



**HAL**  
open science

# Commande optimale rapide pour l'optique adaptative des futurs télescopes hectométriques

Clémentine Béchet

► **To cite this version:**

Clémentine Béchet. Commande optimale rapide pour l'optique adaptative des futurs télescopes hectométriques. Physique [physics]. Ecole Centrale de Lyon, 2008. Français. NNT: . tel-00363940

**HAL Id: tel-00363940**

**<https://theses.hal.science/tel-00363940>**

Submitted on 24 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CENTRE DE RECHERCHES ASTROPHYSIQUES DE LYON  
LABORATOIRE AMPÈRE, ÉCOLE CENTRALE DE LYON  
ÉCOLE DOCTORALE ÉLECTRONIQUE,  
ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE DE LYON

Thèse présentée par  
**Clémentine Béchet**

pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'École Centrale de Lyon**

**Commande optimale rapide  
pour l'optique adaptative  
des futurs télescopes hectométriques**

Jury :

---

Gérard	Rousset	Rapporteur
Jean-François	Giovannelli	Rapporteur
Henri-François	Raynaud	Examineur
Jean-Pierre	Véran	Examineur
Éric	Blanco	Examineur
Gérard	Thomas	Directeur de thèse
Michel	Tallon	Directeur de thèse

---

Année 2008

**Résumé :**

Le nombre de degrés de liberté à contrôler dans un système d'optique adaptative (OA) passe de quelques centaines pour les grands télescopes actuels à plusieurs milliers prévus sur les futurs télescopes de 30 à 100 mètres de diamètre. La méthode de commande de cette OA doit être repensée à la fois pour être en adéquation avec les nouveaux critères de performance et pour pouvoir estimer un si grand nombre de paramètres en temps réel. Je montre d'abord qu'il est possible d'améliorer l'estimation de la déformation de la surface d'onde, d'un facteur 2 sur la variance de l'erreur, en tenant compte de connaissances *a priori* sur la statistique de la turbulence atmosphérique et ce, tout en utilisant un algorithme rapide adapté aux grands systèmes. Ensuite, l'optimisation d'un critère en boucle fermée me conduit à une commande optimale par modèle interne, applicable en temps réel sur un télescope hectométrique grâce à l'algorithme rapide cité précédemment. La robustesse de cette nouvelle méthode de commande a enfin été éprouvée sur un simulateur complet d'OA et ses performances ont été comparées à d'autres approches.

**Abstract :**

The number of degrees of freedom to be controlled in an Adaptive Optics (AO) system is evolving from a few hundreds on the current telescopes to several thousands foreseen on the coming extremely large telescopes with diameters of order 30 to 100 meters. The control strategies should be adapted both to comply with the new performance criteria and to enable real-time estimation of such a large number of parameters. First, I demonstrate the quantitative improvement of the estimation, a factor of 2 on error variance, available when inserting priors about turbulence statistics, even with a fast algorithm designed for large systems. Next, the optimisation of a closed-loop criterion leads to an optimal law with an internal model control, which can be applied in real time thanks to the same fast algorithm. The robustness of this new control method is finally checked on an end-to-end AO simulator and the performance is compared to other approaches.

Il fallait être Newton pour s'apercevoir que la Lune tombe  
quand tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas.

*Mélange,*  
Paul Valéry



## Remerciements

Mes premiers remerciements sont adressés aux chercheurs *sous toutes leurs formes*, plus particulièrement à ceux que j'ai croisés au cours de ma petite vie et qui ont su me communiquer leur passion. Pour moi, comme pour beaucoup de jeunes, ils jouent un rôle essentiel pour nous donner envie de *comprendre le monde*.

Plus personnellement, je suis très reconnaissante envers Michel Tallon qui a supervisé mes travaux de recherche de près pendant ces trois ans. J'ai beaucoup apprécié la confiance qu'il m'a accordée et la liberté d'orientation qu'il m'a laissée. J'admire la précision de ses raisonnements, qui a su bien des fois redresser ma démarche. Je remercie également Éric Thiébaud pour l'énergie qu'il a déployé pour que je fasse mes premiers pas en optimisation. La rapidité de ses raisonnements et ses idées toujours novatrices constituent une source de motivation sans fin. Avec Éric, il est toujours question d'une nouvelle idée. Je reste impressionnée par la vitesse à laquelle il est capable de *noircir* les deux tableaux du couloir pour élaborer une nouvelle stratégie. Je garde aussi de mémorables souvenirs des discussions de nouvelles pistes de recherche en voiture le soir pour regagner Lyon lorsque je n'avais plus le courage de prendre le vélo.

Gérard Thomas a lui aussi du mérite dans cette affaire. J'en ai pour preuve son éméritat obtenu en 2007, mais aussi le fait qu'il ait accepté de diriger mes travaux pendant ces trois ans, avec son oeil critique d'automaticien. Je lui suis extrêmement reconnaissante du temps qu'il m'a accordé et de la patience dont il a fait preuve face à mon ignorance en automatique. Ce fut notamment un réel plaisir de pouvoir, avec Éric Blanco et Gérard, trouver un terrain d'entente scientifique malgré les fossés de vocabulaire existant entre les astronomes et les automaticiens. Je les remercie de leur ouverture d'esprit et je souhaite à Gérard une très agréable retraite !

Mes deux rapporteurs, Gérard Rousset et Jean-François Giovannelli, ont fait preuve d'un grand courage pour ingurgiter ce manuscrit dont j'estime la lecture peu digeste. J'ai apprécié leurs commentaires constructifs. Je salue particulièrement l'habileté de Jean-François pour m'ouvrir les yeux sur des pistes de recherche subversives.

Je tiens également à remercier Jean-Pierre Véran pour avoir accepté de juger mon travail et particulièrement ma soutenance à travers une vidéo-conférence de fortune, au petit jour. De même, je suis très heureuse qu'Henri-François Raynaud ait accepté d'examiner mon travail. J'ai sans doute eu tort, comme il me l'a fait remarqué, de placer dans l'intitulé de mon manuscrit l'expression *commande optimale*. J'ai toutefois souhaité conserver ce titre parce que je pense qu'il est révélateur du fait qu'il existe autant de façon d'être *optimal*, qu'il existe d'hypothèses et d'objectifs définissables.

Mon travail, durant ces trois années, a été enrichi de multiples discussions, avec des gens qui m'ont permis de comprendre davantage toute la complexité de l'optique adaptative. Carlos Correia s'est montré toujours à l'écoute et disposé à éclaircir des zones d'ombres. J'ai aussi pu rencontrer, à l'ONERA, Jean-Marc Conan et Cyril Petit, et ainsi que Caroline Kűlcsár, au L2TI, qui sont toujours disponibles pour converser et auprès desquels j'ai appris beaucoup.

Je tiens également à remercier Miska Le Louarn, de l'European Southern Observatory, pour avoir pris le temps de me présenter son simulateur nommé Octopus et m'avoir permis de tester mes algorithmes dessus. Je lui suis très reconnaissante du temps qu'il a passé (et qu'il passe encore) à répondre patiemment à ma liste infinie de questions concernant l'optique adaptative. Lors de cette expérimentation sur le simu-

lateur Octopus, j'ai apprécié de travailler avec Iciar Montilla, sans qui la comparaison des trois algorithmes contenue à la fin de ce manuscrit n'existerait pas.

Étrangement, je souhaite aussi remercier un *intrus* dans ce monde d'optique adaptative. Il s'agit de François Doré, qui a eu la sympathie de retarder sa rédaction pour achever sa thèse en même temps que moi. Et même si ce n'est que coïncidence, les discussions concernant nos recherches respectives et nos perspectives m'ont beaucoup apporté.

Et si tous ces gens m'ont aidé dans mon travail de recherche, ils sont également nombreux à m'avoir accompagnée au quotidien et à avoir transformé ces trois années en une expérience mémorable. Les fous rires, les décharges explosives et les émotions fortes sont monnaie courante au sein de l'équipe AIRI. Chacun y contribue à sa façon : Françoise, Isabelle, Renaud, Michel, Éric, Paul, Ferréol et Xavier. Je me permets même d'inclure Magali à cette liste pour tous les efforts qu'elle a fait en supportant mes caprices de cycliste et pour oser pénétrer régulièrement le bout du couloir AIRIen ! Je remercie tous les amis que j'ai eu la chance de rencontrer à l'Observatoire de Lyon, et avec qui j'ai partagé parties de volley, randonnées à ski, courses glaciaires et surtout le challenge domicile-travail à vélo sous la pluie en automne !

Ce sont ces petits plaisirs qui aident à affronter le reste.

Je tiens également à remercier ma famille et mes amis de Lyon et de Navarre, pour leur présence à toutes les bonnes occasions. Enfin, je remercie celui qui a dû souffrir le plus de mon manque de disponibilité, de mes longues absences autant que j'ai enduré les siennes. Merci Alberto de m'avoir accompagnée sur cette voie, pour une ouverture d'un genre particulier.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Contexte de l'optique adaptative pour un télescope hectométrique</b>	<b>23</b>
<b>1</b>	<b>Résolution angulaire</b>	<b>25</b>
1.1	La résolution d'un télescope . . . . .	25
1.1.1	La fonction d'étalement de point du télescope . . . . .	26
1.1.2	La fonction de transfert optique du télescope . . . . .	27
1.2	La résolution en présence d'atmosphère . . . . .	28
1.2.1	La FEP et la FTO instantanées . . . . .	29
1.2.2	Les images courte pose . . . . .	29
1.2.3	Les images longue pose . . . . .	29
1.2.4	La résolution longue pose . . . . .	31
1.3	La résolution avec une optique adaptative . . . . .	32
1.3.1	Le rapport de Strehl . . . . .	32
1.3.2	Les performances de l'optique adaptative : description du formalisme utilisé . . . . .	33
<b>2</b>	<b>L'Optique Adaptative</b>	<b>37</b>
2.1	Les sources de référence . . . . .	38
2.1.1	Les étoiles de référence naturelles . . . . .	38
2.1.2	Les étoiles de référence laser . . . . .	39
2.2	Les analyseurs de surface d'onde . . . . .	41
2.2.1	L'analyse en plan focal . . . . .	41
2.2.2	L'analyse en plan pupille . . . . .	41
2.2.3	Les incertitudes de la mesure . . . . .	45
2.2.4	Les incertitudes de modèle (analyseur de Shack-Hartmann) . . . . .	47
2.3	Miroir déformable . . . . .	48
2.4	Les optiques adaptatives à grand nombre de paramètres . . . . .	49
2.4.1	Les optiques adaptatives de champ restreint . . . . .	51
2.4.2	Les optiques adaptatives de champ large . . . . .	53
2.5	La matrice d'interaction du système . . . . .	56
2.5.1	Cas particulier de la géométrie de Fried . . . . .	57
2.6	L'asservissement du système . . . . .	58
2.6.1	Correcteur pour une OAmC . . . . .	59
2.6.2	Correcteur pour une optique adaptative en champ large ou en tomographie . . . . .	62
2.6.3	Calcul en temps réel de la correction . . . . .	63
2.7	Conclusion . . . . .	65



<b>3</b>	<b>La modélisation de la perturbation</b>	<b>67</b>
3.1	La modélisation par couche . . . . .	67
3.1.1	Modèle de turbulence de Kolmogorov . . . . .	69
3.1.2	Modèle de turbulence de von Kármán . . . . .	70
3.1.3	Statistique Normalisée . . . . .	70
3.2	La représentation spatiale de la surface d'onde . . . . .	72
3.2.1	Représentation zonale . . . . .	72
3.2.2	Représentation modale . . . . .	72
3.3	La modélisation temporelle de l'évolution de la turbulence . . . . .	78
3.4	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Approche problème inverse pour l'optique adaptative</b>	<b>81</b>
4.1	Un problème inverse linéaire Gaussien <i>simple</i> . . . . .	81
4.1.1	La modélisation de la mesure . . . . .	82
4.1.2	L'information statistique <i>a priori</i> sur les paramètres . . . . .	83
4.1.3	L'estimation en présence d'une commande . . . . .	84
4.2	L'estimation en cascade d'un signal constant . . . . .	85
4.3	Approche inverse avec évolution temporelle . . . . .	86
4.3.1	L'introduction d'un modèle d'évolution temporelle . . . . .	87
4.3.2	De Gauss à Kalman . . . . .	88
4.4	Interprétation en optique adaptative . . . . .	89
<b>II</b>	<b>La reconstruction de surface d'onde turbulente sur un grand nombre de paramètres</b>	<b>93</b>
<b>5</b>	<b>Un problème inverse simple</b>	<b>97</b>
5.1	La modélisation du système . . . . .	97
5.1.1	La statistique des erreurs . . . . .	98
5.1.2	La statistique de la surface d'onde turbulente . . . . .	98
5.1.3	Retour à l'équation de mesure . . . . .	98
5.2	Le critère de reconstruction et les reconstituteurs . . . . .	99
5.3	Article Béchet <i>et al.</i> JOSA A. 2009 . . . . .	101
5.4	La comparaison théorique des erreurs . . . . .	114
5.4.1	Le reconstituteur $\mathbf{R}_{\text{KL}}$ . . . . .	114
5.4.2	Le reconstituteur $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$ . . . . .	115
5.4.3	Le reconstituteur $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$ . . . . .	115
5.4.4	Synthèse . . . . .	115
5.5	Conclusion . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Les algorithmes rapides de reconstruction</b>	<b>119</b>
6.1	La reconstruction par Transformée de Fourier . . . . .	121
6.2	L'approximation de $\mathbf{C}_w^{-1}$ . . . . .	122
6.2.1	L'approximation diagonale dans le domaine de Fourier . . . . .	123
6.2.2	L'approximation creuse par le Laplacien . . . . .	123
6.2.3	L'approximation fractale . . . . .	123
6.3	La factorisation de Cholesky creuse . . . . .	123
6.4	Les gradients conjugués préconditionnés . . . . .	124
6.4.1	Les préconditionneurs en optique adaptative . . . . .	126

6.4.2	Algorithme des gradients conjugués préconditionnés . . . . .	128
6.5	Conclusion . . . . .	128
<b>7</b>	<b>Comparaison des reconstitueurs par simulations</b>	<b>131</b>
7.1	Simulation de surface d'onde turbulente . . . . .	132
7.2	Les reconstructions de type maximum de vraisemblance sur des grands systèmes . . . . .	134
7.2.1	Le préconditionnement pour la reconstruction de maximum de vraisemblance . . . . .	134
7.2.2	Résultats . . . . .	135
7.3	La comparaison de FrIM MNML et FrIM MAP . . . . .	137
7.3.1	La vitesse de convergence de FrIM MAP en fonction de l'échelle externe . . . . .	138
7.3.2	La comparaison des erreurs de FrIM MAP et de FrIM MNML . . . . .	140
7.4	Application aux étoiles laser . . . . .	141
7.4.1	Publication Tallon <i>et al.</i> présentée à SPIE Marseille (juin 2008) . . . . .	141
7.4.2	La corrélation des erreurs de mesure . . . . .	151
7.4.3	L'impact des corrélations sur la reconstruction . . . . .	151
7.5	L'impact d'une erreur sur les <i>a priori</i> . . . . .	152
7.5.1	L'erreur d'estimation de l'échelle externe . . . . .	153
7.5.2	L'erreur sur le poids de la régularisation . . . . .	155
7.6	Conclusion . . . . .	161
<b>8</b>	<b>La correction de surface d'onde turbulente</b>	<b>163</b>
8.1	Le critère de correction et son optimisation . . . . .	164
8.1.1	Les équations . . . . .	164
8.1.2	La reformulation du critère . . . . .	165
8.1.3	L'optimisation du critère . . . . .	165
8.2	L'interprétation de l'estimateur pour la correction . . . . .	166
8.2.1	La reformulation de $\mathbf{E}$ . . . . .	166
8.2.2	L'extension à la correction sur plusieurs miroir déformable . . . . .	167
8.3	L'erreur de correction . . . . .	168
8.3.1	L'erreur de sous-dimensionnement $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$ . . . . .	168
8.3.2	L'erreur due au repliement . . . . .	169
8.3.3	La comparaison des corrections . . . . .	172
<b>III</b>	<b>L'OA en boucle fermée sur un télescope hectométrique</b>	<b>175</b>
<b>9</b>	<b>Problème inverse en boucle fermée</b>	<b>177</b>
9.1	Les équations en boucle fermée . . . . .	177
9.1.1	Le modèle des mesures . . . . .	177
9.1.2	La discrétisation temporelle . . . . .	178
9.2	La loi de commande et le critère à optimiser . . . . .	179
9.3	L'optimisation du critère . . . . .	180
9.3.1	L'optimisation par rapport à $\mathbf{U}$ . . . . .	181
9.3.2	L'optimisation par rapport à $\mathbf{E}$ . . . . .	181
9.4	La mise en oeuvre de la loi de commande . . . . .	182
9.4.1	La reformulation de l'estimateur $\mathbf{E}$ . . . . .	182

9.4.2	Le détail des 3 étapes de <b>E</b> . . . . .	183
9.5	Béchet <i>et al.</i> publié dans <i>Traitement du signal</i> . . . . .	186
9.6	L'analyse du correcteur . . . . .	197
9.6.1	Le diagramme de la boucle fermée . . . . .	197
9.6.2	Le transfert en boucle fermée . . . . .	197
9.6.3	Analogie entre la CMI et la correction classique . . . . .	198
9.6.4	La comparaison avec d'autres correcteurs . . . . .	200
9.7	Conclusion . . . . .	201
<b>10</b>	<b>Les simulations d'OAmC en boucle fermée</b>	<b>203</b>
10.1	La modélisation du système . . . . .	203
10.1.1	La modélisation spatiale de $\mathbf{w}$ . . . . .	204
10.1.2	La modélisation temporelle de $\mathbf{w}$ . . . . .	204
10.2	L'algorithme de calcul de la commande . . . . .	207
10.2.1	La reconstruction itérative avec FrIM MAP . . . . .	208
10.2.2	La prédiction et la projection . . . . .	209
10.3	Le budget d'erreurs . . . . .	209
10.4	Article en préparation sur FrIM en boucle fermée . . . . .	210
10.5	Les résultats et les conclusions . . . . .	223
<b>IV</b>	<b>Validation sur Octopus</b>	<b>225</b>
<b>11</b>	<b>Le premier contact avec Octopus</b>	<b>229</b>
11.1	La présentation d'Octopus . . . . .	229
11.1.1	Les modèles utilisés par Octopus . . . . .	230
11.1.2	Les configurations testées . . . . .	231
11.1.3	L'interfaçage et la procédure de simulation . . . . .	231
11.1.4	Les outils pour l'analyse des performances . . . . .	233
11.2	Les tests de correction statique . . . . .	235
11.2.1	La comparaison du modèle d'ASO d'Octopus au modèle linéaire des angles d'arrivée . . . . .	235
11.2.2	Comparaison aux modèles d'ASO impliqués dans la reconstruction	238
11.2.3	Simulations de correction statique . . . . .	240
<b>12</b>	<b>Les performances d'OAmC en boucle fermée</b>	<b>243</b>
12.1	La convergence et nombre d'itérations . . . . .	244
12.2	Les conditions de turbulence variables . . . . .	244
12.3	La stabilité vis-à-vis des erreurs d'alignements du système . . . . .	245
12.4	La performance à faible flux . . . . .	246
12.5	Publication sur la validation de FrIM sur Octopus . . . . .	250
<b>V</b>	<b>Annexes</b>	<b>263</b>
<b>A</b>	<b>Fast Minimum Variance Wavefront Reconstruction</b>	<b>265</b>

<b>B Transformée de Laplace et Transformée en <math>z</math></b>	<b>281</b>
B.1 Transformée de Laplace : représentation en temps continu . . . . .	281
B.2 Transformée en $z$ : représentation en temps discret . . . . .	281



# Table des figures

1.1	Schéma optique . . . . .	26
2.1	Schéma de principe d'une optique adaptative . . . . .	37
2.2	Effet de cône associé à une étoile laser. . . . .	40
2.3	Schéma de principe de l'analyseur pyramide . . . . .	43
2.4	Définition et principe de mesure d'angle d'arrivée. . . . .	44
2.5	Principe de l'analyseur Shack-Hartmann . . . . .	45
2.6	Principe du miroir déformable . . . . .	49
2.7	Effet d'anisoplanétisme . . . . .	50
2.8	Tomographie laser en champ restreint : OATL . . . . .	52
2.9	Schéma de principe de l'optique adaptative multiconjuguée, OAMC orientée étoiles. . . . .	54
2.10	Géométrie de Fried sur NAOS . . . . .	57
2.11	Modes non vus par le Shack-Hartmann . . . . .	58
2.12	Schéma d'une optique adaptative en boucle fermée . . . . .	58
2.13	Chaîne directe du système . . . . .	59
2.14	Schéma bloc d'une optique adaptative classique . . . . .	60
2.15	Coût calculatoire de la méthode de multiplication matrice-vecteur . . . . .	64
3.1	Représentations discrètes de surface d'onde . . . . .	73
3.2	Modes de la représentation fractale . . . . .	77
3.3	Taux de remplissage de la matrice de l'opérateur fractal . . . . .	78
6.1	Coût calculatoire de la méthode de multiplication matrice-vecteur . . . . .	120
6.2	Coûts calculatoires des méthodes de reconstruction de surface d'onde . . . . .	129
7.1	Saturation de la fonction de structure . . . . .	134
7.2	Propagation du bruit sur pupilles circulaires et carrées . . . . .	136
7.3	Propagation du bruit pour les reconstituteurs de maximum de vraisemblance . . . . .	137
7.4	Vitesse de Convergence de l'algorithme FrIM MAP . . . . .	138
7.5	Vitesse de convergence relative de l'algorithme FrIM MAP . . . . .	139
7.6	Erreur quadratique moyenne normalisée en fonction de $\mu_0$ . . . . .	140
7.7	Allongement des taches images sur les sous-pupilles de l'analyseur pour des étoiles de référence laser . . . . .	152
7.8	Profil de l'erreur de reconstruction $\sqrt{\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}}$ en nanomètres en fonction de la méthode de reconstruction sur la pupille du télescope pour des étoiles de référence laser . . . . .	153

7.9	Erreurs de reconstruction MAP et maximum de vraisemblance zonal avec un modèle de Kolmogorov en fonction de l'échelle externe . . . . .	154
7.10	Erreur de reconstruction MAP et maximum de vraisemblance modal avec un modèle de Kolmogorov en fonction de l'échelle externe . . . . .	155
7.11	Erreur de reconstruction MAP et maximum de vraisemblance zonal avec un modèle de von Kármán en fonction de l'échelle externe . . . . .	156
7.12	Erreur de reconstruction MAP et maximum de vraisemblance modal avec un modèle de von Kármán en fonction de l'échelle externe . . . . .	157
7.13	Évolution théorique de l'erreur de reconstruction normalisée en fonction de l'hyperparamètre de régularisation . . . . .	158
7.14	Évolution de l'erreur de reconstruction en fonction de l'hyperparamètre de régularisation . . . . .	159
7.15	Évolution du rapport des erreurs de reconstruction de FrIM MAP et FrIM MNML en fonction de l'hyperparamètre de régularisation . . . . .	160
7.16	Évolution du rapport de Strehl en fonction de l'hyperparamètre de régularisation . . . . .	160
8.1	Comparaison des erreurs pour les modèles de Fried et d'analyseur sur-échantillonné . . . . .	171
9.1	Diagramme d'OA en boucle ouverte et en boucle fermée . . . . .	178
9.2	Chronogramme de l'OA en boucle fermée . . . . .	179
9.3	Diagramme d'OA avec modèle interne . . . . .	198
9.4	Diagramme conventionnel de commande avec modèle interne . . . . .	199
9.5	Diagramme d'OA avec la commande POLC . . . . .	201
10.1	Évolution du budget d'erreur en boucle fermée en fonction du nombre d'itérations de la reconstruction et de l'échantillonnage du système . . . . .	211
11.1	Exemples de fichiers de textes pour les coordonnées des sous-pupilles et des actionneurs . . . . .	232
11.2	Schéma de la procédure de simulations sur Octopus pour comparer les méthodes FrIM CMI et MMV-I . . . . .	234
11.3	Comparaison du modèle d'ASO d'Octopus avec le modèle théorique des angles d'arrivée sur une défocalisation. . . . .	236
11.4	Comparaison du modèle d'Octopus en présence de bruit de photons et du modèle des AA théoriques . . . . .	237
11.5	Comparaison du modèle d'Octopus en présence de bruit de photons et des modélisations linéaires approchées pour VLT <sub>2</sub> . . . . .	239
11.6	Comparaison du modèle d'Octopus en présence de bruit de photons et des modélisations linéaires approchées pour E-ELT <sub>1</sub> . . . . .	239
11.7	Strehl en correction simple pour E-ELT <sub>1</sub> en fonction de l'hyperparamètre	241
12.1	Fermeture de la boucle sur Octopus . . . . .	244
12.2	Comparaison des trois méthodes en fonction des conditions de turbulence pour E-ELT <sub>2</sub> . . . . .	245
12.3	Rapport de Strehl courte pose au fur et à mesure des boucles pour différents désalignements du système . . . . .	246
12.4	Stabilité de FrIM CMI jusqu'à un défaut d'alignement de $d_l/2$ pour E-ELT <sub>2</sub>	247

12.5	Comparaison des trois méthodes en fonction de la magnitude de l'étoile de référence . . . . .	248
12.6	Comparaison de MMV-I et FrIM CMI-I pour $N_{\text{ph}} = 100$ photons . . . . .	249
12.7	Comparaison de MMV-I et FrIM CMI-I pour $N_{\text{ph}} = 10$ photons . . . . .	249
12.8	Comparaison de MMV-I et FrIM CMI-I pour $N_{\text{ph}} = 1$ photon . . . . .	250





# Liste des tableaux

1	Acronymes . . . . .	18
2	Notations . . . . .	19
11.1	Paramètres des configurations testées sur Octopus . . . . .	232

OA	Optique adaptative
FEP	Fonction d'étalement de point
FTO	Fonction de transfert optique
ASO	Analyseur de surface d'onde
MD	Miroir déformable
AA	Angles d'arrivée
OAmC	Optique adaptative monoconjuguée
OAX	Optique adaptative extrême
OAMC	Optique adaptative multiconjuguée
OAMO	Optique adaptative multiobjet
OACL	Optique adaptative de couche limite
OATL	Optique adaptative tomographique avec source de référence laser
RSB	Rapport signal à bruit
MAP	Maximum <i>a posteriori</i>
CMI	Commande par modèle interne
FrIM	Algorithme de reconstruction itératif avec l'approximation fractale
FrIM MAP	Algorithme de reconstruction MAP de la méthode FrIM
FrIM CMI	Algorithme de commande utilisant FrIM MAP et une commande CMI
POLC	Commande en pseudo-boucle ouverte proposée par Gilles (2005)
MMV	Multiplication matrice-vecteur
FTR	Reconstructeur par Transformée de Fourier
MMV-I	Algorithme de commande de type MMV combiné avec un intégrateur
FTR-I	Algorithme de commande de type FTR combiné avec un intégrateur
FrIM CMI-I	Algorithme FrIM CMI combiné avec une correction intégrale (type POLC)
FFT	Algorithme de Transformée de Fourier rapide
GC	Algorithme des gradients conjugués
mas	millisecondes d'arc
ms	millisecondes
ESO	Observatoire Européen Austral
VLT	Très grands télescopes de l'ESO, au Cerro Paranal (Chili)
OWL	Télescope incroyablement large, projet européen de 100 m de diamètre
ELT	Télescopes extrêmement grands ou télescopes hectométriques
E-ELT	Télescope hectométrique européen
TMT	Télescope de trente mètres (U.S.A.)
GMT	Télescope géant de Magellan
LBT	Grand telescope binoculaire, en Arizona
NAOS	Système d'optique adaptatif Nasmyth, sur un VLT
SOAR	Southern Astronomical Research
SAM	Module adaptatif de SOAR
WHT	William Herschel Telescope
GLAS	OA de couche limite conçue pour le WHT

TAB. 1 – Acronymes

$\mathbf{r} = (r, \theta)$	Vecteur de coordonnées polaires dans le plan pupille
$\beta_i, \beta_d$	Vecteurs de coordonnées angulaires par rapport à l'axe optique du télescope
$\mathcal{A}$	Domaine couvert par l'ouverture du télescope dans le plan pupille
$\mathcal{S}_A$	Surface de l'ouverture
$D$	Diamètre du miroir primaire du télescope
$\lambda_I$	Longueur d'onde d'observation
$\lambda_{OA}$	Longueur d'onde d'analyse de l'OA
$r_0$	Paramètre de Fried
$n_a$	Nombre de degrés de liberté du miroir déformable (MD)
$\phi_s$	Fluctuations de phase dues aux aberrations statiques du télescope
$\phi, \phi^c, \phi^{\text{res}}$	Variations de la phase incidente, produite par le miroir et résiduelle
$l$	Fluctuations d'amplitude de l'onde incidente
$w, w^{\text{res}}$	Surfaces d'onde turbulente et résiduelle
$w^c$	Déformée générée par le miroir
$\mathcal{P}, \mathcal{P}_0$	Fonction pupille généralisée et transmittance du télescope
$H_{\text{tel}}, \tilde{H}_{\text{tel}}$	FEP et FTO du télescope en l'absence d'atmosphère
$\langle \tilde{H}_{\text{atm}} \rangle$	FTO longue pose de l'Atmosphère
$O$	Distribution de luminance d'un objet astrophysique sur le ciel
$I$	Intensité dans le plan image
$\mathcal{R}, \langle \mathcal{R} \rangle$	Pouvoirs de résolution au sens de Strehl : instantané et longue pose
$\mathcal{D}$	Fonction de structure de l'onde incidente $\psi$ , en logarithme
$\mathcal{D}_w$	Fonction de structure de la phase incidente $\phi$
$\mathcal{S}_w$	Densité spectrale de puissance spatiale de la surface d'onde $w$
$\tau$	Temps de pose et de transfert de charge du détecteur
$\mathbf{S}_o z^{-1}$	Modèle linéaire nominal de l'ASO
$\mathbf{M}_o$	Modèle linéaire nominal du MD
$\mathbf{S}$	Modèle de l'analyseur de surface d'onde (ASO)
$\mathbf{m}$	Fonctions d'influence du MD
$\alpha$	Angle d'arrivée d'une surface d'onde
$\mathbf{d}, \mathbf{a}$	Vecteur de mesures dans $\mathbb{R}^m$ et de commande dans $\mathbb{R}^{n_a}$
$\mathbf{e}$	Vecteur des incertitudes de mesure dans $\mathbb{R}^m$
$\mathbf{y}$	Vecteur de mesures boucle ouverte modélisées, sans bruit, dans $\mathbb{R}^m$
$\mathbf{b}$	Projection de la surface d'onde sur l'espace des actionneurs $\mathbb{R}^{n_a}$
$\mathbf{G}$	Matrice d'interaction du système
$\mathbf{Q}(z)$	Partie dynamique du correcteur d'OA dans une architecture classique
$Q_{\text{MI}}(z)$	Correcteur additionnel scalaire dans une architecture d'OA avec modèle interne
$\mathbf{R}$	Reconstructeur de surface d'onde
$\mathbf{F}$	Opérateur de projection orthogonale sur l'espace des actionneurs $\mathbb{R}^{n_a}$
$\mathbf{\Gamma}$	Opérateur de prédiction
$\mathbf{E}$	Opérateur d'estimation dans la correction
$\mathbf{C}_e, \mathbf{W}_e = \mathbf{C}_e^{-1}$	Covariance des erreurs de mesure, et son inverse
$\mathbf{C}_w$	Covariance spatiale de la surface d'onde turbulente
$\mathcal{M}$	Espace image du miroir déformable
$\mathcal{M}_\perp$	Espace orthogonal à l'image du miroir déformable
$\langle \epsilon^2 \rangle_\infty$	Erreur due à la paramétrisation
$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$	Erreur de reconstruction
$\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}_\perp}, \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$	Erreur de sous-dimensionnement et son complément
$\langle \epsilon^2 \rangle_\tau$	Erreur due au retard de la correction
$(f g)$	Produit scalaire des fonctions $f$ et $g$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A}; \mathbb{R})$
$d_l$	Pas d'échantillonnage des mesures de gradients de l'ASO
$d_e$	Pas d'échantillonnage de la surface d'onde en représentation zonale

TAB. 2 – Notations



# Introduction

Les astronomes scrutent de plus en plus loin dans l'univers pour trouver des traces et des explications de sa formation et de son évolution. Pour continuer à progresser dans cette recherche, ils visent des objets scientifiques de plus en plus difficiles d'accès, parce que souvent très éloignés, ou du moins peu brillants vus de notre Terre. Ils souhaitent également avoir accès à des détails de plus en plus petits, ce qui sur le ciel revient à obtenir une résolution angulaire toujours plus fine. Ces deux améliorations sont liées à un même paramètre de conception du télescope : son diamètre. En effet, pour accéder à des objets dont le rayonnement devient très faible il faut augmenter la surface collectrice de photons. Celle-ci croît proportionnellement au carré du diamètre du miroir primaire du télescope. Par ailleurs, la résolution angulaire théorique d'un télescope est également directement fonction du diamètre de cette pupille. C'est ce qui a conduit jusqu'à nos jours à la construction incessante de télescopes de miroirs primaires toujours plus grands. Les années 1990 ont vu fleurir la génération des télescopes décimétriques. Les plus grands parmi ceux-ci sont les deux télescopes Keck (Hawaii) de 9.8 mètres (1993 et 1996), le télescope japonais Subaru (Hawaii, 1998), les deux télescopes Gemini North (Hawaii, 1999) et Gemini South (Chili, 2001) de 8.1 mètres chacun, et les 4 unités du Very Large Telescope (VLT, Chili entre 1998 et 2001) aux miroirs primaires de 8.2 mètres de diamètre. Le Grand Télescope des Canaries (GTC) est désormais le plus grand miroir primaire avec son diamètre de 10.4 mètres qu'il a pointé vers le ciel pour la première fois au cours de l'été 2007. Enfin au printemps 2008, le grand télescope binoculaire (LBT), en Arizona, a combiné ses deux *pupilles* de 8.4 mètres de diamètre chacune afin de réaliser des observations équivalentes à celles d'un télescope de 11.8 mètres.

La soif d'observations des astronomes ne s'étanchant jamais, les nouveaux programmes scientifiques prévus pour la vingtaine d'années à venir nécessiteront cependant des télescopes encore plus grands, hectométriques, autrement dit *des télescopes géants*. Une première solution est adoptée pour le télescope géant de Magellan (GMT), consistant à accoler 7 miroirs monolithiques de 8 mètres de diamètres en pétales. Ce télescope devrait voir sa première lumière en 2016. Par ailleurs, les États-Unis travaillent à la conception du télescope de trente mètres (TMT), qui comme son nom l'indique possèdera un miroir primaire de 30 mètres de diamètre. L'Europe a quant à elle envisagé différents projets, d'abord l'*Overwhelmingly Large Telescope* (OWL) symbolisant la démesure avec ses 100 mètres de diamètre, pour finalement se concentrer sur un télescope de 42 mètres, le télescope extrêmement large européen (E-ELT). Si tout va bien, l'E-ELT et le TMT pointeront l'univers lointain à partir de 2017 ou 2018. C'est dans le cadre de l'étude de dimensionnement du télescope E-ELT que j'ai effectué ma thèse.

Il est vrai que la turbulence de l'atmosphère terrestre affecte la résolution des té-

lescopes au sol, ce qui pourrait faire la part belle aux télescopes spatiaux qui, eux, s'affranchissent naturellement de ce problème. Cependant, les télescopes dans l'espace requièrent des moyens financiers beaucoup plus importants et il est particulièrement difficile de concevoir un télescope spatial avec une surface collectrice dépassant 10 mètres de diamètre. Les scientifiques ont donc mis au point des systèmes d'optique adaptative (OA) pour compenser les perturbations de l'atmosphère et redonner aux télescopes terrestres une résolution proche de leur limite de diffraction. Une optique adaptative en astronomie a pour objectif de corriger les effets de la turbulence atmosphérique en déformant en temps réel un miroir du télescope. La qualité de la correction augmente avec le nombre de degrés de liberté de ce miroir.

Il faut noter que les systèmes d'OA existants ont d'ores et déjà démontré qu'il était possible d'obtenir des images de meilleure résolution au sol que celles généralement obtenues dans l'espace. Ainsi la raison d'être des télescopes terrestres n'est plus à remettre en question et leur développement s'accompagnera nécessairement de la conception d'un ou plusieurs systèmes d'OA.

Toutefois, le changement d'échelle entre les télescopes décimétriques et ceux hectométriques soulèvent de nombreux défis, notamment concernant l'optique adaptative. Un des points critiques porte sur l'algorithme de commande de cette OA, c'est-à-dire sur la méthode de calcul en temps réel de la correction à appliquer. En effet, la commande faisant office sur les systèmes actuels n'est plus adaptée aux optiques adaptatives complexes prévues pour les télescopes hectométriques. C'est ainsi la méthode de calcul de cette commande qui est revisitée dans ce manuscrit, afin d'investiguer comment résoudre ce problème de correction en temps réel sur un système à très grand nombre de degrés de liberté.

Ce manuscrit est composé de quatre parties. Dans un premier temps, je présente le contexte de cette étude. Sont mis en avant les objectifs de la correction d'optique adaptative en terme de résolution angulaire, le principe de fonctionnement des systèmes d'OA et les outils qui existent pour déterminer la correction, qu'il s'agisse de modélisation de la perturbation ou de théorie de l'estimation. De cette présentation, ressortent plusieurs étapes caractéristiques de la correction : une reconstruction, une projection et une correction dynamique (liée à une prédiction).

La seconde partie de ce manuscrit est essentiellement consacrée à l'étape de reconstruction de la perturbation atmosphérique pour un système à grand nombre de paramètres. Elle conduit à la définition d'un algorithme de reconstruction rapide adapté à des contraintes de temps réel sur un télescope hectométrique.

Dans une troisième partie, l'optimisation d'un critère de correction conduit à une méthode de commande pour l'optique adaptative en boucle fermée sur un grand système. Je montre qu'il est possible de mettre à profit la méthode de reconstruction rapide étudiée dans la partie précédente pour le calcul de cette commande en boucle fermée. Les performances de cette correction pour une application en temps réel sur un système à grand nombre de degrés de liberté sont évaluées à partir de simulations simples.

Enfin, dans une quatrième partie, cette méthode de commande est validée sur le simulateur complet Octopus, implémenté à l'observatoire européen austral (ESO, Allemagne). Ceci constitue une première étape vers la validation de cette loi de commande aux conditions réelles de fonctionnement d'une optique adaptative. Ces tests sur le simulateur mettent en évidence les atouts et les limites de ce nouvel algorithme de commande pour le télescope E-ELT.

## Première partie

# Contexte de l'optique adaptative pour un télescope hectométrique





# Chapitre 1

## Résolution angulaire des grands télescopes terrestres

La résolution angulaire ou pouvoir séparateur d'un télescope caractérise la finesse des détails qui peuvent être discernés sur la voûte céleste. Un instrument optique d'ouverture de dimension finie a une résolution limite finie, du fait de la diffraction de la lumière. Cette limite est appelée *résolution du télescope à la limite de diffraction* et est fixée par le rapport de la longueur d'onde d'observation au diamètre de l'ouverture,  $\lambda_I/D$ . C'est la résolution effective des télescopes spatiaux, aux défauts près des optiques et de l'échantillonnage par le détecteur. Le télescope Hubble offre ainsi une résolution optique de quelques 100 millisecondes d'arc (mas) dans le visible pour un diamètre de miroir primaire de 240cm.

Ainsi construire des télescopes de diamètre de plus en plus grand permet de repousser les limites de résolution des observations astronomiques. Toutefois, la résolution d'un grand télescope est dégradée s'il est placé sur Terre, parce que l'atmosphère terrestre, turbulente, perturbe la surface d'onde venant du ciel. Quel que soit le diamètre d'un télescope terrestre, sa résolution angulaire limite est déterminée par la turbulence atmosphérique au-dessus de son ouverture.

L'optique adaptative (OA) est un système asservi qui vise à compenser les déformations de la surface d'onde incidente en temps réel. Une optique adaptative idéale, compensant parfaitement les perturbations, permettrait de retrouver la résolution à la limite de diffraction d'un télescope sur Terre.

Ce chapitre est destiné à présenter les objectifs d'une optique adaptative, en expliquant quels sont les paramètres influant sur la résolution angulaire. Dans un premier temps, je rappelle comment caractériser la résolution d'un télescope en l'absence d'atmosphère. Ce critère n'est plus suffisant en présence d'atmosphère, il est nécessaire de tenir compte de la dégradation de la résolution due à l'atmosphère. Lorsque le télescope est utilisé avec une optique adaptative, un critère essentiel pour qualifier la qualité de la correction est le rapport de Strehl.

### 1.1 La résolution d'un télescope

La transmission d'un télescope est décrite par la fonction pupille généralisée

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_0(\mathbf{r}) e^{i\phi_s(\mathbf{r})}. \quad (1.1)$$

$\mathcal{P}_0$  et  $\phi_s$  sont respectivement la transmittance et les aberrations de phase du télescope. Ce sont deux fonctions réelles de  $\mathbf{r} = (r, \theta)$ , vecteur de coordonnées polaires dans le plan pupille du télescope. Elles sont supposées statiques ou quasi-statiques et dépendent de la longueur d'onde d'observation  $\lambda_I$ . Dans toutes les équations de ce chapitre,  $i = \sqrt{-1}$ .

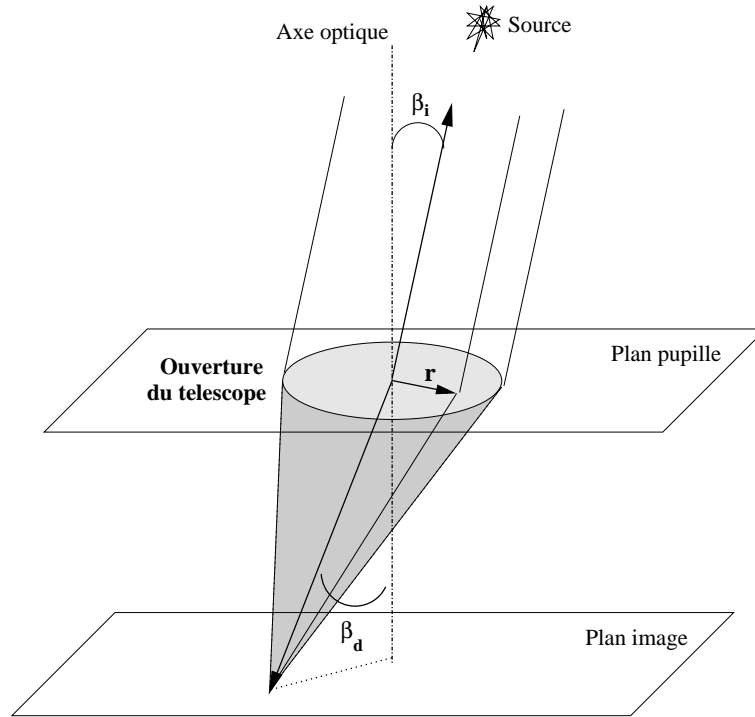


FIG. 1.1 – Schéma optique. La source se trouve dans le plan objet, à l'infini, sur le ciel dans une direction d'incidence  $\beta_i$  par rapport à l'axe optique du télescope. Le plan image est conjugué du plan objet à travers le télescope. La relation (1.2) donne l'expression de l'amplitude diffractée par le télescope dans la direction  $\beta_d$  du plan image à partir de la source observée.

Une source ponctuelle monochromatique émet une onde sphérique, mais regardée par une ouverture de diamètre  $D$  petit devant la distance à cette source, la surface d'onde incidente est approximativement plane. D'après la théorie de la diffraction de Fraunhofer (Goodman, 2005), l'amplitude diffractée  $\tilde{\mathcal{P}}(\beta_d, \beta_i)$  à un angle  $\beta_d$  dans le plan image, de l'onde émise par une telle source à un angle  $\beta_i$  de l'axe optique sur le ciel, s'écrit

$$\tilde{\mathcal{P}}(\beta_d, \beta_i) = \mathcal{C}(\beta_i) \int \mathcal{P}(\mathbf{r}) e^{-2i\pi\beta_d \cdot \mathbf{r}/\lambda_I} d\mathbf{r}, \quad (1.2)$$

où  $\beta_d$  est un vecteur de coordonnées angulaires bidimensionnelles dans le plan image et  $\mathcal{C}$  dépend de la position angulaire (bidimensionnelle aussi)  $\beta_i$  de la source (cf. figure 1.1). D'après l'équation (1.2), le système optique se comporte comme un opérateur de Fourier entre le plan pupille et le plan image.  $\beta_d$  est la variable conjuguée de  $\mathbf{r}/\lambda_I$ .

### 1.1.1 La fonction d'étalement de point du télescope

La fonction d'étalement de point (FEP), *point spread function* en anglais, est la distribution d'intensité  $H$  dans le plan image engendrée par l'observation d'une source

ponctuelle monochromatique à l'infini à un angle  $\beta_i$  de l'axe optique, *i.e.*

$$H(\beta_d, \beta_i) = \tilde{\mathcal{P}}(\beta_d, \beta_i) \tilde{\mathcal{P}}^*(\beta_d, \beta_i) = \left| \tilde{\mathcal{P}}(\beta_d, \beta_i) \right|^2 \quad (1.3)$$

où la notation  $\tilde{\mathcal{P}}^*$  désigne le conjugué de  $\tilde{\mathcal{P}}$ , et  $|\tilde{\mathcal{P}}|$  son module.

Dans le cas idéal d'une ouverture circulaire de diamètre  $D$  de transmission normalisée

$$\mathcal{P}_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2/(\sqrt{\pi}D) & \text{si } r \leq D/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.4)$$

et sans aberrations de phase  $\phi_s = 0$ , la FEP, pour  $\beta_i = 0$ , est la tache d'Airy.

En pratique, la fonction pupille d'un télescope est rarement décrite par l'équation (1.4), du fait de la présence d'une obstruction centrale, engendrée par la présence du miroir secondaire, ou d'une araignée (les bras du support de ce même miroir). En conséquence, la FEP sur l'axe optique n'est pas exactement la tache d'Airy, mais une fonction similaire appelée plus généralement tache de diffraction du télescope  $H_{\text{tel}}$ . Dans la mesure du possible, je prends en compte dans la suite la présence de l'obstruction centrale de diamètre  $\eta D$ , avec  $0 \leq \eta \leq 1$  et

$$\mathcal{P}_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2/(\sqrt{\pi(1-\eta^2)}D) & \text{si } \eta D/2 \leq r \leq D/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Le domaine d'isoplanétisme du télescope délimite le champ angulaire sur le ciel pour lequel la FEP a la même forme dans toutes les directions d'observations  $\beta_i$ , alors  $H(\beta_d, \beta_i) = H(\beta_d - \beta_i)$ .

Les objets astrophysiques peuvent généralement être considérés comme un ensemble de sources ponctuelles incohérentes. L'image par le télescope d'un tel objet est la superposition des images dues à ces sources ponctuelles

$$I(\beta_d) = \int O(\beta_i) H(\beta_d, \beta_i) d\beta_i.$$

où  $I$  désigne l'intensité de l'image et  $O$  l'intensité lumineuse de l'objet émise depuis la direction  $\beta_i$ . En supposant que l'objet astrophysique est contenu dans le domaine d'isoplanétisme, alors son image est

$$\begin{aligned} I(\beta_d) &= \int O(\beta_i) H(\beta_d - \beta_i) d\beta_i \\ &= [O * H](\beta_d), \end{aligned} \quad (1.6)$$

qui est le produit de convolution de sa distribution d'intensité sur le ciel et de la FEP. Le signe  $*$  désigne le produit de convolution. La FEP représente donc la réponse impulsionnelle du télescope.

### 1.1.2 La fonction de transfert optique du télescope

La relation fondamentale (1.6) peut être traduite en fréquences par un simple produit

$$\tilde{I}(\mathbf{f}) = \tilde{H}(\mathbf{f}) \tilde{O}(\mathbf{f}).$$

où  $\mathbf{f}$  est la variable conjuguée de  $\beta_d$  en fréquences spatiales. Un système optique est donc aussi caractérisé par sa réponse en fréquence spatiale, la fonction de transfert optique (FTO)  $\tilde{H}(\mathbf{f})$ .

D'après le théorème de Wiener-Khintchine, on peut réécrire la FTO comme

$$\tilde{H}(\mathbf{f}) = \mathcal{B} \int \mathcal{P}(\mathbf{r}) \mathcal{P}^*(\mathbf{r} - \lambda_I \mathbf{f}) d\mathbf{r}, \quad (1.7)$$

pour faire intervenir la fonction d'auto-corrélation de l'amplitude complexe  $\mathcal{P}$  dans le plan pupille. L'équation de conservation de l'énergie lumineuse,

$$\tilde{H}(\mathbf{0}) = \mathcal{B} \int |\mathcal{P}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 1, \quad (1.8)$$

fournit la valeur de la constante de normalisation  $\mathcal{B}$ . Alors la FTO dans l'équation (1.7) devient

$$\tilde{H}(\mathbf{f}) = \frac{\int \mathcal{P}(\mathbf{r}) \mathcal{P}^*(\mathbf{r} - \lambda_I \mathbf{f}) d\mathbf{r}}{\int |\mathcal{P}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}. \quad (1.9)$$

Le pouvoir de résolution  $\mathcal{R}$  du télescope au sens de Strehl est défini à partir de la FTO par

$$\mathcal{R} = \int \tilde{H}(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \quad (1.10)$$

Pour un télescope circulaire, c'est-à-dire lorsque la FEP est la tache d'Airy,

$$\mathcal{R}_{\text{tel}} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D}{\lambda_I} \right)^2. \quad (1.11)$$

La résolution du télescope est donc caractérisée par  $\lambda_I/D$ . Lorsque le diamètre de la pupille  $D$  augmente, la résolution angulaire est meilleure.

Il existe alors dans le ciel des étoiles résolues et d'autres non résolues par le télescope. Les étoiles non résolues par le télescope peuvent à juste titre être considérées comme des sources ponctuelles pour obtenir la FEP du télescope  $H_{\text{tel}}$ .

## 1.2 La résolution en présence d'atmosphère

La résolution et le transfert optique du télescope sont définis dans la section précédente comme des propriétés intrinsèques au dimensionnement et spécifications physiques du système. Ceci est vrai pour un télescope dans l'espace, mais ce n'est plus suffisant pour décrire la résolution d'un télescope sur Terre, à cause de l'atmosphère.

La surface de l'onde émise par une étoile non résolue, dans le ciel, subit des déformations de l'ordre de quelques microns au cours de sa traversée de l'atmosphère terrestre. La turbulence atmosphérique perturbe de façon aléatoire l'amplitude complexe incidente sur le télescope, qui peut alors s'écrire sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_i, t) = e^{l(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_i, t) + i\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_i, t)}, \quad (1.12)$$

où  $l$  et  $\phi$  sont deux processus stochastiques réels illustrant respectivement les fluctuations d'amplitude (en logarithme) et de phase de l'onde incidente dans le plan pupille et dans le temps. Ces perturbations dépendent du volume d'atmosphère traversé et donc sont des fonctions de la direction de visée  $\boldsymbol{\beta}$ . L'équation (1.2) de l'amplitude complexe dans le plan pupille est remplacée par l'amplitude complexe globale de l'onde dans le plan pupille qui s'écrit

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_i, t) = \mathcal{P}_0(\mathbf{r}) e^{l(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_i, t) + i(\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_i, t) + \phi_s(\mathbf{r}))}. \quad (1.13)$$

### 1.2.1 La FEP et la FTO instantanées

D'après la définition de l'équation (1.3), la FEP instantanée de l'ensemble {Atmosphère + Télescope} s'écrit alors

$$H(\boldsymbol{\beta}_d, \boldsymbol{\beta}_i, t) = \tilde{U}(\boldsymbol{\beta}_d, \boldsymbol{\beta}_i, t) \tilde{U}^*(\boldsymbol{\beta}_d, \boldsymbol{\beta}_i, t) = \left| \tilde{U}(\boldsymbol{\beta}_d, \boldsymbol{\beta}_i, t) \right|^2, \quad (1.14)$$

Le domaine d'isoplanétisme doit, en présence d'atmosphère, être défini tel que les perturbations  $l$  et  $\phi$  soient aussi à peu près indépendantes de  $\boldsymbol{\beta}_i$ . Dans ce champ, l'ensemble { Atmosphère + Télescope } est décrit par sa FTO instantanée

$$\tilde{H}(\mathbf{f}, t) = \frac{\int \mathcal{P}(\mathbf{r}) \mathcal{P}(\mathbf{r} - \lambda_I \mathbf{f}) e^{l(\mathbf{r}, t) + l(\mathbf{r} - \lambda_I \mathbf{f}, t) + i\phi(\mathbf{r}, t) - i\phi(\mathbf{r} - \lambda_I \mathbf{f}, t)} d\mathbf{r}}{\int |\mathcal{P}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}, \quad (1.15)$$

En choisissant de nouveau la limite de diffraction comme référence dans l'équation (1.15), les performances sont quantifiées par rapport au télescope en l'absence de turbulence (Ellerbroek et Tyler, 1999).

Comme  $l$  et  $\phi$ , la FEP (1.14) et la FTO (1.15) instantanées de l'ensemble {Atmosphère + Télescope} sont donc des quantités stochastiques.

### 1.2.2 Les images courte pose

Les observations, ou mesures, effectuées en sortie du télescope ne sont pas instantanées. L'image d'une source non résolue est donc obtenue par intégration de l'équation (1.14) pendant le temps de pose  $T$ , *i.e.*

$$\langle H(\boldsymbol{\beta}_d, t) \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T H(\boldsymbol{\beta}_d, t) dt, \quad (1.16)$$

pour une source sur l'axe ( $\boldsymbol{\beta}_i = 0$ ).

Des mesures courte pose, *i.e.*  $T$  de l'ordre de quelques millisecondes (ms), permettent de *geler* la turbulence. Ainsi,  $l$ ,  $\phi$  et donc  $H(\boldsymbol{\beta}_d, t)$  sont à peu près fixes sur cet intervalle de temps, et l'image courte-pose d'une source non résolue fournit une FEP (presque) instantanée.

Pour un objet astrophysique contenu dans le domaine d'isoplanétisme, l'image courte pose est décrite grâce à la FEP instantanée  $H(\boldsymbol{\beta}_d, t)$ , par le produit de convolution

$$I(\boldsymbol{\beta}_d, t) = O(\boldsymbol{\beta}_d) * H(\boldsymbol{\beta}_d, t). \quad (1.17)$$

### 1.2.3 Les images longue pose

Les grands télescopes offrent la possibilité aux astronomes d'observer des objets d'intensité chaque fois plus faible, à mesure que leur surface collectrice (miroir primaire) augmente. Pour de tels objets, les temps de pose  $T$  se calculent en secondes. De ce fait, la turbulence n'est plus gelée sur l'image, elle est au contraire moyennée (en intensité sur l'image) à travers le temps. L'équation (1.16) approche une valeur limite (quand  $T$  tend vers l'infini) bien définie : la FEP longue pose  $\langle H(\boldsymbol{\beta}_d) \rangle$ . En effet, la turbulence est stationnaire et ergodique. Ceci signifie que la moyenne temporelle dans l'équation (1.16) fournit une valeur approchée de l'espérance mathématique de la FEP instantanée à tout instant. Ce raisonnement vaut aussi pour la FTO en présence de turbulence. Je note la FEP longue pose  $\langle H(\boldsymbol{\beta}_d) \rangle$  et la FTO longue pose  $\langle \tilde{H}(\mathbf{f}) \rangle$ .

D'après certaines hypothèses sur la structure et la dynamique de l'atmosphère, il est possible de définir des modèles statistiques pour les variations logarithmiques d'amplitude  $l$  et les retards de phase  $\phi$  sur la pupille. Les modèles de turbulence atmosphériques supposent que  $l$  et  $\phi$  sont deux variables aléatoires indépendantes de statistiques Gaussiennes, isotropes et localement homogènes (Fried, 1966), d'où

$$\left\langle e^{l(\mathbf{r})+l(\mathbf{r}-\lambda_I \mathbf{f})+i(\phi(\mathbf{r})-\phi(\mathbf{r}-\lambda_I \mathbf{f}))} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}_{\ln \Psi}(\lambda_I f)} \quad \forall \mathbf{r}, \quad (1.18)$$

où  $\mathcal{D}_{\ln \Psi}$  est la fonction de structure de l'onde (en logarithme de son amplitude complexe) et  $f$  est le module de la fréquence spatiale  $\mathbf{f}$ . Je rappelle que la fonction de structure  $\mathcal{D}_x$  d'un processus stochastique  $x$  défini sur  $\mathcal{A}$  s'écrit

$$\mathcal{D}_x(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle (x(\mathbf{r}) - x(\mathbf{r} + \mathbf{r}'))^2 \rangle, \quad (1.19)$$

où  $\mathcal{A}$  désigne l'ensemble des coordonnées  $\mathbf{r}$  du plan situés à l'intérieur de l'ouverture.

D'autre part, nous nous intéressons à de grands télescopes optiques, *i.e.* des instruments pour lesquels l'approximation de champ proche  $D \gg \sqrt{L\lambda_I}$  est vérifiée,  $L$  étant l'épaisseur d'atmosphère traversée. Dans ce cadre, les fluctuations d'amplitude  $l$  produisant la scintillation, ont un impact négligeable par rapport aux perturbations de phase, si bien que l'on peut approximer  $\mathcal{D}_{\ln \Psi}$  par la fonction de structure de la phase  $\mathcal{D}_\phi$  (Tatarski, 1961; Fried, 1966).

Dans toute la suite de ce manuscrit, je retiens cette hypothèse de champ proche, si bien que je me concentre sur les perturbations de la phase dues à l'atmosphère.

De plus, je note  $p$  le retard uniforme de phase sur la pupille du télescope, définie telle que

$$\int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (1.20)$$

Cette aberration s'appelle aussi le *piston*. Elle s'écrit à l'aide de formules semblables à celles de la transmission normalisée de la pupille, (1.4) et (1.5), *i.e.*

$$p(\mathbf{r}) = \begin{cases} 4/(\pi D^2) & \text{si } r \leq D/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.21)$$

et

$$p(\mathbf{r}) = \begin{cases} 4/(\pi(1-\eta^2)D^2) & \text{si } \eta D/2 \leq r \leq D/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.22)$$

respectivement dans les cas sans obstruction centrale, et avec obstruction centrale. Par définition, la fonction de structure  $\mathcal{D}_\phi$  de la phase est indépendante de cette aberration. En conséquence, dans la suite de ce manuscrit, les perturbations de la surface d'onde sont entendues comme des écarts de phase par rapport à une phase arbitraire uniforme sur toute la pupille.

La FTO longue pose de l'ensemble { Atmosphère + Télescope } s'écrit (Fried, 1966)

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}(\mathbf{f}) \rangle &= \frac{\int \mathcal{P}(\mathbf{r}) \mathcal{P}(\mathbf{r} - \lambda_I \mathbf{f}) e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}_\phi(\lambda_I f)} d\mathbf{r}}{\int |\mathcal{P}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}} \\ &= \tilde{H}_{\text{tel}}(\mathbf{f}) e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}_\phi(\lambda_I f)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ce résultat repose sur l'hypothèse que l'image intégrée pendant un temps très long est représentative des moments statistiques du deuxième ordre de la phase  $\phi$ . Hufnagel et Stanley (1964) ont mis en évidence ce découplage possible dans le cas d'images longue pose entre la FTO du télescope et la FTO équivalente longue pose de l'atmosphère

$$\langle \tilde{H}_{\text{atm}} \rangle(\mathbf{f}) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}_\phi(\lambda_I f)}. \quad (1.24)$$

Si l'objet astrophysique observé est stationnaire et contenu dans le domaine d'isoplanétisme, alors la distribution d'intensité dans l'image longue pose conserve la forme d'un produit de convolution

$$\langle I(\boldsymbol{\alpha}) \rangle = [O * \langle H \rangle](\boldsymbol{\alpha}). \quad (1.25)$$

Pour des images courte pose, la FTO moyenne peut également être décomposée comme le produit de la FTO de l'instrument avec une FTO de l'atmosphère en courte-pose, mais il faut alors distinguer plusieurs réponses suivant que l'approximation de champ proche est ou non respectée (Fried, 1966; Wang, 1977).

#### 1.2.4 La résolution longue pose

Même si un télescope spatial a l'avantage de proposer une résolution à la limite de diffraction, les plus grands diamètres de télescopes se trouvent sur Terre. De nos jours, les projets d'exploration extra-galactique ou de détection d'exo-planètes visent l'observation de cibles très faibles, pour lesquelles une grande surface collectrice ( $\propto D^2$ ) est nécessaire. Il existe 3 télescopes de 10 m, deux à Hawaii et un aux Canaries, plusieurs télescopes internationaux de 8 mètres, et les projets de télescopes plus grands sont déjà bien engagés de par le monde. Nombreux sont les astronomes intéressés par ces grandes surfaces collectrices, mais ils ne veulent pas céder pour autant les performances de résolution accessibles *via* les télescopes spatiaux.

Or la résolution de l'ensemble {Atmosphère + Télescope} en pose longue s'écrit

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \int \tilde{H}_{\text{tel}}(\mathbf{f}) \langle \tilde{H}_{\text{atm}} \rangle(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \quad (1.26)$$

La résolution limite en présence d'atmosphère a été quantifiée par Fried (1966),

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\text{max}} = \lim_{D \rightarrow \infty} \langle \mathcal{R} \rangle = \frac{\pi}{4} \left( \frac{r_0}{\lambda_I} \right)^2 \quad (1.27)$$

où  $r_0$  est le paramètre de Fried (1966).  $r_0$  dépend de la longueur d'onde  $\lambda_I$  d'imagerie ( $r_0 \propto \lambda_I^{6/5}$ ) et de la turbulence sur le site d'observation, mais ne dépend plus du diamètre  $D$ . On remarque, d'après la comparaison des équations (1.11) et (1.27), que  $r_0$  est défini comme le diamètre d'un télescope qui aurait la même résolution sans turbulence (à la limite de diffraction) que le système {Atmosphère + Télescope} en longue pose. Typiquement, sur les sites d'observation, dans le visible,  $r_0$ , généralement exprimé à  $\lambda_I = 500$  nm, fluctue entre 2 et 20 cm. La perte de résolution et donc considérable pour un télescope terrestre de plusieurs mètres de diamètre.

C'est pour cette raison que les grands télescopes au sol sont désormais équipés d'optique adaptative ; pour contrer ces méfaits de l'atmosphère.



### 1.3 La résolution avec une optique adaptative

La discussion de la section précédente a été menée en supposant que les effets de la turbulence n'étaient pas corrigés. Une optique adaptative est un système asservi, destiné à corriger les perturbations de la surface d'onde au cours de mesures longues poses. La fig. 2.1 schématise le principe de l'optique adaptative sur un télescope, il est détaillé dans le chapitre suivant de ce manuscrit.

L'extension de la notion de résolution angulaire à un télescope muni d'une optique adaptative s'obtient en considérant que le terme de phase dans l'équation (1.12) est en fait une phase perturbée résiduelle  $\phi^{\text{res}}$ , *i.e.* partiellement corrigée. Elle est également aléatoire, mais ne possède pas les mêmes propriétés statistiques de fluctuations spatiales et temporelles, d'isotropie et d'uniformité locale par exemple, que la phase issue de la turbulence atmosphérique  $\phi$ . D'une façon générale, la FTO longue pose du système ne peut pas se dissocier en deux composantes, {Atmosphère} et {Télescope} comme dans l'équation (1.26) (Wang, 1977). La fonction de structure  $\mathcal{D}_{\phi^{\text{res}}}$  de la phase résiduelle dépend à la fois de  $\mathbf{r}$  et de  $\lambda_I \mathbf{f}$ , si bien que l'exponentielle ne peut être strictement isolée de l'intégration dans l'équation (1.23). Ce cas a été étudié plus en détails par Wang (1977) et par Ellerbroek et Tyler (1999). La conclusion en est que l'approximation multiplicative de l'équation (1.26) reste une bonne approche pour quantifier les performances d'un système comprenant une optique adaptative. On écrit alors

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\text{OA}} = \int \tilde{H}_{\text{tel}}(\mathbf{f}) \exp(-\mathcal{D}_{\phi^{\text{res}}}(\lambda_I \mathbf{f})/2) d\mathbf{f}. \quad (1.28)$$

#### 1.3.1 Le rapport de Strehl

Le rapport de Strehl est défini comme le rapport du maximum de la FEP longue pose au maximum de la tache de diffraction du télescope sans turbulence. Le rapport de Strehl longue pose  $\langle \text{SR} \rangle$  s'exprime donc ainsi

$$\langle \text{SR} \rangle = \frac{\langle H(0) \rangle}{H_{\text{tel}}(0)} = \frac{\int \langle H(\mathbf{f}) \rangle d\mathbf{f}}{\int H_{\text{tel}}(\mathbf{f}) d\mathbf{f}} = \frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\text{OA}}}{\mathcal{R}_{\text{tel}}}. \quad (1.29)$$

On remarque que, par définition,  $\langle \text{SR} \rangle$  est égal à 1 en l'absence de toute aberration et inférieur à 1 sinon.

Qualitativement, une optique adaptative corrige avant tout les déformations de la surface d'onde à grande échelle, si bien que la covariance de la phase résiduelle  $\langle \phi^{\text{res}}(\mathbf{r}) \phi^{\text{res}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle_{\mathbf{r}}$  décroît très rapidement quand  $\mathbf{r}'$  augmente. Ainsi la fonction de structure peut être approximée par la somme des variances (Conan, 2000)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\phi^{\text{res}}}(\mathbf{r}') &= \left\langle (\phi^{\text{res}}(\mathbf{r}) - \phi^{\text{res}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}'))^2 \right\rangle_{\mathbf{r}} \\ &= \langle [\phi^{\text{res}}(\mathbf{r})]^2 \rangle + \langle [\phi^{\text{res}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}')]^2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Pour de faibles déformations résiduelles, la valeur des variances en un point, dans l'équation (1.30), est peu différente de la valeur moyenne de la variance de la phase résiduelle sur la pupille  $a_{\phi^{\text{res}}}$  (Conan, 2000) qui s'écrit

$$a_{\phi^{\text{res}}} = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \int_{\mathcal{A}} \left\langle \left( \phi^{\text{res}} - \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \int_{\mathcal{A}} \phi^{\text{res}}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)^2 \right\rangle d\mathbf{r}. \quad (1.31)$$

Ainsi  $\exp(\mathcal{D}_{\phi^{\text{res}}}(\lambda_I \mathbf{f})/2) \simeq \exp(-a_{\phi^{\text{res}}})$  et donc la FTO longue pose à basse fréquence s'uniformise, prenant une valeur constante  $\exp(-a_{\phi^{\text{res}}})$ . La FEP longue pose du système est alors la superposition d'une tache de diffraction similaire à la tache d'Airy et d'un halo plus large dû à cette contribution résiduelle.

Le rapport de Strehl longue pose vaut donc à peu près

$$\langle \text{SR} \rangle \simeq \exp(-a_{\phi^{\text{res}}}), \quad (1.32)$$

lorsque les déformations résiduelles ne sont pas trop grandes.

### 1.3.2 Les performances de l'optique adaptative : description du formalisme utilisé

L'évaluation des performances d'une optique adaptative repose donc en général sur le calcul de la variance de phase à une longueur d'onde d'observation donnée, ou des déformations de la surface d'onde, en moyenne sur la pupille et dans le temps. La déformée  $w$  s'exprime en mètres et est reliée aux fluctuations de phase  $\phi$  à une longueur d'onde  $\lambda_I$  donnée par

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\lambda_I} w(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{A}. \quad (1.33)$$

Ainsi les fonctions de structure de la phase  $\phi$  et de la déformation de la surface d'onde  $w$  vérifient

$$\mathcal{D}_{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi^2}{\lambda_I^2} \mathcal{D}_w(\mathbf{r}). \quad (1.34)$$

Je décris ici le formalisme mathématique utilisé dans tout ce manuscrit pour caractériser les déformations spatiales d'une surface d'onde.

La déformée de la surface d'onde  $w$  est une fonction continue du temps et de l'espace sur l'ouverture du télescope, elle appartient donc à l'espace de Hilbert  $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  des fonctions à valeurs réelles de carré sommable sur la pupille  $\mathcal{A}$  (Ellerbroek, 1994). Il s'agit de l'espace vectoriel de dimension infinie engendré par ces fonctions, et muni du produit scalaire et de la norme définis par

$$(f|g) = \int_{\mathcal{A}} fg \quad \text{and} \quad \|f\| = \left( \int_{\mathcal{A}} f^2 \right)^{1/2}$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ .

La phase associée à une surface d'onde à une longueur d'onde donnée est également une fonction de  $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ .

On note en particulier que pour l'aberration de phase uniforme sur la pupille, égale à une déformation de surface d'onde uniforme, appelée le piston,  $p$  (cf. équations (1.21) et (1.22),

$$\|p\|^2 = (p|p) = 1/\mathcal{S}_{\mathcal{A}}, \quad (1.35)$$

où  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  est la surface de l'ouverture. Ainsi, la moyenne spatiale de la déformation de la surface d'onde  $w$  sur l'aire de la pupille s'écrit

$$(w|p) = \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r})w(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (1.36)$$

Je rappelle que cette déformée moyenne (1.36) représente un décalage constant de phase qui n'affecte pas la fonction de structure, et donc pas la résolution des images.

Elle est donc otée de toute surface d'onde résiduelle considérée pour évaluer le critère de performance.

Grâce à la linéarité de l'intégrale et afin de simplifier les notations, je note dans toute la suite  $P$  l'opérateur linéaire de  $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , défini par

$$P(f) = f - \frac{(f|p)}{(p|p)} p. \quad (1.37)$$

$P$  est un projecteur orthogonal (Ellerbroek, 1994).

Pour un processus Gaussien centré  $x$ , de  $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  et de fonction de structure  $\mathcal{D}_x$ , un développement (fastidieux mais sans obstacle) montre que les deux expressions suivantes sont équivalentes

$$a_x = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \left\langle \|P(x)\|^2 \right\rangle \quad (1.38)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}') \mathcal{D}_x(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (1.39)$$

Si on considère la surface d'onde résiduelle  $w^{\text{res}}$  comme un processus Gaussien centré continu sur la pupille, les expressions (1.38)-(1.39) permettent d'évaluer la variance de la déformée résiduelle *dépistonnée* moyennée sur la pupille  $a_{w^{\text{res}}}$  et donc le rapport de Strehl d'après l'équation (1.32).

Ainsi la dépendance du rapport de Strehl longue pose (1.32) en fonction de la longueur d'onde d'observation  $\lambda_I$  est explicitée grâce à l'équation (1.33), qui conduit à la formulation

$$\langle \text{SR} \rangle \simeq \exp \left( -\frac{4\pi^2}{\lambda_I^2} a_{w^{\text{res}}} \right), \quad (1.40)$$

Les expressions (1.32)-(1.38)-(1.39)-(1.40) sont employées à plusieurs reprises dans ce manuscrit, parce qu'elles permettent de caractériser les performances de l'optique adaptative en terme de perturbations résiduelles de la surface d'onde sur la pupille.

Afin d'atteindre un rapport de Strehl moyen  $\langle \text{SR} \rangle$  de l'ordre de 50%, l'écart-type des perturbations résiduelles moyennes de la surface d'onde doit être de l'ordre de  $\sqrt{a_{w^{\text{res}}}} = \lambda_I/7.5$ . Pour des observations à la longueur d'onde  $\lambda_I = 1 \mu\text{m}$ , ceci correspond à quelques 130nm de perturbations résiduelles. Si les observations se font à  $\lambda_I = 2.2 \mu\text{m}$ , dans l'infra-rouge, les contraintes sont moins fortes, il faut réduire les perturbations de la surface d'onde à un écart-type de 290 nm environ.

D'autres critères de performance s'avèrent complémentaires du rapport de Strehl suivant les applications envisagées pour l'optique adaptative. L'énergie encerclée (ou encadrée),  $EE$  définie par

$$EE(\Delta\alpha) = \frac{\int_{S_{\Delta\alpha}} H(\alpha') d\alpha'}{\int_{\mathbb{R}^2} H(\alpha') d\alpha'}, \quad (1.41)$$

quantifie la fraction d'énergie lumineuse concentrée autour du centre de la FEP, dans un cercle de diamètre (ou un carré) de surface  $S_{\Delta\alpha}$ , où  $\Delta\alpha$  représente le diamètre ou le côté de cette aire.

Je quantifie les résultats dans ce manuscrit en terme de variance des déformations résiduelles, variance de la phase résiduelle ou rapport de Strehl équivalent à une longueur d'onde donnée, parce que l'étude est générale et ne concerne pas une application astrophysique donnée.

Maintenant que les objectifs de l'optique adaptative sont présentés en terme de résolution angulaire, le chapitre suivant décrit le principe de cette optique adaptative et ses différentes composantes.



## Chapitre 2

# L'Optique Adaptative

Le chapitre précédent met en évidence le gain en résolution angulaire que peut apporter l'utilisation d'une optique adaptative (OA) sur un grand télescope terrestre ( $D > r_0$ ). Il est maintenant nécessaire de comprendre le fonctionnement général d'une optique adaptative et c'est l'objectif premier de ce second chapitre.

L'optique adaptative corrige en temps réel les perturbations de la surface d'onde dues à la turbulence atmosphérique. Cette correction est appliquée par le biais d'un élément optique correcteur. En astronomie, l'utilisation d'un miroir déformable (MD) permet d'effectuer une correction achromatique. La figure 2.1 présente un exemple d'optique adaptative en boucle fermée comprenant outre le miroir déformable, un analyseur de surface d'onde (ASO), observant une source de référence, et un système de commande (correcteur). Ce schéma est caractéristique d'une optique adaptative classique en astronomie.

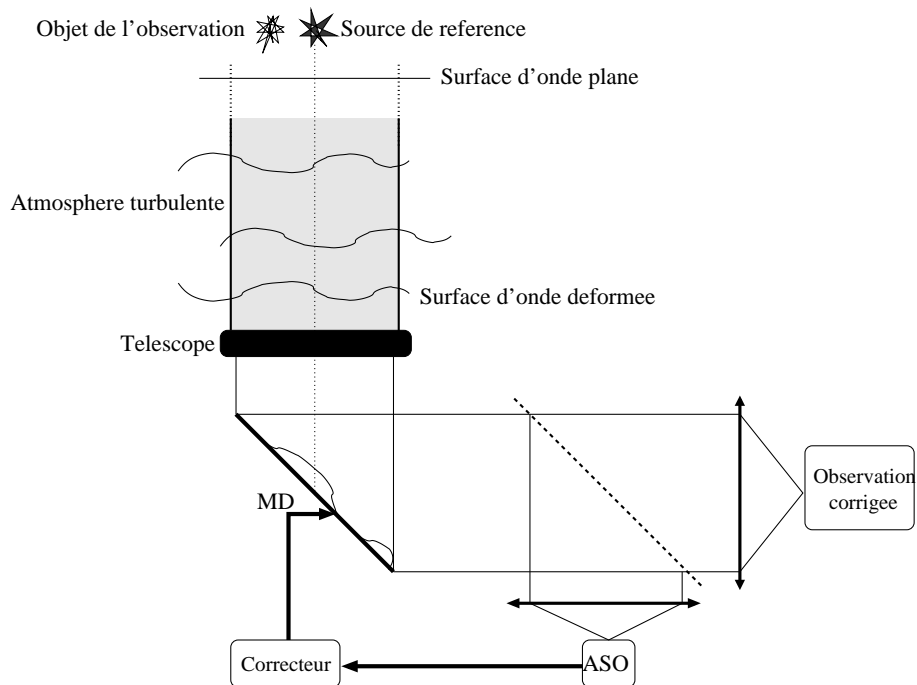


FIG. 2.1 – Schéma de principe d'une optique adaptative en boucle fermée.

L'accent est mis, dans ce chapitre, sur le nombre de degrés de liberté du système afin

de situer le travail exposé dans son contexte. En effet, l'ordre de grandeur du nombre de paramètres d'entrée et de sortie de l'optique adaptative croît d'un facteur  $10^2$  à  $10^3$  avec l'arrivée des télescopes hectométriques. Ces paramètres sont les mesures délivrées par l'analyseur de surface d'onde et les actionneurs à commander sur le miroir déformable à chaque boucle, c'est-à-dire à une fréquence de l'ordre de 1 kHz. Ces nouvelles dimensions soulèvent de nombreux problèmes dont celui des algorithmes de commande à employer afin de pouvoir corriger la perturbation en temps réel.

Trois parties peuvent être distinguées dans ce chapitre. La première introduit trois éléments essentiels d'une optique adaptative en astronomie : les sources de référence, les analyseurs de surface d'onde et les miroirs déformables. Le choix de ces composants détermine le nombre d'entrées et de sorties de l'optique adaptative. Ensuite, je décris les nouveaux concepts d'optique adaptative qui apparaissent pour les grands télescopes terrestres. Ces différentes solutions, adaptées aux divers besoins des astrophysiciens, conduisent à des systèmes à très grand nombre de degrés de liberté (nombre de mesures ou nombre de commandes) à traiter en temps réel. Je souligne plus particulièrement les valeurs que prennent ces dimensions pour le projet européen E-ELT, dans le cadre duquel s'est déroulée cette thèse. Enfin, je présente l'impact de ces grands nombres de degrés de liberté sur le correcteur de l'optique adaptative.

## 2.1 Les sources de référence

Une optique adaptative peut fonctionner à partir de sources de références naturelles ou artificielles. On comprend par ces termes que les premières sont présentes dans le champ d'observation (ou à proximité) sans qu'une intervention humaine les y ait placées, tandis que les secondes sont le fruit d'un artifice destiné à générer une source lumineuse de référence.

Par abus de langage, en astronomie pour les observations nocturnes, on parle généralement d'étoiles de référence, naturelles ou artificielles. Pourtant, certaines optique adaptative sont conçues pour pouvoir utiliser comme référence des objets astrophysiques (naturels) qui ne sont pas nécessairement des *étoiles*. D'autre part, le nom d'étoile artificielle s'est répandu pour désigner la source générée par l'excitation de certains atomes dans l'atmosphère à l'aide d'un laser.

J'utilise ainsi dans ce manuscrit essentiellement l'expression d'*étoile de référence* au lieu de source de référence. Les particularités de ces deux types de sources sont identifiées dans les deux prochaines strophes.

### 2.1.1 Les étoiles de référence naturelles

Les étoiles naturelles non résolues sont idéales parce qu'elles sont facilement assimilables à une source ponctuelle située à l'infini. L'analyse de la perturbation à corriger en est facilitée.

Toutefois, l'évolution temporelle de la turbulence impose une fréquence de mesures de l'analyseur de l'ordre de 1 kHz. La variance du bruit de photons<sup>1</sup> sur les mesures est inversement proportionnel au nombre de photons reçus. La qualité des mesures et donc

---

<sup>1</sup>Le bruit de photons limite tout système de détection de flux lumineux. Il est directement lié à la nature corpusculaire de la lumière. Les photons reçus par un détecteur suivent une statistique de Poisson. Si la surface du détecteur reçoit en moyenne  $N_{\text{ph}}$  photons pendant un temps d'intégration  $T$ , l'écart-type sur le nombre de photons reçus est  $\sqrt{N_{\text{ph}}}$ .

celle de la correction sont dégradées lorsque l'étoile de référence est trop faible. On peut ainsi définir une magnitude limite, spécifique à chaque optique adaptative, permettant une correction satisfaisante à définir. La réunion des domaines d'isoplanétisme situés autour de toutes les étoiles naturelles plus brillantes que cette magnitude limite représente la portion du ciel qui peut être explorée grâce à une optique adaptative classique. Cette fraction de la voûte céleste est appelée la couverture du ciel du système d'optique adaptative.

Cette notion est développée dans la section 2.4 pour des systèmes d'optique adaptative à large champ.

### 2.1.2 Les étoiles de référence laser

Afin d'augmenter la couverture du ciel d'une optique adaptative classique, il est possible de créer une source de référence dans le champ à observer à l'aide d'un laser (Foy et Labeyrie, 1985). Le principe consiste à analyser le flux lumineux émis par des particules excitées dans certaines couches de l'atmosphère, grâce à ce laser. En astronomie, on distingue généralement deux types d'*étoiles laser* : les premières proviennent de la diffusion Rayleigh de l'atmosphère (entre 10 et 30 km d'altitude environ) et les secondes sont générées dans une couche de l'atmosphère très concentrée en atomes de sodium ( $\sim 90$  km d'altitude).

L'utilisation de ces étoiles de référence artificielles est limitée du fait de certaines particularités intrinsèques à leur mode de création, qui compliquent l'analyse des perturbations à corriger. Je décris ici trois de ces limites majeures : l'indétermination du tip-tilt, l'effet de cône, et l'élongation de la tâche sur l'analyseur.

#### L'indétermination du basculement (tip-tilt)

Le principe de réversibilité du chemin optique fait que la position sur le ciel d'une étoile laser reste toujours inconnue. De cette façon, deux composantes de la déformation de la surface d'onde ne peuvent pas être analysées, les basculements en  $x$  et en  $y$  (modes tip-tilt). Ces modes représentent pourtant des déformations d'amplitude majeures sur la surface d'onde turbulente. Ils doivent donc être déterminés par une méthode auxiliaire pour pouvoir être corrigés.

Une possibilité consiste à utiliser une étoile de référence naturelle additionnelle dans le champ. Si une étoile laser permet de corriger les autres composantes de la perturbation atmosphérique sur la surface d'onde alors l'analyse du basculement global de la surface d'onde au-dessus de la pupille peut être effectuée sur une étoile naturelle, même peu brillante, dans le domaine d'isoplanétisme autour de l'étoile laser.

Une autre approche a été proposée par Foy et al. (1995) qui consiste à générer une étoile LASER polychromatique dans cette même couche de sodium. Le basculement différentiel entre plusieurs longueurs d'onde d'analyse permet de lever l'indétermination du tip-tilt (Schöck et al., 2002; Rondeau et al., 2008).

#### L'effet de cône

Les étoiles naturelles sont situées à une distance de l'atmosphère terrestre très grande devant le diamètre du télescope. Ceci permet d'approximer l'onde pénétrant l'atmosphère turbulente au-dessus la pupille à une onde plane. Cette approximation ne peut plus être faite pour les étoiles laser, parce qu'elles sont générées à trop grande



proximité (pour ne pas dire au sein même) de la turbulence atmosphérique, par rapport aux dimensions de la pupille. Cette caractéristique se traduit par ce qui est nommé l'*effet de cône* (Tallon et Foy, 1990) et qui est illustré sur la figure 2.2.

