Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège

Caroline Bulf

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS 7)

UFR de Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines

THESE

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Caroline Bulf

ETUDE DES EFFETS DE LA SYMETRIE AXIALE SUR LA CONCEPTUALISATION DES ISOMETRIES PLANES ET SUR LA NATURE DU TRAVAIL GEOMETRIQUE AU COLLEGE

STUDY OF THE EFFECTS OF SYMMETRY ON THE ISOMETRY'S CONCEPTUALIZATION AND ON THE NATURE OF GEOMETRICAL WORK AT SECONDARY SCHOOL

Thèse dirigée par M. Alain KUZNIAK

Soutenue publiquement le 17 Novembre 2008 devant le jury composé de :

Mme Michèle ARTIGUE, professeur à l'Université Paris Diderot	examinateur
M. Paolo BOERO, professeur à l'Università degli studi di Genova,	rapporteur
M. Jacques COLOMB, professeur émérite de l'INRP	co-directeur
M. Alain KUZNIAK, professeur à l'IUFM d'Orléans Tours	directeur
Mme Colette LABORDE, professeur émérite à l'Université J. Fourier, Grenoble	rapporteur

REMERCIEMENTS

Tous les remerciements exprimés dans cette page ne sont sans doute pas à la hauteur de l'implication des personnes auxquels ils sont destinés dans la réalisation de ce travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers Alain Kuzniak qui a accepté de diriger ce travail de thèse il y a trois ans. Sa grande culture scientifique en général et géométrique en particulier, ses nombreux conseils et ses remarques toujours justes m'ont permis de nourrir sans cesse ma pensée. Je tiens particulièrement à le remercier pour sa patience, son immense soutien et pour m'avoir fait découvrir le métier de chercheur. J'adresse une sincère reconnaissance à Jacques Colomb qui m'a toujours accompagné depuis mes premiers pas dans le vaste monde de la didactique des mathématiques. Son incroyable disponibilité et ses encouragements nombreux ont sans nul doute facilité ces années de thèse. Son implication dans ce travail et tous les moments que nous avons partagés ont à mes yeux une très grande valeur.
Je remercie sincèrement Colette Laborde d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse et dont le rapport est une source précieuse pour faire encore progresser ma réflexion. L'école d'été YERME 2006 est pour moi très importante car j'y ai rencontré Paolo Boero dont j'admire la réalisation didactique. Je tiens à exprimer mon sincère enthousiasme lorsqu'il a accepté d'être rapporteur de ma thèse. J'adresse également mes sincères remerciements à Michèle Artigue qui a accepté d'être membre du Jury. Au-delà de ce rôle, elle a toujours été d'une exceptionnelle disponibilité pour répondre à mes nombreuses questions concernant mes enseignements ou mes projets didactiques.

La réalisation de ce travail de thèse dépend incontestablement de la généreuse participation de Mme Chloé B. et de ses classes de 6^{e}, 5^{e} et 3^{e}. Je tiens en particulier à faire part du très plaisir que j'ai ressenti de l'accompagner dans sa classe. Je tiens également à remercier sincèrement les 17 professeurs qui ont accepté de répondre à mon questionnaire, ainsi que les 7 tailleurs de pierre et ébénistes qui ont très spontanément accepté de me recevoir et de me guider dans leurs pratiques professionnelles dans le cadre de mes recherches.

Je tiens vivement à remercier Gérard Vergnaud d'avoir accepté de me recevoir pour répondre à mes interrogations (toujours) nombreuses sur la théorie des champs conceptuels. Je souhaite également remercier Aline Robert pour ses conseils méthodologiques et son dynamisme engagé au sein de l'équipe Didirem. J'adresse un très grand merci à Laurent Vivier pour sa relecture fine de ma thèse et son soutien amical. Je remercie également tous les autres membres de l'équipe Didirem, pour tous les échanges didactiques ou simplement amicaux. La naturelle bonté de Martine Lamy, Nicole Gillet et Nadine Locufier, ainsi que l'incroyable efficacité de Michèle Wasse m'ont permis de venir à bout des méandres administratifs qui jalonnent les années de thèse.
Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée amicale pour l'équipe des jeunes chercheurs dont les rendez-vous didactiques ont toujours été un très grand plaisir. J'adresse une pensée toute particulière à Pablo Carranza, Christine Chambris, Elizabeth Montoya, Pascal Stoelting et Avenilde Romo Vazquez pour tous ces grands et petits moments passés ensemble durant ces années de thèse. Je ne manque pas de faire un clin d'œil complice aux occupants du bureau 5B01 (anciens et actuels) ainsi qu'aux logiciens et probabilistes des bureaux voisins.
Enfin, je termine cette page par une pensée pleine de tendresse pour mes parents, mon frère et François, pour leur infaillible soutien.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

Ce travail de recherche est une étude didactique des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège. Nous nous référons à Vergnaud quant à l'utilisation du terme de « conceptualisation ». D'après Vergnaud, le processus de conceptualisation est au cœur de l'activité de l'élève lors d'un apprentissage scolaire vu comme l'adaptation de schèmes dans une situation donnée. Nous supposons que la symétrie axiale, faisant partie des connaissances anciennes d'un élève de collège, va participer à la construction de nouvelles connaissances visées par l'enseignement de la symétrie centrale en 5^{e}, et de la rotation en 3^{e} (nous n'étudierons pas le cas de la translation). La problématique de notre travail de thèse s'articule donc autour de la question générale du rôle joué par la symétrie axiale dans l'apprentissage des autres transformations du plan, telles que la symétrie centrale et la rotation au collège. Agit-elle en tant qu'obstacle ou en tant que levier ? Nous référons à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud pour analyser la conduite de l'élève mais aussi au cadre des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique de Houdement et Kuzniak quant à la nature du travail géométrique en jeu dans l'activité de l'élève.

Cette thèse comprend sept chapitres qui décrivent le cheminement opéré durant plusieurs années pour apporter des éléments de réponse à cette question de départ sur les effets didactiques joués par la symétrie axiale.

Dans le **chapitre 1**, intitulé ***Les premiers ancrages***, nous commencerons par développer notre réflexion autour de cette question de départ très générale à travers les travaux existant déjà dans des champs divers tels que la psychologie, la philosophie, l'histoire des mathématiques, et bien sûr la didactique des mathématiques.

Dans le **chapitre 2**, intitulé ***Construction du cadre théorique***, nous décrirons le cadre théorique que nous avons choisi pour notre étude. Notre cadre théorique se concentre sur le savoir mathématique en jeu (à savoir les isométries du plan) : d'un point de vue cognitif à travers le cadre théorique des champs conceptuels de Vergnaud, et d'un point de vue géométrique avec le cadre des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique de Houdement et Kuzniak. Nous proposerons alors nos questions de recherche qui s'articulent autour de l'étude de l'organisation des invariants opératoires en jeu lors de la construction de l'Espace de Travail Géométrique personnel de l'élève dans une situation qui donne un sens au concept de symétrie.

Dans le **chapitre 3**, intitulé ***Le rôle de la symétrie dans la construction de l'espace de travail géométrique des tailleurs de pierre et des ébénistes***, nous présenterons un travail de recherche indépendant du reste de la thèse mais qui rejoint notre réflexion sur le rôle joué par la symétrie axiale dans une activité géométrique. Nous analyserons le rôle joué par la symétrie dans la nature du travail géométrique opéré dans une problématique pratique dans le contexte de l'artisanat, à travers des entretiens-actions auprès d'artisans au sein même de leurs ateliers.

Dans le **chapitre 4**, intitulé ***Un premier questionnaire exploratoire***, nous reviendrons sur l'institution scolaire en décrivant les analyses et résultats fournis par un premier questionnaire exploratoire mené en classe de 3^{e} auprès de dix élèves. Ce questionnaire nous a permis de définir un certain nombre de variables que nous prendrons en compte pour la suite des expérimentations, et d'introduire les outils d'analyse inspirés par les travaux de Duval, et notamment les différents types de déconstruction des figures qu'il définit.

Dans le **chapitre 5**, intitulé ***Méthodologie de recherche à travers une étude longitudinale***, nous décrirons la méthodologie générale que nous avons choisie de mettre en place :
- un deuxième questionnaire destiné à des élèves de 5^{e} et de 3^{e} afin d'analyser et de comparer la construction et la mise en œuvre (notamment à travers le type de déconstruction des figures) de l'ETG personnel de l'élève selon la nature de la transformation et selon la tâche (appartenant à une même classe de situation),
- l'observation des premières séances d'enseignement de la symétrie axiale en 6^{e}, de la symétrie centrale en 5^{e} et de la rotation en 3^{e} menées par un même professeur, Mme B., qui était le professeur des élèves qui ont réalisé le deuxième questionnaire. Ces observations ont alors pour but d'expliquer en partie les résultats obtenus dans le deuxième questionnaire.

Dans le **chapitre 6**, intitulé ***Analyse du deuxième questionnaire***, nous détaillerons la méthodologie d'analyse des productions recueillies lors du deuxième questionnaire. Nous avons obtenu une catégorisation des élèves par profil selon des critères de réussite et surtout de la stabilité de leur réussite selon un changement de perception suggéré par la tâche, auquel l'élève n'adhère pas nécessairement. Nous soulignerons le rôle très différent que peut jouer la symétrie axiale dans la construction de l'Espace de Travail Géométrique personnel de l'élève selon qu'il s'agit d'un élève de 5^{e} ou de 3^{e}.

Le chapitre 7, intitulé ***Les effets de l'enseignement***, a pour but d'essayer d'expliquer certains comportements des élèves mis en évidence par les résultats du deuxième questionnaire. D'après les observations des premières séances d'enseignement des transformations du plan en 6^{e}, 5^{e} et en 3^{e}, nous montrerons comment le statut de la symétrie axiale change au sein de la classe mais aussi comment certaines pratiques institutionnalisées en classe peuvent être détournées par l'élève.

Nous conclurons ce travail de recherche en pointant les différents aspects que revêt la symétrie axiale tout au long du collège. En effet, la symétrie axiale semble plutôt à l'origine d'amalgames en début de collège pour finalement permettre à l'élève d'organiser un réseau de propriétés en fin de collège. Ce travail débouche alors sur de nouvelles perspectives de travail et notamment concernant le rôle joué par les basculements de paradigmes entre une géométrie GI (en lien direct avec la réalité) et une géométrie GII (qui renvoie à des modèles axiomatiques) dans la progression d'un raisonnement logico-déductif visé par le collège.

CHAPITRE 1er

LES PREMIERS ANCRAGES

Résumé

L'objectif de ce chapitre est d'introduire notre étude concernant le rôle de la symétrie comme élément de notre réalité dans l'enseignement et l'apprentissage des autres transformations du plan au collège.

Nous commencerons par préciser la question de la « réalité » dans l'enseignement. Puis nous montrerons comment le concept de symétrie peut être interprété comme un moteur dans le développement de la pensée géométrique, ou au contraire comme un frein. Nous alimenterons cette réflexion d'un point de vue didactique à partir d'un panorama des travaux de recherche en didactique des mathématiques sur le concept de symétrie et des transformations du plan.
Cette première entrée, à partir d'un panorama de travaux antérieurs de champs divers, nous permet de construire notre point de départ sur les effets d'un tel concept sur les conceptions des élèves, et à nous interroger sur le rôle de l'enseignement concernant ces conceptions.

Pour terminer ce premier chapitre, nous proposerons un parallèle entre la construction historique et la construction curriculaire du concept de symétrie, afin de mettre en évidence la complexité de son enseignement et donc la complexité de l'étude de cet enseignement. Ces ancrages dans une géométrie pratique mais aussi dans une géométrie axiomatique et formelle laissent en particulier entrevoir les origines épistémologiques des difficultés didactiques de ce concept.

PLAN

Notre travail de thèse a pour but d'étudier le rôle de la symétrie comme élément de notre réalité dans l'apprentissage des transformations du plan au collège. Une telle étude est une entrée possible pour approcher la question plus globale du rôle de la réalité dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. La symétrie est un concept complexe dont nous proposons une étude originale. Ce chapitre propose *les premiers ancrages* de notre étude à partir de travaux antérieurs, qui nous permettent en particulier d'envisager *a priori* **la symétrie comme un obstacle, ou au contraire comme un levier au développement de la pensée en géométrie.** Des éclairages historique et curriculaire alimenteront également cette dualité en pointant la complexité de la construction et reconstruction de ce concept.

1. LA QUESTION DES EFFETS DE LA REALITE SUR LES APPRENTISSAGES SCOLAIRES

1.1 La « réalité » au sens commun

Ce travail de thèse s'inscrit dans une branche des mathématiques qui concerne directement l'étude de la « réalité » : la géométrie. Le mot géométrie vient du latin *geometria*, du grec *geômetria*, de *gê* « la Terre » et *metria* « technique, science de la mesure », qui signifie donc « science de la mesure de la Terre ». Le sens commun du mot géométrie entend aujourd'hui celui-ci comme science des figures de l'espace. Nous utilisons le terme de réalité comme étant le contexte, l'environnement de notre vie quotidienne, ce qui est immédiatement effectif, concret, ce qui peut être appréhendé par les sens et nourrir l'expérience. Nous comprenons donc le terme de « réalité » dans son sens commun.

1.2 La question des effets de la réalité sur l'apprentissage scolaire

La réalité a-t-elle un effet sur l'apprentissage visé par l'enseignement ? Est-elle un levier ou au contraire un obstacle ? La recherche en didactique s'intéresse aux apprentissages visés par une situation intentionnelle d'enseignement, et non à l'apprentissage lié au développement d'un individu, bien que le développement d'un individu conditionne les apprentissages scolaires et réciproquement. Le constructivisme - théorie de l'apprentissage - impulsé par Piaget définit l'apprentissage comme un processus de construction et de reconstruction à partir des connaissances anciennes et de l'expérience antérieure pour en construire de nouvelles. Les travaux de Piaget portent essentiellement sur le développement de la pensée et de l'intelligence chez l'enfant. Dans la pensée constructiviste, il ne suffit pas de cumuler les connaissances nouvelles en « couches successives » pour les assimiler. Piaget décrit l'apprentissage de connaissances nouvelles comme un processus :

- d'assimilation : « le système [cognitif] trie et sélectionne ce qui est conforme à sa structure ou, ce qui revient au même, il décode dans son propre langage et intériorise sous cette forme le système de relations qui lui est présenté »

- et d'accommodation : « dans le système de connaissances qui est accepté – ou transcodé – par le système cognitif, s'introduisent des relations nouvelles qui généralisent ou élargissent les structures propres au système cognitif ».
- le processus d' « équilibration permet de régler les rapports entre la structure cognitive du sujet et les sollicitations extérieures »[1].

Le courant constructiviste s'inspire de la pensée piagétienne et de ce processus d'équilibration pour décrire l'apprentissage.

A propos de la construction de la pensée scientifique, Bachelard argue « Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit »[2]. Bachelard définit la notion « d'obstacle épistémologique » lors de la construction des raisonnements scientifiques : « c'est en terme d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique »[3] car « loin d'être linéaire, l'histoire de la production des connaissances scientifiques témoigne d'un cheminement chaotique opérant par rectifications et transformations des savoirs élaborés »[4]. Bachelard catégorise ainsi différentes sortes d'obstacles : l'expérience première, l'extension abusive des images familières, l'obstacle de la connaissance générale.

D'un point de vue constructiviste, il en est de même sur le plan cognitif d'un élève qui est en train d'apprendre car il se confronte à ses propres conceptions. Ainsi, certaines erreurs ne sont dues ni à de l'inattention ni à la simple bêtise, mais elles sont révélatrices de ces obstacles cognitifs : « l'erreur […] [est] l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée »[5]. Brousseau s'inspire ainsi de la notion d' « obstacle épistémologique » de Bachelard (1934) pour décrire les « obstacles didactiques » (Brousseau, 1983, 1998), c'est-à-dire les obstacles qui se révèlent dans une situation didactique.

On relève ainsi :
- les obstacles ontogéniques qui sont liés au développement de l'individu. L'épistémologie génétique développée par Piaget (1972) a mis en évidence des stades (stade sensori-moteur, stade préopératoire, stade des opérations concrètes et enfin stade formel) qui décrivent le cheminement du développement de la pensée chez l'enfant.
- les obstacles didactiques qui découlent des choix et des intentions du système éducatif. Brousseau (1998) donne l'exemple des décimaux qu'un élève comprend comme « des entiers naturels avec un changement d'unité », donc des « naturels (avec une virgule) et des mesures »[6].

[1] Johsua & Dupin, 1993, p. 95.
[2] Bachelard, 1934, p. 16.
[3] Ibidem, p. 15.
[4] Reuter & Al., 2007, p. 153.
[5] Brousseau, 1998, p. 119.
[6] Ibidem, p. 125.

- et les obstacles épistémologiques qui sont inhérents à l'objet même de la connaissance et qu'on ne peut donc éviter, et que l'on retrouve dans l'histoire de la construction de la pensée scientifique (Bachelard, 1934).

Il existe d'autres types d'obstacles (culturel, affectif…) et la recherche de leur catégorisation et de leur formation fait écho aux recherches sur les *représentations*. « Ces investigations ont amené à l'établissement de catalogues de représentations fréquentes dans différentes disciplines. Si, pour chaque thématique, les représentations peuvent être variées, les obstacles sont souvent en nombre restreint puisqu'ils les expliqueraient et les structureraient en profondeur. […] La notion de représentation a été définie pour parler des systèmes de connaissances qu'un sujet mobilise face à une question ou à une thématique »[7]. De nombreux travaux de recherche en didactique (ou dans d'autres champs disciplinaires) ont mis en évidence la forte résistance de certaines représentations lors de l'apprentissage de certains concepts scientifiques (Migne, 1969), (Astolfi, 1989), (Brousseau, 1998), (Sierpinska, 1995), et certaines d'entre elles persistent ou finissent par revenir. Il s'agit d'un des thèmes cruciaux de recherche en didactique de la physique, dans lesquels certains auteurs dénoncent « le dogmatisme du sens commun »[8].

La question du rôle de la *réalité* dans l'apprentissage peut alors se poser en terme d'obstacle (obstacle des images familières, obstacle de l'expérience première, obstacle du sens commun, obstacle des représentations sociales) mais pas seulement. La réalité permet également l'expérience et entretient l'intuition. Elle permet le recours à des métaphores et des raisonnements empiriques. Bien que Bachelard (1934) dénonce « l'usage abusif des images familières » et Brousseau[9] celui des analogies, nous ne pouvons ignorer la portée heuristique de la réalité : « à côté du travail de recensement et de description des grands obstacles à la constitution des concepts, se développent des études portant sur les caractéristiques de fonctionnement des connaissances, à la fois comme appui et comme obstacle (alternativement et dialectiquement) »[10]. **Ainsi, la question de la *réalité* se pose aussi en terme de levier pour l'apprentissage.**

Nous référons ici à deux courants actuels de recherche en didactique : la *Realistic Mathematics Education* (RME), dont Freudenthal (1983) fut l'investigateur en Hollande, et le cadre de la *Didactique des Domaines d'Expérience* (DDE), sous l'égide de Boero (1998, 1999) en Italie. Ces deux courants fonctionnent dans des directions orthogonales à partir d'un contexte réel. *La mathématisation verticale* proposée par la RME s'inspire de Freudenthal, qui voit les mathématiques comme une activité humaine qui consiste à résoudre et à chercher des problèmes dans un processus de mathématisation. Ainsi, les « mathematics in context » proposées par certaines de leurs situations ont pour but d'accéder à des niveaux plus élevés et

---

[7] Reuter & al. 2007, p. 154 et p. 197.
[8] Johsua & Dupin, 1989, p. 32.
[9] http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf (toujours disponible le 10/07/2008)
[10] Brousseau, 1998, p. 121.

plus abstraits de connaissance par l'intermédiaire de la réalité. On retrouve ce type de situation dans PISA (Programme for International Student Assessment), où l'on prétexte une situation de vie quotidienne pour extraire des mathématiques (Linchevski & Williams, 1999), (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). La DDE s'apparente davantage à une mathématisation de dimension horizontale, car on questionne les potentialités de différents contextes réels, à travers l'expérimentation et la manipulation, dans le but de faire émerger des concepts mathématiques (Bartolini-Bussi & Boero, 1998), (Douek, 1999, 2003).

1.3 Recherches préliminaires

Cette problématique a été abordée dans mon précédent travail de master (Bulf, 2005). Nous avions étudié les effets possibles de l'introduction d'une balance de Roberval dans l'enseignement des équations du premier degré en classe de 4^{e}. Nous avions observé le déroulement des premières séances de cet enseignant dans trois classes différentes, à partir de trois niveaux différents de « modélisation »[11] :
- à partir de la manipulation d'une balance de Roberval (modèle concret)
- à partir du schéma de la balance (modèle pseudo-concret)
- en introduisant directement le langage formel (modèle algébrique)

Cette recherche a mis en évidence que la congruence recherchée dans les différentes étapes de la modélisation entraînait chez les élèves une routinisation de la technologie de résolution, au sens de Chevallard, alors qu'une introduction directe du modèle théorique des équations semble privilégier le raccourci technique de résolution : « je passe de l'autre côté et je change de signe », qui peut être dénaturé par la suite et donner lieu à des changements de signe abusifs. Ce résultat est à nuancer car l'usage de la balance peut entraîner une « dénaturation simplificatrice », c'est-à-dire que certains élèves peuvent se contenter de ce référent en évacuant le contenu mathématique des équations. Ou au contraire, le recours à la balance semble être un frein car certains élèves peuvent « anticiper » le contrat didactique et/ou disciplinaire et résoudre les problèmes posés, malgré le contexte concret de la balance, en passant directement dans le cadre algébrique.

1.4 La symétrie fait partie de notre réalité

Dans ce travail de thèse, nous avons choisi de nous concentrer sur un concept mathématique présent dans notre environnement du quotidien, au fort pouvoir d'évocation. Il est clair que le concept de symétrie est omniprésent dans les mathématiques, à l'école (de l'école primaire à l'université) et est une composante culturelle de nombreuses sociétés. Il ne s'agit pas d'établir dans ce paragraphe un catalogue exhaustif de l'impact d'un tel concept. Nous invitons le lecteur à consulter certains ouvrages très éclairants à ce propos : Weyl (1952), Noel (1989), Bacry (2000), Dézarnaud Dandine & Al. (2007), ou encore l'article d'Alain Connes (2001).

[11] Dans ce travail de master, nous entendions par modélisation le processus de réalisation d'un modèle mathématique à partir d'une réalité sensible.

Tous ces ouvrages décrivent la complexité de ce concept d'un point de vue historique, esthétique, philosophique et mathématique. Précisons d'ores et déjà qu'il est délicat de dater ce concept, car on peut admettre son existence indépendamment de sa définition. De même, il est difficile de discuter de la paternité du terme *symétrie* dont l'étymologie renvoie à *sun* (« avec ») et *metron* (« mesure »), et dont on retrouve de nombreuses traces au cours de l'Histoire.
Nous avons donc supposé que nous n'avions nul besoin de convaincre le lecteur de l'omniprésence du concept de symétrie dans la *réalité*, et c'est pourquoi ce concept se situe au cœur de notre recherche. Notre motivation de départ porte sur les effets de ce concept, visible dans la réalité, sur l'apprentissage visé par l'enseignement des transformations du plan au collège. Nous nous intéressons donc à son évolution en tant que concept mathématique, dans le contexte du collège, mais aussi à son évolution et son impact au cours de l'enseignement et de l'apprentissage plus général des isométries du plan. Comme annoncé précédemment, la classe n'est pas un lieu hermétique, l'élève y entre avec ses propres représentations et conceptions. Qu'en est-il avec le concept de symétrie ?

La question de la réalité sur les apprentissages s'affine dans ce travail : quels sont les effets de la symétrie (axiale)[12] sur l'apprentissage des autres transformations du plan au collège ? La question se pose-t-elle en terme d'obstacle ou de levier ? Nous exposons dans le paragraphe suivant certains résultats obtenus dans des travaux de recherche didactiques et non didactiques, que nous avons choisis de présenter ici car ils annoncent nos premières hypothèses de recherche.

2. LA THESE DE LA SYMETRIE COMME MOTEUR DE DEVELOPPEMENT DE LA PENSEE EN GEOMETRIE

2.1 La thèse de Keller : la symétrie à l'origine des figures de référence

Les deux ouvrages de Keller (2004, 2006) : *Aux origines de la géométrie – le Paléolithique – le monde des chasseurs cueilleurs* et *Une archéologie de la géométrie : la figure et le monde : peuples paysans sans écriture et premières civilisations* relatent ce que Keller appelle l'histoire de la « gestation » de la géométrie depuis la préhistoire jusqu'à sa naissance, telle qu'on la connaît aujourd'hui, en Grèce Antique avec *Les Eléments* d'Euclide. Keller décrit les « germes de géométrie décelables dans l'activité humaine préhistorique » - bien sûr il existe d'autres types de géométrie avant les Grecs : celle des Babyloniens ou encore celle des Egyptiens, mais ce n'est pas notre propos. Nous évoquons dans ce paragraphe seulement l'une de ses thèses : la symétrie comme moteur dans l'action pour construire les objets géométriques de référence.

[12] Tout au long de cette thèse, nous entendons par symétrie, la symétrie axiale ou réflexion.

Keller analyse l'évolution des constructions des outils des hommes préhistoriques, et en particulier celle du biface (figure 1.1) :

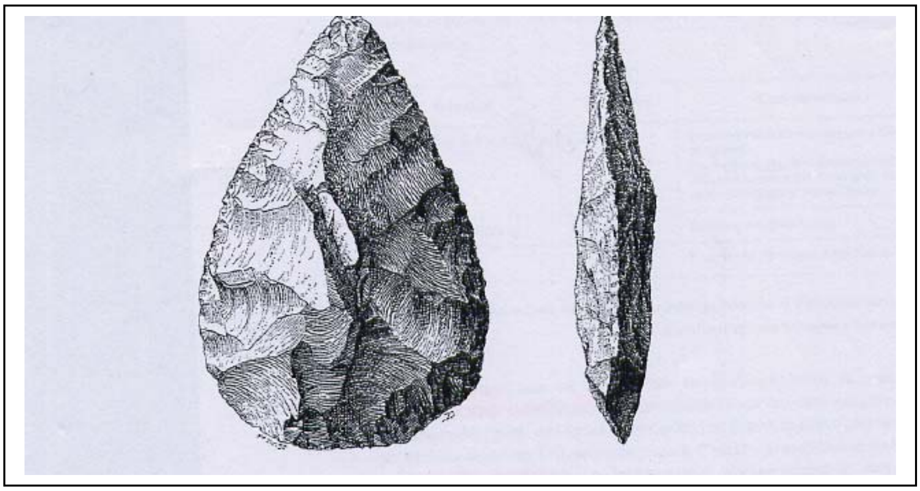


*Figure 1.1 : « Biface, avec ses deux plans de symétrie perpendiculaires» (*Keller, 2004, p. 10).

> « […] *dans un premier temps, on cherche à atteindre la régularité dans le contour du biface, comme aussi peut-être dans la surface des sphéroïdes, par enlèvements de plus en plus fins et par piquetage, c'est-à-dire au fond « point par point », petit coup par petit coup : on cherche une continuité de forme au moyen de gestes discontinus. Tout se passe ensuite comme si, une fois atteinte au mieux cette régularité par des gestes discontinus, on se décidait à mettre en accord le geste et la forme ; et l'on voit alors, au Paléolithique moyen, la technique Levallois produire automatiquement des côtés rectilignes de triangles, puis au Paléolithique supérieur, la technique laminaire produire d'un seul coup des lignes droites. Bien plus tard encore, au Néolithique, le polissage des tranchants de haches, puis des haches entières, met enfin complètement en accord la forme et le geste ; mais même là, le polissage n'est qu'une finition, il n'intervient qu'après le débitage bifacial classique « point par point » de l'outil».* (Ibidem, p. 89).

Keller décrit ainsi la structuration de l'espace de plus en plus organisée en formes géométriques dont le travail de taille de pierre commence en 3D (espace) puis s'affine en 2D (surfaces) et enfin en 1D (lignes). Les gestes s'organisent. « Le tailleur s'arrête, regarde son produit, réfléchit et dirige le geste suivant en fonction de l'image qu'il a en tête ; ce processus décrit par Elkin et Pétrequin montre bien que c'est l'image préalable qui dirige, et non le geste »[13]. Dans ce cas, cela nécessite des « représentants » symétriques en tant qu'images mentales, car le biface révèle une parfaite symétrie sur le plan vertical. Or, « copier » les symétries est « une affaire complexe : il faut d'abord être capable d'analyser abstraitement un objet donné, mettons le corps humain, c'est-à-dire de le séparer en deux sous-espaces de même grandeur par rapport à une ligne imaginaire qui joint le nez au nombril, et il faut ensuite reproduire plusieurs fois (de face et de profil) cette structure dans un autre contexte. On ne peut pas croire à la spontanéité de l'intelligence sous-jacente à ce comportement »[14]. Pourtant, cette proposition se discute d'après l'hypothèse de Boas d'une « transposition de la symétrie corporelle et des symétries naturelles » :

> *« Je suis tentée de prendre cette condition [le fait que nos gestes obéissent souvent à une symétrie*

[13] Keller, 2004, p. 89.
[14] Ibidem, p. 89.

> *gauche-droite et droite-gauche] pour l'une des causes fondamentales, d'importance égale à la vision de la symétrie du corps humain et de celui des animaux ; non que les motifs soient faits par la main droite et la main gauche, mais que la sensation des mouvements de droite et de gauche conduit à une sensation de symétrie ».* (Ibidem, p. 90).

Keller souligne la fréquence des symétries naturelles verticales. Il exhibe la surface structurée par des motifs qui peuvent être interprétés comme des composées de transformations qui sont l'expression de la recherche « obsessionnelle » de rythme, caractéristique de la pensée primitive. Une « jauge intellectuelle des grandeurs » est également nécessaire sous la forme de comparaison (prémices de la proportionnalité) et d'égalité pour permettre une organisation (ne serait-ce que pour tenir l'outil dans sa main). Apparaissent ainsi les premiers concepts dans l'action que l'on peut qualifier de prémices à la pensée géométrique. Cependant, Keller nuance ce type d'interprétation car « il s'agit d'un apprentissage cérébral, d'une base cognitive certainement indispensable pour une mutation ultérieure en concepts, mais d'un apprentissage seulement et dans un contexte technique bien précis […] un argument très solide en faveur de la non conceptualisation est que le travail était selon toute vraisemblance un processus silencieux »[15].

Dans son deuxième ouvrage, il poursuit son étude en proposant une analyse approfondie des mythes pour expliquer l'espace comme produit de plans de direction indépendante, et en particulier la construction des points cardinaux (Keller, 2006, p. 37). Ainsi, Keller met en évidence l'existence de symétries très sophistiquées apparues à partir d'un simple schème[16] de structuration de l'espace : « deux espaces séparés par une surface médiatisante »[17]. Les techniques de taille de pierre ont donné naissance à une décomposition de l'espace en surfaces et droites, et l'apparition de figures élémentaires qui a suivi suggère alors une géométrie implicite. D'après Keller, les symétries, dont l'existence est démontrée tout au long de ces deux ouvrages, sont « moteurs » de cette genèse et de cette évolution de la géométrie :

> « […] *de l'existence incontestable de ces symétries j'ai déduit l'existence à mon avis tout aussi incontestable, dès les temps paléolithiques, des figures de base : rectangles, cercles, segments de droites. On notera que, comme pour l'outillage lithique, si l'on décèle bien l'apparition des figures géométriques classiques planes, on ne constate rien du même ordre en dimension trois : pas de cube, pas de polyèdre en général, pas de pyramide, pas de sphère ».* (Ibidem, p. 216).

Les travaux de Keller mettent ainsi en évidence l'hypothèse que les symétries peuvent être des catalyseurs dans la progression de la pensée géométrique.

2.2 La symétrie est-elle vraiment à l'origine de tout ?

Le concept de symétrie se situe également au coeur de la pensée platonicienne dont la genèse des solides parfaits (figure 1.2) serait une résultante.

[15] Ibidem, p. 95.
[16] La définition de *schème* est donnée dans le chapitre 2, p. 44.
[17] Keller, 2004, p. 213.

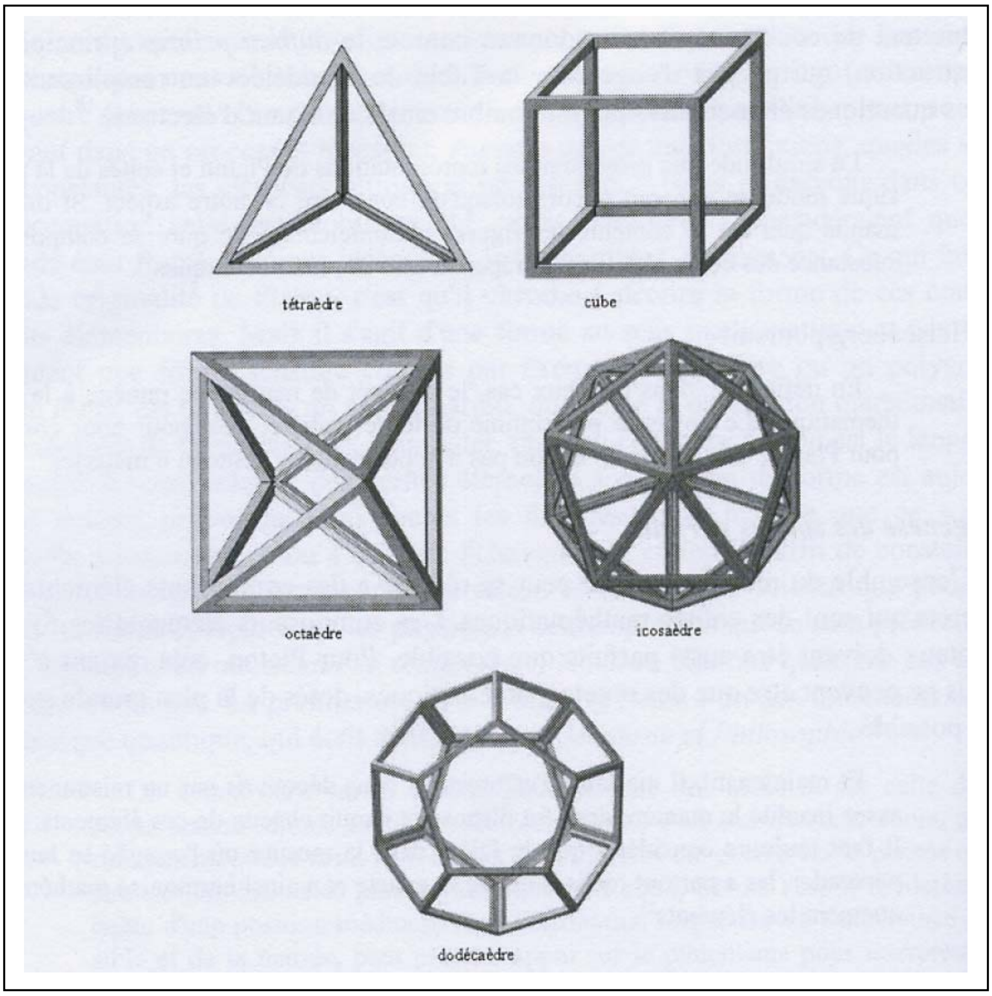


Figure 1.2 : « Les solides parfaits de Platon » (Dézarnaud Dandine & Al., 2007, p. 12).

D'après Platon, la symétrie permet d'approcher la connaissance vraie, l'*epistêmê,* contrairement à la *doxa* (l'opinion commune).

> *« La symétrie que définit Platon n'est pas limitée aux propriétés mathématiques des figures, des corps, elle est la trace, l'empreinte que le Démiurge* [le créateur] *a laissée lors de la création du monde. Uniquement soucieux du Bien, il a mis en notre âme la possibilité de sentir, d'approcher les formes éternelles, les Idées, par l'intermédiaire des mathématiques. Ainsi, la beauté, l'ordre, l'harmonie, la proportion, la justice, tout ce qui apparaît « avec mesure » relève de la symétrie et s'exprime en termes mathématiques* […] *l'ensemble du monde matériel peut se réduire à des composants élémentaires discrets qui sont des entités mathématiques. Ces composants élémentaires fondamentaux doivent être aussi parfaits que possible. Pour Platon, cela revient à dire qu'ils ne peuvent être que des objets mathématiques, dotés de la plus grande symétrie possible »*. (Dézarnaud Dandine & Al., 2007, pp. 8-11).

On retrouve ainsi la symétrie à l'origine de la construction des polyèdres « parfaits » de Platon.

Weyl (1952), dans son ouvrage dont le titre original est *Symmetry*, témoigne également du rôle originel que le concept de symétrie est supposé jouer :

> *« Avec Platon, je suis enclin à penser que l'idée mathématique est l'origine commune, dans les*

> *deux cas : les lois mathématiques qui gouvernent la nature sont l'origine de la symétrie dans la nature ; la représentation intuitive de l'idée mathématique dans l'esprit créateur de l'artiste est l'origine de la symétrie dans l'art ».* (Weyl, 1952, p. 16).

Ce point de vue, discutable, attribue alors à la symétrie un rôle fondateur de la réalité et du raisonnement. Outre le sens commun attribué à la symétrie qui évoque des proportions harmonieuses, « la symétrie bilatérale » définie par Weyl est une réflexion par rapport à un plan médian dans l'espace : un plan d'eau, un miroir. Soit P un plan, E une droite orthogonale au plan, alors pour tout point p de E il existe un unique point p' situé sur E et à égale distance de P. Weyl précise l'importance de l'adjectif « bilatérale » dans « symétrie bilatérale » en soulignant l'opposition gauche-droite ou droite-gauche d'un tel concept. D'après lui, cette dualité est « complètement lié[e] aux problèmes de la phylogenèse (développement des espèces) et de l'ontogenèse (développement de l'individu) »[18]. Et en effet, Piaget met en évidence le stade de **la recherche d'un axe vertical** comme repère de frontière ou plan médian (Piaget, 1977) dans le développement de la pensée chez l'enfant. Plus généralement, Weyl met en évidence le caractère fondateur et fondamental de **l'action de décomposer en deux parties égales** : du développement biologique (vivant et végétal) à la structuration de l'art, de l'architecture ou de la musique. Bien qu'il reconnaisse la gauche et la droite comme des « concepts relatifs »[19], il fixe cette bipolarité et la propriété de chiralité au cœur de la symétrie bilatérale qui se retrouve alors, d'après Weyl, moteur dans le développement de l'homme et de l'humanité.

Il évoque également **le lien privilégié entre la rotation et la symétrie** : « En raison de leur symétrie complète de rotation, le cercle du plan et la sphère étaient considérés par les Pythagoriciens comme les figures géométriques les plus parfaites »[20], et l'illustre notamment par de nombreux exemples, empruntés dans la nature ou dans l'art, de rotations qui sont également des réflexions : la symétrie hexagonale (rotation d'ordre 6) que l'on retrouve dans les cristaux, ou la rotation d'ordre 5 (l'étoile à cinq branches). Les rotations sans réflexions se retrouvent associées à des croyances nuisibles (comme la croix gammée). Weyl suggère ainsi, tout au long de son ouvrage, la fréquence culturelle, naturelle ou scientifique de la symétrie bilatérale (ou de la réflexion si on se situe en 3D), qui lui octroie presque un caractère de domination sur les autres transformations du plan. Il cite Aristophane dans *Le banquet* de Platon, qui décrit le passage de la symétrie sphérique à la symétrie bilatérale :

> *« A l'origine, dit-il, les hommes étaient ronds, avec quatre bras, quatre jambes, deux visages opposés l'un de l'autre et avançaient par un mouvement circulaire. Pour rabaisser leur orgueil et leur puissance, Jupiter les coupa en deux, de la manière que l'on coupe les œufs en deux parties égales. Et sur son ordre, Apollon fit tourner les visages et les organes génitaux du côté que la séparation avait été faite. C'est depuis que les hommes marchent droits, soutenus sur deux jambes seulement. Et, menaça Jupiter, si après cette punition, leur audace subsiste, je les fendrai de nouveau, et ils en seront réduits à sauter sur un seul pied ! »* (Ibidem, p. 36).

[18] Weyl, 1952, p. 46.
[19] Ibidem, p. 29.
[20] Ibidem, p. 14.

Cette légende fait écho à une autre, proposée par Keller dans son deuxième ouvrage, qui évoque le lien privilégié entre la symétrie axiale et les rotations, le mythe Bambara (Keller, 2006, p. 106).

Depuis, des ethnologues ont travaillé sur l'influence de la symétrie dans les sociétés[21], mais c'est plutôt la dualité *symétrie - brisure de symétrie* qui serait révélatrice, comme « support de sens culturel et symbolique »[22] tout autant que les dichotomies mathématiques : *continu-discret, fini-infini, local-global.*

Nous pourrions poursuivre cette réflexion en citant les travaux de Thompson (1917) et de son ouvrage *On Growth and Form,* dans lequel nous retrouverions cette idée, partagée par Weyl, que la symétrie, sous toutes ses formes et interprétations, a été un catalyseur dans le développement de l'homme, d'un point de vue ontogénique mais aussi culturel et philosophique.

C'est cet aspect « moteur » que nous souhaitions évoquer dans ce paragraphe à travers la thèse de Keller ou les points de vue plus ambitieux de Weyl. On peut alors transposer cette réflexion à propos de l'apprentissage scolaire : **la symétrie est-elle un catalyseur dans le développement de la pensée géométrique chez un élève de collège ?**

3. LA THESE DE LA SYMETRIE COMME OBSTACLE PERSPECTIF

Dans ce paragraphe, nous croisons les résultats de différents travaux en psychologie, principalement américains. Malgré certaines divergences théoriques et méthodologiques, tous s'accordent pour désigner la symétrie comme un facteur important de la perception. L'axe vertical médian de la symétrie bilatérale apparaît comme un stimulus très fort et va jusqu'à provoquer des « préférences » dans la perception qui inhiberaient d'autres phénomènes potentiels. D'autre part, l'orientation de la figure comme un facteur dominant et la recherche d'un repère orthogonal en guise de référentiel par rapport à la gravité semblent être des idées partagées (et que l'on retrouve chez Piaget (1947)). Certains auteurs s'accordent même à dire que notre système visuel « préfère » un système référent à la gravitation plutôt qu'à l'axe rétinien, et selon la correspondance des axes de symétrie d'une figure avec notre référentiel, la perception de la figure varie encore (Giaquinto, 2005). Certaines recherches supposent que notre système visuel (et cognitif) teste les différents axes de symétries potentiels. Mach, à la fin du XIX^{ème} siècle, présageait déjà l'idée d'une rotation mentale pour retrouver un axe vertical. Il est important de remarquer que certains chercheurs relèvent l'existence d'indices conflictuels : entre la perception rétinienne de la verticale, la gravité et le cadre du support (comme la feuille de papier) en allant jusqu'à l'idée qu'il existe des stimuli qui inhibent certaines alternatives perceptives (Rock, 2001).

21 Héritier F. (1996) *Masculin/Féminin la pensée de la différence,* Odile Jacob, Paris.
22 Lecourt, 1999, p. 897.

3.1 La symétrie : facteur non négligeable d'après les théories de la perception

Rock (2001), dans son ouvrage *La perception,* nous expose les différentes théories de la perception :
- la théorie de l'inférence (perspective empiriste) prétend que notre expérience passée nous permet d'interpréter nos sensations perceptives : « les sensations issues de nos sens sont des déclencheurs pour notre conscience, notre intelligence étant chargée de comprendre leur signification ».
- la théorie de la Gestalt (psychologie de la forme) défend la thèse qu'il existe des idées innées sur la forme, la taille, la couleur et les propriétés d'objets, et que c'est l'organisation de la figure décomposée en unités qui permet d'accéder à la perception.
- la théorie du stimulus (anciennement appelée approche psychophysique) stipule que « toute l'information nécessaire pour expliquer nos perceptions est présente dans l'environnement, attendant d'être prélevée par l'œil mobile d'un observateur »[23] ; par exemple la couleur s'explique par les longueurs d'ondes.
- la théorie du traitement de l'information décrit la perception comme des séquences de traitement de l'information sous forme de « computations » (que l'on peut assimiler à des « inférences »). L'ordinateur devient une métaphore de l'esprit (Marr, 1982).

Selon ces différents courants de pensée, on peut supposer que la symétrie n'est pas un facteur quelconque dans l'action de percevoir. En effet, la symétrie fait partie de notre environnement quotidien et donc de notre expérience première ; elle organise une figure en mettant en relation les éléments de celle-ci, et pourrait agir comme un stimulus au processus de traitement de l'information.

3.2 A la recherche de la verticalité et de l'orientation

Mach est le premier à pointer le rôle déterminant de l'axe vertical dans la perception à la fin du XIX^{ème} siècle. Il souligne, tout comme Weyl précédemment, le rôle déterminant du plan médian et de l'action de décomposer en deux parties égales (Corballis & Roldan, 1975). En 1936, Goldmeier montre expérimentalement que l'axe vertical est privilégié par rapport à l'axe horizontal (Rock & Leaman, 1963). Plus généralement, il met en évidence le rôle fondamental de l'orientation d'une figure, en particulier par rapport à la perception rétinienne ou par rapport à la gravité. L'expérimentation de Goldmeier montre que seules les figures dont l'axe de symétrie est vertical sont reconnues comme symétriques :

> *"Not only is symmetry more salient about a vertical axis, but it would seem that this is the only orientation in which a symmetrical figure will spontaneously be perceived as symmetrical. We have performed some preliminary experiments in which figures, symmetrical about one axis only, are shown in various orientations. Each is presented in only one orientation and it is assumed to be upright in space. The subjects are asked to report whether or not each figure appears symmetrical. For the most part only when the axis is vertical is a figure perceived as*

[23] Rock, 2001, pp. 12-14.

symmetrical”. (Rock & Leaman, 1963, p. 181).

Les résultats obtenus montrent que l’orientation verticale impliquée dans la symétrie bilatérale ne réfère pas à l’orientation rétinienne, ce qui, d’après les auteurs, s’oppose à la pensée de la Gestalt[24]. De manière générale, il semble que la position de la figure oriente notre manière de l’appréhender. Citons l’exemple connu de Mach en 1959 du carré-diamant (figure 1.3) et cité dans de nombreux travaux dont (Giaquinto, 2005, pp. 32-37), (Palmer, 1985, p. 68) et de nombreux travaux en didactique :

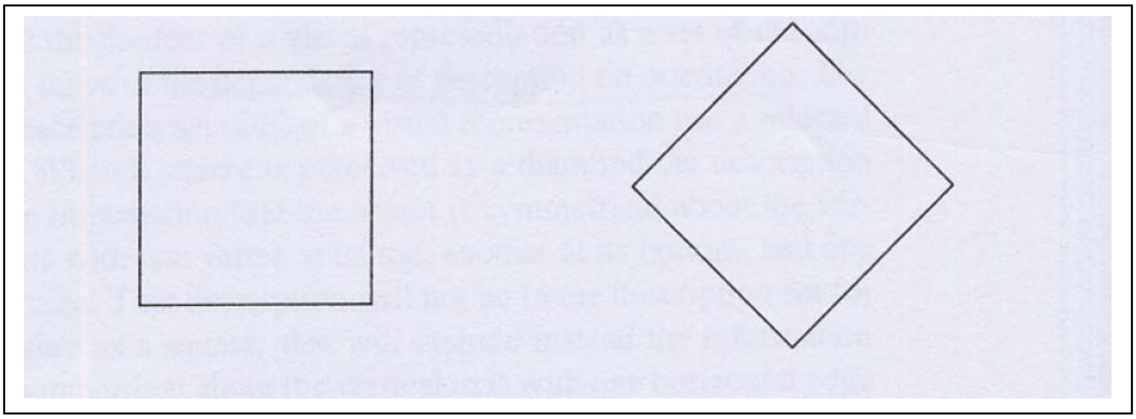
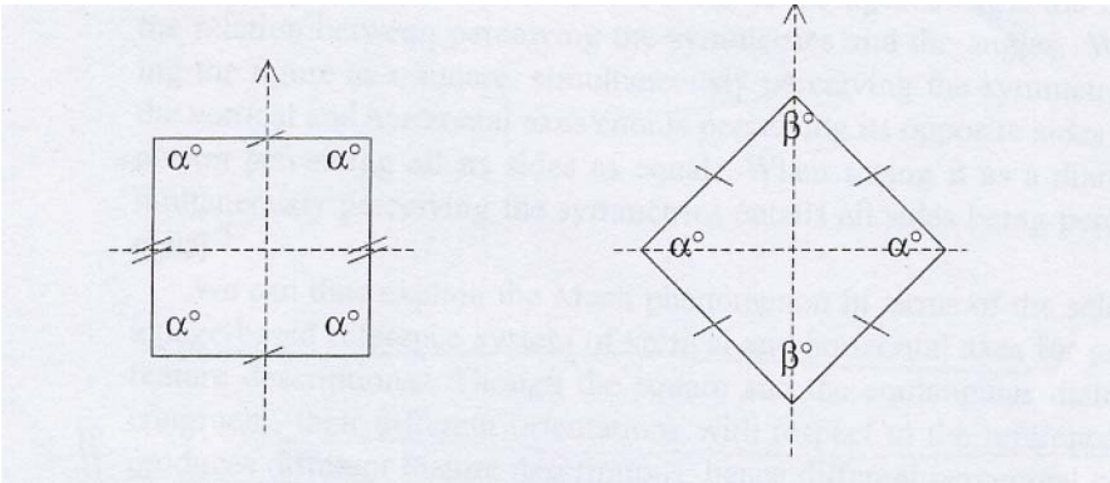


Figure 1.3 : la perception du carré-diamant (Giaquinto, 2005, p. 32.).

Un carré dont un des côtés est horizontal est perçu comme un carré, alors que si l’un de ses côtés forme un angle de 45° avec l’horizontale, ce même carré sera perçu comme un losange. Palmer et Giaquinto expliquent cet effet par la mise en évidence d’une paire d’axes de symétries dans les deux cas par rapport à la gravité (figure 1.4) : la figure est perçue comme un carré lorsque les médiatrices des côtés forment un repère orthogonal (dans le sens de la gravité sur la feuille de papier), alors que cette figure est perçue comme un losange lorsque les bissectrices des angles, que les sommets « saillants » mettent en évidence, forment un repère orthogonal par rapport à la gravité[25].

[24] “*Here we have shown that the vertical orientation that is implicated in symmetry does not refer to a retinal-cortical direction but to a phenomenal direction. This fact does not seem compatible with Gestalt thinking on the subject”*. (Rock & Leaman, 1963, pp. 181-182).

[25] *“The figure is seen as a square when its side-bisector axes are vertical and horizontal and as a diamond when its angle-bisector axes are vertical and horizontal : in these orientations the gravitational bias selectively reinforces one pair of frames and not the other”* (Palmer, 1985, p. 72).



<u>Figure 1.4</u> : hypothèse de la perception du carré-diamant (Giaquinto, 2005, p. 37).

Rock & Leaman (1963) reliaient déjà les effets de l'orientation de la figure à ceux de la symétrie, et à l'instar de Weyl, ces auteurs questionnent l'impact du schème propre à la symétrie bilatérale de décomposition en deux parties égales :

> *"We are, therefore, left with an intriguing problem. The impression of symmetry in visual perception seems to depend on seeing the objectively similar halves as « sides », i.e. left and right sides with the respect to a vertical axis.* […] *A clue to an understanding of our finding may be that in our environment the bottom and the top of objects are often functionally different, the former being the portion on which the object rests on the ground. On the other hand, the sides of objects are not functionally differentiated in this manner although, to be sure, they may be different from one another. In fact the sides of an object are reversed when it is rotated 180° about its vertical axis or when we come upon it in the opposite direction, thus pointing up the subjectivity of "left" and "right". There is nothing intrinsically "left" or "right" in external objects the way there is a bottom and top".* (Rock & Leaman, 1963, p. 182).

Par la suite, d'autres recherches en psychologie ont approfondi la question de l'orientation de l'axe de symétrie. Corballis & Roldan (1975) ont mis en évidence le lien entre la symétrie et la rotation dans l'action. Leur expérimentation s'inspire des idées de Mach à propos de la perception des symétries avec un axe horizontal : « by turning the figure round or by an intellectual act »[26], qui suppose donc un acte mental rotatif pour retrouver un axe vertical. L'expérience porte sur un petit groupe de personnes (quatre hommes et quatre femmes), lesquelles se retrouvent face à un écran, la tête droite face à une table à 0.85 mètre de distance. Sont projetées des figures symétriques (quatre-vingt seize projections au total dans le désordre) par rapport à un axe de direction variable (figure 1.5), ou bien des figures reproduites par translation de part et d'autre d'un axe.

[26] Corballis & Roldan, 1975, p. 222.

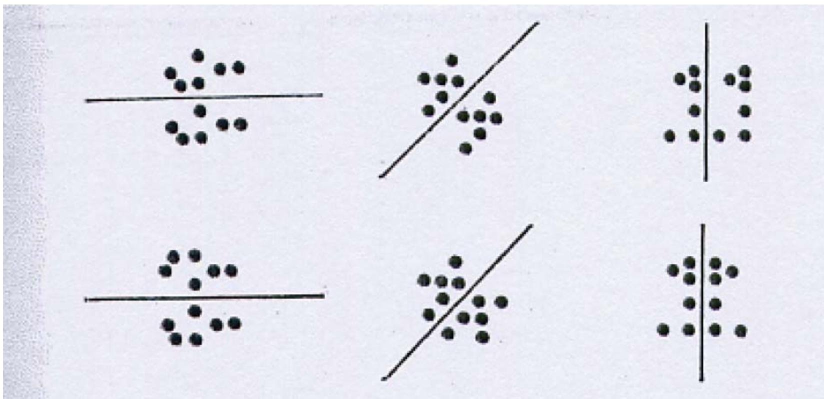


FIGURE 1. Examples of the patterns used in the three experiments, shown here as the photographic negatives of the originals.

Figure 1.5 : figures projetées lors de l'expérience de Corballis & Roldan (1975, p. 223).

On demande alors à ces personnes de reconnaître s'il s'agit d'une symétrie (ou pas), et le temps de réaction est mesuré. Les auteurs relèvent alors deux résultats significatifs : la réponse *oui* (c'est symétrique) est plus rapide que *non* (ce n'est pas symétrique), et le temps de réaction varie significativement en fonction de l'orientation de l'axe. Ces résultats sont cohérents avec l'idée que les sujets font tourner mentalement la figure avant de répondre :

> *"The orientation function is reasonably consistent with the notion that subjects mentally rotated the patterns to the vertical before making their judgments. Reaction time was shortest for vertical symmetry, longest for horizontal symmetry, and intermediate for symmetry about the obliques".* (Corballis & Roldan, 1975, p. 224).

Dans une deuxième expérimentation, huit autres hommes et femmes sont avertis de la direction de l'axe (car les motifs apparaissent dans un certain ordre selon l'orientation). Les résultats obtenus, significatifs, sont identiques à ceux de la première expérience. Les auteurs supposent ainsi que les sujets n'anticipent pas les rotations mentales malgré un temps de réaction plus court. Enfin, dans la dernière expérience, les sujets doivent toujours reconnaître des motifs symétriques (représentés dans le désordre comme dans l'expérience 1) mais sont autorisés cette fois à tourner la tête de 45°. Les résultats proposés montrent alors que les mouvements de la tête sont un facteur déterminant et que le temps de réaction est modulé selon l'orientation de l'axe de symétrie par rapport à l'axe de la rétine. Les auteurs de ces résultats situent ces derniers en opposition avec ceux proposés par Rock & Leaman en 1963, dont nous nous avons déjà discuté précédemment. Or, ces résultats ne semblent pas forcément en opposition, mais proposent seulement une autre interprétation possible, complémentaire :

> *"Insofar as they show that the orientation function was tied more closely to retinal than to gravitational coordinates, our results might be taken as further evidence for the theory developed by Mach (1897, 1898) and Julesz (1971) that the perception of symmetry depends on the structural symmetry of the visual system. However the results are also in opposition to those of Rock and Leaman (1963) and raise some general issues concerning the nature of the compensation for head tilt".* (Ibidem, p. 228).

Les auteurs nuancent pourtant ces résultats en suggérant qu'il est raisonnable de penser que chaque sujet recherche finalement son propre référentiel à travers un repère orthogonal où se définissent leur propre verticale et leur propre horizontale :

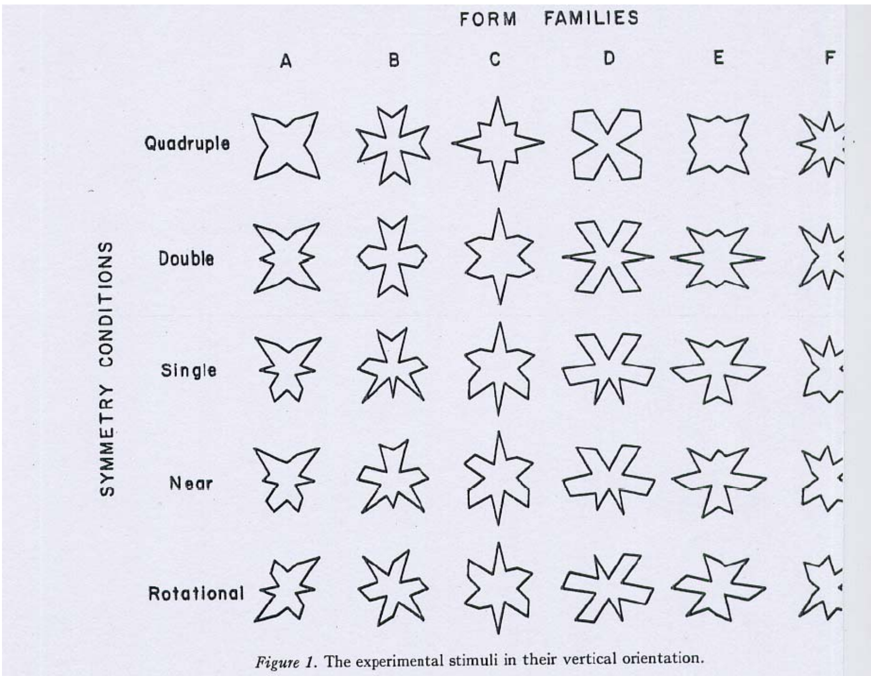
> *"It is convenient to suppose that orientation is actually perceived with reference to phenomenal coordinate system in which the observer establishes his own vertical and horizontal axes".* (Ibidem, p. 229).

Cependant, il reste toujours en suspens la question de l'appréhension originelle du concept de symétrie par un individu : est-il inné, ou issu de notre développement biologique, ou encore s'est-il construit au contact de notre environnement quotidien imprégné de symétrie ? Question à l'origine de nombre de ces travaux en psychologie.

> *"But even if we conclude that the template for detecting symmetry is embedded symmetrically in the brain, there must still be some question as to whether it is « built-in » or whether it is acquired through experience with symmetrical patterns in the everyday world. Rock and Leaman were undecided on this point. Julesz's theory of homotopic mapping implies that the mechanism is bult-in.* […] *Although one cannot rule out the possibility of a learned component, it seems likely that the detection of symmetry is primarily a product of evolution and depends on those very contingencies that have shaped the structural symmetry of the nervous system itself".* (Ibidem, p. 230).

3.3 « symmetry conditions »

Palmer & Hemenway (1978) ont également réalisé des expérimentations à partir de motifs symétriques mais à partir de formes polygonales (figure 1.6) classées selon différentes « symmetry conditions » afin de tester aussi le facteur de l'orientation.



<u>Figures 1.6</u> *: figures sous « symmetry conditions »* (Palmer & Hemenway, 1978, p. 692).

Leur résultat, qui corrobore plus ou moins ceux dont on a parlé précédemment, révèlent en particulier que les motifs « rotational » (qui correspondent aux motifs qui sont globalement invariants par symétrie centrale) ont été les plus longs à être repérés comme non symétriques. Ils supposent alors différentes hypothèses, dont en particulier celle que le sujet teste des axes de symétrie potentiels (en effectuant aussi des rotations mentales ?). En effet, les motifs de la catégorie « rotational » symétrie créent l'ambiguïté car ils possèdent deux parties opposées, semblables, qui donnent l'illusion d'un axe médian de symétrie et suggèrent le schème de décomposition en deux parties égales de la symétrie bilatérale :

> *"Perhaps the most likely is that the lack of an explicit line of symmetry in the present stimuli forced subjects to find a potential axis of symmetry prior to testing symmetry about it. In other words, without lines to cue the appropriate axis, a selection process may operate to pick out the most probable axis (or axes)* […] [about the rotational symmetry] *homologous parts on opposite sides give the impression of a possible axis of symmetry along the diameter connecting them (if the parts themselves are approximately symmetric) or perpendicular to that diameter.* […] the lack *of orientation effects for these stimuli is also consistent with this interpretation."* (Palmer & Hemenway, 1978, pp. 696-697).

Quelques années plus tard, Palmer (1985) développe plus généralement une « symmetry theory », qui propose certains principes de fonctionnement de la perception : les formes d'une figure sont perçues à partir de notre propre référentiel composé d'un système de coordonnées qui accorde alors une orientation à la figure observée. Le système visuel humain sélectionne un référentiel parmi d'autres possibles, ce qui implique donc « un choix » dans notre manière de percevoir. La symétrie (impliquant une invariance globale) autour d'un axe (2D ou 3D) devient alors un stimulus fort car les axes verticaux suggèrent un référentiel[27]. L'auteur mentionne l'existence d'autres facteurs non négligeables : le nombre ou l'espacement ou l'organisation ou encore les positions des axes ou les angles saillants[28]. Cette théorie est issue principalement d'études qualitatives qui stipulent seulement la présence de certains effets et non leur absence ni leur amplitude. Nous pouvons également signaler l'existence de travaux plus récents[29] qui ont porté sur la perception des formes chez les animaux, lesquels reconnaissent différentes symétries selon différentes positions dues aux invariances.

En conclusion, ces différents travaux en psychologie pointent les effets « possibles » du concept de symétrie sur la perception des figures. Les hypothèses envisagées, de nature cognitive, qui expliquent les processus opératoires de la perception semblent privilégier la thèse de la recherche d'un repère de type cartésien (la verticale dans le sens de la gravité) qui

[27] "*(1) People perceive at least some aspects of a figure's shape within a perceptual reference frame and its orientation in terms of that frame's orientation relative to some larger environmental frame.*
(2) The human visual system includes a unitary attentional mechanism which establishes a single reference frame at any one time by selecting one frame from among many competing alternatives.
(3) There is a strong bias toward selecting a frame oriented along an axis of reflectional symmetry, if one exists, and global symmetries bias frame selection more strongly than merely local one.
(4) There is also a general bias toward selecting environmentally vertical and horizontal frames rather than obliques ones, and these will prevail, all else being equal". (Palmer, 1985, p. 71).

[28] « intrinsic axes and frame effects » (Giaquinto, 2005).

[29] Enquist & Al.,1994, pp. 169-175.

permet d'attribuer une orientation à la figure. D'où le rôle accordé à la symétrie dans cette organisation : par exemple, la paire d'axes de symétrie (horizontale-verticale) suggère un repère cartésien qui donne une orientation particulière à la figure. Sont également évoqués les liens entre la rotation et la symétrie, dans l'action, pour tester les axes possibles de symétrie. Ainsi, d'après les différentes expérimentations présentées, il apparaît que **la symétrie oriente la manière de percevoir *contre* d'autres possibles.** Or, la perception est fondamentale dans le processus d'apprentissage comme nous l'étayerons par la suite. Donc, on peut supposer que la symétrie oriente aussi la manière d'apprendre.

4. APPORT DES TRAVAUX DE RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES SUR LA SYMETRIE AXIALE ET LES TRANSFORMATIONS DU PLAN

De nombreux travaux de recherche en didactique ont situé le concept de symétrie au cœur de leur recherche, impulsés par l'ambivalence socioculturelle et mathématique de ce concept, à travers des problématiques et donc des méthodologies différentes. Nous disposons de différents travaux qui rendent compte de la résistance de certaines conceptions familières (l'axe de symétrie vertical et le schème de bidécomposabilité) lors de l'enseignement et de l'apprentissage de la symétrie axiale (Grenier & Laborde, 1988, 1990) mais aussi de la symétrie centrale (Cassan, 1997). La question de l'impact du caractère socioculturel de la symétrie dans la sphère « école » est également abordée à travers la problématique de la transposition didactique (Tavignot, 1993).

4.1 Les conceptions des élèves : Grenier & Laborde (1988), Denys (1986), Lima (2006)

Grenier et Laborde ont d'abord travaillé sur les conceptions[30] des élèves (1988) de 11 à 15 ans (6^e à 3^e) du concept de symétrie, motivés également par la question de l'impact de son poids culturel sur l'enseignement et l'apprentissage d'un tel concept. L'objectif de leur expérimentation (1988) était de diagnostiquer l'état des conceptions des élèves avant et après l'enseignement sur la symétrie orthogonale, et de déterminer les variables qui ont entraîné des changements dans les stratégies des élèves. La tâche proposée aux élèves portait sur des constructions à main levée où sont en jeu des variables de position, d'orientation, de forme et de dimension de la figure par rapport à l'axe. Les conceptions initiales des élèves reconnues par les auteurs rejoignent les résultats des travaux en psychologie discutés précédemment :
- les seules droites de symétrie sont verticales
- les droites de symétrie sont les droites qui partagent la figure en deux parties identiques et disjointes.

[30] Conception au sens de Vergnaud, où une conception s'exprime en particulier sous la forme d'un ensemble des règles d'action mises en œuvre dans une classe de problèmes (Grenier, 1988, p. 2 in : Lima, 2006, p. 45).

Les auteurs ont également mis en évidence un certain nombre de conceptions de la 6e à la 3e dont certaines peuvent être résistantes :
- la conservation pour l'élève de la forme de l'objet (l'image d'un point est un point, l'image d'un segment est un segment de même longueur),
- la figure-image a la même direction que la figure-objet,
- la droite de symétrie matérialise sur la feuille deux demi-plans distincts, d'où des problèmes lorsque l'axe de symétrie coupe la figure,
- l'existence de « vraies » et « fausses » droites de symétrie.

Grenier (1990) a approfondi ces travaux en analysant un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale d'après le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998). La question de ce travail de recherche était « Peut-on élaborer une suite de situations-problèmes susceptibles de faire évoluer les connaissances des élèves sur la symétrie axiale avant l'enseignement vers la notion mathématique visée ? »[31]. Dans le but de déstabiliser les conceptions erronées des élèves, l'auteur construit des tâches rendant leur emploi inefficace et tendant à exploiter plutôt les propriétés d'orthogonalité, d'invariance point par point, et d'équidistance :
- la configuration renvoie à des figures pouvant être décomposées en deux parties identiques mais ne présentant pas de symétrie orthogonale, ou bien des figures pouvant avoir plusieurs axes de symétrie ou encore des figures admettant une « symétrie de rotation d'ordre 3 »
- la propriété du milieu étant largement privilégiée par les élèves, les tâches de construction avaient pour but de considérer l'aspect « transformation » de la symétrie axiale.
Ces tâches sont réalisées par groupes d'élèves puis la mise en commun est dirigée par le professeur. Grenier souligne alors la grande dépendance des élèves à la règle graduée (lorsqu'il leur est demandé une « construction précise »). Les élèves sont assujettis à leur volonté de mesurer, et sans leur règle graduée, ils ne peuvent rien construire. Grenier pointe ainsi un effet de contrat résistant, et rencontré par la suite dans de nombreuses autres recherches. Les conclusions de l'auteur insistent sur l'importance de l'orthogonalité, souvent implicite dans l'action des élèves (sous la notion d' « équilibre »). L'orthogonalité est au cœur du processus d'apprentissage de la symétrie axiale, voire en est révélatrice. Les propriétés d'incidence semblent camouflées par la propriété du milieu dont la prégnance amène à la considérer presque comme un obstacle. La propriété d'équidistance émerge très difficilement malgré le passage vers la médiatrice. L'auteur confirme la résistance du schème de décomposition en deux parties identiques et superposables par pliage comme contrôle jusqu'à la dernière séance d'enseignement. L'auteur pointe également la difficulté des élèves à réinvestir des procédures de construction point par point dans des figures plus complexes.

D'autres travaux ont fait progresser l'analyse des conceptions des élèves et leur origine sur le concept de symétrie. Denys (1986) par exemple a comparé des élèves japonais et français. Il a

[31] Grenier, 1990, p. 8.

alors montré que les élèves japonais dépassaient mieux les conceptions erronées. L'une de ses hypothèses est que les élèves japonais utilisent mieux la symétrie dans l'espace tout au long de l'enseignement. On peut alors s'interroger sur la spontanéité des figures symétriques « dans le plan ». Rappelons que Keller développe dans son ouvrage l'idée que la symétrie dans le plan a engendré l'apparition des figures géométriques de référence (le carré, le rectangle, etc.) mais n'a pas engendré des objets mathématiques de référence en 3D. De plus, on peut supposer que l'école entretient cette conception, car la symétrie axiale est surtout traitée dans le plan à l'école élémentaire et au collège. On peut même imaginer que travailler la symétrie dans l'espace permettrait à l'élève de dépasser certaines conceptions erronées, à l'instar des élèves japonais.

La thèse de Lima (2006) traite des choix didactiques des professeurs à partir des conceptions reconnues des élèves. Lima se situe dans une démarche expérimentale en 4^{e} afin de tester la résistance de certaines représentations. Nous mentionnons son travail ici car elle montre en particulier que tous les professeurs prônent un retour quasi-systématique à des référents naïfs comme le pliage ou le quadrillage. En effet, ce moyen de contrôle simple (lorsqu'il est possible) atteste de manière pragmatique l'existence de la symétrie. Et certains professeurs recourent au quadrillage pour permettre à l'élève de contrôler l'orthogonalité, de manière pragmatique également, ce que ne permet pas le pliage. Les élèves ont en effet recours de manière récurrente à leur conception familière de la symétrie comme un pliage, et de l'orthogonalité comme un « équilibre », ou « à la même hauteur » (ce qui a déjà été mentionné dans le travail de Grenier).

4.2 La transposition didactique : Tavignot (1993)

Tavignot traite également de la question de l'impact du poids culturel et familier d'un tel concept, mais en problématisant la question de la transposition didactique d'un tel concept dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard. En effet, « la transposition didactique caractérise le décalage entre les savoirs de référence (savoirs savant et culturel de société), le savoir à enseigner puis le savoir enseigné » (Tavignot, p. 258). Tavignot met au point une méthode d'analyse dite « tridimensionnelle » (dimension épistémologique, sociologique et psychologique) qui est supposée donner accès aux représentations des acteurs. Cette méthode repose sur l'étude des savoirs de référence et du savoir à enseigner (à travers les travaux de recherche en didactique, les programmes et commentaires, et des entretiens semi directifs de professeurs), les manuels scolaires et enfin les pratiques des professeurs (à travers des observations, entretiens et questionnaires).
Tavignot rappelle les conceptions initiales connues du concept de symétrie chez l'élève :

> « […] *la symétrie orthogonale est familière aux enfants par sa dimension socioculturelle, elle fait partie de leurs acquis en leur fournissant des références à partir d'une expérience extrascolaire. Mais elle peut leur évoquer deux significations, celle de la propriété du milieu qui privilégie l'axe de symétrie d'une figure, et celle de bilatéralité qui est associée à la bijection involutive du plan dans le plan* […] *leur première perception de la symétrie orthogonale est globale* ». (Tavignot,

1993, pp. 268-270).

Tavignot montre en particulier que la noosphère (dont la Commission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques - CoPREM - fait partie) suggère un enseignement « dynamique » avec des manipulations. L'accent est mis sur les effets de la symétrie et non sa définition « abstraite ». Les moyens physiques tels que le papier calque et le pliage sont à retenir comme moyens de contrôle. Puis, Tavignot relève les principaux aspects développés dans la progression du professeur (qui s'articule entre activités et cours) :
- la mise en évidence des propriétés suggérées par le programme et les commentaires
- le lien entre l'action de la symétrie orthogonale sur une figure et la présence d'un axe de symétrie dans une figure
- la présentation des méthodes de construction du symétrique d'un point

Des glissements apparaissent entre l'interprétation des programmes et la progression réalisée en classe, mais également entre ce que le professeur prépare et ce qu'il se passe en classe. Il existe également d'importants glissements entre le contenu des manuels et leur transformation par le professeur. Tavignot met notamment en évidence le fait que la légitimation en tant que savoir à enseigner et savoir enseigné est imposée par la valence mathématique de ce concept, alors que c'est par sa nature en tant qu'objet socioculturel que la noosphère avait décidé de l'introduire en tant que première transformation du plan, dès la 6^{e}.

4.3 La symétrie axiale et la symétrie centrale : Cassan (1997)

La démarche de Cassan est différente de celles présentées précédemment, car elle introduit la notion de centre de symétrie à partir de l'idée de demi-tour en classe de CM2. Puis elle compare les stratégies développées par les élèves de CM2 et ceux de 5^{e}. L'une des sous-questions de recherche de Cassan qui nous intéresse particulièrement est : « La forte institutionnalisation de la symétrie axiale en classe de sixième a-t-elle une influence et laquelle, pour l'étude de la symétrie centrale ? ». L'une des confusions connues par de nombreux professeurs se situe autour des tâches de construction entre la symétrie axiale et la symétrie centrale, ce qu'Artigue[32] appelle « **l'amalgame de notions sur un support donné** »[33].

Cassan mentionne alors d'autres formes d'ambiguïtés qui relient ces deux notions :
- la présence d'un centre et de deux axes orthogonaux de symétrie dans une même figure (ou plus)
- les deux sont appelées symétries
- ce sont des isométries involutives mais l'une est directe et l'autre indirecte.

Elle annonce ainsi la nécessité de « rompre avec la symétrie axiale pour présenter cette nouvelle transformation qu'est la symétrie centrale », d'où son choix de ne pas explorer la

[32] Artigue, 1990, p. 258.
[33] Cassan, 1997, p. 58.

conception « composée de symétrie » pour aborder le centre de symétrie dans son expérimentation.

Les premières observations des résultats, aussi bien en CM2 qu'en 5^{e}, montrent que le centre de symétrie est considéré comme « un point d'équilibre », obtenu par intersection de deux droites perpendiculaires, milieu d'un segment, ou point d'intersection de diagonales. « Les constructions s'appuient essentiellement sur des images de référence, culturelles et surtout scolaires, de figures admettant deux axes de symétrie ».

Une nouvelle tâche est alors formulée : « inventer une figure qui admette un centre de symétrie, mais pas d'axe de symétrie ». Apparaît la procédure suivante : « le choix d'une figure prototypique de base, admettant généralement deux axes de symétrie, puis la juxtaposition à cette figure d'un élément, et enfin la construction utilisant une procédure semi ponctuelle du symétrique de cet élément ». On trouve ainsi un indice important déjà suggéré dans l'étude des travaux américains : la nécessité de trouver une paire d'axes de symétrie, comme repère orthogonal pour développer la pensée géométrique de l'enfant.

Un autre des résultats importants de Cassan pour la suite de notre travail est que l'axe de symétrie apparaît comme un obstacle lors d'une tâche faisant intervenir le centre de symétrie, en particulier chez les élèves de 5^{e}, alors que les élèves de CM2 se rapportent à la conception de rotation. Cassan fait alors le lien entre ces résultats et les choix didactiques de l'institution :
« - la disparition des programmes de l'école élémentaire de toute transformation (isométrique) autre que la symétrie axiale,
- même remarque en 6^{e},
- l'introduction de la symétrie centrale en 5^{e} à partir ou toujours en relation avec la symétrie axiale ».

4.4 L'enseignement des transformations du plan : Bkouche (1992) Jahn (1998)

De manière plus générale, mais aussi plus engagée, Bkouche dépeint un portrait de l'enseignement actuel (contemporain à sa recherche) des transformations du plan : « les transformations y [dans les programmes] interviennent d'une façon détachée de toute signification géométrique » qu'il associe à l' « illusion langagière » et à « l'activisme pédagogique » que l'on retrouve à travers les « activités ». Il décrit l'état actuel des programmes comme « une caricature du Programme d'Erlangen de Félix Klein, comme à l'époque des mathématiques modernes, l'enseignement des mathématiques était une caricature de la théorie des ensembles et de l'axiomatique […] en outre, si la notion de transformation prend son sens géométrique à travers la notion d'invariants (ce qui ne change pas quand on transforme), il faut, pour que la notion de transformation soit consistante, que les invariants apparaissent d'une façon non triviale. Dire qu'un déplacement ne change pas la longueur d'un segment de droite est un truisme qui n'apprend rien sur la notion d'invariant ».

Il décrit les divers moyens par lesquels sont introduites les transformations que suggèrent les programmes (actuels de sa recherche) :
- par le mouvement : en particulier les translations et rotations. Cela permet alors de distinguer le « déplacement en tant que mouvement et le déplacement en tant que transformation isométrique »
- par des figures régulières (miroir, polygone, pavage) à partir desquelles le concept d'invariance peut être mis en évidence.
- la ressemblance de forme : les similitudes.

Bkouche reconstitue le parcours historique des transformations du plan pour amener à des considérations didactiques. Il suggère la problématique de la notion d'invariant pour reconsidérer l'enseignement des transformations, ce qui ne veut pas dire que la notion de groupe doit figurer dans les programmes, mais par exemple, il propose d'exhiber les transformations déformantes pour mettre en évidence les notions de transformations (et non pas seulement se limiter au terme de transformation comme passer d'un état initial à un état final) et d'invariance.

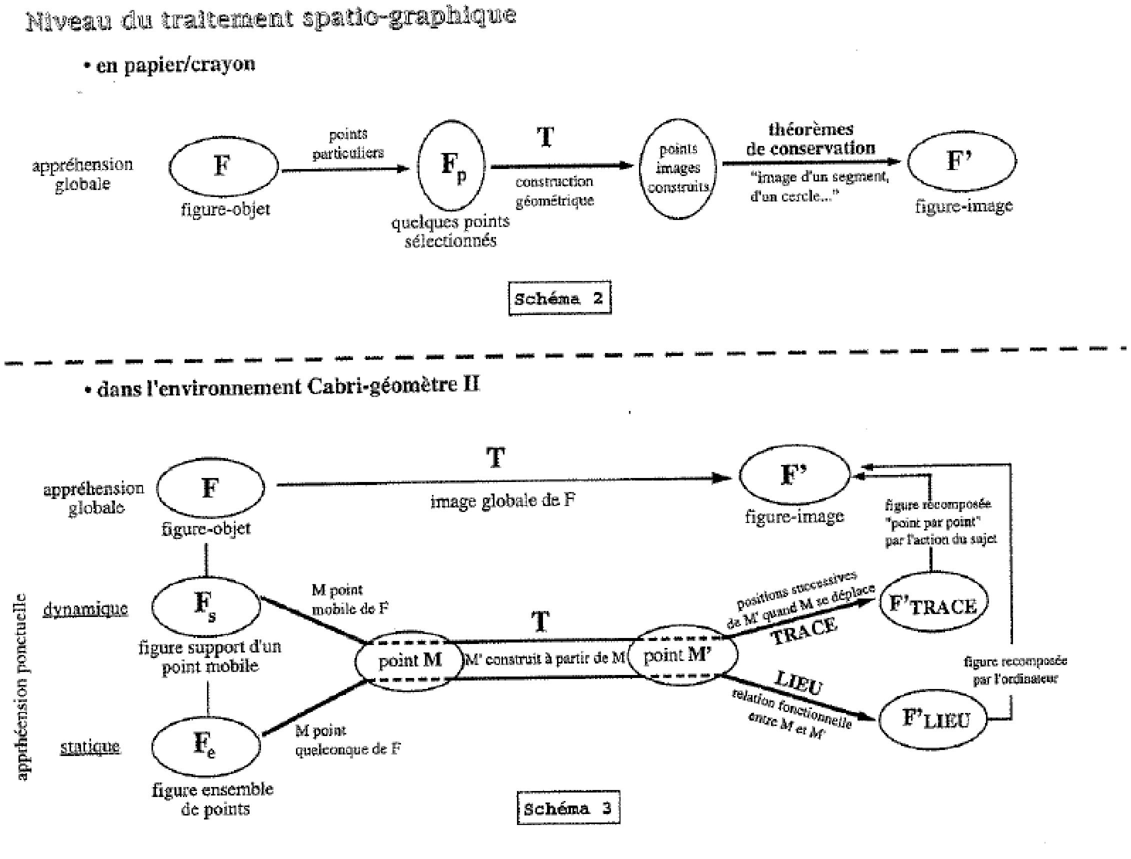
La thèse de Jahn concerne également les difficultés d'apprentissage des transformations du plan en classe de seconde. Nous avons choisi de relater ce travail, même s'il dépasse notre terrain d'exploration (le collège), car la seconde est une classe charnière entre le collège et le lycée. Jahn situe son travail autour de la dialectique global/pontuel que l'on retrouve autour du concept des transformations du plan (nous y reviendrons dans le chapitre 4). Elle propose une étude historique qui rend compte du passage des « transformations des figures aux transformations ponctuelles » et qui révèle **l'obstacle (épistémologique) à la conception ponctuelle, négligée par les programmes** : « le passage de la notion de transformation de figure à celle d'application ponctuelle ne relève pas d'une évolution : la notion d'application ponctuelle ne se dégage pas de façon progressive de celle de transformation, comme les programmes semblent le laisser supposer. Bien au contraire, il s'agit d'une rupture conceptuelle difficile que les élèves ne font pas spontanément »[34]. L'étude curriculaire que Jahn propose par la suite révèle alors que « l'introduction des isométries de base au collège peut apparaître comme un atout essentiel pour poursuivre au lycée l'étude des transformations. L'étude de manuels scolaires et de pratiques enseignantes montre au contraire que, faute d'avoir identifié clairement ces enjeux, l'obstacle de la ponctualisation est rapidement contourné par l'utilisation, explicite ou en actes, des théorèmes de conservation, permettant aux élèves de s'en tenir à l'appréhension globale de la géométrie synthétique. Le fait que ces transformations élémentaires n'interviennent pas dans les chapitres de géométrie analytique est significatif de ce contournement d'obstacle »[35]. Jahn parle d'une rupture collège/lycée car le concept de transformation est vu comme une application ponctuelle au collège d'un point de vue dynamique uniquement, alors qu'au lycée, la notation fonctionnelle

[34] Jahn, 1998, p. 69.
[35] Ibidem, p. 264.

permet de caractériser le concept de transformation explicitement comme une application ponctuelle. Jahn suppose alors que l'interprétation cinématique « point mobile sur une courbe », accompagnée du vocabulaire et des formulations associées à une interprétation dynamique, peut favoriser ce passage. Elle pointe notamment l'existence d'un vide didactique à l'entrée du lycée car un tel passage (des transformations des figures aux transformations ponctuelles) nécessite en particulier le cadre fonctionnel, qui n'est pas mis en place au moment de cet enseignement.

A partir de ses hypothèses, elle propose un schèma (document 1.7) qui synthétise le processus d'apprentissage de la notion de transformation géométrique et s'en inspire pour construire une expérimentation avec Cabri-Géomètre en classe de seconde, dans le but d'étudier comment ce passage global/ponctuel est pris en charge par l'enseignement, et quelles sont les conditions qui permettent de modifier le rapport d'un élève de seconde au concept de transformation.

Jahn montre alors que l'environnement de géométrie dynamique permet de faciliter la compréhension de « lieux géométriques » et participe à favoriser la ponctualisation des figures. De plus, il apparaît que les élèves se sont appropriés l'outil « trace » de Cabri-Géomètre II qui permet de « matérialiser de façon discrète » l'approche des figures. Jahn montre également qu' « il y a une amorce de la notion de variable, un premier niveau : le point peut être n'importe où sur la figure ».



Document 1.7 : « Niveau du traitement spatio-graphique » (Jahn, 1998, p. 136)

4.5 Apport de ces travaux dans notre réflexion

Certains de ces travaux pointent des problèmes didactiques liés au concept de symétrie, d'autres pointent des problèmes didactiques liés aux transformations en général. Dans un premier temps, on retrouve des conceptions résistantes chez les élèves du concept de symétrie axiale liées principalement à la verticalité et au schème de bidécomposabilité (en deux parties égales ou en deux plans distincts et superposables), qui font écho aux résistances perceptives signalées par les travaux en psychologie cités précédemment. On peut supposer que l'ancrage socioculturel d'un tel concept est un des facteurs qui entretient ces résistances.

D'autres travaux révèlent alors que les difficultés de transposition didactique d'un tel concept, dont l'organisation actuelle des programmes est une illustration, sont propices à générer des difficultés chez les élèves. Sont également évoquées les difficultés didactiques des autres transformations du plan, voire l'aspect artificiel de certaines institutionnalisations comme la conservation des formes, comme si cela allait de soi chez les élèves. De plus, certains vides didactiques apparaissent et sont liés à la négligence du passage global/ponctuel des figures en général et à la négligence du « passage des transformations des figures aux transformations ponctuelles » en particulier.

Notre travail consiste alors à croiser ces différents constats concernant la symétrie axiale et les autres transformations du plan. On revient alors sur nos questions de départ : **peut-on envisager le concept de symétrie comme un levier dans l'apprentissage des autres transformations du plan, ou au contraire comme un obstacle ? Peut-on relier les conceptions résistantes de la symétrie axiale des élèves aux difficultés didactiques rencontrées lors de l'enseignement des autres transformations du plan ? Ces difficultés, si elles existent, sont-elles inhérentes (et donc inéluctables ?) aux concepts de symétrie ou sont-elles liées à l'organisation actuelle des programmes qui concourent à ces difficultés ?**

5. REPERAGES HISTORIQUES DE L'EVOLUTION DU CONCEPT DE SYMETRIE

Piaget évoque une correspondance entre l'évolution historique et les stades individuels d'apprentissage. Dans son ouvrage *Psychogenèse et histoire des sciences*, il met en évidence des correspondances des stades du développement de l'individu avec l'évolution historique de la géométrie, comme expliqué dans le tableau 1.8 tiré de l'ouvrage de Keller :

Individuel	**Historique**	**Caractéristiques**
Intrafigural (≤ 8-9 ans)	Euclidien	Etude des relations internes entre éléments de figures. Pas d'espace, pas de transformations. Difficulté à concevoir l'invariance de l'aire après découpage et réorganisation.
Interfigural (≤ 11-12 ans)	Projectif	Relations entre les figures
Transfigural	Structures	Programme d'Erlangen (Félix Klein).

Tableau 1.8 : « Correspondance des stades d'apprentissage individuel et d'évolution historique » (Keller, 2004, p. 30).

Nous proposons trois moments cruciaux dans l'histoire des mathématiques qui illustrent ce découpage.

5.1 Les Eléments d'Euclide

Dans *Les Eléments* d'Euclide, on reconnaît le principe de coïncidence pour décrire le cas d'égalité des triangles :

> *« Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. »*[36] (Euclide, Livre I, axiome 4).

Le principe de superposition connaîtra ses succès tout au long de l'Histoire, et sera défendu en particulier par d'Alembert : « les propositions fondamentales [de la géométrie] peuvent être réduites à deux : la mesure des angles par les arcs de cercle, et le principe de superposition »[37]. Cette notion de superposition sera souvent associée à celle de mouvement et se retrouve ainsi au niveau 1 d'appréhension des figures de Piaget. En particulier, « l'usage de la superposition (ajustement « des choses ») peut être interprété comme étant d'ordre empirique car il s'appuie sur la coïncidence qui est avant tout le constat d'une observation ou issue d'un « critère sensible » (Vitrac, 1994). Ces propositions ou critères d'égalité des triangles sont à la fois d'ordre empirique et fondateurs de rationalité, car ils énoncent des conditions d'égalité qui vont permettre le développement déductif, en écartant ultérieurement l'utilisation effective de la superposition »[38].

5.2 La géométrie de Descartes

[36] Vitrac, 1994, p. 200.
[37] Bkouche, 1991, p. 137.
[38] Jahn, 1998, p. 25.

On assimile la genèse des transformations du plan au XVI^{ème} siècle à l'émergence des techniques de perspective sous l'égide de Desargues. Il met en exergue la transformation géométrique comme transfert de propriétés : « cet architecte et ingénieur lyonnais […] considère que le principe dont sont issues les techniques de dessin en perspective permet non seulement d'engendrer une configuration à partir d'une autre, mais également de transporter des propriétés de la configuration initiale à celle obtenue »[39]. Pascal et De La Hire généralisent alors les techniques projectives de Desargues et appliquent les transformations comme transfert de propriétés d'une configuration à une autre dans le cadre de la théorie des coniques[40]. Newton utilisera cette notion de transfert de propriétés accordée aux transformations pour simplifier certains problèmes liés aux coniques : « changer des figures en d'autres figures du même genre. […] A chaque point G de la figure, on construit un point g qui lui « répond ». […] et si on imagine que le point G parcourt d'un mouvement continu tous les points de la première figure, le point g parcourra de même, par un mouvement continu, tous les points de la nouvelle figure ».[41]

La symétrie est vue comme objet mathématique en tant que transformation du plan dans le plan à la suite de l'émergence de la géométrie analytique avec Descartes, au XVII^{ème} siècle. Descartes engage le formalisme algébrique (impulsé par le calcul littéral de Viète à la fin du XVI^{ème} siècle) pour décrire les objets de la géométrie. Apparaissent le repérage par coordonnées (dont Fermat rend l'usage systématique) et les équations de droites et de plan. Descartes ouvre ainsi la voie à la géométrie analytique, et amène à considérer le plan comme un ensemble de points.

Comme décrit dans la thèse de Jahn, on assiste alors à un changement de point de vue, du global au ponctuel. On transcrit alors les problèmes géométriques en équations. Une transformation géométrique plane est par suite une bijection du plan dans le plan et, si elle conserve les distances, elle est une isométrie. Les isométries se caractérisent par les éléments qu'elles laissent invariants dans le plan (ou l'espace). Si les points fixes forment une droite, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à cette droite, tandis que la rotation admet un seul point fixe, et la translation (ou la symétrie glissée) aucun. La symétrie axiale est en particulier une bijection involutive, c'est-à-dire dont la réciproque est elle-même : $s = s^{-1}$ soit $s^2=id$.

Précisons qu'il est difficile de reconnaître la paternité du terme « symétrie » ou « symétrique » dans ce nouveau contexte algébrique.

> « […] *Certains commentateurs attribuent la paternité à Adrien Marie Legendre (1752-1833) dans ses écrits sur la géométrie. Suivant d'autres auteurs, nous serions tentés de voir son introduction systématique à partir des travaux d'algèbre d'Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) sur les fonctions symétriques, parus en 1771 dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences. *Louis Lagrange (1736-1813) dans son ouvrage majeur* Réflexions sur la résolution algébrique des équations, *paru en 1770, emploie souvent le terme « symétrie » ». (*Dezarnaud Dandine & Al., 2007, p. 230).

[39] Ibidem, p. 33.
[40] Ibidem, p. 52.
[41] Ibidem, p. 39.

5.3 Le programme d'Erlangen

C'est à travers la recherche des racines de polynômes que Galois développera les bases de la théorie des groupes, au XIX^{ème} siècle. Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition qui vérifie l'associativité, et admet un élément inverse et un élément neutre. S'opère une extension de la signification du concept de symétrie. Nous dépassons sa caractérisation purement géométrique. L'ensemble des isométries muni de la loi de composition est un groupe.

Citons pour illustrer notre propos Christian Houzel qui, lors d'un entretien radiophonique, répond à la question « à quel moment la symétrie devient-elle un concept mathématique ? » :

> *« Ce n'est pas du tout venu de la géométrie comme on aurait pu le penser. Cela n'est pas venu non plus d'autres domaines où l'on trouve naturellement des symétries. C'est essentiellement venu de l'algèbre. On s'est intéressé vers la fin du XVIII^{ème} siècle à la structure des équations algébriques, c'est-à-dire d'un polynôme à une inconnue égale à 0. On le fait en transformant l'équation en une plus simple, et la structure des transformations possibles se reflète dans les propriétés de symétries des racines de l'équation. Une équation dont le degré est n, a n racines réelles ou complexes.* […] *Mais ces n racines ont des propriétés de symétrie, elles peuvent s'échanger entre elles, se permuter.* […] *Cela dépend des coefficients de l'équation.* […] *Ensuite, au XIX^{ème} siècle, le très célèbre mathématicien français Evariste Galois,* […] *a, de façon profondément lucide, compris la nature de cette théorie des équations en associant à chacune d'elles un certain ensemble de permutations des racines, qu'il a appelé le groupe. Le groupe de permutations est l'ensemble de toutes les substitutions des racines permises, ces substitutions pouvant se composer les unes aux autres.*[…] *C'est seulement vers 1870, avec le traité des substitutions de Camille Jordan, que ces idées de la théorie des groupes ont été pleinement admises et répandues. En même temps, Jordan a fait le lien entre l'espace géométrique et les transformations géométriques ».* (Noel, 1989, p. 20).

En 1872, Félix Klein propose un programme de recherche, connu sous le nom du programme d'Erlangen (du nom de l'université), dans lequel il resitue les nouvelles géométries émergentes (dont la géométrie hyperbolique, géométrie projective, etc.) à partir de la notion de symétrie et de ses critères d'invariance par l'action de groupe : « il expliquait une géométrie comme étant la théorie des propriétés qui restent invariantes par un certain groupe d'opérations, groupe au sens de Galois »[42], groupe qu'il appelle « groupe principal ».

Le développement de *la pensée axiomatique* par Hilbert, au début du XX^{ème} siècle, permet également de comprendre différemment les nouvelles géométries dites non-euclidiennes où se redéfinit encore le concept de symétrie.

En 1918, le théorème de Noether fige alors le caractère fondateur de la symétrie, au cœur des sciences. Son théorème exprime l'équivalence qui existe entre les lois de conservation et l'invariance des lois physiques qui concerne certaines transformations[43] (encore appelées

---

[42] Noel, 1989, p. 22.
[43] Dézarnaud Dandine & Al., 2007, p. 286.

symétries, ce qui confirme la polysémie de ce terme ne serait-ce qu'au sein des mathématiques).

Ce repérage historique nous a permis d'entrevoir la construction complexe du concept de symétrie au cours de l'Histoire et comment il s'est adapté à la progression de la pensée mathématique. Van Fraasen soutient même que « les trois concepts de relation d'équivalence, de partition et de groupe de transformations reviennent en réalité à un seul et même concept »[44], mais nous préférons clore maintenant ce débat qui dépasse l'objet de notre recherche. Citons Tavignot (1993) pour résumer les différents niveaux d'appréhension du concept de symétrie, qui rejoint l'idée du parallèle donné en début de paragraphe entre le développement chez un individu et l'histoire des sciences proposée par Piaget :

> *« - premier niveau : les transformations sont appréhendées comme une relation entre deux configurations géométriques ou comme une relation entre deux parties d'une même configuration géométrique.* […]
>
> *- deuxième niveau : les transformations sont appréhendées comme une application de l'ensemble des points du plan dans lui-même, il y a homogénéisation du plan. La symétrie orthogonale se définit comme une bijection involutive du plan dans le plan conservant les distances, les angles, les aires, le parallélisme, l'orthogonalité et l'alignement des points, mais changeant l'orientation des angles, et possédant des points invariants ceux de l'axe de symétrie.* […]
>
> *- troisième niveau : les transformations mettent en évidence des invariants.* […] *Ce niveau inclut les deux autres ».* (Tavignot, 1993, p. 267).

Jahn ajoute un quatrième niveau :

> *- quatrième niveau : « la transformation est considérée comme l'élément d'un groupe (les transformations se composent et se comparent, elles forment des groupes de transformation. »* (Jahn, 1998, p. 60).

6. ECLAIRAGE CURRICULAIRE DE L'ENSEIGNEMENT DES TRANSFORMATIONS DU PLAN AU COLLEGE

Ce sont ces différents « stades » de Piaget, décrits sous forme de niveaux dans les différents travaux mentionnés ici (Grenier, Laborde, Tavignot), qui ont inspiré les concepteurs des programmes dans les années 80. Rappelons les niveaux d'appréhension d'un point de vue général :

> *« - niveau 1 : comme une relation entre deux configurations géométriques ou une relation entre deux parties d'une même configuration ; à ce niveau, le caractère fonctionnel de la transformation est absent ;*
>
> *- niveau 2 : comme une application de l'ensemble des points du plan dans lui-même ;*
>
> *- niveau 3 : comme un outil fonctionnel à des fins de mise en évidence d'invariants. »* (Grenier & Laborde, 1988, p. 66).

[44] Lecourt, 1999, p. 897.

L'enseignement des transformations du plan au collège a connu un tournant lors de la réforme Chevènement, en 1985, que Tavignot situe au cœur de sa thèse. Dans les programmes de 1971, les transformations du plan sont toutes enseignées en 3e, la symétrie orthogonale n'est alors qu'un cas particulier dans l'ensemble des isométries. Elle y est introduite à partir du Niveau 2 d'appréhension : transformations ponctuelles, homogénéisation du plan, bijection involutive du plan dans le plan, voire niveau 3 pour repérer les éléments invariants de la figure. En 1978, la symétrie axiale est enseignée en 4e. Et enfin, en 1985, les transformations se sont retrouvées isolées à chaque niveau scolaire. La symétrie axiale est enseignée dès la 6e, ce qui est toujours le cas jusqu'en 2007. C'est alors le niveau 1 qui est privilégié en 6e, vu comme une relation entre deux figures ou relations entre deux parties d'une même figure. La symétrie orthogonale n'est plus envisagée comme une bijection involutive du plan dans lui-même. La coprem (Tavignot, 1993, p. 271) suggère qu'« on doit s'attacher aux effets de la symétrie et non à une définition abstraite comme une application du plan dans le plan ». Tavignot souligne la particularité des programmes à employer le terme de « symétrie axiale », ce qui met l'accent sur l'axe, alors que le terme « symétrie orthogonale » met en évidence l'importance de l'orthogonalité (Grenier montra en 1988 que cette notion faisait largement défaut dans les conceptions des élèves), mais les programmes de 2007-2008[45] semblent engager la voie pour améliorer cette qualification car ils mentionnent la « symétrie orthogonale autour d'un axe ». La géométrie analytique est enseignée dès la 4e, mais le lien entre la symétrie axiale et les transformations du plan n'est pas fait au collège malgré l'objet fonction introduit en 3e. La symétrie y est vue comme une notion pratique dont le pliage et le piquetage sont des moyens de contrôle ; il est clairement mentionné dans les programmes de ne pas donner de définition abstraite de niveaux 2 ou 3.

L'histoire des programmes depuis les années 70 rend compte d'une progression inverse à celle de la construction historique de ce concept. Au cours de l'histoire, la symétrie est d'abord instituée comme une connaissance pratique pour les arts ou l'architecture, puis elle ne deviendra un objet mathématique qu'à partir des transformations du plan, et enfin la théorie des invariants la situera au cœur de la pensée mathématique. Cette progression se retrouve dans les programmes actuels[46] qui affichent clairement une volonté de raisonnement empirique, dès le début du collège, à travers la manipulation pour exercer une « démarche scientifique » : « expérimentation », « raisonnement », « imagination », « critique », où l'activité mathématique se retrouve à travers « la résolution des problèmes » dont des « problèmes courants ». On retrouve la volonté d'introduire des activités, d'après une

[45] BO n°6 Hors-Série du 19 Avril 2007.

[46] « Les dispositions concernant les enseignements de mathématiques, de sciences de la vie et de la Terre et de physique-chimie figurant dans les arrêtés du 10 janvier 1997 et du 15 septembre 1998 sont abrogées à compter de la rentrée de l'année scolaire 2006-2007 pour la classe de cinquième et de la rentrée de l'année scolaire 2007-2008 pour la classe de quatrième ». Nous avons consulté les BO suivants :
- programme de 6e : BO n°5 Hors-Série du 9 septembre 2004, pp. 4-16.
- programme de 5e : BO n°5 Hors-Série du 25 août 2005, pp. 9-16.
- programme de 3e : BO n°10 Hors-Série du 15 octobre 1998, pp. 106-114.

tradition constructiviste, et d'assurer ainsi la continuité du passage de l'école élémentaire à l'école secondaire.

*6.1 En classe de 6^e^ et 5^e^*

En 6e, on cherche à compléter « la connaissance » et « la reconnaissance » de certains objets géométriques à travers les définitions et propriétés : triangle, rectangle, losange, cerf-volant, carré, cercle, etc. On cherche à faire passer l'élève « d'une reconnaissance perceptive à une connaissance plus analytique » : une première démarche fondamentale qui laisse présager du passage d'objet commun de la symétrie à sa conception mathématique en tant que transformation du plan à travers sa procédure de construction. Notamment, la symétrie épouse bien la volonté des programmes de passer par des éléments d' « architecture, œuvres d'art, éléments naturels, objets d'usage courant… ces mises en relation permettent peu à peu de dégager le caractère universel des objets géométriques par rapport à leurs diverses réalisations naturelles et artificielles ».
Ainsi, par le recours à la réalité suggéré dans les programmes actuels, notre problématique a donc du sens et un réel intérêt contemporain. Les programmes stipulent de travailler sur plusieurs niveaux que l'on peut interpréter comme étant : perception, reproduction et construction. On retrouve cette progression à propos de la symétrie orthogonale en 6e. Un travail expérimental (pliage, papier calque) permet d'obtenir un « inventaire abondant de figures simples à partir desquelles sont dégagées les propriétés de *conservation* (des distances, de l'alignement, des angles et des aires) ». Il est stipulé une « mise en jeu [de la symétrie] le plus fréquemment possible pour justifier les propriétés [des quadrilatères usuels] », les constructions de la médiatrice et de la bissectrice doivent être reliées à la symétrie axiale. Comme déjà mentionné lors de la réforme de 1985, « la symétrie axiale n'a, à aucun moment, à être présentée comme une application du plan dans lui-même ».

Les mêmes directives apparaissent en classe de 5e : la symétrie centrale permet de « réorganiser et de compléter les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés peuvent être démontrées ». En particulier, « la symétrie centrale permet de justifier des propriétés caractéristiques du parallélogramme ». La construction des quadrilatères usuels permet de revenir sur la symétrie axiale et les axes de symétrie. On retrouve l'utilisation de la symétrie axiale et centrale pour justifier des propriétés et des constructions, ces transformations oscillent alors entre un statut objet et outil (Douady, 1984). La symétrie centrale non plus n'a pas à être présentée comme une application du plan dans lui-même. Remarquons que les programmes ne stipulent pas un détachement de la symétrie axiale pour définir la symétrie centrale, mais au contraire sollicitent la symétrie axiale pour faire le lien.
Il est important de noter que l'un des objectifs du collège est d'amener l'élève vers un raisonnement déductif : « diverses activités de géométrie habituent les élève à expérimenter et à conjecturer, et permettent progressivement de s'entraîner à des justifications au moyen de courtes séquences déductives ».

*6.2 Généralisation en classe de 3^e^*

En classe de 3^e^, on poursuit cette perspective logico-déductive : « le travail demandé en géométrie, qui s'inscrit en complément, au moins partiel, de celui engagé précédemment (sur les configurations, les isométries), généralise des résultats antérieurs, tout en ouvrant un nouveau champ à la mise en œuvre de démonstrations ». La géométrie analytique est étudiée avec les vecteurs et donc la translation. On y préconise l'étude des composées de symétries centrales et de translations. En ce qui concerne l'étude des transformations, la rotation est la dernière des isométries enseignées au collège. De même que pour les autres transformations du plan, on suppose des activités expérimentales pour élaborer « un inventaire de figures à partir desquelles seront dégagées des propriétés d'une rotation (conservation des longueurs, des alignements, des angles, des aires) […] dans des pavages, on rencontrera des figures invariantes par rotation ». On insiste également sur la construction de l'image d'un objet géométrique de référence (point, segment, cercle) par une rotation. Cette fois, aucune censure n'est suggérée sur le terme de *transformation* ou *d'application du plan dans lui-même* ; au contraire, on parle de « vision des figures à celle du plan tout entier, […] préparer la distinction entre la transformation en tant que telle et des processus de construction. On rejoint implicitement le travail fait dans le domaine fonctionnel avec les transformations d'écritures littérales et les identités. » On assiste alors à une volonté institutionnelle de combler les vides didactiques pointées par Jahn.

6.3 Paradoxe des programmes ?

Les thèmes de convergence[47], nouvel objectif des programmes, proposent un rapprochement entre les sciences expérimentales et les mathématiques, qui présentent des analogies au niveau de la « démarche d'investigation […] démarche qui s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques) ». La question des obstacles et des représentations initiales est évoquée : « difficultés liées au vocabulaire courant et aux représentations préalables des élèves. […] Travailler sur leurs conceptions initiales […] le guidage par le professeur ne doit pas amener à occulter les conceptions initiales mais au contraire à faire naître le questionnement ». On retrouve alors une volonté clairement exprimée de référer à des démarches expérimentales tirées de notre réalité pour faire progresser l'élève vers la pensée mathématique alors que d'après les programmes, année par année, se dessine une volonté de détachement de la réalité dans une perspective de s'affirmer dans une description analytique et fonctionnelle.

Ces deux directions orthogonales mais non contradictoires se retrouvent au niveau de l'enseignement des transformations, en particulier concernant le concept de la symétrie qui supporte un certain nombre de manipulations (pliage, piquetage, pavage) mais dans le but d'être assimilé comme une transformation du plan dans le plan en fin de collège. D'autre part,

[47] APISP n°167 (bulletin d'information des professeurs d'initiation aux sciences physiques).

le rôle des transformations ne cesse d'osciller entre objets et outils, à partir d'un répertoire (limité) de figures géométriques[48]. De plus, la progression suggérée de l'enseignement des transformations est nivelée, voire cloisonnée, dans le but de participer à l'objectif du collège qui consiste à amener « progressivement » l'élève vers un raisonnement logico-déductif, et donc de le détacher d'une géométrie naturelle ou naïve. Or, ces basculements outils-objets (au sens de Douady) dont de nombreux travaux didactiques pointent les difficultés didactiques, cette progression linéaire et « artificielle » qui suit les niveaux d'appréhension (c'est-à-dire du niveau 1 de la superposition au niveau 3 de la description fonctionnelle et analytique) de la symétrie axiale, nourrissent nos interrogations sur son rôle dans l'apprentissage et l'enseignement des autres transformations du plan.
Nous terminons notre propos en citant quelques commentaires de Jean-Pierre Kahane issus de son rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en 2000[49] : « la minoration du rôle des invariants, l'abandon des cas d'égalité des triangles sont autant de points discutables, tant sur le plan mathématique que sur le plan didactique. […] Au-delà de cette connaissance familière s'inscrit une pratique plus proprement géométrique qui permet, elle aussi, de parfaire la connaissance de l'espace. […] l'étude des éléments de symétrie de ces objets [les solides] (en particulier la recherche des rotations qui la conservent) est importante à la fois pour leur représentation et pour la compréhension de leur mouvement. […] Avant la réforme des mathématiques modernes, les cas d'égalité et de similitude des triangles jouent un rôle essentiel, ainsi que les invariants (angles, longueurs). […] Le principe qui gouverne les programmes actuels est l'introduction progressive des transformations (en commençant par la symétrie axiale), sans utiliser les cas d'égalité et de similitude des triangles et en minorant le rôle des invariants (aire, angle) ». Il est proposé dans ce rapport un renforcement du rôle des invariants et de « réhabiliter » le cas d'isométrie des triangles (ce qui est le cas en seconde depuis 2000), c'est-à-dire ne pas évacuer le niveau 3 d'appréhension, dont le rôle « parallèle » dans l'histoire des mathématiques est crucial (programme de Félix Klein).

CONCLUSION

D'après les différents travaux relatés ici, le concept de symétrie peut se révéler être **un catalyseur dans la progression de la pensée géométrique** ou au contraire diriger notre perception *contre* d'autres interprétations possibles. D'après les différentes théories sur la perception, la reconnaissance d'une figure donnée passerait par la recherche d'un repère cartésien (correspondant à la gravité), or une paire d'axes de symétrie (horizontal et vertical par rapport à la gravité) constitue un repère orthogonal familier. L'orientation de la figure permet (dont des angles saillants de la figure) la mise en évidence de certains axes de symétrie qui détermine alors la perception d'une figure donnée par un individu. La recherche d'axes de

[48] Notons que ce processus est contraire à celui proposé par Keller dans la construction « pré-historique » des objets de référence en géométrie : il suppose que les symétries permettent d'aboutir aux figures de référence.
[49] http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/ (toujours disponible le 10/07/08)

symétrie apparaît comme un processus systématique dans la reconnaissance d'une figure, voire peut amener l'individu à effectuer une rotation mentale de la figure pour la positionner de manière idoine par rapport à un axe de symétrie verticale. **Ces travaux mettent ainsi en évidence le rôle important joué par la symétrie dans la perception. Or la perception est l'antichambre du processus de conceptualisation présent dans l'activité de l'élève[50] d'où notre volonté d'étudier le rôle supposé joué par la symétrie dès la perception**.

Les différents travaux en didactique mentionnés apportent de précieux renseignements sur les conceptions des élèves et leurs résistances, ainsi que sur les difficultés de transmission d'un tel concept. Leur méthodologie repose principalement sur les travaux d'élèves et les observations de classe, à un niveau donné. Ces travaux concordent avec les précédents mentionnés (Keller, Weyl et ceux sur la théorie de la perception), notamment sur la résistance de certaines conceptions chez des élèves de collège : *un axe de symétrie est vertical* (et réciproquement), *une figure décomposable en deux parties semblables est invariante par symétrie axiale*, *la symétrie conserve la forme*. La justification de certaines procédures passe par la reconnaissance de *vrais* et *faux* axes de symétrie, ce qui semble donc concorder avec la thèse du processus de reconnaissance d'une figure par des axes de symétrie énoncée dans les travaux en psychologie. Nous avons également mis en exergue, d'après certains travaux, les liens privilégiés entre la symétrie axiale et la rotation, en particulier dans l'action.
Cassan, Bkouche et Jahn amorcent notre interrogation sur le rôle de la symétrie axiale parmi les autres transformations du plan car ces auteurs pointent les difficultés didactiques liées à l'enseignement des transformations du plan. En particulier, la dialectique globale/ponctuelle et les concepts d'invariance et de conservation semblent négligés par l'institution scolaire alors qu'ils concourent à donner du sens mathématique au concept des transformations et donc en particulier au concept de la symétrie. Cassan propose l'existence de l'obstacle du concept de symétrie axiale dans l'apprentissage de la symétrie centrale.
Ces travaux didactiques pointent alors, de manière générale, l'existence de difficultés didactiques liées à l'enseignement des transformations du plan au collège, et notre travail a pour but d'éclairer l'origine de ces difficultés : **sont-elles liées au concept de symétrie lui-même, ou bien sont-elles des effets de l'enseignement ?**

Les programmes contemporains à notre étude semblent participer à l'existence de ces difficultés car les transformations sont enseignées de manière isolée tout au long du collège. La symétrie axiale est notamment enseignée en premier en 6^{e} afin d'assurer la continuité avec la géométrie pratique (et socioculturelle) de l'école élémentaire. L'organisation actuelle des programmes semble entretenir une *mathématisation verticale*, au sens où l'on prétexte une situation empruntée à la vie quotidienne pour faire émerger certaines propriétés des isométries, à travers notamment des activités introductives sur les conservations et les invariants. Alors que parallèlement, il est stipulé un détachement progressif d'une géométrie

[50] « on pourrait donc dire au fond de la perception, la conceptualisation » (Sensévy, 2007, p. 45)

naïve, en suivant la progression des niveaux d'appréhension de Piaget, calqués sur la construction historique de ce concept. Finalement, l'organisation de l'enseignement des transformations semble accorder une certaine « autorité » au concept de symétrie, dont la progression vers une géométrie plus formelle semble parfois artificielle.

Les questions plus spécifiques de notre travail seront développées dans les chapitres suivants, en particulier le chapitre 2, consacré à la construction de notre cadre théorique, et le chapitre 5, consacré à la méthodologie mise en place. Nos questions originelles sur le statut ambivalent du concept de symétrie semblent partagées par de nombreux auteurs dans différents champs de recherche. L'ascendant perceptif du concept de symétrie joue-t-il un rôle dans le développement du raisonnement géométrique visé par le collège ? En particulier, nous choisissons d'interroger les effets de la symétrie axiale lors de l'enseignement et l'apprentissage des autres transformations du plan, c'est-à-dire la symétrie centrale en 5^{e} et la rotation en 3^{e}. Les résultats des travaux précédents nous encouragent en particulier à interroger le rôle de l'école et ses effets sur l'enseignement du concept de symétrie et des transformations du plan. Notre problématique se distingue alors de ces travaux tout en les complétant. Elle appelle à une méthodologie plus longitudinale (tout au long du collège) et implique une exploration du côté des élèves mais aussi du côté des pratiques des enseignants. Notre travail se distingue également par notre cadre théorique, qui présente par conséquent une dimension cognitive et épistémologique, et qui est l'objet du chapitre 2.

CHAPITRE 2

CONSTRUCTION DU CADRE THEORIQUE

Résumé

Nous avons choisi d'étudier le concept de symétrie à travers son processus de conceptualisation opérant tout au long du collège lors de son apprentissage. La théorie des champs conceptuels de Vergnaud nous apporte une dimension cognitive pour analyser ce processus de conceptualisation. Ce choix nous amène à considérer l'apprentissage comme adaptation des schèmes. Le couple {schème, situation} se trouve alors au cœur de notre recherche. En effet, lors de l'apprentissage des autres transformations du plan, le concept de symétrie se reconstruit et s'adapte. Nous nous intéressons donc aux adaptations des invariants opératoires relatifs au concept de symétrie dans une classe de situation de référence tout au long du collège, mises en œuvre dans l'activité de l'élève. De plus, le cadre théorique des paradigmes géométriques et la notion d'Espace de Travail Géométrique (ETG) de Houdement et Kuzniak nous apportent alors un cadre qui prend en compte la nature du travail géométrique en jeu, dans une dimension épistémologique mais toujours lors d'une tâche réalisée par l'élève. Nous montrons dans ce chapitre comment nous articulons ces deux cadres à travers l'existence de la dialectique GI-GII et la mise en œuvre des schèmes d'action de l'élève lors de la construction de l'Espace de Travail Géométrique dans une situation qui donne du sens au concept de symétrie. Une telle articulation permet d'approcher la question de recherche centrale de ce travail, c'est-à-dire les effets du concept de symétrie dans l'apprentissage des autres transformations du plan tout au long du collège.

