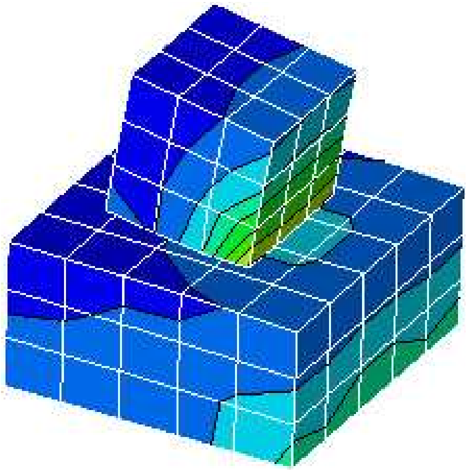
Thèse de doctorat
spécialité : mécanique

DÉVELOPPEMENT D'ALGORITHMES ET D'UN CODE DE CALCUL POUR LES PROBLÈMES DE L'IMPACT ET DU CHOC

Benoît Magnain

28 novembre 2006

Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry
Université d'Évry - Val d'Essonne



- ❒ Simulation numérique des problèmes d'impact
- ❒ Deux grandes sources de difficultés :
  - ⇒ gestion du contact avec frottement
  - ⇒ intégration des équations du mouvement
- ❒ Objectifs :
  - ⇒ précision des résultats
  - ⇒ stabilité de la méthode
  - ⇒ performance (temps de calcul)

Couplage de deux méthodes originales

Traitement du contact :

méthode du bi-potentiel (DE SAXCÉ et FENG 1991 et 1998)

$\Longrightarrow$ vérifie de manière exacte les conditions de contact

$\Longrightarrow$ résolution dans un système réduit

$\Longrightarrow$ réactions normales et tangentielles liées par le bi-potentiel de contact

$\Longrightarrow$ méthode éprouvée en statique

Intégration des équations du mouvement :

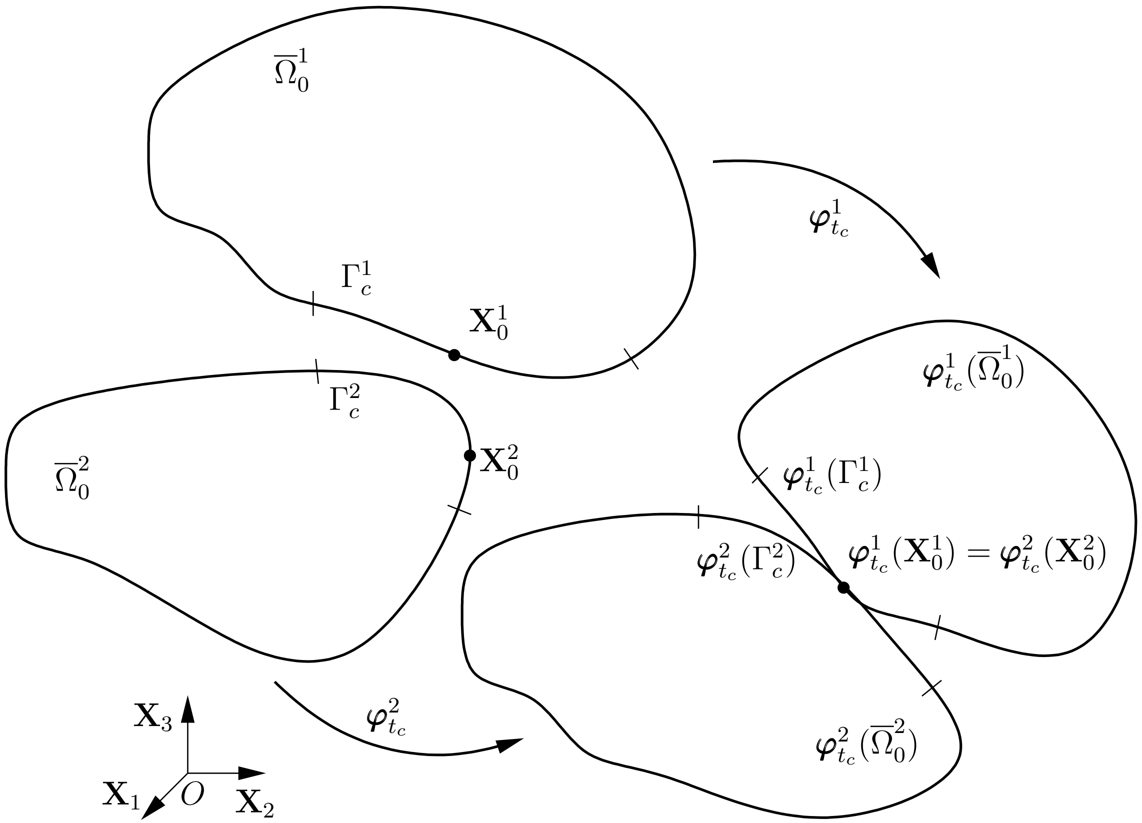
θ-*méthode* du premier ordre (JEAN 1999)

$\Longrightarrow$ ne fait pas intervenir de termes d'accélération dans le calcul

Plan de la présentation

- Introduction
- Contact avec frottement
- Schémas d’intégration
- Applications numériques
- Conclusions et perspectives

- ❒ Introduction
- ❒ Contact avec frottement :
  - définition du problème
  - méthode globale de résolution
  - loi de contact avec frottement
  - méthode du bi-potentiel
  - algorithme local de résolution
  - définition des zones de contact
- ❒ Schémas d'intégration
- ❒ Applications numériques
- ❒ Conclusions et perspectives



Cadre de l'étude :

- ❐ problèmes dynamiques
- ❐ grands déplacements et grandes déformations
- ❐ matériaux hyperélastiques
- ❐ contact avec frottement entre corps déformables
- ❐ problèmes 2D et 3D

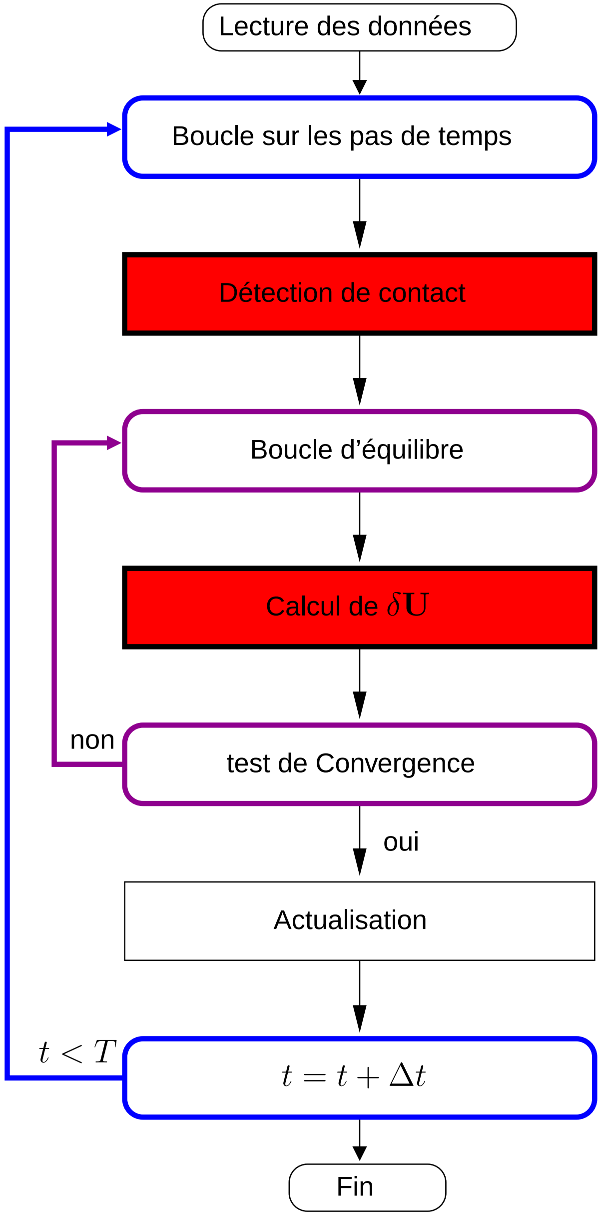
Équations d'équilibre discrétisées :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_T\ \delta\mathbf{U} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int} + \mathbf{R}_c} + \begin{cases} \text{loi de comportement} \\ \text{conditions aux limites} \\ \text{conditions initiales} \\ \text{conditions de contact} \end{cases}$$

non-linéarité matérielle (hyperélasticité) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Kirchhoff-Saint Venant, Néo-Hookéen,} \\ \text{Blatz-Ko et Mooney-Rivlin} \end{cases}$

non-linéarité géométrique $\Rightarrow$ formulation lagrangienne totale, $\mathbf{E}$, $\mathbf{S}$

non-linéarité de contact $\Rightarrow$ méthode du bi-potentiel



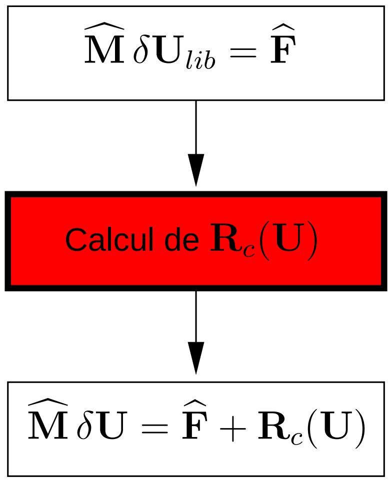
Après intégration temporelle :

$$\widehat{\mathbf{M}}\ \delta\mathbf{U} = \widehat{\mathbf{F}} + \mathbf{R}_c$$

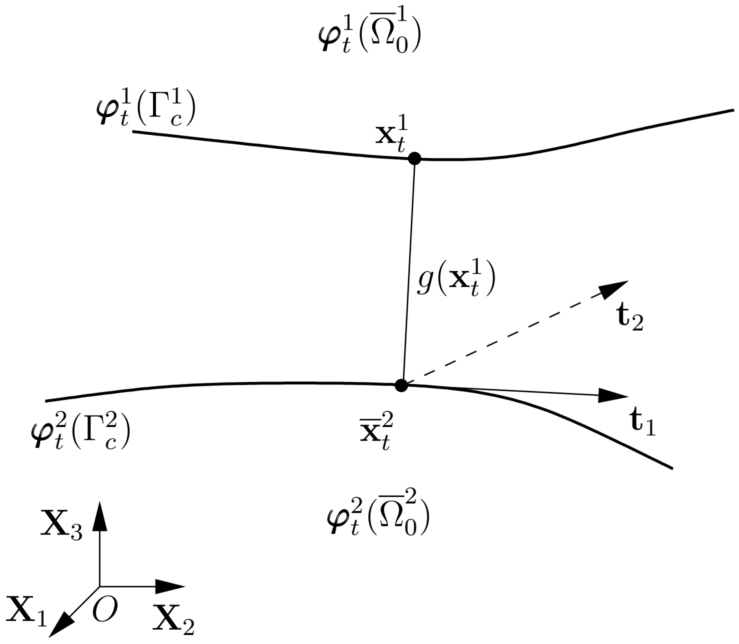
Décomposition du problème :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U} &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\widehat{\mathbf{F}} + \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{R}_c \\ &= \delta\mathbf{U}_{lib} + \delta\mathbf{U}_c \end{aligned}$$

Calcul de $\delta\mathbf{U}$:



Repère local du contact



Changement de base et condensation

$$\mathbf{R}_c^\alpha = \mathbf{H}^\alpha \mathbf{r}^\alpha$$

$$\delta \mathbf{u}_c^\alpha = (\mathbf{H}^\alpha)^{\mathrm{T}} \delta \mathbf{U}_c^\alpha$$

$$\delta \mathbf{u}_c = \left(\mathbf{H}\widehat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right) \mathbf{r} = \mathbf{W}\,\mathbf{r}$$