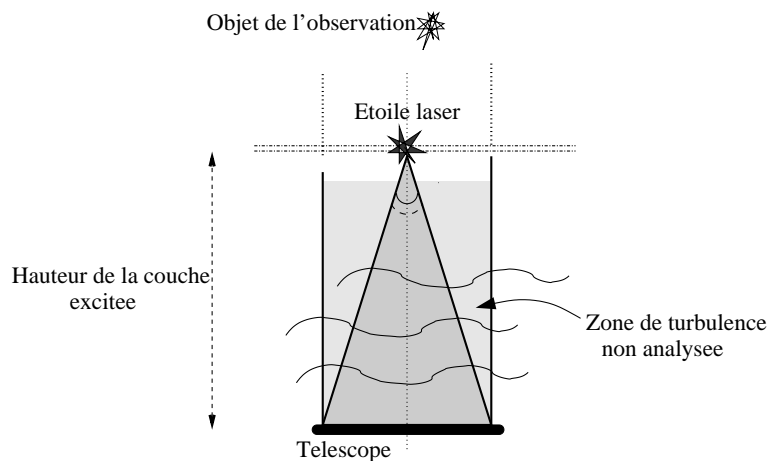


FIG. 2.2 – Effet de cône associé à une étoile laser.

Pour un diamètre de télescope donné, plus l'étoile de référence est haute, plus l'angle que fait la zone de turbulence analysée par rapport à la verticale est faible. Ainsi un objet astrophysique dans le champ est mieux corrigé lorsque l'altitude de l'étoile laser augmente, parce que progressivement le volume de turbulence correctement analysé est de plus en plus haut.

Ceci est un argument en faveur des étoiles laser de sodium pour un télescope de l'ordre de 10 mètres de diamètre ou plus. Le choix d'étoiles laser de type Rayleigh reste néanmoins intéressant pour des systèmes visant la correction des couches turbulentes de faible altitude sur des télescopes de plus faible diamètre (*cf.* les systèmes SAM et GLAS cités à la section 2.4.2).

### L'élongation de la tache sur l'analyseur

La source laser générée n'est pas une source ponctuelle. Elle est étendue verticalement comme un fin pinceau, dans l'épaisseur de la couche d'atomes excités. Cette extension verticale de l'étoile laser, généralement une centaine de mètres pour les étoiles de type Rayleigh et de l'ordre de 10km pour une étoile de sodium, doit être prise en compte pour optimiser l'analyse de la surface d'onde. Plus l'analyse de la surface d'onde se fait à grande distance du point de lancement du laser au sol, plus l'extension verticale de la source intervient dans la mesure (par un phénomène de parallaxe). Ceci entraîne une perte de précision de la mesure dans la direction du point de lancement, à grande distance.

Dans le cas d'un analyseur de Shack-Hartmann qui sera introduit à la section 2.2, ceci se traduit par une élongation de la tache sur les sous-pupilles (*cf.* section 7.4).

L'utilisation d'un laser pulsé pour générer une étoile laser de type Rayleigh permet de maintenir son extension verticale à une centaine de mètres environ, ce qui limite cet effet de parallaxe de façon acceptable sur un télescope de quelques mètres de diamètre. La couche de sodium de l'atmosphère, à environ 90km d'altitude, a une épaisseur moyenne de 10 kilomètres. Une étoile laser de type sodium, créée à partir d'un laser non pulsé, est suffisamment haute pour que cet effet soit négligeable sur les télescopes

de 8 et 10 mètres actuels. Ce n'est en revanche plus le cas pour la future génération de télescopes terrestres, de plusieurs dizaines de mètres de diamètre.

## 2.2 Les analyseurs de surface d'onde

L'objectif d'un analyseur de surface d'onde (ASO) en optique adaptative est de pouvoir caractériser les déformations de cette surface d'onde à une résolution suffisante pour pouvoir appliquer par la suite une correction utile. Différents types d'analyseur ont été étudiés, mais aucun ne semble surpasser les autres à tous points de vue. Le choix d'un analyseur doit donc être effectué par rapport aux conditions de fonctionnement attendues et aux objectifs de l'optique adaptative.

On distingue essentiellement deux approches : les analyseurs de plan focal et ceux de plan pupille. Je décris d'abord rapidement le principe de l'analyse en plan focal. Les analyseurs couramment utilisés en optique adaptative sont des analyseurs de surface d'onde en plan pupille.

### 2.2.1 L'analyse en plan focal

Cette approche est décrite plus en détails par Rousset (1999). L'analyse en plan focal consiste à retrouver la forme de la surface d'onde directement à partir de l'intensité d'une image courte pose d'un objet connu ou mal connu. Il s'agit donc de résoudre le problème inverse défini par l'équation

$$I(\boldsymbol{\beta}_d, t) = [O * H](\boldsymbol{\beta}_d, t). \quad (2.1)$$

en tenant compte du bruit de mesure. La non linéarité de l'intensité vis-à-vis de la phase perturbée et l'existence de dégénérescences compliquent la recherche de la solution. En considérant plusieurs images courte pose prises au même instant sur deux détecteurs différents, si la relation entre les phases produisant ces deux images est connue, le problème peut être résolu en levant les dégénérescences. Ces techniques, dites de *diversité de phase*, (Mugnier et al., 2006; Rondeau et al., 2008), peuvent en théorie fournir des résultats intéressants et d'une grande précision. Cependant, la résolution en temps réel de ce problème inverse pour une optique adaptative à grand nombre de degrés de liberté n'a pas encore été démontrée. En outre, ces techniques d'analyse en plan focal requièrent une détection sur une faible bande spectrale puisque la fonction d'étalement de point (FEP) est fonction de la longueur d'onde.

### 2.2.2 L'analyse en plan pupille

Pour l'analyse en plan pupille, les déformations de la surface  $w$  sont détectées *via* ses dérivées spatiales, gradient ou laplacien. Cette approche a l'avantage de fournir des mesures qui sont reliées linéairement à la quantité recherchée  $w$ , aux approximations du système de mesure réel près.

Les trois analyseurs en plan pupille présentés ci-après ont un principe de fonctionnement achromatique. Il est donc possible d'augmenter le flux de photons reçu en les utilisant en bande large.

L'analyseur de surface d'onde fournit un jeu de mesures  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ , caractérisé par un modèle de la forme

$$\mathbf{d} = S(w) \quad (2.2)$$

où  $S$  est le modèle linéaire de l'analyseur,  $w(\mathbf{r})$  est la surface d'onde incidente sur l'analyseur dans le plan pupille.

Je décris brièvement, parmi les analyseurs en plan pupille, celui de type courbure et celui de type pyramide, puis je détaille davantage le Shack-Hartmann qui est considéré les simulations d'optique adaptative présentées dans ce manuscrit.

### L'analyseur de courbure

Le principe de l'analyseur par la courbure a été développé par Roddier (1988) et son équipe. Il repose sur la comparaison de l'intensité lumineuse incidente sur deux plans parallèles localisés de part et d'autre de la pupille. L'éclairement par une onde plane engendre une répartition d'intensité uniforme en tout point des deux plans. Là où la surface d'onde est déformée de façon convexe, on observe une intensité moindre dans le plan amont que dans le plan aval. Et réciproquement, si la déformation est localement concave, l'intensité est supérieure dans le plan amont. L'évaluation du contraste entre les images obtenues dans chacun de ces deux plans fournit une mesure du Laplacien de la surface d'onde incidente.

L'ajustement de la position des plans amont et aval à considérer dépend de la fréquence spatiale des déformations de la surface d'onde que l'on souhaite analyser, et du niveau de sensibilité que l'on recherche. Ceci rend l'analyseur de courbure peu adapté à la mesure d'une large gamme de fréquences spatiales sur la surface d'onde perturbée et donc il n'est actuellement pas considéré parmi les analyseurs susceptibles d'être inclus dans une optique adaptative sur un télescope de plus de 10 mètres.

Le télescope de 4.20 mètres du Télescope Canada-France-Hawaii (CFHT), à Hawaii, est équipé d'une optique adaptative nommée PUEO, avec un analyseur de courbure.

### L'analyseur pyramide

L'analyseur de type pyramide a été proposé par Ragazzoni (1996). Il généralise le principe du couteau de Foucault. Pour cela, la surface d'onde est focalisée au sommet d'un prisme pyramidal, à quatre faces, comme indiqué sur le schéma de la figure 2.3.

La pyramide a pour effet de diviser le faisceau en quatre sous-faisceaux qui sont projetés sur le détecteur grâce à une optique de relais. La mesure des gradients de la surface d'onde découle alors d'une combinaison linéaire des intensités reçues dans chacune des 4 pupilles. La présence du miroir de basculement permet de décaler légèrement le point de focalisation autour du sommet de la pyramide afin d'augmenter la sensibilité de l'analyseur aux fréquences spatiales de déformations les plus élevées (Esposito et al., 2000). Cette action est désignée par le terme de *modulation*.

L'analyseur pyramide a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années (Esposito et al., 2000; Vérinaud et al., 2005; Vérinaud, 2004), afin de déterminer les atouts essentiels de ce nouvel analyseur. Il s'avère être plus sensible aux basses fréquences spatiales de la déformation de la surface d'onde que l'analyseur de Shack-Hartman présenté ci-dessous (Vérinaud, 2004). La précision de la correction de ces bas ordres permet de réduire le halo de la FEP longue pose et fait donc de cet analyseur un candidat prometteur pour une optique adaptative visant la détection de planètes extrasolaires (Vérinaud et al., 2006).

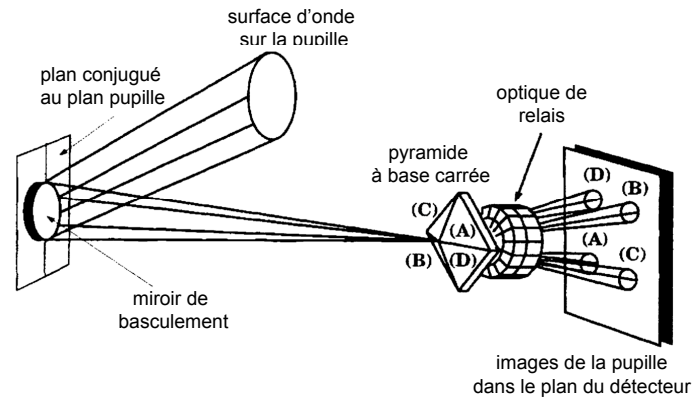


FIG. 2.3 – Schéma de principe de l'analyseur pyramide. Source : Esposito et al. (2000).

### L'analyseur de Shack-Hartmann

L'analyseur de type Shack-Hartmann est le plus couramment utilisé en optique adaptative pour l'astronomie. Il est conçu pour mesurer, idéalement, l'angle d'arrivée (AA), noté  $\alpha$ , de la surface d'onde incidente sur la pupille. L'angle d'arrivée en un point de coordonnées  $\mathbf{r}$  sur la pupille est défini comme l'angle orienté entre la normale à la surface d'onde en ce point et la direction de propagation, de sorte que

$$\alpha(\mathbf{r}) = \nabla w(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_{AO}}{2\pi} \nabla \phi(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur de gradient spatial à 2 dimensions,  $w$  est la déformée de la surface d'onde et  $\phi$  la phase associée à la longueur d'onde  $\lambda_{AO}$  dans le plan pupille. Cette définition est illustrée sur la partie gauche de la figure 2.4 dans un cas monodimensionnel pour simplifier la représentation.

L'angle d'arrivée caractérise donc le gradient de la déformée de la surface d'onde incidente.

Naturellement, il n'est pas possible de mesurer l'angle d'arrivée en tout point de la pupille, mais l'analyseur de Shack-Hartmann fournit des valeurs moyennes locales de  $\alpha$ . Pour cela, le faisceau dans le plan pupille est *découpé* sur une matrice de micro-lentilles carrées, qui jouent chacune le rôle de sous-pupille. La matrice de CCD du détecteur est située dans le plan focal de ces lentilles. La portion de surface d'onde incidente sur chaque sous-pupille produit une tache image sur le détecteur.

Le principe est le même pour toutes les sous-pupilles. Ainsi, je me contente d'expliquer ce qui se passe au niveau de l'une d'elles. Si la surface d'onde a un angle d'arrivée  $\alpha$  uniforme sur la petite surface carrée, de côté  $d_i$ , délimitée par une micro-lentille, alors la situation est illustrée sur la partie droite de la figure 2.4. Le déplacement du centre de gravité de la distribution d'intensité (tache image) par rapport à l'axe optique sur

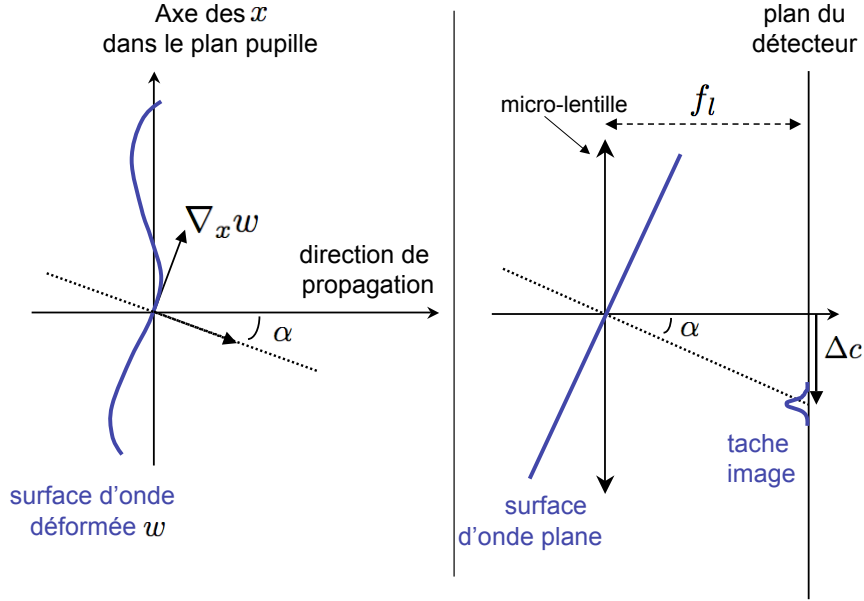


FIG. 2.4 – Définition et principe de mesure d'angle d'arrivée.

le détecteur s'écrit

$$\Delta c = f_l \alpha. \quad (2.4)$$

Si l'angle d'arrivée est nul sur la sous-pupille, alors la tache image est centrée sur l'axe optique de la micro-lentille. Le déplacement  $\Delta c$  par rapport à cette position de référence centrée, est proportionnel à l'angle d'arrivée.

Cependant, lorsqu'une surface d'onde turbulente est analysée, les fréquences spatiales des déformations dépassent celle de l'échantillonnage par les micro-lentilles  $1/(2d_l)$ . Autrement dit, l'angle d'arrivée n'est pas uniforme sur une sous-pupille. Néanmoins, le déplacement du centre de gravité de la tache image sur le détecteur fournit encore la valeur moyenne de  $\alpha$  intégrée sur la surface de la sous-pupille, *i. e.*

$$\Delta c = \frac{f_l}{d_l^2} \int_{-d_l/2}^{d_l/2} \int_{-d_l/2}^{d_l/2} \alpha. \quad (2.5)$$

Ceci est illustré, à une dimension, par le schéma de la figure 2.5, avec sur la partie de droite un détail de l'intégration de l'angle d'arrivée sur une sous-pupille.

Il est important de noter que puisque  $\Delta c$  dans l'équation (2.5) ne dépend pas de la longueur d'onde d'analyse. Ceci signifie que l'analyseur de Shack-Hartmann est intrinsèquement achromatique.

Je considère dans la suite de ce manuscrit que les mesures finales, notées  $\mathbf{d}$  en sortie de l'analyseur de Shack-Hartmann, sont des estimées des gradients moyens de la surface d'onde sur chaque sous-pupille, *i. e.*

$$\frac{1}{d_l^2} \int_{-d_l/2}^{d_l/2} \int_{-d_l/2}^{d_l/2} \nabla w = \frac{1}{d_l^2} \int_{-d_l/2}^{d_l/2} \int_{-d_l/2}^{d_l/2} \alpha = \frac{1}{f_l} \Delta c, \quad (2.6)$$

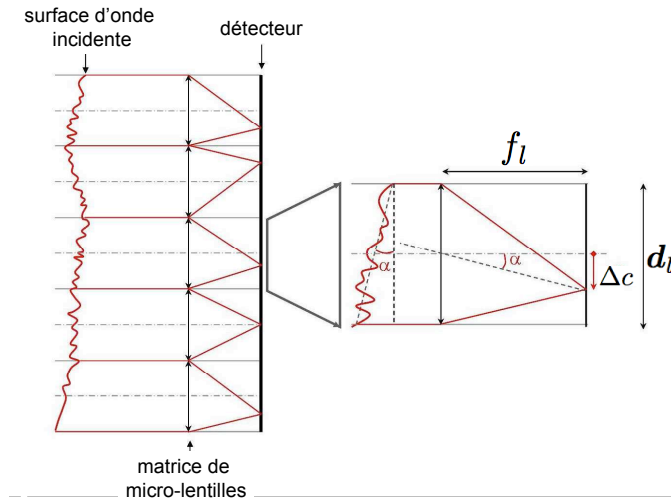


FIG. 2.5 – Schéma de principe optique de l'analyseur de surface d'onde de Shack-Hartmann. Source : Nicolle (2006).

exprimées en mètres par taille de sous-pupille  $d_l$ . Cette mesure représente alors la différence de marche entre deux bords d'une sous-pupille. De cette façon, elle est indépendante de la distance focale des micro-lentilles. Le vecteur  $\mathbf{d}$  des mesures peut être décomposé en deux sous-vecteurs : les mesures des pentes locales moyennes dans la direction  $x$ ,  $\mathbf{d}^x$ , et celles des pentes locales moyennes en direction  $y$ ,  $\mathbf{d}^y$ . Si le doublet  $(i, j)$  identifie la sous-pupille de la  $i$ -ème rangée et de la  $j$ -ème colonne de la matrice de l'analyseur, alors

$$d^x(i, j) = \frac{1}{d_l^2} \int_{(j-1/2)d_l}^{(j+1/2)d_l} [w((i+1/2)d_l, y) - w((i-1/2)d_l, y)] dy \quad (2.7)$$

$$d^y(i, j) = \frac{1}{d_l^2} \int_{(i-1/2)d_l}^{(i+1/2)d_l} [w(x, (j+1/2)d_l) - w(x, (j-1/2)d_l)] dx \quad (2.8)$$

Ces équations définissent un modèle linéaire  $S_{th}$  du processus de mesure de l'analyseur de Shack-Hartmann tel que

$$\mathbf{d} = S_{th}(w), \quad (2.9)$$

que je considère dans la suite de ce manuscrit comme le modèle théorique de l'analyseur de Shack-Hartmann.

### 2.2.3 Les incertitudes de la mesure

Toute mesure fait l'objet d'une incertitude, qu'il est important de minimiser si l'on veut pouvoir extraire une information intéressante de cette mesure.

Je restreins la description des incertitudes de mesure aux cas des analyseurs en plan pupille, n'ayant pas étudié les analyseurs en plan focal.

L'incertitude de la mesure peut être représentée par un bruit  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ , processus stochastique réel, de sorte que l'équation qui caractérise la mesure (2.2) peut être écrite

à nouveau sous la forme

$$\mathbf{d} = S(w) + \mathbf{e}. \quad (2.10)$$

Cette équation de mesure est reprise tout au long de ce manuscrit. Elle est essentielle pour caractériser le système et pour définir la correction en optique adaptative.

Le bruit de mesure est en général supposé être décorrélé du signal,  $w$ ; ce que je discute un peu plus loin par le biais des incertitudes de modèle de l'analyseur.

Par ailleurs,  $\mathbf{e}$  possède deux origines principales :

- le bruit du détecteur
- le bruit de photons

### Le bruit du détecteur

Le bruit du détecteur est lié à ses imperfections, essentiellement au bruit de lecture. L'analyseur de courbure lorsqu'il est utilisé avec des photo-diodes à avalanche, comme sur l'optique adaptative PUEO au CFHT, n'a pas de bruit de lecture.

Les analyseurs de type pyramide et Shack-Hartmann peuvent être conçus avec le même type de détecteurs CCD. La nouvelle génération de détecteurs génère un bruit de lecture très faible, inférieur à 1 électron ( $1e^-$ ) par trame pour les L3CCD par exemple. De plus, si une bonne correction atmosphérique sur un télescope hectométrique avec un analyseur de Shack-Hartmann requiert quelque 100 photons en moyenne par sous-pupille et par pose (Gavel, 2001), alors dans ces conditions, le bruit de lecture est de toute façon négligeable devant le bruit de photons.

### Le bruit de photons

Le bruit de photons est engendré par le nombre fini de photons reçus sur le détecteur. C'est un bruit qui suit une statistique de Poisson. Il est inhérent à tous les systèmes de mesure de flux, donc à tous les analyseurs. Cependant, il est susceptible de varier fortement suivant les analyseurs parce qu'il est lié à la conception optique et électronique du système de détection. Il peut également dégrader indirectement la mesure si le calcul de l'estimée finale (courbure ou pente locales ici) n'est pas optimisé.

Pour l'analyseur à courbure de l'optique adaptative PUEO, l'intégration des photons incidents sur les deux plans image a été optimisée pour réduire ce bruit de photons. Ainsi le système de détection n'est divisé qu'en 19 sous-pupilles, autant que de degrés de liberté du système, et le flux total de chaque sous-pupille est intégré et comptabilisé à travers une photo-diode à avalanche (Véran, 1997), pour fournir directement la valeur de la courbure. Cette optimisation permet à l'optique adaptative PUEO de fonctionner jusqu'à une magnitude d'étoile de référence de l'ordre de  $m_R = 17$ , dans le rouge.

Du fait de ses 4 images de la pupille, l'analyseur de type pyramide requiert autant de pixels CCD qu'un analyseur Shack-Hartmann dont chaque sous-pupille serait imagée sur  $2 \times 2$  pixels, *i.e.* de type *quatre quadrants*. Le bruit de photons sur les mesures de gradients locaux de la phase pour l'analyseur pyramide est proportionnel à l'inverse du nombre de photons moyens intégrés,  $1/N_{\text{ph}}$  (Vérinaud, 2004). Son expression exacte a fait l'objet de plusieurs études (Ragazzoni et Farinato, 1999; Vérinaud, 2004), montrant qu'il dépend à la fois de la fréquence spatiale des déformations mesurées et de l'utilisation ou non de la technique de modulation sur l'analyseur pyramide.

Le bruit de photons sur l'estimation des gradients locaux de la phase dans le cas d'un analyseur Shack-Hartmann suit une dépendance similaire vis-à-vis du nombre de

photons moyens reçus, qui s'exprime ainsi (Nicolle et al., 2004) :

$$\sigma_e^2 = \frac{\pi^2}{2 \ln 2 N_{ph}} \left( \frac{\theta_b d_l}{\lambda_{OA}} \right)^2 \quad (2.11)$$

où  $N_{ph}$  est le nombre de photons détectés dans la sous-pupille,  $\theta_b$  est la largeur à mi-hauteur angulaire de la tache image. Pour des sous-pupilles à la limite de diffraction,  $\theta_b = \lambda_{OA}/d_l$ , alors que pour des sous-pupilles limitées par la turbulence  $\theta_b = \lambda_{OA}/r_0$ .

### 2.2.4 Les incertitudes de modèle (analyseur de Shack-Hartmann)

N'ayant pas étudié les analyseurs de types courbure et pyramide, je ne détaille ici que les incertitudes de modèle associées au Shack-Hartmann.

#### La méthode de centrage

En pratique, l'analyseur de Shack-Hartmann conduit à une matrice d'images sur le détecteur, qui doivent être traitées pour estimer le déplacement de centre de gravité de la tache associée à chaque sous-pupille. Ceci fait l'objet d'un algorithme dit de centrage. De nombreuses études et comparaisons des méthodes de centrage ont été faites, concernant les techniques de centre de gravité simple ou seuillé et également des méthodes de corrélations (Thomas, 2005; Nicolle, 2006).

Pour les étoiles de référence laser sur un télescope hectométrique, l'élongation de la tache image sur le détecteur rompt la symétrie en  $x$  et  $y$ , ce qui a donné naissance à de nouveaux algorithmes de centrage adaptés : le filtre adapté (Gilles et Ellerbroek, 2006) et le centre de gravité pondéré (Fusco et al., 2006c). Cet allongement introduit des corrélations entre les mesures de pentes suivant les directions  $x$  et  $y$  dans une même sous-pupille.

#### Les approximations du modèle au bord de la pupille

Par ailleurs, les sous-pupilles étant carrées et la pupille du télescope circulaire, il existe en pratique des sous-pupilles partiellement illuminées. Un traitement particulier des mesures de centrage dans ces sous-pupilles doit être implémenté.

Dans toutes les simulations présentées dans les parties II et III, les mesures issues des sous-pupilles partiellement illuminées ne sont pas comptées parmi les mesures à traiter. L'analyse est simplement faite avec un peu moins de données que ce qui serait accessible de façon optimale. Pour les tests d'optique adaptative présentés dans la partie IV, réalisés sur le simulateur Octopus, les sous-pupilles illuminées au-delà d'un certain taux ( $\sim 75\%$  de leur surface) sont gardées pour déterminer la correction.

#### Le modèle de Fried du Shack-Hartmann

L'approximation de Fried (1977) de l'analyseur de Shack-Hartmann conduit au modèle de Fried  $S_f$ . Ce modèle approxime les intégrales des Eqs. (2.7)-(2.8) par une intégration trapézoïdale, ne considérant que les valeurs de surface d'onde aux coins des



sous-pupilles. Alors les mesures modélisées s'écrivent :

$$d^x(i, j) = \frac{1}{2d_l} \left[ w((i + 1/2)d_l, (j - 1/2)d_l) + w((i + 1/2)d_l, (j + 1/2)d_l) \right. \\ \left. - w((i - 1/2)d_l, (j - 1/2)d_l) - w((i - 1/2)d_l, (j + 1/2)d_l) \right] \quad (2.12)$$

$$d^y(i, j) = \frac{1}{2d_l} \left[ w((i - 1/2)d_l, (j + 1/2)d_l) + w((i + 1/2)d_l, (j + 1/2)d_l) \right. \\ \left. - w((i - 1/2)d_l, (j - 1/2)d_l) - w((i - 1/2)d_l, (j - 1/2)d_l) \right]. \quad (2.13)$$

L'équation de mesure non bruitée du modèle de Fried s'écrit

$$\mathbf{d} = S_f(w). \quad (2.14)$$

## 2.3 Miroir déformable

Il existe plusieurs technologies possibles pour réaliser un miroir déformable. Les principales spécifications pour un miroir déformable s'expriment en termes d'amplitude de déformation maximale, de temps de réponse, de qualité de surface, d'hystérésis, de dissipation d'énergie ou encore d'encombrement. L'amplitude maximale requise dépend du diamètre du télescope  $D$ , si bien qu'elle est de l'ordre de quelques microns pour un télescope de 10 m, mais qu'elle doit couvrir 10 à 20 microns pour les télescopes hectométriques en projet. Les défauts de rugosité de petite échelle doivent par ailleurs être évités parce qu'ils ne peuvent être corrigés par l'optique adaptative.

Différentes technologies ont été expérimentées jusqu'ici pour réaliser ces miroirs (Séchaud, 1999). Les premiers miroirs déformables étaient segmentés, c'est-à-dire qu'ils sont constitués d'un ensemble de petits miroirs plans contigus. Suivant le type de miroirs segmentés considéré, les segments sont commandés pour corriger 1 à 3 types de déformations : le piston local uniquement ou le piston et les basculements en  $x$  et en  $y$ .

Désormais, il existe des miroirs déformables à surface continue. Ils déforment une membrane réfléchissante à l'aide d'actionneurs.

Les miroirs bimorphes sont constitués de deux membranes collées dos-à-dos, avec un réseau d'électrodes entre celles-ci pour influencer sur la courbure locale. Ils sont idéalement conçus pour être combinés à un analyseur de courbure. Ainsi, l'optique adaptative PUEO (CFHT) commande un miroir bimorphe.

La technologie la plus couramment utilisée à l'heure actuelle en astronomie est constituée d'une seule membrane, réfléchissante, au dos de laquelle sont attachés des actionneurs piezo-électriques. La figure 2.6 schématise la déformation de la membrane réfléchissante grâce aux actionneurs piezo-électriques. Une tension de l'ordre de 150 Volts produit une déformation de l'ordre de 10 microns d'amplitude.

Les actionneurs piezo-électriques sont responsables d'un phénomène d'hystérésis générant une erreur de correction de l'ordre de 10 à 20% de l'amplitude de la déformation. Il est heureusement possible de réduire cette erreur à environ 1% en introduisant des capteurs de position sur les actionneurs. Ceci est réalisé sur l'optique adaptative NAOMI du télescope William Herschel (Myers et al., 2003).

Portés par l'industrie des circuits intégrés, une nouvelle technologie suscite une attention croissante. Il s'agit des miroirs micro opto-électro-mécaniques, MOEM, qui sont prometteurs pour leur faible coût et la possibilité d'un très grand nombre d'actionneurs. Ils ne sont encore utilisés qu'à un stade de tests en laboratoires et leur dimension

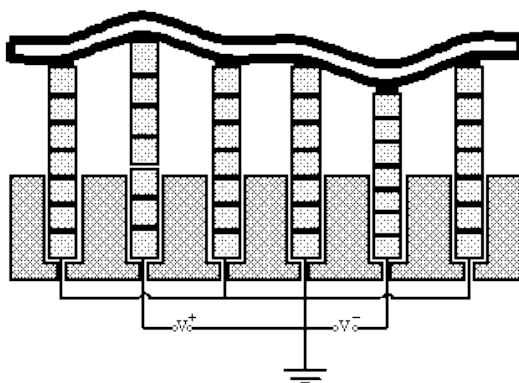


FIG. 2.6 – Schéma de déformation de la membrane réfléchissante à l'aide d'actionneurs piezo-électriques dans le miroir déformable de l'optique adaptative NAOS (ESO, Chili). Source : <http://www.onera.fr/conferences/naos/index.php>

actuelle est trop réduite pour offrir l'amplitude de correction exigée par les diamètres des télescopes hectométriques.

Dans ce manuscrit, la déformée du miroir  $w^c$  désigne la correction engendrée par la commande  $\mathbf{a}$  sur un nombre  $n_a$  d'actionneurs.

La réponse du  $i$ -ème actionneur est modélisée par une fonction continue  $m_i$  sur la surface du miroir déformable, appelée fonction d'influence. L'action du miroir déformable est alors décrite par l'équation

$$w^c(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n_a} m_i(\mathbf{r})a_i = (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a})(\mathbf{r}). \quad (2.15)$$

La linéarité du processus est généralement vérifiée sur les miroirs déformables existants.

Je néglige dans ce manuscrit la dynamique temporelle du miroir. De plus, je ne modélise le miroir que par des fonctions d'influence de type splines linéaires, de support égal à deux fois l'espace entre les actionneurs. Cette modélisation néglige les couplages entre les actionneurs ou d'autres effets particuliers à certaines technologies de miroir déformable comme l'hystérésis.

## 2.4 Les optiques adaptatives à grand nombre de paramètres

La figure 2.1 dépeint les premières idées des astronomes pour palier les méfaits de l'atmosphère sur la résolution des observations. Une optique adaptative élaborée à partir d'un seul analyseur observant une seule étoile de référence est désignée dans la suite de ce manuscrit par le terme d'optique adaptative *classique*.

Le principe de l'optique adaptative *classique* a commencé à démontrer son efficacité sur le ciel en 1990 avec l'optique adaptative COME-ON sur le télescope de 3.6m de l'ESO (Rigaut et al., 1991). Ce premier système comportait un miroir déformable à 19 actionneurs, puis il a été remplacé par l'optique adaptative COME-ON+ avec un miroir à 52 actionneurs en 1992 (Rousset et al., 1994). Depuis de nombreux systèmes d'optique adaptative *classiques* ont été réalisés, toujours avec un nombre croissant d'actionneurs, garants d'une résolution angulaire toujours plus proche de la limite de diffraction du télescope. Actuellement, les optiques adaptatives *classiques* mises en

oeuvre en astronomie utilisent des miroirs à quelques centaines de degrés de liberté (349 actionneurs pour le télescope décacatétrique Keck II à Hawaï) (van Dam et al., 2004).

L'optique adaptative *classique* est malheureusement limitée par le domaine d'isoplanétisme du système. On retrouve la remarque faite au chapitre précédent sur l'uniformité de la FEP longue pose dans le champ (*cf.* section 1.2.1). Plus l'objet astrophysique à observer est éloigné angulairement sur le ciel de l'étoile de référence de l'optique adaptative, moins les surfaces d'onde incidentes sur la pupille sont corrélées et donc moins pertinente est la correction appliquée dans le plan conjugué du plan pupille par le miroir déformable (Fried, 1982), ce qui est illustré par la figure 2.7.

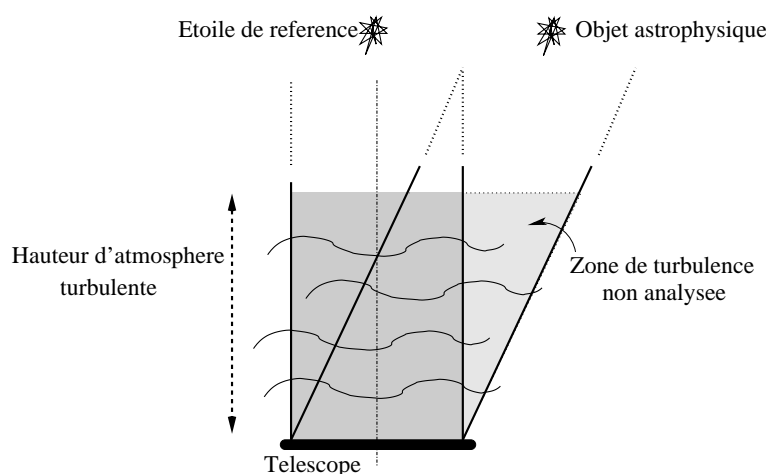


FIG. 2.7 – Effet d'anisoplanétisme.

Du fait de cet anisoplanétisme, le champ des observations bénéficiant de la correction d'optique adaptative est limité à quelques  $30''$  (secondes d'arc) de rayon autour de l'étoile de référence dans l'infra-rouge. Ce point soulève deux problèmes :

- Quelle est la probabilité qu'il existe une étoile de référence suffisamment brillante à proximité d'un objet astrophysique à observer pour que celui-ci puisse bénéficier de la correction ? Ou, d'un autre point de vue, quelle est la fraction du ciel qui peut faire l'objet d'observations corrigées avec cette optique adaptative ?
- Comment obtenir une correction d'optique adaptative sur un champ plus large ?

Le premier point introduit la notion de couverture du ciel. Elle est associée à la fois au critère de qualité de la correction et à la répartition sur la voûte céleste des étoiles d'une magnitude donnée. D'une part, la qualité de la correction peut être spécifiée en terme de valeur et d'uniformité dans le champ observé du rapport de Strehl ou d'un autre critère de performance. D'autre part, cette qualité de correction requiert la présence dans ce champ ou à proximité d'une ou plusieurs étoiles de référence naturelles suffisamment brillantes pour atteindre ces performances. La prise en compte de ces paramètres permet de caractériser la couverture du ciel d'une optique adaptative (Nicolle, 2006).

Cette couverture du ciel n'est malheureusement que de l'ordre de 1% pour les systèmes d'optique adaptative actuels qui fonctionnent avec des étoiles de référence naturelles.

Ainsi la dernière décennie a vu fleurir de nouveaux concepts d'optique adaptative pour dépasser ces difficultés. Je présente dans cette section les différents concepts pro-

posés afin d'adapter l'optique adaptative aux besoins des astronomes sur les grands télescopes existants ou en projet. Ils peuvent être classés en deux grands groupes :

- les optiques adaptatives de champ restreint : l'OA monoconjuguée (OAmC), l'OA par tomographie laser (OATL) et l'OA extrême (OAX)
- les optiques adaptatives de champ large : l'OA multiconjuguée (OAMC), l'OA de couche limite (OACL), et l'OA multiobjets (OAMO)

Le projet de télescope hectométrique européen, l'E-ELT, prévoit que chacun de ces concepts d'optique adaptative puisse être utilisé sur le futur télescope, soit en tant que système intégré au télescope ou système dédié à un instrument particulier. Je précise un peu plus loin pour chacun de ces systèmes le nombre de mesures et d'actionneurs envisagé dans chacune de ces configurations pour ce projet E-ELT.

### 2.4.1 Les optiques adaptatives de champ restreint

Les optiques adaptatives de champ restreint n'utilisent qu'un seul miroir déformable optiquement conjugué avec le plan pupille du télescope.

#### L'optique adaptative monoconjuguée : OAmC

Cette configuration est celle dont j'ai déjà fait mention, avec un analyseur observant une seule étoile de référence (*cf.* figure 2.1), en considérant un miroir déformable dont la fréquence spatiale limite de déformation est proche de  $1/(2r_0)^2$ . De cette façon, l'optique adaptative permet une bonne correction dans le domaine d'isoplanétisme autour de l'étoile de référence, c'est-à-dire sur quelques dizaines de secondes d'arc dans le proche infra-rouge. J'entends, par bonne correction, un rapport de Strehl longue pose de l'ordre de 70% si l'étoile est brillante. À partir des seules étoiles de référence naturelles, la couverture du ciel d'un tel système est de l'ordre de 1%. L'utilisation d'étoiles laser sur une telle optique adaptative permet d'accroître de façon phénoménale cette couverture du ciel (100% en théorie). C'est ainsi que le télescope de 10 m Keck II (Hawaii) est équipé d'une optique adaptative avec une étoile laser de type sodium.

Toutefois, le principe de l'optique adaptative monoconjuguée analysant des étoiles laser n'est plus valable pour les télescopes hectométriques, en raison de l'effet de cône (*cf.* section 2.1.2) qui domine alors fortement les erreurs de correction.

L'E-ELT est prévu pour accueillir en temps qu'optique adaptative de première lumière une OAmC basée sur l'analyse d'étoiles naturelles, avec un analyseur comprenant 84 sous-pupilles le long du diamètre ( $D/d_l = 84$ ).

L'analyse des étoiles laser pour augmenter la couverture du ciel est prévue grâce à une optique adaptative de champ restreint plus complexe, nommée OATL, visant à éliminer les effets néfastes de l'effet de cône.

#### L'optique adaptative de champ restreint en tomographie laser : OATL

Le concept OATL, pour *laser tomography adaptive optics*, découle de l'impact de l'effet de cône sur la qualité de la correction avec étoile laser lorsque le diamètre du télescope est supérieur à 10 m. L'idée est de maintenir une bonne qualité de correction sur un champ restreint, comme en OAmC, à l'aide d'un seul miroir déformable conjugué

---

<sup>2</sup> $r_0$  est le paramètre de Fried de la turbulence atmosphérique caractéristique du site d'observation considéré et exprimé ici à la longueur d'onde de l'observation  $\lambda_I$ . Je rappelle que  $r_0$  est proportionnel à  $\lambda_I^{6/5}$ .

au plan pupille, mais en analysant plusieurs étoiles laser, conjuguées chacune à un analyseur. Ceci est illustré par la figure 2.8.

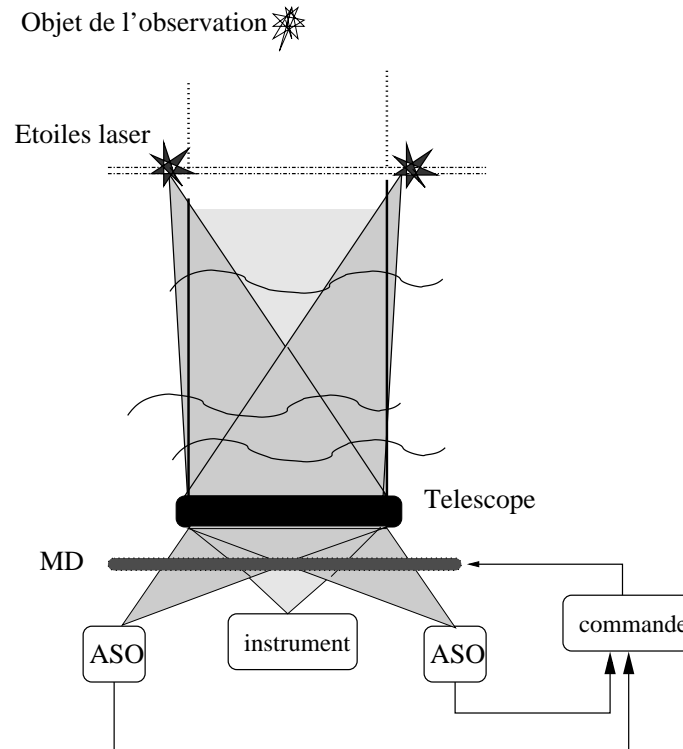


FIG. 2.8 – Tomographie laser en champ restreint : OATL

Cette optique adaptative prévue sur l'E-ELT est dimensionnée pour employer 6 étoiles laser, afin de corriger la surface d'onde sur un champ de 1 minute d'arc. L'indétermination de la position des étoiles laser, dans cette configuration à plusieurs étoiles, rend également difficile l'analyse des premiers ordres (spatiaux) de la perturbation, au-delà des simples basculements en  $x$  et  $y$  (Le Louarn et Tallon, 2002). L'analyse additionnelle d'une à trois étoiles naturelles dans le champ est alors nécessaire pour déterminer ces déformations de basse fréquence spatiale de la surface d'onde.

L'analyse des étoiles laser est envisagée à partir de 6 analyseurs de Shack-Hartmann avec  $D/d_l = 84$  et les étoiles naturelles sont analysées à partir d'un analyseur Shack-Hartmann de bas-ordres, c'est-à-dire qu'il ne comprend que  $3 \times 3$  sous-pupilles pour échantillonner la surface d'onde au-dessus de toute la pupille. Le nombre de mesures à traiter en temps réel pour la tomographie s'élève à plus de  $6 \times 10^4$ , et le nombre de commandes à appliquer au miroir est de l'ordre de  $5 \times 10^3$ .

### L'optique adaptative extrême : OAX

Une optique adaptative extrême, OAX, est optimisée pour sonder l'entourage très proche d'une étoile, avec comme objectifs directeurs la détection de planètes extrasolaires ou l'étude de disques de poussières (Gavel, 2001). Ainsi pour cette configuration, l'anisoplanétisme dans le champ n'est plus un problème puisque l'étoile dont l'environnement proche fait l'objet d'une observation sert elle-même d'étoile de référence. Un seul analyseur et un seul miroir déformable sont donc utilisés, comme en OAmC.

Afin de sonder les objets faibles autour de l'étoile (planètes ou poussière), un coronographe masque l'étoile. Ceci permet d'intégrer le flux issu des zones immédiates de celle-ci pendant un temps de pose extrêmement long afin de faire apparaître les signes d'existence d'une planète par exemple.

Cette optique adaptative doit être *extrêmement* performante afin de maximiser la résolution et permettre l'identification des objets très faibles dans le voisinage immédiat de l'étoile. Le système doit assurer un très haut rapport de Strehl ( $> 90\%$  à  $\lambda_I = 1.65 \mu\text{m}$ ). Les performances au-delà de cette valeur sont évaluées en terme de contraste, c'est-à-dire la quantité de lumière dispersée dans la FEP à une distance angulaire donnée de l'étoile.

Deux systèmes OAX sont actuellement en cours de conception. Un premier est destiné à l'instrument *Gemini Planet Imager*, sur le télescope de 8 mètres Gemini Nord (Consortium Gemini, Hawaii) (Poyneer et al., 2008). Un second projet, SAXO, sera inclus dans l'instrument SPHERE prévu pour le VLT (ESO, Chili) (Fusco et al., 2006a). Ces deux systèmes d'optique adaptative sont conçus avec une quarantaine d'actionneurs le long du diamètre ( $D = 8 \text{ m}$ ).

Cette configuration d'optique adaptative est également prévue pour le futur instrument EPICS de l'E-ELT (Vérinaud et al., 2006), mettant en jeu cette fois-ci un analyseur d'environ  $210 \times 210$  sous-pupilles. Le nombre de mesures fournies par l'analyseur est donc de l'ordre de  $6 \times 10^4$  et le nombre de commandes à envoyer au miroir déformable vaut environ moitié moins,  $3 \times 10^4$ .

### 2.4.2 Les optiques adaptatives de champ large

Les limitations de champ dues à l'anisoplanétisme des systèmes présentés précédemment sont faits notoires depuis les débuts de l'optique adaptative (Fried, 1982). Afin de pouvoir observer des scènes étendues avec une correction d'optique adaptative uniforme, il est nécessaire de compenser la perturbation atmosphérique dans son volume. Les modèles de la turbulence atmosphérique (*cf.* chapitre suivant) justifient l'intérêt de conjuguer plusieurs miroirs déformables à des altitudes différentes, correspondant à des couches d'atmosphère particulièrement turbulentes, afin d'uniformiser ou d'optimiser la fonction d'étalement de point (FEP) dans le champ. Les trois concepts d'optique adaptative de champ large présentés ci-après reposent sur ce principe.

#### L'optique adaptative multiconjuguée : OAMC

À partir de l'analyse de 3 étoiles de référence naturelles et de 2 miroirs déformables optiquement conjugués à des altitudes différentes, il est désormais démontré que l'effet d'anisoplanétisme peut être significativement réduit sur les observations d'un champ stellaire de 2 arcminutes grâce à cette multiconjugaison (Marchetti et al., 2007). Les applications de cette approche, OAMC, sont nombreuses en astrophysique extragalactique, par exemple pour étudier la poussière interstellaire des zones d'étoiles en formation.

On distingue deux types d'OAMC, celle *orientée étoile* et celle *orientée couche*. Le schéma de la figure 2.9 illustre le concept d'OAMC orientée étoile. Dans ce cas, il y a un analyseur par étoile de référence. C'est la recombinaison des différents jeux de mesure qui permet d'estimer la perturbation introduite dans chaque couche turbulente modélisée à la verticale de la pupille. Un faible nombre de couches est généralement utilisé, et ceci est justifié par les études de turbulence sur les sites d'observation (*cf.*

section 3.1). Plusieurs miroirs déformables sont insérés dans la boucle fermée du système d'optique adaptative, en les conjuguant optiquement à des altitudes de couches différentes. D'après le schéma de la figure 2.9, on remarque que plus la couche est élevée, plus le miroir déformable est susceptible de corriger une large surface projetée, incluse dans la réunion des projections de la pupille du télescope sur cette couche dans les directions des étoiles de référence.

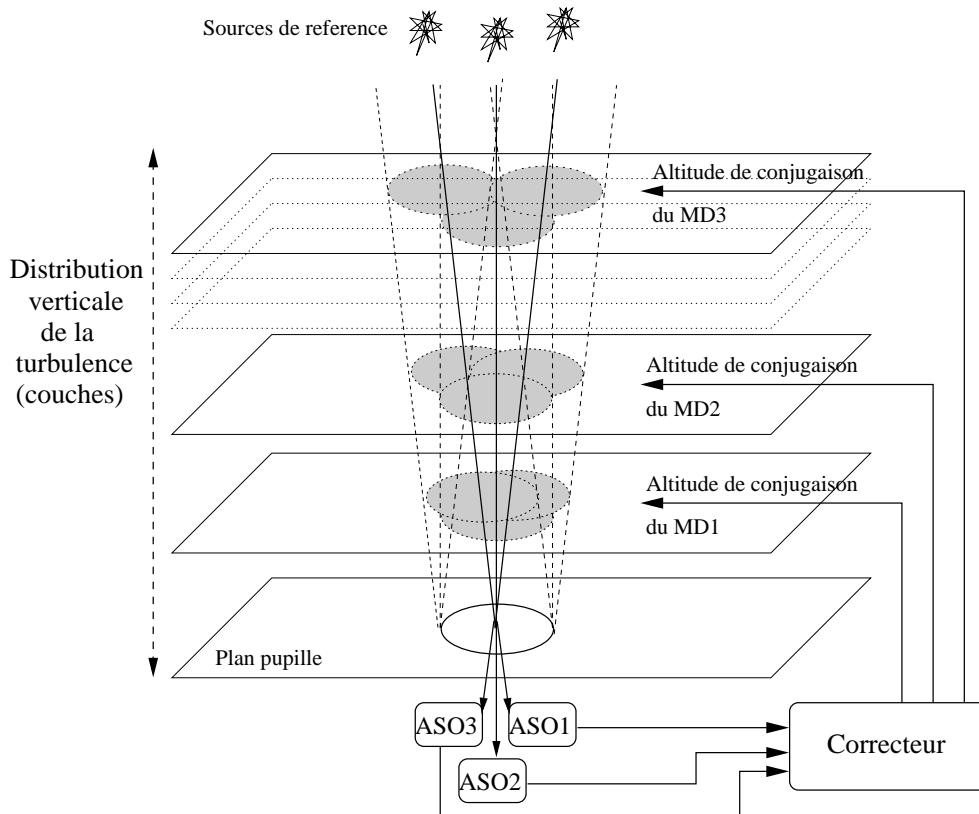


FIG. 2.9 – Schéma de principe de l'optique adaptative multiconjuguée, OAMC. Plusieurs étoiles de référence sont analysées, réparties dans un champ de vue large à corriger. En configuration *orientée étoile*, chaque étoile est analysée par un analyseur différent. La perturbation est modélisée comme l'ensemble de plusieurs déformations à des altitudes discrètes où est concentrée la turbulence. À plusieurs de ces altitudes sont conjugués des miroirs déformables pour appliquer une correction sur tout le champ.

Un second concept d'MCAO a été développé par Ragazzoni et al. (2000), désigné comme OAMC orientée couche. Cette configuration utilise autant d'analyseurs que de miroirs déformables. Chaque analyseur est optiquement conjugué à une altitude de couche à laquelle est associée un miroir déformable. Contrairement à l'OAMC orientée étoile, les analyseurs observent tous le flux issu de plusieurs étoiles de référence dans le champ. La correction peut alors être décomposée en boucles fermées disjointes ; une boucle par couple analyseurmiroir déformable conjugué. La complexité de la correction croît alors avec le nombre de miroirs et non plus avec le nombre d'étoiles de référence comme en OAMC orientée étoile. De plus, le fait d'intégrer le flux reçu de toutes les étoiles de référence sur chaque analyseur, permet d'augmenter la sensibilité de l'analyse et donc de faire fonctionner ce système sur des étoiles de référence plus faibles.

Malheureusement, la disparité des magnitudes des étoiles de référence naturelles dans le champ complique l'estimation de la perturbation à corriger, parce que la turbulence est *mieux* analysée dans les directions d'étoiles brillantes que dans les autres (Nicolle, 2006).

Le projet d'E-ELT comprend une optique adaptative multiconjuguée, nommée MAORY, dont l'étude à commencer cette année. Son dimensionnement n'est pas encore arrêté mais il comprendra vraisemblablement un nombre total de mesures proche de  $10^5$ , et deux à trois miroirs déformables afin de fournir la qualité de correction attendue.

### **L'optique adaptative de couche limite : OACL**

Le champ qui peut être corrigé de façon uniforme grâce à l'OAMC est restreint à 1 à 2 minutes d'arc, du fait du grand nombre de paramètres qu'elle fait intervenir. Pourtant, certaines observations astrophysiques requièrent avant tout un très grand champ avec une correction partielle mais uniforme. C'est l'objectif de l'optique adaptative de couche limite, OACL. Son principe repose sur le fait que l'essentiel de la turbulence optique est généralement concentrée dans les premières centaines de mètres au-dessus du télescope, que l'on nomme la couche limite. Par ailleurs, dans ce volume de basse altitude, la turbulence atmosphérique affecte les surfaces d'onde, même issues d'étoiles éloignées dans le champ, à peu près de la même façon.

Ainsi, l'analyse de plusieurs étoiles de référence dans un champ de quelques 5 minutes d'arc permet de reconstituer la perturbation commune de basse altitude et de la corriger grâce à un unique miroir déformable optiquement conjugué à une faible altitude, représentative de cette couche limite.

Le système OACL peut fonctionner avec des étoiles de référence naturelles ou laser. Dans le cas de l'utilisation d'étoiles laser, la couverture du ciel d'un système OACL est proche de 100%, puisque le grand champ considéré augmente la probabilité d'y trouver une ou plusieurs étoiles naturelles suffisamment brillantes pour analyser les bas ordres de la turbulence. C'est un atout supplémentaire de ce concept d'optique adaptative.

Deux optiques adaptatives de type OACL sont actuellement conçues pour fonctionner avec une seule étoile laser de type Rayleigh. Il s'agit de SAM sur le télescope SOAR (Chili) (Thomas, 2005) et de GLAS sur le télescope William Herschel (Morris et al., 2006). Les deux télescopes recevant ces systèmes d'optique adaptative ont un diamètre de 4.2m. D'autres projets d'OACL sont actuellement à l'étude, et notamment un système intégré au télescope E-ELT.

### **L'optique adaptative multiobjets : OAMO**

Contrairement au cas de la OAMC, les miroirs déformables en OAMO ne sont plus différenciés par leur altitude de conjugaison mais par leur directions de correction. L'avantage de cette technique est de pouvoir optimiser la correction dans chacune des directions d'observation. De plus, il est possible de la mettre en pratique de cette correction se fait en combinant un miroir déformable de grand champ pour la correction de la turbulence commune au sol, avec plusieurs miroirs de champ restreint en altitude dédiés aux différentes cibles. L'objectif de l'OAMO est ainsi de fournir un grand champ d'observation avec une correction optimisée dans 10 à 20 directions. Ce concept d'optique adaptative est porté par les besoins de la spectroscopie tridimensionnelle en astrophysique. Les objets observés sont très faibles et bénéficieront donc de l'utilisation d'une ouverture de 42 m de diamètre pour collecter le flux incident. La compréhension



de la formation stellaire passe par une analyse statistique des observations et donc l'obtention d'un grand nombre de données. Dans ce contexte, l'atout fondamental de la OAMO est de permettre l'observation simultanée d'une dizaine d'objets astrophysiques corrigés.

La difficulté majeure d'un tel concept est que la correction en altitude, spécifique à chaque direction d'observation, se fait en boucle ouverte. Les performances sont encore difficiles à quantifier à l'heure actuelle.

Un système de type MOAO est prévu sur l'E-ELT, il est nommé EAGLE, et est en cours d'étude.

### Conclusion sur les optiques adaptatives à grands nombre de paramètres

Les projets de télescopes hectométriques avec leurs divers concepts d'optique adaptative marquent un saut en terme de nombre de paramètres à contrôler en temps réel. Tandis que le système d'optique adaptative du télescope Keck II comporte 349 actionneurs, le système monoconjugué de l'E-ELT en comportera plus de 5000. Les concepts d'optique adaptative de champ large en comporteront encore davantage. Ceci n'est pas sans conséquence sur la stratégie de correction du système et plus particulièrement sur l'algorithme permettant de passer des mesures aux commandes à appliquer.

Les deux prochaines sections présentent les stratégies actuelles de correction de la commande et leurs perspectives pour les dimensions des systèmes à venir.

## 2.5 La matrice d'interaction du système

La matrice d'interaction  $\mathbf{G}$  nomme l'opérateur de passage de l'espace des commandes  $\mathbb{R}^{n_a}$  à celui des mesures  $\mathbb{R}^m$ , à travers le système d'optique adaptative en l'absence de perturbations, *i.e.*

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}, \quad (2.16)$$

où  $\mathbf{a}$  est un vecteur de commandes et  $\mathbf{d}$  est un vecteur de mesures.

Je distingue ici deux approches possibles pour modéliser  $\mathbf{G}$  : la calibration ou la synthèse théorique.

### Modèle de $\mathbf{G}$ calibré

En supposant que la réponse du système d'optique adaptative à une commande  $\mathbf{a}$  est linéaire, il est possible d'obtenir  $\mathbf{G}$  par calibration en observant une source non affectée par la turbulence atmosphérique. Chaque colonne de la matrice  $\mathbf{G}$  est le vecteur de mesure obtenu en appliquant au miroir déformable un vecteur de base de l'espace des commandes. La matrice  $\mathbf{G}$  est alors stockée en mémoire, dans le système de commande de l'optique adaptative. C'est la procédure employée sur la plupart des systèmes d'optique adaptative existants (*e.g.* (van Dam et al., 2004)).

Pour une optique adaptative de champ large, cette matrice d'interaction est fonction de la direction d'analyse, c'est-à-dire de la position de l'étoile de référence, dans ce champ. Ceci entraîne une recalibration fréquente de la matrice d'interaction.

### Modèle de $\mathbf{G}$ synthétique

Afin d'éviter l'étape de calibration de la matrice d'interaction  $\mathbf{G}$ , il est aussi possible de synthétiser la matrice à partir des modèles séparés des analyseurs et des miroirs dé-

formables. Cette approche est intéressante lorsque l'on a un bon modèle de connaissance de l'analyseur et du miroir, et lorsqu'ils sont linéaires. Ainsi

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = S(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}), \quad (2.17)$$

De plus, les miroirs et les analyseurs ne sont plus nécessairement décrits par des matrices, mais ils peuvent être implémentés à partir de modèles analytiques plus précis. La direction d'analyse peut être considérée comme un paramètre du modèle implémenté pour chaque analyseur. Pour de grands systèmes d'optique adaptative, cette approche peut éviter le stockage en mémoire d'une matrice de dimension  $n_a \times m$ , où  $n_a$  et  $m$  représentent respectivement le nombre total d'actionneurs (comprenant tous les miroirs déformables) et le nombre total de mesures (comprenant tous les analyseurs).

### 2.5.1 Cas particulier de la géométrie de Fried

Dans les systèmes d'optique adaptative *simples* que j'étudie dans ce manuscrit, les coins des sous-pupilles de l'analyseur de Shack-Hartmann sont alignés avec les actionneurs du miroir déformable. C'est le cas généralement pour les systèmes d'optique adaptative utilisant ce type d'analyseur. Par exemple, la configuration du système NAOS installé sur un télescope VLT, au Chili, est représentée sur la figure 2.10. Cette géométrie est désignée par l'appellation *géométrie de Fried*. Il est intéressant de remarquer que dans le cas d'un miroir aux fonctions d'influence bilinéaires, le modèle de Fried de l'analyseur (*cf.* section 2.2) est un modèle parfait de Shack-Hartmann, *i.e.*

$$\mathbf{d} = S_f(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}) = S_{th}(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}). \quad (2.18)$$

En effet, la moyenne résultant de l'intégrale sur la frontière dans les équations (2.7)-(2.8) est équivalente à la demi-somme effectuée par le modèle de Fried dans les équations (2.12)-(2.13).

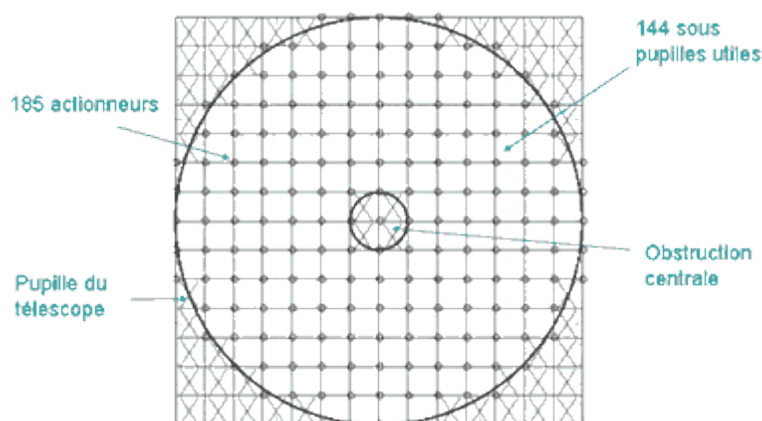


FIG. 2.10 – Configuration du système NAOS sur un télescope du VLT au Chili. Les actionneurs sont alignés avec les coins des sous-pupilles de l'analyseur de Shack-Hartmann. C'est la géométrie de Fried. *Source* : <http://www.onera.fr/conferences/naos/index.php>

Dans la géométrie de Fried, il existe aux moins deux modes non vus du miroir, *i.e.*  $\dim \text{Ker } \mathbf{G} \geq 2$ . Une déformation uniforme dans le plan pupille, c'est-à-dire un *piston*,

produit un jeu de mesures nulles. De plus, le mode *gauffre* ou *damier* est également un mode singulier du système. Si on ne considère que les mesures provenant des sous-pupilles entièrement illuminées et qu'il existe un actionneur aux 4 coins de chaque sous-pupille entièrement illuminée, alors ces deux modes orthogonaux du noyau de  $\mathbf{G}$  sont représentés sur la figure 2.11 pour une pupille circulaire. Le mode damier correspond au mode pour lequel chaque actionneur est déplacé d'une même amplitude mais de signe opposé à celui de ses plus proches voisins.

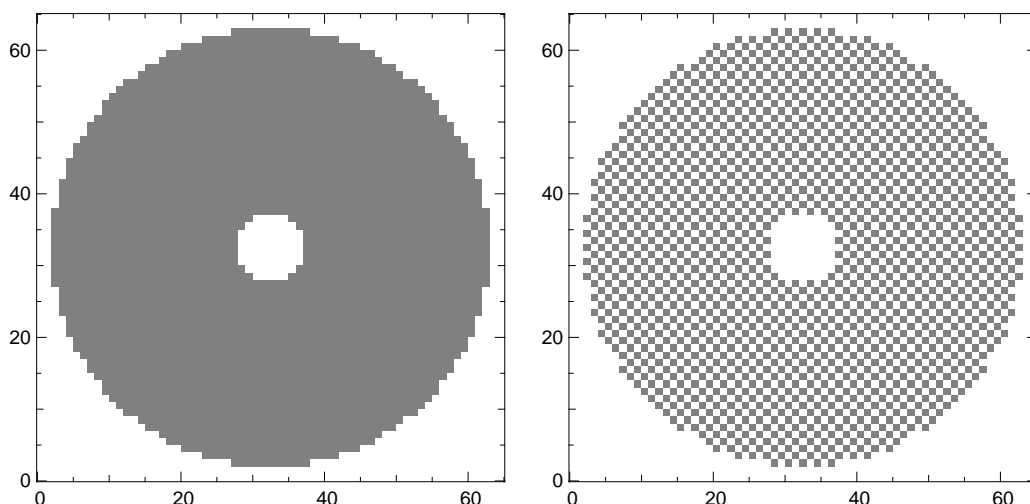


FIG. 2.11 – Les deux modes non vus de la matrice d'interaction  $\mathbf{G}$  du système dans la géométrie de Fried sur une pupille circulaire. À gauche, le mode piston, pour lequel les actionneurs génèrent une déformée plane sur la pupille. À droite, le mode *damier* comprenant les valeurs -1 et 1, en alternance sur la pupille.

Tout actionneur dont la déformée se trouve en dehors de la pupille est aussi responsable à lui seul d'un mode non vu additionnel pour  $\mathbf{G}$ .

## 2.6 L'asservissement du système

L'optique adaptative est un système asservi. Son illustration sur la figure 2.1 peut être transcrite sous la forme d'un schéma, ce qui est effectué sur la figure 2.12.

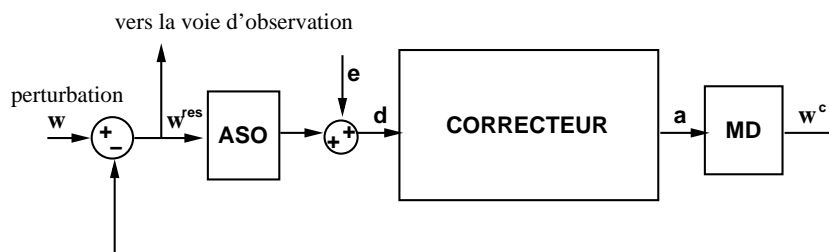


FIG. 2.12 – Schéma d'une optique adaptative en boucle fermée. La surface d'onde incidente est notée  $w$ , la déformée du miroir déformable  $w^c$  et la surface d'onde résiduelle  $w^{\text{res}}$ . Les mesures  $d$  issues de l'analyseur sont entachées d'incertitudes, modélisées par un bruit Gaussien centré  $e$ .

La surface d'onde incidente perturbée par l'atmosphère est notée  $w$ , et la correction

appliquée par le biais du miroir déformable  $w^c$ . L'analyseur observe alors la déformée résiduelle  $w^{\text{res}}$ . Cette perturbation résiduelle est caractéristique des déformations affectant les observations astrophysiques effectuées en parallèle de la correction, aux effets d'isoplanétisme près.

À partir des systèmes d'analyseurs et de miroirs déformables présentés dans les sections précédentes, il faut concevoir un correcteur permettant d'atteindre les performances spécifiées par les besoins des astronomes. Je décris dans un premier temps les correcteurs utilisés pour des systèmes d'OAmC existants. Puis, je présente les nouvelles problématiques de synthèse du correcteur introduites par les concepts d'optique adaptative de champ large et de tomographie.

### 2.6.1 Correcteur pour une OAmC

Dans une optique adaptative mono-conjuguée (OAmC), comme dans une optique adaptative extrême (OAX) d'ailleurs, la correction est calculée pour corriger la surface d'onde issue de l'étoile de référence. En conséquence, corriger les déformations est équivalent à annuler les dérivées spatiales de  $w$  sur la pupille, autrement dit annuler les mesures  $\mathbf{d}$  s'il n'y avait pas de bruit.

Historiquement, la synthèse du correcteur était décomposée en deux étapes distinctes, une étape statique, et l'autre dynamique. L'étape statique vise l'inversion de la chaîne directe du système d'optique adaptative. La partie dynamique de la correction est souvent réalisée à l'aide d'un correcteur de type intégrateur. Afin de réaliser ces deux étapes, il faut modéliser la chaîne directe de l'optique adaptative, ce qui est fait dans le prochain paragraphe. Ensuite, je décris le processus de synthèse d'un correcteur de type intégrateur en optique adaptative.

#### La fonction de transfert de la chaîne directe

La chaîne directe correspond au transfert de l'optique adaptative entre l'entrée  $\mathbf{a}$  et la sortie  $\mathbf{d}$ , c'est-à-dire à l'ensemble {MD + ASO} illustré par le schéma en haut de la figure 2.13.

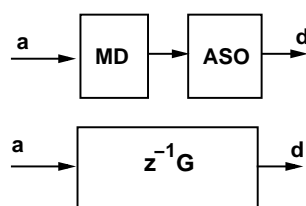


FIG. 2.13 – Chaîne directe de l'optique adaptative. En haut : Schéma de principe. En bas : Représentation à partir de la fonction de transfert du système dans le cas d'une modélisation linéaire et discrète.

La dynamique du miroir déformable est généralement négligeable en optique adaptative. L'analyseur a en revanche une dynamique non négligeable, puisque le détecteur doit intégrer l'intensité reçue de l'étoile de référence pendant un certain temps. L'opération de moyenne temporelle du signal équivalente à ce temps de pose a un effet négligeable sur la synthèse du correcteur pour les performances recherchées en optique adaptative. Cependant, le retard avec lequel les mesures de l'analyseur deviennent ac-

cessibles, dû à ce temps de pose et à la lecture du détecteur, doit être pris en compte (Madec, 1999).

Je discrétise temporellement le modèle du système, avec un pas d'échantillonnage temporel  $T$  égal à la période avec laquelle un nouveau jeu de mesures de l'analyseur devient accessible. Alors la transformée en  $z$  de la chaîne directe du système s'écrit  $z^{-1}\mathbf{G}$ , comme représentée en bas de la figure 2.13, où  $\mathbf{G}$  est toujours la matrice d'interaction du système.

La définition de la fonction de transfert en temps discret est rappelée dans l'annexe B.

J'insiste sur le fait que les transferts en  $z$  sont exprimés ici en multivariable, c'est-à-dire, qu'ils sont fonction à la fois de la fréquence temporelle (*via*  $z$ ) et des variables (spatiales) des espaces d'entrée et de sortie des blocs (ASO, MD, *etc*).

Maintenant que l'on connaît le transfert du système  $\{\text{MD} + \text{ASO}\}$ , il est possible de synthétiser un correcteur pour l'optique adaptative en boucle fermée schématisée sur la figure 2.12, afin de réguler la sortie  $\mathbf{d}$ . Les spécifications de ce système bouclé sont exprimées à partir des mesures  $\mathbf{d}$ . En régime transitoire, elles concernent la rapidité et l'amortissement. En régime permanent, on étudie la précision et la stabilité de  $\mathbf{d}$ .

La loi de commande utilisée dans les systèmes d'optique adaptative mono-conjuguée (OAmC) *sur le ciel* est de type intégrale.

### Correcteur intégrateur scalaire

Les premiers systèmes d'optique adaptative, comme COME-ON, étaient synthétisés en découplant les aspects temporels des autres variables du système. Le correcteur est ainsi composé de deux éléments schématisés par les deux blocs placés en série à la place du correcteur dans le diagramme de la figure 2.14.

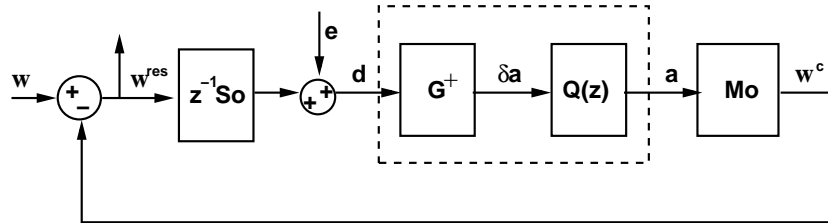


FIG. 2.14 – Représentation des transferts d'une optique adaptative dans le cas d'une modélisation linéaire et en temps discret. Les modèles nominaux de l'analyseur et du miroir déformable sont désignés par  $z^{-1}S_o$  et  $M_o$  respectivement.

Dans le premier bloc,  $\mathbf{G}^+$  est une inverse généralisée ou une approximation de l'inverse du processus décrit par  $\mathbf{G}$ . Ceci permet de passer de l'espace des mesures à l'espace des commandes, pour appliquer une correction qui rétablira la sortie désirée. Ce bloc constitue la partie statique du correcteur, au sens où il est défini indépendamment des dynamiques du système et des perturbations.

Dans le deuxième bloc, on trouve la loi de commande proprement dite, l'intégrateur scalaire

$$Q(z) = \frac{K_i}{1 - z^{-1}}, \quad (2.19)$$

où  $K_i$  désigne le gain de l'intégrateur.

Ce type de correction a une limitation majeure. Quand la dimension de  $\mathbf{d}$  augmente en optique adaptative, c'est que l'on souhaite corriger la surface d'onde dans un espace de possibilités de perturbations (ou de modes) de plus en plus grand. Or tous ces modes de la surface d'onde n'évoluent pas avec la même dynamique (Conan et al., 95). Il est donc pénalisant de définir une seule loi de commande appliquée uniformément sur l'espace des paramètres.

### Correcteur intégrateur modal

Une amélioration de ce correcteur consiste à transformer le système d'optique adaptative à  $n_a$  variables d'entrée en  $n_a$  systèmes d'optique adaptative mono-entrée indépendants, fonctionnant en parallèle. Gendron et Lena (1994) ont montré que ceci était possible si chacun des  $n_a$  systèmes mono-entrée commande un mode spatial propre du système, *i.e.* un vecteur propre de la matrice symétrique positive  $(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})$ . En effet, on peut noter

$$(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T, \quad (2.20)$$

la décomposition en valeurs singulières (SVD), qui sont aussi les valeurs propres, de  $(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})$ . La matrice  $\mathbf{V}$  est orthogonale, ce qui signifie que  $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  est diagonale. Si le modèle de la matrice d'interaction du système est correct, alors  $\mathbf{G} = \mathbf{S}_o \cdot \mathbf{M}_o$  sur la figure 2.14. Que  $\mathbf{G}^+$  soit la pseudo-inverse de  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}^+ \cdot \mathbf{G} = (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})^\dagger \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda}^\dagger \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T, \quad (2.21)$$

ou bien qu'elle soit obtenue par SVD tronquée

$$\mathbf{G}^+ \cdot \mathbf{G} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda}^+ \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T, \quad \text{où } \Lambda_{ii}^+ = \begin{cases} 1/\Lambda_{ii} & \text{si } \Lambda_{ii} > \epsilon > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.22)$$

la matrice orthogonale  $\mathbf{V}^T$  définit un changement de variables à partir de l'espace des actionneurs tel que le système de commande pour chacun des modes propres (vecteurs colonnes de  $\mathbf{V}^T$ ) soit découplé des autres.

Dans chacun de ces sous-espaces, les diagrammes mono-variables équivalents à celui de la figure 2.14 ne font plus intervenir qu'un bloc  $z^{-1}$  pour l'analyseur et un bloc  $Q(z)$  pour le correcteur ; les autres blocs disparaissent. Les systèmes étant découplés, il est finalement possible de définir un correcteur  $Q_i(z)$  spécifique à chaque mode propre.

En pratique, le découplage des systèmes nécessite dans ce cas de précalculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction  $\mathbf{G}$  du système, afin de connaître les matrices de passage dans les espaces de modes singuliers pour la commande  $\mathbf{a}$  et les mesures  $\mathbf{d}$ .

Ellerbroek et al. (1994) ont généralisé cette approche modale de la correction à d'autres approximations  $\mathbf{G}^+$  de l'inverse de la matrice d'interaction  $\mathbf{G}$ , avec la contrainte que  $\mathbf{G}^+ \cdot \mathbf{G}$  soit une matrice diagonale. Toutefois, cette fois-ci, les modes orthogonaux et les gains des intégrateurs sont déduits d'une optimisation tenant compte à la fois de la propagation du bruit dans la commande et de la dynamique de la turbulence spécifiques à ces différents modes.

Dans la suite de ce manuscrit, j'entends par *correcteur modal* un correcteur  $\mathbf{Q}(z) \cdot \mathbf{G}^+$ , tel que  $\mathbf{G}^+ \cdot \mathbf{G}$  soit une matrice diagonalisable dans une base de modes orthogonaux de l'espace de commande (actionneurs) et que  $\mathbf{Q}(z)$  soit diagonal dans cette même base.

Plusieurs correcteurs modaux avec un intégrateur ont été mis en oeuvre avec succès sur des systèmes d'optique adaptative en astronomie. On peut citer notamment COME-ON PLUS pour l'ESO (Gendron et Lena, 1995), le système PUEO du Télescope Canada-France-Hawaii (Rigaut et al., 1998), Altaïr sur le télescope Gemini Nord, ou encore NAOS au Very Large Telescope (ESO).

D'autres correcteurs modaux ont été étudiés dans le passé pour des systèmes d'OAmC. Madec (1999) a comparé les performances de plusieurs choix possibles de correcteurs modaux : un intégrateur pur, un proportionnel intégrateur, et un intégrateur avec prédicteur de Smith. Dessenne et al. (1998) ont généralisé l'approche modale à des correcteurs arbitraires, dans le but particulier de déterminer un prédicteur.

### 2.6.2 Correcteur pour une optique adaptative en champ large ou en tomographie

Cette approche n'est pas facilement adaptable aux nouveaux concepts d'optique adaptative.

Comme précisé à la section 2.5, la matrice d'interaction  $\mathbf{G}$  du système doit être recalculée à chaque nouvelle configuration d'analyse. Donc sa décomposition en modes singuliers doit également être recalculée, pour redéfinir les vecteurs propres associés au contrôle modal. Ceci représente du temps de calibration et du temps de précalcul avant chaque série d'observations. L'avantage des systèmes à étoiles de référence laser est que la disposition des étoiles artificielles dans le champ peut être figée et alors la matrice d'interaction est constante vis-à-vis de ces directions d'analyse. Il ne reste alors plus qu'à intégrer la partie de la matrice d'interaction qui tient compte des étoiles naturelles pour les basses fréquences spatiales (basculements principalement) de la perturbation.

Par ailleurs, pour la correction à l'aide de plusieurs miroirs, l'inversion de la matrice d'interaction, *i.e.* la partie statique du correcteur, devient plus complexe. En effet, l'utilisation de miroirs conjugués à des altitudes diverses provoque l'apparition de modes non vus, dans les directions d'analyse, de fréquences spatiales suffisamment basses pour dégrader significativement les observations dans d'autres directions (Le Roux et al., 2004). Il est nécessaire de lever ces dégénérescences lors de l'inversion de la matrice d'interaction, ou lors de la détermination de l'espace modal à considérer pour le correcteur. La régularisation de cette inversion doit reposer sur des *a priori* concernant la surface d'onde turbulente au niveau des couches atmosphériques perturbées modélisées. Ce besoin spécifique aux systèmes d'optique adaptative comportant plusieurs miroirs déformables requiert donc l'introduction d'un espace supplémentaire dans la modélisation du système : l'espace des surfaces d'onde aux altitudes de conjugaison des miroirs déformables.

La matrice d'interaction est alors modélisée de façon composée

$$\mathbf{G} = S(\mathbf{m}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}. \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{S}$  sont des matrices représentant les miroirs et les analyseurs en utilisant une représentation paramétrique entre ces deux éléments des surfaces d'ondes aux différentes altitudes  $\mathbf{w}$ . L'espace de définition des paramètres  $\mathbf{w}$  couvre l'espace image des miroirs  $\mathcal{M}$ , engendré par les fonctions d'influence  $(m_i)_{1 \leq i \leq n_a}$ . Cet espace définit également l'espace de définition de la matrice  $\mathbf{S}$ .

L'inversion de  $\mathbf{G}$  se fait alors en deux étapes : l'inversion du processus de mesure  $\mathbf{S}$  et l'inversion du miroir déformable. Les incertitudes associées à la commande du miroir déformable sont généralement négligeables en optique adaptative. L'inversion du

miroir déformable est donc effectuée par une simple projection  $\mathbf{F}$  des surfaces d'onde sur l'espace des actionneurs (Ellerbroek, 1994; Fusco et al., 2001). En revanche, les incertitudes de mesures de l'analyseur sont plus importantes, à cause des diverses sources de bruit intervenant : bruit de photon, bruit de lecture et erreur de centrage avec un Shack-Hartmann par exemple. C'est pour cette raison que l'inversion du processus de mesure,  $\mathbf{S}$ , est traitée comme un problème inverse (*cf.* chapitre 4) particulièrement pour les systèmes d'optique adaptative de champ large et en tomographie laser (Ellerbroek, 1994; Fusco et al., 2001). L'inversion du processus de mesure est désignée dans tout ce manuscrit par le terme de *reconstruction*. La détermination d'un estimateur optimal  $\mathbf{R}$  pour cette reconstruction fait l'objet du chapitre 5, je précise simplement ici que la matrice  $\mathbf{R}$  comprend un terme de régularisation afin de définir une approximation de l'inverse du processus  $\mathbf{S}$ .

À partir de  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{R}$ , il est donc possible de définir une nouvelle approximation

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \quad (2.24)$$

Cette synthèse de la partie statique du correcteur est étudiée dans la partie II de ce manuscrit.

Si  $\mathbf{R}$  est un reconstituteur de type *maximum a posteriori* (*cf.* chapitre 4),  $\mathbf{G}^+ \cdot \mathbf{G}$  n'est plus nécessairement diagonalisable (parce que la symétrie n'est pas garantie), ce qui ne permet pas un découplage tel qu'effectué dans la section précédente. Il est alors possible de reconsidérer une structure d'asservissement identique à celle du bas de la figure 2.14, avec  $\mathbf{G}^+$  définie par une forme du type (2.24) et  $Q(z)$  un correcteur scalaire.

D'une façon encore plus générale, on peut retenir que même si un espace modal adéquat est trouvé permettant un découplage spatial de la commande, alors il faut prendre conscience que le changement de variable entre l'espace des mesures en sortie de l'analyseur et cet espace modal pour les mesures, ou le changement de variable entre l'espace de commande des voltages sur les actionneurs et l'espace modal orthogonal souhaité sont *a priori* définis par des matrices pleines de dimension  $\mathbb{R}^{m \times m}$  ou  $\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ . L'application de telles matrices à des vecteurs en temps réel pour les ordres de grandeur de  $m$  et  $n_a$  envisagés sur un télescope hectométrique reste problématique. Ceci est détaillé dans le prochain paragraphe.

Enfin, on peut noter que le critère de performance pour les systèmes d'optique adaptative à plusieurs miroirs déformables doit être exprimé dans l'espace des surfaces d'onde et non plus dans l'espace des mesures. Ceci remet en question le choix d'un correcteur de type intégrateur scalaire. La partie III de ce manuscrit est consacrée à la définition d'une nouvelle correction à partir de l'optimisation d'un critère exprimé dans l'espace des surfaces d'onde.

### 2.6.3 Calcul en temps réel de la correction

L'arrivée des nouveaux systèmes d'optique adaptative n'impose pas seulement une révision de la synthèse du correcteur dans son principe, elle conduit avant tout à de nouvelles contraintes algorithmiques et c'est dans ce contexte particulier que le travail présenté a été mené. J'explique ici cette contrainte.

Quel que soit le type d'optique adaptative, de champ restreint ou de champ large, la matrice de commande du système  $\mathbf{G}^+$  est une matrice pleine. Ceci provient du fait que l'analyseur mesure les dérivées spatiales de la surface d'onde. La modification d'une valeur de mesure a des répercussions sur toutes les commandes. Actuellement,



dans les plus grands systèmes d'optique adaptative en astronomie, la matrice  $\mathbf{G}^+$  est appliquée au vecteur de mesures afin de déterminer les commandes à appliquer. Cette manipulation numérique, notée MMV pour multiplication matrice-vecteur, requiert de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^2)$  opérations en flottants, en considérant qu'il y a généralement environ 2 fois plus de mesures que d'actionneurs à contrôler  $n$ . Cette dépendance du calcul en  $n$  au carré est problématique pour la transposition d'une telle stratégie sur l'optique adaptative d'un télescope hectométrique.

Ceci est illustré par la figure 2.15. La bande hachurée montre la marge de manoeuvre associée à la fréquence de la boucle de commande entre 500 Hz et 2 kHz.

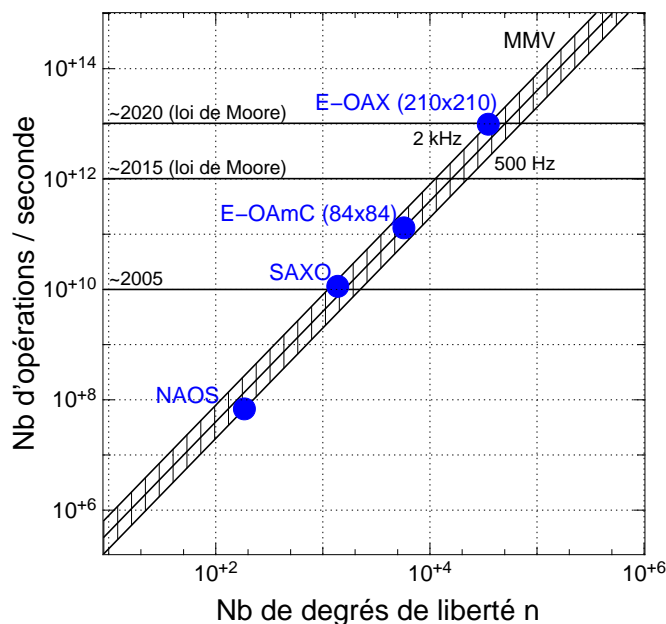


FIG. 2.15 – Nombre d'opérations par seconde en fonction de la dimension du système  $n$  dans le cas d'une reconstruction par la méthode de multiplication matrice-vecteur (MMV). La bande hachurée représente les coûts de la méthode MMV entre 500 Hz et 2 KHz.