PLAN

Préliminaire… La symétrie est un concept.

Jusqu'à présent, nous avons cité plusieurs auteurs qui parlent du « concept de symétrie ». Justifions nous aussi l'emploi du mot *concept*, qui est un terme polysémique et récurrent. La plupart des définitions rencontrées reconnaissent un *concept* comme objet de connaissance alors que « idée » se ramène à l'objet directement. Un concept est vu comme « acte de conception »[1] (en latin, *consipere* signifie *saisir ensemble*). Aristote est le premier à définir un concept comme une entité, mais c'est Kant qui distinguera systématiquement concept et idée, et définit alors un concept comme n'étant « rien d'autre que ce que nous pensons d'un objet ». La notion de concept a été au cœur des préoccupations des philosophes des sciences car « le concept devient la garantie que l'on s'occupe de la science telle qu'elle se fait et non telle qu'elle est pensée dans la conscience scientifique »[2]. Les entités dont traitent les mathématiques ont « un caractère idéal et, à ce titre, paraissent appartenir au même domaine que les concepts. […] Il semble nécessaire de distinguer complètement les objets mathématiques (tels que les nombres, les fonctions, les espaces, etc.) des concepts au moyen desquels nous les caractérisons en décrivant les propriétés »[3]. Cependant, nous ne pouvons nous contenter de considérer la symétrie comme une propriété entre deux objets (qui revient au niveau 1 d'appréhension de Piaget). En effet, dans l'institution scolaire, la symétrie oscille en permanence entre outil et objet, et celle-ci se caractérise également par la géométrie des transformations ou encore par ses invariants (niveaux 2 et 3). D'après le philosophe contemporain américain Sellars, « les concepts impliquent toujours des lois sans lesquelles il seraient vides et indistinguables »[4]. Or la métaphore connue de la machine de l'économiste hongrois Polanyi précise : « la structure d'une machine ne peut être définie en fonction des lois qui la régissent »[5]. Vergnaud concilie ces différents points de vue à propos de l'apprentissage d'un concept car il décrit : « un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant »[6].

« Il convient de distinguer les concepts selon la sphère de pratiques au sein de laquelle ils sont élaborés et utilisés. Ainsi, il est possible de différencier les concepts scientifiques élaborés dans les disciplines de recherche, les concepts *scolaires* qui sont construits et travaillés dans l'espace scolaire, et enfin les concepts *quotidien* de la vie de tous les jours »[7]. La symétrie est un concept qui relève de ces différentes catégories. La problématique de recherche de Tavignot, dont nous avons déjà évoqué le travail, concerne la transposition didactique d'un tel

[1] Lecourt, 1999, p. 224.
[2] Ibidem.
[3] Encyclopaedia Universalis.
[4] Lecourt, 1999, p. 225.
[5] Hall, 1976, p. 89.
[6] Vergnaud, 1991, p. 135.
[7] Reuter & al. 2007, pp. 35-39.

concept, entre savoir à enseigner et savoir enseigné. La dualité concept scientifique - concept familier[8] se retrouve à ces deux niveaux, d'où la complexité de transposition d'un tel concept.

Gonseth précise : « les concepts ne doivent pas être conçus comme des contenus stables, auxquels est associée une définition immuable et précise. Les concepts sont plutôt à penser comme des outils cognitifs d'orientation qui rendent l'action possible »[9]. Ainsi, nous ne donnerons pas de définition univoque de la symétrie ni en tant que concept quotidien ni en tant que concept scolaire, car la symétrie est un concept polysémique et récurrent qui englobe un champ de concepts. Nous supposons donc qu'il convient d'étudier la symétrie en tant que concept et que son étude n'a de sens que lors de son processus de conceptualisation, autrement dit « en situation », ici dans le contexte scolaire, car nous adoptons le point de vue de Vergnaud : « au fond de l'action, la conceptualisation »[10].

1. LA THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS DE VERGNAUD

1.1 Définitions générales

La théorie des champs conceptuels de Vergnaud s'applique aux concepts scolaires. Les préoccupations de Vergnaud s'apparentent à celle de Piaget, « à savoir établir une description du savoir qui s'appuie sur la genèse des notions chez l'enfant »[11]. Piaget a travaillé sur l'intelligence et le développement chez l'enfant en mettant en évidence des stades dans le processus d'apprentissage. Vergnaud ne décrit pas d'acquisition des savoirs chez l'enfant dans un ordre prédéfini et s'est concentré sur les savoirs mathématiques scolaires :

> *« L'ordre de complexité croissante des notions acquises par l'enfant n'est d'ailleurs pas un ordre total ou linéaire, au sens où l'enfant devrait nécessairement acquérir la notion A, puis la notion B, puis la notion C, etc. C'est un ordre partiel ou à plusieurs branches, car des notions A et B peuvent fort bien être acquises indifféremment dans un ordre ou dans un autre, ou simultanément tout en étant elles-mêmes préalables à l'acquisition d'une autre notion C. »* (Ibidem, p. 66).

Il a notamment développé l'étude des structures additives et multiplicatives, dans laquelle il applique certains principes de son cadre théorique. Vergnaud place au cœur du processus de conceptualisation la notion de représentation du réel, dont l'étude est révélée à travers l'activité de l'élève. Il s'inspire de la notion de schème proposée par Piaget pour décrire l'organisation de la conduite d'un sujet dans une situation donnée. Avant de définir plus précisément cette notion de schème, revenons à la notion de concept amorcée dans le paragraphe précédent.

---

[8] Nous reviendrons en fin de chapitre à cette dichotomie Concept Quotidien / Concept Scientifique de Vygotski.
[9] Barbin, 1996, p. 269.
[10] Vergnaud, 1996.
[11] Brun, 2007, p. 66.

Vergnaud organise un concept selon trois critères (S, I, *S*) où S représente l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence), I est l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié), et *S* est l'ensemble des formes langagières ou non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) (Vergnaud 1991, p. 145). On retrouve dans cette définition de concept la dialectique fondamentale : signifiant / signifié de Saussure :

> *"[Saussure] defined the sign as a combination of two mental constructs, roughly translated as a « signified » together with its « signifier » (Saussure, 1959; Whitson, 1994, 1997). The signified might be, say, the idea of a tree (to use Saussure's example), and the "sound-image" of the word tree is then a signifier (Saussure, 1959, p. 67)."*[12] (Presmeg, 2006, p. 165).

Ainsi, tout élément présente deux versants dont l'un est accessible par son signifiant et l'autre relève de la conceptualisation :

> *« Tout signe est à double face, l'une perceptible qui est son signifiant et l'autre conceptuelle qui est son signifié. Signifiant et signifié sont des concepts, de sorte que, même s'il peut être tentant d'identifier le signifiant au signe lui-même, ils se distinguent l'un de l'autre par leur statut : le premier est idéal, le second matériel. En particulier, <u>le signe linguistique unit non une chose et un nom, mais un concept et une image acoustique.</u> »* (Grize, 1996, p. 32).

Dans le prolongement de Piaget, Vergnaud enrichit la notion de « schème » et définit le schème comme « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situation donnée. Le schème fonctionne comme un tout : c'est une totalité dynamique fonctionnelle, une sorte de module finalisé par l'intention du sujet et structuré par les moyens qu'il utilise pour atteindre son but »[13]. La notion de « situation » y apparaît fondamentale mais est employée dans le sens de tâche à résoudre sous des contraintes et un but donnés, plutôt que dans le sens donné dans la *Théorie des Situations Didactiques* de Brousseau. Dans le cadre de la théorie des champs conceptuels, les situations sont alors « source de variables didactiques qui permettent de générer des classes de situations »[14]. Le couple {schème, situation} devient ainsi fondamental dans l'étude de l'activité de l'élève.

On distingue quatre sortes d'éléments organisateurs constitutifs du schème :

- le but et les anticipations
- les règles d'action
- les invariants opératoires dont en particulier :

    ▪les concepts-en-acte : éléments ou notions qui peuvent être pertinents ou non pertinents, qui sont mis en jeu et se révèlent naturellement lors de l'activité mathématique

---

[12] « [Saussure] *définit le signe comme une combinaison de deux constructions mentales, globalement traduites ensemble par un signifié et son signifiant. Le signifié serait l'idée d'un arbre (si l'on se réfère à l'exemple de Saussure), et l'évocation son-image du mot arbre en est alors un signifiant ».*

[13] Vergnaud, 1991, 1994, 2007.

[14] Brousseau, 2007, p. 55.

observée. Leur fonction est d'abord une fonction de sélection : retenir de la situation présentée ce qui est nécessaire et suffisant à l'atteinte du but.

▪les théorèmes-en-acte : propositions tenues pour vraies sur le réel, qui sont vraies ou fausses, mises en place instinctivement, et suite aux interactions avec le milieu.

- les inférences (ou raisonnements) qui permettent de *calculer* les règles et les anticipations à partir des informations et du système d'invariants opératoires dont dispose le sujet (Vergnaud, 1991, 1994), (Merri, 2007).

L'étude des concepts et théorèmes-en-acte se révèle cruciale dans la description d'un schème dans une classe de situation donnée. **Leur organisation et leurs inférences décrivent les invariants opératoires qui constituent le schème**. Et l'étude des schèmes est révélatrice de l'apprentissage opérant. En effet, la définition de schème comprend la notion de familiarité et d'opportunisme. Les élèves ont à leur disposition un répertoire de schèmes « anciens », forgés par leur propre expérience antérieure à travers des situations variées. Vont alors se construire de nouveaux schèmes, à partir des anciens, mais adaptés à la nouvelle situation. On retrouve les principes fondamentaux de la pensée constructiviste.

> *« On retrouve ces deux idées dans le concept de schème, puisque celui-ci contient à la fois l'idée de familiarité (l'expérience, y compris celle des grands experts, repose en grande partie sur les situations rencontrées fréquemment), et celle de nouveauté (la possibilité de faire face à des situations nouvelles). Face à une situation nouvelle, en effet, nous ne sommes pas totalement démunis. Nous puisons des ressources dans notre répertoire de schèmes, faisant feu de tout bois, nous trompant souvent, produisant des erreurs qui, justement, résultent de l'inadéquation des schèmes évoqués. Puis, découvrant de nouveaux aspects, décombinant et recombinant des éléments de schèmes antérieurs, nous parvenons à une solution, au moins provisoire, plus ou moins pertinente, et locale.* […] *Les schèmes expriment bien les deux caractères fondamentaux de la pensée : systématique et opportuniste. C'est ce qui donne aux schèmes leur rôle central dans l'adaptation et le développement. »* (Vergnaud, 2007, pp. 27-28).

Plus généralement, nous adoptons la définition d'*apprentissage* vue comme « adaptation de schèmes », qui fait écho à la pensée piagétienne. Le processus de conceptualisation s'inscrit donc au cœur de l'apprentissage en général et donc de l'apprentissage scolaire.

> *« L'expérience et l'apprentissage sont adaptation. La connaissance est adaptation, nous disait déjà Piaget, et il précisait : assimilation et accommodation. Mais qu'est-ce qui s'adapte, et à quoi? Il est trop général de parler d'adaptation à l'environnement. Ce qui s'adapte ce sont des schèmes, et ils s'adaptent à des situations. Le couple schème-situation est donc le couple théorique central de la psychologie du développement et de l'apprentissage, de la didactique et de la pédagogie ».* (Vergnaud, 2001).

Nous distinguons apprentissage et enseignement : « c'est l'apprentissage qui implique une situation intentionnelle d'enseignement »[15]. Nous essaierons de ne pas créer d'ambiguïté quant à l'utilisation du mot « apprentissage », qui désigne selon le contexte le processus d'apprendre ou le résultat du processus d'avoir appris. De même, il existe l'apprentissage à court terme qui désigne un apprentissage visé dans une situation didactique (par exemple l'apprentissage de la symétrie axiale) et l'apprentissage à long terme qui désigne un contenu

[15] Reuter & Al., 2007, p. 17.

plus large, comme l'apprentissage des isométries qui concerne donc tout le collège et même au-delà[16] (Reuter & Al, 2007).
Etudier le champ conceptuel d'un concept donné consiste à étudier l'organisation et les inférences des invariants opératoires qui construisent le schème dans une classe de situation qui donne du sens au concept en question, pour une population donnée. L'étude du champ conceptuel comprend alors une description par schèmes, et donc il s'agit d'un cadre théorique adapté pour analyser les processus de l'apprentissage visé. Les signifiants des invariants opératoires, qui font également partie du schème puisqu'ils fonctionnent en dialectique avec le signifié (supporté par les concepts et théorèmes-en-acte), portent sur les traces écrites (production d'élèves) ou langagières (le discours qui accompagne), ou d'autres systèmes de signes. Etudier un champ conceptuel nécessite de décrire ce réseau en identifiant ces différents composants et leurs liens.

> *«* [Le] *champ conceptuel* [est] *un ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes-en-acte, en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter ».* (Vergnaud, 1994, p. 71).

Pour résumer, la théorie de champs conceptuels offre un cadre pour l'étude des phénomènes de conceptualisation. Le principe est de « considérer l'action du sujet en situation, et l'organisation de sa conduite. D'où l'importance accordée au concept de schème » (Ibidem, p. 167).

1.2 Apport méthodologico-théorique : décomposition du concept de symétrie

Nous nous intéressons à l'activité de l'élève autour du concept de symétrie. Nous nous intéressons notamment aux effets de ce concept sur les apprentissages postérieurs concernant les autres transformations du plan. Ainsi, d'après la théorie de Vergnaud, une entrée possible est l'étude des adaptations des schèmes des élèves en situation, qui donne du sens au concept de symétrie. Méthodologiquement parlant (le chapitre 5 est consacré à la méthodologie générale), il s'agit de décrire l'activité de l'élève en terme d'invariants opératoires, c'est-à-dire décrire leur organisation et leurs inférences à des moments cruciaux de l'apprentissage des isométries. Une telle approche nous accorde ainsi la perspective de pouvoir comparer la conduite des élèves à différents moments du collège en termes d'adaptations de schèmes (car, d'après ce que l'on a vu précédemment, ces dernières sont symptomatiques de l'apprentissage en cours).
Apportons maintenant quelques précisions sur certains points théoriques délicats dans le cadre de ce travail, en particulier concernant la détermination d'une « situation de référence », des « invariants opératoires » et des « schèmes ».

[16] Si nous ne précisons pas le terme d'« apprentissage » par la suite, c'est qu'il s'agit de l'apprentissage des transformations du plan (et donc soit sur le long soit sur le court terme).

a) La classe de situation de référence

Dans notre recherche, la classe de situation choisie comme « situation de référence » est la situation de reconnaissance des transformations du plan[17]. Nous avons privilégié ce type de situation car il s'agit d'une situation qui peut à la fois être familière pour l'élève et mettre en œuvre des connaissances nouvelles. L'élève est amené à reconnaître consciemment ou non des éléments de symétrie dans sa vie quotidienne. On reconnaît des éléments de symétrie axiale dans l'architecture, l'art ou dans d'autres éléments de notre environnement. De même, on peut reconnaître des éléments de rotation dans la vie quotidienne (cartes à jouer, rosaces de vitraux d'églises, cadrans de montres, etc.). En outre, la reconnaissance de transformations du plan (type symétrie ou rotation) est une des situations caractéristiques d'un élève de collège (d'après les programmes et les manuels scolaires), quel que soit le niveau scolaire de la 6^{e} à la 3^{e}, et fait intervenir leurs « nouvelles » conceptions de la symétrie axiale, la symétrie centrale et la rotation. Nous avons donc choisi d'étudier l'activité d'un élève dans cette classe de situation, qui constitue donc une situation de référence. Nous reviendrons sur les différentes stratégies possibles pour reconnaître une symétrie axiale, une symétrie centrale ou une rotation, dans les analyses des exercices proposés (chapitre 6).

b) les invariants opératoires

Nous souhaitons décrire la conduite des élèves en terme d'invariants opératoires relativement au concept des isométries, afin de mesurer les effets de la symétrie axiale dans les adaptations des schèmes, et donc de mesurer ses effets sur l'apprentissage visé. Mais comment reconnaître ces invariants opératoires à partir de l'activité observée des élèves ? Nous avons choisi de répertorier les composants mathématiques (signifiés) communs aux isométries concernées par notre étude (la symétrie axiale, la symétrie centrale et la rotation – nous justifierons dans le chapitre 5 p. 138 pourquoi nous avons écarté la translation), et qui sont *a priori* repérables dans l'activité des élèves (par des signifiants). Nous nous intéressons donc aux concepts mathématiques qui construisent la connaissance visée par l'enseignement des isométries. Ces composants ont déjà été évoqués à plusieurs reprises dans le chapitre 1 :
- le schème de **bidécomposabilité** : l'action de décomposer une figure en deux parties égales semble orienter aussi bien l'action des hommes préhistoriques que des élèves de collège. De nombreux travaux soulignent le poids de ce schème. On peut généraliser ce découpage en *n* parties égales, ce qui nous amène à considérer le concept de **permutation** et d'**orbite** qui participe à la construction de ce schème : nous verrons que l'élève décrit la trajectoire (et donc chaque position) d'une sous-figure sous l'action d'une rotation avant de revenir dans sa position initiale. Il s'agit bien d'un concept mathématique de niveau III (par la mise en

[17] Nous avons également traité d'autres types de situations que l'on peut considérer comme des situations de référence, comme la classe de situation de construction (*compléter une figure à l'aide d'une transformation donnée* ou bien *rédiger le programme de construction à partir d'une figure donnée*).

évidence des invariants) dont le signifiant relève pourtant d'une géométrie naturelle de position.
- le concept **d'invariance** et de **conservation** : ces concepts différents sont évoqués dans la construction historique et curriculaire du concept de symétrie. En particulier, d'un point de vue institutionnel, la conservation des figures est jugée « artificielle » d'après Bkouche, et le concept d'invariance inexploité d'après le rapport Kahane. Le principe de superposition est un signifiant opératoire récurrent de ces concepts, tout au long du collège et au-delà. L'axe ou le centre de symétrie d'une figure ou d'une configuration[18] sont des signifiants de l'invariance exploités dans l'action, car ils sont les seuls éléments fixes du plan et permettent de fixer le calque, ou de déterminer un repère de mesure.
- le concept d'**orientation** : d'après les travaux en psychologie évoqués dans le chapitre 1, ce concept est crucial dans la perception d'une figure. Au niveau du collège, on invoque souvent un plan orienté (plus ou moins implicite) et des vocables de position empruntés au sens commun : renverser, retourner, sens inverse, sens positif, négatif, etc. Le niveau de géométrie est également discutable (géométrie de position, géométrie analytique…)

D'après la construction historique et institutionnelle, mais aussi cognitive et didactique, du concept de symétrie (dont le chapitre 1 fait l'objet), il est clair que le concept de symétrie ne peut pas être considéré comme un tout de manière univoque : « il est nécessairement imbriqué à d'autres concepts et d'autres pensées, il fait partie de systèmes (au sens large), on qualifiera ces liens entre les concepts connexes de la symétrie des liens systémiques »[19]. Et, comme l'indique Vergnaud, « étudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens »[20]. Ainsi, ces différents concepts mathématiques, mentionnés précédemment, donnent du sens au concept de symétrie et constituent même les *observables* du concept de symétrie, dans un contexte didactique. On cherche à étudier l'organisation invariante de ces « observables » dans la conduite des élèves, dans différentes situations (toutes appartenant à la classe de situation de référence désignée) ; ce qui constitue donc dans notre travail les schèmes recherchés. Il apparaît nécessaire de présenter plus précisément ces observables et de fixer notamment les définitions mathématiques associées, car nous emploierons ces termes-ci pour décrire la conduite d'un élève. Nous proposons les définitions du tableau 2.1. Les définitions proposées sont issues d'une étude croisée de plusieurs dictionnaires et manuels de références indiqués en bibliographie. Les définitions mathématiques finalement retenues dans ce tableau sont celles qui semblent les plus proches du *signifié* (au sens de Saussure) des composants du concept des isométries reconnaissable au niveau du collège. Ces concepts sont disponibles à différents niveaux de géométrie (géométrie affine, affine euclidienne, théorie des groupes, etc.) et se retrouveront à différents niveaux d'appréhension dans l'activité des élèves.

[18] Nous entendons par configuration l'ensemble des figures proposées et le support graphique.
[19] Douek, 2003.
[20] Vergnaud, 1989-1990, pp. 51-69.

Il s'agit donc d'une première grille d'observables pour déterminer les invariants opératoires, du type concept et théorème-en-acte, dans l'activité de l'élève. Nous avons pour objectif de décrire leurs inférences et leurs adaptations dans une même situation de référence lors de l'apprentissage de la symétrie centrale (en 5e) et de la rotation (en 3e), afin de mettre en évidence l'adaptation des schèmes des élèves à ces différents moments et de mesurer ainsi les effets du concept de symétrie tout au long du collège.

<table>
<tr><th></th><th>Symétrie Axiale (SA)</th><th>Symétrie Centrale (SC)</th><th>Rotation</th></tr>
<tr><td>L'invariance</td><td colspan="3">L'ensemble des points de l'axe d'une symétrie axiale est invariant. Le centre d'une rotation est invariant.

Un élève peut reconnaître les effets d'une isométrie sur une figure globalement invariante. Certaines notions mathématiques peuvent alors être repérées dans la conduite de l'élève. Par exemple, dans le cas des figures dites « des rosaces » (pp. 134-136), l'élève peut décomposer la figure en un nombre fini de sous-figures Fi superposables. L'élève décrit alors la rotation comme étant la transformation qui permet de passer d'une sous-figure Fi à une sous-figure Fi+1 (superposables entre elles, on peut alors noter r(Fi)=Fi+1).
Cette description renvoie alors au concept d'orbite car l'élève décrit la trajectoire effectuée par une sous-figure avant de revenir en sa position initiale.

On infère de ce comportement la notion d'ordre car l'élève donne le nombre total de déplacements effectués par une sous-figure avant de revenir dans sa position initiale (et qui constitue donc l'orbite). L'élève décrit ainsi la transformation qui laisse globalement invariante la figure. Par exemple, la rotation reconnue par l'élève est d'ordre n si $r^n = id$ c'est-à-dire si pour toute sous-figure Fi (les sous-figures sont superposables entre elles) de F, on a $r^n(Fi) = Fi$ et si pour tout $0<m<n$ on a $r^m(Fi) = Fj, i \neq j$.
Notons que nous travaillons toujours avec des rotations d'angle de la forme π p/q.</td></tr>
<tr><td>La conservation</td><td colspan="3">Certaines propriétés sont dites conservées sous l'action d'une de ces transformations. Les isométries conservent l'alignement, les distances et les mesures d'angles, cela implique l'idée qu'il n'y a pas de déformations (il n'y a pas d'agrandissement ou de réduction de la figure).</td></tr>
</table>

	La conservation des dimensions et des formes implique alors la **superposition** ou la **coïncidence** (au sens d'Euclide) et conduit au concept plus général d'**égalité.** En revanche, **l'orientation** peut être différente pour deux figures isométriques dans un plan orienté $(O;\vec{i},\vec{j})$ donné. On distingue alors les déplacements et les antidéplacements. La symétrie axiale change l'orientation d'une figure contrairement à la rotation. On retrouve alors ce critère de reconnaissance dans la conduite des élèves.

Tableau 2.1 : décomposition en « signifiés » de la symétrie axiale, de la symétrie centrale et de la rotation dans le plan.

La théorie des champs conceptuels de Vergnaud supporte naturellement cette approche méthodologique du concept de symétrie sous la forme des concepts mathématiques connexes qui lui donnent du sens. On distinguera ceux que l'élève relève comme pertinents ou non dans une situation donnée (on retrouve la notion de concept-en-acte), et dont l'organisation va faire émerger des théorèmes-en-acte qui vont déterminer l'activité de l'élève. Les signifiants tels que les traces écrites de l'élève, le discours qui accompagne leurs tracés, les codages sur les figures géométriques et le langage rendent compte de cette organisation. Il est clair que tous ces concepts n'apparaissent pas sous la forme définie dans le tableau 2.1 dans l'enseignement secondaire. Par exemple, on sait d'après les manuels scolaires et les programmes que le concept de conservation est explicitement mentionné. Nous cherchons justement à étudier quels sont les concepts (parmi ceux cités dans le tableau) qui construisent les invariants opératoires des ETG personnels des élèves à différents niveaux du collège.

L'étude du champ conceptuel des isométries stipule l'étude de plusieurs situations, afin de faire émerger tous ces différents invariants opératoires qui donnent du sens au concept étudié. Vergnaud précise qu'« un concept ne prend pas sa signification dans une seule classe de situation, et une situation ne s'analyse pas à l'aide d'un seul concept »[21]. Dans notre travail, nous considérerons pourtant une seule classe de situation (celle de reconnaissance de transformation du plan) et plusieurs tâches issues de cette classe. Ce n'est donc pas une approche traditionnelle des champs conceptuels, au sens de Vergnaud. Notre étude revient à une étude « d'une partie » du champ conceptuel des isométries du plan enseignées au collège. Et c'est donc avec précaution que nous parlons de « champs conceptuels » et que nous employons les termes « une partie du champ conceptuel » ou « champ conceptuel partiel ».

[21] Vergnaud 1991, p. 167.

1.3 Reformulation des questions de recherche

Une de nos hypothèses de départ est que l'apprentissage des isométries, telles que la symétrie centrale et les rotations, implique dans une même situation la réorganisation et l'adaptation de certains invariants opératoires qui donnent du sens au concept de symétrie axiale. Le couple {schème, situation} rend alors compte du processus de conceptualisation en jeu lors de ces nouveaux apprentissages dont on se propose l'étude à travers l'étude d'une partie du champ conceptuel. Ceci nous conduit alors à la reformulation d'une de nos premières questions :

La symétrie opère-t-elle alors en tant que levier ou en tant qu'obstacle dans l'apprentissage de ces autres transformations du plan ?

La symétrie axiale pilote-t-elle l'organisation et les inférences des invariants opératoires des autres transformations du plan au collège ?

La mise en œuvre de la théorie des champs conceptuels dans le cas de la symétrie a déjà été évoquée par Vergnaud dans un article concernant la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance[22]. Vergnaud reconnaît lui-même la difficulté d'adaptation de sa théorie en géométrie du fait des divers types de géométrie qui coexistent :

> *« Le concept de champ conceptuel s'applique à la géométrie d'une manière un peu plus complexe qu'à l'arithmétique ou à l'algèbre élémentaire. La raison principale en est que les trois grands domaines d'expérience de l'espace dans lesquels la géométrie prend sa source sont profondément interdépendants :*
>
> *- la géométrie des figures*
> *- la géométrie des positions*
> *- la géométrie des transformations.*
>
> *Il est bien difficile de construire des situations et d'élaborer des exercices relevant de la géométrie des figures sans toucher en même temps la question des positions relatives et la question des transformations. De même, il n'y a pas de géométrie des transformations sans figures et sans positions »* (Vergnaud, 2001).

Malgré ces difficultés liées à la nature même du domaine mathématique qu'est la géométrie, et qui complexifient le choix d'une entrée par les situations, nous souhaitons analyser la nature de l'activité de l'élève à partir de l'approche cognitiviste de Vergnaud mais en la croisant avec un cadre plus spécifique à la nature du contenu en jeu, à travers le cadre théorique des paradigmes géométriques et de la nature de l'Espace de Travail Géométrique de Houdement et Kuzniak.

2. LES PARADIGMES GEOMETRIQUES ET LES ESPACES DE TRAVAIL GEOMETRIQUE

2.1 Définitions

Le cadre de Vergnaud nous permet de décrire le travail de l'élève d'un point de vue cognitif en situant l'activité de ce dernier au cœur du processus de conceptualisation. Le cadre proposé par Houdement et Kuzniak nous offre un cadre théorique pour décrire le travail de l'élève, mais cette fois d'un point de vue géométrique. Inspirés par la définition de paradigme selon Kuhn : « le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. […] Dans un deuxième sens, plus local, le mot désigne aussi les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants et aux étudiantes pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global »[23], et les travaux de Gonseth sur les différents modes de pensée tels que l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif ; Houdement et Kuzniak ont catégorisé

[22] Vergnaud, 2001.
[23] Kuzniak, 2006, p. 169.

ces modes de pensées selon des paradigmes dits géométriques, qui se caractérisent par leur rapport à la réalité.

> *« -* ***la géométrie I*** *ou « géométrie naturelle » a pour source de validation la réalité, le sensible.* […] *la géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas, comme par exemple des figures simples (cercles, carrés…). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. En ce sens, la géométrie d'Euclide n'est pas de la géométrie I.*
>
> ***- la géométrie II*** *ou « géométrie axiomatique naturelle » : dans cette géométrie, la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D'où la conservation du qualificatif naturelle ».*
>
> *-* ***la géométrie III*** *ou « géométrie axiomatique formaliste » : dans cette géométrie, qui naît à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible, et la primauté du raisonnement logique l'emporte.»* (Houdement & Kuzniak, 2006, pp. 180-181).

Nous éludons la Géométrie III dans ce travail, car elle ne concerne pas le collège ni la réalité. Cette catégorisation nous permet de considérer ainsi l'ambivalence du concept de symétrie que l'on peut traduire comme ayant une valence GI via sa conception plus familière, et une valence GII si l'on choisit de se placer dans un système logico-déductif telle que la géométrie d'Euclide.

S'ajoute à cette catégorisation la notion d'Espace de Travail Géométrique pour décrire plus finement le travail de l'élève, que la simple distinction GI-GII ne permet pas, en général, d'appréhender.

> *« Nous désignerons sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG) l'environnement organisé par et pour le géomètre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composants suivants :*
>
> *-* ***un ensemble d'objets****, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local,*
>
> *-* ***un ensemble d'artefacts*** *qui seront les outils et instruments mis au sens du géomètre, et enfin*
>
> *-* ***un référentiel théorique*** *éventuellement organisé en un modèle théorique ».* (Ibidem, p. 184).

Il ne s'agit pas cette fois de décomposer sous forme d'invariants l'activité cognitive de l'élève mais de décrire son activité géométrique selon trois catégories : l'ensemble des objets de l'espace local et réel, les référentiels théoriques et enfin les artefacts (outils et schèmes d'action) qui assurent la relation entre les deux. La nature et la cohérence de l'organisation de ces trois composants dépendent du paradigme dans lequel l'Espace de Travail Géométrique se situe et dans quel but. En ce qui concerne les objets, si l'on se réfère à la distinction dessin-figure de Parzysz, une figure géométrique sera envisagée comme un *dessin* dans GI, ou comme une *figure* définie par ses propriétés dans GII.

> *« La figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin est une représentation ».* (Parzysz, 1989)

De manière générale, Houdement et Kuzniak renvoient à Malafosse pour définir ce premier composant de l'ETG, qui parle d'*espace de la réalité* :

> *« un ensemble composé des objets réels et des évènements existant hors de la pensée du sujet, et sur lequel porte à la fois l'activité psychique des individus et l'activité de réflexion des communautés culturelles. »* (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 186).

Le deuxième composant de l'ETG qui concerne l'ensemble *des artefacts* est pris au sens de Rabardel :

> *« En géométrie, ces choses sont notamment les outils et les instruments tels que règle, équerre, mais aussi pliage… Rabardel précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action.* […] *Dans le cadre euclidien classique, on sait l'importance des constructions à la règle et au compas : l'essentiel est ici la justification théorique d'une technique de construction. La règle n'est pas graduée et la précision de la construction importe peu, la GII se différencie ainsi radicalement de la GI où la réalisation finale du dessin est essentielle. »* (Ibidem, p. 186).

C'est à ce niveau que se situe le point d'ancrage de la théorie des champs conceptuels, mais nous y reviendrons. Enfin, la composante dite de *référentiel théorique* définit le système logico-déductif dans lequel s'organisent le(s) modèle(s) théorique(s) et les objets mathématiques en jeu :

> *« Les objets et les artefacts de la géométrie en constituent la partie empirique, celle-ci ne prendra tout son sens qu'articulée avec un ensemble de définitions, de propriétés, de relations réunies dans une sorte de référentiel théorique que l'on peut aussi regarder comme un modèle théorique. Le sens du mot modèle oscille entre concret et abstrait, réalisation matérielle et norme abstraite. Cette oscillation reflète la distinction entre les différents paradigmes que nous étudions. Dans ce qui suit, nous appellerons modèle théorique le modèle abstrait qui résulte soit d'une modélisation, soit d'une définition a priori. Dans le premier cas, le modèle théorique résulte d'un processus de modélisation par schématisation et idéalisation du monde réel dont il cherche à rendre le plus fidèlement compte. La géométrie axiomatique entre dans cette description. Dans le deuxième cas, le modèle théorique préexiste et ce qu'on appelle modèle est cette fois une interprétation (et souvent une création) qui doit rendre compte des objets et propriétés définis par les axiomes.* […] *Dans un sens plus restreint, il faut noter que le modèle peut aussi désigner une réalisation matérielle d'une figure géométrique : il pourra alors exister une confusion entre le travail sur l'objet réel et l'objet idéal. Le référentiel de la GI, au moins dans sa pratique élémentaire, paraît ne se référer à aucune structuration en un modèle théorique, sauf à y admettre des définitions sensibles. »* (Ibidem, p. 187).

Il devient clair que l'organisation de ces composants dépend du but à atteindre et de l'institution dans laquelle le géomètre s'inscrit. L'adaptation de ces composants conduit à considérer différents types d'ETG :

> *« -* ***ETG de référence.*** […] *Cet espace de travail défini de manière idéale en fonction des seuls critères mathématiques.* […] *On peut donc également envisager cet espace comme l'ETG institutionnel de la communauté des mathématiciens.*

> **- ETG idoine.** *L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. Cela suppose une réflexion sur la réorganisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence.* […] *le choix de l'adjectif idoine suppose que cet espace est bien conçu et opérationnel pour les questions qu'on pose dans cette institution. Nous devrions en toute rigueur introduire d'abord l'idée d'un ETG institutionnel et poser ensuite la question de son caractère idoine.*
>
> **- ETG personnel.** *L'ETG idoine doit être utilisé par des étudiants mais aussi par les enseignants. Chacun se l'approprie et l'occupe avec ses connaissances mathématiques et ses capacités cognitives. Ces ETG sont ce que nous appelons des ETG personnels. Quand l'élève construit son espace de travail, il a tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Il lui accorde ainsi une fonction de validation indépendamment de l'horizon visé. Le rôle de l'enseignant consistera à développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. »* (Ibidem, pp. 188-189).

Dans cette description, on retrouve l'idée d'adaptation pour les composants de l'espace de travail géométrique. Les composants de l'espace de travail géométrique s'adaptent au statut du géomètre et donc au but que celui-ci s'est fixé. Nous parlerons également d'adaptation des schèmes d'action (car ils concernent le composant « ensemble d'artefacts ») de l'espace de travail géométrique, dont on essaie de montrer qu'ils ne dépendent pas seulement du statut du géomètre ou de ses buts à atteindre. En effet, nous souhaitons regarder si le concept même de symétrie est un des facteurs dans l'adaptation des schèmes (et si oui, comment), ou bien si c'est l'enseignement de ce concept qui est un facteur lors de ces adaptations.

2.2 La dialectique GI-GII

Nous avons déjà mentionné que la notion de paradigme géométrique rendait compte de l'ambivalence du concept de symétrie, du fait qu'on peut imaginer que ce concept ait du sens dans les paradigmes GI et GII. En effet, son fort pouvoir d'évocation en fait presque un concept « naturel ». Il se vérifie « instinctivement », ou immédiatement par perception ou manipulation à l'aide d'un pliage effectif ou imaginaire par rapport à un axe, (presque) toujours unique et vertical. De plus, le concept de symétrie s'exprime formellement en mathématiques et oscille souvent entre un statut objets/outils dans une perspective GII recherchée par l'enseignement. Il n'existe pourtant pas de frontière stricte entre GI et GII, tout comme nous ne prétendons pas qu'il existe une frontière nette entre le concept quotidien et le concept scientifique du concept de symétrie. Il existe cependant des « basculements » d'un paradigme à un autre[24] : lors d'une modélisation d'un problème concret par exemple, on passe de GI vers GII, puis on peut « vérifier » sur un dessin une conclusion théorique, et dans ce cas, on passe de GII vers GI. De plus, aussi bien le mathématicien et le professeur de mathématiques que l'élève peuvent recourir à un dessin dans un but heuristique, et le raisonnement géométrique se situe pourtant dans GII. Cela revient à considérer la dialectique dessin-figure de Parzysz (1989).

---

[24] B. Parzyzs évoque des « basculements de paradigme » lors du séminaire DIDIREM du 09.01.2008 à Paris, intitulé *La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles*.

2.3 Reformulation des questions de recherche

On peut évoquer les basculements de paradigmes GI-GII parallèlement aux basculements du concept de symétrie entre sa valence scientifique et sa valence quotidienne. On peut alors se demander **dans quelle mesure cette dialectique GI-GII agit sur le concept de symétrie et réciproquement**. Un tel questionnement est une entrée possible pour répondre à une question de recherche plus large qui consiste à mesurer les effets des basculements GI-GII dans l'apprentissage en géométrie. Sont-ils favorables ou défavorables au développement du raisonnement de l'élève au collège ? Nous ne prétendons pas répondre à une telle question ; il s'agit d'une toute autre recherche, dont il n'est pas inintéressant de savoir que notre propre recherche peut être une entrée possible.

Nous proposons d'étudier l'ETG personnel de l'élève, qui nous apporte un modèle de description de l'organisation du travail de l'élève et ses jeux de paradigmes. L'étude *a priori* d'une situation donnée décrira notamment l'ETG idoine tandis que l'activité réelle de l'élève sera décrite par son ETG personnel. Nous décrirons ces Espaces de Travail Géométrique par les trois composants décrits précédemment, en situation de reconnaissance des transformations du plan. Les objets de l'espace local et réel de la situation sont mis en relation avec les modèles prédéfinis d'un système axiomatique (tels que les propriétés de la configuration donnée de la situation) par l'intermédiaire de schèmes d'actions. On cherche en particulier à vérifier s'il existe une **distance entre l'ETG personnel et l'ETG idoine**, car si cette distance existe, l'organisation des invariants opératoires est nécessairement différente.

Comment se construit et évolue l'ETG personnel d'un élève à des étapes différentes du collège, dans une même situation mettant en jeu les transformations du plan ?
Quel rôle joue la symétrie axiale dans ces constructions et reconstructions d'ETG personnel et idoine ?

3. ARTICULATION DES CADRES THEORIQUES

3.1 Champ conceptuel & ETG

Nous avons explicité de manière indépendante le cadre de la théorie des champs conceptuels et le cadre des paradigmes géométriques, en montrant comment chacun se révélait pertinent pour notre étude. L'objet de ce paragraphe est maintenant de montrer l'intérêt d'articuler ces deux cadres.

Nous avons suggéré un parallèle entre la dialectique GI-GII et l'ambivalence du concept de symétrie dans la situation de référence, au sens de Vergnaud, que nous avons choisi d'étudier, qui est la situation de reconnaissance des transformations du plan. Nous avons répertorié un certain nombre de composants qui, organisés et mis en relation sous forme d'invariants opératoires (signifiés), donnent du sens au concept de symétrie. Lors de nouveaux apprentissages, ces invariants opératoires vont s'adapter et se réorganiser. L'étude de ces réseaux, à différents moments de l'apprentissage (dans notre cas lors de l'apprentissage de la symétrie centrale et de la rotation) consiste à décrire principalement les inférences entre ces invariants opératoires (repérés à travers leurs signifiants). Cette étude revient à analyser une partie du champ conceptuel des isométries.

L'articulation des composants de l'Espace de Travail Géométrique (dont les objets géométriques de l'espace local et réel et les modèles prédéfinis d'un système axiomatique) dépend en partie de l'organisation de ces invariants opératoires et de leurs inférences dans une même situation de référence. Ainsi, l'étude de l'organisation de ces invariants opératoires peut également décrire les liens entre les composants de l'ETG. Et donc, l'étude de l'ETG personnel et idoine contribue à l'étude d'une partie du champ conceptuel des isométries.

Nous cherchons donc à étudier les adaptations des schèmes (symptomatiques de l'apprentissage) lors des enseignements de la symétrie centrale et de la rotation, dans le but de mesurer les effets de la symétrie axiale dans ces réorganisations. L'étude de l'ETG idoine et personnel de l'élève en situation de référence est une entrée possible pour décrire une partie du champ conceptuel des isométries.

3.2 Articulation générale avec le contrat didactique et/ou disciplinaire

Le schéma 2.2 synthétise l'articulation du cadre de Vergnaud et du cadre de Houdement et Kuzniak.

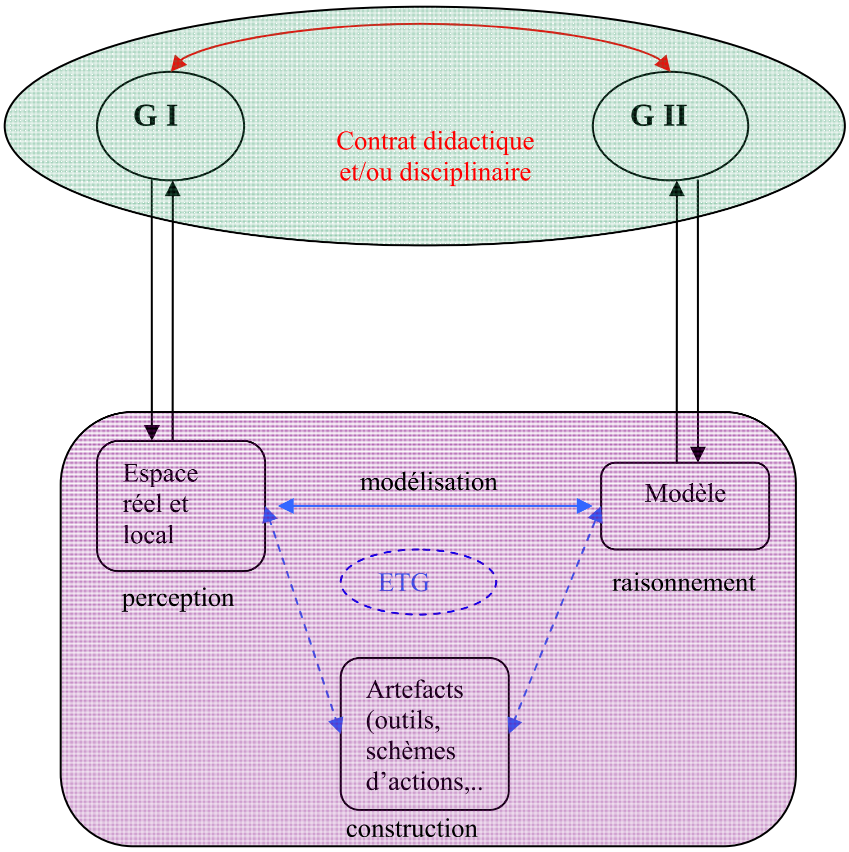


Schéma 2.2 : articulation des cadres théoriques.

Nous distinguons dans ce schéma les paradigmes géométriques (forme ovoïdale) et l'Espace de Travail Géométrique (forme rectangulaire).

> *« Les paradigmes géométriques que nous avons introduits servent de référence, d'horizon qui permet d'interpréter les contenus des composants et de définir leurs fonctions (par exemple heuristique ou validation), fonctions elles-mêmes constitutives des paradigmes ».* (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 185).

Expliquons maintenant les relations sagittales du schéma :

- Nous supposons qu'il existe une **dialectique GI-GII** qui peut intervenir aussi bien au niveau du travail de l'élève qu'au niveau de l'intervention du professeur lors d'un enseignement. Nous supposons également qu'il n'existe pas une frontière stricte entre ces deux paradigmes et que l'on peut passer au cours d'une même situation (c'est-à-dire lors d'un enseignement ou lors de la résolution d'une tâche) d'une géométrie « naturelle » GI à une géométrie « axiomatique naturelle » GII, et réciproquement.

- De plus, nous supposons que si ce jeu GI-GII existe, il est en partie **régulé par le contrat disciplinaire et/ou le contrat didactique.** En effet, lors de l'enseignement d'un savoir nouveau se crée une relation explicite entre l'élève et le professeur (notamment par la communication orale et écrite) mais aussi implicite (qui relève de l'interprétation des non-dits). Par conséquent, l'interprétation d'un énoncé qui suit cet enseignement va dépendre de ces relations précédentes maître-élève relevant du contrat didactique. Le jeu GI-GII qui apparaît lors de la résolution d'une tâche donnée individuellement ou collectivement en classe relève ainsi en partie du contrat didactique.

> *« L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage.* […] *le maître doit donc effectuer non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution [prise de responsabilité de l'élève dans l'activité proposée par le professeur] s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère. [Il se crée une] relation qui détermine - explicitement d'une part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre responsable devant l'autre ».* (Brousseau, 1998, pp. 59-61).

Nous faisons également l'hypothèse que le contexte disciplinaire établi durant l'année scolaire va également contribuer à ces changements de paradigme.

> *« L'ensemble des interactions didactiques qui se développent tout au long de l'année scolaire entre un enseignant et ses élèves détermine, pour partie, les représentations de l'élève par rapport au savoir disciplinaire qui est en jeu. Ainsi une « image » de la discipline, de ses modalités de fonctionnement, des règles qui la régissent, se construit chez l'élève. »* (Colomb, 1993, p. 46).

Le contrat disciplinaire relève plus de la représentation personnelle que se fait l'élève de la discipline durant cette année scolaire avec son professeur que de la situation didactique (au sens de Brousseau) que le contrat didactique caractérise à un moment donné, plus localement. On peut alors donner la définition suivante du contrat disciplinaire :

> « […] *Ensemble des comportements du maître qui sont attendus de l'élève et ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître dans une discipline au cours d'une année scolaire.* » (Colomb, 1993, p. 46).

Nous supposons donc que le contrat didactique, qui agit localement, et le contrat disciplinaire, qui agit globalement, régulent en partie cette dialectique GI-GII. Ces deux contrats agissent de manières différentes, mais non contradictoires, sur la conduite des élèves. On cherche maintenant à savoir de quelle manière le contrat didactique et le contrat disciplinaire régulent cette dialectique GI-GII dans notre situation de référence de reconnaissance des transformations, et agissent ainsi sur la construction et la reconstruction des schèmes des élèves.

- La **Géométrie I** concerne des raisonnements géométriques qui reposent sur la manipulation d'objets matériels issus de l'espace local et réel. Et réciproquement, **l'espace local et réel** apparaît comme le support privilégié pour une Géométrie I, d'où les doubles flèches. La conception primaire du concept de symétrie se situe *a priori* dans cette relation. En effet, dans une situation de reconnaissance, seule la perception première et la manipulation (si celle-ci est possible) permettent de reconnaître qu'il s'agit d'une symétrie.

- La **Géométrie II** concerne des raisonnements géométriques dits hypothético-déductifs mettant en jeu un ou des modèle(s) mathématique(s) prédéfini(s) dans un système. Réciproquement, ce(s) **modèle(s)** mathématique(s) est /sont prédéfini(s) pour faire fonctionner des raisonnements hypothético-déductifs tels que la géométrie euclidienne. Dans une situation de reconnaissance des transformations dans le plan, on reconnaîtra la symétrie axiale par déduction à partir de ses propriétés métriques du milieu et/ou de conservation des mesures et/ou ses propriétés d'orthogonalité. Le raisonnement n'est pas le même que dans GI, il implique des modèles mathématiques concernant le point, la droite, l'orthogonalité, la mesure de distance, etc. dans une géométrie de position comme celle d'Euclide ou en géométrie analytique avec l'intermédiaire d'un repère orthonormé.

Cependant, précisons que ces interconnexions ne sont pas exclusives : il existe des « modèles de référence », plus implicites dans GI et « un espace local réel », également plus implicite, dans GII.

- On appelle ici « modélisation »[25] le processus à partir duquel se construit un modèle mathématique à partir de la réalité. Ce processus entre en résonance avec la dialectique GI-GII. Nous nous intéressons aux interactions entre la symétrie dans GI, dont l'espace local et réel est le support privilégié, et la symétrie dans GII qui met en réseau des modèles mathématiques prédéfinis dans un système logico-déductif.

[25] Déjà mentionné dans les précédentes citations de Houdement et Kuzniak.

- Ce processus d'interaction (et de construction) nécessite des artefacts, et **des schèmes d'action**, d'où les flèches en pointillés : elles représentent un processus intermédiaire. Nous nous concentrons en particulier sur ces schèmes d'action qui articulent les composants de l'ETG et, comme nous l'avons déjà explicité précédemment, résultent donc de l'organisation des concepts-en-acte et théorèmes-en-acte, qui donnent du sens au concept de symétrie (toujours dans notre situation de référence).

L'ETG apparaît finalement comme un espace propice à la conceptualisation car l'articulation de ces composants, en terme d'invariants opératoires, renvoie au processus de conceptualisation décrit par Vergnaud :

> *« Ce que j'entends par conceptualisation, c'est l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi-directe, ou d'une construction ».* (Vergnaud, 2007, p. 342).

L'articulation de ces deux cadres permet de donner une dimension cognitive à l'analyse de l'activité de l'élève à travers l'étude d'une partie du champ conceptuel des isométries, à laquelle on accède à travers une étude plus épistémologique supportée par l'analyse en terme d'Espace de Travail Géométrique et de paradigmes géométriques.

4. INSPIRATION VYGOTSKIENNE

Notre cadre théorique entre en résonance avec la théorie sur l'apprentissage de Vygotski, et notamment avec le contenu des chapitres 5 et 6 de *Pensée et Langage* concernant la formation et le développement des concepts.

4.1 « Concept quotidien » et « concept scientifique »

Vygotski définit les Concepts Quotidiens (ou concepts spontanés) CQ et les Concepts Scientifiques CS, qu'il différencie par leur organisation et leur rapport aux objets :
- les CQ peuvent être isolés, vivre en acte et ne sont pas nécessairement conscients et verbalisables. « Un concept est gorgé de contenu empirique »[26], il est associé à des quantités de propriétés de l'objet réel. « Ce sont des concepts qui se forment spontanément chez le sujet en rapport avec son expérience, sa culture et son entourage. Ils sont d'une portée locale, et étant donné leur portée, il n'y a pas lieu de les définir »[27].
- les CS sont conscients et vivent à travers des représentations symboliques. Leur force vient de leur généralité en terme d'abstraction et de domaine de mise en œuvre, qui permet une « décontextualisation[28] ». Vergnaud, dans son ouvrage consacré à Vygotski, synthétise :

---

[26] Rogalski, 2005, p. 251.
[27] Douek, 2003.
[28] Rogalski, 2005, p. 251.

> *« La force et la faiblesse des seconds [les concepts quotidiens] sont l'inverse de la force et de la faiblesse des premiers. Il précise alors que les concepts quotidiens se forment dans l'expérience, ont une portée immédiate, sont peu abstraits et ne forment pas de système ; tandis que les concepts scientifiques sont transmis par le langage, ont une portée générale, et forment des systèmes. Leur faiblesse, en revanche, résulte de leur « verbalisme » et de leur « insuffisante saturation en concret ».* (Vergnaud, 2000, p. 12).

Ainsi, nous pourrions supposer qu'il existe un concept quotidien de la symétrie axiale à travers le schème du pliage (généralement mental), qui s'avère être la symétrie axiale d'axe (presque toujours) unique et vertical. Sa dimension culturelle lui donne un aspect pas nécessairement conscient, pas nécessairement verbalisable et qui peut vivre en action. De même, on peut également annoncer qu'il existe un concept scientifique du concept de symétrie. Par exemple, on peut énoncer que la symétrie axiale (dans le plan) entre dans la catégorie des isométries (donc s'inscrit dans un système) et se différencie par ses propriétés verbalisables : elle se caractérise par ses propriétés métriques, ou d'orthogonalité, ou par ses invariances. Elle est ainsi consciemment définie et vit à travers des représentations symboliques mathématiques du type application point par point : *M' est le symétrique de M par la symétrie s d'axe (D)*, qui s'exprime sous la forme *s(M)=M'*. Elle peut être décontextualisée et réinvestie (ce qui fait sa force) : *toute isométrie peut être décomposée en produit de symétries orthogonales*[29]. De plus, il n'est pas nécessaire de rappeler que l'on retrouve le concept de symétrie dans différents champs scientifiques.

4.2 La dialectique CQ-CS et le processus de double germination

> *(i) « Un aspect important de cette dualité concept quotidien, concept scientifique est le rapport dialectique que Vygotski met en lumière entre eux. L'enfant accède d'abord aux concepts quotidiens. C'est l'école qui va introduire les concepts scientifiques. Le rapport dialectique est le suivant : l'enseignant introduit les concepts scientifiques en s'appuyant sur les concepts quotidiens.* […] *D'un autre côté, certains aspects quotidiens ainsi que leurs liens systémiques se transforment à l'école. Ils deviennent de plus en plus explicitables et utilisables grâce à la maîtrise des concepts scientifiques. Ils peuvent ainsi gagner en sens.* […] *Vygotski schématise ce lien dialectique par la double image d'un mouvement de germination ascendant dans le développement des concepts quotidiens et d'un mouvement de germination descendant dans la conceptualisation dans le cas des concepts scientifiques ».* (Douek, 2003)

> *(ii) « Les concepts quotidiens frayent la voie à la germination des concepts scientifiques par les significations qu'ils assurent, et les concepts scientifiques préparent la voie par leur organisation et les médiations qu'il proposent, et tirent vers le haut les concepts dans leur germination ».* (Rogalski, 2005, p. 253).

> *(iii) « Nous devons supposer que l'apparition des concepts de type supérieur, tels que les concepts scientifiques, ne peut manquer d'influer sur le niveau des concepts spontanés déjà formés, puisque dans la conscience de l'enfant, les uns et les autres ne sont pas enfermés dans des capsules, ne sont pas séparés par une cloison étanche, ne suivent pas deux trajectoires distinctes mais qu'ils se trouvent dans un processus d'interaction constante, qui doit avoir pour conséquence que les généralisations de structure supérieure, propres aux concepts scientifiques, provoquent obligatoirement des modifications dans la structure des concepts spontanés ».* (Vygotski, 1997, p. 290).

[29] Reinhardt & Soeder, Atlas des Mathématiques, 1997, p. 155.

Vygotski suppose qu'il existe une interaction mutuelle entre les concepts quotidiens et les concepts scientifiques, qu'il schématise par un système de doubles flèches opposées verticales. Clairement, il attribue au concept quotidien un rôle de levier (à partir du bas) qui amène vers le concept scientifique (donc supérieur). De même, le concept scientifique hisse les conceptions primaires vers le haut, rendant alors plus « évidentes » des conceptions supérieures. On retrouve alors l'idée que l'évidence est la finalité de l'apprentissage, comme l'explique Vergnaud (Vergnaud, 2007). Les conceptions primaires sont déstabilisées et s'adaptent aux nouvelles connaissances, d'un niveau supérieur.
Nous pouvons certes établir un parallèle entre la dialectique CQ-CS et la dialectique GI-GII, ainsi qu'entre le processus de *double-germination* et le processus dit de « modélisation » (dans le schéma 2.2), lui-même en parallèle avec la dialectique GI-GII. Mais, comme précédemment évoqué, nous ignorons l'existence d'une frontière nette entre GI et GII, nous évoquons plutôt des interactions entre ces deux paradigmes, interactions dont la nature reste à déterminer et sont l'objet de nos recherches. Nous préférons ainsi limiter les dualités possibles de nos objets de réflexion et considérer seulement la dialectique GI-GII et le champ conceptuel des isométries, au lieu de la dichotomie stricte CQ-CS. En effet, d'après le chapitre premier, il est sensé d'imaginer que le concept de la symétrie peut être un obstacle perceptif culturel et inhiber le raisonnement : est-ce un effet de CQ ? Ou bien les deux ? De même, il est sensé de penser que la symétrie peut être un moteur au développement de la pensée géométrique : est-ce une action de CS ? Ou bien les deux ?

Notons également la thèse souvent étayée en didactique de la physique que les conceptions primaires déstabilisées par l'enseignement reviennent plus tard à un niveau plus familier, comme s'il n'y avait jamais eu d'apprentissage ! Les travaux de didactique de la physique (inspirée par Halbwachs) parlent de « dogmatisme du sens commun »[30], ce qui ne va donc pas dans le sens que « l'évidence a changé de camp »[31], au sens de Vergnaud. Ou bien ce changement serait-il alors temporaire ? C'est également une des questions de fond que nous nous posons sur la symétrie, mais qui dépasse l'objet de recherche de cette thèse et nécessiterait clairement des recherches sur un plus long terme. Cependant, au niveau de notre recherche, on se demande si :

Le concept de symétrie, tellement gorgé d'expériences antérieures et culturelles, ne va-t-il pas rendre instable les enseignements et apprentissages visés des autres isométries du plan ?

4.3 La ZPD

[30] Johsua, Dupin, 1989, p. 32.
[31] Vergnaud, 2007, p. 354.

> *« Vygotski considère que développement et apprentissage ne coïncident pas et ne doivent donc pas être confondus.* […] *L'apprentissage de l'enfant commence, dans ses phases initiales, bien avant l'apprentissage scolaire. L'apprentissage scolaire ne commence jamais sur une table rase. Tout apprentissage de l'enfant a une préhistoire.* […] *Nous pouvons donc tranquillement prendre comme point de départ le fait fondamental et incontestable qu'il existe une relation entre un niveau donné de développement et la capacité potentielle d'apprentissage.* […] *Il est nécessaire de déterminer au moins deux niveaux de développement sinon on ne réussit pas à trouver la relation entre développement et possibilité d'apprentissage. Nous appelons le premier de ces niveaux développement actuel de l'enfant. Il correspond au degré de développement atteint par les fonctions psychiques de l'enfant. Le second niveau est évidemment un niveau de développement potentiel. Entre les deux se situe la zone de proche développement (ou encore « zone proximale de développement »), que Vygotski définit comme ce que l'enfant sait faire avec l'aide d'autrui et qu'il ne sait pas faire tout seul ».* (Vergnaud, 2000, pp. 21-22).

Vygotski définit la ZPD, la Zone Proximale de Développement, comme une zone intermédiaire entre le développement personnel de l'enfant et le développement potentiel visé (par l'école) à l'intérieur de laquelle peut se faire un apprentissage avec l'intermédiaire d'autrui. Il est difficile de délimiter la zone « idoine », car il faut jauger entre ce que sait déjà faire l'enfant et ce qu'il est capable d'apprendre. On peut également établir un parallèle entre l'existence de cette zone et la distance entre l'ETG idoine et l'ETG personnel déjà mentionnée précédemment. En effet, on peut imaginer que plus la distance sera grande entre ces deux ETG, plus nombreuses seront les ruptures, et nous nous situerons alors en dehors de la ZPD. Inversement, plus petite sera cette distance, plus grande sera la continuité entre ces deux ETG, et nous serons alors dans la ZPD. Les ruptures et continuités dont nous parlons concernent les adaptations des invariants opératoires qui construisent l'ETG (personnel et idoine) et donnent du sens au concept de symétrie dans la situation donnée. Mais la complexité d'une telle approche réside dans la détermination de cette distance.

CONCLUSION

La symétrie est un concept dont nous cherchons à étudier le développement et l'adaptation à travers l'apprentissage visé par l'enseignement de certaines transformations tout au long du collège. Nous proposons l'étude de l'Espace de Travail Géométrique idoine et personnel des élèves dans une situation de référence de reconnaissance des transformations du plan. Nous avons montré qu'une telle étude était une entrée possible pour l'étude partielle du champ conceptuel des isométries. En effet, celle-ci consiste à étudier les invariants opératoires qui articulent également les composants de l'Espace de Travail Géométrique dans une même situation de référence. Nous souhaitons étudier les adaptations de ces invariants opératoires afin de décrire les adaptations de schèmes, indicatrices de l'apprentissage, qui ont eu lieu tout au long du collège. Nous avons mis au point un tel cadre théorique, à la dimension cognitive et géométrique, dans le but **de déterminer la nature de l'influence du concept de symétrie, comme élément de la réalité, sur l'apprentissage des autres transformations du plan tout au long du collège.**

La dialectique GI-GII renvoie à l'ambivalence du concept de symétrie. Nous supposons alors que les différentes adaptations des invariants opératoires que nous cherchons à observer

opèrent sous l'égide de cette dialectique que le contrat (didactique et/ou disciplinaire) régule en partie. Evaluer la distance entre l'ETG personnel et l'ETG idoine est un des moyens que l'on propose pour mettre en évidence les adaptations des invariants opératoires à des moments cruciaux de l'enseignement des transformations. Nous pourrons ainsi prendre en compte **les effets de l'enseignement de la symétrie, la symétrie centrale et des rotations** sur la nature du travail géométrique fourni par l'élève.
Résumons les questions auxquelles nous essaierons de répondre tout au long de ce travail de thèse :

<u>Questions initiales :</u>
La symétrie opère-t-elle en tant que levier ou en tant qu'obstacle dans l'apprentissage des autres transformations du plan ?
Peut-on relier les conceptions résistantes de la symétrie axiale des élèves aux difficultés didactiques rencontrées lors de l'enseignement des autres transformations du plan ?
Ces difficultés, si elles existent, sont-elles inhérentes (et donc inéluctables ?) aux concepts de symétrie, ou sont-elles liées à l'organisation actuelle des programmes qui concourent à ces difficultés ?

<u>Questions de recherche :</u>
1. La symétrie axiale pilote-t-elle l'organisation et les inférences des invariants opératoires des autres transformations du plan au collège dans la construction de l'ETG personnel de l'élève ? Si oui, comment ?

2. Comment l'ETG personnel évolue-t-il au cours de l'enseignement des autres transformations du plan ?

3. Quel est l'ETG (idoine) développé en classe ? Quelle est la distance entre cet ETG idoine et l'ETG personnel que l'élève développe finalement ?

CHAPITRE 3

LE ROLE DE LA SYMETRIE DANS LA CONSTRUCTION DE L'ESPACE DE TRAVAIL GEOMETRIQUE DES TAILLEURS DE PIERRE ET DES EBENISTES

Résumé

Nous avons choisi une entrée originale, celle de l'artisanat, pour explorer l'organisation des invariants opératoires dont nous avons amorcé l'étude dans le chapitre 2. Durant les mois de novembre et décembre 2005, nous avons questionné des tailleurs de pierre et des ébénistes dans leurs ateliers, dans une situation de communication de reconnaissance et de reconstruction de motifs symétriques. L'un des résultats importants de cette étude montre que les symétries repérées orientent leurs gestes vers des répertoires de techniques relativement figés. Cependant, les invariants opératoires repérés se révèlent très intriqués et rendent opaque l'origine de leur construction. Autrement dit, il est difficile de reconnaître si les gestes des artisans sont des résidus d'enseignement, une adaptation au contexte de l'entretien, un savoir ou savoir-faire de référence. Leur intrication est telle que l'on peut accorder au concept de symétrie un statut non pas de concept familier ou de concept scientifique, mais plutôt un concept intermédiaire qui rend compte de toutes ces influences, autrement dit un concept « naturalisé ».

Cette première étude n'est pas prévue dans le but de comparer cette institution avec celle de l'école. Nous souhaitons repérer les interactions possibles des invariants dans une situation donnée où le concept de symétrie a du sens, avec des populations différentes. Cette exploration nous éclaire sur les possibles adaptations du concept de symétrie dans un paradigme géométrique dont la visée n'est pas nécessairement la « démonstration », et nous indique alors comment la symétrie oriente la construction de l'ETG personnel de l'artisan. Notre réflexion générale sur la thèse s'en trouve enrichie et nous pourrons par la suite éclairer notre discussion sur l'origine possible de certaines adaptations.

PLAN

1. POURQUOI RECHERCHER UNE PROBLEMATIQUE PRATIQUE[1] CHEZ LES ARTISANS ?

1.1 « Au fond de l'action, la conceptualisation »[2]

Notre problématique de recherche se concentre sur le concept de symétrie. D'après le cadre théorique de Vergnaud, l'étude d'un tel concept n'a du sens que si l'on s'intéresse à son processus de conceptualisation. Or, l'étude des processus de conceptualisation se réalise à partir de la conduite d'individus en situation (de référence). La recherche de l'observation d'un concept dans l'action est donc cohérente avec la recherche de situations professionnelles qui « référeraient dans l'action » au concept de symétrie.

D'autre part, notre recherche prend en considération le double aspect du concept de symétrie : sa conception familière et sa conception scientifique. Les définitions proposées par Vygotski caractérisent en particulier la conception familière par son expression (inconsciente) dans l'action et non dans le formalisme mathématique. La pratique professionnelle des artisans tailleurs de pierre et ébénistes se situe dans une problématique pratique soumise à des contraintes professionnelles (telles que l'efficacité, le temps, le coût, le matériel, etc.). Leur savoir de référence est malgré tout la géométrie euclidienne, mais il s'agit d'une géométrie de construction et non d'une géométrie pour la démonstration.

Ainsi, le contexte de l'artisanat offre *a priori* un contexte privilégié pour observer le concept de symétrie dans une perspective non mathématique et dans l'action. Et ceci nous apportera donc *a priori* des éléments sur le concept de symétrie et sa conceptualisation. Les artisans ne cherchent pas à faire « germer » leurs conceptions familières en vue d'un concept scientifique. On peut même supposer qu'ils sont en quelque sorte des « experts » du concept de symétrie d'un point de vue du sens commun, car leur pratique concerne justement la réalisation de ces motifs symétriques qui ornent notre vie quotidienne.

Historiquement, il est cohérent de s'intéresser à ce concept dans une problématique pratique car la symétrie a d'abord été reconnue comme un savoir (faire) pour l'art et l'architecture avant d'être reconnue comme un objet mathématique au XVIII^{ème} siècle avec l'émergence de la géométrie analytique, puis des transformations. Keller montre même que la symétrie, dans une problématique pratique aux temps préhistoriques, fraie la voie aux prémices de la géométrie telle que nous la connaissons aujourd'hui.

Notre intérêt dans ce travail porte sur la place de la géométrie dans l'espace de travail des artisans, et sur la nature de cette géométrie à travers l'étude du concept de symétrie. Ces questions sont directement liées à des questions de recherche concernant la place de la dialectique GI-GII dans la progression du raisonnement en géométrie. Nous nous situons ici

[1] Au sens de Berthelot & Salin (2000-2001, p. 14).
[2] Vergnaud, 1996.

dans un paradigme *a priori* GI où le concept de symétrie n'est pas utilisé sous sa forme mathématique, c'est-à-dire en tant que transformation du plan.

Quelle est la nature du concept de symétrie dans un paradigme *a priori* exclusivement GI, et quelle est sa place dans l'espace de travail personnel de l'artisan (ETG) ?

1.2 Quelques travaux sur le rôle des mathématiques en voie professionnelle

Ces dernières années, de nombreux travaux se sont intéressés aux mathématiques dans l'enseignement professionnel (Bessot & Laborde, 2005), (Laborde & Pastré, 2005), (Straesser, 2000, 2007), ou sur les mathématiques dans l'activité professionnelle (Noss & Al., 2000), (Williams & Wake, 2007).

Bessot & Laborde (2005) ont analysé les activités de lecture-tracé du bâtiment, en particulier les activités de contrôle. Leur problématique de recherche concerne la nature des connaissances en jeu et leur rapport avec les artefacts présents sur le chantier. Les auteurs ont mis au point une situation fondamentale : la fabrication de pré-dalles dans une usine qui implique une activité de lecture-tracé. Ils ont ensuite observé cette situation dans une institution de formation professionnelle avec des élèves de BEP en atelier. Les auteurs ont dans un premier temps décrit l'activité observée en termes de procédures, puis à partir de leurs observations et des formulations des élèves, ils ont dégagé certains invariants dans l'activité observée « dans les termes d'une géométrie en acte en se référant à la géométrie euclidienne »[3]. Ils mettent ainsi en évidence l'existence d'objets géométriques analogues à ceux de la géométrie euclidienne, que l'on peut exprimer en terme de concepts-en-acte. Et, à partir de leurs observations et des commentaires obtenus, les auteurs décrivent un réseau de théorèmes-en-acte obtenus à partir de ces concepts-en-acte, qui définissent ainsi une véritable « géométrie en acte des tracés, instrumentée et contrainte par le système de cotes ». Ces théorèmes voire axiomes concernent principalement les propriétés de parallélisme et d'orthogonalité. Il apparaît un lien évident entre la géométrie euclidienne et cette géométrie en acte qui mène alors naturellement à une autre question : celle de la place de cette géométrie de référence dans la formation aux pratiques de ces activités de tracés dans le bâtiment, question que nous n'aborderons pas ici car elle dépasse le cadre de notre recherche.

Noss & Al. (2000) ont analysé les mathématiques impliquées dans des contextes professionnels très différents : ceux des employés de banque, des infirmières et des pilotes. Leur activité mathématique commune consiste à minimiser la marge d'erreur. Les auteurs nous rapportent alors que les savoirs mathématiques repérés par les professionnels portent sur des savoirs relativement élémentaires. Ils fonctionnent de façon locale, contextualisée, avec un fort niveau d'implicite des modèles utilisés et ayant une connexion étroite avec les outils.

[3] Bessot & Laborde, 2005, p. 14.

Les savoirs mathématiques visibles dans les pratiques sont ceux dérivés des savoirs scolaires. Ils utilisent le symbolisme mathématique conventionnel et les représentations usuelles tels que : nombres, représentations graphiques, tables, formules, etc. ainsi que des concepts, méthodes et techniques scolaires qui ont été quelquefois adaptées à la contingence ou routinisées par la pratique.

D'autres recherches montrent que les mathématiques dans la pratique fonctionnent comme des « boîtes noires » (Straesser, 2000) ou comme des « mathématiques cristallisées » (Williams & Wake, 2007) : « les concepts et procédures mathématiques sont si intégrés dans la pratique et le fonctionnement du monde du travail qu'ils ne sont plus perçus comme quelque chose de spécifique par rapport aux mathématiques »[4]. Elles ne surgissent qu'en cas de difficulté : « breakdown », qui signifie que le professionnel se retrouve en difficulté (voire régresse) lorsque la situation est légèrement différente de celle qu'il a l'habitude de résoudre. Ce qui nous amène également à la question de l'enseignement des « boîtes noires » dans la formation. Doit-on ouvrir ou non ces boîtes noires ? Mais ceci est également une toute autre question.

2. METHODOLOGIE

2.1 Entretiens-actions dans les ateliers

Nous avons rencontré quatre tailleurs de pierre (nous noterons TP) et trois ébénistes (TB pour Tailleur de Bois) ayant au moins plusieurs années d'expérience, et dont les formations professionnelles sont différentes :

- TP n°1 : CAP (Certificat d'Aptitude Professionnelle) en taille de pierre à l'école St Lambert de Paris (15ème arr.).
- TP n°2 : Compagnon de France.
- TP n°3 : dit « autodidacte ».
- TP n°4 : CAP en taille de pierre à l'école St Lambert de Paris.
- TB n°1 : reconversion, FPA (Centre de Formation Adulte : menuiserie-ébénisterie-escalieteur-restaurateur mobilier).
- TB n°2 : formation professionnelle classique (CAP).
- TB n°3 : devenu sculpteur de bois, ornementiste. Centre technique, lycée professionnel, CAP ornementiste.

Nous avons mené des entretiens exploratoires semi directifs à partir de photos de motifs de la Cathédrale Notre Dame de Paris et des cas de figures courants en taille de bois tels qu'une volute, révélant différents cas de symétries (cf. paragraphe suivant pour les illustrations).
Les questions portent principalement sur le tracé du motif et sa réalisation, en essayant d'insister sur la justification des techniques, des instruments et des moyens de contrôle. Il ne

[4] Sraesser, 2007, pp. 117-186.

s'agit donc pas d'une mise en situation directe mais d'une situation de communication et de validation, afin de faire parler et réfléchir les artisans sur leurs propres actions. Bessot & Laborde le rappelaient : « moins une tâche est problématique, plus les actions pour la réaliser sont transparentes et donc difficiles à expliciter »[5]. D'où l'intérêt que l'entretien se déroule dans leurs ateliers, où ils se retrouvent dans leur environnement familier et peuvent alors appuyer leur discours par de courtes démonstrations avec leurs propres outils.

Le corpus regroupe les retranscriptions de tous les entretiens dont certains extraits sont donnés dans le développement de ce chapitre, quelques photos et vidéos, ainsi que le recueil des dessins et figures réalisés lors des entretiens.

2.2 Répertoire de tâches : analyse a priori

J'ai demandé aux artisans comment ils s'y prendraient pour reproduire chaque motif. La question est volontairement exposée sous peu de contraintes afin de laisser l'artisan libre de choisir ses propres contraintes. Ainsi, l'artisan se situe dans les situations (et donc contraintes) qui lui sont les plus familières. J'ai toujours commencé par donner le motif le plus « simple », celui de la fleur de Lys, dont l'unique axe de symétrie est vertical dans le sens de la gravité. L'analyse *a priori* donnée ici porte principalement sur la reconnaissance des transformations laissant invariante la figure donnée car l'enjeu des entretiens porte sur le rôle joué par la symétrie axiale et les concepts qui la caractérisent. Rappelons que nous nous intéressons à la nature de l'Espace de Travail Géométrique de l'artisan, organisé par la nature du concept de symétrie en jeu et l'organisation des tracés, ainsi que l'instrumentation sollicitée.

a) la fleur de Lys : le cas de symétrie orthogonale simple

Figure 3.1 : la fleur de Lys.

[5] Bessot & Laborde, 2005, p. 11.

L'axe est suggéré par la tige et le centre du cercle situé à la base. On suppose cette figure comme un cas simple de reproduction. Si l'artisan suppose avoir à disposition une moitié du motif et à une échelle accessible, on suppose la technique du calque ou du gabarit la plus sollicitée. Si l'artisan suppose n'avoir à disposition que cette photo comme modèle, on peut supposer qu'il va rechercher à tracer la moitié et dispose alors de techniques propres à son métier pour retrouver des motifs tels que celui de la fleur de Lys, plutôt commun, mais dont les arcs de cercle semblent impliquer des techniques plus complexes.

b) la frise en amandes : le cas de la translation

Figure 3.2 : la frise en amandes.

On peut discuter des motifs reconnus au départ :

- l'amande simple. On obtient la frise en composant des symétries axiales d'axe horizontal ou en composant des rotations de centre « les coins » des amandes et d'angle $\pi/2$.
- deux amandes en demi-cercle. On obtient alors la frise par composées de translations de vecteur orthogonal à la droite horizontale (de norme le diamètre du demi-cercle), ou par composées de symétries axiales d'axe horizontal.

On suppose des techniques de reproduction par translation, instrumentées par papier calque en suivant une direction donnée par le cadre choisi.

c) la frise de la fleur de Lys : symétrie axiale et translation

Figure 3.3 : la frise de la fleur de Lys.

De même que précédemment, on peut imaginer des techniques propres au tailleur de pierre pour établir :
- une translation de vecteur orthogonal à l'horizontale
- ou plus classiquement, une symétrie axiale d'axe verticale.

d) la rotation d'ordre 4

Figure 3.4 : la rotation d'ordre 4.

Ce motif n'est pas un motif symétrique sous une symétrie axiale. Nous qualifions cette figure de complexe car elle suggère tout de même des parties superposables. On peut cependant imaginer des pliages successifs pour obtenir un modèle à partir d'un quart de la figure (en tant que composées de symétries axiales). Il s'agit d'une figure invariante sous :

- symétrie centrale de centre le centre de la figure
- rotation de centre le centre de la figure et d'angle $\pi/2$ [π]

Cette figure se compose de plusieurs volutes, qui sont des motifs fréquents en taille de pierre ou de bois, et qui sont symétriques par symétrie centrale (figure 3.7).

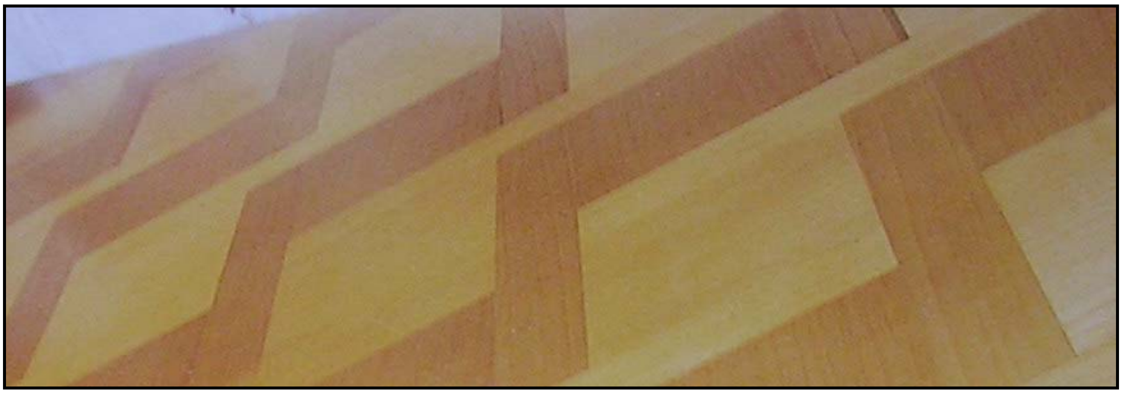
e) le trèfle, ou trilobe (également évoqué avec les ébénistes) : rotation d'ordre 3

<u>Figure 3.5</u> : le trèfle (ou trilobe).

En effet, il s'agit d'une figure globalement invariante sous :
- rotation de centre le centre de la figure et d'angle $2\pi/3[\pi]$
- symétrie axiale (3 axes possibles).

Cette figure, évoquée après la fleur de Lys, est une figure complexe mais très courante dans la taille de pierre. De même, selon les contraintes que se donne l'artisan, le modèle est *a priori* reconstitué directement par tracé à partir de techniques routinières chez l'artisan.

f) le frisage (traité exclusivement avec les ébénistes)



<u>Photo 3.6</u> : le frisage[6].

Il s'agit d'un technique spéciale de marqueterie : un assemblage décoratif de pièces de bois appliquées par incrustation ou par placage sur fond de menuiserie. L'ébéniste met en œuvre différents groupes de symétrie (simples) lors des « développements » pour obtenir différents motifs (composées de symétries axiales, translations ou rotations) symétriques. Nous n'avions pas de questions spécifiques à ce sujet mais la technique de la marqueterie a été évoquée plusieurs fois, en particulier dans le cas de la volute (dont voici un exemple en photo 3.7) :

[6] Cette photo représente un frisage réalisé par un des ébénistes interrogés et qui m'a fourni la photo.

Figure 3.7 : un exemple de volute[7].

Une volute simple

Cette photo présente deux volutes, symétriques l'une de l'autre par une symétrie axiale d'axe médian et vertical.
Nous avons évoqué la reproduction du cas simple d'une volute unique, symétrique par symétrie centrale, avec les ébénistes et sculpteurs de bois.

g) la trisection de l'angle

Après avoir dessiné un angle quelconque (aigu ouvert) à l'aide de la règle non graduée, j'ai demandé aux artisans comment ils s'y prendraient pour diviser en trois parties égales cet angle à l'aide du compas et de la règle non graduée. Cette question était envisagée après les situations de reproduction des motifs évoqués précédemment.

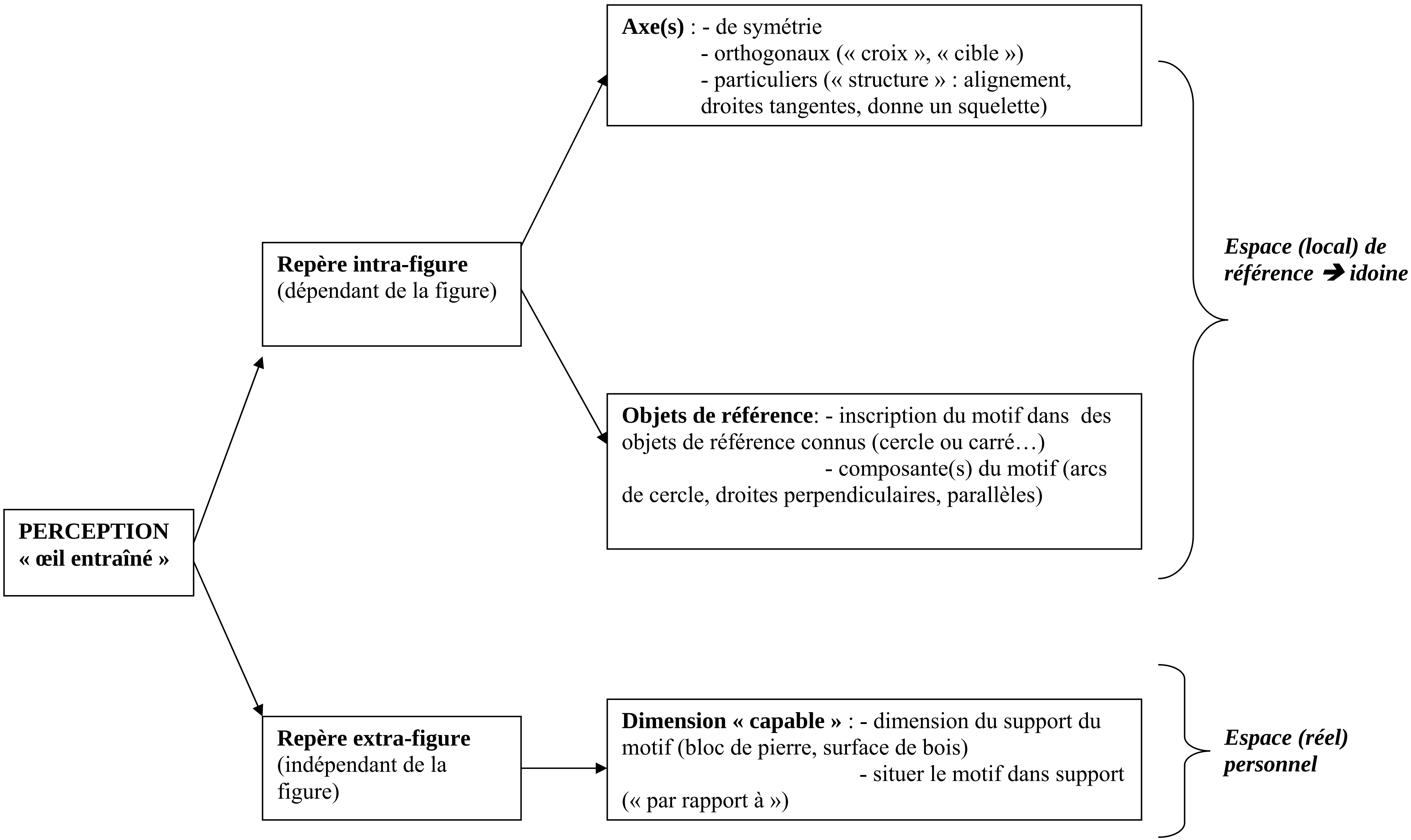
[7] Cette photo a été prise dans l'atelier d'un des tailleurs de pierre interrogés, avec son autorisation.

3. ETUDE DU CAS SIMPLE DE SYMETRIE AXIALE (fig. 3.1 & 3.3)

3.1 Structuration de l'espace et déconstruction de la figure[8]

Le schéma 3.8 reconstitue l'organisation des tracés de l'artisan pour construire son modèle. L'artisan « prépare » son espace personnel en déterminant les repères extra-figure (le support et le cadre de la figure) qui supporteront la figure. Les repères intra-figure « structurent » alors la figure de la manière la plus adaptée, d'après l'artisan, au problème pratique posé.
Tout le développement qui suit dans ce paragraphe décrit la mise en place de cet Espace de Travail Géométrique de l'artisan.

[8] Le terme de « figure » est employé ici au sens usuel du terme, comme l'emploie l'artisan, et non au sens de la dialectique « dessin-figure ».



<u>Schéma 3.8</u> : organisation des traces de l'artisan.

Nous avons développé une approche similaire à celle de Bessot & Laborde, c'est-à-dire qu'à partir de nos observations et de leurs formulations, nous avons dégagé certains invariants dans l'activité observée « dans les termes d'une géométrie en acte en se référant à la géométrie euclidienne »[9].

La symétrie se retrouve en situation de reproduction de motifs en vue d'une restauration, d'une création, ou d'une simple copie. Les situations étudiées ici sont des situations de communication sur une « possible » reproduction d'un motif photographié qui présente des symétries (on entend ici le sens commun de symétrie, c'est-à-dire des éléments semblables) dans le plan. Le tailleur ou l'ébéniste s'approprie la situation en construisant oralement et dans la pratique son Espace de Travail Géométrique personnel, qui décrit le rapport particulier entre :
- la figure donnée
- l'environnement dont l'artisan dispose
- et l'artisan

Dans tous les cas, le premier rapport est celui de la perception « d'un œil entraîné » :

> *« Le plan est une surface dont tous les éléments peuvent coïncider avec l'arête d'une règle dressée et quelle que soit l'orientation de cette règle. Des images nous en sont fournies par la surface de l'eau calme, la table de dégauchisseuse, le dessus de l'établi, la semelle de la varlope. Si nous faisons pivoter un plan de façon à amener les deux arêtes extrêmes l'une derrière l'autre, elles doivent exactement coïncider sur toute leur longueur. L'action de ce dégauchissage visuel s'appelle : bornoyer, verbe qui vient de borgne, ce qui nous amène à dire qu'il est nécessaire de fermer un œil pour opérer cette vérification ».*[10]

- **Repères extra-figure (indépendants de la figure)** :

Dès le départ, les artisans cherchent un référentiel pour situer le motif dans un autre ensemble :

TP1 : « Il faut que j'aie les dimensions, pour pouvoir me dire <u>dans quel cadre ça rentre</u> et dans <u>quel bloc capable</u>, j'entends par là les <u>dimensions maximales</u> de l'ouvrage, une fois que j'ai les dimensions par rapport à un axe ou des cotes. (…) Il <u>est inscrit</u> dans une surface plane. (…) Pour vérifier que le motif est bien <u>cadré</u> sur cet axe et que j'ai le **bon axe.** (…) C'est-à-dire on trace un **trait droit**, qui **sera l'axe**, on prend les <u>dimensions capables</u>, on <u>prend les contours</u>, ensuite on reprend les <u>cotes déterminantes</u>, et ça va nous déterminer <u>l'emplacement du motif</u> (…) donc **l'axe vertical** me permet de faire une **symétrie correcte,** en fait, c'est une **croix**, ça **cale** quelque chose, je ne sais pas comment vous expliquer ça, c'est une **cible** en fait. Si je trace **la même croix** sur un morceau de pierre et que je **la fixe** au calque à cet endroit, ça me permet de **caler les choses**. »

La symétrie axiale apparaît comme un repère topographique essentiel dans la réalisation de ce « cadre » qui détermine la surface travaillée. L'axe de symétrie sert de repère de mesure (constitue l'origine de ce repère) et se comporte comme un véritable outil puisqu'il « cale quelque chose ».

[9] Bessot & Laborde, 2005, p. 14.
[10] Chanson, Traité d'ébénisterie, 1988, p. 9.

De plus, le fond est distingué de la forme :
TP4 : « On doit vérifier si c'est un relief, ou un bas-relief. »

TP3 : « Je trace préalablement sur la pierre l'axe ici, et après je vais chercher mes fonds (...) les fonds c'est ça. Ça c'est le motif, ça c'est le fond. Donc je fais le fond puis la forme. »

TP1 : «Je vais avoir besoin de telle ou telle dimension pour prendre mon bloc de pierre brute, et suivant aussi le sens de la pierre. »

La contrainte réelle de l'espace (en 3D) est permanente, et l'épaisseur nécessaire du bloc de pierre et la nature de celle-ci sont des éléments importants qui conditionnent le reste du travail. Le motif doit être situé « par rapport » à un autre ensemble et non pas aléatoirement, et doit être « bien » situé :

TB2 à propos de la figure 3.5 : « Il faut trouver le centre et la dimension du trèfle proportionnellement à l'endroit où il est placé (...) c'est-à-dire s'il est sur un panneau, on trace les diagonales. »

Cet espace détermine alors le support de l'ETG réel et personnel de l'artisan. Ce dernier peut ensuite s'appliquer à la déstructuration du motif.

- **Repères intra-figure (dépendants de la figure) :**

Les artisans effectuent un travail de reconnaissance des objets connus (cercle, carré…). Et plus généralement, ils recherchent « des rythmes, des régularités » mesurables :

TP1 : « Je **structure** ce que je pense avoir vu. Je regarde si c'est parallèle. (...) Je reprends là si c'est des arcs de cercle et donc la première chose à faire c'est retrouver les centres. »

TP3 : « Il faut **des repères de base** : la dimension du cercle, la dimension de cette palme, de cette volute. »

A propos de la figure 3.4, TP2 : « Il y a un point central, il y a des lignes de convergence, il y a un cercle par ici. (...) Il suffit de partir d'un carré comme ceci. »

Différentes « structures » se distinguent alors, telles que :

- **les axes de symétrie (principalement l'axe de symétrie vertical) :**

TP3 : « Pour être sûr de ma symétrie, je fais d'abord un dessin sur l'axe. »

A propos de figure 3.5 : TP2 : « Tout est basé sur la symétrie (...) et par rapport à un axe. »

TB3 : « Là je verrai symétrique, il suffit que je me trace un axe. »

TP4 : « C'est simple, tout motif a un axe. »

Clairement, la reconnaissance d'éléments symétriques et d'axes de symétrie apparaît comme systématique et consciente chez l'artisan. Elle oriente l'organisation de la figure et donc la construction de l'ETG.

- **les axes « cibles » :**

« C : Cet axe va permettre quoi ?
TP1 : De placer le motif sur l'axe vertical. Je vais trouver un endroit que je pourrai reprendre, par exemple la base.
C : Et rappelez-moi l'utilité de l'axe horizontal ?
TP1 : À placer le motif à un endroit précis (…) C'est une base de mesure (…) l'axe vertical me permet de faire une symétrie correcte, en fait, c'est une croix, ça cale quelque chose, je ne sais pas comment vous expliquer ça, c'est une cible en fait. »

On retrouve la volonté de reconnaître une esquisse de système de coordonnées de type cartésien. Les axes « cibles » en question sont orthogonaux (paire d'axe horizontal et vertical) et sont clairement utilisés comme repères de mesures.

- **les droites de référence particulières : parallèles, perpendiculaires, tangentes, etc**.

TP1 au sujet de la figure 3.3 : « J'essaie aussi de comprendre comment je fais. Je regarde si c'et parallèle, parce qu'à mon avis c'est parallèle ».

Et au sujet de la figure 3.4 : TP1 : « Je reprends la perpendiculaire et là je fais des parallèles autour de … je prends une parallèle par rapport à l'axe qui jouxte le motif du milieu et j'envoie ces parallèles de chaque côté de l'axe et je reprends celles qui m'importent ».

TP2 : « Il y a un point de centre et des lignes de convergence. »

Cette première approche du motif donne un autre statut à celui-ci, il devient une *figure géométrique,* non pas au sens de Parsyzs, c'est-à-dire représentant de propriétés, mais dans le sens où il suggère un programme de construction pour l'artisan : la marche à suivre.

TP1 : « Au début, il faut comprendre l'espace, il faut pouvoir structurer une surface plane, comme vérifier que c'est bien droit. »

Finalement, ils mettent en évidence les caractéristiques, les « régularités » qui révèlent les invariances de la figure d'abord par symétrie axiale. C'est une préparation souvent nécessaire à la construction du calque, outil prépondérant chez les tailleurs de pierre, et qui amène donc l'artisan à certains invariants opératoires propres à cette préparation (la recherche d'axes de symétrie ou autres axes de structures, nous y reviendrons). Les tailleurs de pierre pensent justement se distinguer des ornementistes par ce travail :

TP1 : « Les sculpteurs s'occupent d'ornementations et les tailleurs de pierre de géométrie : c'est-à-dire tout est définissable par côte, par rayon et par structure. »

L'ETG de référence s'habille progressivement dans le but de devenir l'ETG personnel de l'artisan, défini par les critères de la pierre ou du plan en bois et des dimensions capables suggérés par la figure :

TP1 : « Je reprends un endroit qui est mesurable, (…) je vérifie si le rythme est régulier (…) j'essaie de le contenir dans l'espace de travail. »

On retrouve chez Keller une description similaire de la conduite du tailleur de pierre, aux temps préhistoriques, de même que chez Piaget sur « le passage à l'espace euclidien » chez l'enfant. La recherche de ces axes qui structurent la figure et fixent la perception semble donc des invariants forts dans la perception « aiguisée » d'un artisan dans une problématique pratique, en perspective d'une tâche réelle de construction.

> *« Un système de coordonnées est donc le produit d'une multiplication logique des relations d'ordre, avec intervention des droites, des distances, des parallèles et des angles, selon n dimensions. On voit en quoi* ***un système d'axes de cordonnées suppose****, en plus des rapports topologiques élémentaires,* ***l'ensemble des notions euclidiennes*** *appliquées à la mise en relation de tous les objets entre eux, quels que soient leur proximité ou leur éloignement : c'est donc la structuration d'ensemble de l'espace euclidien que constitue un tel système, et c'est pourquoi sa construction est si tardive. Cela dit on comprend aussi pourquoi* ***la perception ne saurait suffire à une telle organisation d'ensemble****. La perception fournit bien, il est vrai,* ***une estimation grossière de l'ordre des droites, des distances, des parallèles et des angles****, et surtout elle s'appuie toujours, comme l'intelligence elle-même, sur des systèmes élémentaires de référence :* ***chaque objet perçu est, en effet, situé dans un « cadre »,*** *et c'est par rapport à ce cadre ou contexte perceptif* ***qu'il est mis en position et estimé en sa grandeur et ses dimensions.*** *(…) Est-ce le progrès perceptif qui est cause du progrès intellectuel ou l'inverse ? (…) On comprend bien le rôle possible de l'intelligence, qui consiste à mettre en relations durables les champs perceptifs entre eux, et non pas seulement à intervenir à l'intérieur de chacun des champs successifs (…) On comprend bien pourquoi ce progrès intellectuel est tardif :* ***il suppose****, comme nous l'avons vu, non seulement* ***l'achèvement des relations d'ordre*** *(…)* ***et la réunion en un seul tout opératoire de toutes les notions propres à l'espace euclidien : droite, distance et mesure, parallèles et angles*** *».* (Piaget & Inhelder, 1947, p. 10*).*

Piaget met en évidence l'importance d'un repère orthogonal dans la perception en tant que « cadre » pour délimiter l'espace de travail mais aussi dans le but de faire fonctionner une géométrie euclidienne (une géométrie affine munie d'une distance euclidienne). **Mais quels sont les moyens mis en œuvre pour réaliser cette structure ?**

3.2 Mise en œuvre de l'ETG : répertoire d'objets et de techniques

a) Un certain nombre d' « objets de référence » et de « postulats » :

- Le point

Dans la pratique, il est cité par les tailleurs ou ébénistes en tant que repère de mesure (« cote », « épure »), ou apparaît en tant que support de construction (point d'intersection d'arcs de cercle), ou encore est reconnu comme un point particulier (« le point de centre » d'un cercle).
Dans les ouvrages de référence[11] (ces deux ouvrages ont été les principaux cités en référence lors des entretiens) : « le point n'a pas de dimension, il n'est pas mesurable» (annexe, p. 284)

[11] Chanson, Traité d'ébénisterie, 1988, p. 9. et Ricaud, 1999, p. 18.

est une définition proche de celle des *Eléments* d'Euclide[12] : « un point est ce qui n'a pas de partie (indivisible) ».

Remarquons que la présentation des ouvrages de référence des artisans est proche de celle d'un ouvrage de référence en géométrie tel que *Les Eléments* d'Euclide (annexes pp. 275-292) sous forme de « planches » qui sont des listes d'énoncés, de définitions et de propriétés vues comme des axiomes ou des propositions, que l'on ne démontre pas - à la différence des *Eléments* d'Euclide - et des listes de *problèmes,* accompagnées de figures toutes répertoriées sur une page unique, également appelée « planche ».

- La droite

Dans la pratique, la droite est citée en tant que « ligne », « trait » ou « axe » et sera support de mesure (pour mesurer le milieu par exemple), support de position (repère visuel en donnant une « structure » comme explicité précédemment) ou encore support de construction (construire un angle droit par exemple). Dans le tracé des artisans, une droite est définie par deux points, ils admettent donc tout naturellement le postulat 1 du livre premier d'Euclide : « de tout point à tout point on peut tracer une ligne droite»[13]. Il y a également toutes les déclinaisons : parallèles, perpendiculaires, tangentes, sécantes et confondues, qui sont remarquées, recherchées et construites par les artisans (« les positions de la droite » : annexe p. 276).
Dans les ouvrages de référence : la droite est « une succession de points se déplaçant dans une même direction »[14], et le plan est « engendré par le déplacement ininterrompu d'une droite »[15] définition basée sur le mouvement, considération naturellement très prégnante chez les artisans (annexe p. 283).

- Le cercle

Dans la pratique, les artisans interrogés le citent en tant que « rond », « courbe », « arc ». Il est utilisé en tant que support de construction (les points sont des « croisés d'arc »), ou comme instrument de mesure via le compas (report de distance par petits arcs de cercle). Il est également support de structure d'un autre motif ou figure (cercle inscrit ou circonscrit : voir figure 3.5) ou simple ornementation.
Dans leur tracé et le discours associé, il suffit :
- **d'un centre et d'un rayon pour définir un cercle.**

TP4 : « Toujours un axe et un point de centre dans un cercle. »

---

[12] Traduction de Vitrac, 1994.
[13] Ibidem.
[14] Ricaud, 1999, p. 9.
[15] Ibidem.

Ce théorème-en-acte dont la formulation langagière des artisans est très proche correspond parfaitement au postulat 3 du livre premier d'Euclide: « avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence »[16].

- ou de trois points.

TP1 : « Si on prend trois points, il y a un qu'un arc qui passe par ces trois points. »

De même, ce théorème-en-acte correspond exactement au théorème de géométrie : « par trois points non en ligne droite on peut faire passer une circonférence et une seule »[17]. On retrouve ces définitions du cercle dans les ouvrages de référence [18] (annexes p. 276, p. 279 et p. 287).

Les artisans « disposent » ainsi d'un certain nombre de « postulats » du type d'Euclide définissant des objets de référence géométriques et les relations entre eux. Etant donné que les éléments sont visibles dans le discours des artisans - les formulations étant proches de celles relevées dans les ouvrage de référence -, on peut supposer que ces connaissances en acte sont soit des résidus d'un enseignement antérieur, soit le fruit d'une conception spontanée et intuitive. En effet, certains énoncés sont tenus pour vrais par l'artisan car ils se vérifient par perception ou construction immédiate. Par exemple, à propos de l'existence et de l'unicité d'un cercle à partir de trois points :

« TP1 : « C'est logique… j'arrive pas… j'ai pas de théorie, je perçois.
C : Il ne peut pas y avoir un deuxième arc ?
TP1 : Ben ça sera le même !
C : Il ne peut pas y en avoir un autre ?
TP1 : Ben par <u>superposition</u>, il peut y avoir autant d'arcs que vous voulez, mais comment dire, <u>il ne peut pas y avoir, passant par ces trois points, un autre</u>… Si le rayon qui passe par ces trois points est de 10, on pourra pas faire passer un arc avec un rayon de 2. »

b) Un certain nombre de techniques[19] routinisées :

- <u>La recherche (systématique) d'axes de symétrie :</u>

- « **à l'œil** », avec une règle non graduée.

TP4 à propos de la figure 3.1 : « C'est simple, tout motif a un axe. (…) L'axe de votre structure passera par la boule et cette partie puis entre les deux spirales. »

- **mesure** et avec l'aide d'**outils spécifiques** (fil à plomb pour l'orthogonalité).

TP1 : « C'est un motif <u>vertical</u>, donc je vais prendre les <u>cotes extérieures</u> et je vais tracer la moitié. Je vais tracer un <u>à plomb</u> et je vais vérifier si les éléments du bas de ce motif

---

[16] Vitrac, 1994.
[17] Hadamard, 1898.
[18] Chanson, 1988, p. 20 et Ricaud, 1999, p. 106.
[19] « technique » peut aussi être interprété au sens de Chevallard mais nous ne ferons pas une analyse en terme de praxéologie.

tombent aussi sur la moitié, pour vérifier que le motif est bien cadré sur cet axe et que j'ai le bon axe. (…) Il nous faut la cote du haut et la cote du bas pour être au plus précis sur la longueur. (…) On trace un trait droit qui sera l'axe et on prend les dimensions capables, les cotes déterminantes, et ça va nous déterminer l'emplacement du motif. »

On peut supposer que cette technique assez intuitive vient en partie de la conception naturelle : « la verticale est perpendiculaire à l'horizontale » qui est formulée comme un « théorème » dans leur ouvrage de référence (annexe p. 280). Elle est ici vérifiée par un outil, le fil à plomb. L'artisan tailleur de pierre inscrit donc son ETG dans l'espace car le fil à plomb, outil de référence, lui donne systématiquement la direction normale au plan horizontal. C'est une des principales distinctions entre l'ETG mis en place par le tailleur de pierre et l'ETG mis en place par l'ébéniste, car celui-ci se contente (souvent) du plan.

TP1 : « Si je m'aperçois que c'est décalé, je reprends les cotes extérieures. »

Cette technique est supportée par des conceptions géométriques admises précédemment sur la droite. TP1 reprend les « cotes extérieures » en traçant deux droites parallèles à l'horizontale de distance suffisamment grande pour « être le plus précis sur la longueur », chacune à l'aide de deux points de part et d'autre de l'axe, et là aussi suffisamment éloignés. Puis par la technique de la médiatrice ou en mesurant, il obtient les milieux qu'il rejoint ensuite et trace ainsi l'axe de symétrie. Il applique ainsi les propriétés de la médiatrice d'un segment qui passe par le milieu (l'orthogonalité étant induite). La technique de la médiatrice est une des techniques que l'on retrouve abondamment dans les ouvrages de référence (annexes pp. 277-279 ; p. 281 et pp. 285-287) et qui répond à différents types de tâches.

- **la technique de la médiatrice**.

A propos de la figure 3.2, TP1 : « Donc là y a cet axe vertical et y a l'autre axe qui va dans l'autre sens. (…) Je vais trouver un endroit que je pourrai reprendre, par exemple la base [en mesurant ou à l'œil].
C : comment vous tracez ce deuxième axe ?
TP1 : Alors soit je prends une équerre et un réglé qui va remplir entre les deux colonnes, soit même chose, je reprends à l'endroit où les axes vont se croiser et je reprends le milieu d'un segment compris sur l'axe vertical de symétrie et je reprends un coup de compas à égale distance des deux côtés, j'écarte le compas un peu plus grand que le centre. »

Il obtient ainsi deux axes orthogonaux pour « caler » sa figure de manière instrumentée : soit en mesurant avec un réglé, soit avec le compas tout en appliquant la technique de construction de la médiatrice. Il s'agit clairement de « visible mathematics »[20], soit des *mathématiques visibles*, car certains des artisans me confirment qu'il s'agissait d'une technique de l'école (certains me prenaient même en témoin : « vous savez… ») et que l'on retrouve dans leur ouvrage de référence : « tracer une perpendiculaire au milieu AB. Avec une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de AB et en prenant successivement comme centre

[20] Noss & Al., 2000, pp. 17-35.

A et B, tracer les deux arcs mn et nm. La corde des deux arcs mn coïncide avec la perpendiculaire cherchée »[21].

La technique de la médiatrice permet de répondre à plusieurs tâches :
- trouver le milieu d'un segment
- tracer un couple de droites perpendiculaires
- retrouver le centre d'un cercle (voir paragraphe p. 85 « la recherche du point de centre »).

Cette technique reprise par presque tous les artisans pour répondre au moins à l'une de ces tâches est clairement une routine, mais semble avoir été éloignée de son sens mathématique (ou de sa « technologie » si l'on réfère toujours à Chevallard). En effet, dans le cas des techniques disponibles pour retrouver un centre de cercle, un même artisan se souvient de la technique de la médiatrice pour tracer un milieu ou un angle droit mais ne va pas jusqu'au bout de la technique pour en déduire le tracé du centre d'un bout de cercle donné alors qu'il commence par tracer la médiatrice à partir de deux points de ce cercle (voir extrait p. 85).

➢ La recherche de droites particulières :

- **droites parallèles**[22] : en mesurant

C : « Comment vous vérifiez que c'est parallèle ?
TP1 : En faisant la cote au plus haut et au plus bas. Et si les dimensions sont les mêmes, dans ce cas, elles sont parallèles. »

- **droites perpendiculaires**[23] : avec instruments (équerre, rapporteur ou fil à plomb), ou par la technique de la médiatrice ou encore en traçant un demi-cercle puis le triangle dont l'hypoténuse est le diamètre. Cette dernière technique a été repérée dans l'action mais n'est pas formulée par l'artisan (TP2). Cette technique illustre également l'idée d'une « boîte noire » dont la justification mathématique semble opaque. Elle est employée comme technique de construction économique comme celle de la médiatrice. On la retrouve également dans les ouvrages de référence (annexe p. 290).

- **droites tangentes** : « qui jouxtent », à l'œil (TP1), avec une règle ou une équerre.

➢ La recherche des courbes, des cercles

- toujours « **à l'œil** », ou « **main levée** ».

[21] Chanson, 1988, p. 18.
[22] Il existe également d'autres techniques disponibles dans les ouvrages de référence dont des extraits sont disponibles en annexe p. 278.
[23] De même, le tracé de droites perpendiculaires est décrit abondamment dans les ouvrages de référence dont nous proposons des extraits en annexes p. 281 ou p. 285.

- **la méthode du Perroquet** (« ou pistolet à dessin » voir annexe p. 292) : encore un exemple de *boîte noire*[24] . Il s'agit d'un outil économique qui laisse également opaque la raison mathématique qui justifie l'existence de cet outil.

TP1 : « On a le principe du perroquet, c'est un outil qui inscrit beaucoup de courbes.
C : Et qui nous donne le centre ?
TP1 : Qui ne nous donne rien du tout, mais quand j'ai retrouvé la correspondance, je trace. »

➢ La recherche du « point de centre » :

- « **à l'œil** » ou « **à tâtons** » (à l'aide du compas, voir p. 90 l'exemple de la méthode dite d'« essais-erreurs »)

- **informatisée** (*boîte noire)* avec la « technique des trois points » énoncée sous forme d'axiome. Un des tailleurs (dont nous avons déjà cité un extrait de l'entretien à propos de ce théorème) nous explique qu'aujourd'hui, les logiciels donnent directement le centre si l'on rentre les coordonnées des trois points.

- **la technique de la corde** (à l'aide du compas et d'un réglé) qui revient à la technique de la médiatrice d'une corde (et décrite également dans plusieurs ouvrages de référence, annexes pp. 286-287) :

TP1 : « Je vais prendre un segment [la corde], je vais trouver son milieu, soit par cote soit par croisé d'arc avec le compas [technique de la médiatrice]. Je prends la pointe de mon compas sur un côté que j'aurai déterminé, <u>j'envoie à l'œil plus loin que la moitié</u>, je trace un arc de cercle, la même chose sur l'autre point et je rejoins forcément, clac. (…) Et là-dessus je peux retrouver mon rayon… <u>mais je ne me souviens plus très bien</u>…. »

Il finit par chercher à tâtons (méthode dite « d'essais-erreurs ») avec le compas le centre sur la médiatrice. Même chose pour TB1 qui cherche à construire la bissectrice du triangle isocèle dont la base est une corde d'une des courbes de la volute. On assiste même à ce que Noss et Hoyles qualifient de *breakdown,* lorsqu'on tente d'ouvrir les *boîtes noires,* c'est-à-dire que l'artisan se retrouve dans une situation difficile car il cherche à expliquer la technologie d'une technique routinisée (en terme de Chevallard) et finalement va se contenter de la méthode « essais-erreurs » :

TB2 : « S'il fallait faire un tracé géométrique sur cette courbe, là, bon là, il y a quand même un rayon là, donc on peut déterminer un centre qui se trouve par ici, à ce moment-là on prend les parties les plus opposées donc avant que ça retourne, donc on trace un point ici, un par là, on trace la corde là, on trace la perpendiculaire, cette corde ici et puis on fait… ensuite… <u>comment on fait déjà</u>…. On prend ces points-là, on fait un écartement qui correspond… <u>ha je me rappelle plus</u>…. Après, là, on a les bissectrices…. »

---

[24] Noss & Al. 2000, pp. 17-35.

Technique dont certains se souviennent et vont correctement tracer le point d'intersection de deux médiatrices et de deux cordes :

TB3: « D'après la courbe, pour trouver le centre, il faut faire comme ça, il faut tracer deux perpendiculaires et on a le centre. »

Il s'agit de *visible mathematics* mais la raison mathématique semble opaque car l'artisan tente de nous faire comprendre que « le centre appartient toujours à la médiatrice d'une corde » qui fait écho à une forme d'axiome cristallisé. Dans le manuel de référence[25], théorème 23 : « la perpendiculaire élevée au milieu d'une corde passe par le centre », puis « tracer deux cordes quelconques et élever les perpendiculaires au milieu de ces cordes. L'intersection des perpendiculaires nous donne le centre recherché. C'est une application du théorème 23 ». L'enchaînement ne se fait pas toujours mais l'origine de son utilisation dans la pratique vient d'un enseignement antérieur.

3.3 Les invariants opératoires de la symétrie axiale

- Le schème de bidécomposabilité

Tous les artisans cherchent à diviser en deux parties égales les figures proposées de symétrie axiale simple et même d'autres (fig. 3.1, 3.3, 3.4 et 3.5). Le calque, le poncif, le gabarit, le fil à plomb, le compas ou la règle graduée permettent la mise en œuvre des techniques « routinières » telles que celle de la médiatrice et de la bissectrice (comme déjà explicité précédemment). L'axe médian est vertical et sert d'origine de mesure. Il constitue donc un début de repère orthogonal (« de croix », « de cible »). Il tient lieu de frontière entre les deux parties égales.

TP1 : « **Sur mon calque aussi** j'aurais tracé mon axe **parce que je l'aurais tracé sur la pierre**, et je reprends les cotes extérieures et **je repositionne mon truc** dessus et hop ».

TP3 : « Je fais d'abord un dessin sur l'axe, **je fais une moitié** et je reporte ensuite ».

TP4 : « Donc **vous avez un axe**, **vous calquez cette partie-là** et **puis vous la retournez** ».

TB2 : « Je fais **mon tracé d'un côté**, je trace sur le calque et **je retourne mon calque** et je trace de l'autre ».

- Le concept-en-acte d'invariance

Rappelons que nous distinguons deux types d'invariances (chapitre 2 p. 49) : l'invariance globale et l'invariance point par point.

[25] Chanson, 1988, p. 14.

- Une figure *F* est globalement invariante par une transformation *T* si *T(F)=F*. L'un des signifiants de ce concept est le schème de superposition par pliage dont l'axe de symétrie est la « pliure ». Ce type d'invariance est recherché par l'artisan sous la forme de « régularités » ou de « rythmes », autrement dit à travers le concept-en-acte de conservation. On entend par conservation la conservation de la forme, des distances, des angles mais pas de l'orientation (qui permet de distinguer les isométries en déplacements et anti-déplacements).

- Une figure *F* est invariante point par point par une transformation *T* si pour tout point *M* de *F*, *T(M)=M*. Cette propriété implique l'invariance globale. L'axe de symétrie d'une symétrie axiale est invariant point par point. L'un des signifiants de ce concept est qu'il sert justement de repère fixe (de position, d'origine de mesure, de frontière, etc.). Ce concept, implicite dans l'action, se retrouve dans le discours lorsque les artisans recherchent « le bon axe ».

➢ Le schème de superposition ou de coïncidence

Il met en relation les concepts-en-acte précédents : l'invariance point par point, l'invariance globale, et la conservation. Il accompagne également le schème de bidécomposabilité s'il s'agit d'un pliage. Ce schème a une valeur empirique. Il rend perceptible l'existence de la symétrie par pliage le long de l'axe de symétrie.
Il peut même attester l'unicité comme par l'exemple : « par trois points distincts passe un unique cercle » dont nous avons déjà cité l'extrait de l'entretien p. 82.

➢ Le concept d'involution

Le caractère involutif est appliqué en tant qu'action de contrôle : les artisans plient et déplient. Cette caractérisation de la symétrie axiale est clairement implicite dans l'action. Cette propriété a seulement statut de contrôle et non de valeur de reconnaissance de la symétrie.

