-1}[A_{p-1} \to m]^s = \Delta_+ \circ \delta[(H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]\ \ \mathbb{T}\,)\,] \cup \Delta_+ \circ \delta[B_1]$ dont chaque membre de la réunion est incluse dans $\{\Delta_\infty\} \cup H_r[\widehat{\Delta_+}]$. Finalement, comme $A_p = A_p \cup A_{p-1}[A_{p-1} \to m]^s$ et $B_p = B_p \cup B_{p-1}[B_{p-1} \to m]$, nous obtenons :

– A_p est incluse dans $\{\Delta_\infty\} \cup H_r[\widehat{\Delta_+}]$ *et* B_p est incluse dans $H_{r-1}[\widehat{\Delta_+}]$.

Ce qui contredit la minimalité de p. □

Fait 9.2.35 *Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $-1 \leq j < n$, aucun terme de $\{\Delta_\infty\} \cup H_n[\widehat{\Delta_+}]$ n'est sous-terme de $\widehat{\Delta_+}$ ni de $H_j[\widehat{\Delta_+}]$.*

Preuve Par récurrence sur le couple (n, j), ordonné lexicographiquement.

▷ Pour $(n, -1)$. $H_{-1}[\widehat{\Delta_+}]$ dénote $\{\Delta_+\}$.
Le résultat découle alors de deux constats :
 – D'une part, Δ_∞ possède une branche infinie à droite, ce qui n'est pas le cas pour les sous-termes de Δ_+.
 – D'autre part, les termes de $H_n[\widehat{\Delta_+}]$ s'écrivent $\Delta_+ \circ \delta[w]$ où w est un OTF. Or, les seuls sous termes de $\widehat{\Delta_+}$ que filtre le contexte δ sont δ_3.

▷ Pour (n, j) où $n \geq 1$ et $0 \leq j < n$.
Soit $u \in \{\Delta_\infty\} \cup H_n[\widehat{\Delta_+}]$. D'après la définition de H, u s'écrit soit $u = \Delta_\infty$, soit $u = \Delta_+ \circ \delta[w]$ où $w \in H_{n-1}[\widehat{\Delta_+}]$. Soit $t \in H_j[\widehat{\Delta_+}]$, de même il s'écrit $t = \Delta_+ \circ \delta[v]$ où $v \in H_{j-1}[\widehat{\Delta_+}]$. Si $u \leq t$, d'après le lemme de filtrage 7.2.4, nous distinguons trois cas :
 (a) $u \leq v$, ce qui est impossible d'après l'hypothèse de récurrence en $(n, j-1)$
 (b) et (c) $w \leq v$ également impossible par hypothèse de récurrence en $(n-1, j-1)$.

□

9.3 Conclusion

Nous venons donc de démontrer le résultat suivant :

Théorème 9.3.1 *Pour tout terme m, fini et clos, dont la forme normale infinie m^∞ satisfait H_1 et H_2 la classe $Cls_m(Y\,\Omega_3)$ n'est composée que de zéro-termes.*

Chapitre 10

EXEMPLES

Dans $Y\,\Omega_3$ *is almost easy*, Kuper propose deux exemples pour le terme m. Le premier correspond au cas $\lambda\beta + (\Omega_3\ m) = m \not\vdash m = \delta_3$ l'autre non. Reprenons ces exemples pour voir ce qu'en disent nos résultats.

10.1 $m = \lambda x.x\,\Omega\,\Omega$

Ici, comme Ω est muet, c'est un OTF de degré fini. Le théorème 6.0.2 permet de conclure.

10.2 $m_1 = Y(\lambda v\ \lambda x.(x\ (\Omega_3\ v\ \lambda yz.x)\ x))$

En premier remarquons que $m_1 \to_\beta^* \lambda x.(x\ (\,(\Omega_3\ m_1)\ \lambda yz.x)\ x)$. Dans la théorie $\lambda\beta + (\Omega_3\ \ m_1) = m_1$, nous pouvons donc montrer que $m_1 = \delta_3$ puisque $(m_1\ \lambda yz.x) \to_\beta^* x$. Ce cas échappe donc au théorème de Kuper.

Avec les notations de la proposition 9.1.1, posons $t = \lambda yz.x$. Le terme t vérifie bien $(\delta\ t) \to_\beta x$.

