



**HAL**  
open science

# Traitement d'antenne adapté aux modèles linéaires intégrant une interférence structurée. Application aux signaux mécaniques.

Guillaume Bouleux

## ► To cite this version:

Guillaume Bouleux. Traitement d'antenne adapté aux modèles linéaires intégrant une interférence structurée. Application aux signaux mécaniques.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2007. Français. NNT: . tel-00368248

**HAL Id: tel-00368248**

**<https://theses.hal.science/tel-00368248>**

Submitted on 15 Mar 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

No d'ordre :

Année 2007

# THÈSE

*présentée devant*

L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET

*pour obtenir*

**Le Grade de Docteur**

*Spécialité*

TRAITEMENT DU SIGNAL

Ecole Doctorale : Image Vision Signal

*par*

**Guillaume BOULEUX**

**TRAITEMENT D'ANTENNE ADAPTÉ AUX MODÈLES  
LINÉAIRES INTÉGRANT UNE INTERFÉRENCE  
STRUCTURÉE.  
APPLICATION AUX SIGNAUX MÉCANIQUES.**

Thèse soutenue le 4 Décembre 2007, devant le jury composé de :

M. JEAN-PIERRE DELMAS	Professeur	Président
M. PASCAL LARZABAL	Professeur	Rapporteur
M. JEAN-YVES TOURNERET	Professeur	Rapporteur
MME. SYLVIE MARCOS	DR-CNRS	Examinateur
M. ROLAND BADEAU	Maître de Conférences	Examinateur
M. MOHAMED EL BADAoui	Maître de Conférences	Examinateur
M. FRANÇOIS GUILLET	Professeur	Directeur de thèse
M. RÉMY BOYER	Maître de Conférences	Co-directeur de thèse



# REMERCIEMENTS

EN premier lieu j'exprime mes sincères remerciements envers M. le Professeur Jean-Pierre Delmas pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance envers M. le Professeur Pascal Larzabal dont les remarques m'ont été très précieuses et réellement constructives ainsi que pour la tâche de rapporteur qu'il a bien voulu assumer. Je remercie aussi vivement M. le Professeur Jean-Yves Tourneret pour l'honneur qu'il m'a fait d'accepter de rapporter ce travail et l'intérêt qu'il y a porté.

Je tiens à remercier Mme. Sylvie Marcos, directrice de recherche, pour l'intérêt qu'elle a porté aux travaux de cette thèse. Je remercie enfin très vivement MM. Roland Badeau et Mohamed El Badaoui, maître de conférences, pour le crédit qu'ils ont bien voulu accorder à mon travail en participant au jury de cette thèse.

Viennent maintenant deux personnes sans qui rien de tout ceci n'aurait pu exister. La première, M. Rémy Boyer, maître de conférences qui m'a lancé et fortement encadré pour que cette thèse puisse débiter et se terminer convenablement. La deuxième est M. le professeur François Guillet, directeur du LASPI (Laboratoire d'Analyse des Signaux et des Processus Industriels) qui s'est toujours démené pour que je puisse travailler, vivre et me développer dans les meilleures conditions. Sans toi ma vie et ma carrière seraient incontestablement différentes, c'est plus qu'un merci que je t'adresse c'est une réelle reconnaissance. Plus que d'autres tu m'as, à ta manière et de façon directe ou indirecte, apporté :

**MERCI!!!!.**

CES années ont vraiment été différentes, les années parisiennes ont été plutôt classiques, bien que très prenantes psychologiquement et difficiles à vivre, j'aimerais simplement parler de Kun et Titi à qui j'ai du contre mon gré mettre des fessés à PES, les gars je n'ai plus l'entraînement mais vous êtes tellement mauvais qu'il n'y a plus rien à faire pour vous!!!

Parler des Bretons et Bretonnes, Seb et son appart, ses cocktails à base de Chartreuse orangina et vodka, la mule pour avoir tiré la carriole tous les jours en suède, Erwan, ya trop à dire, tu es la personne qui a éduqué mon palet à ce doux breuvage des pays du nord ouest, Kev, Dylan les Lyonnais, Marine et Nelly qui adorent ma voix "Guigui White" et tous ceux que j'ai pu croiser lors des soirées de Malakof.

Biensûr, je ne peux oublier les petits jeunes, Damibou, Bubu, Mommon et Max, Steph, t'inquiète chaussette Europapark et les Six Flags nous attendent et puis Dago et Vaness complètement dans l'excès.

Puis il y a eu le changement complet en arrivant à Roanne. J'ai pu y vivre mes plus fortes émotions jusqu'à présent. Tout d'abord merci à ces femmes qui s'occupent de nous (gentils thésards et jeunes enseignants contractuels), merci à Mylène et Nezha. Merci à Raph pour

m'avoir fait pleurer de rire avec son bonnet rouge...et pour son dynamisme quotidien et puis à Pascal, Pierre, Nabih pour leurs conseils et soutien moral.

Merci à M. Khalid Sabri, Frédéric Albert et Mounir Lahlimi compagnons de bureau pour les bons moments passés ensemble, même si parfois il y eu quelques tensions et énervement.... Je ne peux oublier Khalid, Ali, Nat Anh, Aissam, Saïd pour les quelques heures passées à leur apprendre l'art du Baby-foot et puis merci à Mathieu pour son calme, sa sérénité, sa passion du blues et du rock, merci pour m'avoir fait découvrir Harvest, merci aussi pour m'avoir laissé gagner 2 matchs de squash en 35682 rencontres...

Un énorme merci pour leur monstrueuse patience, parce que pour me supporter il en faut, leur gentillesse intarissable, leur attention, merci d'avoir et de vivre mes émotions, merci pour votre oreille et vos paroles...Salma et Widian, MERCI pour avoir été là ....

Encore plus difficile de dire simplement merci puisque Manue, Arnaud et Arnaud, Damien et Vaness et enfin Antoine partagent depuis quelques années maintenant ma vie. C'est une chance immense que d'avoir des amis comme vous, toujours présent, toujours là quelque soit la distance et le temps.

C'est de tout mon coeur que je souhaite parler de Patricia, Christian et Armelle, Odile, Florence et enfin Gérard mes oncles et tantes qui malgré la distance et nos réunions sporadiques sont toujours présents dans mon coeur et mon esprit.

Je souhaite dire à mes parents, Annick et Richard, que malgré ma dureté apparente, je tiens énormément à vous. Sans votre apport et votre dure responsabilité de parents ma vie serait différente. Si je commence à voir le bout du tunnel aujourd'hui c'est grâce à vous, à vos efforts et parfois même à vos sacrifices. Vous êtes toujours avec moi, près de moi.

Je souhaiterais quoi qu'il advienne demain, dédier tout ce mémoire à la personne qui m'a absolument transfiguré, changé, chamboulé, à la personne qui m'a apporté tout ce que je pouvais espérer, tout ce qui me faisait rêver et que je désespérais de ne pas voir arriver. Pour toutes les émotions que tu m'as procurées, ton soutien, pour tes encouragements, pour ton attention quasi-permanente ou encore pour ton affection... pour être là ...,

**Lorraine...merci...**



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Du souvenir à la nouveauté</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Les Méthodes Haute Résolution . . . . .	8
1.2.1 Généralités . . . . .	8
1.2.2 Formalisme matriciel pour l'estimation des DDA . . . . .	8
1.2.3 Modèle d'antenne linéaire . . . . .	9
1.2.4 Les méthodes du Maximum de Vraisemblance . . . . .	10
1.2.5 Les méthodes sous-espaces . . . . .	13
1.2.6 L'algorithme MinNorm . . . . .	14
1.2.7 Performances et comparaison des algorithmes MUSIC et MinNorm . .	16
1.2.8 Estimation de l'ordre de modélisation . . . . .	16
1.2.9 Le Subspace Fitting . . . . .	17
1.3 Les Projecteurs Obliques . . . . .	19
1.3.1 Introduction . . . . .	19
1.3.2 Algèbre des Projecteurs Obliques . . . . .	20
1.4 Position du problème . . . . .	26
<b>2 Estimation des Directions D'Arrivées par introduction d'une connaissance <i>a priori</i> exacte : algorithme MUSIC <i>a priori</i></b>	<b>29</b>
2.1 Introduction . . . . .	30
2.1.1 Structure de la covariance spatiale . . . . .	31
2.2 Déflation et <i>a priori</i> . . . . .	32
2.2.1 Dérivation et analyse de la Prior-CRB . . . . .	32
2.2.2 Algorithmes de type prior MUSIC ( <i>MUSIC a priori</i> ) . . . . .	35
2.2.3 Implémentation du critère WP-MUSIC . . . . .	39
2.2.4 Simulations numériques . . . . .	43
2.2.5 Conclusion . . . . .	52
2.3 L'algorithme MinNorm avec connaissance <i>a priori</i> : variances théoriques et analyse . . . . .	53
2.3.1 Introduction . . . . .	53
2.3.2 Formulation des algorithmes Weighted Prior-MinNorm, et Prior MinNorm	53
2.3.3 Analyse des variances des algorithmes de type MinNorm <i>a priori</i> . . .	54

2.3.4	Validation numérique . . . . .	55
2.3.5	Variances asymptotiques et comparaison avec l'algorithme MinNorm . . . . .	57
2.3.6	Variances dans le cas de deux DDA proches . . . . .	59
2.4	Conclusion . . . . .	63
2.5	Annexes . . . . .	63
2.5.1	Démonstration de la proposition 1 . . . . .	63
2.5.2	Démonstration du Théorème 1 . . . . .	64
2.5.3	Démonstration du Théorème 2 . . . . .	65
2.5.4	Démonstration du Théorème 3 . . . . .	67
2.5.5	Preuve du Théorème 4 . . . . .	67
2.5.6	Preuve du Théorème 5 . . . . .	68
2.5.7	Dérivation des déviations . . . . .	71
2.5.8	Preuve du Théorème 6 . . . . .	72
2.5.9	Preuve du Théorème 7 . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Une approche séquentielle pour l'estimation des DDAs</b>	<b>77</b>
3.1	L'algorithme séquentiel Zero-forcing MUSIC (ZF-MUSIC) . . . . .	78
3.1.1	Critère spectral . . . . .	79
3.1.2	Analyse de la fonction de forçage à zéro . . . . .	80
3.2	Dérivation et analyse de la CRB déterministe structurée ( $CRB_S$ ) . . . . .	81
3.2.1	CRB structurée . . . . .	83
3.2.2	Analyse de la $CRB_S$ . . . . .	84
3.3	Analyse au premier ordre du biais, de la variance et de l'erreur de propagation . . . . .	85
3.3.1	Analyse de l'erreur d'estimation, du biais et de la variance . . . . .	86
3.3.2	Analyse de l'erreur de propagation . . . . .	87
3.4	Simulations Numériques . . . . .	87
3.4.1	Résultats de Simulation pour la $CRB_S$ . . . . .	88
3.4.2	Précision de l'algorithme spectral ZF-MUSIC . . . . .	88
3.4.3	Une résolution fortement accrue . . . . .	94
3.4.4	Principaux résultats de simulation . . . . .	94
3.5	Conclusion . . . . .	95
3.6	Annexes . . . . .	96
3.6.1	Preuve de la Propriété 1 . . . . .	96
3.6.2	Preuve de l'expression (3.6) . . . . .	97
3.6.3	Dérivation de la $CRB_S$ , Théorème 8 . . . . .	97
3.6.4	Démonstration du Théorème 9 . . . . .	98
3.6.5	Démonstration du Théorème 10 . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Application aux signaux mécaniques</b>	<b>105</b>
4.1	Reformulation du modèle pour l'analyse spectrale . . . . .	106
4.2	Exploitation des méthodes dans le contexte du diagnostic . . . . .	106
4.2.1	Introduction générale . . . . .	106
4.2.2	Diagnostic de défaut d'engrenage . . . . .	107
4.2.3	Manifestation d'un défaut de denture localisé . . . . .	108
4.2.4	Analyse Spectrale . . . . .	109
4.2.5	Présentation des signaux . . . . .	110
4.2.6	Apport des méthodes pour l'estimation des fréquences de rotation . . . . .	112



---

4.3	Diagnostic de défaut de roulement par mesure électrique . . . . .	115
4.3.1	Introduction . . . . .	115
4.3.2	Expérimentation . . . . .	117
	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>



# Table des figures

1.1	Figure géométrique illustrant la projection oblique. . . . .	23
1.2	Figure géométrique montrant la projection oblique dans l'espace euclidien. . .	24
2.1	Borne de Cramér-Rao Fct. du RSB . . . . .	44
2.2	Borne de Cramér-Rao Fct. RSB . . . . .	45
2.3	Borne de Cramér-Rao Fct. RSB . . . . .	46
2.4	Explication visuelle des algorithmes C-MUSIC et WP-MUSIC . . . . .	47
2.5	Déviati on Standard Fct. RSB pour deux sources et pour trois sources . . . . .	49
2.6	Déviati on Standard Fct. de l'erreur sur la DDA connue . . . . .	51
2.7	Déviati on Standard Fct. RSB . . . . .	56
2.8	Déviati on Standard Fct. RSB . . . . .	58
2.9	$R(L)$ et $\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1)$ Fct. du nombre de capteurs $L$ . . . . .	61
2.10	Courbes des ratios de variances Fct. de $\Delta_\omega$ et $L$ . . . . .	62
3.1	Fonction de forçage à zéro Fct. des valeurs de $L_z$ . . . . .	81
3.2	Atténuation du premier lobe secondaire Fct. de $L_z$ . . . . .	82
3.3	EQM de $\omega_2$ Fct. RIB. . . . .	89
3.4	EQM de $\omega_2$ Fct. RSB quand $\omega_1$ est sans erreur. . . . .	90
3.5	EQM de $\omega_2$ Fct. RSB quand $\omega_1$ est estimée. . . . .	91
3.6	EQM de $\omega_2$ Fct. RSB quand $\omega_1$ estimée pour des directions éloignées avec des sources corrélées. . . . .	92
3.7	EQM de $\omega_2$ Fct. RSB quand $\omega_1$ est estimée pour des directions proches avec des sources corrélées. . . . .	93
3.8	Comparaison des Pseudo-spectre MUSIC et ZF-MUSIC. . . . .	95
4.1	Spectre du signal vibratoire d'un engrenage . . . . .	108
4.2	Spectre du signal vibratoire d'un engrenage . . . . .	109
4.3	Evolution du défaut sur la roue . . . . .	111
4.4	Signaux vibratoires réels. . . . .	113
4.5	DSP du signal vibratoire, jour 2. . . . .	114
4.6	Application aux signaux d'engrenage. Illustration de l'algorithme ZF-MUSIC. . . . .	115
4.7	Structure et paramètre d'un roulement. . . . .	116
4.8	Application aux signaux de courant d'une machine asynchrone. Pseudo-spectres faible nombre d'échantillons. . . . .	118



## Acronymes

<b>ALU</b>	:	Antenne Lineaire et Uniforme
<b>DDA</b>	:	Direction D'Arrivée
<b>CRB</b>	:	Cramér-Rao Bound
<b>EQM</b>	:	Erreur Quadratique Moyenne
<b>ESPRIT</b>	:	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
<b>HR</b>	:	Haute Résolution
<b>I-CRB</b>	:	Interfering-Cramér-Rao Bound (Borne de Cramér-Rao interfeferente)
<b>MIF</b>	:	Matrice d'Information de Fisher
<b>MUSIC</b>	:	MUltiple SIgnal Classification
<b>MVD</b>	:	Maximum de Vraisemblance Déterministe
<b>MVS</b>	:	Maximum de vraisemblance Stochastique
<b>P-CRB</b>	:	Prior-Cramér-Rao Bound (Borne de Cramér-Rao <i>a priori</i> )
<b>P-MUSIC</b>	:	Prior-MUSIC (MUSIC <i>a priori</i> )
<b>RIB</b>	:	Rapport Interférence à Bruit
<b>RSB</b>	:	Rapport Signal à Bruit
<b>SOI</b>	:	Signal Of interest
<b>ZF-MUSIC</b>	:	Zero-Forcing MUSIC

## Notations

---

$L$	: nombre de capteurs de l'antenne
$T$	: nombre d'observations
$M$	: nombre total de DDA
$S$	: nombre de DDA inconnues
$\omega$	: pulsation spatiale (ou par abus de langage et fluidité de lecture, DDA)
$\theta$	: la DDA proprement dite
$T$	: transposée
$H$	: transposée conjuguée
$\dagger$	: pseudo-inverse de Moore-Penrose
$\mathbb{E}()$	: espérance mathématique
$\ \cdot\ $	: norme euclidienne (norme-2)
$\rho$	: corrélation entre les sources
$\mathbf{p}(\omega)$	: vecteur directionnel ou encore vecteur d'antenne
$\mathbf{p}'(\omega_i)$	: dérivée première du vecteur directionnel évalué à la $i^{\text{ième}}$ pulsation spatiale
$\mathcal{R}(\cdot)$	: <i>Range</i> , sous-espace engendré par les colonnes de $(\cdot)$
$\mathbf{Z}$	: matrice de Vandermonde des vecteurs directionnels
$\mathbf{A}$	: sous-matrice de Vandermonde associée aux DDA inconnues
$\mathbf{B}$	: sous-matrice de Vandermonde associée aux DDA connues ou estimées au préalable
$\mathbf{Y}$	: matrice des observations
$\sigma^2$	: variance du bruit blanc additif Gaussien centré
$\mathbf{R}_Y$	: matrice de covariance spatiale des observations
$\Lambda_\alpha$	: matrice des sources inconnues
$\Lambda_\beta$	: matrice des sources connues ou estimées au préalable
$\mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}$	: matrice de covariance des sources associées aux DDA inconnues
$\mathbf{R}_{\Lambda_\beta}$	: matrice de covariance des sources associées aux DDA connues ou estimées au préalable
$\mathbf{S}_Y$	: covariance du signal d'observation
$\mathbf{S}_A$	: covariance du signal associé aux DDA inconnues
$\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})}$	: projecteur oblique sur $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ suivant $\mathcal{R}(\mathbf{B})$
$\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{A})}$	: projecteur oblique sur $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ suivant $\mathcal{R}(\mathbf{A})$
$\mathbf{P}_Z^\perp$	: projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(\mathbf{Z})^\perp$
$\mathbf{P}_B^\perp$	: projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(\mathbf{B})^\perp$
$\mathbf{P}_A^\perp$	: projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp$
$\Delta_\omega$	: écart (supposé petit) entre deux pulsations spatiales
$\Delta \mathbf{M}$	: erreur sur la matrice $\mathbf{M}$
$\mathbf{A}_m$	: matrice des $m - 1$ vecteurs directionnels estimés
$\mathbf{B}_m$	: matrice des $M - 1$ vecteurs directionnels estimés et restant à estimer
$\mathbf{P}_m^\perp$	: matrice de projection sur $\mathcal{R}(\mathbf{A}_m)^\perp$ à la $m^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme ZF-MUSIC
$\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega)$	: fonction de pondération
$f_{\text{MUSIC}}(\omega)$	: fonctionnelle MUSIC
$z$	: racine des polynômes
Fct.	: en fonction de
$\mathcal{L}$	: fonction de vraisemblance

# Introduction

Le monde d'aujourd'hui évolue au rythme élevé de la technologie numérique. Le signal, autrefois analogique est de plus en plus remplacé par son image numérique. Le traitement beaucoup plus maîtrisé et élaboré en devient plus efficace. Le signal qui par définition est l'ensemble des événements physiques qui transportent de l'information est de ce fait une donnée aléatoire variant au cours du temps. Le signal est alors vu, pour de nombreuses applications comme un processus stochastique. De cette hypothèse découle toute une démarche statistique. En effet, puisque l'idée est de détecter, estimer ou encore localiser des paramètres déterministes d'un processus stochastique, la construction d'estimateurs est inévitable. Le cadre de l'estimation est extrêmement vaste et nous nous situons dans ce document dans le cadre de l'estimation paramétrique. Nous nous fixons donc un modèle d'observation dépendant des paramètres d'intérêts et, à partir d'une règle pré-établie basée sur ce modèle, nous estimons les paramètres d'intérêts. Pour aller plus en profondeur encore et borner l'étude de ce travail, nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle paramétrique issu du traitement d'antenne.

Une antenne est un réseau de capteurs. Rien n'empêche une géométrie d'antenne particulière, cependant de nombreux travaux ont été élaborés en supposant que l'Antenne est Linéaire et Uniforme (ALU), signifiant en fait que les capteurs sont répartis uniformément sur un axe linéaire. Cette hypothèse qui au premier abord peut paraître restrictive, est fondamentale car elle permet de lier le domaine de l'analyse spectrale à celui du traitement d'antenne. Ainsi, tous les algorithmes proposés peuvent aussi bien s'appliquer au traitement d'antenne qu'à l'analyse spectrale (données vibratoires [Capdessus et al., 2000, Li and Qi, 2005], signaux de musique ou de parole [Badeau, 2005, Boyer and Abed-Meraim, 2004], données bio-médicales [Mosher and Leahy, 1999, Chen et al., 1996], etc). Dans ces différents domaines, qu'il soit du traitement d'antenne où la pulsation spatiale/Direction D'Arrivée est le paramètre d'intérêt ou en analyse spectrale où la fréquence est le paramètre d'intérêt, un sous-ensemble des paramètres d'intérêts est parfois connu. Il est donc d'un intérêt majeur de pouvoir estimer les paramètres inconnus en intégrant cette connaissance dite *a priori*. Nous proposons dans ce mémoire d'intégrer cette connaissance sous la forme d'une interférence structurée [Behrens and Scharf, 1994] dans le modèle linéaire d'estimation. Le sous-espace associé à l'interférence structurée sera alors soit connu avec exactitude soit représentatif des données purement interférentes (dans ce dernier cas, le sous-espace sera constitué des données d'intérêts et de non-intérêts). Partant de cette hypothèse structurelle, la question reste ouverte, l'introduction d'un *a priori* est-il bénéfique, tant au niveau des performances ultimes des estimateurs qu'au niveau des performances des algorithmes proposés? Concernant les performances ultimes, autrement dit l'expression d'une borne minimale de la variance, aucun travail dans le cadre déterministe n'a été proposé pour le type de modèles proposés. Des algorithmes d'estimation ont quant à eux été introduits et tous sont basés sur le principe de la déflation orthogonale. Enfin, aucun critère de minimisation n'a été proposé pour ce types d'algorithmes.

Ce document, résume le travail abordé sur cette thématique et propose des réponses sur la possibilité d'améliorer l'estimation de paramètres d'intérêts en incorporant une connaissance *a priori* dans les méthodes Hautes Résolutions. Les résultats obtenus sont relatés dans le paragraphe suivant.

## Principaux Résultats obtenus

Soit le modèle linéaire suivant :

$$Obs = \text{Signal d'intérêt} + \text{Interférence Structurée} + \text{Interférence Non-Structurée (bruit)} \quad (1)$$

où *Obs* est le signal d'observation (acquisition). Les résultats obtenus en considérant ce modèle se classent alors en trois grandes catégories :

### I Les bornes minimales déterministes de la variance d'estimation.

Dans la littérature, certains algorithmes ont été proposés incorporant un *a priori* exact. La connaissance d'un sous-ensemble des paramètres du modèle permet par conséquent de déflater, via une projection orthogonale, le sous-espace signal complet. Dans ce contexte, la partie du sous-espace signal (la partie connue) associée à l'interférence structurée est exacte et le modèle (1) est déflaté orthogonalement. À partir de ce modèle, nous avons opté pour la dérivation d'une Borne de Cramér-Rao (CRB) déterministe. Cette dernière montre des limitations assez fortes et contraignantes pour l'estimation des paramètres d'intérêts puisque si les sources sont décorréelées de DDA proches alors aucune amélioration n'est envisageable. Seuls le cas de sources corrélées et de DDA proches permet une amélioration de l'estimation. Lorsque le sous-espace signal associé à l'interférence structurée est incertain, le sous-espace associé au Signal d'intérêt dans le modèle (1) est de dimension 1. En effet, pour un modèle d'estimation séquentiel, un seul paramètre d'intérêt est estimé à chaque itération. Dans ce contexte, l'interférence structurée contient tous les autres paramètres du modèle, ceux déjà estimés et ceux restant à estimer. Nous avons donc dérivé une Borne de Cramér-Rao déterministe associée à ce modèle. L'analyse de cette borne, nous permet de mettre clairement en évidence deux régimes dépendant du rapport interférences à bruit.

### II Les algorithmes introduits.

Compte tenu des résultats obtenus sur les CRB (dans le cas où le sous-espace associé à l'interférence structurée est exacte), nous avons opté pour l'établissement d'algorithmes basés non plus sur une déflation orthogonale mais plutôt sur une déflation oblique du sous-espace signal. Ces algorithmes de types prior MUSIC et MinNorm montrent leur supériorité dans l'estimation des paramètres d'intérêts quand les DDA des sources sont proches et ce comparativement aux algorithmes à déflation orthogonale du sous-espace signal. Nous donnons, de



plus, une formulation basée sur les projecteurs obliques de l'algorithme Constrained MUSIC (et Constrained MinNorm). Il est bien connu que les algorithmes sous-espaces de type MUSIC sont coûteux dû à la recherche dans l'espace des paramètres (grille de recherche). Par conséquent, nous donnons également l'équivalent polynomial, plus connu sous la dénomination de Root, de tous les algorithmes spectraux proposés. Enfin, nous proposons un nouvel algorithme séquentiel basé sur une pondération du pseudo-spectre MUSIC par une fonction de forçage à zéro, appropriée. Cet algorithme, dans le contexte où l'algorithme MUSIC est incapable d'estimer des DDA proches (espacement entre les DDA inférieur à la résolution de Rayleigh), est nettement plus performant que toutes les solutions utilisant une déflation orthogonale. Nous notons de surcroît que tous les algorithmes proposés suivent et sont proches des CRB associées et proposées (*Cf.* le paragraphe **I** plus haut).

### **III** La caractérisation et l'étude des performances.

Nous considérons qu'une erreur d'estimation est commise sur la matrice de covariance spatiale due à la durée d'analyse finie (nombre d'observation fini). Dans ce contexte, nous avons dérivé les expressions des erreurs commises sur l'estimation des projecteurs obliques et orthogonaux. La caractérisation de ces erreurs nous a permis de donner les expressions des variances théoriques des algorithmes proposés. Nous avons par la suite réalisé une analyse asymptotique (nombre de capteurs élevé) de ces expressions et dérivé une analyse au premier ordre pour le cas de deux DDA proches. Nous prouvons de plus, l'efficacité statistique des estimateurs proposés aussi bien pour les méthodes estimant un sous-ensemble des paramètres (sous-espace associé à l'interférence structurée exact) que pour les méthodes d'estimation séquentielle des paramètres (sous-espace associé à l'interférence structurée incertain).

## Organisation du document

L'introduction d'un *a priori* sous sa forme d'interférence structurée, dans les méthodes à Hautes Résolution peut naturellement être pensée et classifiée selon deux catégories. Nous proposons une classification simple, reposant sur les hypothèses suivantes

- soit  $(i)$  : la connaissance de l'*a priori* est certaine
- soit  $(ii)$  : la connaissance de l'*a priori* est incertaine.

Le chapitre 2 de ce document adopte l'hypothèse  $(i)$ , alors que le chapitre 3 est exclusivement consacré aux méthodes et analyses sous l'hypothèse  $(ii)$ .

## Chapitre 1

Ce chapitre est dédié, dans un premier temps, au rappel historique des méthodes Hautes Résolutions (HR) puis à l'introduction du modèle d'observation adopté pour l'ensemble des algorithmes proposés dans ce document. Après un bref rappel sur les méthodes du Maximum de Vraisemblance Déterministe (MVD) et Stochastique (MVS), nous rappelons les définitions des méthodes de type sous-espaces puis nous rappelons la définition de deux algorithmes majeurs tels que représentent l'algorithme MUSIC et l'algorithme MinNorm. Ces deux algorithmes sont la base des méthodes proposées dans ce document. En effet, les nouvelles méthodes proposées sont déduites à partir, d'une part de l'algorithme MUSIC et d'autre part de l'algorithme MinNorm, en y incorporant (via une fonctionnelle) un projecteur oblique. Un rappel sur les projecteurs obliques est donc donné.

## Chapitre 2

Dans le domaine du traitement d'antenne, de l'analyse bio-médical ou encore dans l'analyse vibratoire, nous pouvons disposer d'une connaissance *a priori* d'un sous-ensemble réduit des paramètres d'intérêts. Cette connaissance a déjà suscité un intérêt aux travers des travaux de [DeGroat et al., 1993] ou encore de [Chen et al., 1996] supposant l'hypothèse (*i*) vérifiée. La solution adoptée, pour la majeure partie de ces algorithmes, est de déflater orthogonalement le sous-espace signal complet de sa partie connue. Ainsi, il est supposé que les paramètres d'intérêts seront mieux estimés. Une façon de matérialiser cette idée, est de quantifier la variance minimale d'estimation pour ce type de modèle. Nous proposons donc une nouvelle borne déterministe, que nous nommons la P-CRB, pour Prior-Cramér-Rao Bound (CRB *a priori*) quantifiant la variance minimale de ce modèle. En particulier, nous montrons qu'à partir du modèle à déflation orthogonal, lorsque les sources sont décorréelées de DDA proches, la mise en oeuvre d'une déflation orthogonale ne permet pas d'améliorer l'estimation des paramètres d'intérêts. Nous avons donc envisagé une solution ad-hoc en utilisant une déflation oblique du sous-espace signal plutôt qu'orthogonale. Nous testons cette approche en intégrant la déflation oblique dans un critère de type MUSIC mono-dimensionnel (en référence au Subspace Fitting). L'algorithme qui en découle ainsi que les tests statistiques appliqués nous montrent que grâce à cette approche, il est possible de supprimer l'influence des données *a priori* dans le contexte suivant : les sources sont décorréelées et pour un Rapport Signal à Bruit (RSB) suffisant.

Ces résultats nous conduisent à justifier l'intérêt de la déflation oblique par une analyse du comportement de différents algorithmes. Cette analyse nous permet, de plus, de bien comprendre le "fonctionnement" particulier et essentiel d'un projecteur oblique. Ces explications s'effectuent dans le cadre de la deuxième partie de ce chapitre. Nous introduisons ici l'étude de performances de trois algorithmes proposés, à savoir le Constrained MinNorm (C-MinNorm), le Prior-MinNorm (P-MinNorm) et le Weighted-Prior MinNorm (WP-MinNorm). Ces trois algorithmes sont des versions MinNorm des algorithmes déjà introduits dans la partie précédente. Nous effectuons une analyse de la variance théorique de ces algorithmes et mettons en évidence l'apport des projecteurs obliques par comparaison numérique des variances. Dans un

cadre asymptotique, quand le nombre de capteurs devient grand, nous dérivons les expressions trouvées précédemment pour obtenir une variance théorique asymptotique. Dans ce contexte, nous montrons l'équivalence de toutes les approches proposées. Enfin, les propriétés intrinsèques du projecteur oblique sont mises en exergue par le biais d'une analyse de la variance quand les DDA des sources sont proches. Dans ce contexte le projecteur oblique diffère du projecteur orthogonal, les valeurs singulières du projecteur oblique deviennent très grande (largement supérieure à 1), ce qui permet une réjection que le projecteur orthogonal est incapable de réaliser. De plus, nous montrons que les algorithmes de type Prior (WP-MinNorm et P-MinNorm) sont relativement insensibles à la proximité des DDA comparativement aux C-MinNorm et standard MinNorm. Par conséquent, les expressions des variances dans le contexte de DDA très proches justifient et permettent d'expliquer le comportement favorable des algorithmes *a priori* avec déflation oblique : les algorithmes de type prior.

L'hypothèse (i), certes réaliste dans une certaine mesure, ne couvre pas tout le champ relativement vaste de l'utilisation de la connaissance *a priori*. Nous pouvons adopter une vision différente en considérant que l'*a priori* est incertain. Cette supposition nous permet de développer des solutions dans le contexte des algorithmes séquentiels. En effet, à la différence d'une méthode d'estimation d'un sous-ensemble de données, une méthode séquentielle estime l'ensemble des données d'intérêts. A chaque itération de l'algorithme, sont prises en considération les données préalablement estimées, constituant alors une connaissance *a priori* incertaine. Le chapitre 3 suppose donc l'hypothèse (ii) vérifiée et il s'articule autour des recherches suivantes.

### Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous prenons parti d'une interférence structurée estimée (connaissance *a priori* incertaine). Nous développons alors un nouvel algorithme séquentiel, que nous nommons le Zero-Forcing MUSIC (ZF-MUSIC), basé sur une pondération, par une fonction appropriée, du pseudo-spectre MUSIC. Nous donnons les propriétés de cette fonction qui permettent de justifier son efficacité et son intérêt. Nous proposons, par la suite une Borne de Cramér-Rao déterministe associée au modèle sous-jaçant. L'analyse qui découle, montre clairement que ce type d'algorithme est robuste au bruit gaussien, nous mettons de plus en exergue, deux régimes dépendant du rapport interférences à bruit. Enfin, nous réalisons une analyse au premier ordre du biais, de la variance et de l'erreur de propagation de l'algorithme ZF-MUSIC, montrant ainsi qu'au travers d'un paramètre libre et réglable à souhait, le ZF-MUSIC est équivalent statistiquement parlant à l'algorithme MUSIC (biais, variance).

Afin de justifier pratiquement l'intérêt des algorithmes proposés, nous avons appliqué nos méthodes à des signaux mécaniques.

## Chapitre 4

Ce chapitre est consacré à l'apport des méthodes proposées sur des signaux réels issus de systèmes mécaniques. Les systèmes étudiés sont un réducteur à engrenage et une machine asynchrone. La cinématique de ces systèmes est connue ce qui permet d'alimenter l'aspect *a priori* des méthodes proposées. Au travers de ces signaux mécaniques, nous avons pu mettre en évidence l'apport des méthodes proposées tant au niveau de la variance d'estimation que de la résolution. Dans des situations drastiques, *i.e.* lorsque le nombre d'échantillon ne permet pas d'avoir une résolution suffisante pour l'algorithme MUSIC, les algorithmes WP-MinNorm et ZF-MUSIC permettent d'obtenir une estimation précise alors que l'algorithme MUSIC en est incapable.

La Conclusion résume tous les résultats obtenus et oriente le travail futur via l'énoncé des perspectives.

# Du souvenir à la nouveauté

## 1.1 Introduction

Nous n'avons pas pour prétention dans ce chapitre d'être le plus exhaustif possible tant le domaine abordé possède une littérature riche. Nous nous contentons de rappeler historiquement l'émergence des méthodes Haute Résolution (HR) dans un premier temps puis nous posons le modèle linéaire issu du traitement d'antenne. Ce modèle est la base du travail retranscrit dans ce document et nous nous y référons tout au long des chapitres. Afin de poser le problème et de justifier l'approche adoptée, nous donnons quelques méthodes connues, nous pensons particulièrement aux méthodes du Maximum de Vraisemblance Déterministe (MVD) ou stochastique (MVS). Ces dernières nous mènent presque naturellement à l'approche de type sous-espace ce qui nous permet d'introduire les algorithmes MUSIC et MinNorm, base des algorithmes proposés dans ce document. Afin de faire l'analogie entre les méthodes du Maximum de Vraisemblance et sous-espace, nous rappelons la définition du critère MUSIC, mono- puis multi-dimensionnel par l'approche du Subspace Fitting (SF).

D'un point de vue pratique, les méthodes sous-espaces nécessitent de bien estimer la dimension du sous-espace signal ou du sous-espace bruit. Ce choix subjectif classe dès lors les algorithmes sous-espaces en deux familles<sup>1</sup>. Seulement, quelque soit la famille d'algorithmes étudiée, cette tâche d'estimation difficile a suscité et suscite d'ailleurs encore un grand intérêt, dû à son caractère primordial. Nous rappelons donc brièvement les critères les plus couramment utilisés.

La recherche de nouveaux algorithmes peut être guidée par le fait que les méthodes existantes (estimateurs) ne sont pas efficaces au sens statistique. Nous rappelons que la propriété d'efficacité des estimateurs est définie par l'intermédiaire de la Borne de Cramér-Rao (CRB). Dans de nombreux cas, la CRB étudiée est déterministe et cette borne, certes optimiste surtout à faible Rapport Signal à Bruit (RSB)<sup>2</sup>, nous permet facilement d'avoir des expressions analytiques de la variance minimale atteignable pour un estimateur à modèle donné. Enfin, et là encore dû à la structure du modèle (1), les projecteurs obliques sont omniprésents dans ce document.

---

1. Nous indiquons ici que ce document s'articule autour de la famille d'algorithmes basés sur l'estimation du sous-espace bruit.

2. nous renvoyons le lecteur à la thèse d'Alexandre Renaux [Renaux, 2006] très complète à ce sujet

Très peu utilisé à ce jour, nous avons opté pour le formalisme introduit par Behrens et Scharf [Behrens and Scharf, 1994] qui nous semble le plus parlant. Nous rappelons donc dans la dernière partie de ce chapitre la définition, l'algèbre et les propriétés des projecteurs obliques en nous basant essentiellement sur le tutorial de Behrens et Scharf [Behrens and Scharf, 1994] retranscrit.

## 1.2 Les Méthodes Haute Résolution

### 1.2.1 Généralités

Les méthodes dites à Haute résolution sont apparues timidement dans les années 70, poussées par la demande militaire [Ligget, 1972, Mermoz, 1976]. Principalement adaptées au sonar (acoustique sous-marine) dans un premier temps, ces méthodes ont vite été déployées pour le traitement sismique, radio-astronomique [El-Behery and Phie, 1978] et le traitement d'antenne [Bienvenu, 1979]. Le plein essor des méthodes HR a débuté par l'introduction du goniomètre adaptatif en 1980 puis par l'algorithme MUSIC [Schmidt, 1981]. Depuis, innombrables sont les variantes de MUSIC, prouvant encore aujourd'hui toute l'utilité, l'efficacité et le véritable engouement pour le traitement du signal de telles méthodes. Rappelons que l'algorithme MUSIC où les méthodes HR de façon générale, ont un pouvoir de résolution théoriquement infini, même si en pratique les erreurs de calcul/modèle ou encore les effets du bruit réduisent cet aspect théorique.

Les paramètres d'intérêt en traitement d'antenne sont multiples. Ils peuvent être les Directions D'Arrivées (DDA) pour la localisation de sources, l'amplitude des signaux, le nombre de signaux et plus généralement le canal de propagation. Les méthodes à Haute Résolution (HR) se classent en deux grandes catégories : les méthodes du Maximum de Vraisemblance et les méthodes sous-espaces. Avant de développer succinctement les méthodes du Maximum de Vraisemblance puis plus longuement les méthodes sous-espaces, nous présentons, dans le cadre du traitement d'antenne et de l'estimation des DDA, le formalisme adopté pour la suite de ce document.

### 1.2.2 Formalisme matriciel pour l'estimation des DDA

Dans cette partie, nous introduisons le formalisme matriciel classique pour l'estimation des DDA dans le cadre d'une Antenne Linéaire et Uniforme (ALU).

### 1.2.3 Modèle d'antenne linéaire

Supposons que  $M$  ondes planes (sources bandes étroites) frappent simultanément une ALU composée de  $L$  capteurs. Soit,  $y_\ell(t)$  l'observation bruitée du  $\ell^{\text{ième}}$  capteur au  $t^{\text{ième}}$  instant d'acquisition. La réponse de l'antenne s'écrit alors  $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}_1(t) \dots \mathbf{y}_L(t)]^T$ , à la  $t^{\text{ième}}$  acquisition et peut se décomposer sous la forme

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}_z + \mathbf{n}(t) \quad (1.1)$$

où la matrice des vecteurs directionnels  $\mathbf{Z}$  est définie comme  $\mathbf{Z} = [\mathbf{p}(\omega_1) \dots \mathbf{p}(\omega_M)]$  avec le  $i^{\text{ième}}$  vecteur directionnel (vecteur d'antenne) défini par  $\mathbf{p}(\omega_i) = [1 \ e^{i\omega_i} \ \dots \ e^{i(L-1)\omega_i}]^T$ <sup>3</sup> dans lequel  $\omega_i = -2\pi\frac{d}{c}\sin(\theta_i)$  est la  $i^{\text{ième}}$  pulsation spatiale avec  $\theta_i$  la  $i^{\text{ième}}$  DDA,  $d$  la distance inter-capteur et  $c$  la longueur d'onde. Le vecteur des amplitudes  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$  est quant à lui défini par  $\boldsymbol{\alpha}_z = [\alpha_1(t) \dots \alpha_M(t)]^T$ . Enfin,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \dots n_L(t)]^T$  est le vecteur associé au bruit dans lequel chaque  $n_\ell(t)$  est la contribution du bruit sur le  $\ell^{\text{ième}}$  capteur. Le bruit est supposé être un processus Gaussien complexe circulaire, de moyenne nulle, temporellement et spatialement blanc de variance  $\sigma^2$ . Le nombre de sources,  $M$ , est supposé connu ou préalablement estimé (*cf.* la section 1.2.8 : estimation de l'ordre de modélisation).

Nous définissons la matrice de covariance spatiale comme

$$\mathbf{R}_Y = \mathbb{E}(\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H) \quad (1.2)$$

avec  $\mathbb{E}(\cdot)$  l'espérance mathématique. Finalement, le modèle pour  $T$  acquisitions est

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{N} \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1) \dots \mathbf{y}(T)]$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = [\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(1) \dots \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(T)]$  et  $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1) \dots \mathbf{n}(T)]$ . Par suite, la matrice de covariance spatiale de  $\mathbf{Y}$  estimée est donnée par

$$\hat{\mathbf{R}}_Y = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H. \quad (1.4)$$

Par conséquent,  $T\hat{\mathbf{R}}_Y$  peut être modélisée par la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi de Wishart complexe à  $T$  degrés de libertés et dont la moyenne vaut  $\mathbf{R}_Y$ . Nous définissons alors l'erreur de la matrice de covariance  $\Delta\mathbf{R}_Y$  comme

$$\Delta\mathbf{R}_Y = \hat{\mathbf{R}}_Y - \mathbf{R}_Y. \quad (1.5)$$

Les propriétés statistiques de  $\Delta\mathbf{R}_Y$  sont bien connues [Muirhead, 1982] et nous en rappelons quelques unes pour l'analyse de perturbation du chapitre 2, il vient alors

$$\mathbb{E}(\Delta\mathbf{R}_Y) = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

$$\mathbb{E}(\Delta\mathbf{R}_Y(i, j) \Delta\mathbf{R}_Y(m, n)) = \frac{1}{T} \mathbf{R}_Y(i, n) \mathbf{R}_Y(m, j). \quad (1.7)$$

---

3. nous verrons par la suite une version normalisée du vecteur directionnel dont l'écriture adoptée est  $\mathbf{p}_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{L}} [1 \ e^{i\omega} \ \dots \ e^{i(L-1)\omega}]^T$

Les éléments  $\sqrt{T}\Delta\mathbf{R}_Y(i, j)$  tendent pour de large valeur de  $T$  vers une loi Gaussienne complexe dont la variance est déduite de (1.6). En conséquence nous avons les propriétés suivantes

$$\mathbb{E}(\Delta\mathbf{R}_Y\mathbf{C}\Delta\mathbf{R}_Y\mathbf{D}) = \frac{1}{T}\text{Trace}(\mathbf{R}_Y\mathbf{C}\mathbf{R}_Y\mathbf{D}) \quad (1.8)$$

pour toutes matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{L \times L}$ .

Le modèle des données reçues étant dorénavant fixé, nous introduisons les méthodes mentionnées, peu avant dans les généralités, en commençant par les méthodes du Maximum de Vraisemblance.

#### 1.2.4 Les méthodes du Maximum de Vraisemblance

Ces méthodes ne constituent pas le sujet d'étude principal de ce document, c'est pourquoi nous ne présentons pas de façon exhaustive toutes les méthodes mais donnons seulement une idée de principe. Cette approche possède néanmoins, un fort lien avec les méthodes sous-espaces et c'est pourquoi nous nous y attardons.

Les méthodes du Maximum de Vraisemblance s'appuient sur une exploitation des connaissances statistiques des observations par l'intermédiaire de la fonction de vraisemblance. Les méthodes du Maximum de Vraisemblance conduisent à l'optimisation d'un critère multi-dimensionnel. Elles sont souvent qualifiées d'optimales pour leur bonnes propriétés statistiques en termes de consistance et d'efficacité [Viberg and Ottersten, 1991, Stoica and Nehorai, 1990a, Stoica and Nehorai, 1990b].

La littérature distingue deux types d'approches différentes pour l'application de la méthode du Maximum de Vraisemblance au traitement d'antenne : le Maximum de Vraisemblance Déterministe (MVD) et le Maximum de Vraisemblance Stochastique (MVS).

#### La méthode du MVS

Cette méthode correspond à supposer et traiter les sources  $\alpha(t)$  comme des variables aléatoires complexes, centrées, circulaires, indépendantes, de matrice de covariance  $\mathbf{R}_\Lambda$  inconnue.

Le processus observé est un vecteur aléatoire complexe gaussien, circulaire, centré, décorrélé d'un instant à l'autre, et de covariance inconnue  $\mathbf{R}_y$  tel que

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)) = \mathbf{Z}\mathbf{R}_\Lambda\mathbf{Z}^H + \sigma^2\mathbf{I}_L. \quad (1.9)$$

Soit  $\boldsymbol{\eta}$  le vecteur de paramètres recherchés, concaténation de  $\boldsymbol{\theta}^{(M)} = [\theta_1 \dots \theta_M]^T$ ,  $\sigma^2$  et des éléments de  $\mathbf{R}_\Lambda$  définie par

$$\boldsymbol{\eta} = \left[ \boldsymbol{\theta}^{(M)T}, \mathbf{R}_\Lambda(1, 1), \dots, \mathbf{R}_\Lambda(M, M), \sigma^2 \right]^T. \quad (1.10)$$

Nous avons alors  $M^2 + M + 1$  valeurs réelles à déterminer.



La densité de probabilité d'une observation élémentaire  $\mathbf{y}(t)$  s'écrit

$$p_{\eta}(\mathbf{y}(t)) = \frac{1}{\pi^L \det(\mathbf{R}_{\mathbf{y}(t)})} \exp(-\mathbf{y}^H \mathbf{R}_{\mathbf{y}(t)}^{-1} \mathbf{y}(t)). \quad (1.11)$$

Comme nous supposons les observations indépendantes et identiquement distribuées, les vraisemblances se multiplient et nous obtenons la densité suivante

$$p_{\eta}(\mathbf{Y}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\pi^L \det(\mathbf{R}_{\mathbf{y}(t)})} \exp(-\mathbf{y}^H(t) \mathbf{R}_{\mathbf{y}(t)}^{-1} \mathbf{y}(t)). \quad (1.12)$$

Maximiser (1.12) revient à minimiser l'anti-log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) &= T \ln(\det(\mathbf{R}_{\mathbf{y}})) + \sum_{t=1}^T \mathbf{y}^H(t) \mathbf{R}_{\mathbf{y}(t)}^{-1} \mathbf{y}(t) + T L \ln(\pi) \\ &= T \left[ \ln(\det(\mathbf{R}_{\mathbf{y}})) + \text{Trace}(\mathbf{R}_{\mathbf{y}}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}^{-1}) + L \ln(\pi) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

où  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$  est la matrice de covariance estimée (empirique) définie par

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t) \mathbf{y}^H(t). \quad (1.14)$$

Après quelques manipulations algébriques [Bresler and Macovski, 1986, Jaffer, 1988, Bohme, 1986], la dimension du problème d'optimisation est réduite en se ramenant à une fonction ne dépendant que de  $\boldsymbol{\theta}$ . Il vient alors que

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \ln \left( \det \left( \mathbf{Z} \hat{\mathbf{R}}_{\Lambda} \mathbf{Z}^H(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{I}_L \right) \right) \right\} \quad (1.15)$$

avec

$$\hat{\mathbf{R}}_{\Lambda} = \mathbf{Z}^{\dagger} \left( \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_L \right) \mathbf{Z}^{\dagger H} \quad (1.16)$$

$$\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{L - M} \text{Trace} \left( \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \right) \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} = \mathbf{I}_L - \mathbf{Z} \mathbf{Z}^{\dagger}$  avec  $\cdot^{\dagger}$  la pseudo-inverse de Moore-Penrose. L'optimisation de ce critère n'en reste pas moins délicate.

## La méthode du MVD

Dans plusieurs applications, par exemple en radar et en radiocommunications, le signal est souvent loin d'être une variable aléatoire gaussienne. D'autre part, dans certaines applications

de radiocommunication, les amplitudes des sources sont plus intéressantes que les directions d'arrivées correspondantes. Le modèle déterministe est alors un modèle naturel dans la mesure où il ne fait aucune hypothèse sur la nature des signaux. Les amplitudes des signaux sont maintenant des paramètres inconnus à déterminer. Le vecteur des paramètres inconnus est donc le suivant

$$\boldsymbol{\eta} = \left[ \boldsymbol{\theta}^{(M)T}, \boldsymbol{\alpha}(1), \dots, \boldsymbol{\alpha}(T), \sigma^2 \right]^T. \quad (1.18)$$

La densité de probabilité pour une observation élémentaire  $\mathbf{y}(t)$  devient

$$p_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{y}(t)) = \frac{1}{\pi^L \sigma^{2L}} \exp \left( -\sigma^{-2} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}(t))^H (\mathbf{y}(t) - \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}(t)) \right). \quad (1.19)$$

Comme précédemment, sous l'hypothèse d'observations i.i.d, les vraisemblances se multiplient et nous obtenons

$$p_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{Y}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\pi^L \sigma^{2L}} \exp \left( -\sigma^{-2} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}(t))^H (\mathbf{y}(t) - \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}(t)) \right). \quad (1.20)$$

L'anti-log-vraisemblance est alors donnée par

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) = T L \ln(\pi \sigma^2) + \sigma^{-2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}(t)\|^2. \quad (1.21)$$

En remarquant que le module au carré d'un vecteur est égal à la somme des modules carrés de ses projections sur deux sous-espaces complémentaires, nous obtenons la relation suivante

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) = T L \ln(\pi \sigma^2) + \sigma^{-2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}^H(t) \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{y}(t) + \sigma^{-2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}(t) - \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}(t))^H \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}(t)). \quad (1.22)$$

Le troisième terme est minimum pour

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \mathbf{Z}^{\dagger} \mathbf{y}(t) \quad (1.23)$$

la solution des moindres carrés ordinaires et la minimisation par rapport à  $\sigma^2$  donne

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{LT} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}^H(t) \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{y}(t) \\ &= \frac{1}{L} \text{Trace} \left( \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

La solution optimale  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  s'obtient en minimisant le critère suivant

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \text{Trace} \left( \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \right). \quad (1.25)$$

Une des propriétés importante dans l'étude des estimateurs statistiques, est sans doute la propriété d'efficacité. Or, il est montré [Stoica and Nehorai, 1989] que pour  $\theta^{(M)}$ , l'estimateur est convergent (en moyenne quadratique) mais non efficace.

Les méthodes du Maximum de Vraisemblance qui s'intéressent simultanément à tous les paramètres de toutes les sources, dans le but de lutter contre une dégradation de la variance, n'en restent pas moins très lourdes en terme de coût de calcul. De plus, ces méthodes ne garantissent pas l'efficacité de l'estimateur dans l'estimation des Directions D'Arrivées (DDA). Les méthodes sous-espace constituent donc une alternative plus séduisante dans le sens où certaines sont asymptotiquement efficaces.

### 1.2.5 Les méthodes sous-espaces

Les méthodes sous-espaces (basées sur une paramétrisation du signal) ont été, relativement tôt, utilisées sous leur forme de prédiction linéaire. C'est par l'intermédiaire du précurseur Baron de Prony (dont une jolie photo peut être trouvée dans la thèse de Roland Badeau [Badeau, 2005]) que les méthodes de prédiction linéaire ont vu leur essor [Prony, 1795]. Puis, compte tenu des difficultés d'estimation en présence d'un bruit additif, Hildebrand a proposé une extension [Hildebrand, 1956], sont venues ensuite tout un panel de méthodes de raffinement avec entre autres des applications aux signaux AR, MA ou ARMA [Clergeot, 1982, Scharf, 1991]. La condition d'orthogonalité entre le vecteur de recherche et l'ensemble des exponentielles qui composent le signal est la base et le lien entre ces méthodes et les méthodes sous-espaces, nous laissons le lecteur approfondir à souhait ce type de méthodes à partir de [Marcos, 1998]-ch 2.

Les méthodes sous-espaces s'appliquent à un modèle formé d'une combinaison linéaire de  $M$  signaux paramétriques d'amplitudes aléatoires ( $\alpha$ ). Dans le contexte d'une ALU, le modèle est directement équivalent au modèle proposé par Prony. On distingue deux types de méthodes sous-espaces. L'une est basée sur la recherche et l'estimation du sous-espace bruit ( $i$ ) et l'autre sur l'estimation du sous espace-signal ( $ii$ ). Ce dernier n'est pas le sujet de ce document et constitue à lui seul un thème de recherche relativement vaste. Nous notons toutefois que les méthodes de type ESPRIT (estimation du sous-espace signal) sont contraintes par la géométrie particulière de l'antenne alors qu'une méthode de type MUSIC ne l'est pas. C'est donc sur ce type de méthodes que nous avons orienté notre travail et nous nous sommes appuyés principalement sur deux méthodes d'estimation du sous-espace bruit : la méthode MUSIC ainsi que la méthode MinNorm. Nous allons donc, dans les paragraphes suivants, rappeler les définitions de ces deux algorithmes.

