Dynamique conforme dans les espaces métriques

Peter Haïssinsky

DYNAMIQUE CONFORME DANS LES ESPACES MÉTRIQUES
Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

par **Peter HAÏSSINSKY**

Résumé.

Ce mémoire est consacré à mes travaux sur la dynamique conforme dans les espaces métriques. Il est constitué de deux parties, la première concernant les groupes hyperboliques, et la seconde l'itération de revêtements ramifiés dans des espaces topologiques. Ces deux parties sont reliées par le dictionnaire de D. Sullivan. On a choisi d'orienter l'exposition en prenant la conjecture de J.W. Cannon comme fil d'Ariane.

Les systèmes dynamiques conformes classiques comprennent notamment l'étude des actions des sous-groupes discrets de $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par homographies (*groupes kleinéens*) et de l'itération des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Au début des années quatre-vingt, D. Sullivan unifie ces deux théories en établissant des liens profonds entre elles : non seulement les objets centraux se correspondent, mais aussi les énoncés et la démonstration de nombreux résultats [Sul2]. Le principe *de l'ascenseur conforme* (*expanding covers* dans [Sul2]), est au cœur de ce dictionnaire. Il exprime que la dynamique permet de changer d'échelle avec distorsion bornée. Il est responsable de l'aspect fractal des ensembles limites et des ensembles de Julia, et permet d'établir leurs propriétés en quantifiant des propriétés qualitatives.

À la même période, M. Gromov développe la théorie des groupes hyperboliques [Gro]. Elle concerne « la plupart » des groupes de présentation finie, et s'appuie entre autres sur la théorie des groupes kleinéens : ce sont les premiers exemples de dynamique conforme sans structure différentiable sous-jacente. En affranchissant la géométrie de sa structure riemannienne, et même de sa structure différentielle, on renforce les liens entre les propriétés algébriques de ces groupes, de leurs actions par isométries sur des espaces hyperboliques et de leurs actions par transformations quasiconformes sur des fractals. Le principe de l'ascenseur conforme reste moteur dans ce cadre. Il est aussi la clef pour approcher la dynamique des transformations non inversibles d'un point de vue topologique et d'en tirer des propriétés intéressantes.

La richesse de la dynamique conforme s'explique par ses interactions avec la géométrie en courbure négative, la géométrie quasiconforme, la théorie géométrique de la mesure, la théorie ergodique et les probabilités, sans oublier les aspects algébriques dans le cas des groupes. Il est d'autant plus remarquable que ses propriétés semblent être déterminées par la topologie des objets étudiés, et que les méthodes de discrétisation soient si performantes.

Plan du mémoire. Un bref préambule présente quelques notions d'analyse quasiconforme et de géométrie hyperbolique communes aux deux parties principales de ce mémoire, en s'inspirant de [18]. La première partie est consacrée aux groupes hyperboliques. Après un rapide tour d'horizon sur ces objets, on compare les différentes approches à la conjecture de Cannon en suivant [14]. Dans un second volet, on décrit des propriétés des marches aléatoires sur des groupes hyperboliques en se basant sur la distance de Green [12, 19]. La seconde partie résume les articles [15, 16, 17] : elle traite de l'itération dans les espaces métriques. On présente d'abord le cadre de notre travail, et on développe le sujet en le mettant en regard avec les groupes. On insiste notamment sur le fait qu'une structure quasiconforme est naturellement associée à un système dynamique topologique dilatant. On présente des exemples, et on montre que le cadre que l'on développe est pertinent pour caractériser la dynamique de fractions rationnelles.

Mon approche à ces problèmes consiste à introduire une structure quasiconforme obtenue en considérant une structure hyperbolique adaptée à la situation envisagée.

Notations. Les citations d'articles apparaissent en lettres comme [Anc], et les références à mes travaux, dont la liste figure en fin de mémoire, en chiffre comme [1].

Si a, b sont des fonctions à valeurs positives, on écrit $a \lesssim b$ ou $b \gtrsim a$ s'il existe une constante universelle $u > 0$ telle que $a \le ub$. On écrit $a \asymp b$ si $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$. On utilisera la notation polonaise $|x - y|$ pour exprimer la distance entre deux points d'un espace métrique. Le diamètre d'un ensemble A est noté $\operatorname{diam} A$.

Commençons par situer le contexte de mes travaux, en rappelant quelques notions de géométries quasiconforme et hyperbolique dans les espaces métriques.

1. NOTIONS DE GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *propre* si les boules fermées (de rayon fini) sont compactes. Une courbe *géodésique* dans X est une application $\gamma : I \to X$ définie sur un intervalle I telle que, pour tous $s, t \in I$, $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$. Si deux points quelconques de X sont joints par un segment géodésique, alors X est un *espace géodésique*.

1.1. **Géométrie quasiconforme**

1.1.1. *Transformations quasiconformes et leurs avatars.* Les homéomorphismes quasiconformes sont obtenus en assouplissant certaines propriétés des transformations conformes. On obtient ainsi plusieurs variantes. On s'appuie essentiellement sur [Väi1, Hei].

DÉFINITION 1.1 (Homéomorphisme quasisymétrique). — *Soit $f : (X,d) \to (X',d')$ un homéomorphisme entre espaces métriques. Étant donné un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, on dit que f est* η-quasisymétrique *si, pour tous x,y,z tels que $d(x,y) \le td(x,z)$, on a $d'(fx,fy) \le \eta(t)d'(fx,fz)$.*

Cette condition est forte car elle implique de la distorsion bornée, comme le théorème de Koebe pour les applications univalentes [Hei, Prop. 10.8] : un homéomorphisme η-quasisymétrique préserve les ensembles bornés et si $A \subset B$ avec diam $B < \infty$, alors

$$\frac{1}{2\eta\left(\frac{\text{diam } B}{\text{diam } A}\right)} \le \frac{\text{diam } f(A)}{\text{diam } f(B)} \le \eta\left(2\frac{\text{diam } A}{\text{diam } B}\right) .$$

Si X est un espace métrique, et a,b,c,d sont quatre points distincts, on définit leur *birapport* en posant

$$[a:b:c:d] \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{|a-b|}{|a-c|} \cdot \frac{|c-d|}{|b-d|} .$$

J. Vaïsälä introduit la classe suivante, qui généralise les homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$ [Väi2].

DÉFINITION 1.2 (Transformation quasimöbius). — *Une application $f : X \to X'$ est η-quasimöbius s'il existe un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a,b,c,d \in X$ deux à deux distincts, on ait*

$$[f(a):f(b):f(c):f(d)] \le \eta\left([a:b:c:d]\right) .$$

Les homéomorphismes quasimöbius sont localement quasisymétriques quantitativement, donc localement de distorsion bornée [Väi2].

1.1.2. *Modules de courbes.* Un principe de L. Ahlfors et A. Beurling exprime que tout invariant conforme est une fonction du module d'une famille de courbes bien choisies. C'est l'outil de géométrie quasiconforme le plus performant qui permet les généralisations de la théorie classique dans un cadre métrique en faisant le lien entre analyse et géométrie.

DÉFINITION 1.3 (Module de familles de courbes). — *Soient (X,μ) un espace métrique mesuré, Γ une famille de courbes de X et $p \ge 1$ un réel. On définit le p-module de Γ par*

$$\text{mod}_p \Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \inf \int_X \rho^p d\mu$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions boréliennes $\rho : X \to [0,\infty]$ telles que, pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma$, $\int_\gamma \rho ds \ge 1$.

Les modules mod_p définissent une famille de mesures extérieures sur les familles de courbes.

Il suffit en général de se restreindre aux familles de courbes suivantes.

Définition 1.4 (Condensateurs et capacités). — *Si X est un espace topologique, un* condensateur *est défini par une paire de continua disjoints $\{E, F\}$. On note $\Gamma(E, F)$ la famille des courbes qui joignent E et F. On définit la p-capacité du condensateur par*

$$\mathrm{cap}_p(E, F) = \mathrm{mod}_p(E, F) \stackrel{def.}{=} \mathrm{mod}_p\Gamma(E, F)\,.$$

1.1.3. *Espaces de Loewner.* J. Heinonen et P. Koskela ont développé une théorie des homéomorphismes quasiconformes dans certains espaces métriques mesurés, qualifiés de Loewner, qui permettent d'étendre des propriétés locales en propriétés globales [HK]. Suite aux travaux de M. Bourdon et H. Pajot [BP1, BP2] et de M. Bonk et B. Kleiner [BK1, BK2], cette propriété est aussi devenue un enjeu dans les problèmes de classification et de rigidité en géométrie hyperbolique, voir [18] pour plus de détails.

On définit ici une classe un peu plus restrictive d'espaces de Loewner (en imposant la condition (2) ci-dessous). Si (E, F) est un condensateur, sa distance relative $\Delta(E, F)$ se définit par la formule

$$\Delta(E, F) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{dist}\,(E, F)}{\min\{\mathrm{diam}\, E, \mathrm{diam}\, F\}}\,,$$

quantité quasi-invariante par les homéomorphismes quasimöbius.

Définition 1.5 (Espace loewnesque). — *Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est un espace* loewnesque *s'il existe une dimension $Q > 1$ telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :*

(1) Condition de Loewner. *Il existe une fonction décroissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour chaque condensateur (E, F), on ait*

$$\mathrm{mod}_Q(E, F) \geq \psi(\Delta(E, F))\,.$$

(2) Ahlfors-régularité. *(X, d, μ) est Q-Ahlfors-régulier, c'est-à-dire que pour toute boule $B(R)$ de rayon $R \in]0, \mathrm{diam}\, X]$, on a $\mu(B(R)) \asymp R^Q$.*

Le point (2) permet d'obtenir des bornes supérieures sur les Q-modules et le point (1) impose des bornes inférieures. L'exemple de base est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Notons qu'un espace loewnesque a de bonnes propriétés de connexité. Par exemple il est *linéairement localement connexe*, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on ait les propriétés suivantes :

(1) tout couple de points dans $B(x, r)$ appartient à un continuum contenu dans $B(x, Cr)$;

(2) tout couple de points dans $X \setminus \overline{B(x, r)}$ appartient à un continuum contenu dans $X \setminus \overline{B(x, (1/C)r)}$.

Cette propriété sert surtout à la construction de condensateurs.

On peut consulter [Hei, BKR] et les références qui s'y trouvent pour plus de propriétés de ces espaces et des homéomorphismes quasiconformes.

1.1.4. *Jauge conforme.* La géométrie quasiconforme s'intéresse en général aux propriétés des fonctions et des espaces invariantes par homéomorphismes quasisymétriques. Pour cela, on introduit la notion suivante.

DÉFINITION 1.6 (Jauge conforme). — *Si (Z,d) est un espace métrique, la* jauge conforme *$\mathcal{C}(Z,d)$ est l'ensemble des métriques δ sur Z telles que $Id:(Z,d)\to(Z,\delta)$ est quasisymétrique.*

On cherche à déterminer deux types de propriétés relatives à une jauge.

(1) Les propriétés qui ne dépendent pas de la métrique choisie dans la jauge, comme les propriétés purement topologiques, de complétude, la connexité locale linéaire, le groupe des transformations quasimöbius, etc.

(2) Les propriétés qui sont satisfaites pour au moins une métrique de la jauge, comme le fait d'être Ahlfors-régulier, loewnesque, d'avoir un groupe dénombrable de transformations conformes, etc.

P. Pansu tire de la jauge conforme une caractéristique numérique : la *dimension conforme* $\dim \mathcal{C}(Z)$, qui est définie comme l'infimum des dimensions de Hausdorff $\dim_H(Z,d)$ de (Z,d) lorsque d parcourt la jauge de Z [Pan]. Cette quantité est toujours minorée par la dimension topologique de l'espace. En pratique, les jauges contiennent des métriques Ahlfors-régulières, et on s'intéresse alors plutôt à la *dimension conforme Ahlfors-régulière* $\dim_{AR}\mathcal{C}(Z)$, c'est-à-dire à l'infimum des dimensions de Hausdorff parmi les distances Ahlfors-régulières de la jauge de Z.

J. Tyson montre que $\dim\mathcal{C}(Z)=\dim_{AR}\mathcal{C}(Z)=\dim_H Z$ si Z est loewnesque [Tys].

1.2. **Espaces hyperboliques**

On obtient naturellement des espaces métriques munis d'une structure quasiconforme en considérant les bords à l'infini d'espaces hyperboliques au sens de M. Gromov. On peut consulter [GdlH] pour les détails, ainsi que pour le paragraphe suivant.

Si X est un espace métrique, on définit le produit de Gromov ainsi. Si $x,y,z\in X$, on pose

$$(x|y)_z \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}(|x-z|+|y-z|-|x-y|)\,.$$

DÉFINITION 1.7 (Espace hyperbolique). — *Un espace métrique (X,d) (non borné) est hyperbolique s'il existe une constante δ telle que, pour tous $x,y,z,w\in X$,*

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w,(y|z)_w\}-\delta\,.$$

L'hyperbolicité est une propriété de X à grande échelle. Pour capturer cette information, on définit la notion de quasi-isométries, une notion introduite sous cette forme par G. Margulis [Mar] et naturellement justifiée dans les contextes dynamiques qui nous intéressent (*cf.* le lemme de Švarc-Milnor).

DÉFINITION 1.8 (Quasi-isométrie, quasigéodésique). — *Soient X, Y deux espaces métriques, et $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ deux constantes. Une application $f : X \to Y$ est un plongement* (λ, c)-quasi-isométrique *si, pour tous $x, x' \in X$, on a*

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + c. \tag{1}$$

On dit que f est une (λ, c)-quasi-isométrie *s'il existe $g : Y \to X$ qui vérifie aussi (1) et telle que, pour tout $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$.*

Une quasigéodésique est l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par un plongement quasi-isométrique.

Les espaces géodésiques hyperboliques jouissent de nombreuses propriétés dont les suivantes.