Calcul de $\mathbf{R_c}$

$$\delta \mathbf{U}_c = \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\ \mathbf{R}_c$$

$+$ loi de contact

$\Downarrow$

changement de repère

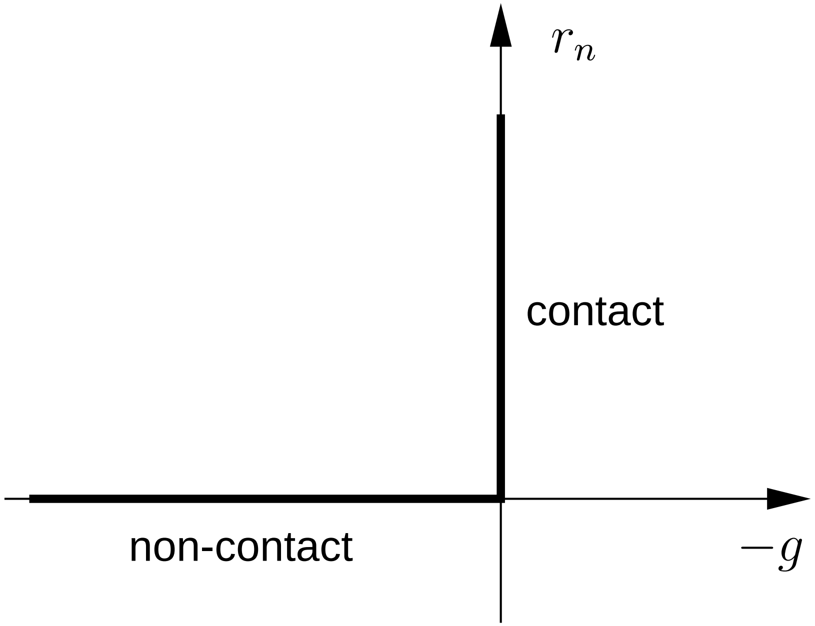
$+$ condensation

$\Downarrow$

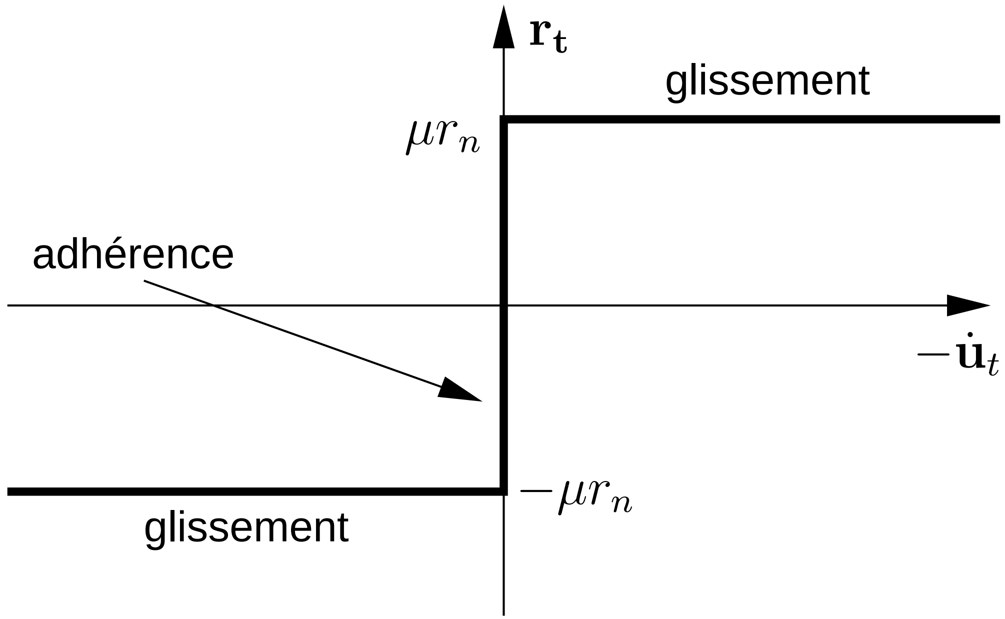
$$\delta \mathbf{u}_c = \mathbf{W}\ \mathbf{r}$$

$+$ loi de contact

Contact unilatéral



Loi de frottement



Conditions de Signorini :

$g \geq 0$	non-pénétration
$r_n \geq 0$	non-adhésion
$g \cdot r_n = 0$	condition complémentaire

Modèle de Coulomb :

$$\text{Si } \|\mathbf{r}_t\| < \mu r_n \quad \text{alors} \quad \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}$$

$$\text{Si } \|\mathbf{r}_t\| = \mu r_n \quad \text{alors}$$

$$\exists \lambda > 0 \quad \text{tel que} \quad \dot{\mathbf{u}}_t = -\lambda \mathbf{r}_t$$

bi-potentiel de contact :

$$b_c(-\dot{\mathbf{u}},\mathbf{r}) = \bigcup_{\mathbb{R}_-}(-\dot{u}_n) + \bigcup_{K_\mu}(\mathbf{r}) + \mu\, r_n\|-\dot{\mathbf{u}}_t\| \qquad \begin{cases} \mathbb{R}_- =]-\infty,0] \\ K_\mu = \left\{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } \|\mathbf{r}_t\| - \mu r_n \leq 0\right\} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Théorème : Le couple extremum de b_c vérifie la loi de contact avec frottement

$$\Downarrow$$

méthode du lagrangien augmenté

$$\Downarrow$$

$\dot{u}_n \geq 0$, $\mathbf{r}\in K_\mu$ et $\forall\, \mathbf{r}' \in K_\mu$:

$$\varrho\mu(r_n' - r_n)\|\dot{\mathbf{u}}_t\| + \big(\mathbf{r}' - (\mathbf{r} - \varrho\dot{\mathbf{u}})\big)(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0$$

$$\boxed{\mathbf{r} = \text{proj}(\mathbf{r}^*, K_\mu) \quad \text{où} \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \varrho\big(\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{u}_n + \mu\|\dot{\mathbf{u}}_t\|)\mathbf{n}\big)}$$

$$\Downarrow$$

Algorithme d'Uzawa :

$$\begin{cases} \text{Prédiction } \mathbf{r}^{*i+1} = \mathbf{r}^i - \varrho^i\big(\dot{\mathbf{u}}_t^i + (\dot{u}_n^i + \mu\|\dot{\mathbf{u}}_t^i\|)\,\mathbf{n}\big) \\ \text{Correction } \mathbf{r}^{i+1} = \text{proj}(\mathbf{r}^{*i+1}, K_\mu) \end{cases}$$

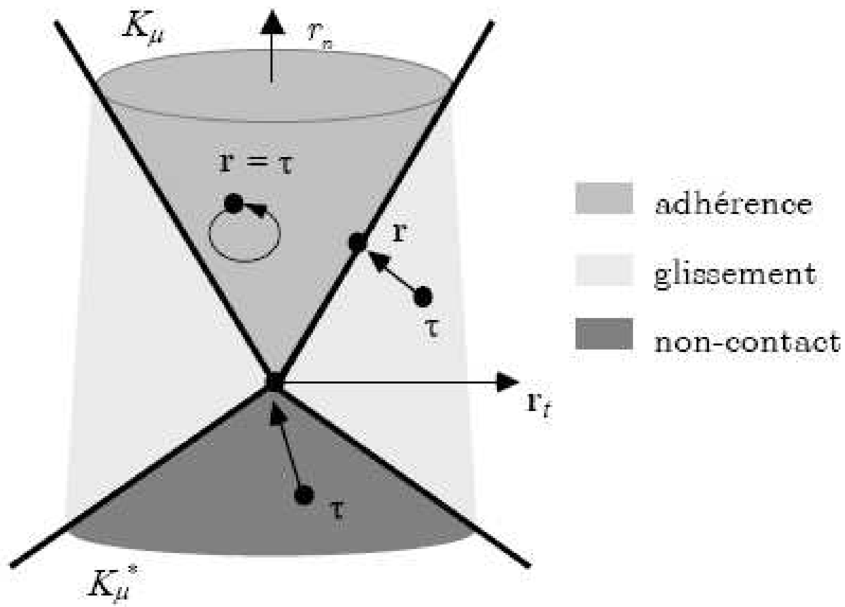
$\mu\|\mathbf{r}_t^*\| < -r_n^*$ — oui → non-contact : $\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{0}$

non ↓

$\|\mathbf{r}_t^*\| < \mu r_n^*$ — oui → adhérence : $\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{r}^*$

non ↓

glissement : $\mathbf{r} = \mathbf{r}^* - \dfrac{(\|\mathbf{r}_t^*\| - \mu r_n^*)}{(1+\mu^2)}\Big(\dfrac{\mathbf{r}_t^*}{\|\mathbf{r}_t^*\|} + \mu\,\mathbf{n}\Big)$



$$\delta\mathbf{u}_c = \mathbf{W}\ \mathbf{r}$$

$+$ loi de contact

$$\Downarrow$$

$$\delta\mathbf{u}_c = \mathbf{W}\ \mathbf{r}$$

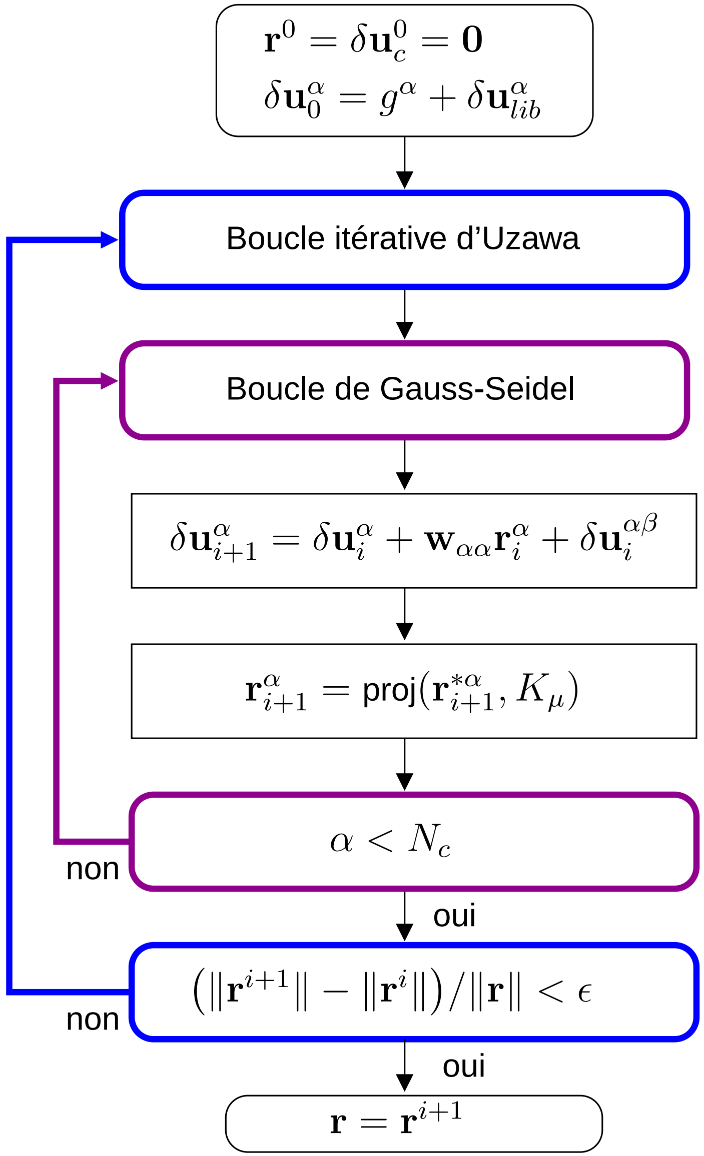
$$\mathbf{r} = \text{proj}(\mathbf{r}^*, K_\mu)$$

