

Du transport de particules à l'optimisation globale sous contrainte d'EDP

Sous titre: *une approche des mathématiques en vue de ses applications industrielles et médicales*

Laurent DUMAS

Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC

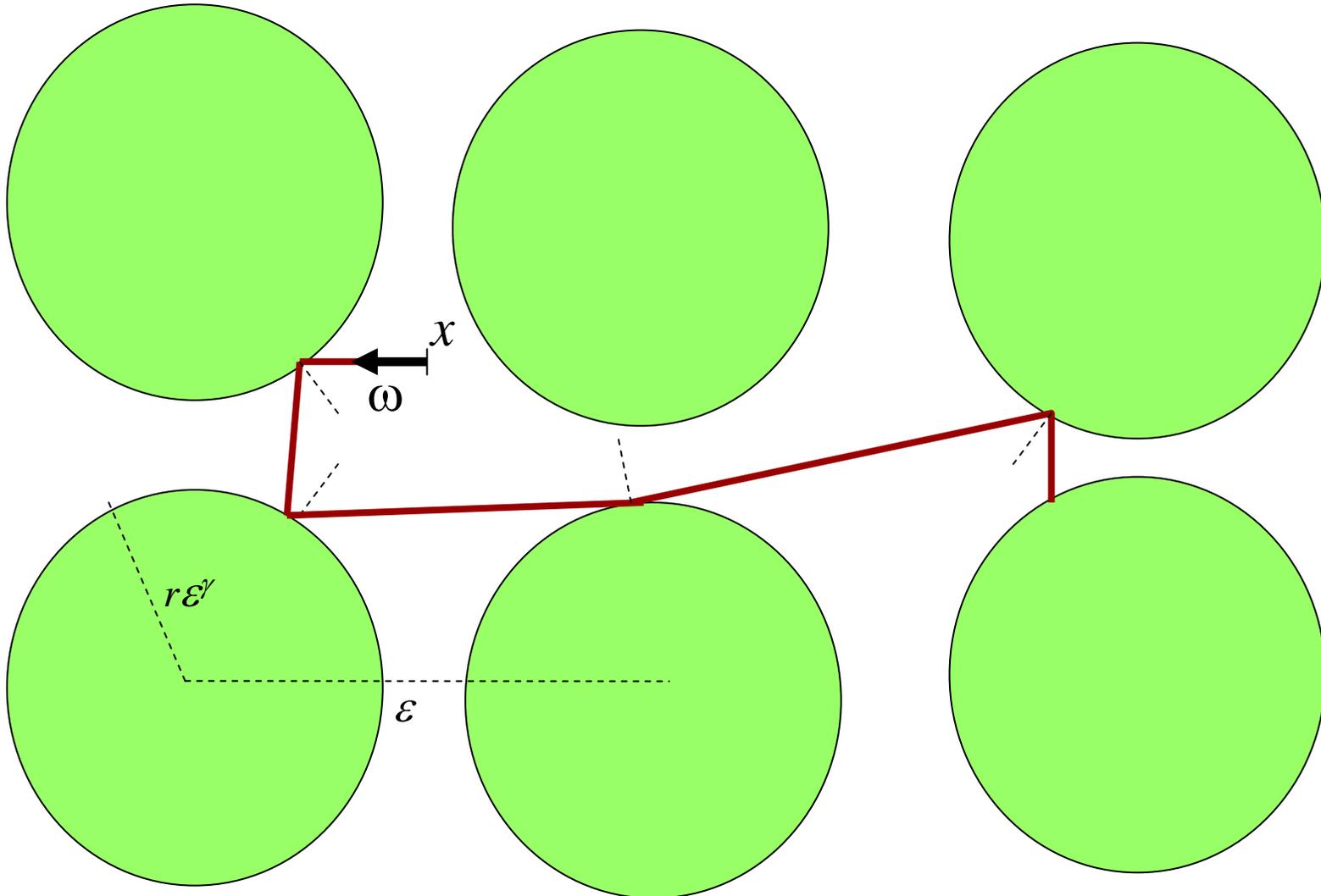
soutenance HDR, 3 Décembre 2008

- 1. Introduction. Travaux initiaux**
- 2. Problématiques industrielles et médicales**
- 3. Nouvelles méthodes d'optimisation globale**
- 4. Deux exemples d'applications médicales**
- 5. Perspectives**

1. Introduction. Travaux initiaux

1. Introduction. Travaux initiaux

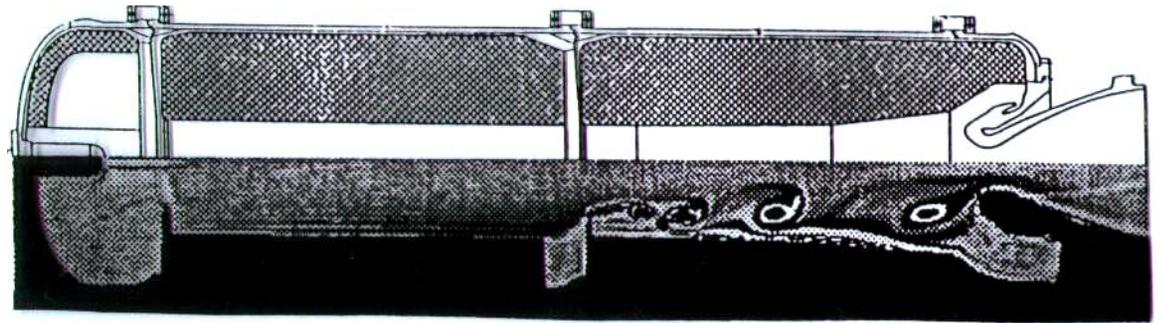
- Collaborations: F. Golse; C. Bardos, H.S. Dumas
- Références: [Art1]: *J. of Stat. Phys* 96, [Art2]: *JSP* 96, [Art3]: *JSP* 97, [Art4]: *SIAM J.Num. An* 00



2. Problématiques industrielles et médicales

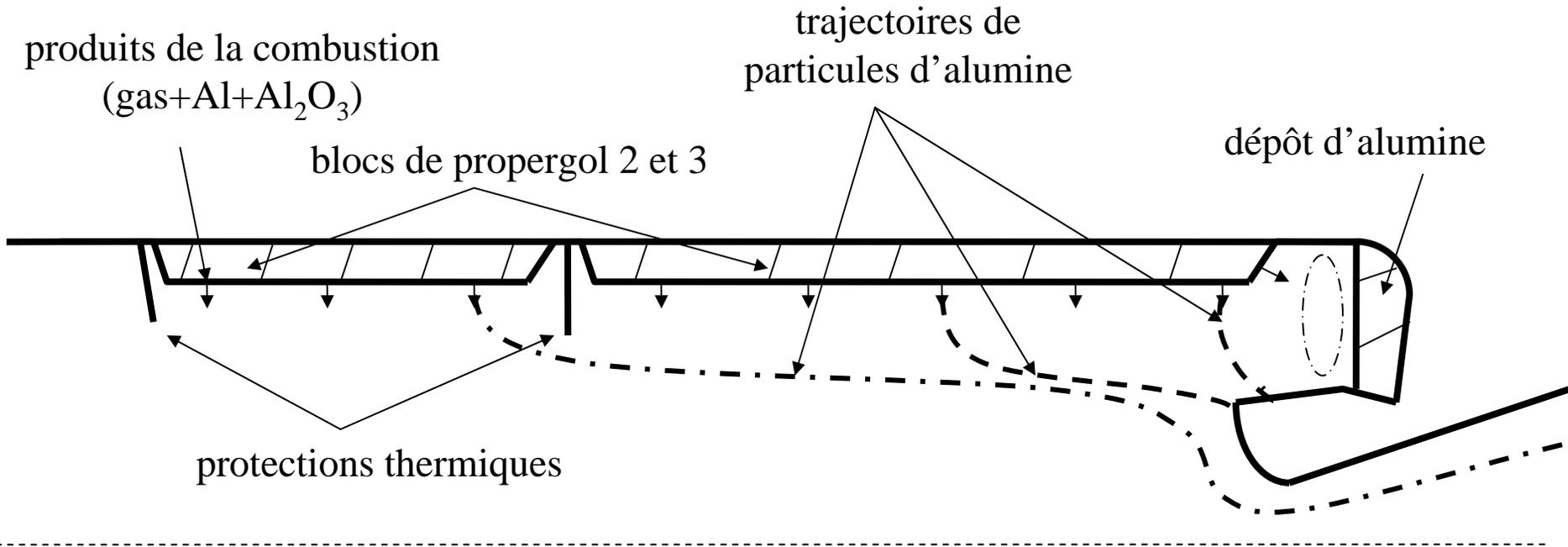
2.1 Calcul du dépôt d'alumine dans les boosters d'Ariane 5

- Collaborations: Aérospatiale, département écoulements propulsifs
- Références: [Proc1]: AIAA 95, [Proc2]: AIAA 97



- Objectif: *Estimer le dépôt d'alumine dans le fond arrière du booster d'Ariane 5 en fin de combustion.*