(1) Le produit de Gromov $(x|y)_w$ est comparable à la distance de w à n'importe quel segment géodésique $[x, y]$.
(2) Le *lemme de poursuite* de M. Morse affirme que toute quasigéodésique d'un espace hyperbolique est à distance finie d'une géodésique.

Le lemme de poursuite de Morse implique que la propriété d'hyperbolicité est invariante par quasi-isométries dans la catégorie des espaces métriques géodésiques.

1.2.1. *Bord d'un espace hyperbolique.* Soit (X, w) un espace hyperbolique propre pointé. On dit qu'une suite (x_n) tend vers l'infini si $\liminf_{m,n\to\infty}(x_m|x_n)_w = \infty$. Le *bord visuel* ∂X de X est l'ensemble des suites qui tendent vers l'infini modulo la relation d'équivalence $(x_n) \sim (y_n)$ si $(x_n|y_n)_w$ tend vers l'infini. Dans le cas des variétés de Hadamard qui ont la propriété de visibilité, on obtient la même compactification que celle introduite par P. Eberlein et B. O'Neill [EO].

Le produit de Gromov se prolonge à l'infini de sorte que l'inégalité de quasi-ultramétricité est encore vérifiée. Une *métrique visuelle* vue de w et de paramètre $\varepsilon > 0$ est une distance d_ε sur ∂X telle que $d_\varepsilon(a, b)$ est comparable à $e^{-\varepsilon(a|b)_w}$. Il existe toujours des métriques visuelles pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

1.2.2. *Structure quasiconforme à l'infini.* Si d_1 et d_2 sont des distances visuelles basées en w_1 et w_2 et de paramètre ε_1 et ε_2, alors $Id : (\partial X, d_1) \to (\partial X, d_2)$ est quasisymétrique. On a plus généralement :

THÉORÈME 1.9. — *Une (λ, c)-quasi-isométrie $\Phi : X \to Y$ entre espaces δ-hyperboliques géodésiques se prolonge continûment en un homéomorphisme $\phi : \partial X \to \partial Y$ et, si d_X et d_Y sont des métriques visuelles, il existe $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui ne dépend que de $(\delta, \lambda, c, \varepsilon_X/\varepsilon_Y)$ telle que ϕ est η-quasimöbius.*

La véracité de ce théorème provient du fait que, dans un espace hyperbolique, le logarithme du birapport $[a : b : c : d]$ de quatre points à l'infini correspond essentiellement à la distance entre les géodésiques $[a, b]$ et $[c, d]$ au signe et à une constante additive près.

On a une réciproque partielle, due à F. Paulin [Pau], dans le cadre des espaces hyperboliques géodésiques. À un triplet $\{a, b, c\} \in \partial^3 X$, on associe un triangle idéal de sommets $\{a, b, c\}$. L'hyperbolicité de X nous permet de considérer un centre du triangle, c'est-à-dire un point x dont la distance aux trois côtés est minimale. Cela définit une application $p_X : \partial^3 X \to X$.

Disons qu'un espace hyperbolique géodésique X est *quasi-enveloppé* s'il existe une constante D telle que tout point de X est à distance au plus D de $p_X(\partial^3 X)$. Cette condition est équivalente à X d'être quasi-étoilé (il existe $w \in X$ tel que tout x est à distance au plus D' d'un rayon géodésique issu de w). On a alors

THÉORÈME 1.10 (F. Paulin). — *Soient X, Y deux espaces hyperboliques géodésiques D-enveloppés. Toute transformation quasimöbius $\varphi : \partial X \to \partial Y$ se prolonge en une quasi-isométrie $\Phi : X \to Y$.*

PARTIE I : GROUPES HYPERBOLIQUES

2. UN BREF APERÇU

On commence par une définition.

DÉFINITION 2.1 (Action géométrique). — *Un groupe G opère* géométriquement *sur un espace métrique propre X si*

(1) *chaque élément opère par isométrie ;*

(2) *l'action est proprement discontinue, c.à.d., pour tous compacts K et L de X, le nombre d'éléments $g \in G$ du groupe tels que $g(K) \cap L \neq \emptyset$ est fini ;*

(3) *l'action est cocompacte.*

Par exemple, si G est de type fini et S est une famille finie et symétrique de générateurs de G, on peut considérer le graphe de Cayley $\mathcal{G}$ associé à S : les sommets sont les éléments du groupe, et une paire $(g, g') \in G \times G$ définit une arête si $g^{-1}g' \in S$. En munissant $\mathcal{G}$ de la métrique de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$, on obtient la *métrique des mots associée à S*. Elle fait de $\mathcal{G}$ un espace géodésique et propre, et l'action de G sur lui-même par translations à gauche induit une action géométrique sur $\mathcal{G}$.

Il s'avère qu'un groupe n'admet essentiellement qu'une seule action géométrique :

LEMME 2.2 (Švarc-Milnor). — Soient X un espace géodésique et propre, et G un groupe qui opère géométriquement sur X. Alors G est de type fini et X est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley localement fini de G.

On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe de type fini s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini.

DÉFINITION 2.3 (Groupe hyperbolique). — *Un groupe est* hyperbolique *s'il opère géométriquement sur un espace hyperbolique, propre et géodésique.*

Un groupe hyperbolique est dit *élémentaire* s'il est fini ou quasi-isométrique à $\mathbb{Z}$. On supposera toujours les groupes non-élémentaires.

2.1. **Espaces hyperboliques quasiréglés**

La plupart des propriétés intéressantes des espaces et des groupes hyperboliques sont établies dans le cadre des espaces géodésiques (et propres). Cependant, la notion de quasi-isométrie ne préserve pas ce type de propriétés. Il s'est avéré important dans mes travaux sur les marches aléatoires de pouvoir travailler avec des espaces hyperboliques non géodésiques.

La notion de *structure quasiréglée* s'en est dégagée [19, Appendice A]. Elle est issue d'une lecture approfondie du lemme de poursuite de Morse. En effet, non seulement celui-ci affirme que toute quasigéodésique est à distance bornée d'une véritable géodésique, il établit aussi une propriété d'alignement des points : si $q : \mathbb{R} \to X$ est une (λ, c)-quasigéodésique dans un espace δ-hyperbolique géodésique, alors il existe une constante $\tau = \tau(\delta, \lambda, c)$ telle que, pour tous $s < t < u$, on ait

$$(q(s)|q(u))_{q(t)} \le \tau\,.$$

Cela nous a conduit aux définitions suivantes.

DÉFINITION 2.4 (Quasirègles, structures quasiréglées, espaces quasiréglés et quasi-isométries quasiréglantes). — *Soit (X, d) un espace métrique. Une* (λ, c, τ)-quasirègle *est une (λ, c)-quasigéodésique $q : I \to X$ telle que, pour tous $s < t < u$ dans I,*

$$(q(s)|q(u))_{q(t)} \le \tau\,.$$

Une structure quasiréglée *$\mathcal{G}$ sur X est un ensemble de (λ, c, τ)-quasirègles tel que toute paire de points de X est liée par un élément de $\mathcal{G}$, où (λ, c, τ) sont des constantes.*

L'espace métrique X sera dit quasiréglé *s'il existe des constantes (λ, c, τ) telles que X est (λ, c)-quasigéodésique et toute (λ, c)-quasigéodésique est une (λ, c, τ)-quasirègle.*

Un plongement quasi-isométrique $f : X \to Y$ d'un espace géodésique est quasiréglant *si l'image des géodésiques définit une structure quasiréglée sur $f(X)$.*

Nous énonçons deux résultats qui justifient cette notion et qui généralisent le cadre géodésique [GdlH].

THÉORÈME 2.5. — [19, Thm B.1] *Soit (X, w) un espace δ-hyperbolique et soit $k \ge 0$.*

(i) Si $|X| \leq 2^k + 2$*, alors il existe un arbre métrique fini et pointé* T *et une application* $\phi : X \to T$ *tels que :*
$\to$ $\forall x \in X$, $|\phi(x) - \phi(w)| = |x - w|$,
$\to$ $\forall x, y \in X$, $|x - y| - 2k\delta \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|$.

(ii) Si $(X_i, w_i)_{1 \leq i \leq n}$ *sont des rayons* (λ, c, τ)*-quasiréglés avec* $n \leq 2^k$*, tels que* $X = \cup X_i$*, alors il existe un arbre réel pointé* T *et une application* $\phi : X \to T$ *tels que*
$\to$ $\forall x \in X$, $|\phi(x) - \phi(w)| = |x - w|$,
$\to$ $\forall x, y \in X$, $|x - y| - 2(k+1)\delta - 4c - 2\tau \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|$*, où* $c = \max\{|w - w_i|\}$.

Théorème 2.6. — [19, Thm A.1] *Soient* X *un espace métrique hyperbolique géodésique* $\varphi : X \to Y$ *une quasi-isométrie sur un espace métrique* Y*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'espace* Y *est hyperbolique ;*

(ii) *l'espace* Y *est quasiréglé ;*

(iii) *l'application* φ *est quasiréglante.*

Remarque 2.7. — Au vu du théorème précédent, il est facile de construire des métriques dans la classe de quasi-isométrie d'un groupe hyperbolique G, qui sont invariantes à gauche, mais qui ne sont pas hyperboliques. Par exemple, si $|\cdot|$ est une métrique des mots sur G, la formule $d(g, g') = |g - g'| + \log(1 + |g - g'|)$ définit une telle distance, *cf.* [19, Prop. A.8].

2.2. **Dynamique à l'infini**

Soit G un groupe hyperbolique opérant géométriquement sur un espace propre quasiréglé (X, d). D'après le lemme de Švarc-Milnor, la topologie du bord ∂X ne dépend que de G, et on peut donc parler du bord ∂G du groupe, qui est bien défini à homéomorphismes près.

Par ailleurs, le Théorème 1.9 indique que toutes les métriques visuelles que l'on peut obtenir en faisant varier X sont quasisymétriquement équivalentes les unes aux autres. Par suite, la *jauge conforme* $\mathcal{C}(G)$ du groupe G, définie comme la jauge de ∂X muni d'une distance visuelle ne dépend que de la classe de quasi-isométrie du groupe G.

De plus, en vertu du même théorème, l'action de G se prolonge au bord par homéomorphismes quasimöbius. Topologiquement, on a affaire à un *groupe de convergence* : soit Θ l'ensemble des triplets de points distincts de ∂X ; alors G opère proprement discontinûment sur Θ. L'action sur Θ est même cocompacte, et dédinit donc un *groupe de convergence uniforme*. B. Bowditch a établi une réciproque [Bow] :

Théorème 2.8. — *Si* G *est un groupe de convergence uniforme opérant sur un espace métrique compact parfait* Z*, alors* G *est hyperbolique et son bord est homéomorphe à* Z*.*

Autrement dit, l'hyperbolicité d'un groupe est complètement caractérisée par son action topologique sur son bord. De plus, en considérant des métriques dans la jauge conforme d'une métrique visuelle, ce groupe de convergence est aussi un groupe uniformément quasimöbius (*cf.* Théorème 1.9). Le Théorème 2.8 implique notamment que la structure quasiconforme est incluse dans la notion purement topologique de groupe de convergence uniforme : la jauge conforme et tous ses dérivés sont des invariants topologiques de l'action de convergence uniforme du groupe.

Ces remarques sont le point de départ des travaux de M. Bonk et B. Kleiner et suggèrent une approche inspirée de la dynamique conforme : la définition de groupe de convergence uniforme implique qu'il existe une constante $m > 0$ telle que, quel que soit $\{x, y, z\} \in \partial^3 X = \Theta(\partial X)$, il existe $g \in G$ telle que $\min\{d_\varepsilon(gx, gy), d_\varepsilon(gx, gz), d_\varepsilon(gz, gy)\} \geq m$.

On est naturellement conduit à la formulation suivante du principe de l'ascenseur conforme [18].

Proposition 2.9 (Principe de l'ascenseur conforme). — *Soit G un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius opérant sur un espace métrique compact Z. Il existe $r_0 > 0$ et une fonction de distorsion η telles que, pour tout $z \in Z$, pour tout rayon $r \in]0, \operatorname{diam} Z/2]$, il existe $g \in G$ telle que $g(B(z, r)) \supset B(g(z), r_0)$ et $g|_{B(z,r)}$ soit η-quasisymétrique.*

Nous obtenons facilement les corollaires suivants (voir [18] pour plus de détails) :

Corollaire 2.10. — *Soit G un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius opérant sur un espace métrique compact Z.*

(1) *Si un ouvert est homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, alors Z est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.*

(2) *L'espace Z est doublant, c'est-à-dire qu'il existe un nombre N tel que chaque boule puisse être recouverte par au plus N boules de rayon moitié (un espace Ahlfors-régulier est doublant).*

(3) *Tout espace tangent est quasimöbius équivalent à Z épointé.*

(4) *L'espace Z est linéairement localement connexe.*

Les points (3) et (4) sont dûs à M. Bonk et B. Kleiner.

2.3. Mesures quasiconformes

On introduit d'abord quelques notions supplémentaires.

Soit (X, w) un espace métrique propre hyperbolique et quasiréglé. Soient $a \in \partial X$, $x, y \in X$. La fonction

$$\beta_a(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ \limsup_{n \to \infty} [d(x, a_n) - d(y, a_n)] \right\} ,$$

où le supremum est pris sur toutes les suites $(a_n)_n$ de X qui tendent vers a, est appelée la *fonction de Busemann* au point a.

Soient $R > 0$ et $x \in X$. *L'ombre* $\mho_w(x, R)$ d'une boule $B(x, R)$ vue de $w \in X$ est l'ensemble des points $a \in \partial X$ tels que $(a|x)_w \geq d(w, x) - R$.

