



HAL
open science

Assistance préventive à la sortie de voie

Nicoleta Minoiu Enache

► **To cite this version:**

Nicoleta Minoiu Enache. Assistance préventive à la sortie de voie. Automatique / Robotique. Université d'Evry-Val d'Essonne, 2008. Français. NNT: . tel-00364073

HAL Id: tel-00364073

<https://theses.hal.science/tel-00364073>

Submitted on 8 Jul 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Assistance préventive à la sortie de voie

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 17 Novembre 2008

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université d'Évry-Val-d'Essonne
(spécialité automatique)

par

Nicoleta Minoiu Enache

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Brigitte d'Andréa-Novel	Professeur à l'ENSMP
	Carlos Canudas-de-Wit	Directeur de recherche au CNRS-GIPSA-LAB
	Françoise Lamnabhi-Laguarigue	Directrice de recherche au CNRS-LSS
	Christian J. Gerdes	Professeur à l'Université de Stanford États-Unis
	Driss Mehdi	Professeur à l'ESIP
<i>Encadrant :</i>	Mariana Netto	Chargée de recherche au LCPC
<i>Directeur :</i>	Saïd Mammar	Professeur à l'Université d'Évry-Val-d'Essonne

Laboratoire sur les Interactions Véhicules-Infrastructure-Conducteurs
Unité mixte INRETS / LCPC 14, route de la Minière 78000 Versailles-Satory

Remerciements

Avec mon travail de recherche, les relations et les contacts humains quotidiens ont été au cœur de mes satisfactions et accomplissements. Il m'est difficile de mettre des mots sur ces sentiments, mais je vais essayer d'exprimer au mieux ma reconnaissance et ma profonde gratitude aux gens qui m'ont entourée au cours de ces trois dernières années.

Je remercie Madame Brigitte d'Andréa-Novel, Professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris, et Monsieur Carlos Canudas-de-Wit, Directeur de recherche au Laboratoire d'Automatique de Grenoble CNRS-GIPSA-LAB, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, et pour l'attention avec laquelle ils ont lu mon mémoire. Je remercie également les autres membres du jury pour leurs commentaires et leurs remarques pertinentes, Madame Françoise Lamnabhi-Lagarigue, Directrice de recherche au CNRS-LSS, Monsieur Driss Mehdi, Professeur à l'École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, et Monsieur Christian J. Gerdes, Professeur à l'Université de Stanford.

Je remercie Madame Mariana Netto et Monsieur Saïd Mammar pour m'avoir confié cette thèse de doctorat.

Je tiens à remercier Madame Mariana Netto, qui a été co-encadrant de cette thèse. Je la remercie pour l'autonomie qu'elle m'a laissée et pour la confiance avec laquelle elle m'a entourée tout au long de cette thèse. Je lui suis reconnaissante pour m'avoir encouragée en permanence et pour sa gentillesse.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Saïd Mammar, mon directeur de thèse. Son professionnalisme, son incroyable capacité de travail, son enthousiasme et son investissement humain resteront pour moi des références, que j'espère atteindre un jour. Je le remercie pour son conseil scientifique permanent qui m'a guidé dans mes recherches, pour sa disponibilité et sa générosité. MERCI.

J'ai effectué ma thèse de doctorat au sein du Laboratoire sur les Interactions Véhicules-Infrastructure-Conducteurs (LIVIC), unité mixte de recherche du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) et de l'Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité (INRETS). J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur Jacques Ehrlich directeur du LIVIC, pour son soutien et la confiance qu'il m'a accordée en me permettant d'effectuer mes travaux de thèse au LIVIC. Je le remercie infiniment de m'avoir soutenue dans toutes mes démarches, notamment pour la préparation de mon séjour de recherche à l'Université de Stanford. Je remercie Monsieur Didier Aubert, directeur adjoint du LIVIC, pour avoir partagé avec moi l'esprit de performance, ses hautes valeurs professionnelles et son enthousiasme. Je remercie également Monsieur Jean-Marc Blosseville, directeur du LIVIC durant mes premières années de thèse, pour m'avoir incitée à développer la partie applicative de mes recherches. Merci Monsieur Blosseville pour la confiance que vous m'avez accordée et pour m'avoir encouragée à implanter mes travaux sur le véhicule prototype à l'occasion de l'évaluation du LIVIC en 2006 !

Je remercie l'ensemble de l'équipe du LIVIC pour son soutien et son accueil chaleureux durant ces trois années. J'exprime ma gratitude notamment à :

- Benoit Lusetti, qui m'a accompagnée avec ses précieux conseils du début jusqu'au terme de ma thèse. Son soutien m'a aidé à rester enthousiasmée et à surmonter les moments difficiles. Il m'a appris prendre confiance et à renforcer mes points faibles, notamment la conduite aux limites du renversement sur le plan à fort devers. Je le remercie profondément pour notre collaboration qui a permis d'obtenir la totalité des résultats expérimentaux présentés dans ce mémoire. MERCI.
- Je tiens à remercier Séverine Somma pour sa grande disponibilité et son soutien chaleureux pour toutes les questions délicates qui peuvent survenir dans la gestion d'une thèse de

doctorat, comme par exemple le choix d'une robe de mariée.

- Aux membres de l'équipe contrôle-commande et de l'équipe risque, que je n'ai pas encore mentionnés, Lydie Nouvelière, Sébastien Glaser, Jamil Dakhallallah, Yazid Sebsadji, Hong-Tu Luu, je leur adresse mes remerciements. J'ai toujours tiré profit des intéressantes discussions que j'ai eu avec eux, notamment des conseils généreux de Sébastien Glaser sur la dynamique du véhicule. Je suis reconnaissante à Lydie Nouvelière pour avoir coordonné et encadré mon monitorat que j'ai effectué à l'Université d'Evry Val d'Essonne et qui restera grâce à son soutien un très beau souvenir.
- J'exprime mes remerciements à mes collègues de l'équipe moyens expérimentaux et validation, Francis Dupin, Jean-Marie Chevreau, Didier Dominois et Christian Leverger qui ont rendu possible la mise en pratique de mes recherches. Je leur suis reconnaissante pour leur contribution à ce travail.
- Pour le travail, essentiel à la réalisation pratique de ma thèse, sur la détection des marquages routiers, je remercie mes collègues de l'équipe perception du LIVIC et parmi eux, Raphaël Labayrade.
- L'informatique n'a jamais représenté un obstacle dans mes projets grâce à l'aimable et souriante aide de Monsieur Georges Coches. Merci, Georges.
- À mes collègues de bureau, Jamil Dakhallallah et Nabil Benmansour, qui ont animé mes journées avec leur présence dans une ambiance agréable et décontractée, je les remercie.
- À tous mes collègues qui m'ont soutenue dans mes efforts et qui m'ont donné du courage dans cette aventure, Isné Rusani, Nicolas Hautière, Dominique Gruyer, Alexandre Ndjeng Ndjeng, Matthias Perrolaz, Benjamin Mourllion, Guillaume Saint-Pierre, Thomas Veit, Romain Gallen, Aurélien Cord, Simon Coutel, Steve Pechberti, Joelle Besnier, Benoît Van Holme, Ali Ganoun, Guilhem Cortès, je les remercie, ainsi que tous ceux que j'aurais oublié.
- Un petit mot pour CARLLA qui a courageusement et admirablement supporté mon travail sans jamais se plaindre et sans qui, rien n'aurait été possible.

Je voudrais ajouter sur cette liste Carlos de Melo qui a eu une contribution très importante à la réalisation et à la présentation de mon manuscrit de thèse. Je te remercie Carlos, d'avoir accepté si gentiment de m'aider, surtout quand le temps n'était pas vraiment mon allié.

Le deuxième laboratoire où j'ai mené mes recherches est le Dynamic Design Laboratory de l'Université de Stanford. J'exprime ma profonde gratitude au Professeur Christian J. Gerdes qui m'a accueillie pour trois mois exceptionnels au sein de son laboratoire. Son esprit formateur, sa disponibilité et son expertise m'ont aidée d'une manière fondamentale à structurer et à progresser dans mes recherches. Pour sa rigueur, son esprit critique toujours constructif et ses très hautes exigences, je remercie ma collaboratrice directe, Kirstin L. R. Talvala. Mon respect Kirstin, tu m'a beaucoup appris! À toute l'équipe du Dynamic Design Laboratory j'exprime mes profonds remerciements pour leur hospitalité, pour leur aide à m'intégrer et à poursuivre les tests expérimentaux : Carrie Bobier, Rami Y. Hindiyeh, Judy Hsu Yung-Hsiang (Judy) Hsu, Adam Jungkunz, Krisada (Mick) Kritayakirana, Shad Laws, Hsien-Hsin Liao, Nikhil Ravi, Matt Roelle, Christophe Voser. Thank you, guys, I miss you very much!

Multumesc familiei mele. Fara voi nu aş fi fost și nu aş fi fost ce sunt. Voi sunteți intotdeauna cu mine și langa mine, oriunde aş fi in lumea astea. Va multumesc și va iubesc Mami, Tati, Manu, Vlaicu, Crina, Mama și Tata Enache, Dragos.

À mon mari et mon ami, Razvan, je le remercie pour son amour et pour la vie heureuse que nous avons. Pour son soutien, sa solidarité et toutes les petites choses qui vont beaucoup plus loin que ce que les mots peuvent dire.

Avant-propos

The story of a ladybird

To Ingrid

Once upon the time, on a sunny may day a little ladybird came out into the light. She, because it was a girl ladybird, didn't know either her father or her mother. This is the way the ladybirds' life begins : they don't exist for a long time and suddenly they spread out their wings and fly to discover the world.

The ladybirds don't go to school since school education is longer than the may month, hence longer than their short life. So, the ladybirds start life knowing nothing about it. They don't know even the most usual common sense, for instance that without parents and education one is a lost bug.

Coming back to the little new born ladybird let us see how the open minded enriched the world by her smooth presence. First of all, she enjoyed the sun light. She played with it by hiding herself behind a punched leaf and showering in the rays.

When clouds covered the sun the ladybird looked around herself. She wondered other bugs, flying or sliding, that all seem to have something important to accomplish in their life. And the little ladybird wondered how they knew what they had to do and first of all how to do it? Perhaps she also had a small job to do in her short life and she would fail at it since she never knew what it was.

After these kind of thoughts she was frightened of the unknown. Why should she have a goal in life? What for? Is it bad if she had none? Where to find one? And thinking about these complex problems the ladybird flew over a beehive. The bees were coming in and out without crossing or talking to each other and flew straight to a mysterious place to return subsequently having loaded legs. The bees didn't speak to the ladybird. They were too busy and she was too small. Only one bee turned her head when the ladybird asked her for directions and said "Waste of time!". Her answer confused the ladybird. Was the "Waste of time!" really her direction? Was that the reason why all the bees were flying in one direction, to waste their time? And especially was that the aim of a bees life, to waste time? A thousand other questions invaded her small head. Eventually, she understood from the bees that organized jobs executed in a big team have the goal of keeping one busy, so that time goes on and, to the end of one's life, everybody is fulfilled.

However the ladybird didn't like the bees lifestyle very much and went on her discovery trip. She flew over a man's house and saw the cats. The cats didn't speak to her either but she stopped for a while to observe them. They played, and ate and slept over and over again. Definitely they didn't have any time problems and apparently neither any goal. Sometimes, for a short while, they paid attention to some singing bird but they came back fast to their soothing sleep. And the ladybird understood that not all living beings might have a goal in their life.

Perhaps to have a goal in life is not so important, she told herself. Tired already from all the thinking, she decided to follow the singing birds and to stop thinking. Finally, the small open minded ladybird was soon eaten by a bird.

*Je dédie cette thèse
à mes parents,
Elisabeta et Ștefan.
Dedic aceasta teza de doctorat
parintilor mei,
Elisabeta și Ștefan.*

Table des matières

Notations	xxi
1 Notations mathématiques	xxi
2 Notations véhicule	xxii
3 Notations loi de commande	xxiii
4 Acronymes	xxiii
Partie I Introduction	1
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Chapitre 1 Motivations</div>	
1.1 Contexte du sujet	3
1.2 Objectifs et contributions	4
1.3 Organisation du mémoire	5
Bibliographie	7
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Chapitre 2 État de l'art</div>	
2.1 Systèmes intelligents de transport	9
2.1.1 Généralités	9
2.1.2 La recherche menée dans le cadre des projets	11
2.2 L'aide active au maintien dans la voie	18
2.2.1 Progression de l'intrusion de l'aide au guidage latéral	18
2.2.2 Méthodes d'action sur la dynamique latérale du véhicule	20
2.2.3 Contrôle latéral du véhicule	23
2.2.4 Systèmes intégrés d'assistance active au contrôle latéral du véhicule	27
2.3 Le conducteur et l'assistance au maintien dans la voie	30
2.3.1 Prise en compte du conducteur par l'assistance	30

2.3.2	Acceptabilité des assistances à la conduite et adaptation au comportement	31
2.4	Les systèmes sur le marché	33
2.4.1	Responsabilité juridique	33
2.4.2	Systèmes de prévention active de sortie de voie disponibles sur le marché	35
2.4.3	Gains en sécurité des systèmes commercialisés	38
2.5	Conclusion	40
Bibliographie		41
Partie II Outils pour la modélisation et la commande du véhicule		49
<p>Chapitre 3 Éléments théoriques de la commande des systèmes</p>		
3.1	Les inégalités matricielles linéaires et bilinéaires	52
3.1.1	Ensemble convexe, fonction convexe et problème d'optimisation convexe	53
3.1.2	Problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI	61
3.1.3	Problème d'optimisation sous contraintes BMI	63
3.2	Ensemble atteignable et ensemble invariant	63
3.2.1	Ensemble atteignable	63
3.2.2	Ensemble invariant	64
3.2.3	Approximation des ensembles atteignables par des ensembles invariants	65
3.3	Fonction de Lyapunov	66
3.3.1	La stabilité au sens de Lyapunov	67
3.3.2	Fonction de Lyapunov et ensembles invariants	68
3.4	Fonction de Lyapunov quadratique et inégalités matricielles	69
3.4.1	Système dynamique linéaire invariant autonome	70
3.4.2	Système dynamique linéaire invariant commandé par retour d'état . .	70
3.4.3	Système dynamique linéaire invariant commandé par retour d'état avec perturbations	73
3.4.4	Système dynamique linéaire à paramètres variants	80
3.5	Fonction de Lyapunov composée	81
3.5.1	Propriétés de la fonction quadratique composée	81
3.5.2	Fonction de Lyapunov composée : stabilité et ensemble invariant . . .	84
3.6	Systèmes hybrides avec des entrées et des sorties	87
3.6.1	Représentation	88
3.6.2	Définitions	88

3.7 Utilisation de ces outils théoriques dans le contexte de la thèse	90
---	----

Bibliographie	93
----------------------	-----------

Chapitre 4

Modèle du véhicule pour le suivi de voie et instrumentation
--

4.1 Modèle « bicyclette » du véhicule	95
4.1.1 Repères et mouvements du véhicule	96
4.1.2 Application des lois fondamentales de la dynamique	99
4.1.3 Étude des forces et des moments extérieurs pour la dynamique latérale	104
4.1.4 Modèle « bicyclette » du véhicule	111
4.2 Modèle de la colonne de direction assistée électrique	112
4.3 Positionnement du véhicule sur la voie	117
4.3.1 Écart latéral, angle de cap relatif et courbure de la voie	117
4.3.2 Modèle « bicyclette » du véhicule lié à la voie	120
4.3.3 Modèle « bicyclette » équivalent du véhicule sur la voie	120
4.3.4 Coordonnées sur la voie des roues avant du véhicule	122
4.4 Modèle « bicyclette » intégrant la colonne de direction et le positionnement sur la voie	128
4.5 Capteurs et actionneurs pour le contrôle latéral	128
4.6 Équipement du véhicule prototype, CARLLA	130
4.6.1 Fonctionnalités du véhicule prototype CARLLA	131
4.6.2 Équipement	131

Bibliographie	139
----------------------	------------

Partie III Contribution : loi d'assistance au maintien de voie	141
---	------------

Chapitre 5

Concept et architecture de l'assistance : automate hybride d'assistance à la conduite
--

5.1 Caractérisation des situations de conduite	143
5.1.1 Capacité de conduite dégradée	144
5.1.2 Situation de « conduite normale »	145
5.2 Automate hybride d'assistance à la conduite	150
5.2.1 Démarche et hypothèse	151
5.2.2 Définition de l'automate hybride	152

5.2.3	Transitions du système commuté	153
5.2.4	Cahier des charges pour la loi de commande	153
5.2.5	Stabilité de l'automate hybride	155

Bibliographie **161**

Chapitre 6

Assistance à la conduite pour des routes à faibles courbures

6.1	Synthèse de la loi de commande	164
6.1.1	Fonction de Lyapunov quadratique pour une région hypercube de « conduite normale » : 1ère loi de commande	164
6.1.2	Fonction de Lyapunov composée pour une région hypercube de « conduite normale » : 2ème loi de commande	168
6.1.3	Fonction de Lyapunov quadratique pour une région polytopique de « conduite normale » : 3ème loi de commande	172
6.1.4	Ensemble invariant et déplacement latéral des roues avant du véhicule	175
6.2	Stratégies de commutation	178
6.2.1	Stratégie de commutation à partir du risque instantané de sortie de voie	179
6.2.2	Stratégie de commutation à partir du risque instantané et du risque évalué par l'assistance	180
6.2.3	Stratégies de commutation : avantages et inconvénients	181
6.3	Implantation pratique et résultats	183
6.3.1	Implantation de la 1ère loi d'assistance	183
6.3.2	Implantation de la 2ème loi d'assistance	185
6.3.3	Implantation de la 3ème loi d'assistance	201
6.4	Conclusions	215

Bibliographie **217**

Chapitre 7

Assistance à la conduite pour des routes à courbure prononcée

7.1	Influence de la courbure sur le suivi de voie	219
7.2	Synthèse de la loi de commande	221
7.2.1	Courbure non mesurable : Synthèse de la 4ème loi de commande par rejet de perturbation	221
7.2.2	Courbure mesurable : Synthèse de la 5ème loi de commande par compensation en préfiltrage	223

7.3	Stratégies de commutation	227
7.3.1	Ensemble invariant et déplacement latéral des roues avant du véhicule	227
7.3.2	Stratégies de commutation	228
7.4	Implantation pratique et résultats	230
7.4.1	Implantation de la 4ème loi d'assistance	230
7.4.2	Implantation de la 5ème loi d'assistance	242
7.5	Conclusions	251

Bibliographie **255**

Chapitre 8
Prise en compte de la saturation des forces de contact

8.1	Modèle de force de contact avec prise en compte de la saturation	258
8.2	Synthèse des 6ème et 7ème lois de commande	262
8.3	Implantation pratique et résultats	266
8.3.1	Équipement du véhicule prototype « steer by wire »	266
8.3.2	Implantation des deux lois d'assistance	268
8.3.3	Assistance au maintien de voie et contrôle du mouvement de lacet	276
8.4	Robustesse des lois d'assistance vis-à-vis de l'entrée de perturbation due à la courbure	279
8.4.1	Approche théorique du calcul	279
8.4.2	Limites assurées en fonction des bornes sur la courbure et des paramètres ζ_F et ζ_R liés aux forces de contact	283
8.4.3	Vérification des bornes calculées lors des essais	287
8.5	Conclusions	288

Bibliographie **293**

Partie IV Conclusions **295**

Chapitre 9
Conclusions et perspectives

9.1	Conclusions	297
9.2	Perspectives	299

Annexes **301**

Annexe A Définitions, lemmes et théorèmes	301
A.1 Système commuté	301
A.2 Stabilité « entrée bornée - état borné »	301
Annexe B État stationnaire en virage du véhicule commandé	303
Annexe C Figures issues du test de la quatrième loi de commande	305
Annexe D Domaine des paramètres	307

Table des figures

2.1	Vision PROMETHEUS d'un trafic futur sûr et efficace [PRe08].	12
2.2	Vision PReVENT d'une zone de sécurité autour du véhicule réalisée à travers des fonctions complémentaires de sécurité [PRe08].	16
2.3	Niveaux d'assistance.	20
2.4	Colonne de direction à moteur d'assistance électrique, développée par TRW . . .	21
2.5	Assistance électro-hydraulique développée par ZF Group (1) Mesure de vitesse électronique, (2) Unité électronique de contrôle, (3) Transducteur électro-hydraulique, (4) Engrenage pignon-crémaillère, (5) Pompe de braquage, (6) Réservoir d'huile avec filtre, (7) Tuyau expansible anti-vibration, (8) Colonne de direction ajustable.	21
2.6	Système de direction « steer by wire » développé par ZF Group.	22
2.7	Le concept de l'assistance à la conduite du projet CAPC [LeB96].	27
2.8	Concept et fonctions de l'assistance à la conduite dans le projet CAPC [LeB96]. .	28
2.9	Les états de l'assistance latérale intégrée développée dans le projet AKTIV. . . .	29
2.10	Concept LKAS sur Honda Accord [Iih04].	36
2.11	Interaction avec le conducteur dans le concept LKAS sur Honda Accord [Iih04]. .	37
2.12	Système d'assistance au maintien de voie développé par Volkswagen AG (a) activation, (b) détection des marquages latéraux par caméra, (c) voyant d'activation sur le tableau de bord.	38
3.1	(a) Ensemble convexe. (b) Enveloppe convexe.	54
3.2	(a) Hyperplan et les sous-espaces fermés définis dans \mathbb{R}^2 . (b) Polytope dans \mathbb{R}^2 . .	55
3.3	(a) Ellipsoïde dans \mathbb{R}^2 . (b) Hyperplan tangent à un ellipsoïde dans \mathbb{R}^2	57
3.4	(a) Fonction convexe. (b) Condition du premier ordre pour la convexité.	58
3.5	Ensemble des états initiaux ζ^0 , ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \zeta^0)$ et ensemble positivement invariant robuste \mathcal{S}	66
3.6	Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov.	68
3.7	Minimisation de l'ensemble atteignable.	72
3.8	Limitation de la commande du système dynamique.	74
3.9	Courbe de niveau d'une fonction quadratique composée pour $\alpha = 1$	82
3.10	Exemple d'automate hybride : deux bassins avec un seul robinet d'alimentation. .	88
3.11	Graphe orienté de l'automate hybride du système avec deux bassins et un seul robinet.	88
3.12	Véhicule-conducteur-assistance : Système hybride ouvert	90
3.13	Outils théoriques utilisés pour la conception de l'assistance à la conduite.	91
3.14	Interdépendance entre les outils théoriques utilisés pour la conception de l'assistance à la conduite.	91

4.1	Les différents mouvements du véhicule.	96
4.2	(a) Repère absolu-repère véhicule. (b) Repère véhicule-repère intermédiaire. (c) Repère intermédiaire-repère caisse.	97
4.3	Point sur la caisse du véhicule dans le repère absolu et dans le repère lié à la caisse.	100
4.4	Élément volumique et centre de gravité du véhicule dans le repère lié à la caisse.	101
4.5	(a) Roue vue dans le plan $O_r Y_r X_r$. (b) Roue vue dans le plan $O_r X_r Z_r$	105
4.6	Angle de dérive de la roue avant gauche.	106
4.7	Vitesse au point R_1 , $(v_{R_1})^v$, par rapport au repère absolu R^a	107
4.8	Forces et moments s'exerçant sur la roue.	108
4.9	Force longitudinale et force latérale en fonction de la dérive.	109
4.10	(a) La chasse géométrique due à la déformation du pneumatique. (b) La chasse géométrique due à l'axe de rotation de la roue.	111
4.11	Modèle « bicyclette » du véhicule.	113
4.12	Modèle du mécanisme de la direction de Jeantaud.	114
4.13	Modèle de la colonne de direction.	114
4.14	(a) Modèle de la colonne supérieure. (b) Modèle de la colonne médiane.	115
4.15	(a) Modèle de la colonne inférieure. (b) Modèle de la crémaillère.	115
4.16	(a) Angle formé par la colonne supérieure et la colonne médiane. (b) Angle formé par la colonne médiane et la colonne inférieure.	116
4.17	Modèle réduit de la colonne de direction.	116
4.18	Modèle de la colonne de direction pour la synthèse des lois de commande.	117
4.19	Position du modèle « bicyclette » du véhicule par rapport au repère tangent à la voie.	118
4.20	Position du modèle « bicyclette » du véhicule par rapport au repère tangent à la voie en avant du véhicule.	119
4.21	Position des roues avant du véhicule par rapport au centre de la voie (route à faible courbure).	123
4.22	Position des roues avant du véhicule par rapport au centre de la voie (route à faible courbure), écart latéral à l'avant du véhicule.	123
4.23	Coordonnées des roues avant du véhicule, pour un virage à gauche de courbure significative.	124
4.24	Coordonnées des roues avant du véhicule, pour un virage à droite de courbure significative.	125
4.25	(a) Transformation de l'écart latéral et de l'angle de cap relatif au centre de gravité (virage à gauche). (b) Transformation de l'écart latéral et de l'angle de cap relatif au centre de gravité (virage à droite).	127
4.26	Conduite en slalom (a) Erreur entre les coordonnées des roues avant calculées d'une façon exacte et approchée; (b) La courbure de la voie.	127
4.27	Véhicule expérimental CARLLA.	130
4.28	Architecture de réseau [Dup07].	132
4.29	(a) Caméra en vision frontale. (b) Interface graphique.	133
4.30	Centrale inertielle.	133
4.31	Système GPS RTK : antenne (a) et récepteur (b).	134
4.32	Pistes de Satory, (a) vue d'ensemble. (b) détail.	134
4.33	(a) Courbure. (b) Altitude relative. (c) Dévers droit. (d) Dévers gauche.	135
4.34	Système de mesure de l'angle de dérive du vecteur vitesse CORREVIT.	135
4.35	Système de direction [Dup07].	136

4.36	Moteur électrique installé sur la colonne de direction [Dup07] (a) vision sans volant, (b) vision avec volant.	137
5.1	La zone centrale $\pm d$ représentée sur la voie (a) et dans l'espace d'état en deux dimensions ψ_L et y_L (b).	150
5.2	L'intersection de l'hypercube de « conduite normale » et du polyèdre d'une zone centrée sur la voie en deux dimensions ψ_L et y_L	150
5.3	Système hybride.	153
5.4	Système hybride réduit aux états Σ_1 et Σ_2	157
5.5	Commutation entre les états Σ_1 et Σ_2 . La trajectoire du véhicule contrôlé par son conducteur est représentée en ligne continue. La trajectoire du véhicule contrôlé par la loi de commande est marquée en ligne discontinue.	158
5.6	Système hybride réduit aux transitions T_r^{12} , T_r^{23} et T_r^{31}	158
5.7	Commutation entre les états Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 . La trajectoire du véhicule contrôlé par son conducteur est représentée en ligne continue. La trajectoire du véhicule contrôlé par la loi de commande est marquée en ligne discontinue.	159
6.1	La région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$, la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ et les ensembles ellipsoïdaux invariants $\varepsilon(P)$, $\varepsilon_{opt}(P_{opt})$ et $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ représentés en deux dimensions, ψ_L et y_L	166
6.2	Ellipsoïdes et hypercubes représentés en deux dimensions pour les variables ψ_L et y_L	170
6.3	Ellipsoïdes $\varepsilon(P)$ et $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ et région polytope de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$ représentés en deux dimensions pour les variables ψ_L et y_L	174
6.4	Les zones centrées $2d_{ext}$ et $2d$ représentées (a) dans l'espace d'état en deux dimensions ψ_L et y_L et (b) sur la voie.	177
6.5	Ellipsoïde instantané de la fonction de Lyapunov composée $V_c(x^v)$	178
6.6	Exemple d'absence d'activation pour la deuxième stratégie de commutation.	182
6.7	Exemple d'activation pour la troisième stratégie de commutation.	183
6.8	Exemple d'activation pour la quatrième stratégie de commutation.	184
6.9	Schéma d'implantation de la loi de commande reposant sur une fonction de Lyapunov composée.	189
6.10	Position latérale des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	190
6.11	Consigne d'angle de braquage et angle de braquage mesuré (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	191
6.12	Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_1^* . (b) γ_2^* (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	191
6.13	Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_3^* . (b) γ_4^* (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	192
6.14	Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_5^* . (b) γ_6^* (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	193
6.15	Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_7^* . (b) γ_8^* (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	193
6.16	(a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	194
6.17	(a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	194

6.18 (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	195
6.19 Position latérale des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé (2ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).	196
6.20 Angle de braquage de consigne et angle de braquage mesuré (2ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).	196
6.21 (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (2ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).	197
6.22 (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (2ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).	197
6.23 (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (2ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).	197
6.24 Position latérale des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximum anticipé (2ème loi d'assistance, virages importants).	198
6.25 Courbure de la voie (2ème loi d'assistance, virages importants).	199
6.26 Consigne d'angle de braquage et angle de braquage mesuré (2ème loi d'assistance, virages importants).	199
6.27 (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (2ème loi d'assistance, virages importants).	200
6.28 (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (2ème loi d'assistance, virages importants).	200
6.29 (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (2ème loi d'assistance, virages importants).	200
6.30 Position latérale des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé (2ème loi d'assistance, virages très serrés).	201
6.31 Courbure de la voie (2ème loi d'assistance, virages très serrés).	202
6.32 Consigne d'angle de braquage et angle de braquage mesuré (2ème loi d'assistance, virages très serrés).	202
6.33 Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_1^* . (b) γ_2^* (2ème loi d'assistance, virages très serrés).	203
6.34 Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_3^* . (b) γ_4^* (2ème loi d'assistance, virages très serrés).	203
6.35 Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_5^* . (b) γ_6^* (2ème loi d'assistance, virages très serrés).	203
6.36 Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_7^* . (b) γ_8^* (2ème loi d'assistance, virages très serrés).	204
6.37 Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d pour la 3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).	205
6.38 Couple exercé par le conducteur sur le volant en trait continu et couple d'assistance en trait pointillé (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).	206
6.39 (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).	206
6.40 (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).	207
6.41 (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).	207
6.42 (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).	207

6.43	Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d pour la 3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	209
6.44	Couple exercé par le conducteur sur le volant en trait continu et couple d'assistance en trait pointillé (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	210
6.45	(a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	210
6.46	(a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	211
6.47	(a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	211
6.48	(a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).	211
6.49	Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximum anticipé (3ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).	212
6.50	Couple exercé par le conducteur sur le volant en trait continu et couple d'assistance en trait pointillé (3ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).	213
6.51	Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d).	214
6.52	Couple exercé par le conducteur sur le volant.	215
6.53	Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé.	216
7.1	Ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$, ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \mathcal{L}(Z^N))$ et région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$.	221
7.2	Scénario relatif à la 5ème stratégie d'activation : ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$, région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ et hyperplans correspondant à une zone centrée sur la voie et de largeur $2d$. x^0 représente l'état du véhicule au moment de la perte d'attention du conducteur et x est l'état du véhicule au moment de l'activation de la loi d'assistance.	228
7.3	Scénario relatif à la 6ème stratégie de commutation : ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$, région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ et hyperplans tangents à $\varepsilon(P)$. x^0 représente l'état du véhicule au moment de la perte d'attention par le conducteur et x est l'état du véhicule au moment de l'activation de la loi d'assistance.	230
7.4	Test des performances en suivi de voie : Courbure de la route mesurée par l'algorithme de vision (4ème loi d'assistance).	232
7.5	Test des performances en suivi de voie : Positions latérales des roues avant du véhicule en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (4ème loi d'assistance).	232
7.6	Erreur d'approximation pour le calcul des positions latérales des roues avant du véhicule y_g et y_d par la formule linéaire qui ne tient pas compte de la courbure de la route (4ème loi d'assistance).	233
7.7	Test des performances en suivi de voie : Couple d'assistance (4ème loi d'assistance).	233
7.8	Test des performances en suivi de voie : (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (4ème loi d'assistance).	234
7.9	Test des performances en suivi de voie : (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (4ème loi d'assistance).	234
7.10	Test des performances en suivi de voie : (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (4ème loi d'assistance).	235

7.11	Test des performances en suivi de voie : (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (4ème loi d'assistance).	236
7.12	Courbure de la route mesurée par l'algorithme de vision (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).	237
7.13	Test en sortie de voie : Positions latérales des roues avant du véhicule en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).	238
7.14	Test en sortie de voie : Erreur d'approximation pour le calcul des coordonnées des roues avant du véhicule y_g et y_d par la formule linéaire qui ne tient pas compte de la courbure de la route (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).	238
7.15	Test en sortie de voie : Couple d'assistance (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).	239
7.16	Test en sortie de voie : (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).	239
7.17	Test en sortie de voie : (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).	240
7.18	Test en sortie de voie : (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).	240
7.19	Test en sortie de voie : (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).	241
7.20	Courbure de la route donnée par l'algorithme de vision (4ème loi d'assistance, virages très serrés).	241
7.21	Test en sortie de voie hors conditions nominales : Positions latérales des roues avant du véhicule en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (4ème loi d'assistance, virages très serrés).	242
7.22	Test en sortie de voie hors conditions nominales : Couple d'assistance (4ème loi d'assistance, virages très serrés).	243
7.23	Test en sortie de voie hors conditions nominales : (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (4ème loi d'assistance, virages très serrés).	243
7.24	Performances en suivi de voie : Courbure de la route donnée par l'algorithme de vision (5ème loi d'assistance).	245
7.25	Performances en suivi de voie : Positions latérales des roues avant en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (5ème loi d'assistance).	246
7.26	Performances en suivi de voie : Couple total d'assistance en noir et composante provenant de la correction en préfiltrage en rouge (5ème loi d'assistance).	246
7.27	Performances en suivi de voie : (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (5ème loi d'assistance).	247
7.28	Performances en suivi de voie : (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (5ème loi d'assistance).	248
7.29	Performances en suivi de voie : (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (5ème loi d'assistance).	248
7.30	Performances en suivi de voie : (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (5ème loi d'assistance).	249
7.31	Courbure de la route donnée par l'algorithme de vision (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation).	250
7.32	Positions latérales des roues avant du véhicule en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation).	250

7.33	Couple total d'assistance en noir et composante provenant de la correction en préfiltrage en rouge (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation). . . .	251
7.34	(a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation).	252
7.35	(a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation).	252
7.36	(a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation).	253
7.37	(a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation).	253
8.1	Courbes des forces latérales généralement obtenues pour des relevés expérimentaux pour plusieurs valeurs du paramètre d'adhérence μ et les limites du secteur défini par $\zeta^{min}C\alpha$ et $\zeta^{max}C\alpha$	259
8.2	Variation du paramètre ζ avec l'angle de dérive α pour plusieurs valeurs du paramètre d'adhérence μ	260
8.3	Véhicule expérimental « steer by wire » du laboratoire Dynamic Design Laboratory, Université de Stanford.	267
8.4	Trajectoire de référence et trajectoire réalisée par le véhicule contrôlé latéralement par (a) retour d'état, (b) retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).	270
8.5	Vitesse longitudinale, accélération latérale et angle de braquage commandé par (a) retour d'état, (b) retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).	271
8.6	Courbure de la trajectoire de référence et variables d'état pour (a) le retour d'état, (b) le retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).	272
8.7	Courbes expérimentales de la force latérale en fonction de l'angle de dérive pour les pneus avant : (a) retour d'état, (b) retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).	274
8.8	Courbes expérimentales de la force latérale en fonction de l'angle de dérive pour les pneus arrières : (a) retour d'état, (b) retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).	274
8.9	Angle de dérive et force latérale des pneus avant pour : (a) le retour d'état, (b) le retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).	275
8.10	Angle de dérive et force latérale pour les pneus arrières pour (a) le retour d'état, (b) le retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).	275
8.11	Trajectoire de référence et trajectoire réalisée par le véhicule pour le freinage avec (a) contrôle latéral désactivé, (b) contrôle latéral activé.	277
8.12	Vitesse longitudinale, accélération latérale et angle de braquage pour le freinage avec (a) contrôle latéral activé, (b) contrôle latéral désactivé.	277
8.13	Vitesse de l'écart latéral, dérivée de l'angle de cap relatif et angle de cap relatif pour le freinage avec : (a) contrôle latéral désactivé, (b) contrôle latéral activé.	278
8.14	Angle de dérive des pneus arrières et avant pour : (a) contrôle latéral désactivé, (b) contrôle latéral activé.	279
8.15	Approximation des limites réduites grâce aux différents ellipsoïdes invariants. Ceux correspondent à la minimisation de y_L^{CG} et ψ_L , $\varepsilon(R^3)$ et $\varepsilon(R^4)$, et contiennent l'ensemble atteignable.	282
8.16	Bornes de la vitesse de l'écart latéral pour : (a) la 6ème loi d'assistance par retour d'état, (b) la 7ème loi d'assistance par retour de sortie.	283
8.17	Bornes de la vitesse de l'angle de cap relatif pour : (a) la 6ème loi d'assistance par retour d'état, (b) la 7ème loi d'assistance par retour de sortie.	284

8.18	Bornes de l'écart latéral pour : (a) la 6ème loi d'assistance par retour d'état, (b) la 7ème loi d'assistance par retour de sortie.	285
8.19	Bornes de l'angle de cap relatif pour : (a) la 6ème loi d'assistance par retour d'état, (b) la 7ème loi d'assistance par retour de sortie.	286
8.20	Courbure de la trajectoire de référence et limites pour les variables d'état pour la 6ème loi de commande par retour d'état.	290
8.21	Courbure de la trajectoire de référence et limites pour les variables d'état pour la 7ème loi de commande par retour de sortie.	291
C.1	(a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet.	305
C.2	(a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral.	306
C.3	(a) Angle de braquage. (b) Vitesse de l'angle de braquage.	306

Notations

1 Notations mathématiques

Symbole	Dénomination
$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in \mathbb{R}$ et $x \geq 0$.
$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	A est une matrice contenant des nombres réels avec n lignes et m colonnes.
$V \in \mathbb{R}^n$	V est un vecteur contenant des nombres réels avec n lignes.
$A_{i,j}$	Élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice A .
V_i	Élément de la ligne i du vecteur V .
$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$	Vecteur constant contenant des 1.
$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matrice constante des 0.
$V, Y \in \mathbb{R}^n, V \leq Y$	$V_i \leq Y_i$ pour $i = 1, \dots, n$.
$A \succ 0, A \prec 0$	Matrice A définie positive, respectivement négative.
$A \succeq 0, A \preceq 0$	Matrice A semi-définie positive, respectivement semi-définie négative.
$\text{conv}\mathcal{A}$	Enveloppe convexe de l'ensemble \mathcal{A} .
$\mathcal{H}(F, c)$	Hyperplan de vecteur F et de constante c .
$\mathcal{H}(F)$	Hyperplan de vecteur F et de constante 1.
$\mathcal{L}(F, C)$	Polyèdre de matrice F et de vecteur constant C .
$\mathcal{L}(F)$	Polyèdre de matrice F et de vecteur constant $\mathbf{1}$.
$\mathcal{P}(\text{Sommets})$	Polytope de matrice <i>Sommets</i> .
$\varepsilon(P, v)$	Ellipsoïde de matrice P et de centre v .
$\varepsilon(P)$	Ellipsoïde de matrice P centré à l'origine.
$\mathbb{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matrice unité dans $\mathbb{R}^{n \times n}$.
$\text{tr}(P)$	Trace de P , somme des valeurs diagonales de la matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
$\det(P)$	Déterminant de la matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
$\lambda_{\max}(P)$	Valeur propre maximale de la matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
$\wp(E)$	Ensemble contenant tous les sous-ensembles de l'ensemble E .
∂E	Ensemble contenant tous les éléments de la frontière de l'ensemble convexe et compact E .
$\nabla h(x)$	Gradient de la fonction $h(x)$.

2 Notations véhicule

Symbole	Dénomination
$v^1, v^2 \in \mathbb{R}^n, v^1 \times v^2$	Produit vectoriel de v^1 et v^2 .
$\dot{v}(t)$	Dérivée dans un repère fixe.
$\check{v}(t)$	Dérivée dans un repère mobile.
$(v)^g$	Vecteur v projeté dans le repère R^g .
θ	Angle de tangage.
ϕ	Angle de roulis.
ψ	Angle de lacet.
$R^a : O_a X_a Y_a Z_a$	Repère absolu considéré galiléen.
$R^c : O_c X_c Y_c Z_c$	Repère lié à la caisse du véhicule.
$R^v : O_v X_v Y_v Z_v$	Repère véhicule.
$R^i : O_i X_i Y_i Z_i$	Repère intermédiaire.
m	Masse du véhicule.
I_z	Moment d'inertie de lacet du véhicule.
l_f	Distance du centre de gravité à l'essieu avant.
l_r	Distance du centre de gravité à l'essieu arrière.
a	Longueur des essieux.
η_t	Chasse géométrique.
R_S	Rapport de réduction de la direction.
ψ_L	Angle de cap relatif.
ρ_{ref}	Courbure de la route.
l_S	Distance de visée.
v	Vitesse longitudinale du véhicule.
μ	Coefficient d'adhérence.
I_S	Moment d'inertie de la colonne de direction.
B_S	Coefficient d'amortissement de la colonne de direction.
c_r^0	Coefficient de raideur des roues arrières pour $\nu = 1$.
c_f^0	Coefficient de raideur des roues avant pour $\nu = 1$.
c_r	Coefficient de raideur des roues arrières.
c_f	Coefficient de raideur des roues avant.
C^{max}	Couple maximal d'assistance fourni par le moteur électrique.

3 Notations loi de commande

Symbole	Dénomination
---------	--------------

C_a	Couple d'assistance fourni par le moteur électrique.
C_c	Couple exercé par le conducteur sur le volant.
σ_1	Seuil pour le couple exercé par le conducteur sur le volant en dessous duquel le conducteur est supposé avoir des capacités de conduite dégradées.
σ_2	Seuil pour le couple exercé par le conducteur sur le volant au dessus duquel le conducteur est supposé être dans une situation d'urgence.

4 Acronymes

Symbole	Dénomination
---------	--------------

LMI	Linear Matrix Inequalities
BMI	Bilinear Matrix Inequalities

Liste des publications

Articles de revue

1. N. Minoiu Enache, S. Mammar, M. Netto, B. Lusetti, « Driver steering assistance for lane departure avoidance based on hybrid automata and on composite Lypunov function », IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems (accepté).
2. N. Minoiu Enache, M. Netto, S. Mammar, B. Lusetti, « Driver steering assistance for lane departure avoidance », Control Engineering Practice (accepté).
3. N. Minoiu Enache, B. Lusetti, S. Mammar, M. Netto, « Assistance préventive à la sortie de voie : Le cas de la conduite en virage », Journal Européen des Systèmes Automatisés (soumis).
4. K. L. R. Talvala, N. Minoiu Enache, S. Mammar, J. C. Gerdes, « Vehicle Control at the Limits of Handling : Lanekeeping and Yaw Stability », IEEE Transactions on Control Systems Technology (soumis).
5. N. Minoiu Enache, K. L. R. Talvala, S. Mammar, J. C. Gerdes, « Vehicle Control at the Limits of Handling : Performance Guarantees for Lanekeeping and Yaw Stability », IEEE Transactions on Control Systems Technology (en cours de préparation).

Articles pour des conférences avec comité de lecture

1. N. Minoiu, M. Netto, S. Mammar, S. Glaser, « A new strategy for lane departure avoidance », IEEE International Conference on Control Applications, Munich 2006.
2. N. Minoiu, M. Netto, S. Mammar, « A switched optimized approach for road departure avoidance », IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Toronto 2006.
3. N. Minoiu, M. Netto, S. Mammar, B. Lusetti, « A switched optimized approach for road departure avoidance : Implementation results », IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Instabul 2007.
4. N. Minoiu, M. Netto, S. Mammar, « Assistance control based on a composite Lyapunov function for lane departure avoidance », IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Athènes 2007.
5. N. Minoiu Enache, M. Netto, S. Mammar, B. Lusetti, « Driver steering assistance to avoid unintended lane departure by lane keeping and steering suggestions », IFAC World Congress, Séoul 2008.
6. N. Minoiu Enache, S. Mammar, B. Lusetti, M. Netto, « Driver steering assistance : lane departure prevention for curvy roads using feedforward correction and BMI optimization », AVEC International Symposium, Kobe 2008.
7. N. Minoiu Enache, B. Lusetti, S. Mammar, M. Netto, « Assistance préventive à la sortie de voie : Cas de la conduite en virage », Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bucarest 2008.

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Motivations

Sommaire

1.1	Contexte du sujet	3
1.2	Objectifs et contributions	4
1.3	Organisation du mémoire	5

1.1 Contexte du sujet

Les accidents par sortie involontaire de voie continuent à représenter une part importante de l'accidentologie. Le rapport d'accidentologie pour 2006 aux États-Unis révèle que 28.5% des accidents mortels sont la conséquence d'une erreur de guidage latéral du véhicule sur la voie de circulation ou d'une sortie de route [NHT07]. Les conducteurs inattentifs, occupés par une conversation ou en train de manger, comptent pour 7.9% des décès alors que l'assoupissement, la fatigue, le malaise ou la maladie ont causé 2.6% des accidents mortels. Les études réalisées dans d'autres pays offrent moins de détails sur ces mêmes causes d'accident. Néanmoins, les collisions avec un obstacle fixe, situé hors de la voie, peuvent facilement être attribuées à des sorties involontaires de voie. Ainsi on dénombre pour l'année 2007 au Québec (Canada), 61 accidents mortels, 211 accidents graves et 2275 accidents légers par collision sur obstacle fixe [SAA08]. De même, des statistiques publiées récemment en France montrent que 30% des accidents corporels et 16% des accidents mortels ont eu lieu par la collision latérale des deux véhicules [ONS08].

Les améliorations apportées par les constructeurs automobiles pour renforcer la sécurité des passagers en réalisant des véhicules de plus en plus résistants aux chocs et absorbant la grande majorité de l'énergie due à l'impact semblent aujourd'hui être arrivées à maturité. Une nouvelle dimension pourrait offrir un potentiel prometteur : la prévention active des accidents. Le véhicule est devenu capable d'évaluer sa dynamique et de reconnaître son environnement afin de disposer d'une mesure de risque associé à la situation. Des actions peuvent alors être entreprises automatiquement ou en partage avec le conducteur afin de maintenir le véhicule dans une enveloppe de sécurité.

Grâce aux progrès technologiques des capteurs et des actionneurs, ces fonctions actives sont intégrées progressivement dans les véhicules. Les systèmes de localisation GPS et les cartographies permettent de localiser le véhicule avec précision et de faire l'adéquation avec les caractéristiques de l'infrastructure contenues sur une carte numérique embarquée dans le véhicule. Prochainement, la coordination et l'information étendues entre les véhicules et entre les véhicules et l'infrastructure deviendront possibles grâce aux communications généralisées.

Ces nouvelles fonctions, dont le nombre va crescendo, agissent en transparence dans les cas limites ou assistent le conducteur en lui apportant une aide à la décision ou une facilité dans la réalisation des actions de conduite. Les fonctions préventives sont particulièrement importantes dans ce dernier cas. Elles devraient être capables d'évaluer l'état de vigilance du conducteur et ses capacités à conduire. Elle pourraient, alors, prendre momentanément le contrôle du véhicule jusqu'au recouvrement de l'attention du conducteur.

1.2 Objectifs et contributions

L'objectif principal de ce travail de thèse est le développement et l'implantation d'une assistance active pour l'évitement des sorties involontaires de la voie de circulation. Les caractéristiques de cette assistance se déclinent en plusieurs sous-objectifs énumérés ci-dessous :

1. Intervention dans les moments d'inactivité du conducteur alors que la sortie de voie devient imminente et rétablissement de la situation de maintien de voie.
2. Action partagée avec le conducteur sur la direction du véhicule.
3. Fonctionnement sur des routes à faible et à forte courbure.
4. Efficacité quelle que soit la qualité de la route, à forte ou à faible adhérence.

Comme nous le verrons tout au long de ce mémoire, tous les objectifs énoncés précédemment ont été traités et atteints.

La démarche adoptée est celle qui devrait être naturelle pour tout problème d'automatique. Le cahier des charges est formalisé en utilisant les outils et les concepts offerts par les mathématiques, la géométrie et l'automatique. L'optimisation convexe linéaire et bilinéaire permet de trouver une solution au problème posé. Par la suite, la commande ainsi synthétisée est implantée sur véhicule et on vérifie que les objectifs sont bien atteints.

Plusieurs approches de synthèse seront présentées, privilégiant à chaque fois l'un des objectifs sans pour autant négliger les autres. Les principales contributions de cette thèse peuvent être résumées comme suit :

1. *Gestion de l'interaction avec le conducteur par des stratégies de commutation.* Le choix a été porté dès le départ sur le cas usuel d'une commande du braquage des roues par l'intermédiaire d'un moteur électrique monté sur la colonne de direction. Le conducteur et le contrôleur interagissent alors au niveau de la colonne de direction et donc du volant, ce qui peut provoquer des actions antagonistes. Un premier enjeu a donc été de définir une procédure de partage du contrôle de la direction du véhicule entre la commande automatique et le conducteur. La solution retenue consiste à limiter l'intervention de l'assistance aux seules situations dangereuses, caractérisées par une perte d'attention du conducteur et par l'imminence de la sortie de voie. L'assistance est désactivée dès que le conducteur manifeste l'action de reprendre la conduite. D'un point de vue formel, le système dynamique résultant est caractérisé par des commutations correspondant à l'activation et à la désactivation de la commande. Il est modélisé comme un système hybride dont la stabilité a été analysée grâce à la théorie de Lyapunov et des ensembles invariants. La limitation des trajectoires du système commuté a ainsi pu être établie.
2. *Gestion de la trajectoire du véhicule sur la voie et garanties a priori sur les excursions latérales limites.* Le deuxième enjeu réside dans la maîtrise de la trajectoire du véhicule, une fois l'assistance activée et ceci plus particulièrement lorsque l'activation a lieu dans une zone éloignée de l'état stationnaire souhaité pour le véhicule. En effet, l'activation

peut engendrer des dépassements considérables qui peuvent se traduire par le franchissement des marquages de délimitation des bords de voie dans le régime transitoire. Les lois de commande synthétisées assurent un dépassement minimal de la position d'activation tout en utilisant un effort de commande borné. Celles-ci résultent de l'application de l'approche théorique de la synthèse d'une loi commande par retour d'état avec états et entrées contraints, approche fondée sur des méthodes d'optimisation LMI (« Linear Matrix Inequalities ») et BMI (« Bilineaire Matrix Inequalities »). Le maintien des roues avant du véhicule dans les limites d'une zone centrée sur la voie est traduit dans l'espace d'état par une contrainte de confinement entre deux hyperplans parallèles.

3. *Validité de l'assistance pour une large plage de la courbure de la route.* La troisième difficulté a porté sur la réalisation d'une assistance ayant de bonnes performances de suivi de voie à la fois sur des routes à faible courbure mais aussi sur celles à forte courbure. Trois cas ont été traités : route à très faible courbure, route à courbure importante et non accessible à la mesure ou route à courbure importante et accessible à la mesure. Les lois de commande développées pour des routes à courbure négligeable ont montré de bonnes propriétés de robustesse, y compris sur routes à courbure importante. Dans le deuxième cas, la commande est calculée de sorte à minimiser l'effet de la courbure, considérée comme une entrée exogène, sur l'erreur de positionnement. Lorsque l'information de courbure est disponible, un terme de préfiltrage a été calculé. Les techniques de synthèse développées utilisent les ensembles invariants, la minimisation de l'espace d'état atteignable et les méthodes d'optimisation BMI.
4. *Une assistance pour le cas des forces de contact pneumatique-chaussée saturées.* Les commandes ayant été synthétisées, dans un premier temps, pour le cas d'une adhérence nominale, le quatrième enjeu a consisté à tenir compte des diverses conditions de la route qui entraînent une sollicitation des pneumatiques au-delà du domaine linéaire. L'effet non linéaire apparaissant sur ces forces a été traité par une modélisation paramétrique de chacune d'elles. Il a été prouvé que les lois de commande développées garantissent les performances souhaitées pour une large plage de variation de ces paramètres. Les méthodes d'optimisation LMI et BMI ont également été utilisées.
5. *Validation pratique des résultats théoriques obtenus.* Les différentes lois d'assistance et les stratégies de commutation développées au cours de cette thèse ont été testées en pratique sur des véhicules prototypes. Les nombreux essais réalisés sur piste d'essais ont donné entière satisfaction : les relevés sur véhicules ont été conformes aux attentes théoriques et tous les conducteurs qui ont pu tester ces stratégies ont confirmé leur bonne ergonomie.

1.3 Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en quatre parties principales et quatre annexes.

Une première partie (Partie I, « Introduction ») contient le présent chapitre qui précise les motivations et les principales contributions de ce travail de thèse et un second chapitre (Chapitre 2) qui dresse un état de l'art des systèmes intelligents de transport, des principaux projets dans ce domaine et des aspects théoriques et pratiques des aides actives au maintien de voie.

La deuxième partie (Partie II, « Outils pour la modélisation et la commande du véhicule ») se compose aussi de deux chapitres. Un premier, Chapitre 3, fournit les rappels mathématiques sur les principaux concepts de l'automatique, les définitions et les théorèmes qui seront utilisés par la suite. Le Chapitre 4, consacré à la modélisation des véhicules, expose les différentes étapes qui aboutissent au modèle « bicyclette » du véhicule dans le repère lié à la voie de circulation. La fin

de ce chapitre est dédiée à un exposé général sur l'instrumentation des véhicules expérimentaux utilisés pour le contrôle latéral et plus spécifiquement sur la description du véhicule prototype CARLLA du LIVIC, utilisé lors des essais présentés dans ce mémoire.

La Partie III, « Contribution : loi d'assistance au maintien de voie », représente le cœur de mon travail de recherche. Elle contient quatre chapitres décrivant la synthèse et le test de l'assistance à la conduite développée. Le Chapitre 5 fixe les hypothèses ainsi que l'architecture générale de cette assistance. Le deuxième chapitre, Chapitre 6, traite un cas simplifié dans lequel la route est supposée rectiligne et présentant des conditions d'adhérence nominale. Le Chapitre 7 fournit une extension aux routes à faible et forte courbure alors que le Chapitre 8 explore la synthèse d'une assistance assurant les mêmes objectifs de performance y compris pour des cas de saturation des forces de contact qui pourraient être dus, par exemple, à une réduction d'adhérence.

La quatrième et dernière partie de ce mémoire, « Conclusions », donne une synthèse des principaux résultats obtenus. Les développements déjà identifiés, mais qui n'ont pas pu être traités, ainsi que des directions futures de recherche sont donnés en perspective.

Bibliographie

- [NHT07] National Highway Traffic Safety Administration *Traffic Safety Facts 2006 : A Compilation of Motor Vehicle Crash Data from the Fatality Analysis Reporting System and the General Estimates System*. Rapport No. DOT HS 810 818 de National Highway Traffic Safety Administration National Center for Statistics and Analysis U.S. Department of Transportation Washington, DC 20590, 2007.
- [SAA08] Société de l'assurance automobile Québec *Bilan 2007, Accidents, parc automobile, permis de conduire* Dossier statistique de la Direction des études et des stratégies en sécurité routière Société de l'assurance automobile du Québec 333, boul. Jean Lesage, N-4-30 C. P. 19600 Québec (Québec) G1K 8J6, 2008.
- [ONS08] Ministère de l'Écologie, de l'Énergie du Développement durable et de l'Aménagement du territoire *Répartition des nombres d'accidents corporels et de tués selon le type d'accident en 2007* [http ://www2.securiteroutiere.gouv.fr/infos-ref/observatoire/accidentologie/autres-analyses.html](http://www2.securiteroutiere.gouv.fr/infos-ref/observatoire/accidentologie/autres-analyses.html)

Chapitre 2

État de l'art

Sommaire

2.1	Systèmes intelligents de transport	9
2.1.1	Généralités	9
2.1.2	La recherche menée dans le cadre des projets	11
2.2	L'aide active au maintien dans la voie	18
2.2.1	Progression de l'intrusion de l'aide au guidage latéral	18
2.2.2	Méthodes d'action sur la dynamique latérale du véhicule	20
2.2.3	Contrôle latéral du véhicule	23
2.2.4	Systèmes intégrés d'assistance active au contrôle latéral du véhicule	27
2.3	Le conducteur et l'assistance au maintien dans la voie	30
2.3.1	Prise en compte du conducteur par l'assistance	30
2.3.2	Acceptabilité des assistances à la conduite et adaptation au com- portement	31
2.4	Les systèmes sur le marché	33
2.4.1	Responsabilité juridique	33
2.4.2	Systèmes de prévention active de sortie de voie disponibles sur le marché	35
2.4.3	Gains en sécurité des systèmes commercialisés	38
2.5	Conclusion	40

2.1 Systèmes intelligents de transport

2.1.1 Généralités

Sans avoir une définition unifiée, les systèmes intelligents de transport (ITS, « Intelligent Transportations Systems ») désignent les recherches et les technologies appliquées au transport pour le rendre plus sûr, plus efficace ou plus écologique. Il y a quatre paramètres de base dans le développement et l'utilisation des systèmes intelligents de transport : le conducteur, le véhicule, l'environnement et les pouvoirs publics.

Le conducteur

La présence du conducteur dans le système constitue une des principales raisons de la mise en place des systèmes intelligents de transport. L'informer sur son véhicule et son environnement,

l'avertir des dangers potentiels et l'assister dans le processus de décision et des ses tâches de conduite constituent autant d'applications différentes dans le cadre de l'amélioration de la sécurité routière.

Deux aspects soulèvent aujourd'hui des incertitudes ; d'une part l'accommodation du conducteur à ces systèmes et les effets pervers que cela peut engendrer, et d'autre part, le partage et le transfert de responsabilité. Les dispositifs, embarqués aujourd'hui sur les véhicules, assistent mais ne remplacent pas le conducteur qui continue à garder la responsabilité de la conduite.

Le véhicule

Le véhicule a beaucoup évolué au cours des deux dernières décennies. C'est aujourd'hui un système mécatronique complexe qui rassemble des composants mécaniques, électriques, électroniques et informatiques. Les équipements électroniques qui renforcent la sécurité des occupants sont catégorisés en systèmes de sécurité passive ou active.

Les premiers ont pour rôle de diminuer les conséquences d'un accident lorsque celui-ci n'a pu être évité. À titre d'exemple, lors d'un choc, les ceintures de sécurité à prétensionnement retiennent le passager mais limitent l'effort exercé sur le thorax et réduisent ainsi le risque de fracture.

Les équipements de sécurité active influencent la dynamique du véhicule avant l'apparition de la situation dangereuse pouvant amener à l'accident. C'est le cas du système anti-blocage des roues au freinage ABS¹, qui permet d'optimiser la distance de freinage et préserve la contrôlabilité du véhicule, ou encore du système qui contrôle le mouvement de rotation de lacet du véhicule grâce au freinage différentiel des roues ESP² ou ESC³. De même, un système d'aide au freinage d'urgence amplifie la pression de freinage du conducteur pour réduire la distance d'arrêt.

Si les systèmes de sécurité passive sont arrivés à maturité, l'enjeu actuel est de rendre les dispositifs de sécurité active suffisamment sûrs et performants pour renforcer leur déploiement [Njo06]. Une autre perspective de développement est l'intégration du véhicule avec son environnement, constitué par les autres véhicules et l'infrastructure, l'objectif étant d'augmenter l'efficacité des systèmes par une perception étendue.

L'environnement

Un environnement intelligent se compose d'une infrastructure dotée en moyens de communication et de véhicules capables de recevoir, interpréter et transmettre des informations. Par d'exemple, un véhicule équipé avec des moyens de diagnostic et de communication pourrait envoyer des informations sur son état en cas d'accident ou de passage dans une zone dangereuse. Cette dimension de progrès dans les transports, impliquant l'infrastructure, nécessite des initiatives à long terme et un engagement fort des pouvoirs publics. Néanmoins, l'équipement des véhicules avec des technologies de perception permettant de caractériser leur environnement pourrait la suppléer à court terme.

Les pouvoirs publics

Les pouvoirs publics n'ont pas seulement la tâche de s'impliquer dans le développement et le déploiement des systèmes intelligents de transport, mais aussi le devoir de réglementer l'usage de ces équipements. À cet égard, la question de la responsabilité pour les systèmes de sécurité

¹ « Anti-lock Braking System, »

² « Electronic Stability Program »

³ « Electronic Stability Control »

active est encore ouverte. Le déploiement rapide des systèmes peut être soutenu par la législation, comme ce fût le cas avec l'ABS qui est devenu obligatoire en première monte sur les véhicules vendus en Europe.

2.1.2 La recherche menée dans le cadre des projets

D'un point de vue historique, les systèmes intelligents de transport ont suivi quatre phases de développement relativement distinctes [Yng99]. Dans les décennies 60 - 70, des premières études et travaux de recherche ont été menés dans l'esprit de démontrer l'aptitude des systèmes à accroître la sécurité et les performances du transport routier. Bien que certains aient débouché sur des applications pratiques, comme par exemple le bus à guidage latéral en Allemagne [Kan87] (voir Section 2.2.1), la plupart des systèmes mis en œuvre nécessitaient des équipements lourds (ordinateurs volumineux) ou des applications complémentaires inexistantes à l'époque. En conséquence, nombre de ces études sont restées au stade du concept, comme par exemple le système de guidage communicant ALI⁴ [Kuh05].

Dans les années 80 - 95, des investissements forts dans l'information routière embarquée ont été réalisés. Des projets ambitieux, comme PROMETHEUS⁵ (1986-1995) en Europe, PATH⁶ (lancé en 1986) aux États-Unis ou RACS⁷ et ASV⁸ au Japon, visaient principalement les systèmes avancés de gestion du trafic et d'information aux voyageurs et aux conducteurs.

La période 1995-2000 a vu les recherches s'orienter fortement vers la réalisation de l'autoroute automatisée. En août 1997, le consortium américain public-privé NAHSC⁹ a organisé à San Diego une grande démonstration autour des résultats obtenus dans le projet AHS¹⁰ à laquelle avaient participé plus de 4000 visiteurs [Ste98]. Avant même d'attendre la tenue de cette démonstration, qui fût par ailleurs une grande réussite, USDOT¹¹, qui soutenait financièrement la plupart de ces recherches, demanda quelques mois auparavant la réorientation des recherches vers des projets qui pourraient déboucher à court terme sur des bénéfices pour la sécurité. En 1998, USDOT décidait de mettre fin aux activités du consortium NAHSC.

Dans la période récente, 2000-2008, les aspects de la mobilité durable, de la multimodalité et surtout de la sécurité routière ont été renforcés. Mentionnons que le découpage temporel présenté ne peut pas rendre compte de toute la réalité des développements dans le cadre des systèmes intelligents de transport. Pour illustrer cet aspect, signalons que le projet PROMETHEUS traitait déjà la conduite automatisée et ses bénéfices ainsi que les gains sur la sécurité grâce à l'équipement électronique des véhicules.

Les développements dans le domaine des transports intelligents ont suivi approximativement le même parcours partout dans le monde. L'état actuel dans les transports intelligents au Japon est résumé par les auteurs de [Bru05]. Une synthèse comparative des systèmes intelligents de transport aux États-Unis et au Japon a été réalisée dans [ADI03]. Cette synthèse évoque les visions nationales et l'intégration de ces systèmes à l'environnement socio-économique, les facteurs de blocage et les leviers à l'innovation aussi bien que les processus d'émergence technologique nationaux. Les technologies clefs de l'innovation en transport pour le futur en Europe sont dévoilées dans [The05].

⁴ « Autofahrer Leit und Information System »

⁵ « PROgramme for European Traffic with Highest Efficiency and Unprecedented Safety »

⁶ « Partners For Advanced Transit And Highways »

⁷ « Road Automobile Communication System »

⁸ « Advanced Safety Vehicle »

⁹ « National Automated Highway System Consortium »

¹⁰ « Automated Highway System »

¹¹ « U.S. Department of Transportation »

Comme mentionné précédemment, nombre de projet de recherche ont ciblé soit la conception de technologies de transport intelligents, soit l'évaluation de systèmes déjà existants. Quelques projets seront présentés succinctement dans la suite, l'objectif étant de donner une image synoptique des orientations des recherches dans ce domaine. Nous serons plus attentifs aux développements impliquant le conducteur et le véhicule sachant que les aspects portant sur l'environnement et les politiques de transport seront traités de manière secondaire. Les développements réalisés dans le cadre de l'aide au maintien dans la voie, seront repris plus en détail dans la Section 2.2.

PROMETHEUS

PROMETHEUS a été un projet précurseur à l'échelle mondiale, dans le domaine des systèmes intelligents de transport. Il reste aussi, le projet le plus ambitieux mené à ce jour, avec un budget total de 749 M€. Mené entre 1987 et 1995 sous l'égide de l'Union Européenne, PROMETHEUS a réuni des constructeurs automobiles (en Angleterre : BL, Rolls Royce, en France : Matra, Peugeot S.A., Renault, en Allemagne : BMW, Daimler-Benz, Porsche, Volkswagen/Audi, en Italie : Alfa Romeo, Fiat, en Suède : Saab Scania, Volvo, etc.), des équipementiers (Siemens Automotive S.A., TRW, Valeo Electrical Systems, Knorr Bremse etc.) et des centres de recherche et des universités (Linköping University, Université Di Roma « La Sapienza », École Nationale Supérieure des Mines De Paris, Deutsche Luftraum Technik, etc).

Le but déclaré de ce projet a été la création de concepts et de solutions qui vont ouvrir le chemin vers un système de trafic routier économiquement plus efficace et ayant un impact réduit sur l'environnement tout en assurant un degré élevé de sécurité [Eur08]. La vision de ce projet est représentée sur la Figure 2.1.



FIG. 2.1 – Vision PROMETHEUS d'un trafic futur sûr et efficace [PRE08].

Les travaux de recherche et développement dans PROMETHEUS ont été scindés en deux volets, industriel et fondamental [Kan87]. Plusieurs véhicules prototypes ont été construits durant ce projet :

- CED-3, véhicule experimental pour l'évitement des collisions [Mat94],
- VITA II, véhicule prototype de Daimler-Benz intégrant la détection d'environnement par la vision, le suivi automatique de voie, la détection d'obstacles, l'analyse du trafic et la reconnaissance des panneaux de circulation [Pri94],

– Pro-Lab II a intégré les résultats des partenaires français du sous-projet Pro-Art [Has95], [Tra96], [Fra92]. Il intégrait cinq fonctions [Fra92] : les trois fonctions « localisation du véhicule », « détection de l’environnement » et « état du véhicule » fournissaient des informations relatives à l’environnement et à la dynamique du véhicule à une quatrième fonction « co-pilot ». La cinquième fonction traitait les aspects de communication entre le système et le conducteur. La fonction « co-pilot » distinguait déjà quatre activités :

1. Superviseur des autres activités du « co-pilote », qui assurait le lien avec l’interface homme-machine et activait les activités du « co-pilot » si nécessaire.
2. Interface de perception qui assurait le lien avec les trois premières fonctions de Pro-Lab II.
3. Contrôle longitudinal de la vitesse du véhicule.
4. Contrôle latéral du véhicule pour le maintenir entre les marquages latéraux.

Le véhicule Pro-Lab II a été présenté lors des démonstrations organisées par les constructeurs français PSA et Renault en octobre 1994 pour la manifestation clôturant le programme PROMETHEUS.

Malgré ces accomplissements exceptionnels, les résultats obtenus dans PROMETHEUS n’ont pas débouché sur des produits commerciaux. Ceci est principalement dû à l’état de faible avancée technologique des techniques de calcul embarqué et à l’absence des composants clés à des prix compétitifs pour l’industrie automobile comme, par exemple, les composants capteurs bas coût. Néanmoins, ce projet a ouvert le chemin à d’autres projets sur les systèmes intelligents de transport, qui ont bénéficié des meilleures dispositions technologiques, notamment le projet européen PReVENT [PRe08].

PATH

California PATH est un programme pluridisciplinaire lancé en 1986 aux États-Unis et qui se poursuit encore aujourd’hui. Il est géré par l’institut des études sur les transports de l’université de Berkeley, en collaboration avec le ministère californien des transports Caltrans. Mis en place pour proposer des solutions aux problèmes de transport de surface en Californie, PATH privilégie les directions de recherche offrant un potentiel de changement radical dans le système de transport. Quatre orientations de recherche ont été définies :

1. Recherches sur les politiques et sur le comportement (« Policy and Behavioral Research »),
2. Recherches sur la sécurité dans les transports (« Research Transportation Safety »),
3. Recherches sur la gestion du trafic (« Research Traffic Operations »),
4. Recherches sur le fret (« Transit Operations Research »).

Les recherches sur la sécurité ont abordé différents volets de la modélisation et du contrôle des véhicules et du conducteur :

- La modélisation des véhicules légers, bus et poids lourds [Pen90], [Tai98],
- La modélisation du conducteur [Pro00], [Del01],
- L’équipement du véhicule pour le contrôle latéral et longitudinal [Pro98], [Far02], [Cha03],
- Le contrôle autonome longitudinal et latéral de véhicule et de peloton de véhicules [Gul97], [Pen90], [Tom90], [Swa99],
- Les situations de défaillance des capteurs et du contrôle [Tsa97], [Pat94], [Tal04].

Les travaux récents ou encore en cours dans le cadre de PATH sont détaillés dans le rapport annuel 2006 [PAT07]. L’orientation sur la sécurité en transport a visé en 2006 quatre domaines. Les développements sur les systèmes coopératifs ont porté sur la gestion des interdistances et

la réduction du nombre d'accidents avec un tiers en virage dans le cas de recouvrement de trajectoire. Pour ce qui est de la modélisation du comportement des conducteurs, ces derniers ont été observés depuis l'extérieur, pour des manœuvres de changement de voie, de suivi de véhicules, de croisement d'intersection et ont été observés de l'intérieur pendant la conduite, pour les chauffeurs professionnels. En troisième lieu, la sécurité des vulnérables (piétons, deux-roues) a été étudiée et des outils d'amélioration ont été développés. Finalement, la sécurité et la viabilité du système de transport dans sa globalité, a été abordée par l'étude et la conception de méthodes pour détecter les endroits à risque élevé de collision et les critères d'occurrence des accidents pour des routes mouillées.

ARCOS

Le projet français ARCOS (Action de Recherche pour la CONduite Sécurisée), d'une durée de 3 ans, 2001-2004, a fait partie des travaux de recherche conduits dans le cadre du PREDIT II (Programme de Recherche et d'Innovation dans les Transports Terrestres). Ce projet financé à hauteur de 15 M€, a réuni une soixantaine de partenaires dont : des instituts de recherche publiques (INRETS, INRIA, LCPC), des laboratoires CNRS (IRCCyN, LAAS, LAMIH, LASMEA), des laboratoires des Universités (Supélec, Université de Haute Bretagne, LAUREPS, Université La Rochelle, Laboratoire Informatique et Imagerie Industrielle, Université Technologique de Belfort-Montbéliard, ERCO, Université Technologique de Troyes, LM2S, Université Versailles-Saint Quentin, LRV) et des industriels (EADS /MATRA Systèmes et Information, PSA, Renault, Renault Véhicules Industriels, SAGEM, Valeo, Vectra). Ce projet a été piloté par le LIVIC, unité de recherche mixte INRETS et LCPC.

Les travaux du projet ARCOS ont été menés autour de quatre fonctions génériques : la gestion des interdistances entre véhicules, la prévention des collisions, la prévention des sorties de route et l'alerte des véhicules en amont d'accidents ou d'incidents [ARC04]. Onze thèmes techniques ont permis de traiter les composants nécessaires à la réalisation de ces fonctions :

1. Amélioration de la perception de l'environnement du véhicule. Deux types de recherches ont été conduits : la détection des objets et des obstacles sur la route [Lab04(a)], [Lab03] et la détection de la route qui permet de fournir la position et l'évolution de la trajectoire du véhicule par rapport aux voies de circulation [Lab04(b)].
2. Visibilité [Hau05] et adhérence [Ste04(a)], [Ste04(b)].
3. Traitement de l'information et élaboration de l'action. Quatre tâches ont été accomplies dans ce thème [Rah04(a)], [Mam04], [Net03], [Mar04] : la construction des bases de données géolocalisées pour les aides à la conduite, la localisation précise et robuste du véhicule et des obstacles, le calcul des trajectoires et la sécurisation des trajectoires par une conduite partagée qui empêche les sorties de routes à travers plusieurs modes, modes qui seront exposés dans la Section 2.2.1.
4. Systèmes de télécommunications. Trois sous-projets ont été ciblés : analyse des besoins, communication véhicule-véhicule et communication véhicule-infrastructure [Rob03].
5. Accidentologie, simulation [Bar02].
6. Systèmes homme-machine [Anc03], [Hoc03].
7. Acceptabilité sociale, questions juridiques.
8. Aspects économiques.
9. Expérimentation et intégration.
10. Analyse fonctionnelle.

11. Poids lourds. Ce sujet a porté sur la perte de contrôle du véhicule lorsqu'elle est engendrée par un des facteurs suivants : ses caractéristiques mécaniques, celles de l'infrastructure, la défaillance du véhicule et la défaillance du conducteur [ElH03].

PreVENT-IP

Le projet PreVENT-IP¹², du 6ème PCRD, a réuni pendant quatre années (2004-2007) 55 partenaires issus de 10 pays dans 15 sous-projets et ce pour un budget total de 55 M€ [Pre08]. Parmi les partenaires et sans faire une énumération complète, signalons la présence des constructeurs automobiles et des équipementiers : DaimlerChrysler AG, Audi AG, BMW AG, Ford Forschungszentrum Aachen GmbH, Peugeot Citroën Automobiles SA, REGIENOV-Renault Recherche Innovation, Volvo Car Corporation, Volkswagen AG, Robert Bosch GmbH, Delphi Delco Electronics Europe GmbH, Siemens AG, Sagem Défense Sécurité Groupe SAFRAN, des instituts de recherche et laboratoires : Fraunhofer-Gesellschaft, Netherlands Organisation For Applied Scientific Research, Centre National De La Recherche Scientifique - Ile De France Est, INRIA, INRETS, des universités : Universität Passau, Universita Degli Studi di Parma, National Technical University of Athens, Lunds Universitet et des associations EUCAR¹³, CLEPA¹⁴ et ERTICO (communauté ITS).

La vision du projet PreVENT-IP portait sur la création d'une région de sécurité électronique autour du véhicule par le développement, l'intégration et la démonstration d'une collection de fonctions complémentaires de sécurité centrées sur l'information et l'assistance au conducteur (voir Figure 2.2) [Pre08]. Dans l'enveloppe conducteur-véhicule-environnement, les technologies avancées étaient censées assister le conducteur en le maintenant au maximum dans la boucle. Le conducteur était intégré dans le système véhicule intelligent et non remplacé par celui-ci.

Le rapport final du projet, publié en 2008, donne une synthèse des fonctions, des activités et des résultats obtenus [Pre08]. Rappelons que le projet avait été structuré en quatre fonctions verticales de développement des applications indépendantes pour concevoir la région de sécurité autour de véhicule et en quatre activités horizontales de support pour la convergence des fonctions verticales.

– Fonctions verticales.

1. *Fonction d'assistance au contrôle longitudinal.* Deux sous-projets ont été conduits pour la réalisation de cette fonction : SASPENCE et WILLWARN. SASPENCE a introduit la limitation de la vitesse en fonction de la situation de trafic et le contrôle de la distance par rapport aux objets sur la voie afin de diminuer le risque de collision avant et arrière. L'assistance WILLWARN soutient le conducteur via une communication véhicule-véhicule et l'avertit des dangers en fonction de la géolocalisation du véhicule.
2. *Fonction d'assistance au contrôle latéral.* Cette fonction a fait l'objet de deux sous-projets : LATERALSAFE et SAFELANE. Le premier a permis de développer des applications pour l'amélioration de la perception par le conducteur autour du véhicule. Celui-ci est assisté dans les manœuvres de changement de voie et il est averti en cas de risque de collision. SAFELANE a été consacré au développement d'assistances au maintien de voie pour remédier aux dégradations des capacités de conduite du conducteur.

¹² « Preventive and Active Safety Applications Integrated Project »

¹³ « European Council for Automotive R& D »

¹⁴ « European Association for Automotive Suppliers »

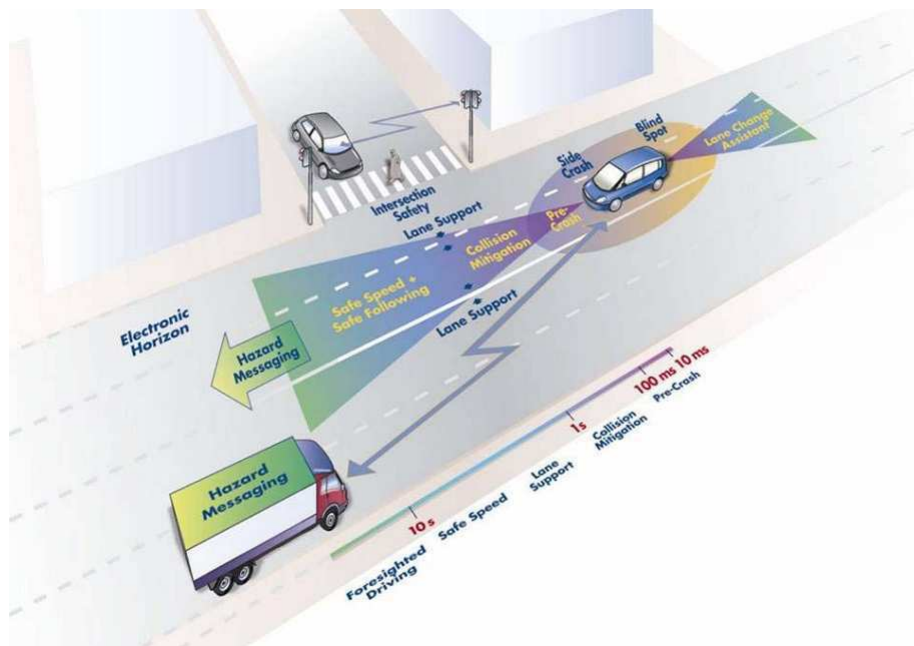


FIG. 2.2 – Vision PReVENT d'une zone de sécurité autour du véhicule réalisée à travers des fonctions complémentaires de sécurité [PRe08].

3. *Fonction pour la sécurité en intersection.* Cette fonction a été traitée par le développement d'un système d'avertissement dans le sous-projet INTERSAFE. Ce système est basé sur une communication bi-directionnelle véhicule-infrastructure et sur la prédiction de la trajectoire des véhicules concernés.
4. *Fonction de protection des vulnérables et mitigation des collisions (« collision mitigation »).* Trois sous-projets ont été consacrés à cette fonction : APALACI, COMPOSE et USERCAMS. Tous les trois ont développé des applications pour l'amélioration de la perception dans le voisinage proche du véhicule. Une fonction de freinage d'urgence a été implantée.

- Activités horizontales. Elles avaient pour rôle de faciliter l'intégration des fonctions de sécurité au sein du projet et d'en évaluer l'impact. Un code de bonnes pratiques (« Code of Practice ») a été développé. Il donne aux industriels de l'automobile la démarche à suivre pour mettre sur le marché des produits innovants pour la sécurité, lesquels, après certification, ne feront plus l'objet d'incertitudes juridiques (voir Section 2.4.1 pour plus de détails).

Souvent comparé à PROMOTHEUS pour son ampleur, le projet PReVENT s'est efforcé de se placer dans le segment précompétitif afin de favoriser l'émergence rapide des systèmes et des technologies développés sous son égide. Les composants utilisés dans les différents sous-projets sont tous disponibles dans le commerce et pourraient être produits à terme en grandes séries.

AKTIV

Lancé en septembre 2006 pour une durée de 4 ans, AKTIV¹⁵ est actuellement le projet phare de l'industrie automobile allemande. L'objectif affiché est de réaliser des assistances à la conduite et des systèmes de gestion du trafic qui :

1. Améliorent la sécurité de l'ensemble des acteurs de la mobilité.
2. Allègent les tâches de conduite et aident le conducteur à atteindre sa destination en sécurité.
3. Évitent les congestions par une meilleure gestion du trafic et du réseau.
4. Soient rentables, écologiques et respectent le cadre légal.
5. Soient acceptées par la société et par les utilisateurs.

AKTIV est porté par 29 partenaires de l'industrie de l'automobiles (Audi, BMW, DaimlerChrysler, Ford, Opel, MAN, VW, etc.), de l'électronique (Bosch, Siemens, etc.), de télécommunication (Ericsson, etc.) et de logiciel. Il est également soutenu par des instituts de recherche et universités (Uni Hannover, Uni Kassel, TU Munich, Hochschule Saarland, etc.). Le projet AKTIV a un budget total de 60 M€ financé en partie par le ministère allemand de l'économie et de la technologie (27 M€) [AKT08(a)], [AKT06].

La sécurité active est traitée au travers de cinq sous-projets [Kre07] :

1. Le freinage automatique pour l'évitement de la collision fait l'objet d'un premier sous-projet. Par rapport à l'aide au freinage d'urgence actuelle, la fonction développée anticipe et s'adapte à la situation de circulation. Elle nécessite la reconnaissance et l'interprétation de l'environnement ainsi qu'un système de décision évolué. Le concept prévoit un système en trois phases : avertissement, freinage et freinage d'urgence avec prise en compte de l'attention du conducteur.
2. Le sous-projet sur l'assistance latérale intégrée développe une aide au maintien de voie capable également d'effectuer des changements de voie pour un domaine de vitesses de 0km/h à 180km/h . Des tests intensifs sont actuellement menés sur l'acceptabilité du concept, qui sera par ailleurs détaillé dans la Section 2.2.4.
3. L'assistance aux intersections (avertissement et intervention active) fait l'objet d'un sous-projet et utilise des capteurs embarqués (radar, lidar, caméra), des systèmes de communication coopératifs et des algorithmes de localisation avec cartographie.
4. Le projet étudie toute une stratégie d'évitement de collision avec les piétons et les cyclistes. En cas de collision imminente (à 2 secondes), le conducteur est alerté par des alarmes sonore, visuelle et haptique et le piéton ou le cycliste par un appel de phare et le klaxon. Dans l'intervalle de une à deux secondes avant la collision, les freins sont armés et le freinage total est déclenché à une seconde. À 0.5 seconde avant la collision, une manœuvre d'évitement est engagée ; le véhicule est mis en condition pour la collision par des mesures réversibles (action du capot et du pare choc) et irréversibles (déclenchement d'un airbag extérieur).
5. Un sous-projet est aussi dédié à l'étude de l'attention du conducteur. Il aborde les points suivants : estimation de l'attention du conducteur, intégration de l'attention du conducteur dans les assistances développées, conception des scénarios de test pour les algorithmes conçus et évaluation des effets à court et long termes des assistances sur le conducteur.

¹⁵ « Adaptive und Kooperative Technologien für den Intelligenten Verkehr »

Les autres projets et recherche

LaRA (La Route Automatisée) réunit les efforts de recherche des équipes de INRIA et de l'École de Mines de Paris. LaRA a été mise en place voilà maintenant 10 ans pour développer, intégrer et expérimenter des Technologies sur l'Information et la Communication (TIC) ainsi que pour améliorer le transport routier [LaR08]. À long terme, l'objectif est de remplacer le conducteur par un système de conduite automatisée, tout au moins dans les environnements appropriés à ce type d'application, comme cela pourrait être le cas pour les déplacements urbains à basse vitesse.

CarSense¹⁶ est un projet européen du 5ème PCRD (2000-2002) [Car00]. Il avait pour objectif la mise au point d'un système de perception multi-capteurs pouvant être embarqué sur un véhicule particulier. Les participants étaient des industriels européens du secteur de l'automobile (Renault, BMW, Lucas Varsity, Thomson Detexys, Ibeo, etc.) et des instituts de recherche (INRIA, INRETS, LIVIC).

Le projet **LAVIA**¹⁷ a étudié l'usage et l'acceptabilité du limiteur de vitesse, ainsi que son impact sur la sécurité routière [LAV06]. Ce projet qui s'est déroulé de 2001 à 2006, s'est conclu par une expérimentation à grande échelle impliquant 22 véhicules de marques Peugeot et Renault. Ces véhicules ont été équipés d'un système d'enregistrement de données et d'un limiteur s'adaptant à la vitesse autorisée lue sur une cartographie embarquée. Le système a pu être testé durant un mois par chacun des 110 conducteurs. Les données enregistrées ont fait l'objet d'une analyse qualitative et quantitative effectuée par des ergonomes, des psychologues de la conduite et des statisticiens.

Évolution de la recherche dans le domaine des systèmes intelligents de transport

La recherche dans le domaine des systèmes intelligents de transport a connu plusieurs réorientations au cours de ces vingt dernières années. Le premier changement a eu lieu autour des années 95, le centre d'intérêt est passé des applications macroscopiques, reposant sur une infrastructure fortement instrumentée, vers le véhicule et le conducteur. En suivant cette nouvelle tendance, vers la fin des années 90 le véhicule totalement automatisé est devenu moins prioritaire face aux assistances à la conduite centrées sur le conducteur et ses besoins. Les visions à très long terme ont été remplacées par la nécessité de disposer d'applications à court et moyen termes, celles-ci étant plus faciles à réaliser à l'échelle du véhicule que de l'infrastructure. Cette tendance s'est d'ailleurs confirmée par l'accumulation des équipements sur les véhicules commercialisés et présentés dans la Section 2.4.

2.2 L'aide active au maintien dans la voie

Passons maintenant en revue les systèmes d'aide active au maintien dans la voie ainsi que les méthodes théoriques et pratiques mises en œuvre. Deux concepts d'assistance intégrant aussi des logiques d'interaction avec le conducteur compléteront cette section.

2.2.1 Progression de l'intrusion de l'aide au guidage latéral

Le guidage latéral automatique du véhicule a toujours constitué un point d'intérêt dès le début des systèmes intelligents de transport. Vers la fin des années 70, le ministère allemand

¹⁶ « Sensing of Car Environment at Low Speed Driving »

¹⁷ « Limiteur s'Adaptant à la Vitesse Autorisée »

de la recherche et de la technologie initiait un projet pour l'amélioration des performances du réseau de transport en commun dans les grandes villes [Kan87]. Le résultat qui en découla est le système « 0-Bahn », qui rassemblait les avantages des transports ferré et routier. Des bus ont été conçus pour circuler sur des voies étroites spécialement aménagées. Cependant, pour rouler dans ces voies les bus avaient besoin d'un contrôle de la direction de grande précision. Ceci a été réalisé via un câble électrique noyé au milieu de la voie. Une antenne embarquée permettait de mesurer les déviations du bus par rapport au câble et un dispositif de braquage automatique réalisait le contrôle automatique du bus le long du câble. L'idée d'utiliser un câble électrique a, par ailleurs, été explorée par de nombreux auteurs. Les études ont démontré qu'une précision du contrôle de l'ordre de 2cm pouvait être atteinte [Fen76], [Gar60] et [Car70].

Les années qui suivirent ont vu le développement de la recherche sur l'automatisation totale des véhicules combinant le contrôle longitudinal et latéral. Les premiers concepts d'autoroute automatisée ont été le fait du projet PATH ([Tsa96], [Lyg97]). Les recherches dans le cadre de LaRA ont abouti à la proposition de quatre scénarios de route automatisée associant des véhicules autonomes ou en pelotons.

Vers la fin des années 90 les recherches mettent davantage l'accent sur le conducteur qu'on ne cherche plus à remplacer, mais à aider dans ses tâches de conduite. C'est le concept du « co-pilote » intelligent qui informe, avertit et qui au final agit en cas de défaillance du conducteur qui s'impose [Fra92]. Cinq niveaux d'assistance ont été proposés par [Kop94], puis utilisés dans le contexte de la conduite automatisée par [Yuh98] (voir Figure 2.3) : (1) information, (2) conseil, (3) avertissement, (4) assistance et (5) intervention. Dans les premiers niveaux - information, conseil et avertissement - il s'agit d'une aide passive, qui peut influencer le conducteur, mais pas directement la dynamique du véhicule, tandis que dans les suivants modes d'assistance et d'intervention des actionneurs sont prévus pour agir sur la dynamique du véhicule (aide active). À titre d'exemple, le projet ARCOS a défini les modes d'assistance suivants [Mam05] :

- Mode instrumenté : le conducteur est informé. Les informations primaires peuvent être fournies par des capteurs ou reconstituées par des observateurs. L'information peut se faire par affichage direct ou après traitement.
- Mode avertissement : le conducteur est averti en cas de risque. L'information est associée à une mesure de risque. Les mesures de risque de sortie de voie peuvent être l'accélération latérale, la vitesse de lacet, la vitesse latérale, l'écart latéral, l'angle de cap par rapport à l'axe de la voie ou le temps à sortie de voie (TLC, [Mam06]).
- Mode limite : les actions du conducteur sont limitées pour diminuer la croissance d'une mesure de risque.
- Mode médiatisé : le conducteur a l'initiative de l'action, mais le système de sécurité amplifie cette action pour réduire le risque d'accident.
- Mode régulé : le conducteur et l'assistance contrôlent simultanément le véhicule.
- Mode automatisé : le véhicule est contrôlé automatiquement et les actions du conducteur sont inhibées.

Tous ces modes utilisent des applications embarquées qui fournissent le positionnement du véhicule par rapport à sa voie de circulation et calculent les indicateurs de risque.

Dans ce contexte, l'aide active au maintien de voie demeure difficile à réaliser car l'interaction avec le conducteur, notamment par l'intermédiaire du volant, est problématique pour différentes raisons :

- Comment estimer dans quelle mesure le conducteur a besoin d'assistance ?
- Comment estimer les objectifs de guidage du conducteur ?
- Comment réaliser l'assistance de telle sorte que le conducteur demeure seul responsable de la trajectoire du véhicule ?

- Comment gérer le compromis entre le confort et l'agrément de conduite du conducteur et la fonction de sécurité de l'aide ?

Toutes ces questions ont suscité de nombreux travaux dont certains tentent d'intégrer l'interaction avec le conducteur dans les phases de synthèse. À titre d'exemple, les auteurs de [Can05] proposent une approche formelle d'intégration des contraintes du conducteur en termes de confort et de sécurité dans la synthèse.

Il faut aussi noter que la technologie choisie pour la réalisation de l'assistance peut permettre de répondre partiellement à certaines de ces questions.

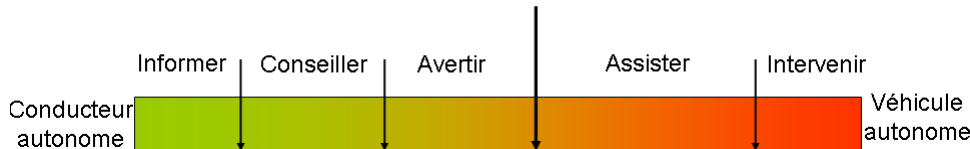


FIG. 2.3 – Niveaux d'assistance.

2.2.2 Méthodes d'action sur la dynamique latérale du véhicule

Le composant primordial d'une assistance active au contrôle latéral est l'actionneur utilisé pour agir sur la dynamique latérale. Trois principes d'assistance seront présentés : par freinage différentiel des roues, par intervention sur une colonne de direction avec lien mécanique et par une colonne de direction filo-commandée (« steer by wire »).

Le freinage différentiel

Le freinage différentiel des roues induit un moment de lacet du véhicule qui modifie sa direction de déplacement [Raj06]. Cet effet est généralement utilisé pour contrecarrer un mouvement de lacet du véhicule pouvant engendrer une instabilité dynamique. Cela est le cas sur le système de sécurité ESP [Bos00] ou ESC qui supprime les tendances au survirage ou sousvirage et rétablit la vitesse de lacet désirée. Cependant, ce système n'a pas l'objectif de maintenir le véhicule dans sa voie de circulation, mais uniquement de conserver la stabilité dynamique de celui-ci. Le suivi d'une trajectoire stable sur la voie est uniquement un effet secondaire partant de l'hypothèse que le conducteur suit l'axe de la voie.

Quoi qu'il en soit l'utilisation du freinage différentiel pour le guidage latéral a été explorée par [LeB96] et [Pil95]. Le concept global de cette assistance sera détaillé dans la Section 2.2.4. L'avantage fondamental avancé à l'époque de sa conception est la facilité de mise en œuvre du fait de la dissociation des actions du contrôle et du conducteur pour le guidage latéral, le conducteur gardant ainsi l'entière responsabilité de la conduite. Néanmoins, l'action de braquage par freinage différentiel reste limitée aux régions de stabilité dynamique du véhicule. Ces régions sont déterminées par les forces de contact des pneus et dépendent de l'adhérence, de l'angle de braquage et de la vitesse longitudinale du véhicule. Un autre aspect mitigé de cette approche est la décélération subie par le véhicule lors de l'intervention de l'assistance. Ainsi, la vitesse décroît de près de $-2.5m/s$ pour une correction vers l'axe de la voie à partir d'un écart latéral d'un mètre et avec une décélération maximale de $-0.15g$, où g est l'accélération gravitationnelle. Les auteurs de [Pil95] suggérèrent que cette réduction de la vitesse pourrait servir de signal d'avertissement au conducteur, elle peut cependant constituer un facteur de mécontentement de celui-ci. Ce système a été breveté dans [Pil00].

Actionneur sur une colonne de direction avec lien mécanique

Une solution couramment adoptée dans ce cas consiste à ajouter un actionneur électrique [Tai01], [Shi02], [Net06] ou hydraulique [Pen92], [Cho00] sur la colonne de direction avec lien mécanique. Notons que le véhicule est généralement déjà pourvu d'une assistance à l'effort de braquage qui peut être soit électrique (voir Figure 2.4, <http://www.trw.de>), soit hydraulique ou encore hybride, électrique et hydraulique (voir Figure 2.5, <http://www.zf.com>). En conséquence, l'action du moteur électrique pour réaliser l'aide active au maintien dans la voie vient s'additionner à l'action de l'assistance d'origine. Dans le cas des directions à assistance entièrement électrique, les deux tâches sont accomplies par un seul et même moteur [Poh03], [Hat03].



FIG. 2.4 – Colonne de direction à moteur d'assistance électrique, développée par TRW .

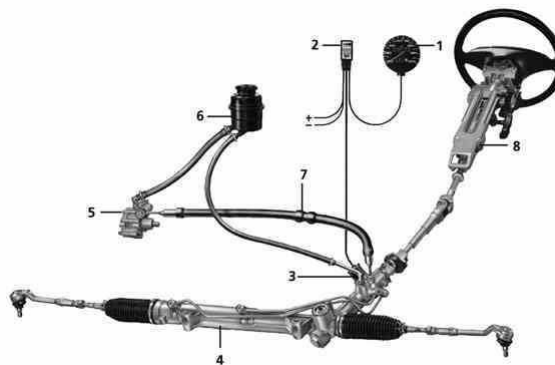


FIG. 2.5 – Assistance électro-hydraulique développée par ZF Group (1) Mesure de vitesse électronique, (2) Unité électronique de contrôle, (3) Transducteur électro-hydraulique, (4) Engrenage pignon-crémaillère, (5) Pompe de braquage, (6) Réservoir d'huile avec filtre, (7) Tuyau expansible anti-vibration, (8) Colonne de direction ajustable.

Il existe une différence notable entre les aides à la conduite réalisées à l'aide d'un moteur d'assistance électrique et celles qui utilisent au moins une composante hydraulique. Ces derniers deviennent complexe à modéliser et le couple délivré pour réaliser le braquage des roues directrices est difficilement mesurable. Par conséquent, les lois de contrôle latéral pour une direction assistée électrique sont généralement synthétisées en couple de braquage, tandis que ceux destinés aux

actionneurs hydrauliques sont réalisés directement en angle. Une étude comparative entre les commandes pour le guidage latéral du véhicule en angle de braquage et en couple de braquage est présentée dans [Nag02]. Elle sera reprise dans une prochaine Section 2.2.3.

Colonne de direction filo-commandée

La direction filo-commandée, « steer by wire », consiste à éliminer le lien mécanique entre le volant et les roues directrices et à installer deux actionneurs, généralement des moteurs électriques, dont l'un gère directement le braquage des roues directrices et l'autre fournit le retour d'effort au volant (voir Figure 2.6, <http://www.zf.com>). Cette technologie présente de nombreux avantages pour la réalisation des aides actives à la conduite. Il s'agit principalement de l'interaction avec le conducteur qui peut être modélisée de façon séparée et qui n'est plus contrainte par la superposition physique de l'action du conducteur et de l'action de l'assistance. Réalisée ou en étude avancée chez plusieurs équipementiers de l'automobile (ZF Group, Jtekt, Renault [Gui07]), les systèmes de direction filo-commandée sont autorisés à la vente en Europe depuis 2005 [ECE05]. Cependant, cette technologie soulève par ailleurs d'autres enjeux théoriques et techniques, notamment ceux liés à la stabilité du système de direction dans sa globalité et à la restitution des forces de contact pneu-chaussée au conducteur, qui ici fournit une perception de la route très utile.



FIG. 2.6 – Système de direction « steer by wire » développé par ZF Group.

La commande de ces systèmes peut se faire de façon unilatérale, bilatérale ou mixte [Cou07]. Dans le premier cas, le découplage entre les roues directrices et le volant est complet. Le dispositif de braquage des roues est asservi en fonction de la position du volant et le conducteur reçoit un retour d'effort, calculé, par exemple, à l'aide d'une cartographie [Oh04] ou via une fonction qui dépend de la vitesse et de l'angle [Seg01]. La structure de commande bilatérale renvoie une image des forces de contact au niveau du volant, image qui se veut être soit la plus fidèle possible à la réalité (système « transparent ») [Swi06], [Can05], soit optimisée pour assurer l'agrément de conduite [Yao06]. Finalement, la stratégie mixte a l'objectif d'utiliser selon le cas l'une des structures de commande, en fonction notamment de la nécessité de restituer l'effort à la surface de contact, notamment pour des adhérences réduites.

La commande de guidage latéral vient donc s'ajouter aux contrôles du système filo-commandé lui-même. Un état des lieux des travaux récents dans le domaine du contrôle de ce type de direction et de la synthèse d'assistances les utilisant peut être trouvé dans [Swi06], [Can05], [Cou05], [Cou07], [Pan06].

2.2.3 Contrôle latéral du véhicule

Cette section dresse un état des lieux des méthodes de contrôle de la direction par braquage des roues directrices pour des véhicules équipés d'une colonne de direction avec ou sans lien mécanique. La commande de la direction du véhicule par freinage différentiel n'y sera pas traitée.

Les lois de commande pour le contrôle latéral peuvent être conçues dans un objectif d'automatisation ou d'assistance pour le maintien du véhicule au centre de la voie. La prise en compte du conducteur dans les étapes de synthèse est relativement récente et suscite beaucoup d'attention ces dernières années. Il est généralement convenu, qu'une commande en couple de braquage est plus naturelle dans le cas d'une direction conventionnelle. Il en est de même pour la commande en angle des roues dans le cas des directions filo-commandées. Cette constatation est corroborée par les arguments fournis dans [Nag02], où les auteurs ont comparé les deux approches (couple ou angle) sur un véhicule équipé d'une colonne de direction conventionnelle. En utilisant un modèle « bicyclette » de véhicule et des lois de commande par retour statique d'état calculées via l'approche d'optimisation linéaire-quadratique, ils concluent que la différence fondamentale entre ces approches provient du couple d'auto-alignement et du couple conducteur qui s'exercent sur la colonne de direction. Alors que ces couples sont modélisés de façon explicite pour la synthèse d'une commande en couple, ils apparaissent comme des perturbations dans le cas d'un contrôle en angle de braquage. Cette perturbation est alors rejetée dans la boucle supplémentaire d'asservissement de l'angle de braquage sur la valeur de consigne. Même si cette boucle supplémentaire rend la loi de commande en angle plus robuste par rapport à celle en couple, un observateur implanté pour compenser la perturbation par préfiltrage, risque de rejeter non seulement la perturbation de couple d'auto-alignement, mais aussi le couple du conducteur. C'est pour cette raison que les auteurs de [Nag02] concluent que la commande en couple est plus appropriée pour cohabiter avec la commande conducteur pour ce type de direction. Cependant, ils ne détaillent pas comment traiter l'influence de cette entrée conducteur qui représente aussi une perturbation pour la commande en couple .

La prise en compte de l'interaction avec le conducteur dès les étapes de synthèse de loi de commande demeure un problème ouvert. Plusieurs approches de synthèse de loi de commande pour le contrôle latéral en angle ou en couple de braquage sont maintenant passées en revue.

Méthodes de synthèse de loi de commande robuste et optimale

Les méthodes de synthèse de loi de commande robuste et optimale LQ¹⁸, LQG¹⁹, H_2 et H_∞ ont été utilisées par [Pen94], [Mou99], [Shi02], [Rah04(b)], [Lee02] et [Koe01].

Les auteurs de [Pen94] ont développé dans le cadre du projet PATH une loi de commande pour le contrôle latéral en tenant compte du confort des passagers via une approche FSLQ²⁰. Cette approche permet d'inclure dans la fonction de coût des signaux filtrés représentatifs d'une mesure de confort. Le problème FSLQ peut être transformé par une augmentation du vecteur d'état en un problème LQ. La mesure de la courbure, considérée comme une perturbation, est rendue possible par l'utilisation d'aimants codés et sert de terme de compensation par préfiltrage.

Dans [Mou99] la courbure de la route a été considérée d'abord comme mesurable et un contrôle vers un point d'équilibre différent de l'origine a été synthétisé par la théorie de la commande linéaire quadratique (LQ). Quand celle-ci n'est plus accessible à la mesure, elle est modélisée comme la sortie d'un filtre formant du premier ordre et une nouvelle loi de commande LQ est

¹⁸Linéaire Quadratic

¹⁹Linéaire Quadratic Gaussian

²⁰« Frequency-Shaped-Linear-Quadratic »

synthétisée.

Une loi de commande en couple de braquage sur la colonne de direction a été synthétisée dans [Shi02]. Pour cela, la colonne de direction a été modélisée comme un système mécanique du deuxième ordre ayant comme entrées : le couple d'assistance fourni par un moteur électrique, le couple d'auto-alignement et le couple du conducteur. La courbure de la route est une entrée du système véhicule lié à la voie. Le couple du conducteur et la courbure ont été modélisés par des équations différentielles linéaires avec un bruit blanc en entrée qui sont par la suite intégrées au vecteur d'état. Seul l'écart latéral en avant du véhicule et l'angle de braquage ont été considérés accessibles à la mesure. Les autres variables ont été estimées en même temps que la synthèse de la loi de commande. Celle-ci a été calculée en minimisant la norme H_2 de la fonction de transfert du système en boucle fermée du bruit blanc et du bruit de mesure vers le positionnement par rapport à l'axe de la voie. Une analyse de robustesse par « μ -analyse » pour différentes variations de paramètres (coefficients de raideurs des pneus avant et arrière, puissance du moteur électrique, masse) et par rapport aux perturbations (vent latéral, courbure de la route) a été ensuite réalisée.

Les auteurs de [Lee02] ont adopté une approche similaire à celle de [Shi02]. Une commande en couple de type LQ a été développée, elle est associée à un filtre de Kalman pour l'estimation de la courbure de la voie. Cette fois, le conducteur est pris en compte via un modèle de conducteur qui inclut un temps mort, un retard physique inhérent, et un paramètre décrivant l'effet kinesthésique de l'assistance sur le couple du conducteur.

La méthode de synthèse H_∞ a été employée par [Rah04(b)]. Il s'agit d'une loi de commande en couple sur la colonne de direction qui utilise un modèle du deuxième ordre pour la colonne de direction mécanique et un modèle de conducteur. Seuls l'écart latéral en avant du véhicule et l'angle de cap relatif sont considérés comme mesurables. La loi de commande dynamique est synthétisée en minimisant la norme H_∞ des fonctions de transfert de la perturbation (vent latéral) vers la sortie (l'écart latéral) et l'entrée (couple d'assistance). Une analyse de robustesse par « μ -analyse » a ensuite été effectuée par rapport aux variations de la vitesse longitudinale et du coefficient d'adhérence.

Méthodes de synthèse utilisant les méthodes d'optimisation LMI et BMI

L'optimisation LMI²¹ est récemment devenue un outil très utilisé pour la synthèse des lois de commande pour le contrôle latéral des véhicules. Mentionnons que la plupart des lois de commande résumées précédemment utilisent ou peuvent utiliser les inégalités matricielles linéaires comme méthode de calcul (synthèse par H_∞ , « μ -analyse », contrôle LQ). Par la suite, deux références d'utilisation des méthodes d'optimisation LMI et BMI dans la synthèse de contrôle latéral seront ajoutées.

Les auteurs de [Li05] ont construit un problème d'optimisation à objectifs multiples pour calculer une loi de commande en angle de braquage par retour d'état statique, qui simultanément stabilise le système, rejette la perturbation (courbure de la route et vent latéral), prend en compte la saturation de l'actionneur et le retard introduit par des observateurs. En plus, une contrainte de limitation en valeur crête de l'écart latéral durant la période de convergence a été introduite. Celle-ci est réalisée à travers une condition sur la norme L_1 des fonctions de transfert des perturbations, supposées persistantes (bornées en valeur absolue), vers l'écart latéral. Finalement, un contrôleur robuste L_1/H_∞ est obtenu comme le résultat d'une série d'inégalités matricielles linéaires. Cependant, l'analyse du problème permet de constater qu'il admet difficilement une solution, car il est, en réalité, qu'une forme simplifiée d'un système d'inégalités matricielles non pas linéaires mais bi-linéaires (BMI).

²¹ « Linear Matrix Inequalities »

Une loi de commande en angle de braquage par retour de sortie statique a été conçue dans [Ben05]. Dans un premier temps, une expression linéaire à paramètres variants est adoptée pour les forces de contact latérales. La variation de ces paramètres correspond à une saturation des forces latérales. Ces expressions linéaires permettent alors d'exprimer le modèle « bicyclette » de véhicule comme un système linéaire variant dans le temps (LTV, « Linear Time Varying »). Par la suite, la synthèse du contrôle par retour de sortie est écrite sous la forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMIs). La satisfaction des inégalités matricielles bilinéaires aux limites des intervalles des paramètres est suffisante pour conclure de leur validité sur tout l'intervalle, car ces inégalités sont elles-mêmes linéaires par rapport aux paramètres des forces latérales. La loi de commande qui en résulte est alors robuste vis-à-vis de la saturation des forces latérales. Les auteurs avaient alors proposé une résolution itérative du système de BMIs, sachant que des solveurs de problèmes d'optimisation BMI fiables sont maintenant disponibles.

Méthodes de synthèse par l'approche du champ de potentiel et fonction de Lyapunov

L'approche du contrôle latéral, fondée sur le champ de potentiel, provient de la théorie de déplacement des robots. Les véhicules, comme les robots, sont amenés à suivre soit des trajectoires de consigne définies à travers des coordonnées cartésiennes qui, par exemple, évitent les obstacles [Vil07], soit des chemins à énergie potentielle minimale. Dans cette dernière approche, la voie de circulation est caractérisée par un champ de potentiel à énergie nulle sur l'axe de la voie et croissante quand on se déplace vers ses bords. Les obstacles et les autres véhicules, présents sur la voie, peuvent aussi être intégrés au modèle, ils sont représentés comme des sommets du champ de potentiel. Cette approche a été intensivement étudiée par l'équipe de Dynamic Design Laboratory (DDL) de l'Université de Stanford aux États-Unis avec l'objectif de concevoir une assistance à la conduite qui partage le contrôle de la direction avec le conducteur [Ros03], [Ros04], [Ger01], [Swi06].

Dans la thèse de doctorat de [Ros03] une loi de commande en angle de braquage a été réalisée et testée sur un véhicule prototype à direction de type « steer by wire ». Une commande par braquage et freinage différentiel simultanés a été d'abord étudiée en utilisant une force virtuelle équivalente appliquée sur l'axe du véhicule et calculée à partir d'un champ de potentiel quadratique fondé sur l'écart latéral et l'angle de cap relatif. Les propriétés du système commandé par la force virtuelle ont été explorées pour différentes variations de paramètres : le point d'application de la force virtuelle, la vitesse longitudinale et le comportement sousvireur/survireur du véhicule. Il en a résulté que pour assurer la stabilité du véhicule, la force virtuelle doit être appliquée en avant du centre de gravité pour un véhicule de comportement neutre. De plus, à haute vitesse ($30m/s$), cette force virtuelle doit utiliser un écart latéral mesuré bien en avant du véhicule ($30m$). L'ajout d'amortissement au contrôleur a été fait par l'ajout d'un bouclage des variables d'état correspondant à la vitesse de variation de l'écart latéral et de l'erreur de cap. L'implantation d'un retour d'état complet présente l'avantage d'autoriser un emplacement libre des pôles du système en boucle fermée, mais rend le contrôle difficilement annulable au centre de la voie. Ce dernier comportement risque alors de gêner le conducteur. De plus, une fonction de Lyapunov fondée sur un sous-ensemble d'énergie du système facilite le calcul des bornes pour l'écart latéral du véhicule pendant l'activation de l'assistance. Cette loi de commande a été implantée sur un véhicule avec la direction filo-commandée, les tests ont démontré de bonnes performances de suivi de voie.

Finalement, un dispositif de contrôle de la direction filo-commandée du véhicule prototype incorporant la restitution d'effort a été conçu dans une autre thèse de doctorat [Swi06] pour tester les capacités de partage du contrôle de cette assistance avec le conducteur. Les résultats

obtenus ne sont pas concluants et la stabilité globale du système avec l'intervention du conducteur demeure un domaine de recherche de l'équipe du DDL.

Comparaisons des approches de synthèse de loi de commande

Une étude comparative des trois stratégies de contrôle latéral, correction par avance de phase (« lead-lag control »), contrôle par retour d'état statique et contrôle par linéarisation, utilisant un positionnement du véhicule par rapport à la voie de circulation via une caméra en vision frontale a été réalisée par [Tay99]. Dans un premier temps, l'influence des trois paramètres du modèle « bicyclette » de véhicule est analysée : la vitesse longitudinale, la distance de mesure de l'écart latéral en avant du véhicule et le retard introduit par le traitement d'image. Notons que l'analyse de l'effet de la distance de mesure de l'écart latéral a aussi été traitée dans [Gul97] pour le projet PATH. Les conclusions de ces études sont les suivantes : l'augmentation de la vitesse longitudinale déplace les pôles et les zéros de la fonction de transfert, de l'angle de braquage vers l'écart latéral, sur la droite du plan imaginaire et rend le système moins stable. Une extension de la distance en avant du véhicule agit sur les zéros de la même fonction de transfert et les rapproche de l'axe réel. En conséquence, le système devient mieux amorti. Le retard dû au traitement d'image diminue considérablement la marge de phase. Ces trois effets apparaissent simultanément et peuvent se compenser mutuellement. Par exemple, une augmentation de la distance de mesure en avant du véhicule peut assurer une marge de phase non-nulle malgré le retard, mais jusqu'à une certaine limite. Après avoir synthétisé et implanté les trois contrôleurs en angle de braquage, des tests sur un véhicule prototype ont été conduits sur un trajet en oval. La loi de commande à avance de phase a les meilleures performances de suivi de voie, elle est secondée par le contrôle obtenu par linéarisation entrée-sortie. La loi de commande par retour d'état statique provoque un dépassement notable pendant les transitions des courbes vers les lignes droites. L'ajout d'un terme de compensation en préfiltrage (terme statique obtenu pour le régime permanent en virage) de la courbure de la trajectoire de référence conserve la hiérarchie établie précédemment. La courbure est calculée via un observateur en partant de l'écart latéral et de l'angle de cap relatif fournis par la vision.

[Cha04] a réalisé une comparaison de quatre lois de commande en angle de braquage synthétisées pour le modèle « bicyclette » de véhicule : il s'agit d'une commande adaptative, une commande H_∞ , un contrôleur par logique floue et un contrôleur proportionnel. Le contrôle adaptatif utilise uniquement la mesure de l'écart latéral en avant du véhicule. Tous les paramètres du véhicule (parmi ceux-ci, citons la masse et le moment d'inertie, les raideurs des pneus, l'adhérence de la surface de contact et la vitesse longitudinale) sont supposés inconnus, mais bornés à l'intérieur d'un ensemble compact. La commande adaptative en angle de braquage s'est faite par l'estimation et l'adaptation continue de ces paramètres. La deuxième loi de commande, par synthèse H_∞ , contrôle simultanément l'écart latéral et l'angle de cap relatif et fait accroître par un pré et un post filtrage la marge de gain de 26%. Le contrôle synthétisé par la logique floue utilise un tableau de règles à deux entrées, la vitesse longitudinale et l'écart latéral, quantifiées par cinq classes. L'appartenance à ces classes est donnée par des fonctions triangle, l'inférence est faite par la méthode de la somme et produit, et le contrôle en angle de braquage s'obtient par la méthode du barycentre. La commande proportionnelle agit sur les erreurs de l'écart latéral et de l'angle de cap. Les quatre commandes ont été simulées dans le mode conduite automatique, le long d'un circuit incluant des virages. Trois situations ont été testées en simulation : variation du coefficient d'adhérence, variation de la vitesse longitudinale et introduction d'un vent latéral. Dans tous les cas, le contrôleur proportionnel a eu les plus grands dépassements et le contrôleur adaptatif le meilleur comportement. L'évolution du système contrôlé par la commande H_∞ est

très proche de celle par logique floue.

Un problème spécifique, portant sur la commande automatique d'un bus sur une voie très étroite, a été traité dans [Ack95]. Les spécifications très précises pour l'écart latéral (maximum $0.15m$ en régime transitoire) et pour l'accélération latérale (inférieure à $2m/s^2$) ont été abordées via une loi de commande linéaire dynamique et une loi de commande par modes glissants. Deux commandes en angle de braquage ont été synthétisées par les deux méthodes avec retour de l'écart latéral et de la vitesse en lacet. La robustesse vis-à-vis de la variation des paramètres de masse et de vitesse longitudinale du bus a été prise en compte par itération sur le calcul des lois de commande jusqu'à la satisfaction des spécifications. Finalement, les deux contrôleurs obtenus avaient des performances comparables, la seule différence concerne la loi de commande par modes glissants qui maintenait l'écart latéral plus faible, mais au prix d'oscillations sur l'accélération latérale et l'angle de braquage.

2.2.4 Systèmes intégrés d'assistance active au contrôle latéral du véhicule

Le concept CAPC

Un résultat concret du projet CAPC²² est l'implantation pratique d'une unité d'avertissement de sortie de voie présentée dans [LeB96]. Cette unité constituait la première étape à la réalisation d'une assistance à la conduite plus complexe à objectifs multiples :

1. Anticiper les départs de la voie de circulation.
2. Avertir le conducteur du danger de sortie de voie.
3. Intervenir activement, si nécessaire, par un contrôle additionnel de la direction du véhicule pour éviter la sortie de voie.

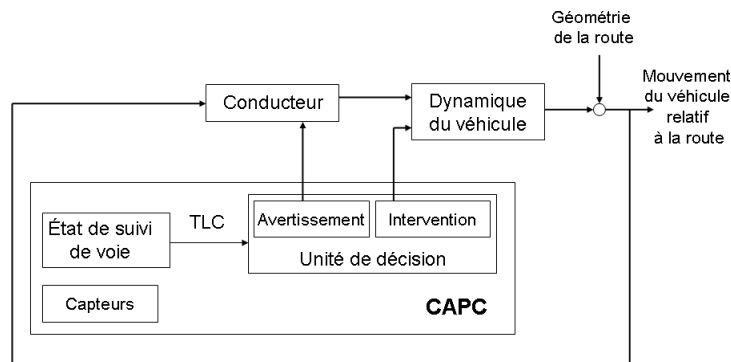


FIG. 2.7 – Le concept de l'assistance à la conduite du projet CAPC [LeB96].

Contrairement au contrôle totalement automatisé du véhicule, cette assistance a été développée pour servir de « co-pilote » vigilant. Le schéma de partage des tâches avec le conducteur est représenté sur la Figure 2.7. Les fonctions à travers lesquelles l'assistance remplit ses tâches sont les suivantes (voir Figure 2.8) :

1. *Estimation de l'état du véhicule et de la géométrie de la route.* Cette fonction est réalisée par l'intermédiaire d'une seule caméra montée en vision frontale et capable de détecter les marquages latéraux à une distance, en avant du véhicule, allant de $6m$ à $100m$. Deux

²² « Crewman's Associate for Path Control »

filtres de Kalman sont utilisés ; un premier filtre fournit l'écart latéral, l'erreur de cap et la courbure de la route à partir des images proches et un second utilise des données des images éloignées (20m-100m) ainsi que les estimations du premier filtre de Kalman pour reconstruire la géométrie de la route à distance.

2. *Calcul du temps à sortie de voie (TLC, « Time to Lane Crossing »)*. Le temps à sortie de voie est défini comme le temps qui sera écoulé jusqu'au moment où le centre de gravité du véhicule croisera un des bords de la voie, sous les conditions que la vitesse longitudinale et l'angle de braquage restent constants. Il est calculé en projetant la trajectoire du véhicule via un modèle « bicyclette » (intégration numérique), sur l'estimation de la trajectoire de route fournie par le filtre de Kalman. Les conditions initiales sont quant à elles données par les mesures des variables d'état.
3. *Unité de décision pour initier l'avertissement ou l'intervention*. Deux seuils sur le TLC ont été choisis pour déclencher l'assistance : un seuil haut à 2s pour l'avertissement et un seuil bas à 1s pour l'intervention. Ces valeurs ont été fixées après simulation et tests, elles tiennent compte de la contrainte d'une part de minimiser le nombre de fausses activations et d'autres part d'activer l'assistance suffisamment tôt pour empêcher les sorties de voie.
4. *Surveillance de l'état du conducteur (non-implantée)*.
5. *Intervention active par freinage différentiel (non-implantée)*. L'implantation de cette fonction était envisagée à partir de la solution décrite dans [LeB96(a)]. Rappelons qu'elle offre l'avantage de ne pas partager le même actionneur de direction avec le conducteur, mais présente l'inconvénient d'une efficacité réduite, comme évoqué dans la Section 2.2.2.

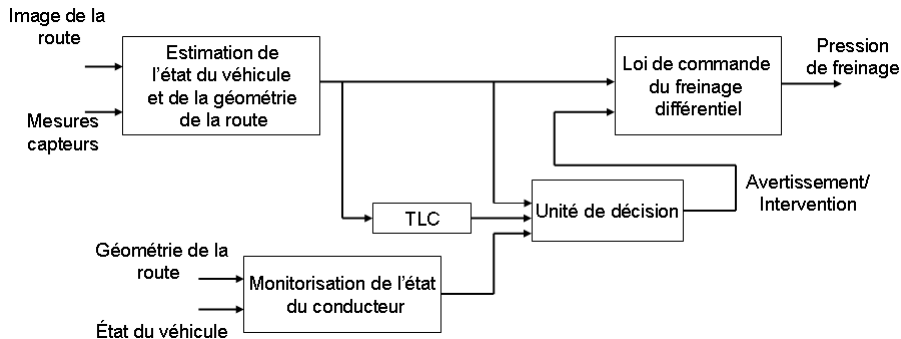


FIG. 2.8 – Concept et fonctions de l'assistance à la conduite dans le projet CAPC [LeB96].

Les expérimentations ont visé principalement le test des trois premières fonctions pour avertir le conducteur sur le danger de sortie de voie. Elles ont permis de conclure que la fonction de TLC implantée est utilisable pour plusieurs type de conduite, sans générer un nombre de fausses alarmes excessif. Cependant, les seuils choisis ont été perçus différemment selon les conducteurs qui ont trouvé l'intervention de l'assistance plus ou moins agréable.

Le concept du projet AKTIV

Un autre concept intégré d'assistance au maintien dans la voie est en cours de développement dans le sous-projet sur l'assistance latérale du volet Sécurité Active dans le projet AKTIV (voir Section 2.1.2). Cette assistance à la conduite a comme objectifs [Kre07] :

1. Le développement d'une assistance latérale avec superposition continue du couple d'assistance, qui allège la tâche de guidage latérale du véhicule mais ne remplace pas le conducteur. Il est d'ailleurs prévu que le conducteur doit maintenir ses mains sur le volant.
2. Le fonctionnement de l'assistance pour une grande plage de vitesses allant de 0km/h à 180km/h et pour des environnements et des situations de trafic très différentes : autoroutes, routes départementales, routes congestionnées ou zones des travaux.
3. Le comportement de l'assistance doit être adaptable. L'assistance utilise plusieurs moyens de perception : stereo caméra et radars montés en frontal, en latéral et à l'arrière. Cet équipement est combiné à une cartographie couplée à un système de localisation.

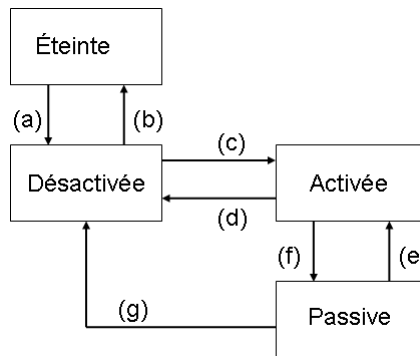


FIG. 2.9 – Les états de l'assistance latérale intégrée développée dans le projet AKTIV.

Dans [Kre07], les états discrets de fonctionnement de cette assistance sont brièvement présentés comme sur la Figure 2.9.

- Dans l'état *Éteinte* l'assistance est déconnectée par le conducteur, elle ne peut pas s'activer quelle que soit la situation de conduite.
- Dans l'état *Désactivée* l'assistance ne peut pas s'activer automatiquement, mais le conducteur peut l'activer.
- Dans l'état *Activée* l'assistance est active et agit d'une manière continue, tant que le système se trouve à l'intérieure des bornes définies pour son fonctionnement.
- Dans l'état *Passive* l'assistance n'agit pas, et peut se réactiver automatiquement ou passer dans l'état *Désactivée*.

Les transitions décrites dans [Kre07] ont lieu selon la stratégie suivante :

- La transition (c) a lieu après une activation de l'assistance par le conducteur.
- La transition (f) a lieu si les bornes définies pour le fonctionnement de l'assistance sont dépassées ou si le conducteur intervient d'une façon limitée.
- La transition (e) a lieu pour une réactivation après l'intervention du conducteur ou si le système est revenu dans les bornes définies pour son fonctionnement.
- La transition (g) a lieu pour une désactivation automatique si les limites d'adaptation à la situation ont été dépassées. Ces limites d'adaptation sont par exemple la durée d'action de l'assistance et le nombre de dépassements des bornes défini pour le fonctionnement de l'assistance.

Cette stratégie d'activation/désactivation peut entraîner une certaine confusion vis-à-vis du conducteur ; la passivité temporaire de l'assistance pourrait lui paraître peu compréhensible.

2.3 Le conducteur et l'assistance au maintien dans la voie

2.3.1 Prise en compte du conducteur par l'assistance

La prise en compte du conducteur constitue une composante fondamentale de la conception des assistances à la conduite. Elle peut se faire par différents biais : dans la synthèse des lois de commande pour l'assistance, dans la logique d'interaction de la loi d'assistance avec le conducteur ou par des interfaces de communication avec celui-ci.