Posons $u_1 = (\Omega_3\ m_1)$, $u = u_1^\infty$ et $m = m_1^\infty$. Il vient alors $m = \delta[u\ t]$ et $u = \Delta\ m$.

Ainsi, $u = \Delta\circ\delta[u\ t]$ et donc $u \in H_0[u]$. On vérifie donc que u est t-définissable (déf. 9.1.12). En vertu du théorème 9.3.1, nous avons donc $Cls_m(Y\,\Omega_3) \subseteq \mathrm{OT}$.

Vérifions juste qu'il existe des termes de $Cl_m(Y\,\Omega_3)$ qui n'apparaissent pas dans $Cls_m(Y\,\Omega_3)$. D'après la proposition 9.2.31, en remplaçant A^* par $Cls_m(Y\,\Omega_3)$, on a $Cls_m(Y\,\Omega_3) \subseteq F[\,Cls_m(Y\,\Omega_3)\,]$.

Commençons par décrire F. Pour un terme comme m_1, $\mathbb{T} = \{t\}$ puisque t est déjà minimal. D'après la définition 9.2.9, F s'écrit :

- $D = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{D}_k$ où $\mathcal{D}_0 = \{[], \delta_3\} \cup \delta[([]\ t)]$ et pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{D}_{k+1} = ([]\ \ \lambda yz.\mathcal{D}_k])$
- $E = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{E}_k$ où $\mathcal{E}_0 = \{\Delta\}$ et pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{E}_{k+1} = (\mathcal{E}_k\ D)$
- $F = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_k$ où $\mathcal{F}_0 = E$ et pour tout $k \geq 0$, $\mathcal{F}_{k+1} = (\mathcal{F}_k\ D) \cup (\mathcal{F}_k\ \ \lambda yz.D\ \ D)$

Autrement dit, si $f \in F$, alors $f = \Delta\ d_1 \cdots$.

Or, comme $\lambda\beta + (\Omega_3\ m_1) = m_1 \vdash m_1 = \delta_3$, alors $(Y\,\Omega_3) =_{Y\,\Omega_3 = m_1} (Y\ m_1)$. En effet, $(Y\,\Omega_3) = m_1$ (1). Puis, $(Y\,\Omega_3) =_\beta \Omega_3\ (Y\,\Omega_3) = \Omega_3\,m_1 = \Omega_3\,\delta_3 =_\beta \Omega_3$ (2). D'où (1) + (2), $\Omega_3 = m_1$ (3) . Et ainsi, $(Y\,\Omega_3) = (Y\,m_1)$.

Comme $(Y\,\Omega_3) =_{Y\,\Omega_3 = m_1} (Y\ m_1)$, alors $(Y\ m)^\infty \in Cl_m(Y\,\Omega_3)$. Or, que vaut $(Y\ m)^\infty$?

Pour le calculer, il suffit de voir ce que donne sa réduction de tête infinie. Soit $V = (Y\,m)^\infty$. Par unicité de la forme normale, $V = (m\ \ V)^\infty$. Or, $(m\ V)^\infty = (V\ (u\ t[V/x])\ V)^\infty$. En répétant le réduction de tête, on réalise donc que V est un OTF. Sa forme normale infinie vérifie donc $V = (V\ (u\ \lambda yz.V)\ V)$. Un tel terme n'est donc pas présent dans $Cls_m(Y\,\Omega_3)$.

$Cons\{Y\,\Omega_3 = m_1\}$ reste donc toujours ouverte.

10.3 $m = \lambda x.x\ (\Omega_3\, x)\ x$

Terminons par un exemple pour lequel il n'est pas évident que $\lambda\beta + (\Omega_3\ m) = m \not\vdash m = \delta_3$.

Dans ce cas, avec les notations de la définition 8.0.3, la classe $\mathring{A} = \Delta_+ \circ \delta[\mathring{B}]$ où $\mathring{B} = \{\Delta\ x\}$ est clairement une classe confinante pour m. En effet, les seuls sous-termes OTF de $\mathring{B}$ sont Δ et Δ n'apparaît pas dans $\mathring{A}$. Nous avons donc $\mathring{B}[\mathring{A} \to_\infty m] = \mathring{B}$. La proposition 8.0.8 permet alors de conclure.