Par le Théorème 2.5, on obtient :

PROPOSITION 2.11. — *Soit (X, d) un espace hyperbolique. Pour tout $\tau \geq 0$, il existe des constantes strictement positives C, R_0 telles que, pour tous $R > R_0$, $a \in \partial X$ et $x \in X$ tels que $(w|a)_x \leq \tau$, on ait*

$$B_\varepsilon\left(a, \frac{1}{C}e^{R\varepsilon}e^{-\varepsilon|w-x|}\right) \subset \mho(x, R) \subset B_\varepsilon\left(a, Ce^{R\varepsilon}e^{-\varepsilon|w-x|}\right) .$$

Les fonctions de Busemann, les distances visuelles et l'action de G sont liées par la propriété suivante : pour tout $a \in \partial X$ et tout $g \in G$, il existe un voisinage V de a tel que, pour tous $b, c \in V$,

$$d_\varepsilon(g(b), g(c)) \asymp L_g(a) d_\varepsilon(b, c)$$

où $L_g(a) \overset{\text{def.}}{=} e^{\varepsilon\beta_a(w, g^{-1}(w))}$. De plus, G opère aussi sur les mesures de ∂X selon la règle suivante : $(g^*\rho)(A) = \rho(gA)$.

Le prochain théorème, démontré par M. Coornaert [Coo] dans le cadre des espaces géodésiques en généralisant les travaux de D. Sullivan [Sul1], résume les propriétés des mesures quasiconformes.

THÉORÈME 2.12. — *Soit (X, w) un espace hyperbolique propre quasiréglé pointé muni d'une action géométrique d'un groupe G, et soit d_ε une métrique visuelle. On a*

$$v = \limsup \frac{1}{R} \log |\{G(w) \cap B(w, R)\}| = \varepsilon \cdot \dim(\partial X, d_\varepsilon) .$$

Il existe une mesure de probablité ρ sur ∂X avec les propriétés suivantes :

(i) *la mesure ρ est Ahlfors-régulière de dimension $\alpha = v/\varepsilon$;*

(ii) *la mesure ρ est une mesure G-quasiconforme i.e., pour tout $g \in G$, $\rho \ll g^*\rho \ll \rho$ et*

$$\frac{d(g^*\rho)}{d\rho} \asymp (L_g)^\alpha \ \rho-\textit{presque partout};$$

(iii) *l'action de G est ergodique pour ρ.*

De plus, si ρ' est une autre mesure G-quasiconforme, alors $\rho \ll \rho' \ll \rho$ et

$$\frac{d\rho'}{d\rho} \asymp 1 .$$

Il en ressort que v ne dépend pas du groupe opérant géométriquement sur X, ce qui justifie de l'appeler *l'entropie volumique de* X. La mesure ρ est définie comme une limite faible de

$$\frac{1}{\sum_{g\in G} e^{-sd(w,g(w))}} \sum_{g\in G} e^{-sd(w,g(w))}\delta_{g(w)}$$

quand s décroît vers v.

L'étude des mesures quasiconformes conduisent à l'estimation suivante sur la mesure des ombres.

LEMME 2.13 (de l'ombre). — Sous les hypothèses du Théorème 2.12, il existe R_0, tel que si $R > R_0$, alors, pour tout $x \in X$,

$$\rho(\mho(x,R)) \asymp e^{-vd(w,x)}$$

où les constantes implicites dépendent de R mais pas de x.

3. CARACTÉRISATION DES GROUPES KLEINÉENS COCOMPACTS OPÉRANT SUR L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Le Théorème 1.10 montre que la classe de quasi-isométrie d'un groupe hyperbolique est entièrement déterminée par la topologie et la structure quasiconforme de son bord. La question de savoir s'il existe une *meilleure* action sur un *meilleur* espace se pose naturellement, et aussi si, dans certains cas, la classe de quasi-isométrie du groupe pourrait être déterminée uniquement par la topologie de son bord.

Par ailleurs, W.P. Thurston propose un programme de géométrisation des variétés topologiques compactes de dimension 3 : chaque variété se découpe en morceaux élémentaires, chacun admettant exactement une des huit géométries homogènes possibles [Thu]. Un des points délicats est de munir certaines variétés d'une structure hyperbolique. En particulier, sa conjecture de géométrisation, démontré par G. Perelman, implique que le groupe fondamental d'une variété compacte sans bord est hyperbolique et non-élémentaire si et seulement si la variété peut être munie d'une structure hyperbolique complète.

A l'intersection de ces deux problématiques, J.W. Cannon propose la conjecture suivante dans [Can1], indépendante des travaux de G. Perelman.

CONJECTURE 3.1 (de Cannon). — *Un groupe hyperbolique de bord homéomorphe à* $\mathbb{S}^2$ *opère géométriquement sur l'espace hyperbolique* $\mathbb{H}^3$.

Cette conjecture est vraie en dimension 2 [Tuk, Gab, CJ], et fausse en dimension strictement plus grande que 3. Cela découle de constructions par M. Gromov et W. Thurston de variétés compactes de courbure pincée entre (-1) et $(-1-\varepsilon)$ qui n'admettent pas de métrique de courbure constante et ce, pour tout $\varepsilon > 0$ et en toute dimension $n \geq 4$, [GT]. Notons que P. Pansu montre que la courbure des déformations des variétés localement symétriques non réelles ne peut devenir arbitrairement pincée [Pan]. Donc les variétés de M. Gromov et W. Thurston ne sont pas non plus équivalentes à d'autres variétés localement symétriques.

Les approches de J.W. Cannon *et al.* [Can2, CS, CFP1] et de M. Bonk et B. Kleiner [BK1, BK2] consistent à reconnaître la structure conforme de la sphère de Riemann à partir de la jauge du groupe, en utilisant des versions discrètes des modules de familles de courbes. Cela leur permet de se ramener à une action uniformément quasimöbius sur $\widehat{\mathbb{C}}$ et de conclure à l'aide d'un théorème de redressement de D. Sullivan.

La première approche est plus combinatoire, la seconde plus analytique. L'objet de mon travail a été d'analyser ces différentes méthodes pour comprendre dans quelle mesure elles étaient différentes [14].

3.1. **Modules discrets**

L'intérêt des modules discrets est qu'ils sont en général plus faciles à analyser, et sont invariants par homéomorphismes : ils peuvent donc être considérés dans n'importe quel espace topologique.

Les deux approches utilisent des versions un peu différentes de modules discrets. Soit X un espace topologique et $\mathcal{S}$ un recouvrement fini de X. On note $\mathcal{M}_Q(\mathcal{S})$ l'ensemble des applications $\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ tel que $0 < \sum \rho(s)^Q < \infty$ que l'on appelle *métriques admissibles.*

La définition de J.W. Cannon est la suivante [Can2]. Soit $K \subset X$; on note $\mathcal{S}(K)$ l'ensemble des $s \in \mathcal{S}$ qui intersectent K. La *ρ-longueur* de K est par définition

$$\ell_\rho(K) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{\mathcal{S}(K)} \rho(s)\,.$$

Si Γ est une famille de courbes dans X et $\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S})$, on définit son Q-module combinatoire par

$$\mathrm{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}) \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S})} \frac{\sum_{s\in\mathcal{S}} \rho(s)^Q}{(\inf_{\gamma\in\Gamma} \ell_\rho(\gamma))^Q}\,.$$

M. Bonk et B. Kleiner travaillent uniquement sur le nerf $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{S})$ du recouvrement. Si (E, F) est un condensateur de X, on définit

$$\widehat{\mathrm{mod}}_Q(E, F, \mathcal{S}) \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S})} \frac{\sum_{s\in\mathcal{S}} \rho(s)^Q}{(\inf_{\widehat{\gamma}\in\widehat{\Gamma}} \ell_\rho(\widehat{\gamma}))^Q}$$

où $\widehat{\Gamma}$ est l'ensemble des courbes dans $\mathcal{N}$ qui relient $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}(F)$, et où la longueur d'une courbe $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$ est calculée en sommant ρ sur les sommets de $\mathcal{N}$ traversés par $\widehat{\gamma}$.

Lorsque X et $\mathcal{S}$ sont suffisamment réguliers, alors ces deux notions de modules sont en fait équivalentes [14, Proposition 2.11 et Remarque 3.12].

Inspirée par la notion « d'approximation d'un espace métrique » définie par M. Bonk et B. Kleiner [BK1], on introduit la notion de *quasi-empilement.* Si X est un espace métrique, on dira qu'un recouvrement $\mathcal{S}$ est un quasi-empilement s'il existe une constante $K \geq 1$ et, pour chaque $s \in \mathcal{S}$, un point x_s de s et une taille $r_s > 0$ tels que

(1) $B(x_s, r_s) \subset s \subset B(x_s, K \cdot r_s)$.

(2) Chaque point appartient à au plus K boules $B(x_s, r_s)$, $s \in \mathcal{S}$.

On peut alors aller montrer qu'en général les modules analytiques sont bien approchés par des modules discrets dans les espaces réguliers.

THÉORÈME 3.2. — [14, Prop. B.2] *Soit X un espace Q-régulier, $Q > 1$, muni d'une suite de quasi-empilements $(\mathcal{S}_n)_n$ dont la maille tend vers zéro. Pour $L > 0$, on note Γ_L les courbes de X de diamètre au moins L. Pour n assez grand, on a*

$$\mathrm{mod}_Q(\Gamma_L, \mathcal{S}_n) \asymp \mathrm{mod}_Q \Gamma_L$$

si $\mathrm{mod}_Q \Gamma_L > 0$ et sinon, $\lim \mathrm{mod}_Q(\Gamma_L, \mathcal{S}_n) = 0$. De même, pour tout condensateur (E, F) et pour n assez grand, on a

$$\mathrm{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) \asymp \mathrm{mod}_Q(E, F)$$

si $\mathrm{mod}_Q(E, F) > 0$ et sinon, $\lim \mathrm{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) = 0$.

Ce théorème permet de donner une démonstration simplifiée d'un théorème de J. Tyson assurant que les transformations quasimöbius entre espaces Q-réguliers, $Q > 1$, préservent les Q-capacités à une constante multiplicative près, voir [14, Thm B.5]. Il permet aussi de minorer la dimension conforme Ahlfors-régulière :

COROLLAIRE 3.3. — [16, Cor. 3.3] *Soit X un espace régulier muni d'une suite de quasi-empilements $(\mathcal{S}_n)_n$ dont la maille tend vers zéro et soit $Q > 1$. S'il existe une constante $m > 0$ et une famille de courbes Γ de diamètre minoré telles que $\mathrm{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}_n) \geq m$ pour tout n alors $Q \leq \dim_{AR} \mathcal{C}(X)$.*

3.2. **Planarité**

Les deux écoles n'utilisent pas la planarité de la même façon.

J.W. Cannon ne considère que les modules pour les anneaux A, et ce pour $Q = 2$ uniquement. Cependant, il considère à la fois les courbes Γ_t qui joignent les deux composantes de bord — $\mathrm{mod}_{\sup}(A, \mathcal{S}) \stackrel{\text{def.}}{=} 1/\mathrm{mod}_2(\Gamma_t, \mathcal{S})$, que les courbes homotopes à l'âme de l'anneau Γ_s — $\mathrm{mod}_{\inf}(A, \mathcal{S}) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{mod}_2(\Gamma_s, \mathcal{S})$. Sur une surface de Riemann, les modules analytiques correspondant sont identiques. Ils permettent de confronter des problèmes variationnels transverses afin de construire sur chaque anneau une structure euclidienne qui le rend isométrique à un cylindre.

En revanche, M. Bonk et B. Kleiner ne considèrent que des capacités de condensateurs, mais pour des dimensions $Q \geq 2$ variables. Ils utilisent la planarité (et la connexité locale linéaire) pour construire des triangulations de la sphère. Ces triangulations sont ensuite utilisées pour construire des empilements de cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$ de graphes d'incidence ces triangulations.

Les empilements de cercles produisent des partitions de la sphère que l'on peut utiliser pour discrétiser les 2-modules. Dans [14], on met en évidence cette observation en considérant des anneaux, dits *empilés*, définis comme réunion d'atomes d'une de ces partitions. La proposition suivante fait le pont entre modules analytique et combinatoire.

PROPOSITION 3.4. — [14, Cor. 3.8] *Si $\mathcal{E}$ est un empilement de valence bornée et si A est un anneau empilé tel que la distance combinatoire entre les deux bords est au moins* 2*, alors*

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A,\mathcal{S}) \asymp \mathrm{mod}\, A \asymp \mathrm{mod}_{\mathrm{inf}}(A,\mathcal{S}),$$

où $\mathcal{S}$ est la partition associée à $\mathcal{E}$ et où les constantes implicites ne dépendent que de la valence.

3.3. Théorèmes d'uniformisation

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes d'uniformisation qui permettent de reconnaître la sphère de Riemann.

On dit qu'une suite de recouvrements finis $(\mathcal{S}_n)$ de la sphère S^2 dont la maille tend vers zéro est *K-conforme* au sens de Cannon si

(1) pour tout anneau A, il existe $m > 0$ et n_0 tels que, pour $n \geq n_0$, on ait

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A,\mathcal{S}_n), \mathrm{mod}_{\mathrm{inf}}(A,\mathcal{S}_n) \in [m/K, Km];$$

(2) pour tout $x \in X$, tout voisinage V de x et tout $m > 0$, il existe un anneau $A \subset V$ qui sépare x de $X \setminus V$ et n_0 tels que, pour $n \geq n_0$,

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A,\mathcal{S}_n) \geq m\,.$$

Nous énonçons un premier résultat de nature combinatoire qui correspond à une version simplifiée du théorème de Riemann combinatoire de J.W. Cannon [Can2]. On dira qu'un recouvrement est *K-adapté* si son nerf est de valence au plus K et s'il est équivalent à une triangulation de la sphère.