#### L'algorithme MUSIC

D'après (1.4), l'estimée de la covariance spatiale des observations bruitées est

$$\hat{\mathbf{R}}_Y = \frac{1}{T} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H = \mathbf{Z} \mathbf{R}_\Lambda \mathbf{Z}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_L \quad (1.26)$$

où  $\mathbf{R}_\Lambda = \frac{1}{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^H$  est l'estimée de la matrice de covariance des sources. Par décomposition en valeurs propres, la matrice de rang  $L$   $\hat{\mathbf{R}}_Y$ , nous avons  $\hat{\mathbf{R}}_Y = \sum_{\ell=1}^L \lambda_\ell \mathbf{u}_\ell \mathbf{u}_\ell^H$  où  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_M > \lambda_{M+1} \geq \dots \geq \lambda_L$  sont les valeurs propres ordonnées et  $\mathbf{u}_\ell$  les vecteurs propres de la covariance spatiale. Soit  $\mathbf{G} = [\mathbf{u}_{M+1} \dots \mathbf{u}_L]$  la matrice constituée des vecteurs propres associés aux  $L - M$  plus petites valeurs propres. Alors, le projecteur sur le sous-espace bruit est défini par

$$\mathbf{P}_Z^\perp = \mathbf{G}\mathbf{G}^H = \sum_{\ell=M+1}^L \mathbf{u}_\ell \mathbf{u}_\ell^H. \quad (1.27)$$

Nous définissons maintenant la fonction quadratique  $f_{\text{MUSIC}}(\omega)$  comme

$$f_{\text{MUSIC}}(\omega) = \mathbf{p}^H(\omega) \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{p}(\omega) \quad (1.28)$$

qui représente la fonctionnelle bien connue de MUSIC. Nous pouvons dorénavant énoncer le critère d'optimisation du spectral MUSIC comme suit [Schmidt, 1981, Stoica and Moses, 2005]

$$\arg \max_{\omega} \frac{1}{f_{\text{MUSIC}}(\omega)}. \quad (1.29)$$

Le but est de trouver les  $M$  plus grands pics dans la fonction de coût (également appelée pseudo-spectre) en énumérant les valeurs du paramètre à estimer de sorte que les pics coïncident avec les directions  $\theta_m = \sin^{-1}(\frac{c\omega_m}{-2\pi d})$  pour  $m \in [1 : M]$ .

### 1.2.6 L'algorithme MinNorm

L'algorithme de la norme minimale ou MinNorm [Zha and Qiu, 2007, Mewes et al., 1994, Hasan and Hasan, 2000, Colares and Lopes, 1999, Rao and Hari, 1990, Villier, 1995] permet d'estimer les DDA de signaux en nombre connu  $M$ , à partir des signaux mesurés sur  $L$  capteurs, en recherchant les zéros de la surface  $f_{\text{MN}} = |\mathbf{p}^H(\omega)\mathbf{d}|^2$ , où  $\mathbf{d}$  est un vecteur de dimension  $L$  du sous-espace bruit et de norme minimale et  $\mathbf{p}(\omega)$  un vecteur directionnel de dimension  $L$  et paramétré par la DDA  $\theta$ . Le calcul de  $\mathbf{d}$  nécessite le choix préalable d'un capteur  $l$  particulier, et l'on impose en outre à  $\mathbf{d}$  d'avoir un pour  $l^{\text{ième}}$  composante. Nous choisissons, à titre arbitraire, le premier élément de l'antenne comme référence.

Le vecteur de norme minimale se calcule de la manière suivante [Kumaresan and Tufts, 1983, Zha and Qiu, 2007]. L'approche de départ est bien évidemment identique à celle de MUSIC et nous ne rappelons pas le modèle sous-jacent, ni la définition de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_Y$ , nous reprenons seulement les éléments nécessaires à la compréhension.

Soit la matrice  $[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_M] = \mathbf{E}$  correspondant aux  $M$  vecteurs propres associés aux  $M$  valeurs propres les plus grandes de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_Y$ . Ces vecteurs propres engendrent alors le sous-espace signal comme vu précédemment. La matrice  $\mathbf{G} = [\mathbf{u}_{M+1} \dots \mathbf{u}_L]$  engendre

une base du sous-espace bruit. Supposons que  $\mathbf{d} = [1 \ \mathbf{g}^T]^T \in \mathbf{G}$ , où  $\mathbf{g}^T = [g_1 \dots g_{L-1}]$ . Le vecteur  $\mathbf{d}$  appartient donc au sous-espace bruit et est de norme minimale, enfin il respecte les conditions d'orthogonalité. Nous obtenons alors les relations suivantes

$$\mathbf{E}^H \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}^H [1, 0, \dots, 0]^T = 1. \quad (1.30)$$

Soit maintenant la matrice  $\bar{\mathbf{E}} = [\mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_L]^T$ , avec  $\mathbf{c}_i^T$  les vecteurs représentant la  $i$ ème ligne de la matrice  $\mathbf{E}$  et où la première ligne a été supprimée. De la même manière nous nommons  $\bar{\mathbf{d}}$  le vecteur  $\mathbf{d}$  amputé de sa première composante, d'où  $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{g}$ . La relation (1.30) est alors équivalente à

$$\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{d}} = -\mathbf{c}_1^*. \quad (1.31)$$

Parmi toutes les solutions possibles de ce système linéaire sous-déterminé, celle de la norme minimale est unique et vaut

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{g} = -\bar{\mathbf{E}}^{H\dagger} \mathbf{c}_1^*. \quad (1.32)$$

En écrivant explicitement la pseudo-inverse de  $\bar{\mathbf{E}}$ , et en utilisant la propriété d'unitarité de la base  $\mathbf{E}$ , soit  $\mathbf{E}^H \mathbf{E} = \mathbf{I}_M$ , nous obtenons le résultat

$$\mathbf{g} = -\frac{\bar{\mathbf{E}} \mathbf{c}_1^*}{1 - \|\mathbf{c}_1\|^2}. \quad (1.33)$$

Le vecteur complet  $\mathbf{d}$  peut s'exprimer en fonction du projecteur orthogonal sur le sous-espace bruit  $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{E} \mathbf{E}^H$  et le vecteur de norme minimale est finalement donné par

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^\perp \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^\perp \mathbf{e}_1} \quad (1.34)$$

où  $\mathbf{e}_1$  est la première colonne de la matrice identité. Le dénominateur  $\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^\perp \mathbf{e}_1$  est un terme de normalisation qui est omis par la suite. Nous en déduisons facilement la fonctionnelle de MinNorm définie comme suit

$$f_{\text{MN}} = |\mathbf{p}_L^H(\omega) \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^\perp \mathbf{e}_1|^2. \quad (1.35)$$

En fait les performances du MinNorm, en termes de variance et de pouvoir séparateur, montrent que le choix du capteur de référence est essentiel. Dans le cas général, on ne peut prédire le choix optimum, celui-ci dépendant des DDA. Cependant dans le cas particulier d'une antenne rectiligne uniforme (contexte ALU), l'extrémité de l'antenne constitue le meilleur choix possible. L'hypothèse d'antenne rectiligne et uniforme permet tout autant que le pour l'algorithme MUSIC d'avoir une approche polynomial. Approche développée dans le chapitre 2.3.

### 1.2.7 Performances et comparaison des algorithmes MUSIC et MinNorm

Du point de vue de la précision de la localisation, les premiers résultats concernant les méthodes à vecteurs propres ont été obtenus en 1984 [Sharman et al., 1984] et en 1985 [D. Thubert and Lecadre, 1985] pour MUSIC. Ils ont été suivis par de nombreuses publications qui ont analysé et comparé les performances d'autres méthodes : MinNorm et Root-MinNorm [Rao and Hari, 1989c], [Krim et al., 1992], Root-MUSIC [Rao and Hari, 1989b], [Krim et al., 1992], ESPRIT [Rao and Hari, 1989a], [Ottersten et al., 1991] et la méthode des sous-espaces pondérés [Viberg and Ottersten, 1991]. Une synthèse de ces résultats est par ailleurs fournie dans [Li and Vaccaro, 1991]. Ces travaux supposent que la matrice de covariance estimée suit une loi de Wishart. Ils ont abouti aux conclusions suivantes :

1. La précision de MUSIC est toujours meilleure que celle de MinNorm [Krim et al., 1992] ou [Li and Vaccaro, 1991].
2. Les versions root de MUSIC et MinNorm offrent les mêmes précisions de localisation que MUSIC et MinNorm [Rao and Hari, 1989c, Rao and Hari, 1989b, Krim et al., 1992].

Des formules approchées dans le cas d'une source ou de deux sources proches ont aussi été développées pour MinNorm [Rao and Hari, 1989c] et MUSIC [Rao and Hari, 1989b]. La loi des racines de Root-MUSIC et Root-MinNorm est par ailleurs fournie dans [Krim et al., 1992].

Un chapitre de synthèse complet est consacré à ces diverses analyses de performances dans ([Marcos, 1998], ch 9). Ces études sont la base théorique qui a conduit aux résultats des chapitres 2.3 et 3.

Nous l'avons cité dans l'établissement du modèle d'estimation, il est indispensable de pouvoir estimer correctement la dimension du sous-espace bruit. Nous donnons brièvement dans le paragraphe suivant des pistes et des solutions déjà données dans la littérature.

### 1.2.8 Estimation de l'ordre de modélisation

Jusqu'à présent le nombre d'ondes planes incidentes était supposé connu, ce qui n'est généralement pas le cas en pratique. Nous proposons ici quelques méthodes proposées dans la littérature, le paragraphe qui suit est très largement inspiré de la thèse de Roland Badeau [Badeau, 2005] avec son accord.

De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour estimer le nombre de sinusoïdes présentes dans un bruit blanc. Les plus classiques sont la méthode du Maximum de Vraisemblance [Bienvenu and Kopp, 1983] et les critères issus de la théorie de l'information, dits "*Critères de Théorie de l'Information*" (ITC) [Wax and Kaylath, 1985], parmi lesquels les critères *Akaike Information Criterion* (AIC) [Akaike, 1973] et *Minimum description Length* (MDL) par Schwarz [Schwarz, 1978] et Rissanen [Rissanen, 1978]. Une autre technique dans le cadre des ITC est le critère *Efficient Detection Criteria* (EDC) [Zhao et al., 1986a], qui s'avère également robuste à un bruit blanc multiplicatif [Gini and Bordonni, 2003]. Ces divers critères ITC reposent sur la similarité des valeurs propres

dans le sous-espace bruit, et non sur l'existence et la détection d'un saut de valeur entre les valeurs propres du sous-espace bruit et celles du sous-espace signal [Liavas and Regalia, 2001]. Nous citons par exemple Liavas qui propose [Liavas et al., 1999] un critère de sélection de l'ordre du modèle paramétrique en se basant sur la détection d'une différence majeure entre les valeurs propres signal et bruit. D'autres approches reposent sur les matrices de Wishart [Grouffaud et al., 1996] et sur les méthodes de validation croisée [Kundu et al., 2000]. Nous laissons le lecteur approfondir ces notions dans diverses références supplémentaires [Ducasse et al., 1998, Djuric, 1993, Djuric and Li, 1995, Dublanchet et al., 1995, Djuric, 1996, Wax and Kaylath, 1985, Cho and Djuric, 1995, Fuchs, 1988, Haykin, 1989]. Parmi toutes ces méthodes, nous présentons ici les plus classiques, à savoir les trois principaux critères ITC : AIC, MDL et EDC (qui est une généralisation robuste de AIC et MDL). Ces méthodes consistent à minimiser une fonction de coût composée d'un premier terme commun et d'un second terme qui constitue un facteur de pénalisation :

$$\text{ITC}(p) = -(n-p)l \ln \left( \frac{\left( \prod_{q=p+1}^n \sigma_q^2 \right)^{\frac{1}{n-p}}}{\frac{1}{n-p} \sum_{q=p+1}^n \sigma_q^2} \right) + p(2n-p)C(l) \quad (1.36)$$

où les scalaires  $\sigma_q^2$  sont les valeurs propres de la matrice  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$  classées par ordre décroissant, et  $C(l)$  une fonction de la variable  $l$ . Le critère AIC est défini en posant  $C(l) = 1$ , et le critère MDL est défini en posant  $C(l) = \frac{1}{2} \ln(l)$ . Les critères EDC sont obtenus pour toutes les fonctions  $C(l)$  telles que  $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{C(l)}{l} = 0$  et  $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{C(l)}{\ln(\ln(l))} = +\infty$ . Ces critères conduisent à maximiser le rapport de la moyenne géométrique des valeurs propres du sous-espace bruit sur leur moyenne arithmétique. Or ce rapport est maximal et égal à 1 quand toutes ces valeurs propres sont égales, il mesure donc la blancheur du bruit (en théorie les valeurs propres sont toutes égales à  $\sigma^2$ ). Le terme de pénalisation  $C(l)$  permet d'éviter de surestimer  $p$  et assure la consistance du critère. Dans la pratique, ces méthodes sont relativement satisfaisantes pour traiter des signaux qui vérifient bien le modèle de signal, mais leurs performances s'effondrent quand ce modèle est moins bien vérifié, en particulier quand le bruit est coloré. Ainsi, des méthodes spécifiques ont été conçues pour traiter le cas d'un bruit coloré, parmi lesquelles de nouveaux critères ITC [Zhao et al., 1986a, Zhao et al., 1986b, Zhang and Wong, 1993, Wang, 1993], une technique basée sur un modèle de fonction de covariance du bruit à support fini [Fuchs, 1992, Moal and Fuchs, 1999], et un critère de maximum a posteriori [Bishop and Djuric, 1996].

### 1.2.9 Le Subspace Fitting

Dans cette partie, la classe des techniques de Subspace Fitting résolvant le problème de l'estimation des DDA est considérée. La discussion qui suit est relative aux travaux de Viberg et Ottersten [Viberg and Ottersten, 1991] ainsi qu'à ceux de Stoica [Stoica and Nehorai, 1990a, Stoica and Nehorai, 1990b]. Le problème générique du Subspace Fitting adopté dans [Viberg and Ottersten, 1991] est le suivant : étant donné une matrice de données  $\mathbf{M}$ , nous cherchons les éléments  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  et  $\hat{\mathbf{A}}$  tel que

$$\hat{\omega}, \hat{\Lambda} = \arg \min_{\omega, \Lambda} \|M - Z(\omega)\Lambda\|_F^2 \quad (1.37)$$

avec  $Z$  et  $\Lambda$  de rang  $M$ . Ce problème non-linéaire est difficile à résoudre mais peut cependant se décomposer en un problème linéaire en  $\Lambda$  et un problème toujours non-linéaire en  $\omega$ . La solution linéaire en  $\Lambda$  s'obtient aisément par les moindres carrés ordinaires, d'où  $\hat{\Lambda} = Z^\dagger M$ , et en substituant cette solution dans (1.37), nous obtenons

$$\hat{\omega} = \arg \min_{\omega} \|(I_L - P_Z(\omega))M\|_F^2 = \arg \min_{\theta} \text{Trace} \left( P_Z^\perp(\omega) M M^H \right), \quad (1.38)$$

dans laquelle nous rappelons que  $P_Z^\perp(\omega) = I_L - Z(\omega)Z^\dagger(\omega)$  est le projecteur orthogonal sur le sous-espace  $\mathcal{R}(Z)^\perp$ . De nombreux algorithmes d'estimation peuvent se mettre sous la forme de l'équation (1.38), nous citons à titre d'exemple le MVD [Tufts and Kumaresan, 1982, Stoica and Nehorai, 1990a, Tufts and Kumaresan, 1980, Kumaresan and Scharf, 1986, Bohme, 1986, Wax, 1985, Bresler and Macovski, 1986], l'algorithme MUSIC multidimensionnel [Roy, 1987, Cadzow, 1988], ou encore l'algorithme de type Weighted Subspace Fitting (WSF) [Viberg and Ottersten, 1991].

Les techniques de Subspace Fitting ont été introduites dans le contexte statistique, de ce fait l'analyse ou encore la résolution n'est pas directement faite sur les données mais plutôt à partir de la matrice de covariance spatiale associée. Encore une fois l'estimation des sous-espaces bruit et signal se réalise par calcul d'une SVD. Nous obtenons alors les bases  $E$  et  $G$  définies en (1.2.6) et (1.2.5) respectivement (nous prendrons leur estimés  $\hat{E}$  et  $\hat{G}$ ), notons que plus de précision sur le lien entre SVD de la matrice des observations et valeurs propres (ou vecteurs propres) de l'estimé de la matrice de covariance associée se trouvent dans [Veen et al., 1993]. Les techniques de Subspace Fitting diffèrent ensuite par le choix spécifique de la matrice  $M$ . Pour les méthodes du MVD la matrice  $M$  est la matrice des observations pour les méthodes de type ESPRIT la matrice  $M$  est une concaténation des colonnes (ou lignes selon la littérature) de la base du sous-espace signal. Enfin, l'algorithme MUSIC peut lui aussi se formaliser comme une recherche de type Subspace Fitting, nous en donnons l'argumentation dans le paragraphe suivant.

**MUSIC et Subspace Fitting** Bien que le paradigme des équations (1.37) et (1.38) est multidimensionnel, une formulation mono-dimensionnelle reste possible. L'exemple le plus simple est celui de MUSIC [Schmidt, 1981, Bienvenu and Kopp, 1983], dont le critère de minimisation peut se récrire de la manière suivante

$$\omega = \arg \min_{\omega} \text{Trace} \left( P_Z^\perp(\omega) p^H(\omega) \right) \quad (1.39)$$

où  $p(\omega)$  est un vecteur directionnel de test. La seule différence entre (1.38) et (1.39) avec  $M = p(\omega)p^H(\omega)$  réside dans la recherche des paramètres. En effet, alors que (1.38) effectue une recherche de tous les paramètres simultanément, MUSIC les cherche un par un. En conclusion, MUSIC peut être classifié comme une technique mono-dimensionnelle de type Subspace



Fitting.

Les propriétés asymptotiques de MUSIC ont largement été étudiées, [Stoica and Nehorai, 1990a, Barabell, 1983, Kaveh and Barabell, 1986, Rao and Hari, 1989b]. Un des résultats intéressants de ces études théoriques est le fait que le MVD et MUSIC ont des performances asymptotiques similaires si les sources sont décorréélées de puissances égales.

**MUSIC Multi-dimensionnel** Bien que relativement simple à implémenter, l'algorithme MUSIC ne donne pas une estimation précise si les sources sont fortement corrélées. Ceci est principalement dû à la recherche mono-dimensionnelle des paramètres. Schmidt [Schmidt, 1981] a suggéré qu'une recherche multi-dimensionnelle pourrait pallier à ce problème, et Cadzow indépendamment développa un tel algorithme [Cadzow, 1988]. L'algorithme résultant, référencé par de nombreux auteurs comme MD-MUSIC, peut être décrit en remplaçant  $\mathbf{M}$  par  $\hat{\mathbf{G}}$  dans (1.37) et nous obtenons

$$\hat{\omega} = \arg \min_{\omega} \|\hat{\mathbf{G}} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}\|_F^2 \quad (1.40)$$

$$= \arg \min_{\omega} \text{Trace} \left( \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}} \right). \quad (1.41)$$

Ainsi la comparaison des équations (1.40) et (1.39) éclaire la terminologie de mono-dimensionnelle et de multi-dimensionnelle.

### 1.3 Les Projecteurs Obliques

Cette partie est consacrée à la présentation de l'algèbre des projecteurs obliques. Peu utilisé en traitement du signal et donc assez mal connu, nous présentons ici une "histoire" des projecteurs obliques, *i.e* comment ces projecteurs ont été construits ou encore pensés, leur intérêt majeur aussi dans le contexte de l'introduction de l'*a priori*. Nous donnons également l'interprétation géométrique indispensable pour comprendre leur comportement ainsi que leurs propriétés algébriques ou encore topologiques. Cette présentation, qui n'a pas pour prétention d'être la plus exhaustive possible, nous permettra de justifier les critères d'optimisation et les performances des algorithmes proposés dans le chapitre 2.

#### 1.3.1 Introduction

Les solutions optimales de nombreux problèmes en détection, estimation et analyse de séries temporelles, s'obtiennent très souvent grâce à une projection orthogonale. Dans la littérature, les projecteurs orthogonaux ont été appliqués à l'estimation de paramètres par minimisation au sens des moindres carrés [Golub and Loan, 1996], au traitement d'antenne [Buckley and Xu, 1990], au traitement du signal par block [Furukawa et al., 1990], à la synthèse sismique [Park, 1990], en robotique [Tosunoglu et al., 1990], et dans bien d'autres problèmes d'estimation encore [Scharf, 1990].

L'idée, dans l'analyse de type sous-espace, est de modéliser des séquences réelles ou complexes finies par l'utilisation de sous-espaces linéaires. Ces méthodes de traitement du signal de type sous-espaces, partagent toutes le même but : minimiser les effets du bruit. Or le bruit est présent dans bon nombre d'applications et de variétés différentes : du bruit de fond d'une cassette audio au craquement des lignes téléphoniques dans un téléphone standard. Quelques techniques de suppression de bruit ont émergé en intégrant les projecteurs orthogonaux. Habituellement d'ailleurs, ces projecteurs sont utilisés dans le contexte de l'estimation ou de la détection, comme par exemple dans la prédiction linéaire modifiée par SVD, découverte par Tufts et Kumaresan [Tufts and Kumaresan, 1982], où les coefficients d'un filtre blanchisseur doivent être estimés. Les techniques de suppression de bruit modélisent le signal souhaité comme un vecteur appartenant à un sous-espace réduit et le bruit comme un vecteur aléatoire. L'étape suivante dans la modélisation du bruit est d'admettre que le bruit est corrélé en appliquant une densité de probabilité adaptée au vecteur aléatoire représentant le bruit. En allant un peu plus loin dans la dépendance, nous admettons une dépendance totale de certains échantillons du bruit en supposant que des composantes du bruit appartiennent au sous-espace signal. Nous appelons alors "bruit structuré" les composantes du bruit appartenant au sous-espace signal. Quand maintenant un bruit structuré est inclus dans le modèle des données reçues, les projecteurs obliques interviennent naturellement dans la solution. Le modèle linéaire est malléable. En effet il dépend fortement du type de signal auquel il se réfère. Le modèle linéaire inclut les familles complètes de filtre ARMA, comme les exponentielles complexes, les sinusoïdes, les sinusoïdes amorties, les exponentielles réelles et bien évidemment toute combinaison linéaire de ces éléments. Le bruit impulsif est une autre forme de bruit structuré. En général, ce type de bruit est bien approprié pour tout bruit composé de peu d'éléments bien connus, comme des sinusoïdes pures ou des sinusoïdes amorties.

### 1.3.2 Algèbre des Projecteurs Obliques

Dans cette sous-section nous donnons les formules de construction des projecteurs obliques et établissons le lien entre les valeurs singulières d'un projecteur oblique et les angles principaux de ses deux sous-espaces (de projection et de direction). Notez que plusieurs approches sont possibles avec chacune leur formalisme particulier et nous choisissons de présenter les projecteurs obliques sous la forme introduite par Behrens et Scharf dans [Behrens and Scharf, 1994] plutôt que le formalisme adopté par Hansen dans [Hansen, 2004]. Les notions et concepts restent néanmoins équivalents.

Les projecteurs orthogonaux sont notés  $\mathbf{P}$  indicés par le sous-espace de projection, nous notons alors par  $\mathbf{P}^\perp$  le projecteur sur sous-espace orthogonal. Nous notons par  $\mathbf{E}_{(\cdot, \cdot)}$  les projecteurs obliques indicés par leur sous-espaces de projection et de direction. Par convention, le sous-espace de projection est noté en premier vient ensuite le sous-espace de direction.

Un projecteur oblique est avant tout un projecteur, par conséquent cette matrice est idempotente, elle vérifie donc la relation :

$$\mathbf{E}_{(\cdot, \cdot)}^2 = \mathbf{E}_{(\cdot, \cdot)}. \quad (1.42)$$

**Remarque 1** Les valeurs propres d'une matrice de projection sont 0 et 1. Cependant, une matrice dont les valeurs propres sont 0 et 1 n'est pas nécessairement un projecteur.

## Projecteurs Orthogonaux

Un projecteur orthogonal a un sous-espace de direction orthogonal à son sous-espace de projection. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un projecteur soit orthogonal est de satisfaire la condition de symétrie hermitienne, soit

$$P^H = P. \quad (1.43)$$

Pour un projecteur orthogonal  $P_A$  dont le sous-espace de projection est  $\mathcal{R}(A)$  et dont le sous-espace complémentaire est  $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)^\perp$ , nous avons

$$\begin{aligned} P_A A &= A \\ P_A B &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

## Projecteurs Obliques

Les matrices de projection non-orthogonales sont identifiées comme des projecteurs obliques. Les projecteurs obliques sont donc idempotents mais ils perdent la symétrie hermitienne (propriété très importante, en tous cas pour la suite du document). Pour un projecteur oblique  $E_{(A B)}$  dont le sous-espace de projection est  $\mathcal{R}(A)$  et le sous-espace de direction  $\mathcal{R}(B)$ , nous avons

$$\begin{aligned} E_{(A B)} A &= A \\ E_{(A B)} B &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

## Construction des Projecteurs Obliques

Nous donnons maintenant une méthodologie qui permet la construction d'un projecteur oblique avec les sous-espaces de projection et de direction souhaitées. Ceci n'est qu'une méthodologie pour obtenir un tel projecteur et il existe plusieurs approches différentes [Kayalar and Weinert, 1989] par exemple, qui donnent évidemment les mêmes expressions. Supposons que  $A$  est une matrice complexe de taille  $p \times m$  de plein rang, et de la même façon, que  $B$  est une matrice complexe de taille  $p \times n$  de plein rang. Supposons de plus que  $\mathcal{R}(A)$  et  $\mathcal{R}(B)$  sont disjoints, ce qui requiert l'inégalité  $m + n \leq p$ . La formule pour obtenir un projecteur orthogonal dont le sous-espace de projection est  $\mathcal{R}(A)$  est bien connue et donnée par

$$P_A = A(A^H A)^{-1} A^H. \quad (1.45)$$

Le projecteur complémentaire, *i.e.* le projecteur dont le sous-espace de projection est  $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)^\perp$  est donnée par la formule

$$P_A^\perp = P_B = I - P_A. \quad (1.46)$$

Soit maintenant la matrice  $[A B]$  composée de la concaténation des colonnes de  $A$  et de celles de  $B$ . Supposons que le rang de  $[A B]$  est inférieur à  $p$  soit de manière équivalente

$m + n < p$ . Le projecteur orthogonal sur le sous-espace  $\mathcal{R}([A \ B])$  est

$$P_{[A \ B]} = [A \ B] \begin{bmatrix} A^H A & A^H B \\ B^H A & B^H B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^H \\ B^H \end{bmatrix}.$$

L'inversion d'une matrice block  $2 \times 2$  est donnée par la formule générale

$$\begin{bmatrix} A^H A & A^H B \\ B^H A & B^H B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} A^H B (B^H B)^{-1} \\ -(B^H B)^{-1} B^H A Q^{-1} & (B^H B)^{-1} (I + B^H A Q^{-1} A^H B (B^H B)^{-1}) \end{bmatrix}$$

où  $Q = (A^H A - A^H B (B^H B)^{-1} B^H A) = A^H P_B^\perp A$ , le complément de Schur de  $B^H B$ . Après quelques manipulations algébriques basiques, nous obtenons que le projecteur orthogonal sur le sous-espace  $\mathcal{R}([A \ B])$  s'écrit

$$P_{[A \ B]} = [A \ B] \begin{bmatrix} (A^H P_B^\perp A)^{-1} A^H P_B^\perp \\ (B^H P_A^\perp B)^{-1} B^H P_A^\perp \end{bmatrix} = E_{(A \ B)} + E_{(B \ A)}.$$

où  $E_{(A \ B)} \triangleq A (A^H P_B^\perp A)^{-1} A^H P_B^\perp$  et  $E_{(B \ A)} \triangleq B (B^H P_A^\perp B)^{-1} B^H P_A^\perp$ .

Regardons quelles sont les propriétés des matrices  $E_{(A \ B)}$  et  $E_{(B \ A)}$ . Tout d'abord à partir de l'expression de  $P_{[A \ B]}$  ci-dessus notons que les matrices  $E_{(A \ B)}$  et  $E_{(B \ A)}$  s'expriment aussi de la manière suivante

$$E_{(A \ B)} = [A \ 0] \begin{bmatrix} A^H A & A^H B \\ B^H A & B^H B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^H \\ B^H \end{bmatrix}$$

et

$$E_{(B \ A)} = [0 \ B] \begin{bmatrix} A^H A & A^H B \\ B^H A & B^H B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^H \\ B^H \end{bmatrix}.$$

On déduit alors facilement que

$$\begin{aligned} P_{[A \ 0]} &= E_{(A \ B)} [A \ 0] + E_{(B \ A)} [A \ 0] \\ \Rightarrow E_{(A \ B)} [A \ 0] &= [A \ 0] \text{ car } E_{(B \ A)} [A \ 0] = [0 \ 0] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{[0 \ B]} &= E_{(A \ B)} [0 \ B] + E_{(B \ A)} [0 \ B] \\ \Rightarrow E_{(A \ B)} [0 \ B] &= [0 \ 0] \text{ car } E_{(B \ A)} [0 \ B] = [0 \ B]. \end{aligned}$$

Ces équations déterminent les différents sous-espaces : de projection et direction. En effet, d'après les équations ci-dessus nous avons  $\mathcal{R}(A)$  le sous-espace de projection et  $\mathcal{R}(B)$  le sous-espace de direction pour le projecteur  $E_{(A \ B)}$ . Pour le projecteur  $E_{(B \ A)}$   $\mathcal{R}(B)$  est le sous-espace de projection et  $\mathcal{R}(A)$  le sous-espace de direction.

Notons maintenant que

$$P_{[A \ B]}^2 = (E_{(A \ B)} + E_{(B \ A)})(E_{(A \ B)} + E_{(B \ A)}) = E_{(A \ B)}^2 + E_{(B \ A)}^2. \quad (1.47)$$

Les termes croisés disparaissent car le sous-espace de projection de  $\mathbf{E}_{(A B)}$  est dans le sous-espace complémentaire (noyau) de  $\mathbf{E}_{(B A)}$  et *vice versa*. Toutefois,  $\mathbf{P}_{[A B]}^2 = \mathbf{P}_{[A B]} = \mathbf{E}_{(A B)} + \mathbf{E}_{(B A)}$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{E}_{(A B)}) = \mathcal{R}(A)$  est disjoint de  $\mathcal{R}(\mathbf{E}_{(B A)}) = \mathcal{R}(B)$ , donc  $\mathbf{E}_{(A B)}^2 = \mathbf{E}_{(A B)}$  et  $\mathbf{E}_{(B A)}^2 = \mathbf{E}_{(B A)}$ . Nous avons donc établi que les matrices  $\mathbf{E}_{(A B)}$  et  $\mathbf{E}_{(B A)}$  sont des matrices de projection obliques dont les sous-espaces de projection sont respectivement  $\mathcal{R}(A)$  et  $\mathcal{R}(B)$ , et dont les sous-espaces de direction sont respectivement  $\mathcal{R}(B)$  et  $\mathcal{R}(A)$ . Une interprétation géométrique est donnée par la figure 1.1.

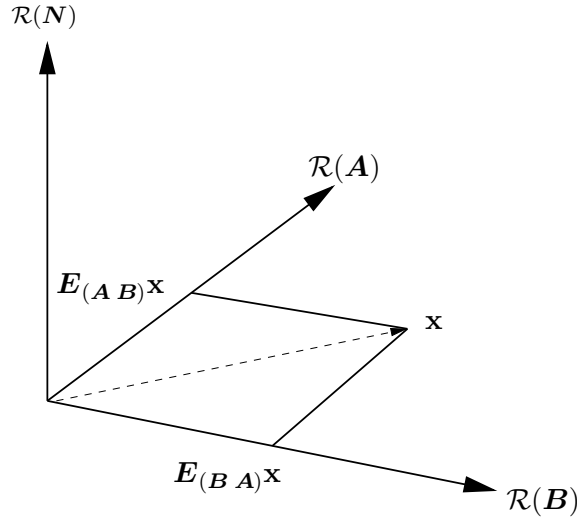


Figure géométrique montrant la projection du vecteur  $x \in \mathcal{R}(Z) = \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B)$  avec  $\mathcal{R}(N) = (\mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B))^\perp$ , sur  $\mathcal{R}(A)$  suivant  $\mathcal{R}(B)$  (vecteur  $\mathbf{E}_{(A B)}x$ ) et projection sur  $\mathcal{R}(B)$  suivant  $\mathcal{R}(A)$  (vecteur  $\mathbf{E}_{(B A)}x$ ).

figure 1.1: Figure géométrique illustrant la projection oblique.

Afin de compléter le noyau des matrices  $\mathbf{E}_{(A B)}$  et  $\mathbf{E}_{(B A)}$ , nous définissons une matrice  $N$  dont les vecteurs colonne engendrent le sous-espace orthogonal à  $\mathcal{R}([A B]) = \mathcal{R}(Z)$ . Alors,  $\mathbf{P}_B^\perp N = N$  et  $A^H N = \mathbf{0}$ . Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(A B)} N &= A(A^H \mathbf{P}_B^\perp A)^{-1} A^H \mathbf{P}_B^\perp N \\ &= A(A^H \mathbf{P}_B^\perp A)^{-1} A^H N \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.48}$$

et nous voyons que  $\mathcal{R}(N)$  est également dans le noyau de  $\mathbf{E}_{(A B)}$ . Nous avons donc déterminé que le sous-espace de projection de  $\mathbf{E}_{(A B)}$  est  $\mathcal{R}(A)$ , et que son noyau est égal à  $\mathcal{R}([B N])$ . En notant  $Z = [A B]$ , alors  $\mathbf{P}_N = \mathbf{P}_Z^\perp$  et nous obtenons une relation fondamentale concernant les projecteurs obliques que nous donnons de la manière suivante

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}_{(A B)} + \mathbf{E}_{(B A)} + \mathbf{P}_Z^\perp. \tag{1.49}$$

La figure 1.2 illustre cette formule et l'analogie dans le cas où la matrice  $\mathbf{N}$  est représentative du bruit décorréolé des données dans un modèle linéaire.

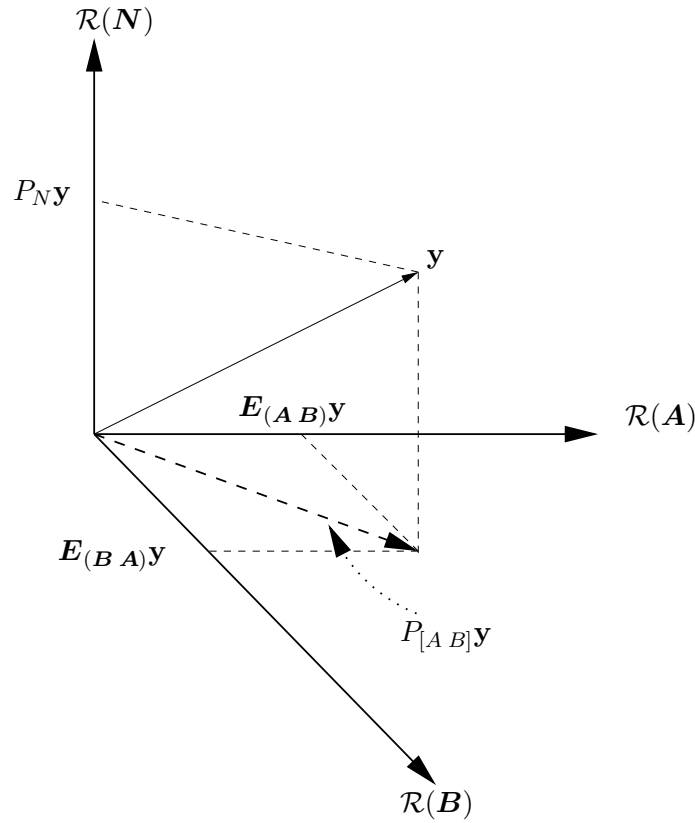


Figure géométrique montrant la projection du vecteur  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{Z}) = (\mathcal{R}(\mathbf{A}) \cup \mathcal{R}(\mathbf{B})) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{N})$  avec  $\mathcal{R}(\mathbf{N}) = (\mathcal{R}(\mathbf{A}) \cup \mathcal{R}(\mathbf{B}))^\perp$ , sur  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  suivant  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$  (vecteur  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})}\mathbf{y}$ ) et montrant la projection sur  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$  suivant  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  (vecteur  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{A})}\mathbf{y}$ ).

figure 1.2: Figure géométrique montrant la projection oblique dans l'espace euclidien.

### Valeurs Singulières des Projecteurs Obliques

Il est bien connu que les valeurs singulières d'une matrice de projection orthogonale sont, de même que ses valeurs propres, égales à 0 et 1. Ceci est vrai car pour une matrice hermitienne ses valeurs singulières sont égales à la valeur absolue de ses valeurs propres. Puisque la norme-2 d'une matrice est égale à sa valeur singulière la plus élevée, une matrice de projection orthogonale a une norme-2 unité et le vecteur résultant de la projection ne pourra être plus grand que le vecteur projeté, nous avons alors l'inégalité :  $\|\mathbf{P}\mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$ . Nous ne pouvons avoir la même analogie en ce qui concerne un projecteur oblique. Nous montrons dans la sous-section suivante qu'un projecteur oblique a des valeurs singulières égales à 0, 1 ou tout autre valeur supérieure à 1. Ce qui implique qu'un projecteur oblique a une norme-2 supérieure à l'unité et donc que  $\|\mathbf{E}_{(\cdot)}\mathbf{x}\|^2$  peut être supérieur à  $\|\mathbf{x}\|^2$ .

### Angles Principaux

Les angles principaux entre des sous-espaces sont une généralisation du concept géométrique des angles entre les lignes et les plans. Pour deux sous-espaces donnés  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$  il existe un ensemble d'angles formés entre eux. Le nombre de tels angles est égal à la dimension du sous-espace de rang le plus faible.

La définition pour le  $i^{\text{ième}}$  angle principal  $\alpha_i$ , est [Golub and Loan, 1996]

$$\alpha_i = \arccos \left( \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})} \max_{\mathbf{v} \in \mathcal{R}(\mathbf{B})} \mathbf{u}^H \mathbf{v} \right) = \arccos(\mathbf{u}_i^H \mathbf{v}_i) \quad (1.50)$$

sous les contraintes que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^H \mathbf{u} &= \mathbf{v}^H \mathbf{v} = 1 \\ \mathbf{u}^H \mathbf{u}_j &= 0, \quad j = 1, \dots, i-1 \\ \mathbf{v}^H \mathbf{v}_j &= 0, \quad j = 1, \dots, i-1 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{v}_i$  sont les vecteurs de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  qui sont solution de (1.50). Remarquons que cette définition est récursive dans le sens où les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  pour le  $i^{\text{ième}}$  angle principal sont contraints d'être orthogonaux à tous les  $\mathbf{u}_j$  et  $\mathbf{v}_j$  précédents. Golub et Van Loan [Golub and Loan, 1996] montrent aussi que l'angle principal peut être calculé par une décomposition en valeur singulière comme suit.

Soit  $\mathbf{U}_A$  une base orthogonale de  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et  $\mathbf{U}_B$  une base orthogonale de  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ . Le  $i^{\text{ième}}$  angle principal entre  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$  est donné par la relation

$$\alpha_i = \arccos \lambda_i \quad (1.51)$$

où  $\lambda_i$  est  $i^{\text{ième}}$  valeur singulière du produit  $\mathbf{U}_A^H \mathbf{U}_B$ . Nous étendons ce résultat comme suit. Pour un projecteur oblique  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})}$  formé par les sous-espaces  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ , les valeurs singulières des matrices de projections sont des fonctions trigonométriques des angles principaux entre les sous-espaces  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ . Soit les valeurs singulières de  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})}$ , notées  $\theta_i$  et les angles principaux par  $\alpha_i$ . Alors il vient que

$$\theta_i = \frac{1}{\sin(\alpha_i)}. \quad (1.52)$$

La démonstration est la suivante, commençons par remarquer que  $\lambda_i$  est une valeur singulière de  $\mathbf{U}_A^H \mathbf{U}_B$ , signifiant que  $\lambda_i^2$  est une valeur propre de  $\mathbf{U}_A^H \mathbf{U}_B \mathbf{U}_B^H \mathbf{U}_A = \mathbf{U}_A^H \mathbf{P}_B \mathbf{U}_A$ . en substituant dans (1.51), nous obtenons

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha_i) & \text{ est une v.p. de } & \mathbf{U}_A^H \mathbf{P}_B \mathbf{U}_A \\ \Rightarrow 1 - \cos^2(\alpha_i) & \text{ est une v.p. de } & \mathbf{I} - \mathbf{U}_A^H \mathbf{P}_B \mathbf{U}_A \\ \Rightarrow \sin^2(\alpha_i) & \text{ est une v.p. de } & \mathbf{U}_A^H (\mathbf{I} - \mathbf{P}_B) \mathbf{U}_A \\ \Rightarrow \frac{1}{\sin^2(\alpha_i)} & \text{ est une v.p. de } & (\mathbf{U}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{U}_A)^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque les valeurs propres sont invariantes par transformation orthogonale, cela implique que

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha_i)} \text{ est une v.p. de } \mathbf{U}_A^H (\mathbf{U}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{U}_A)^{-1} \mathbf{U}_A^H. \quad (1.53)$$

La matrice dans (1.53) est égale à  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})} \mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})}^H$ , comme nous pouvons facilement le vérifier en utilisant  $\mathbf{U}_{\mathbf{A}}$  dans la définition de  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})}$ . Il s'en suit que  $(\frac{1}{\sin(\alpha_i)})$  est une valeur singulière de  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})}$ , et la preuve est faite.

Puisque les angles principaux  $\alpha_i$  varient entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , le sinus de  $\alpha_i$  varie entre 0 et 1, et les valeurs singulières correspondantes de  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})}$  varient entre 1 et l'infini. . . tant déficiente, la matrice de projection a aussi des valeurs singulières égales à 0 mais ces valeurs ne correspondent à aucun angle principal. Nous avons donc montré que les valeurs singulières d'un projecteur oblique peuvent être 0, 1 ou tout autres valeurs supérieures à 1.

## 1.4 Position du problème

Nous avons vu dans les diverses sections présentées dans ce chapitre, les principes de bases pour l'estimation des DDA. Nous avons argumenté notre énoncé en rappelant les approches possibles : MVD ou MVS, prédiction linéaire ou encore algorithmes de type sous-espace. Nous avons rappelé le modèle linéaire pour le traitement d'antenne sous l'hypothèse ALU<sup>4</sup>.

Considérons maintenant que le nombre de DDA total reste égale à  $M$  et que le nombre de DDA d'intérêts est égale à  $S$ . Nous avons alors la relation triviale  $S \leq M$ . Par conséquent, le modèle linéaire défini en (??) est constitué de  $S$  DDA d'intérêt et de  $M - S$  DDA dites **interférentes**. Le traitement de ce type de problème a été étudié par Behrens et Scharf [Behrens and Scharf, 1994] qui proposent de récrire le modèle linéaire général pour l'estimation des DDA en introduisant le concept d'**interférence structurée**. Cette interférence structurée est une partie du signal qui n'est pas d'intérêt, pour le modèle adopté dans ce document, cette interférence structurée est constituée des  $M - S$  DDA. Nous nous basons donc sur le concept et l'écriture du modèle introduit par Behrens et Scharf que nous formalisons ici par l'équation suivante

$$\mathbf{Y} = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}_{\alpha}}_{\text{signal d'intérêt}} + \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{\Lambda}_{\beta}}_{\text{interférence structurée}} + \underbrace{\mathbf{N}}_{\text{bruit}} \quad (1.54)$$

où  $\mathbf{\Lambda}_{\alpha} = [\alpha(1) \dots \alpha(T)]$ , et  $\mathbf{\Lambda}_{\beta} = [\beta(1) \dots \beta(T)]$  avec les amplitudes "rangées" dans deux vecteurs  $\alpha(t) = [\alpha_1(t) \dots \alpha_S(t)]^T$  et  $\beta(t) = [\alpha_{S+1}(t) \dots \alpha_M(t)]^T$ . Comme  $S < M$ , la matrice  $\mathbf{A}$  (respectivement  $\mathbf{B}$ ) est de rang  $S$  (rang  $(M - S)$ ). Nous notons  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  le sous-espace déflaté. Sa dimension est  $\dim(\mathcal{R}(\mathbf{A})) = S$  qui est inférieur à la dimension du sous-espace signal  $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$  où  $\mathbf{Z} = [\mathbf{A} \mathbf{B}]$ . Nous avons de plus la relation  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{R}(\mathbf{Z})$ . De la même manière, nous définissons la matrice des sources associées à  $\mathbf{Z}$  comme  $\mathbf{\Lambda} = [\mathbf{\Lambda}_{\alpha}^T \mathbf{\Lambda}_{\beta}^T]^T$ .

La considération de ce modèle nous permet d'envisager plusieurs approches pour l'estimation des DDA d'intérêt. Nous avons opté pour deux approches qui constituent les deux chapitres majeures de ce document.

Il s'agit dans un premier temps de considérer qu'un certain nombre de DDA est connu avec exactitude. Ce cas de figure se rencontre en RADAR, en radio-astronomie ou encore en bio-medical et il est important d'essayer d'améliorer l'estimation des DDA d'intérêt lorsque ces dernières sont "polluées" par d'autres DDA parfaitement connues et ne portant aucune information.

4. Nous rappelons que le nombre de DDA frappant l'antenne est d'un total de  $M$ .



Puis dans un second temps, nous considérons l'estimation séquentielle des  $M$  DDA. Le caractère séquentiel nous amène à utiliser le modèle (1.1) dans lequel la dimension du sous-espace associé au signal d'intérêt à une itération  $m$  de l'algorithme est de 1 et la dimension du sous-espace associé à l'interférence structurée est alors de  $M - 1$ . Dans ce cas de figure l'interférence structurée contient l'ensemble des  $M - 1$  DDA qui ont été préalablement estimées et celles restant à estimer.

Nous abordons donc dans le chapitre suivant le cas où nous disposons de  $M - S$  DDA connues avec exactitude.



---

## Chapitre 2

# Estimation des Directions D'Arrivées par introduction d'une connaissance *a priori* exacte : algorithme MUSIC *a priori*

---

L'estimation des Directions D'Arrivées (DDA) est un problème suscitant un grand intérêt dans de nombreuses applications. La connaissance *a priori* de la localisation d'une source est même supposée ou admis et certains travaux ont déjà exploité cette information non négligeable. Un des principes utilisé pour intégrer cette connaissance est de déflater le sous-espace signal en projetant orthogonalement la matrice des observations sur un sous-espace bruit constitué à la fois du sous-espace bruit et du sous-espace associé aux DDA connues. Dans ce chapitre nous établissons et analysons la Borne de Cramér-Rao (CRB) associée à ce modèle et nous mettons l'accent sur les limitations de cette approche lorsque les DDA connues et inconnues sont proches et lorsque les sources associées sont décorréelées (soit une matrice de covariance bloc-diagonale). Afin d'aller plus loin et de ne plus être contraint par ces limitations, nous proposons d'intégrer la connaissance *a priori* de la localisation de certaines sources dans l'algorithme MUSIC basé sur la projection oblique de l'ensemble de la matrice de Vandermonde des vecteurs d'antenne. Pour finir, nous montrons que cette nouvelle approche permet de supprimer l'influence des DDA connues sur l'estimation des DDA inconnues, dans le cas de sources décorréelées et pour un Rapport Signal à Bruit (RSB) suffisant.

---

## 2.1 Introduction

L'estimation des Directions D'Arrivées (DDA) de sources bande étroite est un problème central en RADAR passif, radio-astronomie ou encore séismologie. Cette thématique a d'ailleurs reçu une attention considérable depuis ces 30 dernières années et une grande variété de techniques ont été développées à cette fin. Dans le cadre de l'application réelle, il s'est avéré que nous pouvions disposer d'un sous-ensemble de DDA bien identifiées. En effet, dans l'utilisation du RADAR en milieu urbain par exemple, le signal émis peut être réfléchi par un certain nombre d'objets stationnaires (on pensera à des buildings par exemple) dont la position est connue et située dans le champ du RADAR [DeGroat et al., 1993, Linebarger et al., 1995]. Cette identification et connaissance forte a pu alors être intégrée pour améliorer l'estimation des DDA et beaucoup de méthodes ont émergé. Nous pouvons classer ces différentes méthodes en deux grandes familles en considérant la contrainte comme "souple" ou "dure". La dénomination "souple" fait référence à une connaissance approximative de toutes les DDA. Cette famille de méthodes est plus connue sous le nom de Beam-space methods [Stoica and Nehorai, 1991a] et a reçu une attention particulière comme méthode de réduction de données (reduction methods). La dénomination "dure" devient pratiquement explicite dans le sens où nous considérons une connaissance exacte (parfaite) d'un sous ensemble de DDA. Cette contrainte est parfois plus restrictive en pratique, mais nous pouvons espérer que l'estimation des DDA inconnues soit plus précise. Nous nous focalisons dorénavant dans cette classe de méthodes. La connaissance exacte de certaines DDA nous permet de déflater le sous-espace signal et de fait de diminuer l'influence des DDA connues sur l'estimation des inconnues.

Il est bien connu que les méthodes de type sous-espaces sont relativement sensibles à l'estimation du nombre de sources. En pratique, sous-estimer ou sur-estimer le nombre de sources modifie la dimension du sous-espace bruit (respectivement signal) ce qui a des conséquences néfastes pour les conditions d'orthogonalité. La conséquence directe est donc une mauvaise estimation et donc une perte de précision. D'un autre côté, estimer toutes DDA et extraire de ce sous ensemble uniquement les DDA d'intérêt n'est pas aisé, particulièrement quand les DDA sont proches et/ou à bas SNRs. Par conséquent, une stratégie doit être adoptée pour élaborer un estimateur (classe d'estimateurs) capable d'extraire sans biais les DDA d'intérêt. Dans la littérature, [DeGroat et al., 1993, Linebarger et al., 1995], l'algorithme Constrained-MUSIC a été proposé. La propriété essentielle de cet algorithme est de projeter orthogonalement la matrice de réponse de l'antenne bruitée sur le sous espace engendré par le bruit et les DDA connues.

Dans ce chapitre, nous établissons la Borne de Cramér-Rao (CRB), que nous nommons Prior-CRB (P-CRB), associée à la déflation orthogonale du sous-espace signal. En particulier, nous montrons que la connaissance *a priori* d'un sous-ensemble de DDA permet d'obtenir une plus petite variance d'estimation lorsque les sources sont cohérentes (extrêmement corrélées) dont les DDA associées sont proches. Un résultat découlant de l'analyse de la P-CRB nous indique également que si les DDA connues et inconnues sont proches et que leurs sources associées sont décorréélées alors la projection orthogonale n'améliore pas la variance d'estimation. Afin de résoudre ce problème, nous préconisons l'utilisation des projecteurs obliques en place des projecteurs orthogonaux. Partant de ce principe, nous proposons de récrire le critère des moindres carrés (LS) MUSIC [Schmidt, 1981, Stoica and Nehorai, 1991b] dans le contexte de l'algèbre des projecteurs obliques. Le critère quadratique résultant peut être décomposé en

deux contributions. La première contribution (premier terme du critère) est celle du critère MUSIC classique, la deuxième (second terme du critère) est celle d'une fonction correctrice intégrant la connaissance *a priori*.

Nous rappelons ici, que les projecteurs obliques sont relativement peu usités dans le domaine du traitement du signal. Cependant, nous pouvons trouver quelques applications référencées dans [Kayalar and Weinert, 1989] pour le traitement d'antenne. De plus, dans [Behrens and Scharf, 1994], Behrens et Scharf formalisent de façon très détaillée l'algèbre des projecteurs obliques et donnent un panel complet de leurs applications dans le traitement du signal. Récemment, ces opérateurs de projection ont été exploités dans [Vandaele and Moonen, 2000, Yu and Tong, 2001] dans le contexte de l'identification aveugle de canal, en restauration d'image [Wirawan et al., 2002], en réduction de bruit [Hansen and Jensen, 2005] et dans le contexte de l'estimation des DDA par McCloud et Scharf [McCloud and Scharf, 2002]. A titre indicatif, nous nous différencions de cette dernière approche car nous considérons un sous-ensemble de DDA connues pour construire nos différents critères alors que McCloud et Scharf ne font pas cette hypothèse et le critère obtenu dans leur contexte n'est qu'une version pondérée du critère MUSIC. Nous reviendrons dans ce chapitre sur les différences entre notre approche et celle introduite dans [McCloud and Scharf, 2002]. Pour finir, notre méthodologie s'inscrit dans le cadre général des techniques de Subspace Fitting [Viberg and Ottersten, 1991]. De plus, notre algorithme peut s'appliquer à l'analyse de signaux biomédicaux [Chen et al., 1996, Stoica et al., 2004] ou encore à l'analyse spectrale [Veen et al., 1993].

Après cette brève introduction, le chapitre s'organise comme suit. Dans la section 2.2.1 nous donnons les étapes nécessaires à la constitution de la P-CRB dont nous faisons dans une deuxième partie l'analyse théorique. Dans la section 2.2.2, nous expliquons comment intégrer dans le critère MUSIC la connaissance *a priori* d'un sous-ensemble de DDA par utilisation des projecteurs obliques. Les sections 2.2.3 et 2.2.4 sont dédiées à l'implémentation pratique de l'algorithme spectral et polynomial Prior-MUSIC. Figurent dans la section 2.2.4 les simulations numériques. Enfin, une conclusion est donnée dans la section 2.2.5.

Nous supposons donc pour cette partie, connaître  $M - S$  DDA sur les  $M$  frappant l'antenne. Nous utilisons donc le modèle (1.54) dans lequel la  $L \times S$  matrice  $A$  est la matrice composée par les  $S$  DDA désirées et la matrice  $B$  rassemble les  $M - S$  DDA *a priori* connues.

### 2.1.1 Structure de la covariance spatiale

La matrice de covariance spatiale des sources s'écrit de manière générale comme

$$\mathbf{R}_\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} & \mathbf{\Xi} \\ \mathbf{\Xi}^H & \mathbf{R}_{\Lambda_\beta} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{\Xi}$  est la matrice des corrélations entre les sources interférentes (sources associées aux DDA connues) et d'intérêt (sources associées aux DDA inconnues).

## 2.2 Déflation et *a priori*

### 2.2.1 Dérivation et analyse de la Prior-CRB

#### Introduction de la connaissance *a priori*

Dans [DeGroat et al., 1993, Linebarger et al., 1995], un algorithme *a priori* de type MUSIC a été introduit et analysé. Cet algorithme, nommé Constrained-MUSIC, est basé sur la projection de la matrice d'acquisition des données (la réponse de l'antenne) sur le sous-espace engendré par  $\mathcal{R}(\mathbf{B})^\perp$ . Dans la perspective d'établir la Prior-CRB, nous "vectorisons" le modèle (1.54) comme suit

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y}) = [\mathbf{y}(1)^T \quad \dots \quad \mathbf{y}(T)^T]^T = \mathbf{x} + \sigma \mathbf{n} \quad (2.2)$$

dans lequel le bruit est représenté par le vecteur  $\sigma \mathbf{n} = \text{vec}(\mathbf{N})$ . Par conséquent,  $\sigma \mathbf{n}$  est un processus Gaussien, blanc et additif caractérisé par les paramètres  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_{LT})$  et

$$\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X}) = [\mathbf{x}(1)^T \quad \dots \quad \mathbf{x}(T)^T]^T = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{Z}) \boldsymbol{\lambda} \quad (2.3)$$

avec  $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\alpha}(1)^T \dots \boldsymbol{\alpha}(T)^T]^T$  et  $\otimes$  définit le produit de kronecker [Graham, 1981, Bentler and Lee, 1978].