Chapitre 11

Perspectives

La preuve du théorème 9.3.1 fournit une description détaillée des termes qui peuvent être obtenus par échanges de $(Y\,\Omega_3)$ par m. Toutefois, il ne permet pas de conclure quant à la consistance de $\lambda\beta + \{(Y\,\Omega_3) = m\}$. Pour cela, il aurait fallu prouver $Cl_m(Y\,\Omega_3) \subseteq \mathrm{OT}$ au lieu de $Cls_m(Y\,\Omega_3) \subseteq \mathrm{OT}$. Avec $Cl_m(Y\,\Omega_3) \subseteq \mathrm{OT}$ nous aurions pu aboutir au résultat recherché grâce au corollaire 3.4.29.

Pour parvenir à une preuve complète de la consistance, la première solution consiste à corriger la définition des classes $(A_i)_{i\geq 0}$ et $(B_i)_{i\geq 0}$. Au lieu de prendre des échanges simples, il faudrait prendre des échanges infinis. Ce qui revient à utiliser les classes $(\mathring{A}_i)_{i\geq 0}$ et $(\mathring{B}_i)i \geq 0$ de la définition 8.0.3. Cette modification produirait de nombreux bouleversements dans les preuves. Néanmoins les corrections ne seraient pas insurmontables. Une seconde solution consiste à montrer que $Cls_m(Y\,\Omega_3) \subseteq \mathrm{OT}$ entraîne $Cl_m(Y\,\Omega_3) \subseteq \mathrm{OT}$. Nous savons que $Cls_m(Y\,\Omega_3)$ est inclue strictement dans $Cl_m(Y\,\Omega_3)$. En effet, le terme $(m\ m\ \cdots)^\infty$ appartient à $Cl_m(Y\,\Omega_3)$ tandis qu'il est absent de $Cls_m(Y\,\Omega_3)$. Mais nous n'avons pas d'exemple de classes pour lesquelles $Cl_m(Y\,\Omega_3)$ soit composée de OT et pas $Cl_m(Y\,\Omega_3)$. Cet énoncé reste donc à l'état de conjecture.

La généralisation du théorème 9.3.1 nécessiterait quant à elle de profondes modifications. La preuve de ce théorème repose en grande partie sur le fait que m possède une composante b auto-similaire. Si b est auto-similaire alors la classe A des échangés de $(Y\,\Omega_3)$ par m s'écrit à l'aide d'un point fixe. Et nous vérifions alors que A n'est composée que de zéro-termes. Si b est auto-similaire, c'est grâce aux hypothèses H_1 et H_2 :

H_1 : $m = \delta[b]$ *où b est un zéro-terme fort de degré infini sous forme normale*
H_2 : *Avec les notations des définitions 9.0.1 et 8.0.5 :* $x \in \{b\}[A_{n_x-1} \to m]$

En toute généralité, elles devraient s'écrire :

H'_1 : $m = \lambda x.(x\ b_1\ b_2)$ *où $b_{1,2}$ sont des OTF de degré infini sous forme normale*
H'_2 : *Avec les notations des définitions 9.0.1 et 8.0.5 :* $x \in B$

Le passage de H_1 à H'_1 ne posera pas de problèmes sérieux : les deux variables x en argument de $\delta_3 = \lambda x.(x\ x\ x)$ jouant des rôles symétriques. La modification de H_2 est elle plus problématique. En effet, sous H_2, b s'échangeait en une seule étape en x. L'auto-similarité de b se déduisait alors de deux résultats :

- *le lemme de non-capture* : b s'écrit $(u\ \vec{t})$ et les échanges de A par m s'effectuent soit dans u, soit dans $\vec{t}$.
- *la partie utile de $\vec{t}$* : à partir de la réduction $(m\ \vec{t}) \to_{\infty\beta\perp} x$ nous pouvions extraire de $\vec{t}$ un squelette invariant par les échanges de A par m.