THÉORÈME 3.5 (J.W. Cannon). — *Soit $(\mathcal{S}_n)$ une suite de recouvrements finis K-adaptés et K-conforme d'une* 2*-sphère topologique X dont la maille tend vers* 0*. Il existe un homéomorphisme $\phi : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $\mathrm{mod}_2\phi(A) \asymp \mathrm{mod}_{\mathrm{inf}}(A,\mathcal{S}_n) \asymp \mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A,\mathcal{S}_n)$ pour tout anneau A de X et tout n assez grand.*

Voici maintenant la version analytique.

THÉORÈME 3.6 (M. Bonk et B. Kleiner). — *Soit X un espace métrique homéomorphe à $\mathbb{S}^2$. Si*

(1) *X est* 2*-régulier et linéairement localement connexe, ou*

(2) *X est un espace Q-loewnesque, $Q \geq 2$*
alors X est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$.

Nous proposons dans [14] une démonstration unifiée de ces résultats.

L'idée pour le Théorème 3.5 est d'associer à chaque $\mathcal{S}_n$ un empilement de cercles normalisé $\mathcal{E}_n$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$ et de construire une injection $\phi_n : X_n(\subset X) \to \widehat{\mathbb{C}}$ qui à un point base de $s \in \mathcal{S}_n$ associe le centre du cercle correspondant. Les estimations *a priori* sur les modules discrets des anneaux et la Proposition 3.4 permettent de montrer que cette suite est uniformément équicontinue et que toute limite est un homéomorphisme.

M. Bonk et B. Kleiner montrent que sous leurs hypothèses, il existe une suite de recouvrements K-adaptés dont la maille tend vers zéro. On construit alors (ϕ_n) comme ci-dessus.

Sous l'hypothèse (1), on a, pour tout condensateur (E, F) de X et tout n assez grand,

$$\psi_L^{\widehat{\mathbb{C}}}(\Delta(\phi_n(E), \phi_n(F))) \lesssim \mathrm{mod}_2(E, F, \mathcal{S}_n) \lesssim \mathrm{mod}_2(E, F) \leq \psi_{AR}^X(\Delta(E, F))$$

où ψ_{AR}^X est un contrôle obtenu par la 2-régularité de X, et $\psi_L^{\widehat{\mathbb{C}}}$ du fait que la sphère est 2-loewnesque. On peut alors conclure comme pour le Théorème 3.5, et utiliser les estimations pour montrer que (ϕ_n) est uniformément quasimöbius.

Sous l'hypothèse (2), on inverse les rôles de X et $\widehat{\mathbb{C}}$: on montre d'abord que la maille des empilements de cercles tend vers zéro, puis que, pour tout condensateur (E, F) de $\widehat{\mathbb{C}}$ et tout n assez grand,

$$\psi_L^X(\Delta(\phi_n^{-1}(E), \phi_n^{-1}(F))) \lesssim \mathrm{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) \leq \mathrm{mod}_2(E, F, \mathcal{S}_n) \lesssim \psi_{AR}^{\widehat{\mathbb{C}}}(\Delta(E, F))\,.$$

On conclut similairement.

En conclusion, on obtient la caractérisation suivante des groupes kleinéens cocompacts de $\mathbb{H}^3$.

THÉORÈME 3.7. — *Soit G un groupe hyperbolique de bord S^2. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le groupe G opère géométriquement sur $\mathbb{H}^3$.*
(2) *Un graphe de Cayley X localement fini de G est quasi-isométrique à $\mathbb{H}^3$.*
(3) *Le bord ∂G est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$.*
(4) *La jauge de G contient une métrique 2-Ahlfors régulière.*
(5) *La jauge de G atteint sa dimension conforme Ahlfors régulière.*
(6) *La suite $\mathcal{S}_n = \{\mho(x, R),\ x \in S(n)\}$ où $S(n)$ est la sphère de rayon n de X est conforme au sens de Cannon.*

L'équivalence de (1) avec (2) est due à J.W. Cannon et D. Cooper, avec (3) est une conséquence immédiate d'un théorème de D. Sullivan ; les équivalences avec (4) et (5) sont de M. Bonk et B. Kleiner, et (6) de J.W. Cannon et E. Swenson (sans parler des raffinements que l'on peut trouver dans [CFP1]).

3.4. Bilan et perspectives

L'approche présentée ici permet de distinguer deux problèmes différents : le premier est de munir la surface considérée d'une structure complexe compatible avec les modules combinatoires, le second est de comparer la structure métrique ainsi obtenue avec l'originale (lorsqu'elle est fixée).

Les travaux de J.W. Cannon *et al.* s'adressent essentiellement au premier problème, et ceux de M. Bonk et B. Kleiner aux deux, mais sans les dissocier. La raison en est que leur discrétisation sert d'outil pour la construction de l'homéomorphisme quasisymétrique limite, et n'est pas donnée *a priori*.

Notons enfin que J.W. Cannon *et al.*, en établissant dans [CFP1] la 2-régularité de leur métrique, se ramènent à la partie (1) du Théorème 3.6. Se donner des estimations à la fois sur les $\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}$ et les $\mathrm{mod}_{\mathrm{inf}}$ revient à se donner à la fois des majorations et des minorations, donc des propriétés de type loewnesque et de 2-régularité. D'un autre côté, lorsque M. Bonk et B. Kleiner supposent que X est 2-régulier, ils supposent en fait que les quasi-empilements vérifient la propriété (2) d'être conforme au sens du Cannon, et se rapprochent ainsi du théorème de Riemann combinatoire.

Dans tous ces résultats, outre l'hypothèse topologique d'être une sphère, on suppose toujours une condition géométrico-combinatoire extrême : dans les hypothèses de conformité au sens de Cannon, on se donne la combinatoire de la sphère de Riemann, dans l'hypothèse 2-Ahlfors régulière, on se donne une borne supérieure sur la géométrie des modules, et sous la condition loewnesque, on obtient une borne inférieure. De plus, dans les deux approches, les auteurs imposent des estimations uniformes qui impliquent que les structures complexes qu'ils définissent sont à distance quasiconforme bornée les unes des autres.

Dans toutes ces situations, on part donc d'hypothèses qui imposent la présence de nombreuses courbes sur la surface. Ces courbes sont quantifiées grâce à la notion de modules, et celle-ci est utilisée pour en déduire des propriétés géométriques de la surface.

L'existence d'une métrique de Loewner dans la jauge d'un groupe hyperbolique est un problème très délicat. Il semble qu'il n'y ait pas de critère connu qui permettent d'en assurer l'existence, mais on sait que ce n'est pas automatique [BP3]. En effet, les seuls exemples connus proviennent d'actions géométriques sur des espaces explicites : espaces symétriques non-compacts de rang 1 et immeubles fuchsiens, voir [18] et les références qui s'y trouvent pour plus de détails.

La condition de Loewner a de nombreuses conséquences. Par exemple, les seuls distances loewnesques sur S^2 sont dans la jauge de $\widehat{\mathbb{C}}$ [BK2] ; de plus, si le bord à l'infini du revêtement universel d'une variété compacte de courbure strictement négative a une métrique visuelle loewnesque alors cette variété est localement symétrique [Con]. On peut envisager les deux propositions suivantes généralisant cet énoncé : (i) si la jauge du groupe fondamental d'une variété compacte de courbure strictement négative admet une métrique de Loewner, alors il s'agit d'une déformation d'une variété localement symétrique ; (ii) si la distance visuelle canonique d'un espace CAT(-1) muni d'une action géométrique et de bord une sphère est loewnesque, alors cet espace est quasi-isométrique à un espace symétrique. La résolution de ces problèmes pourrait passer par la classification des jauges conformes des sphères contenant des métriques de Loewner.

4. MARCHES ALÉATOIRES SUR LES GROUPES

Les marches aléatoires fournissent un moyen de construire des mesures sur le bord des groupes hyperboliques.

L'ouvrage [Woe] est une référence sur les notions qui suivent. Soit (G, μ) un groupe dénombrable muni d'une mesure de probabilité dont le support engendre tout le groupe en tant que semigroupe. On considère une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi μ, et on construit la marche aléatoire $(Z_n)_n$ partant d'un élément $x \in G$ comme suit : $Z_0 = x$ et $Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$. La loi de Z_n est donnée par la puissance n-ième du produit de convolution de μ.

L'objectif est de comprendre le comportement asymptotique de la suite $(Z_n)_n$. Il existe une caractéristique numérique introduite par A. Avez, *l'entropie asymptotique* h de la marche, qui mesure la dispersion de la marche dans le groupe, et qui joue le même rôle qu'en dynamique [Ave] :

$$h \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_n \frac{-\sum_{\gamma\in\Gamma} \mu^n(\gamma)\log\mu^n(\gamma)}{n} = \lim_n \frac{-\sum_{x\in\Gamma(w)} \mathbb{P}[Z_n(w)=x]\log\mathbb{P}[Z_n(w)=x]}{n}$$

L'entropie est nulle si le comportement asymptotique de la marche est trivial. Le *bord de Poisson* est un espace mesuré qui contient des informations beaucoup plus fines sur les comportements de la marche. Nous n'en ferons pas explicitement usage ici : nous renvoyons à [Kai4] pour sa définition et ses propriétés.

On supposera toujours que la marche est *transiente* c'est-à-dire qu'elle quitte définitivement tout ensemble fini de G presque sûrement. C'est le cas par exemple si G est de type fini sans être une extension finie de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$. On peut alors considérer la fonction de Green $G(x, y)$ qui compte le nombre moyen de visites de y d'une marche partant de x :

$$G(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^x[Z_n = y] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n(x^{-1}y)\,,$$

où $\mathbb{P}^x$ désigne la loi de (Z_n) partant de $x = Z_0$.

Lorsque G est aussi muni d'une distance d invariante à gauche, on considère la *vitesse de fuite* ℓ de la marche qui mesure à quelle vitesse (linéaire) la marche s'enfuit vers l'infini :

$$\ell \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_n \frac{d(x, Z_n)}{n}\,.$$

Elle est finie dès que la marche a *un premier moment fini*, soit si

$$\sum_{x\in G} d(e,x)\mu(x) < \infty\,.$$

Dans la suite, on s'intéressera aussi aux marches ayant un *moment exponentionnel*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\sum_{x\in G} e^{\lambda d(e,x)}\mu(x) < \infty\,.$$

Lorsque l'on munit G de la topologie discrète, on associe une compactification naturelle pour les marches de loi μ : la compactification de Martin [Dyn]. Le noyau de Martin est par définition

$$K(x,y) = K_y(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{G(x,y)}{G(e,y)}\,.$$

La *compactification de Martin* $G\cup\partial_M G$ est la plus petite compactification de G telle que le noyau de Martin se prolonge continûment à $G\times(G\cup\partial_M G)$. On appelle $\partial_M G$ le *bord de Martin*.

On sait que la marche aléatoire $(Z_n)_n$ partant de $x\in G$ converge presque sûrement en un point Z_∞ du bord de Martin. La loi de Z_∞ est *la mesure harmonique* ν_x (on note $\nu=\nu_e$). Les mesures harmoniques $(\nu_x)_{x\in G}$ sont toutes absolument continues les unes par rapport aux autres. Plus précisément, on a, pour ν-presque tout $a\in\partial_M G$,

$$\frac{d\nu_x}{d\nu}(a) = K_a(x)\,.$$

4.1. **Un point de vue géométrique sur les marches aléatoires**

Sébastien Blachère, Pierre Mathieu et moi avons entrepris l'étude des marches aléatoires basée sur la distance de Green [12, 19]. L'idée est la suivante. Notons, pour $x,y\in G$, $F(x,y)$ la probabilité qu'une marche partant de x atteigne y. Par la propriété de Markov et l'invariance de la fonction de Green, on a $G(x,y)=F(x,y)G(e,e)$.

On définit, selon S. Blachère et S. Brofferio [BB],

$$d_G(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} -\log F(x,y)\,.$$

Cette quantité est invariante par l'action diagonale de G.

Lorsque G est différent de $\mathbb{Z}$, d_G est positive, vérifie l'inégalité triangulaire et $d_G(x,y)=0$ si et seulement si $x=y$. Si, de plus, μ est symétrique, alors d_G est une véritable distance. Par abus de notation, nous parlerons malgré tout de distance de Green, même si la loi de la marche n'est pas supposée symétrique.

4.1.1. *Bords de Martin, de Busemann et de Gromov.* Un thème général consiste à indentifier le bord de Martin d'un groupe avec un bord géométrique de ce groupe. On présente d'abord une réalisation du bord de Martin. Soit $\Psi : G \to C(G)$ l'application $y \longmapsto K(\cdot, y)$ à valeurs dans l'espace des fonctions continues définies sur G muni de la topologie de la convergence simple. Cette application est injective et nous permet d'identifier G avec son image $\Psi(G)$. La fermeture $\Psi(G)$ est compacte dans $C(G)$, et on a $\partial_M G \stackrel{\text{def.}}{=} \overline{\Psi(G)} \setminus \Psi(G)$.

On remarque que la distance de Green permet d'identifier le bord de Martin au bord de Busemann. Rappelons que le bord de Busemann d'un espace métrique propre (X, d) est construit *via* l'application $\Phi : X \to C(X)$ définie par $y \longmapsto d(\cdot, y) - d(x, y)$, où $x \in X$ est un point base arbitraire et $C(X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. La compactification de Busemann de X est l'adhérence de l'image $\Phi(X)$ dans $C(X)$.

Si on choisit pour (X, d) le groupe G muni de la distance de Green d_G, alors les deux constructions des compactifications de Martin et de Busemann coïncident puisque

$$d_G(\cdot, y) - d_G(e, y) = -\ln K(\cdot, y)\,.$$

En supposant que la distance de Green est hyperbolique, nous synthétisons plusieurs travaux qui identifient le bord de Martin avec un bord de Gromov, *cf.* [Anc, BL, Kai3].

Théorème 4.1. — [19, Thm 1.7] *Soient G un groupe dénombrable et μ une mesure de probabilité symétrique dont le support engendre G. Nous supposons que μ engendre une marche transiente. Si la distance de Green est hyperbolique, alors le bord de Martin est homéomorphe au bord de Gromov de (G, d_G).*

4.1.2. *Entropie et vitesse de fuite.* Le résultat principal de [12] est le suivant.