Loi de commande automatique et conducteur

L'intégration de la prise en compte du conducteur lors de la synthèse d'une loi de commande est un enjeu non encore totalement résolu. Bien que le conducteur et la loi d'assistance latérale interagissent au niveau de la colonne de direction avec ou sans lien mécanique, ils se perçoivent mutuellement comme des perturbations. Sans aucune modélisation de la perturbation « entrée conducteur » la solution consiste à synthétiser des lois de commande robustes, comme c'est le cas dans [Li05], mais un modèle peut aussi être considéré en espérant que ce modèle reste fidèle aux actions du conducteur humain une fois l'assistance activée. Pour pallier les éventuelles différences, la robustesse du système en boucle fermée doit être renforcée par la loi de commande [Lee02], [Rah04(a)].

La prise en compte du conducteur peut aussi se faire simplement par l'intermédiaire de limitations sur des variables représentant le confort de conduite. À titre d'exemple, pour le contrôle latéral d'un bus, les auteurs de [Ack95] exigent une accélération latérale de moins de $2m/s^2$ avec une limite haute à $4m/s^2$ et une fréquence de résonance inférieure à $1.2Hz$. Une variable supplémentaire, importante pour le confort, est le « jerk » qui représente la vitesse de variation de l'accélération. Le « jerk » doit rester inférieur à $2m/s^3$ [Can05].

Identification et surveillance de l'état du conducteur

L'identification et la surveillance de l'état du conducteur a pour but d'une part de faciliter les conditions d'activation et de réduire les interventions non-souhaitées et, d'autre part, d'adapter l'action de l'assistance à l'état de conducteur.

Différentes techniques peuvent être utilisées :

- Des capteurs mesurent la dynamique du véhicule relative à la voie de circulation. Ces mesures alimentent un modèle conducteur dont les sorties sont comparées aux actions actuelles sur les organes de commande du véhicule [Pil99],[Che01].
- Le conducteur est directement observé par une caméra et son état est caractérisé par traitement d'images [Toc96], [Bul05]. Il est aussi possible de combiner cette technique avec la précédente [Pet05].

L'étude [Esk07] fournit une revue détaillée de la littérature sur le sujet, dont : les facteurs contribuant à la fatigue causant des accidents, les méthodes pour détecter l'état de fatigue des conducteurs et les stratégies d'avertissement. Certains aspects concernant la caractérisation des capacités de conduite dégradées et la caractérisation de la situation de conduite normale seront repris en détail dans la Section 5.1.2 du Chapitre 5, Partie III.

L'interface homme-machine

Contrairement à d'autres domaines, comme l'aéronautique ou les processus industriels, pour lesquels l'automatisation joue un rôle important depuis bien longtemps, l'automatisation des

tâches de conduite est relativement nouvelle et souffre du manque d'approche dédiée aux interfaces homme-machine (IHM). Une perspective historique sur l'évolution des IHM pour les systèmes d'aide à la conduite est fournie par [Wal01].

Dans le cas des assistances au maintien dans la voie, le volant constitue bien entendu une interface naturelle pour le retour d'information sur l'alerte : vibrations, suggestion d'action, correction. Ces modes de communication ont notamment été mis en œuvre dans les différents modes d'assistance développés dans le projet ARCOS [ARC04] (voir Section 2.2.1).

L'information au travers de la colonne de direction peut être complétée par un signal sonore. Les auteurs de [LeB96] ont proposé pour le projet CAPC deux sons différents pour accompagner l'aide au conducteur : un son pour l'avertissement et un son pour l'activation de la fonction d'évitement actif de sortie de voie.

Des interfaces visuelles peuvent aussi être couplées aux systèmes d'assistance. Elles prennent la forme de voyants sur le tableau de bord. Cette solution est par exemple adoptée dans le système de maintien de voie développé par Nissan « Lane Keeping Assistance » (LKA) [Kaw01]. Le fonctionnement du système est symbolisé par un voyant lumineux « LANE ». De plus, si l'assistance est activée et que le véhicule suit automatiquement l'axe de la voie, un voyant avec les marquages latéraux est alors visible. Un autre exemple est l'interface de Volkswagen Passat CC détaillée dans la Section 2.4.2.

2.3.2 Acceptabilité des assistances à la conduite et adaptation au comportement

Acceptabilité

Les systèmes d'assistance au maintien de voie étant encore faiblement répandus sur les véhicules, les études sur l'acceptabilité des assistances à la conduite par les conducteurs sont encore rares. De plus, comme toutes les études qui impliquent des tests sur des humains, elles sont difficiles à concevoir d'une manière objective et à mettre en œuvre. Deux études seront présentées par la suite, elle concernent les systèmes Volvo et Toyota.

Dans le cadre d'un accord de coopération entre le département des transports des États-Unis (USDOT), Volvo Trucks North America et US Xpress, une évaluation indépendante du projet Volvo Intelligent Vehicle Initiative (IVI) Field Operational Test (FOT) a été conduite par le bureau d'étude Battelle [Vol07]. Trois fonctions d'assistance à la conduite sur camions ont été évalués : l'alerte de collision (« Collision Warning System », CWS), le régulateur de vitesse et d'interdistance (« Adaptive Cruise Control », ACC) et un système de freinage avancé (« Advanced Braking System », AdvBS). L'évaluation a été conduite sous trois angles : gains en sécurité, acceptabilité par les conducteurs et bénéfices économiques. L'analyse d'acceptabilité a été menée avec la participation de 204 conducteurs, selon les critères suivants :

1. *Facilité d'usage.* La moitié des conducteurs ont déclaré avoir été formés au CWS, mais moins qu'un quart ont eu un apprentissage sur ACC et AdvBS. Les conducteurs ont déclaré avoir bien assimilé le fonctionnement de CWS, mais la signification des sons associés aux signaux visuels et les distances de déclenchement n'étaient pas claires.
2. *Charge de conduite et stress.* La plupart des conducteurs ont déclaré que les avertissements de CWS ne perturbent pas la tâche de conduite. La moitié des conducteurs ont déclaré que la conduite avec CWS était beaucoup moins stressante bien que la moitié des déclenchements du système CWS paraissaient non justifiés.
3. *L'impact sur la conduite.* Le constat général des conducteurs était que ces systèmes d'assistance rendent la conduite plus sûre. Plus que 80% des conducteurs questionnés souhai-

teraient disposer de camions équipés avec CWS et plus de 90% avec AdvBS. Les opinions concernant ACC sont mitigées : la moitié des conducteurs ont affirmé que le système ACC les avait aidés à garder une interdistance sûre alors que l'autre moitié se sont sentis gênés par la perte du contrôle longitudinal du véhicule.

4. *Qualité perçue* Les conducteurs ont été, en majorité, satisfaits des performances des trois systèmes. 39% de conducteurs ont reporté des problèmes de performance de CWS, 21% de ACC et 19% de AdvBS.

Le rapport final du projet néerlandais « The Assisted Driver » présente une évaluation de l'acceptabilité par les conducteurs des systèmes avancées d'aide à la conduite [Alk07]. Quatre types de systèmes ont été mis à l'épreuve : un système d'avertissement à partir de l'interdistance par rapport au véhicule qui précède (« Headway Monitoring and Warning », HMW), un régulateur de vitesse et d'interdistance (« Adaptive Cruise Control », ACC), un système d'avertissement en cas de dérive latérale importante (« Lane Departure Warning », LDW) et un système d'aide active au maintien de voie (« Lane Keeping System », LKS et « Lane Keeping Assistance », LKA). Ces systèmes ont d'abord été testés sur simulateur de conduite puis en situation réelle de trafic par des conducteurs travaillant sur le projet. Les systèmes LDW et HMW ont été implantés sur des mini-bus faisant le trajet domicile-bureau, 19 personnes ont conduit, pendant 6 mois, une Volkswagen Passat équipée en LDW et ACC et 7 d'entre eux ont conduit pendant trois jours une Toyota Lexus équipée en LKA et LDW.

L'étude a révélé que les systèmes actifs étaient mieux appréciés que les systèmes passifs. Le LDW a aussi la faveur par rapport au système HMW. Tous les participants ayant testé LDW et LKA considèrent que LKA représentait une amélioration de LDW. La conduite avec deux systèmes actifs simultanément (ACC et LKA) n'a pas été jugée excessive, au contraire ces systèmes sont jugés comme complémentaires.

Deux systèmes particuliers ont été évalués sur Toyota Lexus : un système d'avertissement au départ de voie (LDW) qui ajoute une action corrective dans le sens du retour vers l'axe de la voie et un système de maintien de voie qui se déclenche uniquement si le véhicule dérive de la voie (LKA). Cinq des sept conducteurs ont mentionné que les performances du système LKA ont dépassé leurs attentes, deux autres les ont vues se confirmer. Les aspects positifs évoqués sont : la douceur de la correction qui ne crée aucune gêne (une personne), le système maintient le véhicule entre les marquages de la voie via corrections actives (trois personnes) et améliore le niveau de confort et de sécurité (deux personnes). Les aspects négatifs reportés sont les suivants :

- le temps d'accommodation au système (deux personnes),
- le sentiment de rester écarté de l'axe de la voie pendant la conduite automatique (deux personnes),
- la sensation de vent latéral dans le volant (deux personnes),
- la tendance à la dérive si le conducteur intervient trop tard (une personne),
- la dérive pour une correction prolongée sans intervention (une personne),
- le risque de perdre la concentration (une personne).

Adaptation

Un revue de littérature sur les problèmes dus à l'adaptation comportementale induite par différentes aides à la conduite a été réalisée dans [AID04]. Ces problèmes de comportement peuvent apparaître :

- *Dans l'activité du conducteur.* Mentionnons le partage de l'attention entre l'environnement routier et les nouvelles sources d'information, le changement de stratégie de conduite et la délégation de la tâche de contrôle du véhicule au système d'assistance.

- Dans l'interaction du conducteur avec les autres participants au trafic. Il s'agit par exemple de la compréhension des activités du conducteur assisté par les autres participants au trafic.
- Dans la situation générale de trafic. Comme conséquence des changements précédents, la vitesse globale et la stabilité du flux routier peuvent être modifiées.

Il est alors important de déterminer la nature et l'ampleur de ces changements, car finalement ce sont eux qui vont influencer les gains en sécurité routière dus à l'introduction des aides à la conduite.

2.4 Les systèmes sur le marché

Cette section évoque des systèmes d'aide à la conduite, plus spécifiquement d'aide active au maintien de voie, qui sont disponibles sur les véhicules commercialisés ou en passe de l'être. L'introduction de ces systèmes sur le marché a pris du retard à cause des limites techniques, difficiles à surmonter, et des questions, encore ouvertes, sur la responsabilité légale liée à leur usage. Quelques éléments sur l'état actuel de la législation sont d'abord abordés.

2.4.1 Responsabilité juridique

La circulation routière est actuellement régie par la « Convention sur la circulation routière » qui a été signée à Vienne en 1968 ratifiée par la suite par 63 états. Cette convention précise les points suivants dans l'Article 8 :

- « 1. Tout véhicule en mouvement ou tout ensemble de véhicules en mouvement doit avoir un conducteur. »
- « 3. Tout conducteur doit posséder les qualités physiques et psychiques nécessaires et être en état physique et mental de conduire. »
- « 5. Tout conducteur doit constamment avoir le contrôle de son véhicule ou pouvoir guider ses animaux. ».

Ces dispositions seraient donc en contradiction avec le mode de fonctionnement des nouveaux systèmes actifs d'aide à la conduite dont le rôle est justement de suppléer les carences du conducteur. Pour pallier cette contradiction, apparue suite au progrès technologique, la commission européenne et l'industrie automobile ont lancé un ensemble de projets (RESPONSE 1, RESPONSE 2 et RESPONSE 3) traitant le sujet. Le projet RESPONSE 3 a été intégré au projet PREVENT en tant qu'activité horizontale afin d'encourager les autres sous-projets techniques à adopter rapidement les résultats obtenus dans RESPONSE 3.

L'objectif principal du projet RESPONSE 3 était de transférer les résultats des éditions précédentes dans une série de recommandations appelée « Code of Practice ». Des aspects traités par ce « Code of Practice » seront mentionnés par la suite [PRE08], [Sch07].

Dans un premier temps, les systèmes d'aide à la conduite ont été classés pour différencier la responsabilité juridique :

1. *Systèmes d'information et d'avertissement.* Ces systèmes informent ou alertent le conducteur mais n'interviennent pas activement dans le processus de conduite. Le conducteur reste donc entièrement responsable. Si une défaillance du système se produit, la responsabilité du constructeur ou du distributeur serait engagée.
2. *Systèmes actifs pouvant être désactivés à tout moment par le conducteur.* Pour ces systèmes la responsabilité légale sera décidée au cas par cas. Les facteurs de décision seront d'une part les limites du système et leur compréhension par le conducteur et d'autre part le comportement raisonnable du conducteur pour désactiver ces systèmes afin d'éviter les

situations critiques de trafic, mais les défaillances du système engagent la responsabilité du constructeur ou du distributeur.

3. *Systèmes actifs non-désactivables par le conducteur par conception ou à cause du temps de réaction.* Dans ce cas, l'entière responsabilité du constructeur ou du distributeur est très probable.

Parmi les thèmes abordés dans RESPONSE 3, mentionnons :

- *La possibilité de désactiver à tout instant l'assistance et responsabilité.* Ce thème a suscité beaucoup de questions mais peu de réponses : Pour les systèmes conçus pour s'activer en situation d'urgence, le constructeur doit-il être tenu pour responsable si le véhicule est dans un état dangereux et que le système ne s'active pas à cause des limitations des capteurs ? Comment traiter le cas d'une activation injustifiée, avec accident ? Il est, par exemple, possible d'activer les freins parce que le conducteur traverse une intersection malgré le feu rouge ? Pour répondre à ces questions, on considère que le conducteur est censé bien connaître son véhicule et le fonctionnement de ses équipements. Néanmoins, le scénario de location du véhicule rend une telle hypothèse infondée.
- *Fiabilité du système.* Il est bien connu qu'aucun système technique ne peut être totalement fiable, il ne peut donc qu'être de même pour les systèmes d'aide à la conduite. Un bon principe de développement serait en conséquence d'essayer d'élargir les situations où la plausibilité des capteurs assure le bon fonctionnement du système.

Comme suite à ces efforts de définition et de régulation des systèmes avancés d'aide à la conduite, La Commission Économique des Nations Unies a élaboré un accord portant sur l'adoption des systèmes d'aide à la conduite et les exigences à satisfaire pour la mise en vente des assistances pour la direction du véhicule [ECE05]. Ce texte discerne entre :

- *Systèmes de braquage autonomes.* Ces systèmes englobent une fonction qui à travers une électronique de contrôle complexe et des informations recueillies sur l'environnement du véhicule le détermine à suivre une trajectoire de référence. Le conducteur ne sera pas nécessairement en charge du contrôle du véhicule.
- *Systèmes avancés d'aide au contrôle de la direction du véhicule.* Ces systèmes ajoutent au système de direction du véhicule une aide complémentaire au contrôle du braquage des roues directrices, mais le conducteur reste en permanence en charge du contrôle du véhicule. Ces systèmes contiennent au moins une des fonctions suivantes :
 1. *Direction commandée d'une manière automatique.* C'est une fonction de contrôle de la direction du véhicule qui est fondée sur des informations des capteurs embarqués couplées éventuellement aux informations passives de l'infrastructure instrumentée. Elle fournit une action continue pour assister le conducteur à suivre une trajectoire de référence à basse vitesse, notamment pour des manœuvres de parking.
 2. *Correction automatique de la direction.* Cette fonction de contrôle agit de manière discontinue pour une durée limitée. Elle provoque des changements dans la direction du véhicule après l'évaluation par l'intermédiaire de capteurs embarqués de la nécessité de maintenir la trajectoire souhaitée du véhicule ou d'influencer la dynamique du véhicule.

Conformément à ce texte, l'usage des « Systèmes de braquage autonomes » n'est pas autorisé tant que les questions de responsabilité ne seront pas clarifiées. L'usage des « Systèmes avancés d'aide au contrôle de la direction du véhicule » est accepté à condition que ces systèmes ne changent pas le fonctionnement de base du système de direction et que le conducteur puisse à tout moment vaincre le système et reprendre le contrôle total de la direction par une action délibérée. De plus, chaque fois que la fonction de « direction commandée automatique » devient opérationnelle, cella

doit être indiqué au conducteur. Son action doit être désactivée automatiquement si le véhicule dépasse de plus de 20% la limite établie, ou de plus de 10km/h, ou si les signaux d'entrée ne sont plus reçus. La fin d'intervention doit être signalée au conducteur par un signal acoustique ou haptique.

Malgré ces questions de responsabilité juridique et de spécifications pas encore complètement standardisées, plusieurs constructeurs et équipementiers ont développé et mis en œuvre des systèmes actifs d'aide à la conduite et notamment d'aide au maintien de voie. La section suivante fournit des éléments sur l'état du marché dans ce domaine.

2.4.2 Systèmes de prévention active de sortie de voie disponibles sur le marché

Il existe deux types de systèmes commercialisés fournissant une aide active au conducteur afin d'éviter une sortie de voie involontaire. Le premier type de systèmes, dit de confort, a pour objectif de diminuer les fréquentes corrections mineures du conducteur pour se maintenir au voisinage de l'axe de la voie. Cependant, l'assistance ne remplace pas le conducteur elle est désactivée dès qu'une absence prolongée d'activité de celui-ci est détectée. Ces systèmes sont appelés LKS (« Lane Keeping Support ») ou LKA (« Lane Keeping Assist »). Ils sont actuellement les plus fréquents. Le second type correspond aux systèmes qui interviennent quand le véhicule s'est déjà écarté de l'axe de la voie, ils corrigent alors brièvement sa trajectoire. Ceux-ci sont connus plutôt comme des avertissements actifs (« Lane Departure Warning », LDW ou « Lane Departure Avoidance », LDA).

La mise en vente de véhicules équipés d'une assistance active en maintien de voie a débuté au Japon par le système proposé par Nissan en 2001 [IVs01(b)]. Ce pays a été encore une fois un pionnier dans le domaine des systèmes intelligents de transport. Dans une perspective historique, les auteurs de [Bru05] mentionnent que la première application mondiale du régulateur de vitesse et d'interdistance AAC a également eu lieu au Japon en 1995.

Le concept Nissan

Les concepts d'assistance latérale active proposée par Nissan en 2001 sont décrits dans [IVs01(a)]. Il s'agit d'une aide automatique au maintien de voie (« Lane Keeping Support », LKS) et d'une assistance pour éviter les sorties de voie involontaires (« Lane Departure Avoidance », LDA).

Le système LKS a été introduit au Japon sur le modèle CIMA. Il a été conçu pour fonctionner sur des autoroutes à très faible courbure. Ce système agit sur la direction du véhicule en même temps que le conducteur, son action diminue graduellement si le conducteur est inactif. Il n'y a donc pas de délégation totale de la conduite. Il utilise une caméra CCD pour détecter les lignes blanches, un actionneur de braquage et une unité logique de contrôle. La géométrie de la route et la position du véhicule sont estimées et constituent avec la vitesse longitudinale et l'angle de braquage des entrées pour le calcul du couple nécessaire pour maintenir le véhicule sur l'axe. Le couple d'assistance maximal est fixé très bas, la correction ajoutée est plutôt destinée à rejeter des perturbations comme le vent latéral et les imperfections lors que le véhicule est au voisinage de l'axe de la voie. Elle est donc mineure et n'interfère pas avec la volonté du conducteur, sachant que le système LKS peut, de plus, être désactivé dès que le conducteur contre-braque ou actionne un interrupteur sur le tableau de bord.

Le système LDA se comporte quant à lui comme un co-pilote qui se manifeste quand le véhicule est en train de sortir de la voie. Il intervient par un braquage automatique qui corrige

vers le centre de la voie et se transforme en signal d'avertissement haptique (vibrations au volant) et sonore. De même que le système LKS, si le conducteur n'intervient pas, l'action du système LDA est réduite graduellement, un accident par sortie de voie reste donc toujours possible. L'équipement du véhicule diffère peu de celui du système précédent.

Honda Accord

Une assistance au maintien de voie (« Lane Keep Assist System », LKAS), associée à un régulateur de vitesse et interdistançe (ACC), a été proposée par Honda sur le modèle Accord en 2004. Cette assistance avait pour objectif de réduire la charge du conducteur sur les longs trajets via un couple d'assistance sur la colonne de direction qui représente 80% du couple nécessaire au braquage, le reste étant toujours fourni par le conducteur. Le concept de fonctionnement de cette assistance est décrit dans [Iih04], il est représenté sur la Figure 2.10. Une caméra installée en position frontale, au niveau du rétroviseur intérieur, détecte les marquages latéraux de voie et positionne le véhicule sur la voie. La trajectoire optimale est ensuite calculée et le couple de braquage nécessaire pour suivre cette trajectoire est appliqué dans les proportions indiquées précédemment. L'action finale est réalisée par un moteur électrique monté sur la colonne de direction.

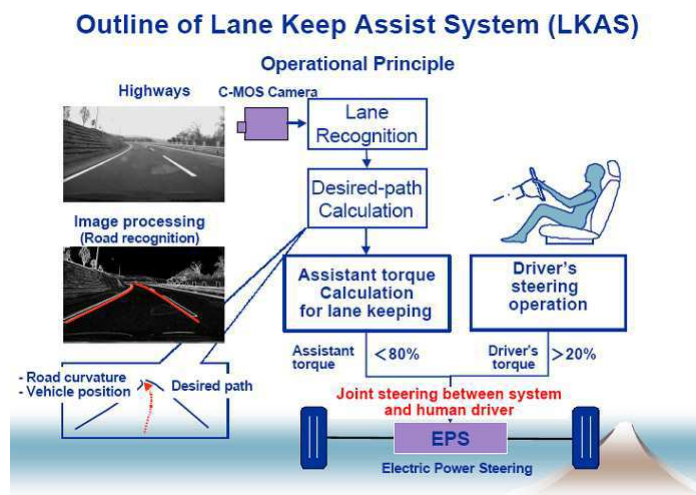


FIG. 2.10 – Concept LKAS sur Honda Accord [Iih04].

Le principe de partage du contrôle latéral avec le conducteur est visible sur la Figure 2.11. Le couple exercé par le conducteur sur le volant est mesuré en permanence et s'il indique un manque d'activité du conducteur, l'assistance est désactivée automatiquement.

Les autres limitations de fonctionnement, valables au Japon, pour ce système concernent la vitesse longitudinale (entre 65km/h – 100km/h), l'accélération latérale (inférieure à $0.2g$, g est l'accélération gravitationnelle) et le rayon de courbure de la route (supérieur à 230m) [Iih04].

Toyota Lexus

La Toyota Lexus est aujourd'hui au sommet de la technologie automobile. Sa conception remonte à 1983, quand les ingénieurs de Toyota se sont proposés de réaliser la plus luxueuse voiture au monde « The best luxury car in the world » [Yam07]. Après plusieurs essais, la

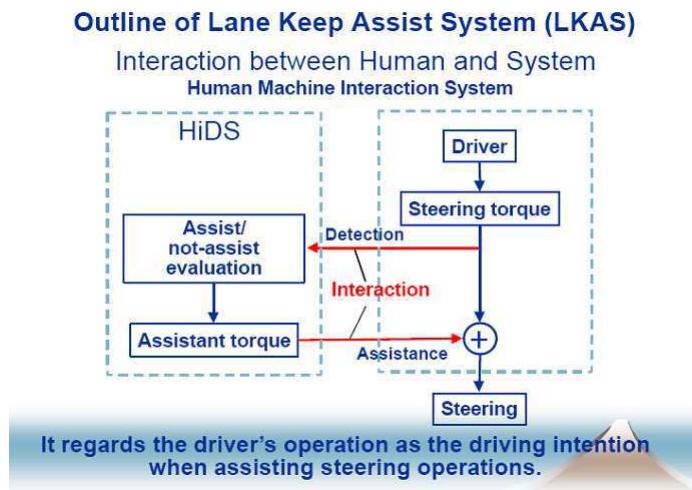


FIG. 2.11 – Interaction avec le conducteur dans le concept LKAS sur Honda Accord [Iih04].

marque Lexus a été lancée en 1989. En 2007, Toyota a présenté la Lexus LS 460 équipée de neuf nouveautés absolues dans l'équipement automobile. Parmi celles-ci, citons la boîte de vitesse automatique à huit rapports, un système de sécurité de pré-collision, un système de détection de vigilance du conducteur, une assistance au braquage d'urgence et un système avancé de détection d'obstacles. Sept autres nouveautés dans son segment ont de plus été mises en œuvre : l'assistance au parking automatique, l'assistance au maintien de voie, le rapport de transmission variable entre l'angle volant et l'angle des roues directrices ainsi que d'autres applications de pointe (freinage contrôlé électroniquement, suspensions pilotées en fonction de la posture du véhicule). Après avoir été mise sur le marché au Japon et au Royaume-Uni, elle est maintenant disponible dans toute l'Europe.

La LS 460 dispose de deux systèmes d'assistance au maintien dans la voie utilisant une caméra montée au niveau du rétroviseur intérieur [Alk07], [Per07]. Un premier système est plutôt orienté vers l'avertissement : un avertissement sonore est émis et une brève correction de la trajectoire est effectuée quand le véhicule s'approche dangereusement des marquages latéraux (LDW). Le deuxième système facilite le maintien de voie : le système corrige automatiquement la trajectoire quand le véhicule s'écarte du centre de la voie (LKA).

Volkswagen Passat CC

Volkswagen AG a activement participé à plusieurs projets, européens ou allemand, sur les véhicules intelligents, dont notamment le projet AKTIV encore en cours. Ceci lui a permis de proposer cette année une assistance au maintien dans la voie « Lane Assist » sur le véhicule Passat CC [Vol08]. Cette assistance est réalisée par l'intermédiaire d'une colonne de direction assistée électrique.

Si le système est activé par le conducteur (voir Figure 2.12 (a), <http://www.volkswagen.de>), l'assistance intervient automatiquement au dessus de 65km/h . Une caméra montée à l'intérieur du véhicule au niveau du rétroviseur détecte les marquages latéraux et évalue la position du véhicule, comme présenté sur la Figure 2.12 (b). L'assistance corrige la trajectoire si le véhicule dérive vers les bords de la voie. Si l'action correctrice est jugée insuffisante pour maintenir le véhicule dans la voie de circulation, ou si la vitesse devient inférieure à 60km/h , l'assistance

avertit le conducteur par des vibrations dans le volant. Il revient alors au conducteur de corriger la trajectoire.

L'activation de l'assistance est indiquée sur le tableau de bord par un voyant représenté sur la Figure 2.12 (c). Le voyant devient vert, une fois que les marquages latéraux sont détectés par la caméra ; le système est alors opérationnel. Si le véhicule s'écarte de la trajectoire idéale, l'assistance corrige en douceur la trajectoire. De même, si le conducteur ôte ses mains du volant, il est alerté par un message sonore et un message écrit l'invite à reprendre la conduite. Le système se désactive automatiquement, après huit secondes, si le conducteur n'intervient pas.

L'action corrective de l'assistance est facile à contrecarrer par le conducteur. De plus, elle se désactive si le conducteur sort de la voie après avoir indiqué son intention avec le clignotant.

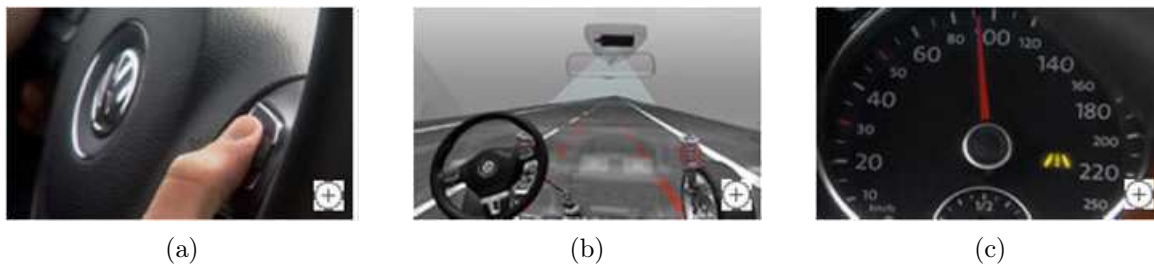


FIG. 2.12 – Système d'assistance au maintien de voie développé par Volkswagen AG (a) activation, (b) détection des marquages latéraux par caméra, (c) voyant d'activation sur le tableau de bord.

2.4.3 Gains en sécurité des systèmes commercialisés

Les systèmes d'assistance active au guidage latéral ont été introduits très récemment sur le marché et généralement que sur des véhicules haut de gamme. Les études statistiques sur leur capacité d'accroître la sécurité routière sont encore du domaine du futur. Toutefois, un autre système d'aide active à la conduite a connu une diffusion très large et son émergence sur le marché est maintenant arrivée à la maturité. Il s'agit du système de stabilité dynamique appelé « Electronic Stability Control », ESC ou encore ESP.

Une étude statistique sur les bénéfices pour la sécurité routière de ce système vient de paraître [NHT07]. La méthode utilisée sera résumée par la suite, car elle pourrait être utilisée pour les assistances au maintien de voie. Les raisons pour lesquelles l'ESC pourrait accroître la sécurité routière sont l'anticipation des situations de perte de contrôle dynamique du véhicule et la capacité d'intervenir pendant l'accident pour diminuer ses conséquences.

L'étude [NHT07] a été conduite aux États-Unis sur des données d'accidentologie des années 1997-2004. Les accidents pris en compte ont été scindés en deux groupes selon l'importance du système ESC : un groupe pour lequel l'équipement du véhicule en ESC n'aurait pas eu d'incidence sur l'accident et un groupe pour lequel le système ESC aurait pu faire une différence. Le premier groupe (groupe de réponse) rassemble les cas suivants :

1. Véhicule à l'arrêt, garé, reculant, entrant ou sortant d'un parking avant que l'accident se produise,
2. Véhicule à moins de $10m/h$ avant l'accident,
3. Véhicule percuté à l'arrière,

4. Véhicule non responsable, impliqué dans un accident avec plusieurs véhicules sur une route mouillée.

Le deuxième groupe (groupe de contrôle) est constitué par :

1. Véhicule seul avec sortie de voie suivi d'une collision avec un obstacle fixe ou tête à queue.
2. Véhicule responsable, impliqué dans un accident avec plusieurs véhicules sur une route mouillée.
3. Collision avec piétons, cyclistes ou animaux.

Les auteurs de [NHT07] ont tenté de faire une comparaison en partant de mêmes types de véhicules, d'une part équipés avec ESC et d'autre part non-équipés avec ESC. Comme ceci n'était pas possible, ils ont retenu trois solutions :

1. Considérer les mêmes types de véhicule présents dans les groupes avec et sans ESC. À titre d'exemple, mentionnons la Toyota Accura, non-équipée entre 1997 et 1999 et équipée entre 2000 et 2004, la BMW 740I, non-équipée en 1997 et équipée entre 1998 et 2001 ainsi que la Chevrolet Corvette, non-équipée en 1997 et équipée entre 2001 et 2004.
2. Prendre en compte des modèles similaires comme l'Audi A4 (1.8l), non-équipée en 2000 et équipée entre 2002 et 2004.
3. Prendre en compte des modèles d'un même constructeur qui, à partir d'un certain moment, a équipé l'ensemble de sa gamme avec ESC : Mercedes-Benz a standardisé l'équipement ESC en 2000.

TAB. 2.1 – Tableau d'analyse de l'efficacité du système ESC [NHT07].

Relevance de l'accident	Véhicules équipés avec ESC	Véhicules non-équipés avec ESC	Total
Groupe de contrôle	a	b	a+b
Groupe de réponse	c	d	c+d
Total	a+c	b+d	a+b+c+d=N

Les classifications ci-dessous ont été résumées dans le Tableau 2.1. Pour analyser du point de vue statistique si l'équipement en ESC est efficace, l'hypothèse nulle a été considérée et testée que le rapport d/c et le même que le rapport b/a . Pour calculer l'efficacité du système ESC, les rapports des accidents du groupe de réponse sur les accidents du groupe de contrôle ont été d'abord calculés pour les véhicules équipés et non-équipés. Le pourcentage de réduction entre le rapport pour les véhicules équipés et le rapport pour les véhicules non-équipés a été calculé par la suite :

$$Efficacité(\%) = \left\{ 1 - \frac{(d/c)}{(b/a)} \right\} \times 100. \quad (2.1)$$

La signification statistique de l'efficacité a été testée par une statistique du χ^2 .

Les résultats de cette étude ont mis en évidence que les systèmes ESC sont extrêmement efficaces dans la réduction du nombre d'accidents. À titre d'exemple, les accidents mortels des voitures particulières impliquant un seul véhicule peuvent être réduits de 36% et les accidents non-mortels de 26%. De même, les accidents mortels par sortie de voie seraient diminués de 36% par l'utilisation de l'ESC et les accidents non-mortels de 45% pour les voitures particulières.

2.5 Conclusion

Les systèmes intelligents de transport apparus à la fin des années 60 ont pris de l'envergure au début des années '80 avec le lancement de grands projets comme PROMETHEUS en Europe, PATH aux États-Unis et ASV au Japon. Une vision à long terme a d'abord été privilégiée avec la volonté d'assurer des meilleurs flux de circulation. Le véhicule autonome et l'autoroute automatisée ont suscité notamment, jusqu'aux années 95, énormément d'intérêt et des efforts de recherche soutenus. Un changement de cap radical a été opéré à la même époque pour passer de l'infrastructure intelligente vers un véhicule intelligent et plus autonome. Le concept de véhicule robotisé a progressivement évolué vers le véhicule assisté avec une volonté d'applications à court terme.

Le véhicule s'est enrichi en conséquence de plusieurs applications destinées à accroître la sécurité routière : le système ABS s'est généralisé à la fin des années 80, le premier ACC est introduit en 1995 au Japon et équipé, en option, plusieurs modèles commercialisés. Le système ESP-ESC a commencé à être commercialisé en 1997 et est devenu une option courante sur tous les modèles. Les années 2000 ont vu le franchissement d'un cap : les premiers systèmes d'assistance active au contrôle latéral du véhicule avec positionnement par rapport à la voie de circulation, ont été introduits au Japon. Pour ce type d'assistance, l'interaction avec le conducteur est gérée soit par un contrôle permanent faible, qui interfère au minimum avec celui-ci, soit par une surveillance de l'état de vigilance du conducteur. Toutefois, l'exigence fondamentale de ces systèmes est d'agir en partage avec le conducteur tout en lui laissant l'entière responsabilité de la tâche de conduite.

Les systèmes d'aide au maintien de voie s'activent soit lorsque le véhicule est encore proche de l'axe de la voie - ils maintiennent alors cette position (contrôle latéral en boucle fermée) - soit quand le véhicule est en train de sortir de la voie, ils fournissent alors une correction brève (contrôle latéral en boucle ouverte). Une assistance qui s'active loin du centre de la voie, qui laisse plus de liberté de manœuvre au conducteur et qui évite ensuite la sortie de voie tout en maintenant le véhicule sur l'axe de celle-là (contrôle latéral en boucle fermée) n'est pas encore disponible sur le marché. Elle représenterait une combinaison des systèmes d'avertissement actif et des systèmes de maintien au centre de la voie déjà présents sur le marché automobile japonais et qui émergent aujourd'hui en Europe.

Le déploiement futur de ces systèmes, comme option ou équipement standard sur les véhicules, pourra répondre aux trois questions encore ouvertes :

1. Quel sera le gain sur la sécurité routière grâce à l'émergence des assistances au contrôle latéral de véhicule ?
2. Quelle sera l'acceptabilité des conducteurs vis à vis de ces systèmes et comment influenceront-ils sur leur comportement ?
3. Quels bénéfices complémentaires de tels systèmes apporteront-ils en termes de mobilité des personnes, d'écologie et d'environnement, de gains économiques et de marchés ?

Bibliographie

- [Ack95] J. Ackermann, J. Guldner, W. Sienel, R. Steinhauser et V. U. Utkin *Linear and nonlinear controller design for robust automatic steering*. IEEE Trans. Control Systems Technology, Vol. 3, pp. 132-143, 1995.
- [ADI03] ADIT, Agence pour la Diffusion de l'Information Technologique *L'ITS aux Etats-Unis et au Japon dans le domaine du transport : Innovation technologique et société* Rapport de Centre de Prospective et de Veille scientifiques et technologiques (CPVST) du Ministère de l'Écologie, de l'Énergie, du Développement durable et de l'Aménagement du territoire, 2003.
- [AID04] F. Saad, M. Hjälmdahl, J. Cañas, M. Alonso, P. Garayo, L. Macchi, F. Nathan, L. Ojeda V. Papakostopoulos, M. Panou et E. Bekiaris *Behavioural effects of driver assistance systems and road situations* Délivrable No. D1_2_1 du sous-projet « Behavioural effects and DVE modelling », INRETS, [http : //www.aide – eu.org/res _sp1.html](http://www.aide-eu.org/res_sp1.html), 2004.
- [AKT06] W. Scholl *Presseinformation, Mobilität AKTIV gestalten*. AKTIV Büro, [http : //www.aktiv-online.org/deutsch/img/061218-AKTIV-Pressinformation-PI1.pdf](http://www.aktiv-online.org/deutsch/img/061218-AKTIV-Pressinformation-PI1.pdf), 2006.
- [AKT08(a)] W. Scholl *Presseinformation, Aktiv Meilensteinpräsentation in Bergisch Gladbach, 25. Juni 2008*. AKTIV Büro, [http : //www.aktiv-online.org/deutsch/img/08-06-25-Aktiv-PI2.pdf](http://www.aktiv-online.org/deutsch/img/08-06-25-Aktiv-PI2.pdf), 2008.
- [AKT08(b)] AKTIV Büro *AKTIV : Adaptive une Kooperative Technologien für den Intelligenten Verkehr*. AKTIV Büro, [http : //www.aktiv-online.org/deutsch/img/AKTIV-Factsheet-D.pdf](http://www.aktiv-online.org/deutsch/img/AKTIV-Factsheet-D.pdf), 2008.
- [Alk07] T. Alkim, G. Bootsma et P. Looman *Roads to the future, The Assisted Driver*. Rapport final de projet « The Assisted Driver » publié par Ministère de Transport, Travaux Publics et Management de l'Eau, Rijkswaterstaat, 2007.
- [Anc03] F. Anceaux, M.P. Pacaux, N. Halluin, B. Rajaonah et J.C. Popieul *Analysis of effects of driver characteristics on driving behavior and decision making : theoretical and methodological framework*. Papier présenté à First International Conference on Driving Behaviour and Training DB&T, Angleterre, 2003.
- [ARC04] Projet ARCOS *ARCOS - Résultats Demonstrations - Conclusions 28 octobre 2004 - Versailles* Projet ARCOS, 2004.
- [Bar02] F. Bar et Y. Page *Les sorties de voie involontaires*. Rapport ARCOS, Paris CEESAR, 2002.
- [Ben05] R. E. Benton, Jr. et D. Smith *A Static-Output-Feedback Design Procedure for Robust Emergency Lateral Control of a Highway Vehicle*. IEEE Transactions on Control, Systems, Technology, Vol. 13, No. 4, pp. 618-623, 2005.

- [Bos00] Robert Bosch GmbH *Mémento de technologie automobile*. Robert Bosch GmbH, 2000.
- [Bru05] S. Bruel et D. Ho *Les transports intelligents au Japon* Dépêche No. SMM05053 de Ambassade de France à Tokyo Service pour la Science et la Technologie, 2005.
- [Bul05] D. Bullocka et J. Zelek *Towards real-time 3-D monocular visual tracking of human limbs in unconstrained environments* Real-Time Imaging, Vol. 11, pp. 323-353, 2005.
- [Can05] C. Canudas-de-Wit, H. Bechart, X. Claeys, P. Dolcini et J.-J. Martinez *Fun-to-Drive by Feedback* European Journal of Control, 2005.
- [Car70] K. H. F. Cardew *The automatic steering of vehicles - An experimental system fitted to a DS19 Citroen car*. Road Research Laboratory, Crowthorne, England, Tech. Rep. RRL LR340, Feb. 1970.
- [Car00] Chargés de communication des centres de recherche INRIA *CARSENSE : perception autour de la voiture à basse vitesse* Communiqué de presse, <http://www.inria.fr/presse/pre68.fr.html>, Mai 2000.
- [Cha03] C.-Y. Chan et H.-S. Tan *Evaluation of Magnetic Markers as a Position Reference System for Ground Vehicle Guidance and Control*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-2003-8, 2003.
- [Cha04] S. Chaib, M. Netto et S. Mammar, H_∞ , *Adaptive, PID and fuzzy control : a comparison of controllers for vehicle lane keeping* Proceeding of IEEE Intelligent Vehicles Symposium, pp. 139-144, 2004.
- [Che01] L.-K. Chen et A. G. Ulsoy, *Identification of a Driver Steering Model, and Model Uncertainty, From Driving Simulator Data* Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 123, pp. 623-629, 2001.
- [Cho00] S. B. Choi *The Design of a Look-Down Feedback Adaptive Controller for the Lateral Control of Front-Wheel-Steering Autonomous Highway Vehicles* IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 49, No. 6, pp. 2257-2269, 2000.
- [Cou05] J. Coudon, X. Claeys et C. Canudas De Wit *A new global reference model for steer-by-wire control with embedded vehicle dynamics* IEEE Proceedings of Conference on Decision and Control, 2005.
- [Cou07] J. Coudon *Algorithmes de commande pour le pilotage d'une direction découplée* Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [Del01] D. Delorme et B. Song *Human Driver Model for SmartAHS*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-2001-12, 2001.
- [ECE05] United Nations Economic Commission for Europe *Supplement 3 to ECE Regulation 79.01* United Nations Economic Commission for Europe, 4 Avril, 2005.
- [ElH03] A. El Hadri, J.C. Cadiou, M. Boutelddja et V. Dolcemascolo *Modelling heavy vehicle dynamics observation and lateral tires forces estimation* ITS World Congress, Madrid, Spain, 2003.
- [Eur08] EUREKA pan-European network for market-oriented, industrial R&D. *EUREKA PROJECT E!45- PROMETHEUS*. <http://www.eureka.be/inaction/AcSearchProject.do>, 1997.
- [Esk07] A. Eskandarian, R. Sayed, P. Delaigue, J. Blum, et A. Mortazavi *Advanced Driver Fatigue Research*. Rapport Technique No. FMCSA-RRR-07-001 supporté par U.S. Department of Transportation Federal Motor Carrier Safety Administration, Office of Research & Analysis 400 Virginia Ave., SW, Suite 600 Washington, DC 20024, 2007.

-
- [Far02] J. Farrell et M. Barth *Integration of GPS/INS and Magnetic Markers for Advanced Vehicle Control*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-2002-32, 2002.
- [Fen76] R. Fenton, G. Melocik et K. Olson, *On the steering of automated vehicles : Theory and experiment*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 21, pp. 306-315, 1976.
- [Fra92] T. Fraichard, M. Hassoun et N. Lefort *An electronic co-pilot : The Pro-Lab II demonstrator*. Proceeding of the 3rd PROMETHEUS Collision Avoidance Workshop, pp. 230-237, 1992.
- [Gar60] K. Gardels *Automatic car controls for electronic highways*. General Motors Research Laboratory Warren, Michigan, Tech. Rep. GMR-276, Jun. 1960.
- [Ger01] J. C. Gerdes et E. J. Rossetter *A Unified Approach to Driver Assistance Systems Based on Artificial Potential Fields Authors*. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 123, No. 3, pp. 431-438, 2001.
- [Gui07] O. Guicherd et L. Calegari *Dispositif de restitution d'effort au volant passif pour systèmes de direction de véhicule automobile de type steer-by-wire* Demande internationale publiée en vertu du traité de coopération en matière de brevets WO 2007/003811 A3, 2007.
- [Gul97] J. Guldner, H.-S. Tan et S. Patwardhan *On Fundamental Issues of Vehicle Steering Control for Highway*. California PATH Working Paper UCB-ITS-PWP-97-11, 1997.
- [Has95] M. Hassoun et C. Laugier *An architecture for motion planning and motion control of car-like vehicle*. Mathematical Computing Modelling, Vol. 22, No. 4-7, pp. 329-341, 1995.
- [Hat03] C. Hatipoglu, Ü. Özgüner et K. A. Redmill *Automated Lane Change Controller Design* IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, Vol. 4, No. 1, pp. 13-22, 2003.
- [Hau05] N. Hautière *Détection des conditions de visibilité et estimation de la distance de visibilité par vision embarquée* Thèse de Doctorat, Université Jean Monnet, Saint-Etienne, 2005.
- [Hoc03] J.M. Hoc, J.M. Blosseville, In G.C. van der Veer et J.F. Hoorn *Cooperation between drivers and in-car automatic driving assistance*. Proceedings of Conference Cognitive Science Approaches to Process Control, France, pp. 17-22, 2003.
- [IVs01(a)] IVsource *Nissan Demos New Lane Keeping Products* <http://www.IVsource.net>, 12 Février 2001.
- [IVs01(b)] IVsource *February Industry Snippets* <http://www.IVsource.net>, March 2001.
- [Iih04] A. Iihoshi *Driver Assistance System (Lane Keep Assist System)* Presentation to WP-29 ITS Round Table 18/02/2004 Geneva, 2004.
- [Kan87] A. Kanafani, R. E. Parson et H. R. Ross *Status of Foreign Advanced Highway Technology*. California PATH Research Paper UCB-ITS-PRR-87-2, 1987.
- [Kaw01] H. Kawazoe, XXX *Development of a Lane-Keeping Support System* Proceedings of the SAE 2001 World Congress, Paper 2001-01-0797, 2001.
- [Koe01] D. Koenig et S. Mammar *Estimate based H_∞ Compensator : Application to Robust Automatic Steering* Proceedings of European Control Conference, 2001.
- [Kop94] M. Kopf *Ein Beitrag zur modellbasierten, adaptiven Fahrerunterstützung für das Fahren auf der deutschen Autobahnen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 12, Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, No. 203, VDI-Verlag, 1994.

- [Kre07] U. Kressel *Forschungsinitiative Aktiv - Das Projekt Aktive Sicherheit*. Présentation dans la réunion de travail « Rechtliche Rahmenbedingungen zur Einführung von Fahrerassistenzsystemen » le 15 mars 2007, <http://www.aktiv-online.org/deutsch/Downloads/2007-03-15-BASSt-Workshop/Praes-01-AKTIV-AS-Gesamt.pdf>, 2007.
- [Kuh05] D. Kuhlitz *Bosch Automotive, Produktgeschichte im Überblick* Robert Bosch GmbH, Magazin zur Bosch-Geschichte, Sonderheft 2, 2005.
- [Lab03] R. Labayrade, C. Royère, D. Gruyer et D. Aubert, *Cooperative fusion for multi-obstacles detection with use of stereovision and laser scanner* Autonomous Robots, Vol. 19, No. 2, pp. 117-140, 2005.
- [Lab04(a)] R. Labayrade et D. Aubert *Robust and fast stereovision based obstacles detection for driving safety assistance* Special Issue on Machine Vision Applications at the IEICE Japanese journal, Vol. E87-D, No. 1, 2004.
- [Lab04(b)] R. Labayrade, S.-S. Ieng et D. Aubert *A reliable road lane detector approach combining two vision-based algorithms* Proceedings of International Conference on Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC2004), pp. 149-154, 2004.
- [LaR08] La Route Automatisée <http://www.lara.prd.fr/en/> Lien vers le site web de consortium La Route Automatisée, 2008.
- [LAV06] Chargés de communication de presse du projet LAVIA *Colloque LAVIA Les premiers résultats des tests d'acceptabilité du Limiteur s'Adaptant à la Vitesse Autorisée* Communiqué de presse fait le 9 novembre 2006, <http://heberge.lcpc.fr/lavia/download/colloque091106/CP-2006.pdf>, 2006.
- [LeB96] D. J. LeBlanc, G. E. Johnson, P. J.Th. Venhovens, G. Gerber, R. DeSonia, R. D. Ervin, C.-F. Lin, A. G. Ulsoy et T. E. Pilutti *CAPC : A Road-Departure Prevention System* IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 16, No. 6, pp. 61-71, 1996.
- [LeB96(a)] D. J. LeBlanc, G. E. Johnson, P. J. Th. Venhovens, G. Gerber, R. DeSonia, R. D. Ervin, C.-F. Lin, A. G. Ulsoy et T. E. Pilutti *CAPC : An Implementation of Road-departure Warning System* Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications, pp. 590-595, 1996.
- [Lee02] P. Leelavansuk, K. Shitamitsu, H. Mouri et M. Nagai *Study on lane-keeping assistance system*. ITS World Congress (CD-ROM), Chicago, 2002.
- [Li05] L. Li, F.-Y. Wang et Q. Zhou *An LMI Approach to Robust Vehicle Steering Controller Design*. Proceedings of the IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, pp. 360-365, 2002.
- [Lyg97] J. Lygeros, D. N. Godbole et S. Sastry *A Verified Hybrid Controller for Automated Vehicles*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-97-9, 1997.
- [Mam04] S. Mammar, T. Raharijaona, S. Glaser et G. Duc *Lateral driving assistance using robust control embedded driver-vehicle-road model* Vehicle System Dynamics, Vol. 41 Supplement, pp. 311-320, 2004.
- [Mam05] S. Mammar, P. Martinet, S. Glaser, M. Netto, L. Nouvelière et B. Thuilot *Méthodes de l'automatique pour l'assistance et l'automatisation de la conduite automobile*. Actes de la 5^e Journées Nationales de la Recherche en Robotique, Guidel, Morbihan, 5-7 octobre, pp. 263-272, 2005.

-
- [Mam06] S. Mammar, S. Glaser et M. Netto *Time to line crossing for lane departure avoidance : A theoretical study and an experimental setting* IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, Vol. 7, pp. 226-241, 2006.
- [Mar04] J.-J. Martinez, J.-C. Avila et C. Canudas-de-Wit *A New Bicycle Vehicle Model with Dynamic Contact Friction* IFAC Symposium on Advances in Automotive Control, Salerno, Italy 2004.
- [Mat94] N. D. Matthews *Visual Collision Avoidance*. Thèse de doctorat de l'Université Southampton, Angleterre, 1994.
- [Mou99] H. Furusho et H. Mouri *Research on automated lane tracking using linear quadratic control : control procedure for a curved path*. JSAE Review, Vol. 20, pp. 325-329, 1999.
- [Nag02] M. Nagai, H. Mouri et P. Raksincharoensak *Vehicle Lane-Tracking Control with Steering Torque Input* Vehicle System Dynamics, Supplement 37, pp. 267-278, 2002.
- [Net03] M. Netto, R. Labayrade, S.-S. Ieng, B. Lusetti, J.M. Blosseville et S. Mammar, *Different Modes on Shared Lateral Control* ITS World Congress, Madrid, Spain, 2003.
- [Net06] M. Netto, J.-M. Blosseville, B. Lusetti et S. Mammar *A new robust control system with optimized use of the lane detection data for vehicle full lateral control under strong curvatures* Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference, Toronto, Canada, pp. 1382-1387, 2006.
- [NHT07] NHTSA *Statistical Analysis of the Effectiveness of Electronic Stability Control (ESC) Systems*. Technical report, National Highway Traffic Safety Administration, USA, 2007.
- [Njo06] J. Njord, J. Peters, M. Freitas, B. Warner, K. C. Allred, R. Bertini, R. Bryant, R. Callant, M. Knopp, L. Knowlton, C. Lopez et T. Warne *Safety Applications of Intelligent Transportation Systems in Europe and Japan*. Office of International Programs, Office of Policy, Federal Highway Administration, U. S. Department of Transportation, American Association of State Highway and Transportation Officials, National Cooperative Highway Research Program, Rapport Technique FHWA-PL-06-001, 2006.
- [Oh04] S.-W. Oh, H.-C. Chae, S.-C. Yun et C.-S. Han *The Design of a Controller for the Steer by Wire System* JSME International Journal, Series C, Vol. 47, No. 3, pp. 896-907, 2004.
- [Pan06] Y.-J. Pan, C. Canudas-de-Wit et O. Sename *A New Predictive Approach for Bilateral Teleoperation With Applications to Drive-by-Wire Systems* IEEE Transactions on Robotics, Vol. 22, No. 6, pp. 1146-1162, 2006.
- [Pat94] S. N. Patwardhan *Fault Detection and Tolerant Control for Lateral Guidance of Vehicles in Automated Highways*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-94-17, 1994.
- [PAT07] California PATH *California PATH 2006 Annual Report*. California PATH Headquarters 1357 South 46th Street Building 452 Richmond, CA 94804-4648, 2007
- [Pen90] H. Peng et M. Tomizuka *Lateral Control of Front-Wheel-Steering Rubber-Tire Vehicles*. Rapport technique de California PATH UCB-ITS-PRR-90-5, 1990.
- [Pen92] H. Peng, W.-B. Zhang, A. Arai, Y. Lin, T. Hessburg, P. Devlin, M. Tomizuka et Steven Shladover *Experimental Automatic Lateral Control System for an Automobile* PATH Research Report UCB-ITS-PRR-92-11, 1992.
- [Pen94] H. Peng, W.-B. Zhang, M. Tomizuka et Steven Shladover *A Reusability Study of Vehicle Lateral Control System* Vehicle System Dynamics, Vol. 23, pp. 259-278, 1994.

- [Per07] A. Perez *Au volant de la Lexus à pilotage électronique* <http://www.lesechos.fr/info/metiers>, 15/07/2007, 2007.
- [Pet05] L. Petersson, L. Fletcher et A. Zelinsky *A framework for driver-in-the-loop driver assistance systems* Proceedings of the International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, pp.771-776, 2005.
- [Pil95] T. Pilutti, G. Ulsoy et D. Hrovat *Vehicle Steering Intervention Through Differential Braking*. Proceedings of the American Control Conference, pp. 590-595, 1995.
- [Pil99] T. Pilutti et A. G. Ulsoy *Identification of driver state for lane keeping tasks*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans, Vol. 29, No. 5, pp. 486-502, 1999.
- [Pil00] T. E. Pilutti, D. D. Hrovat et G. Ulsoy *Vehicle Steering System and Method for Controlling Vehicle Direction Through Differential Braking of Left and Right Road Wheels* United States Patent, Patent Number 6,021,367, 1 February, 2000.
- [Poh03] J. Pohl et J. Ekmark *Developement of a Haptic Intervention System for Unintended Lane Departure* SAE International, paper No. 2003-01-0282, 2003.
- [PRE08] M. Schulze, T. Mäkinen, J. Irion, M. Flament et T. Kessel *PREVENT Final Report* PREVENT Consortium, 2008.
- [Pri94] L. Priese, J. Klieber, R. Lakmann, V. Rehrmann et R. Schian *New Results on Traffic Sign Recognition*. Proceedings of the "Intelligent Vehicles Symposium 1994", pp. 249-254, 1994.
- [Pro98] R. Prohaska et P. Devlin *Combined Brake and Steering Actuator for Automatic Vehicle Control*. California PATH Working Paper UCB-ITS-PWP-98-15, 1998.
- [Pro00] G. Prokop *Model of Human Vehicle Driving - A Predictive Nonlinear Optimization Approach*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-2000-19, 2000.
- [Rah04(a)] T. Raharijaona *Commande robuste pour l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier* Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud et Supélec, 2004.
- [Rah04(b)] T. Raharijaona, G. Duc et S. Mammar *Robust Control and μ -analysis with application to Lateral Driving Assistance* Proceedings IEEE Intelligent Vehicles Symposium, pp. 407-412, 2004.
- [Raj06] R. Rajamani *Vehicle dynamics and control*. Springer Verlag, 2006.
- [Rob03] Y. Robin-Jouan et J. Ehrlich *Data communications services to mobiles via IMMACS : an integrated solution for vehicle to vehicle and vehicle to roadside* ITS World Congress, Madrid, Spain, 2003.
- [Ros03] E. J. Rossetter *A Potential Field Framework For Active Vehicle Lanekeeping Assistance*. Thèse de doctorat de l'Université de Stanford, 2003.
- [Ros04] E. J. Rossetter, J. P. Switkes et J. Christian Gerdes *Experimental Validation of the Potential Field Driver Assistance System*. International Journal of Automotive Technology, Vol. 5, No. 2, pp. 95-108, 2004.
- [Sch07] S. Schwarz *RESPONSE 3 - Code of Practice for Development, Validation and Market, Introduction of ADAS - A PREVENT Project* http://www.prevent-ip.org/en/public_documents/publications/papers_presentations/code_of_practice_for_development_validation_and_market_introduction_of_adas.htm., 2007.
- [Seg01] M. Segawaa, S. Nakanoa, O. Nishiharab et H. Kumamoto *Vehicle stability control strategy for steer by wire system* JSAE Review, Vol. 22, pp. 383-388, 2001.

-
- [Shi02] M. Shimakage, S. Satoh, K. Uenuma et H. Mouri *Design of lane-keeping control with steering torque input* JSAE Review, Vol. 23, pp. 317-323, 2002.
- [Ste98] W. B. Stevens *Summary Report of the Cooperative and Autonomous Workshop 27 and 28 April 1998, Washington, DC* Conducted by The National Automated Highway System Consortium For The United States Department of Transportation, 1998.
- [Ste04(a)] J. Stephant, A. Charara et D. Meizel *Virtual sensor, application to vehicle sideslip angle and transversal forces* IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 51, No. 2, Special Section on Automotive Electronics Systems, pp. 278-289, 2004.
- [Ste04(b)] J. Stephant, A. Charara et D. Meizel *Experimental evaluation of vehicle sideslip angle observers* Proceedings IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicle, 2004.
- [Swa99] D. Swaroop et S. M. Yoon *The Design of a Controller for a Following Vehicle in an Emergency Lane Change Maneuver*. California PATH Working Paper UCB-ITS-PWP-99-3, 1999.
- [Swi06] J. P. Switkes *Handwheel Force Feedback with Lanekeeping Assistance : Combined Dynamics, Stability and Bounding* Thèse de doctorat de l'Université de Stanford, 2006.
- [Tay99] C.J. Taylor, J. Košecká, R. Blasi et J. Malik *A comparative study of vision-based lateral control strategies for autonomous highway driving*. International Journal of Robotics Research, Vol. 18, pp. 442-453, 1999.
- [Tai98] M. Tai, J.-Y. Wang, P. Hingwe, C. Chen et Masayoshi Tomizuka *Lateral Control of Heavy Duty Vehicles for Automated Highway Systems*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-98-8, 1998.
- [Tai01] M. Tai, J.-Y. Wang, R. White et M. Tomizuka *Robust Lateral Control of Heavy Duty Vehicles* California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-2001-35, 2001.
- [Tal04] C. M. Talbot, I. Papadimitriou et M. Tomizuka *Fault Tolerant Autonomous Lateral Control for Heavy Vehicles*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-2004-24, 2004.
- [The05] J. Theys *Quelles technologies-clefs pour l'Europe ? : (Les enjeux liés aux transports)* Rapport No. DRAST-CPVST-05-03 du Ministère de l'équipement, des transports et du logement, Centre de prospective et de veille scientifique, Puteaux, France (Commanditaire) Commission Européenne, Direction Générale de la Recherche, Luxembourg, 2005.
- [Toc96] D. Tack et I. Craw *Tracking and measuring drivers' eyes* Image and Vision Computing, Vol. 14, pp. 541-547, 1996.
- [Tom90] M. Tomizuka, J. K. Hedrick et H. Pham *Integrated Maneuvering Control for Automated Highway Systems based on a Magnetic Reference/Sensing System*. California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-95-12, 1995.
- [Tra96] L. Trassoudaine, P. Checchin, J. Alizon, F. Collange et J. Gallice *Gestion intelligente de capteurs et fusion multisensorielle pour la détection et le suivi d'obstacles sur route*. Traitement du Signal, Vol. 13, No. 2, pp. 127-142, 1996.
- [Tsa96] H.-S. J. Tsao et B. Ran *Driving Intelligence Replacement in a Decision-Oriented Deployment Framework for Driving Automation*. California PATH Working Paper UCB-ITS-PWP-96-4, 1996.

- [Tsa97] H.-S. J. Tsao, T. A. Plocher, W.-B. Zhang et S. E. Shladover *Major Failure Events of Automated Highway Systems : Three Scenarios from the Driver's Perspective*. California PATH Working Paper UCB-ITS-PWP-97-4, 1997.
- [Vil07] J. Villagra, B. D'Andréa-Novel, H. Mounier et M. Pengov *Une stratégie de commande basée sur la platitude pour les véhicules de type voiture*. e-Sta, Vol. 4, pp. 20-25, 2007.
- [Vol07] *Evaluation of the Volvo Intelligent Vehicle Initiative Field Operational Test, Version 1.3* Battelle 505 King Avenue Columbus, Ohio 43201 for U.S. Department of Transportation Washington, D.C., Contract No. DTFH61-96-C-00077, 2007.
- [Vol08] Volkswagen Media Services *Research project AKTIV : Intelligent cars set to revolutionise safety* Press Release <https://www.volkswagen-media-services.com>, 2008.
- [Yam07] J. Yamaguchi *Lexus LS 460=Best Engineered Vehicle 2007* Automobile Engineering International online, Avril, 2007.
- [Yao06] Y. Yao *Vehicle Steer-by-Wire System Control* SAE Technical Paper Series, 2006-01-1175, 2006.
- [Yng99] J. L. Ygnace *Les Systèmes de Transport Intelligent : Un enjeu stratégique mondial* La Documentation Française, 1999.
- [Yuh98] N. Yuhara, J. Tajima, S. Horiuchi, T. Iijima, N. Asanuma et M. Ikegaya *Advanced driving support : Toward human-centered automation*. Proceedings of FISITA'98, article F98T652, France, 1998.
- [Wal01] G. H. Walker, N.A. Stanton et M.S.Young, *Where is computing driving cars? A technology trajectory of vehicle design*. International Journal of Human Computer Interaction, Vol. 13, No. 2, pp. 203-229, 2001.

Deuxième partie

Outils pour la modélisation et la commande du véhicule

3

Éléments théoriques de la commande des systèmes

Sommaire

3.1	Les inégalités matricielles linéaires et bilinéaires	52
3.1.1	Ensemble convexe, fonction convexe et problème d'optimisation convexe	53
3.1.2	Problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI	61
3.1.3	Problème d'optimisation sous contraintes BMI	63
3.2	Ensemble atteignable et ensemble invariant	63
3.2.1	Ensemble atteignable	63
3.2.2	Ensemble invariant	64
3.2.3	Approximation des ensembles atteignables par des ensembles invariants	65
3.3	Fonction de Lyapunov	66
3.3.1	La stabilité au sens de Lyapunov	67
3.3.2	Fonction de Lyapunov et ensembles invariants	68
3.4	Fonction de Lyapunov quadratique et inégalités matricielles . .	69
3.4.1	Système dynamique linéaire invariant autonome	70
3.4.2	Système dynamique linéaire invariant commandé par retour d'état .	70
3.4.3	Système dynamique linéaire invariant commandé par retour d'état avec perturbations	73
3.4.4	Système dynamique linéaire à paramètres variants	80
3.5	Fonction de Lyapunov composée	81
3.5.1	Propriétés de la fonction quadratique composée	81
3.5.2	Fonction de Lyapunov composée : stabilité et ensemble invariant . .	84
3.6	Systèmes hybrides avec des entrées et des sorties	87
3.6.1	Représentation	88
3.6.2	Définitions	88
3.7	Utilisation de ces outils théoriques dans le contexte de la thèse	90

Ce chapitre fait un rappel théorique des outils utilisés pour concevoir l'assistance à la conduite. Avant d'introduire les notions théoriques, nous définissons les systèmes d'équations différentielles utilisés dans cette thèse.

Définition 3.0.1 (Système dynamique continu) *Un système dynamique continu est caractérisé par une équation différentielle*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), v(t)), \\ y(t) = g(x(t), v(t)), \end{cases} \quad t \in T \subset \mathbb{R}^+. \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur des variables d'état, $v(t) \in \mathbb{R}^r$ représente le vecteur des entrées du système et $f : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs continus. $y \in \mathbb{R}^k$ décrit le vecteur des sorties du système et $g : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^k$ est un champ de vecteurs continus. Le vecteur $v(t)$ est équivalent à $v(t) = [u^T(t), w^T(t)]^T$, où $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $w(t) \in \mathbb{R}^p$, $m + p = r$. Le vecteur $u(t)$ représente les entrées de commande. En fonction du problème à modéliser, le vecteur $w(t)$ peut représenter soit une perturbation, soit une entrée de référence, soit un bruit qui affecte le système.

Définition 3.0.2 (Trajectoire du système dynamique continu) *Une trajectoire du système dynamique continu (3.1) est une fonction continue $\xi_x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, telle que ξ_x est une solution de l'équation (3.1) pour la condition initiale $x(t_0) = x^0$ et pour $v(t) \in \mathbb{R}^r$ connu.*

La fonction f est supposée à vérifier la condition de Lipschitz en x et v , pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $v \in \mathbb{R}^r$, ce qui garantit, pour chaque condition initiale x^0 , l'existence d'une solution unique globale du système (3.1). On dit alors que le système dynamique (3.1) est déterministe dans le sens où pour un état initial en x^0 et une entrée connue $v(t)$, il génère une trajectoire unique.

La plupart des systèmes considérés dans le cadre de cette thèse sont des systèmes dynamiques linéaires continus.

Définition 3.0.3 (Système dynamique linéaire continu) *Un système dynamique linéaire continu est un système dynamique de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_u(t)u(t) + B_w(t)w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D_u(t)u(t) + D_w(t)w(t), \end{cases} \quad t \in T \subset \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

où $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de la dynamique du système, $B_u(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice de commande, $B_w(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est la matrice de perturbation ou de référence, $y(t) \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur des mesures, $C(t) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ est la matrice d'observation et $D_u(t) \in \mathbb{R}^{k \times m}$ et $D_w(t) \in \mathbb{R}^{k \times p}$ sont des matrices de transfert des entrées de commande et de perturbation vers les sorties.

Si les matrices $A(t)$, $B_u(t)$, $B_w(t)$, $C(t)$, $D_u(t)$ et $D_w(t)$ sont constantes, elles seront notées par A , B_u , B_w , C , D_u et D_w , et nous parlons alors d'un système linéaire invariant dans le temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ y = Cx + D_u u + D_w w, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.3)$$

Pour alléger les notations, les vecteurs $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ et $w(t)$ seront notés par la suite x , u , y et w , sans pour autant induire une constance temporelle, sauf indication contraire.

3.1 Les inégalités matricielles linéaires et bilinéaires

Synthétiser une loi de commande consiste à trouver des entrées u qui satisfont au mieux le cahier des charges. Ce dernier peut imposer aussi bien des objectifs à atteindre (poursuite asymptotique de la référence), que des contraintes à vérifier pendant le processus de régulation (temps

de réponse maximal ou commande de l'actionneur en deçà d'une saturation). En conséquence, les problèmes d'optimisation sous contraintes sont apparus naturellement dans la théorie de la commande.

D'un point de vue mathématique, il apparaît que de nombreuses contraintes peuvent être exprimées par des inégalités linéaires matricielles (LMI). Leur origine remonte à l'inégalité de Lyapunov $A^T P + P A \preceq 0$ introduite dans les années 1890, qui établit la stabilité des systèmes continus linéaires. Dans un premier temps résolues de manière analytique pour les systèmes d'ordre faible, les équations matricielles linéaires seront utilisées en automatique par Lur'e, Yakubovich, Popov et Kalman dans les années soixante. Ensuite, une fois le « Lemme Borné Réel » établi [Boy94], les solutions ont été trouvées par des méthodes graphiques.

Ce n'est que vers la fin des années 1960 que la résolution d'une classe de LMI s'est avérée théoriquement possible. Elles étaient résolues par les équations algébriques de Ricatti. Dans les années 1980, [Pya82] fait l'observation que les problèmes d'optimisation avec contraintes LMI peuvent être formulés sous la forme de problèmes d'optimisation convexe et donc résolus par des algorithmes numériques de faible complexité, voire polynômiaux.

Le fait de reconnaître ou de formuler un problème d'optimisation comme convexe présente de grands avantages. L'avantage fondamental est que si une fonction convexe est minimisée sur un ensemble de contraintes convexes, chaque optimum local trouvé est en fait l'optimum global. De plus, pour trouver la solution, il existe des algorithmes de faible complexité (par exemple la méthode de l'ellipsoïde [Nem83] ou les méthodes du point intérieur [Nes94]) qui sont de complexité polynomiale pour des problèmes standards. Leur convergence pour approcher la solution est prouvée mathématiquement quelle que soit la précision souhaitée. La formulation du problème sous la forme d'une optimisation convexe permet également d'exprimer son problème dual. Ceci apporte également des interprétations supplémentaires et facilite la résolution numérique.

Les sections suivantes introduisent brièvement les principales notions de convexité. Par la suite, nous présenterons la définition d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI. Les problèmes d'optimisation BMI (« Bilinear Matrix Inequalities ») représentent une extension non-convexe des problèmes LMI. Cette extension est nécessaire dans la théorie du contrôle pour exprimer une gamme plus large de problèmes d'optimisation, problèmes qui ne sont plus linéaires, mais bilinéaires.

3.1.1 Ensemble convexe, fonction convexe et problème d'optimisation convexe

La plupart des définitions introduites dans cette section sont reprises de [Boy06] avec des compléments de [Bla08]. Si d'autres sources sont utilisées, elles seront mentionnées au cours du document. Par ailleurs, nous avons modifié les notations de [Boy06] et de [Bla08] pour les harmoniser avec nos propres notations.

Ensemble convexe

Définition 3.1.1 (Ensemble convexe) *Un ensemble \mathcal{A} est dit convexe si pour tous points $v_1 \in \mathcal{A}$ et $v_2 \in \mathcal{A}$ la condition suivante est vérifiée :*

$$v \triangleq \gamma v_1 + (1 - \gamma) v_2 \in \mathcal{A}, \quad \forall \gamma \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Cette définition des ensembles convexes signifie que le segment de droite qui réunit deux points intérieurs de l'ensemble appartient à cet ensemble (voir Figure 3.1 (a)). Une autre propriété importante des ensembles convexes est que leur intersection est aussi un ensemble convexe.

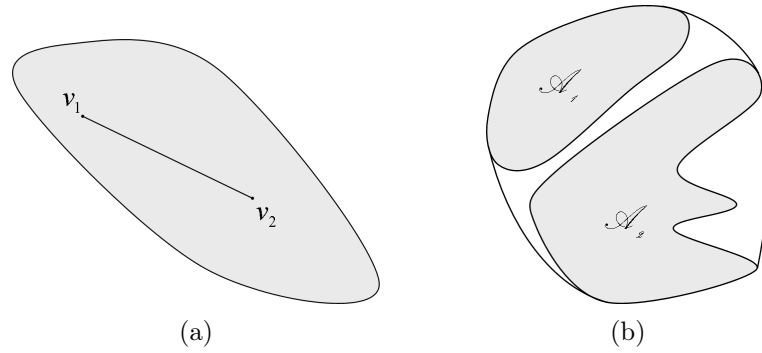


FIG. 3.1 – (a) Ensemble convexe. (b) Enveloppe convexe.

Propriété 3.1.1 (Intersection des ensembles convexes) *La convexité est préservée par l'intersection : étant donnés \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 deux ensembles convexes, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est également convexe. Cette propriété peut être étendue pour un nombre infini d'ensembles convexes.*

Définition 3.1.2 (Enveloppe convexe) *L'enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{A} , notée $\text{conv}\mathcal{A}$, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de \mathcal{A} :*

$$\text{conv}\mathcal{A} \triangleq \{\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_q v_q : v_i \in \mathcal{A}, \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, q, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_q = 1\}. \quad (3.5)$$

Sur la Figure 3.1 (b) est représentée l'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. L'enveloppe convexe d'un ensemble est toujours un ensemble convexe. De plus, $\text{conv}\mathcal{A}$ est le plus petit ensemble convexe contenant \mathcal{A} .

Propriété 3.1.2 *Si \mathcal{A}_1 est un ensemble convexe qui contient \mathcal{A}_2 , alors $\text{conv}\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$.*

Contraintes sur les variables d'état : hyperplan et ellipsoïde

Dans cette section nous allons introduire les définitions et quelques propriétés des ensembles convexes les plus utilisés dans la théorie du contrôle : l'hyperplan et l'ellipsoïde.

Parce que les propriétés des systèmes dynamiques sont rarement valables sur l'espace d'état entier, il est nécessaire de délimiter des régions d'intérêt. Les ensembles convexes représentent une solution très attractive du point de vue du calcul analytique et numérique pour réaliser cette délimitation. L'hyperplan et ses dérivés (polyèdre, hypercube, polytope) permettent de formaliser des contraintes linéaires sur l'espace d'état. L'ellipsoïde offre en complément une approche quadratique.

Définition 3.1.3 (Hyperplan) *Un hyperplan est un ensemble tel que :*

$$\mathcal{H}(F, c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Fx = c\}, \quad (3.6)$$

où $F \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Sans perte de généralité, on peut considérer que $c = 1$. Dans ce cas, une représentation alternative pour l'hyperplan est donnée par :

$$\mathcal{H}(F) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Fx = 1\}, \quad (3.7)$$

où $\mathcal{H}(F, \mathbf{1})$ est une notation réduite de $\mathcal{H}(F)$.

L'interprétation analytique de l'hyperplan est donnée par la solution de l'équation linéaire $Fx = c$. D'un point de vue géométrique, l'hyperplan est caractérisé par un vecteur normal F^T et par un décalage par rapport à l'origine c (voir Figure 3.2 (a)).

Un hyperplan partage l'espace d'états en deux sous-espaces (voir Figure 3.2 (a)).

Définition 3.1.4 (Sous-espace fermé) *Un sous-espace fermé est un ensemble défini par*

$$\mathcal{L}(F, c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Fx \leq c\}, \quad (3.8)$$

où $F \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $c \in \mathbb{R}$.

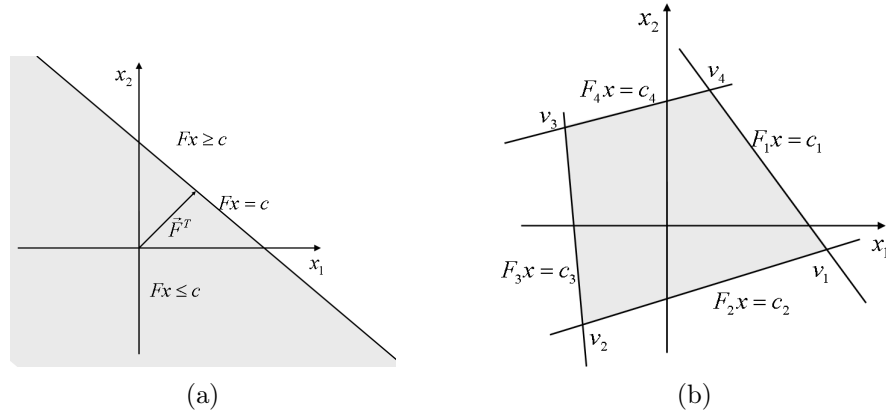


FIG. 3.2 – (a) Hyperplan et les sous-espaces fermés définis dans \mathbb{R}^2 . (b) Polytope dans \mathbb{R}^2 .

Un ensemble polyédrique, appelé aussi polyèdre, est obtenu par l'intersection de plusieurs sous-espaces fermés.

Définition 3.1.5 (Polyèdre) *Un polyèdre est un ensemble défini par*

$$\mathcal{L}(F, C) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Fx \leq C\}, \quad (3.9)$$

où $F \in \mathbb{R}^{q \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^q$.

Lorsqu'en particulier les coordonnées du vecteur C sont toutes unitaires, une représentation alternative pour le polyèdre est donnée par :

$$\mathcal{L}(F) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Fx \leq \mathbf{1}\}. \quad (3.10)$$

La notation $\mathcal{L}(F, \mathbf{1})$ a été allégée et réduite à $\mathcal{L}(F)$.

L'ensemble polyédrique $\mathcal{L}(F, C)$ contient l'origine comme point intérieur si et seulement si $C > 0$. Un ensemble polyédrique symétrique par rapport à l'origine est représenté par

$$\mathcal{L}(F, C) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : -C \leq Fx \leq C\}, \quad C > 0, \quad \text{ou} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{L}(F) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : -\mathbf{1} \leq Fx \leq \mathbf{1}\}. \quad (3.12)$$

Nous remarquons que les ensembles polyédriques peuvent être infinis, comme c'est le cas pour l'espace entre deux hyperplans parallèles, ou finis, comme l'intérieur d'un rectangle. Les polyèdres finis sont connus sous l'appellation de polytopes (voir Figure 3.2 (b)).

Définition 3.1.6 (Polytope) Un ensemble polyédrique fini est appelé polytope. Une des représentations du polytope est la suivante

$$\mathcal{P}(\text{Sommets}) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^g v_i \gamma_i, \sum_{i=1}^g \gamma_i = 1, \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, g\}, \quad (3.13)$$

où $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, g$ sont les points d'intersection des hyperplans délimitant le polyèdre fini. La matrice $\text{Sommets} = [v_1, \dots, v_g]$ contient sur ses colonnes les vecteurs des angles du polytope.

Avant de définir l'ellipsoïde, nous présentons une propriété des matrices particulièrement importante dans notre contexte : la définition positive/négative d'une matrice.

Définition 3.1.7 (Matrice définie positive) Considérons une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Cette matrice est définie positive et notée $A \succ 0$ si $v^T A v > 0$ pour tous $v \in \mathbb{R}^n$. Si l'inégalité n'est pas stricte ($v^T A v \geq 0$) la matrice est semi-définie positive et notée $A \succeq 0$.

La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie négative si $-A$ est définie positive. La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est semi-définie négative si $-A$ est semi-définie positive.

Définition 3.1.8 (Ellipsoïde) Considérons un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique ($P = P^T$) et définie positive. Un ensemble ellipsoïdal ou ellipsoïde, de centre $v \in \mathbb{R}^n$, est défini par :

$$\varepsilon(P, v) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : (x - v)^T P (x - v) \leq 1\}. \quad (3.14)$$

Pour alléger les notations, un ellipsoïde centré à l'origine sera noté par $\varepsilon(P)$:

$$\varepsilon(P) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq 1\}. \quad (3.15)$$

Pour caractériser un ellipsoïde du point de vue géométrique, il faut regarder les valeurs propres de la matrice $Q = P^{-1}$. Les racines carrées des valeurs propres de la matrice Q , $\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$, sont les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ (voir Figure 3.3 (a)). Les vecteurs propres de la matrice Q , v^i , $i = 1, \dots, n$, donnent les orientations des demi-axes. Le volume d'un ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ est :

$$\text{vol}(\varepsilon(P, v)) = \text{vol}(Sh_n) \det(Q) = \text{vol}(Sh_n) \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad (3.16)$$

où $\text{vol}(Sh_n)$ est le volume de la sphère de rayon unité en \mathbb{R}^n .

Nous remarquons que pour réduire/agrandir la taille d'un ellipsoïde nous pouvons agir sur :

1. la plus grande/la plus petite des valeurs propres de la matrice Q ,
2. le déterminant de la matrice Q ,
3. la trace $\text{trace}(Q) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Pour montrer les propriétés d'une loi de commande décrite dans la Section 3.5 , nous devons introduire le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 [Fir64] Si $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_1 = P_1^T$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_2 = P_2^T$ sont deux matrices définies positives, l'inégalité suivante est satisfaite pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 \leq \gamma \leq 1$:

$$(1 - \gamma)P_1 + \gamma P_2 \succeq [(1 - \gamma)P_1^{-1} + \gamma P_2^{-1}]^{-1}. \quad (3.17)$$

Cette inégalité signifie aussi que

$$\varepsilon([(1 - \gamma)P_1 + \gamma P_2]) \subseteq \varepsilon([(1 - \gamma)P_1^{-1} + \gamma P_2^{-1}]^{-1}). \quad (3.18)$$

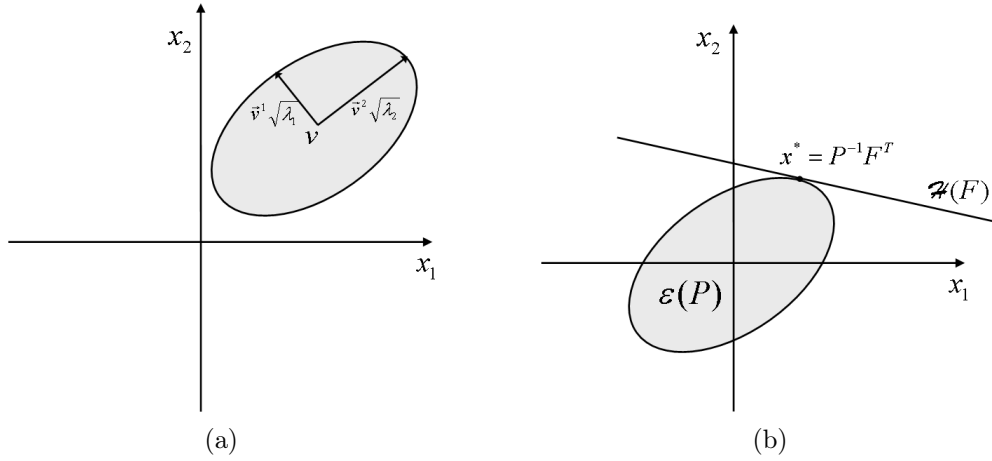


FIG. 3.3 – (a) Ellipsoïde dans \mathbb{R}^2 . (b) Hyperplan tangent à un ellipsoïde dans \mathbb{R}^2 .

Dans le contexte de cette thèse une autre définition tout aussi importante est la définition de la distance entre un hyperplan et un ellipsoïde. Cette distance permet de discerner qu'elle est la relation entre un polyèdre et un ellipsoïde : intersection, inclusion ou disjonction.

Définition 3.1.9 (Distance d'un ellipsoïde à un hyperplan) [Kur06] *Considérons un ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ et un hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ dans \mathbb{R}^n . La distance algébrique de l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ à l'hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ est définie par :*

$$\text{dist}(\varepsilon(P, v), \mathcal{H}(F, c)) = \frac{|c - Fv| - \sqrt{FP^{-1}F^T}}{FF^T}. \quad (3.19)$$

Si $\text{dist}(\varepsilon(P, v), \mathcal{H}(F, c)) > 0$, l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ et l'hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ n'ont aucun point commun. Si $\text{dist}(\varepsilon(P, v), \mathcal{H}(F, c)) < 0$, l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ et l'hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ se croisent. Leur intersection est un ellipsoïde. Si $\text{dist}(\varepsilon(P, v), \mathcal{H}(F, c)) = 0$, l'hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ est tangent à l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$.

Précisons que pour un ellipsoïde $\varepsilon(P)$ centré à l'origine et pour un hyperplan $\mathcal{H}(F)$ avec $c = 1$, la relation (3.19) devient :

$$\text{dist}(\varepsilon(P), \mathcal{H}(F)) = \frac{1 - \sqrt{FP^{-1}F^T}}{FF^T}. \quad (3.20)$$

Si $\text{dist}(\varepsilon(P), \mathcal{H}(F)) = 0$ (voir Figure 3.3 (b)), le point tangent de l'hyperplan et de l'ellipsoïde est décrit par [Hu01] :

$$x^* = P^{-1}F^T. \quad (3.21)$$

Fonction convexe

Définition 3.1.10 (Fonction convexe) *Une fonction $h : D_h \rightarrow C_h$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$ et $C_h \subset \mathbb{R}$, est dite convexe si D_h est un ensemble convexe et si pour tous $v_1 \in D_h$, $v_2 \in D_h$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 \leq \gamma \leq 1$ la condition suivante est vérifiée :*

$$h(\gamma v_1 + (1 - \gamma)v_2) \leq \gamma h(v_1) + (1 - \gamma)h(v_2). \quad (3.22)$$

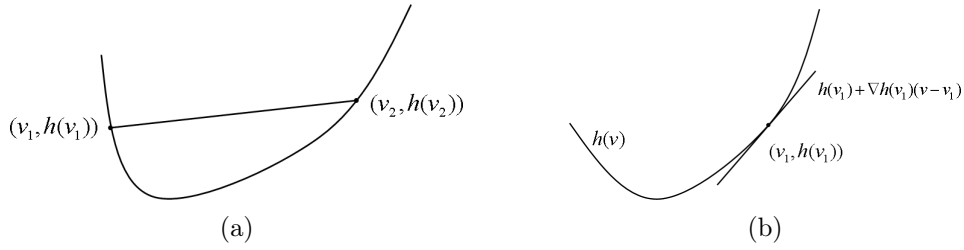


FIG. 3.4 – (a) Fonction convexe. (b) Condition du premier ordre pour la convexité.

D'un point de vue géométrique, l'équation (3.22) signifie que chaque segment de droite reliant les deux points de coordonnées $(v_1; h(v_1))$ et $(v_2; h(v_2))$ est au-dessus du graphe de la fonction h sur le domaine $[v_1, v_2]$ (voir Figure 3.4 (a)).

Définition 3.1.11 (Fonction affine) Une fonction $h : D_h \rightarrow C_h$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$ et $C_h \subset \mathbb{R}$, est affine si pour tous $v_1 \in D_h$, $v_2 \in D_h$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ la condition suivante est vérifiée :

$$h(\gamma v_1 + (1 - \gamma)v_2) = \gamma h(v_1) + (1 - \gamma)h(v_2). \quad (3.23)$$

Remarque 3.1.1 (Convexité des fonctions affines) L'équation (3.22) est toujours vérifiée pour des fonctions affines. Ces fonctions (dont une partie sont des fonctions linéaires) sont en conséquence des fonctions convexes.

Théorème 3.1.2 (Condition de premier ordre pour la convexité) Considérons la fonction $h : D_h \rightarrow C_h$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$ et $C_h \subset \mathbb{R}$, différentiable. La fonction h est convexe si et seulement si l'ensemble D_h est convexe et si la condition suivante est vérifiée pour tous $v_1 \in D_h$, $v \in D_h$:

$$h(v) \geq h(v_1) + \nabla h(v_1)^T(v - v_1). \quad (3.24)$$

L'interprétation géométrique du Théorème 3.1.2 est donnée sur la Figure 3.4 (b). Chaque hyperplan tangent à une fonction convexe sépare l'espace en deux sous-espaces, l'un des deux contenant toutes les valeurs de la fonction.

Définition 3.1.12 (Courbe de niveau) Étant donnée la fonction convexe $h : D_h \rightarrow C_h$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$ et $C_h \subset \mathbb{R}$, une courbe de niveau $\mathcal{S}(\alpha)$ est un ensemble défini par :

$$\mathcal{S}(\alpha) \triangleq \{x \in D_h : h(x) \leq \alpha\}. \quad (3.25)$$

Toutes les courbes de niveau d'une fonction convexe sont convexes pour toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous remarquons qu'une courbe de niveau d'une fonction quadratique $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^T P x$, $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succ 0$, définit un ellipsoïde $\varepsilon(\frac{1}{\alpha}P)$ pour tout $\alpha > 0$:

$$\varepsilon(\frac{1}{\alpha}P) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T (\frac{1}{\alpha}P)x \leq 1\}. \quad (3.26)$$

Problème d'optimisation convexe

Après avoir introduit les définitions d'un ensemble convexe et d'une fonction convexe, nous allons présenter le problème d'optimisation convexe.

Définition 3.1.13 (Problème d'optimisation convexe) *Considérons la fonction $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La formulation*

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & h(x) \\ \text{contraint par} & f^i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ & g^j(x) = 0, j = 1, \dots, p, \end{array} \quad (3.27)$$

signifie qu'il faut rechercher l'argument x qui minimise la fonction $h(x)$ parmi tous les x satisfaisant les contraintes (3.27). $x \in \mathbb{R}^n$ est appelé la variable d'optimisation. $f(x)$ et $g(x)$ sont les fonctions de coût. Les fonctions $f^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ décrivent les contraintes d'inégalité et $g^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ décrivent les contraintes d'égalité. Si toutes les fonctions $h, f^i, i = 1, \dots, m$, et $g^j, j = 1, \dots, p$, sont convexes, le problème formulé ci-dessus est un problème d'optimisation convexe.

Grâce à la propriété de convexité des courbes de niveau, propriété valable pour les fonctions convexes, l'ensemble des contraintes défini par

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f^i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, g^j(x) = 0, j = 1, \dots, p\} \quad (3.28)$$

est un ensemble convexe. Nous minimisons alors une fonction convexe sur un ensemble convexe.

Résoudre un problème d'optimisation convexe suppose que l'intersection de toutes les contraintes exprimées en (3.27) soit non-vide. Un problème de faisabilité est défini par la recherche d'un point satisfaisant ces contraintes.

Définition 3.1.14 (Problème de faisabilité) *La formulation*

$$\begin{array}{ll} \text{trouver} & x \\ \text{contraint par} & f^i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ & g^j(x) = 0, j = 1, \dots, p, \end{array} \quad (3.29)$$

signifie la recherche d'au moins un x qui satisfait les contraintes (3.29). Si ce problème admet au moins une solution, il est faisable. Dans ce cas, l'ensemble faisable est l'ensemble des solutions au problème (3.29).

Une propriété très puissante des problèmes d'optimisation convexe est qu'ils n'ont pas de minimum local, qui pourrait bloquer la recherche du minimum global sur l'ensemble des contraintes. S'il y a une solution, alors soit elle est unique, soit elle fait partie d'un ensemble convexe de valeurs donnant la même valeur pour la fonction de coût.

Propriété 3.1.3 (Solution d'un problème d'optimisation convexe) *Chaque solution locale d'un problème d'optimisation convexe est aussi globale.*

Nous allons introduire un exemple pour résoudre de manière analytique un problème d'optimisation convexe. Cet exemple revient à calculer le point tangent entre un hyperplan et un ellipsoïde (voir équation (3.19)).

Enoncé exemple 3.1.1 (Hyperplan tangent à un ellipsoïde) *Il s'agit de connaître la valeur maximale d'une fonction linéaire $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = v^T x$, $v \in \mathbb{R}^n$ sur un ellipsoïde $\varepsilon(P)$. Ceci revient à minimiser son opposé :*

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & -v^T x \\ \text{contraint par} & x^T P x \leq 1. \end{array} \quad (3.30)$$

Développement exemple 3.1.1 (Hyperplan tangent à un ellipsoïde)

1. Nous commençons par résoudre un sous-problème énoncé de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & -h(x) = -v^T x \\ \text{contraint par} & x^T P x = c, c \in (0, 1], \text{ fixé.} \end{array} \quad (3.31)$$

Montrons ensuite que le maximum s'obtient pour $c = 1$.

2. La solution du problème d'optimisation convexe (3.31) est :

$$h_c(x^*) = \sqrt{cv^T P^{-1}v}. \quad (3.32)$$

Preuve 3.1.1 Nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange à travers la fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, \lambda) = -v^T x + \lambda(x^T P x - c)$. Nous appliquons la condition d'annulation de la dérivée de la fonction Φ aux points extrêmes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -v + 2\lambda P x = 0 \\ x^T P x - c = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x^* = (2\lambda)^{-1} P^{-1} v \\ \lambda^* = \sqrt{v^T P^{-1} v} (\sqrt{4c})^{-1} \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^* = (\sqrt{v^T P^{-1} v})^{-1} \sqrt{c} P^{-1} v \\ \lambda^* = \sqrt{v^T P^{-1} v} (\sqrt{4c})^{-1} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Par conséquent, la valeur de la fonction $h_c(x)$ pour la valeur extrême trouvée x^* est :

$$h_c(x^*) = v^T x^* = \sqrt{cv^T P^{-1}v}. \quad (3.34)$$

3. Puisque la fonction $h_c(x^*)$ est croissante en c , le maximum pour $c \in (0, 1]$ s'obtient alors pour $c = 1$:

$$h(x^*) = \sqrt{v^T P^{-1}v}. \quad (3.35)$$

Un usage possible du résultat exposé dans cet exemple est de calculer les valeurs maximales d'un ellipsoïde $\varepsilon(P)$ sur des axes, par exemple pour $v^T = [1, 0, \dots, 0]^T$. La fonction de coût devient $h(x) = x_1$ (x_1 dénote le premier élément du vecteur x) et le problème de la valeur maximale est décrit par :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & -x_1 \\ \text{contraint par} & x^T P x \leq 1. \end{array} \quad (3.36)$$

La solution s'obtient comme suit :

$$x_1^* = \sqrt{[1, 0, \dots, 0] P^{-1} [1, 0, \dots, 0]^T} = \sqrt{q_{11}}, \text{ où } Q = P^{-1}. \quad (3.37)$$

Nous remarquons que pour les autres axes le résultat est $x_i^* = \sqrt{q_{ii}}$, pour $i = 1, \dots, n$.

Dans l'exemple traité ci-dessus nous avons abouti à une solution analytique du problème d'optimisation convexe. Pour beaucoup d'applications cela n'est pas nécessaire ou bien n'est pas possible, une solution numérique étant suffisante. Par la suite, nous exposerons un sous-ensemble des problèmes d'optimisation convexe, sous-ensemble caractérisé par des contraintes matricielles linéaires. Pour ce sous-ensemble, des algorithmes puissants de calcul de la solution ont été développés.

3.1.2 Problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI

La formulation de contraintes pour des systèmes dynamiques linéaires conduit aux inégalités qui dépendent des matrices : A , B_u , B_w , C . Le cas fondamental provient de la description de la stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov, cas qui sera repris en détail dans la Section 3.3. Mise à part la contrainte de stabilité, d'autres contraintes sur les entrées ou sur les états des systèmes dynamiques (3.2) peuvent être également exprimées en fonction des matrices. Par exemple, une contrainte de \sqrt{c} sur la valeur maximale des entrées est décrite par :

$$v^T \mathbb{I}_n v \leq c, \quad (3.38)$$

où \mathbb{I}_n dénote la matrice identité dans $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Parmi les contraintes qui incluent des matrices, les contraintes matricielles linéaires présentent un très fort avantage : elles sont convexes. Grâce à cette propriété, de nombreux problèmes de contrôle avec des contraintes matricielles et avec des fonctions de coût convexes peuvent être résolus comme des problèmes d'optimisation convexe. De plus, la linéarité facilite la tâche de résolution.

Cette section contient la définition des inégalités matricielles linéaires ainsi que des lemmes importants et quelques propriétés les caractérisant. Nous définirons le problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI, à partir du problème d'optimisation convexe. Les définitions et les notions exposées dans cette section se retrouvent pour la plupart dans [Boy94]. Les autres sources utilisées seront citées tout au long de la section.

Définition 3.1.15 (Inégalité matricielle affine stricte (LMI)) Une contrainte LMI est une contrainte d'Inégalité Matricielle Affine de la forme :

$$F(l) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m l_i F_i \succ 0, \quad \text{où} \quad (3.39)$$

- $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)^T \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des variables appelées de décision,
- $F_0, F_1, \dots, F_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices symétriques $F_j = F_j^T$, $j = 0, \dots, m$.

Une inégalité matricielle affine non-strictes s'obtient en remplaçant l'inégalité matricielle (3.39) par $F(l) \succeq 0$. Une contrainte LMI est convexe en l . Autrement dit, l'ensemble

$$\{l \in \mathbb{R}^m : F(l) \succ 0\} \quad (3.40)$$

est un ensemble convexe.

Un ensemble de plusieurs LMI $F^1(l), F^2(l), \dots, F^g(l)$ peut être exprimé comme étant une seule LMI, formée par une matrice diagonale avec les contraintes LMI sur la diagonale principale et des éléments nuls pour le reste de la matrice :

$$\begin{pmatrix} F^1(l) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F^2(l) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & F^g(l) \end{pmatrix} \succ 0. \quad (3.41)$$

Les variables de décision des contraintes LMI peuvent ainsi être exprimées sous une forme matricielle. Prenons comme exemple l'inégalité matricielle de Lyapunov $A^T P + P A \prec 0$, qui a comme inconnue la matrice $P = P^T$. La matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est un élément d'un espace des

matrices, dont une des bases est $\{P^1, P^2, \dots, P^g\}$, $g = n(n+1)/2$ et $P^j = (P^j)^T$ pour $j = 1, \dots, g$. La matrice P s'écrit alors comme une combinaison linéaire : $P = l_0 P^0 + l_1 P^1 + \dots + l_g P^g$, où $P^0 = \mathbf{0}$.

Les problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI sont alors de la forme suivante :

Définition 3.1.16 (Problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI)

Considérons la fonction $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. La formulation

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && h(l) \\ & \text{contraint par} && F_0 + \sum_{i=1}^m l_i F_i \succ 0, \end{aligned} \tag{3.42}$$

représente un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI.

Nous introduirons dans les paragraphes suivants un lemme et des méthodes qui facilitent l'écriture des inégalités matricielles sous forme de LMI.

Le lemme de Schur permet de transformer des inégalités matricielles non-linéaires en inégalités matricielles linéaires.

Lemme 3.1.1 (Lemme de Schur) La contrainte LMI

$$\begin{pmatrix} Q(l) & S(l) \\ S(l)^T & R(l) \end{pmatrix} \succeq 0 \tag{3.43}$$

où $Q(l) = Q(l)^T$, $R(l) = R(l)^T$ et $S(l)$ est affine en l , est équivalente à

$$R(l) \succ 0, \quad Q(l) - S(l)R(l)^{-1}S(l)^T \succ 0. \tag{3.44}$$

Afin de tester la faisabilité des contraintes quadratiques convexes, il est possible de résoudre des problèmes d'intersection de ce type d'ensemble comme des problèmes de faisabilité sous contraintes LMI. Pour exprimer les contraintes quadratiques sous forme de LMI, la S-procédure est utilisée.

Lemme 3.1.2 (S-procédure) Considérons des fonctions quadratiques $h(x)^0, h(x)^1, \dots, h(x)^g$, $h^i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$h^i(x) \triangleq x^T P^i x + 2(v^i)^T x + c^i, \quad i = 0, \dots, g, \quad P^i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P^i = (P^i)^T, \quad v^i \in \mathbb{R}^n, \quad c^i \in \mathbb{R}. \tag{3.45}$$

S'il existe $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \dots, \tau_g \geq 0$ tels que

$$h^0(x) - \sum_{i=1}^g \tau_i h^i(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{alors} \tag{3.46}$$

$$h^0(x) \geq 0 \quad \forall x \text{ tel que } h^i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, g. \tag{3.47}$$

Il existe des cas pour lesquels les inégalités matricielles ne sont pas linéaires, mais bilinéaires, comme dans l'exemple qui suit. Dans certains cas il est possible toutefois d'effectuer un changement de variable matricielle pour restaurer la linéarité.

Enoncé exemple 3.1.2 (Changement de variable matricielle) Considérons les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ (A + BK)^T P + P(A + BK) \prec 0, \end{cases} \tag{3.48}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et P, K sont des variables de décision matricielles. Ce problème décrit la recherche d'une loi de commande par retour d'état linéaire. Il peut être transformé en une contrainte LMI.

Développement exemple 3.1.2 (Changement de variable matricielle)

1. Pour cet exemple nous pouvons retrouver une inégalité matricielle linéaire en faisant un changement de variable $z = P^{-1}x$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} P^{-1} \succ 0 \\ AP^{-1} + P^{-1}A^T + P^{-1}K^TB^T + BKP^{-1} \prec 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

2. Les inégalités matricielles obtenues ne sont pas linéaires, mais elles peuvent être transformées en LMI en posant $Q = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Y = KP^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ AQ + QA^T + Y^TB^T + BY \prec 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

3. Ce changement de variable est possible car la fonction qui relie (P, K) à (Q, Y) est bijective.

La méthode que nous avons exposée dans l'exemple précédent n'est pas toujours possible. Puisque beaucoup de problèmes de contrôle peuvent être exprimés sous la forme d'inégalités matricielles bilinéaires et non linéarisables, des méthodes spécifiques pour celles-ci ont été développées. Un bref aperçu en est donné dans la section suivante.

3.1.3 Problème d'optimisation sous contraintes BMI

Contrairement aux problèmes LMI, les problèmes de type BMI sont des problèmes difficiles à résoudre, car ils sont d'une manière générale non convexes. Par conséquent, le développement d'algorithmes de résolution pour les problèmes BMI a tardé, même si des méthodes de résolution ont été proposées, comme par exemple [Ber97]. L'intérêt pour ce domaine est toujours grandissant. Récemment, un premier solveur pour le problème BMI, nommé PENBMI, a été publié. Ce solveur repose sur la méthode de Lagrange augmentée et sur des fonctions de pénalisation [Koc03]. La convergence vers un minimum local qui garantit la condition d'optimalité de premier ordre est assurée [Sti05].

Nous donnons ci-dessous la définition d'un problème BMI.

Définition 3.1.17 (Problème d'optimisation BMI) *La formulation*

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && v^T x \\ & \text{contraint par} && F_0 + \sum_{i=1}^m l_i F_i + \sum_{j=1}^q p_j H_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q l_i p_j F_i H_j \succ 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

est la recherche de $l \in \mathbb{R}^m$ et $p \in \mathbb{R}^q$ parmi tous les l et p qui satisfont les contraintes (3.51) tel que $v^T x$ soit minimisée. $v^T x$ est la fonction de coût et $v \in \mathbb{R}^n$. Les matrices $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ et $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, q$ sont telles que $F_i = F_i^T$ et $H_j = H_j^T$.

3.2 Ensemble atteignable et ensemble invariant

3.2.1 Ensemble atteignable

Deux questions fondamentales apparaissent dans l'analyse des systèmes dynamiques et dans la synthèse des lois de commande. La première question est « Où les trajectoires d'un système dynamique arriveront en partant d'un état initial connu, ou en partant d'un ensemble d'états initiaux connus, sous l'influence des entrées ? ». Dans ce cas, on étudie par exemple le pire effet qu'une perturbation bornée peut avoir sur les performances d'un système dynamique. Pour

répondre à cette question, l'ensemble atteignable du système est à rechercher pour l'entrée considérée.

La deuxième question est de savoir si les trajectoires d'un système dynamique resteront dans l'ensemble souhaité. Sinon, comment faire pour les garder dans cet ensemble via des entrées de commande ? Par exemple, on peut étudier si les trajectoires resteront dans les limites souhaitées. Une réponse à cette question est fournie par la théorie des ensembles invariants. Les définitions d'un ensemble atteignable et d'un ensemble invariant seront introduites par la suite.

Définition 3.2.1 (Ensemble atteignable [Kur97]) *L'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \chi^0)$ d'un système dynamique décrit dans l'équation (3.1) est défini par*

$$\chi(t, t_0, \chi^0) \triangleq \cup \{x(t, t_0, x^0) : x^0 \in \chi^0, v(t) \in \Upsilon(t), t \in T \subset \mathbb{R}^+\}, \quad (3.52)$$

où $x(t, t_0, x^0)$ est une trajectoire du système (3.1), χ^0 est un ensemble convexe et compact des états initiaux dans \mathbb{R}^n et $\Upsilon(t)$ est un ensemble convexe et compact des contraintes $\Upsilon(t) : T \rightarrow \mathbb{R}^r$.

L'ensemble atteignable d'un système dynamique pourrait être calculé à partir de la totalité de ces trajectoires. Pour étudier cette alternative, regardons d'abord plus en détail une trajectoire isolée d'un système dynamique.

Le comportement d'un système dynamique est décrit d'une manière analytique exacte par la solution de l'équation différentielle (3.1) pour un état initial $x(t_0) = x^0$ et pour une entrée $v(t) \in \mathbb{R}^r$. Cette solution est représentée pour les systèmes dynamiques linéaires par :

$$x(t, t_0, x^0) = e^{(t-t_0)A}x^0 + \int_{t_0}^t e^{\tau A}Bv(\tau)d\tau, \quad (3.53)$$

où $B = [B_u, B_w]$, $v = [u^T, w^T]^T$.

Dans la plupart des cas pratiques l'état initial du système x^0 n'est pas connu. En revanche, nous pouvons presque toujours supposer qu'il appartient à un ensemble χ^0 convexe et compact. De plus, si l'entrée de commande u est normalement prédéterminée dans les applications de contrôle, les entrées de perturbations ou le bruit w ne sont généralement pas connus de manière analytique. La connaissance des perturbations peut se limiter à des propriétés les caractérisant, notamment l'énergie, le domaine fréquentiel, ou des limites des valeurs temporelles. De plus, en supposant qu'on connaît la valeur x^0 et les fonctions $u(t)$ et $w(t)$ d'une manière analytique, la résolution de l'équation (3.53) s'avère difficile, spécialement pour des systèmes d'ordre élevé. Celle-ci est fournie par des calculs numériques.

En effet, l'ensemble atteignable est difficilement calculable à partir des trajectoires isolées. L'ensemble atteignable est estimé dans la littérature à travers des ensembles intérieurs ou extérieurs à l'ensemble atteignable recherché. Pour les systèmes discrets dans le temps, plusieurs algorithmes ont été établis, comme ceux de [Mot53], [Kva04]. Pour la théorie des systèmes continus dans le temps les résultats sont récents, comme par exemple l'approximation par des polyèdres orthogonaux [Dan00] ou des ellipsoïdes [Kur97], [Kur06]. Dans les paragraphes suivants, l'une des solutions pour estimer les ensembles atteignables, en l'occurrence par des ensembles invariants, est décrite.

3.2.2 Ensemble invariant

Dans ce paragraphe, plusieurs définitions de l'invariance des ensembles seront introduites. Considérons d'abord le système (3.1) sans aucune entrée ($r = 0$) avec $T = \mathbb{R}^+$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0. \quad (3.54)$$

Pour ce type de système, l'ensemble positivement invariant est défini comme suit :

Définition 3.2.2 (Ensemble positivement invariant [Bla08]) *Un ensemble $\mathcal{S} \subseteq \chi^0$ est dit positivement invariant, ou invariant, par rapport aux dynamiques du système (3.54) si toutes les trajectoires de (3.54) ayant des états initiaux $x^0 \in \mathcal{S}$ sont telles que $x(t, t_0, x^0) \in \mathcal{S}$ pour $t > t_0$.*

Si la propriété ci-dessus n'est pas vérifiée pour toutes les trajectoires commençant dans l'ensemble \mathcal{S} , nous parlons d'un ensemble positivement invariant faible.

Définition 3.2.3 (Ensemble positivement invariant faible [Bla08]) *Un ensemble $\mathcal{S} \subseteq \chi^0$ est dit positivement invariant faible par rapport aux dynamiques du système (3.54) si parmi toutes les trajectoires de (3.54) ayant des états initiaux $x^0 \in \mathcal{S}$, il en existe au moins une, telle que $x(t, t_0, x^0) \in \mathcal{S}$ pour $t > t_0$.*

Pour des systèmes caractérisés par des entrées $v = [u^T, w^T]^T$, nous parlons d'un ensemble positivement invariant robuste vis-à-vis de l'entrée de perturbation w :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.55)$$

et d'un ensemble positivement invariant contrôlé d'une manière robuste vis-à-vis de l'entrée de commande u pour les systèmes suivants :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)), \quad t \geq 0. \quad (3.56)$$

Définition 3.2.4 (Ensemble positivement invariant robuste [Bla08]) *L'ensemble $\mathcal{S} \subseteq \chi^0$ est positivement invariant robuste par rapport aux dynamiques du système (3.55), si pour tout $x^0 \in \mathcal{S}$ et pour tout $w(t) \in \mathcal{W}$, la condition $x(t, t_0, x^0) \in \mathcal{S}$ est vérifiée pour $t > t_0$.*

L'ensemble \mathcal{W} est un ensemble convexe et compact qui contient toutes les variations possibles du signal inconnu mais borné, $w(t)$. Celui-ci peut être une perturbation, du bruit ou un signal de référence.

Définition 3.2.5 (Ensemble positivement invariant contrôlé robuste [Bla08]) *L'ensemble $\mathcal{S} \subseteq \chi^0$ est positivement invariant contrôlé robuste par rapport aux dynamiques du système (3.56), s'il existe une loi de commande de classe \mathcal{C} (assurant l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (3.56) en boucle fermée) telle que pour tout $x^0 \in \mathcal{S}$ et pour tout $w(t) \in \mathcal{W}$, la condition $x(t, t_0, x^0) \in \mathcal{S}$ est vérifiée pour $t > t_0$.*

3.2.3 Approximation des ensembles atteignables par des ensembles invariants

Les ensembles atteignables sont utiles, par exemple, pour décrire les effets d'une perturbation bornée ou l'efficacité d'une loi de commande bornée sur un système dynamique continu. Malheureusement, leur résolution reste difficile. Si une connaissance exacte de l'ensemble atteignable n'est pas nécessaire, et si une approximation suffit, celle-ci peut être fournie par un ensemble invariant.

Considérons le système dynamique (3.55), l'ensemble des états initiaux $\varsigma^0 \subset \chi^0$ et une entrée de perturbation bornée $w(t) \in \mathcal{W}$. Nous remarquons qu'un ensemble positivement invariant robuste \mathcal{S} incluant ς^0 contient également l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \varsigma^0)$ (voir Figure 3.5).

En effet, quelle que soit la trajectoire $x(t, t_0, x^0)$ commençant à l'intérieur de l'ensemble ς^0 , celle-ci, par définition, ne dépassera pas l'ensemble positivement invariant robuste \mathcal{S} , quelle que soit l'entrée $w(t) \in \mathcal{W}$. Cette affirmation reste valable indépendamment de l'instant t , car

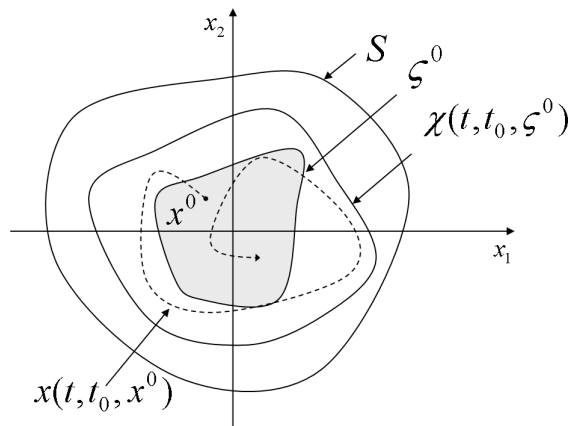


FIG. 3.5 – Ensemble des états initiaux ζ^0 , ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \zeta^0)$ et ensemble positivement invariant robuste \mathcal{S} .

l'ensemble \mathcal{S} est positivement invariant robuste pour tous $t > t_0$. En même temps, $x(t, t_0, x^0)$ appartient à l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \zeta^0)$. Puisque l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \zeta^0)$ est défini par la réunion de toutes les trajectoires $x(t, t_0, x^0)$ (voir l'équation (3.52)) et puisque chaque trajectoire $x(t, t_0, x^0)$ est incluse dans \mathcal{S} , l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \zeta^0)$ est inclus dans \mathcal{S} .

Par conséquent, une approximation intérieure de l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \zeta^0)$ est assurée par l'ensemble des états initiaux ζ^0 et une approximation extérieure est fournie par l'ensemble invariant \mathcal{S} . En cherchant un ensemble invariant \mathcal{S} contenant ζ^0 et proche de celui-ci, il est possible de trouver une approximation raisonnable de l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \zeta^0)$.

Dans la prochaine section, nous introduirons des notions de stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov et des ensembles invariants d'une forme particulière : les ensembles invariants ellipsoïdaux.

3.3 Fonction de Lyapunov

La stabilité est une propriété essentielle des systèmes dynamiques. Cette propriété signifie de façon intuitive que les trajectoires d'un système dynamique restent bornées pour une période indéfiniment longue. La stabilité asymptotique, notamment exponentielle ou quadratique, assure en plus que les trajectoires d'un système dynamique convergent vers un point d'équilibre.

Lyapunov a apporté vers la fin du dix-neuvième siècle une contribution fondamentale à la théorie de stabilité des systèmes dynamiques : une méthode prouvant la stabilité via une fonction décroissante le long des trajectoires du système.

Un rappel de ce résultat sera présenté, en mettant l'accent sur trois aspects qui résultent de l'existence d'une fonction de Lyapunov :

1. la garantie de la stabilité du système dynamique,
2. la garantie de l'existence des ensembles invariants,
3. la garantie de l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique pour les systèmes linéaires stables.

Les définitions et les théorèmes présentés ci-dessous sont détaillés dans [Kha2002] et [Bla08].

3.3.1 La stabilité au sens de Lyapunov

Nous considérerons d'abord la définition d'un point d'équilibre et celle de sa stabilité pour un système autonome représenté dans l'équation (3.54).

Définition 3.3.1 (Point d'équilibre) *Un point $x = x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système (3.54) si pour un état initial $x(t_0) = x^*$, la trajectoire du système reste constante $\xi_x(t) = x^*$ pour $t \in [t_0, \infty)$. Pour les systèmes autonomes, les points d'équilibres sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.*

La solution de l'équation $f(x) = 0$ peut contenir un point isolé, ou bien un continuum de points d'équilibre. Considérons x^* , un point d'équilibre isolé du système (3.54). Si $x^* \neq 0$, le système dynamique (3.54) peut toujours être représenté par un système dynamique équivalent, obtenu après le changement de variable $z = x - x^*$:

$$\dot{z} = f(x) = f(z + x^*) \triangleq g(z). \quad (3.57)$$

Le système dynamique obtenu (3.57) a un point d'équilibre nul. Nous ne traiterons donc dans cette section que des points d'équilibre nuls, sachant que les notions exposées restent également valables pour des points d'équilibre non nuls. Nous introduirons dans la suite la définition de la stabilité d'un point d'équilibre.

Définition 3.3.2 (Stabilité d'un point d'équilibre) *Un point d'équilibre de (3.54) $x^* = 0$ est :*

– *stable, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$, tel que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.58)$$

– *instable s'il n'est pas stable,*

– *asymptotiquement stable, s'il est stable et si δ peut être choisi tel que :*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = 0. \quad (3.59)$$

En étudiant les systèmes mécaniques, Lyapunov a remarqué qu'un bon indicateur pour rechercher la stabilité d'un point d'équilibre était l'énergie du système. Par exemple, l'énergie cinétique d'un ressort excité, puis laissé libre, diminue par frottement avec l'air avant de revenir au point d'équilibre. Dans l'espace d'état, ce système dynamique converge vers le point d'équilibre avec une énergie décroissante le long des trajectoires. Lyapunov a fait le constat que des fonctions, autres que la fonction d'énergie, peuvent prouver la stabilité des systèmes dynamiques sous la condition que leurs dérivées le long des trajectoires du système soient définies négatives.

Considérons la fonction continûment différentiable $V : D_V \rightarrow \mathbb{R}$, où $D_V \in \mathbb{R}^n$ contient l'origine. La dérivée de la fonction V le long des trajectoires du système (3.54) est décrite par :

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x). \quad (3.60)$$

Le théorème suivant énonce les conditions qu'une fonction V reliée à un système dynamique, (3.54), doit vérifier pour garantir la stabilité du système à l'origine de l'espace d'état.

Théorème 3.3.1 (Théorème de stabilité de Lyapunov) *Considérons $x^* = 0$ un point d'équilibre isolé du système (3.54) et $D_V \in \mathbb{R}^n$ un ensemble contenant l'origine. $V : D_V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continûment différentiable telle que :*

$$\begin{aligned} V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0, \quad \forall x \in D_V - \{0\} \\ \dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in D_V. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Alors, $x^* = 0$ est un point d'équilibre stable. De plus, si

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in D_V - \{0\} \tag{3.62}$$

alors $x^* = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

La fonction $V(x)$ satisfaisant les conditions (3.61) est appelée fonction de Lyapunov. Nous remarquons que les conditions exprimées dans le Théorème 3.3.1 sont des conditions suffisantes, mais pas nécessaires. La construction des fonctions de Lyapunov pour les systèmes dynamiques non-linéaires reste un enjeu de la recherche qui n'est pas encore totalement résolu.

3.3.2 Fonction de Lyapunov et ensembles invariants

L'ensemble $\mathcal{S}(\alpha) = \{x \in D_V : V(x) \leq \alpha\}$ est une courbe de niveau de la fonction de Lyapunov $V : D_V \rightarrow \mathbb{R}$. Nous verrons que l'ensemble $\mathcal{S}(\alpha)$ possède une propriété importante décrite en Section 3.2.2 : il est positivement invariant.

En effet, considérant $V(x(t_1)) = \alpha_1$ et $V(x(t_2)) = \alpha_2$ pour $t_2 \geq t_1$, deux instants de temps quelconques, nous obtenons $\alpha_2 \leq \alpha_1$ grâce à la décroissance de la fonction $V(x(t))$. Par conséquent, $\mathcal{S}(\alpha_2) \subseteq \mathcal{S}(\alpha_1)$ et donc $x(t_2) \in \mathcal{S}(\alpha_1)$ pour $t_2 \geq t_1$. Cela signifie que chaque trajectoire commençant à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{S}(\alpha_1)$ y restera pour $t \rightarrow \infty$.

Les courbes de niveau $\mathcal{S}(\alpha_1), \mathcal{S}(\alpha_2), \dots, \mathcal{S}(\alpha_n)$ obtenues pour des instants de temps consécutifs $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sont concentriques et se contractent vers le point d'équilibre dans le cas de la stabilité asymptotique, $t_n \rightarrow \infty$ (voir Figure 3.6). $\mathcal{S}(\alpha_1), \mathcal{S}(\alpha_2), \dots, \mathcal{S}(\alpha_n)$ représentent des ensembles positivement invariants.

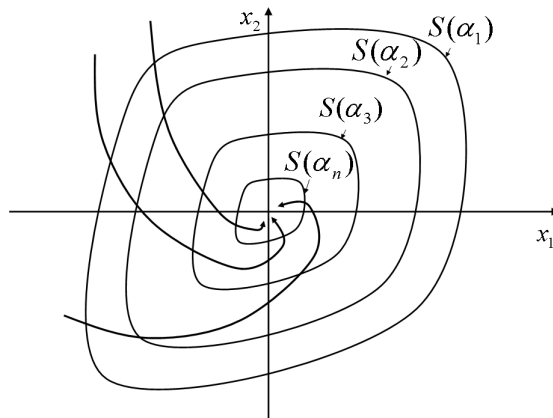


FIG. 3.6 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov.

Les ensembles positivement invariants assurés par des fonctions de Lyapunov peuvent être finis ou infinis. Pour étendre la stabilité au niveau global, les propriétés du Théorème 3.3.1 doivent être vérifiées sur l'ensemble $D_V = \mathbb{R}^n$.

La stabilité globale impose une propriété supplémentaire. La fonction de Lyapunov doit être radialement non-bornée. Cela signifie que les courbes de niveau $\mathcal{S}(\alpha)$ restent des ensembles bornés pour des états x bornés, tendant respectivement uniquement vers l'infini pour $\|x\| \rightarrow \infty$. Cette propriété est assurée si la fonction de Lyapunov est telle que :

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{seulement pour} \quad \|x\| \rightarrow \infty. \quad (3.63)$$

Théorème 3.3.2 (Théorème de stabilité globale de Lyapunov) *Considérons $x^* = 0$ un point d'équilibre isolé du système (3.54). $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continûment différentiable telle que :*

$$V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0,$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty, \quad (3.64)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Alors, $x^* = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

3.4 Fonction de Lyapunov quadratique et inégalités matricielles

Nous allons porter notre attention dans les paragraphes suivants sur une classe particulière de fonctions de Lyapunov : les fonctions de Lyapunov quadratiques. Dans un premier temps, les propriétés de ces fonctions seront mises en valeur pour des systèmes linéaires invariants dans le temps. Dans un deuxième temps, les systèmes linéaires à paramètres variants seront abordés. Les systèmes linéaires considérés dans les sections suivantes possèdent un seul point d'équilibre : l'origine.

Nous ferons en même temps le lien entre la stabilité des systèmes linéaires et les inégalités matricielles linéaires pour les fonctions quadratiques. De cette manière, nous aborderons la synthèse des lois de commande par retour d'état à travers des fonctions de Lyapunov et des problèmes d'optimisation LMI.

Considérons le système dynamique invariant décrit dans (3.3) dont l'intégralité du vecteur d'état est supposée accessible à la mesure : $y = x$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (3.65)$$

Définition 3.4.1 (Fonction quadratique définie positive) *La fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quadratique définie positive si :*

$$V(x) = x^T P x \quad \text{et} \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T, P \succ 0. \quad (3.66)$$

Premièrement, puisque la matrice P est définie positive, nous remarquons que la fonction $V(x)$ est définie positive et radialement non-bornée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Elle est donc une très bonne candidate pour une fonction de Lyapunov. Les courbes de niveau de cette fonction sont décrites par des ellipsoïdes :

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}P\right) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq \alpha\}. \quad (3.67)$$

Deuxièmement, nous considérerons la seconde condition pour obtenir une fonction de Lyapunov. La fonction $V(x)$ de (3.66) doit satisfaire cette condition vis-à-vis du système (3.65). Plus précisément, elle doit avoir sa dérivée négative le long des trajectoires du système (3.65) :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x(t)) \leq 0 &\Leftrightarrow \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (Ax + B_u u + B_w w)^T P x + x^T P (Ax + B_u u + B_w w) \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^T (A^T P + P A) x + u^T B_u^T P x + x^T P B_u u + w^T B_w^T P x + x^T P B_w w \leq 0.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

3.4.1 Système dynamique linéaire invariant autonome

Pour les systèmes linéaires invariants autonomes ($u = 0, w = 0$) :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.69}$$

l'équation (3.68) se traduit par une inégalité matricielle linéaire :

$$x^T (A^T P + P A) x \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A^T P + P A \preceq 0. \tag{3.70}$$

Remarque 3.4.1 *S'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x) = x^T P x$, $P = P^T$, $P \succ 0$ et $A^T P + P A \preceq 0$, le système $\dot{x} = Ax$ est alors globalement stable.*

Pour les systèmes de type : $\dot{x} = Ax$, l'existence de la fonction de Lyapunov quadratique s'est avérée non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour prouver la stabilité.

Lemme 3.4.1 (Existence d'une fonction de Lyapunov quadratique) [Rug93]

Considérons le système dynamique linéaire invariant $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si la matrice A a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative, il existe une solution unique à l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q \tag{3.71}$$

et cette solution est décrite par

$$P = \int_0^\infty e^{A^T \tau} Q e^{A \tau} d\tau. \tag{3.72}$$

De plus, si la matrice Q est définie positive, la matrice P est définie positive.

Le Lemme 3.4.1 garantit la faisabilité du problème LMI $A^T P + P A \preceq 0$ pour une matrice A ayant des valeurs propres à partie réelle négative.

3.4.2 Système dynamique linéaire invariant commandé par retour d'état

Considérons dans ce paragraphe un système dynamique linéaire invariant avec des entrées de commande, mais sans entrée de perturbation :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{3.73}$$

L'objectif fondamental de la synthèse d'une loi de commande $u(x)$ est de rendre le système (3.73) stable, ou bien, si le système est déjà stable, de ne pas altérer sa stabilité. Pour une loi de commande par retour d'état constant $u(x) = Kx$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, cet objectif peut être atteint en cherchant simultanément une fonction de Lyapunov quadratique et le vecteur de retour d'état K en résolvant un problème de faisabilité LMI.