En 1965, le directeur de la société Intel, Gordon Moore, fait remarquer que les capacités des processeurs doublent tous les 18 mois. Cette loi, ainsi baptisée la loi de Moore, s'est avérée très proche de la réalité jusqu'à aujourd'hui. Les lignes horizontales sur la figure 6.1 montrent les prédictions des capacités des processeurs selon cette loi.

Le système NAOS est le système d'optique adaptative en fonctionnement au VLT sur un télescope de 8m de diamètre. L'instrument de deuxième génération du VLT SPHERE, visant à imager des planètes extrasolaires, requiert un système d'optique adaptative de type OAX. C'est le système SAXO actuellement à l'étude. L'E-ELT et le TMT sont supposés voir leur première lumière dans les années 2016-2017. Pour l'ELT européen, le système d'optique adaptative monoconjugué est désigné par E-OAmC sur la figure, avec  $n = 84 \times 84$  degrés de liberté. Il est doré et déjà envisagé d'utiliser l'ELT européen pour des applications à très haute résolution avec un système d'optique adaptative contenant davantage de degrés de liberté. C'est le système E-OAX représenté sur la figure avec  $n = 210 \times 210$  actionneurs. On note que les télescopes géants prévus avant 2020 posent un défi quand à l'implémentation de la reconstruction dans la boucle de commande de l'optique adaptative.

Les autres concepts d'optique adaptative cités dans ce chapitre présenteront dans le cas de l'E-ELT des nombre de degré de liberté semblables à ce dernier système du fait des nombreuses étoiles de référence et éventuellement des divers miroirs conjugués. D'après les estimations actuelles,  $n$  est susceptible d'atteindre des valeurs supérieures à  $10^5$ .

Cette illustration démontre qu'il est crucial d'investiguer de nouveaux algorithmes de calcul de la commande, afin d'atténuer cette dépendance en  $n$  du calcul et s'assurer la capacité de commander en temps réel une optique adaptative sur l'E-ELT. Ce point crucial constitue le point de départ du travail exposé dans ce manuscrit. Les différents éléments du correcteur doivent répondre à cette exigence de faible coût calculatoire.

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre a avant tout permis de se familiariser avec la structure des systèmes d'optique adaptative. Les éléments constitutifs des systèmes actuels ont été introduits : étoiles de référence, analyseur, miroir déformable et correcteurs. Par ailleurs, la présentation des différents concepts d'optique adaptative en vue de dépasser les limites des systèmes d'origine fixe le contexte de mon travail de thèse. Plus particulièrement, les ordres de grandeurs du nombre de paramètres à commander pour une optique adaptative sur un télescope hectométrique ( $\sim 10^4 - 10^5$ ) mettent en évidence le besoin de nouvelles méthodes de calcul de la commande.



## Chapitre 3

# La modélisation de la perturbation atmosphérique

Afin de pouvoir étudier de nouvelles stratégies de commande pour l'optique adaptative, il est avant tout nécessaire de modéliser les différents éléments du système. Les modèles des analyseurs et des miroirs déformables ont été introduits au chapitre précédent, ainsi que le bruit de mesure. Il reste maintenant à caractériser la perturbation atmosphérique à compenser. C'est l'objectif de ce chapitre.

Dans un premier temps, je décris la modélisation statistique par couches de la perturbation atmosphérique. Les deux caractérisations statistiques les plus largement reconnues sont présentées ; il s'agit du modèle de Kolmogorov et de celui de von Kármán. Il est en pratique nécessaire d'associer à ces modèles de perturbation un choix de paramétrisation de la surface d'onde. Ceci est discuté dans la deuxième partie de ce chapitre et permet d'introduire la représentation fractale qui est utilisée dans la majorité des simulations présentées dans ce manuscrit. Enfin, j'aborde les aspects dynamiques de la perturbation en présentant le modèle d'évolution temporelle de Taylor.

### 3.1 La statistique de la turbulence optique : modélisation spatiale par couche

J'introduis dans cette section les modèles statistiques de la turbulence optique dans l'atmosphère. On désigne par turbulence optique les effets de la turbulence atmosphérique, au sens de la mécanique des fluides, sur les fluctuations de l'indice de réfraction de l'air. Après une brève description des phénomènes physiques qui sont responsables de cette turbulence optique, j'explicite les équations des modèles de Kolmogorov et de von Kármán concernant les déformations d'une surface d'onde.

La viscosité cinématique de l'air  $\nu_0 = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  est tellement faible que les mouvements de masse d'air dans l'atmosphère sont presque toujours turbulents. En d'autres termes, le nombre de Reynolds  $\mathcal{Re} = V_0 D_0 / \nu_0$ , qui représente le rapport entre les phénomènes convectifs et les phénomènes visqueux, y est généralement supérieur à quelque  $10^5$ .

Le modèle de Kolmogorov d'un tel milieu turbulent suppose que l'énergie cinétique à grande échelle est transférée petit à petit vers les échelles inférieures, telle *une cascade*. Ceci est valable dans le domaine inertiel, pour lequel on parle alors de *turbulence pleinement développée*. Cette cascade d'énergie est responsable d'inhomogénéités de

température et d'humidité. Les spectres de puissance des fluctuations de température  $\mathcal{S}_{\text{Tre}}(\kappa)$  et d'humidité  $\mathcal{S}_{\text{H}}(\kappa)$  sont tous deux proportionnels à  $|\kappa|^{-5/3}$ , où  $|\kappa|$  est un vecteur de fréquences spatiales (Roddiier, 1981). Ces fluctuations spatiales de température et d'humidité engendrent des variations de l'indice de réfraction de l'air  $n_{\text{air}}$ . Verticalement, *i.e.* le long d'une direction de visée à travers l'atmosphère, ces perturbations sont caractérisées par le profil de la constante de structure de l'indice de réfraction,  $C_{n_{\text{air}}}^2(z)$ , où  $z$  est l'altitude. Sa hauteur caractéristique d'évolution est de l'ordre de plusieurs mètres, si bien que l'on peut modéliser l'atmosphère par une multitude de fines couches turbulentes horizontales, dont l'énergie turbulente relative est illustrée par la valeur intégrée par couche de  $C_{n_{\text{air}}}^2$ .

Pour les observations astronomiques, on distingue généralement les phénomènes turbulents à 4 échelles : au niveau du télescope et de son dôme, au niveau du sol (couche limite de surface), les perturbations orographiques (couche limite planétaire) et les mouvements de la tropopause (Roddiier, 1981). Les deux premiers phénomènes sont par abus de langage communément considérés comme *la couche limite* en optique adaptative. À eux deux, ils s'étendent jusqu'à une altitude de 100 à 300 mètres, et sont responsables de 50 à 70% de la turbulence, *i.e.* du profil total intégré  $\int C_{n_{\text{air}}}^2(z)dz$  (Jolissaint, 2006).

À partir du modèle de turbulence proposé par Kolmogorov, la loi d'Obukhov décrit la fonction de structure de l'indice de réfraction de l'air dans une couche élémentaire de l'atmosphère

$$\mathcal{D}_{n_{\text{air}}}(\mathbf{r}) = C_{n_{\text{air}}}^2(z) r^{2/3} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{r} = (r, \theta)$  est un vecteur de coordonnées polaires dans la couche et  $z$  représente l'altitude de la couche. Le spectre de puissance associé s'écrit (Roddiier, 1981)

$$\mathcal{S}_{n_{\text{air}}}(\kappa) = 0.033 C_{n_{\text{air}}}^2(z) \kappa^{-11/3} \quad (3.2)$$

On note que  $\kappa$  est la variable conjuguée de  $r$  en fréquences. C'est cette distribution aléatoire de l'indice de réfraction de l'air qui perturbe l'onde plane issue d'une source ponctuelle à l'infini et qui impose de décrire l'amplitude complexe de l'onde dans le plan pupille sous la forme (1.12).

L'indice de réfraction dans chaque couche possède une fonction de structure (3.1) de type Kolmogorov dans le domaine inertiel. De cette façon, chaque couche élémentaire contribue aléatoirement à la déformation de la surface d'onde, tels un écran de phase indépendant.

Les retards de phase sur la pupille du télescope résultent des fluctuations de  $n_{\text{air}}$  intégrées verticalement le long de la direction de visée, donc de l'action cumulée de tous les écrans de phase élémentaires. Le paramètre de Fried défini par l'équation (1.27) peut aussi être réécrit en tenant compte de cette distribution verticale de la turbulence atmosphérique (Tatarski, 1961)

$$r_0 = \left[ \frac{0.423 \kappa^2}{\cos \gamma} \int C_{n_{\text{air}}}^2(z) dz \right]^{-3/5}, \quad (3.3)$$

où  $\gamma$  est la distance angulaire de la source au zénith.

On peut déjà par des considérations physiques simples fournir quelques caractéristiques statistiques de la déformation  $w$  d'une surface d'onde.

- D’après le théorème central limite,  $w$  étant le fruit d’une grande succession de processus aléatoires (couches élémentaires), la statistique de  $w(\mathbf{r})$ , fonction continue en tout point de coordonnées  $\mathbf{r}$  sur un domaine  $\mathcal{A}$ , suit une statistique Gaussienne.
- Dans chaque couche atmosphérique, les propriétés statistiques de l’indice de réfraction sont uniformes, donc la probabilité d’avoir parcouru un certain chemin optique pour deux rayons parallèles incidents sur la surface  $\mathcal{A}$  est la même. En d’autres termes, la différence de marche entre deux points de la pupille a une espérance mathématique nulle, c’est-à-dire que l’espérance mathématique de déformation est uniforme ;  $\langle w(\mathbf{r}) \rangle = w_0 \forall \mathbf{r}$ , où  $w_0$  est une constante.
- Dans chaque couche atmosphérique, les propriétés statistiques de l’indice de réfraction et donc de la perturbation de la surface d’onde sont localement uniformes, stationnaires et isotropes. En conséquence, on peut supposer une variance locale uniforme  $\sigma_w^2$ , une covariance stationnaire uniforme isotrope  $C_w(\mathbf{r}', \mathbf{r}' + \mathbf{r}) = C_w(0, r) = C_w(r)$ . Il est aussi possible de caractériser les déformations de la surface d’onde dans une couche atmosphérique ou dans la pupille, à partir d’une fonction de structure isotrope  $\mathcal{D}_w(r) = \left\langle (w(\mathbf{r}') - w(\mathbf{r}' + \mathbf{r}))^2 \right\rangle_{\mathbf{r}'}$ .

### 3.1.1 Modèle de turbulence de Kolmogorov

Le modèle d’atmosphère de Kolmogorov considère que la turbulence est pleinement développée dans un domaine, appelé domaine inertiel, compris entre deux échelles caractéristiques  $l_0$  et  $\mathcal{L}_0$ . La petite échelle  $l_0$  correspond à la taille des structures dont l’énergie cinétique se dissipe par frottement visqueux. La grande échelle correspond à des phénomènes macroscopiques tels que le déplacement de masses d’air par le vent. Entre ces deux échelles, la projection de la loi d’Obukhov conduit à la fonction de structure de la surface d’onde qui a traversé une ou plusieurs couches turbulentes de type Kolmogorov

$$\mathcal{D}_w(r) = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (3.4)$$

où  $r_0$  est le paramètre de Fried équivalent. Il est défini par l’équation (3.3) si on considère l’ensemble des couches de l’atmosphère dans la direction d’analyse  $\gamma$  par rapport au zénith. Puisque  $\mathcal{D}_w$  s’exprime sous la forme d’une puissance de  $r$ , un changement d’échelle se traduit simplement par un facteur à appliquer (Lane et al., 1992), *i.e.*

$$\mathcal{D}_w(\rho r) = \rho^{5/3} \mathcal{D}_w(r) \quad \forall \rho > 0. \quad (3.5)$$

De cette façon, la surface d’onde incidente a une fonction de structure similaire à toutes les échelles (au sein du domaine inertiel). Cette propriété d’auto-similarité confère à la surface d’onde turbulente une nature fractale.

La densité spectrale de puissance (DSP) de la déformation  $\mathcal{S}_w$  est reliée à la fonction de structure par l’équation suivante

$$\mathcal{D}_w(r) = 2 \int d\kappa \mathcal{S}_w(\kappa) (1 - \cos(2\pi \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})). \quad (3.6)$$

de telle sorte que (Noll, 1978)

$$\mathcal{S}_w(\kappa) = \frac{0.0229}{r_0^{5/3}} \kappa^{-11/3}. \quad (3.7)$$

Dans le modèle de Kolmogorov, la phase a une variance locale  $\sigma_w^2$  infinie et donc la covariance

$$C_w(r) = \sigma_w^2 - \frac{1}{2} \mathcal{D}_w(r) \quad (3.8)$$

n'est pas non plus définie.

### 3.1.2 Modèle de turbulence de von Kármán

Les pupilles des télescopes décimétriques atteignent des échelles qui sont à la limite du domaine de validité de la turbulence de Kolmogorov. Une saturation de la fonction de structure a été observée sur les études de site à ces grandes échelles spatiales. Dans ce cas, le modèle de von Kármán est plus adapté que le modèle de Kolmogorov, parce qu'il introduit une échelle externe de cohérence spatiale de la surface d'onde  $L_0$  (Conan, 2000). Je précise que l'échelle supérieure limite du domaine inertiel de la théorie de Kolmogorov, notée plus haut  $\mathcal{L}_0$ , est différente de ce paramètre  $L_0$  *ad hoc* de la théorie de von Kármán qui caractérise la décorrélation spatiale de la surface d'onde.

Pour ce modèle de von Kármán, la fonction de structure, la variance locale et la covariance sont définies par (Conan, 2000) :

$$\mathcal{D}_w(r) = 2\sigma_w^2 - 2C_w(r) \quad (3.9)$$

$$C_w(r) = \alpha \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^{5/3} \left(\frac{2\pi r}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{2\pi r}{L_0}\right) \quad (3.10)$$

$$\sigma_w^2 = C_w(0) \quad (3.11)$$

où  $K_{5/6}$  est la fonction de Bessel modifiée de 3ème espèce et d'ordre 5/6 (fonction de Mac Donald) et

$$\alpha = [12/5 \Gamma(6/5)]^{5/6} \Gamma(11/6) / \pi^{8/3} \simeq 0.0858. \quad (3.12)$$

Le spectre de la surface d'onde turbulente sur la pupille pour le modèle de von Kármán s'écrit (Conan, 2000) :

$$\mathcal{S}_w(\kappa) = 0.0229 r_0^{-5/3} (\kappa^2 + 1/L_0^2)^{-11/6}. \quad (3.13)$$

### 3.1.3 Statistique Normalisée

Le choix de l'un ou l'autre des modèles ci-dessus est fixé par le rapport  $D/L_0$ , entre le diamètre de la pupille du télescope et l'échelle externe de cohérence spatiale de la turbulence. Le choix du modèle de Kolmogorov correspond au cas limite de la turbulence de von Kármán pour  $D/L_0 = 0$ , puisque  $L_0$  est infinie.

Je choisis de regrouper les deux modèles en notant une seule fonction de structure normalisée par  $(D/r_0)^{5/3}$

$$\underline{\mathcal{D}}_w(\bar{r}) = \begin{cases} 6.88 \bar{r}^{5/3} & \text{si } D/L_0 = 0 \\ \alpha \left(\frac{D}{L_0}\right)^{-5/3} \left[ 2^{5/6} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) - 2 \left(2\pi\bar{r}\frac{D}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(2\pi\bar{r}\frac{D}{L_0}\right) \right] & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.14)$$

avec  $\bar{r} = r/D$ . Je justifie comme suit l'intérêt de mettre  $(D/r_0)^{5/3}$  en facteur dans la statistique.

Dans le cas d'une turbulence de type Kolmogorov non compensée, Wallner (1983) a introduit les notations suivantes :

$$a_w = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \left\langle \|P(w)\|^2 \right\rangle \quad (3.15)$$

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r}') \mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) d\mathbf{r}' \quad (3.16)$$

L'équation (3.15) n'est autre que l'équation (1.38) appliquée à la surface d'onde turbulente. Une fois encore, je retiens la notation  $\underline{a}_w$  et  $\underline{g}$  pour désigner les fonctions normalisées

$$\underline{a}_w = a_w / (D/r_0)^{5/3} \quad \text{et} \quad \underline{g}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) / (D/r_0)^{5/3}. \quad (3.17)$$

Pour une turbulence de type Kolmogorov au-dessus d'une ouverture circulaire de diamètre  $D$  (Wang et Markey, 1978),

$$a_w = 1.0324(D/r_0)^{5/3} \quad \text{donc} \quad \underline{a}_w = 1.0324. \quad (3.18)$$

On peut mener un calcul plus général à partir de la fonction de structure normalisée (3.14) et en tenant compte d'une obstruction centrale de diamètre  $\eta D$  (cf. équation (1.5)). Si l'origine des coordonnées  $\mathbf{r}$  est prise au centre de la pupille, la symétrie de révolution de  $\mathcal{A}$  implique que  $g$ , dans l'équation (3.16), n'est fonction que de la norme de  $\mathbf{r}$ ,  $r = D\bar{r}$ . On peut donc calculer  $g$  en choisissant une orientation particulière, par exemple  $\mathbf{r}/D = (\bar{r}/D, 0)$  en coordonnées polaires. Avec  $\mathbf{r}'/D = (\bar{r}', \theta')$ , on en déduit

$$\underline{g}(\bar{r} D) = \frac{4}{\pi(1-\eta^2)} \int_0^\pi \int_{\eta/2}^{1/2} \underline{\mathcal{D}}_w(\sqrt{\bar{r} + \bar{r}' - 2\bar{r}\bar{r}' \cos \theta'}) \bar{r}' d\theta' d\bar{r}' \quad (3.19)$$

et

$$\underline{a}_w(D/L_0, \eta) = \frac{8}{(1-\eta^2)} \int_{\eta/2}^{1/2} \bar{r} \underline{g}(\bar{r} D) d\bar{r}. \quad (3.20)$$

J'ai explicité dans l'équation (3.20) les dépendances de  $\underline{a}_w$ . Pour certains types de turbulence, les intégrales des eqs. (3.19) et (3.20) peuvent être approchées en utilisant des transformées de Hankel ou être estimées numériquement. Des estimations numériques ont été réalisées dans ce manuscrit quand nécessaire. L'intérêt ici de ces deux dernières équations est qu'elles fournissent les dépendances du paramètre  $a_w$  en fonction des grandeurs adimensionnés  $D/r_0$ ,  $D/L_0$  et  $\eta$ . On note que pour une turbulence de type Kolmogorov ou von Kármán, en présence ou non d'une obstruction centrale,  $a_w$  s'écrit sous la forme

$$a_w = \underline{a}_w(D/L_0, \eta) (D/r_0)^{5/3}, \quad (3.21)$$

Une échelle externe finie  $L_0$  ou une obstruction centrale ont pour effet d'atténuer le niveau de turbulence au-dessus de l'ouverture  $a_w$ , rendant le facteur  $\underline{a}_w$  inférieur à 1.0324.

Pour les deux modèles de turbulence,  $\underline{\mathcal{D}}_w$  et  $\underline{a}_w$  sont indépendantes de  $r_0$ .

La densité spectrale de puissance est également notée par une formulation commune pour les deux modèles, à partir des équations (3.7) et (3.13) :

$$\mathcal{S}_w(\kappa) = \begin{cases} 0.0229 r_0^{-5/3} \kappa^{-11/3} & \text{si } D/L_0 = 0 \\ 0.0229 r_0^{-5/3} (\kappa^2 + 1/L_0^2)^{-11/6} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.22)$$



Je suppose maintenant que les caractéristiques statistiques  $\sigma_w^2$ ,  $\underline{C}_w$ ,  $\underline{D}_w$ , sont bien définies et connues pour un type de turbulence donné, afin de montrer dans le paragraphe suivant comment elles peuvent conduire à diverses représentations de la surface d'onde turbulente.

### 3.2 La représentation spatiale de la surface d'onde

Je rappelle que la surface d'onde dans le plan pupille, ou en altitude dans une couche atmosphérique, est une fonction continue de l'espace,  $w$ , définie dans un espace de Hilbert de dimension infinie (Ellerbroek, 1994). Cette surface d'onde peut être décomposée sur une base de fonctions  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , continues de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , *i.e.*

$$w(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\mathbf{r}) w_i. \quad (3.23)$$

En pratique, lorsqu'il est nécessaire de représenter une surface d'onde, on se limite à un nombre fini  $n$  de fonctions de base  $h_i$ , et la surface d'onde est alors paramétrée par un vecteur  $\mathbf{w}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Je décris dans les prochaines strophes différentes bases utilisées dans la littérature pour représenter la surface d'onde. Au cours de ma thèse, je n'ai utilisé parmi celles-ci que la représentation *zonale* et la représentation fractale.

Quelle que soit la représentation en dimension finie  $n$  choisie, elle est associée à une erreur quadratique moyenne que je note

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\infty} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| P(w - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{w}) \right\|^2 \right\rangle \quad (3.24)$$

due à cette paramétrisation.

#### 3.2.1 Représentation zonale

La représentation *zonale* utilise comme fonctions de base des fonctions d'interpolations à support compact.

Dans ce manuscrit, par abus de langage, lorsque je parle de représentation *zonale*, celle-ci est construite à partir de fonctions splines linéaires définies sur une grille régulière à deux dimensions (bilinéaires). Cela signifie que l'on omet les déformations de fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist  $1/(2d_e)$ ; la surface d'onde est lissée. La phase est représenté par un vecteur  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , qui sont les coefficients des fonctions d'interpolations. L'image de gauche de la figure 3.1 montre cette représentation  $\mathbf{w}$ . La valeur de chaque pixel correspond au coefficient de la spline linéaire centrée sur ce pixel. Numériquement, ce vecteur  $\mathbf{w}$  est enregistré en deux dimensions,  $N \times N$ , avec  $N = \sqrt{n}$ , tout comme pour sa visualisation sur la figure 3.1.

#### 3.2.2 Représentation modale

On nomme représentation *modale*, par opposition à *zonale*, une approximation de la surface d'onde décrite sur une base, finie ou infinie, de fonctions  $h_i$  dont le support s'étend sur toute la pupille : les modes.

Les représentations modales de la surface d'onde les plus courantes sont la décomposition en série de Fourier, les polynômes de Zernike et les modes de Karhunen-Loève.

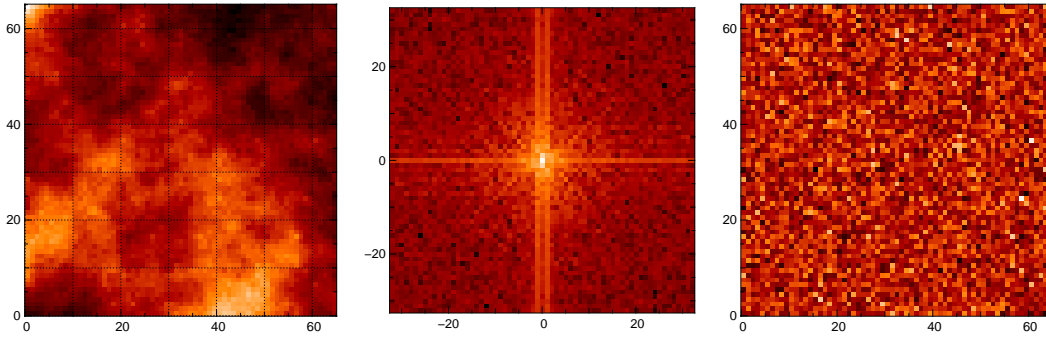


FIG. 3.1 – À gauche : Représentation zonale d'une surface d'onde sur un échantillonnage  $65 \times 65$ , *i.e.*  $N = \sqrt{n} = 65$ . Au centre : Module des coefficients de la série de Fourier de la même surface d'onde, en échelle logarithmique. À droite : Représentation fractale de la même surface d'onde.

### Série de Fourier

La décomposition de la surface d'onde en série de Fourier discrète se fait également sur une grille carrée régulière  $N \times N$  de fréquences spatiales, dont les coefficients sont notés  $a_{k,l}$ , avec  $0 \leq k, l \leq N-1$ . Les fonctions de base sont les exponentielles complexes discrètes (Freischlad et Koliopoulos, 1986; Poyneer et al., 2002)

$$Z_{k,l}(k', l') = \frac{1}{N} \exp \left[ \frac{2i\pi}{N} (kk' + ll') \right] \quad (3.25)$$

$\forall 1 \leq k', l' \leq N$  et  $0 \leq k, l \leq N-1$ , et  $i = \sqrt{-1}$  dans ce paragraphe. Ces fonctions de base définissent le changement de variable linéaire, la Transformée de Fourier Discrète, existant entre la représentation de Fourier  $\tilde{\mathbf{w}}$  et la représentation zonale  $\mathbf{w}$ , *i.e.*

$$\mathbf{w}(k', l') = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{w}}(k, l) Z_{k,l}(k', l') \quad (3.26)$$

$\forall 1 \leq k', l' \leq N$ . La base des exponentielles complexes discrètes utilisée est orthonormée. Les graphiques de gauche et du centre de la fig. 3.1 illustrent le changement de variable entre la représentation zonale et celle de Fourier d'une surface d'onde échantillonnée.

### Polynômes de Zernike

La description présente est un résumé de celle faite par Jean-Pierre Véran dans sa thèse (Véran, 1997).

L'utilisation des polynômes de Zernike pour décomposer la surface d'onde est également une approche fort utilisée. Ils sont définis sur un disque et s'écrivent comme le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction trigonométrique

$$Z_i(\mathbf{r}) = R_k^l(r) \Theta_k^l(\theta) \quad (3.27)$$

$(r, \theta)$  étant toujours les coordonnées polaires du vecteur  $\mathbf{r}$ . La numérotation  $i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , des polynômes est définie à partir des conventions suivantes :

- À chaque polynôme de Zernike  $i$  est associé un degré radial  $k$  et un degré azimuthal  $l$ .

- Seuls les couples  $(k, l)$  tels que  $0 \leq l \leq k$  et avec  $k$  et  $l$  de même parité caractérisent des polynômes de Zernike.
- Ceci étant, si  $l = 0$ , alors le couple  $(k, l)$  définit un polynôme de Zernike, tandis que si  $l \neq 0$ , alors  $(k, l)$  est associé à deux polynômes distincts.
- Le classement selon l'indice  $i$  correspond à un degré radial croissant  $k$ , et à même degré radial, à un degré azimuthal croissant  $l$ .

Le polynôme radial  $R_k^l$ , de degré  $k$ , est défini par

$$R_k^l(|\mathbf{r}|) = \sum_{s=0}^{(k-l)/2} \frac{(-1)^s (k-s)!}{s! [(k+l)/2 - s]! [(k-l)/2 - s]!} |\mathbf{r}|^{k-2s} \quad (3.28)$$

La fonction trigonométrique  $\Theta_k^l$  s'écrit

$$\Theta_k^l(\theta) = \begin{cases} \sqrt{k+1} & \text{si } l = 0 \\ \sqrt{2(k+1)} \cos(l\theta) & \text{si } l \neq 0 \text{ et } i \text{ est pair} \\ \sqrt{2(k+1)} \sin(l\theta) & \text{si } l \neq 0 \text{ et } i \text{ est impair} \end{cases} \quad (3.29)$$

Les polynômes de Zernike ont une forme analytique relativement simple, et, sur une pupille circulaire en l'absence d'obstruction centrale, ils forment une base orthonormale de dimension infinie. Leur popularité dans notre domaine d'étude vient du fait que les premiers polynômes sont interprétés comme des aberrations optiques classiques (*e.g.* basculement, défocalisation, astigmatisme, *etc.*).

Par ailleurs, la décomposition en polynômes de Zernike est assez proche de la décomposition en série de Fourier, si bien que leur classement par ordre radial croissant est à peu près un classement par fréquence spatiale croissante.

Pour une turbulence de type Kolmogorov, les variances et covariances des coefficients de la décomposition en Zernike  $z_i$  s'écrivent (Noll, 1976; Wang et Markey, 1978; Conan, 2000) :

$$\langle z_i z_j \rangle = \alpha_{ij} \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (3.30)$$

Le *piston*, mode constant sur la pupille est le premier mode de Zernike. Les modes de Zernike étant orthogonaux, on peut réécrire l'équation (3.15) sous la forme

$$a_w = \sum_{i=2}^{i=\infty} \alpha_{ii} (D/r_0)^{5/3} \quad (3.31)$$

### Les modes de Karhunen-Loève

Il existe une base de fonctions  $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , telle que l'erreur quadratique moyenne d'approximation  $\langle \|w - \bar{w}\|^2 \rangle$  de la surface d'onde turbulente  $w$  sur un nombre fini  $n$  de composantes (dans l'équation (3.23)),

$$\bar{w}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n h_j(\mathbf{r}) w_j, \quad (3.32)$$

soit minimale. Ces fonctions sont les modes de Karhunen-Loève. Ils optimisent ce critère d'approximation en raison de deux caractéristiques essentielles : ils sont orthogonaux et statistiquement indépendants pour un modèle de turbulence donné. Dans le cas d'une

surface d'onde de type Kolmogorov définie sur une pupille circulaire sans obstruction centrale, on n'obtient pas de forme analytique simple, mais une approximation numérique est possible (Wang et Markey, 1978). L'atout majeur d'une telle représentation est que la compensation parfaite des  $n$  premiers modes de Karhunen-Loève est la meilleure correction que l'on puisse faire dans un espace à  $n$  dimensions (*i.e.* avec  $n$  degrés de liberté). Ceci vaut parce que le piston est le premier mode de Karhunen-Loève, donc paramétrer la surface d'onde sur les  $n$  premiers modes de Karhunen-Loève revient à minimiser l'erreur due à la paramétrisation  $\langle \epsilon^2 \rangle_\infty$  définie par l'expression (3.24).

Cette base de fonctions théoriquement intéressante a été peu utilisée du fait de l'absence d'expression simple pour décrire ses modes. Beaucoup lui préfère les modes de Zernike, d'autant que pour les premiers ordres les deux développements sont très proches. Wang et Markey (1978) ont montré que jusqu'à une vingtaine de modes corrigés, le choix des modes de Zernike ou des modes de Karhunen-Loève ne changeaient pas significativement les performances. Cependant, ceci est de moins en moins vrai à mesure que le nombre de modes corrigés devient grand. Par exemple, il faut corriger près de 250 modes de Zernike pour obtenir le niveau de correction équivalente à 130 modes de Karhunen-Loève sur une pupille circulaire (Lane et Tallon, 1992). Sur un télescope hectométrique, le système d'optique adaptative corrigera plusieurs milliers de modes, ce qui devrait encore agrandir l'écart de performance entre les deux espaces.

Roddier (1990) a considéré la décomposition d'une surface d'onde sur un nombre fini  $n$  de polynômes de Zernike, c'est-à-dire une surface d'onde lissée. En diagonalisant la matrice de covariance des coefficients de Zernike, définis par (3.30), il a obtenu une forme approchée de modes de Karhunen-Loève. En effet, les colonnes de la matrice de passage à la covariance diagonale sont les modes statistiquement indépendants et orthogonaux exprimés dans la base des Zernike. Cependant, la discussion du paragraphe précédent montre que corriger les  $n$  modes approchés de Karhunen-Loève ainsi obtenus équivaut à corriger les  $n$  modes de Zernike. Il n'est alors intéressant d'effectuer ce changement de base que si l'on envisage de corriger un nombre de modes très inférieur à  $n$ .

### Une autre approche : la représentation fractale

Je présente ici la méthode de représentation fractale développée par Thiébaud et Tallon (2008). L'article qui la décrit n'étant pas encore paru, il est attaché dans l'annexe A. Je résume ici le principe et les particularités de cette méthode.

La représentation fractale (Thiébaud et Tallon, 2008) consiste à effectuer une sorte de représentation de Karhunen-Loève d'une surface d'onde déjà lissée. Contrairement à la méthode de Roddier (1990), le point de départ n'est pas un développement sur les Zernike (représentation modale) mais directement la surface d'onde échantillonnée (représentation zonale de la figure 3.1).

On considère un développement de longueur finie  $n$ , *i.e.* une représentation zonale de la surface d'onde par le vecteur  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , comme le graphique de gauche de la figure 3.1. La matrice de covariance des coefficients de cette représentation  $\mathbf{C}_w$  est symétrique positive. On peut définir un changement de variable linéaire  $\mathbf{K}$  défini par

$$\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}, \quad (3.33)$$

tel que les coefficients  $\mathbf{u}$  soient des variables aléatoires normales indépendantes, *i.e.*  $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , pour une statistique de turbulence donnée.

L'existence d'un tel changement de variable  $\mathbf{K}$  implique que la covariance des variables  $\mathbf{w}$  puisse être factorisée de la forme

$$\mathbf{C}_w = \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^T \rangle = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T. \quad (3.34)$$

La décomposition de Cholesky de  $\mathbf{C}_w$  conduit à une expression de ce type, démontrant ainsi qu'il existe au moins un opérateur  $\mathbf{K}$  satisfaisant l'équation (3.34). Cependant, cette factorisation n'est pas unique.

Les colonnes de la matrice  $\mathbf{K}$  sont alors les modes de la nouvelle décomposition exprimés dans la représentation zonale. Ils sont statistiquement indépendants comme les modes Karhunen-Loève, mais pas nécessairement orthogonaux d'après les hypothèses ci-dessus.

L'approche fractale (Thiébaud et Tallon, 2008) consiste à trouver une telle factorisation avec une matrice de changement de variable notée  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  creuse. Les équations et détails de la méthode sont précisés dans la Sect. 3 de l'article de Thiébaud et Tallon (2008) (*cf.* annexe A). Je résume ici le principe de cette paramétrisation.

L'idée consiste à exploiter la nature fractale de la fonction de structure de Kolmogorov pour générer une surface d'onde turbulente, de façon récursive vers une résolution de plus en plus fine. Cette méthode de *simulation* de surface d'onde conduit à construire l'opérateur  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ , ce qui définit ainsi la représentation fractale obtenue.

Le point de départ de la méthode consiste à générer une surface d'onde avec seulement 4 valeurs, aux 4 coins, correspondant à la plus grande échelle (*cf.* Sect. 3.A. dans Thiébaud et Tallon (2008)). Si on note  $\mathbf{w}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^4$  le vecteur zonal de ces valeurs, on peut écrire leur covariance, en fonction de la fonction de structure et de leur variance :

$$\mathbf{C}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} c_0 &= \sigma_w^2 \\ c_1 &= \sigma_w^2 - \mathcal{D}_w(L)/2 \\ c_2 &= \sigma_w^2 - \mathcal{D}_w(\sqrt{2}L)/2 \end{aligned}$$

et  $L$  la longueur d'un côté de la surface d'onde.

La diagonalisation de  $\mathbf{C}_{\text{out}}$  et la définition d'une valeur pour la variance  $\sigma_w^2$  fournissent la matrice de passage  $\mathbf{K}_{\text{out}}$  d'un jeu  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$  à  $\mathbf{w}_{\text{out}}$ . Si ces quatre points de phase forment un carré de côté  $L$ , alors on peut par la méthode fractale raffiner de façon récurrente cet écran de phase à des résolutions de  $L/2^p$ , avec  $p$  le nombre de pas de récurrence.

La procédure de raffinement d'une échelle à la suivante s'effectue en trois étapes, illustrées par la Fig. 4 dans Thiébaud et Tallon (2008). Les deux dernières étapes peuvent être calculées en parallèle, l'une générant des points sur la frontière de l'écran de phase ( $4 \times 2^{p-1}$  nouveaux points) et l'autre des points intérieurs.

Chaque nouvelle valeur de la déformée  $w_i$  est une combinaison linéaire des valeurs de phase des plus proches voisins dans l'échelle supérieure et d'une nouvelle variable aléatoire  $u_i$  (*cf.* équation 23 dans Thiébaud et Tallon (2008)). Les coefficients de la

combinaison linéaire sont précalculés à partir de la fonction de structure aux échelles en question et de la valeur de la variance  $\sigma_\phi^2$ .

La procédure globale correspond à un algorithme de point milieu. Par construction, il génère donc des surfaces d'onde paramétrées par  $2^p + 1 \times 2^p + 1$  valeurs. Contrairement à la méthode fractale proposée par Lane et al. (1992), ce nouvel opérateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  est construit comme une bijection.

Il n'a pas été mis en évidence d'expression analytique particulière pour les modes de cette décomposition fractale. Néanmoins, la structure des colonnes de  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  révèle le fait que la plupart des points de phase sont uniquement déduits de leur plus proches voisins. La figure 3.2 montre les modes associés à certaines colonnes de  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  pour une surface d'onde échantillonnée sur une grille  $17 \times 17$ . Les modes présentés sont ceux dont le numéro de la colonne dans  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  est un carré. On remarque qu'une majorité de modes a une influence très localisée.

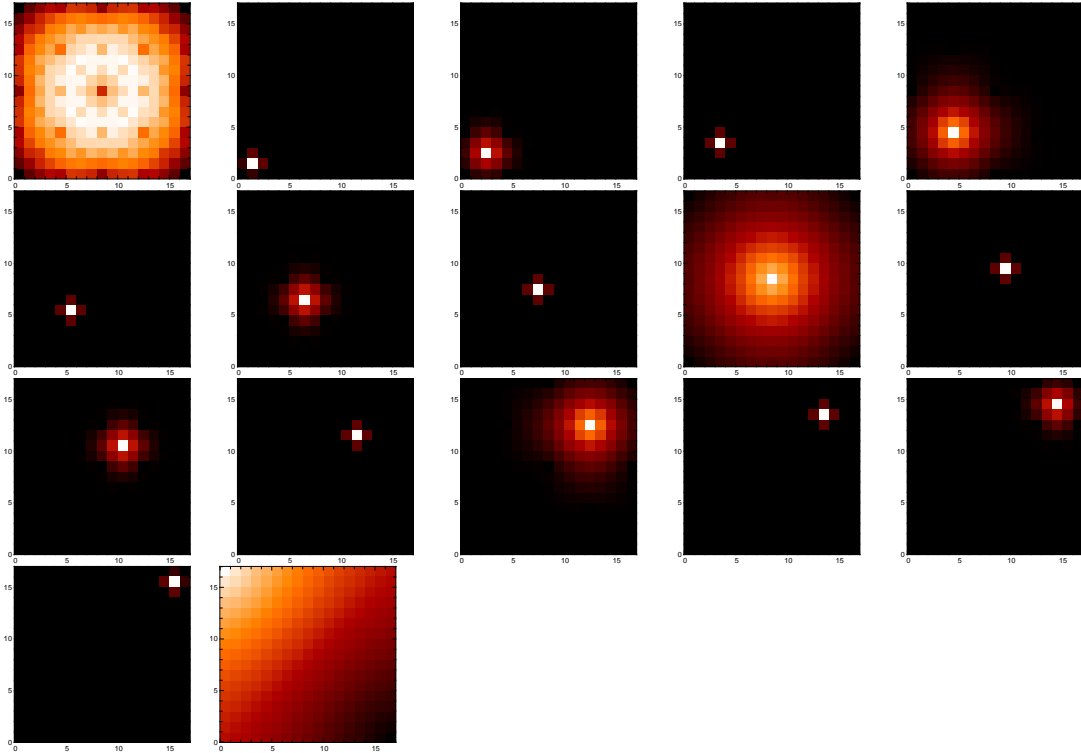


FIG. 3.2 – Représentation des modes carrés ( $i^2$ -ème colonne de la matrice  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ ) pour  $n = 17^2$ .

La figure 3.3 montre les éléments non nuls (en noir) de la matrice  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  pour générer des phases  $5 \times 5$ ,  $9 \times 9$  et  $17 \times 17$ . Elle est creuse. L'opérateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  est donc un changement de variable facile à appliquer. Plus précisément, la matrice  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  n'est jamais construite en pratique, mais l'opérateur est représenté par un algorithme qui permet de transformer un vecteur  $\mathbf{u}$  de variables aléatoires Gaussiennes centrées réduites en une surface d'onde décomposée zonalement (Thiébaud et Tallon, 2008) en seulement  $\sim 6 \times n$  opérations environ.

En conclusion de cette section sur la représentation de la surface d'onde, je fais remarquer que les paramétrisations possibles de la perturbation sont variées, certaines analytiques, d'autres numériques. La représentation fractale a un avantage considérable

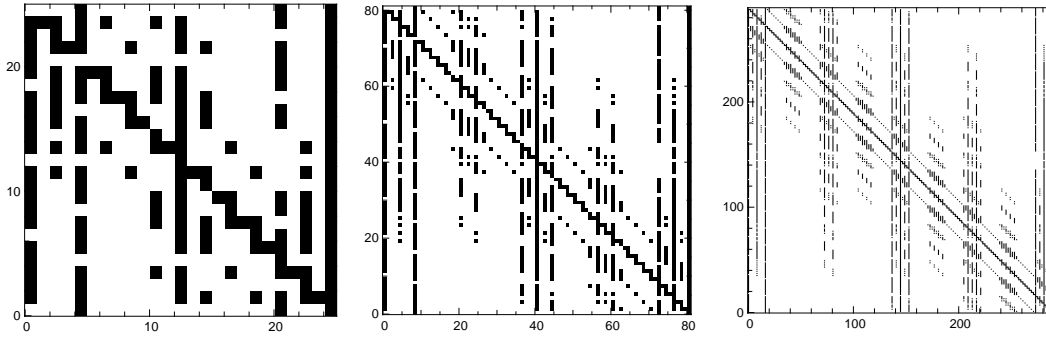


FIG. 3.3 – Éléments non nuls (en noir) dans la matrice de l’opérateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ , pour des dimensions de surface d’onde échantillonné en  $5 \times 5$  (à gauche),  $9 \times 9$  (au milieu) et  $17 \times 17$  à droite. Cela correspond respectivement à des taux de remplissage de 28, 15 et 7%.

sur les représentations classiques de Karhunen-Loève et de Zernike pour simuler des systèmes d’optique adaptative de grandes dimensions, parce que le changement de variables  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  est peu coûteux à appliquer pour fournir une représentation zonale équivalente de la surface d’onde. Et la représentation zonale facilite la modélisation du système de mesure (*cf.* modèle de Fried à la section 2.2). La représentation de Fourier est également intéressante par son changement de variable en  $\mathcal{O}(n \ln(n))$  à partir de la représentation zonale, mais les effets secondaires de la périodisation de la surface d’onde compliquent généralement son utilisation.

Dans la suite de ce manuscrit, c’est la représentation zonale et la représentation fractale qui sont utilisées.

Pour résumer les principales caractéristiques du changement de variable fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  proposé par Thiébaud et Tallon (2008), on peut noter que :

- les modes, ou fonctions de base pour la représentation  $\mathbf{u}$ , ou vecteurs colonnes de  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ , sont statistiquement indépendants pour la turbulence de Kolmogorov.
- les modes ne sont pas orthogonaux *a priori*.
- l’hypothèse est faite d’une variance locale uniforme finie pour la déformation  $w$ .
- les applications de  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ ,  $\mathbf{K}_{\text{frac}}^{-1}$ ,  $\mathbf{K}_{\text{frac}}^{\text{T}}$  et  $\mathbf{K}_{\text{frac}}^{-\text{T}}$  à un vecteur de dimension  $n$  nécessitent chacune  $\sim 6 \times n$  opérations.

### 3.3 La modélisation temporelle de l’évolution de la turbulence

Le temps caractéristique des inhomogénéités de température dans l’air est très supérieur au temps de passage d’une masse d’air portée par le vent à travers le champ de visée. Ceci conduit à l’approximation de Taylor, selon laquelle la turbulence dans une couche est *gelée*, et se déplace en translation horizontale au cours du temps à la vitesse du vent dans cette couche.

Les études de la turbulence optique sur les sites d’observations met en évidence quelques couches dominantes réparties en altitude, avec des vitesses de vent indépendantes (Trinquet et Vernin, 2007). Le volume de turbulence au-dessus du télescope est donc généralement modélisé par un certain nombre de couches discrètes (une dizaine au plus en général) qui constituent des écrans de phase en translation.

Si on corrige parfaitement les déformations de la surface d'onde  $w$  dans une couche en translation à la vitesse  $\mathbf{v}$  mais avec un retard  $\tau$ , la perturbation résiduelle s'écrit  $w(\mathbf{r}, t) - w(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau, t)$ . Au niveau de la pupille, on peut définir un temps de cohérence  $\tau_0$  pour lequel la variance des résidus est de 1 radian<sup>2</sup> à la longueur d'onde  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ , *i.e.*

$$\begin{aligned} a_{\Delta w} &= \left\langle (w(\mathbf{r}, t + \tau_0) - w(\mathbf{r}, t))^2 \right\rangle_{\mathbf{r}, t} = 1 \text{rad.}^2 \\ &= 6.88 \left( \frac{\|\bar{V}\tau_0\|}{r_0} \right)^{5/3} \end{aligned}$$

où  $\bar{V}$  est la vitesse caractéristique de la turbulence en volume, définie par

$$\bar{V} = \left( \frac{\int_0^\infty C_{n_{\text{air}}}^2(z) \|\mathbf{v}(z)\|^{5/3} dz}{\int_0^\infty C_{n_{\text{air}}}^2(z) dz} \right)^{3/5}$$

et  $r_0$  est toujours le paramètre de Fried exprimé lui aussi à la longueur d'onde de  $0.5 \mu\text{m}$ .

Le temps de cohérence s'écrit

$$\tau_0 \simeq 0.314 \frac{r_0}{\bar{V}}.$$

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre introduit la caractérisation statistique de la perturbation atmosphérique à corriger. J'ai présenté les paramétrisations les plus communes d'une surface d'onde  $w$ , ainsi que la méthode fractale récente de Thiébaud et Tallon (2008).

Par ailleurs, j'ai noté par une seule fonction de structure normalisée les modèles de turbulence de von Kármán et de Kolmogorov, en insérant la dépendance du modèle vis-à-vis de l'échelle externe  $L_0$  par le biais d'une variable supplémentaire  $D/L_0$ . Ces notations sont conservées tout au long de ce manuscrit.





## Chapitre 4

# Approche problème inverse pour l'optique adaptative

Ce chapitre reprend naturellement des hypothèses caractéristiques d'un système d'optique adaptative tel que décrit précédemment. Je suppose ainsi que le signal et le bruit suivent des statistiques Gaussiennes.

Je rappelle ici quelques résultats fondamentaux de l'approche problème inverse, ou théorie de l'estimation, qui sont utilisés dans la suite de ce manuscrit. Mon idée est de présenter la théorie de l'estimation en présence de signaux et perturbations de statistiques Gaussiennes comme je l'ai compris. La démarche suit une complexité croissante du problème traité, dont le but est d'améliorer en permanence l'estimation. Sorenson (1970) a écrit une publication intitulée de *Least-Squares Estimation : from Gauss to Kalman*. Je n'ai pas l'intention d'être aussi exhaustive que lui, mais je voudrais faire ressortir la démarche qui conduit quelqu'un à passer du formalisme de Gauss à celui de Kalman. Ceci sans imposer directement le formalisme mystérieux du modèle d'état à ceux qui ne seraient pas familiers avec celui-ci.

Pour tenter de garder un raisonnement clair, j'omets volontairement dans ce chapitre d'estimation la commande qui intervient dans l'équation de mesure en boucle fermée. L'idée est de considérer cette commande comme certaine, ce qui ne modifie pas le raisonnement, et très peu les équations. L'introduction de cette commande est traitée dans la partie III de ce manuscrit.

### 4.1 Un problème inverse linéaire Gaussien *simple*

Je considère pour commencer un problème inverse linéaire *simple*, c'est-à-dire l'estimation d'un ensemble de paramètres  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  à partir d'un jeu de  $m$  données,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ . Ceci équivaut à la recherche d'un signal à partir de mesures, en pratique entachées d'incertitudes.

Malgré les controverses, il est communément admis que le jeune Karl Friedrich Gauss *inventa* la méthode des moindres carrés en 1795. Cette méthode lui aurait permis de relier ses mesures d'observations astronomiques aux paramètres de mouvement des planètes et des comètes (Sorenson, 1970). Il soulève dans *Theoria Motus* des besoins essentiels de la théorie de l'estimation : un nombre minimum de mesures, une redondance des mesures parce qu'elles sont entachées d'erreurs, une description satisfaisante du système, une caractérisation statistique des erreurs de précision, ainsi que

l'optimisation d'un critère de précision.

De nos jours, le lien est fait entre la méthode des moindres carrés de Gauss et l'approche probabiliste de l'estimation. Toutes deux maximisent un même critère, la probabilité conditionnelle des paramètres  $\mathbf{w}$  sachant les données  $\mathbf{d}$ , notée  $\mathcal{P}r(\mathbf{w}|\mathbf{d})$ .

D'après le théorème de Bayes, cette probabilité conditionnelle s'exprime également sous la forme

$$\mathcal{P}r(\mathbf{w}|\mathbf{d}) = \frac{\mathcal{P}r(\mathbf{d}|\mathbf{w}) \mathcal{P}r(\mathbf{w})}{\mathcal{P}r(\mathbf{d})}, \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{P}r(\mathbf{d}|\mathbf{w})$  est la probabilité des données  $\mathbf{d}$  étant donnés les paramètres  $\mathbf{w}$ ,  $\mathcal{P}r(\mathbf{w})$  est la probabilité des paramètres et  $\mathcal{P}r(\mathbf{d})$  la probabilité des données. Naturellement, les données étant par définition réalisées,  $\mathcal{P}r(\mathbf{d})$  prend une valeur particulière (arbitraire pour l'optimisation).

### 4.1.1 La modélisation de la mesure

#### L'équation de mesure

L'estimation des paramètres  $\mathbf{w}$  nécessite avant tout de modéliser le processus de mesure, c'est-à-dire d'écrire une *équation de mesure*, e.g.

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{e}. \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{S}$  est ici un modèle linéaire du processus de mesure et  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$  représente les incertitudes, contenant à la fois les erreurs de mesure et les erreurs dues aux approximations du modèle  $\mathbf{S}$ . On suppose que l'hypothèse de linéarité de  $\mathbf{S}$  est raisonnablement justifiée et que le bruit  $\mathbf{e}$  suit une statistique Gaussienne centrée, de matrice de covariance  $\mathbf{C}_e$ . On considère dans un premier temps que l'on n'a pas d'information sur la statistique des paramètres à estimer.

#### Le maximum de vraisemblance

Lorsqu'on n'a pas d'information statistique sur les paramètres  $\mathbf{w}$  recherchés, ou de façon équivalente lorsque leur densité de probabilité est uniforme ( $\mathcal{P}r(\mathbf{w})$  constante arbitraire), alors le théorème de Bayes (4.1) permet de montrer que la méthode des moindres carrés maximise la probabilité  $\mathcal{P}r(\mathbf{d}|\hat{\mathbf{w}})$  d'obtenir les données  $\mathbf{d}$  étant donné un jeu de paramètres estimés  $\hat{\mathbf{w}}$  :

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{ML}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{w}}} (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{w}})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{w}}). \quad (4.3)$$

J'utilise dans tout ce manuscrit la notation  $\hat{x}$  pour désigner l'estimée d'une quantité  $x$ .

L'approche probabiliste de cette méthode a été développée par Fisher sous le nom de maximum de vraisemblance (Fisher, 1925) (*Maximum Likelihood* d'où la notation ML dans l'équation (4.3)). Cette solution fait partie de l'ensemble des solutions des *équations normales*, i.e.  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{ML}} \in \Omega_{\text{ML}}$ , avec :

$$\Omega_{\text{ML}} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{d}\} \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{W}_e = \mathbf{C}_e^{-1}$ . Pour un analyseur de plan pupille tel que ceux présentés à la section 2.2, le système de mesures  $\mathbf{S}$  n'est pas inversible sur l'espace des paramètres. En effet, le piston n'est pas observé par l'analyseur. Alors des contraintes supplémentaires sont

nécessaires pour définir une solution unique au problème d'estimation. Par exemple, il est fréquent de retenir la solution de moindre norme parmi  $\Omega_{\text{ML}}$ , *i.e.*

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{MNML}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{w}} \in \Omega_{\text{ML}}} \|\hat{\mathbf{w}}\|_2 = \mathbf{R}_{\text{MNML}} \cdot \mathbf{d} \quad (4.5)$$

avec

$$\mathbf{R}_{\text{MNML}} = (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S})^\dagger \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e \quad (4.6)$$

où l'exposant  $\dagger$  représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose (Petersen et Pedersen, 2007).

#### 4.1.2 L'information statistique *a priori* sur les paramètres

##### Densité de probabilité non uniforme *a priori*

Sans connaissance *a priori* de la densité de probabilité des paramètres, ou encore si celle-ci est uniforme, l'estimateur optimal est fourni par la méthode du maximum de vraisemblance précédente (Tarantola, 2005). Si, en revanche, les paramètres suivent une distribution non uniforme de propriétés connues, alors cette information peut être prise en compte pour améliorer l'estimation.

Une autre façon de présenter les choses consiste à dire que de même que l'on fait des hypothèses sur la statistique des erreurs dans le maximum de vraisemblance, il est possible de tenir compte d'hypothèses statistiques sur les valeurs des paramètres  $\mathbf{w}$ . Finalement,  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{e}$  sont deux processus stochastiques indépendants intervenant dans les valeurs de mesures. L'estimation de l'un induit implicitement l'estimation de l'autre d'après l'équation de mesure (4.2) :  $\mathbf{d} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{e}}$ . La différence fondamentale est que l'on ne cherche pas à connaître  $\hat{\mathbf{e}}$ , tandis que l'on souhaite bien obtenir les valeurs de  $\hat{\mathbf{w}}$ . L'expression connaissances *a priori* désigne les caractéristiques statistiques supposées connues des paramètres à estimer  $\mathbf{w}$ .

Je suppose dans la suite que les paramètres suivent une distribution Gaussienne, de moyenne  $\langle \mathbf{w} \rangle$  et de covariance  $\mathbf{C}_w$ .

##### Le maximum *a posteriori*

Puisque la statistique des erreurs et la statistique des paramètres sont toutes les deux Gaussiennes et indépendantes entre elles, la solution des moindres carrés avec *a priori* s'écrit

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{w}}} (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{w}})^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{w}}) + (\hat{\mathbf{w}} - \langle \mathbf{w} \rangle)^T \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{w}} - \langle \mathbf{w} \rangle) \quad (4.7)$$

Cette solution  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{MAP}}$  est aussi l'espérance conditionnelle des paramètres sachant les données, ou la solution du maximum *a posteriori*, d'où la notation MAP dans l'expression (4.7). Cette solution minimise la covariance de l'erreur d'estimation. C'est aussi d'une façon plus générale, la solution de minimum de variance, mais formulée ici dans le cas particulier où le modèle est linéaire et les signaux Gaussiens.

La dérivation du critère convexe dans l'équation (4.7) fournit

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{MAP}} = \langle \mathbf{w} \rangle + \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle) \quad (4.8)$$

$$= \langle \mathbf{w} \rangle + (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle) \quad (4.9)$$

$$= (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{C}_w^{-1} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle) \quad (4.10)$$

L'équivalence entre ces expressions a été démontrée par Tarantola et Valette (1982). Suivant le problème à traiter, l'une des trois écritures ci-dessus peut être préférable aux autres, notamment pour l'implémentation numérique de l'estimateur. Ce point est discuté dans le cas de l'estimation d'une surface d'onde turbulente dans l'article de Thiébaud et Tallon (2008) joint dans l'annexe A.

Je synthétise le résultat précédent à l'aide d'un lemme (Goodwin et Sin, 1984), avec des notations plus générales utilisant les propriétés des distributions jointes Gaussiennes. Ce lemme est réutilisé sous plusieurs formes par la suite.

### Lemme

Si  $\mathbf{X}$  est une variable aléatoire multidimensionnelle Gaussienne d'espérance  $\mathbf{X}_0$  et de covariance  $\mathbf{\Sigma}_0$  et que l'on peut partitionner  $\mathbf{X}$  sous la forme :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{Z}_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{YY} & \mathbf{C}_{YZ} \\ \mathbf{C}_{ZY} & \mathbf{C}_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

alors  $\mathbf{Y}$  est une variable aléatoire Gaussienne d'espérance  $\mathbf{Y}_0$  et de covariance  $\mathbf{C}_{YY}$ . La distribution conditionnelle de  $\mathbf{Y}$  sachant  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$  est Gaussienne d'espérance  $\langle \mathbf{Y} | \mathbf{Z} = \mathbf{z} \rangle = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{C}_{YZ} \cdot \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{Z}_0)$  et de covariance  $\mathbf{C}_{YY} - \mathbf{C}_{YZ} \cdot \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{ZY}$ .

Si on note  $\mathbf{Y} = \mathbf{w}$  et  $\mathbf{Z} = \mathbf{d}$  dans le lemme précédent, alors on retrouve l'équation (4.8).

La covariance *a posteriori*, ou covariance de l'erreur d'estimation s'écrit

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{w}}} = \langle (\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_{\text{vrai}}) \cdot (\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_{\text{vrai}}) \rangle \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{w}_{\text{vrai}}$  est la véritable surface d'onde turbulente, qui suit elle aussi la statistique Gaussienne centrée de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}$ . Le développement de l'équation (4.12) pour la solution MAP donne

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{w}}_{\text{MAP}}} = (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1})^{-1} \quad (4.13)$$

La démarche de cette estimation peut être résumée comme suit. L'estimée des coefficients de la phase turbulente  $\mathbf{w}$  était inconnue avant la mesure. Si aucune mesure n'est effectuée et qu'aucune information statistique n'est connue, alors l'estimation est improbable. Sans mesure, mais avec la connaissance *a priori* du moment statistique du premier ordre de la phase, on peut déjà fournir une estimation par défaut. Cette estimation est la phase de probabilité maximale, c'est à dire l'espérance mathématique de  $\mathbf{w}$ , notée  $\langle \mathbf{w} \rangle$ . Une fois que des mesures sont accessibles, on peut améliorer l'estimation. On obtient comme estimation l'espérance mathématique de  $\mathbf{w}$  sachant les données  $\mathbf{d}$ , notée  $\langle \mathbf{w} | \mathbf{d} \rangle$ .

### 4.1.3 L'estimation en présence d'une commande

J'ouvre une parenthèse dans cette section pour introduire le problème qui se posera dans une optique adaptative en boucle fermée. L'équation de mesure qui décrit une optique adaptative en boucle fermée fait intervenir la commande appliquée au miroir

déformable (MD). Le système de mesure étant linéaire, l'équation (2.16) traduit l'influence du vecteur de commande  $\mathbf{a}$  sur les données. En présence de turbulence et d'une commande non nulle appliquée au miroir déformable, l'équation de mesure devient

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{e}. \quad (4.14)$$

Cette fois-ci, les erreurs  $\mathbf{e}$  rendent compte à la fois les incertitudes de mesure, et des erreurs d'approximation des modèles  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{G}$ . Je suppose néanmoins que ces erreurs restent gaussiennes centrées de covariance toujours notée  $\mathbf{C}_e$ .

La commande est supposée connue ; calculée par le correcteur et appliquée au miroir déformable. La mesure  $\mathbf{d}$  est donc toujours une variable aléatoire de statistique Gaussienne. Son espérance vaut désormais

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle - \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} \quad (4.15)$$

mais sa matrice de covariance reste décrite par

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{d} - \langle \mathbf{d} \rangle) \cdot (\mathbf{d} - \langle \mathbf{d} \rangle)^T \rangle &= \langle (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a})^T \rangle \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e. \end{aligned} \quad (4.16)$$

À partir du lemme (4.11), en remplaçant à nouveau  $\mathbf{Y}$  par  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{Z}$  par  $\mathbf{d}$ , on obtient l'estimation MAP  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{MAP}}$  en boucle fermée, *i.e.*

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{MAP}} = \langle \mathbf{w} \rangle + \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}). \quad (4.17)$$

De fait, n'importe quelle expression parmi les équations (4.8)-(4.9) fournit la solution MAP en boucle fermée à condition de remplacer  $\mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle$  par  $\mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle - \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}$ , l'espérance des mesures en boucle fermée.

J'ai montré ici l'impact sur l'estimation MAP d'une entrée appliquée au système, la commande. J'analyse ce résultat dans l'étude théorique du problème inverse de la boucle fermée au chapitre 9. En attendant, je ferme cette parenthèse et reprends la discussion sur des mesures en boucle ouverte, *i.e.* sans commande, jusqu'à la fin de ce chapitre.

## 4.2 L'estimation en cascade d'un signal constant

Désormais, la question est de savoir comment améliorer l'estimation. Une possibilité consiste à prendre de nouvelles mesures du même signal, c'est-à-dire de la même surface d'onde vraie  $\mathbf{w}_{\text{vrai}}$ .

Supposons que l'on ait accès à  $p$  jeux de mesures  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_p$  du même signal, avec des bruits décorrélés d'un jeu de mesure à l'autre. Alors en reprenant les notations du lemme, on peut écrire :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \dots \\ \mathbf{d}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{e}_2 \\ \dots \\ \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{w} + \mathbf{e}_p \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

On se ramène ainsi au cas précédent et l'estimation MAP fournit la solution

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{MAP}} = \langle \mathbf{w} | \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_p \rangle \quad (4.19)$$

$$= \langle \mathbf{w} \rangle + \left( \sum_{i=1}^p \mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{C}_{e_i}^{-1} \cdot \mathbf{S}_i + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^p \mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{C}_{e_i}^{-1} \cdot \mathbf{d}_i + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle \right), \quad (4.20)$$

avec une covariance *a posteriori*  $\mathbf{C}_{\mathbf{w} | \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_p} = \left( \sum_{i=1}^p \mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{C}_{e_i}^{-1} \cdot \mathbf{S}_i + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} \right)^{-1}$ .

Cette expression permet d'obtenir directement l'estimation optimale étant donnés les  $p$  jeux de mesure. Si, en revanche, les mesures ne deviennent accessibles que les unes après les autres, on calcule au fur et à mesure  $\langle \mathbf{w} | \mathbf{d}_1 \rangle$ ,  $\langle \mathbf{w} | \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \rangle$ , et  $\langle \mathbf{w} | \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_p \rangle$ . Puisque le bruit des mesures est décorrélé, on peut résoudre cette estimation en cascade (Tarantola, 2005).

La démonstration est faite ici pour  $p = 2$ , le cas général étant déductible par récurrence. On note

$$\langle \mathbf{w} | \mathbf{d}_1 \rangle = \left( \mathbf{S}_1^T \cdot \mathbf{C}_{e_1}^{-1} \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} \right)^{-1} \cdot \left( \mathbf{S}_1^T \cdot \mathbf{C}_{e_1}^{-1} \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle \right)$$

et

$$\mathbf{C}_{\mathbf{w} | \mathbf{d}_1} = \left( \mathbf{S}_1^T \cdot \mathbf{C}_{e_1}^{-1} \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} \right)^{-1}.$$

En remarquant l'égalité suivante :

$$\left( \sum_{i=1}^2 \mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{C}_{e_i}^{-1} \cdot \mathbf{S}_i + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} \right)^{-1} = \mathbf{C}_{\mathbf{w} | \mathbf{d}_1} - \left( \sum_{i=1}^2 \mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{C}_{e_i}^{-1} \cdot \mathbf{S}_i + \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{C}_{e_2}^{-1} \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{w} | \mathbf{d}_1} \quad (4.21)$$

et en l'insérant dans l'équation (4.20) pour  $p = 2$ , on obtient

$$\langle \mathbf{w} | \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \rangle = \left( \mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{C}_{e_2}^{-1} \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{C}_{\mathbf{w} | \mathbf{d}_1}^{-1} \right)^{-1} \cdot \left( \mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{C}_{e_2}^{-1} \cdot \mathbf{d}_2 + \mathbf{C}_{\mathbf{w} | \mathbf{d}_1}^{-1} \cdot \langle \mathbf{w} | \mathbf{d}_1 \rangle \right) \quad (4.22)$$

On reconnaît dans l'équation (4.22), l'expression de l'espérance conditionnelle fournit par le lemme quand  $\mathbf{Y} = \langle \mathbf{w} | \mathbf{d}_1 \rangle$  et  $\mathbf{Z} = \mathbf{d}_2$ . La statistique Gaussienne de la distribution conditionnelle  $\mathbf{w} | \mathbf{d}_1$  (*a posteriori*) devient donc l'information *a priori* pour traiter le deuxième jeu de données. Afin d'éviter toute confusion entre ce qui à une étape est considéré comme *a posteriori* et à la suivante comme *a priori*, il est plus clair d'explicitier les conditions *sachant les données*  $\mathbf{d}_i$ , directement dans la notation de l'estimée, par exemple  $\hat{\mathbf{w}} | \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_i$ .

### 4.3 Approche inverse avec évolution temporelle

J'écris à nouveau les équations de mesure (4.18) d'une façon plus générale, en admettant que la surface d'onde est susceptible d'évoluer entre deux mesures :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \dots \\ \mathbf{d}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{e}_2 \\ \dots \\ \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{w}_p + \mathbf{e}_p \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Alors, le résultat du lemme fait intervenir des covariances spatio-temporelles de la surface d'onde  $\langle (\mathbf{w}_i - \langle \mathbf{w}_i \rangle) \cdot (\mathbf{w}_j - \langle \mathbf{w}_j \rangle)^T \rangle$  avec  $i \neq j$ . Les deux cas d'estimation traités dans les sections précédentes sont caractéristiques de deux situations extrêmes en optique adaptative.

Supposons que les surfaces d'onde successives soient entièrement décorréelées, alors chaque nouvelle estimation est un problème inverse *simple* comme décrit à la section 4.1. En effet,  $\mathbf{d}_i$  ne sert qu'à l'estimation de  $\mathbf{w}_i$ . Aucun lien ne peut être fait avec un  $\mathbf{w}_j$ ,  $j \neq i$ .

Supposons, à l'inverse, que la surface d'onde est constante. Alors on se ramène directement au cas de la section 4.2.

La réalité dans le cas de la turbulence atmosphérique se situe évidemment entre ces deux situations, et on souhaite tirer profit des informations successivement apportées par les jeux de données  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_p$ , qui échantillonnent temporellement le signal  $\mathbf{w}(t_k)$ , aux instants  $t_k$  avec  $1 \leq k \leq p$ . On distingue trois types d'estimation de  $\hat{\mathbf{w}}$  :

- le lissage estime  $\hat{\mathbf{w}}(t_k - \tau)$ ,  $\tau > 0$ , à un instant antérieur à celui de la mesure.
- le filtrage estime  $\hat{\mathbf{w}}(t_k)$ , à l'instant de la mesure.
- la prédiction estime  $\hat{\mathbf{w}}(t_k + \tau)$ ,  $\tau > 0$ , à un instant postérieur à celui de la mesure.

On comprend bien que ces distinctions n'ont de sens qu'à partir du moment où l'évolution temporelle de la turbulence a été modélisée. Les sections 4.1 et 4.2, ne faisant pas intervenir de considération temporelle, traitent simplement du filtrage.

### 4.3.1 L'introduction d'un modèle d'évolution temporelle

Améliorer l'estimation de la surface d'onde turbulente en optique adaptative repose sur la modélisation de l'évolution temporelle de  $\mathbf{w}$ . Les processus physiques sont souvent modélisés par des équations différentielles. Je retiens ici les modèles ARMAX pour *autoregressive moving-average model with auxiliary input* qui s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{w}(k) = \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{w}(k-i) + \mathbf{v}(k) \quad (4.24)$$

où les  $\mathbf{A}_i$  sont des matrices,  $q$  représente l'horizon du modèle avec  $1 \leq q \leq k$  et  $\mathbf{v}$  désigne une perturbation qui illustre le fait que l'évolution temporelle de la turbulence est un processus stochastique.

Le cas particulier d'un modèle autorégressif d'ordre 1 suppose

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{w}(k-1) + \mathbf{v}(k). \quad (4.25)$$

Tirer le maximum d'information possible de  $\mathbf{w}(k-1)$  pour modéliser  $\mathbf{w}(k)$  suppose que  $\mathbf{w}(k-1)$  et  $\mathbf{v}(k)$  sont décorrélés. Dans le cas d'un processus stationnaire, comme la turbulence, la matrice  $\mathbf{A}$  satisfait alors

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{A} \cdot \langle \mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{w}(k)^T \rangle. \quad (4.26)$$

Nos paramètres à estimer doivent désormais satisfaire deux équations : l'équation de mesure et l'équation d'évolution temporelle. On a déjà vu comment joindre les distributions des  $\mathbf{d}_i$  et de  $\mathbf{w}(k)$  à l'intérieur de  $\mathbf{X}$  pour appliquer le lemme. Désormais, il faut ajouter à  $\mathbf{X}$  les  $q$  jeux de paramètres passés, pour pouvoir retrouver une écriture



semblable à celle du lemme en regroupant les deux équations en une. On écrit alors,

$$\mathbf{X} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{w}(k) & \\ \mathbf{w}(k-1) & \\ \dots & \\ \mathbf{w}(k-q) & \\ \mathbf{d}(k) & \end{array} \middle| \mathbf{d}(k-1), \dots, \mathbf{d}(1) \right] \quad (4.27)$$

Pour simplifier les écritures, on peut renommer  $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{w}(k), \mathbf{w}(k-1), \dots, \mathbf{w}(k-q)]^T$ , ce qui permet de se ramener à nouveau à un système de la forme

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{v}}(k) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{d}(k) = \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k) \quad (4.29)$$

où  $\bar{\mathbf{A}}$  et  $\bar{\mathbf{S}}$  sont deux matrices creuses par blocs, définies à partir des  $\mathbf{A}_i$  et de  $\mathbf{S}$ . Le bruit  $\bar{\mathbf{v}}(k)$  est aussi une version augmentée  $q$  fois de  $\mathbf{v}$ .

$\mathbf{x}(k)$  sert à caractériser l'état de l'estimation, la quantité d'information connue à l'étape  $(k)$ . Si  $\mathbf{x}$  contient juste la quantité minimum d'information nécessaire à décrire tout le système, alors on dit que  $\mathbf{x}$  est la variable d'état de ce système.

Grâce à ce changement de notation, on peut retrouver simplement la formulation du lemme, en terme d'état.

### 4.3.2 De Gauss à Kalman

Afin d'obtenir l'estimateur de Kalman, il faut faire les 3 hypothèses suivantes :

- L'évolution de l'état suit un modèle de Markov, *i. e.*

$$\mathcal{P}r(\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1), \mathbf{x}(k-2), \dots, \mathbf{x}(k-q)) = \mathcal{P}r(\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1)) \quad (4.30)$$

- Le modèle du système stochastique est linéaire de la forme

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{v}}(k) \quad (4.31)$$

$$\mathbf{d}(k) = \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k) \quad (4.32)$$

avec  $\bar{\mathbf{v}}$  et  $\mathbf{e}$  des processus Gaussiens centrés stationnaires indépendants, de covariance  $\mathbf{C}_v$  et  $\mathbf{C}_e$  respectivement.

- L'état initial  $\mathbf{x}(0)$  est une variable aléatoire d'espérance  $\langle \mathbf{x}(0) \rangle$  et de covariance  $\mathbf{C}_x(0)$ .

Si on considère que ces trois hypothèses sont acceptables pour le système modélisé, alors il suffit de dérouler le lemme par récurrence pour obtenir l'estimation de  $\mathbf{x}(k+1)$ , qui contient l'estimation de  $\mathbf{w}(k+1)$  au moins. Je note  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(k+1) \ \mathbf{d}(k)]^T$ . La distribution jointe de  $\mathbf{X}$  sachant  $\mathbf{d}(k-1), \dots, \mathbf{d}(0)$  est Gaussienne, d'espérance

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{d}(k-1), \dots, \mathbf{d}(0) \rangle = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \cdot \langle \mathbf{x}(k) | \mathbf{d}(k-1), \dots, \mathbf{d}(0) \rangle \quad (4.33)$$

et de covariance

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}_x(k) \cdot \bar{\mathbf{A}}^T + \mathbf{C}_v & \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}_x(k) \cdot \bar{\mathbf{S}}^T \\ \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_x(k) \cdot \bar{\mathbf{A}}^T & \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_x(k) \cdot \bar{\mathbf{S}}^T + \mathbf{C}_e \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

En conséquence, l'estimation de  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  au sens des moindres carrés, ou encore l'espérance conditionnelle de  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  sachant  $\mathbf{d}(k), \mathbf{d}(k-1), \dots, \mathbf{d}(0)$  s'exprime ainsi :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \langle \mathbf{x}(k+1) | \mathbf{d}(k), \mathbf{d}(k-1), \dots, \mathbf{d}(0) \rangle \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ &\quad + \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k) \cdot \bar{\mathbf{S}}^T \cdot (\bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k) \cdot \bar{\mathbf{S}}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \cdot (\mathbf{d}(k) - \bar{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (4.36)$$

et sa covariance *a posteriori* :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k+1) &= (\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k) \cdot \bar{\mathbf{A}}^T + \mathbf{C}_v) \\ &\quad - \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k) \cdot \bar{\mathbf{S}}^T \cdot (\bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k) \cdot \bar{\mathbf{S}}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k) \cdot \bar{\mathbf{A}}^T. \end{aligned} \quad (4.37)$$

On reconnaît la structure de l'équation (4.9) dans la forme (4.36) ci-dessus. De plus, cette comparaison met en évidence que la moyenne *a priori* des paramètres s'écrit  $\bar{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , directement déduite du modèle d'évolution temporelle.

Pour une surface d'onde constante,  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$  et  $\bar{\mathbf{v}}(k)$  disparaît, si bien que l'on retrouve exactement la formulation de la cascade vue dans la section 4.2.

L'estimateur de Kalman permet donc à partir de la modélisation de la mesure et de l'évolution temporelle du signal de fournir par récurrence l'estimation au sens des moindres carrés de tous les jeux de paramètres.

En pratique, ce formalisme est difficile à mettre en oeuvre lorsque les matrices sont de grandes tailles. Il existe cependant des approximations et simplifications possibles. D'après l'équation (4.37), si la suite  $(\mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge, alors sa limite  $\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{\infty}$  vérifie l'équation algébrique de Riccati :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{\infty} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{\infty} \cdot \bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{\infty} \cdot \bar{\mathbf{S}}^T \cdot (\bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{\infty} \cdot \bar{\mathbf{S}}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{\infty} \cdot \bar{\mathbf{A}}^T - \mathbf{C}_v. \quad (4.38)$$

Résoudre l'équation algébrique de Riccati permet d'obtenir une expression de la covariance limite  $\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{\infty}$ . Si la convergence est rapide, cette covariance limite peut remplacer la covariance *a priori*  $\mathbf{C}_{\mathbf{x}}(k)$  à tous les pas dans l'expression de l'estimateur de Kalman (4.36).

## 4.4 Interprétation en optique adaptative

En optique adaptative, cette approche *optimale* de l'estimation a été étudiée à plusieurs reprises. Historiquement, il existe un déséquilibre de considération entre les aspects spatiaux et temporels de la turbulence. Parce que la qualité de la correction dépend avant tout de l'estimation spatiale de la perturbation, le retard du système était d'abord considéré comme une source d'erreur secondaire. En conséquence, une première approximation consiste à traiter le système comme instantané, en omettant la dynamique temporelle et en se réduisant à un contrôle spatial. C'est en ce sens que Wallner (1983) a introduit le contrôle optimal de l'optique adaptative qui repose sur une estimation MAP de la commande à appliquer sans *a priori* temporels. Paschall et Anderson (1993) ont introduit un modèle d'évolution temporelle (*cf.* équation (4.24) qui les conduit à une loi de commande linéaire quadratique Gaussienne (LQG) (Goodwin et Sin, 1984) reposant sur le formalisme d'état et un estimateur de Kalman. Pour des OAmC ou OAX sur des télescopes décimétriques, il est possible d'étendre l'approche modale du correcteur présentée dans la section 2.6.1 à une loi de commande

LQG *par mode*. Ceci a été proposé par Looze et al. (2003) pour une OAmC et plus récemment adapté par Poyneer et al. (2007) à la commande d'une OAX en utilisant la représentation modale dans l'espace de Fourier.

Comme je l'ai précisé dans la section 2.6.2, la correction des optiques adaptatives de champ large et la tomographie requièrent l'introduction d'*a priori* spatiaux sur la surface d'onde. Autrement dit, une estimation de type MAP ou Kalman est nécessaire pour régulariser la reconstruction, notée  $\mathbf{R}$  (*cf.* section 2.6.2). En imaginant une décomposition en valeur Singulières des différentes matrices mises en jeu pour la reconstruction, la projection ou le modèle d'évolution temporelle, on note que la surface d'onde peut être paramétrée suivant différents espaces : un espace de modes singuliers en sortie de la reconstruction, un espace de modes singuliers pour la projection, un espace de modes singuliers pour le processus de mesure réel et éventuellement un ou deux espaces de modes singuliers vis-à-vis du modèle d'évolution temporelle  $\mathbf{A}$ . Les passages entre les différents espaces considérés pour modéliser les processus et les *a priori* s'appliquant sur la surface d'onde impliquent généralement des matrices de changement de variable pleines dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , *i.e.* des coûts calculatoires prohibitifs en  $\mathcal{O}(n^2)$  pour une optique adaptative à grand nombre de paramètres à chaque boucle. C'est ce qui freine actuellement la mise en oeuvre de la loi de commande LQG avec un estimateur de Kalman pour les systèmes à grands nombres de paramètres. La loi de commande proposée par Le Roux (2003), puis développée par Petit (2006), pour l'OAMC met en évidence cet obstacle. Il en est de même pour d'autres stratégies de commande de type LQG proposées par Gavel et Wiberg (2003) et Hinnen et al. (2007).

# Conclusion

Au moment de clore cette présentation du contexte de travail de ma thèse, je souhaite mettre en exergue les principaux points qui ont guidés ma démarche et qui seront visibles, je suppose, dans la suite de ce manuscrit.

L'étude d'une commande d'optique adaptative pour un télescope de type E-ELT requiert une nouvelle approche pour la correction, à la fois du point de vue du critère et du point de vue algorithmique. Concernant le critère, la section 2.6 montre le besoin de décomposer le problème de l'estimation dans l'espace des commandes en deux sous-problèmes : une reconstruction de surfaces d'onde et une projection sur les miroirs déformables. Alors que la projection est une opération généralement peu coûteuse, l'étape de reconstruction a fait l'objet de nombreuses études depuis le milieu des années 90 afin de réduire son coût calculatoire, tout en permettant une qualité d'estimation optimale.

L'approche optimale de l'estimation introduite par le biais de l'estimateur de Kalman dans le chapitre 4 est une approche très intéressante pour bâtir une loi de commande de type LQG en optique adaptative (Le Roux, 2003; Petit, 2006; Gavel et Wiberg, 2003; Looze et al., 2003), toutefois son implémentation avec des algorithmes rapides pour de grands systèmes n'est pas encore accessible.

À partir de ces éléments, j'ai étudié la possibilité d'offrir un algorithme de commande rapide pour une optique adaptative sur un télescope hectométrique.



## Deuxième partie

# La reconstruction de surface d'onde turbulente sur un grand nombre de paramètres



La reconstruction de surface d'onde constitue généralement une étape statique de la correction en optique adaptative, comme expliqué dans la section 2.6. Elle vise à résoudre un problème inverse en estimant la perturbation incidente à partir de mesures  $\mathbf{d}$  fournies par l'analyseur (*cf.* chapitre 4). Dans ce manuscrit, je ne traite pas d'estimation *optimale* prenant en compte un modèle d'évolution temporelle. Je compare les approches de type maximum de vraisemblance et maximum *a posteriori* pour l'estimation.

Deux aspects de la reconstruction sont examinés : sa mise en oeuvre algorithmique rapide pour des optiques adaptatives à grand nombre de paramètres et la qualité de l'estimation.

Le premier chapitre de cette partie présente une analyse algébrique générale de la qualité de reconstruction obtenue avec trois estimateurs classiques en optique adaptative.

Ensuite, un rappel de l'état de l'art des algorithmes rapides pour la reconstruction de surface d'onde turbulente en optique adaptative permet de comparer les coûts des algorithmes qui peuvent être employés pour implémenter de tels reconstruteurs sur un grand système d'optique adaptative. Cette étude comparative montre certains atouts de la méthode fractale itérative (FrIM, pour *Fractal Iterative Method*) développée par Thiébaud et Tallon (2008). L'accent est mis sur la possibilité d'application de la méthode en temps réel pour un grand nombre de paramètres.

Dans un troisième chapitre, les performances quantitatives de cette méthode sont évaluées en terme de qualité de reconstruction et de robustesse de l'estimation, à l'aide de simulations de surfaces d'onde à grand nombre de paramètres.

Enfin, la reconstruction de surface d'onde précède une autre étape statique qui est la projection. Ainsi, j'aborde dans un dernier chapitre le problème de la détermination de la correction, toujours par une approche de type problème inverse *simple*.





## Chapitre 5

# La reconstruction de surface d'onde : un problème inverse *simple*

La reconstruction en optique adaptative a été maintes fois analysée comme un problème d'estimation résolu par une méthode de type maximum de vraisemblance (Fried, 1977; Noll, 1978; Herrmann, 1980; Gendron et Lena, 1994). Ce chapitre présente une analyse théorique du problème d'estimation associé à la reconstruction de surface d'onde, en tant que problème inverse *simple*. Trois reconSTRUCTEURS importants sont comparés : deux sont de type maximum de vraisemblance et le troisième est l'estimateur MAP.

Leurs performances sont évaluées en terme de précision et de propagation du bruit. L'ensemble de cette étude fait l'objet d'une partie théorique dans un article publié par le *Journal of Optical Society of America A*, en février 2009. Cet article est copié dans la section 5.3 de ce chapitre, afin de faciliter l'analyse des équations. Je me contente ainsi, dans le corps de ce chapitre, de résumer le raisonnement suivi dans l'article en tentant de souligner les points essentiels qui distinguent les trois reconSTRUCTEURS et leurs performances.

