Algèbre des invariants relatifs pour les groupes de réflexions

Catégorie stable

Vincent Beck

Mercredi 19 Novembre 2008

Plan

1. Partie 1 : Groupe de réflexions

Plan

1. Partie 1 : Groupe de réflexions
2. Partie 2 : Catégorie stable

Partie 1

Algèbre des invariants relatifs

pour les

groupes de réflexions

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$$

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
- $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexes

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^{\chi}$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
- $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexes c'est-à-dire
  1. G fini

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
- $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexes c'est-à-dire
  1. G fini
  2. G engendré par des réflexions

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
- G un groupe de réflexions complexes

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
- G un groupe de réflexions complexes
- $S(V^*)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^{\chi}$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
- G un groupe de réflexions complexes
- $S(V^*)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V
- M un G-module de dimension finie (notée r)

Objectif

Étude de $$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^{\chi}$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
- G un groupe de réflexions complexes
- $S(V^*)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V
- M un G-module de dimension finie (notée r)
- χ un caractère linéaire de G

Objectif

Étude de $$(T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi$$

Cadre

- V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
- G un groupe de réflexions complexes
- $S(V^*)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V
- M un G-module de dimension finie (notée r)
- χ un caractère linéaire de G
- T une « bonne » partie multiplicative de $S(V^*)$

$M = 0$ **et** $\chi = \mathbf{1}$

Théorème — Shephard-Todd (1954) (Chevalley (1955)).
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un sous-groupe fini. On a l'équivalence

(*i*) G est un groupe de réflexions complexes

(*ii*) $S(V^*)^G$ est une algèbre de polynômes

$M = 0$ **et** $\chi = \mathbf{1}$

Théorème – Shephard-Todd (1954) (Chevalley (1955)).
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un sous-groupe fini. On a l'équivalence

(i) G est un groupe de réflexions complexes

(ii) $S(V^*)^G$ est une algèbre de polynômes

Exemple : $G = \mathfrak{S}_n$

$M = 0$ **et** χ **qcq.**

Théorème – Springer-Stanley (1977). Soient G un groupe de réflexions complexes et $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un caractère linéaire de G. Alors

$$S(V^*)^\chi \text{ est un } S(V^*)^G\text{-module libre de rang 1.}$$

On fixe à présent Q_χ tel que $S(V^*)^\chi = S(V^*)^G Q_\chi$.

$M = 0$ et χ qcq.

Théorème – Springer-Stanley (1977). Soient G un groupe de réflexions complexes et $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un caractère linéaire de G. Alors

$$S(V^*)^\chi \text{ est un } S(V^*)^G\text{-module libre de rang } 1.$$

On fixe à présent Q_χ tel que $S(V^*)^\chi = S(V^*)^G Q_\chi$.

Exemple : $G = \mathfrak{S}_n$

Petite pause « Notation »

M qcq. et $\chi = 1$

Théorème – Orlik-Solomon (1980). Soient G un groupe de réflexions complexes et M un G-module de dimension finie r. Si, pour tout $H \in \mathscr{H}$, on a $n_H(M) < e_H$, alors

$$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^G \text{ est une } S(V^*)^G\text{-algèbre extérieure.}$$

$M = V$ **ou** $M = V^*$ **et** χ **qcq.**

Théorème – Shepler (1999). Soient G un groupe de réflexions complexes, χ un caractère linéaire de G et $M = V$ ou $M = V^*$. Alors

$$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi \text{ est une } S(V^*)^G\text{-algèbre extérieure.}$$

M et χ qcq.

Théorème Soient G un groupe de réflexions complexes, χ un caractère linéaire de G et M un G-module de dimension finie. Si $n_H(M) + n_H(\chi) < e_H$ pour tout $H \in \mathscr{H}$ ou si s_H agit sur M comme l'identité ou une réflexion pour tout $H \in \mathscr{H}$ alors

$$(S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi \text{ est une } S(V^*)^G\text{-algèbre extérieure.}$$

M et χ qcq.

Théorème Soient G un groupe de réflexions complexes, χ un caractère linéaire de G et M un G-module de dimension finie.
On pose $T = \langle \alpha_H,\ H \in \mathscr{M} \rangle_{\mathrm{mult}}$ ou $\mathscr{M}$ est une partie G-invariante de $\mathscr{H}$ contenant tous les hyperplans tels que $n_H(M) + n_H(\chi) \geqslant e_H$ ou tous les hyperplans tels que s_H n'agit pas sur M comme l'identité ou une réflexion. Alors

$$(T^{-1}S(V^*) \otimes \Lambda(M^*))^\chi \text{ est une } (T^{-1}S(V^*))^G\text{-algèbre extérieure.}$$

Une application

Théorème – Entier régulier. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Si, pour tout $H \in \mathscr{H}$, la restriction de $\chi \cdot \det$ à G_H n'est pas triviale alors d est régulier si et seulement si d divise autant de degrés que de « χ-codegrés ».

Catégorie M-stable

Problématique

Étude de $\mathscr{A}/M$-split ?

Problématique

Étude de $\mathscr{A}/M$-split ?

Cadre

- $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ deux catégories additives
- $M : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ un foncteur additif

Problématique

Étude de $\mathscr{A}/M$-split ?

Cadre

- $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ deux catégories additives
- $M : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ un foncteur additif

Définition – Objet M-split. On dit qu'un objet X de $\mathscr{A}$ est un objet M-split s'il existe $Y \in \mathscr{B}$ tel que $X \mid MY$.

Objet M-split

Hypothèse : on suppose que M a un adjoint à gauche L et à droite R ; on suppose aussi que, pour tout $X, X' \in \mathscr{A}$ et tout $p : X \to X'$ et $i : X' \to X$ vérifiant $pi = \mathrm{id}_{X'}$ alors $X' \mid X$.