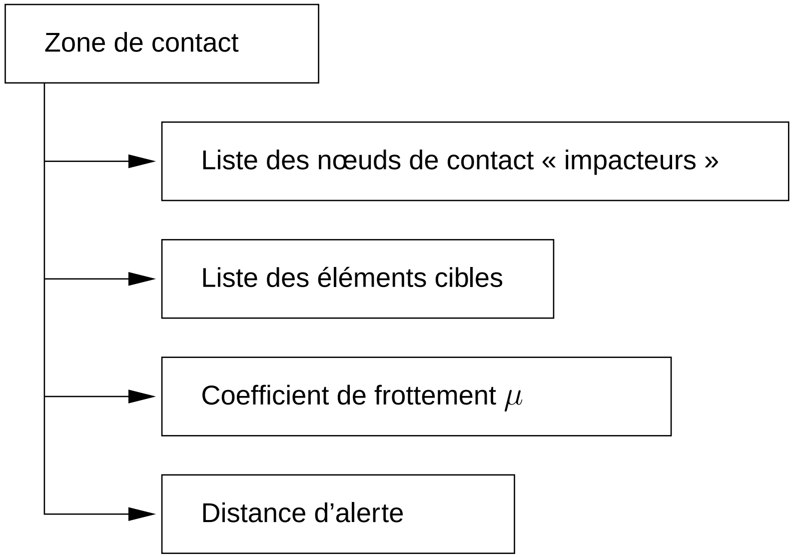
Gauss-Seidel par bloc

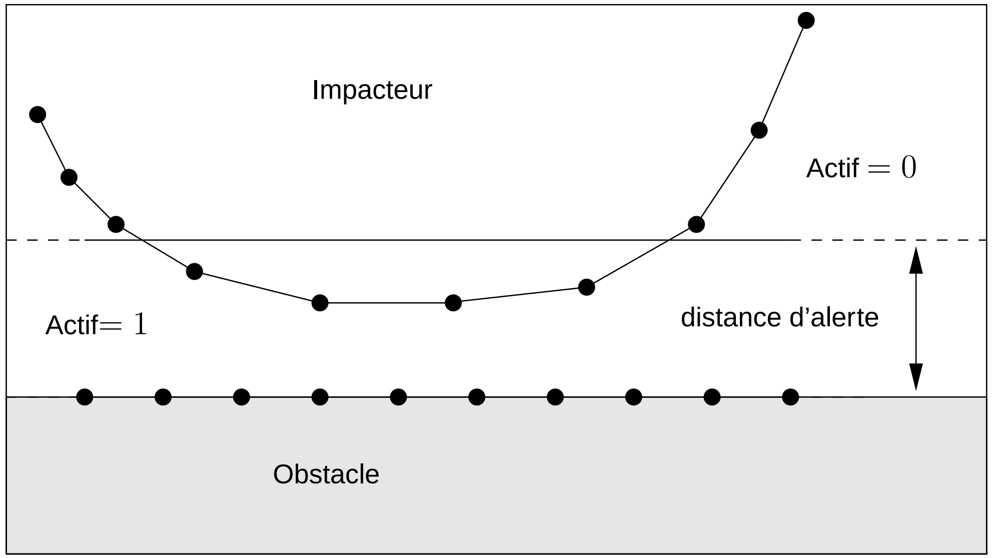
problème non-linéaire de $(6 \times N_c)$ équations

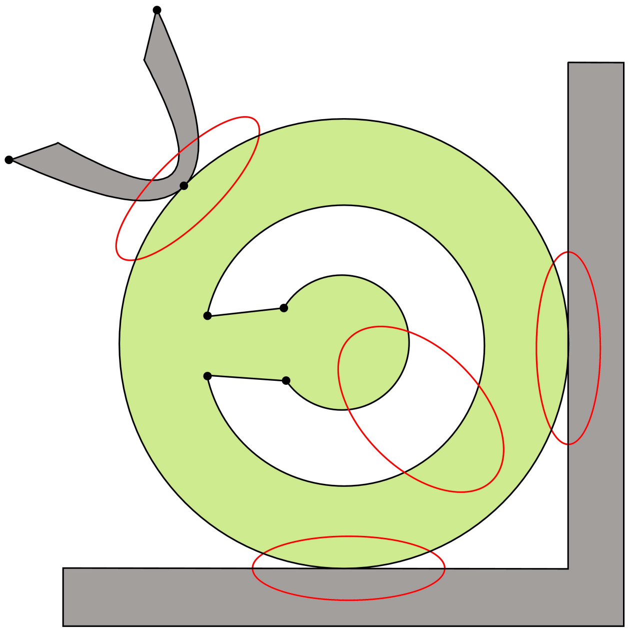
$$\Downarrow$$

N_c sous-problèmes de 6 équations









Type de traitement :

- problème 2D : nœud-segment
- problème 3D : nœud-facette

- Introduction
- Contact avec frottement
- Schémas d'intégration :
  - problématique
  - schéma classique de Newmark
  - schéma adapté aux problèmes d'impact
- Applications numériques
- Conclusions et perspectives

NEWTON-RAPHSON

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} + (\mathbf{K}_T)_{t+\Delta t}^{i}\,\delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = (\mathbf{F}_{ext})_{t+\Delta t} - (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^{i} + (\mathbf{R}_c)_{t+\Delta t}^{i+1}$$
$$\Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i} + \delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$\Downarrow$ SCHÉMA D'INTÉGRATION $\Downarrow$

$$\widehat{\mathbf{M}}\,{}_{t+\Delta t}^{i+1}\,\delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \widehat{\mathbf{F}}\,{}_{t+\Delta t}^{i+1} + (\mathbf{R}_c)_{t+\Delta t}^{i+1}$$
$$\Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i} + \delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

- schéma explicite (différences centrées ...)
  - dynamique rapide
  - calcul de crash
  - PAM-CRASH, RADIOSS

- schéma implicite (Newmark, Houbold, HHT ...)
  - vérifie l'équilibre à chaque pas de temps
  - inconditionnellement stable sans contact
  - ANSYS,ABAQUS,...

Hypothèses de départ :

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t\left[(1-\alpha)\,\ddot{\mathbf{U}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\right]\\ \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{U}_t + \Delta t\dot{\mathbf{U}}_t + (\Delta t)^2\left[\left(\tfrac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\mathbf{U}}_t + \beta\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\right]\end{aligned}}$$

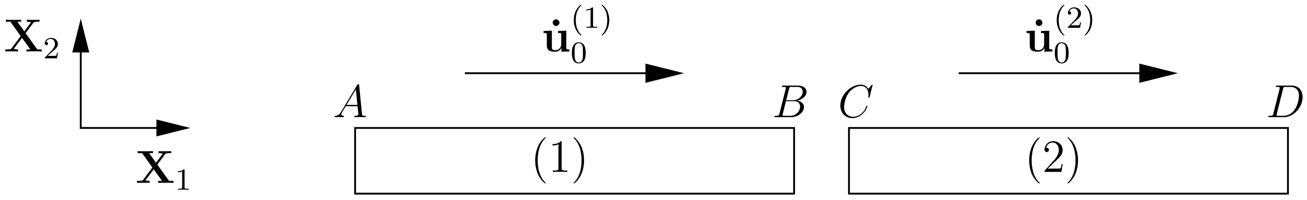
Inconditionnellement stable (sans contact) pour :

$$\boxed{\alpha \geq 0,5 \quad \text{et} \quad \beta \geq (2\alpha+1)^2/16}$$

Couples de paramètres classiques :

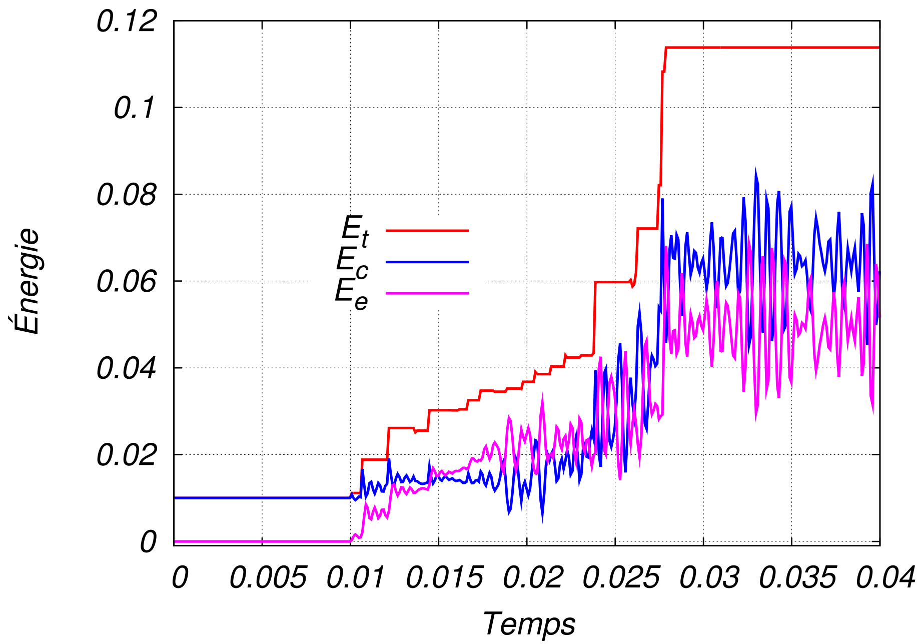
α	β	à l'intérieur de Δt
$0,5$	$0,25$	hypothèse de l'accélération constante (règle du trapèze)
$0,5$	$\dfrac{1}{6}$	hypothèse de l'accélération linéaire

Test 1 : impact longitudinal (Hu 1997)

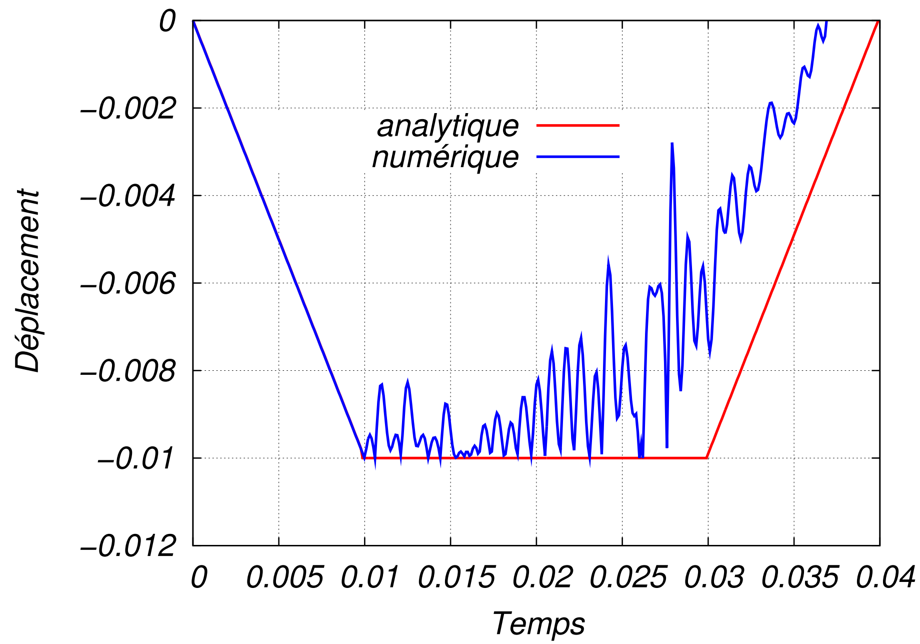


type de matériau	Kirchhoff-Saint Venant
longueur	$L = 10$
module de Young	$E = 1000$
masse volumique	$\rho = 0,001$
vitesse initiale	$\dot{u}_0^{(1)} = -\dot{u}_0^{(2)} = (1,0;0,0)$
durée totale	$T = 0,04$
pas de temps	$\Delta t = 10^{-5}$
maillage	20 éléments $Q4$ par barre