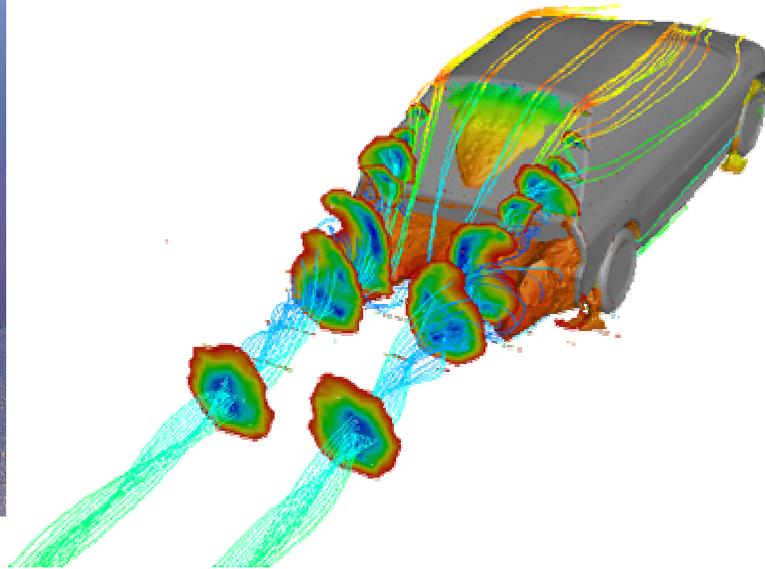
2.1 Calcul du dépôt d'alumine dans les boosters d'Ariane 5



- Outils: calcul de l'écoulement turbulent et suivi lagrangien avec dispersion turbulente
- Résultats: estimation réaliste du montant du dépôt alumine (2 tonnes environ)

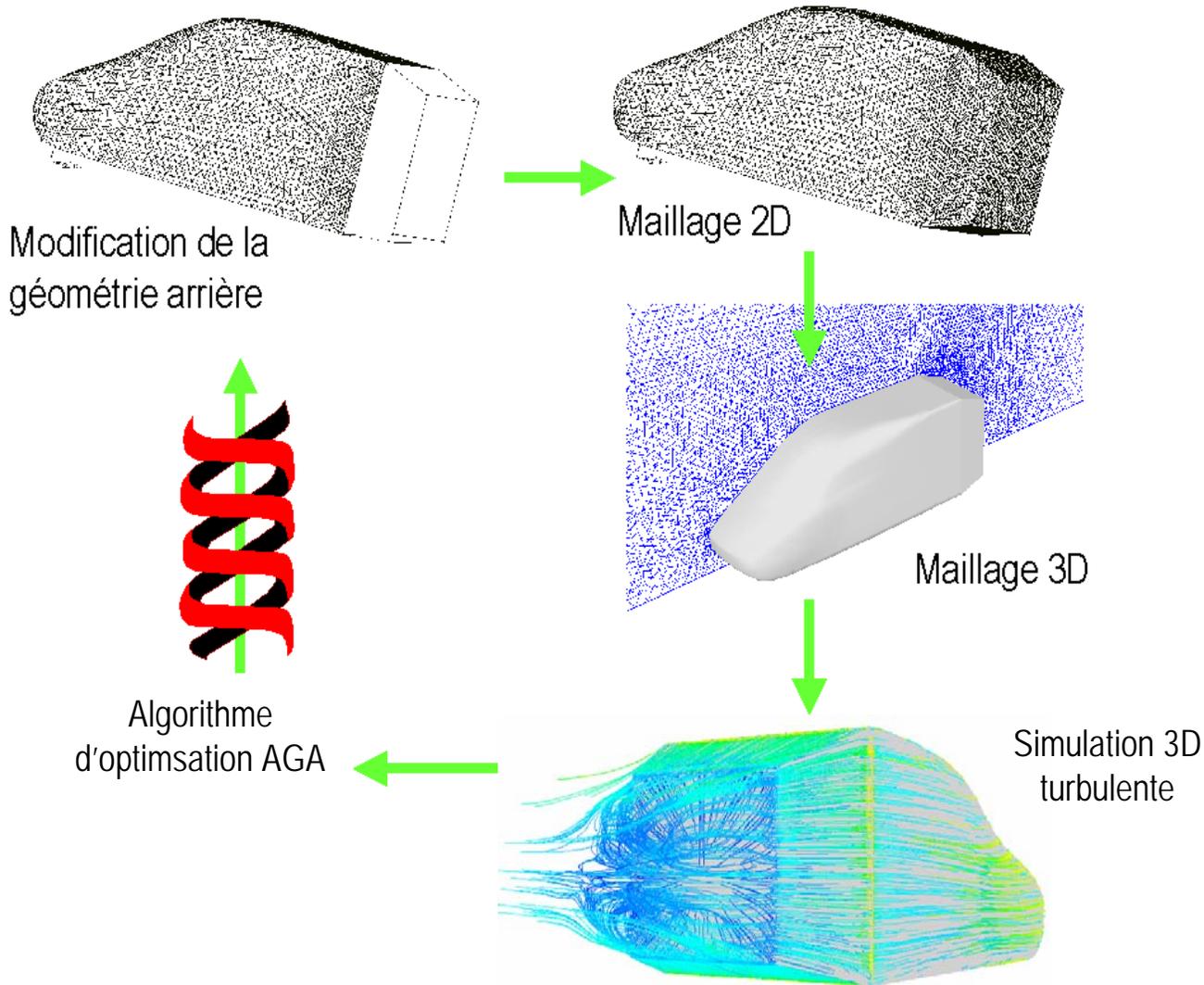
2.2 Optimisation du Cx d'une automobile

- Collaborations: V. Herbert, F. Muyl (PSA)
- Références: [Cha1], [Art5]: *Comp.&Fluids* 04, [Art6]: *LNCS* 05, [Art7]: *Méc. & Ind.* 05.

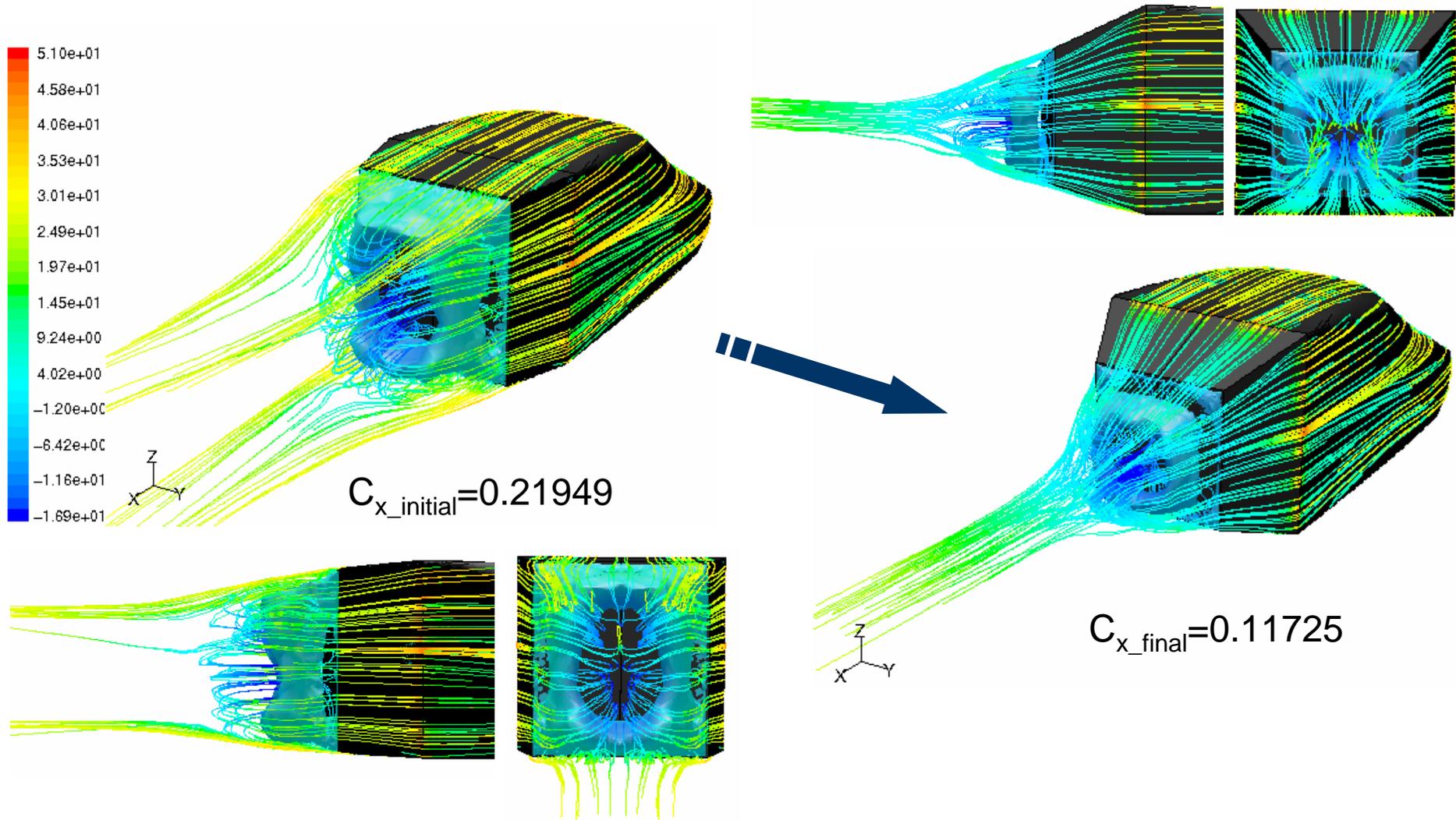


- La traînée aérodynamique d'un véhicule (mesurée par son Cx) est responsable d'une large partie de sa consommation.
- **Objectif**: obtenir la forme arrière optimale d'une automobile simplifiée par un procédé automatique et rapide.