Théorème 4.2. — [12, Thm 1.1] *Pour toute marche aléatoire transiente et d'entropie finie sur un groupe dénombrable, l'entropie asymptotique h et la vitesse de fuite ℓ_G dans la métrique de Green sont égales.*

Nous présentons deux démonstrations de ce résultat. La première, valable en toute généralité, consiste à exprimer la vitesse de fuite par une formulation intégrale sur le bord de Martin, puis de l'identifier avec une autre expression intégrale de l'entropie asymptotique établie par Y. Derriennic. La seconde démonstration n'est valable que pour les groupes de type fini. Elle repose sur « l'inégalité fondamentale » $h \le \ell v$ de où v est l'entropie volumique du groupe. On généralise cette inégalité au cas des groupes dénombrables munis d'une distance invariante à gauche, d'une marche de loi d'entropie et de premier moment finis admettant un taux de croissance logarithmique fini [12, Prop. 3.4]. Le fait d'être finiment engendré est utilisé pour montrer que la croissance v_G dans la distance de Green vérifie $v_G \le 1$.

4.2. **Marches sur des groupes hyperboliques**

Nous supposons dorénavant que G est un groupe hyperbolique et que μ est une mesure de probabilité symétrique. D'après ce qui précède, la résolution de la conjecture de Cannon semble passer par la construction de « bonnes » mesures sur le bord d'un groupe hyperbolique. Nous avons déjà rencontré les mesures quasiconformes ; les mesures harmoniques nous servirons d'une autre source d'exemples.

On considère l'ensemble $\mathcal{D}(G)$ des distances hyperboliques et invariantes à gauche sur G qui sont quasi-isométriques à G (ce sont donc des distances quasiréglées, *cf.* § 2.1). Dans la suite, nous distinguerons le groupe en tant qu'espace et en tant que groupe opérant sur un ensemble : on gardera la notation G pour le groupe, et on notera $(X, d) = (G, d) \in \mathcal{D}(G)$.

Ce contexte nous permet de capturer les deux situations suivantes.

– Si G opère géométriquement sur un espace géodésique et propre (Y, d), et si l'orbite d'un point $w \in Y$ est canoniquement en bijection avec G, alors la restriction de d sur l'orbite $G(w)$ convient.
– On pourra parfois aussi considérer le groupe muni de la distance de Green (voir Théorème 4.3).

4.2.1. *Hyperbolicité de la métrique de Green.* Lorsque μ est de support fini, ou admet un moment exponentiel, il n'est pas très difficile de montrer que la métrique de Green sur un groupe hyperbolique est quasi-isométrique au groupe, voir [BB] et [19, Prop. 3.5]. Cependant, cela n'implique pas que la métrique est hyperbolique.

On a le résultat suivant.

Théorème 4.3. — [19, Thm 1.1] *Soient G un groupe hyperbolique non-élémentaire et μ une mesure de probabilité symétrique sur G dont le support engendre G.*

(i) *Si μ admet un moment exponentiel, alors $d_G \in \mathcal{D}(G)$ si et seulement si, pour tout $r \geq 0$, il existe une constante $C(r)$ telle que*

$$F(x, y) \leq C(r)F(x, v)F(v, y) \tag{2}$$

dès que x, y et v sont des points dans un graphe de Cayley localement fini de G et v est à distance au plus r d'un segment géodésique $[x, y]$.

(ii) *Si $d_G \in \mathcal{D}(G)$, alors la mesure harmonique est Ahlfors-regulière de dimension $1/\varepsilon$, quand ∂G est muni d'une distance visuelle de paramètre $\varepsilon > 0$ induite par d_G.*

Notons que, sous les conditions de (ii), la distance de Green est hyperbolique, donc le Théorème 4.1 implique que l'on peut identifier le bord de Martin avec le bord de Gromov, et considérer par là-même la mesure harmonique sur le bord de Gromov de G. Dans ce cas, la mesure harmonique devient formellement une mesure géométrique (de Hausdorff).

A. Ancona a établi (2) pour les marches de loi μ de support fini ; cette condition nous fournit la structure quasiréglée qui nous est nécessaire pour établir l'hyperbolicité. La condition (2) a aussi été mise en avant par V. Kaimanovich comme l'ingrédient-clef pour montrer que le bord de Martin s'identifiait au bord de Gromov d'un groupe [Kai3, Thm 3.1].

Une autre source d'exemples provient de la discrétisation du mouvement brownien de variétés de Hadamard M de courbure sectionnelle strictement négative pincée. Lorsque G est un sous-groupe d'isométries qui opère sur M proprement discontinûment et de quotient de volume fini, la construction de T. Lyons et D. Sullivan associe au mouvement brownien sur M une marche aléatoire sur G de support tout le groupe et de même mesure harmonique que le mouvement brownien [LS]. Le raffinement de W. Ballmann et F. Ledrappier permet d'obtenir une marche symétrique dont la fonction de Green est proportionnelle à la fonction de Green de M hors de la diagonale [BL]. Les estimées de la fonction de Green sur M sont alors utilisées pour montrer que d_G est hyperbolique et que son bord est la sphère visuelle à l'infini ∂M. Cette construction permet en particulier de construire des exemples de groupes non hyperboliques pour lesquels la distance de Green est hyperbolique, et aussi des exemples de groupes hyperboliques pour lesquels la distance de Green est aussi hyperbolique, mais pas dans la classe de quasi-isométrie du groupe en question.

Les conséquences du point (ii) de ce théorème ne sont pas négligeables : elles permettent d'utiliser toutes les propriétés des mesures quasiconformes, dont le lemme de l'ombre. En voici un exemple.

Proposition 4.4. — [19, Prop. 3.8] *Supposons que G est un groupe hyperbolique non-élémentaire, $(X,d)\in\mathcal{D}(G)$, et μ est une loi symétrique telle que sa distance de Green appartienne à $\mathcal{D}(G)$. Alors il existe τ_0 telle que, pour tout triple d'entiers naturels m,n,k, on ait*

$$\mathbb{E}[(Z_m(w)|Z_{m+n+k}(w))_{Z_{m+n}(w)}]\le\tau_0\,.$$

Autrement dit, la trajectoire de la marche est quasiréglée en moyenne.

4.2.2. *Dimension de la mesure harmonique.* Soit Z un espace métrique compact et m une mesure de Radon sur Z. La dimension $\dim m$ de m est par définition l'infimum des dimensions de Hausdorff des sous-ensembles boréliens de Z de mesure pleine.

On établit une formule « dimension-entropie-vitesse de fuite », bien connue en dynamique géométrique, qui donne une interprétation géométrique de « l'inégalité fondamentale ».

Théorème 4.5. — [19, Thm 1.3, Cor. 1.4 et Thm 1.5] *Soient G un groupe hyperbolique non-élémentaire, $(X,d)\in\mathcal{D}(G)$, et μ une loi symétrique de premier moment fini et telle que sa distance de Green appartienne à $\mathcal{D}(G)$. On désigne par d_ε une métrique visuelle sur ∂X et par $B_\varepsilon(a,r)$ la boule de centre $a\in\partial X$ et de rayon r pour cette distance d_ε. Soient ρ une mesure quasiconforme sur ∂X et ν la mesure harmonique de la marche (Z_n).*

La dimension de Hausdorff ponctuelle $\lim_{r\to0}\frac{\log\nu(B_\varepsilon(a,r))}{\log r}$ existe pour ν-presque tout a de ∂X, et est indépendante du choix du point a. Plus précisément, pour ν-presque tout a, *on a*

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log \nu(B_\varepsilon(a,r))}{\log r}=\frac{h}{\varepsilon\ell}$$

où $\ell>0$ désigne la vitesse de fuite par rapport à d et h l'entropie asymptotique.

De plus, les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) On a l'égalité $h=\ell v$.

(ii) Les mesures ρ et ν définissent la même classe.

(iii) Les mesures ρ et ν sont équivalentes et leur dérivées de Radon-Nykodym sont bornées supérieurement et inféreurement.

(iv) L'application $(G,d_G)\xrightarrow{Id}(X,vd)$ est une $(1,C)$-quasi-isométrie.

(v) La mesure ν est une mesure quasiconforme sur $(\partial X,d_\varepsilon)$.

Pour le mouvemement brownien sur une variété de Hadamard M, il existe aussi une notion de vitesse de fuite ℓ_M [Pra] et une notion d'entropie h_M aux propriétés similaires de celle des groupes [Kai1].

Nos travaux sur les marches conduisent au corollaire suivant.

Corollaire 4.6. — [19, Thm 1.9] *Soit M le revêtement ramifié universel d'une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative et d'entropie volumique v. Soit d_ε une distance visuelle sur ∂M. Alors*

$$\dim\nu=\frac{h_M}{\varepsilon\ell_M}\,.$$

De plus, on a $h_M=\ell_M v$ si et seulement si ν est équivalente à la mesure de Hausdorff de dimension v/ε sur $(\partial M,d_\varepsilon)$.

La démonstration consiste à discrétiser le mouvement brownien par une marche aléatoire sur le groupe fondamental G, de montrer que sa loi admet un moment exponentiel (fait affirmé dans [Anc]), et enfin, d'observer que $h_M/\ell_M=h/\ell$ [Kai2, KL].

Le premier résultat est folklorique. Le second énoncé est dû à F. Ledrappier [Led1]. En fait, l'égalité $h_M=\ell_M v$ est équivalente à l'égalité entre ν et la mesure conforme canonique sur $(\partial M,d_\varepsilon)$, et cela équivaut à ce que M est une variété symétrique de type non-compacte de rang 1 [Led2, BCG].

4.3. Bilan et perspectives

La distance de Green procure un point de vue adéquat pour interpréter les propriétés de marches aléatoires. Elle permet notamment d'unifier les résultats visant à identifier le bord de Martin avec un bord à l'infini d'un espace hyperbolique, et d'interpéter géométriquement l'inégalité fondamentale.

Théoriquement, on devrait pouvoir résoudre la conjecture de Cannon ainsi. Soit G un groupe opérant géométriquement sur un espace géodésique propre X de bord une 2-sphère S^2 que l'on munit d'une distance visuelle d_v. On cherche une marche aléatoire de moment exponentiel telle que la distance de Green soit quasiréglée, c.à.d. vérifie la condition d'Ancona (2). Dans ce cas, la mesure harmonique ν vérifie la condition de doublement du volume sur $(\partial X, d_v)$. Une construction de S. Semmes implique que s'il existe une distance bilipschitzienne à q, définie par

$$q(a,b) = \sqrt{\nu(B(a, d_v(a,b)) \cup B(b, d_v(a,b)))}$$

pour $a, b \in \partial X$, alors G opère géométriquement sur $\mathbb{H}^3$ [Hei, § 14.18].

Nos résultats soulèvent de multiples questions. Nos estimations de la dimension de la mesure harmonique repose sur la symétrie de la marche — un confort technique qui nous a permis d'appliquer la théorie des mesures quasiconformes comme une boîte noire, mais surtout sur la condition d'Ancona (2). Étant donné un groupe hyperbolique, peut-on caractériser les marches pour lesquelles la distance de Green est hyperbolique et dans la classe de quasi-isométrie du groupe ? Récemment, V. Leprince a montré que la dimension de Minkowski de la mesure harmonique était toujours $h/\varepsilon\ell$ sous la seule hypothèse de premier moment fini. A-t'on toujours coïncidence avec sa dimension de Hausdorff ? Enfin, nous proposons une caractérisation des marches qui réalisent l'égalité dans l'inégalité fondamentale. Les seuls exemples (hyperboliques) connus sont sur des groupes virtuellement libres ; sont-ils les seuls ?

Partie II : ITERATION DE REVÊTEMENTS RAMIFIES

Cette partie décrit mes travaux avec Kevin Pilgrim [15, 16, 17]. Nous sommes en partie motivés par le dictionnaire de D. Sullivan dont plusieurs lignes incomplètes nous ont particulièrement intéressées. Tout d'abord, le lien des groupes kleinéens avec la géométrie hyperbolique est un outil moteur dans l'évolution de ces deux théories et leurs graphes de Cayley contiennent non seulement des informations combinatoires, mais aussi géométriques ; les fractions rationnelles générales n'ont pas de modèles combinatoires satisfaisants (les polynômes et certaines fractions rationnelles admettent cependant des puzzles qui sont très utiles). Les groupes kleinéens convexes cocompacts apparaissent aujourd'hui comme une sous-classe des groupes hyperboliques ; nous voyons les fractions rationnelles *semi-hyperboliques* comme la traduction de ces groupes kleinéens ; de quelle grande classe font-elles partie ? Enfin, nous voulons établir une ligne entre la conjecture de Cannon et le théorème de caractéristation topologique des fractions rationnelles de W.P. Thurston. Notons que M. Lyubich et Y. Minsky ont associés aux fractions rationnelles un objet hyperbolique de type riemannien, mais notre méthode sera bien différente.

5. DYNAMIQUE GROSSIÈREMENT CONFORME

5.1. Revêtements ramifiés

Il y a eu différentes définitions de revêtements ramifiés qui, pour la plupart coïncident dans le contexte des variétés. Notre définition, proche de celle d'A. Edmonds [Edm], généralise de manière assez évidente les propriétés topologiques des fractions rationnelles, et se comportent bien dans les problèmes dynamiques.

Soient X, Y des espaces séparés localement compacts, et soit $f : X \to Y$ une application continue à fibres finies. Pour $x \in X$, le *degré local* de f au point x est

$$\deg(f; x) = \inf_U \sup\{\# f^{-1}(\{z\}) \cap U : z \in f(U)\}$$

où U parcourt les voisinages de x.