Impact longitudinal ($\alpha = 0,5$ et $\beta = 0,25$)



Évolution de l'énergie



Déplacement du point C

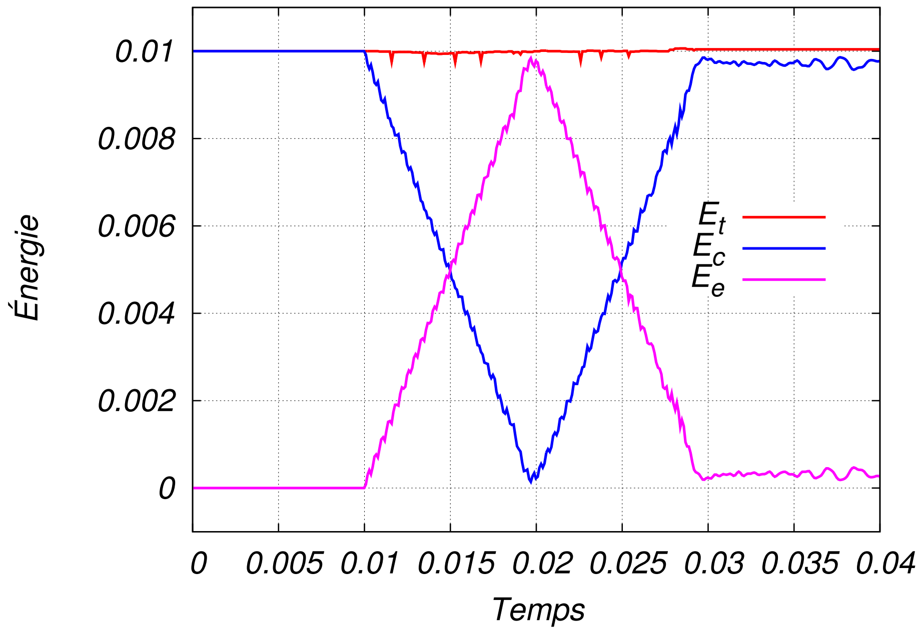
$$\Downarrow$$

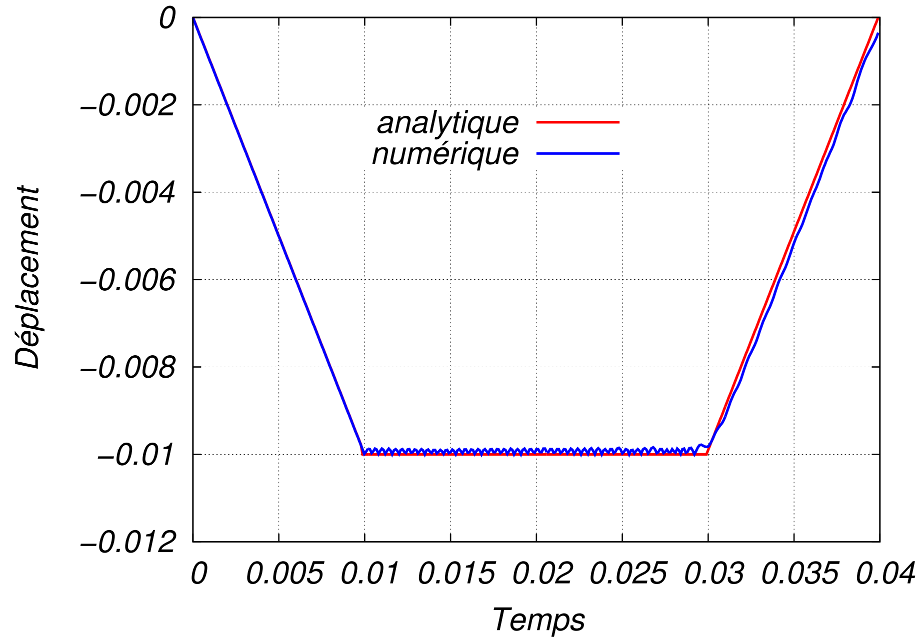
accroissement anormal de l'énergie totale

oscillations du point de contact

divergence du calcul

Impact longitudinal ($\alpha = 0,5$ et $\beta = 0,5$)





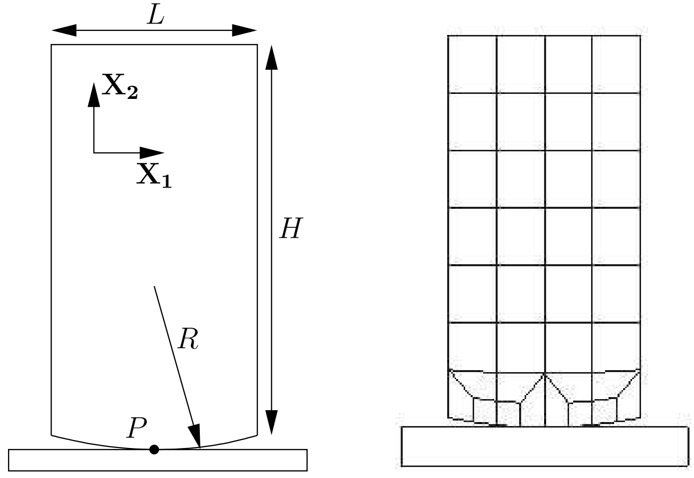
$$\Downarrow$$

introduction de dissipation numérique : stabilisation du calcul

réduction des oscillations du point de contact

amélioration global du résultat

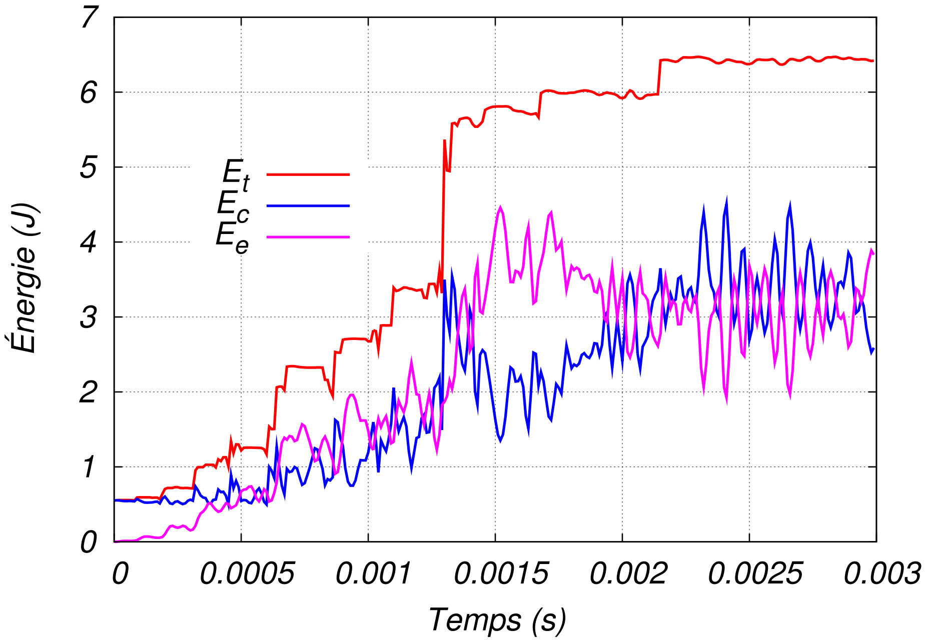
Test 2 : impact oblique (Kwak 1992)

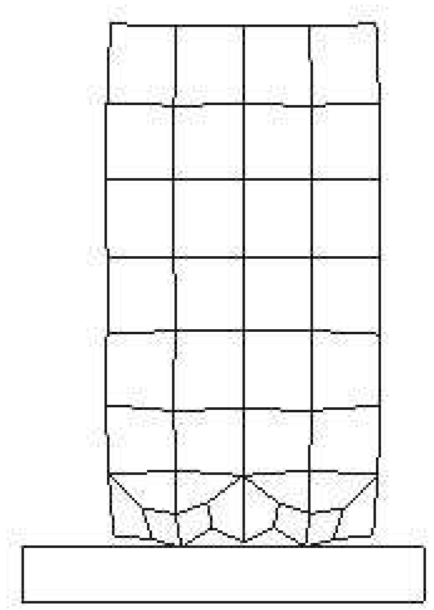


type de matériau	Kirchhoff-Saint Venant
module de Young	$E = 10^7$ Pa
masse volumique	$\rho = 1000$ kg/m^3
vitesse initiale	$\dot{u}_0 = (3,0;-5,0)$
durée totale	$T = 0,003$ s
pas de temps	$\Delta t = 10^{-5}$ s

Impact oblique ($\alpha = 0, 5$ et $\beta = 0, 25$)

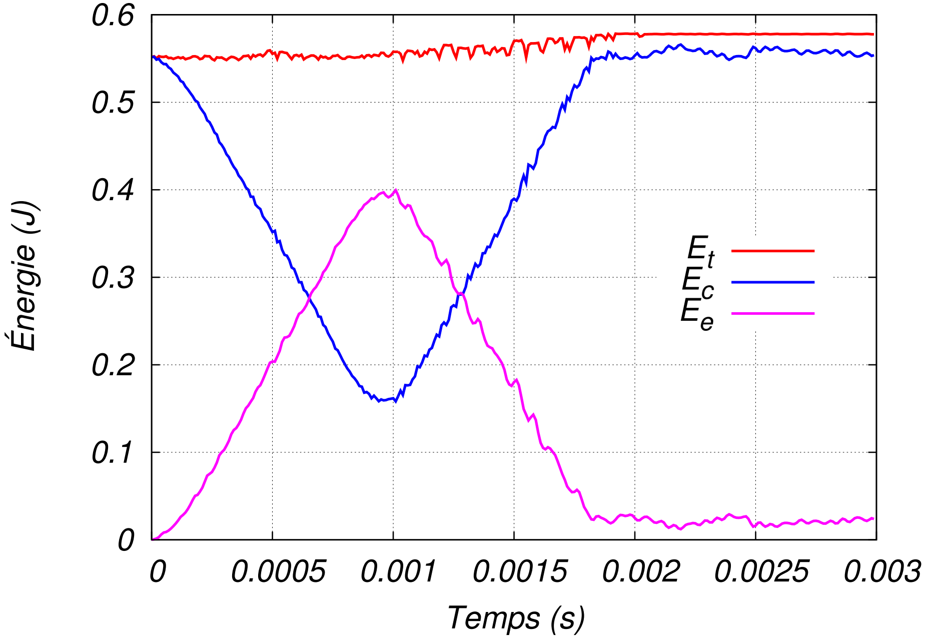
Animation

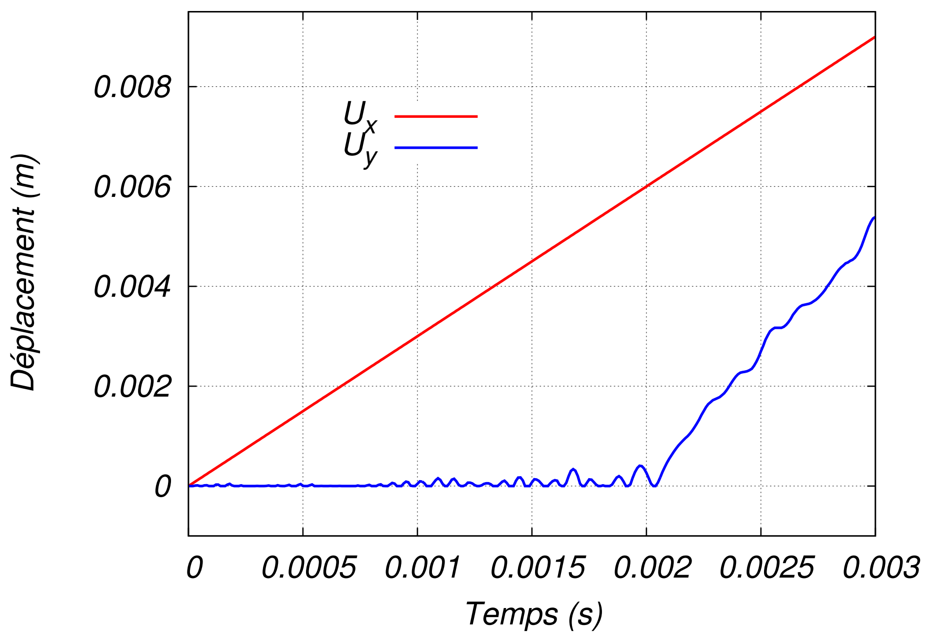




Impact oblique ($\alpha = 0,5$ et $\beta = 0,5$)