Dans cette situation de communication de la tâche de reproduction d'une figure globalement invariante par symétrie axiale (fig. 3.1 et 3.3), l'artisan se situe dans une géométrie de perception (écartement du compas à l'œil pour la technique de la médiatrice, et toute la structuration, le choix des axes, etc.), de mesure, de construction instrumentée et de mouvement, dans le monde sensible. Il se situe dans GI. Il dispose d'un répertoire de techniques routinisées avec des outils adaptés. Une même technique peut répondre à différentes tâches. Ces techniques semblent être des résidus d'enseignement : *visible mathematics* dont certains *breakdown* ont mis en évidence l'existence des *boîtes noires* et nous confirment « l'étanchéité » de ces boîtes noires (« on n'ouvre pas les *boîtes noires* » (Straesser, 2007)). On repère de nombreuses réminiscences de la géométrie euclidienne (tout comme Bessot & Laborde le remarquaient pour les tracés de bâtiment), mais cette géométrie en acte reste empirique et non axiomatique. Le schème de bidécomposabilité dont un des signifiants est l'axe de symétrie vertical, est très prégnant dès le départ et organise bien

souvent la conduite de l'artisan. Bien que le motif considéré se révèle sous les atours d'une figure géométrique, il est toujours l'objet d'étude de l'artisan et non pas un support à un raisonnement axiomatique (ce n'est pas le but de toute façon !).
On reste donc définitivement dans GI à la limite de GII. Un certain nombre de techniques mathématiques aménagent l'ETG personnel de l'artisan et concourent à la construction de la géométrie en acte visée par l'artisan.

4. LA SYMETRIE : CONCEPT NATURALISE, ORGANISATEUR DE LA CONDUITE

4.1 Des situations plus complexes de « symétrie » : le cas des rotations d'ordres 3 et 4 (fig. 3.4 et 3.5)

Les artisans s'adaptent et reconstruisent la figure proposée afin de retrouver une situation connue. Nous montrons dans ce paragraphe comment ils reconstruisent la situation pour exhiber un (ou des) cas simple(s) de symétrie axiale. Le schéma d'adaptation des artisans repose sur le même schéma de structuration (schéma 3.8) que celui évoqué dans le paragraphe précédent. Autrement dit, ils procèdent à la reconnaissance et la mise en place des repères intra- et extra- figures, à la reconnaissance d'objets de référence inscrits ou circonscrits à la figure, au tracé d'axes (de symétrie, ou autres axes particuliers) et vérifient la conservation par superposition.

a) Au sujet de la figure 3.4 (rotation d'ordre 4) :

TP1 : « Alors vu que c'est symétrique, enfin pas symétrique, mais régulier, c'est un rythme régulier, en fait si mon point de centre est ici, je vais hop prendre ce rayon et tracer un cercle » (…) Bon imaginons je vais appeler 1, 2, 3 et 4, et puis a, b, c et d. Par exemple 1 devient a et b, donc l'autre ainsi de suite. (…) Il y a un rythme carré en décalé. Je vais chercher cet angle, je trace donc mes perpendiculaires sur mon premier rythme puis le deuxième (…) s'il est à reproduire par rapport à un point de centre, il suffit que je reproduise cette première partie par rapport à un axe. C'est toujours par rapport à un axe. Enfin moi je travaille toujours par rapport à un axe, enfin sur deux perpendiculaires. (…) Ça tourne par rapport à un point de centre, je vais tracer toutes les lignes nécessaires pour faire tourner toutes les structures du motif ».

TP1 appartient au système, il tente de se ramener à une situation connue d'axes perpendiculaires, qui n'est pas sans rappeler les invariants opératoires caractéristiques de la situation simple de symétrie axiale. TP1 tente alors d'adapter ces invariants : « toujours par rapport à un axe », mais reconnaît aussi l'invariance du point de centre. On retrouve sa volonté d'établir des axes « cibles » à travers la recherche de système de coordonnées avec « deux perpendiculaires ». Enfin, le principe de conservation se vérifie par la superposition grâce à un mouvement rotatif comme évoqué par Mach dans le chapitre 1 :

TP1 : « Je peux tourner les axes, par exemple sur mon calque, y aura mes axes vu que c'est perpendiculaire, je peux faire tourner de 90° (…) je peux faire tourner sur ces quatre droites, ou à quatre endroits, je peux faire tourner un cercle, et après reprendre entre chaque point sur cet axe toujours et voir les distances par exemple. Si je fais un axe au milieu, une perpendiculaire toujours, je trace un rond qui passe par les mêmes points partout, au croisement de ces axes et de ces points sur cet arc, enfin sur ce cercle, et en prenant chaque point d'un axe à l'autre, j'ai la même chose. »

De même TP3 propose : « Là il n'y a pas de symétrie en fait puisque les motifs tournent. (…) Puisque c'est cette partie-là qui est multipliée par 4, je prends cette partie-là et on multiplie par 4. Donc on part d'un axe, reste à déterminer l'axe. (…) A partir du moment où j'ai les dimensions dont j'ai besoin pour faire mon ornementation, je me trace un cadre, et je la mets dans le cadre. En l'occurrence c'est un carré, donc j'ai découpé un profil et je pose dans l'angle là et je pose l'autre là et donc c'est obligatoirement symétrique. »

De manière générale, on retrouve un usage assez peu rigoureux du terme de symétrie. Les artisans interrogés entendent principalement par « symétrie » la conservation de la forme dans un certain rythme qui constitue alors la figure dans sa globalité. Ils invoquent les mêmes éléments de structuration de la figure que dans le schéma 3.8.

b) Au sujet de la figure 3.5 (rotation d'ordre 3) :

Les mêmes invariants opératoires guident la conduite de l'artisan :

TP1 : « Premièrement je vais étudier son rythme comme l'autre, pour moi ça rentre dans un cercle (…) là je vais tracer un axe. Moi je vois ces trois axes-là. Bon déjà ça s'inscrit dans un rond tout ça, ça s'inscrit soit dans un rectangle, soit dans un carré, soit dans un cercle. Ici vous cherchez ce point de centre, ensuite vous pouvez faire un axe. Puis de cet axe, vous en tracez un autre. »

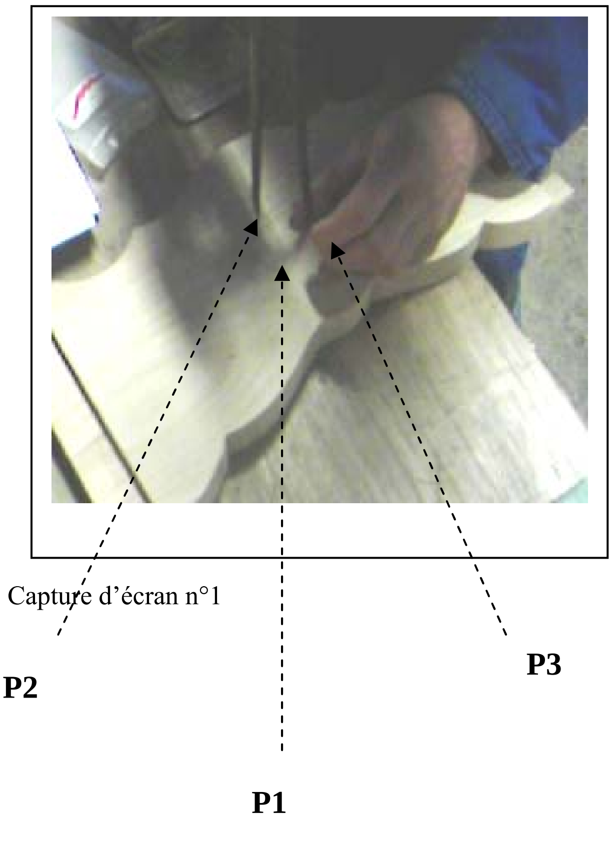
TP4 : « Votre cercle est partagé donc automatiquement, il est symétrique partout. (…) Si vous avez un motif à exécution répétitive, (…) le trèfle est symétrique dans le sens où les trilobes se rejoignent et sont inscrits dans un triangle ou un cercle. (…) Dès l'instant où c'est traçable c'est symétrique, là vous avez trois lobes, du même rayon, donc il y a bien l'aspect symétrique. (…) C'est toujours symétrique car si je les éloigne les uns des autres, ça part d'un axe et d'un point de centre. »

On retrouve une organisation de la conduite proche de celle décrite dans le cas simple de la symétrie axiale : un découpage global de la figure à partir d'axes, qui tiennent lieu de « frontières » entre les parties égales ou semblables, des axes qui peuvent donc être ou non des axes de symétrie mais qui décomposent la figure et les repères intra- et extra- figure dont des objets de référence (inscription dans un « cadre » ou un cercle). L'artisan décrit toujours une géométrie dans le mouvement où la perception et son propre point de vue dominent l'interprétation du motif. On reconnaît le même répertoire de postulats de base et la même mise en œuvre de techniques.

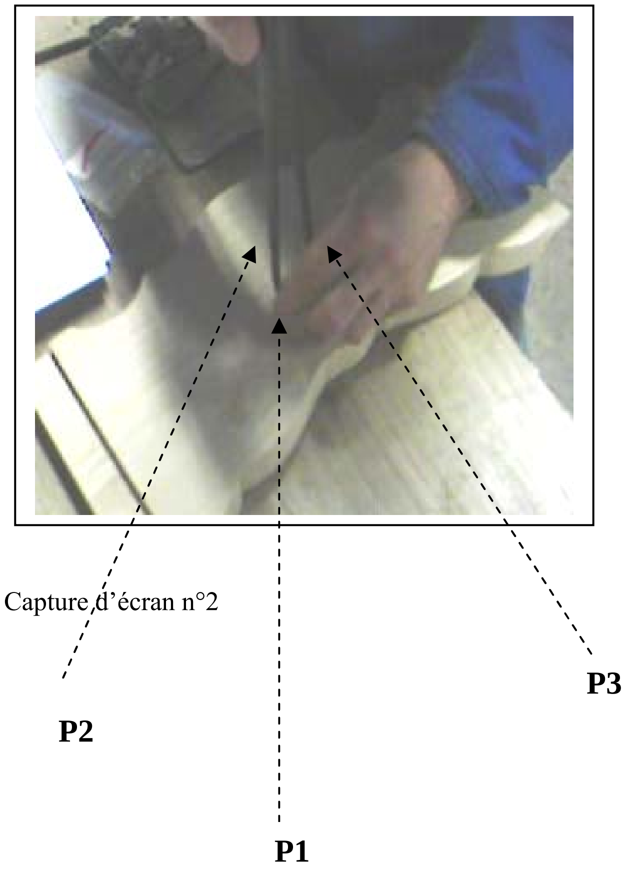
Nous avons rencontré une autre forme d'adaptation du type « essais-erreurs ». Grâce à l'enregistrement vidéo, nous avons découpé la conduite de l'ébéniste TB2.

A partir du modèle proposé, il indique d'abord un axe vertical qui divise alors en deux le trèfle. « Je trace mon axe ». Puis il désigne les centres des autres cercles : « mes départs ».
Sur un support en bois qu'il trouve, il commence par tracer un cercle à l'aide d'un compas à deux pointes sèches, afin de tracer dans le bois. Je lui demande pourquoi il commence par tracer un cercle : « Comment ça, mais si, ils sont tous les trois [les trois autres centres] sur le même point ». Je comprends alors qu'il m'indique que les trois centres des trois autres cercles appartiennent au même cercle. Il cherche ensuite à diviser en trois ce premier cercle. Il cherche alors la position idéale de ces trois centres. Il agit par permutation.

On désigne par P1, P2 ou P3 les différentes positions des centres des trois cercles sur ce cercle initial. Il tente alors différentes positions en vérifiant un écartement du compas constant.
Nous illustrons ces différentes positions « essais-erreurs » grâce à des captures d'écran à partir de la vidéo réalisée sur place.



Capture d'écran n°1



Capture d'écran n°2

Il positionne d'abord P1, situé sur l'axe vertical qu'il avait préalablement désigné sur le modèle (mais qu'il n'a pas retracé sur le bois). Cet axe (imaginaire) est vertical par rapport à l'artisan. On retrouve alors la méthode de la « visée »[26], terminologie de Piaget qui désigne une action qui est « subordonnée à un point de vue ou une direction ».
Les positions de P2 et P3 sont désignées aléatoirement (« au jugé », comme il le dit lui-même) mais avec le même écartement. Autrement dit, P1P2=P1P3.

[26] Piaget & Inhelder, 1947, p. 192 et p. 224.

D'après la capture d'écran n°1, l'ébéniste laisse fixe une des pointes sèches sur P2 pour alors comparer P2P1 et P2P3. Les distances n'étant pas les mêmes, l'ébéniste réajuste alors son écartement, légèrement plus petit ou légèrement plus grand, afin de faire tendre la mesure P2P3 vers P1P2 (et donc P1P3). Il repositionne ainsi et P2 et P3 toujours tels que P1P2=P1P3 puis compare à nouveau P2P1 et P2P3, et repositionne à nouveau si les distances ne sont pas encore satisfaisantes.
La capture d'écran n°2 nous montre l'ébéniste qui laisse fixe la pointe sèche en P3 et réajuste l'écartement en P1. Il contrôle toujours en comparant deux à deux et mesure ici P3P1 et P3P2. Il change alors les positions des centres des trois cercles visés, de manière à ce que la distance entre ces trois centres tende vers la même mesure, en comparant toujours les mesures deux à deux. La marge d'erreur se réduit alors petit à petit. Cette méthode peut sembler assez chronophage mais a pourtant été réalisée en quelques secondes.
En se référant à leur ouvrage de référence, le tracé du trèfle pourrait être effectué d'abord à partir de la construction d'un triangle équilatéral ABC puis du tracé des cercles de centre A, B et C, de même rayon OA=OB=OC, O étant le centre du cercle circonscrit à ABC. Le tracé n'est pas pour autant plus rapide.

Cet artisan appliquerait exactement la même méthode s'il s'agissait d'un carré [27]. Il tracerait d'abord le cercle qui sera circonscrit au carré et déterminerait ensuite les sommets du carré en comparant les mesures deux à deux, et obtiendrait également un tracé satisfaisant en un moindre temps.

4.2 Des théorèmes-en-acte intéressants dans la situation de la symétrie centrale seule *(la volute fig. 3.7)*

- composée de deux symétries orthogonales

TB1 : « On est obligé de développer une première fois puis d'inverser pour qu'il se retrouve complètement à l'opposé. »

La symétrie centrale est interprétée (et mimée) comme composée de deux symétries axiales dont les axes sont : un horizontal puis un vertical dans un même plan. On retrouve le rôle prépondérant de cette paire d'axes, signifiants d'une autre conception, celle de la composée de deux symétries axiales. On « développe » en deux temps : il s'agit de la succession de deux « dépliages ». Ce schème met en relation les concepts en acte de conservation, d'invariance globale et d'orientation. On peut faire l'hypothèse que l'origine de cette conception vient d'une technique propre à l'ébénisterie : la marqueterie (voir illustration 3.6). En effet, cette technique consiste à reproduire un motif issu d'une fine tranche de bois par « développement » en 3D (puisqu'on plie et déplie une feuille de bois) en suivant des composées de symétries axiales d'axe horizontal ou vertical, ou des composées de translation

[27] Nous indiquons en annexe p. 282, une des « planches » sur les tracés des polygones réguliers.

(développement 2D), ou encore des composées de symétries axiales et translations, autrement dit des symétries glissées. Ainsi, dans le cas de la volute simple, on retrouve les gestes quotidiens et routiniers associés à ceux de la marqueterie, d'où la mise en œuvre naturelle de composées de symétries axiales. L'ébéniste est également partie intégrante du système et nous décrit une géométrie qui s'anime autour de lui.

En ce qui concerne le tracé préliminaire (notamment le tracé de la courbe de la volute), on retrouve le même répertoire de techniques et de postulats (la technique de la corde pour déterminer le centre des arcs : un centre appartient à la médiatrice d'une corde). A la question du contrôle de « la symétrie » (terme que je reprends uniquement s'il est employé par l'artisan interrogé) : il décrit à nouveau le processus dans l'action de la composée de deux symétries orthogonales :

C : « Comment vous vérifiez que vous avez bien votre symétrie ?
E : Ben si c'est fait par un gabarit… ben de toute façon… il y a l'axe qui… ben heu… En fait je tracerais quelque chose de perpendiculaire ici, pour déterminer le haut de la volute pour qu'elle se reproduise, et en fait pareil par rapport à l'axe, la rencontre des axes, l'axe vertical, et l'axe horizontal, je reproduirais le même point ici pour vérifier que la distance par rapport à l'axe est la même, avec le gabarit ou la feuille de calque, comme ça, ça me donne le point exact. »

On retrouve dans l'action un théorème fondamental en mathématiques : toutes les isométries peuvent être engendrées à partir de réflexions[28]. Translation, rotation ou symétrie centrale sont décomposables en produits de réflexions successives. Et en marqueterie, la composée intuitive de ces transformations conditionne les gestes des artisans.

- demi-tour

Dans un premier temps, TB3 ne remarque pas la symétrie centrale :

TB3 : « On peut faire avec un calque. On décalque d'un côté et on reporte de l'autre. (…) Ce motif-là je le trace, et je retrace mon motif sur le bois et en même temps derrière comme ça quand je fais de l'autre côté, je retourne et maintenant je peux le tracer à l'envers, symétrique. Il suffit que je me trace un axe auparavant pour avoir le même axe.
C : Et ici **vous prendriez quel axe** ?
TB3 : Ben ici.
C : Là **vous me montrez un point.**
TB3 : Non, il faut un axe pour faire une symétrie, donc on part de l'axe.
C : Lequel ?
TB3 : Il faut qu'il soit perpendiculaire à la ligne qui passe par les volutes, obligatoirement. »

On assiste aux schèmes (quasi instantanés) de la symétrie axiale simple avec la structuration du motif dont le repère orthogonal semble ici un critère explicite.

[28] « Étant donné un plan, il existe une transformation involutive appelée réflexion par rapport à ce plan, distincte de l'identité qui transforme points, droites et plans en points, droites et plans respectivement, et qui conserve l'orthogonalité et l'incidence. […] L'ensemble des isométries est obtenu par composition de réflexions. » (Reinhardt F. & Soeder H., Atlas de Mathématiques, 1997, p. 155).

Puis, je lui expose la différence ici…
C : Mais attention… la volute est comme ceci *et je redessine avec mon doigt le tracé de la volute.*
Après quelques secondes de réflexion, TB3 s'adapte : « Ah oui. Elle est pas symétrique. Ah ben il faut tourner autour de l'axe, c'est tout. Pas besoin de faire l'autre côté. A ce moment-là, pas besoin de faire l'autre côté, je prends ça et je tourne comme ça et je la fais ici, c'est une histoire de pivotage, ça reste un axe comme celui du compas.
C : *[en me parlant à moi-même en prenant des notes] :* Retournement du calque…
TB3 : Euh non j'appellerai pas ça un retournement, c'est un pivotement. Pour moi un retournement c'est ça : *[il mime le retournement d'une feuille comme pour la symétrie axiale].* Et j'ai fait la figure à l'envers. Pivotement, ça ne fait pas très français, je ne sais pas quel mot il faudrait employer… rotation autour de l'axe, rotation de la feuille ou rotation en opposition. Je ne sais pas comment on dit, c'est comme ça qu'on dit dans les écoles : figures opposées ? Ou symétriques ?
C : Ce n'est pas important ce qu'on dit… donc pour vous c'est un retournement ?
TB3 : C'est ça *[il remime]* je retourne ma feuille, alors si je fais comme ça *[il fait la rotation d'angle π]* c'est plutôt une rotation.
C : Dans ce cas, comment vous pouvez être sûr d'avoir fait une rotation exactement de l'angle que vous vouliez ?
TB3 : Il faut se tracer un axe sur le modèle. Donc si l'axe il est là, il faut que l'axe que vous allez mettre là, il s'aligne avec l'autre.
C : Donc vous retracez l'axe sur la figure ?
TB3 : Ben c'est-à-dire qu'au départ il vous faut un axe, donc je me positionne sur cet axe et je me retrouve sur l'axe pareil et à ce moment-là, on a le même de chaque côté. Parce que vous vous appelez ça symétrique ? Parce que nous on n'appelle pas ça symétrique, nous on appelle symétrique quand justement ça, ça c'est comme ça, et comme ça, *[il mime à nouveau les gestes associés à la symétrie axiale].*

Pour lui, cette transformation n'est pas symétrique. Il conçoit la symétrie centrale comme une rotation de centre le « centre » de la volute et d'angle π, mais non pas explicitement autour du point de centre, mais autour d'un axe, perpendiculaire au plan de la volute, « comme le compas ». Il situe son Espace de Travail en 3D (de la même manière qu'un tailleur de pierre passe en 3D pour repérer la verticale normale au plan). TB3 associe une fois de plus ses gestes à la transformation (tout comme TB2 et la technique de la marqueterie). On peut faire l'hypothèse que cela vient d'une « mémoire gestuelle ». Cet artisan dispose en fait d'un répertoire de tâches et de techniques routinisées mais aussi des « gestes routinisés », notamment avec le compas, qu'il adapte selon le type de tâches, car il est sculpteur de bois, et ne réalise pas autant de marqueterie que TB2, qui lui est ébéniste.

L'artisan TB3 fait mention de plusieurs axes :

- l'axe de structure qui « aligne » un point repère d'une courbe, le centre de symétrie et l'image de ce point repère. Il sera l'axe de « position », de repère pour le « pivotage » du calque. Cet axe de position n'est pas l'axe invariant point par point utilisé comme repère de position comme dans le cas de la symétrie axiale simple.
- l'« axe de symétrie » initial (mais qui n'est pas un axe de symétrie) choisi par l'ébéniste, qui est l'orthogonal en passant par O, à l'axe précédent, mais qui se révèle finalement inexploité.

- l'« axe de rotation » qui est l'axe normal au plan (de travail) et sur lequel est axé la rotation d'après l'artisan. Son point d'intersection avec le plan est O. Il assimile cet axe au compas.

L'artisan décrit une géométrie dans le mouvement, mouvement coordonné par ses gestes et ses instruments, d'où le passage en 3D et à la confusion des éléments laissés invariants par la transformation (compas assimilé à l'axe invariant). L'artisan, les outils et la figure participent au fonctionnement de son Espace de Travail Géométrique. En ce qui concerne le tracé géométrique, il dispose toujours d'un même répertoire de techniques (*visible mathematics)* : la technique des médiatrices de deux cordes et l'adaptation de la technique de l'hexagone pour le trèfle, où l'on reconnaît des postulats naturalisés du type : « mais c'est forcément symétrique dans un cercle ».

4.3 Exemple d'adaptation en situation de réalisation sans modèle : la trisection de l'angle

➢ <u>Un théorème-en-acte issu du schème de bidécomposabilité</u>

Après avoir dessiné un angle quelconque (aigu et ouvert) sur une feuille de papier, j'ai demandé à l'artisan comment il le diviserait en trois parties égales. Un des ébénistes m'explique qu'il diviserait d'abord en douze, en traçant de manière itérative des bissectrices d'angles et, comme trois est un diviseur de douze, j'aurai ma trisection :

TB1 : «On <u>divise en deux avant,</u> je diviserais en 12 et je prendrais 4 parties de 12.
C : Comment vous faites pour diviser en 12 ?
TB1 : Ben c'est un multiple de 3.
C : Oui mais comment vous faites pour arriver à 12 ?
TB1 : Ben je <u>divise en 2, puis je redivise en 2</u>, ça me donne 4 et si je divise en 2…*[il se rend alors compte que ça ne marche pas… après quelques instants]…* Bon ben je prendrais mon rapporteur une fois de plus ! »

On peut faire l'hypothèse que cette stratégie vient des schèmes de la symétrie axiale : c'est-à-dire décomposer en deux parties égales (ici deux demi-plans). La bissectrice est alors un axe de symétrie. Leur gestuelle quotidienne (telle que le pliage/dépliage de la marqueterie, le calque et le décalque et la manipulation du compas) semble concourir à la mise en œuvre de cette stratégie qui semble finalement assez naturelle. Elle peut également être résidu altéré d'un enseignement antérieur. Dans les ouvrages de référence, on trouve des problèmes du type « diviser une droite en 2, 4, 8, 16 etc. segments égaux » (annexes p. 278, p. 281 et p. 291) :
« Prendre une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de la droite, et tracer de A comme centre, un arc en c, en faire autant de B comme centre. Descendre la perpendiculaire de c sur la droite. Procéder de même entre mA et mB pour trouver les points n

et n' et ainsi de suite »[29]. On retrouve alors cette technique « institutionnalisée » d'itérations en divisant par deux.
L'existence d'une solution au problème n'est pas remise en cause, seulement, comme pour la technique de la corde, l'artisan pense que s'il n'y arrive pas c'est parce qu'il ne sait pas. Il s'adapte donc, car la réalisation de la trisection reste pour lui toujours possible mais il se résout à utiliser des outils moins « exacts » tels que le rapporteur ou la règle graduée. Vérifier l'existence théorique d'une solution à la règle non graduée et au compas[30] ne fait pas partie du « contrat professionnel », et il est clair que l'on peut réaliser la trisection d'un angle au rapporteur. La réalité rend alors possible tout problème de construction grâce à l'existence avérée d'outils de mesure adaptés. Notons que la trisection de l'angle est possible par pliage (annexe p. 293)

- <u>Un théorème-en-acte issu de la confusion sur la nature des objets mathématiques : diviser un segment en *n* parties égales est équivalent à diviser un angle en *n* parties égales</u>

TB3 : « Il faut <u>faire une ligne</u>. C'est comme les assemblages en « queue d'aronde » pour les tiroirs, donc on fait une ligne, alors comment ça marche déjà… Oui ici on va reporter mettons trois traits au compas et ici on va faire trois parallèles, c'est ça ? Heu… non… il faut arriver ici à partager une ligne en trois … Il faut partir de là… il faut partir de celle du bout, de la troisième, et ensuite on fait des parallèles. Vous n'avez pas compris ? (…) C'est un problème de répartition, pour les balustrades ou les escaliers, c'est pareil. »

Il s'agit d'une autre stratégie inspirée de la conservation des longueurs par la projection de droites parallèles (application du théorème de Thalès). Il s'agit de *visible mathematics,* ou résidus altérés d'enseignements et de pratiques. L'explication est erronée (du fait que la trisection de l'angle n'est pas possible à la règle et au compas) et la confusion principale est l'association spontanée d'éléments de nature différente (ici segment/angle) associée à une restitution inexacte du théorème de Thalès. Dans les ouvrages de référence (annexe p. 291) on trouve la technique de « division d'un segment de droite [ab] en 7 parties égales (méthode valable pour toute autre division). Du point a, tracer une oblique (ax) suivant un angle quelconque y du point a, et à l'aide d'un compas réglé approximativement à 1/7^{ème} de (ab), porter sur (ax) 7 divisions égales (1 à 7). Joindre le point (7) au point (b) ; positionner le grand côté d'une équerre sur (7b) et appliquer une règle sous le petit côté de l'équerre. Maintenir fermement la règle et, en faisant glisser l'équerre vers la gauche, descendre les points 6 à 1 sur ab. Les points 1' à 6' divisent ab en 7 parties égales. »[31]

Une autre technique qui vient également de la confusion des objets est développée par TB2 : il « ferme » l'angle donné, et obtient ainsi un triangle dont il divise le côté opposé à l'angle en

[29] Chanson, 1988, p. 16.
[30] Notons que les ouvrages indiquent « diviser un angle en deux et en trois » : pp. 288-289.
[31] Ricaud, 1999, p. 34.

question en mesurant. Puis, il joint le sommet opposé avec les points marquant les tiers du segment. On obtient un théorème-en-acte un peu différent : *dans un triangle, on divise un angle en n parties égales en divisant en n parties égales le côté opposé.*

Lors de la réalisation de la tâche de la trisection de l'angle, on constate que les artisans ont à leur disposition un répertoire de tâches et un répertoire de techniques mais que ces dernières sont encore figées. Ici, la tâche reconnue par les artisans est « diviser en *n* parties égales » et les techniques correspondantes sont :
- soit diviser par deux de manière successive
- soit la technique de Thalès et la projection par parallèles.

La question de l'adaptation des objets en jeu dans la situation rencontrée ne se pose pas, d'où une restitution qui peut être erronée. On parle alors de « mathématiques cristallisées » (Straesser, 2007, p. 179). La difficulté de la tâche (en effet, elle est impossible) produit alors un *breakdown* et révèle l'inefficacité de la technique.
On retrouve un phénomène semblable dans les situations dites a-didactiques : l'élève se rend compte que ses connaissances anciennes sont inadaptées au problème et l'adaptation au milieu va générer la construction de nouvelles connaissances. Ici, le but de la situation n'implique pas une telle adaptation car la solution « exacte » (théorique) du problème est masquée par l'existence d'une solution pratique (et le problème n'est pas posé dans un but « didactique »). En effet, les artisans ont finalement réalisé la tâche en mesurant l'angle à l'aide d'un rapporteur et en divisant par trois sa mesure. Les artisans ont bien sûr conscience de l'existence d'une sphère GII mais celle-ci ne leur semble pas adaptée à leurs problèmes « pratiques » :

TP1 : « Tout est mathématique. (…) Il y a toujours moyen mathématiquement de trouver ce qu'il y a à faire. »

5. CONCLUSION : UNE GEOMETRIE EN ACTE ORGANISEE MAIS FIGEE

5.1 Vers une théorie de l'approximation dans la pratique

La mise en pratique de connaissances géométriques acquises au cours d'un enseignement antérieur et les connaissances acquises au cours de l'expérience propre de l'artisan sont fortement intriquées. Autrement dit, les liaisons existantes entre les deux ont été polies par la pratique. On ne peut définir l'origine de certains postulats tirés de leurs discours qui accompagnent leur geste : comme par exemple « par trois points passe un unique cercle » ou « un point de centre et un rayon suffisent pour définir un cercle ». On retrouve une formulation semblable à celle de leurs ouvrages de référence de géométrie, mais ils l'expliquent de manière pragmatique.

Leurs techniques de tracé, pour construire une droite orthogonale (verticale) ou un milieu ou un centre, sont dérivées de techniques de constructions géométriques telles que celle de la médiatrice, de la bissectrice ou encore certains théorèmes de projection de droites, d'intersection des médiatrices de cordes, etc. Ces techniques se retrouvent dans leur manuels de référence mais ont été tellement routinisées dans leur pratique qu'elles ne sont pas adaptables à d'autres situations un peu différentes (comme celle de la trisection). Noss, Hoyles & Pozzi font état de ce phénomène: "the visible mathematics of practice was almost invariably associated with routine activities (…) unaware that they used them, or did not regard them as sufficiently "mathematical" to be interest to us"[32].

L'Espace de Travail Géométrique personnel de l'artisan se décrit comme l'interaction entre l'espace réel, les modèles théoriques et les artefacts. L'ensemble des objets de référence, des tâches et des techniques semble figé et est sollicité quel que soit l'espace local en jeu. Cet espace est décomposé et déstructuré. L'ensemble des outils permettant cette réalisation est dense et très spécifique au corps du métier. Cette très forte instrumentalisation semble accentuer alors le phénomène de cristallisation et condamne l'existence « des boîtes noires ».
L'ETG personnel est centré sur l'artisan. Son point de vue est une autre composante importante qui oriente ses gestes. Il évolue dans une géométrie intuitive, mesurable, manipulable, en mouvement, dans un paradigme GI « sophistiqué ». Il ne semble se détacher du système uniquement en situation de *breakdown*. Les artisans mettent alors au point des « stratégies d'ajustement ». Ils procèdent par « essais-erreurs », ou en divisant par fractions dyadiques (le dénominateur est une puissance de deux), ou encore en détournant le théorème de Thalès pour diviser en *n* parties égales une surface ou un segment. Ils approchent le résultat recherché par des techniques qui leur sont familières et qui leur donnent un résultat satisfaisant dans la pratique. On assiste à une volonté de « théoriser » leur Espace de Travail Géométrique pour le rendre le plus efficace possible et le plus proche de la solution exacte possible, d'où le détournement de certaines techniques mathématiques à des fins pratiques.

5.2 Le concept de symétrie comme principe organisateur dans l'action

Les invariants opératoires propres à la symétrie axiale se retrouvent dans tous les répertoires d'objets géométriques, de tâches et de techniques. Le schème de **bidécomposabilité** se révèle être le plus prégnant. La déstructuration des figures rencontrées ici a impliqué un vaste réseau de droites largement dominé par la recherche d'axes de symétrie dont le statut est variable (origine de mesure, repère de position, pli, frontière…). La recherche des « rythmes réguliers » est le moteur organisateur de l'ETG des artisans. Le concept de **conservation** étant induit, leur moyen de contrôle repose sur le principe de **superposition** des parties « semblables ». Ces invariants opératoires, caractéristiques de la symétrie axiale

[32] Noss & Al. 2000, p. 31.

(bidécomposabilité et axes) se retrouvent alors adaptés dans les situations des rotations d'ordre 3, 4 et même dans le cas de la symétrie centrale, mais peuvent conduire à un retour à des méthodes plus « naïves » (« essais-erreurs ») et à certains théorèmes-en-acte erronés (la situation de trisection). Dans tous les cas, il s'agit d'une géométrie dynamique animée par une mémoire gestuelle dont les invariants opératoires laissent présager une *théorie de l'ajustement*.

L'intrication des objets de référence, des postulats et des techniques tirés des apprentissages précédents des artisans ou de leurs propres conceptions nous incite à penser que le concept de symétrie dont ils réfèrent n'est pas comme une conception experte du concept familier, ni une conception antagoniste à une conception scientifique mais plutôt comme un concept intermédiaire, que l'on pourrait qualifier de « naturalisé ». Ce type de concept fait écho au « concept pragmatique » défini par Pastré (2002) dans le cadre de la didactique professionnelle, qui définit un concept pragmatique par son caractère organisateur, qui se construit dans l'usage et qui présente une dimension sociale. Il nous resterait à approfondir une telle approche notamment au niveau méthodologique et à observer des situations professionnelles « réelles » et non pas « fictives », comme cela a été le cas dans nos entretiens-actions, mais ce n'est pas de cela dont il s'agit pour la suite de notre thèse. Cette recherche nous a permis de pointer l'existence d'une appropriation du concept de symétrie dans une problématique pratique, au cœur d'une géométrie en acte dont la géométrie de référence est celle d'Euclide. Il s'agit donc d'une appropriation de ce concept mais dans une géométrie finalement assez figée. Le schème de bidécomposabilité et le principe de conservation « globale » de la figure sont les principaux signifiés relevés, dont la recherche d'un axe de symétrie est le principal signifiant.

5.3 Perspectives dans l'institution scolaire

Cette étude a révélé la cohérence et l'organisation des signifiés « observables » (répertoriés dans le tableau 2.1 p. 49 du chapitre 2) relevant du concept de symétrie. Cette organisation met en évidence l'influence fondamentale de la symétrie axiale dans la construction de l'Espace de Travail Géométrique de l'artisan qui se situe dans une GI « sophistiquée », du fait qu'il gère l'approximation par des techniques mathématiques cristallisées et routinisées dans la pratique. On distingue justement la rupture entre GI et GII par cette gestion de l'approximation. Le collège cherche à détacher l'élève de cette GI en reniant cette approximation (même efficace). L'élève doit « démontrer », et ses réponses doivent être exactes. **Quelle est alors l'adaptation et l'organisation des signifiés du concept de symétrie (bidécomposabilité, conservation, invariance, etc.) dans une géométrie qui ne se veut plus figée mais au contraire qui tend vers GII ?** Il s'agit alors maintenant d'étudier les ETG personnels des élèves, ce qui est l'objet du reste de notre étude.

CHAPITRE 4

UN PREMIER QUESTIONNAIRE EXPLORATOIRE

Résumé

Ce premier questionnaire, réalisé en juin 2006 par dix élèves de 3^e^, est une première étape pour dresser une expérimentation plus large destinée à des élèves de 5^e^ et 3^e^. Ce premier diagnostic nous permet de penser aux outils d'analyse à développer pour analyser plus finement les prochaines données.

L'étude de cas de ce premier questionnaire met en évidence l'existence de certains phénomènes didactiques qui soulèvent des questions sur la nature et l'organisation même du champ conceptuel des isométries au cœur de l'ETG personnel de l'élève et de son enseignement. Certains de ces phénomènes suggèrent à nouveau le rôle organisateur joué par le concept de symétrie. Cette étude nous révèle en particulier le rôle fondamental joué par la déconstruction des figures, au sens de Duval (2005), au cœur de la construction de l'ETG personnel de l'élève. Les résultats obtenus pointent en particulier un traitement différent des figures selon la nature de la transformation en jeu.

Ce chapitre a donc pour but d'introduire un nouvel outil d'analyse fondamental dans la suite de notre travail, qui porte sur la nature de la déconstruction des figures. En particulier, ce chapitre introduit notre méthodologie de recherche, qui sera développée dans le chapitre 5.

PLAN

1. POURQUOI UN PREMIER QUESTIONNAIRE ?

1.1 Adopter une méthodologie

Rappelons que notre problématique de recherche porte sur le rôle joué par la symétrie axiale dans l'apprentissage des autres transformations du plan, et s'articule autour des questions de recherche suivantes :

1. La symétrie axiale pilote-t-elle l'organisation et les inférences des invariants opératoires concernant les autres transformations du plan au collège dans la construction de l'ETG personnel de l'élève ? Si oui, comment ?

2. Comment l'ETG personnel évolue-t-il au cours de l'enseignement des autres transformations du plan ?

3. Quel est l'ETG (idoine) développé en classe ? Quelle est la distance entre cet ETG idoine et l'ETG personnel que l'élève développe finalement ?

Ces questions ont pour but de savoir si le concept de symétrie a une influence sur l'apprentissage des élèves lors de l'enseignement et de l'apprentissage des autres isométries, et dans quelle mesure son enseignement tel qu'il est organisé aujourd'hui influe sur le comportement des élèves. Ces questions nourrissent également la réflexion plus générale sur le rôle de la dialectique GI-GII dans la progression du raisonnement logico-déductif visé par le collège. En effet, on suppose que l'enseignement des transformations du plan est propice à des basculements GI-GII, du fait de l'ambivalence du concept de symétrie, mais aussi car cet enseignement est prévu tout au long du collège, et doit donc s'adapter au passage vers GII stipulé par les programmes, en fin de collège.
Notre problématique suggère donc que nous nous concentrons sur l'évolution du concept de symétrie tout au long du collège. Nous disposons déjà de nombreux travaux traitant de l'enseignement de la symétrie axiale et de l'enseignement plus général des transformations (chapitre 1). On se demande alors dans quelle mesure on peut relier les conceptions résistantes de la symétrie axiale des élèves aux difficultés didactiques rencontrées lors de l'enseignement des autres transformations du plan.
Nous avons réalisé un premier questionnaire exploratoire à la fin du collège, en 3^{e}, car c'est à ce stade seulement que les élèves ont enfin pris connaissance de toutes les isométries planes. La symétrie axiale a été enseignée en 6^{e}, la symétrie centrale en 5^{e}, la translation a été amorcée en 4^{e} et finalisée en 3^{e}, et la rotation en 3^{e}.

1.2 Contexte

Nous avons choisi de réaliser un premier questionnaire et de le proposer à dix élèves de 3^{e} de niveaux hétérogènes de la classe de Mme B., l'unique professeur dont nous avons observé par la suite toutes les classes (6^{e}, 5^{e} et 3^{e}). En effet, nos préoccupations portent sur les adaptations des schèmes dans une même situation de référence qui donnent du sens aux isométries du plan au collège. Nous adoptons ainsi le point de vue méthodologique traditionnel en didactique des mathématiques (Robert, 1992) pour « observer » l'apprentissage :

> *« Souvent en didactique des mathématiques, on repère l'apprentissage par rapport à la mise en fonctionnement des notions visées dans des exercices ou des problèmes. Cela correspond à une épistémologie des mathématiques de type « problématique » (pour résoudre des problèmes et poser des questions). Il s'agit de faire acquérir les concepts sous leur double forme, outil et objet. En conséquence, nous caractérisons les conduites des élèves en situation de résolution de problèmes. Pour cela, nous avons besoin d'étudier les procédures, les performances mais aussi les erreurs, avec leur persistance, et même les conceptions (y compris spontanées) qui participent aux conduites ».* (Robert, 1992, p. 41).

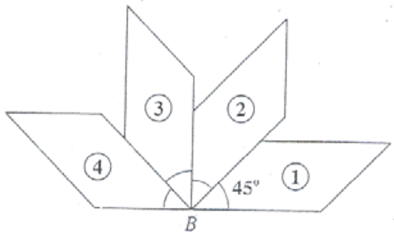
Pendant une heure environ, les élèves ont eu à résoudre plusieurs types de tâches (l'intégralité du sujet est donnée en annexe pp. 294-295), dont plusieurs concernent la reconnaissance des transformations du plan. Ce questionnaire est intervenu quelques jours après qu'on leur ait enseigné les rotations (quelques semaines avant le Brevet). J'étais seule à les surveiller dans une salle de leur collège. Les élèves savaient qu'il ne s'agissait pas d'un contrôle mais d'une enquête pour un travail de recherche sur l'enseignement et leur manière d'apprendre la géométrie. Je leur ai demandé de s'appliquer et de justifier leurs réponses. Le collège où a été réalisé ce travail est un collège général sans réelles difficultés disciplinaires, du 17^{e} arrondissement de Paris.

2. CONCEPTION DU QUESTIONNAIRE ET METHODOLOGIE D'ANALYSES

Confronter une analyse *a priori* et *a posteriori* des tâches proposées dans la situation de reconnaissance des transformations est la première entrée que nous avons choisie pour mettre en évidence « des traces » possibles du concept de symétrie sur les autres transformations du plan dans l'activité de l'élève. Nous avons écarté l'analyse des autres exercices car ils n'appartiennent pas à la situation de référence choisie pour développer cette thèse.

2.1 Analyse de la tâche de l'exercice des parallélogrammes *(document 4.1)*

Cette figure est composée de quatre parallélogrammes (numérotés de 1 à 4) superposables.



Indiquez comment (de toutes les manières possibles) et Justifiez :
1 → 2
1 → 3
1 → 4
2 → 4

<u>Document 4.1</u> : exercice n°1 du premier questionnaire exploratoire.

Le type de tâche est de reconnaître et de décrire toutes les transformations du plan dans les différents cas proposés. Les connaissances en jeu sont disponibles (la rotation a été enseignée une semaine auparavant). La question est relativement ouverte car elle ne suggère pas de transformations (l'énoncé n'indique pas qu'il s'agit de rotations dont il faut préciser les caractéristiques). L'énoncé annonce qu'il s'agit de parallélogrammes et suggère le critère de superposition comme technique de résolution. Le terme « superposable » est connu des élèves de 3^{e}, car il a été largement diffusé depuis l'école élémentaire. Les différents cas à résoudre sont donnés sous la forme d'un symbolisme lié aux applications point par point mais désigne ici la transformation de l'ensemble de la figure : « 1 → 2 » qui suggère donc le déplacement de la figure dans sa globalité.

Le support graphique proposé est l'unique support au raisonnement. Les parallélogrammes sont disposés comme un éventail déployé, qui renvoie alors au mouvement de la rotation. En particulier, les sommets du parallélogramme ne sont pas nommés et seul le centre de la rotation, le seul point commun aux parallélogrammes, est nommé. Les parallélogrammes sont désignés dans leur globalité, par un chiffre. En revanche, la mesure d'un angle du parallélogramme n°1 est donnée, sans doute dans le but que l'élève n'utilise pas d'instruments de mesure et se contente de la perception.

D'après la configuration générale de l'exercice (l'énoncé et le support graphique proposé), on suppose donc que cet exercice ne pose pas de difficultés particulières pour l'élève de 3^{e}. On s'attend à ce que l'élève raisonne dans un paradigme de type GI, supportée par une perception dynamique de la rotation. Cependant, l'ajout dans l'énoncé de « justifiez » a pour but de créer une ambiguïté GI-GII. En effet, le contrat scolaire d'un élève de 3e suppose que l'élève ne doit plus se contenter d'une géométrie naïve, perceptive (comme suggérée par cet exercice), et qu' « il faut démontrer ».

Nous proposons pour chacun des cas à résoudre l'ensemble des solutions attendues par un élève de 3e :

1→2

a) La rotation est de centre B et d'angle 45° car B est fixe et 1. et 2. sont superposables par hypothèse. Dans tous les cas à résoudre, l'élève peut, de lui-même, nommer les sommets des parallélogrammes. Il peut par exemple nommer le parallélogramme 1. BACD et le parallélogramme 2. BGFE, et justifier alors que E est l'image de D, G est l'image de A, et F est l'image de C.
b) L'axe oblique qui marque exactement la bissectrice de l'angle droit en B et qui est également un côté du parallélogramme 2. peut suggérer un axe de symétrie (erroné) du fait que les parallélogrammes ont des côtés adjacents presque de mêmes longueurs.

1→3

a) La rotation est de centre B et d'angle 90°. De même, on suppose une justification par superposition, et la mesure de l'angle est donnée car 45°+45°=90°. De plus, l'axe vertical tracé permet un contrôle immédiat de cette mesure d'angle.
b) La diagonale du parallélogramme 2. (non tracée sur le schéma) peut suggérer un axe de symétrie du fait que 1. et 3. ont des dimensions proches du losange.

1→4

a) La rotation est de centre B et d'angle 90°+45°=135°. Les sommets peuvent également être nommés.
b) Les axes vertical et horizontal étant tracés (leur intersection est le point B), ils suggèrent un repère orthogonal, stimulus déjà évoqué en faveur de la symétrie axiale (Chapitres 1 et 3). On suppose alors l'erreur assez fréquente d'imaginer cet axe vertical comme un axe de symétrie.

2→4

a) La figure de départ change, mais il s'agit toujours d'une rotation de même centre B et d'angle 90°.
b) La diagonale du parallélogramme 3. peut être vue comme un axe de symétrie.

De manière générale, on ne s'attend pas à l'utilisation d'instruments de mesure car l'énoncé annonce que les parallélogrammes sont superposables. On ne s'attend donc pas à un contrôle des mesures pour vérifier la conservation de ces dernières. En revanche, on peut s'attendre à l'utilisation du rapporteur pour déterminer la mesure des angles de la rotation si l'élève n'agit pas par déduction.

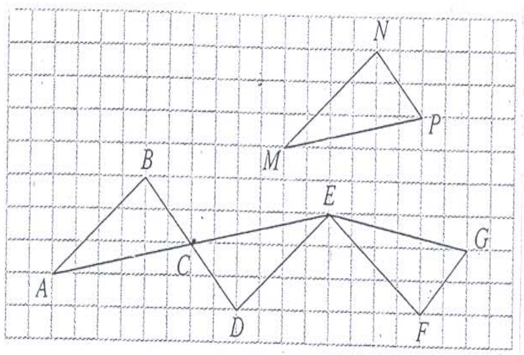
Cet exercice nous intéresse particulièrement car nous souhaitons tester l'évocation d'une géométrie basée sur la superposition avec certaines droites ambiguës qui peuvent orienter l'élève vers les schèmes de la symétrie axiale alors qu'il s'agit d'un exercice simple, pour un élève de 3e, de reconnaissance de rotations.

2.2. Analyse de l'exercice des triangles *(document 4.2)*

Dans chacun des cas suivants, dites laquelle des translations ou des symétries ou des rotations :

a) transforme ABC en EDC
b) transforme CDE en GFE
c) transforme ABC en MNP

Justifiez vos réponses.



Document 4.2 : exercice n° 2 du premier questionnaire exploratoire.

Le type de tâche est de reconnaître et de décrire toutes les transformations dans les différents cas proposés. Il s'agit également de connaissances « disponibles », car toutes les transformations évoquées dans l'énoncé ont été enseignées auparavant. La question est relativement fermée car l'énoncé suggère les transformations possibles. Contrairement à l'exercice précédent, l'énoncé ne précise pas que les figures sont superposables. Il évoque cependant directement l'idée de « transformation » (qui est connue par les élèves de Mme B.), et suggère une description point par point des figures (vision à laquelle l'élève ne va pas nécessairement adhérer).

La possibilité d'introduire des intermédiaires est réduite à partir du support graphique proposé. En effet, les sommets sont nommés et le quadrillage suggère un certain nombre d'axes dont des repères orthogonaux. Les sommets sont situés exactement sur des points du quadrillage et ce dernier peut fournir un repère pour mesurer.
Comme dans l'exercice précédent, les figures de départ et d'arrivé ont exactement un sommet commun et fixe (qui est le centre de symétrie ou appartient à l'axe de symétrie).
L'ajout de « justifiez » présage également différents types de réponses possibles dont on propose une étude dans les deux premiers cas a) et b). Nous évacuons la question de la translation (nous justifierons ce choix dans le chapitre 5 p. 138).

a) transforme ABC en EDC

D'après la configuration proposée, l'élève de 3e peut considérer les figures point par point en considérant (et même en utilisant ce symbolisme) : A→E, B→D et C→C. L'élève peut reconnaître la rotation de centre C et d'angle 180° ou bien la symétrie centrale de centre C. Il peut justifier son choix car C est le seul point fixe, et agrémenter sa réponse dans le cadre de la géométrie affine euclidienne en précisant que A, C, E sont alignés ainsi que B, C, D, ou alors que C est le milieu du segment [BD] et [AE] car AC=CE et BC=CD.

L'élève peut rester à un niveau d'appréhension des figures globales et justifier sa réponse car le triangle ABC devient le triangle EDC par demi-tour. Il ne considère pas l'ordre des points dans l'énoncé : {A,B,C}→{E,D,C} ou {A,B,C}→{C,D,E}.

Des erreurs sont également prévisibles : l'élève peut imaginer une symétrie axiale dont l'axe de symétrie est issu du quadrillage (un axe vertical par exemple), ou suggéré par un des côtés de la figure.
L'élève peut également proposer la composée de deux symétries axiales (qui aboutit à la symétrie centrale recherchée).

b) transforme CDE en GFE

L'élève de 3e peut interpréter les figures (la figure de départ et la figure d'arrivée) point par point sous la forme C→G, D→F et E→E, et reconnaître la symétrie axiale d'axe vertical passant par E (car E est fixe). Il peut justifier grâce au quadrillage l'orthogonalité des droites (CG) et (DF) par rapport à l'axe vertical et l'équidistance par rapport à cet axe vertical.

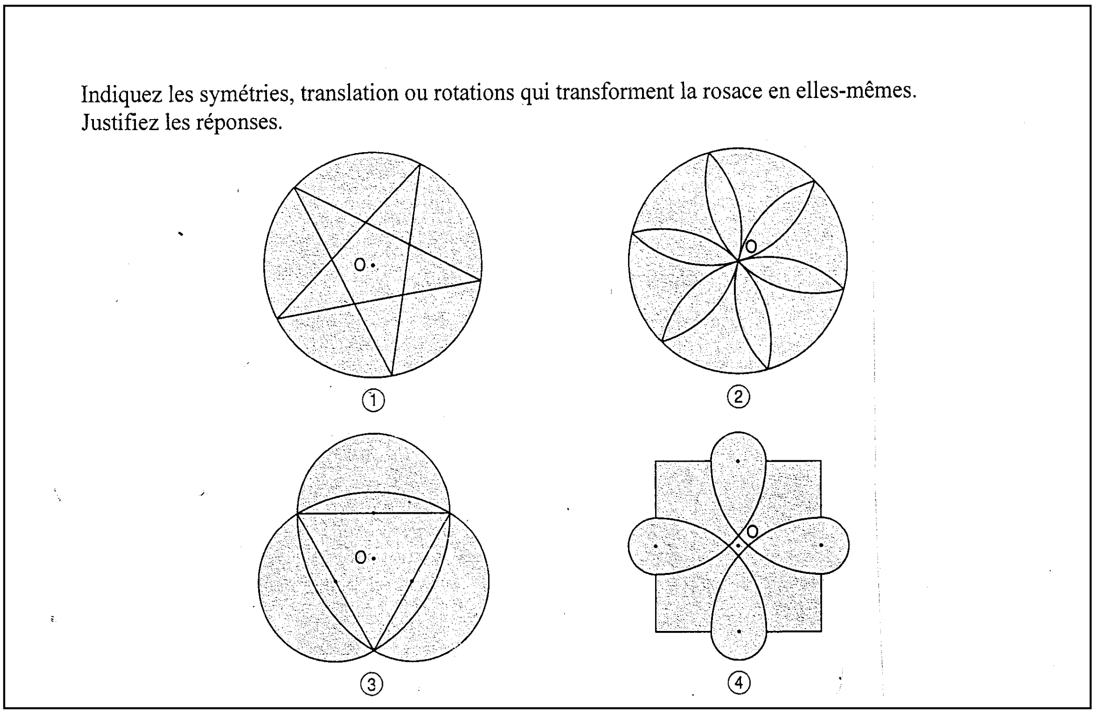
Du fait que E soit le seul point fixe mis en évidence, l'élève peut penser reconnaître une symétrie centrale ou une rotation. Dans ce cas, l'élève ne tient pas compte de l'orientation de la figure. En effet, si l'ordre des points n'est pas pris en compte : F peut être interprété comme l'image de C et G comme l'image de D.

Bien que l'énoncé n'indique pas que les triangles soient superposables, il n'est pas attendu que l'élève utilise ses instruments de mesure. En revanche, il est attendu des arguments métriques permis par le quadrillage**.**

Contrairement à l'exercice précédent, le paradigme associé à cet exercice concerne une géométrie plus formelle où une description point par point de la transformation est attendue, révélatrice de sa conception mathématique. Cependant, les élèves peuvent également considérer les triangles dans leur globalité. Les erreurs attendues ne sont donc pas toutes de même nature que précédemment, des erreurs perceptives comme de faux axes de symétries par exemple sont toujours attendues, mais les erreurs peuvent être également de nature métrique, voire concerner des éléments invariants de la figure, en particulier dans le cas b).

Ainsi, à travers ces deux exercices (l'exercice 1 et l'exercice 2) dont les paradigmes géométriques associés semblent différents, on cherche à tester les adaptations à la tâche de l'élève et à vérifier l'influence des schèmes de la symétrie axiale. L'exercice 1 renvoie à un niveau d'appréhension de niveau 1 basé sur la superposition, alors que l'exercice 2 renvoie à un niveau d'appréhension de niveau 2, mettant en œuvre des propriétés métriques.

2.3 Analyse de l'exercice des rosaces[1] *(document 4.3)*



Document 4.3 : l'exercice des rosaces.

[1] Nous avons conservé l'exercice d'origine, malheureusement avec les fautes d'orthographe incluses dans l'énoncé.

Cet exercice appartient toujours à la même classe de situation, la reconnaissance des transformations du plan, mais se distingue des deux précédents exercices car la transformation opère sur une seule figure. Le déplacement n'est plus décrit par une figure de départ et une figure d'arrivée. Il s'agit maintenant de figures globalement invariantes sous plusieurs transformations. L'énoncé de la tâche est relativement fermé car il suggère un choix de transformations (« symétries, translations, ou rotations »). Toutes les figures proposées n'ont qu'un seul point nommé : le point O (il est un point isolé de la figure dans les cas 1. 3. et 4. mais il est un point de la figure dans le cas 2.). Quatre autres points (les points cardinaux) sont suggérés dans la figure 4. Aucun axe de symétrie n'est tracé mais peut être suggéré par les angles et sommets saillants des figures 1. 2. et 3. ou les points remarquables de la figure 4. Nous proposons pour chaque figure les réponses attendues par un élève de 3^{e} :

Figure 1 (rotation d'ordre 5)

Il s'agit d'une étoile à cinq branches, qui est une figure connue par les élèves. Ils peuvent alors reconnaître :

- cinq symétries axiales d'axes passant par O et par un sommet de l'étoile (médiatrice des côtés du pentagone circonscrit).
- la rotation de centre O et d'angle α = *360°:5= 72°* (ou rotation de centre O d'angle de 72°x2=144° ou 72°x3=216° ou 72°x4=288° ou 72°x5=360°). Le concept d'orbite (défini dans le chapitre 1) est implicite sous cette énumération de toutes les rotations possibles.

Figure 2 (rotation d'ordre 6)

Cette figure est également commune pour des élèves de collège qui ont l'habitude de tracer ce type de motif au compas. Ils peuvent alors reconnaître :

- six symétries axiales d'axes passant par O et les sommets de la rosace (et les médiatrices des côtés de l'hexagone circonscrit).
- la symétrie centrale de centre O.
- la rotation de centre O et d'angle α = 360°:6=60° (ou bien d'angles de 120°, 180°, 240°, 300° ou 360°)

Figure 3 (rotation d'ordre 3)

Un triangle équilatéral est inscrit dans cette figure. L'élève peut reconnaître :

- trois symétries axiales d'axes passant par O et les sommets du triangle (et passant par les points suggérés).
- la rotation de centre O et d'angle α = 360° : 3 = 120° (ou 240°).

Figure 4 (rotation d'ordre 4)

Un carré compose cette figure. L'élève peut reconnaître :

- quatre symétries axiales d'axes vertical, horizontal et les bissectrices, concourants en O.
- la rotation de centre O et d'angle α =360° :4=90° (ou 180° ou 270° ou 360°).

- la symétrie centrale de centre O.

La reconnaissance de ces transformations du plan peut être formulée par l'élève, point par point (en nommant les points significatifs pour l'élève) ou en décrivant la figure dans sa globalité ou à partir de sous-figures. L'évocation à la fois de figures de référence (type triangle ou carré) et des figures plus usuelles (étoile, rosace) est intéressante car elle peut provoquer une ambiguïté entre GI et GII chez l'élève, et celui-ci peut être amené à justifier de manière différente les transformations reconnues.

On cherche à étudier les stratégies de reconnaissance sollicitées par l'élève. En particulier, on cherche à savoir si la symétrie axiale est privilégiée dans certains cas de figures.

3. ETUDE QUALITATIVE DES PRODUCTIONS ECRITES DU QUESTIONNAIRE

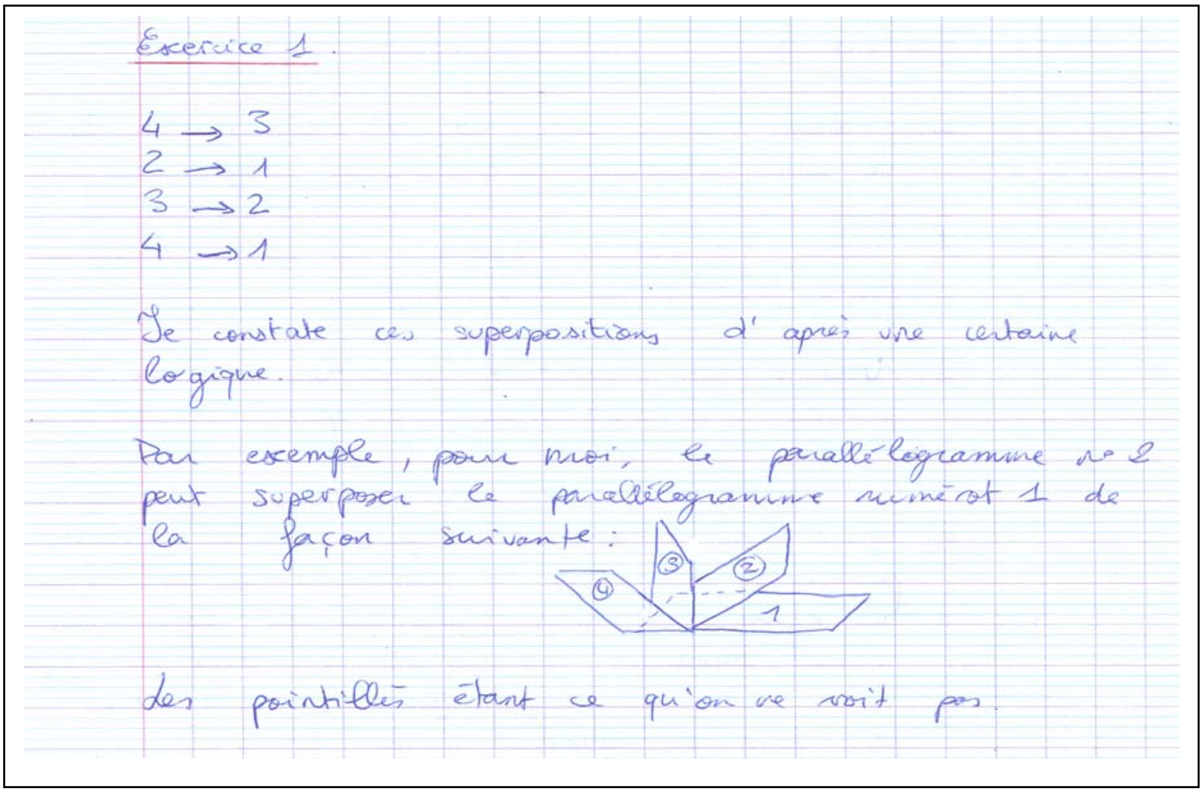
Nous avons étudié les dix productions d'élèves au cas par cas. Nous avons procédé à l'étude des stratégies des élèves en fonction de l'organisation des invariants opératoires (tableau 2.1 p. 49 chapitre 2), dont en particulier :
- le schème de bidécomposabilité
- le concept d'invariance
- le concept d'orientation
- la conservation des formes.

Nous avons notamment été attentif aux signifiants de ces invariants et à la nature de leurs signifiants perceptifs (axes, sommets). L'organisation et le rôle de ces invariants opératoires, l'utilisation des outils (compas, règle graduée), la prise en compte du support (la figure sur la feuille de papier) et le discours associé (registre langagier, connecteur logique) déterminent la nature du travail géométrique (en terme d'Espace de Travail Géométrique personnel de l'élève). Nous appuyons directement nos analyses par des extraits significatifs de productions d'élèves.

3.1 Perception globale et perception ponctuelle au service de la dialectique GI-GII

L'étude de cas des productions révèle qu'effectivement, le paradigme géométrique suggéré par l'exercice 1 est le paradigme GI basé sur la perception et le mouvement, alors que l'exercice 2 voit l'introduction d'un langage formel propre aux applications et la mise en relation des propriétés métriques qui caractérisent les transformations.

Nous proposons deux extraits de productions (documents 4.4 et 4.5) qui illustrent ce changement de paradigmes par une organisation différente des invariants opératoires.



Exercice 1.

4 → 3
2 → 1
3 → 2
4 → 1

Je constate ces superpositions d'après une certaine logique.

Par exemple, pour moi, le parallélogramme n° 2 peut superposer le parallélogramme numérot 1 de la façon suivante :

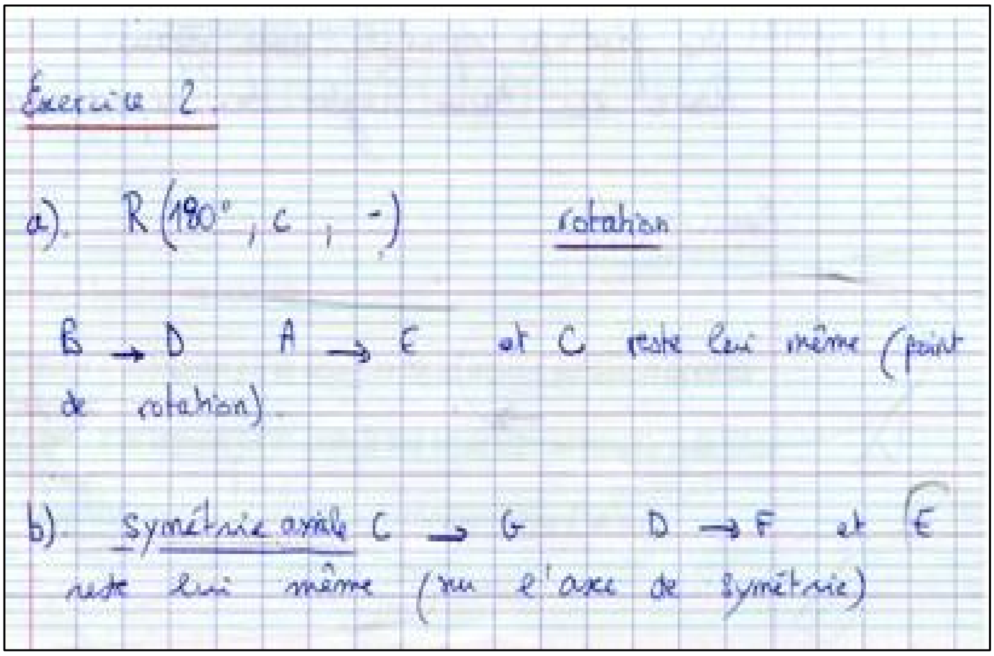
les pointillés étant ce qu'on ne voit pas.

<u>Document 4.4</u> : extrait de la résolution de l'exercice n°1 de Martin.

Martin décrit le déplacement des parallélogrammes dans une certaine continuité et régularité. Il décrit les superpositions successives des parallélogrammes d'une position à une autre par rapport à un point fixe qu'il fait tourner selon un même angle. Il décrit une rotation mais sans mentionner dans son discours le terme de rotation. Le concept de conservation est repérable dans l'activité de Martin car les parallélogrammes qu'il dessine sont toujours les mêmes, et sont tous superposables. De plus, il conserve le même angle dans les déplacements qu'il décrit ainsi que l'orientation de la figure. Il décrit ainsi le déplacement global de la figure « d'après une certaine logique ». Il utilise un langage courant, non formel. Le seul objet de référence dont il fait mention est le parallélogramme évoqué dans l'énoncé. On peut également reconnaître le concept-en-acte d'invariance point par point car il décrit les déplacements des parallélogrammes toujours autour d'un même point fixe, comme suggéré par l'énoncé. Martin reprend également le symbolisme associé à l'énoncé dont il propose son propre traitement : il reformule même l'énoncé pour décrire les déplacements de la figure 4. jusqu'à la figure 1. en composant la même rotation quatre fois.

Son ETG personnel semble donc s'inscrire dans un paradigme GI. L'organisation de ces invariants opératoires (sans l'intermédiaire d'artefact) repose sur la perception globale (par « superposition ») et dynamique de la configuration dans le but de décrire un « trajet régulier » dans le plan (local) délimité par les déplacements successifs du parallélogramme (on peut s'interroger sur le signifiant des pointillés : ils évoquent un déplacement passé ? ou plusieurs plans superposables ?). Cet élève organise ainsi son ETG personnel pour raisonner dans le cadre de la géométrie de position dans un paradigme GI, et sans jamais mentionner explicitement la rotation alors que plusieurs concepts qui la caractérisent peuvent être repérés dans la conduite de Martin. Un autre élève qui décrira également de manière « pratique » les déplacements dans le plan qualifiera lui d' « élévations » les transformations décrites, au lieu de rotation.

Dans l'exercice 2 (document 4.5), ce même élève va pourtant reconnaître et décrire formellement les transformations point par point, et décrire ainsi la rotation comme une application du plan dans le plan, et situer alors son ETG personnel plus proche de celui attendu (ETG idoine) dans GII.


Exercice 2.

a). R(180°, C, -) rotation

B → D A → E et C reste lui même (point de rotation).

b). symétrie axiale C → G D → F et E reste lui même (sur l'axe de symétrie)

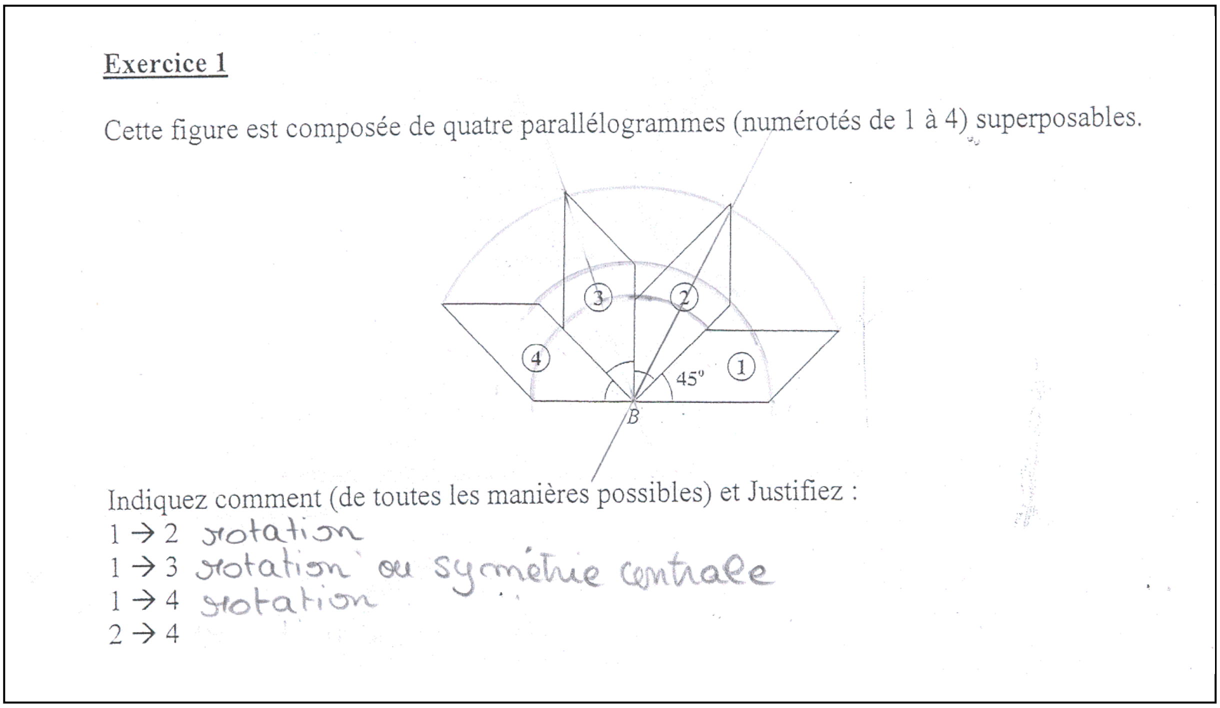
<u>Document 4.5</u> *: extrait (agrandi) de la résolution de l'exercice n°2 de Martin.*

On reconnaît le concept d'application point par point pour décrire les transformations, la notation formelle proche de celle des fonctions. Le concept d'invariance point par point est cette fois clairement énoncé pour justifier le centre de rotation et l'axe de symétrie, caractéristiques des transformations en jeu. L'ETG personnel de cet élève est ainsi plus proche de l'ETG idoine et de référence. Le travail géométrique de cet élève se réalise dans un autre paradigme que l'exercice précédent : il est passé d'une géométrie de position à une géométrie des transformations, supportée par une perception ponctuelle et décrite par le symbolisme correspondant. Cette fois, les transformations sont nommées : « rotation » et « symétrie axiale » comme suggéré par l'énoncé.
Ce basculement de paradigme n'est pas surprenant et nous l'avions prévu dans nos analyses a priori. Il n'est pas pour autant systématique, comme nous le verrons par la suite. Notons de plus que le taux de réussite varie sensiblement selon l'exercice : seulement quatre élèves sur dix reconnaissent au moins une rotation correcte dans l'exercice 1 (dont seulement deux nomment le centre) alors qu'ils sont neuf élèves sur dix à correctement reconnaître les

transformations de l'exercice 2. Cependant, de nombreuses autres variables didactiques sont à prendre en compte pour interpréter cet écart (comme la complexité de la figure par exemple). Malgré un fort taux d'abstention, les erreurs reconnues et explicites de l'exercice 1 portent sur une reconnaissance erronée d'axes de symétrie. En particulier, un élève a confondu l'axe vertical comme un axe de symétrie et trois autres ont supposé un axe de symétrie oblique. Les superpositions erronées dues à la symétrie axiale se révèlent davantage dans l'exercice 1, dont la tâche suggère un raisonnement par superposition. Deux élèves reconnaissent également une symétrie centrale erronée dans l'exercice 1.
Comme prévu a priori, l'élève semble donc s'adapter à la tâche. En effet, son ETG personnel est plus proche de celui attendu dans le cas de l'exercice 2. De plus, les erreurs reconnues dans ces deux exercices semblent également de nature différente. Dans l'exercice 1, il s'agit de superpositions abusives, contrairement à l'exercice 2, comme cela est expliqué dans le paragraphe suivant.

3.2 Le théorème-en-acte de cocyclicité : révélateur de la rotation vue comme une application point par point

Dans plusieurs copies (dont le document 4.6), on retrouve le tracé d'arcs de cercle dans l'exercice 1 ou l'exercice 2 pour justifier la reconnaissance de la rotation. Ces arcs de cercle sont les signifiants du théorème-en-acte que l'on peut formuler de la manière suivante : *si un point et son image appartiennent au même cercle, alors il s'agit d'une rotation.*


Exercice 1

Cette figure est composée de quatre parallélogrammes (numérotés de 1 à 4) superposables.

Indiquez comment (de toutes les manières possibles) et Justifiez :
1 → 2 rotation
1 → 3 rotation ou symétrie centrale
1 → 4 rotation
2 → 4

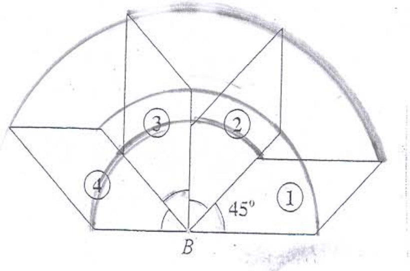
<u>*Document 4.6*</u> *: extrait de la résolution de l'exercice n°1 de Camille.*

Dans l'exercice 1, Camille trace les cercles de centre B et de rayon les côtés du parallélogramme afin de vérifier que les sommets de départ et les sommets images appartiennent au même cercle et sont donc superposables (c'est donc ce que nous avons appelé le théorème-en-acte de cocyclicité). Ce théorème-en-acte rend bien compte de la transformation ponctuelle qu'elle assimile à la rotation, mais ni le centre ni les angles ne sont mentionnés dans le discours.
Cet élève reconnaît une symétrie centrale mais c'est un axe qui est tracé. On peut imaginer qu'il y a eu confusion dans les termes et qu'elle pensait à une symétrie axiale dans la mesure où la diagonale du parallélogramme et le raisonnement par superposition aurait conduit Camille à commettre cette erreur (en effet, les dimensions du parallélogramme sont proches de celle du losange). Cet élève a tout aussi bien pu penser à la symétrie centrale car B est un point fixe et qu'il y a aussi superposition en faisant pivoter la figure de départ jusqu'à la figure d'arrivée. On pourrait également imaginer que l'axe tracé est un « faux » axe de symétrie, qui a permis à l'élève de reconnaître qu'il ne s'agissait justement pas d'une symétrie axiale et de procéder de manière exclusive avec le théorème-en-acte suivant : *si ce n'est pas une symétrie axiale, c'est une symétrie centrale.*

Le théorème-en-acte de cocyclicité ne tient pas compte de la conservation de la mesure d'angle de la rotation (lorsqu'il s'agit de la même rotation qui est en jeu), qui est pourtant une caractéristique supposée connue pour un élève de 3^{e}. Aussi, certains élèves, dont Christophe, ont-ils reconnu une rotation dans l'exercice 2 au lieu de la symétrie axiale, comme le montre l'extrait de sa copie dans le document suivant 4.7 :

Exercice 1

Cette figure est composée de quatre parallélogrammes (numérotés de 1 à 4) superposables.



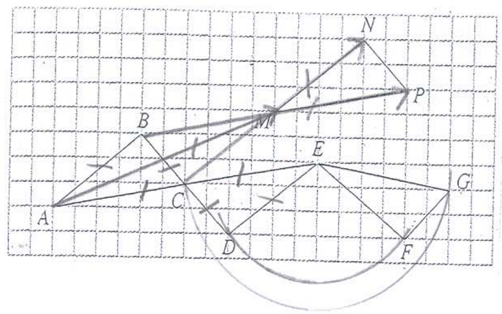
Indiquez comment (de toutes les manières possibles) et Justifiez :
1 → 2 rotations (B, 45°, +)
1 → 3 rotations (B, 90°, +)
1 → 4 rotations (B, 180, +)
2 → 4 rotations (B, 135, +)

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dites laquelle des translations ou des symétries ou des rotations :

a) transforme ABC en EDC ⇒ symétrie de centre C
b) transforme CDE en GFE ⇒ rotation de centre E
c) transforme ABC en MNP ⇒ translation de vecteur $\vec{AM}$

Justifiez vos réponses.



Document 4.7 : extrait de la résolution du premier questionnaire de Christophe.

Commençons par préciser qu'on ne reconnaît pas dans ce cas de basculement « franc » de paradigme entre l'exercice 1 et l'exercice 2 pour Christophe. Il applique, de manière cohérente, le théorème-en-acte de cocyclicité à l'exercice 1 mais en commettant tout de même quelques erreurs sur les angles. Il utilise à nouveau ce théorème-en-acte pour reconnaître une rotation dans l'exercice 2 alors qu'il s'agit d'une symétrie axiale. Ce théorème-en-acte, ne tenant pas compte de la conservation de la mesure d'angle de la rotation, est trompeur dès lors

qu'un point fixe se situe sur l'axe de symétrie. En effet, les points et points-images considérés par l'élève, {C ; G} et {D ; F}, appartiennent bien à un cercle de même centre mais les angles associés *CEG et DEF* ne sont pas les mêmes.
Bien que les deux transformations (la symétrie axiale et la rotation) conservent les dimensions globales de la figure, une autre caractéristique de la rotation n'est pas prise en compte : la rotation conserve l'orientation de la figure, or ici l'orientation de la figure-image n'est pas la même que celle de la figure de départ, puisqu'il s'agit d'une symétrie axiale. Dans d'autres cas (notamment en 5^{e}, nous y reviendrons dans le chapitre 6), cette conservation de l'orientation permettra de distinguer la symétrie axiale et la symétrie centrale sans introduire une vision ponctuelle.

Les signifiants graphiques employés par ce même élève pour reconnaître la symétrie centrale (qui est pourtant une rotation) sont ceux du même codage d'égalité des mesures : BC=CD, AC=CE et AB=DE, bien que toutes ces longueurs ne soient pas égales entre elles. L'argument clé ici est donc la conservation des mesures *globalement* et le point C fixe (et valable finalement pour toutes les isométries ayant des points fixes).

La différence sémantique pour reconnaître un objet de même nature (ici des rotations) est très significative ici : la rotation est une transformation dynamique mais une application point par point, tandis que la symétrie (axiale ou centrale) rend compte des conservations des mesures d'un point de vue global. Nous venons ainsi de dégager les prémices d'une tendance qui se confirmera dans la suite de notre travail.

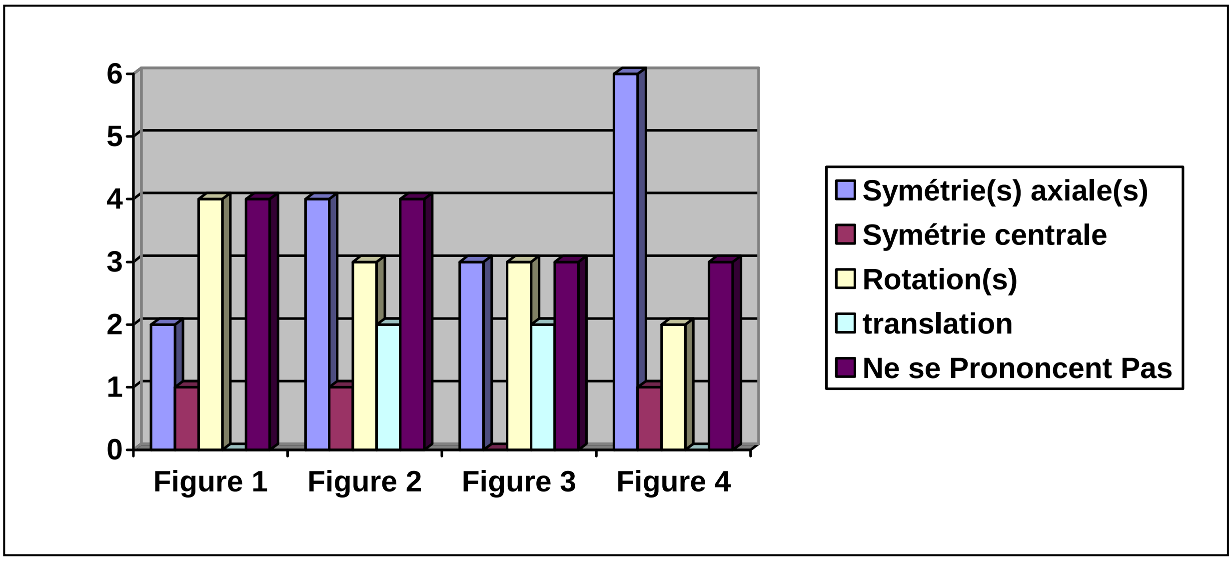
3.3 Le phénomène d'exclusivité des transformations

Ce phénomène se remarque dans l'exercice dit des rosaces (document 4.3) lorsqu'un élève reconnaît une transformation à l'exclusion de toutes les autres au lieu de se montrer exhaustif et de décrire toutes les transformations possibles qui laissent invariante la figure. Nous avons donc appelé ce phénomène *le phénomène d'exclusivité des transformations*.

Par exemple, Romain écrit pour l'exercice 4 :
1. Par la symétrie de centre O.
2. Par la rotation de centre O.
3. Par la translation O.
4. Par la rotation de centre O.

Les quatre figures proposent plusieurs rotations possibles et plusieurs axes de symétrie possibles. Seules les figures 2. et 4. du document 4.3 présentent aussi une symétrie centrale. Pourtant, seulement deux élèves sur dix ont associé plusieurs transformations à une même figure :
- Valentine donne toutes les transformations correctes pour chaque figure

- et Josquin reconnaît une rotation et une symétrie dans le cas des figures 2. et 4.
(Précisons tout de même que Kévin reconnaît jusqu'à deux symétries axiales pour chaque figure, les axes étant obliques, mais sans mentionner les rotations).
Examinons la répartition des transformations reconnues par les élèves selon les figures (graphe 4.8) :



<u>Graphe 4.8</u> : répartition des transformations reconnues par les élèves à l'exercice des rosaces.

On remarque alors que les rotations d'ordre pair, c'est-à-dire les figures 2. et 4., ont un taux de reconnaissance de la symétrie axiale supérieur à celui des rotations d'ordre impair, les figures 1. et 3. Le taux de reconnaissance de la rotation est légèrement supérieur pour les rotations d'ordre impair. En réalité, peu d'élèves reconnaissent plusieurs transformations pour une même figure. S'ils le font, c'est justement dans le cas des figures d'ordre pair. Et principalement, soit un élève reconnaît une rotation (plutôt dans le cas des figures 1. et 3.), soit il reconnaît une symétrie axiale (plutôt dans les cas 2. et 4.).

Nous expliquons ce phénomène car les symétries axiales impliquent le schème de bidécomposabilité. Ainsi, on suppose que la parité des rotations serait un facteur dans la reconnaissance des transformations, car l'élève « découpe » la figure en sous-figures en divisant en deux de manière itérative (avec le signifiant des axes de symétries). Les rotations d'ordre pair privilégieraient ainsi la reconnaissance de symétries axiales, car la figure est divisible en un nombre pair de sous-figures.
L'organisation actuelle des programmes français pourrait également être un facteur qui expliquerait ce phénomène. En effet, on enseigne chaque transformation de manière isolée : une transformation à chaque niveau, chaque année. Les transformations ne sont considérées comme le groupe des isométries qu'au lycée.

3.4 L'orientation : concept différenciateur « des symétries »

Nous avons déjà suggéré un phénomène de congruence entre l'organisation des invariants opératoires de la symétrie axiale et ceux de la symétrie centrale. Cependant, il apparaît dans le graphe de répartition (document 4.8) que la symétrie centrale est quasi-absente des réponses données dans l'exercice des rosaces par les élèves de 3^{e}, contrairement aux exercices précédents. En effet, la reconnaissance de la symétrie centrale ou de la symétrie axiale peut solliciter le schème de bidécomposabilité, et des arguments métriques et de conservation des dimensions. L'orientation devient alors déterminante pour différencier la symétrie axiale de la symétrie centrale. La figure « retournée » ou dans « l'autre sens » semble être un argument récurrent dans le discours des élèves, qui ont conscience du changement d'orientation dans le cas de la symétrie axiale.

Camille, dans l'exercice 2, écrit :

a) symétrie centrale de centre C (AC=CE et BC=CD)

b) symétrie axiale d'axe (la figure est retournée).

On explique la quasi absence de cette transformation dans la situation des rosaces (car il ne semble pas que ce soit pour privilégier la reconnaissance de la rotation de 180°) par le fait que le concept d'orientation n'est plus mobilisable dans ce type de configuration. L'élève reconnaît donc exclusivement une symétrie axiale ou une rotation, tandis que dans les deux premiers exercices, les configurations sont constituées de deux parties, dont on peut comparer l'orientation par rapport à un repère orthogonal déterminé (graphiquement ou mentalement).

4. UN NOUVEL OUTIL D'ANALYSE : LA DECONSTRUCTION DES FIGURES SELON DUVAL

4.1 Rotation vs Symétries ?

D'après l'étude de cas de cet échantillon de dix élèves de 3^{e}, les invariants opératoires relevés pour la symétrie centrale et la symétrie axiale semblent différents de ceux de la rotation. Le schème de bidécomposabilité qui caractérise la symétrie (axiale ou centrale) privilégie une perception globale de la figure et implique le concept de conservation des dimensions par superposition (exercice 1 et exercice des rosaces). Des propriétés métriques sont également signifiées (exercice 2) pour caractériser la symétrie. En revanche, la rotation semble favoriser une perception ponctuelle largement supportée par une perception dynamique (exercice 1 et exercice 2). La rotation semble alors appréhendée comme une application point par point.
Une telle organisation des invariants opératoires est une résultante de la nature même des transformations en jeu et/ou une résultante de l'organisation scolaire actuelle ?

Notre étude de cas révèle également des adaptations différentes de l'élève selon la tâche. Nous formulons l'hypothèse que des basculements de paradigme apparaissent lors d'un changement de perception suggéré par la tâche. Si la tâche suggère une perception globale (exercice 1), alors l'élève construirait son ETG personnel dans un paradigme GI, alors que si la tâche suggère une perception ponctuelle (exercice 2), l'ETG personnel de l'élève se rapprocherait plutôt d'un paradigme GII. **Ce changement de paradigme suggéré par la tâche impliquerait alors une organisation différente des composants de l'ETG personnel de l'élève.**

4.2 Conclusion intermédiaire de cette étude exploratoire

Cette étude de cas réalisée à partir d'un faible échantillon d'élèves de 3^{e} nous a permis d'analyser les adaptations des élèves dans une même classe de situation, mais dans des tâches différentes. Et d'après les résultats obtenus, nous formulons les hypothèses suivantes :
- la perception globale favoriserait les schèmes de la symétrie axiale
- et d'autre part la perception globale favoriserait un paradigme GI.

Par conséquent, peut-on supposer que la symétrie favoriserait un basculement de paradigme vers GI ou bien qu'un ETG inscrit dans GI favoriserait les schèmes de la symétrie ?

Cette première réflexion nourrit directement notre problématique et nos questions de départ (rappelées au début de ce chapitre). Il apparaît alors nécessaire d'introduire un nouvel outil d'analyse pour prendre en considération la dimension des éléments considérés lors de la reconnaissance des transformations, ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

4.3 Introduction de la déconstruction des figures selon les travaux de Duval comme indices de progression du raisonnement

Les travaux de Duval (1995, 2005) sur l'apprentissage de la géométrie concernant le rôle de la visualisation dans le développement du raisonnement nous permettent d'affiner les résultats et hypothèses de recherche énoncés dans les paragraphes précédents. Ces travaux nous permettent notamment d'affiner le rôle joué par la variable perception globale / perception ponctuelle dans les processus cognitifs de la pensée géométrique.
Dans son article « Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation de raisonnements et coordination de leurs fonctionnements », Duval décrit le développement des processus cognitifs articulant la visualisation et le langage en géométrie. Il distingue en particulier la visualisation iconique et la visualisation non-iconique. Il définit le processus de déconstruction dimensionnelle des

formes dans la visualisation non-iconique qu'il distingue de la déconstruction instrumentale et de la déconstruction heuristique (pour faire apparaître des formes particulières). Il situe en particulier le processus de déconstruction dimensionnelle au cœur du processus de visualisation et du développement du raisonnement en géométrie.
Dans un premier temps, il propose une classification des différentes manières de voir (document 4.9). Nous avons choisi de l'évoquer car on peut retrouver certains parallèles avec les niveaux d'appréhension des figures proposés dans le chapitre 1. On retrouve alors une progression de la perception globale (niveau 1 et vision botaniste) vers la perception ponctuelle (niveau 3 et vision inventeur-bricoleur), qui nous conforte quant aux résultats que l'on a obtenus sur les basculements de paradigme selon la perception évoquée.

	BOTANISTE	**ARPENTEUR-géomètre**	**CONSTRUCTEUR**	**INVENTEUR-bricoleur**
STATUT EPISTEMOLOGIQUE	CONSTAT perceptif immédiat : « ça se voit sur… »	CONSTAT résultant de la lecture d'un instrument de mesure	RESULTAT *d'une procédure de construction*	RESULTAT *d'une décomposition de la figure de départ en unités figurales que l'on reconfigure autrement*
SOURCE COGNITIVE DE LA CERTITUDE	**Superposition** effectué à l'œil ou en utilisant un gabarit	**Comparaison** des valeurs numériques qui ont été obtenues empiriquement	**Nécessité interne** à l'enchaînement des opérations de la procédure de construction	**Invariance** des unités figurales qui sont les référents de la transformation de la figure de départ
	VISUALISATION ICONIQUE : *ÇA RESSEMBLE AU* profil d'un objet réel, ou à un ensemble d'itinéraires ou de déplacements sur un territoire ou à un modèle type (étalon). *La figure reste un objet indépendant des opérations que l'on effectue sur elle*		**VISUALISATION NON ICONIQUE :** C'est une *SEQUENCE d'OPERATIONS* qui permet de reconnaître des propriétés géométriques, par l'impossibilité d'obtenir certaines configurations, ou par invariance des configurations obtenues. *La figure est une configuration contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexes*	

Tableau 4.9 : « Mode de compréhension et de connaissance lié à chaque manière de voir » et « les deux mécanismes d'identification d'objets à partir de formes visuelles » (Duval, 2005, p. 12 et p. 14).

Duval soulève alors la question d'une hiérarchie de ces différentes manières de voir : « par exemple, l'approche botaniste peut-elle être considérée comme la première étape nécessaire à toute acquisition de connaissances géométriques ? », et soulève la question de transfert entre ces différentes manières de voir : « Vouloir privilégier une entrée comme devant être plus accessible que les autres revient à supposer la transférabilité plus ou moins spontanée d'une manière de voir aux autres manières de voir »[2]. Il inclut ces questions dans la perspective de répondre à une question plus générale : « Comment et jusqu'où *voir* et *énoncer* peuvent-ils se rejoindre en géométrie ? ».

Duval rappelle que la complexité cognitive dans l'action de *voir* réside dans la « reconnaissance discriminative de formes et l'identification des objets correspondant aux formes reconnues ». Il décrit les différents processus de déconstruction en fonction des dimensions en jeu : « l'activité de construction de figures, presque toujours des configurations de formes 2D/2D ou 3D/2D, repose sur leur déconstruction en tracés 1D/2D et 0D/2D (le dénominateur correspond à la prise en compte de l'espace dans lequel les représentations sont produites) ». Notons qu'il fait également référence à la Gestalt theory (p. 16 Chapitre 1) pour signaler que « la reconnaissance visuelle de formes échappe à tout contrôle intentionnel. Il y a des lois d'organisation des données visuelles qui imposent la reconnaissance de certaines formes *contre* la reconnaissance d'autres formes, même si celles-ci sont verbalement évoquées »[3]. Nous avions évoqué également cette théorie car l'une de nos hypothèses suggère que la symétrie implique la reconnaissance de forme *contre* d'autres, comme cela a été mis en évidence dans le chapitre 1 à travers des travaux très différents (didactiques et psychologiques).

Duval décrit le processus de déconstruction dimensionnelle de la manière suivante :

> *« La manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, c'est-à-dire reconnue comme une forme* ***nD/2D, en unités figurales d'un nombre de dimension inférieure à celui de cette forme****. Ainsi, la figure d'un cube ou d'une pyramide (3D/2D) est décomposée en une configuration de carrés, triangles, etc. (unités figurales 2D/2D). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales 1D/2D). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en « points » (unités 0D/2D). En effet, les points ne sont visibles que lorsqu'ils apparaissent comme l'intersection d'unités 1D/2D (tracés sécants ou tracés formant un coin (« sommets », « angles »,…).* (Ibidem, p. 20).

On retrouve donc une description systématique qui distingue la perception globale (2D/2D) et la perception ponctuelle (1D/2D et 0D/2D) lors de la description d'une figure par un élève, dans un plan donné. Duval définit la **décomposition heuristique par division méréologique** des formes reconnues :

> *« L'utilisation heuristique d'une figure exige souvent qu'on la regarde comme s'il s'agissait des pièces d'un puzzle. Mais cela suppose que l'on décompose en unités figurales du même nombre de dimensions que la figure de départ. Ainsi un triangle (2D/2D) peut être décomposé en d'autres triangles (2D/2D).* […] *Ce partage, que nous appellerons une division méréologique (division d'un tout en parties juxtaposables ou superposables), se fait toujours pour reconstruire avec les parties ainsi obtenues d'une figure souvent très différente visuellement. Cette décomposition*

[2] Ibidem, p. 19.
[3] Ibidem, p. 18.

s'inscrit donc dans un processus plus général de métamorphose. […] *Cette décomposition peut être :*

- strictement homogène (fig. 4.10) : la décomposition se fait en unités de même forme que la figure de départ.

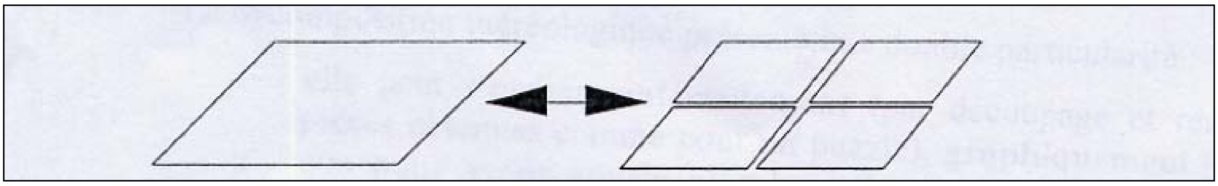


Figure 4.10

- homogène : la décomposition (fig. 4.11) se fait en unités figurales différentes de la forme de la figure de départ, mais toutes de même forme.

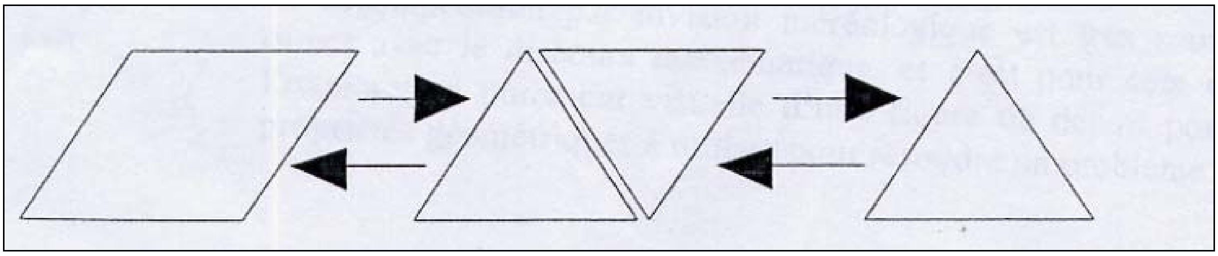


Figure 4.11

- hétérogène (fig.4.12) : la décomposition se fait en unités figurales de formes différentes entre elles. » (Duval, 2005, pp. 21-22).

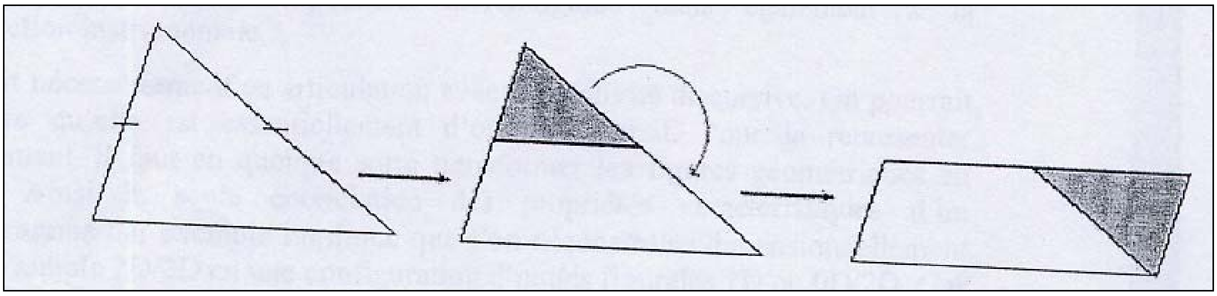


Figure 4.12

Il existe plusieurs décompositions méréologiques possibles pour une même figure, ceci concorde avec la théorie de la Gestalt car « il y a des situations où la figure aide à voir et d'autres où elle empêche de voir. On peut déterminer les facteurs qui favorisent ou inhibent ces processus de division méréologique et de réorganisation des formes reconnues. Et ces facteurs peuvent être des variables didactiques pour des activités qui visent à faire entrer les élèves dans l'utilisation heuristique des figures »[4]. Ainsi se dessine **l'hypothèse que les**

[4] Ibidem, p. 22.

figures symétriques peuvent être une variable didactique si celles-ci favorisent ou inhibent ces processus de décomposition méréologique.

Cependant, **Duval oppose la déconstruction dimensionnelle à la décomposition méréologique et à la déconstruction instrumentale**. La déconstruction dimensionnelle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive car « la seule énonciation des propriétés caractéristiques d'un parallélogramme par exemple implique que l'on déconstruise dimensionnellement une figure simple 2D/2D en une configuration d'unités figurales 1D ou 0D/2D. Car les propriétés d'un objet 2D/2D (par exemple un parallélogramme – figure 4.13 représenté par A ci-dessous) sont des relations entre des objets représentés par des unités figurales 1D/2D (les configurations B et C ci-dessous) ou 0D/2D ».

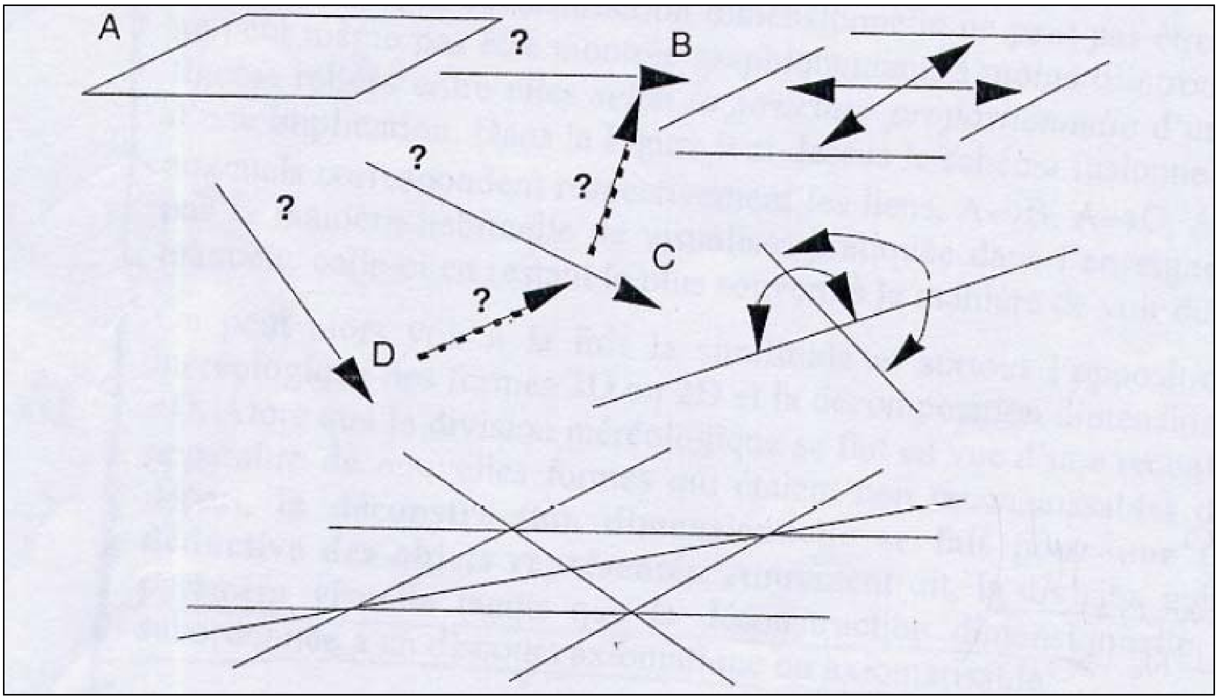


Figure 4.13 : *« Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle d'une forme »* (Duval, 2005, p. 23).

Duval oppose ce processus d'appréhension des figures à la décomposition méréologique car celle-ci requiert

> *« la priorité immédiate et stable des unités figurales 2D sur les unités figurales 1D. Cela veut dire non seulement que* ***l'on voit d'abord un parallélogramme avant de voir quatre côtés****, mais cela veut dire surtout que tous les tracés que l'on perçoit d'emblée comme formant le contour de la surface restent, d'une certaine manière, non détachables de cette reconnaissance visuelle première.* ***Les côtés d'un polygone restent les bords non séparables de la surface qu'ils délimitent.*** *Et* ***cela rend inconcevable et invisible le processus de déconstruction dimensionnelle*** *des formes. Même* ***les activités de construction de figures,*** […] *car l'attention porte justement sur la* ***reconstruction d'unités figurales 2D à partir d'unités figurales 1D automatiquement produites par l'instrument.*** *C'est pourquoi* ***la déconstruction dimensionnelle****, c'est-à-dire le passage des surfaces aux lignes (les lignes n'étant pas visuellement des bords),* ***représente une révolution cognitive*** *par rapport aux autres types de visualisation.* […] *Alors que la division*

> *méréologique se fait en vue d'une reconfiguration faisant apparaître de nouvelles formes qui étaient reconnaissables dans la figure de départ, la déconstruction dimensionnelle se fait pour une (re)construction déductive des objets représentés. Autrement dit,* ***la division méréologique reste purement visuelle tandis que la déconstruction dimensionnelle est entièrement subordonnée à un discours axiomatique ou axiomatisable*** *».* (Ibidem, pp. 23-24).

Ainsi, Duval associe le processus de déconstruction dimensionnelle (qui passe donc d'une perception globale à une perception ponctuelle en mettant en relation les éléments de dimension inférieure) à une entrée vers la géométrie déductive, autrement dit GII d'après notre propre cadre théorique, tandis que la division méréologique (dont la perception globale est exclusive) reste à un niveau naïf de géométrie, autrement dit GI toujours si l'on se situe dans notre propre cadre théorique. Il adhère en particulier à la théorie de la Gestalt qui concerne la domination de la reconnaissance de certaines formes sur d'autres.

4.4 Le « hiatus dimensionnel »

Duval décrit les différences d'articulation des unités figurales entre la visualisation et le discours. En particulier, il décrit ces différences par des processus ascendants et descendants. Il met en évidence le fait que la vision nécessite l'articulation de dimension inférieure pour traiter les figures de dimension supérieure, alors que c'est le contraire dans le processus de déconstruction dimensionnelle assujetti au discours axiomatisable, les dimensions supérieurs étant déstructurées en dimension inférieure :

> *«* […] *le hiatus entre le nombre de dimensions pris en compte pour identifier une unité figurale dans ce qui est visualisé et le nombre de dimensions pris en compte pour nommer les objets et les relations que l'on identifie. Nous avions déjà mentionné ce phénomène du changement du nombre de dimensions à effectuer, dans le sens de l'augmentation lorsqu'on passe du dire au voir et dans le sens de la réduction quand on passe du voir au dire.* […] *L'articulation entre la visualisation et le discours géométrique suppose que l'on aille contre le mouvement ascendant de la visualisation, c'est-à-dire contre cette priorité visuelle des unités figurales de dimension supérieure sur les unités figurales de dimension inférieure. »* (Ibidem, pp. 45-46).

Il souligne le caractère contraignant du processus cognitif du raisonnement géométrique : il va à l'encontre du processus dimensionnel de la vision. L'un dissocie les unités figurales pour les traiter indépendamment et mettre en évidence les relations pertinentes entre elles, dans un but précis, alors que l'autre associe les unités figurales entre elles pour permettre la perception d'une figure par exemple. Notre thèse est alors cohérente avec cette idée : on peut supposer que le concept de symétrie impose certaines relations entre des unités figurales, qui va à l'encontre du processus (général) de déconstruction dimensionnelle.
Duval dénonce alors l'organisation contraire à ce processus cognitif de l'élève dans le système scolaire :

> *«Toutes les progressions de connaissances semblent s'organiser selon le même ordre « conceptuel » : ((((points→droites)→segments de droites)→polygones)→polyèdres).* […] *cela va donc dans un sens contraire du travail long et nécessaire de déconstruction dimensionnelle pour entrer dans la compréhension des connaissances géométriques. Privilégier cet ordre revient à faire comme si la déconstruction dimensionnelle était évidente, alors qu'elle est contraire au*

> *fonctionnement normal et intuitif de la visualisation. »* (Ibidem, p. 47).

Nous interrogeons également le rôle de l'école dans ces « hiatus dimensionnels » à travers sa gestion du concept de symétrie.

> *« Et ce hiatus dimensionnel prend, dans l'enseignement de la géométrie, deux formes en quelques sortes inverses : le hiatus dimensionnel qui est intrinsèque aux démarches géométriques et le hiatus dimensionnel didactique résultant de l'organisation de l'acquisition des connaissances, telle qu'on peut l'observer dans les manuels ou dans les programmes. »* (Ibidem, p. 48).

4.5 L'éclairage de Duval

Une telle perspective théorique nous oriente alors méthodologiquement car nous allons chercher à **étudier le traitement de la figure préconisé par les élèves dans leur stratégie de reconnaissance des transformations**. L'intérêt d'une telle démarche réside dans l'idée que si la symétrie axiale favorise une décomposition méréologique (car la perception globale est la perception exclusive de la division méréologique), ou si elle impose une certaine mise en relation d'unités figurales de dimensions inférieures, alors d'après Duval (car il oppose la décomposition méréologique à la déconstruction dimensionnelle), cela impliquerait que la symétrie pourrait freiner voire empêcher le processus (général) de déconstruction dimensionnelle. Or, la déconstruction dimensionnelle est nécessaire pour entrer dans un raisonnement géométrique logico-déductif (car des relations entre les éléments de la figure mettent alors en évidence par exemple des propriétés métriques, d'équidistance, etc.). Donc, cela signifierait que **la symétrie pourrait freiner (voire s'opposer ?) au passage vers GII** et, en accord avec la théorie de la Gestalt, la symétrie pourrait être à la source de situations qui orientent alors la manière de voir. Ceci expliquerait en partie le phénomène d'inhibition accordé à la symétrie axiale sur la rotation (suggéré par le phénomène d'exclusivité des transformations dans le cas des rotations d'ordre pair). Un tel phénomène rendrait alors compte d'une **instabilité de GII dont la symétrie serait responsable**. Nous interrogerons naturellement par la suite le rôle imputé à l'institution scolaire dans cette gestion du hiatus dimensionnel (en particulier lors de la négociation GI-GII), dont la symétrie pourrait être un catalyseur.

CONCLUSION

D'après ces premières données, la dualité globale / ponctuelle se retrouve au cœur de la dichotomie symétrie(s) / rotation(s) comme semblent l'exprimer certains invariants opératoires dont celui du théorème-en-acte de cocyclicité (propre à la rotation), celui du concept-en-acte différenciateur de l'orientation (qui distingue la symétrie centrale et la symétrie axiale sans passer par une vision ponctuelle), ou encore le principe d'exclusivité (au profit de la symétrie dans les cas de rotations d'ordre pair). Cependant, ces résultats ne sont obtenus qu'à partir d'un échantillon de dix élèves à partir d'un questionnaire dont nous n'avons pas maîtrisé toutes les variables didactiques, lesquelles ont pu jouer un rôle important.

Il apparaît nécessaire de réaliser un questionnaire plus fin qui permette d'utiliser les adaptations de l'ETG personnel de l'élève dans ces basculements de paradigme suggérés par la tâche pour déterminer quel type de déconstruction des figures est mis en jeu selon la transformation.

Nous pourrons ainsi tester l'hypothèse que les figures symétriques peuvent être des variables didactiques dans le sens où la symétrie axiale pourrait jouer un rôle dans la nature du travail géométrique de l'élève en orientant le passage vers GII. En effet, le développement puis la maîtrise de la déconstruction dimensionnelle se retrouvent au cœur du passage vers GII.
Le chapitre suivant détaille alors la méthodologie mise en place à partir de ces hypothèses et de nos questions de recherche.

CHAPITRE 5

METHODOLOGIE DE RECHERCHE A TRAVERS UNE ETUDE LONGITUDINALE

Résumé

L'objet de ce chapitre consiste à décrire notre corpus de thèse :
- comment nous l'avons construit,
- comment nous avons recueilli les données
- puis comment nous les avons traitées.

Notre méthodologie de recherche se décompose en deux parties :
*- un deuxième questionnaire destiné à des élèves de 5^e^ et de 3^e^*
- et une série d'observations de l'enseignement de la symétrie axiale en 6^e^, de la symétrie centrale en 5^e^ et de la rotation en 3^e^.

Ce deuxième questionnaire est construit à partir des résultats obtenus dans le chapitre 4, dans le but d'étudier l'ETG personnel d'un élève de 5^e^ et de 3^e^ dans une même situation (la situation dite de référence qui est la reconnaissance des transformations). Puis nous avons exploré du côté des séances de classe auxquelles ont participé ces mêmes élèves pour tenter d'expliquer les résultats obtenus après l'analyse de ce deuxième questionnaire.

Il s'agit d'une étude à deux dimensions :
- une **dimension cognitive locale** *menée à travers une étude qualitative des productions écrites des élèves.*
- une **dimension cognitive collective** *menée à travers une analyse des séquences d'observations des séances de classe.*

PLAN

1. UNE ETUDE LONGITUDINALE AU COLLEGE

1.1 Rappel de nos hypothèses de départ et de nos questions de recherche

Hypothèse n°1 : nous adoptons le point de vue de Vergnaud, qui considère l'apprentissage comme l'adaptation de schèmes. Nous supposons aussi que les processus de conceptualisation sont observables à partir de l'activité de l'élève.

Nos préoccupations portent donc sur les adaptations des schèmes dans une même situation de référence qui donnent du sens aux isométries du plan au collège. Nous adoptons alors le point de vue méthodologique traditionnel en didactique des mathématiques (Robert, 1992) pour « observer » l'apprentissage dont nous rappelons l'extrait suivant (déjà cité dans le chapitre 4)) :

> *« Souvent en didactique des mathématiques on repère l'apprentissage par rapport à la mise en fonctionnement des notions visées dans des exercices ou des problèmes. Cela correspond à une épistémologie des mathématiques de type « problématique » (pour résoudre des problèmes et poser des questions). Il s'agit de faire acquérir les concepts sous leur double forme, outil et objet. En conséquence, nous caractérisons les conduites des élèves en situation de résolution de problèmes. Pour cela, nous avons besoin d'étudier les procédures, les performances mais les erreurs, avec leur persistance, et même les conceptions (y compris spontanées) qui participent aux conduites. »* (Robert, 1992, p. 41).

Les adaptations de schèmes que nous évoquons ont lieu lors de nouveaux apprentissages. C'est pourquoi nous avons choisi de situer notre recherche à trois niveaux cruciaux du collège concernant l'enseignement des isométries : en 6^e, lors du premier enseignement (formel) de la symétrie axiale, en 5^e, lors de l'enseignement de la symétrie centrale, et en 3^e, lors de l'enseignement de la rotation.
Nous avons choisi d'étudier les conduites des élèves en situation de résolution de problèmes dans la situation de référence de reconnaissance des transformations (après les enseignements de la symétrie centrale en 5^e et de la rotation en 3^e). Ce choix méthodologique concorde ainsi avec nos choix théoriques car il correspond à l'étude d'une partie du champ conceptuel des isométries, décrite à travers l'étude de l'organisation de l'Espace de Travail Géométrique d'un élève. On suppose en particulier que la perception fait partie de la conceptualisation (Sensévy, 2007, p. 45), qui est au cœur du processus d'apprentissage. Nous avons donc défini certaines variables perceptives à partir de notre étude exploratoire réalisée en 3^e (développée en seconde partie de ce chapitre).

Hypothèse n°2 : nous adoptons le point de vue constructiviste et nous supposons que la symétrie axiale participe à la construction et reconstruction des savoirs nouveaux visés par l'enseignement de la symétrie centrale et de la rotation au collège.

Le point de vue constructiviste admet qu'il ne suffit pas d'empiler des couches de connaissances pour que celles-ci soient assimilées ; apprendre est un processus de reconstruction à partir de l'ancien. Ainsi, au moment de l'apprentissage de la symétrie centrale et de la rotation, les connaissances des élèves se reconstruisent à partir de leurs connaissances anciennes.

D'après les travaux de didactique des mathématiques (chapitre 1) concernant la symétrie axiale en particulier et les transformations du plan en général, il apparaît un certain nombre de conceptions erronées et résistantes tout au long du collège liées à la symétrie axiale. Des difficultés sont également rencontrées lors de l'enseignement des autres isométries du plan. Notre travail de recherche consiste alors à déterminer si les conceptions liées au concept de la symétrie axiale sont liées aux difficultés rencontrées lors de l'enseignement des autres transformations. En particulier, on cherche à savoir si ces difficultés sont inhérentes au concept de symétrie ou si elles sont liées à des effets de l'enseignement.

Questions de recherche n°1 :
La symétrie axiale pilote-t-elle l'organisation et les inférences des invariants opératoires des autres transformations du plan au collège dans la construction de l'ETG personnel de l'élève ? Si oui, comment ?

L'une des particularités du collège (en France) est d'enseigner les isométries de manière successive, c'est-à-dire d'étudier une nouvelle transformation par niveau. Cette progression scolaire est synchrone avec le passage de GI vers GII visé par le collège.

Questions de recherche n°2 :
Comment l'ETG personnel évolue-t-il au cours de l'enseignement des autres transformations du plan ?