### 5.1 La modélisation du système

La reconstruction de surface d'onde turbulente est caractérisée par l'équation de mesure (2.10), que j'écris à nouveau ici pour plus de lisibilité :

$$\mathbf{d} = S(w) + \mathbf{e}$$

Je rappelle que  $\mathbf{d}$  appartient à  $\mathbb{R}^m$ , que  $S$  est un modèle linéaire de l'analyseur, la surface d'onde  $w$  est une fonction de  $\mathcal{C}(\mathcal{A}; \mathbb{R})$  et  $\mathbf{e}$  représente les incertitudes. Le domaine  $\mathcal{A}$  représente l'aire couverte par la pupille du télescope.

Le signal  $w$  et les erreurs  $\mathbf{e}$  sont deux processus stochastiques dont la statistique est supposée Gaussienne centrée.

### 5.1.1 La statistique des erreurs

La matrice de covariance des erreurs est notée  $\mathbf{C}_e$ . J'utilise par la suite une covariance normalisée

$$\underline{\mathbf{C}}_e = \mathbf{C}_e / \underline{\sigma}_e^2 \quad (5.1)$$

où  $\underline{\sigma}_e^2 = \text{tr}(\mathbf{C}_e)/m$  est la variance moyenne des erreurs de mesure et  $\text{tr}(\cdot)$  désigne l'opérateur Trace d'une matrice. Dans le cas particulier d'erreurs de variance uniforme,  $\underline{\mathbf{C}}_e$  est la matrice de corrélation des erreurs et  $\underline{\sigma}_e^2$  est exactement la variance du bruit  $\sigma_e^2$ .

La covariance normalisée des erreurs  $\underline{\mathbf{C}}_e$  est une matrice symétrique définie positive puisque toutes les mesures sont bruitées. La décomposition de Cholesky de cette matrice  $\underline{\mathbf{C}}_e$  est notée

$$\underline{\mathbf{C}}_e = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$$

où  $\mathbf{L}$  définit donc un autre changement de variable linéaire  $\mathbf{e} = \sqrt{\underline{\sigma}_e^2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}'$ . Les erreurs  $\mathbf{e}'$  sont indépendantes et suivent ainsi une statistique normale,  $\mathbf{e}' \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ .

### 5.1.2 La statistique de la surface d'onde turbulente

Bien que la surface d'onde  $w$  soit définie dans un espace de dimension infinie, il n'est possible en pratique d'estimer qu'un nombre fini  $n$  de paramètres la caractérisant. En d'autres termes, on se ramène à une description paramétrique  $\mathbf{w}$  dans  $\mathbb{R}^n$  de la surface d'onde. Cette description est associée à une base  $(h_i)_{1 \leq i \leq n}$  de fonctions de  $\mathcal{C}(\mathcal{A}; \mathbb{R})$  telle que

$$w(\mathbf{r}) \simeq \sum_{i=1}^n h_i(\mathbf{r}) w_i = \mathbf{h}(\mathbf{r})^T \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{A}.$$

La matrice de covariance de  $\mathbf{w}$  est notée  $\mathbf{C}_w$ . De la même façon que pour le bruit, j'adopte la notation normalisée suivante

$$\mathbf{C}_w = \underline{\sigma}_w^2 \underline{\mathbf{C}}_w \quad (5.2)$$

avec  $\underline{\sigma}_w^2 = \text{tr}(\mathbf{C}_w)/n$ , la variance moyenne de la surface d'onde. La surface d'onde approchée est donc définie sur un sous-espace  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{A}; \mathbb{R})$ .

Je considère également une paramétrisation particulière de la surface d'onde sur  $\mathcal{F}$ , notée  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que les fonctions de base de cette représentation (les modes) soient statistiquement indépendants de variance unité, *i.e.*  $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Je note  $\mathbf{K}$  le changement de variable normalisé, tel que

$$\mathbf{w} = \sqrt{\underline{\sigma}_w^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}. \quad (5.3)$$

### 5.1.3 Retour à l'équation de mesure

Le problème de la reconstruction sur  $\mathcal{F}$  est alors décrit par l'équations de mesure (4.2), où  $\mathbf{S}$  est une modélisation (linéaire) matricielle de  $S$  telle que

$$S\left(\sum_{i=1}^n h_i(\mathbf{r}) w_i\right) = \sum_{i=1}^n S(h_i) w_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n.$$

Le problème de reconstruction peut alors être décrit de façon équivalente par l'équation (4.2) avec les covariance  $\mathbf{C}_w$  et  $\mathbf{C}_e$ , ou par l'équation de mesure

$$\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} + \sqrt{\sigma_e^2} \mathbf{e}' \quad (5.4)$$

avec  $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T \rangle = \mathbf{I}$  et  $\langle \mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}'^T \rangle = \mathbf{I}$ . J'appelle cette équation de mesure où le signal et le bruit suivent tous deux une statistique normale, l'équation de mesure généralisée.

## 5.2 Le critère de reconstruction et les reconSTRUCTEURS

Si la surface d'onde estimée  $\hat{\mathbf{w}}$  lors de la reconstruction peut être reproduite par un miroir déformable pour compenser les perturbations de la surface d'onde incidente, alors l'estimateur optimal, celui qui maximise le rapport de Strehl, minimise le critère suivant

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{S}_A} \left\langle \|P(w - \mathbf{h}^T \cdot \hat{\mathbf{w}})\|^2 \right\rangle \quad (5.5)$$

où  $P$  est défini par l'équation (1.37),  $\langle \cdot \rangle$  représente l'espérance mathématique sur la statistique jointe du bruit et de la turbulence. Ce critère peut être décomposé en deux termes

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \langle \epsilon^2 \rangle_\infty + \langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} \quad (5.6)$$

avec, la contribution de l'erreur due à la paramétrisation

$$\langle \epsilon^2 \rangle_\infty = \frac{1}{\mathcal{S}_A} \left\langle \|P(w - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{w})\|^2 \right\rangle$$

et celle associée au choix de l'estimateur

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} = \frac{1}{\mathcal{S}_A} \left\langle \|P(\mathbf{h}^T \cdot (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}))\|^2 \right\rangle. \quad (5.7)$$

L'erreur due à la paramétrisation a été introduite par l'équation (3.24). Quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\langle \epsilon^2 \rangle_\infty \rightarrow 0$ . Cette erreur est directement liée aux degrés de liberté du système de correction envisagé. En revanche, le nombre  $m$  de mesures étant fini,  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  sature vers une erreur minimale quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Remarque :** La décomposition (5.6) ne fait pas intervenir de terme croisé si on suppose que le piston sur la pupille est bien un vecteur contenu dans l'espace engendré par les fonctions  $h_i$ . Dans ce cas, le terme croisé est nul parce qu'il correspond au produit scalaire de vecteurs orthogonaux, et non parce que ces vecteurs seraient statistiquement décorrés.

Dans la suite de ce chapitre,  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  désigne le critère de la reconstruction de surface d'onde en optique adaptative. Je note  $\underline{\mathbf{N}}$  la matrice de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  dont les éléments sont définis par

$$\underline{N}_{i,j} = \frac{1}{\mathcal{S}_A} (P(h_i)P(h_j)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n. \quad (5.8)$$

La factorisation de Cholesky de cette matrice symétrique positive est notée

$$\underline{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N}, \quad (5.9)$$

de sorte que le critère de l'équation (5.7) devient (Ellerbroek, 1994)

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} = \text{tr} \langle \mathbf{N} \cdot (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}) \cdot (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}})^T \cdot \mathbf{N}^T \rangle. \quad (5.10)$$

J'étudie et je compare dans ce chapitre plusieurs estimateurs. Ils sont tous définis à partir d'un reconstruteur linéaire  $\mathbf{R}$  fournissant une estimée

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{d},$$

Quel que soit le reconstruteur  $\mathbf{R}$  ainsi défini, le critère de l'équation (5.7) se décompose à son tour en deux contributions d'erreur :

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} = b + v \quad (5.11)$$

avec

$$b = \text{tr} (\mathbf{N} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{S})^T \cdot \mathbf{N}^T) \underline{\sigma}_{\mathbf{w}}^2 \quad (5.12)$$

le terme de *biais*, et

$$v = \text{tr} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{R} \cdot \underline{\mathbf{C}}_e \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{N}^T) \underline{\sigma}_e^2. \quad (5.13)$$

celui de *variance*. D'après l'équation (5.12), le terme nommé ici *biais*  $b$  quantifie, de façon quadratique, la qualité de l'inversion du processus de mesure  $\mathbf{S}$  par le reconstruteur. Le terme  $v$  dans l'équation (5.13) est une erreur quadratique due à la propagation du bruit dans l'estimation. L'optimisation du critère  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  impose au reconstruteur à la fois précision (moindre biais) et stabilité (moindre propagation du bruit). Ces contributions d'erreurs sont analysées pour les différents reconstruteurs.

Même si la solution de moindre carrés optimise un critère différent, le chapitre précédent nous fournit plusieurs reconstruteurs d'intérêt. Tout d'abord, le reconstruteur de maximum *a posteriori*  $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$  est obtenu à partir de l'équation (4.9), en notant que l'espérance mathématique *a priori*  $\langle \mathbf{w} \rangle$  est nulle. Alors,

$$\mathbf{R}_{\text{MAP}} = (\mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mu_0 \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1}, \quad (5.14)$$

où

$$\mu_0 = \underline{\sigma}_e^2 / \underline{\sigma}_{\mathbf{w}}^2 \quad (5.15)$$

représente le poids relatif optimal des *a priori* au sens Bayésien. En délaissant les *a priori* sur la statistique de la turbulence, on obtient les reconstruteurs de maximum de vraisemblance. Ils sont une infinité parce que le système de mesure  $\mathbf{S}$  n'est pas inversible. En effet, en optique adaptative, les analyseurs de surface d'onde n'ont généralement pas de référence de phase et ne mesurent donc pas le mode piston de la surface d'onde. Je retiens ici deux reconstruteurs de maximum de vraisemblance particuliers. Le premier est le reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  de maximum de vraisemblance et de moindre norme dans l'espace des paramètres  $\mathbf{w}$ , défini par l'équation (4.6), avec  $\mathbf{W}_e = \underline{\mathbf{C}}_e^{-1}$ , *i.e.*

$$\mathbf{R}_{\text{MNML}} = (\mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S})^\dagger \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \quad (5.16)$$

Le second est son homologue, le reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$ , de maximum de vraisemblance et de moindre norme, dans l'espace des  $\mathbf{u}$ . Il est défini à partir de l'équation de mesure (5.4), tel que

$$\mathbf{R}_{\text{KL}} = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K})^\dagger \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1}, \quad (5.17)$$

avec l'indice KL pour Karhunen-Loève, afin de rappeler qu'il s'agit d'un espace dans lequel les paramètres sont statistiquement indépendants. Il est important de noter cependant que les hypothèses que j'ai faites dans la section 5.1 n'imposent pas aux vecteurs colonnes de  $\mathbf{K}$  d'être orthogonaux, tandis que les modes de Karhunen-Loève le sont par définition (*cf.* section 3.2.2). Ces deux reconstituteurs de maximum de vraisemblance conduisent à des solutions différentes *a priori*, à moins que  $\mathbf{K}$  ne satisfasse des propriétés d'orthogonalité particulières discutées plus loin.

### 5.3 Comparison of minimum norm maximum likelihood and maximum a posteriori wavefront reconstructions for large adaptive optics systems

L'analyse algébrique des erreurs associées à chacun des trois reconstituteurs cités ci-dessus est contenue dans un article, qui vient de paraître (février 2009) dans le Journal of Optical Society of America A. Il est recopié ici.

La majorité des calculs ont été regroupés en annexe à l'article, afin de faciliter la discussion dans le corps du texte. La section 5.4 reproduit une synthèse de cette analyse, malheureusement pour le lecteur, avec quelques changements de notations par rapport à l'article ( $\mathbf{G}$  dans l'article devient  $\mathbf{D}$  dans ce manuscrit). Ceci est dû à l'antériorité de cet article et afin d'éviter dans ce manuscrit toute confusion avec la matrice d'interaction du système d'optique adaptative.

# Comparison of minimum-norm maximum likelihood and maximum *a posteriori* wavefront reconstructions for large adaptive optics systems

Clémentine Béchet,\* Michel Tallon, and Éric Thiébaud

Université de Lyon, Lyon, F-69000, France; Université Lyon 1, Villeurbanne, F-69622, France; Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval cedex, F-69561, France; CNRS, UMR 5574; Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France

\*Corresponding author: CBéchet@eso.org

Received July 21, 2008; revised November 28, 2008; accepted December 12, 2008;  
posted December 23, 2008 (Doc. ID 99089); published February 9, 2009

The performances of various estimators for wavefront sensing applications such as adaptive optics (AO) are compared. Analytical expressions for the bias and variance terms in the mean squared error (MSE) are derived for the minimum-norm maximum likelihood (MNML) and the maximum *a posteriori* (MAP) reconstructors. The MAP estimator is analytically demonstrated to yield an optimal trade-off that reduces the MSE, hence leading to a better Strehl ratio. The implications for AO applications are quantified thanks to simulations on 8-m- and 42-m-class telescopes. We show that the MAP estimator can achieve twice as low MSE as MNML methods do. Large AO systems can thus benefit from the high quality of MAP reconstruction in  $\mathcal{O}(n)$  operations, thanks to the fast fractal iterative method (FrIM) algorithm (Thiébaud and Tallon, submitted to J. Opt. Soc. Am. A). © 2009 Optical Society of America  
OCIS codes: 010.1080, 010.7350, 100.3190.

## 1. INTRODUCTION

Turbulent wavefront reconstruction has been intensively investigated for the estimation step of large adaptive optics (AO). Nowadays, particular attention concerns two aspects of the problem: high reconstruction quality and high-speed algorithms. On the one hand, in some AO concepts such as multiconjugate AO (MCAO) or laser tomography AO, introduction of priors in the wavefront estimation is required to ensure a good correction quality, allowing correction of unseen modes [1,2]. This is why the historical minimum-norm maximum likelihood (MNML) approach [3] has been replaced, for a few years now, by maximum *a posteriori* (MAP) reconstructions [4–9]. This evolution also illustrates the fact that turbulent wavefront reconstruction is now tackled, in a general framework, as an inverse problem to solve. On the other hand, Extremely Large Telescopes (ELT) currently being designed will have to deal with wavefront reconstructions with a huge number of parameters  $n \sim 10^4$ . Even adaptive optics systems (AOSs) on smaller telescopes, such as the SPHERE extreme AO concept [10] on the Very Large Telescope in Chile, will have to face more than  $10^3$  actuators. In order to control the AOS in real time, around 1 kHz, efficient algorithms are required for estimating the large number of parameters with a low computational load.

Discussing these two issues, the aim of this paper is twofold. First, in Section 2, we provide an algebraic analysis of the wavefront reconstruction inverse problem in order to justify the optimal trade-off provided by MAP methods. This study involves a detailed comparison of MNML and MAP reconstructors in terms of contributions to the reconstruction error. Then, in Section 3, we quan-

tify the benefits of using a particular MAP method with the help of simulations. As mentioned above, we are also concerned with the computational cost of the reconstructor, which is why the chosen algorithm for the simulations is the fractal iterative method (FrIM) [9].

## 2. WAVEFRONT RECONSTRUCTION: AN INVERSE PROBLEM

### A. Inverse Problem and Parameterization

Wavefront reconstruction aims to solve an ill-posed inverse problem, characterized by the following measurement equation:

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}(w) + \mathbf{e}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$  are the data,  $\mathbf{S}$  is a model of the sensing device,  $w(x,y)$  is the wavefront phase in the pupil plane, and  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$  are the errors due to noise and model approximations.

Wavefront  $w(x,y)$  is a continuous function of space defined in an infinite-dimension Hilbert space [11]. In practice, however, reconstruction is limited to a finite-dimension space and the recovered wavefront is characterized by  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  with  $n$  a finite number of parameters. For instance, using a basis of 2D functions  $f_j(x,y)$ , the true wavefront is approximated by

$$w(x,y) \approx \sum_{j=1}^n w_j f_j(x,y). \quad (2)$$

Most wavefront sensors are approximately linear [12,13]; then the measurement equation (1) becomes

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{e}, \quad (3)$$

where, according to Eq. (2), the coefficients of the model matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  are  $S_{i,j} = S_i(f_j)$ . Note that the error term  $\mathbf{e}$  in Eq. (3) accounts for the modeling errors due to the linear approximation of the sensing device and to the wavefront description given by Eq. (2). In the following, we notate  $\mathbf{C}_e$  the covariance of the measurements errors  $\mathbf{e}$ , and we widely use the rescaled covariance

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{C}_e / a_e, \quad (4)$$

where  $a_e = \text{tr}(\mathbf{C}_e) / m$  is the mean variance of the measurements errors. Note that  $\text{tr}(\cdot)$  is the trace operator. In the particular case of a uniform variance of errors,  $\mathbf{C}_e$  is the correlation matrix of the measurements errors and  $a_e$  exactly is the noise variance  $\sigma_e^2$ .

Without loss of generality, we define here the wavefront parameters  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  to be equal to the values of the wavefront phase sampled on an evenly spaced  $N \times N$  grid at least as large as the optics pupil. In this particular *zonal* representation, the basis functions are simply interpolation functions. A number of alternative wavefront representations can be obtained by any bijective change of variables:

$$\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}, \quad (5)$$

where  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  are the coefficients of the alternative expansion and where the columns of  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  are the linearly independent new wavefront basis functions expressed in the former basis function. The new basis functions are usually called *modes* when they spread over the whole pupil. In this paper we specifically consider two different wavefront representations: a *zonal* one parameterized by  $\mathbf{w}$ , evenly sampling the wavefront in the pupil plane, and a *modal* one parameterized by  $\mathbf{u}$  based on the Karhunen–Loève modes. The latter one is chosen such that the new variables are normally distributed:  $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . This can be obtained by factorizing the covariance of the variables  $\mathbf{w}$  as

$$\mathbf{C}_w = a_w \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{K}^T = a_w \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T, \quad (6)$$

using the rescaled linear change of variable

$$\mathbf{w} = \sqrt{a_w} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (7)$$

with  $a_w = \text{tr}(\mathbf{C}_w) / n$ , the mean variance of the phase.

Cholesky decomposition leads to a possible expression for  $\mathbf{K}$  and shows that there exists, at least, one linear operator  $\mathbf{K}$  satisfying Eqs. (6) and (7). However, this factorization is not unique, and we consider in Section 3 a rescaled version of the fractal factorization proposed by Thiébaud and Tallon [9], in their FrIM method.

## B. Mean Squared Error, Bias, and Variance

The objective of the phase reconstruction problem is to recover a *good* estimate  $\hat{\mathbf{w}}$  of the true parameters  $\mathbf{w}$  given the measurements  $\mathbf{d}$ . In this stochastic study, the quality of the reconstruction is assessed by the mean squared error (MSE) of the phase [14]:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{n} \text{tr} \langle (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}) \cdot (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}})^T \rangle_{\mathbf{w}, \mathbf{e}}, \quad (8)$$

where  $\langle \cdot \rangle_x$  denotes expectation over the statistics of the variable  $\mathbf{x}$ . In the particular case of a turbulent wavefront,  $\mathbf{w}$  and  $\mathbf{e}$  are two independent random processes obeying zero-mean Gaussian statistics and the MSE is obtained from the expectation over both turbulence and noise statistics. In this paper, we consider solutions obtained by a linear reconstructs  $\mathbf{R}$ , that is,

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}. \quad (9)$$

This is supported by the fact that, for a linear model and Gaussian statistics, the so-called minimum-variance solution that has the smallest MSE is equal to a linear operator applied to the data as recalled in what follows. The expansion of  $\epsilon^2$  in Eq. (8) for a linear reconstructor yields

$$\epsilon^2 = b + v, \quad (10)$$

$$b = \text{tr}((\mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{C}_w \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{S})^T) a_w / n, \quad (11)$$

$$v = \text{tr}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \mathbf{R}^T) a_e / n, \quad (12)$$

where  $\mathbf{I}$  is the identity matrix.

Equations (10)–(12) make explicit the MSE as the sum of two terms. The so-called bias term,  $b$ , is a quadratic measure of how well the reconstructor  $\mathbf{R}$  approximates the inverse of the sensing operator  $\mathbf{S}$ . The so-called variance term,  $v$ , is the quadratic error due to the noise propagation in the solution. This readily illustrates that a given reconstructor  $\mathbf{R}$  yields some trade-off between accuracy (i.e., least bias) and stability (i.e., least variance).

In this paper, we are particularly interested in turbulent wavefront reconstruction for AO. In this case, neither the piston mode nor the phase outside the telescope pupil have any effect on the image quality. This leads to an AO-specific formulation of the MSE for which the piston-removed MSE averaged over the aperture is written

$$\epsilon^2 = \frac{1}{n'} \text{tr} \langle \mathbf{P} \cdot (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}) \cdot (\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}})^T \cdot \mathbf{P}^T \rangle_{\mathbf{w}, \mathbf{e}}, \quad (13)$$

where  $\mathbf{P}$  is a linear operator that combines aperture masking and 2D integration over the pupil for piston removal and where  $n'$  is the rank of  $\mathbf{P}$ . Similarly to the MSE defined in Eq. (10), the AO-specific MSE in Eq. (13) is the sum of a bias and a variance term:

$$b = \text{tr}(\mathbf{P} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{C}_w \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{S})^T \cdot \mathbf{P}^T) a_w / n', \quad (14)$$

$$v = \text{tr}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{P}^T) a_e / n'. \quad (15)$$

The remainder of this paper is devoted to an extensive study of these two terms for different reconstructors and turbulence statistics.

## C. Minimum-Norm Maximum Likelihood

For Gaussian distributed errors, the maximum likelihood (ML) wavefront minimizes the  $\chi^2$  discrepancy between the model and the data:



$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{ML}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{w}}} (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{w}})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{w}}), \quad (16)$$

and, as a consequence, belongs to the set of solutions to the normal equations, i.e.,  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{ML}} \in \Omega_{\text{ML}}$ , with

$$\Omega_{\text{ML}} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{d}\} \quad (17)$$

with  $\mathbf{W}_e = \mathbf{C}_e^{-1}$ . Since the model matrix  $\mathbf{S}$  is not invertible over the parameter space (at least because the piston mode and phase outside the pupil are not measured by the sensor), additional constraints are required to yield a unique solution. This can be achieved by choosing the minimum-norm solution from among the ones in  $\Omega_{\text{ML}}$  and leads to the MNML solution:

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{MNML}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{w}} \in \Omega_{\text{ML}}} \|\hat{\mathbf{w}}\|_2 = \mathbf{R}_{\text{MNML}} \cdot \mathbf{d} \quad (18)$$

with

$$\mathbf{R}_{\text{MNML}} = (\mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S})^{\dagger} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e, \quad (19)$$

where exponent  $\dagger$  denotes Moore–Penrose pseudo-inverse [15].

However, since the norm depends on the particular basis of functions, the MNML solution may be different for a different basis. Choosing the ML solution that has minimal Euclidean norm for the Karhunen–Loève wavefront coefficients  $\mathbf{u}$  yields the modal MNML solution:

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{KL}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{w}} \in \Omega_{\text{ML}}} \|\hat{\mathbf{w}}\|_{\text{KL}} = \mathbf{R}_{\text{KL}} \cdot \mathbf{d}, \quad (20)$$

where  $\|\mathbf{w}\|_{\text{KL}} = \|\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{w}\|_2 / \sqrt{a_w}$  and with

$$\mathbf{R}_{\text{KL}} = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{K}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K})^{\dagger} \cdot \mathbf{K}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e. \quad (21)$$

Unless  $\mathbf{K}$  satisfies some properties preserving orthogonality mentioned later (see Appendix A), zonal and modal MNML reconstructors produce two different solutions. Historically, MNML with the zonal representation was the first approach to find a unique estimate to the wavefront reconstruction problem [3].

One may notice that MNML solutions produce by construction a null piston-mode component. As a matter of fact, a nonnull piston not only belongs to the null space of the sensing process  $\mathbf{S}$  but also necessarily produces a larger norm for the solution in both wavefront representations. MNML optimizations simply rely on the famous Gauss least-squares analysis [16], taking into account a model for the measurement uncertainties.

#### D. Maximum *a Posteriori*

Following the minimum-variance approach, it is possible to define the linear reconstructor that directly minimizes the MSE. Since wavefront reconstruction deals with zero-mean Gaussian signal and perturbation, the linear reconstructor providing the minimal MSE is also the MAP reconstructor [9,17]:

$$\mathbf{R}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{R}} \epsilon^2 = (\mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S} + \mu_0 \mathbf{W}_w)^{-1} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W}_e, \quad (22)$$

where  $\mathbf{W}_w = \mathbf{C}_w^{-1}$  and  $\mu_0 = a_e / a_w \geq 0$ . The relative-priors weight  $\mu_0$  scales as the inverse of the square of the signal-to-noise ratio (SNR). Unlike MNML and since the de-

nominator in Eq. (22) is full rank, the MAP solution is uniquely defined whatever the parameterization. The operator  $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$  generalizes the well-known Wiener filter.

#### E. Algebraic Analysis of Performances

In order to analytically compare the performances of the different approaches to recover the wavefront, we make use of the generalized singular-value decomposition (GSVD) to factorize the wavefront reconstructors. These developments are detailed in Appendix A. GSVD leads to the following three expressions:

$$\mathbf{R}_{\text{MAP}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot (\mathbf{\Sigma}^{\text{T}} \cdot \mathbf{\Sigma} + \mu_0 \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{\Sigma}^{\text{T}} \cdot \mathbf{V}_1^{\text{T}} \cdot \mathbf{L}^{-1}, \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_{\text{KL}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma}^{\dagger} \cdot \mathbf{V}_1^{\text{T}} \cdot \mathbf{L}^{-1}, \quad (24)$$

$$\mathbf{R}_{\text{MNML}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Sigma}^{\dagger} \cdot \mathbf{V}_1^{\text{T}} \cdot \mathbf{L}^{-1}, \quad (25)$$

for the MAP reconstructor, the modal MNML reconstructor in Karhunen–Loève (KL-MNML) basis, and the zonal MNML reconstructor, respectively. The origins of the various matrices are explained in Appendix A. In particular, matrices  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}_1$ , and  $\mathbf{L}$  are regular. Matrix  $\mathbf{Z}$  is defined in Eq. (A11), and  $\mathbf{\Sigma}$  is a diagonal matrix, whose diagonal elements  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$  are the generalized singular values of the measurement process [see Eq. (A3)]. Furthermore,  $\sigma_i = 0 \forall i \geq p$ , so that  $p$  is the rank of the measurement process.

We use a general expression for the three reconstructors

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{V}_1^{\text{T}} \cdot \mathbf{L}^{-1} \quad (26)$$

where matrix  $\mathbf{G}$  is the only term that depends on the particular reconstruction criterion. From Eq. (24), Eq. (23), and Eq. (25),

$$\mathbf{G}_{\text{KL}} = \mathbf{\Sigma}^{\dagger}, \quad (27)$$

$$\mathbf{G}_{\text{MAP}} = (\mathbf{\Sigma}^{\text{T}} \cdot \mathbf{\Sigma} + \mu_0 \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{\Sigma}^{\text{T}}, \quad (28)$$

$$\mathbf{G}_{\text{MNML}} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Sigma}^{\dagger}. \quad (29)$$

Note that the matrices  $\mathbf{G}$  can be seen as different approximations of the inverse of  $\mathbf{\Sigma}$  using minimum-norm or regularization to remove the degeneracies and improve the conditioning of the inverse problem.

Combining Eq. (26) with the definitions of the bias and variance terms in Eqs. (11) and (12) or Eqs. (14) and (15) gives rise to general expressions for these terms:

$$b = \text{tr}(\mathbf{W} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{\Sigma}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{\Sigma})^{\text{T}}) a_w, \quad (30)$$

$$v = \text{tr}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^{\text{T}}) a_e, \quad (31)$$

where, for an MSE averaged over the whole phase screen,

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n} \mathbf{U}^{\text{T}} \cdot \mathbf{U}, \quad (32)$$

or, for an AO specific MSE,

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n'} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}. \quad (33)$$

To obtain the factorizations in Eqs. (30)–(33), we make use of the properties that  $\mathbf{Q}$  is unitary (see Appendix A) and that  $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$  for any matrices  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  of compatible sizes. Note that, by construction, the diagonal terms  $(W_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$  of matrix  $\mathbf{W}$  are all nonnegative.

From these notations, the bias, variance, and MSE of the modal MNML reconstructor in KL-MNML basis can be decomposed (see Appendix B) into

$$b_{\text{KL}} = a_e \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{W_{i,i}}{\mu_0}, \quad (34)$$

$$v_{\text{KL}} = a_e \sum_{i=1}^{i=p} \frac{W_{i,i}}{\sigma_i^2}, \quad (35)$$

$$\epsilon_{\text{KL}}^2 = a_e \left( \sum_{i=1}^{i=p} \frac{W_{i,i}}{\sigma_i^2} + \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{W_{i,i}}{\mu_0} \right), \quad (36)$$

where  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq p}$  are the nonnull singular values of the wavefront sensing system, independent of the criterion [see Eq. (A4)]. The matrix  $\mathbf{W}$  and the singular values  $\sigma_i$  are defined to depend only on the dimensions and model of the sensing process and on the correlations of the perturbations. A change in the wavefront perturbations' mean level  $a_w$  or in the noise level  $a_e$  has no influence on these quantities.

From Eq. (34), the bias error  $b_{\text{KL}}$  is due to all the unseen modes. In contrast, Eq. (35) shows that the noise propagation is exclusively introduced over the subspace of the nonsingular modes of the measurement process, i.e., those with  $\sigma_i \neq 0$ . Equation (35) enhances the expected result that the more singular a mode, the higher the noise propagation on this reconstructed mode. Furthermore, the bias error  $b_{\text{KL}}$  is proportional to the mean variance of the wavefront phase fluctuations  $a_w$  but independent of the noise level. In contrast, the variance error  $v_{\text{KL}}$  is proportional to the noise level but independent of the turbulence strength.

Detailed formulation of the bias, variance, and MSE of the MAP reconstructor in Appendix B leads to the following simplified expressions:

$$b_{\text{MAP}} = a_e \left( \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\mu_0 W_{i,i}}{(\mu_0 + \sigma_i^2)^2} + \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{W_{i,i}}{\mu_0} \right), \quad (37)$$

$$v_{\text{MAP}} = a_e \left( \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\sigma_i^2 W_{i,i}}{(\mu_0 + \sigma_i^2)^2} \right), \quad (38)$$

$$\epsilon_{\text{MAP}}^2 = a_e \left( \sum_{i=1}^{i=p} \frac{W_{i,i}}{\mu_0 + \sigma_i^2} + \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{W_{i,i}}{\mu_0} \right). \quad (39)$$

As  $W_{i,i} \geq 0$ ,  $\forall i$  from 1 to  $n$ , comparing Eq. (34) and Eq. (37) shows that the KL-MNML estimation has a lower bias than the MAP estimation. As a matter of fact, the bias on the unseen modes stays unchanged, but MAP reconstruction adds a bias on the nonsingular modes. In

contrast, comparing Eq. (35) and Eq. (38) shows that MAP yields a lower noise propagation than KL-MNML.

Finally, the second sums in Eqs. (36) and (39) are equal, demonstrating the inability to recover invisible modes. The first sum is, however, clearly smaller in Eq. (39) than in Eq. (36). The gain in MSE produced by the MAP then comes from a well-constrained noise propagation over the sensed modes. Comparison of Eqs. (36) and (39) shows that this is all the more significant as  $\mu_0$  increases, i.e., as the SNR decreases. This confirms the advantage of using priors when the data quality degrades.

Concerning the zonal MNML reconstructor performance, the detailed expressions are also provided in Appendix B. Equation (B8) demonstrates that the bias of the zonal MNML can be written as

$$b_{\text{MNML}} = b_{\text{KL}} + b_0 \quad (40)$$

with  $b_0 \geq 0$ , which shows that the bias of zonal MNML is always larger than the bias of modal KL-MNML. This property can be generalized: *in a minimum-norm solution, the bias contribution is minimized when the parameter space is spanned by statistically independent modes.*

Equations (B2) and (B11) demonstrate that the variance of zonal MNML is smaller than that of KL-MNML in the non-AO-specific case. This means that using statistically independent parameters in the MNML approach results in worse noise propagation. However, zonal MNML does not reconstruct anything outside the aperture and, as already mentioned, provides a solution with null piston component. Then, from Eqs. (15) and (19),

$$\begin{aligned} v_{\text{MNML}} &= \text{tr}(\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S})^\dagger \cdot \mathbf{P}^T) a_e / n' \\ &= \text{tr}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S})^\dagger a_e / n', \end{aligned} \quad (41)$$

which is  $n/n'$  times the non-AO-specific variance of the error [see Eq. (12)], so the AO specific variance is always larger than the non-AO-specific one, for zonal MNML, but we cannot analytically compare AO-specific  $v_{\text{MNML}}$  with the variance of the other methods. In fact, neither is the analytical comparison of zonal MNML MSE with the MSE of the other reconstructors available.

Finally, the algebraic comparison of the three reconstructors leads to a few more conclusions. Among all possible reconstructors, KL-MNML yields the smallest bias. However, its noise propagation is not optimal and needs to be decreased with the help of a regularization strategy. In other words, the trade-off between bias and variance errors must be optimized. Truncation is widely used to decrease the number of terms in Eq. (35), hence artificially increasing the subspace of unseen modes along with the bias contribution. The zonal MNML method constitutes an alternative regularization strategy. It provides larger bias too, but the noise propagation comparison had not been carried out analytically. Eventually, MAP method provides the optimal trade-off, thanks to the introduction of priors on the second-order statistics of the wavefront.

Obviously, our analysis is not specific to wavefront reconstruction; it is general to any inverse problems with a linear model, Gaussian statistics for the errors and parameters.

### 3. APPLICATION TO LARGE AO SYSTEMS

The algebraic analysis in Section 2 provides a suitable basis to compare performance of several wavefront reconstruction methods. As no analytical comparisons are drawn with respect to the MSE of the zonal MNML method, such a comparison is investigated in this section with use of simulations. Furthermore, while the qualitative comparison of the MSE for KL-MNML and MAP is enhanced in Section 2, we also investigate in this section the quantitative gain of using a MAP method on an AO system with a large number of degrees of freedom.

We consider the reconstruction step of a single conjugate AO (SCAO) system with a Shack–Hartmann wavefront sensor (WFS) simulated by Fried’s model [3] and observing a natural guide star (NGS). Numerical simulations are involved so as to quantitatively compare zonal MNML, modal MNML, and MAP reconstruction performance. The reconstruction algorithms are based on the code of the FrIM [9].

#### A. Wavefront and Noise Statistics

For a NGS observed by a Shack–Hartmann sensor, the noise is uniform and uncorrelated to a good approximation. Otherwise, it is possible to perform a change of variables for the data to obtain uncorrelated pseudodata with uniform variance  $\sigma_e^2$ . The underlying idea is to separate what depends on the brightness of the guide star, which directly affects the mean noise level  $a_e$ , from what depends on the sensing device such as noise correlation or aperture masking. In any cases and for now, we consider that we work with data such that  $\mathbf{C}_e = \mathbf{I}$  and  $\sqrt{a_e} = \sigma_e$ , the uniform standard deviation of the noise expressed in radians per subaperture size  $d$ .

The turbulent wavefront  $\mathbf{w}$  is simulated with use of  $N \times N$  bilinear interpolation functions, with a sampling step  $d$  equal to the subaperture size. This means that the true turbulence is low-pass filtered, which leads to two remarks. On the one hand, the MSE is assessed with respect to this filtered wavefront  $\mathbf{w}$ , so the fitting error [18] of the SCAO system associated with these simulations does not appear in this study. This enhances our choice to investigate the reconstruction contribution to the correction error, i.e., the MSE, here. On the other hand, no aliasing appears in the data with such smoothed representation. Thus noise is really uncorrelated with the turbulent wavefront. With a real Shack–Hartmann WFS, aliasing exists but has negligible effects until the global correction error is strongly dominated by the fitting error.

In Fried’s model of the wavefront sensing device [3,9], the matrix  $\mathbf{S}$  simply computes the local derivative of the phase by finite difference between corners of the fully illuminated subapertures. However, note that if the data are transformed by a change of variables, it is also necessary to modify the WFS model matrix  $\mathbf{S}$ . Fried’s model  $\mathbf{S}$  is used for both simulation of the measurements  $\mathbf{d}$  according to Eq. (3), and definition of the reconstructors.

The wavefront covariance  $\mathbf{C}_w$  also needs to be modeled. From Kolmogorov’s theory of the atmospheric turbulence in the inertial domain, wavefront phase distortions in the pupil plane can be characterized by a stationary isotropic stochastic process with structure function:

$$D_w(r) = \langle [w(\mathbf{r}') - w(\mathbf{r}' + \mathbf{r})]^2 \rangle_{\mathbf{r}'} = 6.88 \times \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (42)$$

where  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{r}'$  are positions in the pupil plane,  $r = |\mathbf{r}| \geq 0$  is the length of  $\mathbf{r}$ , and  $r_0$  is Fried’s parameter. Outside the inertial domain—that is, for large  $r$ —saturation of the structure function cannot be neglected [19]. In the case of large telescopes, a better approximation than Kolmogorov’s model is provided by von Kármán’s model, which accounts for an outer scale  $L_0$  of the spatial coherence of the turbulence [20]. In von Kármán’s model, the structure function and the covariance of the wavefront are written

$$D_w(r) = 2\sigma_w^2 - 2C_w(r), \quad (43)$$

$$C_w(r) = \alpha \left( \frac{L_0}{r_0} \right)^{5/3} \left( \frac{2\pi r}{L_0} \right)^{5/6} K_{5/6} \left( \frac{2\pi r}{L_0} \right), \quad (44)$$

where  $\sigma_w^2 = C_w(0)$  is the local phase variance that has a finite value,  $K_{5/6}$  is the modified Bessel function of third kind and of order 5/6, and

$$\alpha = [12/5\Gamma(6/5)]^{5/6} \Gamma(11/6) / \pi^{8/3} \simeq 0.0858. \quad (45)$$

In their FrIM method, improving over the midpoint algorithm proposed by Lane *et al.* [21], Thiébaud and Tallon [9] have shown that it is possible to approximate the Karhunen–Loève change of variables for any stationary isotropic random process thanks to a fractal operator that can be applied in  $\mathcal{O}(n)$  operations. In practice, we use their method to build the operator  $\mathbf{K}$  such that  $\mathbf{C}_w \simeq \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T$  as in Eq. (6). The only requirement is to know the covariance law  $C_w(r)$  or, by Eq. (43), the structure function  $D_w(r)$  and the local variance  $\sigma_w^2$  that is supposed to be uniform. For von Kármán’s model of turbulence, the covariance function is everywhere finite, so that the fractal operator for von Kármán’s can be built directly. This is not the case for Kolmogorov’s model, which does not yield a finite variance value. In the original FrIM method [9], only Kolmogorov’s model was considered, and the authors had to introduce an arbitrary value for  $\sigma_w^2$  to solve for this issue. They chose this value to be equal to half the structure function value at the largest scale  $L$  of the reconstruction domain:  $\sigma_w^2 = \frac{1}{2} C_w(L)$ . This choice can be interpreted as uncorrelating scales larger than the reconstruction domain, involving as well saturation of the structure function. Since the aperture diameter  $D$  is smaller than the side of the reconstruction domain, then the saturation scale is  $L \geq \sqrt{2}D$ , which yields an average variance:  $\sigma_w^2 \geq 3.44(\sqrt{2}D/r_0)^{5/3}$ .

Figure 1 shows different structure functions for typical seeing conditions at paranal [22] which we use in all our simulations:  $r_0 = 0.159$  m and  $L_0 = 25$  m. It appears that the structure function used by Thiébaud and Tallon yields stronger correlations at large scales than a von Kármán model and that the correlations increase with the diameter of the telescope. On the other hand, their approximation has the advantage of following the “five-thirds” theoretical law of Kolmogorov inside the inertial domain.

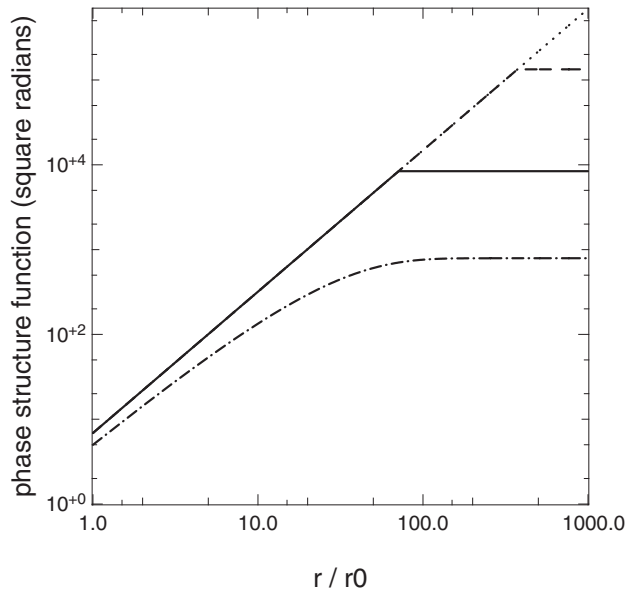


Fig. 1. Models of wavefront structure functions. Dotted line, Kolmogorov theoretical five-thirds law. Dashed line, saturated Kolmogorov model with minimal saturation set for a 42-m telescope. Solid line, saturated Kolmogorov model with minimal saturation set for an 8-m telescope. Dashed-dotted curve, von Kármán structure function for  $r_0=0.159$  m and  $L_0=25$  m.

In the remainder of this paper, we consider both saturated Kolmogorov and von Kármán models for  $C_w(r)$ , which we normalize by factorizing out the turbulence strength [23]:

$$C_w(r) = (D/r_0)^{5/3} \underline{C}_w(r), \quad (46)$$

where the normalized covariances for von Kármán and saturated Kolmogorov models can be respectively written:

$$\underline{C}_w(r) = 0.0858 \times \left(\frac{L_0}{D}\right)^{5/3} \left(\frac{2\pi r}{L_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{2\pi r}{L_0}\right), \quad (47)$$

$$\underline{C}_w(r) = 3.44 \times \left[ \left(\frac{\sqrt{2}(N-1)d}{D}\right)^{5/3} - \left(\frac{r}{D}\right)^{5/3} \right], \quad (48)$$

for an  $N \times N$  wavefront sampled with a step  $d$ . The turbulence strength can then be factorized out of the fractal operator  $\mathbf{K}$  to write the Karhunen–Loève change of variables as

$$\mathbf{w} = (D/r_0)^{5/6} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (49)$$

with  $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . The covariance of the wavefront is then written as in Eq. (6) but with  $a_w = (D/r_0)^{5/3} \approx \sigma_w^2$ , the variance of the piston removed turbulent wavefront averaged over a circular aperture of diameter  $D$  for the Kolmogorov theory [14,23,24]. We extend the use of this factorization to the von Kármán model, as it still characterizes the turbulence strength for a given ratio  $L_0/D$ . Note that although  $\mathbf{K}$  does not depend on the turbulence strength, it is, however, a function of the number of wavefront samples  $n$  and the ratios  $L_0/D$  or  $L/D$  whether or not the outer scale and the saturation scale of the turbulence are defined.

In the following simulations, turbulent wavefronts to be reconstructed are generated by applying Eq. (49) to a vector  $\mathbf{u}$  of independent Gaussian random values of variance equal to unity.

Dealing with Gaussian statistics, the MSE in Eq. (8) can be normalized by the noise variance  $a_e = \sigma_e^2$ :

$$\epsilon^2/\sigma_e^2 = \gamma + \eta/\mu_0, \quad (50)$$

where the noise propagation coefficient  $\gamma$  is the ratio of the variance term in the MSE to the noise variance,

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \nu/\sigma_e^2, \quad (51)$$

and where

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} (D/r_0)^{-5/3} b = \mu_0 b/\sigma_e^2 \quad (52)$$

characterizes the fraction of variance of the turbulence over the aperture contained in the bias term of the MSE.

## B. MSE for the MNML Reconstructors

Performance properties of the zonal MNML reconstructor have already been studied [3,25,26] for Fried's geometry. Here we extend the study to large AO systems and use it as an introduction toward the achievable benefits of the fractal change of variable.

From Eqs. (51) and (41), the noise propagation coefficient

$$\gamma_{\text{MNML}} = \frac{1}{n'} \text{tr}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S})^\dagger \quad (53)$$

depends only on the model of the wavefront sensing device, on the shape of the pupil, and on the number  $n'$  of wavefront samples inside the aperture.

Due to the definition of the Moore–Penrose pseudo-inverse,  $(\mathbf{I} - (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S})^\dagger \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S})$  is a projection onto the null space of  $\mathbf{S}$ . Then the bias error in Eq. (14) for the zonal MNML method reduces to the variance of unseen modes of the WFS above the aperture, the removed piston excepted. In the case of Fried's model, the only concerned mode is a chessboard mode over the pupil, so that  $\eta_{\text{MNML}}$  is fixed by the AO system dimensions and the number of subapertures.

Nevertheless, the relative weight of the two contributions in Eq. (50) for the zonal MNML reconstruction depends on the SNR values, through  $\mu_0$ . This is why the performance is studied in the following with the normalized MSE defined in Eq. (50) and with respect to  $\mu_0$ , to the system dimensions  $n$ , and to the aperture shape.

### 1. Square Aperture

Fried found [3] that for an  $N \times N$  square aperture

$$\gamma_{\text{MNML}} \approx 0.6558 + 0.16028 \ln n, \quad (54)$$

where  $n=N^2$  is the number of wavefront samples. The small black squares on Fig. 2 show the noise propagation as a function of  $n$  and confirm this logarithmic dependency for our simulated data on large AO systems [26]. On small systems—that is, up to  $65 \times 65$ —our simulated reconstructions have been checked to provide a mean value equal to the numerical evaluation of Eq. (53), with



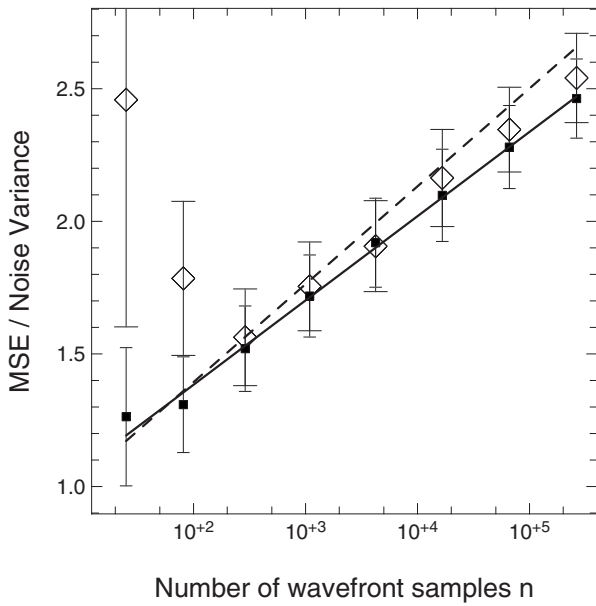


Fig. 2. Noise propagation on a square aperture for zonal MNML. Small black squares, noise propagation coefficient  $\gamma_{\text{MNML}}$  averaged over 100 simulations of zonal MNML reconstruction of a null wavefront (dispersion given by error bars); solid line, law fitted on these values. Dashed line, Fried's law for  $\gamma_{\text{MNML}}$  over a square aperture. Large white diamonds, ratio  $\epsilon_{\text{MNML}}^2/\sigma_e^2$  estimated from averaging 50 simulations of zonal MNML reconstructions on Kolmogorov turbulence (dispersion given by corresponding error bars). The conditions of the simulations are  $r_0 = 0.5d$  (where  $d$  is the sampling step size) and  $\sigma_e = \sqrt{0.1}$  rad./sub-aperture. The number of wavefront samples are  $n = (2^q + 1)^2 = 5^2, 9^2, 17^2, 33^2, 65^2, 129^2, 257^2$ , and  $513^2$ .

an accuracy close to a few percent. However Fried's law (dashed line) does not perfectly fit our simulations. The best fit of our simulations is given by the experimental law (solid line):

$$\gamma_{\text{MNML}} \approx 0.748 + 0.138 \ln n. \quad (55)$$

In addition, considering the MSE normalized by the noise variance, in Fig. 2 we observe that the contribution of the bias error becomes more and more negligible as the size of the aperture is increased. This means that the logarithmic increase of the noise propagation coefficient dominates the MSE evolution for large  $n$ . As  $\gamma_{\text{MNML}}$  constitutes a fixed threshold for the value of  $\epsilon_{\text{MNML}}^2/\sigma_e^2$ , independent of  $\mu_0$  level, Fried's law is kept as a reference curve in the remainder of this paper.

## 2. Circular Aperture

Noll [25] provided an alternative formula for a circular aperture with a total number of wavefront samples  $n'$ :

$$\gamma_{\text{MNML}} \approx 0.0136 + 0.1592 \ln n'. \quad (56)$$

Compared to a square aperture, the slope is similar but the offset is very different. Noll explains [25] this discrepancy admitting that his law may underestimate some low-order aberrations but argues that the logarithmic dependency is still valid in the case of a circular aperture. By fitting the results of our simulations of zonal MNML reconstructions for a circular aperture (see Fig. 3), we obtain the following law:

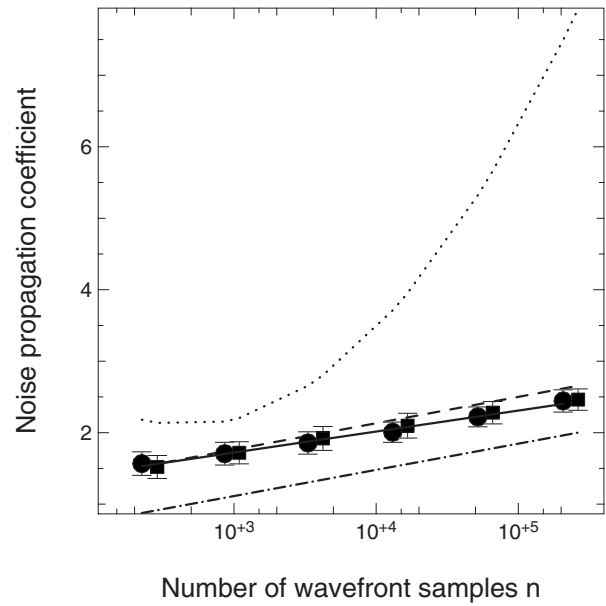


Fig. 3. Comparison of  $\gamma_{\text{MNML}}$  on square and circular apertures. Dashed line, Fried's law for square aperture. Dashed–dotted line, Noll's law for circular aperture. Dotted curve, Poyneer *et al.* [27] law for circular aperture with FTR,  $\gamma_{\text{FTR}}$  on Fried's geometry. Other symbols are average results of 100 simulations of zonal MNML reconstructions on null signal. Squares, for a square aperture. Circles, for a circular aperture. Number of subapertures across the pupil diameter: 16, 32, 64, 128, 256, and 512. Other simulation parameters are the same as for Fig. 2.

$$\gamma_{\text{MNML}} \approx 0.842 + 0.127 \ln n'. \quad (57)$$

Again the small-system results have been checked to be consistent with numerical evaluation of the noise propagation term. On the one hand, our simulations tend to confirm what Noll expected, i.e., an underestimation of his constant but still a logarithmic increase with the system dimension. On the other hand, the behavior of the noise propagation coefficient for zonal MNML method is quite similar for square and circle apertures.

Another ML method has been proposed by Poyneer *et al.* [27]: the Fourier transform reconstructor (FTR). As it involves a very low computational burden, it constitutes an alternative to the matrix-vector multiplication (MVM) method when solving the zonal ML problem for large systems. The dotted curve in Fig. 3 plots the law given by Poyneer *et al.* for the noise propagation of the first version of the FTR method [27] in the case of circular apertures with Fried's geometry:

$$\gamma_{\text{FTR}} \approx 0.1456(\ln n')^2 - 1.7922 \ln n' + 7.6175. \quad (58)$$

The FTR algorithm with Fried's geometry involves a regularization strategy that produces a very large and inadequate local waffle mode [27]. This strategy, which is based on the geometrical model of the WFS and not on the signal statistics, badly constrains the unseen modes so that the performance is in the end worse than with the zonal minimum-norm regularization. It is important, however, to mention that significantly better performance is obtained with the FTR on a modified Hudgin's geometry for the model of a Shack–Hartmann, which still makes the FTR algorithm a very competitive method for

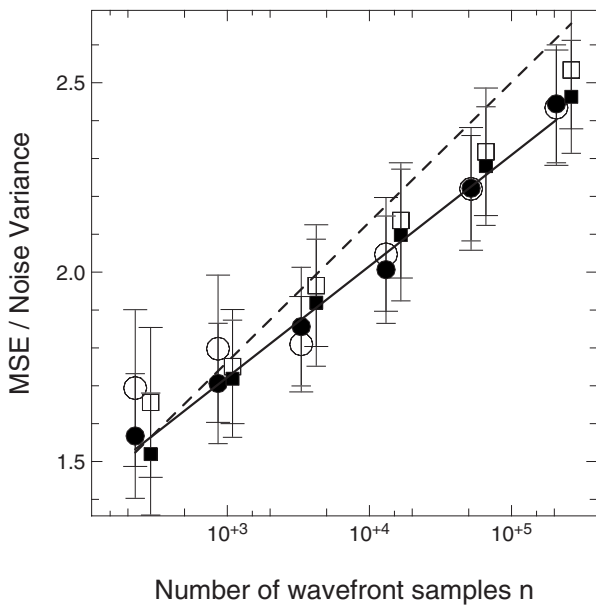


Fig. 4. Comparison of noise propagation coefficient  $\gamma_{\text{MNML}}$  and MSE normalized by noise variance for zonal MNML reconstructions on square and circular apertures. Dashed line, Fried's law on square apertures. Solid line, our experimental law on circular apertures; see Eq. (57). White symbols,  $\epsilon_{\text{MNML}}^2/\sigma_e^2$  from our simulations. Black symbols, noise propagation coefficient  $\gamma_{\text{MNML}}$  from our simulations. Squares, square aperture. Circles, circular aperture. System dimensions are the same as in Fig. 3. Other simulation parameters are the same as for Fig. 2.

wavefront reconstruction on large systems [28,29].

To evaluate the effect of the aperture shape on the bias term of the AO-specific MSE, we simulated 100 zonal MNML reconstructions for circular apertures. Results are displayed by circle symbols on Fig. 4 and show that, as for the noise propagation coefficient, the aperture shape has little effect on the global performance of the method.

### 3. Zonal and Modal MNML

According to the conclusions of Subsection 2.E, it is possible to minimize the bias error of the MNML reconstruction by using a decomposition on statistically independent modes. However, an algebraic comparison of the AO-specific noise propagation coefficients  $\gamma_{\text{MNML}}$  and  $\gamma_{\text{KL}}$  was not achieved. Figure 5 provides this comparison by means of simulations. The AO-specific normalized MSEs are plotted for the two MNML approaches.

For system sizes smaller than 128 subapertures across the diameter, the two MNML approaches exhibit similar performance. Nevertheless, for larger systems, the AO-specific normalized MSE is lower for KL-MNML reconstruction. It has also been observed in unpublished simulations that KL-MNML reconstructors performs better whatever the turbulence model, Kolmogorov or von Kármán, used to build  $\mathbf{K}$ .

### C. MAP Reconstruction Benefits

MAP reconstruction quality is assessed in the following relative to the best of the two MNML approaches, that is, the KL-MNML method. Moreover, in Section 2 we have already analytically proved that MAP performs better than KL-MNML.

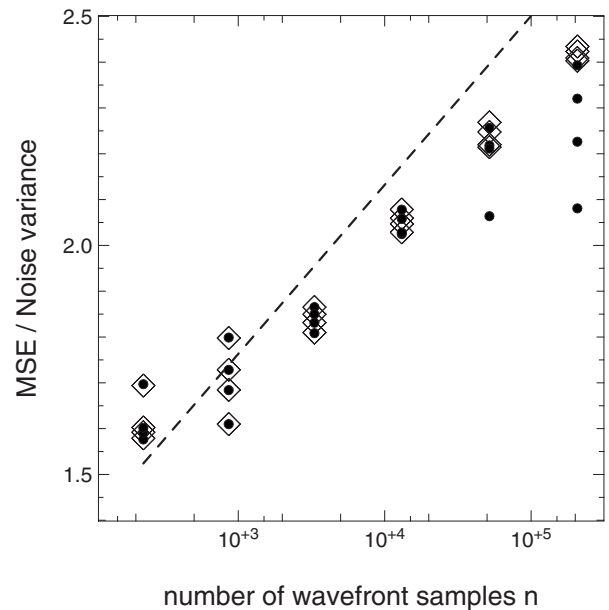


Fig. 5. Comparison of zonal and modal MSE normalized by the noise variance. Dashed line, Fried's law for  $\gamma_{\text{MNML}}$ . Large white symbols,  $\epsilon_{\text{MNML}}^2/\sigma_e^2$ , i.e., reconstruction by zonal MNML. Small black symbols,  $\epsilon_{\text{KL}}^2/\sigma_e^2$ , i.e., reconstruction by modal MNML. Symbols correspond to the average of 50 reconstructions of Kolmogorov turbulence over circular apertures. Noise level was set to  $\sigma_e = \sqrt{0.1}$  rad/subaperture. System dimensions are the same as in Fig. 3. For every system size, the turbulence conditions are:  $r_0 = 0.1d, 0.5d, d, \text{ and } 2d$ .

Figures 6 and 7 quantify the gain in using the FrIM MAP reconstructor, respectively, for an 8-m telescope and a 42-m telescope with, for each case, several system dimensions. The fractal operator  $\mathbf{K}$  defines a change of variable on a  $(2^q + 1) \times (2^q + 1)$  domain, with  $q$  an integer. So, if the number of subapertures across the diameter is of this form  $2^q$ , the telescope pupil is inscribed in the reconstruction domain. The particular cases of  $40 \times 40$  and  $84 \times 84$  do not correspond to such a configuration, but they respectively represent an extreme AO-like configuration for the Very Large Telescope (Chile) [10] and a SCAO case expected for the European (E-ELT). We added these two cases to confirm that the noninscription of the aperture in the square reconstruction domain does not degrade FrIM performance.

On the one hand, for small systems, some simulated cases have such low  $\mu_0$  value that the bias error contributes significantly to the MSE for FrIM MAP as well as for the KL-MNML reconstruction. On the other hand, the simulated reconstructions confirm that MAP produces lower MSE than the KL-MNML method, according to Eqs. (36) and (39). Figure 7 even shows that while zonal MNML MSE is well known to increase as  $\ln(n')$ , FrIM MAP MSE is almost constant when  $n'$  increases for a fixed SNR.

The same data are gathered on Fig. 8, with enhancement of the gain factor between the two methods, depending on the parameter  $\mu_0$  and hence on the SNR. Each curve represents a system dimension, solid curves for the 42-m telescope case and dashed-dotted curves for the 8-m one. This time, markers evolve with  $\mu_0$  values. Of course,

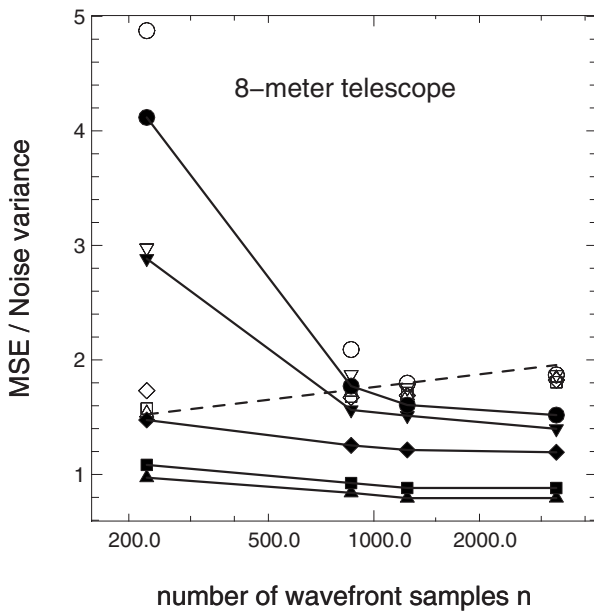


Fig. 6. Comparison of KL-MNML and MAP performance on an 8-meter telescope. Dashed line, Fried's law for  $\gamma_{\text{MNML}}$  on square apertures. White symbols,  $\epsilon_{\text{KL}}^2/\sigma_e^2$ , i.e., reconstruction by KL-MNML. Black symbols,  $\epsilon_{\text{MAP}}^2/\sigma_e^2$ , i.e., reconstruction by FrIM MAP. Markers stand for average results over 200 simulations of von Kármán turbulent wavefronts on circular apertures. Iso- $\mu_0$  are linked with solid lines.  $\mu_0$  varies along with noise variance values  $\sigma_e^2=5 \times 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ , 1, and 2  $\text{rad}^2$  per subaperture.  $L_0=24$  m,  $r_0=25$  cm,  $D/d=16, 32, 40$ , and 64.

for a given system size, the major gain occurs when  $\mu_0$  increases, that is, when the SNR decreases. This means that the priors introduced by the Bayesian method will have a special influence, improving performance.

On the one hand, using a  $40 \times 40$  system on an 8-m telescope means low noise, and high Strehl ratio  $\text{SR} = \exp(-\epsilon^2)$  is sought. For an  $r_0$  value of 16 cm (at 500 nm)

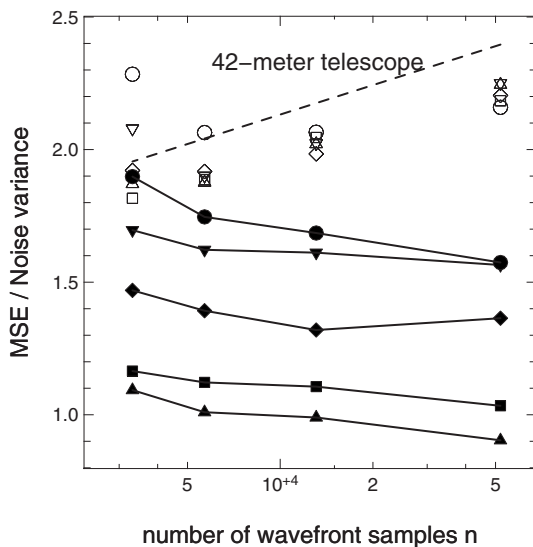


Fig. 7. Comparison of KL-MNML and MAP performance on a 42-meter telescope. Legend is the same as for Fig. 6. Changing parameters values are  $L_0=21$  m,  $r_0=32$  cm,  $D/d=64, 84, 128$ , and 256.

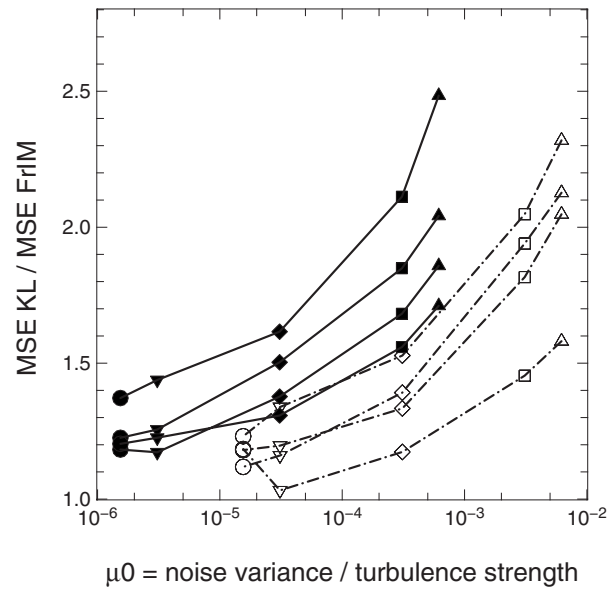


Fig. 8. Ratio between MSE obtained by the FrIM MAP method and MSE obtained by KL-MNML reconstruction for the same data as plotted in Figs. 6 and 7. White symbols, 8-m telescope. The same system dimensions are linked with dashed-dotted lines. Black symbols, 42-m telescope. Iso- $n$  are linked with curves.

and a noise variance  $\sigma_e^2=0.014$   $\text{rad}^2/\text{subaperture}$  for an AO wavelength of 700 nm, then  $\mu_0=3.1 \times 10^{-5}$ , which is represented in Fig. 8. The MSE achieved by FrIM is reduced by a factor of 1.2 with respect to the MSE produced by the KL-MNML method. This implies a reduction of the rms wavefront estimation error from 16.5 to 15 nm. In such application, the gain is not so relevant. On the other hand, let us consider the case of a 42-m telescope with 84 subapertures across the diameter, with the same  $r_0$  and a noise variance  $\sigma_e^2=1.8$   $\text{rad}^2/\text{subaperture}$  for an AO wavelength of 700 nm. This corresponds to one point of the curves in Fig. 8, for which  $\epsilon_{\text{KL}}^2/\epsilon_{\text{FrIM}}^2=1.7$ . Such conditions correspond to a SNR of 3.6 per subaperture. The MNML method would produce a total MSE of 1.9  $\text{rad}^2$ , while FrIM can reduce it to 1.13  $\text{rad}^2$ . This allows the associated Strehl ratio  $\text{SR} = \exp(-\epsilon^2)$  to increase from 17% to 35% when imaging at 1  $\mu\text{m}$ .

Finally, given the AO system dimensions and the aperture shape, Figs. 6 and 7 provide a mean to predict optimal performance of MAP reconstruction, which is useful in controlling the error budget of the AO system.

#### 4. DISCUSSION

The general algebraic analysis of the inverse problem of turbulent wavefront reconstruction yields a quantitative comparison of performance between zonal and modal minimum-norm maximum likelihood and maximum *a posteriori* reconstructors. The modal description, for which the parameters of the system are statistically independent, allows minimization of the bias error. Nevertheless, only the maximum *a posteriori* solution achieves the optimal error trade-off between bias and noise propagation.

The results of both the algebraic analysis and the simulations apply for several pupil shapes (square and circular) and several turbulence models (Kolmogorov and von Kármán).

While Fried's law described the noise propagation evolution with the system size for zonal minimum-norm maximum likelihood reconstruction on small systems, we provide here an extension of these experimental laws to a larger range of system dimensions. Simulations also demonstrate that the minimum-norm regularization performs better with the Karhunen–Loève modal description than with the zonal one, even though maximum *a posteriori* reconstruction with FrIM can divide the MSE by two compared with the performance of the modal minimum norm approach. Moreover, the fractal iterative method had already been demonstrated by Thiébaud and Tallon [9] to be a fast wavefront reconstruction method, so that the maximum *a posteriori* optimal reconstructor can effectively be of benefit to large AO systems.

## APPENDIX A: FACTORIZATION BY GENERALIZED SINGULAR-VALUE DECOMPOSITION

In order to compare MNML and MAP wavefront reconstruction, we need unified expressions of their reconstructors and of the resulting MSE's. In this Appendix we derive these expressions by means of the generalized singular-value decomposition (GSVD) of the square roots of the matrices  $\mathbf{A}=\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S}$  and  $\mathbf{W}_w$  that appear in the denominator of  $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$  given by Eq. (22).

By Cholesky decomposition of the noise covariance  $\mathbf{C}_e = \mathbf{W}_e^{-1}$ , we derive

$$\mathbf{W}_e = \mathbf{L}^{-T} \cdot \mathbf{L}^{-1} \quad (\text{A1})$$

where  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  is a nonsingular matrix. Then the matrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad (\text{A2})$$

is the square root of  $\mathbf{A}$  as  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M} = \mathbf{A}$ . Besides, since (see Section 2)  $\mathbf{C}_w = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T$ ,  $\mathbf{K}^{-1}$  is the square root of  $\mathbf{W}_w = \mathbf{C}_w^{-1}$ .

The objective is now to use GSVD [30] to simultaneously diagonalize  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  and  $\mathbf{K}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Since  $\mathbf{K}^{-1}$  is regular, we actually tackle a particular case of GSVD, which is detailed in what follows.

We first proceed to a singular-value decomposition (SVD [30,31]) of the rectangular matrix  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_2^T, \quad (\text{A3})$$

where  $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  and  $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  are two unitary matrices, i.e.,  $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1^T = \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_m$  and  $\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2^T = \mathbf{V}_2^T \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_n$ . The considered SVD algorithm [30] lets us write the rectangular matrix  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  as

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{with } \mathbf{\Sigma}_{11} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p), \quad (\text{A4})$$

where the singular values are such that  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p > 0$  and where  $p \leq \min(m, n)$  is the rank of  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{K}$ , which is also that of  $\mathbf{M}$ .

The next step consists of the QR decomposition [30,31] of the regular matrix  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_2$ :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}, \quad (\text{A5})$$

where  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is unitary and  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is an upper-triangular regular matrix. Using block notation,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{A6})$$

where  $\mathbf{U}_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  and  $\mathbf{U}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  are regular upper-triangular matrices and  $\mathbf{U}_{12} \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$ . One may notice that the  $\mathbf{U}_{22}$  and  $\mathbf{U}_{12}$  blocks do not exist when  $\mathbf{M}$  is full rank, i.e., for an invertible measurement operator  $\mathbf{S}$ . Furthermore,  $\mathbf{U}_{12} = \mathbf{0}$  only if orthogonality between  $\ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{K})$  and  $\ker^\perp(\mathbf{M} \cdot \mathbf{K})$  is maintained after application of the  $\mathbf{K}$  operator to these subspaces. In such a case, the minimum-norm solution in the modal space is also the minimum-norm solution in the zonal one.

Finally, we can express the GSVD of  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}^{-1}$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (\text{A7})$$

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (\text{A8})$$

If  $\mathbf{K}$  is unitary, that is, if  $\mathbf{W}_w = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T = \mathbf{I}$ , then the matrix  $\mathbf{U}$  is also unitary (in fact,  $\mathbf{U}$  becomes useless in the decomposition) and Eqs. (A7) and (A8) will be plain (not generalized) SVDs.

Using the GSVD of  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}^{-1}$ , we can factorize the numerator and the terms in the denominator of the MAP reconstructor in Eq. (22),

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{L}^{-1},$$

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\mathbf{W}_w = \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T,$$

to rewrite  $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$  as in Eq. (23).

To simplify the MNML reconstructor  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  in Eq. (21), we use the GSVD of  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}^{-1}$  to compute

$$\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_2^T,$$

$$(\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K})^\dagger = \mathbf{V}_2 \cdot (\mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{\Sigma})^\dagger \cdot \mathbf{V}_2^T, \quad (\text{A9})$$

and we note that for the particular matrix  $\mathbf{\Sigma}$  defined in Eq. (A4), we have

$$(\mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{\Sigma})^\dagger \cdot \mathbf{\Sigma}^T = \mathbf{\Sigma}^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{A10})$$

to finally obtain the expression of  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  given in Eq. (24).

Using GSVD to rewrite  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  is not as straightforward as for the other reconstructors. We first rewrite the normal equations [see Eq. (17)], which must be obeyed by any ML solution, as

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{w} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{d}.$$

Since  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{U}$  are invertible, we introduce the invertible change of variables  $\mathbf{w} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{y}$  and simplify the normal equations:



$$\Sigma^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{y} = \Sigma^T \cdot \mathbf{z} \quad \text{with } \mathbf{z} = \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{d}.$$

Using the same block decomposition as for  $\mathbf{U}$  in Eq. (A6) and  $\Sigma$  in Eq. (62),  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T)^T$  and  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T)^T$ , the normal equations are equivalent to

$$\mathbf{y}_1 = \Sigma_{11}^{-1} \cdot \mathbf{z}_1.$$

As  $\mathbf{Q}$  is unitary, the Euclidean quadratic norm of  $\mathbf{w}$  expands as

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}\|_2^2 = \|\mathbf{U}_{11} \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{U}_{12} \cdot \mathbf{y}_2\|_2^2 + \|\mathbf{U}_{22} \cdot \mathbf{y}_2\|_2^2,$$

which, as  $\mathbf{y}_1$  is uniquely set by the normal equations, must be minimized with respect to  $\mathbf{y}_2$  to obtain the MNML solution. Taking the derivatives of  $\|\mathbf{w}\|_2^2$  with respect to  $\mathbf{y}_2$ , this is achieved by solving

$$(\mathbf{U}_{12}^T \cdot \mathbf{U}_{12} + \mathbf{U}_{22}^T \cdot \mathbf{U}_{22}) \cdot \mathbf{y}_2 = -\mathbf{U}_{12}^T \cdot \mathbf{U}_{11} \cdot \mathbf{y}_1.$$

In the left-hand-side matrix above,  $\mathbf{U}_{12}^T \cdot \mathbf{U}_{12}$  is at least positive semidefinite and, as  $\mathbf{U}_{22}$  is invertible,  $\mathbf{U}_{22}^T \cdot \mathbf{U}_{22}$  is positive definite. The left-hand-side matrix is therefore positive definite and invertible, which means that  $\mathbf{y}_2$  is uniquely defined. Hence

$$\mathbf{y}_{\text{MNML}} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \Sigma^\dagger \cdot \mathbf{z} \quad \text{with } \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A11})$$

where  $\mathbf{I}_{11}$  is the  $p \times p$  identity matrix, and:

$$\mathbf{Z}_{21} = -(\mathbf{U}_{12}^T \cdot \mathbf{U}_{12} + \mathbf{U}_{22}^T \cdot \mathbf{U}_{22})^{-1} \cdot \mathbf{U}_{12}^T \cdot \mathbf{U}_{11}. \quad (\text{A12})$$

Note that  $\mathbf{Z}_{12}$  and  $\mathbf{Z}_{22}$  are irrelevant to the computation of  $\mathbf{y}_{\text{MNML}}$  and can be any matrices. Without loss of generality, one can take  $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{Z}_{22} = \mathbf{0}$ . Finally, the MNML wavefront can be written

$$\mathbf{w}_{\text{MNML}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z} \cdot \Sigma^\dagger \cdot \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{d},$$

and the corresponding reconstructor  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  is Eq. (25).

## APPENDIX B: BIAS, VARIANCE, AND MSE EXPRESSIONS

A general formulation is found to describe the three reconstructors with common notation, according to Eqs. (26)–(29). From this notation, one can insert the various  $\mathbf{G}$  forms into Eqs. (30) and (31) to obtain the bias, variance, and MSE associated with each reconstructor. Such expressions are derived in this section.

Taking  $\mathbf{G} = \Sigma^\dagger$  yields the bias, variance and MSE of the modal MNML reconstructor in Karhunen–Loève basis:

$$b_{\text{KL}} = a_w \text{tr}(\mathbf{W} \cdot (\mathbf{I} - \Sigma^\dagger \cdot \Sigma) \cdot (\mathbf{I} - \Sigma^\dagger \cdot \Sigma)^T) = a_w \text{tr}(\mathbf{W}_{22}), \quad (\text{B1})$$

$$v_{\text{KL}} = a_e \text{tr}(\mathbf{W} \cdot \Sigma^\dagger \cdot (\Sigma^\dagger)^T) = a_e \text{tr}(\mathbf{W}_{11} \cdot \Sigma_{11}^{-2}), \quad (\text{B2})$$

$$\epsilon_{\text{KL}}^2 = a_e \text{tr}(\mathbf{W}_{11} \cdot \Sigma_{11}^{-2}) + a_w \text{tr}(\mathbf{W}_{22}), \quad (\text{B3})$$

where we make use of the block decomposition of  $\mathbf{W}$  over the same subspaces as  $\Sigma$ :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{B4})$$

with  $\mathbf{W}_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  and  $\mathbf{W}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ .

Taking  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\text{MAP}}$  from Eq. (28) and noticing that

$$\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\text{MAP}} \cdot \Sigma = \mu_0 (\Sigma^T \cdot \Sigma + \mu_0 \mathbf{I})^{-1},$$

yields the bias, variance, and MSE of the MAP reconstructor:

$$\begin{aligned} b_{\text{MAP}} &= \mu_0 a_e \text{tr}(\mathbf{W} \cdot (\Sigma^T \cdot \Sigma + \mu_0 \mathbf{I})^{-2}) \\ &= \mu_0 a_e \text{tr}(\mathbf{W}_{11} \cdot (\Sigma_{11}^2 + \mu_0 \mathbf{I}_{11})^{-2}) + a_w \text{tr}(\mathbf{W}_{22}), \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

$$\begin{aligned} v_{\text{MAP}} &= a_e \text{tr}(\mathbf{W} \cdot \Sigma^T \cdot \Sigma \cdot (\Sigma^T \cdot \Sigma + \mu_0 \mathbf{I})^{-2}) \\ &= a_e \text{tr}(\mathbf{W}_{11} \cdot \Sigma_{11}^2 \cdot (\Sigma_{11}^2 + \mu_0 \mathbf{I}_{11})^{-2}), \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

$$\epsilon_{\text{MAP}}^2 = a_e \text{tr}(\mathbf{W} \cdot (\Sigma^T \cdot \Sigma + \mu_0 \mathbf{I})^{-1}). \quad (\text{B7})$$

Quantifying the MSE of the MNML reconstructor in the zonal description requires some more algebra. We first note that

$$\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\text{MNML}} \cdot \Sigma = \mathbf{I} - \mathbf{Z} \cdot \Sigma^\dagger \cdot \Sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{I}_{22} \end{pmatrix},$$

hence

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\text{MNML}} \cdot \Sigma) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\text{MNML}} \cdot \Sigma)^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{22} + \mathbf{Z}_{21} \cdot \mathbf{Z}_{21}^T \end{pmatrix},$$

which lets us write the bias of the zonal MNML as

$$b_{\text{MNML}} = \underbrace{a_w \text{tr}(\mathbf{W}_{22})}_{b_{\text{KL}}} + \underbrace{a_w \text{tr}(\mathbf{W}_{22} \cdot \mathbf{Z}_{21} \cdot \mathbf{Z}_{21}^T)}_{b_{0 \neq 0}}. \quad (\text{B8})$$

By the Sherman–Morrison–Woodbury identity [15] and since  $\mathbf{U}_{22}$  is invertible, the matrix  $\mathbf{Z}_{21}$  in Eq. (A12) can be rewritten as

$$\mathbf{Z}_{21} = -\mathbf{U}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{U}_{22}^T \cdot \mathbf{U}_{12}^T \cdot (\mathbf{I}_{11} + \mathbf{B}_{11})^{-1} \cdot \mathbf{U}_{11}, \quad (\text{B9})$$

where  $\mathbf{I}_{11}$  is the identity over  $\mathbb{R}^p$  and

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{U}_{12} \cdot \mathbf{U}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{U}_{22}^T \cdot \mathbf{U}_{12}^T. \quad (\text{B10})$$

As a result of the block decomposition,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}_{\text{MNML}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11} \cdot \Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{21} \cdot \Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

with

$$\mathbf{Y}_{11} = \mathbf{U}_{11} + \mathbf{U}_{12} \cdot \mathbf{Z}_{21} = (\mathbf{I}_{11} + \mathbf{B}_{11})^{-1} \cdot \mathbf{U}_{11},$$

$$\mathbf{Y}_{21} = \mathbf{U}_{22} \cdot \mathbf{Z}_{21} = -\mathbf{U}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{U}_{12}^T \cdot (\mathbf{I}_{11} + \mathbf{B}_{11})^{-1} \cdot \mathbf{U}_{11}.$$

Then, considering the non-AO-specific case, the variance of the zonal MNML reconstructor can be written:

$$\begin{aligned} v_{\text{MNML}} &= \text{tr}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}_{\text{MNML}} \cdot \mathbf{G}_{\text{MNML}}^T \cdot \mathbf{U}^T) a_e / n \\ &= \text{tr}(\mathbf{Y}_{11}^T \cdot \mathbf{Y}_{11} \cdot \Sigma_{11}^{-2}) a_e / n + \text{tr}(\mathbf{Y}_{21}^T \cdot \mathbf{Y}_{21} \cdot \Sigma_{11}^{-2}) a_e / n \\ &= \text{tr}(\mathbf{U}_{11}^T \cdot \mathbf{U}_{11} \cdot \Sigma_{11}^{-2} \cdot (\mathbf{I}_{11} + \mathbf{B}_{11})^{-1}) a_e / n, \end{aligned}$$

and finally, noting that  $\mathbf{W}_{11} = \mathbf{U}_{11}^T \cdot \mathbf{U}_{11} / n$ , the variance of the zonal MNML estimator is

$$v_{\text{MNML}} = a_e \text{tr}(\mathbf{W}_{11} \cdot \Sigma_{11}^{-2} \cdot (\mathbf{I}_{11} + \mathbf{B}_{11})^{-1}). \quad (\text{B11})$$

The matrix  $\mathbf{B}_{11}$  is by construction positive semidefinite; then  $(\mathbf{I}_{11} + \mathbf{B}_{11})^{-1} \leq \mathbf{I}_{11}$  and therefore  $v_{\text{MNML}} \leq v_{\text{KL}}$  in Eq. (72).

## ACKNOWLEDGMENT

This work forms part of the ELT Design Study and is supported by the European Commission, within Framework Program 6, contract 011863.