2.2 Optimisation du Cx d'une automobile

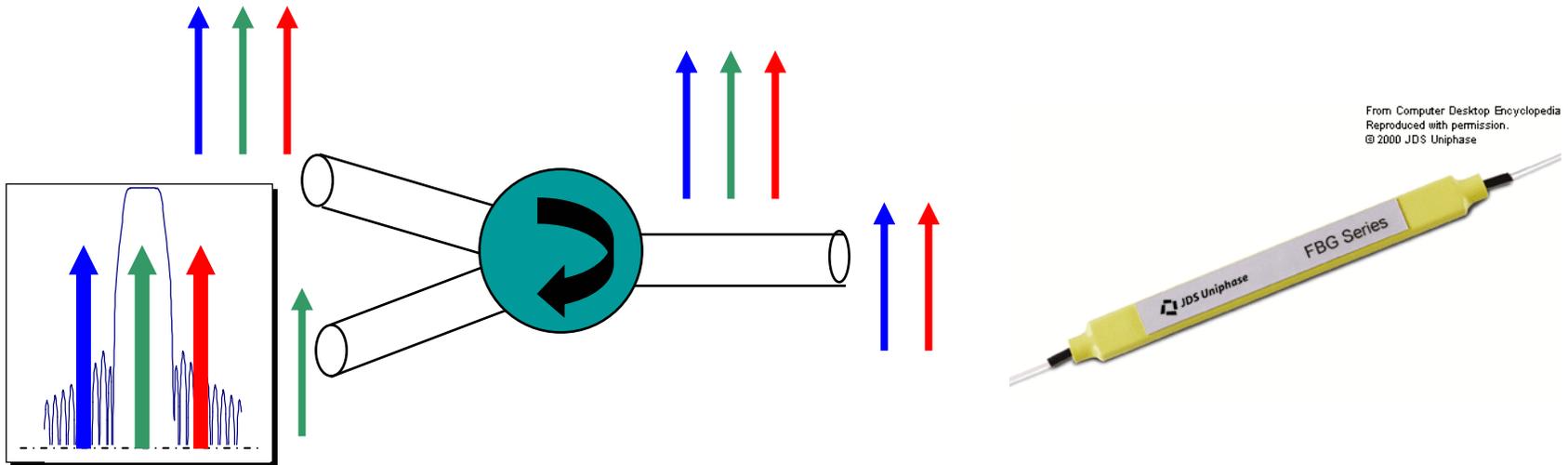


2.2 Optimisation du Cx d'une automobile



2.3 Optimisation des performances d'un FBG

- Collaborations: O Durand (Alcatel), B. Ivorra, B. Mohammadi
- Références: [Art8]: *Num. Meth. & Adv. Appl. 06*, [Art9]: *IJCSE 06*.



- **Principe d'un FBG**: transmettre un grand nombre de canaux (ie longueurs d'onde) sur une seule fibre optique: 32, 64 voire 128 canaux.
- **Objectif**: construire la fonction d'apodisation du FBG se rapprochant d'un FBG idéal.

2.3 Optimisation des performances d'un FBG

- **Modèle mathématique**: b_T, b_R amplitude des 2 modes principaux dans le FBG

$$\frac{db_T(z, \lambda)}{dz} - i\beta b_T(z, \lambda) = \bar{q}(z)b_R(z, \lambda)$$

$$\frac{db_R(z, \lambda)}{dz} + i\beta b_R(z, \lambda) = q(z)b_T(z, \lambda)$$

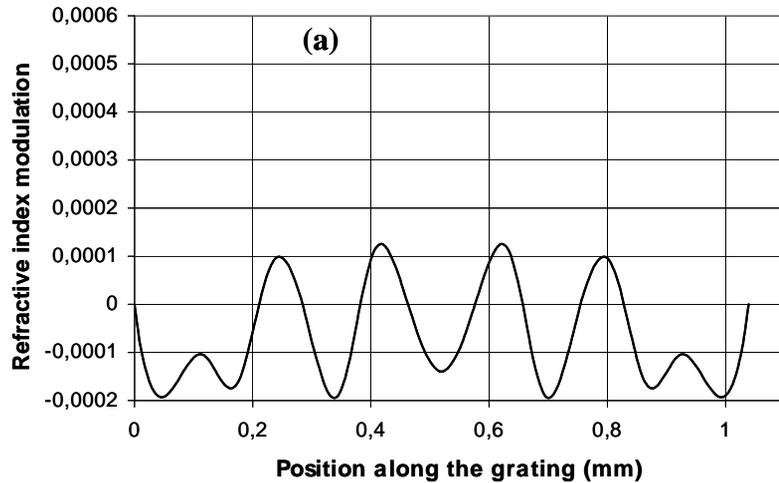
avec les conditions aux limites: $b_T(0, \lambda) = 1$ and $b_R(L, \lambda) = 0$

- **Spectre de réflectivité**: $\rho(\lambda, q) = |b_R(0, \lambda)|^2$

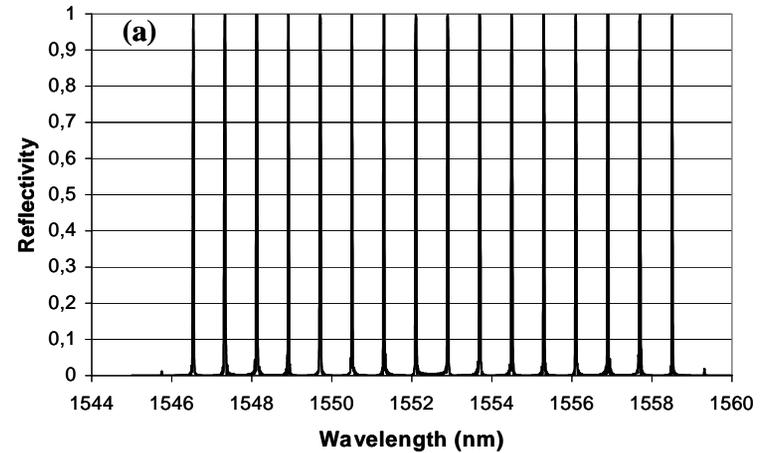
- **Fonction objectif**: $J(q) = \|\rho(q) - \rho_{cible}\|_{L^2(\lambda)}$

2.3 Optimisation des performances d'un FBG

- Exemple de résultat (GA ou SDA) FBG avec un spectre idéal de 16 pics:



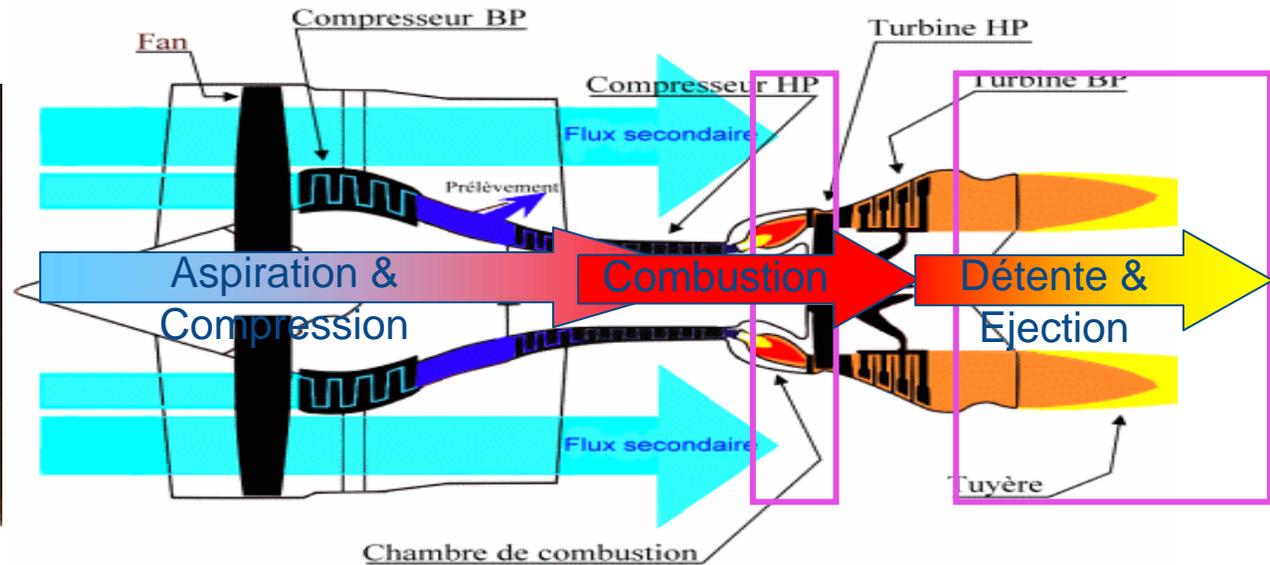
Apodisation optimale



Spectre de réflectivité

2.4 Optimisation des formes des aubes d'un turboréacteur

- Collaborations: B. Druetz, N. Lecerf (Snecma)
- Références: [Cha1], [Art10]: *Journal of Comp. and Applied Maths 08*