Hypothèse n°3 : nous supposons qu'il existe une dialectique GI-GII au niveau du travail de l'élève mais aussi de l'intervention du professeur. Nous supposons qu'une partie des basculements d'un paradigme à un autre sont régulés par le contrat didactique et le contrat disciplinaire.

Questions de recherche n°3 :
Quel est l'ETG (idoine et de référence) développé en classe ? Quelle est la distance entre cet ETG idoine et l'ETG personnel que l'élève développe finalement ?

1.2 Rappel des résultats du questionnaire exploratoire et des nouvelles questions

L'étude du premier questionnaire « exploratoire » réalisé par des élèves de 3e en fin d'année scolaire (Chapitre 4) a nourri notre réflexion et a apporté des éléments nouveaux à considérer pour mettre au point l'expérimentation principale de la thèse.

Cette étude de cas a dégagé certaines spécificités au niveau des invariants opératoires mis en jeu par la transformation.
La symétrie axiale et la symétrie centrale privilégient :
- le schème de bidécomposabilité (dont le point ou l'axe sont des frontières, des éléments de repères visuels, entre les deux parties égales)
- le concept-en-acte de conservation des dimensions d'un point de vue global
- et le concept-en-acte d'orientation en tant qu'argument pour différencier la symétrie axiale de la symétrie centrale.

En revanche, la rotation semble privilégier le concept d'application point par point vu comme un déplacement, au sens géométrique dans le plan, mais les éléments de conservation (des dimensions et de l'orientation) sont certes implicites dans l'action mais non formulés comme une caractéristique de la rotation chez l'élève, contrairement aux symétries.

Les travaux de Duval ont alors apporté un nouvel éclairage quant à notre problématique de recherche. Duval décrit les processus cognitifs en jeu lors de la perception d'une figure dans un contexte scolaire. Il oppose notamment la division méréologique (qui est la division de la figure par des figures de même dimension, la perception globale y est donc exclusive : 2D/2D) et la déconstruction instrumentale (qui rend compte de la constructibilité de la figure à l'aide d'instruments : 1D/2D et 0D/2D dans l'action) à la déconstruction dimensionnelle (qui correspond à la décomposition en éléments de dimension inférieure, et donc permet de basculer vers une perception ponctuelle explicite : 1D/2D et 0D/2D) subordonnée à un discours axiomatique et donc nécessaire pour entrer dans GII.

Hypothèse de départ n°4 : le traitement de la figure (au sens de Duval) est fondamental dans la construction de l'ETG de l'élève et la déconstruction dimensionnelle est nécessaire pour atteindre le paradigme GII.

D'après notre premier questionnaire exploratoire, il apparaît grossièrement que la dichotomie perception globale / perception ponctuelle renvoie à la dichotomie symétrie axiale / rotation. Cependant, l'élève semble s'adapter à la tâche proposée et justifie aussi la symétrie axiale ou la symétrie centrale par des propriétés métriques (si la tâche suggère une perception ponctuelle). Aussi semblerait-il que selon la tâche, la symétrie axiale favoriserait la décomposition méréologique (semblable à une décomposition du type puzzle : 2D/2D visible par exemple dans la situation des rosaces) ou une certaine décomposition dimensionnelle, c'est-à-dire dans le but de faire émerger seulement certaines propriétés de conservation des mesures.

Duval oppose la déconstruction dimensionnelle à la déconstruction instrumentale et la déconstruction méréologique. Aussi, si ces hypothèses sur la symétrie sont avérées, peut-on alors imaginer que la symétrie axiale inhiberait d'autres schèmes possibles tels que ceux liés à la rotation par exemple.

L'une des hypothèses que nous cherchons donc à vérifier ou invalider est que la symétrie joue un rôle organisateur de la conduite chez certains élèves :
- soit car elle est cristallisée dans une perception globale
- soit car elle impose la mise en relation de certains éléments de la figure.

Le concept de symétrie constitue alors un frein à la mise en place et l'articulation d'une déconstruction dimensionnelle générale et nécessaire dans la négociation du passage vers GII visé par le collège.

Questions de recherche n°4 :
Quel est le rôle joué par la symétrie axiale dans le traitement de la figure dans la mise en place de l'ETG personnel de l'élève ?

1.3 Apport d'un point de vue méthodologique

Les résultats du premier questionnaire ont été obtenus à partir de l'analyse des stratégies d'un petit échantillon de dix élèves de 3^e^ (la 3^e^ est la seule année où les élèves sont censés acquérir la connaissance de toutes les isométries du plan). La suite de la méthodologie de recherche a été construite à partir de ces résultats, dans le but de décrire le processus de conceptualisation lors de l'apprentissage d'une partie des isométries enseignées au collège. Nous avons réalisé un deuxième questionnaire destiné cette fois à des élèves de 5^e^ (après l'enseignement de la symétrie centrale) et de 3^e^ (après l'enseignement des rotations). Ce deuxième questionnaire a pour but de vérifier ou d'invalider les résultats obtenus à partir du premier questionnaire, en éliminant certaines variables didactiques.

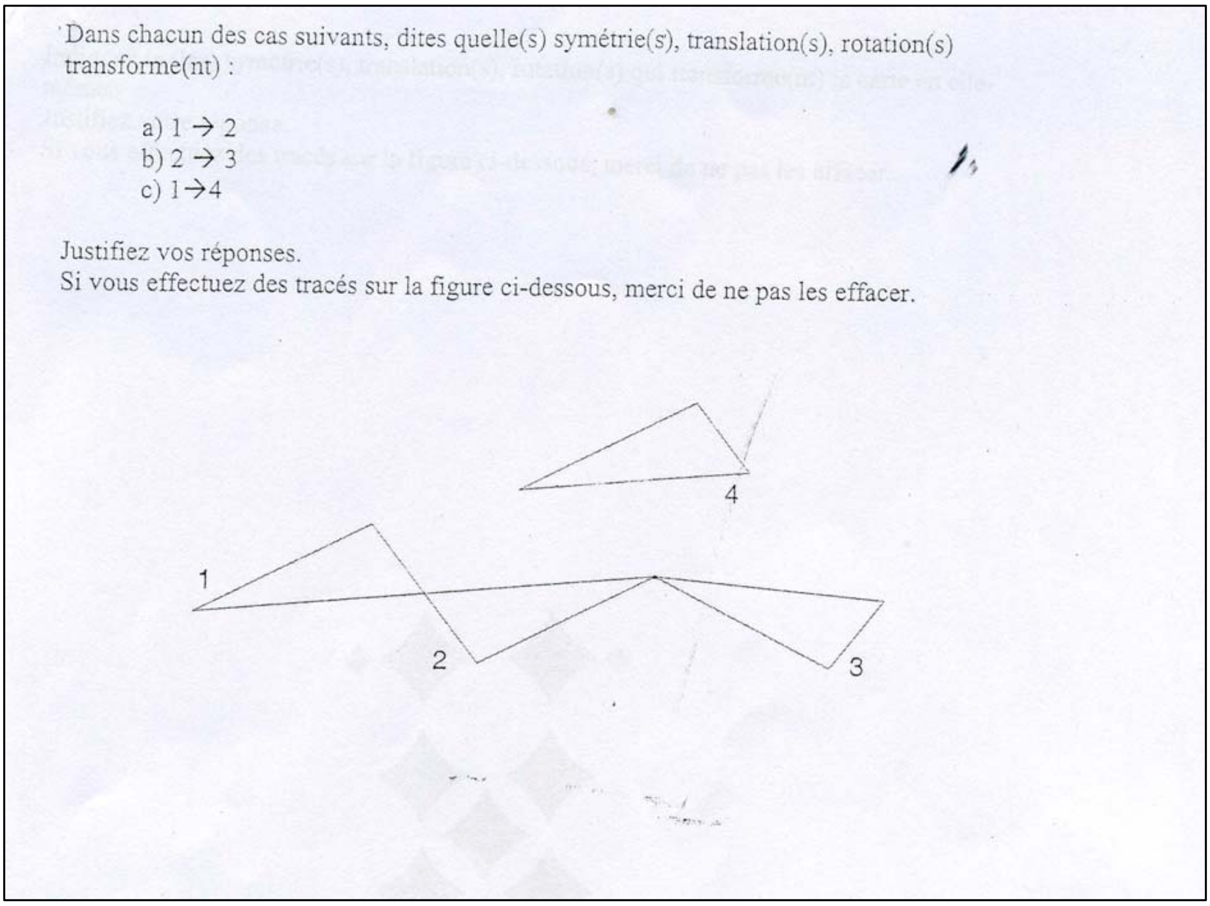
Afin d'expliquer certains résultats obtenus à partir de l'analyse des productions des élèves, nous avons observé les premières séances d'enseignement sur chacune de ces transformations : en 6^e^, en 5^e^, et en 3^e^. Nous nous sommes concentrés sur les premières séances d'enseignement car c'est le moment où les connaissances des élèves sont déstabilisées et propices à l'erreur, et donc révélatrice de l'adaptation des élèves en cours.

2. LE DEUXIEME QUESTIONNAIRE EN 5^e^ ET EN 3^e^

2.1 Conception du deuxième questionnaire : variables retenues

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence les basculements de paradigme géométrique des ETG personnels des élèves dans la résolution des deux premiers exercices du premier questionnaire. Nous avons alors supposé que l'élève s'adaptait et que l'organisation des invariants opératoires qui construisent son ETG était différente selon la perception suggérée par la tâche. La perception ponctuelle semble favoriser un ETG personnel plus proche de l'ETG de référence. Nous avons ainsi évoqué **une distance modulable de l'ETG personnel** selon la tâche.

Cependant, dans ce premier questionnaire, d'autres variables didactiques entrent en jeu. La configuration de l'exercice 1 présente des parallélogrammes disposés en « éventail » (avec un côté commun entre chaque parallélogramme), alors que la configuration de l'exercice 2 porte sur des triangles (ayant un sommet commun). Nous cherchons à isoler la **variable perception globale / perception ponctuelle** au cœur du deuxième questionnaire en éliminant les autres variables. Pour cela, il apparaît nécessaire de ne conserver qu'une seule configuration et de présenter cette fois les situations en deux temps donnés différents. Nous avons donc choisi la configuration des triangles (exercice 2 du premier questionnaire) que nous déclinons selon une perception globale et selon une perception ponctuelle (fig. 5.1 et fig. 5.2). Ainsi, nous ferons jouer les adaptations de l'ETG de l'élève lors de ces changements supposés de paradigme pour dégager le type de déconstruction dimensionnelle privilégié par les transformations du plan visées par l'élève.


Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3
c) 1→4

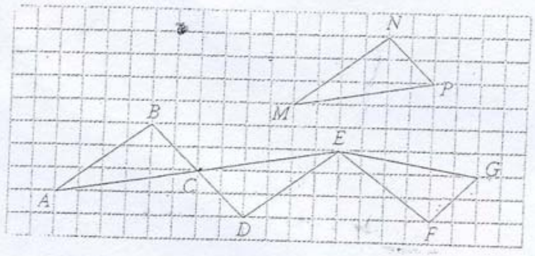
Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

<u>Document 5.1</u> *: extrait du deuxième questionnaire, la situation des triangles dans le cas dit de la « perception globale ».*

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE
c) ABC en MNP

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



Document 5.2 : extrait du deuxième questionnaire, la situation des triangles dans le cas dit de la « perception ponctuelle ».

La parité semble également être un facteur non négligeable dans les cas de figures globalement invariantes (exercice des rosaces). Cassan (1997) avait également exploité cette variable en classe de 5^{e} dans une situation de reconnaissance en montrant que les rotations d'ordre impair permettaient de mettre en évidence l'amalgame entre la symétrie centrale et la symétrie axiale. En effet, les élèves reconnaissaient des centres de symétrie centrale alors qu'il s'agissait seulement du centre de la rotation (nous montrerons par la suite que cet obstacle disparaît en 3^{e}). D'après le premier questionnaire, il semble qu'une rotation d'ordre pair oriente l'élève vers une symétrie axiale alors que la rotation d'ordre impair l'oriente vers la rotation, résultats qui concordent avec le **phénomène d'exclusivité des transformations**. Dans le deuxième questionnaire, nous avons donc choisi de conserver cette situation afin de vérifier un tel phénomène mais en éliminant aussi les variables périphériques. Nous présentons donc deux mêmes types de rosaces, toujours dans une situation de reconnaissance des transformations :

- une rosace d'ordre pair (avec un nombre pair d'axes de symétrie). Nous avons choisi une étoile à six branches (fig. 5.3 et 5.4).

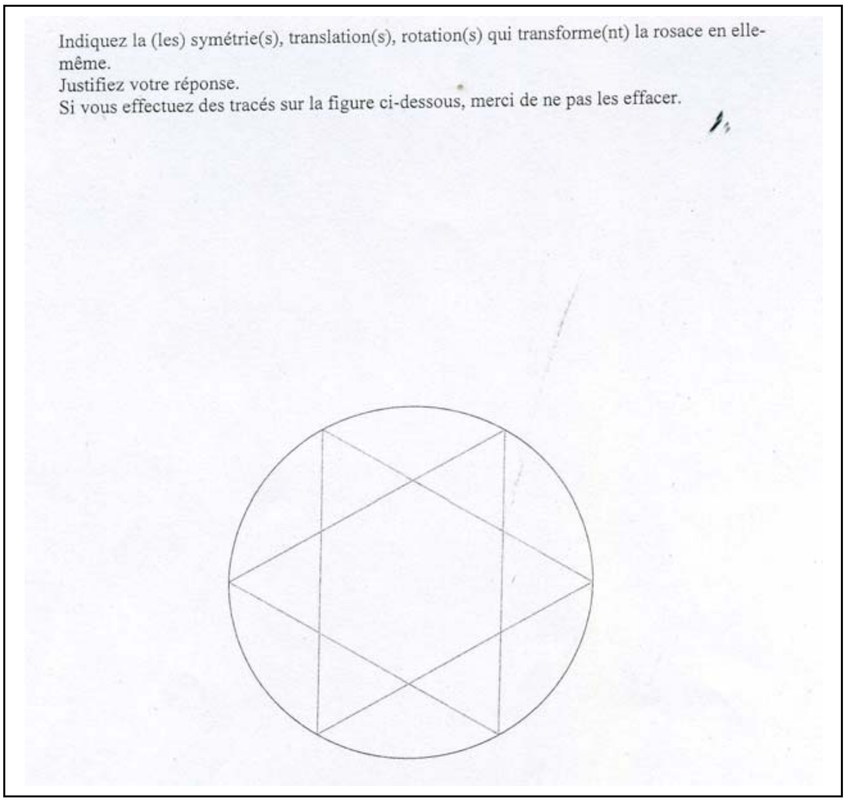
- une rosace d'ordre impair (avec un nombre impair d'axes de symétrie). Nous avons choisi une étoile à cinq branches (fig. 5.5 et 5.6)

Les deux motifs sont plus proches visuellement (alors que dans le premier questionnaire, on pouvait constater des formes pleines dans certains motifs ou encore des points remarquables).

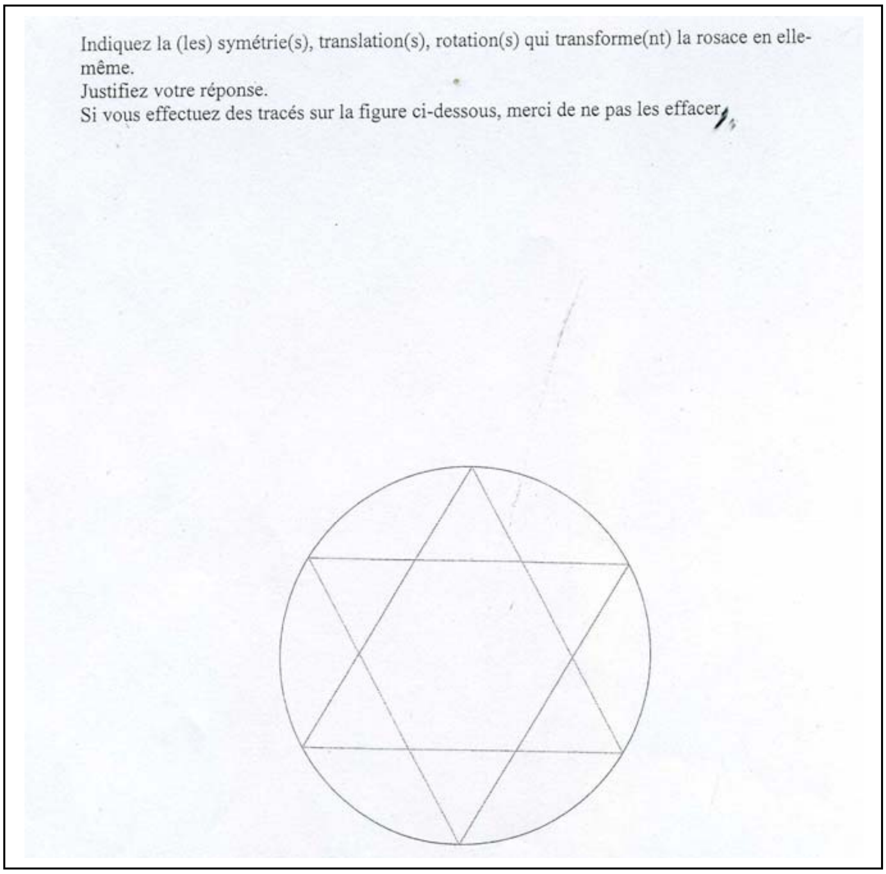
L'orientation des rosaces a été une des variables également retenues *a priori* mais dont les données *a posteriori* ne nous permettent pas de tirer des résultats significatifs. Dans le chapitre 1, nous mettions en évidence l'ascendant perspectif de certains angles saillants et leur orientation par rapport à un repère orthogonal (paire d'axes horizontal et vertical). Nous avons alors décliné les rosaces en :

- rosace d'ordre 6 avec deux diagonales parallèles verticales (fig. 5.3)
- rosace d'ordre 6 avec un sommet saillant vertical (fig.5.4)
- rosace d'ordre 5 avec un sommet saillant vertical inférieur (fig. 5.5)
- rosace d'ordre 5 avec un sommet saillant vertical supérieur (fig. 5.6)

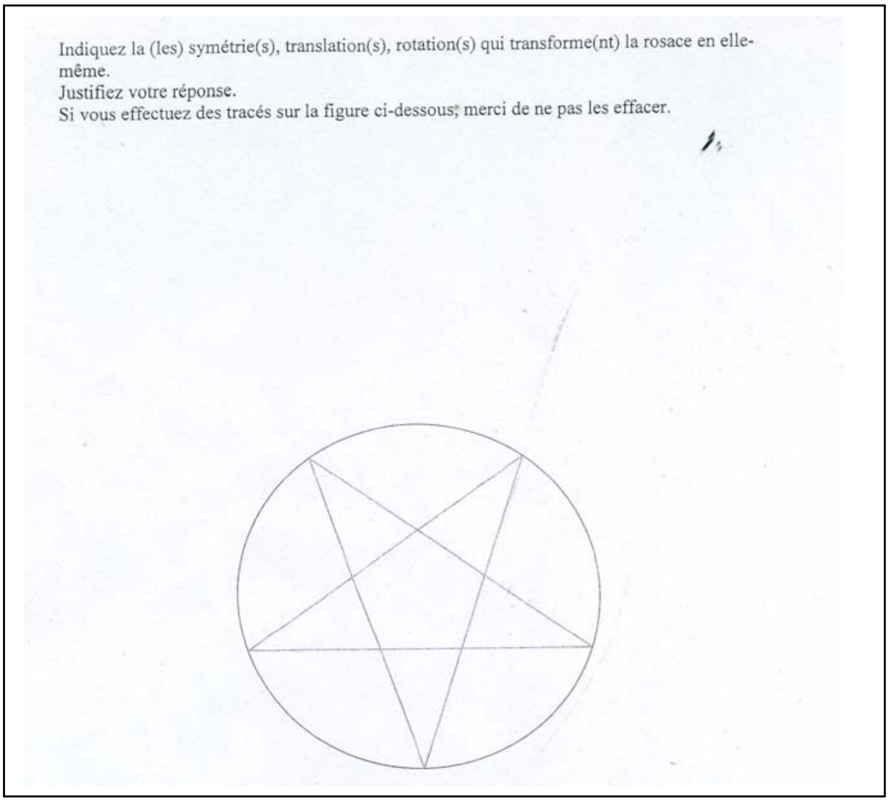
Les deux orientations ont été données en deux temps différents à un même élève. Un même élève a toujours rencontré une rosace de même ordre (5 ou 6). Nous souhaitions comparer les stratégies des élèves selon l'orientation de la figure et la parité.


Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

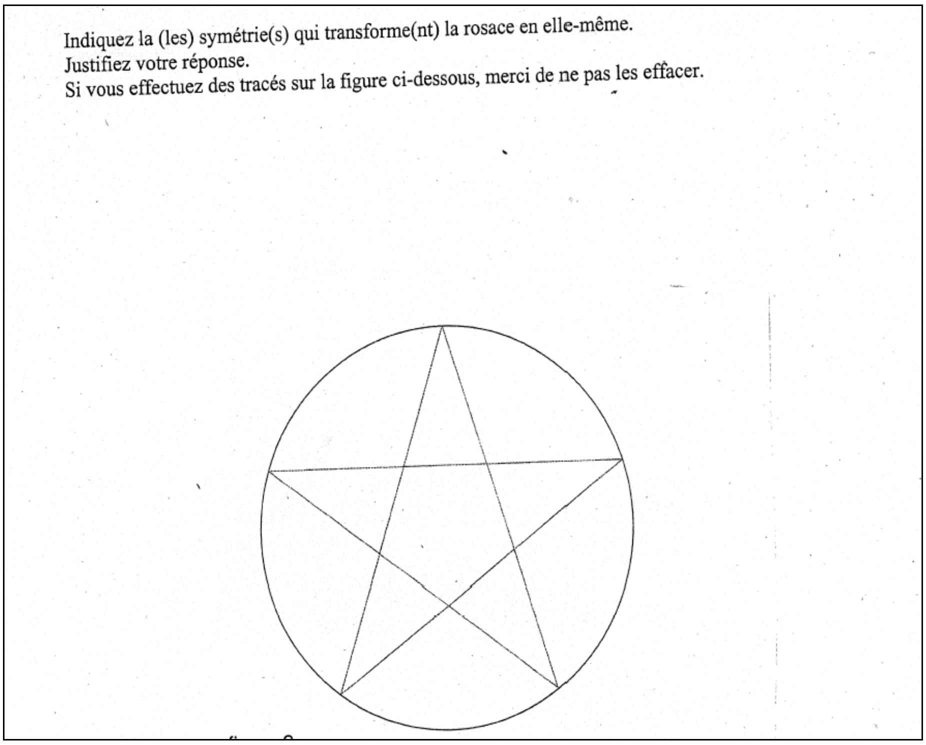
<u>*Document 5.3*</u> *: rosace d'ordre 6 (orientation dite « parallèle »).*


Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

Document 5.4 : rosace d'ordre 6 (orientation dite « pointée verticale »).


Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

Document 5.5 : rosace d'ordre 5 (orientation dite « pointé bas »).


Indiquez la (les) symétrie(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

<u>Document 5.6</u> : rosace d'ordre 5 (orientation dite « pointé verticale »).

D'après nos hypothèses, il existe un lien entre la symétrie et la décomposition des figures Ainsi, nous avons choisi ces variables et configurations pour réaliser une étude détaillée du **type de déconstruction des figures** dans l'ETG personnel de l'élève, dans cette situation de référence de reconnaissance des transformations.

Une fois tous ces choix assumés, nous avons adapté les énoncés du nouveau questionnaire aux niveaux 5^e et 3^e. Mme B. nous a confirmé le choix du verbe « transformer » en avouant qu'elle l'utilisait elle-même dès la 5^e (ce que nos observations de classe ont confirmé). Nous avons ensuite écrit un énoncé minimal, au sens où il n'est même pas précisé cette fois que les figures en question sont superposables. En 5^e nous n'évoquons que les symétries (document 5.6), et en 3^e nous évoquons toutes les transformations du plan rencontrées au cours du collège : les symétries (nous ne précisions pas axiale ou centrale), la translation, et la rotation (documents 5.3, 5.4 et 5.5).

2.2 Recueil des données

Nous avons fait passer ce questionnaire dans la classe de 5^e et de 3^e dont nous avons observé les premières séances d'enseignement de la symétrie centrale (en 5^e) et de la rotation (en 3^e), menées par le même professeur Mme B. Nous avons choisi de conserver le même professeur lors de nos observations et pour les questionnaires afin de limiter les variables à des variables mathématiques.

Nous avons fait passer ce deuxième questionnaire entre janvier et juin 2007, toujours dans le même collège du 17ème arrondissement de Paris. On comptait 27 élèves dans la classe de 5^{e} et 30 élèves dans celle de 3^{e}. **Ce deuxième questionnaire s'effectuait en deux temps** (dans une durée limitée de quarante minutes environ, car ce questionnaire comprenait d'autres exercices disponibles en annexe p. 296) en classe (avec la présence de Mme B.) :

- la première partie du questionnaire comportait la situation des triangles en situation dite « perception globale » et la situation rosace avec une rosace d'ordre pair ou impair.

- la deuxième partie comportait la situation des triangles en situation dite « perception ponctuelle » cette fois, et la situation rosace avec la même rosace mais donnée dans une orientation différente.

La classe était donc partagée en deux parties car un même élève ne rencontrait qu'une seule rosace (paire ou impaire) mais dans une orientation différente. Les deux types de questionnaires présentaient les mêmes exercices mais dans un ordre différent afin de faire en sorte que deux élèves côte à côte réalisent un questionnaire, en apparence, différent.

Nous avons donc récupéré 27x2= 54 copies en 5^{e} et 30x2=60 copies en 3^{e}. D'autres exercices étaient également proposés dont le type de tâche portait sur la construction et la réalisation d'un programme de construction, mais nous n'avons pas analysé ces situations dans le cadre de cette thèse.

La première partie du questionnaire a eu lieu, pour les 3^{e} peu de temps après la fin de leur enseignement sur la rotation, et la deuxième partie du questionnaire quelques jours après la première partie. Alors que pour les 5^{e}, la première partie du questionnaire a été donnée plus longtemps après la fin de leur enseignement sur la symétrie centrale (un mois et demi après), et la suite du questionnaire quelques jours après la première partie.

2.3 Choix des classes

Nous n'avons pas fait passer ce deuxième questionnaire en classe de 6^{e} car la tâche que nous avons choisi d'analyser est la tâche de reconnaissance des transformations du plan parmi celles disponibles par le niveau concerné. Or en 6^{e}, les élèves ne connaissent que la symétrie axiale. Cependant, nous aurions pu adapter notre questionnaire en demandant aux élèves de 6^{e} de reconnaître s'il s'agissait d'une symétrie axiale ou pas, et de justifier leurs réponses. Ceci nous aurait permis de repérer les invariants opératoires sollicités dans cette tâche par des élèves de 6^{e} et de décrire ainsi les premiers schèmes construits par des élèves dans une situation de reconnaissance de la symétrie. Cependant, les travaux de Grenier (chapitre 1) sont très précis sur les conceptions des élèves à propos de ce concept et nous apportent de nombreux éléments. Nous n'avons donc pas re-expérimenté en 6^{e} et nous nous sommes appuyés sur les résultats de Grenier & Laborde (et de la thèse de Lima qui s'inspire entre autres de Grenier), qui se vérifient dans les productions relevées durant les séances d'enseignement de 6^{e}.

Nous aurions également pu faire passer notre questionnaire en classe de 4^{e}, qui est un niveau intermédiaire où on assiste aux prémices de l'enseignement des translations. Cependant, nous avons préféré nous concentrer sur les effets de la symétrie axiale sur l'enseignement et l'apprentissage de la symétrie centrale et de la rotation[1] (dont le lien est immédiat). Nous n'avons donc pas fait passer notre questionnaire en 4^{e} et nous n'avons pas non plus analysé les réponses des questions au sujet de la translation de notre deuxième questionnaire.

2.4 Traitement du deuxième questionnaire

Nous avons choisi de mener une **étude qualitative** des productions écrites en 5^{e} et en 3^{e} du fait de nos choix théoriques préliminaires. En effet, nous menons une étude sur les effets de la symétrie axiale dans le processus de conceptualisation qui a lieu au cœur de l'ETG personnel de l'élève lors de l'enseignement des transformations du plan. Cela implique une étude qualitative des composants de cet ETG, leur organisation et leurs inférences.

Dans le cas de la situation triangle, la variable principale est la perception globale / perception ponctuelle. Nous avons donc réalisé une classification des productions selon la réussite de l'élève et la stabilité de sa réussite (d'une perception à une autre). Puis nous avons mis en évidence des profils d'élèves (en fonction de la stabilité de leur comportement selon la transformation en jeu) dont nous avons étudié l'ETG (et en particulier le traitement de la figure) à l'aide d'une grille d'analyses. Le chapitre 6 est exclusivement consacré à l'étude de ce deuxième questionnaire. Nous testons et étudions ainsi la distance modulable entre l'ETG personnel de l'élève et l'ETG idoine selon la perception suggérée par la tâche et selon les transformations reconnues.

Dans le cas de la situation des rosaces, nous avons également réalisé une première classification selon les transformations reconnues par l'élève et le nombre de transformations qu'il reconnaît pour une même figure. Nous testons et étudions ainsi le principe d'exclusivité des transformations et étudions quel traitement de la figure est mis en place selon la transformation en jeu.

L'étude de cas des ETG personnels des élèves nous permettra ainsi de répondre aux questions de recherche n°1 et n°4. Et comparer les analyses des ETG personnels entre élèves de 5^{e} et de 3^{e} nous permettra de répondre aux questions de recherche n°2.

3. RELATIONS DES RESULTATS OBTENUS AVEC L'ENSEIGNEMENT

[1] De plus, nous avons également évoqué, dans le chapitre 1, les liens privilégiés entre la symétrie axiale et la rotation.

Le temps limité de la thèse ne nous a pas permis d'observer une même classe sur quatre ans. En revanche, nous avons, deux années durant, observé **trois classes différentes avec toujours le même professeur, Mme B.** Rappelons que nous avons choisi de limiter nos variables à des variables mathématiques, ce pourquoi nous avons toujours observé le même professeur, Mme B. (qui était également le professeur des élèves interrogés par test).

3.1 Où, quand, comment ?

Les séances de classe observées se sont déroulées pendant l'année scolaire 2005-2006 pour les séances de 6^{e}, et 2006-2007 pour les séances de 5^{e} et 3^{e} (soit la même année scolaire que notre deuxième questionnaire). Nous avons observé cinq à six séances pour la classe de 6^{e} et la classe de 3^{e}, et une dizaine de séances pour la classe de 5^{e}. Cette différence vient du fait que Mme B. a réalisé beaucoup d'activités préparatoires pour la classe de 5^{e} pour introduire la symétrie centrale. Nous avons également relevé une grande partie des productions d'élèves de 6^{e}, 5^{e} et 3^{e} lors des ces enseignements. Le corpus recueilli est donc la retranscription de ces séances, mes notes personnelles (dont les traces écrites du tableau) et les productions des élèves (principalement « activités préparatoires »).

3.2 Les effets de l'enseignement

Nous avons choisi d'observer les séances ordinaires de classe dans le but de trouver des éléments qui expliqueraient les résultats obtenus après l'analyse des productions issues du deuxième questionnaire. En effet, on se demande si c'est la nature même du concept de symétrie qui est à l'origine de ces résultats ou si c'est l'enseignement (en particulier l'enseignement nivelé des transformations du plan de la 6^{e} à la 3^{e}) qui en est la cause, du fait d'avoir relevé certains effets de contrat.

Nous avons choisi, dans le cadre de cette thèse, de ne pas réaliser une analyse traditionnelle des séances de classe (dans le cadre de la TSD par exemple) ou des pratiques ordinaires des professeurs (avec les outils de double approche) (Robert, 2007), (Roditi, 2003). Il s'agit d'axes méthodologiques qui pourraient être exploités dans le cadre d'un autre travail périphérique à cette thèse.

Nous avons plutôt choisi de partir de certains « incidents », au sens de Roditi (2003), relevés d'après nos observations, et qui pourrait expliquer certains résultats obtenus d'après l'étude du deuxième questionnaire. Ces « incidents » portent sur les échanges entre l'élève et le professeur qui peuvent être de nature différente :

- indications données par le professeur
- institutionnalisation du professeur
- réponses orales données par l'élève
- questions orales d'élèves

- traces écrites des élèves dans les activités préparatoires.

Cette étude a pour but de répondre aux questions de recherche n°3, rappelées en début de chapitre.

Nous développerons cette étude des séances de classe après avoir décrit nos résultats dans le chapitre 6, étude qui sera donc l'objet du dernier chapitre de cette thèse, le chapitre 7.

CHAPITRE 6

ANALYSE DU DEUXIEME QUESTIONNAIRE

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'analyse du deuxième questionnaire réalisé en classes de 5^e^ et 3^e^ durant les mois de mai et juin 2007. Nous cherchons à vérifier si la symétrie axiale joue un rôle dans le traitement de la figure, au cœur de la construction de l'ETG personnel de l'élève.

La conception de ce questionnaire a été développée dans les chapitres 4 et 5.
Ce chapitre se compose de deux parties :
- la partie A est consacrée à la situation dite « des triangles » : un même type de tâche est décliné selon une tâche qui suggère une perception globale et une tâche qui suggère une perception ponctuelle. Après l'analyse a priori *de la tâche, et du rôle* a priori *joué par ce changement de perception suggéré par la tâche, nous analyserons les données. Nous avons procédé à une classification des copies des élèves selon des critères de réussite et de stabilité de cette réussite. Cette première classification nous permet alors de mettre en évidence des profils d'élèves qui présentent des stratégies de reconnaissance différente selon la perception globale et la perception ponctuelle et selon la transformation en jeu. Nous étudions en particulier le traitement de la figure au cœur de l'Espace de Travail Géométrique personnel de l'élève. Nous expliciterons la stabilité de l'ETG d'un élève de 3^e^ en fonction du traitement de la figure, différent selon qu'il s'agit d'une symétrie axiale ou d'une rotation. La symétrie axiale semble s'adapter plus facilement, allant jusqu'à faire fonctionner une déconstruction dimensionnelle de la figure. En revanche, l'ETG personnel d'un élève de 5^e^ est beaucoup plus instable. Le type de déconstruction des formes mis en place semble relever d'un effet de contrat.*
- la partie B est consacrée à la situation dite « des rosaces » : à une même figure correspondent plusieurs transformations du plan possibles. Après l'analyse a priori *de la tâche, nous avons également procédé à une classification des productions des élèves afin de déterminer des profils d'élèves dont nous souhaitons étudier l'ETG personnel. Nous montrerons également comment l'ETG personnel d'un élève de 3^e^ est nettement plus stable que celui d'un élève de 5^e^, et de quelle manière les schèmes de la symétrie et ceux de la rotation s'opposent au niveau du traitement de la figure.*

PLAN

PARTIE A : LA SITUATION DES TRIANGLES, COMPARAISON PERCEPTION GLOBALE ET PERCEPTION PONCTUELLE

1. ETUDES *A PRIORI* *(fig. 5.1 et 5.2, chapitre 5 pp. 132-133)*

1.1 Analyse a priori *de la tâche en 5^e^*

- La situation des triangles, dite de « perception globale »

La tâche consiste à reconnaître une symétrie centrale à la question a. et une symétrie axiale à la question b. Il s'agit donc d'un exercice dont les connaissances en jeu sont anciennes :
- la symétrie axiale a été vue en 6^e et revue en 5^e
- la symétrie centrale a été traitée un mois et demi plus tôt.
Elles sont directement évoquées dans l'énoncé (comme déjà précisé dans le chapitre 5, nous avons adopté l'énoncé du questionnaire pour les 5^e et les 3^e), il s'agit alors de connaissances « mobilisables », l'élève n'a pas à rechercher les connaissances à utiliser car on lui demande : « quelle(s) symétrie(s) transforme(nt)…». La question est donc « relativement » fermée car on leur indique qu'il s'agit déjà de symétrie, laquelle doit être une connaissance disponible. L'énoncé et le support fourni suggèrent une perception globale et dynamique : les triangles ne sont pas nommés, ils sont désignés par des chiffres (1, 2, ou 3) et leur transformation est symbolisée ici par une flèche. L'énoncé suggère un contrôle par déplacement global de la figure. La conservation des dimensions est certes suggérée, mais on pourrait s'attendre également à ce qu'elle soit vérifiée à l'aide de la règle graduée, contrôle qui fait partie du contrat disciplinaire en 5^e (une représentation connue de la géométrie chez l'élève au début du collège est qu'en géométrie : on mesure.).
Du fait qu'on demande aux élèves de justifier leurs réponses, on peut prévoir différents types d'adaptation. On peut prévoir des techniques de reconnaissance différentes :

- **les techniques dites de « perception globale » :** l'élève a recours à une perception globale des figures pour justifier sa réponse en invoquant des superpositions.
La superposition par demi-tour autour de l'unique point fixe (instrumentée - ou pas - à l'aide du papier calque et/ou du compas) renvoie à la symétrie centrale.
La superposition par pliage par rapport à un axe (vertical, ou suggéré par l'alignement des sommets A, C et E par exemple ou B, C et D) renvoie à la symétrie axiale. D'après le chapitre 4, certains élèves invoquent l'orientation de la figure pour distinguer la symétrie axiale et la symétrie centrale ; une appréhension globale des figures suffit alors.
Ce sont des techniques qui renvoient à des manipulations directes de l'espace local et donc renvoient plutôt à un paradigme géométrique GI. On suppose que l'énoncé de la tâche, à ce niveau du collège, favorise alors ces techniques dites de « perception globale ».

- **les techniques dites de « perception ponctuelle » :** l'élève aménage l'espace graphique. Il nomme les points invariants remarquables (ici les sommets communs aux deux triangles) ainsi que les sommets des triangles dans le but de formuler des arguments métriques caractéristiques de la symétrie axiale ou de la symétrie centrale (égalité des mesures des côtés, équidistance par rapport à l'axe ou le centre), ou encore des propriétés affines telles que le parallélisme ou affines euclidiennes comme l'orthogonalité.

Ces techniques correspondent à la « reconnaissance analytique » et « reconnaissance semi-analytique » décrites par Miyakawa (2005, pp. 88-89) dans le cas de la symétrie axiale : « Par *reconnaissance analytique* nous entendons une approche mobilisant des propriétés géométriques explicites, les éléments analytiques de la symétrie orthogonale ». Si les propriétés géométriques sont de temps en temps mises en œuvre avec la perception globale, alors il qualifie cette approche de *semi-analytique.*

Ces techniques renvoient à une organisation de la figure à partir d'éléments de dimension inférieure, associée à un discours axiomatique. Ces techniques renvoient donc à une déconstruction dimensionnelle de la figure, au sens de Duval, et plutôt à un paradigme géométrique GII.

- les techniques dites de « reconnaissance de figures de référence » : l'élève peut invoquer l'intersection des diagonales d'un parallélogramme dont le centre est le centre de symétrie pour reconnaître une symétrie centrale, ou la reconnaissance du cerf-volant pour reconnaître la symétrie axiale. Ces techniques nécessitent alors le tracé des diagonales ou d'autres tracés auxiliaires. En effet, d'après les programmes, le parallélogramme est « la » figure de référence de la symétrie centrale en 5^e et le cerf-volant est « la » figure de référence de la symétrie axiale en 6^e (et ce fut effectivement le cas pour les élèves de Mme B., voir chapitre 7).

- La situation des triangles, dite de « perception ponctuelle » (voir également dans le chapitre 4, pp. 105-107)

Le type de tâche est le même que précédemment, mais la perception suggérée par la tâche change. Le support est un quadrillage et les sommets des triangles sont nommés. La désignation des figures dans l'énoncé est également différente. Les techniques attendues sont les mêmes que dans la situation dite de « perception globale ». Cependant, on suppose que cette situation-ci favorise les techniques dites de « perception ponctuelle », car les aménagements graphiques nécessaires sont déjà établis. En particulier, les sommets des triangles se situent exactement sur des points remarquables du quadrillage. On s'attend donc à ce que l'élève développe alors son ETG plutôt dans un paradigme GII.

1.2 Analyse **a priori** *de la tâche en 3^e*

- La situation des triangles, dite de « perception globale »

Il s'agit toujours de la même tâche, mais l'énoncé est adapté pour le niveau de 3^{e}. Ce type de tâche ne présente alors pas non plus de difficultés en 3^{e}. Les connaissances en jeu sont anciennes. La rotation est la dernière transformation enseignée. Au moment du questionnaire, la rotation vient d'être traitée en classe (une semaine avant mais le contrôle a eu lieu après notre questionnaire), on peut donc imaginer que pour certains élèves, le processus d'apprentissage de la rotation est toujours en cours. Les transformations sont directement évoquées dans l'énoncé, il s'agit alors de connaissances « mobilisables », l'élève n'a pas à rechercher les connaissances à utiliser, le répertoire possible des transformations disponibles est suggéré : « dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) ». La question est donc « relativement » fermée. Le travail de l'élève consiste à justifier la reconnaissance des transformations en jeu. Au-delà du « ça se voit », on peut prévoir différents types d'adaptation :

- on peut s'attendre à ce qu'un élève de 3^{e} revienne à des **techniques dites de « perception globale »** (déjà citées précédemment dans le cas des élèves de 5^{e}) pour justifier la symétrie axiale ou la symétrie centrale. De plus, nous faisons l'hypothèse que la tâche suggère ici un contrôle par déplacement global de la figure.

- on peut également supposer qu'un élève de 3^{e} s'adapte au contrat disciplinaire de la classe de 3^{e}, c'est-à-dire qu'il ne justifie plus par manipulation ou mesure (dans un paradigme GI), mais en exhibant des « propriétés caractéristiques » dans le cadre de la géométrie affine euclidienne (dans un paradigme GII). On peut donc également supposer que l'élève de 3^{e} mobilisera aussi des **techniques dites de « perception ponctuelle »** (également déjà décrites précédemment). De même, ces techniques correspondent à la « reconnaissance analytique » et « semi-analytique » décrite par Miyakawa (2005, p. 91).

- d'après le questionnaire exploratoire (chapitre 4), on s'attend à ce que l'ambiguïté des mesures et du déplacement dans le plan de la question b. conduise certains élèves à reconnaître une rotation, en particulier en utilisant **le théorème-en-acte de cocyclicité**, à l'aide du compas.

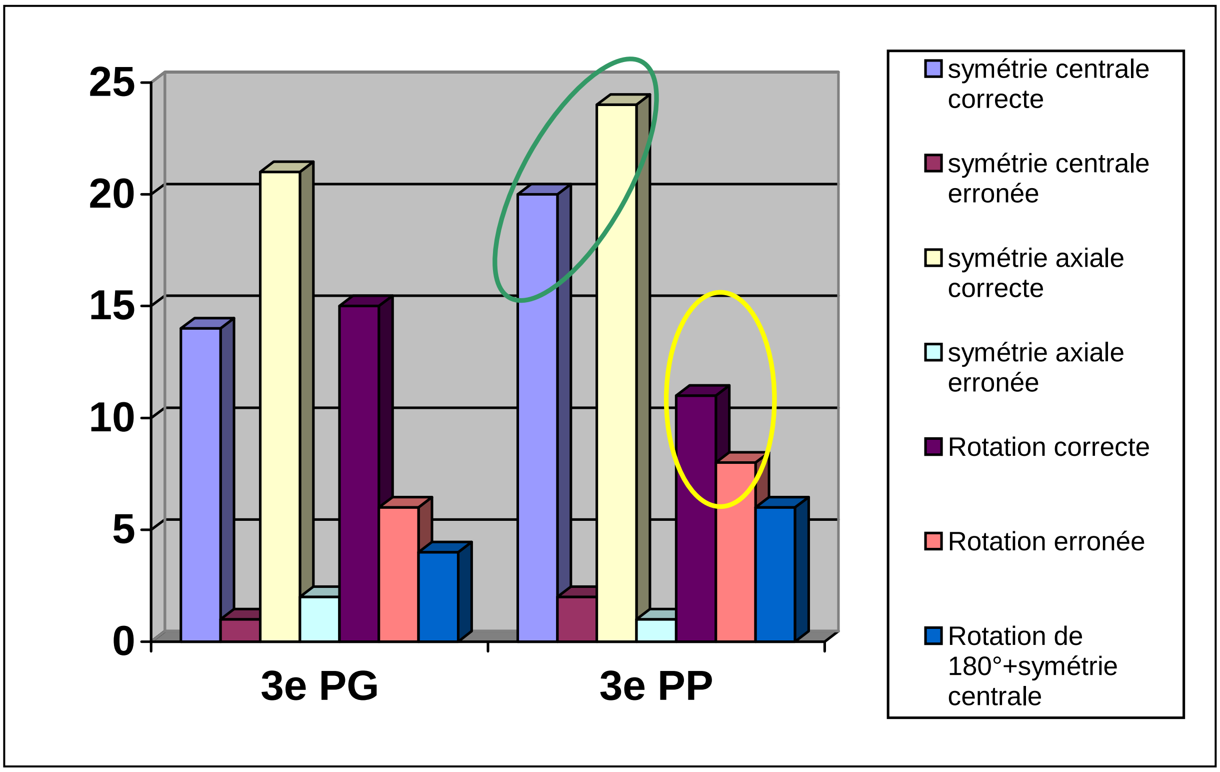
- La situation des triangles, dite de « perception ponctuelle » (chapitre 4 pp. 105-107)

L'énoncé suggère ici une perception ponctuelle et on suppose en particulier que les **techniques dites de « perception ponctuelle »** seront privilégiées (du fait de l'aménagement graphique initial : un quadrillage, les points nommés et les sommets situés sur des points du quadrillage). On suppose en particulier qu'un élève de 3^{e} doit cette fois reconnaître correctement une symétrie axiale à la question b. car la description y est faite point par point et évite ainsi des superpositions globales erronées.

On suppose donc *a priori* que certains élèves n'auront pas le même comportement selon ce changement de perception suggéré par la tâche. On suppose également qu'une majorité des élèves réussiront cette tâche car elle ne présente pas de réelles difficultés. Cela dit, on suppose qu'ils passeront des techniques dites de « perception globale », dans la tâche qui suggère une perception globale, à des techniques dites de « perception ponctuelle » dans la tâche qui suggère une perception ponctuelle. On cherche alors à analyser *a posteriori* les différentes adaptations survenues lors de ces changements de perception selon les transformations reconnues, et à déterminer l'influence de la symétrie axiale.
On cherche à comparer la construction de l'ETG personnel d'un élève de 5e et d'un élève de 3e, toujours dans le but de déterminer le rôle supposé joué par la symétrie axiale qui doit être différent à ces deux niveaux : est-elle cristallisée dans une perception globale ou impose-t-elle sa propre déconstruction dimensionnelle ?

1.3 Catégories d'élèves selon la stabilité de leur réussite

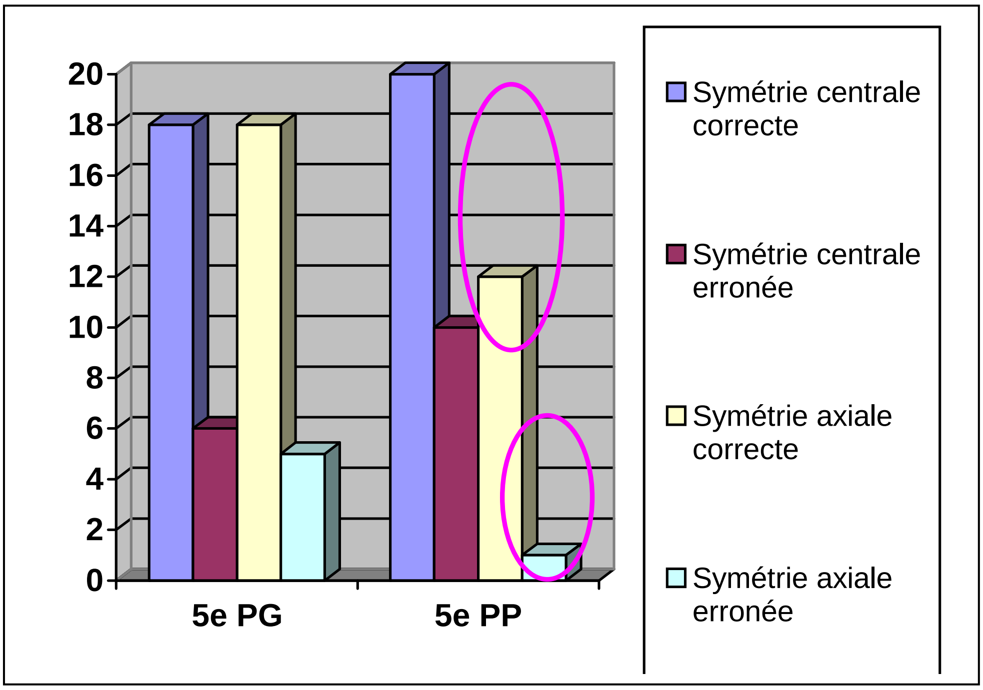
Arès une première répartition « grossière » (graphique 6.1) des transformations reconnues (entre transformation correcte et transformation erronée) par les élèves de 3e, sans distinguer les questions a. et b., apparaît une répartition légèrement différente des transformations reconnues selon le changement de perception :



Graphique 6.1 : répartition des transformations dans la situation des triangles, en classe de 3e.

On distingue du côté gauche la répartition des transformations dans la situation dite de « perception globale » (PG), et du côté droit la répartition dans la situation dite de « perception ponctuelle » (PP). En comparant ces deux répartitions, on relève **une hausse du taux de symétries centrales et symétries axiales correctes** dans la situation « PP » (ellipse verte), et **un taux très faible et stable de symétries axiales et symétries centrales erronées dans les deux situations**. **Le taux des rotations erronées est assez stable** (une légère hausse en réalité dans la situation « PP ») mais **le taux de rotations correctes diminue** (ellipse jaune).
Les erreurs en 3^{e} portent donc essentiellement sur la reconnaissance de rotations erronées quelle que soit la perception suggérée par la tâche.
On peut d'ores et déjà supposer que cette stabilité des choix d'une perception à une autre en 3^{e} traduit une certaine **stabilité dans la construction de l'ETG personnel de l'élève.**

En comparant les différentes répartitions en classe de 5^{e}, on relève **un plus grand nombre de symétries axiales correctes et erronées dans la situation « PG » que dans la situation « PP »** (graphe 6.2).



Graphique 6.2 : répartition des transformations dans la situation des triangles, en classe de 5^{e}.

En effet, dans la situation dite « PP », le taux de symétries axiales erronées diminue mais le taux de symétries axiales correctes diminue aussi (ellipse rose). On constate le phénomène inverse pour la symétrie centrale : **le taux de symétries centrales erronées augmente en perception ponctuelle ainsi que le taux de symétries centrales correctes**.
On constate alors que le changement de perception suggéré par la tâche (pour un même type de tâche), entraîne alors chez certains élèves de 5^{e} un changement dans leur réponse finale sur

la désignation des transformations. **On peut alors d'ores et déjà supposer que l'ETG de l'élève de 5^{e} est plus instable que celui de l'élève de 3^{e}**.
Nous cherchons maintenant à identifier les adaptations survenues en 5^{e} et en 3^{e} lors de la construction de l'ETG personnel des élèves. Il est donc nécessaire de mener une étude de cas à travers une analyse fine des productions des élèves réalisées lors de ce deuxième questionnaire. Nous proposons une classification plus fine des productions des élèves afin de mettre en évidence des profils d'élèves qui organiseront notre étude de cas.

Nous avons déterminé **des catégories d'élèves** (les mêmes en 5^{e} et en 3^{e}) **selon leur performance et la stabilité de leur performance d'une perception à une autre**. L'une de nos hypothèses de départ (d'après notre premier questionnaire, chapitre 4) est que ce changement de perception (global/ponctuel) va changer la prise d'information des élèves sur la situation, ainsi que leur traitement de la figure. Par exemple, la situation dite de « perception ponctuelle » peut permettre à l'élève d'éviter des erreurs dues à certaines superpositions erronées (notamment venant de l'ambiguïté de certaines mesures) qu'il aurait commises précédemment dans la version « perception globale » de la situation. L'élève ne se situe donc pas *a priori* dans un paradigme selon le type de tâche. C'est la situation (au sens de la tâche) qui semble suggérer le paradigme. Cependant, on suppose que l'ETG personnel d'un élève de 5^{e} et de 3^{e} ne se situe pas *a priori* dans le même paradigme. On attend d'un élève de 3^{e}, surtout en fin d'année scolaire, que son ETG personnel se situe plutôt vers GII.

Les catégories répertoriées sont :

- CATEGORIE VRAI-VRAI : les élèves proposent des **réponses correctes quelle que soit la tâche**, autrement dit dans la situation dite de « perception globale » et dans la situation dite de « perception ponctuelle ».

- *SOUS-CATEGORIE VRAI-VRAI VARIABLE* : les élèves de cette sous-catégorie présentent des changements explicites dans la justification de leurs réponses (toujours correctes quelle que soit la situation). Par exemple, ils peuvent adapter leur technique de reconnaissance et passer d'une technique dite de « perception globale » à une technique dite de « perception ponctuelle ».

- *SOUS-CATEGORIE VRAI-VRAI INVARIABLE* : les élèves de cette sous-catégorie ne présentent pas des signes de changement dans la justification de leurs réponses (également toujours correctes quelle que soit la situation). Ils utilisent par exemple toujours une technique dite de « perception ponctuelle » malgré un changement de perception suggéré par la tâche.

- **CATEGORIE FAUX-FAUX :** les élèves présentent des **réponses erronées** (ou pas de réponses du tout) dans les deux situations : « perception globale » et « perception ponctuelle ».

- *SOUS-CATEGORIE FAUX-FAUX VARIABLE* : les élèves de cette sous-catégorie présentent des changements explicites dans la justification de leurs réponses (pourtant toujours incorrectes quelle que soit la situation).

- *SOUS-CATEGORIE FAUX-FAUX INVARIABLE* : les élèves de cette sous-catégorie ne présentent pas de signes de changement dans la justification de leurs réponses (également toujours incorrectes quelle que soit la situation).

- **CATEGORIES MIXTES** : les élèves changent de réponses selon la perception suggérée par la tâche :

- **CATEGORIE FAUX-VRAI** : les élèves présentent des réponses erronées dans la situation dite de « perception globale » mais correctes dans la situation dite de « perception ponctuelle ».

- **CATEGORIE VRAI-FAUX** : les élèves présentent des réponses correctes dans la situation dite de « perception globale » mais erronées dans la situation dite de « perception ponctuelle ».

2. TRAITEMENT ET ANALYSE DES DONNEES

2.1 Classification des productions écrites des élèves par catégories

Rappelons que nous avons proposé ces deux exercices aux élèves de 5^e et de 3^e en deux temps différents. Les élèves de 3^e ont d'abord réalisé la situation dite de « perception globale » puis celle dite de « perception ponctuelle ». Les élèves de 5^e ont d'abord réalisé la situation dite de « perception ponctuelle » puis celle dite de « perception globale » (cet ordre-ci ne semble pas avoir influencé leur aménagement graphique, car rares sont les élèves qui ont nommé les sommets des triangles dans la situation dite de « perception globale »).

Nous avons catégorisé les productions des élèves en fonction de leurs réponses et de la stabilité de celles-ci selon le changement de perception suggéré *a priori* par la tâche (d'abord la situation dite de « perception globale » puis la situation dite de « perception ponctuelle ») dans le cas a. où il s'agit de reconnaître une symétrie centrale (SC) et dans le cas b. où il s'agit de reconnaître une symétrie axiale (SA).

Nous avons numéroté les copies d'élèves :
- 3.*i* : *i* allant de 1 à 29 élèves en 3^e (l'élève de la copie 3.30 était absent lors d'une des deux séries du questionnaire : on compte alors 29 élèves au lieu de 30).
- 5.*j* : *j* allant de 1 à 26 élèves en 5^e (l'élève de la copie 5.16 était absent lors d'une des deux séries du questionnaire : on compte alors 26 élèves au lieu de 27).

<u>Exemple</u> : *Si la réponse d'un élève de 3^e (copie 3.1 par exemple) à la question a. porte sur la symétrie centrale dans la situation dite de « perception globale » et dans la situation dite de « perception ponctuelle », alors 3.1 appartient à la catégorie VRAI-VRAI car la réponse est*

correcte quelle que soit la perception suggérée par la tâche. S'il ne justifie pas sa réponse de la même manière dans la situation dite de « perception globale » et dans la situation dite de « perception ponctuelle », cet élève appartient à la sous-catégorie VRAI-VRAI VARIABLE. En revanche, si ce même élève ne reconnaît pas la symétrie axiale à la question b. dans la situation dite de « perception globale » mais qu'il la reconnaît dans la situation dite de « perception ponctuelle », il appartient à la catégorie FAUX-VRAI dans le cas b.
En conclusion, cet élève appartient à la catégorie VRAI-VRAI à la question a. mais appartient à la catégorie FAUX-VRAI à la question b. Le comportement de cet élève est donc différent selon la perception et la transformation opérante (il reste à étudier ensuite l'ETG de cet élève).

Les tableaux suivants (6.3 et 6.4) répertorient la conduite de tous les élèves interrogés selon la perception suggérée par la tâche à la question a., où il s'agit de reconnaître une symétrie centrale, et à la question b., où il s'agit de reconnaître une symétrie axiale.

Catégories / Transformations	VRAI-VRAI		FAUX-FAUX		MIXTE	
	VRAI-VRAI VARIABLE	VRAI-VRAI INVARIABLE	FAUX-FAUX VARIABLE	FAUX-FAUX INVARIABLE	FAUX-VRAI	VRAI-FAUX
a. reconnaissance de la symétrie centrale	3.5 3.7 3.8 3.9 3.17 3.18 3.19 3.22 3.27 3.28 3.29	3.1 3.3 3.11 3.14 3.16 3.20 3.21 3.23 3.24	3.2	(vide)	3.6 3.26 3.10	3.4 3.12 3.13 3.15 3.25
Effectif Pourcentage	**11/29** **38%**	**9/29** **31%**	**1/29** **3,5%**	**0/29** **0%**	**3/29** **10,3%**	**5/29** **17,2%**
Total	**20/29** **69%**		**1/29** **3,5%**		**8/29** **27,5%**	
b. reconnaissance de la symétrie axiale	3.5 3.8 3.17 3.18 3.28	3.2 3.3 3.4 3.7 3.10 3.11 3.12 3.13 3.14 3.15 3.16 3.19 3.20 3.21 3.22 3.23 3.27	(vide)	3.1 3.9 3.24 3.25 3.29	3.6 3.26	(vide)
Effectif Pourcentage	**5/29** **17,2%**	**17/29** **58,7%**	**0/29** **0%**	**5/29** **17,2%**	**2/29** **6,9%**	**0/29** **0%**
Total	**22/29** **75,9%**		**5/29** **17,2%**		**2/29** **6,9%**	

Tableaux 6.3 : répartition des élèves de 3^e par catégories dans la situation des triangles.

Catégories / Transformations	VRAI-VRAI		FAUX-FAUX		MIXTE	
	VRAI-VRAI VARIABLE	VRAI-VRAI INVARIABLE	FAUX-FAUX VARIABLE	FAUX-FAUX INVARIABLE	FAUX-VRAI	VRAI-FAUX
a. reconnaissance de la symétrie centrale	5.1 5.3 5.4 5.8 5.14 5.20 5.23 5.24 5.27	5.6 5.10 5.12 5.15 5.17 5.25 5.26	5.18 5.11	5.7 5.19	5.2 5.5 5.9 5.22	5.13 5.21
Effectif Pourcentage	**9/26** **34,6%**	**7/26** **26,9%**	**2/26** **7,7%**	**2/26** **7,7%**	**4/26** **15,4%**	**2/26** **7,7%**
Total	**16/26** **61,5 %**		**4/26** **15,4%**		**6/26** **23,1%**	
b. reconnaissance de la symétrie axiale	5.3 5.12 5.24	5.1 5.8 5.10 5.15 5.17 5.26 5.27 5.7	5.14 5.6 5.18	5.11 5.19 5.21 5.13 5.22 5.9 5.20	5.25	5.2 5.5 5.4 5.23
Effectif Pourcentage	**3/26** **11,6%**	**8/26** **30,7%**	**3/26** **11,6%**	**7/26** **26,9%**	**1/26** **3,8%**	**4/26** **15,4%**
Total	**11/26** **42,3%**		**10/26** **38,5%**		**5/26** **19,2%**	

<u>Tableau 6.4</u> : répartition des élèves de 5^e^ par catégories dans la situation des triangles.

Nous avons également donné la répartition en pourcentage (arrondi à la décimale la plus proche voire l'entier le plus proche) afin de donner, à titre seulement indicatif, l'importance relative par rapport à la classe. Il est clair que ce n'est pas dans le but de donner un résultat statistique général car nos populations concernent seulement 29 élèves en 3^{e} et 26 élèves en 5^{e}. Notre étude est avant tout une étude de cas, et nous mettons en évidence des profils d'élèves afin d'organiser notre étude de cas.

Un premier fait important à relever est que la répartition des élèves par catégories en 5^{e} et 3^{e} n'est pas identique. De plus, cette répartition est différente selon qu'il s'agit de reconnaître une symétrie centrale à la question a. ou qu'il s'agit de reconnaître une symétrie axiale à la question b.

a) Zoom sur la répartition des effectifs par catégorie en 5^{e} (tableau 6.4)

- 61,5% des élèves reconnaissent la symétrie centrale et 42,3% reconnaissent la symétrie axiale quelle que soit la perception suggérée par la tâche. **Tous les élèves qui ont reconnu la symétrie centrale n'ont pas nécessairement reconnu la symétrie axiale et tous les élèves qui ont reconnu la symétrie axiale n'ont pas nécessairement reconnu la symétrie centrale** (SC ≠> SA et SA≠>SC. D'après le tableau 6.4, on peut citer 5.7 comme exemple).

Les individus de cette catégorie VRAI-VRAI se répartissent à peu près équitablement en sous-catégorie VRAI-VRAI VARIABLE et sous-catégorie VRAI-VRAI INVARIABLE pour la reconnaissance de la symétrie centrale, mais pas dans le cas de la reconnaissance de la symétrie axiale. Ils sont même plus nombreux (trois fois plus) à présenter des justifications identiques quelle que soit la perception suggérée dans le cas de la symétrie axiale.

- 15,4% des élèves restent dans l'erreur lorsqu'il s'agit de reconnaître une symétrie centrale quelle que soit la perception et 38,5% des élèves restent dans l'erreur lorsqu'il s'agit de reconnaître une symétrie axiale (dont 26,9% semblent justifier leur erreur de la même manière quelle que soit la perception – c'est une des ellipses rouges). **L'erreur étant révélatrice des obstacles cognitifs,** ces productions sont donc particulièrement intéressantes ici, car **ceux qui n'ont pas su reconnaître une symétrie axiale (quelle que soit la perception) ne sont pas nécessairement ceux qui n'ont pas su reconnaître une symétrie centrale en a.** (non SA ≠> non SC).

- 15,4% (ellipse rouge) ne reconnaissent pas la symétrie centrale dans le cas dit de « perception globale » mais la reconnaissent dans la situation dite de « perception ponctuelle ». Et 15,4% (ellipse rouge) des élèves reconnaissent correctement la symétrie axiale dans le cas dit de « perception globale » mais ne la reconnaissent plus dans le cas dit de « perception ponctuelle ». Un tel comportement nous amène à penser que **la situation dite de « perception ponctuelle » a favorisé la reconnaissance de la symétrie centrale alors que celle dite de « perception globale » a favorisé la reconnaissance de la symétrie axiale.** Ces deux transformations impliqueraient dans ce cas des types différents d'appréhension des figures (on retrouve notre hypothèse que la symétrie axiale est cristallisée dans une perception globale).

Une majorité des élèves de 5e reconnaissent la symétrie centrale mais pas nécessairement la symétrie axiale. Quels sont ceux qui reconnaissent correctement les deux transformations ? Et qu'ont fait les autres ? De plus, le nombre de réponses erronées ne semble pas dépendre seulement du changement de perception, puisque seulement 23,1% changent leur réponse selon la perception suggérée dans le cas de la reconnaissance de la symétrie centrale, et 19,2% dans le cas de la symétrie axiale. En revanche, 26,9% des élèves semblent réaliser la même erreur quelle que soit la perception suggérée, mais uniquement dans le cas de la symétrie axiale. Quelles sont ces erreurs qui regroupent ou distinguent ces élèves de 5e ?

b) Zoom sur la répartition des effectifs par catégorie en 3e (tableau 6.3)

- 69% des élèves de 3e reconnaissent la symétrie centrale (ou la rotation de 180°) et 75,9% des élèves de 3e reconnaissent la symétrie axiale lors du changement de perception. Ces individus se répartissent à peu près de manière équitable en sous-catégorie VARIABLE et INVARIABLE dans le cas de la symétrie centrale, mais 58,7% des élèves semblent présenter le même type de réponse pour reconnaître la symétrie axiale (ils sont 30,7% en 5e).

- Les élèves de 3e sont beaucoup moins nombreux à rester dans l'erreur lorsque la tâche suggère un changement de perception. En effet, **il n'y a qu'un élève qui ne reconnaît pas du tout la symétrie centrale** (ou rotation de 180°) quelle que soit la perception. Cependant, 17,2% des élèves **restent dans l'erreur lorsqu'il s'agit de reconnaître une symétrie axiale et tous semblent présenter la même justification à cette erreur (ellipse rouge) car ils sont dans la sous-catégorie INVARIABLE,** lors du changement de perception (et d'après le graphe 6.1, il s'agit de rotations erronées).

- **17,2% reconnaissent correctement la symétrie centrale** (ou une rotation de 180°) dans **la situation dite de « perception globale » mais changent d'avis en perception ponctuelle** pour une réponse erronée (ellipse rouge). Un tel comportement n'est pas relevé dans le cas de la symétrie axiale (contrairement aux élèves de 5e).
Ils sont seulement 6,9% à passer d'un raisonnement FAUX en « perception globale » à une réponse VRAI en « perception ponctuelle », quelle que soit la transformation en jeu, alors qu'*a priori* (d'après le chapitre 4) nous avions prévu ce comportement de manière plus fréquente (étant donné les différences de réussite observées dans le premier questionnaire exploratoire).

Une majorité des élèves de 3e proposent des réponses correctes quelle que soit la perception suggérée par la tâche. Il reste donc à déterminer quels sont les arguments sollicités selon la

transformation reconnue et comment ces justifications s'adaptent à la perception suggérée, car la résistance de ces justifications ne semble pas la même selon la symétrie centrale (ou la rotation de 180°) ou la symétrie axiale. Deux groupements d'élèves (mis en évidence par les ellipses rouges) semblent présenter des erreurs dont la résistance semble également différente selon la transformation en jeu.
On constate donc un comportement différent chez certains élèves selon la transformation en jeu. Il nous reste maintenant à déterminer la stabilité de leur réussite selon la transformation.

2.2 Profils d'élèves selon l'influence de la transformation sur leur réussite

Nous avons décrit précédemment la répartition *a posteriori* des effectifs en 5^{e} et en 3^{e} selon des catégories définies par la stabilité des réponses des élèves lors d'un changement de perception. Afin de déterminer le rôle qu'a joué la transformation en jeu, nous cherchons à déterminer si un élève change de catégorie ou non selon la transformation qu'il pense reconnaître (symétrie axiale, symétrie centrale ou rotation).
La première classification opérée organisait le comportement des élèves en fonction de leur choix final : VRAI s'il est correct ou FAUX s'il est erroné. Cette première classification se situait alors à deux niveaux :

- **Le premier niveau** - VRAI-VRAI ou FAUX-FAUX ou VRAI-FAUX ou FAUX-VRAI - **concerne la conservation du choix final de l'élève selon le changement de perception suggéré par la tâche :**

VRAI-VRAI (V-V) : sa réponse est correcte dans la situation dite de « perception globale » puis dans la situation dite de « perception ponctuelle ».
FAUX-FAUX (F-F) : son choix final est erroné dans la situation dite de « perception globale » puis dans la situation dite de « perception ponctuelle ».
VRAI-FAUX : son choix final est VRAI dans la situation dite de « perception globale » mais FAUX dans la situation dite de « perception ponctuelle ».
FAUX-VRAI : son choix final est FAUX dans la situation dite de « perception globale » mais VRAI dans la situation dite de « perception ponctuelle ».

- **Le deuxième niveau** concernait **la conservation des justifications associées à la réponse finale.**

VARIABLE : on reconnaît des indices de changement dans la justification du choix final.
INVARIABLE : on ne reconnaît pas d'indice visible de changement dans la justification du choix final.
A partir des deux précédents tableaux de répartition des effectifs (tableaux 6.3 et 6.4), nous avons représenté par **une flèche le comportement d'un élève à la question a. puis à la question b.** Nous obtenons alors plusieurs profils d'élèves, désignés ici par une même couleur en fonction des changements similaires de catégories d'une transformation à une autre (tableaux 6.5 et 6.6).

Catégories / Transformations	VRAI-VRAI		FAUX-FAUX		MIXTE	
	VRAI-VRAI Variable	VRAI-VRAI Invariable	FAUX-FAUX Variable	FAUX-FAUX Invariable	FAUX-VRAI	VRAI-FAUX
a. reconnaissance de SC	3.5 3.8 3.9 3.17 3.18 3.19 3.7 3.22 3.27 3.29 3.28	3.1 3.3 3.11 3.14 3.16 3.20 3.21 3.23 3.24	3.2	(vide)	3.6 3.26 3.10	3.4 3.12 3.13 3.15 3.25
effectif	11/29	9/29	1/29		3/29	5/29
b. reconnaissance de SA	3.5 3.17 3.8 3.18 3.28	3.2 3.3 3.4 3.11 3.7 3.10 3.12 3.13 3.14 3.15 3.16 3.19 3.20 3.21 3.23 3.22 3.27	(vide)	3.1 3.9 3.24 3.25 3.29	3.6 3.26	(vide)
effectif	5/29	17/29	0/29	5/29	2/29	0/29

<u>Tableau 6.5</u> : détermination des profils d'élèves de 3e.

Catégorie / Transformation	VRAI-VRAI		FAUX-FAUX		MIXTE	
	VRAI-VRAI Variable	VRAI-VRAI Invariable	FAUX-FAUX Variable	FAUX-FAUX Invariable	FAUX-VRAI	VRAI-FAUX
a. reconnaissance de SC	5.1 5.3 5.8 5.14 5.20 5.4 5.27 5.24 5.23	5.12 5.6 5.10 5.15 5.17 5.26 5.25	5.18 5.11	5.7 5.19	5.2 5.5 5.9 5.22	5.21 5.13
effectif	9/26	7/26	2/26	2/26	4/26	2/26
b. reconnaissance de SA	5.3 5.24 5.12	5.1 5.8 5.10 5.15 5.17 5.26 5.27 5.7	5.14 5.6 5.18	5.11 5.19 5.21 5.13 5.22 5.9 5.20	5.25	5.2 5.5 5.4 5.23
effectif	3/26	8/26	3/26	7/26	1/26	4/26

Tableau 6.6 : détermination des profils d'élèves de 5^e.

A partir des tableaux 6.5 et 6.6, nous avons répertorié dans les tableaux 6.7 et 6.8 les profils que nous avons retenus (ceux qui avaient le plus de représentants) pour notre étude de cas, respectivement en 3e et en 5e. Chaque ligne de ces tableaux (6.7 et 6.8) décrit le comportement d'un profil (c'est-à-dire la catégorie à laquelle l'élève de ce profil appartient selon la transformation) et les effectifs (mais qui ne regroupent pas tous les élèves) :

Catégorie pour la reconnaissance de la symétrie centrale	**Catégorie pour la reconnaissance de la symétrie axiale**	**Effectifs**	**Pourcentage**
VRAI-VRAI Variable	VRAI-VRAI Variable	5	**17,2%**
VRAI-VRAI Invariable	VRAI-VRAI Invariable	7	**24,1%**
VRAI-VRAI Variable	VRAI-VRAI Invariable	4	**13,8%**
Total VRAI-VRAI (flèches rouges dans le tableau 6.5)		**16**	**≈ 55%**
FAUX-VRAI	FAUX-VRAI	2	**6,9%**
VRAI-VRAI	FAUX-FAUX Invariable	4	**13,8%**
VRAI-FAUX (*)	VRAI-VRAI Invariable (*)	4	**13,8%**
Total au moins une erreur (flèches vertes dans le tableau 6.5)		**10**	**34,5%**

Tableau 6.7 : profils retenus en 3e en comparant la stabilité de la catégorie selon la transformation reconnue.

Les comportements des élèves de 5e sont plus éclatés et donc les profils que nous avons relevés n'ont souvent que trois représentants. Il s'agit d'un fait cohérent avec celui que les stratégies d'un élève de 5e sont plus instables que pour un élève de 3e.

Catégorie pour la reconnaissance de la symétrie centrale	**Catégorie pour la reconnaissance de la symétrie axiale**	**Effectifs**	**Pourcentage**
VRAI-VRAI Variable	VRAI-VRAI variable	2	**7,7%**
VRAI-VRAI Invariable	VRA-VRAI Invariable	4	**15,4%**
VRAI-VRAI Variable	VRAI-VRAI Invariable	3	**11,6%**
Total VRAI-VRAI (flèches rouges dans le tableau 6.6)		**9**	**34,7%**
VRAI-VRAI	FAUX-FAUX	3	**11,6%**
FAUX-FAUX	FAUX-FAUX	3	**11,6%**
VRAI-FAUX ou FAUX-VRAI	FAUX-FAUX	4	**15,4%**
VRAI-VRAI	VRAI-FAUX ou FAUX-VRAI	3	**11,6%**
Total au moins une erreur (flèches vertes dans le tableau 6.6)		**13**	**≈ 50%**

Tableau 6.8 : profils retenus en 5e en comparant la stabilité de la catégorie selon la transformation reconnue.

Finalement, seulement **34,7% des élèves de 5^{e}** reconnaissent correctement les deux transformations quelle que soit la perception suggérée par la tâche, et seulement **55% d'élèves de 3^{e}** reconnaissent correctement les deux transformations quel que soit le changement de perception ! Que se passe-t-il pour tous les autres élèves ? **34,5% des élèves de 3^{e} et environ 50% des élèves de 5^{e} font au moins une erreur !**

Cette nouvelle classification des élèves (mise en évidence par les flèches) nous apporte alors de nouveaux éléments concernant la stabilité de la réussite de l'élève en fonction de la transformation reconnue. **On constate notamment en classe de 3^{e} que les individus entourés dans une même ellipse rouge dans le tableau 6.3 ont eu un comportement à peu près similaire pour l'autre transformation à reconnaître (ce qui constitue donc un profil intéressant à étudier). En revanche, le comportement des élèves entourés dans une même ellipse rouge en 5^{e} n'est pas nécessairement le même (tableau 6.4).**

L'erreur peut être inhérente à la conception personnelle qu'a l'élève de la transformation en jeu et être résistante au changement de perception. Ou bien sa technique de reconnaissance est instable, car un changement de perception conduit l'élève à l'erreur. C'est ce que nous allons essayer de déterminer.

D'après cette nouvelle répartition des élèves selon ces différents profils (ceux qui sont dans l'erreur mais aussi ceux qui ont raison), les hypothèses formulées à la fin du chapitre 4, sur le rôle supposé joué par la symétrie axiale dans la mise en fonctionnement ou non de la déconstruction dimensionnelle (nécessaire pour réaliser l'exercice de manière idoine), ne semblent pas invalidées. En effet, nous avions supposé que :

- (1) la symétrie axiale est cristallisée dans une perception globale
- (2) la symétrie axiale impose une certaine mise en relation d'éléments de la figure de dimension inférieure et donc impose une certaine déconstruction dimensionnelle.

Ni (1) ni (2) n'empêchent *a priori* les élèves de formuler une réponse correcte. Seule une étude de cas, détaillant le type d'appréhension figurale mis en jeu, peut alors déterminer si les hypothèses (1) et (2) sont valides pour les profils VRAI-VRAI. A ce stade de nos analyses, on ne peut déterminer si les autres profils qui sont au moins une fois dans l'erreur valident ou pas (1) et/ou (2). Par exemple, si (1) est avéré, cela pourrait expliquer l'existence du profil VRAI-FAUX pour reconnaître les deux transformations, ou encore le profil VRAI-VRAI pour reconnaître la symétrie centrale mais VRAI-FAUX ou FAUX-FAUX pour reconnaître la symétrie axiale. En effet, on peut supposer que l'élève reste à un niveau de perception globale pour reconnaître la symétrie axiale mais fait fonctionner une appréhension point par point des figures pour reconnaître la symétrie centrale (ou la rotation de 180°). Ou encore, l'élève ne maîtrise pas du tout l'appréhension point par point des figures, et s'en sort plus facilement dans une situation telle que celle dite de « perception globale ».

Si (2) est évéré, cela pourrait expliquer pourquoi certains élèves présentent toujours des réponses correctes lorsqu'il s'agit de reconnaître une symétrie axiale mais ont des difficultés pour reconnaître la symétrie centrale (ou la rotation de 180°). Dans ce cas, cela expliquerait l'existence du profil (*) dans le tableau 6.7. L'élève développerait une appréhension point par point des figures seulement dans le cas de la symétrie axiale.

Nous avons donc besoin de mener une étude de cas de ces profils d'élèves à travers l'étude de leur Espace de Travail Géométrique personnel, car le type d'appréhension des figures mobilisé par l'élève détermine la construction de son ETG.

3. METHODOLOGIE D'ANALYSE DES ETG PERSONNELS DES ELEVES : UN EXEMPLE D'ETUDE DE CAS

L'étude de l'ETG personnel de l'élève passe par l'étude de l'articulation des trois composantes suivantes :
- l'espace réel et local
- les objets de référence qui renvoient à un système logico-déductif (modèle mathématique)
- les artefacts (outils, schèmes d'action).

Nous avons répertorié un certain nombre d'observables dans les productions des élèves, qui permettent de rendre compte de l'articulation de ces trois composantes. Nous nous inspirons des analyses de Duval (2005, p. 31) pour prendre en compte également le traitement de la figure dans cette articulation (tableau 6.9).

1. Termes analytico-descriptifs donnant un statut d'«élément» à un tracé dans l'organisation visuelle de plusieurs tracés **Directement associé à un seul tracé visuel**	2. Termes dénominatifs d'objets d'étude : **Associés à une organisation visuelle de plusieurs tracés en une forme typique**	3.Termes de propriété caractéristique permettant de classer les objets d'études **Associés à la comparaison de tracés en tant qu'éléments de l'organisation visuelle d'une forme typique**	4.Termes de relation entre tracés (éléments) hors toute appartenance à une organisation visuelle **Non décidables visuellement**
Eléments D1 : *côté, diagonale, corde, rayon...* **Eléments D2 :** *sommet, point d'intersection, angle* **Elément D3** *: face, plan d'intersection(?)*	**Objets D1 :** *droite, segment, courbe* **Objets D2 :** *triangle, carré, parallélogramme, polygone, cercle..* **Objets D3 :** *pyramide, tétraèdre, cube, prisme, polyèdre, sphère..*	**Liés à un type d'objets :** *— Milieu, centre — Isocèle, équilatéral, rectangle, quelconque — Régulier, convexe*	*Parallèle perpendiculaire, symétrique, égal*
(EUCLIDE Livre I) Définitions : 1, 2, 3, 5, 6 , 8, 13, 14, 17	Définitions : 4 ,7, 9, 15, 16, 18, 19, 22	Définitions : 11, 12, 20, 21	Définitions : 10, 23

<u>Tableau 6.9</u> : « Classification de termes géométriques en fonction de leur valeur descriptive d'un donné visuel » (Duval, 2005, p. 31).

3.1 Conception de la grille d'analyse pour l'étude de l'ETG personnel d'un élève

- **L'Aménagement de l'espace local et réel** porte sur les traces graphiques ajoutées par l'élève sur la figure : sommets nommés, points d'intersection nommés (0D), droites tracées, côtés repassés, arcs de cercle, cercle (1D), sur-figures (2D), codages de propriétés, etc.

- **Les Outils** sont entre autres : le compas, la règle graduée (ou non graduée), le rapporteur ou encore l'équerre qui sont, mentionnés ou non, nécessaires à l'action ou aux justifications avancées (*exemple* : on suppose l'utilisation d'un rapporteur pour donner une mesure d'angle).

- **Le Traitement de la figure dans l'action** porte sur l'utilisation ou la référence (instrumentée ou pas) à des points (0D), des droites (1D), ou des (sur)-figures (2D) du support graphique. Duval précise qu' « un point n'a pas d'existence visuelle propre, c'est-à-dire ne peut pas constituer une unité figurale identifiable. Un point est toujours un effet de marquage, c'est-à-dire de codage, soit par une lettre, soit par un nombre (graduation d'une droite) pour fixer une extrémité ou une séparation, et à ce titre relève du seul discours. La visualisation s'arrête aux tracés de segments qui sont les unités figurales les plus petites […] il y a bien sûr les points « remarquables » qui apparaissent avec deux droites sécantes avec les sommets des polygones ou des polyèdres »[1]. Bien que Duval stipule qu'il n'y ait pas d'observable de dimension 0D (les points sont la résultante de la construction d'unités figurales de dimension 1D), nous souhaitons distinguer les tracés qui n'impliquent que des unités figurales de dimension 1D comme par exemple retracer ou prolonger un côté, ou encore tracer un (faux) axe (de symétrie), de l'utilisation dans l'action d'un point pour placer, par exemple, la pointe sèche du compas. Aussi utiliserons-nous la notation 0D pour référer à des actions engageant seulement un point et 1D pour des actions engageant des côtés, des droites ou des axes.

On suppose qu'il existe au moins une appréhension globale de la figure (notée 2D). La notion de syncrétisme développée par Piaget[2] renvoie à cette idée que notre appréhension des formes est d'abord globale : « nous reconnaissons et percevons les objets non pas après les avoir analysés et perçus dans le détail, mais grâce à des *formes d'ensemble* »[3].

- **Registre langagier** :

  - **le langage courant** renvoie à l'utilisation d'un vocabulaire du sens commun (référence au sens des aiguilles d'une montre, au reflet d'un miroir, ou à des termes de repères visuels graphiques : droite, gauche, haut, lignes, etc.)

  - **le langage formel mathématique** renvoie à des mathématiques de type :
    - ensembliste (relation d'appartenance, d'intersection, point commun)
    - affine (définie par des points : la droite (AB))

[1] Duval, 2005, p. 36.
[2] Piaget, 1968, pp. 34-35.
[3] Entre guillemets dans le texte d'origine.

- affine euclidien (munie d'une distance : mesure de longueur, mesure d'angle dont l'orthogonalité)

- fonctionnel (type application du plan vu comme ensemble de points).

- **le langage courant mathématique** relève d'un mélange de ces précédents registres opéré par l'élève.

▪ **Le traitement de la figure dans le discours** porte sur des références explicites dans le discours de l'élève à des points, des milieux, des sommets (0D) ou des segments, des droites, des côtés, des axes (1D) ou encore la figure dans sa globalité (2D).

▪ **Les connecteurs logiques** sont les signifiants d'une organisation de la pensée de l'élève : « car », « donc », « on sait que », etc.

▪ **Les objets de référence désignés** peuvent être :

- institutionnels (objet de référence usuel : carré, rectangle, cercle, etc. ou encore symétrie axiale, symétrie centrale, rotation)

- non institutionnels (de la vie quotidienne) : « élévation » (vu dans le premier questionnaire).

Notons qu'il dépend de l'intention de l'élève pour déterminer s'il s'agit de l'objet triangle d'un point de vue mathématique ou d'un triangle d'un point de vue du sens commun. L'horizon GI ou GII dans lequel s'inscrit l'ETG personnel de l'élève permettra de faire la différence.

▪ **« Le rôle supposé du langage »** reprend explicitement la catégorisation développée par Duval (2005, p. 46) :

- **la dénomination** : les objets désignés correspondent au but de la situation (c'est-à-dire : symétrie axiale, symétrie centrale, rotation, etc.)

- **l'énonciation des propriétés** : les relations entre éléments de dimension inférieure mettent en évidence des propriétés caractéristiques.

- **la déduction** : « dérivations déductives de propositions », autrement dit, on déduit des propositions caractéristiques la dénomination finale.

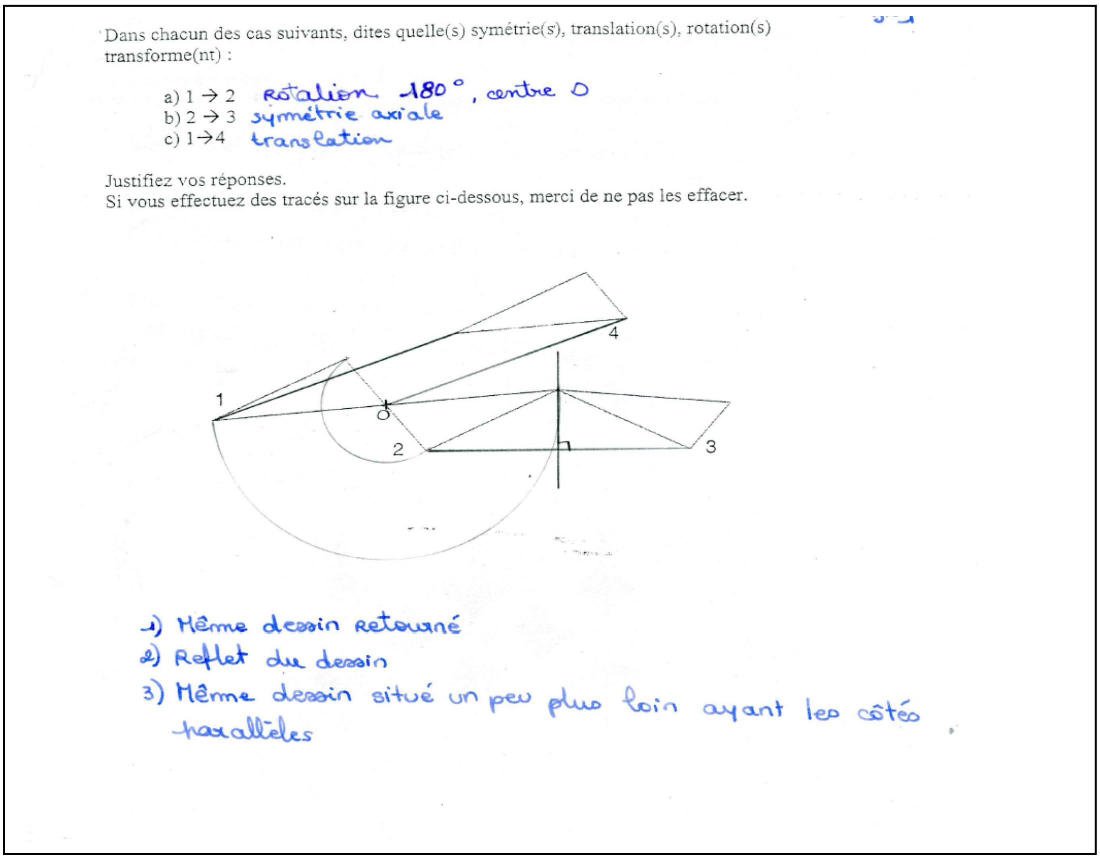
Nous avons répertorié sous la forme d'un tableau (6.10) ces différents critères dans le but d'analyser chaque production d'élève par profil retenu selon la perception globale et la perception ponctuelle.

Perception Suggérée / Composants De l'ETG	**Perception globale**	**Perception ponctuelle**
Aménagement de l'espace local		
Outils		
Traitement de la figure dans l'action		
Registre langagier		
Objet de référence désigné		
Traitement de la figure dans le discours		
Connecteurs logiques		
Rôle supposé du langage		

Tableau 6.10: grille d'analyse vierge des productions des élèves pour déterminer l'ETG personnel dans la situation des triangles.

3.2 Un exemple d'analyse : le cas Adèle, une représentante du profil VRAI-VRAI (Variable) en 3e quelle que soit la transformation en jeu

Nous présentons maintenant un exemple d'analyse de productions à partir de cette grille : la production d'Adèle, qui appartient au profil VRAI-VRAI quelle que soit la transformation en jeu, c'est-à-dire que cet élève reconnaît correctement une symétrie centrale (ou une rotation de 180°) à la question a. et une symétrie axiale à la question b. mais change le discours associé selon la perception. Les documents 6.11 sont des extraits de la copie d'Adèle.


Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2 Rotation 180°, centre O
b) 2 → 3 symétrie axiale
c) 1→4 translation

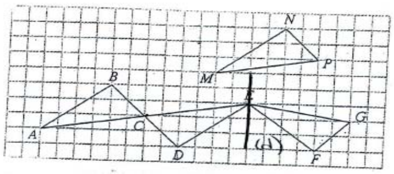
Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

1) Même dessin retourné
2) Reflet du dessin
3) Même dessin situé un peu plus loin ayant les côtés parallèles

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE
c) ABC en MNP

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) Pour transformer ABC en EDC, on fait une symétrie centrale en C car AC = CE, BC = CD et AB = DE.
b) Pour transformer CDE en GFE, on fait une symétrie axiale dont l'axe passe par E car (CG) ⊥ (d) et (DF) ⊥ (d).
c) Pour transformer ABC en MNP, on fait une translation de vecteur $\overrightarrow{BN}$ car (BN) // (AM) // (CP) et ces 3 droites vont dans la même direction.

<u>Documents 6.11</u> : extraits de la copie d'Adèle (3.28) dans la situation dite de « perception globale et dans la situation dite de « perception ponctuelle ».

a) Analyse du cas Adèle lors de la reconnaissance de la symétrie centrale (ou rotation de 180°) dans la situation dite de « perception globale » :

Le discours de l'élève commence par le résultat final : « rotation de 180°, centre 0 ». Dans cette dénomination mathématique, le centre semble avoir un statut particulier et est nommé. Nous indiquerons dans notre tableau que le <u>traitement de la figure dans le discours est 0D.</u> Puis, en dessous de la figure sont données quelques justifications (« même dessin retourné ») ; la justification vient du fait que la figure-image obtenue après la transformation repérée est en fait le résultat d'un déplacement de la figure dont les dimensions sont conservées mais dont l'orientation, d'après cette élève, est différente de la précédente car la figure est « retournée ». On peut alors imaginer le déplacement dans le plan ou en 3D (vu comme un pliage par rapport au centre O (ou un axe ?) comme cela a déjà été mentionné par d'autres élèves). Nous indiquerons alors dans notre grille d'analyse que <u>le traitement de la figure dans le discours fait apparaître les dimensions 2D et même 3D</u>. Le registre langagier du discours associé est le registre courant mais la dénomination de départ est bien mathématique. Nous indiquerons alors que le <u>registre langagier est mathématique courant.</u> On ne repère <u>pas de connecteurs logiques</u> dans le discours associé, donc la case correspondante dans le tableau restera vide.

L'aménagement du support graphique nous apporte des précisions sur l'appréhension opératoire de la figure chez l'élève : le théorème-en-acte de cocyclicité (« un point et son image par une rotation appartiennent à un même cercle ») indique que le déplacement a lieu dans le plan et implique une superposition point par point d'un point et de son image, par rapport au centre O (point fixe et repère pour situer la pointe sèche du compas). Nous indiquerons alors dans le tableau que le traitement de la figure dans l'action implique les dimensions 0D, 2D étant toujours implicites. L'outil utilisé est le compas. Nous indiquerons « arcs de cercle et centre nommé » dans la case du tableau correspondant à l'aménagement de l'espace local.

a') Analyse du cas Adèle lors de la reconnaissance de la symétrie centrale (ou rotation de 180°) dans la situation dite de « perception ponctuelle » :

L'aménagement de l'espace local est différent : la réponse finale et les justifications sont données dans le même discours et il n'y a aucune trace graphique visible. Les cases correspondantes (aménagement de l'espace local, outils et traitement de la figure dans l'action) resteront vides. On trouve une organisation du discours (plus long que dans le cas de la perception globale) du type programme de construction : « Pour… on fait… » qui est une manière d'organiser la pensée. Les figures sont nommées globalement par leurs points (comme dans l'énoncé) donc leur dénomination est de dimension 2. La transformation reconnue est donnée sous sa forme formelle mathématique « symétrie centrale en C » qui rappelle son rôle constructeur. L'élève agrémente son discours par des arguments métriques : AC=CE, BC=CD et AB=DE, qui d'une part désignent C comme le milieu (0D) et d'autre part entendent la conservation des mesures des côtés du triangle (1D) (les côtés étant déjà tracés). On indiquera donc dans le discours que le traitement de la figure est de dimension 1D et 0D. Ces arguments métriques sont introduits par un connecteur logique : « car ». Le discours de l'élève s'inscrit dans le cadre de la géométrie affine munie d'une distance (géométrie affine euclidienne).

On obtient alors la grille d'analyse suivante (tableau 6.12) :

Perception Suggérée / Composants de l'ETG	**Perception globale**	**Perception ponctuelle**
Aménagement de l'espace local	Demi-arcs de cercle (point-image) Centre 0 nommé	
Outils	Compas	
Traitement de la figure dans l'action	(2D) 0D	
Registre langagier	Mathématique courant	Géométrie affine euclidienne
Objet de référence désigné	Rotation de 180°, centre O	Symétrie centrale en C

Traitement de la figure dans le discours	(3D) 2D 0D	2D 1D 0D
Connecteurs logiques		« Pour… on fait » « car » (égalité de mesure)
Rôle supposé du langage	Dénomination Description déplacement	Programme de construction implicite - Dénomination Propriétés métriques

Tableau 6.12 : grille d'analyse de l'ETG d'Adèle dans le cas de la reconnaissance de la symétrie centrale.

b) Analyse du cas Adèle lors de la reconnaissance de la symétrie axiale dans la situation dite de « perception globale » :

Le discours de l'élève commence par donner le résultat final : « symétrie axiale » dont il ne précise pas l'axe dans la dénomination. Puis, sous la configuration, sont donnés des éléments pour justifier ce choix : « reflet de dessin ». Le registre langagier est courant mais la dénomination de départ est mathématique. Le registre langagier que nous inscrirons dans le tableau est donc mathématique courant. Il justifie la symétrie axiale par le principe de superposition induit dans la référence au reflet. On en déduit alors un traitement de la figure de dimension 2 dans le discours, voire même de dimension 3 car on parle de « reflet », qui est un référent de notre espace quotidien qui est en 3D. L'aménagement du support graphique nous apporte également des précisions sur l'appréhension opératoire de la figure : l'élève trace l'axe de symétrie avec une règle graduée (ou non), puis trace un segment point-image pour mettre en évidence un couple {point ; image} par cette symétrie axiale. On suppose donc une appréhension opératoire point par point mise en œuvre par l'élève ou bien la tentative de se rapprocher de la configuration de base de la symétrie axiale (avec la mise en évidence de l'axe comme étant la médiatrice d'un segment {point ; image} par exemple). Nous indiquerons alors que le traitement de la figure dans l'action est 2D (d'après Piaget, nous supposons toujours une appréhension globale de la figure) 1D et 0D (d'après les éléments considérés par l'élève). De plus, le codage de l'orthogonalité est un codage important car il nous permet de dire que l'élève s'engage, dans l'action, vers la géométrie affine et euclidienne (car elle définit des droites par des points et rend compte de mesure d'angle). Il n'est pas exclu d'imaginer que l'équerre a pu être utilisée pour contrôler l'orthogonalité.

b') Analyse du cas Adèle lors de la reconnaissance de la symétrie axiale dans la situation dite de « perception ponctuelle » :

L'aménagement de l'espace local est différent : la réponse finale et les justifications sont données dans le même discours (également plus long) dont le registre langagier est seulement mathématique. On retrouve une organisation du discours du type programme de construction : « Pour… on fait… ». Les figures sont nommées globalement par leurs points (comme dans l'énoncé et comme dans le cas a.) donc leur dénomination est de dimension 2. La transformation reconnue est donnée sous sa forme formelle mathématique : « symétrie axiale dont l'axe passe par E », qui rappelle son rôle constructeur. L'élève justifie alors sa dénomination par l'orthogonalité de deux droites définies par les couples de points {point ; image} par rapport à l'axe (d), qui est tracé et nommé sur la figure. On indiquera donc que le traitement de la figure dans l'action est (2D) 1D et 0D. Les arguments donnés dans le discours, qui s'inscrivent donc dans le cadre de la géométrie affine euclidienne, sont donnés sous une forme formelle et sont introduits par un connecteur logique « car » (comme dans le cas a.).

On obtient alors la grille d'analyse suivante (tableau 6.13) :

Perception Suggérée / Composants de l'ETG	**Perception globale**	**Perception ponctuelle**
Aménagement de l'espace local	Axe de symétrie Segment point-image Codage orthogonalité	Axe de symétrie nommée (d)
Outils	Règle graduée (ou non) Equerre ?	
Traitement de la figure dans l'action	(2D)1D 0D	(2D) 1D 0D
Registre langagier	Mathématique courant	Mathématiques formelles Géométrie affine
Objet de référence désigné	Symétrie axiale	Symétrie axiale dont l'axe passe par E
Traitement de la figure dans le discours	3D 2D	2D 1D 0D
Connecteurs logiques		« Pour… on fait » « car » (droites orthogonales à l'axe)
Rôle supposé du langage	Dénomination	Programme de construction implicite - Dénomination Propriétés affines (orthogonalité de droites)

Tableau 6.13 : grille d'analyse de l'ETG d'Adèle dans le cas de la reconnaissance de la symétrie axiale.

Les deux grilles d'analyses obtenues (6.12 et 6.13) ci-dessus mettent en évidence les différences de comportement d'un même élève selon la situation : « perception globale » ou « perception ponctuelle ».

Dans la situation dite de « perception globale », l'appréhension opératoire de la figure par l'élève est de dimension 3D (2D) 0D ou (2D) 1D 0D. Adèle traite la figure point par point (théorème-en-acte de cocyclicité, droites points-images, ou encore codage de l'orthogonalité), mais le discours associé porte sur la conservation globale des dimensions de la figure, dans un niveau de langage courant. Malgré des indices graphiques d'une géométrie avancée, l'ETG personnel de l'élève semble s'inscrire dans GI dans la situation dite de « perception globale ».

Duval expliquait déjà cette différence entre le registre discursif et le processus cognitif de visualisation de l'élève, qu'il distingue par un mouvement ascendant dans un cas et descendant dans l'autre[4].
Cependant, il en est encore autrement dans la situation dite de « perception ponctuelle ». En effet, malgré l'absence de signifiants graphiques, le discours met cette fois explicitement en relation des éléments de dimension inférieure (1D, 0D) dans le but de formuler des propriétés caractéristiques des transformations visées dans le cadre de la géométrie affine euclidienne. L'ETG personnel de l'élève est cette fois plus proche de l'ETG de référence attendu et semble donc plutôt s'engager dans un paradigme géométrique GII.

Ces différences de traitement de la figure, lors du changement de perception suggéré par la tâche, mettent en évidence que la distance entre l'ETG personnel et l'ETG idoine est modulable selon la tâche et que l'élève met en œuvre la géométrie disponible selon la tâche.

L'étude de cet exemple nous permet d'anticiper sur l'étude plus générale du profil auquel appartient Adèle. Cette souplesse d'adaptation de l'ETG ne conduit pas nécessairement à l'erreur, contrairement à ce qu'on aurait pu être amené à penser d'après le questionnaire exploratoire du chapitre 4. Nous relevons seulement deux élèves (3.6 et 3.26, annexe p. 298) qui se trouvaient dans l'erreur dans la situation dite de « perception globale » et qui ont su adapter de manière idoine leur ETG dans la situation dite de « perception ponctuelle » sans commettre à nouveau des erreurs.

Nous proposons maintenant une synthèse des analyses obtenues à partir d'analyses similaires menées pour chaque élève des profils retenus. Certains extraits de productions que nous citerons au cours de notre développement sont disponibles en annexes pp. 297-318.

4. SYNTHESE DES ANALYSES DES PRODUCTIONS D'ELEVES DE 3^{e} DANS LA SITUATION DES TRIANGLES

Afin d'éviter les répétitions, nous ne proposons pas les résultats de nos analyses de manière linéaire par profils, mais nous présentons les résultats obtenus de manière générale, que nous illustrons ensuite par profils.
Dans ce paragraphe, nous détaillerons notre étude de cas, en décrivant les adaptations relevées sur l'aménagement de l'espace local et le discours associé selon la situation dite de « perception globale » et la situation dite de « perception ponctuelle ». En particulier, nous mettrons en évidence les différences de traitement de la figure en fonction des transformations reconnues. Nous montrerons alors qu'en effet, l'ETG personnel d'un élève de 3^{e} est relativement stable, en particulier du fait de la souplesse d'adaptation des schèmes de la symétrie axiale.

[4] Duval, 2005, p. 47.

4.1 Aménagement général de l'espace local et réel : vers une organisation ponctuelle

Comme vu dans le cas Adèle, certains profils d'élèves aménagent l'espace local et font apparaître les unités figurales de dimensions inférieures (1D et 0D). Ces aménagements ne sont pas nécessairement différents selon la perception suggérée par la tâche, ils sont seulement plus visibles en perception globale car l'espace est plus vierge (comme prévu par l'analyse *a priori*).

On relève des signifiants graphiques de nature différente :
- **les signifiants qui rendent compte d'une déconstruction instrumentale** :

- les arcs de cercle, signifiants du théorème-en-acte de cocyclicité, sont tracés pour reconnaître la rotation. **Les sommets des triangles** sont des repères de position pour signifier la correspondance des couples {point ; image}, qui appartiennent donc au même cercle.

- les points fixes (centre de symétrie ou points appartenant à l'axe de symétrie) sont des **repères de position** pour utiliser un instrument : le pli du pliage, position de la pointe sèche du compas pour faire un demi-tour ou appliquer le théorème-en-acte de cocyclicité. Les points fixes sont également des **repères d'origine pour mesurer** (à l'aide du quadrillage ou de la règle graduée).

- **les segments auxiliaires** sont par exemple les tracés des segments d'extrémité {point ; image} qui permettent de mettre en évidence les schèmes de construction de la médiatrice pour caractériser l'axe de symétrie.

- **les signifiants qui rendent compte de propriétés** par la mise en relation d'éléments de dimension inférieure :

  - les sommets et/ou les points fixes nommés (0D)
  - codage d'orthogonalité (1D)
  - codage d'égalité de mesure (conservation des mesures) (0D ou 1D)
  - codage d'équidistance (0D ou 1D)

- des **flèches rotatives** rendent compte du déplacement dans le plan, et peuvent même rendre compte du changement d'orientation. D'après le chapitre 1, le tracé de l'axe de symétrie ou d'un repère orthogonal est un support graphique pour déterminer l'orientation d'une figure.

Il est important de considérer le discours associé pour caractériser l'horizon géométrique (GI ou GII) dans lequel s'inscrit l'ETG personnel de l'élève.

4.2 Adaptation du discours : du langage courant à la géométrie affine euclidienne

Dans les cas où l'on relève une adaptation du discours, les élèves passent d'un langage courant ou mathématique courant dans la situation dite de « perception globale » à

l'énonciation de propriétés voire à l'élaboration de déduction dans la situation dite de « perception ponctuelle » à travers l'usage de connecteurs logiques et du formalisme des fonctions. Le registre langagier s'adapte alors à la perception suggérée par la tâche.
Dans la situation dite de « perception globale », le discours est généralement bref et présente peu d'indices de connecteurs logiques ou d'organisateurs de la pensée. Les élèves justifient leur choix final par la description d'une géométrie dynamique à travers des « superpositions », « pliages », « demi-tours » qui renvoient à une appréhension globale (2D) des figures. De plus rares arguments topographiques (comme dans le premier questionnaire) : « les points sont placés à égale distance » peuvent enrichir le discours. Le concept-en-acte d'orientation : « les points sont renversés » est visible dans le but de différencier la symétrie centrale (ou la rotation) de la symétrie axiale (seulement identifiée ici dans des cas de réussite). Le traitement de la figure s'inscrit donc plus généralement en dimension 2 et privilégie ainsi la conservation globale de la figure.
En revanche, dans le cas dit de « perception ponctuelle », l'élève annonce des propriétés caractéristiques, dans le cadre de la géométrie affine euclidienne, par l'intermédiaire d'éléments de dimension inférieure de la figure : égalité de mesures de segments, orthogonalité de droites définies par des points, milieu, intersection... Un certain nombre d'élèves décrivent la transformation avec le langage des fonctions : « B devient D, A devient E, C reste C » (ou directement avec le symbolisme associé : « B→D, A→E et C→C » bien qu'il ne soit pas nécessairement un signifiant des applications pour l'élève). Les points fixes (ou « communs ») sont explicitement mis en évidence. On retrouve alors le passage décrit par Jahn (1998) qui caractérise la fin du collège et le début du lycée : « des transformations de figures aux transformations ponctuelles ».

On assiste au passage d'une géométrie de niveau 1 (relation entre deux figures d'un point de vue global) à une géométrie de niveau 2 (application du plan dans le plan), voire de niveau 3 (invariants) d'après les niveaux de Grenier & Laborde rappelés dans chapitre 1, reconnaissables dans le discours, par accommodation à la perception suggérée par la tâche.

4.3 Les adaptations par profils

On relève ces adaptations de manière franche pour les profils VRAI-VRAI (variable) dont Adèle est une « bonne » représentante. Cependant, tous les profils rencontrés ne réunissent pas nécessairement tous ces signifiants opératoires ou langagiers. Les élèves du profil VRAI-VRAI (invariable), par exemple, restent plus énigmatiques. Leur espace local reste quasi vierge quelle que soit la perception et la transformation. Certains tracent tout de même l'axe de symétrie et nomment le centre de symétrie. Ce profil avait été déterminé *a priori* car d'une perception à une autre, leurs stratégies de reconnaissance semblaient similaires, en réalité, on dispose de trop peu de signifiants langagiers (leur discours est minimal et sert uniquement pour désigner la transformation) ou opératoires pour décrire leur conduite qui les amène pourtant vers un choix final correct.

Les profils qui donnent des réponses inexactes présentent les mêmes adaptations que ceux qui présentent des réponses correctes. Ils adoptent les mêmes techniques de reconnaissance mais appliquées dans un domaine non valide, et donc conduisent ces élèves à l'erreur. Nous développerons dans le paragraphe 4.4 l'étude de l'ETG des profils que nous avons cerclés de rouge dans le tableau 6.3, en décrivant leurs schèmes.

Dans certains cas isolés, comme ceux relevant par exemple de la catégorie MIXTE, on trouve également un discours minimal qui vise la dénomination simple de la transformation opérante. On relève le lapsus « symétrie axiale de centre le centre de symétrie » (3.15 annexe p. 297). Cette erreur (qui pourrait certes être corrigée facilement par certains élèves en menant un contrôle de relecture, ce qui est le cas pour l'élève de la copie 3.15 dans le cas dit de « perception ponctuelle ») peut également relever du phénomène que Cassan (1997) résume en citant Artigue : « l'amalgame de notions sur un support donné » (Chapitre 1 p. 25) Ce phénomène porte sur des confusions entre la symétrie axiale et la symétrie centrale, venant de la proximité des schèmes par lesquels ces deux transformations sont enseignées au collège (bidécomposabilité, superposition, équidistance). Le « pliage par rapport à un point » (reconnu dès la 5^{e}) est un autre signifiant, dans l'action, de cet amalgame. Ce schème intermédiaire peut être envisagé comme le signifiant du processus d'adaptation entre la symétrie axiale et la symétrie centrale. Cet amalgame est exprimé sous forme de concaténation verbale mais aussi opératoire, de connaissances acquises pour s'adapter aux nouveaux problèmes.
Les opérations de contrôle de la symétrie axiale peuvent se contenter du schème de bidécomposabilité et de pliage en dimension 2, mais ceux de la symétrie centrale nécessitent un passage à la vision point par point de la figure (au moins pour l'unique point invariant qui est le centre de la symétrie) pour réaliser un contrôle pragmatique comme le demi-tour ou le théorème-en-acte de cocyclicité. Nous reviendrons sur l'origine de cet amalgame dans la partie B de ce chapitre et le chapitre 7.

4.4 Les adaptations par transformation : « hiatus dimensionnel » entre la rotation et la symétrie

Ce paragraphe décrit plus précisément les ETG des profils qui sont dans l'erreur. Ces élèves ont mis en place des schèmes disponibles mais dans un domaine invalide, ce qui les a conduit à reconnaître des rotations erronées. Nous montrerons qu'il s'agit en réalité d'un « hiatus dimensionnel », pour reprendre un terme employé par Duval (Chapitre 4 p. 123) pour caractériser un conflit cognitif concernant la dimension des objets dans leur enseignement, entre la rotation et la symétrie.

a) description générale du phénomène :

Pour repérer une rotation, un nombre important d'élèves réalisent le théorème-en-acte de cocyclicité (défini dans le chapitre 4 p. 112). Ce théorème-en-acte permet de vérifier qu'un couple supposé {point ; image} appartient à un même cercle. Ce théorème-en-acte amène à une réponse correcte dans le cas a. (voir le cas Adèle) mais peut conduire à une réponse inexacte dans le cas b. (annexes : 3.26 p. 298 ou 3.24 p. 299). Ce théorème-en-acte ne rend pas visibles les propriétés de conservation de la mesure d'angle d'une même rotation (ni dans l'action ni dans le discours) car deux couples {point ; image} appartenant à un même cercle peuvent déterminer une mesure d'angle différente.

Pourtant, un élève de 3^{e} reconnaît correctement une symétrie axiale soit :
- par une **technique dite de « perception ponctuelle »** avec la mise en relation explicite d'éléments de dimension inférieure : conservation de mesures de côtés, équidistance à l'axe, orthogonalité (comme par exemple le cas Adèle pp. 165-166, ou 3.10 pp. 302-303), par codage sur la figure ou dans le discours (dans le cadre de la géométrie affine euclidienne).
- par une **technique dite de « perception globale »** avec la conservation des dimensions d'unités figurales de dimension 2 (superposition, comme par exemple encore une fois le cas Adèle ou en comparant l'orientation des deux figures) et dans ce cas, la symétrie axiale est reconnue par l'intermédiaire de schèmes plus « basiques ».

Ainsi, les schèmes de la symétrie axiale s'adaptent à la tâche proposée.

Lors de la reconnaissance des rotations (correctes ou abusives), on ne relève pas de codage d'égalité de mesures. De plus, la mesure d'angle de la rotation reconnue change selon la perception. L'élève de la copie 3.29 par exemple (annexe p. 300) propose plusieurs mesures d'angles et semble situer son ETG en dimension 3 dans le cas a. car l'élève suggère un « retournement ». De plus, cet élève justifie la reconnaissance des transformations par une conservation erronée de l'orientation des figures. Ses conceptions de l'angle, de l'orientation et du sens lors du processus cognitif de reconnaissance de la rotation, semblent donc instables, alors que celles-ci sont fondamentales dans le concept mathématique de la rotation.

La déconstruction instrumentale opérante (par le théorème-en-acte de cocyclicité) semble l'unique schème, pour ces élèves, qui valident la reconnaissance de la rotation. Les élèves ne vérifient pas la conservation de la mesure d'angle pour d'autres couples {point ; image} d'une même figure avec le même centre, d'où leurs erreurs car ce schème est effectivement valide à la question b. Les traces graphiques repérées sont uniquement les signifiants d'une déconstruction instrumentale.

Dans la situation des triangles, la différence d'appréhension des figures entre la symétrie axiale et la rotation vérifie ce que nous avons appelé le « hiatus dimensionnel », car les deux transformations proposent une décomposition des figures qui sont opposées d'après Duval. Les schèmes de la symétrie axiale sont plus souples et s'adaptent à la tâche, et peuvent aller jusqu'à faire fonctionner une déconstruction dimensionnelle, alors que les schèmes de reconnaissance de la rotation semblent se réduire aux schèmes liés à une déconstruction instrumentale. Or, d'après Duval, ces deux types de décomposition des figures s'opposent et seule la déconstruction dimensionnelle permet de développer un raisonnement géométrique (dans GII).

b) Description particulière de cette opposition dimensionnelle entre la symétrie axiale et la rotation dans certains profils

Ce « hiatus dimensionnel » peut s'exprimer différemment selon certains profils rencontrés :

- l'élève de la copie 3.26 (annexe p. 298) (du profil FAUX-VRAI) est le seul à reconnaître une rotation erronée en perception globale dans le cas b. et à rectifier son erreur en perception ponctuelle. Cet élève se contente d'une déconstruction instrumentale dans le cas dit de « perception globale ». Or, dans le cas dit de « perception ponctuelle », ce même élève reconnaît bien une symétrie axiale. On ignore sa stratégie mais ce même élève reconnaît également la symétrie centrale à la question a. (alors qu'il avait également proposé une réponse inexacte dans le cas dit de « perception globale ») en justifiant alors par égalité de mesure de part et d'autre du centre de symétrie. On suppose donc que cet élève s'est adapté à la tâche (on reconnaît par exemple l'utilisation de flèches uniquement dans le cas dit de « perception globale ») et que **l'adaptation à la vision point par point suggérée par la tâche dite de « perception ponctuelle » lui a permis de faire fonctionner des arguments métriques et de le conduire à une réponse correcte.** Tandis que le cas dit de « perception globale » nécessite trop d'adaptations.

- les élèves du profil VRAI-VRAI dans le cas a. et FAUX-FAUX dans le cas b. reconnaissent correctement une symétrie centrale dans le cas a. mais restent toujours dans l'erreur dans le cas b. car ils reconnaissent une rotation (3.24 annexe p. 299). Bien que leur discours s'oriente vers la désignation simple, on reconnaît des traces du concept d'application point par point dans leur appréhension opératoire de la figure (droites {point ; image} et arcs de cercle). Cependant, aucune propriété métrique (par le biais du formalisme fonctionnel par exemple) n'est mise en évidence. Le fait que le concept-en-acte d'application point par point soit le seul concept-en-acte visible dans le cas a. est alors complètement cohérent avec **le fait que seule la déconstruction instrumentale est disponible chez ces élèves** car ils reconnaissent ensuite une rotation erronée en b.