Dans le but maintenant d'incorporer une connaissance *a priori* de l'ensemble de DDA connues, nous utilisons la matrice  $\mathbf{B}$  constituée de l'ensemble des DDA  $\{\omega_{S+1}, \dots, \omega_M\}$ . Le modèle (2.2) est alors modifié de la manière suivante

$$\mathbf{y}_{(\text{prior})} = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{P}_\mathbf{B}^\perp) \mathbf{y} = \mathbf{x}_{(\text{prior})} + \sigma (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{P}_\mathbf{B}^\perp) \mathbf{n}. \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{P}_\mathbf{B}^\perp = \mathbf{I}_L - \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger$ . La notation "prior" indique que nous avons projeté le signal  $\mathbf{y}$  sur le sous-espace complémentaire au sous-espace associé aux DDA *a priori*<sup>1</sup>. En suivant les mêmes notations, nous définissons le signal non bruité tel que

$$\mathbf{x}_{(\text{prior})} = (\mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{P}_\mathbf{B}^\perp \mathbf{A})) \bar{\boldsymbol{\lambda}} \quad (2.5)$$

où  $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = [\bar{\boldsymbol{\alpha}}(1)^T \dots \bar{\boldsymbol{\alpha}}(T)^T]^T$  avec  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(t) = [\alpha_1(t) \dots \alpha_S(t)]^T$ .

#### Prior-CRB basée sur le modèle (2.4) (P-CRB)

Il existe plusieurs façons d'établir la P-CRB. Dans un premier temps, nous pourrions établir cette borne en supposant que les processus étudiés sont des processus Gaussiens colorés. Cette considération implique alors que l'inverse de la covariance du bruit, présente dans la formule générale de la CRB [Stoica and Nehorai, 1989], est calculée par troncature de la pseudo-inverse du projecteur  $\mathbf{P}_\mathbf{B}^\perp$ . Une autre approche, équivalente mais plus élégante, est basée sur la proposition suivante.

---

1. ceci correspond à projeter  $\mathbf{y}$  sur le noyau de  $\mathbf{B}$ .

**Proposition 1** *Le signal "compressé"*<sup>2</sup>

$$\tilde{\mathbf{y}}_{(\text{prior})} = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H) \mathbf{y}_{(\text{prior})} \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{U}_B$  est une base unitaire de dimension  $L \times (L - M + S)$  du sous-espace engendré par  $\mathcal{R}(\mathbf{B})^\perp$ , suit une distribution Gaussienne de paramètres  $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}, \tilde{\mathbf{\Gamma}} = \sigma^2 \mathbf{I}_{LT})$  où  $\tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})} = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H) \mathbf{x}_{(\text{prior})}$ .

*Preuve : voir Annexe 2.5.1.*

Soit le vecteur des paramètres du modèle signal plus bruit, défini par  $\boldsymbol{\chi} = [\boldsymbol{\chi}'^T \ \sigma^2]^T$  où  $\boldsymbol{\chi}' = [\boldsymbol{\omega}^{(S)T} \ \bar{\boldsymbol{\lambda}}_R^T \ \bar{\boldsymbol{\lambda}}_I^T]^T$ ,  $\boldsymbol{\omega}^{(S)} = [\omega_1 \dots \omega_S]^T$ ,  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_R = \Re\{\bar{\boldsymbol{\lambda}}\}$  et  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_I = \Im\{\bar{\boldsymbol{\lambda}}\}$ . Un résultat standard [Stoica and Moses, 2005, Annexe B] est que l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) pour tout estimé non-biaisé,  $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ , du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\chi}$ , satisfait  $\text{MSE}(\hat{\boldsymbol{\chi}}) = \mathbb{E}((\boldsymbol{\chi} - \hat{\boldsymbol{\chi}})(\boldsymbol{\chi} - \hat{\boldsymbol{\chi}})^H) \geq \text{P-CRB}(\boldsymbol{\chi})$  avec

$$\text{P-CRB}^{-1}(\boldsymbol{\chi}) = \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{y}}_{(\text{prior})}, \boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{y}}_{(\text{prior})}, \boldsymbol{\chi})^H}{\partial \boldsymbol{\chi}} \right) \quad (2.7)$$

où  $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{y}}_{(\text{prior})}, \boldsymbol{\chi})$  est la fonction de vraisemblance. Par suite, la P-CRB est une borne inférieure sur la variance de l'estimé. Or, d'après la proposition 1, l'expression (2.7) peut se récrire dans le cadre d'une distribution Gaussienne de la manière suivante

$$[\text{P-CRB}^{-1}(\boldsymbol{\chi})]_{ij} = \text{Trace} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \frac{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}}{\partial \boldsymbol{\chi}_i} \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \frac{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}}{\partial \boldsymbol{\chi}_j} \right) + 2 \Re \left\{ \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}}{\partial \boldsymbol{\chi}_i} \right)^H \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}}{\partial \boldsymbol{\chi}_j} \right\} \quad (2.8)$$

où  $\boldsymbol{\chi}_i$  correspond au  $i^{\text{ième}}$  bloc du vecteur  $\boldsymbol{\chi}$  pour  $i \in [1 : 4]$ . Finalement, nous formulons le résultat suivant.

**Théorème 1** *La P-CRB, en fonction des paramètres du "signal" est donnée par*

$$\text{P-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) = \frac{\sigma^2}{2T} \left[ \Re \left\{ \left[ \mathbf{D}_A^H \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{D}_A \right] \bullet \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \right\} \right]^{-1} \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{D}_A = [\mathbf{p}'(\omega_1) \dots \mathbf{p}'(\omega_S)]$  avec  $\mathbf{p}'(\omega_k) = \left. \frac{\partial \mathbf{p}(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k}$  et  $\mathbf{P}_Z^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ , de plus  $\bullet$  symbolise le produit de Hadamard (le produit point à point).

*Preuve : voir Annexe 2.5.2.*

---

2. Dans le sens où  $(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H)$  est une matrice "allongée" (plus de colonnes que de lignes).

### CRB sans connaissance *a priori* et basée sur le modèle (2.2)

La définition de ces bornes est bien connue [Stoica and Moses, 2005, p.392, eq. B.6.32]. Nous les rappelons donc

$$\text{CRB}_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) = \frac{\sigma^2}{2T} \left[ \Re \left\{ \left[ \mathbf{D}_{\mathbf{A}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{D}_{\mathbf{A}} \right] \bullet \mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}} \right\} \right]^{-1} \quad (2.10)$$

$$\text{CRB}_{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\omega}^{(M)}) = \frac{\sigma^2}{2T} \left[ \Re \left\{ \left[ \mathbf{D}_{\mathbf{Z}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{D}_{\mathbf{Z}} \right] \bullet \mathbf{R}_{\Lambda} \right\} \right]^{-1} \quad (2.11)$$

où  $\boldsymbol{\omega}^{(M)} = [\omega_1 \dots \omega_M]^T$ ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{I}_L - \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}$  et  $\mathbf{D}_{\mathbf{Z}} = [\mathbf{p}'(\omega_1) \dots \mathbf{p}'(\omega_M)]$ . Les expressions (2.10) et (2.11) sont respectivement la CRB associée au sous-espace d'intérêt,  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et associée au sous-espace signal complet,  $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$ . Remarquons que la P-CRB mélange la CRB $_{\mathbf{A}}$  et la CRB $_{\mathbf{Z}}$  dans le sens où seulement la matrice des dérivées des DDA inconnues est projetée sur le sous-espace orthogonal au sous-espace signal complet.

### Comparaison des différentes bornes

Le théorème suivant illustre quelques propriétés liant les différentes bornes établies et existantes.

**Théorème 2** Pour  $\boldsymbol{\omega}^{(S)}$  l'ensemble des DDA d'intérêt, nous avons les relations suivantes

- Pour  $\mathbf{R}_{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}} & \boldsymbol{\Xi} \\ \boldsymbol{\Xi}^H & \mathbf{R}_{\Lambda_{\beta}} \end{bmatrix}$ ,  $\forall \boldsymbol{\Xi}$ ,  $\mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}}$  et  $\mathbf{R}_{\Lambda_{\beta}}$  pleines nonsingulières, alors :
  - (i)  $P\text{-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) \geq \text{CRB}_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\omega}^{(S)})$
  - (ii)  $P\text{-CRB}(\omega_m), \text{CRB}_{\mathbf{A}}(\omega_m), \text{CRB}_{\mathbf{Z}}(\omega_m) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{6}{L^3 T} \frac{\sigma^2}{[\mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}}]_{mm}}$ , pour  $m \in [1 : S]$ .
- Pour  $\mathbf{R}_{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\Lambda_{\beta}} \end{bmatrix}$  avec une corrélation quelconque entre les sources, soit  $\mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}}$  et  $\mathbf{R}_{\Lambda_{\beta}}$  deux matrices pleines, nonsingulières, alors :
  - (iii)  $P\text{-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) = \text{CRB}_{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\omega}^{(S)})$
  - (iv)  $P\text{-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) \gg \text{CRB}_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\omega}^{(S)})$  pour des DDA proches
  - (v)  $P\text{-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) \approx \text{CRB}_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\omega}^{(S)})$  pour des DDA éloignées.
- Pour  $\mathbf{R}_{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\Lambda_{\beta}} \end{bmatrix}$  avec  $\mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}}$  une matrice pleine nonsingulière et  $\mathbf{R}_{\Lambda_{\beta}}$  proche de la singularité (forte corrélations entre les sources interférentes) et de DDA proches, alors :
  - (vi)  $P\text{-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) < \text{CRB}_{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\omega}^{(S)})$

*Preuve : voir Annexe 2.5.3.*



Notons que *DDA proches* signifie qu'au moins une DDA connue est proche d'au moins une DDA inconnue<sup>3</sup>.

Si les sources sont décorréelées et d'après la propriété (i), nous ne pouvons pas attendre d'avoir de meilleures performances que la CRB correspondant au sous-espace d'intérêt,  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ . C'est une limite fondamentale. En se basant sur la propriété (ii), nous concluons que la connaissance *a priori* n'aide pas l'estimation quand le nombre de capteurs est grand. Si les DDA connues et inconnues sont décorréelées, les sources connues ne sont pas cohérentes et les DDA sont éloignées, alors les propriétés (iii) and (v) signifient que toutes les CRB sont confondues. Inversement (*cf.* propriété (vi)), si les sources connues sont cohérentes ou fortement corrélées, nous pouvons exploiter la connaissance *a priori*. En conclusion, l'utilisation d'un projecteur orthogonal pour introduire un *a priori* dans les algorithmes d'estimation est recommandée pour des scénarios limités, à savoir dans le cadre de DDA proches associées à des sources cohérentes (ou fortement corrélées) avec un nombre de capteurs relativement faible. Certaines de ces conclusions ont déjà été obtenues dans [DeGroat et al., 1993, Linebarger et al., 1995] dans l'étude de l'algorithme Constrained-MUSIC mais nous présentons ici une étude beaucoup plus générale. En effet nous basons notre analyse sur un modèle statistique indépendant de l'algorithme d'estimation choisi. Un point important est toutefois que pour  $L$  fini, la propriété (iv) suggère que le projecteur orthogonal n'annule pas complètement l'influence des DDA connues lors de l'estimation des inconnues et de ce fait la CRB associée aux DDA d'intérêt pour une matrice de covariance bloc-diagonale dont les DDA sont proches. Dans la section suivante, nous proposons un ensemble d'algorithmes d'estimation capables de résoudre cette difficulté.

## 2.2.2 Algorithmes de type prior MUSIC (*MUSIC a priori*)

Pour être en accord avec la propriété (iv), nous supposons que les sources associées aux DDA connues (source interférentes) et inconnues (sources d'intérêt) sont décorréelées. Par conséquent, la matrice de covariance spatiale des sources est bloc-diagonale et s'écrit

$$\mathbf{R}_\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\Lambda_\beta} \end{bmatrix}.$$

De plus, nous introduisons ici pour bien insister sur les paramètres vrais et ceux estimés, les ensembles  $\omega_0$  et  $\omega$  respectivement, avec comme hypothèse  $\omega_0 \cap \omega = \emptyset$ . Ainsi les matrices de Vandermonde des vecteurs directionnels s'écrivent  $\mathbf{A}(\omega)$  comme étant la matrice fonction des paramètres d'intérêts et  $\mathbf{B}(\omega_0)$  comme étant la matrice des paramètres interférents (vrais paramètres).

Nous rappelons que l'algorithme Constrained-MUSIC (C-MUSIC)<sup>4</sup> [DeGroat et al., 1993, Linebarger et al., 1995] cherche la valeur du paramètre (et non toutes les valeurs de tous les paramètres) qui rend le vecteur de test  $\mathbf{p}(\omega)$  le plus orthogonal au sous-espace bruit. Le critère d'optimisation C-MUSIC peut alors être écrit comme

$$\hat{\omega} = \arg \min_{\omega} f_{\text{C-MUSIC}}(\omega)$$

3. Plus précisément, la distance inter-DDA doit être plus petite que la distance limite définie par la résolution de Rayleigh [Thubert and Kopp, 1986], *i.e.*,  $|\pi(\sin(\theta_2) - \sin(\omega_1))| \ll \sqrt{\frac{6}{L^2-1}}$ .

4. au même titre que les algorithmes MUSIC, MinNorm...

où

$$f_{\mathcal{C}\text{-MUSIC}}(\omega) = \left\| \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\omega, \omega_0) \mathbf{p}(\omega) \right\|^2. \quad (2.12)$$

Notons ici que ce problème est différent du problème standard de type non-contraint (unconstrained) appliqué par l'algorithme MUSIC :  $\arg \min_{\omega} f_{\text{MUSIC}}(\omega)$  avec  $f_{\text{MUSIC}}(\omega) = \left\| \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\omega) \mathbf{p}(\omega) \right\|^2$  où le projecteur orthogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\omega)$  contient tous les paramètres d'intérêts alors que  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\omega, \omega_0)$  contient un sous-ensemble  $S$  de paramètres d'intérêts ainsi que  $M - S$  vrais paramètres.

En suivant le formalisme introduit dans les références [Ephraïm et al., 1995, Schmidt, 1981] pour l'algorithme MUSIC, le critère contraint Prior-MUSIC est donné par

$$\arg \min_{\alpha_{\mathbf{Z}}, \omega} \mathcal{C}(\alpha_{\mathbf{Z}}, \omega) \quad \text{sachant que } \mathbf{p}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{A}) \quad (2.13)$$

où la fonction de coût est définie par

$$\mathcal{C}(\alpha_{\mathbf{Z}}, \omega) = \left\| \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \ \mathbf{B}(\omega_0))} \mathbf{Z}(\omega, \omega_0) \alpha_{\mathbf{Z}} \right\|^2 \quad (2.14)$$

dans laquelle  $\alpha_{\mathbf{Z}}$  est le vecteur des amplitudes complexes. Soit  $\alpha_{\mathbf{Z}} = [\alpha^T \ \beta^T]^T$  alors la fonction de coût  $\mathcal{C}(\alpha_{\mathbf{Z}}, \omega)$  peut se réécrire

$$\mathcal{C}(\alpha_{\mathbf{Z}}, \omega) = \left\| \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \ \mathbf{B}(\omega_0))} (\mathbf{A}(\omega) \alpha + \mathbf{B} \beta) \right\|^2 \quad (2.15)$$

$$= \left\| \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{A}(\omega) \alpha \right\|^2 \quad (2.16)$$

puisque  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \ \mathbf{B}(\omega_0))} \mathbf{A}(\omega) = \mathbf{A}(\omega)$  et  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \ \mathbf{B}(\omega_0))} \mathbf{B}(\omega_0) = \mathbf{0}$ . Par suite, minimiser  $\mathcal{C}(\alpha_{\mathbf{Z}}, \omega)$  est équivalent à chercher les vecteurs  $\mathbf{p}(\omega)$  dans le sous-espace d'intérêt,  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  tout en rejetant les DDA connues (appartenant au sous-espace  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ ). Pour un tel critère nous notons que grâce à la structure algébrique du projecteur oblique, la matrice  $\mathbf{A}(\omega)$  des vecteurs directionnels d'intérêt n'est pas affectée par l'opération de projection.

### L'algorithme Prior-MUSIC (P-MUSIC)

Le critère (2.13) est un problème séparable et étant linéaire en  $\alpha$ , la solution est obtenue par les moindres carrés ordinaires. La solution  $\alpha$  qui minimise (2.13) vaut alors

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} = (\mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \ \mathbf{B}(\omega_0))} \mathbf{Z}(\omega, \omega_0))^{\dagger} \mathbf{p}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\omega)^{\dagger} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{p}(\omega) \\ \implies &\begin{cases} \tilde{\alpha} = \mathbf{A}(\omega)^{\dagger} \mathbf{p}(\omega) \\ \tilde{\beta} = \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Cette solution satisfait pour tout  $\mathbf{p}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{Z})$ ,  $\left. \frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha}_Z, \omega)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_Z} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_Z = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}} = \mathbf{0}$ . Ce qui signifie que la minimisation en fonction des amplitudes  $\boldsymbol{\alpha}$  ce fait indépendamment des vecteurs de test  $\mathbf{p}(\omega)$ . Par conséquent, la fonction de coût de l'algorithme P-MUSIC

$$\mathcal{C}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \omega) = \left\| \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}(\omega) \mathbf{p}(\omega) \right\|^2 \quad (2.18)$$

atteint sa valeur minimale (en fonction de  $\alpha$ ) pour les DDA connues et inconnues. Toutefois, le critère (2.13) se doit d'être minimal uniquement pour les DDA connues. C'est pourquoi nous pouvons imaginer, dans un context limite comme par exemple à faible RSB ou quand les DDA sont proches, que cette approche soit sous-optimale. Afin de complètement résoudre ce problème nous proposons dans la section suivante une approche optimale qui minimise efficacement le critère (2.13).

### L'algorithme Weighted Prior-MUSIC (WP-MUSIC)

**Une deuxième approche basée sur la pseudo-inverse oblique et la norme-2 pondérée** Pour résoudre plus judicieusement le critère (2.13), nous intégrons mathématiquement la contrainte  $\mathbf{p}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$  au travers de la norme-2 pondérée. Nous considérons alors la solution des moindres carrés pondérés suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_Z = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} \left\| \mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \mathbf{B}(\omega_0))} (\mathbf{p}(\omega) - \mathbf{Z}(\omega, \omega_0) \boldsymbol{\alpha}_Z) \right\|^2 \quad (2.19)$$

où nous exploitons complètement la structure non-orthogonale de la matrice des vecteurs directionnels  $\mathbf{Z}(\omega, \omega_0)$  ainsi que la connaissance *a priori*. En effet, nous avons  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \mathbf{B}(\omega_0))} \mathbf{p}(\omega) = \mathbf{p}(\omega)$  pour  $\mathbf{p}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ . Nous obtenons donc

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A}(\omega)^{\dagger} \mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \mathbf{B}(\omega_0))} \mathbf{p}(\omega). \quad (2.20)$$

Cette minimisation va nous permettre de minimiser (2.13) simultanément en  $\boldsymbol{\alpha}$  et en  $\omega$ . Nous réécrivons la fonction de coût et nous obtenons

$$\mathcal{C}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \omega) = \left\| \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{A}(\omega) \mathbf{A}(\omega)^{\dagger} \mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \mathbf{B}(\omega_0))} \mathbf{p}(\omega) \right\|^2 \quad (2.21)$$

$$= \left\| (\mathbf{I}_L - \mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \mathbf{B}(\omega_0))}) \mathbf{p}(\omega) \right\|^2 \quad (2.22)$$

$$= \left\| \left( \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\omega, \omega_0) + \mathbf{E}_{(\mathbf{B}(\omega_0) \mathbf{A}(\omega))} \right) \mathbf{p}(\omega) \right\|^2. \quad (2.23)$$

Les expressions précédentes sont obtenues en utilisant des propriétés basiques de l'algèbre des projecteurs obliques définies dans la section 1.3 et en utilisant la propriété d'idempotence des projecteurs. Par suite, le critère final WP-MUSIC est donné par la relation  $\arg \min_{\omega} \mathcal{C}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \omega)$ . Notons que

- $\forall \mathbf{p}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ , nous avons  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{p}(\omega) = \mathbf{E}_{(\mathbf{B}(\omega_0) \mathbf{A}(\omega))} \mathbf{p}(\omega) = 0$ . Donc,  $\mathcal{C}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \omega) = 0$  est alors minimal.

- $\forall \mathbf{p}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{B})$ , nous avons  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp(\omega, \omega_0)\mathbf{p}(\omega) = 0$  et  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B}(\omega_0) \ \mathbf{A}(\omega))}\mathbf{p}(\omega) = \mathbf{p}(\omega)$  et donc  $\mathcal{C}(\bar{\alpha}, \omega) = L$ . D'où,  $\mathcal{C}(\bar{\alpha}, \omega)$  non-minimal.

Afin de montrer que  $\bar{\alpha}$  minimise judicieusement le critère (2.13), nous considérons la dérivée partielle en fonction de  $\alpha_z = \bar{\alpha}$  de la fonction de coût, soit

$$\left. \frac{\partial \mathcal{C}(\alpha_z, \omega)}{\partial \alpha_z} \right|_{\alpha_z = \bar{\alpha}} = -2 \left\{ \mathbf{Z}^H \mathbf{E}_{(\mathbf{A}(\omega) \ \mathbf{B}(\omega_0))}^H \left( \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp(\omega, \omega_0) + \mathbf{E}_{(\mathbf{B}(\omega_0) \ \mathbf{A}(\omega))} \right) \mathbf{p}(\omega) \right\}. \quad (2.24)$$

Nous distinguons alors deux cas,

- $\forall \mathbf{p}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$  alors  $\left. \frac{\partial \mathcal{C}(\alpha_z, \omega)}{\partial \alpha_z} \right|_{\alpha_z = \bar{\alpha}} = \mathbf{0}$ . Donc,  $\bar{\alpha}$  est une solution de norme minimale du critère (2.13) pour les DDA inconnues.
- $\forall \mathbf{p}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{B})$  then  $\left. \frac{\partial \mathcal{C}(\alpha_z, \omega)}{\partial \alpha_z} \right|_{\alpha_z = \bar{\alpha}} \neq \mathbf{0}$ . Donc pour les DDA connues,  $\bar{\alpha}$  n'est pas une solution de norme minimale ou en d'autres termes, la fonction de coût  $\mathcal{C}(\bar{\alpha}_z, \omega)$  n'atteint pas sa valeur minimale en fonction de  $\alpha_z$  pour les DDA connues. Ce résultat est réellement appréciable car nous contraignons plus fortement les solutions en minimisant simultanément les amplitudes et les DDA. Nous pouvons voir cette propriété comme un renforcement de la réjection des DDA connues.

**Lien avec le critère Constrained-MUSIC** Nous pouvons facilement vérifier que  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp(\omega, \omega_0)\mathbf{E}_{(\mathbf{B}(\omega_0) \ \mathbf{A}(\omega))} = \mathbf{0}$  et de ce fait que la fonction de coût  $\mathcal{C}(\bar{\alpha}, \omega)$  peut se décomposer en deux contributions s'écrivant

$$\mathcal{C}(\bar{\alpha}, \omega) = f_{\text{C-MUSIC}}(\omega) + f_{\text{COR}}(\omega) \quad (2.25)$$

où  $f_{\text{C-MUSIC}}(\omega)$  a été définie dans l'expression (2.12) et  $f_{\text{COR}}(\omega) = \left\| \mathbf{E}_{(\mathbf{B}(\omega_0) \ \mathbf{A}(\omega))}\mathbf{p}(\omega) \right\|^2$ . Comme nous pouvons le constater, l'expression ci-dessus correspond à la somme du critère C-MUSIC et d'une fonction corrective.

### Cas d'un nombre de capteurs élevé

Par souci de clarté et en considérant que le lecteur a intégré les composantes d'intérêts et interférentes, nous omettons dorénavant de spécifier à quelle classe de DDA les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont associées.

Nous commençons par exposer un résultat asymptotique concernant les projecteurs obliques.

**Proposition 2** *Pour  $L$  élevé et si  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$  intersectent trivialement, nous avons  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} \xrightarrow{L \gg 1} \mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{L} \mathbf{A} \mathbf{A}^H$  et  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})} \xrightarrow{L \gg 1} \mathbf{P}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{L} \mathbf{B} \mathbf{B}^H$ .*

*Preuve :* Comme  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{R}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{0}\}$ , nous avons  $\mathbf{p}(\theta_i)^H \mathbf{p}(\theta_j) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$  où  $i \in [1 : S]$  et  $j \in [S + 1 : M]$  alors  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$  sont mutuellement orthogonaux. Cela implique que  $\frac{1}{L} \mathbf{A}^H \mathbf{B}, \frac{1}{L} \mathbf{B}^H \mathbf{A} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mathbf{0}$ . En utilisant maintenant ces propriétés avec la définition d'un projecteur oblique donnée dans (1.3.2), il est aisé de montrer la proposition.

Il est évident et direct de voir que pour un nombre de capteurs élevé, nous avons

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow{L \gg 1} \boldsymbol{\alpha}^* \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\alpha}^* = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{p}(\omega). \quad (2.26)$$

D'après (2.17) et le fait que  $\mathbf{A}^\dagger \xrightarrow{L \gg 1} \frac{1}{L} \mathbf{A}^H$ , il est facile de montrer que  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow{L \gg 1} \boldsymbol{\alpha}^*$ . De plus, il vient que

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} \mathbf{p}(\omega) \xrightarrow{L \gg 1} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_A \mathbf{p}(\omega) \quad (2.27)$$

$$= \boldsymbol{\alpha}^* \quad (2.28)$$

où nous avons utilisé les résultats donnés dans la proposition 2. Par conséquent, les fonctions de coût P-MUSIC et WP-MUSIC deviennent

$$\mathcal{C}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \omega), \mathcal{C}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \omega) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha}^*, \omega) = \left\| \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{p}(\omega) \right\|^2.$$

Ce résultat signifie qu'asymptotiquement, les critères P-MUSIC et WP-MUSIC sont en réalité équivalents au critère MUSIC sur le sous-espace d'intérêt *orthonormalisé*. De plus, les algorithmes WP-MUSIC et P-MUSIC basés respectivement sur le critère  $\mathcal{C}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \omega)$  et  $\mathcal{C}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \omega)$  sont asymptotiquement équivalents. Cependant, pour des situations plus réalistes où  $L$  prend des valeurs raisonnables, nous montrons dans la partie simulation que les deux approches ne sont plus équivalentes, comme nous pouvons nous y attendre gr,ce aux démonstrations données dans la section 2.2.2.

### 2.2.3 Implémentation du critère WP-MUSIC

Comme revendiqué à la fin de la section 2.2.2, nous focalisons notre analyse sur l'algorithme WP-MUSIC. Pour implémenter cet algorithme, nous avons deux possibilités. Nous pouvons utiliser les expressions (2.22) ou (2.23). Cette dernière est plus parlante car elle explique comment l'algorithme WP-MUSIC fonctionne. Cependant, il est préférable d'implémenter l'expression (2.22) pour les deux raisons suivantes :

1. Plus de DDA peuvent être estimées. Puisque la seconde expression du critère WP-MUSIC fait intervenir le projecteur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp$ , nous devons satisfaire la contrainte  $M \leq L$

pour nous assurer que  $\mathbf{Z}$  est une matrice de rang  $M$ . En ce qui concerne la première expression, seules les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  interviennent dans le projecteur  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$ . Dans ce cas, les contraintes suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{Z}) &\implies S \leq M, \\ \mathbf{A} \text{ est de rang } S &\iff S \leq L, \\ \mathbf{B} \text{ est de rang } (M - S) &\iff M - S \leq L. \end{aligned}$$

Les deux dernières contraintes peuvent être reformulées comme  $\max(S, M - S) \leq L$  ce qui est moins restrictif que  $M \leq L$  puisque nous avons  $\max(S, M - S) \leq M$ . En fait, en combinant les contraintes sur le rang des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , nous obtenons  $M \leq 2L$  qui autorise des valeurs possibles pour  $M$  supérieures à  $L$ .

2. D'un point de vue coût de calcul, l'expression (2.23) nécessite l'estimation des projecteurs  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp$  et  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}$  alors que l'expression (2.22) ne nécessite que l'estimation du projecteur  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$ .

### Estimation des projecteurs obliques

**Invariance par changement de base** Les projecteurs obliques  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}$  et  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$  sont invariants par changement de base. En effet, une base du sous-espace  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  n'est pas unique. Considérons par exemple une autre base  $\Phi$  telle que  $\mathcal{R}(\Phi) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$ . Nous savons alors qu'il existe une matrice inversible de changement de base, que nous nommons  $\Theta$  telle que  $\Phi\Theta = \mathbf{A}$ . Dans ce cas, nous obtenons les deux égalités suivantes  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})} = \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A}\Theta^{-1})}$  et  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} = \mathbf{E}_{(\mathbf{A}\Theta^{-1} \ \mathbf{B})}$ . Cette propriété d'invariance pour  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}$  est une conséquence du fait que  $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^\perp$  est essentiellement unique car  $\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\Theta^{-1}\Theta\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ . En appliquant ce résultat au projecteur  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$ , nous montrons que

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{A}\Theta^{-1} \ \mathbf{B})} = \mathbf{A}\Theta^{-1}\Theta \left( \mathbf{A}^H \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^\perp \mathbf{A} \right)^{-1} (\Theta^{-1}\Theta)^H \mathbf{A}^H \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^\perp = \mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}. \quad (2.29)$$

### Estimation du projecteur $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$

Dans le critère (2.22), nous avons besoin d'estimer le projecteur  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$ . La connaissance du projecteur  $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^\perp$ , nous permet d'estimer une base du sous-espace engendré par  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ . Soit l'estimé de la matrice de covariance pondérée suivante :

$$\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{T} \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^\perp \mathbf{X} \mathbf{X}^H. \quad (2.30)$$

Comme  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$  admet une décomposition de type Vandermonde et comme nous supposons que  $\mathbf{R}_{\Lambda}$  est bloc-diagonale, alors il vient que

$$\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^\perp \mathbf{Z} \mathbf{R}_{\Lambda} \mathbf{Z}^H = \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^\perp \mathbf{A} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \mathbf{A}^H \quad (2.31)$$

et le rang de  $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}$  est de  $S$ . Considérons maintenant la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD, [Stoica and Moses, 2005, p.355]) de la matrice de covariance déflatée. Cette dernière admet la forme :

$$\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}} = \mathbf{U}\Sigma [\mathbf{V}_{\mathbf{A}} \quad \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}]^H \quad (2.32)$$

où  $\mathbf{V}_{\mathbf{A}}$  est une base unitaire de taille  $L \times S$  du sous-espace  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  et  $\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}$  est une base unitaire de taille  $L \times (L - S)$  du noyau de la matrice de covariance projetée. Nous utilisons la base droite car le projecteur  $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp}$  détruit le caractère hermitien de la covariance. Par conséquent le projecteur  $\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$  est calculé (estimé) par la méthode suivante :

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} = \mathbf{V}_{\mathbf{A}}(\mathbf{V}_{\mathbf{A}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp} \mathbf{V}_{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{V}_{\mathbf{A}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp} \quad (2.33)$$

$$= \mathbf{V}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp} \mathbf{V}_{\mathbf{A}})^{\dagger} \quad (2.34)$$

$$= \left( \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}} \right)^{\dagger} \quad (2.35)$$

où  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_{\mathbf{A}} \mathbf{V}_{\mathbf{A}}^H$ . En présence de bruit, il est préférable de considérer  $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}} = \frac{1}{T} \mathbf{U}_{\mathbf{B}}^H \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$  où  $\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$  est définie au travers de l'expression (2.66). En effet, nous avons montré que  $\mathbf{U}_{\mathbf{B}}^H$  ne détruisait pas les propriétés statistiques du bruit. Finalement, nous formulons la forme spectrale de l'algorithme WP-MUSICF.

### WP-MUSIC spectral

Le critère spectral WP-MUSIC est

$$\arg \max_{\omega} \mathcal{C}(\omega)^{-1} \quad \text{où} \quad \mathcal{C}(\omega) = \left\| \left( \mathbf{I}_L - \left( \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}} \right)^{\dagger} \right) \mathbf{p}(\omega) \right\|^2. \quad (2.36)$$

Les pics du pseudo-spectre,  $\mathcal{C}(\omega)^{-1}$ , coïncident avec les DDA inconnues. En remarque supplémentaire, la minimisation de  $\mathcal{C}(\omega)$  peut également être interprétée comme une recherche classique à une dimension d'un algorithme de type subspace fitting [Veen et al., 1993]. Il suffit pour cela de récrire le critère comme  $\mathcal{C}(\omega)^{-1} = \arg \max_{\omega} \text{Trace} \left( \left( \mathbf{I}_L - \left( \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}} \right)^{\dagger} \right) \mathbf{p}(\omega) \mathbf{p}(\omega)^H \right)$ .

### Root WP-MUSIC

La recherche des solutions appartenant à un ensemble discret (grille de recherche) associée au critère spectral WP-MUSIC est extrêmement coûteuse. Seulement, l'hypothèse ALU nous permet de construire un nouvel algorithme, basé sur une recherche de racines d'un polynôme. Cette nouvelle version, de type "root" de l'algorithme spectral WP-MUSIC est sans aucun doute moins coûteuse. De plus, il est bien connu aujourd'hui que la version de type "root" de l'algorithme MUSIC est nettement plus performante que sa version spectrale [Rao and Hari, 1989b].

**Principe de l'algorithme Root-C-MUSIC** Soit  $z = e^{-i\omega}$ . Le critère du Root-C-MUSIC<sup>5</sup> est donné par

$$f_{\text{C-MUSIC}}(z) = \mathbf{p} \left( \frac{1}{z} \right)^T \bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{Z}}^H \mathbf{p}(z) \quad (2.37)$$

où  $\bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{Z}}$  représente une base unitaire du sous-espace bruit  $\mathcal{R}(\hat{\mathbf{Z}})^\perp$  obtenue par la méthodologie introduite dans [DeGroat et al., 1993, Linebarger et al., 1995]. Grâce à l'hypothèse ALU,  $\mathbf{p}(\cdot)$  a une structure de Vandermonde et le problème d'estimation des DDA se résume à trouver les racines du polynôme centro-symétrique de dimension  $2L - 2$  ci-dessus. Cette symétrie est une conséquence du caractère hermitien du projecteur  $\bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{Z}}^H$  et le calcul explicite des coefficients de  $f_{\text{C-MUSIC}}(z)$ , notés  $\{q_\ell\}_{\ell \in [1-L:L-1]}$ , est obtenu par sommation le long des diagonales de la matrice de projection. De plus, nous avons  $q_\ell = q_{-\ell}^*$  et  $q_0$  est réel et égal à  $\text{Trace}(\bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{U}}_{\mathbf{Z}}^H) = L - M$ . En fin, nous vérifions facilement que  $f_{\text{C-MUSIC}}(z)$  est égal à son polynôme réciproque [Bistritz, 1984] et donc si  $z_m$  est une racine alors  $z_m^*{}^{-1}$  l'est également, *i.e.*,  $(z_m, z_m^*{}^{-1})$  apparaît en paires. Notons ici, que pour les  $M$  DDA désirées, nous avons contraint  $|z_m| = 1$ , *i.e.*, les DDA d'intérêt appartiennent au cercle unité. En présence de bruit, nous extrayons la DDA souhaitée (sélection d'une racine parmi les  $2L - 2$  possibles) en sélectionnant celle qui est la plus proche du cercle unité.

### Forme polynomiale de la fonction corrective et algorithme Root WP-MUSIC

Dans cette partie, nous suivons la même méthodologie adoptée pour le Root-C-MUSIC, et nous associons une forme polynomiale à  $f_{\text{COR}}(\omega)$  telle que pour toutes DDA inconnues, le polynôme suivant :

$$f_{\text{COR}}(z) = \mathbf{p} \left( \frac{1}{z} \right)^T \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}^H \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})} \mathbf{p}(z) \quad (2.38)$$

$$= \mathbf{p} \left( \frac{1}{z} \right)^T \left( \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \right)^\dagger \mathbf{p}(z) \quad (2.39)$$

s'annule. Par analogie avec l'expression (2.35), nous avons  $\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})} = \left( \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \right)^\dagger$ . Alors le polynôme (2.39) est obtenu en remarquant que :

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}^H \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})} = \left( \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \right)^\dagger \left( \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \right)^\dagger \quad (2.40)$$

$$= \left( \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \right)^\dagger \quad (2.41)$$

$$= \left( \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \right)^\dagger. \quad (2.42)$$

---

5. Ici encore nous donnons une version de type "root" de l'algorithme WP-MUSIC basé sur l'expression (2.23) puisque nous jugeons que cette dernière révèle et met nettement en évidence le lien entre le Root WP-MUSIC et le Root-C-MUSIC. Cependant, pour les deux raisons déjà citées et expliquées dans la section 2.2.3, il est préférable d'utiliser l'expression (2.22) pour implémenter l'algorithme Root WP-MUSIC basé sur la résolution du polynôme  $\mathbf{p}(1/z)^T \left( \mathbf{I}_L - \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}^H \right) \left( \mathbf{I}_L - \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} \right) \mathbf{p}(z)$  où le projecteur  $\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$  est donné par l'expression (2.35).



Notons, du fait que  $\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}^H \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}$  soit hermitien, les coefficients de  $f_{\text{COR}}(z)$ , notés  $\{p_\ell\}_{\ell \in [1-L:L-1]}$ , sont conjugués centro-symétrique, *i.e.*,  $p_\ell = p_{-L-\ell}^*$ ,  $p_0 = \text{Trace}(\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}^H \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})})$  et donc  $(z_m, z_m^{*-1})$  apparaît par paires. Par conséquent, le Root WP-MUSIC est basé sur le résultat suivant :

**Théorème 3** *Les  $S$  racines du polynôme  $\mathcal{C}(z) = f_{\text{C-MUSIC}}(z) + f_{\text{COR}}(z)$  où  $f_{\text{C-MUSIC}}(z)$  et  $f_{\text{COR}}(z)$  définies dans les expressions (2.37) and (2.38), respectivement, sont l'ensemble des DDA sans les DDA connues.*

*Preuve : voir Annexe 2.5.4.*

## 2.2.4 Simulations numériques

### Analyse numérique de la Prior-CRB

La géométrie adoptée est celle d'une Antenne Linéaires Uniforme (ALU). Nous prenons  $L = 10$  capteurs (antennes) et  $T = 100$  acquisitions. Ces données expérimentales nous permettent de déduire la résolution de Rayleigh correspondante soit environ  $0.24$  rad ( $14, 1^\circ$ ). Afin d'illustrer la comparaison entre les trois bornes étudiées : la  $\text{CRB}_{\mathbf{A}}$ , la  $\text{CRB}_{\mathbf{Z}}$  et la P-CRB, nous considérons deux scénarios.

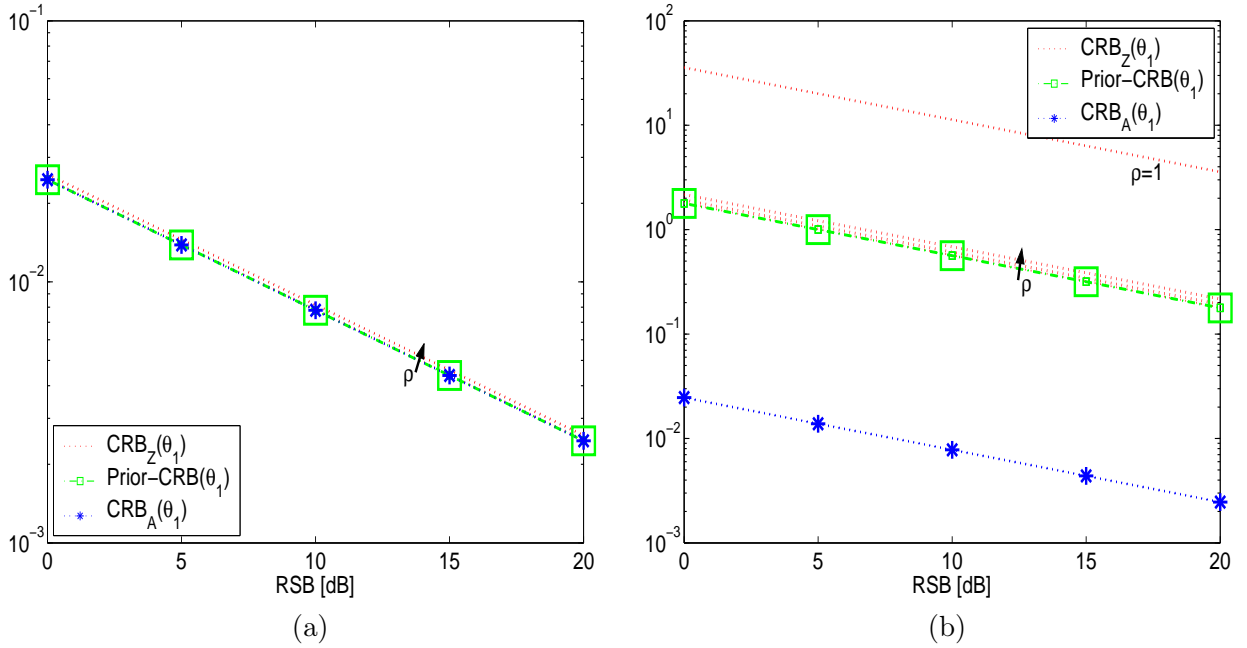
**Une DDA connue et une inconnue** Pour des raisons liées à la lecture (les DDA en degrés sont parfois plus parlantes que les pulsations spatiales  $\omega$ ), nous avons pris partie dans cette section de simulation d'étudier les performances au travers de la DDA  $\theta$ . Nous remarquons simplement que les performances ont été programmées avec la pulsation spatiale  $\omega$  puis transcrites en fonction de  $\theta$ .

Dans ce contexte,  $\theta_2$  ( $\omega_2$  par extension) est connue et  $\theta_1$  ( $\omega_1$ ) doit être estimée. La matrice de covariance des sources est donnée par  $\mathbf{R}_{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} & \rho \\ \rho^* & \mathbf{R}_{\Lambda_\beta} \end{bmatrix}$  avec  $\mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} = \mathbf{R}_{\Lambda_\beta} = \mathbf{I}$  et  $|\rho|^2 \in [0 : 0.99]$ . Le scénario où les sources sont cohérentes est admis quand la matrice de covariance spatiale devient singulière, *i.e.*, quand  $\rho = 1$ . Sur la figure Fig. 2.1-a, nous prenons différents cas : le cas de sources décorrélées, corrélées et cohérentes dont les DDA sont éloignées. Nous constatons alors que la Prior-CRB est sensiblement comparable à la CRB pour une ou deux DDA. Par suite, dans cette situation, la connaissance de  $\omega_2$  n'améliore pas l'estimation de  $\theta_1$ . Nous rejoignons et par la même confirmons les propriétés (vi) et (iii) même si les sources sont corrélées.

Sur la figure Fig. 2.1-b, les DDA sont proches. Dans ce cas, la CRB pour une DDA est bien inférieure à la P-CRB ainsi qu'à la CRB pour deux DDA, comme attendu gr,ce à (iv). De plus, quand la matrice de covariance des sources est bloc-diagonale, la P-CRB et la CRB pour deux DDA sont confondues ce qui confirme la propriété (iii) et illustre en particulier la propriété (iv). Il est important de remarquer que même si les sources sont fortement corrélées, le gain associé à la P-CRB par rapport à la CRB pour deux DDA est faible. Inversement, pour des sources cohérentes de DDA proches, la the P-CRB est nettement inférieure à la

CRB pour deux DDA. Cette observation illustre la propriété (v). Ce scénario nous permet donc de conclure sur l'apport de la connaissance *a priori* et ses bénéfices pour l'estimation des composantes inconnues.

Finalement, la figure Fig. 2.2, nous permet de valider la propriété (ii) en faisant varier le nombre de capteurs quand les DDA sont proches. Nous constatons que toutes les CRB convergent asymptotiquement vers une même tendance.



(a) DDA espacées ( $\theta = [5^\circ \ 80^\circ]$ ) (b) DDA proches ( $\theta = [5^\circ \ 5.2^\circ]$ ).

figure 2.1: Borne de Cramér-Rao Fct. du RSB

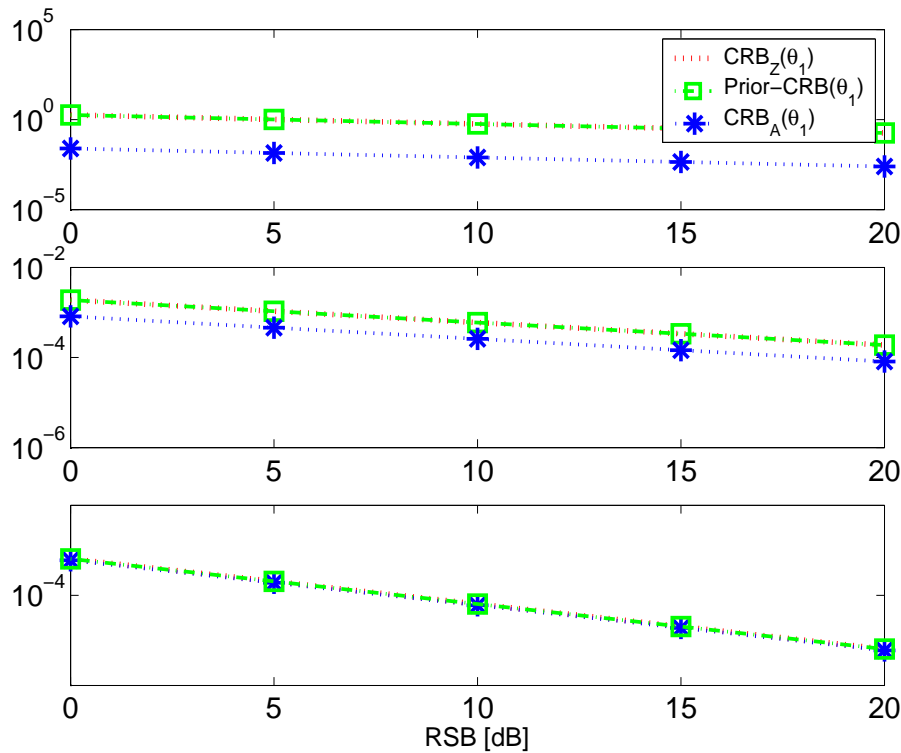
**Deux DDA connues et une inconnue** Dans cette partie, nous connaissons  $\theta_2$  et  $\theta_3$  et nous souhaitons estimer  $\theta_1$ . La covariance spatiale est alors donnée par

$$\mathbf{R}_\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^H & \mathbf{R}_{\Lambda_\beta} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

où  $\mathbf{v} = [\rho_{12} \ \rho_{13}]$ ,  $\mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} = 1$  et

$$\mathbf{R}_{\Lambda_\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{23} \\ \rho_{23}^* & 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

avec  $|\rho_{12}|^2 = 0.32$ ,  $|\rho_{23}|^2 = 0.99$  et  $\rho_{13}$  variant de la même façon que  $\rho$  dans la section précédente. Les DDA connues sont fortement corrélées et le coefficient de corrélation entre la DDA inconnue et la DDA associée à la troisième source varie jusqu'à la valeur correspondante au scénario de sources cohérentes. Sur la figure Fig. 2.3, nous avons reporté la CRB pour des DDA proches et éloignées. À la différence de de la section précédente, la P-CRB nous indique que l'exploitation de la connaissance *a priori* n'est intéressante que dans le cas de sources cohérentes dont les DDA sont proches.



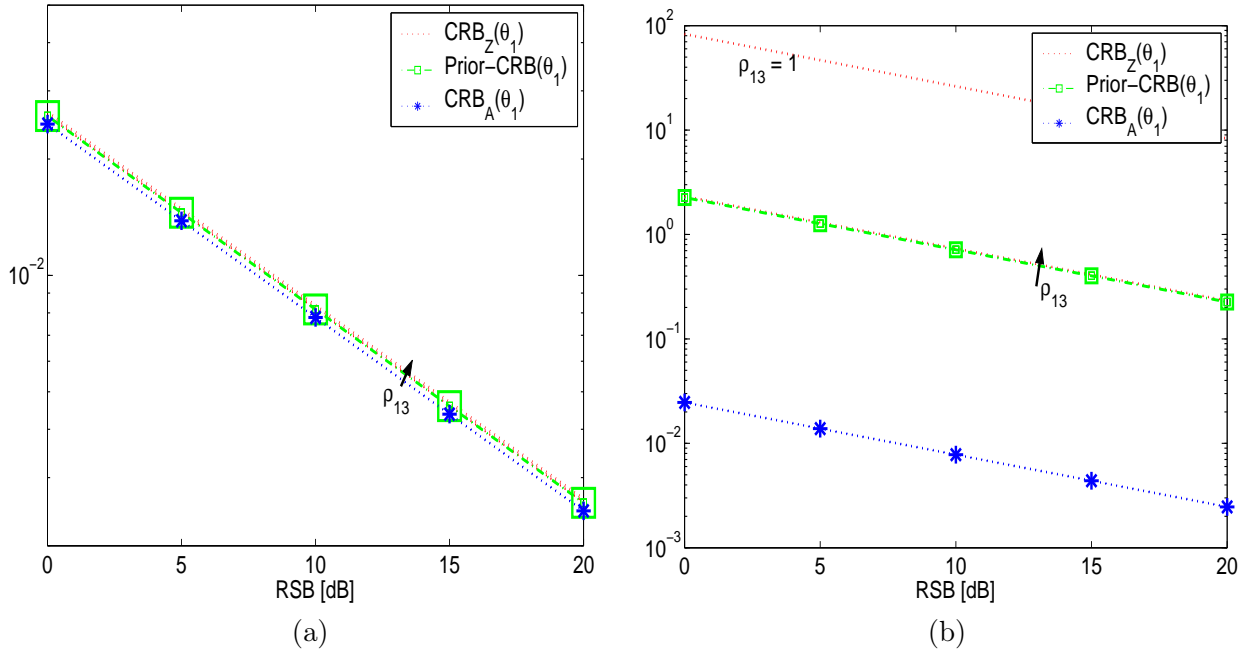
DDA proches, (Haut)  $L = 10$ , (milieu)  $L = 300$ , (bas)  $L = 1000$ .

figure 2.2: Borne de Cramér-Rao Fct. RSB

### Illustration de l'algorithme WP-MUSIC

Dans cette section, nous nous appuyons sur un exemple numérique dans le but d'illustrer l'algorithme WP-MUSIC. Sur la figure Fig. 2.4-a, nous donnons le pseudo-spectre des algorithmes C-MUSIC et WP-MUSIC pour trois DDA dont seulement une est connue et les deux autres doivent être estimées. Premièrement, notons que sur le pseudo-spectre de l'algorithme Prior-MUSIC, la DDA connue à  $100^\circ$  a complètement été annulée du pseudo-spectre de l'algorithme C-MUSIC sans même altérer les DDA inconnues. A la différence de l'algorithme C-MUSIC, la figure Fig. 2.4-b montre bien que  $\mathcal{C}(\omega)$  n'a uniquement que deux valeurs nulles, à  $50^\circ$  et à  $150^\circ$ .

La figure Fig. 2.4-c, montre la position des zéros par rapport au cercle unité pour les deux algorithmes, le Root-C-MUSIC et le Root WP-MUSIC. L'analyse de cette figure nous révèle plusieurs points essentiels. Tout d'abord, les zéros apparaissent par paire comme nous pouvions nous y attendre. La présence du bruit, complique cependant la tâche de sélection des meilleurs racines. Le critère de choix, mentionné dans les sections précédentes, où il s'agit de sélectionner le zéro ayant un module contraint à l'unité, n'est plus optimal dû au bruit. Par conséquent, le critère de sélection basé uniquement sur  $f_{\text{COR}}(z)$  ne nous permet pas réellement d'avoir la solution la plus optimale (proximité des zéros) et donc semble inefficace. A contrario, la prise de décision basée sur le critère  $\mathcal{C}(z)$  semble quant à elle beaucoup plus appropriée et



(a) DDA espacées ( $\omega = [5^\circ 80^\circ 40^\circ]$ ) (b) DDA proches ( $\omega = [5^\circ 5.2^\circ 7^\circ]$ )

figure 2.3: Borne de Cramér-Rao Fct. RSB

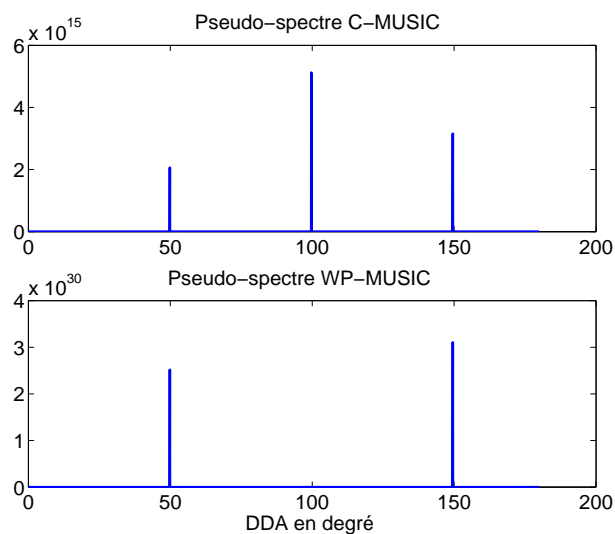
efficace.