Pour $u = Kx$ et $w = 0$, l'équation (3.68) s'écrit sous la forme :

$$x^T(A^T P + PA + K^T B_u^T P + P B_u K)x \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad (3.74)$$

$$A^T P + PA + K^T B_u^T P + P B_u K \preceq 0.$$

Nous avons montré dans l'Exemple 3.1.2 qu'en faisant le changement de variable $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$ dans (3.74) nous obtenions pour la synthèse de la loi de commande le problème de faisabilité LMI suivant :

$$\begin{cases} Q \succ 0 \\ AQ + QA^T + Y^T B^T + BY \preceq 0. \end{cases} \quad (3.75)$$

Afin d'étendre la synthèse de la loi de commande à d'autres objectifs que la stabilité, le problème de faisabilité LMI (3.75) peut être adjoint de contraintes ou transformé en un problème d'optimisation LMI en ajoutant une fonction de coût. Nous allons exposer quelques exemples de problèmes de faisabilité LMI et d'optimisation LMI prenant en compte des exigences supplémentaires par rapport à la stabilité lors de la synthèse de la loi de commande. Les exemples présentés ci-dessous reposent sur la propriété d'invariance positive des courbes de niveau de la fonction de Lyapunov et également sur leur convexité.

Pour les exemples suivants nous utiliserons un ensemble d'états initiaux $\chi^0 \in \mathbb{R}^n$ qui est décrit par le polytope :

$$\chi^0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^g v_i \gamma_i, \sum_{i=1}^g \gamma_i = 1, \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, g \right\}, \quad (3.76)$$

où $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, g$, sont les vecteurs des sommets du polytope.

Enoncé exemple 3.4.1 (Minimiser l'ensemble atteignable) [Boy94] *L'objectif de cet exemple est de trouver des contraintes LMI et, si nécessaire, une fonction de coût, pour synthétiser par un problème d'optimisation LMI la loi de commande $u = Kx$, telle que :*

1. le système (3.73) soit stable,
2. l'ensemble atteignable $\chi(\infty, t_0, \chi^0)$ soit réduit au minimum quand χ^0 est décrit par (3.76).

Développement exemple 3.4.1 (Minimiser l'ensemble atteignable)

1. La stabilité du système (3.73) est assurée par les contraintes LMI (3.75), $V(x) = x^T P x$ étant une fonction de Lyapunov. Par conséquent, $\varepsilon(P)$ représente un ensemble invariant du système (3.73) avec la commande $u(x) = Kx$.
2. Nous rappelons dans un premier temps la remarque faite dans la Section 3.2.3 : si un ensemble des états initiaux est inclus dans un ensemble invariant, l'ensemble atteignable afférent est également inclus dans l'ensemble invariant. Ainsi, nous étudierons d'abord l'inclusion de l'ensemble χ^0 dans $\varepsilon(P)$ (voir Figure 3.7).
3. Un polytope est inclus dans un ensemble convexe si tous ses sommets y sont inclus. En conséquence, χ^0 est inclus dans $\varepsilon(P)$ si $v_i \in \varepsilon(P)$, $i = 1, \dots, g$. Cela revient, selon la définition d'un ellipsoïde, à :

$$v_i^T P v_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, g \quad \Leftrightarrow \quad 1 - v_i^T P v_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, g. \quad (3.77)$$

En appliquant le Lemme de Schur dans l'équation (3.77), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & P^{-1} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g. \quad (3.78)$$

4. Pour minimiser la taille de l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ nous pouvons soit minimiser la trace $\text{tr}(Q)$, soit minimiser le déterminant $\det(Q)$ ou la valeur propre maximale de Q , $\lambda_{\max}(Q)$.
5. Le problème d'optimisation LMI, dont la solution fournit la loi de commande $u(x) = Kx$, s'écrit donc de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 &\text{minimiser} && \text{tr}(Q) \text{ ou } \det(Q) \text{ ou } \lambda_{\max}(Q) \\
 &\text{contraint par} && Q \succ 0, \\
 &&& AQ + QA^T + Y^T B^T + BY \preceq 0, \\
 &&& \begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Les variables matricielles sont $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$.

6. Nous remarquons que l'ensemble $\varepsilon(P)$ ne reste qu'une approximation extérieure de l'ensemble atteignable χ pour $u(x) = Kx$. Cette méthode représente également un bon moyen de prendre en compte l'ensemble atteignable lors de la synthèse de la loi de commande.

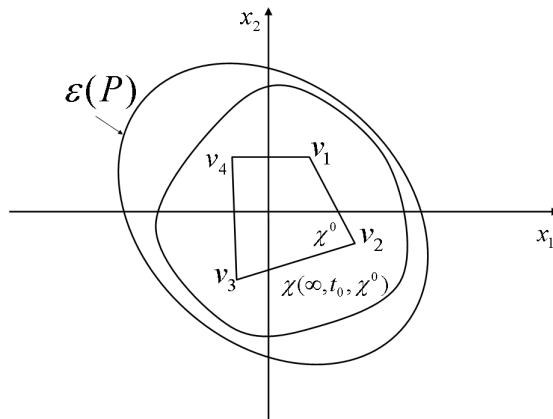


FIG. 3.7 – Minimisation de l'ensemble atteignable.

Enoncé exemple 3.4.2 (Borner la valeur de l'entrée de commande) [Boy94] L'objectif de cet exemple est de trouver des contraintes LMI et, si nécessaire, une fonction de coût, pour synthétiser par un problème d'optimisation LMI la loi de commande $u(x) = Kx$, telle que

1. le système (3.73) ayant une seule entrée ($m = 1$) soit stable,
2. la loi de commande $u(x) = Kx$ reste bornée à U_{\max} en valeur absolue pour tout $x_0 \in \chi^0$ décrit par (3.76) et pour $t_0 = 0$.

Développement exemple 3.4.2 (Borner la valeur de l'entrée de commande)

1. La stabilité est assurée par les contraintes LMI (3.75), $V(x) = x^T P x$ étant une fonction de Lyapunov. Par conséquent, $\varepsilon(P)$ représente un ensemble invariant du système (3.73) en boucle fermée ($u(x) = Kx$).

2. La condition $|u(x)| = |Kx| \leq U_{\max}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit comme étant un ensemble polyédrique (voir Figure 3.8) :

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{U_{\max}}K\right) = \{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{1}{U_{\max}}Kx\right| \leq 1\}. \quad (3.80)$$

3. Si $\chi^0 \subseteq \varepsilon(P) \subseteq \mathcal{L}\left(\frac{1}{U_{\max}}K\right)$ les trajectoires du système (3.73) ne vont pas dépasser l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$ et resteront en plus à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{L}\left(\frac{1}{U_{\max}}K\right)$ pour tout $x_0 \in \chi^0$ et $t \geq 0$. Dans ce cas, l'entrée de commande restera donc bornée à U_{\max} pour tout $x_0 \in \chi^0$ et $t \geq 0$.

4. La relation d'inclusion $\chi^0 \subseteq \varepsilon(P)$ est décrite dans l'équation (3.78).

5. La relation d'inclusion $\varepsilon(P) \subseteq \mathcal{L}\left(\frac{1}{U_{\max}}K\right)$ est équivalente à la contrainte suivante (voir Définition 3.1.9, Distance d'un ellipsoïde à un hyperplan) :

$$\left(\frac{1}{U_{\max}}K\right)^T P^{-1} \left(\frac{1}{U_{\max}}K\right) \leq 1 \Leftrightarrow \quad (3.81)$$

$$1 - \left(\frac{1}{U_{\max}}K\right)^T P^{-1} P P^{-1} \left(\frac{1}{U_{\max}}K\right) \geq 0.$$

En appliquant le Lemme de Schur dans l'équation (3.81) nous obtenons la contrainte matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{U_{\max}}(KP^{-1}) \\ \frac{1}{U_{\max}}(KP^{-1})^T & P^{-1} \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{U_{\max}}(KQ) \\ \frac{1}{U_{\max}}(KQ)^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0. \quad (3.82)$$

6. En conséquence, la recherche de la loi de commande bornée s'écrit comme un problème de faisabilité LMI :

$$\begin{array}{ll} \text{trouver} & Y, \quad Q \\ \text{contraint par} & Q \succ 0, \end{array}$$

$$AQ + QA^T + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad (3.83)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{U_{\max}}Y \\ \left(\frac{1}{U_{\max}}Y\right)^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Les variables matricielles sont $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$.

7. Nous remarquons que l'inclusion de l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ dans le polyèdre $\mathcal{L}\left(\frac{1}{U_{\max}}K\right)$ peut engendrer une contrainte forte sur la synthèse de la loi de commande. De plus, l'ellipsoïde ne représente qu'une approximation de l'ensemble atteignable $\chi(\infty, t_0, \chi^0)$.

3.4.3 Système dynamique linéaire invariant commandé par retour d'état avec perturbations

Nous prendrons en compte dans cette section un système dynamique linéaire avec entrées de commande u et de perturbation w :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad w \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (3.84)$$

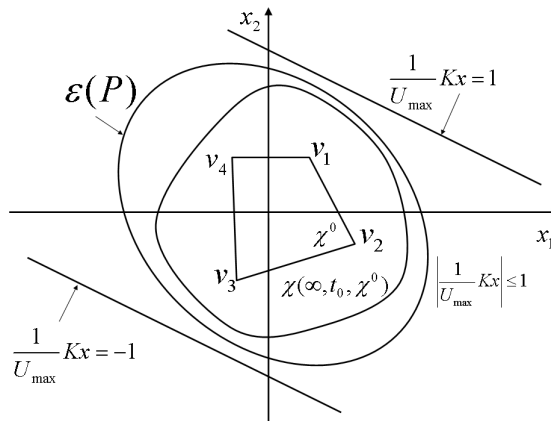


FIG. 3.8 – Limitation de la commande du système dynamique.

En poursuivant la série d'exemples d'utilisation de l'optimisation LMI lors de la synthèse de la loi de commande, nous montrerons comment calculer un retour d'état linéaire $u = Kx$ qui tient compte des perturbations w . Dans une première approche, la perturbation w sera considérée non-mesurable. Dans un deuxième temps, nous aborderons la synthèse d'une loi de commande pour des perturbations mesurables.

Dans l'Exemple 3.4.3, la perturbation w est supposée non-mesurable. En revanche, elle est supposée avoir une amplitude bornée $w^T w \leq 1$. Ce problème a été étudié parmi d'autres par [Boy94], [Nag94], [Naz07], [Pol06]. Il est connu comme étant l'approximation des ensembles atteignables des systèmes dynamiques linéaires ayant des entrées d'amplitudes crête à crête unitaires.

Énoncé exemple 3.4.3 (Minimiser l'ensemble atteignable malgré des perturbations)
[Boy94]

L'objectif de cet exemple est de trouver des contraintes LMI et, si nécessaire, une fonction de coût, pour synthétiser par un problème d'optimisation LMI la loi de commande $u(x) = Kx$, telle que :

1. le système (3.84) soit stable,
2. l'ensemble atteignable $\chi(\infty, t_0, \chi^0)$ soit réduit au minimum quand $w^T w < 1$ et χ^0 est décrit par (3.76).
3. la loi de commande $u(x) = Kx$ reste bornée à U_{max} en valeur absolue pour tout $x_0 \in \chi^0$ et pour $t_0 = 0$.

Développement exemple 3.4.3 (Minimiser l'ensemble atteignable malgré des perturbations)

1. D'après les constats de la Section 3.2.3, l'inclusion de l'ensemble des états initiaux χ^0 dans un ensemble invariant équivaut à l'inclusion de l'ensemble atteignable $\chi(\infty, t_0, \chi^0)$ dans l'ensemble invariant. Nous cherchons un ensemble invariant ellipsoïdal $\varepsilon(P)$, avec $P \succ 0$, $P = P^T$ qui provient d'une fonction quadratique $V(x) = x^T P x$.
2. Les contraintes LMI pour l'inclusion $\chi^0 \subseteq \varepsilon(P)$ sont décrites par :

$$\begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g, \quad Q = P^{-1}. \quad (3.85)$$

Cela engendre $\chi(\infty, t_0, \chi^0) \subseteq \varepsilon(P)$.

3. L'ensemble $\varepsilon(P)$ est invariant vis-à-vis des dynamiques du système (3.84) si

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (3.86)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $V(x) \geq 1$ et pour tout $w \in \mathbb{R}^p$ tel que $w^T w \leq 1$.

L'équation (8.34) est équivalente à

$$\begin{aligned} x^T (A_{bf}^T P + P A_{bf}) x + x^T P B_w w + w^T B_w^T P x &\leq 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall w \in \mathbb{R}^p \text{ tels que } w^T w &\leq 1 \text{ et } x^T P x \geq 1, \end{aligned} \quad (3.87)$$

où $A_{bf} = A + BK$.

En appliquant la S -procédure, la condition de l'équation (3.87) est vraie s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$x^T (A_{bf}^T P + P A_{bf}) x + x^T P B_w w + w^T B_w^T P x \leq \beta(w^T w - 1) + \alpha(1 - x^T P x). \quad (3.88)$$

Ceci correspond à l'existence de $\alpha > 0$ et de $\beta > 0$ tels que :

$$\begin{pmatrix} x \\ w \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_{bf}^T P + P A_{bf} + \alpha P & P B_w & 0 \\ B_w^T P & -\beta I & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0. \quad (3.89)$$

En supposant sans perte de généralité que $\alpha = \beta$, l'équation matricielle (8.37) s'écrit alors comme :

$$\begin{pmatrix} A_{bf}^T P + P A_{bf} + \alpha P & P B_w \\ B_w^T P & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3.90)$$

$$\begin{pmatrix} A^T P + K^T B_u^T P + P A + P B_u K + \alpha P & P B_w \\ B_w^T P & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (3.91)$$

Par la suite les notations $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$ seront utilisées. En multipliant l'équation (8.38) à droite et à gauche par une matrice diagonale par blocs et définie positive, l'inégalité (8.38) reste valable :

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P + K^T B_u^T P + P A + P B_u K + \alpha P & P B_w \\ B_w^T P & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3.92)$$

$$\begin{pmatrix} Q A^T + Y^T B_u^T + A Q + B_u Y + \alpha Q & B_w \\ B_w^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (3.93)$$

4. La loi de commande $u(x) = Kx$ reste bornée à U_{max} en valeur absolue pour tout $x_0 \in \chi^0$ si en plus de $\chi^0 \subseteq \varepsilon(P)$, nous avons $\varepsilon(P) \subset \mathcal{L}(\frac{1}{U_{max}}K)$. Ceci est vrai, si la contrainte LMI suivante est satisfaite (voir Exemple 3.4.2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{U_{max}} Y \\ (\frac{1}{U_{max}} Y)^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0. \quad (3.94)$$

5. Pour minimiser l'ensemble atteignable $\chi(\infty, t_0, \chi^0)$ une minimisation de l'ensemble extérieur $\varepsilon(P)$ est à effectuer. Ceci peut être atteint par la minimisation de la trace $\text{tr}(Q)$, du déterminant $\det(Q)$ ou de la valeur propre maximale de Q , $\lambda_{max}(Q)$.

6. Si $\alpha > 0$, une constante réelle, est supposée connue, la recherche de la loi de commande $u = Kx$ qui minimise l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \chi^0)$ pour $w \in \mathbb{R}^p$, $w^T w \leq 1$ s'écrit comme un problème d'optimisation LMI :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && \text{tr}(Q) \text{ ou } \det(Q) \text{ ou } \lambda_{\max}(Q) \\
 & \text{contraint par} && Q \succ 0 \\
 & && \begin{pmatrix} QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y + \alpha Q & B_w \\ B_w^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g, \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{U_{\max}} Y \\ (\frac{1}{U_{\max}} Y)^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0.
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

Les variables matricielles sont $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$.

7. Nous remarquons qu'en l'absence de perturbation ($w = 0$), le système dynamique (3.84) est asymptotiquement stable. Les équations (3.95) assurent que $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov car :

$$\begin{cases} Q \succ 0, \\ QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y \preceq -\alpha Q. \end{cases} \tag{3.96}$$

8. Si la constante positive α est supposée inconnue (elle est donc une variable de décision), le problème d'optimisation LMI (3.95) se transforme en un problème d'optimisation BMI :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && \text{tr}(Q) \text{ ou } \det(Q) \text{ ou } \lambda_{\max}(Q) \\
 & \text{contraint par} && \alpha \succ 0, \\
 & && Q \succ 0, \\
 & && \begin{pmatrix} QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y + \alpha Q & B_w \\ B_w^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g, \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{U_{\max}} Y \\ (\frac{1}{U_{\max}} Y)^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0.
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Les variables de décision sont α , $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$.

Dans le second Exemple 3.4.4, nous prendrons en compte une perturbation mesurable. La perturbation w est considérée avoir également une valeur maximale bornée, $w^T w \leq 1$. Une approche connue pour ce cas consiste à atténuer l'effet de la perturbation via un terme de préfiltrage : $u(x) = Kx + F_f w$, où $F_f \in \mathbb{R}^{1 \times p}$.

Le terme F_f est généralement calculé de manière analytique, en appliquant le Théorème de la Valeur Finale à l'arrivée du système dans l'état stationnaire [Kwa72]. L'expression analytique

de l'état stationnaire du système dynamique est annulée. Ensuite, le terme F_f est calculé comme une fonction de la perturbation : $F_f = F_f(w)$ en supposant que la perturbation reste constante. Cette approche n'est pas toujours possible, car le système d'équations résultant n'est pas systématiquement compatible. Nous proposerons dans l'exemple suivant une alternative pour calculer le terme F_f par un problème d'optimisation BMI.

Enoncé exemple 3.4.4 (Minimiser l'ensemble atteignable malgré des perturbations via un terme de préfiltrage)

L'objectif de cet exemple est de trouver des contraintes LMI et, si nécessaire, une fonction de coût, pour synthétiser via un problème d'optimisation LMI la loi de commande $u = Kx + F_f w$, telle que :

1. le système (3.84) soit stable en l'absence de perturbation ($w = 0$) ,
2. l'ensemble atteignable $\chi(\infty, t_0, \chi^0)$ soit aussi petit que possible pour $w^T w < 1$ et pour χ^0 décrit par (3.76),
3. la loi de commande $u(x) = Kx + F_f w$ reste bornée à U_{max} en valeur absolue pour tout $x_0 \in \chi^0$, pour tout $w \in \mathbb{R}^p$ tel que $w^T w \leq 1$ et pour $t \geq 0$.

Développement exemple 3.4.4 (Minimiser l'ensemble atteignable malgré des perturbations via un terme de préfiltrage)

1. Nous reformulons d'abord le système dynamique (3.84) pour $u = Kx + F_f w$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u Kx + B_u F_f w + B_w w \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \Leftrightarrow \quad (3.98)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u Kx + \bar{B}_w w \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \Leftrightarrow \quad (3.99)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u \bar{u} + \bar{B}_w w \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (3.100)$$

où $\bar{u} = Kx$ et $\bar{B}_w = B_u F_f + B_w$.

2. Nous remarquons que le système (3.100) est équivalent au système (3.84) les notations de \bar{u} et \bar{B}_w mises à part. Par conséquent, le problème exposé ici équivaut au problème exposé dans l'Exemple 3.4.3. Évidemment, la solution de la recherche de $\bar{u} = Kx$ satisfaisant les conditions de stabilité et de minimisation de l'ensemble atteignable est décrite par le problème d'optimisation BMI suivant :

$$\text{minimiser} \quad \text{tr}(Q) \text{ ou } \det(Q) \text{ ou } \lambda_{max}(Q)$$

$$\text{contraint par} \quad Q \succ 0,$$

$$\begin{pmatrix} QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y + \alpha Q & \bar{B}_w \\ \bar{B}_w^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad \Leftrightarrow \quad (3.101)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g.$$

minimiser $tr(Q)$ ou $det(Q)$ ou $\lambda_{max}(Q)$

contraint par $Q \succ 0$

$$\begin{pmatrix} QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y + \alpha Q & B_u F_f + B_w \\ (B_u F_f + B_w)^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (3.102)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g.$$

Les variables de décision sont α , F_f , $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$.

3. La commande peut être bornée à U_{max} assurant l'inclusion de l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ dans l'ensemble $\mathcal{L}(\frac{1}{U_{max}}(K, F_f))$, où :

$$\varepsilon(P) \subset \mathcal{L}(\frac{1}{U_{max}}(K, F_f)) = \{x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^p : |Kx + F_f w| \leq U_{max}, \forall w^T w \leq 1\}. \quad (3.103)$$

$(K, F_f) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+p)}$ dénote le vecteur formé par la concaténation des vecteurs K et F_f .

Cette inclusion peut être formulée de la façon suivante :

$$\begin{cases} -Kx - F_f w + U_{max} \geq 0 \\ Kx + F_f w + U_{max} \geq 0, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T P x \leq 1, \quad \forall w \in \mathbb{R}^p, w^T w \leq 1 \Leftrightarrow \quad (3.104)$$

$$\begin{cases} - \begin{pmatrix} K & F_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + U_{max} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} K & F_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + U_{max} \geq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T P x \leq 1, \quad \forall w \in \mathbb{R}^p, w^T w \leq 1 \Leftrightarrow \quad (3.105)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x^T & w^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}K^T \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}F_f^T \\ -\frac{1}{2}K & -\frac{1}{2}F_f & U_{max} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} x^T & w^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}K^T \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}F_f^T \\ \frac{1}{2}K & \frac{1}{2}F_f & U_{max} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall w \in \mathbb{R}^p \text{ tels que} \quad (3.106)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x^T & w^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} x^T & w^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad (3.107)$$

En utilisant la S-procédure, la condition décrite précédemment est vraie s'il existe τ_1, τ_2, τ_3 et τ_4 , quatre scalaires positifs, tels que les contraintes suivantes soient satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -\frac{1}{2}K^T \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}F_f^T \\ -\frac{1}{2}K & -\frac{1}{2}F_f & U_{max} \end{array} \right) \succeq \tau_1 \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{1}{2}K^T \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}F_f^T \\ \frac{1}{2}K & \frac{1}{2}F_f & U_{max} \end{array} \right) \succeq \tau_3 \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tau_4 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (3.108)$$

En multipliant à droite et à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

et avec la notation $Y = KQ$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -\frac{1}{2}Y^T \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}F_f^T \\ -\frac{1}{2}Y & -\frac{1}{2}F_f & U_{max} \end{array} \right) \succeq \tau_1 \begin{pmatrix} -Q & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{1}{2}Y^T \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}F_f^T \\ \frac{1}{2}Y & \frac{1}{2}F_f & U_{max} \end{array} \right) \succeq \tau_3 \begin{pmatrix} -Q & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tau_4 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (3.110)$$

4. Le problème BMI, dont la résolution fournit le vecteur de retour d'état K ainsi que le facteur de préfiltrage F_f satisfaisant les trois conditions de l'énoncé de l'exemple, s'écrit donc de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \text{tr}(Q) \text{ ou } \det(Q) \text{ ou } \lambda_{max}(Q) \\ \text{contraint par} & Q \succ 0 \\ & \alpha \succ 0 \\ & \tau_j \succ 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{array} \quad (3.111)$$

$$\begin{pmatrix} QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y + \alpha Q & B_u F_f + B_w \\ (B_u F_f + B_w)^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, g,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -\frac{1}{2}Y^T \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}F_f^T \\ -\frac{1}{2}Y & -\frac{1}{2}F_f & U_{max} \end{array} \right) \succeq \tau_1 \begin{pmatrix} -Q & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{1}{2}Y^T \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}F_f^T \\ \frac{1}{2}Y & \frac{1}{2}F_f & U_{max} \end{array} \right) \succeq \tau_3 \begin{pmatrix} -Q & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tau_4 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Les variables de décisions sont τ_1, τ_2, τ_3 et $\tau_4, \alpha, F_f, Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$.

(3.112)

5. La recherche de F_f par le problème (3.111) offre plusieurs avantages par rapport au calcul de F_f via le Théorème de la Valeur Finale :

- (a) Ce calcul ne suppose pas une convergence vers l'état stationnaire à l'infini.
- (b) Le terme F_f peut contribuer lors de la synthèse de la loi de commande à la minimisation de l'ensemble atteignable dans le cas d'une perturbation bornée.
- (c) Nous obtenons des garanties sur l'évolution des trajectoires et notamment sur la valeur maximale de la loi de commande grâce à l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$, garanties qui ne sont pas fournies par le Théorème de la Valeur Finale.

3.4.4 Système dynamique linéaire à paramètres variants

Dans cette section nous nous focaliserons sur les systèmes dynamiques linéaires à paramètres variant dans le temps. Nous présenterons des résultats pour prouver leur stabilité, résultats qui reposent sur le Théorème de Lyapunov.

Dans ce but, considérons un système dynamique linéaire autonome, avec une matrice du système A qui dépend du vecteur de paramètres $\delta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^g$:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\delta(t))x \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.113)$$

Nous présenterons un cas particulier des systèmes dynamiques à paramètres variants : le cas des paramètres satisfaisant des contraintes polytopiques. Sans perte de généralité, nous supposons par la suite que la matrice A se trouve dans un polytope dont les sommets sont déterminés par $A^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, g$:

$$A \in \Omega \triangleq \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(\delta(t)) = \sum_{i=1}^g A^i \delta_i(t), A^i \in \mathbb{R}^{n \times n}, 0 \leq \delta_i(t) \leq 1, \sum_{i=1}^g \delta_i(t) = 1\}. \quad (3.114)$$

Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique du système (3.113) est l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$, $P \succ 0$, $P = P^T$ décroissante le long des trajectoires du système (3.113). Car la dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique $V(x)$ est décrite par :

$$\dot{V}(x) = x^T (A(t)^T P + P A(t)) x, \quad (3.115)$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité du système (3.113) sont :

$$P \succ 0 \quad \text{et} \quad A^T P + P A \prec 0 \quad \forall A \in \Omega. \quad (3.116)$$

Lemme 3.4.2 (Stabilité quadratique des systèmes linéaires polytopiques) [Boy94]

Les contraintes (3.116) sont équivalentes à

$$P \succ 0 \quad \text{et} \quad (A^i)^T P + P A^i \prec 0 \quad \forall i = 1, \dots, g. \quad (3.117)$$

Par conséquent, l'étude de la stabilité quadratique du système dynamique (3.113) équivaut au problème de faisabilité LMI (3.117) constitué de $(g + 1)$ inégalités.

3.5 Fonction de Lyapunov composée

Nous avons présenté dans les sections précédentes des ensembles invariants ellipsoïdaux qui sont engendrés par des fonctions de Lyapunov quadratiques. Les ensembles ellipsoïdaux ne sont pas toujours appropriés pour étudier et approcher les ensembles atteignables des systèmes dynamiques. Dans l'Exemple 3.4.1 l'ensemble des états initiaux est représenté par un polytope, χ^0 . Même si le polytope χ^0 est invariant, donc identique à l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \chi^0)$ dans ce cas ($\chi^0 = \chi(t, t, \chi^0)$), l'ellipsoïde qui l'approchera restera toujours une approximation conservatrice.

En effet, pour mieux approcher l'ensemble $\chi(t, t_0, \chi^0)$, nous aurions besoin d'un ensemble invariant polyédrique, voir polytopique. Les méthodes pour développer des ensembles invariants polyédriques présentent des avantages théoriques, mais elles restent en pratique difficiles à implémenter, surtout pour les systèmes dynamiques continus [Bla08], [Bit95], [Vas89], [Cas93], [Mes04].

Dans ce cas, les ensembles invariants fournis par les fonctions de Lyapunov composées représentent un bon compromis. Introduites récemment par [Hu03], les fonctions de Lyapunov composées sont utilisées pour élargir l'estimation du domaine d'attraction d'un point d'équilibre. Une des propriétés qui les rendent très intéressantes est l'invariance de l'enveloppe convexe de plusieurs ellipsoïdes invariants. Par la suite, nous allons exposer la définition et les propriétés les plus importantes des fonctions de Lyapunov composées, qui se trouvent dans [Hu03] et [Hu04]. Un théorème pour la synthèse d'une loi de commande via une fonction de Lyapunov composée sera proposé.

3.5.1 Propriétés de la fonction quadratique composée

Considérons des matrices symétriques et définies positives $P^j = (P^j)^T$, $P^j \succ 0$, $P^j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$. L'ensemble Γ contient des vecteurs γ tels que :

$$\Gamma \triangleq \{\gamma \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \gamma_j \geq 0, j = 1, \dots, N\}. \quad (3.118)$$

Pour un vecteur $\gamma \in \mathbb{R}^N$ nous définissons les matrices suivantes :

$$Q(\gamma) \triangleq \sum_{j=1}^N \gamma_j Q^j, \quad P(\gamma) \triangleq Q^{-1}(\gamma), \quad (3.119)$$

où $Q^j = (P^j)^{-1}$, $j = 1, \dots, N$. Puisque les matrices Q^j sont symétriques et définies positives pour $j = 1, \dots, N$ (comme étant l'inverse d'une matrice symétrique et définie positive), les matrices $Q(\gamma)$ et $P(\gamma)$ sont également symétriques et définies positives.

Remarque 3.5.1 Pour $\gamma \in \Gamma$, Γ défini par l'équation (3.118),

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}P(\gamma)\right) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P(\gamma)x \leq \alpha\} \quad (3.120)$$

est un ellipsoïde.

Définition 3.5.1 (Fonction quadratique composée) Une fonction $V_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

$$V_c(x) \triangleq \min_{\gamma \in \Gamma} x^T P(\gamma)x \quad (3.121)$$

est une fonction quadratique composée.

Remarque 3.5.2 La fonction quadratique composée définie dans (3.121) est une fonction définie positive.

La courbe de niveau de la fonction $V_c(x)$ est décrite par :

$$\mathcal{S}_{V_c}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : V_c(x) \leq \alpha\}. \quad (3.122)$$

La courbe de niveau $\mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$ est l'enveloppe convexe des ellipsoïdes composants : $\varepsilon(\frac{1}{\alpha}P^j)$, $j = 1, \dots, N$ (voir Figure 3.9).

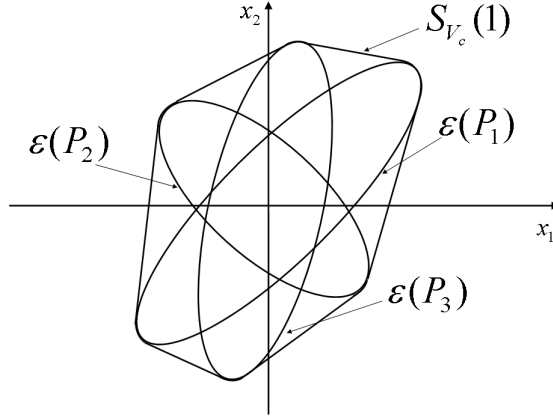


FIG. 3.9 – Courbe de niveau d’une fonction quadratique composée pour $\alpha = 1$.

Théorème 3.5.1 (Courbe de niveau de la fonction quadratique composée) [Hu03]

$$\mathcal{S}_{V_c}(\alpha) = \text{co}\{\varepsilon(\frac{1}{\alpha}P^j), j = 1, \dots, N\} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \varepsilon(\frac{1}{\alpha}P(\gamma)). \quad (3.123)$$

Nous remarquons qu’en créant l’enveloppe convexe de plusieurs ellipsoïdes de volumes différents et avec des orientations différentes par rapport aux axes, nous obtenons une forme géométrique semblable à un polytope (voir Figure 3.9). Dans le cas extrême, quand les ellipsoïdes composants sont dégénérés et réduits à un seul axe, la forme obtenue représente rigoureusement un polytope.

Une propriété importante de la courbe de niveau $\mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$ est que chaque point situé sur cette enveloppe convexe peut s’écrire comme une combinaison linéaire des points appartenant aux ellipsoïdes couverts. De plus, le vecteur de la combinaison linéaire est fourni par la solution du problème de minimisation calculé pour la fonction quadratique composée.

Lemme 3.5.1 [Hu04] Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, soit $\gamma^* \in \Gamma$ une solution optimale telle que :

$$x^T P(\gamma^*) x = \min_{\gamma \in \Gamma} x^T P(\gamma) x = V_c(x). \quad (3.124)$$

Notons $x^j = Q^j P(\gamma^*) x$. Avec ces notations, x est une combinaison linéaire de x^j , $j = 1, \dots, N$:

$$x = \sum_{j=1}^N \gamma_j^* x^j. \quad (3.125)$$

Notons $h = P(\gamma^*)x$ et $\alpha = V_c(x)$. Si $\gamma_j^* > 0$, alors

$$x^j \in \partial\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}P^j\right) \quad \text{où} \quad \partial\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}P^j\right) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^j x = \alpha\}. \quad (3.126)$$

Pour calculer la valeur instantanée de la fonction quadratique composée, [Hu03] proposent une méthode basée sur l'optimisation LMI. Une représentation équivalente de la valeur de la fonction quadratique composée est donnée par :

$$V_c(x) = \min_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \omega > 0}} \{\omega : \omega \geq x^T P(\gamma)x\}. \quad (3.127)$$

La représentation (3.127) peut être transformée par le Lemme de Schur en un problème d'optimisation LMI :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \omega \\ & \text{contraint par} && \omega \succ 0, \\ & && \gamma_j \succ 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ & && \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \\ & && \begin{pmatrix} \omega & x^T \\ x & \sum_{j=1}^N \gamma_j Q^j \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Les variables de décision sont ω et γ_j , $j = 1, \dots, N$. Notons la solution du problème LMI (3.128) par ω^* et γ_j^* , $j = 1, \dots, N$, soit $\gamma^* = (\gamma_1^*, \dots, \gamma_N^*)^T$.

Bien évidemment, le problème d'optimisation LMI (3.128) est toujours faisable et a une solution. Cependant, la solution n'est pas toujours unique. Le lemme suivant offre des conditions dont la vérification garantit une solution unique au problème (3.128). De plus, si la solution γ^* est unique pour un $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, la continuité de la fonction $\gamma^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ est garantie, propriété décrite dans le lemme ci-dessous.

Lemme 3.5.2 [Hu04]

1. Si pour tout $x \in \partial\mathcal{S}_{V_c}(1)$, il existe une représentation unique

$$x = \sum_{j=1}^N \gamma_j x^j, \quad x^j \in \partial\varepsilon(P^j), \quad \gamma \in \Gamma, \quad (3.129)$$

alors $\gamma^*(x)$ est unique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Si $\gamma^*(x)$ est unique $\forall x \in \mathbb{R}^n$, alors $\gamma^*(x)$ est une fonction continue en x .

Une propriété analytique très importante de la fonction $V_c(x)$ est la différentiabilité. La fonction quadratique composée est une fonction continument différentiable par rapport à la variable x .

Théorème 3.5.2 (Dérivabilité de la fonction quadratique composée) [Hu03] La fonction $V_c(x)$ est dérivable par rapport à x . Considérons $\gamma^*(x)$ un γ optimal tel que $x^T P(\gamma^*(x))x = \min_{\gamma \in \Gamma} x^T P(\gamma)x$. La dérivée de $V_c(x)$ par rapport à x est décrite par :

$$\frac{\partial V_c}{\partial x} = 2P(\gamma^*(x))x. \quad (3.130)$$

Nous avons décrit quelques propriétés très pertinentes de la fonction quadratique composée : c'est une fonction définie positive, avec des courbes de niveau qui enveloppent des ellipsoïdes, en approchant la forme d'un polytope. Cette fonction est notamment différentiable, avec une dérivée continue par rapport à x .

Afin de rendre invariant ses courbes de niveau, la fonction V_c devrait satisfaire également la deuxième condition des fonctions de Lyapunov : avoir les dérivées négatives le long des trajectoires du système dynamique considéré. Nous proposons dans la section suivante un théorème pour la synthèse d'une loi de commande qui stabilise un système linéaire et permet à la fonction quadratique composée de vérifier les propriétés d'une fonction de Lyapunov.

3.5.2 Fonction de Lyapunov composée : stabilité et ensemble invariant

Considérons un système dynamique linéaire sans perturbation et à une seule entrée de commande :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u \\ y = x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.131)$$

Nous proposons pour ce système (3.131) une loi de commande qui repose sur des retours d'état linéaire K^j associés à des fonctions de Lyapunov quadratiques $x^T P^j x$, $j = 1, \dots, N$. Ce théorème exige une valeur temporelle maximale pour la grandeur de commande : $|u| \leq U_{max}$. Le théorème ci-dessous est inspiré d'un théorème proposé par [Hu03] pour la synthèse d'une loi de commande saturée. Néanmoins, il a été formulé et prouvé dans le cadre de cette thèse.

Théorème 3.5.3 (Fonction de Lyapunov composée) *Considérons le système dynamique linéaire décrit par (3.131). Les matrices $P^j = (P^j)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P^j \succ 0$ et les vecteurs $K^j \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $j = 1, \dots, N$, sont tels que :*

$$(A + B_u K^j)^T P^j + P^j (A + B_u K^j) \prec 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.132)$$

et

$$|K^j x| \leq U_{max} \quad \forall x \in \varepsilon(P^j), \quad (3.133)$$

où U_{max} est une constante réelle positive. Notons $Q^j = (P^j)^{-1}$ et $Y^j = K^j Q^j$ pour $j = 1, \dots, N$. Pour $\gamma \in \Gamma$ défini par (3.118), nous définissons :

$$K(\gamma) \triangleq Y(\gamma)P(\gamma) \quad (3.134)$$

où

$$Y(\gamma) = \sum_{j=1}^N \gamma_j Y^j, \quad Q(\gamma) = \sum_{j=1}^N \gamma_j Q^j, \quad P(\gamma) = Q^{-1}(\gamma). \quad (3.135)$$

Considérons $\gamma^*(x)$ tel que

$$V_c(x) = \min_{\gamma \in \Gamma} x^T P(\gamma)x = x^T P(\gamma^*(x))x.$$

1. Si la fonction $\gamma^*(x)$ est continue, $u(x) \triangleq K(\gamma^*(x))x$ est une loi de commande continue.
2. $\mathcal{S}_{V_c}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : V_c(x) \leq 1\}$ est contractif et invariant pour la loi de commande $u(x) = K(\gamma^*(x))x$.
3. De plus, $|K(\gamma^*(x))x| \leq U_{max} \quad \forall x \in \mathcal{S}_{V_c}(1)$.

Preuve 3.5.1 (Fonction de Lyapunov composée)

1. La loi de commande est définie par :

$$u(x) = K(\gamma^*(x))x = Y(\gamma^*(x))Q^{-1}(\gamma^*(x))x, \quad (3.136)$$

où

$$\begin{aligned} Y(\gamma^*(x)) &= \sum_{j=1}^N \gamma_j^*(x)Y^j, \\ Q(\gamma^*(x)) &= \sum_{j=1}^N \gamma_j^*(x)Q^j. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Cette loi est donc équivalente à :

$$u(x) = \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j^*(x)Y^j \right) \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j^*(x)Q^j \right)^{-1} x. \quad (3.138)$$

Puisque la matrice $Q(\gamma^*(x))$ est une somme de matrices symétriques définies positives, elle est également une matrice symétrique définie positive. En conséquence, la matrice inversée $Q(\gamma^*(x))^{-1}$ existe $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Ce fait engendre l'existence de la loi de commande $u(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$.

De plus, $u(x)$ est exprimé en fonction de $\gamma^*(x)$ et de $x(t)$. Puisque $x(t)$ est une fonction continue, la continuité de la loi de commande $u(x)$ est déterminée par la continuité de $\gamma^*(x)$.

2. Considérons x quelconque. $\gamma^*(x)$ est la solution de $\min_{\gamma \in \Gamma} x^T P(\gamma)x = x^T P(\gamma^*(x))x$, où $\sum_{j=1}^N \gamma_j^*(x) = 1$, et $\gamma_j^*(x) \geq 0$ pour $j = 1, \dots, N$.

Les inégalités matricielles suivantes proviennent des hypothèses du Théorème 3.5.3 :

$$\begin{aligned} (A + B_u K^j)^T (Q^j)^{-1} + (Q^j)^{-1} (A + B_u K^j) < 0, \quad j = 1, \dots, N \Leftrightarrow \\ Q^j A^T + Q^j (K^j)^T B_u^T + A Q^j + B_u K^j Q^j < 0, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.139)$$

En posant $Y^j = K^j Q^j$, nous obtenons :

$$Q^j A^T + (Y^j)^T B_u^T + A Q^j + B_u Y^j < 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.140)$$

En multipliant chaque inégalité de (3.140) par $\gamma_j^*(x)$ et en les additionnant pour $j = 1, \dots, N$, il résulte :

$$Q(\gamma^*(x))A^T + Y^T(\gamma^*(x))B_u^T + A Q(\gamma^*(x)) + B_u Y(\gamma^*(x)) < 0. \quad (3.141)$$

Sous la condition d'une matrice non-singulière $Q(\gamma^*(x))$, nous multiplions à droite et à gauche l'équation (3.141) par $Q^{-1}(\gamma^*(x))$. Nous obtenons de cette façon :

$$\begin{aligned} A^T Q(\gamma^*)^{-1} + Q(\gamma^*)^{-1} Y^T(\gamma^*) B_u^T Q(\gamma^*)^{-1} + \\ + Q(\gamma^*)^{-1} A + Q(\gamma^*)^{-1} B_u Y(\gamma^*) Q(\gamma^*)^{-1} < 0. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Sachant que $P(\gamma^*) = Q^{-1}(\gamma^*)$ et que $K(\gamma^*) = Y(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)$, l'équation (3.142) est ré-écrite comme suit :

$$(A + B_u K(\gamma^*))^T P(\gamma^*) + P(\gamma^*)(A + B_u K(\gamma^*)) < 0. \quad (3.143)$$

Nous construisons alors une fonction quadratique avec la variable $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
 & x^T[(A + B_u K(\gamma^*))^T P(\gamma^*) + P(\gamma^*)(A + B_u K(\gamma^*))]x < 0 \Leftrightarrow \\
 & x^T[A + B_u K(\gamma^*)]^T P(\gamma^*)x + x^T P(\gamma^*)[A + B_u K(\gamma^*)]x < 0 \Leftrightarrow \\
 & 2x^T[A + B_u K(\gamma^*)]^T P(\gamma^*)x < 0 \Leftrightarrow \\
 & \{[A + B_u K(\gamma^*)]x\}^T 2P(\gamma^*)x < 0, \Leftrightarrow \\
 & \dot{x}^T 2P(\gamma^*)x < 0 \Leftrightarrow \\
 & (2P(\gamma^*)x)^T \dot{x} < 0.
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

D'après le Théorème 3.5.2, la fonction $V_c(x)$ est différentiable d'une manière continue par rapport à x , avec la dérivée :

$$\frac{\partial V_c(x)}{\partial x} = 2P(\gamma^*(x))x. \tag{3.145}$$

Sa dérivée temporelle est décrite par conséquent par :

$$\frac{\partial V_c(x)}{\partial t} = \left(\frac{\partial V_c(x)}{\partial x}\right)^T \cdot \frac{\partial x}{\partial t}. \tag{3.146}$$

Selon les résultats (3.144), (3.145) et (3.146) nous obtenons d'une part que la dérivée temporelle de la fonction $V_c(x)$ est négative pour la loi de commande $u(x) = K(\gamma^*(x))x$:

$$\frac{\partial V_c(x)}{\partial t} < 0. \tag{3.147}$$

et d'autre part, que la fonction $V_c(x) = \min_{\gamma \in \Gamma} x^T P(\gamma)x = x^T P(\gamma^*)x$ est définie positive grâce à la matrice symétrique définie positive $P(\gamma^*)$.

En utilisant le Théorème de Lyapunov, nous concluons que $V_c(x)$ est une fonction de Lyapunov et par conséquent la courbe de niveau $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ est invariante et contractive.

3. Considérons $x \in \mathcal{S}_{V_c}(1)$ et $V_c(x) = \min_{\gamma \in \Gamma} x^T P(\gamma)x = x^T P(\gamma^*(x))x = \alpha \leq 1$. Le Lemme

3.5.1 assure qu'il existe $x^j = Q^j P(\gamma^*)x$ tel que pour $\gamma_j^* > 0$ nous avons $x^j \in \partial\varepsilon(\frac{1}{\alpha}P^j)$ et $x = \sum_{j=1}^N \gamma_j^* x^j$.

En faisant l'hypothèse que $x \in \mathcal{S}_{V_c}(1)$, il résulte que $\alpha \leq 1$. Ceci implique $\partial\varepsilon(\frac{1}{\alpha}P^j) \subset \varepsilon(P^j)$. Ainsi, pour $\gamma_j^* > 0$ nous avons $x^j \in \varepsilon(P^j)$.

Par la suite nous considérerons l'hypothèse faite dans l'énoncé du Théorème 3.5.3 : $|K^j x| \leq U_{max}$, $\forall x \in \varepsilon(P^j)$. Ceci implique $|K^j x^j| \leq U_{max}$ pour tout $x^j = Q^j P(\gamma^*)x$ et $\gamma_j^* > 0$, $j = 1, \dots, N$. Nous réécrivons cette relation et nous obtenons :

$$|K^j Q^j P(\gamma^*)x| \leq U_{max}, \quad j = 1, \dots, N, \quad \gamma_j^* > 0. \tag{3.148}$$

En utilisant la notation $Y^j = K^j Q^j$, l'équation (3.148) devient :

$$|Y^j P(\gamma^*)x| \leq U_{max}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, N \text{ et } \gamma_j^* > 0. \tag{3.149}$$

Nous multiplions ensuite par $\gamma_j^* > 0$ et additionnons les équations (3.149) pour $j = 1, \dots, N$ et $\gamma_j^* > 0$. Le résultat ainsi obtenu est :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j^* > 0}}^N |\gamma_j^* Y^j P(\gamma^*)x| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j^* > 0}}^N \gamma_j^* U_{max}. \tag{3.150}$$

En considérant que $\gamma_j^* \geq 0$ l'équation (3.150) est équivalente à :

$$\sum_{j=1}^N |\gamma_j^* Y^j P(\gamma^*) x| \leq \sum_{j=1}^N \gamma_j^* U_{max}, \quad (3.151)$$

car si γ_j^* n'est pas strictement positif, alors il est nul.

En utilisant l'inégalité

$$\left| \sum_{j=1}^N \gamma_j^* Y^j P(\gamma^*) x \right| \leq \sum_{j=1}^N |\gamma_j^* Y^j P(\gamma^*) x| \quad (3.152)$$

nous obtenons à partir des équations (3.151) et (3.152) :

$$\left| \sum_{j=1}^N \gamma_j^* Y^j P(\gamma^*) x \right| \leq U_{max}. \quad (3.153)$$

Selon la définition de la loi de commande, nous remarquons que $\sum_{j=1}^N \gamma_j^* Y^j = Y(\gamma^*)$ et l'équation (3.153) devient alors :

$$|Y(\gamma^*) P(\gamma^*)| \leq U_{max}. \quad (3.154)$$

Nous remplaçons $Y(\gamma^*) P(\gamma^*)$ par $K(\gamma^*)$ dans l'équation (3.154) et nous obtenons

$$|K(\gamma^*) x| \leq U_{max}, \quad (3.155)$$

ou, autrement dit

$$|u(x)| \leq U_{max} \quad \forall x \in \mathcal{S}_{V_c}(1). \quad (3.156)$$

3.6 Systèmes hybrides avec des entrées et des sorties

Les systèmes qui possèdent une dynamique composée d'une partie discrète et d'une partie continue peuvent être décrits par des automates hybrides. Ces systèmes évoluent selon des lois physiques continues durant une période de temps. Dès qu'une condition sur le système est vérifiée, il change de dynamique. Le système possède donc des états discrets auxquels correspond pour chacun une évolution continue (décrite par la dynamique liée à cet état discret). Dans les sections suivantes nous introduirons les systèmes hybrides avec des entrées et sorties, en présentant les théorèmes et les définitions les plus importants. Une description détaillée de ces concepts est exposée dans [Lyg98], [Lyn03], [Lyg96] et [Liu99].

Un exemple d'automate hybride est un système avec deux bassins d'eau et un seul robinet représenté sur la Figure 3.10. Le robinet a un flux constant d'eau w . Il peut être commuté entre les deux bassins. Par ailleurs, les bassins ont des volumes x_1 et x_2 et évacuent l'eau avec des flux constants v_1 et v_2 . Les niveaux d'eau dans les deux bassins ne doivent pas descendre en-dessous des seuils r_1 et r_2 .

Tant que le flux du robinet est dirigé vers l'un des deux bassins, la dynamique du système est continue. Le système a donc deux états discrets différents q_1 et q_2 , qui correspondent au robinet dirigé soit vers le bassin 1, soit vers le bassin 2. La dynamique discrète intervient lorsque le robinet commute entre les deux bassins, c'est-à-dire à chaque fois que le niveau d'eau dans l'un des deux bassins passe en-dessous du seuil r_i . Par conséquent, les conditions de changement d'état discret sont $x_1 \leq r_1$ (pour passer du bassin 2 au bassin 1) et $x_2 \leq r_2$ (pour passer du bassin 1 au bassin 2). Par symétrie, les conditions pour garder le même état discret sont $x_1 \geq r_1$ (pour garder le robinet dans le bassin 2) et $x_2 \geq r_2$ (pour garder le robinet dans le bassin 1).

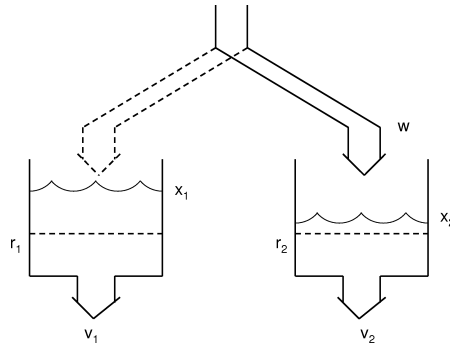


FIG. 3.10 – Exemple d’automate hybride : deux bassins avec un seul robinet d’alimentation.

3.6.1 Représentation

Les automates hybrides peuvent être représentés par des graphes orientés, comme celui de la Figure 3.11 pour l’exemple avec les deux bassins.

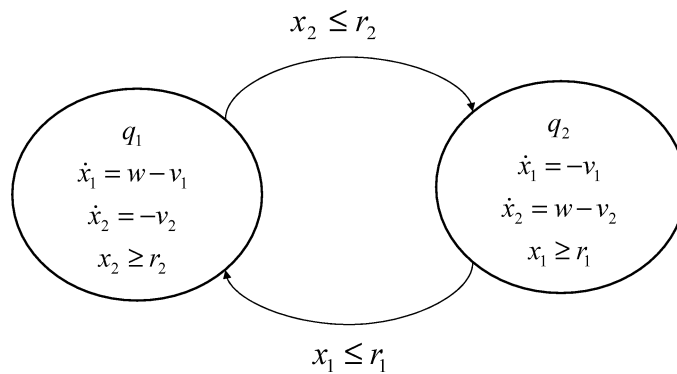


FIG. 3.11 – Graphe orienté de l’automate hybride du système avec deux bassins et un seul robinet.

Chaque nœud du graphe est caractérisé par un état discret $q \in \{q_1, q_2\}$ et par une évolution des variables continues $x \in \mathbb{R}^2$, donnée par le champ de vecteurs $f(q, x, w, v_1, v_2)$. S’ajoute à la description du nœud l’ensemble $Init(q, x)$, qui est l’ensemble des valeurs initiales possibles pour l’état discret q et pour l’état continu x . Le flux w et les volumes évacués v_1 et v_2 représentent les entrées du système hybride.

Les flèches du graphe correspondent aux changements d’état $q \in \{q_1, q_2\}$. Plus précisément, à chaque flèche $e \in E \triangleq \{(q_1, q_2), (q_2, q_1)\}$ correspond une condition de garde qui précise pour quelles valeurs des variables continues x le changement d’état est possible. Si le changement d’état a été effectué, une fonction d’initialisation R fournit la valeur initiale de la variable x .

3.6.2 Définitions

Dans cette section le concept des automates hybrides avec des entrées et sorties est formalisé.

Définition 3.6.1 (Automate hybride ouvert) *Un automate hybride ouvert est une collection de 11 variables et ensembles $H \triangleq (Q, X, U, Y, Init, f, h, Inv, E, G, R)$ qui vérifie :*

- Q est un ensemble fini d’états discrets. Il représente la dynamique discrète de H .

- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$, est un ensemble fini de variables réelles continues. Il représente la dynamique continue de H .
- $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \cup \{u_1^d, u_2^d, \dots, u_{m^d}^d\} \in \mathbb{R}^{m+m^d}$, est un ensemble fini de m variables d'entrée réelles continues et m^d variables d'entrée réelles discrètes.
- $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\} \cup \{y_1^d, y_2^d, \dots, y_{k^d}^d\} \in \mathbb{R}^{k+k^d}$, est un ensemble fini de k variables de sortie réelles continues et k^d variables de sortie réelles discrètes.
- $Init \subseteq Q \times X$ est l'ensemble des états initiaux possibles (q^0, x^0) de l'automate hybride H . $q^0 \in Q$ est l'état initial discret, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est la valeur initiale de la variable continue vectorielle x .
- $f : Q \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs. Il décrit, à travers l'équation différentielle $\dot{x} = f(q, x, u)$, le flux continu pour chaque état discret $q \in Q$.
- $h : Q \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^{k+k^d}$ est la fonction des sorties.
- $Inv : Q \rightarrow \wp(X \times U)$ est l'ensemble des conditions invariantes de H .
- $E \subset Q \times Q$ est l'ensemble des transitions.
- $G : E \rightarrow \wp(X \times U)$ est une condition de garde qui attribue à chaque $(q_i, q_j) \in E$ une condition exprimée en fonction des variables x et u .
- $R : E \times X \times U \rightarrow \wp(X)$ est une application d'initialisation (reset). Si la condition de garde $G((q_i, q_j))$ est satisfaite, alors le système H va passer de l'état q_i à l'état q_j et la valeur d'initialisation pour x sera $R((q_i, q_j), x, u)$.

Définition 3.6.2 (Trajectoire temporisée des automates hybrides) Une trajectoire temporisée Υ d'un automate hybride H est une suite finie ou infinie d'intervalles de temps $\Upsilon \triangleq \{I_i\}_{i=0}^N$ telle que :

- $I_i = [\tau_i, \tau'_i], \forall i < N$,
- si $N < \infty$ alors $I_N = [\tau_N, \tau'_N]$, ou $I_N = [\tau_N, \tau'_N)$,
- $\tau_i \leq \tau'_i = \tau_{i+1}$ pour $\forall i < N$.

Définition 3.6.3 (Préfixe d'une trajectoire temporisée) [Lyg03] $\Upsilon = \{I_i\}_{i=0}^N$ est un préfixe de $\Upsilon' = \{J_i\}_{i=0}^M$ et noté par $\Upsilon \sqsubseteq \Upsilon'$ si, ou bien, ces trajectoires sont identiques, ou bien Υ est fini, $N \leq M$, $I_i = J_i$ pour tout $i = 1, \dots, N-1$ et $I_N \subseteq J_N$.

Un automate hybride garde son état discret pendant un intervalle de temps, $I_i = [\tau_i, \tau'_i]$. La fin d'un intervalle τ'_i coïncide avec le début d'un autre intervalle τ_{i+1} . À l'instant $\tau'_i = \tau_{i+1}$ a lieu un changement d'état discret. Des intervalles de temps nuls $\tau_i = \tau'_i = \tau_{i+1} = \tau'_{i+1}$ sont également possibles.

Définition 3.6.4 (Exécution de l'automate hybride ouvert) L'exécution d'un automate hybride ouvert H est une collection (τ, ς, x, u) avec $\tau \in \Upsilon = \{[\tau_i, \tau'_i]\}_{i=0}^T$, $\varsigma : \tau \rightarrow Q$, $x : \tau \rightarrow X$, et $u : \tau \rightarrow U$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

- Condition initiale : $(\varsigma(\tau_0), x(\tau_0)) \in Init$;
- Évolution discrète : $\forall i$, soit $(\varsigma(\tau'_i), x(\tau'_i)) = (\varsigma(\tau_{i+1}), x(\tau_{i+1}))$ soit $e_i = (\varsigma(\tau'_i), \varsigma(\tau_{i+1})) \in E$, $(x(\tau'_i), u(\tau'_i)) \in G(e_i)$ et $x(\tau_{i+1}) \in R(e_i, x(\tau'_i), u(\tau'_i))$;
- Évolution continue : $\forall i$ avec $\tau_i < \tau'_i$, ς, x et u sont continues pour $[\tau_i, \tau'_i]$ et $\forall t \in [\tau_i, \tau'_i)$, $(x(t), u(t)) \in Inv(\varsigma(t))$ et $\dot{x}(t) = f(\varsigma(t), x(t), u(t))$;
- Évolution des sorties : $\forall t \in \tau$, $y(t) = h(q(t), x(t), u(t))$.

L'existence et l'unicité des exécutions ne sont généralement pas garanties pour les automates hybrides. Un problème potentiel réside dans le blocage dans un état discret, quand l'évolution continue n'est plus possible, mais néanmoins aucune condition de garde n'est satisfaite. Par

ailleurs, l'automate hybride peut être non-déterministe. Ceci signifie que plusieurs transitions sont possibles au même instant. Les exécutions Zeno sont caractérisées par un nombre infini de transitions exécutées en temps fini, ce qui constitue un autre problème.

3.7 Utilisation de ces outils théoriques dans le contexte de la thèse

Dans cette thèse nous avons proposé une solution au problème suivant : concevoir une assistance à la conduite qui empêche les sorties de voie involontaires. Le développement de cette solution est divisé en plusieurs étapes.

La première étape était de trouver un formalisme mathématique pour décrire les interactions entre les acteurs principaux du système : le véhicule, le conducteur et l'assistance. Le conducteur et l'assistance représentent les deux actionneurs de haut niveau sur la direction du véhicule. Nous avons opté pour une conduite alternative du véhicule par le conducteur ou l'assistance, suivant des conditions de commutations. Par conséquent, ce formalisme mathématique a été représenté par les systèmes hybrides ouverts (voir Figure 3.12). Cette phase de modélisation est décrite dans le Chapitre 5, Partie III.

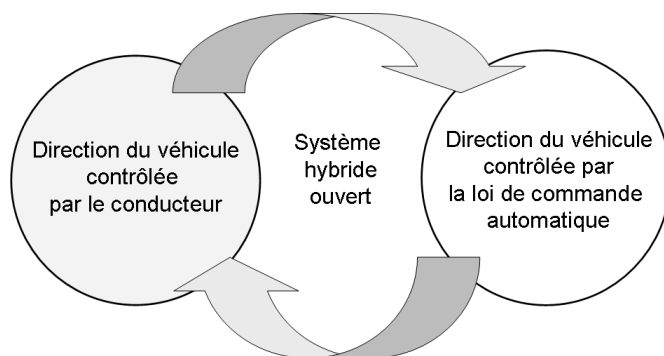


FIG. 3.12 – Véhicule-conducteur-assistance : Système hybride ouvert

Si le véhicule contrôlé par le conducteur représente un système de type boîte noire, le comportement du véhicule contrôlé par l'assistance restait à concevoir. La deuxième étape était la conception de la loi de commande qui gère la direction du véhicule pendant les moments d'inattention du conducteur. Afin de satisfaire le cahier des charges de l'assistance à la conduite, nous avons pris en compte plusieurs aspects (voir Figure 3.13). Les contraintes sur les variables d'états et sur l'entrée de commande du véhicule ont été exprimées comme des polyèdres ou des polytopes. Les exigences sur la trajectoire du véhicule durant l'action de l'assistance ont été prises en compte en partant des ensembles atteignables et des ensembles invariants. En plus de ces ensembles invariants il est nécessaire d'obtenir la stabilité asymptotique en boucle fermée. Ces aspects seront exposés dans le Chapitre 6 et le Chapitre 7 de la Partie III.

Une troisième étape, transversale aux deux étapes énoncées précédemment, consistait à assurer un comportement borné des trajectoires du système commuté véhicule-conducteur-assistance.

Toutes ces contraintes et exigences ont été satisfaites grâce à deux outils fondamentaux. Le premier outil est le Théorème de Stabilité de Lyapunov, qui a été utilisé pour des fonctions quadratiques et composées (voir Figure 3.14). Le deuxième outil est représenté par les méthodes d'optimisation LMI et BMI. Ces méthodes d'optimisation ont permis de calculer les lois de

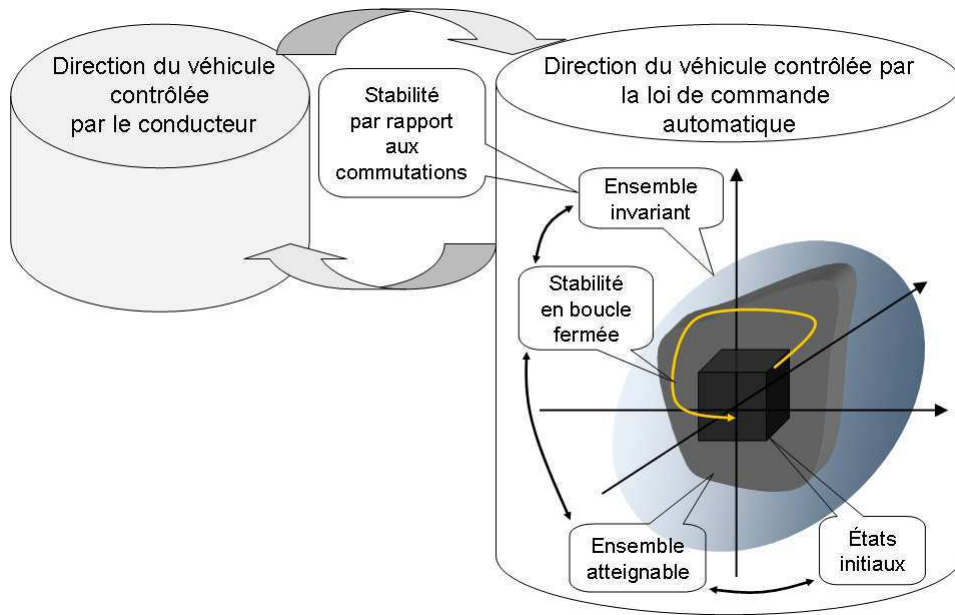


FIG. 3.13 – Outils théoriques utilisés pour la conception de l’assistance à la conduite.

commande et les fonctions de Lyapunov souhaitées.

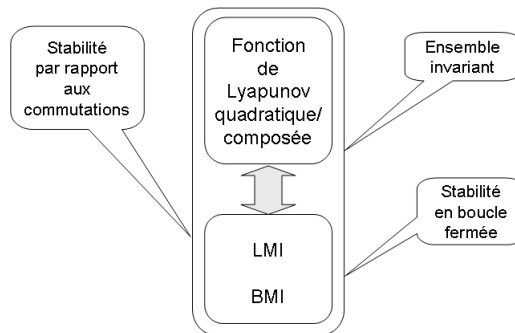


FIG. 3.14 – Interdépendance entre les outils théoriques utilisés pour la conception de l’assistance à la conduite.

Bibliographie

- [Ber97] E. Beran, L. Vanderberghe et S. Boyd *A global BMI algorithm based on the generalized Benders decomposition*. Proceedings of the European Control Conference, Brussels, Belgium, 1997.
- [Bit95] G. Bitsoris et M. Vassilaki *Constrained regulation of linear systems* Automatica, Vol. 31, No. 2, pp. 223 - 227, 1995.
- [Bla08] F. Blanchini et S. Miani *Set-theoretic methods in control*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2008.
- [Boy94] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan *Linear matrix inequalities in system and control theory* Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Philadelphia, 1994.
- [Boy06] S. P. Boyd et L. Vandenberghe *Convex Optimization* Cambridge University Press, 2006.
- [Cas93] E. B. Castelan et J. C. Hennes *On invariant polyhedra of continuous-time linear systems* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 11, pp. 1680 - 1685, 1993.
- [Dan00] T. X. T. Dang *Vérification et synthèse des systèmes hybrides*. Thèse de doctorat à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [Fir64] W. J. Firey *Some applications of mean of convex bodies*. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 14, No. 1, 1964.
- [Hu01] T. Hu et Z. Lin *Control systems with actuator saturation : Analysis and design*. Birkhäuser, Boston, MA, 2001.
- [Hu03] T. Hu et Z. Lin *Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, No. 3, pp. 440 - 450, 2003.
- [Hu04] T. Hu et Z. Lin *Properties of the composite quadratic Lyapunov functions* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No. 7, pp. 1162 - 1167, 2004.
- [Kha2002] H. K. Khalil *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [Koc03] M. Kocvara et M. Stingl *PENNON - A Code for Convex Nonlinear and Semidefinite Programming*. Optimization Methods and Software, Vol. 18, No. 3, pp. 317-330, 2003.
- [Kva04] M. Kvasnica, P. Grieder, M. Baotić et M. Morari *Multi-Parametric Toolbox (MPT)* Dans : R. Alur et G. J. Pappas, éditeurs, *Hybrid Systems : Computation and Control*, Vol. 2993, Lecture Notes in Computer Science, pp. 448-462, Springer Verlag.
- [Kur97] A. Kurzhanski et I. Vályi *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.
- [Kur06] A. Kurzhanski et P. Varaiya *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Ellipsoidal Toolbox, Technical Report, 2006.

- [Kwa72] H. Kwakernaak et R. Sivan *Linear optimal control systems* Wiley-Interscience, a Division of John Wiley and Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1972.
- [Lyg96] J. Lygeros *Hierarchical hybrid control of large scale systems* Thèse de doctorat à Département of Electrical Engineering, University of California, Berkeley, 1996.
- [Lyg98] J. Lygeros, D. N. Godbole et S. Sastry *Verified hybrid controllers for automated vehicles* IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 43, pp. 522-539, 1998.
- [Lyg03] J. Lygeros, K. H. Johansson, S. N. Simić, J. Zhang et S. S. Sastry *Dynamical Properties of Hybrid Automata* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, No. 1, pp. 2-17, 2003.
- [Lyn03] N. Lynch, R. Segala et F. Vaandrager *Hybrid I/O automata* Information and Computation, Vol. 185, pp. 105-157, 2003.
- [Liu99] J. Liu, X. Liu, T.-K. J. Koo, B. Sinopoli, S. Sastry et E. A. Lee *A hierarchical hybrid system model and its simulation* Proceedings of Conference on Decision and Control, pp. 3508-3513, 1999.
- [Mes04] F. Mesquine, A. Benlemkadem et A. Benzaouia *Robust constrained regulator problem for linear uncertain systems* Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 10, No. 4, pp. 527 - 544, 2004.
- [Mot53] T. S. Motzkin, H. Raifa, G. L. Thompson, R. M. Thrall *The double description method* Dans : H. W. Kuhn et A. W. Tucker, éditeurs, *Contribution to theory of games*, Vol. 2, Princeton University Press.
- [Nag94] K. Nagpal, J. Abedor et K. Poolla *An LMI Approach to peak-to-peak gain minimization : filtering and control* Proceeding of the American Control Conference, Baltimore, Maryland, 1994, pp. 742 - 746.
- [Naz07] S. A. Nazin, B. T. Polyak et M. V. Topunov *Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids* Automation and Remote Control, Vol. 68, No. 3, 2007, pp. 467 - 486.
- [Nem83] A. Nemirovskii et D. Yudin *Problem complexity and method Efficiency in optimization* John Wiley ans Sons, 1983.
- [Nes94] Yu. Nestorov et A. Nemirovskii *Interior-point polynomial methods in convex programming* Studies in Applied Mathematics, SIAM Philadelphia, PA Vol. 13, 1994.
- [Pol06] B. T. Polyak, A. V. Nazin, A. V. Topunov et S. A Nazin *Rejection of bounded disturbances via invariant ellipsoids technique* Proceedings of Conference on Decision and Control, San Diego, pp. 1429 - 1434, 2006.
- [Pya82] Ye.S. Pyatnitskiy et V.I. Skorodinskiy *Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem* Systems and Control Letters, Vol. 2, No. 2, pp. 130 - 135, 1982.
- [Rug93] W. J. Rugh *Linear system theory*. Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1993.
- [Sti05] M. Stingl *On the solution of nonlinear semidefinite programs by augmented Lagrangian methods*. Thèse de doctorat de l'université Friedrich-Alexander-Universität Erlangen Nürnberg, 2005.
- [Vas89] M. Vassilaki et G. Bitsoris *Constrained regulation of linear continous-time dynamical systems* Systems&Control Letters, Vol. 13, pp. 247 -252, 1989.

4

Modèle du véhicule pour le suivi de voie et instrumentation

Sommaire

4.1	Modèle « bicyclette » du véhicule	95
4.1.1	Repères et mouvements du véhicule	96
4.1.2	Application des lois fondamentales de la dynamique	99
4.1.3	Étude des forces et des moments extérieurs pour la dynamique latérale	104
4.1.4	Modèle « bicyclette » du véhicule	111
4.2	Modèle de la colonne de direction assistée électrique	112
4.3	Positionnement du véhicule sur la voie	117
4.3.1	Écart latéral, angle de cap relatif et courbure de la voie	117
4.3.2	Modèle « bicyclette » du véhicule lié à la voie	120
4.3.3	Modèle « bicyclette » équivalent du véhicule sur la voie	120
4.3.4	Coordonnées sur la voie des roues avant du véhicule	122
4.4	Modèle « bicyclette » intégrant la colonne de direction et le positionnement sur la voie	128
4.5	Capteurs et actionneurs pour le contrôle latéral	128
4.6	Équipement du véhicule prototype, CARLLA	130
4.6.1	Fonctionnalités du véhicule prototype CARLLA	131
4.6.2	Équipement	131

4.1 Modèle « bicyclette » du véhicule

Cette section est consacrée à la présentation du modèle de véhicule utilisé pour la synthèse de l'assistance. L'exposé sera centré sur les principes essentiels de la dynamique latérale et suivra le cheminement des études réalisées dans [Mam01] et dans [Bag01].

Les lois fondamentales de la dynamique seront d'abord formulées pour le véhicule considéré comme un corps rigide qui ne subit aucune déformation. Des simplifications permettront de retenir les seuls mouvements de lacet et de dérive.

Une fois les forces extérieures, notamment les forces de contact pneumatique-chaussée, et les moments dynamiques extérieurs identifiés, quelques simplifications supplémentaires permettront d'aboutir aux équations du modèle « bicyclette ».

4.1.1 Repères et mouvements du véhicule

Le véhicule considéré comme un corps rigide présente six degrés de liberté : trois mouvements de rotation et trois mouvements de translation. Ces mouvements sont réunis dans la Figure 4.1. Les mouvements de translations s'effectuent selon trois axes :

1. un axe longitudinal, parallèle à l'axe de symétrie de la caisse, l'axe OX ;
2. un axe transversal, perpendiculaire à l'axe de symétrie de la caisse, l'axe OY ;
3. et un axe orthogonal aux deux axes précédents, l'axe OZ .

Les mouvements de rotation s'effectuent selon les axes mentionnés précédemment et portent chacun un nom bien spécifique :

1. la rotation autour de l'axe longitudinal OX , caractérisée par l'angle de roulis ϕ est appelée mouvement de roulis ;
2. la rotation autour de l'axe transversal OY , caractérisée par l'angle de tangage θ est appelée mouvement de tangage ;
3. la rotation autour de l'axe vertical OZ , caractérisée par l'angle de lacet ψ est appelée mouvement de lacet.

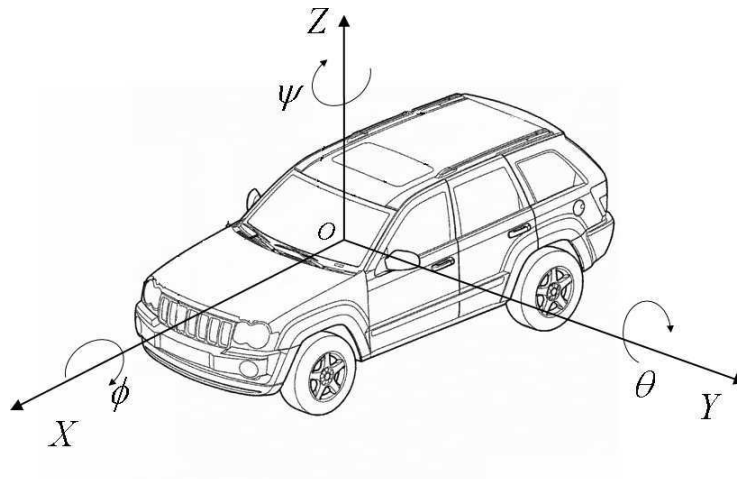


FIG. 4.1 – Les différents mouvements du véhicule.

Définition des repères

Plusieurs repères peuvent être utilisés pour décrire les mouvements du véhicule. Il sera fait usage ici de deux repères particuliers : un repère absolu, supposé galiléen et noté R^a , et un repère lié à la caisse du véhicule, noté R^c . Le passage entre ces deux repères utilisera deux repères intermédiaires : un repère dit véhicule R^v et un repère dit intermédiaire R^i .

Les passages entre les différents repères se décomposent de la manière suivante :

- Le repère véhicule R^v subit une translation O_aO_v et une rotation de lacet d'angle ψ autour de l'axe O_aZ_a par rapport au repère absolu R^a (voir Fig. 4.2 (a)).
- Le repère intermédiaire R^i subit une rotation de tangage d'angle θ autour de l'axe O_vY_v par rapport au repère véhicule R^v (voir Fig. 4.2 (b)).
- Le repère caisse R^c a une rotation de roulis d'angle ϕ autour de l'axe O_iX_i par rapport au repère intermédiaire R^i (voir Fig. 4.2 (c)).

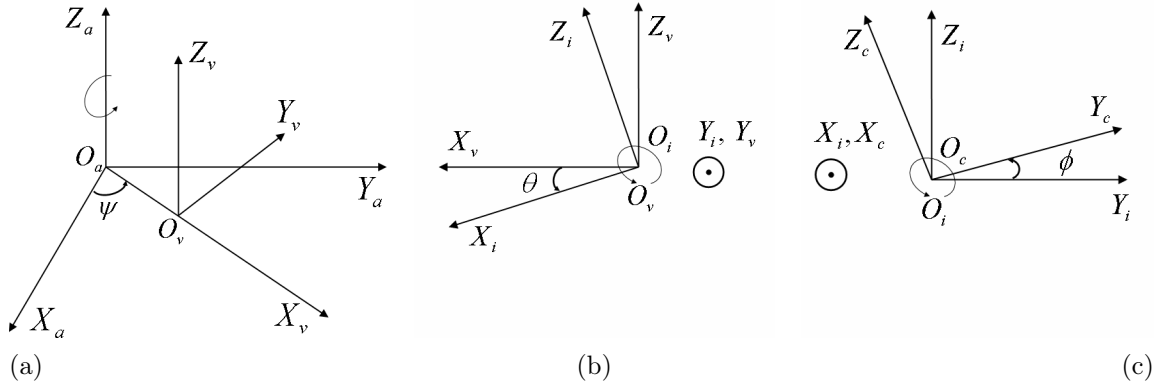


FIG. 4.2 – (a) Repère absolu-repère véhicule. (b) Repère véhicule-repère intermédiaire. (c) Repère intermédiaire-repère caisse.

Changement de repère

Les transformations de coordonnées entre les repères nécessitent de tenir compte des translations et des rotations effectuées. Considérons pour cela un point P dans l'espace et calculons les transformations des coordonnées du point P , $((x_P)^a, (y_P)^a, (z_P)^a)^T$, du repère absolu R^a vers les repères R^v , R^i et R^c . Le vecteur $(O_a P)^a$ sera donc projeté sur chacun de repères R^v , R^i et R^c . Les coordonnées dans ces repères seront respectivement notées $(O_a P)^v$, $(O_a P)^i$ et $(O_a P)^c$.

1. **Le passage de R^a vers R^v** se compose
 - d'une translation $(O_a O_v)^v$
 - et d'une rotation d'angle ψ autour de l'axe $O_a Z_a$:

$$\begin{cases} (x_P)^v = (x_P)^a \cos \psi + (y_P)^a \sin \psi \\ (y_P)^v = -(x_P)^a \sin \psi + (y_P)^a \cos \psi \\ (z_P)^v = (z_P)^a \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}^v = R_\psi \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}^a, \quad R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

La composition de la translation avec la rotation donne :

$$(O_a P)^v = (O_a O_v)^v + R_\psi (O_a P)^a. \quad (4.3)$$

2. **Le passage de R^v vers R^i** se compose
 - d'une rotation d'angle θ autour d'axe $O_v Y_v$

$$\begin{cases} (x_P)^i = (x_P)^v \cos \theta - (z_P)^v \sin \theta \\ (y_P)^i = (y_P)^v \\ (z_P)^i = (x_P)^v \sin \theta + (z_P)^v \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.4)$$

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}^i = R_\theta \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}^v, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Le vecteur $O_a P$ a pour coordonnées dans ce repère :

$$(O_a P)^i = R_\theta (O_a P)^v. \quad (4.6)$$

3. Le passage de R^i vers R^c se compose

– d'une rotation d'angle ϕ autour d'axe $O_i X_i$

$$\begin{cases} (x_P)^c = (x_P)^i \\ (y_P)^c = (y_P)^i \cos \phi + (z_P)^i \sin \phi \\ (z_P)^c = -(y_P)^i \sin \phi + (z_P)^i \cos \phi \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.7)$$

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}^c = R_\phi \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}^i, \quad R_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Le vecteur $O_a P$ a pour coordonnées dans ce repère :

$$(O_a P)^c = R_\phi (O_a P)^i. \quad (4.9)$$

Il faut maintenant pouvoir exprimer les formules de passage du repère R^a au repère R^c pour les vitesses du point O_c . On considère pour cela qu'à l'origine du temps $O_a \equiv O_v \equiv O_i \equiv O_c$. Les notations suivantes seront utiles :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \begin{pmatrix} x_{O_c} \\ y_{O_c} \\ z_{O_c} \end{pmatrix}^a : \text{ coordonnées du point } O_c \text{ dans le repère } R^a, \\ \eta_2 &= \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}^a : \text{ angles de rotation du repère } R^c \text{ vis-à-vis du repère } R^a, \\ \nu_1 &= \begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix}^c : \text{ le vecteur vitesse du point } O_c \text{ dans le repère } R^c, \\ \nu_2 &= \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}^c : \text{ le vecteur vitesse de rotation du point } O_c \text{ dans le repère } R^c. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Les égalités (4.3), (4.6) et (4.9) conduisent à :

$$(O_a O_c)^c = R_\phi R_\theta R_\psi (O_a O_c)^a \Rightarrow \nu_1 = R_1(\eta_2) \dot{\eta}_1, \quad \text{où } R_1(\eta_2) = R_\phi R_\theta R_\psi, \quad (4.11)$$

$$R_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Ce résultat peut également être utilisé sous la forme réciproque :

$$\dot{\eta}_1 = R_1^{-1}(\eta_2) \nu_1. \quad (4.13)$$

Les transformations des vitesses de rotation s'écrivent sous la forme suivante :

$$\nu_2 = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_\phi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \quad (4.14)$$

$$\nu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \cdot \dot{\eta}_2 = R_2(\eta_2)\dot{\eta}_2. \quad (4.15)$$

Comme précédemment, la transformation des vitesses de rotation peut également être utilisée pour obtenir les formules de passage du repère R^c au repère R^a :

$$\dot{\eta}_2 = R_2^{-1}(\eta_2)\nu_2. \quad (4.16)$$

Précisons que la matrice $R_1(\eta_2)$ étant orthogonale, son inverse est donné par sa transposée : $R_1^{-1}(\eta_2) = R_1^T(\eta_2)$. L'inverse de la matrice $R_2(\eta_2)$ est quant à elle donnée par :

$$R_2^{-1}(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Nous pouvons finalement conclure que les transformations de vitesses de translation et de rotation du repère lié à la caisse vers le repère absolu se réduisent à des opérations de multiplication par des matrices de transformation. Pour des raisons de simplicité, les équations de la dynamique du véhicule seront donc exprimées dans le repère lié à la caisse, il sera toujours possible d'opérer une transformation pour établir les équations du mouvement dans le repère absolu.

4.1.2 Application des lois fondamentales de la dynamique

Rappelons que le véhicule est assimilé à un corps rigide en mouvement dans un repère à 3 dimensions. Des hypothèses simplificatrices seront faites tout au long de l'exposé. Avant l'énoncé des lois fondamentales de la dynamique, il est nécessaire de calculer l'accélération et le moment dynamique du véhicule, calculs pour lesquels il sera fait usage du théorème de la dérivation dans un repère mobile.

Théorème 4.1.1 (Dérivation et changement de référentiel) *Considérons R^a un repère fixe et R^m un repère mobile. Le vecteur des vitesses de rotation du repère R^m vis-à-vis du repère R^a est décrit par Ω . Si $v \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur, sa dérivée par rapport au repère fixe R^a est liée à la dérivée par rapport au repère mobile R^m par l'équation suivante :*

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_a \triangleq \left(\frac{dv}{dt}\right)_m + \Omega \times (v). \quad (4.18)$$

Les notations $\left(\frac{dv}{dt}\right)_a = \dot{(v)}$ et $\left(\frac{dv}{dt}\right)_m = \check{v}$ seront utilisées par la suite. De même, pour alléger les notations, le vecteur ν_2 sera noté Ω .

Calcul de l'accélération d'un point situé sur la caisse du véhicule

Soit P un point de la caisse du véhicule. Les vecteurs formés par P avec l'origine du repère absolu R^a et l'origine du repère lié à la caisse R^c sont notés respectivement O_aP et O_cP (voir Fig. 4.3). Le vecteur O_aO_c relie les origines des deux repères. La relation de composition entre les trois vecteurs, écrite dans le repère caisse est donnée par :

$$(O_aP)^c = (O_aO_c)^c + (O_cP)^c. \quad (4.19)$$

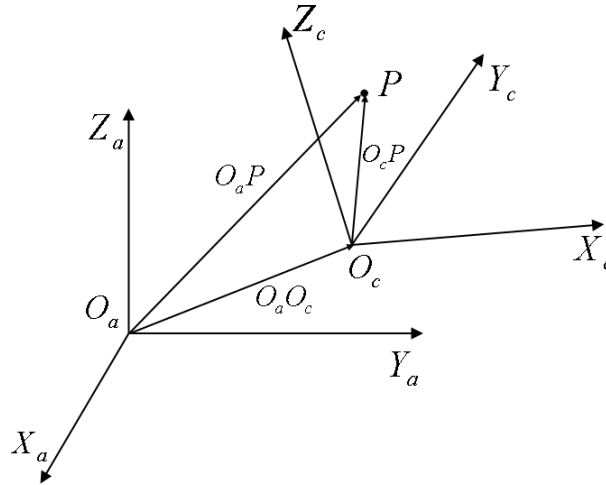


FIG. 4.3 – Point sur la caisse du véhicule dans le repère absolu et dans le repère lié à la caisse.

La vitesse absolue du point P , par rapport au repère R^a , doit maintenant être exprimée dans le repère caisse R^c . Il faut donc dériver l'égalité (4.19) par rapport au repère absolu :

$$\begin{aligned}
 (O_a \dot{P})^c &= (O_a \dot{O}_c)^c + (O_c \dot{P})^c \Leftrightarrow \\
 (O_a \dot{P})^c &= (O_a \dot{O}_c)^c + (O_c \check{P})^c + \Omega \times (O_c P)^c \Leftrightarrow \\
 (v_P)^c &= (O_a \dot{O}_c)^c + (O_c \check{P})^c + \Omega \times (O_c P)^c, \quad \text{où } (v_P)^c = (O_a \dot{P})^c.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

L'accélération du point P est obtenue en dérivant une nouvelle fois l'expression obtenue précédemment pour la vitesse (4.20) :

$$\begin{aligned}
 (O_a \ddot{P})^c &= (O_a \ddot{O}_c)^c + (O_c \check{\dot{P}})^c + \dot{\Omega} \times (O_c P)^c + \Omega \times (O_c \dot{P})^c \Leftrightarrow \\
 (O_a \ddot{P})^c &= (O_a \check{\ddot{O}}_c)^c + \Omega \times (O_a \dot{O}_c)^c + (O_c \check{\dot{P}})^c + \Omega \times (O_c \check{P})^c + \\
 &\quad + \dot{\Omega} \times (O_c P)^c + \Omega \times ((O_c \check{\dot{P}})^c + \Omega \times (O_c P)^c) \Leftrightarrow \\
 (O_a \ddot{P})^c &= (O_a \check{\ddot{O}}_c)^c + \Omega \times (O_a \dot{O}_c)^c + (O_c \check{\dot{P}})^c + \Omega \times (O_c \check{P})^c + \\
 &\quad + \dot{\Omega} \times (O_c P)^c + \Omega \times (O_c \check{\dot{P}})^c + \Omega \times (\Omega \times (O_c P)^c) \Leftrightarrow
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_P)^c &= (O_c \check{\dot{P}})^c + 2\Omega \times (O_c \check{P})^c + \\
 &\quad + (O_a \check{\ddot{O}}_c)^c + \Omega \times (O_a \dot{O}_c)^c + \dot{\Omega} \times (O_c P)^c + \Omega \times (\Omega \times (O_c P)^c), \\
 \text{où } (\Gamma_P)^c &= (O_a \ddot{P})^c.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Cette expression permet d'identifier aisément les composantes usuelles d'une accélération, calculée par rapport à un repère fixe et exprimée dans un repère mobile :

1. l'accélération relative $(O_c \check{\dot{P}})^c$,
2. l'accélération d'entraînement $(O_a \check{\ddot{O}}_c)^c + \Omega \times (O_a \dot{O}_c)^c + \dot{\Omega} \times (O_c P)^c + \Omega \times (\Omega \times (O_c P)^c)$,
3. et l'accélération de Coriolis $2\Omega \times (O_c \check{P})^c$.

Calcul du moment dynamique

Nous nous intéressons maintenant aux mouvements de rotation de la caisse du véhicule. Dans un premier temps, des résultats généraux sur les mouvements de rotation seront fournis, rappelons que le moment dynamique d'un corps dans l'espace dépend de son volume et de la répartition de sa masse. Considérons donc un élément de volume dV de la caisse situé autour d'un point M (voir Fig. 4.4). v est la vitesse de cet élément volumique par rapport au repère lié à la caisse et ρ_s représente sa masse volumique. CG est le centre de gravité du véhicule.

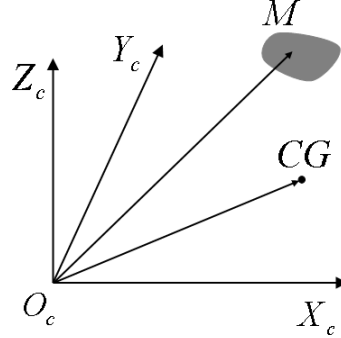


FIG. 4.4 – Élément volumique et centre de gravité du véhicule dans le repère lié à la caisse.

Définition 4.1.1 (Centre de gravité) La position du centre de gravité CG s'obtient par une intégrale sur l'ensemble du volume V du corps considéré, soit :

$$(O_c CG)^c \triangleq \frac{1}{m} \int_V (O_c M)^c \rho_s dV. \quad (4.23)$$

Par dérivation de l'équation (4.23) on obtient :

$$\begin{aligned} m(O_c CG)^c = \int_V (O_c M)^c \rho_s dV &\Rightarrow m(O_c \dot{C}G)^c = \int_V (O_c \dot{M})^c \rho_s dV \Rightarrow \\ \int_V (O_c \dot{M})^c \rho_s dV &= m((O_c \check{C}G)^c + \Omega \times (O_c CG)^c). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ce calcul interviendra dans la recherche du moment dynamique.

Le tenseur d'inertie d'un corps non ponctuel intervient dans le calcul du moment cinétique qui permet d'aboutir par dérivation au moment dynamique. CG étant le centre de gravité du corps considéré, le tenseur d'inertie est défini comme suit :

Définition 4.1.2 (Tenseur d'inertie) Le tenseur d'inertie d'un corps rigide est défini par le produit entre sa matrice d'inertie et le vecteur de ses vitesses de rotation. En considérant un élément volumique dV et le centre de gravité CG , il se calcule par l'intégrale volumique :

$$I_0 \Omega \triangleq \int_V \rho_s [(O_c CG)^c \times (\Omega \times (O_c CG)^c)] dV. \quad (4.25)$$

La matrice d'inertie I_0 de l'équation (4.25) est symétrique, définie positive et de la forme :

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

où les indices $(x, y, z)^T$ de l'équation (4.26) sont des notations abrégées pour les directions O_cX_c , O_cY_c et O_cZ_c . Cette matrice est constante dans le référentiel lié à la caisse.

Le moment cinétique est représentatif de la quantité de mouvement qui contribue à une rotation, calculée par rapport à un point de référence. En choisissant comme point de référence l'origine du repère lié à la caisse du véhicule, le moment cinétique est décrit plus précisément par une intégrale volumique.

Définition 4.1.3 (Moment cinétique par rapport au point O_c) *Le moment cinétique du véhicule par rapport à l'origine du repère lié à la caisse est décrit par :*

$$\sigma_0 \triangleq \int_V ((O_cM)^c \times v) \rho_S dV = m(O_cCG)^c \times (O_a\dot{O}_c)^c + I_0 \times \Omega. \quad (4.27)$$

Le moment dynamique d'un corps rigide par rapport à un point de référence décrit l'effet de rotation autour de ce point, effet qui est provoqué par les forces agissant sur ce corps rigide.

Définition 4.1.4 (Moment dynamique par rapport au point O_c) *Le moment dynamique du véhicule par rapport à l'origine du repère lié à la caisse est décrit par :*

$$H_0 \triangleq \int_V ((O_cM)^c \times \dot{v}) \rho_S dV. \quad (4.28)$$

À ce stade, l'ensemble des quantités nécessaires à l'application d'un des théorèmes fondamentaux de la mécanique des corps rigides a été réuni, à savoir : *le moment dynamique d'un corps rigide par rapport à un point s'obtient par la dérivation du moment cinétique par rapport à ce même point.* En effet, nous remarquons que :

$$\dot{\sigma}_0 = \int_V ((O_c\dot{M})^c \times v) \rho_S dV + \int_V ((O_cM)^c \times \dot{v}) \rho_S dV = H_0 + \int_V ((O_c\dot{M})^c \times v) \rho_S dV. \quad (4.29)$$

Par ailleurs, la dérivée de σ_0 peut être calculée en dérivant l'expression (4.27) :

$$\dot{\sigma}_0 = m[(O_c\check{C}G)^c + \Omega \times (O_cCG)^c] \times (O_a\dot{O}_c)^c + m(O_cCG)^c \times [(O_a\check{O}_c)^c + \Omega \times (O_a\dot{O}_c)^c] + I_0\check{\Omega} + \Omega \times (I_0\Omega). \quad (4.30)$$

En tenant compte des relations (4.24), (4.29) et (4.30) nous obtenons pour le moment dynamique après les calculs intermédiaires :

$$H_0 = \dot{\sigma}_0 - \int_V (O_c\dot{M})^c \times v) \rho_S dV \Leftrightarrow \quad (4.31)$$

$$H_0 = I_0\check{\Omega} + \Omega \times (I_0\Omega) + m(O_cCG)^c \times [O_a\check{O}_c^c + \Omega \times (O_a\dot{O}_c)^c]. \quad (4.32)$$

Équations globales des forces d'inertie et du moment dynamique

Après avoir établi les expressions de l'accélération d'un point appartenant à la caisse du véhicule et du moment dynamique du véhicule par rapport à l'origine du repère R^c , les équations de mouvement au centre de gravité ($P \equiv CG$) peuvent être écrites :

$$\begin{cases} m(\Gamma_{CG})^c = \sum(F_{ext})^c, \\ H_0 = \sum(M_{ext})^c, \end{cases} \quad (4.33)$$

où $\sum(F_{ext})^c$ et $\sum(M_{ext})^c$ sont les résultantes des forces et des moments extérieurs agissant sur le véhicule.

En utilisant les équations (4.22) et (4.32), les lois de la dynamique de l'équation (4.33) deviennent :

$$\begin{cases} m[(O_c\check{C}G)^c + 2\Omega \times (O_c\check{C}G)^c + \\ + (O_a\dot{O}_c)^c + \Omega \times (O_a\dot{O}_c)^c + \dot{\Omega} \times (O_cCG)^c + \Omega \times (\Omega \times (O_cCG)^c)] = \sum(F_{ext})^c, \\ I_0\check{\Omega} + \Omega \times (I_0\Omega) + m(O_cCG)^c \times [O_a\dot{O}_c^c + \Omega \times (O_a\dot{O}_c)^c] = \sum(M_{ext})^c. \end{cases} \quad (4.34)$$

Les équations générales précédentes se simplifient grandement grâce à quelques hypothèses qui seront introduites dans la suite.

Hypothèse 4.1.1 (Hypothèse de véhicule en un seul corps rigide) *L'ensemble masse non-suspendue/masse suspendue (caisse) constitue un seul même corps rigide.*

Cette hypothèse consiste à négliger les déformations et les mouvements relatifs de la caisse qui sont engendrés par les éléments de suspension. La conséquence en est que la vitesse et implicitement l'accélération du centre de gravité CG par rapport à l'origine du repère lié à la caisse, O_c , sont nulles $(O_c\check{C}G)^c = 0$ et $(O_c\dot{C}G)^c = 0$. Les équations (4.34) deviennent alors :

$$\begin{cases} m[(O_a\dot{O}_c)^c + \Omega \times (O_a\dot{O}_c)^c + \dot{\Omega} \times (O_cCG)^c + \Omega \times (\Omega \times (O_cCG)^c)] = \sum(F_{ext})^c, \\ I_0\check{\Omega} + \Omega \times (I_0\Omega) + m(O_cCG)^c \times [O_a\dot{O}_c^c + \Omega \times (O_a\dot{O}_c)^c] = \sum(M_{ext})^c. \end{cases} \quad (4.35)$$

Hypothèse 4.1.2 (Référentiel lié à la caisse avec pour origine le centre de gravité) *Le référentiel lié à la caisse R^c a son origine au centre de gravité du véhicule : $O_c \equiv CG$.*

Le vecteur O_cCG étant nul dans ce cas, les équations (4.35) se réduisent à :

$$\begin{cases} m[(O_a\dot{O}_c)^c + \Omega \times (O_a\dot{O}_c)^c] = \sum(F_{ext})^c, \\ I_0\check{\Omega} + \Omega \times (I_0\Omega) = \sum(M_{ext})^c. \end{cases} \quad (4.36)$$

Rappelons que la vitesse du point O_c , et donc du centre de gravité CG , par rapport au repère absolu est notée $\nu_1 = (v, u, w)^T$. Ceci implique $(O_a\dot{O}_c)^c = \nu_1$ et $\Omega = \nu_2$. Les équations (4.36) deviennent ainsi :

$$\begin{cases} m[(\nu_1)^c + \nu_2 \times \nu_1] = \sum(F_{ext})^c, \\ I_0\check{\nu}_2 + \nu_2 \times (I_0\nu_2) = \sum(M_{ext})^c. \end{cases} \quad (4.37)$$

Réduction au modèle « lacet-dérive »

L'hypothèse supplémentaire concerne cette fois-ci les mouvements du véhicule. Pour étudier le mouvement latéral, il est possible de ne considérer que la translation dans le plan $O_aX_aY_a$ et la rotation en lacet autour de l'axe O_aZ_a . Les mouvements de tangage, de roulis et de pompage sont donc considérés comme nuls. Cette hypothèse conduira dans les sections suivantes au modèle « bicyclette » du véhicule, largement utilisé pour la commande de la dynamique latérale.

Hypothèse 4.1.3 (Absence de mouvements de tangage, roulis et pompage) *Le mouvement du véhicule est restreint aux translations dans le plan horizontal $O_aX_aY_a$ et à la rotation autour de l'axe vertical O_aZ_a .*

Sous cette hypothèse, le repère lié à la caisse R^c coïncide avec le repère véhicule R^v . La conséquence directe est que le vecteur des vitesses de translation ν_1 devient $\nu_1 = (v, u, 0)^T$ et le vecteur des vitesses de rotation devient $\nu_2 = (0, 0, r)^T$. Ces nouvelles expressions injectées dans l'équation (4.37), permettent d'écrire :

$$\begin{cases} m(\ddot{v} - ru) &= \sum (F_{ext})_x^c, \\ m(\ddot{u} + rv) &= \sum (F_{ext})_y^c, \\ I_z \ddot{r} &= \sum (M_{ext})_z^c. \end{cases} \quad (4.38)$$

Les indices $(x, y, z)^T$ de l'équation (4.38) sont des notations abrégées pour les directions O_cX_c , O_cY_c et O_cZ_c .

Une dernière simplification est nécessaire pour pouvoir établir par la suite le modèle « bicyclette » à vitesse constante.

Hypothèse 4.1.4 (Vitesse longitudinale constante) *La vitesse longitudinale du véhicule v selon l'axe O_cX_c reste constante.*

L'Hypothèse 4.1.4 implique que \ddot{v} est nul. De plus, la vitesse transversale u peut maintenant être exprimée en fonction de la vitesse longitudinale v et d'un angle β : $u = v \sin \beta$. L'angle β sera appelé par la suite angle de dérive au centre de gravité du véhicule. Cet angle de dérive demeure faible pour les situations de conduite normale et la formule approchée $u \cong v\beta$ pourra alors être utilisée.

En ne gardant dans les équations de l'équilibre dynamique que celles qui sont liées au mouvement transversal, selon l'axe O_cY_c , et au mouvement de lacet autour de l'axe O_cZ_c , le modèle « lacet-dérive » peut être établi :

$$\begin{cases} mv(\ddot{\beta} + r) &= \sum (F_{ext})_y^c, \\ I_z \ddot{r} &= \sum (M_{ext})_z^c. \end{cases} \quad (4.39)$$

4.1.3 Étude des forces et des moments extérieurs pour la dynamique latérale

L'interaction du véhicule avec son environnement se fait principalement par l'intermédiaire de la surface de contact entre les roues et la chaussée. Le véhicule étant un corps solide de volume non-négligeable, d'autres phénomènes comme l'interaction aérodynamique jouent également un rôle important dans le mouvement du véhicule. Nous porterons la discussion dans les paragraphes suivants sur les forces et les moments dynamiques induits par l'interaction pneumatique-chaussée.

Forces et moments du contact pneumatique chaussée

Le contact du véhicule avec sa surface d'évolution est réalisé au niveau de ses quatre roues. Les actions et les réactions qui s'exercent entre le sol et le véhicule dépendent de la nature du contact, ainsi que de la force normale sur la surface de contact.

La nature du contact pneumatique-chaussée résulte de l'état et du type des deux surfaces qui interagissent : le sol et l'enveloppe de la roue. L'état du sol n'est pas généralement connu avec exactitude. De même, l'enveloppe a un comportement difficile à décrire de manière analytique, qui dépend de sa composition, de sa structure, de ses déformations mais aussi de son état d'usure. Le résultat de ce contact est décrit par le coefficient de frottement, défini par le rapport de la force sollicitant la roue dans la surface de contact et la force normale [Rei01]. Le coefficient de frottement dépend de la vitesse et a des valeurs entre 1 pour une route sèche et 0.2 pour une route

mouillée ou verglacée. Les efforts verticaux sur la surface de contact sont aussi variables. Leurs variations dépendent notamment de report de charge dû à l'accélération latérale ou longitudinale.

Pour approcher les effets dynamiques générés par le contact du pneumatique avec la chaussée, considérons une roue isolée sur le sol. Un repère lié à la roue $O_r X_r Y_r Z_r$ est positionné au centre de cette roue, avec l'axe $O_r Z_r$ normal au sol. La roue est de plus considérée comme un élément solide qui subit des déformations pendant son mouvement : la déformation de l'enveloppe et également la déformation de la chape de caoutchouc. Ces déformations sont généralement prises en compte par la réduction du rayon de la roue sous l'effet de la force normale. Le rayon est alors noté \bar{R}_e (voir Fig. 4.5 (b)). De même, l'écrasement du pneumatique conduit à une surface de contact non nulle qui est modélisée sous la forme d'un rectangle, appelée région de contact (voir Fig. 4.5 (a)).

Cinématique de la roue

Une première conséquence de la déformation du pneumatique est que le vecteur vitesse au centre de rotation de la roue n'est plus dans le plan de rotation longitudinal $O_r X_r Z_r$ (voir Fig. 4.5 (a)). Une deuxième conséquence est que la vitesse longitudinale au centre de rotation $(v_x)^r$ (voir Fig. 4.5 (b)) est différente de la vitesse linéaire au point du contact.

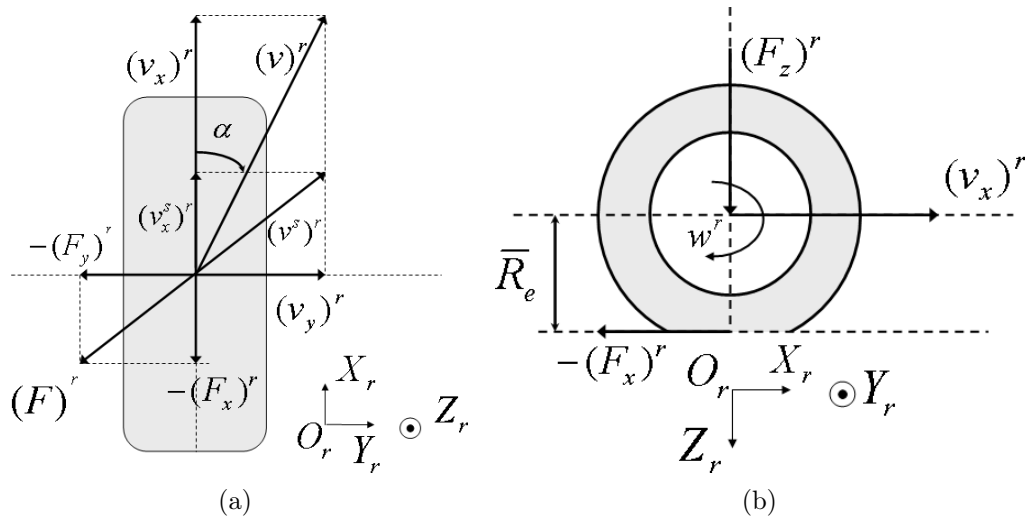


FIG. 4.5 – (a) Roue vue dans le plan $O_r Y_r X_r$. (b) Roue vue dans le plan $O_r X_r Z_r$.

La terminologie suivante est souvent utilisée [Sve07].

- La vitesse au centre de rotation de la roue, notée $(v)^r$, fait un angle α avec l'axe $O_r X_r$. L'angle α est appelé angle de dérive du pneumatique. La vitesse $(v)^r$ se décompose en une vitesse latérale $(v_y)^r$ et une vitesse longitudinale notée $(v_x)^r$.
- La vitesse périphérique de la roue dans la direction $O_r X_r$, dû au mouvement de rotation de la roue, serait pour une roue non déformée de rayon R_e : $(v_c)^r = (\omega)^r (R_e)^r$.
- La vitesse de dérive de la roue se définit sur l'axe longitudinal $O_r X_r$ par la différence entre la vitesse $(v_x)^r$ et la vitesse $(v_c)^r$ et sur l'axe transversal $O_r Y_r$ par $(v_y)^r$: $(v^s)^r = (v_x - v_c, v_y)^r$.

1. **Taux de glissement.** Le taux de glissement représente le rapport entre la vitesse de glissement et la vitesse de la roue. Selon la vitesse de la roue pour laquelle il est calculé,

nous retrouvons les formules suivantes [Sve07] :

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y) \triangleq \frac{(v^s)^r}{(v_c)^r}, \quad \kappa = (\kappa_x, \kappa_y) \triangleq \frac{(v^s)^r}{(v_x)^r}, \quad s = (s_x, s_y) \triangleq \frac{(v^s)^r}{(v)^r}. \quad (4.40)$$

La deuxième formulation, qui est la plus utilisée dans la littérature, se transforme en :

$$\kappa \triangleq (\lambda, \tan \alpha) = \begin{cases} ((\frac{R_e \omega}{v_x})^r - 1, \tan \alpha), & \text{si } (v_x)^r > (R_e)^r (\omega)^r \text{ (freinage),} \\ (1 - (\frac{R_e \omega}{v_x})^r, \tan \alpha), & \text{si } (v_x)^r < (R_e)^r (\omega)^r \text{ (accélération),} \end{cases} \quad (4.41)$$

selon que la roue soit en situation de freinage ou d'accélération.

2. **Les angles de dérive des roues.** Les angles de dérive des roues peuvent être obtenus en partant de la vitesse du véhicule au centre de gravité puis en effectuant les transformations nécessaires jusqu'à l'obtention de la vitesse au niveau de la roue. Ils dépendent de ce fait de la vitesse de rotation en lacet et pour les roues directrices de l'angle de braquage [Kie05]. Les roues du véhicule étant respectivement, dans le sens horaire, R_1 , R_2 , R_3 et R_4 (voir Figure 4.6), le calcul sera développé pour la roue avant gauche, notée R_1 sur la Figure 4.6. Cette roue directrice forme avec l'axe longitudinal du véhicule un l'angle de braquage δ_f . Cet angle de braquage sera supposé identique pour les deux roues avant du véhicule.

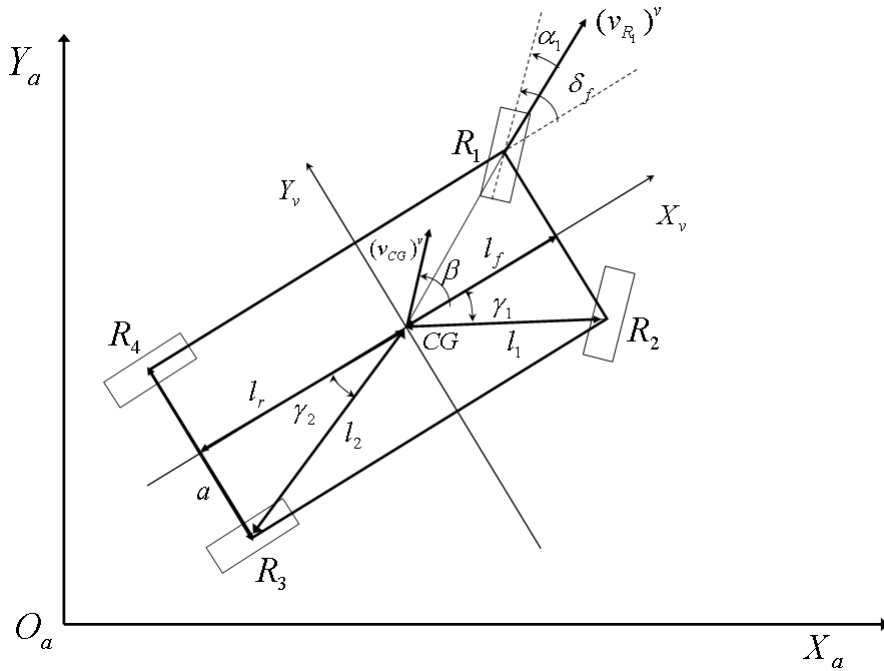


FIG. 4.6 – Angle de dérive de la roue avant gauche.

Le calcul de l'angle de dérive α_1 , nécessite de déterminer dans un premier temps la vitesse au point R_1 par rapport au repère absolu R^a , notée $(v_{R_1})^v$ et de l'exprimer dans le repère véhicule R^v (voir Figure 4.7) :

$$\left. \begin{aligned} (v_{R_1})^v &= (O_a \dot{R}_1)^v = (O_a \dot{C}G)^v + (C\dot{G} R_1)^v = (v_{CG})^v + (C\check{G} R_1)^v + \Omega \times (C\check{G} R_1)^v \\ (C\check{G} R_1)^v &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (4.42)$$

$$(v_{R_1})^v = (v_{CG})^v + \Omega \times (CG R_1)^v. \quad (4.43)$$

Rappelons que la vitesse du centre de gravité CG est donnée par : $(v_{CG})^v = v_1 = (v, u, 0)^T = (v, v \sin \beta, 0)^T$. La vitesse de rotation Ω se réduit avec l'hypothèse du seul mouvement de rotation de « lacet » à $\Omega = (0, 0, r)^T$. En poursuivant le calcul de l'équation (4.43), on établit :

$$(v_{R_1})^v = \begin{pmatrix} v \\ v\beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_f \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v\beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}r \\ rl_f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - \frac{a}{2}r \\ v\beta + rl_f \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

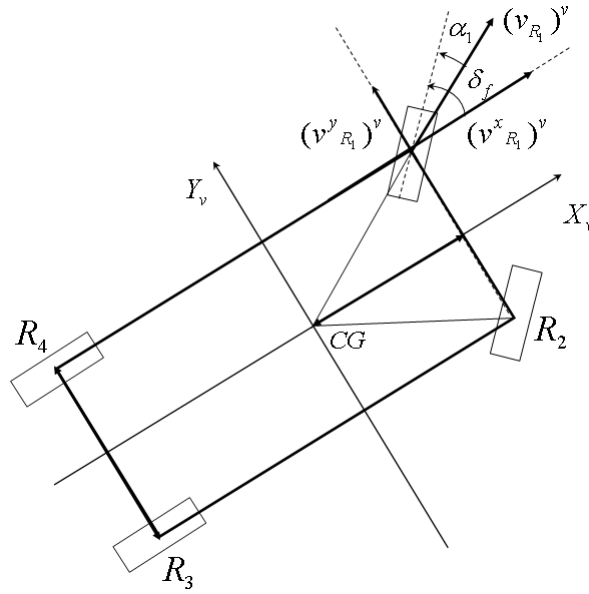


FIG. 4.7 – Vitesse au point R_1 , $(v_{R_1})^v$, par rapport au repère absolu R^a .

L'équation précédente associée à la Figure 4.7 permet d'écrire l'égalité ci-dessous :

$$\tan(\delta_f - \alpha_1) = \frac{(v^y_{R_1})^v}{(v^x_{R_1})^v} = \frac{v\beta + rl_f}{v - \frac{a}{2}r}. \quad (4.45)$$

On obtient finalement l'angle de dérive α_1 de la roue avant :

$$\alpha_1 = \delta_f - \arctan \frac{(v^y_{R_1})^v}{(v^x_{R_1})^v} = \delta_f - \arctan \frac{v\beta + rl_f}{v - \frac{a}{2}r}. \quad (4.46)$$

Les angles de dérive des trois autres roues R_2 , R_3 et R_4 s'obtiennent de la même manière :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \delta_f - \arctan \frac{v\beta + rl_f}{v + \frac{a}{2}r}, \\ \alpha_3 &= -\arctan \frac{v\beta - rl_f}{v + \frac{a}{2}r}, \\ \alpha_4 &= -\arctan \frac{v\beta - rl_f}{v - \frac{a}{2}r}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ces expressions se simplifient et deviennent linéaires si on considère que les rapports $\frac{(v_{R_i}^y)^v}{(v_{R_i}^x)^v}$, $i = 1, \dots, 4$, sont très faibles et que $|\frac{a}{2}r| \ll v$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \delta_f - \beta - \frac{rl_f}{v}, \\ \alpha_3 &= \alpha_4 = -\beta + \frac{rl_r}{v}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Dynamique de la roue

Les forces et les moments qui s'exercent sur la roue sont représentés dans la Figure 4.8. Notons que le plan de la roue, n'est pas dans le plan vertical, il fait un angle γ avec le plan $O_r X_r Z_r$, appelé angle de carrossage. Sur la Figure 4.8 sont représentées les trois forces : longitudinale $(F_x)^r$, transversale $(F_y)^r$ et normale $(F_z)^r$. De même, les trois moments qui s'exercent sur la roue sont le moment résistant M_z autour de l'axe $O_r Z_r$ appelé moment d'auto-alignement qui tend à la ramener dans l'axe du véhicule, le moment de résistance au roulement M_y autour de l'axe $O_r Y_r$ et le moment de résistance M_x autour de l'axe $O_r X_r$.

Dans la suite de ce chapitre, l'exposé sera restreint à la modélisation des forces de contact pneumatique-chaussée $(F_x)^r$ et $(F_y)^r$ dans les deux directions de translation longitudinale et transversale. Ces forces résultent de phénomènes de friction complexes à caractériser. Fortement non-linéaires, ces forces sont généralement approchées par des méthodes empiriques ou des méthodes analytiques décrivant les phénomènes mis en jeu. Quatre méthodes seront présentées brièvement [Sve07].

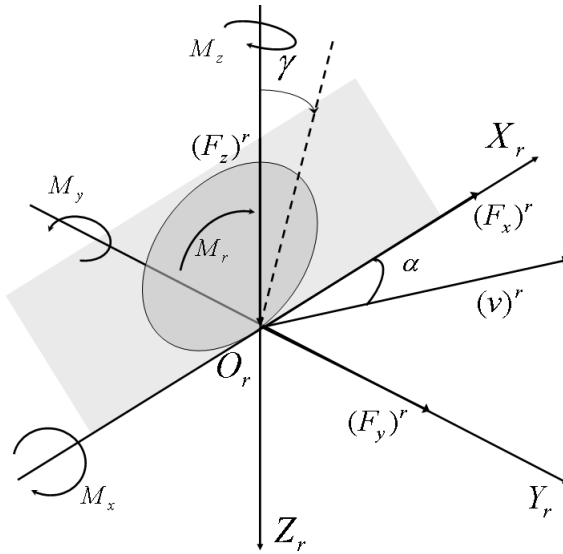


FIG. 4.8 – Forces et moments s'exerçant sur la roue.

1. Modèles statiques linéaires.

Ces modèles statiques expriment les forces de contact en fonction de paramètres comme par exemple l'adhérence, la vitesse ou la charge, en partant des relevés expérimentaux. L'objectif est de reproduire au mieux les phénomènes observés.

Les relevés expérimentaux de la force $(F_x)^r$ en fonction de la dérive longitudinale λ et de la force $(F_y)^r$ en fonction de l'angle de dérive α , ont le profil de la courbe de la Figure 4.9.

Cette courbe appelle les remarques suivantes :

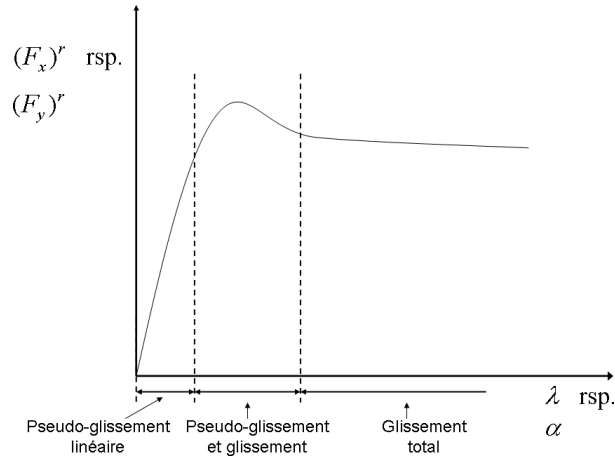


FIG. 4.9 – Force longitudinale et force latérale en fonction de la dérive.

- Les forces sont quasi-linéaires et croissantes pour des faibles sollicitations (zone de pseudo-glisserement). Elles peuvent être approchées dans ce cas par leurs tangentes à l'origine :

$$\begin{aligned} (F_x)^r &= \left(\frac{\partial (F_x)^r}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} \cdot \lambda = c_x \lambda, \\ (F_y)^r &= \left(\frac{\partial (F_y)^r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \cdot \alpha = c_y \alpha, \end{aligned} \quad (4.49)$$

où c_x et c_y sont les coefficients de raideur du pneumatique.

- Elles sont non-linéaires avec une tendance à la saturation pour des sollicitations à la limite de l'adhérence dans laquelle le véhicule reste toujours contrôlable (zone de pseudo-glisserement et glissement),
- Elles reprennent une forme quasi-linéaire, décroissante une fois la saturation dépassée et qu'on atteint la zone de glissement sans roulement.

Si les situations de conduite n'entraînent pas de saturation des forces de contact, la force latérale $(F_y)^r$ se situe dans le domaine linéaire de pseudo-glisserement de la Figure 4.9. Elle peut être reformulée sous la forme :

$$(F_y)^r = c_y \alpha = c_y^0 \mu \alpha, \quad (4.50)$$

où c_y^0 est le coefficient de raideur pour une adhérence parfaite correspondant à $\mu = 1$.

Pour approcher au mieux les relevés expérimentaux, comme celui de la Figure 4.9, les auteurs de [Bak87] ont proposé une formule analytique applicable aux deux forces longitudinale et latérale ainsi qu'au moment d'auto-alignement :

$$y(x) = D \sin \left[C \arctan \left[(1 - E)x + \frac{E}{B} \arctan(Bx) \right] \right]. \quad (4.51)$$

L'équation (4.51) est plus connue sous l'appellation « Formule magique de Pacejka », le couple (x, y) doit être remplacé, selon le cas, par $(\lambda, (F_x)^r)$, $(\alpha, (F_y)^r)$ ou (α, M_z) . Les quatre coefficients C , D , B et E sont différents pour chaque $(F_x)^r$, $(F_y)^r$ ou M_z et sont fonction de la charge normale $(F_z)^r$ sur le pneumatique. Le modèle a connu plusieurs extensions et paramétrages pour décrire les propriétés d'intérêt du pneumatique [Pac02]. Il contient à présent environ 85 paramètres qui sont adaptables en fonction des données expérimentales. Un des points d'intérêt de la « Formule magique de Pacejka » est qu'elle

peut tenir compte des interdépendances entre les sollicitations longitudinales et latérales. Ces interactions seront abordées par la suite.

2. Modèle semi-empirique : Ellipse de friction.

Les phénomènes de friction sont décrits par les lois de frottement de Coulomb. On parle de frottement statique ou dynamique selon l'absence ou pas de mouvement relatif entre les deux corps en contact. Pour passer du frottement statique au frottement dynamique, la force de frottement statique est augmentée jusqu'à ce que les résistances (par exemple des aspérités) sur la surface de contact soient vaincues. Une première loi de Coulomb affirme que la force maximale de frottement demeure inférieure à la limite $(F_{max})^r = \mu_s(F_z)^r$, où μ_s est le coefficient de frottement statique. Selon la deuxième loi de Coulomb, une fois le phénomène de glissement en place, la force de frottement est opposée à la direction du mouvement et est proportionnelle à la vitesse relative.

La résultante des forces transversale et longitudinale est toujours bornée par un maximum, qui dépend du coefficient de frottement et de la force normale :

$$((F_x)^r)^2 + ((F_y)^r)^2 \leq (\mu_s(F_z)^r)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{(F_x)^r}{(F_z)^r}\right)^2 + \left(\frac{(F_y)^r}{(F_z)^r}\right)^2 \leq (\mu_s)^2. \quad (4.52)$$

L'équation (4.52) est l'équation d'un cercle. La forme obtenue par les relevés expérimentaux sont plutôt des ellipses. En dehors des points extrémaux, les deux forces sont couplées et dépendent simultanément de λ et de α : $(F_x)^r = (F_x)^r(\lambda, \alpha)$, $(F_y)^r = (F_y)^r(\lambda, \alpha)$.

Les modèles semi-empiriques reposent sur des modèles physiques, comme celui de l'ellipse de friction présenté ci-dessus. Ils utilisent des paramètres déterminés sous certaines conditions, puis leur validité est testée pour d'autres conditions.

3. Modèles dynamiques.

Il est admis que les forces de frottement à la surface de contact pneumatique-chaussée ne se développent pas instantanément mais nécessitent un certain temps pour atteindre les valeurs stationnaires. Ce comportement transitoire peut être modélisé par des équations différentielles plus ou moins complexes, mais on adopte le plus souvent un filtre du premier ordre de la forme [Raj06] :

$$\tau_l \dot{F}_y^l + F_y^l = (F_y)^r. \quad (4.53)$$

Dans l'équation (4.53) F_y^l est appelée force latérale dynamique et τ_l est la constante de temps.

4. Modèles à éléments finis.

Les modèles à éléments finis sont de plus en plus utilisés grâce à l'augmentation de la puissance des calculateurs. Ces modèles réalisent un maillage du pneumatique en des éléments de faibles dimensions. Le comportement physique de chaque élément est alors décrit par des équations différentielles. Les éléments sont connectés par des surfaces de frontière, sur lesquelles ces éléments interagissent. L'équilibre dynamique des forces et des moments s'écrit en tenant compte de chaque élément. La résolution des équations différentielles pour chaque élément permet par la suite d'aboutir aux forces globales.

Après avoir passé en revue quelques approches pour la modélisation des forces de contact pneumatique-chaussée, nous attirons l'attention sur le point d'application de ces forces, plus particulièrement celui de la force latérale qui présente un intérêt pour cette thèse. Sur la Figure 4.5, les forces sont représentées comme agissant au milieu de la bande de roulement. Cette représentation, suffisamment précise pour des calculs cinématiques, doit être reformulée dans le cadre de l'étude de la dynamique.

Remarque 4.1.1 (Point d'application des forces de contact) [Rei01] *Le point d'application des forces de contact longitudinale et transversale ne coïncide pas avec la projection du centre de la roue sur la bande de roulement. Il est généralement en retrait d'une distance appelée chasse géométrique.*

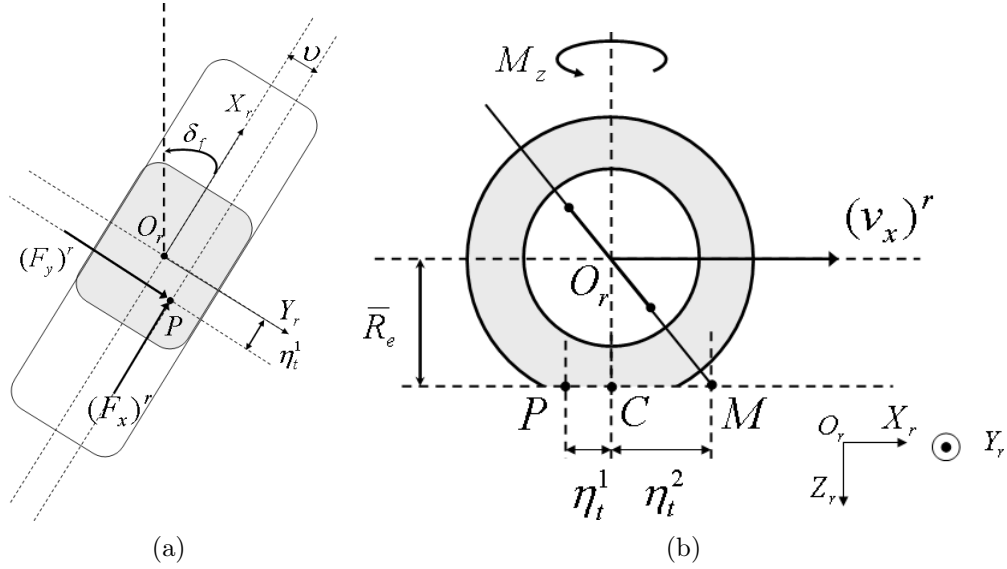


FIG. 4.10 – (a) La chasse géométrique due à la déformation du pneumatique. (b) La chasse géométrique due à l'axe de rotation de la roue.