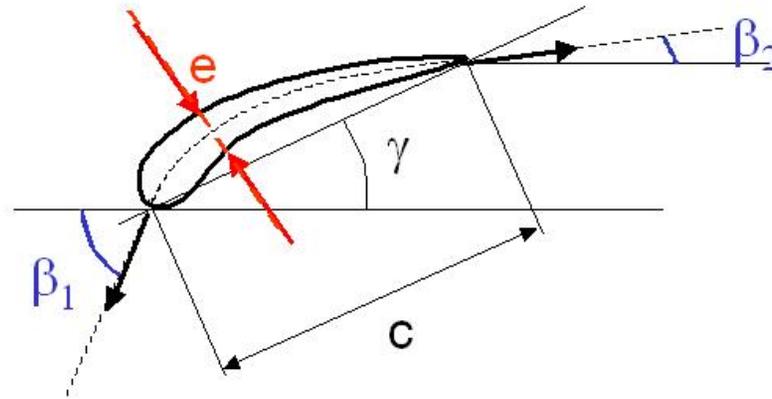
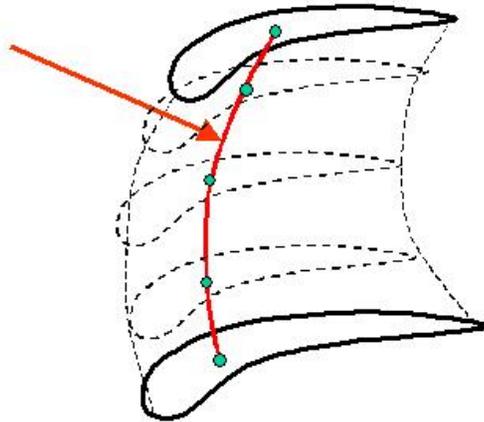


- **Objectif**: *minimiser la contrainte mécanique la plus élevée sur l'aube du compresseur HP, et imposer à toutes les autres de rester inférieures à un seuil.*

2.4 Optimisation des formes des aubes d'un turboréacteur

- **Paramètres**: loi d'empilage et paramètres géométrique d'une coupe 2D de l'aube

Stacking law



- **Résultat obtenu** (algorithme AHM):

Aube initiale
Aube optimisée



(gain de 3% en efficacité par rapport au meilleur design connu)

3. Nouvelles méthodes d'optimisation globale

3.1 Problème d'optimisation

- Le problème général d'optimisation rencontré dans les applications s'écrit:

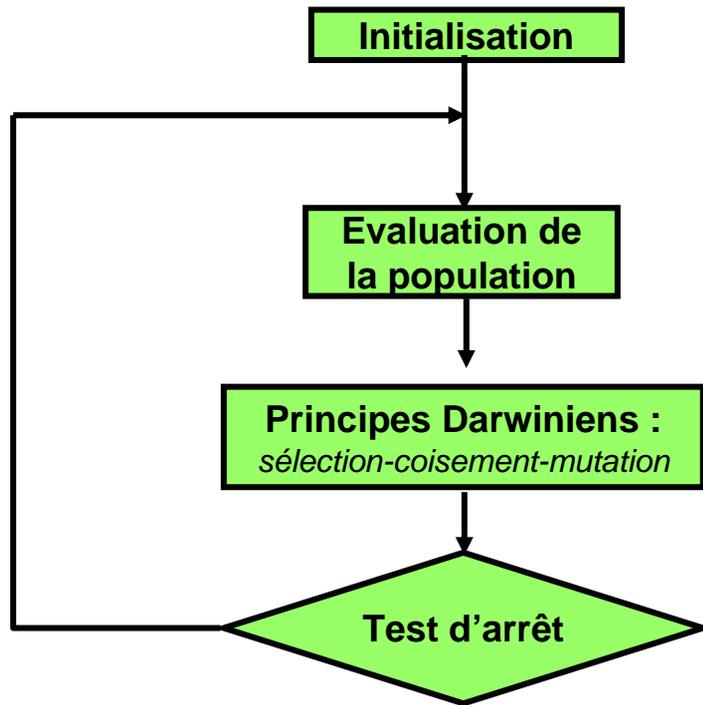
$$x^* = \arg \min \{ J(x) \equiv J(x, W(x)), x \in O \subset \mathbb{R}^N \}$$

- Dans cette expression, $W(x)$ représente des variables auxiliaires, par exemple $(\rho(x), V(x), E(x))$ pour l'optimisation du Cx, satisfaisant une certaine EDO ou EDP, par exemple Navier Stokes, de la forme:

$$E(x, W(x)) = 0$$

- Dans une méthode déterministe usuelle (gradient, Newton, etc...), la principale difficulté est de calculer le gradient de la fonction coût $\nabla_x J(x)$.
- De plus, de telles méthodes ne permettent pas de déterminer un optimum global.

3.2 Les algorithmes génétiques (AG): principe général



Initialisation: sélection aléatoire de N_p individus représentant chacun une solution potentielle x .

Evaluation: à chaque individu est affecté un facteur de santé, inversement proportionnel à la fonction coût.

La population ensuite évolue suivant des principes aléatoires Darwiniens (sélection, croisement, mutation)

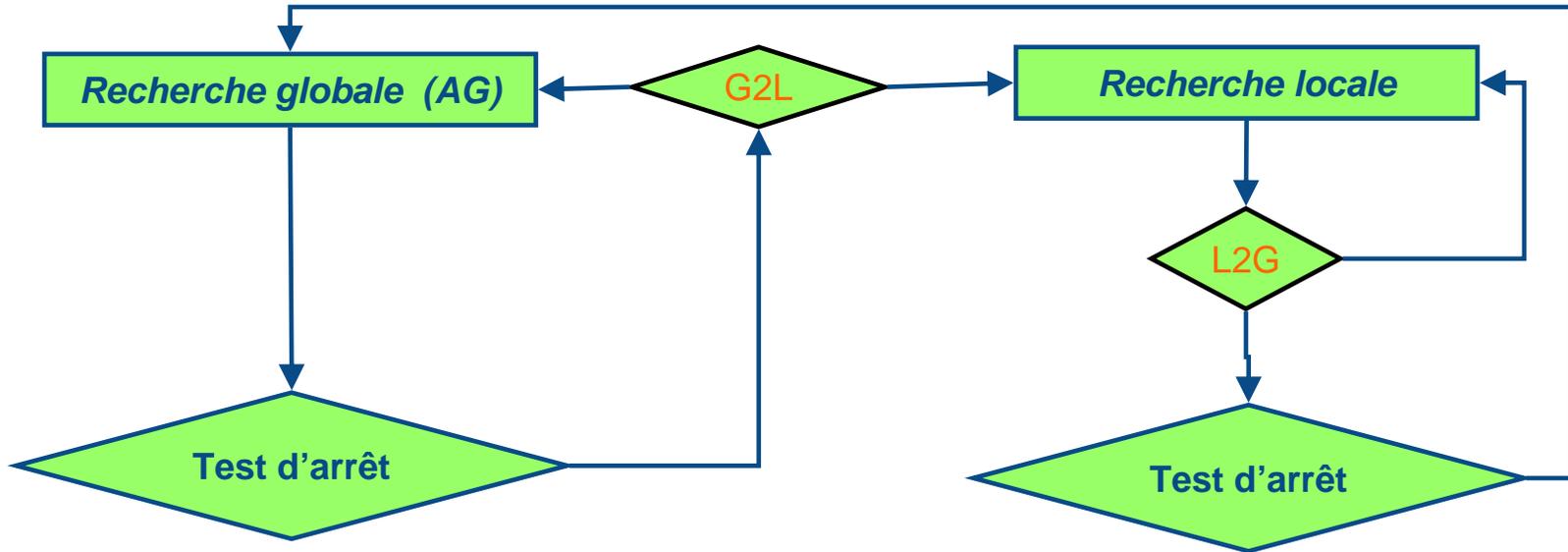
- Il existe d'autres algorithmes évolutionnaires (ES, PSO,...) que les AG. Cependant, aucun d'eux ne se dégage vraiment de manière 'universelle'.