## Performances des algorithmes

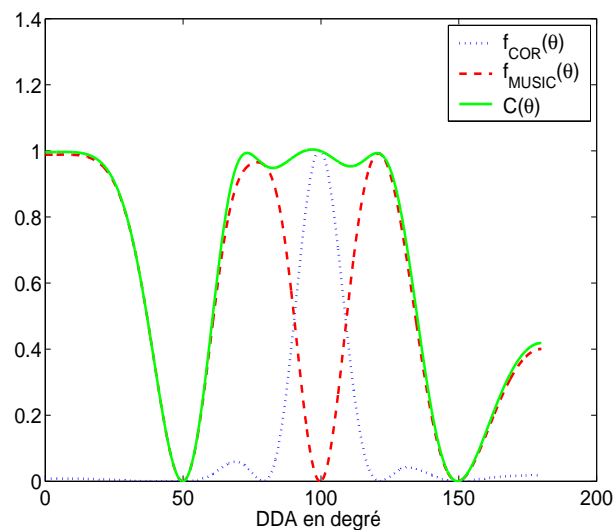
**Précision d'estimation des méthodes proposées** Nous supposons que la matrice de covariance des sources est bloc-diagonale. Les méthodes testées sont

- WP-MUSIC : L'algorithme MUSIC avec connaissance *a priori* basé sur la pseudo-inverse oblique pondérée (*cf.* section IV.B).
- P-MUSIC : L'algorithme MUSIC avec connaissance *a priori* basé sur une résolution classique des moindres carrés (LS) (*cf.* section 2.2.2).
- P-MUSIC (SI) : L'algorithme MUSIC avec connaissance *a priori* basé sur l'implémentation du projecteur oblique proposé par McCloud et Scharf [McCloud and Scharf, 2002].
- MUSIC : La version "Root" standard de l'algorithme MUSIC.
- C-MUSIC : La version "Root" de l'algorithme Constrained-MUSIC introduit par DeGroat *et al.* [DeGroat et al., 1993].

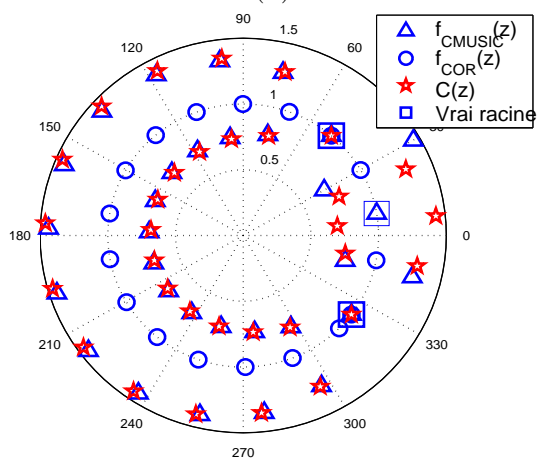
La précision d'estimation de la DDA d'intérêt est mesurée via la Déviation Standard qui n'est autre que la racine carré de l'erreur quadratique minimale (EQM). Chacune des simulations est basée sur 1000 essais de type Monte-Carlo. Sur la figure Fig. 2.5-a, nous considérons des DDA éloignées, par exemple,  $\theta = [80^\circ 5^\circ]$ . Dans cette situation, tous les algorithmes testés sont équivalents. Sur la figure Fig. 2.5-b, nous prenons des DDA proches, soit  $\theta = [8^\circ 5^\circ]$  qui correspond à une ouverture d'antenne bien plus petite que celle définie



(a)



(b)



(c)

(a) pseudo-spectre C-MUSIC et WP-MUSIC pour 3 DDA (une connue et deux inconnues), (b)  $f_{C-MUSIC}(\omega)$ ,  $f_{COR}(\omega)$  et  $C(\omega)$  pour  $L = 18$  capteurs, (c) position des zéros par rapport au cercle unité.

figure 2.4: Explication visuelle des algorithmes C-MUSIC et WP-MUSIC

par la résolution de Rayleigh dans le cas de 10 capteurs. Dans ce contexte particulier, la CRB pour deux DDA et la P-CRB de la DDA d'intérêt sont confondues, comme l'analyse théorique nous l'indique par la propriété (*iii*) du Théorème 1 (*cf.* section III.D) dans le contexte où sont présentes plus de deux sources. Notons que pour un RSB suffisant, les algorithmes C-MUSIC et MUSIC atteignent ces bornes mais ne peuvent pas les dépasser dans le cadre de deux DDA proches et d'une matrice de covariance des sources bloc-diagonale. Les algorithmes WP-MUSIC, P-MUSIC et P-MUSIC (SI) ont une Déviation Standard proche de la CRB pour une DDA à haut RSB. Cet exemple met en évidence le fait que l'influence de la DDA connue a pratiquement été annihilée par les algorithmes proposés. Ce qui n'est pas le cas pour l'algorithme C-MUSIC. L'analyse des figures 2.5-b and c, nous montre que l'algorithme WP-MUSIC est plus efficace que l'algorithme P-MUSIC à faible RSB ( $\approx 10$  dB) et pour des DDA proches. Cette observation confirme la discussion de la section 2.2.2. En fin, nous donnons par les figures Fig. 2.5-d,e et f, quelques expériences avec deux DDA connues et une inconnue. Les conclusions sont similaires au cas simple d'une DDA connue et d'une DDA inconnue.

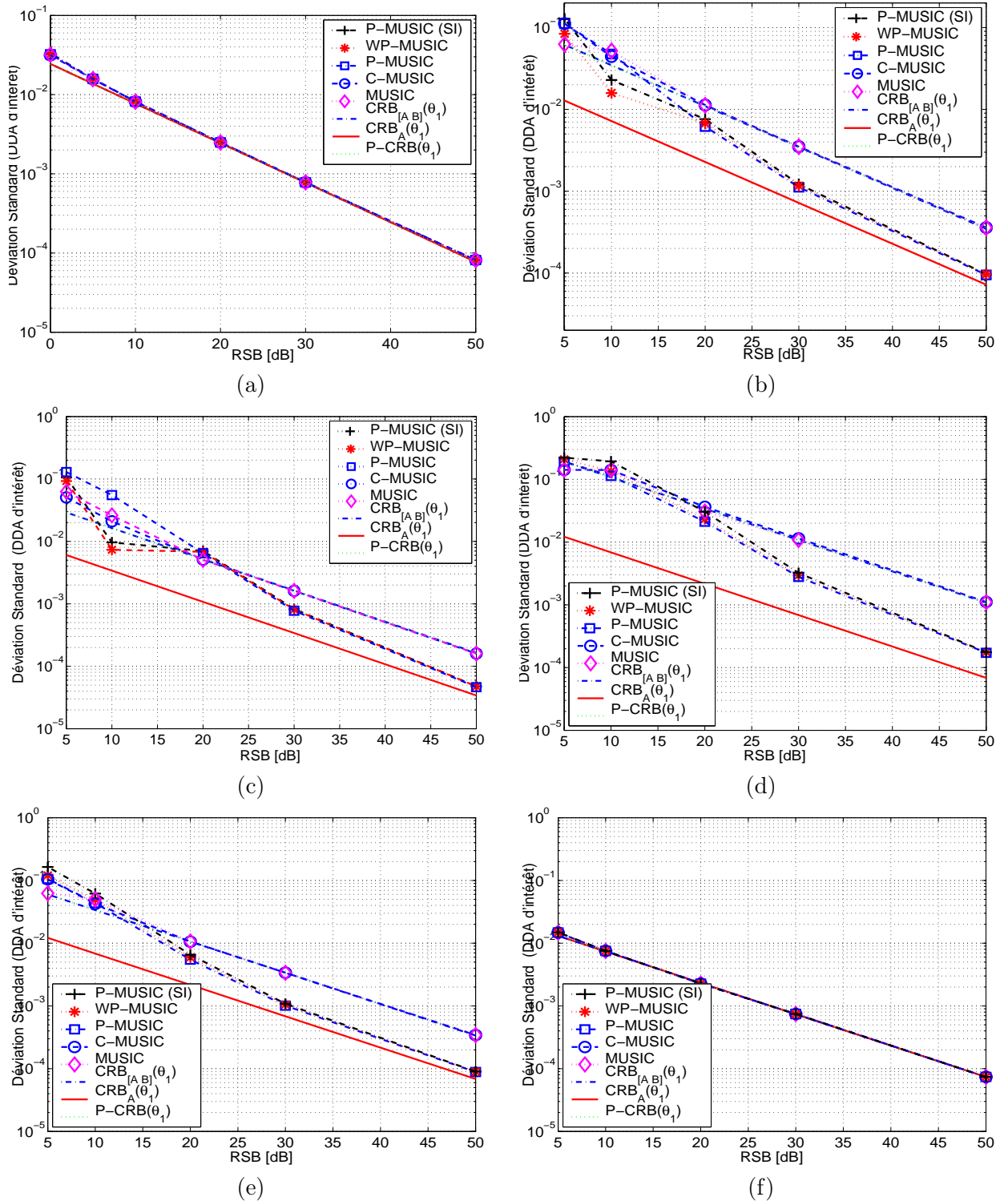


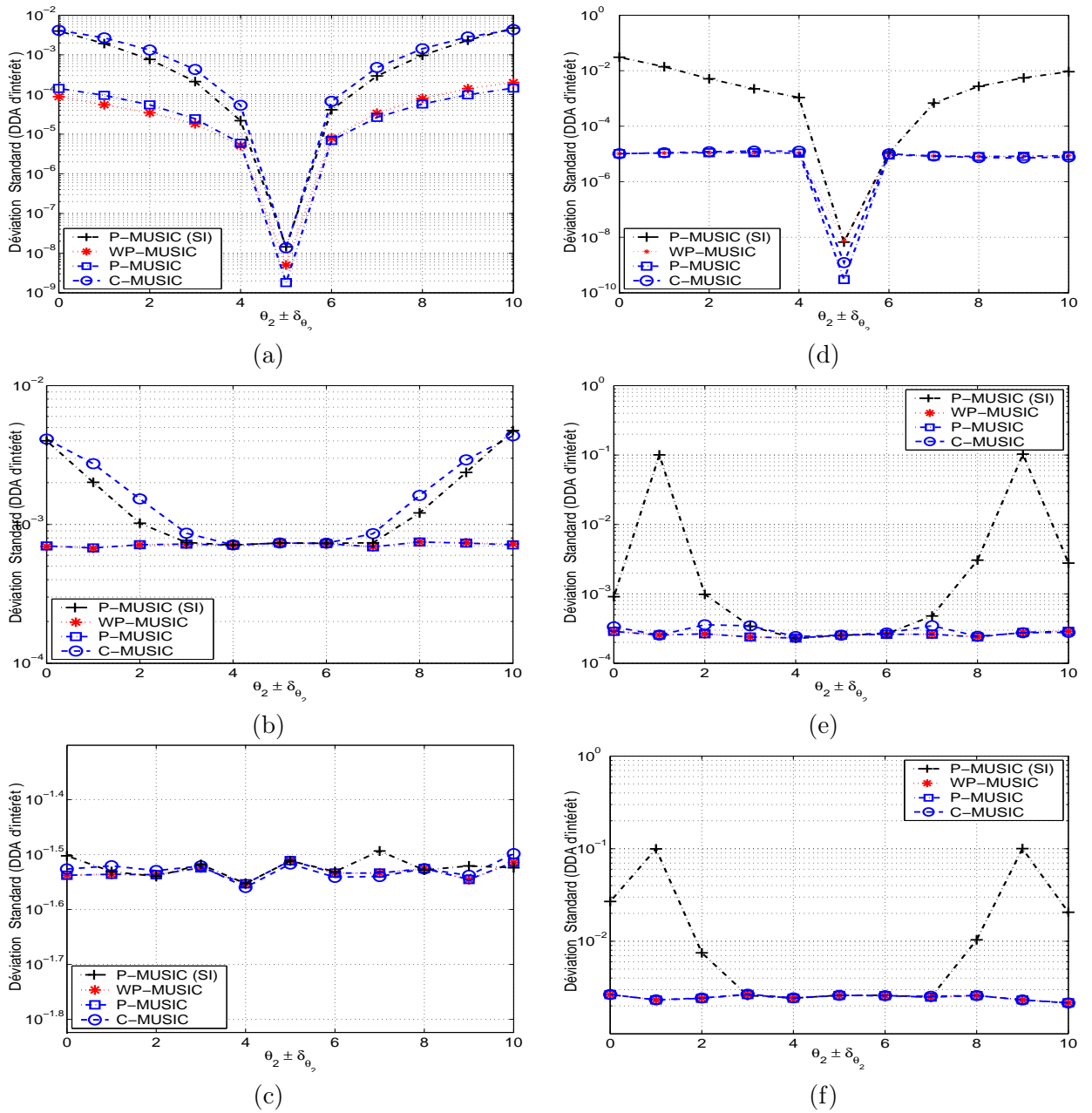
figure 2.5: Déviation Standard Fct. RSB pour deux sources et pour trois sources

**Robustesse à une légère variation sur l'*a priori*** Le contexte reste identique à celui qui nous a servi pour le tracé de la figure Fig. 2.5-a, *i.e.*, une DDA connue dont  $\theta_1 = 80^\circ$  et une DDA inconnue dont  $\theta_2 = 5^\circ$ . Nous perturbons  $\theta_2$  par la quantité  $\pm\delta_{\theta_2} = 5^\circ$  et nous calculons la déviation standard pour la DDA d'intérêt,  $\theta_1$ . Nous répétons ce scénario pour différentes valeurs du RSB et pour différentes valeurs du nombre de capteurs. Le nombre d'acquisition est égale à 100.

La figure Fig. 2.6-a montre que sans bruit, les algorithmes P-MUSIC (SI) et C-MUSIC sont très sensibles à une petite variation sur la DDA connue. A contrario, les algorithmes P-MUSIC et WP-MUSIC sont plus robustes. Ces observations sont confirmées par la figure Fig. 2.6-b où le RSB est égal à 30 dB. En effet, nous remarquons la très forte robustesse des algorithmes P-MUSIC et WP-MUSIC gr,ce la forme quasi plate de leur déviation standard. Ceci constitue un avantage indéniable de ces nouvelles approches. Enfin, l'expérience de la figure 2.6-c, nous montre qu'à faible RSB (0 dB) toutes les méthodes souffrent d'un manque de robustesse. Dans ce cas, l'erreur induite par le bruit domine l'erreur associée à la DDA connue.

Sur la figure Fig. 2.6-d, nous avons tracé la déviation standard des méthodes proposées sans bruit et pour un nombre de capteurs important ( $L = 100$ ). Encore une fois, comme nous pouvions nous y attendre, dans ce régime asymptotique, les algorithmes C-MUSIC, P-MUSIC et WP-MUSIC ont la même efficacité et la même robustesse. Nous remarquons toutefois les mauvaises performances de l'algorithme P-MUSIC (SI). Ces remarques sont appuyées par l'analyse des figures Fig. 2.6-e et 2.6-f dans le contexte bruité.





$L = 10$  capteurs, (a) sans bruit, (b) avec un RSB= 30 dB, (c) avec un RSB= 0 dB.  $L = 100$  capteurs et  $T = 100$  acquisitions, (d) sans bruit, (e) avec  $L = 30$  capteurs et  $T = 100$  acquisitions et un RSB = 30 dB, (f) avec un RSB = 0 dB.

figure 2.6: Déviation Standard Fct. de l'erreur sur la DDA connue

### Conclusion de la partie simulation

1. Pour un faible nombre de capteurs, l'algorithme WP-MUSIC est l'algorithme ayant les meilleures performances et robustesse à une légère erreur de la DDA connue. En particulier, la précision d'estimation de cet algorithme est proche de celle donnée par la CRB associée au sous-espace d'intérêt. Par conséquent nous pouvons dire que l'influence de la DDA connue a pratiquement été annulée.
2. Comme expliqué dans la section 2.2.2, ainsi que dans la partie simulation, l'algorithme P-MUSIC est légèrement moins efficace que l'algorithme WP-MUSIC. Leur robustesse est néanmoins comparable. Cet algorithme est donc une solution convenable.
3. L'algorithme P-MUSIC (SI) a des performances similaires aux algorithmes P-MUSIC et WP-MUSIC à fort RSB mais cet algorithme reste toutefois moins efficace et précis dans de nombreux cas de figure. De plus l'algorithme P-MUSIC (SI) est très peu robuste. Pour les raisons mentionnées, nous préférons donc l'implémentation du projecteur oblique introduite dans la section V.A plutôt que celle présentée par McCloud et Scharf<sup>6</sup>.
4. Pour un faible nombre de capteurs et dans le cas de DDA proches dont la matrice de covariance des sources est bloc-diagonale, les algorithmes P-MUSIC, WP-MUSIC et P-MUSIC (SI) sont nettement plus performant que l'algorithme C-MUSIC, en particulier à fort RSB où l'algorithme C-MUSIC est minoré par la CRB du sous-espace signal entier. Pour un nombre de capteurs élevé et/ou des sources éloignées, cet algorithme est équivalent à tous les algorithmes basés sur les projecteurs obliques.

#### 2.2.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté une solution de type sous-espace pour estimer  $S$  DDA sur un ensemble  $M$  en utilisant la connaissance de  $M - S$  DDA préalablement connues. Dans un premier temps, nous avons établi et analysé la borne de Cramér-Rao associée à la déflation orthogonale du sous-espace signal et nous avons montré les limitations (importantes) liées à ce type d'approche. Par conséquent, dans un deuxième temps, nous avons proposé des solutions alternatives basées sur la projection oblique du sous-espace signal. Nous montrons par ailleurs que les algorithmes proposés, que nous nommons Prior-MUSIC, annulent quasiment l'influence de la DDA connue (ou de l'ensemble des DDA connues) sur la DDA d'intérêt, en particulier quand les DDA sont proches et que la matrice de covariance des sources est bloc-diagonale. En conclusion, l'étude et l'utilisation des projecteurs obliques fournissent une méthodologie appropriée pour l'intégration d'une connaissance *a priori* dans les méthodes de type sous-espace ou de façon plus générale dans les méthodes de type Subspace Fitting. L'analyse des résultats de simulation nous montre de meilleures performances, nous allons donc dans la partie suivante, proposer une explication théorique.

---

6. Remarque : dans ce travail, la méthode proposée suppose également l'hypothèse d'une matrice de covariance des sources bloc-diagonale.

## 2.3 L'algorithme MinNorm avec connaissance *a priori* : variances théoriques et analyse

### 2.3.1 Introduction

Dans cette partie, nous proposons les versions MinNorm des algorithmes WP-MUSIC, P-MUSIC et C-MUSIC introduit précédemment, motivés par les résultats de [Kaveh and Barabell, 1986] montrant que l'algorithme MinNorm a une meilleure résolution que l'algorithme MUSIC dans le cas d'une Antenne Linéaire et Uniforme (ALU) et un coût de calcul moindre [Stoica and Moses, 2005]. Ces deux points sont essentiels pour une application mécanique dans le contexte des engrenages (réducteurs).

Dans la partie précédente, les performances des algorithmes basés sur la projection oblique et non orthogonale ont montré les meilleures performances. Le but de cette partie est de donner des éléments de réponse quant à leur efficacité en comparaison des autres algorithmes, au travers de leur version MinNorm. Pour ce faire, nous dérivons les variances théoriques des algorithmes WP-MinNorm, P-MinNorm and C-MinNorm (versions MinNorm des algorithmes proposés). En particulier, nous étudions ces algorithmes et expliquons pourquoi la déflation oblique est si efficace dans le contexte de DDA proches pour un nombre faible/modéré de capteurs.

La partie s'organise de la façon suivante. Dans la Section 2.3.2 nous donnons brièvement les versions MinNorm des algorithmes proposés, puis nous donnons les variances théoriques de ces algorithmes dans la partie 2.3.3. Nous vérifions la validité des expressions théoriques par comparaison des valeurs de simulation dans la partie 2.3.4. Puis nous réalisons une étude détaillée des expressions données en regardant théoriquement et numériquement le cas du régime asymptotique et le cas de deux sources proches dans les parties 2.3.5, 2.3.6. Enfin, nous dressons une conclusion dans la partie 2.4 et les preuves des Théorèmes sont déferées dans l'Annexe.

### 2.3.2 Formulation des algorithmes Weighted Prior-MinNorm, et Prior MinNorm

Nous donnons dans cette partie les formulations des algorithmes de type MinNorm obtenu à partir des critères introduits dans le chapitre 2 avec  $\mathbf{W} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T$ . Nous avons donc

$$\arg \min_{\alpha, \omega} \left\| \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} \mathbf{Z} \alpha_z \right\|_{\mathbf{W}}^2 \quad (2.45)$$

où

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{P}_B^\perp \quad (2.46)$$

est le projecteur oblique sur le sous-espace d'intérêt,  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ , suivant le sous-espace associé aux DDA interférentes  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ . Nous dérivons d'une manière identique à (2.2.2) le critère (2.45) et nous obtenons facilement

$$\arg \min_{\omega} |f_{\text{WP}}(\omega)|^2 \quad \text{où} \quad f_{\text{WP}}(\omega) = 1 - \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \ \mathbf{B})} \mathbf{p}(\omega) \quad (2.47)$$

$$\arg \min_{\omega} |f_{\text{P}}(\omega)|^2 \quad \text{où} \quad f_{\text{P}}(\omega) = \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{p}(\omega). \quad (2.48)$$

### Recherche de type Root pour le cas ALU

Les projecteurs obliques restant identiques à ceux définis en (2.2.3), nous avons toujours la propriété d'unicité qui permet l'estimation des projecteurs. Nous développons les même stratégies que celle proposées dans le chapitre précédent et nous donnons ci-dessous les versions Root des algorithmes de type MinNorm par le Théorème suivant.

**Théorème 4** Soit  $z = e^{-i\omega}$ . Les paramètres d'intérêt sont les  $S$  racines des polynômes suivants :

$$f_{\text{WP}}(z) = f_{\text{C}}(z) + f_{\text{COR}}(z) \quad \text{où} \quad f_{\text{COR}}(z) = \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \mathbf{p}(z) \quad (2.49)$$

pour l'algorithme WP-MinNorm et

$$f_{\text{P}}(z) = \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{P}}_{\text{A}}^{\perp} \mathbf{p}(z) \quad (2.50)$$

pour l'algorithme P-MinNorm.

*Preuve : voir Annexe 2.5.5.*

L'analyse de (2.49) nous permet d'interpréter l'algorithme WP-MinNorm comme la somme du critère C-MinNorm et d'une fonction de correction que nous nommons  $f_{\text{COR}}(z)$ .<sup>7</sup>

### 2.3.3 Analyse des variances des algorithmes de type MinNorm *a priori*

Dans cette section, nous dérivons les expressions des variances théoriques des algorithmes Root WP-MinNorm, Root P-MinNorm et Root Constrained MinNorm. Cette analyse suit la méthodologie (ainsi que les hypothèses) introduite en référence [Krim and Viberg, 1996] lorsque les projecteurs estimés sont perturbés par une mauvaise estimation de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ .

**Théorème 5** Sous l'hypothèse que la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Lambda_{\alpha}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\Lambda_{\beta}} \end{bmatrix}$  est bloc-diagonale et pour un RSB suffisant, les variances théoriques des algorithmes Root WP-MinNorm, P-MinNorm, et Root Constrained MinNorm sont respectivement données par

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_i) = \sigma^2 \frac{(\mathbf{e}_1^T (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} + \mathbf{\Omega}) \mathbf{e}_1) (\mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{S}_{\text{A}}^{\dagger} \mathbf{R}_{\text{A}} \mathbf{S}_{\text{A}}^{\dagger} \mathbf{p}(\omega_i))}{2T |\mathbf{e}_1^T \mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})} \mathbf{p}'(\omega_i)|^2}, \quad (2.51)$$

$$\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_i) = \sigma^2 \frac{(\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\text{A}}^{\perp} \mathbf{e}_1) (\mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{S}_{\text{A}}^{\dagger} \mathbf{R}_{\text{A}} \mathbf{S}_{\text{A}}^{\dagger} \mathbf{p}(\omega_i))}{2T |\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\text{A}}^{\perp} \mathbf{p}'(\omega_i)|^2}, \quad (2.52)$$

$$\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_i) = \sigma^2 \frac{(\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{e}_1) (\mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{S}_{\text{A}}^{\dagger} \mathbf{R}_{\text{A}} \mathbf{S}_{\text{A}}^{\dagger} \mathbf{p}(\omega_i))}{2T |\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{p}'(\omega_i)|^2} \quad (2.53)$$

<sup>7</sup> ici encore l'interprétation est similaire à celle évoquée dans le chapitre précédent, nous conservons toutefois exactement les mêmes lien mais avec l'approche MinNorm plutôt que celle de MUSIC.

où  $\Omega = \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$ ,  $\mathbf{R}_A = \mathbf{S}_A + \sigma^2 \mathbf{I}_S$ , avec  $\mathbf{S}_A = \mathbf{A} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \mathbf{A}^H$  et où  $\mathbf{p}'(\omega_i) = \left. \frac{\partial \mathbf{p}(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_i}$ .

*Preuve : voir Annexe 2.5.6.*

Dans la suite, nous introduisons en :

- 2.3.4 une analyse numérique permettant la validation des expressions théoriques par adéquation aux mesures issues de la simulation.
- 2.3.5 une analyse théorique des variances (2.51)-(2.53) lorsque le nombre de capteurs est élevé (comportement asymptotique).
- 2.3.6 une analyse théorique des variances lorsque le nombre de capteurs est faible/modéré et pour deux sources de DDA proches.

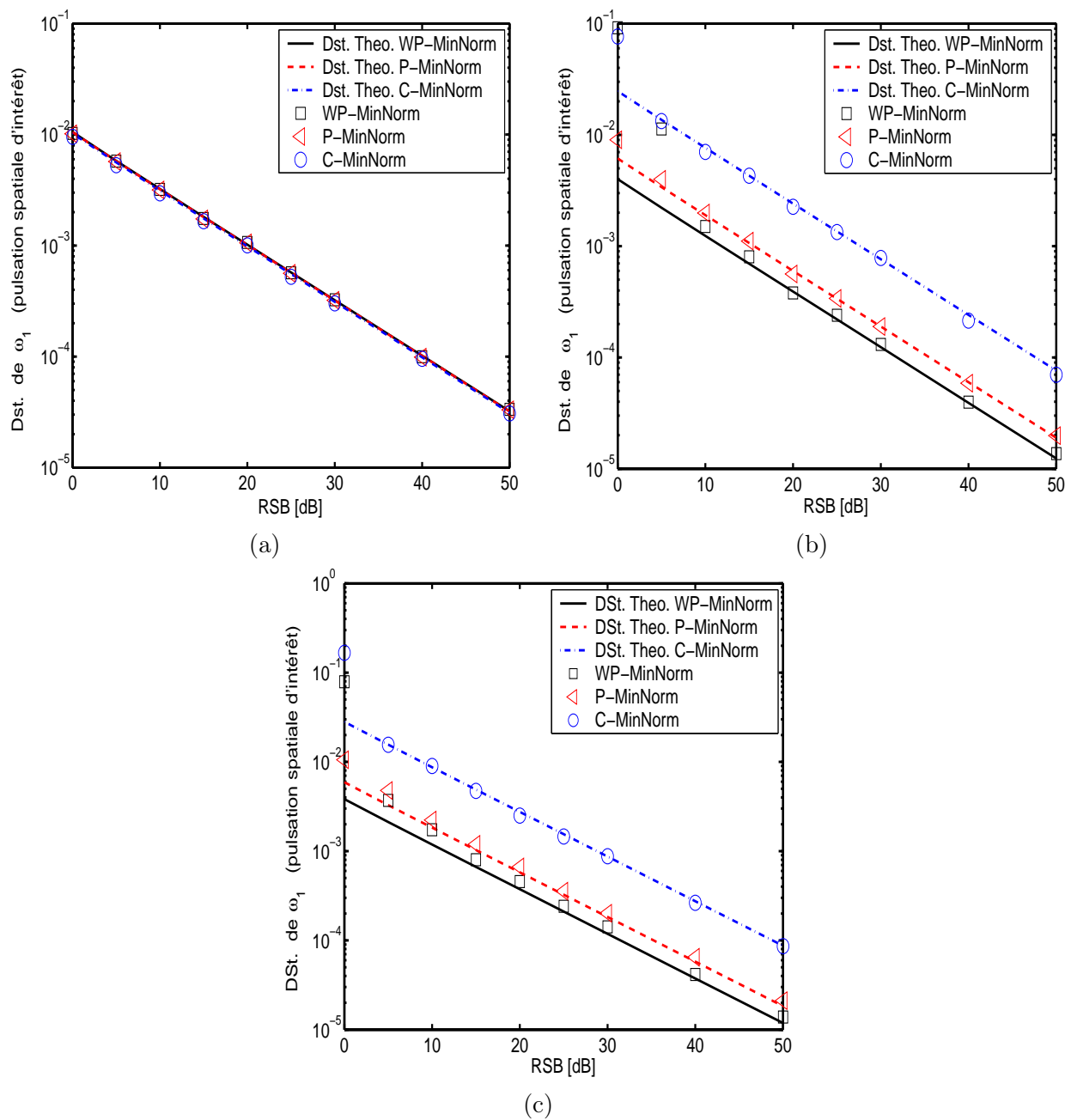
### 2.3.4 Validation numérique

Les paramètres adoptés pour l'Antenne Linéaire et Uniforme (ALU) sont : une distance inter-capteur d'une demi longueur d'onde,  $T = 100$  acquisitions et  $L = 25$  capteurs. Les performances des méthodes proposées sont comparées à celles du Root Constrained MinNorm [DeGroat et al., 1993]<sup>8</sup>. La Fig. 2.7-a montre clairement que tous les algorithmes sont équivalents quand les DDA sont espacées et de ce fait que les méthodes proposées n'apportent aucune amélioration par rapport au Root Constrained MinNorm. Fig. 2.7-b nous indique par contre que les algorithmes WP-MinNorm et P-MinNorm ont chacun, une variance plus petite que la variance de l'algorithme Root Constrained MinNorm quand les DDA sont proches. De plus, la meilleure précision est obtenue par l'algorithme WP-MinNorm. Enfin, les Fig. 2.7-a, b and c montrent la très bonne adéquation entre les variances théoriques dérivées dans le Théorème 5 par comparaison aux valeurs pratiques mesurées, que ce soit pour le cas de 2 DDA espacées Fig. 2.7-a, de 2 DDA proches Fig. 2.7-b ou de trois DDA relativement proches Fig. 2.7-c.

Ces simulations numériques nous rappellent que les algorithmes de type prior (*a priori*) sont plus performants (chapitre (2) et [Boyer and Bouleux, ]) que les algorithmes à déflation orthogonale. De plus, nous validons les expressions théoriques dérivées. De ces expressions nous donnons une analyse asymptotique et une analyse lorsque les DDA sont proches (2.3.5 et 2.3.6 respectivement).

---

8. bien que dans cette référence seule la version spectrale soit abordée, nous privilégions ici le concept du constrained MinNorm car son extension polynomiale est évidente.



(a) DDA espacées avec  $\omega = [-0.1 \ -1.57]$  rad, (b) DDA proches avec  $\omega = [-0.59 \ -0.54]$  rad, (c) DDA proches avec  $\omega = [-0.59 \ -0.54 \ -0.76]$  rad.

figure 2.7: Déviation Standard Fct. RSB

### 2.3.5 Variances asymptotiques et comparaison avec l'algorithme MinNorm

La variance de l'algorithme MinNorm peut être trouvée dans [Krim and Viberg, 1996] et par la suite, nous la notons par  $\text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_i)$ . Les variances asymptotiques, *i.e.* pour un nombre élevé de capteurs, des algorithmes considérés sont données dans le Théorème suivant.

**Théorème 6** *Pour un grand nombre de capteurs ( $L$  élevé) et pour un  $RSB$  suffisant, les variances asymptotiques des algorithmes Root WP-MinNorm, P-MinNorm, C-MinNorm and Root MinNorm, sont données par*

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_i) = \text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_i) = \frac{2(L - S)}{TL^3 RSB_i}, \quad (2.54)$$

$$\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_i) = \text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_i) = \frac{2(L - M)}{TL^3 RSB_i} \quad (2.55)$$

où  $RSB_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}$  pour  $i \in [1 : S]$  avec  $\sigma_i^2$  la variance de la  $i^{\text{ième}}$  source.

*Preuve : voir Annexe 2.5.8.*

Soit les ratios

$$\rho = \frac{\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_i)}{\text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_i)} = \frac{\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_i)}{\text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_i)} = \frac{\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_i)}{\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_i)} = \frac{\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_i)}{\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_i)} = \frac{L - S}{L - M}.$$

Alors nous avons :

– si  $M \gg S$ , alors  $\rho \gg 1$  et

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_i) = \text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_i) \gg \text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_i) = \text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_i).$$

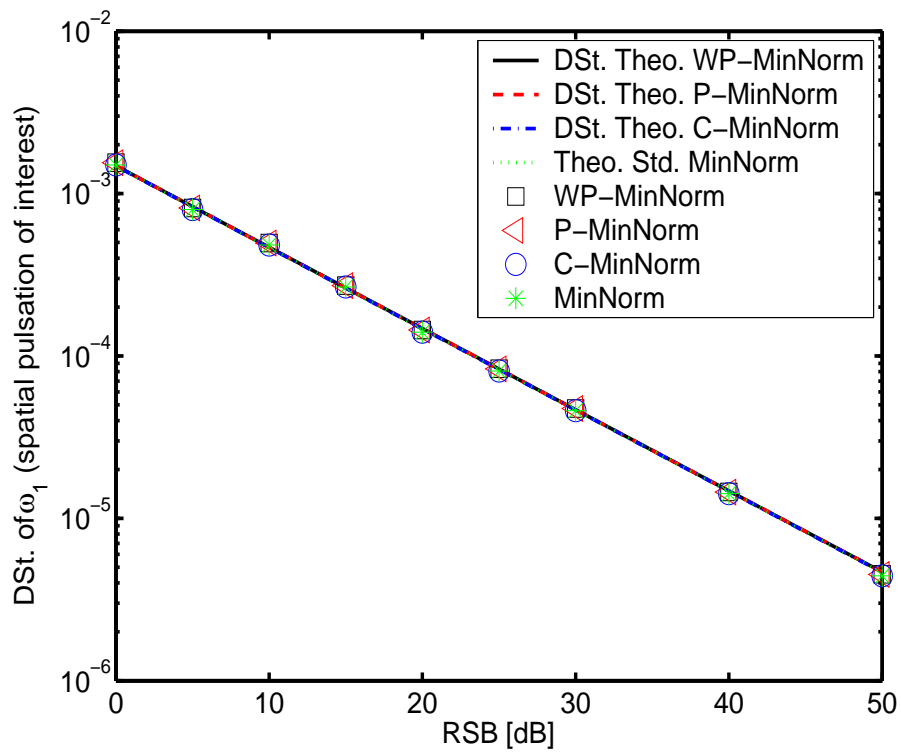
– si  $M = O(S)$  ou  $L \gg M$  alors  $\rho \approx 1$  et

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_i) = \text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_i) \approx \text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_i) = \text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_i).$$

Afin d'illustrer le Théorème 6, nous testons les algorithmes de type prior (*a priori*) avec un grand nombre de capteurs ( $L = 100$ ) et nous comparons les valeurs pratiques aux valeurs théoriques. L'analyse de la Fig. 2.8 montre la bonne adéquation entre valeurs pratiques et théoriques. Ceci confirme les résultats donnés dans le Théorème 6, *i.e.*, dans le cas d'un régime asymptotique la connaissance *a priori* n'améliore pas l'estimation des DDA d'intérêt comparativement aux algorithmes MinNorm et Constrained MinNorm. Néanmoins, nous rappelons avec conviction que même si tous les algorithmes sont équivalents dans ce régime, seuls les algorithmes de type prior peuvent estimer uniquement la DDA d'intérêt<sup>9</sup>. En conclusion, pour de nombreux capteurs, l'exploitation de la connaissance *a priori* n'est pas déterminante.

---

9. dans ces simulations l'algorithme MinNorm admet par exemple un pourcentage de "détection" de la DDA d'intérêt d'environ 50%



$\omega = [-0.43, -0.65]$  rad et  $L = 100$  capteurs.

figure 2.8: Déviation Standard Fct. RSB



### 2.3.6 Variances dans le cas de deux DDA proches

Considérons dorénavant le cas d'un signal composé de deux sources (une d'intérêt et une d'interférence). D'après cette hypothèse les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  s'écrivent  $\mathbf{A} = \mathbf{p}(\omega_1)$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{p}(\omega_2)$ . Nous supposons que les pulsations spatiales  $\omega_1$  et  $\omega_2$  soient suffisamment proches pour avoir

$$\Delta_\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll 1.$$

Par conséquent,  $\mathbf{p}(\omega_2)$  peut être bien approximé par son développement de Taylor au premier ordre, d'où

$$\mathbf{p}(\omega_2) \stackrel{1}{=} \mathbf{p}(\omega_1) + \Delta_\omega \mathbf{p}'(\omega_1)$$

où  $\mathbf{p}'(\omega_1)$ . Basé sur cette approximation au premier ordre ainsi que sur les expressions (2.51)-(2.53), il est aisé d'énoncer le Théorème suivant.

**Théorème 7** *Pour deux DDA/pulsations spatiales avec  $\Delta_\omega \ll 1$ , nous avons les variances suivantes :*

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1) = \frac{12 + \Delta_\omega^2(L-2)(L-1)^2}{L(L^2-1)} \bar{\xi}_1 \quad (2.56)$$

$$\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1) = \frac{4}{L(L-1)} \bar{\xi}_1 \quad (2.57)$$

$$\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1) = \frac{144}{\Delta_\omega^2 L(L^2-1)(L-2)} \bar{\xi}_1 \quad (2.58)$$

$$\text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_1) = \frac{144}{\Delta_\omega^2 L(L^2-1)(L-2)} \xi_1 \quad (2.59)$$

où  $\bar{\xi}_1 = \frac{1}{2T RSB_1} \left(1 + \frac{1}{RSB_1} \frac{1}{L}\right)$  et où  $\xi_1 = \frac{1}{2T RSB_1} \left(1 + \frac{1}{RSB_1} \frac{12}{\Delta_\omega^2 L(L^2-1)}\right)$ .

*Preuve : voir Annexe 2.5.9.*

Dans ce qui suit nous analysons les différentes interprétations de ce Théorème.

– L'inspection du comportement des variances proposées pour  $\Delta_\omega \rightarrow 0$ , est utile car

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1) \xrightarrow{\Delta_\omega \rightarrow 0} \frac{12}{L(L^2-1)} \bar{\xi}_1, \quad (2.60)$$

$$\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_i) \xrightarrow{\Delta_\omega \rightarrow 0} \frac{4}{L(L-1)} \bar{\xi}_1, \quad (2.61)$$

$$\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1), \text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1) \xrightarrow{\Delta_\omega \rightarrow 0} \infty. \quad (2.62)$$

Clairement, les variances des algorithmes C-MinNorm et MinNorm sont très sensibles à la proximité des DDA/pulsations spatiales. Ce n'est par contre pas le cas pour les deux schémas proposés. De plus, nous avons

$$\frac{\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1)}{\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1)} \xrightarrow{\Delta_\omega \rightarrow 0} \frac{3}{L+1}$$

et donc pour  $L > 2$ , nous avons

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1) < \text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1). \quad (2.63)$$

En conséquence, pour des DDA/pulsations spatiales proches, l'algorithme WP-MinNorm une meilleur précision que l'algorithme P-MinNorm.

- Pour un  $\Delta_\omega$  moins faible, nous avons représenté la quantité  $R(L) = \sqrt{\frac{12}{(L-2)(L-1)^2}}$  sur la Fig. 2.9-a. Sur cette figure, nous pouvons voir que les conclusions données dans le point précédent sont valides pour un nombre peu conséquent de capteur (faible nombre) ce qui satisfait

$$\Delta_\omega \ll R(L) \quad (2.64)$$

Cette conclusion est renforcée par les résultats de la Fig. 2-b où la variance de l'algorithme WP-MinNorm est tracée en fonction du nombre de capteurs  $L$ . Clairement, pour  $5 \leq L < 10$  (faible nombre de capteurs  $L$ ) toutes les variances sont proches, signifiant que  $\Delta_\omega^2(L-2)(L-1)^2$  peut être négligé dans (2.56).

- Inversement, pour des valeurs plus élevées mais toujours modérées de  $L$ , typiquement  $10 < L \leq 30$ , la condition (2.64) n'est plus vérifiée. Dans ce cas, nous traçons sur la Fig. 2.10 les ratios suivants :

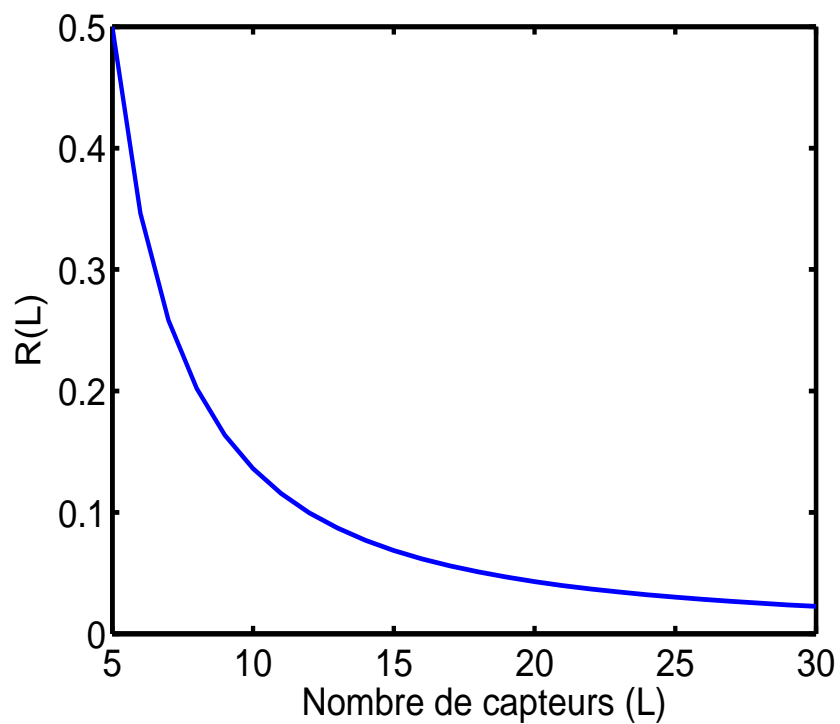
$$\rho_1(\Delta_\omega, L) = \frac{\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1)}{\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1)} \quad \rho_2(\Delta_\omega, L) = \frac{\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1)}{\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1)} \quad \rho_3(\Delta_\omega, L, \text{RSB}_1) = \frac{\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1)}{\text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_1)}.$$

Notons en premier lieu que les ratios  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont indépendants du nombre d'acquisitions  $T$  ainsi que du RSB. Au contraire, l'algorithme standard MinNorm, via  $\rho_3$  est dépendant du RSB. D'après la Fig. 2.10-a, nous pouvons voir que  $\rho_1(\Delta_\omega, L) \leq 1$  et donc que le WP-MinNorm est plus précis que le P-MinNorm pour une large plage du nombre de capteurs. Nous notons de plus, que plus les pulsations spatiales sont proches, plus ce fait est vérifié. La Fig. 2.10-b montre que  $\rho_2(\Delta_\omega, L) \leq 1$ , impliquant de ce fait que l'algorithme P-MinNorm est clairement plus efficace que l'algorithme C-MinNorm. Cette figure confirme ce que nous énonçons depuis le chapitre 2 : la déflation oblique du sous-espace signal est préférable à la déflation orthogonale pour des DDA/pulsations spatiales proches. Finalement, les figures Fig. 2.10-c et d, montrent que l'algorithme C-MinNorm est plus efficace que l'algorithme MinNorm pour deux situations étudiées :

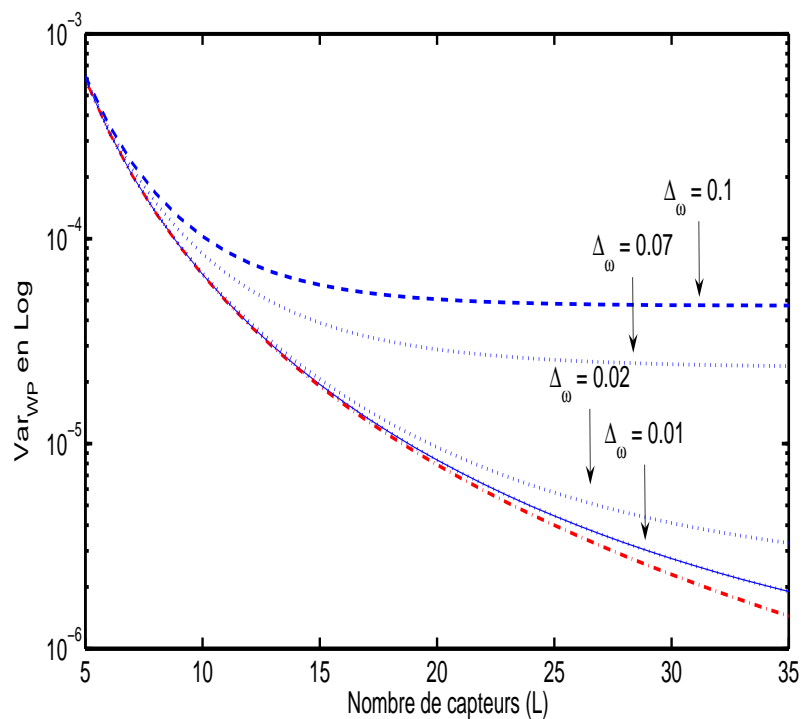
1. si le RSB est élevé alors l'algorithme C-MinNorm est plus performant pour des pulsations spatiales très proches.
2. si le RSB est faible alors quelque soit la valeur des pulsations spatiales, l'algorithme C-MinNorm est plus efficace que l'algorithme MinNorm.

Par conséquent, nous concluons que :

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1) \leq \text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1) \leq \text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1) \leq \text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_1). \quad (2.65)$$



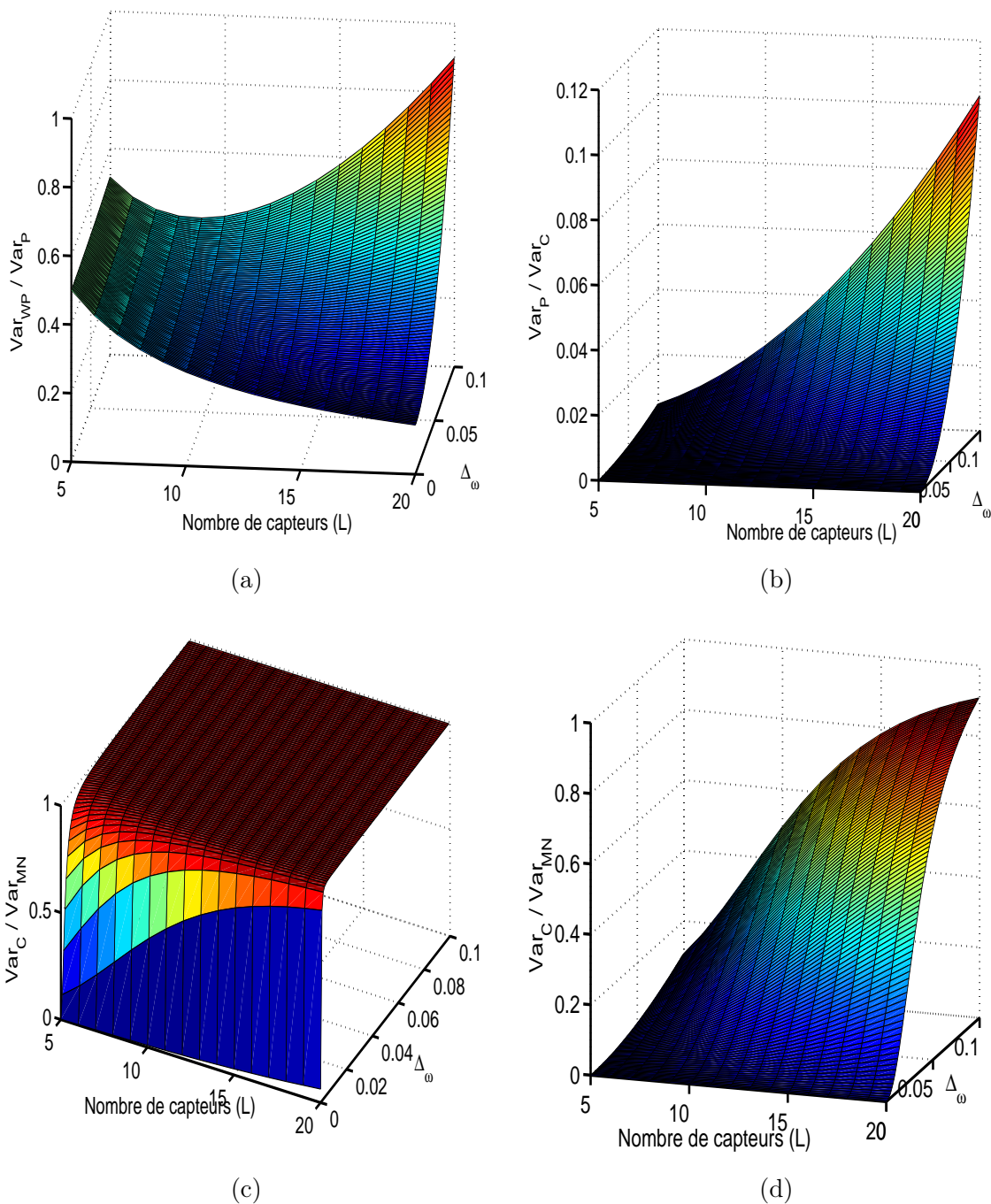
(a)



(b)

(a)  $R(L)$ , (b)  $\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1)$  avec la courbe en pointillée + traitillée représentant l'approximation (i) alors que toutes autres courbes représentent l'expression (ii).

figure 2.9:  $R(L)$  et  $\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1)$  Fct. du nombre de capteurs  $L$



(a) Ratio  $\frac{\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1)}{\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1)}$  Fct.  $L$  and  $\Delta\omega$ , (b) Ratio  $\frac{\text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1)}{\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1)}$  Fct.  $L$  and  $\Delta\omega$ , (c) Ratio  $\frac{\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1)}{\text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_1)}$  Fct.  $L$  and  $\Delta\omega$  for a SNR = 40dB, (d) Ratio  $\frac{\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1)}{\text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_1)}$  Fct.  $L$  and  $\Delta\omega$  for a SNR = 0dB.  
 figure 2.10: Courbes des ratios de variances Fct. de  $\Delta\omega$  et  $L$

## 2.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons comparé les approches introduites en réalisant une analyse théorique des versions MinNorm des méthodes proposées. Nous donnons donc, une expression des variances théoriques de chacun des algorithmes puis nous donnons une analyse pour le cas asymptotique (nombre de capteurs élevé) et pour le cas de deux sources de DDA proches. Nous montrons alors que l'approche par déflation oblique est bien plus adaptée que l'approche par déflation orthogonale pour l'intégration d'une connaissance *a priori* dans les algorithmes de type MinNorm quand les DDA sont proches. Inversement, nous montrons qu'asymptotiquement toutes les approches sont équivalentes.

En résumé, nous avons montré dans ce chapitre, que la connaissance *a priori* d'un nombre  $M - S$  de données sur l'ensemble  $M$  des données du modèle peut être bénéfique pour l'estimation des  $S$  données d'intérêt. La solution la plus adaptée est celle utilisant une projection oblique des données sur le sous-espace des données inconnues suivant le sous-espace des données connues. Les résultats numériques et théoriques nous montrent que cette approche reste moins sensible à la proximité des DDA, autrement dit, plus les DDA sont proches et plus la variance des algorithmes à déflation orthogonale est élevée.

Ces méthodes sont basées sur la connaissance supposée exacte des DDA associées à  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$  dans le modèle (??). Nous pouvons considérer que ces éléments ainsi que les sources  $\beta_m$  s'y reportant sont estimés. Nous sommes alors amenés à modifier notre approche puisque la déflation ne peut plus être clairement effectuée. Cela constitue l'étude du chapitre suivant.

## 2.5 Annexes

### 2.5.1 Démonstration de la proposition 1

Premièrement, notons que la décomposition en valeurs propres ordonnées de n'importe quelle matrice idempotente de rang  $(L - M + S)$  est donnée par

$$\mathbf{P}_B^\perp = [\mathbf{U}_B \quad \times] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L-M+S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{U}_B \quad \times]^H = \mathbf{U}_B \mathbf{U}_B^H \quad (2.66)$$

où  $\mathbf{U}_B$  sont les  $L - M + S$  premières colonnes de la matrice propre "gauche". Du fait d'un bruit centré et de  $\mathbf{U}_B^H \mathbf{U}_B = \mathbf{I}_{L-M+S}$ , il est facile de voir que

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{y}}_{(\text{prior})}) = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H)(\mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B \mathbf{U}_B^H))(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{Z})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.67)$$

$$= (\mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A}))\bar{\boldsymbol{\lambda}} \quad (2.68)$$

$$= \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}. \quad (2.69)$$

L'erreur commise sur la matrice de covariance, notée  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ , est donnée par la covariance du signal centré suivant  $\tilde{\mathbf{y}}_{(\text{prior})} - \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})} = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H)\mathbf{n}$  alors

$$\tilde{\Gamma} = \mathbb{E} \left( (\tilde{\mathbf{y}}_{(\text{prior})} - \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})})(\tilde{\mathbf{y}}_{(\text{prior})} - \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})})^H \right) \quad (2.70)$$

$$= (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H) (\sigma^2 \mathbf{I}_{LT}) (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B) \quad (2.71)$$

$$= \sigma^2 \mathbf{I}_{LT}. \quad (2.72)$$

### 2.5.2 Demonstration du Théorème 1

Nous rappelons ici que le vecteur des paramètres du modèle de signal plus paramètres de nuisance est  $\boldsymbol{\chi} = [\boldsymbol{\chi}'^T \ \sigma^2]^T$  où  $\boldsymbol{\chi}' = [\boldsymbol{\omega}^{(S)T} \ \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{R}}^T \ \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{I}}^T]^T$ ,  $\boldsymbol{\omega}^{(S)} = [\omega_1 \dots \omega_S]^T$ ,  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{R}} = \Re\{\bar{\boldsymbol{\lambda}}\}$  et  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{I}} = \Im\{\bar{\boldsymbol{\lambda}}\}$ . Le premier terme de cette expression (2.8) est associé au bruit et est donné par

$$\text{Trace} \left( \tilde{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \tilde{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{(L-M+S)T}{\sigma^4} \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Le second terme qui fait intervenir les dérivées partielles du modèle non-bruité en fonction du vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\chi}$  s'exprime comme suit

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{R}}} = \mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A}) \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathcal{I}}} = i \mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A}) \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}}{\partial \boldsymbol{\omega}^{(S)}} = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H) \mathbf{C} \quad (2.76)$$

où

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}'(\omega_1) \alpha_1(1) & \dots & \mathbf{p}'(\omega_S) \alpha_S(1) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{p}'(\omega_1) \alpha_1(T) & \dots & \mathbf{p}'(\omega_S) \alpha_S(T) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

avec  $\mathbf{p}'(\omega_k) = \left. \frac{\partial \mathbf{p}(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k}$ . Nous obtenons alors

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}}{\partial \boldsymbol{\chi}} = [(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H) \mathbf{C} \quad \mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A}) \quad i \mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A}) \quad \mathbf{0}].$$

La P-CRB est donnée par la matrice suivante :

$$\text{P-CRB}(\boldsymbol{\chi}) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} \left[ \Re \left\{ \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}}{\partial \boldsymbol{\chi}'} \right)^H \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{(\text{prior})}}{\partial \boldsymbol{\chi}'} \right\} \right]^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\sigma^4}{(L-M+S)T} \end{bmatrix}.$$

Comme les paramètres de nuisance et ceux du signal sont découplés, la P-CRB a une structure bloc-diagonale. Afin d'obtenir la P-CRB pour le sous-vecteur  $\boldsymbol{\omega}^{(S)}$ , nous suivons la

méthode de bloc-diagonalisation introduite dans [Stoica and Moses, 2005, p.390]. Finalement, nous avons

$$\text{P-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) = \frac{\sigma^2}{2} \left[ \Re \left\{ \mathbf{C}^H (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B) \mathbf{P}_{\mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A})}^\perp (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{U}_B^H) \mathbf{C} \right\} \right]^{-1}$$

où  $\mathbf{P}_{\mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A})}^\perp = \mathbf{I}_{(L-M+S)T} - (\mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A})) (\mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{U}_B^H \mathbf{A}))^\dagger$ .