Animation





$\Downarrow$

dissipation numérique insuffisante

oscillations résiduelles du point P

Spécificité des chocs :

vitesse discontinue au moment du choc

Idée directrice :

stabiliser le calcul en maîtrisant l’énergie mécanique

axes de recherche :

$\Rightarrow$ introduire de la dissipation numérique

$\Rightarrow$ introduire un terme correctif (Laursen, Armero)

$\Rightarrow$ adapter des schémas différents (Hauret, Barboteu, Jean)

$$\Downarrow$$

schéma du premier ordre (θ-*méthode*, Jean et Simo)

Formulation intégrale :

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M} d\dot{\mathbf{U}} + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}\, dt + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{int}\, dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext}\, dt + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c\, dt$$

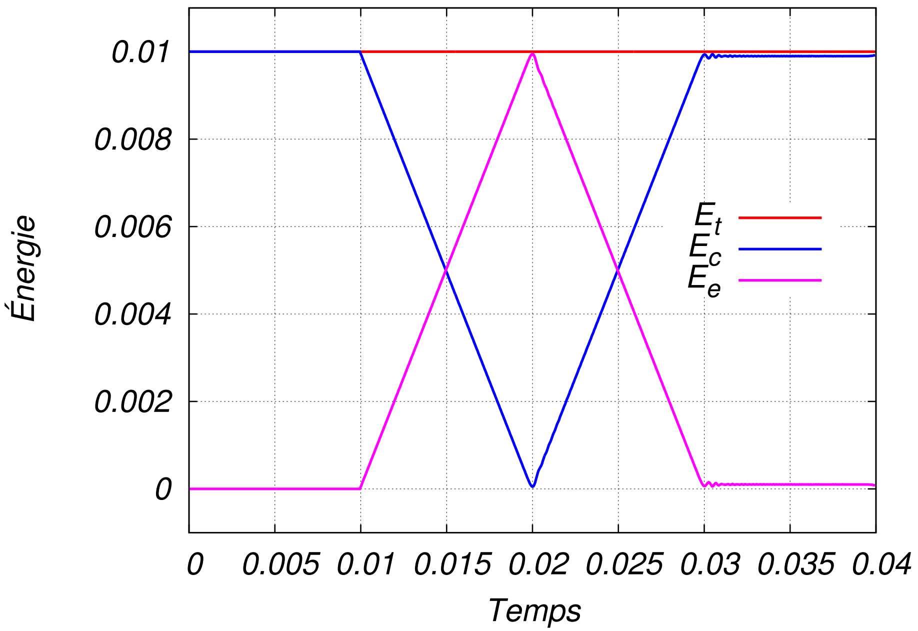
θ***-méthode*** **du premier ordre :**

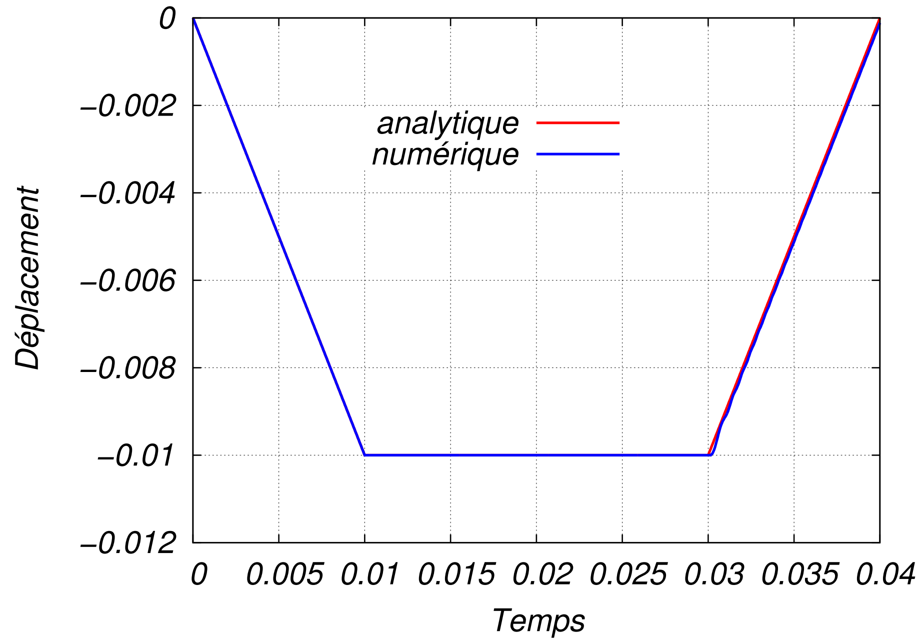
$$\frac{\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t}{\Delta t} = (1-\theta)\,\dot{\mathbf{U}}_t + \theta\,\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad \text{où} \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Approximations appliquées :

- ❒ $\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M}\, d\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}\left(\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}_t\right)$
- ❒ $\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}\, dt = \Delta t\big((1-\xi)\,\mathbf{F}_t + \xi\,\mathbf{F}_{t+\Delta t}\big)$ où $0 \leq \xi \leq 1$
- ❒ $\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c\, dt = \Delta t\,(\mathbf{R}_c)_{t+\Delta t}$

Impact longitudinal (1/2)



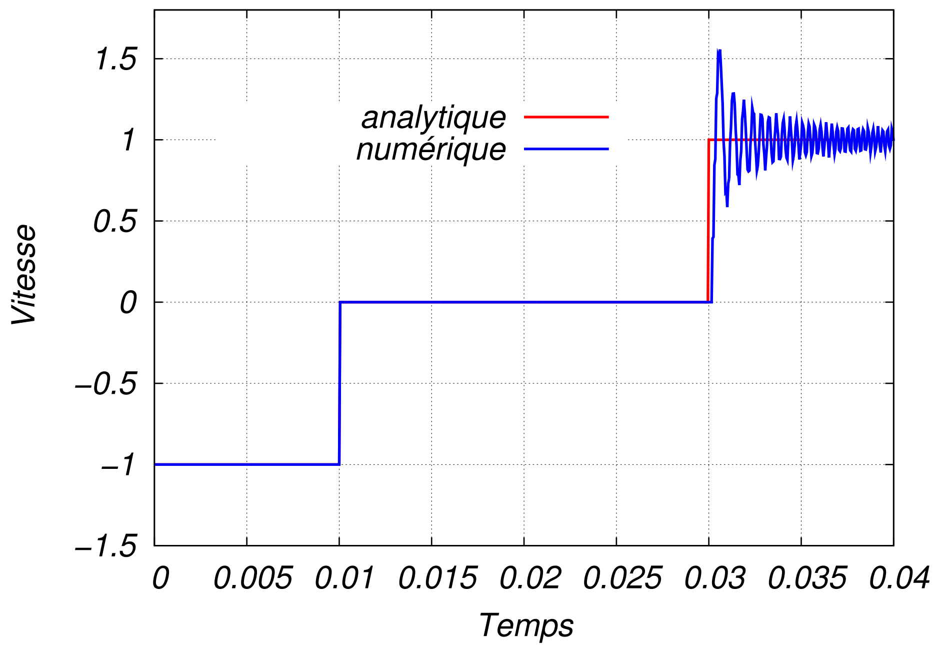


$\Downarrow$

bonne corrélation du déplacement

conservation de l'énergie mécanique

Impact longitudinal (2/2)



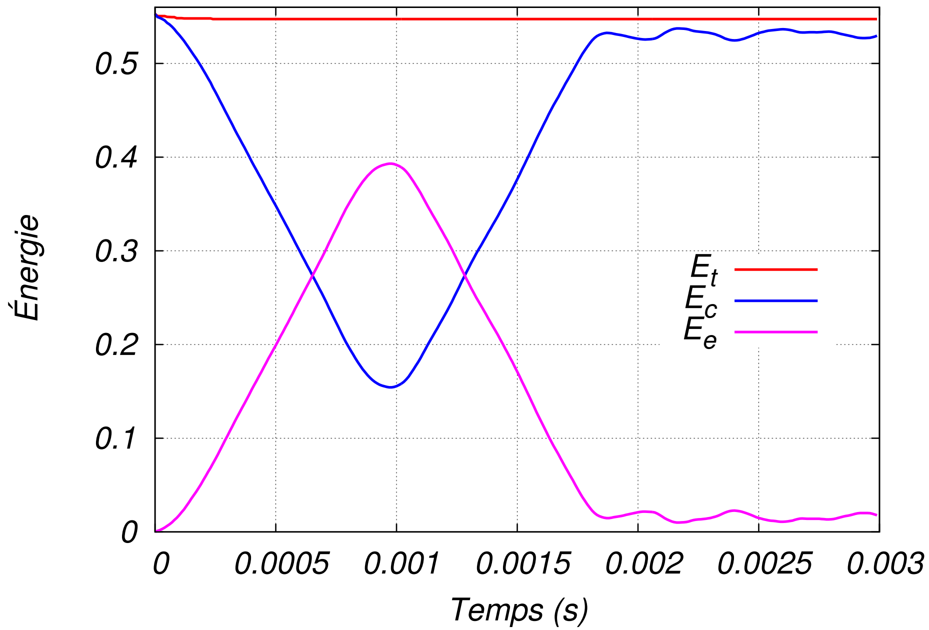
$\Downarrow$

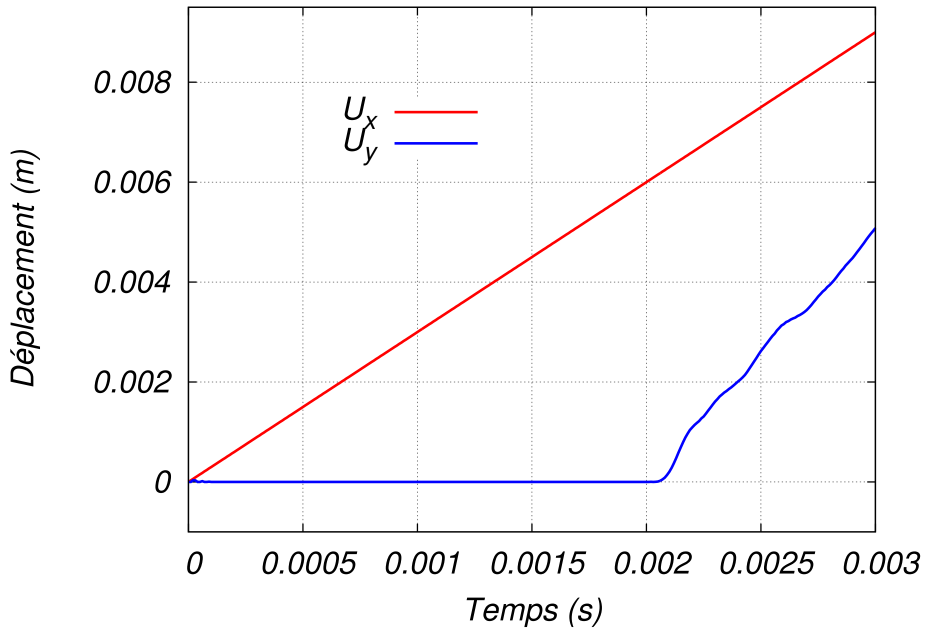
prise en compte des vibrations après impact