Ce déplacement du point d'application est dû aux différentes déformations de la roue pendant le roulement et le braquage (voir Figure 4.10 (a)). Pour la force latérale, ce déplacement, noté η_t^1 sur la Figure 4.10 (a), est une des causes du couple d'auto-alignement. L'autre cause du couple d'auto-alignement est l'écart η_t^2 , entre le point M et le point C (voir Figure 4.10 (b)). Le point M représente l'intersection de l'axe de braquage de la roue avec la surface de contact. Le point C est la projection du centre de la roue O_r sur la surface de contact.

La chasse géométrique est la somme de η_t^1 et η_t^2 [Rei01] :

$$\eta_t = \eta_t^1 + \eta_t^2. \quad (4.54)$$

La chasse géométrique représente le bras de levier pour la force latérale $(F_y)^r$ qui engendre le moment M_z d'auto-alignement de la roue :

$$M_z = \eta_t \cdot (F_y)^r. \quad (4.55)$$

4.1.4 Modèle « bicyclette » du véhicule

Cette section utilisera le modèle linéaire des forces latérales de contact pneumatique chaussée présenté précédemment. Ces forces permettront d'écrire l'équilibre dynamique des forces et des moments intérieurs dans le cas du modèle de véhicule restreint aux mouvements de lacet et de dérive latérale : le modèle « bicyclette ».

Dans ce modèle, le repère véhicule R^v coïncide avec le repère caisse R^c après avoir fait les Hypothèses 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4, les dérivées seront donc exprimées par rapport au repère caisse. En remplaçant \ddot{a} par \dot{a} , les équations (4.39) décrivant l'équilibre dynamique deviennent :

$$\begin{cases} mv(\dot{\beta} + r) &= \sum (F_{ext})_y^v, \\ I_z \dot{r} &= \sum (M_{ext})_z^v. \end{cases} \quad (4.56)$$

Le modèle « bicyclette » représente les deux roues avant et les deux roues arrières du véhicule par une seule roue (voir Figure 4.11) au milieu de chaque essieu. La roue résultante à l'avant sera notée R_f et à l'arrière R_r . Les vitesses des roues seront notées $(v_{R_f})^v$, respectivement $(v_{R_r})^v$, et les angles de dérive α_f , respectivement α_r . Les forces latérales seront quant à elles notées F_f et F_r . En utilisant le modèle linéaire de l'équation (4.50), ces forces sont décrites par :

$$F_f = 2c_f \alpha_f, \quad F_r = 2c_r \alpha_r. \quad (4.57)$$

En remplaçant les angles de dérive (4.48) par leurs expressions respectives, on obtient :

$$F_f = 2c_f \left(\delta_f - \beta - \frac{r l_f}{v} \right), \quad F_r = 2c_r \left(-\beta + \frac{r l_r}{v} \right). \quad (4.58)$$

Les forces F_f et F_r sont maintenant projetées sur l'axe $O_v Y_v$ sous l'hypothèse d'un faible angle de braquage δ_f . On obtient :

$$(F_f)_y = F_f \cos \delta_f \cong F_f, \quad (F_r)_y = F_r. \quad (4.59)$$

Les équations de l'équilibre dynamique (4.56) s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{cases} mv(\dot{\beta} + r) &= (F_f)_y + (F_r)_y, \\ I_z \dot{r} &= (F_f)_y \cdot l_f - (F_r)_y \cdot l_r, \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.60)$$

$$\begin{cases} mv(\dot{\beta} + r) &= 2c_f \left(\delta_f - \beta - \frac{r l_f}{v} \right) + 2c_r \left(-\beta + \frac{r l_r}{v} \right), \\ I_z \dot{r} &= 2c_f l_f \left(\delta_f - \beta - \frac{r l_f}{v} \right) - 2c_r l_r \left(-\beta + \frac{r l_r}{v} \right), \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.61)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta} &= -\frac{2(c_f + c_r)}{mv} \beta + \left(\frac{2(c_r l_r - c_f l_f)}{mv^2} - 1 \right) r + \frac{2c_f}{mv} \delta_f, \\ \dot{r} &= \frac{2(-c_f l_f + c_r l_r)}{I_z} \beta + \frac{2(-c_f l_f^2 - c_r l_r^2)}{v I_z} r + \frac{2l_f c_f}{I_z} \delta_f. \end{cases} \quad (4.62)$$

Et finalement la représentation d'état du modèle « bicyclette » est obtenue :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2(c_f + c_r)}{mv} & \left(\frac{2(c_r l_r - c_f l_f)}{mv^2} - 1 \right) \\ \frac{2(-c_f l_f + c_r l_r)}{I_z} & \frac{2(-c_f l_f^2 - c_r l_r^2)}{v I_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2c_f}{mv} \\ \frac{2l_f c_f}{I_z} \end{pmatrix} \delta_f. \quad (4.63)$$

4.2 Modèle de la colonne de direction assistée électrique

Comme nous le verrons dans les prochains chapitres, les commandes développées seront implantées sur un véhicule équipé d'une colonne de direction classique mais mue par un moteur électrique. La colonne de direction est donc au final le système qui transforme un angle de braquage du volant ou du moteur, dans le mode assistance active, en un angle de braquage des roues. Nous supposons donc l'existence d'un lien mécanique entre le volant et les roues avant directrices. Dans cette section, quelques éléments et principes de fonctionnement et de modélisation de la colonne de direction assistée électrique seront fournis. Un modèle simplifié de la colonne sera présenté.

Le conducteur se sert de la colonne de direction pour imposer un cap à son véhicule, notamment pour suivre la voie de circulation. Cependant, la relation entre l'angle de braquage au volant et le changement de cap du véhicule n'est pas linéaire. La succession d'actions et de réactions, qui aboutit à un rebouclage sur l'action de conducteur, est la suivante [Rei01] :

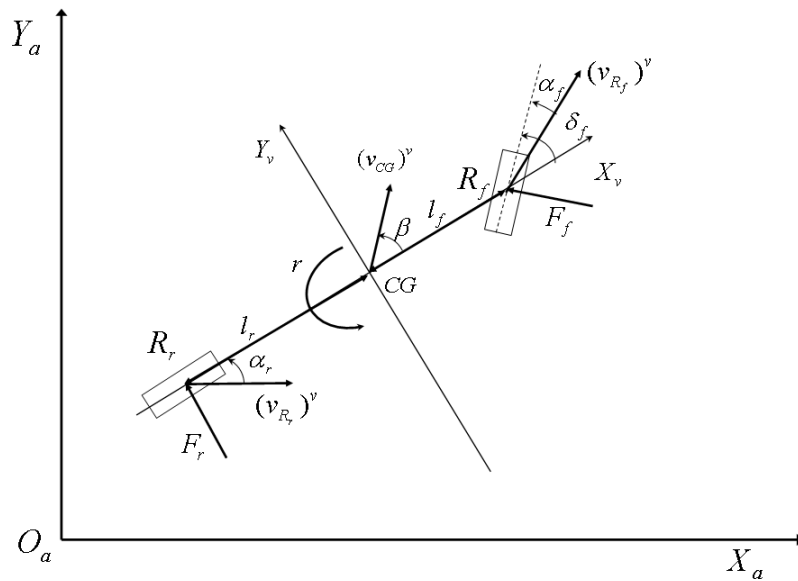


FIG. 4.11 – Modèle « bicyclette » du véhicule.

- le conducteur braque le volant et son mouvement est transmis à la crémaillère par la colonne,
- l'angle des roues directrices change,
- des forces latérales de contact pneumatique-chaussée se créent et créent un couple d'autoalignement,
- l'orientation du véhicule est modifiée et le conducteur perçoit grâce au couple d'autoalignement, un couple résistant sur le volant.

Ce processus d'action-réaction nécessite donc de la part du conducteur une adaptation permanente de l'angle de braquage, en fonction non seulement de la position perçue visuellement, mais aussi en fonction des retours haptiques sur le volant et sur l'ensemble du corps, notamment causés par le devers de la route et l'accélération latérale.

La réalisation technique des directions des véhicules a une longue histoire qui a commencé au XIX^{ème} siècle [Bro06]. Repris des chariots, le système à un essieu directeur à l'avant et des roues fixes, solidaires de celui-ci, s'est avéré difficilement contrôlable sous l'effet des perturbations sur la voie. Pour pallier ce problème, Ackermann a proposé et a breveté en 1817 un système de braquage trapézoïdal qui assure le même angle de braquage aux deux roues directrices. Par contre, ce système ne convenait pas en virage car, pour une bonne conduite, les roues avant évoluant sur des cercles de rayons différents doivent avoir des angles de braquage différents. Quelques années plus tard, Jeantaud a éliminé ce problème ; il a conçu une technique de braquage, qui réalise, en plus de l'invention de Ackermann, une intersection au même point, le centre de rotation, des axes orthogonaux aux roues avant braquées et des axes orthogonaux aux roues arrières (voir Figure 4.12). Ce système est encore utilisé dans toutes les colonnes de direction des véhicules actuels. Aujourd'hui, le mouvement de rotation du volant est transmis à la crémaillère via des arbres. Ensuite, un pignon transforme le mouvement de rotation en un mouvement de translation de la crémaillère.

La direction assistée est montée sur la plupart des véhicules sur le marché. Ce système est ajouté à la colonne de direction manuelle. Cela présente l'avantage, qu'en cas de défaillance de

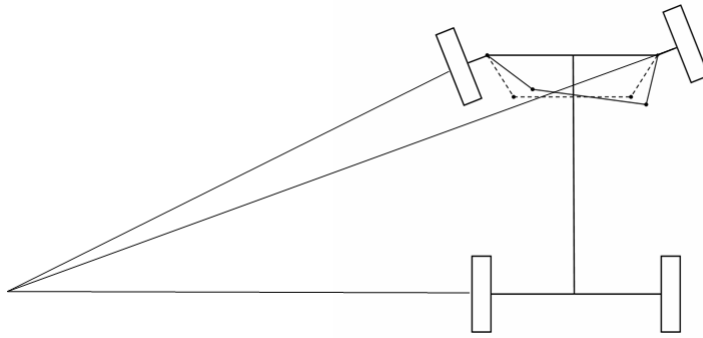


FIG. 4.12 – Modèle du mécanisme de la direction de Jeantaud.

l'assistance, le véhicule reste manœuvrable. Pour son fonctionnement, le couple exercé par le conducteur sur le volant est mesuré. Ensuite, une force ou un couple est ajouté sur la colonne de direction pour soutenir les efforts du conducteur. L'assistance est réalisée soit par un système hydraulique, soit par un moteur électrique. La combinaison des deux est également possible. Les systèmes hydrauliques ont l'avantage d'offrir un grand couple d'assistance, mais ils doivent rester en permanence sous pression, même quand le conducteur n'a pas besoin d'être aidé. Cependant, les assistances réalisées par les moteurs électriques ne consomment de l'énergie que lorsque cela est nécessaire. Elles ne peuvent pas par contre soutenir des charges importantes et sont soumises au risque d'échauffement. Le véhicule prototype utilisé pour la partie expérimentale de cette thèse est équipé d'une direction à assistance électrique.

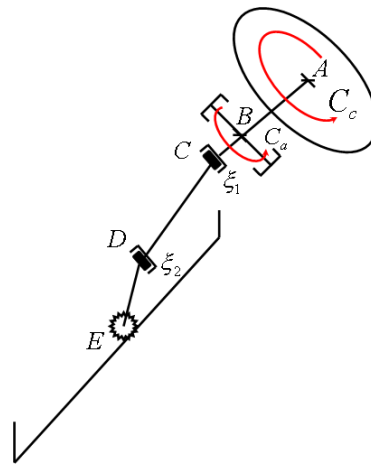


FIG. 4.13 – Modèle de la colonne de direction.

Nous présenterons dans ce qui suit les équations dynamiques qui décrivent la transformation de l'angle de braquage du volant en un déplacement de la crémaillère. La colonne de direction qui équipe le véhicule prototype est composée de trois arbres reliés par des joints de cardan (voir Figure 4.13) : l'arbre supérieur AC solidaire du volant, l'arbre médian CD et l'arbre inférieur DE lié par un pignon à la crémaillère. Les joints de cardan ont les rendements ξ_1 et ξ_2 . L'arbre AC forme un angle π_1 avec l'arbre CD et l'arbre CD forme un angle π_2 avec l'arbre DE (voir Figure 4.16). Le moteur électrique est positionné dans le prolongement du volant, au niveau du

point B sur la Figure 4.13. Il est relié par un engrenage à roues dentées à l'arbre AC .

Un repère fixe par rapport au repère caisse R^c sera associé à chacun des trois arbres et à la crémaillère. Ils sont notés $O_s X_s Y_s Z_s$, $O_m X_m Y_m Z_m$, $O_{in} X_{in} Y_{in} Z_{in}$ et $O_{cr} X_{cr} Y_{cr} Z_{cr}$. Ces repères sont représentés sur les Figures 4.14 et 4.15. Les repères $O_{s1} X_{s1} Y_{s1} Z_{s1}$, $O_{m1} X_{m1} Y_{m1} Z_{m1}$, $O_{in1} X_{in1} Y_{in1} Z_{in1}$ et $O_{cr1} X_{cr1} Y_{cr1} Z_{cr1}$ sont des repères mobiles qui ont un axe confondu avec les repères fixes, comme indiqué sur les Figures 4.14 et 4.15.

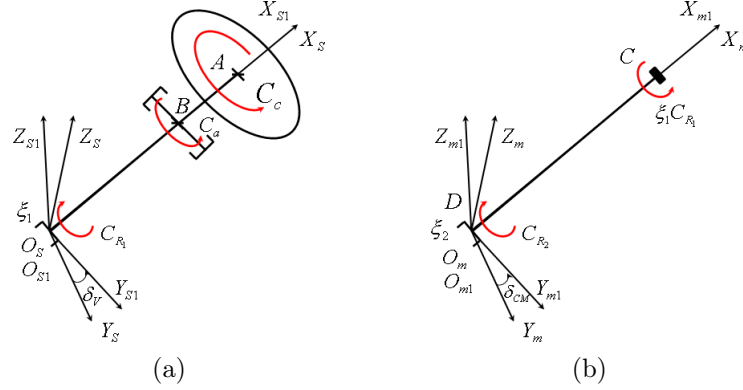


FIG. 4.14 – (a) Modèle de la colonne supérieure. (b) Modèle de la colonne médiane.

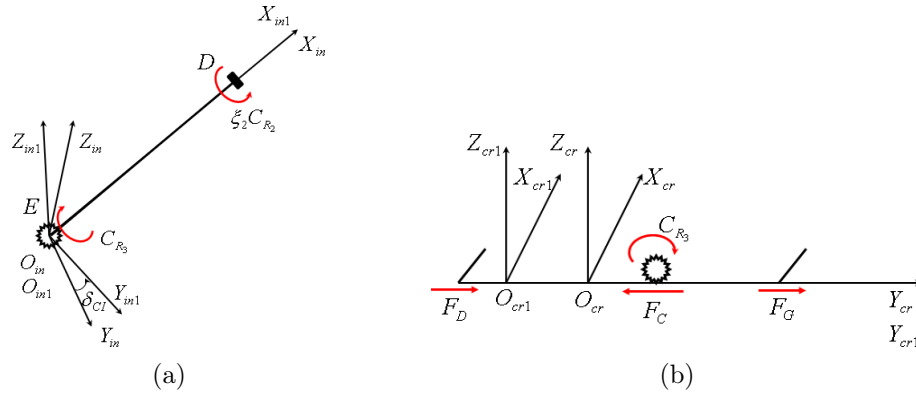


FIG. 4.15 – (a) Modèle de la colonne inférieure. (b) Modèle de la crémaillère.

Nous écrivons maintenant les équations dynamiques qui relient le couple exercé par le conducteur sur le volant au déplacement de la crémaillère, en passant par chaque élément composant la colonne de direction [Ram07] :

1. Colonne supérieure :

$$I_{cs} \ddot{\delta}_v + B_{cs} \dot{\delta}_v = C_c + C_a - C_{R1}. \quad (4.64)$$

2. Colonne médiane :

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\delta}_{CM} + B_m \dot{\delta}_{CM} &= \xi_1 C_{R1} - C_{R2}, \\ \delta_{CM} &= \arctan(\cos \pi_1 \tan \delta_v). \end{aligned} \quad (4.65)$$

3. Colonne inférieure :

$$\begin{aligned} I_{in} \ddot{\delta}_{CI} + B_{in} \dot{\delta}_{CI} &= \xi_2 C_{R2} - C_{R3}, \\ \delta_{CI} &= \arctan(\cos \pi_2 \tan \delta_{CM}). \end{aligned} \quad (4.66)$$

4. Crémaillère :

$$\begin{aligned}
 O_{cr}O_{cr1} &= -R^{cr}\delta_{CI}, \\
 F_R &= \frac{C_{R3}}{R^{cr}}, \\
 m_{cr}(O_{cr}\ddot{O}_{cr1}) + B_{cr}(O_{cr}\dot{O}_{cr1}) &= F_R - F_D - F_G.
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

Dans les équations (4.64), (4.65), (4.66) et (4.67) l'angle δ_v représente l'angle de braquage du volant par rapport au repère fixe $O_S X_S Y_S Z_S$. Les paramètres I_{cs} , I_m et I_{in} sont les moments d'inertie des trois arbres autour des axes OX . Les paramètres B_{cs} , B_m et B_{in} sont les coefficients d'amortissement. R^{cr} est le rayon primitif du pignon de la crémaillère.

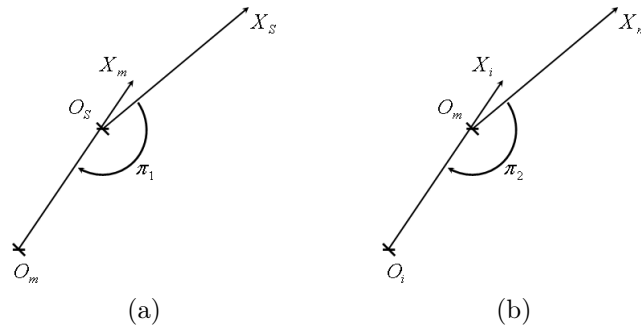


FIG. 4.16 – (a) Angle formé par la colonne supérieure et la colonne médiane. (b) Angle formé par la colonne médiane et la colonne inférieure.

Les équations (4.64), (4.65), (4.66) et (4.67) montrent le caractère fortement non-linéaire de la relation entre l'effort exercé sur la colonne de direction et le déplacement de la crémaillère et par conséquent l'angle de braquage des roues avant. De plus, les inerties et les amortissements des trois arbres sont des paramètres inconnus et difficiles à estimer.

Le modèle utilisé pour la synthèse de la loi de commande peut être plus simple. À titre d'exemple, nous pouvons considérer, comme sur la Figure 4.17, que la colonne de direction est composée d'un arbre unique. Cette hypothèse permet de formuler la dynamique de la colonne comme un système linéaire du second ordre schématisé sur la Figure 4.18.

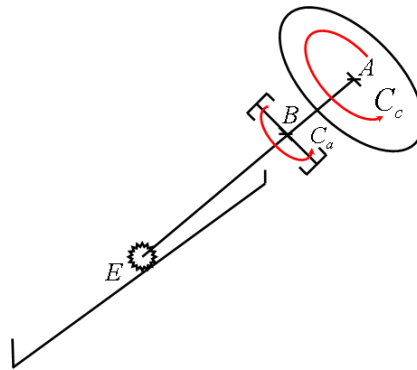


FIG. 4.17 – Modèle réduit de la colonne de direction.

La représentation d'état de ce modèle est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_v \\ \ddot{\delta}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B_S}{I_S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_v \\ \dot{\delta}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_S} & \frac{1}{I_S} & -\frac{1}{I_S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_a \\ C_c \\ C_{at} \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

$$\delta_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_S} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_v \\ \dot{\delta}_v \end{pmatrix}.$$

Les entrées de ce modèle sont le couple conducteur C_c , le couple d'assistance C_a et le couple d'auto-alignement C_{at} . Le couple d'auto-alignement peut être modélisé comme le produit de la chasse géométrique η_t et de la force latérale sur les roues avant $F_f = 2c_f(\delta_f - \beta - \frac{r l_f}{v})$ (voir équations (4.55) et (4.58)). L'expression obtenue au niveau du volant est :

$$C_{at} = -T_{S\beta}\beta - T_{Sr}r + \frac{2c_f\eta_t}{R_S}\delta_f, \quad \text{où} \quad (4.69)$$

$$T_{S\beta} = \frac{2c_f\eta_t}{R_S}, \quad T_{Sr} = \frac{2c_f l_f \eta_t}{R_S v}.$$

Dans les équations (4.69), le paramètre R_S est le rapport de réduction de la direction et I_S représente le moment d'inertie de la colonne de direction.

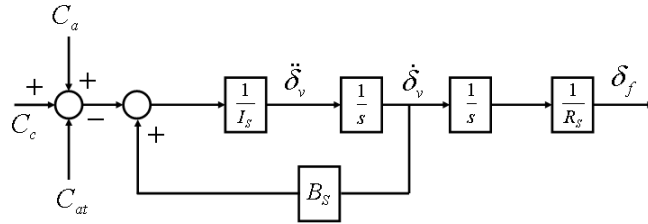


FIG. 4.18 – Modèle de la colonne de direction pour la synthèse des lois de commande.

4.3 Positionnement du véhicule sur la voie

Les deux sections précédentes ont permis d'obtenir des modèles simplifiés du mouvement plan du véhicule, supposé sur une surface infinie et du mécanisme de direction qui transforme l'effort du conducteur sur le volant en un angle de braquage des roues.

Cette section est dédiée à la formulation mathématique de la position du véhicule par rapport à la voie de circulation. Dans un premier temps, le modèle « bicyclette » permettra de déterminer la position du centre de gravité du véhicule par rapport au centre de la voie ainsi que l'angle de cap de l'axe de symétrie du véhicule vis-à-vis de la tangente à la voie. Dans un deuxième temps, le véhicule sera considéré comme étant un corps dans le plan, avec une longueur et une largeur non-négligeables. Ceci permettra de calculer la position de l'avant du véhicule par rapport aux bords de la voie.

4.3.1 Écart latéral, angle de cap relatif et courbure de la voie

Le conducteur contrôle la direction du véhicule pour suivre la voie de circulation en se référant constamment à celle-ci et en réduisant les erreurs vis-à-vis de la trajectoire qu'il désire suivre. De même, dans le cas du contrôle de la trajectoire par un automate, deux variables sont

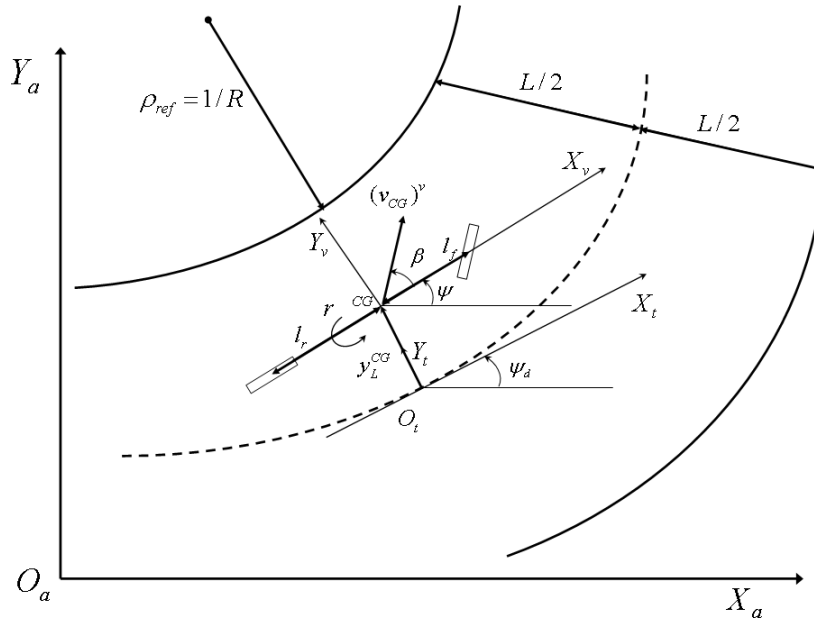


FIG. 4.19 – Position du modèle « bicyclette » du véhicule par rapport au repère tangent à la voie.

particulièrement essentielles : l'écart latéral entre le centre de gravité du véhicule et le centre de la voie et l'angle de cap relatif. Ces variables seront définies par la suite.

La position du centre de gravité s'obtient comme étant la distance minimale instantanée entre le point CG et la ligne médiane de la voie dans le plan $O_a X_a Y_a$ (voir Figure 4.19). À chaque instant, on obtient cette distance par l'intersection entre la droite qui relie le centre instantané de rotation de la voie avec le point CG et la ligne médiane de la voie.

Notons ce point d'intersection O_t et définissons le repère mobile $R^t : O_t X_t Y_t Z_t$, tangent à la médiane de la voie (voir Figure 4.19). Le plan $O_t X_t Y_t$ est confondu avec le plan $O_a X_a Y_a$ et l'axe $O_t X_t$ est tangent à la médiane de la voie. Le repère R^t est caractérisé par un angle de rotation ψ_d par rapport au repère R^a . La matrice de passage du repère absolu R^a au repère R^t , pour $O_a \equiv O_t$, est donnée par :

$$R_{\psi_d} = \begin{pmatrix} \cos \psi_d & \sin \psi_d & 0 \\ -\sin \psi_d & \cos \psi_d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Le passage du repère véhicule au repère tangent à la trace du centre de la voie s'effectue par l'angle $\psi_L = \psi - \psi_d$, appelé angle de cap relatif. La dynamique de l'angle de cap relatif est décrite par :

$$\dot{\psi}_L = \dot{\psi} - \dot{\psi}_d = r - v \rho_{ref}, \quad (4.71)$$

où ρ_{ref} est la courbure de la route, $\rho_{ref} = \frac{1}{R}$ avec R son rayon de courbure. L'égalité $\dot{\psi}_d = v \rho_{ref}$ a été utilisée dans l'équation (4.71). Cette formulation ne représente qu'une approximation, car la vitesse du point O_t le long de l'axe $O_t X_t$, $(v_{O_t}^x)^t$, est la même que la vitesse $(v_{CG}^x)^v$ le long de l'axe $O_v X_v$, à $\cos \psi_L$ près : $(v_{O_t}^x)^t = (v_{CG}^x)^v \cos \psi_L$. Si l'angle ψ_L est faible, son cosinus peut être assimilé à 1 et donc $(v_{O_t}^x)^t \cong (v_{CG}^x)^v = v$.

Pour calculer maintenant la vitesse relative du centre de gravité du véhicule par rapport à l'origine du repère R^t , exprimée dans le repère R^t , la courbure de la route sera supposée

constante : ρ_{ref} .

$$(O_a \dot{CG})^t = (O_a \dot{O}_t)^t + (O_t \dot{CG})^t, \quad (4.72)$$

L'équation (4.72) équivaut à :

$$(v_{CG})^t = \begin{pmatrix} v \\ v \sin(\beta + \psi_L) \\ 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} (O_t \dot{CG})_x \\ (O_t \dot{CG})_y \\ (O_t \dot{CG})_z \end{pmatrix}^t \Leftrightarrow \quad (4.73)$$

$$((O_t \dot{CG})_y)^t = v \sin(\beta + \psi_L). \quad (4.74)$$

Les quantités $(O_t \dot{CG})_y$ et $(O_t \dot{CG})_y$ seront notées par la suite respectivement y_L^{CG} et \dot{y}_L^{CG} . Dans ce cas, la vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule par rapport à la tangente au centre de la voie s'exprime sous la forme :

$$\dot{y}_L^{CG} = v \sin(\beta + \psi_L). \quad (4.75)$$

Pour un angle $\beta + \psi_L$ faible, l'approximation $\dot{y}_L^{CG} \cong v(\beta + \psi_L)$ est par ailleurs toujours valable.

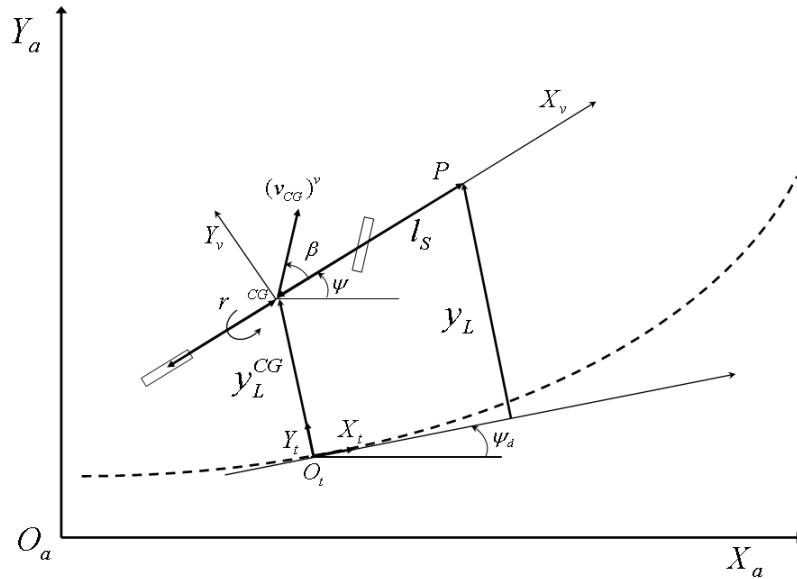


FIG. 4.20 – Position du modèle « bicyclette » du véhicule par rapport au repère tangent à la voie en avant du véhicule.

Remarque 4.3.1 (Convention de signe pour l'écart latéral et pour l'angle de cap relatif)

L'écart latéral y_L^{CG} est considéré comme étant positif si le centre de gravité du véhicule se trouve sur la gauche de l'axe $O_t X_t$, et négatif sinon. L'angle de cap relatif ψ_L est positif si $\psi > \psi_d$ et négatif sinon. Nous considérons donc l'angle ψ_L positif pour une rotation trigonométrique de l'axe $CG X_v$ autour de point CG , rotation partant d'une position parallèle à l'axe $O_t X_t$.

Les dispositifs de mesure de la position du véhicule par rapport au centre ou aux bords de la voie ne fournissent pas toujours l'écart latéral au niveau du centre de gravité, mais le plus souvent à l'avant du véhicule et ce à une distance de visée l_S (voir Figure 4.20). La projection de l'écart latéral en avant du véhicule peut se faire selon plusieurs approches [Tse05]. Il est par exemple possible de considérer la direction du vecteur vitesse comme la direction d'avancement du véhicule, et de calculer l'écart de celle-ci, en avant du véhicule, par rapport au centre de la voie .

Pour une distance de visée faible, ou pour des rayons de courbure faibles ou modérés, nous pouvons approcher l'écart latéral y_L en avant du véhicule par (voir Figure 4.20) :

$$y_L = y_L^{CG} + l_S \sin(\psi - \psi_d) = y_L^{CG} + l_S \sin \psi_L. \quad (4.76)$$

Si l'angle de cap relatif est faible, l'écart latéral en avant du véhicule devient [Pen90] :

$$y_L \cong y_L^{CG} + l_S \psi_L. \quad (4.77)$$

La dérivation de l'équation précédente permet d'obtenir la variation de l'écart latéral en avant du véhicule :

$$\dot{y}_L = v(\beta + \psi_L) + l_S r. \quad (4.78)$$

4.3.2 Modèle « bicyclette » du véhicule lié à la voie

Dans la section précédente nous avons établi le comportement dynamique du modèle « bicyclette » dans un repère lié au véhicule. Pour obtenir la dynamique transversale par rapport à la voie de circulation, on ajoute à l'équation (4.63), les équations différentielles de l'écart latéral en avant du véhicule (4.78) et de l'angle de cap relatif (4.71) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi}_L \\ \dot{y}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2(c_f+c_r)}{mv} & -1 + \frac{2(c_r l_r - c_f l_f)}{mv^2} & 0 & 0 \\ -\frac{2(l_f c_f - l_r c_r)}{I_z} & -\frac{2(l_f^2 c_f + l_r^2 c_r)}{v I_z} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v & l_S & v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \\ \psi_L \\ y_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2c_f}{mv} \\ \frac{2l_f c_f}{I_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_f + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \rho_{ref}. \quad (4.79)$$

En notant : $x^v = (\beta, r, \psi_L, y_L)^T$,

$$A^v = \begin{pmatrix} -\frac{2(c_f+c_r)}{mv} & -1 + \frac{2(c_r l_r - c_f l_f)}{mv^2} & 0 & 0 \\ -\frac{2(l_f c_f - l_r c_r)}{I_z} & -\frac{2(l_f^2 c_f + l_r^2 c_r)}{v I_z} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v & l_S & v & 0 \end{pmatrix}, \quad B_u^v = \begin{pmatrix} \frac{2c_f}{mv} \\ \frac{2l_f c_f}{I_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_\rho^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'équation (4.79) devient :

$$\dot{x}^v = A^v x^v + B_u^v \delta_f + B_\rho^v \rho_{ref}. \quad (4.80)$$

4.3.3 Modèle « bicyclette » équivalent du véhicule sur la voie

Le modèle « bicyclette » de l'équation (4.79) admet pour les deux premières variables d'état l'angle de dérive et la vitesse de rotation en lacet. Dans la littérature traitant du contrôle latéral des véhicules, un modèle « bicyclette » du véhicule ayant le vecteur d'état $\tilde{x} = (\dot{y}_L^{CG}, \dot{\psi}_L, y_L^{CG}, \psi_L)^T$

est plus généralement utilisé [Pen90], [Pen91], [Swi06]. Ce modèle qui sera utilisé dans le Chapitre 8, Partie III de cette thèse, s'obtient facilement du modèle « bicyclette » de l'équation (4.79).

Pour cela, rappelons que le vecteur des vitesses de translation du centre de gravité du véhicule est $\nu_1 = (v, u, 0)^T$ et que la vitesse longitudinale v est constante. Ce vecteur simplifié est le résultat des hypothèses faites pour arriver à la réduction des équations au modèle « lacet-dérive » (Hypothèse 4.1.1, Hypothèse 4.1.2, Hypothèse 4.1.3 et Hypothèse 4.1.4).

De même, les forces latérales de contact pneumatique-chaussée peuvent être écrites en partant des équations (4.48) et (4.57) :

$$F_f = 2c_f(\delta_f - \frac{u + r \cdot l_f}{v}) = C_F(\delta_f - \frac{u + r \cdot l_f}{v}), \quad F_r = 2c_r \frac{-u + r \cdot l_r}{v} = C_R \frac{-u + r \cdot l_r}{v}, \quad (4.81)$$

où les notations $C_F = 2c_f$ et $C_R = 2c_r$ ont été utilisées. Par ailleurs, en utilisant le vecteur vitesse ν_1 , l'équation (4.60) s'écrit :

$$\begin{cases} m\dot{u} + mvr &= (F_f)_y + (F_r)_y, \\ I_z \dot{r} &= (F_f)_y \cdot l_f - (F_r)_y \cdot l_r, \end{cases} \quad (4.82)$$

expression qui devient, après introduction des expressions des forces de l'équation (4.81) :

$$\begin{cases} \dot{u} &= \frac{1}{mv}(-C_F - C_R)u + \frac{1}{mv}(-C_F l_f + C_R l_r - mv^2)r + C_F \delta_f, \\ \dot{r} &= \frac{1}{vI_z}(-C_F l_f + C_R l_r)u + \frac{1}{vI_z}(-C_F l_f^2 - C_R l_r^2)r + C_F l_f \delta_f. \end{cases} \quad (4.83)$$

D'autre part, si on remplace l'angle de dérive β par la vitesse latérale u , les équations de l'écart latéral au centre de gravité (4.75) et de l'angle de cap relatif (4.71) sont équivalentes à :

$$\begin{cases} \dot{y}_L^{CG} &= u + v \cdot \psi_L, \\ \dot{\psi}_L &= r - v \cdot \rho_{ref}. \end{cases} \quad (4.84)$$

En dérivant les équations (4.84), puis en utilisant les expressions des dérivées de \dot{u} et de \dot{r} données par les équations (4.83), on obtient les équations linéaires de la dynamique transversale en fonction de \dot{y}_L^{CG} , $\dot{\psi}_L$, y_L^{CG} et ψ_L :

$$\begin{cases} \ddot{y}_L^{CG} &= \frac{1}{mv}(-C_F - C_R)\dot{y}_L^{CG} + \frac{1}{mv}(C_R l_r - C_F l_f)\dot{\psi}_L + \frac{1}{m}(C_F + C_R)\psi_L + \\ &+ \frac{1}{m}(-l_f C_F + l_r C_R - mv^2)\rho_{ref} + \frac{1}{m}C_F \delta_f, \\ \ddot{\psi}_L &= \frac{1}{I_z v}(-C_F l_f + C_R l_r)\dot{y}_L^{CG} + \frac{1}{vI_z}(-C_F l_f^2 - C_R l_r^2)\dot{\psi}_L + \frac{1}{I_z}(C_F l_f - C_R l_r)\psi_L + \\ &+ \frac{1}{I_z}(-C_F l_f^2 - C_R l_r^2)\rho_{ref} - v\dot{\rho}_{ref} + \frac{1}{I_z}C_F l_f \delta_f. \end{cases} \quad (4.85)$$

Ces équations prennent alors la forme de la représentation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_L^{CG} \\ \ddot{\psi}_L \\ \dot{y}_L^{CG} \\ \dot{\psi}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_F + C_R}{mv} & \frac{C_R l_r - C_F l_f}{mv} & 0 & \frac{C_F + C_R}{m} \\ -\frac{C_F l_f + C_R l_r}{vI_z} & -\frac{C_F l_f^2 + C_R l_r^2}{vI_z} & 0 & \frac{C_F l_f - C_R l_r}{I_z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_L^{CG} \\ \dot{\psi}_L \\ y_L^{CG} \\ \psi_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_F}{m} \\ \frac{C_F l_f}{I_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_f + \begin{pmatrix} \frac{1}{m}(-C_F l_f + C_R l_r - mv^2) \\ -\frac{C_F l_f^2 - C_R l_r^2}{I_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rho_{ref} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\rho}_{ref}. \quad (4.86)$$

En définissant les matrices et vecteurs :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{C_F+C_R}{mv} & \frac{C_R l_r - C_F l_f}{mv} & 0 & \frac{C_F+C_R}{m} \\ \frac{-C_F l_f + C_R l_r}{v I_z} & -\frac{C_F l_f^2 + C_R l_r^2}{v I_z} & 0 & \frac{C_F l_f - C_R l_r}{I_z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_u = \begin{pmatrix} \frac{C_F}{m} \\ \frac{C_F l_f}{I_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.87)$$

$$\tilde{B}_\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}(-C_F l_f + C_R l_r - mv^2) \\ \frac{-C_F l_f^2 - C_R l_r^2}{I_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{\dot{\rho}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'équation (4.86) devient :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_u \delta_f + \tilde{B}_\rho \rho_{ref} + \tilde{B}_{\dot{\rho}} \dot{\rho}_{ref}. \quad (4.88)$$

4.3.4 Coordonnées sur la voie des roues avant du véhicule

Le véhicule sera considéré dans cette section comme un rectangle de longueur $l_r + l_f$ et de largeur égale à la longueur des essieux a . Nous exprimerons des conditions mathématiques, portant sur l'écart latéral et l'angle de cap relatif, permettant de garder l'avant du véhicule dans les limites de la voie. Ces conditions seront d'abord établies pour une route à faible courbure puis pour une route à virages significatifs.

Route à faible courbure

Dans les paragraphes suivants, les positions latérales des roues avant du véhicule gauche et droite, y_g et y_d , seront calculées par rapport au centre de la voie, sous l'hypothèse que $\rho_{ref} \cong 0$ (voir Figure 4.21). y_g et y_d sont aussi les coordonnées des roues avant du véhicule sur deux axes orthogonaux à la médiane de la voie. Ces deux axes sont positifs à gauche du centre de la voie.

Dans un premier temps, nous considérons le véhicule avec un angle de cap relatif ψ_L^{CG} et un écart latéral y_L^{CG} au centre de gravité (voir Figure 4.21). Sous l'hypothèse que ψ_L^{CG} est faible, y_g et y_d s'écrivent :

$$y_g = y_L^{CG} + l_f \psi_L^{CG} + \frac{a}{2}, \quad y_d = y_L^{CG} + l_f \psi_L^{CG} - \frac{a}{2}. \quad (4.89)$$

Nous considérerons maintenant une bande de largeur $2d$, centrée sur la voie de circulation, notée $(\pm d)$. Les deux roues avant du véhicule se trouvent simultanément à l'intérieur de cette zone, si la condition suivante est satisfaite (voir Figure 4.21) :

$$\begin{cases} y_g \leq d, \\ y_d \geq -d. \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.90)$$

$$-\frac{2d-a}{2} \leq y_L^{CG} + l_f \psi_L^{CG} \leq \frac{2d-a}{2}. \quad (4.91)$$

Considérons maintenant que la mesure de l'écart latéral y_L est prise à l'avant du véhicule, à une distance de visé $l_S > 0$ (voir Figure 4.22). Pour les voies à faible courbure, l'angle de cap relatif en avant du véhicule coïncide avec la mesure au centre de gravité du véhicule ($\psi_L = \psi_L^{CG}$). Avec la

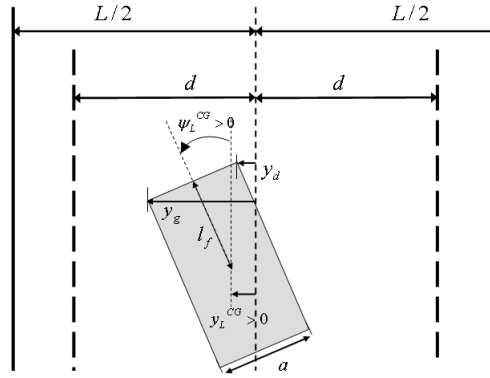


FIG. 4.21 – Position des roues avant du véhicule par rapport au centre de la voie (route à faible courbure).

même hypothèse des petits angles que précédemment, nous pouvons écrire que $y_L^{CG} \cong y_L - \psi_L \cdot l_S$. En introduisant cette relation dans l'équation (4.89), il résulte :

$$y_g = y_L + (l_f - l_S)\psi_L + \frac{a}{2}, \quad y_d = y_L + (l_f - l_S)\psi_L - \frac{a}{2}. \quad (4.92)$$

Les roues avant du véhicule se trouvent donc à l'intérieur de la zone $\pm d$, si la condition suivante est vérifiée :

$$-\frac{2d - a}{2} \leq y_L + (l_f - l_S)\psi_L \leq \frac{2d - a}{2}. \quad (4.93)$$

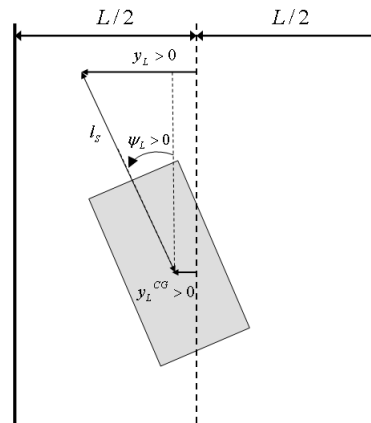


FIG. 4.22 – Position des roues avant du véhicule par rapport au centre de la voie (route à faible courbure), écart latéral à l'avant du véhicule.

Route à courbure significative

Nous considérons maintenant le cas d'une route de courbure non-négligeable $|\rho_{ref}| > 0$. Par convention, ρ_{ref} est positive pour un virage à gauche ($\rho_{ref} > 0$) et négative pour un virage à droite ($\rho_{ref} < 0$). Sur les Figures 4.23 et 4.24, la route est supposée avoir un rayon de courbure constant et toujours positif : $R = |1/\rho_{ref}|$.

Sur cette figure, xx et yy sont les positions transversales des roues avant gauche et droite par rapport aux bords gauche respectivement droit de la voie. Elles se trouvent sur deux axes reliant la roue gauche, respectivement la roue droite, au centre instantané de rotation de la voie (voir Figures 4.23 et 4.24). Les deux axes ont leurs origines sur les bords de la voie. xx et yy sont positifs si les roues sont à l'intérieur de la voie et négatifs sinon.

Sur les Figures 4.23 et 4.24, b est une constante du véhicule, facilement calculable par $b = \sqrt{l_f^2 + (\frac{a}{2})^2}$. L'angle α est également constant et vaut $\alpha = \arctan(\frac{a}{2l_f})$.

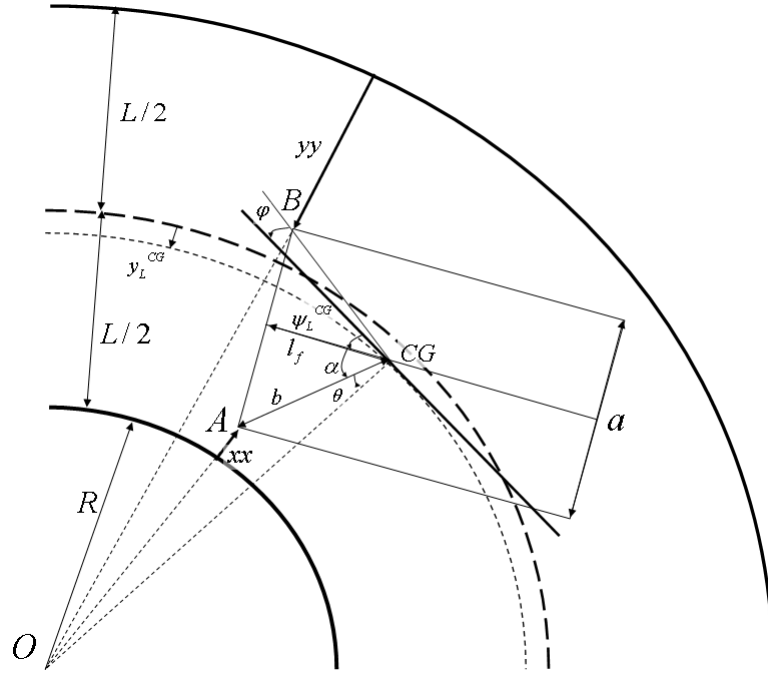


FIG. 4.23 – Coordonnées des roues avant du véhicule, pour un virage à gauche de courbure significative.

Par la suite, les positions transversales des roues avant du véhicule seront calculées pour les virages de courbure positive et négative.

1. *Virage à courbure positive* ($\rho_{ref} \geq 0$, voir Figure 4.23) : Pour calculer xx , on applique le théorème de Pythagore généralisé au $\triangle AO(CG)$. L'angle θ vaut²³ $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \psi_L^{CG}$. On obtient :

$$(R + xx)^2 = b^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})^2 - 2b(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG}) \cos \theta \Rightarrow \quad (4.94)$$

$$xx = \sqrt{b^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})^2 - 2b(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG}) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \psi_L^{CG})} - R. \quad (4.95)$$

Pour calculer yy le théorème de Pythagore généralisé est appliqué au $\triangle BO(CG)$. L'angle φ vaut $\varphi = \alpha - \psi_L^{CG}$. On obtient de même :

$$(R + L - yy)^2 = b^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})^2 - 2b(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG}) \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) \Rightarrow \quad (4.96)$$

²³L'angle ψ_L^{CG} peut être positif ou négatif, la formule restera valable indépendamment du signe.

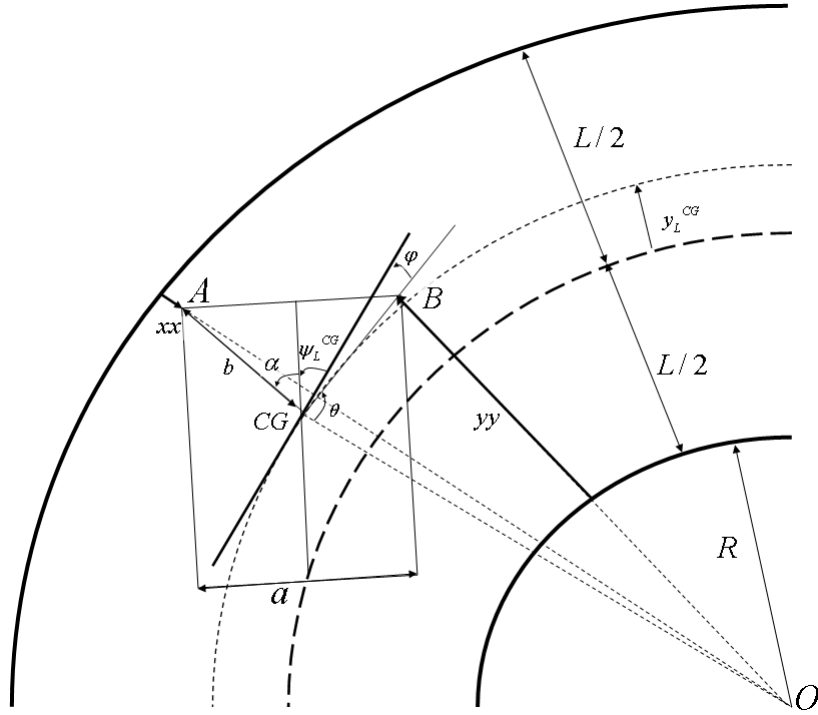


FIG. 4.24 – Coordonnées des roues avant du véhicule, pour un virage à droite de courbure significative.

$$yy = -\sqrt{b^2 + \left(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG}\right)^2 - 2b\left(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \psi_L^{CG}\right)} + R + L. \quad (4.97)$$

2. Virage à courbure négative ($\rho_{ref} < 0$, voir Figure 4.24) :

Pour calculer xx , le théorème de Pythagore est appliqué cette fois ci au $\triangle AO(CG)$. Les angles φ et θ ont pour valeurs : $\varphi = \alpha - \psi_L^{CG}$ et $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha + \psi_L^{CG}$. On obtient :

$$\left(R + L - xx\right)^2 = b^2 + \left(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG}\right)^2 - 2b\left(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG}\right) \cos(\theta + 2\alpha) \Rightarrow \quad (4.98)$$

$$xx = -\sqrt{b^2 + \left(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG}\right)^2 - 2b\left(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \psi_L^{CG}\right)} + R + L. \quad (4.99)$$

Pour calculer yy on procède de même avec le $\triangle BO(CG)$:

$$\left(R + yy\right)^2 = b^2 + \left(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG}\right)^2 - 2b\left(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG}\right) \cos \theta \Rightarrow \quad (4.100)$$

$$yy = \sqrt{b^2 + \left(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG}\right)^2 - 2b\left(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \psi_L^{CG}\right)} - R. \quad (4.101)$$

Ensuite, nous garderons les deux axes définis pour xx et pour yy , mais nous changerons les origines vers le centre de la voie, avec des orientations similaires au cas de la voie sans courbure ($\rho_{ref} = 0$) (voir Figure 4.21). Par conséquent, pour des virages à rayon de courbure non nulle, les coordonnées des roues avant du véhicule, par rapport au centre de la voie, s'écrivent :

$$y_g = \frac{L}{2} - xx \quad \text{et} \quad y_d = -\frac{L}{2} + yy, \quad (4.102)$$

où xx est donné par les équations (4.95) et (4.99) et yy est donné par les équations (4.97) et (4.101). Ces quatre équations sont résumées dans le Tableau 4.1.

TAB. 4.1 – Formules de xx et de yy .

$\rho_{ref} > 0$
$\Delta AO(CG) : xx = \sqrt{b^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})^2} - 2b(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \psi_L^{CG}) - R$
$\Delta BO(CG) : yy = -\sqrt{b^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})^2} - 2b(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha - \psi_L^{CG}) + R + L$
$\rho_{ref} < 0$
$\Delta AO(CG) : xx = -\sqrt{b^2 + (R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})^2} - 2b(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha + \psi_L^{CG}) + R + L$
$\Delta BO(CG) : yy = \sqrt{b^2 + (R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})^2} - 2b(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha + \psi_L^{CG}) - R$

Dans le cas où l'écart latéral et l'angle de cap relatif ne sont pas mesurés au centre de gravité du véhicule, mais à l'avant, à une distance l_S , des transformations peuvent être effectuées pour calculer y_L^{CG} et ψ_L^{CG} en fonction de y_L et ψ_L . Sur la Figure 4.25 (a) sont représentées les constructions géométriques nécessaires aux transformations pour un virage à gauche. En appliquant le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle $\Delta OD(CG)$, on obtient :

$$\begin{cases} (R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})^2 = l_S^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L)^2 - 2l_S(R + \frac{L}{2} - y_L)\cos(\frac{\pi}{2} + \psi_L), \\ (R + \frac{L}{2} - y_L)^2 = l_S^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})^2 - 2l_S(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})\cos(\frac{\pi}{2} - \psi_L^{CG}), \end{cases} \Rightarrow \quad (4.103)$$

$$\begin{cases} y_L^{CG} = -\sqrt{l_S^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L)^2 - 2l_S(R + \frac{L}{2} - y_L)\cos(\frac{\pi}{2} + \psi_L)} + R + \frac{L}{2}, \\ \psi_L^{CG} = -\arccos\left(\frac{l_S^2 + (R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})^2 - (R + \frac{L}{2} - y_L)^2}{2l_S(R + \frac{L}{2} - y_L^{CG})}\right) + \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (4.104)$$

De même la Figure 4.25 (b) pour un virage à droite et le théorème de Pythagore généralisé appliqué au triangle $\Delta OD(CG)$, permet d'établir :

$$\begin{cases} (R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})^2 = l_S^2 + (R + \frac{L}{2} + y_L)^2 - 2l_S(R + \frac{L}{2} + y_L)\cos(\frac{\pi}{2} - \psi_L), \\ (R + \frac{L}{2} + y_L)^2 = l_S^2 + (R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})^2 - 2l_S(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})\cos(\frac{\pi}{2} + \psi_L^{CG}), \end{cases} \Rightarrow \quad (4.105)$$

$$\begin{cases} y_L^{CG} = \sqrt{l_S^2 + (R + \frac{L}{2} + y_L)^2 - 2l_S(R + \frac{L}{2} + y_L)\cos(\frac{\pi}{2} - \psi_L)} - R - \frac{L}{2}, \\ \psi_L^{CG} = \arccos\left(\frac{l_S^2 + (R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})^2 - (R + \frac{L}{2} + y_L)^2}{2l_S(R + \frac{L}{2} + y_L^{CG})}\right) - \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (4.106)$$

Formules approchées

Des différences significatives apparaissent dans les formules des coordonnées des roues avant, entre le cas d'une route à faible courbure et le cas d'une route avec des virages prononcés. Ces différences sont d'une part la non linéarité du second cas par rapport à ψ_L^{CG} et y_L^{CG} et d'autre part la dépendance avec le rayon R du virage, qui doit alors être accessible à la mesure. Ces deux aspects sont limitant pour la synthèse de l'assistance, mais, l'approximation d'une route avec des virages par les équations d'une route à faible courbure se révèle en pratique suffisamment précise.

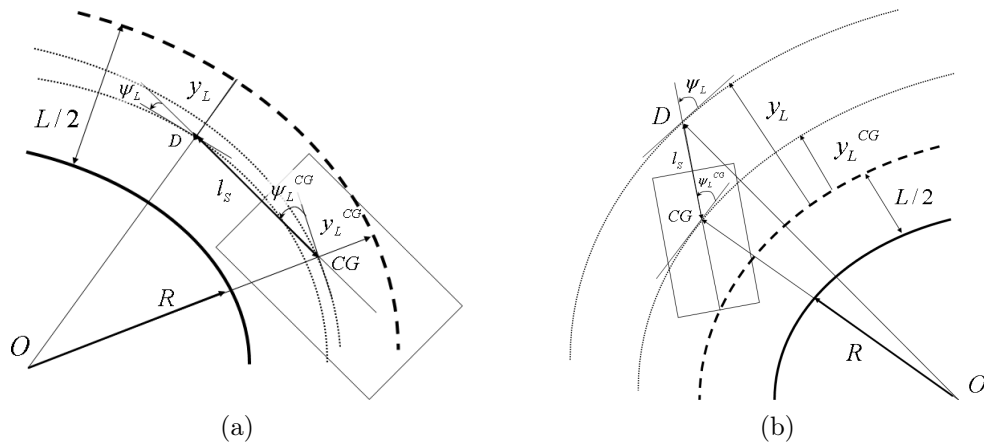


FIG. 4.25 – (a) Transformation de l'écart latéral et de l'angle de cap relatif au centre de gravité (virage à gauche). (b) Transformation de l'écart latéral et de l'angle de cap relatif au centre de gravité (virage à droite).

Sur la Figure 4.26 (a) sont représentées les erreurs absolues entre les coordonnées des roues avant calculées à partir des équations (4.92) (route à faibles courbures) et des équations (4.102) (route sinueuse), lors d'un trajet test effectué avec le véhicule prototype. La courbure de la voie a été mesurée par traitement d'images utilisant une caméra montée en vision frontale (voir Figure 4.26 (b)). L'erreur maximale est de l'ordre de $10^{-3}m$ et l'erreur moyenne de d'ordre $10^{-4}m$. À la vue de ces résultats, il a été décidé de négliger la courbure dans le calcul des coordonnées des roues avant et de toujours utiliser les formules linéaires des équations (4.92).

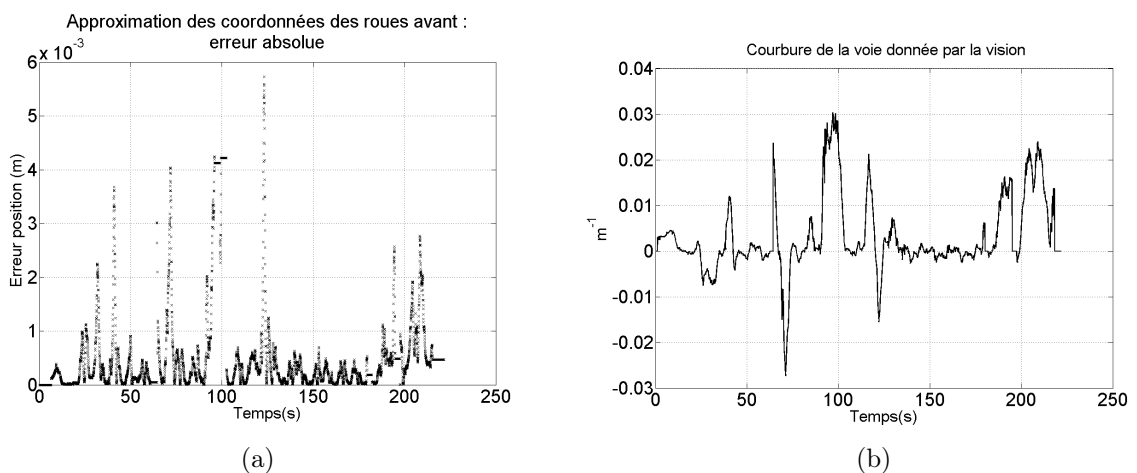


FIG. 4.26 – Conduite en slalom (a) Erreur entre les coordonnées des roues avant calculées d'une façon exacte et approchée; (b) La courbure de la voie.

4.4 Modèle « bicyclette » intégrant la colonne de direction et le positionnement sur la voie

L'application des lois de la dynamique au cas des mouvements de lacet et de dérive ont conduit, dans la première section de ce chapitre, au modèle « bicyclette » du véhicule. Il s'en est suivi la présentation du mécanisme de direction qui transforme un couple exercé par le conducteur sur le volant en un angle de braquage des roues. Finalement, le calcul de la position du véhicule par rapport à la voie de circulation a constitué le sujet de la troisième section de ce chapitre. Ces équations ((4.63), (4.71) et (4.78), (4.68) et (4.69)) peuvent être réunies dans une seule représentation d'état intégrant l'ensemble des dynamiques et ayant pour vecteur d'état $x = (\beta, r, \psi_L, y_L, \delta_f, \dot{\delta}_f)^T$ et pour entrées $u = C_c + C_a$ et la courbure de la voie ρ_{ref} :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_\rho \rho_{ref}, \\ z = x \end{cases} \quad \text{où} \quad (4.107)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & l_S & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{T_{S\beta}}{I_S R_S} & \frac{T_{Sr}}{I_S R_S} & 0 & 0 & -\frac{2c_f \eta_t}{I_S R_S^2} & -\frac{B_S}{I_S} \end{pmatrix}, \quad (4.108)$$

$$B_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_S I_S} \end{pmatrix}^T, \quad (4.109)$$

$$B_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -v & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{2(c_r + c_f)}{mv}, & a_{12} &= -1 + \frac{2(l_r c_r - l_f c_f)}{mv^2}, \\ a_{21} &= \frac{2(l_r c_r - l_f c_f)}{I_z}, & a_{22} &= -\frac{2(l_r^2 c_r + l_f^2 c_f)}{I_z v}, \\ c_r &= c_r^0 \mu, & c_f &= c_f^0 \mu, \\ b_1 &= \frac{2c_f}{mv}, & b_2 &= \frac{2c_f l_f}{I_z}, \\ T_{S\beta} &= \frac{2c_f \eta_t}{R_S}, & T_{Sr} &= \frac{2c_f l_f \eta_t}{R_S v}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

La sortie est l'état entier du système.

4.5 Capteurs et actionneurs pour le contrôle latéral

Dans le cadre de cette thèse, le modèle « bicyclette » du véhicule décrit ci-dessus sert à synthétiser et à réaliser en pratique le contrôle latéral du véhicule. L'efficacité et la faisabilité des lois de commande synthétisées peuvent être vérifiées par des tests sur des véhicules prototypes. Cette étape de test, indispensable, précède les phases de développement des systèmes finalisés et leur mise en série. Les moyens nécessaires à la mise en œuvre de ces tests de contrôle latéral seront développés ultérieurement.

Les systèmes de contrôle latéral du véhicule se servent principalement de capteurs extéroceptifs qui positionnent le véhicule par rapport à sa voie de circulation, de capteurs proprioceptifs qui mesurent la dynamique du véhicule, ainsi que d'actionneurs agissant sur le braquage des roues directrices.

Pour positionner le véhicule dans son environnement, plusieurs solutions ont été retenues dans la littérature :

1. *Le câble rayonnant.* Ce système a été le premier moyen utilisé pour localiser le véhicule par rapport à l'axe de la voie. Il a été employé, par exemple, pour le guidage latéral avec une grande précision d'un bus en conduite automatique en Allemagne vers la fin des années '70 [Kan87]. Le principe de fonctionnement est fondé sur un câble posé au sol le long de la trajectoire à suivre, dans lequel circule un courant électrique et le véhicule détecte le champ magnétique ainsi rayonné.
2. *Le système des magnétomètres et des plots magnétiques.* Les systèmes de positionnement magnétiques se composent d'aimants enterrés (plots) le long de l'axe de la voie de circulation et d'un ou plusieurs magnétomètres installés principalement sous les pare-chocs avant et arrière. Le champ magnétique est détecté par les magnétomètres et l'écart latéral est déduit à partir de l'intensité du champ émit par chaque plot. Le changement de la géométrie de la route est anticipé à travers le codage magnétique des plots. Les projet PATH aux États-Unis et AHSRA au Japon ont utilisé intensivement cette méthode de positionnement [Tan01]. Le principal avantage de cette méthode est sa robustesse aux conditions atmosphériques ou à la luminosité. Cependant, les manœuvres de changement de voie posent des problèmes pour le repérage par rapport au centre de la voie. Il est également possible d'ajouter à la détection par l'intermédiaire des magnétomètres et des plots magnétiques des informations d'une centrale inertielle et d'un système GPS (« Global Positioning System ») pour réaliser un positionnement plus robuste [Far01], [Her03].
3. *Le GPS différentiel.* Le GPS (« Global Positioning System ») est un système de positionnement par satellite, à vocation militaire, initialement déployé par le Département de la Défense des États-Unis et qui est devenu récemment très répandu dans les applications routières. Il fonctionne par un système d'émission-réception entre des satellites et le récepteur dont la position a besoin d'être identifiée. La précision du GPS est d'approximativement 10m. Le GPS différentiel (DGPS) se sert d'un récepteur GPS relié à une antenne fixe dont la position précise est connue. Il est alors possible de connaître localement les erreurs de positionnement. En transmettant ces erreurs à un récepteur GPS embarqué dans un véhicule, la précision sur la localisation de celui-ci s'accroît considérablement (erreur de l'ordre de quelques centimètres). Il existe plusieurs travaux de contrôle latéral qui ont été développés à partir de l'écart latéral et de l'angle de cap mesurés par l'intermédiaire d'un DGPS. À titre d'exemple, citons les recherches du Dynamic Design Laboratory de l'Université de Stanford [Tal05], [Ros04], [Ros03].
4. *Le capteur vidéo.* Les monocomères en vision frontale sont peut-être les plus utilisées dans la détection de marquages latéraux, donc dans le positionnement du véhicule par rapport à sa voie de circulation. Récemment, elles se sont imposées pour plusieurs applications d'assistance latérale commercialisées, comme par exemple sur Volkswagen Passat CC [Vol08], Honda Accord [Iih04] ou Toyota Lexus [Yam07]. À travers la détection des marquages latéraux, l'écart latéral à l'avant du véhicule, l'angle de cap relatif par rapport à la voie et la courbure de la route sont calculés. Ayant des vitesses d'acquisition allant jusqu'à 30 images par seconde, les capteurs vidéos ont aussi de très bonnes précisions de positionnement, de l'ordre du centimètre. Cependant, ce type de capteur reste inutilisable pour des routes sans marquages ou avec des marquages effacés ou très dégradés.

Les capteurs proprioceptifs complètent les informations nécessaires pour réaliser le contrôle latéral du véhicule.

1. La centrale inertielle embarquée à bord du véhicule mesure la vitesse de lacet du véhicule ainsi que les accélérations selon les trois axes. La centrale inertielle peut être remplacée par un gyroscope et des accéléromètres.
2. L'angle de braquage du volant est mesuré par des capteurs montés sur la colonne de direction du véhicule qui s'incrémentent suivant les tours du volant. Ces capteurs peuvent fonctionner à base de potentiomètre [Pen92], d'accéléromètre [Swi06] ou sur un principe optique.
3. La vitesse longitudinale du véhicule peut être mesurée par un odomètre spécifique, ou bien, directement avec les signaux du système ABS déjà existant sur la plupart des véhicules.
4. L'angle de dérive du vecteur vitesse par rapport à l'axe de la voiture est une variable difficilement mesurable par un capteur, elle est en général estimée à partir de mesures fournies par d'autres capteurs. Toutefois, un système basé sur du DGPS fonctionnant avec trois antennes embarquées a été proposé par les auteurs de [Tal05]. Une nouvelle approche pour l'estimation des vitesses longitudinale et latérale au centre de gravité du véhicule est décrite dans [Vil08]. Le résultat des auteurs de [Vil08] est fondé sur des méthodes algébriques d'estimation des dérivées. Un capteur encore cher, mais très utilisé, du moins pour la validation des estimateurs, est le CORREVIT. Ce capteur mesure les vitesses selon deux axes horizontaux par un balayage de route avec un faisceau laser.

Les actionneurs sur le système de direction sont des moteurs électriques ou hydrauliques montés sur les arbres supérieurs de la colonne mécanique ou sur la crémaillère. Les systèmes de direction filo-commandés disposent, non seulement d'actionneurs sur les roues directrices, mais aussi, d'actionneurs pour la restitution de l'effort au volant, comme décrit dans la Section 2.2.2 du Chapitre 2, Partie I.

4.6 Équipement du véhicule prototype, CARLLA



FIG. 4.27 – Véhicule expérimental CARLLA.

4.6.1 Fonctionnalités du véhicule prototype CARLLA

Les tests pratiques de cette thèse ont utilisé le véhicule expérimental CARLLA équipé et instrumenté par l'unité de recherche LIVIC²⁴ des laboratoires LCPC²⁵ et INRETS²⁶. Le véhicule expérimental CARLLA (Contrôleur d'Assistance Routière Longitudinale et Latérale) présenté sur la Figure 4.27 est un véhicule Peugeot de type 307 SW qui a été modifié pour le test des assistances à la conduite [Dup07]. Il est instrumenté pour l'information et l'avertissement du conducteur et pour le contrôle longitudinal et latéral. Les applications implantées actuellement sur ce véhicule sont :

- SAVV (Système d'Avertissement de Vitesse excessive en approche de Virage) en mode informatif et actif.
- Les assistances latérales à la conduite : vibrations du volant, oscillations avec suggestions d'action du volant, interventions sur la colonne de direction pour éviter les sorties de voie, contrôle latéral automatisé.
- La détection d'obstacles par stéréovision et laser avec freinage d'urgence.
- Le contrôle longitudinal à basse vitesse.

Les équipements du véhicule pour le contrôle latéral peuvent être classés dans les catégories suivantes :

1. Capteurs extéroceptifs : caméra placée en position frontale, GPS RTK couplé à une cartographie précise.
2. Capteurs proprioceptifs : centrale inertielle, capteur de distance parcourue et de vitesse, capteur d'angle de braquage du volant, capteur de couple conducteur, CORREVIT.
3. Actionneur : colonne de direction électrique prototype (sans assistance hydraulique) réalisée en collaboration avec la société CERMA.
4. Moyens de calcul : 2 PC, l'un dédié au traitement d'image et l'autre dédié aux algorithmes de commande et à l'interface homme-machine.

La Figure 4.28 présente l'architecture des capteurs et du moteur électrique de la colonne de direction. Le module de commande de la direction, DIR et le PC qui lui envoie des consignes, CTRL/CDE communiquent par un bus CAN au format CAN-A. Les identifiants des messages sont donc codés sur 11 bits. Une couche applicative CanFestival2 développée par le LIVIC a été ajoutée. Celle-ci respecte la norme CANOpen DS301 v.4.02. CTRL/CDE est donc équipé de cette couche applicative, dont le rôle est de gérer le réseau : initialiser les noeuds, les connecter, les reconnecter en cas de défaut. Tout ceci est réalisé à partir d'un fichier de configuration écrit en XML qui décrit le réseau.

4.6.2 Équipement

1. Caméra

La caméra CCD utilisable de jour comme de nuit est un modèle CNB WK-ZS260IR. Cette caméra fournit une image avec une échelle de gris sur 8 bits et une résolution de 752(H) x 582(V) pixels. Sa fréquence est de 25 images par seconde. Cette caméra est installée en vision frontale, à la place du rétroviseur intérieur (voir Figure 4.29 (a)).

Des algorithmes de traitement d'image fournissent la détection des marquages routiers latéraux [Lab06]. D'autres variables sont également calculées : la courbure de la route,

²⁴Laboratoire sur les Interactions Véhicules-Infrastructure-Conducteurs

²⁵Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

²⁶Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité

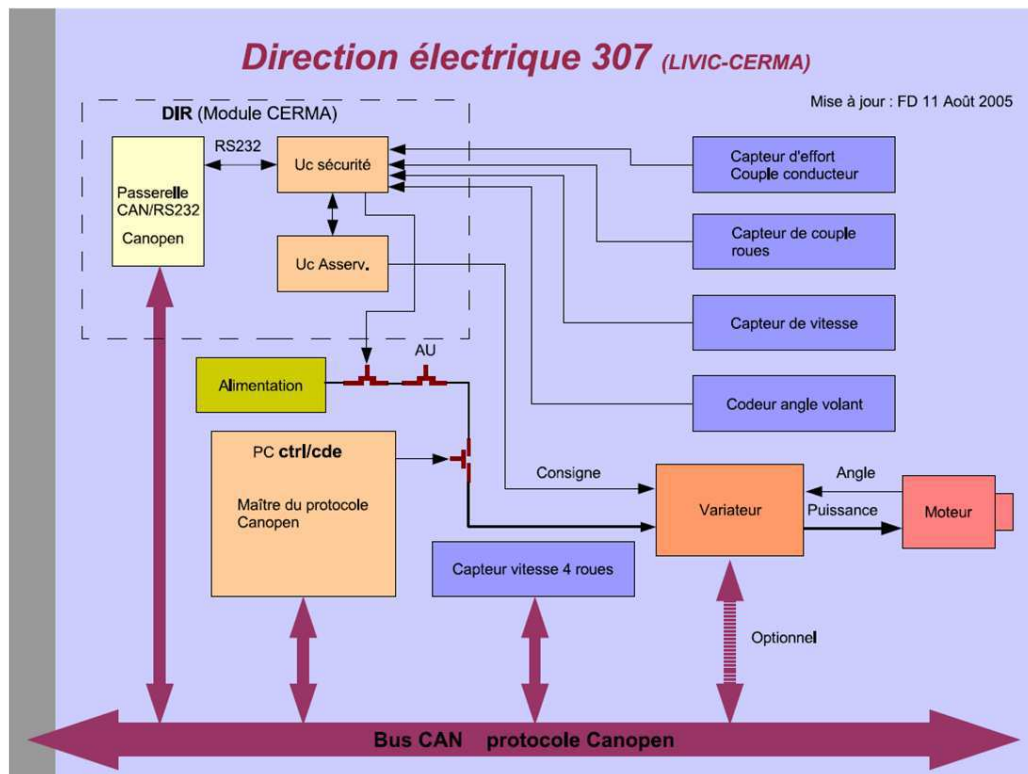


FIG. 4.28 – Architecture de réseau [Dup07].

l'écart latéral du véhicule par rapport au centre de la voie, l'angle de cap relatif du véhicule par rapport à l'axe de la voie. Ces deux derniers sont calculés à l'aplomb de la caméra.

Le véhicule est équipé d'un écran présentant les résultats du traitement d'image (voir Figure 4.29 (b)). L'indice de confiance est représenté sur une échelle allant du rouge (mauvaise détection) au vert (détection satisfaisante) sur la partie latérale gauche de l'affichage. La ligne orange représente l'estimation de l'axe de la voie et la courbe verticale rouge la trajectoire future du véhicule calculée à partir de l'angle de braquage du volant.



FIG. 4.29 – (a) Caméra en vision frontale. (b) Interface graphique.

2. Centrale Inertielle

Le véhicule est équipé d'une centrale inertielle trois axes Crossbow VG400 (voir Figure 4.30) qui communique par une liaison RS232 avec le PC de commande. Celle-ci fournit les accélérations et les vitesses de rotations selon les trois axes (roulis, tangage et lacet).



FIG. 4.30 – Centrale inertielle.

3. Capteur GPS RTK et cartographie

Le système GPS RTK ²⁷ est un Thalès SAGITTA 02 avec une précision centimétrique (voir Figure 4.31).

Les essais réalisés durant cette thèse se sont déroulés sur la piste d'essai Routière localisée à Satory sur la commune de Versailles. Cette piste possède des virages et des lignes droites ; elle est proche de la configuration d'une route départementale (voir Figure 4.32). Une cartographie 3D des marquages avec une précision centimétrique est disponible. Les caractéristiques de courbure, d'altitude et de dévers gauche et droit sont représentées sur la Figure 4.33 en fonction de l'abscisse curviligne.

²⁷ « Global Positioning System Real Time Kinetic »

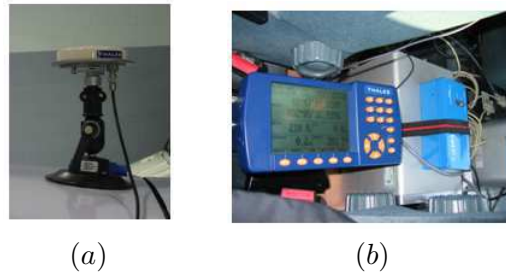


FIG. 4.31 – Système GPS RTK : antenne (a) et récepteur (b).

L'utilisation du GPS couplé à la cartographie via un algorithme de map-matching, permet d'avoir accès à des variables non mesurables ou à des variables de meilleure précision et moins bruitées (par exemple la courbure).

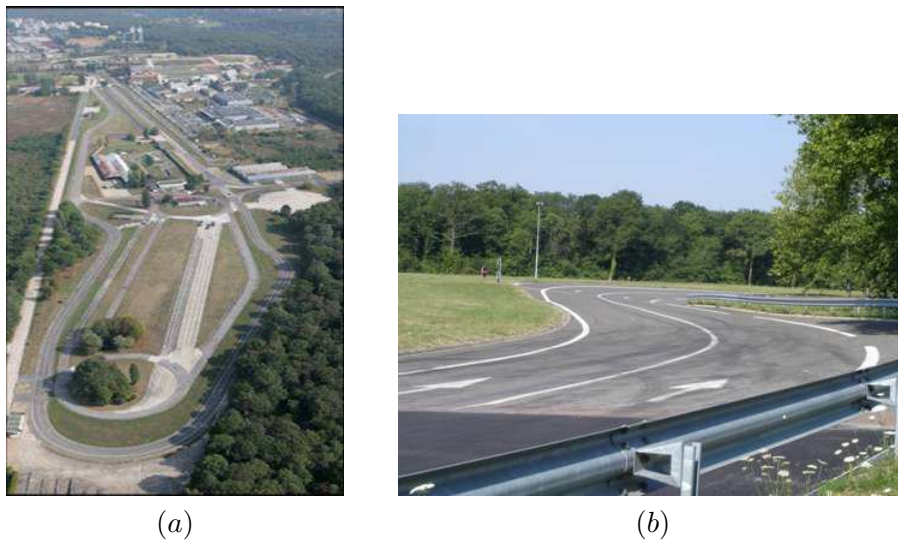


FIG. 4.32 – Pistes de Satory, (a) vue d'ensemble. (b) détail.

4. CORREVIT

Un capteur optique CORREVIT de type 2 axes S-400 (voir Figure 4.34) fournit les mesures des vitesses selon les directions X_v et Y_v et une estimation de l'angle de dérive du vecteur vitesse par l'intermédiaire d'un filtre de Kalman interne. Ce capteur utilise un système optique de traitement du défilement de la surface de la route sous le véhicule. Les mesures se font à l'aplomb du capteur, une translation vers le centre de gravité du véhicule est donc nécessaire. Un algorithme de reconstruction de l'angle de dérive, à partir des capteurs ABS, de l'angle de braquage et de la centrale inertielle a également été utilisé pour pouvoir se dispenser de ce capteur qui demeure très coûteux.

5. Odométrie

Un odomètre délivre une impulsion périodique dont la durée est inversement proportionnelle à la vitesse du véhicule. C'est la mesure de cette durée qui est transmise au module de commande de la direction et ensuite inversée pour calculer la vitesse longitudinale du véhicule.

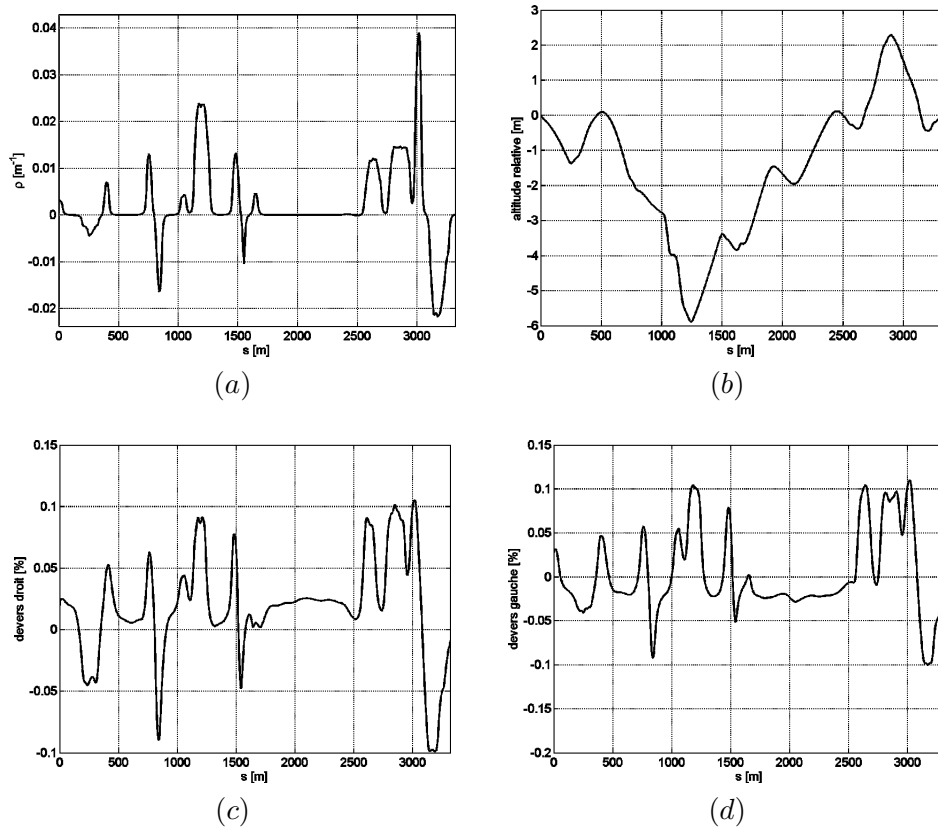


FIG. 4.33 – (a) Courbure. (b) Altitude relative. (c) Dévers droit. (d) Dévers gauche.



FIG. 4.34 – Système de mesure de l'angle de dérive du vecteur vitesse CORREVIT.

6. PC de traitement d'image et PC de commande

Les PC installés sur CARLLA sont utilisés pour le traitement d'images et les contrôles longitudinal et latéral. Ils servent également à gérer l'interface homme-machine et à enregistrer les données pour l'évaluation à posteriori. Ces PC sont chacun équipés de 2 processeurs AMD Opteron 2.2 GHz et de 1GB de mémoire RAM. L'ensemble des programmes utilisés fonctionnent sous le logiciel RTMaps développé par la société Intempora. Ce logiciel permet l'acquisition de données issues de différentes sources (ports série, bus CAN, vidéo, etc.), leur horodatage, leur enregistrement et leur rejeu. Les modules de traitement d'images et de commande, développés en C++, sont intégrés à RTMaps grâce à un environnement de développement intégré au logiciel Microsoft Visual Studio.

7. Actionneur sur la colonne de direction

Le laboratoire LIVIC a sous-traité à la société CERMA le remplacement de la colonne de direction du véhicule Peugeot 307. L'assistance hydraulique a été supprimée pour éliminer le couple non-maîtrisé de l'assistance de série. À la place, un moteur électrique contrôlé par un micro-contrôleur de type PIC a été modifié pour piloter la colonne de direction.

La nouvelle assistance électrique peut fonctionner selon deux modes [Dup07] :

- (a) Le mode assistance classique pour la route : le micro-contrôleur du moteur assure une direction assistée électrique standard.
- (b) Le mode expérimentation : le micro-contrôleur reçoit les consignes en couple du PC installé dans la voiture. Il vérifie que ces signaux sont valides, assure la sécurité du système et fournit le contrôle de bas niveau pour suivre les consignes de couple.

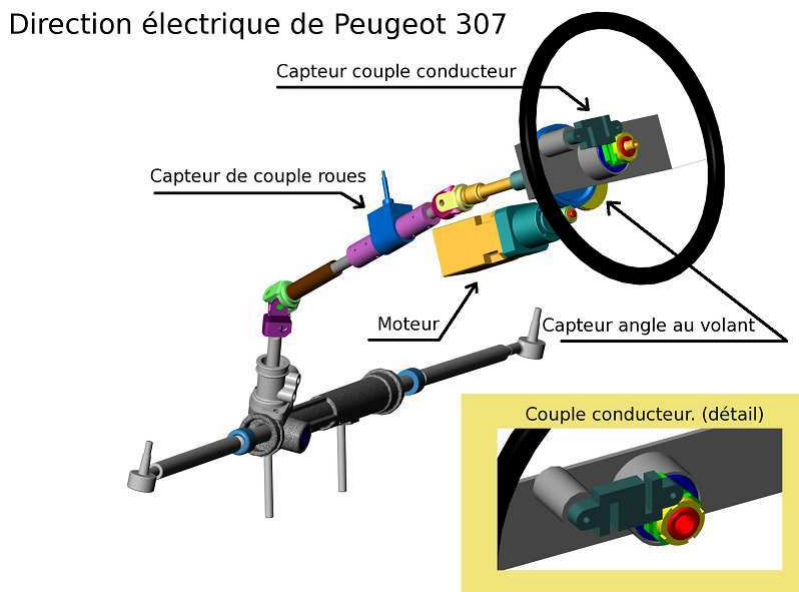


FIG. 4.35 – Système de direction [Dup07].

La nouvelle colonne de direction est équipée de trois capteurs [Dup07] (voir Figures 4.35 et 4.36) :

- (a) Un capteur optique d'angle produit par BEI IDEACOD de type CHM 510-13BT-002 pour la mesure de l'angle volant a été installé au niveau de l'engrenage du volant sur l'arbre supérieur de la colonne de direction. La valeur de l'angle est codée sur 13 bits,

soit 8192 valeurs et un bit codeur correspond à une variation d'angle de 0.1266° . Ce capteur donne également le braquage des roues puisqu'il y a continuité mécanique entre le volant et les roues.

- (b) Le couple conducteur est fourni par un capteur d'effort SCAIME de type ZF qui relie le volant à la colonne de direction. Compte tenu de ses caractéristiques et des bras de levier, il fournit une mesure entre $-31.5Nm$ et $+31.5Nm$ codée sur 12 bits, soit 4096 valeurs. 1 bit codeur correspond donc à une variation de couple $0.0154Nm$.
- (c) Le couple transmis aux roues est fourni par un capteur SCAIME de type DR2513 placé sur la colonne de direction sous le pignon d'entraînement du moteur électrique. Il est d'une grande précision, classe 0.25%. Il fournit une mesure entre $-50Nm$ et $+50Nm$ codée sur 12 bits, soit 4096 valeurs. 1 bit codeur correspond donc à une variation de couple $0.0244Nm$.

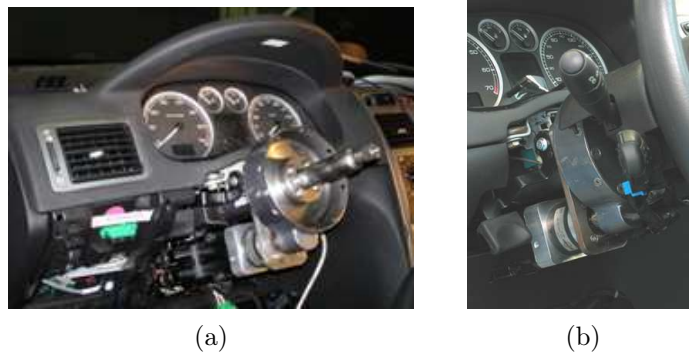


FIG. 4.36 – Moteur électrique installé sur la colonne de direction [Dup07] (a) vision sans volant, (b) vision avec volant.

8. Interface homme-machine

Les interactions entre le conducteur et le système se font principalement au niveau du volant. En fait, le conducteur ressent l'ensemble des couples qui s'exercent sur la colonne de direction (contacts roues-sol, action du moteur de direction, couple d'auto-alignement). Il est alors possible en jouant sur la consigne de couple du moteur sur la colonne de direction de faire ressentir au conducteur certains signaux, comme des vibrations, des oscillations ou des mouvements du volant. Cependant, le véhicule ayant une continuité mécanique entre les roues et le volant, l'intensité des signaux et leur forme résulte d'un compromis entre le braquage des roues et le ressentit du conducteur.

L'autre moyen utilisé pour interagir avec le conducteur est un système audio qui permet d'émettre tous types de sons dans l'habitacle. L'émission des signaux sonores peut être latéralisée en fonction des besoins (niveaux du volume gauche et du volume droit ajustables indépendamment).

Les paramètres du véhicule CARLLA ont été en partie mesurés et en partie estimés à partir des paramètres des véhicules similaires (voir Tableau 4.2).

TAB. 4.2 – Nomenclature et valeurs numériques du véhicule d’essai

	Dénomination	Valeur
B_S	coefficient d’amortissement de la colonne	15
c_{f0}	coefficient de raideur des pneus avant	40000 N·rad ⁻¹
c_{r0}	coefficient de raideur des pneus arrière	35000 N·rad ⁻¹
I_S	moment d’inertie du système de direction	0.05kg·m ²
J	moment d’inertie de lacet du véhicule	2454 kg·m ²
l_f	distance du centre de gravité à l’essieu avant	1.22 m
l_r	distance du centre de gravité à l’essieu arrière	1.44 m
l_s	distance de visée	0.98 m
m	masse totale	1600 kg
R_S	rapport de réduction de la direction	16
a	longueur des essieux	1.5m
v	vitesse longitudinale	15 m · s ⁻¹
η_t	largeur de contact du pneu	0.13m
ν	adhérence	1
ξ	coefficient d’amortissement	0.707
L	largeur de la voie	3.5m
K_P	gain de direction manuelle	1

Bibliographie

- [Bag01] V. B. Baghdassarians *Commandes robustes pour le contrôle latéral d'un véhicule routier*. Thèse de doctorat de l'Université d'Evry Val d'Essonne, 2001.
- [Bak87] E. Bakker, L. Nyborg et H. B. Pacejka *Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies*. SAE Technical Paper 870421, 1987.
- [Bro06] J.-P. Brossard *Dynamique du véhicule : Modélisation des systèmes complexes*. Presses Polytechnique et Universitaire Romande, 2006.
- [Dup07] F. Dupin *Équipement d'une direction électrique sur Peugeot 307 SW : Spécification des interfaces et des modes de fonctionnement* Rapport technique intern de LIVIC, « Laboratoire sur les Interactions Véhicule-Infrastructure-Conducteur » 14, route de la minière, 78000 Versailles, 2007.
- [Far01] J. Farrell et M. Barth *Integration of GPS/INS and Magnetic Markers for Advanced Vehicle Control* California PATH Research Report UCB-ITS-PRR-2002-32, 2001.
- [Her03] J. I. Hernandez et C.-Y. Kuo *Steering Control of Automated Vehicles Using Absolute Positioning GPS and Magnetic Markers*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 52, No. 1, 2003.
- [Iih04] A. Iihoshi *Driver Assistance System (Lane Keep Assist System)* Presentation to WP-29 ITS Round Table 18/02/2004 Geneva, 2004.
- [Kan87] A. Kanafani, R. E. Parson et H. R. Ross *Status of Foreign Advanced Highway Technology*. California PATH Research Paper UCB-ITS-PRR-87-2, 1987.
- [Kie05] U. Kiencke et L. Nielsen *Automotive Control Systems : For Engine, Driveline, and Vehicle*. Springer Verlag, 2005.
- [Lab06] R. Labayrade, J. Douret, J. Laneurit et R. Chapuis *A reliable and robust lane detection system based on the parallel use of three algorithms for driving safety assistance* IEICE Transactions on Information and Systems Online, E89-D, 2092-2100, 2006.
- [Mam01] S. Mammar *Contrôle latéral assisté et automatisé des véhicules : Approches par commandes robustes*. Habilitation à diriger les recherches à l'Université d'Evry Val d'Essonne.
- [Pac02] H. B. Pacejka *Tyre and vehicle dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2002.
- [Pen90] H. Peng et M. Tomizuka *Lateral control of front-wheel-steering rubber-tire vehicles*. Technical Report UCB-ITS-PRR-90-5, du PATH Research Programm, 1990.
- [Pen91] H. Peng et M. Tomizuka *Optimal Preview Control for Vehicle Lateral Guidance*. Technical Report UCB-ITS-PRR-91-16, du PATH Research Programm, 1990.
- [Pen92] H. Peng, W.-B. Zhang, A. Arai, Y. Lin, T. Hessburg, P. Devlin, M. Tomizuka et Steven Shladover *Experimental Automatic Lateral Control System for an Automobile* PATH Research Report UCB-ITS-PRR-92-11, 1992.

- [Raj06] R. Rajamani *Vehicle dynamics and control*. Springer Verlag, 2006.
- [Ram07] R. Ramdani, S. Berkoune, M. L. Traore et B. Latourte *Identification du modèle d'une colonne de direction d'un véhicule*. Rapport de stage ER&D encadré par N. Minoiu Enache, Université d'Evry Val d'Essonne 2007.
- [Rei01] J. Reimpell, H. Stoll et J. W. Betzler *The automotive chassis : Engineering principles*. Butterworth-Heinemann, 2001.
- [Ros03] E. J. Rossetter *A Potential Field Framework For Active Vehicle Lanekeeping Assistance*. Thèse de doctorat de l'Université de Stanford, 2003.
- [Ros04] E. J. Rossetter, J. P. Switkes et J. Christian Gerdes *Experimental Validation of the Potential Field Driver Assistance System*. International Journal of Automotive Technology, Vol. 5, No. 2, pp. 95-108, 2004.
- [Sve07] J. Svendius *Tire modeling and friction estimation*. Thèse de doctorat de l'Université Lund, Departement of Automatic Control, 2007.
- [Swi06] J. P. Switkes *Handwheel force feedback with lanekeeping assistance : Combined Dynamics, Stability and Bounding*. Thèse de doctorat de l'Université Stanford, 2006.
- [Tal05] K. L. Rock, S. A. Beiker, S. Laws et J. C. Gerdes *Validating GPS Based Measurements for Vehicle Control*. Proceedings of the 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2005.
- [Tan01] H.-S. Tan et B. Bougler *Vehicle Lateral Warning, Guidance and Control Based on Magnetic Markers : PATH Report of AHSRA Smart Cruise 21 Proving Tests*. California PATH Working Paper UCB-ITS-PWP-2001-6, 2001.
- [Tse05] H. E. Tseng, J. Asgari, D. Hrovat, P. Van der Jagt, A. Cherry et S. Neads *Evasive manoeuvres with a steering robot*. Vehicle System Dynamics, Vol. 43, No. 3, pp. 199-216, 2005.
- [Vil08] J. Villagra, B. D'Andréa-Novel, M. Fliess et H. Mounier *Estimation of longitudinal and lateral vehicle velocities : an algebraic approach*. Proceedings of American Control Conference, pp. 3941-3946, 2008.
- [Vol08] Volkswagen Media Services *Research project AKTIV : Intelligent cars set to revolutionise safety* Press Release <https://www.volkswagen-media-services.com>, 2008.
- [Yam07] J. Yamaguchi *Lexus LS 460=Best Engineered Vehicle 2007* Automobile Engineering International online, Avril, 2007.

Troisième partie

Contribution : loi d'assistance au maintien de voie

Concept et architecture de l'assistance : automate hybride d'assistance à la conduite

Sommaire

5.1	Caractérisation des situations de conduite	143
5.1.1	Capacité de conduite dégradée	144
5.1.2	Situation de « conduite normale »	145
5.2	Automate hybride d'assistance à la conduite	150
5.2.1	Démarche et hypothèse	151
5.2.2	Définition de l'automate hybride	152
5.2.3	Transitions du système commuté	153
5.2.4	Cahier des charges pour la loi de commande	153
5.2.5	Stabilité de l'automate hybride	155

5.1 Caractérisation des situations de conduite

Ce chapitre est consacré à la description du champ d'action de l'assistance à la conduite qui sera développée dans les chapitres suivants de cette partie.

Rappelons que l'objectif fondamental de cette thèse est de développer une assistance active qui empêche les sorties de voie involontaires.

Les activations, c'est-à-dire les interventions de cette assistance, sont donc ponctuelles et n'ont lieu que lorsque le conducteur est jugé défaillant et qu'il y a un risque de sortir de la voie. La haute variabilité de ces deux grandeurs entraîne une large palette d'états initiaux possibles pour la loi de commande en boucle fermée.

Par ailleurs, la défaillance du conducteur peut être brève, elle peut aussi durer plusieurs secondes, voir quelques dizaines de secondes. Il est donc nécessaire que l'assistance en boucle fermée, soit capable de maintenir le véhicule sur la voie pendant cette période.

5.1.1 Capacité de conduite dégradée

Description de l'état du conducteur

Il existe plusieurs raisons pour lesquelles la réaction du conducteur n'est pas toujours adaptée à la situation de conduite et peut alors entraîner une sortie de voie involontaire. Parmi toutes ces raisons, nous considérerons celles qui sont uniquement liées à l'état du conducteur et qui apparaissent de manière ponctuelle durant le processus de conduite. Ainsi, l'environnement du véhicule ou les lacunes de conduite (connaissances insuffisantes) ne seront pas prises en compte.

Définition 5.1.1 (Capacité de conduite dégradée) [Bar02] *Une capacité de conduite dégradée, ou une sous-activité pendant le processus de conduite, correspond dans le contexte de cette thèse, par exemple, à une activité annexe à la conduite, à une hypovigilance, à un malaise, à un endormissement, à un assoupissement, à une alcoolisation ou à une prise de médicaments qui dégradent les capacités d'attention.*

Les accidents faisant suite à un état de conduite dégradé ne sont généralement pas recensés dans les statistiques d'accidentologie, exception faite de l'alcoolisation. À ce jour, un seul rapport [TRF06] qui résume les données des accidents aux États-Unis en 2006 mentionne des nombres relatifs aux sorties de voie involontaires. Relatant les facteurs à l'origine des accidents mortels (un total de 57 695 accidents), [TRF06] dénombre 1 480 accidents provoqués par l'assoupissement, la somnolence, la fatigue, la maladie ou l'évanouissement (2.6%). 4 560 accidents résultent d'une inattention (manger ou discuter) (7.9%). De plus, 16 470 accidents mortels ont été causés par une erreur de guidage entraînant la sortie de voie (28.5%). Les trois facteurs mentionnés précédemment sont considérés comme distincts dans le rapport [TRF06]. Comme notre étude porte uniquement sur les sorties de voie causées par un état de conduite dégradé, cette distinction n'est pas faite dans les données de [TRF06].

Dans le système d'agrégation de données de [TRF06], les accidents sont recensés comme étant causés par la somnolence sur la base des déclarations des conducteurs dans un formulaire complété après l'accident. Pour dépister d'autres accidents provoqués par un état de somnolence du conducteur, les auteurs de [Kni95] ont revu les données d'accidentologie aux États-Unis pour l'année 1993. Les auteurs de [Kni95] ont repris pour cette année tous les accidents déclarés comme étant provoqués par la somnolence. Ils ont, de plus, considéré l'ensemble des accidents semblables à ceux provoqués par la somnolence. À ce titre, ils ont pris en compte les sorties de voie qui ne font pas suite à une manœuvre ou à un facteur bien identifiés, comme le dépassement, l'évitement d'un obstacle ou la vitesse excessive. Les manœuvres qui précédaient la sortie de voie ont alors été étudiées pour tous les cas non-déclarés, afin de les qualifier comme étant « certainement », « probablement » ou « peut-être » dues à la somnolence. Le résultat des analyses se trouve dans le Tableau 5.1.

Dans le Tableau 5.1, les sorties de voie ont été scindées en deux classes : les sorties de voie « pures » et les autres. Les sorties de voie « pures » doivent satisfaire plusieurs critères : aucune manœuvre avant la sortie, conducteur seul, aucune référence à l'alcool ou à des médicaments, vitesse entre 72.5 et 105km/h, aucune violation des règles de conduite qui impliquerait un conducteur alerte, route sèche, beau temps et aucune défaillance du véhicule. Les résultats montrent que le nombre d'accidents causés par la somnolence et non déclarés comme tel après l'accident est significatif. Pour les accidents par sortie de voie « pures », en plus des 9 000 accidents déclarés, 6 000 accidents non-déclarés sont « certainement » dus à la somnolence et 4 000 accidents non-déclarés sont aussi « probablement » ou « peut-être » dus à la somnolence.

TAB. 5.1 – Nombre revu d’accidents causés par la somnolence [Kni95].

Nombre total d’accidents 6.3 millions	Somnolence déclarée	Supposition de somnolence (cas non-déclarés)		
		« certainement »	« probablement » « peut-être »	total cas non-déclarés
Catégorie d’accident				
Sortie de voie « pure »	9 000	6 000	4 000	62 000
Autres sorties de voie	31 000	11 000	13 000	832 000
Autres accidents	16 000	6 000	7 000	5 350 000

Le couple conducteur, un indicateur de son état

Plusieurs méthodes d’identification de l’état de sous-activité du conducteur ont été développées dans le cadre des systèmes d’avertissement. Une première possibilité consiste à concevoir et à identifier un modèle du conducteur et de le faire évoluer pendant le processus de conduite. Deux approches de ce type se trouvent dans [Pil99] et [Pom99]. Les aspects pratiques de cette approche seront détaillés dans la Section 5.1.2. Une deuxième approche repose sur la surveillance directe du conducteur par l’intermédiaire de caméras associées à des algorithmes de vision. Dans [Tac96], l’état de fatigue du conducteur est déterminé par un système de suivi des yeux qui étudie l’ouverture des paupières et la fréquence de clignement. De même, les mouvements des bras du conducteur peuvent être détectés et suivis par une caméra [Bul05].

Dans notre étude nous avons considéré le couple exercé par le conducteur sur le volant comme un indicateur de l’état de vigilance de celui-ci. Cette idée n’est pas nouvelle, elle avait été proposée sous une autre forme par [Pom99] qui a considéré qu’un angle de braquage constant correspondait à un état d’inattention. Dans [Poh03], les auteurs ont développé un système pour mesurer les actions du conducteur sur le volant. Le but était de concevoir un système d’aide à la conduite qui assiste le conducteur pour retrouver la bonne trajectoire, mais qui ne le remplace pas. Pour cela, un filtre de Kalman, qui détecte si le conducteur est actif ou non selon ses actions sur le volant, a été conçu.

Dans notre cas, la caractérisation de l’état d’inattention est relativement rudimentaire. Nous avons supposé que pour un couple inférieur à un seuil prédéfini ($|C_c| \leq \sigma_1$), le conducteur est dans un état de sous-activité. Dans le cas contraire, le conducteur est supposé être en capacité de conduire ($|C_c| > \sigma_1$). Pour les besoins de désactivation de l’assistance, nous avons de plus un second comportement de conduite : la situation d’urgence. Celle-ci est caractérisée par une action forte du conducteur sur le volant pour, par exemple, éviter un obstacle. Dans ce cas, nous avons supposé que $|C_c| > \sigma_2$, où évidemment $\sigma_1 < \sigma_2$.

Néanmoins, précisons dès maintenant que l’architecture et le développement de l’assistance à la conduite restent indépendants de la mesure utilisée pour caractériser l’état du conducteur. Seuls compte les trois états prédéfinis : « conducteur en bonne capacité de conduite », « conducteur en sous-activité » et « situation d’urgence ».

5.1.2 Situation de « conduite normale »

Afin de spécifier l’état initial du système au moment du déclenchement de l’assistance, nous procédons à l’étude d’une des situations de conduite les plus fréquentes sur les routes hors

agglomération, à savoir le suivi de voie. Cette situation sera dénommée situation de « conduite normale ».

Définition 5.1.2 (Situation de « conduite normale ») *Une situation de « conduite normale » correspond à un état de suivi de voie pendant lequel le conducteur n'entreprend aucune manœuvre particulière comme un dépassement, un changement de voie ou un changement de direction.*

Dans la section précédente, quelques causes et effets de la détérioration de l'état physique ou psychique du conducteur sur sa capacité de conduite ont été exposés. À cette occasion, nous avons remarqué un lien fort entre l'état du conducteur et sa dynamique de conduite. Par ailleurs, nous supposons, que les valeurs des variables décrivant la dynamique du véhicule sont également dépendantes du type de conducteur ou conducteur lui même.

En conséquence, spécifier un ensemble pour l'état initial du système se révèle être une tâche difficile à accomplir, même pour une situation de suivi de voie. Le même trajet peut être parcouru de façons distinctes par deux conducteurs, ou par le même conducteur dans des circonstances différentes. Néanmoins, nous pouvons considérer qu'il existe des bornes entre lesquelles l'état du système varie pendant une telle situation de conduite. Malheureusement, il y a peu d'études disponibles sur ce sujet et seules quelques unes ont ciblé des aspects complémentaires (par exemple, l'identification d'un modèle de conducteur). Nous considérerons par la suite deux types d'études qui contiennent des données statistiques partielles caractérisant une situation de « conduite normale ».

Identification d'un modèle de conducteur pour le suivi de voie

Les systèmes d'aide à la conduite qui préviennent les sorties involontaires de voie par avertissement ont également besoin d'un système de décision pour déclencher l'alerte. Dans ce but, des modèles de conducteur ont été développés. Ces modèles sont censés reproduire une conduite appropriée à la situation de trafic. L'activation de l'assistance se fait par comparaison entre la sortie du modèle avec l'état et la position du véhicule.

Le paramétrage de ces modèles nécessite des enregistrements sur des sujets réels. Nous présenterons plus particulièrement ceux de études publiées dans [Pil99] et [Pom99].

Nous ferons d'abord référence à l'étude de [Pil99] pour l'identification de l'état du conducteur dans le but d'implanter une assistance à la conduite. L'objectif était de générer un algorithme d'identification en temps réel du niveau d'attention du conducteur en partant de l'écart latéral pendant une situation de suivi de voie.

L'expérimentation a été réalisée sur le simulateur de conduite, Ford Driving Simulator (FDS), dans les laboratoires Ford Research Labs, à Dearborn, MI. Douze sujets y ont participé, neuf hommes et trois femmes, âgés de 27 à 40 ans. L'état de fatigue des participants a été accentué en leur demandant de réduire la veille leur durée habituelle de sommeil d'une heure. De plus, le test a été conduit pendant la période journalière de baisse d'activité cérébrale ; il a débuté à 13h30 et a duré deux heures. Pendant ce test, les sujets ont eu à parcourir une section d'autoroute à deux voies dans chaque sens. Les conducteurs avaient pour consigne d'accélérer jusqu'à une vitesse comprise entre 95 et 110km/h puis de maintenir cette vitesse en suivant le centre de la voie, comme pour leur conduite habituelle. Les données ont été recueillies à une fréquence de 20Hz.

Plusieurs variables caractéristiques de la dynamique du véhicule ont été enregistrées, mais seul l'écart latéral a été analysé dans [Pil99]. La valeur moyenne de l'écart latéral pour chacun des douze conducteurs est de l'ordre de $\pm 0.5m$. Néanmoins, la distribution générale qui inclut tous les conducteurs a la forme d'une distribution normale centrée à l'origine.

L'écart type individuel de l'écart latéral a beaucoup varié entre les participants. Dans tous les cas, il est resté en dessous de $0.5m$. Cet écart type a aussi montré des variations temporelles : si au début du test il était d'environ $0.2m$ pour tous les participants, il s'est accru graduellement au cours du temps et en fonction du participant.

Nous allons maintenant résumer les résultats de l'expérience effectuée par les auteurs de [Pom99] sur un segment d'autoroute et un segment de route nationale représentatifs. Ces segments incluent des lignes droites, un virage serré à gauche (de courbure $\frac{1}{499}m^{-1}$ pour l'autoroute et de $\frac{1}{291}m^{-1}$ pour la route nationale) et un virage large à droite (de courbure $-\frac{1}{1191}m^{-1}$ pour l'autoroute et $-\frac{1}{873}m^{-1}$ pour la nationale). Les conducteurs ont conduit une Chrysler Concorde fabriquée en 1996. 37 conducteurs, âgés de 18 à 74 ans, 19 femmes et 18 hommes, ont participé à l'expérience. La position du véhicule sur la voie a été mesurée via deux caméras vidéos montées à l'arrière du véhicule. Chaque caméra a suivi un des marquages latéraux. Les données ont été recueillies avec une fréquence de $30Hz$ puis filtrées et moyennées pour obtenir une mesure tous les $6.1m$.

Pour interpréter les résultats, chaque segment d'autoroute ou de route nationale a été analysé séparément. Les valeurs extrémales, les médianes et les moyennes de l'écart latéral ont été calculées. Ces valeurs se trouvent dans le Tableau 5.2 (voir Remarque 4.3.1, Partie II pour la convention des signes).

TAB. 5.2 – Valeurs minimales, médianes et maximales de l'écart latéral [Pom99].

	Ligne droite autoroute	Ligne droite nationale	Virage large autoroute	Virage large nationale	Virage serré autoroute	Virage serré nationale
médiane (m)	0	-0.3	-0.3	-0.05	-0.3	0.15
min (m)	-1.22	-0.61	-0.64	-0.36	-1.12	-0.85
max (m)	0.61	0.06	0.83	0.3	0.91	0.61

La différence la plus importante apparaît entre les comportements de suivi de voie sur autoroute et route nationale. Les conducteurs se permettent des dérives beaucoup plus importantes sur autoroutes. De plus, l'écart entre les valeurs minimales et maximales pour tous les segments d'autoroute montre de grandes variations de comportements de conduite entre les conducteurs. Le comportement en virage a été aussi inégal entre les conducteurs. Pour des virages larges à droite, que ce soit sur l'autoroute ou sur nationale, les conducteurs ont eu tendance à couper le virage à l'intérieur. Cependant, pour les virages serrés à gauche, la médiane montre une tendance de conduite à l'intérieur du virage sur route nationale et une conduite à l'extérieur sur l'autoroute.

Les sorties de voie involontaires

Une deuxième étude, qui nous a été utile pour spécifier les limites de la situation de « conduite normale », a été réalisée dans le cadre du projet national ARCOS [Bar02]. Le but était de construire une typologie des mécanismes accidentogènes pour les sorties de voie involontaires. L'événement initiateur de la situation d'accident a été analysé sur un échantillon de 115 accidents. À ce titre, nous pouvons citer : l'origine du déport, la contrôlabilité du véhicule lors de la sortie de voie, l'éventuelle réaction du conducteur et le retour ou non du véhicule dans sa voie.

Les résultats de ces études ont été utilisés comme suit : à partir de l'échantillon de départ, 50 accidents, hors agglomérations, ayant des scénarios qui s'approchent d'une situation de « conduite normale » avec des capacités de conduite du conducteur dégradées ont été retenus. Les variables de la dynamique du véhicule lors du premier déport constituent alors les états initiaux potentiels pour l'activation de l'assistance à la conduite.

Signalons que les auteurs de [Bar02] différencient l'événement initiateur de l'accident en distinguant le guidage sur la voie et la perte de contrôle du véhicule au sens dynamique (par exemple perte de contrôle en longitudinal due à un blocage des roues suite à un freinage). Il va de soi que seuls les accidents ayant pour origine un défaut de guidage sur la voie ont été retenus, les autres étant hors du champ de l'assistance développée dans cette thèse. Les capacités dégradées de conduite dans 54 accidents (dont 50 accidents se sont produits hors agglomérations) concernent : l'hypovigilance (9 cas), l'activité annexe (19 cas), le malaise (6 cas), l'alcool (6 cas), l'inattention (3 cas), l'erreur de suivi (3 cas), l'humeur (1 cas) et des causes inconnues (7 cas).

Le Tableau 5.3 donne une image synoptique des valeurs moyennes des variables d'intérêt et leurs écarts types. Nous pouvons admettre à partir de ces valeurs que l'angle de dérive au moment du déport reste inférieur à 3.5° ($0.061rad$) et que la vitesse en lacet ne dépasse pas en général $10^\circ/s$ ($0.174rad/s$). Rappelons que ces valeurs ne représentent que des ordres de grandeur d'une situation de « conduite normale ».

TAB. 5.3 – Sorties de voie involontaires (valeurs moyennes avec les écarts types à l'exponent).

Nombre d'accidents	Vitesse (km/h)	Accélération transversale (m/s^2)	Angle de dérive ($^\circ$)	Vitesse en lacet ($^\circ/s$)
8	$82^{\pm 24}$	$0.3^{\pm 0.3}$	$0.9^{\pm 1}$	$2.0^{\pm 3}$
2	$64^{\pm 12}$	$1.7^{\pm 1.8}$	$2.0^{\pm 1.3}$	$6.7^{\pm 3.7}$
15	$91^{\pm 12}$	$0.7^{\pm 0.6}$	$0.7^{\pm 0.9}$	$2.2^{\pm 3.5}$
25	$92^{\pm 18}$	$1.3^{\pm 0.9}$	$1.5^{\pm 1.3}$	$5.6^{\pm 3.4}$

Hypercube d'une situation de « conduite normale »

Pour les autres variables décrivant la dynamique du véhicule, par exemple l'angle de cap relatif, l'angle de braquage ou encore sa dérivée, il n'existe aucune étude pouvant donner des indications sur leurs valeurs nominales dans une situation de « conduite normale ». La seule solution de repli a été d'analyser les enregistrements effectués avec un véhicule instrumenté sur la piste d'essai de Satory dans des situations de suivi de voie. Les résultats montrent que l'angle de cap relatif reste faible, inférieur à 5° . C'est également le cas pour l'angle de braquage, qui demeure en dessous de 2° . La dérivée de l'angle de braquage est, quant à elle, supposée extrêmement faible au moment du déport, car la réaction du conducteur est supposée quasi inexistante.

Pour conclure cette analyse, la situation de « conduite normale » sera donc caractérisée une dynamique du véhicule bornée, les bornes étant notées de la manière suivante : $|\beta| \leq \beta^N$, $|r| \leq r^N$, $|\psi_L| \leq \psi_L^N$, $|y_L| \leq y_L^N$, $|\delta_f| \leq \delta_f^N$ et $|\dot{\delta}_f| \leq \dot{\delta}_f^N$. Les valeurs numériques des bornes peuvent être choisies en accord avec les valeurs discutées dans les scénarios d'étude décrits précédemment ; par exemple $\beta^N = 3.5^\circ$, $r^N = 10^\circ/s$, $\psi_L^N = 5^\circ$, $y_L^N = 0.5m$, $\delta_f^N = 2^\circ$ et $\dot{\delta}_f^N = 1^\circ/s$. Il va de soi que l'approche adoptée ici permet uniquement de fixer des bornes cohérentes aux différentes variables. Une étude statistique de caractérisation de la situation de « conduite normale » demeure, quoi qu'il en soit, nécessaire pour choisir au mieux ces valeurs. Notons que les algorithmes de

développement de l'assistance à la conduite reposent sur l'existence des telles bornes et non pas sur les valeurs numériques retenues. Les valeurs choisies présentent l'intérêt de nous permettre de conduire une première évaluation pratique de l'assistance. Cet aspect sera repris à différents moments de l'exposé.

Définition 5.1.3 (Hypercube de « conduite normale ») *Au cours de la situation de « conduite normale » l'état du système de l'équation (4.107) du Chapitre 4, Partie II, reste borné dans un ensemble polyédrique de la forme d'un hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$, défini par :*

$$x \in \mathcal{L}(Z^N) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : |Z^N x| \leq \mathbf{1}\}, \quad (5.1)$$

où $Z^N \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est une matrice diagonale de la forme suivante :

$$Z^N \triangleq \begin{pmatrix} (\beta^N)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r^N)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\psi_L^N)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (y_L^N)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta_f^N)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\dot{\delta}_f^N)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Polytope de situation de « conduite normale »

Dans cette section nous caractériserons la situation de « conduite normale » avec un attribut supplémentaire : la position sur la voie des roues avant du véhicule.

Pour commencer, nous reconsidérons les conditions des équations (4.93) du Chapitre 4, Partie II, pour que l'avant du véhicule reste à l'intérieur d'une zone de largeur $2d$ sur la voie (voir Figure 5.1). Cette fois-ci, nous utiliserons la description de l'état du système, du modèle « bicyclette » du véhicule sur la voie.

Définition 5.1.4 (Polyèdre d'une zone centrée sur la voie) *Les roues avant du véhicule se trouvent dans une zone de largeur $2d$ sur une voie de circulation de faible courbure $\rho_{ref} \cong 0$, si l'état x du système (4.107) du Chapitre 4, Partie II, se trouve à l'intérieur du polyèdre infini $\mathcal{L}(F)$, où*

$$x \in \mathcal{L}(F) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : |Fx| \leq \mathbf{1}\}, \quad \text{avec } F = \left(0, 0, \frac{2(l_f - l_s)}{2d - a}, \frac{2}{2d - a}, 0, 0\right). \quad (5.3)$$

Puisque les formules des coordonnées des roues avant pour une route sinueuse peuvent être approchées par les formules d'une route à faible courbure (voir Section 4.3.4 du Chapitre 4, Partie II), la condition de l'équation (5.3) sera utilisée dans les deux cas.

Du point de vue géométrique, la condition de l'équation (5.3) représente l'espace entre deux hyperplans parallèles. Autrement dit, la zone centrée sur la voie de largeur $2d$ correspond dans l'espace d'état à une région symétrique par rapport à l'origine comme cela apparaît sur la Figure 5.1 (b).

Nous supposerons que, durant la situation de « conduite normale », l'avant du véhicule, implicitement les deux roues avant, reste dans une zone de largeur $2d$ sur la voie. Encore une fois, la valeur du paramètre d dépend de la taille du véhicule, du conducteur et de son état. Elle doit être déterminée par des études statistiques. Néanmoins, nous avons constaté lors des essais avec le véhicule prototype, dont la longueur de l'essieu avant $a = 1.5m$, que pour une conduite au centre de la voie cette valeur reste inférieure à $d = 1.3m$.

En réunissant les conditions sur la dynamique du véhicule et sa position sur la voie, on aboutit finalement à un polytope de « conduite normale » (voir Fig. 5.2).

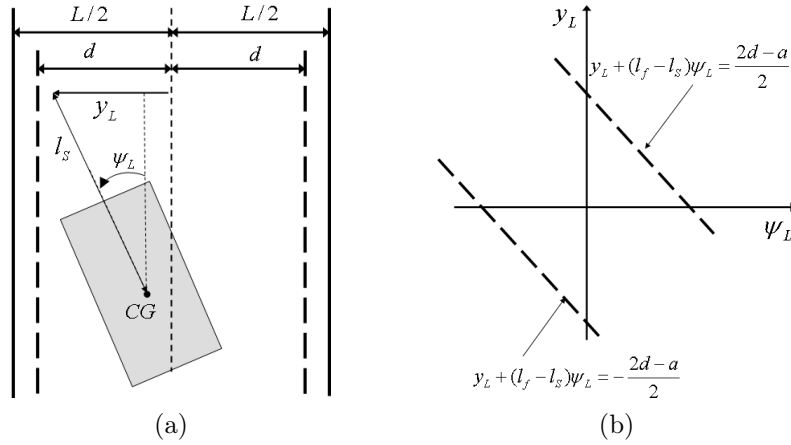


FIG. 5.1 – La zone centrale $\pm d$ représentée sur la voie (a) et dans l'espace d'état en deux dimensions ψ_L et y_L (b).

Définition 5.1.5 (Région polytopique de « conduite normale ») Pour une situation de « conduite normale » l'état du système (4.107) du Chapitre 4, Partie II, reste borné dans une région polyédrique de la forme d'un polytope, définie par :

$$x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F), \quad (5.4)$$

avec $\mathcal{L}(Z^N)$ défini dans l'équation (5.1) et $\mathcal{L}(F)$ dans l'équation (5.3).

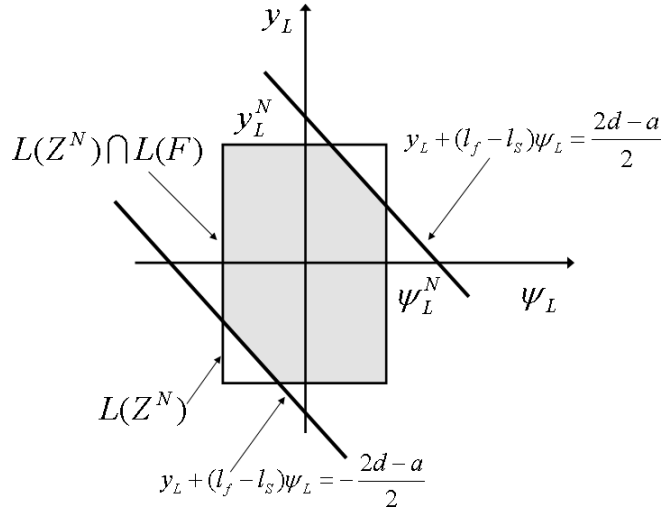


FIG. 5.2 – L'intersection de l'hypercube de « conduite normale » et du polyèdre d'une zone centrée sur la voie en deux dimensions ψ_L et y_L .

5.2 Automate hybride d'assistance à la conduite

Nous donnerons au début de cette section un aperçu de la démarche suivie pour la conception de l'assistance à la conduite et des hypothèses faites. Le véhicule, muni de l'assistance, sera alors

formalisé sous la forme d'un système hybride avec entrées et sorties. Quatre aspects fondamentaux seront abordés : l'évolution dynamique continue dans chaque état discret, les conditions logiques des transitions entre les états discrets, le cahier des charges pour la loi de commande automatique et la stabilité du système hybride. La discussion sur ces sujets restera au niveau qualitatif, car l'automate hybride sera défini tout au long de l'exposé par des lois de commande et des transitions concrètes, qui satisferont les lignes générales décrites dans ce chapitre.

5.2.1 Démarche et hypothèse

La réalisation d'assistances au maintien de voie pour les véhicules équipés d'une colonne de direction classique à liaison mécanique s'avère difficile en pratique. L'utilisation simultanée de la colonne de direction par le conducteur et par l'assistance peut conduire à des situations de conflits se traduisant par des sensations désagréables pour le conducteur. Par exemple, dans l'étude d'un tel système sur des sujets dans [Alk07], ceux-ci ont mentionné une sensation de vent latéral.

En supprimant la continuité mécanique entre les roues et le volant et en assurant au conducteur un retour haptique, une action simultanée du conducteur et de l'assistance est envisageable [Ros04]. Cependant, de nombreux aspects restent ouverts, comme par exemple la façon de traiter l'action du conducteur sur le volant pendant l'intervention de l'assistance, le retour de force à fournir pendant cette intervention et la stabilité du système [Swi06].

Dans ce contexte, nous proposons un contrôle alterné de la direction du véhicule entre le conducteur et l'assistance. L'assistance n'intervient que lorsque les capacités du conducteur sont réduites et qu'une sortie de voie est imminente. Elle prend alors totalement le contrôle de la direction et le véhicule passe en mode automatique. De même, elle est désactivée dès que le conducteur est apte à reprendre la conduite. La mise en œuvre de cette assistance a nécessité de répondre à deux questions primordiales :

1. Comment gérer l'interaction entre le conducteur et l'assistance qui s'active et se désactive ?
2. Quelle loi de contrôle automatique faut-il développer pour éviter les sorties de voie ?

L'adoption du formalisme des systèmes hybrides avec des entrées et des sorties permet de répondre à la première question. Ce formalisme offre la possibilité de modéliser et d'analyser des systèmes physiques caractérisés par des commutations et une évolution continue intermittente (véhicule contrôlé par le conducteur et véhicule contrôlé par l'assistance).

Néanmoins, ce formalisme nous a confronté à un aspect délicat : Comment assurer la stabilité du système commuté ? La solution retenue pour répondre à cette question fait appel aux ensembles invariants en exigeant que les commutations aient lieu à l'intérieur de ces ensembles. Ces ensembles garantissent en effet que toute trajectoire qui commence à l'intérieur d'un ensemble y reste durant toute son évolution. Les trajectoires du système hybride resteront donc bornées.

Bien que le conducteur représente une loi de commande pour ce le système véhicule, il est considéré dans le cadre de ce formalisme comme une entrée inconnue. Il est donc difficile, voir impossible de prouver l'existence d'ensembles invariants pour cette partie du système hybride. À ce stade, nous avons fait une hypothèse en partant des Définitions 5.1.1, 5.1.3 et 5.1.5.

Hypothèse 5.2.1 (« Conduite normale » lors de l'apparition des capacités dégradées)

Nous supposons que la diminution des capacités de conduite du conducteur intervient alors que le véhicule se trouve encore dans une situation de « conduite normale ». L'état du système à cet instant est par conséquent borné à l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$ ou à l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$.