Après quelques manipulations algébriques basiques et en considérant un nombre d'acquisitions suffisant, il vient que

$$\text{P-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) = \frac{\sigma^2}{2T} \left[ \Re \left\{ \left[ \mathbf{D}_A^H \mathbf{U}_B \mathbf{P}_{\mathbf{U}_B^H \mathbf{A}}^\perp \mathbf{U}_B^H \mathbf{D}_A \right] \bullet \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \right\} \right]^{-1}.$$

Soit  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}$  (*resp.*  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}$ ) le projecteur oblique sur le sous-espace  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$  (*resp.*  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ ) suivant le sous-espace  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  (*resp.*  $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ ) défini dans (1.3.2). Basé sur ces opérateurs, nous avons la propriété suivante :

$$\mathbf{U}_B \mathbf{P}_{\mathbf{U}_B^H \mathbf{A}}^\perp \mathbf{U}_B^H = \mathbf{P}_B^\perp (\mathbf{I}_L - \underbrace{\mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{P}_B^\perp}_{\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})}}) \quad (2.78)$$

$$= \mathbf{P}_B^\perp (\mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \ \mathbf{A})}) \quad (2.79)$$

$$= \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{P}_Z^\perp \quad (2.80)$$

$$= \mathbf{P}_Z^\perp \quad (2.81)$$

où pour obtenir (2.79) (*resp.* (2.80)), nous utilisons la relation issue de la section (1.3). Par suite, la P-CRB se simplifie et nous obtenons l'expression (2.9).

### 2.5.3 Démonstration du Théorème 2

Montrer la propriété (i), est équivalent de montrer que  $\text{P-CRB}(\boldsymbol{\omega}^{(S)}) - \text{CRB}_A(\boldsymbol{\omega}^{(S)})$  est une matrice semi-définie positive. En utilisant dans un premier temps  $\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{P}_Z^\perp = \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{P}_Z^\perp$ , il est rapide et direct de voir que  $\mathbf{P}_A^\perp - \mathbf{P}_Z^\perp$  est idempotent. Par conséquent, les valeurs propres de  $\mathbf{P}_A^\perp - \mathbf{P}_Z^\perp$  sont 1 ou 0 et donc  $\mathbf{P}_A^\perp - \mathbf{P}_Z^\perp$  est semi-définie positive. Dans un deuxième temps, comme  $\mathbf{D}_A$  est une matrice non-déficente,  $\mathbf{D}_A^H (\mathbf{P}_A^\perp - \mathbf{P}_Z^\perp) \mathbf{D}_A$  est également une matrice semi-définie positive. Finalement, en utilisant (1) et que le produit de Hadamard de deux matrices semi-définies positives donne encore une matrice semi-définie positive (*cf.* résultat R19 dans [Stoica and Moses, 2005]) et (2) la partie réelle d'une matrice semi-définie positive est elle-même une matrice semi-définie positive, nous montrons (i).

La propriété (ii) se montre de la manière suivante. Dans [Stoica and Nehorai, 1989], il est montré que  $\text{CRB}_A(\boldsymbol{\omega}_M), \text{CRB}_Z(\boldsymbol{\omega}_M) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{6}{L^3 T} \frac{\sigma^2}{[\mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}]_{mm}}$ . Pour la P-CRB, nous avons

$$\frac{1}{L^3} \mathbf{D}_A^H \mathbf{D}_A \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \mathbf{I}_S, \quad \frac{1}{L^2} \mathbf{D}_A^H \mathbf{Z} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{i}{2} [\mathbf{I}_S \quad \mathbf{0}]_{S \times M} \quad \text{et} \quad \frac{1}{L} \mathbf{Z}^H \mathbf{Z} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mathbf{I}_M \quad \text{donc}$$

$$\mathbf{D}_A^H \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{D}_A \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{L^3}{3} \mathbf{I}_S - \frac{L^3}{4} [\mathbf{I}_S \quad \mathbf{0}] \mathbf{I}_M \begin{bmatrix} \mathbf{I}_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \frac{L^3}{12} \mathbf{I}_S. \quad (2.82)$$

Par conséquent, en utilisant la définition de la P-CRB, il vient que

$$\text{P-CRB}(\omega_M) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{6}{L^3 T} \frac{\sigma^2}{[\mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}]_{mm}} \quad (2.83)$$

qui prouve la propriété (ii).

De plus, notons que la CRB sur le sous-espace signal entier se réécrit comme

$$\text{CRB}_Z(\omega^{(M)}) = \frac{\sigma^2}{2T} \left[ \Re \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_A^H \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{D}_A & \mathbf{D}_A^H \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{D}_B \\ \mathbf{D}_B^H \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{D}_A & \mathbf{D}_B^H \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{D}_B \end{bmatrix} \bullet \mathbf{R}_\Lambda \right\} \right]^{-1} \quad (2.84)$$

où  $\mathbf{D}_B = [\mathbf{p}'(\omega_{S+1}) \dots \mathbf{p}'(\omega_M)]$ . Supposons encore que  $\mathbf{R}_\Lambda$  est bloc-diagonale dans (2.84) et il est facile de déduire la propriété (iii) puisque

$$\text{CRB}_Z(\omega^{(M)}) = \begin{bmatrix} \text{P-CRB}(\omega^{(S)}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Remarque : cette relation est valable aussi bien pour les DDA proches que pour les DDA éloignées.

Si les DDA sont éloignées, l'influence entre les DDA est faible et un résultat bien connu est que  $\text{CRB}_Z(\omega^{(S)}) \approx \text{CRB}_A(\omega^{(S)})$ . Par conséquent, d'après la propriété (iii), la P-CRB( $\omega^{(S)}$ ) atteint son minimum près de la CRB $_A(\omega^{(S)})$  par valeur supérieure (cf. la relation (i)), ce qui prouve la propriété (v). Inversement, pour des DDA proches, la CRB $_A(\omega^{(S)})$  est invariante alors que l'inverse de la CRB $_Z(\omega^{(S)})$  est proche de la singularité (nombre de conditionnement élevé pour l'inversion). Donc,  $\text{CRB}_Z(\omega^{(S)}) \gg \text{CRB}_A(\omega^{(S)})$ . Ce résultat combiné à la propriété (iii) nous donne la preuve de la propriété (iv).

Supposons maintenant que  $\mathbf{R}_{\Lambda_\beta}$  soit une matrice déficiente (cas des sources cohérentes), alors due à sa structure bloc,  $\mathbf{R}_\Lambda$  est aussi déficiente<sup>10</sup>. De plus, si nous considérons les DDA proches alors la CRB $_Z(\omega^{(S)})$  prend une valeur élevée comme inverse du produit de Hadamard de deux matrices singulières (quasi). Dans le même temps et au travers du projecteur  $\mathbf{P}_Z^\perp$ , la P-CRB reste sensible aux DDA inconnues mais insensible à la forte corrélation entre les sources associées au DDA connues, *i.e.*, à la covariance spatiale  $\mathbf{R}_{\Lambda_\beta}$ . Par conséquent, la propriété (vi) se montre d'elle-même.

Pour des sources interférentes et d'intérêt corrélées, le problème est plus compliqué et nous avons reporté la discussion dans la partie simulation.

10. Nous avons  $\det(\mathbf{R}_\Lambda) = \det(\mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}) \det(\mathbf{R}_{\Lambda_\beta}) = \mathbf{0}$  puisque nous supposons que  $\det(\mathbf{R}_{\Lambda_\beta}) = \mathbf{0}$ .



### 2.5.4 Demonstration du Théorème 3

Comme nous le savons ( $z_m, z_m^{*-1}$ ) apparaît en paires et nous donnons la forme factorisée des polynômes  $f_{\text{C-MUSIC}}(z)$  et  $f_{\text{COR}}(z)$  de la manière suivante

$$f_{\text{C-MUSIC}}(z) = \prod_{m=1}^S (z - z_m) \left( z - \frac{1}{z_m^*} \right) \prod_{m=S+1}^M (z - z_m) \left( z - \frac{1}{z_m^*} \right) \prod_{m=1}^{L-M-1} (z - z'_m) \left( z - \frac{1}{z'_m} \right) \quad (2.86)$$

et

$$f_{\text{COR}}(z) = \prod_{m=1}^S (z - z_m) \left( z - \frac{1}{z_m^*} \right) \prod_{m=1}^{L-S-1} (z - z''_m) \left( z - \frac{1}{z''_m} \right) \quad (2.87)$$

où les  $\{z_m\}$  sont les zéros désirés (connus ou inconnus) et les  $\{z'_m\}$  et  $\{z''_m\}$  sont les zéros non désirés (en plus) du polynôme. En se basant sur les expressions (2.86) et (2.87),  $\mathcal{C}(z)$  admet la factorisation suivante :

$$\mathcal{C}(z) = I(z)Q(z) \quad (2.88)$$

où  $I(z) = \prod_{m=1}^S (z - z_m) \left( z - \frac{1}{z_m^*} \right)$  et

$$Q(z) = \prod_{m=S+1}^M (z - z_m) \left( z - \frac{1}{z_m^*} \right) \prod_{m=1}^{L-M-1} (z - z'_m) \left( z - \frac{1}{z'_m} \right) + \prod_{m=1}^{L-S-1} (z - z''_m) \left( z - \frac{1}{z''_m} \right).$$

De façon claire,  $Q(z)$  n'a pas de racine triviale, *i.e.*, aucune des DDA connues ou inconnues ne sont solution de  $Q(z) = 0$ . Inversement, nous avons seulement  $I(z) = 0$  pour les DDA inconnues. Par suite, d'après l'expression (2.88), les zéros de  $\mathcal{C}(z)$  sont représentatifs uniquement des DDA qui annulent  $I(z)$ , *i.e.*, les DDA inconnues.

### 2.5.5 Preuve du Théorème 4

La Propriété  $\mathbf{I}_L - \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} = \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp + \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}$  nous permet d'obtenir l'expression (2.49)<sup>11</sup>. Nous pouvons introduire maintenant deux polynômes de la façon suivante :

$$f_{\text{C}}(z) = \prod_{m=1}^S (z - z_m) \prod_{m=S+1}^M (z - z_m) \prod_{m=M+1}^L (z - z'_m) \quad (2.89)$$

où  $z_m$  est associée à la  $m^{\text{ième}}$  DDA et où les  $z'_m$  sont les zéros de  $f_{\text{C}}(z)$  indépendant des DDA et :

11. cette démonstration a déjà été abordée dans le chapitre 2 dans le cadre des algorithmes de type MUSIC, nous en donnons ici un démonstration appliquée aux algorithmes de type MinNorm

$$f_{\text{COR}}(z) = \prod_{m=1}^S (z - z_m) \prod_{m=S+1}^L (z - z_m'') \quad (2.90)$$

où les  $z_m''$  sont les zéros de  $f_{\text{COR}}(z)$  n'étant pas reliés aux DDA. Par suite,  $f_{\text{WP}}(z)$  peut être factorisée de la manière suivante :

$$C(z) = Q(z) \prod_{m=1}^S (z - z_m) \quad (2.91)$$

où  $Q(z) = \prod_{m=S+1}^M (z - z_m) \prod_{m=M+1}^L (z - z_m') + \prod_{m=S+1}^L (z - z_m'')$ . Clairement,  $Q(z)$  n'a aucune racine triviale, *i.e.*, aucune des DDA connues ou interférentes ne sont des zéros de  $Q(z)$ . Par conséquent, et d'après l'expression (2.91), les zéros de  $f_{\text{WP}}(z)$  sont uniquement les zéros associés aux DDA d'intérêt  $\{\omega_1, \dots, \omega_S\}$ . La preuve pour l'algorithme P-MinNorm est directe.

### 2.5.6 Preuve du Théorème 5

#### Dérivation des erreurs sur les projecteurs oblique et orthogonaux

L'utilisation des projecteurs obliques nécessite l'estimation d'une base du sous-espace associé aux DDA inconnues  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  en fonction de l'estimée la matrice de covariance  $\mathbf{R}_Y$ . Une erreur commise sur  $\mathbf{R}_Y$  implique de façon directe une erreur sur l'estimation de la base. De ce fait, le sous-espace de projection est perturbé et nous considérons alors le modèle  $\hat{\mathbf{V}}_A = \mathbf{V}_A + \Delta\mathbf{V}_A$  comme modèle d'erreur sur la base. De plus, nous adoptons les modèles suivants

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_Y &= \mathbf{R}_Y + \Delta\mathbf{R}_Y \\ \hat{\mathbf{R}}_A &= \mathbf{R}_A + \Delta\mathbf{R}_A. \end{aligned}$$

Lorsque la base  $\mathbf{V}_A$  est perturbée nous avons la relation conventionnelle suivante

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} &= \hat{\mathbf{V}}_A (\hat{\mathbf{V}}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \hat{\mathbf{V}}_A)^{-1} \hat{\mathbf{V}}_A \mathbf{P}_B^\perp \\ &= (\mathbf{V}_A + \Delta\mathbf{V}_A) \left( (\mathbf{V}_A + \Delta\mathbf{V}_A)^H \mathbf{P}_B^\perp (\mathbf{V}_A + \Delta\mathbf{V}_A) \right)^{-1} (\mathbf{V}_A + \Delta\mathbf{V}_A)^H \mathbf{P}_B^\perp. \end{aligned}$$

En développant et en omettant les termes du second ordre, nous obtenons une expression de  $\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}$  s'écrivant

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} &= \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} + \Delta\mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp + \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \Delta\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \\ &\quad - \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \Delta\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \\ &\quad - \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \Delta\mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \end{aligned} \quad (2.92)$$

or nous savons que

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} = \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} + \Delta\mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}. \quad (2.93)$$

Par conséquent, une identification basique entre (2.92) et (2.93), nous permet d'avoir

$$\Delta \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} = (\mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}) \Delta \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp + \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \Delta \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_Z^\perp. \quad (2.94)$$

Notons que tout au long de cette section nous utilisons à souhait l'égalité  $(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) = (\mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)})$ . Afin d'avoir une expression de  $\Delta \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}$  en fonction de l'erreur commise sur la matrice de covariance estimée  $\Delta \mathbf{R}_A$ , nous donnons ici le développement au premier ordre de  $\hat{\mathbf{R}}_A$  assujettie à la déflation oblique

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \hat{\mathbf{R}}_A \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H = \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \mathbf{V}_A^H \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H + \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \Delta \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \Delta \mathbf{V}_A^H \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H + \sigma^2 \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H \quad (2.95)$$

En ne gardant que les termes du premier ordre, il vient alors

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{V}_A = \mathbf{V}_A + (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) \Delta \mathbf{V}_A \quad (2.96)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H = \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H + (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) \Delta \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{V}_A^H. \quad (2.97)$$

Par suite nous pouvons exprimer  $\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \hat{\mathbf{R}}_A \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H$  comme

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \hat{\mathbf{R}}_A \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H = \tilde{\mathbf{R}}_A + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_A$$

où

$$\tilde{\mathbf{R}}_A = \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \mathbf{V}_A^H + \sigma^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H \quad (2.98)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{R}}_A = (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) \Delta \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \mathbf{V}_A^H + \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \Delta \mathbf{V}_A^H (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H) + \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \Delta \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \Delta \mathbf{V}_A^H \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H + \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) \Delta \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{V}_A^H. \quad (2.99)$$

Le grand intérêt des projecteurs obliques réside dans leur capacité de réjection nettement accrue en comparaison aux projecteurs orthogonaux. La considération de sous-espace non-orthogonaux et donc de l'existence d'angles principaux très faibles permet cette réjection. De ce fait le projecteur n'est plus hermitien et le bruit s'en retrouve modifié comme nous le constatons dans (2.98) où la puissance du bruit est amplifiée par  $\mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H$ . En Appendix 2.5.9, nous montrons que dans le cas de 2 sources dont les DDA sont proches, le terme  $\mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H$  est d'ordre  $O(\Delta_\omega^{-2})$ , où  $\Delta_\omega$  est la différence angulaire entre les deux DDA. En conséquence, plus les DDA sont proches et plus le bruit est amplifié. Dans [Behrens and Scharf, 1994], les auteurs font référence à une amplification possible du bruit et ils montrent que l'emploi des projecteurs obliques est préférable lorsque les interférences (DDA connues) dominent le bruit.

Nous supposons donc un SNR suffisant. Cela implique que  $\tilde{\mathbf{R}}_A \simeq \mathbf{R}_A$  and  $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_A \simeq \Delta \mathbf{R}_A$  avec

$$\Delta \mathbf{R}_A = (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) \Delta \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \mathbf{V}_A^H + \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \Delta \mathbf{V}_A^H (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H) + \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \Delta \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \Delta \mathbf{V}_A^H \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H \quad (2.100)$$

Nous sommes à présent en mesure d'exprimer  $\Delta \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}$  en fonction de  $\Delta \mathbf{R}_A$ . Dans ce but, de nombreuses maipations sont nécessaires en partant de (2.100) pour obtenir une égalité liant (2.94). En premier lieu, nous pre-multiplions (2.100) par  $(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})$ , nous utilisons  $(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) = (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})$  et  $(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})\mathbf{V}_A = (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})\mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} = \mathbf{0}$  nous permettant d'avoir

$$(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})\Delta \mathbf{R}_A = (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})\Delta \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \mathbf{V}_A^H. \quad (2.101)$$

Ensuite, nous post-multiplions (2.101) par la quantité  $\mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}^{-1} \mathbf{V}_A^H \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}$ , qui est par définition  $\mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}$ , et nous obtenons le premier terme de (2.94) comme

$$(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})\Delta \mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp = (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})\Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}. \quad (2.102)$$

Nous nous focalisons maintenant sur le second terme de (2.94). Ici encore nous pre-multiplions (2.100) par le projecteur orthogonal  $\mathbf{P}_Z^\perp$  afin d'avoir la relation suivante

$$\Delta \mathbf{R}_A \mathbf{P}_Z^\perp = \mathbf{V}_A \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \Delta \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_Z^\perp \quad (2.103)$$

puis nous post-multilions (2.103) par la quantité  $\mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}^{-1} \mathbf{V}_A^H$  et il vient

$$\mathbf{V}_A (\mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{V}_A)^{-1} \Delta \mathbf{V}_A^H \mathbf{P}_Z^\perp = \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H \mathbf{S}_A^\dagger \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{P}_Z^\perp. \quad (2.104)$$

La dernière étape de calcul consiste à sommer (2.102) et (2.104), et sous avons alors

$$\Delta \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} = (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})})\Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} + \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H \mathbf{S}_A^\dagger \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{P}_Z^\perp. \quad (2.105)$$

Nous reprenons la même méthodologie ci-après en vue d'établir l'expression de  $\Delta \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}$ . En premier lieu, nous avons directement

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} = \mathbf{B} (\mathbf{B}^H (\mathbf{P}_A^\perp - \Delta \mathbf{P}_A))^{-1} \mathbf{B}^H (\mathbf{P}_A^\perp - \Delta \mathbf{P}_A) \quad (2.106)$$

avec  $\hat{\mathbf{P}}_A^\perp = \mathbf{P}_A^\perp - \Delta \mathbf{P}_A$  [Krim and Viberg, 1996]. Le développement de cette dernière équation nous conduit à

$$\hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} = \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} - \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}^H \Delta \mathbf{P}_A (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)})$$

et donc à

$$\Delta \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} = \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}^H \Delta \mathbf{P}_A (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}). \quad (2.107)$$

Nous insérons dans (2.107) l'expression de  $\Delta \mathbf{P}_A$  déduite facilement à partir de [Krim and Viberg, 1996], ce qui nous donne  $\Delta \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A^\perp \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger + \mathbf{S}_A^\dagger \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{P}_A^\perp$ . En utilisant cette expression en conjonction avec l'expression (2.107) nous permet d'avoir

$$\Delta \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} = -\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}^H \mathbf{S}_A^\dagger \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{P}_Z^\perp - \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \quad (2.108)$$

où nous avons utilisé  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}^H \mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}$  et  $\mathbf{P}_A^\perp (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}) = \mathbf{P}_A^\perp (\mathbf{P}_Z^\perp - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) = \mathbf{P}_Z^\perp$ .

Finalement, nous évaluons le projecteur orthogonal  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0)$  pour le paramètre inconnu  $\boldsymbol{\omega}$ . Dans ce but, nous utilisons la propriété  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^{\perp} = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} - \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}$ . De plus, en combinant les expressions (2.105) et (2.108) nous obtenons l'expression de  $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}$  d'après

$$\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} = (\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}^H - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}^H) \mathbf{S}_A^{\dagger} \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} - \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^{\dagger} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}. \quad (2.109)$$

Nous remarquons la structure algébrique particulière de (2.109) dans le sens où  $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0)$  est composée des éléments "classiques" de  $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\boldsymbol{\omega})$  mais modifié par les opérateurs de projection  $\mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}$  and  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}$ . L'établissement théorique des perturbations des différents projecteurs à constitué la première étape dans l'établissement des variances théoriques. La section suivante constitue la deuxième.

### 2.5.7 Dérivation des déviations

Nous savons que pour  $z$  une racine, les versions root des critères Constrained-MinNorm, Prior-Minorm and Weighted Prior-Minorm sont égales à zéro. Soit, les trois fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{WP}}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}_0))}, \hat{z}) &= \mathbf{e}_1^T (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}_0))}) \mathbf{p}(\hat{z}), \\ \Pi_{\text{P}}(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^{\perp}(\boldsymbol{\omega}), \hat{z}) &= \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^{\perp}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{p}(\hat{z}), \\ \Pi_{\text{C}}(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0), \hat{z}) &= \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) \mathbf{p}(\hat{z}). \end{aligned}$$

Un développement de Taylor au premier ordre des fonctions de deux variables précédentes nous conduit à

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{WP}}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}, \hat{z}) &= 1 + \mathbf{e}_1^T \Delta \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{p}(z) + \mathbf{e}_1^T \mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})} \mathbf{p}'(z) \Delta z, \\ \Pi_{\text{P}}(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}^{\perp}, \hat{z}) &= -\mathbf{e}_1^T \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{p}(z) + \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{p}'(z) \Delta z, \\ \Pi_{\text{C}}(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^{\perp}, \hat{z}) &= -\mathbf{e}_1^T \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{p}(z) + \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{p}'(z) \Delta z, \end{aligned}$$

La substitution des expressions (2.105), (2.108) et (2.109) dans les relations précédentes combiné aux relations  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{p}(z) = \mathbf{0}$  et égalisant à zéro les fonctions nous permet d'aboutir aux déviations suivantes

$$\Delta z_{\text{WP}} = -\frac{\mathbf{e}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})}) \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^{\dagger} \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{p}(z) + 1}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{p}'(z)}, \quad (2.110)$$

pour le root WP-MinNorm,

$$\Delta z_{\text{P}} = \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^{\dagger} \mathbf{p}(z)}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{p}'(z)}, \quad (2.111)$$

pour le root P-MinNorm , et

$$\Delta z_{\text{C}} = \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^{\dagger} \mathbf{p}(z)}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{p}'(z)}, \quad (2.112)$$

pour le root Constrained MinNorm.

### Expressions des variances

Sous l'hypothèse (ou propriété) que  $\Delta \mathbf{R}_A$  suit une loi de Wishart, alors  $\mathbb{E}(\Delta \mathbf{R}_A) = \mathbf{0}$ , et  $\mathbb{E}(\Delta z_{\text{WP}}) = \frac{-1}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{p}'(z)}$  pour le root WP-MinNorm,  $\mathbb{E}(\Delta z_{\text{C}}) = \mathbb{E}(\Delta z_{\text{P}}) = 0$  pour les algorithmes root P-MinNorm et root Constrained MinNorm. Par suite, nous pouvons définir  $\Delta z'_{\text{WP}} = \Delta z_{\text{WP}} + \frac{1}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{E}_{(\mathbf{A} \mathbf{B})} \mathbf{p}'(z)}$  afin d'avoir une variable centrée. Nous vérifions de plus que les erreurs d'estimatin des racines sont bien circulaires (*i.e.*  $\mathbb{E}(\Delta z \Delta z^T) = 0$ ). Il suffit pour cela de voir que  $\mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger = \mathbf{0}$ , et il est évident de voir que  $\Delta z$  est circulaire. De plus, il est connu [Krim and Viberg, 1996] que pour des algorithmes de type root MinNorm nous avons  $\mathbb{E}(|\Delta \omega|^2) = \mathbb{E}(|\Delta r|^2) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(|\Delta z|^2)$ , où  $\Delta r$  est l'erreur d'estimation du module de la racine estimée  $\Delta \hat{z}$ . Finalement, en considérant l'espérance mathématique des matrices de Wishart (1.6) et en utilisant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^T (\mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}) \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{E}_{(\mathbf{V}_A \mathbf{B})} \mathbf{p}(\omega_i) &= \text{Trace} \left( \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger (\mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)}) \mathbf{p}(\omega_i) \mathbf{e}_1^T \mathbf{E}_{(\mathbf{B} \mathbf{V}_A)} \right) \\ \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_A^\perp \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_i) &= \text{Trace}(\Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_i) \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_A^\perp) \\ \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_Z^\perp \Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_i) &= \text{Trace}(\Delta \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_i) \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_Z^\perp) \end{aligned}$$

dans  $\mathbb{E}(|\Delta z'_{\text{WP}}|^2)$ ,  $\mathbb{E}(|\Delta z_{\text{P}}|^2)$  and  $\mathbb{E}(|\Delta z'_{\text{C}}|^2)$  (où  $z$  est remplacée par  $\omega_i$ ) nous donne les expressions du théorème 5, et la preuve est donnée.

### 2.5.8 Preuve du Théorème 6

Afin de procéder à l'établissement théorique des comportements asymptotiques de chacun des algorithmes proposés, nous commençons par donner une écriture différente du terme droit du numérateur de (2.51), *i.e.*  $\mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_i)$  en fonction du RSB<sub>*i*</sub> [Larzal and Clergeot, 1993, Stoica and Sharman, 1990, Stoica and Nehorai, 1989]. Alors, à l'aide de  $\mathbf{S}_A = \mathbf{A} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha} \mathbf{A}^H$ , nous donnons l'expression faisant intervenir explicitement la pseudo-inverse de  $\mathbf{S}_A$  de la manière suivante

$$\mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger = \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{R}_A \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H. \quad (2.113)$$

En conséquence, en substituant  $\mathbf{R}_A = \mathbf{S}_A + \sigma^2 \mathbf{I}_S$  dans (2.113) et en multipliant à gauche et à droite de  $\mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger$  par  $\mathbf{p}(\omega_i)^H$  and  $\mathbf{p}(\omega_i)$  respectivement, nous obtenons deux termes additifs dont le premier est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{S}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_i) &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}^{-1} \mathbf{e}_i \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2}, \end{aligned} \quad (2.114)$$

où nous avons utilisé la propriété  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{p}(\omega_i) = \mathbf{e}_i$ , où  $\mathbf{e}_i$  est la *i*<sup>ème</sup> colonne de la matrice identité  $\mathbf{I}_S$  [McCloud and Scharf, 2002], et le second terme est donné quant à lui par l'expression

$$\begin{aligned} \sigma^2 \mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{I}_S \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_i) &= \sigma^2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_{\Lambda_\alpha}^{-1} \mathbf{e}_i \\ &= \frac{1}{\text{RSB}_i} \frac{1}{\sigma_i^2} [(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}]_{ii} \end{aligned} \quad (2.115)$$

où  $[(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}]_{ii}$  représente le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale de la matrice  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}$ . En conclusion, la sommation de (2.114) et (2.115), nous conduit à l'expression suivante

$$\mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_i) = \frac{1}{\sigma_i^2} \left( 1 + \frac{[(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}]_{ii}}{\text{RSB}_i} \right). \quad (2.116)$$

Nous rappelons ici la propriété asymptotique que vérifient les exponentielles pures, *i.e.*  $\mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{p}(\omega_j) = L \delta_{i-j}$ ,  $\mathbf{p}(\omega_i)^H \mathbf{p}'(\omega_j) \xrightarrow{L \gg 1} i \frac{L(L-1)}{2} \delta_{i-j}$ . Par suite, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{e}_1 &= 1 - \underbrace{[1 \dots 1]}_S (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{e}_1 \\ &\xrightarrow{L \gg 1} \frac{L-S}{L} \end{aligned} \quad (2.117)$$

, puisque la dimension de  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  est  $S$  et de la même manière  $\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{e}_1 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{L-M}{L}$  puisque la dimension de  $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$  est  $M$ . De plus,  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} \rightarrow \mathbf{P}_A$  et  $\mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{I}_L - \mathbf{P}_B - \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B = \mathbf{P}_A^\perp$  pour un nombre de capteurs  $L$  élevé. Il vient alors

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_A \mathbf{p}'(\omega_i)|^2 \\ |\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_Z \mathbf{p}'(\omega_i)|^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{L \gg 1} \frac{(L-1)^2}{4}.$$

Nous utilisons les résultats ci-dessus dans les expressions (2.51)-(2.53), et il vient pour la  $i^{\text{ème}}$  pulsation d'intérêt

$$\text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_i) = \text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_i) = \frac{2(L-S) \left( 1 + \frac{1}{\text{RSB}_i L} \right)}{TL^3 \text{RSB}_i} \quad (2.118)$$

et

$$\text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_i) = \text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_i) = \frac{2(L-M) \left( 1 + \frac{1}{\text{RSB}_i L} \right)}{TL^3 \text{RSB}_i}. \quad (2.119)$$

Finalement, sous la condition  $L \gg 1$  et pour un RSB suffisant, nous avons  $\frac{1}{\text{RSB}_i L} \ll 1$ .

## 2.5.9 Preuve du Théorème 7

Tout d'abord notons que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\omega_2)^H \mathbf{p}(\omega_2) &= L + \Delta_\omega^2 \frac{L(L-1)(2L-1)}{6} \\ \mathbf{p}^H(\omega_1)(\mathbf{p}(\omega_1) + \Delta_\omega \mathbf{p}'(\omega_1)) &= L + i \Delta_\omega \frac{L(L-1)}{2} \\ \mathbf{p}(\omega_2)^H \mathbf{p}'(\omega_1) &= i \frac{L(L-1)}{2} + \Delta_\omega \frac{L(L-1)(2L-1)}{6}. \end{aligned}$$

Grâce aux équations ci-dessus, nous pouvons caractériser les différents termes intervenant dans (2.51)-(2.53) de la façon suivante

$$|\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}(\omega_1)^H|^2 = \frac{\Delta_\omega^2 (L-1)^2 (L-2)^2}{144}, \quad (2.120)$$

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{e}_1 = \frac{(L-1)(L-2)}{L(L+1)}, \quad (2.121)$$

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{e}_1 = \frac{L-1}{L} \quad (2.122)$$

$$|\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{p}'(\omega_1)|^2 = \frac{(L-1)^2}{4}. \quad (2.123)$$

De plus, nous avons besoin d'évaluer les quantités

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{E}_{(\mathbf{p}(\omega_1) \ \mathbf{p}(\omega_2))} \mathbf{p}'(\omega_1) = \underbrace{\mathbf{e}_1^T \mathbf{p}(\omega_1)}_{=1} \underbrace{\left( \mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{P}_{\mathbf{p}(\omega_2)}^\perp \mathbf{p}(\omega_1) \right)^{-1}}_{\rightarrow(i)} \underbrace{\mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{P}_{\mathbf{p}(\omega_2)}^\perp \mathbf{p}'(\omega_1)}_{\rightarrow(ii)} \quad (2.124)$$

où

– le terme indexé par (i) dans l'expression ci-dessus implique

$$\left( \mathbf{p}(\omega_2)^H \mathbf{p}(\omega_2) \right)^{-1} \stackrel{1}{=} \frac{1}{L} \left( 1 - \Delta_\omega^2 \frac{(L-1)(2L-1)}{6} \right) \quad (2.125)$$

et donc

$$\left( \mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{P}_{\mathbf{p}(\omega_2)}^\perp \mathbf{p}(\omega_1) \right)^{-1} \stackrel{1}{=} \frac{12}{\Delta_\omega^2 L (L^2 - 1)}. \quad (2.126)$$

De plus, nous remarquons que  $\mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_1 = \left( \mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{P}_{\mathbf{p}(\omega_2)}^\perp \mathbf{p}(\omega_1) \right)^{-1}$ .

– le second terme indexé par (ii) est

$$\mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{P}_{\mathbf{p}(\omega_2)}^\perp \mathbf{p}'(\omega_1) \stackrel{1}{=} \Delta_\omega \frac{L(L^2 - 1)}{12}. \quad (2.127)$$

Finalement, un développement au premier ordre du module au carré de l'expression (2.124) est donné par

$$|\mathbf{e}_1^T \mathbf{E}_{(\mathbf{A} \ \mathbf{B})} \mathbf{p}'(\omega_i)|^2 = \left( \frac{12}{\Delta_\omega^2 L (L^2 - 1)} \Delta_\omega \frac{L(L^2 - 1)}{12} \right)^2 = \frac{1}{\Delta_\omega^2}. \quad (2.128)$$

Dû à la proximité entre  $\omega_1$  and  $\omega_2$ , la matrice  $(\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1}$  impliquée dans  $\mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{S}_{\mathbf{Y}}^\dagger \mathbf{R}_{\mathbf{Y}} \mathbf{S}_{\mathbf{Y}}^\dagger \mathbf{p}(\omega_1)$  n'est plus égale à  $\frac{1}{L} \mathbf{I}_S$ , *a contrario*  $(\mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{p}(\omega_1))^{-1}$  reste inchangée et égale à  $\frac{1}{L}$ . Par conséquent, nous donnons une approximation au second ordre de  $(\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1}$  comme suit

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}^H(\omega_1) \mathbf{p}(\omega_1) & \mathbf{p}^H(\omega_1) \mathbf{p}(\omega_1) + \Delta_\omega \mathbf{p}^H(\omega_1) \mathbf{p}'(\omega_1) \\ \mathbf{p}^H(\omega_1) \mathbf{p}(\omega_1) + \Delta_\omega \mathbf{p}'^H(\omega_1) \mathbf{p}(\omega_1) & \mathbf{p}^H(\omega_1) \mathbf{p}(\omega_1) \end{bmatrix}^{-1} = \\ & \begin{bmatrix} L & L + i\Delta_\omega \frac{L(L-1)}{2} \\ L - i\Delta_\omega \frac{L(L-1)}{2} & L + \Delta_\omega^2 \frac{L(L-1)(2L-1)}{6} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (2.129)$$



puisque  $\Delta_\omega \mathbf{p}^H(\omega_1) \mathbf{p}(\omega_1) + \Delta_\omega \mathbf{p}^H \omega_1 \mathbf{p}'(\omega_1) = 2\Delta_\omega \Re(\mathbf{p}^H(\omega_1) \mathbf{p}'(\omega)) = 0$ , avec le produit scalaire  $\mathbf{p}^H(\omega_1) \mathbf{p}'(\omega) = i \frac{L(L-1)}{2}$ . Nous utilisons maintenant la formule d'inversion classique des matrices  $2 \times 2$  et  $(\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1}$  est approchée par

$$(\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \stackrel{2}{=} \frac{12}{\Delta_\omega^2 L(L^2 - 1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 - i\Delta_\omega \frac{L-1}{2} \\ -1 + i\Delta_\omega \frac{L-1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, nous substituons  $[(\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1}]_{(11)} = \frac{12}{\Delta_\omega^2 L(L^2 - 1)}$  dans (2.116) généralisé au sous-espace signal entier  $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$ , et nous obtenons

$$\mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{S}_Y^\dagger \mathbf{R}_Y \mathbf{S}_Y^\dagger \mathbf{p}(\omega_1) = \frac{1}{\sigma_1^2} \left( 1 + \frac{12}{\Delta_\omega^2 L(L^2 - 1)} \frac{1}{\text{RSB}_1} \right) = \frac{2T}{\sigma^2} \xi_1.$$

Puisque  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}$  reste inchangée dans (2.116) nous avons directement

$$\mathbf{p}(\omega_1)^H \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{R}_A \mathbf{S}_A^\dagger \mathbf{p}(\omega_1) = \frac{1}{\sigma_1^2} \left( 1 + \frac{1}{L \text{RSB}_1} \right) = \frac{2T}{\sigma^2} \bar{\xi}_1.$$

Le dernier traitement à réaliser est de substituer tous les termes que nous venons de caractériser dans les expressions (2.51)-(2.53) et il vient que

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\text{WP}}(\hat{\omega}_1) &= \left( \Delta_\omega^2 \frac{12}{L(L^2 - 1)\Delta_\omega^2} + \frac{(L-1)(L-2)}{L(L+1)} \right) \bar{\xi}_1 \\ \text{Var}_{\text{P}}(\hat{\omega}_1) &= \frac{4(L-1)}{L(L-1)^2} \bar{\xi}_1 \\ \text{Var}_{\text{C}}(\hat{\omega}_1) &= \frac{144(L-1)(L-2)}{\Delta_\omega^2 L(L+1)(L-1)^2(L-2)^2} \bar{\xi}_1 \\ \text{Var}_{\text{MN}}(\hat{\omega}_1) &= \frac{144(L-1)(L-2)}{\Delta_\omega^2 L(L+1)(L-1)^2(L-2)^2} \xi_1. \end{aligned}$$

Enfin, de simples manipulations complètent la preuve.



---

# Chapitre 3

## Une approche séquentielle pour l'estimation des DDAs

---

*L'estimation de directions basée sur des algorithmes de type MUSIC séquentiel, est un sujet qui a lui aussi suscité un grand engouement. Quand les sources proches, sont corrélées et à faible RSB, l'algorithme MUSIC éprouve des difficultés dans l'estimation. C'est pourquoi des méthodes séquentielles ont été développées. L'idée simple de ces approches, est d'annuler itérativement les directions préalablement estimées. Nous donnons alors le modèle sous-jacent : à chaque itération, le but est d'estimer la direction d'une seule source entachée d'un mélange composé d'une interférence structurée (composée des sources interférentes, i.e celles déjà estimées et celles à estimer) et d'une interférence non-structurée représentative du bruit additif Gaussien. Dans ce chapitre nous proposons un nouvel algorithme séquentiel que nous nommons Zero-Forcing MUSIC (ZF-MUSIC). Nous dérivons et analysons la Borne de Cramér-Rao (CRB) déterministe, que nous nommons CRB structurée ( $CRB_S$ ), dédiée au modèle présenté précédemment. De plus, nous proposons des expressions théoriques du biais et de la variance de cet algorithme. En particulier, nous montrons que (i) l'algorithme ZF-MUSIC est efficace, i.e. qu'il rejoint la  $CRB_S$ , pour des valeurs du rapport signal à bruit élevées et (ii) l'erreur de propagation (définie comme l'erreur des directions préalablement estimées sur l'estimation de la direction courante) est de l'ordre  $O((\Delta\omega_m)_{MU})$  si  $(\Delta\omega_m)_{MU}$  est l'erreur d'estimation de MUSIC et peut être nulle. Finalement, nous montrons via les simulations numériques, que cet algorithme est nettement plus performant que les autres algorithmes itératifs de type MUSIC dans le cas de sources corrélées ou non dont les directions sont proches.*

---

Fin d'améliorer les performances de l'algorithme MUSIC dans les situations difficiles, quand les directions sont proches, les sources corrélées et encore quand le RSB est faible, plusieurs auteurs ont proposé des versions séquentielles de l'algorithme MUSIC. Ces méthodes sont basées sur une optimisation de critère séquentiel dans lequel chaque direction est l'optimum de différentes fonctions de coût.

Plus précisément, l'algorithme S-MUSIC (Sequential-MUSIC) introduit par Oh *et al.* [Oh and Un, 1993] et l'algorithme IES-MUSIC (ImprovEd Sequential-MUSIC) introduit par Stoica *et al.* [Stoica et al., 1995] sont basés sur le principe de projection alternée, en estimant les directions séquentiellement plutôt que simultanément. Ces approches réussissent à supprimer les interférences spatiales inter-sources et ont une résolution accrue par rapport à l'algorithme classique MUSIC (non-séquentiel) au prix cependant d'un coût de calcul plus élevé. L'algorithme Recursive-MUSIC (R-MUSIC) [Mosher and Leahy, 1998] et sa version améliorée, l'algorithme Recursively Applied and Projected-MUSIC (RAP-MUSIC) [Mosher and Leahy, 1999] ont une approche similaire. Ces deux algorithmes font une recherche de type MUSIC sur un critère modifié. Ce dernier n'est autre que la projection du sous-espace signal estimé et de la matrice des vecteurs d'antenne sur le sous-espace engendré par les sources préalablement estimées. Finalement, nous notons les deux points essentiels suivants : (i) toutes ces méthodes évitent la recherche parfois délicate de plusieurs optima dans le pseudo-spectre MUSIC et (ii) ces approches sont basées sur le principe de déflation du sous-espace signal.

Dans ce chapitre, nous présentons un nouvel algorithme séquentiel de type MUSIC, l'algorithme Zero-Forcing MUSIC (ZF-MUSIC). Notre approche diffère des autres méthodes par le fait de pondérer directement, par une fonction quadratique appropriée, le critère MUSIC. Nous ne réalisons par conséquent pas de déflation du sous-espace signal. La fonction quadratique utilisée vaut zéro pour toutes les directions estimées auparavant et asymptotiquement un partout ailleurs. Dans le but de caractériser les performances de cet algorithme, nous proposons des expressions théoriques de l'erreur d'estimation, du biais et de la variance de l'algorithme ZF-MUSIC puis nous dérivons et analysons la Borne de Cramér-Rao (CRB) déterministe dédiée au modèle sous-jaçant. De plus, nous caractérisons l'erreur de propagation, définie comme l'erreur des directions préalablement estimées sur l'estimation de la direction courante, quantité largement identifiée dans tous les algorithmes séquentiels. De plus, nous établissons et analysons la borne de Cramér-Rao (CRB) déterministe, la CRB structurée ( $CRB_S$ ), dédiée au modèle sous-jaçant.

Le chapitre s'organise comme suit. Dans la section 3.1, la version spectrale de l'algorithme ZF-MUSIC est introduite. La section 3.2 présente la  $CRB_S$  dont nous faisons l'analyse dans la même partie. La section suivante, 3.3 est consacrée à l'étude au premier ordre de l'algorithme ZF-MUSIC. La section 3.4 est dédiée aux simulations numériques. Enfin, nous dressons une conclusion dans la section 3.5 et les démonstrations des théorèmes sont reportés dans l'Annexe.

### 3.1 L'algorithme séquentiel Zero-forcing MUSIC (ZF-MUSIC)

Nous considérons ici le modèle défini en (1.1) et (1.54) mais en normalisant le vecteur d'antenne noté  $\mathbf{p}_L(\omega)$  de la manière suivante

$$\mathbf{p}_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{L}} [1 \quad e^{i\omega} \quad \dots \quad e^{i\omega(L-1)}]^T.$$

Nous rappelons également que la covariance spatiale est donnée par son estimée empirique de la façon suivante

$$\hat{\mathbf{R}}_Y = \frac{1}{T} Y Y^H \quad (3.1)$$

Nous utilisons enfin le critère MUSIC, rappelé en (1.2.5).

### 3.1.1 Critère spectral

Dans cette partie, nous modifions le critère classique MUSIC, d'après la définition suivante.

**Définition 1** *La forme spectrale de l'algorithme séquentiel Zero-Forcing MUSIC (ZF-MUSIC) est donnée par*

$$\omega_m = \arg \max_{\omega} \frac{\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega)}{f_{\text{MUSIC}}(\omega)} \quad (3.2)$$

pour  $m \in [1 : M]$  et avec  $L_z$  un entier positif. La fonction quadratique  $\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega)$  dans le critère (3.2) est définie par

$$\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega) = \mathbf{p}_{L_z}(\omega)^H \mathbf{P}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega) \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{P}_m^\perp = \mathbf{I}_L - \mathbf{P}_m$  dans lequel  $\mathbf{P}_m = \mathbf{A}_m (\mathbf{A}_m^H \mathbf{A}_m)^{-1} \mathbf{A}_m^H$  avec

$$\mathbf{A}_m = [\mathbf{p}_{L_z}(\omega_1) \quad \dots \quad \mathbf{p}_{L_z}(\omega_{m-1})] \quad (3.4)$$

Remarque : nous avons rangé les  $m - 1$  vecteurs d'antenne préalablement estimés dans la matrice  $\mathbf{A}_m$ , par suite  $\mathbf{P}_m^\perp$  est le projecteur sur le sous-espace  $\mathcal{R}(\mathbf{A}_m)^\perp$ .

L'estimation des directions par le spectral ZF-MUSIC est décrite par l'algorithme suivant.

**Init.** Appliquez l'algorithme spectral MUSIC défini dans (1.2.9) (ou avec  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}_{I_L}$ , i.e.,  $\mathcal{F}_1^{(L_z)}(\omega) = 1$  dans (3.2)) et estimez  $\omega_1$  en sélectionnant le pic le plus élevé dans le pseudo-spectre. Puis, calculez le projecteur  $\mathbf{P}_2^\perp = \mathbf{I}_L - \mathbf{p}_{L_z}(\omega_1) \mathbf{p}_{L_z}(\omega_1)^H$  avec  $L_z \gg L$ .

**Boucle.** Pour  $m \in [2 : M]$ , calculez la fonction zero-forcing  $\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega)$  basée sur les expressions (3.3)-(3.4) et estimez  $\omega_m$  en sélectionnant le pic le plus élevé dans le pseudo-spectre correspondant au critère (3.2).

### 3.1.2 Analyse de la fonction de forçage à zéro

#### Étude asymptotique de la fonction de forçage à zéro

**Propriété 1** *La fonction de forçage à zéro a les propriétés suivantes :*

$$\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mathbf{p}_{L_z}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{A}_m) \\ 1 & \text{autrement et pour } L_z \text{ élevé.} \end{cases} \quad (3.5)$$

En d'autres termes, la fonction de forçage à zéro est égale à zéro pour toutes les directions préalablement estimées et vaut asymptotiquement (i.e., pour  $L_z$  élevé) un partout ailleurs. Par conséquent, le pseudo-spectre MUSIC, donné dans (1.29), est forcé à valoir zéro pour toutes les directions déjà estimées et reste inchangé pour les autres directions (ou encore de façon analogue pour les autres pulsations) à estimer.

*Preuve : voir Annexe 3.6.1.*

#### Largeur de bande et atténuation de la fonction de forçage à zéro

Sans perte de généralité, nous supposons que  $L_z$  est élevé, la fonction de forçage à zéro s'écrit alors de la manière suivante

$$\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega) = 1 - \frac{1}{L_z} \mathcal{K}_{L_z}(\omega) * \left( \sum_{\ell=1}^{m-1} \delta_{\omega-\omega_\ell} \right) \quad (3.6)$$

où  $*$  représente le produit de convolution et

$$\mathcal{K}_{L_z}(\omega) = \frac{1}{L_z} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2} L_z\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

définit le noyau de Fejér qui est directement relié à la théorie des noyaux des projecteurs orthogonaux [Michele et al., 1993]. La démonstration de l'expression (3.6) est donnée dans l'Annexe 3.6.2. Le noyau de Fejér est quasiment équivalent à l'identité (compte tenu de l'hypothèse adoptée sur  $L_z$ ) ou encore il représente un invariant pour l'opérateur de convolution puisqu'il tend vers une distribution de Dirac. En s'intéressant d'avantage à l'expression (3.6), il est évident que la fonction  $\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega)$  est la somme de noyaux translattés, centrés autour des pulsations  $\omega$  préalablement estimées. La largeur du lobe principal est obtenue en considérant une fraction de la distance entre deux zéros consécutifs de la fonction  $\mathcal{K}_{L_z}(\omega)$  centrée autour de  $\omega = 0$ . Il est aisé et direct de voir que les zéros de  $\mathcal{K}_{L_z}(\omega)$  sont obtenus pour  $\pm k \frac{2\pi}{L_z}$  où  $k$  est un entier relatif. Par suite, la largeur du lobe principal est de l'ordre de  $O\left(\frac{4\pi}{L_z}\right)$ . Cette quantité est inversement proportionnelle au paramètre  $L_z$  (cf. Fig. 3.1).

Comme ce paramètre est supposé élevé, le lobe principal est étroit. Par conséquent, l'algorithme ZF-MUSIC peut annuler de façon très précise les directions estimées aux itérations précédentes.

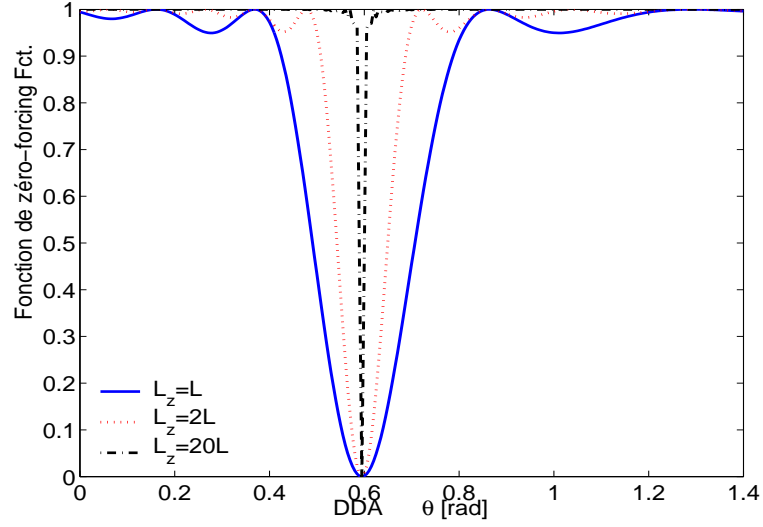


figure 3.1: Fonction de forçage à zéro Fct. des valeurs de  $L_z$ .

De plus, nous pouvons donner facilement l'atténuation du premier lobe secondaire, approximativement centré autour de la moyenne du premier et second zéro, *i.e.*, autour de  $\pm \frac{3\pi}{L_z}$ . L'atténuation est donc donnée par

$$Q(L_z) = \frac{1}{L_z} \mathcal{K}_{L_z} \left( \pm \frac{3\pi}{L_z} \right) = \frac{100}{L_z^2 \sin^2 \frac{3\pi}{2L_z}} [\%]. \quad (3.7)$$

Pour une valeur de  $L_z$  très grande, le sinus est approximé par son argument et l'atténuation minimal vaut alors  $Q_{\min} = \frac{400}{9\pi^2} \approx 4,5\%$  ce qui constitue une petite valeur. Pour une petite valeur ou bien pour une valeur concrète du paramètre  $L_z$ , nous donnons une représentation numérique de la fonction (3.7) référencée en figure 3.2. Nous remarquons sur cette figure que l'atténuation pour  $L_z = 5$  reste petite, aux environs de 6%. Nous remarquons de plus que la convergence vers la valeur  $Q_{\min}$  est assez rapide puisque pour  $L_z \geq 15$ , l'atténuation est inférieure à 4.6%.

En conclusion, il existe un compromis entre la sélectivité de la fonction de forçage à zéro et le coût de calcul associé à la recherche des solutions.

### 3.2 Dérivation et analyse de la CRB déterministe structurée (CRB<sub>S</sub>)

Nous nous focalisons dans cette section sur la dérivation de la borne déterministe que nous nommons CRB<sub>S</sub>, pour l'estimation séquentielle des directions. Nous rappelons que le modèle sous-jacent est basé sur l'estimation d'une seule source corrompue par une interfé-

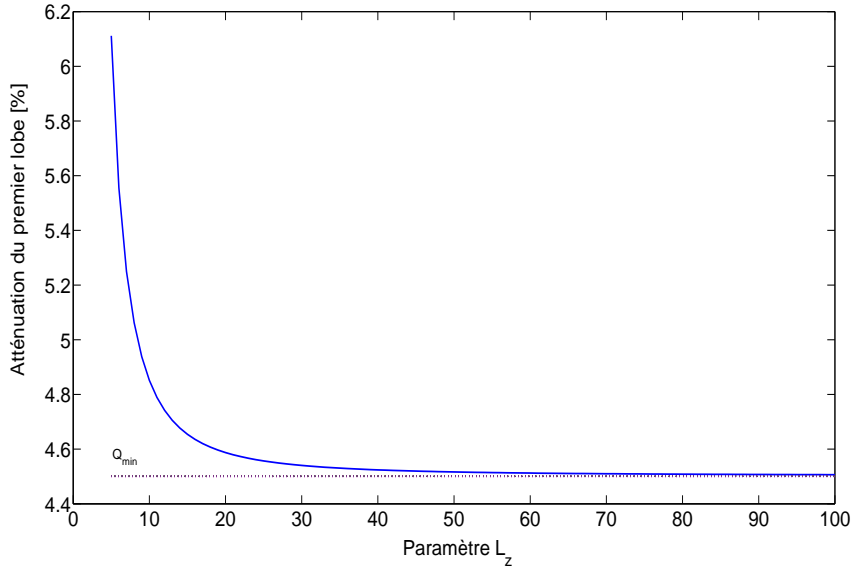


figure 3.2: Atténuation du premier lobe secondaire Fct. de  $L_z$ .

rence structurée (l'ensemble de toutes les autres sources, estimées ou non) plus une interférence non-structurée modélisée par un bruit additif Gaussien. Remarquons que ce problème est différent du problème basé sur la déflation orthogonale introduit dans le chapitre 2 et en référence [Boyer and Bouleux, ] où nous avons supposé la connaissance exacte (sans erreur) du sous-espace associé à l'interférence structurée. De plus, nous rappelons que dans ce cas de figure, le sous-espace déflaté est de dimension réduite. Ce fait n'est évidemment pas valable pour le modèle adopté pour la CRB<sub>S</sub>. En effet, les directions estimées aux itérations précédentes sont par définition entachées d'une erreur. Par conséquent, leur interférence ne peut pas être annulée et la dimension du sous-espace signal reste inchangée.