- les élèves du profil MIXTE dans le cas a. et VRAI-VRAI dans le cas b. ne commettent pas d'erreur lorsqu'il s'agit de reconnaître la symétrie axiale, mais leurs réponses sont différentes dans le cas a. Ils reconnaissent une rotation erronée dans le cas a. (toujours par l'intermédiaire du théorème-en-acte de cocyclicité) car ils reconnaissent une mesure d'angle erronée et en plus différente selon la perception suggérée (3.15 annexe p. 297). Leur discours est minimal et leurs traces graphiques aussi. En revanche, dans le cas b., leur discours est similaire pour les deux perceptions et justifie la symétrie axiale parfois même avec l'aide d'arguments de géométrie affine euclidienne (3.10 annexe pp. 302-303). **La déconstruction dimensionnelle est donc disponible pour ces élèves mais uniquement dans le cas de la symétrie axiale, car elle ne semble pas opérante dans le cas a. où ils reconnaissent une rotation (erronée).**

On remarque implicitement **cette opposition entre la rotation et la symétrie également dans les profils corrects.** Par exemple, le cas Adèle (pp. 165-166) reconnaît bien **une « rotation de 180° » dans le cas a. avec le théorème-en-acte de cocyclicité** dans la situation dite de « perception globale » où elle ne laisse aucune trace de conservation des mesures dans son discours associé (bien que le cercle soit un objet de la géométrie affine euclidienne). Dans le cas dit de « perception ponctuelle », la stratégie de reconnaissance d'Adèle s'inscrit explicitement dans le cadre de la géométrie affine euclidienne car elle rend compte de **propriétés métriques pour justifier cette fois une « symétrie centrale »**.

Relevons également que certains élèves construisent des droites dans le cas a. qui peuvent alors tenir lieu de « faux-axe » de symétrie. Un tel tracé « auxiliaire » peut être un signifiant du **théorème-en-acte différenciateur de l'orientation** (chapitre 4 p. 117). En effet, le concept d'orientation apparaît toujours comme un argument implicite dans le discours ou l'action de ces élèves (annexes 3.24 p. 299 et 3.13 p. 301). Un tel théorème-en-acte est également cohérent avec la thèse de la mise en cause de l'absence de la mise en relation d'unités figurales de dimensions inférieures alors nécessaire pour reconnaître le concept de rotation sous sa forme mathématique (qui conserve la mesure d'angle et des côtés de la figure). Le concept-en-acte d'orientation **engage seulement la figure dans sa globalité** (2D) et **permet de distinguer la symétrie axiale de la symétrie centrale** (ou de la rotation) sans passer par la mise en relation des éléments de dimension inférieure.

Finalement, l'étude des ETG par profils d'élèves révèle un ETG personnel de l'élève de 3e relativement stable. En effet, les profils qui sont corrects se déclinent en deux sous-profils :
- ceux qui ont la géométrie disponible selon la tâche et mettent en évidence la souplesse d'adaptation des schèmes de la symétrie axiale. Ils gèrent donc avec succès la dialectique GI-GII et passent donc d'une géométrie naïve, naturelle, à une géométrie plus formelle dans le cadre de la géométrie affine euclidienne.
- ceux qui sont corrects mais laissent opaques leurs adaptations.

Les profils qui sont dans l'erreur sont moins nombreux et révèlent toujours le même type d'erreur dû à l'appréhension instrumentale mise en place par les schèmes de la rotation. En effet, chez ces élèves, la conservation de la mesure d'angle n'est alors pas encore stabilisée et donc la rotation ne peut être conceptualisée comme une transformation d'un point de vue mathématique.

Nos interrogations convergent alors vers celles de Duval et de Jahn (Chapitres 1 et 4) sur la question de transfert de ces étapes cognitives de déconstruction qui ne vont pas de soi. **Sont-**

elles inhérentes à la nature de la transformation ou sont-elles des effets de l'enseignement ? Comment sont-elles prises en charge par l'école ? Nous y reviendrons dans le chapitre 7, suite à nos observations de classes.

Afin de mieux comprendre ces processus de conceptualisation opérant en 3^{e}, nous revenons sur la construction en amont de l'ETG personnel de l'élève, lorsque la conceptualisation de la symétrie axiale est plus instable, et lors de la première introduction, camouflée, de la rotation, autrement dit lors de l'enseignement de la symétrie centrale en 5^{e}.

5. SYNTHESE DES ANALYSES DES PRODUCTIONS D'ELEVES DE 5^{e} DANS LA SITUATION DES TRIANGLES

Nous avons proposé la même situation à des élèves de 5^{e}. Nous exposons dans un premier temps le type général d'adaptations que nous avons repérées chez les élèves de 5^{e} lors du changement de perception suggéré par la tâche. Dans un deuxième temps, nous illustrerons par profils d'élèves ces résultats.

5.1 Aménagement de l'espace local : vers une organisation ponctuelle

Les traces graphiques relevées dans l'aménagement de l'espace local en 5^{e}, en particulier dans la situation dite de « perception globale », **portent, d'une part, sur la configuration d'origine** :
- les côtés des triangles sont repassés voire prolongés (1D).
- les sommets et milieux sont marqués (par des petites croix par exemple 0D) sans être nommés.

Les traces graphiques portent, d'autre part, **sur des tracés auxiliaires, « complémentaires » à la configuration d'origine** :
- des droites et/ou des arcs de cercle {point ; image} signifient la transformation comme une application point par point. La progression dimensionnelle est donc de 1D vers 0D.
- des droites peuvent être tracées pour mettre en évidence une figure de référence de 5^{e} (comme le parallélogramme dans le cas a.). L'élève « ferme »[5] alors la figure. La progression dimensionnelle est inverse à la précédente : 1D vers 2D.
- de « vrais » ou de « faux » axes de symétrie peuvent être tracés comme signifiants du théorème-en-acte d'exclusivité : *si ce n'est pas une symétrie axiale, c'est une symétrie centrale*. Le concept-en-acte différenciateur de l'orientation peut permettre alors de valider la reconnaissance d'une symétrie axiale par rapport à un de ces « vrais » ou « faux » axes de symétrie. L'élève de la copie 5.27 (annexe p. 304) trace même de faux côtés images pour tester de possibles superpositions (2D-1D) et montrer ainsi que ce n'est pas une symétrie axiale par rapport aux côtés de la figure.

[5] Hypothèse d'inspiration de la *Gestalt Theory*.

- des flèches rotatives simples dans le cas de la symétrie centrale ou des flèches rotatives doubles dans le cas de la symétrie axiale signifient le déplacement dans le plan pour l'une et le pliage en 3D pour l'autre (5.23 annexe p. 305).

On ne relève aucun codage de propriétés : ni le codage d'équidistance, ni celui d'égalité de mesure, ni celui de perpendicularité. Aucun argument métrique n'est donc révélé graphiquement. On ne peut donc parler de déconstruction dimensionnelle comme en 3^e^ seulement à partir du registre graphique. Un petit nombre d'élèves nomment tout de même les points fixes (centre de symétrie et points de l'axe de symétrie) et seulement un élève nomme les sommets (5.26 annexe p. 306).

Ces aménagements graphiques semblent réalisés dans un but heuristique (« vrais » ou « faux » axes de symétrie et superpositions potentielles, construction du parallélogramme, etc.). Il est alors nécessaire d'étudier le discours associé pour déterminer si certains tracés sont tout de même associés à un discours axiomatique.

5.2 Adaptation du discours associé

Comme relevé en 3e, ce sont les profils VRAI-VRAI qui présentent une adaptation plus franche entre les deux perceptions suggérées par la tâche (comme par exemple l'élève de la copie 5.1 annexe p. 307 qui adapte son langage). Pourtant, la distinction entre les deux registres de langue (le registre courant et le registre mathématique) n'est pas aussi évidente qu'en 3e. Un grand nombre d'élèves entremêlent les deux registres, quelle que soit la perception en jeu.

Dans la situation dite de « perception globale », les élèves relatent davantage une géométrie dynamique : « la figure est reportée », « par demi-tour », « les figures se superposent », « les côtés ne partent pas dans des sens opposés, comme dans un miroir », « si l'on fait pivoter la figure vers le bas, on verra que ce sont les mêmes figures ». Le traitement de la figure dans le discours rend compte d'un point de vue global (2D). On discerne une organisation de la pensée sous la forme d'un programme de construction implicite (avec l'emploi du pronom « on ») et même structuré par des connecteurs logiques : « car si on trace un trait, on plie la figure… ».

Dans la situation dite de « perception ponctuelle », le discours des élèves se rapproche du cadre de la géométrie affine euclidienne: « C milieu de [AE] et (AB) parallèle à (ED) » ; voire même dans le cadre fonctionnel : « [BC]→[DC] » (mais le formalisme des fonctions est tout de même plus rare en 5e). Le traitement de la figure dans le discours semble alors passer par toutes les étapes : 2D, 1D et 0D.

5.3 Des adaptations vues comme des ruptures de contrat

Ces différences de comportement (lors des changements de perception suggérés par la tâche) rendent compte de l'interprétation que se fait l'élève de la tâche proposée. On remarque alors que certaines adaptations dans la situation dite de « perception ponctuelle » rendent davantage compte d'effets de contrat. Par exemple, le « formalisme » des réponses (registre formel de la géométrie affine) peut être cohérent avec la réponse visée (comme c'est généralement le cas en 3[e]) mais peut aussi donner lieu à **des justifications exhaustives** (sans être erronées). L'élève donne un maximum de renseignements institutionnels alors qu'il semble plus concis dans la situation dite de « perception globale » (5.26 annexe p. 306).
D'autres changent carrément leurs réponses dans la situation dite de « perception ponctuelle » pour des réponses erronées (profil VRAI-FAUX, exemple 5.4, annexes p. 308 et 5.23 p. 305). En effet certains proposent des réponses correctes (justifiées par une superposition par exemple) dans le cas dit de « perception globale » et développent des réponses erronées dans la situation dite de « perception ponctuelle », qu'ils justifient alors par des **propriétés « institutionnelles » incongrues** : « car dans la symétrie centrale, l'image d'une figure est une figure de même longueur et c'est le cas ici » ou bien « dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur », alors qu'il s'agit de la même symétrie axiale qu'ils avaient pourtant reconnue dans le cas dit de « perception globale ». Exhiber une telle propriété est cohérent dans le cas a. car il s'agit effectivement d'une symétrie centrale, mais l'élève l'emploie également de la même manière dans le cas b., alors qu'il s'agit d'une symétrie axiale. Et d'après les signifiants dont on dispose, on peut raisonnablement penser qu'il s'agit d'un effet de contrat.

De plus, on se rend compte dans ces exemples non isolés que les signifiants graphiques sont différents des signifiants langagiers associés. Le **traitement de la figure est différent entre le discours et l'action**. Par exemple, l'élève de la copie 5.23 (annexe p. 305) annonce des propriétés de conservation de dimension 1D pour justifier la symétrie centrale. Or, il s'avère que deux pseudo axes de symétrie sont tracés avec des flèches rotatives (du même type que décrites précédemment). On suppose alors que le théorème-en-acte d'exclusivité : *si ce n'est pas une symétrie axiale, c'est une symétrie centrale,* a été opérant et validé par le concept-en-acte différenciateur d'orientation. En effet, dans ce cas, la flèche dessinée par l'élève est un signifiant de l'orientation de la figure, qui est donc différente selon qu'il s'agit d'une symétrie axiale ou d'une symétrie centrale. Dans l'action, le traitement de la figure peut donc se limiter à 2D voire 3D (et 1D pour l'axe). En revanche, dans le discours, la propriété invoquée renvoie à un discours axiomatique et à un traitement de la figure de dimensions 1D et 0D.

Cela confirme l'idée que la perception ponctuelle suggérée par la tâche stimule la construction de l'ETG personnel de l'élève plus proche de l'ETG de référence attendu, mais contrairement à ce que nous avions supposé dans le premier questionnaire, cette adaptation

« idoine » peut conduire à des erreurs en 5e. Cela rappelle le caractère artificiel, dénoncé par Bkouche, des propriétés de conservation que les programmes mettent en exergue (chapitre 1 p. 26). La déconstruction dimensionnelle visible dans ce type de discours ne serait alors qu'un effet de contrat.

5.4 « Amalgame » entre la symétrie centrale et la symétrie axiale

Nous supposons que certaines congruences entre la symétrie axiale et la symétrie centrale (comme le schème de bidécomposabilité, la conservation globale des dimensions, ou encore l'équidistance) peuvent conduire à certaines confusions. Cassan (1997) sous le terme emprunté à Artigue, d' « amalgame d'une notion sur un support donné » pointait déjà des erreurs dues à la proximité de ces deux transformations entretenue par les programmes scolaires (chapitre 1, p. 25). Les profils erronés, retenus pour notre étude, sont plus éclatés en 5e qu'en 3e (en effet, en 3e, les erreurs portent principalement sur les défaillances du théorème-en-acte de cocyclicité). Les erreurs relevées en 5e rendent compte de confusion entre ces deux symétries, mais quel traitement de la figure est développé dans ces « amalgames » ? S'agit-il d'erreurs dues à une conceptualisation instrumentale de la rotation (car la symétrie centrale est une rotation) comme en 3e ? Ou ces erreurs viennent-elles d'une négligence des concepts différenciateurs de ces transformations, comme l'orientation et l'invariance point par point ?

Nous avons déjà explicité certaines erreurs précédemment (dont celles associées à un effet de contrat). Il en existe d'autres que l'on peut expliciter autrement. En effet, un certain nombre d'élèves **reconnaissent une symétrie axiale au lieu d'une symétrie centrale** dans la situation dite de « perception globale », ce qui va dans le sens de notre hypothèse (1) que la symétrie axiale est cristallisée dans une perception globale (annexes 5.22 p. 309 ou 5.9 p. 310). Dans ces cas, l'élève justifie sa réponse par superposition.
D'autres élèves vont, eux, reconnaître **une symétrie centrale au lieu de la symétrie axiale (et surtout dans le cas dite de « perception ponctuelle »)** à la question b. (5.22 p. 309 ou 5.9 p. 310 ou encore 5.4 p. 308 ou 5.23 p. 305) et justifient alors leurs réponses en mettant en évidence :
- le point fixe
- la conservation des dimensions globales (par superposition)
- les éléments de dimensions inférieures qui amènent à considérer des propriétés métriques (erreurs que nous avons assimilées pour certaines à un effet de contrat).

Notons que très peu d'élèves reconnaissent des axes de symétrie qui n'en sont pas dans le cas b.

L'amalgame entre la symétrie axiale et la symétrie centrale en 5e s'explique car les élèves invoquent des arguments de même nature (superpositions globales ou propriétés de conservation pouvant mettre en relation des éléments de la figure de dimension inférieure). Le

point fixe est mis en évidence dans le cas de la symétrie centrale mais il n'est pas vérifié qu'il est l'unique point fixe, pour justement le distinguer de la symétrie axiale. Le concept d'orientation (qui les distingue également) apparaît surtout dans le cas des profils corrects.
Finalement, les profils d'élèves de 5^e sont plus éclatés qu'en 3^e et révèlent alors un ETG personnel de l'élève plus instable. En effet, les profils qui proposent des réponses correctes, moins représentés qu'en 3^e, mettent eux aussi en évidence un passage de la géométrie naturelle à la géométrie affine euclidienne, permis par la flexibilité des schèmes de la symétrie axiale et de la symétrie centrale, selon la tâche. Les profils qui proposent des réponses erronées présentent des erreurs de nature différente. Certaines viennent directement de l'amalgame entre la symétrie axiale et la symétrie centrale mais d'autres sont issues d'effets de contrat qui rendent alors le passage vers GII plus artificiel chez certains élèves.

6. CONCLUSION : LA STABILITE DES ETG PERSONNELS DES ELEVES DE 5^e ET DE 3^e SELON LA TÂCHE

Des élèves d'une même classe de 5^e et d'une même classe de 3^e (dont le professeur de mathématiques est le même) ont résolu une même tâche (la situation des triangles) déclinée sous deux formes différentes (l'une dite de « perception globale » et l'autre dite de « perception ponctuelle ») en deux temps différents. Chacune de ces deux tâches suggérait *a priori* une perception différente et donc une adaptation différente. L'une des tâches (fig. 5.1 p. 132) suggérait des techniques basées sur la superposition tandis que l'autre (fig 5.2 p.133) suggérait des techniques dans le cadre de la géométrie affine, plus formelle. Nos résultats portent sur l'étude des adaptations des élèves à ces changements suggérés par la tâche et le rôle joué par la symétrie axiale dans ces adaptations.

Nous avons mis en évidence que l'ETG personnel d'un élève de 5^e était plus instable que celui d'un élève de 3^e. En effet, les profils d'élèves de 5^e sont plus éclatés, en particulier au niveau des erreurs. Bien qu'un certain nombre d'élèves de 5^e s'adaptent à la tâche (selon le changement de perception suggéré) et ont la géométrie disponible pour résoudre la tâche, d'autres élèves cèdent à l' « amalgame » entre la symétrie axiale et la symétrie centrale. En particulier, la situation dite de « perception globale » conforte certains élèves dans la reconnaissance de la symétrie axiale et la situation dite de « perception ponctuelle » conforte certains élèves dans la reconnaissance de la symétrie centrale. Ce phénomène alimente notre hypothèse que la symétrie axiale est cristallisée dans une perception globale. On dénonce même certains effets de contrat dus à cette situation dite de « perception ponctuelle », révélant un passage vers la déconstruction dimensionnelle artificielle et donc un passage vers GII également artificiel.

En revanche, l'étude de l'ETG personnel des élèves de 3^e nous révèle une certaine stabilité de cet ETG et une certaine maîtrise de la dialectique GI-GII. Tout d'abord, un plus grand nombre d'élèves s'adaptent à la tâche car ils ont la géométrie disponible pour résoudre ces tâches de manière correcte. Ils passent alors d'une géométrie de type naïf à une géométrie affine euclidienne du fait de la souplesse d'adaptation des schèmes de la symétrie axiale qui, en 3^{e}, ne provoquent plus d' « amalgame » mais au contraire s'opposent à ceux de la rotation. En effet, les schèmes de la symétrie axiale, développés par l'élève, permettent d'atteindre une déconstruction dimensionnelle des figures, alors que les schèmes de la rotation se limitent à une déconstruction instrumentale. Il existe également un certain nombre d'élèves, également plus nombreux en 3^{e} qu'en 5^{e}, qui laissent opaques les adaptations survenues lors du changement de perception suggéré par la tâche, sans changer pour autant leurs réponses correctes. Les profils d'élèves de 3^{e} qui sont dans l'erreur sont donc nettement moins nombreux qu'en 5^{e} et ne concernent finalement qu'un seul type d'erreur. La déconstruction instrumentale associée à la rotation, chez ces élèves, implique une négligence de la conservation de la mesure d'angle pour une même rotation, d'où certaines erreurs résistantes malgré le changement de perception suggéré par la tâche.

Nous avons également utilisé le logiciel CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) pour mener une analyse statistique implicative à partir des données de la situation des triangles. Les résultats obtenus ne nous satisfont pas totalement (à cause de notre faible échantillon) mais laissent tout de même apparaître que la symétrie axiale est le fruit d'un raisonnement impliquant des propriétés métriques alors que la rotation n'est en lien qu'avec le concept d'orientation (annexes pp. 319-324), ce qui est cohérent avec les résultats obtenus par notre étude de cas.

Nous avons mené cette étude de cas dans une situation où la configuration se compose d'une figure de départ et d'une figure d'arrivée où une seule transformation peut être correcte. La rotation n'apparaît, de manière correcte, que sous la forme de la symétrie centrale. Nous allons maintenant étudier l'ETG de ces élèves de 5^{e} et de 3^{e} dans une situation globalement invariante sous plusieurs transformations possibles. Nous supposons alors, qu'*a priori*, le phénomène d'exclusivité des transformations va opérer, nous révélant alors quelle transformation est dominante chez un élève et organise ainsi son ETG personnel.

PARTIE B : LA SITUATION DES ROSACES, TRAITEMENT D'UNE FIGURE INVARIANTE SOUS PLUSIEURS TRANSFORMATIONS

1. ETUDES *A PRIORI* DE LA SITUATION ROSACE *(fig. 5.3, 5.4, 5.5 & 5.6, chapitre 5 pp. 134-136)*

1.1 Analyse de la tâche en 5^e

Il s'agit du même type de tâche (reconnaître les transformations du plan) que la situation des triangles mais la configuration est différente. Il s'agit d'une seule figure globalement invariante sous plusieurs transformations. Les connaissances en jeu sont les mêmes et sont anciennes :
- la symétrie axiale a été vue en 6^e et revue en 5^e,
- la symétrie centrale a été traitée un mois et demi plus tôt.

Elles sont directement évoquées dans l'énoncé, il s'agit alors de connaissances « mobilisables ». L'élève n'a pas à rechercher les connaissances à utiliser : « indiquez le(s) symétrie(s) qui transforme(nt) ». La question est donc « relativement » fermée. Du fait qu'on leur demande de justifier leurs réponses, on peut prévoir différents types d'adaptations. En particulier, le centre et aucun des sommets ne sont nommés, on peut donc s'attendre à ce que l'élève organise l'espace en nommant certains points remarquables. Les élèves peuvent tracer le centre du cercle par :
- intersection des diagonales,
- intersection des médiatrices de deux cordes du cercle,
- mesure de la moitié d'un diamètre (dont l'extrémité est un des sommets de la figure).

Les techniques de reconnaissance des transformations peuvent être de natures différentes :

- **des techniques dites de « perception globale » :** la superposition des figures est le principal argument. La symétrie centrale peut être reconnue par demi-tour et la symétrie axiale reconnue par pliage (en testant les diagonales comme des axes de symétrie potentiels).

- **des techniques dites de « perception ponctuelle » :** la décomposition des figures point par point est nécessaire, soit dans l'action, soit dans le discours. La symétrie centrale peut être reconnue, par exemple, uniquement en identifiant le centre du cercle circonscrit comme un centre de symétrie. L'élève peut également faire fonctionner le théorème-en-acte qui consiste à dire que le point d'intersection d'axes de symétrie est un centre de symétrie. La symétrie axiale et la symétrie centrale peuvent être toutes deux reconnues en vérifiant l'équidistance d'un couple {point ; image} par rapport à un (des) axe(s) potentiel(s) de symétrie ou le centre supposé de symétrie, avec l'aide d'instruments : règle graduée, équerre ou compas. L'élève peut alors aller jusqu'à formuler des propriétés caractéristiques « institutionnelles » (conservation de la forme ou des dimensions, orthogonalité, milieu, etc.).

1.2 Analyse de la tâche en 3^e

Au moment du questionnaire, la rotation venait d'être traitée en classe (une semaine avant notre questionnaire, mais le contrôle du professeur a eu lieu après notre questionnaire). Les transformations du plan sont directement évoquées dans l'énoncé, il s'agit alors de connaissances « mobilisables », l'élève n'a pas à rechercher les connaissances à utiliser. Le répertoire possible des transformations disponibles est suggéré : « indiquez le(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) …». La question est donc « relativement » fermée. La tâche proposée consiste à justifier la reconnaissance des transformations en jeu. Au-delà du « ça se voit », on peut donc prévoir différents types d'adaptation. En particulier, ni le centre ni les sommets ne sont nommés. On peut donc s'attendre, tout comme en 5^{e}, à ce que l'élève organise l'espace en nommant les points remarquables et en traçant le centre du cercle de la même manière que précédemment. Les techniques de reconnaissance des transformations peuvent être de natures différentes :

- **des techniques dites de « perception globale » :** l'élève peut tester des axes de symétrie potentiels en pliant par rapport à une diagonale. La rotation peut également être reconnue en testant des superpositions de sous-figures par pivotement. Dans ce cas, l'élève tente de reconnaître les éléments caractéristiques de la rotation définis en classe et dont la « figure de base » fait partie.
- **des techniques dites de « perception ponctuelle »** : on vérifie l'équidistance d'un couple {point ; image} par rapport à un ou des axes potentiels de symétrie ou le centre supposé de rotation, à l'aide d'instruments : règle graduée, équerre ou compas. L'élève peut aller jusqu'à formuler les caractéristiques « institutionnelles » de la transformation visée : égalité de mesure et de mesure d'angle, orthogonalité, milieu.

Les modalités de reconnaissance de la rotation évoquées en classe (et d'après le chapitre 7) portent également sur :

- la trajectoire d'une sous-figure (qui détermine l'ordre de la rotation). La sous-figure peut être de dimension 2D, 1D ou 0D (un point),
- la reconnaissance du centre,
- la détermination d'une mesure d'angle,
- la détermination d'un sens.

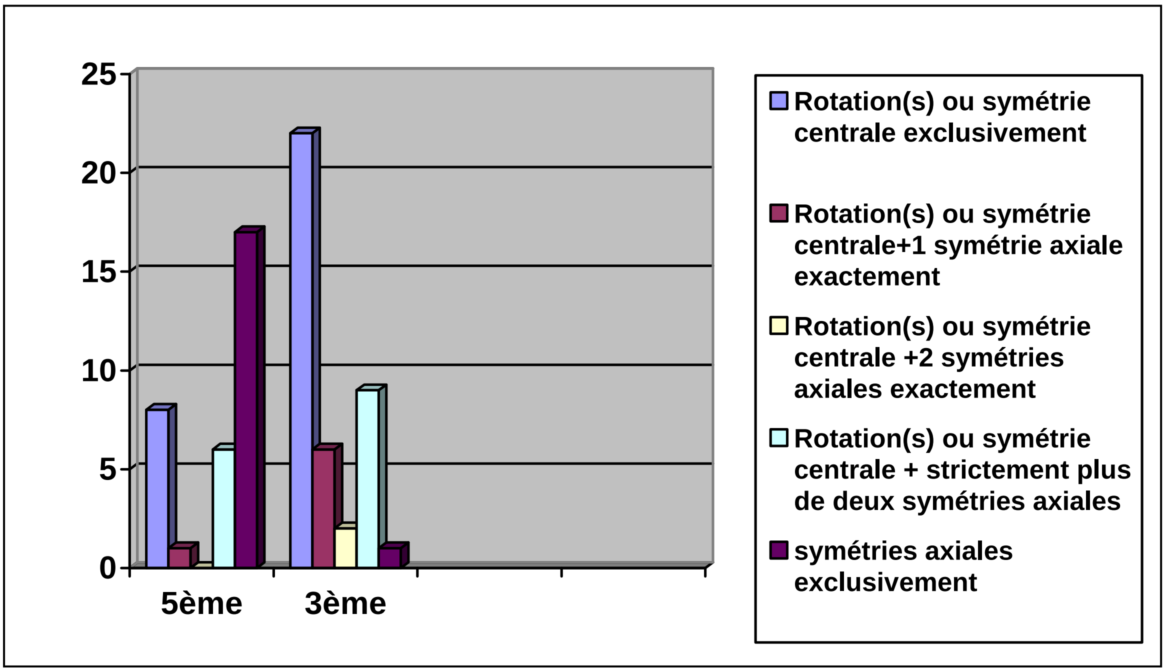
Le plan n'étant pas quadrillé, nous supposons que le langage fonctionnel ne sera pas autant sollicité par les élèves de 3^{e} que dans la situation précédente des triangles. Nous supposons plutôt que ce type de configuration (en forme d'étoiles, relevant donc de nos références de la vie quotidienne) va faire appel à des techniques plus naïves, autrement dit des techniques dites de « perception globale ».

On suppose *a priori* que va s'appliquer le principe d'exclusivité qui consiste à reconnaître une seule transformation par figure, à l'exclusion de toutes les autres. D'après le test exploratoire (chapitre 4), nous avons supposé dans ce type de situation que la rosace d'ordre pair favorisait la reconnaissance de la symétrie axiale car la symétrie axiale favoriserait une décomposition méréologique (en sous-figures de mêmes dimensions) à travers le schème de bidécomposabilité.

De plus, on suppose que le choix des transformations reconnues par les élèves dépend aussi du contrat didactique car, en 3^e par exemple, toujours d'après le questionnaire exploratoire, la symétrie centrale avait été exclue de leur choix. La symétrie centrale va-t-elle en revanche être plus prégnante que la symétrie axiale en 5^e ? Le traitement de la figure par la symétrie axiale change-t-il en 5^e et en 3^e ?

1.3 Catégories des élèves selon la nature des transformations reconnues

Le graphe 6.14 nous indique une première répartition « grossière » des transformations reconnues par les élèves de 5^e et de 3e sans distinguer l'ordre de la rotation.



<u>Graphe 6.14</u> : répartition des transformations reconnues par les élèves en 5e et en 3e sans distinguer l'ordre de la rotation.

La répartition des transformations est donc différente pour les élèves de 5^e et de 3^e. La rotation est la transformation la plus prégnante en 3^e, et la symétrie axiale est la plus prégnante en 5^e. On ne peut interpréter ce choix des élèves seulement par un effet de contrat, car sinon, la symétrie centrale serait plus largement représentée en 5^e. Afin de déterminer les profils d'élèves dont nous étudierons l'ETG personnel (analyse nécessaire si on cherche à déterminer l'influence par la symétrie axiale dans ces choix), nous avons répertorié les productions des élèves par catégories en fonction des résultats obtenus, c'est-à-dire en fonction des transformations reconnues :

- **CATEGORIE R** : Reconnaissance de rotation(s) en 3^e ou d'une symétrie centrale en 5^e.

 - CATEGORIE R0 : Reconnaissance de rotations(s) exclusivement (on ne distingue pas si l'élève distingue plusieurs rotations) ou reconnaissance d'une symétrie centrale exclusivement en 5^e.

- CATEGORIE R1 : Reconnaissance de rotation(s) en 3^e ou d'une symétrie centrale en 5^e + une symétrie axiale exactement (1 SA).

- CATEGORIE R2 : Reconnaissance de rotations(s) en 3^e ou d'une symétrie centrale en 5^e + deux symétries axiales exactement (2 SA).

- CATEGORIE R3 : Reconnaissance de rotations(s) en 3^e ou d'une symétrie centrale en 5^e + strictement plus de deux symétries axiales (>2 SA).

- CATEGORIE $\overline{R}$: Reconnaissance de symétrie(s) exclusivement.

- CATEGORIE $\overline{R}$ 1 : Reconnaissance d'une symétrie axiale exactement (1 SA).

- CATEGORIE $\overline{R}$ 2 : Reconnaissance de deux symétries axiales exactement (2 SA).

- CATEGORIE $\overline{R}$ 3 : Reconnaissance strictement de plus de deux symétries axiales (> 2 SA).

Ces élèves de 3^e ne reconnaissent pas de symétrie centrale, donc nous n'avons donc pas tenu compte de la catégorie : « rotation et symétrie centrale en 3^e » ou « symétrie centrale et symétrie(s) axiale(s) ».

2. TRAITEMENT ET ANALYSE DES DONNEES DE LA SITUATION ROSACE

2.1 Traitement des données par catégories d'élèves

Rappelons que cette situation s'est déroulée en deux temps distincts (à une semaine d'intervalle). La classe était partagée en deux : une moitié traitait le cas de la rosace d'ordre pair et l'autre moitié la rosace d'ordre impair. Puis, une semaine plus tard, chaque élève traitait la même rosace mais dans une orientation différente (figures 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 chapitre 5 pp. 134-136). Aussi les productions sont-elles classées de telle manière qu'un élève qui a fait la même chose quelle que soit l'orientation ne soit pas mentionné deux fois. Les copies d'élèves qui apparaissent deux fois dans les tableaux 6.15 et 6.16 correspondent donc à des élèves qui ont reconnu des transformations différentes après le changement d'orientation.
Ainsi, un certain nombre d'élèves proposent une réponse stable et d'autres changent d'avis. Il est intéressant de remarquer si ce sont les mêmes élèves qui sont stables dans leurs réponses finales dans cette situation et dans la situation précédente (c'est-à-dire la situation des triangles, décrite dans la partie A). Notons que, cette fois, l'absence d'un élève à l'un des deux tests ne biaise pas les données car il a traité au moins une fois la rosace. Nous le comptons donc dans nos effectifs. Nous proposons également les résultats en pourcentage afin de donner une importance relative de ces données, par rapport à l'ensemble de la classe. Etant donné qu'un même élève a pu formuler des réponses différentes pour une même rosace, la somme totale des effectifs dépasse les 27 élèves en 5^e et les 30 élèves en 3^e (de même, la somme des pourcentages dépasse les 100%).

R								$\overline{R}$					
R0		R1		R2		**R3**		$\overline{R}$ 1		$\overline{R}$ 2		$\overline{R}$ 3	
Ordre5	**Ordre6**	Ordre5	Ordre6	Ordre5	Ordre6	**Ordre5**	**Ordre6**	Ordre5	Ordre6	Ordre5	Ordre6	**Ordre5**	**Ordre6**
5.2 5.18 5.23	**5.4 5.10 5.22 5.24**	(vide)	5.24	(vide)	(vide)	**5.1 5.8 5.12 5.14 5.25**	**5.15 5.19 5.26**	5.7	(vide)	(vide)	5.22	**5.1 5.11 5.12 5.14 5.17 5.23 5.27**	**5.3 5.5 5.6 5.9 5.13 5.15 5.19 5.21**
7/27 25,9%		**1/27 3,7%**		**0/27 0%**		**8/27 29,6%**		**1/27 3,7%**		**1/27 3,7%**		**15/27 55,5%**	

Tableau 6.15 : classification des copies d'élèves dans la situation rosaces selon les transformations reconnues en 5^{e}.

R									$\overline{R}$					
R0		R1		R2		R3		$\overline{R}$ 1		$\overline{R}$ 2		$\overline{R}$ 3	
Ordre5	**Ordre6**	**Ordre5**	**Ordre6**	Ordre5	**Ordre6**	**Ordre5**	**Ordre6**	Ordre5	Ordre6	Ordre5	Ordre6	Ordre5	Ordre6
3.6 3.8 3.9 3.10 3.13 3.16 3.18 3.22 3.24	**3.1 3.2 3.4 3.5 3.11 3.12 3.19 3.20 3.25 3.26 3.29 3.30**	**3.13 3.23 3.27**	**3.1 3.17 3.19**	(vide)	**3.3 3.4**	**3.6 3.7 3.14 3.18 3.21 3.28**	**3.15 3.26 3.29**	(vide)	(vide)	(vide)	(vide)	(vide)	3.5
22/30 **73,3%**		**6/30** **20%**		**2/30** **6,7%**		**9/30** **30%**		**0/30** **0%**		**0/30** **0%**		**1/30** **3,3%**	

Tableau 6.16 : classification des copies d'élèves dans la situation rosaces selon les transformations reconnues en 3e.

2.2 Stabilité des catégories selon l'orientation des figures

En 3^{e}, 9/30 élèves soit **30% des élèves** ont changé leurs réponses après le changement d'orientation de la figure (dont 6 parmi ces 9 élèves sont des élèves qui ont traité une rosace d'ordre pair). Ces élèves-là appartiennent à des catégories d'élèves et des profils différents dans la situation des triangles précédente.
En 5^{e}, 7/27 élèves soit **26% des élèves ont changé leurs réponses après le changement d'orientation de la figure**. Ces élèves-là appartiennent également à des profils différents dans la situation des triangles précédente.

Ainsi, les élèves qui changent leurs réponses selon l'orientation de la figure sont des élèves dont le profil peut révéler ou pas une instabilité dans la situation des triangles, on ne peut donc, à ce stade des analyses, en tirer un quelconque lien sur le comportement des élèves entre les deux situations.

Il est important de retenir que finalement, 20/27 en 5^{e} soit **74% en 5^{e}** et 21/30 soit **70% en 3^{e} ne changent pas leurs réponses finales selon l'orientation de la figure.** Il nous reste à étudier les justifications de ces réponses, afin de déterminer si leur ETG est effectivement stable et quel est le rôle joué par la symétrie axiale à ces deux niveaux scolaires différents.

2.3 Profils retenus pour notre étude de cas

D'après le tableau 6.16, le choix des profils d'élèves de 3^{e} à étudier s'impose alors assez naturellement. Nous les avons signalés en vert dans le tableau 6.16. Nous étudierons les catégories dont les effectifs sont supérieurs à deux élèves, en distinguant la parité de la rosace en jeu. Nous disposons d'un effectif total de **38 copies** de 3^{e} car il se peut que nous étudiions deux copies d'un même élève. Nous proposons le tableau 6.17 qui répertorie les **7 profils d'élèves** qui émergent donc en 3^{e}, et dont nous étudierons l'ETG personnel des élèves. Le phénomène d'exclusivité des transformations, détaillé dans le chapitre 4 p. 115, est vérifié ici pour la majorité de ces élèves de 3^{e}, au profit quasi exclusivement de la rotation. De plus, ces profils ne sont *a priori* pas dans l'erreur, c'est-à-dire qu'effectivement les transformations opérantes sont des rotations et des symétries axiales.

Nom du profil	Caractéristiques	Parité de la rosace	Effectifs	Pourcentage
R0_5	Rotations exclusivement	Impaire	9	**23,6%**
R0_6	Rotations exclusivement	Paire	12	**31,6%**
R1_5	Rotations + 1 SA	Impaire	3	**7,9%**
R1_6	Rotations + 1 SA	Paire	3	**7,9%**
R2_6	Rotations + 2 SA	Paire	2	**5,3%**
R3_5	Rotations + >2 SA	Impaire	6	**15,8%**
R3_6	Rotations + >2 SA	Paire	3	**7,9%**
Nombre total de copies			38	**100%**

Tableau 6.17 : profils des élèves de 3e dont nous étudierons l'ETG personnel.

Ces premières données sont d'ores et déjà un peu différentes de celles attendues. En effet, un élève seulement reconnaît exclusivement des symétries axiales (et effectivement dans le cas d'une rosace d'ordre pair) mais nous n'avons pas la répartition attendue selon la parité. Au contraire, ils sont même plus nombreux à reconnaître exclusivement une rotation dans le cas de la rosace d'ordre pair et plus nombreux à reconnaître une (ou plusieurs) symétries axiales dans le cas de la rosace d'ordre impair !
L'étude de cas des ETG nous permettra alors de déterminer quel traitement de la figure est malgré tout opérant car même si on peut supposer qu'une telle prégnance de la rotation soit un effet de contrat en 3e, on peut aussi supposer qu'une décomposition méréologique est opérante dans les cas où l'élève reconnaît une (ou des) symétries axiales, en plus des rotations.

D'après le tableau 6.15, la répartition des élèves de 5e est différente de celle de 3e. Tout comme observé dans le cas de la situation des triangles, les profils sont plus éclatés car certains profils d'élèves sont dans l'erreur, contrairement aux 3e. En effet, il n'y a pas de symétries centrales dans le cas de la rotation d'ordre impair, or les profils R0_5, R1_5, R2_5 et R3_5 ne sont pas vides, ces élèves proposent donc des réponses erronées.
Nous comptons un nombre important d'élèves qui reconnaissent exclusivement des symétries axiales et peu, finalement, qui reconnaissent exclusivement une symétrie centrale.
Le choix des profils d'élèves à étudier s'impose également assez naturellement. Nous proposons le tableau 6.18 qui répertorie les **6 profils** d'élèves qui émergent en 5e, et dont nous étudierons l'ETG personnel. Le principe d'exclusivité des transformations est vérifié ici pour la majorité de ces élèves de 5e, au profit cette fois des symétries axiales. Nous avons signalé ces profils en bleu dans le tableau 6.15. Nous étudierons les profils d'élèves dont les effectifs sont supérieurs à deux élèves. Nous disposons d'un effectif total de **29 copies** de 5e car il se peut qu'un même élève fournisse deux réponses différentes selon le changement d'orientation.

Nom du profil	Caractéristiques	Parité de la rosace	Effectifs	Pourcentage
R0_5	Symétrie centrale exclusivement	Impaire	4	**13,8%**
R0_6	Symétrie centrale exclusivement	Paire	4	**13,8%**
R3_5	Symétrie centrale et plusieurs (>2) symétries axiales	Impaire	3	**10,3%**
R3_6	Symétrie centrale et plusieurs (>2) symétries axiales	Paire	3	**10,3%**
$\overline{R}3\_5$	Symétries axiales exclusivement (>2)	Impaire	7	**24,2 %**
$\overline{R}3\_6$	Symétries axiales exclusivement (>2)	Paire	8	**27,6%**
Total			29	**100%**

Tableau 6.18 : profils des élèves de 5e dont nous étudierons l'ETG personnel.

Ces premières données sont également différentes de celles prévues car nous remarquons une répartition uniforme selon la parité. De plus, très peu d'élèves se sont contentés d'une seule symétrie axiale ou de deux symétries axiales exactement. L'étude des ETG personnels de ces élèves nous permettra alors d'expliciter le traitement des figures au cœur de ces ETG, lorsque la symétrie axiale détient l'exclusivité. On cherche en particulier à vérifier si une décomposition méréologique organise l'ETG de l'élève de 5e (hypothèse 1 p. 161).

3. METHODOLOGIE D'ANALYSE DES ETG PERSONNELS DES ELEVES DANS LA SITUATION ROSACE : UN EXEMPLE D'ETUDE DE CAS

Notre grille d'analyse porte sur les éléments observables des composantes de l'ETG, qui sont :
- l'espace réel et local,
- les objets de référence qui renvoient à un système logico-déductif (modèle mathématique),
- les artefacts (outils, schèmes d'action).

3.1 Conception de la grille d'analyse pour l'étude de l'ETG personnel

a) Etude des traces graphiques.

- **Eléments 0D :**

- le centre : est-il tracé et/ou nommé ? Comment est-il tracé ?

- les sommets ou points remarquables : sont-ils tracés et/ou nommés ? Sont-ils des points intra-figure (appartenant au cercle, intersections de diagonales de la figure déjà tracées) ou sont-ils des points extra-figure ?

- **Eléments 1D :** toutes les traces graphiques qui concernent des droites, des segments, des axes, des côtés. Elles peuvent être intra-figure (les côtés de la figure par exemple) ou extra-figure (les diagonales ou côtés non tracés du polygone inscrit par exemple).

- **Eléments 2D :** la rosace peut être considérée dans sa globalité ou peut être décomposée en sous-figures de même dimension. Certains élèves colorient la surface dont ils tiennent compte. On distingue :
  - une figure de référence : polygone régulier, triangle, etc.
  - une figure non institutionnelle ou familière (quadrilatère non régulier, « étoile », etc.)

- **Outils :** règle graduée, compas, équerre, rapporteur, etc.

Les éléments figuraux de dimension inférieure (0D et 1D) qui composent la figure de départ sont tracés ou nommés par l'élève dans un but *heuristique* : afin de mettre en évidence le centre de la figure, ou les droites auxiliaires ou les côtés du polygone qui constituent une (sous-)figure de référence : pentagone, hexagone, triangle, parallélogramme, etc. Ces différents tracés rendent compte d'une déconstruction instrumentale (décomposition 1D/2D et 0D/2D à l'aide d'instruments) ou d'une décomposition méréologique s'il s'agit d'une décomposition de la figure en sous-figures de même dimension (2D/2D).

- **Codage :** orthogonalité, égalités métriques, égalité de mesures d'angles, etc.

Ces autres *signifiants* mettent alors en évidence des caractéristiques des transformations visées : milieu (égalité de mesure), orthogonalité, ou encore les points fixes (centre de symétrie, centre de rotation, axe de symétrie). Le discours qui accompagne peut alors mener à la déduction de la transformation visée. Cette mise en relation des composants de la figure renvoie alors à une déconstruction dimensionnelle, au sens de Duval.

b) Etude du discours associé

- **Registre langagier :**

- langage courant : utilisation d'un vocabulaire du sens commun (référence au sens des aiguilles d'une montre, au reflet d'un miroir, ou à des termes de repères visuels graphiques : droite, gauche, haut, bas, lignes, etc.).

- **langage formel mathématique** :
  - **ensembliste** (relation d'appartenance, d'intersection, point commun)
  - **affine** (définie par des points : la droite (AB))

- **affine euclidienne** (mesure de longueur, mesure d'angle dont l'orthogonalité)
- **fonctionnel** (application du plan vu comme un ensemble de points)

- **langage courant mathématique** : mélange de ces précédents registres.

▪ **Traitement de la figure dans le discours :** référence explicite dans le discours à des points, des milieux, des sommets (0D), des segments, des droites, des côtés, des axes (1D) ou la figure dans sa globalité (2D).

▪ **Connecteurs logiques** : révélateurs d'une organisation de la pensée de l'élève : car, donc, on sait que, etc.

▪ **Rôle supposé du langage :**

- **énonciation des propriétés :** relations entre éléments de dimension inférieure qui correspondent à des propriétés caractéristiques.
- **déduction** : « dérivations déductives de propositions »[6], on déduit des propositions caractéristiques la **dénomination finale.**
- **autres** : programme de construction par exemple.

(- la dénomination des transformations reconnues est déjà donnée par le nom du profil observé).

Nous avons alors répertorié ces différents observables sous forme d'une grille d'analyse à compléter par profil (tableau 6.19) :

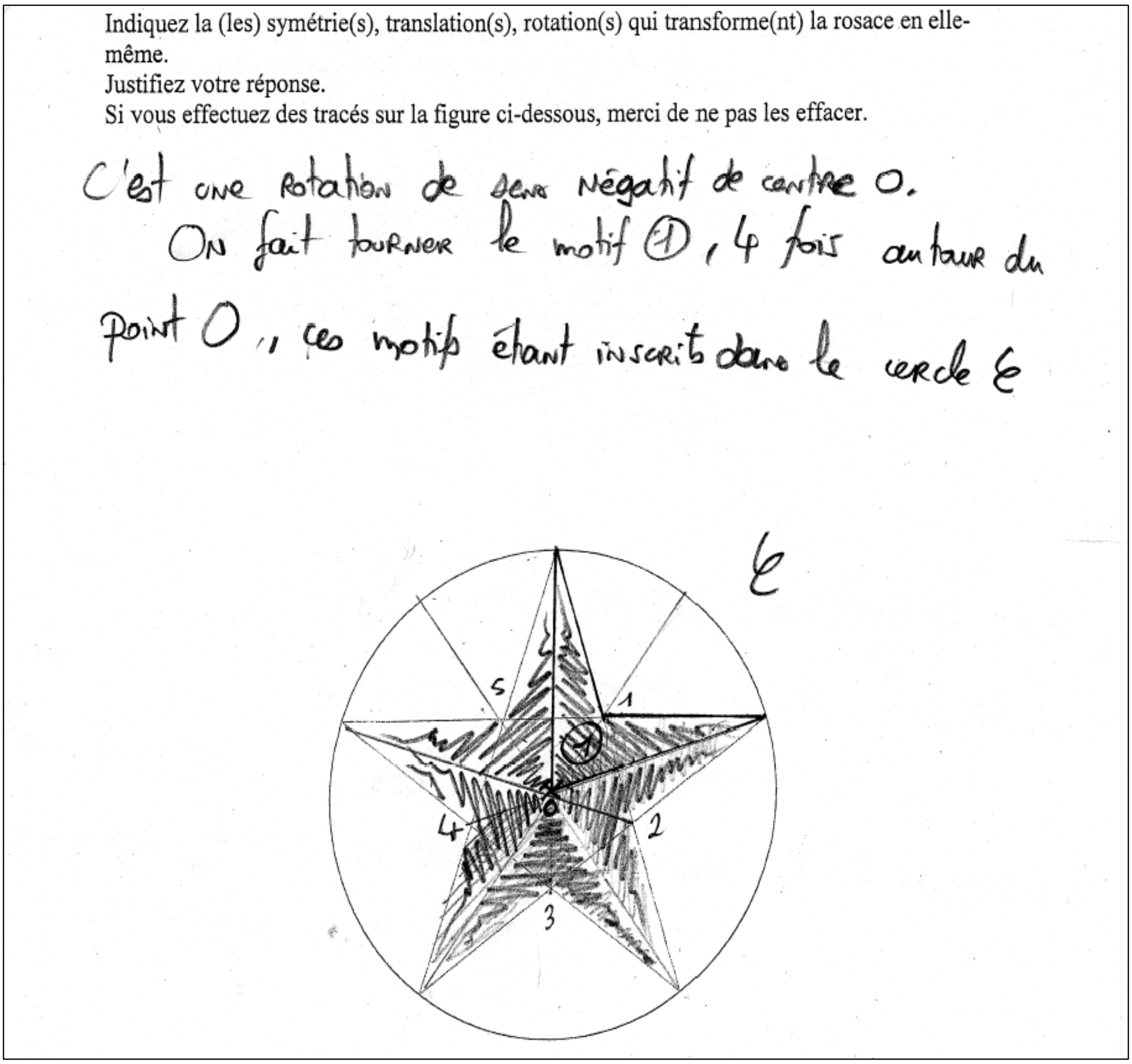
Centre		
Sommets	intra-figure	
	extra-figure	
Aménagement 1D	intra-figure	
	extra-figure	
Sous-figure	de référence	
	non institutionnelle	
Codage	propriétés	
	autres	
Outils		
Registre langagier (et type de désignation de la transformation)		
Traitement de la figure dans le discours		
Connecteurs logiques (organisation du discours)		
Rôle du langage associé		

Tableau 6.19 : grille d'analyse vierge des productions des élèves pour décrire l'ETG personnel dans la situation des rosaces.

[6] Duval, 2005, p. 46.

3.2 Exemple d'analyse en 3e: le cas Lisa (3.13), représentante à la fois du profil R0_5 (rotations exclusivement dans le cas d'une rotation d'ordre 5) et R1_5 (rotations et une symétrie axiale)

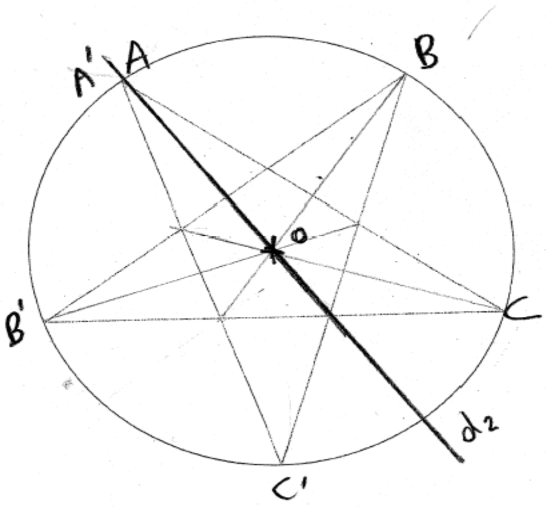
Nous présentons l'analyse détaillée faite pour un représentant du profil des élèves de 3e, Lisa, (copie 3.13), qui ne reconnaît qu'une ou (des) rotations (document 6.20). Lisa a changé sa réponse finale lors du changement d'orientation, elle a alors reconnu également une symétrie axiale en plus de la rotation (document 6.21). Nous présentons l'analyse détaillée de son ETG personnel dans ces deux cas.


Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

C'est une rotation de sens négatif de centre O.
On fait tourner le motif 1, 4 fois autour du point O, ces motifs étant inscrits dans le cercle 𝒞

Document 6.20 : extrait de la copie de Lisa (3.13) dans la situation dite des rosaces, appartenant au profil R0_5.

Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



1) Symétrie axiale par d_2

2) On pointe la pointe du compas sur O et on trace le cercle ayant pour Rayon de O jusqu'au sommet de la pointe.

<u>Document 6.21</u> : extrait de la copie de Lisa (3.13) dans la situation dite des rosaces, appartenant au profil R1_5.

a) profil R0_5 : rotations exclusivement

Lisa a procédé à une reconnaissance du type iconique (au sens de Duval) de la figure proposée : la figure est identifiée comme l'étoile à cinq branches. Les composants de la figure, mis en évidence par Lisa, sont de dimensions différentes :

- 2D : la surface de la figure globale considérée est coloriée et l'orientation des tracés permet de déterminer la sous-figure considérée (une figure non institutionnelle). La sous-figure considérée par l'élève est représentée cinq fois. Chaque sous-partie est numérotée de 1 à 5 à l'intérieur de la figure. En particulier, Lisa a retracé les contours de la sous-figure, dans sa position initiale (en 1.).

- 1D : les contours de la sous-figure sont repassés et deux diagonales sont tracées pour déterminer le centre.
- 0D : le centre est l'unique point remarquable tracé et nommé 0.

Aucun codage « institutionnel » sur la figure n'est visible et le discours associé est relativement sommaire. Lisa commence par nommer la transformation reconnue : la rotation, qu'elle caractérise par son centre et son sens. Aucune mesure d'angle n'est donnée. Elle décrit le déplacement géométrique dans le plan autour du point fixe O : « on fait tourner le motif 1. quatre fois autour du point O, ces motifs étant inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$». On retrouve le traitement de la figure dans sa globalité et le concept-en-acte de l'ordre de la rotation est explicite. En effet, la trajectoire de la figure se décompose en cinq positions différentes à l'intérieur du cercle. Le signifiant du cercle semble toujours un représentant fort de la rotation chez cet élève dans cette situation.

Nous synthétisons ces analyses dans la grille suivante (tableau 6.22) :

Centre		Tracé et nommé 0
Sommets	intra-figure	(vide)
	extra-figure	
Aménagement 1D	intra - figure	Côtés de la figure repassés
	extra figure	Deux diagonales
Sous-figures	de référence	Le cercle nommé $\mathscr{C}$
	ou non institutionnelle	Quadrilatère avec deux angles saillants et un angle rentrant, colorié (sous-partie de l'étoile).
Codage	propriétés	(vide)
	autres	
Outils		Règle graduée
Registre langagier (et type de désignation/justifications de la transformation)		Mathématique courant dynamique : « on fait tourner 4 fois le motif A (…) inscrit dans le cercle. »
Traitement de la figure dans le discours		2D
Connecteurs logiques (organisation du discours)		Programme de construction implicite globale.
Rôle du langage associé		Désignation simple et programme de construction implicite

Tableau 6.22 : grille d'analyse 1 du cas Lisa du profil R0_5.

b) profil R1_5 : rotation(s) et une symétrie axiale

Lorsque la rosace a été donnée dans une orientation différente, Lisa a proposé un autre type de réponse : elle reconnaît cette fois explicitement une symétrie axiale, en plus de la rotation.

Son aménagement graphique est alors très différent. On ne reconnaît pas cette fois une décomposition de la figure en sous-figures de même dimension. Elle nomme les sommets de la figure appartenant au cercle sous la forme {point ; image} afin de décrire la symétrie axiale (autrement dit sous la forme « A a pour image A' »). Elle trace et nomme l'axe de symétrie (d2) en trait gras, contrairement aux autres diagonales qui ne sont que des tracés auxiliaires pour déterminer le centre de la figure O. Un tel aménagement graphique vise alors à mettre en évidence la symétrie axiale dont l'axe de symétrie et les couples {point ; image} sont les principaux signifiants.

La rotation n'est pas désignée directement dans le discours. Lisa décrit les gestes associés au processus de la rotation : « On pointe la pointe du compas sur O et on trace le cercle ayant pour rayon de O jusqu'au sommet de la pointe ». Il s'agit en réalité de la description du théorème-en-acte de cocyclicité, qui implique chez l'élève la reconnaissance de la rotation. La rotation n'est pas nommée, tout comme « la figure de base », l'ordre et la mesure d'angle. La rotation est exprimée ici par sa construction, contrairement à la symétrie qui, elle, est nommée explicitement.

On synthétise alors l'analyse de la deuxième production de Lisa (effectuée environ une semaine après) dans la grille suivante (tableau 6.23):

Centre		Tracé et nommé
Sommets	intra-figure	Sommets appartenant au cercle et nommés tels que un sommet B a pour image le sommet B' par la symétrie axiale (d')
	extra-figure	(vide)
Aménagement 1D	intra-figure	(vide)
	extra figure	Un axe de symétrie nommé d2 et tracé en trait gras. Les autres diagonales, au trait plus léger, déterminent le centre O
Sous-figures	de référence	Le cercle
	ou non institutionnelle	Moitié de la figure (décomposée par points)
Codage	propriétés	(vide)
	autres	
Outils		Compas Règle graduée
Registre langagier (et type de désignation de la transformation)		Maths minimal (pour la symétrie axiale) Maths pour la construction

	(pour la rotation)
Traitement de la figure dans le discours	
Connecteurs logiques (organisation du discours)	Description d'une construction
Rôle du langage associé	Désignation simple et programme de construction.

Document 6.23 : grille d'analyse 2 du cas Lisa du profil R1_5.

D'après l'extrait détaillé de ces deux analyses, on retrouve les prémices d'un résultat que nous détaillons par la suite et qui confirme l'un des résultats développés dans la partie A. L'appréhension des figures est différente chez ce même élève de 3e s'il décrit une symétrie axiale ou s'il décrit une rotation. La rotation est décrite comme un déplacement global de la figure dans le plan, inscrit dans un cercle, dont le concept-en-acte d'ordre semble un signifié important, alors que la reconnaissance de la symétrie axiale fait fonctionner les signifiants du concept d'application point par point du plan.

4. SYNTHESE DES ANALYSES DES ETG PERSONNELS DES ELEVES DE 3e DANS LA SITUATION ROSACE

Afin d'éviter les répétitions, nous proposons d'abord les principaux résultats obtenus à partir de l'analyse des ETG personnels par profils d'élèves puis nous étayerons nos analyses par profil.
Cette étude révèle un ETG personnel stable pour ces élèves de 3e. On assiste à une homogénéisation des ETG personnels des élèves qui confirme l'opposition entre la symétrie et la rotation au niveau du traitement de la figure, déjà évoquée dans l'étude du cas Lisa.

4.1 Un schème stable de la rotation

Dans cette situation dite « des rosaces », tous les élèves, à une exception près, reconnaissent une (ou des) rotation(s). La stratégie alors mise en place passe par la reconnaissance d'un modèle implicite de construction qui s'articule autour de plusieurs composants :

- **le « motif de base »**

- une figure de référence

Peu d'élèves mettent en évidence le polygone inscrit dans le cercle (pentagone ou hexagone) en traçant les côtés à la règle graduée. Certains ne commentent pas ces tracés auxiliaires, d'autres leur attribuent tout de même la justification de la rotation reconnue : « on peut le voir car il s'agit d'un polygone régulier se trouvant dans un cercle, or on sait qu'un polygone régulier inscrit dans un cercle peut se construire grâce à des rotations. En l'occurrence, il s'agit d'un cercle de centre 0 d'angle 72° ». Le lien entre les polygones réguliers et la rotation est effectivement traité en classe (voir chapitre 7 p. 251), conformément au programme, mais ce questionnaire révèle que les élèves ne réfèrent finalement pas ou peu aux polygones réguliers pour caractériser une rotation.

La majorité des autres élèves reconnaît une « figure de base », dont ils décrivent le déplacement dans le plan à l'intérieur du cercle. Il s'agit soit d'un triangle inscrit dans le cercle (dont les trois sommets appartiennent au cercle), soit d'un triangle « périphérique » dont seulement un des sommets appartient au cercle (3.28 annexe p. 311).
Certains élèves, comme ceux du profil R0_6, reconnaissent également d'autres « figures de base » comme un parallélogramme (plus particulièrement un losange).

Les élèves du profil R0_5 ne désignent généralement pas la « figure de base » en nommant ses sommets. Ils repassent les côtés ou plutôt les contours de la figure, souvent à main levée ou à l'aide d'une règle graduée, contrairement aux élèves du profil R0_6 qui sont nombreux à nommer les sommets de la « sous-figure de base ». Ces points remarquables sont tous des points intra-figure (c'est-à-dire qui correspondent aux sommets du polygone ou à l'intersection des diagonales). Ils repassent également les côtés de la figure considérée, souvent à la règle graduée.

- une figure non institutionnelle ou familière (moins fréquente)

Il s'agit souvent d'un quadrilatère présentant un angle rentrant et deux angles saillants, la forme étoilée est quelquefois mise explicitement en exergue (comme dans le cas Lisa). D'autres (moins nombreux) évoquent une surface angulaire comme motif de base.

Certains élèves colorient le « motif de base » (quelle que soit la nature de celui-ci) ou hachurent sa surface et retracent les côtés soit à main levée soit à l'aide de la règle graduée. Le discours associé désigne de toute façon cette « figure de base » dans sa globalité, même si certains la nomment par ses sommets.

Duval qualifierait cette classe d'individus de « botaniste » car elle « reconnaît des formes à partir de qualités visuelles d'un contour » (hormis ceux qui justifient la rotation par la construction du polygone régulier inscrit dans le cercle).

- **l'ordre de la rotation**

La majorité des élèves décrit la trajectoire effectuée par « le motif de base » dans le plan, autour du centre 0, en conservant la même orientation. Les élèves comptent le nombre de positions différentes du « motif de base » avant de revenir dans sa position initiale. Il s'agit de l'ensemble des orbites, au sens mathématique dont le cardinal (le nombre total de positions différentes) donne l'ordre de la rotation. Les élèves qui travaillent sur la rosace d'ordre 5 sont partagés entre dire « quatre fois » ou « cinq fois ». Les élèves qui travaillent sur la rosace d'ordre 6 sont partagés entre « trois », « cinq » ou « six » fois.

- **la mesure d'angle**

Les élèves décrivent le déplacement dans le plan selon un angle constant. Ils l'obtiennent majoritairement par le calcul suivant qui peut être énoncé sous la forme d'un théorème-en-acte : *360° divisé par l'ordre de la rotation (ici : cinq ou six)*. Cette mesure d'angle est définie dans un but de construction. Une minorité d'élèves vont mesurer directement sur la figure et donnent alors une mesure d'angle erronée comme 70° par exemple, dans le cas de la rosace d'ordre 5. Le formalisme attendu en 3^{e} pour désigner la rotation est plus prégnant chez les élèves qui traitent la rosace d'ordre 6, sous la forme « R(0 ;60° ; +) ».

- **Le sens**

Il apparaît aléatoirement dans les copies et de manière anecdotique, comme s'il fallait en parler mais que finalement ce composant n'était pas significatif : « positif ou négatif », « trigonométrique ou dans le sens des aiguilles d'une montre ». On se demande si l'élève le mentionne pour préciser le programme de construction qu'il propose ou parce que le sens est mentionné dans le formalisme associé de la rotation.

- **Le centre**

Il est massivement obtenu par le tracé de deux ou plusieurs diagonales (dont l'épaisseur du trait les distingue des axes de symétrie rémarqués) et est nommé O. Il apparaît comme un des seuls points remarquables communs à toutes les copies. Il est désigné dans le discours associé à des fins diverses :
- pour déterminer le cercle. Certains justifient le choix de la rotation en évoquant le théorème-en-acte de cocyclicité : « car tous les triangles sont contenus dans un cercle » ou encore « il s'agit d'un polygone régulier se trouvant dans un cercle ». On peut même reconnaître chez certains élèves la déconstruction instrumentale de la figure associée : « On a un point A sur le cercle de centre O, par la rotation du point A d'angle 120° dans le sens des aiguilles d'une montre et de centre O, on obtient le centre C ».

- pour désigner un repère fixe pour réaliser le déplacement du motif de base (« tourner autour du point O »).

- dans le formalisme associé à la rotation, comme dans l'exemple donné précédemment.

L'identification et la justification de la rotation répondent majoritairement à une « visualisation iconique » : ça ressemble au profil d'un objet réel, ou à un ensemble d'itinéraires ou de déplacements sur un territoire ou à un modèle type – la figure reste un objet indépendant des opérations que l'on effectue sur elle »[7].

Tous les profils d'élèves procèdent de la même manière pour justifier une rotation, dans ce type de situation. Ils décrivent la trajectoire possible d'un motif de base inscrit dans un cercle. Quelques propriétés de conservation des mesures de la figure et de la mesure d'angle ont été évoquées soit à travers le codage, soit dans le discours mais de manière très anecdotique. Même si l'élève désigne la rotation par le formalisme attendu, le champ lexical du discours associé est toujours proche de celui des programmes de construction, privilégiant le concept-en-acte d'ordre (3.25 annexe p. 313).

4.2 Schèmes souples de la symétrie axiale

Les élèves qui reconnaissent des rotations et une ou (des) symétries axiales sont moins nombreux. Les schèmes associés à la symétrie axiale semblent alors plus souples que ceux de la rotation.

L'axe de symétrie se distingue alors des autres diagonales (alors tracées pour déterminer le centre) et est le principal *signifiant* de cette transformation : il découpe la figure en deux plans disjoints. Selon les cas, la figure apparaît comme un ensemble de points du plan : « A devient A' » (3.23 annexe p. 312) ou comme une partie globale délimitée par des vocables du langage courant « la partie gauche », mais qui peut renvoyer au caractère involutif de la transformation : « et réciproquement ». Le discours renvoie généralement à une appréhension globale de la figure de niveau 1 (entre deux parties de la figure) lorsqu'il s'agit de décrire la symétrie axiale (à quelques exceptions près).

Les quelques élèves qui représentent le profil R2_6 (3.3 annexe p. 314), tracent un axe vertical et un axe horizontal qui sont désignés comme étant les seuls axes de symétries. On retrouve la recherche d'un repère orthogonal suggéré par les recherches en psychologie sur les processus cognitifs de la perception (chapitre 1 pp. 15-22). Les sous-figures (quart de figure donc) obtenues sont traitées également dans leur globalité dans le discours associé. On retrouve tout de même des traces d'un symbolisme lié aux fonctions : « E→G B→H » mais aussi lié à des vocables du langage courant : « symétrie axiale de la partie haute à la partie basse par la droite (d) », tout comme dans les autres profils.

4.3 Opposition entre la symétrie axiale et la rotation

Les schèmes associés à la symétrie axiale se révèlent donc également assez souples dans cette situation. En effet, la reconnaissance de la symétrie axiale peut passer par une reconnaissance perceptive globale où l'axe de symétrie revêt le statut de frontière entre deux plans disjoints,

[7] Duval, 2005, p. 14.

ou par le passage à une géométrie affine qui met en jeu un couple {point ; image} par rapport à une droite qui revêt cette fois plutôt un repère d'origine même si l'élève ne mentionne ou ne code que rarement des propriétés caractéristiques (orthogonalité ou égalité de mesures).
Nous n'avons pas relevé d'erreurs d'axes de symétrie (comme des faux axes de symétrie par exemple). En revanche, l'ascendant perceptif des angles saillants n'a pas été si évocateur, que supposé *a priori*, car de nombreux axes de symétrie sont négligés par ces élèves de 3^{e}. On ne relève pas non plus des cas de symétrie centrale erronée, notamment dans le cas de la rotation d'ordre 5, comme cela est pourtant le cas en 5^{e}.

En revanche, les schèmes impliqués dans la reconnaissance de la rotation se révèlent eux plus constants. Une grande majorité des élèves de 3^{e} cherchent à passer par la reconnaissance de composants caractéristiques (figure de base, ordre, mesure d'angle, sens, centre) d'un modèle implicite de construction de la rosace.
Les erreurs relevées portent seulement sur la mesure de l'angle associé à la rotation :
- erreur de mesure avec le rapporteur
- ou erreur dans le calcul car la détermination de l'ordre de la rotation est erronée.

L'élève conserve ici toujours la même mesure d'angle pour une même rotation, contrairement à la situation des triangles (partie A), où justement l'élève négligeait la conservation de la mesure d'angle pour une même rotation. C'est une différence importante (entre ces deux situations) qui révèle alors une conceptualisation différente de la rotation selon la situation.

L'ETG personnel d'un élève de 3^{e} se révèle donc également stable dans la situation des rosaces, du fait de la souplesse d'adaptation des schèmes de la symétrie axiale et de la constance des schèmes de la rotation, qui renvoient à un même modèle implicite de construction.

5. SYNTHESE DES ANALYSES DES ETG PERSONNELS DES ELEVES DE 5e DANS LA SITUATION ROSACE

5.1 Le schème dominant de la symétrie axiale

Les élèves de 5^{e} sont une majorité à reconnaître plusieurs symétries axiales pour une même figure qu'ils désignent souvent dans leur discours seulement par les axes de symétrie (d'après le tableau 6.15, ils sont 18 élèves différents sur 27, soit 66,7%, à reconnaître strictement plus de deux symétries axiales).
Les traces graphiques associées sont alors très similaires pour tous ces élèves. Une grande majorité de ces élèves trace les diagonales de la figure et les désigne comme les axes de symétrie (5.1 annexe p. 315). Le reste de ces élèves trace au moins un axe vertical et/ou horizontal comme axes de symétrie, en particulier dans le cas de la rotation d'ordre 6 (5.3 annexe p. 318) ; la rosace d'ordre 5 n'admettant pas d'axe de symétrie horizontal.

Leur discours et traces graphiques renvoient aux schèmes « élémentaires » de la symétrie mettant en jeu la bidécomposabilité (en évoquant quelquefois le milieu) et la superposition : « si on replie la feuille sur les traits, il y a les mêmes figures de part et d'autre » ou encore « car l'axe coupe l'image en son milieu » (annexe 5.3 p. 318) à quelques exceptions près qui ont nommé les points remarquables de la figure et procédé par une application point par point « car les points sont superposables : A=B ». On ne relève aucun codage sur la figure ni aucune propriété « institutionnelle » (équidistance par rapport à l'axe de symétrie ou orthogonalité) pour justifier la symétrie axiale. Leur appréhension de la figure est toujours globale de niveau 1. Au sens de Duval, une telle appréhension des figures renvoie à une décomposition méréologique car l'élève ne décompose pas la figure en éléments de dimension inférieure mais en sous-figures de même dimension, superposables (annexe 5.1 p. 315 ou 5.25 p. 317). Ces élèves sont donc seulement dans un contrôle pragmatique de leurs résultats.
Parmi ces 18/27 élèves, ils sont 8 élèves différents, soit 29,6% (tableau 6.15) à reconnaître également une symétrie centrale. Les schèmes de reconnaissance de la symétrie centrale semblent alors assujettis à ceux de la symétrie axiale dans cette situation, et provoquent alors une forme d' « amalgame » entre ces deux notions, phénomènes didactiques que nous avions déjà relevés dans la situation triangle et que nous développons dans le paragraphe suivant.

5.2 Les schèmes de la symétrie centrale assujettis à ceux de la symétrie axiale

Ils sont 8/27 élèves, soit 29,6% des élèves de 5^{e}, à reconnaître une symétrie centrale dans les cas où la rosace est d'ordre 5. Ces élèves sont donc dans l'erreur car ils adoptent le théorème-en-acte suivant : *Si tous les axes de symétrie se coupent en un même point, ce point est un centre de symétrie.* En effet, ces élèves tracent et nomment les cinq diagonales qui sont aussi axes de symétrie et nomment ce point d'intersection situé au centre de la figure, O.
La construction de ces axes de symétrie concourants conduit les élèves à la conception familière erronée qui consiste à considérer le centre d'une figure comme son centre de symétrie. L'élève de la copie 5.25 (annexe p. 317) est très explicite : « la **symétrie axiale qui coupe l'étoile en 10** […] **et la symétrie centrale dont le centre est au milieu de l'étoile à l'endroit où se rejoignent les axes** ». Ce théorème-en-acte rend compte de l'opposition entre la symétrie axiale et la rotation, que nous avons déjà mentionnée dans l'étude de cas des élèves de 3^{e} (précédemment et dans la partie A). La stratégie de reconnaissance de la symétrie axiale repose sur un contrôle perceptif (et pragmatique). L'élève réalise une décomposition méréologique de la figure car il la décompose en sous-figures (superposables) de même dimension alors que la stratégie de reconnaissance de la symétrie centrale repose sur sa constructibilité à travers notamment la construction des axes de symétrie (stratégie très différente de celles reconnues dans la situation des triangles, dans la partie A précédente).
On relève une variante de ce théorème-en-acte, qui peut être formulée de la manière suivante : *si des droites se coupent en un même point, qui est le centre (supposé de symétrie) de la figure, alors ces droites sont des axes de symétrie.* L'élève de la copie 5.14 (annexe p. 317) en

est une illustration : **« Car elles se coupent au même point O (centre de symétrie) donc ce sont des symétries ».**
Les élèves du profil R0_5 qui reconnaissent seulement une symétrie centrale (sans parler de symétries axiales) sont également dans l'erreur et certains d'entre eux adoptent une variante du théorème-en-acte précédent car ils tracent les cinq diagonales mais ne les identifient pas comme des axes de symétries. Cette variante peut alors être formulée de la manière suivante : *si les diagonales d'une figure se coupent en un même point, alors ce point est le centre de symétrie*.

L'étude du discours de ces élèves qui sont dans l'erreur renvoie à une forme institutionnelle correcte mais inappropriée dans la situation d'ordre impair : « **si on choisit trois points caractéristiques et que l'on cherche leurs images, si on relit les points avec leur symétrique respectif par des droites, le centre d'intersection des trois droites et le centre de symétrie** » (5.1 annexe p. 315). L'amalgame « l'axe de symétrie centrale » est justifié par une propriété institutionnelle : « dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur » (5.23 annexe p. 316). Nous attribuons ce type d'erreurs à des effets de contrat, comme ceux déjà mentionnés dans l'étude de cas des élèves de 5^{e} dans la partie A de ce chapitre. Certains élèves semblent invoquer des arguments d'un niveau supérieur, or ce passage vers une géométrie de type GII est incohérent avec la réponse proposée qui est erronée.

5.3 Conformité de l'ETG personnel entre ces élèves de 5^{e}

L'aménagement local et réel (support graphique) est très similaire pour tous ces élèves de 5^{e}. En effet, ces élèves n'effectuent pas un contrôle pragmatique, un demi-tour par exemple, pour reconnaître la symétrie centrale (à une exception près qui le suggère dans son discours, comme une autre possibilité). Tous ces élèves passent par la construction des diagonales identifiées ou non comme des axes de symétrie.
L'ascendant perceptif du Repère Orthogonal formé par le couple axe vertical, axe horizontal est plus prégnant dans l'étude des ETG en 5^{e} qu'en 3^{e}, notamment dans le cas de la rosace d'ordre pair.
Rares sont les élèves de 5^{e} qui nomment un autre point que le centre de la figure, couramment nommé O. Ces mêmes élèves de 5^{e} ne mettent pas non plus en évidence des sous-figures, ni des propriétés affines euclidiennes (orthogonalité) ou métriques (ni par codage ni dans le discours). On ne relève aucune mesure effectuée. Pourtant, la règle est l'instrument commun à tous ces élèves (notamment pour tracer les diagonales).

Les ETG personnels de ces élèves de 5^{e} semblent relativement proches. En effet, tous ces élèves s'accordent pour reconnaître la symétrie axiale à partir de schèmes élémentaires (les axes de symétrie permettent une décomposition méréologique homogène de la rosace) et reconnaissent la symétrie centrale à partir de la constructibilité de ces axes de symétrie. Contrairement aux élèves de 3^e, les élèves de 5^e proposent des réponses erronées dans cette situation, ce qui accorde donc un caractère encore instable aux ETG de ces élèves.

6. CONCLUSION: LE ROLE DE LA SYMETRIE DANS L'EVOLUTION DE L'ETG PERSONNEL DE L'ELEVE

6.1 Comparaison des ETG en 5^e et 3^e

L'étude de cas des ETG personnels de ces élèves dans la réalisation de ces deux situations différentes mais tirées de la même classe de situation met en évidence une construction de l'ETG personnel différente pour un élève de 5^e et un élève de 3^e.
L'ETG personnel d'un élève de 3^e se révèle plus stable. Leur classification par profils se révèle plus évidente qu'en 5^e, les basculements de paradigmes sont mieux maîtrisés et peu d'erreurs sont identifiées. En revanche, les élèves de 5^e présentent des profils plus éclatés du fait d'une plus grande diversité de leurs erreurs. On remarque une tentative de passage vers GII mais qui semble encore trop artificielle ou maladroite.

En 5^e, on remarque une tendance à privilégier la symétrie axiale dans le cas dit de « perception globale » et la symétrie centrale dans le cas dit de « perception ponctuelle ». Et c'est en 5^e que la symétrie axiale détient l'exclusivité dans la situation des rosaces. Notre hypothèse (1) qui suppose la symétrie axiale cristallisée dans une perception globale se voit alors vérifiée en classe de 5^e.

Ça sera plutôt l'hypothèse (2) qui se vérifie en 3^e car les schèmes de la symétrie axiale sollicités par l'élève de 3^e s'adaptent à la tâche et modulent la distance entre l'ETG personnel de l'élève et l'ETG de référence attendu.

On ne peut cependant expliciter l'exclusivité d'une des transformations (rotation ou symétrie axiale) seulement par un effet de contrat. Car sinon, on remarquerait un taux de reconnaissance exclusive de la symétrie centrale plus élevé en 5^e, or c'est le taux de symétries axiales qui est largement plus élevé en 5^e.

6.2 Opposition symétrie(s) et rotation

Les schèmes de la rotation en 3^e reposent toujours sur son aspect constructible dans les deux situations, négligeant alors les propriétés de conservation métriques de la rotation. L'appréhension des figures considérées renvoie à une déconstruction instrumentale qui s'oppose alors au type d'appréhension mis en place lors de la reconnaissance de la symétrie axiale car celle-ci peut aller jusqu'à la déconstruction dimensionnelle.

En revanche, en 5e, les schèmes de la symétrie centrale sont encore très liés à ceux de la symétrie axiale, provoquant un amalgame de notions dans les deux situations étudiées. Cela renvoie alors à une conceptualisation instable de la symétrie centrale en 5e.
L'élève considère finalement la symétrie centrale comme une transformation « auxiliaire » car celle-ci n'est mobilisée que dans la situation des triangles car la tâche renvoie explicitement à des schèmes de la symétrie axiale (bilatéralité, orientation, égalité des mesures). Dans la situation des rosaces, la symétrie centrale est complètement écartée par les élèves de 3e au profit exclusif de la symétrie axiale et de la rotation (sans pourtant autant inclure la rotation de 180°). Elle est également bien moins reconnue par les élèves de 5e.

La symétrie axiale semble alors jouer un rôle important dans la conceptualisation des isométries visée en fin de collège car elle est la transformation à travers laquelle l'élève construit ainsi son réseau de propriétés (dont celles d'équidistance, de conservation métrique et d'orthogonalité) que l'on peut visualiser grâce au graphe obtenu par CHIC (annexe pp. 319-324). En 5e, les schèmes de la symétrie centrale développés par les élèves semblent étroitement liés à la symétrie axiale, provoquant de nombreux amalgames, tandis qu'en 3e, les schèmes de la rotation semblent au contraire s'opposer à ceux de la symétrie, reléguant alors seulement dans l'implicite les propriétés de conservation métrique.

PERSPECTIVES : Quels liens ont ces résultats avec l'enseignement reçu en classe par le même professeur, Mme B. ?

Plusieurs résultats obtenus à partir du traitement de ces données laissent présager certains effets de contrat. Dans l'étude de la situation des triangles, en 5^{e}, des propriétés de conservation institutionnelles sont mentionnées de manière incohérente. De plus, la conceptualisation de la symétrie centrale met en jeu des schèmes directement liés à la symétrie axiale, d'où un amalgame fréquent entre ces deux notions.
Nous avons directement relié ces erreurs à la question de la **transférabilité des processus de déconstruction de la figure** soulevée par Duval, qui ne vont pas de soi. **Quelle est la prise en charge de ces différents passages de déconstruction dimensionnelle par l'enseignant selon les différents niveaux en 6^{e}, 5^{e} et en 3^{e} ?**

L'étude menée en 3^{e} met en évidence une déconstruction dimensionnelle qui semble adaptable lorsque la symétrie axiale est en jeu, alors que la rotation fait fonctionner seulement une déconstruction instrumentale. On suppose alors que l'enseignement récent de la rotation est un facteur principal de cette inégalité au niveau des stades de conceptualisation de ces transformations. Cependant, nous avons mis en évidence dans nos analyses que l'élève ne maîtrise pas la conservation de la mesure d'angle, ni un contrôle global de la figure lorsqu'il s'agit de reconnaître la rotation. De plus, le concept d'orientation est seulement sollicité par l'élève pour distinguer la symétrie axiale de la symétrie centrale dans certaines situations, comme dans celle des triangles et non celle des rosaces. On s'interroge alors sur **l'enseignement décalé de ces différents concepts qui donnent du sens à toutes ces isométries** (en particulier la conservation des mesures, la conservation de la mesure d'angle, l'orientation). **Est-ce que certains concepts, composants de toutes les isométries, sont privilégiés dans l'enseignement de certaines transformations et pas assez travaillés pour d'autres ?**

On soulève également la question de la **gestion en classe, par le professeur, de la distance entre l'ETG personnel et l'ETG idoine (et attendu par l'institution scolaire)**. Nous avons en particulier mis en évidence dans la situation des triangles que la distance entre l'ETG personnel et l'ETG idoine est plus petite dans la situation dite de « perception ponctuelle » que dans la situation dite de « perception globale ». Le contrat induit par la tâche et interprété par l'élève détermine cette distance. Nous supposons que cet effet de contrat (dû au changement de perception suggéré par la tâche) rejoint la question de la **gestion en classe de la déconstruction dimensionnelle**.

C'est ce que nous allons essayer de déterminer dans le chapitre 7, qui résulte de nos observations dans les classes de 6^{e}, 5^{e} et 3^{e} de Mme B.

CHAPITRE 7

LES EFFETS DE L'ENSEIGNEMENT

Résumé

Nous avons évoqué dans les chapitres précédents le rôle que peut jouer l'enseignement des transformations du plan en classe, dans les résultats obtenus dans le chapitre 6.
Nous nous interrogeons en particulier sur :
- ***la gestion des passages de déconstruction dimensionnelle**, au sens de Duval.*
- ***la gestion des concepts mathématiques** qui donnent du sens aux transformations du plan.*

Notre méthodologie repose sur l'analyse des retranscriptions des observations des séances introductives des transformations du plan de Mme B. en classes de 6^{e}, 5^{e} et 3^{e}. Notre méthodologie d'analyse s'articule alors autour de la notion d' « incident » au sens de Roditi et de la gestion de ces incidents (qui renvoient directement à la gestion du savoir évoqué à travers la gestion des éléments cités précédemment).

Le but de ce chapitre est de mettre en évidence l'existence d'une distance entre l'ETG idoine visé par le professeur et l'ETG personnel que s'approprie finalement l'élève, dû à des basculements de paradigmes géométriques et des changements fréquents de dimension des objets mathématiques en jeu, qui impliquent un certain nombre de malentendus entre le professeur et les élèves ou même la dénaturation par les élèves de certaines pratiques institutionnalisées en classe.

PLAN

1. UN ESPACE DE TRAVAIL STABILISE DU POINT DE VUE DES PROFESSEURS

1.1 Une enquête parmi 17 professeurs du secondaire

D'après l'enquête de Tavignot (1993) menée auprès d'une dizaine de professeurs : « la répartition des transformations sur les quatre années fait l'unanimité. […] Ils reconnaissent l'importance de l'introduction de la symétrie orthogonale comme transformation en 6e, puisqu'elle favorise le lien avec l'école primaire. […] Ils reconnaissent que pour l'enseignement de la symétrie orthogonale, le pliage est un moyen de contrôle, ainsi que le calque avec la superposition. Ces moyens sont introduits lors de la première activité, l'aspect ludique dans les manipulations est pour eux essentiel. Pour la construction du symétrique, il leur semble que l'utilisation du compas avec la notion de médiatrice est privilégiée, notamment pour mettre en évidence les propriétés des figures usuelles »[1].

Nous avons également mené une enquête auprès de 17 professeurs de mathématiques (dont Mme B.) exerçant tous dans l'enseignement secondaire durant l'année 2005-2006. Nous avons rencontré individuellement chacun de ces professeurs. La durée de l'entretien n'excédait pas quinze minutes. Les questions posées et les résultats sont disponibles en annexe pp. 325-329, ainsi que les différents entretiens réalisés avec Mme B., pp. 330-333 (un entretien au début de nos observations et un entretien à la fin).
L'objectif de cette enquête est de connaître les positions générales d'un enseignant « lambda » du secondaire sur l'actuel enseignement des isométries. A l'époque de l'enquête de Tavignot, les enseignants semblaient plutôt satisfaits de l'enseignement des isométries et semblaient partager la même progression d'un enseignement de la symétrie axiale. Qu'en est-il au moment de notre propre recherche ? **L'Espace de Travail visé par le professeur est-il toujours stabilisé concernant l'enseignement des transformations du plan ?**
Nous souhaitons en particulier déterminer **les positions de Mme B.** par rapport à ces positions générales sur l'enseignement des isométries (nous émettons bien sûr des réserves sur le discours des professeurs interrogés car il existe toujours des décalages entre le discours des professeurs sur leurs pratiques et leurs pratiques effectives).

La progression générale de Mme B. concernant les transformations du plan (quel que soit le niveau) est dans un premier temps de réaliser des activités préparatoires en classe dans le but de faire émerger les propriétés importantes, puis de glisser vers ce qu'elle appelle « la mathématisation » du problème à travers des discussions entre elle et ses élèves. Puis, s'ensuit une phase de mise en commun et d'institutionnalisation durant laquelle les élèves copient dans leur cahier de cours les définitions et propriétés qui ont été formulées durant la phase préparatoire. La phase de réinvestissement consiste pour les élèves à s'exercer à résoudre un

[1] Tavignot, 1993, p. 274.

grand nombre de problèmes (en classe et à la maison) de leur manuel scolaire (ou à partir d'autres sources : photocopies d'autres manuels ou Internet). Durant cette phase d'acquisition des connaissances, il est arrivé à Mme B. de réaliser un devoir surprise pour jauger de la progression de ses élèves. Mme B. termine son enseignement par un devoir sur table d'une durée d'une heure ou deux heures.

1.2 Les positions des professeurs pour chaque transformation du plan

Nous proposons une synthèse des résultats de cette enquête pour chaque transformation (car celles-ci sont effectivement enseignées indépendamment tout au long du collège) que nous illustrons avec certains extraits d'entretien de Mme B. Nous invitons le lecteur à consulter les autres extraits d'entretiens de ces professeurs, en annexe.

▪ **La symétrie axiale**

D'après nos entretiens avec Mme B., le caractère culturel et omniprésent de la symétrie est une raison suffisante pour l'enseigner mais à travers des **tâches de reconnaissance, de manipulation et de construction**, comme il est suggéré dans les programmes :

Mme B. : « Beaucoup de choses sont symétriques, l'œil s'habitue aux formes harmonieuses, et ce qui est harmonieux est souvent symétrique d'une manière ou d'une autre. […] *La symétrie est quelque chose pour moi de très important, de comprendre comment elle fonctionne et à partir de quel moment elle n'est plus symétrique et quel effet ça produit.* […] *Faire en sorte que les élèves repèrent une symétrie axiale en 6^e^, centrale en 5^e^, qu'ils sachent manipuler, qu'ils sachent comment ça marche, qu'ils sachent reproduire par une symétrie et qu'ils sachent repérer les propriétés, c'est-à-dire va falloir à un moment mathématiser.* […] *L'objectif du programme de 6^e^ est clairement établi, on n'a pas du tout à leur parler de transformation du plan ».*

Cet avis est partagé par d'autres professeurs même si l'aspect culturel ne semble pas si important (6 professeurs seulement parmi 16 en parlent explicitement). A la question ***« Pouvez-vous me dire si vous donnez une définition de la symétrie en 6^e^ et si oui laquelle ? »***, beaucoup privilégient une définition empirique par pliage (10 professeurs sur 16), d'autres mettent l'accent sur une définition plus locale, point par point, pour retrouver l'algorithme de construction (7 sur 16) et d'autres se concentrent sur la médiatrice (7 sur16), comme Mme B. *:*

Mme B. : « J'ai choisi de les faire travailler sur la médiatrice avant. Je ne fais pas toujours ça, euh, bon, il faut du vocabulaire de base de géométrie, qu'ils aient la notion de droites perpendiculaires, qu'ils sachent les reconnaître, d'égalité, de milieu […], *le vocabulaire de géométrie, et cette notion de milieu, de moitié de droites perpendiculaires, à la limite c'est tout ce qu'il faut. Il faut savoir utiliser le compas, et imaginer ce que peut être l'image d'un cercle, d'un rectangle, non ils sont logiques, tout ça c'est naturel pour eux, quand leur image se reflète dans le lac, ils voient bien que c'est eux-mêmes, même s'il y a quelques déformations* […] *parce qu'ils reconnaissent très bien vous verrez, mais dès qu'ils symétrisent eux-mêmes, ça demande un gros travail de manipulation, pourtant ils en ont fait à l'école primaire, mais il suffit qu'un truc change, que l'axe soit oblique et tout est fichu ».*

De nombreuses entrées sont possibles, mais tous les professeurs s'accordent pour définir « la symétrie » plutôt à partir de la définition du « symétrique » : soit vu comme le processus de construction, soit comme le résultat du processus de construction. A l'instar de Mme B., la plupart ne parlent pas de transformation du plan dans le plan pour la symétrie axiale.

A la question ***« Quelle est pour vous la nature des difficultés des élèves au moment de l'enseignement de la symétrie ? »***, beaucoup ont conscience d'un certain nombre de difficultés des élèves. Mme B. cite certains obstacles liés au concept de symétrie :

Mme B. : « La difficulté c'est dès qu'on rajoute une petite chose qui n'est pas ordinaire, comme un axe oblique, parce que placer l'équerre sur un axe oblique, c'est moins facile que quand il est horizontal et vertical et puis tracer le symétrique d'un objet quand il est coupé par l'axe, alors ça, c'est très difficile ».

D'autres professeurs de notre enquête ont cité d'autres difficultés liées à :
- l'ambiguïté dessin-figure
- la confusion entre la symétrie centrale et la symétrie axiale
- l'obstacle de l'image familière
- la réalisation d'un raisonnement mathématique
- la manipulation d'outils.

▪ La symétrie centrale

D'après Mme B. et certains professeurs interrogés, la symétrie centrale est une notion qui *« passe relativement bien »*.

Mme B. : « C'est moins naturel […] *il y a une espèce de déplacement dans le plan qui n'est pas forcément naturel, on tourne autour d'un point, ça c'est plus compliqué, mais une fois qu'ils ont compris le système, ils s'aperçoivent même que la définition est beaucoup plus simple en symétrie centrale qu'en symétrie axiale.* […] *Donc même si le départ est plus lent, ils vont y arriver plus facilement car ils ont l'habitude d'avoir cumulé les propriétés ».*

A la question ***« Pouvez-vous me dire si vous donnez une définition de la symétrie centrale en 5^e^ et si oui laquelle ? »*** La plupart des professeurs interrogés décrivent la symétrie centrale par son processus de construction locale : la moitié des professeurs par demi-tour et l'autre moitié par la construction ponctuelle. Comme nous le verrons par la suite, Mme B. ne s'éloigne pas de ces tendances.

▪ La rotation

Une partie des professeurs interrogés introduisent les rotations par la symétrie centrale vue comme une rotation particulière de 180°, puis resituent ainsi le groupe des isométries. D'autres professeurs font plutôt le lien en composant les symétries. Certains s'autorisent alors à employer le terme de « transformation », et s'affranchissent alors du programme. D'autres encore se concentrent sur le principe de conservation et d'invariance. Mme B. se retrouve plutôt dans cette catégorie *: « L'objectif c'est de définir cette rotation, de leur faire percevoir dans des schémas déjà organisés, dans les pavages et puis d'aboutir sur les polygones réguliers ».* Les difficultés des élèves concernant les rotations sont ciblées autour du centre « […] *une rotation qui n'a pas le bon centre, le bon sens, voilà ce qui est arrivé en 3e, même avec des élèves d'assez bon niveau, qui s'en sont aperçus* *une fois la copie rendue, mais pour eux, le centre de la rotation était le centre du losange ».* Pour Mme B., le problème principal est *« la lecture de l'énoncé, la lecture des consignes. Je pense que c'est un problème de maîtrise de la langue.* […] *Le mot « central » ne leur pose pas de problème, le mot « axial » non plus ».*

Nous avons également soulevé la question de l'enseignement du concept d'invariance : ***« Parlez-vous du principe d'invariance ponctuelle, c'est-à-dire que tous les points de l'axe de symétrie sont invariants et le centre de symétrie est invariant ? Si oui, mentionnez-le vous comme un critère de la transformation ou comme une simple remarque ? ».*** Nous avons vu dans le chapitre 1 que ce concept-là caractérise, à un niveau supérieur à celui du collège, les isométries. Il s'agit également d'un concept-en-acte que l'on retrouve dans les schèmes reconnus lors de la reconnaissance de la symétrie (axiale ou centrale) ou des rotations. Dans le plan, l'axe caractérise la symétrie axiale et le centre caractérise les rotations. L'invariance globale d'une figure renvoie au concept de conservation des dimensions de la figure, caractéristique de toutes les isométries. Les réponses des professeurs interrogés sont partagées : très peu de professeurs sont catégoriques et n'en parlent pas, d'autres reconnaissent que ça reste dans l'implicite, ou au contraire, certains en parlent explicitement comme critère. Nous n'avons pas posé cette question à Mme B. afin de ne pas l'influencer dans son enseignement de la symétrie et de la rotation.

Ces différents entretiens nous ont permis de dresser un panorama possible des représentations générales et conscientes d'un professeur du secondaire concernant l'enseignement de la symétrie axiale, de la symétrie centrale et de la rotation au collège. Il apparaît alors que l'Espace de Travail décrit par ces enseignants dans le cadre de l'enseignement des isométries semble relativement stable et commun. D'après eux, il s'agit d'un enseignement qui se passe relativement bien. Globalement, ils définissent les transformations du plan à partir de leur processus de construction. Un certain nombre d'entre eux semble réticent à parler explicitement d'invariance point par point mais ils s'accordent tous pour institutionnaliser le principe de conservation globale. Ils ont également conscience d'un certain nombre de difficultés rencontrées par leurs élèves, mais celles-ci sont finalement propres à la géométrie et pas seulement aux transformations du plan.
Nous ajoutons que Mme B. accorde beaucoup d'importance au format de la rédaction en mathématiques. Elle s'astreint à souligner l'importance du vocabulaire employé et la justesse de l'utilisation des connecteurs logiques. Elle fait beaucoup observer, manipuler et commenter ses élèves avant de se lancer dans une phase de synthèse et d'institutionnalisation. Son enseignement des transformations est conforme aux instructions du programme, même si elle avoue n'être pas toujours convaincue par la pertinence de celui-ci. On peut finalement qualifier la classe de Mme B. (quel que soit le niveau) comme « un lieu de construction du savoir »[2], pour reprendre les caractérisations données par Roditi (2003) pour décrire les pratiques des professeurs.

[2] Roditi, 2003, p. 212.

Pour la suite de notre travail, nous nous sommes inspirés de son travail de catégorisation des pratiques ordinaires des professeurs pour analyser nos séances de classes retranscrites.

2. METHODOLOGIE D'ANALYSE DES SEANCES OBSERVEES

2.1 La notion d'« incident » inspirée des travaux de Roditi (2003)

Nous avons réalisé nos analyses à partir des premières séances d'enseignement, c'est-à-dire la phase « activités préparatoires » et les premières institutionnalisations, sans pour autant ignorer la suite. Ce choix est fait d'une part pour nous limiter dans la récolte des données, et d'autre part car nous supposons que c'est au début que les anciens schèmes se déstabilisent et que les élèves s'adaptent et en construisent de nouveaux. Nous sommes allés jusqu'aux séances portant sur le parallélogramme (après la symétrie centrale) en 5^{e}, car la symétrie centrale intervient comme un outil pour démontrer les propriétés caractéristiques du parallélogramme.

Dans son article intitulé « Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux », Roditi analyse des séquences d'enseignement autour d'une même notion mathématique (la multiplication des décimaux), menées par quatre professeurs différents. Il analyse alors les adaptations de ces professeurs selon la gestion et la place des « incidents » par rapport au scénario. Il définit l'incident comme « une manifestation publique (au sens où elle s'intègre à la dynamique de la classe) d'un élève ou d'un groupe, en relation avec l'enseignement, et en décalage négatif par rapport à l'ensemble des réponses correctes envisageables compte tenu de la tâche proposée. L'incident n'est pas nécessairement en décalage par rapport à ce que le professeur attend : c'est la tâche proposée aux élèves qui constitue la référence de ce qui est attendu »[3]. Il distingue différents types[4] d'incidents provenant de la réaction d'un élève au cours de la séquence observée:

- la question : « qui montre un décalage négatif par rapport à l'activité qui mène à la réponse exacte »,

- l'erreur : les erreurs peuvent être de natures différentes. Elles peuvent renvoyer à une mobilisation de connaissances non valides pour la stratégie visée par le professeur, et peuvent donc rendre compte d'obstacles cognitifs manifestes,

- la réponse incomplète (notée RI dans nos grilles d'analyse) : correspond à une réponse qui n'est pas suffisamment précise pour signifier si elle est correcte ou erronée. Elle est suivie généralement d'une relance du professeur pour amener l'élève à préciser sa réponse,

- le silence : « lorsqu'un élève est interrogé, il arrive qu'il reste silencieux, attendant un encouragement du professeur pour formuler sa réponse qu'il n'ose pas exprimer, attendant

[3] Roditi, 2003, p. 192.
[4] Ibidem, pp. 192-193.

une aide du professeur pour trouver la réponse attendue, ou attendant que le professeur se lasse et pose la question à un autre élève »,

- le désaccord alors que personne n'a tort : « il arrive que des élèves soient en désaccord alors qu'aucun d'entre eux n'a tort ». Ce type d'incident peut aussi venir de réponses incomplètes,

- la réponse à une question hors de portée des élèves : « ces incidents surviennent par exemple lorsque le professeur veut faire comprendre à la classe l'impossibilité de résoudre un problème et qu'un des élèves propose pourtant une solution ». Elle correspond aussi à une anticipation de l'élève de la connaissance ou de la stratégie visée alors que le professeur a prévu une progression plus longue. Dans ce cas, le professeur valide mais relance la classe sur d'autres pistes possibles.

La place de l'incident par rapport au scénario peut être de trois types[5] :
- soit l'incident ne porte sur aucun contenu abordé durant la séquence observée,
- soit il porte sur un objet d'enseignement qui n'est pas directement lié à la stratégie prévue par le professeur,
- soit enfin l'incident porte sur un contenu directement lié à la stratégie d'enseignement.

Le professeur gère un incident de plusieurs manières possibles. Roditi a classé ces différentes interventions[6] « en fonction de la possibilité de travail qui reste à l'élève après l'intervention du professeur ». Le professeur peut :

- ignorer : « le professeur se comporte alors comme s'il n'avait rien entendu »,

- répondre : le professeur indique alors que l'élève a tort en invalidant sa réponse, et fournit la réponse attendue avec ou sans explications supplémentaires. Il peut aussi seulement invalider la réponse et relancer sans fournir d'explications,

- enrichir : « l'enseignant détourne la réponse de l'élève et la complète pour parvenir à la réponse attendue. »,

- **relancer** : le professeur peut accorder davantage de temps de recherche à l'élève, à un autre élève ou à l'ensemble de la classe. Dans ce cas, cinq techniques sont décelées :

  - changer d'intervenant,
  - guider l'élève pour qu'il fournisse la réponse attendue,
  - faciliter la tâche en décomposant en sous-tâches par exemple,
  - demander un approfondissement de la réponse,
  - ou reprendre la réponse fournie de façon neutre.

Ces différentes réactions ne sont pas exclusives. Par exemple, un professeur peut invalider une erreur proposée par un élève, puis relancer la phase de recherche en facilitant alors la tâche, qu'il relance à l'ensemble de la classe.

Roditi définit alors l'adaptation du professeur comme un triplet composé :

[5] Ibidem, p. 194.
[6] Ibidem, p. 195.

- d'un incident,
- de sa place par rapport au scénario (un scénario se compose de l'ensemble de la séquence qui relate la résolution d'une tâche donnée par le professeur),
- de sa gestion par le professeur.

A partir des séances observées, nous avons isolé des scénarios, c'est-à-dire un ensemble d'interactions professeur/élèves autour d'une tâche donnée, puis nous avons cherché à analyser certains « incidents » (certaines grilles d'analyses obtenues sont données en annexe pp. 351-358) dont on suppose qu'ils ont un lien avec les comportements des élèves décrits, dont le chapitre 6 fait objet. **C'est à travers la nature d'un incident et de sa gestion par le professeur que nous cherchons à caractériser** :
- la gestion des **composants du champ conceptuel des isométries par le professeur**, dont ceux relatifs à la symétrie axiale, la symétrie centrale et la rotation, en pointant les validations et institutionnalisations du professeur et les résistances ou glissements des élèves.
- la gestion par le professeur des différents **passages de décomposition** des figures au sens de Duval (méréologique, instrumentale, dimensionnelle), auxquels la dialectique globale/ponctuelle fait écho.

Nous ne tiendrons pas compte de la composante « la place de l'incident par rapport au scénario », car ce que nous souhaitons dégager dans ce chapitre ce n'est pas le profil didactique de Mme B. mas sa gestion du savoir que nous étudions dans cette thèse, autrement dit **sa gestion des composants mathématiques qui vont donner du sens aux transformations** du plan chez l'élève et qui construisent alors l'ETG idoine visé par le professeur et développé en classe.

2.2 Découpage des séances observées en scénarios

Nous entendons ici par *scénario* un extrait de séance observée qui relate les interactions entre le professeur et l'élève autour de la résolution d'une tâche (ou d'un type de tâche) écrite ou orale proposée à l'ensemble de la classe par le professeur. La suite de ce chapitre porte sur les analyses effectuées de certains scénarios retenus en fonction de la nature de l'incident, de sa gestion par le professeur et de la dimension des éléments en jeu.

Le choix des scénarios retenus sur l'ensemble des séances observées porte sur leur pertinence quant à notre étude, en vue d'expliquer les résultats obtenus dans le chapitre 6. En effet, le chapitre 6 apporte un certain nombre de réponses quant aux questions de recherche n°1 et n°2 qui concernent le rôle joué par la symétrie axiale dans la construction de l'ETG personnel d'un élève de 5^{e} et de 3^{e}. Le chapitre 7 a alors pour but de répondre aux questions de recherche n°3 sur le rôle de l'enseignement dans la nature et l'évolution des ETG personnels décrits dans le chapitre 6.

Nous proposons le découpage suivant (tableau 7.1), qui répertorie l'ensemble des scénarios retenus. Nous notons *6.i* un scénario en classe de 6^{e}, *5.i* un scénario extrait d'une séance de 5^{e}

et *3.i* un scénario de 3e. Il est possible de relever plusieurs incidents au cours d'un même scénario. Il se peut également qu'un même incident se reproduise dans deux scénarios distincts.

Désignation du scénario	**Contenu de la séance (thèmes, activités, tâches, objectifs visés)**	**Séance(s) concernées**
6.1	**Introduction à la symétrie axiale** : Observation d'une photo de fleur de Lys (identique à celle intervenant dans les entretiens avec les tailleurs de pierre chapitre 3 p. 70). Tâches (annexe 7.a, p. 334) : *Comment reproduire cette fleur de Lys ? Comment compléter la moitié d'un motif simplifié de la fleur de Lys ?* Activité collective de reproduction au calque et par pliage. Validation du terme de « symétrique » et « superposable ».	*1ère séance*
6.2	Tâche (annexe 7.a, p. 334) : *Reproduire un triangle par rapport à un axe oblique et sur fond blanc.* Activité collective de pliage et piquetage au compas. Mise en évidence des propriétés de conservation globale.	*1ère séance*
6.3	Tâche (annexe 7.b, p. 335) : *Reproduire sur feuille quadrillée le symétrique d'une figure de référence (carré).* Mise en évidence de l'équidistance par rapport à l'axe de symétrie.	*2ème séance*
6.4	Tâche : *Reconnaître l'axe de symétrie comme la médiatrice des segments d'extrémités un couple {point ; image} à partir de la photo de la fleur de Lys* (toujours la même photo). Validation de l'algorithme de construction du symétrique d'un point.	*3ème séance*
	Interrogation surprise (construction du symétrique d'une figure, annexe 7.c, pp. 336-337). Synthèse des activités précédentes dans le cahier de cours.	*4ème et 5ème séances*
6.5	Institutionnalisation de la construction du symétrique d'un point à la règle et au compas.	*5ème séance*
Total des séances en 6e		***5***
5.1	**Introduction à la symétrie centrale :** activité des bateaux. Tâche (annexe 7.e, p. 339) : *Déterminer la transformation correspondant à la composée de deux symétries axiales (d'axe horizontal et vertical).* Activité collective dont la stratégie visée est le demi-tour.	*1ère séance*
5.2	Activités des cartes à jouer (le roi de coeur). Tâche (annexe 7.f, p. 340) : *Déterminer le centre de la symétrie centrale comme le milieu du segment d'extrémité le couple {point ; image}.*	*2ème séance*
5.3	*Construction de la définition du symétrique d'un point par symétrie centrale.*	*2ème séance*
	Activités individuelles sur trois nouvelles cartes à jouer.	*2ème séance*

	Type de tâche : *Reconnaître toutes les symétries axiales et/ou la symétrie centrale sur une même figure.*	
	Correction des activités individuelles des cartes. Activités individuelles sur les éventails. Type de tâche (annexe 7.g, p. 341) : *Déterminer les axes et centre de symétrie.*	*$3^{\text{ème}}$ séance*
5.4	*Construction du symétrique d'un point par symétrie centrale*.	*$4^{\text{ème}}$ séance*
5.5	Propriétés de conservation de la symétrie centrale d'après des tâches de construction.	*$5^{\text{ème}}$ séance*
	Interrogation surprise (avec même bateau que l'activité d'introduction, annexe 7.i, p. 343). Type de tâche 1 : *Tracer le centre de symétrie s'il existe.* Type de tâche 2 : *Construire le symétrique d'une figure par symétrie centrale.*	*$6^{\text{ème}}$ séance*
5.6	Exercice du livre : *construction du symétrique de points donnés et déterminer la nature de la figure obtenue (losange).*	*$6^{\text{ème}}$ séance*
	Suite exercices et corrections.	*$7^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$ séances*
5.7	Dans le cahier de cours : suite des propriétés de conservation.	
	Correction du devoir. Exercices de routinisation de construction tirés du livre.	
5.8	**Introduction au parallélogramme.** Tâche : *Construction des sommets du parallélogramme à partir de l'algorithme de construction du symétrique d'un point par symétrie centrale.* Définition du parallélogramme.	*$8^{\text{ème}}$ et $9^{\text{ème}}$ séances*
5.9	Propriétés & propriétés réciproques du parallélogramme (annexe 7.k et 7.l, pp. 345-346) et à partir de *tâches de construction*.	*$9^{\text{ème}}$ et $10^{\text{ème}}$ séances*
	Devoir sur table. Correction du contrôle.	*$11^{\text{ème}}$ et $12^{\text{ème}}$ séances*
	Les parallélogrammes particuliers. Différentes constructions des parallélogrammes. Interrogation surprise sur les parallélogrammes.	*$13^{\text{ème}}$, $14^{\text{ème}}$ et $15^{\text{ème}}$ séances*
Total des séances en 5^{e}		***15***
3.1	**Introduction de la rotation :** activités collectives (figures globalement invariantes inscrites dans un cercle). Tâche (annexes 7.m et 7.n, pp. 347-348) : *Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation.* Définition de la rotation.	*$1^{\text{ère}}$ et $2^{\text{ème}}$ séances*
3.2	Propriétés de conservation (annexes 7.o et 7.p, pp. 349-350)	*$1^{\text{ère}}$, $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ séance*
	Exercices de routinisation.	*$4^{\text{ème}}$ séance*
Total des séances de 3^{e}		***4***

Tableau 7.1 : découpage en scénarios des séances observées de Mme B. en 6^{e}, 5^{e} et 3^{e}.

Un facteur méthodologique imprévu

Je dois préciser un facteur important qui a sans doute biaisé le déroulement des séances de 5^{e} et de 3^{e} qui ont eu lieu durant l'année scolaire qui a suivi les observations de 6^{e} et le premier questionnaire exploratoire. Après mes premiers résultats (chapitre 4), obtenus à partir du premier questionnaire, j'ai fait l'erreur d'en discuter avec Mme B. J'ai notamment mentionné le principe d'exclusivité, qu'elle a trouvé intéressant, et nous avons soulevé ensemble la légitimité de l'enseignement en 5^{e} de la symétrie centrale. Je me suis alors rendu compte que notre conversation avait sans doute influencé ses interventions en 5^{e} mais aussi en 3^{e}. Je préciserai alors dans les paragraphes concernés les indices qui me confortent dans cette idée. Finalement, nous pourrons également tester si ces modifications dans sa stratégie d'enseignement auront des effets sur les élèves.

3. L'INTRODUCTION DE LA SYMETRIE AXIALE EN 6^{e} DANS LA CLASSE DE Mme B.

3.1 Une évolution progressive et dirigée par le professeur des différents types d'appréhension de la figure

a) Perception globale et pliage

Le scénario *6.1* concerne l'ensemble des échanges entre le professeur et les élèves à partir de l'observation d'une photo de la fleur de Lys (chapitre 3, p. 70). Mme B. a demandé à ses élèves d'expliquer comment ils s'y prendraient pour reproduire ce motif. La stratégie de décalquer la moitié du motif apparaît rapidement. Mme B. relance alors systématiquement le débat vers la recherche de points de repère pour déterminer l'axe de symétrie qui partage le motif en deux.

Nous invitons le lecteur à consulter l'analyse détaillée des incidents survenus lors d'un extrait du scénario *6.1* disponible dans le tableau 7.q (annexes, pp. 351-352). L'analyse de ces incidents nous amène à constater que le professeur relance presque systématiquement les réponses proposées des élèves (correctes ou erronées) dans le but d'approfondir les réponses proposées et d'arriver jusqu'à la connaissance visée. Par exemple, la désignation de la droite « verticale, au milieu » apparaît spontanément dans l'action, mais l'explicitation de ces termes provoque des incidents :

- la construction du « milieu » chez l'élève reste approximative alors que Mme B. attend une construction plus rigoureuse,
- la reconnaissance de la verticale est immédiate chez l'élève mais il ne parvient pas à formuler sa construction.

Mme B. relance alors le débat en guidant l'élève vers une décomposition des éléments considérés, c'est-à-dire vers une vision point par point (1D puis 0D). Elle finit par faire intervenir des conceptions plus élémentaires, du type « il suffit de deux points pour tracer une droite ». La non conservation de l'orientation de la figure est validée par Mme B. dans l'action. Le terme « symétrique », déjà évoqué dès le départ par les élèves, est également assez rapidement validé (oralement) au cours de ce scénario et est associé au schème du pliage. Lors de la tâche de reproduction de la moitié manquante du motif simplifié de la fleur de Lys (annexe 7.a, p. 334), Mme B. confirme le schème du pliage (3D) comme technique de contrôle pour vérifier la superposition, et même invoquer le caractère involutif, toujours dans l'action, à travers le « pliage, dépliage ».

b) Un premier pas vers la déconstruction instrumentale

Mme B. propose ensuite une activité de reproduction d'une figure de référence mais sans utiliser le calque. Il s'agit maintenant de construire le symétrique d'un triangle par rapport à un axe diagonal sur fond blanc (annexe 7.a p. 334). La stratégie adoptée est toujours de type empirique. Le professeur guide l'élève vers une décomposition des figures point par point. En effet, les élèves plient le long de l'axe et par transparence (à l'aide d'une fenêtre), ils pointent les sommets du triangle avec la pointe sèche du compas. En dépliant, il ne reste plus qu'à relier les sommets-images obtenus de l'autre côté de l'axe. Il s'agit donc d'un premier passage vers une décomposition des figures car on considère les sommets (0D) que Mme B. nomme A, B et C, puis les côtés en reliant les sommets (1D). Les élèves restent clairement dans une géométrie GI.

c) Quadrillage à « points nommés »

La tâche donnée dans le scénario *6.3* (annexe 7.b p. 335 et extraits p. 353) aux élèves de 6^{e} consiste à reproduire l'image d'une figure de référence (un carré) à partir cette fois d'un nouveau support : le quadrillage. Les critères d'équidistance déterminent cette fois explicitement la stratégie. L'orthogonalité reste implicite du fait des rappels horizontaux et verticaux d'un tel support, et apparaît comme la distance la plus courte jusqu'à l'axe. Les sommets du carré sont justement situés sur des croisements du quadrillage et le contrôle se fait toujours par pliage. Mme B. dirige le débat, nous ne décelons pas d'incidents. Elle propose la technique à adopter en introduisant une étape intermédiaire : nommer les points (0D). Elle introduit pour la première fois le formalisme langagier (qui appartient au vocabulaire des fonctions) associé à la symétrie axiale : « B' est l'image du point B dans la symétrie d'axe delta ». Mme B. décontextualise ainsi l'objet d'étude en décomposant la figure point par point. L'objectif de Mme B. au cours de cette séance est d'amener l'élève vers la reconnaissance de la médiatrice, d'où sa volonté de passer à une appréhension de la figure point par point.