Pour ce qui est de la loi de commande en mode assistance, celle-ci doit avant tout garantir des ensembles invariants convenables pendant son activation. La théorie de Lyapunov offre la possibilité de concevoir de façon simultanée des lois de commandes avec des ensembles invariants appropriés. Les exigences pour la loi de commande seront discutées en détail dans la Section 5.2.4.

Pour résumer, l'idée principale a consisté à synthétiser une loi de commande garantissant un ensemble invariant qui contient la région de « conduite normale ». Nous avons imposé ensuite que les commutations aient lieu dans la région de « conduite normale » et implicitement dans l'ensemble invariant construit. De cette façon, les trajectoires du système commuté restent bornées à l'ensemble invariant.

5.2.2 Définition de l'automate hybride

Afin de rendre l'assistance à la conduite proche d'une implantation pratique, nous avons introduit une entrée supplémentaire *Inhibée* et une variable d'état *Activée*, qui est commandée par cette entrée. *Inhibée* et *Activée* prennent les valeurs binaires $\{0, 1\}$, elles sont constantes et continues par morceaux. *Inhibée* est mise à un si le conducteur ne souhaite pas être assisté. Dans ce cas, l'état *Activée* = 0 reflète la non autorisation de l'assistance à la conduite. Sinon, *Inhibée* est mise à 0 et la variable *Activée* = 1 valide l'autorisation de l'assistance à la conduite.

Par la suite, nous intégrerons au vecteur des variables d'état du modèle véhicule (équations (4.107), Partie II) la variable d'état *Activée* : $\vartheta = [x^T, \text{Activée}]^T = [\beta, r, \psi_L, y_L, \delta_f, \dot{\delta}_f, \text{Activée}]^T$. Ainsi, la nouvelle description du système véhicule devient :

$$\dot{\vartheta} = \bar{A} \cdot \vartheta + \bar{B}_u \cdot (C_c + C_a) + \bar{B}_\rho \cdot \rho_{ref} \quad \text{où} \quad (5.5)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_u = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_\rho = \begin{pmatrix} B_\rho \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Le système hybride comporte trois systèmes continus dans le temps. Le premier système noté Σ_1 , équation (5.7), décrit le véhicule contrôlé par le conducteur alors que l'assistance est autorisée (*Activée* = 1). Le deuxième système, Σ_2 dans l'équation (5.8), décrit la dynamique du véhicule pendant l'intervention de l'assistance. Finalement, dans le système Σ_3 , équation (5.9), l'intervention de l'assistance n'est pas autorisée.

$$\Sigma_1 : \dot{\vartheta} = \bar{A} \cdot \vartheta + \bar{B}_u \cdot C_c + \bar{B}_\rho \cdot \rho_{ref}, \quad \text{Activée} = 1, \quad (5.7)$$

$$\Sigma_2 : \dot{\vartheta} = \bar{A} \cdot \vartheta + \bar{B}_u \cdot C_a + \bar{B}_\rho \cdot \rho_{ref}, \quad \text{Activée} = 1, \quad (5.8)$$

$$\Sigma_3 : \dot{\vartheta} = \bar{A} \cdot \vartheta + \bar{B}_u \cdot C_c + \bar{B}_\rho \cdot \rho_{ref}, \quad \text{Activée} = 0. \quad (5.9)$$

À tout instant, le système dynamique véhicule-conducteur-assistance a une description unique donnée par l'une des équations (5.7), (5.8) et (5.9). Les transitions entre les trois états discrets sont supposées instantanées et l'état du système véhicule x reste inchangé à l'issue des transitions. L'ensemble des trois états discrets Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 , des évolutions continues dans les trois états discrets et des transitions entre les états discrets forment un automate hybride (voir Fig. 5.3). Cet automate hybride présente deux entrées exogènes : le couple exercé par le conducteur sur le volant et l'entrée *Inhibée* qu'il positionne. L'état entier du système véhicule-conducteur-assistance est considéré comme la sortie du système. $\vartheta = [\beta, r, \psi_L, y_L, \delta_f, \dot{\delta}_f, \text{Activée}]^T$.

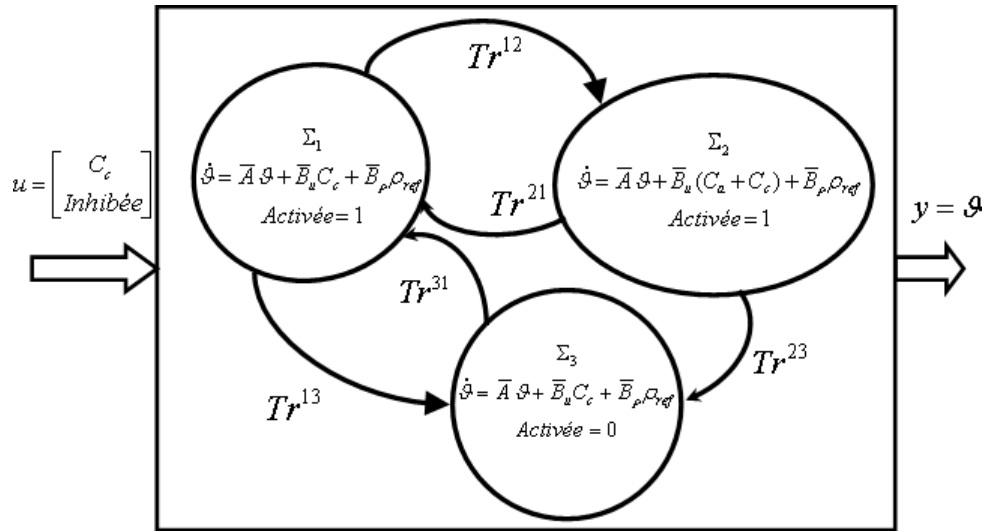


FIG. 5.3 – Système hybride.

5.2.3 Transitions du système commuté

Les transitions entre les trois états discrets dépendent de deux facteurs : la capacité de conduite du conducteur et le risque de sortir de voie. Ces transitions sont notées T_r^{12} , T_r^{21} , T_r^{23} , T_r^{13} et T_r^{31} (Fig. 5.3). Les conditions associées seront d'abord exposées de manière générique. Elles seront précisées au cours des chapitres suivants, en fonction de la façon de prendre en compte le risque de sortie de voie.

La transition T_r^{12} est franchie si les trois conditions suivantes sont vraies : les capacités de conduite du conducteur sont jugées dégradées alors que le véhicule est dans une « conduite normale », le risque de sortie de voie est imminent et l'entrée *Inhibée* est à 0.

La transition T_r^{21} est franchie dès que les conditions suivantes sont vérifiées : l'activité du conducteur est jugée suffisante alors que le véhicule se trouve à nouveau dans une situation de « conduite normale » la désactivation de l'assistance n'est pas exigée par une situation d'urgence ou par l'entrée *Inhibée* mise à 1.

La transition T_r^{23} est franchie dans les situations d'urgence lorsque, par exemple, le conducteur exerce un fort couple sur le volant, ou encore, lorsqu'il souhaite la désactivation totale de l'assistance en mettant *Inhibée* à 1. Après cette transition, l'assistance n'est plus autorisée afin de laisser la liberté de manœuvre au conducteur, en conséquence, la variable d'état *Activée* est mise à zéro.

Les transitions T_r^{13} et T_r^{31} décrivent l'autorisation et l'interdiction de l'assistance à la conduite (*Inhibée* = 0, *Inhibée* = 1).

5.2.4 Cahier des charges pour la loi de commande

Nous aborderons dans les paragraphes suivants le cahier des charges de la loi d'assistance active dans l'état Σ_2 (voir Fig. 5.3). Nous rappelons que son objectif principal est de prendre le relais du conducteur afin d'éviter la sortie de voie. Elle assure alors la fonction de suivi de voie automatique jusqu'au moment de la reprise en main par celui-ci.

La loi de commande doit répondre à deux types d'exigences, celles associées à l'existence de commutations et celles propres à l'état discret Σ_2 et portant sur l'évolution dynamique du

système véhicule contrôlé. Plus précisément :

1. Pour les exigences portant sur l'existence des commutations.
 - (a) La loi de commande doit garantir au moins un ensemble invariant qui contient la région de « conduite normale ». Ceci permettra de maintenir les trajectoires du système hybride bornées.
 - (b) Le laps de temps pendant lequel l'état du système contrôlé se trouve à l'extérieur de la région de « conduite normale » doit être le plus court possible. Cette exigence minimise la durée durant laquelle le conducteur ne peut reprendre le contrôle du véhicule autrement que par un couple fort exercé sur le volant, ou un mettant *Inhibée* à 1, ce qui entraîne une invalidation de l'assistance.
2. Pour celles en lien avec l'évolution de la dynamique du véhicule contrôlé.

(a) La baisse d'attention du conducteur n'est pas seulement momentanée, elle peut durer quelques secondes ; une loi de commande en boucle fermée est donc nécessaire. Cette loi de commande doit ramener le véhicule vers le centre de la voie et maintenir cette position jusqu'à la reprise en main par le conducteur. La trajectoire du véhicule contrôlé doit donc être asymptotiquement stable.

(b) Outre les performances de suivi de voie, la commande doit assurer un bon niveau de confort et de sécurité pendant toute la durée de l'activation. Ces nouvelles exigences sont traduisibles sur l'état du véhicule qui doit rester confiné à l'intérieur de bornes prédéfinies. À titre d'exemple, [Li07] donne les recommandations suivantes pour une loi de commande synthétisée à partir du modèle « bicyclette » : l'angle de braquage doit rester inférieur à $|\delta_f| \leq 40^\circ$ avec une dérivée $|\dot{\delta}_f| \leq 28^\circ/s$. De plus, l'accélération latérale doit rester inférieure à $a_L = 2m/s^2$ ou à $a_L = 4m/s^2$ pour un cas extrême. Eu égard à la vitesse longitudinale du véhicule, ces valeurs donnent des indices sur les valeurs maximales de la vitesse de rotation en lacet via l'approximation $a_L \cong v \cdot r$. Par exemple, pour $v = 18m/s$ et $a_L = 4m/s^2$, on aboutit à $r = 12.73^\circ/s$.

De même les limites de confort et de sécurité imposent que l'angle de dérive β doit correspondre à des valeurs d'angles de dérive des pneumatiques dans le domaine linéaire des forces de contact (voir équation (4.48) du Chapitre 4, Partie II). Par exemple, pour $\alpha_f = 1^\circ$, $r = 12.73^\circ/s$, $\delta_f = 10^\circ$ et $v = 18m/s$ on obtient $\beta \cong 8^\circ$.

Les valeurs maximales des variables de positionnement par rapport à l'axe de la voie ψ_L et y_L sont liées à l'excursion latérale maximale autorisée du véhicule. En considérant d'une part la Définition 5.1.4 du polyèdre associé à une zone centrée sur la voie, et en fixant d'autre part un dépassement maximal des roues avant sur la voie, par exemple $d = L/2$, l'ensemble des valeurs admissibles pour ψ_L et y_L , tel que $x \in \mathcal{L}(F(d))$ sont finalement obtenues.

Les valeurs maximales pour les variables d'état sont notées β^M , r^M , ψ_L^M , y_L^M , δ_f^M et $\dot{\delta}_f^M$. On définit alors une région de sécurité pour l'état du véhicule contrôlé, similaire à l'hypercube de « conduite normale » :

Définition 5.2.1 (Région hypercube de sécurité)

$$x \in \mathcal{L}(Z^M) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : |Z^M x| \leq \mathbf{1}\}, \quad (5.10)$$

où $Z^M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est une matrice diagonale de la forme suivante :

$$Z^M \triangleq \begin{pmatrix} (\beta^M)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r^M)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\psi_L^M)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (y_L^M)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta_f^M)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\dot{\delta}_f^M)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Évidemment, l'ensemble $\mathcal{L}(Z^M)$ est plus large que l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$ et inclut ce dernier. La loi de commande doit être conçue de sorte que l'état x du système reste à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{L}(Z^M)$ pour un état initial appartenant à $\mathcal{L}(Z^N)$. Mentionnons encore une fois que les valeurs précises des bornes pour $\mathcal{L}(Z^M)$ ne sont utiles que dans la phase de calcul numérique et d'implantation de la loi de commande. Pour la phase de développement, seule la possibilité de prendre en compte de telles bornes est nécessaire.

- (c) La grandeur de commande est un couple d'assistance fourni par un moteur électrique sur la colonne de direction. Ce couple est limité à $C^{max} = 40Nm$ de par la puissance du moteur. En conséquence, le couple d'assistance doit rester inférieur à cette valeur pendant toute la durée d'activation de l'assistance.

Le principe de fonctionnement de l'assistance peut être finalement résumé comme suit : la loi de commande s'active pour une perte d'attention du conducteur qui a lieu à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$, elle contrôle la trajectoire du véhicule vers le centre de la voie sans dépasser l'ensemble $\mathcal{L}(Z^M)$, tout en respectant les contraintes sur la commande.

La solution adoptée se fonde sur la synthèse de lois de commande qui assurent des ensembles invariants contenant l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$ et contenus dans l'ensemble $\mathcal{L}(Z^M)$. Des optimisations supplémentaires, nécessaires d'une part pour rapprocher les ensembles invariants de l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$ et d'autre part pour respecter la limitation sur l'entrée de commande ont été mise en place. Le rapprochement des ensembles invariants de l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$ sert à minimiser le dépassement et le temps passé à l'extérieur de $\mathcal{L}(Z^N)$. Les lois de commande synthétisées seront exposées dans les Chapitres 6, 7 et 8 Partie III.

5.2.5 Stabilité de l'automate hybride

L'automate hybride d'assistance présente des entrées : le couple exercé par le conducteur sur le volant et la variable discrète de permission de l'activation de l'assistance *Inhibée*. L'état du système hybride, composé de l'état du véhicule et de la variable discrète d'activation *Activée*, peut être considéré comme la sortie. La stabilité de ce type de système a été peu traitée dans la littérature spécialisée. [Vu07] a abordé ce sujet pour des systèmes commutés, qui représentent une sous-classe des systèmes hybrides, pour lesquelles les commutations sont exclusivement faites en fonction des variables d'état (voir Annexe A, Définition A.1.1 [Vu07], [Son95]). [Vu07] a démontré qu'un système commuté dont tous les états discrets sont caractérisés par une stabilité « entrée bornée - états bornés » est globalement stable selon la définition « entrée bornée - états bornés », si le temps passé dans chaque état discret est suffisamment long (voir l'Annexe A.2.1 pour la définition de la stabilité « entrée bornée - états bornés »). Ces résultats ne sont pas applicables dans notre cas, car nous avons à étudier un système hybride dont les transitions dépendent également des entrées. De plus, nous ne pouvons pas exiger qu'un état discret soit gardé pendant une période de temps prédéfinie.

Néanmoins, la stabilité de l'automate hybride peut être analysée en supposant les entrées bornées et en étudiant si les sorties sont également bornées. Dans notre cas, les entrées représentent les commandes conducteur et les sorties sont identiques avec l'état du système. Ces entrées peuvent provoquer la divergence de la sortie dans un des états discrets Σ_1 et Σ_2 , ou lors des transitions entre les états Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 .

Sortie bornée dans les états discrets

Nous supposons l'existence d'une loi de commande asymptotiquement stable en Σ_2 . L'automate hybride décrit précédemment peut demeurer un temps infini dans un des états discrets Σ_1 et Σ_3 . Le couple conducteur est l'entrée de commande dans ces états.

Le système véhicule « dérive - lacet » (équations (4.63) Partie II) est asymptotiquement stable et satisfait le critère de stabilité « entrée bornée - sortie bornée », si $c_r l_r > c_f l_f$ [Bag01]. Cette condition est satisfaite sur la plupart des véhicules d'aujourd'hui. Cependant, le système véhicule lié à la route (équation (4.107) Partie II) a deux pôles à l'origine, sa stabilité dépend alors de l'entrée de commande. Autrement dit, l'écart latéral peut tendre vers l'infini si, par exemple, le conducteur n'intervient pas.

De plus, le modèle (équation (4.107) Partie II) n'est valable que dans le domaine linéaire des forces de contact pneumatique-chaussée. En dépassant ces limites, les forces latérales de contact pneumatique-chaussée risquent de se saturer et d'entraîner un plus fort glissement latéral du véhicule. Afin d'écartier cette possibilité et de garder une dynamique bornée du système véhicule lié à la voie, nous supposerons que le conducteur n'essaie pas d'entraîner une instabilité du véhicule dans les états Σ_1 et Σ_3 . Cette hypothèse est déjà contenue dans l'Hypothèse 5.2.1 d'une « conduite normale ». Nous ajouterons une hypothèse supplémentaire qui suppose que le conducteur a en général une conduite apaisée et qu'il exécute toutes les manœuvres nécessaires à la conduite, par exemple le dépassement ou le changement de direction, sur une voie de circulation ou en restant proche de celle-ci.

Hypothèse 5.2.2 (Conduite rationnelle) *Nous supposerons dans ce travail que le conducteur n'engendre pas de manière volontaire ou involontaire d'instabilité dynamique du véhicule et qu'il respecte la réglementation.*

Cette hypothèse peut se traduire par des bornes sur le couple exercé sur le volant mais aussi par des bornes sur la dynamique du véhicule et sur sa position dans la voie. De façon analogue aux définitions de la région de sécurité hypercube et de la région de « conduite normale », nous définissons un hypercube qui caractérise cette situation de conduite :

Définition 5.2.2 (Région hypercube de conduite rationnelle)

$$x \in \mathcal{L}(Z^A) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : |Z^A x| \leq \mathbf{1}\}, \quad (5.12)$$

où $Z^A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est une matrice diagonale de la forme :

$$Z^A \triangleq \begin{pmatrix} (\beta^A)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r^A)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\psi_L^A)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (y_L^A)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta_f^A)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\dot{\delta}_f^A)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Ce nouvel hypercube $\mathcal{L}(Z^A)$ est supposé assez étendu de sorte qu'il inclut les valeurs maximales requises pendant l'intervention du contrôle automatique : $\mathcal{L}(Z^M) \subset \mathcal{L}(Z^A)$.

En conclusion, en faisant l'Hypothèse 5.2.2 d'une conduite rationnelle et en supposant l'existence d'une loi de commande asymptotiquement stable en Σ_2 , l'automate hybride est stable au sens « entrée bornée - sortie bornée » dans chaque état discret.

Sortie bornée en dépit des commutations

Les transitions entre tous les états sont déterminées par le couple conducteur et la variable *Inhibée*. Pour un état initial en Σ_1 , les trajectoires cycliques complètes qui ne sont pas des préfixes d'autres trajectoires, sont (Σ_1, Σ_3) , (Σ_1, Σ_2) et $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$. Chacune de ces trajectoires sera étudiée pour examiner la possibilité de l'existence de sorties non-bornées pour des entrées bornées.

On remarque immédiatement que les transitions entre les états Σ_1 et Σ_3 ne peuvent pas générer de sorties non-bornées, car seule la variable virtuelle *Activée* diffère entre les deux états.

Considérons maintenant le domaine de fonctionnement nominal de l'assistance à la conduite, entre les états Σ_1 et Σ_2 (voir Fig. 5.4). Ce domaine est défini comme suit :

Définition 5.2.3 (Domaine de fonctionnement nominal de l'assistance) *Le domaine de fonctionnement nominale de l'assistance contient les états Σ_1 et Σ_2 et les transitions Tr^{12} et Tr^{21} .*

Ce domaine de fonctionnement s'opère sous les hypothèses suivantes :

1. Le conducteur autorise en permanence l'assistance à la conduite (*Inhibée* = 0).
2. Le véhicule se trouve dans une situation de « conduite normale » ($x \in \mathcal{L}(Z^N)$ où $x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$) avant le moment de la dégradation des capacités de conduite.
3. Aucune situation d'urgence pouvant entraîner la désactivation totale de l'assistance par un couple fort du conducteur sur le volant ne va survenir. Dans tous les cas, la situation de conduite demeure dans l'hypercube de conduite rationnelle.

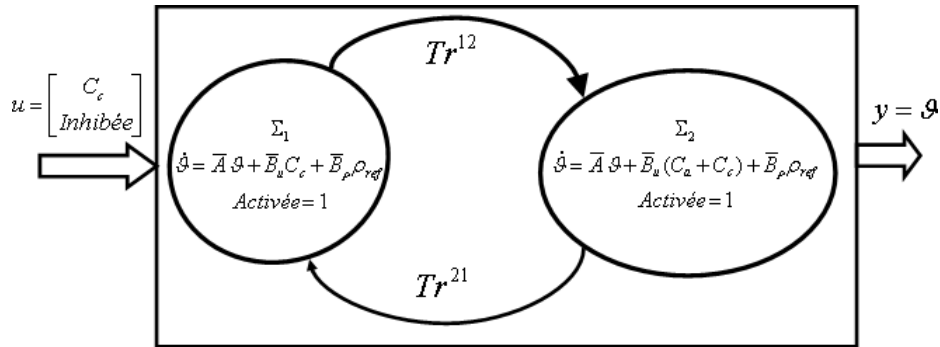


FIG. 5.4 – Système hybride réduit aux états Σ_1 et Σ_2 .

Pour ce domaine de fonctionnement, nous pouvons affirmer que les trajectoires du système hybride ne dépasseront pas l'hypercube de conduite rationnelle $\mathcal{L}(Z^A)$ pour toutes les commutations possibles entre les états Σ_1 et Σ_2 . En effet, en notant par \mathcal{S} l'ensemble invariant garanti par la loi de commande automatique en Σ_2 nous obtenons les inclusions suivantes (voir Fig. 5.5) :

$$\mathcal{L}(Z^N) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}(Z^M) \subset \mathcal{L}(Z^A). \quad (5.14)$$

Les mêmes inférences restent valables pour la région de « conduite normale » définie par $x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$.

Chaque trajectoire du système hybride, contrôlée par le conducteur, commençant dans $\mathcal{L}(Z^A)$, pour un état initial en Σ_1 , évolue, par hypothèse, jusqu'à ce qu'elle arrive dans l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$. Si à cet instant, la loi de commande automatique reprend le contrôle, elle gardera cette trajectoire à l'intérieur de l'ensemble invariant \mathcal{S} jusqu'au moment de la reprise en main par le conducteur. De plus, la reprise par le conducteur ne peut avoir lieu qu'à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$. Les commutations entre les états Σ_1 et Σ_2 garderont en conséquence la dynamique du véhicule bornée. Ce principe de trajectoire débutant dans un ensemble invariant au moment d'une transition est le fondement de la conception de cette assistance à la conduite. Il restera valable pour toutes les lois de commande et pour toutes les transitions qui seront définies par la suite.

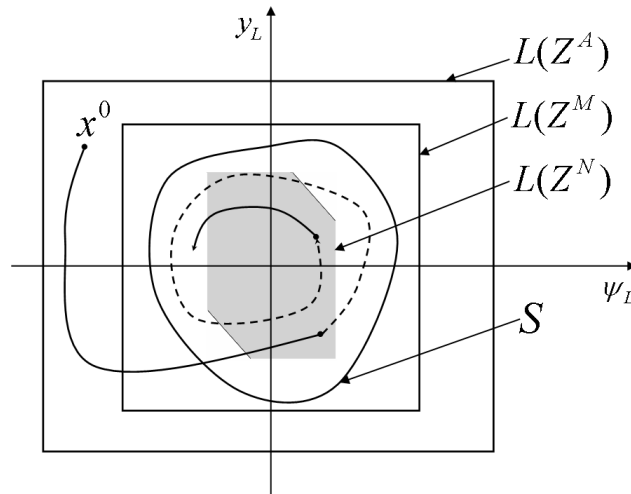


FIG. 5.5 – Commutation entre les états Σ_1 et Σ_2 . La trajectoire du véhicule contrôlé par son conducteur est représentée en ligne continue. La trajectoire du véhicule contrôlé par la loi de commande est marquée en ligne discontinue.

La dernière série de transitions T_r^{12} , T_r^{23} et T_r^{31} entre les états Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 est maintenant étudiée (voir Fig. 5.6).

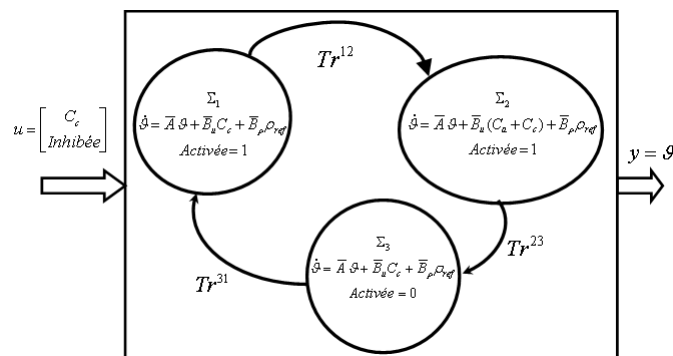


FIG. 5.6 – Système hybride réduit aux transitions T_r^{12} , T_r^{23} et T_r^{31} .

Sur la Figure 5.7, une trajectoire commence en Σ_1 , elle est suivie d'une transition vers la loi

de commande automatique en Σ_2 et se poursuit par la transition vers l'état Σ_3 . Le conducteur intervient en Σ_2 pendant le contrôle automatique, avant que l'état du système soit reconduit en $\mathcal{L}(Z^N)$, pour par exemple éviter un obstacle, comme peuvent le suggérer les augmentations de l'angle de cap relatif et de l'écart latéral. La trajectoire du système se trouve au moment de la reprise à l'intérieur de l'ensemble invariant \mathcal{S} . Le conducteur reprend le contrôle du véhicule soit par un couple fort sur le volant, soit en mettant l'entrée *Inhibée* sur 1. Il désactive de ce fait totalement l'assistance à la conduite (*Activée* = 0). Pour autoriser à nouveau l'assistance et pouvoir recommencer le cycle $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ il doit remettre l'entrée *Inhibée* sur 0. À tout moment de ce cycle, la trajectoire du système hybride reste soit dans l'ensemble $L(Z^A)$, pendant le contrôle du conducteur, ou encore dans l'ensemble \mathcal{S} pendant le contrôle automatique.

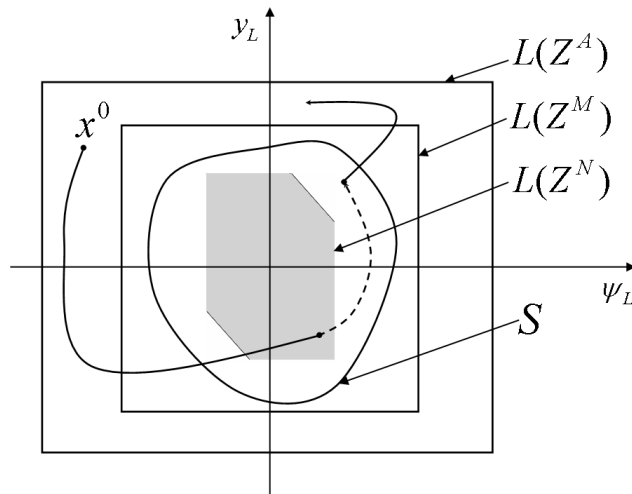


FIG. 5.7 – Commutation entre les états Σ_1, Σ_2 et Σ_3 . La trajectoire du véhicule contrôlé par son conducteur est représentée en ligne continue. La trajectoire du véhicule contrôlé par la loi de commande est marquée en ligne discontinue.

Les quelques analyses qualitatives présentées dans cette section permettent de conclure que pour une situation de conduite rationnelle, une loi de commande automatique qui satisfait les exigences du cahier des charges permet d'assurer que l'état du système hybride reste borné pour toutes les transitions du système et toutes les valeurs des entrées.

Bibliographie

- [Alk07] T. Alkim, G. Bootsma et P. Looman *Roads to the future, The Assisted Driver*. Rapport final de projet « The Assisted Driver » publié par Ministère de Transport, Travaux Publics et Management de l'Eau, Rijkswaterstaat, 2007.
- [Bag01] V. B. Baghdassarians *Commandes robustes pour le contrôle latéral d'un véhicule routier*. Thèse de doctorat de l'Université d'Evry Val d'Essonne, 2001.
- [Bar02] F. Bar et Y. Page Les sorties de voie involontaires. Rapport ARCOS, Paris CEESAR, 2002.
- [Bul05] D. Bullock et J. Zelek *Towards real-time 3-D monocular visual tracking of human limbs in unconstrained environments*. Real-Time Imaging, Vol. 11, pp. 323-353, 2005.
- [Kni95] R. R. Knipling et J.-S. Wang *Revised estimates of the U. S. drowsy driver crash problem size based on general estimates system case reviews*. Proceeding of the Association for the Advancement of Automotive Medicine, Chicago, Illinois, pp. 451-466, 1995.
- [Li07] L. Li et F.-Y. Wang *Advanced Motion Control and Sensing for Intelligent Vehicles*. Springer Verlag, New York, 2007.
- [Pil99] T. Pilutti et A. G. Ulsoy *Identification of driver state for lane keeping tasks*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans, Vol. 29, No. 5, pp. 486-502, 1999.
- [Poh03] J. Pohl et J. Ekmark *Development of a haptic intervention system for unintended lane departure*. SAE International, pp. , 2003.
- [Pom99] D. Pomerleau, T. Jochem, C. Thorpe, P. Batavia, D. Pape, J. Hadden, N. McMillan, N. Brown et J. Everson *Run-of-road collision avoidance using IVHS countermeasures*. U.S. Department of Transportation National Highway Traffic Safety Administration, Technical Report DOT HS 809 170, 1999.
- [Ros04] E. J. Rossetter, J. P. Switkes et J. C. Gerdes, *Experimental validation of the potential field lanekeeping system*. Int. Journal of Automotive Technology, vol. 5, pp. 95-108, Juin 2004.
- [Son95] E. D. Sontag *On the input-to-state stability property*. European Journal of Control, Vol.1, pp. 24-36, 1995.
- [Swi06] J. P. Switkes, E. J. Rossetter, I. A. Coe et J. C. Gerdes *Handwheel force feedback for lanekeeping assistance : Combined dynamics and stability*. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Trans. of the ASME, vol. 128, pp. 532-542, Septembre 2006.
- [Tac96] D. Tack et I. Craw *Tracking and measuring drivers' eyes*. Image and Vision Computing, Vol. 14, pp. 541-547, 1996.

- [TRF06] National Highway Traffic Safety Administration *Traffic Safety Facts 2006 : A compilation of motor vehicle crash data from the fatality analysis reporting system and the general estimates system*. National Center for Statistics and Analysis U.S. Department of Transportation Washington, DC 20590, Rapport DOT HS 810 818, 2006.
- [Vu07] L. Vu, D. Chatterjee et D. Liberzon *Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control*. Automatica Vol. 43, pp. 639-646, 2007.

6

Assistance à la conduite pour des routes à faibles courbures

Sommaire

6.1 Synthèse de la loi de commande	164
6.1.1 Fonction de Lyapunov quadratique pour une région hypercube de « conduite normale » : 1ère loi de commande	164
6.1.2 Fonction de Lyapunov composée pour une région hypercube de « conduite normale » : 2ème loi de commande	168
6.1.3 Fonction de Lyapunov quadratique pour une région polytopique de « conduite normale » : 3ème loi de commande	172
6.1.4 Ensemble invariant et déplacement latéral des roues avant du véhicule	175
6.2 Stratégies de commutation	178
6.2.1 Stratégie de commutation à partir du risque instantané de sortie de voie	179
6.2.2 Stratégie de commutation à partir du risque instantané et du risque évalué par l'assistance	180
6.2.3 Stratégies de commutation : avantages et inconvénients	181
6.3 Implantation pratique et résultats	183
6.3.1 Implantation de la 1ère loi d'assistance	183
6.3.2 Implantation de la 2ème loi d'assistance	185
6.3.3 Implantation de la 3ème loi d'assistance	201
6.4 Conclusions	215

Ce chapitre est dédié à la conception et à l'implantation pratique de l'assistance à la conduite pour le cas des routes à faibles courbures. Seul le domaine de fonctionnement nominal de l'assistance sera traité. On se basera pour cela sur le système hybride défini dans le Chapitre 5, Section 5.2, qui formalise son comportement. Ce domaine de fonctionnement contient les états Σ_1 et Σ_2 et les transitions entre eux.

La restriction au cas nominal est volontaire afin de donner précisément l'aspect quantitatif des éléments spécifiés de manière qualitative dans le chapitre précédent. Ces éléments concernent les conditions d'activation et de désactivation de l'assistance ainsi que les conditions générales de fonctionnement de la loi de commande qui assure le contrôle automatique du véhicule dans l'état Σ_2 .

6.1 Synthèse de la loi de commande

La loi de commande doit respecter les spécifications du cahier des charges défini dans le Chapitre 5, Section 5.2.4. Elle doit notamment assurer un ensemble invariant contenant la région de « conduite normale » et qui soit lui-même inclus dans la région de sécurité. Cette loi de commande doit de plus minimiser, durant toute la durée de la correction, l'excursion des trajectoires en dehors de la région de « conduite normale » et ce avec, selon le cas, un couple d'assistance ou un angle de braquage inférieurs aux limites du moteur électrique monté sur la colonne de direction, ou bien à l'angle de braquage maximal des roues directrices.

Les trois lois de commande qui seront proposées dans cette section reposent sur la théorie de Lyapunov et satisfont toutes les spécifications énoncées ci-dessus (voir Tableau 6.1). La première et la troisième lois de commande, dans l'ordre de présentation du Tableau 6.1, utilisent une fonction de Lyapunov quadratique tandis qu'une fonction de Lyapunov composée est utilisée pour la deuxième. La région de « conduite normale » est prise en compte dans la synthèse des deux premières commandes sous la forme d'un hypercube, selon la Définition 5.1.3 du Chapitre 5, Section 5.1.2. Dans le cas de la troisième loi celle-ci est modélisée sous la forme d'un polytope, issu de la définition 5.1.5 du Chapitre 5, Section 5.1.2.

La première et la troisième loi de commande ont été synthétisées pour une entrée de commande en couple. Le système véhicule de synthèse est alors celui de l'équation (4.107) du Chapitre 4, Partie II pour $\rho_{ref} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u(C_a + C_c), \\ z = x. \end{cases} \quad (6.1)$$

La deuxième loi de commande quant à elle a été synthétisée pour une entrée de commande en angle. Le modèle véhicule dans ce cas est décrit par l'équation (4.80) du Chapitre 4, Partie II pour $\rho_{ref} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}^v = A^v x^v + B_u^v \delta_f, \\ z^v = x^v. \end{cases} \quad (6.2)$$

TAB. 6.1 – Lois de commande synthétisées pour une route à faible courbure.

	Système véhicule (équation)	Région de « conduite normale »	Fonction de Lyapunov
1ère loi de commande	(6.1)	Définition 5.1.3	quadratique
2ème loi de commande	(6.2)	Définition 5.1.3	composée
3ème loi de commande	(6.1)	Définition 5.1.5	quadratique

6.1.1 Fonction de Lyapunov quadratique pour une région hypercube de « conduite normale » : 1ère loi de commande

Dans cette section nous considérerons une région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ de la forme d'un hypercube (Définition 5.1.3 du Chapitre 5). Le système dynamique de l'équation (6.1) sera utilisé pour la synthèse. La loi de commande en couple retenue est de type retour d'état statique associé à un terme de compensation du couple conducteur : $C_a = Kx - C_c$.

Remarque 6.1.1 Si le couple $|Kx|$ reste inférieur à $C^{max} - \sigma_2$, alors l'inégalité $|C_a| \leq C^{max}$ sera toujours vérifiée, car dans l'état Σ_2 de l'automate hybride défini dans le Chapitre 5, Section 5.2, le couple exercé par le conducteur sur le volant reste inférieur à σ_2 en valeur absolue ($|C_c| \leq \sigma_2$).

Le système en boucle fermée s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K)x, \\ z = x. \end{cases} \quad (6.3)$$

La synthèse du retour d'état sera conduite de telle sorte que la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$, avec P une matrice symétrique définie positive soit une fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée, donné par l'équation (6.3). Les différentes inclusions de régions seront prises en compte en recherchant une fonction de Lyapunov dont la courbe de niveau ellipsoïdale $S_V(1) = \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P x \leq 1\}$ est située à l'extérieur, mais la plus proche possible, de l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$ et simultanément située à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{L}(Z^M)$. Cet objectif a été atteint par l'algorithme suivant en 6 étapes :

Algorithme 6.1.1 (Synthèse de la 1ère loi de commande)

1. Recherche simultanée de K et d'une fonction de Lyapunov optimale $x^T P_{opt} x$

Dans un premier temps, la détermination du vecteur de retour d'état K et de la fonction de Lyapunov quadratique dont la courbe de niveau 1 est le plus petit ellipsoïde contenant l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ sont conduites simultanément. Ce plus petit ellipsoïde est symétrique par rapport aux axes. Notons P_{opt} la matrice diagonale caractérisant cet ellipsoïde. Cette recherche de K et de P_{opt} a été formulée comme un problème d'optimisation convexe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && h(l) \\ & \text{contraint par} && (A + B_u K)^T P_{opt} + P_{opt} (A + B_u K) \prec 0 \\ & && 1 - (z_i^N)^T P_{opt} z_i^N \geq 0, \quad i = 1, \dots, \frac{2^6}{2} = 2^5, \end{aligned} \quad (6.4)$$

où $h(l) = \text{trace}(Q_{opt})$ ou $h(l) = \lambda_{max}(Q_{opt})$ ou $h(l) = \log \det(Q_{opt})$, $Q_{opt} = P_{opt}^{-1}$ et z_i^N sont les sommets de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$. $\mathcal{L}(Z^N)$ a 2^6 sommets. L'hypercube et l'ellipsoïde étant tous deux symétriques par rapport à l'origine, il suffit de considérer uniquement la moitié des sommets.

En introduisant le changement de variable $Y = K Q_{opt}$ dans la première contrainte et en appliquant le Lemme de Schur dans la deuxième, on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && h(l) \\ & \text{contraint par} && A Q_{opt} + Q_{opt} A^T + Y^T B_u^T + B_u Y \prec 0 \\ & && \begin{pmatrix} 1 & (z_i^N)^T \\ z_i^N & Q_{opt} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, \frac{2^6}{2} = 2^5. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ce problème s'est révélé infaisable pour une matrice P_{opt} diagonale. Pour le contourner, une matrice P_{opt} a pu être calculée par la résolution du même problème d'optimisation

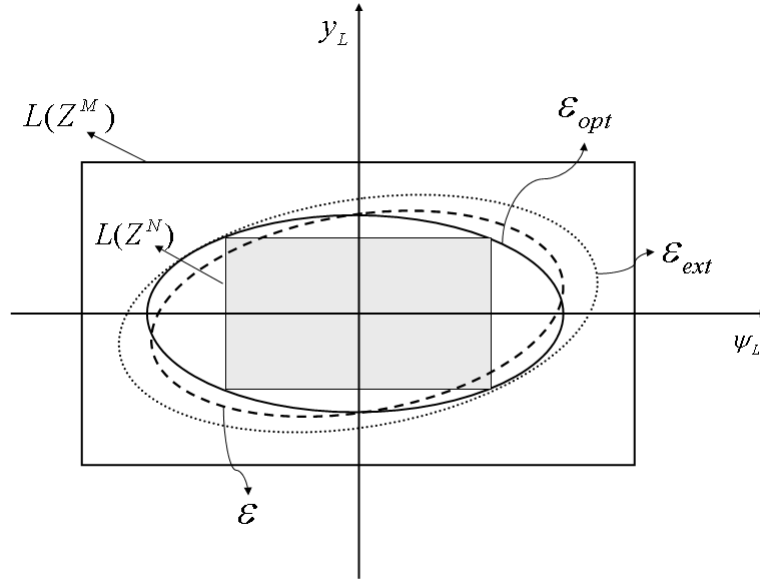


FIG. 6.1 – La région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$, la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ et les ensembles ellipsoïdaux invariants $\varepsilon(P)$, $\varepsilon_{opt}(P_{opt})$ et $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{v_{ext}}P)$ représentés en deux dimensions, ψ_L et y_L .

convexe, dont on exclut la première contrainte. Cette matrice permet de définir l'ellipsoïde $\varepsilon_{opt}(P_{opt})$ par (voir Fig. 6.1) :

$$\varepsilon_{opt}(P_{opt}) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P_{opt} x \leq 1\}. \quad (6.6)$$

2. Choix de K

Dans un deuxième temps, le vecteur de retour d'état K a été calculé par une méthode de placement de pôles du système en boucle fermée. Le choix des pôles a été arrêté de telle sorte que le couple d'assistance demeure significativement inférieur au seuil $C^{max} - \sigma_2$ lorsque le système est à l'intérieur de la région de « conduite normale ».

3. Calcul de la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$

L'idée est maintenant d'associer au système en boucle fermée (6.3) une fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, $P = P^T$, $P \succ 0$, qui ait un ensemble invariant $\mathcal{S}_V(1)$ très proche de ε_{opt} . L'ellipsoïde $\varepsilon(P)$, identique à l'ensemble invariant $\mathcal{S}_V(1)$, est défini par (voir Fig. 6.1) :

$$\varepsilon(P) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P x \leq 1\}. \quad (6.7)$$

La détermination de cette fonction de Lyapunov a été formulée sous la forme d'un problème d'optimisation LMI avec une fonction de coût linéaire. En définissant $Q = P^{-1}$ et $H = Q_{opt} - Q$, la somme des carrés des différences de Q_{opt} et Q a pu être exprimée en utilisant la trace de la matrice $H^T H$:

$$\sum_{i=1, j=1}^6 (q_{opt,ij} - q_{ij})^2 = \text{trace}(H^T H), \quad (6.8)$$

où $q_{opt,ij}$ et q_{ij} sont des éléments des matrices Q_{opt} et Q .

Le problème d'optimisation qui permet le calcul de la matrice H et donc de la matrice Q s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && \gamma \\
 & \text{contraint par} && \text{trace}(H^T H) \prec \gamma, \\
 & && H \prec Q_{opt}, \\
 & && Q_{opt}(A^T + K^T B_u^T) + (A + B_u K)Q_{opt} \prec H(A^T + K^T B_u^T) + (A + B_u K)H.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

En utilisant le Lemme de Schur, le problème d'optimisation (6.9) devient :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && \gamma \\
 & \text{contraint par} && \begin{pmatrix} \gamma & (HU^1)^T & \dots & (HU^6)^T \\ HU^1 & & & \\ \vdots & & I_{36} & \\ HU^6 & & & \end{pmatrix} \succ 0, \\
 & && H \prec Q_{opt},
 \end{aligned}$$

$$Q_{opt}(A^T + K^T B_u^T) + (A + B_u K)Q_{opt} \prec H(A^T + K^T B_u^T) + (A + B_u K)H, \tag{6.10}$$

où $U^j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^6$, $j = 1, \dots, 6$, sont des vecteurs qui ont 1 à l'indice j et 0 sinon.

4. Test d'inclusion de $\mathcal{L}(Z^N)$ et extension de la courbe de niveau de la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$

Après avoir calculé la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, il est nécessaire de vérifier que la région de « conduite normale » est bien incluse dans $\varepsilon(P)$. Autrement dit, il faut vérifier que tous les sommets de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ sont contenus dans $\varepsilon(P)$. Dans le cas contraire, une autre courbe de niveau doit être choisie de manière à satisfaire la condition suivante :

$$\varepsilon_{ext}\left(\frac{1}{V_{ext}}P\right) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P x \leq V_{ext}\}, \tag{6.11}$$

où $V_{ext} = \max_{i=1, \dots, 64} (z_i^N)^T P z_i^N$ et z_i^N sont les sommets de $\mathcal{L}(Z^N)$. $\varepsilon_{ext}\left(\frac{1}{V_{ext}}P\right)$ contient par définition tous les sommets de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$, et donc il contient l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ grâce aux propriétés des ensembles convexes des courbes de niveau.

5. Test d'inclusion de $\varepsilon_{ext}\left(\frac{1}{V_{ext}}P\right)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$

L'ensemble $\varepsilon_{ext}\left(\frac{1}{V_{ext}}P\right)$ doit à son tour être inclus dans la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$. Ceci est vérifié en faisant les projections de l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}\left(\frac{1}{V_{ext}}P\right)$ sur les six axes $(\beta, r, \psi_L, y_L, \delta_f, \dot{\delta}_f)$ et en les comparant avec les bornes de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^M)$ $(\beta^M, r^M, \psi_L^M, y_L^M, \delta_f^M, \dot{\delta}_f^M)$. Ces projections sont données par : $\beta^{max} = \sqrt{V_{ext}}\sqrt{q_{11}}$, $r^{max} = \sqrt{V_{ext}}\sqrt{q_{22}}$, $\psi_L^{max} = \sqrt{V_{ext}}\sqrt{q_{33}}$, $y_L^{max} = \sqrt{V_{ext}}\sqrt{q_{44}}$, $\delta_f^{max} = \sqrt{V_{ext}}\sqrt{q_{55}}$ et $\dot{\delta}_f^{max} = \sqrt{V_{ext}}\sqrt{q_{66}}$, où q_{jj} sont les éléments de la diagonale de $Q = P^{-1}$, $j = 1, \dots, 6$ (voir équation (3.36), Partie II).

Si cette condition d'inclusion n'est pas satisfaite, l'algorithme doit être repris au niveau de sa deuxième étape en procédant à un autre choix des pôles du système en boucle fermée. De même, la phase préparatoire précédant la synthèse de la loi de commande peut être reconsidérée. Cette phase fixe la région de « conduite normale », qui influence par la suite la quatrième étape de l'algorithme.

6. Test du couple maximal nécessaire à l'assistance

Le couple d'assistance maximal nécessaire durant l'intervention de la loi de commande est donné par le maximum de la fonction $|Kx|$ sur l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$. Ce problème d'optimisation convexe est résolu dans l'Exemple 3.1.1 de la Section 3.1.1, Partie II. Le couple maximal vaut donc :

$$C_{\varepsilon_{ext}}^{max} = \sqrt{V_{ext}KP^{-1}K^T}. \quad (6.12)$$

Pour satisfaire au cahier des charges de la loi de commande, $C_{\varepsilon_{ext}}^{max}$ doit rester inférieur à $C^{max} - \sigma_2$. Si cette condition n'est pas satisfaite, les mêmes conclusions que celles du test d'inclusion de l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$ restent applicables.

L'algorithme proposé a pour objectif de synthétiser une loi de commande qui satisfasse toutes les exigences du cahier des charges. Néanmoins, sa mise en œuvre peut être laborieuse notamment pour assurer l'inclusion de l'ensemble invariant ellipsoïdal $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ dans la région hypercube de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$. Pour satisfaire cette condition en même temps que la contrainte sur le couple d'assistance, plusieurs itérations ont été nécessaires.

Cette difficulté est principalement liée à l'impossibilité mathématique d'assurer de bonnes approximations ellipsoïdales pour des ensembles polyédriques. En pratique, la différence entre la région de « conduite normale » et son approximation ellipsoïdale peut se traduire par une trajectoire du véhicule qui dépasse d'une manière significative cette région, le danger de dépasser les bords de la voie subsiste donc. D'autre part, le temps de régulation et de retour dans la région de « conduite normale » peut devenir gênant pour le conducteur qui ne peut désactiver l'assistance qu'en utilisant un couple fort $|C_c| > \sigma_2$ ou en mettant l'entrée *Inhibe* sur 1. Il ne peut pas désactiver l'assistance en dehors de la région de « conduite normale » avec un couple faible $\sigma_1 \leq |C_c| \leq \sigma_2$. Il sera tenu compte de ces inconvénients lors de la synthèse d'une autre loi de commande dans la section suivante.

6.1.2 Fonction de Lyapunov composée pour une région hypercube de « conduite normale » : 2ème loi de commande

L'objectif de la loi de commande proposée dans cette section est de réduire la taille de l'ensemble invariant qui approche par l'extérieur la région de « conduite normale », $\mathcal{L}(Z^N)$. La solution idéale pour ce problème serait un ensemble invariant polyédrique, identique à $\mathcal{L}(Z^N)$. Cela signifierait que pour une activation au bord de la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ le dépassement de cette région serait nul. Cette solution n'est pas envisageable, car physiquement irréalisable par le véhicule. Par exemple, pour un angle de cap relatif, un écart latéral et un angle de braquage qui sont positifs et situés aux limites de la région de « conduite normale » il faudrait aussi avoir une décroissance instantanée de l'écart latéral pour reconduire le véhicule vers le centre de la voie sans dépassement de $\mathcal{L}(Z^N)$. Ceci n'est bien entendu pas possible et toute loi d'assistance augmentera à court terme la valeur de l'écart latéral.

Une approximation moins conservatrice de la région $\mathcal{L}(Z^N)$ peut être fournie par l'enveloppe convexe de plusieurs ellipsoïdes. Si chaque diagonale principale de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ est un axe d'un ellipsoïde, pour lequel tous les autres axes sont réduits au minimum (idéalement nuls),

l'enveloppe convexe de tous les ellipsoïdes correspondant à toutes les diagonales principales est très proche de l'ensemble $\mathcal{L}(Z^N)$ et idéalement identique à $\mathcal{L}(Z^N)$.

Cette idée fondamentale et le Théorème 3.5.3 du Chapitre 3, Partie II ont été utilisés pour la synthèse d'une nouvelle loi de commande, en angle de braquage. Le choix d'une commande en angle de braquage est justifié par la dimension réduite du problème numérique à résoudre pour la synthèse de la commande. La procédure de synthèse d'une commande en couple est exactement similaire, exception faite de la dimension du système dynamique qui passe de 4 à 6.

Les ensembles $\mathcal{L}(Z^N)$ et $\mathcal{L}(Z^M)$ sont de ce fait définis par les quatre variables d'état β , r , ψ_L et y_L . Cependant et par souci de simplicité, les mêmes notations $\mathcal{L}(Z^N)$ et $\mathcal{L}(Z^M)$ ont été utilisées. L'exigence précédente portant sur un couple d'assistance borné se traduit par une exigence sur la limitation de l'angle de braquage notée $|\delta_f| \leq \delta_f^{max}$.

Une entrée de commande en angle de braquage suppose que la colonne de direction du véhicule est de technologie « steer by wire ». L'assistance est capable d'analyser la consigne en angle de braquage du conducteur et d'imposer l'angle de braquage adéquat au niveau des roues. La consigne conducteur étant dans tous les cas traitée et jamais directement transmise aux roues, celle-ci ne sera pas prise en compte dans la suite. En conséquence, $\delta_f = \delta_f^a$.

Le système dynamique utilisé pour la synthèse est donné par l'équation (6.2). La loi de commande par retour d'état s'écrit : $\delta_f^a = K(x^v)x^v$, où le gain $K(x^v) \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$. Le système en boucle fermée est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}^v = (A^v + B_u^v K(x^v))x^v, \\ z^v = x^v. \end{cases} \quad (6.13)$$

Algorithme 6.1.2 (Synthèse de la 2ème loi de commande)

La synthèse de la 2ème loi de commande a été décomposée en 3 étapes.

1. Calcul des vecteurs de retour d'état F^j et des fonctions de Lyapunov correspondantes $(x^v)^T P^j x^v$

Premièrement, l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ a été approché par l'enveloppe convexe de huit ellipsoïdes, $\varepsilon(P^j)$, $j = 1, \dots, 8$. Le nombre d'ellipsoïdes est choisi en accord avec le nombre de diagonales principales de l'hypercube, diagonales dont les extrémités définissent les sommets de cet hypercube. Ce nombre est donné par $2^{n-1} = 2^{4-1} = 8$. Notons que dans le cas d'un rectangle, l'enveloppe convexe de ses deux diagonales ($2^{2-1} = 2$) coïncide avec le rectangle considéré (voir Fig. 6.2).

Rappelons maintenant qu'une fonction quadratique composée est définie par la Définition 3.5.1 du Chapitre 3 Partie II :

$$V_c(x^v) \triangleq \min_{\gamma \in \Gamma} (x^v)^T P(\gamma) x^v, \quad P(\gamma) \triangleq Q^{-1}(\gamma), \quad Q(\gamma) \triangleq \sum_{j=1}^N \gamma_j Q^j, \quad (6.14)$$

où $Q^j = (P^j)^{-1}$, $j = 1, \dots, N$ et $\gamma \in \{\gamma \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \gamma_j = 1, \gamma_j \geq 0, j = 1, \dots, N\}$. Sa courbe de niveau $\mathcal{S}_{V_c}(1) = \{x^v \in \mathbb{R}^4 : V_c(x^v) \leq 1\}$ est l'enveloppe convexe des ellipsoïdes $\varepsilon(P^j)$.

Le Théorème 3.5.3 du Chapitre 3, Partie II fournit une loi de commande qui rend l'ensemble $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ invariant. Afin de satisfaire les hypothèses et de pouvoir appliquer ce théorème, les ellipsoïdes $\varepsilon(P^j)$ et les vecteurs de retour d'état K^j pour $j = 1, \dots, 8$ sont déterminés via

le problème d'optimisation LMI suivant :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && \text{trace}(Q^j) \\
 & \text{contraint par} && Q^j \succ 0, \\
 & && (Y^j)^T (B_u^v)^T + Q^j (A^v)^T + A^v Q^j + B_u^v Y^j \prec 0, \\
 & && Q^j v^j = \lambda^j v^j, \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\delta_f^{max}} Y^j \\ \frac{1}{\delta_f^{max}} (Y^j)^T & Q^j \end{pmatrix} \succeq 0.
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

où $Q^j = (P^j)^{-1}$ et $Y^j = K^j Q^j$, $j = 1, \dots, 8$,

Dans ce problème, la minimisation de la trace des matrices Q^j a été retenue afin de réduire l'amplitude des demi-axes non pertinents (voir Fig 6.2). La deuxième contrainte LMI assure que ces ellipsoïdes sont des courbes de niveau des fonctions de Lyapunov pour des vecteurs de retour d'état K^j . Pour la troisième contrainte LMI des vecteurs v^j et des scalaires λ^j ont d'abord été définis à partir des diagonales de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ (voir Fig. 6.2). Cette contrainte exige donc que chaque matrice Q^j ait v^j comme vecteur propre et λ^j comme valeur propre associée. En d'autres termes, cette contrainte tend à orienter les ellipsoïdes $\varepsilon(P^j)$ sur les diagonales de $\mathcal{L}(Z^N)$. Pour finir, la quatrième LMI permet de borner l'effort de commande de telle sorte que $|\delta_f^a| \leq \delta_f^{max}$ pour chaque K^j . Ceci est réalisé en assurant l'inclusion des ellipsoïdes $\varepsilon(P^j)$ dans les polyèdres $\mathcal{L}(\frac{1}{\delta_f^{max}} K^j) = \{x^v \in \mathbb{R}^4 : |K^j x^v| \leq \delta_f^{max}\}$.

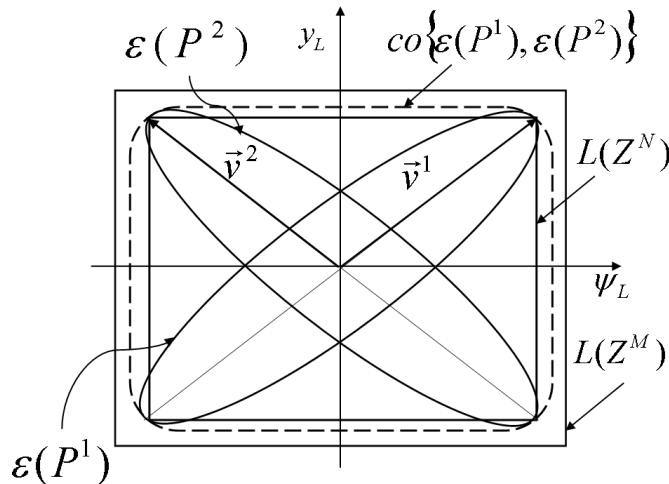


FIG. 6.2 – Ellipsoïdes et hypercubes représentés en deux dimensions pour les variables ψ_L et y_L .

Après avoir calculé les vecteurs de retour d'état K^j et les matrices P^j symétriques et définies positives via les problèmes d'optimisation LMI (6.15) pour $j = 1, \dots, 8$, toutes les hypothèses du Théorème 3.5.3 du Chapitre 3, Partie II ont été satisfaites. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_{V_c}(1) = \{x^v \in \mathbb{R}^4 : V_c(x^v) \leq 1\}$ est invariant et se rétracte pour la loi de

commande $\delta_f^a(x^v) = K(\gamma^*(x^v))x^v$, où

$$V_c(x^v) = \min_{\gamma \in \Gamma} (x^v)^T P(\gamma) x^v, \quad (6.16)$$

$$K(\gamma^*) = Y(\gamma^*)P(\gamma^*) = \left(\sum_{j=1}^8 \gamma_j^* Y^j \right) \left(\sum_{j=1}^8 \gamma_j^* Q^j \right)^{-1} \quad (6.17)$$

et $\gamma^*(x^v)$ est la solution du problème de minimisation de l'équation (6.16). De plus, le Théorème 3.5.3 garantit que l'entrée de commande $\delta_f^a(x^v) = K(\gamma^*)x^v$ est bornée à δ_f^{max} pour toute activation à l'intérieur de $\mathcal{S}_{V_c}(1)$.

2. Test d'inclusion de $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$

L'étape de synthèse précédente assure que tous les sommets de la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$, et donc la région de « conduite normale », sont inclus dans l'ensemble invariant $\mathcal{S}_{V_c}(1)$. Par la suite, l'inclusion de l'ensemble invariant $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$ doit être vérifiée.

Les projections de l'ensemble $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ sur les quatre axes (β, r, ψ_L, y_L) ne dépassent pas les projections de $\varepsilon(P^j)$, $j = 1, \dots, 8$ sur ces mêmes axes (Propriété 1 de [Hu04]). D'autre part, les valeurs maximales des projections des ellipsoïdes $\varepsilon(P^j)$ sur les axes (β, r, ψ_L, y_L) sont décrites par : $\beta^j = \sqrt{(q_{11})^j}$, $r^j = \sqrt{(q_{22})^j}$, $(\psi_L)^j = \sqrt{(q_{33})^j}$ et $(y_L)^j = \sqrt{(q_{44})^j}$, où $(q_{11})^j$, $(q_{22})^j$, $(q_{33})^j$ et $(q_{44})^j$ sont les éléments diagonaux des matrices Q^j (équation (3.36) du Chapitre 3, Partie II). Par conséquent, les bornes des projections de l'ensemble $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ sur les quatre axes (β, r, ψ_L, y_L) sont les suivantes :

$$\beta^{max} = \max_{j=1, \dots, 8} \beta^j, \quad r^{max} = \max_{j=1, \dots, 8} r^j, \quad \psi_L^{max} = \max_{j=1, \dots, 8} (\psi_L)^j, \quad y_L^{max} = \max_{j=1, \dots, 8} (y_L)^j. \quad (6.18)$$

Il reste alors à vérifier que les valeurs β^{max} , r^{max} , ψ_L^{max} et y_L^{max} sont inférieures aux valeurs β^M , r^M , ψ_L^M et y_L^M pour conclure que l'ensemble invariant $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ est inclus dans la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

Si cette condition n'est pas satisfaite, la seule possibilité est de reprendre l'algorithme depuis la première étape en modifiant les limites de la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$. Une diminution de l'écart latéral de la région de « conduite normale » en faveur d'une vitesse de rotation en lacet plus élevée pourrait accroître la rapidité de la réaction de la loi de commande et aider à garder l'ensemble invariant $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ étroit.

3. Calcul de la solution au problème de minimisation de la fonction de Lyapunov composée

Pour calculer la solution optimale $\gamma^*(x^v)$ qui définit la fonction de Lyapunov composée de l'équation (6.14), [Hu03] a proposé une approche reposant sur l'optimisation LMI. Dans un premier temps, la fonction quadratique composée $V_c(x^v)$ est écrite sous la forme :

$$V_c(x^v) = \min\{\omega : \omega \geq (x^v)^T P(\gamma) x^v, \gamma \in \Gamma\}. \quad (6.19)$$

Puis le problème de minimisation (6.19) est transformé en problème LMI en utilisant le Lemme de Schur :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && \omega \\
 & \text{contraint par} && \begin{pmatrix} \omega & (x^v)^T \\ x^v & \sum_{j=1}^8 \gamma_j Q^j \end{pmatrix} \succeq 0, \\
 & && \sum_{j=1}^8 \gamma_j = 1, \\
 & && \gamma_j \succeq 0.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Les variables de décision sont les paramètres γ_j , $j = 1, \dots, 8$, et le nombre réel positif ω . Ce problème doit être résolu pour chaque valeur de x^v . La valeur optimale γ^* obtenue permet alors de calculer le vecteur de retour d'état

$$K(\gamma^*) = \left(\sum_{j=1}^8 \gamma_j^* Y^j \right) \left(\sum_{j=1}^8 \gamma_j^* Q^j \right)^{-1}. \tag{6.21}$$

La loi de commande synthétisée par l'Algorithme 6.1.2 satisfait toutes les contraintes du cahier des charges. De plus, elle assure un dépassement très limité de la région de « conduite normale ». Ce dépassement se traduit non seulement par une trajectoire du véhicule proche des valeurs des variables d'état au moment de l'activation, mais aussi par un temps de convergence vers la région de « conduite normale » qui peut être extrêmement bref.

Cependant, un aspect important n'a pas été pris en compte lors de la synthèse des deux dernières lois de commande. En effet, l'évolution du véhicule sur la voie de circulation est considérée à travers les bornes sur les deux variables de positionnement qui sont l'écart latéral et l'angle de cap relatif. En réalité, ces deux variables, combinées à la géométrie du véhicule, déterminent l'élément important qui est la position de l'avant du véhicule sur la voie. La prochaine section fournira l'algorithme de la synthèse d'une loi de commande qui tient compte de cet aspect dans les contraintes.

6.1.3 Fonction de Lyapunov quadratique pour une région polytopique de « conduite normale » : 3ème loi de commande

Pour tenir compte de la position de l'avant du véhicule par rapport aux bords de la voie, la région de « conduite normale » prend la forme d'un polytope $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$ (Définition 5.1.5 du Chapitre 5, Partie III). Rappelons que la région de « conduite normale » de la forme d'un polytope inclut à la fois des contraintes sur la valeur absolue des variables d'état et sur la position des roues avant du véhicule. Plus spécifiquement, dans une situation de « conduite normale » les roues avant du véhicule sont supposées rester dans une zone centrée sur la voie et de largeur $2d$.

Le système dynamique de l'équation (6.1) sera utilisé pour la synthèse d'une loi de commande en couple par retour linéaire d'état et avec un terme de compensation pour le couple du conducteur : $C_a = Kx - C_c$. Le système dynamique en boucle fermée est alors décrit par l'équation (6.3). La Remarque 6.1.1 demeure valable aussi dans ce cas.

L'idée principale de cette approche est de trouver une loi de commande qui assure un dépassement minimal de la zone de largeur $2d$, pour un état initial dans $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$. Pour atteindre cet objectif, le vecteur de retour d'état K et une fonction de Lyapunov quadratique seront recherchés de telle sorte que la courbe de niveau 1 soit située simultanément à l'intérieur de $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$ et la plus proche possible des deux hyperplans $|Fx| = 1$. Par la suite, une courbe de niveau étendue a été calculée, telle qu'elle contienne les régions de l'espace d'état

$\mathcal{L}(Z^N) \cap \{x \in \mathbb{R}^6 : |Fx| = 1\}$. Ce choix sera justifié en détail dans la Section 6.2. Il s'agit d'avoir une activation de la loi de commande dans la région de « conduite normale », quand une des deux roues avant croise la zone centrée de largeur $2d$ ($|Fx| = 1$). Rappelons aussi que la courbe de niveau étendue est un ensemble invariant pour le système en boucle fermée. Cette courbe fournira des valeurs maximales pour l'état du système pendant la régulation, ainsi que des bornes pour le déplacement des roues avant sur la voie.

Algorithme 6.1.3 (Synthèse de la 3ème loi de commande)

La synthèse de cette 3ème loi de commande a été décomposée en 4 étapes.

1. Calcul du vecteur de retour d'état K et de la fonction de Lyapunov correspondante $V(x) = x^T Px$

Dans un premier temps, le vecteur de retour d'état K et la fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T Px$ ont été calculés comme résultats du problème d'optimisation LMI (6.22)) ayant pour variables de décision : $Q = P^{-1}$, $Y = KQ$ et α :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && -\alpha \\
 & \text{contraint par} && AQ + QA^T + Y^T B_u^T + B_u Y \prec 0, \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & (z_i^N)^T \\ z_i^N & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, \frac{2^6}{2} = 2^5, \\
 & && \alpha \preceq FQF^T, \\
 & && FQF^T \preceq 1, \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{C_\varepsilon^{\max}} Y \\ \frac{1}{C_\varepsilon^{\max}} Y^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0,
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

où $Z^N \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est une matrice diagonale définie par l'équation (5.2) du Chapitre 5, z_i^N sont la moitié des sommets de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$, $i = 1, \dots, 32$, et le vecteur $F = (0, 0, \frac{2(l_f - l_s)}{2d - a}, \frac{2}{2d - a}, 0, 0)$ est défini selon la Définition 5.1.4 du Chapitre 5.

La première contrainte LMI de (6.22)) assure que le système en boucle fermée, décrit par l'équation (6.3) est asymptotiquement stable.

Les 2ème et 4ème contraintes LMI de l'équation (6.22)) exigent que la courbe de niveau 1 de la fonction $V(x) = x^T Px$ se trouve à l'intérieur de la région $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$. Cette courbe de niveau, qui correspond à un ellipsoïde, est définie de façon similaire à l'équation (6.7), elle est notée par $\varepsilon(P)$ (voir Fig. 6.3).

La 3ème contrainte, associée à la fonction de coût a pour objectif de rapprocher au maximum $\varepsilon(P)$ des hyperplans $|Fx| = 1$.

Pour finir, la limitation du couple d'assistance est prise en compte par l'intermédiaire de la 5ème contrainte LMI de l'équation (6.22)). Cette contrainte impose que l'ellipsoïde ε soit inclus dans un polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^6 : |Kx| \leq C_\varepsilon^{\max}\}$. Néanmoins, la valeur limite pour le couple a été choisie telle que $C_\varepsilon^{\max} \ll C^{\max} - \sigma_2$. Par ce choix, on anticipe l'extension de $\varepsilon(P)$ et donc l'augmentation du couple maximal nécessaire pour l'assistance.

2. Extension de la courbe de niveau de la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T Px$

Dans un deuxième temps, l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ est étendu vers l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ (équation (6.11)), tel que $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ inclut la région de l'espace d'état $L(Z^N) \cap \{x \in \mathbb{R}^6 : |Fx| = 1\}$ (voir Fig. 6.3). Ce problème est un problème d'optimisation d'une fonction de coût non-linéaire sous contraintes linéaires :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser} && V_{ext} = x^T P x \\ & \text{contraint par} && Z^N x \leq \mathbf{1}, \\ & && Fx = 1. \end{aligned} \tag{6.23}$$

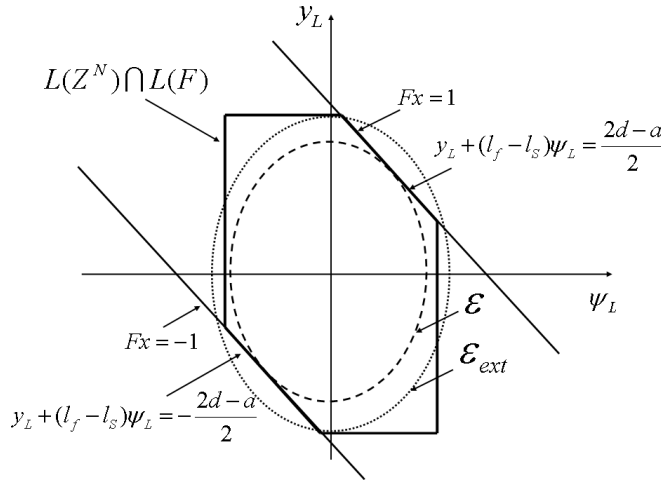


FIG. 6.3 – Ellipsoïdes $\varepsilon(P)$ et $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ et région polytope de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$ représentés en deux dimensions pour les variables ψ_L et y_L .

3. Test d'inclusion de $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$

Cette étape est analogue à la 5ème étape de l'Algorithme 6.1.1 pour la synthèse de la 1ère loi de commande. Si la condition d'inclusion n'est pas satisfaite, la phase préparatoire de l'algorithme doit être reprise et notamment la définition des limites de la région de « conduite normale » qui influencent directement la première et la deuxième étape de l'algorithme.

4. Test du couple maximal nécessaire à l'assistance

Cette étape est analogue à la 6ème étape de l'Algorithme 6.1.1 pour la synthèse de la 1ère loi de commande. Si la condition de couple maximal sur l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ n'est pas satisfaite, la phase préparatoire doit aussi être reprise en modifiant par exemple le seuil de couple maximal permis à l'intérieur de l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$, couple noté par C_ε^{max} ou encore les limites de la région de « conduite normale ». Encore une fois, ces éléments influencent la première et la deuxième étape de l'algorithme.

La synthèse de cette 3ème loi de commande tient compte de toutes les spécifications du cahier des charges avec notamment le déplacement latéral de l'avant du véhicule sur la voie. Pour une activation dans la région $L(Z^N) \cap \{x \in \mathbb{R}^6 : |Fx| = 1\}$, cette commande minimise le dépassement des roues avant par rapport à la zone centrée sur l'axe de la voie et de largeur $2d$. Ceci est dû, en particulier, à l'expansion minimale de $\varepsilon(P)$ vers $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$. Cette expansion minimale est

assurée par le rapprochement de $\varepsilon(P)$ vers $\{x \in \mathbb{R}^6 : |Fx| = 1\}$, lors de l'optimisation LMI décrite par les équations (6.22).

L'algorithme 6.1.3 peut être adapté pour une prise en compte directe des variations de la vitesse longitudinale du véhicule dans les limites $v \in [v^{min}; v^{max}]$.

Il faut pour cela définir un paramètre $\xi_v \in [-1; 1]$, un paramètre qui décrit la variation de v entre v^{min} et v^{max} [Rah04] :

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} \xi_v, \quad v \cong v_0(1 - \frac{v_0}{v_1} \xi_v), \quad \frac{1}{v^2} \cong \frac{1}{v_0^2}(1 + 2\frac{v_0}{v_1} \xi_v). \quad (6.24)$$

Les deux constantes v_0 et v_1 sont calculées en posant $\xi_v = -1$ pour $v = v^{min}$ et $\xi_v = 1$ pour $v = v^{max}$. On obtient alors :

$$v_0 = \frac{2v^{min}v^{max}}{v^{max} + v^{min}}, \quad v_1 = -\frac{2v^{min}v^{max}}{v^{max} - v^{min}}. \quad (6.25)$$

Les expressions linéaires obtenues pour v , $1/v$ et $1/v^2$ en fonction de ξ_v , permettent d'écrire la matrice A du système véhicule qui intervient dans le système d'inégalités décrit dans l'équation (6.22) sous la forme $A = A^* + A^{**}\xi_v$ (voir équations (4.108) et (4.111) du Chapitre 4, Partie II). La matrice $A(v)$ est donc aussi une fonction linéaire du paramètre ξ_v .

Comme seule la matrice A dépend du paramètre ξ_v et comme cette dépendance est affine, il suffit que les conditions de stabilité soient vérifiées aux bornes. En conséquence, la première contrainte du système d'inégalités (6.22) est remplacée par les inégalités suivantes :

$$(A^* \pm A^{**})Q + Q(A^* \pm A^{**})^T + Y^T B_u^T + B_u Y \prec 0. \quad (6.26)$$

Les solutions obtenues assurent la stabilité pour toute vitesse longitudinale variable $v \in [v^{min}, v^{max}]$. Ce résultat est fondé sur le Lemme 3.4.2 énoncé dans Chapitre 3, Partie II.

6.1.4 Ensemble invariant et déplacement latéral des roues avant du véhicule

Dans la section précédente trois algorithmes de synthèse de lois d'assistance ont été exposés. La méthode adoptée assure pour toutes les lois d'assistance l'existence d'ensembles invariants pour la boucle fermée. Cependant, seule la troisième loi de commande tient compte explicitement du déplacement latéral de l'avant du véhicule. Il sera montré dans ce qui suit que tous les ensembles invariants garantissent quand même un déplacement latéral maximal de l'avant du véhicule durant la régulation. Cette analyse sera faite séparément pour les deux types d'ensembles invariants considérés : l'ensemble invariant ellipsoïdal et l'ensemble invariant sous forme d'enveloppe convexe d'ellipsoïdes.

Ensemble invariant ellipsoïdal et déplacement latéral des roues avant

Considérons un ensemble invariant ellipsoïdal $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ comme celui décrit par l'équation (6.11). Chaque trajectoire qui commence à l'intérieur de $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ est assurée d'y demeurer pendant toute la durée de la régulation. Par ailleurs, les coordonnées des roues avant du véhicule sont des fonctions linéaires des variables d'état (équations (4.89) du Chapitre 4, Partie II). Le déplacement latéral maximal des roues avant peut alors s'obtenir en calculant la valeur maximale de ces fonctions sur l'ensemble $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$. En notant d_{ext} cette valeur, le problème d'optimisation associé est le suivant :

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximiser} & y_g = y_L + (l_f - l_S)\psi_L + \frac{a}{2} \\
 \text{contraint par} & x \in \varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P).
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{ll}
 \text{maximiser} & (y_g - \frac{a}{2}) = fx \\
 \text{contraint par} & x \in \varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P),
 \end{array}
 \quad (6.27)$$

où $f \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$, $f = (0, 0, (l_f - l_S), 1, 0, 0)$, $x = (\beta, r, \psi_L, y_L, \delta_f, \dot{\delta}_f)^T$.

Le problème d'optimisation précédent a été formulé pour la roue gauche. Pour la roue droite, l'énoncé est similaire mais porte sur la variable y_d :

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimiser} & (y_d + \frac{a}{2}) = fx \\
 \text{contraint par} & x \in \varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P),
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{ll}
 \text{maximiser} & (-y_d - \frac{a}{2}) = -fx \\
 \text{contraint par} & x \in \varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P).
 \end{array}
 \quad (6.28)$$

D'après l'Exemple 3.1.1 (Section 3.1.1, Partie II), les deux problèmes de maximisation ont leurs solutions x_g^* et x_d^* sur le bord de l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$: x_g^* et $x_d^* \in \partial\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$. De ce fait, les valeurs maximales des fonctions coût sont :

$$(y_g - \frac{a}{2})^* = f \cdot x_g^* \quad \text{et} \quad (-y_d - \frac{a}{2})^* = -f \cdot x_d^* \Leftrightarrow \quad (6.29)$$

$$(y_g - \frac{a}{2})^* = \sqrt{fV_{ext}P^{-1}f^T} \quad \text{et} \quad (-y_d - \frac{a}{2})^* = \sqrt{fV_{ext}P^{-1}f^T} \Leftrightarrow \quad (6.30)$$

$$(y_g)^* = \sqrt{fV_{ext}P^{-1}f^T} + \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad (y_d)^* = -\sqrt{fV_{ext}P^{-1}f^T} - \frac{a}{2}. \quad (6.31)$$

Ce qui permet d'obtenir le déplacement latéral maximal des deux roues avant pour une activation à l'intérieur de l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$:

$$d_{ext} = \sqrt{fV_{ext}P^{-1}f^T} + \frac{a}{2}. \quad (6.32)$$

On constate de plus que :

$$\frac{2}{2d_{ext} - a}fx_g^* = 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{2d_{ext} - a}fx_d^* = -1. \quad (6.33)$$

En conséquence, le polyèdre défini par :

$$\mathcal{L}(F_{ext}) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : |F_{ext}x| \leq 1\}, \quad F_{ext} = \frac{2}{2d_{ext} - a}f = \frac{2}{2d_{ext} - a}(0, 0, (l_f - l_S), 1, 0, 0) \quad (6.34)$$

contient l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ et est tangent à celui-ci aux points x_g^* et x_d^* . Les hyperplans $\{x \in \mathbb{R}^6 : |F_{ext}x| = 1\}$ sont parallèles aux hyperplans $\{x \in \mathbb{R}^6 : |Fx| = 1\}$, car $F = \frac{2}{2d_{ext} - a}f$. La transposition du déplacement maximal d_{ext} de l'espace d'état vers la voie est représentée sur la Figure 6.4.

Remarque 6.1.2 (Déplacement potentiel maximal à partir de x^0) Nous remarquons que pour un état initial $x^0 \in \mathbb{R}^6$ quelconque, qui détermine l'ellipsoïde $\{x \in \mathbb{R}^6 : x^T Px \leq (x^0)^T Px^0\}$, le déplacement latéral maximal des roues avant sur la voie dépend de x^0 de la manière suivante :

$$d^{max}(x^0) = \sqrt{(x^0)^T Px^0} \sqrt{fP^{-1}f^T} + \frac{a}{2}. \quad (6.35)$$

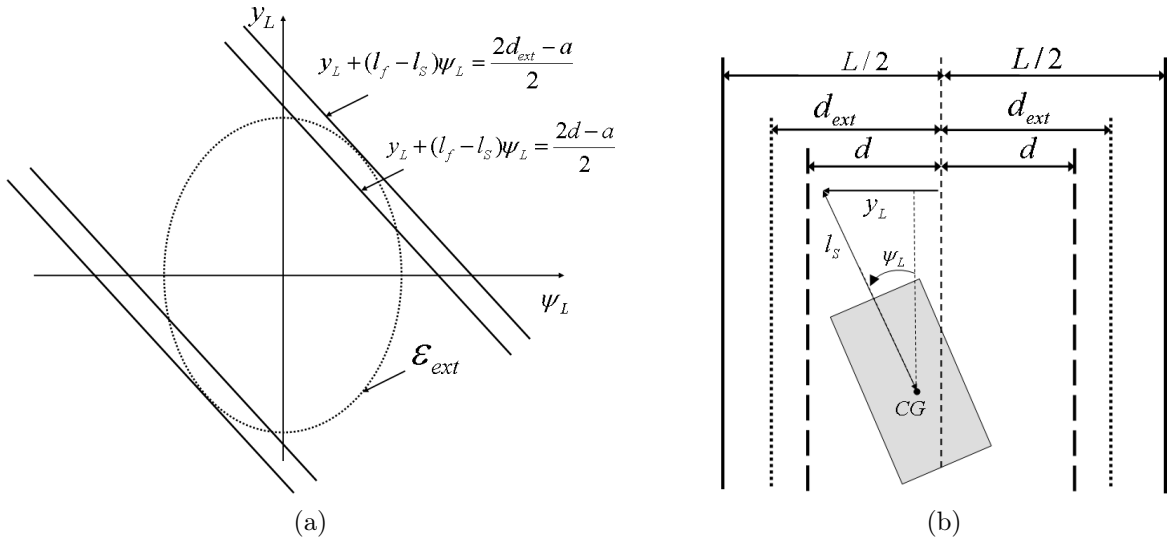


FIG. 6.4 – Les zones centrées $2d_{ext}$ et $2d$ représentées (a) dans l'espace d'état en deux dimensions ψ_L et y_L et (b) sur la voie.

Les résultats établis précédemment permettent de conclure que pour chaque trajectoire du véhicule contrôlé, qui commence à l'intérieur de l'ensemble invariant $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$, l'avant du véhicule restera à l'intérieur d'une zone centrée sur la voie de largeur $2d_{ext}$. À l'exception de la 3ème loi de commande, la valeur de d_{ext} n'est pas une spécification prise en compte dans les étapes de synthèse. Néanmoins, sa valeur peut être calculée et vérifiée à l'issue de la synthèse et une fois la fonction de Lyapunov connue. Si d_{ext} est supérieure à une valeur seuil, par exemple une demi-largeur de voie, l'algorithme peut être repris avec des nouvelles spécifications pour la région de « conduite normale ».

Ensemble invariant enveloppe convexe d'ellipsoïdes et déplacement latéral des roues avant

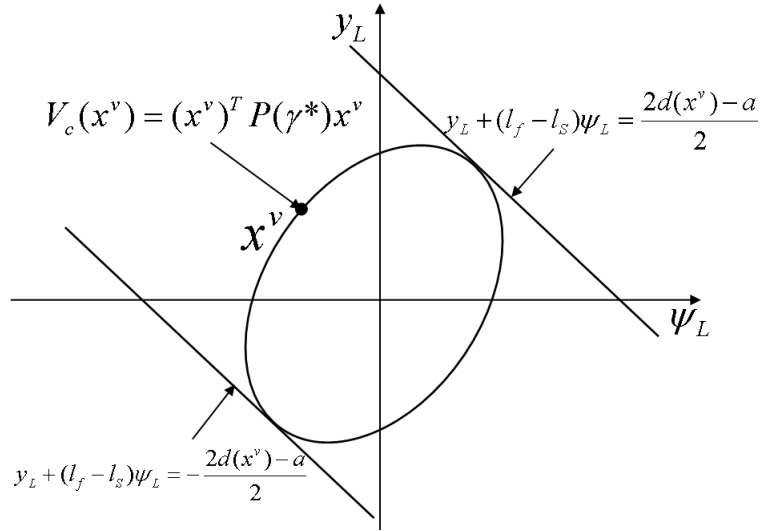
Afin de déterminer la valeur du déplacement latéral maximal sur la voie d_{ext} pour le cas d'un ensemble invariant de la forme d'une enveloppe convexe d'ellipsoïdes, considérons un état du véhicule contrôlé $x^v \in \mathcal{S}_{V_c}(1)$. À un instant donné, la fonction de Lyapunov composée représente pour un x^v , une courbe de niveau qui fournit un ellipsoïde invariant dans l'espace d'état $V_c(x^v) = (x^v)^T P(\gamma^*) x^v$ (voir Fig. 6.5). Calculons pour cet ellipsoïde les hyperplans tangents $|F(x^v)x^v| = 1$, $F(x^v) = \frac{2}{2d(x^v)-a}f$, où

$$d(x^v) = \sqrt{V_c(x^v)} \sqrt{fP(\gamma^*)^{-1}f^T} + \frac{a}{2}. \quad (6.36)$$

En remplaçant $P(\gamma^*)^{-1}$ par son expression $\sum_{j=1}^8 \gamma_j^* Q^j$, l'équation (6.36) devient :

$$d(x^v) = \sqrt{V_c(x^v)} \sqrt{\sum_{j=1}^8 \gamma_j^* f Q^j f^T} + \frac{a}{2}. \quad (6.37)$$

En notant $c^j = f Q^j f^T$, $c^{max} = \max_{j=1, \dots, 8} \{c^j\}$ et $c^{min} = \min_{j=1, \dots, 8} \{c^j\}$, les limites inférieure et


 FIG. 6.5 – Ellipsoïde instantané de la fonction de Lyapunov composée $V_c(x^v)$.

supérieure de $d(x^v)$ sont les suivantes :

$$\sqrt{V_c(x^v)}\sqrt{c^{min}} + \frac{1}{2}a \leq d(x^v) \leq \sqrt{V_c(x^v)}\sqrt{c^{max}} + \frac{1}{2}a. \quad (6.38)$$

L'équation (6.38) signifie que pour tous $x^v \in \mathbb{R}^4$ avec $V_c(x^v) = \alpha$ ou encore pour tout ensemble invariant $\mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{c^{min}} + \frac{1}{2}a \leq d(x^v) \leq \sqrt{\alpha}\sqrt{c^{max}} + \frac{1}{2}a. \quad (6.39)$$

Par conséquent, le déplacement latéral maximal des roues avant, pour un état initial x^v donné, s'écrit :

$$d^{max}(x^v) = \sqrt{\alpha}\sqrt{c^{max}} + \frac{1}{2}a. \quad (6.40)$$

De plus, $d^{max}(x^v(t))$ est décroissant au cours de temps car $V_c(x^v(t))$ est une fonction décroissante dans le temps.

D'une façon analogue, pour chaque trajectoire du véhicule contrôlé commençant dans $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ la loi d'assistance garantit de maintenir l'avant du véhicule dans une zone centrée sur la voie de largeur $2d_{ext}$, où

$$d_{ext} = \sqrt{c^{max}} + \frac{1}{2}a. \quad (6.41)$$

6.2 Stratégies de commutation

Après avoir introduit trois algorithmes de synthèse de lois d'assistance, quatre stratégies d'activation et de désactivation sont maintenant examinées.

Ces stratégies doivent tenir compte de l'attention de conducteur, du risque de sortie de voie et du danger d'engendrer une instabilité du fait même des commutations entre le conducteur et le contrôle automatique. Elles reposent sur l'hypothèse de l'existence de lois de commande qui assurent des ensembles invariants de forme connue, telles que celles synthétisées dans la section

précédente. C'est par l'intermédiaire de cette propriété que le danger d'entraîner une instabilité et, en partie, le risque de sortie de voie seront pris en compte. Plus spécifiquement, le point clé de la méthode consiste à activer et à désactiver le contrôle automatique à l'intérieur d'un ensemble invariant convenable de telle sorte que les dynamiques globales du système commuté restent bornées.

Le danger de sortie de voie a fait l'objet de nombreuses études dans lesquelles des indicateurs de risque ont été proposés, comme par exemple le temps à sortie de voie TLC (Time to Line Crossing) [Mam06]. La difficulté consiste à trouver une bonne adéquation entre le risque instantané perçu par le conducteur et l'évaluation du risque par le système muni de capteurs. Les stratégies de commutation proposées dans cette thèse considéreront les deux approches : le risque perçu par le conducteur ou la combinaison entre un danger potentiel ressenti par le conducteur et une évaluation du risque fournie par le système.

Pour mémoire, seul le domaine de fonctionnement nominal de l'assistance sera traité, domaine qui concerne uniquement les transitions T_r^{12} et T_r^{21} . Le conducteur est par ailleurs supposé autoriser en permanence l'activation de l'assistance à la conduite ($Inhibe = 0$).

6.2.1 Stratégie de commutation à partir du risque instantané de sortie de voie

Une mesure du risque instantané de sortie de voie, tel qu'il pourrait être perçu par le conducteur, est fournie par la position du véhicule sur la voie. Plus précisément, cette position peut se traduire par l'écart latéral et l'angle de cap relatif (1ère stratégie de commutation), ou encore par les coordonnées des roues avant du véhicule (2ème stratégie de commutation).

1ère stratégie de commutation

– Activation

Dans cette stratégie, la règle d'activation est la suivante : L'assistance s'active si les capacités de conduite du conducteur sont dégradées (couple conducteur faible) alors que le véhicule est encore dans une situation de « conduite normale » ($x \in \mathcal{L}(Z^N)$) et si l'écart latéral et l'angle de cap relatif ont le même signe. En résumant, la condition logique de la transition T_r^{12} est la suivante :

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq \sigma_1) \wedge (x \in \mathcal{L}(Z^N)) \wedge (\psi_{LYL} > 0) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.42)$$

– Désactivation

La désactivation de l'assistance a lieu dès que le conducteur recouvre la capacité de conduire (couple conducteur supérieur à un seuil) et que le véhicule est à nouveau dans la région de « conduite normale ». La condition de la transition T_r^{21} s'écrit :

$$T_r^{21} : (\sigma_1 < |C_c| \leq \sigma_2) \wedge (x \in \mathcal{L}(Z^N)) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.43)$$

2ème stratégie de commutation

– Activation

La condition d'activation est similaire à la condition d'activation de la 1ère stratégie de commutation. De plus, une condition sur la position des roues avant du véhicule a été ajoutée. L'assistance est enclenchée pour une sous-activité du conducteur pendant une

situation de « conduite normale » ($x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$) sous la condition qu'une des deux roues avant dépasse la zone centrée sur la voie de largeur $2d$ qui délimite le polyèdre $\mathcal{L}(F)$:

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq \sigma_1) \wedge (x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)) \wedge (\psi_L \cdot y_L > 0) \wedge ((y_g = d) \vee (y_d = -d)) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.44)$$

– *Désactivation*

Le conducteur reprend la conduite sous les mêmes contraintes que pour la 1ère stratégie de commutation :

$$T_r^{21} : (\sigma_1 < |C_c| \leq \sigma_2) \wedge (x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.45)$$

6.2.2 Stratégie de commutation à partir du risque instantané et du risque évalué par l'assistance

Le risque instantané est identique aux cas précédents. L'évaluation du risque par l'assistance correspond au déplacement maximal potentiel des roues avant sur la voie si l'assistance est activée. Notons $d^{max}(x^0)$ ce déplacement latéral maximal pour un état initial x^0 . Sa valeur est donnée par l'équation (6.35) pour une loi de commande fondée sur une fonction de Lyapunov quadratique et par l'équation (6.40) pour une loi de commande fondée sur une fonction de Lyapunov composée.

3ème stratégie de commutation

Cette troisième stratégie de commutation autorise l'activation de l'assistance dans une région qui peut être plus étendue que la région de « conduite normale ». Cette région porte sur le franchissement, par l'une des roues avant du véhicule, des bornes d'une zone centrée sur la voie et de largeur $\pm d$. Cette condition s'écrit par :

$$|Fx| = 1. \quad (6.46)$$

Nous rappelons que le vecteur F est défini dans l'équation (5.3) du Chapitre 5 et prend la forme :

$$F = (0, 0, \frac{2(l_f - l_s)}{2d - a}, \frac{2}{2d - a}, 0, 0). \quad (6.47)$$

De plus, une fois l'assistance activée, le déplacement maximum anticipé des roues avant en partant de l'état x^0 ne doit pas excéder une limite D^{max} . De cette façon, l'appartenance de l'état du véhicule à l'ensemble invariant ellipsoïdal tangent aux hyperplans définis ci-dessous (voir Figures 6.4 et 6.5) est garanti au moment de la commutation :

$$y_L + (l_f - l_s)\psi_L = \pm \frac{2D^{max} - a}{2}. \quad (6.48)$$

– *Activation*

L'assistance est activée si les conditions suivantes sont vérifiées : les capacités du conducteur sont dégradées, l'état du véhicule est dans le polyèdre $\mathcal{L}(F)$ correspondant à la zone centrée sur la voie de largeur $2d$, une des deux roues avant croise cette zone avec un angle de cap relatif et un écart latéral de même signe et le déplacement maximal anticipé reste inférieur au seuil D^{max} . La condition logique associée à la transition T_r^{12} est :

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq \sigma_1) \wedge (x \in \mathcal{L}(F)) \wedge (\psi_L \cdot y_L > 0) \wedge ((y_g = d) \vee (y_d = -d)) \wedge \wedge (d^{max}(x) \leq D^{max}) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.49)$$

– Désactivation

La désactivation de l'assistance a lieu dans les mêmes conditions que la 2ème stratégie (équation (6.45)).

4ème stratégie de commutation

Cette stratégie de commutation autorise l'activation de l'assistance dans un ellipsoïde invariant $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ défini par :

$$\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P x \leq V_{ext}\}, \quad V_{ext} = \frac{1}{f^T P^{-1} f} \left(\frac{L-a}{2}\right)^2. \quad (6.50)$$

Défini de cette façon, l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ est inclus dans le polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^6 : |\frac{2}{L-a}f x| \leq 1\}$ et est tangent à celui-ci. Rappelons que f est toujours le vecteur $f = (0, 0, (l_f - l_s), 1, 0, 0)$ et L dénote la largeur de la voie de circulation. Ce polyèdre correspond exactement aux coordonnées sur la voie des deux roues avant du véhicule. Autrement dit, chaque trajectoire initiée dans l'ensemble invariant $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ aura un déplacement des roues avant d'une demi-largeur de voie au maximum. Nous remarquons que les ellipsoïdes tangents aux hyperplans correspondants aux zones de largeur $2d$, $d < \frac{L}{2}$, plus étroites que la largeur de la voie, sont inclus dans $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$, car $V_{ext} > \frac{1}{f^T P^{-1} f} \left(\frac{2d-a}{2}\right)^2$.

– Activation

La stratégie d'activation impose toujours la dégradation des capacités du conducteur, l'appartenance de l'état à l'ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ et finalement que le déplacement maximal anticipé ne dépasse pas une demi-largeur de voie. La condition logique s'écrit :

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq \sigma_1) \wedge (x^T P x \leq V_{ext}) \wedge (|d^{max}(x)| = \frac{L}{2}) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.51)$$

– Désactivation

La désactivation de l'assistance s'opère selon la condition suivante :

$$T_r^{21} : (\sigma_1 < |C_c| \leq \sigma_2) \wedge (x^T P x \leq V_{ext}) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.52)$$

6.2.3 Stratégies de commutation : avantages et inconvénients

Dans cette section, nous allons donner un aperçu sur les avantages et les inconvénients des différentes stratégies de commutation. Ces aspects seront repris dans la Section 6.3 sur l'implantation pratique des lois de commande qui seront couplées aux stratégies de commutations.

L'avantage majeur de la première stratégie est le lien direct entre la situation de « conduite normale » et l'activation de l'assistance. Rappelons que la situation « conduite normale » assure une dynamique du véhicule bornée. Cependant, cette stratégie peut s'avérer d'une utilité très limitée car si cette région est trop réduite, l'assistance aura peu d'occasions pour s'activer. Cela a d'ailleurs été constaté en pratique et c'est pourquoi les résultats de l'implantation sur véhicule ne seront pas exposés. De même, les conditions d'activation ou de non-activation sont difficilement discernables par le conducteur, qui aurait potentiellement du mal à interpréter une non-activation malgré un angle de cap relatif élevé.

La deuxième stratégie résout en partie ce problème car l'activation de l'assistance est soumise au franchissement des deux roues avant du véhicule des limites de la zone centrée sur la voie et de largeur $\pm d$. Cependant, ces franchissements peuvent avoir lieu en dehors de l'hypercube de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ et n'engendrent pas dans ce cas d'activation. Sur la Figure

6.6 x^0 représente l'état du véhicule au moment de la dégradation des capacités de conduite du conducteur et x l'état au moment où l'une des deux roues avant franchit une des limites $\pm d$. Dans cet exemple, l'assistance ne se sera pas activée, car x n'appartient pas à $\mathcal{L}(Z^N)$.

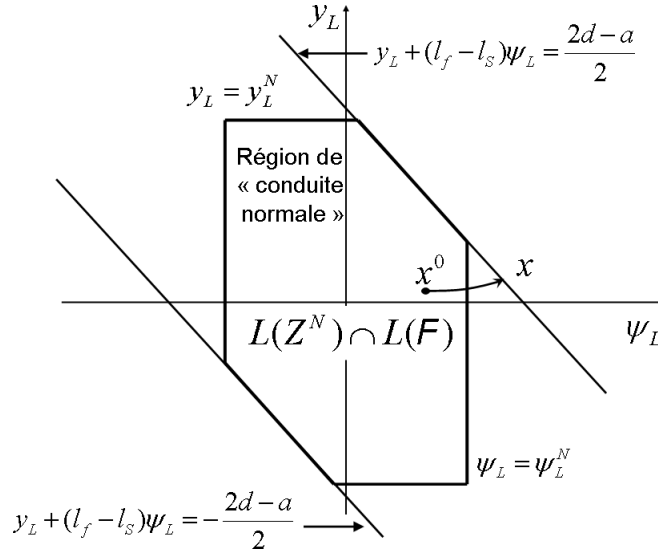


FIG. 6.6 – Exemple d'absence d'activation pour la deuxième stratégie de commutation.

La troisième stratégie élimine la contrainte de l'hypercube de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$. Ceci peut aussi bien être un avantage qu'un inconvénient. Dans l'exemple de la Figure 6.7, x^0 représente l'état du véhicule au moment de la dégradation des capacités de conduite du conducteur. x est l'état du véhicule au moment où l'une des deux roues avant franchit une des limites $\pm d$. À ce moment, le déplacement maximal anticipé $d^{max}(x)$ est calculé et comparé à D^{max} . Si l'ellipsoïde correspondant à $d^{max}(x)$ (trait discontinu sur la Figure 6.7) est inclus dans l'ellipsoïde correspondant à D^{max} (trait continu sur la Figure 6.7), la condition de déclenchement de l'assistance est satisfaite. L'avantage est, que du point de vue de la position des roues avant du véhicule, l'assistance est systématiquement déclenchée au même endroit. L'inconvénient reste que le moment de l'activation n'est que fonction du positionnement du véhicule sur la voie. De plus, des défauts d'activation peuvent toujours apparaître si l'ellipsoïde correspondant à D^{max} (trait continu sur la Figure 6.7) a déjà été dépassé au moment du croisement des limites $\pm d$.

Dans la quatrième stratégie, la condition de croisement des hyperplans, correspondant à la zone centrée sur la voie de largeur $2d$, pour l'activation de l'assistance est également éliminée. Plus spécifiquement, l'assistance est activée au moment où l'ellipsoïde lié au déplacement maximum D^{max} est dépassé (voir Figure 6.8). Sur la Figure 6.8, x^0 est l'état du véhicule au moment de la perte de capacité du conducteur et x est l'état du véhicule au moment de l'activation de l'assistance. Dans cette stratégie, D^{max} est aussi une demi-largeur de voie : $D^{max} = \frac{L}{2}$. L'avantage majeur de ce procédé est une grande réactivité de l'assistance pour éviter les sorties de voie, tout en laissant la liberté de manœuvre au conducteur : les sorties lentes engendrent des activations tardives alors que les sorties rapides engendrent des activations plus proches du centre de la voie. L'inconvénient de ce type d'activation est son caractère non-prévisible qui peut être gênant pour le conducteur et créer des situations d'inconfort.

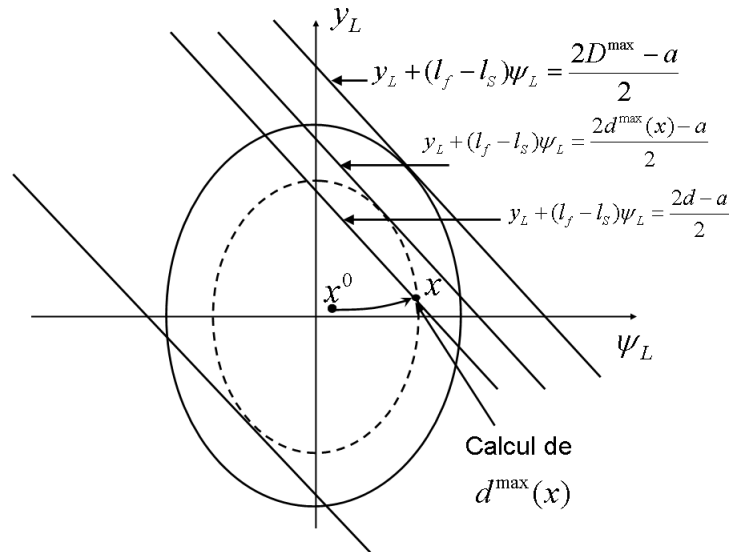


FIG. 6.7 – Exemple d’activation pour la troisième stratégie de commutation.

6.3 Implantation pratique et résultats

Plusieurs lois d’assistance et stratégies de commutation ont été exposées dans les deux sections précédentes. Présentées séparément, il convient d’associer une loi d’assistance et une stratégie de commutation afin de finaliser une stratégie d’assistance. On aboutit alors à un automate hybride tel que décrit dans le Chapitre 5, Section 5.2. Même si cela ne transparaît pas forcément, les développements des lois d’assistance et des stratégies de commutation ont été conduits de manière complémentaire. Pour cette raison, certaines lois de d’assistance sont plus appropriées à certaines stratégies de commutations et inversement. La composition des assistances qui ont été implantées en pratique sur le véhicule prototype est décrite dans le Tableau 6.2. Chacune de ces assistances ainsi que les résultats obtenus seront décrits dans le détail.

TAB. 6.2 – Lois de commande implantées pour une route à faible courbure.

Assistance à la conduite	Loi d’assistance		
	1ère	2ème	3ème
Stratégie de commutation			
1ère			
2ème			✓
3ème		✓	✓
4ème		✓	✓

6.3.1 Implantation de la 1ère loi d’assistance

Cette première loi de d’assistance n’a pas été portée sur le véhicule d’essai à cause des faibles performances garanties pendant la phase de synthèse. Néanmoins, nous présenterons brièvement quelques résultats numériques, afin d’avoir un point de comparaison pour les autres lois de commande.

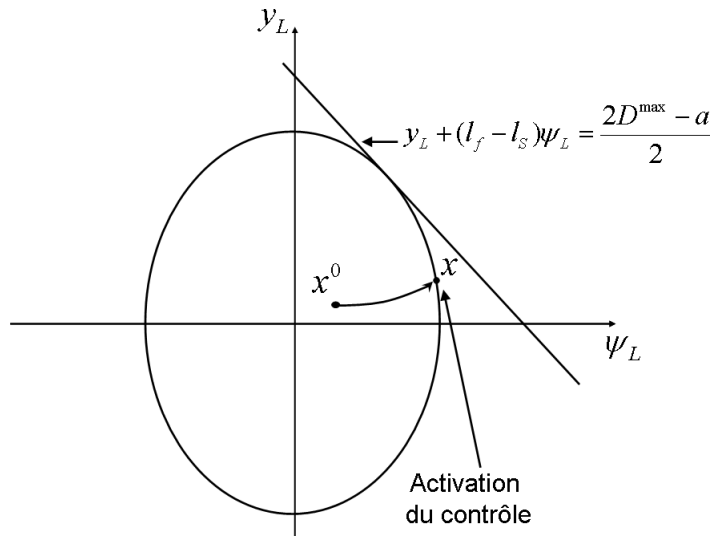


FIG. 6.8 – Exemple d’activation pour la quatrième stratégie de commutation.

L’Algorithme d’optimisation 6.1.1 a été appliqué plusieurs fois afin d’aboutir à une loi d’assistance, qui pour une région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ la plus large possible, assure l’inclusion de l’ensemble invariant $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ contenant la région de « conduite normale » dans une région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ la plus étroite possible. Ceci permet de maintenir l’état du véhicule, pendant la période d’activation, le plus proche possible de la région de « conduite normale ». Une grande variété d’états initiaux a été examinée. Les meilleurs résultats obtenus se trouvent regroupés dans les Tableaux 6.3 et 6.4. La plus petite région de sécurité non-dépassée pendant l’intervention de l’assistance coïncide avec les limites des projections de l’ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$ sur les axes $(\beta, r, \psi_L, y_L, \dot{\delta}_f, \dot{\delta}_f)$. La vitesse longitudinale utilisée était de $20m/s$.

TAB. 6.3 – Limites de la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ pour le 1ère loi d’assistance.

β^N	r^N	ψ_L^N	y_L^N	$\dot{\delta}_f^N$	$\dot{\delta}_f^N$
0.0044rad	0.015rad/s	0.0087rad	0.20m	0.002rad	0.0087rad/s
0.25°	0.85°/s	0.5°	0.20m	0.11°	0.5°/s

TAB. 6.4 – Limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

β^M	r^M	ψ_L^M	y_L^M	$\dot{\delta}_f^M$	$\dot{\delta}_f^M$
0.0159rad	0.0716rad/s	0.0232rad	0.91m	0.0079rad	0.0436rad/s
0.91°	4.10°/s	1.32°	0.91m	0.45°	2.49°/s

Remarquons que malgré des activations proches de l’axe de la voie (20cm), l’excursion en ce qui concerne l’écart latéral atteint les 90cm, il y a donc presque dépassement de voie. La 2ème loi d’assistance qui garantit des ensembles invariants quasi polyédriques permettrait de remédier

à cet inconvénient.

6.3.2 Implantation de la 2ème loi d'assistance

Cette loi d'assistance est le résultat de l'Algorithme 6.1.2. Rappelons qu'elle est décrite par une fonction non-linéaire donnée par les équations (6.16) et (6.17) dans laquelle interviennent :

1. Les fonctions de Lyapunov, $x^T P^j x$, $j = 1, \dots, 8$, calculées a priori, à partir des problèmes d'optimisation (6.15),
2. La valeur optimale du vecteur γ , notée γ^* , calculée en temps réel à partir du problème d'optimisation (6.20).

Calcul des fonctions de Lyapunov

Les limites de la région hypercube de « conduite normale » ont été fixées avant de procéder au calcul des fonctions de Lyapunov. Les limites choisies dans un premier temps sont données dans le Tableau 6.5. La valeur maximale de l'angle de braquage autorisé pendant l'activation de l'assistance a été choisie à $\delta_f^{max} = 2^\circ$ et la vitesse longitudinale a été fixée à $18m/s$.

TAB. 6.5 – Limites de la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ pour la 2ème loi d'assistance.

β^N	r^N	ψ_L^N	y_L^N
0.005rad	0.087rad/s	0.017rad	0.1m
0.3°	5°/s	1°	0.1m

Les vecteurs propres v^j , $j = 1, \dots, 8$, du problème d'optimisation (6.15) s'obtiennent à partir des sommets de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$, en faisant l'ensemble des combinaisons $(\beta^N, \pm r^N, \pm \psi_L^N, \pm y_L^N)^T$. Ces vecteurs propres ne sont pas normés, mais dans ce contexte cela n'est pas nécessaire. Les valeurs propres λ^j , $j = 1, \dots, 8$, s'obtiennent en prenant le carré des distances des sommets de $\mathcal{L}(Z^N)$ par rapport à l'origine : $\lambda^j = (\|v^j\|)^2$.

Les limites de la région hypercube de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ sont présentées dans le Tableau 6.6. Ce choix particulier de valeurs numériques a été arrêté de la manière suivante : l'accélération latérale maximale souhaitée a d'abord été fixée à $4g$. Cette valeur permet alors d'avoir une estimation de la valeur maximale de la vitesse de lacet qui a été fixée à $r^M = 0.222rad/s$ pour une vitesse longitudinale $v = 18m/s$. Pour trouver les valeurs maximales de l'angle de cap relatif et de l'écart latéral, on utilise la condition que les deux roues avant du véhicule doivent rester sur la voie. L'inégalité (4.93) du Chapitre 4, Partie II a été adaptée pour une zone centrée de largeur $2d$ superposée à la voie de circulation, $d = \frac{L}{2}$, où L est la largeur de la voie :

$$-\frac{L-a}{2} \leq y_L + (l_f - l_s)\psi_L \leq \frac{L-a}{2}. \quad (6.53)$$

Pour $|y_L| \leq y_L^M = 0.5m$ et $|\psi_L| \leq \psi_L^M = 0.14rad$ l'inégalité (6.53) est satisfaite, et par conséquent les roues avant du véhicule ne dépassent pas la voie de circulation. Finalement, l'angle de dérive maximal β^M a été estimé à partir de l'équation (4.48) du Chapitre 4, Partie II en prenant $\delta_f = 10^\circ$, $\alpha_1 = 1^\circ$ et $r = r^M$. L'angle de dérive obtenu est $\beta^M = 8^\circ$. La faible valeur choisie pour α_1 signifie que les forces latérales sont dans le domaine linéaire.

TAB. 6.6 – Limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

β^M	r^M	ψ_L^M	y_L^M
0.142rad	0.222rad/s	0.139rad	0.5m
8.13°	12.71°/s	8°	0.5m

Après avoir calculé les matrices Q^j et les vecteurs de retour d'état K^j , $j = 1, \dots, 8$, via le problème d'optimisation (6.15), l'inclusion de l'ensemble invariant $\mathcal{S}_{V_c}(1) = \{x^v \in \mathbb{R}^4 : V_c(x^v) \leq 1\}$ dans la région hypercube de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ doit être vérifiée. Les valeurs maximales d'état x^v , atteignables à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{S}_{V_c}(1)$, sont décrites dans l'équation (6.18) et sont données dans le Tableau 6.7. On remarque que l'ellipsoïde $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ est inclus dans $\mathcal{L}(Z^M)$, et qu'il est assez éloigné des limites fixées par celui-ci, exception faite de la vitesse de rotation en lacet qui a une valeur double par rapport à la valeur de la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$. Cet effet est une conséquence de l'estimation très étroite de la région de « conduite normale » par la courbe de niveau de la fonction de Lyapunov composée. Ceci impose une réaction rapide afin de limiter le dépassement de l'état initial. Cette constatation a permis d'envisager d'élargir la région hypercube de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$, avec comme objectif de laisser plus de latitude au conducteur avant l'intervention de l'assistance.

TAB. 6.7 – Projections de l'ensemble $\mathcal{S}_{V_c}(1)$ sur les quatre axes.

β^{max}	r^{max}	ψ_L^{max}	y_L^{max}
0.018rad	0.177rad/s	0.035rad	0.166m
1.03°	10.14°/s	2.00°	0.166m

Remarque 6.3.1 (Extension ou contraction de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$) Si la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ est étendue ou contractée d'un facteur $\sqrt{\alpha}$, l'ensemble invariant de la nouvelle fonction de Lyapunov composée, fonction notée $\bar{V}_c(x^v)$ et obtenue à partir de $\mathcal{L}((\sqrt{\alpha})^{-1}Z^N)$, est décrit par :

$$\mathcal{S}_{\bar{V}_c}(1) = \{x^v \in \mathbb{R}^4 : \bar{V}_c(x) \leq 1\}. \quad (6.54)$$

et satisfait la relation

$$\mathcal{S}_{\bar{V}_c}(1) = \mathcal{S}_{V_c}(\alpha) = \{x^v \in \mathbb{R}^4 : V_c(x) \leq \alpha\}. \quad (6.55)$$

La relation précédente s'obtient en partant des sommets de l'hypercube élargi $\mathcal{L}((\sqrt{\alpha})^{-1}Z^N)$, qui sont maintenant caractérisés par : $\sqrt{\alpha}(\pm\beta^N, \pm r^N, \pm\psi_L^N, \pm y_L^N)^T$. Les vecteur propres restent inchangés mais les nouvelles valeurs propres sont données par $\bar{\lambda}^j = \alpha\lambda^j$, $j = 1, \dots, 8$. Comme toutes les matrices de la forme $\bar{Q}^j = \alpha Q^j$, $j = 1, \dots, 8$, satisfont toujours les trois premières conditions du problème d'optimisation (6.15), la nouvelle fonction de Lyapunov composée est

donnée par :

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_c(x^v) &= (x^v)^T \bar{P}(\gamma^*) x^v = (x^v)^T (\bar{Q}(\gamma^*))^{-1} x^v = \\
 &= (x^v)^T (\sum_{j=1}^8 \gamma_j^* \bar{Q}^j)^{-1} x^v = \\
 &= (x^v)^T (\sum_{j=1}^8 \gamma_j^* \alpha Q^j)^{-1} x^v = \\
 &= (x^v)^T (\frac{1}{\alpha}) P(\gamma^*) x^v = (\frac{1}{\alpha}) V_c(x^v).
 \end{aligned} \tag{6.56}$$

L'équation (6.56) montre que $\bar{V}_c(x^v) \leq 1$ conduit à $V_c(x^v) \leq \alpha$ et en conséquence, la relation de l'équation (6.55) est vérifiée.

Remarquons maintenant qu'en multipliant les trois premières contraintes du problème d'optimisation (6.15) par α , les vecteurs de retour d'état \bar{K}^j , $j = 1, \dots, 8$, obtenus après la résolution de l'optimisation sont les mêmes que K^j , $j = 1, \dots, 8$. En conséquence, le retour d'état non-linéaire, après modification de la région de « conduite normale » à $\mathcal{L}((\sqrt{\alpha})^{-1} Z^N)$, est décrit par :

$$\begin{aligned}
 |\delta_f^a(x^v)| &= |\bar{K}(\gamma^*) x^v| = |\bar{Y}(\gamma^*) \bar{P}(\gamma^*) x^v| = |(\sum_{j=1}^8 \bar{K}^j \bar{Q}^j \gamma_j^*) \bar{P}(\gamma^*) x^v| = \\
 &= |(\sum_{j=1}^8 K^j \alpha Q^j \gamma_j^*) \frac{1}{\alpha} P(\gamma^*) x^v| = |(\sum_{j=1}^8 K^j Q^j \gamma_j^*) P(\gamma^*) x^v|.
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

L'expression de la loi de commande ne change donc pas par rapport au problème initial.

La quatrième condition du problème d'optimisation (6.15) contient la limitation de l'angle de braquage à δ_f^{max} pour des activations de l'assistance à l'intérieur de $\mathcal{S}_{V_c}(1)$. Cette contrainte n'est plus respectée pour une activation de l'assistance à l'intérieur de $\mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$. Cependant, la nouvelle limitation sur l'angle d'assistance peut être calculée en considérant le vecteur de retour d'état $\bar{K}(\gamma^*)$, pour un état x^v au bord de l'ensemble $\mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$, $x^v \in \partial \mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$.

Le Lemme 3.5.1 du Chapitre 3, Partie II sera utilisé par la suite. Il assure pour chaque élément x^v de l'ensemble $\partial \mathcal{S}_{V_c}(\alpha) = \partial \mathcal{S}_{V_c}(1)$, l'existence des éléments $x^j \in \mathbb{R}^4$ appartenant aux ensembles $\partial \varepsilon(\frac{1}{\alpha} P^j) = \partial \varepsilon(\bar{P}^j)$, $j = 1, \dots, 8$, tels que :

$$x^j = \bar{Q}^j \bar{P}(\gamma^*) x^v = \alpha Q^j \frac{1}{\alpha} P(\gamma^*) x^v = Q^j P(\gamma^*) x^v \tag{6.58}$$

$$\text{et } x^j \in \partial \varepsilon(\frac{1}{\alpha} P^j), \quad j = 1, \dots, 8, \quad x^v \in \partial \mathcal{S}_{V_c}(\alpha).$$

En réécrivant l'équation (6.57), on obtient :

$$|\delta_f^a(x^v)| = |\bar{K}(\gamma^*) x^v| = \left| \sum_{j=1}^8 \gamma_j^* K^j (Q^j P(\gamma^*) x^v) \right| = \left| \sum_{j=1}^8 \gamma_j^* K^j x^j \right| \leq \sum_{j=1}^8 \gamma_j^* |K^j x^j|. \tag{6.59}$$

Notons par m^j le maximum de la fonction $K^j x^j$ au bord de l'ensemble $\varepsilon(\frac{1}{\alpha} P^j)$, $x^j \in \partial \varepsilon(\frac{1}{\alpha} P^j)$, $j = 1, \dots, 8$. Ce maximum est obtenu, comme dans l'Exemple 3.1.1 du Chapitre 3, Partie II, par la maximisation d'une fonction linéaire sur un ensemble convexe :

$$m^j = \max_{x^j \in \partial \varepsilon(\frac{1}{\alpha} P^j)} K^j x^j = K^j (\frac{1}{\alpha} P^j)^{-1} (K^j)^T = \alpha K^j Q^j (K^j)^T. \tag{6.60}$$

Il est alors possible de borner en valeur absolue l'angle de braquage $\delta_f^a(x^v)$:

$$|\delta_f^a(x^v)| = |\bar{K}(\gamma^*) x^v| \leq \max_{j=1, \dots, 8} m^j \Rightarrow |\delta_f^a(x^v)| \leq \max_{j=1, \dots, 8} \alpha |K^j Q^j (K^j)^T|, \quad \forall x^v \in \partial \mathcal{S}_{V_c}(\alpha). \tag{6.61}$$

Si la condition précédente est satisfaite au bord de $\mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$, elle le sera également pour tout $x^v \in \mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$, car les valeurs m^j sont atteintes pour x^j sur le bord de $\varepsilon(\frac{1}{\alpha}P^j)$ (voir les équations 6.59 et 6.60).

À la lumière des précédents développements, nous concluons que les valeurs qui définissent la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ restent une contrainte flexible et adaptable à différentes situations de conduite. Une fois les vecteurs de retour d'état et que les fonctions de Lyapunov calculés pour une région $\mathcal{L}(Z^N)$ donnée, ceux-ci restent valables par homothétie sur la région. La contrainte sur l'angle de braquage peut être considérée comme un facteur d'adaptation de la région de « conduite normale ».

La loi d'assistance exposée dans cette section a été implantée sur le véhicule prototype avec une valeur de $\sqrt{\alpha} = 2.5$. Cette valeur a été choisie à partir du calcul de $\alpha = V_c(x^v)$ en exigeant un déplacement maximal anticipé des roues avant d'une demi largeur de voie ($D^{max} = \frac{L}{2}$), pour des états initiaux $(x^v)^0 \in \mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$ (voir équation (6.40)). Il faut aussi noter que les projections de $\mathcal{S}_{V_c}(\alpha)$ sur les quatre axes augmentent d'un facteur $\sqrt{\alpha}$ si les matrices Q^j augmentent d'un facteur α .

Cette manière de procéder a permis de connaître dans quelle mesure on peut élargir la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ sans qu'il n'y ait de conséquence sur le dépassement de la voie de circulation pendant la durée d'activation. La région de « conduite normale », $\mathcal{L}((2.5)^{-1}Z^N)$ est décrite dans le Tableau 6.8. Le nouvel ensemble invariant est $\mathcal{S}_{V_c}(2.5^2)$, ses projections maximales sur les quatre axes sont présentées dans le Tableau 6.9. Remarquons que l'ensemble invariant $\mathcal{S}_{V_c}(2.5^2)$ n'est plus contenu dans la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$, car la vitesse de rotation en lacet est supérieure à la limite exigée. Ceci peut signifier que l'exigence sur le déplacement maximum des roues avant d'une demi-largeur de voie nécessite une accélération latérale supérieure à la limite de $4m/s^2$, considérée pour calculer r^M de $\mathcal{L}(Z^M)$. Effectivement, la vitesse de rotation maximale $\bar{r}^{max} = 0.44rad/s$ implique, pour une vitesse longitudinale $v = 18m/s$, une accélération latérale de $7.92m/s^2$. Si cette valeur est atteinte, le pneu ne sera peut-être plus dans son domaine de fonctionnement linéaire. Cependant, les résultats pratiques ont démontré que la vitesse de lacet reste inférieure à cette limite. Ces résultats seront décrits plus loin dans cette section.

TAB. 6.8 – Limites de la nouvelle région de « conduite normale » $\mathcal{L}(2.5^{-1}Z^N)$.

$\bar{\beta}^N$	\bar{r}^N	$\bar{\psi}_L^N$	\bar{y}_L^N
0.012rad	0.217rad/s	0.042rad	0.25m
0.71°	12.46°/s	2.43°	0.25m

TAB. 6.9 – Projections de l'ensemble $\mathcal{S}_{V_c}(2.5^2)$ sur les quatre axes.

$\bar{\beta}^{max}$	\bar{r}^{max}	$\bar{\psi}_L^{max}$	\bar{y}_L^{max}
0.045rad	0.44rad/s	0.087rad	0.41m
2.57°	25.35°/s	5.01°	0.41m

Implantation sur le véhicule et résolution du problème d'optimisation en ligne

Rappelons que la loi d'assistance fondée sur l'approche de fonction de Lyapunov composée doit être recalculée à chaque pas d'échantillonnage du processus de contrôle. Le seul facteur qui influe sur la variation de la loi de commande est le vecteur γ^* , qui détermine la contribution optimale de chacun des gains K^j , $j = 1, \dots, 8$ à la commande. Le critère d'optimisation est une minimisation décrite par l'équation (6.20) et qui détermine aussi l'ensemble $S_{V_c}(\alpha)$, enveloppe convexe des ellipsoïdes composants. Ce problème d'optimisation est toujours faisable, car pour des x^v , Q^j , $j = 1, \dots, 8$ et γ fixés, il existe toujours un $\omega > 0$ tel que $\omega > (x^v)^T P(\gamma)x^v$.

Le schéma d'implantation sur le véhicule est présenté sur la Figure 6.9. Les entrées pour le calcul du vecteur optimal γ^* sont le vecteur d'état x^v et les matrices calculées a priori Q^j , $j = 1, \dots, 8$. Nous avons considéré comme point initial pour la recherche, γ_0^* , la valeur optimale de γ^* déterminée au pas précédent d'optimisation. Le vecteur γ^* sert par la suite à calculer le vecteur de retour d'état $K(\gamma^*(x^v))$ et la commande en angle de braquage.

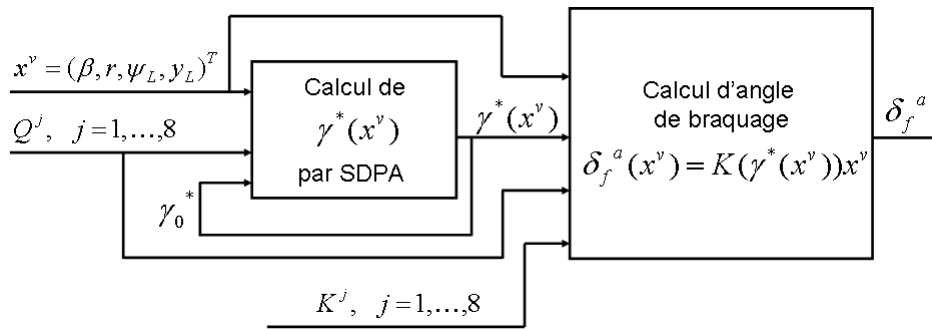


FIG. 6.9 – Schéma d'implantation de la loi de commande reposant sur une fonction de Lyapunov composée.

L'enjeu principal de l'implantation a été d'aboutir à un temps de résolution du problème d'optimisation qui soit inférieur à la période d'échantillonnage qui est de 0.01s. Cet objectif a été atteint grâce au logiciel SDPA (SemiDefinite Programming Algorithm) [SDP08]. SDPA résout des problèmes d'optimisation semi-définis (semidefinite programs, SDPs). Il calcule la solution de SDPs de forme standard et également de forme dual. Libre d'accès, il est implanté en C++ et utilise la bibliothèque standard LAPACK [LAP99] pour le calcul des matrices. En utilisant ce logiciel, le temps maximum de calcul sur le PC équipant le véhicule est de 0.003s, avec une moyenne de 0.0011s et un écart type de 0.00024s pour un contrôle d'une trajectoire d'une durée de 150s. Le temps nécessaire pour les autres opérations effectuées pour le calcul de la loi de commande, opérations présentées sur la Figure 6.9, est négligeable. Le calcul de cette loi de commande en angle de braquage représente une charge processeur inférieure à 3%. Pour rappel, le véhicule est équipé d'un PC avec deux processeurs AMD Opteron cadencés à 2GHz.

Une fois la consigne en angle de braquage calculée, un correcteur proportionnel intégral réalise le pilotage en couple du moteur électrique monté sur la colonne de direction afin de réaliser l'asservissement en angle.

Deux types de tests ont été réalisés. Le premier porte sur l'activation de l'assistance et le suivi de voie pour des routes à faibles courbures, pour les stratégies d'activation décrites dans la Section 6.2.2 (troisième et quatrième stratégies d'activation). Le deuxième porte sur le suivi de voie sur des virages à courbures prononcées afin de vérifier la robustesse de la loi proposée.

Résultats des tests pratiques pour des routes à faibles courbures

La loi de commande testée a été conçue pour des routes à très faibles courbures. Elle est couplée à la troisième puis à la quatrième stratégie de commutation. Pour forcer l'activation de l'assistance, le conducteur a simulé pour ces tests une perte d'attention en ôtant ses mains du volant.