3.3 Nouvelles méthodes d'optimisation

- De nouvelles méthodes d'optimisation ont du être développées pour améliorer la vitesse de convergence des AG pour des applications coûteuses.
- La première idée est de développer des méthodes hybrides en incluant un algorithme d'optimisation locale dans le processus global (→ méthode AHM)
- Une seconde idée naturelle pour réduire le temps de calcul de la fonction coût est de développer des modèles approchés de celle-ci (→ méthode AGA)

3.3 La méthode AHM (Adaptive Hybrid Method)

➤ Référence: [Art10]: *Journal of Comp. and Applied Maths* 08

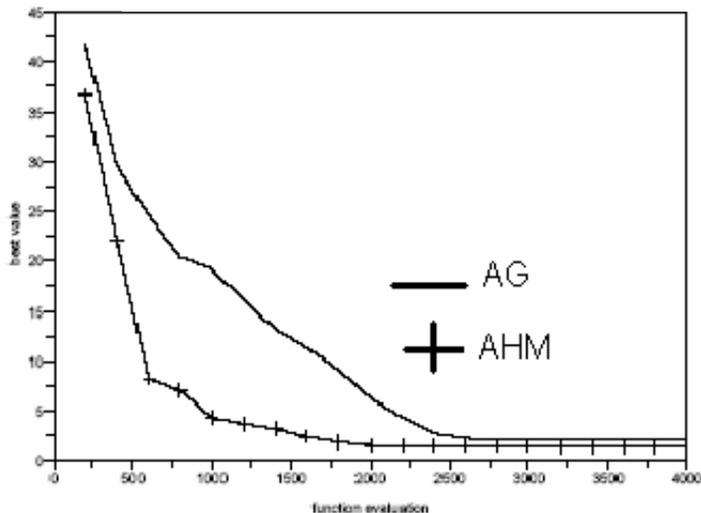


- Le passage de la recherche globale à la recherche locale et inversement s'effectue à travers deux coefficients adaptatifs G2L et L2G.
- Le choix des éléments de la population utilise la méthode de 'reduced clustering'.

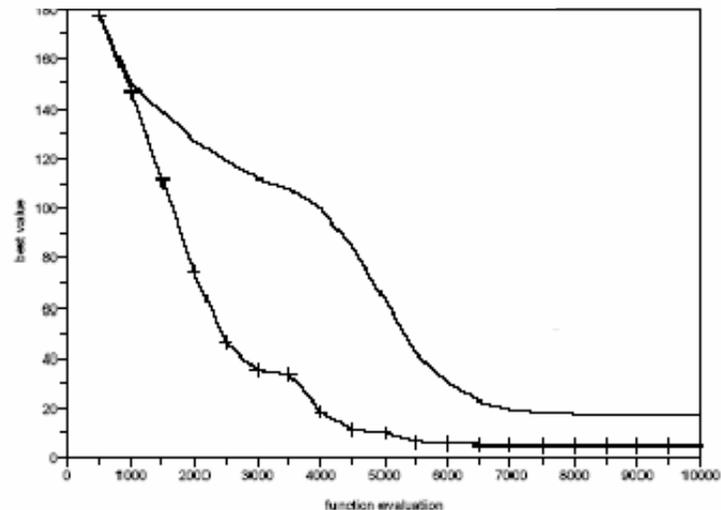
3.3 Exemple de validation de la méthode AHM

- **Fonction test** : fonction de Rastrigin (nombreux minima locaux, un minimum global)

$$Rast_a(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - a \cos(2\pi x_i)) + an$$



$Rast_{10} (n=6)$



$Rast_{10} (n=20)$

- Pour $Rast_{10} (n=20)$, après 5000 évaluations:

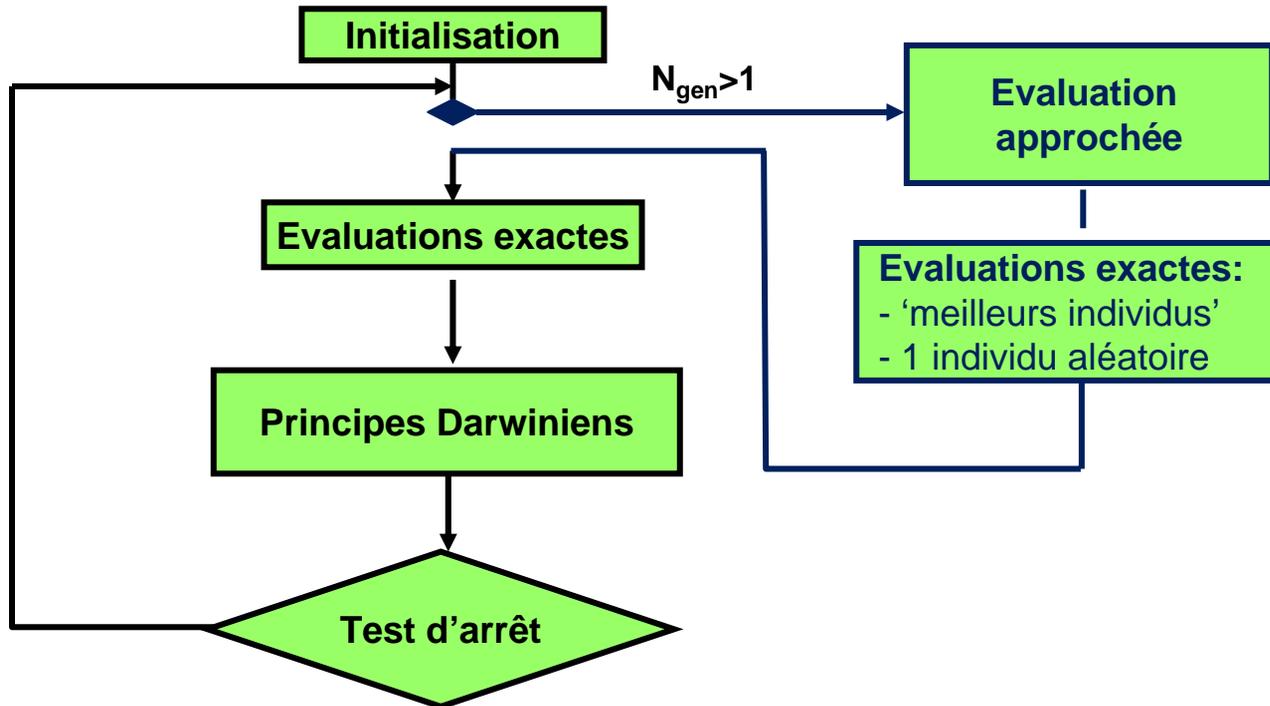
| | | | |
|----------------------|-------|-------|-------|
| Mean/best/worst AHM: | 9.82 | 4.97 | 24.06 |
| Mean/best/worst AG: | 63.56 | 45.54 | 90.49 |

3.3 La méthode AGA

(Approximate Genetic Algorithm ou Algorithme Génétique Approché)

➤ Référence: [Art5], [Art6]

- Le principe de la méthode AGA est de n'effectuer qu'un nombre réduit d'évaluations exactes, seulement pour les 'meilleurs individus'.



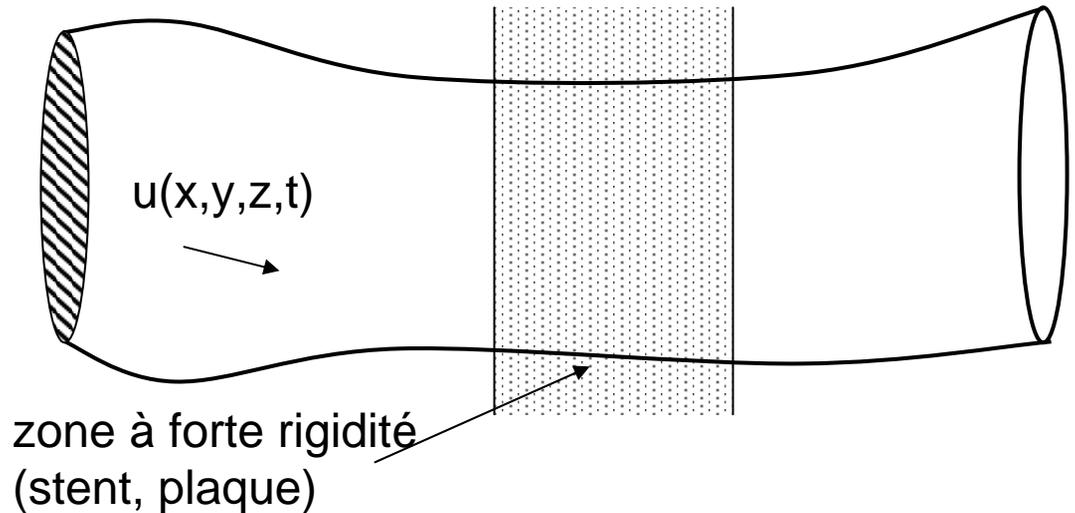
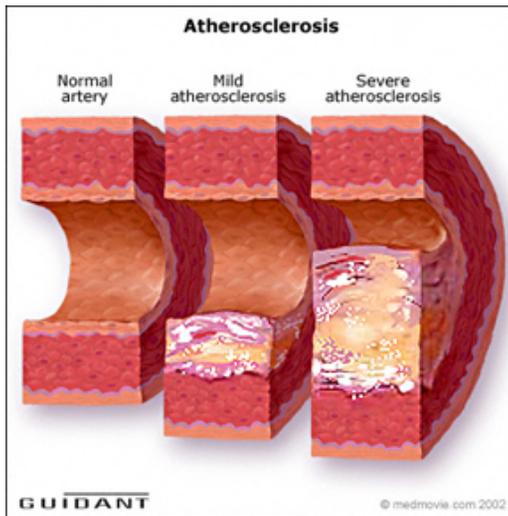
- L'évaluation approchée est basée sur un principe d'approximation locale 'optimale' par des fonctions radiales.