Compte tenu des explications sur le modèle choisi, nous donnons maintenant le modèle mathématique. Nous rangeons, à la  $m^{\text{ième}}$  itération, dans la matrice  $\mathbf{X}_m = \mathbf{p}_L(\omega_m)\boldsymbol{\lambda}_m^T$ , de taille  $L \times T$  et où  $\boldsymbol{\lambda}_m^T = [\boldsymbol{\alpha}_m(1) \dots \boldsymbol{\alpha}_m(T)]$ , les signaux d'intérêts. De plus, nous rangeons dans la matrice  $\tilde{\mathbf{Y}}_m = \mathbf{B}_m\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_m$ , de taille  $L \times T$ , les signaux associés aux directions déjà estimées aux itérations précédentes ainsi que celles à estimer. Par suite, la matrice  $\mathbf{B}_m$  est de taille  $L \times (M - 1)$  et nous avons  $\mathcal{R}(\mathbf{p}_L(\omega_m)) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{B}_m) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$  avec  $\oplus$  la somme directe entre les sous-espaces. Cela signifie simplement que  $\mathcal{R}(\mathbf{p}_L(\omega_m))$  et  $\mathcal{R}(\mathbf{B}_m)$  intersecte trivialement. Pour finir, nous contraignons le modèle en considérant que toutes les sources sont décorréliées et de même puissance, ainsi  $\mathbf{R}_Y = \mathbf{I}_M$ .

Comme l'ordre des colonnes dans la matrice des vecteurs directionnels  $\mathbf{Y}$  est arbitraire, nous pouvons récrire le modèle (1.54) comme suit



$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y} &= [\mathbf{p}_L(\omega_m) \quad \mathbf{B}_m] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_m^T \\ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_m \end{bmatrix} + N \\
 &= \underbrace{\mathbf{p}_L(\omega_m)\boldsymbol{\lambda}_m^T}_{\text{Signal d'intérêt : } \mathbf{X}_m} + \underbrace{\mathbf{B}_m\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_m}_{\text{Interférence Structurée : } \bar{\mathbf{X}}_m} + \underbrace{N}_{\text{Interférence Non-Structurée (bruit)}}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

### 3.2.1 CRB structurée

#### Modèle vectorisé

En vue d'établir l'expression de la CRB<sub>S</sub>, nous “vectorisons” le modèle (1.54) de la manière suivante

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y}) = [\mathbf{y}(1)^T \quad \dots \quad \mathbf{y}(T)^T]^T = \mathbf{x}_m + \bar{\mathbf{x}}_m + \sigma \mathbf{n} \quad (3.9)$$

dans lequel le processus additif blanc Gaussien vectorisé de paramètres  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_{LT})$  est noté par le vecteur  $\mathbf{n} = \text{vec}(\mathbf{N})$  et

$$\mathbf{x}_m = \text{vec}(\mathbf{X}_m) = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{p}_L(\omega_m))\boldsymbol{\lambda}_m^T, \quad (3.10)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}_m) = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{B}_m)\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_m \quad (3.11)$$

où  $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_m = \text{vec}(\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_m)$ .

#### Modèle statistique

Dans le modèle (3.8), le but est d'estimer les DDA associées au signal déterministe,  $\mathbf{X}_m$ , contaminé par une interférence structurée et non-structurée modélisée par le vecteur  $\bar{\mathbf{X}}_m + \sigma \mathbf{n}$ . Les sources associées à l'interférence structurée sont supposées i.i.d et suivre une loi Gaussienne centrée, *i.e.*,  $\bar{\mathbf{X}}_m \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_T \otimes \Gamma_m)$  où  $\Gamma_m = \sigma_I^2 \mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^H$  avec  $\sigma_I^2$  la variance des sources interférentes. Nous supposons que l'interférence structurée,  $\bar{\mathbf{X}}_m$ , et l'interférence non-structurée,  $\mathbf{n}$ , sont des vecteurs aléatoires Gaussiens indépendants. Nous en déduisons, par propriété des vecteurs aléatoires Gaussiens, que la somme de ces deux vecteurs est un vecteur lui-même Gaussien. De manière plus précise, nous avons  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_m, \tilde{\mathbf{R}}_m)$  où  $\tilde{\mathbf{R}}_m = \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_m = \mathbf{I}_T \otimes (\sigma_I^2 \mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^H + \sigma^2 \mathbf{I})$ .

#### La borne inférieure déterministe

Soit maintenant le vecteur des paramètres signal plus nuisance pour le  $m^{\text{ième}}$  signal défini par  $\boldsymbol{\chi}_m = [\boldsymbol{\chi}_m^T \quad \boldsymbol{\zeta}_m^T]^T$  où  $\boldsymbol{\chi}_m = [\omega_m \quad \Re\{\boldsymbol{\lambda}_m\}^T \quad \Im\{\boldsymbol{\lambda}_m\}^T]^T$  est le vecteur des paramètres d'intérêt et où le vecteur des paramètres de nuisance est donné par  $\boldsymbol{\zeta}_m = [\boldsymbol{\varphi}_m^T \quad \sigma_I^2 \quad \sigma^2]^T$  avec  $\boldsymbol{\varphi}_m = [\omega_1 \dots \omega_{m-1} \omega_{m+1} \dots \omega_m]^T$ .

Soit la définition de la CRB rappelée ici par

$$\text{CRB}_S^{-1}(\boldsymbol{\chi}_m) = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}_m)}{\partial \boldsymbol{\chi}_m} \left( \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\chi}_m)}{\partial \boldsymbol{\chi}_m} \right)^H \right] \quad (3.12)$$

En se référant aux propriétés statistiques du signal  $\mathbf{Y}$  dérivé dans la section précédente et en utilisant le fait que les paramètres du signal et ceux de nuisances sont découplés [Stoica and Moses, 2005], l'expression (3.12) pour le sous-vecteur  $\boldsymbol{\chi}'_m$  se réécrit de la manière suivante

$$[\text{CRB}_S^{-1}(\boldsymbol{\chi}'_m)]_{ij} = 2\Re \left\{ \left( \frac{\partial \boldsymbol{x}_m}{\partial [\boldsymbol{\chi}'_m]_i} \right)^H \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{x}_m}{\partial [\boldsymbol{\chi}'_m]_j} \right\} \quad (3.13)$$

où  $[\boldsymbol{\chi}'_m]_i$  dénote la  $i^{\text{ème}}$  entrée du vecteur  $\boldsymbol{\chi}'_m$ . Par suite, l'expression de la CRB<sub>S</sub> est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 8** *Pour des sources décorréelées et de même puissance la CRB<sub>S</sub> est donnée par*

$$\text{CRB}_S(\omega_m) = \frac{1}{2T \text{RSB}_m} \frac{\|\mathbf{p}_L(\omega_m)\|_{\mathbf{K}_m}^2}{\|\mathbf{p}'_L(\omega_m)\|_{\mathbf{K}_m}^2 \|\mathbf{p}_L(\omega_m)\|_{\mathbf{K}_m}^2 - |\langle \mathbf{p}'_L(\omega_m), \mathbf{p}_L(\omega_m) \rangle_{\mathbf{K}_m}|^2} \quad (3.14)$$

où la dérivée première du vecteur d'antenne est  $\mathbf{p}'_L(\omega_m) = \left. \frac{\partial \mathbf{p}_L(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}$ ,  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{W}} = \mathbf{p}^H \mathbf{W} \mathbf{g}$  est le produit scalaire  $\mathbf{W}$ -pondéré [Golub and Loan, 1996], le RSB local étant quant à lui défini par  $\text{RSB}_m = \sigma_m^2 / \sigma^2$  et

$$\mathbf{K}_m = (\mathbf{I}_L + \text{INR} \mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^H)^{-1} \quad (3.15)$$

où le rapport Interférence à bruit est défini par  $\text{INR} = \sigma_I^2 / \sigma^2$ .

*Preuve : voir Annexe 3.6.3.*

### 3.2.2 Analyse de la CRB<sub>S</sub>

Dans cette section, nous analysons la CRB<sub>S</sub>. Dans ce but, nous rappelons que pour des sources décorréelées, la CRB correspondant au modèle (3.8) où nous avons une seule source ( $M = 1$ ) ou de façon équivalente au modèle (1.54) sans interférence structurée, s'écrivent sous la forme suivante [Stoica and Moses, 2005] :

$$\text{CRB}_1(\omega_m) = \frac{1}{2T \text{SNR}_m} \frac{1}{\|\mathbf{p}'_L(\omega_m)\|_{\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{p}(\omega_m)}}^2}. \quad (3.16)$$

De plus, la CRB associée aux interférences structurées connues sans erreur, soit la Prior-CRB vue dans le chapitre 2 et dans [Boyer and Bouleux, ], est donnée par la relation

$$P\text{-CRB}(\omega_m) = \frac{1}{2T \text{SNR}_m} \frac{1}{\|\mathbf{p}'_L(\omega)_m\|_{\mathbf{P}_A^\perp}^2}. \quad (3.17)$$

Nous sommes dorénavant en mesure de fournir une analyse comparative des différentes bornes de la manière suivante.

**Théorème 9** *Pour tout estimateur non-biaisé de la  $m^{\text{ième}}$  pulsation spatiale,  $\omega_m$ , ainsi que pour des sources décorrélées, nous avons les relations d'ordres suivantes :*

- (i)  $CRB_S(\omega_m) \xrightarrow{RIB \rightarrow 0} CRB_1(\omega_m)$ ,
- (ii)  $CRB_S(\omega_m) \xrightarrow{RIB \rightarrow \infty} P\text{-CRB}(\omega_m)$ ,
- (iii) *Pour des directions espacées, toutes les bornes sont confondues, i.e.,  $CRB_S(\omega_m) = CRB_1(\omega_m) = P\text{-CRB}(\omega_m)$ ,*
- (iv) *Pour des directions proches, nous avons*
  - $CRB_S(\omega_m) \ll P\text{-CRB}(\omega_m)$  *pour un RIB faible,*
  - $CRB_1(\omega_m) \ll CRB_S(\omega_m)$  *pour un RIB élevé,*
- (v) *Pour tout RIB, nous avons  $CRB_1(\omega_m) \leq CRB_S(\omega_m) \leq P\text{-CRB}(\omega_m)$ .*
- (vi)  $CRB_S(\omega_m), P\text{-CRB}(\omega_m), CRB_1(\omega_m) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{6}{L^2 T R S B_m}$ .

*Preuve : voir Annexe 3.6.4.*

Le théorème ci-dessus montre que pour des directions proches, la  $CRB_S$  possède deux régimes principaux selon la valeur (ordre de grandeur) du RIB. *i.e.*, en fonction du rapport des puissances entre interférence structurée et bruit. Nous remarquons, de plus, que la  $CRB_S$  est minorée par la CRB sans interférence structurée et majorée par la  $P\text{-CRB}$ <sup>1</sup>. Finalement, retenons que (i) pour de petites valeurs (valeurs concrètes) du nombre de capteurs et pour des directions espacées et (ii) pour un nombre de capteurs élevé, toutes les bornes sont confondues.

### 3.3 Analyse au premier ordre du biais, de la variance et de l'erreur de propagation

Dans un contexte d'estimation séquentielle, nous pouvons identifier deux sources d'erreur :

- La covariance estimée  $\hat{\mathbf{R}}_Y$  induit une erreur dans l'estimation du projecteur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp$  qui intervient dans l'expression de  $f_{\text{MU}}(\omega)$ . C'est ce que nous définissons comme "l'effet

---

1. CRB associé à une connaissance exacte des interférences

d'acquisition". Plus précisément, soit  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}_{\mathbf{Y}} + \Delta \mathbf{R}_{\mathbf{Y}}$  où  $\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{Y}}$  est l'erreur sur la vraie covariance  $\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}$ . De manière équivalente, nous définissons  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^{\perp} = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} + \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$  où  $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$  est l'erreur sur le vrai projecteur<sup>2</sup>  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}$  [Krim and Viberg, 1996].

– Au  $m^{\text{ième}}$  pas de l'algorithme, l'erreur d'estimation sur les paramètres préalablement estimés, *i.e.* sur les pulsations  $\omega_1, \dots, \omega_{m-1}$ , a un impacte sur l'estimation du paramètre courant à estimer, soit  $\omega_m$ . C'est ce que nous définissons comme l'erreur de propagation. Pour la  $m^{\text{ième}}$  pulsation spatiale, nous avons  $\hat{\mathbf{P}}_m^{\perp} = \mathbf{P}_m^{\perp} + \Delta \mathbf{P}_m$  où  $\hat{\mathbf{P}}_m^{\perp} = \mathbf{I}_{L_z} - \hat{\mathbf{A}}_m \hat{\mathbf{A}}_m^{\dagger}$ , avec  $\hat{\mathbf{A}}_m = [\mathbf{p}_{L_z}(\hat{\omega}_1) \dots \mathbf{p}_{L_z}(\hat{\omega}_{m-1})]$ . En utilisant un développement de Taylor au premier ordre, nous obtenons

$$\hat{\mathbf{A}}_m \stackrel{1}{=} \mathbf{A}_m + \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)} \quad (3.18)$$

où

$$\mathbf{D}_m = [\mathbf{p}'_{L_z}(\omega_1) \quad \mathbf{p}'_{L_z}(\omega_2) \quad \dots \quad \mathbf{p}'_{L_z}(\omega_{m-1})], \quad (3.19)$$

$$\Delta_e^{(m)} = \begin{bmatrix} (\Delta\omega_1)_{\text{MU}} & & & 0 \\ & (\Delta\omega_2)_{\text{ZF}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (\Delta\omega_{m-1})_{\text{ZF}} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

dans laquelle  $(\Delta\omega_m)_{\text{ZF}} = \omega_m - \hat{\omega}_m$  est l'erreur d'estimation de la  $m^{\text{ième}}$  pulsation spatiale  $\omega_m$  conditionnellement à l'erreur de propagation sur les pulsations préalablement estimées. Il est à noter que l'erreur d'estimation de la première pulsation spatiale n'est rien d'autre que l'erreur d'estimation de l'algorithme MUSIC, notée  $(\Delta\omega_1)_{\text{MU}}$ .

### 3.3.1 Analyse de l'erreur d'estimation, du biais et de la variance

**Théorème 10** Dans un régime à fort RSB, l'erreur d'estimation de l'algorithme ZF-MUSIC est donnée par

$$(\Delta\omega_m)_{\text{ZF}} \stackrel{1}{=} (\Delta\omega_m)_{\text{MU}} (1 + \varepsilon_m). \quad (3.21)$$

où  $(\Delta\omega_m)_{\text{MU}}$  est l'erreur d'estimation de l'algorithme MUSIC [Krim and Viberg, 1996] et

$$\varepsilon_m = 2 \frac{\mathbf{p}_{L_z}^H(\omega_m) \left( \mathbf{P}_m^{\perp} \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)} \mathbf{A}_m^{\dagger} \right) \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m)}{\mathbf{p}_{L_z}^H(\omega_m) \mathbf{P}_m^{\perp} \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m)}. \quad (3.22)$$

*Preuve : voir Annexe 3.6.5.*

Remarque :

$\varepsilon_m$  l'expression (3.21) tient compte de l'erreur commise sur les pulsations préalablement estimées au travers de la matrice  $\Delta_e^{(m)}$ . De plus, comme  $\mathbf{A}_m^H \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \xrightarrow{L_z \gg 1} 0$  et  $\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega_m) \xrightarrow{L_z \gg 1} 1$ , nous avons  $\varepsilon_m \xrightarrow{L_z \gg 1} 0$ . Par suite, lorsque le paramètre  $L_z$  est élevé, l'erreur d'estimation finale de l'algorithme ZF-MUSIC est la même que celle de l'algorithme MUSIC, *i.e.*

2. Ce type d'analyse a déjà été abordé dans le chapitre 2.3.

$(\Delta\omega_m)_{\text{ZF}} \stackrel{1}{=} (\Delta\omega_m)_{\text{MU}}$ . Par conséquent, le biais et la variance de l'algorithme ZF-MUSIC sont ceux de l'algorithme MUSIC, soit

$$\text{Biais}_{\text{ZF}}(\hat{\omega}_m) \stackrel{1}{=} \mathbb{E}[(\Delta\omega_m)_{\text{MU}}], \quad (3.23)$$

$$\text{Var}_{\text{ZF}}(\hat{\omega}_m) \stackrel{1}{=} \mathbb{E}[(\Delta\omega_m)_{\text{MU}}(\Delta\omega_m)_{\text{MU}}^*]. \quad (3.24)$$

Ce dernier résultat implique sans difficulté que l'algorithme ZF-MUSIC est efficace, *i.e.* que le ZF-MUSIC atteint la  $\text{CRB}_S$ .

### 3.3.2 Analyse de l'erreur de propagation

Une des plus grandes sources de nuisance des algorithmes séquentiels est sans nul doute l'erreur de propagation. Dans cette partie, nous caractérisons cette erreur. Plus précisément, dans l'hypothèse où les directions  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}$  ont été estimées sans erreur, la fonction de forçage à zero est exacte. Ceci implique que  $\Delta\mathbf{P}_m = \mathbf{0}$  et  $\varepsilon_m = 0$ . Nous définissons l'erreur d'estimation sans erreur de propagation comme  $(\Delta\omega_m|\varepsilon_m = 0)_{\text{ZF}}$  et d'après le Théorème 10, nous obtenons

$$(\Delta\omega_m|\varepsilon_m = 0)_{\text{ZF}} \stackrel{1}{=} (\Delta\omega_m)_{\text{MU}}. \quad (3.25)$$

Par suite, nous pouvons dorénavant définir l'erreur de propagation par

$$\text{PE}_m = (\Delta\omega_m)_{\text{ZF}} - (\Delta\omega_m|\varepsilon_m = 0)_{\text{ZF}}. \quad (3.26)$$

Enfin, l'erreur de propagation de l'algorithme ZF-MUSIC pour la pulsation spatiale  $\omega_m$  est donnée par la relation

$$\text{PE}_m \stackrel{1}{=} \varepsilon_m (\Delta\omega_m)_{\text{MU}}. \quad (3.27)$$

Or, d'après l'expression (3.27), nous pouvons dire que

(i) l'erreur de propagation est de l'ordre  $O((\Delta\omega_m)_{\text{MU}})$ .

(ii) pour  $L_z$  élevé, nous savons que  $\varepsilon_m \xrightarrow{L_z \gg 1} 0$ , et donc nous en déduisons que  $\text{PE}_m \xrightarrow{L_z \gg 1} 0$ .

## 3.4 Simulations Numériques

Pour cette partie dédiée aux tests numériques de l'algorithme ZF-MUSIC et à la vérification des propriétés de la  $\text{CRB}_S$ , nous choisissons une Antenne linéaire et Uniforme (ALU), avec une distance inter-capteurs d'une demi longueur d'onde,  $L = 10$  capteurs et  $T = 100$  acquisitions. La précision du spectral ZF-MUSIC est comparée à deux algorithmes séquentiels

standards, que sont les algorithmes S-MUSIC et RAP-MUSIC. Ces deux algorithmes sont basés sur le principe de la déflation du sous-espace signal. Dans [Mosher and Leahy, 1999], les auteurs montrent que l'algorithme RAP-MUSIC a de meilleures performances que tous les autres algorithmes séquentiels (R-MUSIC, S-MUSIC et IES-MUSIC). Par conséquent, nous considérons naturellement l'algorithme RAP-MUSIC comme l'algorithme séquentiel de référence. Pour toutes les expériences réalisées, nous avons effectué l'analyse des performances quand les directions sont proches et quand ces dernières sont espacées. Quand les directions sont espacées, nous fixons  $\omega_1 = -0.31$ ,  $\omega_2 = -2.46$  rad et  $\omega_1 = -1.76$  and  $\omega_2 = -1.77$  rad lorsque les directions sont proches (cela correspond respectivement à  $\theta = [0.1 \ 0.9]$  rad et  $\theta = [0.595 \ 0.6]$  rad), avec  $\omega$  défini par (1.1). Dans ce dernier cas, la différence angulaire entre les deux directions est petite et inférieure à la résolution de Rayleigh [Thubert and Kopp, 1986]. Par suite, l'algorithme MUSIC ne peut absolument pas estimer les deux directions. Le critère adopté pour quantifier et évaluer les performances est celui de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) pour la direction d'intérêt,  $\omega_2$ .

### 3.4.1 Résultats de Simulation pour la $CRB_S$

Comme nous pouvons le constater sur la figure 3.3-a où les directions sont espacées, toutes les bornes sont confondues. De plus, la figure 3.3-b nous permet de vérifier les propriétés de la  $CRB_S$  liées au RIB. En effet, quand le RIB est faible (inférieur à 0 dB), la  $CRB_S$  se confond avec la  $CRB_1$ . Puis, quand le RIB = 0 dB (cas où les interférences structurées et le bruit ont la même puissance), nous voyons la  $CRB_S$  se détacher de la  $CRB_1$  pour atteindre la P-CRB quand le RIB est important (cas où les interférences dominent le bruit). Ces simulations illustrent concrètement les propriétés (i)–(v) du Théorème 2 et mettent clairement en évidence le caractère non-linéaire de la  $CRB_S$ .

### 3.4.2 Précision de l'algorithme spectral ZF-MUSIC

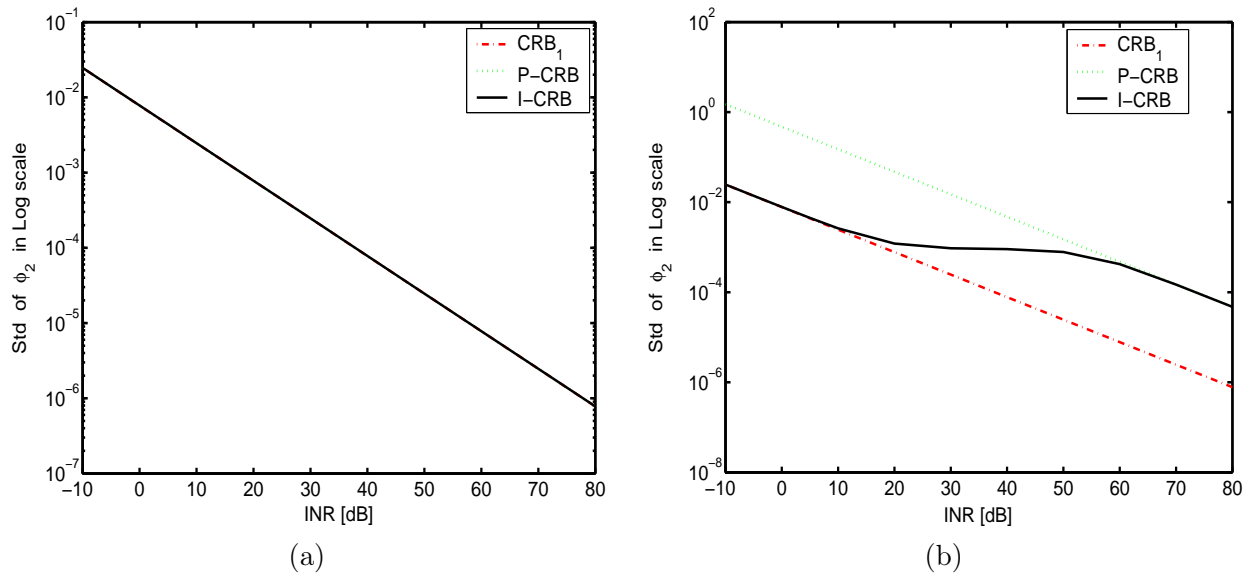
Pour chacune des simulations, nous calculons la déviation standard de la pulsation spatiale de la source d'intérêt, notée  $\omega_2$ , en moyennant sur 500 réalisations Monte-Carlo pour chaque RSB. Nous avons également rajouté, la CRB dans le cas où il n'existe qu'une seule source dans le modèle, la P-CRB et la  $CRB_S$  données respectivement dans (3.16) et dans (3.17). Pour deux sources de même puissance, la matrice de covariance des sources est donnée par

$$R_\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$$

où  $\gamma$  est le coefficient de corrélation.

#### Sources décorréliées

Pour des sources décorréliées, la matrice de covariance des sources se réduit à la matrice identité de rang 2 puisque  $\gamma = 0$ .



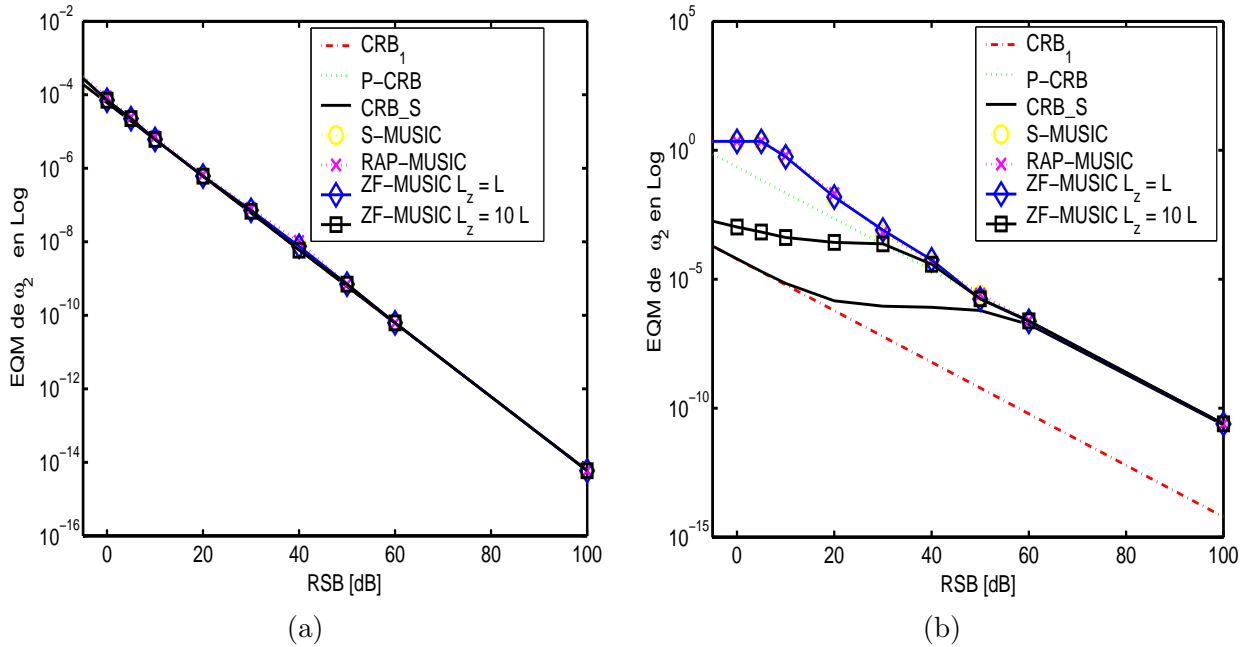
(a) Directions éloignées, (b) Directions proches.

 figure 3.3: EQM de  $\omega_2$  Fct. RIB.

**Cas où la première direction est totalement connue** Sur les Figures 3.4-a et b, nous considérons dans un premier temps que la pulsation spatiale,  $\omega_1$  est totalement connue, (estimée sans erreur). Cette situation est parfois réaliste (elle rejoint les hypothèses du chapitre 2), [DeGroat et al., 1993, Boyer and Bouleux, , Chen et al., 1996, Cavassila et al., 1999]. Compte tenu de cette hypothèse, nous nous focalisons uniquement sur l'erreur d'estimation de la pulsation d'intérêt,  $\omega_2$ . Dans le cas où les directions sont espacées, illustré par la figure 3.4-a, nous constatons que tous les algorithmes sont équivalents. Quand nous rapprochons les directions, expérience illustrée par les figures 3.4-b et c, où nous faisons varier le paramètre de sélectivité  $L_z$ , le spectral ZF-MUSIC devient beaucoup plus précis que les algorithmes S-MSUSIC et RAP-MUSIC, pour une plage importante de RSB ( $\leq 45$  dB). En s'attardant sur les performances du spectral ZF-MUSIC, le gain observé entre les figures 3.4-b, peut être expliqué de la manière suivante. Nous avons vu dans la section 3.1.2 qu'en augmentant la valeur du paramètre  $L_z$  nous obtenions un lobe principal de la fonction de forçage à zéro de plus en plus étroit, de ce fait la réjection de la pulsation spatiale,  $\omega_1$ , est plus précise.

L'analyse des figures 3.4-a et b, nous permet de constater que les méthodes basées sur la déflation orthogonale (algorithmes S-MUSIC et RAP-MUSIC) sont minorées par la P-CRB quelque soit la valeur du RSB. Pour  $L_z$  de même grandeur que  $L$ , les performances du spectral ZF-MUSIC sont légèrement meilleures que les celles des algorithmes basés sur la déflation. A contrario, quand  $L_z$  est plus grand que  $L$ , la version spectrale de l'algorithme ZF-MUSIC devient nettement plus performante et se rapproche de la borne  $CRB_S$ . En particulier, l'algorithme ZF-MUSIC est proche de la CRB correspondant à un modèle sans source interférente pour des RSB inférieurs à 15 dB et inférieur à la P-CRB pour une plage importante de RSB. Finalement, à très fort RSB, toutes les méthodes étudiées atteignent la P-CRB.

**Cas où la première direction est estimée** Dans cette partie,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont séquentiellement estimées et cette configuration est illustrée par les figures 3.5-A et b. Dans ce cas, l'erreur de propagation induite par l'estimation de la première direction n'est pas nulle. Les effets sont cependant négligeables quand les directions sont espacées, comme nous pouvons le voir en se référant à la figure 3.5-a. La situation de directions proches correspond à l'expérience des figures 3.5-b. Comme nous pouvions nous y attendre, nous observons des performances légèrement moins bonnes quelque soit le type de méthodes ou algorithmes proposés. Ce n'est toutefois pas crucial (la variance d'estimation n'est pas affectée de façon drastique) ce qui nous permet de conclure sur la robustesse de tous les algorithmes à une erreur sur la direction préalablement estimée ( $\omega_1$ ). En fin, les comparaisons effectuées lors de la partie précédente (cas où la première direction est totalement connue) restent inchangées.



(a) Directions éloignées, (b) Directions proches.

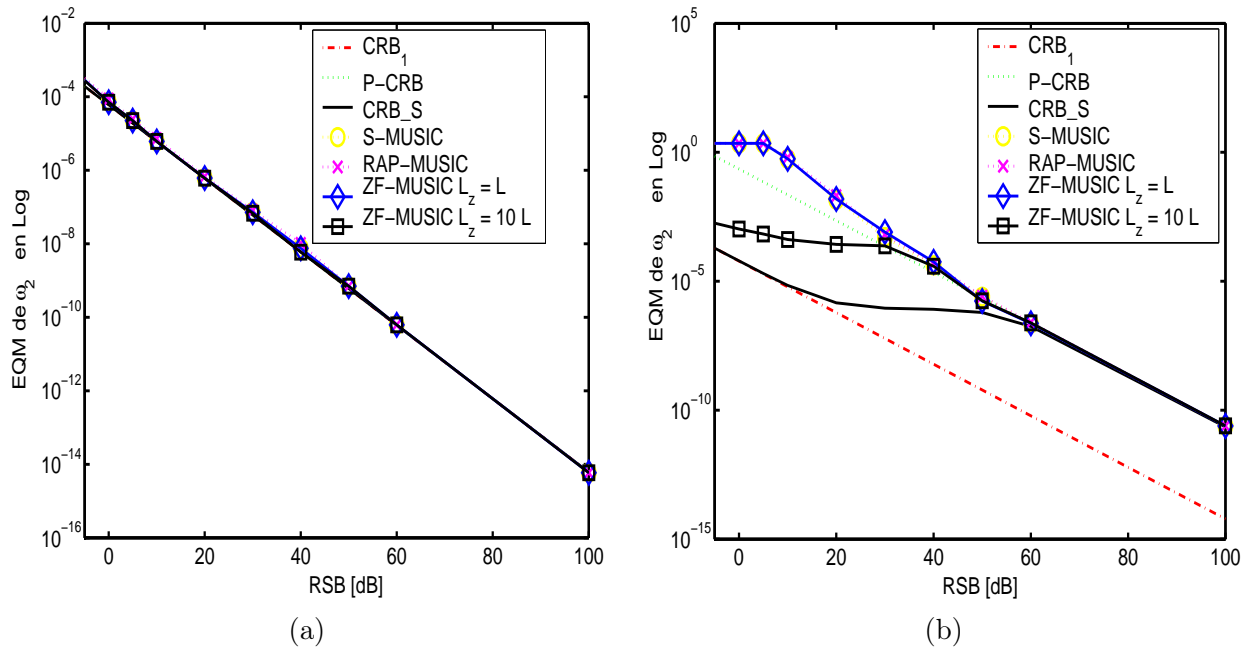
figure 3.4: EQM de  $\omega_2$  Fct. RSB quand  $\omega_1$  est sans erreur.

### Sources Corrélées

Nous prenons pour cette série d'expériences, trois valeurs typiques du coefficient de corrélation :  $\gamma = 0.5$ ,  $\gamma = 0.7$  and  $\gamma = 0.9$ .

**Cas où les directions sont espacées** En s'appuyant sur les résultats donnés dans la référence [Mosher and Leahy, 1998], pour des sources corrélées, l'algorithme RAP-MUSIC est le meilleur algorithme séquentiel. Dans ce contexte comme nous le voyons sur l'ensemble des simulations incluses dans la figure 3.6, tous les algorithmes étudiés sont proches (leur précision est similaire) et ce quelque soit la valeur du coefficient de corrélation. Nous notons en fin,



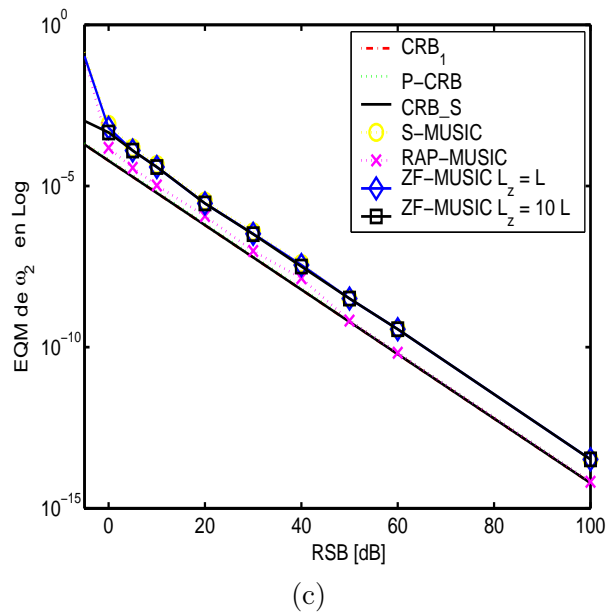
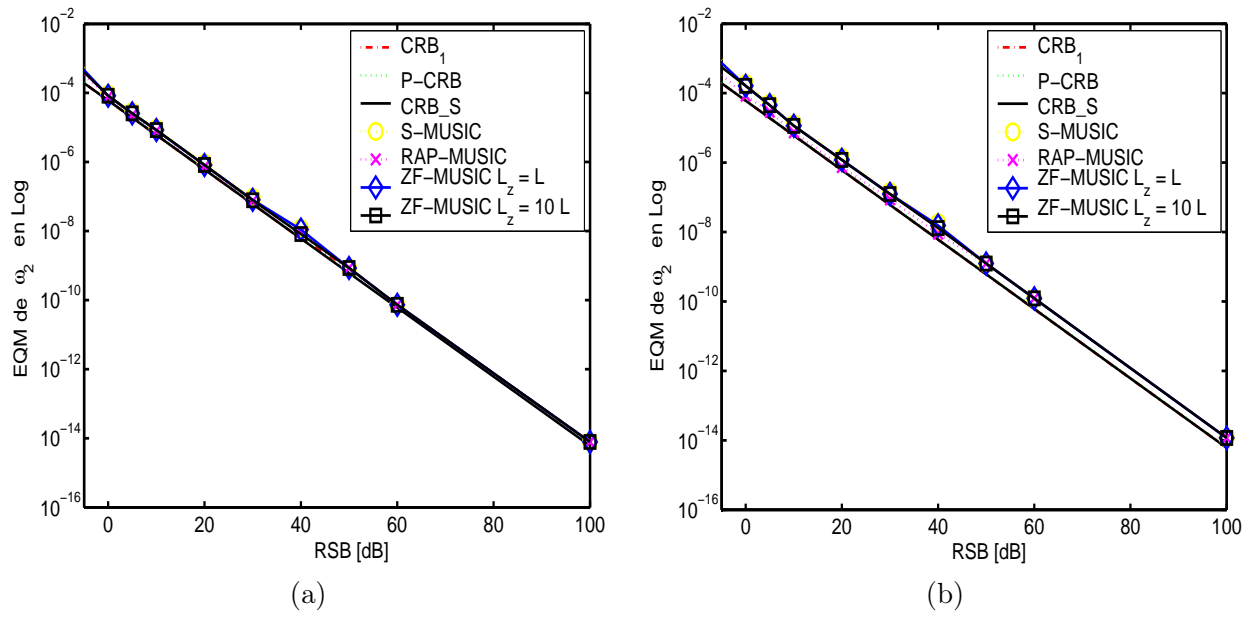


(a) Directions éloignées, (b) Directions proches.

 figure 3.5: EQM de  $\omega_2$  Fct. RSB quand  $\omega_1$  est estimée.

qu'augmenter la valeur du paramètre de sélectivité  $L_z$  n'a aucune influence sur la précision d'estimation de l'algorithme spectral ZF-MUSIC quand les directions sont espacées.

**Cas où les directions sont proches** Dans le contexte de directions proches dont les sources associées sont corrélées, les performances illustrées par l'ensemble des simulations de la figure 3.7, nous indiquent que l'algorithme spectral ZF-MUSIC est relativement indépendant de la corrélation puisque ses performances sont identiques au contexte de directions proches. En effet, plus nous augmentons le paramètre de sélectivité  $L_z$  et plus la précision d'estimation de l'algorithme ZF-MUSIC est à la fois meilleure intrinsèquement mais aussi nettement plus performante que tous les autres algorithmes proposés, quelque soit la valeur du coefficient de corrélation. En fin, remarquons que la CRB<sub>S</sub> est plutôt "optimiste", cela tient du fait que cette borne a été établie sous hypothèses de sources décorrélées.



(a)  $\gamma = 0.5$ , (b)  $\gamma = 0.7$ , (c)  $\gamma = 0.9$ .

figure 3.6: EQM de  $\omega_2$  Fct. RSB quand  $\omega_1$  estimée pour des directions éloignées avec des sources corrélées.

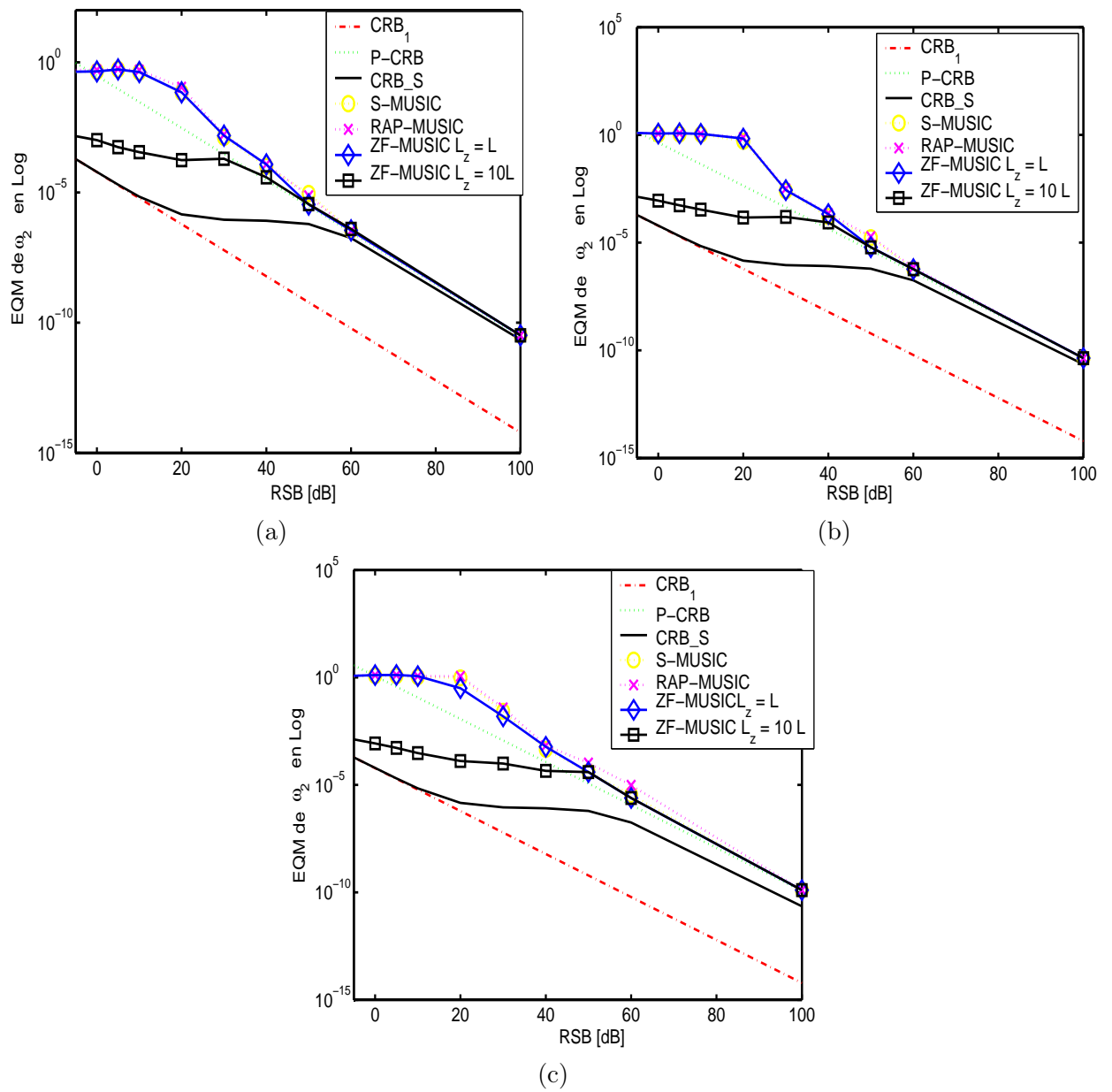


figure 3.7: EQM de  $\omega_2$  Fct. RSB quand  $\omega_1$  est estimée pour des directions proches avec des sources corrélées.

### 3.4.3 Une résolution fortement accrue

#### Traitement matriciel des Directions

Cette expérience illustre visuellement la très haute résolution de l'algorithme ZF-MUSIC en présence d'un faible bruit. Les paramètres du modèle choisis sont les suivants : une Antenne Linéaire et Uniforme (ALU) avec une distance inter-capteurs d'une demi longueur d'onde,  $L = 8$  capteurs et  $T = 100$  acquisitions. Nous avons deux pulsations spatiales,  $\omega_1 = -2.4065$  rad ( $50^\circ$ ) et  $\omega_2 = -2.4083$  rad ( $50.05^\circ$ ). Dans ces conditions d'expérience la limite de Rayleigh ou Résolution de Rayleigh vaut  $\approx 0.61$  et la différence angulaire entre les pulsations spatiales  $\omega_1$  et  $\omega_2$  vaut quant à elle  $\approx 0.0017$ . Nous prenons délibérément des conditions drastiques et extrêmement difficiles (nous sommes bien en dessous de la limite Rayleigh) afin de montrer l'efficacité de l'algorithme proposé. En premier lieu nous constatons, à partir de la Fig. 3.8-a que l'algorithme MUSIC ne peut effectivement pas détecter les deux directions. En effet un seul lobe est présent, correspondant à  $\omega_1$  ( $50^\circ$ ). Nous rappelons ici que le pseudo-spectre de la Fig. 3.8-a est celui de MUSIC mais aussi celui du ZF-MUSIC (première itération de l'algorithme). Par conséquent, la pulsation retenue et incorporée dans la fonction de pondération de l'algorithme ZF-MUSIC est la pulsation estimée par MUSIC, soit  $\omega_1$ . La deuxième itération de l'algorithme ZF-MUSIC, annule complètement l'influence de  $\omega_1$  ce qui permet de détecter et d'estimer avec une grande précision la deuxième pulsation  $\omega_2$  ( $50.05^\circ$ ). Ce principe est illustré par la Fig. 3.8-b où la courbe en pointillée représente le pseudo-spectre de MUSIC (une seule direction est détectée) et la courbe pleine représente le pseudo-spectre de l'algorithme ZF-MUSIC à la deuxième itération. La figure parle d'elle-même.

### 3.4.4 Principaux résultats de simulation

Dans cette section, nous résumons les principaux résultats obtenus en simulation.

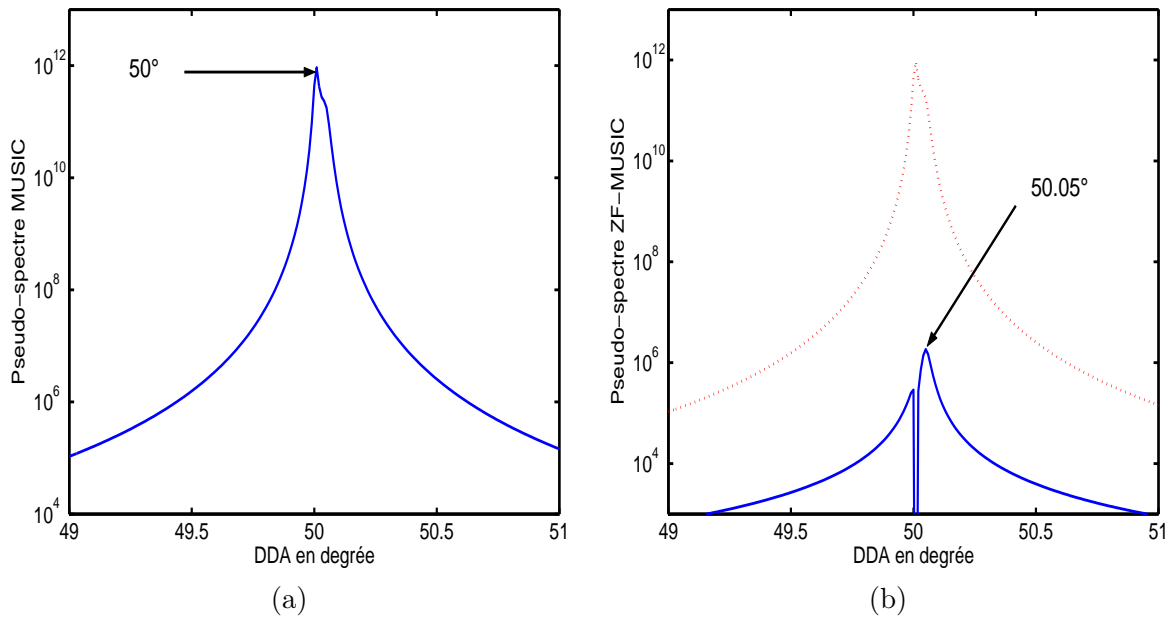
1. Pour une première direction totalement connue ou estimée sans erreur et pour des sources corrélées ou non, nous avons :
  - dans le cas de directions espacées,

$$EQM_{ZF} \approx EQM_{RAP} \approx EQM_S.$$

- dans le cas de directions proches,

$$EQM_{ZF} \leq EQM_{RAP} \approx EQM_S.$$

2. Dans le cas de directions proches, l'algorithme spectral ZF-MUSIC est nettement plus performant que les algorithmes S-MUSIC et RAP-MUSIC quand le paramètre de sélectivité  $L_z$  est élevé ( $> L$ ). Un inconvénient reste alors sa complexité si ce dernier se veut être plus performant que les approches basées sur la déflation orthogonale.
3. Les algorithmes S-MUSIC et RAP-MUSIC sont minorés par la P-CRB (la CRB où les interférences structurées sont parfaitement connues).
4. L'algorithme RAP-MUSIC est minoré par la  $CRB_S$  et cette borne possède une structure non-linéaire, nous observons deux régimes principaux, dépendant du RIB.



(a) Pseudo-Spectre de MUSIC Fct. de la pulsation spatiale 1<sup>ière</sup> itération de l'algorithme ZF-MUSIC, (b) Pseudo-Spectre ZF-MUSIC Fct. de la pulsation spatiale, l' algorithme MUSIC en traits discontinus et l'algorithme ZF-MSUIC en trait solide, 2<sup>ième</sup> itération de l'algorithme ZF-MUSIC.

figure 3.8: Comparaison des Pseudo-spectre MUSIC et ZF-MUSIC.

5. A faible RSB (et pour des valeurs modérées du RSB), l'algorithme ZF-MUSIC est proche de la CRB sans interférence structurée, correspondant à la variance minimale que peut atteindre ce type d'algorithme.

### 3.5 Conclusion

Habituellement, l'idée essentielle des algorithmes de type MUSIC séquentiels, est de déflater le sous-espace signal. En d'autres termes, la dimension de ce sous-espace est réduit en projetant le signal observé (ou une représentation matricielle) sur le sous-espace engendré par les directions estimées aux itérations précédentes. Dans ce chapitre, nous ne suivons pas cette démarche et nous laissons intacte la dimension du sous-espace signal. Nous pondérons simplement le pseudo-spectre de l'algorithme MUSIC par une fonction appropriée. Cette dernière vaut zéro pour toutes les directions préalablement estimées et asymptotiquement 1 partout ailleurs. L'algorithme associé à ce principe est l'algorithme Zero-Forcing séquentiel MUSIC (ZF-MUSIC). Dans le but de quantifier la précision de l'algorithme ZF-MUSIC, nous avons dérivé et analysé dans ce chapitre la borne déterministe CRB structurée ( $CRB_S$ ) associée au modèle où le but est d'estimer une seule source corrompue par une interférence structurée et un bruit additif. De plus, nous avons montré que (i) l'algorithme ZF-MUSIC est efficace, *i.e.* qu'il atteint la  $CRB_S$  quand le Rapport Signal à Bruit (RSB) est élevé et (ii) que l'erreur de propagation (définie comme l'erreur d'estimation de la direction courante sachant

l'erreur sur les directions préalablement estimées) est de l'ordre  $O((\Delta\omega_m)_{\text{MU}})$  si  $(\Delta\omega_m)_{\text{MU}}$  est l'erreur d'estimation de l'algorithme MUSIC et peut être nulle sous une condition peu contraignante. Nous avons également montré par simulations numériques que notre approche a de bien meilleures performances que d'autres algorithmes séquentiels de type MUSIC quand les directions sont proches, qu'elles soient corrélées ou non. En particulier, nous montrons que dans le contexte classique du traitement d'antenne matriciel, l'algorithme proposé a une hyper résolution comparée à l'algorithme MUSIC classique.

## 3.6 Annexes

### 3.6.1 Preuve de la Propriété 1

1. Soit  $\mathbf{p}_{L_z}(\omega) \in \mathcal{R}(\mathbf{A}_m)$  (signifiant que  $\mathbf{p}_{L_z}(\omega)$  a déjà été estimé), il est alors directe de voir que

$$\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega) = 1 - \mathbf{p}_{L_z}(\omega)^H \mathbf{P}_m \mathbf{p}_{L_z}(\omega) = 0 \quad (3.28)$$

puisque  $\mathbf{P}_m \mathbf{p}_{L_z}(\omega) = \mathbf{p}_{L_z}(\omega)$ .

2. Soit  $\alpha_{L_z}(\phi_i, \phi_j) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{p}_{L_z}(\phi_i), \mathbf{p}_{L_z}(\phi_j) \rangle = \mathbf{p}_{L_z}(\phi_i)^H \mathbf{p}_{L_z}(\phi_j)$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire hermitien. Observons de plus que [Stoica and Nehorai, 1989]

$$\alpha_{L_z}(\phi_i, \phi_j) = \frac{1}{L_z} \sum_{\ell=0}^{L_z-1} e^{i(\phi_j - \phi_i)\ell} \xrightarrow{L_z \rightarrow \infty} \delta_{\phi_i - \phi_j} \quad (3.29)$$

où  $\delta_{\phi_i - \phi_j} = 1$  si  $\phi_i = \phi_j$  et 0 autrement. Donc, pour  $\mathbf{p}_{L_z}(\omega) \notin \mathcal{R}(\mathbf{A}_m)$ , nous avons

$$(\mathbf{A}_m^H \mathbf{A}_m)^{-1} \xrightarrow{L_z \rightarrow \infty} I_{m-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \alpha_{L_z}(\omega_1, \omega_{m-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{L_z}^*(\omega_1, \omega_{m-1}) & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

où  $I_{m-1}$  est la matrice identité de rang  $(m-1)$  et

$$\mathbf{A}_m^H \mathbf{p}_{L_z}(\omega) = \begin{bmatrix} \alpha_{L_z}(\omega_1, \omega) \\ \vdots \\ \alpha_{L_z}(\omega_{m-1}, \omega) \end{bmatrix} \xrightarrow{L_z \rightarrow \infty} \mathbf{0}_{m-1} \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{0}_{m-1}$  est le vecteur nul de dimension  $(m-1) \times 1$ . Par conséquent, nous avons  $\mathbf{p}_{L_z}(\omega)^H \mathbf{P}_m \mathbf{p}_{L_z}(\omega) \xrightarrow{L_z \rightarrow \infty} 0$  et donc

$$\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega) = 1 - \mathbf{p}_{L_z}(\omega)^H \mathbf{P}_m \mathbf{p}_{L_z}(\omega) \quad (3.31)$$

$$\xrightarrow{L_z \rightarrow \infty} 1. \quad (3.32)$$

### 3.6.2 Preuve de l'expression (3.6)

Rappelons que  $p_{L_z}(\omega)$  est un vecteur normalisé et pour  $L_z$  élevé, nous avons  $\mathbf{A}_m^\dagger \xrightarrow{L_z \rightarrow \infty} \mathbf{A}_m^H$ . La fonction de forçage à zéro devient alors

$$\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega) \xrightarrow{L_z \rightarrow \infty} 1 - p_{L_z}(\omega)^H \mathbf{A}_m \mathbf{A}_m^H p_{L_z}(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_{L_z}(\omega, \phi_i)|^2 \quad (3.33)$$

$$= 1 - \frac{1}{L_z^2} \sum_{i=1}^{m-1} \left| \sum_{n=0}^{L_z-1} e^{i(\phi_i - \omega)n} \right|^2 \quad (3.34)$$

$$= 1 - \frac{1}{L_z^2} \sum_{i=1}^{m-1} \left| \frac{1 - e^{L_z i(\phi_i - \omega)}}{1 - e^{i(\phi_i - \omega)}} \right|^2 \quad (3.35)$$

$$= 1 - \frac{1}{L_z} \underbrace{\frac{1}{L_z} \frac{\sin^2(L_z \frac{\omega}{2})}{\sin^2(\frac{\omega}{2})}}_{\mathcal{K}_{L_z}(\omega)} * \left( \sum_{i=1}^{m-1} \delta_{\phi_i - \omega} \right) \quad (3.36)$$

où  $\mathcal{K}_{L_z}(\omega)$  est le noyau de Fejér [Michele et al., 1993].