Sous H'_2, b s'échangera alors en x en plusieurs étapes. Ce qu'on écrira

$b \to_{A\to m} b_1 \to_{A\to m} b_2 \to_{A\to m} \cdots \to_{A\to m} b_n \to_{A\to m} x$. Comme dans le cas à une étape nous pourrons toujours établir que b_n s'échange de tête en x i.e. $b_n = (u\ \overrightarrow{t}\,)$ où u est un élément de A. Cependant, pour b, b_1, ... ,b_{n-1} il n'y aura plus de raisons pour que l'échange se fasse en tête : $b = C_0[a_0] \to_{A\to m} C_0[m]^\infty = b_1 = C_1[a_1] \cdots$. Deux questions se poseront alors : comment s'exprime la non-capture sur un contexte C ? Comment définir une partie utile intouchable par échanges à partir d'une réduction $C_0[a_0] \to_{A\to m} C_0[m]^\infty = C_1[a_1]$?

Sinon, indépendamment des hypothèses H'_1 et H'_2, l'idée qui a mené tout mes travaux était la suivante : pour que m rende la consistance de la théorie $\lambda\beta + \{(Y\,\Omega_3) = m\}$ difficile à prouver, il doit nécessairement avoir une forme compliquée. La complexité de sa forme se traduit par l'apparition de composantes auto-similaires. Une étape intermédiaire avant de prouver la facilité de $(Y\,\Omega_3)$ consisterait donc à monter que si $\lambda\beta + \{(\Omega_3\,m) = m\} \vdash m = \delta_3$ alors les sous-termes non-résolubles de m sont auto-similaires.

Enfin, tous les résultats de cette thèse ont été obtenus dans le cadre du λ-calcul infini. Il n'est pourtant pas exclu que la facilité de $(Y\,\Omega_3)$ ne soit pas démontrable dans un tel calcul et qu'il faille ainsi revenir à la version fini. En effet, nous l'avons déjà signalé, il existe deux termes $(P\ (\Omega\,\Omega))$ et $(P\ \Omega)$ qui ont même arbre de Berarducci. Pourtant le premier est facile tandis que l'autre ne l'est pas (cf. propositions 3.4.35 et 3.4.36). Il existe donc des termes faciles qui échappent au λ-calcul infini.

Bibliographie

[1] F. Alessi, M. Dezani-Ciancaglini, F. Honsell. Filter Models and Easy Terms. *ICTCS* p17-37, 2001

[2] Baeten and Boerboom. Ω can be anything it should not be. Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Serie A, *Indag. Mathematicae*, Vol. 41, pp. 111-120.

[3] H.P. Bahrendregt, The Lambda Calculus, Studies in Logic, North Holland, Amsterdam 1984.

[4] A. Berarducci, B. Intrigila. Church-Rosser λ-theories, infinite λ-terms and consistency problems. In W.Hodges and M.Hyland et al., editors, *Logic : From Foundations to Applications*, pages 33-58. Oxford Sci. Publ., New York, 1996.

[5] A. Berarducci. Infinite λ-Calculus and non-sensible models. In *Logic and algebra*, pages 330-377. Dekker, New York, 1996.

[6] A. Berarducci, B. Intrigila, some new result on easy lambda-terms, *Theoritical Computer Science*, 121 pages 71-88, 1993.

[7] C.Böhm, Alcune proprietà delle forme $\beta\eta$-normali nel λK-calcolo, Pubblicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, n. 696, Roma, 1968, (19 p.).

[8] R. David, Computing with Böhm tree. *Fundamenta Informaticae*, 45 (1,2) p 53-77, 2001

[9] R. David, K. Nour. Storage operators and directed lambda-calculus.*The Journal of Symbolic Logic*, pages 1054-1086, Volume 60, N.4, 1995

[10] B. Intrigila, a problem on easy terms in λ-calculus, *Fundamenta informaticae, vol. XV .1*, 1991.

[11] G. Jacopini. A condition for identifying two elements of whatever model of Combinatory Logic. λ-Calculus and Computer Science Theory, ed. C.Böhm, Lecture Notes in *Computer Science*, 37, 1975.

[12] G. Jacopini, M. Venturini Zilli, Equating for recurrent terms of λ-calculus and Combinatory Logic. Istituto per le applicazioni del Calcolo. *Quaderni serie III*, N.85, Roma, 1978.

[13] G. Jacopini, M. Venturini Zilli, Easy terms in the λ-calculus, Annales Societatis Mathematicae Polonae. Serie IV : *Fundamenta Informaticae VIII. 2*, 1985.