pas d’oscillation de la force de contact

Impact oblique sans frottement

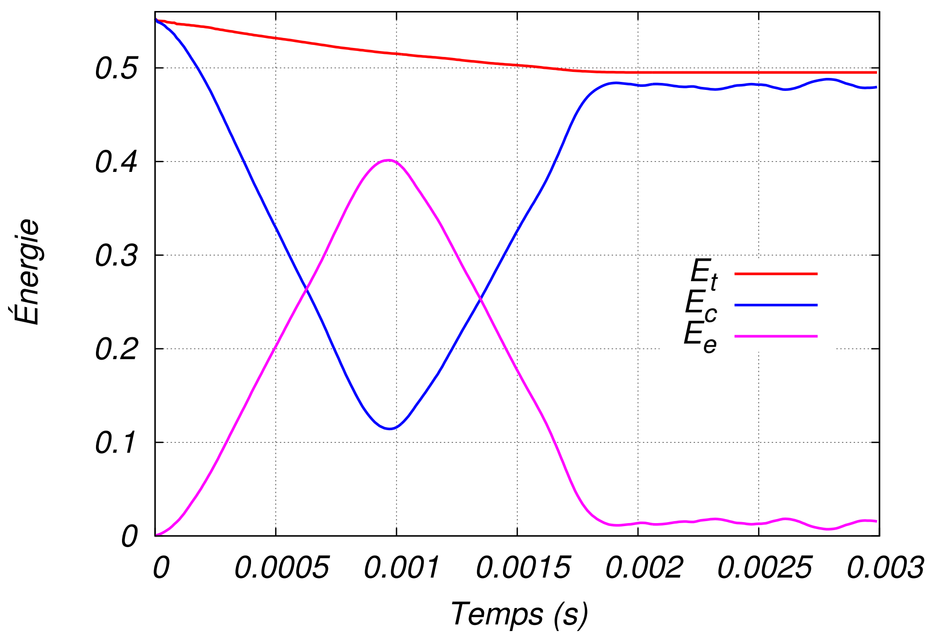
Animation

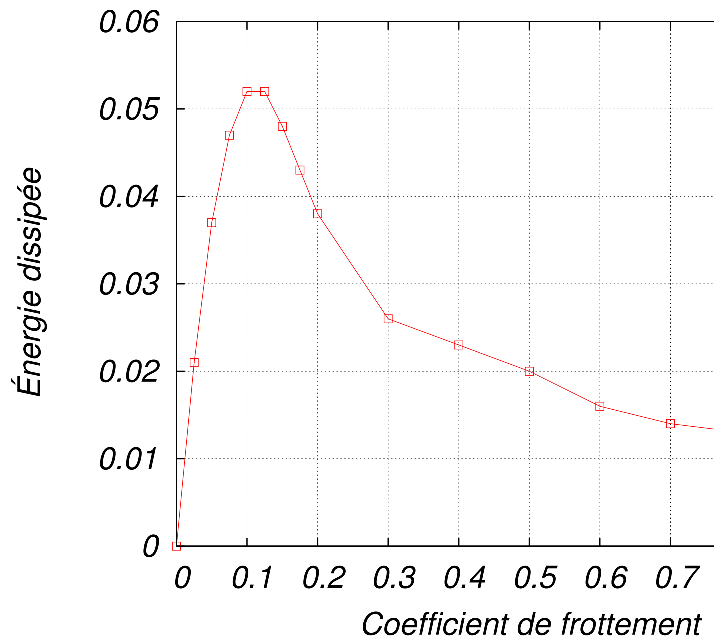




Impact oblique avec frottement ($\mu = 0, 2$)

Animation



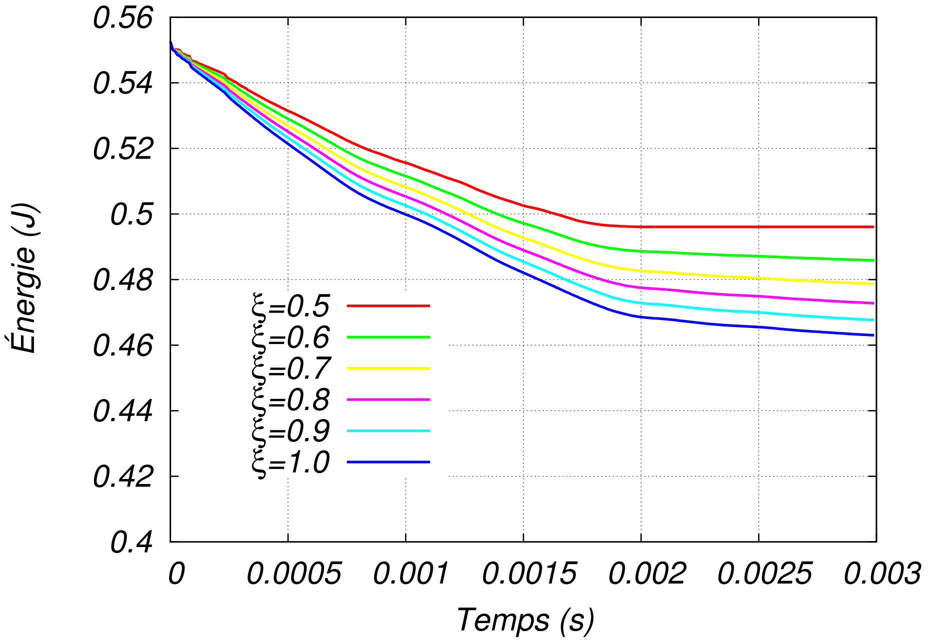


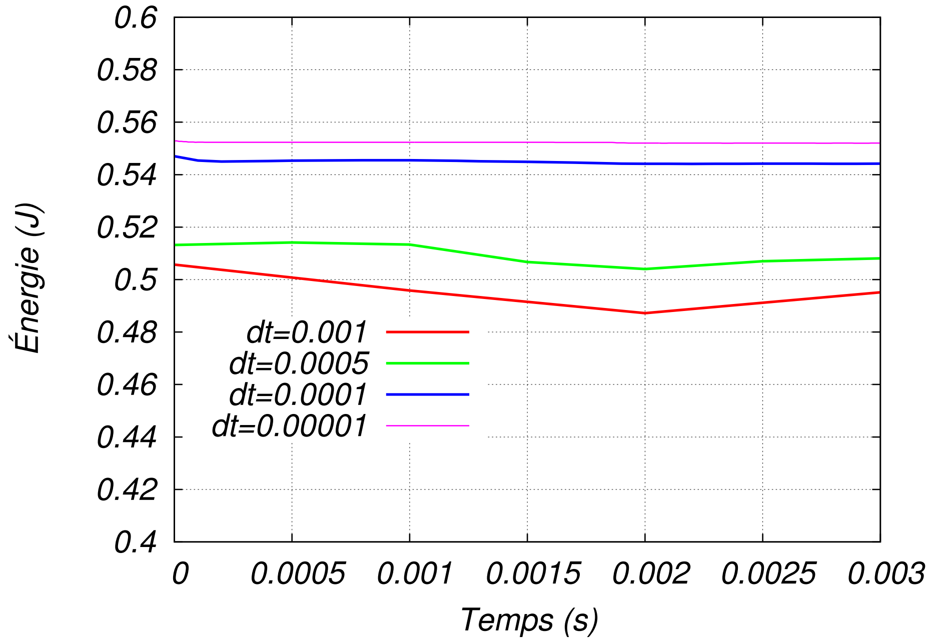
$\Downarrow$

détermination quantitative de l'énergie dissipée

influence de μ

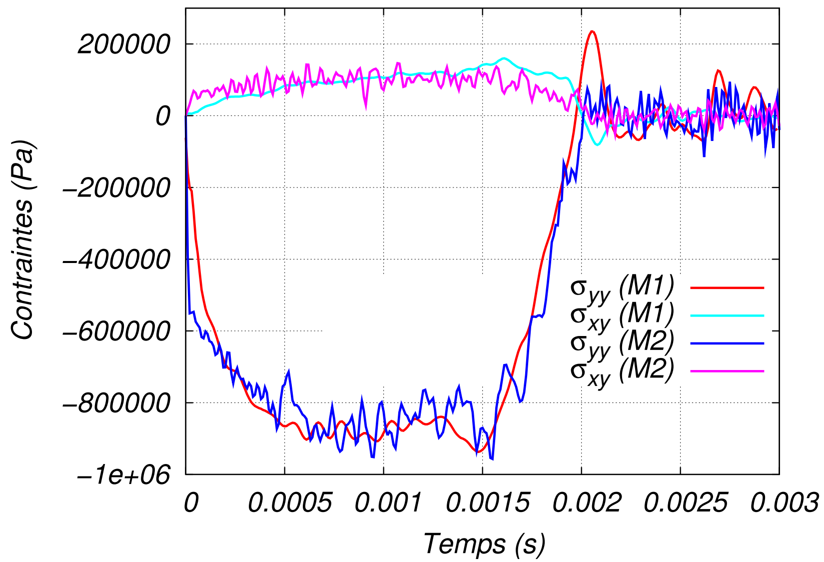
Influence des paramètres du schéma

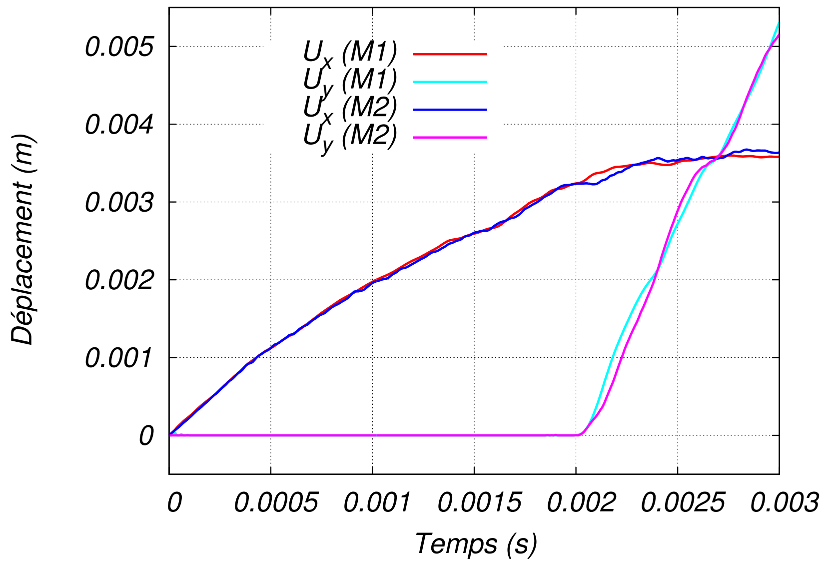


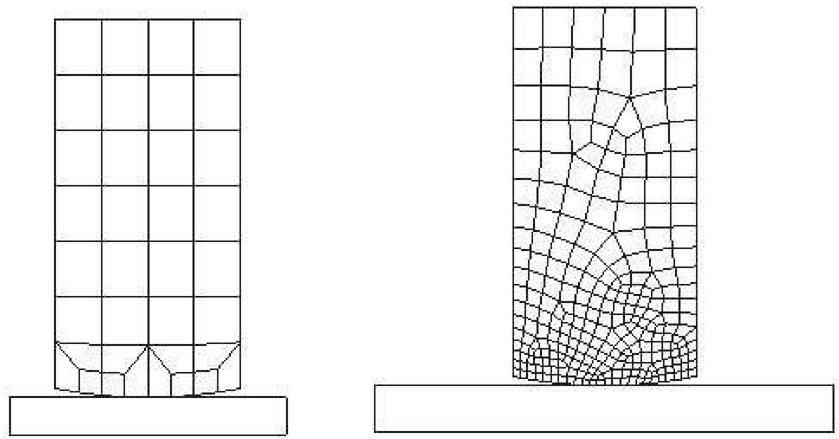


$$\Downarrow$$

$\theta = \xi = 0,5$ couple "optimal"