## REFERENCES

1. M. Le Louarn and M. Tallon, "Analysis of modes and behavior of a multiconjugate adaptive optics system," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 912–925 (2002).
2. B. Le Roux, J.-M. Conan, C. Kulcsar, H.-F. Raynaud, L. Mugnier, and T. Fusco, "Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 1261–1276 (2004).
3. D. L. Fried, "Least-squares fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 370–375 (1977).
4. M. C. Roggemann, "Optical performance of fully and partially compensated adaptive optics systems using least-squares and minimum variance phase reconstructors," *Comput. Electr. Eng.* **18**, 451–466 (1992).
5. B. L. Ellerbroek, "Efficient computation of minimum-variance wave-front reconstructors with sparse matrix techniques," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 1803–1816 (2002).
6. L. Gilles, "Order- $N$  sparse minimum-variance open-loop reconstructor for extreme adaptive optics," *Opt. Lett.* **28**, 1927–1929 (2003).
7. L. Gilles, "Closed-loop stability and performance analysis of least-squares and minimum-variance control algorithms for multiconjugate adaptive optics," *Appl. Opt.* **44**, 993–1002 (2005).
8. D. Looze, "Minimum variance control structure for adaptive optics systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 603–612 (2006).
9. E. Thiébaud and M. Tallon, "Fast minimum variance wavefront reconstruction for extremely large telescopes," submitted to *J. Opt. Soc. Am. A*.
10. T. Fusco, G. Rousset, J.-F. Sauvage, C. Petit, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, M. Nicolle, M. Kasper, P. Baudoz, and P. Puget, "High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets: application to the sphere instrument," *Opt. Express* **14**, 7515–7534 (2006).
11. B. Ellerbroek, "First-order performance evaluation of adaptive optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended field-of-view astronomical telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 783–805 (1994).
12. F. Roddier, *Adaptive Optics in Astronomy* (Cambridge U. Press, 1999).
13. S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau, and G. Rousset, "Comparison of centroid computation algorithms in a Shack–Hartmann sensor," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **371**, 323–336 (2006).
14. E. P. Wallner, "Optimal wave-front correction using slope measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 1771–1776 (1983).
15. D. Pelat, Course titled "Bruits et signaux" (École Doctorale d'Ile de France, Département Astronomie-Astrophysique, Paris, 2005).
16. H. Sorenson, "Least-square estimation: from Gauss to Kalman," *IEEE Spectrum* **7**, 63–68 (1970).
17. A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation* (SIAM, 2005).
18. R. H. Hudgin, "Wave-front compensation error due to finite corrector-element size," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 393–395 (1977).
19. V. I. Tatarski, *Wave Propagation in a Turbulent Medium* (Dover, 1961).
20. R. Conan, "Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation à haute résolution angulaire en astronomie," Ph.D. thesis (Université de Nice-Sophia Antipolis, 2000).
21. R. G. Lane, A. Glindemann, and J. C. Dainty, "Simulation of a Kolmogorov phase screen," *Waves Random Media* **2**, 209–224 (1992).
22. F. Martin, R. Conan, A. Tokovinin, A. Ziad, H. Trinquet, J. Borgnino, A. Agabi, and M. Sarazin, "Optical parameters relevant for high angular resolution at paranal from gsm instrument and surface layer contribution," *Astrophys. J., Suppl. Ser.* **144**, 39–44 (2000).
23. R. J. Noll, "Dynamic atmospheric turbulence correction," *Proc. SPIE* **75**, 39–42 (1976).
24. J. Y. Wang and J. K. Markey, "Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion," *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 78–89 (1978).
25. R. Noll, "Phase estimates from slope-type wave-front sensors," *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 139–140 (1978).
26. J. Herrmann, "Least-squares wave front errors of minimum norm," *J. Opt. Soc. Am.* **70**, 28–35 (1980).
27. L. Poyneer, D. Gavel, and J. Brase, "Fast wave-front reconstruction in large adaptive optics systems with use of the Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 2100–2111 (2002).
28. L. A. Poyneer, "Advanced techniques for Fourier transform wavefront reconstruction," *Proc. SPIE* **4839**, 1023–1034 (2002).
29. L. A. Poyneer, M. Troy, B. Macintosh, and D. T. Gavel, "Experimental validation of Fourier-transform wave-front reconstruction at the Palomar observatory," *Opt. Lett.* **28**, 798–800 (2003).
30. E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov, and D. Sorensen, *LAPACK Users' Guide*, 2nd ed. (SIAM, 1995).
31. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2nd ed. (Cambridge U. Press, 1992).

## 5.4 La comparaison théorique des erreurs

À partir d'une décomposition en valeurs singulières du processus de mesure généralisé défini dans l'équation (5.4), *i.e.*

$$\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_2^T, \quad (5.18)$$

j'ai montré dans l'article précédent que les trois reconstituteurs cités pouvaient s'écrire sous la forme

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{L} \quad (5.19)$$

avec uniquement la matrice  $\mathbf{D}$  qui reste particulière à chaque méthode, *i.e.*

$$\mathbf{D}_{\text{KL}} = \mathbf{\Sigma}^\dagger \quad (5.20)$$

$$\mathbf{D}_{\text{MAP}} = (\mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{\Sigma} + \mu_0 \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{\Sigma}^T \quad (5.21)$$

$$\mathbf{D}_{\text{MNML}} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Sigma}^\dagger. \quad (5.22)$$

Les matrices  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  sont deux matrices orthogonales. La matrice  $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice diagonale des valeurs singulières classées par ordre décroissant. Les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{U}$  sont obtenues par la décomposition QR de  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_2$ . La matrice  $\mathbf{Z}$  a une structure particulière que je ne détaille pas ici (*cf.* article). Enfin, je rappelle que j'ai modifié la notation  $\mathbf{G}$  de l'article pour la remplacer par la notation  $\mathbf{D}$ , afin d'éviter toute confusion avec la matrice d'interaction du système introduite à la section 2.5. On note que les différentes formes de la matrice  $\mathbf{D}$  dans les équations (5.20)-(5.22) illustrent les approximations faites de l'inverse de  $\mathbf{\Sigma}$  par les reconstituteurs, c'est-à-dire de l'inverse du processus de mesure généralisé.

À partir de ce formalisme commun, j'ai pu comparer les contributions d'erreur des trois reconstituteurs cités.

### 5.4.1 Le reconstituteur $\mathbf{R}_{\text{KL}}$

$$b_{\text{KL}} = \frac{\sigma_e^2}{\mu_0} \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{W_{i,i}}{\mu_0}, \quad (5.23)$$

$$v_{\text{KL}} = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{i=p} \frac{W_{i,i}}{\sigma_i^2}, \quad (5.24)$$

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{KL}} = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_i^2} \left( \sum_{i=1}^{i=p} \frac{W_{i,i}}{\sigma_i^2} + \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{W_{i,i}}{\mu_0} \right), \quad (5.25)$$

où les  $(W_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$  sont les éléments diagonaux d'une matrice symétrique positive  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Les  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont les valeurs singulières non nulles du processus de mesure. Ce sont donc les éléments non nuls de  $\mathbf{\Sigma}$ , et  $p$  est le rang du processus de mesure. La matrice  $\mathbf{W}$  et les  $\sigma_i$  ne dépendent que des dimensions du système, de sa modélisation et des corrélations du signal et du bruit. En revanche, une modification du niveau de turbulence  $\underline{\sigma_w^2}$  ou du niveau de bruit  $\underline{\sigma_e^2}$  n'a pas d'effet sur ces grandeurs.

### 5.4.2 Le reconstructeur $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$

Avec les mêmes notations,

$$b_{\text{MAP}} = \frac{\sigma_e^2}{\mu_0} \left( \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\mu_0 W_{i,i}}{(\mu_0 + \sigma_i^2)^2} + \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{W_{i,i}}{\mu_0} \right), \quad (5.26)$$

$$v_{\text{MAP}} = \frac{\sigma_e^2}{\mu_0} \left( \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\sigma_i^2 W_{i,i}}{(\mu_0 + \sigma_i^2)^2} \right) \quad (5.27)$$

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{MAP}} = \frac{\sigma_e^2}{\mu_0} \left( \sum_{i=1}^{i=p} \frac{W_{i,i}}{\mu_0 + \sigma_i^2} + \sum_{i=p+1}^{i=n} \frac{W_{i,i}}{\mu_0} \right). \quad (5.28)$$

### 5.4.3 Le reconstructeur $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$

Je montre uniquement que

$$b_{\text{MNML}} = b_{\text{KL}} + b_0, \quad (5.29)$$

avec  $b_0 \geq 0$ . Aucune expression simple de  $v_{\text{MNML}}$  et de  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{MNML}}$  n'a été trouvée pour pouvoir les comparer algébriquement avec les erreurs des autres méthodes.

### 5.4.4 Synthèse

Le choix d'un reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$ , *i.e.* de maximum de vraisemblance et de moindre norme dans un espace de modes statistiquement indépendants,

- implique que le biais  $b_{\text{KL}}$  est le résultat de tous les modes non-vus du système de mesure
- implique, en revanche, que la propagation du bruit ne se fait qu'à travers l'espace des modes non-singuliers
- implique que plus la valeur singulière  $\sigma_i$  d'un mode est de module faible (mais non nul), plus la propagation du bruit sur ce mode reconstruit est forte
- engendre un biais  $b_{\text{KL}}$  proportionnel à  $\frac{\sigma_w^2}{\mu_0}$  mais indépendant du niveau de bruit  $\frac{\sigma_e^2}{\mu_0}$
- engendre, au contraire, une variance d'erreur  $v_{\text{KL}}$  proportionnelle à  $\frac{\sigma_e^2}{\mu_0}$  mais indépendante du niveau de turbulence  $\frac{\sigma_w^2}{\mu_0}$
- minimise le biais : il est inférieur à celui du reconstructeur MAP et inférieur à tout autre reconstructeur de type maximum de vraisemblance et de moindre norme (quel que soit l'espace choisi)

Pour le reconstructeur MAP :

- le biais est à la fois le résultat des modes non-vus (donc  $b_{\text{KL}}$ ) et d'une erreur commise sur les modes non-singuliers
- le biais  $b_{\text{MAP}}$  est donc toujours plus grand que  $b_{\text{KL}}$
- la propagation du bruit est plus faible qu'avec le reconstructeur MNML-KL
- l'erreur quadratique moyenne totale  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  est néanmoins toujours plus faible pour le reconstructeur MAP (par définition), du fait qu'il contraint mieux la propagation du bruit sur les modes non-singuliers

- le gain en  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  entre un reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  et le reconstruteur MAP est d'autant plus significatif que le rapport signal à bruit décroît ( $\mu_0$  croissant), ce qui confirme l'intérêt d'utiliser de bons *a priori* lorsque la qualité des données se dégrade

Pour le reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$ , enfin :

- le biais  $b_{\text{MNML}}$  est toujours plus grand que  $b_{\text{KL}}$
- la propagation du bruit est mieux contrainte que pour un reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$
- il n'a pas été possible de fournir de comparaison de  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  dans ce cas avec les autres méthodes
- les simulations numériques présentées dans la suite de ce chapitre permettent d'effectuer une comparaison de  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  avec les autres reconstruteurs

Cette étude montre comment le choix judicieux de l'espace des paramètres et de la régularisation peut influencer la précision ou la stabilité de la solution. Il est intéressant de noter que, le système étant linéaire, le paramètre  $\mu_0 = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_w^2}$  est inversement proportionnel au carré du rapport signal à bruit. Ce lien sera détaillé par la suite.

Il est également possible de comparer les résultats avec un reconstruteur tronqué (Gendron et Lena, 1994), très souvent utilisé en optique adaptative. Dans l'espace des paramètres  $\mathbf{u}$ , un tel reconstruteur est défini en fixant un seuil  $\sigma_0^2 > 0$ , si bien que  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale avec pour  $i$  de 1 à  $n$ ,

$$\mathbf{D}_{\text{tronc } i,i} = \begin{cases} 1/\sigma_i^2 & \text{si } \sigma_i^2 \geq \sigma_0^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.30)$$

Cette troncature équivaut à utiliser le reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  avec un rang  $p$  réduit pour le processus de mesure. Les erreurs ont donc la même forme que dans les équations (5.23)-(5.25), avec un  $p$  inférieur. Cette stratégie décroît le nombre de modes sur lesquels se propagent le bruit, c'est-à-dire le nombre de termes dans la somme (5.24). Elle permet de limiter la propagation du bruit sur les modes mal estimés, ceux pour lesquels  $\sigma_i^2$  est faible. En revanche, ceci accroît artificiellement l'espace des modes singuliers, et donc l'erreur de biais du reconstruteur dans l'équation (5.23).

## 5.5 Conclusion

L'analyse algébrique met en évidence par des équations finalement simples que le reconstruteur MAP fournit le compromis optimal entre biais et variance.

Une remarque essentielle de cette synthèse est qu'elle a été menée de la façon la plus générale possible, pour un problème inverse multi-variables, *simple* au sens donné au chapitre 4, avec un modèle de mesure linéaire et des statistiques de bruit et de signal Gaussiennes centrées. Elle s'applique donc dans tous les domaines. Dans le cas de l'optique adaptative, aucune hypothèse particulière n'a été faite sur le type d'analyseur utilisé, ni sur sa modélisation (excepté la linéarité), ni sur la fréquence de coupure de l'approximation zonale de la surface d'onde.

Par ailleurs, ces conclusions peuvent être facilement généralisées à un système d'optique adaptative de champ large ou de tomographie laser. Il suffit pour cela de concaténer les mesures et le bruit provenant des différents analyseurs à l'intérieur des vecteurs  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{e}$  et les multiples surfaces d'onde paramétrées dans les couches en altitude dans le vecteur  $\mathbf{w}$  (Ellerbroek et al., 1994; Fusco et al., 2001). Les modèles d'analyseurs rassemblés dans  $\mathbf{S}$  doivent contenir la modélisation de la propagation des surfaces d'onde

jusqu'à la pupille du télescope dans la direction d'analyse de chaque analyseur. Ceci est un processus linéaire. Enfin, l'opérateur  $P$  doit être modifié suivant le critère de performance recherché. Par exemple, si la correction doit être optimisée dans une direction de visée particulière, alors  $P$  contient la modélisation de la propagation des surfaces d'onde contenues dans  $\boldsymbol{w}$  et dans  $\hat{\boldsymbol{w}}$  à travers les couches dans cette direction de visée, jusqu'à atteindre le plan pupille où le mode piston est ôté à la différence des surfaces d'onde résultantes. Pour une optique adaptative multi-conjuguée (OAMC), l'uniformité de l'erreur quadratique moyenne est requise. Ceci correspond à inclure dans  $P$  une moyenne (par intégrale) suivant toutes les directions  $\beta_i$  possibles dans le champ à corriger. Qu'il s'agisse de la propagation des surfaces d'onde à travers les couches ou de la moyenne dans les directions de visée à corriger, ce sont des processus linéaires qui peuvent être inclus dans l'analyse, sans en modifier les conclusions.



## Chapitre 6

# Les algorithmes rapides de reconstruction

Le chapitre précédent traite le problème théorique de la reconstruction de surface d'onde de façon suffisamment générale pour que ses résultats soient appliqués à tous les concepts d'optique adaptative conçus ou envisagés actuellement en astronomie. Dans le présent chapitre, je suis amenée à effectuer des choix de représentation particuliers de la surface d'onde et de l'analyseur pour discuter des difficultés d'implémentation des reconstituteurs quand  $n$  est grand ( $\geq 10^4$ ).

La discussion est menée sur la base d'une optique adaptative mono-conjuguée (OAmC) ou extrême (OAX), afin de simplifier les notations. En d'autres termes, la surface d'onde considérée  $\mathbf{w}$  est dans le plan pupille et il n'y a qu'un seul analyseur dont le modèle est noté  $\mathbf{S}$ . Lorsque les considérations ne sont pas directement étendables à des systèmes d'optique adaptative de champ large ou à la tomographie, je le précise.

La surface d'onde est représentée zonalement par le vecteur  $\mathbf{w}$  de  $\mathbb{R}^n$ . L'analyseur est de type Shack-Hartmann. La modélisation de la matrice  $\mathbf{S}$  se fait à partir des équations d'angles d'arrivée théoriques (2.7)-(2.8). En utilisant la représentation zonale  $\mathbf{w}$ , la matrice  $\mathbf{S}$  a l'avantage d'être creuse, puisque l'intégrale dans ces formules peut être modélisée à l'aide de l'approximation des trapèzes. Pour le modèle de Fried de l'analyseur (*cf.* équations (2.12)-(2.13)),  $\mathbf{w}$  est échantillonnée spatialement avec un pas  $d_e = d_l$ , égal à la taille d'une sous-pupille de l'analyseur et  $\mathbf{S}$  possède 4 éléments non nuls par ligne.

Je reprends les 3 reconstituteurs introduits dans le chapitre précédent. Le reconstituteur de maximum de vraisemblance et de moindre norme zonal  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  est le reconstituteur largement étudié dans la littérature en optique adaptative (Fried, 1977; Noll, 1978; Herrmann, 1980).

J'utilise dans la suite les notations suivantes :

$$\mathbf{A}_{\text{MNML}} = \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{A}_{\text{KL}} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{A}_{\text{MAP}} = \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mu_0 \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}}^{-1}, \quad (6.3)$$

si bien que les reconstituteurs  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$ ,  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  et  $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$  définis par les équations (5.16),



(5.17) et (5.14) peuvent être mis sous la forme

$$\mathbf{R}_{\text{MNML}} = \mathbf{A}_{\text{MNML}}^\dagger \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{R}_{\text{KL}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_{\text{KL}}^\dagger \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \quad (6.5)$$

et

$$\mathbf{R}_{\text{MAP}} = \mathbf{A}_{\text{MAP}}^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1}. \quad (6.6)$$

De cette façon, dans la suite, j'associe à chaque reconstituteur  $\mathbf{R}$  étudié, la forme matricielle  $\mathbf{A}$  qui lui est associée. La matrice  $\mathbf{A}$  est la partie à inverser dans l'expression générale du reconstituteur.

Dans les systèmes d'optique adaptative actuels, pour lesquels  $n$  est de l'ordre de quelques centaines, la matrice du reconstituteur  $\mathbf{R}$  choisi est stockée en mémoire et appliquée aux vecteurs de mesure  $\mathbf{d}$  à la fréquence de commande du système.  $\mathbf{R}$  est une matrice  $n \times m$ , et il y a généralement quelque  $m \simeq 2n$  mesures, donc son coût d'application à un vecteur est de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^2)$ .  $\mathbf{R}$  n'est pas une matrice creuse puisque l'analyseur fournit des dérivées spatiales de  $w$ , qu'il faut intégrer. Une variation d'une valeur de mesure a des répercussions sur tous les paramètres, du fait de cette intégration.

La figure 6.1 rappelle les difficultés d'application de la méthode de multiplication matrice-vecteur (MMV) lorsque la taille des systèmes atteindra les ordres de grandeur prévus sur les télescopes hectométriques (*cf.* section 2.6.3).

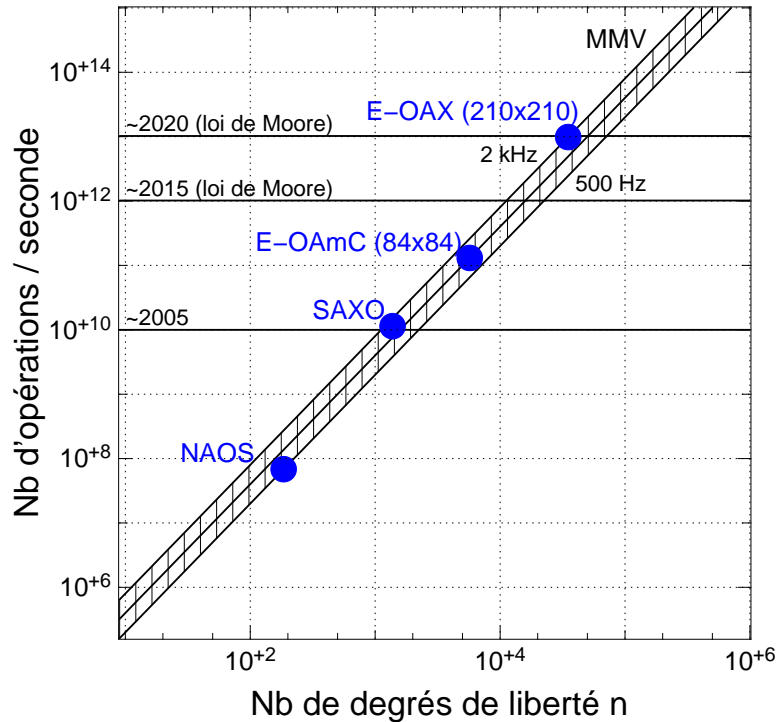


FIG. 6.1 – Nombre d'opérations par seconde en fonction de la dimension du système  $n$  dans le cas d'une reconstruction par la méthode de multiplication matrice-vecteur (MMV). *cf.* légende complète sur la figure 2.15.

Il est donc important de réduire les coûts calculatoires de la reconstruction et de la commande avec des algorithmes pour lesquels le nombre d'opérations requis est plus faible que  $\mathcal{O}(n^2)$ . Diverses approches ont été proposées depuis une dizaine d'année pour réduire ces calculs. Je rappelle dans ce chapitre les principaux algorithmes actuellement étudiés dans la communauté pour la reconstruction de surface d'onde sur de grands systèmes.

## 6.1 La reconstruction par Transformée de Fourier

Cette méthode de reconstruction que je note par FTR dans toute la suite de ce manuscrit ne correspond à aucune des formes (6.4)-(6.6) présentées ci-dessus, mais peut être assimilée à un filtrage des mesures dans l'espace de Fourier. Sa première version a été proposée par Freischlad et Koliopoulos (1986) pour un support de mesures carré et une surface d'onde reconstruite zonalement  $\mathbf{w}$ , carrée  $N \times N$ . Elle repose sur le fait que le processus de mesure, *i.e.* l'analyseur, est bien approximé par un calcul de différences finies sur la surface d'onde représentée zonalement par  $\mathbf{w}$  et en série de Fourier par  $\tilde{\mathbf{w}}$  (*cf.* section 3.2.2).

J'illustre cela dans le cas du Shack-Hartmann avec la géométrie de Fried, où la surface d'onde est estimée aux coins des sous-pupilles de l'analyseur. D'après les équations (2.12)-(2.13) de ce modèle, la transformée de Fourier discrète (TFD) inverse des mesures s'écrit aussi

$$\tilde{\mathbf{d}}^x(k, l) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{d}^x(k', l')) = \frac{1}{2d_l} \tilde{\mathbf{w}}(k, l) \left( e^{\frac{2\pi i k}{N}} - 1 \right) \left( 1 + e^{-\frac{2\pi i l}{N}} \right) \quad (6.7)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}^y(k, l) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{d}^y(k', l')) = \frac{1}{2d_l} \tilde{\mathbf{w}}(k, l) \left( e^{\frac{2\pi i l}{N}} - 1 \right) \left( 1 + e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \right) \quad (6.8)$$

avec  $N = \sqrt{n}$ . Ainsi il est possible en combinant les différentes mesures d'obtenir l'expression de la surface d'onde dans l'espace de Fourier comme un filtrage sur les mesures en fréquence.

$$\tilde{\mathbf{w}}(k, l) = \begin{cases} 0 & \text{si } k, l = 0 \text{ ou } k, l = N/2 \\ \frac{\left( e^{-\frac{2\pi i k}{N}} - 1 \right) \left( e^{\frac{2\pi i l}{N}} + 1 \right) \tilde{\mathbf{d}}^x(k, l) + \left( e^{-\frac{2\pi i l}{N}} - 1 \right) \left( e^{\frac{2\pi i k}{N}} + 1 \right) \tilde{\mathbf{d}}^y(k, l)}{8 \left( \sin^2 \frac{\pi k}{N} \cos^2 \frac{\pi l}{N} + \sin^2 \frac{\pi l}{N} \cos^2 \frac{\pi k}{N} \right)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.9)$$

Cette méthode s'applique donc théoriquement en trois étapes :

- Effectuer la TFD inverse des mesures, en  $\mathcal{O}(n \ln n)$  opérations
- Appliquer le filtre décrit par l'équation (6.9), en  $\mathcal{O}(n)$  opérations
- Repasser dans l'espace zonal de la surface d'onde par TFD directe, en  $\mathcal{O}(n \ln n)$  opérations

La rapidité des TFD en  $\mathcal{O}(n \ln n)$  est obtenue pour des dimensions particulières de système, *i.e.* lorsque  $N$  est une puissance de 2 afin de pouvoir mettre en oeuvre un algorithme de Transformée de Fourier rapide (FFT pour *Fast Fourier Transform*). Ceci est nécessaire pour faire chuter le coût calculatoire à une valeur proportionnelle à  $n \ln n$ .

Toutefois, cette méthode présente une difficulté majeure pour la reconstruction de surface d'onde en astronomie. Les mesures de l'analyseur sont délivrées sur un support circulaire caractéristique de la pupille du télescope, ou annulaire en présence d'une

obstruction centrale. Ceci n'est pas directement compatible avec l'application de la TFD et remplir le support carré de zéros là où il n'y a pas de mesures engendre des erreurs de reconstruction inacceptables (Poyneer et al., 2002). Finalement, Poyneer et al. (2002) ont proposé diverses méthodes pour *remplir* le support carré  $(N - 1) \times (N - 1)$  des mesures de façon à réduire la variance de l'erreur de reconstruction sur la pupille. Ils ont par ailleurs comparés différents filtres inverses dans l'espace de Fourier, associés à des modélisations de l'analyseur par divers calculs de différences finies sur la surface d'onde. Certains filtres inverses produisent une très bonne reconstruction dans la pupille, *i.e.* là où il y a eu des mesures (Poyneer et al., 2002, 2003; Poyneer et Véran, 2005).

Il est important de noter que les techniques d'extension employées sont déterminées de façon *ad hoc* en cohérence avec la périodisation imposée par la DFT et le fait que le modèle d'analyseur non bruité implique que le rotationnel des mesures soit nul puisqu'il s'agit de gradients.<sup>1</sup> En l'absence d'hypothèse sur le bruit des mesures et la statistique de la surface d'onde, cette méthode est assimilable à une méthode de maximum de vraisemblance. Par ailleurs, il n'est pas trivial de conclure que les techniques d'extension n'ont pas d'impact sur l'extrapolation de la surface d'onde reconstruite à l'extérieur de la pupille. Cependant, puisque Poyneer et al. (2008) envisagent d'utiliser la méthode FTR pour la correction d'un système d'optique adaptative extrême (OAX), prévu pour l'instrument Gemini Planet-Imager, la reconstruction hors de la pupille n'a pas d'effet sur les performances du système.

Cette méthode de reconstruction requiert environ  $7.5n \log(n) + 20n$  opérations en flottants pour passer des mesures  $\mathbf{d}$  à la surface d'onde estimée  $\hat{\mathbf{w}}$  (Poyneer et Véran, 2005).

Récemment, Correia et al. (2008) ont développé un algorithme itératif pour étendre les mesures sur le support carré nécessaire en introduisant des *a priori* sur la statistique du signal et du bruit. Ceci ouvre de nouvelles perspectives au reconstruteur FTR, mais la qualité de l'extrapolation n'a pas été évaluée. Ce raffinement induit un coût calculatoire supplémentaire dépendant du nombre d'itérations effectuées pour extrapoler les mesures à l'extérieur de la pupille.

## 6.2 L'approximation de $\mathbf{C}_w^{-1}$

L'utilisation d'un reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  ou du reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$  implique la modélisation de  $\mathbf{C}_w$  ou  $\mathbf{C}_w^{-1}$ . Cette matrice pleine de dimension  $n \times n$ , dont la structure a été présentée dans la section 3.2.2, rend le calcul de ces reconstructions coûteuses pour  $n$  grand. Cependant, cette covariance agit comme une régularisation pour le problème inverse considéré, elle peut être approximée sans dégrader fortement les performances du reconstruteur (ceci est discuté dans la section 7.5).

Je rappelle ici les différentes approximations de  $\mathbf{C}_w$  qui ont été étudiées dans la littérature pour  $n$  grand. Elles ont la particularité de pouvoir être appliquées à un vecteur en un nombre d'opérations  $\mathcal{O}(n \log n)$  ou  $\mathcal{O}(n)$ , plutôt que  $\mathcal{O}(n^2)$  lorsque la matrice est pleine.

---

<sup>1</sup>Ceci vient de la propriété des opérateurs rotationnels et gradients :  $\text{rot } \nabla w = 0$ .

### 6.2.1 L'approximation diagonale dans le domaine de Fourier

Une première approche consiste à diagonaliser la matrice de covariance  $\mathbf{C}_w$  dans l'espace de Fourier. En effet, pour un modèle de turbulence stationnaire la matrice de covariance zonale  $\mathbf{C}_w$  est une matrice Toeplitz. Les matrices de Toeplitz sont souvent approximées par des matrices circulantes parce que ces dernières sont diagonalisées par une Transformée de Fourier Discrète (TFD) 2-D. Ainsi,

$$\mathbf{C}_w \simeq \mathcal{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\mathcal{S}_w) \cdot \mathcal{F}, \quad (6.10)$$

où  $\mathcal{F}$  désigne la TFD et  $\text{diag}(\mathcal{S}_w)$  est diagonale et approxime la densité spectrale spatiale de la surface d'onde turbulente décrite par l'équation (3.22) que je rappelle ici

$$\mathcal{S}_w(\kappa) = \begin{cases} 0.0229 r_0^{-5/3} \kappa^{-11/3} & \text{si } D/L_0 = 0 \\ 0.0229 r_0^{-5/3} (\kappa^2 + 1/L_0^2)^{-11/6} & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.11)$$

L'approximation de la matrice Toeplitz par une matrice circulante équivaut à étendre périodiquement la surface d'onde à l'infini (Gilles et al., 2002a).

### 6.2.2 L'approximation creuse par le Laplacien

À partir de l'approximation circulante ci-dessus et en considérant  $11/3 \simeq 4$  dans l'expression de la densité spectrale de puissance  $S_w$  de l'équation (3.22), Ellerbroek (2002) a proposé une décomposition

$$\mathbf{C}_w^{-1} \simeq \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \quad (6.12)$$

où  $\mathbf{C}$  est proportionnelle à une approximation discrète de l'opérateur de Laplace. La matrice  $\mathbf{C}$  est creuse puisqu'elle ne contient pas plus de 5 éléments non nuls par ligne. Cette approximation génère néanmoins une singularité pour le mode piston, qui est corrigée en rajoutant un terme de régularization supplémentaire dans  $\mathbf{A}_{\text{MAP}}$ , *i.e.*

$$\mathbf{A}_{\text{MAP}} \simeq \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^T \quad (6.13)$$

où  $\mathbf{z}$  est vecteur de  $\mathbb{R}^n$  avec un seul élément non nul, égal à 1, servant de référence de phase pour définir le piston.

### 6.2.3 L'approximation fractale

L'approximation fractale développée par Thiébaud & Tallon exprime  $\mathbf{C}_w^{-1}$  sous la forme

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{K}_{\text{frac}}^{-T} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}}^{-1},$$

où  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  a été défini dans la section 3.2.2.

À partir de ces trois approximations différentes, des algorithmes rapides de reconstruction MAP ont été développés au cours de la dernière décennie. Je les décris ci-après.

## 6.3 La factorisation de Cholesky creuse

Ellerbroek (2002) a développé un algorithme de reconstruction basé sur une approximation creuse de la matrice de reconstruction, que j'explique brièvement ici. Elle repose

sur le caractère creux de  $\mathbf{A}$ . Dans le cas du reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$ , ceci est immédiat. Pour le reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$  en revanche, l'approximation (6.13) est utilisée.

La matrice  $\mathbf{A}$  ainsi obtenue est symétrique avec une structure creuse particulière, pour laquelle la factorisation de Cholesky s'écrit

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^T \quad (6.14)$$

avec  $\mathbf{E}$  une matrice triangulaire inférieure creuse. De cette façon, l'inversion  $\mathbf{x} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^T)^{-1} \cdot \mathbf{b}$  et résolue en deux étapes :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{y}, \end{cases} \quad (6.15)$$

par substitution. Il est difficile de quantifier le coût de cette résolution parce qu'elle dépend fortement de la structure de la matrice  $\mathbf{E}$ . Le gain essentiel de la méthode par rapport à la MMV réside dans la phase de précalcul (Ellerbroek, 2002). Alors que l'inversion matricielle requiert  $\mathcal{O}(n^3)$  opérations afin de pouvoir stocker  $\mathbf{A}^{-1}$ , la factorisation creuse de Cholesky ne nécessite que  $\mathcal{O}(n^{3/2})$  pour déterminer  $\mathbf{E}$ . Ce coût de précalcul a été quantifié par Ellerbroek (2002) dans le cas du reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  sur un système d'optique adaptative à un seul analyseur et un seul miroir déformable. Cette méthode peut être intéressante pour des système d'optique adaptative extrêmes, c'est-à-dire de type SAXO ou E-OAX, si le reconstructeur de maximum de vraisemblance zonal permet une qualité de reconstruction satisfaisante.

Malheureusement, pour des systèmes plus complexes, lorsque plusieurs surfaces d'onde doivent être estimées à différentes altitudes avec des *a priori* sur la turbulence, cette factorisation devient plus coûteuse. Pour une optique adaptative multiconjuguée (OAMC) avec  $n \geq 2 \times 10^4$ , le stockage de la factorisation de Cholesky creuse de  $\mathbf{A}_{\text{MAP}}$  devient problématique (Ellerbroek, 2002).

## 6.4 Les gradients conjugués préconditionnés

Cette dernière méthode consiste à remplacer le calcul des reconstructeurs (6.4)-(6.6) par la résolution itérative des systèmes linéaires équivalents

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad (6.16)$$

avec la condition  $\hat{\mathbf{x}}$  de moindre norme si  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible. Pour les cas particuliers étudiés ici, cela signifie

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\text{MNML}} &= \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b}_{\text{KL}} &= \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b}_{\text{MAP}} &= \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{d}, \end{aligned}$$

et  $\mathbf{A}_{\text{MNML}}$ ,  $\mathbf{A}_{\text{KL}}$  et  $\mathbf{A}_{\text{MAP}}$  définis par les équations (6.1)- (6.3). L'algorithme des gradients conjugués (GC) permet de résoudre efficacement ce type de système, pour une matrice  $\mathbf{A}$  symétrique définie positive que l'on sait appliquer à un vecteur (Barrett et al., 1994). Autrement dit, le stockage de  $\mathbf{A}$  n'est pas nécessaire, ce qui est un avantage quand  $n$  est grand. Dans le cas particulier où  $\mathbf{A}$  est n'est pas inversible, la méthode des GC utilisée à partir d'une l'estimée initiale  $\mathbf{x}^{\text{init}}$  nulle fournit la solution de moindre norme

du système. L'algorithme peut donc bien être mis en oeuvre pour les reconstructions de type maximum de vraisemblance étudiées ici.

Je rappelle brièvement le principe des GC. Pour une présentation claire de l'algorithme sous ses diverses formes, je conseille la lecture de l'introduction de Shewchuck (1994).

Les GC minimisent la fonction de pénalisation  $\Delta = \|\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|^2$ , qui n'est autre que le carré de la norme des résidus de l'estimation. À chaque itération, une recherche linéaire de minimum est effectuée dans une direction de descente pour la fonction de pénalisation. Les directions de recherche sont orthogonales au sens de la matrice  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = 0$  pour toutes les directions de descentes  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  empruntées. Ceci garantit formellement la convergence de la méthode au bout de  $n$  itérations au plus, si on ne tient pas compte des erreurs d'arrondis numériques. Cette condition d'orthogonalité vis-à-vis de  $\mathbf{A}$  distingue les GC des autres algorithmes de minimisation, comme la méthode de plus grande pente par exemple, dont les taux de convergence sont plus faibles parce que les directions de recherche peuvent devenir presque orthogonales à la direction du vrai minimum.

La convergence des GC dépend néanmoins fortement du conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$ . Le nombre de conditionnement est le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre non nulle de  $\mathbf{A}$ . La convergence est plus lente lorsque le nombre de conditionnement augmente. La vitesse de convergence dépend aussi du regroupement des valeurs propres. Par exemple, si certaines valeurs propres sont multiples, ceci peut accélérer la convergence.

Pour la reconstruction de maximum *a posteriori*, le conditionnement de  $\mathbf{A}_{\text{MAP}}$  évolue avec le rapport signal-à-bruit (RSB) du problème, défini dans la littérature (Gilles et al., 2002b; Le Roux et al., 2004; Lessard et al., 2008) par

$$\begin{aligned} \text{RSB} &= \sqrt{\frac{\langle \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} \rangle}{\sigma_e^2}} \\ &\simeq \sqrt{\frac{\mathcal{D}_w(\sqrt{2} d_l)}{2 \mu_0}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

La deuxième expression est obtenue en supposant que les statistiques du signal et du bruit sont identiques dans toutes les sous-pupilles.

Le coût calculatoire par itération de l'algorithme est dominé par l'application de la matrice  $\mathbf{A}$  à un vecteur. En ce sens, les approximations de  $\mathbf{A}$  présentées dans les paragraphes précédents permettent de réduire le nombre d'opérations nécessaires pour la reconstruction. Cependant, le coût calculatoire global de l'estimation dépend aussi de la vitesse de convergence de la méthode. Il est parfois préférable de résoudre un système équivalent

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{b} \quad (6.18)$$

avec  $\mathbf{M}$  inversible. L'application de  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}$  à chaque itération est un peu plus coûteux, mais si le nombre de conditionnement de  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}$  est meilleur, seules quelques itérations seront nécessaires pour la convergence. Le coût calculatoire global peut de cette façon être réduit. Ceci fait de la matrice  $\mathbf{M}$ , appelée préconditionneur, un élément essentiel de l'algorithme.

### 6.4.1 Les préconditionneurs en optique adaptative

En pratique, si la matrice  $\mathbf{M}$  approxime l'inverse de  $\mathbf{A}$ , elle a de bonnes chances d'être un préconditionneur intéressant. Plusieurs méthodes de reconstruction de surface d'onde pour les grands télescopes reposent sur l'algorithme des gradients conjugués. Elles utilisent différentes méthodes de préconditionnement. Je présente ici le préconditionnement multigrille, le préconditionnement dans le domaine de Fourier et le préconditionnement fractal.

L'algorithme des gradients conjugués préconditionnés est rappelé à la fin de cette section.

#### Le préconditionnement multigrille

Gilles et al. (2002b) fait remarquer que les méthodes multigrille sont réputées efficaces pour résoudre les équations aux dérivées partielles fortement elliptiques, ce qui est le cas ici lorsque  $\mathbf{A}$  est modélisée à partir de l'approximation creuse (6.12). Les grilles représentent le système à un niveau de résolution de plus en plus grossier, à partir d'un opérateur de lissage. La grille la plus fine a la même résolution que le vecteur à estimer  $\mathbf{x}$ . D'une grille donnée à la grille de résolution immédiatement inférieure, un opérateur de lissage est appliqué. Cet opérateur doit être capable de résoudre de façon efficace les hautes fréquences, afin que le résidu d'erreur ne contienne que des basses fréquences. Si le lissage identifie correctement les basses fréquences, celles-ci pourront être corrigées de façon efficace sur une grille plus grossière, *i.e.* sur un système de plus petite dimension. L'application récursive de ce principe sur les grilles de plus en plus grossières permet de résoudre le système en 1 cycle de descente et de remontée progressive de l'information vers les hautes résolutions. Si l'opérateur de lissage n'identifie pas parfaitement les basses fréquences alors plusieurs cycles peuvent être nécessaires. L'utilisation de l'algorithme multigrille comme préconditionneur consiste à effectuer un cycle de cette méthode.

L'opérateur de lissage utilisé par Gilles et al. (2002b, 2003) est l'opérateur de Gauss-Seidel symétrique. Gilles et al. (2003) ont montré que pour une OAX, *i.e.* avec  $r_0/d_l \simeq 3$ , les GC préconditionnés par cette méthode multigrille impliquent  $\simeq 260 \times n$  opérations par itération. Pour les rapports signal-à-bruit simulés ( $\text{RSB} < 3$ ), la méthode converge en seulement 2 itérations Gilles et al. (2003).

#### Le préconditionnement dans l'espace de Fourier

Yang et al. (2006) ont utilisé comme préconditionneur une approximation diagonale inversible de  $\mathbf{A}$  dans l'espace de Fourier, *i.e.*

$$\mathbf{M}^{-1} \simeq \mathcal{F} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathcal{F}^{-1}. \quad (6.19)$$

Ils ont appliqué cette approximation à une reconstruction tomographique de la turbulence et, plus récemment, l'algorithme a été étudié pour le cas de la simple reconstruction de surface d'onde dans une optique adaptative mono-conjuguée (OAmC) par Lessard et al. (2008).

À chaque itération, l'étape de préconditionnement requiert donc 2 FFT à 2 dimensions. Le coût par itération est donc de l'ordre de  $\mathcal{O}(n \ln n)$ .

Cette méthode est particulièrement intéressante pour la reconstruction de surfaces d'ondes sur plusieurs couches parce que la vitesse de convergence semble indépendante

de  $n$ , ce qui n'est pas le cas pour les CG préconditionnés avec la méthode multigrille (Yang et al., 2006). Pour une reconstruction multicouches avec un RSB compris entre 5 et 20, la convergence est atteinte en moins de 10 itérations. Dans ce cas, le préconditionnement multigrille conduit à une convergence plus lente (Yang et al., 2006). La méthode de préconditionnement dans l'espace de Fourier a donc une très bonne convergence mais son temps de calcul est dominé par l'application des FFT pour le préconditionneur.

Le nombre d'opérations en flottants requis pour cette méthode est estimée par Correia (2006) à

$$25n + (24 + 10 \ln(n)) N_{\text{iter}} n. \quad (6.20)$$

### Le préconditionnement fractal

Thiébaud et Tallon (2008) ont proposé et analysé plusieurs méthodes de préconditionnement pour la reconstruction. Tout d'abord, le conditionnement du système peut être amélioré par le changement de variable fractal. Le nouveau système, équivalent, à résoudre devient alors

$$\mathbf{A}_{\text{frac}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{b}_{\text{frac}} \quad (6.21)$$

avec

$$\mathbf{A}_{\text{frac}} = \mathbf{K}_{\text{frac}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}} + \mu_0 \mathbf{I} \quad (6.22)$$

et

$$\mathbf{b}_{\text{frac}} = \mathbf{K}_{\text{frac}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{d}. \quad (6.23)$$

Puis, on obtient la solution recherchée en calculant  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot \hat{\mathbf{u}}$ .

Un préconditionneur diagonal  $\mathbf{M}$  peut être ajouté au système (6.21). Thiébaud et Tallon (2008) dérivent ce préconditionneur de l'optimisation de la distance entre le produit  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}$  et la matrice identité. Suivant que cette distance (norme) est évaluée dans l'espace des données ou dans l'espace des paramètres, deux préconditionneurs diagonaux distincts sont obtenus. Dans l'espace des données,

$$\mathbf{M}_{\text{jac}} = \arg \min_{\mathbf{M} \text{ diagonal}} \langle (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{x})^{\text{T}} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\text{diag}(\mathbf{A})}.$$

Ce préconditionneur, égal à l'inverse de la diagonale de  $\mathbf{A}$ , est le préconditionneur de Jacobi (Barrett et al., 1994).

Suivant que la distance est calculée dans l'espace des paramètres  $\mathbf{w}$  ou celui des  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{A}$  correspond respectivement à  $\mathbf{A}_{\text{MAP}}$  ou à  $\mathbf{A}_{\text{frac}}$ , et l'optimisation suivante

$$\mathbf{M}_{\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{M} \text{ diag}} \langle (\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x})^{\text{T}} \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}) \rangle$$

conduit à une matrice dont les éléments diagonaux sont :

$$\mathbf{M}_{\text{opt},ii} = \frac{A_{ii}}{\sum_j A_{ij}^2}. \quad (6.24)$$



Ces préconditionneurs diagonaux sont précalculés (*i.e.* calculés hors ligne) à partir de  $\mathbf{A}_{\text{MAP}}$  ou  $\mathbf{A}_{\text{frac}}$  suivant l'espace d'estimation. Leur application ne rajoute que  $n$  opérations par itération à la charge de la méthode. Pour comparaison, le préconditionnement dans l'espace de Fourier (6.19) requiert  $\sim n \ln n$  opérations par itérations.

Toutes ces possibilités de préconditionnement du système d'origine (6.16) à partir de l'approximation fractale ont été comparées par Thiébaud et Tallon (2008) en termes de nombre d'opérations nécessaires par itération et de vitesse de convergence. Les figures 6 à 10 de l'article, joint dans l'annexe A, mettent en évidence l'accélération de la convergence par le changement de variable fractal et les préconditionneurs diagonaux.

Finalement, quel que soit le système choisi  $\mathbf{A}_{\text{MAP}} \cdot \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{b}$  ou (6.21), le nombre d'opérations global de la méthode est de l'ordre de  $(23 + 33 N_{\text{iter}}) \times n$  pour les GC et de  $(23 + 34 N_{\text{iter}}) \times n$  pour les GC avec un préconditionneur diagonal. Dans toute la suite, c'est la méthode de reconstruction avec changement de variable fractal et le préconditionneur  $\mathbf{M}_{\text{opt}}$  qui sont utilisés pour les reconstructions, parce que c'est la méthode qui converge le plus vite. Je note cette méthode FrIM MAP dans la suite de ce manuscrit. Thiébaud et Tallon (2008) ont étudié la vitesse de convergence de FrIM MAP en fonction de  $n$  et du RSB pour une turbulence de Kolmogorov (figures 12 et 13 dans l'annexe A). La figure 13 montre que la vitesse de convergence dépend peu de  $n$ , en revanche elle diminue lorsque le RSB augmente. Les RSB présentés sur cette figure s'échelonne entre 2 et 50.

#### 6.4.2 Algorithme des gradients conjugués préconditionnés

- estimée initiale  $\mathbf{x}_0$
- $k = 0$
- $\Delta_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0$
- Pour  $k = 0, 1, \dots$  jusqu'à la convergence Faire :
- $\mathbf{z}_k = \mathbf{M} \cdot \Delta_k$  (préconditionneur)
- $\rho_k = \Delta_k^T \cdot \mathbf{z}_k$
- $\mathbf{p}_k = \mathbf{z}_k$
- Si  $k \neq 0$ , alors  $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k + (\rho_k / \rho_{k-1}) \mathbf{p}_{k-1}$
- $\mathbf{q}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_k$
- $\alpha_k = \rho_k / (\mathbf{p}_k^T \cdot \mathbf{q}_k)$
- $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$
- $\Delta_{k+1} = \Delta_k - \alpha_k \mathbf{q}_k$
- $k \leftarrow k + 1$

### 6.5 Conclusion

Ce chapitre résume l'état de l'art des algorithmes de reconstruction rapides pour des surfaces d'onde à grand nombre de paramètres. La figure 6.2 résume alors les progrès faits en terme de coûts de calcul grâce à ces méthodes. La bande hachurée représente toujours le nombre d'opérations d'une multiplication matrice-vecteur (MMV) entre 500 Hz et 2 kHz, tandis que les besoins des autres méthodes sont tracés pour une fréquence de 1 kHz uniquement.

Les nouveaux algorithmes abaissent la dépendance en  $n$  du nombre d'opérations à

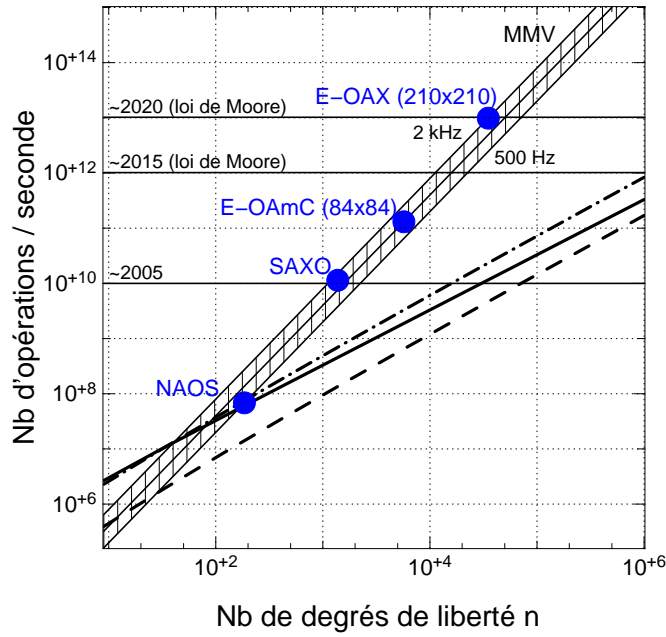


FIG. 6.2 – Comparaisons des coûts calculatoires pour la reconstruction de surface d’onde en fonction du nombre de paramètres  $n$ . Même légende que pour la figure 2.15. La bande hâchurée représente les coûts de la méthode MMV entre 500 Hz et 2 kHz. Méthode FTR de Poyneer et Véran (2005) (trait tireté), méthode FrIM MAP de Thiébaud et Tallon (2008) pour 10 itérations (trait plein), méthode de GC avec préconditionnement dans Fourier de Yang et al. (2006) pour 5 itérations (trait pointillé-tireté). Les coûts de ces méthodes sont évalués à 1 kHz et en négligeant les contraintes de dimensions des supports (puissance de 2) nécessaires à des implémentations rapides.

des valeurs proportionnelles à  $n \ln(n)$  ou  $n$ . La dépendance en  $n$  semble immédiatement plus intéressante que celle en  $n \ln n$ . Ce serait néanmoins se méprendre que de conclure ainsi, parce que les nombres de paramètres  $n$  envisagés ne sont pas suffisamment grands pour que le facteur  $\ln n$  soit fortement pénalisant. Par exemple, pour  $n = 10^5$ ,  $\ln n \simeq 11.5$ . C’est ainsi que la méthode FTR de Poyneer et al. (2002) fournit une reconstruction moins coûteuse que la méthode FrIM MAP qui s’évalue en  $\mathcal{O}(n)$  opérations. Néanmoins, je rappelle que la méthode FTR n’est pas un estimateur de type MAP et qu’elle n’est pas nécessairement adaptée à la tomographie du fait de la méthode *ad hoc* d’extension.

La méthode FrIM MAP et la méthode de gradients conjugués avec préconditionnement dans Fourier (FD-PCG) sont les deux reconstructions de type MAP les moins coûteuses. Elles sont représentées sur la figure 6.2 par un trait plein et un trait pointillé-tireté respectivement. La méthode FTR itérative de Correia et al. (2008) pour 2 itérations engendrerait sur la figure une droite confondue avec celle de la méthode FD-PCG.

FrIM MAP est la méthode de reconstruction qui permet de tenir compte du rapport signal à bruit et de la statistique de la surface d’onde pour régulariser la solution, tout en offrant le plus faible coût de reconstruction.

Je tiens à faire remarquer que la figure 6.2 ne prend pas en compte d’éventuelles stratégies d’implémentations particulières à chaque méthode. Les reconstructions utilisant la FFT imposent simplement un nombre de paramètres  $n$  de la forme  $2^p \times 2^p$ . La méthode fractale requiert une description  $2^p + 1 \times 2^p + 1$ . De ce point de vue,

les contraintes sont donc équivalentes. Il est vrai que le temps de calcul réel peut être optimisé pour chaque méthode en fonction de son implémentation, ou de sa parallélisation possible. Le but de cette figure est simplement de donner un ordre de grandeur des coûts calculatoires de ces algorithmes, pour souligner leur intérêt.

C'est la méthode FrIM MAP et ses performances qui sont étudiées très en détail dans la suite de cette partie.

## Chapitre 7

# Comparaison des reconstruteurs par simulations

Je présente dans ce chapitre des simulations de reconstructions de surface d'onde turbulente, effectuées à l'aide de l'algorithme de reconstruction des gradients conjugués (GC) combiné avec l'approximation fractale (*cf.* chapitre 6). Dans un premier temps, l'algorithme est utilisé pour la reconstruction de type maximum de vraisemblance sur des systèmes de type optiques adaptatives extrêmes (OAX). Puis les performances sont comparées à celles de la méthode FrIM MAP, c'est-à-dire de l'estimateur MAP construit à partir de l'approximation fractale (*cf.* section 6.4.1). Une partie de ces résultats est contenue dans l'article reproduit dans la section 5.3. Je commence donc pas résumer les points importants des résultats présentés dans cet article. La rapidité de l'algorithme et la qualité de la reconstruction sont toutes deux analysées.

Par la suite, j'étudie également l'impact d'une erreur de modélisation des corrélations des erreurs de mesures et l'impact d'une erreur d'*a priori* sur la reconstruction de surface d'onde. Là encore, je fournis un résumé des résultats présentés dans l'article *Wavefront Reconstruction with Laser Guide Star Spot elongation* reproduit dans la section 7.4. Cet article a fait l'objet d'une présentation à la conférence SPIE de Marseille en Juin 2008. D'autres erreurs de modélisation et leur impact sur la qualité de la reconstruction sont analysées dans ce chapitre.

Les valeurs de  $r_0$  citées ci-après sont calculées à la longueur d'onde de l'analyseur  $\lambda_{AO}$  si celle-ci n'est pas précisée. Les erreurs de mesure de l'analyseur sont exprimées, comme les mesures, en différence de phase entre deux bords d'une sous-pupille à la longueur d'onde de l'analyseur, c'est-à-dire en radian/ $d_l$ . L'erreur de reconstruction est évaluée par  $a_{\phi^{\text{res}}}$ , en radian<sup>2</sup>, en moyenne sur la pupille, avec  $\phi^{\text{res}} = 2\pi\mathbf{w}^{\text{res}}/\lambda_{AO}$ .

Dans tout ce chapitre, les simulations sont faites avec  $d_l = d_e$ , c'est-à-dire que la surface d'onde turbulente simulée et celle reconstruite sont paramétrées avec un pas d'échantillonnage  $d_e$ , en représentation zonale, égal à  $d_l$ , la taille d'une sous-pupille de l'analyseur. En d'autres termes, le modèle de Fried de l'analyseur est un modèle parfait du processus de mesure. La qualité de la reconstruction est évaluée à partir de l'erreur  $\langle\epsilon^2\rangle_{\text{reconst}}$  définie par les équations (5.11)-(5.13).

## 7.1 Simulation de surface d'onde turbulente

L'étude des algorithmes de commande pour l'optique adaptative passe par la simulation du comportement du système. J'ai donc été amenée à simuler des surfaces d'onde au cours de ma thèse.

À partir des différentes paramétrisations de la surface d'onde introduites dans la section 3.2 et de la fonction de structure ou du spectre de la surface d'onde, il est possible de construire divers générateurs de surfaces d'onde turbulentes. La méthode la plus largement utilisée repose sur la transformée de Fourier discrète (TFD) de la surface d'onde, donc sur une décomposition en coefficients  $\tilde{\mathbf{w}}_{k,l}$  tels que définis par les équations (3.25)-(3.26). J'ai étudié cette méthode de simulation pour générer des écrans de phase turbulents pour les grands télescopes (Lane et al., 1992).

Pour chaque fréquence  $(k, l)$ , on génère une variable aléatoire complexe Gaussienne centrée telle que  $\langle |\tilde{\mathbf{w}}_{k,l}|^2 \rangle = S_w(\sqrt{k^2 + l^2})$ . De cette façon, on obtient à partir des parties réelles et imaginaires de la TFD de cette décomposition, deux surfaces d'onde turbulentes indépendantes.

Par cette technique, la représentation des basses fréquences est limitée par la taille de l'écran de phase final. Or les bas ordres sont ceux qui contiennent le plus d'énergie dans la turbulence, il est donc important de bien les simuler. Lane et al. (1992) ont proposé une méthode d'introduction de sous-fréquences, mais son implémentation ne m'a pas conduit à des résultats satisfaisants. Dans la littérature, le problème des basses fréquences pour les simulations est généralement résolu en générant un écran de phase beaucoup plus large que la pupille afin d'assurer une représentativité correcte des bas ordres de la turbulence. J'ai écarté cette solution pour générer mes simulations parce que je considère des pupilles larges dans le cas des télescopes hectométriques et la représentation en mémoire serait alors très coûteuse.

J'ai finalement considéré la méthode fractale de Thiébaud et Tallon (2008) pour simuler les surfaces d'onde turbulentes. Cette méthode permet de générer une surface d'onde  $\mathbf{w}$  dans une représentation zonale de dimension  $2^p + 1 \times 2^p + 1$ , à partir d'un vecteur  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^{(2^p+1) \times (2^p+1)}$  valeurs aléatoires indépendantes et de statistique normale (*i.e.* Gaussienne centrée réduite). Ceci s'effectue en seulement  $6 \times n$  opérations,  $n = (2^p + 1) \times (2^p + 1)$ , en appliquant l'opérateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot \mathbf{u}.$$

L'algorithme de Thiébaud et Tallon (2008) suppose une statistique de Kolmogorov. Toutefois, j'ai précisé au début de ce manuscrit que pour les télescopes hectométriques l'impact d'une échelle externe de cohérence spatiale finie  $L_0$  s'avère important (Conan, 2000; Ellerbroek, 1997). Afin de pouvoir tenir compte de cet effet dans mes simulations, j'ai modifié la définition de l'opérateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  pour qu'il puisse caractériser une statistique de turbulence de type von Kármán.

D'après le résumé de la méthode présentée dans la section 3.2.2, la construction de l'algorithme de points milieux, et donc de  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ , découle de la variance locale  $\sigma_w^2$  et des valeurs de la fonction de structure aux différentes échelles  $d_e, \sqrt{2}d_e, 2d_e, 2\sqrt{2}d_e$  et ainsi de suite jusqu'à  $\sqrt{2}L$  où  $L$  est la longueur d'un côté de la surface d'onde. Afin d'étendre le générateur fractal à une statistique de type von Kármán, il suffit de remplacer ces valeurs de variance et de fonction de structure par celles fournies par le modèle de von Kármán. Ceci est d'autant plus simple que la statistique de von Kármán suppose une valeur finie de la variance locale  $\sigma_w^2$ , dépendante du rapport  $D/L_0$ . La procédure

proposée par Thiébaud et Tallon (2008) pour une statistique de Kolmogorov implique, elle, de fixer arbitrairement la valeur de la variance locale  $\sigma_w^2$ , celle-ci étant infinie en théorie.

Finalement, il est désormais possible de simuler des surfaces d'onde turbulentes avec un opérateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  issu de la statistique normalisée décrite dans la section 3.1. Ceci signifie que, dans les simulations,  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  dépend de  $D/d_e$ ,  $D/r_0$  et  $D/L_0$ . Je décris dans le prochain paragraphe les implications de cette nouvelle statistique pour l'opérateur fractal.

### La saturation de la fonction de structure dans la représentation fractale

Dans toute la suite de ce manuscrit, l'opérateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  est normalisé, c'est-à-dire qu'il est construit à partir de la fonction de structure normalisée  $\underline{D}_w$  définie par l'équation (3.14). Le générateur  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  respecte la nature fractale de la fonction de structure de la phase turbulente si on peut multiplier la surface d'onde normalisée  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot \mathbf{u}$  par  $(D/r_0)^{5/6}$  pour obtenir la fonction de structure désirée. Ceci n'est vrai que pour la turbulence de Kolmogorov. En effet, l'opérateur normalisé  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  pour von Kármán est défini pour un certain rapport  $D/L_0$ . Seul le rapport  $D/r_0$  est ajustable sur la surface d'onde pour un changement d'échelle. La saturation de la fonction de structure, *via*  $D/L_0$ , est figée à la construction de l'opérateur normalisé  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ .

Puisque la variance de la phase  $\sigma_w^2$  est infinie pour la turbulence de Kolmogorov, une valeur arbitraire  $\sigma_w^2$  a été suggérée par Thiébaud et Tallon (2008) pour construire l'opérateur  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  de Kolmogorov. Ils ont choisi  $\sigma_w^2$  égale à la moitié de la fonction de structure calculée sur la plus grande échelle de l'écran de phase, *i.e.*  $\sigma_w^2 = \frac{1}{2} C_w(L)$ , avec  $L$  la diagonale de l'écran de phase. Ce choix peut être interprété comme la décorrélation des plus basses fréquences, introduisant une saturation de la fonction de structure. Puisque la pupille est toujours plus petite que l'écran de phase, on a  $L \geq \sqrt{2} D$ . Donc la valeur minimale de variance imposée par l'opérateur fractal est  $\sigma_w^2 \geq 3.44 (\sqrt{2} D/r_0)^{5/3}$ .

La figure 7.1 montre les différentes fonctions de structure. Celle de von Karman est calculée pour des conditions de turbulence typiques à Cerro Paranal (VLT au Chili) (Martin et al., 2000). On observe que la variance utilisée par la méthode fractale avec le modèle de Kolmogorov induit des corrélations plus fortes à grande échelle que ce que fait le modèle de von Kármán. Ces corrélations augmentent encore avec le diamètre du télescope considéré. Néanmoins, l'approximation du modèle de Kolmogorov par  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  a l'avantage de suivre la loi de puissance de Kolmogorov dans le domaine inertiel.

On peut désormais réécrire la covariance normalisée de la surface d'onde utilisée par le générateur fractal :

$$\underline{C}_w(\bar{r}) = \begin{cases} 3.44 \left[ \left( \frac{\sqrt{2}(N-1)d_e}{D} \right)^{5/3} - \bar{r}^{5/3} \right] & \text{si } D/L_0 = 0 \\ 0.0858 \left( \frac{D}{L_0} \right)^{-5/3} \left( 2\pi\bar{r} \frac{D}{L_0} \right)^{5/6} K_{5/6} \left( 2\pi\bar{r} \frac{D}{L_0} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\bar{r} = r/D$  et pour un écran de phase  $N \times N$  échantillonné avec un pas  $d_e$ .

C'est à partir de ce formalisme que j'ai simulé des surfaces d'onde turbulentes pour comparer les méthodes de reconstruction.

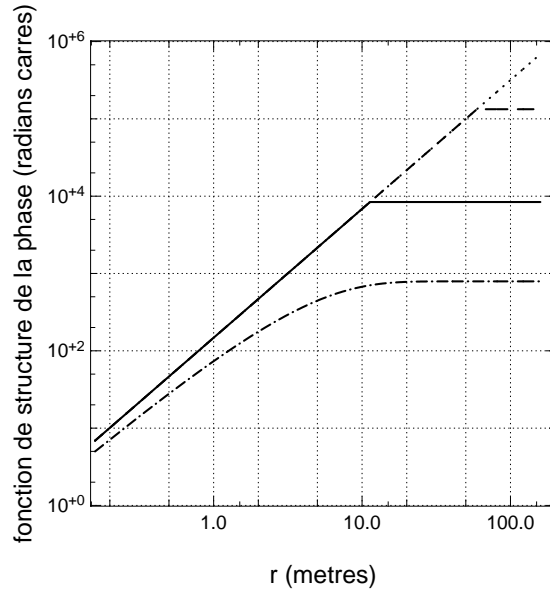


FIG. 7.1 – Modèles de fonction de structure de surfaces d'onde turbulentes. *trait pointillés* : loi théorique de Kolmogorov en puissance  $5/3$ . *trait tiretés* : modèle de Kolmogorov par le générateur fractal avec le niveau de saturation minimum pour un télescope de 42m. *trait plein* : modèle de Kolmogorov par le générateur fractal avec le niveau de saturation minimum pour un télescope de 8ms. *trait pointillés-tiretés* : fonction de structure de von Kármán pour  $r_0 = 0.159$  m et  $L_0 = 25$  m.

## 7.2 Les reconstructions de type maximum de vraisemblance sur des grands systèmes

Dans le cas des optiques adaptatives mono-conjuguées (OAmC) ou extrêmes (OAX), c'est-à-dire avec un seul analyseur et un seul miroir déformable, la reconstruction de maximum de vraisemblance zonale, *i.e.* avec  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  ou  $\mathbf{A}_{\text{MNML}}$  (*cf.* équations (6.4) ou (6.1)), peut être envisagée.

Les propriétés du reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  pour la géométrie de Fried ont déjà été étudiées dans la littérature (Fried, 1977; Noll, 1978; Herrmann, 1980), concernant des petits systèmes de quelques dizaines de paramètres au plus. On sait que son coefficient de propagation du bruit

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} v_{\text{MNML}}/\sigma_e^2 \quad (7.1)$$

augmente proportionnellement à  $\ln(n)$ . J'ai étendu cette étude à de plus grands systèmes, *i.e.* jusqu'à  $n \sim 2 \times 10^5$ , à partir de simulations. Ces résultats sont présentés dans l'article reproduit dans la section 5.3. Je rappelle ici les points importants de cette analyse.

### 7.2.1 Le préconditionnement pour la reconstruction de maximum de vraisemblance

J'ai pu facilement effectuer des simulations de reconstructions de type maximum de vraisemblance sur des grands systèmes grâce à l'algorithme des GC. Dans le cas du reconstructeur zonal,  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$ , j'ai préconditionné le système avec le précondition-

neur optimal défini par l'équation (6.24) appliqué à la matrice  $\mathbf{A}_{\text{MNML}}$ . Cependant, la matrice  $\mathbf{A}_{\text{MNML}}$  n'est pas inversible, donc je n'ai préconditionné que les modes non singuliers, les autres éléments diagonaux du préconditionneur étant mis à 1.

Pour le reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  (cf. équation (6.5)), j'utilise l'algorithme des GC avec le changement de variable fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  et le préconditionneur est aussi calculé à partir de l'équation (6.24) appliqué cette fois à la matrice  $\mathbf{A}_{\text{KL}}$ . De la même façon, je n'ai pas préconditionné les modes singuliers. Cette méthode est notée FrIM MNML par la suite parce qu'elle exploite l'approximation fractale  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  pour une reconstruction de type maximum de vraisemblance de moindre norme.

Ainsi, dans ces 2 cas, le préconditionneur optimal est calculé d'une façon plus générale par

$$\mathbf{M}_{\text{opt},ii} = \begin{cases} \frac{A_{ii}}{\sum_j A_{ij}^2} & \text{si } \sum_j A_{ij}^2 \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.2)$$

L'hypothèse est faite, dans les études antérieures (Fried, 1977; Noll, 1978; Herrmann, 1980) comme dans mes simulations, que la variance du bruit de mesure est uniforme :  $\sigma_{\mathbf{e}}^2 = \sigma_{\mathbf{e}'}^2$ .

## 7.2.2 Résultats

D'après l'équation (5.13) et l'expression du reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$ , la propagation du bruit

$$\gamma_{\text{MNML}} = \text{tr}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}^T) \quad (7.3)$$

ne dépend pas du signal, *i.e.* de la turbulence. Elle est donc évaluée par des reconstructions de surface d'onde nulle,  $\mathbf{w} = 0$ , à partir de mesures bruitées.

Les résultats sont présentés sur la figure 7.2, à l'aide de symboles carrés pour une pupille carrée et de symboles circulaires pour une pupille circulaire.

### Loi de propagation du bruit pour une pupille carrée

La loi de Fried (1977) est

$$\gamma_{\text{MNML}} \simeq 0.6558 + 0.16028 \ln n. \quad (7.4)$$

Mon ajustement donne

$$\gamma_{\text{MNML}} \simeq 0.748 + 0.138 \ln n. \quad (7.5)$$

On note que la loi avancée par Fried (1977) pour des pupilles carrées est très proche de mon ajustement. Fried (1977) a évalué cette loi à partir de simulation sur des systèmes plus petit que  $41 \times 41$ , ce qui peut expliquer l'écart quand  $n$  croît.

### Loi de propagation du bruit pour une pupille circulaire

Noll (1978) a proposé une loi pour des pupilles circulaires :

$$\gamma_{\text{MNML}} \simeq 0.0136 + 0.1592 \ln n. \quad (7.6)$$

Mon ajustement fournit

$$\gamma_{\text{MNML}} \simeq 0.842 + 0.127 \ln n. \quad (7.7)$$



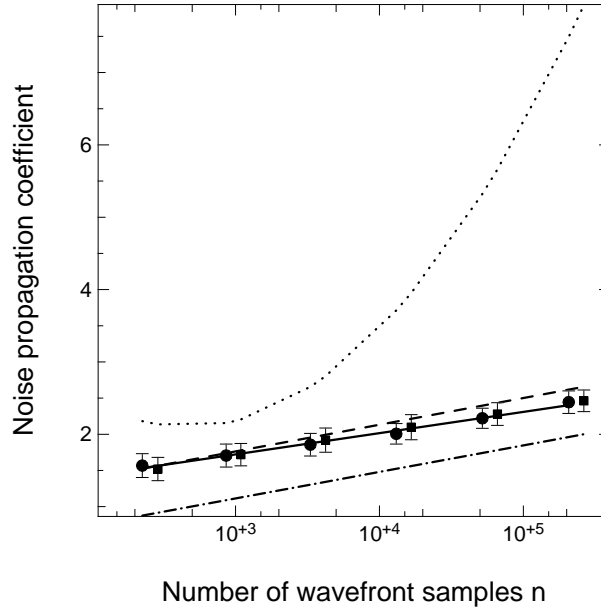


FIG. 7.2 – Coefficient de propagation du bruit  $\gamma_{\text{MNML}}$  pour des ouvertures carrées (symboles carrés) et des ouvertures circulaires (symboles circulaires) en fonction du nombre de paramètres  $n$ . *Trait tireté-pointillé* : Loi de Noll (1978) pour des ouvertures circulaires. *Trait pointillé* : Loi de Poyneer et al. (2002) pour une reconstruction parla méthode FTR. *Trait tireté* : Loi de Fried (1977) pour une ouverture carrée. *Trait plein* : Loi ajustée à partir de mes simulations pour des ouvertures circulaires.

La pente est bien identifiée par Noll (1978), mais la constante est largement sous-estimée. Noll (1978) lui-même explique qu’il a sans doute sous-estimé des aberrations de bas ordres, responsables de cet écart, dans son calcul.

En conclusion, la loi d’évolution de  $\gamma_{\text{MNML}}$  dépend peu du caractère carré ou circulaire de la pupille. De plus, les coefficients de cette loi logarithmique ont été ajustés à partir de simulations sur de plus grands systèmes.

La méthode de reconstruction FTR (*cf.* section 6.1) fournit une reconstruction de type maximum de vraisemblance, mais avec une régularisation particulière imposée par la méthode d’extension associée. Le terme de variance  $v$  de l’erreur pour cette méthode est également indépendant de la turbulence (Poyneer et al., 2002). Ceci permet de définir le coefficient de propagation du bruit de cette méthode  $\gamma_{\text{FTR}}$  qui a été évalué par Poyneer et al. (2002) :

$$\gamma_{\text{FTR}} \simeq 0.1456 (\ln n)^2 - 1.7922 \ln n + 7.6175. \quad (7.8)$$

On observe sur la figure 7.2 que cette méthode, utilisée dans le cas de la géométrie de Fried, n’est pas adaptée parce qu’elle ne contraint pas correctement le mode gauffre, non vu par le Shack-Hartmann (Poyneer et al., 2002). La méthode de reconstruction par transformée de Fourier offre néanmoins de meilleurs résultats dans la géométrie d’Hudgin, ou avec un autre modèle d’analyseur (Poyneer, 2003; Poyneer et al., 2003).

D’autres résultats de simulations sont inclus dans l’article reproduit dans la section 5.3, montrant que l’erreur de reconstruction  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  du reconstituteur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  est dominée par la propagation du bruit. J’ai également comparé les erreurs normalisées  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / \sigma_e^2$  pour les reconstituteurs  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  et FrIM MNML. Les résultats sont

présentés sur la figure 7.3. Il est intéressant de noter que l'étude algébrique menée dans la section 5.4 ne permet pas de comparer les erreurs de  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  avec celles des autres reconstitueurs, on observe sur cette figure que la méthode FrIM MNML produit toujours une erreur plus faible que celle du reconstituteur zonal.

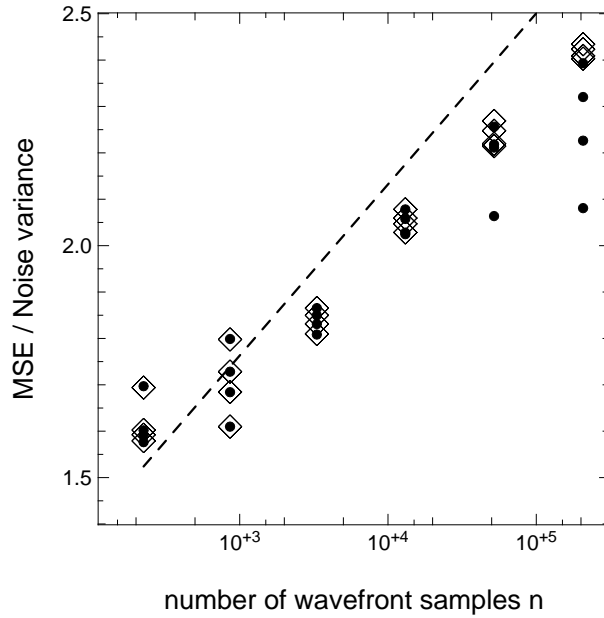


FIG. 7.3 – Erreur normalisée  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / \sigma_e^2$  pour les reconstitueurs  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  (grands symboles blancs) et FrIM MNML (petits symboles noirs). Trait tireté : Loi de Fried (1977) pour  $\gamma_{\text{MNML}}$ . Les symboles représentent la moyenne sur 50 reconstructions, avec l'écart-type, à partir d'une turbulence de Kolmogorov observée sur une pupille circulaire.  $\sigma_e = \sqrt{0.1} \text{rad.} / d_l$ . Les systèmes simulés ont des dimensions  $D/d_l$  : 16, 32, 64, 128, 256, 512. Pour chaque  $D/d_l$ , *i.e.* chaque  $n$  en abscisse, les conditions de turbulence simulées sont successivement  $r_0 = 0.1 d_l$ ,  $0.5 d_l$ ,  $d_l$ , and  $2 d_l$ .

De plus, l'algorithme des GC avec le reconstituteur zonal n'est accéléré, dans mes simulations, que par le préconditionneur diagonal, ce qui a un effet très réduit. Une centaine d'itérations sont nécessaires pour converger lorsque  $n$  est de l'ordre de 60. En revanche, la méthode FrIM MNML bénéficie à la fois du changement de variable fractal et du préconditionneur diagonal, ce qui lui permet de converger en moins de 10 itérations. Enfin, j'ai vérifiée que la vitesse de convergence de FrIM MNML est semblable à celle de FrIM MAP, c'est-à-dire qu'une dizaine d'itérations suffisent pour la reconstruction.

### 7.3 La comparaison de FrIM MNML et FrIM MAP

Les simulations présentées ci-dessus montrent que FrIM MNML est plus performant que le reconstituteur de maximum de vraisemblance zonal, et l'étude algébrique (*cf.* 5.4) démontre que l'erreur produite par le reconstituteur MAP est inférieure à celle du reconstituteur FrIM MNML. C'est pourquoi, je considère dans la suite que FrIM MNML est le reconstituteur de maximum de vraisemblance de référence, et j'étudie l'intérêt d'utiliser FrIM MAP par rapport à cette référence, sur des systèmes avec  $n$

compris entre  $10^2$  et  $2 \times 10^5$ .

Dans un premier temps, je montre que la vitesse de convergence ne dépend pas du type de turbulence considérée (simulée et utilisée dans les *a priori*). Ensuite, une comparaison des performances en termes d'erreur,  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / \sigma_e^2$ , complète les résultats plus nombreux contenus dans l'article de la section 5.3.

### 7.3.1 La vitesse de convergence de FrIM MAP en fonction de l'échelle externe

Je montre ici que la prise en compte d'une échelle externe finie  $L_0$  de la turbulence ne modifie pas significativement la vitesse de convergence de la méthode FrIM MAP.

J'ai simulé pour cela les mêmes conditions de reconstruction que les figures 12 et 13 de Thiébaud et Tallon (2008), mais avec une échelle externe de cohérence spatiale de la turbulence  $L_0 = 44 d$ , où  $d$  est la dimension d'une sous-pupille. Pour des sous-pupilles de 50 cm de côté, cela revient à une échelle externe  $L_0 = 22$  m. L'ensemble des résultats sont représentés sur les figs. 7.4 et 7.5. Les différents types de courbe (traits plein, tireté, pointillé) correspondent à des rapports signal-à-bruit (RSB) compris entre 2 et 40. Les 4 jeux de courbes (du haut vers le bas pour la figure 7.4 et du bas vers le haut pour la figure 7.5) sont associés aux dimensions de surface d'onde échantillonnées suivantes :  $n = 257 \times 257$ ,  $129 \times 129$ ,  $65 \times 65$  et  $33 \times 33$ . Les graphiques de la figure 7.4 montrent l'évolution de l'erreur d'estimation  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  en fonction du nombre d'itérations des gradients conjugués. L'estimée de départ est toujours un front d'onde nul sur toute la grille. Les lignes horizontales démarquent les rapport de Strehl équivalents à une erreur de correction égale au niveau de bruit introduit dans la simulation  $\sigma_e = 1, 0.3$  et  $0.1 \text{radian}/r_0$ .

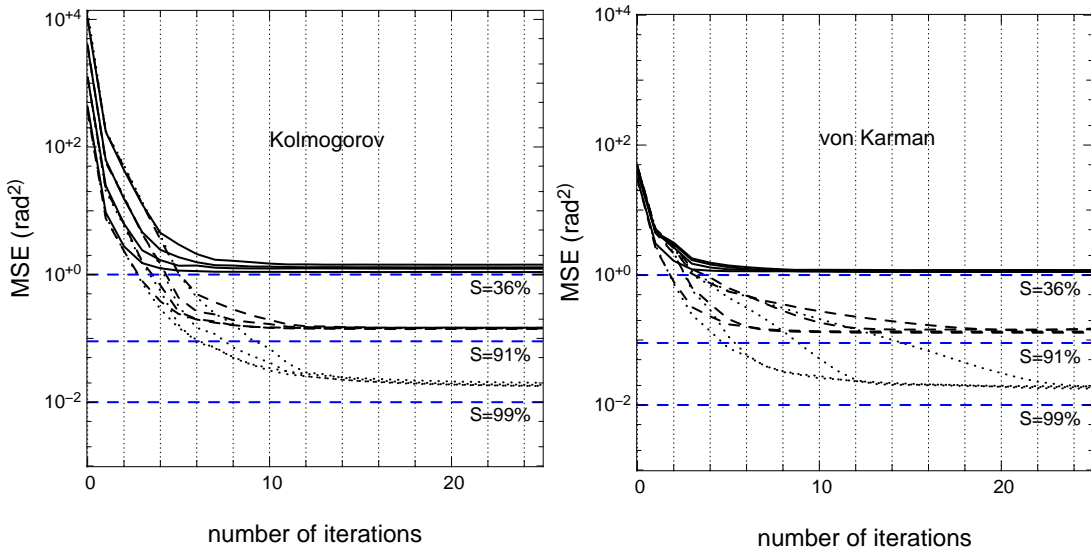


FIG. 7.4 – Convergence de l'algorithme FrIM MAP observant une turbulence de type Kolmogorov (à gauche) et de type von Kármán (à droite). Les courbes représentent l'erreur quadratique moyenne  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  en radians<sup>2</sup> en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme des gradients conjugués préconditionnés.

Les deux jeux de simulations sont réalisées à  $d_l/r_0$  constant. En conséquence, sur la figure 7.4, les surfaces d'onde de type Kolmogorov simulées par la méthode fractale ont

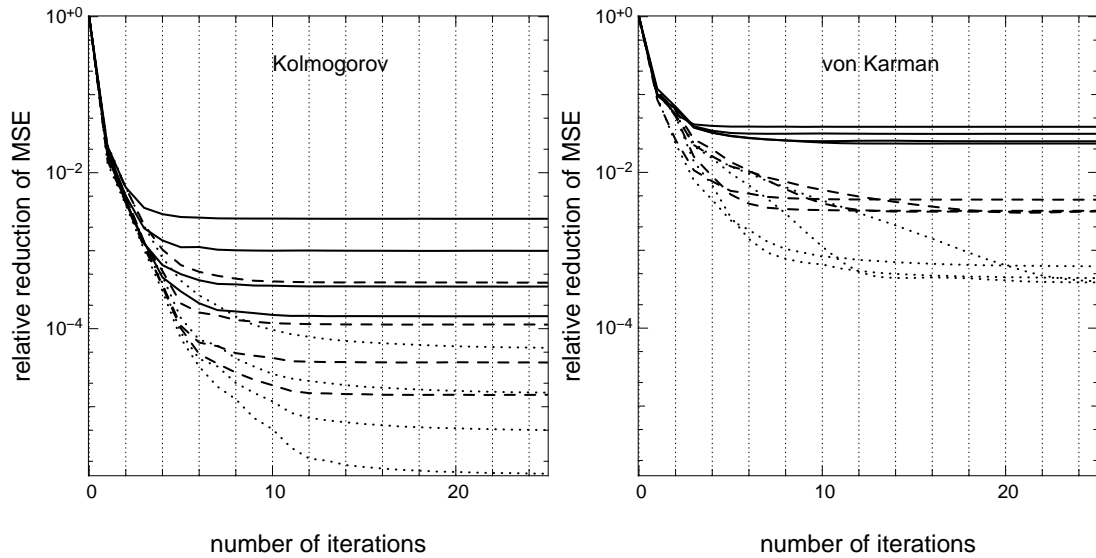


FIG. 7.5 – Réduction relative des erreurs sur la pupille ( $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / a_w$ ) avec la méthode FrIM MAP, observant une turbulence de type Kolmogorov (à gauche) et de type von Kármán (à droite).

une variance de phase moyennée sur la pupille,  $\sigma_w^2$ , croissante avec l'échantillonnage de la surface d'onde  $D/d_l$ . Ceci est dû au choix arbitraire de la variance locale de la phase dans l'algorithme de simulation fractal, qui croît elle aussi avec  $D/d_l$ . En revanche, pour la turbulence de von Kármán, la variance est fixée par les rapports  $D/L_0$  et  $D/d_l$ . Même si l'échantillonnage sur l'ouverture du télescope augmente de  $D/d_l = 32$  à  $D/d_l = 256$ , cette variance  $\sigma_w^2$  varie peu. C'est pour cette raison que toutes les courbes du graphique de droite de la figure 7.4 partent approximativement du même niveau d'erreur  $a_w$ , contrairement à celles du graphique de gauche.

Cette explication aide également à interpréter les différences entre les deux graphiques de la figure 7.5. Je rappelle que l'ordre vertical des courbes est inversé par rapport à celles de la figure 7.4 : les courbes du haut correspondent aux dimensions  $33 \times 33$  tandis que celles d'en bas représentent le cas  $257 \times 257$ . Le graphique du cas Kolmogorov met en évidence que la réduction de l'erreur est d'autant plus significative que l'erreur de départ est importante. Ceci s'applique de même au graphique de droite, mais surtout cela permet d'interpréter la différence de hauteur frappante entre les courbes de gauche et de droite. Puisque les surfaces d'onde simulées de type von Kármán sont bien moins turbulentes que celles de type Kolmogorov, alors la réduction relative est moins importante pour le cas von Kármán.

Pour les deux types de turbulence, le niveau de réduction obtenu est fonction du rapport signal à bruit. Dans les deux cas, la vitesse de convergence augmente lorsque le RSB diminue. Pour les petits systèmes,  $33 \times 33$  et  $65 \times 65$ , la vitesse de convergence est semblable pour les deux modèles de turbulence. En revanche, à fort rapport signal à bruit pour de plus grandes dimensions, le modèle de von Kármán semble converger plus lentement.

### 7.3.2 La comparaison des erreurs de FrIM MAP et de FrIM MNML

Tout d'abord, la figure 7.6 vient soutenir la conclusion du paragraphe précédent selon laquelle les performances de FrIM MAP sont semblables que la turbulence soit du type Kolmogorov ou du type von Kármán. Ceci est observé sur deux cas typiques. Dans le cas d'un télescope de 8 mètres, j'ai choisi des dimensions cohérentes avec une optique adaptative extrême (OAX), *i.e.*  $r_0/d_l = 1.25$  à la longueur d'onde de l'analyseur. De plus, pour un tel diamètre, l'échelle externe de von Kármán  $L_0$  est trois fois plus grande que le diamètre. Au contraire, le télescope de 42m simulé sur le graphique de droite correspond à une optique adaptative mono-conjuguée (OAmC), avec  $r_0$  à la longueur d'onde de l'analyseur plus petit que la taille d'une sous-pupille,  $r_0/d_l = 0.65$ . D'autre part, dans ce cas, l'échelle externe de cohérence spatiale de la turbulence mesure à peine la moitié du diamètre de la pupille.