Troisième stratégie de commutation

Les valeurs numériques adoptées pour l'implantation de cette stratégie sont les suivantes :

– *Activation*

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 1.5Nm) \wedge (x^v \in \mathcal{L}(F)) \wedge (\psi_L \cdot y_L > 0) \wedge ((y_g = 1.3m) \vee (y_d = -1.3m)) \wedge (1.75m - 0.1m \leq d^{max}(x^v) \leq 1.75m + 0.1m) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.62)$$

– *Désactivation*

$$T_r^{21} : (1.5Nm < |C_c| \leq 4Nm) \wedge (x^v \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.63)$$

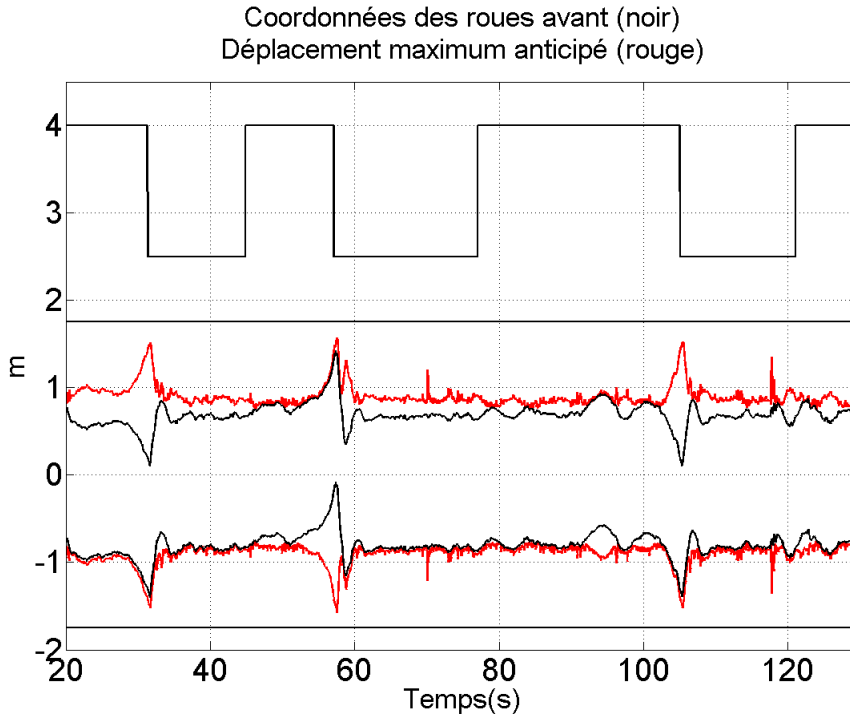


FIG. 6.10 – Position latérale des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

Les résultats de ce test sont présentés sur les Figures 6.10 à 6.18. Sur chacune d'elles, l'activation du système est représentée par une courbe noire binaire en haut de la figure : à la valeur haute le conducteur conduit et à la valeur basse l'assistance est activée. Pour une meilleure lisibilité, la valeur haute et la valeur basse sont en fonction de l'échelle des autres courbes.

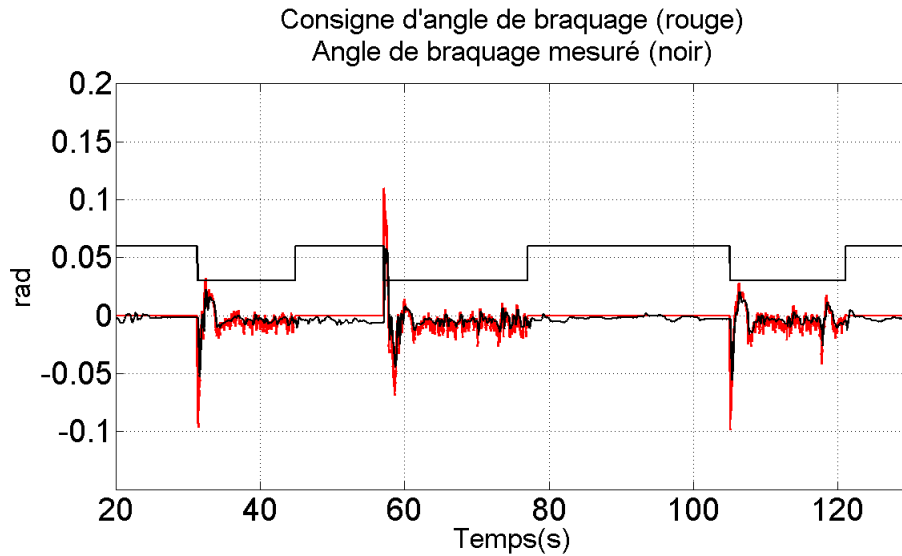


FIG. 6.11 – Consigne d'angle de braquage et angle de braquage mesuré (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

La Figure 6.10 montre en trait noir les trajectoires des roues avant sur la voie et en trait rouge le déplacement maximal anticipé $d^{max}(x^v)$, dans l'éventualité d'une activation de l'assistance. Nous remarquons que l'assistance s'active toujours quand une des trajectoires des roues avant dépasse $1.3m$ par rapport au centre de la voie, sous la condition que $d^{max}(x^v)$ soit inférieur à une demi-largeur de voie, plus ou moins $0.1m$ (voir $t = 32s$, $t = 58s$, $t = 106s$).

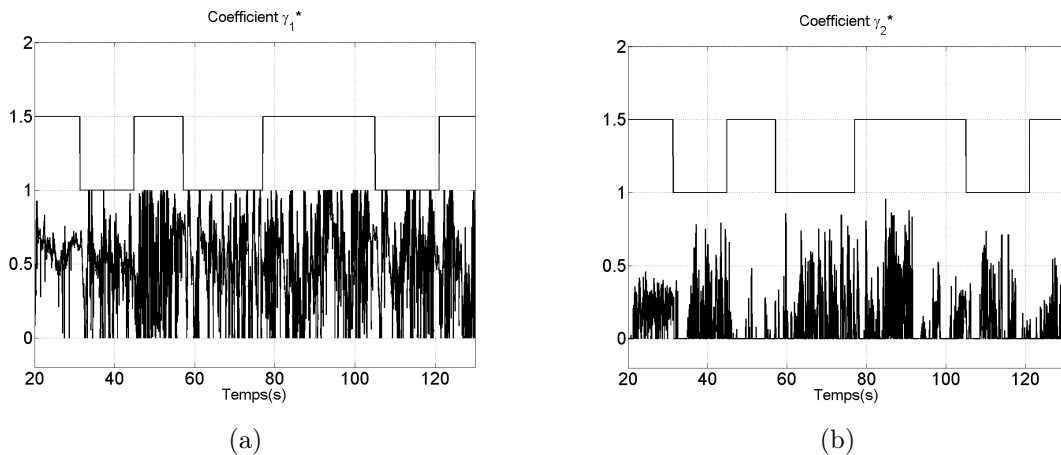


FIG. 6.12 – Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_1^* . (b) γ_2^* (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

La principale conclusion de cet essai est que le déplacement anticipé des roues avant (trait rouge) reste extrêmement proche des trajectoires instantanées (trait noir). Ceci valide dans la pratique les spécifications imposées à la loi de commande pendant l'étape de synthèse : déplacement minimal par rapport à l'état initial pour éviter les sorties de voie. Les valeurs maximales

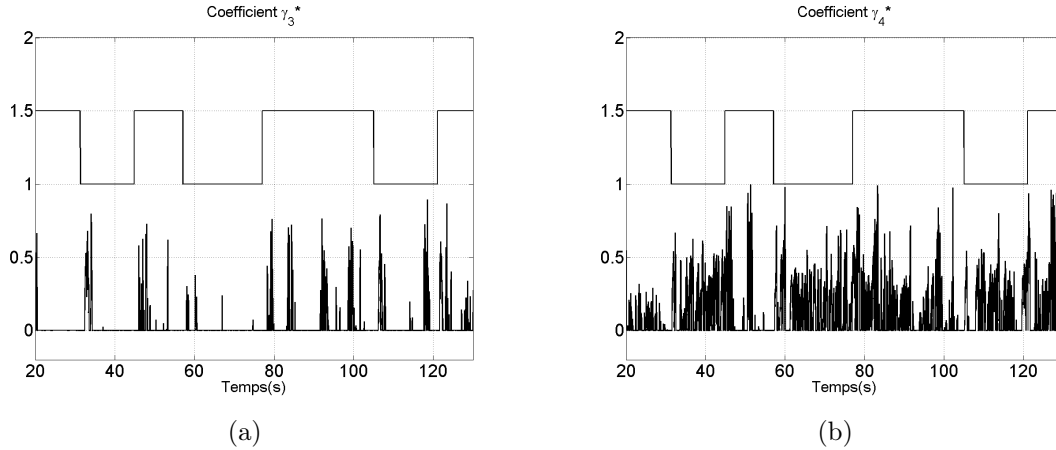


FIG. 6.13 – Loi d'assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_3^* . (b) γ_4^* (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

effectives enregistrées pour $d^{max}(x^v)$ restent inférieures à $1.5m$. Par conséquent, la condition $d^{max}(x^v) \leq 1.75m \pm 0.1m$ pour l'activation de l'assistance est très large dans ce cas.

Après une activation, le véhicule est de plus ramené rapidement vers le centre de la voie et y est maintenu jusqu'à ce que le conducteur intervienne. Sur l'exemple considéré, le temps de convergence vers l'état stationnaire de suivi de voie est inférieur $2s$.

Les angles de braquage sont présentés sur la Figure 6.11. Le trait rouge est l'angle de braquage calculé et le trait noir est l'angle de braquage mesuré. On remarque une différence due au filtrage des hautes fréquences par la colonne de direction. Si le retard semble négligeable, la réponse de la colonne de direction coupe les fréquences supérieures à $7Hz$. Ce phénomène a d'ailleurs été constaté lors des essais sur véhicule avec l'injection de signaux à fréquence variable sur la colonne de direction.

Rappelons que la loi de commande est le résultat d'un processus d'optimisation effectué en ligne pour calculer γ^* . Les contributions des retours d'état K^j , $j = 1, \dots, 8$ à la loi de commande sont décidées par le vecteur γ^* , dont les composantes sont présentées sur les Figures 6.12 à 6.15. On remarquera que les contributions de ces retours d'état varient dans le temps, exception faite du retour d'état K^7 , dont la contribution est quasi nulle (voir Figure 6.15 (a)).

L'évolution de l'état du véhicule pendant l'essai de l'assistance est présentée sur les Figures 6.16 et 6.17. L'angle de dérive reste sur tout le parcours de test inférieur à $0.02rad$ (1.15°), ce qui est très faible (voir Figure 6.16 (a)). La vitesse de rotation en lacet présente des amplitudes de $0.4rad/s$ ($22.91^\circ/s$) aux moments d'activation de l'assistance et décroît ensuite rapidement pour se stabiliser autour de $0.07rad/s$ ($4^\circ/s$) (voir Figure 6.16 (b)). L'angle de cap relatif maximal après activation est de $0.04rad$ (2.29°); il décroît vers $0.01rad$ (0.57°) (Figure 6.17 (a)). Ceci est un indicateur des très bonnes performances du suivi de voie. Ce fait est confirmé par les valeurs de l'écart latéral qui restent inférieures à $0.7m$ au moment de l'activation et qui décroissent rapidement à $0.15m$ (Figure 6.17 (b)).

Il est à noter que les valeurs maximales enregistrées pour les variables d'état pendant l'activation de l'assistance sont toutes inférieures aux valeurs maximales anticipées du Tableau 6.9, exception faite de l'écart latéral qui dépasse au moment de l'activation de l'assistance la valeur maximale prévue de $0.41m$. Ceci pourrait s'expliquer par l'intervalle de tolérance de $\pm 0.10m$ admis sur $d^{max}(x^v)$ pour l'activation de la loi de commande. De plus, l'asservissement sur l'angle

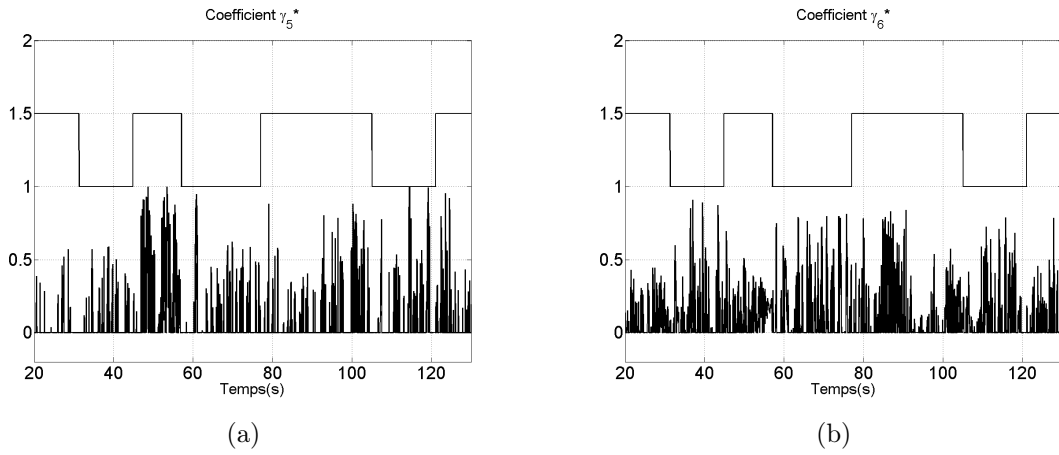


FIG. 6.14 – Loi d’assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_5^* . (b) γ_6^* (2ème loi d’assistance, 3ème stratégie de commutation).

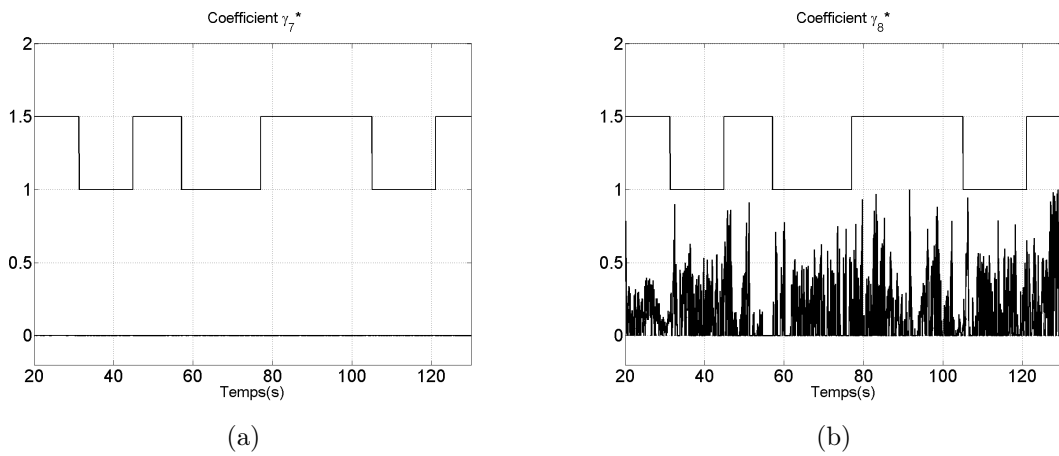


FIG. 6.15 – Loi d’assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_7^* . (b) γ_8^* (2ème loi d’assistance, 3ème stratégie de commutation).

de braquage fait que la commande calculée n'est pas appliquée immédiatement au niveau des roues.

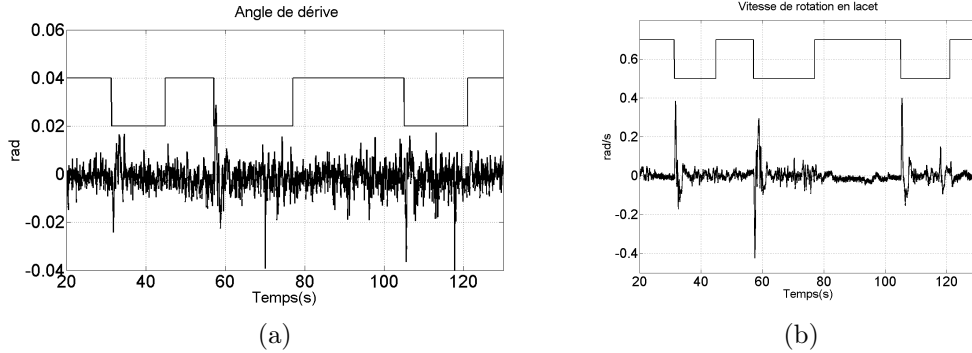


FIG. 6.16 – (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

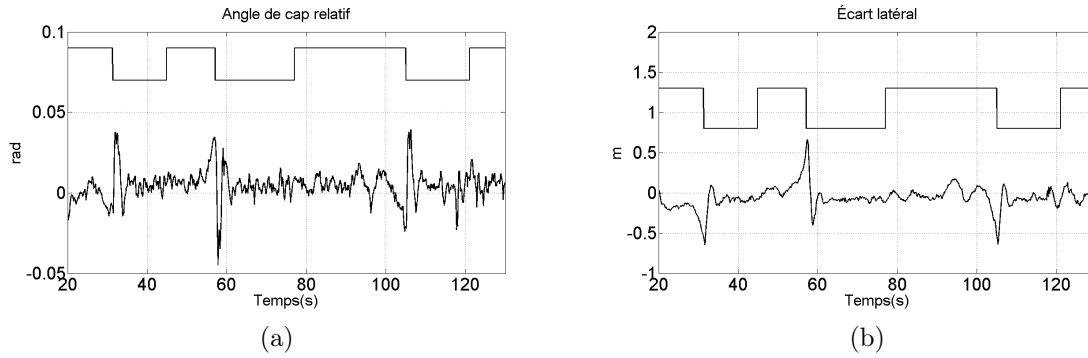


FIG. 6.17 – (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (2ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

Cet essai avait été réalisé pour une vitesse longitudinale maintenue par le conducteur autour de $16m/s$ (Figure 6.18). Pour cette vitesse, l'accélération latérale enregistrée pendant l'activation de l'assistance n'a pas dépassé $0.4m/s^2$, ce qui reste acceptable pour le confort (voir Figure 6.18 (b)). Notons que le maximum est chaque fois atteint aux instants d'activation.

Quatrième stratégie de commutation

La quatrième stratégie de commutation a été implantée sur le véhicule prototype pour les valeurs numériques suivantes :

– *Activation*

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 1.5Nm) \wedge ((x^v)^T P x^v \leq 2.5^2) \wedge \wedge (1.6m - 0.1m \leq d^{max}(x^v) \leq 1.6m + 0.1m) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.64)$$

– *Désactivation*

$$T_r^{21} : (1.5Nm < |C_c| \leq 4Nm) \wedge ((x^v)^T P x^v \leq 2.5^2) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.65)$$

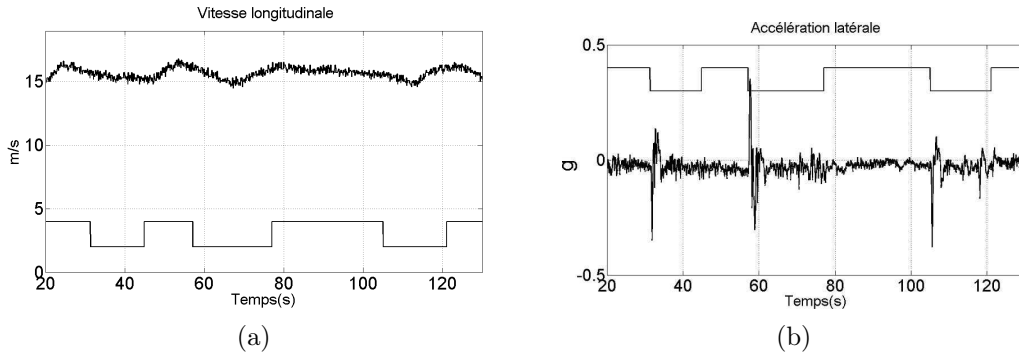


FIG. 6.18 – (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (2ème loi d’assistance, 3ème stratégie de commutation).

La différence fondamentale entre les deux stratégies testées porte sur la position du véhicule au moment de l’activation. Pour l’activation de la troisième stratégie l’une des roues avant du véhicule doit se trouver sur un des bords de la zone centrale de largeur $\pm d = \pm 1.3m$. Cependant, l’activation basée sur la quatrième stratégie peut se déclencher pour n’importe quelle position des roues avant sur la voie. À titre d’exemple, si la vitesse de rotation en lacet est très élevée, et fait accroître brusquement la valeur de la fonction de Lyapunov (donc le déplacement maximum anticipé des roues avant, $d^{max}(x^v)$, jusqu’à $1.6m \pm 0.1m$), l’assistance s’active même si le véhicule se trouve au centre de la voie. De même, pour des sorties plus lentes, la valeur $D^{max} = 1.6m \pm 0.1m$ sera franchie plus tard, par conséquent, l’activation de l’assistance sera retardée. Ceci est équivalent à une position du véhicule proche des bords de la voie.

Les coordonnées des roues avant du véhicule (trait noir) ainsi que leur déplacement maximal anticipé (trait rouge) sont présentés sur la Figure 6.19. L’activation de l’assistance se produit dans cet exemple toujours pour $d^{max}(x^v)$ autour de $1.5m$. La sortie qui se produit à $t = 32s$ est une sortie lente, par conséquent, la roue avant gauche du véhicule arrive à proximité du bord gauche de la voie avant l’activation. Par contre, les sorties de voie à $t = 66s$ et à $t = 91s$ sont des sorties rapides qui impliquent une activation prompte de l’assistance. En effet, les valeurs maximales enregistrées pour le déplacement latéral des roues avant restent entre $1.45m$ et $1.58m$. Ceci met en évidence aussi un très léger dépassement, de maximum $0.08m$ par rapport à la valeur anticipée. Comme précédemment, ces différences seraient aussi à imputer à la différence entre l’angle de braquage de consigne exigé et celui réellement appliqué aux roues. L’angle de braquage reste aux moments de l’activation à la moitié de la valeur de consigne et suit après avec une atténuation la valeur de consigne (Figure 6.20).

L’évolution des variables d’état du véhicule est présentée sur les Figures 6.21 et 6.22. Les valeurs obtenues sont similaires à celles de l’essai exposé précédemment pour la troisième stratégie d’activation.

La vitesse longitudinale est aussi maintenue comme précédemment autour de $16m/s$ (voir Figure 6.23). Une nouvelle fois, l’accélération latérale montre un bon confort de conduite, car elle reste inférieure à $0.4g$ pendant toute la durée de l’essai, y compris pour les moments d’activation de l’assistance et pour les deux types de sorties de voie, lente et rapide.

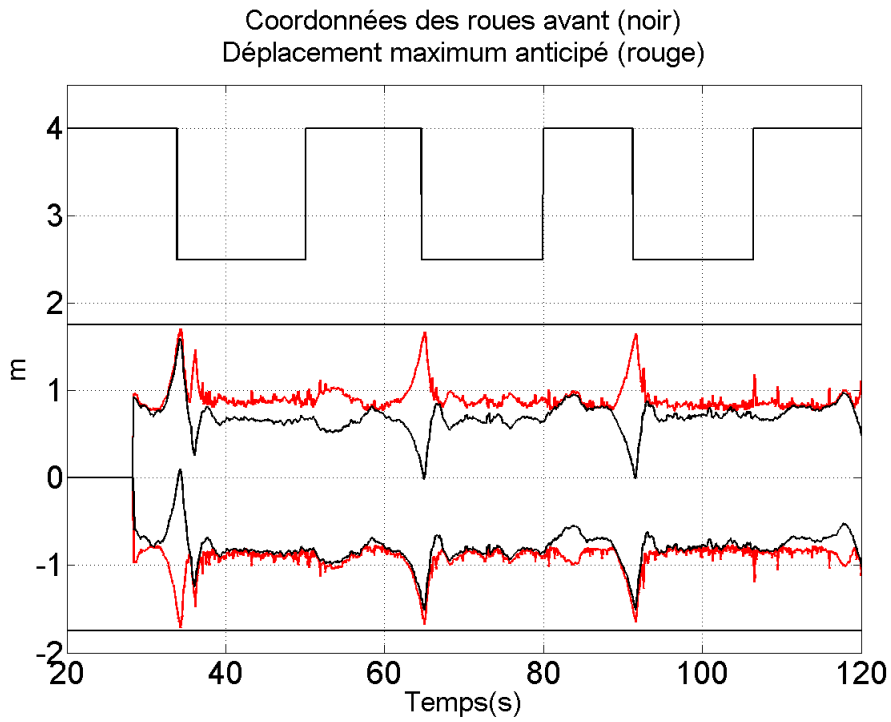


FIG. 6.19 – Position latérale des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé (2ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).

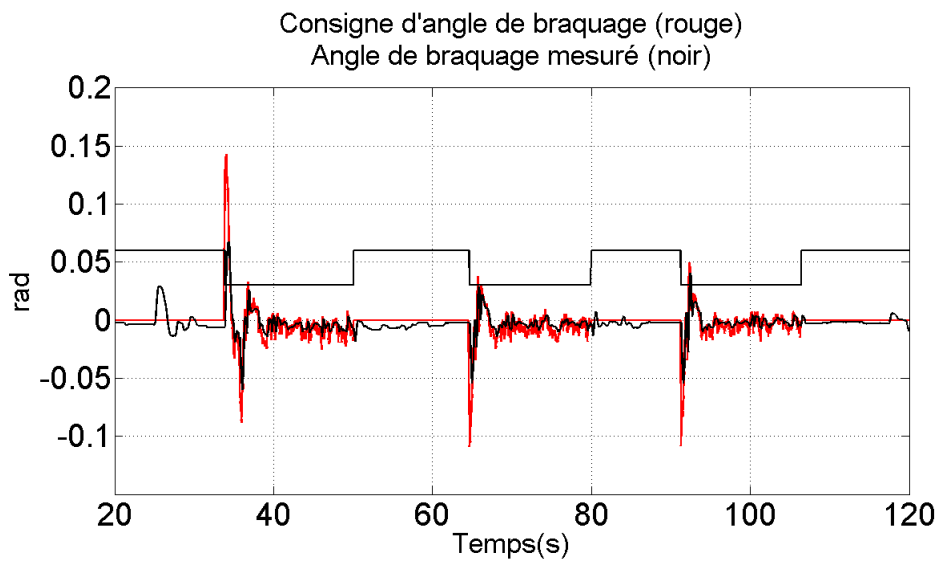


FIG. 6.20 – Angle de braquage de consigne et angle de braquage mesuré (2ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).

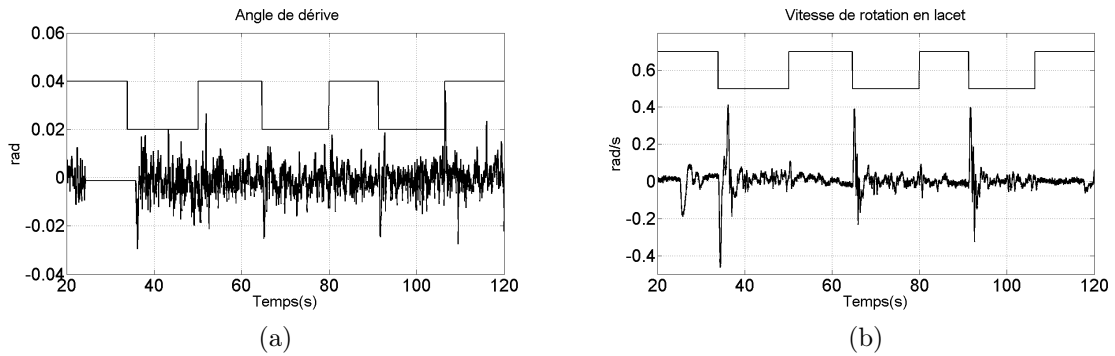


FIG. 6.21 – (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (2ème loi d’assistance, 4ème stratégie de commutation).

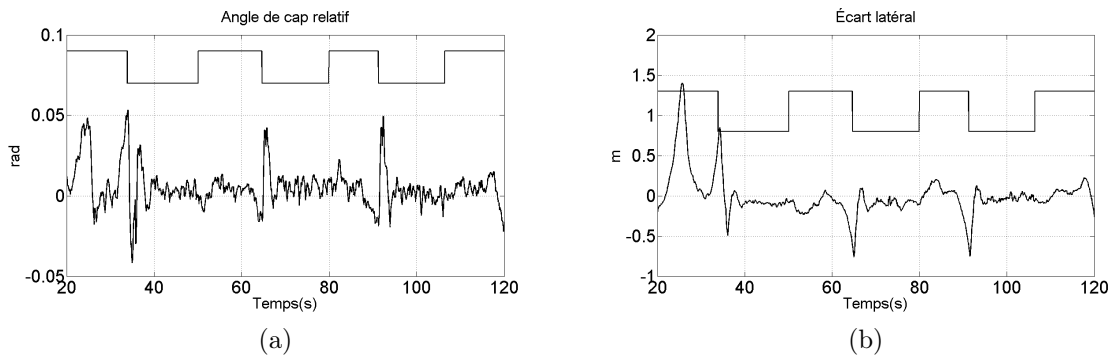


FIG. 6.22 – (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (2ème loi d’assistance, 4ème stratégie de commutation).

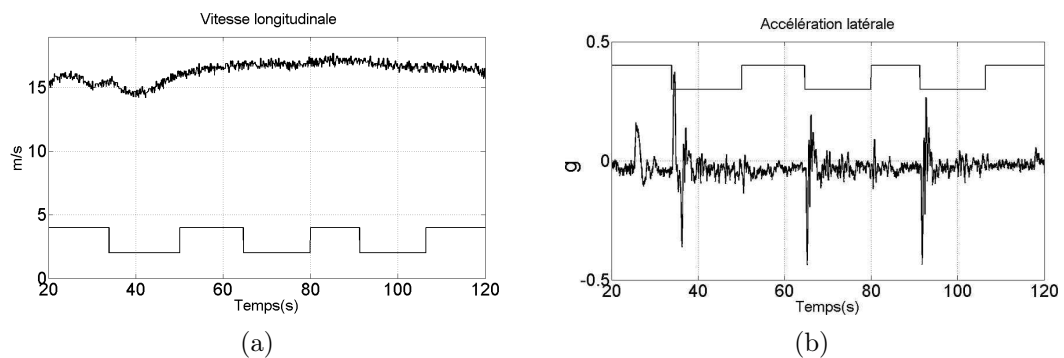


FIG. 6.23 – (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (2ème loi d’assistance, 4ème stratégie de commutation).

Résultats des essais sur routes à virages prononcés

Ces essais portent donc sur des conditions autres que celles des hypothèses de synthèse de la loi d'assistance. La route supposée sans virage présente maintenant des virages importants. Plusieurs rayons de courbures sont considérés. La vitesse longitudinale est quant à elle maintenue autour de $16m/s$ (Figure 6.29 (a)).

Le premier essai, dont les résultats sont présentés sur les Figures 6.24 à 6.29, a été effectué sur un segment de la piste avec une courbure ρ_{ref} allant jusqu'à $0.01m^{-1}$ ($100m$ de rayon), voir Figure 6.25.

La loi de commande a montré des très bonnes performances dans ces conditions. Les trajectoires des roues avant du véhicule (Figure 6.24) montrent un bon comportement : aucune erreur persistante après les virages n'est apparue, le véhicule rejoint bien le centre de la voie. Les déplacements latéraux des roues avant sont autour de $\frac{a}{2} \pm 0.5m$ et s'atténuent rapidement.

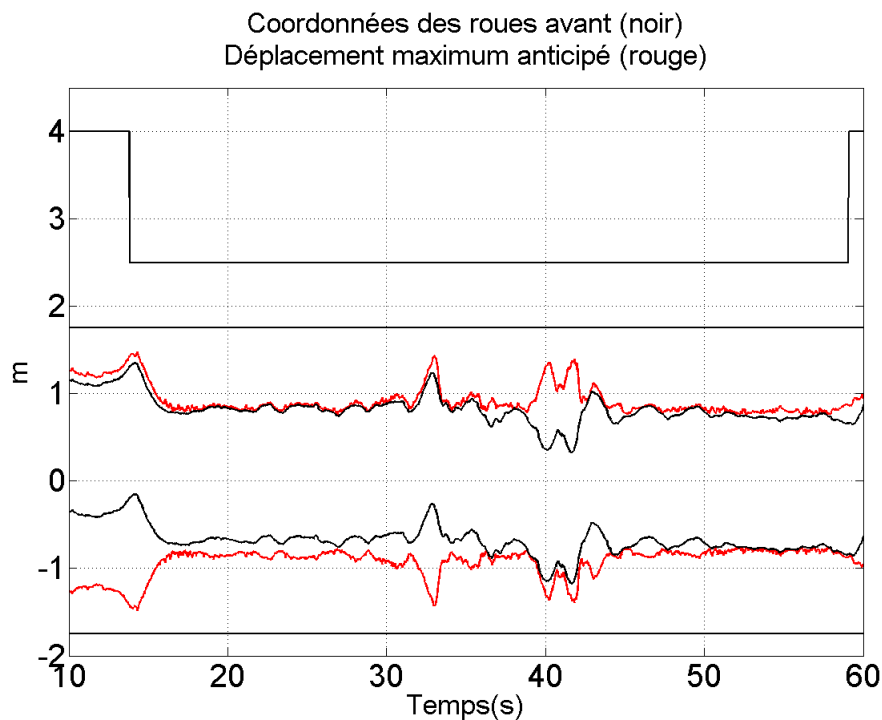


FIG. 6.24 – Position latérale des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximum anticipé (2ème loi d'assistance, virages importants).

L'angle de braquage de la loi de commande reste inférieur à $0.1rad$, soit 6° (voir Figure 6.26). L'état du véhicule a gardé des faibles valeurs pendant le contrôle automatique : l'angle de dérive reste inférieur à $0.03rad$ (1.71°) (Figure 6.27 (a)), la vitesse de rotation en lacet reste inférieure à $0.4rad/s$ ($22.91^\circ/s$) (Figure 6.27 (b)), l'angle de cap relatif est inférieur à $0.05rad$ (2.86°) (Figure 6.28 (a)) et l'écart latéral est en dessous de $0.6m$ (Figure 6.28 (b)). L'accélération latérale, représentée sur la Figure 6.29 (b), reste tout au long de l'essai à moins de $0.3g$, ce qui préserve les conditions de confort pendant la conduite automatique.

Afin de s'assurer des performances de la loi d'assistance synthétisée, les essais ont été poursuivis pour un cas extrême : un suivi de voie en conduite automatique pour une route avec un rayon de courbure de $50m$ (courbure de $0.02m^{-1}$) (voir Figures 6.30 et 6.31). Les trajectoires des

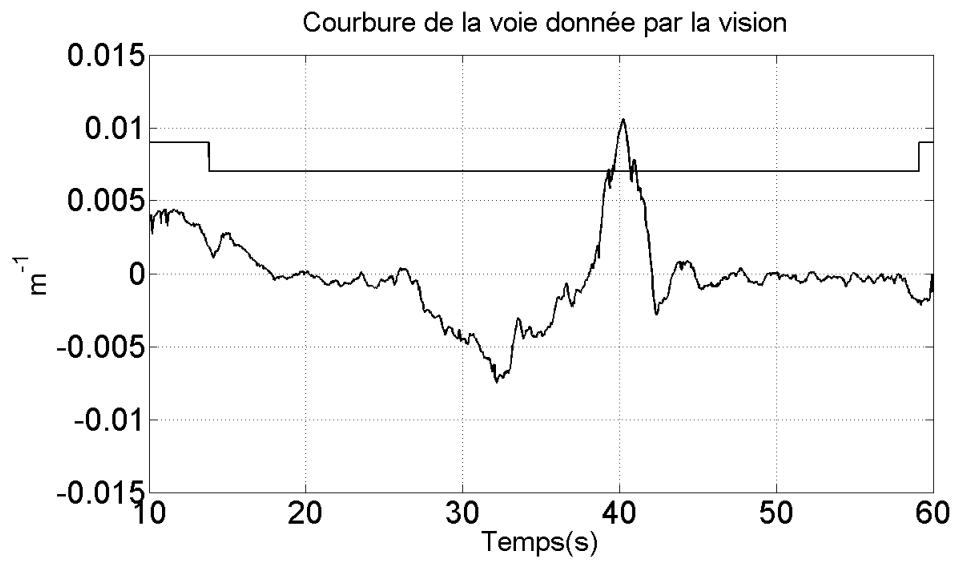


FIG. 6.25 – Courbure de la voie (2ème loi d'assistance, virages importants).

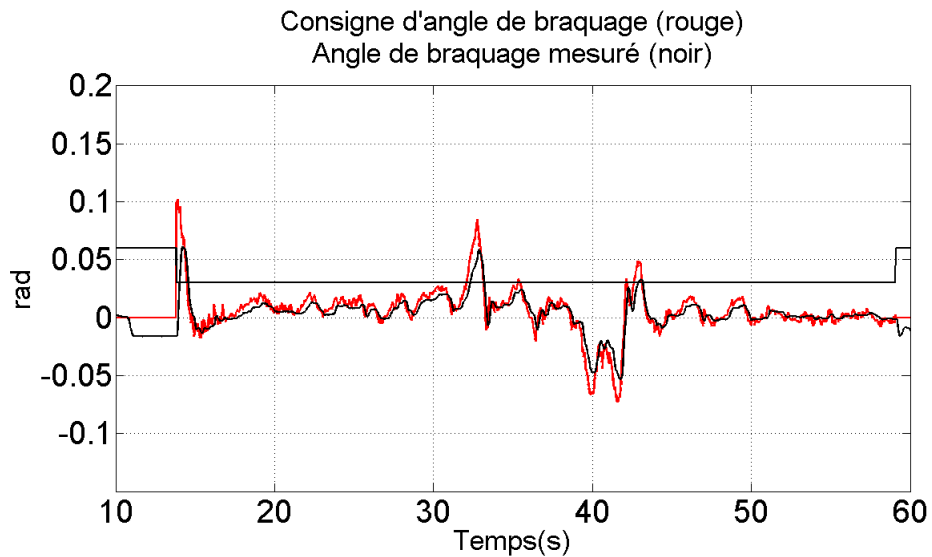


FIG. 6.26 – Consigne d'angle de braquage et angle de braquage mesuré (2ème loi d'assistance, virages importants).

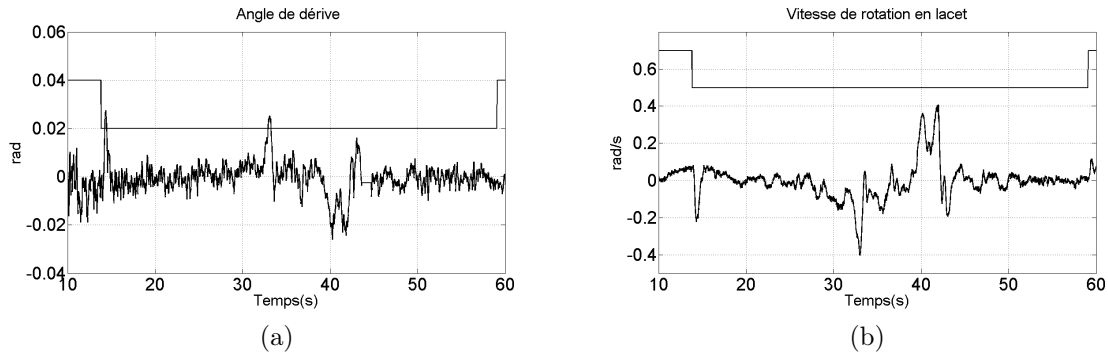


FIG. 6.27 – (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (2ème loi d'assistance, virages importants).

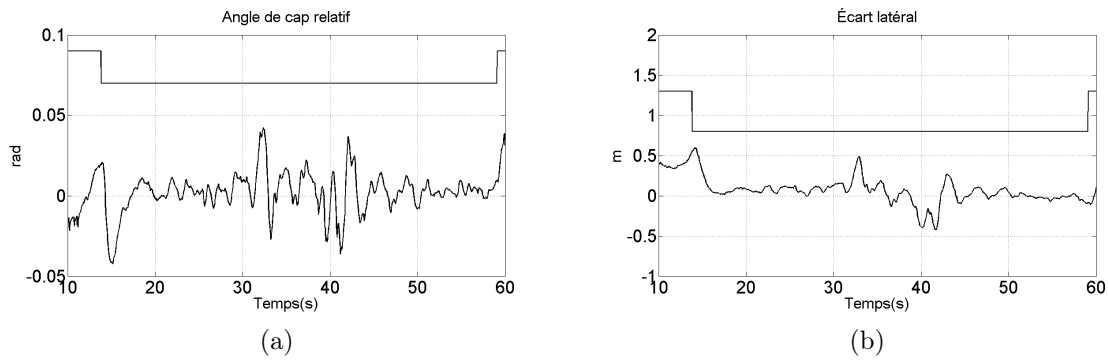


FIG. 6.28 – (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (2ème loi d'assistance, virages importants).

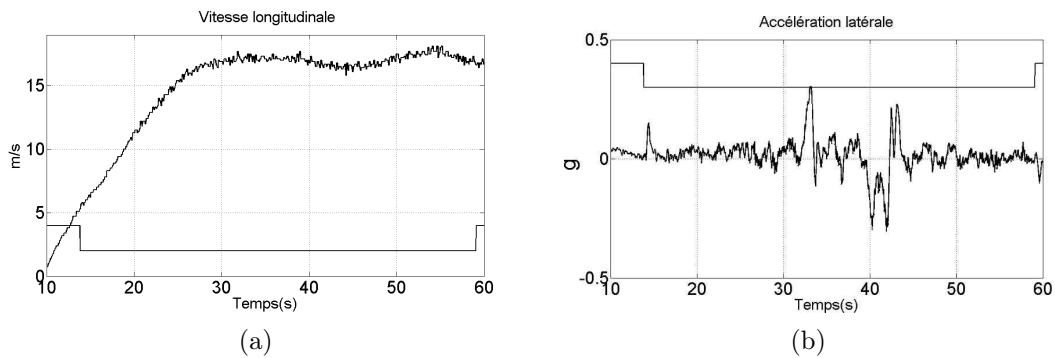


FIG. 6.29 – (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (2ème loi d'assistance, virages importants).

roues avant montrent des oscillations, mais le véhicule continue à suivre la voie sans dépasser ses bords. La vitesse longitudinale était dans ce cas particulier autour de $14m/s$.

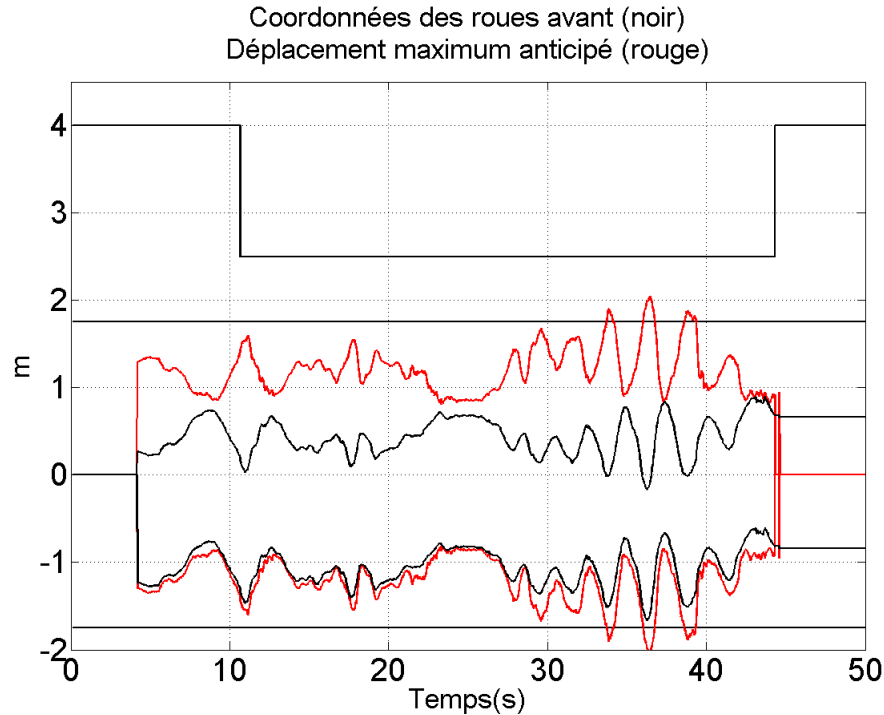


FIG. 6.30 – Position latérale des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé (2ème loi d'assistance, virages très serrés).

La commande en angle de braquage de ce dernier essai est présentée sur la Figure 6.32. L'évolution temporelle des coefficients γ^* , qui est très différente de celle pour la ligne droite, permet de mettre en évidence une sorte d'adaptation de la commande pour rejeter la perturbation de courbure (voir Figures 6.33 à 6.36). La contribution de certains gains, comme par exemple K^1 , K^3 et K^8 , est favorisée par rapport aux autres, qui sont plus utiles pendant un fonctionnement nominal.

6.3.3 Implantation de la 3ème loi d'assistance

La troisième loi d'assistance a été calculée d'après l'Algorithme 6.1.3. Rappelons que cette loi fournit une entrée de consigne en couple appliqué sur la colonne de direction. Les essais ont été conduits en couplant cette loi avec les deuxième, troisième et la quatrième stratégie de commutation. Les avantages et les inconvénients de chaque couplage ont été analysés et comparés.

Calcul de la loi d'assistance et de la fonction de Lyapunov

La région de « conduite normale » utilisée dans l'Algorithme 6.1.3 est définie comme l'intérieur du polytope $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$ suivant la Définition 5.1.5 du Chapitre 5. Par conséquent, avant de calculer la loi d'assistance, les valeurs numériques de β^N , r^N , ψ_L^N , y_L^N , δ_f^N et $\dot{\delta}_f^N$ ainsi que la valeur de d pour la zone centrée sur la voie de largeur $2d$ doivent être choisies. L'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ a été choisi avec les limites données dans le Tableau 6.10. Les limites sur la voie pour

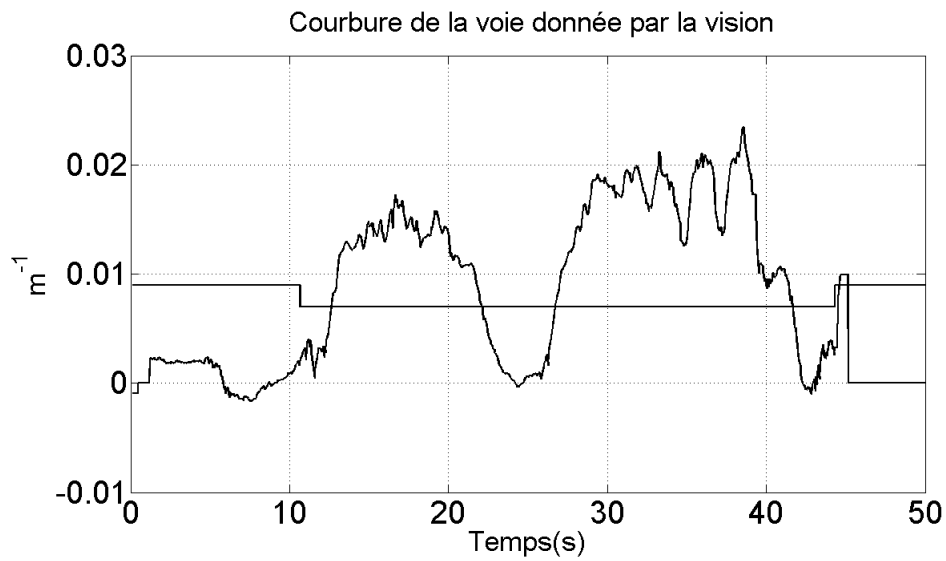


FIG. 6.31 – Courbure de la voie (2ème loi d'assistance, virages très serrés).

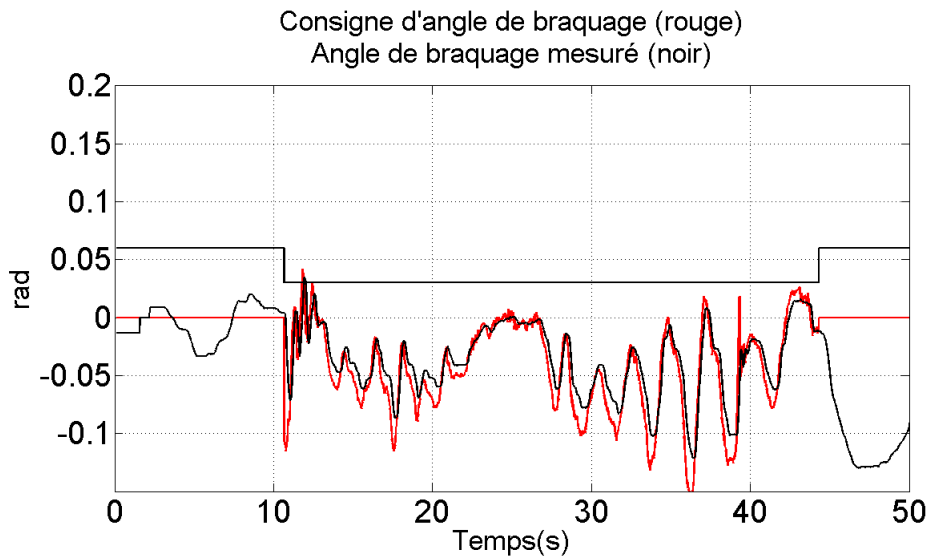


FIG. 6.32 – Consigne d'angle de braquage et angle de braquage mesuré (2ème loi d'assistance, virages très serrés).

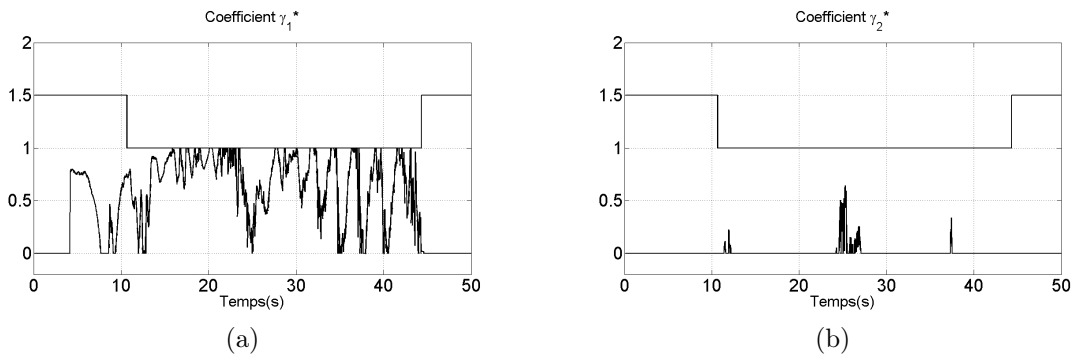


FIG. 6.33 – Loi d’assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_1^* . (b) γ_2^* (2ème loi d’assistance, virages très serrés).

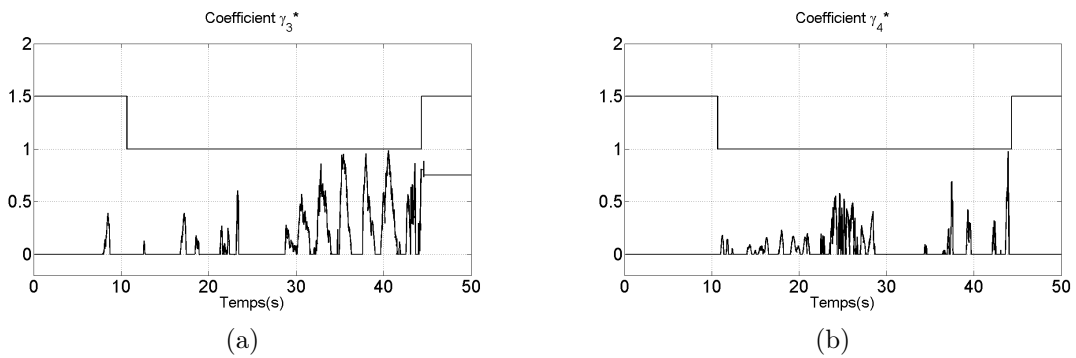


FIG. 6.34 – Loi d’assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_3^* . (b) γ_4^* (2ème loi d’assistance, virages très serrés).

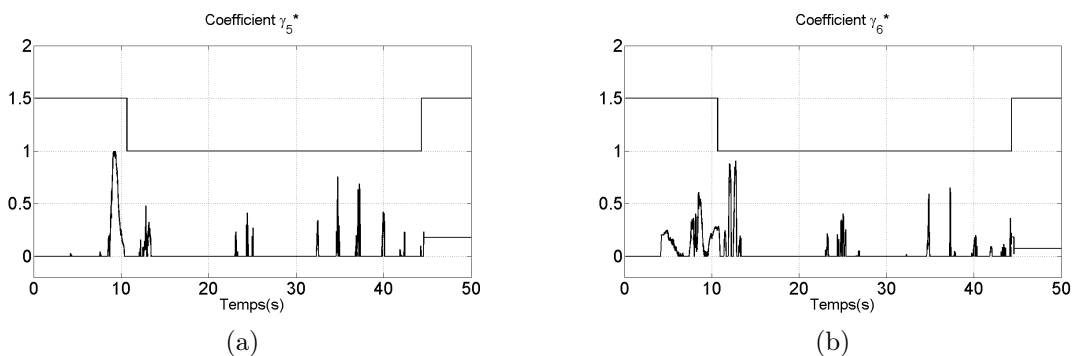


FIG. 6.35 – Loi d’assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_5^* . (b) γ_6^* (2ème loi d’assistance, virages très serrés).

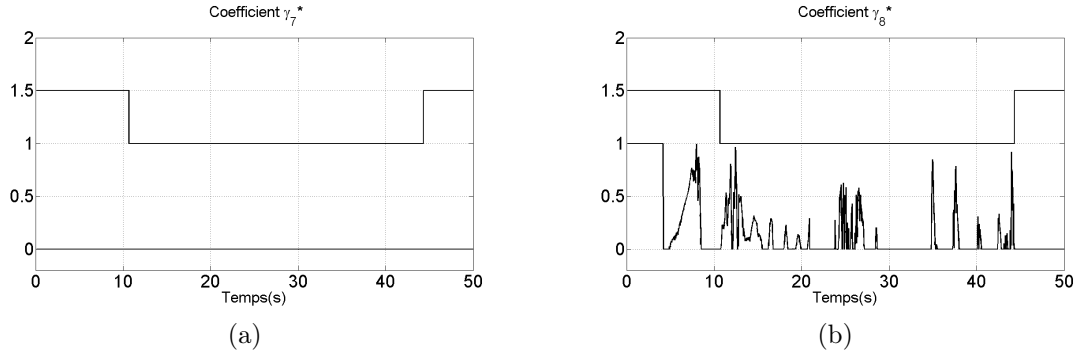


FIG. 6.36 – Loi d’assistance à fonction de Lyapunov composée : (a) γ_7^* . (b) γ_8^* (2ème loi d’assistance, virages très serrés).

le déplacement des roues avant du véhicule pendant une situation « conduite normale » ont été fixées à $d = \pm 1.1m$. Toutes ces valeurs, définissent complètement les ensembles $\mathcal{L}(Z^N)$ et $\mathcal{L}(F)$. La vitesse est quant à elle supposée variable dans l’intervalle $v \in [18m/s; 22m/s]$.

TAB. 6.10 – Limites de l’hypercube de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$.

β^N	r^N	ψ_L^N	y_L^N	δ_f^N	$\dot{\delta}_f^N$
0.01rad	0.104rad/s	0.034rad	0.8m	0.026rad	0.209rad/s
0.5°	6°/s	2°	0.8m	1.5°	12°/s

Le vecteur K résultant de l’Algorithme 6.1.3 est :

$$K = [-198.5, -69.3, -355.9, -17.7, -409.9, 5.5]. \quad (6.66)$$

Les pôles du système véhicule en boucle fermée ont été calculés pour toutes les vitesses $v \in [18m/s; 22m/s]$. Ce système a deux pôles réels et deux paires de pôles complexes conjugués. Tous les pôles ont leurs parties réelles inférieures à -0.6 . L’amortissement des pôles reste en dessous de 1.18 et montre de bonnes propriétés de robustesse.

TAB. 6.11 – Limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

β^M	r^M	ψ_L^M	y_L^M	δ_f^M	$\dot{\delta}_f^M$
0.0297rad	0.2789rad/s	0.08rad	1.02m	0.058rad	0.57rad/s
1.7°	16°/s	4.58°	1.02m	3.32°	32.67°/s

Les trajectoires du véhicule contrôlé sont garanties de rester dans l’ellipsoïde $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$, représenté sur la Figure 6.3, pour des activations dans la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)$. Ceci implique le respect d’une région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ telle que décrite par les valeurs du Tableau 6.11. De plus, le couple maximal d’assistance est assuré de rester inférieur à $26.22Nm$ à l’intérieur de $\varepsilon_{ext}(\frac{1}{V_{ext}}P)$. Dans les mêmes conditions, le déplacement latéral maximal des roues avant doit rester inférieur à $d_{ext} = 1.76m$, valeur qui a été calculée d’après l’équation (6.32).

Résultats des essais

Deuxième stratégie de commutation

La deuxième stratégie de commutation a été programmée comme suit :

– *Activation*

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 2Nm) \wedge (x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)) \wedge \wedge (\psi_L \cdot y_L > 0) \wedge ((y_g = 1.1m) \vee (y_d = -1.1m)) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.67)$$

– *Désactivation*

$$T_r^{21} : (2Nm < |C_c| \leq 6Nm) \wedge (x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.68)$$

Les résultats du couplage de cette stratégie de commutation avec la deuxième loi d'assistance sont présentés sur les Figures 6.37 à 6.42.

Sur la Figure 6.37 les trajectoires des roues avant sur la voie sont représentées en trait continu. En trait continu sont représentées également les limites de la zone centrée sur la voie de largeur $\pm 1.1m$. Les bords de la voie de circulation sont marqués en traits pointillés à $\pm 1.75m$. Les activations de l'assistance ont lieu aux instants $t = 31.9s$, $t = 50.7s$, $t = 70.4s$, $t = 82.6s$, $t = 96.4$ et $t = 100.5s$. Chaque activation est due à un couple faible du conducteur sur le volant (voir Fig. 6.38), quand l'une des deux roues avant franchit les limites de la zone centrée sur la voie de largeur $\pm 1.1m$ et que l'état du véhicule se trouve dans l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$. Les limites de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ sont représentées par un trait pointillé pour chaque variable d'état sur les Figures 6.39 à 6.41.

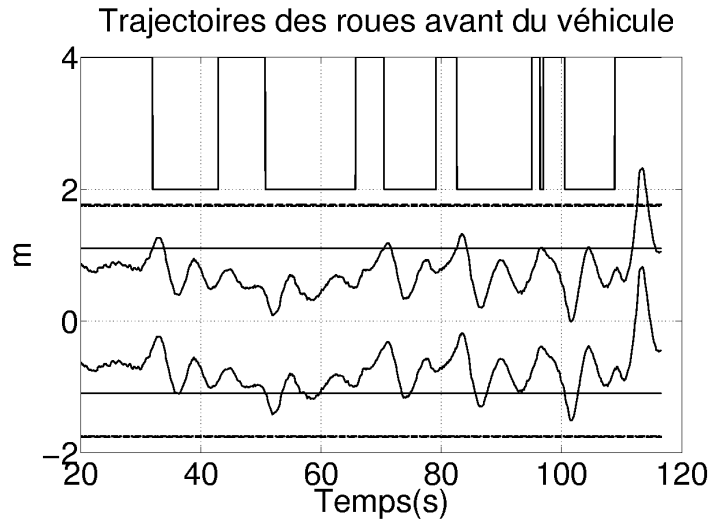


FIG. 6.37 – Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d pour la 3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).

Après l'activation de l'assistance, les roues avant dépassent légèrement les limites de $\pm 1.1m$, mais elles restent toujours à l'intérieur de la voie (voir Figure 6.37). La conduite automatique au centre de la voie est stable. Elle montre des oscillations à faible fréquence autour du centre de la voie avec une amplitude inférieure à $0.3m$ à l'état stationnaire.

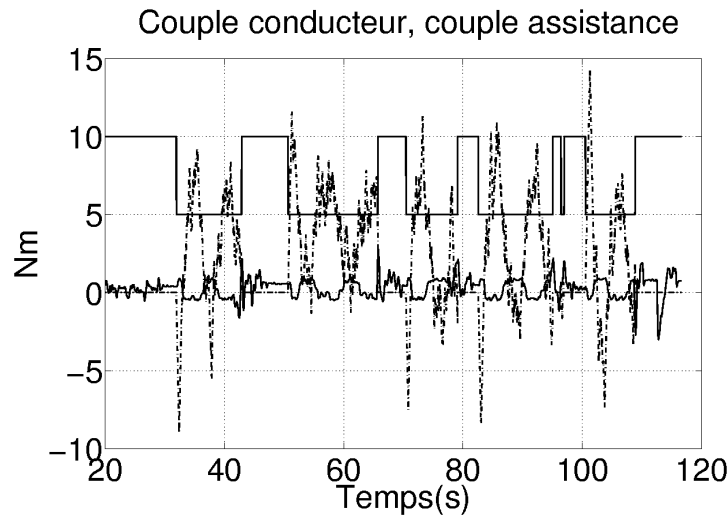


FIG. 6.38 – Couple exercé par le conducteur sur le volant en trait continu et couple d'assistance en trait pointillé (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).

Le couple conducteur et le couple d'assistance sont présentés sur la Figure 6.38. Le couple d'assistance vérifie les spécifications du calcul théorique et reste en dessous de $26.22Nm$. Notons que la moyenne du couple d'assistance est positive à certains moments du suivi de voie. Cela correspond en réalité à la compensation du devers prononcé des pistes d'essai.

Les variables d'état présentées sur les Figures 6.39 à 6.41 ont des évolutions très proches des limites de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$, et sont, dans la plupart des cas, à l'intérieur de celui-ci. Elles restent, sur la totalité du parcours de test, très éloignées des limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$, marquées sur les Figures 6.39 à 6.41 en trait point-trait. La vitesse longitudinale du véhicule a varié pendant ce test entre $18m/s$ et $22m/s$, satisfaisant les spécifications de la phase de synthèse de la loi de commande (Figure 6.42 (a)). L'accélération latérale, inférieure à $0.15g$, même aux moments de l'activation de l'assistance, montre un bon confort (Figure 6.42 (b)).

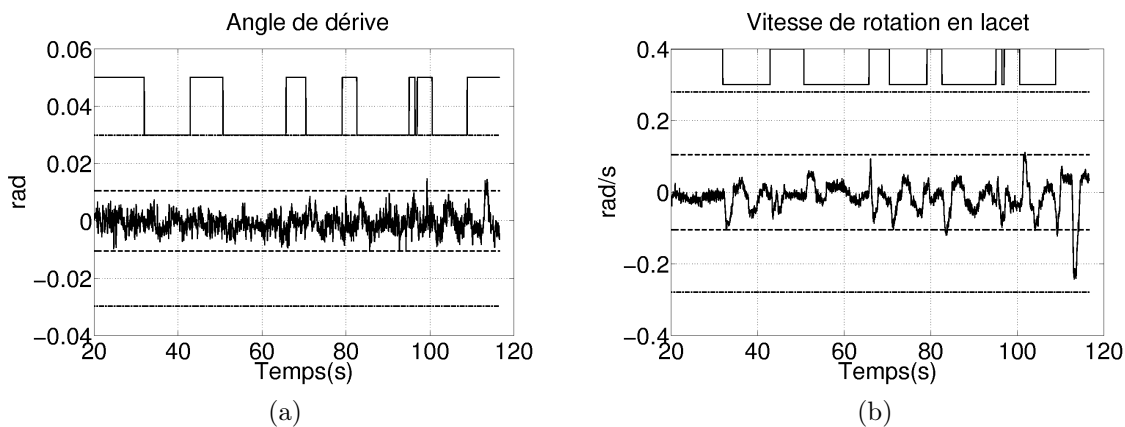


FIG. 6.39 – (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).

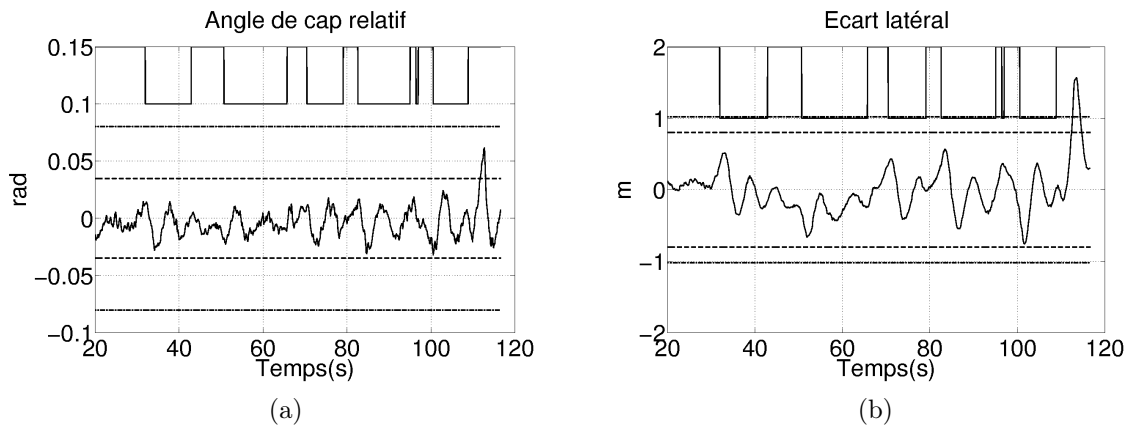


FIG. 6.40 – (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).

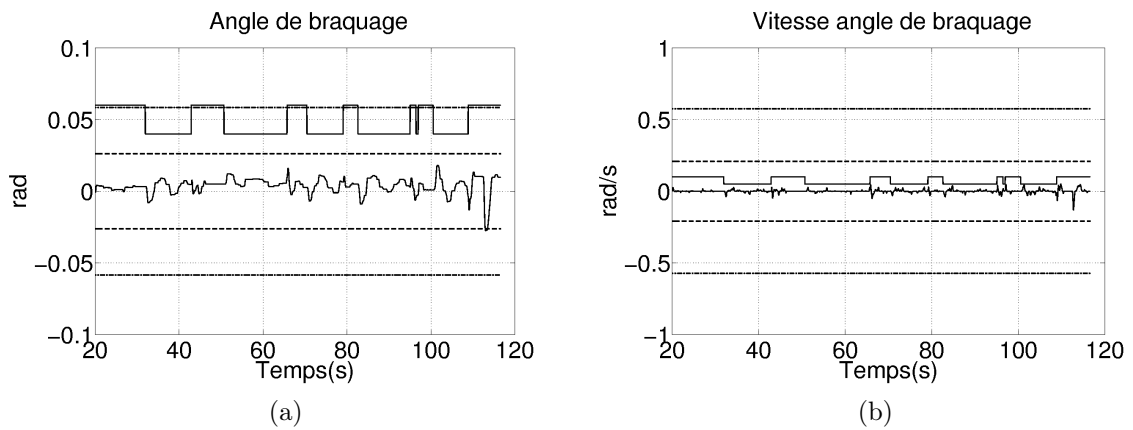


FIG. 6.41 – (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).

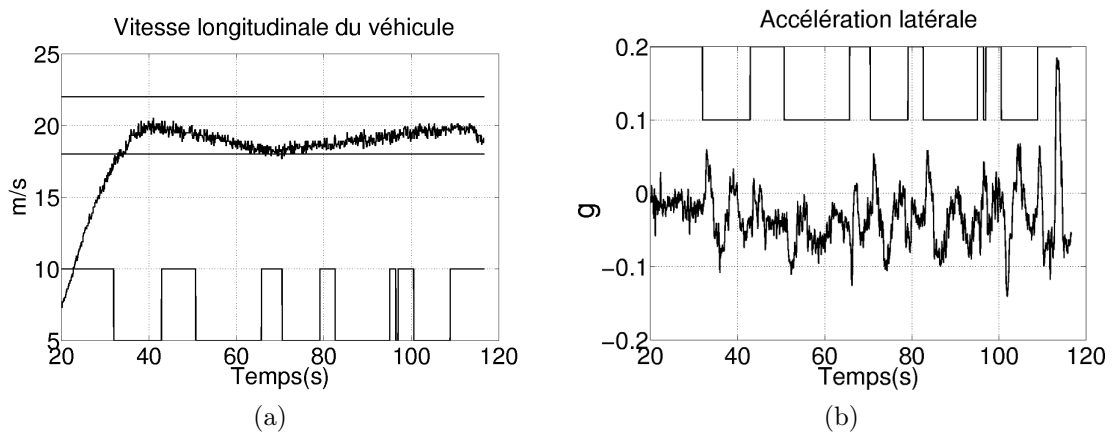


FIG. 6.42 – (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (3ème loi d'assistance, 2ème stratégie de commutation).

Signalons aussi qu'à $t = 111.7s$, l'assistance à la conduite ne s'est pas déclenchée, malgré le fait que les roues avant du véhicule étaient en train de dépasser la voie de circulation, pendant une période d'activité réduite du conducteur (voir sur la Figure 6.37). Ceci est un cas pour lequel l'état du véhicule est déjà en dehors de la région hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$, quand une des deux roues avant franchit une des limites $\pm 1.1m$. Dans cet exemple, l'angle de cap relatif dépasse sa limite de « conduite normale », avant qu'une des roues franchisse $\pm 1.1m$ (voir Figure 6.40 (a), $t = 111.7s$). Plus spécifiquement, il s'agit d'une sortie brusque du véhicule de la voie de circulation, qui n'est pas couverte par la deuxième stratégie de commutation de l'assistance. Pour palier cet inconvénient, la troisième stratégie de commutation a été mise en place avec cette loi d'assistance.

Troisième stratégie de commutation

L'essai de la loi d'assistance couplée avec la deuxième stratégie de commutation a montré un grand écart entre la valeur maximale prédite pour le déplacement des roues avant ($1.75m$) et le déplacement effectivement mesuré pendant l'essai (moins de $1.5m$ dans la plupart des cas d'activation). D'autre part, les valeurs des variables d'état restent très inférieures aux valeurs maximales garanties. Pour ces raisons, D^{max} dans la troisième stratégie de commutation est choisi à une valeur supérieure à la demi-largeur de la voie, soit $D^{max} = 2.5m$. L'implantation de la troisième stratégie de commutation prend donc la forme :

– *Activation*

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 2Nm) \wedge (x \in \mathcal{L}(F)) \wedge (\psi_L \cdot y_L > 0) \wedge ((y_g = 1.1m) \vee (y_d = -1.1m)) \wedge \wedge (d^{max}(x) \leq 2.5m) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.69)$$

– *Désactivation*

$$T_r^{21} : (2Nm < |C_c| \leq 6Nm) \wedge (x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.70)$$

Si l'assistance à la conduite est déclenchée pour des déplacements anticipés des roues avant inférieures à $D^{max} = 2.5m$, l'ellipsoïde invariant correspondant aux hyperplans déterminés par $D^{max} = 2.5m$ est :

$$\bar{\varepsilon}_{ext}\left(\frac{1}{\bar{V}_{ext}}\right) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P x \leq \bar{V}_{ext}\}, \quad (6.71)$$

où \bar{V}_{ext} est calculé à partir de l'équation (6.32) par :

$$\bar{V}_{ext} = \frac{1}{f P^{-1} f^T} \left(D^{max} - \frac{a}{2}\right)^2, \quad (6.72)$$

et $f = (0, 0, (l_f - l_s), 1, 0, 0)$.

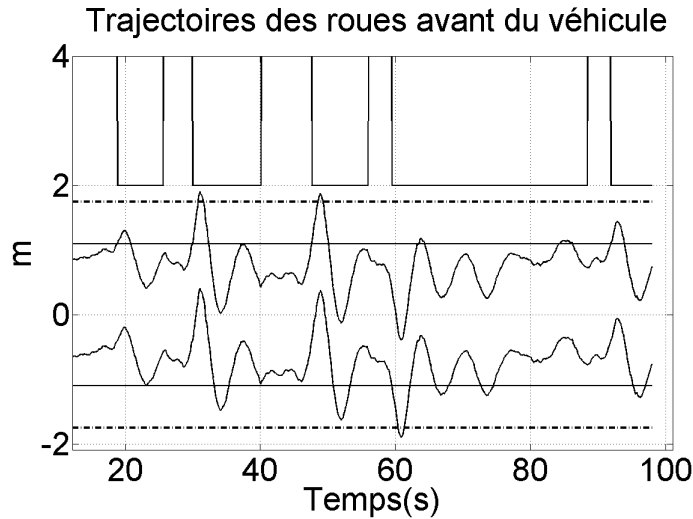
L'activation de l'assistance, conformément à la troisième stratégie de commutation, garantit que l'état du véhicule est à l'intérieur de l'ellipsoïde $\bar{\varepsilon}_{ext}\left(\frac{1}{\bar{V}_{ext}}\right)$ au moment de l'activation et durant la période de contrôle automatique. En conséquence, la nouvelle région de sécurité garantie, $\mathcal{L}(\bar{Z}^M)$, s'obtient en faisant les projections sur les six axes de l'ellipsoïde $\bar{\varepsilon}_{ext}\left(\frac{1}{\bar{V}_{ext}}\right)$. Les valeurs numériques de ces projections sont données dans le Tableau 6.12

Pour cet essai, des sorties de voies rapides associées à des moments d'activité réduite du conducteur ont été provoquées. Pour cela, le conducteur a exercé un couple fort et rapide sur le volant puis a ôté aussitôt ses mains du volant. Les résultats obtenus se trouvent sur les Figures 6.43 à 6.48.

TAB. 6.12 – Limites de l'hypercube de sécurité $\mathcal{L}(\bar{Z}^M)$.

$\bar{\beta}^M$	\bar{r}^M	$\bar{\psi}_L^M$	\bar{y}_L^M	$\bar{\delta}_f^M$	$\dot{\bar{\delta}}_f^M$
0.0507rad	0.475rad/s	0.136rad	1.73m	0.099rad	0.977rad/s
3°	24.8°/s	7.82°	1.73m	5.67°	56°/s

Les trajectoires des roues avant, présentées sur la Figure 6.43, indiquent un comportement très favorable de cette combinaison stratégie de commutation - loi d'assistance. L'assistance est activée promptement quand une des deux roues avant franchit la zone centrée de largeur $\pm 1.1m$, elle ramène le véhicule vers le centre de la voie sans dépasser les marquages. Les déplacements des roues avant restent très faibles et bien inférieurs à $2.5m$ par rapport au centre de la voie. Ces valeurs confirment l'hypothèse que l'ensemble invariant $\bar{\varepsilon}_{ext}(\frac{1}{V_{ext}})$ est fortement conservateur. Le couple d'assistance, présenté avec le couple du conducteur sur la Figure 6.44, est peu différent de celui de la deuxième stratégie de commutation. Il reste toujours inférieur à $20Nm$.

FIG. 6.43 – Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d pour la 3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

Les variables d'état, leurs limites dans la région de « conduite normale » hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ et les valeurs de la nouvelle région de sécurité garantie $\mathcal{L}(\bar{Z}^M)$ sont présentées sur les Figures 6.45 à 6.47 en ligne continue, discontinue et respectivement trait-point. On remarque à nouveau une très grande différence entre les valeurs maximales mesurées et les valeurs maximales garanties. De plus, l'état du véhicule reste, la plupart du temps, très proche, voire à l'intérieur, de $\mathcal{L}(Z^N)$ même si cette stratégie de commutation ne tient pas compte de $\mathcal{L}(Z^N)$. La vitesse longitudinale du véhicule est restée pendant cet essai entre $18m/s$ et $22m/s$ (Figure 6.48 (a)). L'accélération latérale inférieure à $0.2g$ démontre la préservation du confort durant l'intervention de l'assistance (Figure 6.48 (b)).

Quatrième stratégie de commutation

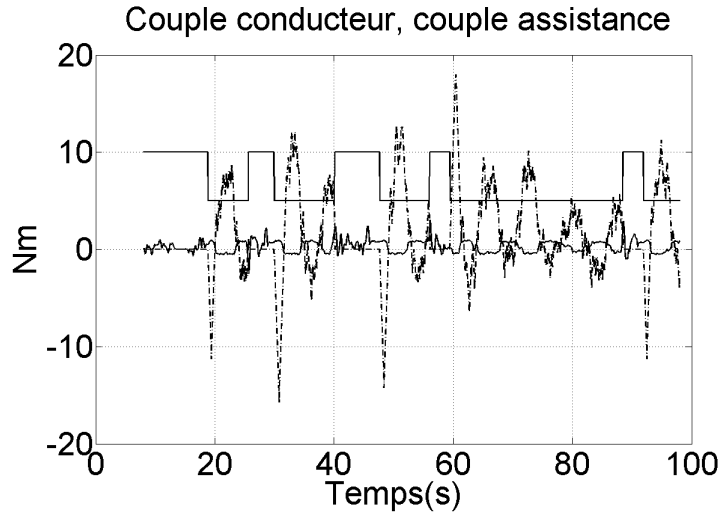


FIG. 6.44 – Couple exercé par le conducteur sur le volant en trait continu et couple d'assistance en trait pointillé (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

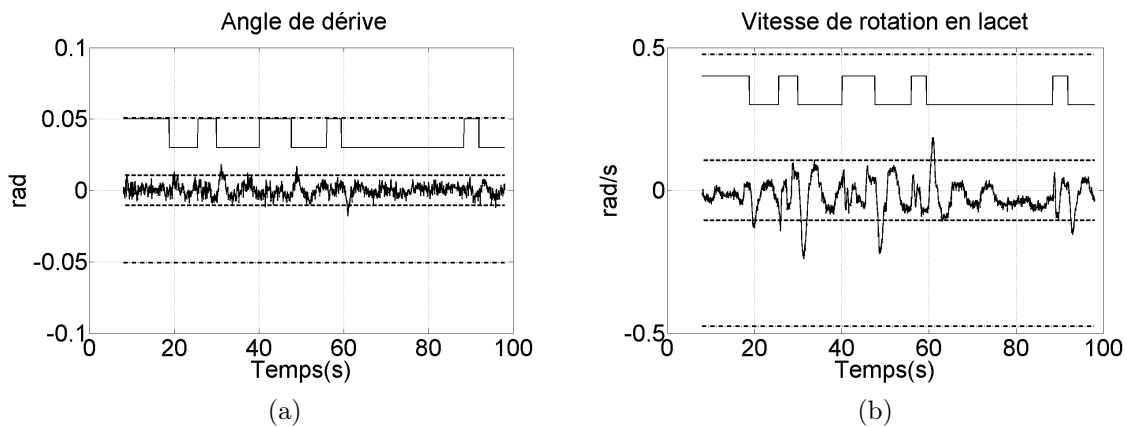


FIG. 6.45 – (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

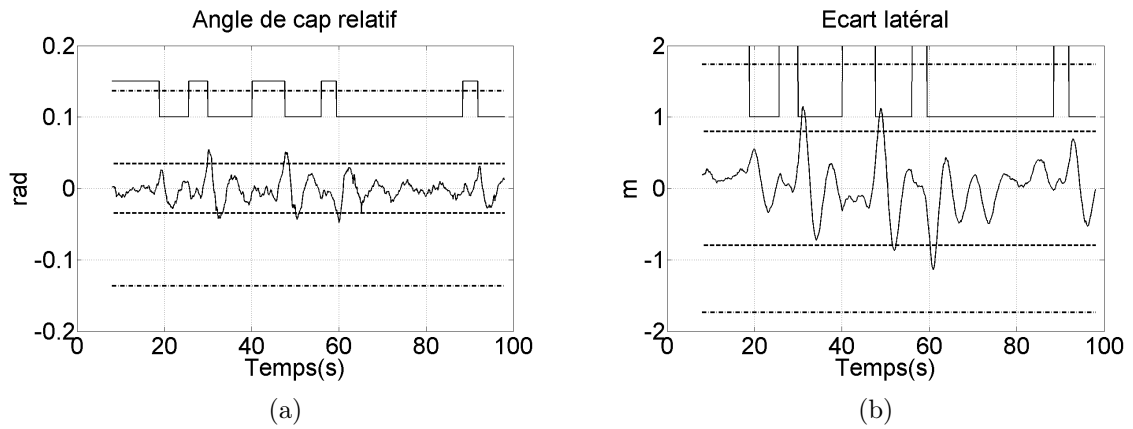


FIG. 6.46 – (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

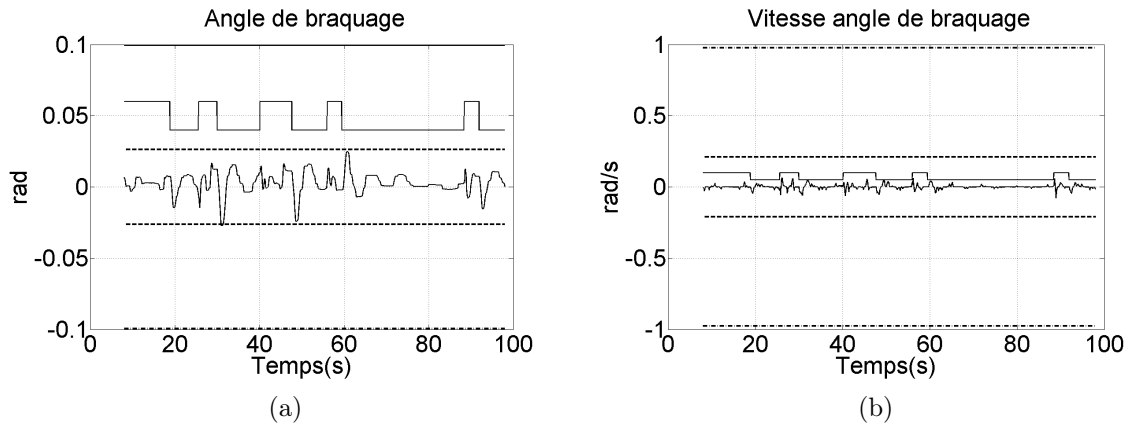


FIG. 6.47 – (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

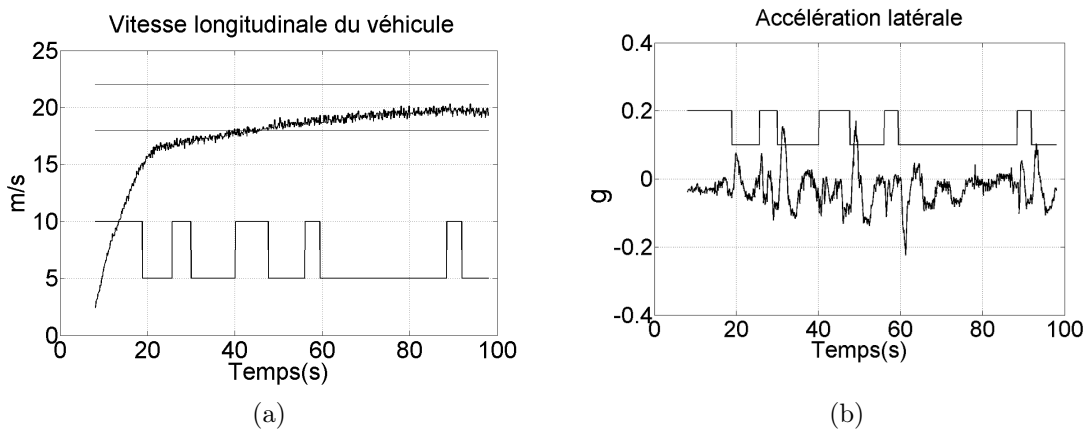


FIG. 6.48 – (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (3ème loi d'assistance, 3ème stratégie de commutation).

La quatrième stratégie de commutation a pour objectif de traiter tous les types de sorties de voie : lente ou rapide. Pour la tester, le conducteur exerce un couple faible ou fort sur le volant et ôte aussitôt ses mains du volant.

Conformément à la quatrième stratégie de commutation, la loi d'assistance est activée juste au bon moment pour que les roues puissent au maximum atteindre les bords de voie, sans les dépasser. Les valeurs numériques adoptées pour ce test sont les suivantes :

– *Activation*

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 2.5Nm) \wedge (x^T P x \leq V_{ext}) \wedge \wedge (1.75m - 0.1m \leq d^{max}(x) \leq 1.75m + 0.1m) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.73)$$

– *Désactivation*

$$T_r^{21} : (2.5Nm < |C_c| \leq 6Nm) \wedge (x^T P x \leq V_{ext}) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.74)$$

La valeurs de V_{ext} est calculée à partir de l'équation (6.72) pour $D^{max} = 1.75m + 0.1m$ et vaut 8.36. Sur la Figure 6.49 sont présentées les trajectoires des roues avant en trait noir continu, la valeur instantanée du déplacement anticipé $d^{max}(x)$ en trait rouge continu et les bords de la voie à $\pm 1.75m$ en trait pointillé avec une tolérance de $\pm 0.1m$. La loi d'assistance est activée chaque fois que le déplacement maximal anticipé indique une sortie de voie potentielle pendant une réduction de l'activité du conducteur (voir $t = 59s$, $t = 73.2s$, $t = 87.2s$, $t = 102s$ sur la Figure 6.49). Remarquons que l'assistance s'active pour différents déplacements des roues avant par rapport au centre de la voie, par exemple à $t = 73.2s$ $y_d = -1.05m$ et à $t = 102s$ $y_g = 1.25m$. Le couple d'assistance, représenté en trait pointillé sur la Figure 6.50, reste dans ce cas en dessous de $15Nm$, valeur inférieure à la valeur maximale des deux stratégies de commutation testées précédemment. Les variables d'état ont des évolutions très similaires à celles enregistrées pendant le test de la troisième stratégie de commutation.

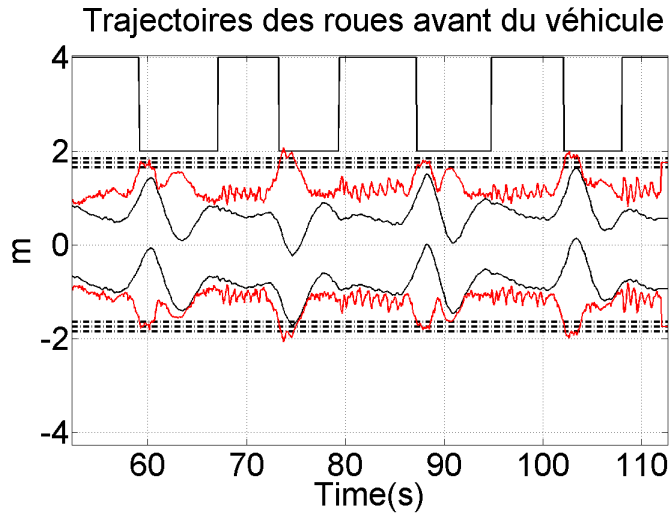


FIG. 6.49 – Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximum anticipé (3ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).

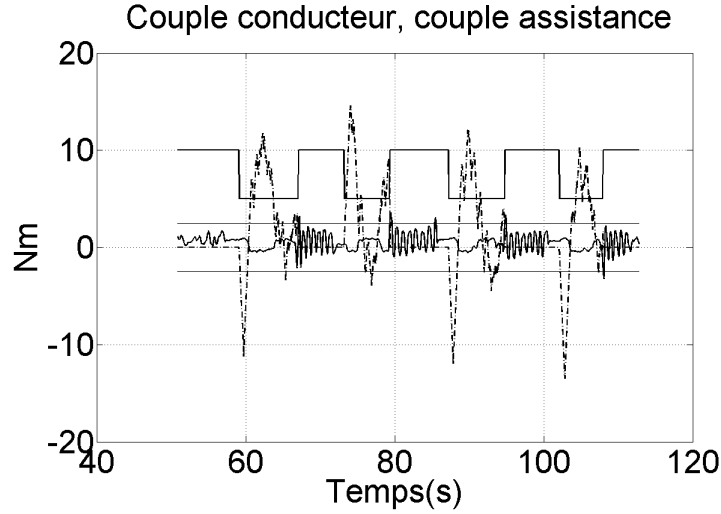


FIG. 6.50 – Couple exercé par le conducteur sur le volant en trait continu et couple d'assistance en trait pointillé (3ème loi d'assistance, 4ème stratégie de commutation).

Comparaison des stratégies de commutation

Le test de la 3ème loi d'assistance a été poursuivi par une comparaison pratique des deuxième, troisième et quatrième stratégies de commutation en vérifiant notamment la fiabilité des activations. Pour effectuer cette comparaison, les données du scénario suivant ont été enregistrées : Les assistances étant toutes inhibées, le conducteur a suivi la voie sur un segment de la piste à très faible courbure, puis laisse le véhicule dériver sur la gauche ou sur la droite de la voie en lâchant le volant. Le véhicule s'écarte alors du centre de la voie et dépasse le bord de la voie. Le conducteur reprend le contrôle du véhicule à ce moment là.

Les données enregistrées ont été ensuite rejouées sous RTMaps avec les trois stratégies de commutation agissant en parallèle. Les critères d'activation utilisés sont rappelés ci-dessous. Comme le test portait sur la seule activation, la condition de désactivation de l'assistance a été réduite à la détection d'un couple du conducteur supérieur à $2Nm$, ce qui correspond à une activité volontaire du conducteur.

– Activation de la 2ème stratégie de commutation

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 2Nm) \wedge (x \in \mathcal{L}(Z^N) \cap \mathcal{L}(F)) \wedge \wedge (\psi_L \cdot y_L > 0) \wedge ((y_g = 1.1m) \vee (y_d = -1.1m)) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.75)$$

– Activation de la 3ème stratégie de commutation

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 2Nm) \wedge (x \in \mathcal{L}(F)) \wedge (\psi_L \cdot y_L > 0) \wedge ((y_g = 1.1m) \vee (y_d = -1.1m)) \wedge \wedge (d^{max}(x) \leq 2.5m) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.76)$$

– Activation de la 4ème stratégie de commutation

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 2.5Nm) \wedge (x^T P x \leq 8.36) \wedge \wedge (1.75m - 0.1m \leq d^{max}(x) \leq 1.75m + 0.1m) \wedge (Inhibée = 0). \quad (6.77)$$

– Désactivation

$$T_r^{21} : (2Nm < |C_c| \leq 6Nm). \quad (6.78)$$

Les trajectoires des roues avant, les bords de la voie de circulation et ainsi que trois signaux décrivant l'activation des stratégies de commutation sont présentés sur la Figure 6.51. Le signal marqué en noir correspond à la deuxième stratégie de commutation et indique une activation sur la valeur basse 3. Le signal marqué en bleu correspond à la troisième stratégie de commutation et indique une activation sur la valeur basse 4. Le signal marqué en rouge correspond à la quatrième stratégie de commutation et indique une activation sur la valeur basse 5.

Les activations de la loi de commande ont lieu conformément aux trois stratégies de commutation autour de $t = 77.2s$, $t = 83s$, $t = 95s$ et $t = 104s$. Dans tous ces cas, le couple du conducteur sur le volant est inférieur à $2Nm$ (Figure 6.52). Si la deuxième et la troisième stratégie de commutation génèrent chacune une activation de la loi de commande, alors celles-ci ont lieu au même instant. Il s'agit du moment de croisement des limites de la zone centrée sur la voie $\pm 1.1m$.

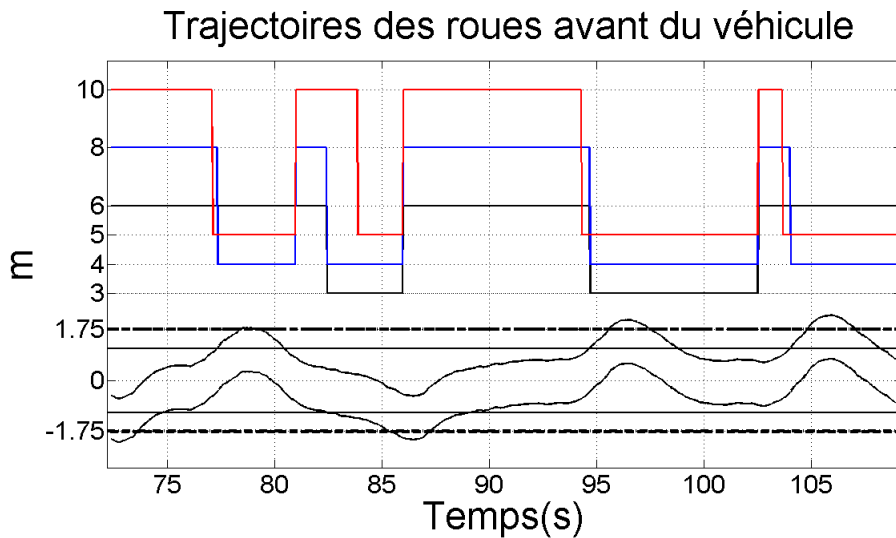


FIG. 6.51 – Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d).

La première activation, autour de $t = 77.2s$, s'est produite uniquement pour la troisième et la quatrième stratégie de commutation, car pour la deuxième stratégie de commutation l'état du véhicule avait déjà dépassé la région $\mathcal{L}(Z^N)$. La deuxième activation, autour de $t = 83s$, est un exemple de sortie de voie lente, pour laquelle la deuxième et la troisième stratégie de commutation activent l'assistance simultanément, au moment du croisement des limites $\pm 1.1m$. Cependant, la quatrième stratégie de commutation retarde son activation, car elle agira exactement au dernier moment pour éviter une sortie de voie. Ceci est son grand avantage par rapport aux autres ; elle laisse plus de liberté sur la voie au conducteur en fonction du danger réel de la situation de dérive. Les activations autour de $t = 95s$ et de $t = 104s$ ont lieu simultanément pour la deuxième et la troisième stratégie de commutation et légèrement en avance pour la quatrième. Ceci suggère que les roues avant auraient dépassé les bords de voie pour des activations de la deuxième et de la troisième stratégie, mais pas pour la quatrième.

L'activation selon la quatrième stratégie est présentée sur la Figure 6.53 avec le déplacement maximal anticipé des roues avant, qui est marqué en trait rouge continu. Chaque fois que ce trait rouge franchit les bords de la voie, l'assistance est activée.

En considérant les constatations précédentes, nous pourrions conclure que la quatrième stra-

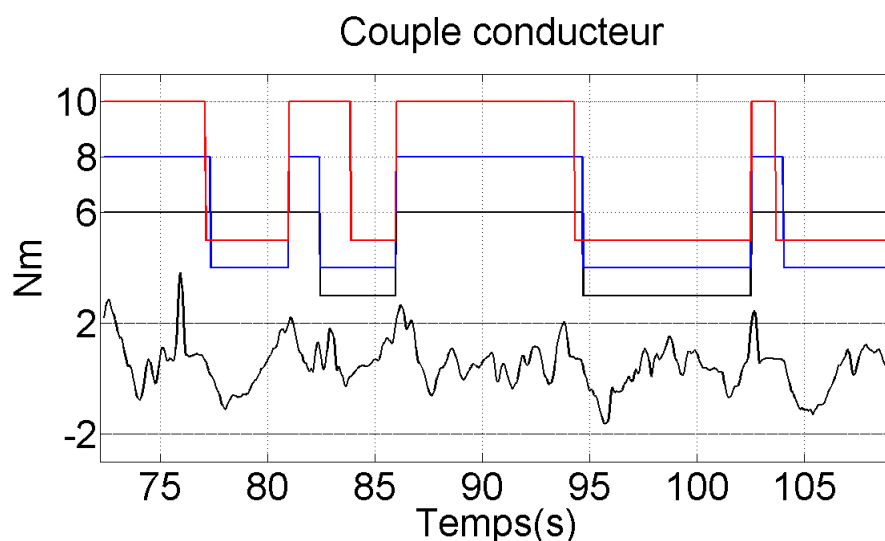


FIG. 6.52 – Couple exercé par le conducteur sur le volant.

tégie de commutation serait la plus efficace en terme d'activation de la loi d'assistance. Néanmoins, il ne faut pas oublier que cette comparaison ne prend pas en compte l'avis de conducteur. Nous pourrions supposer que le fait d'avoir une assistance à la conduite qui se déclenche pour différentes positions du véhicule sur la voie peut générer des confusions et rendra l'assistance peu prévisible. Des études approfondies sur l'acceptation de l'assistance à la conduite par les conducteurs pourraient être décisives pour trancher sur la question de la meilleure stratégie de commutation à adopter.

6.4 Conclusions

Ce chapitre a exposé le développement et l'implantation sur le véhicule prototype de différentes assistances à la conduite pour éviter les sorties involontaires de voie pour des routes à faibles courbures. Les lois d'assistance synthétisées ont porté sur des commandes en couple et des commandes en angle de braquage appliquées sur la colonne de direction. Quatre stratégies de commutation ont été aussi proposées.

L'implantation pratique des assistances, qui se composent à chaque fois d'une loi d'assistance couplée à une stratégie de commutation, a été réalisée avec succès. Toutes les lois d'assistance ont un comportement asymptotiquement stable et dirigent le véhicule vers le centre de la voie après activation. Les garanties de non-dépassement de la voie de circulation ou d'une limite maximale par rapport au centre de la voie, qui ont été exprimées par l'intermédiaire du déplacement maximum des roues avant du véhicule, ont été vérifiées lors des essais. De plus, ces bornes garanties se sont montrées conservatrices dans la plupart des cas. Pendant l'intervention de l'assistance à la conduite, la dynamique du véhicule décrite à travers ses variables d'état, reste bornée à la région de sécurité imposée lors de la synthèse de la loi d'assistance. La remarque de sur-estimation des valeurs maximales garanties pendant le processus de régulation est également valable pour la dynamique du véhicule.

La synthèse des lois d'assistance de ce chapitre a été réalisée pour des routes à faible courbure. Pour cette raison, les performances de suivi de voie de ces lois de commande se sont montrées très

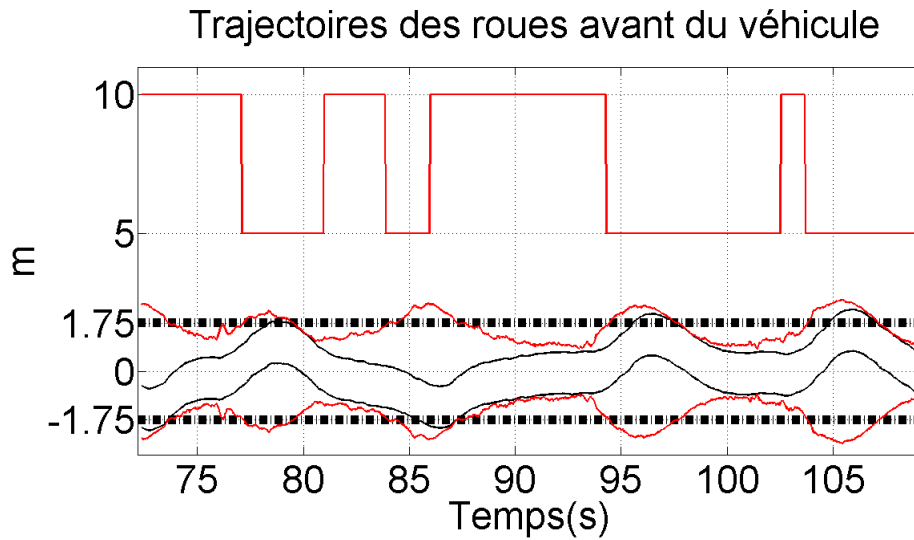


FIG. 6.53 – Positions latérales des roues avant du véhicule (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé.

faibles pour des segments de la piste d'essai à courbure significative (moins de 500m de rayon), exception faite de la loi de commande fondée sur l'approche avec une fonction de Lyapunov composée, qui conduit le véhicule proche de centre de la voie, même le long des virages à très faible rayon de courbure (50m).

Cependant, mis à part le suivi de voie, un enjeu beaucoup plus important relevé sont les activations/désactivations de l'assistance à la conduite en situations de prise de virage. Dans ce cas, pour des virages importants, les ensembles ellipsoïdaux définis dans ce chapitre n'ont plus la garantie de rester invariants, car les dérivées des fonctions de Lyapunov correspondantes ne sont plus forcément négatives. Par conséquent, les résultats de stabilité « entrée bornée - sortie bornée » du système véhicule commuté ne sont plus valables. De même, les garanties des limites de déplacement des roues avant sur la voie de circulation, ou des limites pour la dynamique globale du véhicule ne sont plus valides.

Le chapitre suivant tiendra compte de l'évolution du véhicule sur des routes à courbures significatives lors de la synthèse des lois de commande. L'objectif sera d'assurer des ensembles invariants malgré l'entrée de courbure, tel que les commutations conducteur - loi d'assistance gardent bornées les trajectoires du système véhicule. Les performances de suivi de voie et également le non-dépassement de la voie de circulation seront également des points principaux du cahier des charges.

Bibliographie

- [Hu03] T. Hu et Z. Lin *Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, No. 3, pp. 440 - 450, 2003.
- [Hu04] T. Hu et Z. Lin *Properties of the composite quadratic Lyapunov functions* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No. 7, pp. 1162 - 1167, 2004.
- [LAP99] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, L. S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney et D. Sorensen, *LAPACK Users' Guide, Third Edition* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1999.
- [Mam06] S. Mammar, S. Glaser et M. Netto *Time to line crossing for lane departure avoidance : A theoretical study and an experimental setting* IEEE Transactions on Intelligent Transportation Ssystems, Vol. 7, pp. 226-241, 2006.
- [Rah04] Raharijoana, T. *Commande robuste pour l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier* Thèse de doctorat de l' Université Paris XI Orsay, 2004.
- [SDP08] K. Fujisawa, M. Fukuda, K. Kobayashi, M. Kojima, K. Nakata, M. Nakata et Makoto Yamashita *SDPA (SemiDefinite Programming Algorithm) User's Manual - Version 7.0.5* Research Reports on Mathematical and Computing Sciences, SERIES B : Operation Research, B-448, February 2008.

Assistance à la conduite pour des routes à courbure prononcée

Sommaire

7.1	Influence de la courbure sur le suivi de voie	219
7.2	Synthèse de la loi de commande	221
7.2.1	Courbure non mesurable : Synthèse de la 4ème loi de commande par rejet de perturbation	221
7.2.2	Courbure mesurable : Synthèse de la 5ème loi de commande par compensation en préfiltrage	223
7.3	Stratégies de commutation	227
7.3.1	Ensemble invariant et déplacement latéral des roues avant du véhicule	227
7.3.2	Stratégies de commutation	228
7.4	Implantation pratique et résultats	230
7.4.1	Implantation de la 4ème loi d'assistance	230
7.4.2	Implantation de la 5ème loi d'assistance	242
7.5	Conclusions	251

Ce chapitre est dédié à la conception est à l'implantation sur véhicule prototype de l'assistance à la conduite pour le cas des routes à courbure prononcée. Nous traiterons uniquement le domaine de fonctionnement nominal de l'assistance, en se basant sur le formalisme du système hybride défini dans la Section 5.2 du Chapitre 5. Ce domaine de fonctionnement contient les états Σ_1 et Σ_2 et les transitions de passage de l'un à l'autre.

7.1 Influence de la courbure sur le suivi de voie

Le cahier des charges spécifié dans le Chapitre 5, Section 5.2.4 reste valable également pour les lois de commande développées pour le type de route traité ici. Ces lois doivent donc assurer des ensembles invariants qui contiennent la région de « conduite normale » et qui sont contenus dans la région de sécurité et ce malgré l'influence de la courbure de la route. Elles doivent de plus minimiser l'excursion des trajectoires en dehors de la région de « conduite normale ». De même que dans les spécifications précédentes, le couple fourni par le moteur, pendant l'intervention de l'assistance doit respecter les limites physiques de cet actionneur.

Les lois d'assistances seront synthétisées sur le modèle de véhicule de l'équation (4.107) du Chapitre 4, Partie II :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u(C_a + C_c) + B_\rho \rho_{ref}, \\ z = x. \end{cases} \quad (7.1)$$

La courbure ρ_{ref} y intervient sous la forme d'une perturbation exogène. L'objectif de la commande est alors d'atténuer son effet sur l'erreur de positionnement latéral du véhicule par rapport à l'axe de la voie. Plusieurs solutions ont été étudiées dans la littérature. Si cette courbure est accessible à la mesure à travers des algorithmes de vision ou d'une cartographie couplée à un système GPS par exemple, un terme de préfiltrage (feedforward) peut être adjoint à la commande pour compenser son effet en régime permanent. Notons que les valeurs de l'angle de dérive, de la vitesse de lacet et de l'angle de cap relatif dans ce même régime ne dépendent ni du retour d'état utilisé, ni du terme de préfiltrage. Par contre, la valeur de l'écart latéral peut être réduite voire annulée par un choix judicieux de la commande et du terme de préfiltrage. La synthèse de ce type de commande est décrite dans la Section 7.2.2 de ce chapitre.

Une deuxième solution, beaucoup moins contraignante et onéreuse, consiste à rejeter ou à atténuer l'effet de cette perturbation considérée dans ce cas comme une entrée exogène non mesurée. Cette solution nécessite uniquement des hypothèses sur le type de signal correspondant. L'hypothèse de perturbation d'énergie finie, donc de norme L_2 bornée, a largement été utilisée dans la littérature facilitant énormément les développements. Elle peut être obtenue par l'intermédiaire d'un filtre formant du premier ordre excité par un bruit blanc en entrée. Cette approximation a été mise en œuvre avec un contrôleur LQG qui stabilise le système augmenté dans [Mou99]. De même, la minimisation de norme L_2 induite (contrôle H_∞) constitue une bonne stratégie de rejet robuste de la perturbation [Rah04]. Cependant, cette hypothèse n'est pas très réaliste, elle exclut en particulier le cas des routes très sinueuses.

Une hypothèse beaucoup plus plausible consiste à supposer uniquement que l'amplitude de la courbure est bornée. On raisonne alors sur la norme L_∞ qui doit alors être finie. Cette hypothèse est d'ailleurs toute naturelle et permet de traiter tous les types de routes : ligne droite (courbure nulle), cercle (courbure constante) et clothoïde (courbure linéaire mais bornée par construction). La prise en compte de ce type de perturbation, appelée aussi perturbation persistante, a été traitée selon plusieurs approches. [Vid86] a défini le problème comme la recherche d'une loi de commande qui minimise l'amplitude maximale de la réponse du système pour une entrée de perturbation bornée. [Dah87] a recherché des lois de commande robustes, linéaires ou non-linéaires, à travers une approche fondée sur des opérateurs et sur la programmation linéaire. La norme « * » a été introduite par [Nag94] pour minimiser une borne supérieure de la norme L_∞ , borne représentée par un ellipsoïde invariant. Les méthodes LMI déjà établies dans [Boy94] ont été employées pour approcher cet ellipsoïde. Les résultats de [Nag94] ont été étendus pour le cas discret et complétés par des contraintes supplémentaires dans [Naz07].

Pour le contrôle latéral du véhicule, [Li05] a utilisé la minimisation de l'ellipsoïde invariant pour la synthèse d'une loi de commande L_1/H_∞ qui tient compte du retard de l'estimation des variables d'état non-mesurables (angle de dérive et angle de cap relatif) et qui stabilise le système et rejette la perturbation avec une commande bornée. Cependant, le problème LMI obtenu dans [Li05] est en réalité un problème BMI, dont une des variables est supposée constante. Cette dernière hypothèse rend la résolution de ce problème LMI, avec les outils classiques, plus difficile.

Dans cette thèse, l'hypothèse de perturbation de courbure persistante a été retenue. Les deux cas de courbure non-mesurable et mesurable seront successivement traités. Les lois de contrôle latéral qui seront synthétisées incluront l'objectif d'atténuation de l'effet de cette perturbation.

Elle seront obtenues par la résolution de problèmes d'optimisation BMI. L'approche de synthèse est décrite en détail dans la Section 7.2 de ce chapitre.

Hypothèse 7.1.1 (Route à courbure bornée) *La courbure de la route est bornée en valeur absolue et a une valeur maximale connue a priori : $|\rho_{ref}| \leq \rho_{ref}^{max}$, $\rho_{ref}^{max} \in \mathbb{R}^+$.*

Soit $w \in \mathbb{R}$ une variable de normalisation telle que $|w| \leq 1$, il est alors possible de reparamétriser l'entrée de courbure du système véhicule de l'équation (7.1) : $\rho_{ref} = \rho_{ref}^{max} w$ où $w = \frac{\rho_{ref}}{\rho_{ref}^{max}}$. Ce reparamétrage permet de réécrire l'équation (7.1) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u(C_c + C_a) + B_w w, \\ z = x \end{cases} \quad \text{où} \quad (7.2)$$

$$B_w = \rho_{ref}^{max} B_\rho = \rho_{ref}^{max} (0 \ 0 \ 0 \ -v \ 0 \ 0)^T. \quad (7.3)$$

7.2 Synthèse de la loi de commande

7.2.1 Courbure non mesurable : Synthèse de la 4ème loi de commande par rejet de perturbation

La commande doit respecter le cahier des charges malgré la présence de la courbure de la route supposée non mesurable. Cependant, l'exigence de la stabilité asymptotique sera relaxée comme décrit par la suite. L'idée principale utilisée ici pour la synthèse de la loi de commande consiste à minimiser l'ensemble atteignable du système véhicule en boucle fermée pour tous les états initiaux dans la région de « conduite normale ».

Cette région est représentée sous la forme d'un hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ (Définition 5.1.3 du Chapitre 5). La représentation alternative, sous forme de polytope (Définition 5.1.5 du Chapitre 5), peut être également utilisée dans cette approche, mais engendre cependant une augmentation de la complexité numérique de l'algorithme de synthèse.

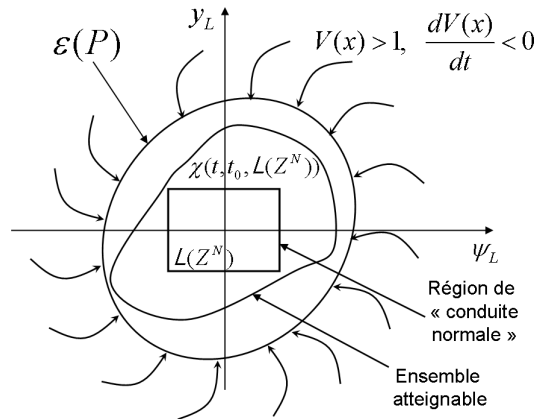


FIG. 7.1 – Ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$, ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \mathcal{L}(Z^N))$ et région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$.

De même, pour des raisons de simplicité de synthèse, le contrôleur de maintien de voie est choisi à nouveau sous la forme d'une commande par retour d'état à coefficients constants. Le couple conducteur est encore une fois compensé : $C_a = Kx - C_c$, $K \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$. La Remarque

6.1.1 du Chapitre 6 est également valable pour cette approche de synthèse. Plus spécifiquement, l'amplitude de l'entrée de commande doit être bornée à $C^{max} - \sigma_2$, pour vérifier les spécifications du cahier des charges.

Une fois la commande insérée dans la boucle, le système véhicule-assistance de l'équation (7.2) prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K)x + B_w w = A_{bf}x + B_w w, \\ z = x. \end{cases} \quad (7.4)$$

L'ensemble atteignable du système (7.4) pour des états initiaux dans $\mathcal{L}(Z^N)$, est défini par :

$$\chi(t, t_0, \mathcal{L}(Z^N)) \triangleq \cup \{x(t, t_0, x^0) : x^0 \in \mathcal{L}(Z^N), |w(t)| \leq 1, t \in \mathbb{R}^+\}. \quad (7.5)$$

La minimisation de cet ensemble est conduite par la minimisation d'un ensemble invariant ellipsoïdal qui lui est extérieur et décrit par la courbe de niveau 1, $\mathcal{S}_V(1)$, d'une fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ ($\varepsilon(P) = \mathcal{S}_V(1)$, $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est une matrice symétrique définie positive). La fonction quadratique $V(x)$ doit satisfaire la propriété :

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq 0, \forall x \text{ satisfaisant l'équation (7.4), pour } V(x) \geq 1, \text{ et pour } \forall w \in \mathbb{R}, \text{ tel que } |w| \leq 1. \quad (7.6)$$

Les développements théoriques de cette approche sont détaillés dans l'Exemple 3.4.3 du Chapitre 3, Partie II.

Algorithme 7.2.1 (Synthèse de la 4ème loi de commande)

La synthèse a été décomposée en deux étapes.

1. Calcul du vecteur de retour d'état K et de la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$

Cette première étape aboutit au calcul du vecteur de retour d'état K et de la matrice P de la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ à partir du problème d'optimisation BMI (7.7) ayant pour variables de décision $Q = P^{-1}$, $Y = KQ$ et α . Les contraintes qui y apparaissent sont obtenues comme suit :

La condition de l'équation (7.6) correspond à la troisième contrainte de (7.7).

La condition d'inclusion de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ dans l'ensemble $\varepsilon(P) = \mathcal{S}_V(1)$, se traduit simplement par la condition d'appartenance de ses sommets z_i , $i = 1, \dots, 64$, à ce même ensemble (quatrième contrainte du problème d'optimisation BMI (7.7)).

Le couple d'assistance doit rester borné à $C^{max} - \sigma_2$ pour tous les états de l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \mathcal{L}(Z^N))$. Pour ce faire, l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$, contenant l'ensemble atteignable, doit appartenir au polyèdre $\mathcal{L}(\frac{1}{C^{max} - \sigma_2} K)$ (cinquième contrainte du problème d'optimisation BMI (7.7)).

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && \text{tr}(Q) \text{ ou } \det(Q) \text{ ou } \lambda_{\max}(Q) \\
 & \text{contraint par} && \alpha \succ 0, \\
 & && Q \succ 0, \\
 & && \begin{pmatrix} QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y + \alpha Q & B_w \\ B_w^T & -\alpha \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (7.7) \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & z_i^T \\ z_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, 32, \\
 & && \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{C^{\max} - \sigma_2} Y \\ (\frac{1}{C^{\max} - \sigma_2} Y)^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0.
 \end{aligned}$$

La fonction de coût du problème d'optimisation BMI (7.7) minimise la taille de l'ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$ ce qui permet de réduire la taille de l'ensemble atteignable $\chi(t, t_0, \mathcal{L}(Z^N))$ qui y est inclus.

2. Test d'inclusion de $\varepsilon(P)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$

Une fois l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$ obtenu, son inclusion dans la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ doit être vérifiée. Cela est réalisé en comparant les limites de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^M)$ avec les projections de $\varepsilon(P)$ sur les six axes (voir équation (3.36) du Chapitre 3, Partie II).

Le problème d'optimisation BMI de l'équation (7.7) peut s'avérer infaisable, de même, la condition d'inclusion de $\varepsilon(P)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$ peut ne pas être vérifiée, il faut alors reprendre l'algorithme en adoptant une valeur plus petite pour la courbure maximale ρ_{ref}^{\max} , ou encore en modifiant les contours de la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$.

L'approche adoptée peut nécessiter plusieurs essais puisqu'on recherche à minimiser l'ensemble atteignable sous l'influence de la perturbation, jusqu'à ce que des bornes de sécurité soient respectées. Notons que cette 4ème loi d'assistance tient compte de toutes les spécifications du cahier des charges, mise à part la stabilité asymptotique. L'erreur de poursuite de l'axe de la voie peut rester considérable en virage, car la stabilité asymptotique n'est pas garantie dans ce cas. En revanche, pour des routes à très faibles courbures ($\rho_{ref} = 0$), cette loi d'assistance assure la stabilité asymptotique vers le centre de la voie grâce à la condition de la matrice semi-définie négative $QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y + \alpha Q \preceq 0$ pour $\alpha > 0$. Cette condition est présente dans les contraintes du problème BMI (7.7). Si cette condition est respectée, et s'il n'y a pas de perturbation ($w = 0$), la fonction $V(x) = x^T P x$ est alors une fonction de Lyapunov pour le système de l'équation (7.4).

7.2.2 Courbure mesurable : Synthèse de la 5ème loi de commande par compensation en préfiltrage

Lorsque l'entrée de la courbure, respectivement la variable w , est accessible à la mesure, elle peut être interprétée dans le système décrit par l'équation (7.2) comme une perturbation de charge (load disturbance) à rejeter ou à atténuer.

D'une manière générale, une perturbation de ce type peut être réinjectée dans le système, au niveau de l'entrée de commande, par l'intermédiaire d'un filtre. L'objectif est alors d'actionner

en amont du système de telle sorte à compenser l'influence de la perturbation. Dans ce cas, une très bonne connaissance du modèle du système est nécessaire, car le filtre consiste à inverser le sous-système qui se trouve en amont du point d'application de la perturbation. Cependant, même si un modèle précis du système est connu, l'inversion exacte peut exiger une dérivation en temps réel (inversion d'un intégrateur) ou même une prédiction (inversion d'un retard), qui sont difficilement réalisables en pratique. La solution est donc d'utiliser un filtre qui approche au mieux la fonction inverse. Cette problématique de trouver une fonction de transfert qui soit proche, selon une certaine métrique, à une autre fonction de transfert demeure un sujet important de la recherche en automatique.

Dans certains cas, on préfère assurer uniquement la compensation de la perturbation en régime statique, car dans ce cas, un simple gain de préfiltrage suffit.

Le problème de rejet de perturbation par retour d'état statique et compensation par préfiltrage statique peut être énoncé pour un système linéaire invariant dans le temps décrit par l'équation (3.2) du Chapitre 3.3, Partie II pour $D = 0$ et $D_w = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ y = Cx. \end{cases} \quad (7.8)$$

Définition 7.2.1 (Rejet de perturbation par retour d'état statique) [Lar07] *Il faut trouver, s'il existe, un retour d'état statique de la forme $u(x) = Kx + Fw$, tel que le système en boucle fermée de l'équation (7.8) ait une matrice de transfert nulle de w vers y .*

Définition 7.2.2 (Rejet de perturbation et stabilité interne) [Lar07] *Il faut trouver, s'il existe, un retour d'état statique de la forme $u(x) = Kx + Fw$, tel que le système en boucle fermée de l'équation (7.8) ait une matrice de transfert nulle de w vers y . De plus, si elle existe, la matrice K doit assurer la stabilité de la matrice $(A + BK)$.*

Mentionnons que si la perturbation n'est pas mesurable, les deux définitions précédentes s'énoncent de la même façon, mais pour $F = 0$. L'existence de solutions au problème de rejet de perturbation par retour d'état statique et l'existence de solutions assurant la stabilité interne ont suscité beaucoup d'intérêt dans la littérature [Cam01], [Mal97], [Dio03]. La résolution de ces problèmes a été exprimée en terme de rang des matrices de transfert de certains sous-systèmes du système original structuré.

Si une solution au rejet total de la perturbation ne peut être obtenue, l'atténuation de son effet sur la sortie est quand même envisageable. Elle peut se faire de manière optimale selon une norme donnée. À titre d'exemple, [Giu99] ont développé des conditions LMI pour calculer un préfiltrage dynamique de la perturbation, telle que la fonction de transfert de perturbation vers la sortie ait une norme H_∞ inférieure à un seuil exigé, malgré des incertitudes sur le système contrôlé.

Dans le cadre de cette thèse, la compensation de la courbure a d'abord été considérée selon la définition (7.2.2) sous l'hypothèse de la perturbation mesurable et bornée. Cette approche ne permettant pas de satisfaire tous les objectifs du cahier des charges, une approche d'atténuation a alors été développée par la minimisation de l'ensemble atteignable du système. La loi de commande utilisée dans les deux cas prend la forme :

$$C_a = Kx + F_f \rho_{ref} - C_c = Kx + F_f \rho_{ref}^{max} w - C_c, \quad (7.9)$$

où $F_f \in \mathbb{R}$ est un gain à déterminer, au même titre que le vecteur de retour d'état K . Le système

véhicule-assistance en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u(Kx + F_f \rho_{ref}^{max} w) + B_w w, \\ y = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K)x + (B_u F_f \rho_{ref}^{max} + B_w)w, \\ y = x, \end{cases} \Leftrightarrow \quad (7.10)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K)x + \bar{B}_w w, \\ y = x, \end{cases} \quad \text{où} \quad \bar{B}_w = B_u F_f \rho_{ref}^{max} + B_w. \quad (7.11)$$

En considérant une entrée de courbure ρ_{ref} constante ($w = \frac{\rho_{ref}}{\rho_{ref}^{max}}$ constant), l'état stationnaire du modèle véhicule-assistance décrit par l'équation (7.11) est :

$$x_{ss} = -(A + B_u K)^{-1} \bar{B}_w w. \quad (7.12)$$

Son expression explicite est donnée dans l'équation (B.2) de l'Annexe B. Hormis le déplacement latéral, les autres composantes de l'état en régime permanent du véhicule contrôlé en virage sont non nulles et ne dépendent ni du vecteur du retour d'état K , ni du terme de préfiltrage F_f . En conséquence, seul le déplacement latéral peut être annulé par un choix judicieux de F_f en fonction des paramètres du véhicule et du vecteur K . En résumant, l'approche utilisée dans ce cas pour synthétiser une loi de commande est de fixer d'abord le retour d'état K tel que le système en boucle fermée soit stable, et de calculer ensuite le terme F_f afin d'annuler l'erreur statique sur l'écart latéral [Raj06].

Cependant, dans notre cas, cette approche ne tient pas compte de certaines spécifications importantes du cahier des charges énoncé dans le Chapitre 5, Section 5.2.4. D'une part, aucun ensemble invariant n'est garanti par ce procédé, il serait nécessaire de les rechercher à-posteriori, une fois la loi d'assistance synthétisée. D'autre part, la contrainte sur le couple d'assistance n'est pas vérifiée.

Pour pallier ces inconvénients, l'approche considérée permet le calcul simultané du vecteur de gains de retour d'état K et du terme de préfiltrage F_f . Pour cela il suffit de remarquer que le système véhicule-assistance en boucle fermée de l'équation (7.11) est similaire à celui obtenu pour une courbure bornée mais non-mesurable. La seule différence est que cette fois-ci, le gain F_f est un paramètre de synthèse au même titre que le vecteur K . On recherche alors une fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ qui assure un ensemble invariant contenant l'ensemble atteignable du véhicule pour des états initiaux situés dans la région de « conduite normale ». Rappelons que celle-ci est définie sous la forme d'un hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$ selon la Définition 5.1.3 du Chapitre 5. L'ensemble invariant recherché doit également tenir compte des limitations imposées au couple d'assistance. Les développements théoriques relatifs à cette approche se trouvent dans l'Exemple 3.4.4 du Chapitre 3, Partie II, l'algorithme mis en œuvre est maintenant détaillé.