[14] Jean-Louis Krivine, Lambda-calcul, types et modèles, *Masson*, 1990.

[15] R. Kennaway, J.W. Klop, M.R. Sleep, and F.J. de Vries, Infinitary lambda calculus. *Theoritical Computer Science*, 175(1) :93-125, 1997.

[16] R. Kennaway, V. van Oostrom, and F.J. de Vries, Meaningless Terms in Rewriting, The Journal of Functional and Loqgic Programming, *The MIT Press*, Volume 1999, Article 1, 1999.

[17] J.Kuper, $Y\Omega_3$ is almost easy, University of Twente, Departement of Computer Science.

[18] G. Mitschke, λ-Kalkül, δ-conversion und axiomatische Rekursion-theorie, Preprint Nr.274, *Technishe Hochschule, Fachbereit Matematik, Darmstadt*, Pages 77, 1976.

[19] S. Severino, I termini easy nel Lambda-Calcolo, Tesi di laurea, Università ca' Foscari-Venezia, Anno Accademico 1999-2000.

[20] M. Venturini-Zilli, Head recurrent terms in Combinatory Logic : a generalization of the notion of head normal form. Automata, Languages and Programming, (proceeding of ICALP'78), *Springer Verlag*, 1978.

[21] C. Zylberajch. *Syntaxe et sémantique de la facilité en lambda-calcul*. Thèse de Doctorat, Université Paris VII, 1991.

Index

Résumé

La facilité compte parmi les notions les plus fines de l'indéfini en λ-calcul. Un terme est dit facile s'il peut être identifié à tout autre terme clos arbitraire sans soulever de contradiction. Introduite en 1975 par Jacopini, elle fait depuis l'objet de recherches qui visent à caractériser la forme des termes faciles. Aujourd'hui, de tous les travaux entrepris il se dégage qu'un tel terme doit posséder une périodicité. Être périodique, c'est être β-équivalent à un sous-terme propre de l'un de ses réduits. Ici, la périodicité apparaîtra sous les traits de l'auto-similarité. Sont auto-similaires les termes dont l'arbre de Berarducci réapparaît comme sous-arbre propre à lui-même. La facilité de tels termes demeure un mystère. À ce jour, nous n'en connaissons que peu d'exemples. Le terme $Y_t\,\Omega_3$ constitue un exemple typique dont la question de la facilité reste ouverte. Dans cette thèse, nous étendrons la connaissance de l'ensemble des termes m identifiables à $Y_t\,\Omega_3$. Nous montrerons que dans un cas critique où $\lambda\beta + \{Y_t\,\Omega_3 = m\} \vdash m = \delta_3$, sous certaines hypothèses, m est lui-même auto-similaire. Ils s'en suit une description possible de toutes les équations dérivées de $\{Y_t\,\Omega_3 = m\}$ sous la forme de classes confinantes.

Mots-clé : facilité, indéfini, consistance, λ-calcul infini, arbres de Berarducci, classes confinantes

Abstract

Easiness is among the finest notions of the concept of undefinability in the field of the λ-calculus. A term is said to be easy if it can be identified to any other arbitrary closed term without raising a contradiction. Since its introduction by Jacopini in 1975 this subject was the attention of a large research activity centered on the characterization of the structure of such easy terms. It comes out from this work that an easy term should have a periodicity i.e. should be β-convertible to one of its proper sub-terms. In the following the periodicity behavior will appear throughout the self-similarity property. Terms are said to be self-similar when their Berarducci tree reappears as a proper sub-tree of itself. Easiness of such terms is still a mystery and yet we only know few examples of those terms. The $Y_t\,\Omega_3$ term is a typical term for which the easiness property is still an open question. In this thesis we will add new insights to the knowledge of m-terms that can be identified to $Y_t\,\Omega_3$. We will show that in the critical case where $\lambda\beta + \{Y_t\,\Omega_3 = m\} \vdash m = \delta_3$ and under some particular hypothesis, m is itself self-similar. In that case we show that it is possible to express all the equations derived from $\{Y_t\,\Omega_3 = m\}$ by using confining classes.

Keywords : easiness, undefinability, consistency, infinite λ-calculus, Berarducci tree, confining class