4. Deux exemples d'applications médicales

4.1 Détection d'une plaque d'athérome

- Collaborations: J.F. Gerbeau
- Références: [Art11], [Proc6]: *ENGOPT 2008*

- La formation d'une plaque d'athérome dans une artère peut engendrer des risques d'infarctus et d'AVC (38% des cause de décès en France).



- Objectif: *déterminer la localisation d'une plaque par des mesures non invasives.*

4.1 Détection d'une plaque d'athérome

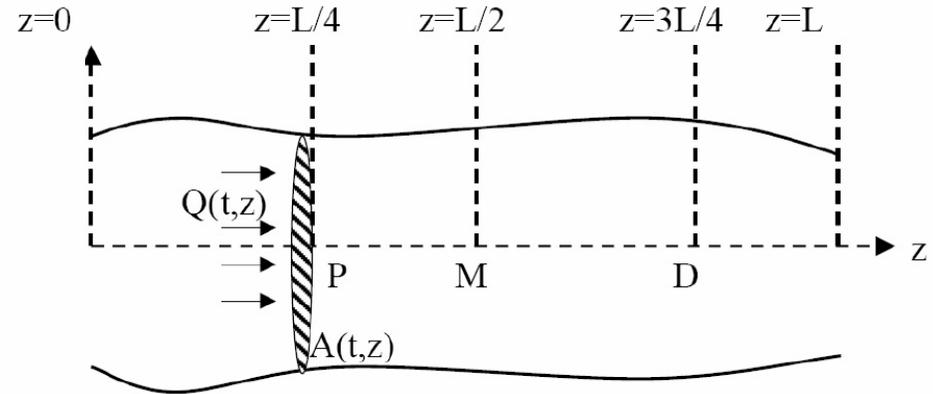
• **Modèle mathématique:** modèle 1D issu d'une moyennisation d'un modèle 3D fluide/structure (A: section, Q: débit)

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K_r \frac{Q}{A} = 0 \end{cases}$$

avec la loi de pression simplifiée:

$$P(t, z) - P_{ext} = \beta(A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}})$$

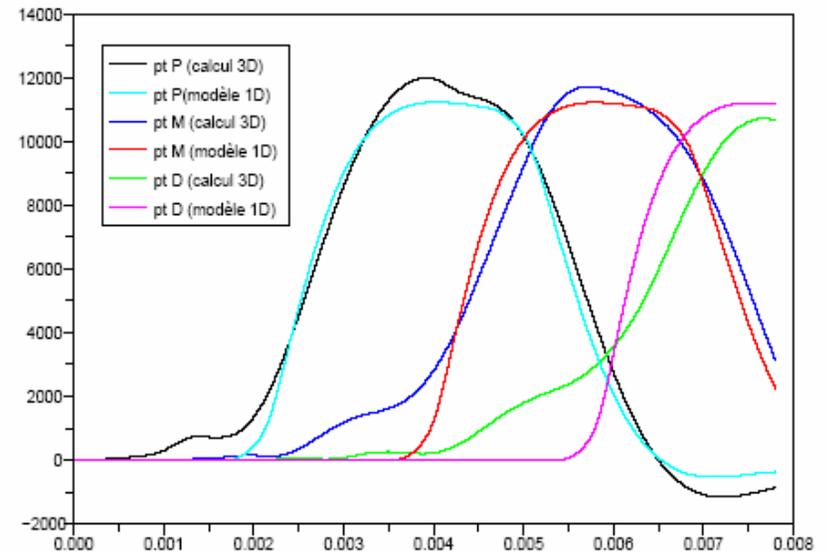
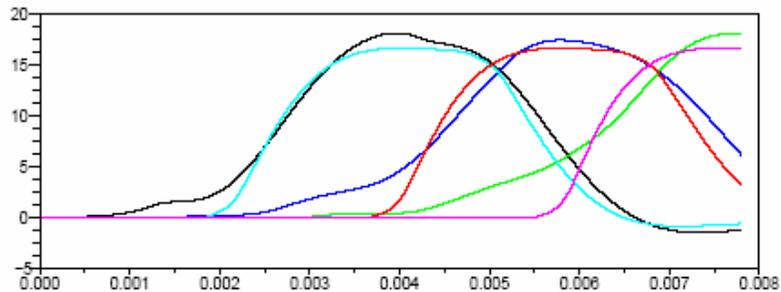
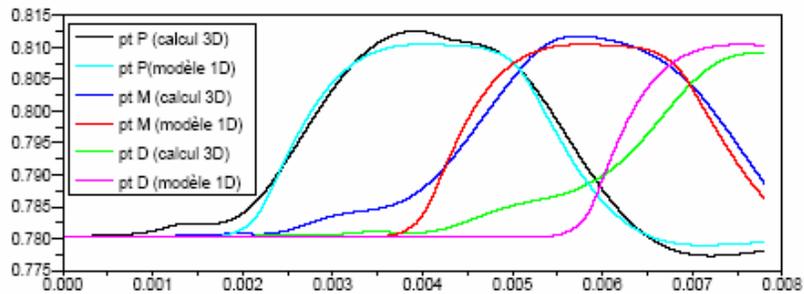
- **Paramètre à estimer:** rigidité de l'artère $\beta(z)$
- **Fonction coût:** écart entre valeurs obtenues et valeurs expérimentales de A et Q en une ou plusieurs sections.



4.1 Détection d'une plaque d'athérome

- **Résultats obtenus:**

1er cas: comparaison avec un calcul 3D, compliance fixe:

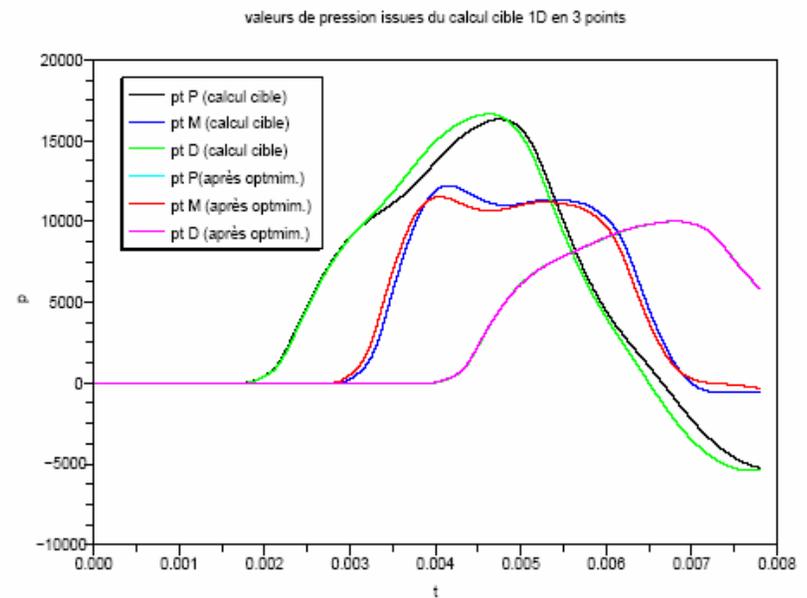
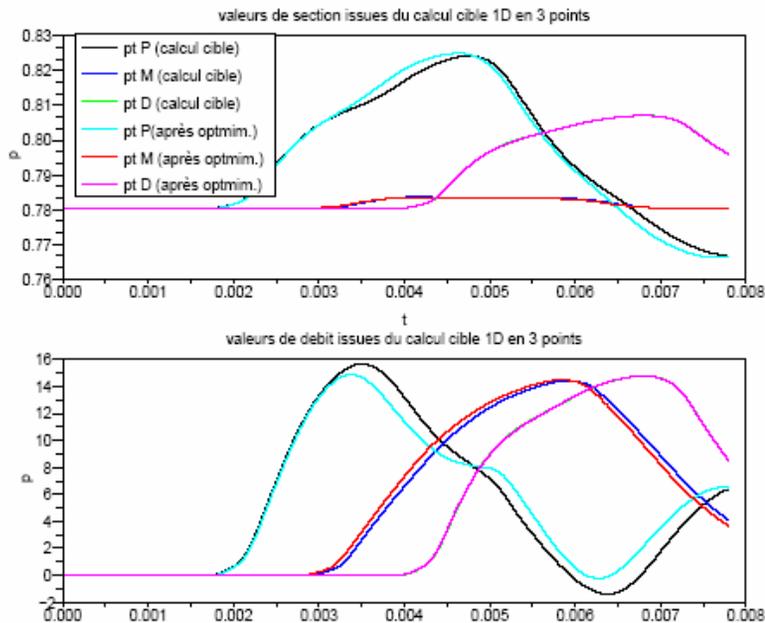


- Le modèle 1D 'optimal' permet de retrouver les caractéristiques du modèle 3D.