Algorithme 7.2.2 (Synthèse de la 5ème loi de commande) *L'algorithme est composé de deux étapes principales.*

1. **Calcul conjoint du vecteur de retour d'état K , du terme de préfiltrage F_f et de la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$**

Le vecteur de retour d'état K , le terme de préfiltrage F_f et la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ résultent du problème d'optimisation (7.13) dont les variables de décision sont $Q = P^{-1}$, $Y = KQ$, F_f , α et τ_j , $j = 1, \dots, 4$.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser} && \text{tr}(Q) \text{ ou } \det(Q) \text{ ou } \lambda_{\max}(Q) \\
 & \text{contraint par} && Q \succ 0, \\
 & && \alpha \succ 0, \\
 & && \tau_j \succ 0, \quad j = 1, \dots, 4,
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{pmatrix} QA^T + Y^T B_u^T + AQ + B_u Y + \alpha Q & B_u F_f \rho_{ref}^{max} + B_w \\ (B_u F_f \rho_{ref}^{max} + B_w)^T & -\alpha \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i^T \\ z_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, 32,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}Y^T \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}F_f \rho_{ref}^{max} \\ -\frac{1}{2}Y & -\frac{1}{2}F_f \rho_{ref}^{max} & C^{max} - \sigma_2 \end{pmatrix} \succeq \tau_1 \begin{pmatrix} -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}Y^T \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}F_f \rho_{ref}^{max} \\ \frac{1}{2}Y & \frac{1}{2}F_f \rho_{ref}^{max} & C^{max} - \sigma_2 \end{pmatrix} \succeq \tau_3 \begin{pmatrix} -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tau_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les différentes contraintes du problème s'obtiennent comme suit :

La dérivée temporelle de $V(x)$ le long des trajectoires du système (7.10) doit être négative en dehors de la courbe de niveau $\varepsilon(P) = S_V(1)$ (4ème contrainte BMI de l'équation (7.13)).

La courbe de niveau $\varepsilon(P)$ de la fonction $V(x) = x^T P x$ doit inclure la région $\mathcal{L}(Z^N)$ (5ème contrainte LMI de l'équation (7.13)).

La limitation du couple d'assistance nécessite que la somme $|Kx + F_f \rho_{ref}^{max} w|$ reste inférieure à $C^{max} - \sigma_2$ pour $|w| \leq 1$. Elle se traduit par les 6ème et 7ème contraintes LMI de l'équation (7.13)).

La fonction de coût choisie permet de minimiser la taille de l'ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$ afin de réduire l'ensemble atteignable intérieur à cet ellipsoïde pour des états initiaux appartenant à $\mathcal{L}(Z^N)$. L'atténuation de l'effet de l'entrée de perturbation sur l'erreur de poursuite de l'axe de la voie est ainsi réalisée.

2. Test d'inclusion de $\varepsilon(P)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$

L'étape précédente a permis d'obtenir l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$ qui inclut l'ensemble atteignable du système (7.11) à partir d'états initiaux situés dans la région de « conduite normale ». Il faut maintenant vérifier que $\varepsilon(P)$ est lui-même inclus dans l'ensemble $\mathcal{L}(Z^M)$ représentant la région de sécurité. Ceci est vérifié en comparant les projections de l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ sur les six axes $(\beta, r, \psi_L, y_L, \delta_f, \dot{\delta}_f)$ aux bornes de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^M)$ $(\beta^M, r^M, \psi_L^M, y_L^M, \delta_f^M, \dot{\delta}_f^M)$. Ces projections sont calculées en utilisant l'équation (3.36) du Chapitre 3, Partie II.

Le problème d'optimisation BMI de l'équation (7.13) peut se révéler infaisable, de même la vérification a posteriori de l'inclusion de $\varepsilon(P)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$ peut aussi échouer. Dans ce cas, l'algorithme doit être réappliqué avec d'autres limites pour la région de « conduite normale » ou une autre valeur de la courbure maximale admissible ρ_{ref}^{max} .

Cette cinquième loi d'assistance tient compte de toutes les spécifications du cahier des charges, mise à part la stabilité asymptotique. Elle utilise un terme de préfiltrage qui suppose la courbure mesurable. L'objectif de ce terme n'est pas d'annuler l'effet de cette courbure mais uniquement de l'atténuer en maintenant le domaine atteignable à l'intérieur de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

7.3 Stratégies de commutation

Deux stratégies de commutations sont proposées. Elles utilisent en particulier le déplacement des roues avant du véhicule pour déclencher ou arrêter l'assistance. Il est en l'occurrence nécessaire de calculer le déplacement latéral anticipé des roues avant sur la voie.

7.3.1 Ensemble invariant et déplacement latéral des roues avant du véhicule

L'objet de cette section est de déterminer le déplacement maximal des roues avant lorsque l'état du véhicule évolue à l'intérieur de l'ensemble invariant ellipsoïdal $\varepsilon(P)$. Rappelons que ce déplacement par rapport à l'axe de la voie est décrit par les coordonnées y_d et y_g des roues droite, respectivement gauche, dont les expressions sont données par l'équation (4.92) du Chapitre 4, Partie II.

Les formules établies dans la Section 6.1.4 du Chapitre 6 de cette Partie III pour un ensemble ellipsoïdal invariant sont également valables dans ce cas. Plus spécifiquement dans ces formules, pour tous les états x du système véhicule-assistance qui appartiennent à l'ensemble invariant

$$\varepsilon\left(\frac{1}{V_{ext}}P\right) = \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P x \leq V_{ext}\} \quad (7.14)$$

les roues avant restent à l'intérieur d'une zone centrée sur l'axe de la voie et de largeur $2d_{ext}$:

$$-d_{ext} \leq y_d, \quad y_g \leq d_{ext} \quad \text{où} \quad d_{ext} = \sqrt{V_{ext} f P^{-1} f^T} + \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad f = (0, 0, (l_f - l_S), 1, 0, 0). \quad (7.15)$$

Par ailleurs, si pour un état initial x^0 , l'ellipsoïde

$$\varepsilon\left(\frac{1}{(x^0)^T P x^0}P\right) = \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P x \leq x^0 P x^0\} \quad (7.16)$$

est invariant, alors le déplacement des roues avant du véhicule sera au maximum :

$$d^{max}(x^0) = \sqrt{(x^0)^T P x^0} \sqrt{f P^{-1} f^T} + \frac{a}{2}. \quad (7.17)$$

Il est par ailleurs utile d'apporter quelques précisions sur l'invariance de l'ensemble $\varepsilon\left(\frac{1}{V_{ext}}P\right) = \mathcal{S}_V(V_{ext})$ dans le contexte de ce chapitre. Cet ensemble est uniquement invariant lorsque $V_{ext} \geq 1$, car la dérivée de la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ est négative si $x \in \mathbb{R}^6$ tels que $x^T P x \geq 1$. Par conséquent, le déplacement maximum anticipé garanti par la loi de commande pour des états initiaux $x^0 \in \varepsilon(P)$ doit être calculé à partir des hyperplans tangents à $\varepsilon(P)$, et non à $\varepsilon\left(\frac{1}{(x^0)^T P x^0}P\right)$. Ce déplacement est donné par :

$$d^{max}(x^0) = \sqrt{f P^{-1} f^T} + \frac{a}{2}, \quad x^0 \in \varepsilon(P). \quad (7.18)$$

En revanche, si x^0 est à l'extérieur de $\varepsilon(P)$, $(x^0)^T P x^0 \geq 1$, le déplacement maximum anticipé est alors fourni par l'équation (7.17).

7.3.2 Stratégies de commutation

Les principes mis en œuvre dans le développement des précédentes stratégies de commutation dans la Section 6.2 du Chapitre 6 sont reprises ici. Les transitions d'activation de la loi d'assistance doivent avoir lieu dans un ensemble invariant pour assurer une dynamique bornée du système contrôlé hybride, de plus le danger de sortie de voie est géré durant toute la phase d'activation. Rappelons de plus que le risque de sortie de voie instantané tel qu'il pourrait être perçu par le conducteur n'est pas toujours en accord avec celui déterminé a priori par l'assistance. Finalement, l'assistance doit être la moins intrusive possible pour le conducteur. Afin de s'allouer certaines marges, l'activation et la désactivation de l'assistance se fera dans un domaine plus large que celui de la région de « conduite normale ». Rappelons que ce choix n'entraîne aucun changement sur les propriétés de limitation de la dynamique du système assisté du fait de l'invariance de $\varepsilon(P)$.

Deux stratégies de commutation seront proposées pour le cas des routes à courbure importante. Celles-ci complètent les quatre précédentes stratégies exposées dans la Section 6.2 du Chapitre 6. Elles seront uniquement étudiées dans le domaine de fonctionnement nominal de l'assistance et en l'occurrence les deux transitions T_r^{12} et T_r^{21} de l'automate hybride (Section 5.2 du Chapitre 5) dont les réceptivités seront détaillées dans la suite. Il sera finalement admis que le conducteur autorise en permanence l'activation de l'assistance à la conduite ($Inhibée = 0$).

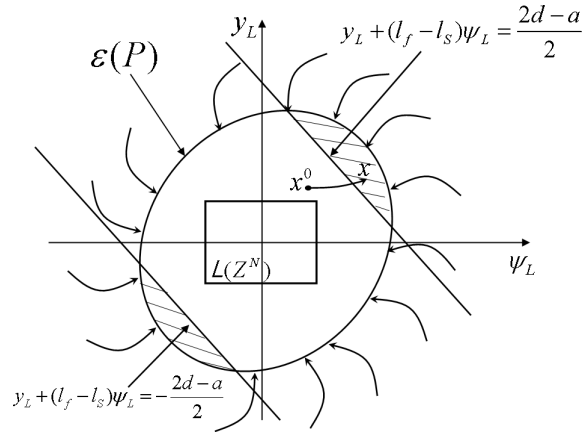


FIG. 7.2 – Scénario relatif à la 5ème stratégie d'activation : ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$, région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ et hyperplans correspondant à une zone centrée sur la voie et de largeur $2d$. x^0 représente l'état du véhicule au moment de la perte d'attention du conducteur et x est l'état du véhicule au moment de l'activation de la loi d'assistance.

5ème stratégie de commutation

– Activation

Cette stratégie autorise l'activation de l'assistance lorsque l'état est à l'intérieur de l'ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$ et que l'une des deux roues avant du véhicule a déjà dépassé les bords d'une zone centrée sur la voie de largeur $2d$ (voir Figure 7.2).

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq \sigma_1) \wedge (x^T P x < 1) \wedge [(y_g > d) \vee (y_d < -d)] \wedge (Inhibée = 0). \quad (7.19)$$

– *Désactivation*

La désactivation se produit lorsque le conducteur recouvre sa capacité à conduire et que l'état du véhicule est dans la région $\varepsilon(P)$:

$$T_r^{21} : (\sigma_1 < |C_c| \leq \sigma_2) \wedge (x^T P x \leq 1) \wedge (Inhibée = 0). \quad (7.20)$$

En utilisant la 5ème stratégie de commutation, le déplacement maximum qui peut être assuré par la loi d'assistance pour des activations de l'assistance à l'intérieur de l'ellipsoïde $\varepsilon(\frac{1}{(x)^T P x} P) \subset \varepsilon(P)$ doit être déterminé à partir des hyperplans tangents à l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$.

6ème stratégie de commutation

Cette stratégie est très semblable à la 4ème stratégie de commutation présentée dans la Section 6.2.1 du Chapitre 6. Le déclenchement de l'assistance se produit au moment où l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$ est dépassé. Le déplacement latéral maximal anticipé d_{ext} est déterminé à partir des hyperplans tangents à l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$.

– *Activation*

Le conducteur étant dans un état de baisse d'attention, l'activation de la loi d'assistance se produit quand l'état du véhicule est au bord de l'ensemble $\varepsilon(P)$ et que le déplacement latéral anticipé atteint la valeur d_{ext} (voir Figure 7.3).

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq \sigma_1) \wedge (x^T P x \leq 1) \wedge (d^{max}(x) = d_{ext}) \wedge (Inhibée = 0). \quad (7.21)$$

– *Désactivation*

La désactivation se produit lorsque le conducteur est en capacité de conduire sous la condition que l'état du véhicule soit dans la région $\varepsilon(P)$:

$$T_r^{21} : (\sigma_1 < |C_c| \leq \sigma_2) \wedge (x^T P x \leq 1) \wedge (Inhibée = 0). \quad (7.22)$$

Comme on peut le constater, la seule différence entre les deux stratégies de commutation présentées réside dans la condition sur la position du véhicule lors de l'activation de la loi d'assistance. La 5ème stratégie tient compte de la position instantanée du véhicule sur la voie alors que la 6ème réagit sur la position anticipée. Cette dernière laisserait plus de liberté au conducteur avant d'activer l'assistance pour des sorties lentes et réagit plus rapidement pour les sorties violentes. Ces deux stratégies ont été implantées sur le véhicule prototype avec les lois d'assistance selon le Tableau 7.1.

TAB. 7.1 – Lois de commande implantées pour une route à courbure significative.

Assistance à la conduite	Loi d'assistance	
	4ème	5ème
5ème	✓	
6ème		✓

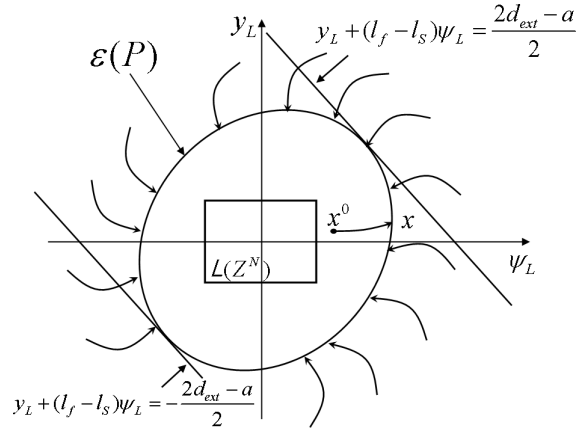


FIG. 7.3 – Scénario relatif à la 6ème stratégie de commutation : ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$, région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ et hyperplans tangents à $\varepsilon(P)$. x^0 représente l'état du véhicule au moment de la perte d'attention par le conducteur et x est l'état du véhicule au moment de l'activation de la loi d'assistance.

7.4 Implantation pratique et résultats

7.4.1 Implantation de la 4ème loi d'assistance

La 4ème loi de assistance traite la courbure de la route comme étant une perturbation non-mesurable mais bornée, qui doit être rejetée. On minimise pour cela l'ensemble atteignable pour des états initiaux dans la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$.

Calcul de la loi d'assistance et de la fonction quadratique

Pour la synthèse, la courbure est supposée ne pas dépasser $\rho_{ref}^{max} = 0.008m^{-1}$, soit 120m de rayon minimal. La vitesse longitudinale a été fixée à 15m/s. Les valeurs délimitant la région de « conduite normale » ont été choisies supérieures à celles correspondant à l'état stationnaire d'un véhicule qui négocie un virage de courbure ρ_{ref}^{max} à une vitesse 15m/s. L'expression de l'état stationnaire est décrite dans l'Annexe B, Équation (B.1). Les valeurs numériques associées se trouvent dans le Tableau 7.2. Pour l'écart latéral et pour la dérivée de l'angle de braquage, les valeurs limites d'une « conduite normale » ont été choisies en concordance avec les résultats pratiques enregistrés sur la piste d'essai. Les limites de la région de « conduite normale » se trouvent finalement rassemblées dans le Tableau 7.3. Le couple maximal du moteur électrique d'assistance est limité à $C^{max} - \sigma_2 = 40Nm$.

TAB. 7.2 – État stationnaire du modèle « bicyclette » du véhicule pour $v = 15m/s$ et $\rho_{ref} = \rho_{ref}^{max} = 0.008m^{-1}$.

β_{ss}	r_{ss}	$(\psi_L)_{ss}$	$(\delta_f)_{ss}$
-0.007rad	0.125rad/s	0.007rad	0.023rad
-0.4°	7.16°/s	0.4°	1.36°

TAB. 7.3 – Limites de l’hypercube de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ pour $v = 15m/s$ et $\rho_{ref}^{max} = 0.008m^{-1}$.

β^N	r^N	ψ_L^N	y_L^N	δ_f^N	$\dot{\delta}_f^N$
0.017rad	0.130rad/s	0.026rad	0.2m	0.033rad	0.071rad/s
1°	7.5°/s	1.5°	0.2m	1.9°	4.1°/s

Le calcul du vecteur de retour d’état K nécessite la résolution du problème d’optimisation BMI de l’équation (7.7) selon l’étape 1 de l’Algorithme 7.2.1. Le logiciel d’optimisation PENBMI mis à disposition par la société PENOPT GbR a été utilisé à cet effet [Koc03]. Les éléments théoriques relatifs à la méthode de résolution utilisée sont disponibles dans [Sti05]. Le vecteur K qui en résulte est :

$$K = (-219.88, -30.06, -349.00, -21.465, -369.34, -1.20). \quad (7.23)$$

Le déplacement latéral des roues avant, garanti par la loi d’assistance, est alors calculé et vaut $d_{ext} = 2.67m$ (voir l’équation (7.15) pour $V_{ext} = 1$). De plus, la loi d’assistance garantit des valeurs maximales raisonnables pour les variables d’état, valeurs qui ont été d’ailleurs choisies comme limites de la région de sécurité (Tableau 7.4).

TAB. 7.4 – Limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

β^M	r^M	ψ_L^M	y_L^M	δ_f^M	$\dot{\delta}_f^M$
0.089rad	0.593rad/s	0.240rad	1.81m	0.118rad	0.760rad/s
5.14°	34.03°/s	13.78°	1.81m	6.79°	43.59°/s

Résultats des tests sur véhicule prototype

La loi d’assistance développée a été évaluée sur trois types de tests. Les performances du suivi de voie ont d’abord été vérifiées, puis des manœuvres de sortie de voie, pour des routes de courbure maximale proche de celle utilisée lors de la synthèse, ont été réalisées. Finalement, les mêmes manœuvres sont reprises sur des virages plus serrés et de courbure supérieure à la limite fixée.

Performances en suivi de voie

Dans un premier temps l’assistance est activée afin de tester les performances en suivi de voie. Le véhicule étant alors en mode automatique, on le laisse évoluer sur un segment de la piste dont le profil de courbure est présenté sur la Figure 7.4.

Il apparaît que la loi de commande fait preuve d’une très bonne robustesse des performances. Bien que l’assistance ait été conçue pour des routes avec des courbures au maximum de $0.008m^{-1}$, le véhicule suit sans difficulté l’axe de la voie, y compris pour des virages de courbure de $0.025m^{-1}$ (voir Figures 7.5 et 7.4). Dans ce cas extrême, les roues avant du véhicule ne dépassent que

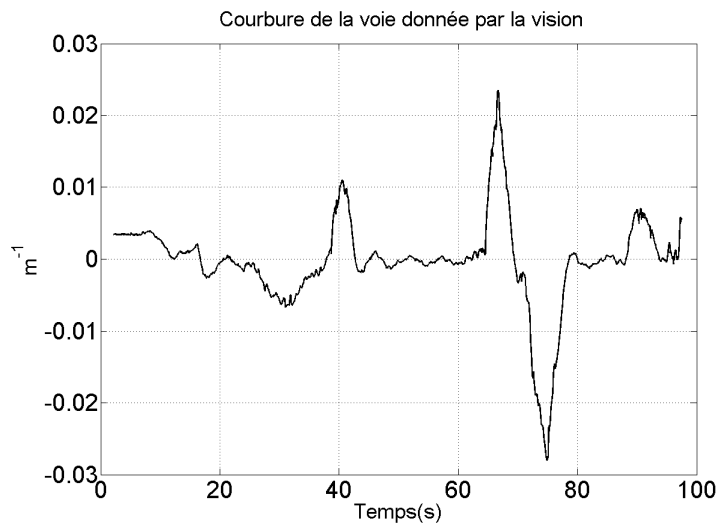


FIG. 7.4 – Test des performances en suivi de voie : Courbure de la route mesurée par l’algorithme de vision (4ème loi d’assistance).

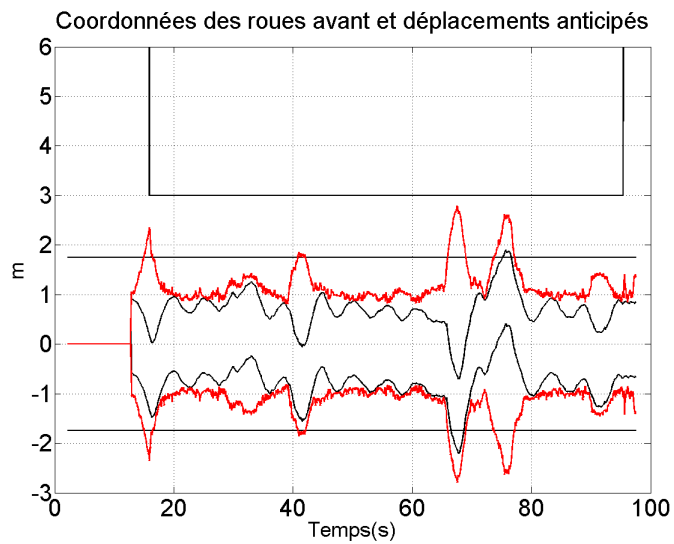


FIG. 7.5 – Test des performances en suivi de voie : Positions latérales des roues avant du véhicule en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (4ème loi d’assistance).

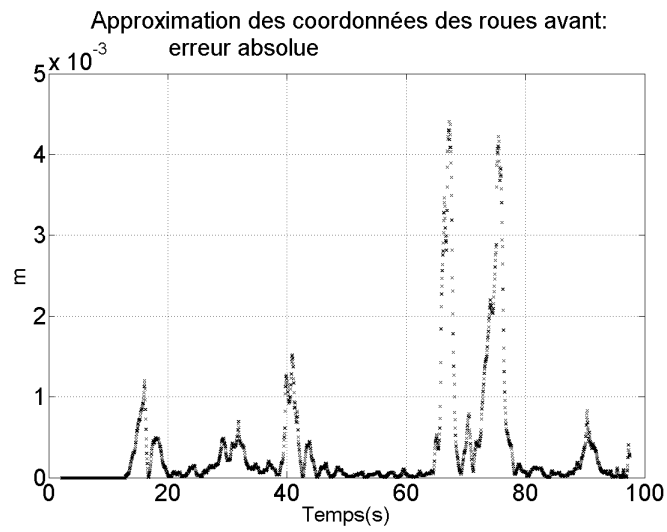


FIG. 7.6 – Erreur d’approximation pour le calcul des positions latérales des roues avant du véhicule y_g et y_d par la formule linéaire qui ne tient pas compte de la courbure de la route (4ème loi d’assistance).

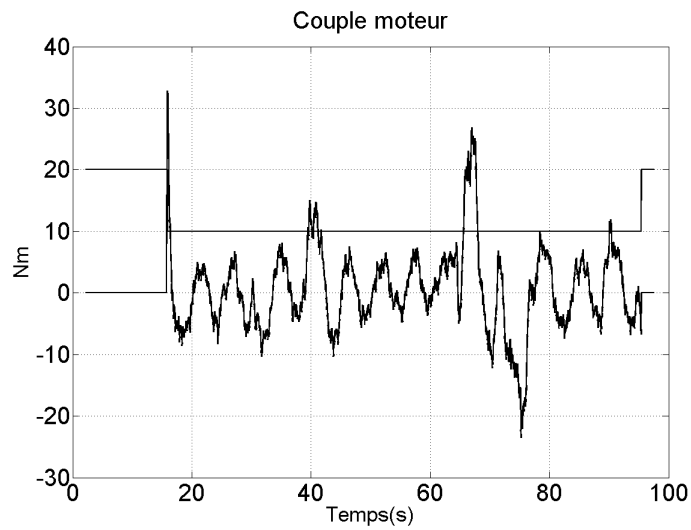


FIG. 7.7 – Test des performances en suivi de voie : Couple d’assistance (4ème loi d’assistance).

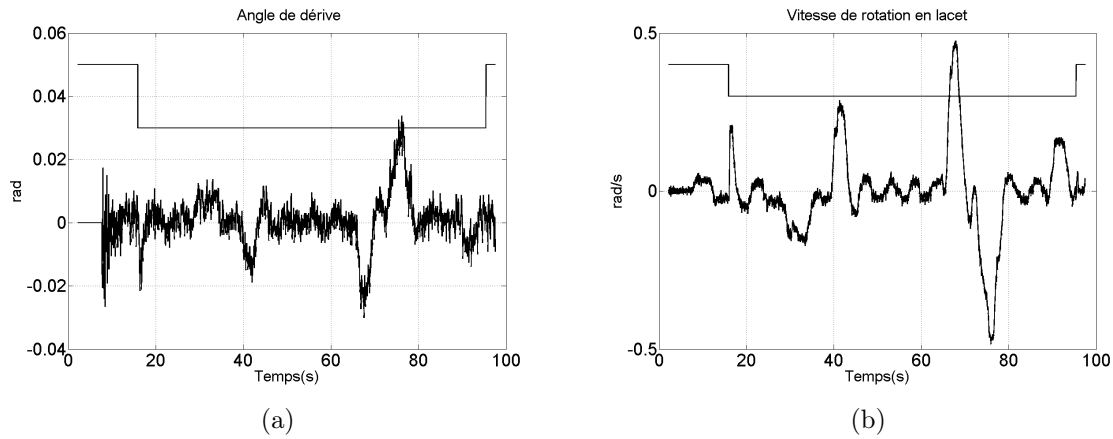


FIG. 7.8 – Test des performances en suivi de voie : (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (4ème loi d'assistance).

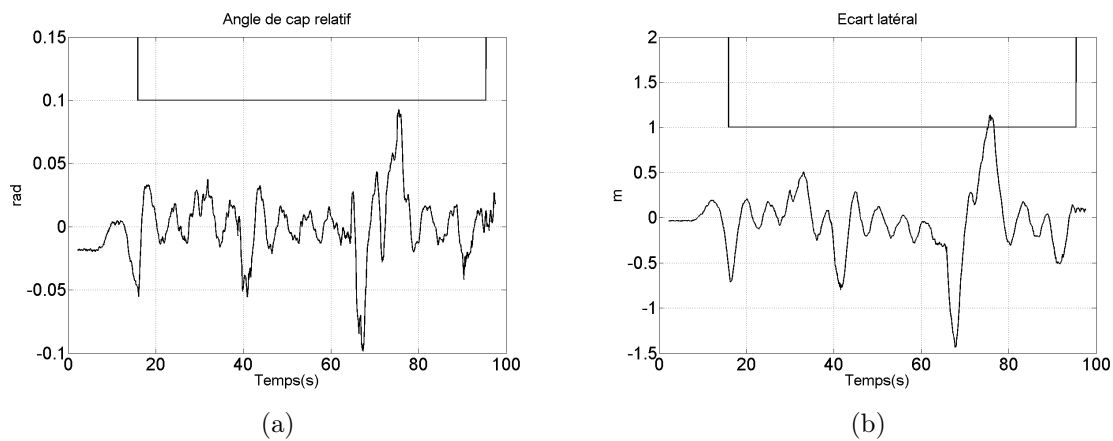


FIG. 7.9 – Test des performances en suivi de voie : (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (4ème loi d'assistance).

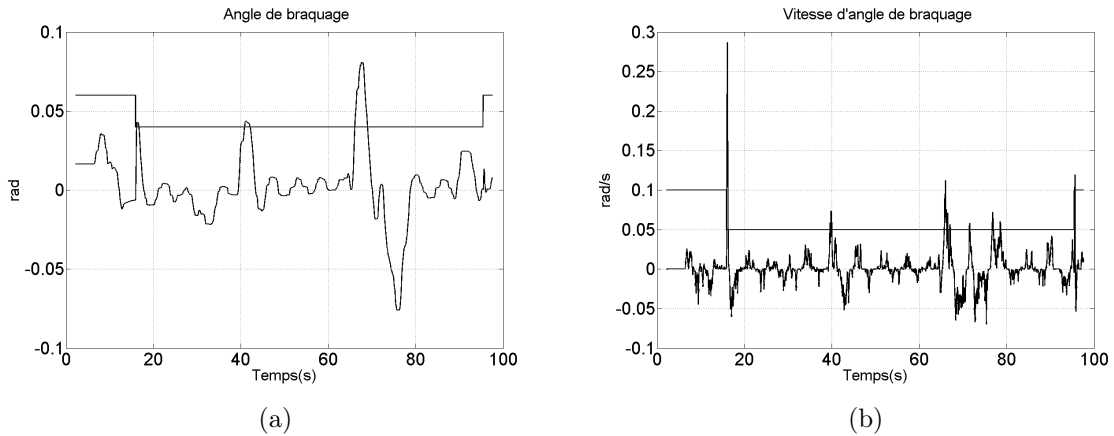


FIG. 7.10 – Test des performances en suivi de voie : (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (4ème loi d'assistance).

légèrement les marquages des bords de voie. À la sortie des virages, le véhicule se restabilise facilement au centre de la voie (voir Figure 7.5).

L'erreur absolue d'approximation des coordonnées des roues avant, y_g et y_d , calculée par la formule linéaire (équation (4.92) du Chapitre 4 Partie II) à la place de la formule non-linéaire qui tient compte de la courbure de la route (équation (4.102) du même chapitre) est de l'ordre de $10^{-3}m$ (voir Figure 7.6).

Les valeurs maximales enregistrées pour les variables d'état demeurent en dessous des valeurs maximales prédites données dans le Tableau 7.4, en dépit d'une perturbation beaucoup plus importante que celle utilisée lors du calcul de la loi d'assistance : angle de dérive $0.03rad$, 1.71° (voir Figure 7.8 (a)), vitesse de lacet $0.5rad/s$, $28.6^\circ s^{-1}$ (voir Figure 7.8 (b)), angle de cap relatif $0.1rad$, 5.72° (voir Figure 7.8 (a)), écart latéral $1.5m$ (voir Figure 7.9 (b)), angle de braquage $0.08rad$, 4.58° (voir Figure 7.10 (a)), dérivée de l'angle de braquage $0.1rad/s$, $5.72^\circ s^{-1}$ (voir Figure 7.10 (b)).

Le couple moteur requis pour le contrôle est inférieur à $25Nm$ (voir Figure 7.7). La vitesse longitudinale a varié pendant l'essai entre $10m/s$ et $16m/s$ (voir Figure 7.11 (a)) sans que cela ait une quelconque incidence sur les performances. L'accélération latérale enregistrée ne dépasse pas $0.2g$ et révèle un bon confort de conduite (voir Fig. 7.11 (b)).

Performances pour des sorties de voie dans les conditions nominales par l'utilisation de la cinquième stratégie de commutation

La 4ème loi d'assistance est maintenant associée à la 5ème stratégie de commutation. On teste alors les activations et désactivations.

L'activation de l'assistance est avant tout assujettie à un faible effort du conducteur sur le volant, un couple inférieur à $1.5Nm$. La seconde condition est le risque de sortie de voie instantané ou perçu par le conducteur, fixé à un dépassement de $d = 1.3m$ par rapport au centre de la voie par les roues avant. Ces valeurs ont été choisies après une phase de tests sur la piste ayant permis d'éliminer les fausses activations. La troisième condition porte sur l'appartenance à l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ et en conséquence sur le déplacement maximal anticipé des roues avant du véhicule.

Les valeurs des déplacements des roues avant et les variables d'état relevées pendant le test de

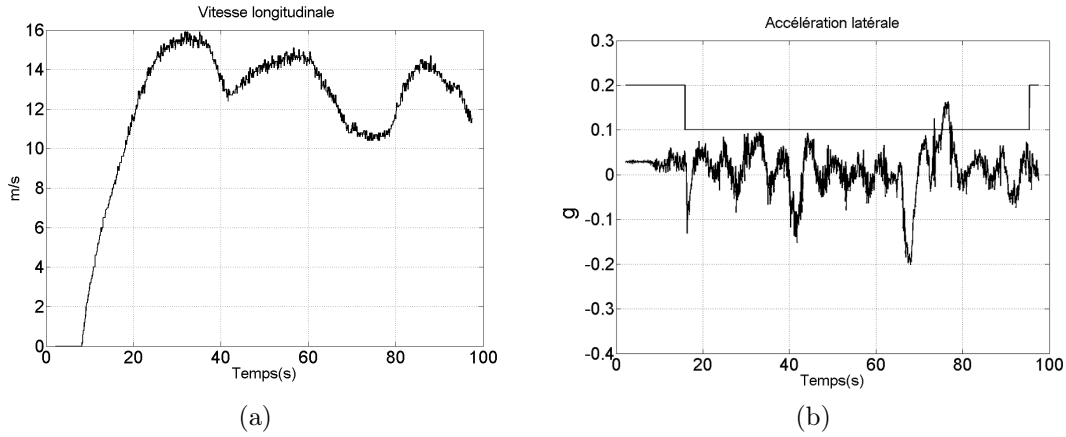


FIG. 7.11 – Test des performances en suivi de voie : (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (4ème loi d’assistance).

suivi de voie exposé précédemment étaient bien inférieures aux valeurs maximales garanties par la loi de commande. Ce fait traduit un certain conservatisme de ces marges et permet d’envisager de réaliser des commutations y compris au-delà de l’ensemble invariant $\varepsilon(P)$. Finalement, on s’impose un déplacement maximal garanti de $\bar{d}_{ext} = 3m$ au moment de l’activation. Cette valeur a été choisie supérieure à une demi-largeur de voie en considérant encore une fois le fait que l’approximation ellipsoïdale de l’ensemble atteignable est conservatrice. L’ellipsoïde invariant $\varepsilon(\frac{1}{\bar{V}_{ext}}P)$, tangent aux hyperplans correspondant à un déplacement $\bar{d}_{ext} = 3m$, est extérieur à l’ellipsoïde $\varepsilon(P)$. $\varepsilon(\frac{1}{\bar{V}_{ext}}P)$ s’obtient par la formule suivante :

$$\varepsilon(\frac{1}{\bar{V}_{ext}}P) = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid x^T P x \leq \bar{V}_{ext}, \bar{V}_{ext} = \frac{(2\bar{d}_{ext} - a)^2}{f Q f^T}\}, \quad (7.24)$$

où $f = (0, 0, 2(l_f - l_s), 2, 0, 0)$. La valeur associée à $\bar{d}_{ext} = 3m$ est $\bar{V}_{ext} = 1.20$. Le couple maximal mobilisable pour des états x à l’intérieur de $\varepsilon(\frac{1}{\bar{V}_{ext}}P)$ est donné par :

$$\bar{C}^{max} = \sqrt{\bar{V}_{ext} K Q K^T} \quad (7.25)$$

sa valeur numérique est de $43.94Nm$. Les valeurs maximales garanties pour les variables d’état en cas d’activation à l’intérieur de l’ellipsoïde $\varepsilon(\frac{1}{\bar{V}_{ext}}P)$ sont données dans le Tableau 7.5. Elles constituent en même temps la nouvelle région de sécurité $\mathcal{L}(\bar{Z}^M)$.

TAB. 7.5 – Limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(\bar{Z}^M)$.

$\bar{\beta}^M$	\bar{r}^M	$\bar{\psi}_L^M$	\bar{y}_L^M	$\bar{\delta}_f^M$	$\dot{\bar{\delta}}_f^M$
0.098rad	0.652rad/s	0.264rad	1.99m	0.130rad	0.835rad/s
5.65°	37.38°/s	15.14°	1.99m	7.46°	43.89°/s

La cinquième stratégie de commutation a finalement été implantée numériquement comme suit :

– Activation

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 1.5Nm) \wedge (x^T P x < \bar{V}_{ext}) \wedge [(y_g > 1.3m) \vee (y_d < -1.3m)] \wedge (Inhibée = 0). \quad (7.26)$$

– Désactivation

$$T_r^{21} : (1.5Nm < |C_c| \leq 6Nm) \wedge (x^T P x \leq \bar{V}_{ext}) \wedge (Inhibée = 0). \quad (7.27)$$

Le test de sortie a été conduit dans une situation proche des conditions utilisées pour la synthèse. La courbure de la route est inférieure à $0.008m^{-1}$ aux moments d'activation de la loi d'assistance (voir Figure 7.12) et la vitesse longitudinale est maintenue entre $12m/s$ et $15m/s$ (voir Figure 7.19 (a)).

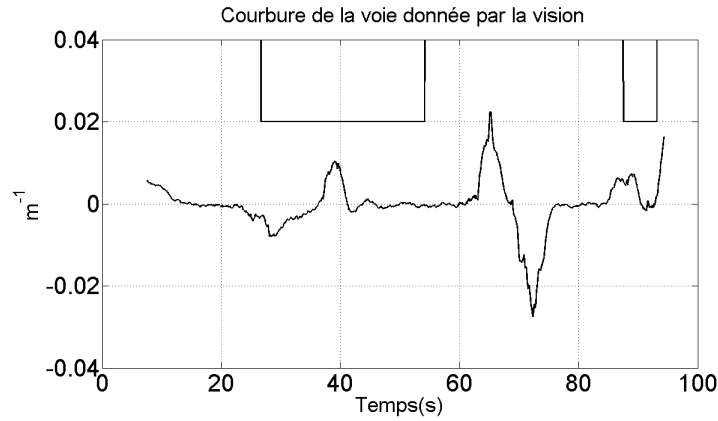


FIG. 7.12 – Courbure de la route mesurée par l'algorithme de vision (4ème loi d'assistance, 5ème stratégie de commutation).

Le conducteur a simulé une perte d'attention en ôtant ses mains du volant à l'entrée du virage choisi pour le test. L'assistance s'est activée à $t = 26.6s$ et à $t = 87.8s$, dès que les roues avant du véhicule ont franchi la distance de $1.3m$ par rapport au centre de la voie. Cette distance est tracée en ligne discontinue sur la Figure 7.13. Cette figure montre que l'avant du véhicule est resté à l'intérieur des marquages pour les deux activations de l'assistance.

On remarque que pour un déplacement maximum prédit de plus de $2m$ au moment de l'activation de l'assistance, le déplacement effectif est resté en réalité autour de $1.4m$ ($t = 26.6s$). Cette remarque est valable aussi pour la deuxième activation, pour laquelle, le déplacement anticipé vaut $2.5m$ alors que le déplacement effectif n'est que de $1.44m$ ($t = 87.8s$). Ce comportement indique que l'approximation de l'ensemble atteignable par un ellipsoïde reste toujours conservatrice. Ce fait est également vérifié par l'intermédiaire du couple moteur maximal requis pendant la correction ($39Nm$, Figure 7.15), qui est inférieur à la valeur prédite ($43.9Nm$). L'approximation des coordonnées des roues avant par la formule linéaire, qui n'est pas fonction du rayon de courbure, est suffisamment précise, car l'erreur absolue calculée est de l'ordre 10^{-3} (voir Figure 7.14).

Les valeurs maximales atteintes par les variables d'état après l'activation de l'assistance sont en dessous des valeurs maximales prédites, données dans le Tableau 7.5 : angle de dérive $0.02rad$, 1.14° (Figure 7.16 (a)), vitesse de lacet $0.19rad/s$, $10.88^\circ s^{-1}$ (Figure 7.16 (b)), angle de cap relatif $0.07rad$, 4.01° (Figure 7.17 (a)), écart latéral $0.79m$ (Figure 7.17 (b)), angle de braquage $0.04rad$,

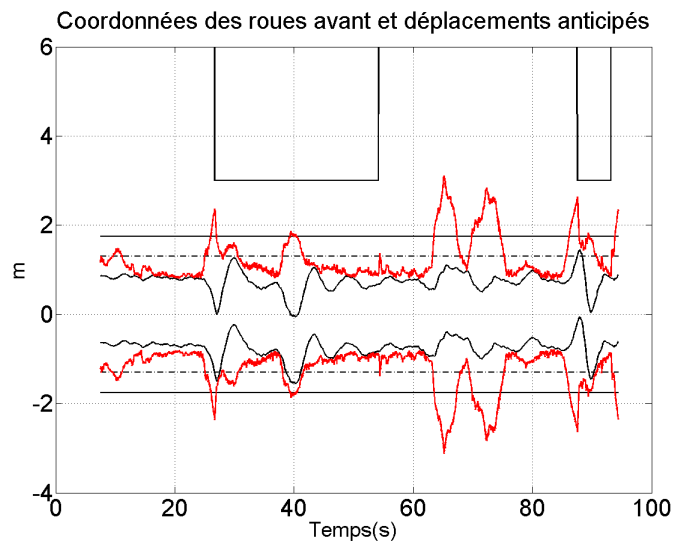


FIG. 7.13 – Test en sortie de voie : Positions latérales des roues avant du véhicule en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (4ème loi d’assistance, 5ème stratégie de commutation).

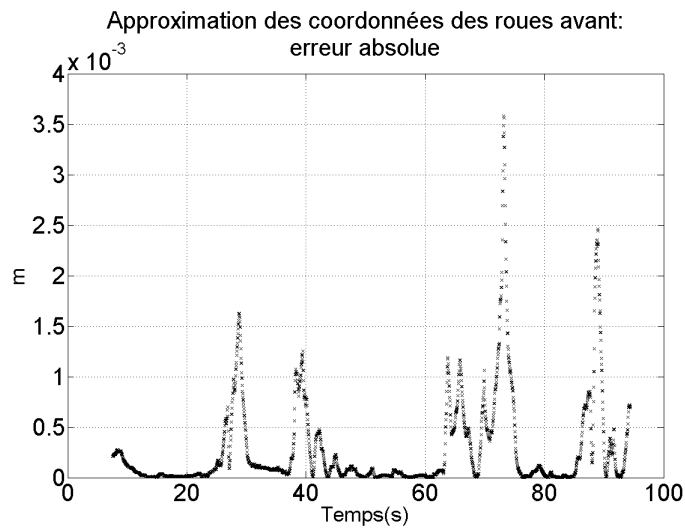


FIG. 7.14 – Test en sortie de voie : Erreur d’approximation pour le calcul des coordonnées des roues avant du véhicule y_g et y_d par la formule linéaire qui ne tient pas compte de la courbure de la route (4ème loi d’assistance, 5ème stratégie de commutation).

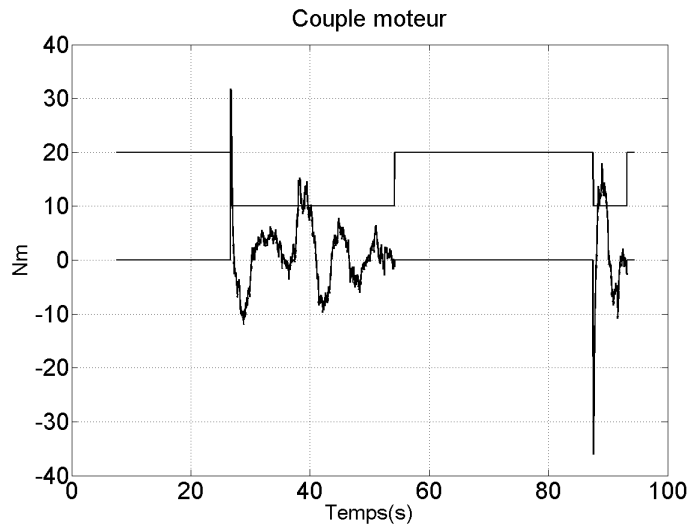


FIG. 7.15 – Test en sortie de voie : Couple d’assistance (4ème loi d’assistance, 5ème stratégie de commutation).

2.29° (Figure 7.18 (a)), dérivée de l’angle de braquage 0.29rad/s , 16.61°s^{-1} (Figure 7.18 (b)). Le confort des passagers est préservé, car l’accélération latérale reste autour de $0.2g$ pendant toute la durée d’activation de l’assistance (Figure 7.19 (b)).

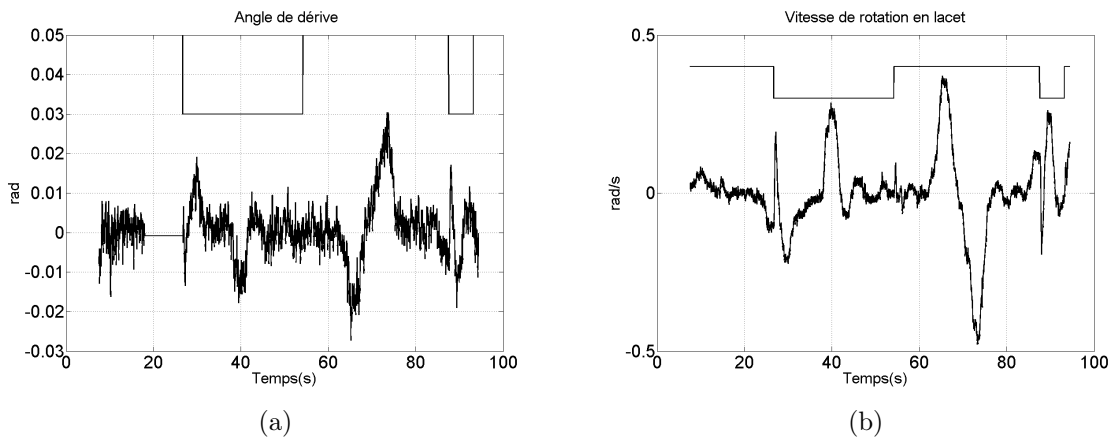


FIG. 7.16 – Test en sortie de voie : (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (4ème loi d’assistance, 5ème stratégie de commutation).

Performances hors conditions nominales

Ces tests ont pour objectif de vérifier la réponse en régime transitoire de l’assistance pour des activations en dehors des conditions nominales de développement et plus particulièrement en ce qui concerne la courbure. L’activation présentée ici a eu lieu dans un virage de 0.017m^{-1} de courbure, donc deux fois plus élevée que la valeur maximale supposée pour la synthèse de la loi

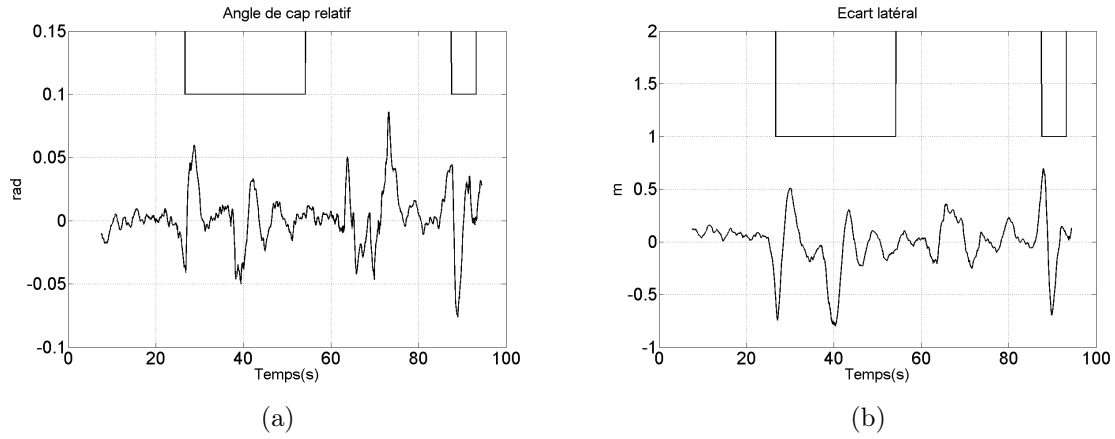


FIG. 7.17 – Test en sortie de voie : (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (4ème loi d’assistance, 5ème stratégie de commutation).

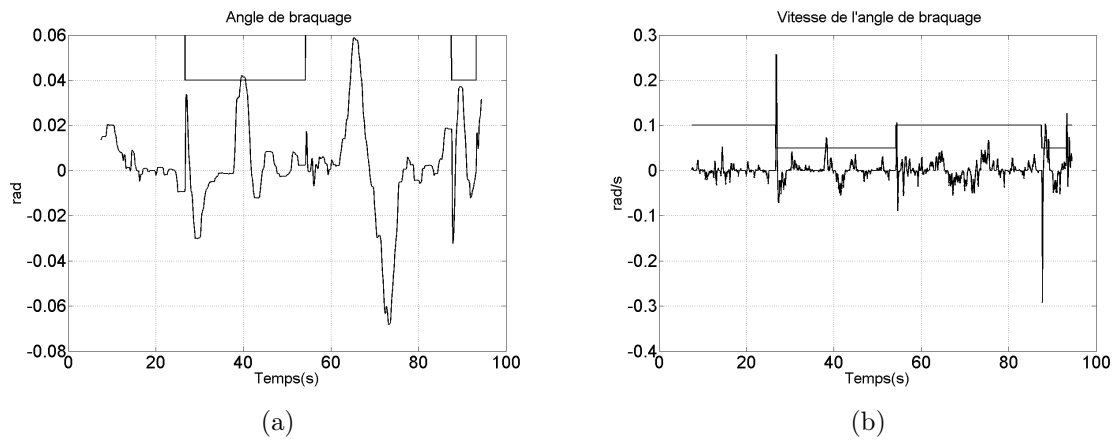


FIG. 7.18 – Test en sortie de voie : (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l’angle de braquage (4ème loi d’assistance, 5ème stratégie de commutation).

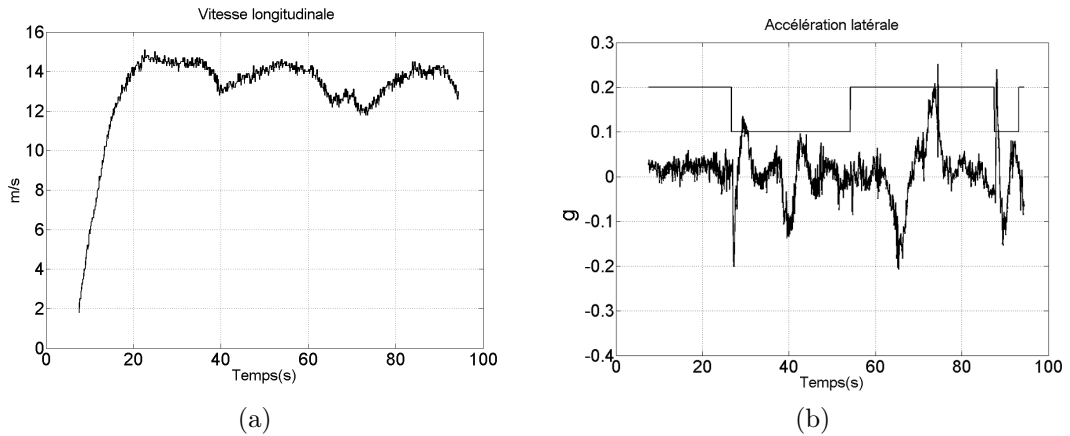


FIG. 7.19 – Test en sortie de voie : (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (4ème loi d’assistance, 5ème stratégie de commutation).

d’assistance (voir Figure 7.20). Remarquons aussi que le segment de voie choisi se prolonge par un virage plus prononcé.

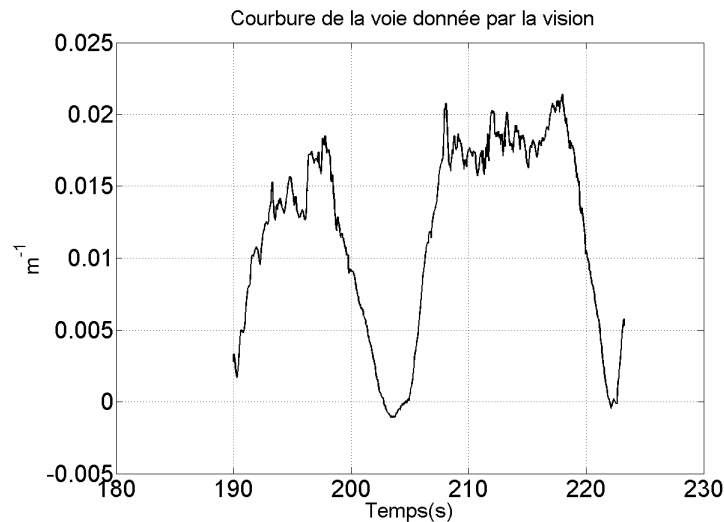


FIG. 7.20 – Courbure de la route donnée par l’algorithme de vision (4ème loi d’assistance, virages très serrés).

La conséquence directe d’une courbure supérieure à celles considérées lors de la synthèse de la loi de commande est la perte de validité des ensembles invariants garantis. Ceci se répercute sur les bornes du déplacement latéral des roues avant ou de l’état du véhicule, bornes qui ne sont plus garanties. L’activation de la loi de commande n’est donc plus fondée sur l’anticipation du risque de sortie de voie. Néanmoins, le comportement de l’assistance à la conduite dans une telle situation d’activation non-conforme à la synthèse présente également un intérêt pour l’analyse en fonctionnement dégradé.

Remarque 7.4.1 Les ensembles $\varepsilon(P)$ et $\varepsilon(\frac{1}{V_{ext}}P)$ n’ont plus la garantie d’être invariants pour

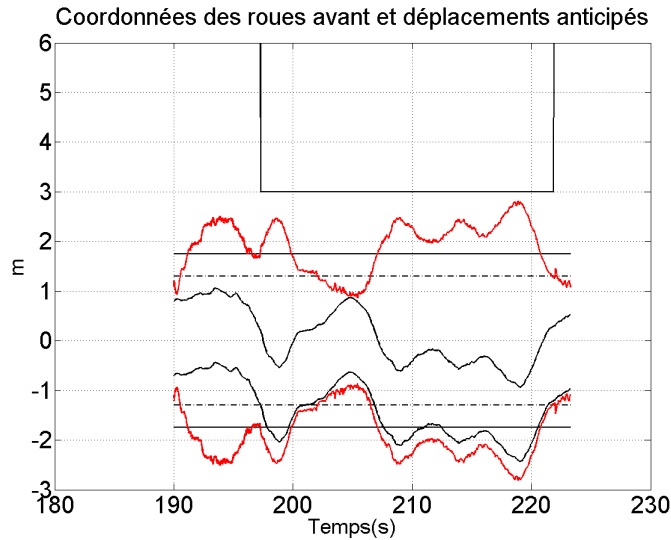


FIG. 7.21 – Test en sortie de voie hors conditions nominales : Positions latérales des roues avant du véhicule en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (4ème loi d’assistance, virages très serrés).

une entrée de perturbation $\rho_{ref} > \rho_{ref}^{max}$, ou, plus spécifiquement dans ce cas, $\rho_{ref} > 0.008m^{-1}$.

On remarque qu’après l’activation de l’assistance, les trajectoires des roues avant dépassent légèrement les marquages latéraux (voir Figure 7.21 à $t = 196s$). Ensuite, le véhicule se stabilise autour du centre de la voie. Dans le second virage, le véhicule maintient un dépassement latéral mais suit sans difficulté la voie. Le couple moteur reste inférieur à $25Nm$ (voir Figure 7.22) et l’accélération latérale dépasse légèrement $0.2g$ (voir Figure 7.23 (b)).

Malgré les conditions d’activation très sévères quant à la courbure de la route, les valeurs des variables d’état restent toujours acceptables : angle de dérive $0.029rad$, 1.66° (voir Figure C.1 de l’Annexe C), vitesse de lacet $0.48rad/s$, $27.5^\circ s^{-1}$ (voir Figure C.1 (b)), angle de cap relatif $0.07rad$, 4.01° (voir Fig. C.2 (a)), écart latéral $1.67m$ (voir Figure C.2 (b)), angle de braquage $0.07rad$, 4.01° (voir Figure C.3 (a)), dérivée de l’angle de braquage $0.07rad/s$, $4.01^\circ s^{-1}$ (voir Figure C.3 (b)).

Pour conclure, l’ensemble de ces valeurs démontre à nouveaux une excellente robustesse de la loi de commande développée.

7.4.2 Implantation de la 5ème loi d’assistance

La 5ème loi d’assistance tient compte de la courbure de la route, supposée accessible à la mesure, en ajoutant un terme de préfiltrage permettant d’en atténuer l’effet sur les performances de suivi de voie. La gestion des commutations est assurée par la 6ème stratégie de commutation. Les performances de l’assistance ont été encore une fois éprouvées par des tests sur véhicule prototype.

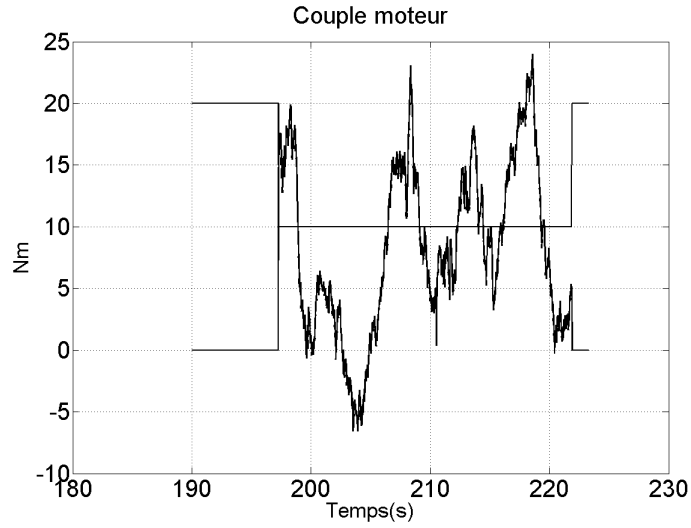


FIG. 7.22 – Test en sortie de voie hors conditions nominales : Couple d’assistance (4ème loi d’assistance, virages très serrés).

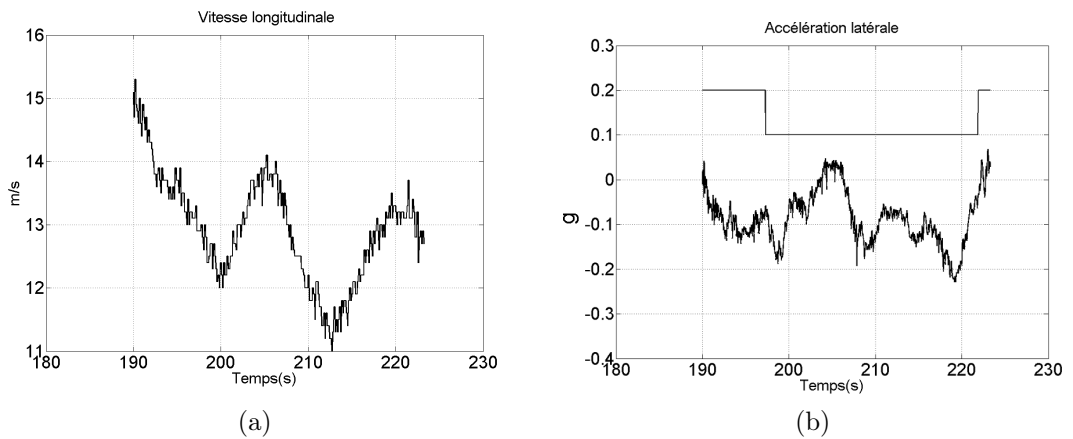


FIG. 7.23 – Test en sortie de voie hors conditions nominales : (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (4ème loi d’assistance, virages très serrés).

Calcul de la loi d'assistance, du terme de préfiltrage et de la fonction quadratique

Les valeurs numériques utilisées pour la mise en œuvre de l'Algorithme 7.2.2 décrit dans une section précédente sont les suivantes : la vitesse longitudinale est fixée à $15m/s$, la courbure est supposée être limitée à $\rho_{ref}^{max} = 0.01m^{-1}$, soit $100m$ de rayon minimal. Les limites de la région de « conduite normale » ont été choisies de telle sorte à ce qu'elle inclut l'état stationnaire du véhicule en situation de suivi de voie dans le virage de courbure $\rho_{ref}^{max} = 0.01m^{-1}$. Cet état est déterminé à partir de l'expression (B.1) de l'Annexe B, les valeurs correspondantes sont regroupées dans le Tableau 7.6. Les limites de la région de « conduite normale », choisie en conséquence, se trouvent dans le Tableau 7.7. Le couple d'assistance doit quant à lui rester inférieur à $C^{max} - \sigma_2 = 62Nm$. Cette valeur est supérieure aux valeurs choisies pour les précédentes lois d'assistance. La pratique montre que le couple reste quoi qu'il en soit bien inférieur à cette valeur.

TAB. 7.6 – État stationnaire du modèle « bicyclette » du véhicule pour $v = 15m/s$ et $\rho_{ref} = \rho_{ref}^{max} = 0.01m^{-1}$.

β_{ss}	r_{ss}	$(\psi_L)_{ss}$	$(\delta_f)_{ss}$
$-0.009rad$	$0.15rad/s$	$-0.0006rad$	$0.027rad$
-0.52°	$8.59^\circ/s$	-0.035°	1.56°

TAB. 7.7 – Limites de l'hypercube de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ pour $v = 15m/s$ et $\rho_{ref}^{max} = 0.01m^{-1}$.

β^N	r^N	ψ_L^N	y_L^N	δ_f^N	$\dot{\delta}_f^N$
$0.013rad$	$0.174rad/s$	$0.017rad$	$0.1m$	$0.027rad$	$0.052rad/s$
0.8°	$10^\circ/s$	1°	$0.1m$	1.6°	$3^\circ/s$

La résolution du problème BMI (7.13) avec les valeurs numériques adoptées conduit au gain de retour d'état suivant :

$$K = (-351.90, -68.37, -728.44, -56.69, -620.60, -1.81). \quad (7.28)$$

La valeur obtenue pour le terme de préfiltrage est $F_f = 472.90$. À titre de comparaison, la méthode de calcul du terme de préfiltrage par annulation de l'erreur statique fournit, pour le même gain K , un gain approximativement 9 fois plus élevé ($\bar{F}_f = 4166.18$). Le couple maximal d'assistance, dans ce cas à l'intérieur de l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$, serait de :

$$|Kx + \bar{F}_f \rho_{ref}^{max}| \leq |Kx| + |\bar{F}_f \rho_{ref}^{max}| \leq |\max_{x \in \varepsilon(P)} Kx| + |\bar{F}_f \rho_{ref}^{max}| \leq \sqrt{KQK^T} + |\bar{F}_f \rho_{ref}^{max}|, \text{ où } Q = P^{-1}. \quad (7.29)$$

En valeur numérique, l'équation (7.29) devient :

$$|Kx + \bar{F}_f \rho_{ref}^{max}| \leq 57.27Nm + 41.66Nm \Rightarrow |Kx + \bar{F}_f \rho_{ref}^{max}| \leq 98.93Nm. \quad (7.30)$$

Valeur, qui est donc supérieure à la limite imposée. Même si cette valeur est aussi liée au choix de K , elle indique cependant l'intérêt de prendre en compte la limitation en amplitude de l'entrée dès la synthèse de la loi de commande.

De plus, la loi de commande obtenue par l'Algorithme 7.2.2 assure un ensemble ellipsoïdal invariant $\varepsilon(P)$, et donc un déplacement maximum garanti des roues avant sur la voie qui est inférieur à $d_{ext} = 2.05m$ (pour des états initiaux à l'intérieur de $\varepsilon(P)$). La dynamique du véhicule à l'intérieur de $\varepsilon(P)$ est bornée aux limites indiquées dans le Tableau 7.8. Ces limites ont été choisies pour fixer la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

TAB. 7.8 – Limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

β^M	r^M	ψ_L^M	y_L^M	δ_f^M	$\dot{\delta}_f^M$
0.104rad	0.702rad/s	0.240rad	1.37m	0.118rad	0.830rad/s
5.97°	40.25°/s	13.78°	1.37m	6.78°	47.60°/s

Résultats des tests sur véhicule prototype

La loi de commande ainsi obtenue a été testée dans deux situations particulières : le suivi de voie en conduite automatique sur une portion de piste incluant des virages modérés et prononcés et le déclenchement de l'assistance en virage conformément à la 6ème stratégie de commutation.

Performances en suivi de voie

Ce test a eu comme objectif de vérifier la capacité de la loi d'assistance à suivre l'axe de la voie de circulation. Pour ce test, le conducteur a déclenché volontairement l'assistance et a laissé le véhicule évoluer sur un segment de la piste d'essai dont le profil de courbure est présenté sur la Figure 7.24. Ce segment inclut deux virages de moins de $0.01m^{-1}$ de courbure, deux virages de moins de $0.02m^{-1}$ de courbure et un virage de plus de $0.02m^{-1}$ de courbure.

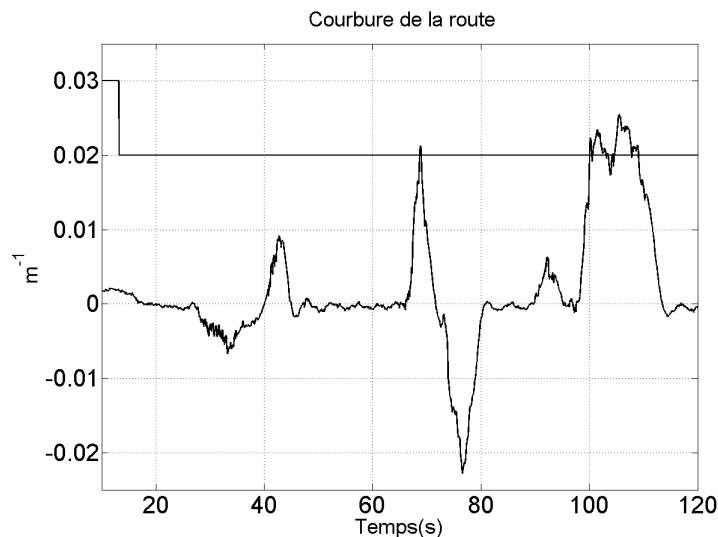


FIG. 7.24 – Performances en suivi de voie : Courbure de la route donnée par l'algorithme de vision (5ème loi d'assistance).

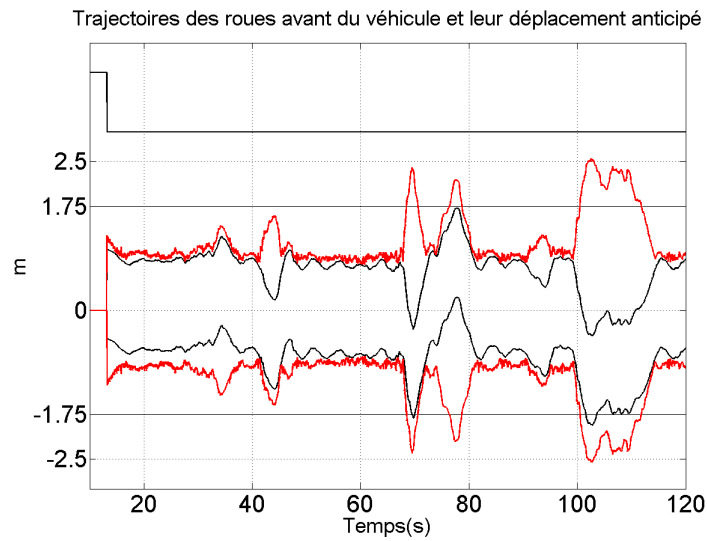


FIG. 7.25 – Performances en suivi de voie : Positions latérales des roues avant en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (5ème loi d'assistance).

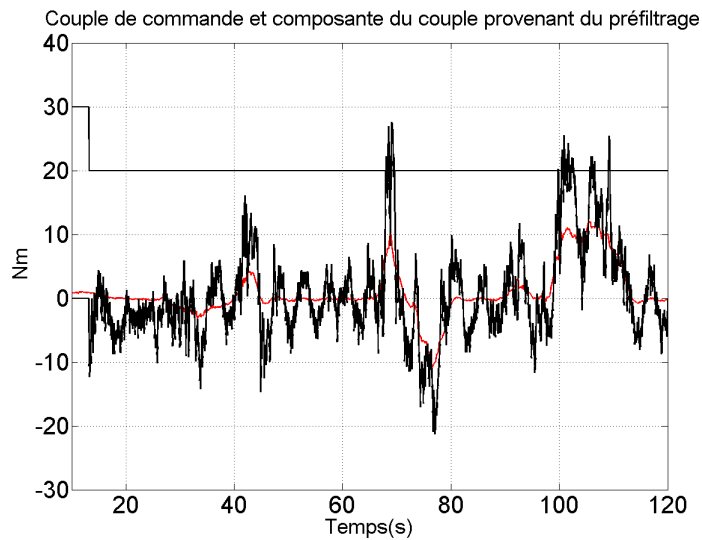


FIG. 7.26 – Performances en suivi de voie : Couple total d'assistance en noir et composante provenant de la correction en préfiltrage en rouge (5ème loi d'assistance).

Pour tous les virages considérés, le véhicule a pu suivre la voie de manière stable en mode automatique, même si la loi de commande a été conçue pour des routes de courbure inférieure à $0.01m^{-1}$. De plus, les roues avant n'ont dépassé que légèrement les marquages latéraux pour le virage à courbure supérieure à $0.02m^{-1}$ (de $t = 95s$ à $t = 120s$ sur la Figure 7.25). Pour la partie de la piste à très faible courbure, le véhicule est resté très proche du centre de la voie (voir Figures 7.25 et 7.28 (b) de $t = 50s$ à $t = 65s$).

Le couple d'assistance est composé du retour d'état linéaire qui représente la plus forte composante et du terme de correction en fonction de la courbure, accessible à la mesure par l'algorithme de vision et la caméra en vision frontale (voir Figure 7.26). Le supplément de couple dû à ce terme est inférieur à $5Nm$ pour les virages à courbure de moins de $0.01m^{-1}$ (de $t = 30s$ à $t = 50s$ sur Figure 7.26) et dépasse légèrement $10Nm$ pour le virage à courbure de plus de $0.02m^{-1}$ (de $t = 95s$ à $t = 120s$ sur Figure 7.26). Ceci ne constitue donc qu'une correction modérée, ajoutée pour atténuer l'influence de la courbure sur le suivi de voie.

Les variables d'état du véhicule sont présentées sur les Figures de 7.27 à 7.29. Les maxima atteints pendant ce test sont : $0.04rad$ (2.29°) pour l'angle de dérive du vecteur vitesse, $0.53rad\ s^{-1}$ ($30.38^\circ s^{-1}$) pour la vitesse de rotation en lacet, $0.04rad$ (2.29°) pour l'angle de cap relatif, $1.16m$ pour l'écart latéral en avant du véhicule, $0.09rad$ (5.15°) pour l'angle de braquage et $0.15rad\ s^{-1}$ ($8.59^\circ s^{-1}$) pour la dérivée de l'angle de braquage. Toutes ces valeurs ont été atteintes pendant le passage du virage le plus serré (courbure de $0.02m^{-1}$, de $t = 95s$ à $t = 120s$ sur Figure 7.24). Elles confirment la très bonne robustesse de la loi d'assistance, ainsi que les bonnes performances du suivi de voie. Le confort des passagers n'a pas été affecté pendant le contrôle automatique, comme le montre l'accélération latérale qui est restée inférieure à $0.25g$ (Figure 7.30 (b)), pour une vitesse longitudinale variant entre $10m/s$ et $15m/s$ (Figure 7.30 (a)).

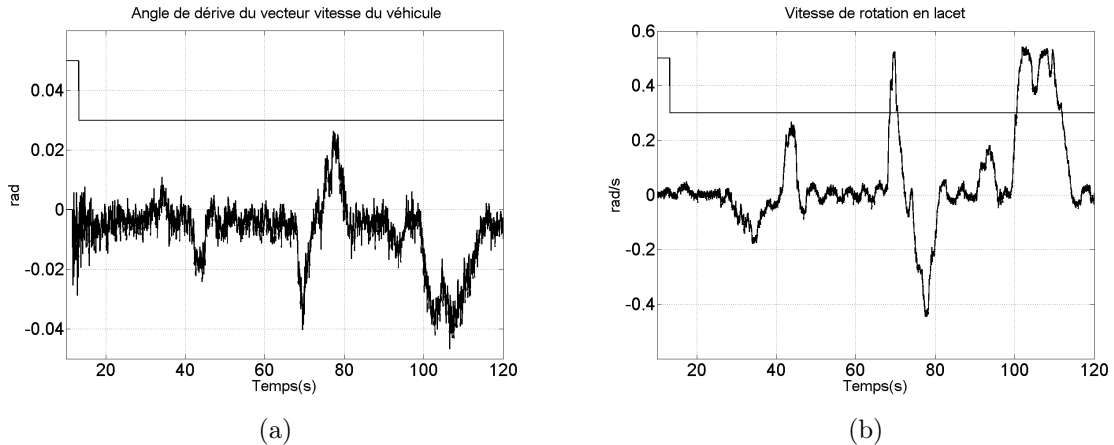


FIG. 7.27 – Performances en suivi de voie : (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (5ème loi d'assistance).

Performances pour des sorties de voie par l'utilisation de la 6ème stratégie de commutation

Une fois les bonnes performances en suivi de voie établies, la réponse transitoire de la 5ème loi d'assistance a été testée pour des cas d'activation avec un état éloigné du régime permanent. La stratégie d'activation/désactivation a été réalisée conformément à la 6ème stratégie de commutation. En tenant compte du déplacement maximal des roues avant, assuré par la loi d'assistance

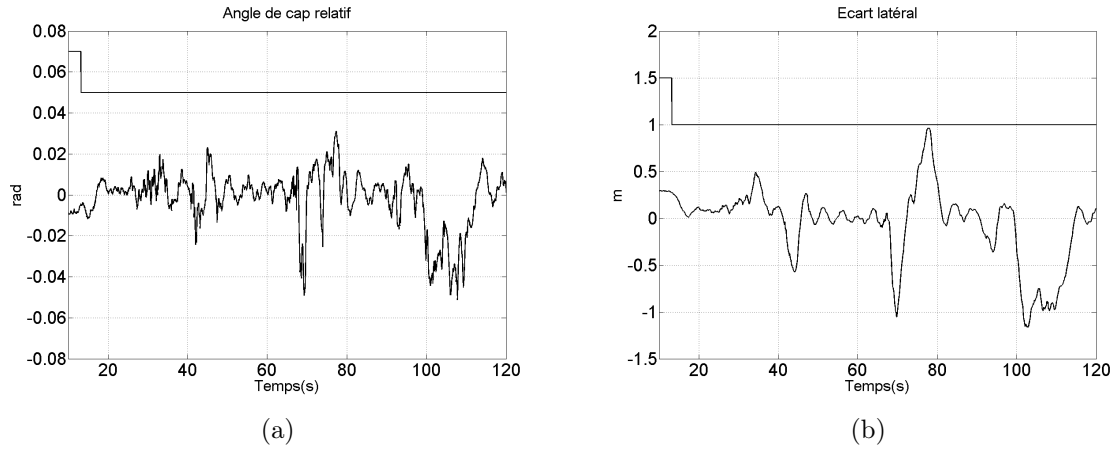


FIG. 7.28 – Performances en suivi de voie : (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (5ème loi d'assistance).

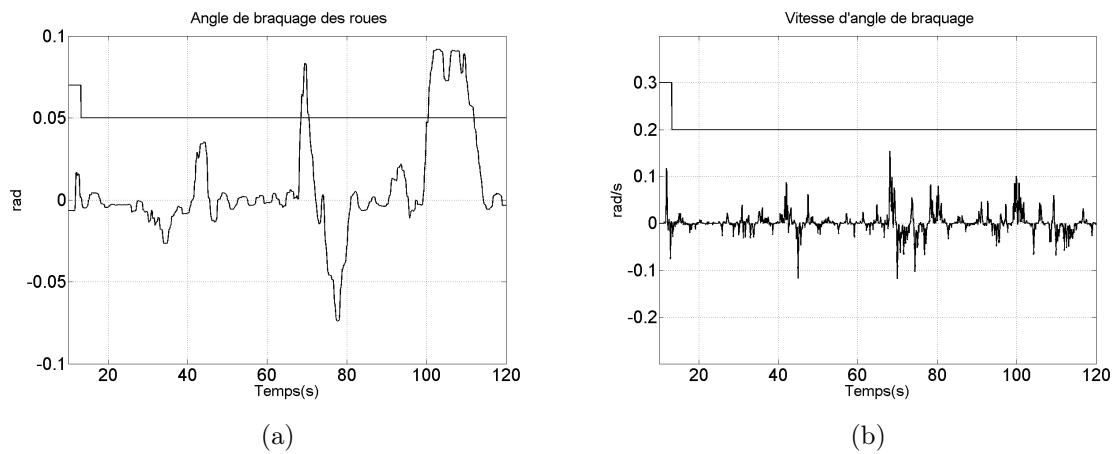


FIG. 7.29 – Performances en suivi de voie : (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (5ème loi d'assistance).

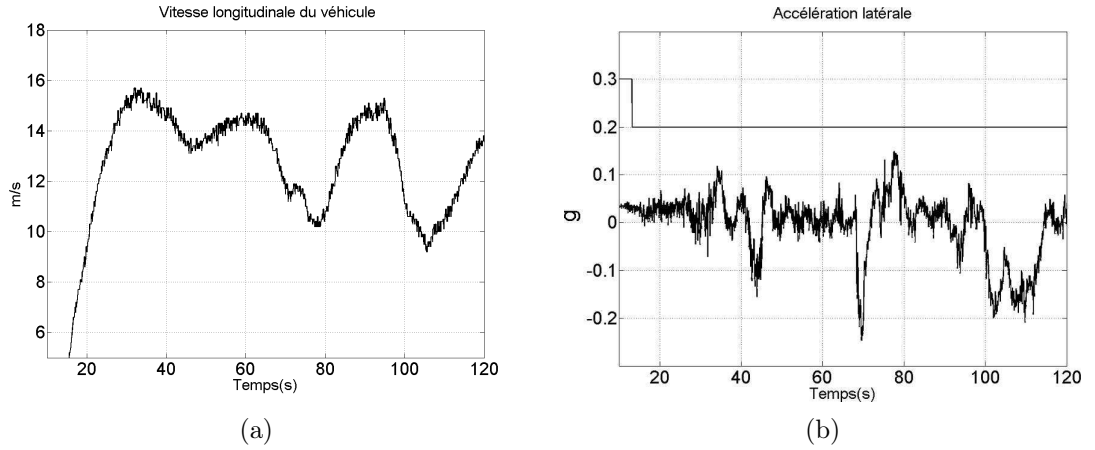


FIG. 7.30 – Performances en suivi de voie : (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (5ème loi d’assistance).

pour des déclenchements à l’intérieur de l’ensemble invariant $\varepsilon(P)$, $d_{ext} = 2.05m$, l’implantation de la 6ème stratégie de commutation prend la forme suivante :

– *Activation*

$$T_r^{12} : (|C_c| \leq 1.5Nm) \wedge (x^T P x \leq 1) \wedge (2.05m - 0.25m \leq d^{max}(x) \leq 2.05m + 0.25m) \wedge (Inhibée = 0). \quad (7.31)$$

– *Désactivation*

$$T_r^{21} : (1.5Nm < |C_c| \leq 4Nm) \wedge (x^T P x \leq 1) \wedge (Inhibée = 0). \quad (7.32)$$

Pour activer l’assistance à partir du déplacement maximum anticipé, nous avons considéré un intervalle de $\pm 25cm$ autour de la valeur $d_{ext} = 2.05m$. Rappelons que pour un état initial x^0 , $d^{max}(x^0)$ représente la demi-largeur d’une zone centrée sur la voie correspondant à l’ellipsoïde :

$$\varepsilon\left(\frac{1}{(x^0)^T P x^0} P\right) = \{x \in \mathbb{R}^6 : x^T P x \leq (x^0)^T P x^0\}. \quad (7.33)$$

L’ellipsoïde $\varepsilon\left(\frac{1}{(x^0)^T P x^0} P\right)$ est invariant seulement si $\varepsilon(P) \subset \varepsilon\left(\frac{1}{(x^0)^T P x^0} P\right)$. Par conséquent, $d^{max}(x^0)$ est un déplacement maximal assuré par l’intervention de l’assistance en x^0 , seulement si $d^{max}(x^0) \geq d_{ext}$, $d_{ext} = 2.05m$.

Le test de sortie a été mené sur deux activations en virages à courbures inférieures à $\rho_{ref}^{max} = 0.01m^{-1}$ (voir Figure 7.31 $t = 27s$ et $t = 40s$) et une activation en virage de courbure deux fois supérieure à $\rho_{ref}^{max} = 0.01m^{-1}$, utilisée dans la synthèse de la loi d’assistance (voir Figure 7.31 $t = 65s$).

Les deux premières activations ont eu lieu au moment où le déplacement maximal anticipé $d^{max}(x)$ a franchi $1.7m = 2.05m - 0.25m$. En réalité les déplacements des roues avant par rapport à l’axe de la voie sont restés inférieurs à $1.4m$ (voir Figure 7.32 à $t = 27s$ et à $t = 40s$). Le véhicule revient rapidement au centre de la voie après l’enclenchement de la loi d’assistance et se stabilise sans oscillations.

La troisième activation de l’assistance, à $t = 65s$, n’a plus aucune garantie pour le déplacement maximum de roues avant, car la valeur de l’entrée de courbure est supérieure à celle utilisée lors

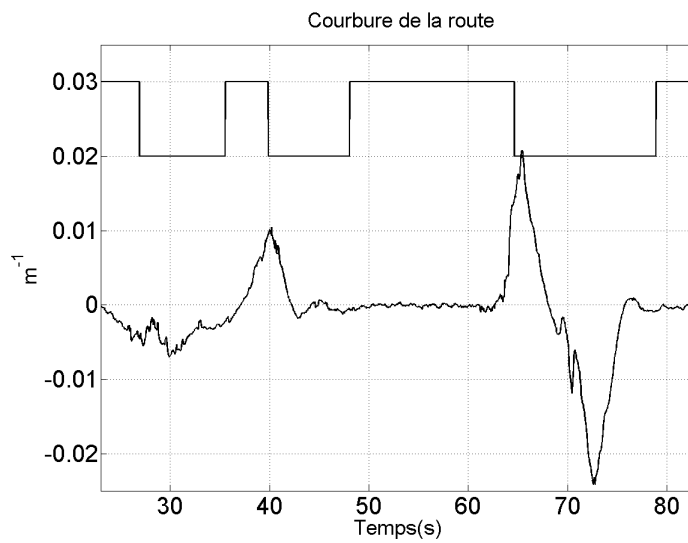


FIG. 7.31 – Courbure de la route donnée par l’algorithme de vision (5ème loi d’assistance, 6ème stratégie de commutation).

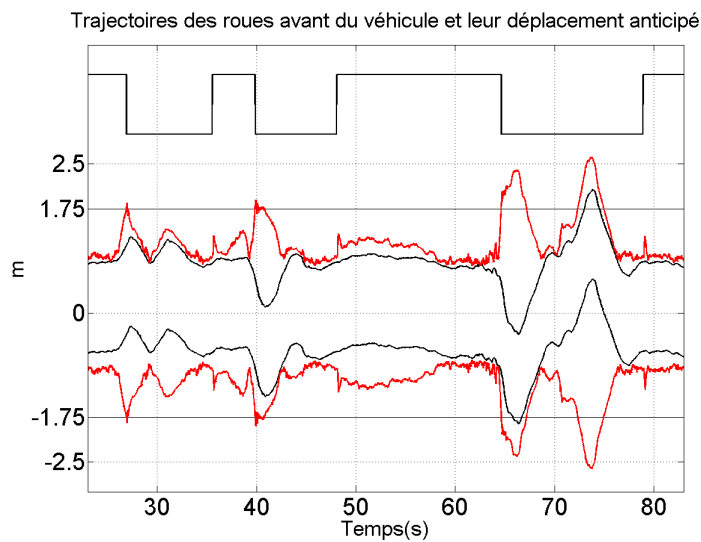


FIG. 7.32 – Positions latérales des roues avant du véhicule en noir (y_g et y_d) et déplacement maximal anticipé en rouge (5ème loi d’assistance, 6ème stratégie de commutation).

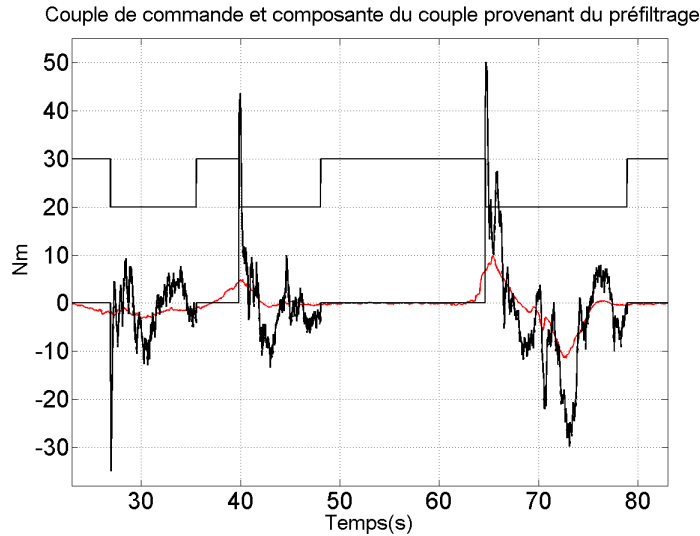


FIG. 7.33 – Couple total d’assistance en noir et composante provenant de la correction en préfiltrage en rouge (5ème loi d’assistance, 6ème stratégie de commutation).

de la synthèse de la loi d’assistance (voir Figure 7.31). Cependant, les trajectoires des roues avant ne dépassent que légèrement les marquages latéraux et la loi démontre une robustesse remarquable (voir Figure 7.32 de $t = 65s$ à $t = 80s$). Ce comportement est obtenu malgré le fait que le virage serré où l’assistance a été activée soit suivi par un virage de même courbure maximale, mais d’orientation opposée.

Le couple d’assistance utilisé pendant les activations en virages à courbure $|\rho_{ref}| \leq \rho_{ref}^{max}$ ($\rho_{ref}^{max} = 0.01m^{-1}$) est inférieur à $44Nm$ (voir Figure 7.33 de $t = 26s$ à $t = 36s$ et de $t = 40s$ à $t = 48s$). Cette valeur est notablement inférieure à la limite imposée dans la phase de synthèse ($62Nm$). La composante du couple d’assistance correspondant à la compensation de la courbure est plutôt faible, en dessous de $10Nm$ durant cet essai (voir Figure 7.33)

L’évolution des variables d’état est présentée sur les Figures 7.34 à 7.36. Les maxima atteints par celles-ci pendant l’usage de l’assistance dans son domaine de développement (de $t = 20s$ à $t = 60s$) sont : $0.03rad$ (1.7°) pour l’angle de dérive du vecteur vitesse, $0.4rad/s$ ($23^\circ/s$) pour la vitesse de lacet, $0.047rad$ (2.69°) pour l’angle de cap relatif, $0.64m$ pour l’écart latéral, $0.056rad$ (3.21°) pour l’angle de braquage et $0.32rad/s$ ($18.34^\circ/s$) pour la dérivée de l’angle de braquage. Toutes ces valeurs sont inférieures à celles garanties par la théorie et présentées dans le Tableau 7.8. De plus, l’accélération latérale, inférieure à $0.3g$, même lors du passage du virage le plus serré, confirme la préservation du confort des passagers (voir Figure 7.37 (b)). La vitesse longitudinale a varié pendant ce test entre $12m/s$ et $15m/s$ (voir Figure 7.37 (a)), sans aucune incidence sur le fonctionnement.

7.5 Conclusions

Ce chapitre a mis en œuvre deux méthodes de synthèse d’assistances à la conduite pour le maintien de voie, utilisables sur routes à courbure prononcée. Seule l’hypothèse de courbure bornée est nécessaire à la synthèse. La première méthode suppose la courbure non accessible à la mesure. La seconde méthode est fondée sur une mesure en temps réel de celle-ci.

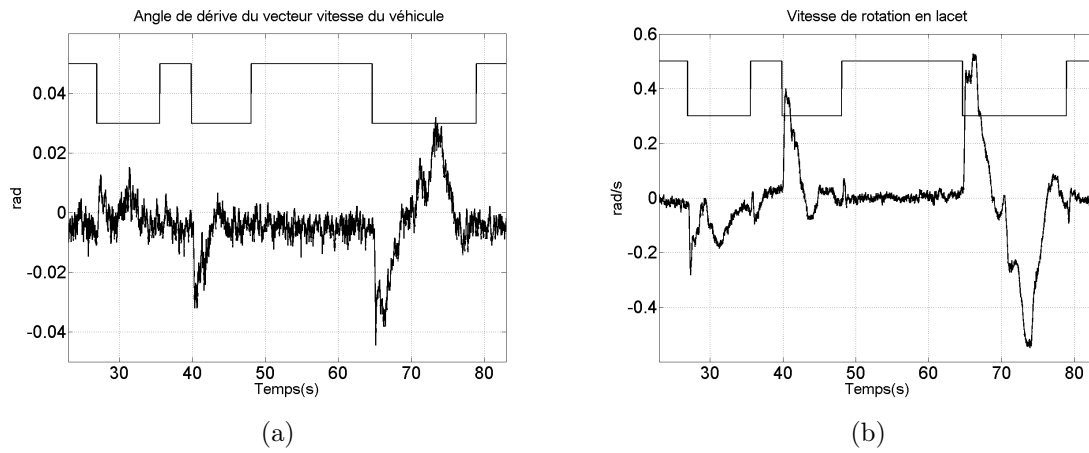


FIG. 7.34 – (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet (5ème loi d’assistance, 6ème stratégie de commutation).

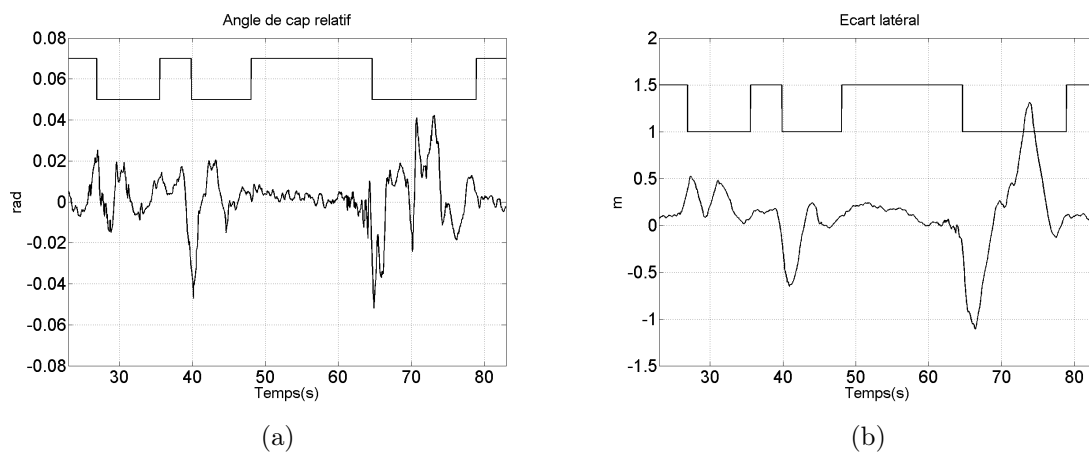


FIG. 7.35 – (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral (5ème loi d’assistance, 6ème stratégie de commutation).

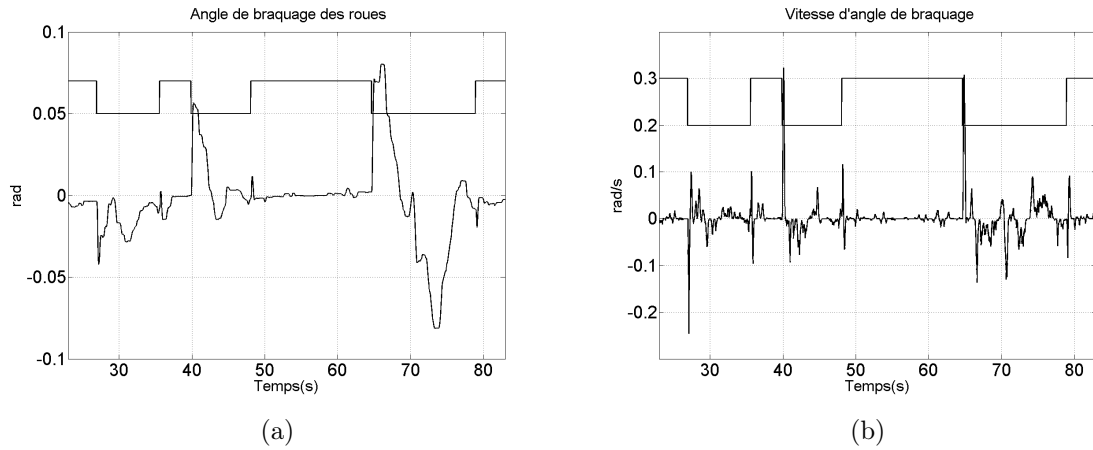


FIG. 7.36 – (a) Angle de braquage. (b) Dérivée de l'angle de braquage (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation).

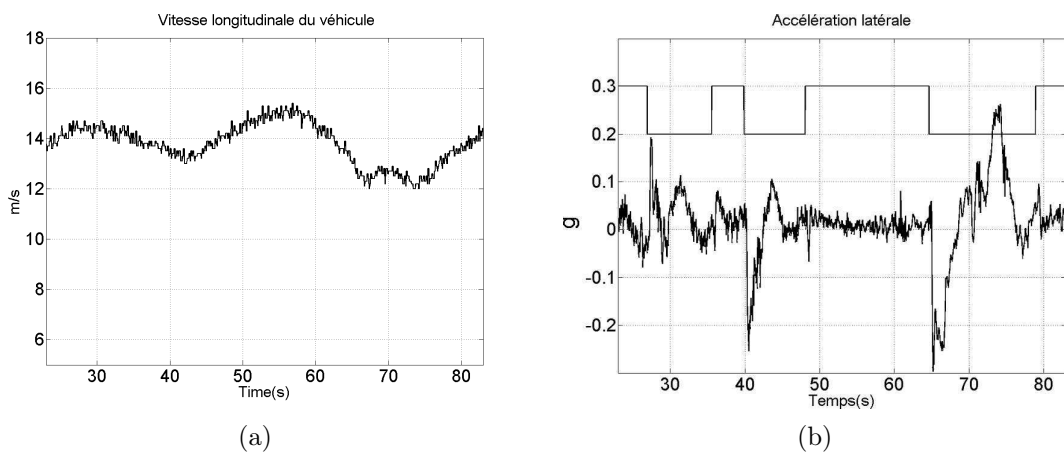


FIG. 7.37 – (a) Vitesse longitudinale. (b) Accélération latérale (5ème loi d'assistance, 6ème stratégie de commutation).

Cette différence mise à part, les deux assistances à la conduite ont des lois de commande très semblables dans le principe. L'atténuation de l'effet d'une perturbation (non-mesurable ou bien mesurable) par la minimisation de l'ensemble atteignable du système en boucle fermée sous l'influence de la perturbation, pour des états initiaux de la région de « conduite normale », a constitué l'objectif principal dans les deux cas. Une fonction quadratique a été cherchée simultanément avec un vecteur de retour d'état pour circonscrire cet ensemble atteignable dans un ensemble invariant, qui est ensuite minimisé. Dans les deux méthodes de synthèse, l'ensemble invariant, et en conséquence, l'ensemble atteignable, a été contraint à appartenir à un ensemble dont les états sont caractérisés par un couple d'assistance borné.

Les deux lois de commande qui en résultent ont une caractéristique importante : bien que n'assurant pas l'annulation de l'erreur de poursuite en régime permanent, les deux lois de commande ont montré des bonnes performances pour un suivi de voie. Cependant, des bornes maximales pour la trajectoire du véhicule sur la voie sont garanties.

Concernant le comportement des assistances à la conduite vis-à-vis des commutations, une dynamique bornée est assurée grâce aux ensembles invariants établis et aux stratégies de commutation. Ces ensembles invariants ont dans notre cas un rôle double : ils servent, d'une part, à minimiser les ensembles atteignables et d'autre part à maintenir limitée la dynamique du véhicule assisté représenté sous forme d'un automate hybride.

Les deux assistances développées ont été testées sur le véhicule prototype sur différents types de scénarios :

- Le suivi de voie en mode automatique dans les conditions nominales, sur des segments de piste avec des virages à courbure maximale égale à la courbure de la synthèse.
- Le test hors conditions nominales avec l'évaluation des performances du suivi de voie pour des virages à forte courbure. Le véhicule a un comportement stable et a démontré la très bonne robustesse des lois de commande.
- Le test des commutations et notamment les activations en virage qui constituent un des enjeux difficiles des assistances. Les limites théoriques ont été totalement confirmées par la pratique.

Cependant, certains aspects importants n'ont pas été pris en compte dans ce chapitre, c'est le cas notamment de la perte de la linéarité de la dynamique latérale du véhicule. Les lois d'assistances, des deux derniers chapitres, ont été développées sur la base d'un modèle « bicyclette » linéaire et invariant du véhicule, qui évolue dans le domaine de linéarité du pneu. Cette linéarité peut devenir une hypothèse difficile à vérifier en pratique, surtout pour la conduite en virage à haute vitesse, où les accélérations latérales deviennent importantes. Le chapitre suivant est consacré au passage vers le domaine de saturation du pneumatique et vers un modèle du véhicule dont certains paramètres varient dans le temps.

Bibliographie

- [Boy94] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan *Linear matrix inequalities in system and control theory* Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Philadelphia, 1994.
- [Cam01] J.-F. Camart, M. Malabre et J.-C. Martinez-Garcia, *Fixed poles of simultaneous disturbance rejection and decoupling : a geometric approach*. Automatica, Vol. 37, pp. 297-302, 2001.
- [Dah87] M. A. Dahleh et J. Boyd Pearson, Jr. *l^1 -Optimal Feedback Controller for MIMO Discrete-Time Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 4, pp. 314-322, 1987.
- [Dio03] J.-M. Dion, C. Commault et J. van der Woude *Generic properties and control of linear structured systems : a survey* Automatica, Vol. 39, pp. 1125-1144, 2003.
- [Giu99] A. Giusto et F. Paganini *Robust Synthesis of Feedforward Compensators* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 8, pp. 1578-1582, 1999.
- [Koc03] M. Kocvara et M. Stingl *PENNON - A Code for Convex Nonlinear and Semidefinite Programming*. Optimization Methods and Software, Vol. 18, No. 3, pp. 317-330, 2003.
- [Lar07] P. de Larminat *Analysis and Control of Linear Systems*. ISTE Ltd, 6 Fitzroy square, London UK, 2007.
- [Li05] L. Li, F.-Y. Wang et Q. Zhou, *An LMI approach to robust vehicle steering controller design*. Proceedings IEEE ITS Congress, pp. 360-365, 2005.
- [Mou99] H. Furusho et H. Mouri *Research on automated lane tracking using linear quadratic control : control procedure for a curved path*. JSAE Review, Vol. 20, pp. 325-329, 1999.
- [Mal97] M. Malabre, J. C. Martinez-Garcia et B. Del-Muro-Cuellar *On the Fixed Poles for Disturbance Rejection*. Automatica, Vol. 33, no. 6, pp. 1209-1211, 1997.
- [Nag94] K. Nagpal, J. Abedor et K. Poolla, *An LMI Approach to peak-to-peak gain minimization : filtering and control*. Proceeding of the American Control Conference, pp. 724-746, 1994.
- [Naz07] S. A. Nazin, B. T. Polyak et M. V. Topunov, *Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids*. Automation and Remote Control, Vol. 68, No. 3, pp. 467-486, 2007.
- [Rah04] Raharijoana, T. *Commande robuste pour l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier* Thèse de doctorat de l' Université Paris XI Orsay, 2004.
- [Raj06] R. Rajamani *Vehicle dynamics and control*. Springer Verlag, 2006.
- [Sti05] M. Stingl *On the solution of nonlinear semidefinite programs by augmented Lagrangian methods*. Thèse de doctorat de l'université Friedrich-Alexander-Universität Erlangen Nürnberg, 2005.

- [Vid86] M. Vidyasagar, *Optimal rejection of persistent bounded disturbances*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-31, No. 6, pp. 527-534, 1986.

Prise en compte de la saturation des forces de contact

Sommaire

8.1	Modèle de force de contact avec prise en compte de la saturation	258
8.2	Synthèse des 6ème et 7ème lois de commande	262
8.3	Implantation pratique et résultats	266
8.3.1	Équipement du véhicule prototype « steer by wire »	266
8.3.2	Implantation des deux lois d'assistance	268
8.3.3	Assistance au maintien de voie et contrôle du mouvement de lacet .	276
8.4	Robustesse des lois d'assistance vis-à-vis de l'entrée de perturbation due à la courbure	279
8.4.1	Approche théorique du calcul	279
8.4.2	Limites assurées en fonction des bornes sur la courbure et des paramètres ζ_F et ζ_R liés aux forces de contact	283
8.4.3	Vérification des bornes calculées lors des essais	287
8.5	Conclusions	288

Ce chapitre est consacré à la conception et aux tests pratiques d'une assistance à la conduite qui prend en compte la saturation potentielle des forces de contact pneumatiques-chaussée. Seul le domaine de fonctionnement nominal de l'assistance qui correspond aux états discrets Σ_1 et Σ_2 , sera traité. De même, les transitions d'activation/désactivation ne seront pas abordées, mais tous les prémisses seront satisfaites pour associer aux lois d'assistance conçues une des stratégies de commutation proposées dans les Chapitres 6 et 7 selon le formalisme du système hybride défini dans le Chapitre 5, Section 5.2. Il sera donc considéré par la suite, que le couple véhicule-assistance est continuellement dans l'état discret Σ_2 .

La conception des lois de commande pour l'état discret Σ_2 assurera a priori le respect des spécifications du cahier de charges (Section 5.2.4 du Chapitre 5) pour un large spectre de forces de contact et pour une route supposée rectiligne. Par la suite, les bornes de la dynamique latérale du véhicule contrôlé seront calculées en considérant une courbure et une dérivée de la courbure à valeurs crêtes limitées.

Le travail présenté dans ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec le Dynamic Design Laboratory de l'Université de Stanford (États-Unis). Il a été réalisé au cours d'un séjour de 3 mois au sein de ce laboratoire, en très étroite collaboration avec Kirstin L. R. Talvala, doctorante, et le Professeur Christian J. Gerdes, directeur du DDL.

8.1 Modèle de force de contact avec prise en compte de la saturation

L'hypothèse fondamentale utilisée dans cette thèse pour la conception de l'assistance suppose que le véhicule se trouve dans une situation de « conduite normale » au moment de la dégradation des capacités du conducteur (Hypothèse 5.2.1 du Chapitre 5). Cette hypothèse suppose aussi implicitement que la dynamique du véhicule reste éloignée des limites physiques qui exigent de fortes sollicitations latérales des pneumatiques, que l'adhérence de la route ne subit pas de dégradation particulière et que les sorties de voie sont uniquement dues à un défaut de guidage, suite, par exemple, à un endormissement du conducteur et non pas à une perte de stabilité au sens de la dynamique véhicule.

Tout en gardant cette hypothèse, nous considérons dans ce chapitre une situation relativement vraisemblable, qui n'était pas prise en compte lors de la conception de l'assistance dans les deux chapitres précédents : l'assistance se déclenche, comme précédemment alors que le véhicule est encore dans une situation de « conduite normale », mais, pendant son intervention, le véhicule arrive sur une section de route à faible adhérence. Les performances de l'assistance, dans ce cas, peuvent alors être fortement dégradées et les bornes sur la trajectoire du véhicule, calculées a priori, ne sont plus valables, car l'hypothèse du modèle véhicule « bicyclette » à forces latérales linéaires n'est plus vérifiée.

La cause principale de la dégradation des performances est la saturation des forces latérales. En effet, initialement proportionnelles à l'angle de dérive, ces forces saturent au fur et à mesure que le pneumatique est sollicité et que l'angle de dérive augmente. Au delà d'un certain seuil, ces forces deviennent d'ailleurs quasiment constantes (glissement total). Notons aussi que la saturation des forces, sur route à faible adhérence, intervient pour des valeurs d'angle de dérive relativement faible, à $0.2g$ au lieu de $0.8g$ d'accélération pour une route d'adhérence nominale. Les développements de ce chapitre concerneront principalement le cas des saturations dues à une réduction de l'adhérence. L'autre situation, qui correspond au contrôle du véhicule pour la saturation des forces latérales due à une forte accélération latérale, s'avéra être correctement traité par l'assistance, même si cela n'a pas été pris explicitement en compte dans les objectifs.

Plusieurs modèles non-linéaires de forces latérales existent. Dans la Section 4.1.3 du Chapitre 4, Partie II) nous avons évoqué le modèle de Pacejka et [Swi06] utilise un autre modèle bien établi dans la littérature, le modèle de Dugof, et exprime les forces latérales sous forme de non-linéarités de type secteur. La stabilité de la loi de commande développée dans [Swi06] pour le suivi de voie est garantie même si les forces saturent. À cet effet, une fonction de Lyapunov a été trouvée par l'intermédiaire de l'approche « Positivstellensatz » pour un retour de sortie, formé par l'écart latéral et par l'angle de cap relatif. Néanmoins, une approche fondée sur un modèle analytique des forces de contact présente l'inconvénient de nécessiter la calibration précise des paramètres du modèle de pneumatique choisi et conduit à une loi de commande dont la validité est fortement liée à ce même modèle.

Une autre approche, beaucoup plus répandue, considère la saturation des forces latérales et la variation du paramètre d'adhérence μ au travers des propriétés de robustesse de la loi de commande. Ainsi [Li05] propose, via une approche fondée sur l'optimisation LMI, une loi de commande pour le suivi de voie, robuste pour une large plage de variation du coefficient d'adhérence. [Rah04] a effectué une analyse de robustesse par rapport au paramètre variant d'adhérence en utilisant la méthode de la « μ -analyse » pour une loi de commande déjà synthétisée. Cependant, la prise en compte de la variation du paramètre d'adhérence nous permet uniquement de rendre compte d'un phénomène de dégradation de la force de contact que l'on peut alors assimiler à un

phénomène de saturation.

L'objectif principal demeure donc de tenir compte de la saturation indépendamment du phénomène mis en jeu. Pour cela, nous faisons appel dans ce chapitre à la paramétrisation des forces latérales proposée par [Tal08] et [Ben05]. Les auteurs de [Tal08] et [Ben05] n'utilisent pas de modèle particulier du pneu, la relation force de contact - angle de dérive est linéaire, mais le facteur de proportionnalité est variant dans le temps. Pour un angle de dérive du pneu $\alpha \in \mathbb{R}$, la force latérale est supposée varier entre $\zeta^{min}C\alpha$ et $\zeta^{max}C\alpha$. [Tal08] définit $\zeta^{max} = 1$ et C qui est une constante représentant le coefficient de proportionnalité maximal :

$$C = \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{F_y}{\alpha}. \quad (8.1)$$

Il existe une correspondance précise entre cette représentation et les modèles issus des relevés expérimentaux. Le maximum de l'équation (8.1) s'obtient à pleine adhérence, comme la tangente à l'origine du diagramme donnant la force latérale en fonction de l'angle de dérive.

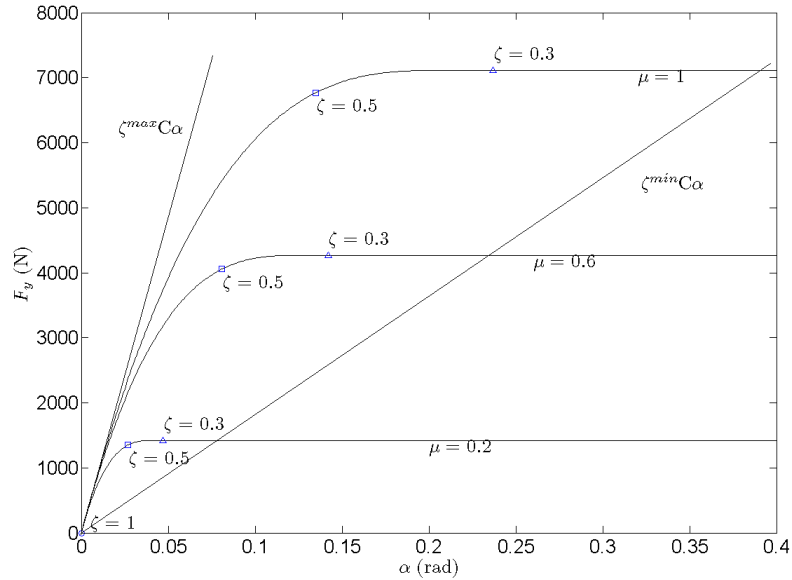


FIG. 8.1 – Courbes des forces latérales généralement obtenues pour des relevés expérimentaux pour plusieurs valeurs du paramètre d'adhérence μ et les limites du secteur défini par $\zeta^{min}C\alpha$ et $\zeta^{max}C\alpha$.

Comme indiqué sur la Figure 8.1, la paramétrisation définit un secteur compris entre les deux droites $\zeta^{min}C\alpha$ et $\zeta^{max}C\alpha$. Selon l'ouverture du secteur, celui-ci peut englober, pour différentes valeurs de l'adhérence, le domaine linéaire de la force latérale, la région de passage du domaine linéaire au domaine de saturation et le domaine de saturation lui-même.

La force latérale dans le secteur ($\zeta^{min}C\alpha$; $\zeta^{max}C\alpha$) est donc décrite par :

$$F_y = \zeta C\alpha, \quad (8.2)$$

où $\zeta \in [\zeta^{min}, \zeta^{max} = 1]$ est un paramètre qui varie entre 1, quand le pneu a un comportement parfaitement linéaire pour $\mu = 1$, et ζ^{min} quand le pneu est saturé. Notons que ζ^{min} est un paramètre toujours supérieur à zéro (voir Figure 8.2).

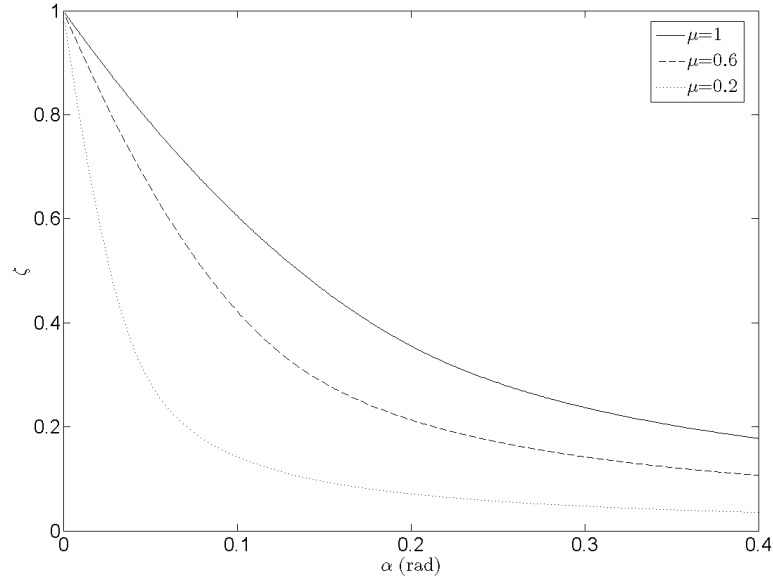


FIG. 8.2 – Variation du paramètre ζ avec l'angle de dérive α pour plusieurs valeurs du paramètre d'adhérence μ .

La paramétrisation fonctionne comme suit : l'évolution de la force latérale en fonction de l'angle de dérive du pneu pour une adhérence constante ($\mu = const.$) correspond à un ζ constant dans le domaine linéaire puis à un ζ variable dès que la saturation apparaît comme la conséquence d'une forte sollicitation latérale. Pour des variations des conditions d'adhérence à sollicitation latérale constante, le paramètre ζ reste quasi-constant si la force latérale est dans le domaine linéaire. De même, le paramètre ζ varie si une sollicitation latérale provoque l'entrée dans le domaine de saturation. En conclusion, la saturation des forces latérales correspond à une variation du paramètre ζ , indépendamment de la cause de cette saturation. Le paramètre ζ englobe, en effet, des non-linéarités provenant soit d'une surface de contact de faible adhérence, soit de limites physiques du pneu pour des fortes sollicitations latérales en conditions de bonne adhérence.

Cette paramétrisation offre le double avantage de la simplicité et de la linéarité. Pour illustrer ces aspects, reprenons le modèle du véhicule lié à la voie de l'équation (4.88), exposé dans la Section 4.3.3 du Chapitre 4, Partie II :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_u\delta_f + \tilde{B}_\rho\rho_{ref} + \tilde{B}_{\dot{\rho}}\dot{\rho}_{ref}. \quad (8.3)$$

Le vecteur d'état vaut : $\tilde{x} = (\dot{y}_L^{CG}, \dot{\psi}_L, y_L^{CG}, \psi_L)^T$. Les forces latérales qui agissent sur les pneus avant et arrière sont écrites en fonction de deux paramètres $\zeta_F \in [\zeta_F^{min}, \zeta_F^{max} = 1]$ et $\zeta_R \in [\zeta_R^{min}, \zeta_R^{max} = 1]$:

$$(F_f)_y = \zeta_F C_F \alpha_f, \quad (F_r)_y = \zeta_R C_R \alpha_r, \quad (8.4)$$

où C_F et C_R sont deux constantes définies par la relation de l'équation (8.1).

Les matrices apparaissant dans l'équation (8.3) prennent alors la forme suivante :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\zeta_F C_F + \zeta_R C_R}{mv} & \frac{\zeta_R C_R l_r - \zeta_F C_F l_f}{mv} & 0 & \frac{\zeta_F C_F + \zeta_R C_R}{m} \\ -\frac{\zeta_F C_F l_f + \zeta_R C_R l_r}{v I_z} & -\frac{\zeta_F C_F l_f^2 + \zeta_R C_R l_r^2}{v I_z} & 0 & \frac{\zeta_F C_F l_f - \zeta_R C_R l_r}{I_z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_u = \begin{pmatrix} \frac{\zeta_F C_F}{m} \\ \frac{\zeta_F C_F l_f}{I_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

$$\tilde{B}_\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}(-\zeta_F C_F l_f + \zeta_R C_R l_r - mv^2) \\ -\frac{\zeta_F C_F l_f^2 - \zeta_R C_R l_r^2}{I_z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{\dot{\rho}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

À la vue des expressions précédentes, l'intérêt pour cette paramétrisation est évident : le modèle « bicyclette » du véhicule prend la forme d'un système linéaire à paramètres variants. Les auteurs de [Tal08] et [Ben05] ont donc exprimé une non-linéarité par l'intermédiaire d'un système linéaire avec deux paramètres variants à l'intérieur de deux intervalles. Chacune des matrices \tilde{A} , \tilde{B}_u , \tilde{B}_ρ et $\tilde{B}_{\dot{\rho}}$ s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de paramètres ζ_F et ζ_R et de matrices constantes²⁸ :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A_0 + \zeta_R A_1 + \zeta_F A_2, \\ \tilde{B}_u &= \zeta_F B_2, \\ \tilde{B}_\rho &= B_{\rho 0} + \zeta_R B_{\rho 1} + \zeta_F B_{\rho 2}, \\ \tilde{B}_{\dot{\rho}} &= B_{\dot{\rho} 0}, \end{aligned} \quad \text{où} \quad (8.6)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -C_R/mv & l_r C_R/mv & 0 & C_R/m \\ l_r C_R/v I_z & -l_r^2 C_R/v I_z & 0 & -l_r C_R/I_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -C_F/mv & -l_f C_F/mv & 0 & C_F/m \\ -l_f C_F/v I_z & -l_f^2 C_F/v I_z & 0 & l_f C_F/I_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} C_F/m \\ l_f C_F/I_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

$$B_{\rho 0} = \begin{pmatrix} -v^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\rho 1} = \begin{pmatrix} l_r C_R/m \\ -l_r^2 C_R/I_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\rho 2} = \begin{pmatrix} -l_f C_F/m \\ -l_f^2 C_F/I_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

²⁸Pour garder la simplicité des notations nous avons renoncé à transférer le « \sim » dans les notations des matrices A_0 , A_1 , A_2 , B_2 , $B_{\rho 0}$, $B_{\rho 1}$, $B_{\rho 2}$ et $B_{\dot{\rho} 0}$.

$$B_{\dot{\rho}0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

8.2 Synthèse des 6ème et 7ème lois de commande

Les lois d'assistance synthétisées dans cette section doivent respecter le cahier des charges spécifié dans le Chapitre 5, Section 5.2.4 et ce même au delà du domaine linéaire des forces latérales, à savoir :

- Assurer un ensemble invariant contenant la région de « conduite normale » et qui soit inclus dans la région de sécurité.
- Minimiser l'excursion des trajectoires en dehors de la région de « conduite normale ».
- Utiliser une entrée de commande dont la limite est fixée lors de la synthèse.

Ces lois ont été synthétisées en angle de braquage, sur le modèle du véhicule lié à la voie présenté dans les équations (8.3) et (8.5), en admettant que la route est rectiligne, soit $\rho_{ref} = \dot{\rho}_{ref} = 0$:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_u\delta_f. \quad (8.11)$$

Synthétisée d'abord sous la forme d'un retour d'état $\delta_f = \delta_f^a = K\tilde{x}$, $K \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$, la loi d'assistance est par la suite généralisée pour le cas d'un retour de sortie, la sortie étant définie par $\tilde{z} = \tilde{C}\tilde{x}$, et $\delta_f^a = K\tilde{z} = K\tilde{C}\tilde{x} = \tilde{K}\tilde{x}$ est également établie.

Notons que le véhicule expérimental de l'Université de Stanford, sur lequel ces lois ont été mises en œuvre dispose d'une direction filo-commandée (« steer by wire »). L'angle de braquage du conducteur ne sera donc pas pris en compte lors de la synthèse. Le système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B}_uK)\tilde{x}, \quad (8.12)$$

dans le cas d'une loi de commande par retour d'état et

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B}_u\tilde{K})\tilde{x} \quad (8.13)$$

dans le cas d'une loi de commande par retour de sortie.

La procédure de synthèse est similaire à celle présentée dans le Chapitre 6, pour le cas des forces latérales dans le domaine de linéarité. Elle aboutit, pour le retour d'état, à un problème d'optimisation LMI et pour le retour de sortie à un problème d'optimisation BMI. Rappelons que la procédure consiste à rechercher simultanément le vecteur de retour d'état ou de sortie et une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$, $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $P = P^T$ définie positive, tels que la région de « conduite normale » formée par l'hypercube $\mathcal{L}(Z^N)$, $Z^N \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, soit contenue dans une courbe de niveau convenable. La stabilité asymptotique est requise même en cas de saturation des pneumatiques, c'est à dire pour toutes les valeurs des paramètres $(\zeta_F, \zeta_R) \in [\zeta_F^{min}, \zeta_F^{max} = 1] \times [\zeta_R^{min}, \zeta_R^{max} = 1]$.

L'algorithme de synthèse du retour d'état est comme suit :

Algorithme 8.2.1 (Synthèse de la 6ème loi de commande)

Il procède en deux étapes principales.

1. **Calcul du vecteur de retour d'état K et de la fonction quadratique de Lyapunov $V(x) = x^T P x$**

- Le vecteur de retour d'état K et la matrice P de la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ sont déterminés sous la condition de la stabilité asymptotique du système de l'équation (8.12). Cette condition conduit à une inégalité matricielle linéaire :

$$(A_0 Q + Q A_0^T) + \zeta_R (A_1 Q + Q A_1^T) + \zeta_F (A_2 Q + Q A_2^T + B_2 Y + Y^T B_2^T) \prec 0, \quad (8.14)$$

où $Q = P^{-1}$ et $Y = K P^{-1}$. L'inégalité matricielle (8.14) est satisfaite pour $(\zeta_F, \zeta_R) \in [\zeta_F^{\min}, \zeta_F^{\max} = 1] \times [\zeta_R^{\min}, \zeta_R^{\max} = 1]$, si elle est satisfaite pour les limites du domaine de définition des paramètres, soit $(\zeta_F, \zeta_R) \in \{\zeta_F^{\min}, \zeta_F^{\max} = 1\} \times \{\zeta_R^{\min}, \zeta_R^{\max} = 1\}$ (selon le Lemme 3.4.2 du Chapitre 3, Partie II).

La prise en compte des variations de la vitesse longitudinale sur $v \in [v^{\min}, v^{\max}]$ nécessite une reparamétrisation et une reformulation de l'équation (8.14). À cet effet, les matrices \hat{A}_1 , \bar{A}_1 , \hat{A}_2 et \bar{A}_2 doivent être utilisées, où :

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{A}_1/v + \bar{A}_1, \\ A_2 &= \hat{A}_2/v + \bar{A}_2, \end{aligned} \quad (8.15)$$

et

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} -C_R/m & l_r C_R/m & 0 & 0 \\ l_r C_R/I_z & -l_r^2 C_R/I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_R/m \\ 0 & 0 & 0 & -l_r C_R/I_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.16)$$

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} -C_F/m & -l_f C_F/m & 0 & 0 \\ -l_f C_F/I_z & -l_f^2 C_F/I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_F/m \\ 0 & 0 & 0 & l_f C_F/I_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Les expressions ci-dessus permettent d'écrire la matrice \tilde{A} sous la forme :

$$\tilde{A} = A_0 + \zeta_R \bar{A}_1 + (\zeta_R/v) \hat{A}_1 + \zeta_F \bar{A}_2 + (\zeta_F/v) \hat{A}_2. \quad (8.18)$$

Une nouvelle paramétrisation est alors possible :

$$p_1 = \zeta_R/v, \quad p_2 = \zeta_F/v. \quad (8.19)$$

Cette paramétrisation présente l'avantage de rendre le système linéaire en les nouveaux paramètres, cependant elle entraîne une augmentation du nombre de paramètres, ce qui augmentera la complexité du problème d'optimisation. La matrice \tilde{A} prend finalement la forme :

$$\tilde{A} = A_0 + \zeta_R \bar{A}_1 + p_1 \hat{A}_1 + \zeta_F \bar{A}_2 + p_2 \hat{A}_2. \quad (8.20)$$

L'inégalité matricielle de l'équation (8.14) devient alors :

$$\begin{aligned} (A_0 Q + Q A_0^T) + \zeta_R (\bar{A}_1 Q + Q \bar{A}_1^T) + p_1 (\hat{A}_1 Q + Q \hat{A}_1^T) + \\ + \zeta_F (\bar{A}_2 Q + Q \bar{A}_2^T + B_2 Y + Y^T B_2^T) + p_2 (\hat{A}_2 Q + Q \hat{A}_2^T) \prec 0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

L'inégalité matricielle (8.21) est satisfaite pour tout $(\zeta_R, \zeta_F, p_1, p_2) \in [\zeta_R^{\min}, 1] \times [\zeta_F^{\min}, 1] \times [p_1^{\min}, p_1^{\max}] \times [p_2^{\min}, p_2^{\max}]$ si elle est satisfaite pour les sommets du domaine de définition

des paramètres : $\forall (\zeta_R, \zeta_F, p_1, p_2) \in \{\zeta_R^{\min}, 1\} \times \{\zeta_F^{\min}, 1\} \times \{p_1^{\min}, p_1^{\max}\} \times \{p_2^{\min}, p_2^{\max}\}$, où les valeurs minimales et maximales des paramètres p_1 et p_2 sont données par :

$$\begin{aligned} p_1^{\min} &= \frac{\zeta_R^{\min}}{v^{\max}}, & p_1^{\max} &= \frac{\zeta_R^{\max}}{v^{\min}}, \\ p_2^{\min} &= \frac{\zeta_F^{\min}}{v^{\max}}, & p_2^{\max} &= \frac{\zeta_F^{\max}}{v^{\min}}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

De plus, l'appartenance des paramètres $(\zeta_R, \zeta_F, p_1, p_2) \in [\zeta_R^{\min}, 1] \times [\zeta_F^{\min}, 1] \times [p_1^{\min}, p_1^{\max}] \times [p_2^{\min}, p_2^{\max}]$ implique $(\zeta_R, \zeta_F, v) \in [\zeta_R^{\min}, 1] \times [\zeta_F^{\min}, 1] \times [v^{\min}, v^{\max}]$. En conséquence, si l'inégalité (8.21) est satisfaite pour $(\zeta_R, \zeta_F, p_1, p_2) \in [\zeta_R^{\min}, 1] \times [\zeta_F^{\min}, 1] \times [p_1^{\min}, p_1^{\max}] \times [p_2^{\min}, p_2^{\max}]$, elle est aussi satisfaite pour $(\zeta_R, \zeta_F, v) \in [\zeta_R^{\min}, 1] \times [\zeta_F^{\min}, 1] \times [v^{\min}, v^{\max}]$. La preuve est fournie dans l'annexe (D).