La tâche se poursuit en construisant le symétrique du carré, cette fois par rapport à l'axe horizontal. En passant dans les rangs, il est intéressant de noter que de nombreux élèves font tourner leur feuille pour que l'axe horizontal devienne vertical. Cette tâche se déroule sans incident. Puis, lors de la dernière tâche de cette activité, les élèves doivent reproduire le carré par rapport à la droite diagonale (concourante avec les deux autres droites). Il ne suffit plus alors de suivre les rappels horizontaux et verticaux du quadrillage. Un incident se produit, que l'on repère sous la forme d'un théorème-en-acte (que nous retrouverons en 5e) : les élèves pensent que le symétrique du carré par rapport à la droite diagonale revient à la composée des symétries axiales précédentes (d'axe de symétrie vertical et horizontal). Un grand nombre d'élèves construisent alors en réalité le symétrique du carré par symétrie centrale, de centre le point d'intersection de ces trois axes (l'axe oblique et le repère orthogonal). Se rendant compte de cet incident[7], Mme B. décide alors de guider l'élève vers la stratégie visée, en insistant sur l'indépendance des axes entre eux, et en décrivant point par point les déplacements des points dans le plan. Il y a un saut cognitif important entre ces différentes tâches, qui ne va pas nécessairement de soi pour l'élève. L'élève passe du schème du pliage en 3D (mise en œuvre précédemment) à un déplacement point par point (0D) dans le plan (2D). Ce passage est largement guidé par le professeur. Des erreurs apparaissent car certains élèves ne tracent pas (CC') orthogonalement, mais plutôt sans direction précise, c'est-à-dire sans rechercher la distance la plus courte, car celle-ci n'est plus induite par les rappels horizontaux ou verticaux, comme cela était le cas dans les tâches précédentes. D'autres erreurs apparaissent du fait de vouloir aligner les précédentes images avec la nouvelle.

d) Du couple {Point ; Image} au schème de construction de la médiatrice

Lors du scénario *6.4*, les élèves travaillent à nouveau à partir de la photo de la fleur de Lys (la même que celle du scénario *6.1*). Le projet de Mme B. consiste à amener progressivement l'élève à reconnaître l'axe de symétrie comme la médiatrice d'un segment d'extrémités le couple {point ; image}. On ne reconnaît pas d'incidents, malgré des interactions variées entre le professeur et l'élève, mais ça sera tout de même Mme B. qui amènera la réponse finale :

> « P : Je vais vous demander de choisir quatre points sur la gauche du motif (…) Vous allez maintenant prendre un stylo vert, et vous allez chercher dans le motif de droite l'image de chaque point, et vous me l'appelez prime. (…) Maintenant, prenez votre règle et le crayon à papier. Je vous propose de **tracer tous les segments formés par un point et son image**. (…) Observez et trouvez-moi des choses à dire sur ces segments. (…)
> E : On peut voir que les segments [AA'], [BB'], [CC'] et [DD'] sont parallèles entre eux.
> E : L'axe de symétrie coupe les segments en leur milieu.
> E : Les segments sont perpendiculaires à l'axe de symétrie. (…)
> P : Donc regardez mon axe de symétrie delta qui **partage en deux** (…) *inaudible.* Et qui en plus **passe par le milieu de chaque segment**. Je répète, cet axe de symétrie d'après ce que vous m'avez dit, il passe par le milieu de chaque segment et il est **perpendiculaire à chaque segment**. Qu'en pensez-vous ? Est-ce que ça ne vous fait pas penser … ? **Delta est la médiatrice de chaque segment**. »

[7] Il pourrait y avoir des incidents d'un autre type. Les travaux de Grenier (1989) pointent les difficultés liées à la position de l'axe de symétrie.

Dans la dernière séance observée (mais qui n'était pas la dernière concernant l'enseignement de Mme B. de la symétrie axiale), l'institutionnalisation se concentre sur la construction du symétrique d'un point à partir de la définition de médiatrice. Le formalisme mathématique du symétrique d'un point est donc associé à une construction instrumentée (menée par Mme B. au tableau).

> « P : On dit que **A' est le symétrique de A dans la symétrie d'axe d**…qui finit la phrase ? Alexandre.
> E : ….heu…
> P et E: **si d est… la… médiatrice du segment [AA'].** (…)
> P : On part toujours de la même manière. Un axe delta et un point A et un compas. On va travailler sur l'idée de la médiatrice bien sûr. Dans un premier temps, on écoute et puis on fait. **Avec mon compas, je vais aller couper mon axe delta en deux points, alors il faut que je choisisse un rayon pour qu'on puisse couper en deux points**. J'aurai donc déterminé un petit segment. **Je ne vais pas changer l'écartement de mon compas**, d'accord. **Et à partir de ces deux points,** que je ne prends pas la peine de nommer parce que ceux sont des points intermédiaires, ils n'ont pas besoin d'être nommés, **je vais tracer de l'autre côté un arc de cercle à partir de ce point et un autre arc de cercle à partir de ce point-là,** et bien ce point **A', à l'endroit où les deux arcs de cercle se coupent**, **sera le symétrique du point A,** et ça m'évitera de tracer la droite perpendiculaire. Y en a qui la préfèrent. »

On assiste alors à la construction « stéréotypée » du symétrique d'un point à partir de la construction de la médiatrice[8]. Des situations non standards (par exemple au bord de la feuille) ne sont pas évoquées dans cette phase d'institutionnalisation. Au cours de ce scénario, Mme B. relance le débat à partir des réponses des élèves, tout en les guidant vers une vision ponctuelle des figures en jeu. En revanche, dans les scénarios suivants, on constate qu'il y a moins de risques que des incidents se produisent car Mme B. dirige les débats. Ces scénarios sont en effet plus délicats car ils nécessitent une décomposition des figures.

3.2 Analyses des productions intermédiaires : l'ETG personnel de l'élève dans GI

Les tâches proposées lors de l'interrogation surprise (4[e] séance, document 7.c annexe pp. 336-337) portent sur les stratégies de reconnaissance et de construction[9] du symétrique d'une figure. Les résultats obtenus à l'exercice 1 montrent qu'à ce stade de l'enseignement, les élèves sont partagés sur le statut de l'axe de symétrie comme :

- repère de position pour le calque,
- repère pour le pliage (la pliure),
- origine pour mesurer.

Les stratégies attendues de reconnaissance et de construction, à ce stade de l'enseignement, se situent principalement dans une Géométrie I et portent principalement sur le pliage. Cependant, les élèves mentionnent explicitement la médiatrice ou certaines de ses propriétés à

[8] Lemonnier Jore, 2006, pp. 145-147
[9] Nous renvoyons aux travaux de Grenier (1989) concernant la difficulté des constructions semi-analytiques pour les élèves. Les situations de construction ne font pas parties des situations que nous étudions dans cette thèse.

la question de la « condition nécessaire pour que I' soit le symétrique de I » (le détail des résultats des élèves est organisé dans le tableau 7.d, annexe p. 338). Le discours écrit des élèves aux questions I a), b) et c) de cette interrogation surprise traduit une vision empirique de la géométrie, conformément à celle repérée en classe. Dans les tâches où il s'agit de réaliser une construction, l'association de l'outil à l'action dans le discours et la prégnance de la mesure chez une grande majorité des élèves (18 élèves sur 29, soit **62%** de la classe) traduisent un fort engagement de l'élève dans son ETG personnel dans GI.

« Plier la feuille en deux et pointer avec la mine du compas sur les points IJKL et relier les points de l'autre côté. Prendre une feuille de calque et décalquer IJKL puis repasser sur la feuille de calque et reproduire la figure. Utiliser les carreaux. »

« On se sert de la pointe du compas puis on pique dans les côtés. On peut aussi se servir de la règle pour savoir la distance du cerf-volant (…) la meilleure manière est de se servir de la pointe du compas. »

Bien qu'un certain nombre d'élèves reste à un niveau élémentaire à la question des conditions nécessaires I d), qui est d'un niveau de compréhension plus élevé, du fait de l'emploi du terme « nécessaire », certains mentionnent des indices du modèle mathématique élaboré en classe à la dernière séance. En effet, 7 élèves parmi les 29 (soit **24,1%** de la classe) formalisent la notion de distance à l'axe et expriment une vision ponctuelle. 11 élèves parmi 29 (soit **37,9%** de la classe) font explicitement référence à des propriétés mathématiques formelles d'orthogonalité, de parallélisme, ou de propriétés de milieu, ce qui n'exclut pas des références à une géométrie naturelle :

« Les conditions sont que I est à la même longueur de d que I' que si on trace un segment entre I et I' il faut qu'il soit perpendiculaire à d ; que si on trace un segment entre K et K' ; il faut qu'il soit parallèle au segment [II'] ; il faut que d soit la médiatrice du segment [II']. »

« Il faut que (d) soit la médiatrice de II' et que (d) coupe le segment II' en son milieu et quand on plie la feuille il faut que I et I' soient superposés. »

Il est donc important de noter qu'à ce stade de l'enseignement, ces élèves de 6e inscrivent leur discours et leurs gestes associés dans une vision empirique de la géométrie, dans un but de construction. Cependant, si la tâche est explicitement d'un autre niveau de compréhension, un tiers des élèves environ formule les propriétés mathématiques opérantes (orthogonalité, équidistance, conservation des mesures).

3.3 Découverte progressive du champ conceptuel de la symétrie axiale

Nous proposons le tableau suivant 7.2 comme une description de l'ETG que Mme B. a mis en place :

Progression chronologique : →

Type de dimension privilégiée	2D	2D 0D	1D 0D	2D 1D 0D	(on ne peut pas se prononcer)
Instruments support	Photo de la fleur de Lys Règle graduée	Triangle sur fond blanc Pliage, pointe sèche compas Règle graduée	Quadrillage Points nommés Règle graduée	Photo de la fleur de Lys Règle graduée compas	(on ne peut pas se prononcer)
Concepts et objets mathématiques invoqués	Axe de symétrie Milieu Superposition Orientation	Axe de symétrie Superposition	Axe de symétrie Distance Équidistance Image	Couple {point ; image} Parallèle Perpendiculaire Milieu Médiatrice	Conservation des mesures, des milieux, de l'alignement
Type de déconstruction des figures au sens de Duval	Méréologique	Instrumentale	Instrumentale	Dimensionnelle et instrumentale	(on ne peut pas se prononcer)

Tableau 7.2 : mise en place de l'ETG par Mme B. lors de l'enseignement de la symétrie axiale en classe de 6e.

On assiste à une progression vers un modèle mathématique du symétrique d'un point, qui passe par plusieurs types d'appréhension figurale. Nous remarquons un retour au même support qu'au départ pour invoquer les propriétés mathématiques caractéristiques de la symétrie axiale. Un même support (la fleur de Lys) va alors être à la fois pour l'élève :
- exploré dans une géométrie GI qui privilégie une perception de dimension 2D voire 3D pour introduire la symétrie axiale,
- mais aussi dans une géométrie qui tend vers GII pour faire émerger le modèle mathématique visé, mobilisant alors différents types d'appréhension de cette figure (1D et 0D). Le but de Mme B. étant de situer l'ETG personnel de l'élève dans cet horizon GII.
Mme B. guide l'élève vers la mise en relation des éléments de dimension inférieure de la photo de la fleur de Lys (0D) dont elle fait émerger des propriétés de géométrie affine euclidienne (1D) du type milieu ou orthogonalité (déconstruction dimensionnelle), afin de renvoyer l'élève au schème de construction de la médiatrice (déconstruction instrumentale).

La progression décrite précédemment dévoile alors progressivement les concepts fondateurs du concept de symétrie à travers cette dialectique globale/ponctuelle :
- la **conservation globale** est validée par la perception globale (calque, pliage) où l'axe de symétrie est un repère de position du calque, ou de la pliure,

- l'**équidistance** est mise en évidence à travers l'utilisation du quadrillage et/ou de la règle graduée où l'axe de symétrie tient lieu de repère d'origine pour mesurer,
- l'**orthogonalité et le milieu** sont finalement exploités afin de mettre en évidence le schème de la construction de la **médiatrice** et son formalisme associé,
- les **propriétés de conservation** sont institutionnalisées dans un dernier temps (nous n'avons pas assisté à ces séances mais nous avons eu confirmation que ces propriétés avaient été traitées).

On assiste alors à des basculements de paradigmes (GI-GII) et des passages d'une dimension à une autre, qui ne vont pas nécessairement de soi pour l'élève. Dans un premier temps, l'ETG personnel de l'élève validé par le professeur se situe dans GI et prend en compte l'espace tout entier (3D) du fait de la validation par pliage. Puis l'ETG personnel de l'élève se complexifie mais se limite au plan (2D) et considère alors le déplacement d'un point (0D). Différentes relations entre ces éléments de dimension inférieure sont alors mises en évidence pour structurer un ETG idoine (voire standard) de la symétrie axiale.

4. LA SYMETRIE CENTRALE DANS LA CLASSE DE 5^{e} DE Mme B.

4.1 Les schèmes intermédiaires entre la symétrie axiale et la symétrie centrale

Lors des premières séances d'enseignement de la symétrie centrale, nous avons relevé un certain nombre d'invariants opératoires (théorèmes-en-acte, concepts-en-acte) construits par les élèves à partir de la symétrie axiale, qui se révèlent alors sous la forme d'incidents au cours d'un même scénario (le *5.1*), qui est l'activité introductive de la symétrie centrale (document 7.e annexe p. 339). Certains d'entre eux se retrouveront même au cours d'autres scénarios et même lors du deuxième questionnaire (chapitre 6), révélant ainsi une certaine résistance de ces schèmes d'action, alors que d'autres n'auront été que transitoires.
Nous proposons dans les paragraphes suivant les résultats de l'analyse de ces incidents survenus lors du scénario *5.1*, lesquels mettent en évidence certaines résistances internes chez l'élève, qui vont alors complexifier l'aménagement de son ETG personnel.

a) Le théorème-en-acte de la symétrie d'axe oblique

Nous avions déjà relevé en 6^{e} que certains élèves envisageaient qu'une symétrie axiale par rapport à un axe oblique était le résultat de la composée de deux symétries axiales (dont l'un des axes était horizontal et l'autre vertical), et telle que les trois axes soient concourants (le repère orthogonal et l'axe oblique). Nous retrouvons ce théorème-en-acte erroné dès la première séance d'enseignement de la symétrie centrale en 5^{e}. On suppose alors que la première activité proposée par Mme B. favorise l'apparition de ce théorème-en-acte, car elle a choisi d'introduire la symétrie centrale comme la composée de deux symétries axiales, dont l'un des axes est vertical et l'autre horizontal. Dans un premier temps, les élèves construisent le symétrique de la figure F1 par rapport à un axe vertical (qui donne la figure image F2) puis par rapport à un axe horizontal (qui donne la figure image F3). Les élèves doivent ensuite trouver un moyen d'obtenir F3 sans passer par F2. Précisons que Mme B. n'hésite pas à utiliser le terme de « transformation » pour désigner maintenant la symétrie axiale.

> « E : **Avec un trait oblique**.
> P : Avec un trait oblique ?
> E : **Une droite oblique.**
> P : Tu vas nous expliquer ça plus clairement parce qu'on ne comprend pas ce que ça veut dire.
> E : **On passe par O**. et puis…euh.
> P : Et cette droite oblique passant par O, ça nous donnerait quel résultat ?
> E : C'est faux.
> P : Non j'ai pas dit ça, mais **qu'est-ce que tu ferais ? Comment ferais-tu pour trouver les points images ?**
> E : *inaudible.*
> P : Ce n'est pas très clair. Alors qui aurait une idée ? Sans passer par F2. **Mathilde ?** On imagine que F2 n'existe pas. **Qu'est-ce qu'on fait ? »**

Cet extrait du scénario *5.1* nous montre que Mme B. relance la réponse proposée par l'élève mais le débat s'essouffle assez vite, l'élève n'arrivant pas à préciser plus avant sa pensée. Mme B. tente de guider alors la réponse vers une décomposition point par point, en évoquant la construction des « points ; images » dans le plan. Un peu plus tard, ce théorème-en-acte émergera à nouveau chez un autre élève, mais Mme B. fera cette fois diversion en distribuant les papiers calques et ne relèvera donc pas l'incident. C'est seulement lors de la deuxième séance, au cours du scénario *5.2*, lors de l'activité avec les cartes, que ce théorème-en-acte sera enfin explicitement invalidé, cette fois sans passer par une vision point par point mais en restant à un contrôle de type pragmatique permis par le pliage (et donc en 3D) :

> « P : Alors tu nous proposes une symétrie par rapport à la diagonale. Alors ça voudrait dire que si on plie suivant la diagonale, qu'est-ce qui va se passer ? *Brouhaha.* Etre en parfaite coïncidence les uns avec les autres. Donc...
> E : Ça marche pas !
> P : **Donc cet axe est un faux axe.** Et si je regarde par transparence, regardez donc la position des piques... Est-ce que les deux piques viennent en coïncidence quand on fait semblant de plier ?
> E(s) : Non.
> P : **Donc on pourrait dire que les deux figures n'ont pas été reproduites comme on l'a fait l'année dernière**. »

Ce théorème-en-acte n'a pas été explicitement reconnu dans notre deuxième questionnaire. On suppose donc qu'il s'agit d'un schème intermédiaire, temporaire, construit par l'élève avec ses connaissances anciennes mais dont la mise en défaut a été apportée par le professeur dans un paradigme proche de celui de l'élève (autour du schème du pliage).

b) Le pliage par rapport à un point

Au cours de ce premier scénario *5.1*, l'élève cherche toujours à superposer sa figure F1 avec sa figure F3. En passant dans les rangs, on relève alors différentes manières de plier. Jonas, par exemple, pointe son doigt sur le point O avec le calque en dessous puis le retourne en diagonale, comme une page. Le théorème-en-acte du pliage par rapport à un point a été relevé dans de rares copies du deuxième questionnaire (et même en 3e), dont les résultats étaient instables. Ce schème semble donc un schème instable et temporaire dont la mise en défaut semble immédiate, comme le précédent, mais est laissé ici, implicitement, à la charge de l'élève.

Ces différentes méthodes de pliage, soit par un axe oblique, soit par le centre O, résultent d'une adaptation du schème disponible par l'élève (en 3D), autrement dit celui du pliage par rapport à un axe de symétrie, qui n'est pas valide ici. Ces schèmes sont alors évacués oralement par le professeur, ou invalidés de manière pragmatique. On suppose même que Mme B. les a elle-même encouragés car elle demandait à ses élèves de se rappeler ce qu'ils avaient fait l'année dernière, comme si finalement elle prévoyait ces réponses erronées. En revanche, elle s'est retrouvée à valider une proposition correcte d'un élève mais qui est apparue dès le début, autrement dit un peu trop tôt… et donc a provoqué également un incident. Un élève évoque prématurément le terme de « centre de symétrie ». Le professeur relance la réponse de l'élève mais sans l'enrichir. L'élève ne peut donc pas exprimer la réponse attendue par le professeur, car la réponse est hors de portée. Cependant, il évoque tout de même l'équidistance au centre O (l'équidistance étant un concept mathématique commun à la symétrie axiale). Mme B. finit alors par valider la réponse en la complétant succinctement, mais relance le débat immédiatement vers d'autres réponses possibles et donc d'autres incidents possibles.

.

c) Le demi-tour autour de l'axe

Ça sera finalement la stratégie du demi-tour que Mme B. validera toujours lors de ce scénario *5.1*, mais il reste un malentendu résistant à propos du *signifié* du centre de symétrie. En effet, l'élève n'a, à ce stade de l'enseignement, que la symétrie axiale comme connaissance disponible (concernant les transformations du plan), ainsi il s'adapte à la nouvelle situation et comprend que l'on tourne autour d'un axe normal au plan (comme nous l'avait fait remarquer un ébéniste dans le chapitre 3 p. 92). L'ETG personnel de l'élève se situe alors en 3D (comme pour le pliage) alors que l'ETG idoine attendu se situe seulement dans le plan (2D). Le centre de symétrie est pourtant l'intersection de cet axe orthogonal au plan qui correspond à l'axe de symétrie pour l'élève. Nous proposons ci-dessous l'extrait de l'incident révélant ce malentendu :

> « E : Ben moi je calque sur la figure F1, après avec le compas, je mets le compas sur le point O et sur le calque.
> P : Ah ! La pointe du compas ? Donc qu'est-ce que tu fais avec ce point O ?
> E : **C'est l'axe**.
> P : **C'est l'axe ? Le point O c'est l'axe. C'est un point !**

E : Oui.
P : Un axe c'est une droite. Et qu'est-ce que tu fais avec ce point avec ton compas dessus ? … Il dit qu'il met le compas sur le point O et après ?
E: Après il met le compas sur le point O et il tourne la feuille.
P : Vous avez entendu ? C'est là que j'aurais aimé avoir un rétroprojecteur n'est-ce pas… Elle calque son schéma, elle bloque, elle reproduit le point O, elle met le calque comme ça. Et qu'est-ce que tu fais ? Quel geste a-t-elle fait ? Elle a tourné son papier calque. [Mme B. mime le tout]. Voila elle calque F1 et elle tourne naturellement. Elle a tourné autour de quoi ?
E : Autour de O.
P : **Autour du point O qui lui est… complètement…**
E: **L'axe de symétrie.**
E(s) : **C'est le centre ! »**

Les échanges fermés entre l'élève et le professeur révèlent un malentendu résistant. Le professeur s'attend à ce que l'élève dise que le centre de symétrie est fixe et est le centre de symétrie, or en effet, il est clair pour l'élève que le centre de symétrie est l'élément fixe de la nouvelle transformation, matérialisé par la branche du compas, autour de laquelle tourne la figure, et qui permet la superposition recherchée des figures. L'élève fait donc une correspondance des signifiants (par analogie avec la symétrie axiale) pour caractériser cette invariance, et pour lui « le centre de symétrie est donc l'axe de symétrie ». Les interlocuteurs, n'usant pas des mêmes référents et n'étant pas dans la même dimension (l'élève se situe en 3D mais le professeur reste en 2D), ne se sont donc pas compris.
On retrouve ce glissement lors de la troisième séance lors d'une synthèse, qui révèle encore une fois un malentendu entre le professeur et l'élève. D'un côté, le professeur évoque lui-même la correspondance entre l'axe de la symétrie axiale et le centre de la symétrie centrale. Alors que d'un autre côté, l'élève fait également cette correspondance entre les deux transformations, mais l'exprime maladroitement, toujours à travers les signifiants langagiers dont il dispose et qui provoquent alors cet incident, du même type que précédemment :

« P : La nouvelle symétrie c'est quoi ? Qu'est-ce que vous avez retenu de tout ce qu'on raconte depuis trois jours ? Allez on vous écoute. Juliette ?
E : Y a le centre de symétrie.
P : Oui. Y a une histoire de centre de symétrie. Très bien. Vous avez retenu quoi encore ? Alors que l'an dernier on travaillait plutôt sur quoi ?
E(s) : Un axe.
P : Un axe. Là c'est un point. Qu'est-ce qu'il y a encore ? Quand je dis « symétrie centrale », quel est le pouvoir d'évocation de ce mot ? Tout de suite vous voyez quoi ?
E' : C'est lorsqu'on pivote. [non entendu par Mme B. mais noté lors de mes observations]
E : En fait l'axe de symétrie, c'est le milieu.
P : De qui tu parles ?
E : C'est un point.
E : **Le point c'est un axe de symétrie…**
P : Ah bon ?
E : **Enfin non pas un axe de symétrie mais… je sais pas comment on dit.**
P : Ben **je ne sais pas ce que tu veux nous dire.**
E : **Quand c'est le milieu de deux points.**
P : Oui. C'est pas le milieu de deux points, c'est le milieu d'un segment. **D'accord. Alors ?**

E : Alors si par exemple le point O est le milieu d'un segment [AA'], alors O peut servir comme un axe de symétrie.
P : Un axe de symétrie ? Comment un point devient une droite ?
E : En le traçant.
P : En le traçant… »

Ce malentendu entre l'élève et le professeur, qui ne sera pas levé par la suite, est donc résistant car on le retrouve dans plusieurs séances, et nous l'avons également retrouvé dans certaines copies de 5e lors de l'analyse du deuxième questionnaire lorsque l'élève désignait : « l'axe de symétrie centrale ». Cette dénomination « d'axe de symétrie centrale » peut être interprétée comme un signifiant de l'adaptation des connaissances anciennes de l'élève aux nouvelles connaissances visées par l'enseignement. Cet amalgame de notions (dont l'élève concatène lui-même les termes) ne semble pourtant pas résistant jusqu'en 3e (nous ne l'avons relevé ni dans les copies de 3e du deuxième questionnaire ni durant les séances observées).
Ce type d'incident est donc important car il révèle des problèmes cognitifs relatifs à la dimension des objets géométriques en jeu, liés à l'analogie de la symétrie axiale.

Une autre forme de glissement cognitif à propos de l'usage du signifiant langagier « axe de symétrie » a été relevée lors de l'interrogation surprise en 5e (à la sixième séance), lorsqu'un élève désigne comme « axe de symétrie » les segments {point ; image} qu'il trace pour déterminer le centre de symétrie, alors que ces segments ne sont pas non plus des axes de symétrie. Cette erreur est sans doute également une dérive du théorème-en-acte des droites concourantes si celles-ci sont effectivement des axes de symétrie, et que nous explicitons dans le paragraphe suivant.

d) Le théorème-en-acte des droites concourantes

Il s'agit d'un théorème-en-acte qui peut être erroné, mais qui est stable chez les élèves de 5e car nous l'avons trouvé fréquemment dans les copies du deuxième questionnaire de 5e (mais pas dans celles de 3e). Cassan (1997) avait également repéré un théorème-en-acte similaire dans ses expérimentations en classe de 5e. En effet, dans la situation des rosaces d'ordre 5, certains élèves reconnaissaient un centre de symétrie car les diagonales du pentagone, identifiées ou non par les élèves comme des axes de symétries, sont concourantes. En revanche, ce théorème-en-acte n'est pas erroné dans le cas de la rosace d'ordre 6. En effet, les diagonales sont bien des axes de symétrie et leur point d'intersection est bien le centre de symétrie.
Il s'avère que ce théorème-en-acte a sans doute pris ses racines dès la première séance d'enseignement de la symétrie centrale. La première activité rendait compte d'un repère orthogonal où l'axe horizontal et l'axe vertical, identifiés comme des axes de symétrie, se coupaient en un point O, identifié par la suite comme étant le centre de symétrie. Puis, lors de la deuxième séance, Mme B. a usé d'une carte à jouer (le roi, annexe 7.f p. 340) comme support (qui est donc un rectangle) pour mettre en évidence des couples {point ; image} dont les segments (qui ne sont pas des axes de symétrie) correspondant se coupent en un même

point O : le centre de symétrie. Notons que Mme B. traçait également ces référents graphiques (les segments {point ; image} étaient alors parallèles) dans le cas de la symétrie axiale en 6^{e}.

L'extrait suivant décrit la phase de communication qui suit la phase de construction des segments {point ; image} sur la carte, impliquant également un autre incident provoqué par la proximité des signifiés pour l'élève des termes « centre » et « milieu », que nous développons dans le paragraphe d'après.

> « P : Bon, vous allez regarder ce que vous avez obtenu et essayer de me faire toutes les remarques que vous avez à me faire. Tout ce que vous voyez et tout ce que vous auriez envie de me dire. Bon alors, tout ce que vous avez à me dire sur ce que vous venez de faire. [Beaucoup de doigts levés]
> P : **Tous les segments… se coupent… en un même point.** [Elle écrit au tableau en même temps]. Très bien. Autre remarque ? Roxane ?
> E : Ben le point, il est **<u>le centre des segments</u>**.
> P : Il est le centre des segments, **<u>c'est quoi le centre d'un segment ?</u>**
> E : **<u>Le milieu.</u>**
> P : Tu l'as vérifié ?
> E : Heu.
> P : **<u>Le point est… le milieu… de tous les segments</u>**. [Elle écrit au tableau en même temps]. Elle a raison. Autant dire que **vous avez tout compris sur la manière de trouver l'image d'un point par rapport à un autre point.** Cet autre point, vous l'avez bien compris, comment on va l'appeler ?
> E(s) : O.
> P : On peut l'appeler O comme tout à l'heure **<u>mais ça doit être le centre de symétrie de la figure.</u>** [on entend l'emphase] Et à ce moment-là vous comprenez bien que la reproduction de la figure en haut et à gauche va passer par le centre de symétrie et ça devient la figure en bas et à droite. Et ça fonctionne de cette manière-là, en passant par le centre et hop **ça repart dans l'autre sens. »**

Le fait que les points doivent être alignés n'est pas explicité à ce moment-là, mais est implicite dans la validation du centre de symétrie comme milieu des segments. Un changement d'orientation de la figure est suggéré à la fin de cet extrait : « ça repart dans l'autre sens », mais sera l'unique occasion d'évoquer l'orientation de la figure. Celle-ci ne semble pas être comparée à celle d'une figure symétrique par symétrie axiale, alors que nous avons évoqué à plusieurs reprises le théorème-en-acte différenciateur de l'orientation chez les élèves de 5^{e}, voire de 3^{e} dans les chapitres 4 et 6.
On constate dans l'extrait du scénario *5.3* que l'alignement des points ne va finalement pas de soi chez l'élève et que c'est surtout l'équidistance (comme pour la symétrie axiale) qui est exprimée consciemment chez l'élève :

> « P : (…) Alors je vais vous demander à partir de là, si j'avais envie de fabriquer une définition, si par exemple, j'avais envie d'écrire A' est le symétrique du point A dans la symétrie centrale de centre O [elle écrit en même temps au tableau]. On est bien d'accord ? A' est le symétrique du point A dans la symétrie centrale de centre O si… qui me termine la phrase ? Trouvez-moi une bonne raison pour que A' soit le symétrique de A. Allez réfléchissez. Lamine ?
> « E : Il **est à égale distance du point A. Le A'… à partir de la ligne.**
> E : A O !
> P : **Non ce n'est pas à égale distance**. A' est le symétrique de A dans la symétrie centrale de centre O… Romy ?

E : A' est à égale distance du point A par rapport au point O. **Et passe par le point O.**
P : Le point A' il passe par nulle part.
E : *inaudible* **se coupent en un point O**.
P : **Ce n'est pas correct.** On est sur le chemin. Alors A' est le symétrique du point A dans la symétrie de centre 0 si…
E : Si A et A' sont à **égale distance chacun du point O**.
P : C'est pas mal ça. A et A' sont à égale distance du point O. Mais **il manque la précision que j'attendais.** Juliette ?
E : **A'O= AO.**
P : Regardez, je trace un segment. [OA] et [OA'] deux segments de même longueur [Mme B. trace alors au tableau deux segments [A'O] et [AO] de même longueur mais A, O, A' ne sont pas alignés].
E : **Le segment [AA'] passe par O.**
P : Le segment [AA'] passe par O, on y arrive, on y arrive. Comment appelle-t-on, **comment peut-on dire de ces trois points A, O, A'** ? Ils sont… alignés. »

e) Le « milieu est le centre » (de symétrie)

On peut supposer que la validation du terme de *centre* de symétrie comme étant le *milieu* favorise les lapsus langagiers récurrents entre ces deux termes. On relève fréquemment des incidents dus à cette ambiguïté (voir les extraits cités précédemment) entre ces termes sans que le professeur lève explicitement l'ambiguïté, car il n'y a d'ambiguïté que chez l'élève. Il s'agit d'une erreur récurrente et résistante en 5^{e} qui consiste à considérer le centre d'une figure comme un centre de symétrie[10]. Nous ne retrouvons pas explicitement cette erreur en 3^{e} dans notre questionnaire, car le centre de la rosace d'ordre 5 n'est jamais pris pour un centre de symétrie mais toujours pour un centre de rotation.

f) Le théorème-en-acte de cocyclicité

On retrouve en 5^{e} les prémices de ce théorème-en-acte très prégnant en 3^{e} (chapitres 4 et 6). En effet, au cours de la deuxième séance d'enseignement de la symétrie centrale, Mme B. détaille la construction du symétrique. Elle fait elle-même la construction avec les instruments au tableau que l'élève doit reproduire ensuite dans son cahier de cours :

« P : Je répète la question. Trouvez un moyen pour tracer le symétrique du point M par rapport au point O.
E : Faut faire une demi-droite.
P : Faut faire une demi-droite. Elle part d'où ?
E : Elle part de M, et elle passe par O.
P : Ah il faut qu'elle passe par le point O. Une demi-droite qui passe par O.
E : On mesure…
P : On mesure quoi ?
E : On mesure le segment [MO].
P : On mesure le segment [MO] avec par exemple… ?
E : **Avec un compas**, puis on rapporte.
P : On ne rapporte pas on reporte.
E : **On reporte** pardon, **de l'autre côté**.
P : Et regardez ce que je fais ? Vous avez vu ce que c'est ?
E(s) : **Un demi-cercle**.

[10] Colomb, 1993.

> P : Un demi-cercle. **J'ai fait faire à mon point M un**…
> E : **Demi-tour**.
> P : Ben oui, un demi-tour. Evidemment, ceci est le rayon. Ceci est égal à ceci. [Elle fait donc un schéma codé en rajoutant l'égalité des rayons]. *Inaudible*. Vous allez coller sur votre page et vous allez garder une page blanche. Donc vous tournez la page. »

Le résultat de sa construction laisse apparent un demi-cercle. Ce signifiant graphique est à l'origine du théorème-en-acte de cocyclicité en classe de 3^{e}, qui permet aux élèves de reconnaître une rotation. Mme B. ira même, en 5^{e}, jusqu'à parler de rotation pour désigner la symétrie centrale. On peut alors imaginer qu'un théorème-en-acte équivalent en 5^{e} peut être mis en place par les élèves, que l'on pourrait formuler de la façon suivante : *si un point et son image (supposée) appartiennent à un demi-cercle, alors il s'agit d'une symétrie centrale.* Cependant, un tel théorème-en-acte ne sera relevé que dans de rares copies intermédiaires en classe de 5^{e} (activités préparatoires ou interrogation surprise) et ne sera pas du tout relevé dans notre deuxième questionnaire.

Synthèse de ces invariants opératoires et des adaptations survenues en classe de 5^{e}

A l'issue des analyses de nos observations en classe de 5^{e} dans la classe de Mme B., nous proposons un tableau (7.3) qui résume les différents schèmes d'action repérés en tant qu'incidents, pour reconnaître une symétrie centrale.

Schèmes d'action pour reconnaître une symétrie centrale	**Type d'interaction prof/élève**	**Durée de vie**	**Fréquence dans le deuxième questionnaire en 5^{e} (chapitre 6)**
Le théorème-en-acte de la symétrie d'axe oblique (2D) (a)	- vient de l'élève - schème invalidé en classe de manière pragmatique par le professeur	Temporaire	0
Le pliage par rapport à un point (3D) (b)	- vient de l'élève - schème invalidé en classe oralement par le professeur	Temporaire	Anecdotique
Demi-tour autour d'un axe normal au plan (3D) (c)	- vient de l'élève - malentendu résistant entre le professeur et les élève	Temporaire	Anecdotique
Théorème-en-acte des droites concourantes (2D) (d)	- vient du professeur - glissement par l'élève : évacuation de l'alignement des points.	Résistant	Très prégnant
Le milieu est le centre (2D) (e)	- vient de l'élève - malentendu résistant entre le professeur et les élèves	Résistant	Prégnant
Théorème-en-acte de cocyclicité (2D) (f)	- vient du professeur - institutionnalisé en classe	Temporaire	0

Tableau 7.3 : synthèse des schèmes d'action pour reconnaître une symétrie centrale d'après nos observations en classe de 5^{e}.

4.2 Analyses des productions intermédiaires mettant en évidence une déconstruction instrumentale chez les élèves de 5^e

Dans l'activité des éventails (annexe 7.g, p. 341) donnée à la fin de la troisième séance et lors de l'interrogation surprise (annexe 7.i, p. 343), dans laquelle les élèves doivent reconnaître une symétrie centrale, c'est la stratégie de l'intersection d'au moins deux segments {point ; image} qui est majoritairement invoquée par les élèves. D'après les stratégies décrites en classe (paragraphes précédents), on pouvait s'attendre *a priori* à d'autres stratégies du type :

- le tracé d'un segment {point ; image} et la détermination du milieu O (par mesure à la règle graduée ou avec le compas avec l'algorithme de construction de la médiatrice) ou encore la mise en évidence de l'équidistance,
- le tracé d'un segment {point ; image} et la détermination du milieu comme point fixe qui permettra de faire pivoter le papier calque d'un demi-tour,
- le tracé d'un segment {point ; image} et des demi-arcs de cercle : le milieu est le centre du cercle de diamètre la longueur du segment (théorème-en-acte de cocyclicité adapté en 5^e).

Le tableau ci-dessous (7.4) rend compte de la fréquence des stratégies *a posteriori* chez ces élèves de 5^e dans ces deux tâches (l'activité des éventails et l'exercice 1 de l'interrogation surprise) :

	Mesure et calque		*Construction plus instrumentée*			
Stratégies	Milieu d'un segment {point ; image}	Milieu d'un segment {point ; image} puis demi-tour avec le calque	Milieu d'un segment {point ; image} puis théorème-en-acte de cocyclicité (arcs de cercle)	**Intersection de deux segments {point ; image}**	**Intersection de plus de deux segments {point ; image}**	Autres
Dimension privilégiée par la stratégie	0D 1D	0D 2D	1D	**1D 0D**	**1D 0D**	
Effectifs sur 27 élèves dans la situation des éventails	(vide)	5	2	**9**	**9** (*)	2
Codage dans la situation des éventails	(vide)	(vide)	Sommets nommés : 1	égalité de mesure : 1 Sommets nommés : 1	égalité de mesure (O milieu) : 1 **Sommets nommés : 4**	(vide)
Effectifs sur 27 élèves à l'exercice 1 de l'interrogation surprise	3	2	(vide)	(vide)	**15** (**)	6
Codage à l'exercice 1 de l'interrogation surprise	(vide)	(vide)	(vide)	(vide)	**{Point ; image} nommés : 5**	(vide)

<u>Tableau 7.4</u> *: répartition des effectifs par stratégies dans l'activité des éventails et à l'interrogation surprise.*

(*) Dont 16 élèves parmi ces 18 élèves qui joignent le calque qu'ils ont également utilisé pour vérifier le demi-tour (voir un extrait d'une copie d'élève, annexe 7.h, p. 342)
(**) Aucun ne fait mention de demi-tour (un extrait d'une copie d'élève est disponible en annexe 7.j, p. 344).

Il apparaît donc dès la troisième séance que le théorème-en-acte des droites concourantes, dont l'intersection des « possibles » segments {point ; image} correspond au centre de symétrie, soit la stratégie de reconnaissance la plus prégnante en 5^{e}. On constate également que cette stratégie amène davantage les élèves à coder la figure ou y signifier des codages d'égalité de mesure par exemple. C'est par cette stratégie que Mme B. atteste également de la reconnaissance de la symétrie centrale (ou pas) dans l'activité des cartes à jouer (troisième séance), où pour la première fois, elle met explicitement en défaut le pliage dans le cas de la symétrie centrale :

> « P : Comment on fait pour vérifier ?
> E : Ben on plie.
> P : Vous savez pour la symétrie centrale, **on n'a pas besoin de pliage**, **le pliage c'est pour la symétrie axiale.**
> E : On choisit un point.
> P : Oui, dis-nous lequel.
> E : Le bout du 1 en haut à droite.
> P : Donc le bout du 1 en haut à droite.
> E : Puis le 1 en bas à gauche.
> P : Oui.
> E : **Puis on relie.** Avec le 1 en haut à gauche et avec le 1 en bas à droite.
> P : Donc c'est la même technique qu'on a fait avec le roi. »

D'après les résultats *a posteriori* de l'activité des éventails, on constate que les élèves sont partagés entre le nombre de segments {point ; image} suffisant pour attester que le point d'intersection est bien le centre de symétrie. Mme B. précisait alors (toujours durant cette même troisième séance, mais avant la réalisation de cette activité) dans le contexte des activités des cartes à jouer qu'il faut vérifier s'il n'existe pas au moins un segment {point ; image} qui ne passe pas par ce point d'intersection, soupçonné d'être un centre de symétrie.
L'extrait suivant est la correction de l'interrogation surprise (septième séance), Mme B. valide explicitement la stratégie des segments {point ; image} qui se coupent en un même point, et repose à nouveau la question du nombre de segments suffisants. Mme B. invoque cette stratégie en soulignant que ce point d'intersection est le milieu des segments et donc le centre de symétrie, alors que les élève semblent plus se concentrer sur le fait que les segments soient concourants.

> « [Mme B. relit l'énoncé de la première question et demande] :
> P: Alors qu'avez-vous fait ?
> E : **J'ai tracé chaque point fixe commun**.
> P : Commun n'est pas tout à fait le mot…
> E' (un autre) : Correspondant. (…)
> E **: A un moment, ils se coupent tous en un même point.**
> P : Les points ?
> E : Non les… les… segments.

P : **Les segments des points correspondants**. Oui…
E : **Ils vont se couper en un même point…**
P : Oui.
E : **C'est le centre de symétrie que j'ai appelé A.**
P : Très bien. Donc tu en as déduit quoi ?
E : Qu'il y avait un centre de symétrie.
P : Qu'il y avait un centre de symétrie (sur le ton de la validation). **Combien de segments as-tu tracé ?**
E : *inaudible*
P : Quatre segments. **Certains disent que deux ça suffit.**
E(s) : Non ! Trois ! *Léger brouhaha.*
P : Donc là, *inaudible.* Si vous repérez un point qui n'a pas l'air tout à fait d'être le symétrique d'un autre, **il suffit d'un exemple qui ne marche pas,** d'un segment qui ne passe pas par le point d'intersection. *Inaudible,* **Il peut y avoir tout un tas de petits points symétriques si le 157ème ne l'est pas**, **ça ne sera pas une symétrie**. Il faut toujours avoir l'œil aiguisé en géométrie. Est-ce qu'il y en a qui ont procédé autrement ? **Tout le monde a tracé les segments et cherché un centre de symétrie. Est-ce que deux segments ça suffit ?**
E : Non. Trois.
E : Quatre.
E : Moi j'en ai tracé trois. (…)
E : *inaudible.* **On choisit des points correspondants aux deux figures et on les rejoint, on remarque que les segments ne se coupent pas en un même point donc il n'y a pas de centre de symétrie.**
P : **C'est très bien, donc il n'y a pas de symétrie centrale sur ce schéma parce que vous avez plusieurs points d'intersection.** Alors justement, ça montre que si vous ne tracez que deux segments et vous vous arrêtez là, parce que deux segments tracés, ils se coupent. **Vous avez besoin d'un troisième pour voir que ça ne marche pas.** Comment vous pouvez expliquer que ça ne marche pas ?
E : On voit déjà que la figure elle est…
P : Vous l'avez vu à l'œil. Très bien.
E' : Elle est décalée.
P : A votre avis comment elle est placée cette figure ?
E : Elle est penchée.
P : Un peu plus penchée. Qu'est-ce que je n'ai pas fait par rapport à la première ?
E : Une rotation.
P : Oui je n'ai pas fait de rotation… de… 180°. J'ai fait tout en même temps, je l'ai tournée, je l'ai bougée et je voulais qu'à l'œil vous voyiez une différence avec la précédente. Alors… Oui ?
E : *inaudible.*
P : **Les deux segments ne se coupent pas en leur milieu. »**

La dérive de ce théorème-en-acte s'enracine de manière sournoise dans les pratiques des élèves sans que le professeur s'en rende compte. On comprend mieux alors la mise en place fréquente de ce théorème-en-acte dans les résultats de notre deuxième questionnaire en 5e (Chapitre 6).

4.3 Les propriétés de conservation en classe de 5e

La validation et l'institutionnalisation des propriétés de conservation viennent après la définition du symétrique d'un point et les schèmes de construction associés (décrits précédemment). Il en était de même lors de l'enseignement observé de la symétrie axiale.

Mme B. use du terme de symétrie, commun aux deux transformations, pour évoquer la propriété de conservation des mesures (caractéristique des isométries en général). En particulier, le rappel de la symétrie axiale évoque pour l'élève le principe de conservation des mesures par superposition. En effet, ce terme était souvent utilisé en classe de 6e (voir paragraphe précédent relatif à l'enseignement de la symétrie axiale en 6e).
A partir de la tâche de construction du symétrique d'un segment, d'une droite et d'un rectangle, les propriétés de conservation sont formulées oralement à partir d'échanges entre le professeur et les élèves. Puis ces propriétés sont écrites dans le cahier de cours. Mme B. rappelle en particulier les propriétés de conservation associées à la symétrie axiale afin que ses élèves s'en inspirent pour les reformuler dans le cas de symétrie centrale.

Les extraits suivants du scénario *5.5* mettent en évidence le caractère artificiel de la formulation de ces propriétés pour les élèves, qui ne voient finalement pas en quoi il s'agit d'un nouveau savoir, et qui ne perçoivent pas la différence avec la symétrie axiale.

> « P : Qu'est-ce que j'écris ici ? A a pour image…
> E : A'.
> P : A'. B a pour image…
> E : B'.
> P : B'. Le segment [AB] a pour image…
> E(s): [A'B'].
> P: [A'B']. Y a très peu de chance qu'un segment ait pour image un triangle. Pourquoi ?
> E : Parce que c'est de la symétrie
> P : Et que …
> E **: C'est symétrique.**
> P : Et que c'est symétrique comme tu dis et que…
> E : Et que ça va être **la même chose, ça va être pareil.**
> P : Ça va être pareil. C'est-à-dire que les deux figures doivent être…
> E : **Pareilles.**
> P : Pareilles, ce n'est pas un terme mathématique.
> E : **Superposables !**
> P : Superposables. Merci. Elles doivent être superposables. Donc si vous devez expliquer à quelqu'un ce qu'il se passe lorsqu'on trace le symétrique d'un segment. Qu'est-ce que vous diriez ? Que diriez-vous de l'image d'un segment ? **En vous souvenant de ce qu'on a décrit un petit peu sur la symétrie axiale.** Vous avez dû apprendre un certain nombre de propriétés. ***L'image d'un segment est un segment…*** **vous avez tous fait la symétrie axiale.** Qu'est-ce qu'on pourrait dire, là ? L'image du segment [AB] est le segment [A'B']. On vient de vérifier que ces deux segments ont exactement la même longueur. Qu'est-ce qu'on pourrait dire ?
> E **: Qu'ils sont à égale distance du point O.**
> P : Qu'ils sont à égale distance du point O.
> E': **Que dans la symétrie, ben que l'image d'un segment est un segment…**
> P : …est un segment… [En attente de la suite, Mme B. monte le ton de la dernière syllabe]
> E [reprend] : De même longueur.
> P : De même longueur [elle baisse le ton], très bien. C'est ça la propriété. C'est ça qu'il va falloir apprendre par cœur. *Dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur.* (…)
> E : **Madame, je crois qu'on l'a déjà écrit.**
> P : Eh bien c'est pas grave mais je crois pas qu'on avait conclu.

> E : On l'a écrit quand on regardait…
> E' : L'année d'avant
> P : Si c'est l'année dernière je suis d'accord. L'année dernière on l'a écrit, c'est sûr, mais là on est dans la symétrie centrale. Donc c'est à apprendre par cœur, *l'image d'un segment est un segment de même longueur.* **On dit aussi que la symétrie centrale conserve les... y en a qu'ils l'ont utilisé, vous vous souvenez ? Conserve les... conserve les... distances, les longueurs. »**

L'extrait de ce scénario montre bien que le concept d'équidistance est disponible chez l'élève, qui caractérise le symétrique d'un point par rapport à un axe de symétrie ou un centre de symétrie. Puis, à force d'effets Topaze[11], l'élève formule enfin la propriété qui résonne finalement comme un dicton dont le sens originel a été évacué : « Dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur ». Et c'est exactement sous cette forme que nous retrouvons citée cette propriété dans le deuxième questionnaire, chez certains profils d'élèves, notamment ceux chez qui l'on soupçonnait de forts effets de contrat (chapitre 6).

Dans un cheminement similaire (lors des sixième et septième séances), les élèves formulent des « nouvelles » propriétés supplémentaires (voir la grille d'analyse 7.r annexe pp. 354-357) en articulant différents éléments de dimension inférieure (1D et 0D) qui composent la configuration. Ce cheminement est articulé autour de :
- la construction (point par point) de l'image d'une droite, d'un rectangle puis d'un angle,
- le rappel correspondant de la symétrie axiale,
- des interventions du professeur proches de l'effet Topaze,
- un réinvestissement non valide des propriétés précédentes de conservation.

4.4 Passage «guidé »par le professeur vers une décomposition formelle des figures point par point

Rappelons qu'en classe de 6^{e}, la résolution des tâches et la formulation des propriétés étaient largement guidées par Mme B. Elle amenait progressivement ses élèves à considérer et nommer les points d'une figure :
- d'abord les points caractéristiques de la photo de la fleur de Lys,
- puis les sommets du triangle nommés,
- et enfin les sommets du carré et les sommets images du carré-image : « B' est l'image de B »,
- jusqu'au programme de construction du symétrique d'un point adapté de l'algorithme de construction de la médiatrice.

En classe de 5^{e}, dès la première séance, Mme B. rappelle le programme de construction uniquement point par point du symétrique d'un point par rapport à un axe. Puis, comme nous l'avons décrit précédemment, elle fait émerger progressivement les différentes manipulations

[11] Brousseau, 1998, p. 52.

et constructions possibles des élèves afin d'obtenir le symétrique d'une figure dans une symétrie centrale. Cependant, elle ramène toujours le discours de l'élève vers la construction point par point des « points images », comme l'illustrent certains extraits déjà cités précédemment. Dès la deuxième séance, elle donne la définition du symétrique d'un point dans le formalisme mathématique, qu'elle enchaîne avec l'algorithme de construction (extrait déjà cité précédemment) :

« P : (…) Si j'avais envie de fabriquer une définition, si par exemple, j'avais envie d'écrire **A' est le symétrique du point A dans la symétrie centrale de centre O** [elle écrit en même temps au tableau] (…)
E : On mesure le segment [MO].
P : On mesure le segment [MO] avec par exemple… ?
E : **Avec un compas**, puis on rapporte.
P : On ne rapporte pas on reporte.
E : **On reporte** pardon, **de l'autre côté**.
P : Et regardez ce que je fais ? Vous avez vu ce que c'est ?
E(s) : **Un demi-cercle**.»

Mme B. décrit les figures point par point et amène ainsi l'élève vers une déconstruction instrumentale des figures. Cependant, on retrouve une difficulté cognitive qui relève du « hiatus dimensionnel », décrit par Duval (chapitre 4 p. 123). En effet, la construction des objets est instrumentalisée et passe d'abord par le tracé d'éléments de dimension 0D (les points), puis les éléments de dimension 1D (les droites et les segments) jusqu'à la figure visée de dimension 2. La tâche proposée ici par le professeur (faire émerger des propriétés de conservation à partir de la construction du symétrique d'une figure) emprunte un chemin inverse : on décompose la figure obtenue après construction (donc de dimension 2D ou 1D) en éléments de dimension inférieure 1D et 0D dans le but de faire apparaître des relations pertinentes entre ces éléments. Et d'après Duval, c'est une « révolution cognitive » qui ne va pas de soi.

Notons que Mme B. n'hésite pas à employer le terme de *rotation*, ou encore plus généralement le terme de *transformation*. De plus, quelques malentendus langagiers, comme le montre par exemple l'extrait suivant, tiré de la deuxième séance, ajoutent une complexité à ces passages d'une dimension à une autre :

« P : Qu'est-ce qu'on a commencé par faire ? Vous levez la main.
E : On a pris des points, en haut à gauche de la figure.
P : On a choisi combien de points ?
E : Cinq points.
P : **J'ai demandé qu'ils soient comment ces points ?**
E : **En haut à gauche.**
P : **En haut à gauche oui mais… caractéristiques**. Et on les a tracés en rouge. Deuxièmement, qu'est-ce qu'on a fait ?
E(s) : On a relié.
P : Avant de les relier. Qu'est-ce qu'on a fait ? Donc qu'est-ce qu'on a fait… **on a… ceux ne sont pas les mêmes.** *Inaudible.* **On a cherché les cinq points correspondants en bas et à droite** [elle écrit en même temps au tableau]. **Qu'est-ce qu'on a fait en troisième partie ?**
E : **On a relié.**

> P : On **a relié les points A et A', B et B ',** etc. D'accord ? On a tracé les segments. »

Dans ce court extrait, le discours des élèves reste à un niveau de repère visuel global : « en bas à gauche », alors que le discours du professeur s'inscrit dans un point de vue analytique. Les élèves ont surtout retenu l'action de relier des points entre eux, alors que Mme B. attend une description également plus analytique : ce sont des points distinguables (nommés) et leurs images respectives (également nommées) qu'ils ont reliés, et qui forment ainsi des segments dont l'intersection est leur milieu respectif (le centre de symétrie). Il se déroule un changement de contrat au niveau du vocabulaire. L'élève reste à un niveau GI, tandis que le professeur les reprend dans un niveau GII.

Lors de la correction de l'activité éventail (quatrième séance et annexe 7.g, p. 341), Mme B. insiste en particulier sur le fait de mettre en évidence des couples {point ; image} que l'on distingue en les nommant. Cependant, *a posteriori*, une majorité des élèves ont bien tracé ces droites mais n'ont pas nécessairement nommé les points (ils sont seulement 6 élèves sur 27 à l'avoir fait, voir tableau 7.4 p. 234), et n'ont pas non plus codé la figure pour mettre en en évidence O comme le milieu. Il en est de même lors de l'interrogation surprise (sixième séance), ils sont une majorité à avoir sollicité le théorème-en-acte des droites {point ; image} concourantes, mais ils sont seulement cinq élèves à nommer les points et leurs images dont ils tracent le segment (tableau 7.4). Il en est de même d'après les résultats de notre deuxième questionnaire (chapitre 6), où très peu d'élèves n'ont ni nommé les sommets des triangles dans la situation dite de perception globale, ni nommé les points remarquables dans la situation des rosaces alors que Mme B. semblait particulièrement insistante sur ce passage aux point nommés. Elle commençait notamment les corrections d'exercices par dire qu'il faut d'abord « coder la figure ». Elle notait également au tableau le symbolisme associé qui rappelle celui des fonctions : comme par exemple « N→N' ». Finalement, peu d'élèves appliquent eux-mêmes spontanément ce codage. En particulier, peu d'élèves ont nommé les points remarquables ou les sommets dans les copies du deuxième questionnaire (contrairement aux élèves de 3^{e}).

On en déduit donc que le passage vers une déconstruction dimensionnelle ne va pas de soi, comme le soulignait déjà Duval (2005), et ceci nous conforte dans notre hypothèse, élaborée d'après le chapitre 6, que les indices de passage vers la déconstruction dimensionnelle chez les élèves en 5^{e} relèvent surtout d'effets de contrat.

4.5 Le parallélogramme : vers la déconstruction dimensionnelle

La séance d'introduction du parallélogramme arrive à la huitième séance. Mme B. propose la tâche de construction suivante, qu'elle écrit au tableau :

> *- Placer deux points A et B distincts dans le plan. Choisir un point O centre de symétrie.*

O≠A et O≠B
- Construire le symétrique C du point A par rapport à O.
- Construire le symétrique D du point B par rapport à O.
[Elle précise oralement qu'elle ne donne aucune mesure].

Après quelques minutes, Mme B. trace (avec les instruments correspondants) elle-même le résultat de la construction en distinguant par couleur les côtés opposés (fig. 7.5) :

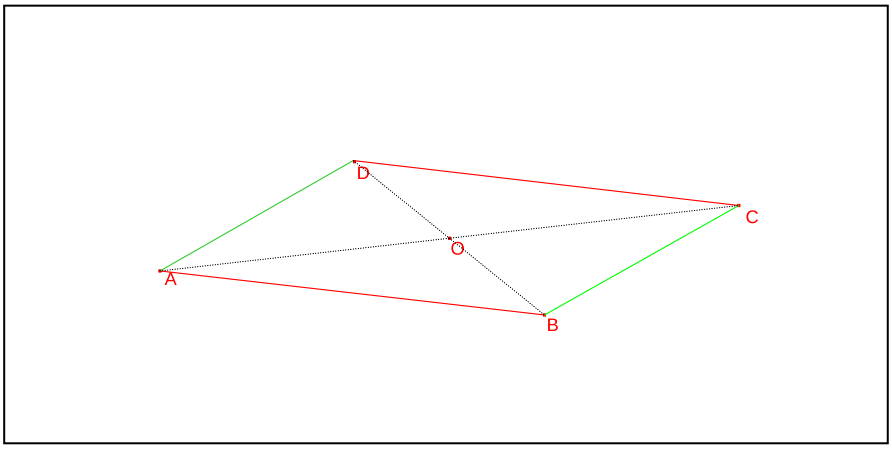


Figure 7.5 : parallélogramme construit par Mme B. lors de la séance d'introduction du parallélogramme.

A partir de la construction sommet par sommet de ce parallélogramme (sollicitant le schème de construction du symétrique d'un point par symétrie centrale, comme décrit précédemment), Mme B. amène ses élèves à formuler les propriétés caractéristiques du parallélogramme (avec l'aide, certes, de quelques effets Topaze). Elle commence par le catégoriser comme un quadrilatère (2D), puis elle fait apparaître des relations entre les éléments du parallélogramme de dimension inférieure. Sont ainsi formulées les propriétés de géométrie affine (« les côtés opposés sont parallèles » 1D) et de géométrie affine euclidienne (« les côtés opposés sont de même mesure » et « les diagonales se coupent en leur milieu » 1D et 0D) caractéristiques du parallélogramme. Elle amène ainsi l'élève vers une déconstruction dimensionnelle du parallélogramme (dans sa forme standard), au sens de Duval, c'est-à-dire assujetti à un discours axiomatique. L'extrait tiré de la huitième séance illustre ce passage dirigé par le professeur vers la déconstruction dimensionnelle :

« P : Qu'obtenez-vous ?
E : Un rectangle heu…
E : Un parallélogramme.
E': Un **quadrilatère.**
P : C'est un quadrilatère, très bien. Vous n'avez pas tous le même résultat parce que vous n'avez pas tous choisi les mêmes **positions des points A et B** par rapport au point O. Alors c'est un **quadrilatère qui est caractérisé par quoi** ? De manière très évidente par les couleurs. C'est un quadrilatère qui est caractérisé par quoi ?…
E : *inaudible.*
P : Par **les côtés parallèles** hein. Qu'est-ce qu'on pourrait dire de ce quadrilatère ?
E : Que AB *inaudible.*
P : Oui, seulement ? *brouhaha.*

P : Alors comment vous pourriez me dire en français les caractéristiques de ce quadrilatère ?
E : Un **côté est parallèle au côté opposé.**
P : Oui… Bon allez… Quoi d'autre de plus joli ? Ça c'est un quadrilatère dont les côtés… sont…
E : De la même longueur.
P : On a parlé de parallèle Andréa, on n'a pas discuté sur les longueurs pour l'instant. Donc c'est quoi ce quadrilatère dont les côtés sont…
E(s) : Parallèles
P : Parallèles…
E : Deux à deux.
P : **Sont parallèles deux à deux**. Très bien. Alors certains connaissent déjà son nom. C'est le quadrilatère le plus important de la 5e… c'est le …
E(s) et P: **Parallélogramme.**
P : C'est le parallélogramme. Alors bien sûr il a des côtés parallèles deux à deux mais qu'est-ce qu'on pourrait dire d'autre sur le parallélogramme ? Quelles autres caractéristiques a-t-il ? A première vue avec ce qu'on a fait avec la symétrie centrale ?
E : Que les droites (BC) et (AD) sont égales, enfin elles ont même…
P : Des droites ne peuvent être égales que si elles sont confondues.
E : Elles sont…
P : Vous devez comprendre qu'en mathématiques certains mots ont une signification très précise et qu'on ne peut pas remplacer un mot par un autre.
E : Le **segment [AB] a la même mesure que le segment [DC**].
P : Pourquoi ?
E : Parce que dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même mesure.
P : Formidable. Donc on **constate que les segments [AB] et [DC] sont égaux du point de vue de la longueur. On pourrait même le démontrer.** Qu'est-ce qu'on pourrait voir aussi ?
E : Que le segment [AD] a la même mesure que le segment [BC].
P : De même le segment [AD] a la même mesure que le segment [BC] mais AB et BC ne sont pas forcément de la même mesure, on est bien d'accord ?
E : Oui.
P : Donc c'est aussi un quadrilatère dont les côtés sont…
E : Egaux deux à deux.
P : **De même mesure deux à deux.** Autre manière de les caractériser. Qu'est-ce qu'on pourrait dire encore ?
E : **Les diagonales se coupent en leur milieu.**
P : Très bien, les diagonales se coupent en leur milieu. Et bien d'autres choses qu'on verra plus tard. Donc voilà, on se retrouve devant un quadrilatère qui est assez facile à obtenir par symétrie centrale, on n'a pas eu de mal à le tracer. Qui a un certain nombre de propriétés caractéristiques très importantes que l'on peut prouver et qui s'appelle un parallélogramme. »

L'objet parallélogramme étant introduit à partir du schème de construction du symétrique d'un point, il est donc introduit à partir du tracé de ses diagonales qui se coupent en leur milieu. La définition du parallélogramme, qui est validée dans la séance d'après (neuvième séance) est pourtant une définition de nature affine, qui porte sur le parallélisme des côtés (1D) : « Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles ». L'intersection des diagonales en leur milieu est formalisée dans un deuxième temps, en tant que première propriété institutionnalisée. On constate cependant, dans un extrait tiré de la neuvième séance, que les élèves semblent se reposer toujours sur le théorème-en-acte des droites concourantes :

« P : (…) Comment pourrait-on faire pour trouver ce centre de symétrie ? Ces deux droites sont parallèles et donc peuvent être symétriques l'une par rapport à l'autre. [Brouhaha et plusieurs doigts se lèvent].
P : D'accord. Allez, trace-nous les diagonales.
P : Voilà… tu as appelé O l'intersection de ces diagonales. Donc on peut dire effectivement dans la symétrie de centre O… Alors est-ce que vous êtes sûrs de ça ? … Non ?
E : Si
P : *inaudible* les **diagonales d'un parallélogramme… elles se coupent** ?
E : **Toutes en un même point.**
P : Toutes ? Il n'y en a que deux. Elles se coupent en un même point et en plus ?
E : En leur milieu. »

Conclusion de l'enseignement de la symétrie centrale en 5e dans la classe de Mme B.

Nous avons mis en évidence certains décalages ou malentendus entre l'élève et le professeur lors de l'enseignement de la symétrie centrale en 5e, visibles sous la forme d'incidents. En particulier, le théorème-en-acte des droites concourantes est issu de pratiques dénaturées par l'élève mais construites en classe, voire impulsées par le professeur, et souvent en lien direct avec la symétrie axiale. On constate des passages largement « guidés » par le professeur vers une vision ponctuelle mais aussi une déconstruction dimensionnelle des configurations, car les élèves restent souvent à un niveau de déconstruction instrumentale. Ces passages d'une dimension à une autre stimulés par le professeur concernent :
- le codage de la figure, en particulier les points nommés,
- les propriétés de conservation formalisées,
- le formalisme des transformations du plan point par point (vocabulaire et symbolisme des fonctions),
- un niveau formel de langage en géométrie affine et géométrie affine euclidienne,
- la déconstruction dimensionnelle associée au parallélogramme.

Des renvois réguliers à la symétrie axiale provoquent alors quelques incidents au sens de Roditi, excepté lors de l'enseignement du parallélogramme. On suppose que ces références (au niveau de la construction des schèmes opératoires, ou des propriétés de conservation) entretiennent alors l'amalgame entre la symétrie axiale et la symétrie centrale chez l'élève, comme identifié dans le deuxième questionnaire et conservent ainsi le rôle impérieux accordé, socialement et scolairement, à la symétrie axiale.

Les effets de contrat repérés chez l'élève de 5e dans le deuxième questionnaire portent sur ces passages d'une dimension à une autre, menés par le professeur, mais qui ne sont pas encore maîtrisés par l'élève. Ces glissements de contrat pointent ainsi une résistance interne de l'élève qui va sans aucun doute jouer un rôle dans la difficulté que présente l'aménagement de son ETG personnel vers GII.

5. LA ROTATION DANS LA CLASSE DE 3^{e} DE Mme B.

Nous avons décrit dans le chapitre 6 les schèmes de reconnaissance de la symétrie axiale et de la rotation sollicités par un élève de 3^{e} dans plusieurs tâches de reconnaissance des transformations du plan. Nous avons en particulier mis en évidence la stabilité de l'ETG personnel d'un élève de 3^{e} dans cette classe de situation due à la souplesse d'adaptation des schèmes propres à la symétrie axiale. Dans la situation des triangles, la rotation impliquait une déconstruction instrumentale de la configuration, inhibant les propriétés métriques dont en particulier la conservation de la mesure d'angle. Un tel procédé confirme alors la thèse de Duval, qui oppose la déconstruction dimensionnelle à la déconstruction instrumentale. Dans la situation des rosaces, la reconnaissance de la rotation passait par un schéma commun bien établi répondant également à un modèle de construction implicite.
Nous allons montrer dans le paragraphe qui suit **comment certains des invariants opératoires qui constituent ces schèmes se sont formés en classe.**

5.1 Les composants du schème de reconnaissance de la rotation selon la tâche

Les composants qui organisent les schèmes d'action d'un élève de 3^{e} dans le cas d'une situation de reconnaissance d'une figure globalement invariante émergent clairement dès la première séance, lors de l'activité introductive proposée (scénario *3.1*, annexe 7.m, p. 347). On constate alors que les tâches proposées (appartenant à la même classe de situation de reconnaissance des transformations du plan) ne sollicitent pas tout à fait les mêmes concepts « caractéristiques » de la rotation. Ces critères sont formulés en classe de manière linéaire, sans incident au sens de Roditi. Les deux tableaux ci-dessous 7.6 et 7.7 mettent en évidence les critères de la rotation formulés en classe à la suite d'échanges entre le professeur et les élèves lors de cette première activité (scénario *3.1*) :

Critères caractéristiques validés de la rotation	***Extrait du Scénario 3.1 (donné dans l'ordre chronologique)***	***Dimension des éléments considérés***
Le motif de départ	« P : Bon alors j'ai choisi trois schémas qui me paraissent assez significatifs pour que vous répondiez à la question : [elle lit l'énoncé] Imaginer **un procédé** permettant de réaliser le motif japonais **à partir du motif de base,** vous pouvez utiliser du papier calque. Alors qui a besoin de papier calque ? J'ai amené du papier calque. [Elle distribue le papier calque] Bon, ne perdez pas dix minutes à faire cet exercice, qu'est-ce qu'il se passe, bref, vous devez me décrire la transformation. **Quel est le motif de base ?**	2D
L'ordre de la rotation	(…) P: [à un élève en particulier] Motif de base ? **Y en a combien là-dedans ?** E : Trois. P : Donc vous avez déterminé le motif de base, donc comment a-t-on fait pour reproduire le motif de base ?	2D

Le centre du cercle	(…) E : Il faut tracer un cercle qui touche chaque extrémité (…) et après on divise par trois (…) et on reproduit en tournant par rotation. (…) ils doivent être dans un cercle. P *: inaudible…* Donc ça veut dire qu'il y a **une histoire de centre.**	0D
La mesure d'angle	(…) P : Voilà on l'a fait tourner et on a reproduit le motif. L'idée c'est de se dire que pour réaliser exactement ce motif, il est quand même régulier, on n'a pas un motif qui passe par-dessus l'autre, on a dû essayer de faire les choses **de manière régulière**. D'accord ? Donc cette rotation, *inaudible*, évidemment y a ce point, on tourne autour de ce point **mais on tourne de combien ?** E : de 120° P : de 120°, *inaudible*, qui tombe du ciel ?! E(s) : **360 divisé par 3.** P : Voilà. Il y a trois motifs… donc 360 divisé par 3. On trouve 120°. Voilà. Il manque un petit détail.	2D 1D
Le sens	E **: Le sens** P : Le sens bien sûr ! Donc quel est le sens de votre motif ? E : Sens inverse des aiguilles d'une montre. *Inaudible* P : Alors c'est bien, lui il me dit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, lui… E : Dans les deux sens, il faut juste savoir lequel. *Inaudible* P : Voilà mais **toujours dans le même sens.** Tout le monde est d'accord, il faut choisir le sens au départ. Bon ben c'est très bien ça, vous avez prononcé **le mot rotation**, **le mot centre du cercle**, on a **déterminé un angle** et vous me dites il faut **un sens.** Ici peu importe, dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. »	(pas de dimension)

<u>Tableau 7.6</u> : les critères caractéristiques de la rotation lors du scénario 3.1 (exercice 1 activité 1, annexe 7.m, p. 347).

Nous remarquons que la conservation de l'orientation de la figure dans le plan n'est pas explicitée dans cette situation alors qu'un sens est déterminé. Dans le cas de la symétrie axiale en 6^{e}, le changement d'orientation de la figure était relevé seulement dans l'action : « le calque devait être retourné ». La conservation globale des dimensions reste également implicite.

Les exercices suivants (de la même activité, document 7.m, annexe p. 347) mettent en jeu deux figures : l'une est la figure de départ et l'autre la figure d'arrivée. On constate alors que les composants des schèmes d'action, mis en évidence au cours de cette phase de communication et de validation, qui caractérisent aussi la rotation, diffèrent légèrement de ceux décrits précédemment :

Critères caractéristiques validés de la rotation	***Suite de l'extrait du scénario 3.1***	***Dimension des éléments considérés***
Orientation de la figure	« E : C'est une symétrie axiale. P : Tu penses que c'est une symétrie axiale ? Est-ce qu'il y a une grande différence avec le numéro 1 ? E : Heu non… **C'est pas le même sens.** P : **Ils n'ont pas le même sens…** E : C'est **pas le même motif de base.** P : Ben le motif de base, c'est quand même le même drapeau sauf **qu'il est pas tourné dans le même sens, voilà.** Donc facile de tracer l'axe. Segment, médiatrice, on fait l'axe. (…) E : **Non car les drapeaux ne sont dans le bon sens.** P : Ah, d'accord, les drapeaux ne sont pas dans le bon sens… E : Quand on fait la rotation… **les pointes sont opposées…** P : Oui oui, c'est intéressant, **les pointes sont inversées** donc **il n'y a pas une reproduction du motif**. Est-ce qu'on pourrait trouver une autre transformation ? E : Euh, **une symétrie axiale.** P : Une symétrie axiale. Très bien.	2D
La mesure d'angle	Alors le numéro 4 ? Ça se précise… Adèle. E : C'est une rotation. P : Dans une rotation, il faut être plus précis. E **: De 120°** P : Adèle nous dit dont l'angle est de 120°. Oui, je pense qu'elle a assez raison quand même dans l'ensemble.	2D 1D
Le sens	Et puis ça serait bien que tu nous dises dans quel sens. E : **Sens inverse des aiguilles d'une montre.** P : Alors on verra que l'on nommera ce sens d'une manière différente, *inaudible*. Alors effectivement, vous pouvez indiquer sur votre schéma le sens. Hein ? Bon vous avez ici un angle de 120° *inaudible.*	(pas de dimension)
Le centre est milieu (dans le cas de la rotation de 180°)	(…) P : Ça tourne autour d'un point, lequel ? E : **Autour du point**… *Inaudible.* P : Comment le trouves-tu ? E : Ben on… avec le compas. P : Avec le compas… *(ton intrigué)* C'est-à-dire… E : Ben soit on mesure le petit espace entre le drapeau 1 et 2. P : Oui. E : Et **on prend le milieu.** P : Enfin entre les bâtons ? E : Entre les deux bâtons.	0D 1D
Le centre du cercle	P : D'accord. Tu prends le milieu de l'écart ? E : Et on essaie de **tracer le cercle.**	0D
Conservation des longueurs	(…) P : Ah. **Les segments n'ont pas la même longueur.** Donc ce n'est pas une rotation. Donc c'est quoi ? Rien. Là c'est clair c'est rien. C'est rien parce que il a très bien dit que si on devait nommer les segments, par exemple si on mettait un A, un B et un C, **AB n'est pas égale à AC. »**	1D 0D

Conservation globale des dimensions	(…) E : Ils sont pas égaux. P : Donc il est pas reproduit, **il a été déformé par la transformation**, donc cette transformation n'est pas une **transformation régulière,** donc on ne la connaît pas.	2D

Tableau 7.7 : les critères caractéristiques de la rotation lors du scénario 3.1 (exercice 2 activité 1, annexe 7.m, p. 347).

Dans le cas où il y a deux figures (une figure de départ et la figure d'arrivée), le choix du « motif de base » est imposé par la figure de départ. Cette première opération n'apparaît donc pas dans la conduite de l'élève. De plus, la trajectoire donnée correspond à un seul déplacement de cette figure dans le plan, il ne s'agit donc pas de décrire sa trajectoire. Le concept d'ordre n'apparaît donc pas non plus.

Pour résoudre cette tâche (exercice 2 de l'activité 1), ont été mis en évidence en classe :
- **le centre du cercle** dans lequel s'inscrit le déplacement de la figure (tout comme dans la première situation), et dont le théorème-en-acte de cocyclicité est un signifié. Le centre de la rotation apparaît également comme le milieu du segment {point ; image} dans le cas de la symétrie centrale,
- une **mesure d'angle** qui, contrairement à la situation précédente, est unique. En effet, dans le cas d'une figure globalement invariante, selon le motif de base choisi, il existe plusieurs mesures d'angle possibles. Celle-ci s'obtient en divisant 360° par l'ordre de la rotation. Or l'ordre varie en fonction du motif de base choisi, et donc la mesure d'angle varie en fonction du motif de départ. La mesure d'angle obtenue est cependant toujours la même lorsqu'elle est donnée pour préciser l'orbite parcourue par le motif de départ. Alors que dans le cas où il y a deux figures, la mesure d'angle s'obtient en mesurant à l'aide du rapporteur (il n'y a pas d'indices dans l'énoncé). Etant donné qu'il n'y a qu'un seul déplacement, c'est l'existence d'une mesure d'angle qui semble mise en évidence à défaut de la conservation de cette mesure d'angle,
- un **sens** qui est toujours précisé même si celui-ci peut sembler aléatoire, tout comme dans la tâche précédente.
- la **conservation de l'orientation** de la figure dans le plan est cette fois exprimée en comparaison avec la symétrie axiale mais est explicitée en terme de sens.

Ces différences relevées dans les activités introductives de la rotation tendent à expliquer en partie le comportement des élèves relevé à l'issue du deuxième questionnaire. Les élèves développent un comportement similaire à celui décrit en classe.

Dans la situation des triangles du deuxième questionnaire, certains élèves se contentent d'une déconstruction instrumentale de la figure (attestée par le théorème-en-acte de cocyclicité) et négligent le concept de conservation de la mesure d'angle, tout comme cela est le cas en classe sans conduire à une réponse erronée (ce qui n'est pas le cas dans le deuxième questionnaire). En revanche, dans le cas de la situation des rosaces, l'élève va privilégier le concept d'ordre et déterminer la mesure d'angle par calcul (360° divisés par l'ordre) qu'il va conserver tout au long de la description de l'orbite, de la même manière qu'en classe.

Nous avions relevé que le concept-en-acte d'orientation semblait opératoire seulement dans le cas de la situation triangle. Il en est de même en classe, la conservation de l'orientation d'une figure n'est opératoire que dans le cas où il y a deux figures, et afin de distinguer la symétrie axiale de la rotation. De plus, dans le cas d'une figure globalement invariante, seule la rotation est décrite en classe ; la symétrie axiale n'est pas mentionnée, alors que dans le cas où il y a deux figures, la symétrie axiale est également considérée car elle peut être une réponse possible, si la rotation n'est pas validée.

D'après le deuxième questionnaire, nous avons également caractérisé le comportement des élèves en terme de types d'appréhension des figures fonctionnant au cœur de l'ETG. Le paragraphe suivant se consacre alors aux différents types d'appréhension des figures développées en classe lors de l'introduction de la rotation en classe de 3^{e}.

5.2 L'appréhension des figures dans les schèmes de reconnaissance de la rotation

Les schèmes émergeants de ces deux exercices précédents renvoient à un modèle de construction implicite que nous avions déjà reconnu dans le deuxième questionnaire. A ce stade de l'enseignement, les éléments de dimension inférieure (1D et 0D) de la configuration sont pris en compte pour :
- mesurer à l'aide du rapporteur la mesure d'angle (1D),
- déterminer le centre de la rotation. Soit il est le milieu d'un segment (on peut parler de déconstruction dimensionnelle, car il s'agit de propriétés métriques issues de la mise en relation d'éléments de dimension 1D et 0D), soit il est le centre du cercle circonscrit (dans ce cas, on parlera plutôt de déconstruction instrumentale, car il s'agit du théorème-en-acte de cocyclicité supporté par le compas).

Les extraits qui suivent rendent compte de plusieurs discussions autour du choix du motif de base, où il apparaît que la figure peut être considérée dans sa globalité (2D) mais aussi de par les côtés ou les sommets qui la délimitent. Dans ce cas, il ne s'agit pas d'une déconstruction dimensionnelle, mais seulement d'une vision iconique, dite du « botaniste » au sens de Duval, que l'on retrouve très clairement dans les productions du deuxième questionnaire (chapitre 6).

> « P : (…) **Partant de [AB],** on a fait tourner une fois, deux fois, trois fois. Est-ce qu'on est d'accord ? On obtient un carré en appliquant la rotation à partir du segment [AB] trois fois. On pourrait de la même manière, au lieu de partir du segment AB, on pourrait choisir un triangle, **le triangle AOB** et le faire tourner trois fois, et le faire tourner trois fois, d'accord ? Ce qui nous permet peut-être de mieux définir la rotation, ça sera peut-être plus facile pour les autres. D'accord ? Je vous propose dans le deuxième de tracer **le triangle dont un des sommets est le centre du cercle.** (…)

P : **A devient C**, C tourne de 144, donc on a déjà… alors y a un petit souci quand même. C'était une bonne idée au départ mais ça sera plus simple avec… Est-ce que vous pourriez terminer cette partie-là par l'hexagone ? (…) Comment pouvez-vous obtenir un hexagone ?
E: **Triangle OAB.**
P : Triangle OAB. Il est comment?
E : Isocèle.
P : Isocèle seulement ? Équilatéral. Et **on le fait tourner combien de fois** ?
E : Cinq fois.
E : Six fois.
P : Il existe déjà donc on va le faire tourner cinq fois et **on va revenir au point A. »**

De manière générale, les passages de décomposition des figures en éléments de dimension inférieure se font d'après la progression d'une construction instrumentale (0D →1D→ 2D), qui peut être proche du langage courant et qui peut paraître confuse, comme le montre l'extrait suivant à propos des polygones réguliers :

« P : **Ce triangle** ? Si on faisait <u>tourner</u> **ce triangle** comme ça, on <u>obtiendrait</u> **les sommets**, d'accord ? (…) et puis ensuite on <u>relie</u> **les sommets** de manière non consécutive. » (…) lorsque vous <u>reliez</u> **les points** <u>en sautant</u> **un point** comme vous dites, *inaudible* vous <u>reliez</u> **les diagonales**. Qu'est-ce que vous faites d'autre là ? Votre rotation vous <u>l'obtenez</u> **par le triangle** <u>de tout à l'heure</u>, **le triangle AOB** que vous faites <u>tourner</u>, qui va vous <u>donner</u> **les points**, j'ai pas dit que c'était la seule manière, hein attention, et une fois que vous avez **vos cinq sommets**, vous allez <u>relier</u> **vos sommets** <u>en en sautant un à chaque fois</u>, et vous allez <u>obtenir</u> **votre étoile à cinq branches. »**

On constate alors dans ces extraits un usage abondant de verbes d'action (relatifs à un programme de construction) du langage courant (tourner, relier, sauter, donner, obtenir) qui mettent en jeu des composants de la figure de dimension différente : le triangle (2D), les sommets (0D), les diagonales (1D) ou l'étoile à cinq branches (2D).

Validation de la définition par le schème de construction

De la même manière qu'en 6^e^ et 5^e^, Mme B. définit en 3^e^ la rotation à partir de son schème de construction, comme le montre l'extrait suivant, tiré de la première séance :

« P : Bien alors, voilà je vais essayer de commencer la définition puis vous allez *inaudible.* Etant donné **un point O… et un point M.** On est d'accord, au départ je vous ai donné O et M. Attention M ne doit pas être O. *(elle écrit en même temps au tableau)* Etant donné un point O et un point M. M' image… du point M… dans la rotation… alors… de centre O… *inaudible.* Etant donné un point O et un point M. M n'est pas sur O. M' est l'image… du point M… dans la rotation de centre O… de sens négatif… et d'angle 60°. *Inaudible.* Si OM égale OM', Katia ? *Inaudible.*
E : **OM le rayon.**
P : Très bien. *Inaudible.* D'accord ?
E : *inaudible*
P : Oui si **OM=OM'. Sont sur le même cercle**. OM rayon du cercle, ça revient à dire que OM égal OM'. Hein ? L'angle MOM' égal alpha. Est-ce que vous pensez qu'il faut dire autre chose ?
E : *inaudible*

> P : Ben oui il faudrait évoquer l'histoire du sens.
> E : Ben il est négatif *Inaudible.*
> P : Il n'y a pas de rotation si on n'a pas MOM' *(l'angle)* égal alpha.
> *[en rouge au tableau]: « Etant donné un point O et un point M du plan (M≠ O) M' est l'image du point M dans la rotation :*
> *- de centre O*
> *- de sens –*
> *- d'angle 60°*
> *Si OM=OM'*
> *L'angle MOM'=* α
> *Sens respecté.»*

Sous cette forme, la conservation de la mesure d'angle n'est pas explicite. Mme B. évoque seulement l'existence d'un angle alpha. En revanche, l'équidistance des points par rapport au centre est bien signifiée par le fait que les points et les points-images appartiennent au même cercle. Les concepts-en-acte qui construisent le théorème-en-acte de cocyclicité sont alors mis en place.

Le niveau de langage employé par Mme B. n'est pas constant. Il peut être issu d'un registre de langue courant, ou bien ou d'un niveau mathématique élevé. L'extrait ci-dessous montre par exemple la façon dont elle annonce un lien direct avec les fonctions, dont elle emprunte le vocabulaire :

> « C'est le vocabulaire des fonctions ! Si on a une fonction *t* il y a un point A associe un point A' *(Mme l'écrit de manière symbolique : t : A → A')* de telle manière que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ soit égal au vecteur $\vec{u}$. Vous comprenez quand j'écris ça ? … C'est une fonction, très bien. C'est une fonction un peu particulière. Pourquoi ? Parce que là c'est une fonction qui s'applique à quoi ? A la géométrie. »

D'après les résultats du deuxième questionnaire, il apparaît que les élèves ne gardent que le symbolisme lié aux fonctions (A→B). Les résultats du chapitre 6 montrent également que dans la situation dite des rosaces, l'élève décrit les rotations selon un modèle de construction implicite dans lequel il propose une décomposition de la rosace en unités figurales selon une « vision botaniste ». Le niveau de langage est également proche du mathématique courant qui renvoie au champ lexical de l'expérimentation ou de la manipulation. Les élèves renvoient plus au vocabulaire des fonctions dans le cas de la symétrie axiale que dans le cas des rotations.

5.3 Les propriétés de conservation

L'institutionnalisation des propriétés de conservation amène le professeur à formaliser des propriétés dans le cadre de la géométrie affine euclidienne. De la même manière qu'en 6^{e} et en 5^{e}, c'est à partir d'une tâche de construction point par point que Mme B. fait émerger ces propriétés. On assiste alors à une progression dimensionnelle suivant la construction instrumentée : 0D →1D → 2D puis, à partir du résultat final, sont visées des propriétés qui mettent en relation les deux figures (de départ et d'arrivée), la progression dimensionnelle est alors inversée : 2D → 1D → 0D. Duval décrivait déjà ces difficultés qui résultent de ces différents passages qui ne vont pas de soi pour l'élève, sous la forme d'un « hiatus dimensionnel ». Les extraits suivants décrivent les incidents relevés lors de ces progressions :

> « E : Je prends la distance AO et je reporte d'un côté.
> P : Et après ?
> E : Ben après on fait un genre de demi-cercle.
> P : Un arc de cercle ça s'appelle.
> E' : **Un arc de cercle de 50°.**
> P : Un arc de cercle. Et je mesure un angle de 50° à partir de… l'arc de cercle. 50°, je trace et j'obtiens le point A'.
> P : Faites ça avec organisation, c'est-à-dire moi je vous conseille de transformer le point A puis de transformer le point B puis de tracer le segment. Ne faites pas tout en même temps et tournez dans le sens positif.
> E : **On fait aussi le point B avec 50° ?**
> P : Pardon ? **Ben oui, c'est la même rotation**. *Inaudible.* Dis donc demain matin si vous venez en cours, prenez votre compas et votre rapporteur, ça peut servir. »

Ces deux incidents nous confirment bien la mise en place chez l'élève du théorème-en-acte de cocyclicité et la négligence de la conservation de la mesure d'angle.
La formalisation de la propriété de conservation de la longueur d'un segment émerge par la suite sans incident, de la même manière qu'en 6^{e} et en 5^{e}. Les difficultés apparaissent lorsqu'il s'agit de mettre en évidence que la rotation conserve l'alignement (document 7.s, annexe p. 358). Soit ils réinvestissent la propriété précédente qui vient d'être validée par le professeur, soit ils reconnaissent à travers l'expression « conserve » une propriété des années précédentes : « la rotation conserve… les longueurs ». Dans tous les cas, la réponse n'est pas erronée mais n'est pas valide dans la stratégie visée par le professeur, puisqu'il s'agit de vérifier la conservation de l'alignement des points.
La propriété de conservation de l'angle qui est formalisée sous la forme « l'image d'un angle est un angle de même mesure » est formulée sans incident en classe après la construction point par point d'un angle. De même, « l'image d'un triangle est un triangle de même aire » est formulée sans incident.

5.4 Les polygones réguliers : un cas particulier

Dans le deuxième questionnaire, quelques élèves mentionnent la reconnaissance d'un polygone régulier pour justifier la reconnaissance d'une rotation, mais restent des cas isolés. Conformément aux programmes contemporains à nos observations, les polygones réguliers sont introduits dans le contexte des rotations : « les activités sur les polygones réguliers, notamment leur tracé à partir d'un côté, porteront sur le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone et éventuellement l'octogone ». Mme B. les présentent comme le résultat de la construction de l'image d'un « motif de base » par rotation (document 7.p, p. 350).

La décomposition en unités figurales de dimension inférieure a pour but de mettre en évidence les composants caractéristiques de la rotation, décrits précédemment dans le cas plus général d'une figure de référence globalement invariante :

> « P : Donc le polygone régulier… enfin les polygones réguliers sont des polygones je dirais relativement faciles à obtenir puisqu'ils **sont dans un cercle** et faciles à obtenir par rotation. Moi je vous ai donné le produit fini. Dans cette partie-là, il va falloir trouver par quel motif de base on peut partir et quelle rotation on peut définir pour au bout du compte obtenir un carré. D'accord ? Alors le carré, on va le faire ensemble. *Inaudible.* On détermine **le centre du cercle.** Regardons le carré. Tout le monde connaît le carré. C'est un polygone à quatre côtés, de même mesure. *Léger brouhaha.* Pouvez-vous trouver **le centre du cercle**… c'est l'intersection des diagonales, sans appuyer comme des sauvages avec votre crayon. **Nous, ce qui nous intéresse, c'est le point d'intersection**. Voilà, on l'appelle bêtement O. Alors la question que l'on peut se poser, on est dans le cas d'une rotation, il y a conservation des distances. Comment peut-on obtenir un carré **à partir d'un motif de base** que l'on va déterminer et quelle est la rotation qui va nous permettre de **transformer le motif de base** en un carré ? Alors tu nous proposes ?
> E : *inaudible.*
> P : Donc **quel est le motif de base** ?
> E : **Ben un côté.**
> E': Le segment.
> P : Alors **le segment [AB]** que vous allez faire **tourner… de 90°…** dans une rotation de **centre…**
> E(s) : **O**
> P : **de sens…**
> E(s) : **Positif.**
> P : **Combien de fois** ?
> E : Quatre fois.
> E : Trois fois.
> P : **Quatre fois,** très bien. *(La sonnerie retentit)* vous allez au moins une fois tracer OAB, chercher **l'image de A, l'image de B** et me dire pour obtenir le carré. Voilà c'est ça le but de cette feuille c'est de voir de quoi on doit partir, de **combien on doit tourner et combien de fois.** Donc **vous tracez le triangle OAB**. Et vous ajoutez dans la **rotation de centre O d'angle 90**°, d'angle 90°…. **dans le sens**… vous m'avez dit **positif. A a pour image B et D a pour image C. »**

Nous retrouvons ici un indice de l'influence de notre discussion car Mme B. introduit le terme d'« ordre » : « c'est ce qu'on appelle une rotation d'ordre 4 ». Cependant, nous n'avons pas relevé d'élèves dans notre deuxième questionnaire qui emploient ce terme.
Le cas particulier de la rotation d'ordre 5 est traité sous la forme du pentagone mais aussi sous la forme de l'étoile à cinq branches, comme dans notre deuxième questionnaire. Les composants mis en évidence dans l'extrait précédent et dans le cas particulier de l'étoile à cinq branche portent sur :

- **le centre :** Mme B. valide la technique de l'intersection des diagonales, qui n'est pas sans rappeler le théorème-en-acte des droites concourantes, largement évoqué dans les observations précédents en 5^{e} et que nous avons largement retrouvé lors de l'analyse du deuxième questionnaire (en 5^{e} pour déterminer le centre de symétrie et en 3^{e} pour déterminer le centre de rotation). Mme B. suggère également la méthode des médiatrices des cordes mais nous avons retrouvé cette technique seulement dans des cas isolés. Mme B. invoque toujours largement le centre de la rotation comme le centre du cercle circonscrit au polygone. On suppose alors que le retour récurrent au cercle circonscrit explique en partie la prégnance du théorème-en-acte de cocyclicité chez les élèves de 3^e.

- **le « motif de base » :** on suppose que les élèves renvoient à une décomposition méréologique, du fait qu'ils proposent : « on divise en plusieurs parties ? » ou encore « est-ce qu'on peut diviser en deux les branches ? ». D'après l'extrait précédent et ceux du paragraphe précédent, le choix du « motif de base » implique un découpage de la figure globale selon « la vision botaniste ». Il en résulte un découpage en unités figurales de dimensions différentes :

  - **un triangle** (2D) dont un seul ou les trois sommets appartiennent au cercle. Mme B. propose cette figure de référence mais le choix d'une figure non institutionnelle proposée par un élève (et largement représentée dans le deuxième questionnaire) est également validé par le professeur,
  - **un côté** (1D),
  - **un sommet** (0D).

- **l'ordre de la rotation :** comme déjà annoncé précédemment, Mme B. va jusqu'à mentionner le terme mathématique d' « ordre », autrement dit le nombre de positions différentes empruntées par le motif de base.

- **la mesure d'angle :** Elle est déterminée de la même manière que lors de la première activité, autrement dit, 360 divisé par l'ordre. Les élèves sont alors partagés entre cette formule et la mesure directe au rapporteur (on retrouve ce comportement des élèves dans le deuxième questionnaire).

- **le sens :** Mme B. insiste sur le fait que le sens doit être donné, mais qu'il soit positif ou négatif, l'important est qu'il soit toujours le même. Dans les productions du deuxième questionnaire, peu d'élèves précisent cet aspect aléatoire, mais tous associent un sens à la rotation reconnue.

L'étude des polygones réguliers renvoie donc à un cas particulier des figures globalement invariantes rencontrées lors de la première activité, et permettent de vérifier les propriétés de conservation formulées lors des séances précédentes.

Conclusion sur l'enseignement de la rotation en 3^e

Le comportement des élèves de 3^e décrit dans le deuxième questionnaire est très proche de celui observé en classe. Les erreurs relevées dans le deuxième questionnaire peuvent

s'expliquer à partir de ces observations de classe. En effet, les concepts-en-acte qui construisent le théorème-en-acte de cocyclicité ont été institutionnalisés en classe (équidistance par rapport au centre de la rotation, le signifiant des arcs de cercle) mais l'unicité de la mesure d'angle pour une même rotation n'est pas explicitée.
La symétrie axiale n'est pas mentionnée dans les cas de reconnaissance des figures globalement invariantes (dont les polygones réguliers) ni dans la formulation des propriétés de conservation.
Un certain nombre de difficultés cognitives sont repérées au cours du déroulement de ce cours. Notamment le « hiatus dimensionnel » au sens de Duval ou des changements de contrat. En particulier, les passages d'une dimension à une autre, ou encore les changements de niveaux de langage rendent compte des difficultés à surmonter pour l'élève.

6. CONCLUSION DES EFFETS DE L'ENSEIGNEMENT

Ce chapitre avait pour but d'apporter des éléments de réponse aux questions de recherche n°3, c'est-à-dire sur la nature de l'ETG développé en classe et sa distance avec l'ETG personnel que l'élève développe finalement. D'après nos observations de classe, nous avons finalement mis en évidence un certain nombre de malentendus qui laissent transparaître **une distance sous-estimée entre l'ETG idoine développé en classe par le professeur et l'ETG personnel** que nous avons décrit dans le chapitre 6.

6.1 « hiatus dimensionnel »

Que ce soit en 6^{e}, 5^{e} ou 3^{e}, l'enseignement des transformations du plan que nous avons observé a révélé des changements implicites de dimension des objets mathématiques en jeu, qui ont provoqué un certain nombre de malentendus. De manière générale, la définition institutionnalisée de la transformation visée passe d'abord par la construction instrumentée (à la règle et au compas) de l'image d'un point par cette transformation (0D→1D→2D). Puis s'opère une déconstruction de la figure obtenue, afin de mettre en évidence des propriétés caractéristiques (dont les propriétés de conservation) à partir des éléments de dimension inférieure (2D→1D→0D). Duval qualifie justement ces différents changements de « révolution cognitive »[12] pour l'élève car ce sont des étapes qui ne vont pas nécessairement de soi (elles sont d'ailleurs ici largement dirigées par le professeur).

Il existe en plus d'autres types de changements de dimension qui sont liés à des basculements de paradigme. En 6^{e}, par exemple, l'élève construit d'abord un ETG personnel dans GI en 3D puis doit finalement progresser vers un ETG personnel dans GII, dans le plan. Ce basculement s'opère également en 5^{e}, ce qui provoque des malentendus résistants entre le professeur et les élèves (comme le montre l'exemple du schème du demi-tour autour d'un axe normal au plan

[12] Duval, 2005.

ou la dérive du théorème-en-acte des droites concourantes). En 3^e, ces différents passages d'une dimension à une autre, liés à des changements de paradigme, se retrouvent lors de la décomposition d'une figure globalement invariante pour mettre en évidence un « motif de base ». Ces changements de dimension font écho à des changements de niveaux de langage, où le professeur passe d'un langage courant (avec de simples repères visuels) à un niveau de langage mathématique qui peut parfois laisser l'élève dans une certaine ambiguïté quant aux termes à employer.

Ces différents changements de dimension qui se retrouvent au cœur de l'ETG idoine développé par le professeur en classe ne sont pas nécessairement tous maîtrisés par les élèves. En effet, un certain nombre d'erreurs survenues lors de la construction de l'ETG personnel de l'élève dans le deuxième questionnaire l'illustrent, comme par exemple en 5^e , les passages vers une déconstruction dimensionnelle semblent factices. De plus, la construction d'abord instrumentale des différentes configurations de base, surtout dans le cas de la symétrie centrale ou de la rotation, peuvent alors expliquer pourquoi l'élève semble prévaloir une déconstruction instrumentale dans certaines situations de reconnaissance de la symétrie centrale en 5^e (dans la situation des rosaces, la reconnaissance de la symétrie centrale est en lien direct avec la construction d'axes de symétrie) ou de la rotation en 3^e avec la prégnance du théorème-en-acte de cocyclicité.

6.2 Un ETG idoine « standard »

L'ETG idoine développé en classe est conforme aux directives des programmes contemporains à notre recherche. On peut même supposer que cet ETG idoine est partagé par d'autres classes. On retrouve le schème standard de la construction de la médiatrice ou encore celui de la reconnaissance du parallélogramme. Les composants de la rotation sont également ceux attendus par les programmes et sont articulés avec les polygones réguliers. La mise en évidence des propriétés de conservation se déroule également sans incident (au sens de Roditi) et semble la même quelle que soit la transformation en jeu.
Cependant, ce déroulement linéaire n'implique pas un apprentissage aussi linéaire chez les élèves. L'enseignement de la symétrie centrale entretient un lien direct avec la symétrie axiale, ce qui provoque alors un amalgame entre ces deux notions que l'on décèle en classe mais encore plus nettement dans les résultats de notre deuxième questionnaire (notamment sur le lien entre l'existence du centre de symétrie et la constructibilité des axes de symétrie ou toutes les superpositions abusives). En 3^e, l'enseignement de la rotation ne se fait plus du tout en lien avec la symétrie axiale. Bien que les figures exploitées soient globalement invariantes par symétrie axiale et symétrie centrale, c'est la rotation qui est toujours validée. Il s'agit surtout du processus de construction de la rotation qui est pratiqué en classe. Et les résultats obtenus dans le chapitre 6 montent justement une opposition des schèmes de la rotation et de la symétrie. La rotation était reconnue par une déconstruction instrumentale alors que la symétrie axiale pouvait faire fonctionner une déconstruction dimensionnelle selon la tâche.

Nous avons en particulier souligné le glissement observé en classe chez l'élève entre l'existence et l'unicité de la mesure d'angle pour une même rotation que l'on retrouve dans les résultats du deuxième questionnaire.

L'ETG idoine mis en place par le professeur correspond à un ETG idoine « standard » dans le sens où il est sans doute partagé par d'autres professeurs (d'après notre enquête) et est conforme au programme. La construction de cet ETG idoine met en œuvre des changements de paradigmes et de dimensions des objets en jeu qui peuvent être à l'origine de certains malentendus entre l'élève et le professeur. Cependant, il est clair que l'ETG idoine développé en classe inspire largement celui que l'élève va finalement s'approprier mais impliquant parfois la **dénaturation de certaines pratiques institutionnalisées en classe** (comme le théorème-en-acte de cocyclicité, le théorème-en-acte des droites concourantes ou encore le réinvestissement factice des propriétés de conservation).

L'existence d'une distance entre l'ETG personnel de l'élève et l'ETG idoine développé en classe, s'explique alors par l'existence du « hiatus dimensionnel » (au sens de Duval), d'une dialectique GI-GII pas toujours maîtrisée par l'élève et par la dénaturation par l'élève de certaines pratiques institutionnalisées en classe.

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

Nous allons maintenant revenir sur nos questions de recherche et présenter les résultats obtenus qui apportent des éléments de réponse. Nous élargirons ensuite notre réflexion en développant les nouvelles questions que nous inspirent ces résultats.

NOTRE RECHERCHE SUR LES EFFETS DIDACTIQUES DE LA SYMETRIE AXIALE

Notre recherche porte sur les effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège. Nous avons adopté le terme de conceptualisation au sens de Vergnaud, c'est-à-dire que nous avons cherché à étudier le processus d'appréhension d'un concept par un élève à travers son activité (scolaire). Vergnaud caractérise le processus de conceptualisation à travers le couple {schème ; situation}. Nous avons alors déterminé un type de situation (la situation de reconnaissance des transformations du plan) que nous avons proposé à des élèves de 5^e et de 3^e afin d'étudier et de comparer les différentes adaptations de leurs invariants opératoires qui constituent les schèmes de leur Espace de Travail Géométrique. Un tel dispositif méthodologique et théorique (décrit dans les chapitres 2 et 5) avait pour but de répondre aux questions de recherche suivantes :

Questions de recherche n°1 : La symétrie axiale pilote-t-elle l'organisation et les inférences des invariants opératoires des autres transformations du plan au collège dans la construction de l'ETG personnel de l'élève ? Si oui, comment ? Questions de recherche n°2 : Comment l'ETG personnel évolue-t-il au cours de l'enseignement des autres transformations du plan ?

Ces questions avaient pour but de nourrir la question plus générale concernant le rôle de la symétrie axiale en tant que levier ou en tant qu'obstacle dans l'apprentissage des autres transformations du plan (chapitre 1).

Les résultats obtenus après notre travail de recherche comportent évidemment des nuances et ne nous permettent pas de trancher entre ces deux pôles : obstacle ou levier. Nos analyses se sont concentrées sur le **rôle joué par la symétrie axiale dans le traitement de la figure au**

cœur de la construction de l'ETG personnel de l'élève (questions de recherche n°4) qui alimente alors les questions de recherche n°1 et n°2.

Les différentes études de cas des productions des élèves (chapitre 6) nous ont permis de mettre en évidence une certaine stabilité de l'ETG personnel de l'élève de 3^{e}, grâce à la flexibilité des schèmes de la symétrie axiale. Ces différentes études de cas nous ont également permis de dépeindre un ETG personnel de l'élève de 5^{e} plus instable du fait de la trop grande proximité des schèmes de la symétrie axiale et de la symétrie centrale.

La symétrie axiale : concept organisateur de l'ETG personnel de l'élève de 3^{e}

Dans le cas des élèves de 3^{e}, nous avons mis en évidence une opposition entre les schèmes de la rotation et ceux de la symétrie axiale. Selon la tâche, la reconnaissance de la symétrie axiale organise une déconstruction dimensionnelle de la figure et met en place un réseau de propriétés dans le cadre de la géométrie affine euclidienne : l'orthogonalité, le milieu, l'équidistance, la conservation des mesures, ou encore la symétrie vue comme une application du plan point par point, tandis que la rotation s'en tient à une déconstruction instrumentale (théorème-en-acte de cocyclicité) de la figure inhibant les propriétés de conservation métriques telle que la conservation de la mesure d'angle. Dans certains cas observés, la symétrie axiale assure donc l'organisation des éléments de dimension inférieure (1D et 0D) de la figure en vue d'un raisonnement déductif pour reconnaître une symétrie axiale.

Amalgame entre la symétrie axiale et la symétrie centrale au cœur de l'ETG personnel de l'élève de 5^{e}

Notre étude de cas des ETG personnels des élèves de 5^{e} a mis en évidence un rôle très différent attribué à la symétrie axiale. Les schèmes de reconnaissance de la symétrie axiale et ceux de la symétrie centrale sollicitent certains concepts et théorèmes-en-acte communs tels que le schème de bidécomposabilité, l'équidistance, le milieu et la conservation des mesures assurée par le principe de superposition. Le concept d'orientation permet alors de différencier l'une ou l'autre transformation en formulant le théorème-en-acte suivant : *si ce n'est pas une symétrie axiale alors il s'agit d'une symétrie centrale.* Quelques élèves se contentent aussi de l'invariance point par point pour caractériser l'une ou l'autre de ces transformations.
La proximité de ces schèmes provoque, chez certains élèves, un « amalgame » entre la symétrie axiale et la symétrie centrale ou carrément la dénaturation de certains théorèmes-en-acte (comme le théorème-en-acte des droites concourantes). Dans certains cas observés, la symétrie axiale apparaît donc comme un obstacle cognitif car elle renvoie à des schèmes disponibles mais non valides.

Changement de statut de la symétrie axiale au cours du collège

On constate ainsi un changement de statut accordé à la symétrie axiale au cours du collège. Elle peut se présenter tel un obstacle cognitif en 5^{e} ou au contraire assurer un raisonnement déductif dans le cadre de la géométrie affine euclidienne en 3^{e}. **Comment s'opère un tel basculement ?**

D'après les études de cas des productions des élèves (premier et deuxième questionnaire), ce changement de statut de la symétrie axiale s'accompagne d'un changement de statut de la symétrie centrale qui ne devient finalement qu'une transformation « intermédiaire ». En effet, celle-ci est disponible pour un élève de 3^{e} dans la situation des triangles mais elle apparaît obsolète dans la situation des rosaces, où le concept différenciateur de l'orientation ne peut pas être sollicité. En classe de 3^{e}, on ne relève plus d'erreurs dues à un amalgame de notions entre la symétrie axiale et la symétrie centrale, contrairement à la classe de 5^{e} où les principales erreurs viennent de cet amalgame. Au contraire, en classe de 3^{e}, les schèmes de la rotation sont opposés à ceux de la symétrie axiale et les erreurs relevées proviennent du concept d'angle, propre à la rotation.

Ainsi, les observations de classes en 5^{e} et en 3^{e} avaient en partie pour but d'expliquer le basculement du statut de la symétrie axiale auprès de certains élèves.

Le rôle fondamental joué par l'enseignement

D'après les analyses effectuées du premier et deuxième questionnaire, nous relevons des traces d'enseignement des transformations du plan dans la conduite des élèves. Nous avons donc observé les premières séances d'enseignement de la symétrie axiale en 6^{e}, de la symétrie centrale en 5^{e} et de la rotation en 3^{e} du même professeur, Mme B. (qui était le professeur de ces élèves interrogés) afin de déterminer le rôle joué par l'enseignement. Notre objectif était de répondre aux questions de recherche suivantes :

Questions de recherche n°3 : Quel est l'ETG (idoine) développé en classe ? Quelle est la distance entre cet ETG idoine et l'ETG personnel que l'élève développe finalement ?

D'après nos observations en classe de 6^{e} et de 5^{e} (chapitre 7), la progression prévue par Mme B. de son enseignement de la symétrie axiale est très proche de celle prévue pour l'enseignement de la symétrie centrale. Mme B. commence par une approche empirique (dans GI), puis vise l'émergence d'un modèle standard de construction du symétrique d'un point et la mise en exergue de propriétés de conservation (dans GII). Les adaptations des élèves provoquent alors certains malentendus qui peuvent être résistants (comme le demi-tour autour d'un axe normal au plan par exemple). La proximité des schèmes propres à ces deux transformations implique certaines adaptations qui peuvent dénaturer le projet d'enseignement (comme le théorème-en-acte des droites concourantes par exemple, que l'on retrouve dans les questionnaires). De plus, les différents passages d'une dimension à une autre (2D ↔ 1D↔ 0D) des objets mathématiques en jeu rendent plus complexes et plus difficiles les adaptations à ces basculements de paradigmes. D'après les analyses des productions des élèves de 5^e^, certains indices de passage vers GII apparaissent alors factices, et semblent plutôt relever d'effets de contrat.

En 3^e^, le lien entre la symétrie axiale et la rotation est rompu. Cependant, la définition de la rotation et les propriétés de conservation sont toujours amenées dans le cadre d'un programme implicite de construction instrumentée. Certaines pratiques enseignées se retrouvent également dénaturées, comme par exemple le théorème-en-acte de cocyclicité car l'élève ne retient que l'existence d'une mesure d'angle au lieu de tenir compte aussi de sa conservation. Le « hiatus dimensionnel », au sens de Duval, complexifie également l'adaptation des élèves aux changements de paradigmes géométriques (visibles à travers les changements de niveaux de langage).

Une distance sous-estimée entre l'ETG idoine et l'ETG personnel

Ainsi, les basculements de paradigmes, le « hiatus dimensionnel » à propos des changements de dimension des objets mathématiques en jeu ou encore la dénaturation par l'élève de certaines pratiques institutionnalisées en classe, peuvent expliquer l'existence d'une distance entre l'ETG idoine (standard) construit en classe et l'ETG personnel que l'élève s'approprie finalement et que nous avons décrit dans le chapitre 6. Ces dénaturations sont difficilement prévisibles car elles portent sur un malentendu qui peut sembler négligeable (comme la conservation de la mesure d'angle) ou encore camouflé tant que l'élève ne se retrouve pas dans une situation qui le met explicitement en défaut (comme le théorème-en-acte des droites concourantes dans le cas de la rosace d'ordre 5).

La symétrie axiale : un concept « naturalisé » dans l'institution professionnelle

L'intérêt de ce travail porte également sur l'étude de la conduite d'une population dans des activités qui ne visent pas un raisonnement géométrique déductif, mais qui vise une réalité pratique (chapitre 3). Il est alors intéressant de remarquer que certaines adaptations sont communes à ces deux populations (scolaires ou artisanales). La symétrie axiale apparaît comme un concept organisateur de la conduite dans ces deux institutions pourtant bien distinctes. Nous avons déjà relevé l'exemple commun du demi-tour autour d'un axe normal. On peut alors expliquer ce théorème-en-acte commun en partie car l'ETG personnel de l'artisan et l'ETG personnel de l'élève en début de collège s'inscrivent tout deux en 3D.

Comme nous le concluons dans le chapitre 3, l'intrication des objets de référence, des postulats et des techniques tirées de leurs apprentissages précédents ou de leurs propres conceptions nous laissent penser que le concept de symétrie auquel les artisans réfèrent n'est finalement pas une conception experte du concept familier, ni une conception antagoniste à une conception scientifique, mais plutôt un concept intermédiaire, un concept « naturalisé ». Le concept de symétrie apparaît alors comme un concept organisateur de l'Espace de Travail Géométrique des artisans car ils procèdent systématiquement à une recherche d'invariance globale ou d'axes de symétrie dont la mise en œuvre renvoie à un paradigme GI muni d'une « théorie de l'approximation ». Le collège cherche justement à détacher l'élève du paradigme GI en reniant cette approximation. Il s'avère pourtant que le concept de symétrie joue toujours un rôle fondamental dans la construction de l'ETG personnel de l'élève. En 5^{e}, l'ETG personnel de l'élève est encore instable et laisse présager que l'élève ne maîtrise pas encore les basculements de paradigmes GI-GII. Le concept de symétrie, drainant de par sa propre nature cette ambivalence, provoque alors des erreurs dues à des pliages abusifs par exemple, ou encore l'injection de propriétés de conservation obsolètes mais qui répondent à un certain effet de contrat. En revanche en 3^{e}, l'ambivalence du concept de symétrie semble mieux maîtrisée car l'élève s'adapte à la tâche et au paradigme qu'elle suggère (la situation des triangles) sans erreurs. On peut alors interpréter cette adaptation comme un indice d'un progrès du raisonnement géométrique de l'élève.

Notre travail de thèse a mis en évidence que la symétrie axiale pouvait jouer un rôle organisateur dans la conduite d'un élève ou d'un artisan. Dans le cas de l'institution scolaire, la symétrie axiale peut révéler une maîtrise de la dialectique GI-GII, mais il resterait à démontrer si de tels basculements de paradigmes sont favorables au développement de la pensée géométrique. La symétrie axiale peut également s'avérer être un obstacle cognitif chez certains élèves du fait de la proximité des schèmes avec la symétrie centrale. Nul doute que l'institution scolaire participe à ces effets didactiques, d'une part du fait de réserver une place souveraine à ce concept tout au long de la scolarité mais aussi du fait de la « dénaturation » de certaines pratiques institutionnalisées, notamment lors de l'enseignement de la symétrie centrale. Dans le contexte de l'institution professionnelle, la symétrie axiale se révèle être un concept « naturalisé » (dans le sens où la routinisation de certaines pratiques a poli l'origine de ces pratiques), et joue un rôle organisateur dans l'organisation de l'espace de travail géométrique de l'artisan. Il resterait également à déterminer, dans le cadre de la didactique professionnelle, si ce concept pourrait être apparenté à un « concept pragmatique »[1].

LES LIMITES DE CE TRAVAIL

Nous indiquons dans ce paragraphe un certain nombre de limites (non exhaustif) à ce travail : celles de nature méthodologique mais aussi celles liées au contexte humain et culturel dans

[1] Pastré, 2002.

lequel s'est réalisé ce travail de recherche. Nous évoquerons également la portée limitée de nos résultats par rapport à l'ambition initiale de ce travail.

Les limites méthodologiques d'une étude qualitative

La méthodologie de notre travail de thèse porte principalement sur des études de cas à partir du travail individuel d'un élève mais aussi d'un point de vue collectif à partir d'observations de classes. Nous avons procédé à de tels choix méthodologiques du fait de notre problématique de départ (chapitre 1) et de nos questions de recherche adaptées à notre cadre théorique (chapitre 2).
Nous avons également abordé une étude à caractère statistique au cours de ce travail avec le logiciel CHIC, mais sans nul doute celle-ci pourrait être améliorée avec un effectif plus important d'élèves. Il s'agit d'un autre type de recherche qui peut être envisagé en tant que perspectives car il impliquerait d'autres types d'observables et une autre méthodologie d'analyse. Nous pourrions alors tester une généralisation des résultats obtenus dans cette thèse sur l'étude de cas des ETG et leur organisation.

En outre, nous n'avons pas pu mettre au point le suivi d'une même classe durant quatre années consécutives, compte tenu de la durée limitée du doctorat. Nous avons donc opté pour le choix du même professeur dans les observations de classes à des niveaux différents. De ce fait, les résultats obtenus dépendent en partie de ce seul professeur.

Une étude partielle des champs conceptuels

L'un des choix théoriques porte sur la théorie des champs conceptuels. Nous avons nuancé dès le chapitre 2 notre utilisation de ce cadre théorique, en nous limitant à un seul type de situation et en désignant a priori les signifiés que nous souhaitions observer (tableau 2.1, chapitre 2). Or, une étude du champ conceptuel complète impliquerait l'analyse d'autres classes de situation (dont celle de construction par exemple). Nous avons déjà réalisé ces situations auprès de ces mêmes élèves de 5^e^ et de 3^e^ mais le temps limité de la thèse ne nous a pas permis d'analyser en profondeur les productions de ces élèves dans le cas de ces situations. En effet, d'autres types de situations nous auraient sans doute permis de mettre en évidence d'autres types d'invariants et de compléter notre étude sur la construction de l'ETG personnel d'un élève. Nous pouvons également envisager de poursuivre ce travail à partir de ces données déjà récoltées mais non exploitées.

Un autre pan méthodologique que nous n'avons pas exploité est celui de mener des entretiens individuels avec certains élèves afin de compléter l'étude des profils (chapitre 6) et d'affiner notre étude de cas. Par exemple, les productions des élèves du profil VRAI-VRAI INVARIABLE se révèlent en réalité minimalistes. Ces élèves se contentent de la désignation de la transformation. Un entretien individuel nous aurait alors éclairé sur les raisons de ce choix et aurait donc enrichi notre corpus. Un entretien individuel avec ces élèves aurait également guidé voire précisé certaines de nos interprétations concernant des signifiants graphiques isolés.