4.1 Détection d'une plaque d'athérome

- **Résultats obtenus:**

2ème cas: comparaison avec un calcul 1D cible, compliance variable:

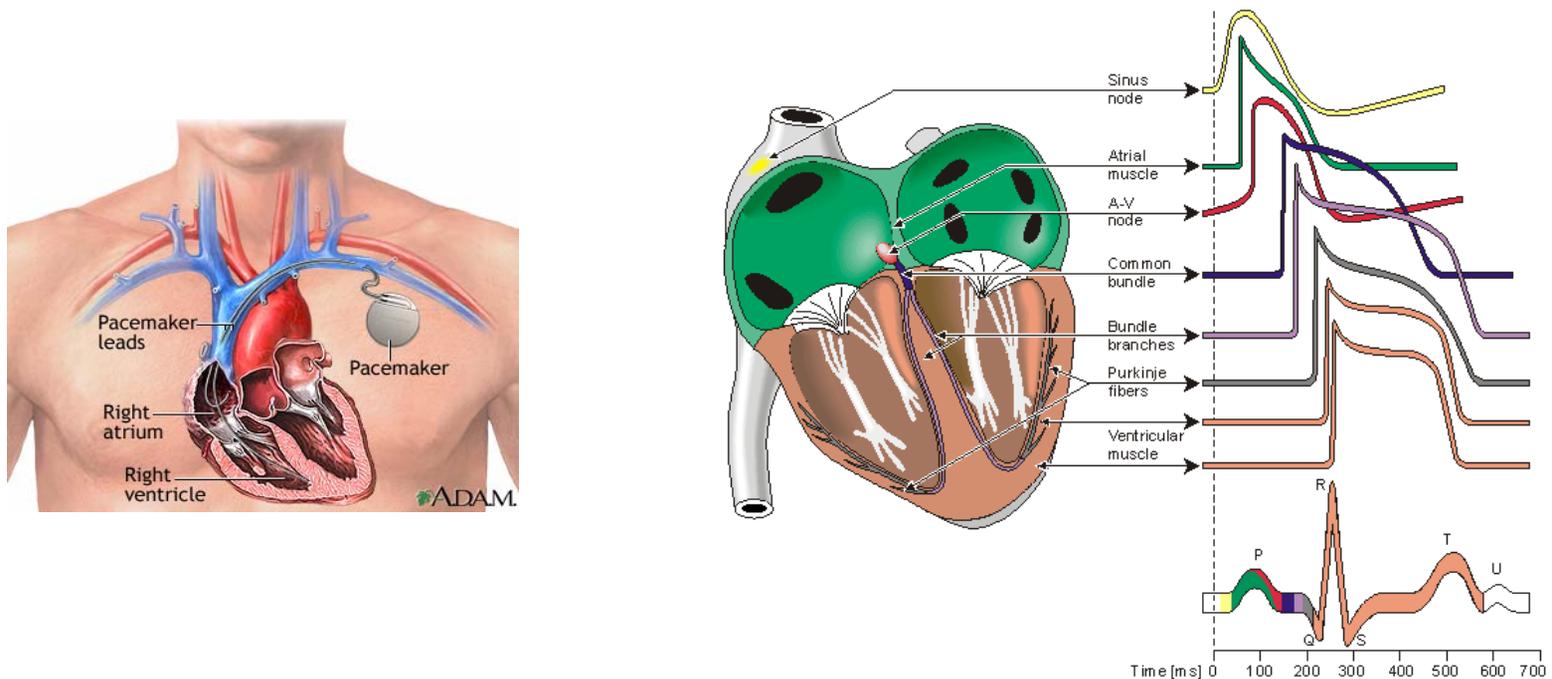


- La connaissance d'un seul profil de section en aval de la plaque permet de localiser celle-ci.

4.2 Optimisation du fonctionnement d'un pacemaker

- Collaborations: L. El Alaoui, J.F. Gerbeau
- Références: [Art12], [Proc3]: EUROGEN 2007, [Proc4]: GECCO 2007.

- La désynchronisation du cœur est une cause d'insuffisance cardiaque.



- **Objectif:** où stimuler ? Quand ? Selon quels critères ?

4.2 Optimisation du fonctionnement d'un pacemaker

- **Modèle mathématique**: modèle bidomaine (V_m potentiel transmembranaire)

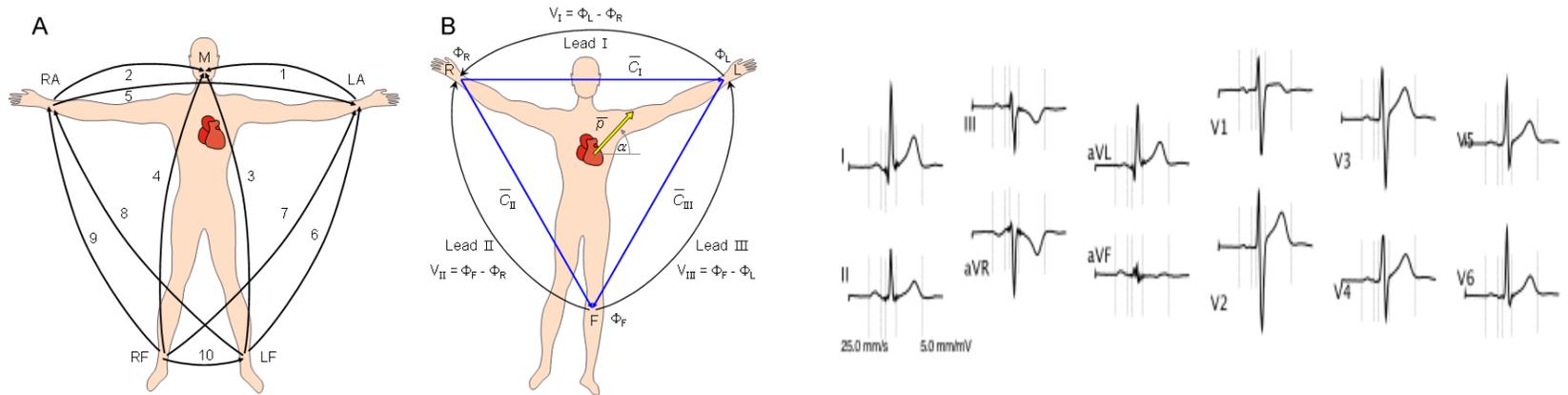
$$\begin{aligned} A_m (C_m \partial_t V_m + I_{\text{ion}}) - \operatorname{div}(\sigma_i \nabla V_m) &= \operatorname{div}(\sigma_i \nabla \phi_e), \\ \operatorname{div}(\sigma_i \nabla \phi_i) &= -\operatorname{div}(\sigma_e \nabla \phi_e), \end{aligned}$$

- **Modèle ionique**: Mitchell et Schaeffer

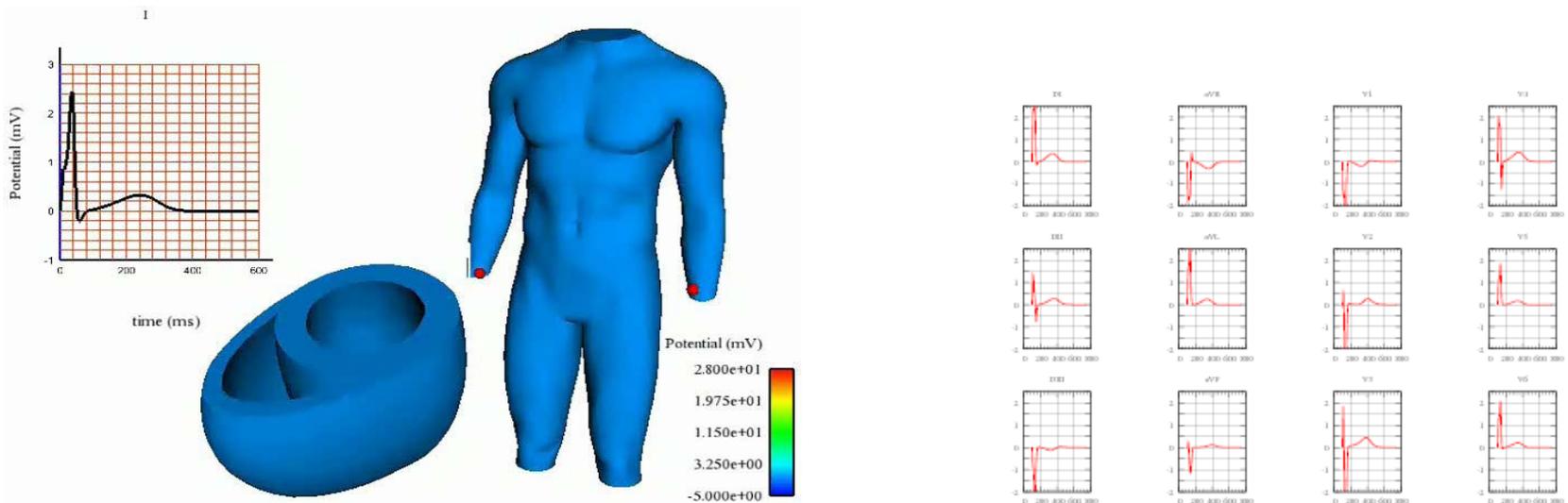
$$I_{\text{ion}} = -\frac{w}{\tau_1} V_m^2 (1 - V_m) + \frac{V_m}{\tau_2},$$

$$\frac{dw}{dt} = g(V_m, w), \quad \text{with} \quad g(V_m, w) = \begin{cases} \frac{w-1}{\tau_3} & \text{if } V_m < V_g, \\ \frac{w}{\tau_4} & \text{if } V_m > V_g, \end{cases}$$