Objet M-split

Hypothèse : on suppose que M a un adjoint à gauche L et à droite R ; on suppose aussi que, pour tout $X, X' \in \mathscr{A}$ et tout $p : X \to X'$ et $i : X' \to X$ vérifiant $pi = \mathrm{id}_{X'}$ alors $X' \mid X$.

Proposition Dans ce cadre, on a les équivalences

- X est un objet M-split

Objet M-split

Hypothèse : on suppose que M a un adjoint à gauche L et à droite R ; on suppose aussi que, pour tout $X, X' \in \mathscr{A}$ et tout $p : X \to X'$ et $i : X' \to X$ vérifiant $pi = \mathrm{id}_{X'}$ alors $X' \mid X$.

Proposition Dans ce cadre, on a les équivalences

- X est un objet M-split
- $X \mid MLX$
- $X \mid MRX$

Objet M-split

Hypothèse : on suppose que M a un adjoint à gauche L et à droite R ; on suppose aussi que, pour tout $X, X' \in \mathscr{A}$ et tout $p : X \to X'$ et $i : X' \to X$ vérifiant $pi = \mathrm{id}_{X'}$ alors $X' \mid X$.

Proposition Dans ce cadre, on a les équivalences

- X est un objet M-split
- $X \mid MLX$
- $X \mid MRX$
- X est relativement M-injectif
- X est relativement M-projectif

Exemple 1 : la catégorie stable

- $\mathscr{B} = k\text{-}\mathrm{Ev}$
- $\mathscr{A} = A\text{-}\mathrm{Mod}$

- $M = \mathrm{Ind}$
- $L, R = \mathrm{Res}$

Exemple 1 : la catégorie stable

- $\mathscr{B} = k\text{-}\mathrm{Ev}$
- $\mathscr{A} = A\text{-}\mathrm{Mod}$

- $M = \mathrm{Ind}$
- $L, R = \mathrm{Res}$

- M-split = projectif

Exemple 1 : la catégorie stable

- $\mathscr{B} = k\text{-}\mathrm{Ev}$
- $\mathscr{A} = A\text{-}\mathrm{Mod}$

- $M = \mathrm{Ind}$
- $L, R = \mathrm{Res}$

- M-split = projectif

Théorème – Happel-Linckelmann.
La catégorie $\mathrm{Stab}_A = \mathscr{A}/\mathrm{Proj}$ est triangulée.

Exemple 1 : la catégorie stable

- $\mathscr{B} = k\text{-}\mathrm{Ev}$
- $\mathscr{A} = A\text{-}\mathrm{Mod}$
- $M = \mathrm{Ind}$
- $L, R = \mathrm{Res}$
- M-split = projectif

Théorème – Happel-Linckelmann.
La catégorie $\mathrm{Stab}_A = \mathscr{A}/\mathrm{Proj}$ est triangulée.

Théorème – Rickard. On a

$$\mathrm{Stab}_A = \mathcal{D}^b(A)/\mathrm{Per}(A)$$

Exemple 2 : la catégorie H-stable

- $\mathscr{B} = \mathcal{O}H\text{-Mod}$
- $\mathscr{A} = \mathcal{O}G\text{-Mod}$

- $M = \mathrm{Ind}_H^G$
- $L, R = \mathrm{Res}_H^G$

- M-split = relativement H-projectif

Plan

1. Le cas triangulé

Plan

1. Le cas triangulé
2. Le cas abélien

Plan

1. Le cas triangulé
2. Le cas abélien
3. Où on lie les deux

Catégorie triangulée

Hypothèse : on suppose que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux catégories triangulées et que M, L, R sont trois foncteurs triangulés.

Théorème – M-Schanuel triangulé. Dans la catégorie $\mathscr{A}/\langle M\text{-split}\rangle_{\text{épaisse}}$, le décalage se calcule de la façon suivante : pour $X \in \mathscr{A}$, on choisit un objet M-split P et $i : X \to P$ tel qu'il existe $\beta : LP \to LX$ vérifiant $\beta Li = \mathrm{id}_{LX}$; on complète alors i en un triangle distingué de $\mathscr{A}$:

$$X \xrightarrow{i} P \xrightarrow{u} \Omega X \xrightarrow{v} TX$$

Catégorie abélienne

Hypothèse : on suppose que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont abéliennes et que L, R sont fidèles et exacts. On suppose qu'une suite exacte courte de $\mathscr{A}$ est L-scindée si et seulement si elle est R-scindée.

Théorème La catégorie $\mathscr{A}/M\text{-split}$ hérite d'une structure triangulée dont le décalage se calcule de la façon suivante : pour $X \in \mathscr{A}$, on choisit un objet M-split P et $i : X \to P$ tel qu'il existe $\beta : LP \to LX$ vérifiant $\beta Li = \mathrm{id}_{LX}$; on complète alors i en une suite exacte courte de $\mathscr{A}$:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} P \longrightarrow \Omega X \longrightarrow 0$$

Lien « abélien - triangulé »

On définit $\mathcal{D}^b_M(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^{\mathrm{ht},b}/\mathrm{Ker}\, L = \mathscr{A}^{\mathrm{ht},b}/\mathrm{Ker}\, R$

et $K^b(M)$ la catégorie homotopique bornée des objets M-split.

Théorème – à la Rickard. Si $K^b(M)$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{D}^b_M(\mathscr{A})$, les catégories triangulées $\mathscr{A}/M\text{-split}$ et $\mathcal{D}^b_M(\mathscr{A})/K^b(M)$ sont équivalentes.

MERCI !