Des limites culturelles et curriculaires

Ce travail de thèse s'est déroulé dans un contexte culturel exclusivement français. Les élèves, les artisans et les professeurs que nous avons rencontrés étaient tous de nationalité française. Le collège où s'est réalisé la totalité de nos questionnaires et nos observations est un collège du 17ème arrondissement de Paris. Les exercices dont nous nous sommes inspirés pour la réalisation de nos questionnaires étaient tous tirés de manuels scolaires français.
La symétrie axiale n'a pourtant pas le même impact culturel dans tous les pays. Par exemple, sur le continent africain, les habitations sont en fait des bases circulaires et peut-être le repère orthogonal n'y est-il pas aussi prégnant. Nos pays européens voisins peuvent également présenter un contexte éducatif très différent de la France pour l'enseignement de la symétrie axiale. En Italie, par exemple, l'école élémentaire et le début du collège ne prévoient pas autant de séances ou d'activités concernant exclusivement la reconnaissance de la symétrie axiale. La reconnaissance de la symétrie axiale ne fait pas partie des compétences exigibles à la fin de l'école primaire[2].

La récolte de nos données s'est déroulée entre septembre 2005 et juin 2007 et sous la contrainte d'un certain programme scolaire qui a changé depuis. En effet, la rotation a été supprimée des programmes à la rentrée 2008. Un tel changement va donc impliquer une nouvelle conceptualisation des transformations du plan auprès des élèves de collège et relance alors le débat sur le rôle accordé à la symétrie axiale, qui va peut-être être encore plus dogmatique. Quel effet aura ce retardement de l'enseignement des rotations ? Va-t-il conforter le rôle organisateur du concept de symétrie dans le développement du réseau des propriétés qui caractérisent les isométries ? Toutes ces questions nous offrent également de nouvelles perspectives de recherche et de nouvelles investigations possibles.

Une portée limitée de nos résultats

Notre thèse est finalement une étude *partielle* des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries, car, d'une part, nous n'avons pas considéré le cas de la translation, et d'autre part parce que le processus de conceptualisation des isométries n'est tout simplement pas achevé en classe de 3e. Au contraire, l'enseignement des transformations du plan continue au lycée, notamment à travers la géométrie analytique où l'élève sera amené

[2] http://www.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/dir_310707.pdf (disponible le 09/07/08)

à reconsidérer à nouveau le groupe des isométries. Les schèmes disponibles de l'élève s'adapteront donc à de nouvelles situations.
Notre étude rend tout de même compte de certains effets didactiques liés directement au concept de symétrie axiale dans la nature même du travail géométrique de l'élève.

Les limites de cette thèse sont nombreuses, notamment du fait de l'exploitation partielle du champ conceptuel des isométries, et il reste encore un grand nombre de questions ouvertes concernant les effets sur l'apprentissage d'un tel concept. Cependant, cette thèse aura souligné l'importance du rôle de ce concept dans la nature d'un travail géométrique de l'élève en vue d'un raisonnement géométrique visé par l'école, mais pas seulement, comme nous le montre notre étude dans le monde artisanal.

PERSPECTIVES ET NOUVELLES QUESTIONS

Des données inexploitées

Comme déjà abordé précédemment, nous disposons d'un certain nombre de données encore inexploitées telles que les productions des élèves sur la réalisation de tâches appartenant à une autre classe de situation (du type *construction de l'image par une transformation donnée* ou encore du type *écrire un programme de construction).* L'analyse de ces productions permettrait alors une étude complète du champ conceptuel des isométries au collège.

Nous disposons également de plusieurs enregistrements vidéo d'entretiens entre un élève de 5^{e} et un élève de 3^{e} discutant de certaines copies d'élèves de 5^{e}. Nous avions réalisé ces entretiens afin de confronter les différents niveaux de conceptualisation de ces élèves (qui sont différents en classes de 5^{e} et de 3^{e}). Nous n'avons pas mis au point une méthodologie d'analyse pertinente durant la thèse mais nous avons la perspective de mener ce travail après la thèse en tenant compte des résultats obtenus sur la caractérisation de l'ETG personnel d'un élève de 5^{e} et de 3^{e}.

Dépasser les limites culturelles

Le contexte italien par exemple offre des perspectives originales pour continuer nos recherches. D'une part, le système éducatif, proche du nôtre, nous permet de conserver une certaine uniformité dans notre méthodologie et de pouvoir comparer les productions d'élèves et les pratiques des professeurs. D'autre part, leur approche empirique de l'enseignement nous offre un contexte nouveau et pertinent car la problématique de recherche originelle de la thèse concernait le rôle de la réalité dans l'enseignement. De plus, comme déjà annoncé précédemment, l'enseignement des transformations du plan ne répond pas aux mêmes contraintes que celles du programme français, ce qui change considérablement les conditions d'obtention de nos résultats de thèse et la prévision des stratégies attendues dans les tâches décrites précédemment (chapitres 4 et 6).

L'ETG personnel des professeurs

L'enquête que nous avons menée auprès des dix-sept professeurs de mathématiques reste une exploitation superficielle des pratiques des professeurs. Il serait intéressant d'étudier plus finement l'ETG personnel des professeurs et de se demander quels aspects du concept de symétrie leur apparaît le plus fondamental. Les propres représentations des professeurs influencent le déroulement de leur cours et nourrissent leurs contenus, et peuvent donc avoir un impact sur l'apprentissage des élèves. Il s'agit alors d'un autre type de travail de recherche qui nécessite une méthodologie adaptée sur les pratiques des professeurs.

Retour sur des questions toujours ouvertes

Notre travail de recherche a permis de distinguer le rôle joué par la symétrie axiale dans la construction de l'ETG dans une classe de classe de 5^{e} et dans une classe de 3^{e}. Nous avons souligné la différence de stabilité de ces deux ETG. Nous avons montré comment en 5^{e} ce concept peut nourrir certains amalgames, chez certains élèves, et comment ce concept peut au contraire amener l'élève à exhiber des propriétés dans le cadre de la géométrie affine euclidienne afin de caractériser la symétrie axiale. Malgré nos investigations en classe, nous ne pouvons expliquer vraiment l'évolution du statut de ce concept. Nous avons mis en évidence que les schèmes de la symétrie axiale étaient suffisamment souples pour s'adapter au contrat implicite de la tâche, reconnu par l'élève, et nous avons également montré comment ces invariants opératoires s'adaptaient (notamment par un passage à la déconstruction des figures), mais nous ignorons finalement si ce changement de statut vient de la routinisation de son enseignement (la symétrie axiale est enseignée dès l'école élémentaire en France) ou de sa « naturalisation » (au même sens qu'employé dans le cas des artisans) par les élèves en dehors de l'école.

Les résultats obtenus nous permettent de revenir également sur la question des effets des basculements de paradigmes GI-GII dans l'apprentissage en géométrie, et de nous demander s'ils sont favorables ou défavorables au développement du raisonnement de l'élève au collège. D'après notre étude, il apparaît ici que la dialectique GI-GII supportée par l'ambivalence du concept de symétrie permet à l'élève d'accéder à une déconstruction dimensionnelle des figures en 3^{e}, qui est nécessaire pour atteindre GII. Aussi, il apparaît, dans le contexte de cette recherche, qu'une dialectique GI-GII a mis en évidence des indices de progrès dans le raisonnement géométrique, mais nous ignorons encore si ces basculements favorisent vraiment le raisonnement.

Les résultats obtenus pointent également un déséquilibre des propriétés unificatrices du groupe des isométries. En effet, en fin de collège, il apparaît que les schèmes de reconnaissance de la rotation se limitent à une déconstruction instrumentale quelle que soit la tâche en négligeant les propriétés métriques ou d'invariance. Les schèmes de la symétrie axiale eux s'adaptent à la tâche et renvoient à la conservation des dimensions ou des propriétés d'équidistance. Nous signalons alors la faible représentation des propriétés d'invariance point par point dans les stratégies des élèves mais aussi dans les pratiques enseignantes, alors qu'il s'agit d'une caractéristique fondamentale des isométries. Sans entrer dans l'apanage de la théorie des groupes, les propriétés d'incidence par exemple pourraient mettre en évidence certains invariants ponctuels. On pourrait alors imaginer et concevoir certaines situations mettant en jeu ces propriétés d'invariance caractéristiques d'une transformation avec l'aide par exemple des logiciels dynamiques de géométrie.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie générale

ARTIGUE M. (1990) Épistémologie et Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10 (2/3), 241-286.

ASTOLFI J-P & DEVELAY M. (1989) *La didactique des mathématiques*, Paris : PUF (édition 1993).

BACHELARD G. (1934) *La formation de l'esprit scientifique*, Paris : Vrin (édition 2004).

BACRY H. (2000) *La symétrie dans tous ses états,* Paris : Vuibert.

BARBIN E. & CAVEING M. (1996) *Les philosophes et les mathématiques*, Paris : Ellipses IREM.

BARTOLINI-BUSSI M. & BOERO P. (1998) *Teaching and Learning Geometry in Contexts, ICMI study perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, Kluwer, 52-62.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (2000-2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège – Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x,* 56, 5-34.

BESSOT A. & LABORDE C. (2005) *Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture – tracé du bâtiment,* Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier Grenoble (document interne).

BKOUCHE R. (1992) De la géométrie et des transformations, *Repères IREM*, 4, 135-158.

BOERO P. (ed.) (1999) Teaching and learning mathematics in context, *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1-3).

BOULE F. (2001) *Questions sur la géométrie et son enseignement,* Paris : Nathan.

BROUSSEAU G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164-198.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : la Pensée Sauvage.

BRUN J. (1993) *Didactique des mathématiques,* Genève : Delachaux & Niestlé (édition 1996).

BRUN J. (2007) *L'œuvre de Gérard Vergnaud dans une perspective de didactique des mathématiques,* in : MERRI I. (dir.) *Activité humaine et conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presse Universitaire du Mirail, 65-68.

BULF C. (2005) *Le rôle des images familières dans l'introduction des équations du 1er degré,* mémoire de master, Université Denis Diderot, Paris VII.

CASSAN (GOBERT) S. (1997) Centre de symétrie d'une figure, comparaisons de productions d'élèves de CM2 et de cinquième, *Petit x*, 46, 55-84.

COLOMB J. (1993) *Contrat didactique et contrat disciplinaire,* in : HOUSSAYE J. (dir.) *La pédagogie: une encyclopédie pour aujourd'hui*, Paris : ESF.

CONNES A. (2001) Symétries, *Pour la science,* 292, 36-43.

CORBALLIS M.C. & ROLDAN C.E. (1975) Detection of Symmetry as a Function of Angular Orientation, *Journal of Experimental Psychology: Human perception and Performances,* 1(3), 221-230.

DENYS B. & GRENIER D. (1986) Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais face à une même tâche de construction, *Petit x,* 12, 33-56.

DEZARNAUD DANDINE C., SEVIN C. & PIEM (2007) *Symétrie m'était contée…histoires de symétries,* Paris : Ellipses.

DOUADY R. (1984) *Rapport enseignement apprentissage : dialectique outils-objets, jeux de cadre,* Cahier de didactique, 3, IREM Paris VII.

DOUEK N. (1999) Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school, in: BOERO P. (ed.) Teaching and learning mathematics in context, *Educational Studies in Mathematics,* 39 (1/3), 89-110.

DOUEK N. (2003) *Les rapports entre l'argumentation et la conceptualisation dans les domaines d'expérience,* thèse de doctorat, Université René Descartes Paris V (version non paginée).

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et Pensée Humaine,* Berne : Peter Lang.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53.

ENQUIST M. & Al. (1994) Symmetry, beauty and evolution, *Nature,* 372, 169-175.

FLUCKIGER A. & BRUN J. (2005) Le champ conceptuel de la mesure, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25 (3), 351-401.

FREUDENTHAL H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Dordrecht/Boston/Lancaster: Mathematics Education Library, Reidel Publishing Company.

GIAQUINTO M. (2005) *From symmetry perception to basic geometry,* in: MANCOSU P., JORGENSEN K. F. & PEDERSON S.A., *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics,* Springer, 31-55.

GRAS R. (& Al.) (1996) *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

GRENIER D. & LABORDE C. (1988) *Transformations géométriques – Le cas de la symétrie orthogonale*, in : VERGNAUD G., BROUSSEAU G., & HULIN M. (éd.) *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques,* Actes du colloque de Sèvres Mai 1987, Grenoble : La Pensée Sauvage, 65-86.

GRENIER D. (1990) Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(1), 5-60.

GRIZE J-B, (1996) *Logique naturelle et communication,* Paris : PUF.

HALL E.T. (1976) *Au-delà de la culture,* Paris : Seuil - Points-Essais (édition 1996).

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, A*nnales de didactique et de sciences cognitives,* 11, 175-193.

JAHN A.P. (1998) *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-Géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde,* thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

JOHSUA S. & DUPIN J-J (1989) *Représentations et modélisations : le « débat scientifique » dans la classe et l'apprentissage de la Physique,* Berne : Peter Lang.

JOHSUA S. & DUPIN J-J (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques,* Paris : PUF (édition 2003).

KELLER O. (2004) *Aux origines de la géométrie : le paléolithique et le monde des chasseurs cueilleurs,* Paris : Vuibert.

KELLER O. (2006) *Une archéologie de la géométrie : la figure et le monde : peuples paysans sans écriture et premières civilisations,* Paris : Vuibert.

KUZNIAK A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques,* Notes d'habilitation de recherche, IREM Université de Paris VII.

KUZNIAK A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 6(2), 168-186.

LABORDE C. (1990) L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9(3), 337-364.

LABORDE C. (1994) *Enseigner la géométrie : permanences et révolutions,* Actes du 7ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques ICME 7, Les presses universitaires de Laval, 47-76.

LABORDE C. & PASTRE P. (2005) *Activités et formation professionnelles : simulations informatiques comme aide à la conceptualisation,* Rapport final Avril 2005 (document interne)

LEMONNIER JORE F. (2006) *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique,* thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris VII.

LIMA I. (2006) *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs – Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale,* thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

LINCHEVSKI L. & WILLIAMS J. (1999) Using Intuition from everyday life in "filling" the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers, in: BOERO P. (ed.) Teaching and learning mathematics in context, *Educational Studies in Mathematics,* 39 (1/3), 131-147.

MARR, D. (1982) *Vision: a computational investigation into the human representation and processing of visual information,* San Francisco: W-H Freeman.

MERRI I. (dir.) (2007) *Activité humaine et conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presse Universitaire du Mirail.

MIGNE J. (1969) Les obstacles épistémologiques et la formation des concepts, *Education permanente,* 2, avril-mai-juin, 39-66.

MIYAKAWA T. (2005) *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de la symétrie orthogonale,* thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

NOEL E. (1989) *La symétrie aujourd'hui, Recueil d'interview de France inter,* Paris : Seuil.

NOSS R., HOYLES C. & POZZI S. (2000) *Working knowledge: Mathematics in use,* in: BESSOT A. & RIDGWAY J. *Education for Mathematics in the workplace,* Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, 24, 17-35.

PALMER S.E. & HEMENWAY K. (1978) Orientation and Symmetry: Effects of Multiple, Rotational, and Near Symmetries, *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance,* 4 (4), 691-702.

PALMER S.E. (1985) The role of symmetry in shape perception, *Acta Psychologica*, 59, 67-90.

PARZYSZ, B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris VII.

PASTRE P. (2002) L'analyse du travail en didactique professionnelle, *Revue française de Pédagogie*, 138, janvier-février-mars, 9-17.

PERRIN-GLORIAN M-J. (2006) *Les Méthodes de recherche en didactiques*, Villeneuve d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion.

PIAGET J. (1930) *Le langage et la pensée chez l'enfant,* Delachaux et Niestlé, pp. 134-135.

PIAGET J. et INHELDER B. (1947) *La représentation de l'espace chez l'enfant,* Paris : PUF (édition 1977).

PIAGET (1948) *La géométrie spontanée chez l'enfant,* Paris : PUF.

PIAGET J. & INHELDER B. (1955) *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent,* Paris : PUF.

PIAGET (1972) *L'épistémologie génétique,* Paris : PUF.

PRESMEG N. (2006) Semiotics and the « connections » standard: significance of semiotics for teachers of mathematics, *Educational Studies in Mathematics,* 61 (1/2), 163-182.

REUTER Y. (éd.), COHEN-AZRIA C., DAUNAY B. DELCAMBRE I. & LAHANIER-REUTER D. (2007) *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques,* Bruxelles : De Boeck.

ROBERT A. (1992) Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12(1), 33-58.

ROBERT A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation, *Petit x,* 63, 7-29.

ROCK I. & LEAMAN R. (1963) An experimental analysis of visual symmetry, *Acta Psychologica*, 21, 171-183.

ROCK I. (2001) *La perception*, Paris – Bruxelles : De Boeck Université.

RODITI E. (2003) Régularité et Variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23(2), 183-216.

ROGALSKI J. (2005) *Articulation des théories de Piaget et de Vygotsky, outils pour la didactique,* actes du séminaire national d'octobre 2005, Irem de Paris VII, 237-262.

SENSEVY G. (2007) *Vergnaud, un pragmatiste ?* in : MERRI I. (dir.) *Activité humaine et conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presse Universitaire du Mirail, 41-48.

SIERPINSKA A. (1995) *La compréhension en mathématiques*, Québec Canada : Modulo de Boeck Université.

STRAESSER R. (2000) *Mathematical means and Models from vocational contexts – a german perspective,* in: BESSOT A. & RIDGWAY J. *Education for Mathematics in the workplace,* Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, 24, 65-80.

STRAESSER R. (2007) *À propos de la transition du secondaire vers le monde du travail,* in : ROUCHIER A. & Al. (éd.) *Actes de la XIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage, 177-186.

TAVIGNOT P. (1993) Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 13(3), 257-294.

THOMPSON A. W. (1917) *On Growth and Form*, Cambridge University Press (édition 1992).

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN M. (2003) The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage, in: PRESMEG N. & VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN M. (ed.) Realistic Mathematics Education Research: a PME special issue, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.

VERGNAUD G. (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 2(2), 215-232.

VERGNAUD G. (1981-1983) *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne : Peter Lang (2ème édition).

VERGNAUD G., BROUSSEAU G. & HULIN M. (dir.) (1988) *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque de Sèvres, Mai 1987, Grenoble : La Pensée Sauvage.

VERGNAUD G. (1989-1990) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques – un exemple : les structures additives, *Petit x,* 22, 51-69.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10 (2/3), 133-170.

VERGNAUD G. (1994) *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?* Paris : Hachette éducation.

VERGNAUD G. (1996) *Au fond de l'action, la conceptualisation*, in : BARBIER G.-M (dir.) *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, Paris : PUF, 275-292.

VERGNAUD G. (2000) *Lev Vygotski, Pédagogue et penseur de notre temps*, Paris : Hachette Education.

VERGNAUD G. (2001) *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance,* Actes du colloque GDM (Groupe des Didacticiens des Mathématiques), smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/ConfMontrealmai**2001**.pdf (toujours disponible le 14/07/08)

VERGNAUD G. (2007) in : MERRY M. (dir.) *Activité Humaine et Conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presses Universitaires du Mirail. 27-37 & 341-357.

VYGOTSKI L. (1934) *Pensée et Langage*, Paris : La dispute (édition 1997).

WEYL H. (1952) *Symétrie et mathématique moderne,* Paris : Flammarion (édition 1964).

WILLIAMS J. & WAKE G. (2007) Black boxes in workplace mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 64, 317-343.

Ouvrages de mathématiques universitaires

FRESNEL J. (1999) *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens*, Paris : Hermann.

FRESNEL J. (1999) *Théorie des groupes*, Paris : Hermann.

HADAMARD J. (1898) *Géométrie plane* - *leçons de géométrie élémentaires 1*, Sceaux : Jacques Gabay (édition 1988).

LIRET F. & MARTINAIS D. (1999) *Mathématiques pour le DEUG, Algèbre et Géométrie – 2ème année,* Paris : Dunod.

EUCLIDE (1994) *Les éléments d'Euclide, traduction et commentaires de B. Vitrac* Paris : PUF.

Ouvrages de référence de taille de pierre et d'ébénisterie

AUSSEL A. (1966) *Histoire de l'art – Étude des styles du mobilier*, Paris : Dunod (2ème édition).

CHANSON L. (1988) *Traité d'ébénisterie*, Dourdan : H. VIAL (15ème édition).

NOEL P. (1965) *Technologie de la Pierre de Taille, dictionnaire des termes couramment employés dans l'extraction, l'emploi et le conservation de la Pierre de Taille*, Paris : édition Société de diffusion des techniques du bâtiment et des travaux publics.

RICAUD P. (1999) *Tracés d'Atelier et géométrie Tome 1 et Tome 2*, Dourdan : H. VIAL.

Manuels scolaires

COLOMB J (dir.) (1991) *Apprentissages mathématiques en 6e*, ERMEL publication INRP, Paris : Hatier.

COLOMB J. (dir.) (1993) *Apprentissages mathématiques en 5e*, ERMEL publication INRP, Paris : Hatier.

COURBON D. & MALAVAL J. (dir.) (2003) *Math 3^e^, collection transmath,* Paris : Nathan.

HACHE C. (dir.) (2006) *Maths 5^e^, Domino,* Paris : Nathan.

MERLIER J-M (dir.) (2006) *Maths 5^e^, Collection Diabolo,* Paris : Hachette éducation.

MINGUIN-DEBRAY M. (2006) *L'atelier des symétries,* Paris : ACL – les éditions du Kangourou.

PENE N. & DEPRESLE P. (2003) *Math 3^e^, nouveau décimale,* Paris : Belin.

Programmes et textes officiels

BO n°10 Hors-Série du 15 octobre 1998, pp. 106-114 (programme de 3^e^).
BO n°5 Hors-Série du 9 septembre 2004, pp. 4-16 (programme de 6^e^).
BO n°5 Hors-Série du 25 août 2005, pp. 9-16 (programme de 5^e^).
BO n°6 Hors-Série du 19 Avril 2007 (nouveaux programmes pour la rentrée 2008).

APISP n°167 (bulletin d'information des professeurs d'initiation aux sciences physiques).

Références usuelles

Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences de D. Lecourt, Paris : PUF (édition 1999).
Dictionnaire des mathématiques de A. Bouvier, M. George, F. Lelionnais, Paris : PUF (4^ème^ édition 1993).
Dictionnaire de mathématiques élémentaires de S. Baruk, Paris : Seuil (édition 1992).
Atlas des Mathématiques par F.Reinhardt et H. Soeder, Paris : La Pochothèque (édition1997).
Encyclopedia Universalis.

ANNEXES

Annexes du chapitre 3 : des extraits d’ouvrages de référence

1. Extraits de l’ouvrage de référence (Chanson, 1988)

GÉOMÉTRIE PLANE

Planches 1 à 15

La géométrie plane est l'étude des figures dont tous les éléments sont dans un même plan.

Le plan est une surface dont tous les éléments peuvent coïncider avec l'arête d'une règle dressée et quelle que soit l'orientation de cette règle. Des images nous en sont fournies par la surface de l'eau calme, la table de la dégauchisseuse, le dessus de l'établi, la semelle de la varlope.

Si nous faisons pivoter un plan de façon à amener les deux arêtes extrêmes l'une derrière l'autre, elles doivent exactement coïncider sur toute leur longueur. L'action de ce dégauchissage visuel s'appelle : bornoyer, verbe qui vient de borgne, ce qui nous amène à dire qu'il est nécessaire de fermer un œil pour opérer cette vérification.

Nous pouvons dire également que toutes surfaces planes, appliquées l'une contre l'autre, doivent coïncider en tous points. Ces trois constatations nous donnent trois procédés pour la vérification de nos corroyages de surfaces planes, c'est l'action de dégauchir.

Planche 1

LE POINT

Fig. 1 – En mathématique le point est l'intersection de deux lignes sans épaisseur. Cet élément de la géométrie n'a donc aucune dimension appréciable.

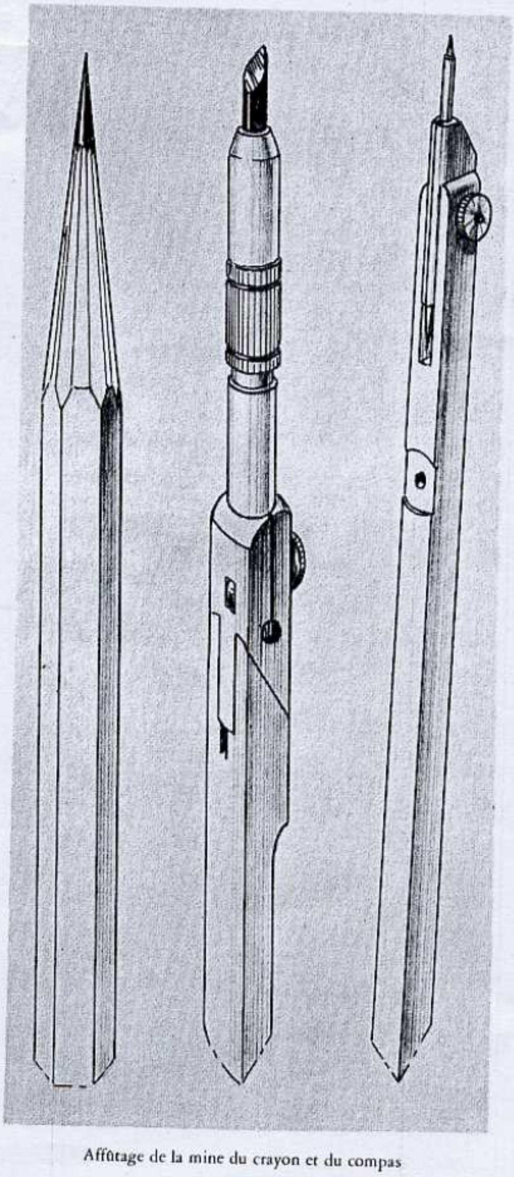
En dessin, nous sommes obligés de donner aux lignes une épaisseur, sous la forme de notre trait de crayon, mais nous devons nous rapprocher le plus possible de la ligne mathématique afin d'obtenir toute la précision nécessaire dans nos épures, plans et tracés.

La première qualité d'un dessinateur se marquera donc par le soin qu'il apportera à tailler son crayon. Le bois et la mine de plomb doivent épouser la forme d'un seul cône très effilé. Par contre, pour le crayon du compas, nous recommandons la forme en langue de chat, avec deux petits chanfreins (suivant *fig.* ci-contre). La langue de chat est pratiquée à l'extérieur du compas.

LES LIGNES

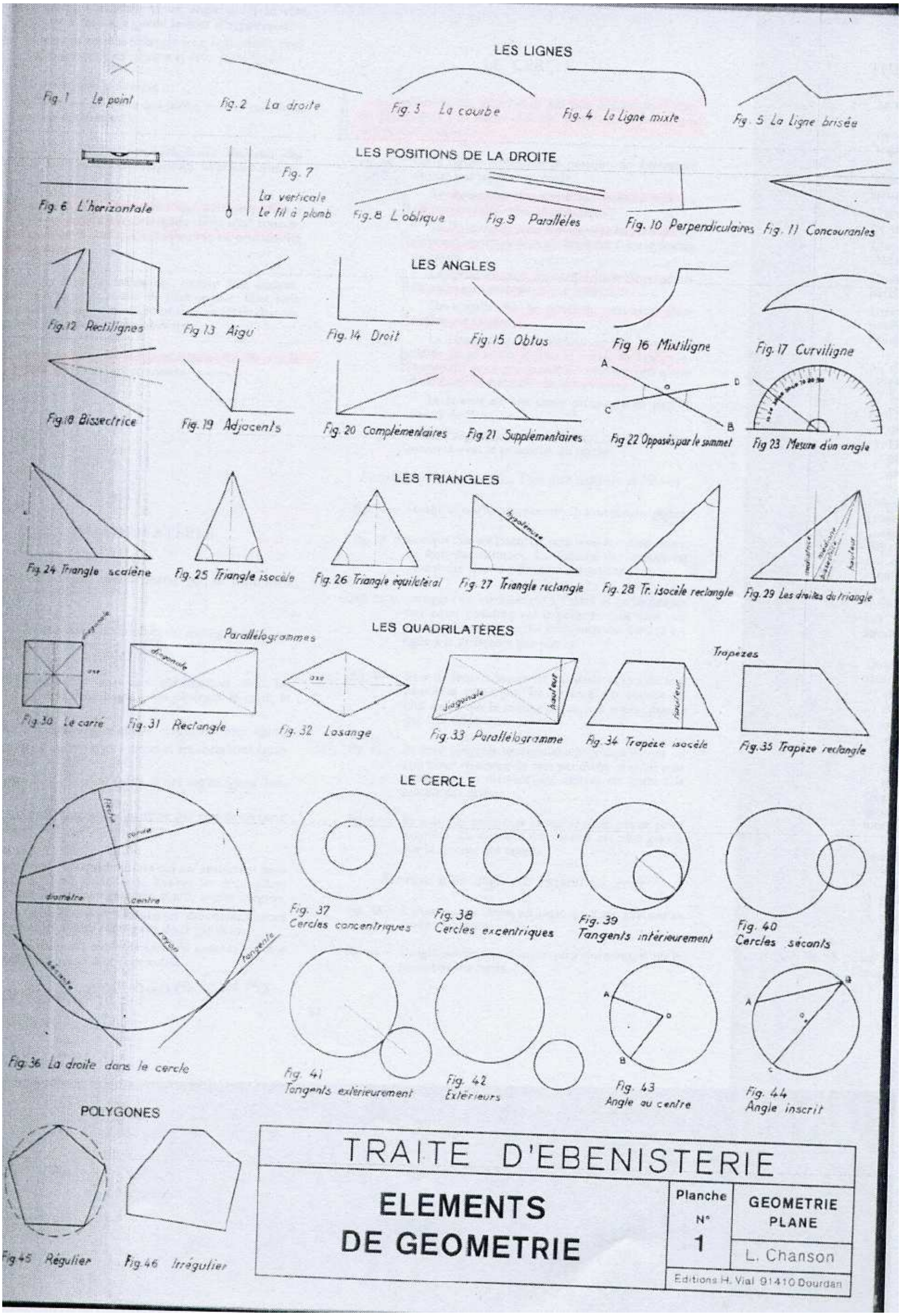
Il existe quatre sortes de lignes : la droite, la courbe, la mixte et la brisée.

Fig. 2 – La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. Nous pouvons dire également qu'elle est formée de points placés dans un même alignement.



Affûtage de la mine du crayon et du compas

(Chanson, 1998, p. 9)


LES LIGNES
Fig. 1 Le point
Fig. 2 La droite
Fig. 3 La courbe
Fig. 4 La Ligne mixte
Fig. 5 La ligne brisée
LES POSITIONS DE LA DROITE
Fig. 6 L'horizontale
Fig. 7 La verticale Le fil à plomb
Fig. 8 L'oblique
Fig. 9 Parallèles
Fig. 10 Perpendiculaires
Fig. 11 Concourantes
LES ANGLES
Fig. 12 Rectilignes
Fig. 13 Aigu
Fig. 14 Droit
Fig. 15 Obtus
Fig. 16 Mixtiligne
Fig. 17 Curviligne
Fig. 18 Bissectrice
Fig. 19 Adjacents
Fig. 20 Complémentaires
Fig. 21 Supplémentaires
Fig. 22 Opposés par le sommet
Fig. 23 Mesure d'un angle
LES TRIANGLES
Fig. 24 Triangle scalène
Fig. 25 Triangle isocèle
Fig. 26 Triangle équilatéral
Fig. 27 Triangle rectangle
Fig. 28 Tr. isocèle rectangle
Fig. 29 Les droites du triangle
LES QUADRILATÈRES
Parallélogrammes
Trapèzes
Fig. 30 Le carré
Fig. 31 Rectangle
Fig. 32 Losange
Fig. 33 Parallélogramme
Fig. 34 Trapèze isocèle
Fig. 35 Trapèze rectangle
LE CERCLE
Fig. 36 La droite dans le cercle
Fig. 37 Cercles concentriques
Fig. 38 Cercles excentriques
Fig. 39 Tangents intérieurement
Fig. 40 Cercles sécants
Fig. 41 Tangents extérieurement
Fig. 42 Extérieurs
Fig. 43 Angle au centre
Fig. 44 Angle inscrit
POLYGONES
Fig. 45 Régulier
Fig. 46 Irrégulier
TRAITE D'EBENISTERIE
ELEMENTS DE GEOMETRIE
Planche N° 1
GEOMETRIE PLANE
L. Chanson
Editions H. Vial 91410 Dourdan

(Ibidem, p. 11)

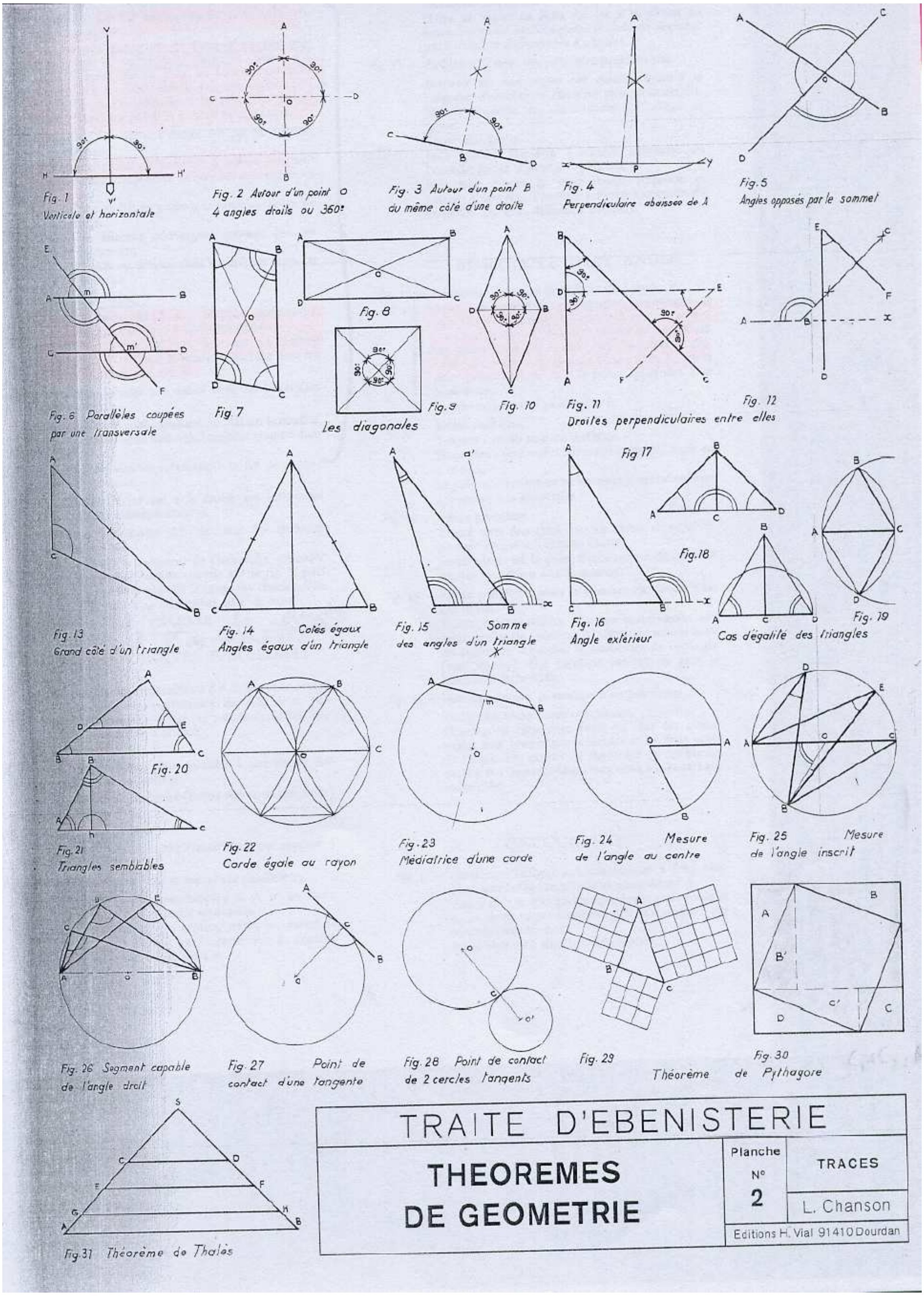


Fig. 1
Verticale et horizontale
Fig. 2 Autour d'un point O
4 angles droits ou 360°
Fig. 3 Autour d'un point B
du même côté d'une droite
Fig. 4
Perpendiculaire abaissée de A
Fig. 5
Angles opposés par le sommet
Fig. 6 Parallèles coupées
par une transversale
Fig. 7
Fig. 8
Les diagonales
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Droites perpendiculaires entre elles
Fig. 12
Fig. 13
Grand côté d'un triangle
Fig. 14 Cotés égaux
Angles égaux d'un triangle
Fig. 15 Somme
des angles d'un triangle
Fig. 16
Angle extérieur
Fig 17
Fig. 18
Fig. 19
Cas d'égalité des triangles
Fig. 20
Fig. 21
Triangles semblables
Fig. 22
Corde égale au rayon
Fig. 23
Médiatrice d'une corde
Fig. 24 Mesure
de l'angle au centre
Fig. 25 Mesure
de l'angle inscrit
Fig. 26 Segment capable
de l'angle droit
Fig. 27 Point de
contact d'une tangente
Fig. 28 Point de contact
de 2 cercles tangents
Fig. 29
Théorème de Pythagore
Fig. 30
Fig. 31 Théorème de Thalès
TRAITE D'EBENISTERIE
THEOREMES
DE GEOMETRIE
Planche
N°
2
TRACES
L. Chanson
Editions H. Vial 91410 Dourdan

(Ibidem, p. 15)

Planche 3

DIVISION D'UNE DROITE EN SEGMENTS ÉGAUX

Fig. 1 – Problème : Diviser une droite en 2, 4, 8, 16, etc. segments égaux.
Prendre une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de la droite, et tracer de A comme centre, un arc en c, en faire autant de B comme centre. Descendre la perpendiculaire de c sur la droite. Procéder de même entre mA et mB pour trouver les points n et n' et ainsi de suite.

Fig. 2 – Problème : Diviser une droite AB par un faisceau convergent.
Tracer une droite ab parallèle à AB de longueur variable mais comportant un nombre n de segments égaux.
Joindre Aa – Bb et prolonger jusqu'au point de rencontre S.
Tracer, le faisceau convergent passant par les points de division.
La droite AB est divisée dans les mêmes rapports que la droite ab.

Fig. 3 – Solution pratique :
Tracer à partir de A une oblique quelconque. Porter sur cette oblique 5 divisions égales. Joindre la 5[e] division avec B et par un système de parallèles à 5B, AB se trouvera partagé dans les mêmes rapports que A5.

Fig. 4 – Problème : Diviser une droite avec des intervalles égaux connus.
Porter dans le prolongement de AB un intervalle. Procéder avec cette nouvelle longueur comme dans la *fig.* 3.
Ensuite, déduire un intervalle à la fin de chaque division obtenue.

Fig. 5 – Problème : Porter sur une droite des intervalles séparant des éléments connus.
Diminuer la droite AB de tous les éléments connus.
Pour trouver la longueur de l'intervalle, procéder avec le segment restant comme sur la *fig.* 3, puis reporter sur la droite AB la longueur connue d'un intervalle, puis d'un élément et ainsi de suite.

TRACÉS DE DROITES PARALLÈLES

Fig. 6 – Tracer une droite parallèle à AB d'intervalle donné.
Tracer aux deux extrémités de AB, deux perpendiculaires. Porter sur ces perpendiculaires, l'intervalle connu en d et en e.
Joindre d à e.

Fig. 7 – Problème : Tracer une parallèle à une droite AB passant par un point m.
Tracer deux arcs égaux (même rayon, même corde) mA et nc.

Fig. 8 – Même problème.
Les arcs peuvent être symétriques par rapport à un axe vertical.

Fig. 9 – Même problème connaissant l'axe parallèle xy.
De deux points quelconques o et o' de l'axe, tracer deux arcs de cercle quelconques.
Puis en inversant les centres, tracer un deuxième arc de cercle passant par l'intersection du premier arc et de la droite connue a a'.
L'intersection des deux arcs nous donnera les points à joindre.

Fig. 10 – Problème : Tracer entre deux parallèles des parallèles équidistantes.
Placer un réglet en biais sur les 2 parallèles de façon à obtenir une longueur facilement divisible par le nombre d'intervalles à obtenir.

Fig. 11 – Problème : Tracer des parallèles équidistantes.
Exécuter sur une règle, une entaille égale à la longueur d'un côté de l'équerre plus un intervalle.
Mettre l'équerre en place comme l'indique la figure.
Tracer une droite.
Faire glisser l'équerre à l'autre extrémité de l'entaille, tracer la première parallèle.
Puis faire glisser la règle contre l'équerre et amener à nouveau l'équerre à l'autre extrémité de l'entaille. Tracer la deuxième parallèle.

BISSECTRICE D'UN ANGLE

Fig. 12 – Problème : Tracer la bissectrice d'un angle.
Avec une ouverture de compas quelconque et en prenant le sommet de l'angle S comme centre, tracer un arc ab. Avec une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de l'arc ab et en prenant successivement comme centre a et b, tracer deux petits arcs en m. Ce point appartient à la bissectrice.
Joindre ce point m au sommet S.

Fig. 13 – Même problème.
Trouver l'arc ab comme ci-dessus.
Élever deux perpendiculaires aux côtés de l'angle en a et en b.
Le point d'intersection de ces deux perpendiculaires appartient à la bissectrice.

Fig. 14 – Même problème.
Tracer cette fois deux arcs de cercle ab et cd en prenant toujours S comme centre.
Joindre bc et ad, le point d'intersection de ces deux droites appartient à la bissectrice.

Fig. 15 – Même problème, mais le sommet de l'angle n'est pas connu.
Tracer deux parallèles, chacune équidistantes aux cotés de l'angle (voir *fig.* 6). Nous obtenons ainsi un angle aSc. Chercher la bissectrice de cet angle (voir *fig.* 12). Elle coïncide exactement avec la bissectrice recherchée.

Fig. 16 – Même problème, le sommet n'est pas connu.
Tracer une sécante quelconque mn.
Chercher la bissectrice (voir *fig.* 12) des quatre angles ainsi formés par la sécante et les deux côtés de l'angle. Les points de rencontre de ces bissectrices x et x' appartiennent tous deux à la bissectrice recherchée.

CONCOURANTES

Fig. 17 – Problème : Trouver une concourante à deux obliques données et passant par un point donné n.
Tracer un triangle quelconque ayant pour sommet n, les deux autres sommets pris sur chacune des concourantes connues.
Nous obtenons ainsi le triangle nBD.

16

(Ibidem, p. 16)

Planche 5

LE CERCLE

Fig. 1 – Problème : Retrouver le centre d'un cercle.

Tracer deux cordes quelconques et élever les perpendiculaires au milieu de ces cordes.
L'intersection des perpendiculaires nous donne le centre recherché. C'est une application du théorème 23 pl. 2.

Fig. 2 – L'équerre à centrer représente une perpendiculaire élevée au milieu d'une corde AB. Elle nous évite tout le tracé de la figure précédente.

Fig. 3 – L'équerre à centrer de cette figure est basée sur le théorème suivant :
« Deux tangentes au périmètre d'un cercle et issues d'un même point sont égales ».
La bissectrice de l'angle formé par ces deux tangentes passe donc par le centre du cercle.

Fig. 4 – Le même problème peut se résoudre également avec une équerre de dessinateur. C'est la réciprocité du théorème 16 pl. 2.

Fig. 5 – Ce théorème nous permet également la vérification d'une cannelure demi-circulaire :
Faire glisser les côtés de l'angle droit sur les arêtes A et B. Le somm. ‹ C de l'angle droit doit toujours rester en contact avec le fond de la cannelure.

TRACÉS DE CERCLES OU ARCS DE CERCLES

Fig. 6 – Problème : Tracer un arc de cercle passant par trois point A, B, C.

Joindre AB et BC.

Élever la perpendiculaire au milieu de ces deux droites, leur intersection nous donne le centre O du cercle dont le périmètre passe par A B et C (voir théorème 23 pl. 2).

Fig. 7 – Tracer un arc de cercle passant par A, B, C, dont le centre est inaccessible.

Fixer deux règles ensemble suivant l'angle ABC. Faire glisser cet angle de façon à ce que les chants des deux règles restent en contact avec A et C. Le sommet de l'angle décrit alors l'arc de cercle cherché (voir théorème 25 pl. 2).

Fig. 8 – Problème : Tracer le cercle circonscrit à un triangle ABC.

Le centre du cercle circonscrit est donné par le point de rencontre des perpendiculaires élevées sur le milieu de chaque côté du triangle (voir *fig.* 29 pl. 1).

Fig. 9 – Problème : Tracer le cercle inscrit dans un triangle.

Le centre du cercle inscrit est donné par le point de rencontre des bissectrices des angles du triangle (voir *fig.* 29 pl. 1).

Fig. 10 – Problème : Tracer à main levée un arc de cercle passant par A, B, C.

Joindre AB et BC.
De A et de C comme centres, tracer deux arcs de cercle égaux.
Sur chacun de ces arcs de cercle et à partir de O porter des petits arcs égaux comme l'indique la figure. Pour l'arc de centre A, nous baptiserons ces points par des chiffres en-dessous de O et par des lettres au-dessus. Pour l'arc de centre C, en chiffres au-dessus et lettres en-dessous.

20

(Ibidem, p. 20)

Planche 2

Afin de mieux comprendre les tracés que nous étudierons par la suite, il a paru nécessaire de faire figurer au début de cet ouvrage, un recueil des principaux théorèmes de géométrie.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE

Fig. 1 – La verticale est perpendiculaire à l'horizontale.

Fig. 2 – Autour d'un point nous pouvons tracer quatre angles droits ou 360°.

Fig. 3 – Autour d'un point et du même côté d'une droite, nous pouvons tracer deux angles droits ou 180°.
- D'un point pris sur une droite, on ne peut élever qu'une perpendiculaire sur cette droite.
- D'un point extérieur à une droite on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à cette droite.
- Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.
- Lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.

Fig. 4 – Si, d'un point pris hors d'une droite, on mène la perpendiculaire et une oblique :
a) La perpendiculaire est plus courte que l'oblique.
b) Deux obliques, qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire, sont égales.
c) De deux obliques, qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, la plus grande est celle qui s'écarte le plus.

Fig. 5 – Deux angles opposés par le sommet sont égaux (voir démonstration planche 1, *fig.* 22).
- Lorsqu'une droite rencontre une autre droite, elle forme avec elle quatre angles. Les angles qui ont un côté commun sont adjacents supplémentaires.
- Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires entre elles.
- Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet forment une seule droite.

Fig. 6 – Quand deux droites parallèles sont coupées par une sécante, elles forment :
a) des angles alternes internes égaux BmF – Em'C,
b) des angles alternes externes égaux EmA – Dm'F,
c) des angles correspondants égaux BmF – Dm'F,
d) des angles intérieurs d'un même côté, supplémentaires BmF – AmF,
e) des angles extérieurs d'un même côté, supplémentaires EmA – EmB.
Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux, s'ils sont de même sens, supplémentaires s'ils sont de sens contraires.

Fig. 7 – Dans un parallélogramme :
a) les angles opposés sont égaux, les angles consécutifs sont supplémentaires.
b) Les côtés opposés sont égaux deux à deux.
c) Les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.

Fig. 8 – Les diagonales d'un rectangle sont égales, elles se coupent en leur milieu.

Fig. 9 – Les diagonales d'un carré sont égales, elles se coupent en leur milieu, en formant quatre angles droits.

Fig. 10 – Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu en formant quatre angles droits. Elles ne sont pas égales.

Fig. 11 – Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires deux à deux sont égaux s'ils sont de même nature, c'est-à-dire s'ils sont tous deux aigus ou tous deux obtus.

Fig. 12 – Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires deux à deux sont supplémentaires s'ils ne sont pas de même nature, c'est-à-dire, l'un aigu et l'autre obtus.

Fig. 13 – Dans tout triangle, au plus grand côté est opposé le plus grand angle et au plus petit côté, le plus petit angle.
Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

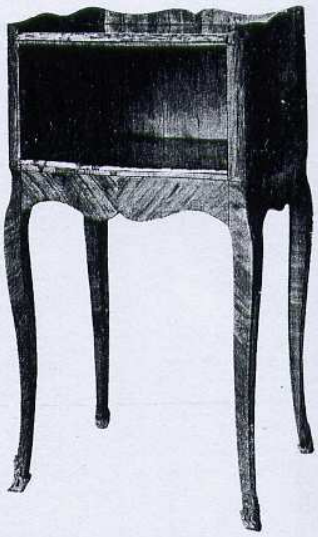
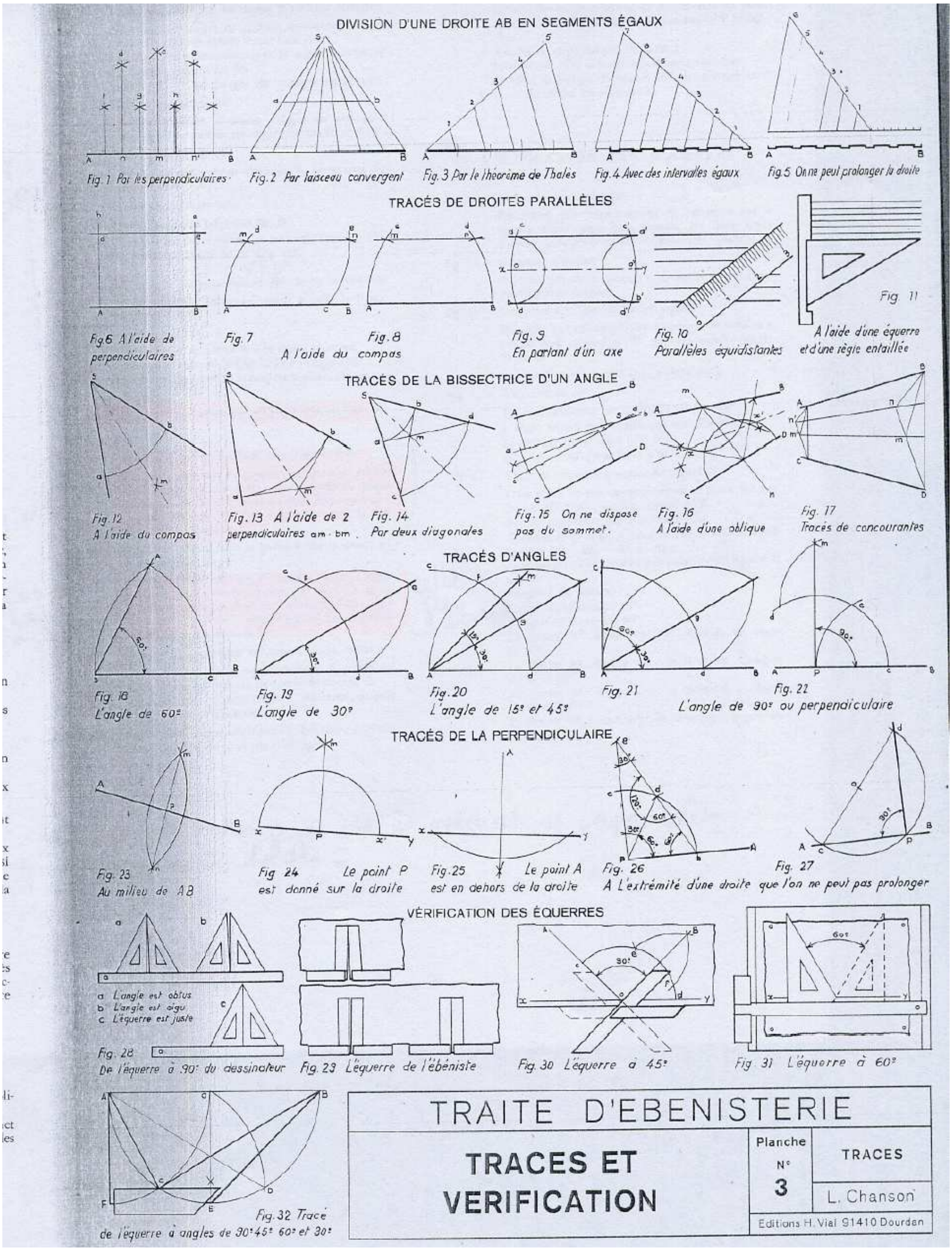


Table de chevet en bois de violette par Antoine Mathieu Criaerd. Époque 1755. Haut. : 0,93 m – Larg. : 0,53 m. Prof. : 0,37 m.
Musée des Arts Décoratifs Paris.

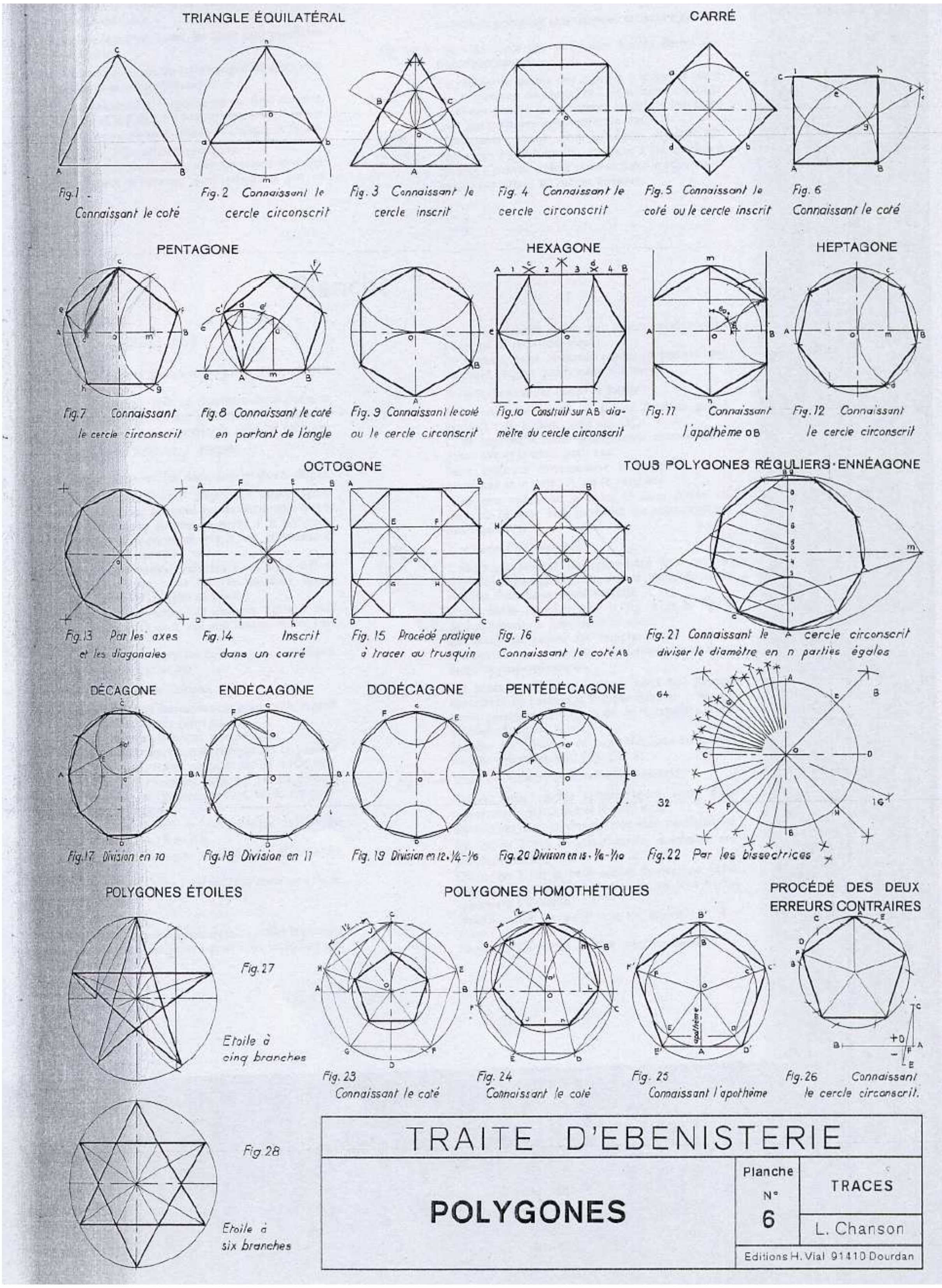
Fig. 14 – Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.
- Si dans un triangle, deux angles sont égaux, les côtés opposés sont égaux. Ce triangle est donc isocèle.
- Dans un triangle isocèle, la médiane, la bissectrice et la hauteur issues du sommet coïncident.
- Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle égal autre que l'angle droit.
- Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.

13

(Ibidem, p. 13)


DIVISION D'UNE DROITE AB EN SEGMENTS ÉGAUX
Fig. 1 Par les perpendiculaires
Fig. 2 Par faisceau convergent
Fig. 3 Par le théorème de Thalès
Fig. 4 Avec des intervalles égaux
Fig. 5 On ne peut prolonger la droite
TRACÉS DE DROITES PARALLÈLES
Fig. 6 A l'aide de perpendiculaires
Fig. 7
Fig. 8
A l'aide du compas
Fig. 9
En partant d'un axe
Fig. 10
Parallèles équidistantes
Fig. 11
A l'aide d'une équerre et d'une règle entaillée
TRACÉS DE LA BISSECTRICE D'UN ANGLE
Fig. 12
A l'aide du compas
Fig. 13 A l'aide de 2 perpendiculaires am - bm
Fig. 14
Par deux diagonales
Fig. 15 On ne dispose pas du sommet.
Fig. 16
A l'aide d'une oblique
Fig. 17
Tracés de concourantes
TRACÉS D'ANGLES
Fig. 18
L'angle de 60°
Fig. 19
L'angle de 30°
Fig. 20
L'angle de 15° et 45°
Fig. 21
Fig. 22
L'angle de 90° ou perpendiculaire
TRACÉS DE LA PERPENDICULAIRE
Fig. 23
Au milieu de AB
Fig 24 Le point P est donné sur la droite
Fig. 25 Le point A est en dehors de la droite
Fig. 26
Fig. 27
A L'extrémité d'une droite que l'on ne peut pas prolonger
VÉRIFICATION DES ÉQUERRES
a L'angle est obtus
b L'angle est aigu
c L'équerre est juste
Fig. 28
De l'équerre à 90° du dessinateur
Fig. 29 L'équerre de l'ébéniste
Fig. 30 L'équerre à 45°
Fig. 31 L'équerre à 60°
Fig. 32 Tracé de l'équerre à angles de 30° 45° 60° et 30°
TRAITE D'EBENISTERIE
TRACES ET VERIFICATION
Planche
N°
3
TRACES
L. Chanson
Editions H. Vial 91410 Dourdan

(Ibidem, p. 17)



TRIANGLE ÉQUILATÉRAL
CARRÉ
Fig.1 Connaissant le coté
Fig.2 Connaissant le cercle circonscrit
Fig.3 Connaissant le cercle inscrit
Fig.4 Connaissant le cercle circonscrit
Fig.5 Connaissant le coté ou le cercle inscrit
Fig.6 Connaissant le coté
PENTAGONE
HEXAGONE
HEPTAGONE
Fig.7 Connaissant le cercle circonscrit
Fig.8 Connaissant le coté en partant de l'angle
Fig.9 Connaissant le coté ou le cercle circonscrit
Fig.10 Construit sur AB diamètre du cercle circonscrit
Fig.11 Connaissant l'apothème OB
Fig.12 Connaissant le cercle circonscrit
OCTOGONE
TOUS POLYGONES RÉGULIERS · ENNÉAGONE
Fig.13 Par les axes et les diagonales
Fig.14 Inscrit dans un carré
Fig.15 Procédé pratique à tracer au trusquin
Fig.16 Connaissant le coté AB
Fig.21 Connaissant le cercle circonscrit diviser le diamètre en n parties égales
DÉCAGONE
ENDÉCAGONE
DODÉCAGONE
PENTÉDÉCAGONE
Fig.17 Division en 10
Fig.18 Division en 11
Fig.19 Division en 12 · 1/4 - 1/6
Fig.20 Division en 15 · 1/6 - 1/10
Fig.22 Par les bissectrices
POLYGONES ÉTOILES
POLYGONES HOMOTHÉTIQUES
PROCÉDÉ DES DEUX ERREURS CONTRAIRES
Fig.27
Etoile à cinq branches
Fig.23 Connaissant le coté
Fig.24 Connaissant le coté
Fig.25 Connaissant l'apothème
Fig.26 Connaissant le cercle circonscrit.
Fig.28
Etoile à six branches
TRAITE D'EBENISTERIE
POLYGONES
Planche N° 6
TRACES
L. Chanson
Editions H. Vial 91410 Dourdan

(Ibidem, p. 25)

2. Extraits de l’ouvrage de référence (Ricaud, 1999)

A. Le point

Il se matérialise, en pratique, par l’intersection de deux droites (a1), de deux courbes (a2) ou d’une courbe et d’une droite (non figurées).

B. La droite

Elle se définit par une succession ininterrompue de points se déplaçant dans une même direction (b1).

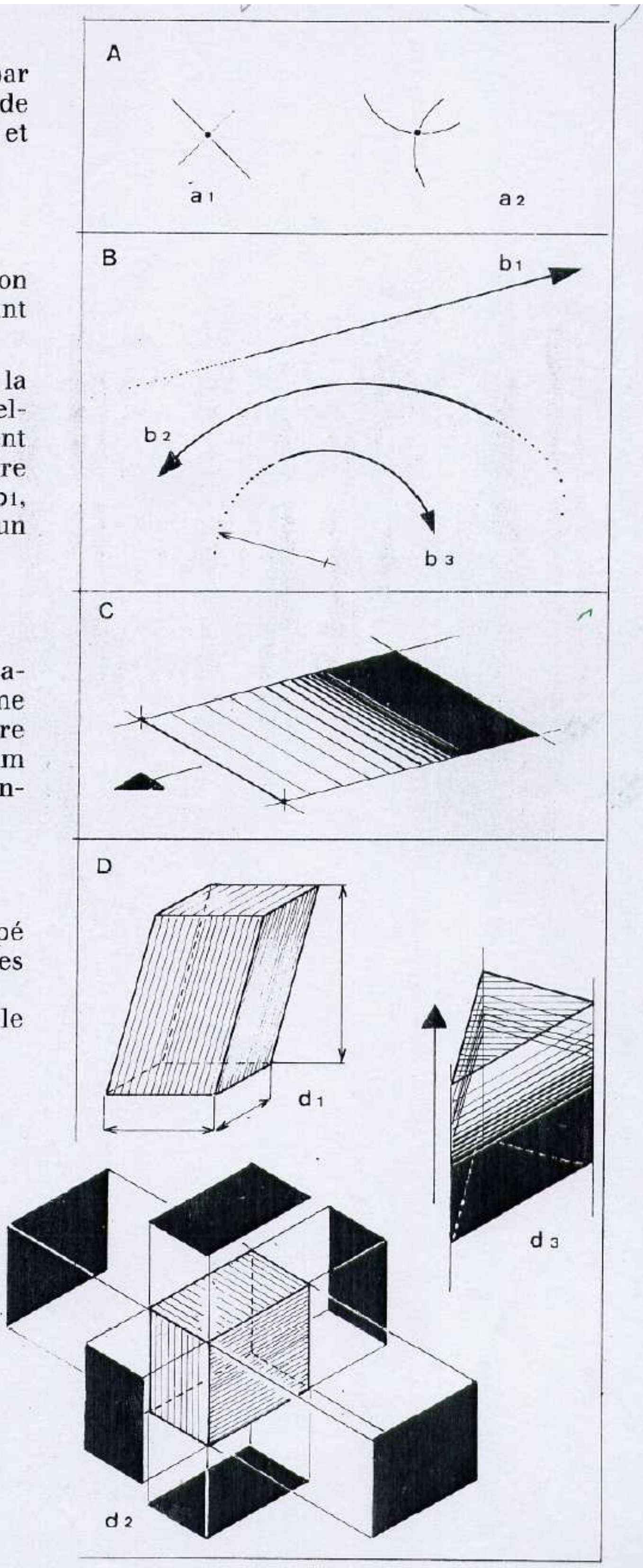
La courbe : même définition que la droite mais avec un déplacement quelconque (b2) ou par un déplacement circulaire autour d’un point de centre (b3). Ces différents déplacements (b1, b2, b3) sont toujours situés sur un même plan.

C. Le plan

Figure plane engendrée par le déplacement ininterrompu, sur un même plan, d’une droite. Un plan peut être limité par l’intersection d’un minimum de trois droites s’entrecoupant (triangle).

D. Le volume

Espace en trois dimensions occupé par un corps (d1) ou limité par des plans (d2).
Un volume peut être engendré par le déplacement d’un plan (d3).



9

(Ricaud, 1999, p. 9)

LE POINT :

Définition. Vocabulaire

Mathématiquement parlant, le point n'a pas de dimension, il n'est donc pas mesurable (1).

En géométrie, il peut se définir par l'intersection de deux droites (2), d'une courbe et d'une droite (3) ou de deux courbes (4).

Par contre, le point doit être bien visible sur certaines lettres (5) ou dans la ponctuation (6).

Le point est très utile dans les tracés d'atelier, les épures ou plans sur règle.

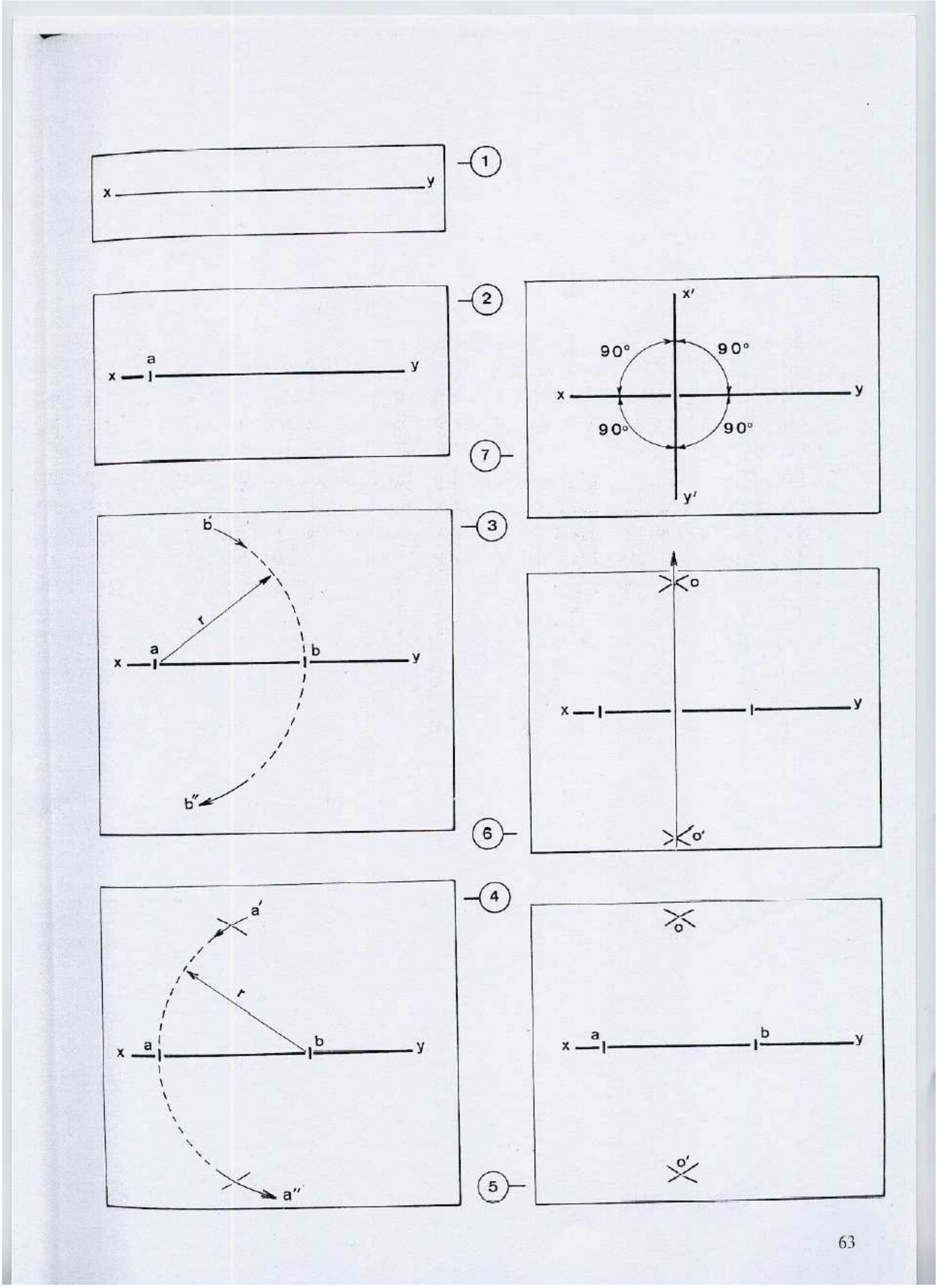
Il peut se matérialiser à l'aide d'un crayon (7), d'une pointe à tracer (8) ou d'un pointeau sur les matériaux durs (9). Le tracé d'un cercle nécessite un point de centre (10).

Un peu de vocabulaire...

Point d'appui : qui sert de support, de maintien.
Point de fusion : température à laquelle un solide se liquéfie.
Point faible : partie fragile d'un ouvrage.
Pointer : (une machine-outil) : en faire le réglage.
« (une feuille de débit, une liste, etc.) : contrôler.
« (une pièce de bois sur une autre) : fixer à l'aide de pointes.
Pointes (clous) : tige d'acier avec ou sans tête à l'une de ses extrémités et pointue à l'autre (pointe à tête plate, tête d'homme, tête ronde, etc.).
Pointe à tracer : outil de traçage (8).
Pointe carrée : outil servant à faire des avant-trous (vissage).
Pointeau : outil de traçage pour matériaux durs (9).
Pointu : terminé en pointe (crayons, clous, etc.).
Point de colle : collage partiel par petites touches de colle.
Point de fixation : solidarisation de deux éléments (clouage, vissage, chevillage, scellement, collage, etc.).
Pointillé : suite de points.
Point de rupture : endroit où une cassure du matériau se produit sous l'effet d'un effort ou d'un choc.
Point d'intersection : (2), (3), (4).
Point de centre : (10).
Point de chute : endroit de la rencontre d'un objet avec le sol à la suite d'une trajectoire.
Point de fuite : utilisé en dessin de perspective.
Mise au point : affiner un réglage ou un projet.

18

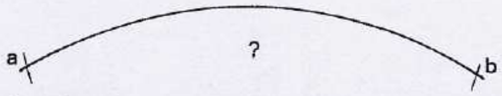
(Ibidem, p. 18)



(Ibidem, p. 63)

CERCLES ET ARCS DE CERCLE

Recherche du point de centre d'un arc de cercle

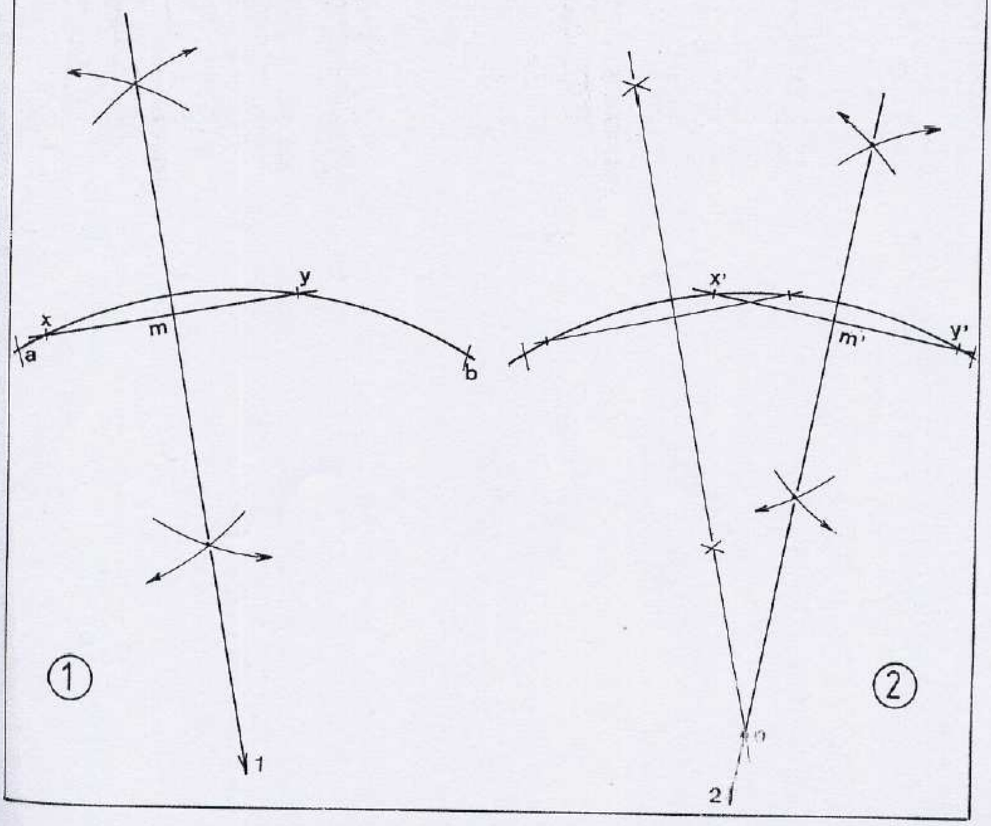


Recherchercher le point de centre de l'arc de cercle a b

(1) Sur l'arc de cercle ab, tracer la sécante quelconque xy, et y élever en son milieu (m) la perpendiculaire n° 1.

(2) Tracer une seconde sécante x'y' en un endroit différent de xy, et y élever, en son milieu la perpendiculaire n° 2.

Les perpendiculaires 1 et 2 se coupent en un point O qui est le centre permettant le tracé de l'arc de cercle ab.



105

(Ibidem, p. 105)

CERCLES ET ARCS DE CERCLE

Recherche du point de centre d'un arc de cercle devant passer par trois points connus

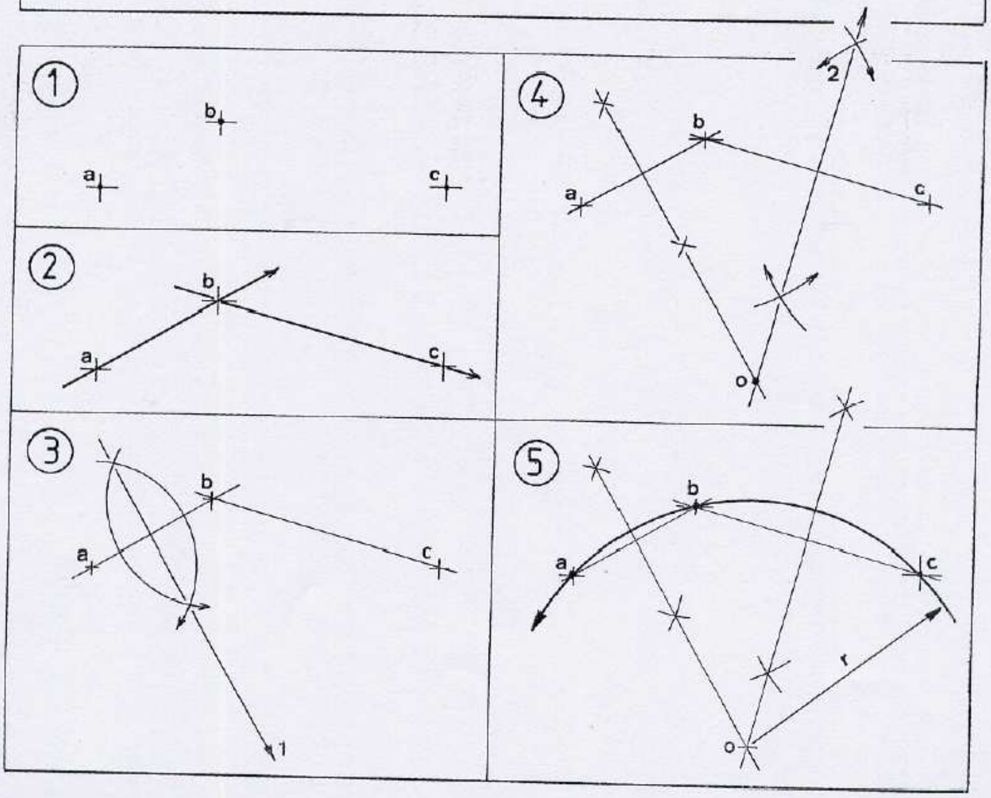
(1) Les trois points connus sont a b et c.

(2) Joindre a à b et b à c.

(3) Tracer la perpendiculaire n° 1 passant par le milieu de ab.

(4) Tracer la perpendiculaire n° 2 passant par le milieu de bc , on obtient le point O.

(5) Le point d'intersection O des deux perpendiculaires est le centre de l'arc de cercle régulier devant passer par les points connus a b et c
(le rayon de l'arc de cercle est Oa, Ob ou Oc).



108

(Ibidem, p. 108)

LES ANGLES :
Division d'un angle droit en
– 2 angles égaux (45°)
– 3 angles égaux (30°)

I. Division d'un angle droit en deux angles égaux (2 fois 45°)

(1) Soit l'angle droit $\widehat{xoy}$.

(2) De o comme centre, tracer l'arc de cercle ab d'un rayon r_1 quelconque, coupant ox en a et oy en b.

(3) De b comme centre, et avec un rayon identique ou différent de r_1, tracer l'arc de cercle cc'.

(4) Avec le même rayon r_2 et de a comme centre, tracer l'arc de cercle dd' coupant cc' en p.

(5) Tracer la demi-droite [op) qui se trouve être également la bissectrice de l'angle $\widehat{xoy}$ (elle divise cet angle en deux parties égales).

(6) Les deux angles $\widehat{xop}$ et $\widehat{poy}$ sont égaux, adjacents et complémentaires (ils ont un côté commun op et leur somme est de 90°).

II. Division d'un angle droit en trois angles égaux (3 fois 30°)

(7) Soit l'angle droit $\widehat{xoy}$.

(8) De o comme centre, tracer l'arc de cercle d'un rayon r_1 quelconque et coupant ox au point a et oy au point b.

(9) De b comme centre et avec un rayon r_2 identique ou différent de r_1, tracer l'arc de cercle cc' coupant l'arc ab au point d.

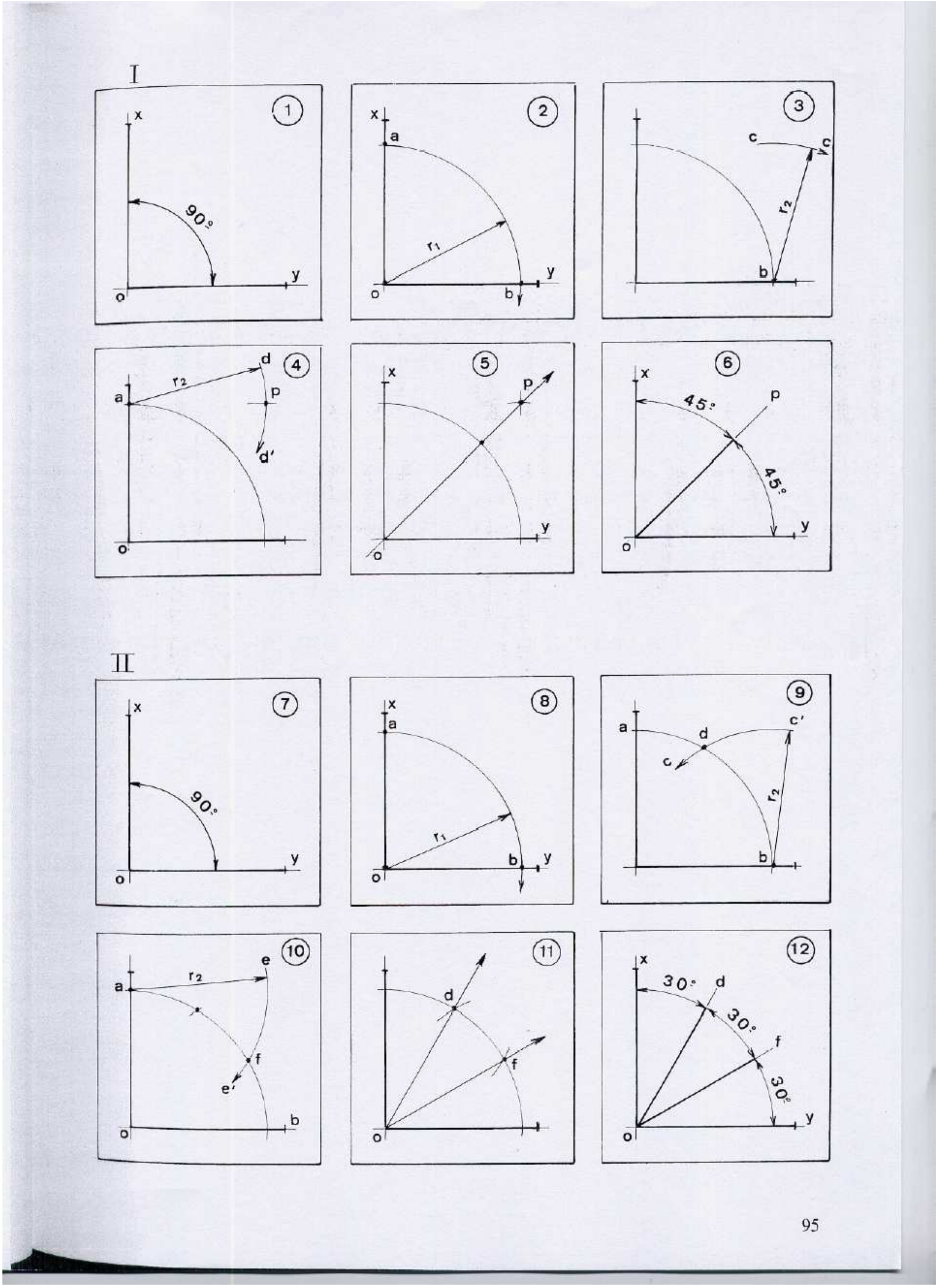
(10) Même rayon (r_2) et a comme centre, tracer l'arc de cercle ee' coupant l'arc ab en un point f.

(11) Tracer les demi-droites [od) et [of).

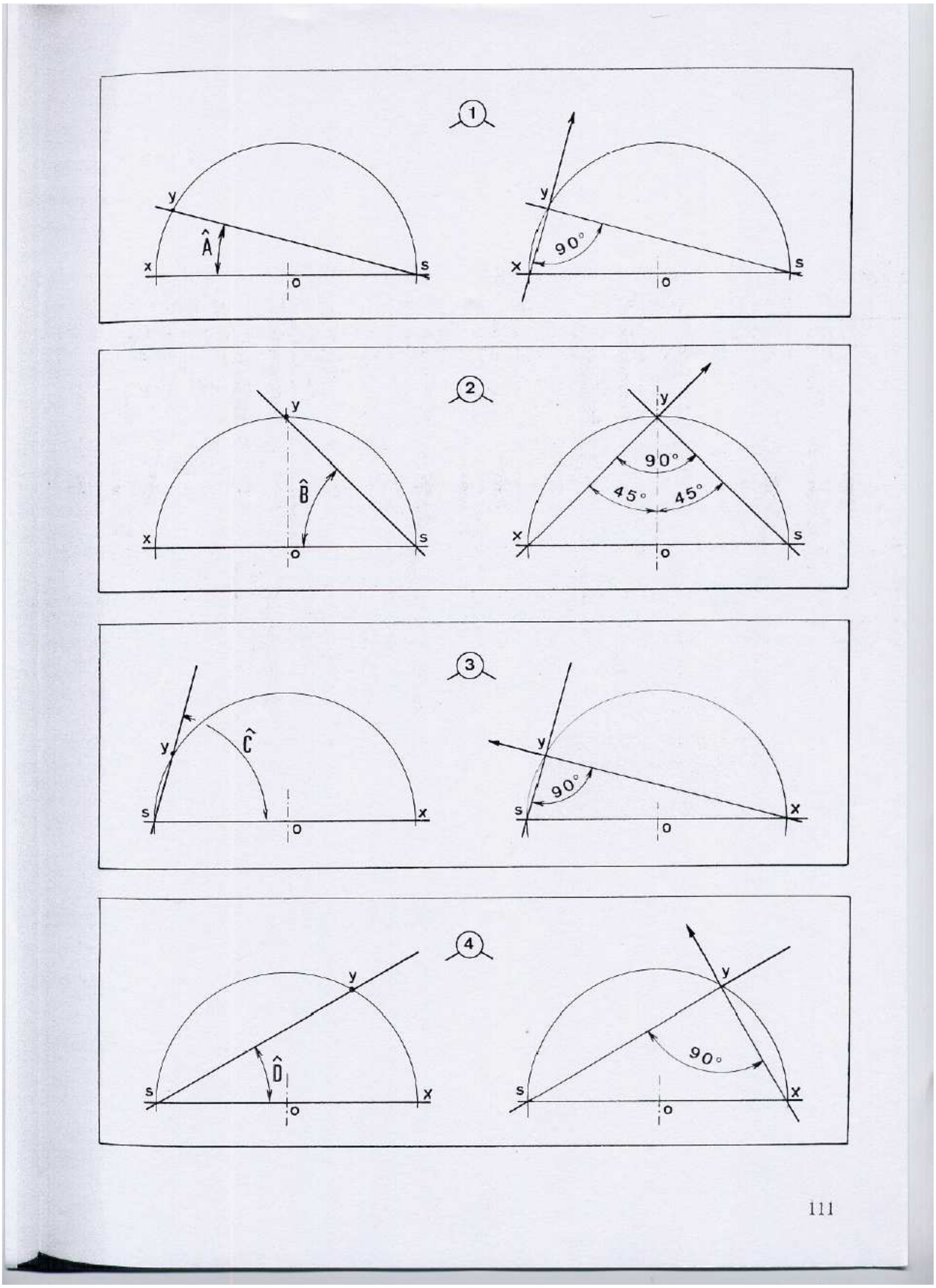
(12) Les trois angles $\widehat{xod}$, $\widehat{dof}$ et $\widehat{foy}$ sont égaux, complémentaires car leur somme est de 90° (30° + 30° + 30° = 90°).

94

(Ibidem, p. 94)


I
1
x
90°
o
y
2
x
a
r1
o
b
y
3
c
c
r2
b
4
d
a
r2
p
d'
o
5
x
p
y
o
6
x
45°
p
45°
o
y
II
7
x
90°
o
y
8
x
a
r1
b
y
o
9
a
d
c'
c
r2
b
10
a
r2
e
f
e'
o
b
11
d
f
o
12
x
30°
d
30°
f
30°
o
y
95

(Ibidem, p. 95)



(Ibidem, p. 111)

DIVISION D'UNE DROITE
en x parties égales

Pour diviser une pièce de bois (1) de 70 mm de large, par exemple en 7 parties égales, il suffit de diviser 70 mm par 7 et de reporter, à l'aide d'un réglet 7 fois 10 mm… facile !

Si l'on désire diviser cette pièce de bois (2) en 8 parties égales, on divise 70 mm par 8 (ce qui donne 8,75 mm) ou en 9 parties égales (soit 70 : 9 = 7,7777 mm…) il faut avouer que ces cotes ne sont pas faciles à reporter, sinon impossibles !

La solution consiste donc à positionner obliquement un réglet en un point 0 sur le chant de référence et à faire coïncider le chiffre 8 (2a) ou le chiffre 9 (2b) le long du chant opposé et repérer, suivant le cas, les chiffres de division 1 à 7 pour 8 parties égales ou **1** à 8 pour une division en 9 parties égales.

Division (3) d'un segment de droite [ab] en 7 parties égales (méthode valable pour toute autre division)

Du point a, tracer une oblique (ax) suivant un angle quelconque $\hat{y}$.

(4) Du point a, et à l'aide d'un compas réglé approximativement à 1/7^e^ de (ab), porter sur (ax) 7 divisions égales (1 à 7).

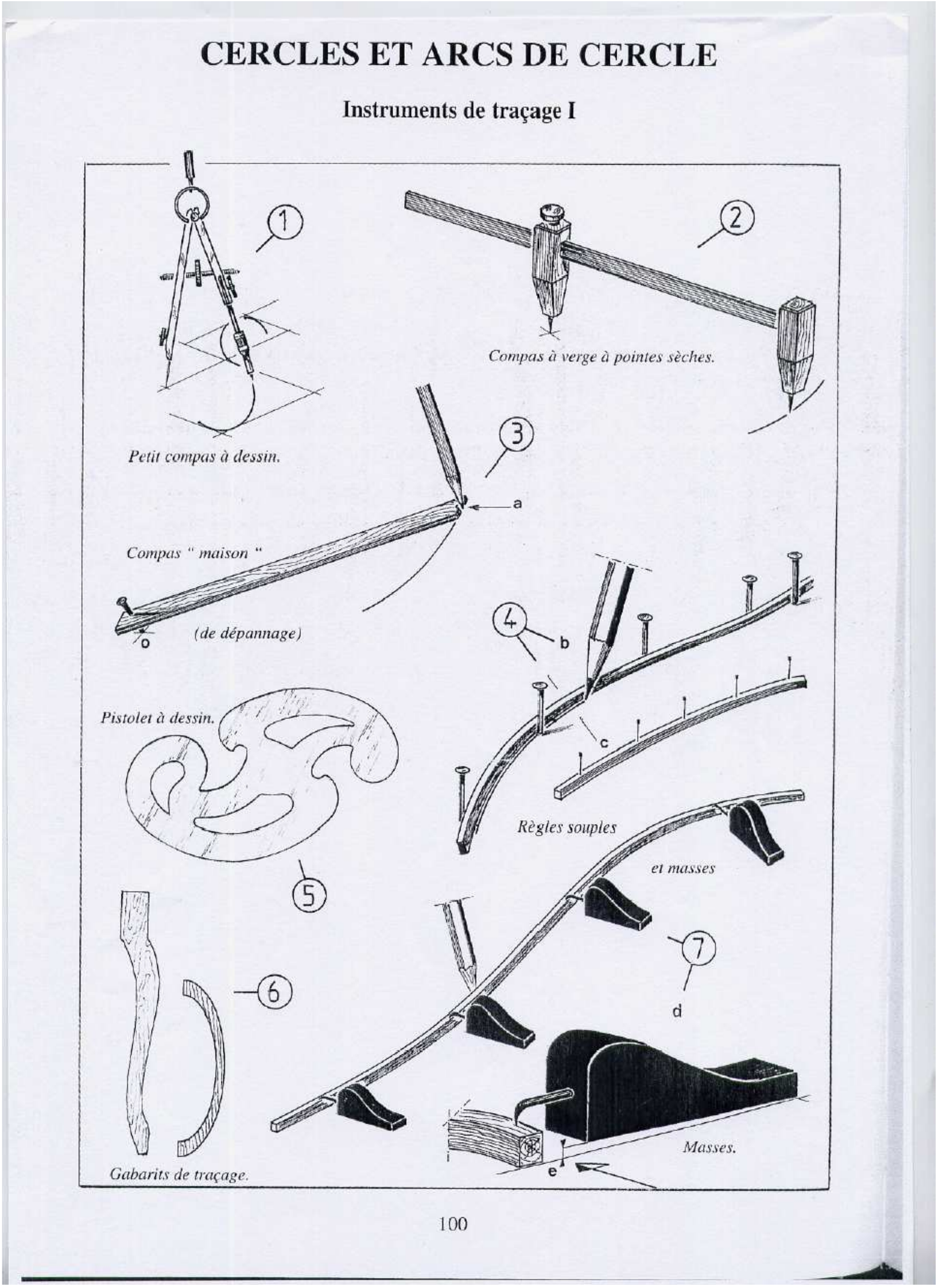
(5) Joindre le point (7) au point (b).

(6) Positionner le grand côté d'une équerre sur (7b) et appliquer une règle sous le petit côté de l'équerre. Maintenir fermement la règle et, en faisant glisser l'équerre vers la gauche, descendre les points 6 à 1 sur ab.

(7) Les points 1' à 6' divisent ab en 7 parties égales.

34

(Ibidem, p. 34)



CERCLES ET ARCS DE CERCLE

Instruments de traçage I

100

(Ibidem, p. 100)

3. Le problème de la trisection de l’angle

Soit l'angle AOB à diviser en trois parties.
Construction : du point B on mène la perpendiculaire BC à la droite OA et la parallèle Bx à cette même droite. Considérons la droite passant par O, coupant BC en D, Bx en E, et telle que DE = 2OB. Dans ces conditions, l'angle AOE est le tiers de l'angle AOB.
Démonstration : Soit F le milieu de DE. Alors, puisque le triangle DBE est rectangle en B, BF = DF. Or, par construction, DF = BO. Ainsi, le triangle OBF est isocèle, ce qui prouve que BOF = BFO. De même, FBE = FEB. On déduit que l'angle FEB est la moitié de l'angle DFB. Les angles AOE et OEB étant égaux (comme alternes internes), l'angle AOE est la moitié de l'angle BOB, donc le tiers de l'angle AOB.

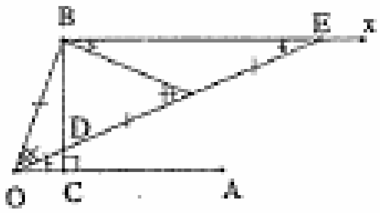
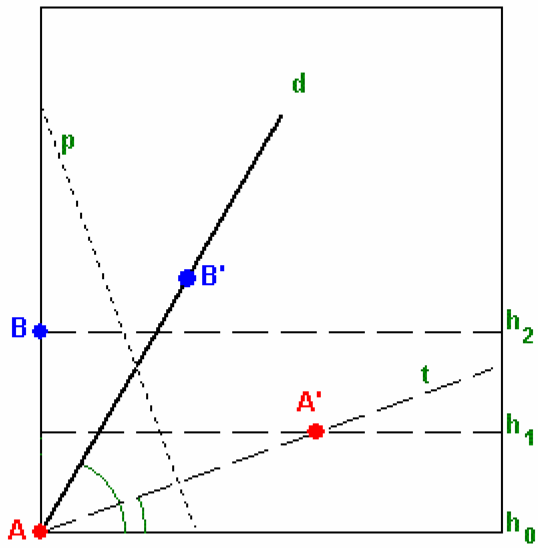


Figure 2 - Trisection de l'angle

(Jahn, 1998, p. 30)

« La trisection de l'angle est en revanche réalisable en pliant une feuille de papier, par une construction due à Hisashi Abe (1980), qu'illustre la figure ci-contre :



- On trace la droite *d* passant par le coin A de la feuille de sorte qu'elle forme, avec le bord inférieur h_0 de la feuille, l'angle à couper en trois.
- Deux bandes horizontales de même largeur (arbitraire) sont tracées en bas de la feuille (ceci peut se faire facilement par pliage.) On appelle h_1 et h_2 les nouvelles droites qui les délimitent.
- Il faut maintenant plier la feuille le long d'un pli *p* de sorte que le coin A se trouve déplacé sur la droite h_1 (en un point A'), en même temps que le point B (intersection du bord gauche avec la droite h_2) se trouve déplacé sur la droite *d* en un point B'.
- La droite *t* passant par A et A' est alors la trisectrice de l'angle donné: l'angle formé par h_0 et *t* vaut 1/3 de l'angle formé par h_0 et *d*.

La démonstration est simple : par symétrie autour de la droite p le milieu P de AB donne le milieu P’ de A’B’ et, de même que A’P est perpendiculaire à AB, on a AP’ qui est perpendiculaire à A’B’. Les deux triangles rectangles P’A’A et P’B’A sont donc égaux.

D’autre part soit H la projection orthogonale de A’ sur h0. Puisque les triangles HAA’ et PA’A sont égaux comme moitiés d’un même rectangle et que les triangles PA’A et P’AA’ sont aussi égaux par symétrie autour de p, il en résulte que les triangles HAA’ et P’AA’ sont égaux. Par conséquent l'égalité des trois triangles HAA', P'AA' et P'AB' montre que les segments AP’ et AA’ partagent bien l’angle dAh0 en trois angles égaux ».

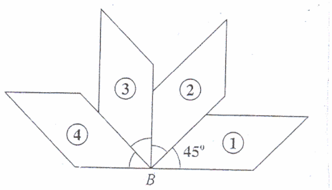
(http://fr.wikipedia.org/wiki/Trisection_de_l'angle, toujours disponible le 14/07/08, source : Jean Aymes, *Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle)*, publication de l'A.P.M.E.P. n°70)

Annexes du chapitre 4 : LE QUESTIONNAIRE EXPLORATOIRE EN CLASSE DE 3^{e} DANS SON INTEGRALITE

Feuilles d'exercices 3ème. Ces exercices portent sur toutes vos connaissances mathématiques rencontrées au Collège.

Exercice 1

Cette figure est composée de quatre parallélogrammes (numérotés de 1 à 4) superposables.



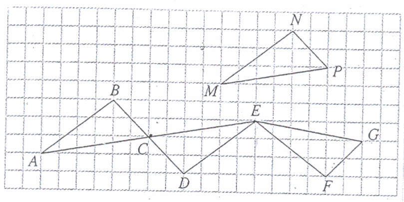
Indiquez comment (de toutes les manières possibles) et Justifiez :
1 → 2
1 → 3
1 → 4
2 → 4

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dites laquelle des translations ou des symétries ou des rotations :

a) transforme ABC en EDC
b) transforme CDE en GFE
c) transforme ABC en MNP

Justifiez vos réponses.



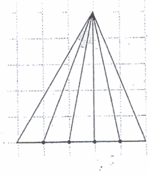
Exercice 3

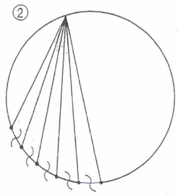
Vrai ou Faux ? Justifiez vos réponses.

1. L'image d'un segment par un demi-tour est un segment parallèle et de même longueur.
2. L'image d'un segment par un quart de tour est un segment parallèle et de même longueur.
3. Une symétrie centrale est une rotation particulière autour d'un axe.

1

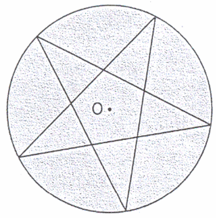
4. Dans les deux cas, les angles sont égaux.

①


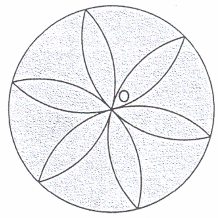
②


Exercice 4

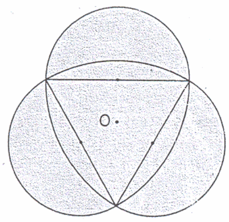
Indiquez les symétries, translation ou rotations qui transforment la rosace en elles-mêmes.
Justifiez les réponses.



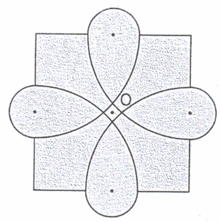
①



②



③



④

Exercice 5

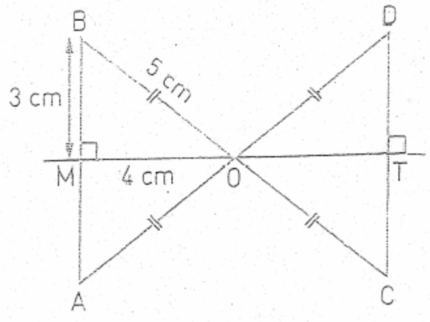
$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 5cm.

1. Construire un hexagone régulier ABCDEF de centre O, inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Justifiez la construction.
2. Tracer le triangle ACE. Pourquoi ce triangle est-il équilatéral ?
3. Tracer les médiatrices des côtes [AB] et [BC] ; elles coupent l'arc AB en I et l'arc BC en J. Expliquer pourquoi BI=BJ et $\widehat{AIB}=\widehat{IBJ}$.

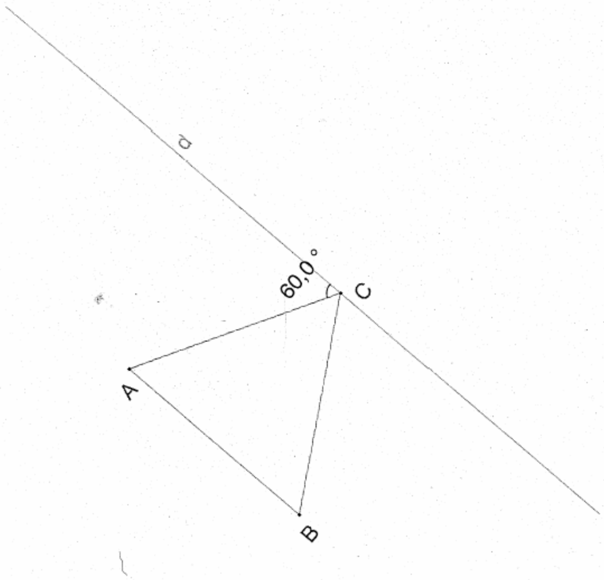
2

Annexes du chapitre 5 : ***LES AUTRES EXERCICES DU DEUXIEME QUESTIONNAIRE***

1) Ecrire un programme de construction pour la figure ci-dessous en utilisant les transformations du plan (symétrie(s), translation(s), rotation(s)).



La figure ABC ci-dessous est incomplète.
Complétez-la pour que le point C soit le centre de la rotation de 60° qui laissera invariante la figure complète (c'est à dire si l'on effectue une rotation de centre C et d'angle 60° la figure restera la même) et que la droite d soit son axe de symétrie.
Merci de laisser les traces de construction.



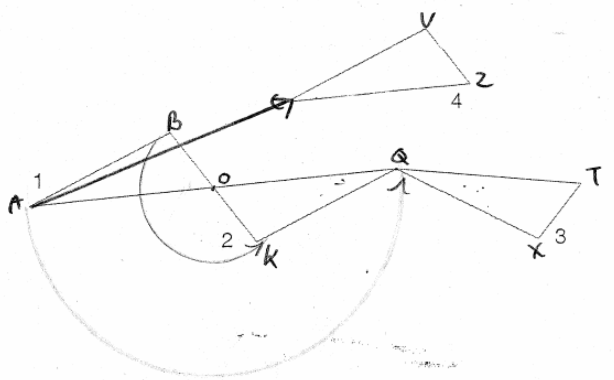
Annexes du chapitre 6 : le deuxième questionnaire

1. Extrait des copies[1]

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2 Par rotation d'angle 180° de centre O dans le sens inverse de aiguilles d'une m C(O).
b) 2 → 3 Par symétrie axiale de centre Q.
c) 1→4 Par translation de vecteur $\vec{AC}$.

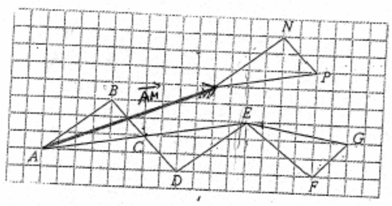
Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC rotation de centre C dans le sens des aiguilles d'une montre et d'angle 90°.
b) CDE en GFE symétrie axiale de ~~centre~~ / axe t.
c) ABC en MNP translation de vecteur $\vec{AM}$

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



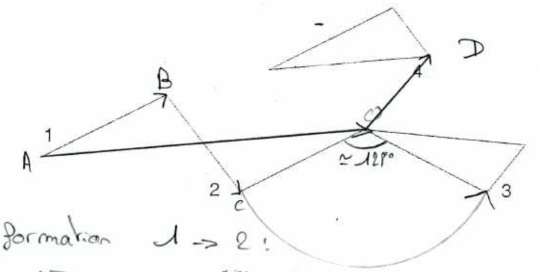
3.15

[1] Nous rappelons notre notation des copies : 3.i désigne une copie d'élève de 3e et 5.i désigne une copie d'élève de 5e.

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3
c) 1 → 4

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) Transformation 1 → 2 :
$\vec{AB} + \vec{BC}$

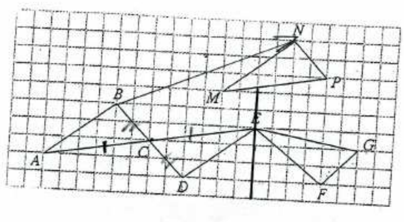
b) La rotation de centre O dans le sens positif.

c) $\vec{AO} + \vec{OD}$

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC symétrie centrale sur le pt C.
b) CDE en GFE symétrie axiale
c) ABC en MNP $\vec{AM}$

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

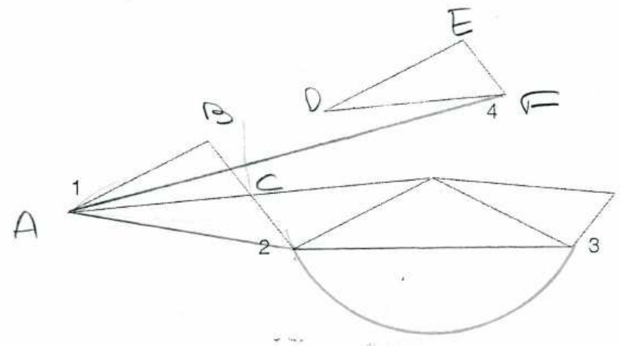


3.26

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2 symétrie centrale
b) 2 → 3 rotation
c) 1→4 translation

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



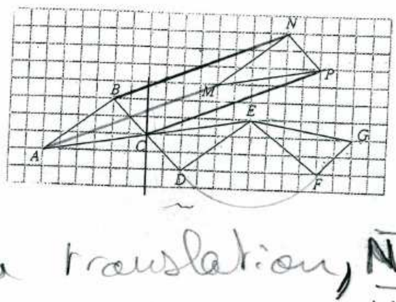
$\vec{FD} = \vec{CA}$

par la translation vectorielle

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC symétrie centrale
b) CDE en GFE rotation
c) ABC en MNP translation

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



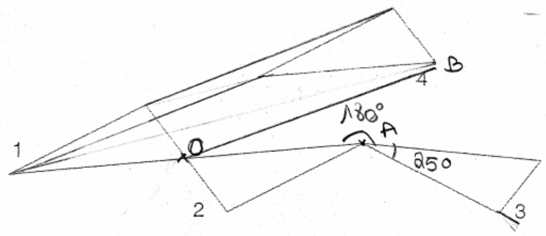
D'après la translation, $\vec{NM} = \vec{BA}$
$\vec{NP} = \vec{BC}$
$\vec{PM} = \vec{CA}$

3.24

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2 symétrie par rapport au point O
b) 2 → 3 rotation d'angle 180+25 = 205° de sens ⊖ de centre A
c) 1→4 Translation de vecteur $\vec{OB}$

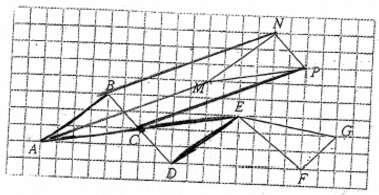
Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC symétrie par rapport au pt C
b) CDE en GFE rotation de sens négatif de centre E, d'angle 72° ?
c) ABC en MNP translation de vecteur $\vec{AB}$

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) On voit le même motif mais "à l'envers" ainsi qu'un point commun aux 2 triangles C.

b) On observe le même motif, qui a été "tourné" autour d'un même point E dans un même sens

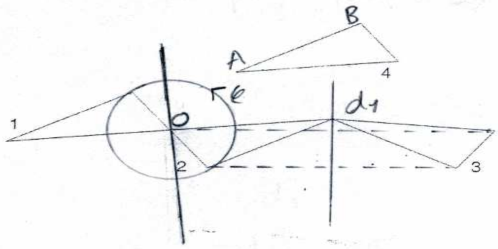
c) On observe le même motif "glissé" dans un même sens.

3.29

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3
c) 1→4

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) Rotation ~~centrale~~, l'image de la figure 1 est la figure 2, la figure 1 tourne autour du point O.

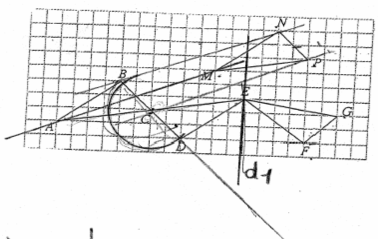
b) symétrie axiale, l'image de la figure 1 est la figure 3.

c) translation, l'image de la figure 4 est la figure 1 par la translation de vecteurs $\overrightarrow{BA}$.

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE
c) ABC en MNP

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) Rotation de centre C de 55°, de sens positif.

b) Symétrie axiale par la droite d_1.

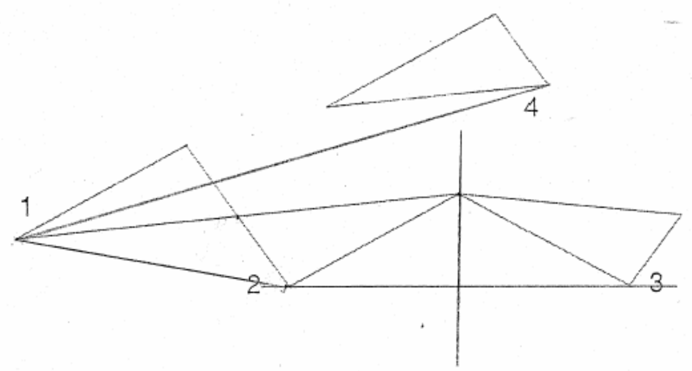
c) Translation de vecteurs $\overrightarrow{BN}$.

3.13

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3
c) 1→4

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) 1 -> 2. C'est une

b) 2 -> 3. C'est une symétrie axiale car les points sont situés à la même distance de l'axe et appartiennent à la même droite qui est perpendiculaire à l'axe.

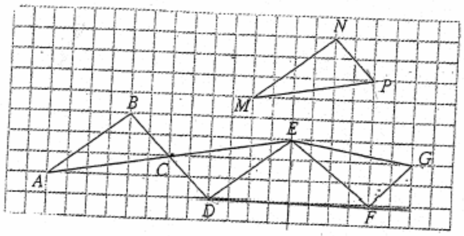
c) 1 -> 4. C'est une translation

3.10

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE
c) ABC en MNP

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) la symétrie centrale transformee le triangle ABC en triangle ECD de centre C.

b) la symétrie axiale transforme le triangle CDE en GFE car les points D et F sont situés à la même distance et sur la mêm droite qui est perpendiculaire à l'axe de symé De même pour les points C et G et E détermin l'axe.

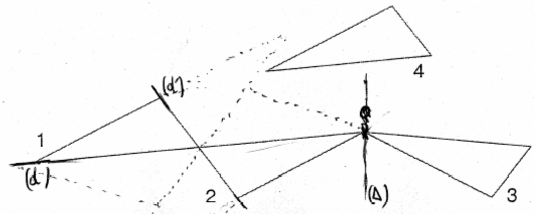
c) la translation par $\vec{AM}$ transforme ABC en MNP car les distances AM = BN = CP et la mesure des côtés est conservés.

3.10

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



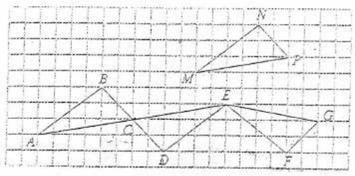
a) Ce n'est pas une symétrie axiale, les côtés des ~~triangles~~ figures ne partant pas dans des sens opposés ni par rapport à la droite (d) ni par rapport à (d'). ~~même si il y avait eu une symétrie axiale~~ C'est donc une symétrie centrale.

b/ La symétrie de 2 et 3 est différente de la symétrie de 1 et 2.
Les droites partant dans ~~le~~ un sens opposé, comme pour un miroir ; donc c'est une symétrie axiale.

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) C'est la symétrie centrale qui transforme ABC en EDC.
Si on part par une droite (c) (vert, cab) les points ne vont pas dans le même sens.
b) C'est une symétrie axiale.
les deux figures sont identiques de à droite et de à gauche.

5.27

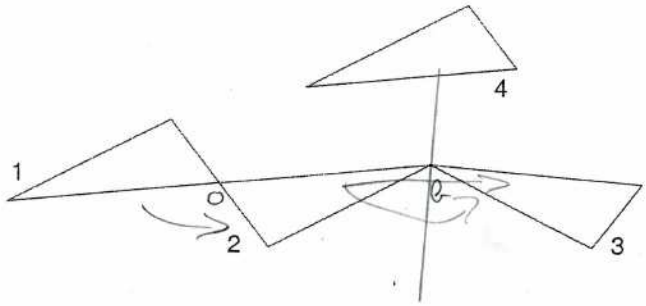
Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2 Symetrie centrale O, si l'on fait pivoter la figure 1 vers le bas (de... l'on vera que ce sont les même figure (superp...

b) 2 → 3 symetrie axiale, car si l'on trace un trait entre ces deux figure et que l'on plitha feuille, l'on vera que ce sont les même figure, mais juste symetrique.

Justifiez vos réponses.

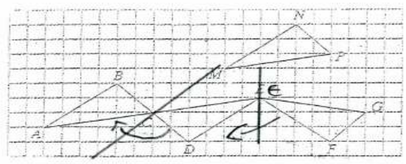
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) La symetrie de centre C transforme ABC en EDC
(Dans la symetrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur).

b) La symetrie de centre E transforme CDE en GFE
(Dans la symetrie centrale, l'image d'un segment est un segment de meme longueur).

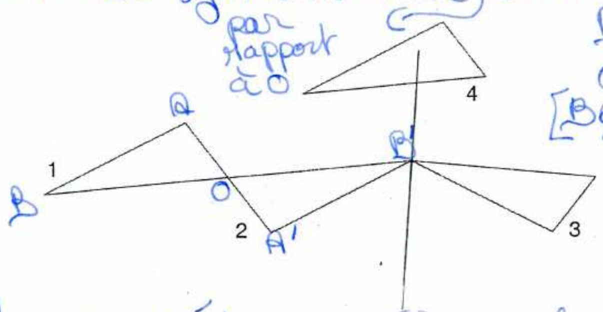
5.23

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

a) La symetrie qui transforme 1 → 2 est la sym centrale par rapport à O, car A a pour image A'
B ——→ B'
O ——→ O
[BA] ——→ [B'A']



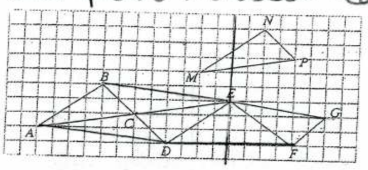
b) La symétrie qui transforme 2 → 3 est la symétrie axeal on pourrait tracer une droite qui passe par B' et qui sera l'axe de symétrie.