$M1$ $M2$

maillage $M1$	37 éléments
maillage $M2$	259 éléments

- ❐ Introduction
- ❐ Contact avec frottement
- ❐ Schémas d'intégration
- ❐ Applications numériques :
  - présentation de FER/Impact
  - impact déformable-rigide en 2D
  - impact déformable-déformable en 3D
  - application aux problèmes quasi-statiques
- ❐ Conclusions et perspectives

FER/Impact

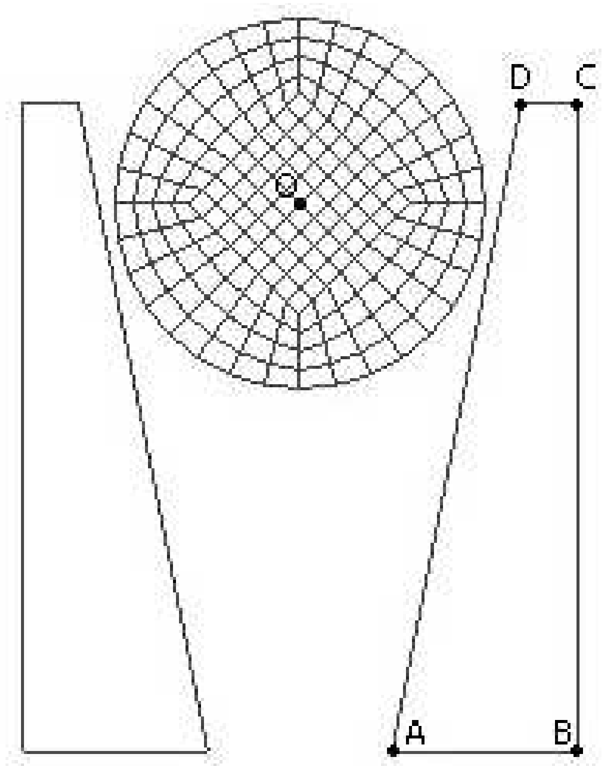
Description : code de calcul par élément finis pour les problèmes d'impact et de choc

Domaines d'application :

- ❒ grandes déformations (formulation lagrangienne totale)
- ❒ matériau hyperélastique (Kirchhoff-Saint Venant, Néo-Hookéen, Mooney-Rivlin et Baltz-Ko)
- ❒ problème 2D (T3 et Q4) et 3D (T4 et H8)

Programmation et méthodes numériques :

- ❒ C++ orientée objet (environ 4000 lignes)
- ❒ stockage des matrices type "ligne de ciel"
- ❒ résolution système linéaire : pivot de Gauss



type de matériau	Blatz-Ko
module de cisaillement	$G = 3$ MPa
masse volumique	$\rho = 700$ kg/m^3
vitesse initiale	$\dot{u}_0 = -30,0$ m/s
durée totale	$T = 3\ 10^{-3}$ s
pas de temps	$\Delta t = 10^{-5}$ s
paramètres de l'algorithme	$\xi = \theta = 0,5$

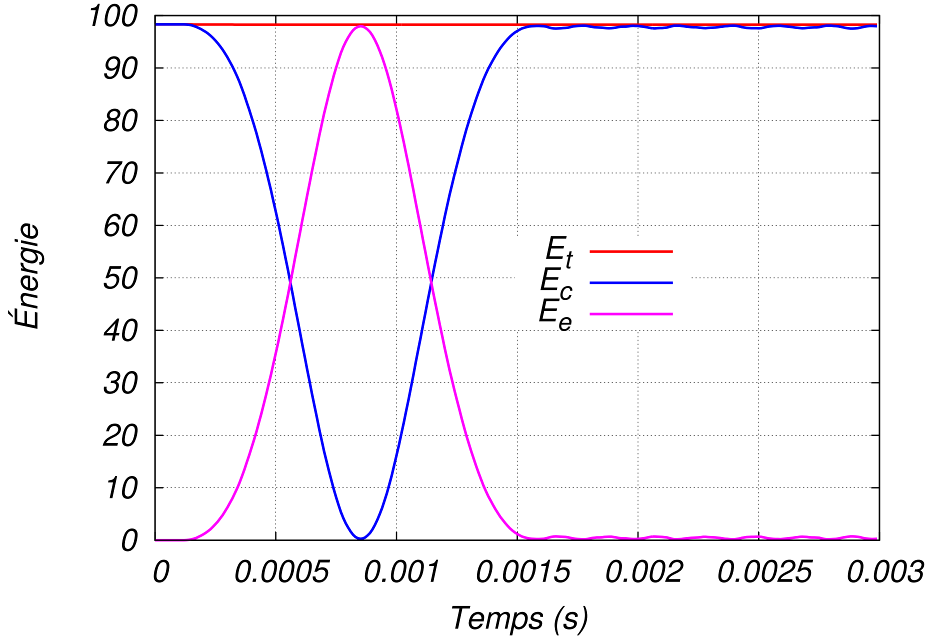
cas A	$\mu = 0,0$
cas B	$\mu = 0,2$
cas C	$\mu = 0,4$

Modèle de Blatz-Ko :

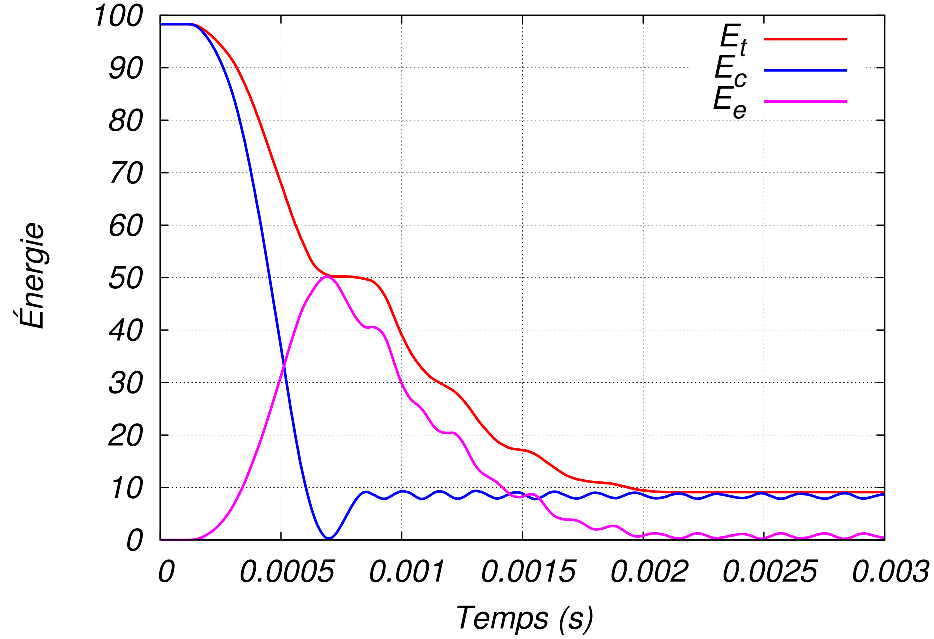
$$W = \frac{G}{2}\Big(\frac{I_1}{I_2} + 2\sqrt{I_3} - 5\Big)$$