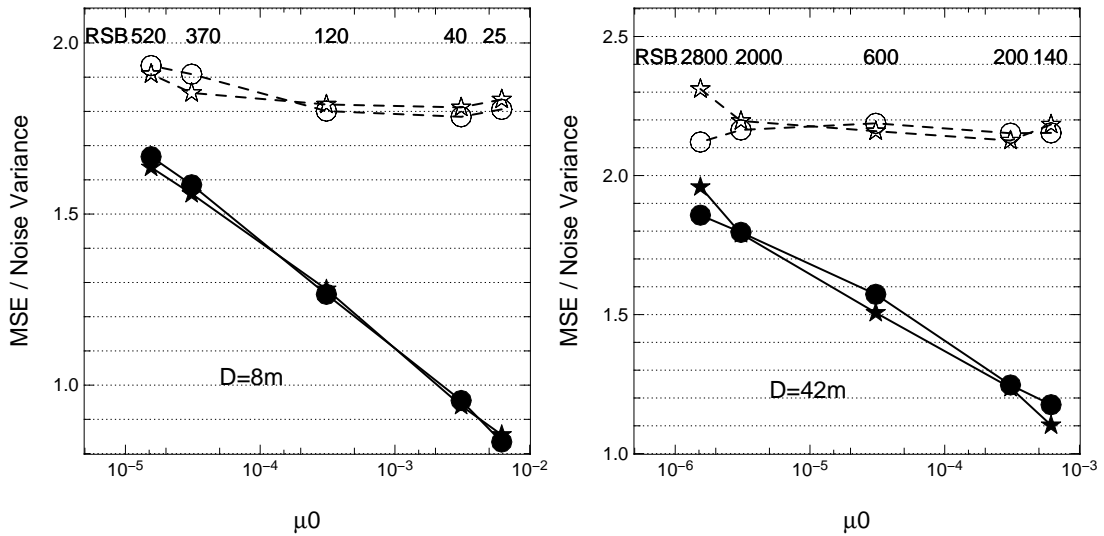


FIG. 7.6 – Erreur normalisée  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / \sigma_e^2$  en fonction de  $\mu_0$  (*cf.* équation (5.15)). À gauche :  $D = 8$  m et  $D/d_l = 40$ . À droite :  $D = 42$  m et  $D/d_l = 84$ . Les symboles marquent la moyenne sur 100 réalisations de turbulence reconstruites. *En noir* : FrIM MAP. *En blanc* : le maximum de vraisemblance de moindre norme dans l'espace fractal, FrIM MNML. Deux types de turbulence sont comparés : Kolmogorov (cercles) et von Kármán (étoiles) avec  $L_0 \simeq 22$  m. Les valeurs approchées de RSB simulés sont notées à la verticale des symboles correspondants.

Par ailleurs, on note sur ces graphiques l'écart croissant entre les erreurs des estimateurs FrIM MNML et FrIM MAP, à mesure que  $\mu_0 = \sigma_e^2 / (D/r_0)^{5/3}$  augmente. J'ai déjà signalé que  $\mu_0$  est lié au RSB. Les valeurs de RSB sont notées sur les graphiques de la figure 7.6 pour la turbulence de Kolmogorov. Les valeurs simulées avec von Kármán sont légèrement plus faibles, mais pas de façon significative.

L'association  $\mu_0$  - RSB est définie de façon unique une fois que l'on a fixé  $D/L_0$  et  $D/d_l$  pour le système, par la relation (6.17). C'est pour cela qu'il n'est pas possible de le représenter comme une deuxième paramétrisation de l'axe des abscisses sur les dernières figures de l'article de la section 5.3, sur la comparaison des reconstitueurs. La figure 7.6 fournit donc un éclairage supplémentaire. On remarque que pour un RSB de l'ordre de 100, l'estimateur FrIM MAP permet de réduire l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  d'un facteur 1.8 à 2, par rapport au reconstitueurs FrIM MNML.

## 7.4 L'impact d'une erreur de modélisation des corrélations des mesures : application aux étoiles laser

L'estimateur MAP repose sur une modélisation complète du processus de mesure, c'est-à-dire le modèle  $\mathbf{S}$ , mais aussi les corrélations du bruit et les *a priori* sur les paramètres. Dans cette section, un article analysant l'impact d'une modélisation correcte des corrélations du bruit dans le cas de la reconstruction de surface d'onde turbulentes avec des étoiles de référence laser est reproduit. Cet article a été présenté à la conférence SPIE de près l'article une synthèse des résultats est proposée.

### 7.4.1 Wavefront Reconstruction with Laser Guide Star Spot elongation

# Wavefront reconstruction with laser guide star spot elongation

Michel Tallon, Isabelle Tallon-Bosc, Clémentine Béchet, Eric Thiébaud

Université de Lyon, Lyon, F-69003, France ; Université Lyon 1, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval, F-69230, France ; CNRS, UMR 5574, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon ; Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, F-69007, France

## ABSTRACT

The current projects of Extremely Large Telescopes rely on adaptive optics systems using several sodium laser guide stars (LGSs). Because of the thickness of the sodium layer, the subapertures of a Shack-Hartmann wavefront sensor will see the LGS all the more elongated as its position is distant from the launching point of the laser. This effect is significant and prompts the lasers to be launched from behind the secondary instead of from around the telescope. The elongations increase centroiding errors and new smarter algorithms have been designed to mitigate this effect, but the loss of accuracy is still significant. Further, the measurement uncertainties are no more uniform across the pupil and correlations are introduced between the two coordinates of the gradients. From numerical simulations, we analyze the benefit of taking into account this structured correlations in wavefront reconstruction algorithms and compare the reconstruction accuracy when using least squares, weighted least squares, or minimum variance using von Kármán turbulence priors.

For a single LGS launched behind the secondary, numerical simulations show effective improvements when using both noise correlations and priors in wavefront reconstruction. When combining the measurements from several LGSs in a Ground Layer adaptive optics system, we show that taking into account the noise covariances yields better reconstructions when LGSs are launched from around the telescope than from behind the secondary. Further, results indicate that we could discard the measurements along the elongated direction where this elongation is greater than a given threshold.

**Keywords:** Adaptive Optics, Extremely Large Telescopes, wavefront reconstruction, laser guide star elongation, Ground Layer Adaptive Optics, Maximum A Posteriori, Minimum Variance

## 1. INTRODUCTION

When a laser beam is tuned on the sodium line and launched from the ground, a resonant backward-diffusion from the atmospheric sodium atoms allows some light to be collected for wavefront sensing.<sup>1</sup> Atmospheric sodium atoms are concentrated at  $\approx 90\text{km}$  in altitude, in a  $\approx 10\text{km}$  thick layer.<sup>2,3</sup> Since the laser beam is focused at this layer, the lightened volume can be seen approximately as a cylindrical source  $\approx 1\text{m}$  in diameter and  $\approx 10\text{km}$  long. When imaging this source from the ground, the image is all the more elongated as the point of view is far away from the launching point, because of an increased parallax. This elongation is very significant on Extremely Large Telescopes (ELT).

The elongation of the spots at the focus of the subapertures of a Shack-Hartmann wavefront sensor reduces the accuracy on the measurement of the centroid displacements. Indeed, noises increase with the size of the spots: the magnitude of photon noise is proportional to the size of the image,<sup>4</sup> and additive noises (detector read-out noise, backgrounds) are increased because more pixels are necessary to image elongated spots. New centroiding algorithms have been devised to cope with this problem, in particular the so-called matched filter.<sup>5,6</sup>

Our aim is here to assess the effect of the spot elongation on the wavefront reconstruction. When using a Shack-Hartmann wavefront sensor with Laser Guide Stars (LGSs), the elongation of the sub-images varies in amplitude and orientation. This makes the noise non-uniform across the pupil and introduces correlations between  $x$  and  $y$  coordinates of the slopes in each subaperture.

We expect that taking into account the non-uniformity of the noise and the correlations of the measurement can improve the quality of the reconstruction, compared to ignoring them. Further, we expect that introducing Kolmogorov (or von Kármán) priors can yet improve the reconstruction. From numerical simulations, we compare the wavefront reconstruction capability of these different approaches in Sec. 3. Furthermore, when using several LGSs on an Extremely Large Telescope

---

Further author information: send correspondence to Michel Tallon : mtallon@obs.univ-lyon1.fr

(ELT), we can combine differently the measurements, depending on the geometry of the AO system. The particular case of Ground Layer Adaptive Optics (GLAO) is studied in Sec. 4, comparing LGSs launched from the center or from the edge of the telescope pupil. Prior to present our results, we summarize in Sec. 2 our assumptions and our modeling for addressing these questions.

## 2. RECONSTRUCTION METHODS AND MODELING OF THE ELONGATION

### 2.1 Reconstruction Methods Considered

For the matter of the comparison, we will use four reconstruction methods described in this section, either using a model of the covariances of the noise or considering the noise as uniform, and using priors or not. All of them start with the same model of data:

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

where the vector of data,  $\mathbf{d}$ , is obtained from the vector of wavefront samples on a suitable grid,  $\mathbf{w}$ , using a linear model  $\mathbf{S}$  of the wavefront sensor. Vector  $\mathbf{n}$  stands both for an additive zero-mean noise independent from the data and for modeling errors. In the following, we assume a Shack-Hartmann wavefront sensor with Fried's geometry for  $\mathbf{S}$ .<sup>7</sup>

Several methods can be used to invert Eq. (1). If we assume an uniform Gaussian noise, maximum likelihood yields pure least squares:

$$(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{d}, \quad (2)$$

which becomes weighted least squares in case of non-uniform noise:

$$(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d}. \quad (3)$$

Former equations are written in the form  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$  where we are looking for  $\mathbf{x}$ , instead of the form  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}$ . Indeed, our matrices are generally not invertible, so we have to specify some recipe for the inversion. One method is "truncated SVD",<sup>8</sup> where the inverses of the singular values lower than a given threshold are set to zero. Here we solve the system with the conjugate gradient method.<sup>9</sup> This yields the "minimal norm" solution, *i.e.* the method used is equivalent to derive:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{I})^{-1}. \quad (4)$$

Also, conjugate gradient method does not need to compute the inverse of  $\mathbf{A}$  which can be a huge matrix for an ELT. For instance, we will consider here a  $100 \times 100$  subapertures wavefront sensor.

Using maximum a priori (MAP) yields:<sup>4</sup>

$$(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d}, \quad (5)$$

where  $\mathbf{C}_w$  is the a priori covariance matrix of the wavefront. Assuming uniform and independent noise with variance  $\sigma_n^2$  in Eq. (5) leads to:

$$(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} + \sigma_n^2 \mathbf{C}_w^{-1}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{d}, \quad (6)$$

For computing efficiency, we use the Fractal Iterative Method<sup>10,11</sup> for solving these equations, *i.e.* a preconditioned conjugate gradient method applied in a fractal approximation of the Karhunen-Loève basis, and using an optimal diagonal preconditioner.

### 2.2 General Assumptions

In this section, we introduce some simplifications in order to focus on the essential trends of the wavefront reconstruction with elongated spots.

The vertical density profile of the sodium atoms is supposed to be a Gaussian distribution centered at altitude  $h_0$ , with a standard deviation  $\sigma_h$ . This assumption seems to be quite reasonable since, although the laser beam looks like a very thin needle ( $\approx 1\text{m}$  in diameter and  $\approx 10\text{km}$  in length), the elongated spots are at most  $\approx 1''$  in width for  $\approx 10''$  in length. So the image is highly smoothed, and the small-scale details of the sodium profile (sporadics<sup>3</sup>) can hardly be seen. In the following, we will set  $h_0 = 90\text{km}$ , considering a telescope pointing at zenith where the spot elongations are maximum.



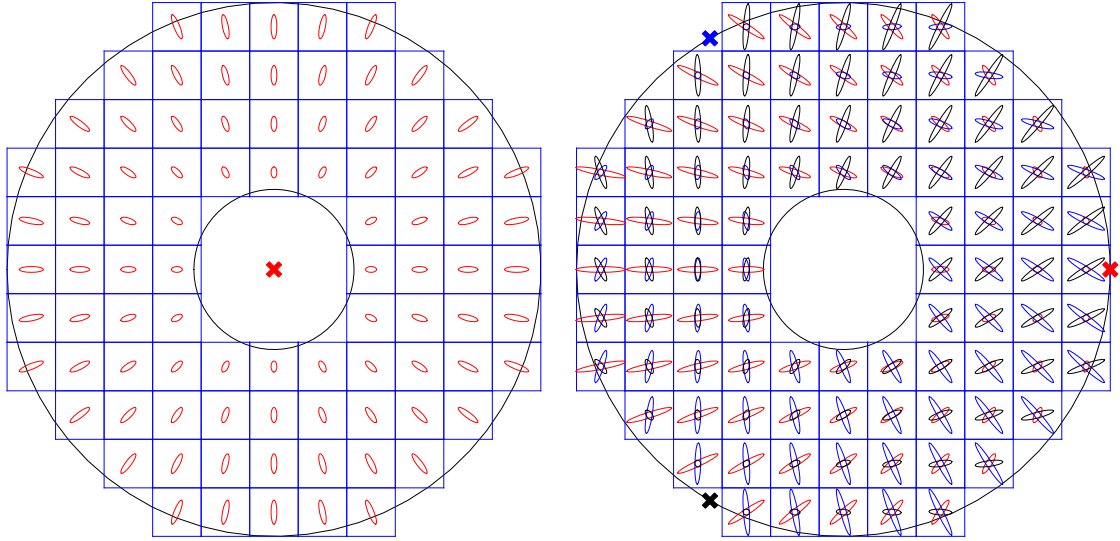


Figure 1. Layout of the elongated sub-images for centered LGSs (left) and for three LGSs at  $120^\circ$  on the edge of the pupil (right). The diameter of the pupil is 42m. In the two cases,  $h_0 = 90\text{km}$ , the FWHM of the Sodium layer is 10km, and the minimal FWHM of the spots is  $1.2''$  (spot size with no elongation). The field of view of the 3.8m subapertures is  $10''$ . In these plots, the squares represent both the subaperture shapes and the field-of-view limits of the subapertures.

The full width at half maximum (FWHM) of the sodium density profile is typically  $\approx 10\text{km}$ , but varies up to 13 – 14km in the worst cases.<sup>2,3</sup>

We will consider Shack-Hartmann wavefront sensors, where each subaperture gives an elongated "sub-image" of the LGS. The sodium Gaussian profile will induce sub-images with elongated Gaussian shapes. Accurate simulations show that this assumption is realistic [5, Fig. 4].

In the field of view of each subaperture, the apparent elongation is described with a vector  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  whose magnitude  $\beta$  is the projection of the standard deviation of the Gaussian sodium profile in the field of view. Using simple geometry, we obtain:

$$\beta \approx \frac{\sigma_h}{h_0^2} (\mathbf{b} - \mathbf{e}), \quad (7)$$

where  $\mathbf{e}$  stands for the position vector of the launching point of the LGS in pupil plane, and  $\mathbf{b}$  is the position vector of the subaperture in the same frame. Equation 7 shows that the elongation only depends on the position of the LGS launching point, not on its position in the whole field of view of the telescope.

When deriving Eq. (7), we neglect a slight distortion of the image of the sodium profile because of a variation of the scaling factor with the altitude, so that the average altitude is actually slightly displaced from the median. This distortion induces quasi-static aberrations in the reconstructed wavefront.<sup>12,13</sup> These effects are not considered here since they involve other types of corrections. The distorted image of the sodium profile is here approximated by a Gaussian profile centered at  $h_0$  and with standard deviation approximated by the first order expansion of  $\beta$ , with a relative error less than 1%.

In our study, we will not include two well-known problems when using LGSs. First we assume that the LGSs, all focused at altitude  $h_0$ , can measure tip/tilts. This avoids introducing separate natural guide stars in the reconstruction, with specific noise independent of the elongation, although this assumption will overestimate the effect of elongation since it will affect tip/tilt. Second, focus anisoplanatism<sup>14</sup> is not taken into account in the reconstruction since it is a problem separated from the effect of spot elongation. Also, if the elongation is larger than the isoplanatic patch, another isoplanatic effect is introduced. This effect is neither considered here. Considering a single turbulent layer in the pupil plane will avoid these anisoplanatisms.

### 2.3 Noise Covariance Matrix

We need to devise a model for the covariance matrix of the noise  $\mathbf{C}_n$  appearing in Eqs (3) and (5). We will assume that the rms noise on a centroid measurement is proportional to the size of the sub-image. This is the case with photon noise,<sup>4</sup> but

could also be the case with additive noise if a centroiding method like the matched filtering is used.<sup>5</sup> Indeed, in such a case, the number of pixels can be proportional to the elongation, while in the usual case the number of pixels for centroiding is proportional to the square of the size of the sub-image.

When no elongation the sub-images are considered as symmetric Gaussians with standard deviation  $\sigma$ . The variance of the error on the centroid measurements,  $\sigma_n^2$ , is chosen as the reference noise.

With elongation, the sub-images are modeled as elongated Gaussians with standard deviations  $\sigma$  and  $\sqrt{\sigma^2 + \beta^2}$  along their main axis, taking into account the projected sodium profile is convolved by the shape of the sub-images without elongation.

Estimates of centroids from different subapertures are independent. So the covariance matrix  $\mathbf{C}_n$  will have  $2 \times 2$  blocks,  $[\mathbf{C}_n]_{2 \times 2}$ , along its diagonal. Considering sub-images as elongated Gaussians, and assuming the noise proportional to the size of the sub-images, the expression of the covariance matrix, for one block, is:

$$[\mathbf{C}_n]_{2 \times 2} = \sigma_n^2 \begin{pmatrix} 1 + \beta_1^2/\sigma^2 & \beta_1\beta_2/\sigma^2 \\ \beta_1\beta_2/\sigma^2 & 1 + \beta_2^2/\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

which becomes  $\mathbf{C}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ , where  $\mathbf{I}$  is the identity matrix, when the elongation is zero ( $\beta = 0$ ). Its inverse is:

$$[\mathbf{C}_n]_{2 \times 2}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \frac{1}{1 + \beta^2/\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 + \beta_2^2/\sigma^2 & -\beta_1\beta_2/\sigma^2 \\ -\beta_1\beta_2/\sigma^2 & 1 + \beta_1^2/\sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

We can notice that we only need that  $\beta$  (standard deviation of the elongation) and  $\sigma$  (standard deviation of the not-elongated image) are expressed with the same unit. They could also be both FWHM instead of standard deviations. The unit of the noise is given by the reference noise  $\sigma_n^2$ .

Figure 1 compares the layout of the elongated spots between launching the LGSs from behind the secondary and three LGSs launched from the edge of the pupil of a 42m telescope. Launching from the center minimizes the elongation and produces radially elongated spots: this is the chosen configuration for the Thirty Meter Telescope (TMT).<sup>5</sup> We can notice that this geometry will suffer from the so-called "fratricide effects" (*i.e.* Rayleigh scattering will be seen by some of the subapertures).

Taking realistic numbers like  $\sigma_h = 4.25\text{km}$  (*i.e.* 10km at FWHM) and  $h_0 = 90\text{km}$  gives  $\beta = 2.3''$  (or 5.4'' FWHM) seen from the edge of the pupil of diameter 42m.

In the case of LGSs launched from the edge of the pupil as shown in Fig. 1, the fratricide effect does not appear but the elongation is twice higher. Since each subaperture can see elongations in various directions, we could try to combine measurements optimally to recover from the increased elongations. This is what we want to explore through the simulations presented in the next sections.

### 3. SIMULATION RESULTS FOR A SINGLE LGS

From simulated data, the aim is to compare the errors of the wavefront reconstructions obtained with the different reconstruction algorithms listed in Sec. 2.1. We consider here the particular case of a single LGS focused at 90km, at the center of the sodium layer, and launched from the center of the pupil (behind the secondary) as shown on Fig. 1 (left).

Turbulent wavefronts are generated in the pupil plane, so we do not suffer from any focus anisoplanatism and can focus on reconstruction errors. Seeing is 0.7'' at 589nm (*i.e.*  $r_0 = 17.4\text{cm}$  at 589nm), corresponding approximately to median conditions at Paranal observatory, with an outer scale  $L_0 = 22\text{m}$ .

The 42m telescope pupil with 30% central obscuration is sampled with  $100 \times 100$  subapertures.

Noise has been fixed to  $\sigma_n^2 = 1\text{rad}^2/\text{subaperture}$  where no elongation, with a spot size of 1.2'' FWHM. This is the phase error at 589 nm. This corresponds to  $\approx 0.046''$  rms of jitter, or  $\approx 94\text{nm}$  rms of wavefront error, measured as the rms path difference between the edges of the subapertures. In the chosen turbulence conditions, the signal to noise ratio per subaperture is  $\approx 5.5$ .

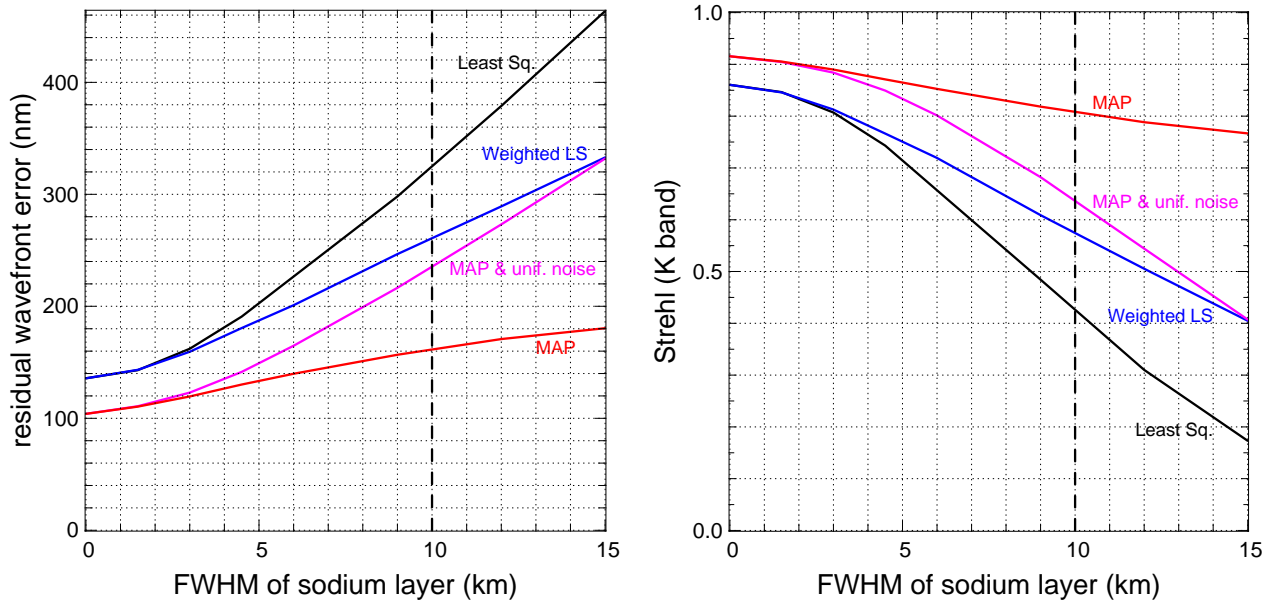


Figure 2. Comparison of the wavefront errors (on the left) and corresponding Strehl ratios in K (on the right) obtained with the different reconstruction methods, depending on the amount of elongation (FWHM), in the case of a single LGS launched from the center of the pupil. The dashed vertical line corresponds to the typical mean FWHM of sodium density profile. Noise covariance matrix is only used for *Weighted LS* (Eq. 3) and *MAP* (Eq. 5), while priors are only used for *MAP* and *MAP+uniform noise* (Eq. 6).

We assess the effect of elongation by varying the FWHM of the sodium density profile. For each value of FWHM, noisy wavefront sensing data are simulated, and each wavefront reconstruction method is applied successively on the same data.

The comparison of the results from the different reconstruction methods is shown in Fig. 2 as a function of the amount of elongation (FWHM of the sodium layer is varied from 0 to 15 km). If we consider the FWHM for the mean sodium profile (10 km), we can see a significant difference between the worse method (*Least Squares*) where the elongation increases the phase error by a factor of 2.4, and the best method (*MAP*) where this factor is only 1.6. For such an elongation, *MAP* gives a phase error half as big as *Least Squares*.

When no elongation, we can see that using priors (MAP methods) allows the variance of the error to be reduced by almost a factor of two as already found by Béchet et al.<sup>15</sup> The curves show that the usefulness of the priors increases with the elongation. We interpret this behavior by an increasing error on the radial modes because of the radial elongation: priors allow reducing this error by using covariances with the other modes that are less affected by the elongation. This can be seen on the azimuthal averages of the residual wavefront errors in the pupil shown on Fig. 3, where priors flatten the residuals from the center to the edge of the pupil.

Also seen on Fig. 2 is the importance of taking into account noise covariances, which effect is almost as important as the use of priors in this particular case.

#### 4. SIMULATION RESULTS FOR SEVERAL LGS (GLAO)

In this section, we consider an array of three LGSs, either launched from the center of the pupil, or from the edge of the pupil. The layout is shown on Fig. 1 (right). When launched from the center, the three LGSs give three times the same radially elongated spots. On the opposite, each subaperture can see elongations in different directions when launching from the edge of the pupil. We want to know if these crossed elongations (see Fig. 1) can be of any help for improving the quality of the wavefront reconstruction.

In order to keep the previous single LGS case as a reference case, we assume here that the total flux is shared evenly among the three LGSs, so that the variance of the photon noise for each measure is three times higher (*i.e.*  $3 \text{ rad}^2/\text{subaperture}$  at 589 nm) when no elongation. Thus, when launching from the center, mixing the measurements from

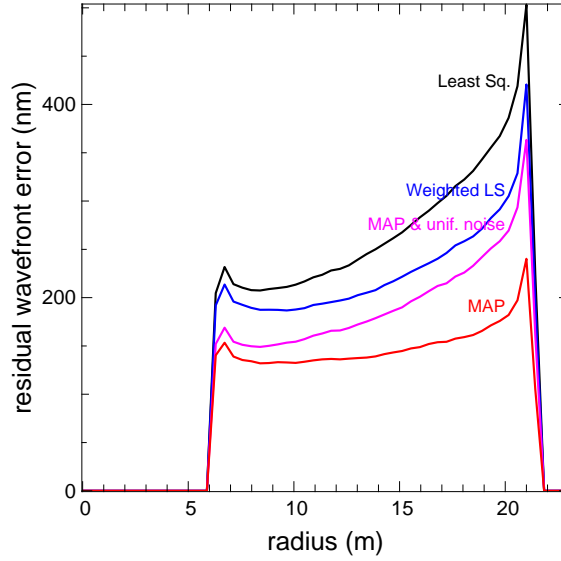


Figure 3. Azimuthal average of the residual wavefront errors for the different reconstruction methods. The FWHM of the sodium profile is 9km. Noise covariance matrix is only used for *Weighted LS* (Eq. 3) and *MAP* (Eq. 5), while priors are only used for *MAP* and *MAP+uniform noise* (Eq. 6). As expected from the geometry (one LGS launched from the center, radial elongations), the wavefront errors are larger at the outer edge of the pupil. The curves show how the priors flatten the residuals from the center to the edge of the pupil.

the 3 LGSs will give the same total accuracy than using one single LGS three times brighter, and the same curves will be obtained. The other parameters are kept the same as for the previous single LGS case.

Of course, we need to combine the measurements in an optimal way. When using several LGSs, the *MAP* (or minimum variance) estimator is now obtained from this equation:

$$\left( \mathbf{S}^T \cdot \left[ \sum_{k=1}^{\#LGS} \mathbf{C}_{n_k}^{-1} \right] \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1} \right) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^T \cdot \sum_{k=1}^{\#LGS} \mathbf{C}_{n_k}^{-1} \cdot \mathbf{d}_k, \quad (10)$$

which is a generalization of Eq. (5) used for *MAP* method, when assuming that identical wavefront sensors are used for all the LGSs. As in Sec. 2.1, the other estimators are obtained from Eq. (10) by removing priors  $\mathbf{C}_w$  when using *Least Squares* or *Weighted least squares* methods, or by approximating the noise covariance matrices with an uniform noise ( $\mathbf{C}_{n_k} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ ) for *Least Squares* or *MAP with uniform noise* methods.

Results are plotted on Fig. 4. As expected, when launching from the center, using three LGSs gives exactly the same results as the previous case with one single LGS three times brighter.

On the opposite, when launching from the edge, the use of noise covariances is now critical. Indeed, not to take into account the noise covariances makes the residual wavefront errors to be much higher (*Least Squares* and *MAP with uniform noise* methods). The noise covariance matrix allows the reconstruction to properly weight the measurements in each subaperture in order to take into account mainly the measurements in the most accurate directions (*i.e.* the directions perpendicular to the elongations). This allows the increase of the residual wavefront errors to be maintained under a factor 1.5 for any elongation with methods *Weighted least squares* and *MAP*.

Further, Fig. 4 seems to show an asymptotic behavior of these methods as the sodium profile FWHM increases. This may be explained as follows. As seen from Eq. (9), the relative weight of the measurement along the elongated direction is proportional to the inverse of the square of the relative elongation  $\beta/\sigma$ . As soon as this elongation is significant, this relative weight is so small that the corresponding measurement has no more influence. Yet increasing the elongation does no more degrade the situation.

In such a regime, we could then set to zero the weights on these measurements without significant loss of accuracy. This would also mean that we don't need to even measure the displacement of the centroid along the elongated directions of the spots when this elongation is high enough.

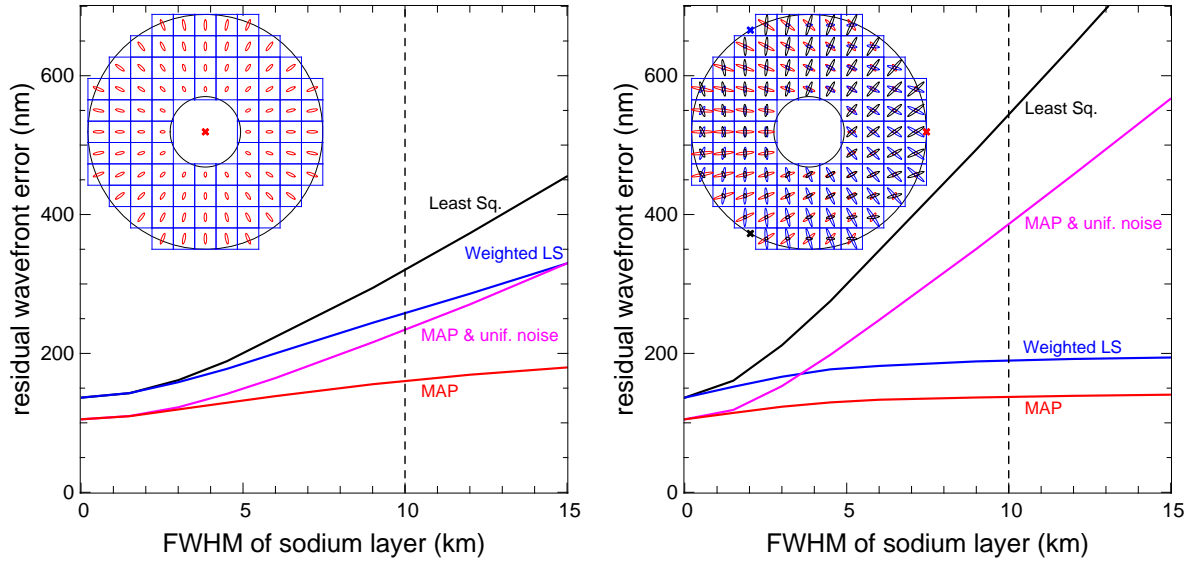


Figure 4. Comparison of the wavefront errors obtained with the different reconstruction methods, depending on the amount of elongation (FWHM), in the case of three LGSs launched from the center (on the left) or from the edge (on the right) of the pupil.

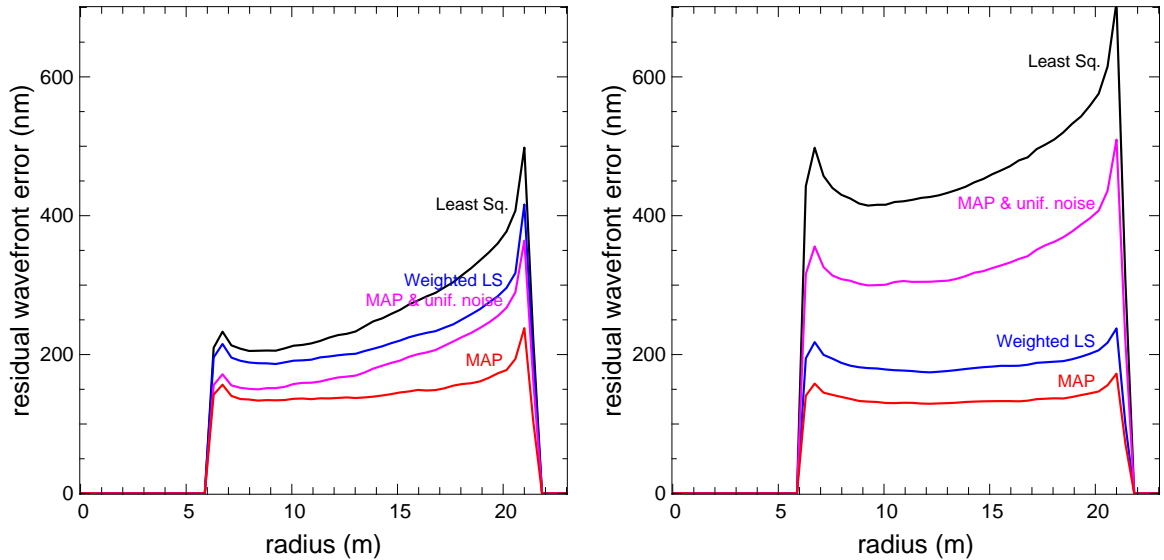


Figure 5. Comparison of the azimuthal averages of the residual wavefront errors for the different reconstruction methods, in case of three LGSs launched from the center (on the left) or from the edge (on the right) of the pupil. The FWHM of the sodium profile is 9km.

On the opposite, using priors does not significantly prevail as in the previous single LGS case, probably because we no longer have the previous systematic radial effect thanks to the crossed elongations. Figure 5 shows the azimuthal averages of the residual wavefront errors in the pupil.

We can notice that using both the correct covariance matrix and the priors with any elongation gives a better reconstruction than using least squares (weighted or not) without elongation.

## 5. CONCLUSION

From this work, we can conclude that taking into account the noise covariances in the reconstruction algorithm is very important. The minimum is to use weighted least squares (or equivalently maximum likelihood). Using the correct covariance matrix allows the effect of elongation to be significantly reduced, and further, thanks to this matrix, we obtain best results when launching from the edge of the pupil than when launching from the center.

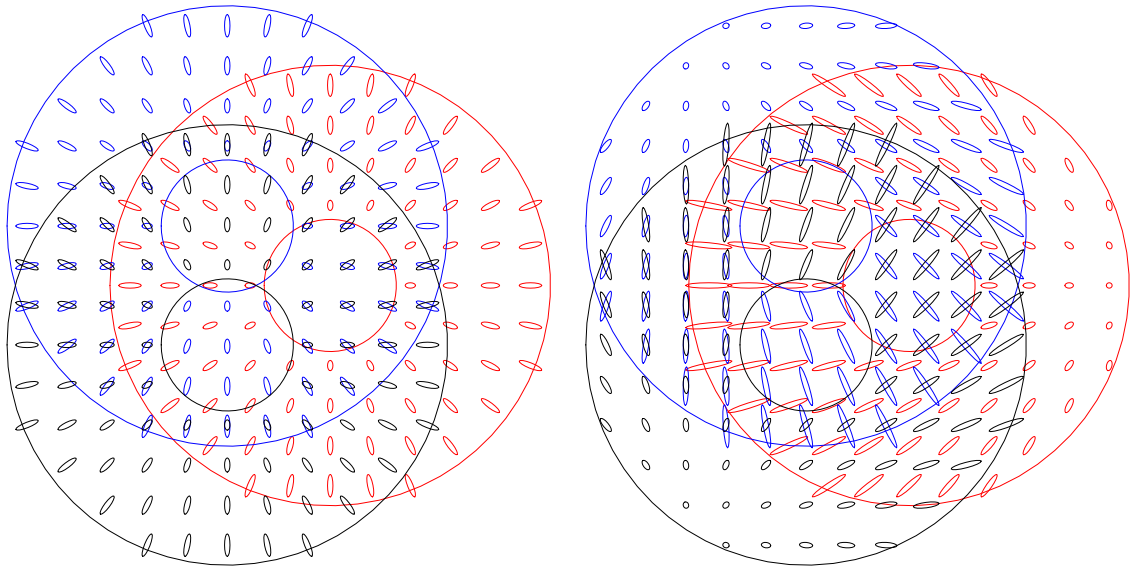


Figure 6. Example of meta-pupils as seen at 10km altitude for a 42m telescope when launching three LGS from the center (left) or from the edge (right) of the pupil. The LGS are pointed on a circle of radius 2 arcmin in the field-of-view. The other parameters are the same as for Fig. 1. When launched from the edge, the elongation is minimum (best accuracy) where the turbulent layer is probed once.

Priors are also helpful, particularly when launching from the center. When launching from the edge of the pupil, the improvement of the reconstruction is approximately the same for any elongation.

These results should be confirmed for various signal to noise ratios, *i.e.* for various measurement noises and various turbulence strengths. Also, we have analyzed the two extreme cases of the perfect knowledge of the noise covariance matrix or its total ignorance. Intermediate cases should be addressed in order to determine the requirements on the accuracy we need on the model of the noise. Numerous effects affect the noise in practice so that we can hardly expect to be able to rely on an accurate model of the noise.

But as noticed previously, the asymptotic behavior of the residual wavefront error as the elongation increases when launching from the edge of the pupil (Fig. 4 on the right) seems to indicate that we could easily discard the measurements of the centroids along the direction of the elongation, where the elongation is greater than a given threshold. This would allow, for instance, the use of a smaller CCD for the Shack-Hartmann wavefront sensor by allowing some truncations of the sub-images in the elongated directions. A study of this possibility, taken into account the loss of photons would be helpful to potentially reduce the costs of the wavefront sensors.

Finally, cone effect when using LGSs on large telescopes yields the need of tomography.<sup>16</sup> Effect of elongation in this case must still be analyzed. For instance, Fig. 6 shows the meta-pupil at 10km altitude when the LGS are pointed on a circle of radius 2 arcmin in the field-of-view. The figure shows that when launching from the edge, the elongation is minimum where the turbulent layer is probed once, *i.e.* exactly where the best accuracy is required. This single observation may indicate that the advantage of this configuration may be kept for the estimation of the corrugations introduced by each layers.

## ACKNOWLEDGMENTS

This activity is supported by the European Community (Framework Program 6, ELT Design Study, contract No 011863). The algorithms and the simulations presented in this article have been implemented in Yorick, a free data processing language written by D. Munro (<http://sourceforge.net/projects/yorick/>).

## REFERENCES

- [1] Foy, R. and Labeyrie, A., "Feasibility of adaptive telescope with laser probe," *Astron. Astrophys.* **152**, L29–L31 (1985).

- [2] Papen, G. C., Gardner, C. S., and Yu, J., “Characterization of the mesospheric sodium layer,” in [*Adaptive optics*], *O.S.A. topical meeting*, 96–99, Optical Society of America, Washington, USA (1996).
- [3] Michaille, L., Clifford, J. B., Dainty, J. C., Gregory, T., Quartel, J. C., Reavell, F. C., Wilson, R. W., and Wooder, N. J., “Characterization of the mesospheric sodium layer at La Palma,” *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **328**(4), 993–1000 (2001).
- [4] Rousset, G., “Wavefront sensors,” in [*Adaptive Optics in Astronomy*], Roddier, F., ed., 91–130, Cambridge University Press (1999).
- [5] Gilles, L. and Ellerbroek, B., “Shack-hartmann wavefront sensing with elongated sodium laser beacons: centroiding versus matched filtering,” *Appl. Opt.* **45**(25), 6568–6576 (2006).
- [6] Gilles, L. and Ellerbroek, B. L., “Constrained matched filtering for extended dynamic range and improved noise rejection for Shack-Hartmann wavefront sensing,” *Opt. Lett.* **33**(10), 1159–1161 (2008).
- [7] Fried, D. L., “Least-squares fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements,” *J. Opt. Soc. Am.* **67**(3), 370–375 (1977).
- [8] Fusco, T., Conan, J. M., Rousset, G., Mugnier, L. M., and Michau, V., “Optimal wave-front reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics,” *J. Opt. Soc. Am. A* **18**(10), 2527–2538 (2001).
- [9] Barrett, R., Berry, M., Chan, T. F., Demmel, J., Donato, J. M., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C., and Van der Vorst, H., [*Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*], SIAM, Philadelphia PA (1994).
- [10] Thiébaud, E. and Tallon, M., “Fast minimum variance wavefront reconstruction for extremely large telescopes,” *J. Opt. Soc. Am. A* **submitted** (2008).
- [11] Tallon, M., Thiébaud, E., and Béchet, C., “A Fractal Iterative Method for fast wavefront reconstruction for extremely large telescopes,” in [*Adaptive Optics: Analysis and Methods*], Ellerbroek, B. L. and Christou, J. C., eds., *OSA topical meetings*, paper PMA2, Optical Society of America, Washington, USA (2007).
- [12] van Dam, M. A., Bouchez, A. H., Le Mignant, D., and Wizinowich, P. L., “Quasi-static aberrations induced by laser guide stars in adaptive optics,” *Opt. Express* **14**(17), 7535–7540 (2006).
- [13] Clare, R. M., van Dam, M. A., and Bouchez, A. H., “Modeling low order aberrations in laser guide star adaptive optics systems,” *Opt. Express* **15**(8), 4711–4725 (2007).
- [14] Fried, D. L., “Analysis of focus anisoplanatism: The fundamental limit in performance of artificial guide star adaptive optics systems,” in [*Laser Guide Star Adaptive Optics*], Fugate, R. Q., ed., *Workshop*, 37–80, Phillips Lab. (1992).
- [15] Béchet, C., Tallon, M., and Thiébaud, E., “Closed-loop AO performance with FrIM,” in [*Signal Recovery and Synthesis*], Ellerbroek, B. L. and Christou, J. C., eds., *OSA topical meetings*, paper JTUA4, Optical Society of America, Washington, USA (2007).
- [16] Tallon, M. and Foy, R., “Adaptive telescope with laser probe: isoplanatism and cone effect,” *Astron. Astrophys.* **235**(1-2), 549–557 (1990).

### 7.4.2 La corrélation des erreurs de mesure

Comme expliqué dans la section 2.1.2, il est possible de générer une étoile de référence artificielle en excitant les atomes de sodium de l'atmosphère. Ces atomes se trouvent en forte concentration à quelques 90km d'altitude, dans une couche d'environ 10km d'épaisseur. L'épaisseur de cette couche engendre une source lumineuse étendue dans un volume cylindrique très allongé. Sa section correspond à la section du faisceau laser, d'environ 1m de diamètre, et sa longueur est caractéristique de l'épaisseur de la couche. La figure 7.7 montre les taches images allongées que ce fin pinceau lumineux produit sur chaque sous-pupille de l'analyseur, par un effet de parallaxe. Il s'agit de l'effet d'élongation des taches images sur les sous-pupilles abordé à la section 2.1.2.

Le calcul du centre de gravité de chaque sous-image, qui fournit la mesure des pentes pour la reconstruction, est alors entaché d'incertitudes non uniformes et non isotropes. Les barres d'erreur des mesures de pentes en  $x$  et en  $y$  sont corrélées. La matrice  $\underline{\mathbf{C}}_e$  n'est plus diagonale comme pour une étoile de référence naturelle.

Les erreurs de mesure restent néanmoins décorréées d'une sous-pupille à l'autre, donc  $\underline{\mathbf{C}}_e$  est diagonale par blocs de dimensions  $2 \times 2$ . De plus, la corrélation des mesures ne dépend que des coordonnées du point de lancement du laser par rapport au centre de chaque sous-pupille. Elle peut donc être précalculée pour un système d'optique adaptative donné, et elle est très creuse.

### 7.4.3 L'impact des corrélations sur la reconstruction

L'article des pages précédentes compare des reconstructions simulées pour lesquelles on a modélisé correctement ou non ces corrélations des erreurs de mesure, avec FrIM MAP et avec un reconstruteur de maximum de vraisemblance de moindre norme zonale. Le résultat essentiel est que l'emploi du reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  sans modéliser les corrélations des erreurs de mesure dégrade fortement la reconstruction au-dessus des sous-pupilles où les images sont allongées. Utiliser un modèle correct pour  $\underline{\mathbf{C}}_e$  est nécessaire pour uniformiser et minimiser les erreurs de reconstruction. L'intérêt d'une bonne modélisation de  $\underline{\mathbf{C}}_e$  apparaît encore plus évident lors de la combinaison de 3 étoiles laser pour reconstruire la surface d'onde (*cf.* à droite de la figure 7.7). Les performances optimales sont alors obtenues lorsque les lasers sont émis depuis les bords de la pupille, plutôt que depuis le centre, derrière le miroir secondaire. Les profils de l'erreur d'estimation sur la pupille sont représentés sur la figure 7.8 dans les deux cas discutés.

Enfin, on peut noter que là où la précision des mesures est dégradée par une trop grande élongation, l'utilisation des *a priori* de FrIM MAP permet de réduire l'erreur de reconstruction.

Cette étude montre à quel point la modélisation correcte des corrélations d'erreurs est essentielle. Le caractère très creux de  $\underline{\mathbf{C}}_e$  rend la prise en compte de ces corrélations peu coûteuses. De plus, elles ne dépendent que des emplacements physiques des projecteurs laser, et de la configuration des analyseurs. Elles peuvent donc être précalculées. Puisque la matrice  $\mathbf{A}_{\text{frac}}$  n'est pas précalculée mais simplement appliquée en modifiant  $\mathbf{C}_e$  quand nécessaire, le coût est faible. L'algorithme FrIM MAP permet alors d'optimiser les performances de reconstruction en tenant compte de ces corrélations et des *a priori* turbulents, à moindre coût calculatoire.



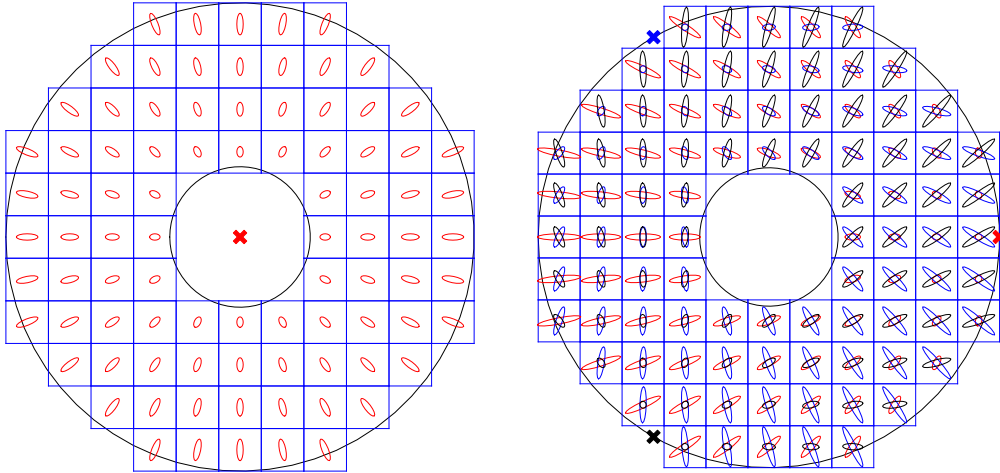


FIG. 7.7 – Allongement des taches images sur les sous-pupilles du ou des analyseurs pour une (à gauche) et trois (à droite) étoiles de référence laser. Les croix représentent la position des points d'émission des lasers par rapport à la pupille.

## 7.5 L'impact d'une erreur sur les *a priori*

L'étude de la reconstruction s'est faite jusqu'ici en supposant que les hypothèses sur la statistique du signal et du bruit étaient correctes (autrement dit bien connues). La réalité est autre et c'est pour cela que j'investigue ici l'impact de certaines erreurs d'*a priori* sur les performances de la reconstruction. Concrètement, j'étudie les effets d'une mauvaise estimation des paramètres du reconstructeur.

Le reconstructeur FrIM MAP apporte un gain lorsque l'information *a priori* est fortement exploitée et à bon escient. D'après l'expression (6.3), FrIM MAP est construit à partir d'une estimation de  $D/L_0$  dans l'approximation fractale  $\underline{\mathbf{C}}_w = \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}}^T$  et du RSB dans  $\mu_0$ . Je montre dans cette section que si ces informations *a priori* ne sont pas adaptées au signal et au bruit réels, alors les performances de l'estimation peuvent devenir plus désastreuses que celles d'un estimateur de maximum de vraisemblance.

Le reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$ , d'après l'équation (5.16), ne dépend ni du niveau de bruit, ni des propriétés statistiques du signal. Le reconstructeur FrIM MNML contient, lui, des informations supplémentaires, sur les corrélations du signal par le biais de  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ . Notamment,  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  est fonction de  $D/L_0$ . Je considère ici  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  et FrIM MNML comme références, *i.e.* comme des reconstructeurs *de moindre effort* de modélisation des propriétés statistiques du système.

Le modèle de von Kármán, auquel correspond une valeur finie pour  $L_0$ , est en adéquation avec les résultats de plusieurs campagnes d'observations (Ziad et al., 2000, 2004). Il est cependant difficile d'estimer  $L_0$  avec précision et les valeurs prises par  $L_0$  au cours des observations peut varier de plusieurs dizaines de mètres. Il est également difficile d'estimer  $\mu_0$  avec précision. Tandis que  $D/L_0$  traduit la limite de corrélation des surfaces d'onde à grande échelle, le paramètre  $\mu_0$  représente lui l'amplitude de ces corrélations. Plus précisément,  $\mu_0$  est le poids des *a priori* relativement au poids du terme d'attache aux données. J'étudie successivement les conséquences d'une erreur d'estimation de chacun de ces deux paramètres,  $D/L_0$  et  $\mu_0$ .

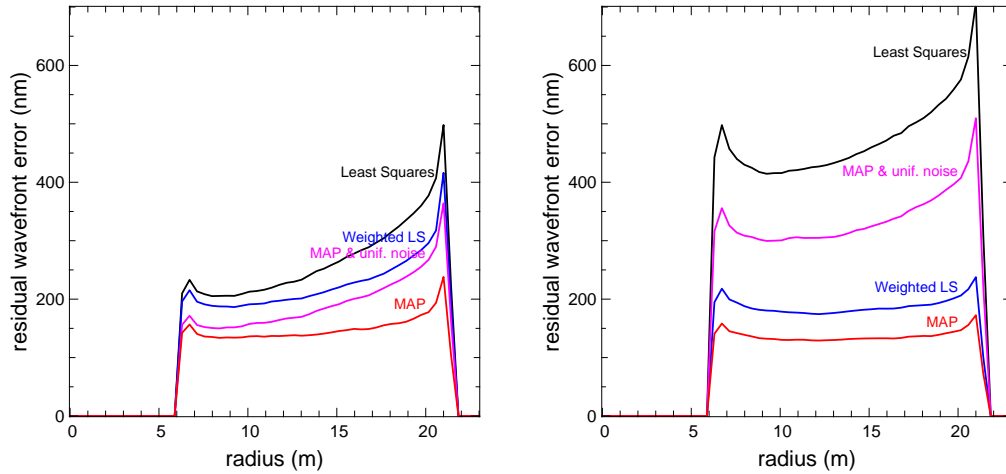


FIG. 7.8 – Profil de l'erreur de reconstruction  $\sqrt{\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}}$  en nanomètres sur la pupille du télescope en fonction de la méthode de reconstruction pour 3 étoiles de référence laser. Méthodes comparées :  $Rmnml$  en supposant  $\underline{\mathbf{C}}_e$  diagonal (noir),  $\mathbf{R}_{MNML}$  avec les bonnes corrélations  $\underline{\mathbf{C}}_e$  (bleu), FrIM MAP en supposant  $\underline{\mathbf{C}}_e$  diagonal (magenta) et FrIM MAP avec les bonnes corrélations  $\underline{\mathbf{C}}_e$  (rouge). À gauche : les lasers sont tirés depuis le centre. À droite : les lasers sont tirés depuis les bords du télescope (*cf.* figure 7.7).

### 7.5.1 L'erreur d'estimation de l'échelle externe

J'ai retenu deux approches. L'une consiste à maintenir dans le reconstructeur FrIM MAP l'hypothèse d'une turbulence de type Kolmogorov au-dessus d'un télescope hectométrique, quand bien même elle serait fausse. Et l'autre suppose que la statistique de la turbulence est plus proche d'une statistique de type von Kármán avec une échelle externe  $L_0$  dans FrIM MAP figée à la valeur médiane du site considéré. Ces deux cas sont traités successivement ici.

La turbulence observée par l'analyseur est toujours de type von Kármán, avec une échelle externe  $L_0$  variable, comprise en 15 et 45 mètres. La valeur du paramètre de Fried,  $r_0$  à 500nm, est choisie fixe égale à 15cm, *i.e.* la valeur médiane au Cerro Paranal (Ziad et al., 2000). Je simule une pupille de diamètre  $D = 42\text{m}$ , avec obstruction centrale ( $\eta = 0.28$ ), échantillonnée avec  $D/d_l = 32, 64, 128$  et  $256$  sous-pupilles successivement, observant à  $\lambda_{AO} = 700\text{ nm}$ . Pour chaque dimension et chaque valeur de  $L_0$ , 100 reconstructions de type FrIM MNML et 100 reconstructions de type FrIM MAP sont effectuées. Deux niveaux de bruit différents sont simulés pour chaque configuration,  $\sigma_e^2 = 1\text{rad}^2$  et  $0.01\text{rad}^2$  par sous-pupille.

Je simule dans un premier temps des reconstructions de type FrIM MNML et FrIM MAP, pour lesquelles l'opérateur  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  est construit à partir d'un modèle de turbulence Kolmogorov. La figure 7.9 montre le rapport de l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  du reconstructeur  $\mathbf{R}_{MNML}$  sur l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  de FrIM MAP. Quel que soit le niveau de bruit (graphique de gauche et graphique de droite), quel que soit la dimension du système considéré (différents types de symboles), le rapport des erreurs est à peu près indépendant de l'échelle externe de la turbulence observée  $L_0$ . La figure 7.10 est construite sur le même principe, illustrant cette fois-ci, le rapport entre l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  du reconstructeur FrIM MNML et celle du reconstructeur FrIM MAP. Comme sur la figure 7.9, le rapport des erreurs est à peu près indépendant de la valeur de l'échelle externe réelle  $L_0$ . Sur

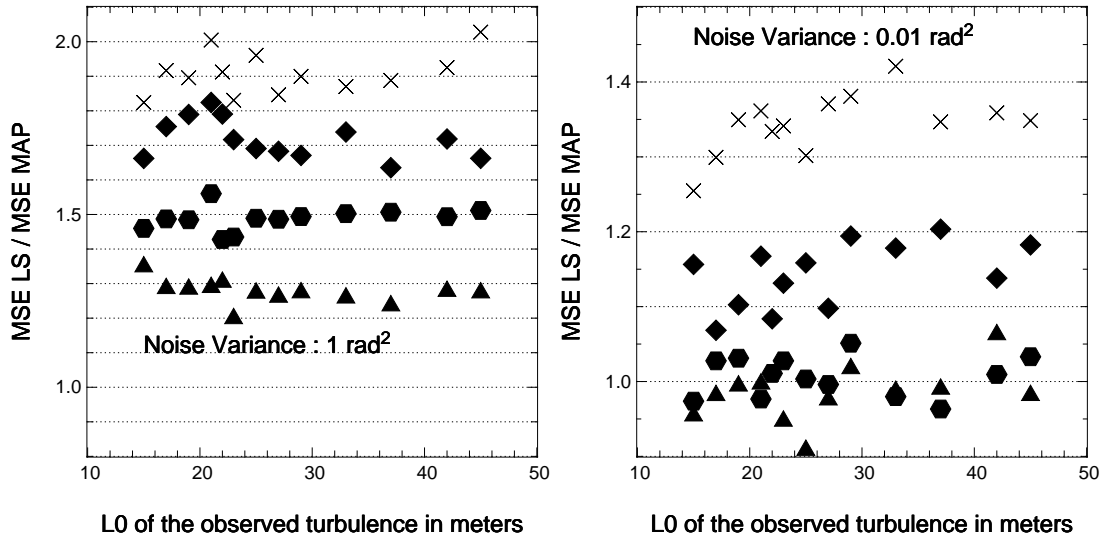


FIG. 7.9 – Rapport entre  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  pour pour  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  et  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  pour FrIM MAP, en fonction de l'échelle externe  $L_0$  de la turbulence observée. FrIM MAP est construit sur un modèle de turbulence de Kolmogorov.  $D = 42\text{m}$ ,  $r_0 = 15\text{cm}$  et  $\sigma_e^2 = 1\text{rad}^2/d_l$  (à gauche) et  $0.01\text{rad}^2/d_l$  (à droite). Les symboles marquent la moyenne sur 100 réalisations de turbulence reconstruites.  $D/d_l = 32$  (triangles), 64 (hexagones), 128 (losanges), 256 (croix).

les deux figures 7.9 et 7.10, le rapport des erreurs est généralement plus grand que 1, ce qui signifie que les *a priori* de type Kolmogorov améliorent toujours la reconstruction. À faible bruit, les *a priori* ont peu d'influence sur le processus de reconstruction, et le gain est donc moins important (plus proche de 1).

Je simule ensuite des reconstructions de surface d'onde dans les mêmes conditions de signal et de bruit que précédemment, mais en utilisant une échelle externe fixe dans l'opérateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  des reconstructeurs FrIM MNML et FrIM MAP. La valeur de  $L_0$  choisie pour  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  doit être caractéristique du site d'observation. Ici cette échelle estimée  $\hat{L}_0$  vaut 22m, la valeur médiane mesurée au Cerro Paranal (Chili).

Les figures 7.11 et 7.12 montrent les résultats de ces simulations. La figure 7.11 représente le rapport de l'erreur du reconstructeur  $\mathbf{R}_{\text{MNML}}$  sur l'erreur du reconstructeur MAP en fonction de la valeur réelle de  $L_0$ . La figure 7.12 représente l'évolution du rapport de l'erreur de FrIM MNML et de l'erreur de FrIM MAP. Tant que l'échelle externe réelle  $L_0$  est plus petite que  $\hat{L}_0$ , on remarque que les performances sont semblables au cas Kolmogorov, présenté sur les figs. 7.9 et 7.10. En revanche, si  $\hat{L}_0$  sous-estime la valeur réelle, l'avantage de FrIM MAP est progressivement perdu. Ceci est d'autant plus remarquable à fort bruit (croix sur les graphiques de gauche) puisque que c'est là que les *a priori* interviennent davantage pour contraindre la solution. Le reconstructeur FrIM MAP devient même moins performant que les méthodes de maximum de vraisemblance lorsque l'échelle externe  $L_0$  est fortement sous-estimée (d'un facteur 2).

En conclusion, les figures 7.9, 7.10, 7.11 et 7.12 montrent qu'il est préférable de surestimer  $L_0$ . Un moyen simple de surestimer  $L_0$  est de modéliser systématiquement une turbulence de Kolmogorov dans le reconstructeur.

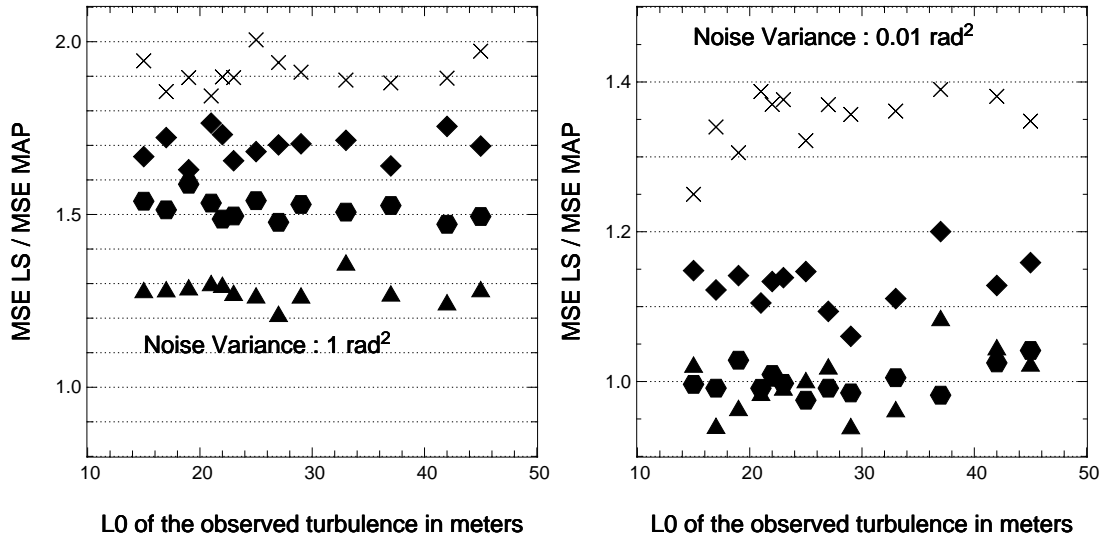


FIG. 7.10 – Rapport entre  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  pour FrIM MNML et pour FrIM MAP, en fonction de l'échelle externe  $L_0$  de la turbulence observée. FrIM MNML et FrIM MAP sont tous deux construits sur un modèle de turbulence de Kolmogorov. Les paramètres de simulation et la légende sont identiques à ceux de la figure 7.10.

### 7.5.2 L'erreur sur le poids de la régularisation

#### L'analyse algébrique

J'ai considéré jusqu'ici que le reconstruteur MAP était défini en connaissant parfaitement  $\mu_0 = \sigma_e^2 / (D/r_0)^{5/3}$ , le poids optimal de la régularisation. En pratique, ce paramètre doit être estimé,  $\hat{\mu}_0$ . Je note ainsi dans toute la suite  $\mu = \hat{\mu}_0 / \mu_0$ , qui traduit si  $\mu_0$  est surestimé ou sous-estimé. Les performances d'un reconstruteur défini par  $\mu_0 \neq 1$  sont donc distinctes de celles du reconstruteur MAP optimal ( $\mu = 1$ ). J'étudie ici cet écart de performance. Tout d'abord, en employant les mêmes notations que dans la section 5.4, je calcule ici le biais  $b$ , la variance  $v$  et l'erreur totale  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  du reconstruteur en fonction de  $\mu$ . L'équation (5.12) se développe ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sigma_e^2} &= \frac{\hat{\mu}_0}{\mu_0} \text{tr} \left[ \mathbf{N} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot (\mathbf{K}_{\text{frac}}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}} + \hat{\mu}_0 \underline{\mathbf{C}}_w^{-1})^{-2} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}}^T \cdot \mathbf{N}^T \right] \\ &= \sum_{i=1}^p \mu \hat{\mu}_0 \frac{W_{ii}}{(\hat{\mu}_0 + \sigma_i^2)^2} + \sum_{i=p+1}^n \frac{W_{ii}}{\mu_0} \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$= \sum_{i=1}^p \mu \hat{\mu}_0 \frac{W_{ii}}{(\hat{\mu}_0 + \sigma_i^2)^2} + \frac{b_{\text{KL}}}{\sigma_e^2}. \quad (7.10)$$

Le passage de l'équation (7.9) à l'équation (7.10) met en évidence la permanence du terme de biais sur les modes non vus, égal à  $b_{\text{KL}}$ . En revanche, le biais sur les autres modes est égal au biais que l'on pense être optimal mais multiplié par notre erreur d'estimation  $\mu = \hat{\mu}_0 / \mu_0$ . En d'autres termes, cette contribution de l'erreur croît proportionnellement à  $\mu$ .

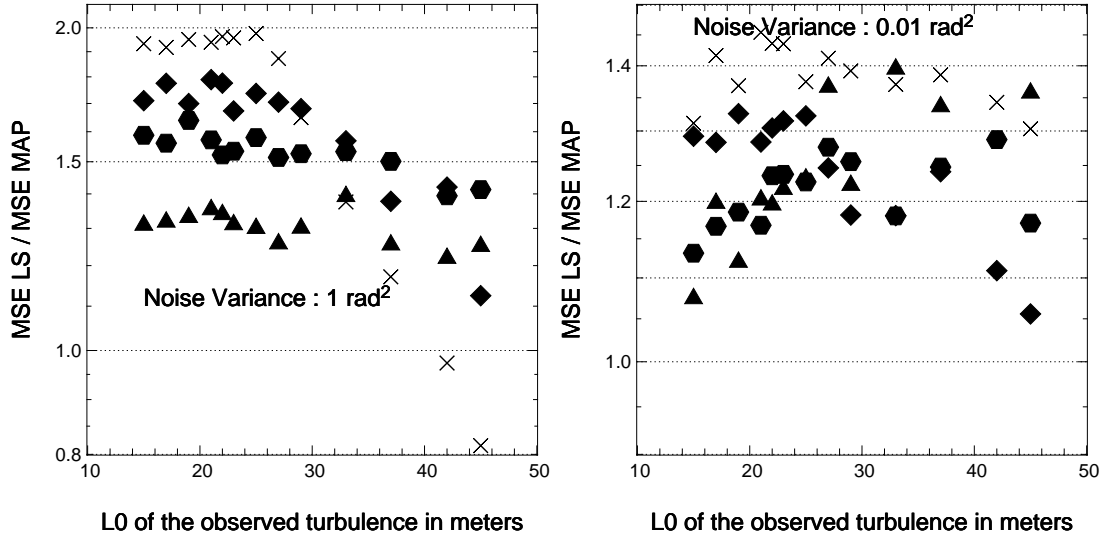


FIG. 7.11 – Même légende que la figure 7.9, mais FrIM MAP sont construits sur un modèle de turbulence de von Kármán avec une échelle externe fixe estimée à  $L_0 = 22\text{m}$ .

Concernant la variance, l'équation (5.13) devient

$$\begin{aligned} \frac{v}{\sigma_e^2} &= \text{tr} \left[ \mathbf{N} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot (\mathbf{K}_{\text{frac}}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}} + \hat{\mu}_0 \underline{\mathbf{C}}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}}^T \cdot \mathbf{N}^T \right] - \frac{\mu_0 b}{\sigma_e^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{W_{ii} \sigma_i^2}{(\hat{\mu}_0 + \sigma_i^2)^2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Le coefficient de propagation du bruit dépend donc uniquement de  $\hat{\mu}_0$  et non du  $\mu_0$  réel. En conséquence, on réduit de façon effective la propagation du bruit en augmentant  $\hat{\mu}_0$ , quel que soit  $\mu_0$ , le poids optimal réel. Cette réduction se fait néanmoins au risque d'une croissance du terme de biais dans l'équation (7.10).

Finalement, l'erreur quadratique moyenne normalisée par le niveau de bruit réel  $\sigma_e^2$  s'écrit désormais

$$\frac{\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}}{\sigma_e^2} = \frac{b_{\text{KL}}}{\sigma_e^2} + \sum_{i=1}^p \frac{(\mu \hat{\mu}_0 + \sigma_i^2) W_{ii}}{(\hat{\mu}_0 + \sigma_i^2)^2} \quad (7.12)$$

La valeur minimale de cette erreur est obtenue pour  $\hat{\mu}_0 = \mu_0$ , c'est-à-dire avec le reconstruteur MAP idéal. Lorsque  $\hat{\mu}_0$  tend vers 0, l'estimateur se rapproche progressivement du reconstruteur de maximum de vraisemblance de moindre norme modale  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$ , obtenu pour  $\hat{\mu}_0 = 0$  exactement. La propagation du bruit est maximale pour ce reconstruteur d'après l'équation (7.11). Des équations (7.10)-(7.12), on peut déduire le comportement asymptotique de  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / \sigma_e^2$  quand  $\hat{\mu}_0$  devient très grand. La propagation du bruit tend vers 0 et le terme de biais vers la limite suivante

$$\frac{b}{\sigma_e^2} \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{W_{ii}}{\mu_0}. \quad (7.13)$$

En conséquence, la limite de l'erreur globale est

$$\frac{\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}}{\sigma_e^2} \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{W_{ii}}{\mu_0}. \quad (7.14)$$

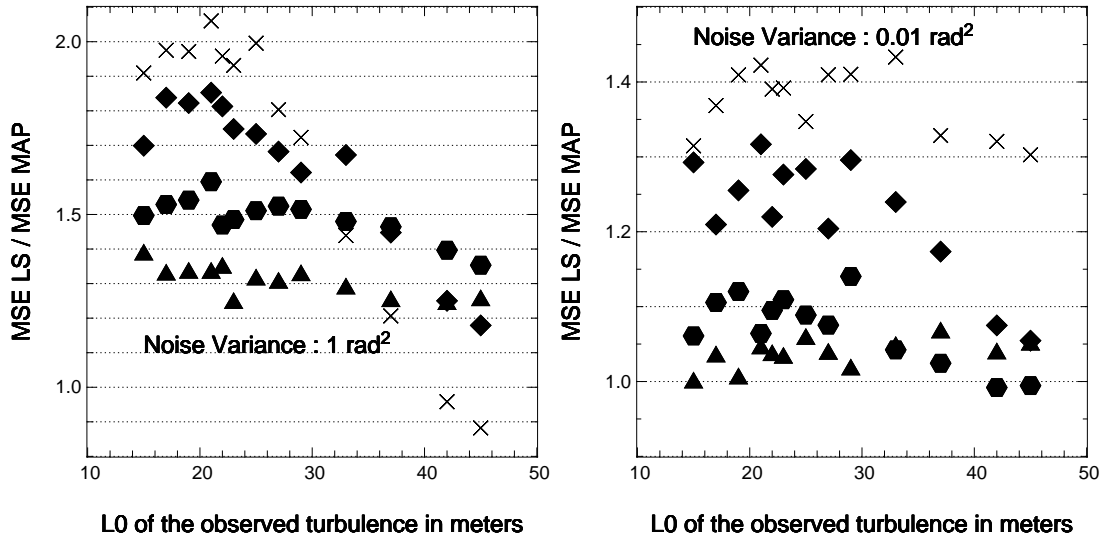


FIG. 7.12 – Même légende que la figure 7.10, mais FrIM MNML et FrIM MAP sont tous deux construits sur un modèle de turbulence de von Kármán avec une échelle externe fixe estimée à  $L_0 = 22\text{m}$ .

Cette limite est toujours supérieure à l'erreur minimale engendrée par l'estimateur MAP idéal ( $\mu = 1$ ). De plus, si  $\mu_0$  est inférieur à tous les carrés des valeurs singulières du système  $\sigma_i^2$ , elle est aussi supérieure à l'erreur produite par le reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$ .

La figure 7.13 illustre le comportement caractéristique de l'expression (7.12) en fonction de  $\mu$ . Pour obtenir cette représentation, j'ai simplement tracé la courbe définie par l'équation (7.12) en prenant des valeurs arbitraires pour  $\mu_0$ ,  $W_{i,i}$ ,  $\sigma_i$ ,  $n$  et  $p$ . En l'occurrence, j'ai choisi  $p = 1$ ,  $n = 2$  et  $\mu_0$  plus petit que tous les  $\sigma_i$ . Cette courbe met en évidence le puits au fond duquel se trouve l'erreur engendrée par la solution MAP optimale. Les deux paliers sont caractéristiques des valeurs aux limites, quand  $\hat{\mu}_0 = 0$  et quand  $\hat{\mu}_0 \rightarrow \infty$ . Dans les cas de reconstruction de surface d'onde que j'ai analysés, le palier de droite était toujours tel que sur la figure 7.13, plus haut que la solution de maximum de vraisemblance de moindre norme modale. Pour un tel comportement, la zone acceptable d'erreur d'estimation de  $\mu_0$  est délimitée par les valeurs de  $\mu$  telles que la courbe en trait plein soit sous la ligne en trait tireté. Dans cet exemple, ces valeurs de  $\mu$  sont comprises entre 0 et 6. D'une façon plus générale, les équations fournissent une valeur seuil de la borne supérieure des  $\mu$  acceptables : 2. En effet, d'après l'équation (7.12) et celle de l'erreur du reconstruteur KL-MNML (*cf.* équation (5.25)), l'erreur de reconstruction est plus faible avec *a priori* si

$$\sum_{i=1}^p W_{ii} \left( \frac{(\mu \hat{\mu}_0 + \sigma_i^2)}{(\hat{\mu}_0 + \sigma_i^2)^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \leq 0 \quad (7.15)$$

Puisque, quel que soit  $i$ ,  $W_{ii}$  et  $\hat{\mu}_0$  sont positifs et,  $\mu_0$  et  $\sigma_i^2$  strictement positifs, alors cette condition est vérifiée si

$$\mu(1 - \mu_0/\sigma_i^2) \leq 2 \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (7.16)$$

Pour les  $i$  tels que  $\sigma_i^2 \leq \mu_0$ , la condition (7.16) est satisfaite pour tout  $\mu$  positif. Pour les autres  $i$ , elle implique  $\mu \leq 2/(1 - \mu_0/\sigma_i^2)$ . Par conséquent, pour tout  $\mu \leq 2$ ,

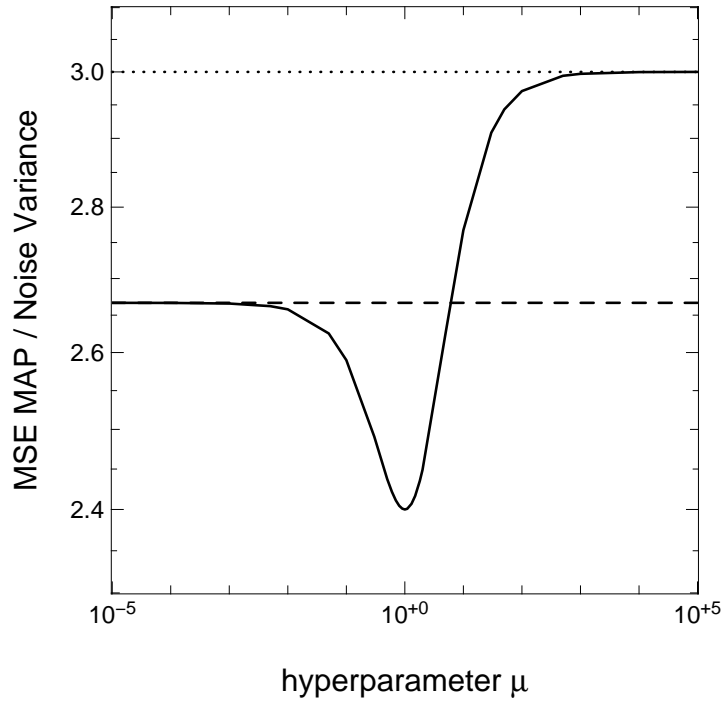


FIG. 7.13 – Allure théorique de  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / \sigma_e^2$  en fonction de  $\mu$  (trait plein), d'après l'équation (7.12). Des valeurs arbitraires ont été choisies pour  $\mu_0$ ,  $W_{ii}$ ,  $\sigma_i^2$ ,  $p$ , sauf que l'on a choisi  $\mu_0 < \sigma_i^2 \forall i$ . Trait tireté = valeur limite pour  $\hat{\mu}_0 = 0$ . Trait pointillé : Valeur limite quand  $\hat{\mu}_0 \rightarrow \infty$ .

les conditions (7.16) sont vérifiées pour tout  $i$ , alors l'estimateur MAP avec  $\mu \leq 2$  est toujours plus performant que le reconstructeur KL-MNML. De plus, la borne supérieure de l'intervalle acceptable augmente quand  $\mu_0$  croît, à système donné, *i.e.*  $W_{ii}$  et  $\sigma_i^2$  fixés.

Plus généralement, sous-estimer  $\mu_0$  revient simplement à perdre en performance et à tendre vers la solution sousoptimale de  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$ . Il arrive de même si on surestime  $\mu_0$  d'un facteur inférieur à la borne supérieure de l'intervalle acceptable (au minimum d'un facteur 2). Surestimer  $\mu_0$  d'un facteur supérieur conduit en revanche à un résultat moins intéressant que celui de *moindre effort* produit par  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$ .

### Les simulations

J'illustre maintenant cette analyse algébrique par les résultats de deux simulations avec FrIM MAP. Il s'agit de deux télescopes de 42m, avec  $D/d_l = 128$  et 256. La figure 7.14 montre les variations de  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / \sigma_e^2$  en fonction de  $\mu$ , pour différents niveaux de bruit. Sur chaque graphique, toutes les courbes tendent vers la même valeur  $\sim \gamma_{\text{KL}}$ , quand  $\mu \rightarrow 0$ . Ceci est vrai parce que le terme de biais est négligeable pour les valeurs  $\mu_0$  de ces simulations (*cf.* article de la section 5.3). Par ailleurs, le palier limite vers l'infini n'est pas observé sur ces courbes, parce qu'il se situe à un niveau beaucoup trop haut par rapport aux performances qui nous intéressent. On peut déjà noter que le taux de croissance de l'erreur (amplitude de la dérivée) pour  $\mu > 1$  (à droite de minimum) est beaucoup plus fort que pour  $\mu < 1$  (à gauche du minimum).

La figure 7.15 reprend ces mêmes résultats, recadrés autour de la zone d'intérêt, et en normalisant l'ordonnée par la valeur limite en 0. La zone acceptable d'erreur d'esti-

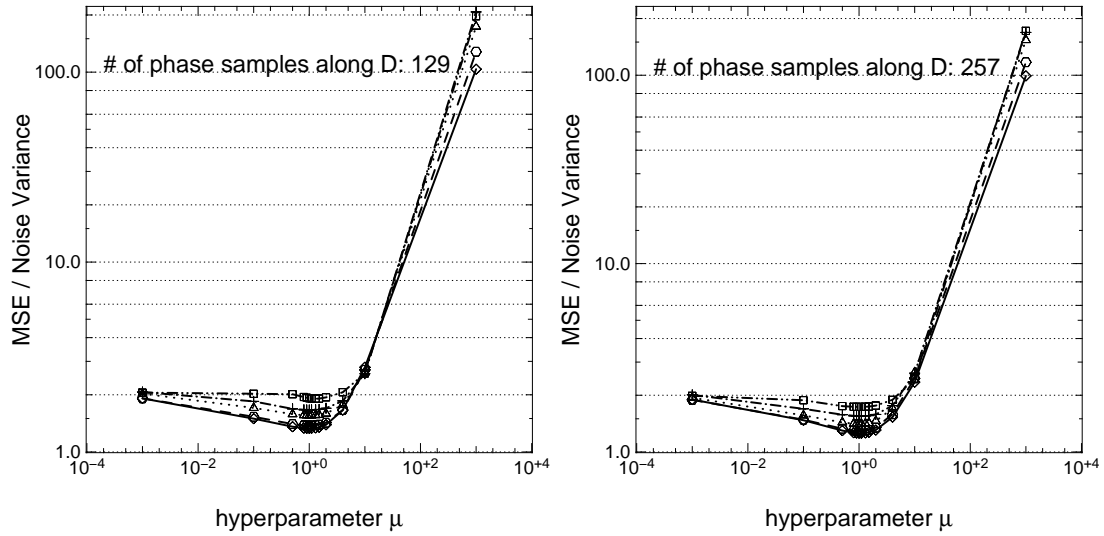


FIG. 7.14 – Évolution de  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}} / \sigma_e^2$  en fonction de  $\mu$  à partir de simulations de reconstruction de type FrIM MAP.  $D = 42\text{m}$ ,  $r_0 = 15\text{cm}$  à  $500\text{nm}$  et  $L_0 = 22\text{m}$ ,  $\lambda_{AO} = 0.7\mu\text{m}$ . 100 reconstructions de surfaces d'onde sont effectuées par point matérialisé. Différents niveaux de bruit sont simulés :  $\sigma_e = 0.01$  (carrés),  $0.09$  (croix),  $0.25$  (triangles),  $0.64$  (hexagones),  $1$  (losanges)  $\text{rad}^2/d_l$ . À gauche :  $D/d_l = 128$ . À droite :  $D/d_l = 256$ .

mation de  $\mu_0$  (ordonnée inférieure à 1) croît légèrement avec  $\mu_0$  et avec l'échantillonnage de la surface d'onde par l'analyseur, *i.e.*  $D/d_l$ . Cependant, dans le pire des cas (les carrés à gauche), l'erreur acceptable par valeurs supérieures correspond à  $\mu = 5$ . Dans le meilleur des cas, (les losanges à droite), la limite vaut  $\mu = 40$ . En d'autres termes, l'erreur d'estimation de  $\mu_0$  acceptable par valeurs supérieures est variable et n'est pas nécessairement très élevée.

Ces mêmes résultats de simulations sont également présentés sur la figure 7.16, traduits en rapport de Strehl équivalent à  $1\mu\text{m}$ . C'est une autre façon de mettre en évidence le gain potentiel de l'estimateur MAP sur celui de maximum de vraisemblance de moindre norme. On notera par exemple que pour un système de  $128 \times 128$  sous-pupilles sur ce télescope de  $42\text{m}$ , pour un niveau de bruit de  $\sigma_e = 1\text{rad}/d_l$ , le reconstruteur  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  fournit un Strehl équivalent de 40%. FrIM MAP permet d'atteindre plus de 50% si  $\mu_0$  est correctement estimé à un facteur 2 près. Si  $\mu_0$  est sous-estimé d'un facteur 100 ou surestimé d'un facteur 5, le Strehl reste supérieur à 45%.

Il est intéressant de noter qu'une surestimation d'un facteur 4 sur  $\mu_0$  équivaut à peu près à une surestimation d'un facteur 2 de la barre d'erreur des mesures, ou de  $r_0$ . Il est donc difficile d'affirmer que l'on est à l'abri d'une telle erreur. Cette analyse appelle donc une étude supplémentaire afin de déterminer comment et avec quelle précision il est envisageable d'estimer ces paramètres auxiliaires, barres d'erreur ou amplitude moyenne des pentes. Une perspective consiste à rechercher une estimée de cet hyperparamètre  $\mu$  par optimisation, à partir de plusieurs reconstructions successives. Une alternative est de se contenter de sous-estimer  $\mu_0$ .