DÉFINITION 5.1 (Revêtement ramifié). — *Une application continue $f : X \to Y$ à fibres finies est un* revêtement ramifié de degré $d \geq 1$ *si*

(i) pour tout $y \in Y$, on a

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg(f; x) = d;$$

(ii) pour tout $x_0 \in X$, il existe des voisinages compacts U et V de x_0 et $f(x_0)$ respectivement tels que

$$\sum_{x \in U, f(x)=y} \deg(f; x) = \deg(f; x_0)$$

pour tout $y \in V$.

Lorsque X, Y sont séparés et localement compacts, un revêtement ramifié $f : X \to Y$ de degré d est ouvert, fermé, propre et surjectif. De plus, les lieux de branchement $B_f = \{\deg(f; x) > 1\}$ et de ramification $V_f = f(B_f)$ sont fermés et nulle part dense.

De nombreux arguments dynamiques utilisent les antécédents d'ouverts et leurs restrictions à des composantes connexes. Pour cela, on impose à X et Y d'être aussi localement connexes. Sous ces condititions, si $V \subset Y$ est ouvert et connexe, et $U \subset X$ est une composante connexe de $f^{-1}(V)$, alors $f|_U : U \to V$ est aussi un revêtement ramifié de degré fini. Par ailleurs, si $y \in Y$ et $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, alors il existe un voisinage connexe arbitrairement petit V de y tel que

$$f^{-1}(V) = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \ldots \sqcup U_k$$

est une réunion disjointe de voisinages connexes U_i de x_i tels que $f|_{U_i} : U_i \to V$ est un revêtement ramifié de degré $\deg(f; x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

5.2. **Définitions et propriétés**

Soient $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1$ des espaces séparés localement compacts et localement connexes. On suppose que $\mathfrak{X}_1$ est ouvert et relativement compact dans $\mathfrak{X}_0$. Soit $f : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_0$ un revêtement ramifié de degré $d \geq 2$. Le *répulseur*, ou *l'ensemble limite* de $f : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_0$ est

$$X = \{x \in \mathfrak{X}_1 | f^n(x) \in \mathfrak{X}_1 \ \forall n > 0\} .$$

Par la suite, on fera toujours l'hypothèse que la restriction $f|_X : X \to X$ de f à X est aussi un revêtement ramifié de même degré d. Cet ensemble X est compact et totalement invariant.

On considère les conditions topologiques suivantes sur f.

(1) **[Expansion]** Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts connexes de $\mathfrak{X}_1$. On construit une suite de recouvrement $\{S(n)\}_n$ en considérant les composantes connexes de $f^{-(n-1)}(U)$, quand U parcourt $\mathcal{U}$ (on a ainsi $\mathcal{U} = S(1)$). On dit que la paire $(f, \mathcal{U})$ vérifie l'axiome ou la condition [Expansion] si la suite de recouvrements induit une base d'entourages de X. On dira que f vérifie [Expansion] s'il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ tel que la paire vérifie [Expansion].

(2) **[Irréductibilité]** Pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans $\mathfrak{X}_0$, il existe un sous-voisinage W et un itéré $n \geq 0$ tels que $f^n(W) \supset X$.

(3) **[Degré]** L'ensemble des degrés des restrictions des itérés de f de la forme $f^k|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$, où $U \in S(n)$, $\widetilde{U} \in S(n+k)$, avec n et k arbitraires, est majoré par un entier p.

Lorsque $\mathfrak{X}_0$ est un espace métrique, l'axiome [Expansion] est équivalent à dire que la maille des recouvrements tend vers zéro. La condition [Irréductibilité] implique que $f : X \to X$ est topologiquement exact.

Définition 5.2 (Dynamique topologiquement dilatante grossièrement conforme). — *On dit qu'un revêtement ramifié $f : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_0$ de degré d et de répulseur X est topologiquement dilatant et grossièrement conforme (abrégé en anglais par top. cxc) si les trois conditions [Expansion], [Irréductibilité] et [Degré] sont vérifiées.*

Remarquons que la condition [Expansion] est plus générale que la notion d'expansivité au sens classique, puisque cela permet d'inclure des points de branchement dans le répulseur.

Ces conditions sont inspirées de la notion de groupe de convergence uniforme : la propriété [Irréductibilité] est analogue à la minimalité de l'action du groupe ; la condition [Expansion] ressemble au fait que le groupe opère proprement discontinûment sur les triplets de points ; enfin, l'axiome [Degré] est comparable à l'action cocompacte sur les triplets de points.

On considère maintenant que $\mathfrak{X}_0$ est un espace métrique. Si $U \subset \mathfrak{X}_0$ est ouvert et $x \in U$, on définit la *rondeur* $\mathrm{Rond}\,(U,x)$ de U par rapport à x comme l'infimum du quotient R/r, où $r \le R$ vérifient $B(x,r) \subset U \subset \overline{B(x,R)}$.

Le principe de l'ascenseur conforme est donné dans ce contexte par les deux propriétés supplémentaires suivantes.

(4) **[Rondeur]** Il existe deux fonctions $\rho_\pm : [1,\infty[\to \mathbb{R}_+$ croissantes qui donnent le contrôle suivant sur la distorsion des rondeurs. Pour tous $n,k \ge 1$ et pour tous $U \in S(n)$, $\widetilde{U} \in S(n+k)$, $\tilde{y} \in \widetilde{U}$ et $y \in U$, si $f^k(\widetilde{U}) = U$ et $f^k(\tilde{y}) = y$ alors
$$\mathrm{Rond}\,(\widetilde{U},\tilde{y}) < \rho_-(\mathrm{Rond}\,(U,y)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rond}\,(U,y) < \rho_+(\mathrm{Rond}\,(\widetilde{U},\tilde{y})).$$

(5) **[Diamètre]** Il existe deux homéomorphismes croissants $\delta_\pm : [0,1] \to [0,1]$ qui donnent le contrôle suivant sur la distorsion relative des diamètres. Pour tous $n_0, n_1, k \ge 1$ et pour tous $U \in S(n_0)$, $U' \in S(n_1)$, $\widetilde{U} \in S(n_0+k)$, $\widetilde{U}' \in S(n_1+k)$ tels que $\widetilde{U}' \subset \widetilde{U}$ et $U' \subset U$, si $f^k(\widetilde{U}) = U$ et $f^k(\widetilde{U}') = U'$ alors
$$\delta_-\left(\frac{\mathrm{diam}\,U'}{\mathrm{diam}\,U}\right) < \frac{\mathrm{diam}\,\widetilde{U}'}{\mathrm{diam}\,\widetilde{U}} < \delta_+\left(\frac{\mathrm{diam}\,U'}{\mathrm{diam}\,U}\right).$$

Voici notre analogue de la notion de groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius.

DÉFINITION 5.3 (Dynamique dilatante grossièrement conforme). — *On dit que f est dilatant et grossièrement conforme (abrégé en anglais par cxc), si f est topologiquement dilatant et grossièrement conforme et si f vérifie aussi les contrôles de distorsion de rondeur et de diamètre.*

Les bornes sur la rondeur permettent de montrer que tous les domaines de $S(n)$, $n \ge 1$, ressemblent à des boules. Bien qu'on ait un contrôle seulement sur ces domaines, il s'avère qu'ils remplissent correctement les voisinages des points de X : toute boule de rayon assez petit peut être coincée par deux de ces domaines de niveaux comparables. Les axiomes [Expansion] et [Diamètre] impliquent que la maille de $S(n)$ décroît exponentiellement vite. La condition [Degré] implique notamment que X est doublant. Dynamiquement, f est uniformément quasirégulière au sens suivant : il existe une constante $H < \infty$ et une suite de tailles (r_n) telles que, pour tout $x \in X$, tout itéré $n \ge 1$, tout $r \in]0, r_n[$,
$$\mathrm{Rond}\,(f^n(B(x,r)), f^n(x)) \le H\,.$$

Enfin, on a la rigidité suivante.

THÉORÈME 5.4. — [15, Thm 2.8.2] *Supposons $f : (\mathfrak{X}_1, X) \to (\mathfrak{X}_0, X)$ et $g : (\mathfrak{Y}_1, Y) \to (\mathfrak{Y}_0, Y)$ deux revêtements ramifiés top. cxc conjugués par un homéomorphisme $h : \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$, où $\mathfrak{X}_0$ et $\mathfrak{Y}_0$ sont des espaces métriques.*

(1) *Si f est cxc et h est quasisymétrique, alors g est cxc.*

(2) *Si f, g sont tous deux cxc, alors $h|_X : X \to Y$ est quasisymétrique.*

Autrement dit, il existe une seule jauge dans laquelle un revêtement ramifié top. cxc puisse être cxc, comme pour les groupes de convergence uniforme.

6. GÉOMÉTRISATION

L'objet de ce chapitre est de montrer que l'on peut associer une jauge conforme canonique à tout revêtement ramifié top. cxc, en parallèle au Théorème 2.8. Cette structure quasiconforme provient de la jauge du bord à l'infini d'un espace hyperbolique.

Cette approche suit le principe de W.P. Thurston affirmant que l'on peut associer une géométrie naturelle à un objet topologique (ici, un système dynamique).

Soit $f : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_0$ un revêtement ramifié top. cxc de degré d et de répulseur X. On note $\mathcal{U}$ un recouvrement qui vérifie [Expansion]. On associe un graphe $\Gamma = \Gamma(f, \mathcal{U})$ défini ainsi. Les sommets sont les éléments des différents $S(n)$, et d'un point base abstrait o que l'on peut voir comme X. On écrit $|W| = n$ si $W \in S(n)$. Tous les éléments de $S(1)$ ont une arête les joignant à o. Les autres arêtes (W, W') sont définies par les propriétés $||W| - |W'|| \leq 1$ et $W \cap W' \cap X \neq \emptyset$. On obtient un espace de longueur en considérant chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$. Notons que f opère naturellement en une transformation simpliciale $F : \Gamma \setminus B(o, 2) \to \Gamma \setminus B(o, 1)$, que l'on peut prolonger continûment à Γ de sorte que $F(\overline{B(o, 1)}) = \{o\}$.

THÉORÈME 6.1. — [15, Thm 3.2.1 et 3.3.1] *Le graphe $\Gamma(f, \mathcal{U})$ est géodésique, propre, non borné, hyperbolique au sens de Gromov et vérifie les propriétés suivantes.*

(1) *L'application F admet une unique extension continue $F : \partial\Gamma \to \partial\Gamma$ au bord ; muni d'une métrique visuelle de paramètre $\varepsilon > 0$ vue de o, on a, pour tout $a \in \partial\Gamma$ et tout $r > 0$ assez petit, $F(B(a, r)) = B(F(a), re^{\varepsilon})$.*

(2) *Il existe un homéomorphisme canonique $\phi_f : X \to \partial\Gamma$ tel que $\phi_f \circ f = F \circ \phi_f$.*

(3) *Si $\mathcal{V}$ est un autre recouvrement tel que $(f, \mathcal{V})$ vérifie l'axiome [Expansion], alors les graphes $\Gamma(f, \mathcal{U})$ et $\Gamma(f, \mathcal{V})$ sont quasi-isométriques.*

Autrement dit, le graphe Γ joue le même rôle que le graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique, et que n'importe quel espace hyperbolique sur lequel un tel groupe opère géométriquement, *cf.* le Lemme 2.2. On remarque que même si on part d'une transformation cxc, cette construction lisse la dynamique puisque l'on obtient un facteur de dilatation indépendant du point.

Comme dans le cas des groupes, on définit *la jauge conforme* $\mathcal{C}(f)$ d'un revêtement ramifié top. cxc comme la jauge du bord du graphe Γ ainsi construit.

Pour justifier que cette construction est bien l'analogue de l'espace hyperbolique dans le dictionnaire de Sullivan, nous appliquons la construction de Patterson-Sullivan des mesures quasiconformes à notre graphe, c'est-à-dire, prenons une limite faible μ_f de

$$\frac{1}{|S(1)| \displaystyle\sum_{\xi\in\cup_{n\geq 1}S(n)} d(\xi)e^{-|\xi|s}} \sum_{n\geq 1}\sum_{\xi\in S(n)} e^{-ns}d(\xi)\delta_\xi\,, \tag{3}$$

quand s décroît vers l'exposant critique $s = \log d$, et où $d(\xi)$ est le degré de la restriction de $(f^{|W|-1})|_W$ lorsque l'on a identifié le domaine W avec le sommet ξ du graphe.

En utilisant la structure du graphe, et une métrique visuelle, on obtient le résultat suivant, à comparer au Théorème 2.12 (nous renvoyons à [15, Chap. 3] pour les notions dynamiques).

THÉORÈME 6.2. — [15, Thm 3.4.1 et 3.5.6] *Supposons f top. cxc, alors la mesure μ_f est l'unique limite de (3), et vérifie les propriétés suivantes.*

(1) *Elle est invariante, ergodique, mélangeante et de jacobien d presque partout.*

(2) *Elle est l'unique mesure invariante quasiconforme, au sens que presque partout (on a en fait égalité)*
$$\frac{d(F^n)^*\mu_f}{d\mu_f} \asymp (e^{n\varepsilon})^\alpha;$$
sa dimension est $\alpha = (1/\varepsilon)\log d$.

(3) *Elle est Ahlfors-régulière de dimension* $(1/\varepsilon)\log d$.

(4) *Elle est l'unique mesure d'entropie maximale* $\log d$.

(5) *Elle décrit la distribution des antécédents d'un point et la distribution des points périodiques, c'est-à-dire μ_f est la limite faible, pour tout $\xi\in\partial\Gamma$, de*
$$(1/d^n)\sum_{F^n(\zeta)=\xi}\deg(F^n;\zeta)\,\delta_\zeta \quad \text{et de} \quad \frac{1}{d^n}\sum_{F^n(a)=a}\deg(F^n;a)\,\delta_a\,.$$

Notons que l'on obtient aussi une version du lemme de l'ombre. L'égalité $\dim\mu_f = (1/\varepsilon)\log d$ est une égalité « dimension=entropie/exposant de Lyapunov » comme dans le Théorème 4.5. On remarque que l'on a aussi coïncidence entre l'entropie topologique $\log d$ de f avec l'entropie volumique

$$v = \lim \frac{1}{n}\log|S(n)|$$

de Γ.