Évolution de l'énergie mécanique

$\mu = 0,0$

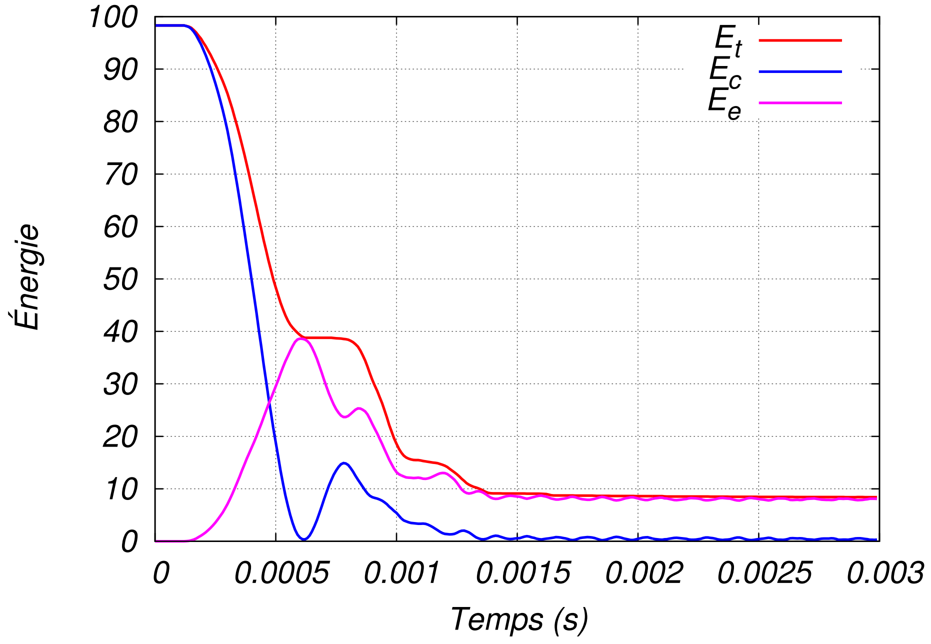


$\mu = 0,2$

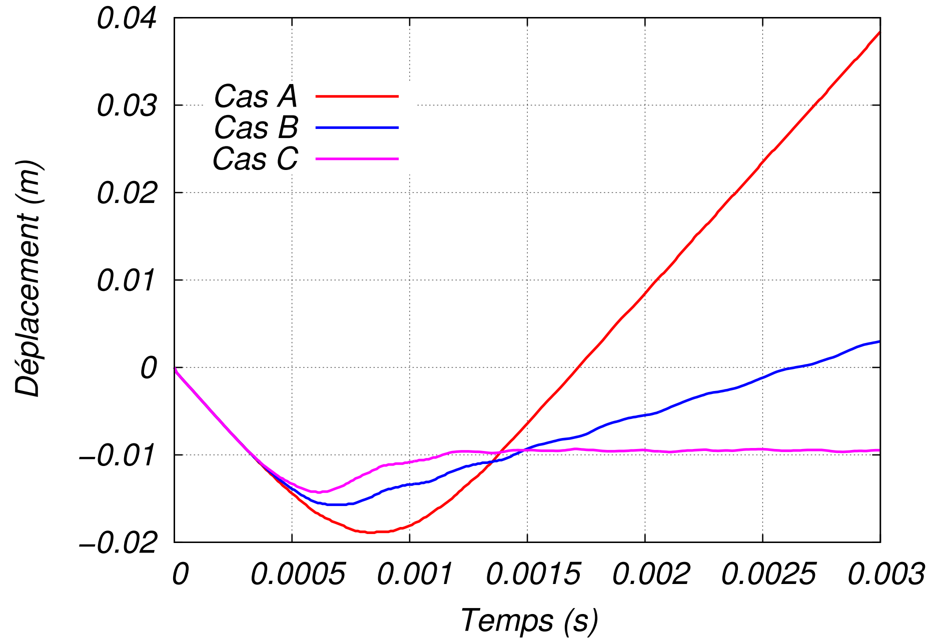


Évolution de l'énergie et déplacement vertical

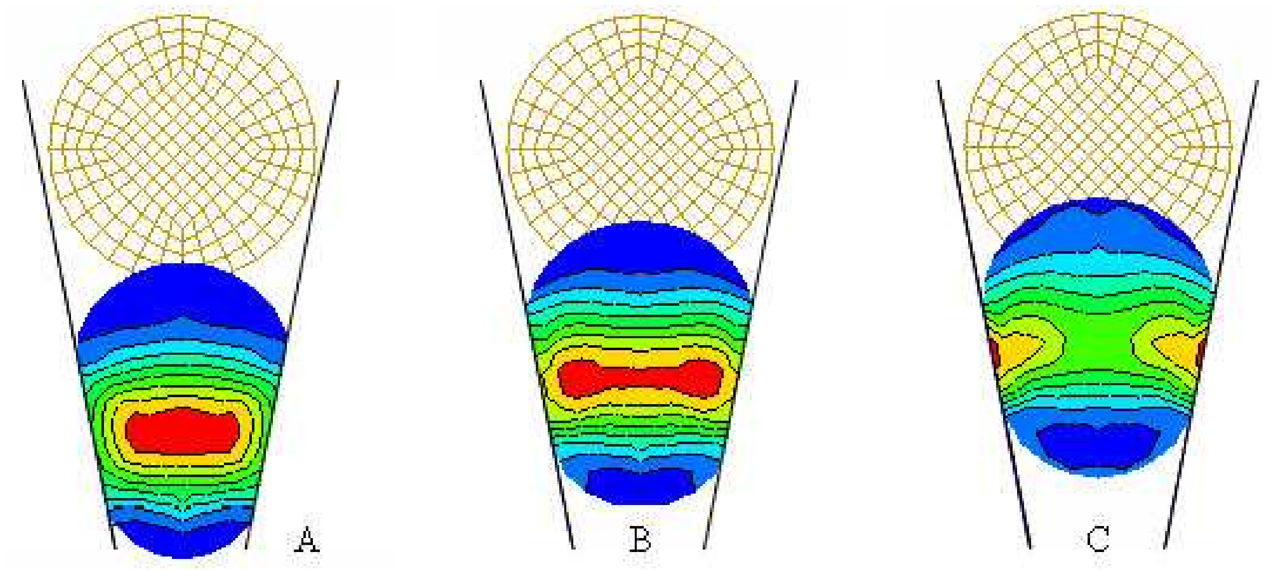
$\mu = 0,4$



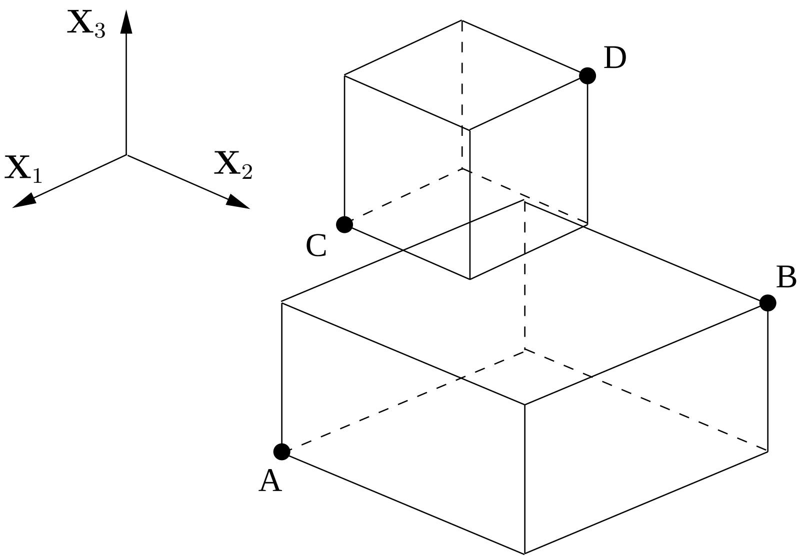
Déplacement de O



Influence des forces de frottement



Cas	temps (ms)	σ_{max} (MPa)	temps CPU (s)
A : μ=0,0	0,87	8,192	62
B : μ=0,2	0,70	4,523	77
C : μ=0,4	0,61	4,396	83

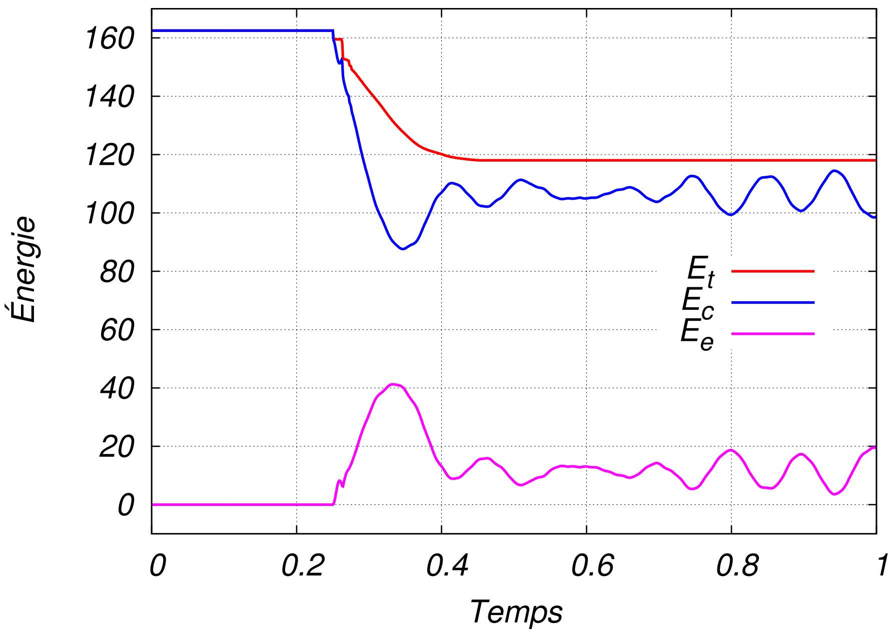


type de matériau	Kirschhoff-Saint Venant
module de Young	$E = 36000$ MPa
coefficient de Poisson	$\nu = 0,2$
masse volumique	$\rho = 100$ kg/m^3
vitesse initiale	$(0,0;1,5;-1,0)$
durée totale	$T = 3\ 10^{-3}$ s
pas de temps	$\Delta t = 10^{-5}$ s
paramètres de l'algorithme	$\xi = \theta = 0,5$

cas 1	$\mu = 0,2$
cas 2	$\mu = 0,8$

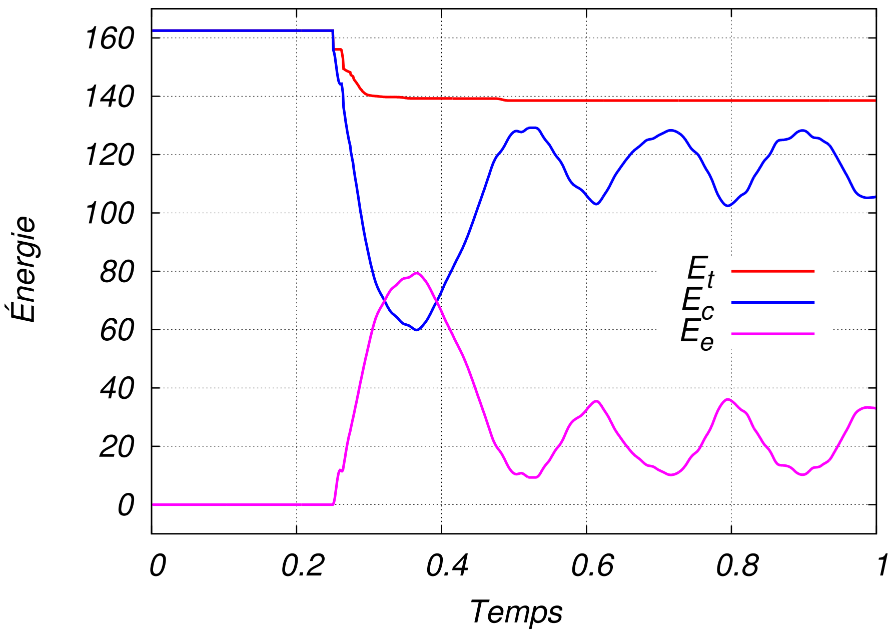
Dissipation d'énergie par frottement

$\mu = 0,2$



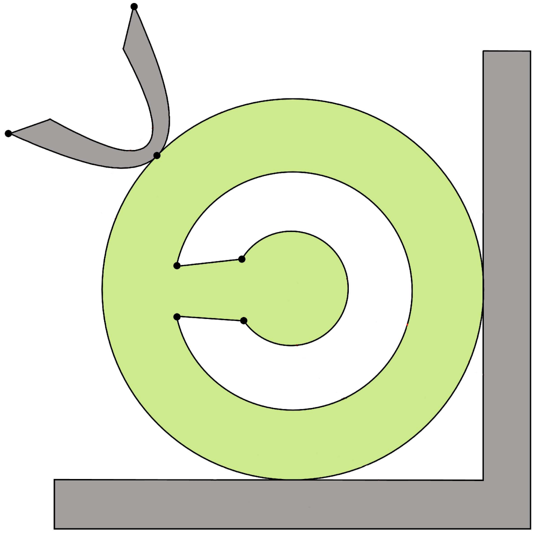
Animation

$\mu = 0,8$



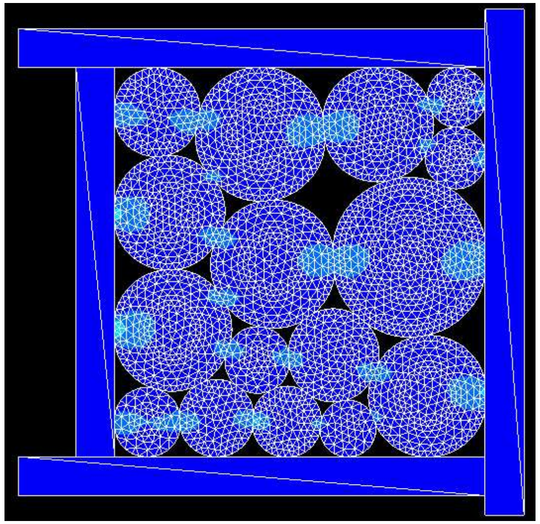
Animation

Auto-contact



Animation

Multi-corps déformables



Animation

- ❒ Introduction
- ❒ Contact avec frottement
- ❒ Schéma d'intégration
- ❒ Applications numériques
- ❒ Conclusions et perspectives

Extension de la méthode du bi-potentiel à l'étude des problèmes d'impact (code de calcul FER/Impact).

Conservation des propriétés de la méthode du bi-potentiel :

- aucune régularisation de lois de contact
- vérification exacte des conditions de contact
- aucune modification du système global
- résolution efficace dans un système réduit

Utilisation d'un schéma d'intégration adapté :

- pas de terme d'accélération dans le calcul
- conservation quasi-parfaite de l'énergie en l'absence de frottement
- étude quantitative de l'énergie dissipée

Mise en évidence d'une relation non-monotone entre μ et la quantité d'énergie dissipée

Développement du domaine d’application

prise en compte du contact :

- ❒ autre modèle de frottement (frottement orthotrope, coefficient de frottement variable ...)
- ❒ méthode de résolution (confrontation de résultats)

schémas d’intégration :

- ❒ étude théorique du schéma proposé
- ❒ implanter et tester de nouveaux schémas

comportement matériau non-réversible :

- ❒ plasticité, usure, rupture

couplage frottement/thermique :

- ❒ lier la dissipation d’énergie mécanique aux phénomènes thermiques

Amélioration des performances de calcul

algorithme de détection du contact :

améliorer la stratégie de détection du contact

parallélisation du code de calcul :

- ❒ niveau 1 : détection du contact
- ❒ niveau 2 : résolution du contact
- ❒ niveau 3 : résolution des systèmes linéaires

optimisation de la bibliothèque d'objets C++ :

- ❒ utilisation du formalisme "templates"