- La région de « conduite normale » devant être incluse dans l'ensemble invariant $\varepsilon(P) = S_V(1)$, ses sommets z_i , $i = 1, \dots, 16$, doivent eux aussi appartenir à $\varepsilon(P) = S_V(1)$. Cette condition se traduit par la troisième contrainte du problème d'optimisation LMI (8.23).
- L'angle de braquage commandé doit demeurer inférieur à δ_f^{\max} pour tous les états de l'ensemble $\varepsilon(P)$. Celui-ci doit donc appartenir au polyèdre $\mathcal{L}(\frac{1}{\delta_f^{\max}}K)$ (quatrième contrainte du problème d'optimisation LMI (8.23)).
- Les propriétés ci-dessus doivent être assurées pour des trajectoires du véhicule qui se maintiennent sur la voie de circulation, ou proche de celle-ci. On exige pour cela que l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ soit confiné dans un polyèdre $\mathcal{L}(h) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^4 : |h\tilde{x}| \leq 1\}$, où $h = (0, 0, \frac{2}{2D^{\max}-a}, \frac{2l_f}{2D^{\max}-a})$. D^{\max} peut être fixé soit à une demi-largeur de voie ($L/2$), soit à la demi-largeur d'une zone centrée sur la voie, dans laquelle les roues avant du véhicule doivent rester pendant toute la durée de l'intervention de l'assistance. Cette inclusion prend la forme d'une inégalité matricielle représentée par la cinquième contrainte du problème d'optimisation LMI (8.23).

Une fois rassemblées, les contraintes précédentes conduisent donc au problème d'optimisation LMI dont les variables de décision sont $Q = P^{-1}$ et $Y = KQ$:

maximiser $tr(Q)$ ou $det(Q)$ ou $\lambda_{\max}(Q)$

contraint par $Q \succ 0$,

$$\begin{aligned} &(A_0Q + QA_0^T) + \zeta_R(\bar{A}_1Q + Q\bar{A}_1^T) + p_1(\hat{A}_1Q + Q\hat{A}_1^T) + \\ &+ \zeta_F(\bar{A}_2Q + Q\bar{A}_2^T + B_2Y + Y^TB_2^T) + p_2(\hat{A}_2Q + Q\hat{A}_2^T) \prec 0, \\ &\forall (\zeta_R, \zeta_F, p_1, p_2) \in \{\zeta_R^{\min}, 1\} \times \{\zeta_F^{\min}, 1\} \times \{p_1^{\min}, p_1^{\max}\} \times \{p_2^{\min}, p_2^{\max}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i^T \\ z_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, 8,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\delta_f^{\max}}Y \\ (\frac{1}{\delta_f^{\max}}Y)^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$hQh^T - 1 \preceq 0.$$

(8.23)

La fonction de coût choisie dans le problème d'optimisation (8.23) permet de maximiser la taille de l'ellipsoïde invariant $\varepsilon(P)$. Bien que ce choix entraîne de larges excursions du

véhicule, avant de revenir dans la région de « conduite normale », il permet d'éviter une réaction trop forte du système au moment de l'activation, réaction qui peut être particulièrement néfaste si les forces de contact sont dans la zone de saturation. De plus, les excursions des trajectoires en dehors de la région de « conduite normale » sont contraintes à rester dans une zone centrée de largeur $2D^{\max}$. Cette loi satisfait quoi qu'il en soit la plupart des contraintes du cahier des charges, exception faite de l'objectif d'excursion minimale de la région de « conduite normale ». La priorité fixée à l'algorithme est d'assurer la faisabilité du problème d'optimisation (8.23) pour une plage de variations des paramètres $(\zeta_F, \zeta_R) \in [\zeta_F^{\min}, 1] \times [\zeta_R^{\min}, 1]$ la plus large possible, donc pour des forces de contact de plus en plus saturées, en défaveur d'une dynamique proche à la région de « conduite normale ».

2. Test d'inclusion de $\varepsilon(P)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$

Une fois l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$ obtenu, son inclusion dans la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ doit être vérifiée. La région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ est définie par des limites sur les variables d'état dont le dépassement est supposé désagréable pour les passagers (par exemple angle de cap ou vitesse latérale très élevés). Par rapport à $\mathcal{L}(h)$, qui est une limite composée des variables d'état, $\mathcal{L}(Z^M)$ tient compte de chaque composante du vecteur d'état. Précisons que les limites de la région $\mathcal{L}(Z^M)$ peuvent être assez larges pour tenir compte d'une intervention à la saturation des pneus.

Pour réaliser le test d'inclusion il suffit de comparer les limites de l'hypercube $\mathcal{L}(Z^M)$ avec les projections de $\varepsilon(P)$ sur les quatre axes (voir équation (3.36) du Chapitre 3, Partie II).

Si le problème d'optimisation s'avère infaisable, ou si la condition d'inclusion dans la zone de sécurité n'est pas vérifiée, l'algorithme doit être repris pour d'autres valeurs de D^{\max} ou de δ_f^{\max} . Une modification des bornes délimitant la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$ est également possible.

La synthèse d'une loi de commande par retour de sortie pour le système de l'équation (8.13) nécessite d'apporter quelques changements mineurs à l'Algorithme de synthèse d'un retour d'état 8.2.1. Le vecteur de retour de sortie K intervient uniquement dans les deuxième et quatrième contraintes du problème d'optimisation (8.23) (contraintes de stabilité et de limitation de l'angle de braquage). Le remplacement dans ces contraintes du vecteur de retour d'état K par le produit KC conduit à un problème d'optimisation sous contraintes matricielles bilinéaires, donc d'un problème d'optimisation BMI. Un algorithme de résolution est proposé dans ce qui suit.

Algorithme 8.2.2 (Synthèse de la 7ème loi de commande)

La synthèse de la 7ème loi de commande est réalisée en deux étapes.

1. **Calcul du vecteur de retour de sortie K et de la fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$** Le problème d'optimisation BMI (8.24) a pour variables de décision $Q = P^{-1}$ et K :

maximiser

$$tr(Q) \text{ ou } det(Q) \text{ ou } \lambda_{max}(Q)$$

contraint par

$$Q \succ 0,$$

$$(A_0Q + QA_0^T) + \zeta_R(\bar{A}_1Q + Q\bar{A}_1^T) + p_1(\hat{A}_1Q + Q\hat{A}_1^T) + \\ + \zeta_F(\bar{A}_2Q + Q\bar{A}_2^T + B_2K\tilde{C}Q + Q^T\tilde{C}^TK^TB_2^T) + p_2(\hat{A}_2Q + Q\hat{A}_2^T) \prec 0, \\ \forall (\zeta_R, \zeta_F, p_1, p_2) \in \{\zeta_R^{min}, 1\} \times \{\zeta_F^{min}, 1\} \times \{p_1^{min}, p_1^{max}\} \times \{p_2^{min}, p_2^{max}\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i^T \\ z_i & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, 8,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\delta_f^{max}}K\tilde{C}Q \\ (\frac{1}{\delta_f^{max}}K\tilde{C}Q)^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$hQh^T - 1 \preceq 0.$$

(8.24)

Il est résolu grâce au logiciel PENBMI.

2. **Test d'inclusion de $\varepsilon(P)$ dans $\mathcal{L}(Z^M)$** Le même type de test que pour l'Algorithme 8.2.1 doit être effectué. Les conditions de reprise de l'algorithme en cas d'échec sont aussi identiques.

8.3 Implantation pratique et résultats

Comme souligné précédemment, les lois de commande synthétisées ont été implantées sur un véhicule prototype équipé en « steer by wire ». Les performances de suivi de voie ont été uniquement testées pour une réduction de l'adhérence.

8.3.1 Équipement du véhicule prototype « steer by wire »

Le véhicule prototype a été construit par l'Université de Stanford au Dynamic Design Laboratory [Law05] (voir Figure 8.3). Les paramètres de ce véhicule sont connus avec précision, seuls les éléments utiles pour le cadre de cette étude sont fournis dans le Tableau 8.1.

Le véhicule est équipé d'un système GPS NovAtel multi-antennes qui permet de mesurer non seulement la position et la vitesse, mais aussi l'angle de cap relatif et l'angle de dérive du vecteur vitesse [Bev02], [Ryu02]. Pour obtenir une mesure de position précise, deux récepteurs GPS sont utilisés dans la configuration de GPS différentiel (Differential GPS, DGPS) : L'un de ces récepteurs, couplé à une antenne de communication, sert de station de référence, l'autre étant embarqué dans le véhicule communique avec le premier récepteur par liaison radio.

La mesure précise du cap utilise la technique de phase relative grâce à un récepteur NovAtel BeeLine équipé de deux antennes placées de chaque côté du véhicule.

La période de rafraîchissement des données GPS étant plus lente par rapport à la dynamique du véhicule, le système de positionnement est renforcé par des gyromètres et des accéléromètres (Inertial Navigation System, INS). Les mesures provenant de l'INS sont fusionnées avec celles du GPS à l'aide d'un filtre de Kalman qui fournit alors l'état du véhicule [Bev01], [Ryu04]. La mesure de la dérive a été validée par une comparaison à un système de mesure de défilement

TAB. 8.1 – Paramètres du véhicule « steer by wire ».

Paramètre	Valeur
m	1724 kg
I_z	1300 N/m ²
C_F	53460 N/rad
C_R	81972 N/rad
l_f	1.35 m
l_r	1.15 m
a	1.5 m

du sol par corrélation optique (CORREVIT). Les résultats obtenus montrent une très bonne précision du système GPS/INS utilisé [Tal05].

Les mesures de position et d'angle de cap sont comparées à une cartographie précise pour calculer l'écart latéral au centre de gravité y_L^{CG} et l'angle de cap relatif ψ_L par rapport à une trajectoire prédéfinie. Les deux autres mesures nécessaires au contrôle, \dot{y}_L^{CG} et $\dot{\psi}_L$, sont calculées à partir des relations de l'équation (4.84), Section 4.3.3 du Chapitre 4, Partie II. La trajectoire de référence ρ_{ref} est quant à elle fournie directement par la cartographie.



FIG. 8.3 – Véhicule expérimental « steer by wire » du laboratoire Dynamic Design Laboratory, Université de Stanford.

Par ailleurs, le véhicule est équipé d'un système de contrôle automatique de la vitesse longitudinale, qui permet d'accélérer jusqu'à une vitesse de consigne et de s'y maintenir. La vitesse pour les essais présentés dans ce chapitre est fixée à 10m/s. Cette vitesse est amplement suffisante pour atteindre la saturation des pneumatiques, car la piste d'essai est recouverte de gravier.

Bien que le véhicule « steer by wire » dispose d'un système de contrôle indépendant des deux roues avant directrices, celui-ci n'a pas été utilisé. La bande passante élevée du mécanisme permet néanmoins une plus grande facilité d'implantation de la loi d'assistance comparativement à un véhicule muni d'une colonne de direction conventionnelle.

Des tests préliminaires ont permis de mettre en évidence le bruit sur la mesure de la vitesse de rotation en lacet r . Ce bruit étant gênant pour le calcul de la dérivée de l'angle de cap relatif $\dot{\psi}_L$, utilisée par la commande, celui-ci a pu être filtré par un filtre passe-bas réglé à 80 Hz.

TAB. 8.2 – Bornes supérieures et inférieures des paramètres utilisés pour le calcul des lois d’assistance par retour d’état et par retour de sortie.

Paramètre	Valeur (retour d’état)	Valeur (retour de sortie)
ζ_F^{min}	0.25	0.2
ζ_R^{min}	0.25	0.2
v^{min}	8 m/s	10m/s
v^{max}	12 m/s	10m/s
δ_f^{max}	0.4 rad	0.4rad
D^{max}	3.5 m	3.5 m

Une fois calculé, l’angle de commande δ_f^a est habituellement additionné à la consigne du conducteur δ_f^c et la somme est transformée en un courant de consigne envoyé aux deux moteurs électriques, moteurs qui réalisent le braquage des roues avants. L’objectif principal des essais étant d’évaluer les performances de l’assistance en suivi automatique de voie en situations de saturation des forces latérales, la consigne conducteur n’est pas transmise aux roues : $\delta_f^c = 0$. Dans ce cas, le véhicule est donc en mode automatisé, lorsque l’assistance est activée.

8.3.2 Implantation des deux lois d’assistance

Calcul des lois de commande et des fonctions de Lyapunov

Le calcul de la 6ème loi d’assistance par retour d’état par l’Algorithme 8.2.1 a été conduit avec les paramètres des Tableaux 8.1, 8.2 et 8.3. La limite supérieure d’angle de braquage des roues directrices est fixée à $0.4rad$, soit 22° , en accord avec les caractéristiques du véhicule expérimental. Pour ce qui est du déplacement latéral des roues avant, la saturation des forces latérales nous a orienté à privilégier la diminution de l’accélération latérale, donc à augmenter le rayon de courbure de la trajectoire du véhicule, permettant ainsi des larges excursions par rapport à l’axe de la voie. En conséquence, le déplacement maximal requis, D^{max} , a été fixé à $3.5m$ tout en préservant la stabilité dynamique du véhicule.

La faisabilité du problème d’optimisation LMI de l’équation (8.23) est satisfaite pour des valeurs très faibles des paramètres ζ_F^{min} et ζ_R^{min} . Ceci garantit la stabilité asymptotique pour un large secteur des forces latérales qui inclut la région de saturation y compris pour de faibles valeurs de l’adhérence. Il a été aussi vérifié que des variations de la vitesse longitudinale à l’intérieur de l’intervalle allant de $8m/s$ à $12m/s$ n’affecte pas les performances de la commande par retour d’état.

Le vecteur de retour d’état obtenu est :

$$K = (-0.0336, -0.1093, -0.0254, -1.2091). \quad (8.25)$$

Les valeurs maximales des variables d’état assurées pour des activations de l’assistance à l’intérieur de la courbe de niveau 1 de la fonction de Lyapunov calculée, $\varepsilon(P)$, ne sont pas élevées, exception fait de la dérivée de l’angle de cap relatif (voir Tableau 8.4). Cependant, cette valeur $\dot{\psi}_L^M = 2.7rad/s$ demeure acceptable pour la région de sécurité, car pour des situations extrêmes, une réaction très rapide des roues avant peut préserver la stabilité dynamique du véhicule.

La 7ème loi d’assistance, par retour de sortie, utilise uniquement les deux variables d’état accessibles à la mesure sur la plupart des véhicules instrumentés pour le contrôle latéral : l’écart

TAB. 8.3 – Limites de la région de « conduite normale » $\mathcal{L}(Z^N)$.

$(\dot{y}_L^{CG})^N$	$\dot{\psi}_L^N$	$(y_L^{CG})^N$	ψ_L^N
2 m/s ²	0.3 rad/s	1 m	0.052 rad
2 m/s ²	17.19°/s	1 m	2.98°

 TAB. 8.4 – Limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$.

$(\dot{y}_L^{CG})^M$	$\dot{\psi}_L^M$	$(y_L^{CG})^M$	ψ_L^M
3.03m/s ²	2.70rad/s	2.77m	0.36rad
3.03m/s ²	154.77°/s	2.77m	20.63°

latéral au centre de gravité et l'angle de cap relatif. La matrice \tilde{C} est alors donnée par :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

L'Algorithme 8.2.2 est appliqué avec les paramètres des Tableaux 8.1 et 8.2. Le problème d'optimisation BMI de l'équation (8.24) a été résolu en utilisant le logiciel PENBMI fourni par la société PENOPT GbR [Koc03]. La faisabilité du problème n'a pu être obtenue qu'au prix d'un allègement du problème. La vitesse est considérée constante et le déplacement des roues avant du véhicule sur la voie ainsi que la région de « conduite normale » ne sont pas pris en compte. En conséquence, le problème d'optimisation BMI retenu contient uniquement les contraintes de stabilité asymptotique et de limitation de l'angle de braquage :

$$\text{maximise} \quad \text{trace}(Q)$$

$$\text{constraint par } Q \succ 0,$$

$$\begin{aligned} & (A_0Q + QA_0^T) + \zeta_R(A_1Q + QA_1^T) + \\ & + \zeta_F(A_2Q + QA_2^T + B_2KCKQ + QC^TK^TB_2^T) \prec 0, \\ & \forall (\zeta_F, \zeta_R) \in \{\zeta_F^{\min}, 1\} \times \{\zeta_R^{\min}, 1\}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\delta_f^{\max}}K\tilde{C}Q \\ \frac{1}{\delta_f^{\max}}Q\tilde{C}^TK^T & Q \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Le vecteur de retour de sortie qui en a résulté est :

$$K = (-0.0533, -1.0746). \quad (8.28)$$

Même si aucune région de « conduite normale » n'a été prise en compte de manière explicite, l'appartenance de l'état du véhicule à une région de sécurité peut être garantie grâce à l'ensemble invariant $\varepsilon(P)$. Les projections de l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ sur les quatre axes, qui jouent aussi le rôle de limites de la région de sécurité, se trouvent dans le Tableau 8.5. Mise à part l'angle de cap relatif, ces limites sont près de deux fois plus faibles que celles assurées par la loi de commande par retour d'état. Ceci ne conduit pas encore à conclure que la loi de commande par retour de sortie aura de meilleures performances.

TAB. 8.5 – Limites de la région de sécurité $\mathcal{L}(Z^M)$ dans le cas du retour de sortie.

$(\dot{y}_L^{CG})^M$	$\dot{\psi}_L^M$	y_L^M	ψ_L^M
1.62m/s ²	1.67rad/s	1.43m	0.38rad
1.62m/s ²	95.73°/s	1.43m	21.78°

Résultats des tests

Pour vérifier les performances des deux lois d'assistance, le véhicule « steer by wire » effectue à la vitesse de consigne de 10m/s et en mode suivi automatique de voie deux tours d'une trajectoire de référence formant une boucle. Comme signalé précédemment, l'adhérence a été dégradée par l'utilisation de gravier.

La trajectoire de référence et les trajectoires réalisées par le véhicule sont présentées sur la Figure 8.4. Les différences entre les trajectoires réalisées au premier et au second tour sont principalement visibles dans le virage le plus serré. Elles sont dues au fait que le véhicule n'avait pas encore atteint la vitesse de consigne 10m/s pendant le premier tour. Sur les sections de très faible courbure le véhicule tend vers la trajectoire de référence, comme souhaité. Cependant, dans les virages plus prononcés, la trajectoire du véhicule s'écarte de la référence. Ce comportement est naturel, car les lois de commande ont été synthétisées en supposant des routes à courbure nulle. La courbure de la trajectoire de référence agit comme une perturbation, dont l'influence sera discutée dans la Section 8.4 de ce chapitre. On peut aussi noter que la loi d'assistance par retour de sortie présente de meilleures performances pour le suivi de la trajectoire de référence que la loi de commande par retour d'état. Pour le retour d'état, le véhicule s'éloigne davantage de la référence dans les virages, et met par conséquent plus de temps pour la rejoindre dans les sections rectilignes.

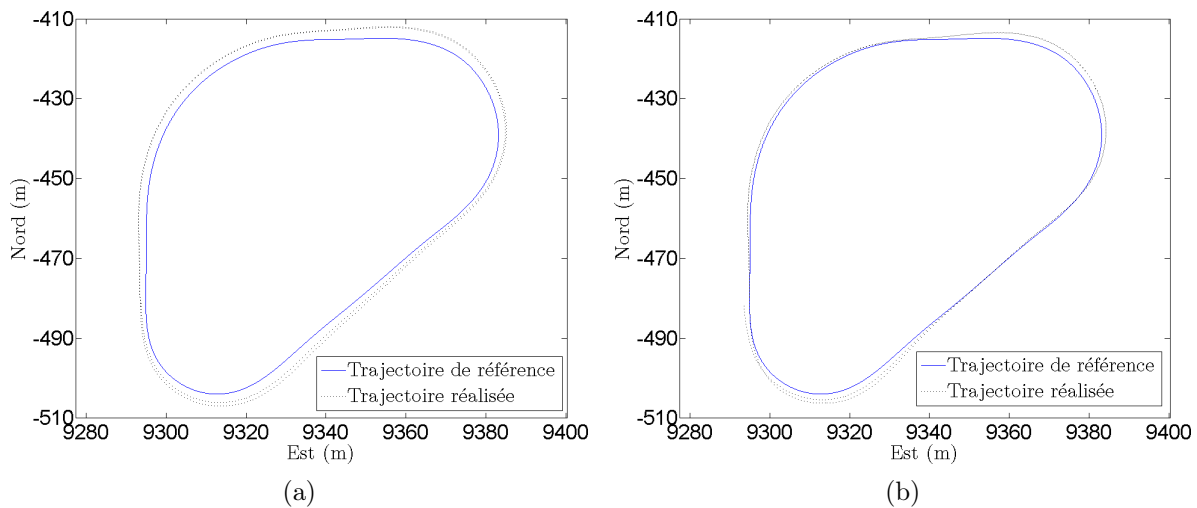


FIG. 8.4 – Trajectoire de référence et trajectoire réalisée par le véhicule contrôlé latéralement par (a) retour d'état, (b) retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).

La Figure 8.5 présente la vitesse longitudinale v , l'accélération latérale \dot{u} et la consigne en angle de braquage δ_f^a pour une partie des essais. La ligne discontinue sur la figure de la consigne

en angle de braquage représente la limite imposée à celui-ci : 23° , soit $0.4rad$. Nous remarquons que cette limite n'est jamais atteinte pour les deux lois de commande, malgré les faibles rayons de courbure de la trajectoire de référence. Ce fait indique que les solutions obtenues pour les lois d'assistance après la résolution des problèmes d'optimisation LMI et BMI sont conservatrices. En d'autres termes, la limite imposée pour l'angle de braquage lors de la synthèse a contraint les trajectoires du système en boucle fermée dans des régions de l'espace d'état caractérisées par des angles de braquage bien inférieurs à cette limite. Soulignons que pour les sections à courbure non nulle aucune garantie de non-saturation de l'angle de braquage n'est assurée théoriquement a priori.

L'accélération latérale atteint approximativement $4m/s^2$, $2m/s^2$ et $5m/s^2$ le long des différents virages de la trajectoire de référence (partie centrale de la Figure 8.5). Ces maxima correspondent exactement aux passages dans les sections à forte courbure, fait indiqué par la courbure de la trajectoire représentée sur la partie haute de la Figure 8.6. L'accélération latérale observée pour le retour de sortie (partie droite de la Figure 8.5) est légèrement plus élevée que dans le cas de retour d'état (partie gauche de la Figure 8.5).

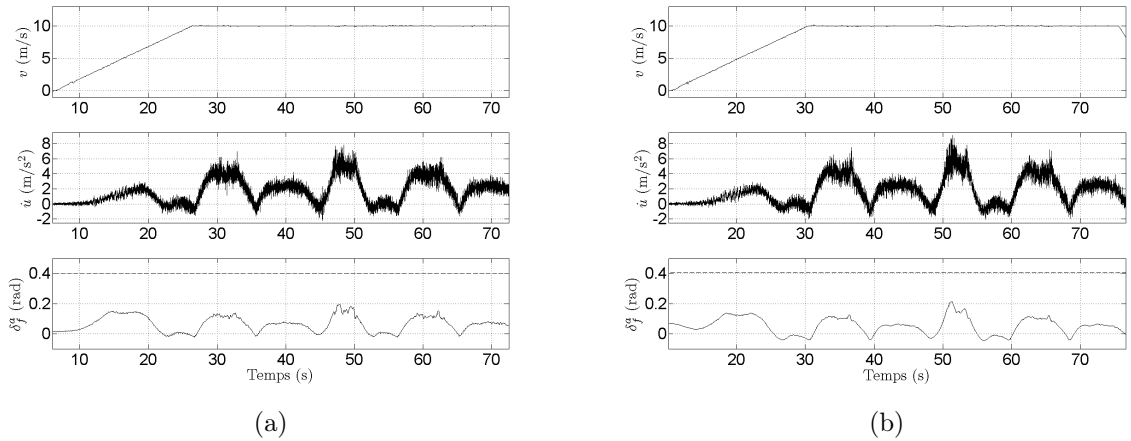


FIG. 8.5 – Vitesse longitudinale, accélération latérale et angle de braquage commandé par (a) retour d'état, (b) retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).

La Figure 8.6 présente l'évolution des quatre variables d'état pour la section de test considérée. La dérivée de l'angle de cap relatif est calculée à partir du signal filtré de la vitesse de rotation en lacet r . Le long des sections à faible courbure de la trajectoire de référence, les variables d'état tendent vers zéro, elles mettent en évidence la stabilité asymptotique des lois de commande. Comparée à la loi de commande par retour d'état, la loi de commande par retour de sortie confère un comportement sollicitant plus la dynamique du véhicule contrôlé. Le long du virage le plus serré (partie droite de la Figure 8.6 à $t = 51s$ pour le retour de sortie et la partie gauche de la Figure 8.6 à $t = 48s$ pour le retour d'état) le retour de sortie engendre une large erreur dans la vitesse latérale \dot{y}_L^{CG} et dans l'angle de cap relatif ψ_L . Cependant, cette loi d'assistance réduit l'erreur sur l'écart latéral à zéro pour les sections en ligne droite, ce que la commande par retour d'état ne réussit pas. D'une manière générale et même pour les sections à forte courbure, l'erreur sur l'écart latéral au centre de gravité est plus faible pour le retour de sortie que pour le retour d'état.

Rappelons que les lois de commande ont été conçues pour satisfaire les exigences du cahier des charges pour une large plage des paramètres ζ_F et ζ_R . Les courbes expérimentales des forces

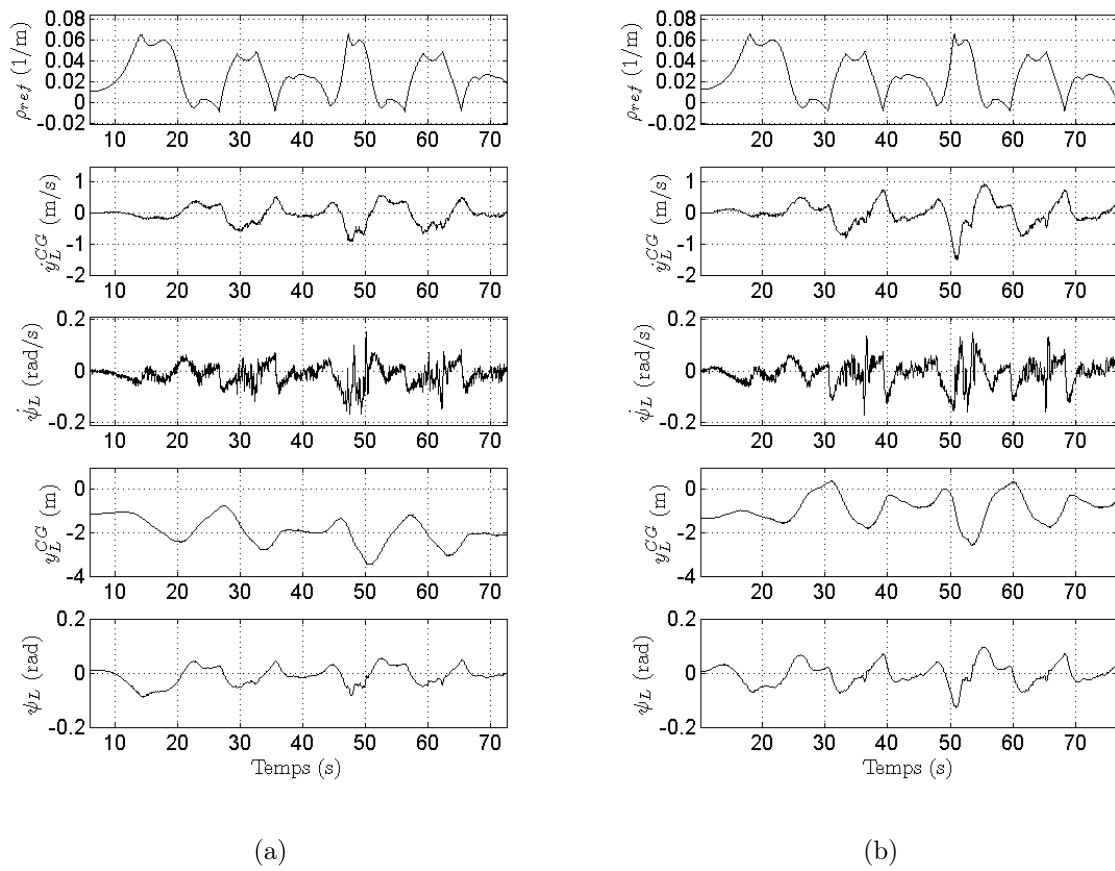


FIG. 8.6 – Courbure de la trajectoire de référence et variables d'état pour (a) le retour d'état, (b) le retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).

latérales avant et arrière en fonction de l'angle de dérive sont visibles sur les Figures 8.7 et 8.8. Les figures contiennent aussi les droites de pente ζC , où ζ est soit la valeur minimale, soit la valeur maximale des paramètres ζ_F et ζ_R , valeurs pour lesquelles les lois d'assistance ont été calculées.

Les valeurs des angles de dérive des pneus, α_f et α_r , ont été calculées à partir des données du système GPS/INS qui fournit une mesure de l'état du véhicule. Les valeurs des forces latérales, $(F_f)_y$ and $(F_r)_y$ ont été calculées à partir des équations en régime permanent en virage :

$$(F_f)_y = \frac{\dot{u}(F_f)_z}{g}, \quad (F_r)_y = \frac{\dot{u}(F_r)_z}{g}, \quad (8.29)$$

où \dot{u} est l'accélération latérale mesurée par le système GPS/INS, g est l'accélération gravitationnelle, $(F_f)_z$ et $(F_r)_z$ sont les forces normales sur les essieux avant et arrière en négligeant le transfert de charge entre essieux :

$$(F_f)_z = mg \frac{l_r}{l_f + l_r}, \quad (F_r)_z = mg \frac{l_f}{l_f + l_r}. \quad (8.30)$$

Les forces latérales ont été filtrées pour éliminer les hautes fréquences (plus de $15Hz$), les tendances des courbes sont par conséquent plus facilement observables. Précisons que les courbes des forces latérales n'ont qu'une valeur indicative de la tendance de linéarité ou de saturation. Elles résultent en effet de deux hypothèses difficiles à vérifier en pratique : le régime permanent en virage et l'absence de transfert de charge.

Dans les courbes expérimentales des forces latérales en fonction de l'angle de dérive, les saturations obtenues pour les deux lois de commande se trouvent dans les secteurs ($\zeta^{min} C\alpha$, $\zeta^{max} C\alpha$) dans tous les cas. Ceci montre que les essais ont été effectués dans le domaine de validité des deux lois de commande.

Pour les forces latérales agissant sur les pneus avant (Figure 8.7) les courbes expérimentales s'aplatissent et montrent que les lois de commande ont opéré au delà du domaine linéaire du pneu. La saturation est plus évidente dans le cas de retour de sortie, ce qui est en accord avec l'accélération latérale qui est plus élevée dans ce cas. Les forces latérales agissant sur les pneus arrières entrent elles aussi dans la zone de saturation, mais d'une façon moins prononcée (Figure 8.8).

Les Figures 8.9 et 8.10 présentent respectivement l'évolution des angles de dérive et des forces latérales en fonction du temps. Les angles de dérive les plus élevés correspondent bien aux passages par les sections à forte courbure.

Les essais conduits pour les deux lois d'assistance ont confirmé les excellentes performances des lois d'assistance dans les conditions de saturation des forces latérales. Les deux lois de commande assurent le suivi de la trajectoire de référence, malgré des perturbations importantes (la courbure de la trajectoire référence) qui n'ont pas été prises en compte dans la phase de synthèse. La loi d'assistance par retour de sortie assure un meilleur suivi de la trajectoire de référence que la loi d'assistance par retour d'état. Plusieurs explications peuvent être avancées : cette loi de commande a été conçue en imposant moins de contraintes, l'erreur à minimiser par régulation est constituée des deux variables de bouclage : l'erreur sur l'écart latéral au centre de gravité et l'erreur sur l'angle de cap relatif. Par conséquent, les dérivées de l'écart latéral et de l'angle de cap relatif sont réduites de manière secondaire, grâce à la stabilité asymptotique du système en boucle fermée.

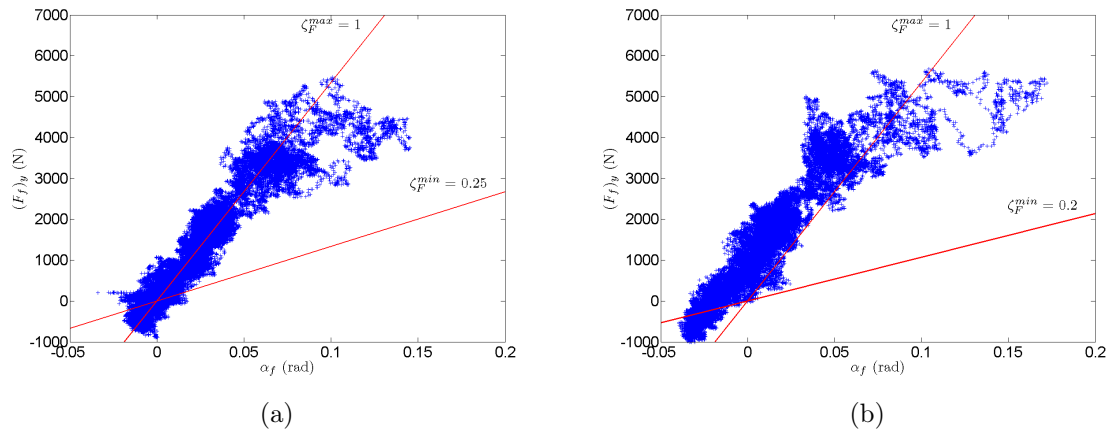


FIG. 8.7 – Courbes expérimentales de la force latérale en fonction de l’angle de dérive pour les pneus avant : (a) retour d’état, (b) retour de sortie (6ème et 7ème lois d’assistance).

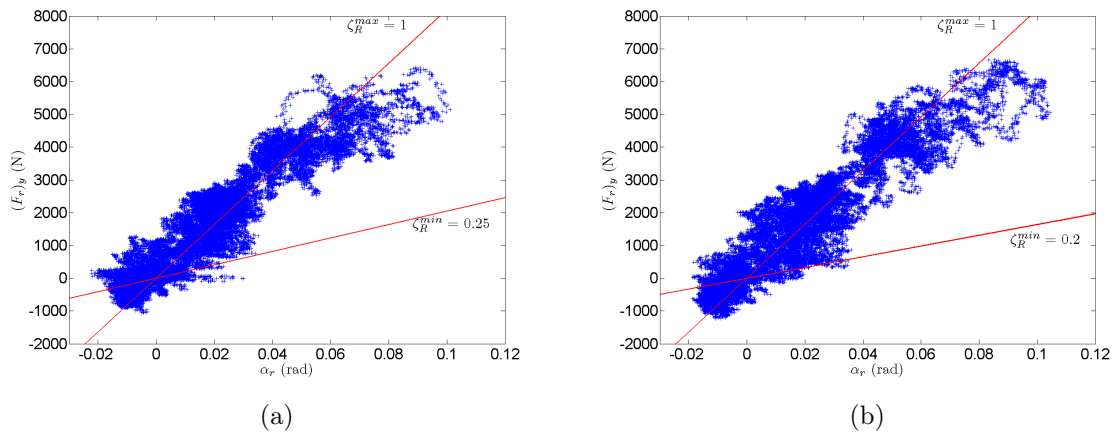


FIG. 8.8 – Courbes expérimentales de la force latérale en fonction de l’angle de dérive pour les pneus arrière : (a) retour d’état, (b) retour de sortie (6ème et 7ème lois d’assistance).

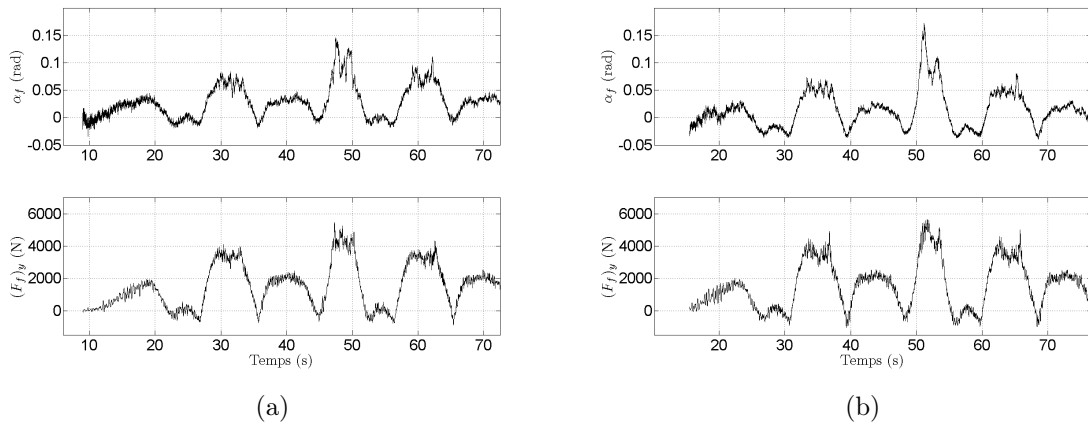


FIG. 8.9 – Angle de dérive et force latérale des pneus avant pour : (a) le retour d'état, (b) le retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).

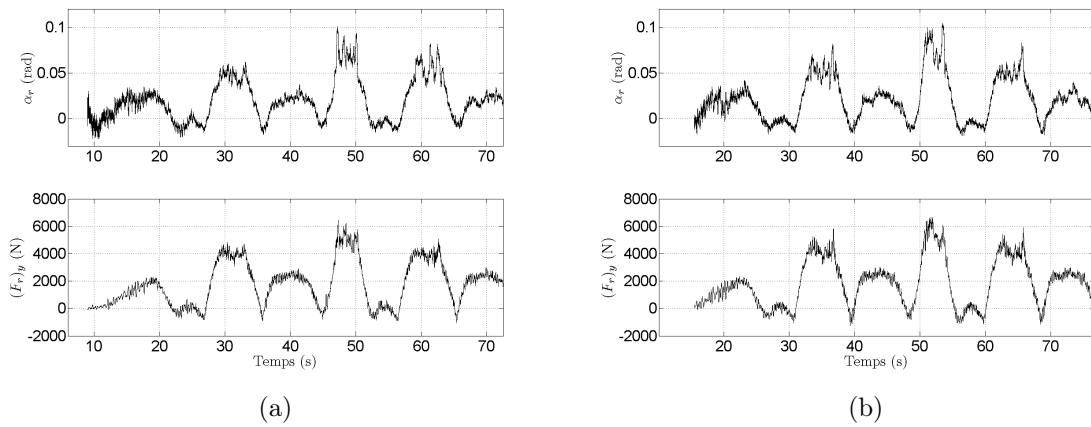


FIG. 8.10 – Angle de dérive et force latérale pour les pneus arrières pour (a) le retour d'état, (b) le retour de sortie (6ème et 7ème lois d'assistance).

8.3.3 Assistance au maintien de voie et contrôle du mouvement de lacet

Même si l'objectif principal des lois d'assistance synthétisées dans ce chapitre est le suivi d'une trajectoire de référence, notamment assimilée au centre de la voie, et la correction de la trajectoire lors d'une sortie de voie nous allons explorer dans cette section un aspect inattendu des contrôleurs obtenus : leur capacité à réaliser également un contrôle de mouvement de lacet du véhicule. Cette fonction est généralement réalisée par un système de type ESP (Electronic Stability Programme) [Bos00], qui ne tient pas compte de la position du véhicule sur la voie.

Sans entrer dans les détails, mentionnons que les systèmes de type ESP :

- détectent le comportement effectif du véhicule à partir de la vitesse de lacet, de l'accélération latérale, de l'angle de braquage et d'autres capteurs placés au niveau des roues,
- agissent soit via un moment de lacet obtenu par freinage différentiel, soit via un angle de braquage [Oha08] ou une combinaison moment de lacet - angle de braquage [Nag02] pour rapprocher le comportement du véhicule de celui souhaité par le conducteur en suivant un modèle de consigne de vitesse de lacet, qui soit dynamiquement stable et qui reste dans les limites physiques offertes par la surface de contact pneumatique-chaussée.

Dans cette thèse, les spécifications du cahier des charges ne présentaient aucune exigence sur le suivi d'une référence de vitesse de lacet. Cependant, le critère de stabilité asymptotique du véhicule vers une trajectoire de référence qui suit le centre de la voie entraîne la convergence de la vitesse de lacet vers zéro en régime permanent pour une route à faible courbure. De plus, les lois d'assistance ont été synthétisées pour satisfaire le cahier des charges pour une large plage des paramètres ζ_F et ζ_R . On peut alors s'attendre à des propriétés induites de contrôle du mouvement de lacet.

Pour explorer cette supposition, un essai a été effectué sur une surface d'adhérence réduite par adjonction de gravier. Le régulateur de vitesse et la 6ème loi d'assistance ont été activés pour réaliser un suivi d'une trajectoire de référence à courbure quasi-constante $\rho_{ref} = 0.03m^{-1}$ en conduite automatique. La vitesse longitudinale a été fixée à $12m/s$. La situation de conduite aux limites de la stabilité dynamique a été provoquée par un freinage brusque du véhicule. On se sert du contrôle longitudinal et du positionnement par GPS pour enclencher le freinage au même endroit pour tous les essais.

Deux tests ont été conduits de cette manière. Dans le premier test, le contrôle latéral est désactivé au moment du freinage, tout en gardant un angle de braquage constant. Dans le deuxième test, le contrôle latéral a été maintenu actif durant et après le moment de freinage. Le comportement du véhicule dans les deux cas est radicalement différent : sans contrôle latéral, le véhicule part en instabilité de type survireur, alors qu'avec le contrôle latéral, il suit la trajectoire de référence temporairement, jusqu'à l'arrêt. Ce comportement est visible sur la Figure 8.11. Il indique clairement une fonction de contrôle du mouvement de lacet de la loi d'assistance testée.

Le comportement dynamique du véhicule doit être observé durant la seconde qui suit l'initiation du freinage par le système automatique. Pendant cet intervalle de temps, le conducteur n'a pas le temps de réagir, puisque son temps de réaction est de cet ordre. En conséquence, sans loi d'assistance, on suppose que l'angle de braquage reste constant.

La vitesse longitudinale pour les deux tests est présentée sur la partie supérieure de la Figure 8.12. Dans les deux cas la vitesse chute de $12m/s$ à $9m/s$. L'angle de braquage nécessaire pour prévenir l'instabilité dynamique du véhicule a une allure remarquable (voir la partie inférieure à droite de la Figure 8.12). L'amplitude de l'angle de braquage n'est que de $0.07rad$, soit 4° , et elle est atteinte $0.7s$ après l'initiation du freinage. L'assistance réagit bien dans le temps de réaction du conducteur.

L'effet de la loi d'assistance de maintien de voie sur la stabilité en lacet du véhicule est

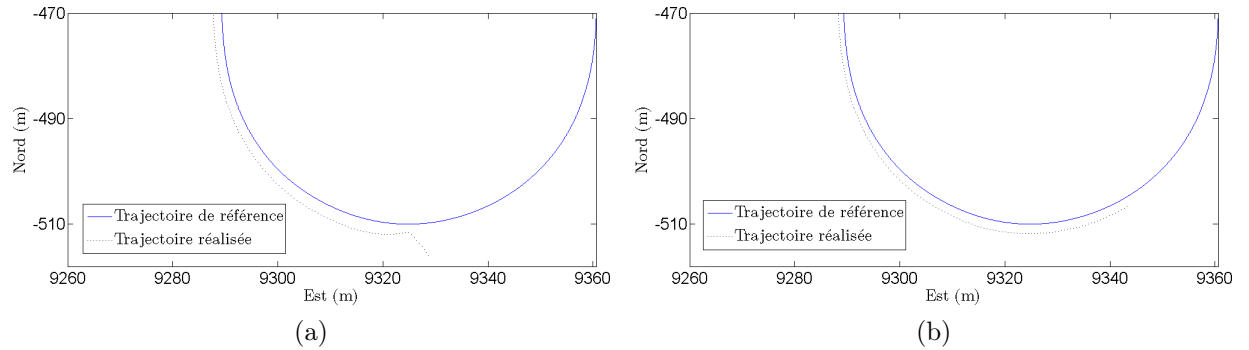


FIG. 8.11 – Trajectoire de référence et trajectoire réalisée par le véhicule pour le freinage avec (a) contrôle latéral désactivé, (b) contrôle latéral activé.

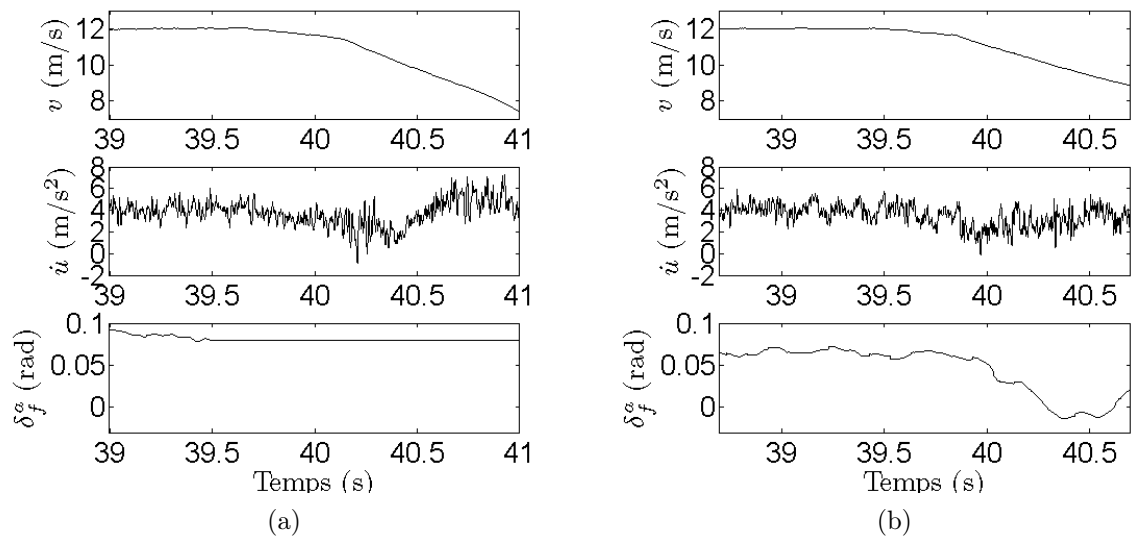


FIG. 8.12 – Vitesse longitudinale, accélération latérale et angle de braquage pour le freinage avec (a) contrôle latéral activé, (b) contrôle latéral désactivé.

incontestable à la vue de l'évolution de l'angle de cap relatif, présentée en bas de la Figure 8.13. Dans le cas non contrôlé latéralement, Figure 8.13 (a), l'angle de cap relatif atteint $0.4rad$, soit 23° , durant la première seconde qui suit le freinage, alors que le contrôle latéral maintient l'angle de cap relatif à une valeur 10 fois plus faible, inférieure à $0.05rad$, soit 2.8° . La loi d'assistance maintient également une dérivée de cap relatif inférieure à $0.15rad/s$ ($8.5^\circ/s$), valeur qui approche l'état stationnaire obtenu avant le moment du freinage (voir Figure 8.13 (b) au milieu), alors qu'elle atteint $1rad/s$ ($57^\circ/s$) pour le cas non contrôlé (voir Figure 8.13 (a) au milieu).

La vitesse de variation de l'écart latéral peut être considérée comme un indicateur du confort des passagers. La loi de contrôle latéral proposée maintient un bon compromis entre la stabilité en lacet du véhicule et la vitesse en latéral. La vitesse de variation de l'écart latéral est maintenue presque constante avant, durant et après le freinage, si la loi d'assistance pour le contrôle latéral reste activée (voir la figure en haut de la Figure 8.13 (b)). Cependant, pour une désactivation de la loi de commande, \dot{y}_L^{CG} atteint $0.2m/s$ dans la première seconde qui suit le freinage (voir la partie supérieure de la Figure 8.13 (a)).

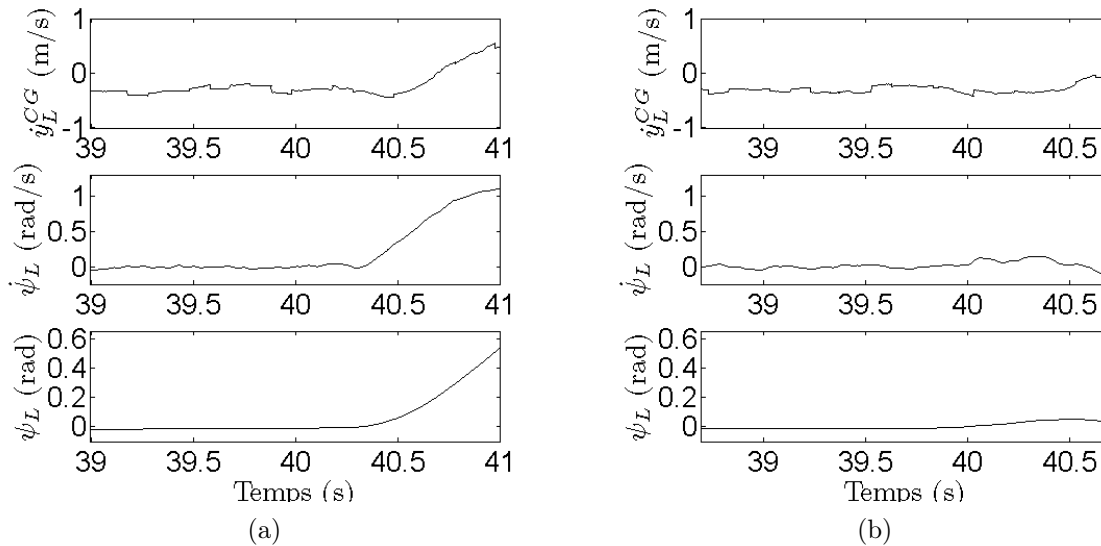


FIG. 8.13 – Vitesse de l'écart latéral, dérivée de l'angle de cap relatif et angle de cap relatif pour le freinage avec : (a) contrôle latéral désactivé, (b) contrôle latéral activé.

Un autre aspect d'intérêt est l'évolution des angles de dérive avant et arrière, qui sont présentés sur la Figure 8.14. Suite au freinage d'urgence, l'angle de dérive croît à $0.2rad$ (11°) pour les pneus avant et à $0.4rad$ (23°) pour les pneus arrières si le contrôle latéral est désactivé (Figure 8.14 (a)). Ces valeurs correspondent à une saturation des pneus et indique une situation difficilement contrôlable par le conducteur. En revanche, le contrôle latéral, maintenu actif durant et après le freinage d'urgence, limite les angles de dérive des pneus avant et arrière à $0.05rad$ (2.86°), respectivement $0.1rad$ (5.72°) (Figure 8.14 (b)). Ces amplitudes indiquent que les forces latérales se trouvent, dans ce cas, très probablement dans le domaine de linéarité, malgré le freinage d'urgence sur une surface à adhérence réduite. La loi d'assistance conçue initialement pour assurer le suivi d'une trajectoire de référence liée à la voie pourrait alors permettre au conducteur de maintenir le contrôle en lacet du véhicule malgré son retard de réaction.

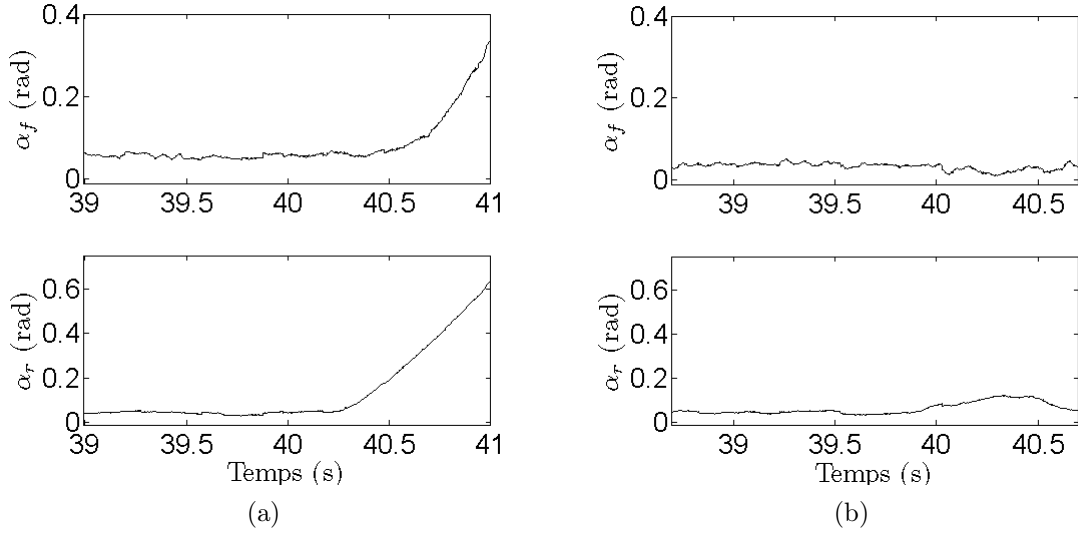


FIG. 8.14 – Angle de dérive des pneus arrières et avant pour : (a) contrôle latéral désactivé, (b) contrôle latéral activé.

8.4 Robustesse des lois d'assistance vis-à-vis de l'entrée de perturbation due à la courbure

Les lois d'assistance ont été synthétisées sous l'hypothèse d'absence de courbure, soit $\rho_{ref} = 0$. Néanmoins, les essais pratiqués pour le suivi d'une trajectoire de référence à courbure modérée et accentuée se sont conclus avec succès.

Il est quand même utile d'évaluer, avant implantation sur le véhicule, les limites de l'erreur entre la trajectoire réalisée par le véhicule et la trajectoire de référence courbe, notamment dans les conditions de saturation des forces latérales, sous l'effet de l'entrée de courbure. Cette évaluation pour une vitesse longitudinale constante sera l'objet de cette section. Après l'exposé de la méthode de calcul, les bornes déterminées numériquement seront comparées aux valeurs obtenues durant les tests pratiques.

8.4.1 Approche théorique du calcul

Rappelons que le modèle du véhicule en boucle fermée, avec une entrée de courbure non-nulle, résulte du modèle véhicule de l'équation (4.88) du Chapitre 4, Partie II :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_{cl}\tilde{x} + \tilde{B}_\rho\rho_{ref} + \tilde{B}_\rho\dot{\rho}_{ref}, \quad (8.31)$$

Dans cette équation, $\tilde{A}_{cl} = \tilde{A} + \tilde{B}_u K$, pour une loi d'assistance par retour d'état $\delta_f^a = K\tilde{x}$, et $\tilde{A}_{cl} = \tilde{A} + \tilde{B}_u K\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}_u \tilde{K}$, pour une loi d'assistance par retour de sortie $\delta_f^a = K\tilde{C}\tilde{x}$. Précisons que le calcul des bornes sur la trajectoire du véhicule contrôlé ne dépend pas de la méthode de synthèse des vecteurs de retour d'état ou de retour de sortie K . Ces vecteurs sont considérés invariants, connus a priori et assurent des valeurs propres à partie réelle négative pour la matrice \tilde{A}_{cl} . Comme la forme algébrique obtenue pour le retour de sortie est similaire avec celle pour le retour d'état, en remplaçant le vecteur K par le vecteur $\tilde{K} = K\tilde{C}$, l'approche sera uniquement détaillée pour le retour d'état.

Les bornes de l'erreur de suivi de trajectoire sont déterminées à partir de l'estimation de l'ensemble atteignable par le système en boucle fermée sous l'influence de la courbure, bornée en amplitude et en vitesse de variation : $|\rho_{ref}| \leq \rho_{ref}^{max}$ et $|\dot{\rho}_{ref}| \leq \dot{\rho}_{ref}^{max}$. Les limites de la courbure et de sa dérivée sont supposées être connues a priori. Cette hypothèse est facilement vérifiable pour des routes réelles.

Encore une fois, des variables de normalisation seront utilisées : w_1 et w_2 , où $w_1 \in \mathbb{R}$, $w_2 \in \mathbb{R}$ et $w_1^T w_1 \leq 1$, $w_2^T w_2 \leq 1$: $\rho_{ref} = \rho_{ref}^{max} w_1$ et $\dot{\rho}_{ref} = \dot{\rho}_{ref}^{max} w_2$. Avec ces notations, l'équation (8.31) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}_{cl} \tilde{x} + \tilde{B}_\rho \rho_{ref} + \tilde{B}_{\dot{\rho}} \dot{\rho}_{ref} = \tilde{A}_{cl} \tilde{x} + \tilde{B}_{w_1} w_1 + \tilde{B}_{w_2} w_2, \quad \text{où} \\ \tilde{B}_{w_1} &= \tilde{B}_\rho \rho_{ref}^{max}, \quad \tilde{B}_{w_2} = \tilde{B}_{\dot{\rho}} \dot{\rho}_{ref}^{max}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Si les forces latérales sont exprimées en fonction des paramètres ζ_F et ζ_R , comme dans l'équation (8.4), la forme paramétrique des matrices du système précédent résulte de l'équation (8.6) :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A_0 + \zeta_R A_1 + \zeta_F A_2, \\ \tilde{B}_u &= \zeta_F B_2, \\ \tilde{B}_{w_1} &= \rho_{ref}^{max} B_{\rho 0} + \rho_{ref}^{max} \zeta_R B_{\rho 1} + \rho_{ref}^{max} \zeta_F B_{\rho 2}, \\ \tilde{B}_{w_2} &= \dot{\rho}_{ref}^{max} B_{\dot{\rho} 0}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

L'approximation de l'ensemble atteignable du système de l'équation (8.32) sous l'effet de perturbations bornées en valeur crête est réalisée à travers un ellipsoïde invariant extérieur à l'ensemble atteignable calculé par des méthodes d'optimisation BMI [Boy94]. L'Exemple 3.4.1 du Chapitre 3, Partie II traite un cas plus complexe par cette méthode, où une loi d'assistance et l'ellipsoïde invariant minima sont déterminés simultanément. Ce fut aussi le cas dans l'Algorithme 7.2.1 du Chapitre 7, où une loi de commande pour le suivi des routes avec des virages significatifs a été synthétisée.

Dans le cas présent, la loi de commande par retour d'état est déjà connue et l'état initial est supposé être à l'origine du système. L'objectif est donc de déterminer l'ellipsoïde invariant le plus petit possible qui contient l'ensemble atteignable du véhicule.

Pour cela, on considère une fonction quadratique $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T R \tilde{x}$, avec $R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ une matrice symétrique et définie positive. La courbe de niveau 1 de cette fonction représente un ellipsoïde, $S_V(1) = \varepsilon(R)$. Cet ellipsoïde est invariant aux dynamiques du système de l'équation (8.32), et contient en conséquence son ensemble atteignable, si

$$\dot{V}(\tilde{x}) \leq 0 \quad (8.34)$$

pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}^4$ tel que $V(\tilde{x}) \geq 1$, pour tout $w_1 \in \mathbb{R}$ tel que $w_1^T w_1 \leq 1$ et pour tout $w_2 \in \mathbb{R}$ tel que $w_2^T w_2 \leq 1$. L'équation (8.34) correspond à :

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T (\tilde{A}_{cl}^T R + R \tilde{A}_{cl}) \tilde{x} + \tilde{x}^T R \tilde{B}_{w_1} w_1 + w_1^T \tilde{B}_{w_1}^T R \tilde{x} + \tilde{x}^T R \tilde{B}_{w_2} w_2 + w_2^T \tilde{B}_{w_2}^T R \tilde{x} &\leq 0, \\ (\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \tilde{x}^T R \tilde{x} \geq 1) \text{ et} & \\ (\forall w_1 \in \mathbb{R} \text{ tel que } w_1^T w_1 \leq 1) \text{ et} & \\ (\forall w_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } w_2^T w_2 \leq 1). & \end{aligned} \quad (8.35)$$

En appliquant la S-procédure, la condition de l'équation (8.35) est vérifiée s'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T (\tilde{A}_{cl}^T R + R \tilde{A}_{cl}) \tilde{x} + \tilde{x}^T R \tilde{B}_{w_1} w_1 + w_1^T \tilde{B}_{w_1}^T R \tilde{x} + \tilde{x}^T R \tilde{B}_{w_2} w_2 + w_2^T \tilde{B}_{w_2}^T R \tilde{x} &\leq \\ \alpha(1 - \tilde{x}^T R \tilde{x}) + \beta(w_1^T w_1 - 1) + \gamma(w_2^T w_2 - 1). & \end{aligned} \quad (8.36)$$

L'équation (8.36) est équivalente à l'existence de $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ w_1 \\ w_2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{A}_{cl}^T R + R\tilde{A}_{cl} + \alpha R & R\tilde{B}_{w_1} & R\tilde{B}_{w_2} & 0 \\ \tilde{B}_{w_1}^T R & -\beta & 0 & 0 \\ \tilde{B}_{w_2}^T R & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + \gamma - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ w_1 \\ w_2 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0. \quad (8.37)$$

L'inégalité (8.37) peut être développée et écrite comme une inégalité matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^T R + K^T \tilde{B}_u^T R + R\tilde{A} + R\tilde{B}_u K + \alpha R & R\tilde{B}_{w_1} & R\tilde{B}_{w_2} & 0 \\ \tilde{B}_{w_1}^T R & -\beta & 0 & 0 \\ \tilde{B}_{w_2}^T R & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + \gamma - \alpha \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (8.38)$$

où l'expression $\tilde{A}_{cl} = \tilde{A} + \tilde{B}_u K$ a été utilisée.

En notant $Z = R^{-1}$ et en multipliant l'équation (8.38) à droite et à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

cette inégalité devient :

$$\begin{pmatrix} Z\tilde{A}^T + ZK^T \tilde{B}_u^T + \tilde{A}Z + \tilde{B}_u K Z + \alpha Z & \tilde{B}_{w_1} & \tilde{B}_{w_2} & 0 \\ \tilde{B}_{w_1}^T & -\beta & 0 & 0 \\ \tilde{B}_{w_2}^T & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + \gamma - \alpha \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (8.40)$$

Rappelons que les limites recherchées dans cette section doivent aussi tenir compte de la saturation des forces latérales. Cette saturation est prise en compte via l'appartenance des forces aux secteurs $[\zeta_F^{min} C_F \alpha_f, C_F \alpha_f]$ et $[\zeta_R^{min} C_R \alpha_r, C_R \alpha_r]$.

Le calcul d'un ensemble invariant ellipsoïdale qui couvre cette condition résulte du problème de l'équation (8.40). Ceci est possible grâce à la linéarité de l'inégalité matricielle vis-à-vis les paramètres ζ_F et ζ_R . En effet, le développement des expressions de matrices de l'équation (8.40) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} ZA_0^T + A_0 Z + \alpha Z & \rho_{ref}^{max} \tilde{B}_{\rho 0} & \dot{\rho}_{ref}^{max} \tilde{B}_{\rho 0} & 0 \\ \rho_{ref}^{max} \tilde{B}_{\rho 0}^T & -\beta & 0 & 0 \\ \dot{\rho}_{ref}^{max} \tilde{B}_{\rho 0}^T & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + \gamma - \alpha \end{pmatrix} + \\ & + \zeta_R \begin{pmatrix} ZA_1^T + A_1 Z & \rho_{ref}^{max} B_{\rho 1} & 0 & 0 \\ \rho_{ref}^{max} B_{\rho 1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \zeta_F \begin{pmatrix} ZA_2^T + ZK^T B_2^T + A_2 Z + B_2 K Z & \rho_{ref}^{max} B_{\rho 2} & 0 & 0 \\ \rho_{ref}^{max} B_{\rho 2}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \preceq 0. \end{aligned} \quad (8.41)$$

L'inégalité matricielle (8.41) étant linéaire en ζ_F et ζ_R , une fois la matrice $Z = Z^T$, $Z \succ 0$ calculée pour $(\zeta_F, \zeta_R) \in \{\zeta_F^{min}, 1\} \times \{\zeta_R^{min}, 1\}$, elle sera vérifiée pour tout $(\zeta_F, \zeta_R) \in [\zeta_F^{min}, 1] \times [\zeta_R^{min}, 1]$.

Pour résumer, la recherche d'un ellipsoïde invariant de taille minimale qui contient l'ensemble atteignable du système (8.31) résulte du problème d'optimisation BMI suivant :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \text{trace}(Z) \\ & \text{contraint par} && \text{l'éq. (8.41) pour } (\zeta_F, \zeta_R) \in \{\zeta_F^{min}, 1\} \times \{\zeta_R^{min}, 1\}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Les variables de décisions sont les scalaires positifs α , β et γ et la matrice symétrique et définie positive Z . Le problème d'optimisation BMI (8.42) minimise la trace de la matrice Z afin de minimiser la taille de l'ellipsoïde $\varepsilon(R)$. Les valeurs maximales des projections de cet ellipsoïde sur les quatre axes $(\dot{y}_L^{CG}, \dot{\psi}_L, y_L^{CG}, \psi_L)$ sont données par les racines carrées des éléments de la diagonale de la matrice Z . Elles représentent les limites recherchées pour la trajectoire du véhicule contrôlé : $(\dot{y}_L^{CG})^{max} = \sqrt{z_{11}}$, $(\dot{\psi}_L)^{max} = \sqrt{z_{22}}$, $(y_L^{CG})^{max} = \sqrt{z_{33}}$ et $(\psi_L)^{max} = \sqrt{z_{44}}$.

Afin de calculer ces limites de façon plus précise, le problème d'optimisation (8.42) a été adapté comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && (v^j)^T Z v^j \\ & \text{contraint par} && \text{l'éq. (8.41) pour } (\zeta_F, \zeta_R) \in \{\zeta_F^{min}, 1\} \times \{\zeta_R^{min}, 1\}, \end{aligned} \quad (8.43)$$

où $j = 1, \dots, 4$ et $v^1 = [1, 0, 0, 0]^T$, $v^2 = [0, 1, 0, 0]^T$, $v^3 = [0, 0, 1, 0]^T$ et $v^4 = [0, 0, 0, 1]^T$. Dans ce nouveau problème d'optimisation BMI, pour chaque j la fonction de coût a été formulée pour minimiser $z_{j,j}$ autrement dit la limite de la variable d'état j . Les quatre ellipsoïdes obtenus admettent l'ensemble atteignable comme leur intersection (Figure 8.15).

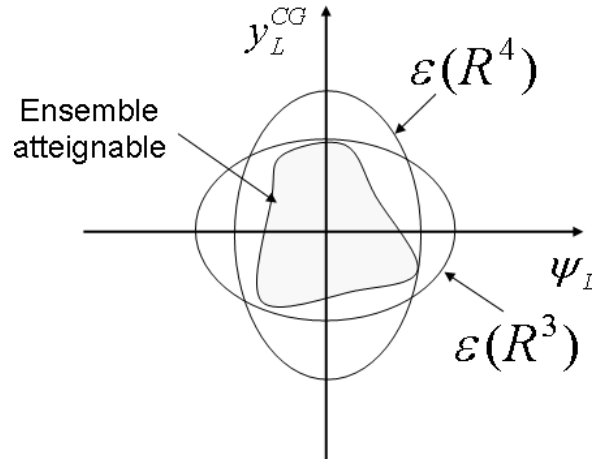


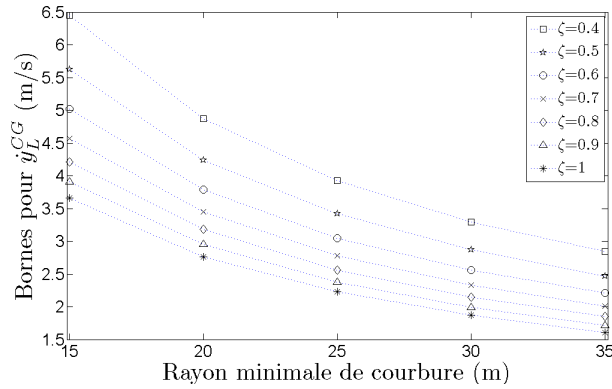
FIG. 8.15 – Approximation des limites réduites grâce aux différents ellipsoïdes invariants. Ceux correspondent à la minimisation de y_L^{CG} et ψ_L , $\varepsilon(R^3)$ et $\varepsilon(R^4)$, et contiennent l'ensemble atteignable.

Remarque 8.4.1 (Généralité sur le problème d'estimation des bornes) *Le problème d'optimisation BMI de l'équation (8.43) convient pour le calcul des bornes sur les variables d'état lorsque les forces latérales saturent sur une route de courbure non-négligeable. Il peut être utilisé indépendamment de la méthode de synthèse de la loi d'assistance et même si la saturation des forces n'a pas été prise en compte lors de la synthèse.*

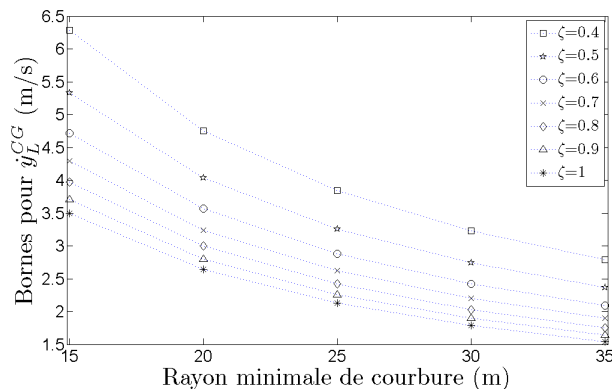
8.4.2 Limites assurées en fonction des bornes sur la courbure et des paramètres ζ_F et ζ_R liés aux forces de contact

Le problème d'optimisation BMI de l'équation (8.43) peut aussi être utilisé pour calculer des bornes aux variables d'état pour différentes valeurs des paramètres ρ_{ref}^{max} , $\dot{\rho}_{ref}^{max}$, ζ_F^{min} et ζ_R^{min} . Les valeurs obtenues pour une vitesse longitudinale constante de $v = 10m/s$ mettent en évidence une sensibilité très réduite vis-à-vis de la valeur maximale de la dérivée de la courbure $\dot{\rho}_{ref}^{max}$, si celle-là reste inférieure à $0.1(ms)^{-1}$. Au dessus de ce seuil, les bornes calculées deviennent très larges, et donc non concluantes.

Les bornes ont aussi été calculées pour des valeurs des paramètres ζ_F^{min} et ζ_R^{min} fixés à 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 et pour des courbures maximales de $0.066m^{-1}$ ($R = 15m$), $0.05m^{-1}$ ($R = 20m$), $0.04m^{-1}$ ($R = 25m$), $0.033m^{-1}$ ($R = 30m$) et $0.028m^{-1}$ ($R = 35m$), où R est le rayon de courbure. La valeur de $\dot{\rho}_{ref}^{max}$ est fixée à $0.05(ms)^{-1}$, elle correspond aux caractéristiques de la trajectoire de référence utilisée pour les tests présentés dans la Section 8.3.2 de ce chapitre. Les bornes obtenues pour les quatre variables d'état \dot{y}_L^{CG} , ψ_L , y_L^{CG} et ψ_L , pour les deux lois d'assistance par retour d'état et retour de sortie sont présentées sur les Figures 8.16, 8.17, 8.18 et 8.19.



(a)

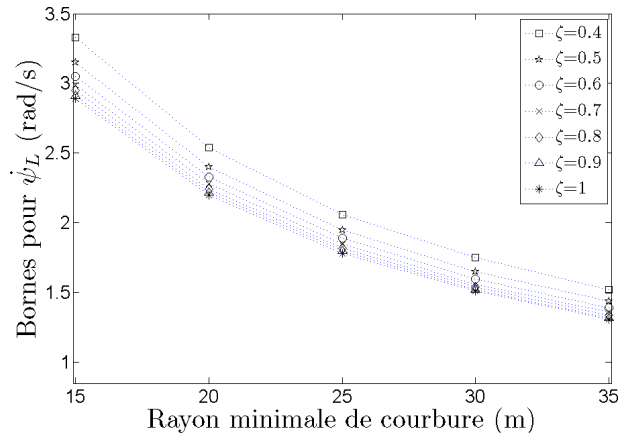


(b)

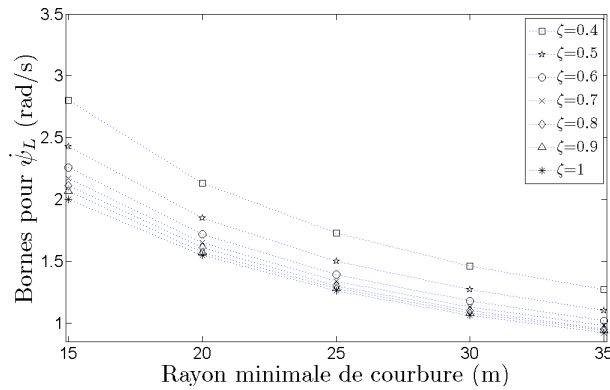
FIG. 8.16 – Bornes de la vitesse de l'écart latéral pour : (a) la 6ème loi d'assistance par retour d'état, (b) la 7ème loi d'assistance par retour de sortie.

De manière générale, les bornes calculées diminuent quand la courbure maximale s'atténue

ou que les valeurs de ζ_F et ζ_R augmentent. Ce résultat confirme que l'approche utilisée pour le calcul des bornes est pertinente. Cependant, ces bornes sont probablement plus larges que les limites réellement atteintes par les variables d'état et ce pour plusieurs raisons : la forme ellipsoïdale retenue pour approcher les ensembles atteignables est connue pour être conservatrice, la courbure et sa dérivée sont considérées comme des entrées distinctes ce qui sous entend que les valeurs maximales sont atteintes simultanément et sont maintenues ainsi par la suite alors que ce cas là ne peut pas se présenter dans la pratique. Si la courbure est constante, sa dérivée est nulle.



(a)



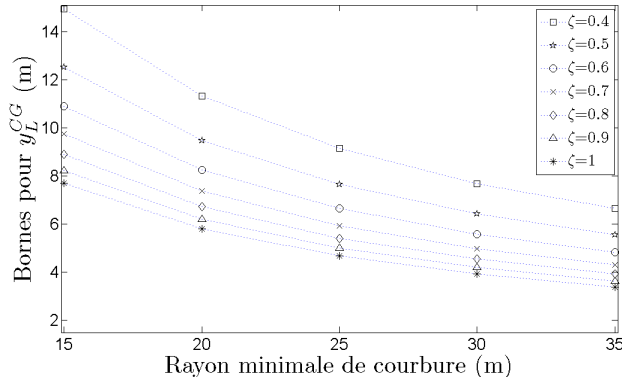
(b)

FIG. 8.17 – Bornes de la vitesse de l'angle de cap relatif pour : (a) la 6ème loi d'assistance par retour d'état, (b) la 7ème loi d'assistance par retour de sortie.

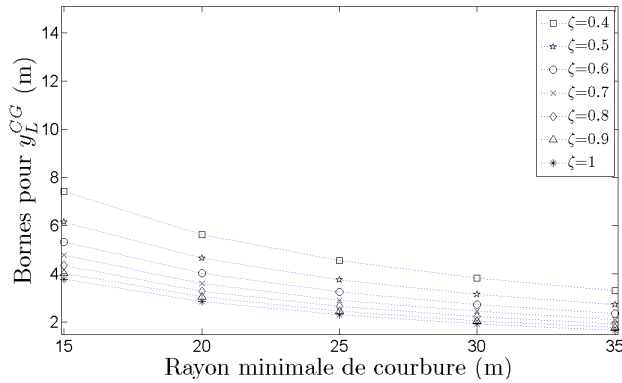
La variation des bornes pour la vitesse de l'écart latéral est présentée sur la Figure 8.16. Les différences entre la 6ème loi d'assistance par retour d'état et la 7ème loi par retour de sortie sont mineures. Dans les deux cas une limite haute à $6.5m/s$ est calculée pour le plus large secteur des forces latérales incluant le domaine de saturation ($\zeta_F^{min} = \zeta_R^{min} = 0.4$) et pour le virage le plus serré considéré à $\rho_{ref}^{max} = 0.066m^{-1}$. Cette limite diminue de 75% jusqu'à $1.5m/s$ pour une courbure de la trajectoire de référence $\rho_{ref}^{max} = 0.028m^{-1}$ (rayon $35m$) et pour des forces latérales linéaires ($\zeta_F^{min} = \zeta_R^{min} = 1$).

Les limites pour la dérivée de l'angle de cap relatif sont différentes pour les deux lois d'assistance (voir Figure 8.17). La limite la plus large dans le cas du retour d'état est de $3.4rad/s$,

tandis que cette limite n'est que de $2.8rad/s$ pour le retour de sortie. Pour ce qui est de la limite la plus basse, le retour d'état assure $1.3rad/s$, alors que le retour de sortie garantit une borne de $0.9rad/s$. Par conséquent, la loi d'assistance par retour de sortie serait plus performante que celle par retour d'état, du moins en ce qui concerne la dérivée de l'angle de cap relatif.



(a)

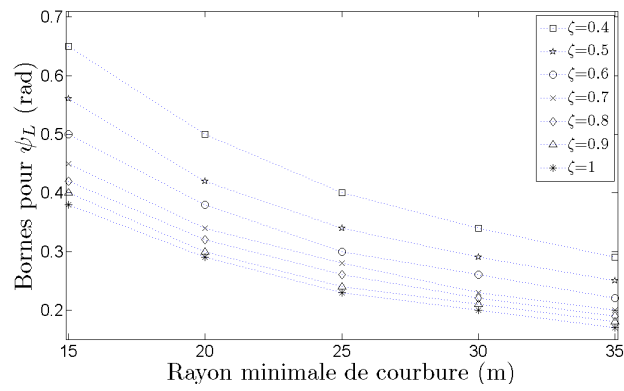


(b)

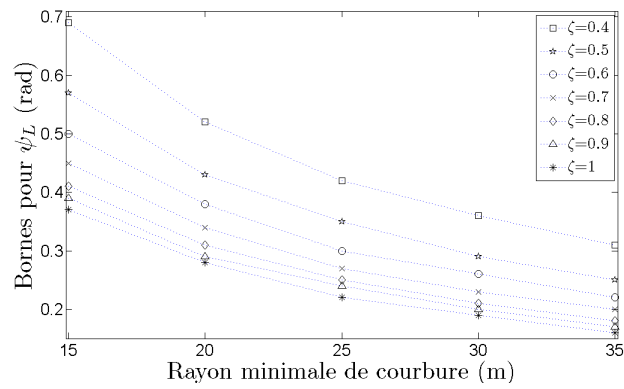
FIG. 8.18 – Bornes de l'écart latéral pour : (a) la 6ème loi d'assistance par retour d'état, (b) la 7ème loi d'assistance par retour de sortie.

Un éloignement notable des limites assurées par la 6ème loi d'assistance par rapport à celles de la 7ème loi d'assistance se confirme pour l'écart latéral présenté sur la Figure 8.18. Sur cette figure nous pouvons remarquer que la 6ème loi garantit un écart latéral maximal de $15m$ pour un faible rayon de courbure, $15m$, et pour des forces latérales probablement très saturées ($\zeta_F^{min} = \zeta_R^{min} = 0.4$). Cette borne décroît à $3.4m$ pour des virages plus larges, qui entraînent une accélération latérale plus réduite et donc des forces latérales non saturées pour la vitesse considérée (rayon minimum à $35m$ et $\zeta_F^{min} = \zeta_R^{min} = 1$). Bien qu'elles soient conservatives, ces garanties ne sont pas du tout satisfaisantes eu égard de la largeur de la voie qui est de $3.5m$. La 7ème loi d'assistance garantit dans les mêmes conditions de meilleures performances avec des limites de $7.4m$ et de $1.67m$ respectivement.

Les bornes calculées pour l'angle de cap relatif ont une allure semblable pour les deux lois d'assistance (voir Figure 8.19). Elles sont quatre fois plus faibles pour une courbure faible et des forces non saturées que pour un virage très serré et des forces latérales saturées ($0.16rad$ par rapport à $0.7rad$).



(a)



(b)

FIG. 8.19 – Bornes de l'angle de cap relatif pour : (a) la 6ème loi d'assistance par retour d'état, (b) la 7ème loi d'assistance par retour de sortie.

8.4.3 Vérification des bornes calculées lors des essais

Dans cette section, la capacité des 6ème et 7ème lois d'assistance à rejeter la perturbation de l'entrée de courbure, même pour des forces latérales saturées, est mise à l'épreuve. Rappelons que ces lois ont été conçues pour des trajectoires de références à courbure nulle. Des bornes ont été calculées par la suite pour le système contrôlé sur la trajectoire de référence. On vérifie alors le respect de ces bornes lors des essais pratiques présentés dans la Section 8.3.2.

La courbure d'une section de la trajectoire en boucle qui a été suivie durant les essais est présentée sur la partie supérieure des Figures 8.20 et 8.21. Les variables d'état enregistrées se trouvent sur la partie basse des Figures 8.20 et 8.21. Pour analyser le respect des bornes calculées pour les variables d'état, les essais sont scindés en trois secteurs, en fonction de la courbure maximale de la trajectoire de référence : pour le retour d'état sur la Figure 8.20, premier secteur de $t = 25s$ à $t = 35s$, deuxième secteur de $t = 35s$ à $t = 45s$ et troisième secteur de $t = 45$ à $t = 55s$, pour le retour de sortie sur la Figure 8.21, premier secteur de $t = 25s$ à $t = 40s$, deuxième secteur de $t = 40s$ à $t = 48s$ et troisième secteur de $t = 48$ à $t = 60s$.

La courbure maximale de la trajectoire de référence vaut $\rho_{ref}^{max} = 0.05m^{-1}$ ($20m$ rayon) pour le premier secteur, $\rho_{ref}^{max} = 0.028m^{-1}$ ($35m$ rayon) pour le deuxième et $0.066m^{-1}$ ($15m$ rayon) pour le troisième. La vitesse de variation de la courbure de référence est inférieure à $0.05(ms)^{-1}$ sur l'ensemble des tests. Pour chaque secteur et pour les deux lois de commande les valeurs minimales des paramètres ζ_F^{min} et ζ_R^{min} ont été estimées à partir des courbes expérimentales des forces latérales en fonction de l'angle de dérive du pneu.

Les bornes pour les variables d'état ont été calculées pour les deux lois de commande et avec les valeurs de ρ_{ref}^{max} , $\dot{\rho}_{ref}^{max}$, ζ_F^{min} et ζ_R^{min} spécifiques à chaque secteur. Les bornes obtenues se trouvent dans les Tableaux 8.6, 8.7 et 8.8 et sont représentées en lignes discontinues sur les Figures 8.20 et 8.21. Les limites obtenues pour le retour de sortie sont généralement plus basses que celles du retour d'état. La raison pourrait être que dans le premier cas les forces latérales sont moins saturées (valeurs plus élevées pour ζ_F^{min} et ζ_R^{min}) et le suivi de trajectoire est donc meilleur (voir Tableaux 8.6 et 8.7).

TAB. 8.6 – Bornes calculées pour une trajectoire de référence à courbure maximale $\rho_{ref}^{max} = 0.05m^{-1}$ et $\dot{\rho}_{ref}^{max} = 0.05(ms)^{-1}$.

	$(\dot{y}_L^{CG})^{max}$	ψ_L^{max}	$(y_L^{CG})^{max}$	ψ_L^{max}
	m/s	rad/s	m	rad
6ème loi de commande par retour d'état, $\zeta_F^{min} = \zeta_R^{min} = 0.6$	3.79	2.33	8.24	0.38
7ème loi de commande par retour de sortie, $\zeta_F^{min} = \zeta_R^{min} = 0.8$	3	1.61	3.29	0.31

Avant de comparer les limites calculées et les valeurs maximales obtenues lors des essais, deux précisions sont nécessaires. D'une part, les bornes présentées dans les Tableaux 8.6, 8.7 et 8.8 ont été calculées pour un état initial à l'origine du système. Cette condition n'a pas pu être vérifiée lors des essais pratiques, car la succession des virages ne permet pas d'atteindre le régime permanent du système. En conséquence, les valeurs des variables d'état peuvent donc dépasser les valeurs calculées. De plus, le circuit en boucle avec des virages continuellement à gauche peut engendrer une erreur statique difficile à atténuer pour toutes les variables d'état.

La première observation confirme quoi qu'il soit, que les variables d'état sont restées, dans tous

TAB. 8.7 – Bornes calculées pour une trajectoire de référence à courbure maximale $\rho_{max} = 0.028m^{-1}$ et $\dot{\rho}_{max} = 0.05(ms)^{-1}$.

	$(\dot{y}_L^{CG})^{max}$	ψ_L^{max}	$(y_L^{CG})^{max}$	ψ_L^{max}
	m/s	rad/s	m	rad
6ème loi de commande par retour d'état, $\zeta_F^{min} = \eta_R^{min} = 0.7$	2.01	1.36	4.31	0.2
7ème loi de commande par retour de sortie, $\zeta_F^{min} = \eta_R^{min} = 1$	1.54	0.92	1.67	0.16

TAB. 8.8 – Bornes calculées pour une trajectoire de référence à courbure maximale $\rho_{max} = 0.066m^{-1}$ et $\dot{\rho}_{max} = 0.05(ms)^{-1}$.

	$(\dot{y}_L^{CG})^{max}$	ψ_L^{max}	$(y_L^{CG})^{max}$	ψ_L^{max}
	m/s	rad/s	m	rad
6ème loi de commande par retour d'état, $\zeta_F^{min} = \eta_R^{min} = 0.5$	5.62	3.15	12.51	0.56
7ème loi de commande par retour de sortie, $\zeta_F^{min} = \zeta_R^{min} = 0.5$	5.33	2.43	6.15	0.57

les cas, inférieures aux limites calculées (voir Figures 8.20 et 8.21). Par ailleurs, si les variables d'état pour la 6ème loi d'assistance restent à l'écart des limites calculées (voir Figure 8.20), pour la 7ème loi, ces courbes approchent les bornes représentées en ligne discontinues (voir Figure 8.21). À titre d'exemple, la vitesse maximale de variation de l'écart latéral est autour de $1.5m/s$ à $t = 39s$ sur la Figure 8.21, par rapport à la limite calculée $1.54m/s$. Cette valeur élevée peut être provoquée par la large variation de la courbure de la trajectoire de référence qui a précédé cet instant. Le même comportement est aussi observable pour l'angle de cap relatif et survient au même moment : la valeur $0.13rad$ est dépassée, celle-ci étant proche à la limite calculée $0.16rad$ (voir Figure 8.21). Aussi dans le cas de la 7ème loi de commande par retour de sortie, l'écart latéral demeure assez faible sur le deuxième secteur du test, caractérisé par une faible courbure et confirme la limite basse calculée de $1.67m$ (voir Figure 8.21).

8.5 Conclusions

L'accent a été mis dans ce chapitre sur le développement de lois d'assistance au contrôle latéral, valides pour une large plage des forces latérales, y compris dans le domaine de saturation de celles-ci. Cette saturation est prise en compte dans le modèle de véhicule par l'intermédiaire d'une paramétrisation linéaire à paramètres variants. Cette façon de procéder permet d'inclure aussi bien les saturations provenant d'une forte sollicitation latérale sur une chaussée à bonne adhérence et celles provoquées par une adhérence réduite de la route.

Deux lois d'assistance ont été synthétisées via cette paramétrisation : une loi de commande par retour d'état, synthétisée comme le résultat d'un problème d'optimisation LMI, et une loi de commande par retour de sortie, synthétisée comme la solution d'un problème d'optimisation BMI. La première loi d'assistance assure la stabilité asymptotique du véhicule contrôlé pour une plage de vitesses longitudinales et pour un secteur de forces latérales qui inclut des régions de saturation. La deuxième loi d'assistance a été synthétisée en respectant les mêmes spécifications

pour une vitesse longitudinale fixée. Ces lois ont été implantées sur un véhicule prototype « steer by wire » et testées en pratique sur une surface de faible adhérence par adjonction de gravier. Une fonctionnalité supplémentaire des lois d'assistance a pu être mise en évidence lors des essais pratiques : elles assurent en plus un contrôle du mouvement de lacet en situation limite.

Les deux lois d'assistance ayant été développées pour des routes rectilignes, l'influence de la courbure sur leurs performances a été étudiée par la suite. Une approche théorique par l'optimisation BMI a été développée pour calculer des bornes sur la trajectoire du véhicule contrôlé, pour une trajectoire de référence à courbure et vitesse de variation de la courbure bornées et des forces latérales allant jusqu'à saturation. Ces bornes ont pu être comparées aux limites observées lors des tests pratiques sur véhicule, comparaisons qui ont confirmé leur pertinence.

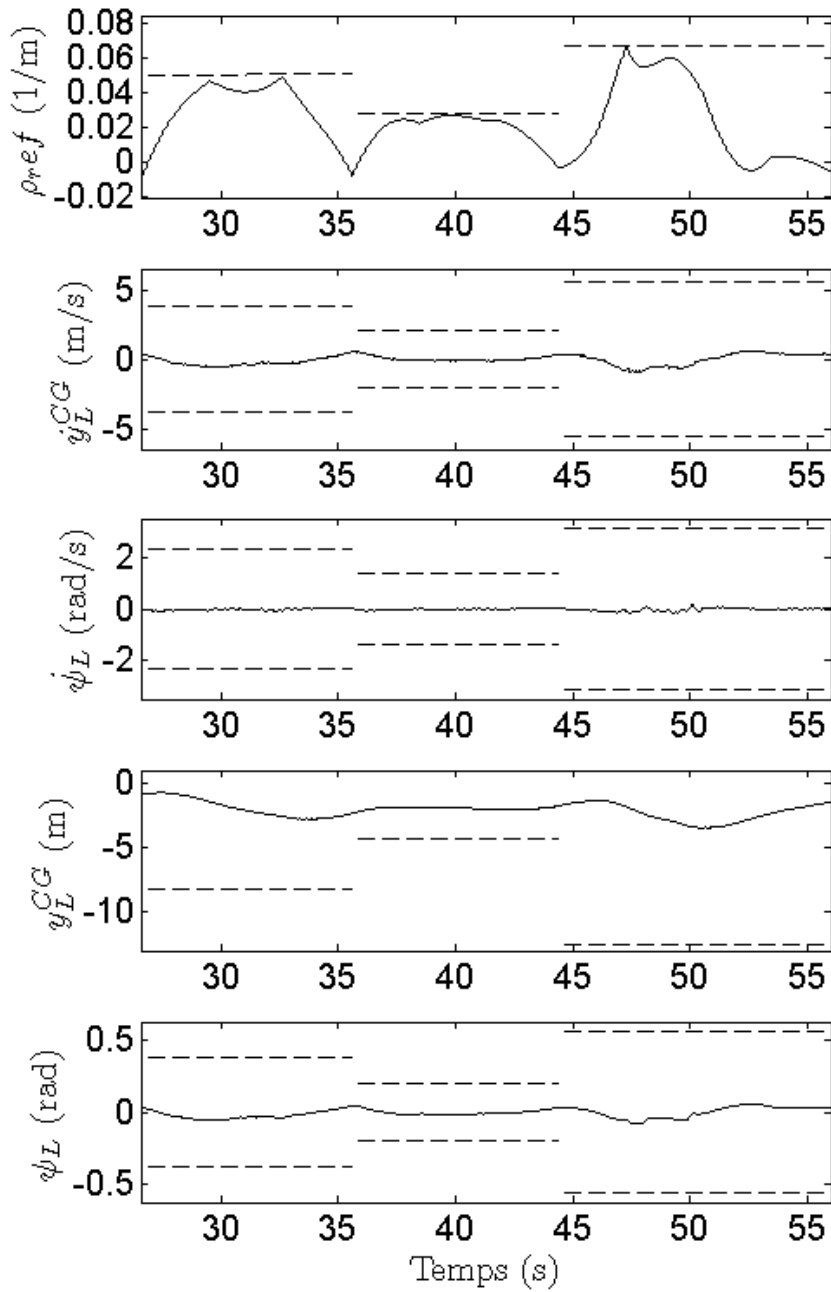


FIG. 8.20 – Courbure de la trajectoire de référence et limites pour les variables d'état pour la 6ème loi de commande par retour d'état.

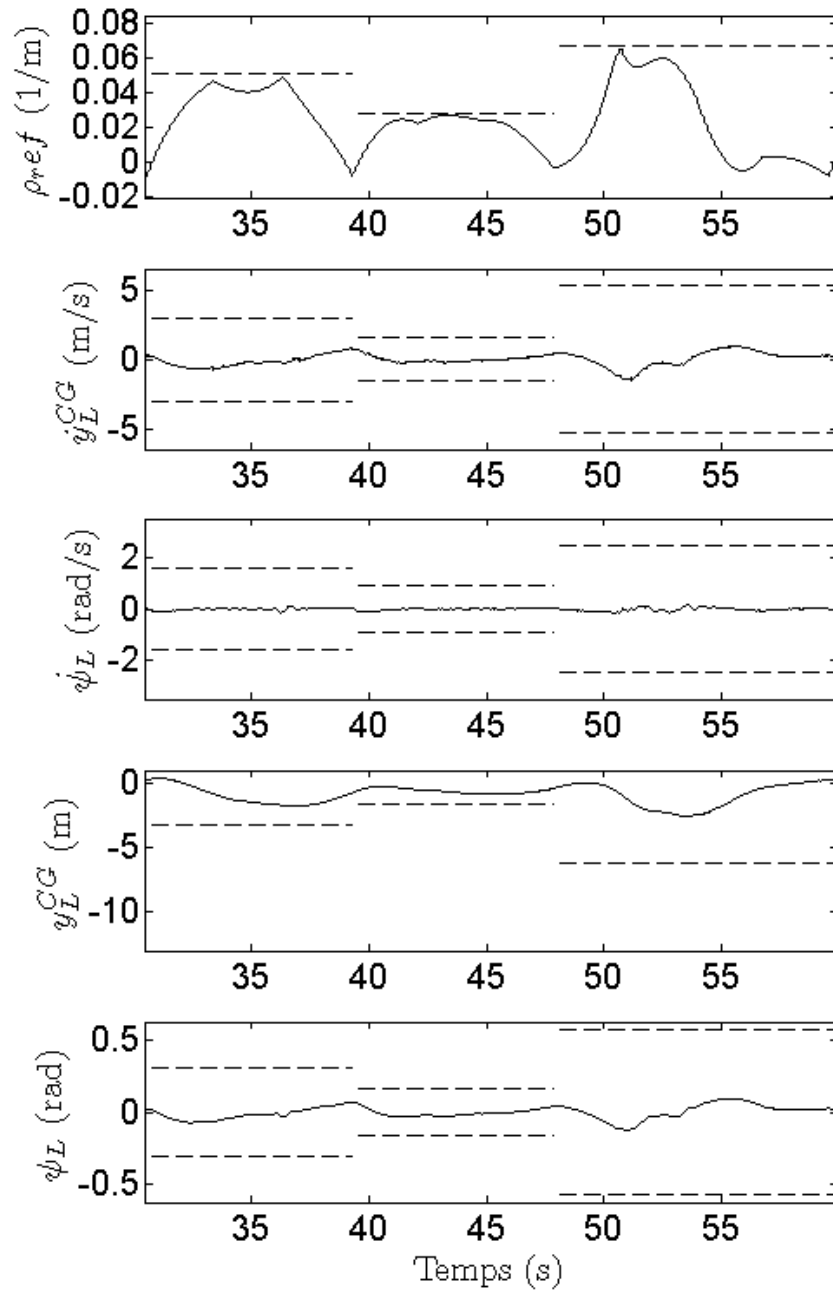


FIG. 8.21 – Courbure de la trajectoire de référence et limites pour les variables d'état pour la 7ème loi de commande par retour de sortie.

Bibliographie

- [Ben05] R. E. Benton, Jr. et D. Smith *A Static-Output-Feedback Design Procedure for Robust Emergency Lateral Control of a Highway Vehicle*. IEEE Transactions on Control, Systems, Technology, Vol. 13, No. 4, pp. 618-623, 2005.
- [Bev01] D. M. Bevly, R. Sheridan et J. C. Gerdes *Integrating INS Sensors with GPS Velocity Measurements for Continuous Estimation of Vehicle Sideslip and Tire Cornering Stiffness*. Proceedings of the American Control Conference (ACC), 2001.
- [Bev02] D. M. Bevly, J. C. Gerdes et C. Wilson *The Use of GPS Based Velocity Measurements for Measurement of Sideslip and Wheel Slip*. Vehicle System Dynamics, Vol. 38, No. 2, pp. 127-147, 2002.
- [Bos00] Robert Bosch GmbH *Mémento de technologie automobile*. Robert Bosch GmbH, 2000.
- [Boy94] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan *Linear matrix inequalities in system and control theory* Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Philadelphia, 1994.
- [Koc03] M. Kocvara et M. Stingl *PENNON - A Code for Convex Nonlinear and Semidefinite Programming*. Optimization Methods and Software, Vol. 18, No. 3, pp. 317-330, 2003.
- [Law05] S. Laws, C. Gadda, S. Kohn, P. Yih, J. C. Gerdes et J. C. Milroy *Steer-By-Wire Suspension and Steering Design for Controllability and Observability*. Proceedings of IFAC World Congress, 2005.
- [Li05] L. Li, F.-Y. Wang et Q. Zhou, *An LMI approach to robust vehicle steering controller design*. Proceedings IEEE ITS Congress, pp. 360-365, 2005.
- [Nag02] M. Nagai, M. Shino et F. Gao *Study on integrated control of active front steer angle and direct yaw moment*. JSAE Review, Vol. 23, pp. 309-315, 2002.
- [Oha08] H. Ohara et T. Murakami *A Stability Control by Active Angle Control of Front-Wheel in a Vehicle System*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 55, pp. 1277-1285, 2008.
- [Rah04] Raharijoana, T. *Commande robuste pour l'assistance au contrôle latéral d'un véhicule routier* Thèse de doctorat de l' Université Paris XI Orsay, 2004.
- [Ryu02] J. Ryu, E. J. Rossetter et J. C. Gerdes *Vehicle Sideslip and Roll Parameter Estimation using GPS*. Proceedings of the International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC), 2002.
- [Ryu04] J. Ryu et J. C. Gerdes *Integrating Inertial Sensors with Global Positioning System (GPS) for Vehicle Dynamics Control*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 126, No. 2, pp. 243-254, 2004.
- [Swi06] J. P. Switkes *Handwheel force feedback with lanekeeping assistance : Combined Dynamics, Stability and Bounding* Thèse de doctorat de l'Université de Stanford, 2006.

- [Tal05] K. L. Rock, S. A. Beiker, S. Laws et J. C. Gerdes *Validating GPS Based Measurements for Vehicle Control*. Proceedings of the 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2005.
- [Tal08] K. L. R. Talvala et J. C. Gerdes *Lanekeeping at the limits of handling : Stability via Lyapunov functions and a comparison with stability control*. Proceedings of ASME Dynamic Systems and Control Conference, article accepté, 2008.

Quatrième partie

Conclusions

Conclusions et perspectives

Sommaire

9.1 Conclusions	297
9.2 Perspectives	299

9.1 Conclusions

Dans ce mémoire, nous avons proposé une assistance préventive à la sortie involontaire de voie qui agit dès que les capacités à conduire du conducteur sont jugées insuffisantes et que le véhicule dérive vers les bords de la voie. L'assistance intervient directement sur la colonne de direction par l'intermédiaire d'un moteur électrique. Une fois enclenchée, elle rétablit la trajectoire du véhicule sur l'axe de la voie, en tenant compte des actions du conducteur.

Les outils mathématiques, les méthodes de synthèse mises en œuvre ainsi que les résultats d'implantation sur véhicule prototype ont été présentés dans les quatre parties constitutives de ce document.

Après l'énoncé des motivations, la première partie s'est attachée à fixer les objectifs de ce travail de recherche. Un état de l'art relativement exhaustif des systèmes intelligents de transport et des assistances au contrôle latéral, a permis de prendre la mesure des enjeux de ce travail. Nous pouvons affirmer que le concept mis en œuvre dans ce document est tout aussi novateur sur le plan théorique que sur le plan pratique.

La deuxième partie a d'abord présenté les principaux outils théoriques utilisés pour la synthèse de l'assistance. Deux notions clés ont constitué le fondement de ce travail : les ensembles invariants et les méthodes d'optimisation convexe linéaire LMI et bi-linéaire BMI. Les ensembles invariants peuvent être obtenus comme des courbes de niveau de fonctions de Lyapunov quadratiques ou de fonctions de Lyapunov quadratiques composées. Les problèmes de synthèse de lois de commande par retour d'état et par retour de sortie ont pu être formulés comme des problèmes d'optimisation LMI et BMI. Ce formalisme a aussi permis d'associer à la synthèse des lois de commande des contraintes sur l'état et sur la valeur maximale de la consigne. De même, la synthèse d'une loi de commande qui atténue l'effet d'une perturbation persistante sur l'ensemble atteignable de l'espace d'état a pu être exprimée sous la forme d'un problème d'optimisation BMI.

Cette deuxième partie fournit également les principales étapes conduisant à l'écriture des équations d'état du modèle « bicyclette » du véhicule, lié à la voie. Ce modèle a été utilisé pour

la synthèse des différentes formes d'assistance. L'expression des coordonnées des roues avant du véhicule en fonction de l'écart latéral au centre de gravité et de l'angle de cap relatif a permis de reformuler l'appartenance à une zone de « conduite normale », centrée sur l'axe de la voie, en une contrainte sur l'espace d'état. Cette contrainte correspond à l'espace d'état confiné entre deux hyperplans. Une telle reformulation facilite la synthèse ultérieure des lois d'assistance.

La troisième partie de ce mémoire porte sur la synthèse de plusieurs lois d'assistance et stratégies de commutation entre la loi de commande et le conducteur. Un automate hybride à trois états discrets a été défini : un état nominal dans lequel le conducteur dispose de toutes ses capacités à conduire et s'acquitte normalement des tâches de conduite, un état où la loi d'assistance supplée le conducteur et évite la sortie de voie, et finalement un état où l'assistance est volontairement désactivée par le conducteur. Par la suite, les lois de commande qui ont été synthétisées pour le domaine nominal de fonctionnement de l'assistance, contenant le premier et le deuxième état discret, seront évoquées.

L'approche théorique utilisée pour la synthèse de toutes les lois d'assistance se fonde sur l'existence d'un ensemble invariant qui inclut la région de « conduite normale ». Cet ensemble invariant garantit alors l'inclusion de l'ensemble atteignable par le système, pour des états au moment de l'activation de l'assistance à l'intérieur de cette région, et fournit des limites supérieures prédéfinies pour l'excursion latérale du véhicule sur la voie. De même, la contrainte imposée à cet ensemble invariant, d'être confiné entre deux hyperplans, permet d'imposer une limite, préalablement choisie, à la commande. Partant de cette approche commune, trois cas d'application de l'assistance ont été traités :

1. Le premier porte sur le cas d'une route rectiligne avec une adhérence nominale. Trois lois d'assistance et quatre stratégies de commutation ont été synthétisées. Les ensembles invariants ont été obtenus comme des courbes de niveau de fonctions de Lyapunov quadratiques ou de fonctions de Lyapunov composées. La relation entre l'ensemble invariant et le déplacement maximal des roues avant sur la voie a été établie dans les deux cas. L'implantation sur véhicule des lois d'assistance par retour d'état statique associées aux fonctions de Lyapunov quadratiques s'est avérée, dans sa réalisation, aisée. L'implantation de la loi d'assistance synthétisée par la fonction de Lyapunov composée a nécessité le développement d'un module d'optimisation LMI en ligne. Toutes les contraintes imposées lors de la synthèse ont pu être vérifiées en pratique. Les performances obtenues sont en total accord avec celles requises.
2. Dans le deuxième cas, pour une route à courbure prononcée, deux lois d'assistance ont été mises en œuvre. Dans la première, la courbure est considérée comme une perturbation non-mesurable et la loi d'assistance est calculée en minimisant l'ensemble atteignable dans l'espace d'état, sous l'effet de cette perturbation. Dans la seconde, la courbure étant supposée accessible à la mesure, un terme de préfiltrage est calculé en même temps que le gain de retour d'état. Encore une fois, les tests pratiques de ces lois ont démontré leur excellentes performances en rejet ou en compensation de la perturbation de courbure.
3. Pour conclure cette partie, les principaux résultats de mon travail de recherche effectué pendant mon séjour à l'université de Stanford ont été présentés. Ils portent sur le développement d'une assistance qui tient compte dans les étapes de synthèse de la saturation des forces de contact pneumatiques-chaussée. En utilisant une modélisation par des forces linéaires à paramètres variants, le modèle « bicyclette » du véhicule a été transformé en un système dynamique linéaire à paramètres variants. Deux lois d'assistance ont alors été synthétisées : la première par retour d'état statique et la seconde par retour de sortie statique. Les tests effectués sur le véhicule filo-commandé de l'Université de Stranford ont permis

de confirmer les bonnes performances pour le suivi de voie en situation de saturation des forces latérales. Des tests étendus ont par ailleurs permis de révéler le bon fonctionnement de l'assistance latérale en tant que système de stabilité en lacet alors que cette caractéristique n'avait pas été requise lors de la synthèse. Cette assistance, bien que synthétisée pour des routes rectilignes, garantit, sous l'influence de la courbure, des bornes à l'état du véhicule. Les tests ont démontré que ces bornes sont largement satisfaisantes.

Nous pouvons maintenant dégager les points forts de ce travail, sous une forme un peu plus synthétique :

- Le développement et la mise en œuvre d'une approche formelle de l'interaction loi d'assistance - conducteur par l'intermédiaire d'un automate hybride.
- La garantie de trajectoires bornées par la conception de la loi d'assistance malgré la présence des commutations.
- Les garanties offertes a priori dès la synthèse de l'assistance sur
 1. le déplacement des roues avant du véhicule,
 2. l'effort du signal de commande.
- Le fonctionnement sur routes à virages prononcés.
- Le fonctionnement sur routes à adhérence réduite.

Cette assistance présente, bien entendu, aussi quelques limitations :

- Le manque d'activation de certaines des stratégies de commutation si la perte d'attention du conducteur a lieu pour un état du véhicule en dehors de l'ensemble invariant considéré.
- Les stratégies de commutation, relativement élémentaires, peuvent ne pas être comprises par le conducteur.

9.2 Perspectives

De nombreuses études sont encore nécessaires sur cet aspect très spécifique de l'interaction de l'assistance avec le conducteur. Elles peuvent être réparties en deux types :

- L'évaluation de l'assistance par une équipe d'ergonomes pour plusieurs situations.
- L'évaluation de l'acceptabilité par des tests pratiques sur un panel plus exhaustif de conducteurs.

L'action simultanée du conducteur pendant la phase d'activation de l'assistance a été supposée négligeable ou du moins compensée par cette même assistance. Une meilleure prise en charge de cette action est possible, y compris dans les étapes de synthèse afin de qualifier son influence sur l'ensemble des trajectoires atteignables. Notons qu'une démarche similaire à celle utilisée pour l'entrée de courbure est possible.

L'entrée de conducteur peut être également considérée comme une perturbation persistante non-mesurable. Deux possibilités se distinguent : soit on considère une loi de commande par retour d'état statique connue et on estime l'ensemble atteignable pour l'entrée conducteur (problème d'optimisation BMI), soit on recherche une loi d'assistance qui minimise l'ensemble atteignable du système véhicule sous l'influence d'actions bornées du conducteur (problème d'optimisation BMI). La résolution de ces problèmes d'optimisation pourra apporter des éclaircissements sur la satisfaction des spécifications de l'assistance y compris pour un conducteur actif.

A

Définitions, lemmes et théorèmes

A.1 Système commuté

Définition A.1.1 (Système commuté) [Vu07] *Considérons des systèmes dynamiques avec l'état $x \in \mathbb{R}^n$, l'entrée $v \in \mathbb{R}^m$ et*

$$\dot{x} = f_p(x, v), \quad p \in \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} \text{ un ensemble des indices.} \quad (\text{A.1})$$

Pour chaque $p \in \mathcal{P}$ la fonction f_p est localement Lipschitz et $f_p(0, 0) = 0$. Un système commuté est généré par la famille des systèmes (A.1) et le signal de commutation σ :

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x, v), \quad (\text{A.2})$$

où $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$ est une fonction constante par morceaux, précisant à tout instant l'indice du système actif. L'entrée $v \in \mathcal{V}$ est une fonction mesurable $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Pour les systèmes commutés, les ensembles des conditions invariants caractérisant chaque état discret sont disjoints. Autrement dit, pour un même état x , l'indice p ne peut pas avoir des valeurs différentes.

A.2 Stabilité « entrée bornée - état borné »

Les notions suivantes ont été définies dans [Son95]. Considérons les systèmes dynamiques à temps continu :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (\text{A.3})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$. La fonction $f : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitz et vérifie $f(0) = 0$. Les entrées sont des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, mesurables et essentiellement localement bornées. Nous notons $\|u(t)\|_{\infty} = (\text{ess})\sup\{|u(t)|, t \geq 0\}$.

La classe \mathcal{K} contient toutes les fonctions $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, continues, strictement croissantes et qui satisfont $\gamma(0) = 0$.

La classe \mathcal{KL} contient toutes les fonctions $\beta(\cdot, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui sont de classe \mathcal{K} pour tout $t \geq 0$. $\beta(s, t)$ tend vers 0, pour tout $s > 0$, quand $t \rightarrow \infty$.

Définition A.2.1 (Stabilité « entrée bornée - état borné ») *Le système A.3 est stable « entrée bornée - état borné » si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *L'application $(x^0, u) \rightarrow x(\cdot)$ est continue en $(0, 0)$.*

2. Il existe un gain asymptotique non-linéaire $\gamma \in \mathcal{K}$ tel que :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t, x^0, u)| \leq \gamma \|u\|_\infty. \quad (\text{A.4})$$

Théorème A.2.1 (Stabilité « entrée bornée - état borné ») *Le système A.3 est stable « entrée bornée - état borné » si et seulement s'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} et deux fonctions γ_i et γ_0 de classe \mathcal{K} , telles que :*

$$|x(t, \xi, u)| \leq \beta(|\xi|, t) + \gamma_0 \int_0^t e^{s-t} \gamma_i(|u(s)|) ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.5})$$

B

État stationnaire en virage du véhicule commandé

L'expression suivante fournit l'état stationnaire du système véhicule de l'équation (7.2) du Chapitre 7 Partie III, commandé par retour d'état linéaire $K = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)^T : C_a = Kx - C_c$ et $x = (\beta, r, \psi_L, y_L, \delta_f, \dot{\delta}_f)^T$.

$$\begin{pmatrix} -1/2 \frac{(l_f m v^2 - 2l_f l_r c_r - 2l_r^2 c_r) \rho_{ref}}{c_r (l_f + l_r)} \\ \rho_{ref} v \\ 1/2 \frac{(-2l_s l_f c_r - 2l_s l_r c_r + l_f m v^2 - 2l_f l_r c_r - 2l_r^2 c_r) \rho_{ref}}{c_r (l_f + l_r)} \\ \frac{(-2c_f l_r^2 c_r k_5 R_S - 2c_r l_f^2 c_f k_5 R_S + 2c_r l_s k_3 l_f c_f R_S - 2c_r l_f c_f k_2 R_S v + 2l_r c_r m v^2 K_p c_f nt) \rho_{ref}}{2R_S k_4 c_f c_r (l_f + l_r)} + \\ + \frac{(-l_r c_r m v^2 k_5 R_S + 4l_r c_r l_f c_f k_5 R_S + 2l_r c_r l_s k_3 c_f R_S - 2l_r c_r c_f k_2 R_S v + l_f c_f m v^2 k_5 R_S) \rho_{ref}}{2R_S k_4 c_f c_r (l_f + l_r)} + \\ + \frac{(-k_3 c_f R_S l_f m v^2 + 2k_3 c_f R_S l_f l_r c_r + 2k_3 c_f R_S l_r^2 c_r + c_f k_1 R_S l_f m v^2 - 2c_f k_1 R_S l_f l_r c_r - 2c_f k_1 R_S l_r^2 c_r) \rho_{ref}}{2R_S k_4 c_f c_r (l_f + l_r)} \\ 1/2 \frac{(2c_f l_r^2 c_r + 2c_r l_f^2 c_f + l_r c_r m v^2 + 4l_r c_r l_f c_f - l_f c_f m v^2) \rho_{ref}}{c_f c_r (l_f + l_r)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.1)$$

L'expression suivante contient l'état stationnaire du système véhicule de l'équation (7.11) du Chapitre 7 Partie III, commandé par un retour d'état linéaire $K = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)^T$ et un terme de préfiltrage $F_f : C_a = Kx + F_f \rho_{ref} - C_c$. Le vecteur d'état est $x = (\beta, r, \psi_L, y_L, \delta_f, \dot{\delta}_f)^T$.

$$\left(\begin{array}{l}
 -1/2 \frac{(l_f m v^2 - 2 l_f l_r c_r - 2 l_r^2 c_r) \rho_{ref}}{c_r (l_f + l_r)} \\
 \rho_{ref} v \\
 1/2 \frac{(-2 l_S l_f c_r - 2 l_S l_r c_r + l_f m v^2 - 2 l_f l_r c_r - 2 l_r^2 c_r) \rho_{ref}}{c_r (l_f + l_r)} \\
 1/2 \frac{\rho_{ref} (c_f k_1 R_s l_f m v^2 - 2 c_f k_1 R_s l_f l_r c_r + 2 l_r c_r m v^2 K_p c_f \eta_t + 2 c_r l_S k_3 l_f c_f R_s + 2 l_r c_r l_S k_3 c_f R_s - 4 l_r c_r l_f c_f k_5 R_s -)}{R_s k_4 c_f c_r (l_f + l_r)} \\
 1/2 \frac{\rho_{ref} (-l_r c_r m v^2 k_5 R_s - 2 c_r l_f c_f k_2 R_s v + l_f c_f m v^2 k_5 R_s - 2 l_r c_r c_f k_2 R_s v - 2 c_f k_1 R_s l_r^2 c_r -)}{R_s k_4 c_f c_r (l_f + l_r)} \\
 1/2 \frac{\rho_{ref} (-k_3 c_f R_s l_f m v^2 + 2 k_3 c_f R_s l_r^2 c_r - 2 c_r l_f^2 c_f k_5 R_s - 2 c_f l_r^2 c_r k_5 R_s + 2 k_3 c_f R_s l_f l_r c_r - 2 F_f R_s c_f c_r l_f - 2 F_f R_s c_f c_r l_r)}{R_s k_4 c_f c_r (l_f + l_r)} \\
 1/2 \frac{(2 c_f l_r^2 c_r + 2 c_r l_f^2 c_f + l_r c_r m v^2 + 4 l_r c_r l_f c_f - l_f c_f m v^2) \rho_{ref}}{c_f c_r (l_f + l_r)} \\
 0
 \end{array} \right) \tag{B.2}$$

C

Figures issues du test de la quatrième loi de commande

Cette Annexe contient des figures du test de la quatrième loi de commande qui rejette la perturbation représentée par une courbure non-mesurable. Cette loi de commande est associée à la cinquième stratégie de commutation qui active l'assistance pour un dépassement d'une zone centrée sur la voie par les roues avant, mais seulement à l'intérieur d'un ellipsoïde invariant (voir Section 7.4 du Chapitre 7 Partie III). Sur les figures ci-dessous il s'agit d'une activation à l'intérieur d'un virage très serré.

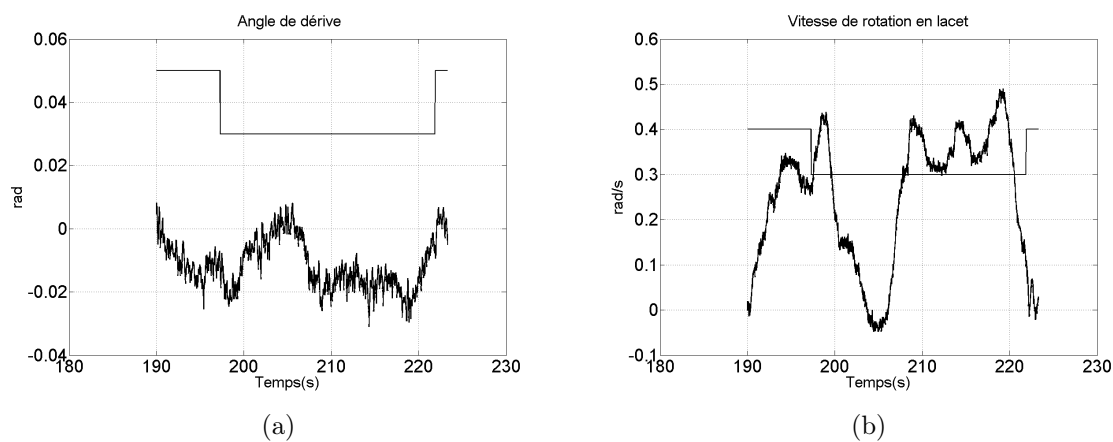


FIG. C.1 – (a) Angle de dérive. (b) Vitesse de rotation en lacet.

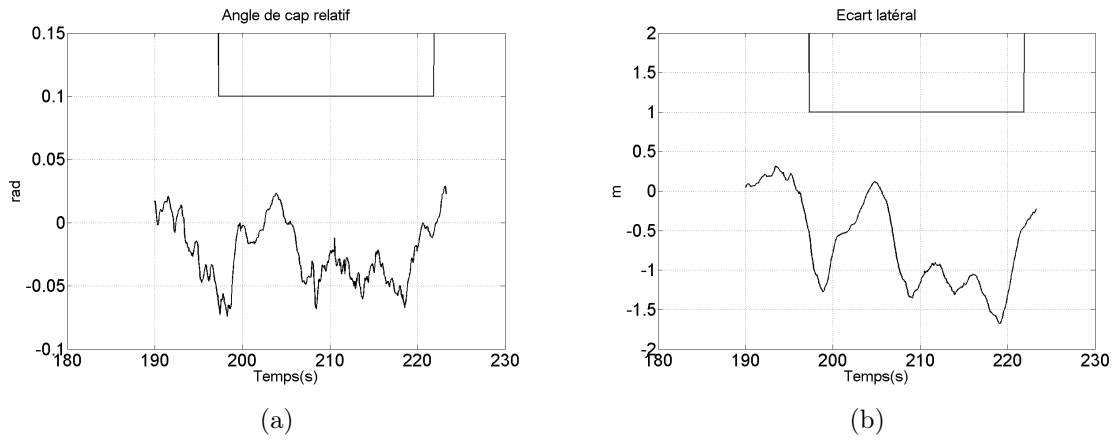


FIG. C.2 – (a) Angle de cap relatif. (b) Écart latéral.

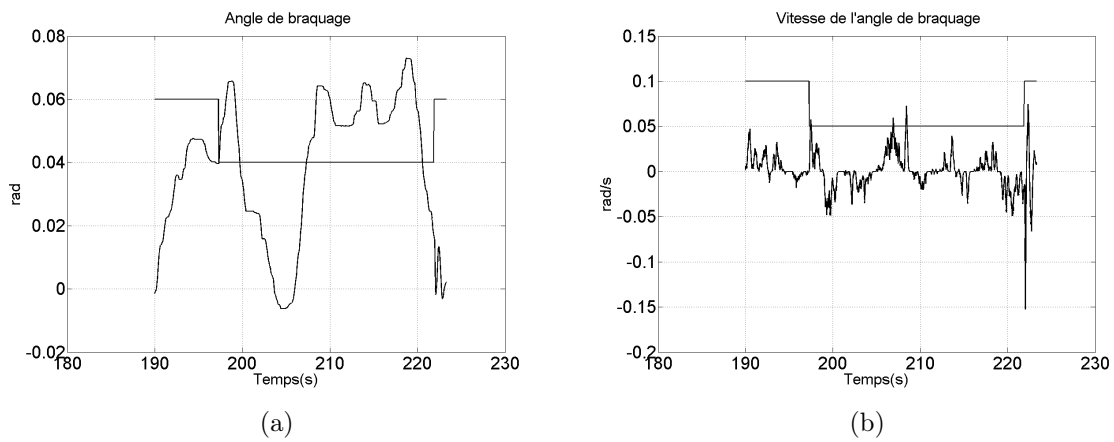


FIG. C.3 – (a) Angle de braquage. (b) Vitesse de l'angle de braquage.

D

Domaine des paramètres

Nous allons montrer que pour des paramètres p_1 et p_2 définis par :

$$p_1 = \zeta_R/v, \quad p_2 = \zeta_F/v, \quad (\text{D.1})$$

et pour des valeurs limites de p_1 et p_2 données par :

$$\begin{aligned} p_1^{min} &= \frac{\zeta_R^{min}}{v^{max}}, & p_1^{max} &= \frac{\zeta_R^{max}}{v^{min}}, \\ p_2^{min} &= \frac{\zeta_F^{min}}{v^{max}}, & p_2^{max} &= \frac{\zeta_F^{max}}{v^{min}}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

l'appartenance des paramètres $(\zeta_F, \zeta_R, p_1, p_2) \in [\zeta_F^{min}, \zeta_F^{max} = 1] \times [\zeta_R^{min}, \zeta_R^{max} = 1] \times [p_1^{min}, p_1^{max}] \times [p_2^{min}, p_2^{max}]$ implique $(\zeta_R, \zeta_F, v) \in [\zeta_R^{min}, 1] \times [\zeta_F^{min}, 1] \times [v^{min}, v^{max}]$.

Soit p_1 une valeur telle que $p_1 \in [p_1^{min}, p_1^{max}]$. Ceci implique :

$$p_1^{min} \leq p_1 \leq p_1^{max} \quad \Rightarrow \quad p_1^{min} \leq \frac{\zeta_R}{v} \leq p_1^{max}, \quad (\text{D.3})$$

ce que est équivalent à

$$v \leq \frac{\zeta_R}{p_1^{min}} \quad \text{et} \quad v \geq \frac{\zeta_R}{p_1^{max}}. \quad (\text{D.4})$$

L'inégalité double de l'équation (D.4) doit être valable pour tous $\zeta_R \in [\zeta_R^{min}, \zeta_R^{max}]$, en conséquence

$$v \leq \min_{\zeta_R} \left(\frac{\zeta_R}{p_1^{min}} \right) = \frac{\zeta_R^{min}}{p_1^{min}}, \quad v \geq \max_{\zeta_R} \left(\frac{\zeta_R}{p_1^{max}} \right) = \frac{\zeta_R^{max}}{p_1^{max}}, \quad (\text{D.5})$$

or :

$$p_1^{min} = \frac{\zeta_R^{min}}{v^{max}}, \quad p_1^{max} = \frac{\zeta_R^{max}}{v^{min}}. \quad (\text{D.6})$$

D'où il résulte

$$v^{min} \leq v \leq v^{max}. \quad (\text{D.7})$$

Une démarche similaire peut être conduite pour le paramètre p_2 .