En fait, $(\partial\Gamma, d_\varepsilon)$ est un exemple d'espace « BPI » au sens de G. David et S. Semmes [DS].

7. DYNAMIQUE DES FRACTIONS RATIONNELLES

Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ une fraction rationnelle. Son *ensemble de Fatou* est l'ensemble des points z pour lesquels il existe un voisinage V tel que la restriction des itérées $(f^n|_V)$ à V est une famille normale au sens de Montel. L'ensemble de Julia $J(f)$ est son complémentaire. On rappelle que la condition [Irréductibilité] est toujours vraie dans ce contexte. On dira que f est *chaotique* si $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$. Les références sur le sujet comprennent notamment [CG, Mil].

7.1. Fractions semi-hyperboliques

Les définitions des revêtements ramifiés top. cxc et cxc sont modelés sur les fractions rationnelles semi-hyperboliques. Plus précisément, une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ est *semi-hyperbolique* si elle est top. cxc [CJY]. Cette classe est particulièrement intéressante car elle se caractérise par de nombreux points de vue complémentaires.

On propose de nouvelles caractérisations des fractions rationnelles semi-hyperboliques qui rappellent celles des groupes kleinéens convexe-cocompacts.

Théorème 7.1. — [15, Thm 4.2.3] *Soit g une fraction rationnelle. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application g est semi-hyperbolique.*
2. *L'application g est cxc sur son ensemble de Julia.*
3. *Il existe un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de $J(g)$ dont le graphe Γ est quasi-isométrique à l'enveloppe convexe de $J(g)$ dans $\mathbb{H}^3$ par une quasi-isométrie qui étend $\phi_g : J(g) \to \partial\Gamma$.*

On présente maintenant une caractérisation dans l'état d'esprit de la conjecture de Cannon (*cf.* Théorème 3.7).

Théorème 7.2. — [15, Thm 4.2.11] *Soit $f : S^2 \to S^2$ un revêtement ramifié qui préserve l'orientation muni d'un recouvrement fini $\mathcal{U}$ qui vérifie l'axiome [Expansion] sur S^2. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application f est topologiquement conjuguée à une fraction rationnelle semi-hyperbolique chaotique $R : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$.*
2. *Le graphe Γ est quasi-isométrique à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.*
3. *Le bord du graphe associé $\partial\Gamma$ est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$.*
4. *La jauge conforme de $\partial\Gamma$ contient une distance 2-Ahlfors régulière.*
5. *L'application f est top. cxc et la suite $\{\mathcal{U}_n\}_n$ de recouvrements de S^2 est conforme au sens de Cannon.*

On remarque qu'une des caractérisations des groupes ne passent pas aux fractions rationnelles : il existe des revêtements ramifiés top. cxc sur S^2 dont la jauge atteint sa dimension conforme Ahlfors-régulière, mais qui ne sont pas conjuguées à une fraction rationnelle. Ces exemples, appelés *exemples de Lattès réels* proviennent d'applications linéaires réelles sur des tores.

7.2. **Interprétation géométrique des obstructions de Thurston**

Nous rapprochons la conjecture de Cannon et la caractérisation de W.P. Thurston des fractions rationnelles en interprétant les obstructions de Thurston en une obstruction à la dimension conforme Ahlfors-régulière d'être deux.

Soit $f : S^2 \to S^2$ un revêtement ramifié qui préserve l'orientation. *L'ensemble postcritique* est défini par $P_f = \overline{\cup_{n>0} f^n(B_f)}$. Lorsque l'ensemble postcritique est fini, W.P. Thurston a caractérisé quand f est équivalent à une fraction rationnelle R au sens suivant : $h_0 \circ f = R \circ h_1$ où h_0, h_1 sont homéomorphismes homotopes rel. P_f [DH]. Les obstructions qui apparaissent se présentent ainsi.

Une *multicourbe* $\Gamma \subset S^2 - P_f$ est un ensemble fini de courbes de Jordan

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$$

dans $S^2 - P_f$ qui vérifient les propriétés suivantes : (i) elles sont disjointes et dans des classes d'homotopie de $S^2 - P_f$ distinctes, et (ii) chaque courbe γ_j est *non-périphérique*, c.à.d. sépare au moins deux paires de points de P_f. Une multicourbe Γ est *invariante* si, pour toute courbe $\gamma_j \in \Gamma$, chaque composante connexe δ de $f^{-1}(\gamma_j)$ est ou bien périphérique ou homotope à une (autre) courbe de Γ dans $S^2 - P_f$. Si α et β sont des courbes de $S^2 - P_f$, on écrit $\alpha \sim \beta$ si elles sont homotopes dans $S^2 - P_f$.

Soit Γ une multicourbe et soit $Q \geq 1$. On désigne par $\mathbb{R}^\Gamma$ l'espace vectoriel réel de base Γ. On définit

$$f_{\Gamma,Q} : \mathbb{R}^\Gamma \to \mathbb{R}^\Gamma$$

en posant

$$f_{\Gamma,Q}(\gamma_j) = \sum_{\gamma_i \in \Gamma} \sum_{\delta \sim \gamma_i} |\deg(f : \delta \to \gamma_j)|^{1-Q} \gamma_i.$$

Comme $f_{\Gamma,Q}$ est représentée par une matrice à coefficients positifs, le théorème de Perron-Frobenius implique l'existence d'une valeur propre positive $\lambda(f_{\Gamma,Q})$ égale au rayon spectral.

Une *obstruction de Thurston* est par définition une multicourbe Γ invariante telle que $\lambda(f_{\Gamma,2}) \geq 1$.

Soit Γ une multicourbe. Si Γ contient une multicourbe irréductible, alors il existe une unique valeur $Q(\Gamma) \geq 1$ telle que $\lambda(f_{\Gamma,Q(\Gamma)}) = 1$; sinon, on pose $Q(\Gamma) = 0$. Posons

$$Q(f) = \sup\{Q(\Gamma) : \Gamma \text{ est une multicourbe}\}.$$

On a

THÉORÈME 7.3. — [16, Thm 1.5] *Supposons que $f : S^2 \to S^2$ est top. cxc. Alors*

$$\dim_{AR} \mathcal{C}(f) \geq Q(f).$$

Notre démonstration consiste à voir une multicourbe Γ comme les âmes d'anneaux dont on évalue les modules discrets associés aux recouvrements $(S(n))_n$. La matrice $f_{\Gamma,Q}$ régit l'évolution des modules de ces anneaux lorsque l'on considère leurs itérés inverses successifs, ce qui permet de minorer le module des courbes homotopes à une courbe de Γ. Le Corollaire 3.3 permet de conclure.

8. AUTRES EXEMPLES

8.1. Dynamique uniformément quasirégulière

Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$. Un revêtement ramifié $f : M \to M$ est K-*quasirégulier* si f appartient à l'espace de Sobolev $W^{1,n}_{loc}$, et si

$$\|Df(x)\|^n \leq K \cdot J_f(x) \quad p.p. \tag{4}$$

où $\|Df(x)\|$ désigne la norme d'opérateur de l'application linéaire tangente de f (qui existe presque partout) et $J_f(x)$ le jacobien. On dit que f est *uniformément quasirégulier* si f et ses itérés sont K-quasiréguliers. Quand $n = 2$, D. Sullivan a montré qu'une telle application est toujours conjuguée à une fraction rationnelle [Sul3].

En dimension plus grande, $n \geq 3$, on obtient une généralisation de la dynamique des fractions rationnelles, dont l'étude a été initiée par T. Iwaniec et G. Martin dans [IM].

Dans [May], V. Mayer définit une généralisation des exemples de Lattès. Ces applications sont en particulier cxc [15, Thm 4.4.3]. Réciproquement, si f est cxc sur tout M, alors f est un exemple de Lattès [15, Thm 4.4.4]. En fait, les autres exemples connus de revêtements ramifiés uniformément quasiréguliers ont pour ensemble de Julia un ensemble de Cantor, et leur complémentaire est un bassin attractif ou parabolique. Dans le premier cas, ils sont aussi cxc.

8.2. Dynamique de type fini

Certains exemples de dynamique cxc vérifient des propriétés supplémentaires qui les rapprochent davantage aux groupes hyperboliques, et qui permettent d'envisager une ligne du dictionnaire que nous n'avons pas encore abordée. Nous avons qualifié cette sous-classe de *dynamique cxc de type fini*. Elle est modelée sur un nombre fini de revêtements ramifiés qui forment un *dynatlas* : c'est la donnée d'un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{M})$ où $\mathcal{V}$ est un ensemble fini d'espaces métriques localement compacts connexes de diamètre 1, et $\mathcal{M}$ est une collection finie de revêtements ramifiés $g_m : \widetilde{V}_m \to V_m, m \in \mathcal{M}$ où $\widetilde{V}_m, V_m \in \mathcal{V}$.

Avant de définir la notion de type fini, on rappelle qu'une *C-quasisimilitude* est un homéomorphisme $h : X \to Y$ entre espaces métriques tel qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{|h(a) - h(b)|}{\lambda |a - b|} \leq C$$

pour tous $a, b \in X$.

DÉFINITION 8.1 (Dynamique cxc de type fini). — *Soit $f : (\mathfrak{X}_1, X) \to (\mathfrak{X}_0, X)$ un revêtement ramifié défini sur l'ouvert $\mathfrak{X}_1$ relativement compact dans l'espace métrique $\mathfrak{X}_0$ avec répulseur X. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de X par ouverts connexes de $\mathfrak{X}_1$.*

On dit que $f : (\mathfrak{X}_1, X) \to (\mathfrak{X}_0, X)$ est un système dynamique cxc de type fini *si les axiomes [Expansion] et [Irreductibilité] sont vérifiés, et s'il existe un dynatlas $(\mathcal{V}, \mathcal{M})$ et une constante $C \geq 1$ qui vérifient les propriétés suivantes.*

(1) *Pour tout $U \in \mathbf{U}$, il existe $V \in \mathcal{V}$ et une C-quasisimilitude $\psi_U : U \to V$, chaque $V \in \mathcal{V}$ apparaissant ainsi.*

(2) *Pour chaque paire de domaines $\widetilde{U}, U \in \cup S(n)$ et chaque itéré $k \geq 1$ tels que $f^k(\widetilde{U}) = U$, on a*

$$\psi_U \circ f^k|\widetilde{U} \circ \psi_{\widetilde{U}}^{-1} \in \mathcal{M}.$$

Par l'existence d'un dynatlas, nous voyons ces applications comme jouissant de l'analogue de la finitude des types coniques des groupes hyperboliques. Rappelons cependant que la présence de points critiques dans le répulseur empêche f d'être expansif au sens classique, et donc, nos applications de type fini ne sont pas de présentation fini au sens de [CP].

THÉORÈME 8.2. — [17, Thm 2.8] *Un revêtement ramifié de type fini est cxc.*

Comme dans le cas des dynamiques cxc, nous avons aussi une notion topologique d'être de type fini, qui est de type fini quand on munit le répulseur d'une distance visuelle provenant du graphe associé, voir [17, § 3.3].

Parmi les fractions rationnelles, celles qui sont sous-hyperboliques (les points critiques ont ou bien une orbite finie, ou sont attirés par un cycle attractif) sont celles qui sont de type fini [17, Thm 3.3 et 3.5]. Les transformations expansives définies sur des variétés compactes et les règles de subdivision de valence bornée et dont la maille tend vers zéro au sens de Cannon, Floyd, et Parry [CFP2] sont d'autres exemples de dynamique de type fini [17, Cor. 3.2 et 3.14].

Une autre classe d'exemples très importante provient de la théorie des groupes autosimilaires de V. Nekrashevych [Nek]. Celui-ci développe une théorie générale de ces groupes *autosimilaires* qui relient la théorie des groupes et les systèmes dynamiques dans les deux directions. Dans un sens, à un système dynamique $f : X \to X$, on peut associer une action d'un groupe autosimilaire en considérant son *groupe de monodromie itérée.* Sous des conditions raisonnables d'expansivité, cette action est *contractante* et *récurrente*. Dans l'autre sens, à une action autosimilaire contractante et récurrente, il associe une dynamique $\partial F_\Sigma : \partial\Sigma \to \partial\Sigma$. L'espace $\partial\Sigma$ est le bord à l'infini d'un graphe hyperbolique Σ. L'application ∂F_Σ est induite par un endomorphisme du graphe $F_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$.

On établit un principe de finitude [17, Thm 5.15] pour l'application F_Σ qui rappelle la finitude des types coniques des groupes hyperboliques. Il est utilisé pour montrer que ce système dynamique est de type fini lorsque l'on munit le bord du graphe d'une distance visuelle [17, Thm 6.15]. En corollaire, on obtient que la classe de quasi-isométrie du complexe Σ sont des invariants topologiques du système dynamique, et donc de l'action du groupe.

9. BILAN ET PERSPECTIVES

Nous validons notre généralisation de la théorie itérative des fractions rationnelles en trois points.

• Le premier point est théorique, puisque la dynamique cxc s'insère naturellement dans le dictionnaire de Sullivan. Voici quelques lignes supplémentaires allant de ce sens.