### 3.6.3 Dérivation de la CRB<sub>S</sub>, Théorème 8

La Matrice d'Information de Fisher (MIF), donnée par l'expression (3.13) fait intervenir les dérivées partielles du modèle non-bruité en fonction des paramètres du signal  $\boldsymbol{\chi}'_m$  s'écrivant de la manière suivante

$$\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \omega_m} = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{p}'_L(\omega_m)) \boldsymbol{\lambda}_m, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \Re\{\lambda_m\}} = \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{p}_L(\omega_m), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \Im\{\lambda_m\}} = i \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{p}_L(\omega_m) \quad (3.39)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}_m = \text{vec}(\boldsymbol{\lambda}_m^T) = [\boldsymbol{\alpha}_m(1) \dots \boldsymbol{\alpha}_m(T)]^T$ . Par suite, la dérivée partielle du vecteur  $\mathbf{x}_m$  en fonction de  $\boldsymbol{\chi}'_m$  est donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \boldsymbol{\chi}'_m} = [(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{p}'_L(\omega_m)) \boldsymbol{\lambda}_m \quad \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{p}_L(\omega_m) \quad i \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{p}_L(\omega_m)]. \quad (3.40)$$

Soit  $\kappa_m = \|\mathbf{p}'_L(\omega_m)\|_{\mathbf{R}_m^{-1}}^2$  et  $\xi_m = \|\mathbf{p}_L(\omega_m)\|_{\mathbf{R}_m^{-1}}^2$  deux quantités réelles et  $\epsilon_m = \langle \mathbf{p}'_L(\omega_m), \mathbf{p}_L(\omega_m) \rangle_{\mathbf{R}_m^{-1}}$ , alors la MIF de dimension  $(2T+1) \times (2T+1)$  est donnée par

$$\begin{aligned}
\text{CRB}_S(\chi'_m) &= \frac{1}{2} \Re e \left\{ \begin{bmatrix} T\sigma_m^2 \kappa_m & \boldsymbol{\lambda}_m^H \boldsymbol{\epsilon}_m & i\boldsymbol{\lambda}_m^H \boldsymbol{\epsilon}_m \\ \boldsymbol{\epsilon}_m^* \boldsymbol{\lambda}_m & \xi_m \mathbf{I}_T & i\xi_m \mathbf{I}_T \\ -i\boldsymbol{\epsilon}_m^* \boldsymbol{\lambda}_m & -i\xi_m \mathbf{I}_T & \xi_m \mathbf{I}_T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T\sigma_m^2 \kappa_m & \Re e\{\boldsymbol{\lambda}_m^H \boldsymbol{\epsilon}_m\} & -\Im m\{\boldsymbol{\lambda}_m^H \boldsymbol{\epsilon}_m\} \\ \Re e\{\boldsymbol{\epsilon}_m^* \boldsymbol{\lambda}_m\} & \xi_m \mathbf{I}_T & 0 \\ \Im m\{\boldsymbol{\epsilon}_m^* \boldsymbol{\lambda}_m\} & 0 & \xi_m \mathbf{I}_T \end{bmatrix}^{-1}
\end{aligned}$$

où  $\sigma_m^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \alpha_m(t) \alpha_m(t)^*$ . Seule la  $m^{\text{ième}}$  pulsation spatiale est d'intérêt, alors en utilisant l'inverse d'une matrice block [Stoica and Moses, 2005], il vient

$$\begin{aligned}
\text{CRB}_S(\omega_m) &= [\text{CRB}_S(\chi'_m)^{-1}]_{11} \\
&= \frac{1}{2} \left( T\sigma_m^2 \kappa_m - \Re e\{\boldsymbol{\lambda}_m^H \boldsymbol{\epsilon}_m\} \left( \frac{1}{\xi_m} \mathbf{I}_T \right) \Re e\{\boldsymbol{\epsilon}_m^* \boldsymbol{\lambda}_m\} - \Im m\{\boldsymbol{\lambda}_m^H \boldsymbol{\epsilon}_m\} \left( \frac{1}{\xi_m} \mathbf{I}_T \right) \Im m\{\boldsymbol{\epsilon}_m^* \boldsymbol{\lambda}_m\} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \left( T\sigma_m^2 \kappa_m - \frac{1}{\xi_m} \sum_{t=1}^T |\alpha_m(t)^* \boldsymbol{\epsilon}_m|^2 \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \left( T\sigma_m^2 \kappa_m - \frac{1}{\xi_m} T\sigma_m^2 |\boldsymbol{\epsilon}_m|^2 \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{2T\sigma_m^2} \frac{\xi_m}{\xi_m \kappa_m - |\boldsymbol{\epsilon}_m|^2}.
\end{aligned}$$

En introduisant maintenant le RSB local  $\text{RSB}_m = \sigma_m^2 / \sigma^2$ , le rapport interférence à bruit défini par  $\text{RIB} = \sigma_i^2 / \sigma^2$  et la matrice  $\mathbf{K}_m$  définie dans (3.15), nous obtenons l'expression (3.14).

### 3.6.4 Démonstration du Théorème 9

En suivant le même formalisme que pour les bornes  $\text{CRB}_1(\omega_m)$  et  $\text{P-CRB}(\omega_m)$  définies par les expressions (3.16) et (3.17), respectivement, nous écrivons l'expression (3.14) comme suit

$$\text{CRB}_S(\omega_m) = \frac{1}{2T\text{RSB}_m} \left[ \Re e \left\{ [\mathbf{p}'_L(\omega_m)]^H \mathbf{K}_m (\mathbf{I}_L - \mathbf{E}_m) \mathbf{p}'_L(\omega_m) \right\} \right]^{-1} \quad (3.41)$$

où  $\mathbf{K}_m$  est définie dans (3.15) et

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{\|\mathbf{p}_L(\omega_m)\|_{\mathbf{K}_m}^2} \mathbf{p}_L(\omega_m) \mathbf{p}_L(\omega_m)^H \mathbf{K}_m. \quad (3.42)$$

est une matrice de dimension  $L \times L$ . En s'appuyant sur cette nouvelle formulation, nous prouvons les propriétés (i) à (vi) de la manière suivante



- (i) Observons, quand la variance de l'interférence non-structurée (bruit) domine la variance des sources interférentes (RIB est faible), *i.e.*  $\sigma^2 \gg \sigma_I^2$ , nous avons  $\mathbf{K}_m \approx \mathbf{I}$  puisque  $\mathbf{I} \gg \text{INR } \mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^H$ . Dans cette situation, nous avons  $\mathbf{E}_m \approx \mathbf{P}_{\mathbf{p}_L(\omega_m)}$  et il vient que  $\text{CRB}_S(\omega_m) \xrightarrow{\text{RIB} \rightarrow 0} \text{CRB}_1(\omega_m)$ .
- (ii) Supposons que le RIB est élevé, *i.e.*,  $\sigma^2 \ll \sigma_I^2$ . Cela signifie que les sources interférentes dominent l'interférence non-structurée. En utilisant la propriété (12) introduite dans la référence [Behrens and Scharf, 1994], nous obtenons

$$\mathbf{K}_m \xrightarrow{\text{INR} \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\mathbf{B}_m}^\perp. \quad (3.43)$$

Par suite, en utilisant la propriété ce-dessus pour un RIB élevé, la matrice  $\mathbf{E}_m$  devient le projecteur oblique  $\mathbf{E}_{(\mathbf{p}_L(\omega_m) \mathbf{B}_m)}$  défini sur le sous-espace  $\mathcal{R}(\mathbf{p}_L(\omega_m))$  le long du sous-espace  $\mathcal{R}(\bar{\mathbf{A}}_m)$  puisque

$$\mathbf{E}_m \xrightarrow{\text{INR} \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{p}_L(\omega_m) \mathbf{p}_L(\omega_m)^H \mathbf{P}_{\mathbf{B}_m}^\perp}{\mathbf{p}_L(\omega_m)^H \mathbf{P}_{\mathbf{B}_m}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m)} = \mathbf{E}_{(\mathbf{p}_L(\omega_m) \mathbf{B}_m)}. \quad (3.44)$$

Alors, gr,ce à (3.44), l'expression (48) devient

$$\begin{aligned} \text{CRB}_S(\omega_m) &\xrightarrow{\text{INR} \rightarrow \infty} \frac{[\Re \{ [\mathbf{p}'_L(\omega_m)^H \mathbf{P}_{\mathbf{B}_m}^\perp (\mathbf{I}_L - \mathbf{E}_{(\mathbf{p}_L(\omega_m) \mathbf{B}_m)}) \mathbf{p}'_L(\omega_m)] \}]^{-1}}{2\text{TSNR}_m} \\ &= \frac{[\Re \{ [\mathbf{p}'_L(\omega_m)^H \mathbf{P}_{\mathbf{B}_m}^\perp (\mathbf{P}_A^\perp + \mathbf{E}_{(\mathbf{B}_m \mathbf{p}_L(\omega_m))}) \mathbf{p}'_L(\omega_m)] \}]^{-1}}{2\text{TSNR}_m} \\ &= \frac{1}{2\text{TSNR}_m} [\Re \{ [\mathbf{p}'_L(\omega_m)^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{p}'_L(\omega_m)] \}]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

L'expression (3.45) est obtenue en utilisant la propriété des projecteurs obliques [Behrens and Scharf, 1994] :

$\mathbf{I}_L - \mathbf{E}_{(\mathbf{p}_L(\omega_m) \mathbf{B}_m)} = \mathbf{P}_A^\perp + \mathbf{E}_{(\mathbf{B}_m \mathbf{p}_L(\omega_m))}$  et l'expression (3.45) est déduite des deux propriétés suivantes :  $\mathbf{P}_{\mathbf{B}_m}^\perp \mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{P}_A^\perp$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{B}_m}^\perp \mathbf{E}_{(\mathbf{B}_m \mathbf{p}_L(\omega_m))} = \mathbf{0}$ . En regardant plus précisément l'expression (3.45), nous pouvons sans difficulté vérifier que  $\text{CRB}_S(\omega_m) \xrightarrow{\text{INR} \rightarrow \infty} \text{P-CRB}(\omega_m)$ .

- (iii) Nous savons que pour des directions espacées, nous avons  $\text{P-CRB}(\omega_m) = \text{CRB}_1(\omega_m)$  [Boyer and Bouleux, ], donc en combinant les propriétés (i) et (ii), nous obtenons que  $\text{CRB}_S(\omega_m) = \text{P-CRB}(\omega_m) = \text{CRB}_1(\omega_m)$  pour tout RIB.
- (iv) Nous savons que pour des directions proches, nous avons  $\text{CRB}_1(\omega_m) \ll \text{P-CRB}(\omega_m)$  [Boyer and Bouleux, ] dû à la grande valeur résultant de la projection  $\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{p}'_L(\omega_m)$ , donc, nous avons
- Pour un RI faible, en s'appuyant sur les propriétés (i) et  $\text{CRB}_1(\omega_m) \ll \text{P-CRB}(\omega_m)$ , il vient que  $\text{CRB}_S(\omega_m) \ll \text{P-CRB}(\omega_m)$ .
  - Pour un RIB faible, en s'appuyant sur les propriétés (ii) et  $\text{CRB}_1(\omega_m) \ll \text{P-CRB}(\omega_m)$ , il vient que  $\text{CRB}_1(\omega_m) \ll \text{CRB}_S(\omega_m)$ .
- (v) Cette propriété se démontre d'elle-même en combinant les propriétés (iii) et (iv).
- (vi) Nous savons [Boyer and Bouleux, ] que  $\text{CRB}_1(\omega_m) = \text{P-CRB}(\omega_m) = \frac{6}{L^2 \text{TSNR}_m}$  pour  $L$  élevé. Alors, d'après la propriété (iii), nous avons (v).

### 3.6.5 Démonstration du Théorème 10

#### Approximation au premier ordre du projecteur orthogonal

Basée sur les expressions (3.18)-(3.19), l'approximation au premier ordre du projecteur orthogonal  $\hat{\mathbf{P}}_m^\perp$  est donnée par

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}_m^\perp &= \mathbf{I}_{L_z} - \left( \mathbf{A}_m + \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)} \right) \left( (\mathbf{A}_m^H + \Delta_e^{(m)} \mathbf{D}_m^H) (\mathbf{A}_m + \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)}) \right)^{-1} (\mathbf{A}_m^H + \Delta_e^{(m)} \mathbf{D}_m^H) \\
&\stackrel{1}{=} \mathbf{I}_{L_z} - \left( \mathbf{A}_m + \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)} \right) \\
&\quad \left( (\mathbf{A}_m^H \mathbf{A}_m)^{-1} - (\mathbf{A}_m^H \mathbf{A}_m)^{-1} (\mathbf{A}_m^H \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)} + \mathbf{A}_m^\dagger \Delta_e^{(m)} \mathbf{D}_m^H \mathbf{A}_m) (\mathbf{A}_m^H \mathbf{A}_m)^{-1} \right) \\
&\quad \quad \quad (\mathbf{A}_m^H + \Delta_e^{(m)} \mathbf{D}_m^H) \\
&\stackrel{1}{=} \mathbf{I}_{L_z} - \mathbf{P}_m - \mathbf{A}_m^\dagger \Delta_e^{(m)} \mathbf{D}_m^H - \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)} \mathbf{A}_m^\dagger + \mathbf{P}_m \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)} \mathbf{A}_m^\dagger + \mathbf{A}_m^\dagger \Delta_e^{(m)} \mathbf{D}_m^H \mathbf{P}_m \\
&= \mathbf{P}_m^\perp - \underbrace{\mathbf{P}_m^\perp \mathbf{D}_m \Delta_e^{(m)} \mathbf{A}_m^\dagger - \mathbf{A}_m^\dagger \Delta_e^{(m)} \mathbf{D}_m^H \mathbf{P}_m^\perp}_{-\Delta \mathbf{P}_m}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

#### Développement de l'erreur d'estimation

En accord avec la méthodologie introduite dans [McCloud and Scharf, 2002], nous supposons une RSB suffisamment élevé pour déterminer l'erreur d'estimation  $(\Delta \omega_m)_{\text{ZF}}$  par une seule itération de l'algorithme Newton [Murray, 1972, Brent, 1973] à partir de la fonctionnelle  $\frac{\hat{f}_{\text{MU}}(\omega)}{\hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega)}$ . Nous avons les relations suivantes :

$$(\Delta \omega_m)_{\text{ZF}} = -\frac{\hat{G}}{\hat{D}} = -\frac{G + \Delta G}{D + \Delta D} = -\frac{\left( \frac{\hat{f}_{\text{MU}}(\omega)}{\hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega)} \right)'}{\left( \frac{\hat{f}_{\text{MU}}(\omega)}{\hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega)} \right)''} \tag{3.47}$$

où  $\left( \frac{\hat{f}_{\text{MU}}(\omega)}{\hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega)} \right)'$  (*resp.*  $\left( \frac{\hat{f}_{\text{MU}}(\omega)}{\hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega)} \right)''$ ) est la dérivée première (*resp.* seconde) par rapport au paramètre  $\omega$ . Dans la dérivée première de la fonctionnelle ZF-MUSIC, tous les termes fonction du projecteur  $\mathbf{P}_Z^\perp$  (*resp.*  $\Delta \mathbf{P}_Z$ ) sont regroupés dans  $G$  (*resp.* dans  $\Delta G$ ). Nous réalisons la même opération pour la dérivée seconde et nous obtenons les quantités  $D$  et  $\Delta D$ . Point important que nous relevons : d'après la référence [Krim and Viberg, 1996] et chapitre 2.3 nous connaissons explicitement l'erreur sur le projecteur orthogonal  $\mathbf{P}_Z^\perp$  puisque  $\Delta \mathbf{P}_Z = -2\Re \{ \mathbf{P}_Z^\perp \Delta \mathbf{R}_X \mathbf{S}^\dagger \}$  avec  $\mathbf{S}^\dagger$  la pseudo-inverse de la partie signal de la covariance. Nous nous focalisons maintenant sur les expressions de  $G$ ,  $\Delta G$ ,  $D$  et  $\Delta D$ .

Dérivation de  $G$  et  $\Delta G$  Nous avons

$$\hat{G} = \left( \frac{\hat{f}_{\text{MU}}(\omega)}{\hat{\mathcal{F}}_m^{(Lz)}(\omega)} \right)' = \frac{\left( \hat{f}_{\text{MU}}(\omega) \right)' \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(Lz)}(\omega) \right) - \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(Lz)}(\omega) \right)' \left( \hat{f}_{\text{MU}}(\omega) \right)}{\left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(Lz)}(\omega) \right)^2}. \quad (3.48)$$

En utilisant (i)  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp + \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_m^\perp = \mathbf{P}_m^\perp + \Delta \mathbf{P}_m$  définis par (3.46) dans (3.48) et (ii) l'approximation au premier ordre de la fonction de forçage à zéro, donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(Lz)}(\omega) \right)^2} &= \frac{1}{\left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) + \Delta \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)^2} \\ &= \frac{1}{\left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)^2} \frac{1}{(1 + \varepsilon_m)^2} \\ &\stackrel{1}{=} \frac{1 - 2\varepsilon_m}{\left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)^2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

où  $\varepsilon_m = \frac{\Delta \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)}$ , il vient

$$\begin{aligned} \hat{G} &\stackrel{1}{=} \frac{\left( f_{\text{MU}}(\omega_m) \right)' \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) - f_{\text{MU}}(\omega_m) \left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)'}{\left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)^2} \\ &+ \frac{1}{\left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)^2} \left[ \left( (\Delta f_{\text{MU}}(\omega_m))' \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) + f_{\text{MU}}(\omega_m) \right)' \Delta \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right. \\ &- 2\varepsilon_m \left( f_{\text{MU}}(\omega_m) \right)' \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) + 2\varepsilon_m \left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)' f_{\text{MU}}(\omega_m) \\ &\left. - \left( \Delta \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)' f_{\text{MU}}(\omega_m) - \left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)' \Delta f_{\text{MU}}(\omega_m) \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

où

$$\left( f_{\text{MU}}(\omega_m) \right)' = 2\Re \left\{ \mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} \quad (3.51)$$

$$\left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)' = 2\Re \left\{ \mathbf{p}'_{L_z}{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\} \quad (3.52)$$

$$\Delta f_{\text{MU}}(\omega_m) = \mathbf{p}_L^H(\omega_m) \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} \mathbf{p}_L(\omega_m) \quad (3.53)$$

$$\Delta \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) = \mathbf{p}_{L_z}^H(\omega_m) \Delta \mathbf{P}_m \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \quad (3.54)$$

$$\left( \Delta f_{\text{MU}}(\omega_m) \right)' = 2\Re \left\{ \mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} \quad (3.55)$$

$$\left( \Delta \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)' = 2\Re \left\{ \mathbf{p}'_{L_z}{}^H(\omega_m) \Delta \mathbf{P}_m \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\}. \quad (3.56)$$

Dans l'expression (3.50), les termes qui sont composés des vrais projecteurs sont regroupés dans  $G$  et les termes d'erreur sont regroupés dans  $\Delta G$ . Par conséquent, il est évident de voir que  $G = 0$  et  $\Delta G$  devient

$$\Delta G = \frac{\left( \Delta f_{\text{MU}}(\omega_m) \right)'}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)}. \quad (3.57)$$

en exploitant les relations  $f_{\text{MU}}(\omega_m) = (f_{\text{MU}}(\omega_m))' = \Delta f_{\text{MU}}(\omega_m) = 0$ .

**Dérivation de  $D$  et  $\Delta D$**  La dérivation de  $D$  et  $\Delta D$  est moins directe compte tenu du nombre de termes, néanmoins nous donnons la dérivée seconde en fonction des projecteurs  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp$  et  $\hat{\mathbf{P}}_m^\perp$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \left( \frac{\hat{f}_{\text{MU}}(\omega)}{\hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega)} \right)'' = \frac{2}{\left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)^4} \\ &\quad \left[ \left( \Re \left\{ \mathbf{p}_L''^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} + \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L'(\omega_m) \right) \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right. \\ &\quad + 2 \Re \left\{ \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\} \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)^2 \\ &\quad - 4 \Re \left\{ \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\} \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)^2 \\ &\quad - \left[ \left( \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}''^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\} + \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}'(\omega_m) \right) \hat{f}_{\text{MU}}(\omega) \right. \\ &\quad + 2 \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\} \Re \left\{ \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)^2 \\ &\quad \left. + 4 \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\}^2 \left( \hat{f}_{\text{MU}}(\omega) \right) \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

où nous avons utilisé les égalités suivantes :

$$\left( \hat{f}_{\text{MU}}(\omega) \right)'' = 2 \Re \left\{ \mathbf{p}_L''^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} + 2 \left( \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L'(\omega_m) \right), \quad (3.59)$$

$$\left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)'' = 2 \Re \left\{ \mathbf{p}_L''^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} + 2 \left( \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_L'(\omega_m) \right). \quad (3.60)$$

Afin de simplifier l'expression (3.58) et comme  $\mathbf{p}_L^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \stackrel{!}{=} 0$ , alors, les deux termes suivants

$$\left( \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}''^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\} + \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}'(\omega_m) \right) \hat{f}_{\text{MU}}(\omega), \quad (3.61)$$

$$4 \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\}^2 \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right) \left( \hat{f}_{\text{MU}}(\omega) \right) \quad (3.62)$$

disparaissent. Nous remarquons, de plus, que le terme

$$2 \Re \left\{ \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\} \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)^2$$

s'annule avec son opposé. Finalement, la dérivée seconde devient

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \frac{2}{\left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)^4} \left[ \left( \Re \left\{ \mathbf{p}_L''^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} + \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L'(\omega_m) \right) \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)^3 \right. \\ &\quad \left. - 4 \Re \left\{ \mathbf{p}_L'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Z}}^\perp \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} \Re \left\{ \mathbf{p}_{L_z}'^H(\omega_m) \hat{\mathbf{P}}_m^\perp \mathbf{p}_{L_z}(\omega_m) \right\} \left( \hat{\mathcal{F}}_m^{(L_z)}(\omega) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Maintenant, en insérant dans (3.63)

1. le développement au premier ordre de  $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{z}}^{\perp}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_m^{\perp}$ .
2. le développement au premier ordre de  $\frac{1}{\hat{\mathcal{F}}_m^{(Lz)}(\omega)} \stackrel{\perp}{=} \frac{1-\varepsilon_m}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega)}$  obtenu par la même méthode que pour l'obtention de (3.49).

le développement au premier ordre de  $\hat{D}$  est

$$\begin{aligned} \hat{D} \stackrel{\perp}{=} & 2 \frac{\mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{\perp} \mathbf{p}'_L(\omega_m)}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)} - 2 \frac{\mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{\perp} \mathbf{p}'_L(\omega_m)}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)} \varepsilon_m \\ & + 2 \frac{\left\{ \Re \left\{ \mathbf{p}''_L{}^H(\omega_m) \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{z}} \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} + \mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{z}} \mathbf{p}'_L(\omega_m) \right\}}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)} - 8 \frac{(\Delta f_{\text{MU}}(\omega_m))' \left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)'}{\left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

En identifiant les termes  $D$  et  $\Delta D$  de la même manière que l'identification faite pour  $G$  et  $\Delta G$ , nous obtenons que

$$D = 2 \frac{\mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{\perp} \mathbf{p}'_L(\omega_m)}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)} \quad (3.65)$$

$$\Delta D = 2q_m k_m + 2u_m k_m (1 - 2\varepsilon) - D\varepsilon_m. \quad (3.66)$$

où

$$q_m = \frac{\Re \left\{ \mathbf{p}''_L{}^H(\omega_m) \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{z}} \mathbf{p}_L(\omega_m) \right\} + \Re \left\{ \mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{z}} \mathbf{p}'_L(\omega_m) \right\}}{(\Delta f_{\text{MU}}(\omega_m))'} \quad (3.67)$$

qui est relié la fonctionnelle MUSIC et

$$u_m = -4 \frac{\left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)'}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)}, \quad (3.68)$$

relié à la fonction de forçage à zéro.

**Dérivation de l'erreur d'estimation** Un développement au premier ordre de l'erreur d'estimation  $(\Delta\omega_m)_{\text{ZF}}$  introduite dans [McCloud and Scharf, 2002] est

$$(\Delta\omega_m)_{\text{ZF}} \stackrel{\perp}{=} \frac{\Delta G D - \Delta G \Delta D}{D^2}. \quad (3.69)$$

Par suite, en substituant les expressions (3.57), (3.65) et (3.66) dans (3.69), nous conduit à l'expression

$$\begin{aligned} (\Delta\omega_m)_{\text{ZF}} &= k_m \left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)^2 \frac{\frac{\mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{\perp} \mathbf{p}'_L(\omega_m)}{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m)} - q_m k_m - u_m k_m (1 - 2\varepsilon) + \frac{D}{2} \varepsilon_m}{\left( \mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{\perp} \mathbf{p}'_L(\omega_m) \right)^2} \\ &\stackrel{\perp}{=} \frac{\mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) k_m}{\mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{\perp} \mathbf{p}'_L(\omega_m)} + \frac{D k_m \left( \mathcal{F}_m^{(Lz)}(\omega_m) \right)^2 \varepsilon_m}{2 \left( \mathbf{p}'_L{}^H(\omega_m) \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{\perp} \mathbf{p}'_L(\omega_m) \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

L'expressions ci-dessus peut être simplifiée en utilisant l'erreur d'estimation de l'algorithme MUSIC [Krim and Viberg, 1996]  $(\Delta\omega_m)_{\text{MU}} = \frac{\Re\{\mathbf{p}'_L(\omega_m)\mathbf{\Delta P_Z p}_L(\omega_m)\}}{\mathbf{p}'_L(\omega_m)\mathbf{P_Z^\perp p}'_L(\omega_m)}$  et en remarquant que

$$(\Delta\omega_m)_{\text{MU}} = \frac{\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega_m)k_m}{\mathbf{p}'_L(\omega_m)\mathbf{P_Z^\perp p}'_L(\omega_m)} = \frac{Dk_m \left(\mathcal{F}_m^{(L_z)}(\omega_m)\right)^2}{2 \left(\mathbf{p}'_L(\omega_m)\mathbf{P_Z^\perp p}'_L(\omega_m)\right)^2}. \quad (3.71)$$

Finalement, l'erreur d'estimation (au premier ordre) de la  $m^{\text{ième}}$  pulsation spatiale  $\omega_m$  peut s'écrire comme

$$(\Delta\omega_m)_{\text{ZF}} \stackrel{1}{=} (\Delta\omega_m)_{\text{MU}} (1 + \varepsilon_m) \quad (3.72)$$

et la preuve est donnée.

# Chapitre 4

## Application aux signaux mécaniques

---

*Ce chapitre est consacré à l'apport des méthodes proposées sur des signaux réels issus de systèmes mécaniques. Nous rappelons donc le modèle équivalent au traitement d'antenne sous l'hypothèse ULA dans le contexte de l'analyse spectrale. Les systèmes étudiés sont un réducteur à engrenage et une machine asynchrone. Nous illustrons par ces deux types de système, dans un premier temps l'algorithme ZF-MUSIC, capable d'estimer des fréquences proches alors que l'algorithme MUSIC en est incapable. Puis, via les signaux de courant d'une machine asynchrone, nous montrons l'utilité d'une méthode telle que le WP-MinNorm lorsque des signaux de forte dynamique empêchent l'estimation d'autres fréquences.*

---

## 4.1 Reformulation du modèle pour l'analyse spectrale

Sous l'hypothèse d'une ALU, les méthodes proposées se transcrivent directement dans le contexte de l'analyse spectrale. Les paramètres d'intérêts ne sont alors plus les DDA (problématique de localisation) mais l'estimation de fréquences. De la même façon que pour le traitement matriciel des DDA, nous supposons disposer de la connaissance de  $M - S$  fréquences sur l'ensemble  $M$  qui composent le modèle. Nous rappelons le modèle équivalent au modèle (??) pour l'estimation de fréquences. Soit la série temporelle définie comme suit

$$x(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m e^{j\omega_m t} \quad (4.1)$$

avec  $\omega_m = 2\pi f_m$  la  $m^{\text{ième}}$  pulsation associée à la fréquence  $f_m$  et  $\alpha_m$  son amplitude réelle. Le  $t^{\text{ième}}$  échantillon acquis est alors défini par la relation

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (4.2)$$

où  $n(t)$  est un bruit blanc Gaussien centré de variance  $\sigma^2$ . Nous supposons que la durée d'analyse correspond à une acquisition de  $T$  échantillons et nous définissons la matrice de Hankel  $\mathbf{H}$  des données réelles de la manière suivante

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(\frac{T}{2}) \\ y(2) & & & y(\frac{T}{2} + 1) \\ \vdots & & & \vdots \\ y(\frac{T}{2}) & y(\frac{T}{2} + 1) & \dots & y(T - 1) \end{bmatrix}.$$

Nous supposons que  $2M \leq \frac{T}{2}$  [Badeau et al., 2002, Li et al., 1995], alors la matrice  $\mathbf{H}$  peut s'écrire par décomposition en valeurs propres comme  $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$ , où  $\mathbf{U}$  est une base du sous-espace signal. En présence d'un bruit blanc additif, nous prendrons comme base du sous-espace bruit les  $\frac{T}{2} - M$  vecteurs propres associés aux valeurs propres les plus faibles. Soit  $\mathbf{u}_l$  le  $l^{\text{ième}}$  vecteur qui compose cette base. Il est aisé et direct de construire le projecteur orthogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp$  à partir du sous-espace bruit (chapitre 1 section 1.2.5). Pour obtenir une base du sous-espace signal associé aux fréquences d'intérêts, nous utilisons une décomposition en valeurs singulières de la partie déflatée de  $\mathbf{H}$ , (voir chapitre 2 section 2.2.3) dont nous prenons les  $S$  vecteurs de la base gauche dominants.

## 4.2 Exploitation des méthodes dans le contexte du diagnostic

### 4.2.1 Introduction générale

La surveillance et le diagnostic des systèmes mécaniques deviennent une des préoccupations majeures des industriels. La tendance actuelle est de rechercher des outils capables de révéler de manière précoce l'apparition de dysfonctionnements dans le but de remplacer progressivement la maintenance systématique par une maintenance conditionnelle moins coûteuse.



L'analyse vibratoire occupe une place de plus en plus importante parmi les différentes méthodes de diagnostic possibles (analyse d'huile, analyse de température). Ce développement résulte des avancées technologiques des capteurs, et des outils d'acquisition numérique permettant une implémentation facilitée des méthodes du traitement du signal. Généralement l'analyse vibratoire s'appuie sur l'exploitation de capteurs de grandeurs mécaniques (capteur accélérométrique ou vitesse de déplacement) et a pour but d'analyser les vibrations et leurs évolutions en fonction du vieillissement et donc de la dégradation de la machine. La mise en oeuvre reste néanmoins relativement lourde puisqu'elle nécessite une instrumentation spécifique. Pour remplacer ces techniques somme toute contraignantes, de nouvelles techniques d'analyse commencent à voir le jour en s'appuyant sur l'analyse des signaux électriques des machines qui à travers des filtres plus complexes sont sensibles aux contraintes et couples dans les machines. Deux applications différentes résultant de ces domaines d'application seront présentées dans la suite de ce paragraphe. L'objectif sera de détecter des défauts d'engrenage ou de roulement.

## 4.2.2 Diagnostic de défaut d'engrenage

### Signal vibratoire d'un train simple d'engrenage

Un certain nombre de modèles de signaux d'engrènements ont été présentés dans la littérature [Randal, 1982], [McFadden, 1986] et [Capdessus, 1992]. Ces modèles traduisent plus ou moins bien la réalité des signaux mesurés. On peut résumer ainsi l'allure du signal : la vibration, appelée signal d'engrènement, est périodique et sa fréquence (fréquence d'engrènement) est égale à la fréquence de rotation de l'une des deux roues multipliée par le nombre de dents de cette roue. De plus ce signal d'engrènement est modulé en amplitude et en fréquence à la fois par un signal périodique de période égale à la période de rotation du pignon, et un signal périodique de période égale à la période de rotation de la roue. En général la modulation de fréquence est beaucoup moins importante que la modulation d'amplitude. En négligeant les modulations de fréquence, on peut utiliser le modèle établi par C. Capdessus [Capdessus and Sidahmed, 1992] :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e(t - n\tau_e) \left( 1 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_p(t - m\tau_p) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_r(t - p\tau_r) \right) \quad (4.3)$$

avec

$\tau_e$	:	période d'engrènement
$\tau_p = N_1\tau_e$	:	période de rotation du pignon et $N_1$ est le nombre de dents du pignon
$\tau_r = N_2\tau_e$	:	période de rotation de la roue et $N_2$ est le nombre de dents de la roue
$x_e(t)$	:	signal d'engrènement
$x_p(t)$	:	signal périodique de période induit par la rotation du pignon
$x_r(t)$	:	signal périodique de période induit par la rotation de la roue

### Spectre du signal

La caractéristique la plus marquante du signal est la modulation d'amplitude due à la rotation des roues. Le spectre sera composé par une famille de raies de fréquence  $\frac{k}{\tau_e}$  due au fondamental et aux harmoniques du signal d'engrènement Fig. 4.1. Cette famille de raies est étalée sur une grande partie du spectre, car la nature du signal d'engrènement est de type large bande. De plus, la modulation d'amplitude se traduit par la présence de bandes latérales autour des harmoniques d'engrènement, à des distances multiples des rotations pour la modulation due au pignon, et pour la modulation due à la roue. Les figures Fig. 4.1 et 4.2 ci-dessous illustrent ce principe.

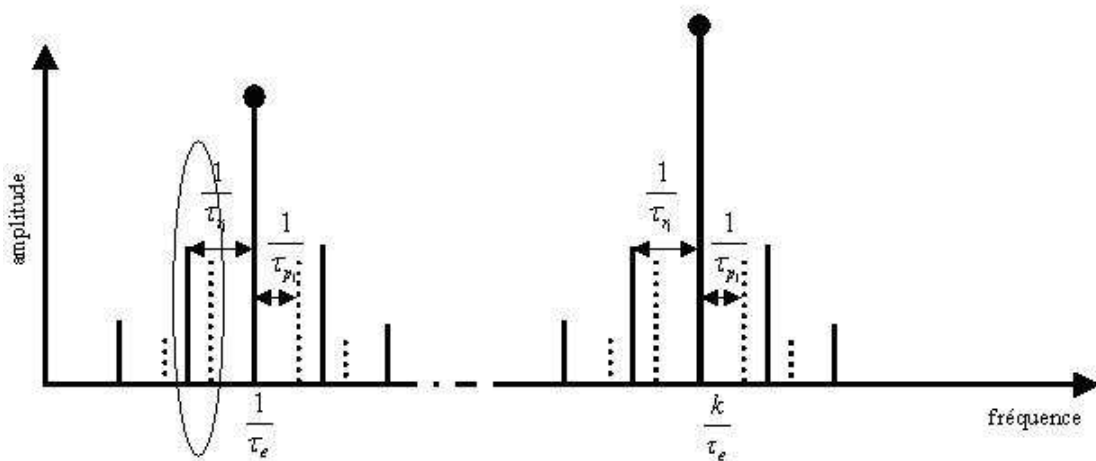


figure 4.1: Spectre du signal vibratoire d'un engrenage

En réalité, l'amplitude de toutes les raies est pondérée par la réponse fréquentielle de la structure mécanique reliant la source excitatrice au capteur.

#### 4.2.3 Manifestation d'un défaut de denture localisé

Considérons un engrenage, si la denture est correcte, le spectre vibratoire aura la même allure que celui défini sur la Fig. 4.1, avec des bandes latérales d'amplitudes données. Si l'une des deux roues possède une dent détériorée, il se produit alors un choc périodique à la fréquence de rotation de cette roue. Ce choc modulera en amplitude le signal d'engrènement, il y aura donc une augmentation du facteur de modulation de la roue considérée, et donc une augmentation d'amplitude de ses raies latérales [Randal, 1982], [Stewart, 1980]. Sur les figures Fig. 4.1 et Fig. 4.2 sont entourées deux raies latérales de la fréquence d'engrènement

pour chacune des roues, la distribution d'énergie évolue avec l'accroissement d'un défaut, la roue portant le défaut ayant la plus grande énergie.

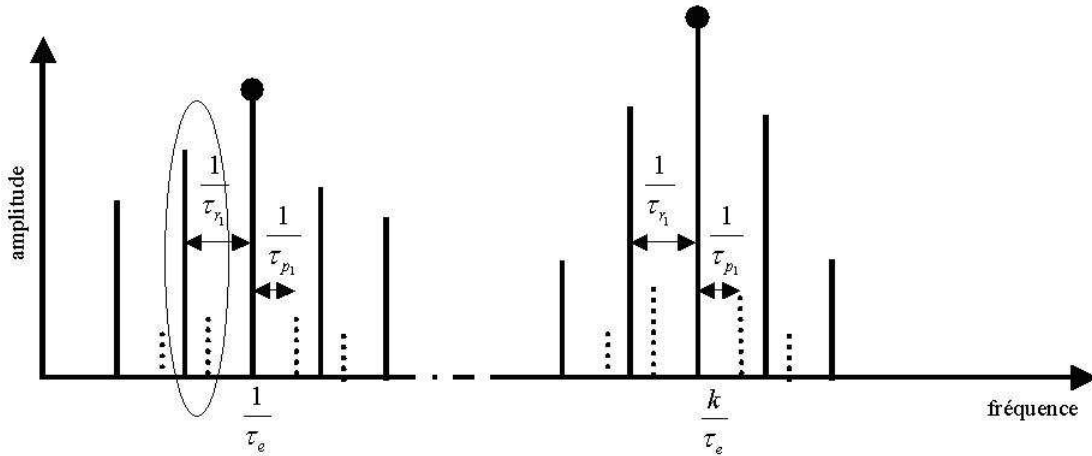


figure 4.2: Spectre du signal vibratoire d'un engrenage

#### 4.2.4 Analyse Spectrale

L'analyse spectrale est un outil naturel pour le traitement des signaux en mécanique. En règle générale, le signal de vibration prélevé sur une machine tournante est une composition de réponse à toute force d'excitation. L'intérêt de l'analyse spectrale est de pouvoir dissocier et identifier les sources vibratoires en fonction des caractéristiques cinématiques des différents éléments constitutifs et de leur vitesse de rotation (ou de leur fréquence de mouvement). Pour obtenir le spectre en fréquence, on peut s'appuyer sur deux types d'approches, paramétriques ou non-paramétriques. Dans les 2 cas cela nécessite que le signal soit stationnaire, ce qui implique d'un point de vue mécanique des paramètres de vitesse et de charge constants sur la fenêtre temporelle d'analyse. Cette hypothèse est en générale mal vérifiée. Pour éviter ce problème on peut synchroniser l'acquisition sur la vitesse de la machine, le signal obtenu est ainsi " stationnarisé " selon les cycles de la machine en fonction non plus du temps mais d'une variable angulaire de la machine. On gagne fortement en résolution par ce type d'acquisition si l'on travaille avec des variations de vitesse raisonnables, la limitation étant généralement donnée par les capacités mémoire de traitement. Ce type d'acquisition est par contre contraignant d'un point de vue expérimental car il nécessite la mise en place de capteur de vitesse (codeur optique), ou dans certaine configuration de machine un post traitement après acquisition pour recalculer tous les cycles de la machine. Il est donc intéressant parallèlement à ce type de mise en oeuvre de développer des outils d'analyse fonctionnant sur des fenêtres temporelles très courtes sur lesquelles on peut négliger les variations de vitesse. C'est la raison pour laquelle nous avons développé des méthodes à Haute Résolution permettant d'extraire les fréquences portant de l'information sur des tranches relativement courtes de signal. Cela nous permet de séparer spectralement certains événements parfois très proches. Nous allons nous intéresser ici à l'estimation de deux fréquences relativement proches, résultant de la rotation de chacune des

roues d'un engrenage. Les signaux sont issus d'une expérimentation réalisée par le CETIM<sup>1</sup> qui avait pour objectif d'étudier l'apparition d'un défaut et suivre son évolution sur un train d'engrenage constitués de 2 roues.

#### 4.2.5 Présentation des signaux

Les vibrations d'engrenages sur lesquelles nous avons fait les tests proviennent d'un réducteur du CETIM. Le dimensionnement (Tableau 4.1) des roues de l'engrenage cémenté trempé, ainsi que les conditions de fonctionnement (vitesse, couple) ont été fixés de façon à obtenir un écaillage sur toute la longueur d'une dent [Drouiche et al., 1992]. Tous les jours après l'acquisition des signaux vibratoires, le banc est arrêté, pour expertiser (Tableau 4.2) l'état des dentures des roues (Cf. les Fig. 4.3-a, b et c). Les essais du réducteur s'étalent sur 12 jours avec l'enregistrement d'un signal vibratoire chaque jour.

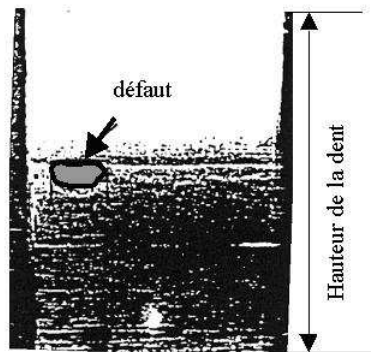
Vitesse (tr/min)	1000	
Couple (daN.m)	200	
Engrenages cylindriques	Roue	Pignon (roue testée)
Nombre de dents	21	20
Largeur (m)	0.03	0.015
Module (m)	0.01	
Angle de pression (°)	20	
Coefficient de creux	1.4	
Coefficient de saillie	1.0	
Coefficient de déport	0	

TABLE 4.1 – Caractéristiques nominales du banc d'essai CETIM.

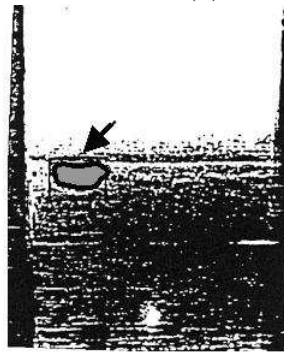
jour	Observations
1	Premier jour d'acquisition, pas d'anomalie
2	Pas d'anomalie
3	idem
4	idem
5	idem
6	...caillage dent 1/2
7	Pas d'évolution
8	dent 1/2 pas d'évolution dent 15/16 début d'écaillage
9	...volution de l'écaillage dent 15/16
10	idem
11	idem
12	...caillage sur toute la largeur de la dent 15/16

TABLE 4.2 – Rapport d'expertise.

1. Centre Technique des Industries Mécaniques



(a), dent 2, jour 10.



(b), dent 16, jour 10.



(c), dent 16, jour 11.

figure 4.3: Evolution du défaut sur la roue

Le réducteur est composé d'un pignon de 20 dents et d'une roue de 21 dents. La vitesse

du moteur d'entraînement est de 1000 trs/mn soit environ 16.67 Hz, la vitesse de rotation de la roue est de 15.87 Hz et la fréquence d'engrènement de l'ordre de 330 Hz. La fréquence d'échantillonnage est de 20 KHz. Chaque enregistrement comporte 60000 points soit une durée de signal de 3 s. Durant l'expérimentation, le réducteur passe de l'état de bon fonctionnement à un état détérioré. La Fig. 4.4, rassemble les signaux réels pour trois jours différents, correspondant à des niveaux de dégradations de défauts d'écaillages distincts. Ces signaux s'étalent sur environ deux périodes de pignon est sont normalisés à puissance constante hors défaut. Le jour 1 correspond au cas sans défaut, les deux premières figures représentent les signaux vibratoires réels. Le zoom sur quatre périodes d'engrènement nous donne une information sur la forme générale du signal d'engrènement, il apparaît une régularité commune sur les courbes à la période d'engrènement. Les jours 10 et 11 font apparaître un défaut croissant, de type écaillage.

Nous souhaitons sur cette expérimentation tester le pouvoir de résolution des méthodes proposées en espérant avec un nombre limité d'échantillons, séparer deux harmoniques de rotation très proches. Il est rappelé ici que la roue portant le défaut présente au niveau de ses harmoniques une énergie très supérieure à l'autre, ce qui complexifie l'estimation.

#### 4.2.6 Apport des méthodes pour l'estimation des fréquences de rotation

Nous l'avons énoncé plus haut, l'estimation de la fréquence de la roue portant le défaut est plus facile que celle (proche) ne portant pas le défaut. De plus, en raison des fluctuations de vitesse, nous devons prendre un nombre de données réduit. Pour cette expérience, nous disposons d'un nombre total de 60000 points. Cependant, compte tenu des difficultés mentionnées, nous ne pouvons traiter qu'une fenêtre de  $T = 1120$  échantillons. Dans ce contexte, une analyse de Fourier usuellement effectuée en traitement de signaux mécaniques est peu révélatrice, voir la Fig. 4.5. De plus, d'après la Fig. 4.6-a, où est représenté le Pseudo-spectre de MUSIC, la fréquence à 321.01 HZ n'est clairement pas visible. Ceci, nous indique donc que l'algorithme MUSIC est incapable d'estimer cette fréquence. Inversement, et en s'appuyant sur la Fig. 4.6-b, l'algorithme ZF-MUSIC annule l'influence de la fréquence de la roue portant le défaut (323.8 Hz environ) et permet une estimation de la fréquence 323.01 Hz. La comparaison entre les deux figures de la Fig. 4.6 est flagrante et parle presque d'elle même. Par conséquent, nous montrons l'efficacité d'estimation de l'algorithme ZF-MUSIC lorsque l'algorithme MUSIC en est incapable et nous montrons l'intérêt d'une telle méthode dans le domaine du diagnostic.

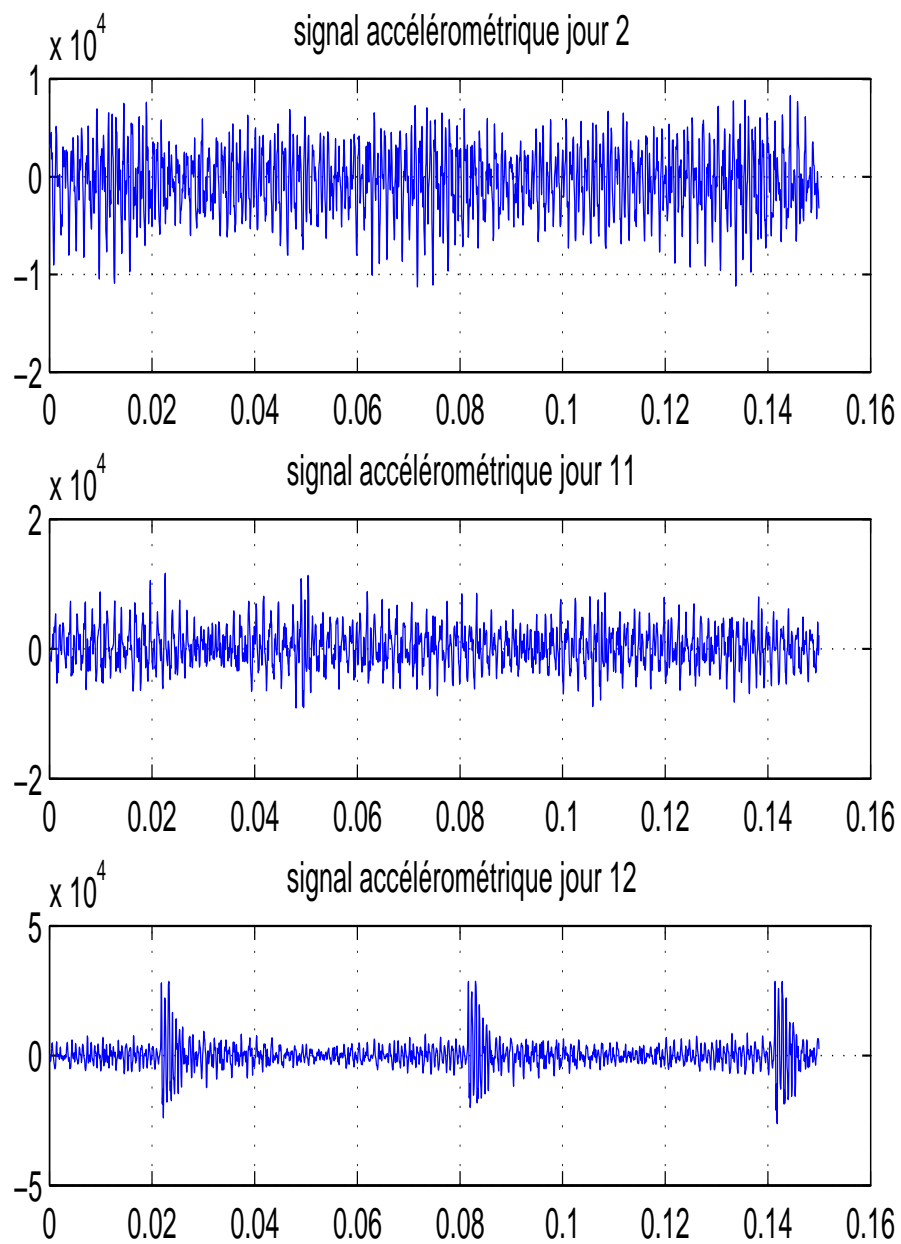


figure 4.4: Signaux vibratoires réels.

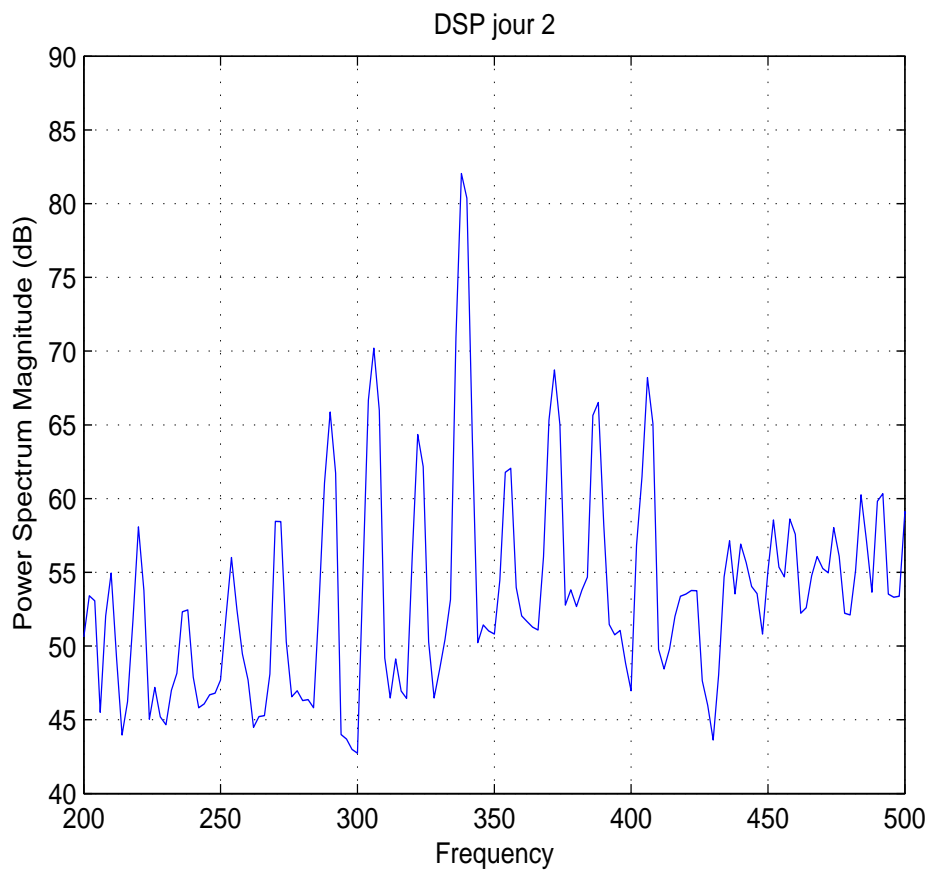
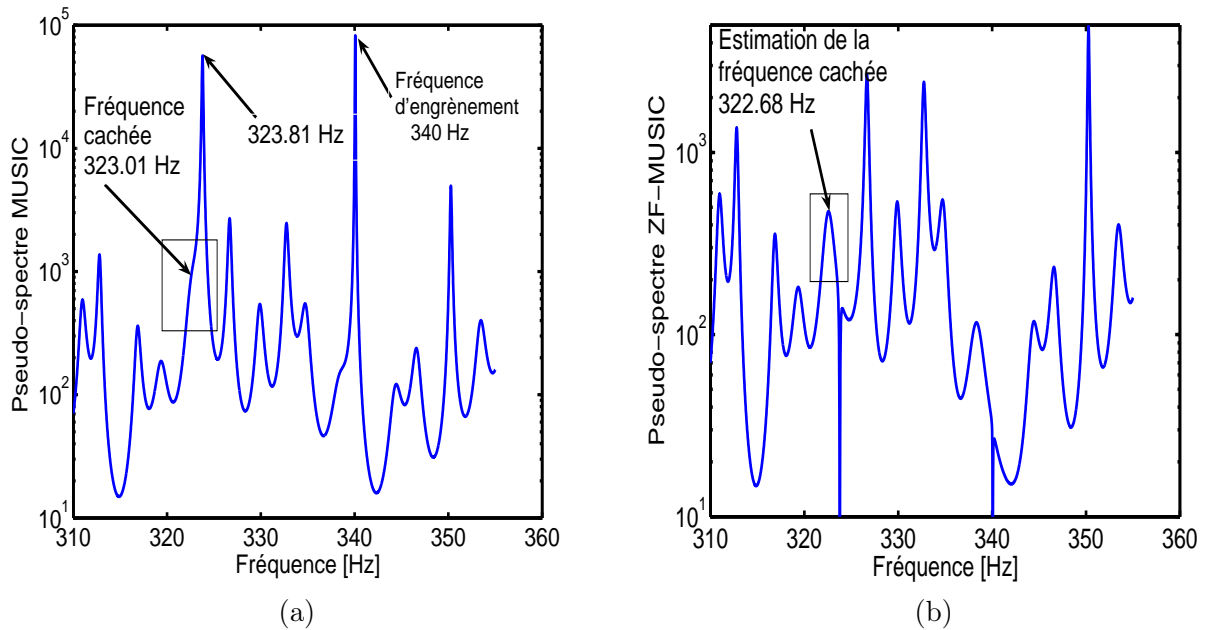


figure 4.5: DSP du signal vibratoire, jour 2.