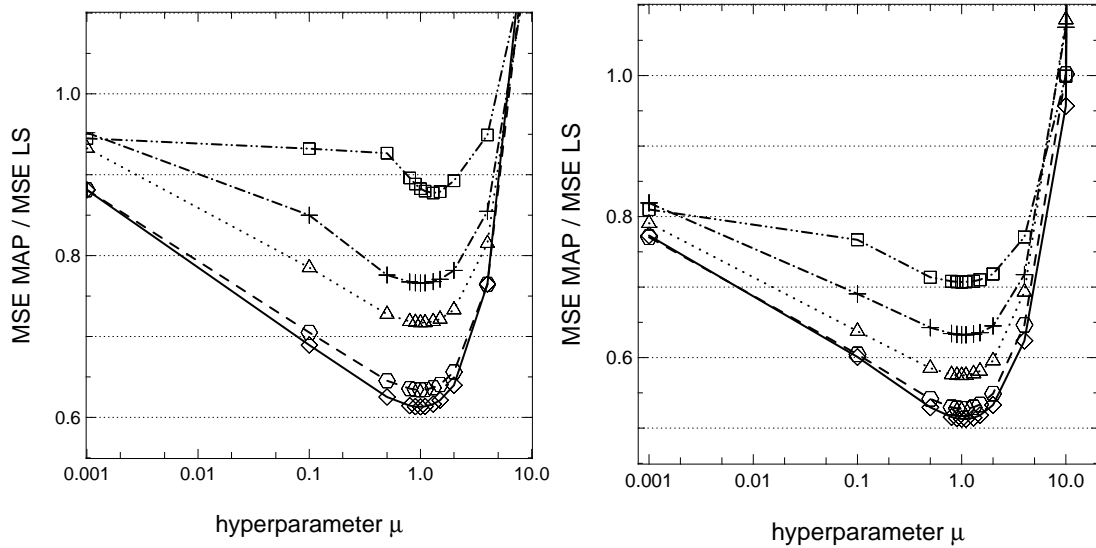


FIG. 7.15 – Évolution du rapport entre l’erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  de  $\mathbf{R}_{\text{MAP}}$  et l’erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  de  $\mathbf{R}_{\text{KL}}$  en fonction de  $\mu$  à partir des mêmes simulations que pour la figure 7.14 (même légende).

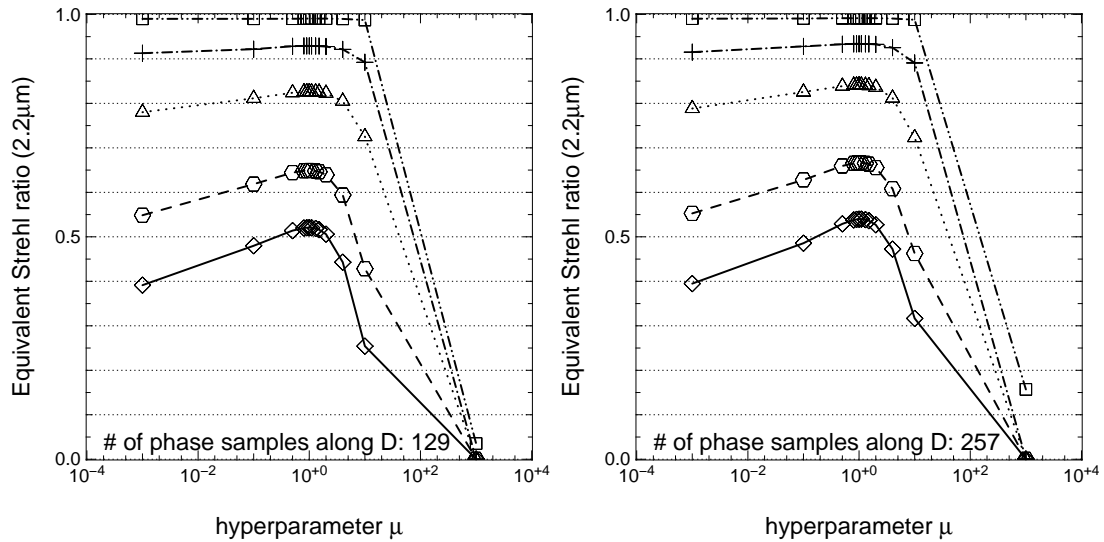


FIG. 7.16 – Évolution du rapport de Strehl équivalent, à  $1\mu\text{m}$ , en fonction de  $\mu$  à partir des mêmes simulations que pour la figure 7.14 (même légende).

## 7.6 Conclusion

Ce chapitre permet de quantifier les gains en performance accessibles par la méthode de reconstruction FrIM MAP pour la reconstruction. Il constitue donc un complément nécessaire à l'analyse théorique menée dans le chapitre 5 et aux considérations calculatoires abordées dans le chapitre 6.

Ces résultats démontrent qu'un gain d'un facteur 2 en variance sur l'erreur de reconstruction est obtenu par l'utilisation de FrIM MAP à faible RSB.

Par ailleurs, la robustesse de l'estimateur a été analysée vis-à-vis des erreurs de modélisation. La prise en compte des corrélations dans les mesures s'avère essentielle pour maintenir une bonne estimation lorsque les étoiles de référence laser génèrent des taches images significativement allongées sur les sous-pupilles de l'analyseur. Il semble préférable de surestimer l'échelle externe de cohérence spatiale de la turbulence  $L_0$ . Enfin, le poids de la régularisation étant difficile à estimer, il est moins pénalisant de le sous-estimer que de risquer de le surestimer.



## Chapitre 8

# La correction de surface d'onde turbulente

La reconstruction en optique adaptative sert généralement à commander un miroir déformable pour corriger les perturbations de la surface d'onde. C'est pourquoi dans ce nouveau chapitre l'existence d'un miroir déformable est prise en compte. J'étudie ainsi les performances de la correction en tenant compte de la fréquence spatiale limite de correction de ce système commandé. Cette fréquence spatiale limite n'est autre que l'espace inter-actionneur, noté ici  $d_a$ .

Dans le chapitre 5, l'estimation de la surface d'onde se fait dans un espace de représentation de dimension finie à choisir. Pour une représentation zonale, avec des splines linéaires, sur une grille d'échantillonnage de pas  $d_e = d_l$ , où  $d_l$  est la taille d'une sous-pupille, alors l'estimée du reconstituteur MAP  $\hat{w}$  peut être appliquée directement à un miroir déformable de fonctions d'influence bilinéaires avec un espace inter-actionneur  $d_a = d_e$ , afin de corriger la surface d'onde. Hors mis les problèmes de saturation des actionneurs, que je n'étudie pas dans ce manuscrit, on obtient alors la meilleure correction possible pour cette représentation de la surface d'onde.

Toutefois, cette représentation néglige les perturbations de fréquences supérieures à  $1/(2d_l)$ . Or ces composantes de la surface d'onde ne sont pas absentes des mesures ; elles sont repliées. Du fait de ce repliement, limiter la reconstruction à un échantillonnage identique à celui des sous-pupilles (*i.e.*  $d_l = d_e$ ) peut dégrader la correction appliquée. C'est ce point qui est étudié dans ce chapitre.

J'étends ainsi la reconstruction de surface d'onde traitée au chapitre 5 à la correction statique de surface d'onde. Pour cela je définis un nouveau critère à optimiser. Son optimisation permet de décomposer le processus de correction en 2 étapes : la reconstruction de surface d'onde et la projection sur le miroir déformable. Les erreurs associées au repliement sont identifiées au sein du budget d'erreur de la correction. Enfin, des simulations effectuées sur un cas simple montrent le poids relatif des erreurs en fonction des dimensions du système et des caractéristiques du signal et du bruit. Deux méthodes de correction sont ainsi comparées. La première reconstruit la surface d'onde sur le même échantillonnage que le miroir déformable. La seconde utilise un modèle d'analyseur plus raffiné, noté SH3  $\times$  3 pour reconstruire la surface d'onde sur une grille échantillonnée deux fois plus fine.

## 8.1 Le critère de correction et son optimisation

### 8.1.1 Les équations

Pour reprendre les notations introduites à la section 2.3, le miroir déformable (MD) peut généralement être modélisé comme un processus linéaire commandé par un vecteur  $\mathbf{a}$  de  $n_a$  éléments,  $n_a$  étant le nombre d'actionneurs à asservir. La déformée du miroir  $w^c$  est une fonction continue sur la pupille  $\mathcal{A}$ , elle peut alors s'écrire

$$w^c(\mathbf{r}) = \mathbf{m}(\mathbf{r})^T \cdot \mathbf{a} = \sum_i a_i m_i(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{A} \quad (8.1)$$

où les  $m_i$  sont appelées les fonctions d'influence du miroir.

L'équation de mesure est toujours donnée par l'expression (2.10)

$$\mathbf{d} = S(w) + \mathbf{e} = \mathbf{y} + \mathbf{e}, \quad (8.2)$$

où la notation introduite  $\mathbf{y} = S(w)$  modélise les mesures non bruitées.

Le critère de correction statique s'écrit

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| P(w - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}) \right\|^2 \right\rangle \quad (8.3)$$

où la commande  $\mathbf{a}$  est à déterminer à partir des mesures  $\mathbf{d}$ . Je cherche l'estimateur linéaire  $\mathbf{E}$  telle que la commande

$$\mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \quad (8.4)$$

minimise le critère (8.3).

### L'espace image $\mathcal{M}$ du miroir déformable

Il est possible de décomposer l'espace de dimension infinie  $\mathcal{C}(\mathcal{A}; \mathbb{R})$  sur lequel est définie la surface d'onde  $w$ , en deux sous-espace orthogonaux complémentaires  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^\perp$ , où  $\mathcal{M}$  est l'espace engendré par les fonctions d'influence  $m_i$  du miroir déformable. Alors,

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}^\perp} + \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} \quad (8.5)$$

où

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}^\perp} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| P(w^{\mathcal{M}^\perp}) \right\|^2 \right\rangle \quad (8.6)$$

et

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| P(\mathbf{m}^T \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) \right\|^2 \right\rangle. \quad (8.7)$$

$w^{\mathcal{M}^\perp}$  et  $(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{b})$  sont les projections orthogonales de  $w$  sur  $\mathcal{M}^\perp$  et  $\mathcal{M}$  respectivement. Le vecteur  $\mathbf{b}$  est ainsi défini dans  $\mathbb{R}^{n_a}$ . Je désigne le premier terme  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}^\perp}$  de cette décomposition comme l'erreur de sous-dimensionnement du système d'optique adaptative. Elle est communément appelée dans la littérature *fitting error*. Je détaille sa contribution au budget d'erreur plus loin dans la section 8.3.1. Je retiens simplement ici qu'elle est fixée par l'espacement entre les actionneurs du miroir déformable,  $d_a$ , et par les dimensions de la pupille du télescope. En d'autres termes, elle est indépendante de l'optimisation de  $\mathbf{E}$ .

### 8.1.2 La reformulation du critère

Optimiser  $\mathbf{E}$  consiste donc à minimiser l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$  de l'équation (8.7). Pour alléger les formules, de façon analogue à l'expression (5.8) introduite sur la base des fonctions de l'estimation, je définis une nouvelle matrice  $\underline{\mathbf{N}}$  de  $\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  dont les éléments sont

$$\underline{N}_{i,j} = \frac{1}{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} (P(m_i)|P(m_j)) \forall 1 \leq i, j \leq n_a. \quad (8.8)$$

La factorisation de Cholesky de cette matrice symétrique positive est notée

$$\underline{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N}, \quad (8.9)$$

si bien que le critère à optimiser devient

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} &= \langle (\mathbf{b} - \mathbf{a})^T \cdot \underline{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \rangle \\ &= \text{tr} \langle \mathbf{N} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})^T \cdot \mathbf{N}^T \rangle \\ &= \text{tr} \langle \mathbf{N} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{N}^T \rangle. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Je garde la notation  $\mathbf{N}$  parce qu'il n'y aura pas de confusion avec la matrice définie au chapitre 5. Il est simplement important de noter que cette nouvelle matrice est définie dans  $\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  et non plus dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

### 8.1.3 L'optimisation du critère

Le critère (8.10) est une forme quadratique en  $\mathbf{E}$ . Son optimisation implique

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{E}} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \langle (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}^T \rangle. \quad (8.11)$$

En remplaçant  $\mathbf{d}$  par son expression (2.10), on obtient

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot [\mathbf{E} \cdot (\langle \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T \rangle + \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \rangle) - \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^T \rangle], \quad (8.12)$$

où j'ai tenu compte du fait que le bruit de mesure est supposé décorrélé de la surface d'onde turbulente, *i.e.*

$$\langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}^T \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}^T \rangle = 0. \quad (8.13)$$

Une condition suffisante pour annuler l'équation (8.12) consiste à choisir  $\mathbf{E}$  tel que

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^T \rangle \cdot (\langle \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T \rangle + \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \rangle)^{-1}. \quad (8.14)$$

Puisque toutes les mesures sont bruitées, la matrice  $(\langle \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T \rangle + \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \rangle)$  dans l'équation ci-dessus est bien symétrique définie positive, donc inversible.

## 8.2 L'interprétation de l'estimateur pour la correction

### 8.2.1 La reformulation de $\mathbf{E}$

La mise en oeuvre de l'opérateur  $\mathbf{E}$ , défini par l'équation (8.14), pour calculer la commande requiert la modélisation des covariances  $\langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^T \rangle$ ,  $\langle \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T \rangle$  et  $\langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \rangle$ . Comme dans la section 5.1, la covariance des erreurs est notée  $\mathbf{C}_e = \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \rangle$ .

Je reprends la décomposition (3.23) de  $w$  sur une base infinie  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{A}; \mathbb{R})$ . Les mesures non bruitées s'écrivent

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty} S(h_i) \cdot w_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}. \quad (8.15)$$

J'étends momentanément la notation de produit matriciel aux applications linéaires en dimension infinie afin d'alléger les notations. La projection orthogonale de  $\mathbf{w}$  sur l'espace image du miroir est notée  $\mathbf{F}$ , définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : (\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R}); (h_i)_{i \in \mathbb{N}}) &\rightarrow (\mathcal{M}; (m_i)_{1 \leq i \leq n_a}) \\ \mathbf{w} &\rightarrow \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Ainsi, l'expression de  $\mathbf{E}$  dans l'équation (8.14) devient

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1}. \quad (8.17)$$

où  $\mathbf{C}_w$  est la covariance spatiale de la surface d'onde turbulente décrite dans la base infinie  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ . Les notations de transposition sont étendues à des applications linéaires en dimension infinie, en utilisant la même base infinie, pour simplifier la formulation de l'équation (8.17).

En pratique, le calcul de  $\mathbf{E}$  se fait généralement à partir d'approximations de dimension finie de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}_w$ .

Dans la suite de ce chapitre, je suppose que la représentation du front d'onde est faite dans un espace de dimension  $n$ , ce qui appelle deux remarques :

- L'erreur de modélisation des mesures non bruitées  $\mathbf{y}$  associée à cette paramétrisation doit être prise en compte dans la perturbation  $\mathbf{e}$  de l'équation de mesure (9.3). Afin d'optimiser la commande, il est important que les performances soient limitées par les incertitudes du système de mesure lui-même et non pas par les approximations du modèle qui en est fait. Ceci signifie qu'il est préférable de choisir  $n$  tel que l'erreur de modélisation de  $\mathbf{y}$  soit négligeable devant les erreurs dues au système de mesure.
- De façon analogue, il faut s'assurer que l'écart à la vraie surface d'onde, *i.e.*  $(w - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{w})$ , se trouve dans l'orthogonal à l'espace engendré par le miroir, afin que la restriction de  $F$  à un espace de dimension finie reste identique à la projection idéale.

Les deux remarques ci-dessus montrent que la paramétrisation de  $\mathbf{w}$  doit être optimisée en fonction du type d'analyseur et de miroir considérés.

La matrice de covariance  $\mathbf{C}_w$  est symétrique définie positive, donc inversible. Ceci permet de décrire le calcul de la commande

$$\mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{d} \quad (8.18)$$

en deux étapes, en appliquant les matrices

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \\ &= (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1},\end{aligned}\tag{8.19}$$

et  $\mathbf{F}$ . Ces deux étapes correspondent respectivement à une reconstruction MAP et une projection.

J'analyse un peu plus loin les propriétés de chacune de ces étapes.

### 8.2.2 L'extension à la correction sur plusieurs miroir déformable

L'avantage de la forme générale des équations traitées dans le chapitre 5, tout comme pour celles présentées ici, est que l'approche et les résultats sont encore valables pour la correction d'une ou plusieurs surfaces d'onde en altitude. Je ne dérive pas à nouveau les équations ici pour ce cas. Leurs expressions complètes sont détaillées par Ellerbroek (1994) et Fusco et al. (2001). L'estimateur obtenu est également composé d'une étape de reconstruction, puis d'une étape de projection.

Je souhaite souligner ici les principales différences existant entre la correction d'une surface d'onde présentée dans cette section, et la correction de plusieurs couches en altitude.

- L'espace de dimension infinie de définition de  $w$  devient la réunion des  $(\mathcal{C}(\mathcal{A}_i^{\text{meta}}; \mathbb{R}))_{(1 \leq i \leq N_{\text{couches}})}$  où  $\mathcal{A}_i^{\text{meta}}$  est la réunion des pupilles du télescope projetées sur les couches en altitude dans les différentes direction d'analyse (*cf.* figure 2.9).
- $\mathbf{S}$  reste un opérateur linéaire mais il dépend de la direction de la, ou des, étoiles de référence et il inclut la modélisation de la propagation de l'onde à travers les différentes couches. Les mesures sont les dérivées locales de la surface d'onde résultante au niveau du plan pupille, dans chaque direction d'analyse.
- Le vecteur  $\mathbf{d}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  où  $m$  désigne désormais le nombre total de mesures, c'est-à-dire en tenant compte de tous les analyseurs.
- L'opérateur  $P$  reste linéaire. Si la reconstruction de surface d'onde doit être optimisée pour une correction dans une direction de visée particulière  $\theta$ , alors on le note  $P_\theta$  et il modélise la propagation de l'erreur d'estimation de  $w$  à travers les différentes couches dans cette direction  $\theta$ , et ôte le piston à la surface d'onde résiduelle résultante dans le plan pupille. Si on souhaite optimiser la reconstruction dans plusieurs direction d'observation  $\theta_j$ ,  $P$  devient alors la somme de ces  $P_\theta$ . Et l'extension de l'optimisation au champ d'observation tout entier, comme c'est le cas de l'optique adaptative multi-conjuguée (OAMC), conduit à insérer une moyenne sur tous les angles  $\theta$  du champ, c'est-à-dire que  $P$  contient une intégrale sur  $\theta$ .
- Quoi qu'il en soit, le critère à optimiser peut encore se mettre sous la forme de l'équation (8.3). L'analyse théorique de ce chapitre est suffisamment générale pour que toutes les conclusions qui suivent l'équation (8.3) soient valables pour la reconstruction dans plusieurs couches.
- L'estimateur obtenu est alors composé du reconstruteur MAP  $\mathbf{E}$  et du projecteur orthogonal  $\mathbf{F}$  associé à ce système et à sa modélisation.
- Le reconstruteur  $\mathbf{E}$  ne dépend pas de la direction  $\theta$  dans lequel le critère doit être optimisé (Ellerbroek, 1994).



- Le projecteur  $\mathbf{F}$  dépend de la direction d'optimisation de la correction.
- Les deux remarques faites au paragraphe précédent sur la nécessité d'un espace de paramétrisation suffisant de la perturbation pour que la projection soit satisfaisante peuvent être étendues à l'espace des surfaces d'onde multiples modélisées en altitude. En d'autres termes, il faut modéliser au moins autant de surfaces d'onde en altitude qu'il y a d'altitudes de conjugaison des miroirs déformables.

Ce paragraphe constitue un aparté dans ce chapitre. Je reprends désormais la discussion à partir des équations dérivées sur un cas d'optique adaptative simple, de correction dans le plan pupille.

### 8.3 L'erreur de correction

L'erreur de correction n'est autre que le critère  $\langle \epsilon^2 \rangle$  dans l'équation (8.3) évalué en fonction de l'expression (8.18) de l'estimateur  $\mathbf{E}$

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp} + \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$$

où

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| P(\mathbf{m}^T \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{d})) \right\|^2 \right\rangle. \quad (8.20)$$

Comme déjà signalé, le terme d'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$  est caractéristique du dimensionnement du système. Il ne dépend donc pas de la modélisation contenue dans  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{R}$ , à partir du moment où la surface d'onde est reconstruite sur un espace contenant entièrement  $\mathcal{M}$ . En revanche, l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$  est, elle, fonction de la modélisation de la surface d'onde et de l'analyseur. En particulier, parce que l'analyseur de Shack-Hartmann génère du repliement dans les mesures, le choix du modèle d'analyseur et des *a priori* associés influe sur ce terme d'erreur.

L'augmentation de l'erreur de sous-dimensionnement  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$  entraîne une augmentation du repliement dans les données. J'étudie conjointement dans la suite de cette section les deux erreurs  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$  et  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$ .

Cette section ne prétend pas analyser de façon générale la diminution de l'erreur de correction due au repliement grâce à un modèle d'analyseur suréchantillonné, mais elle fournit un aperçu des ordres de grandeur des termes d'erreur influant dans la correction à l'aide d'une simulation. Comme dans le chapitre précédent, j'ai simulé un cas d'optique adaptative mono-conjuguée (OAmC), *i.e.* un seul analyseur et un seul miroir déformable. Cette fois-ci, en revanche, la surface d'onde turbulente incidente est modélisée à partir d'une représentation zonale de pas d'échantillonnage  $d_e = d_l/2$ . Autrement dit, les mesures simulées contiennent du repliement et le miroir déformable, dont l'espacement des actionneurs reste égal à  $d_a = d_l$ , est responsable d'une erreur de sous-dimensionnement.

#### 8.3.1 L'erreur de sous-dimensionnement $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$

L'erreur de sous-dimensionnement  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$  correspond à l'espérance mathématique de la valeur minimale de la fonction de pénalisation du problème d'optimisation suivant

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\| P(w - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}) \right\|^2. \quad (8.21)$$

Cette erreur illustre l'incapacité du miroir déformable à corriger certaines distortions. En d'autres termes,  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$  correspond à l'erreur quadratique moyenne générée par les déformations de la surface d'onde dont la fréquence spatiale est supérieure à la fréquence de coupure du miroir déformable. Cette erreur a été étudiée à plusieurs reprises dans la littérature (Hudgin, 1977; Greenwood, 1979; Wallner, 1983; Parenti et Sasiela, 1994; Ellerbroek, 1994; Véran, 1997; Rigaut et al., 1998) pour une turbulence de type Kolmogorov. Elle constitue un critère important pour définir les spécifications technologiques du miroir déformable, notamment l'espacement de ses actionneurs. Pour les géométries de miroir et d'analyseur considérées dans ce manuscrit, l'espace entre les actionneurs est égal au côté d'une sous-pupille  $d_l$ . Wallner (1983) suggère d'écrire cette erreur sous la forme

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp} \simeq \alpha^{\mathcal{M}\perp} (d_l/r_0)^{5/3}, \quad (8.22)$$

où  $r_0$  est le paramètre de Fried calculé à la longueur d'onde à laquelle l'erreur de phase  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$  est évaluée et  $\alpha^{\mathcal{M}\perp}$  est le coefficient de l'erreur de sous-dimensionnement (*fitting* dans la littérature). Pour des sous-pupilles carrées, la géométrie d'alignement des sous-pupilles et des actionneurs a peu d'influence sur ce coefficient. Je considère toujours que les fonctions d'influence du miroir sont des splines linéaires à deux dimensions.

Lorsque les actionneurs sont disposés régulièrement sur un miroir carré plus grand que la pupille circulaire du télescope sans obstruction centrale, Hudgin (1977) donne l'estimation suivante

$$\alpha^{\mathcal{M}\perp} = 0.287. \quad (8.23)$$

Ellerbroek (1994) calcule, pour la géométrie de Fried avec  $D/d_l \geq 12$ ,

$$\alpha^{\mathcal{M}\perp} \simeq 0.3. \quad (8.24)$$

À partir d'un calcul basé sur la densité spectrale de puissance, Rigaut et al. (1998) évaluent ce coefficient à

$$\alpha^{\mathcal{M}\perp} = 0.23. \quad (8.25)$$

Cette erreur de sous-dimensionnement  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$  n'est pas incluse dans les simulations que je présente au chapitre 7 parce que la surface d'onde turbulente est générée à partir de fonctions d'interpolation  $h_i$  qui sont identiques à celles de l'estimation.

Je considère maintenant un télescope de diamètre  $D = 8\text{m}$ , avec une obstruction centrale  $0.15D$ , équipé d'un système d'optique adaptative avec un analyseur de Shack-Hartmann et un miroir déformable dans la géométrie de Fried,  $d_l = d_a$ . Des actionneurs sont positionnés dans toute la pupille et, comme suggéré par Parenti et Sasiela (1994), j'ai ajouté une rangée d'actionneurs en périphérie de l'ouverture et dans l'obstruction centrale. Pour plusieurs dimensionnements  $D/d_l$  (OAmC ou OAX), à partir de simulations d'une turbulence de von Kármán sur une surface d'onde échantillonnée zonalement avec un pas  $d_e = d_l/2$ , l'erreur de dimensionnement simulée est en adéquation avec la loi de Wallner (1983) (*cf.* équation (8.22)) avec

$$\alpha^{\mathcal{M}\perp} = 0.294. \quad (8.26)$$

### 8.3.2 L'erreur due au repliement

Dans la géométrie de Fried, l'absence d'erreur de sous-dimensionnement va de paire avec l'absence de repliement dans les mesures. Dans les simulations du chapitre 7,

l'erreur de sous-dimensionnement est nulle et il n'y a pas de repliement dans les mesures. Dans un système réel, l'analyseur génère du repliement dans les angles d'arrivées théoriques (2.7)-(2.8) en raison de l'intégrale sur la frontière de la sous-pupille. Ce repliement produit une perte d'information, parce que son processus n'est pas inversible. Il constitue donc une source d'erreur supplémentaire qu'il faut prendre en compte.

La déformée du miroir dans la géométrie de Fried ne produit pas de repliement si les fonctions d'influence sont bilinéaires. Je reprends la décomposition de la surface d'onde

$$w = w^{\mathcal{M}\perp} + w^{\mathcal{M}} = w^{\mathcal{M}\perp} + \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{b}, \quad (8.27)$$

sur les espaces  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}\perp$ , dont seule la composante  $w^{\mathcal{M}\perp}$  est responsable du repliement dans les mesures. L'équation de mesure peut également être décomposée

$$\mathbf{d} = S(w^{\mathcal{M}\perp}) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e}. \quad (8.28)$$

où l'incertitude  $\mathbf{e}$  rend compte du bruit de mesure et la notation matricielle  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{b} = S(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{b})$  est adoptée. Suivant le modèle d'analyseur  $\mathbf{S}$  utilisé dans le reconstructeur MAP défini à partir de cette équation de mesure (8.28), l'estimée de la surface d'onde diffère et la correction  $\mathbf{w}^c = \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}$  aussi.

J'étudie ici l'intérêt de raffiner le modèle d'analyseur en tenant compte du repliement afin d'améliorer la correction. L'analyse s'appuie sur des résultats de simulations pour un système de dimension  $D/d_l = 32$ , avec  $D/L_0 = 1/3$  et des valeurs du paramètre de Fried variant entre  $0.1 d_l$  et  $2 d_l$ , à la longueur d'onde d'analyse. La surface d'onde incidente est cette fois-ci représentée zonalement par  $w$  sur une grille de pas d'échantillonnage  $d_e = d_l/2$ . L'analyseur utilisé pour effectuer les mesures  $\mathbf{d}$  est dérivé des équations des angles d'arrivée théoriques (2.7)-(2.8), mais l'intégrale sur la frontière de la sous-pupille est obtenue par une somme de trapèzes, à partir de trois points de phase. Cet analyseur est nommé dans la suite SH3  $\times$  3. Il modélise tout le repliement qui a lieu dans la simulation, mais seulement une partie du repliement généré par un Shack-Hartmann réel.

La finalité de cette étude est de fournir des éléments de réponse à la question : est-ce que la correction est meilleure si la surface d'onde est reconstruite sur une grille échantillonnée de façon plus dense que celle des actionneurs, c'est-à-dire en utilisant le modèle d'analyseur  $\mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3}$  dans l'estimateur ? Pour un reconstructeur de maximum de vraisemblance de moindre norme zonal, la réponse à cette question est non. En effet, les valeurs de phase entre les coins des sous-pupilles seraient la demi-somme des valeurs de phase aux coins de celles-ci. En revanche, l'utilisation d'*a priori* sur la turbulence corrèle ces valeurs de phase intermédiaires avec toutes les autres valeurs de la grille. Leur détermination n'est donc plus simplement liée à la minimisation du terme d'attache aux données.

Dans les simulations, la correction est calculée d'après l'équation (8.18), avec deux modélisations différentes de l'analyseur  $\mathbf{S}$ , afin de comparer l'erreur de correction. La première méthode définit le reconstructeur FrIM MAP  $\mathbf{R}_{\text{SH3}\times 3}$  à partir du modèle d'analyseur SH3  $\times$  3. La deuxième méthode établit son reconstructeur FrIM MAP  $\mathbf{R}_f$  à partir du modèle de Fried de l'analyseur. Grâce aux *a priori* sur la turbulence, les deux reconstructeurs  $\mathbf{R}_f$  et  $\mathbf{R}_{\text{SH3}\times 3}$  filtrent les fréquences pliées. La comparaison des erreurs de correction est présentée sur la figure 8.1. Leur interprétation est développée dans les trois prochaines strophes.

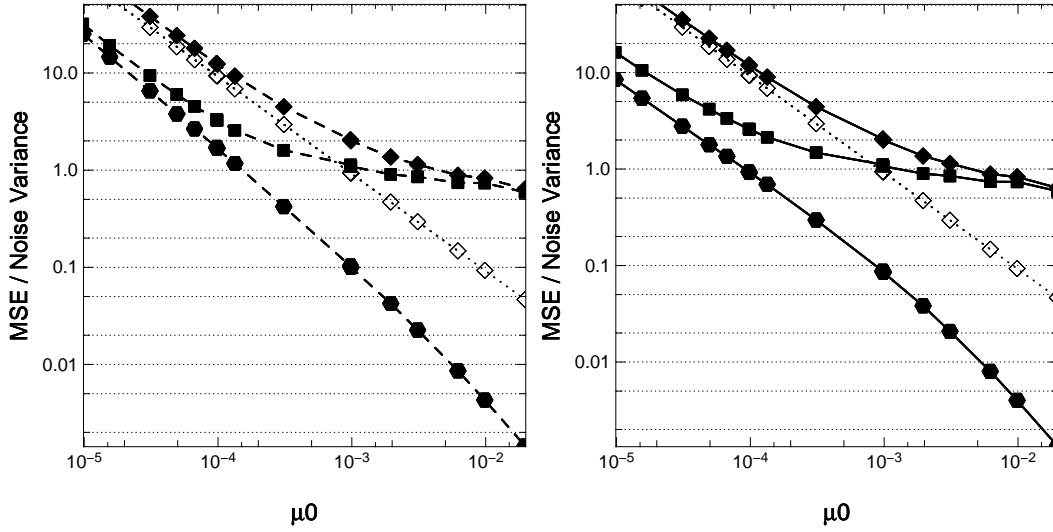


FIG. 8.1 – Contributions des termes d’erreurs de correction, normalisés par la variance du bruit de mesure. Le système d’optique adaptative simple simulé est caractérisé par les paramètres suivants :  $D = 8\text{m}$  avec une obstruction centrale de diamètre  $0.15D$ ,  $D/d_l = 32$ ,  $D/L0 = 1/3$ ,  $r_0$  varie entre  $0.1 d_l$  et  $2 d_l$  à la longueur d’onde d’analyse. Les termes d’erreur représentés sont  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp} / \sigma_e^2$  (losanges blancs),  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{repli}} / \sigma_e^2$  (hexagones noirs),  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} / \sigma_e^2$  (carrés noirs) et  $\langle \epsilon^2 \rangle / \sigma_e^2$  (losanges noirs). À gauche : Avec le modèle de Fried, *i.e.*  $\mathbf{R}_f$  et  $\mathbf{F}_f$ . À droite : Avec le modèle  $\text{SH3} \times 3$ , *i.e.*  $\mathbf{R}_{\text{SH3} \times 3}$  et  $\mathbf{F}_{\text{SH3} \times 3}$ .

### La reconstruction avec le modèle $\text{SH3} \times 3$

L’équation de mesure associée à ce modèle d’analyseur s’écrit

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}_{\text{SH3} \times 3} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{e} \quad (8.29)$$

D’après le chapitre 5, qui est suffisamment général pour que les résultats soient applicables à cette nouvelle équation de mesure, le reconstruteur FrIM MAP  $\mathbf{R}_{\text{SH3} \times 3}$  est

$$\mathbf{R}_{\text{SH3} \times 3} = (\mathbf{S}_{\text{SH3} \times 3}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S}_{\text{SH3} \times 3} + \mu_0 \mathbf{C}_w)^{-1} \cdot \mathbf{S}_{\text{SH3} \times 3}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1}, \quad (8.30)$$

où j’ai gardé les mêmes notations que dans le chapitre 5 pour les covariances et pour  $\mu_0$ .

Toutefois, les courbes de qualité de reconstruction à attendre de ce reconstruteur ne sont pas les mêmes que celles de la figure 7.6 dans le chapitre 7, parce que le modèle d’analyseur est différent. Lorsque  $r_0$  diminue,  $\mu_0 = \sigma_e^2 / (D/r_0)^{5/3}$  diminue aussi, donc le poids relatif de la régularisation diminue. Or le repliement augmente. Mais comme le repliement n’est pas un processus inversible, il est aidé par la régularisation. Le fait que celle-ci soit moins forte entraîne alors une dégradation de la reconstruction.

### La reconstruction avec le modèle de Fried

À partir de l’équation (8.28), je décris les mesures par

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}_{\text{SH3} \times 3} \cdot (\mathbf{w}^{\mathcal{M}} + \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp}) + \mathbf{e} \quad (8.31)$$

où  $\mathbf{w}^{\mathcal{M}}$  et  $\mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp}$  sont respectivement les projections de  $\mathbf{w}$  sur l'espace du miroir  $\mathcal{M}$  et son orthogonal  $\mathcal{M}\perp$ . Le modèle de Fried  $\mathbf{S}_f$  étant parfait sur  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}} = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}}. \quad (8.32)$$

De plus, le modèle de Fried ne modélise pas le repliement. Dans l'équation de mesure qui lui est associée,

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e}', \quad (8.33)$$

les incertitudes sont

$$\mathbf{e}' = \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp} + \mathbf{e}. \quad (8.34)$$

L'équation (8.33) est une équation de mesure telle que celles traitées dans le chapitre 5, mais les incertitudes sont plus élevées, à variance de  $\mathbf{e}$  égale. De plus, elles ne sont pas réellement décorrélées du signal à estimer  $\mathbf{w}^{\mathcal{M}}$ . En considérant toutefois qu'elles le sont, alors on peut en déduire un reconstituteur FrIM MAP  $\mathbf{R}_f$  qui s'écrit

$$\mathbf{R}_f = \left( \mathbf{S}_f^{\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{e}'}^{-1} \cdot \mathbf{S}_f + \mu'_0 \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}}^{-1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{S}_f \cdot \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{e}'}^{-1}, \quad (8.35)$$

avec

$$\underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{e}} + \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \langle \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp} \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp \text{T}} \rangle \cdot \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3}^{\text{T}}}{\sigma_{\mathbf{e}}^2 + \langle \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp \text{T}} \cdot \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp} \rangle} = \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{e}'}}{\sigma_{\mathbf{e}'}^2},$$

et

$$\mu'_0 = \sigma_{\mathbf{e}'}^2 \left( \frac{r_0}{D} \right)^{5/3}.$$

En conséquence,  $\mu'_0$  est plus grand que celui considéré au chapitre précédent, à niveau de bruit de mesure  $\sigma_{\mathbf{e}}^2$  constant. La régularisation prend donc davantage d'importance parce que les données sont moins bien modélisées. Les performances sont alors également moins bonnes que celles présentées au chapitre 7.

Dans les simulations effectuées, le repliement présent dans les mesures est tout de même limité puisque la surface d'onde incidente a une représentation fréquentielle limitée contrairement à celle de la turbulence réelle. L'erreur introduites dans l'équation de mesure par cette paramétrisation deux fois plus fine peut s'écrire

$$\langle \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp \text{T}} \cdot \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp} \rangle = \alpha^{\text{repli}} \left( \frac{d_l}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (8.36)$$

où le coefficient  $\alpha^{\text{repli}}$  est trouvé égal à 0.105 dans toutes nos simulations. Cette erreur est quantifiée dans l'espace des mesures. L'erreur de correction due au repliement est intrinsèquement liée au reconstituteur, et le prochain paragraphe montre que celle-ci dépend du modèle d'analyseur et des *a priori* utilisés.

### 8.3.3 La comparaison des corrections

Les surfaces d'onde reconstruites par  $\mathbf{R}_f$  et  $\mathbf{R}_{\text{SH3}\times 3}$  ne sont pas définies sur le même espace et donc ne sont pas comparables. En revanche, on peut comparer les corrections engendrées par ces deux choix de modèles après projection sur le miroir déformable,

$$\mathbf{w}_{\text{SH3}\times 3}^c = \mathbf{m}^{\text{T}} \cdot \mathbf{F}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{R}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{d} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_f^c = \mathbf{m}^{\text{T}} \cdot \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{d}.$$

L'erreur de totale de correction  $\langle \epsilon^2 \rangle$  associée à ces deux méthodes est représenté sur la figure 8.1, normalisée par le niveau de bruit  $\sigma_e^2$ , en fonction de  $\mu_0$ . Sur le graphique de gauche, les losanges noirs illustrent la moyenne de l'erreur de correction  $\langle \epsilon^2 \rangle / \sigma_e^2$  sur 100 simulations pour le modèle de Fried. Sur le graphique de droite, l'erreur de correction  $\langle \epsilon^2 \rangle / \sigma_e^2$  est représentée pour le modèle SH3  $\times$  3. L'évolution de l'erreur de sous-dimensionnement normalisée,  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp} / \sigma_e^2$ , en fonction de  $\mu_0$  est matérialisée par des losanges blancs. Elle est identique sur les deux graphiques puisqu'elle ne dépend pas du modèle d'analyseur.

Les courbes avec les carrés noirs représentent l'erreur de correction dans l'espace image du miroir déformable,  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} / \sigma_e^2$ , normalisée en fonction de  $\mu_0$ . On note sur la figure 8.1, que pour de mêmes conditions de simulation, cette erreur (carrés noirs) sur le graphique de droite atteint des valeurs environ 2 fois plus faibles que sur le graphique de gauche lorsque  $\mu_0$  diminue, c'est-à-dire lorsque le repliement augmente.

En décomposant les mesures  $\mathbf{d}$  en deux contributions

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$$

avec

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}} + \mathbf{e} = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}} + \mathbf{e}$$

et

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{S}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp},$$

la linéarité de tous les opérateurs permet l'écriture suivante

$$\mathbf{w}_{\text{SH3}\times 3}^c = \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{R}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{R}_{\text{SH3}\times 3} \cdot \mathbf{d}_2$$

et

$$\mathbf{w}_f^c = \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{d}_2.$$

Idéalement la correction associée à  $\mathbf{d}_2$  devrait être nulle puisqu'elle est définie pour compenser une composante de la surface d'onde que le miroir ne génère pas. La variance de l'écart entre ce terme et une correction nulle

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{repli}} = \frac{1}{S_A} \left\langle \left\| P(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_2) \right\|^2 \right\rangle \quad (8.37)$$

est représentée sur les graphiques de la figure 8.1 par la courbe avec des hexagones noirs. Cette erreur augmente quand  $\mu_0$  diminue. En effet, la régularisation diminue et le processus de reconstruction devient moins précis. On note qu'elle est légèrement plus faible pour le modèle SH3  $\times$  3 que pour le modèle de Fried, de quelques pourcents en variance d'erreur. À partir du repliement du spectre de la turbulence, Rigaut et al. (1998) démontrent que l'erreur de correction pour un reconstruteur de type maximum de vraisemblance zonal avec le modèle de Fried s'écrit

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{repli}} \simeq 0.08 \left( \frac{d_l}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (8.38)$$

C'est-à-dire que  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{repli}}$  vaut environ un tiers de l'erreur de sous-dimensionnement. Avec les reconstituteurs MAP étudiés ici,  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{repli}}$  ne dépend plus uniquement du rapport  $(d_l/r_0)$ .

On remarque également sur la figure 8.1 qu'à grand  $\mu_0$ , l'erreur de sous-dimensionnement (losanges blancs) est négligeable devant l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$  dans l'espace image du miroir. Soit le repliement est presque inexistant, soit le niveau de bruit est tellement élevé que le reconstituteur est peu performant, parce qu'il repose principalement sur les *a priori*. La courbe de  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$  à l'extrémité droite des graphiques est semblable à celles de la figure 7.6. En revanche, lorsque  $\mu_0$  diminue l'erreur due aux modes repliés  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{repli}}$  domine rapidement  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$ . Alors que l'extrémité droite des courbes  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$  sont semblables pour les deux modèles, Fried et SH3  $\times$  3, l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$  est plus faible, toujours de quelques pourcents, pour le modèle SH3  $\times$  3 lorsque  $\mu_0$  diminue.

Finalement, les deux modèles se différencient dans leurs erreurs de correction lorsque  $\mu_0$  est très petit. Le repliement important donne un léger avantage au modèle suréchantillonné SH3  $\times$  3. Toutefois, les valeurs de  $\mu_0$  pour lesquelles cet écart d'erreur est de l'ordre de plusieurs pourcents, coïncident avec un régime où l'erreur dominante est due au sous-dimensionnement. Les caractéristiques du système simulé sont proches de celles d'un système de type optique adaptative extrême (OAX) pour un des télescopes VLT (Cerro Paranal, Chili). Cependant, les valeurs de  $\mu_0$  rencontrées pendant le fonctionnement d'un tel système se situent plutôt dans le 1<sup>er</sup> tiers droit de ces graphiques. Dans de telles conditions, les deux modèles semblent avoir des performances similaires. Le repliement a un effet marginal sur les performances d'un tel système.

## Troisième partie

# L'OA en boucle fermée sur un téléscope hectométrique





## Chapitre 9

# L'approche problème inverse en boucle fermée

La partie II de ce manuscrit traite la reconstruction et la correction de surface d'onde comme un problème inverse. En supposant que l'on puisse appliquer l'estimée de la (ou les) surface(s) d'onde à un (ou des) miroir(s) déformable(s), on obtient une correction de la turbulence. Comme discuté au chapitre 4, cette estimation repose sur un problème inverse *simple* et elle peut être améliorée grâce à de nouvelles mesures. Effectuer des mesures et des corrections de façon périodique, c'est finalement réaliser un système d'optique adaptative.

Dans la partie précédente, l'estimation traitée correspond à un système en boucle ouverte, c'est-à-dire que l'analyseur de surface d'onde (ASO) ne voit pas la correction appliquée sur la surface d'onde turbulente. Une telle correction correspond schématiquement au diagramme boucle ouverte en haut de la figure 9.1, avec  $\mathbf{G}^+$  l'estimateur statique et  $Q(z)$  la transformée en  $z$  de la partie dynamique du correcteur (*cf.* section 2.6) qui ne serait ici que la matrice identité. Cependant, un système d'optique adaptative (OA) sert à *réguler* les déformations du surface d'onde, et il est donc plus intéressant de le concevoir comme un système en boucle fermée (*cf.* en bas de la fig. 9.1). La boucle de rétroaction permet une meilleure sensibilité, un meilleur contrôle du régime transitoire, réduit l'effet des perturbations externes et l'erreur statique. De plus, en optique adaptative, l'analyseur de surface d'onde a un domaine de linéarité restreint par ses caractéristiques physiques. Afin de limiter les coûts matériels, il est préférable de mesurer les déformations résiduelles de la surface d'onde  $w^{\text{res}}$ .

Ce chapitre présente une loi de commande pour le contrôle en boucle fermée d'un système de grande dimension. Les équations ne sont dérivées que pour une configuration de type optique adaptative mono-conjuguée (OAmC) ou extrême (OAX).

### 9.1 Les équations en boucle fermée

#### 9.1.1 Le modèle des mesures

Je reprends les notations introduites à la section 8.1; la déformée du miroir  $w^c$  s'écrit

$$w^c(\mathbf{r}) = \mathbf{m}(\mathbf{r})^T \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n_a} a_i m_i(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{A} \quad (9.1)$$

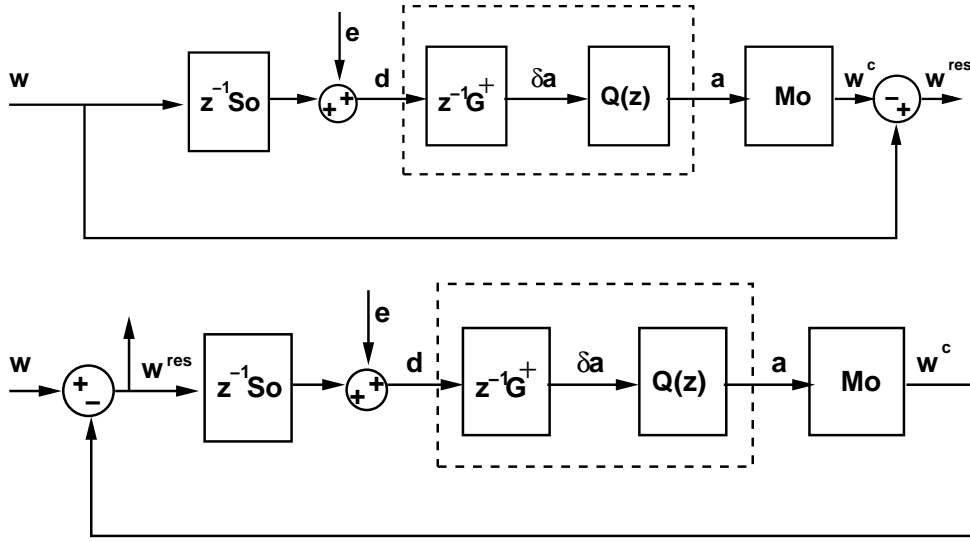


FIG. 9.1 – En haut : Diagramme d’optique adaptative en boucle ouverte. En bas : Diagramme en boucle fermée. Les deux représentations sont en temps discret, avec les transformées en  $z$  des éléments du système.  $\mathbf{M}_o$  et  $\mathbf{S}_o$  représentent les modèles linéaires nominaux du miroir déformable et de l’analyseur, qui sont représentés dans les équations par  $\mathbf{m}$  et  $S$ .

où les  $m_i$  sont les fonctions d’influence et  $n_a$  le nombre de degrés de liberté du miroir déformable.

En boucle fermée, l’analyseur observe la surface d’onde résiduelle  $w^{\text{res}}$ , *i.e.* la différence entre la surface d’onde incidente  $w$ , turbulente, et la déformée du miroir  $w^c$ . L’équation de mesure (2.10) est modifiée comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= S(w^{\text{res}}) + \mathbf{e} \\ &= S(w - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{e} \end{aligned} \quad (9.2)$$

La linéarité du modèle d’analyseur permet d’écrire

$$\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{e} \quad (9.3)$$

avec les notations

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}(w) \quad \text{et} \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{S}(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_a}, \quad (9.4)$$

où  $\mathbf{y}$  représente les mesures équivalentes boucle ouverte non bruitées.

Je rappelle que les statistiques des erreurs de mesures  $\mathbf{e}$  et des déformations de la surface d’onde  $w$  sont supposées gaussiennes centrées, *i.e.*

$$\langle \mathbf{e} \rangle = 0, \quad \langle w(\mathbf{r}) \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{A} \quad \text{et donc} \quad \langle \mathbf{y} \rangle = 0. \quad (9.5)$$

### 9.1.2 La discrétisation temporelle

Le système bouclé comprend à la fois des variables continues et des variables discrètes. Le principe de l’analyseur impose une discrétisation temporelle des mesures, comme illustré par le chronogramme de la figure 9.2. Je note  $\tau$  le temps de pose et de

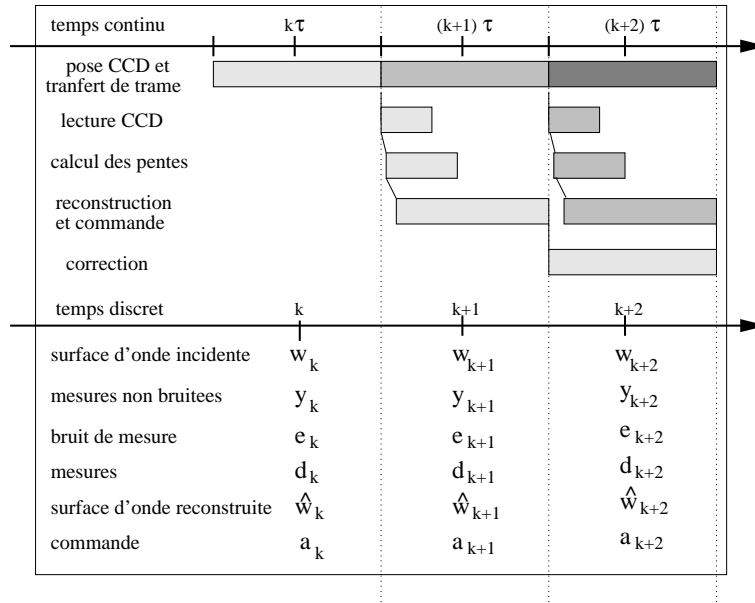


FIG. 9.2 – Chronogramme de la boucle fermée d'optique adaptative avec deux trames de retard. Les nuances de gris indiquent les transferts de l'information. La surface d'onde indiquée  $k$  observée pendant le temps de pose  $[(k - 1/2)\tau, (k + 1/2)\tau]$  donne lieu à un jeu de mesures et d'estimées indicées  $k + 1$ . Puis, en est déduite la commande indicée  $k + 2$ , appliquée pendant le temps de pose  $[(k + 3/2)\tau, (k + 5/2)\tau]$ .

transfert de charge du détecteur. C'est le temps nécessaire pour acquérir une trame de données. Ensuite, commencent successivement et dès que l'information minimale est disponible, la lecture, le calcul des pentes par un algorithme de centrage et le calcul de la reconstruction et de la commande. Je suppose que le système fonctionne avec un CCD à lecture rapide, de sorte que cette étape dure environ  $\tau/3$  secondes. Je suppose également que la suite des calculs peut être effectuée dans les  $2\tau/3$  secondes restantes, afin d'appliquer la correction avec finalement 2 trames de retard (Kulcsar et al., 2006). Il est possible d'envisager un système asynchrone, pour lequel le début de la correction ne serait pas synchronisé avec le début d'une pose. Ceci ne devrait pas modifier les conclusions de l'étude faite dans ce chapitre, mais les équations seraient moins claires. Pour cette raison, la discrétisation temporelle des variables du système suit les indications portées sur la figure 9.2.  $w_k$  et  $a_k$  modélisent la surface d'onde observée et la commande appliquée entre les instants  $(k - 1/2)\tau$  et  $(k + 1/2)\tau$ . Les mesures et les estimations qui deviennent disponibles dans ce même intervalle de temps sont notées avec l'indice  $k$ , *i.e.*  $y_k$ ,  $d_k$ ,  $e_k$  et  $\hat{w}_k$ .

Ainsi, l'équation de mesure (9.3) devient

$$d_k = y_k - \mathbf{G} \cdot a_{k-1} + e_k, \quad (9.6)$$

avec  $y_k = S(w_{k-1})$ .

## 9.2 La loi de commande et le critère à optimiser

D'après le chronogramme schématisé sur la figure 9.2, la commande  $a_k$  est calculée à partir des données  $d_{k-1}$ . L'équation (9.6) montre que ces mesures sont influencées

par la commande précédente  $\mathbf{a}_{k-2}$ . L'idée de ce chapitre est de traiter l'estimation de la commande par une approche problème inverse *simple*.

Je choisis la forme de l'estimateur afin de tenir compte explicitement du nouveau jeu de mesure accessible  $\mathbf{d}_{k-1}$  et de la commande précédente  $\mathbf{a}_{k-2}$  qui a influé sur ces mesures. Et plus particulièrement, je ne détermine la commande qu'à partir de ces deux grandeurs. La linéarité des différents éléments du système justifie alors une écriture sous la forme

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}_{k-2}. \quad (9.7)$$

D'autre part, je cherche en toute généralité les opérateurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{U}$  stationnaires optimaux.

Je considère ici que le système d'OA corrige la turbulence dans la même direction que la direction d'analyse. Ceci signifie que la correction est optimisée pour les objets dans le domaine d'isoplanétisme du système. Ceci sous-entend de plus qu'il existe une étoile de référence (suffisamment brillante) dans ce champ. Le rapport de Strehl est optimisé quand la variance des distortions résiduelles de la surface d'onde sur la pupille,

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \langle \|P(w^{res})\|^2 \rangle = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \langle \|P(w_k - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}_k)\|^2 \rangle \quad (9.8)$$

est minimale.

À partir de la même décomposition que dans le chapitre précédent (*cf.* section 8.1.1), j'isole l'erreur associée au sous-dimensionnement du système  $\langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}^\perp}$  de l'erreur à optimiser sur l'espace image du miroir  $\langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}$ . En reprenant les mêmes notations qu'à la section 8.1.2, le critère à optimiser devient

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}} = \text{tr} \langle \mathbf{N} \cdot (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k) \cdot (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k)^T \cdot \mathbf{N}^T \rangle. \quad (9.9)$$

Étant donnée la forme de la commande dans l'équation (9.7), on peut aussi écrire

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}} = \text{tr} \langle \mathbf{N} \cdot (\mathbf{b}_k - \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{k-1} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}_{k-2}) \cdot (\mathbf{b}_k - \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{k-1} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}_{k-2})^T \cdot \mathbf{N}^T \rangle. \quad (9.10)$$

### 9.3 L'optimisation du critère

On remarque que l'expression de la commande (9.7) définit  $\mathbf{a}_k$  par une relation de récurrence. L'équation (9.10) peut alors être développée pour qu'elle ne dépende plus que des données passées  $(\mathbf{d}_{k-i})_{(1 \leq i \leq k)}$  et de la commande initiale  $\mathbf{a}_0$ . En optimisant ce critère développé par rapport à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{U}$ , une solution optimale serait obtenue. Le calcul est cependant difficile à mener. Je choisis ici une autre approche qui consiste à optimiser directement le critère de l'équation (9.10) en supposant déterminée et connue la valeur de la commande passée  $\mathbf{a}_{k-2}$ . Je ne fais aucune hypothèse sur l'origine de cette commande, mais considère simplement connaître parfaitement sa valeur. Quel que soit l'état actuel du système, je cherche la meilleure solution stationnaire pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{U}$ . Je me ramène ainsi à l'optimisation d'un critère quadratique en  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{U}$ .

Les solutions  $\mathbf{E}^*$  et  $\mathbf{U}^*$  de ce problème d'optimisation vérifient

$$\begin{cases} \frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^*, \mathbf{E}) = 0 & \forall \mathbf{E} \\ \frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{U}, \mathbf{E}^*) = 0 & \forall \mathbf{U} \end{cases},$$

et, en particulier,

$$\begin{cases} \frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^*, \mathbf{E}^*) = 0 \\ \frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{U}^*, \mathbf{E}^*) = 0 \end{cases}$$

### 9.3.1 L'optimisation par rapport à $\mathbf{U}$

Tout d'abord, la dérivée par rapport à  $\mathbf{U}$ , quel que soit  $\mathbf{E}$ , s'écrit

$$\frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}, \mathbf{E}) = 2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \langle (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \rangle$$

En remplaçant le vecteur de données  $\mathbf{d}_{k-1}$  par son expression (9.6), on obtient

$$\frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{U}} = 2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \left\langle \left( \mathbf{E} \cdot (\mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{e}_{k-1}) + (\mathbf{U} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{b}_k \right) \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \right\rangle.$$

Je rappelle que la commande  $\mathbf{a}_{k-2}$  est considérée comme une grandeur déterminée, et plus précisément je ne suppose aucune corrélation particulière entre  $\mathbf{a}_{k-2}$  et les perturbations postérieures  $\mathbf{b}_k$ ,  $\mathbf{y}_{k-1}$  et  $\mathbf{e}_{k-1}$ . Comme les mesures de l'ASO ont une espérance mathématique nulle  $\langle \mathbf{d} \rangle = 0$ , et que l'espérance mathématique de la position des actionneurs pour compenser les perturbations de la phase atmosphérique est également nulle  $\langle \mathbf{b} \rangle = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}_{k-1} \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \rangle &= \langle \mathbf{y}_{k-1} \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T = 0, \\ \langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \rangle &= \langle \mathbf{e}_{k-1} \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T = 0 \end{aligned}$$

et

$$\langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \rangle = \langle \mathbf{b}_k \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T = 0.$$

En conséquence, choisir  $\mathbf{U}^* = \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}$  garantit l'annulation de la dérivée partielle du critère par rapport à  $\mathbf{U}$ . La loi de commande (9.7) se simplifie alors

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2}). \quad (9.11)$$

Puisque  $\mathbf{a}_{k-2}$  est la commande qui a affecté les mesures  $\mathbf{d}_{k-1}$  (*cf.* chronogramme de la fig. 9.2), la forme de la commande dans l'équation (9.11) permet de prendre en compte cette action afin de la soustraire des mesures résiduelles. Les *pseudo* données ainsi générées sont notées dans la suite de ce manuscrit

$$\tilde{\mathbf{d}}_{k-1} = \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2} = \mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{e}_{k-1}. \quad (9.12)$$

### 9.3.2 L'optimisation par rapport à $\mathbf{E}$

Maintenant, la dérivée du critère par rapport à  $\mathbf{E}$ , avec  $\mathbf{U} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}$ , vaut

$$\frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{U}^*, \mathbf{E}) = 2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \left( \mathbf{E} \cdot \langle \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^T \rangle - \langle \mathbf{b}_k \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^T \rangle \right).$$

Une condition suffisante pour annuler cette dérivée est donnée par

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{y}_{k-1}^T \rangle \cdot \left( \langle \mathbf{y}_{k-1} \cdot \mathbf{y}_{k-1}^T \rangle + \langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1}^T \rangle \right)^{-1}. \quad (9.13)$$

Puisque toutes les mesures sont bruitées, la matrice  $(\langle \mathbf{y}_{k-1} \cdot \mathbf{y}_{k-1}^T \rangle + \langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1}^T \rangle)$  dans l'équation ci-dessus est bien symétrique définie positive, donc inversible. On retrouve dans l'équation (9.13) un résultat proche du correcteur statique  $\mathbf{E}$  dérivé au chapitre précédent (*cf.* section 8.1.3), mais en tenant compte ici de l'évolution temporelle.

## 9.4 La mise en oeuvre de la loi de commande

### 9.4.1 La reformulation de l'estimateur $\mathbf{E}$

La mise en oeuvre de l'estimateur  $\mathbf{E}$ , défini par l'équation (9.13), pour calculer la commande requiert la modélisation des covariances  $\langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{y}_{k-1}^T \rangle$ ,  $\langle \mathbf{y}_{k-1} \cdot \mathbf{y}_{k-1}^T \rangle$  et  $\langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1}^T \rangle$ . Pour cela, je procède comme à la section 8.2.1. Je reprends la décomposition (3.23) de  $w$  sur une base infinie  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{A}; \mathbb{R})$ . Les mesures non bruitées s'écrivent

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty} S(h_i) \cdot w_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}. \quad (9.14)$$

La projection orthogonale de  $\mathbf{w}$  sur l'espace image du miroir est notée  $\mathbf{F}$  (cf. définition (8.16)). Ainsi, l'expression de  $\mathbf{E}$  dans l'équation (9.13) devient

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1}. \quad (9.15)$$

avec

$$\mathbf{C}_e = \langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1}^T \rangle \quad \forall k \geq 1 \quad (9.16)$$

et

$$\mathbf{T}_w = \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_{k-2}^T \rangle \quad (9.17)$$

et

$$\mathbf{C}_w = \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^T \rangle \quad (9.18)$$

sont respectivement la covariance spatio-temporelle et la covariance spatiale de la surface d'onde turbulente, temporellement stationnaire, décrites dans la base infinie  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ .

En pratique, le calcul de  $\mathbf{E}$  se fait généralement à partir d'approximations de dimension finie de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}_w$  et  $\mathbf{C}_w$ . La matrice de covariance  $\mathbf{C}_w$  est symétrique définie positive, donc inversible. Ceci permet de décrire le calcul de la commande

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \quad (9.19)$$

en trois étapes, en appliquant les matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \\ &= (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \quad (9.21)$$

et  $\mathbf{F}$ . Ces trois étapes correspondent respectivement à une reconstruction  $\mathbf{R}$ , une prédiction  $\mathbf{\Gamma}$  et une projection  $\mathbf{F}$ .

On reconnaît ici les étapes de reconstruction et de projection obtenues au chapitre 8. Les remarques faites à la section 8.2.1 sur la paramétrisation de la surface d'onde sont à nouveau valables ici.

J'analyse un peu plus loin les propriétés des 3 étapes  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{\Gamma}$  et  $\mathbf{F}$  dans le système en boucle fermée.

### 9.4.2 Le détail des 3 étapes de E

#### La reconstruction MAP avec R

On reconnaît dans l'expression (9.20) de  $\mathbf{R}$  le reconstituteur MAP introduit à la section 5.2. Je reprends les notations normalisées des covariances du bruit et de la turbulence pour écrire le résultat de la première étape du calcul de la commande (9.19) sous la forme

$$\hat{\mathbf{w}}_{k-2} = \mathbf{R}_{\text{MAP}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}, \quad (9.22)$$

avec

$$\mathbf{R}_{\text{MAP}} = (\mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mu_0 \underline{\mathbf{C}}_{\mathbf{w}}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\mathbf{C}}_e^{-1}.$$

La notation  $\hat{\mathbf{w}}_{k-2}$  n'est pas innocente puisque  $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}$  (cf. eq. (9.12)) représente des *pseudo* mesures en boucle ouverte de la surface d'onde  $\mathbf{w}_{k-2}$ . De fait, on retrouve dans l'équation (9.22) l'expression (4.17) avec l'hypothèse  $\langle \mathbf{w}_{k-2} \rangle = 0$ , c'est à dire que  $\hat{\mathbf{w}}_{k-2}$  est une reconstruction de type MAP de la surface d'onde turbulente, dans un système de mesure avec une entrée  $\mathbf{a}_{k-2}$  certaine.

Plus précisément, ceci correspond à une reconstruction MAP *simple*, c'est-à-dire à partir d'un jeu de mesure isolé. En effet, les *a priori* utilisés sont  $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$  et la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}$ , c'est-à-dire des *a priori* portant sur la surface d'onde turbulente.

La qualité de cette reconstruction est quantifiée par le critère  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  défini par l'équation (5.7). Comme pour la reconstruction MAP étudiée dans la partie II,  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  dépend du rapport signal à bruit (RSB) *via*  $\mu_0 = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2}$ , des dimensions du système  $D/d_l$  et de  $D/L_0$  pour un modèle de Fried de l'analyseur avec  $d_l/d_e = 1$ . Si un autre modèle d'analyseur est utilisé, l'erreur de reconstruction dépend aussi du rapport  $d_e/d_l$  (cf. section 8.3).

Par ailleurs, dans cette configuration en boucle fermée, l'erreur de reconstruction  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconst}}$  dépend du modèle  $\mathbf{G}$  du système, qui intervient dans la formation des pseudo mesures boucle ouverte d'après l'équation (9.12)).

#### La prédiction avec $\mathbf{\Gamma}$

J'analyse dans un premier temps l'expression particulière

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}_{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{-1} = \langle \mathbf{w}_{k-2} \cdot \mathbf{w}_k^T \rangle \cdot (\langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^T \rangle)^{-1} \quad (9.23)$$

obtenue dans l'expression (9.15) de  $\mathbf{E}$ . La matrice  $\mathbf{\Gamma}$  effectue une prédiction de la surface d'onde à corriger à l'instant  $k$ , à partir de la connaissance de  $\hat{\mathbf{w}}_{k-2}$ . Des 3 étapes considérées dans cette section (reconstruction, prédiction, projection), c'est la seule qui fait intervenir l'évolution temporelle de la surface d'onde. Cette matrice de prédiction  $\mathbf{\Gamma}$  rend compte du fait que l'on considère un système dynamique, c'est-à-dire qu'appliquer une correction reposant uniquement sur  $\hat{\mathbf{w}}_{k-2}$  n'est pas optimal puisque la commande est envoyée au miroir avec deux trames de retard.

Je m'attarde dans ce paragraphe sur l'interprétation de cette prédiction  $\mathbf{\Gamma}$ , en comparant celle-ci à d'autre description possible de l'évolution temporelle du système. D'une façon générale, le problème de la prédiction de  $\mathbf{w}_k$  à partir de  $\mathbf{w}_{k-2}$  à l'aide d'un estimateur linéaire  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ , pour  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_{k-2}$  de statistiques gaussiennes centrées, s'écrit

$$\mathbf{\Gamma} = \arg \min_{\bar{\mathbf{\Gamma}}} \left\langle (\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{w}_{k-2})^T \cdot (\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{w}_{k-2}) \right\rangle. \quad (9.24)$$



La solution s'obtient immédiatement par dérivation du critère (9.24) par rapport à  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ , et elle est égale à  $\mathbf{\Gamma}$  défini par l'équation (9.21). Donc  $\mathbf{\Gamma}$  est l'estimateur au sens des moindres carrés de  $\mathbf{w}_k$  à partir de  $\mathbf{w}_{k-2}$ , mais aussi de  $\mathbf{w}_k$  à partir de  $\hat{\mathbf{w}}_{k-2}$  après l'étape (9.22).

Plus généralement, prendre en compte des informations temporelles sur la surface d'onde à estimer impose, comme suggéré à la section 4.3, de modéliser l'évolution de la surface d'onde dans le temps.  $\mathbf{\Gamma}$  est le prédicteur linéaire optimal si la seule information que l'on connaît est contenue dans  $\mathbf{w}_{k-2}$ . Cependant,  $\mathbf{\Gamma}$  est construit à partir de la covariance temporelle de la surface d'onde  $\mathbf{T}_w$ . Or si cette covariance est connue, elle permet de modéliser l'évolution temporelle de façon plus précise que simplement au travers de  $\mathbf{\Gamma}$ . J'investigue dans la suite de ce paragraphe quelques possibilités de modélisation de cette évolution temporelle grâce à un modèle linéaire plus raffiné. Je m'efforce à faire ressortir quelques points à respecter pour que cette modélisation améliore la prédiction, à partir du moment où la covariance temporelle du processus  $\mathbf{T}_w$  stationnaire est connue.

Le modèle de turbulence de Kolmogorov montre que les surfaces d'onde successivement observées sont corrélées. Je note  $\mathbf{T}_i = \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_{k-i}^T \rangle$ , quel que soit  $k$  entier, la covariance temporelle stationnaire des surfaces d'onde. En supposant qu'une surface d'onde évolue linéairement dans le temps, alors

$$\mathbf{w}_{k+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{w}_{k-i} + \mathbf{v}_k \quad (9.25)$$

avec  $(\mathbf{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille de matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  stationnaires (*i.e.* indépendantes de  $k$ ) et  $\mathbf{v}_k$  un processus stochastique stationnaire décorrélé des  $(\mathbf{w}_{k-i})_{i \in \mathbb{N}}$ . Ce processus stochastique, appelé bruit générateur, illustre le fait que le modèle d'évolution de la turbulence n'est pas déterministe. Les  $(\mathbf{v}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  suivent une statistique gaussienne centrée, de variance  $\sigma_v^2$ , puisque tous les  $\mathbf{w}_{k-i}$  et  $\mathbf{w}_{k+1}$  sont des surfaces d'onde de statistique gaussienne centrée. Le modèle de l'équation (9.25) est nommé modèle auto-régressif (AR).

Le processus turbulent n'ayant pas de début ni de fin, le modèle (9.25) contient une infinité de termes. En réalité la covariance temporelle  $\mathbf{T}_i$  décroît lorsque  $i$  augmente, donc le développement (9.25) peut être approximé par troncature au  $N_i$ -ème terme en prenant garde que la condition

$$\left\langle \left\| \mathbf{w}_{k+1} - \sum_{i=0}^{N_i} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{w}_{k-i} \right\|^2 \right\rangle \ll \sigma_v^2. \quad (9.26)$$

soit respectée.  $N_i$  s'appelle alors l'horizon du modèle. Pour un modèle de covariance temporelle donné, le choix d'une valeur d'horizon  $N_i$  fixe une borne inférieure pour  $\sigma_v^2$ . Réciproquement, la variance  $\sigma_v^2$  de l'incertitude fixe une borne inférieure pour l'horizon  $N_i$ . La troncature du modèle (9.25) à l'horizon  $N_i$  produit ce que l'on nomme un modèle AR d'ordre  $N_i$ .

Les matrices  $(\mathbf{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont définies à partir de  $T_w$ , de telle sorte qu'en multipliant l'équation (9.25) par chacun des  $(\mathbf{w}_{k-i})_{0 \leq i \leq N_i}$ , on obtient un système de  $N_i + 1$  équations

tions à  $N_i + 1$  inconnues

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_w & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 & \dots & \mathbf{T}_{N_i} \\ \mathbf{T}_1 & \mathbf{C}_w & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{N_i-1} \\ \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_1 & \mathbf{C}_w & \dots & \mathbf{T}_{N_i-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}_{N_i} & \mathbf{T}_{N_i-1} & \mathbf{T}_{N_i-2} & \dots & \mathbf{C}_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \dots \\ \mathbf{B}_{N_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \\ \dots \\ \mathbf{T}_{N_i+1} \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

La matrice de ce système est Toeplitz par blocs et symétrique positive. Si l'horizon  $N_i$  est judicieusement choisi pour que les covariances temporelles  $(\mathbf{T}_i)_{1 \leq i \leq N_i}$  soient significatives, alors la matrice du système (9.27) est inversible et les  $\mathbf{B}_i$  sont déterminés par le modèle de covariance temporelle de la turbulence  $T_w$ .

En particulier, pour un modèle AR d'ordre 1,

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{w}_k + \mathbf{v}_k. \quad (9.28)$$

Si  $\mathbf{v}_k$  est un processus stationnaire décorrélé de  $\mathbf{w}_k$ , alors

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{C}_w^{-1}. \quad (9.29)$$

Ce modèle permet de définir une prédiction de  $\mathbf{w}_{k-1}$ , à partir de  $\mathbf{w}_{k-2}$  ou de  $\widehat{\mathbf{w}}_{k-2}$ . On reconnaît en effet l'estimateur équivalent à  $\mathbf{\Gamma}$  (cf. éq. (9.21)) pour une prédiction à un pas (*i.e.* une seule trame de retard).

On peut également déduire, du modèle AR d'ordre 1 (9.28), un prédicteur optimal à deux pas  $\mathbf{\Gamma}_{\text{AR1}}$ , en optimisant à nouveau le critère (9.24). En remplaçant  $\mathbf{w}_{k-2}$  par la relation de récurrence du modèle AR d'ordre 1 (9.28), on obtient

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{AR1}} = \mathbf{B}_0^2 = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{C}_w^{-1}. \quad (9.30)$$

Plus l'ordre du modèle AR est élevé, meilleure sera la prédiction, à condition évidemment que le modèle soit bon.

En conclusion, si  $\mathbf{\Gamma}$  apporte une information de prédiction, il est néanmoins envisageable d'utiliser un modèle d'évolution temporelle plus raffiné que reposant simplement sur  $\mathbf{T}_w$ . En pratique, il est parfois difficile de s'assurer que le modèle d'évolution est satisfaisant, donc il est intéressant de comparer les performances d'un prédicteur à un estimateur de référence, de *moindre effort*. Cette notion de *moindre effort* constitue l'analogie de celle que j'ai utilisée pour qualifier les méthodes de maximum de vraisemblance en reconstruction de surface d'onde (cf. section 7.5). Temporellement, le moindre effort en OA consiste à considérer que la surface d'onde n'évolue pas dans le temps, *i.e.*

$$T_w \simeq C_w, \quad \mathbf{T}_w \simeq \mathbf{C}_w \quad \text{et donc} \quad \mathbf{\Gamma} \simeq \mathbf{I}. \quad (9.31)$$

Cependant, je n'ai pas effectué au cours de ma thèse la comparaison du prédicteur  $\mathbf{\Gamma}$  avec le prédicteur de *moindre effort*, par manque de temps. J'ai directement utilisé l'approximation (9.31). En d'autres termes, dans toutes mes simulations, il n'y a pas de prédiction.

### La projection avec $\mathbf{F}$

La dernière étape de la loi de commande (9.19) est la projection orthogonale de l'estimation (reconstruction et prédiction) sur l'espace image du miroir déformable  $\mathcal{M}$ ,

*i.e.* sur la base des  $(m_i)_{1 \leq i \leq n_a}$ . On remarque que si l'estimée de la surface d'onde obtenue à la suite des deux étapes ci-dessus est représentée dans un espace qui ne contient pas entièrement  $\mathcal{M}$ , alors la commande calculée par  $\mathbf{F}$  sera entachée d'une erreur de sous-paramétrisation qui s'ajoute à l'erreur de sous-dimensionnement  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}^\perp}$  définie par l'éq. (8.6). Il est donc important d'optimiser la paramétrisation de la surface d'onde à la fois pour optimiser le reconstituteur MAP  $\mathbf{R}$  et pour qu'elle contienne l'espace image du miroir  $\mathcal{M}$ . Ceci découle de l'ordre des choses puisque l'étape de reconstruction se fait avant celle de la projection. La dégradation de l'estimation peut être responsable d'une projection sous-optimale. C'est pourquoi l'estimation (reconstruction et prédiction) doit être la plus précise possible.

J'ajoute aussi que le miroir est considéré ici, comme un processus déterminé, comme dans la plupart des études d'OA. Donc cette étape de calcul du vecteur de commande à appliquer aux actionneurs ne fait pas l'objet d'un problème inverse.

Enfin, il est intéressant de noter que l'erreur de correction  $\langle \epsilon_k^2 \rangle_{\mathcal{M}}$  dans l'éq. (9.10) est indépendante de la composante *piston* dans  $\mathbf{b}_k$  et dans  $\mathbf{a}_k$ . Ceci signifie qu'il est possible de réduire l'espace engendré par le miroir  $\mathcal{M}$  à l'hyperplan défini par l'ensemble des commandes telles que le mode *piston* soit nul. Une autre possibilité consiste à effectuer la projection sur l'espace  $\mathcal{M}$  entier, puis à oter par la suite la composante *piston* de  $\mathbf{a}$ . Ceci permet de s'assurer que la commande  $\mathbf{a}$  envoyée aux actionneurs est bien centrée autour de 0, afin de ne pas engendrer de saturations du MD inutilement. Le choix de l'une ou l'autre des deux méthodes n'a en principe aucune incidence sur les performances finales.

## 9.5 Nouvelle génération d'optique adaptative pour l'astronomie : problème inverse à grands nombres de degrés de liberté

La dérivation de cette loi de commande a fait l'objet d'un article accepté par la revue française *Traitement du signal* et paru en février 2009. Il est reproduit dans les pages suivantes.

# Nouvelle génération d'optique adaptative pour l'astronomie Problème Inverse à grands nombres de degrés de liberté.

Clémentine Béchet<sup>1</sup>, Michel Tallon<sup>1</sup>, Éric Thiébaud<sup>1</sup>,  
Gérard Thomas<sup>2</sup>, Éric Blanco<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Lyon, Lyon, F-69003, France

Université Lyon 1, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval, F-69230, France  
CNRS, UMR 5574, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon  
Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, F-69007, France

<sup>2</sup> AMPERE (UMR CNRS 5005), Ecole Centrale de Lyon  
36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully cedex, France

Bechet@obs.univ-lyon1.fr, MTallon@obs.univ-lyon1.fr, Thiebaut@obs.univ-lyon1.fr  
Gerard.Thomas@ec-lyon.fr, Eric.Blanco@ec-lyon.fr

## Résumé -

Les images astrophysiques issues des télescopes au sol sont dégradées par la turbulence de l'atmosphère terrestre. Un système d'Optique Adaptative (OA) doit corriger en temps réel ces perturbations. L'étude d'une nouvelle génération de télescopes, de plus de 30 mètres de diamètre, avec de nouveaux concepts d'OA ayant de  $10^4$  à  $10^5$  degrés de liberté, appelle de nouveaux algorithmes pour la commande du système. L'optimisation d'un critère nous a conduit à une commande en boucle fermée par modèle interne. Cette structure permet d'exploiter les *a priori* sur la turbulence en utilisant l'algorithme FrIM, particulièrement adapté à ces systèmes à grands nombres de degrés de liberté.

## 1 Introduction

L'observation d'objets de plus en plus faibles dans l'Univers requiert des télescopes au sol toujours plus grands. Cependant, la résolution des images fournies par ces grands télescopes est dégradée par la turbulence atmosphérique. Pour allier sensibilité et haute résolution angulaire, les télescopes au sol sont désormais associés à des systèmes d'optique adaptative (OA)[1]. L'OA doit corriger en temps réel les effets de la turbulence atmosphérique grâce à une boucle comprenant un analyseur de front d'onde (AFO), un système de commande et un miroir déformable (MD) pour appliquer la correction, comme schématisé sur la Fig. 1.

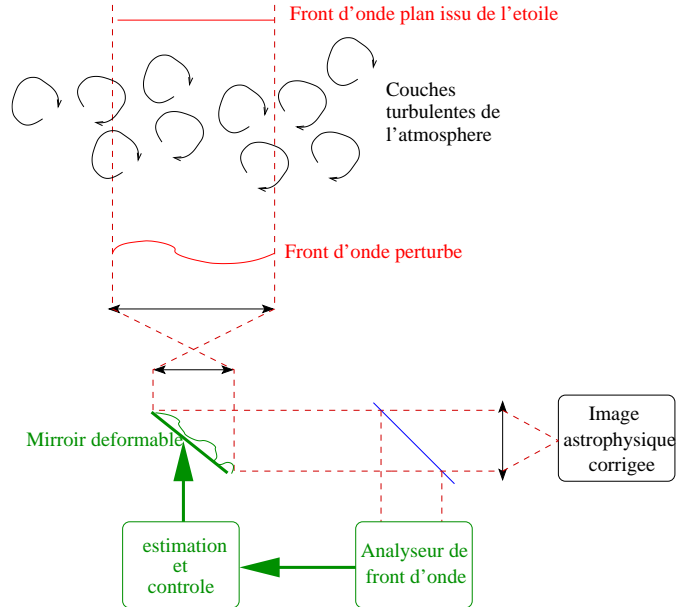


Fig. 1 : Schéma de principe d'une OA simple.

Les systèmes d'OA actuellement mis en oeuvre en astronomie utilisent des miroirs à quelques centaines d'actionneurs tout au plus, *i.e.* quelques centaines de degrés de liberté. Ils sont asservis de façon à ce que les mesures de perturbations résiduelles du front d'onde, fournies par l'AFO, soient nulles. Pour les futurs systèmes d'OA, la démarche est désormais différente. D'une part, la portion de front d'onde analysée par l'AFO ne coïncide pas toujours avec la portion de front d'onde destinée à la voie d'observation, ce qui n'implique pas nécessairement l'annulation des mesures résiduelles. Il est alors nécessaire d'extrapoler le front d'onde reconstruit. Nous traitons ici cette reconstruction par une approche de type problème inverse, avec une régularisation déduite des propriétés statistiques de la turbulence. D'autre part, les OA de nouvelle génération en astronomie compteront quelques dizaines de milliers d'actionneurs, d'où l'exigence d'algorithmes de reconstruction rapide, adaptés à ces grands nombres de degrés de liberté.

Nous considérons ici un système d'OA simple (*cf.* Fig. 1), *i.e.* comprenant un seul AFO et un seul MD, en boucle fermée.

Dans un premier temps, nous expliquons la spécificité des signaux mis en jeu dans un système d'OA, notamment leurs caractéristiques statistiques. Puis, nous montrons que l'optimisation d'un critère de qualité concernant les images astrophysiques conduit à un reconstituteur de type maximum *a posteriori* [3] et une loi de commande de type modèle interne [4]. Enfin, nous proposons d'utiliser un algorithme itératif, FrIM, reposant sur un préconditionneur fractal, afin de calculer cette commande. FrIM permet déjà la reconstruction de surfaces d'onde à grand nombre de paramètres en moins d'opérations qu'aucune autre méthode existante [2]. Nous montrons finalement, comment la dynamique de la turbulence permet de réduire encore le coût de calcul de cette méthode lorsqu'elle est utilisée dans une boucle fermée d'OA.

## 2 Caractériser la phase perturbée par la turbulence de l'atmosphère

D'après le modèle de turbulence de Kolmogorov [5], l'énergie cinétique turbulente est transmise en cascade, des tourbillons à grande échelle vers les plus petites structures. Ceci engendre des fluctuations spatiales et temporelles aléatoires de la température dans l'atmosphère, et donc de l'indice de réfraction de l'air. Pendant l'observation d'une source lumineuse dans le ciel, la surface d'onde au niveau de la pupille, *i.e.* après propagation au travers de la turbulence atmosphérique, présente des retards de phase. La théorie

de Kolmogorov prévoit que ces fluctuations de phase  $w$  suivent une statistique gaussienne centrée en chaque point du plan pupille, avec une fonction de structure qui s'écrit :

$$D_w(\boldsymbol{\rho}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle [w(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}) - w(\boldsymbol{\rho}')]^2 \rangle_{\boldsymbol{\rho}'} = 6.88 \left( \frac{|\boldsymbol{\rho}|}{r_0} \right)^{5/3} \quad (1)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  représente l'espérance mathématique,  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\boldsymbol{\rho}'$  sont des vecteurs de position dans le plan pupille du télescope et  $r_0$  est le paramètre de Fried qui caractérise la quantité de turbulence [6]. La notation  $|\cdot|$  représente la distance dans le plan pupille, mesurée par la norme Euclidienne.

L'OA vise à compenser en temps réel les déformations du front d'onde sur la pupille, à l'aide d'un AFO et d'un nombre  $N_{act}$  d'actionneurs sur un MD. Étant donné que la phase est une fonction continue de l'espace et du temps, le nombre de degrés de liberté  $N_{act}$ , le diamètre  $D$  de la pupille ou encore la fréquence de la boucle, définissent certaines limites de performance du système. Nous considérons ces valeurs comme fixées et nous nous ramenons ici à un système d'OA linéarisé équivalent, discrétisé à la fois spatialement et temporellement. Les vecteurs  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{w}^c$ , de  $\mathbb{R}^N$ , sont les valeurs échantillonnées des fronts d'onde, respectivement incident et corrigé, sur une grille régulière à 2 dimensions, définie dans le plan pupille du télescope. L'AFO est un Shack-Hartmann, qui est l'analyseur le plus couramment utilisé. Il fournit un vecteur de mesures de gradients locaux de la phase résiduelle,  $\mathbf{d}$  dans  $\mathbb{R}^M$ . L'équation de mesure du système s'écrit

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{w}_{k-1}^c) + \mathbf{e}_k \quad (2)$$

avec  $\mathbf{S}$  un modèle linéaire de l'AFO et  $\mathbf{e}$  le vecteur de bruit et d'erreur de modélisation de l'AFO. Les indices  $k$  permettent de représenter les retards caractéristiques du système ; ici, le temps de pose de l'AFO. Les erreurs de mesure sont supposées gaussiennes centrées et indépendantes entre elles, ce qui est très proche de la réalité lorsque la source de référence est une étoile naturelle (*i.e.* à l'infini). La matrice de covariance du bruit  $\mathbf{C}_e$  est alors diagonale.