Action de groupes	**Itération de transformations**
groupe kleinéen	fraction rationnelle
groupe kleinéen convexe-cocompact	fraction rationnelle semi-hyperbolique
groupe de convergence uniforme	transformation top. cxc
groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius	transformation cxc
graphe de Cayley	graphe Γ
mesure quasiconforme ρ	mesure canonique μ_f
finitude des types coniques	transformations de type fini
conjecture de Cannon	théorème de Thurston
caractérisations de Cannon et Bonk-Kleiner des groupes kleinéens cocompacts	caractérisations des transformations cxc de $\mathbb{S}^2$

• La diversité des exemples cxc parmi les systèmes dynamiques déjà étudiés justifie de travailler dans un cadre aussi abstrait. Que ce soit des dynamiques conformes « classiques » comme les fractions rationnelles ou les transformations uniformément quasirégulières, ou des dynamiques *a priori* non conformes, comme les transformations expansives sur les variétés compactes ou les règles de subdivision, ainsi que les transformations induites par les groupes autosimilaires, leurs propriétés sont somme toute comparables. Les règles de subdivision notamment produisent des exemples explicites de jauges conformes exotiques sur la sphère, propres à être disséquées.
• Nous donnons un éclairage nouveau sur la dynamique de certaines fractions rationnelles. Nous pouvons par exemple expliquer l'origine de la structure complexe obtenue par l'accouplement de deux dendrites. Partant de l'accouplement topologique f_{top} de $z \mapsto z^2 + i$ par lui-même, la construction du complexe Σ de V. Nekrashevych isole dans la classe d'isotopie de f_{top} le candidat cxc à être conjugué à une fraction rationnelle. La structure complexe provient alors de la structure conforme discrète de Cannon induite par la suite des recouvrements $(S(n))$, ou, de manière équivalente, par la suite de recouvrements induits par les ombres des sommets de Σ.

Il reste néanmoins des problèmes que nous n'avons pas su résoudre. Toute notre étude est basée sur le fait que le répulseur X est plongé dans un espace ambiant $\mathfrak{X}_0$, ce qui nous permet d'isoler des branches inverses. Dans quelle mesure nos résultats dépendent-ils de ce plongement ? Nous n'avons pas non plus obtenu de résultats satisfaisants sur la topologie de X, même dans le cas de type fini : lorsque X est connexe, est-il toujours localement connexe ? Plusieurs points sur la théorie mesurable n'ont pas été complètement résolus : il est tentant de croire que sous l'hypothèse [Expansion], la formule de Rohlin est vérifiée pour n'importe quelle probabilité invariante ergodique, voire qu'il existe toujours un générateur fini pour l'entropie ; nous avons obtenu l'unicité de la mesure d'entropie maximale dans le cas cxc, mais il se pourrait que ce soit vrai sans la condition [Degré] ; nous ne savons pas non plus s'il existe des exemples pour lesquels la mesure μ_f charge le lieu critique.

Nos travaux ouvrent aussi de nombreuses perspectives. Par exemple, dans le graphe que nous construisons, nous avons choisi d'identifier chaque arête au segment $[0,1]$. Il est possible de faire varier leur longueur de manière équivariante afin d'obtenir d'autres mesures quasiconformes qui pourraient refléter d'autres propriétés statistiques des applications cxc. Dans le cas de dynamiques infiniment renormalisables, il est certainement possible d'élaborer une variante de la construction du graphe qui pourrait en tenir compte.

Notre cadre permet de mettre au même niveau la conjecture de Cannon et le théorème de Thurston. Avec Kevin Pilgrim, nous travaillons à une démonstration de ce dernier avec les outils d'analyse dans les espaces métriques, au moins lorsque la dynamique est chaotique sur S^2. Nous espérons que cela nous aidera à mieux cerner les difficultés à résoudre la conjecture.

TRAVAUX ET PUBLICATIONS

[1] Peter Haïssinsky. *Applications de la chirurgie holomorphe aux systèmes dynamiques, notamment aux points paraboliques.* Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, 1998.

[2] Peter Haïssinsky. Chirurgie parabolique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327**(1998), 195–198.

[3] Peter Haïssinsky. Chirurgie croisée. *Bull. Soc. Math. France* **128**(2000), 599–654.

[4] Peter Haïssinsky. Déformation J-équivalente de polynômes géometriquement finis. *Fund. Math.* **163**(2000), 131–141.

[5] Peter Haïssinsky. Modulation dans l'ensemble de Mandelbrot. In *The Mandelbrot set, theme and variations*, pages 37–65. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[6] Peter Haïssinsky. Rigidity and expansion for rational maps. *J. London Math. Soc. (2)* **63**(2001), 128–140.

[7] Peter Haïssinsky. L'invariant de Calabi pour les homéomorphismes quasiconformes du disque. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334**(2002), 635–638.

[8] Peter Haïssinsky. Pincement de polynômes. *Comm. Math. Helv.* **77**(2002), 1–23.

[9] Peter Haïssinsky, Tan Lei. Convergence of pinching deformations and matings of geometrically finite polynomials. *Fund. Math.* **181**(2004), 143–188.

[10] Peter Haïssinsky. Déformation localisée de surfaces de Riemann. *Publ. Mat.* **49**(2005), 249–255.

[11] Shaun Bullett, Peter Haïssinsky. Pinching holomorphic correspondences. *Conform. Geom. Dyn.* **11**(2007), 65–89 (electronic).

[12] Sébastien Blachère, Peter Haïssinsky, Pierre Mathieu. Asymptotic entropy and Green speed for random walks on countable groups. *Ann. Probab.* **36**(2008), 1134–1152.

[13] Javier Aramayona, Peter Haïssinsky. A characterisation of plane quasiconformal maps using triangles. *Publ. Mat.* **52**(2008), 459–471.

[14] Peter Haïssinsky. Empilement de cercles et modules combinatoires. *Ann. Inst. Fourier*, à paraître.

[15] Peter Haïssinsky, Kevin M. Pilgrim. Coarse expanding conformal dynamics. *Astérisque*, à paraître.

[16] Peter Haïssinsky, Kevin M. Pilgrim. Thurston obstructions and Ahlfors regular conformal dimension. *J. Math. Pures Appl. (9)* **90**(2008), 229–241.

[17] Peter Haïssinsky, Kevin M. Pilgrim. Finite type coarse expanding conformal dynamics. hal-00250031, arXiv :math.DS/0802.1173, 2008.

[18] Peter Haïssinsky. Géométrie quasiconforme, analyse au bord des espaces métriques hyperboliques et rigidités (d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...). Séminaire Bourbaki no. 993. Vol. 2007/2008, 2008.

[19] Sébastien Blachère, Peter Haïssinsky, Pierre Mathieu. Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups. hal-00290127, arXiv :math.PR/0806.3915, 2008.

[20] Peter Haïssinsky. A sewing problem in metric spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, à paraître.

RÉFÉRENCES

[Anc] Alano Ancona. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. In *École d'été de Probabilités de Saint-Flour XVIII—1988*, volume 1427 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–112. Springer, Berlin, 1990.

[Ave] André Avez. Entropie des groupes de type fini. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **275**(1972), A1363–A1366.

[BL] Werner Ballmann, François Ledrappier. Discretization of positive harmonic functions on Riemannian manifolds and Martin boundary. In *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, volume 1 of *Sémin. Congr.*, pages 77–92. Soc. Math. France, Paris, 1996.

[BKR] Zoltán M. Balogh, Pekka Koskela, Sari Rogovin. Absolute continuity of quasiconformal mappings on curves. *Geom. Funct. Anal.* **17**(2007), 645–664.

[BCG] Gérard Besson, Gilles Courtois, Sylvestre Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.* **5**(1995), 731–799.

[BB] Sébastien Blachère, Sara Brofferio. Internal diffusion limited aggregation on discrete groups having exponential growth. *Probab. Theory Related Fields* **137**(2007), 323–343.

[BK1] Mario Bonk, Bruce Kleiner. Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres. *Invent. Math.* **150**(2002), 127–183.

[BK2] Mario Bonk, Bruce Kleiner. Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary. *Geom. Topol.* **9**(2005), 219–246 (electronic).

[BP1] Marc Bourdon, Hervé Pajot. Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **127**(1999), 2315–2324.

[BP2] Marc Bourdon, Hervé Pajot. Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings. *Comment. Math. Helv.* **75**(2000), 701–736.

[BP3] Marc Bourdon, Hervé Pajot. Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov. *J. Reine Angew. Math.* **558**(2003), 85–108.

[Bow] Brian H. Bowditch. A topological characterisation of hyperbolic groups. *J. Amer. Math. Soc.* **11**(1998), 643–667.

[Can1] James W. Cannon. The theory of negatively curved spaces and groups. In *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989)*, Oxford Sci. Publ., pages 315–369. Oxford Univ. Press, New York, 1991.

[Can2] James W. Cannon. The combinatorial Riemann mapping theorem. *Acta Math.* **173**(1994), 155–234.

[CFP1] James W. Cannon, William J. Floyd, Walter R. Parry. Sufficiently rich families of planar rings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **24**(1999), 265–304.

[CFP2] James W. Cannon, William J. Floyd, Walter R. Parry. Finite subdivision rules. *Conform. Geom. Dyn.* **5**(2001), 153–196 (electronic).

[CS] James W. Cannon, Eric L. Swenson. Recognizing constant curvature discrete groups in dimension 3. *Trans. Amer. Math. Soc.* **350**(1998), 809–849.

[CG] Lennart Carleson, Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics.* Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.

[CJY] Lennart Carleson, Peter W. Jones, Jean-Christophe Yoccoz. Julia and John. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **25**(1994), 1–30.

[CJ] Andrew Casson, Douglas Jungreis. Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds. *Invent. Math.* **118**(1994), 441–456.

[Con] Chris Connell. Minimal Lyapunov exponents, quasiconformal structures, and rigidity of non-positively curved manifolds. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **23**(2003), 429–446.

[Coo] Michel Coornaert. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov. *Pacific J. Math.* **159**(1993), 241–270.

[CP] Michel Coornaert, Athanase Papadopoulos. *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*, volume 1539 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[DS] Guy David, Stephen Semmes. *Fractured fractals and broken dreams*, volume 7 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1997.

[DH] Adrien Douady, John Hubbard. A Proof of Thurston's Topological Characterization of Rational Functions. *Acta. Math.* **171**(1993), 263–297.

[Dyn] Eugene Dynkin, The boundary theory of Markov processes (discrete case), *Uspehi Mat. Nauk* **24**(1969), no. 2, 3–42.

[EO] Patrick Eberlein, Barrett O'Neill. Visibility manifolds. *Pacific J. Math.* **46**(1973), 45–109.

[Edm] Allan L. Edmonds. Branched coverings and orbit maps. *Michigan Math. J.* **23**(1976), 289–301 (1977).

[Gab] David Gabai. Convergence groups are Fuchsian groups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **25**(1991), 395–402.

[GdlH] Étienne Ghys, Pierre de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[Gro] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[GT] Mikhael Gromov, William Thurston. Pinching constants for hyperbolic manifolds. *Invent. Math.* **89**(1987), 1–12.

[Hei] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[HK] Juha Heinonen, Pekka Koskela. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Math.* **181**(1998), 1–61.

[IM] Tadeusz Iwaniec, Gaven J. Martin. Quasiregular semigroups. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **21**(1996), 241–254.

[Kai1] Vadim A. Kaimanovich. Brownian motion and harmonic functions on covering manifolds. An entropic approach. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **288**(1986), 1045–1049.

[Kai2] Vadim A. Kaimanovich. Discretization of bounded harmonic functions on Riemannian manifolds and entropy. In *Potential theory (Nagoya, 1990)*, pages 213–223. de Gruyter, Berlin, 1992.

[Kai3] Vadim A. Kaimanovich. Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces. *J. Reine Angew. Math.* **455**(1994), 57–103.

[Kai4] Vadim A. Kaimanovich. The Poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Ann. of Math. (2)* **152**(2000), 659–692.

[KL] Anders Karlsson, François Ledrappier. Propriété de Liouville et vitesse de fuite du mouvement brownien. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **344**(2007), 685–690.

[Led1] François Ledrappier. Ergodic properties of Brownian motion on covers of compact negatively-curve manifolds. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **19**(1988), 115–140.

[Led2] François Ledrappier. Harmonic measures and Bowen-Margulis measures. *Israel J. Math.* **71**(1990), 275–287.

[LS] Terry Lyons, Dennis Sullivan. Function theory, random paths and covering spaces. *J. Differential Geom.* **19**(1984), 299–323.

[Mar] Gregory A. Margulis. The isometry of closed manifolds of constant negative curvature with the same fundamental group. *Soviet Math. Dokl.* **11**(1970), 722–723.

[May] Volker Mayer. Uniformly quasiregular mappings of Lattès type. *Conform. Geom. Dyn.* **1**(1997), 104–111 (electronic).

[Mil] John Milnor. *Dynamics in one complex variable.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. Introductory lectures.

[Nek] Volodymyr Nekrashevych. *Self-similar groups*, volume 117 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Pan] Pierre Pansu. Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **14**(1989), 177–212.

[Pau] Frédéric Paulin. Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord. *J. London Math. Soc. (2)* **54**(1996), 50–74.

[Pra] Jean-Jacques Prat. Étude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **280**(1975), Aiii, A1539–A1542.

[Sul1] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50**(1979), 171–202.

[Sul2] Dennis Sullivan. Seminar on hyperbolic geometry and conformal dynamical systems. Preprint IHES, 1982.

[Sul3] Dennis Sullivan. Conformal Dynamical Systems. In *Geometric Dynamics*. Springer Verlag, 1983. Lecture Notes No. 1007.

[Thu] William P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6**(1982), 357–381.

[Tuk] Pekka Tukia. Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups. *J. Reine Angew. Math.* **391**(1988), 1–54.

[Tys] Jeremy Tyson. Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **23**(1998), 525–548.

[Väi1] Jussi Väisälä. *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229.

[Väi2] Jussi Väisälä. Quasi-Möbius maps. *J. Analyse Math.* **44**(1984/85), 218–234.

[Woe] Wolfgang Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*, volume 138 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2000.

Peter HAÏSSINSKY

L.A.T.P./C.M.I.
Université de Provence
39, rue Frédéric Joliot-Curie
F–13453 Marseille cedex 13
Courriel : `phaissin@cmi.univ-mrs.fr`