4.2 Optimisation du fonctionnement d'un pacemaker

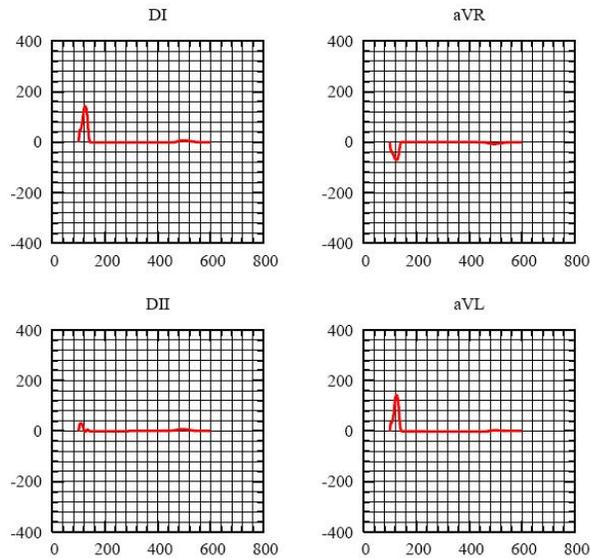
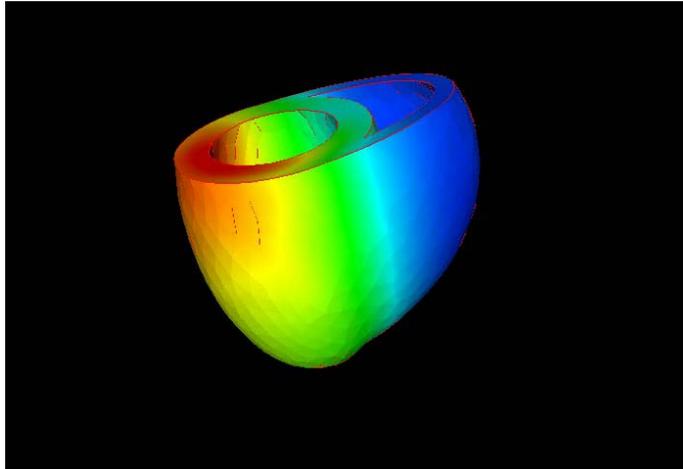


- Couplage avec la conduction dans le thorax pour l'obtention d'ECG numériques:

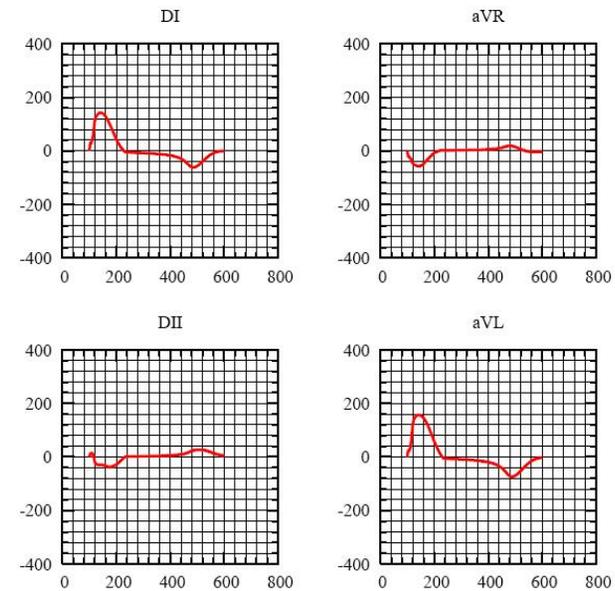
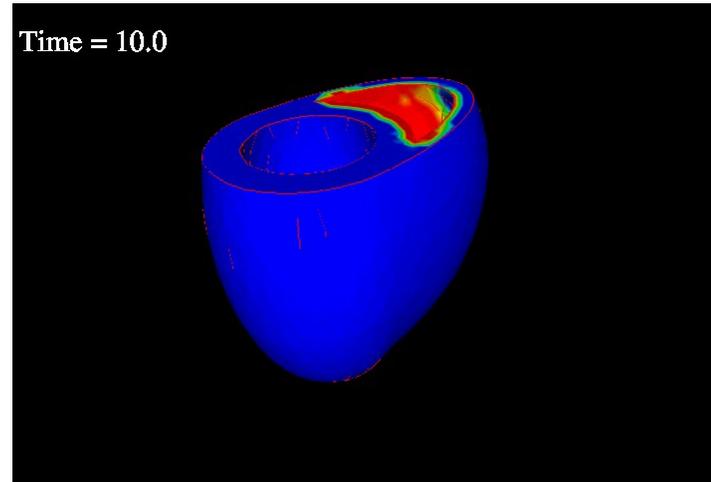


4.2 Optimisation du fonctionnement d'un pacemaker

Cœur sain

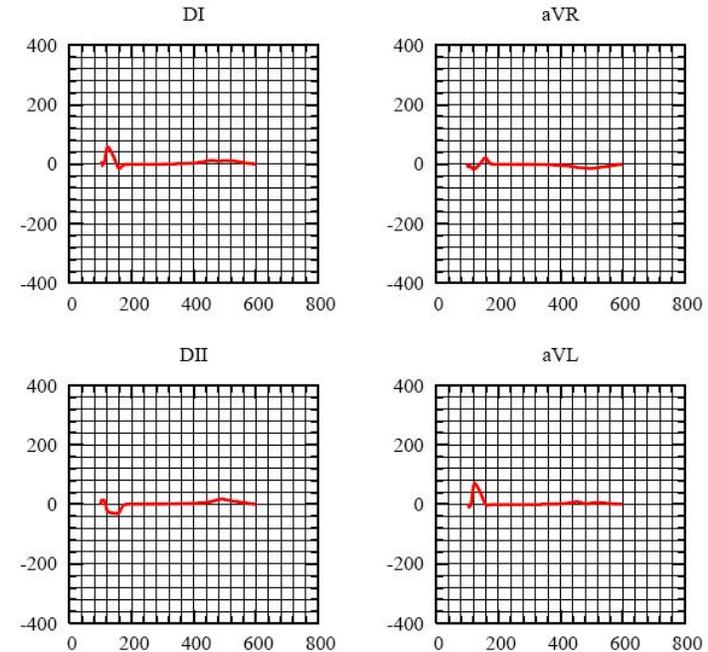
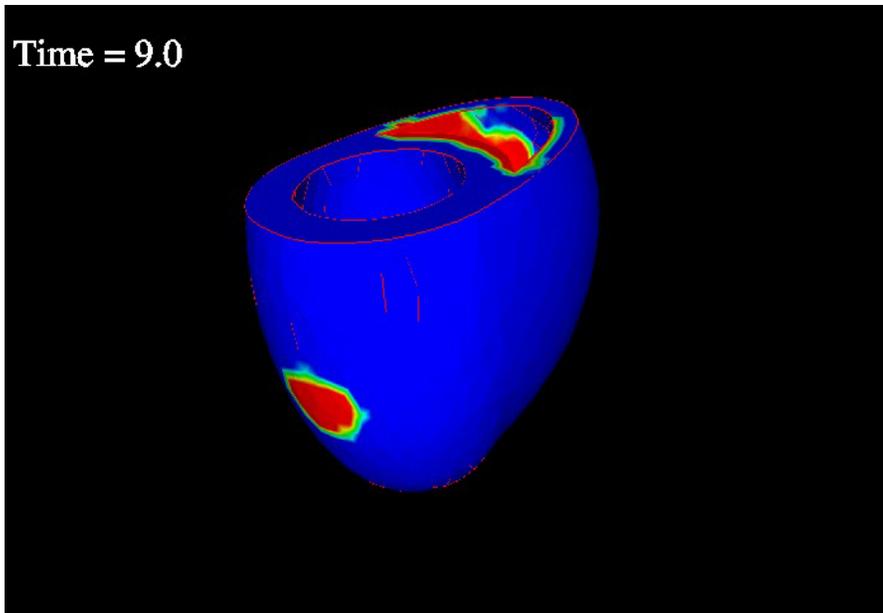


cœur malade (bloc de branche gauche)



4.2 Optimisation du fonctionnement d'un pacemaker

- Fonction coût: délai dans le temps de dépolarisation de 95% du cœur.



- Cas pathologique: $J=73$ ms
- Cas sain: $J=0$ ms
- Cas positionnement aléatoire: $J=65$ ms
- Cas positionnement optimal: $J=20.5$ ms

5. Perspectives

- Justification théorique des méthodes évolutionnaires.
- Exploration de nouvelles méthodes évolutionnaires comme support des méthodes hybrides (CMA-ES, PSO, etc...).
- Influence des incertitudes (optimisation robuste).
- Amélioration des applications médicales présentées afin de poursuivre dans la voie encore longue des applications cliniques.
- De nouvelles applications médicales en vue (peau, stents, ...)