Nombre d'échantillons traités  $T = 1120$ , fréquence d'échantillonnage  $f_e = 800$  Hz. (a) Pseudo-spectre de MUSIC Fct. Fréquence [Hz], (b) Pseudo-spectre du ZF-MUSIC Fct. Fréquence [Hz].

figure 4.6: Application aux signaux d'engrenage. Illustration de l'algorithme ZF-MUSIC.

## 4.3 Diagnostic de défaut de roulement par mesure électrique

### 4.3.1 Introduction

La présence d'un défaut de roulement génère des chocs d'énergie périodiques et donc des harmoniques au niveau des vibrations transmises par les paliers. Dans le cas des machines électriques ces harmoniques peuvent être vues comme des fluctuations de couples et sont donc répercutées au niveau des signaux électriques de commande. Ceci se traduit par des modulations du courant d'alimentation (50Hz) par les fréquences de défauts, le spectre obtenu devient alors très complexe parce que ces fréquences de modulations peuvent être repliées plusieurs fois sur la fenêtre spectrale d'analyse.

En définissant les paramètres suivants :

$F_R$	fréquence de rotation
$F_C$	fréquence de défaut de cage
$F_I$	fréquence de défaut de bague interne
$F_O$	fréquence de défaut de bague externe
$F_B$	fréquence de défaut de bille
$D_b$	diamètre de bille
$D_c$	pitch diameter
$N_B$	nombre d'éléments roulant
$\beta$	angle de contact (de bille).

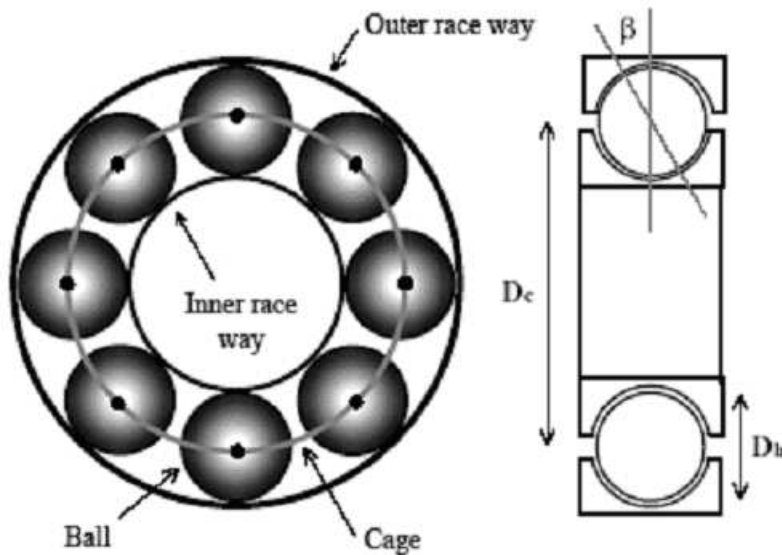


figure 4.7: Structure et paramètre d'un roulement.

nous pouvons obtenir une estimation des fréquences de défaut par les lois équations suivantes :

$$F_C = \frac{1}{2} F_R \left( 1 - \frac{D_b \cos(\beta)}{D_c} \right) \quad (4.4)$$

$$F_O = \frac{N_B}{2} F_R \left( 1 - \frac{D_b \cos(\beta)}{D_c} \right) \quad (4.5)$$

$$F_I = \frac{N_B}{2} F_R \left( 1 + \frac{D_b \cos(\beta)}{D_c} \right) \quad (4.6)$$

$$F_B = \frac{D_c}{D_b} F_R \left( 1 - \left( \frac{D_b \cos(\beta)}{D_c} \right)^2 \right) \quad (4.7)$$

### 4.3.2 Expérimentation

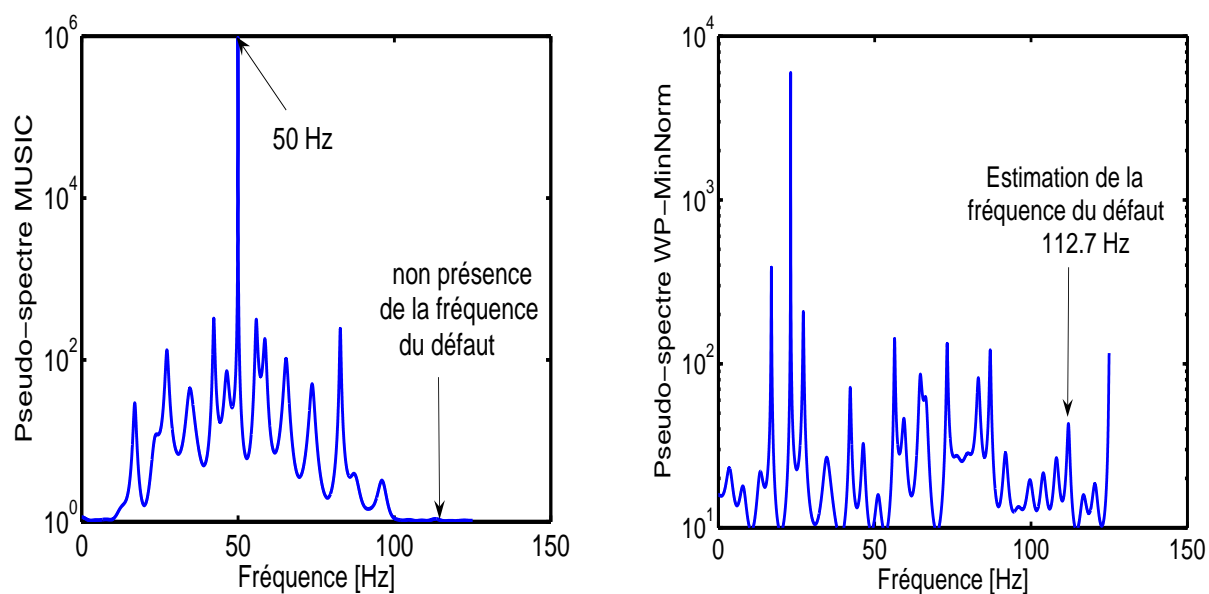
Le moteur développe un défaut au niveau de l'un de ses roulements . C'est un défaut de bague externe, la fréquence peut être estimée à 63 Hz à partir des équations (4.4)-(4.7).

De par la complexité de la cinématique et des phénomènes de modulation avec repliement spectrale, le spectre est très chargé. On s'intéresse ici à estimer la présence de certaines raies spectrales liées au défaut. Les méthodes par déflation semblent pertinentes puisqu'elles permettent de réduire l'espace de travail, notamment pour éliminer des fréquences de forte énergie (50Hz) pour ne se focaliser que sur l'estimation de fréquences de plus faibles énergies. Leur grand intérêt repose sur la réduction de la taille des vecteurs signaux à traiter et par conséquent la réduction des volumes de données à acquérir, réduction de la fréquence d'échantillonnage et réduction du nombre de points à enregistrer. Autre que les capacités mémoires, nous gagnons également en performance par le fait que les signaux ne sont jamais parfaitement stationnaires, en raison de variation de vitesse et de charge au cours du temps. Ainsi, réduire la durée des fenêtres temporelles contribue à ce que l'hypothèse de stationnarité soit mieux vérifiée.

Nous nous intéresserons dans la suite à estimer la présence d'une fréquence de défaut de cage externe se traduisant par l'apparition d'une fréquence autour de 63 Hz. Cette dernière vient moduler la fréquence de réseau à 50 Hz. L'étude portera plus particulièrement sur la présence d'une harmonique autour de 113 Hz.

#### En pratique

Nous avons reporté sur la Fig. 4.8 les pseudo-spectres de MUSIC Fig. 4.8-a ainsi que le pseudo-spectre de l'algorithme WP-MinNorm Fig. 4.8-b. Nous supposons la fréquence du réseau (50 Hz) connue parfaitement. Nous utilisons encore une fois une méthode de type MDL [Wax and Kaylath, 1985] pour estimer le nombre de sources et ainsi dimensionner le sous-espace bruit (ou signal). Une des fréquences d'intérêt est la fréquence du défaut aux environs de 63 Hz. Nous testons les limites d'estimation de l'algorithme WP-MinNorm comparativement à l'algorithme MUSIC, en prenant  $T = 260$  échantillons. Dans ce cas de figure, nous constatons au travers de la Fig. 4.8-a, que l'algorithme MUSIC n'est plus capable d'estimer la fréquence du défaut. Inversement, l'algorithme WP-MinNorm estime cette fréquence. Ce contexte permet de mettre en évidence l'apport d'une méthode n'estimant que les données d'intérêts. La réjection du 50 Hz, a effectivement permis à l'algorithme de se focaliser sur une bande fréquentielle plus large et ainsi pour estimer la fréquence du défaut. Ces constatations figurent sur la Fig. 4.8-b.



$T = 260$  échantillons, fréquence d'échantillonnage  $f_e = 112\text{Hz}$ . (a) Pseudo-spectre de MUSIC Fct. Fréquence [Hz]. (b) Pseudo-spectre du WP-MinNorm Fct. Fréquence [Hz].

figure 4.8: Application aux signaux de courant d'une machine asynchrone. Pseudo-spectres faible nombre d'échantillons.

# Conclusion

Dans le modèle classique du traitement d'antenne linéaire et uniforme, nous supposons disposer d'une connaissance *a priori* d'un nombre réduit de DDA sur l'ensemble qui composent le modèle. Dans ce contexte, le modèle linéaire introduit par Behrens et Scharf est en adéquation avec notre problématique et nous en donnons la formulation de la manière suivante

$$Obs = \text{Signal d'intérêt} + \text{Interférence Structurée} + \text{Interférence Non-Structurée (bruit)}$$

où *Obs* est le signal d'observation (acquisition) et où l'interférence Structurée représente la connaissance *a priori*.

Selon l'hypothèse faite sur l'interférence nous avons considéré deux cas : (i) les vecteurs directionnels sont connus, le sous-espace signal associé à l'interférence structurée est alors connu et (ii) les vecteurs directionnels sont inconnus, nous avons alors dans ce cas une connaissance incertaine du sous-espace signal associé à l'interférence structurée. Dans le cadre de l'hypothèse (i), nous avons établi une CRB issue d'un modèle déflaté orthogonalement, la Prior-CRB. Cette borne nous montre que supprimer le sous-espace associé à l'interférence structurée par déflation orthogonale ne permet d'améliorer l'estimation des DDA inconnues que lorsque ces dernières sont proches et dont les sources associées sont corrélées. Nous proposons donc pour pallier à ce problème d'utiliser une déflation oblique du sous-espace signal plutôt qu'orthogonale. Au travers des algorithmes de type prior MUSIC et MinNorm (MUSIC et MinNorm *a priori*) nous montrons que la variance d'estimation des DDA inconnues lorsque ces dernières sont proches et non corrélées, est fortement réduite. Nous montrons également, dans un premier temps numériquement, que pour un régime de bruit suffisant (RSB élevé) l'interférence structurée est quasi-totalement supprimée. Puis, via une analyse théorique des variances des algorithmes proposés, nous montrons et expliquons pourquoi la projection oblique est efficace et adaptée à notre problématique. Notamment, l'analyse théorique des variances quand les DDA sont proches, nous permet de mettre en évidence le caractère peu sensible des algorithmes de type prior (utilisant la projection oblique) à la proximité des DDA. Ce n'est pas le cas pour les algorithmes classiques (utilisant la projection orthogonale) dont la sensibilité à la proximité des DDA est de l'ordre de  $O(\Delta_\omega^{-2})$ , avec  $\Delta_\omega$  l'écart entre les DDA.

Ensuite, nous avons orienté notre travail vers un cadre d'estimation plus général en supposant que le sous-espace associé à l'interférence structurée est incertain. Plus précisément, nous estimons une seule DDA à la fois (Signal d'intérêt) et toutes les autres DDA, *i.e.* les DDA préalablement estimées et les DDA restant à estimer, sont associées au sous-espace signal de l'interférence structurée. La dérivation de la CRB associée à ce modèle, la Interfering-CRB, met clairement en évidence deux régimes en fonction du rapport interférence à bruit. Guidé par ce modèle nous avons proposé un nouvel algorithme séquentiel : le Zero-Forcing MUSIC (ZF-MUSIC). Cet algorithme se différencie des approches classiques par déflation orthogonale du sous-espace signal en pondérant par une fonction quadratique appropriée le pseudo-spectre de MUSIC. Cette fonction de forçage à zéro, vaut asymptotiquement 1 pour la DDA d'intérêt et zéro partout ailleurs (pour toutes les DDA préalablement estimées). De plus, cette fonction

dépend d'un paramètre libre et réglable à souhait, nous permettant d'agir sur la largeur de la fonction de forçage à zero d'une part et d'annuler l'erreur de propagation inhérente au caractère séquentiel de l'algorithme d'autre part. Ainsi, nous montrons que l'algorithme ZF-MUSIC est statistiquement non biaisé, efficace et possède une erreur d'estimation de l'ordre  $O(\Delta\omega_m)_{\text{MU}}$ , où  $(\Delta\omega_m)_{\text{MU}}$  est l'erreur d'estimation de l'algorithme MUSIC, déterminée en considérant une erreur d'estimation sur la matrice de covariance spatiale.

Pour finir, nous utilisons ces méthodes, transposées au contexte de l'analyse spectrale, pour une application aux signaux mécaniques. Dans un des systèmes étudié (machine asynchrone), la cinématique nous permet de connaître parfaitement des fréquences qui de surcroît ne portent pas d'information. Sur une fenêtre d'observation courte (imposée pour combattre les déviations de fréquences), l'algorithme MUSIC est incapable d'estimer les fréquences d'intérêts. Inversement, l'algorithme WP-MinNorm montre de très bonnes performances. Enfin, dans un système de type réducteur à engrenage, deux fréquences très proches sont primordiales pour le diagnostic. Nous montrons qu'à la différence de l'algorithme MUSIC, l'algorithme ZF-MUSIC permet l'estimation de ces fréquences.

Ces résultats nous amènent à énoncer quelques perspectives à ce travail.

## Perspectives

Compte tenu du domaine d'étude, les perspectives à ce travail sont extrêmement vastes. Tout d'abord, abordons la continuité directe. Nous avons dans le chapitre 2 réalisé une étude de la robustesse des méthodes de type prior face à une erreur commise sur la DDA connue parfaitement. Ces analyses, plutôt numériques, montrent que l'approche de type prior est plus robuste face à cette erreur. Nous avons donc pour but de réaliser une analyse théorique basée sur une erreur de modèle [Astely and Ottersten, 1999, Jaafar et al., 2004] du sous-espace associé aux données connues. Nous avons dérivé les variances théoriques des algorithmes de type prior MinNorm et nous travaillons sur la dérivation de la variance théorique des algorithmes de type prior MUSIC [Bouleux and Boyer, b].

Deux types d'approches ont été introduites dans le chapitre 1 : la méthode du Maximum de Vraisemblance Déterministe ou Stochastique (MVD ou MVS) ainsi que la méthode du Subspace Fitting (SF). Nous avons introduit un critère de minimisation équivalent au SF, il paraît alors évident de montrer la supériorité des méthodes proposées par cette approche. Il est de plus intéressant, de dériver un estimateur du MVD ou MVS en fonction des différents modèles adoptés.

Concernant les bornes introduites dans ce document, une comparaison analytique suivie de son interprétation entre la CRB, la P-CRB et la I-CRB nous permettrait de rejoindre l'idée de sensibilité à la proximité des DDA. De plus, les bornes de Cramér-Rao sont déterministes, un premier pas vers une caractérisation moins optimiste de la variance minimale atteignable est de dériver les bornes stochastiques associées. Bien sur, nous pouvons également envisager de développer des bornes plus complexes, plus coûteuses mais plus réalistes en s'appuyant sur les travaux de [Bell, 1995, Renaux, 2006] par exemple. Enfin, quelques travaux récents abordent la localisation en supposant un front d'onde sphérique et non plus plan. Cette hypothèse peut directement être appliquée dans le contexte de l'estimation des DDA en champ proche et il serait intéressant d'appliquer les méthodes proposées dans ce contexte.

L'application des algorithmes WP-MinNorm et ZF-MUSIC aux signaux mécaniques a ouvert un champs de réflexion. Nous avons constaté que ces algorithmes étaient performants, dans le

---

sens où ils sont arrivés à estimer une fréquence alors que l'algorithme MUSIC en était incapable. Mais la propriété de cyclostationarité des signaux nous amène à repenser (ou dans un premier temps adapter) les critères de type prior et ZF-MUSIC en intégrant la propriété de cyclostationarité. Des méthodes de type cyclic-MUSIC [Charge et al., 2003, Lee and Lee, 2001, Lee and Tung, 2002, Yan, 2005, Yan and Fan, 2004] avec notamment une étude champ proche ont déjà été introduites et cela constitue une bonne base bibliographique pour une comparaison éventuelle des performances. L'engouement que suscite cette approche est relativement récent et les axes de recherches tels que la caractérisation de bornes statistiques n'a pas été aussi bien exploité que dans le cas des signaux stationnaires. Nous citons Schell et Gardner [Schell and Gardner, 1992] qui ont initié ce travail mais le développement de nouvelles bornes (ou leur formalisation "habituelle") et la caractérisation théorique des variances est sans doute un point important à approfondir. D'un point de vue plus pratique, il est important de développer de nouvelles méthodes, dédiées à un type de signal mécanique. L'identification fréquentielle des signaux est encore peu précise et il est intéressant de voir l'apport de nouvelles méthodes pour la compréhension mécanique ainsi que pour le diagnostic...





---

# Bibliographie

---

---

## Bibliographie de l'Auteur

---

### — Articles de Revues —

- [Bouleux and Boyer, a] Bouleux, G. and Boyer, R.  
A New Sequential MUSIC Algorithm : CRB, Performance Analysis and Application.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*.  
article soumis.
- [Bouleux and Boyer, b] Bouleux, G. and Boyer, R.  
First-Order Analysis of the Prior-CRB.  
article en préparation.
- [Bouleux and Boyer, c] Bouleux, G. and Boyer, R.  
Performance Analysis of Prior-Knowledge based MinNorm Schemes and an Application.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*.  
article soumis.
- [Boyer and Bouleux, ] Boyer, R. and Bouleux, G.  
Oblique Projections for Direction-Of-Arrival Estimation with Prior Knowledge.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*.

### — Articles de Conférences —

- [Bouleux and Boyer, 2006a] Bouleux, G. and Boyer, R. (2006a).  
Analysis of Prior-Subspace Estimation Schemes.  
In *Fourth IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-channel processing (SAM 2006)*,  
Boston.
- [Bouleux and Boyer, 2006b] Bouleux, G. and Boyer, R. (2006b).  
Subspace-based Estimation of Direction-Of-Arrival with Known Directions.  
In *European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2006)*, Florence.
- [Bouleux and Boyer, 2007a] Bouleux, G. and Boyer, R. (2007a).  
Estimation des Directions D'Arrivées incorporant un a priori : algorithmes et analyse de  
performance.  
In *XXI Colloque GRETSI 2007*, Troyes.
- [Bouleux and Boyer, 2007b] Bouleux, G. and Boyer, R. (2007b).  
The Interfering Cramér-Rao Bound for Sequential Estimators.  
In *Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP 2007)*.

- [Bouleux and Boyer, 2007c] Bouleux, G. and Boyer, R. (2007c).  
Zero-Forcing Based Sequential MUSIC Algorithm.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 07)*, Hawaii.
- [Bouleux and Boyer, 2008] Bouleux, G. and Boyer, R. (2008).  
First-Order Analysis of the Prior-based knowledge MinNorm Algorithm.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 08)*, Las Vegas.
- [Bouleux et al., 2008] Bouleux, G., Guillet, F., Boyer, R., and Badaoui, M. E. (2008).  
A Subspace-Based Rejection Method for Detecting Bearing Fault in Asynchronous Motor.  
In *IEEE International Conference on Condition Monitoring and Diagnosis (CMD 08)*, Beijing.
- [Boyer and Bouleux, 2006] Boyer, R. and Bouleux, G. (2006).  
CramÈr-Rao Lower Bound for Prior-Subspace Estimation.  
In *Fourth IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-channel Processing (SAM 2006)*.
- [Boyer et al., 2006] Boyer, R., Bouleux, G., and Abed-Meraim, K. (2006).  
Common Pole Estimation with an Orthogonal Vector Method.  
In *European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2006)*, Florence.

---

## Bibliographie du Document

---

- [Abeida and Delmas, 2005] Abeida, H. and Delmas, J.-P. (2005).  
Gaussian Cramer-Rao Bound for Direction Estimation of Noncircular Signals in Unknown Noise Fields.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 53(12) :4610–4619.
- [Akaike, 1973] Akaike, H. (1973).  
Information theory and an extension of the maximum likelihood principle.  
In Petrov, B. and Csaki, F., editors, *2nd International Symposium on Information theory*, pages 267–281, Budapest, Hungary.
- [Antezana et al., 2005] Antezana, J., Corach, G., Ruiz, M., and Stojanoff, D. (2005).  
Weighted projections and Riesz frames.  
*Linear Algebra and its Applications*, 402 :367–389.
- [Astely and Ottersten, 1999] Astely, D. and Ottersten, B. (1999).  
The effects of local scattering on direction of arrival estimation with MUSIC.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(12) :3220–3235.
- [Badeau, 2005] Badeau, R. (2005).  
*Méthodes a haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Application aux signaux de musique.*  
PhD thesis, ENST.

- [Badeau et al., 2002] Badeau, R., Boyer, R., and David, B. (2002).  
EDS Parametric modeling and tracking of audio signals.  
In *Fifth Int. Conference on Digital Audio Effects*, pages 139–144, Hamburg, Germany.
- [Barabell, 1983] Barabell, A. (1983).  
Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction finding algorithms.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 83)*, pages 336–339.
- [Behrens and Scharf, 1994] Behrens, R. and Scharf, L. (1994).  
Signal Processing Applications of Oblique Projection Operators.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(6) :1413–1424.
- [Bell, 1995] Bell, K. (1995).  
*Performance Bounds in Parameter Estimation with Application to Bearing Estimation*.  
PhD thesis, George Mason University.
- [Bentler and Lee, 1978] Bentler, P. and Lee, S.-Y. (1978).  
Matrix Derivatives with Chain Rule and Rules for Simple, Hadamard, and Kronecker Products.  
*Journal of Mathematical Psychology*, 17 :255–262.
- [Besson et al., 2007a] Besson, O., Bidon, S., and Tournet, J.-Y. (2007a).  
Cramér-Rao Bound and maximum likelihood estimation of covariance matrices with non-homogeneous snapshots.  
In *41th IEEE annual Asilomar conference on signals, Systems, and Computers (ASILOMAR 07)*, Pacific Grove, USA.
- [Besson et al., 2007b] Besson, O., Bidon, S., and Tournet, J.-Y. (2007b).  
Knowledge-Aided Bayesian Detection in Heterogeneous Environments.  
*IEEE Trans. on Signal Processing Letters*, 4(5) :355–358.
- [Bienvenu, 1979] Bienvenu, G. (1979).  
Influence of the spatial coherence of the background noise on HR passive methods.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 79)*, pages 306–309.
- [Bienvenu and Kopp, 1980] Bienvenu, G. and Kopp, L. (1980).  
Adaptive to background noise spatial coherence for high resolution passive methods.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 80)*, pages 307–310.
- [Bienvenu and Kopp, 1983] Bienvenu, G. and Kopp, L. (1983).  
Optimality of high-resolution array processing using the eigensystem method.  
*IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 31(5) :1235–1245.
- [Bishop and Djuric, 1996] Bishop, C. and Djuric, P. (1996).  
Model order detection of damped sinusoids in noise by predictive densities.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(3) :611–619.
- [Bistritz, 1984] Bistritz, Y. (1984).  
Zero Location with Respect to the Unit Circle of Discrete-Time Linear System Polynomials.  
*Proc. of the IEEE*, 72(9).
- [Bobrovsky et al., 1987] Bobrovsky, B., Mayer-Wolf, E., and Zakai, M. (1987).  
Some Classes of Global Cramér-Rao Bounds.  
*Annal of Statistics*, 15 :1421–128.
- [Bobrovsky and Zakai, 1976] Bobrovsky, B. and Zakai, M. (1976).

- A Lower Bound on the Estimation Error for Certain Diffusion Processes.  
*IEEE Trans. on Information Theory*, 22 :45–52.
- [Bohme, 1986] Bohme, J. (1986).  
Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields.  
*Signal Processing*, 10 :329–337.
- [Boyer et al., 2004] Boyer, E., Forster, P., and Larzabal, P. (2004).  
Nonasymptotic Statistical Performance of Beamforming for Deterministic Signals.  
*IEEE Trans. on Signal Processing Letters*, 11(1) :20–22.
- [Boyer and Abed-Meraim, 2004] Boyer, R. and Abed-Meraim, K. (2004).  
Audio Modeling Based on Delayed Sinusoids.  
*IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, 12(2) :110–120.
- [Brent, 1973] Brent, R. P. (1973).  
Some Efficient Algorithms for Solving Systems of Nonlinear Equations.  
*SIAM Journal of Numerical Analysis*, 10 :327–344.
- [Bresler and Macovski, 1986] Bresler, Y. and Macovski, A. (1986).  
Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise.  
*IEEE ASSP Magazine*, 34 :1081–1089.
- [Buckley and Xu, 1990] Buckley, K. and Xu, X. (1990).  
Spatial-Spectrum Estimation in a Location Sector.  
*IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38 :1842–1852.
- [Cadzow, 1988] Cadzow, J. (1988).  
A High Resolution Direction-Of-Arrival Algorithm for Narrow-Band Coherent and Incoherent Sources.  
*IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 36 :965–979.
- [Capdessus, 1992] Capdessus, C. (1992).  
*Aide au diagnostic des machines tournantes par traitement du signal*.  
PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Capdessus and Sidahmed, 1992] Capdessus, C. and Sidahmed, S. (1992).  
Analyse des vibrations d'un engrenage : cepstre, corrélation, spectre.  
*Traitement du Signal*, 8(5) :365–371.
- [Capdessus et al., 2000] Capdessus, C., Sidahmed, S., and Lacoume, J. (2000).  
Cyclostationary processes : Application in gear faults early diagnosis.  
*Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(3) :371–385.
- [Cavassila et al., 1999] Cavassila, S., Deval, S., Huegen, C., Ormond, D., and Van, G. (1999).  
The beneficial Influence of Prior Knowledge on the quantitation of the In Vivo Magnetic Resonance Spectroscopy Signals.  
*Investigative Radiology*, 34(3) :242–264.
- [Charge et al., 2003] Charge, P., Wang, Y., and Saillard, J. (2003).  
An Extended Cyclic MUSIC Algorithm.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 51(7) :1695–1702.
- [Chaumette, 2004] Chaumette, E. (2004).  
*Contribution à la caractérisation des performances des problèmes conjoints de détection et d'estimation*.  
PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.

- [Chen et al., 1996] Chen, H., Huffel, S. V., Ormondt, D. V., and de Beer, R. (1996).  
Parameter Estimation with Prior Knowledge of Known Signal Poles for the Quantification  
of NMR Spectroscopy Data in the Time Domain.  
*Journal of Magnetic Resonance*, 119(2) :225–234.
- [Cho and Djuric, 1995] Cho, C.-M. and Djuric, P. (1995).  
Bayesian Detection and Estimation of Cisoids in Colored Noise.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(12) :2943–2952.
- [Clergeot, 1982] Clergeot, H. (1982).  
*Estimation du spectre d'un signal aléatoire gaussien par le critère du maximum de vraisem-  
blance ou du maximum de probabilité a posteriori.*  
PhD thesis, Université Orsay Paris-Sud.
- [Clergeot et al., 1989] Clergeot, H., Tressens, S., and Ouamri, A. (1989).  
Performances of high resolution methods compared to the Cramer-Rao Bounds.  
*IEEE ASSP Magazine*, 37(5) :1701–1720.
- [Colares and Lopes, 1999] Colares, R. and Lopes, A. (1999).  
Improving DOA estimation methods using a priori knowledge about the sources location.  
*42nd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2 :989–992.
- [Cormick and Nandi, ] Cormick, A. M. and Nandi, A.  
Cyclostationarity in rotating machine vibrations.  
*Mechanical Systems and Signal Processing*, 12 :225–242.
- [D. Thubert and Lecadre, 1985] D. Thubert, L. K. and Lecadre, J. (1985).  
Précision des Méthodes Hautes Résolution et Bornes de Cramér-Rao.  
In *Xème colloque GRETSI*, pages 369–373.
- [DeGroat et al., 1993] DeGroat, R., Dowling, E., and Linebarger, D. (1993).  
The Constrained MUSIC Problem.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(3).
- [Delmas and Abeida, 2004] Delmas, J.-P. and Abeida, H. (2004).  
Stochastic Cramer-Rao bound for noncircular signals with application to DOA estimation.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 52(11) :3192–3199.
- [Djuric, 1993] Djuric, P. (1993).  
Simultaneous detection and frequency estimation of sinusoidal signals.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 93)*, vo-  
lume 4, pages 53–56.
- [Djuric, 1996] Djuric, P. (1996).  
A model selection rule for sinusoids in white gaussian noise.  
*IEEE ASSP Magazine*, 44(7) :1744–1751.
- [Djuric and Li, 1995] Djuric, P. and Li, H. (1995).  
Bayesian Spectrum Estimation of Harmonic Signals.  
*IEEE Trans. on Signal Processing Letters*, 2(11) :213–215.
- [Drouiche et al., 1992] Drouiche, K., Sidahmed, S., and Grenier, Y. (1992).  
Detection de défauts d'engrenages par analyse vibratoire.  
*Traitement du Signal*, 8(5) :331.
- [Dublanche et al., 1995] Dublanche, F., Duvaut, P., Idier, J., and Demoment, G. (1995).  
Expulse Complex, estimation bayésienne de sinusoides par déconvolution de la transformée  
de Fourier discrète du signal.  
In *GRETSI 1995*, pages 37–40.

- [Ducasse et al., 1998] Ducasse, A., Mailhes, C., and Castanie, F. (1998).  
Estimation de fréquences : panorama des méthodes paramétriques.  
*Traitement du Signal*, 15(2) :149–162.
- [El-Behery and Phie, 1978] El-Behery, I. and Phie, R. M. (1978).  
Maximum Likelihood Estimation of the Number, Directions and Strength of Point Radio-  
Sources from Variable Base Line Interferometer Data.  
*IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 26 :294–301.
- [Ephraim et al., 1995] Ephraim, Y., Merhav, N., and Trees, H. V. (1995).  
Min-norm Interpretations and Consistency of MUSIC, MODE and ML.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(12).
- [Forster and Larzabal, 2001] Forster, P. and Larzabal, P. (2001).  
Sur les bornes minimales pour l'estimation de paramètres déterministes.  
In *Colloque GRETSI 2001*, pages 707–710, Toulouse.
- [Forster and Larzabal, 2002] Forster, P. and Larzabal, P. (2002).  
On Lower Bounds for Deterministic Parameter Estimation.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2002)*,  
Orlando.
- [Forster et al., 2004] Forster, P., Larzabal, P., and Boyer, E. (2004).  
Threshold Performance Analysis in DOA Estimation.  
*IEEE trans. on Signal Processing*, 52(11) :3183–3191.
- [Fuchs, 1988] Fuchs, J.-J. (1988).  
Estimating the Number of Sinusoids in Additive White Noise.  
*IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 36(12) :1846–1853.
- [Fuchs, 1992] Fuchs, J.-J. (1992).  
Estimation of the Number of Signals in the Presence of Unknown Correlated Sensor Noise.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 40(5) :1053–1061.
- [Fuchs, 1996] Fuchs, J.-J. (1996).  
Rectangular Pisarenko Method Applied to Source Localization.  
*IEEE trans. on Signal Processing*, 44(10) :2377–2383.
- [Furukawa et al., 1990] Furukawa, T., Kubota, H., and Tsujii, S. (1990).  
Orthogonal projection algorithm for block adaptive signal processing and some of its pro-  
perties.  
*Electron. Commun.*, 73 :29.
- [Gini and Bordonni, 2003] Gini, F. and Bordonni, F. (2003).  
On the Behavior of Information Theoretic Criteria for Model Order Selection of INSAR  
Signals Corrupted by Multiplicative Noise.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 83 :1047–1063.
- [Golub and Loan, 1996] Golub, G. and Loan, C. V. (1996).  
*Matrix Computations*.  
Maryland : Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3rd edition edition.
- [Graham, 1981] Graham, A. (1981).  
*Kronecker Products and Matrix Calculus With Applications*.  
Halsted Press.
- [Grouffaud et al., 1996] Grouffaud, J., Larzabal, P., and Clergeot, H. (1996).  
Some Properties of Ordered Eigenvalues of a Wishart Matrix.

- In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 96)*, volume 5, pages 2465–2468.
- [Hansen, 2004] Hansen, P. (2004).  
Oblique Projections, Pseudoinverses, and Standard-Form Transformations.  
Technical report, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU.
- [Hansen and Jensen, 2005] Hansen, P. and Jensen, S. (2005).  
Prewhitening for Rank-Deficient Noise in Subspace Methods for Noise Reduction.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 53(10) :3718–3726.
- [Hasan and Hasan, 2000] Hasan, M. and Hasan, A. (2000).  
Fast Approximated Sub-Space Algorithms.  
In *Tenth IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pages 127–130.
- [Haykin, 1989] Haykin, S. (1989).  
*Modern Filters*.  
MacMilan Publishing Company.
- [Haykin and Steinhardt, 1992] Haykin, S. and Steinhardt, A. (1992).  
*Adaptive Radar Detection and Estimation*.  
New York.
- [Hildebrand, 1956] Hildebrand, F. (1956).  
*Introduction to numerical Analysis*.  
New-York.
- [Hua and Sarkar, 1991] Hua, Y. and Sarkar, T. (1991).  
On SVD for Estimating Generalized Eigenvalues of Singular Matrix Pencil in Noise.  
*IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38(5) :814–824.
- [Jaafar et al., 2004] Jaafar, I., Boujemaa, H., and Siala, M. (2004).  
Performance Analysis of MUSIC Algorithm in the Presence of Local Scattering.  
In *IEEE International conference on Industrial Technology (ICIT 04)*.
- [Jaffer, 1988] Jaffer, A. (1988).  
Maximum Likelihood Direction Finding of Stochastic Sources : a Separable Solution.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 88)*, volume 5, pages 2893–2896, New-York.
- [Jamieson and Rice, 1989] Jamieson, L. and Rice, T. (1989).  
A Highly Parallel Algorithm for Root Extraction.  
*IEEE Trans. Comput.*, 38 :443–449.
- [Kavalieris and Hannan, 1994] Kavalieris, L. and Hannan, E. (1994).  
Determining the Number of Terms in a Trigonometric Regression.  
*Journal of Time Series Analysis*, 15 :613–625.
- [Kaveh and Barabell, 1986] Kaveh, M. and Barabell, A. (1986).  
The Statistical Performance of the MUSIC and Minimum-Norm Algorithms in Resolving Plane Waves in Noise.  
*IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 34 :331–341.  
(Corrections in ASSP-34 (6) 1986).
- [Kay, 1988] Kay, S. (1988).  
*Modern Spectral Estimation*.  
Englewood cliffs edition.

- [Kayalar and Weinert, 1989] Kayalar, S. and Weinert, H. (1989).  
Oblique Projections : Formulas, Algorithms and Error Bounds.  
*Math. Contr. Signals Syst.*, 2(1) :33–45.
- [Kaylath, 1980] Kaylath, T. (1980).  
*Linear Systems*.  
Prentice-hall edition.
- [Krim et al., 1992] Krim, H., Forster, P., and Proakis, J. (1992).  
Operator approach to performance analysis of Root-MUSIC and Root-Min-Norm.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 40(7) :1687–1696.
- [Krim and Viberg, 1996] Krim, H. and Viberg, M. (1996).  
Two Decades of Array Signal Processing Research : the Parametric Approach.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 13(4).
- [Kumaresan and Scharf, 1986] Kumaresan, R. and Scharf, L. (1986).  
An Algorithm for Pole-Zero Modeling and Spectral Analysis.  
*IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 34 :637–640.
- [Kumaresan and Tufts, 1983] Kumaresan, R. and Tufts, D. (1983).  
Estimating the Angle of Arrival of Multiple Plane Waves.  
*IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 19(1).
- [Kundu et al., 2000] Kundu, D., Diamantaras, K., and Taur, J. (2000).  
Detecting the Number of Signals for Undamped Exponential Model Using Cross-Validation Approach.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 80(3) :525–534.
- [Larzabal and Clergeot, 1993] Larzabal, P. and Clergeot, H. (1993).  
Non-Asymptotic Statistical Behaviors of "ML" Methods for Bearing Estimation.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 93)*, volume 4, pages 125–128.
- [Lee and Tung, 2002] Lee, J.-H. and Tung, C.-H. (2002).  
Estimating the Bearings of Near-Field Cyclostationary Signals.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 50(1) :110–119.
- [Lee and Lee, 2001] Lee, Y.-T. and Lee, J.-H. (2001).  
Direction-Finding Methods for Cyclostationary Signals in the Presence of Coherent Sources.  
*IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 49(12) :1821–1827.
- [Li and Vaccaro, 1991] Li, F. and Vaccaro, R. (1991).  
Unified Analysis for DOA Estimation Algorithms in Array Signal Processing.  
*Signal Processing*, 25(2) :147–169.
- [Li et al., 1989] Li, F., Vaccaro, R., and Tufts, D. (1989).  
Min-Norm Linear Prediction for Arbitrary Sensor Arrays.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-89)*, volume 4, pages 2613–2616.
- [Li and Qi, 2005] Li, X. and Qi, F. (2005).  
A fault Detection Method of Bearing in Induction Motor Based on MUSIC Algorithm.  
*Electric Machines and Control*, 9(4) :392–396.
- [Li et al., 1995] Li, Y., Razavilar, J., and Liu, K. (1995).  
DMUSIC Algorithm for 2D NMR signals.
- [Liavas and Regalia, 2001] Liavas, A. and Regalia, P. (2001).  
On the Behavior of Information Theoretic Criteria for Model Order Selection.



- IEEE Trans. on Signal Processing*, 49(8) :1689–1695.
- [Liavas et al., 1999] Liavas, A., Regalia, P., and Delmas, J.-P. (1999).  
Blind Channel Approximation : Effective Channel Order Determination.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(12) :3336–3344.
- [Ligget, 1972] Ligget, W. (1972).  
Passive Sonar : Fitting Models to Multiple Series.  
Technical report.
- [Linebarger et al., 1995] Linebarger, D., DeGroat, R., Dowling, E., Stoica, P., and Fudge, G. (1995).  
Incorporating a Priori Information Into MUSIC-Algorithms and Analysis.  
*Signal Processing*, 46(1).
- [Marcos, 1998] Marcos, S. (1998).  
*Les methodes a haute resolution, traitement d'antenne et analyse spectrale*.  
Hermes.
- [McCloud and Scharf, 2002] McCloud, M. and Scharf, L. (2002).  
A New Subspace Identification Algorithm for High-Resolution DOA Estimation.  
*IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 50(10) :1382–1390.
- [McFadden, 1986] McFadden, P. (1986).  
Detection fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of the meshing vibration.  
*Journal of vibration, acoustics, stress, and Reliability in design*, 108.
- [Mermoz, 1976] Mermoz, H. (1976).  
Imagerie, correlation et modèles.  
Technical report.
- [Mewes et al., 1994] Mewes, H., Wolf, F., and Haseborg, J. (1994).  
Experimental Investigations on High Resolution Direction Finding Algorithms.  
*Antennas and Propagation Society International Symposium*, 3 :1540–1543.
- [Michele et al., 1993] Michele, L. D., Natale, M. D., and Roux, D. (1993).  
Fejer Kernels and Noisy Fourier Series.  
*Journal of Computational and Applied Mathematics*, 49(1-3) :45–50.
- [Moal and Fuchs, 1999] Moal, N. and Fuchs, J.-J. (1999).  
Détection et Estimation de Sinusoïdes dans du Bruit Coloré de Matrice de Covariance Inconnue.  
In *XVII colloque GRETSI*, pages 571–574, Vannes, France.
- [Mosher and Leahy, 1998] Mosher, J. and Leahy, R. (1998).  
Recurssivally Applied MUSIC : A Framework for EEG and MEG Source Localization.  
*IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 45 :1342–1354.
- [Mosher and Leahy, 1999] Mosher, J. and Leahy, R. (1999).  
Source Localization Using Recursively Applied and Projected (RAP) MUSIC.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(2) :332–340.
- [Muirhead, 1982] Muirhead, R. (1982).  
*Aspects of Multivariate Statistical Theory*.  
New-York.
- [Munier and Delisle, 1991] Munier, J. and Delisle, G. (1991).  
Spatial Analysis Using New Properties of the Cross-Spectral Matrix.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 39(3) :746–749.

- [Murray, 1972] Murray, N. (1972).  
*Numerical Methods for unconstrained optimization*.  
New-York.
- [Oh and Un, 1993] Oh, S. and Un, C. (1993).  
A Sequential Estimation Approach for Performance Improvement of Eigenstructure-Based  
Methods in Array Processing.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(1) :457–463.
- [Ottersten et al., 1991] Ottersten, B., Wax, M., and Kailath, T. (1991).  
Performance Analysis of the Total Least Squares ESPRIT Algorithm.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 39(5) :1122–1135.
- [Pan, 1997] Pan, V. (1997).  
Solving a polynomial equation : Some history and recent progresses.  
*SIAM Review*, 39 :187–220.
- [Park, 1990] Park, J. (1990).  
The subspace projection method for constructing coupled-mode synthetic seismograms.  
*Geophys. Inter.*, 101 :111.
- [Peng and Zhang, 2005] Peng, C.-Y. and Zhang, X.-D. (2005).  
On Recursive Oblique Projectors.  
*IEEE Trans. on Signal Processing Letters*, 12(6) :433–436.
- [Pisarenko, 1973] Pisarenko, V. (1973).  
The retrieval of Harmonics from a covariance function.  
*Geophys. Journal Astron. Soc.*, 33.
- [Prony, 1795] Prony, B. (1795).  
Essai experimental et analytique : sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur  
celles de la force expansive de la vapeur de l’eau et de la vapeur de l’alcool à différentes  
températures.  
*Journal de l’école Polytechnique Paris*, (1 :2) :24–76.
- [Randal, 1982] Randal, R. B. (1982).  
A new method of modeling gear faults.  
*Journal of Mechanical Design*, 104 :259–267.
- [Rao and Hari, 1989a] Rao, B. and Hari, K. (1989a).  
Performance Analysis of ESPRIT and Tam in Determining the Direction Of Arrival of  
Plane Waves.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 37(12) :1990–1995.
- [Rao and Hari, 1989b] Rao, B. and Hari, K. (1989b).  
Performance Analysis of Root-Music.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 37(12).
- [Rao and Hari, 1989c] Rao, B. and Hari, K. (1989c).  
Statistical Performance Analysis of the Minimum-Norm Method.  
*IEEE*, 136(3) :125–134.
- [Rao and Hari, 1990] Rao, B. and Hari, K. (1990).  
Effect on Spatial Smoothing on the Performance of Noise Subspace Methods.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 90)*, vo-  
lume 5, pages 2687–2690.
- [Reddi, 1979] Reddi, S. (1979).  
Multiple Source Localisation. A Digital Approach.

- IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, pages 95–105.
- [Renaux, 2006] Renaux, A. (2006).  
*Contribution à l'analyse des performances d'estimation en traitement statistique du signal*.  
PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Rissanen, 1978] Rissanen, J. (1978).  
*Modeling by shortest data description*, volume 14 of *Automatica*.
- [Roy, 1987] Roy, R. (1987).  
*ESPRIT*.  
PhD thesis, Stanford university.
- [Roy et al., 1986] Roy, R., Paulraj, A., and Kailath, T. (1986).  
ESPRIT- A subspace Rotation Approach to Estimation of Parameters of Cissoids in Noise.  
*IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP*, 34(5) :1340–.
- [Scharf, 1990] Scharf, L. (1990).  
The SVD and Reduced-Rank Signal Processing.  
In *Second Inter. Workshop SVD Signal Processing*, University of Rhode Island, Kingston, R.
- [Scharf, 1991] Scharf, L. (1991).  
*Statistical signal processing : detection, estimation and time series analysis*.  
Addison Wesley.
- [Scharf and McCloud, 2002] Scharf, L. and McCloud, M. (2002).  
Blind Adaptation of Zero Forcing Projections and Oblique Pseudo-Inverse for Subspace  
Detection and Estimation when Interference Dominates Noise.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 50(12) :2938–2946.
- [Schell and Gardner, 1992] Schell, S. V. and Gardner, W. A. (1992).  
The Cramér-Rao Lower Bound for Directions of Arrival of Gaussian Cyclostationary Signals.  
*IEEE Trans. on Information Theory*, 38(4) :1418–1423.
- [Schmidt, 1981] Schmidt, R. (1981).  
*A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*.  
PhD thesis, Stanford University.
- [Schwartz, 1981] Schwartz, L. (1981).  
*Cours d'analyse. Tomes 1 and 2*.  
Hermann, Paris.
- [Schwarz, 1978] Schwarz, G. (1978).  
Estimating the dimension of a model.  
*The Annals of Statistics*, 6(2) :461–464.
- [Schönhage, 1982] Schönhage, A. (1982).  
The fundamental theorem of algebra in terms of computational complexity.  
Preliminary report, Math. Inst. Univ. Tübingen.
- [Selva, 2005] Selva, J. (2005).  
Computation of Spectral and Root MUSIC through Real Polynomial Rooting.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 53(5) :1923–1927.
- [Shah and Tufts, 1994] Shah, A. and Tufts, D. (1994).  
Determination of the Dimension of a Signal Subspace from Short Data Records.  
*IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(9).

- [Sharman et al., 1984] Sharman, K., Durrani, T., Wax, M., and Kailath, T. (1984). Asymptotic Performance of Eigenstructure Spectral Analysis Methods. In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 84)*, pages 45.5.1–45.5.4.
- [Stewart, 1980] Stewart, R. (1980). The specification and development of standard for gearbox monitoring. *Mechanical Engineering*, pages 353–358.
- [Stoica et al., 1995] Stoica, P., Handel, P., and Nehorai, A. (1995). Improved Sequential MUSIC. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 31(4) :1230–1239.
- [Stoica et al., 2001] Stoica, P., Larsson, E., and Gershman, A. (2001). The Stochastic CRB for Array Processing : A Textbook Derivation. *IEEE Trans. on Signal Processing Letters*, 8(5) :148–150.
- [Stoica and Moses, 2005] Stoica, P. and Moses, R. (2005). *Spectral Analysis of Signals*. Prentice Hall.
- [Stoica and Nehorai, 1989] Stoica, P. and Nehorai, A. (1989). MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 37(5) :720–741.
- [Stoica and Nehorai, 1990a] Stoica, P. and Nehorai, A. (1990a). MUSIC, Maximum Likelihood and the Cramér-Rao Bound : Further Results and Comparisons. *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38 :2140–2150.
- [Stoica and Nehorai, 1990b] Stoica, P. and Nehorai, A. (1990b). Performances Study of Conditional and Unconditional Direction Of Arrival Estimation. *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38 :1783–1795.
- [Stoica and Nehorai, 1991a] Stoica, P. and Nehorai, A. (1991a). Comparative Performance Study of Element-Space and Beamspace MUSIC Estimators. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 10(3) :285–292.
- [Stoica and Nehorai, 1991b] Stoica, P. and Nehorai, A. (1991b). Performance Comparison of Subspace Rotation and MUSIC Methods for Direction Estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 39(2).
- [Stoica et al., 2004] Stoica, P., Selen, Y., Sandgren, N., and Huffel, S. V. (2004). Using Prior Knowledge in SVD-Based Parameter Estimation for Magnetic Resonance Spectroscopy - the ATP Example. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 51(9).
- [Stoica and Sharman, 1990] Stoica, P. and Sharman, K. (1990). Maximum Likelihood Methods for Direction Of Arrival Estimation. *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38 :1132–1143.
- [Thubert and Kopp, 1986] Thubert, D. and Kopp, L. (1986). Measurement accuracy and resolving power of high resolution passive methods. In *EURASIP*, volume 86, pages 1037–1040.
- [Tosunoglu et al., 1990] Tosunoglu, S., Lin, S., and Tesar, D. (1990). Complete accessibility of oscillations in robotic systems by orthogonal projections. *Journal of Dynamic Systems and Measurement Control*, 112 :194.

- [Tourneret et al., 2005] Tourneret, J.-Y., Ferrari, A., and Letac, G. (2005).  
The noncentral wishart distribution : properties and application to speckle imaging.  
In *13th Workshop on Statistical Signal Processing*, pages 924–929.
- [Tourneret et al., 2004] Tourneret, J.-Y., Ferrari, A., and Swami, A. (2004).  
Cramer-Rao Lower Bound for Change Points in Additive and Multiplicative Noise.  
*Signal Processing*, 84 :1071–1088.
- [Tufts and Kumaresan, 1980] Tufts, D. and Kumaresan, R. (1980).  
Improved Spectral Resolution II.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 80)*, pages 592–597, Dencer, CO.
- [Tufts and Kumaresan, 1982] Tufts, D. and Kumaresan, R. (1982).  
Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids : Making Linear Prediction Perform like  
Maximum Likelihood.  
*Proceeding of IEEE*, 70(9) :975–989.
- [Vaccaro and Tufts, 1989] Vaccaro, R. and Tufts, D. (1989).  
Min-Norm Linear Prediction for Arbitrary Sensor Arrays.  
In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2613–2626,  
Glasgow (GB).
- [Vandaele and Moonen, 2000] Vandaele, P. and Moonen, M. (2000).  
Two deterministic blind channel estimation algorithms based on oblique projections.  
*Signal Processing*, 80(3) :481–495.
- [VanTrees, 1968] VanTrees, H. (1968).  
*Detection, Estimation and Modulation Theory : Radar-Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise*.  
New-York.
- [Veen et al., 1993] Veen, A.-J. V. D., Deprettere, E., and Swindlehurst, A. (1993).  
Subspace-Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition.  
*Proc. of IEEE*, 81(9).
- [Veen and Buckley, 1988] Veen, B. V. and Buckley, K. (1988).  
Beamforming : A versatile Approach to Spatial Filtering.  
*IEEE ASSP Magazine*, 5(2) :4–24.
- [Viberg and Ottersten, 1991] Viberg, M. and Ottersten, B. (1991).  
Sensor Array Processing Based on Subspace Fitting.  
*IEEE trans. on signal processing*, 39(5).
- [Villier, 1995] Villier, E. (1995).  
*Contribution aux méthodes à sous-espace en traitement d’antenne*.  
PhD thesis, Université de Rennes I.
- [Wang, 1993] Wang, X. (1993).  
An AIC type estimator for the number of sinusoids.  
*Journal of Time Series Analysis*, 14 :443–440.
- [Wax, 1985] Wax, M. (1985).  
*Detection and Estimation of superimposed Signals*.  
PhD thesis, Stanford University, CA.
- [Wax and Kaylath, 1985] Wax, M. and Kaylath, T. (1985).  
Detection of Signals by Information Theoretic Criteria.  
*IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP*, 33(2) :387–392.

- [Wirawan et al., 2002] Wirawan, P., Abed-Meraim, K., Maitre, H., and Duhamel, P. (2002). Blind Multichannel Image Restoration Using Oblique Projections. *Proc. of IEEE Sensor Array and Multichannel Processing (SAM2002)*.
- [Yan, 2005] Yan, H. (2005). *Cyclostationarity based DOA estimation and tracking*. PhD thesis, University of Cincinnati.
- [Yan and Fan, 2004] Yan, H. and Fan, H. (2004). Improved cyclic conjugate MUSIC. In *3rd workshop on Sensor array and Multichannel Signal Processing (SAM 2004)*.
- [Yu and Tong, 2001] Yu, X. and Tong, L. (2001). Joint Channel and Symbol Estimation by Oblique Projections. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49(12) :3074–3083.
- [Zha and Qiu, 2007] Zha, D. and Qiu, T. (2007). Direction finding in non-Gaussian impulsive noise environments. *Digital Signal Processing*, 17 :451–465.
- [Zhang and Wong, 1993] Zhang, Q. and Wong, K. (1993). Information Theoretic Criteria for the Determination of the Number of Signal in Spatially Correlated Noise. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(4) :1652–1663.
- [Zhao et al., 1986a] Zhao, L., Krishnaiah, P., and Bai, Z. (1986a). On Detection of the Number of Signals in Presence of White Noise. *Journal of Multivariate Analysis*, 20(1) :1–25.
- [Zhao et al., 1986b] Zhao, L., Krishnaiah, P., and Bai, Z. (1986b). On Detection of the Number of Signals When the Noise Covariance Matrix is Arbitrary. *Journal of Multivariate Analysis*, 20(1) :26–49.
- [Zoltowski, 1987] Zoltowski, M. (1987). Signal Processing Applications of the Method of Total Least Squares. In *Twenty-First Asilomar Conference on Signals Syst. Comput.*, Pacific Grove, CA.