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

b) CDE en GFE : symetrie axeale car E point commun des 2 figures,
- G et F ont pour milieu la droite E
- C et G ont pour milieu la droite E



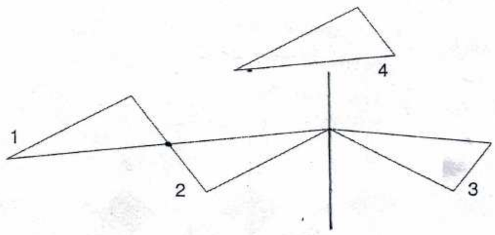
a) ABC en EDC : la symétrie centrale de centre C car : - B a pour image D
A a pour image E
C a pour image C
- C milieu de [AE] et [BD]
- on remarque : (AB) // (ED) et que si on trace [BE] et [AD], (BE) // (AD) donc parallelogramme donc symetrie centrale.

5.26

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



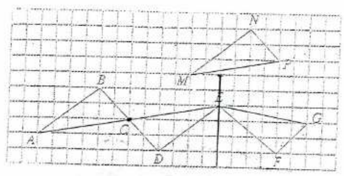
a) 1 → 2 : symétrie centrale car si l'on décalque le 1, a
l'on plante la pointe d'un compas là où les
sommets des triangles 1 et 2 se rejoignent et que l'o
fait 1/2 tour, la figure 1 et la figure 2 se supe

b) 2 → 3 : symétrie axiale car tous les sommets sont :
égale distance de l'axe.

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) Si on trace une demi-droite d'origine B passant par C,
et que l'on reporte la mesure de [BC] de l'autre côté de C
on trouve le point D* donc ces une symétrie centrale
* de même avec le point A pour trouver E.

b) Les points D et F sont à égale distance de la droite qui est
l'axe de symétrie, de même pour E et G.

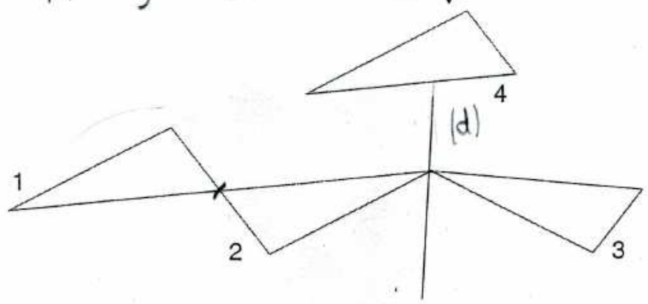
5.1

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2 centrale
b) 2 → 3 axiale

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

1 → 2 se coupent en un point
2 → 3 si on replie la figure sur la droite (d
on s'apperçoi que la figure est supperposable

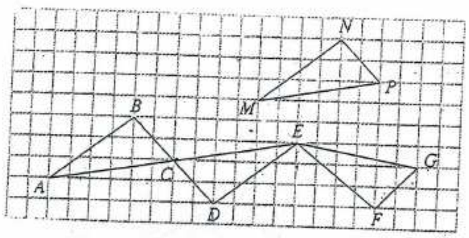


Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC Des symetries centrales
b) CDE en GFE

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

Car dans la symetrie centrale
l'image d'une figure est
une figure de même longueur et
s'en est le cas ici



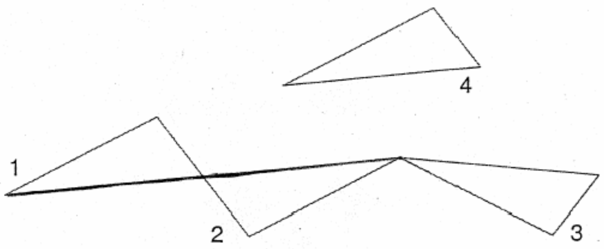
5.4

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

a) La symétrie ascial
b) La symétrie centrale

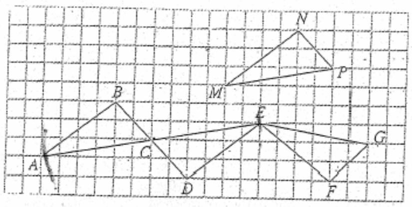


Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

a) Le symétrie qui transforme ABC en EDG ~~ex~~ C car C est le centre de la figure



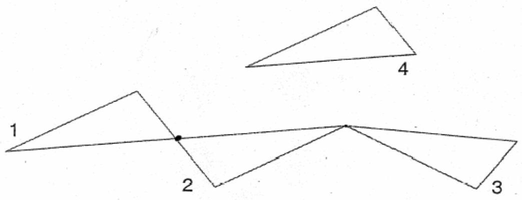
b) Le symétrie qui transforme CDE en GFE est E car E et le centre de la figure

5.22

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



a) c'est la symétrie central ~~est~~ axiale qui transforme 1 → 2 car ~~elles~~ ils sont <u>superposables</u>

b) C'est aussi la symétrie axiale et centrale car (2) et (3) sont <u>superposables</u>

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

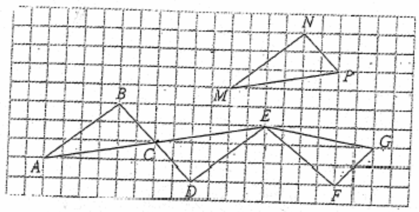
a) ABC en EDC
b) CDE en GFE

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

A) c'est la symétrie de centre C.
B) c'est la symétrie de centre C.

<u>remarque</u> :

ABC = EDC
EDC = GFE
GFE = ABC

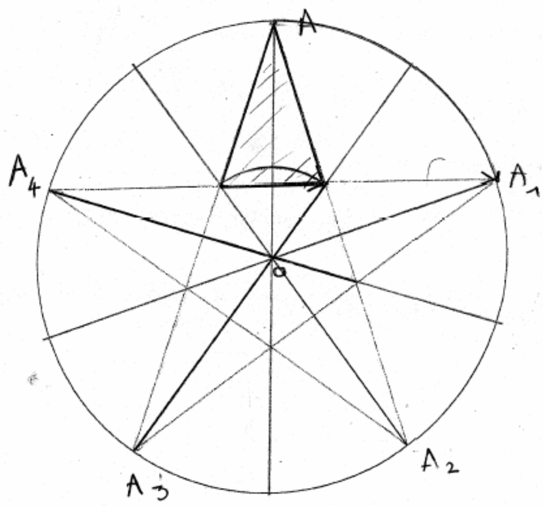


A) Les figures sont superposable et identique
B) les figures sont superposable et pareille

5.9

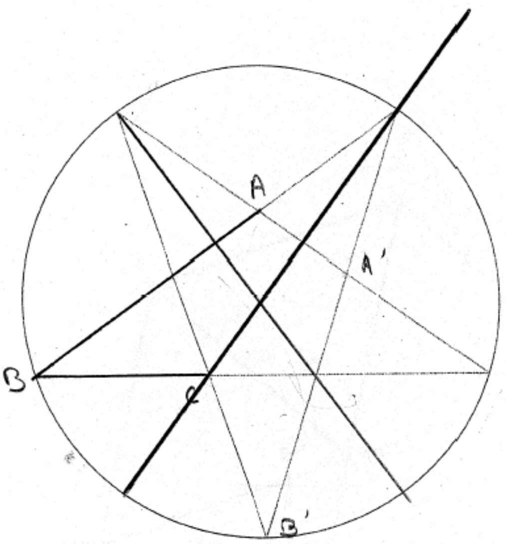
Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

- Rotation de 72°, de centre O, sens négatif
- 5 symétries axiales possible reliant un sommet au centre du cercle



3.28

Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



- On effectue une rotation de l'angle $\widehat{CBA}$ 4 fois et de 72° quelque soit le sens choisi. puis on trouve le centre du polygone à l'aide des bissectrice pour tracer le cercle.
- On utilise la symétrie axiale avec un axe qui passe par un sommet et coupe l'angle de ce sommet en deux (bissectrice). Le point A devient alors A' et B devient B'. Puis on trace le cercle.

3.23

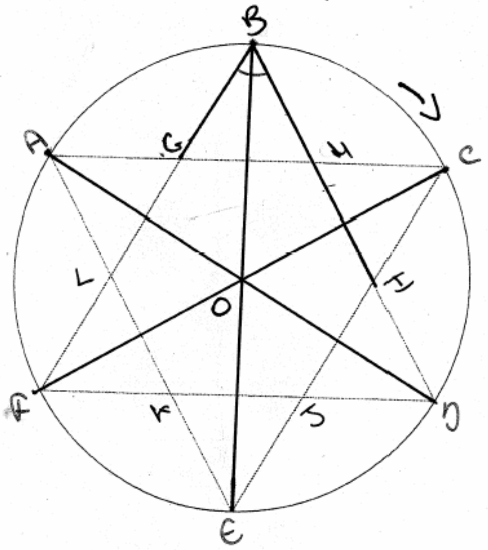
Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

Afin de répéter 5 fois l'élément, je trace le segment [GB], puis le segment [IB].

C'est cet angle que je reproduit 5 fois.

Etant donné que la rotation conserve la mesure des angles et les distances, ~~cela no~~ la rotation de centre O, de sens + ou −, et d'angle $\alpha = \frac{360°}{6}$

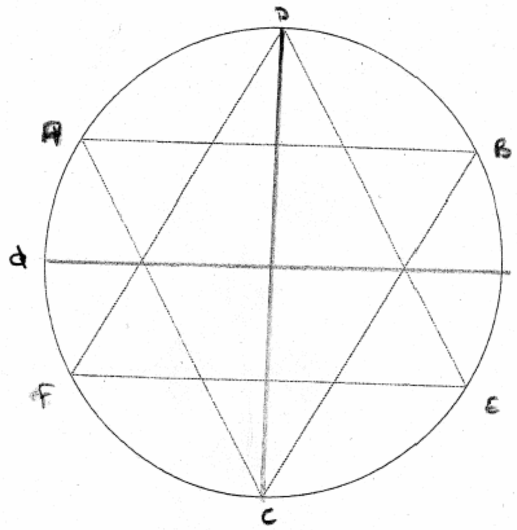
$\alpha = 60°$.



3.25

Indiquez la (les) symétrie(s), translation(s), rotation(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

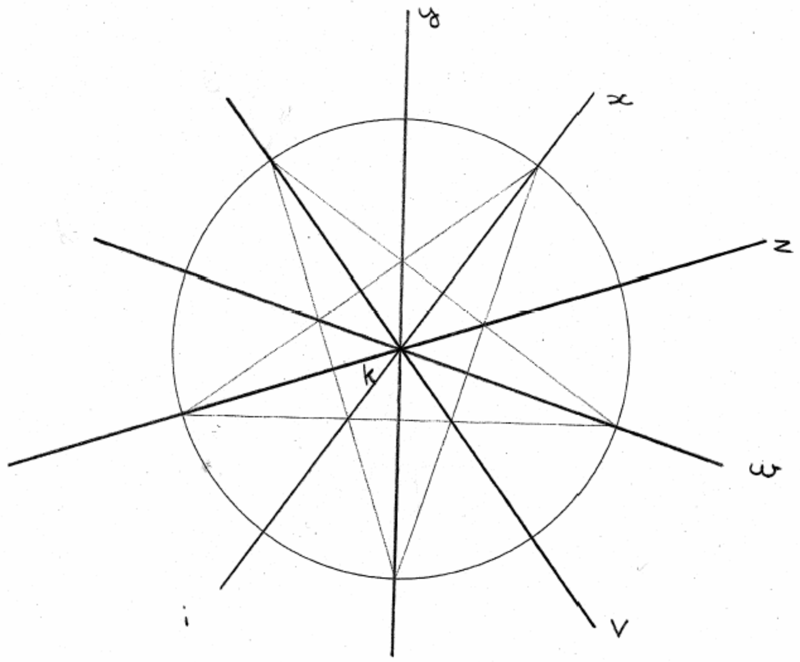
- Rotation du triangle ABC de sens positif de 180°
  ABC → DEF
- symetrie axiale de la partie haute à le partie basse par la droite (d)
- symetrie axiale de la partie gauche à la droite par la droite (CD)



3.3

Indiquez la (les) symétrie(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

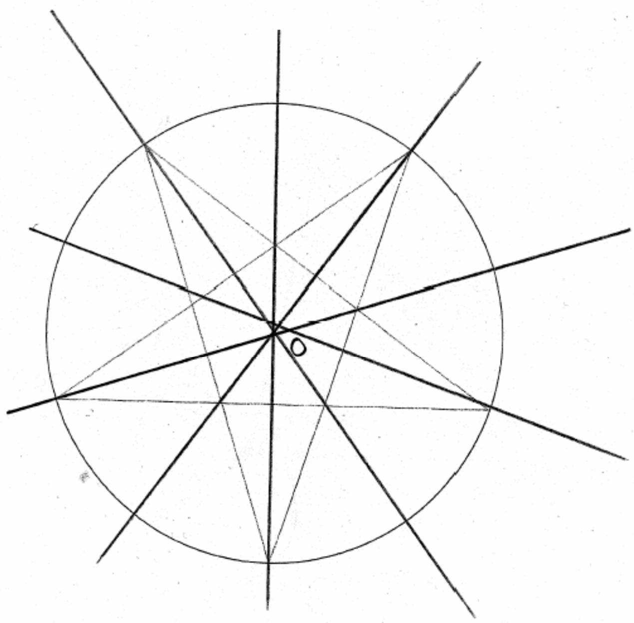
axes de symétrie y, x, z, w, v : si on plit la feuille sur chaque des ~~…~~ axes, chaque traits se superposent.



centre de symétrie k : si on choisi trois points caractéristes et que l'on cherche leur image, si on relié les points avec leur symétrique respectif par des droites, le centre d'intersection des trois droites est le centre de symétrie.

5.1

Indiquez la (les) symétrie(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

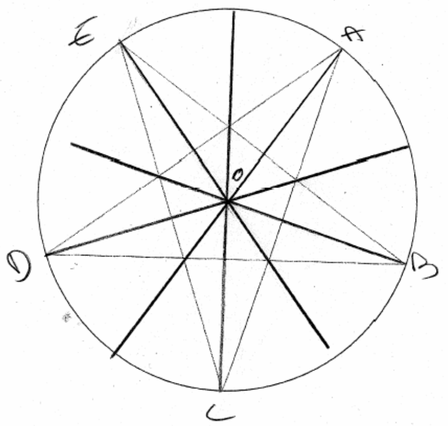


Il y a un axe de symétrie centrale.
Dans la symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur.

5.23

Indiquez la (les) symétrie(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

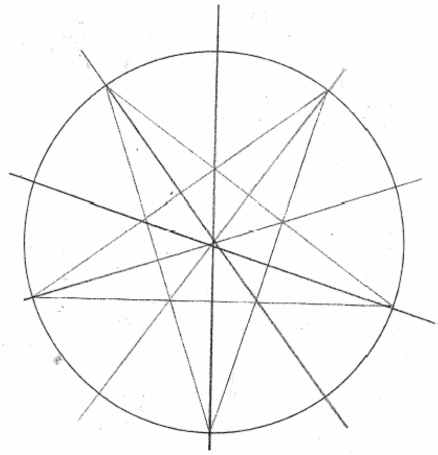
A, B, C, D, E sont les symétries qui transforment la rosaces car elles se coupent au même point (centre de symétrie) le point O donc se sont des symétries



5.14

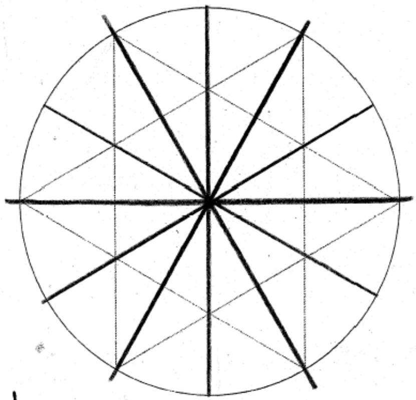
Indiquez la (les) symétrie(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

Les symétries sont : - la symétrie axiale qui coupent l'étoile en 10
- la symétrie centrale dont le centre est au milieu de l'étoile à l'endroit où se rejoingnent les axes



5.25

Indiquez la (les) symétrie(s) qui transforme(nt) la rosace en elle-même.
Justifiez votre réponse.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.



Les droites sont des axes de symetrie car l'axe coupe l' image en sont milieu

5.3

2. Graphes implicatifs obtenus avec le logiciel CHIC

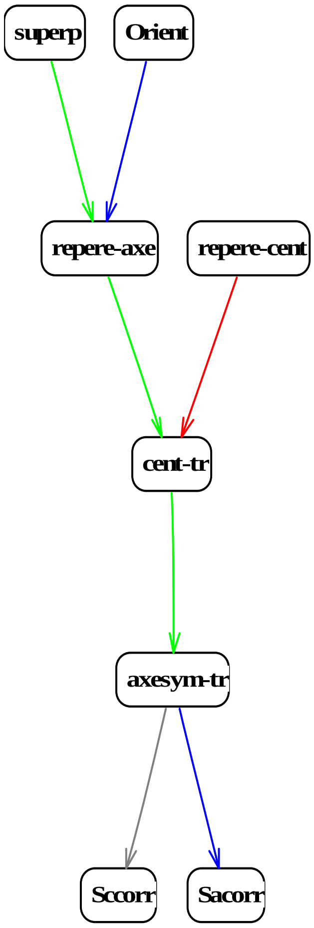
Nous avons procédé à une analyse implicative avec le logiciel CHIC - *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive* - (Gras, 1996) pour chaque classe (5^{e} et 3^{e}) selon la perception suggérée par la tâche (« perception dite globale ou ponctuelle »). Le graphe implicatif obtenu avec CHIC est un graphe qui permet de visualiser les variables qui possèdent une intensité d'implication supérieur à un certain seuil qui sont reliées par une flèche représentant l'implication. Dans les graphes qui suivent, nous avons choisi quatre seuils (identifiées par des couleurs différentes) qui sont des seuils assez significatifs (80, 85, 90, 95).

Le choix des variables bimodales est donné dans le tableau ci-dessous (tableau 6.a). Nos variables portent sur les critères de réussite, les *signifiés* du concept des isométries (orientation, conservation, application point par point - voir tableau 2.1 chapitre 2) et les *signifiants*, relevés dans les productions des élèves (superposition, axe de symétrie tracé, flèches, etc.).

REUSSITE	
Symétrie centrale correcte	SCcorr
Symétrie centrale erronée	SCerr
Symétrie axiale correcte	SAcorr
Symétrie axiale erronée	SAerr
Rotation correcte	Rotcorr
Rotation de 180°	Rot180
Rotation erronée	Roterr
Rotation+autres transformations	Rot+autre
JUSTIFICATIONS	
Si les élèves justifient : - « car c'est un demi-tour » – « tourne », - par le tracé de flèches rotatives, - par l'évocation du sens : « inversé », « renversé » ou « opposé ».	Orient
Si les élèves définissent point par point les images dans le discours ou par le tracé en reliant un point et son image par une droite ou par arc de cercle de compas.	Pt-im
Description de la figure dans sa forme globale, comme dans l'énoncé (par ex : 1→2).	Glob
Si l'élève évoque explicitement une perception globale de la figure : « superposition », « pliage », « reflet », « correspond » (« car c'est symétrique » n'est pas retenu).	Superp
Conservation des longueurs : « de la même forme », « même triangle », « réplique » (« c'est symétrique » n'est pas retenu). Codage de la conservation des longueurs sur le dessin.	Conserv
Les élèves mentionnent le centre en tant que détermination de la symétrie (« symétrie de centre… ») ou en tant que repère, mais non en tant que justification (de même pour l'axe vu comme détermination de la symétrie axiale ou comme repère : type frontière ou pli).	RepèrCent RepèrAx
Les élèves évoquent un point fixe :	Invar

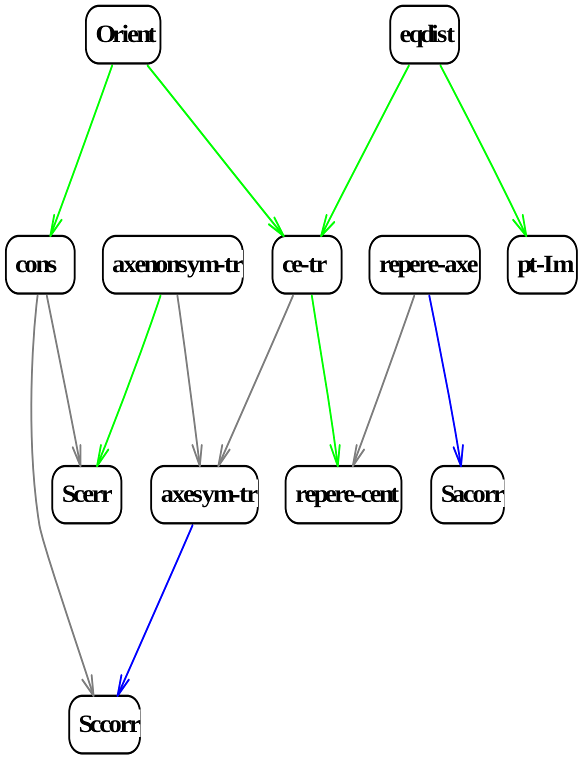
des « points communs » (aux deux triangles), un point « qui ne change pas », ou encore « son image est lui-même » (nous ne retenons pas les cas où les élèves l'évoquent seulement dans la détermination de la symétrie centrale : « symétrie de centre C ou symétrie par rapport au point O »).	
Egale distance de l'axe ou du centre. Codage de l'équidistance.	Dist
L'axe ou le centre est : « au milieu », « au centre » ou « divise en 2 » ou « de part et d'autres », « de chaque côté ».	Bidecomp
Centre nommé.	Ce-tr
Sommets des triangles nommés.	Somm-tr
Points nommés en plus de la figure.	Pts-xtra
Axes de symétrie tracés.	Axe-tr
Axes tracés auxiliaires en plus de la figure.	Axe-xtra
Perpendicularité (dans le discours ou codée sur le dessin).	Perp
Involution	Invol

<u>Tableau 6.a</u> : variables bimodales retenues pour l'analyse implicative.



Graphe implicatif : C:\Documents and S95ti90s\85ar80Mes documents\Thèse\5ème 2007\Triangles\juill\5ème_global_070707.csv

Ce graphe nous confirme d'un point de vue statistique que les concepts de **conservation** et d'**orientation sont au cœur des stratégies des élèves de 5^{e} dans la situation dite de « perception globale » pour reconnaître correctement la symétrie centrale et la symétrie axiale.** On remarque en particulier, qu'un seul arbre suffit pour rendre compte de ces relations.

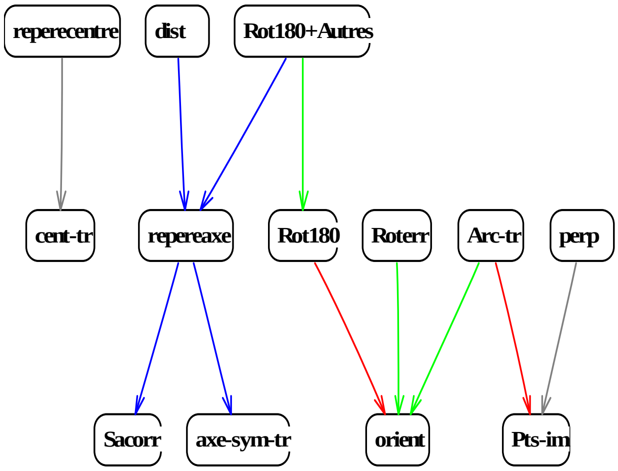


Graphe implicatif : C:\Documents and Settings\Caro\Mes documents\95 90 85 80 2007\Triangles\juill\5ème_quadrillage_070707.csv

Dans le cas dit de la « perception ponctuelle » (suggérée par la tâche), apparaissent les propriétés d'**équidistance** et le concept **d'application point par point.** On distingue deux « chemins » possibles :

- le chemin à gauche : le concept en acte d'**orientation** et de **conservation** (dont le tracé d'un « faux » axe de symétrie est un signifiant du concept-en-acte différenciateur de l'orientation) sont au cœur des stratégies permettant d'aboutir à la reconnaissance d'une symétrie centrale (correcte ou erronée).
- le chemin à droite : le concept **d'application point par point** et le concept d'**équidistance** (l'axe ou le centre apparaissent comme des repères du plan) permettent d'aboutir à la justification d'une symétrie axiale.

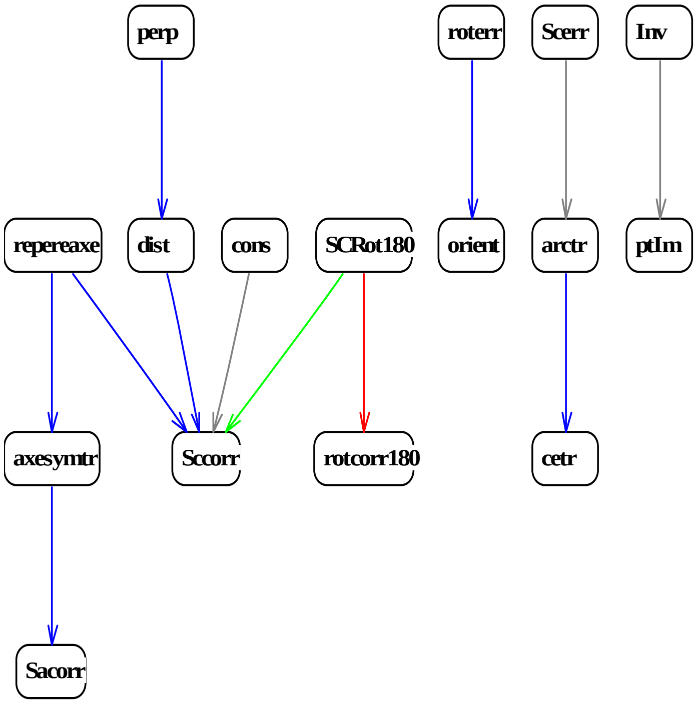
Ces chemins sont cohérents avec les résultats obtenus pas notre étude de cas où la symétrie permet de faire fonctionner une déconstruction dimensionnelle pour en *déduire* une symétrie correcte.



Graphe implicatif : C:\Documents and Settings\Caro\Mes documents\Thèse\3 95 90 85 80 \Test Triangles\Triangles juill\3ème_triangle_global_07070

En classe de 3e, la rotation apparaît en début de « chemin », impliquant le concept d'**orientation** et **d'application point par point.** Le concept de **distance** apparaît également ici pour justifier la symétrie axiale (visible en fin de « chemin »). Ces résultats sont alors cohérents avec les résultats obtenus par nos études de cas, opposant les schèmes liés à la symétrie axiale et la rotation : **la symétrie axiale étant le <u>résultat</u> de la mise en œuvre d'un réseau de propriétés et la rotation <u>impliquant</u> une déconstruction instrumentale des figures.**

Ce graphe rend également compte de l'évolution de l'ETG personnel d'un élève depuis la 5e : la mise en œuvre en « réseau » des invariants opératoires se complexifie.



Graphe implicatif : C:\Documents and Settings\Caro\Mes documents\Thèse\3ème 1 95 i 90 0' 85 T 80 Triangles\Triangles juill\3èmequadrillage07070

D’après ce graphe, la complexification de l’ETG en 3e se confirme, dans le cas dit de « perception ponctuelle ». Le champ conceptuel des isométries se complexifie et semble s’organiser. En 5e, l’exemple de l’exhaustivité de l’élève de la copie 5.26 (annexe p. 306) nous montre bien que cette complexité n’était pas encore organisée.

On retrouve le même type de « chemins » :

- le chemin à gauche : la mise en œuvre de propriétés (perpendicularité, distance et conservation) aboutit à la reconnaissance de la symétrie axiale ou de la symétrie centrale (en fin de chemin).
- le chemin à droite : la rotation (en début de chemin) amène à considérer le concept d’orientation et les signifiants du théorème-en-acte de cocyclicité.

L’évolution de ces graphes (de la 5e à la 3e) est alors cohérente avec nos résultats concernant l’évolution de la stabilité des ETG personnels des élèves en pointant la différence de traitement des figures selon la transformation.

Annexes chapitre 7 : les effets de l'enseignement

1. Une enquête auprès de 16 professeurs de mathématiques de collège

Présentation du corpus :

- 16 professeurs de collège (dont 1 qui enseigne également au lycée en classe de terminale).
-12 femmes et 4 hommes interrogés.
- Zone géographique : Paris: 5/16, Région parisienne : 11/16
- Années d'enseignement : [1-5ans] : 6/16
[6-15 ans] : 2/16
>16 ans : 8/16
- Expérience didactique (Master ou Doctorat en cours ou acquis) : 4/16

1. Quelle est pour vous la définition, en vous détachant de votre cape de professeur de maths mais en tant qu'expert mathématique, de *la symétrie* ?

- Distinction nette dans leur réponse entre la symétrie axiale et la symétrie centrale : 9/16

- Définition simple et directe vue comme « **transformation** » : 10/16 dont 3/10 précisent *« du plan dans le plan »* ou *« d'un espace à un autre »* ou encore *« transformation qui permet de passer d'une figure à une autre ».*

- Définition **familière** : Référence au *« pliage »* : 3/16 : *« pour moi c'est à partir du moment où deux objets sont superposables soit par pliage soit par rotation. »*
Référence au *« demi-tour »* : 3/16
Référence *« miroir »* ou *« reflet »* : 4/16
Référence à la *« superposition »* : 2/16
Référence mixte : *« c'est une image … »* ou *« c'est une figure, on peut trouver une droite… »* : 3/16
Evoque *« l'équilibre »* : 1/16

- Définition plus avancée : *« isométrie »* : 2/16 (dont 1 précise antidéplacement).
« Endomorphisme qui a un élément du plan fait correspondre un élément du plan » : 1/16 et précise dét +1 pour la symétrie centrale et dét -1 pour la symétrie axiale.
Ponctuelle (milieu ou médiatrice): *« Soit un point M, M' est son image si la droite D est médiatrice et O centre de symétrie si O milieu de [MM']… »* : 1/16
Définissent une *« rotation »* : 3/16 (dont 1 précise d'angle π).

- Précisent « les propriétés de conservation » : 5/16 (et précisent « longueurs, angles, formes, etc.… »)

Tous ces ensembles de définitions n'ont pas une intersection vide :
G : *« C'est une transformation du plan qui conserve toutes les propriétés géométriques, alignement, angles, la forme, qu'on va pouvoir obtenir par pliage ».*

2. Toujours en étant seulement expert des mathématiques, quelle est pour vous la définition de *figures symétriques* ?

- Mentionnent clairement 1 figure : 11/16
- Mentionnent clairement 2 figures : 2/16
- Mentionnent seulement la suffisance d'un axe ou d'un centre de symétrie : *«Il faut un axe ou un centre » ou « C'est une figure qui a soit un axe, soit un centre de symétrie »* : 2/16
- Mentionnent la manipulation seule qui permet d'obtenir une figure symétrique : *« Quand on plie, ça se superpose » « C'est une figure superposable par pliage »* : 5/16 (dont 1 précise la manipulation de deux symétries axiales successives par exemple).
- Mentionnent la manipulation mais par rapport à un référentiel : *« Ça n'a pas de sens, c'est une figure par rapport à quelque chose » « Superposable par rapport à une droite ou un point » :* 4/16
Au total, **9/16** définissent une figure symétrique par le **principe de superposition**.

- Mentionnent une figure symétrique comme **ensemble fini de points symétriques**. Et définissent la figure symétrique comme une **généralisation de la vision ponctuelle** : **2/16**
F : « Deux figures sont symétriques si l'ensemble des points d'une figure admet dans l'autre figure, pour chacun des points, un symétrique ».
C : « Une figure est un ensemble de points donc la figure symétrique est l'ensemble des points symétriques ».

- Définissent la figure symétrique comme **résultat de la transformation**: **3/16**
O : « C'est une figure qui peut se construire à l'aide d'une symétrie ».
M-B : «Transformation-image ».
E : « La figure symétrique c'est le résultat de la transformation ».

- Définissent la figure symétrique comme **invariante sous l'effet de la transformation** : **1/16**
L : « C'est une figure qui est invariante par symétrie ».

- Définissent la figure symétrique par ses **caractéristiques : 1/16.**
JMM : « C'est une figure <u>pratique</u> et qui a de bonnes propriétés dans la mesure où on peut <u>réduire</u> toute la figure à un bout de la figure ».

Seulement 2 précisent clairement qu'elles donnent la même définition pour une figure symétrique et une symétrie (qui était la question précédente) et ne se répètent donc pas.

3. Maintenant, vous pouvez reprendre votre cape de professeur de mathématiques et pouvez-vous me dire si vous donnez une définition de la symétrie en 6^{e} et si oui laquelle ?

14/16 me précisent clairement qu'on ne donne pas de définition propre de la symétrie en 6^{e}.
A : «On ne définit pas la symétrie en fait mais le symétrique d'un point ».
E : « Non, y a pas de transformation au collège ».

10/16 précisent qu'ils donnent une **définition empirique** de la symétrie en référence à l'action de plier, au principe de superposition et à son référentiel : **l'axe de symétrie** (mais que c'est bien le terme de symétrique qu'ils institutionnalisent):

O : « On donne une définition empirique en référence au pliage avec l'élément qui permet d'identifier la symétrie qui est l'axe ».
G : « Je parle de deux figures symétriques qu'on peut superposer par pliage ».
L : « Deux figures sont symétriques par rapport à une droite si en pliant par rapport à cette droite les deux figures correspondent ».
Lu : « Une figure est symétrique par rapport à un axe si elle est superposable par pliage ou retournement le long de l'axe ».

7/16 précisent une **définition locale** au niveau d'un point symétrique et la construction associée :
N : « Je donne la méthode de construction de symétrique d'un point ».
F : « On donne la définition du symétrique d'un point par rapport à une droite, puis on fait construire le symétrique de quelques points, puis on passe à la figure et on vérifie que les figures sont invariantes ».

7/16 précisent également la **caractérisation par la médiatrice**.
L : « Deux points sont symétriques par rapport à une droite si cette droite est la médiatrice des deux points ».
C : « On trace la perpendiculaire qui passe par le point de telle sorte que l'axe soit la médiatrice ».
M : « On dit que le point symétrique d'un point M par rapport à une droite est le point M' tel que la droite est la perpendiculaire et passe par le milieu de [MM'] ».

Seulement **1/16** reste à une définition associée à une **forte référence familière** telle que le miroir.

4. Même chose en 5^{e} ?

La très grande majorité des professeurs m'expliquent clairement qu'ils ne définissent pas l'objet symétrie mais qu'ils définissent le symétrique.

- 8/16 m'expliquent qu'ils définissent la symétrie centrale de manière **empirique** par le **demi-tour :**

G : « C'est la transformation qui passe d'une figure à l'autre par demi-tour ».
H : « C'est une figure superposable par demi-tour autour d'un point ». Notons qu'il est le seul à me parler de superposition ici.
C : « Je ne donne pas une définition à proprement parler de la symétrie centrale mais je leur parle d'un retournement, de la manipulation qu'on fait avec le papier calque. J'ai dû davantage définir l'image par symétrie centrale en disant que c'est la figure obtenue par demi-tour ».
O : « A nouveau approche sensible avec un mouvement, un demi-tour … qui sera relié avec la notion d'angle ».

- 8/16 m'expliquent qu'ils donnent une **définition ponctuelle** du symétrique par rapport à son référentiel le centre de symétrie.
L : «Je donne la définition de deux points symétriques par rapport à un point si ce point est le milieu du segment. Je ne donne pas de définition de l'application symétrie ».
M : « On ne définit pas la symétrie, on définit le symétrique d'un point par rapport à un point tel que ce sera le milieu ».

- 2/16 me donnent une **définition progressive du global vers le ponctuel** :
M : « On part d'une figure et on finit par la définition du symétrique d'un point ».
JMM : «Je pars d'une vision globale et après on descend au niveau des points, on peut obtenir une moitié de figure à partir d'une première moitié par demi-tour. Sinon si O un point qui sera le centre, M' le symétrique de M si O milieu ».

Comme on peut le voir avec le dernier exemple, ces différents ensembles de leurs approches n'ont pas une intersection vide.

- 3/16 mettent l'accent sur la **construction** :
N : « J'insiste beaucoup sur la façon dont on construit. Sur la figure, comment elle se transforme pour avoir son symétrique. Je fais pas des trucs formels du style A et c'est A' avec OA=OA' et l'angle qui vaut 180° ».
E : « Par demi-tour et je donne le résultat, on voit, on construit ».
C : « Je trace la droite (OM) et on place le point M' tel que O soit le milieu de [MM'] ».

5. Quelles connections faites-vous en 3^e^ avec les rotations ?

- 9/16 rappellent que la **symétrie centrale comme cas particulier d'une rotation de 180°** :
N : « La symétrie centrale c'est une rotation … enfin c'est plutôt l'inverse une rotation de 180° est une symétrie centrale ».
C précise également : «Je les reconsidère dans le cadre plus large des isométrie. Ils doivent être capable de les reconnaître en 3^e^. J'explique très clairement la différence avec la figure qui est superposable après avoir retourné la figure et qu'elle est superposable simplement en déplaçant ».

- 5/16 parlent des **composées de symétries :**
N : « Je fais les composées de symétries vu comme translations ».
MA : « Quand on enchaîne les symétries ».

- 3/16 font le lien par les **propriétés de conservation** :
E : « Les transformations se font tout au long de l'année sans être clairement structurées. On fait le lien avec les conservations ».

- 1/16 fait le lien avec les **polygones réguliers** :
M : « On travaille les rotations avec les polygones réguliers et donc on retrouve les axes de symétrie».

6. Quelle est pour vous la nature des difficultés des élèves au moment de l'enseignement de la symétrie ?

- Les difficultés identifiées par les professeurs interrogés sont généralement dues à des difficultés plus générales venant de **la perception de la figure :**
O : « Visuellement y a une difficulté concernant les figures symétriques qui sont une seule et même figure ».
G : « Le problème c'est que dès qu'ils voient une figure, tout ce qu'ils voient est vrai ».
E : « Ils ont beaucoup de mal à se détacher de la figure ».
H : « Ils confondent les figures juxtaposées. Ils mettent des axes où y en a pas ».

- Un professeur explique la **confusion** qu'il peut exister entre **la symétrie axiale et la symétrie centrale** : *« Parce qu'il y a un mot commun, symétrie, ils confondent beaucoup et n'ont pas d'images mentales séparées de ces deux transformations ».*

- Certains soulèvent les problèmes liés au **vocabulaire** et d'autres les confusions entre les transformations :
C : « Ils ont des difficultés à distinguer la translation et la symétrie axiale en 6^e».

- Un certain nombre de professeurs mentionnent le **problème de la familiarité** de la symétrie axiale :
L : « Le problème c'est qu'ils ont une idée basique de la symétrie : ça va être un axe vertical ou horizontal. Tu leur mets un pliage avec un axe oblique, ils savent plus faire ».
L : « Ils ont le réflexe de plier. Ils sortent pas de ça. Quand l'axe est penché, c'est pas symétrique comme ils disent ».

- De manière plus générale aussi, pour un certain nombre de professeurs, les difficultés se situent principalement autour de la **formalisation mathématique** :
M : « Ils ont du mal à interpréter les propriétés ».
JMM : « Le passage à la définition locale avec la notion de médiatrice. Formaliser la définition. Je ne crois pas beaucoup que les propriétés des transformations soient utilisées dans la démonstration. Je trouve ça « plaqué » et artificiel ».
M : « Passer au raisonnement à quelque chose de plus abstrait, dégager des propriétés ».

- D'autres aussi mentionnent les difficultés liées à la **construction et la manipulation des outils** :
A : « L'utilisation de l'équerre ».
M : « La construction au compas ».
C : « Y a des élèves qui sont rapides et d'autres qui voient pas ce qu'il se passe. On doit construire avec ceux-là point par point les images en indiquant les règles. L'idée c'est qu'ils aient une définition qui les aide à construire ».
Ce professeur fait aussi référence à un problème également mentionné par d'autres : un problème **de « représentation »**.
C : « Ils ne savent pas à quoi va ressembler la figure à l'arrivée ».

- D'autres ne rentrent pas dans les détails et évoquent des difficultés générales liées à la démonstration ou des problèmes différents tels que des problèmes **de latéralisation** : *« Ils confondent la droite et la gauche »* ou de **maturation :** *« ça arrive trop tôt »* ou *« ils ne se souviennent de rien du primaire » ou « de toute façon on ne peut par leur expliquer qu'on a une transformation du plan dans le plan ».*

Généralement, les professeurs expliquent que *« c'est un chapitre qui passe bien en général »*, *« les élèves aiment bien »*. Un professeur précise : *« Je trouve la symétrie et les transformations en général au collège sont plutôt bien faites (…) la progression est bien faite car c'est un outil qu'on retrouve tout au long du collège »*. Les professeurs semblent avoir en tête les difficultés liées au passage GI-GII du fait des difficultés à se dégager de la perception première et des conceptions familières fortement liées à la symétrie axiale.

7. Parlez-vous du principe d'invariance ponctuelle : tous les points de l'axe de symétrie sont invariants et le centre de symétrie est invariant ? Si oui mentionnez-le vous comme un critère de la transformation ou comme une simple remarque ?

- 3/16 affirment ne **pas du tout** en parler :
N : « Non pas du tout et je ne vois pas pourquoi je ferai ça ».
C : « On ne parle pas d'invariants au collège ».
C : « Non j'essaie de ne pas les noyer sous le flot d'informations (…) c'est quand une partie est invariante qu'ils ont le plus de mal. Construire le point image, ça leur parle pas trop ».

- 6/16 expliquent que ça restera **implicite** mais effectif dans la **construction** ou l'**observation** :
F : « Ils vont l'utiliser dans la construction mais ça va rester dans le non-dit ».
G : « Non mais on va en parler quand on fera la construction au compas ».
JMM a une approche topologique intéressante par le voisinage de points: *« Comme critère de transformation au collège, je n'y crois pas trop, mais j'essaie de leur faire sentir : plus on s'approche de l'axe et quand on sera sur l'axe, ça sera confondu ».*

- D'autres professeurs interprètent l'invariance ponctuelle grâce au mouvement : *« Je n'emploie pas le terme invariant mais confondu »* qui suggère bien le mouvement de points jusqu'à ce qu'ils se confondent.
O : « Oui par le mouvement, à un moment donné, on va s'intéresser à un point situé sur l'axe. J'utilise le terme d'invariant en 3^e^ mais pour les mesures, les angles, donc la conservation ».

- 6/16 font mention de l'invariance ponctuelle comme une **remarque**, ou un **cas particulier** de l'image d'un point :
A : « C'est normal, en 6e ou 5e, on ne peut leur dire trop de choses, donc à part une fois sur l'axe, que l'image d'un point sera lui-même, je ne parle pas d'invariance ».
MR : «Je leur dis que si M appartient à la droite, le symétrique c'est lui-même, c'est plus un cas particulier qu'un critère ».

- 2/3 pensent en parler comme **critère** sans pour autant l'institutionnaliser :
C : « Oui je fais remarquer que le point de l'axe et le centre de symétrie sont invariants, je le donne comme critère. Par exemple, je leur dis que l'image du centre est lui-même et pareil pour l'axe ».
E: « C'est un critère de symétrie, l'invariance de l'axe et du centre mais ce n'est pas un résultat encadré en rouge ».
O : « En 6e ce n'est pas un critère mais en 5e on va travailler en liaison avec le parallélogramme qui a un unique centre de symétrie mais ça ne sera pas dans le cours comme critère d'invariance, ça sera plutôt utilisé dans les activités d'introduction soit dans les raisonnements qu'on verra dans la suite ».

Le terme d'invariant est en général évacué et employé à propos du principe d'invariance globale et notamment du concept de conservation. L'invariance ponctuelle reste à un niveau anecdotique même s'ils ont conscience qu'il est effectif dans l'action et est un critère important en mathématique.

8. Pouvez-me dire en quoi l'enseignement des symétries est important ?

Je n'ai posé la question qu'à 11 professeurs. Les réponses sont très variables.
- 3/ 11 m'avouent ne pas en avoir la moindre idée : *« Pas la moindre idée. On me demande de le faire je le fais. »*

- 3/11 font uniquement référence à son **réinvestissement dans les mathématiques :** *« Pour la démonstration »* ou *« Parce qu'il y a beaucoup de propriétés et à partir de là on peut retrouver un certain nombre de propriétés mathématiques accessibles à des 5e sur le triangle, les quadrilatères », « Pour plus tard, les transformations du plan c'est important ».*

- 6/11 restent plus général et mentionnent l'importance des symétries dans la **perception** ou la manière de pensée dans notre **vie de tous les jours** : *« Pour la culture G, et dans la vie courante, le rangement dans une pièce, le vocabulaire », « Dans l'art, le déplacement des points dans l'ordi » « Dans la vie de tous les jours, car on voit des symétries tous les jours ».*

- 2/11 font mention de **l'aspect économique** des symétries : *« Ça visualise dans le plan des figures qui ne sont pas identiques mais symétriques que l'on peut construire de la même manière », « Pour les ingénieurs, quand ils modélisent une pièce, ça évite les gros calculs, on simplifie les choses ».*

2. Les entretiens avec Mme B.

Retranscription de l'entretien avec Mme B. avant son enseignement de la symétrie axiale, le 03/02/06.

C : En quoi pour vous le chapitre sur les symétries vous semble important ?

Mme B. : Oh ben dans la vie, beaucoup de choses sont symétriques, l'œil s'habitue aux formes harmonieuses, et ce qui est harmonieux est souvent symétrique d'une manière ou d'une autre. Naturellement, même les adultes vont vers des choses très symétriques, même dans l'art. La symétrie est quelque chose pour moi de très important. De comprendre comment elle fonctionne et à partir de quel moment elle n'est plus symétrique et quel effet ça produit.

C : C'est donc une raison suffisante pour l'enseigner.

Mme B. : Je pense que c'est tout à fait indispensable. C'est quelque chose qui fait complètement partie de leurs images qu'ils peuvent rencontrer partout, des images dans l'art, dans la musique, y a beaucoup d'occasions. Donc c'est très important.

C : Votre objectif ?

Mme B. : Mon objectif, c'est l'objectif du programme. Faire en sorte que les enfants repèrent une symétrie axiale en 6^e, centrale en 5^e, qu'ils sachent manipuler, qu'ils sachent comment ça marche, qu'ils sachent reproduire par une symétrie et puis qu'ils sachent repérer les propriétés, c'est-à-dire qu'il va falloir à un moment, mathématiser puis dire que ce carré que tu as symétrisé, il a toujours la même allure ou est-ce qu'il a changé de forme, est-ce qu'il est devenu autre chose, est-ce qu'il est devenu plus petit. L'objectif du programme de 6^e est clairement établi, on n'a pas du tout à leur parler de transformation du plan. On reste extrêmement simple.

C : Quels sont, d'après vous, les pré-requis nécessaires des élèves ?

Mme B. : J'ai choisi cette année de les faire travailler sur la médiatrice avant. Je ne fais pas toujours ça, heu, bon il faut le vocabulaire de base de géométrie, qu'ils aient la notion de droites perpendiculaires, qu'ils sachent les reconnaître, d'égalité, de milieu, ce qui est fait dans les deux premières semaines de géométrie de 6^e, le vocabulaire de géométrie, et cette notion de milieu, de moitié de droites perpendiculaires, à la limite c'est tout ce qu'il faut. Il faut savoir utiliser un compas, et imaginer ce que peut être l'image d'un cercle, d'un rectangle. Non ils sont logiques, tout ça c'est naturel pour eux. Quand leur image se reflète dans le lac, ils voient bien eux-mêmes s'il y a quelques déformations. On parle de ce genre de choses, on regarde. Dans les magazines, si on reconnaît la symétrie dans les photos. C'est la vie. Un reflet dans un plan d'eau calme, c'est naturel pour eux.

C : A quel moment donnez-vous une définition de symétrie ? Et est-ce que vous précisez à quoi ça sert ?

Mme B. : Je donne une définition de la symétrie après un long travail d'observation et de manipulations, et après lors du passage à la mathématisation de la symétrie, au moment où on commence à tracer des droites, des segments. On utilise les instruments de tracés géométriques, l'équerre, la règle graduée. Et à ce moment on travaille sur l'élaboration d'une définition. Quand peut-on dire que ce point-là est l'image de ce point-là ?

C : Et est-ce que à un moment donné il y a une définition précise de ce qu'est une symétrie ?

Mme B. : Non on va pas dire une symétrie est… mais on dira un point M'est l'image d'un point M par rapport à un axe delta si delta est la médiatrice du segment [MM']. On dira pas une symétrie est … jamais justement.

C : Est-ce que vous précisez la place des symétries dans le monde géométrique ? Son rôle et son futur rôle dans tout ce qu'elles vont servir en géométrie ?

Mme B. : Oui et non…pas plus que ça. Axe de symétrie. On fait la relation avec tous les objets qui rentrent dans ce cadre de la symétrie axiale, qu'il existe plein de choses qui sont construites à partir de là. Mais attention je ne leur dit pas attention c'est la première transformation dans le plan, l'an prochain vous allez en étudier une autre et après. Non. De toute façon ils ne s'en souviendraient pas. Il n'est pas prévu de remettre dans un contexte particulier. Par contre constater que c'est partout, oui.

C : Est-ce qu'à un moment donné vous présentez la symétrie comme étant la justification de quelque chose ou étant une propriété ? Est-ce que vous définissez son rôle ?

Mme B. : Pas en 6e. Après, quand on verra la translation en 4e et en 3e, on l'abordera mais je pense que ça serait très ambitieux d'aborder ça en 6e. Parce que déjà obtenir d'eux, non qu'ils reconnaissent, parce qu'ils reconnaissent très bien vous verrez, mais qu'ils symétrisent eux-mêmes, ça demande un gros travail de manipulation, pourtant ils en ont fait à l'école primaire. Mais il suffit qu'un petit truc change, que l'axe soit oblique et tout est fichu. C'est plutôt là-dessus qu'on manipule en 6e.

C : Justement quelles sont les difficultés que les élèves vont rencontrer lors de cet enseignement institutionnalisé de la symétrie ?

Mme B. : Ah ben la difficulté, c'est par exemple, c'est pas de manipuler, de réaliser soi-même, c'est pas ça, parce que c'est comme un jeu, et ils aiment bien, la difficulté c'est dès qu' on rajoute une petite chose qui n'est pas ordinaire, comme un axe oblique, parce que placer l'équerre sur un axe oblique, c'est moins facile que quand il est horizontal et vertical et puis tracer le symétrique d'un objet quand il est coupé par l'axe, alors ça c'est très difficile.

C : D'accord. Par rapport à la symétrie centrale qui va être abordée l'année prochaine, d'après vous, quelles vont être les difficultés des élèves ?

Mme B. : Sur la symétrie centrale ?

C : Et par rapport à la symétrie axiale.

Mme B. : La symétrie centrale, ils n'ont jamais vu, en CM2 on ne fait pas, c'est moins naturel que la symétrie axiale, on voit moins d'objets reproduits par symétrie centrale en apparence parce qu'il y en a aussi beaucoup. Y a une espèce de déplacement dans le plan qui n'est pas forcément naturel, on tourne autour d'un point, ça c'est plus compliqué, mais une fois qu'ils ont compris le système, ils s'aperçoivent même que la définition est beaucoup plus simple en symétrie centrale qu'en symétrie axiale. Donc comme ils ont déjà travaillé en symétrie axiale, même si le départ est plus lent, sur peut-être une petite démonstration déductive, ils vont y arriver plus facilement car ils ont l'habitude d'avoir cumulé les propriétés.

C : Est-ce que vous faites le lien qu'une symétrie centrale est la composée de deux symétries axiales ?

Mme B. : Oui. Je parle de rotations aussi, c'est-à-dire qu'on fait tourner un morceau de papier. On essaie de trouver différents moyens d'obtenir la même chose, donc on le fait par la composée de symétries axiales bien sûr et par rotation.

Retranscription de l'entretien avec Mme B. après son enseignement de la symétrie centrale et de la rotation en 3e, le 24/05/2007.

C : Quelle était votre objectif concernant votre enseignement de la symétrie centrale en 5e ?

Mme B. : Mon objectif était d'abord d'appliquer le programme officiel puisqu'on est obligé d'enseigner la symétrie centrale en 5e et de montrer une autre manière de transformer, de déplacer les points dans le plan, heu, mon objectif était aussi de les faire arriver à cette transformation par le plus de moyens possibles et d'évoquer déjà à ce niveau, le fait que la symétrie centrale est une rotation particulière, mot qu'ils retrouveront en 3e. S'ils le connaissent déjà en 5e dans un cas particulier, c'est déjà ça de pris pour l'avenir.

C : Pensez-vous avoir atteint votre objectif ?

Mme B. : On n'a jamais totalement atteint son objectif parce qu'il y a des gens qui restent toujours en rade mais dans l'ensemble oui, parce que je pense qu'ils ont assez bien construit la différence entre les deux transformations, symétrie axiale et symétrie centrale et bizarrement beaucoup ont retenu cette idée de rotation de 180°, plus que peut-être un autre moyen d'arriver à transformer les points. Heu lorsque j'ai vérifié ou lorsque j'ai contrôlé, évalué, oui dans l'ensemble, la plupart ont bien fait le schéma demandé avec la symétrie centrale. Je ne dis pas qu'ils maîtrisent totalement les propriétés, mais déjà le fait d'évoquer une symétrie centrale, c'est immédiatement dans leur intellect, ils voient le schéma et voient ce qu'il se passe. Et en ça, c'est très réussi parce qu'il m'est arrivé d'avoir des élèves qui confondent les deux symétries. J'ai pas trop l'impression là même si ce n'est pas une très bonne classe.

C : Quelle était votre objectif concernant votre enseignement de la rotation en 3e ?

Mme B. : Ben en 3e, c'est la dernière transformation que l'on évoque, donc la rotation, l'objectif, c'est de définir cette rotation, de leur faire percevoir dans des schémas déjà organisés, dans les pavages et puis d'aboutir sur les polygones réguliers. L'idée c'était ça.

C : Pensez-vous avoir atteint votre objectif ?

Mme B. : Je l'espère, j'ai contrôlé, y a pas si longtemps et on a fait un exercice où on partait de deux figures géométriques avec deux rotations différentes, c'était un losange, l'une partait du centre du losange et l'autre d'un sommet du losange dans deux sens et 80% des élèves ont su lire l'énoncé et ont bien pratiqué les deux rotations. On finissait par une question de calcul des distances, Pythagore… et ça a pas mal marché du tout ! Bon évidemment j'ai pas trop eu le temps de travailler sur les pavages ou les choses comme ça mais j'ai fait bien sûr, et ça marche pas si mal. Là encore j'ai du mal à dire parce que c'est une bonne classe.

C : Justement comment décririez-vous votre classe de 5e et celle de 3e ?

Mme B. : Ah ben la classe de 5e, c'est une classe très hétérogène avec des éléments très très faibles et complètement décalés par rapport à la chose scolaire, donc quand on arrive à les intéresser, ça tient du miracle, alors que les 3e sont plus scolaires, plus intuitifs, ils ont une culture mathématique plus solide et donc les choses se passent beaucoup mieux, apparemment plus facilement dans la 3e. C'est une bonne 3e et une classe de 5e vraiment de niveaux moyens moins.

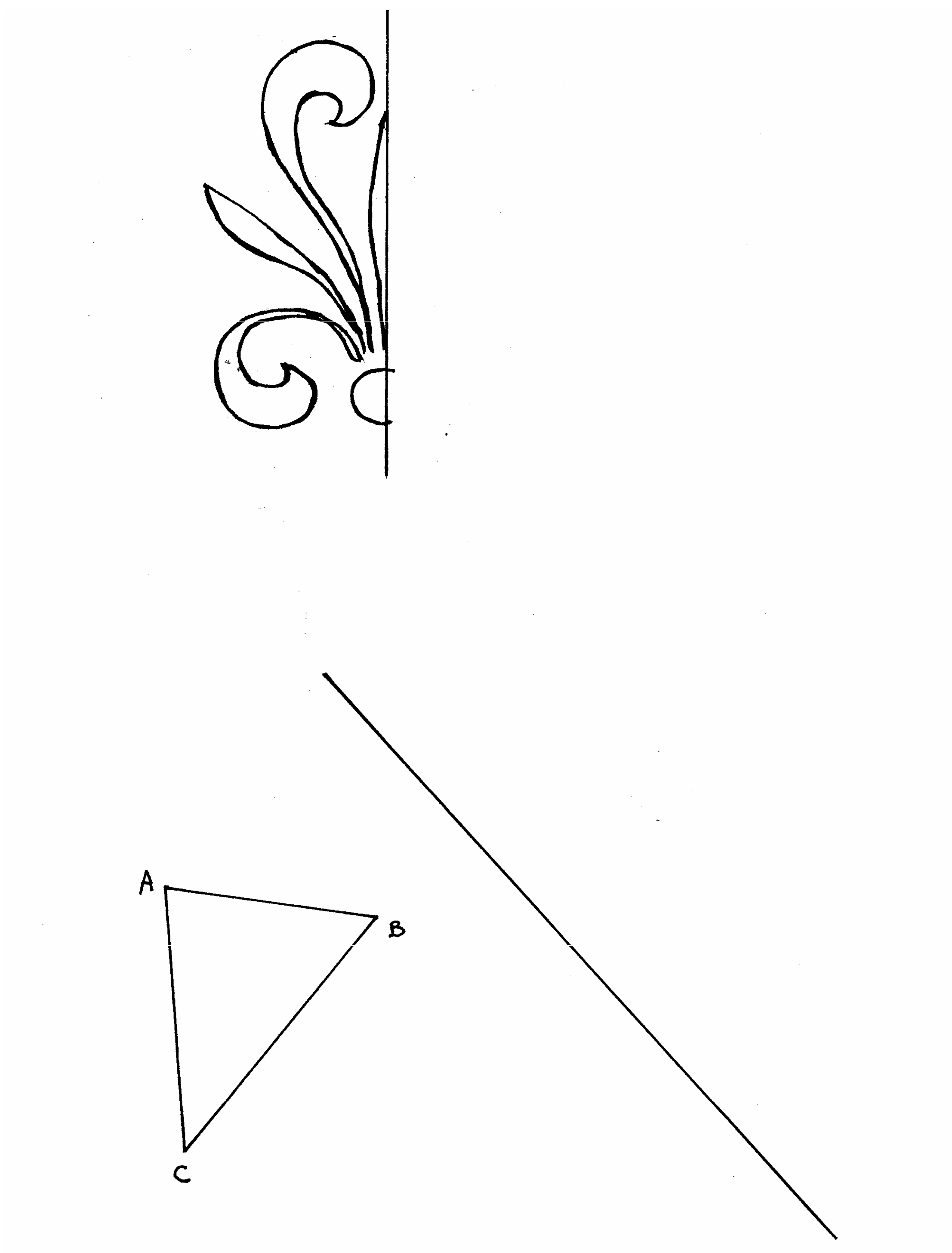
C : D'après vous, quelles sont les difficultés des élèves concernant l'enseignement de la symétrie centrale et de la rotation et pourquoi ?

Mme B. : C'est la lecture de l'énoncé, lecture des consignes. Je pense que c'est un véritable problème de maîtrise de la langue. Je pense qu'à partir du moment où ils ont compris ce qu'il fallait faire, ils y arrivent très bien. Le mot central ne leur pose pas de problème, le mot axial ne leur pose pas de problème. Heu, je leur apprends à avoir une certaine méthode de penser avant de se précipiter sur une feuille de papier. Pour la rotation, les centres ne leur ont pas posé de problème. La plupart du temps, la grosse difficulté, c'est la lecture de l'énoncé et de toutes les consignes qui sont données par l'énoncé, ce qui aboutit à une rotation qui n'a pas le bon centre, le bon sens ou bien voilà, ce qui est arrivé en 3e, même avec des élèves d'assez bons niveaux, qui s'en sont aperçu une fois la copie rendue mais pour eux le centre de la rotation était le centre du losange. En fait, lecture en diagonale, manque de rigueur dans la lecture de l'énoncé et pourtant tous les mots sont connus.

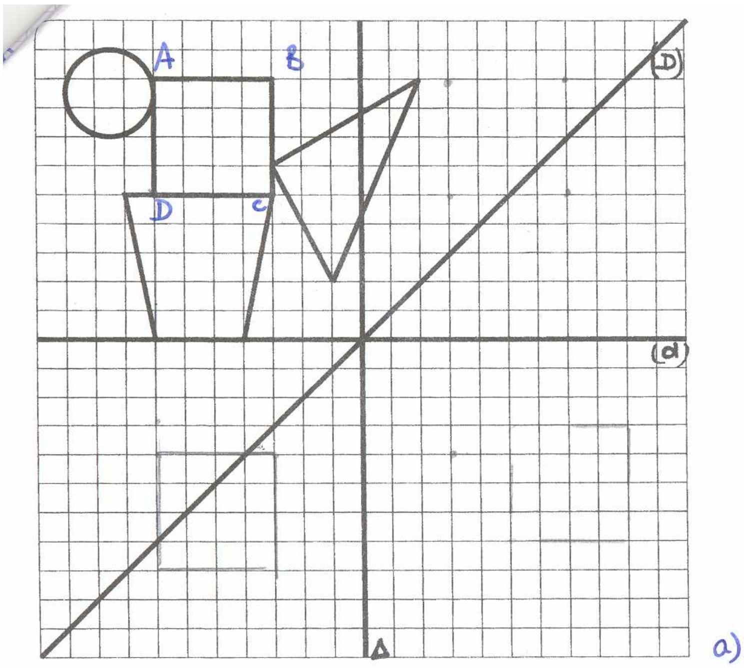
C : Enfin dernière question, d'après vous, pourquoi on enseigne la symétrie et la rotation ?

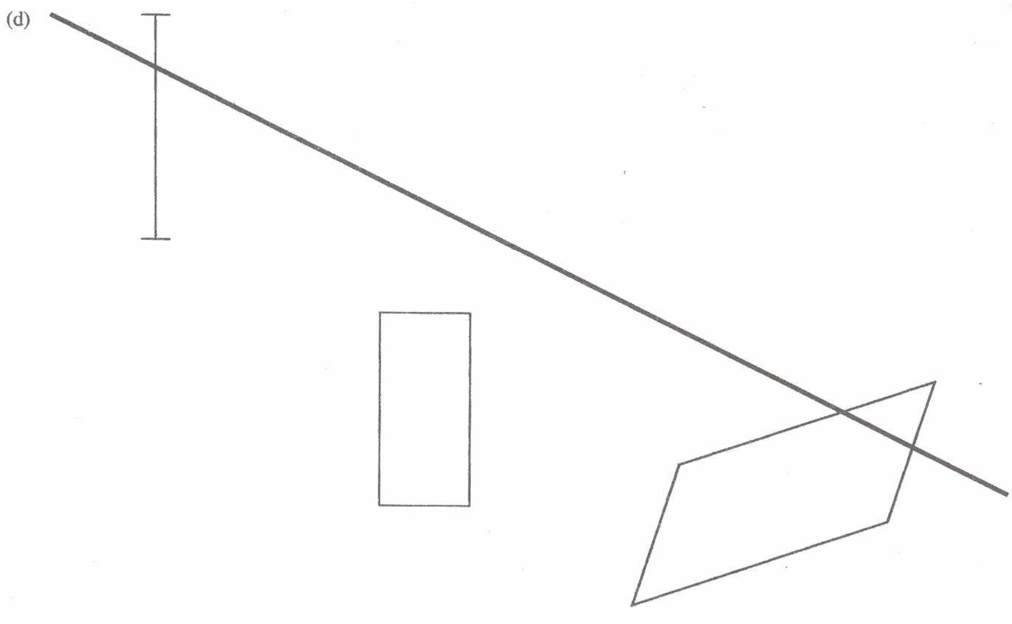
Mme B : Et bien d'après moi, je n'ai pas de réponse. Je pense que c'est dans l'idée de faire pratiquer, d'utiliser les fonctions géométriques, d'évoquer le nom image, transformation, a pour image, c'est un peu pour la pratique de la langue aussi. Tel point est l'image de et tel point a pour image tel point, par la rotation ou par… bon et puis on utilise ces trois transformations pour introduire le raisonnement hypothético-déductif, c'est-à-dire que pouvez-vous dire de la longueur de tel segment, c'est une fois de plus, l'occasion de faire des démonstrations, pour moi, mais on a tellement l'occasion de faire de démonstration….

3. Documents des séances observées en classe de 6e.



<u>Document 7.a</u> : *construction du symétrique d'une figure en 6e.*





Document 7.b : *construction (suite) du symétrique d'une figure en 6^e^.*

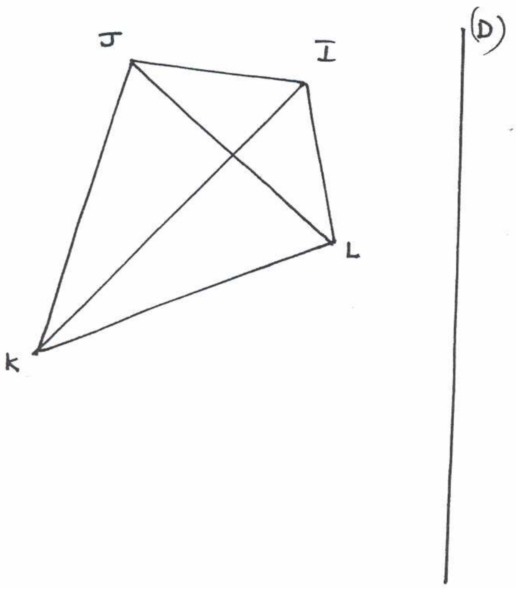
I

Voici un cerf-volant IJKL et une droite (D)

a) Citer plusieurs manières de reproduire IJKL par symétrie axiale par rapport à l'axe (D)

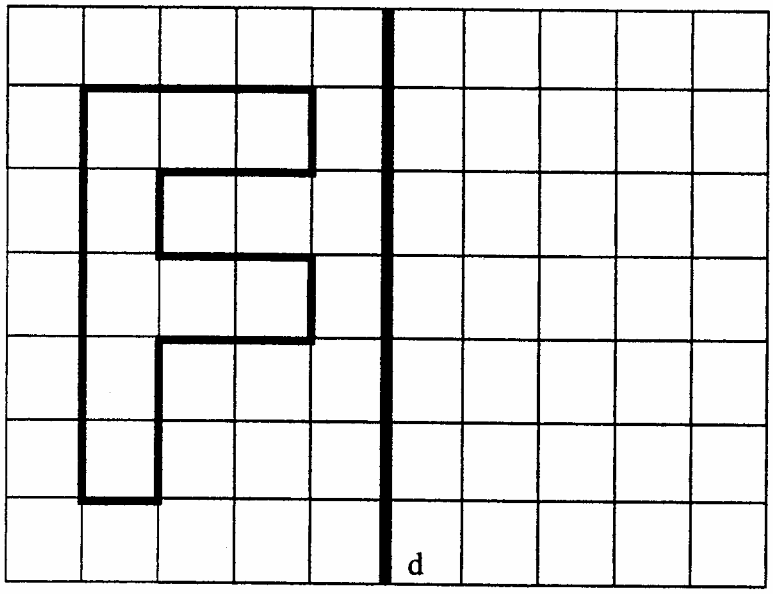
b) Quelle est la méthode la plus simple dans ce cas précis ?

c) Reproduisez IJKL par symétrie axiale selon la méthode choisie. (on l'appellera I'J'K'L')



d) Quelles sont les conditions nécessaires pour que I' soit le symétrique du point I par rapport à (D) ?

<u>Document7.c</u> : *interrogation surprise en 6^e^.*



<u>*Document 7.c (suite)*</u> *: interrogation surprise en 6*^{e}*.*

Stratégies / Exercices	**Superposition**			**Mesure**				**Construction géométrique mettant en jeu explicitement :**			
	Pliage (dont piquer à la pointe sèche, transparence avec la fenêtre, etc.)		**Calque**	**quadrillage**	**RG (ortho précisée)**	**RG (ortho induite)**	**RG (non ortho)**	**milieu**	**parallélisme**	**orthogonalité**	**médiatrice**
I a) Stratégies mentionnées (exhaustives)	**24**		**23**	**9**	1	**8**	1	1	0	1	0
I c) Stratégies réalisées	Avec 4 points : **16**	Avec 5 points : **6**	0	0	0	**5**	2	0	1	0	0
I d) Condition nécessaire	**6**		0	0	1	**6**	0	**3**	**2**	**6**	**6**

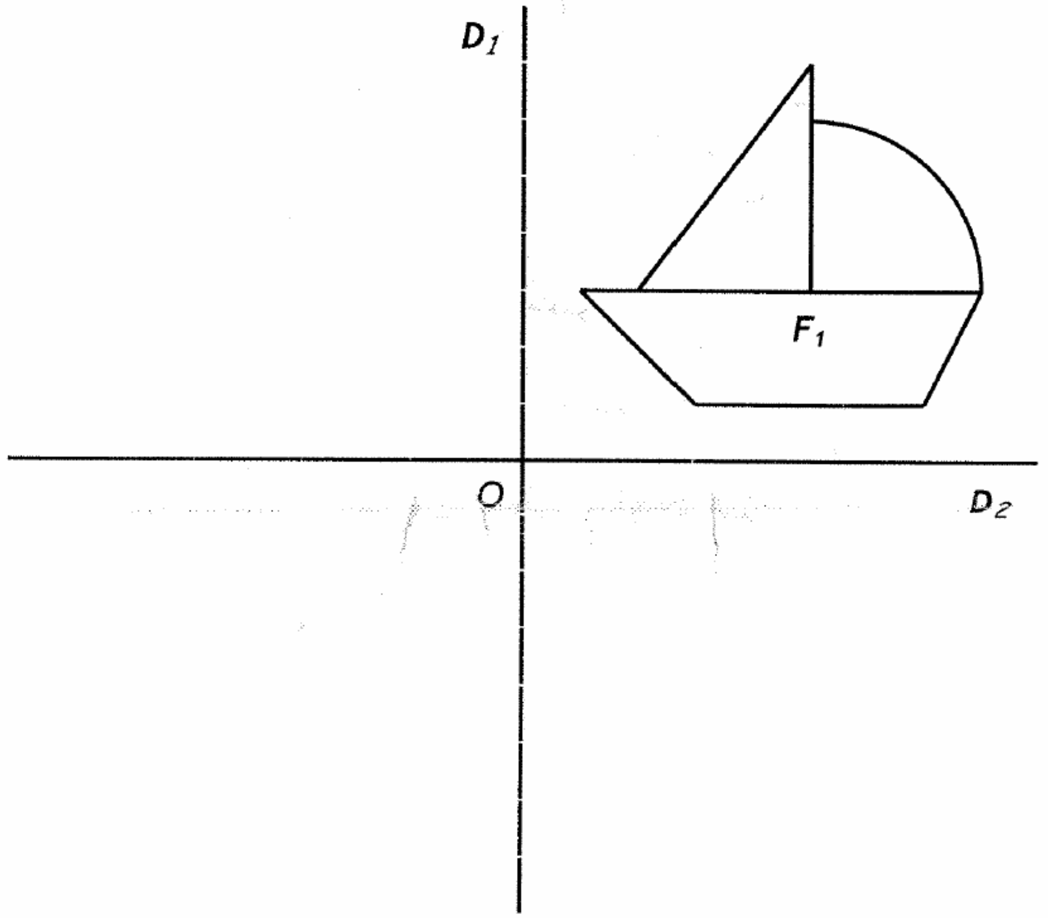
<u>Tableau 7.d</u> : *analyse des 29 productions intermédiaires de 6^e, exercice 1 de l'interrogation surprise (document 7.c).*

11/29

4. Documents des séances observées en classe de 5e.

- Construire en rouge la figure symétrique de F_1 par rapport à la droite D_1. La figure obtenue s'appelle F_2.
- Construire en vert la figure symétrique de F_2 par rapport à la droite D_2.
  La figure obtenue s'appelle F_3.

(Conseil : commencer au crayon de bois puis repasser en couleur après que le professeur ait vérifié.)

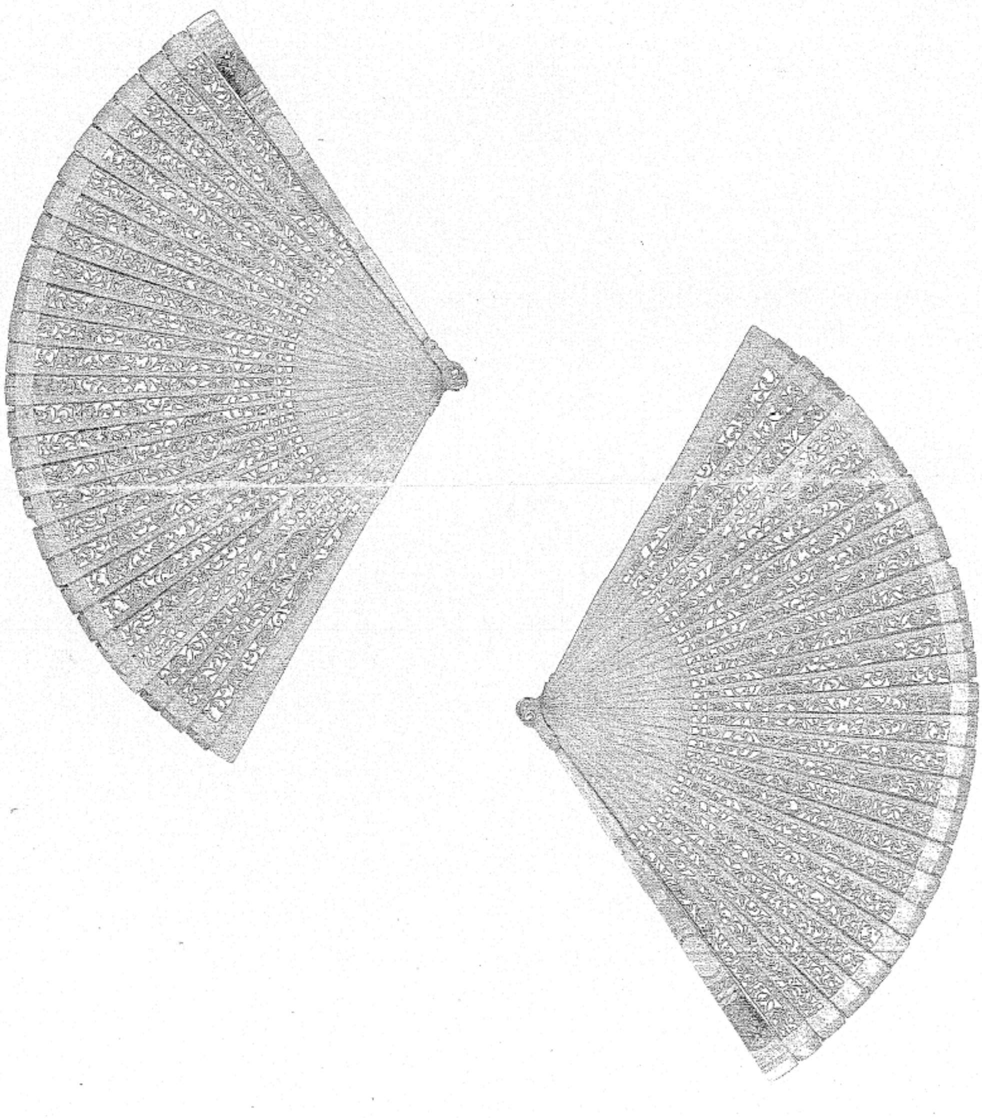


Question :

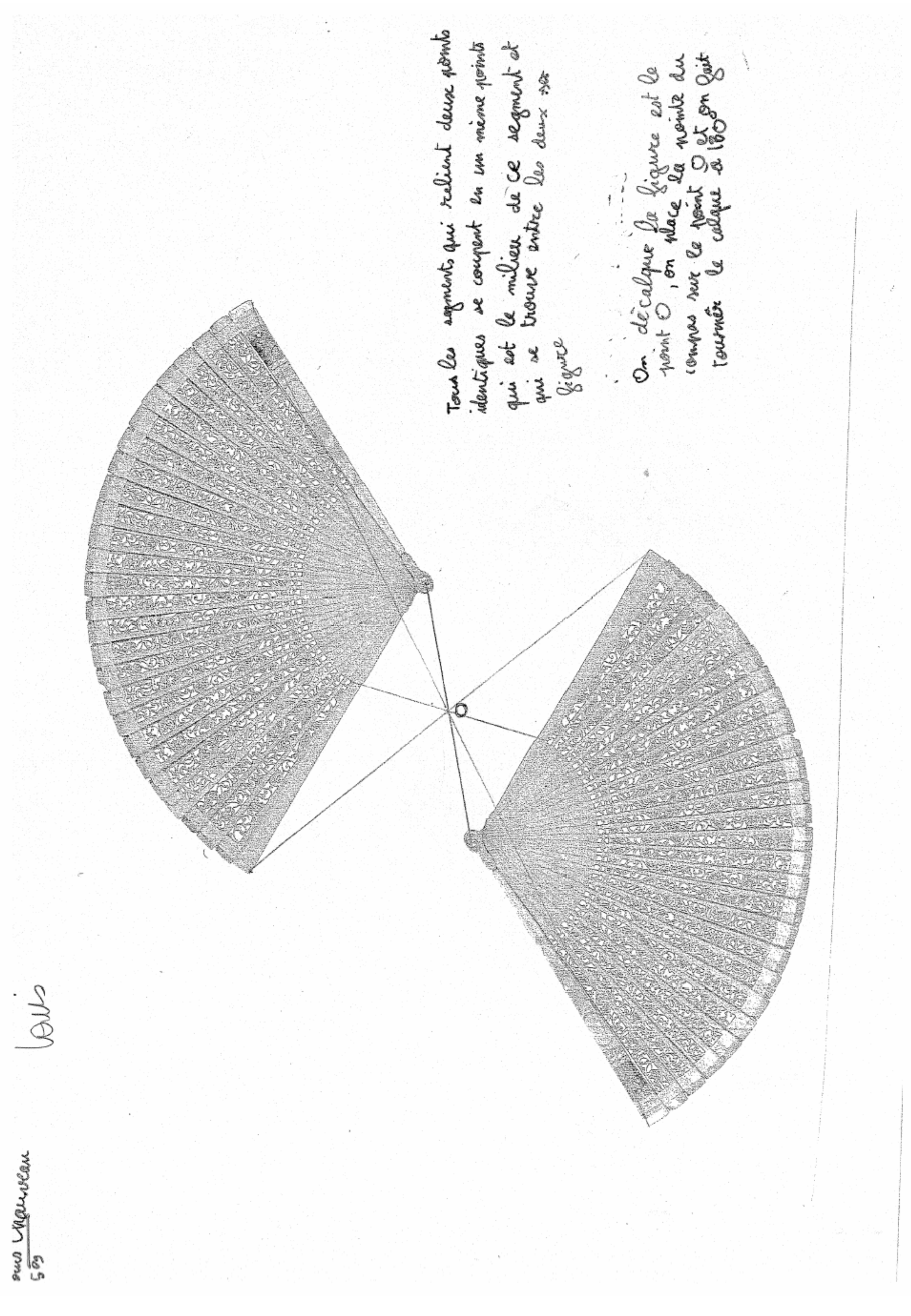
Comment peut-on passer directement de la figure F_1 à la figure F_3 sans faire intervenir la figure F_2 ?

Document 7.e : activité introductive de la symétrie centrale en classe de 5e

Document 7.f : *support de l'activité « cartes à jouer » en classe de 5*^{e}.



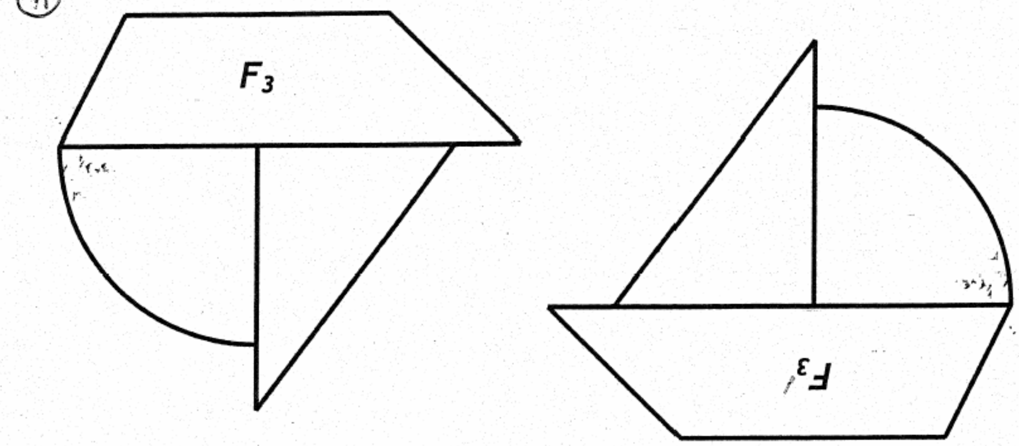
Document 7.g : support de l'activité « éventails » en classe de 5e.



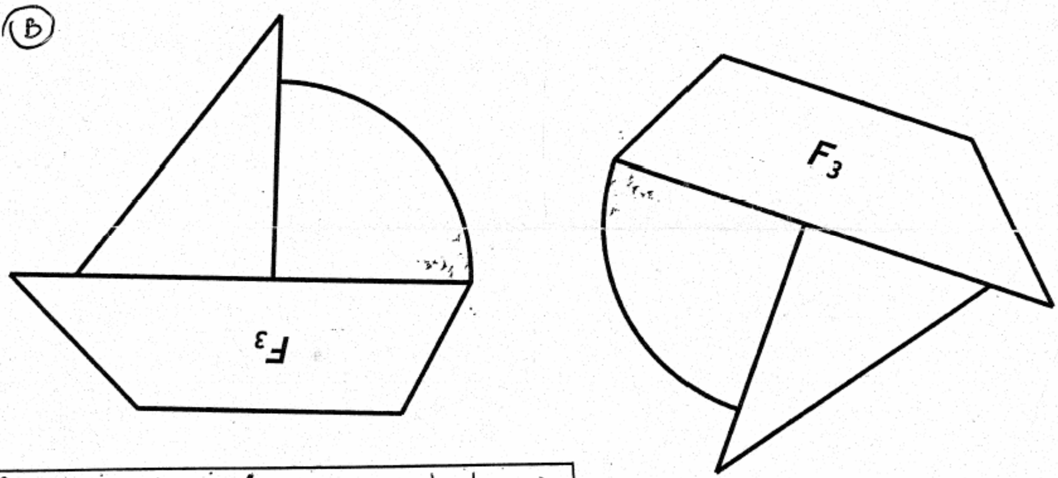
Document 7.h : *extrait d'une copie d'élève de l'activité éventails en classe de 5^e.*

I A l'aide de vos instruments de géométrie, déterminer le centre de symétrie de la figure si il existe, sinon, expliquez pour quelles raisons il n'existe pas.

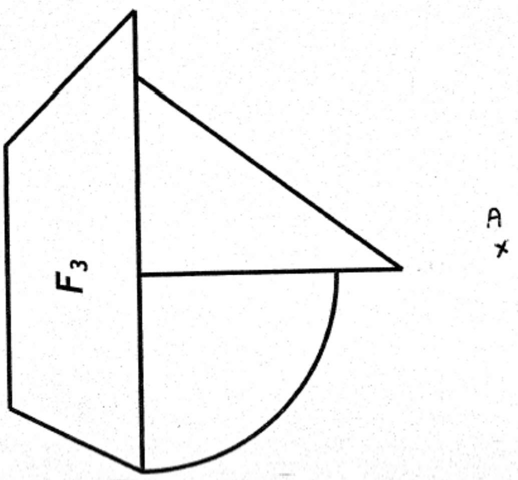
(A)



(B)



I Construire le symétrique du bateau dans la symétrie de centre A (en vert).

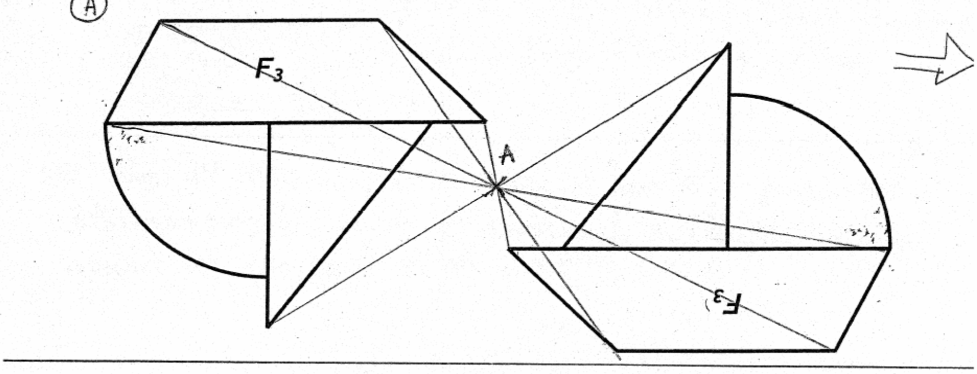


<u>Document 7.i</u> *: interrogation surprise sur la symétrie centrale en classe de 5e.*

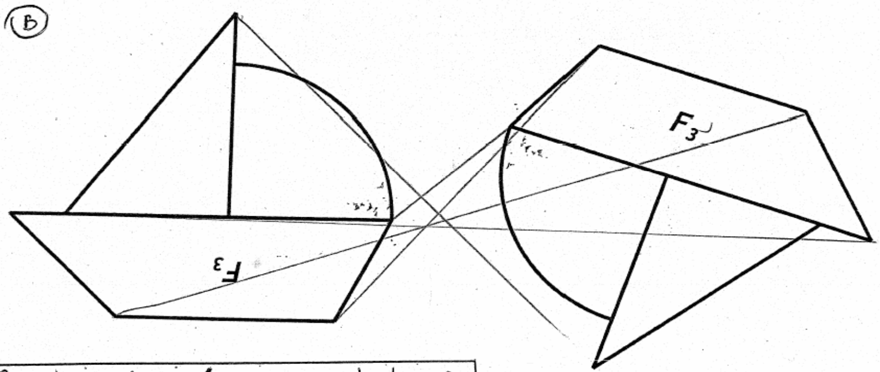
Sarah Perez

I A l'aide de vos instruments de géométrie, déterminer le centre de symétrie de la figure si il existe, sinon, expliquez pour quelles raisons il n'existe pas.

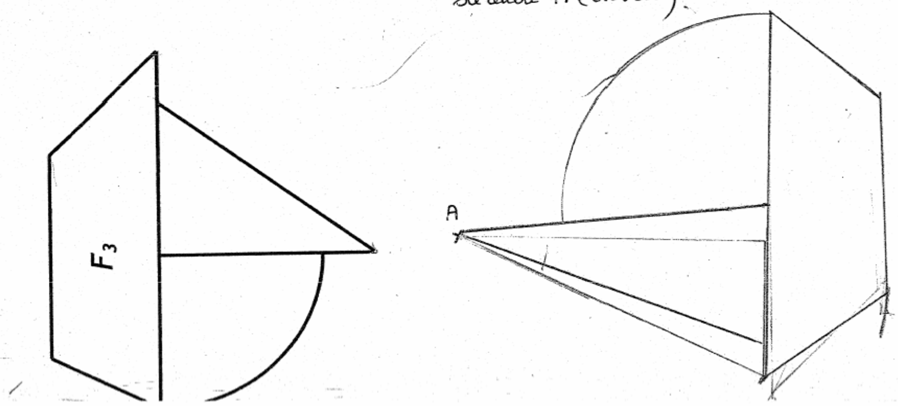
(A)



(B)



II Construire le symétrique du bateau au dans la symétrie de centre A (en vert).



A) Le centre de symetrie des deux figures est le point A car tout les points identique des deux figures se coupent en un point qui est le centre de symetrie. Pour le trouv en relie deux points fixes identiques, un de chaque figure.

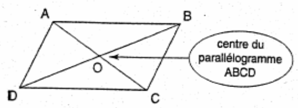
B) Non, il n'y a pas de centre de symétrie, car en reliant plusieurs points fixes et identiques de chaque figures aucun se coupent en un point

Document 7.j : *extrait d'une copie d'élève de l'interrogation surprise en classe de 5e.*

Parallélogramme

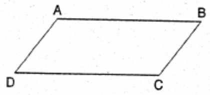
a/ Centre de symétrie d'un parallélogramme

Un parallélogramme a pour centre de symétrie le point d'intersection de ses diagonales (centre du parallélogramme).

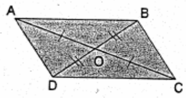


b/ Propriétés

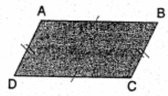
• Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles.



• Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.



• Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont de même longueur.

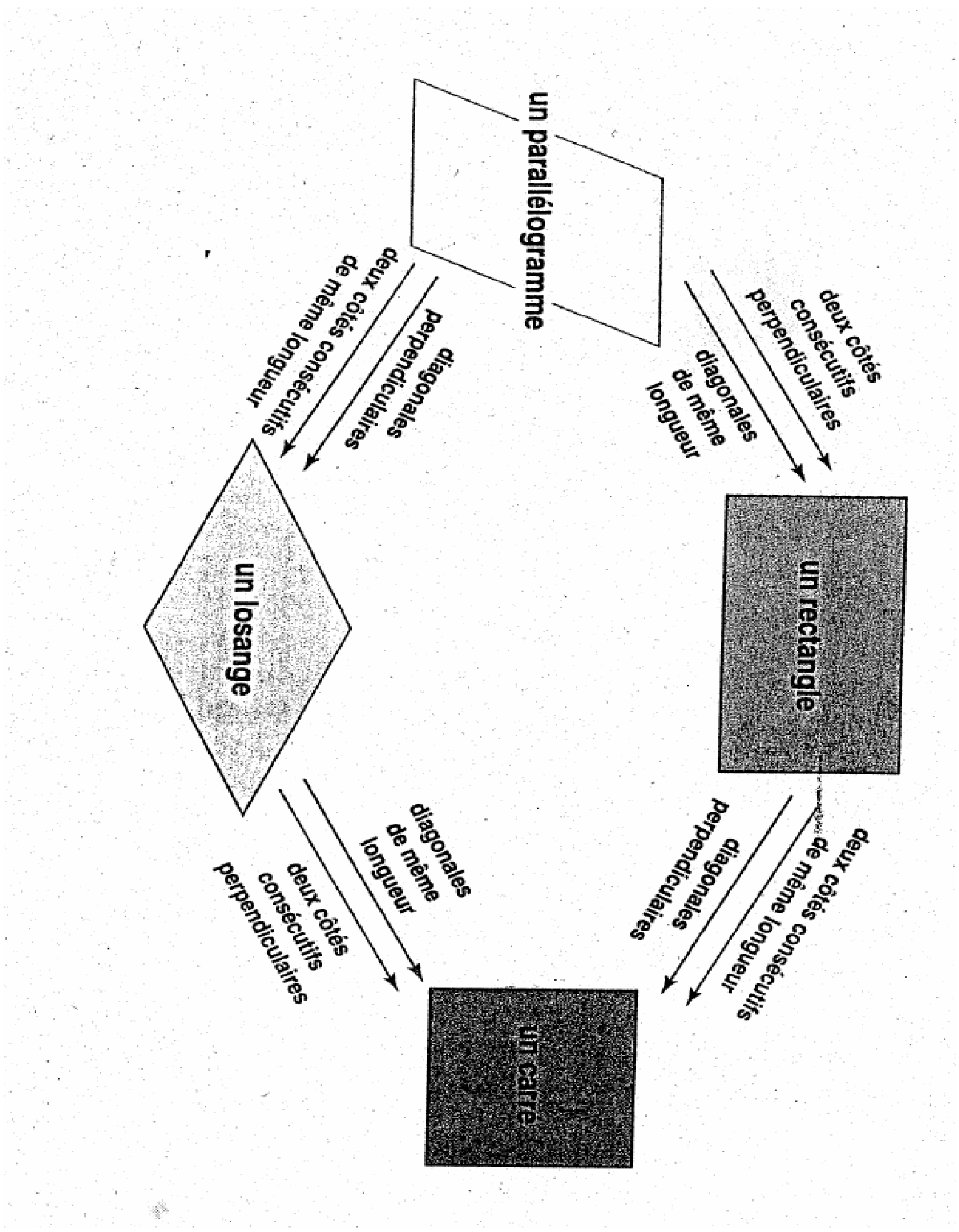


c/ Réciproques

• Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme.
• Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme.
• Si un quadrilatère (non croisé) a ses côtés opposés de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Ces réciproques permettent de :
– justifier la nature d'un quadrilatère ;
– reconnaître un parallélogramme ;
– tracer un parallélogramme

<u>Document 7.k</u> *: extrait d'un document distribué par Mme B. à ses élèves de 5^e.*

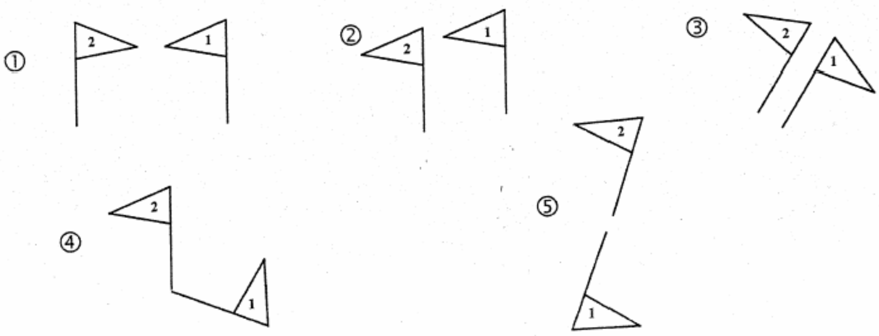


<u>Document 7.l</u> : extrait d'un document distribué par Mme B. à ses élèves de 5^e^.

5. Documents des séances observées en classe de 3e

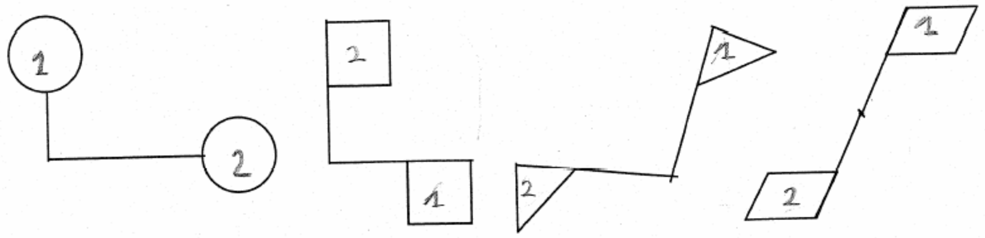
1. Imaginer un procédé permettant de réaliser le motif japonais à partir du motif de base (vous pouvez utiliser du papier calque)

2. Observer les différentes figures. Préciser dans chaque cas , par quelle transformation on passe du drapeau 1 au drapeau 2 . Compléter les schémas.



<u>Document 7.m</u> : activité introductive de la rotation en classe de 3e.

3. Dans chacun des cas, y a t il une rotation transformant la figure 1 en figure 2 ? Si oui, préciser le centre, l'angle et le sens.



4. Définir une rotation.
Construire l'image M ' du point M, dans la rotation de centre O , de sens inverse des aiguilles d'une montre et d'angle 60°.

+
M

+
O

<u>Document 7.n</u> *: suite des documents distribués par Mme B. en classe de 3^e^.*

5. Propriétés de la rotation.

- Image d'un segment.

- Image de 3 points alignés ;

- Image d'un angle.

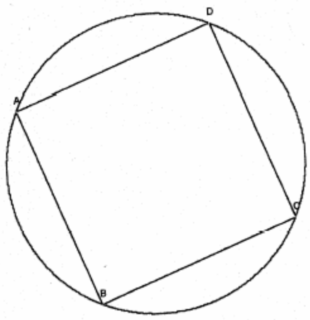
- Image d'un triangle.

- Image d'un cercle.

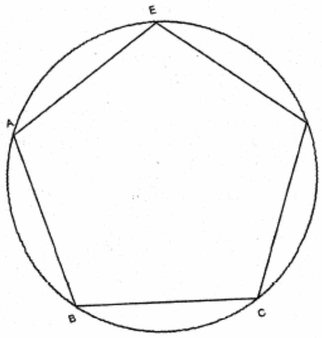
<u>Document 7.o</u> *: suite des documents distribués par Mme B. en classe de 3^e.*

6. Polygones réguliers.

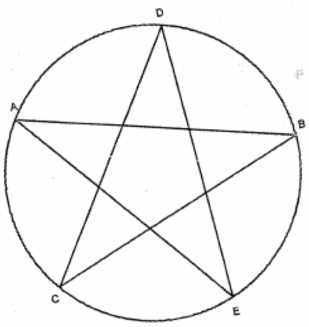
- Le carré.



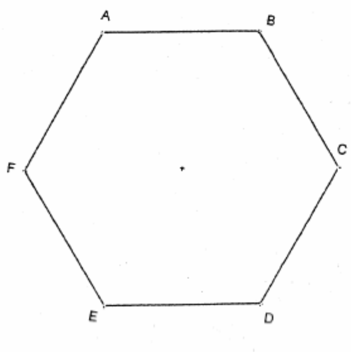
- Le pentagone.



- L'étoile à 5 branches.



- L'hexagone.



<u>Document 7.p</u> *: suite et fin des extraits des documents distribués par Mme B. lors des séances observées en classe de 3e.*

6. Extraits de scénarios et grilles d'analyses de certains scénarios

Extrait du scénario 6.1	**Nature de l'incident repéré**	**Gestion du professeur**	**Dimension des éléments considérés dans l'extrait**
« E : Ben si on décalque que la moitié, et après on reporte de l'autre côté. P : Pourquoi ? **E : Parce que c'est symétrique.** P : Qui a déjà entendu ce mot symétrique ?	RI Anticipe la notion visée	Relance à l'ensemble de la classe	2D
[Toute la classe lève la main]. P : (…) Qu'est-ce que tu proposes ? E : Ben **avec la règle, on prend le compas, on va au milieu.** P : Au milieu de quoi ?	RI	Relance en interrogeant à nouveau l'élève afin de préciser sa réponse	1D 0D
E : **Ben au milieu du dessin.** P : Donne-nous des précisions, y a plein de **points de repères**, **tu passerais par où** ?	RI	Relance en interrogeant à nouveau l'élève. Elle facilite la tâche en guidant l'élève afin qu'il donne la réponse attendue.	2D 0D 0D
E : **Par le centre**. P : le centre de quoi ?	RI	Relance en interrogeant à nouveau l'élève afin qu'il précise sa réponse.	0D 0D
E : **Le centre de la verticale.** P : Ah déjà tu ferais une droite verticalement sur le dessin. **Vous savez ce qu'est vertical ?**	RI et erreur	Répète sa réponse de manière neutre. Relance en interrogeant l'ensemble de la classe pour approfondir cette réponse.	0D 1D 1D
E : **Heu.** P : **Donne-nous des points de repères**.	Silence (l'élève n'arrive plus à préciser)	Guide l'élève en lui facilitant la tâche.	0D
E : **Heu.** P : Oui y a effectivement une feuille. Je n'ai aucune prétention de dessin, mais y a une feuille, et tout autour y a [elle fait le dessin au tableau] ce qu'on appelle des volutes, et puis y a autre chose… *inaudible*…notre ami nous propose de tracer un trait vertical. Il faut **qu'on trouve un moyen de le tracer correctement.** Il faut qu'il **passe par où** ? Pauline ?	Silence à nouveau	Valide certaines réponses collectives. Elle enrichit les données et relance un autre élève en le guidant vers la stratégie visée.	2D 1D
E : **Heu.** E : **Par la feuille.** P : Par la feuille, mais ça veut rien dire, donnez-moi **quelque chose de précis**. (…) Le centre du cercle, pas bête, bon là on va le faire un peu à l'œil [au tableau]. On pourrait calculer absolument. **On va le faire un peu à l'œil**. Je veux une droite. **Il me faut combien de points pour une droite** ?	Silence et erreur	Invalide la réponse donnée. Facilite la tâche pour obtenir la notion visée.	2D 0D

Es : Deux.			1D
(…) E : Il va falloir **changer de sens**. P : Tu penses qu'il va falloir changer de sens.	RI	Répète la réponse d'un ton neutre.	
E : Sauf si **on le tourne**. *Inaudible.* P : Vous voulez dire si vous le glissez comme ça ? [comme une translation] Ah ben vous avez raison, qu'est-ce qu'il faut pour que ça soit vraiment une symétrie ? E : **Retourner la feuille de calque**. »	RI	Enrichit la réponse en vue de le guider vers la stratégie visée, et relance le même élève.	2D 3D

Tableau 7.q : grilles d'analyse de l'extrait de scénario 6.1.

Extrait du scénario *6.3*

« P : Je vous propose d'essayer de reproduire ce carré par rapport à cette droite verticale, la droite delta. (…) On va **compter les petits carreaux** pour aller jusqu'à l'axe de symétrie, puis après on va **faire la même chose de l'autre côté**. (…)
P : Le point dont tu es parti, il a pour image le point que tu viens d'obtenir. D'accord ? Ce qui **sera intéressant peut-être ça serait d'appeler ces points**. (…) **on va lui donner le nom ABCD**, et **on va appeler l'image de chaque point,** avec un nom un peu de la même famille. Par exemple le cousin de A, on va l'appeler **A'**. Donc vous allez appeler ABCD votre carré, sans croiser, en tournant. Puis on cherche les images. (…) alors on pourra dire **B' est l'image du point B dans la symétrie d'axe delta**. On dira B' est le symétrique de B dans la symétrie d'axe delta. (…) attention réfléchissez ! Je sens bien qu'il y a des gens qui vont se tromper… je crois que vous n'avez pas bien réfléchi. Vous devez appeler **A' l'image de A.** C'est ce que vous avez fait ? Regardez bien. (…) Mes points sont nommés ABCD, ici en comptant, très sérieusement, j'ai trouvé **l'image du carré**, il a la **même grandeur**, il est **superposable**. Oui très bien, regardez ce qu'elle fait. Il faut **toujours s'imaginer le pliage**. Qui est **l'image de ce point ? C'est évidemment le plus proche.** Quand on va plier, qu'est-ce qui va se passer ? B' va venir sur… B. (…)
P : Ce qui est amusant, vous ne reproduisez pas comme je le souhaiterai, mais **vous utilisez une autre symétrie**. *Inaudible*. Je crois que vous n'avez pas bien entendu la consigne. Je veux que vous reproduisez ce carré par rapport à la droite D. je vous l'accorde c'est la partie la plus dure. Mais quand je vous demande comment vous vous y prenez, vous me parlez de la droite d, de la droite delta, et de grand D, vous ne m'en parlez jamais. Y a un problème. Comment on s'y prend pour reproduire uniquement par rapport à grand D ? (…) **On ne doit pas plier** *inaudible* (…) Vous n'arrivez pas à effacer de votre cerveau les autres droites. (…)
P : Imaginons que vous soyez des petites araignées et vous vous baladez sur une grande toile d'araignée et **vous allez uniquement vous déplacer sur les fils**, et si vous passez à travers, vous tombez. On ne passe pas par les trous. (…)
P : Vous avez vu ? Il est descendu. Il est parti de C, il a marché sur un fil verticalement, puis il a fait un virage pour aller horizontalement et il nous a dit qu'il a obtenu l'image du point C.
E : Comment il sait qu'il faut s'arrêter ?
P : **On compte les carreaux bien sûr**. »

Extrait du scénario *5.7*	**Nature des interactions professeur/élèves et nature des incidents**	**Dimension des objets mathématiques en jeu**
- tracer une droite (xy) - choisir un point O (O ∉ (xy)) - construire l'image de (xy) dans la symétrie de centre O.	Les élèves commencent par résoudre une tâche de construction donnée dans un langage formel de géométrie affine (écrite au tableau)	1D 0D
« P : (…) Très bien. Bravo. Bon, merci pour cette construction très réussie. Qui a quelque chose à dire sur ce qu'il voit, ce qu'elle voit ? E : **C'est parallèle**. P : Très bien. C'est parallèle. Ces droites sont parallèles. D'accord. Donc c'est une propriété. Comment pourriez-vous exprimer cette propriété ? À l'image de ce qu'on vient d'écrire. Louis ?	Après une phase de recherche et de construction de quinze minutes environ, Mme B. lance la phase de communication, dans le but de leur faire formuler une « nouvelle » propriété. Est énoncée une propriété de géométrie affine exprimant le parallélisme entre deux droites	1D
E : Dans une symétrie centrale…. L'image d'une droite est parallèle à la droite ? P : J'ai pas entendu. E : Dans une symétrie centrale… euh…. L'image d'une droite… est parallèle à la droite… P : Faut dire ce que c'est. L'image d'une droite est… E : Une droite. P : Une droite… parallèle…à la première. Très important. Non démontrée mais très important. **L'image d'une droite est une droite parallèle à la première**.	la propriété « dans la symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle » est écrite en rouge dans le cahier.	1D
(…) P : Est-ce que c'était vrai dans la symétrie axiale ? E : Non. P : C'était pas parallèle ? E : Non c'étaient des points. **C'étaient des points qui étaient parallèles.** P : des points parallèles ? [Elle dessine au tableau, deux points A et B à gauche d'un axe vertical delta et trace la droite (AB)] Vous vous souvenez pas de ça ? E : Ben si c'était vrai aussi. P : Une droite delta, une droite qui passe par un point A et un point B. Qui vient rapidement faire le symétrique de cette droite ? Oui Juliette. [Elle vient au tableau]. Comment tu faisais ? A peu près. Elle trace le symétrique de la droite. Alors est-ce que vous obtenez des droites parallèles ? E(s) : Oui … non… P : Vous obtenez des droites parallèles ?! E(s) : Non, c'est pas parallèle.	Mme B. rappelle que la construction de l'image d'une droite a été également réalisée dans le cas de la symétrie axiale, mais qu'il ne s'agit pas d'une droite parallèle.	0D 0D 1D 1D

E : C'est non parallèle. P : Est-ce que **quelqu'un se souvient d'une propriété de l'image d'une droite par rapport à un axe** ? **Est-ce que vous vous souvenez de ce qu'on a dit l'année dernière, parce qu'on l'a dit, on s'en est même servi pour vérifier qu'on ne s'était pas trompé dans la construction l'année dernière.** Non, vous vous souvenez pas ? **Une droite et son image par rapport à un axe ?** E : Elles sont sécantes. P : Elles sont sécantes. [ton lent et un peu insistant sur chaque mot]. Très bien. Et elles sont sécantes à quel endroit ? E : Sur la droite… P : Ouais… sur l'axe. Si tout va bien, elles sont sécantes sur l'axe. Bon ici, pour ceux qui suivent, l'image d'une droite est une droite parallèle. On est tous d'accord ? Bon ça c'était l'image d'une droite.	On reste dans une géométrie affine car Mme B. et les élèves formulent que les droites sont sécantes. Aucune propriété métrique n'est encore formulée. Et les éléments manipulés sont de dimension 1D.	1D 1D 1D
P : Alors quelle remarque pouvez-vous me faire sur ces deux images ? E : Ils sont parallèles. P : Ils sont parallèles ? E : A et B on les allonge, et si A' B' on les allonge, on remarque qu'ils sont parallèles. P : Il me semble que tu ne dis pas bien ce que tu veux dire. E (un autre): **A et B', C et A', si on les traces, c'est parallèle.** P : Si on les trace, les droites sont parallèles. (Ton suspicieux) **Et si on parlait des côtés AB et A'B' ?** Ils sont comment ?	A partir de la tâche de construction du symétrique d'un rectangle Mme B. va amener l'élève à réinvestir les précédentes propriétés (parallélisme) pour arriver à faire formuler la propriété de conservation de la mesure d'angle et d'aire.	0D 0D 1D 1D 1D 0D
E(s) : **Ils sont parallèles.** P : **Et que pensez-vous de la longueur AB et de la longueur A'B' ?** [la sonnerie retentit] E(s) : **C'est les mêmes / c'est parallèle.**	Les élèves réinvestissent la propriété de parallélisme, mais Mme B. est passé à une géométrie affine euclidienne (munie d'une distance).	1D 0D
P : Que pensez-vous du rectangle ABCD et du rectangle A'B'C'D' ? E : C'est l'image. P : Que pensez-vous de ces 2 rectangles ? E : **Ils sont superposables !** P : Ils sont fort probablement superposables. Vous avez deux rectangles de même dimension. Ne perdez pas cette feuille, collez-là.	Finalement, Mme B. revient à la propriété de conservation globale	2D
P : Alors que pensez-vous de l'image de l'angle DAB ? Alors… qu'est-ce	La phase de communication reprend à partir de la construction d'un angle	0D

que vous avez écrit là, **A a pour image…** **E : A'.** **P : D'accord. B a pour image…** **E : B'** P : B'… [Elle finit d'écrire pour les autres points] Quelle est l'image de DAB ? E : C'est l'angle … E(s) & P : D', A', B'. Quelle était la mesure de l'angle DAB ? [Elle a entouré les lettres A, B et D] E : 90° P : Oui c'est bien et DAB est un angle droit, puisque c'est un rectangle. **Que pensez-vous de la mesure de l'angle D'A'B' ?** E : C'est un angle droit.	dont l'image est un angle.	0D
P : C'est aussi un angle droit. Vous pourriez vérifier si votre schéma est bien fait… Est-ce que ça vous étonne ? E(s) : Non ! P : Pourquoi ? E : Parce que c'est son symétrique. P : Oui, absolument, **les figures doivent être parfaitement superposables,** donc vous avez aussi un angle droit. Alors ça signifie quoi ? C'est très important. E : L'image d'un angle est un angle P : Est un angle… E : De même mesure.	La propriété de conservation de la mesure d'angle est formulée par superposition globale de la figure.	2D
A : Votre avis, comment vous feriez pour calculer l'aire de ABCD ? E : Longueur par largeur. P : Bien, on multiplie la longueur par la largeur. Alors ici comment s'appelle la longueur ? Comment s'appelle la largeur ? E & P: AB P : Et comment s'appelle la largeur ? E : BC ou AD. P : Très bien. [Elle écrit en même temps Aire de ABCD= Lxl=ABxBC] Vous êtes d'accord, quand j'écris AB fois BC, c'est longueur fois largeur. C'est le calcul d'aire. D'accord ?	Puis, toujours à partir de l'image d'un rectangle par symétrie centrale, Mme B. opère alors à un changement de cadre, en passant dans le cadre algébrique et le calcul de l'aire du rectangle.	
P : (…) Que pensez-vous de A'B' ? *Inaudible.* Quelle est l'image du segment [AB] ? E : A'B'. [Mme B. l'écrit et le lit en même temps au tableau, l'image du segment [AB] est [A'B']] Très bien. Et que savez-vous de la symétrie centrale ? E: **Que l'image d'un segment est un segment.** **P : Un segment**…	Mme B. les oriente pour réinvestir les propriétés précédentes de conservation de la mesure pour arriver à la propriété de conservation de l'aire. Elle articule ainsi des changements de cadre (algèbre, géométrie) afin d'arriver à un même calcul d'aire	

E(s) : **De même longueur** P : Très bien. Or l'image d'un segment est un segment de même longueur. (…) P : Et que pensez-vous de la longueur de A'B' ? E(s) : … Elle est égale. P : Egale à quoi ? E(s) : A AB. P : A AB. A'B' est égale à AB. De même, que pensez-vous de la longueur B'C' ? E : C'est l'image de BC. P : *inaudible.* On est d'accord. Alors que pensez-vous de l'aire du quadrilatère A'B'C'D' ? Comment allez-vous la calculer cette aire ? E : Longueur fois largeur P : Longueur fois largeur (ton de validation) c'est-à-dire… E : A'B' fois B'C'. P : Mais que savez-vous de ces deux longueurs ? … Elles sont égales à celles-ci ? Donc qu'est-ce qu'on pourrait trouver ? E : AB P : AB fois… E : BC P : BC. **L'aire de A'B'C'D' est égale à l'aire de ABCD,** on est d'accord ? »		

<u>Tableau 7.r</u> : grille d'analyse concernant l'émergence des propriétés de conservation en 5^{e}.

Extrait du scénario 3.2	**Nature de l'incident repéré**	**Gestion du professeur**	**Dimension des éléments considérés dans l'extrait**
« P : Tracez une droite et sur cette droite, tracez trois points. Vous vous fixez un point O. Puis vous tracez l'image de A… de B…de C et regardez ce qu'il se passe. (…) *(à un élève)* Prime, sinon on voit pas bien. N'oubliez pas que vous conservez le même rayon, OA égale OA'. *Inaudible. (A un élève)* Faut qu'ils soient alignés. Mettez bien A, A', B, B'… qu'on voit bien ce que vous faites. Tournez bien toujours dans le même sens. Tracez tout le cercle c'est pas utile. Juste les arcs de cercle correspondants. (…) Alors qu'est-ce que tu en déduis de ce magnifique dessin ? E : Ben pareil, que l'image de **trois points par une rotation sont trois points de même longueur… non non !** P : Ah pas de même longueur…	Erreur	Répond en invalidant la réponse mais sans approfondir	0D 1D
(…) P : Donc l'image de trois points alignés c'est trois points alignés. On pourrait le dire d'une autre manière pour changer un peu. On va dire que la rotation conserve… **E : La distance.** P : L'alignement des points. **E : Et la longueur.** P : Ben ça la longueur on l'a déjà dit. La deuxième propriété on peut l'exprimer d'une autre manière. »	Erreur	Répond en invalidant la réponse mais sans approfondir. Elle relance la question.	0D 1D

Document 7.s : grille d'analyse sur la propriété de conservation de l'alignement en 3^e^.