La surface d'onde corrigée  $\mathbf{w}^c$  est la déformée du miroir, générée à partir du vecteur de commande  $\mathbf{a}$  de  $\mathbb{R}^{N_{act}}$ . Le miroir est modélisé par un opérateur linéaire  $\mathbf{M}$ , injectif, communément appelé matrice d'influence, tel que

$$\mathbf{w}_{k-1}^c = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_{k-1} \quad (3)$$

La dynamique du miroir est négligée. On peut alors écrire l'Eq. (2) sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k &= \mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{e}_k \\ \mathbf{y}_{k-1} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_{k-1} \end{aligned} \quad (4)$$

et  $\mathbf{G} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}$  est la matrice d'interaction du système.

L'objectif est donc de contrôler un système multi-entrées ( $\mathbf{a}$ ) multi-sorties ( $\mathbf{y}$ ) à plusieurs milliers de degrés de liberté et à une fréquence de l'ordre de 1 kHz. Or la mesure de la perturbation à compenser n'est pas directement accessible. Seules ses dérivées spatiales locales le sont, et donc le temps de calcul nécessaire croît avec les dimensions du système.

### 3 L'optimisation du critère

La qualité des images, quantifiée en astronomie par le rapport de Strehl, croît lorsque la variance de la phase résiduelle intégrée sur la pupille,

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \langle \|\mathbf{P} \cdot (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^c)\|^2 \rangle \quad (5)$$

diminue.  $\mathbf{P}$  est un opérateur linéaire qui ôte à la phase sa composante constante sur la pupille, *le piston*, et annule la phase hors de la pupille. Le mode piston n'influe pas sur le critère  $\langle \epsilon^2 \rangle$ , parce qu'un retard de phase uniforme sur la pupille ne dégrade pas l'image. La norme  $\|\cdot\|$  représente la norme Euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^N$ .  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{w}^c$  étant définis sur un même espace, on peut décomposer la surface d'onde turbulente comme

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \mathbf{w}_k^{\text{M}\perp} + \mathbf{w}_k^{\text{M}} \\ &= \mathbf{w}_k^{\text{M}\perp} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{b}_k \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\mathbf{w}_k^{\text{M}}$  représente la partie commandable de la turbulence, *i.e.* sa projection orthogonale sur l'espace image du miroir  $\mathbf{M}$ . Au contraire,  $\mathbf{w}_k^{\text{M}\perp}$  constitue la partie non commandable de la phase perturbée, qui est donc responsable dans le critère (5) d'une erreur que l'on ne peut compenser.  $\mathbf{M}$  étant injective, la décomposition dans l'Eq. (6) est définie de façon unique, avec  $\mathbf{b}_k$  la représentation vectorielle de la partie commandable de la perturbation dans l'espace des actionneurs. Le critère réduit à optimiser s'écrit alors

$$\langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}} = \langle \|\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k)\|^2 \rangle. \quad (7)$$

La commande ici est supposée être une combinaison linéaire des mesures résiduelles et de la commande appliquée pendant la pose

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_{k-2}. \quad (8)$$

$\mathbf{R}$  et  $\mathbf{Q}$  sont les opérateurs linéaires et stationnaires à déterminer par optimisation du critère (7). Un deuxième retard majeur du système est implicitement pris en compte dans l'Eq. (8) par le décalage d'indice entre  $\mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{d}_{k-1}$  : le temps de lecture du CCD et de calcul de la nouvelle commande. Pour simplifier les notations, on a considéré que ce deuxième retard était égal au premier (*cf.* Eq. (2)), le temps de pose. On peut remarquer que la commande s'exprime par une relation de récurrence dans l'Eq. (8). En utilisant cette propriété, il est possible de développer l'Eq. (7) pour exprimer le critère en fonction de toutes les valeurs de mesures successives et de la commande initiale. Optimiser le critère par rapport à  $\mathbf{R}$  et à  $\mathbf{Q}$  fournirait une solution optimale, mais la détermination de  $\mathbf{R}$  et à  $\mathbf{Q}$  dans ces conditions est complexe. Nous avons opté pour une autre approche, qui consiste à minimiser le critère  $\langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}$  étant donnée la valeur de la commande précédemment appliquée  $\mathbf{a}_{k-2}$ , bien déterminée. Nous ne faisons aucune hypothèse particulière sur son origine mais considérons simplement la connaître parfaitement. En conséquence, nous recherchons  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{Q}$  optimaux, quel que soit l'état actuel du système. En remplaçant l'expression (8) dans l'Eq. (7), le critère à optimiser est bien une fonction quadratique de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{Q}$ . Alors, minimiser  $\langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}$ , quel que soit l'instant  $k$ , étant donnés  $\mathbf{d}_{k-1}$  et  $\mathbf{a}_{k-2}$ , implique

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}}{\partial \mathbf{Q}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}}{\partial \mathbf{R}} = 0 \quad (9)$$

La linéarité de tous les opérateurs implique

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{N} \cdot \langle (\mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} \rangle \quad (10)$$

$$= \mathbf{N} \cdot \langle (\mathbf{R} \cdot \mathbf{y}_{k-2} + (\mathbf{Q} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} \rangle \quad (11)$$

avec  $\mathbf{N} = 2 \mathbf{M}^{\text{T}} \cdot \mathbf{P}^{\text{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$ . L'Eq. (11) est obtenue à partir de (10) en remplaçant  $\mathbf{d}_{k-1}$  par son expression dans l'Eq. (4) et parce que le bruit  $\mathbf{e}_{k-1}$  est décorrélié de la commande  $\mathbf{a}_{k-2}$ . Puisque les espérances mathématiques des dérivées spatiales de la phase  $\mathbf{y}_{k-2}$  et des déformées à corriger  $\mathbf{b}_k$  sont toutes deux nulles,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}_{k-2} \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} \rangle &= \langle \mathbf{y}_{k-2} \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} = 0 \\ \langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} \rangle &= \langle \mathbf{b}_k \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} = 0. \end{aligned}$$

Choisir  $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}$  garantit d'annuler la dérivée partielle (11). La loi de commande devient désormais

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2}) = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \quad (12)$$

où  $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1} = \mathbf{y}_{k-2} + \mathbf{e}_{k-1}$  fournit une estimation de mesures en boucle ouverte, *i.e.* de la phase turbulente. De la même façon, en dérivant par rapport à  $\mathbf{R}$ ,

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle^M}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{N} \cdot (\langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{y}_{k-2}^T \rangle - \mathbf{R} \cdot (\langle \mathbf{y}_{k-2} \cdot \mathbf{y}_{k-2}^T \rangle + \langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1}^T \rangle)) \quad (13)$$

La statistique des signaux est supposée stationnaire, si bien que l'on note  $\forall k$ ,

$$\mathbf{C}_e = \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_w = \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^T \rangle. \quad (14)$$

Choisir

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{w}_{k-2}^T \rangle \cdot \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \quad (15)$$

est donc une condition suffisante pour optimiser le critère d'après l'Eq. (13). D'autre part, l'Eq. (6) permet de montrer facilement que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{w}_{k-2}^T \rangle &= (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M})^\dagger \cdot \mathbf{M}^T \cdot \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_{k-2}^T \rangle \\ &= (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M})^\dagger \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{T}_w. \end{aligned} \quad (16)$$

où l'exposant  $\dagger$  désigne la pseudo-inverse [7] d'une matrice. Alors, la commande (12) une fois optimisée devient

$$\mathbf{a}_k = (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M})^\dagger \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}. \quad (17)$$

## 4 Algorithme rapide FrIM, et simulations

À partir de la formule (17) pour la commande, on peut représenter le système d'OA discretisé par le diagramme Fig. 2. On observe une commande par modèle interne [4].

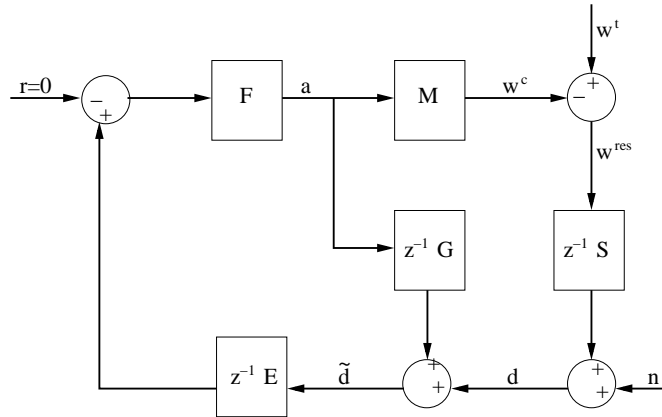


Fig. 2 : Diagramme du système d'OA en boucle fermée.

L'OA doit être commandée en temps réel. Pour un système à  $N = 10^4$  degrés de liberté et environ 2 fois plus de mesures  $M$ , si on précalcule la matrice de commande de l'Eq. (17), son application à un vecteur de pseudo mesures boucle ouverte  $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}$  à la fréquence de 1 kHz nécessiterait  $\simeq 4 \times N^2 \times 10^3 \approx 4 \times 10^{11}$  opérations par seconde. On voit sur la Fig. 3 que, même si cette multiplication matricielle est la méthode implémentée sur les systèmes d'OA existants, elle n'est plus applicable pour de grands systèmes. Étant données les capacités des processeurs actuellement disponibles dans le commerce, et leur supposée évolution, il est nécessaire de développer des méthodes plus rapides.



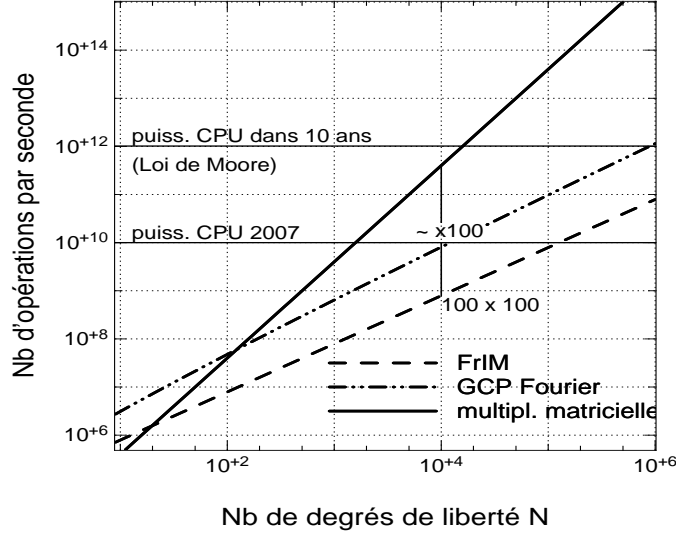


Fig. 3 : Nombres d'opérations par seconde nécessaires pour différents algorithmes de reconstruction, en fonction du nombre de degrés de liberté du système d'OA. Sur les OA actuelles : Multiplication matrice-vecteur. Récemment suggéré : GCP dans le domaine de Fourier [10]. Mis en oeuvre ici : FrIM, *i.e.* GCP avec changement de variables fractal.

On peut découper le calcul de la commande d'après l'Eq. (17) en 3 étapes caractérisées par les opérateurs suivants

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \quad (18)$$

$$= (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \quad (19)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \quad (20)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M})^\dagger \cdot \mathbf{M}^T. \quad (21)$$

L'opérateur  $\mathbf{E}$  correspond à l'estimateur maximum *a posteriori* de la surface d'onde turbulente, puisque les signaux sont gaussiens centrés et que le modèle d'AFO est linéaire. Les 2 formes (18) et (19) sont équivalentes [3].  $\mathbf{\Gamma}$  effectue une prédiction basée simplement sur la covariance spatio-temporelle de la turbulence  $\mathbf{T}_w$ . Enfin,  $\mathbf{F}$  correspond à la projection de moindre norme dans l'espace commandable par le miroir.

Dans notre étude, nous considérons le cas simple où la base de fonctions décrivant la déformée 2D du miroir à partir du vecteur de commande appliqué aux actionneurs, *i.e.* les fonctions d'influence, sont des B-splines bilinéaires. De plus, les sommets de ces fonctions d'influence coïncident avec les coins des sous-pupilles du Shack-Hartmann, ce qui correspond à la géométrie de Fried [8]. En utilisant alors le modèle de Fried pour l'AFO [2], les matrices  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{C}_e$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{F}$  sont creuses dans la représentation zonale que nous avons choisie. Ceci permet d'appliquer chacune de ces matrices à un vecteur en un nombre d'opérations de l'ordre de  $N$ . De fait, l'étape (21) dans son intégralité ne requiert que  $\mathcal{O}(N)$  opérations. En revanche, les matrices de covariance de la turbulence et leurs inverses ne le sont pas. Nous souhaitons pourtant prendre en compte ces *a priori* sur le signal.

Une première approximation consiste à simplifier l'expression (20) en remarquant que le temps de cohérence de la turbulence au-dessus de la pupille est supérieur à la période du système. En d'autres termes, la surface d'onde perturbée change suffisamment peu d'une boucle à l'autre pour écrire  $\mathbf{T}_w \simeq \mathbf{C}_w$ . Alors,  $\mathbf{\Gamma} \simeq \mathbf{I}_d$ , la matrice identité, et l'étape (20) disparaît des calculs à effectuer. Par ailleurs, les simulations, dont un exemple est fourni ci-après, mettent en évidence des corrections satisfaisantes malgré cette approximation dans le calcul de la commande.

Il reste à étudier le coût calculatoire d'application de (18) ou de (19). Les dénominateurs, dans l'une comme dans l'autre expression, sont des matrices pleines, dont le précalcul ne permettra qu'une application à un vecteur en  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations. Afin d'éviter cela, il a été suggéré [9, 10, 2] de résoudre itérativement, dans un premier temps, le système

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{w}}_k = \mathbf{b} \quad (22)$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \quad (23)$$

par un algorithme de gradients conjugués préconditionnés (GCP). On obtient ainsi l'estimée recherchée

$$\hat{\mathbf{w}}_k = \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}$$

Pour appliquer  $\mathbf{A}$  à chaque itération, *Yang et al.* [10] ont proposé d'approximer la régularisation  $\mathbf{C}_w^{-1}$  dans le domaine de Fourier par une matrice diagonale. Dans ce cas, le coût d'application des GCP dans le domaine de Fourier est de l'ordre de  $\mathcal{O}(N \log N)$ , représenté sur la Fig. 3 (trait tireté - pointillé). Nous retenons ici une autre méthode, FrIM [2] qui permet l'approximation suivante

$$\mathbf{C}_w \approx \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T \quad (24)$$

où  $\mathbf{K}$  est un opérateur inversible décrit par un algorithme de points-milieux. La nature fractale de la turbulence permet à cette approximation de respecter la fonction de structure de Kolmogorov (*cf.* Eq. (1)) pour la phase et de définir une bijection  $\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$ . Le vecteur  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^N$  représente alors aussi un signal gaussien centré mais de matrice de covariance égale à l'identité. L'atout majeur du changement de variable fractal est que l'application de  $\mathbf{K}$ , de  $\mathbf{K}^T$  ou de leurs inverses à un vecteur de dimension  $N$  ne nécessite que  $\simeq 6 \times N$  opérations. La méthode fractale FrIM [2] exploite ce changement de variable comme préconditionnement des gradients conjugués, et permet de résoudre itérativement le système équivalent à (22)

$$\mathbf{A}' \cdot \hat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{b}' \quad (25)$$

avec

$$\mathbf{A}' = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{I}_d \quad \text{et} \quad \mathbf{b}' = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \quad (26)$$

L'emploi de ce changement de variable et l'ajout d'un préconditionneur diagonal à gauche [2] accélère la convergence des gradients conjugués. Initialement utilisée pour la reconstruction de surfaces d'onde en boucle ouverte, FrIM est utilisée ici pour l'estimation en boucle fermée. Les *a priori* turbulents restent valables parce que l'estimation se fait à partir des pseudo données boucle ouverte  $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}$ , définies par l'Eq. (12). L'estimation de  $\hat{\mathbf{w}}_k = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k$  par FrIM implique seulement quelques  $34N$  opérations par itération. Seule la première itération suit une procédure différente. En boucle fermée, l'initialisation de l'algorithme nécessite le calcul du premier résidu :

$$r_{\text{init}} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{k-1})) - \hat{\mathbf{u}}_{k-1}. \quad (27)$$

On remarque alors que l'algorithme itératif est initialisé à partir de la meilleure estimée  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}$  de la boucle d'OA précédente. En prenant en compte cette initialisation, le nombre total d'opérations requises par FrIM pour estimer  $\hat{\mathbf{u}}_k$  à chaque boucle est de l'ordre de  $(27 + 34 n_{\text{iter}}) N$ . Le nombre d'itérations  $n_{\text{iter}}$  nécessaires à la convergence de l'algorithme dépend du rapport signal à bruit [2] et de la vitesse d'évolution temporelle de la turbulence.

Nous illustrons un encadrement des valeurs de  $n_{\text{iter}}$  à attendre grâce à 3 cas extrêmes d'évolution temporelle de la turbulence simulés et représentés sur la Fig. 4. La figure 5 n'est qu'un agrandissement de la Fig. 4.

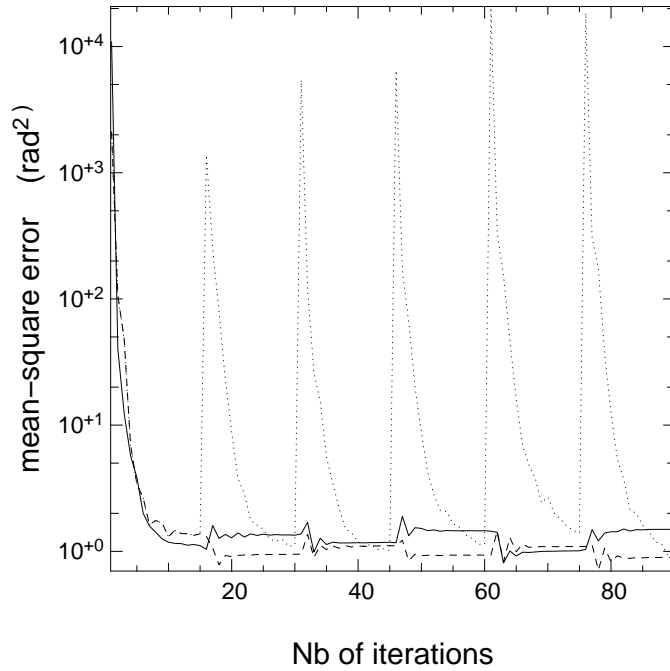


Fig. 4 : Courbes de convergence de l'erreur de reconstruction pendant 6 boucles fermées d'OA successives avec 15 itérations de FrIM par boucle. Trois cas sont simulés. Courbe trait plein : observation d'un front d'onde turbulent en translation au-dessus de la pupille. Déplacement de  $1/10^e$  de sous-pupille par boucle. Courbe en trait tireté : observation d'un front d'onde turbulent fixe au-dessus de la pupille. Courbe en trait pointillé : observation d'une succession de fronts d'onde totalement décorrélés à chaque boucle. Les paramètres des simulations sont  $N = 129 \times 129$ , une turbulence caractérisée par  $r_0$  de la taille d'une sous-pupille  $d = 30\text{cm}$ , un bruit de mesure de variance  $1\text{radian}^2$  par sous-pupille, une fréquence de boucle de  $1\text{ kHz}$ .

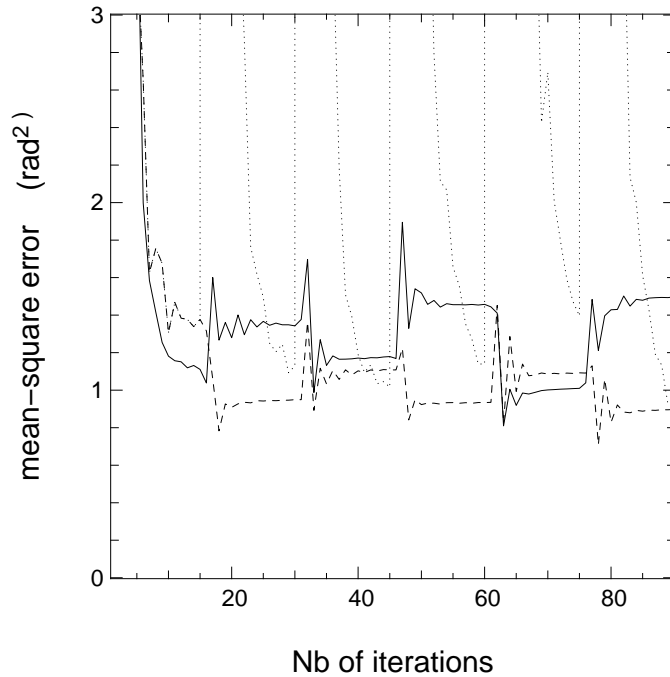


Fig. 5 : Agrandissement de la Fig. 4.

Les trois cas simulés d’OA boucle fermée ont en commun que 15 itérations de FrIM sont effectuées pour chaque boucle et que 6 boucles d’OA sont tracées à la suite sur les figures 4 et 5. En abscisse, l’indexation des itérations va de 1 à  $6 \times 15 = 90$ . L’ordonnée représente l’erreur quadratique moyenne de correction due à la méthode de reconstruction uniquement

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconstruction}} = \langle \|\mathbf{P} \cdot (\mathbf{w}_{k-2} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k)\|^2 \rangle \quad (28)$$

*i.e.* sans inclure le retard de deux trames du système global. En effet, le retard produit une erreur incompressible dans l’Eq. (5) puisque l’on n’utilise pas de prédiction. En revanche, nous souhaitons observer la vitesse de convergence de l’estimation, qui est bien visible sur les figures 4 et 5.

Pour des rapports signal à bruit moyens, la reconstruction de surface d’onde turbulente avec FrIM en partant d’une estimée nulle converge en moins de 10 itérations [2]. Ce taux de convergence vaut en OA boucle fermée dans le cas où l’estimée précédente  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}$ , dans l’étape d’initialisation (27) est décorrélée de la nouvelle turbulence à estimer  $\mathbf{u}_k$ . C’est le cas de la simulation en trait pointillé sur les figures 4 et 5, pour laquelle nous avons simulé des surfaces d’onde totalement décorrélées d’une boucle à l’autre. Le saut significatif toutes les 15 itérations caractérise l’erreur de correction due à l’approximation de  $\mathbf{\Gamma}$  par l’identité dans l’Eq. (20). La covariance temporelle du signal simulée étant nulle, mieux vaut n’appliquer aucune commande puisque l’estimateur est en retard.

Au contraire, si l’OA boucle en observant une turbulence figée (courbe en trait tireté), alors la convergence est atteinte en 2 à 3 itérations. La valeur finale n’est pas exactement la même à chaque boucle en raison du bruit de mesure qui varie. De plus, les saut significatifs de l’erreur toutes les 15 itérations disparaissent. En effet, la turbulence simulée vérifie exactement  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_d$ .

La réalité se situe entre ces deux cas d’étude. Elle est simulée en décalant la surface d’onde d’un dixième de la pupille du télescope entre deux boucles successives (courbe trait plein), ce qui dans les conditions simulées correspond à une vitesse de vent forte de  $30\text{m.s}^{-1}$  dans les couches turbulentes de l’atmosphère. La corrélation spatio-temporelle du signal dans ce cas proche de la réalité, et le fait d’initialiser l’algorithme avec l’estimée précédente permettent alors de converger en 3 à 4 itérations. Le coût de calcul de la commande en temps réel pour une OA est donc réduit par rapport à la simple reconstruction de surface d’onde.

## 5 Conclusion

L’optimisation de la variance de l’erreur de correction en OA boucle fermée nous a conduit à une reconstruction de front d’onde turbulent, de type *maximum a posteriori* sur des pseudo données boucle ouverte. La loi de commande globale correspond à une architecture de commande par modèle interne. Les coûts calculatoires de la commande sont minimisés par l’utilisation de la méthode FrIM pour l’étape d’estimation. Le fonctionnement en boucle fermée de l’OA tire profit du caractère itératif de la méthode, permettant d’accélérer la convergence en initialisant l’algorithme avec la surface d’onde estimée à la boucle précédente. D’après la Fig. 3, le gain en nombre d’opérations par seconde sur la multiplication matricielle pour  $N = 10^4$  est d’un facteur 100, si on considère deux itérations par boucle.

## Références

- [1] F. Roddier. Adaptive Optics in Astronomy. *Cambridge University Press.*, 1999.
- [2] É. Thiébaud and M. Tallon. Ultra fast maximum a posteriori wave front reconstruction for extremely large telescopes. *submitted to J. Opt. Soc. Am. A*, 2008.
- [3] A. Tarantola. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation *SIAM*, 2005.
- [4] M. Morari and E. Zafriou Robust Process Control. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey*, 1989.

- [5] V.I. Tatarski. Wave propagation in a turbulent medium *Dover Publications, Inc. New York*, 1961.
- [6] D.L. Fried. Statistics of a geometric representation of wavefront distortion. *J. Opt. Soc. Am. A*, 55 : 1427-1435, 1965.
- [7] , K. B. Petersen and M. S. Pedersen The Matrix Cookbook, Version February 10, 2007. *Technical University of Denmark*, 2007.
- [8] E. P. Wallner Optimal wave-front correction using slope measurements *J. Opt. Soc. Am.*, 73 :1771-1776, 1983.
- [9] L. Gilles, C.R. Vogel and B.L. Ellerbroek Multigrid preconditioned conjugate-gradient method for large-scale wave-front reconstruction. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19 :1817–1822, 2002.
- [10] Q. Yang, C.R. Vogel and B.L. Ellerbroek Fourier domain preconditioned conjugate gradient algorithm for atmospheric tomography. *Applied Optics*, 45 :5281–5293, 2006.

## 9.6 L'analyse du correcteur

### 9.6.1 Le diagramme de la boucle fermée

À partir des équations dérivées ci-dessus, on peut représenter la boucle fermée par le diagramme du haut de la figure 9.3, avec  $Q_{\text{MI}}(z) = 1$ . On note que le bloc correcteur, délimité par les pointillés, contient une boucle interne. Cette architecture particulière correspond à une loi de *commande avec modèle interne* (CMI) (Morari et Zafiriou, 1989). En effet, la boucle  $\mathbf{G} z^{-1}$  n'est autre qu'un modèle de la chaîne directe du système  $\mathbf{S}_o \cdot \mathbf{M}_o z^{-1} = \mathbf{G}_o z^{-1}$  (cf. section 2.6.1). C'est cette boucle qui permet de construire des pseudo données en boucle ouverte :  $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d} + z^{-1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}$ , comme décrit par l'équation (9.12).

Dans la suite de ce manuscrit, je désigne par modèle interne ce transfert  $\mathbf{G} z^{-1}$ . La figure 9.4 fournit une représentation plus conventionnelle de la commande par modèle interne (CMI). Elle nécessite cependant d'exprimer la perturbation dans l'espace des actionneurs, afin de regrouper le modèle nominal du système symbolisé par  $\mathbf{M}_o$  et  $\mathbf{S}_o z^{-1}$ . On identifie plus facilement la branche parallèle  $\mathbf{G} z^{-1}$  qui constitue le fameux modèle interne du système. La consigne  $\mathbf{c}$  est nulle traduisant le critère en terme d'écart minimum entre  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{a}$ . Les lecteurs familiers de la commande par modèle interne noteront que les signes sont modifiés par rapport à une représentation classique de ce type de commande.

### 9.6.2 Le transfert en boucle fermée

D'après la figure 9.4, la transformée en  $z$  de la commande  $\mathbf{a}$  s'exprime comme

$$\mathbf{a} = Q_{\text{MI}}(z) [z^{-1} \mathbf{E} \cdot (z^{-1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{e} + z^{-1} \mathbf{G}_o \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mathbf{e}) - \mathbf{c}] . \quad (9.32)$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système peut alors être exprimée entre  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{a}$ , dans l'espace des actionneurs :

$$\mathbf{H}_{\text{bf}}(z) = [\mathbf{I} + Q_{\text{MI}}(z) \mathbf{E} \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{G}) z^{-2}]^{-1} Q_{\text{MI}}(z) \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}_o z^{-2}, \quad (9.33)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

Dans la loi dérivée au début de ce chapitre  $Q_{\text{MI}}(z) = 1$  donc, dans notre cas,

$$\mathbf{H}_{\text{bf}}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{E} \cdot (\mathbf{G}_o - \mathbf{G}) z^{-2}]^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}_o z^{-2}. \quad (9.34)$$

On retrouve dans les fonctions de transfert (9.33)-(9.34), des résultats connus de la commande par modèle interne, à savoir que si le modèle interne est parfait, *i.e.*  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_o$ , alors le système est stable parce que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{G}_o$  est une matrice définie indépendante de  $z$ , traduisant le filtrage spatial du bruit dans le système et que l'aspect dynamique du transfert n'est qu'un retard double,  $z^{-2}$ .

Il est donc intéressant de noter que l'optimisation de la commande effectuée dans ce chapitre conduit à un système stable par construction, en l'absence d'erreurs de modélisation de la chaîne directe. Ceci est important puisque cette chaîne concerne la matrice d'interaction du système. En particulier, j'ai précisé dans la section 2.5 que le modèle de Fried fournissait une description parfaite du système lorsque les fonctions d'influence du miroir déformable sont bilinéaires. Naturellement, que  $\mathbf{G}$  soit calibrée ou synthétisée par exemple par le modèle de Fried, elle n'en reste pas moins une approximation du modèle nominal  $\mathbf{G}_o$  parce que les miroirs n'ont pas exactement des

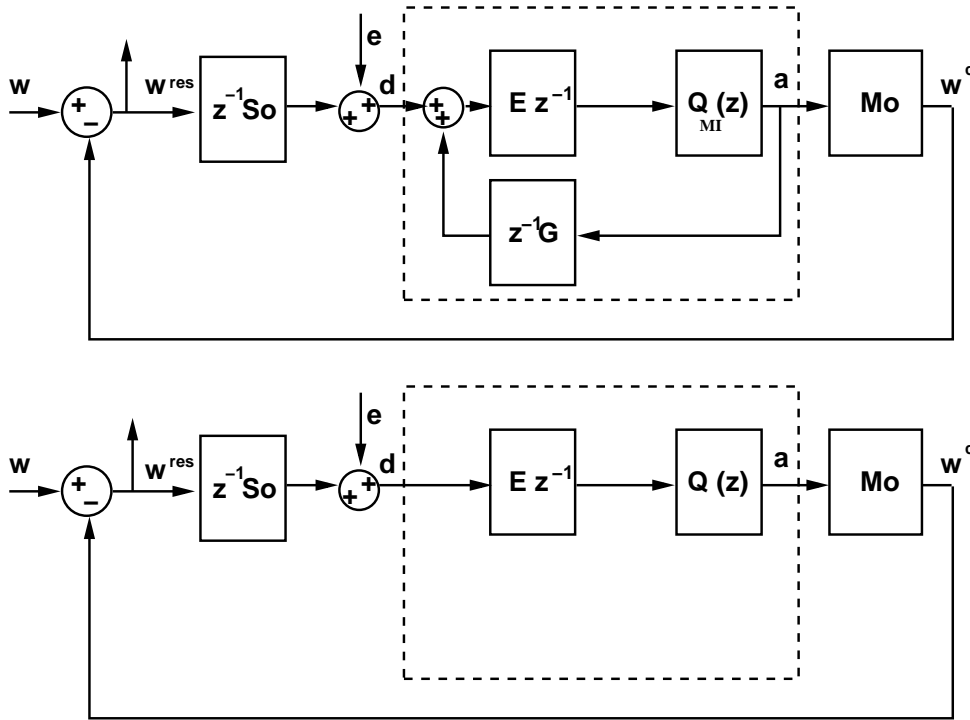


FIG. 9.3 – En haut : Diagramme d’OA en boucle fermée avec modèle interne  $\mathbf{G}z^{-1}$ . L’ensemble du correcteur est regroupé à l’intérieur des pointillés. D’après l’optimisation de la section 9.3,  $Q_{MI}(z) = 1$ . En bas : Diagramme équivalent à celui du haut, mais en retrouvant les notations de la section 2.6, alors  $\mathbf{Q}(z) = Q_{MI}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} z^{-2} Q_{MI}(z))^{-1}$ .

fonctions d’influence bilinéaires ou encore parce que les non-linéarités de l’analyseur sont généralement négligées. En conséquence, il est peu réaliste de considérer que le modèle du système est parfait, et ceci complique fortement l’étude de la stabilité de cette commande. Elle dépend alors des pôles des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{H}_{br}(z)$ . Je n’ai pas mené d’étude théorique plus approfondie sur cette question, en raison de la complexité d’une telle formalisation. En revanche, des simulations ont été réalisées dans différentes configurations d’optique adaptative en boucle fermée pour estimer les risques d’instabilité dues à ces erreurs de modèle interne. Les résultats sur le simulateur Octopus sont présentés dans la partie IV. La stabilité vis-à-vis des non-linéarités de l’analyseur est mise à l’épreuve dans toutes simulations en boucle fermée du chapitre 12. De plus, la stabilité vis-à-vis d’erreurs d’alignement optique du miroir et de l’analyseur est traitée dans la section 12.3.

### 9.6.3 Analogie entre la CMI et la correction classique

Les deux diagrammes de la figure 9.3 sont équivalents mais j’ai fait disparaître la boucle interne dans le diagramme du bas afin de retrouver une structure de correction semblable à celles présentées dans la section 2.6. L’équivalence entre ces deux représentations impliquent mathématiquement que

$$\mathbf{Q}(z) = (\mathbf{I} - Q_{MI}(z) z^{-2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{G})^{-1} Q_{MI}(z). \quad (9.35)$$

Si on compare cette correction à celles étudiées dans la section 2.6, on remarque que le premier bloc constitue toujours la partie statique du correcteur. En effet,  $\mathbf{E}$  est un

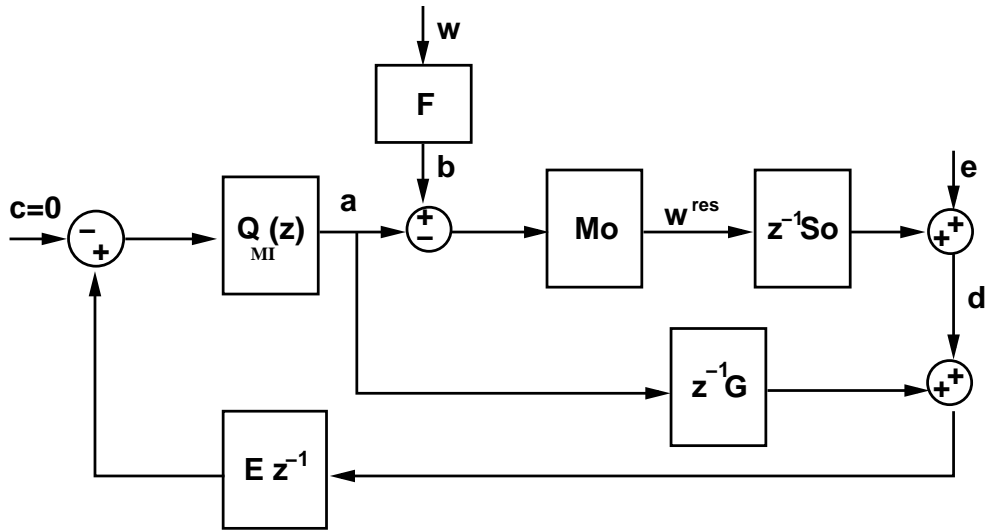


FIG. 9.4 – Diagramme conventionnel de commande avec modèle interne pour l’OA. La projection  $\mathbf{F}$  utilisée pour définir  $\mathbf{b}$ , la perturbation dans l’espace des actionneurs, permet d’obtenir un regroupement des blocs  $\mathbf{M}_o$  et  $\mathbf{S}_o z^{-1}$ , la chaîne directe nominale du système, modélisée par  $\mathbf{G} z^{-1}$ . La consigne est nulle, traduisant l’écart désiré entre  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ .

estimateur qui permet de passer de l’espace des mesures à l’espace des commandes.

Pour la loi de commande dérivée précédemment dans ce chapitre,  $Q_{MI}(z)$  vaut 1, donc la partie dynamique est définie par la boucle interne et l’équivalence de ces représentations est obtenue si

$$\mathbf{Q}(z) = (\mathbf{I} - z^{-2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{G})^{-1}. \quad (9.36)$$

À la section 2.6, j’ai présenté des correcteurs avec  $\mathbf{Q}(z)$  scalaire ou diagonal dans l’espace des modes propres du système. Ici,  $\mathbf{Q}(z)$  ne vérifie *a priori* aucune de ces deux conditions. Il n’y a pas de base évidente permettant de décomposer le système d’OA en  $n_a$  boucles découplées, afin de retrouver une correction modale (*cf.* section 2.6). En effet,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{G}$  dans l’équation (9.36) n’est pas nécessairement diagonalisable. Ceci est dû à la forme particulière de  $\mathbf{E}$  analysée dans la section précédente.

Il est cependant intéressant de considérer un instant le cas, non réaliste, où l’égalité matricielle  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{I}$  est satisfaite. Ceci revient à imaginer un instant un système d’OA mono-entrée mono-sortie, et alors  $\mathbf{Q}(z)$  devient scalaire, égal à

$$Q(z) = \frac{Q_{MI}(z)}{1 - z^{-2} Q_{MI}(z)} \quad (9.37)$$

Et si  $Q_{MI}(z) = 1$ , alors

$$Q(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}. \quad (9.38)$$

On retrouve alors un résultat classique de la commande par modèle interne en scalaire selon lequel l’utilisation du modèle interne introduit une intégration au sein de la correction.



Dans le correcteur dérivé à la section 9.3,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{G}$  est différent de la matrice identité, par construction de  $\mathbf{E}$ . Plus précisément,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}. \quad (9.39)$$

Or les valeurs propres de  $(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S}$  sont comprises entre 0 et 1, strictement inférieures à 1, en raison du filtrage spatial du bruit. Par définition,  $\mathbf{\Gamma}$  a également des valeurs propres toutes inférieures à 1, puisque le maximum de corrélation entre les surfaces d'onde se produit lorsqu'elles sont identiques. De même, pour la projection orthogonale sur le miroir, les valeurs propres du produit  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}$  sont comprises entre 0 et 1. Il n'existe donc plus d'intégrateur dans le correcteur matriciel  $\mathbf{Q}$  dérivé de l'optimisation effectuée à la section 9.3.

#### 9.6.4 La comparaison avec d'autres correcteurs

Cette section est destinée à situer le correcteur dérivé ici par rapport aux principaux correcteurs étudiés en OA.

Je suppose maintenant que je passe du diagramme du haut de la figure 9.3 au diagramme du bas de la même figure, en supprimant complètement la boucle de modèle interne. Ainsi  $Q(z) = Q_{\text{MI}}(z)$ . On retrouve alors une architecture semblable à celles étudiées dans la section 2.6, à ceci près que l'inverse généralisée de la matrice d'interaction est désormais égale à  $\mathbf{E}$ . En associant  $\mathbf{E}$  à un intégrateur scalaire pour  $Q_{\text{MI}}(z)$  (cf. éq. 2.19), on retrouve une commande similaire à celle implémentée pour le système COME-ON (cf. diagramme du bas de la figure 9.1).

Je présente ici un raisonnement heuristique qui permet de lier cette approche classique au *correcteur pseudo open-loop* (POLC) proposé par Gilles (2005). Cette configuration est équivalente à celle du haut de la figure 9.5, où deux boucles ont été ajoutées, l'une additionnant une quantité et l'autre la retranchant ; les deux actions se compensent. La notation  $Q_{\text{MI}}$  est modifiée, remplacée par  $Q_{\text{P}}$ , simplement pour montrer qu'il s'agit d'une approche différente. Il n'est pas question ici de rajouter concrètement ces deux boucles, mais cette étape intermédiaire facilite la compréhension du correcteur POLC. Son approche consiste à approximer la deuxième boucle par un retour scalaire  $z^{-2}$ . Cette architecture nommée POLC est représentée sur le diagramme du bas de la figure 9.5. Gilles utilise un filtre scalaire d'ordre 2 pour  $Q_{\text{P}}(z)$  et il étudie les performances de cette commande pour un système de type multiconjugué. L'estimateur MAP  $\mathbf{E}$  qu'il utilise est donc une extension du  $\mathbf{E}$  présenté ici, afin de reconstruire des surfaces d'onde multiples dans des couches en altitude.

D'après la comparaison des deux diagrammes de la figure 9.5, on note que la commande POLC serait identique à une commande d'OA classique si l'égalité  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{I}$  était vérifiée. Comme discuté à la section 9.6.3, cette condition n'est toutefois pas vérifiée lorsqu'un reconstruteur de type maximum *a posteriori* est utilisé dans  $\mathbf{E}$ .

La commande POLC permet au système de rester stable et avec un perte de correction de 30%, lorsque les désalignements des miroirs atteignent 30% de la largeur d'une sous-pupille (Gilles, 2005). Étant donnée la forte similitude entre le correcteur que j'ai dérivé et celui de Gilles, perceptible à travers les diagrammes 9.3 et 9.5, il est simple de modifier mon correcteur pour qu'il devienne une commande de type POLC. Toutefois, la commande de type POLC requiert la mise en mémoire de plusieurs commandes antérieures, ce qui n'est pas le cas avec la méthode proposée dans ce chapitre.

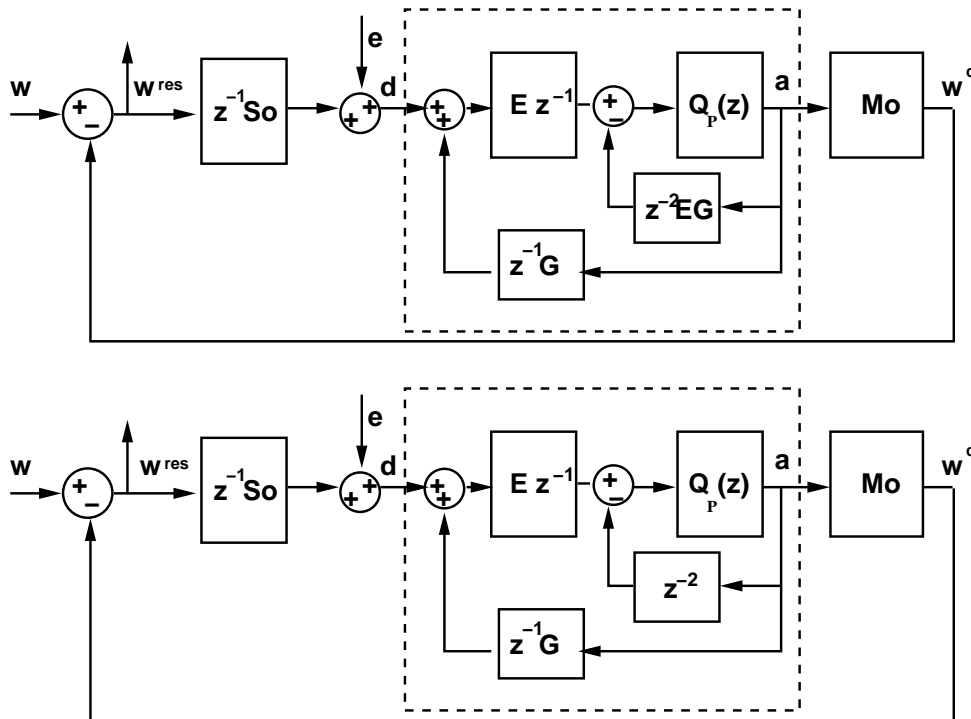


FIG. 9.5 – En haut : Diagramme d’OA en boucle fermée équivalente aux correcteurs classiques étudiés à la section 2.6. En bas : Diagramme de la commande POLC (Gilles, 2005).

Il est également important de noter les différences majeures entre l’optimisation réalisée ici, et celle effectuée dans une recherche de commande optimale Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG) en OA (Paschall et Anderson, 1993; Gavel et Wiberg, 2003; Wiberg et al., 2004a,b; Looze et al., 2003; Le Roux, 2003; Petit, 2006). La commande LQG est déterminée à partir d’une estimation optimale, effectuée par l’estimateur de Kalman. J’ai brièvement introduit cet estimateur à la section 4.3.2. Je souhaite simplement faire remarquer ici que cette estimation optimale utilise toutes les mesures acquises présentement et dans le passé afin de fournir la meilleure estimée possible de l’état du système. Ceci repose sur un modèle d’évolution temporel de l’état, donc notamment de la turbulence. Grâce à cette méthode, l’ensemble des mesures passées et présentes est utilisé pour optimiser l’estimation de la surface d’onde dans les couches, mais aussi pour en déduire la meilleure commande. Dans mon approche en boucle fermée, l’estimation des surfaces d’onde et la détermination de la commande s’expriment toutes deux comme des solutions d’un problème inverse *simple*. L’approche proposée ici est donc bien sous-optimale, mais, contrairement à la commande LQG, elle requiert moins de place en mémoire et moins d’opérations par boucle.

## 9.7 Conclusion

À partir de l’optimisation stationnaire d’un critère de correction, j’ai dérivé une nouvelle loi de commande par modèle interne pour l’OA en boucle fermée. Cette commande repose sur une estimation statique de type MAP, une prédiction et une projection orthogonale sur l’espace des commandes. L’architecture de la commande par

modèle interne permet de mettre en oeuvre l'algorithme rapide FrIM MAP étudié dans la partie II pour l'étape de reconstruction.

Le coût calculatoire global de la méthode est alors fonction du nombre d'itérations requises pour que la reconstruction converge en boucle fermée. Ce point fait l'objet du chapitre à venir, grâce à des simulations d'une OAmC.

## Chapitre 10

# Les simulations d'OAmC en boucle fermée pour un télescope hectométrique

Je présente dans ce chapitre les résultats des simulations d'OA monoconjuguée en boucle fermée que j'ai effectuées en utilisant la loi de commande (9.19) dérivée au chapitre précédent. Ces simulations sont réalisées pour des systèmes à grand nombre d'actionneurs ;  $D/d_l \geq 65$  pour un télescope de 42m. La loi de commande (9.19) doit être calculée par un algorithme rapide, notamment l'étape de reconstruction identifiée à la section 9.4.2.

Puisque j'ai montré au chapitre 6 que le reconstituteur FrIM MAP est un algorithme rapide et performant pour des reconstructions sur un grand nombre de paramètres, c'est encore cette méthode que je mets en oeuvre ici en boucle fermée.

J'explique un peu plus loin que les étapes de prédiction et de projection ont des coûts calculatoires moindres pour les systèmes que je considère. En revanche, le temps imparti à la reconstruction est contraint dans un système d'OA par la fréquence de la boucle. Le but de ce chapitre est d'étudier dans quelle mesure l'algorithme itératif FrIM MAP peut atteindre la convergence si son nombre d'itérations maximal est fixé par des contraintes auxiliaires (la magnitude de l'étoile de référence, le rapport signal-à-bruit, ...).

Je détaille dans un premier temps les hypothèses retenues pour la modélisation du système dans mes simulations. Puis, je décris comment j'ai simulé la surface d'onde perturbée, spatialement et temporellement. Une synthèse du coût calculatoire de la commande, en nombre d'opérations par itération de la méthode FrIM MAP est fournie. Enfin, les résultats des simulations de systèmes d'optique adaptative équilibrés sont présentés afin de démontrer les performances de la loi de commande et de l'algorithme sur de grands systèmes.

### 10.1 La modélisation du système

Je considère un système de type OAmC. L'étoile de référence est naturelle, donc le bruit de mesure est Gaussien centré, de matrice de corrélation  $\underline{\mathbf{C}}_e = \mathbf{I}$  et de variance  $\sigma_e^2$ . Les fonctions d'influence du miroir déformable sont supposées de type splines linéaires à 2 dimensions. La géométrie de Fried est adoptée pour la configuration de l'analyseur

vis à vis des actionneurs du miroir.

### 10.1.1 La modélisation spatiale de $w$

La surface d'onde incidente est simulée à partir du générateur fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$ , comme expliqué à la section 7.1, avec une échelle externe constante  $L_0 = 3D$  pour le télescope de 8m et  $L_0 = D/2$  pour celui de 42m. L'échantillonnage de la surface d'onde simulée coïncide avec les coins des sous-pupilles de l'ASO si bien que  $d_e = d_l$ . Le modèle de Fried de l'analyseur (*cf.* section 2.2), à partir de cette représentation de la surface d'onde, est un modèle parfait.

### 10.1.2 La modélisation temporelle de $w$

Le modèle de turbulence de Kolmogorov donne lieu à plusieurs approximations possibles de l'évolution temporelle d'une surface d'onde. L'approximation de Taylor consiste à considérer que la turbulence est gelée dans différentes couches de l'atmosphère sur un temps supérieur à la période du système d'OA et que ces surfaces d'onde gelées sont en translation horizontale à la vitesse du vent dans chacune de ces couches. Cette approximation conduit à définir un temps caractéristique de la turbulence  $\tau_0$ , introduit à la section 3.3.

Au cours de cette étude, mon besoin n'a pas été de simuler une turbulence dynamique en imposant un  $\mathbf{v}$  donné, mais plutôt de simuler une évolution de la turbulence qui me fournirait un temps de cohérence  $\tau$  ou une erreur de phase résiduelle  $a_{\Delta w}$  donnés. En d'autres termes, pour un temps de cohérence donné, il me faut simuler les perturbations successivement observées par l'instrument.

À cette fin, j'ai étudié deux approches distinctes. La première repose directement sur l'hypothèse de Taylor, en ne considérant qu'une seule couche turbulente. La deuxième génère un *bouillonnement* de la surface d'onde (Glindemann et al., 1993). Je décris ici ces deux approches.

### La translation d'écran de phase

Je ne modélise ici qu'une seule couche en translation uniforme horizontale et  $w$  est une réalisation de la phase continue turbulente dans cette couche. La phase différentielle est notée

$$\delta w(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau)$$

avec  $\mathbf{v}\tau$  le vecteur de translation.  $\tau$  symbolise alors le retard avec lequel la compensation parfaite  $w(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau)$  de la perturbation serait effectuée. Tout comme  $w$  dans l'équation (3.14),  $\delta w$  peut être caractérisée par une fonction de structure normalisée par  $(D/r_0)^{5/3}$ , qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\delta w}(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{r_0}{D}\right)^{5/3} \left\langle (\delta w(\mathbf{r}) - \delta w(\mathbf{r}'))^2 \right\rangle \\ &= 2 \left( \mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) + \mathcal{D}_w(\|\mathbf{v}\tau\|) \right) \\ &\quad - \mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{v}\tau\|) - \mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau\|). \end{aligned} \quad (10.1)$$

La variance de la phase résiduelle induite par la dynamique de la turbulence s'écrit, toujours d'après l'équation (1.39),

$$a_{\delta w} = \left\langle \|P(\delta w)\|^2 \right\rangle = \frac{(D/r_0)^{5/3}}{2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}') \underline{\mathcal{D}}_{\delta w}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (10.2)$$

En remplaçant  $\mathcal{D}_{\delta w}$  dans l'équation (10.2) par son expression (10.1), on obtient :

$$a_{\delta w} = 2a_w + (D/r_0)^{5/3} \underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{v}\tau) \quad (10.3)$$

$$- \frac{(D/r_0)^{5/3}}{2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}') (\underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau) + \underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{v}\tau)) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (10.4)$$

On montre facilement que, dans le cas d'une pupille à symétrie de révolution,

$$a_+ = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}') \underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau) d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

et

$$a_- = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}') \underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{v}\tau) d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

sont égaux. En effet, on peut d'abord exprimer à nouveau  $a_+$  et  $a_-$  sous la forme :

$$a_+ = \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r}) g(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau) d\mathbf{r}$$

et

$$a_- = \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r}) g(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau) d\mathbf{r}.$$

Si on choisit les axes des coordonnées polaires dans le plan pupille, tel que  $\theta = 0$  dans la direction du vent  $\mathbf{v}$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \cos \theta \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{r} + \mathbf{v}\tau &= (r \cos \theta + v\tau) \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau = (r \cos \theta - v\tau) \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau\|^2 &= r^2 + v^2\tau^2 + 2rv\tau \cos \theta \\ \|\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau\|^2 &= r^2 + v^2\tau^2 - 2rv\tau \cos \theta \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable  $\theta' = \theta + \pi$ ,  $\cos \theta' = -\cos \theta$  et  $d\theta' = d\theta$ , on obtient

$$a_+ = a_- = \int_0^\pi \int_{\eta/2}^{1/2} \frac{8}{\pi(1-\eta^2)} g\left(\sqrt{\bar{r}^2 + (v\tau/D)^2 + 2\bar{r}(v\tau/D) \cos \theta}\right) \bar{r} d\bar{r} d\theta \quad (10.5)$$

En conséquence, la variance de la phase résiduelle impliquée par la translation vaut

$$a_{\delta w} = 2a_w + (D/r_0)^{5/3} (\underline{\mathcal{D}}_w(v\tau) - 2a_+) . \quad (10.6)$$

On notera que  $\underline{\mathcal{D}}_w(v\tau)$  et  $a_+$  peuvent toutes deux être évaluées simplement à partir du scalaire  $v\tau/D$ .

En générant une très grande surface d'onde pour  $D/r_0$  et  $D/L_0$  donnés, il est possible d'en extraire une suite de surfaces d'onde translattées les unes par rapport aux autres de  $v\tau$ . En effet, pour une certaine dynamique temporelle fixée par la valeur de  $a_{\delta w}$ , la résolution de l'équation (10.6) fournit la valeur de la translation  $v\tau/D$  à considérer. Malgré une mise en oeuvre simple, cette méthode implique généralement des déplacements d'une fraction du pas d'échantillonnage de la surface d'onde d'origine. Pour des vitesses de vent classiques,  $v\tau$  peut être de l'ordre de  $1/100^{\text{ème}}$  de sous-pupille. Simuler la surface d'onde d'origine avec un tel raffinement pour une grande ouverture implique le stockage d'un vecteur de l'ordre de  $5 \times 10^8$  valeurs de phase. Il est aussi possible de prévoir un échantillonnage plus grossier, et une interpolation de la surface d'onde d'origine à chaque translation. Cette solution a été étudié mais aucune méthode d'interpolation satisfaisante n'a été trouvée.

D'abord, l'effet de lissage des fonctions d'interpolations classiques, telles que les splines linéaires ou cubiques, est trop marqué. Par conséquent, la variance des déformations sur la pupille n'est pas maintenue constante au cours de la translation. La valeur de la variance est correcte uniquement lorsque la surface d'onde coïncide avec des points d'échantillonnage de la surface d'onde d'origine, puis elle décroît jusqu'à ce que les valeurs translattées soient à égale distance de deux échantillons d'origine. De la même façon, la variance de la déformation différentielle pour un décalage  $v\tau/D$  donné fluctue au cours des interpolations successives. Même si les déficits de variance engendrés par cette méthode ne sont que de quelques pourcents, j'ai finalement employé une autre méthode qui évite cet effet systématique.

### La méthode de bouillonnement

Je génère une suite de surfaces d'onde  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , par la formule de récurrence suivante

$$w_k = \alpha_1 w_{k-1} + \alpha_2 w_{\text{new},k} ,$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux scalaires et  $w_{\text{new},k}$  est décorrélée de  $w_{k-1}$ , quel que soit  $k$  entier non nul.

Pour  $\delta w(\mathbf{r}) = w_k(\mathbf{r}) - w_{k-1}(\mathbf{r})$ , les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont déterminées de façon unique grâce à deux 2 contraintes. Premièrement, j'impose à  $w_k$ ,  $w_{k-1}$  et  $w_{\text{new},k}$  de suivre toutes la même statistique, *i.e.* d'être des processus Gaussien de même fonction de structure normalisée  $\underline{\mathcal{D}}_w$ . Deuxièmement, je fixe la variance de phase différentielle  $a_{\delta w}$  souhaitée.

La première hypothèse implique

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{D}}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) &= \left\langle (\alpha_1 w_{k-1}(\mathbf{r}) + \alpha_2 w_{\text{new},k}(\mathbf{r}) - \alpha_1 w_{k-1}(\mathbf{r}') - \alpha_2 w_{\text{new},k}(\mathbf{r}'))^2 \right\rangle \\ &= \alpha_1^2 \underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \alpha_2^2 \underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \end{aligned} \quad (10.7)$$

d'où

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 . \quad (10.8)$$

De plus,

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{D}}_{\delta w}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \left(\frac{r_0}{D}\right)^{5/3} \langle (w_k(\mathbf{r}) - w_{k-1}(\mathbf{r}) - w_k(\mathbf{r}') + w_{k-1}(\mathbf{r}'))^2 \rangle \\ &= 2 \left( \underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \left(\frac{r_0}{D}\right)^{5/3} \langle (w_k(\mathbf{r}) - w_k(\mathbf{r}'))(w_{k-1}(\mathbf{r}) - w_{k-1}(\mathbf{r}')) \rangle \right) \\ &= 2(1 - \alpha_1) \underline{\mathcal{D}}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}').\end{aligned}\quad (10.9)$$

En introduisant l'équation (10.9) dans l'équation (10.2), on obtient la contrainte imposée par la seconde hypothèse :

$$a_{\delta w} = (1 - \alpha_1) a_w. \quad (10.10)$$

En conséquence,

$$\alpha_1 = 1 - a_{\delta w}/a_w \quad (10.11)$$

et

$$\alpha_2 = \sqrt{1 - \alpha_1^2}. \quad (10.12)$$

Cette méthode est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre que la précédente, et elle minimise les besoins numériques. C'est finalement cette approche que j'ai utilisée dans mes simulations.

Cependant, le chronogramme des OA en boucles fermées simulées est celui présenté au chapitre précédent (*cf.* fig. 9.2). Le système d'OA corrige donc la turbulence avec deux trames de retard. La valeur  $a_{\delta w}$  imposée par l'évolution temporelle de la turbulence, correspond alors à

$$\delta w(\mathbf{r}) = w_k(\mathbf{r}) - w_{k-2}(\mathbf{r}). \quad (10.13)$$

En conséquence, les coefficients (10.11) et (10.12) sont remplacés par

$$\alpha_1 = \sqrt{1 - \alpha_2^2} \quad (10.14)$$

et

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{a_{\delta w}}{2a_w}}. \quad (10.15)$$

Le calcul de ces nouveaux coefficients est aussi simple à mener que pour le retard d'une trame. Les détails des formules sont dans l'article joint à la fin ce chapitre. Cet article reprend les principaux résultats de cette partie. Il est néanmoins encore en préparation.

Je précise que pour un système à deux trames de retard, il est évidemment nécessaire de générer la suite complète  $(w_k)_{k \in \mathcal{N}}$  et non pas une valeur sur 2.

## 10.2 L'algorithme de calcul de la commande

L'algorithme utilisé pour le calcul de la commande  $\mathbf{a}$  dans l'équation (9.19) est simple puisqu'il s'agit de respecter les 3 étapes décrites à la fin du chapitre précédent. Je détaille ici le coût de chacune ces étapes, avec leurs approximations.



### 10.2.1 La reconstruction itérative avec FrIM MAP

La reconstruction MAP en boucle fermée utilise l'approximation fractale, c'est-à-dire que l'équation (9.22) s'écrit aussi

$$\widehat{\mathbf{w}}_{k-2} = \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{k-2}$$

avec

$$\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{k-2} = \mathbf{b}$$

où

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_{\text{frac}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K}_{\text{frac}} + \mu_0 \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \mathbf{K}_{\text{frac}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2})$$

Je rappelle que  $\mu_0 = \sigma_e^2 / (D/r_0)^{5/3}$ . La méthode FrIM MAP (*cf.* section 6.4.1) détermine  $\widehat{\mathbf{u}}_{k-2}$  de façon itérative par un algorithme de gradients conjugués préconditionnés. Les simulations de reconstruction FrIM MAP présentées au chapitre 7 mettent en oeuvre le même estimateur. En particulier, la matrice  $\mathbf{A}$  du système à résoudre est la même, donc le conditionnement du problème est identique.

Le nombre d'opérations nécessaires par itération des gradients conjugués pour ce système est détaillé par Thiébaud et Tallon (2008). Pour la première itération, il faut  $32 \times n$  opérations, avec  $n$  le nombre de points de phase à reconstruire. Les itérations suivantes requièrent  $34 \times n$  opérations.

L'initialisation de l'algorithme est différente pour la reconstruction en boucle fermée puisque le premier résidu à calculer est

$$r^{\text{init}} = \mathbf{K}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot (\tilde{\mathbf{d}}_{k-1} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{k-1}) - \mu_0 \widehat{\mathbf{u}}_{k-1} \quad (10.16)$$

$$= \mathbf{K}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{w}}_{k-1}) - \mu_0 \widehat{\mathbf{u}}_{k-1} \quad (10.17)$$

En boucle fermée, l'algorithme itératif part de la solution finale de la reconstruction à la boucle précédente,  $\widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$ . Puisque la surface d'onde turbulente est censée évoluer lentement par rapport à la période d'échantillonnage du système d'OA, alors partir de la solution finale précédente devrait permettre de partir plus près de la nouvelle solution, que de repartir d'une estimée nulle. Ceci devrait accélérer la convergence de la méthode. De plus, pour la modélisation du miroir et la paramétrisation de  $\mathbf{w}$  choisies, le nombre d'opérations nécessaires pour appliquer  $\mathbf{G}$  est à peu près identique à celui requis pour appliquer  $\mathbf{S}$ .

Lorsqu'aucune estimée n'est encore disponible,  $\mathbf{a}_{k-2}$  et  $\widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$  sont tous les deux nuls. Pour la première boucle d'OA, le nombre d'opérations nécessaires au calcul de  $r^{\text{init}}$  est donc  $\sim 10 \times n$ . Pour la deuxième boucle,  $\mathbf{a}_{k-2}$  est nulle mais l'estimation de  $\widehat{\mathbf{w}}_{k-1} = \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$  a déjà eu lieu. Alors le calcul de  $r^{\text{init}}$  requiert cette fois de l'ordre de  $18 \times n$  opérations. Enfin, le calcul du résidu initial pour toutes les boucles suivantes demande  $23 \times n$  opérations environ.

Le coût total de la méthode de reconstruction FrIM MAP en boucle fermée est donc de  $(21 + 34 N_{\text{iter}}) \times n$  opérations par boucle. Le nombre d'itérations dépend de la vitesse de convergence de l'algorithme et de la fréquence de boucle du système d'OA. La vitesse de convergence de FrIM MAP est différente ici de ce qu'elle était en reconstruction de surface d'onde (*cf.* chapitre 7.3.1) puisque l'algorithme part de la meilleure estimée de la boucle précédente.

Lorsque la procédure itérative s'arrête, il faut appliquer le changement de variable fractal  $\mathbf{K}_{\text{frac}}$  à l'estimée

$$\widehat{\mathbf{w}}_k = (r_0/D)^{5/3} \mathbf{K}_{\text{frac}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_k. \quad (10.18)$$

Ainsi la reconstruction en boucle fermée est obtenue après  $(27 + 34 N_{\text{iter}}) \times n$  opérations.

### 10.2.2 La prédiction et la projection

Comme expliqué dans la section 9.4.2, je fais dans mes simulations l'approximation  $\mathbf{\Gamma} \simeq \mathbf{I}$  pour la prédiction. Cette étape n'introduit donc pas de calculs.

La dernière étape du calcul de la commande est la projection sur l'espace des actionneurs. Comme l'échantillonnage de la surface d'onde estimée coïncide avec les positions des actionneurs, la projection est réduite à l'effet d'un masque sur les points de phase situés là où il n'y a pas d'actionneurs. Cette étape implique donc moins de  $n$  opérations.

En conclusion, la combinaison des étapes de reconstruction, prédiction et projection pour le calcul de la commande aboutit à un coût calculatoire total de  $(28 + 34 N_{\text{iter}}) \times n$  opérations. Le coût minimal est de  $62 \times n$  opérations, lorsqu'une seule itération de FrIM MAP est appliquée. Le coût maximal est représenté par le fait que la méthode des gradients conjugués converge en  $n$  itérations, en l'absence d'erreurs d'arrondis. Afin de pouvoir réellement associé un coût calculatoire réaliste à cet algorithme de calcul de la commande en boucle fermée, j'étudie donc dans la prochaine section les propriétés de convergence de FrIM MAP à partir de simulations.

## 10.3 Le budget d'erreurs

Je rappelle l'expression de l'erreur de correction de l'OA  $\langle \epsilon_k^2 \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_k^2 \rangle &= \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \|P(w_k - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}_k)\|^2 \right\rangle \\ \langle \epsilon_k^2 \rangle &= \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \|P(w_k - w_{k-2} + w_{k-2} - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}_k)\|^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (10.19)$$

où la deuxième ligne est obtenue en introduisant artificiellement la surface d'onde  $\mathbf{w}_{k-2}$  dans la première expression.

Dans mes simulations d'OA en boucle fermée, au chapitre suivant, j'ai utilisé l'approximation d'une surface d'onde fixe pour la prédiction, *i.e.*  $\mathbf{\Gamma} \simeq \mathbf{I}$ . Je peux alors identifier dans l'erreur deux composantes

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle \simeq \langle \epsilon^2 \rangle_{\tau} + \langle \epsilon^2 \rangle_{\text{estim}} \quad (10.20)$$

en supposant que l'erreur d'estimation (*cf.* éq. (5.7))

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{estim}} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \|P(w_{k-2} - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}_k)\|^2 \right\rangle \quad (10.21)$$

et l'erreur due au retard

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\tau} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \|P(w_k - w_{k-2})\|^2 \right\rangle \quad (10.22)$$

sont décorréélées et stationnaires.

Par ailleurs, en insérant la loi de commande (9.19) dans l'expression de l'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{estim}}$  ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^2 \rangle_{\text{estim}} &= \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| P \left( w_{k-2} - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \right) \right\|^2 \right\rangle \\ &= \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp} + \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} \end{aligned} \quad (10.23)$$

Je rappelle que  $\mathcal{M}$  est l'espace image du miroir déformable. Alors le budget d'erreur peut être décomposé comme suit

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle \simeq \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp} + \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle \epsilon^2 \rangle_{\tau}. \quad (10.24)$$

Puisque le pas d'échantillonnage  $d_e$  de la paramétrisation de la surface d'onde  $\mathbf{w}$  est égal à l'espace interactionneur du MD dans mes simulations, alors l'erreur de sous-dimensionnement  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}\perp}$  n'est pas prise en compte ici.

Afin de pouvoir conclure sur le nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme FrIM MAP pour converger en boucle ouverte, je suppose que le budget de l'OA a été équilibré, c'est-à-dire que

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\tau} \simeq \langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}} \quad (10.25)$$

L'erreur  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$  a été analysée très en détail dans la partie II, montrant qu'à dimension de système donnée  $D/d_l$  et à échelle externe fixée  $D/L_0$ , le rapport  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}/\sigma_e^2$  ne dépend que de  $\mu_0$ . De plus, à partir des coefficients (10.14)- (10.15) de la section 10.1.2, il est possible de simuler une surface d'onde en évolution avec un erreur de retard  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\tau}$  de valeur bien particulière.

J'ai donc simulé un télescope de 42m, avec un budget d'erreur équilibré, c'est-à-dire tel que l'équation (10.25) soit vérifiée, pour différentes valeurs de  $D/d_l$  et  $\mu_0$ . Le nombre d'itérations autorisées pour FrIM MAP est fixé et l'erreur globale de correction est calculée pendant 100 boucles successives. Si le nombre d'itérations est trop faible, la reconstruction n'a pas convergé est donc l'erreur de reconstruction est supérieure à sa valeur optimale

Les résultats des simulations sont présentés dans la section suivante.

## 10.4 Performance of FrIM algorithm inside a closed-loop AO system on a 42-m telescope

L'analyse effectuée dans ce chapitre est exposée dans un article en cours de préparation. Sa structure est semblable à celle du présent chapitre. Il est reproduit dans cette section. À la suite de cet article, je présente dans une dernière section, une synthèse des résultats ainsi que les conclusions quant à l'utilisation de l'algorithme FrIM en boucle fermée sur un grand système.

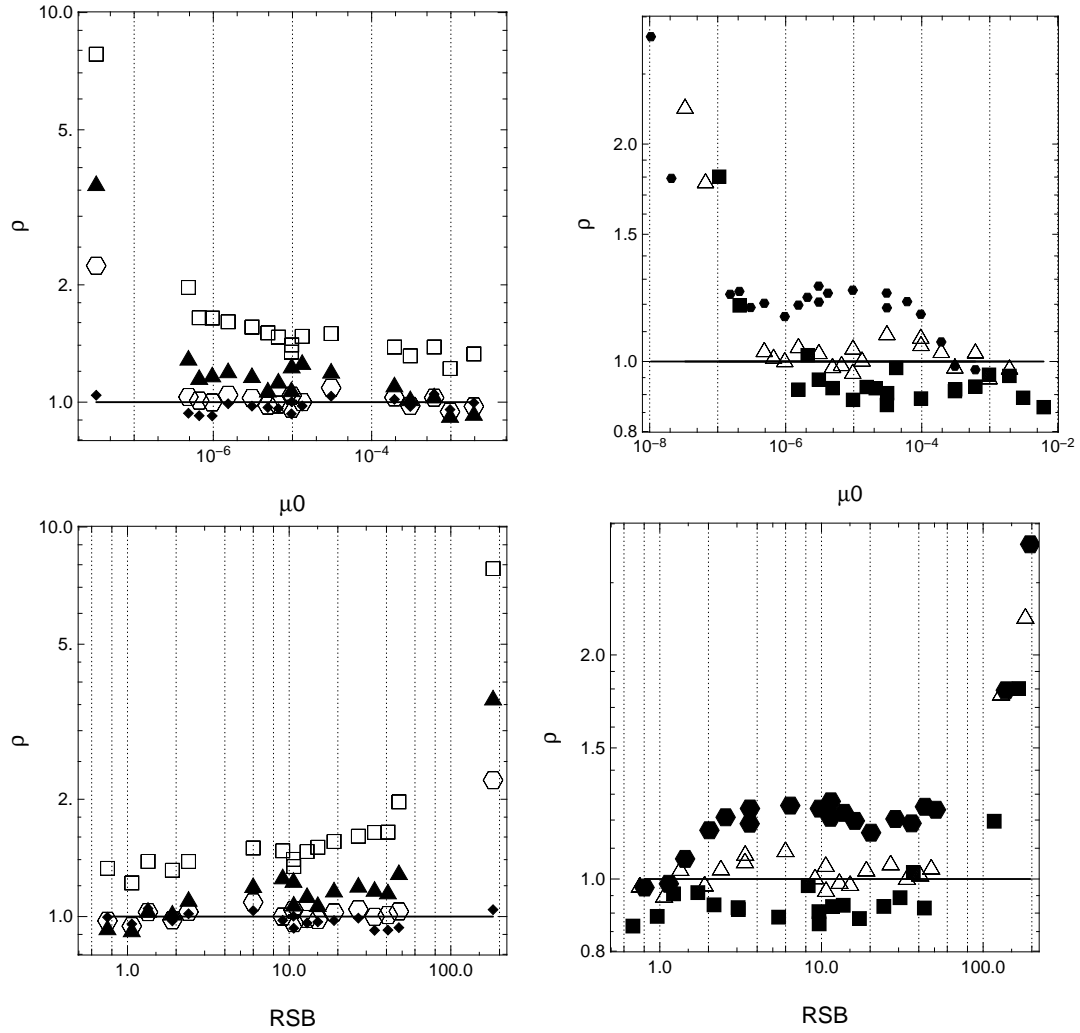


FIG. 10.1 – Rapport  $\rho$  (cf. éq. (équation (10.26))) en fonction de  $\mu_0 = \sigma_e^2 (r_0/D)^{5/3}$  (en haut) et du RSB (en bas). Les conditions de simulation correspondent à une OAmC sur un télescope de 42m, avec  $D/L_0 = 2$ , une obstruction centrale de  $0.28D$ . Chaque symbole représente la moyenne de  $\langle \epsilon_k^2 \rangle$  sur les 70 dernières boucles pour toutes les combinaisons de conditions suivantes possibles :  $r_0 = 0.1d, 0.5d, d, 2d$  et  $\sigma_e^2 = 5 \times 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$  et  $2 \text{ rad}^2/d_l$ . À gauche :  $D/d = 128$  fixé, mais le nombre d'itérations est variable :  $N_{\text{iter}} = 1$  (carrés), 2 (triangles), 3 (hexagones) et 7 (losanges). À droite :  $N_{\text{iter}} = 3$  fixé mais le rapport  $D/d = 64$  est variable : 65 (carrés), 128 (triangles) et 256 (hexagones).

# Performance of FrIM algorithm inside a closed-loop AO system on a 42-m telescope

Béchet, C.,\* Tallon, M., and Thiébaud, E.

PACS numbers:

## I. INTRODUCTION

Large ground-based telescopes resolution is damaged by the atmospheric turbulence, producing inhomogeneities of the refraction index and thus distortions of the wavefront coming from observed science objects. AO systems are dedicated to compensate this distortions in real-time, thanks to wavefront sensing (WFS) devices and one or several deformable mirrors (DM) to apply a phase correction. AO systems conception is undergoing a revolution on two aspects, in terms of correction objectives and in terms of computational methods.

First, existing AO systems in closed-loop are aimed at correcting on-axis perturbations. In such a case, the WFS device observes the same turbulence volume as the science camera does, so that the objective of the AO control is to cancel the measurements, which is usually done thanks to an integrator as a control law [6]. Nowadays, the versatile concepts of AO systems suggested for the future telescopes, such as Multi-Conjugate AO or Laser Tomography AO, no longer can rely on this control objective. The criterion to optimize must now be formulated in the turbulent layers planes, so as to flatten the wavefront in the conjugated layers and in possibly several directions of observation. It has been demonstrated that this inverse problem requires a Bayesian approach of the optimization, with priors on the atmospheric turbulence, in order to cope with unseen modes [10] of the perturbation.

Next, AO systems under study for the future generation of telescopes, the Extremely Large Telescopes (ELT), have to control a huge number of actuators,  $n \sim 10^4$ , defining new challenges in terms of real-time computational cost [5]. This number of parameters  $n$  is typically 2 orders of magnitude larger than for the currently existing AO systems and it is supposed to go on increasing. Given the size and the expected performance of those telescopes, such a high number of actuators on the DM or measurements from the WFS is necessary to provide the best compensation of atmospheric perturbations in the science image. A new generation of order- $n$  algorithms came out to replace the classical Matrix-Vector Multiply (MVM) scaling as  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Various methods have been studied in the past few years, in order to simultaneously face these two issues. Several iterative methods have been proposed to estimate a maximum *a posteriori* solution of the wavefront reconstruction problem with high number of parameters. These methods include priors on the turbulence, thanks to an approximation of the tur-

bulent wavefront spatial covariance matrix. The fastest reconstructions use the Preconditioned Conjugate Gradient (PCG) algorithm, well adapted to large systems dimensions, but each method has its particular preconditioning. Gilles et al. [8] proposed a Multigrid PCG method requiring about  $28 \times n \log(n)$  operations to converge. Next, Yang et al. [17] decreased the required computation time with a Fourier Domain preconditioning. Both methods rely on the approximation of the covariance matrix by a block circulant with circulant blocks matrix. Another approximation of the covariance matrix of the turbulent wavefront has been devised by Thiébaud & Tallon [14], based on a fractal linear operator. From this operator, Thiébaud & Tallon derived a fractal change of variable and a diagonal preconditioner that both accelerate the convergence of the PCG. The fractal iterative method (FrIM) requires  $34 \times n$  operations per iteration and they demonstrated that wavefront reconstruction could be obtained in less than 10 iterations [14]. They showed that the number of iterations is independent of  $n$ , but yet increases with the signal-to-noise ratio (SNR).

Fast reconstruction is required because of the AO loop frequency ranging from 500Hz to 2kHz, and in this prospect, this paper demonstrates the assets of FrIM algorithm for a closed-loop AO.

In Sect. II, closed-loop AO equations are deduced from a linear model of the system and from the optimization of a quadratic criterion. Sect. III details how to make use of FrIM algorithm in the closed-loop computation of the command vector. The number of operations highly depends on the number of iterations allowed for the reconstruction step. This is why we introduce in Sect. IV another criterion based on the error budget equilibrium, in order to check the needs in terms of iterations to maintain an optimal correction. Finally, simulations of well-balanced AO systems of typical dimensions for an ELT telescope are used to quantify these needs over a large range of SNR values.

## II. CLOSED-LOOP AO EQUATIONS

We present here the linear equations used to model the closed-loop Single-Conjugate AO (SCAO) system and define the criterion to be optimized. Then, the control law is directly derived from the optimization of this criterion.

---

\*Electronic address: Bechet@obs.univ-lyon1.fr

### A. Linear Model for a closed-loop AO system

The DM is modeled as a linear process so that the compensation  $w^c$  induced by a given finite-length command vector  $\mathbf{a}$  is

$$w^c(\mathbf{r}) = \mathbf{m}(\mathbf{r})^T \cdot \mathbf{a} = \sum_i a_i m_i(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{A} \quad (1)$$

where  $m_i$  represents the influence function associated with the  $i$ -th command vector component and superscript  $T$  defines the transpose operator. All the  $m_i$  are continuous functions of space coordinate  $\mathbf{r}$  inside the pupil. We notate  $n_a$  the dimension of  $\mathbf{a}$ , which corresponds to the number of controlled parameters in the AO system.

The wavefront sensor observes the residual phase  $w^{\text{res}}$ , so that measurement equation is

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k &= \mathbf{S}(w_{k-1}^{\text{res}}) + \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{S}(w_{k-1} - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}_{k-1}) + \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (2)$$

where  $\mathbf{d}$  stands for the data vector,  $\mathbf{S}$  for the linear model of the wavefront sensor,  $w(\mathbf{r})$  for the continuous turbulent wavefront and  $\mathbf{e}$  is the measurement errors vector due to noise and model approximation. Index  $k$  indicates the time sample.

Thanks to the linearity of all the operators, the last equation can be simplified to write

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{e}_k \quad (3)$$

with  $\mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{S}(w_{k-1})$  and  $\mathbf{G}$  defined such that

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{S}(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}) \quad (4)$$

for any  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_a}$ . Thus,  $\mathbf{y}_{k-1}$  symbolizes noiseless open-loop data and  $\mathbf{G}$  is the interaction matrix of the system.

The presence of distinct time samples,  $k$  and  $k-1$  in Eq. (3), results from the WFS exposure time delay  $T$ , for the sensing is not instantaneous. When considering a discretized representation of the system, another delay should be modeled, corresponding to the CCD read-out time, computation of phase slopes and computation of the next command to apply. Although any value  $\tau$  for this second delay could theoretically be taken into account, discrete equations are simplified when  $\tau$  is a multiple of  $T$ . Equations in this paper represent the simplest case when  $\tau = T$ , that is to say there is only one sampling period inside the system, and the AO system is commonly referred as having a two-frame delay [9].

In this context, the command  $\mathbf{a}_k$  is computed from data  $\mathbf{d}_{k-1}$ . Nevertheless, from Eq. (3), the previous command in a closed-loop system obviously affected the measurements. This is why one should also take into account the previous value  $\mathbf{a}_{k-2}$ . This leads to a general and linear control law of the form

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_{k-2} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1} \quad (5)$$

where  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{R}$  are assumed to be stationary.

One may notice that we do not impose the classical form of a closed-loop integrator, which would be written

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1}.$$

### B. Formalism and criterion definition

The Strehl ratio of the science image, assessing the AO system performance, is optimized for minimum mean squared residual fluctuations of the wavefront over the pupil,

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \int_{\mathcal{A}} \left( w^{\text{res}} - \frac{1}{A} \int_{\mathcal{A}} w^{\text{res}} \right)^2 \right\rangle \quad (6)$$

where  $\mathcal{A}$  is the pupil domain,  $S_{\mathcal{A}}$  is its surface and  $\langle \cdot \rangle$  symbolizes the expectation over both turbulence and noise statistics. The residual wavefront distortion  $w^{\text{res}}$  is a space-continuous real-valued random process defined over  $\mathcal{A}$ . This AO criterion can be formulated thanks to Hilbert-space formalism [2], with the inner product and norm respectively

$$(f|g) = \int_{\mathcal{A}} f g \quad \text{and} \quad \|f\| = \left( \int_{\mathcal{A}} f^2 \right)^{1/2}$$

where  $f$  and  $g$  are parts of  $C^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , the infinite-dimension vector space of continuous real-valued functions defined over the pupil area. We simplify notations further notating  $p$  the uniform phase aberration over the pupil, *i.e.* the *piston* component, scaled such that

$$\int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1, \quad (7)$$

and  $\mathbf{P}$  the orthogonal projector [2] defined as

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : C^0(\mathcal{A}, \mathbb{R}) &\rightarrow C^0(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \\ x &\rightarrow x - \frac{(x|p)}{(p|p)} p. \end{aligned} \quad (8)$$

Then, the AO criterion in Eq. (6) at the  $k$ -th step can be written

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \|\mathbf{P}(w_k^{\text{res}})\|^2 \right\rangle = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \|\mathbf{P}(w_k - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}_k)\|^2 \right\rangle. \quad (9)$$

Before optimizing the criterion in Eq. (9), one should notice that the residual wavefront  $w^{\text{res}}$  compares a continuous function  $w$  in an infinite-dimension space  $w$  with another continuous function  $w^c$  defined in a finite-dimension subspace of  $C^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ . The Hilbert-space can be decomposed into two orthogonal subspaces [16], the first containing uncontrollable modes and the other one controllable modes of the system. The controllable subspace  $\mathcal{M}$  is of finite dimension, generated by the DM influence functions  $(m_i)_{1 \leq i \leq n_a}$ , which are chosen to constitute a linearly independent family. Hence, the turbulent wavefront has a unique decomposition of the form

$$w(\mathbf{r}) = w^{\mathcal{M}^\perp}(\mathbf{r}) + w^{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) = w^{\mathcal{M}^\perp}(\mathbf{r}) + \mathbf{m}(\mathbf{r})^T \cdot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{A} \quad (10)$$

where  $w^{\mathcal{M}^\perp}$  and  $w^{\mathcal{M}}$  are the orthogonal projections of  $w$  respectively on the uncontrollable subspace  $\mathcal{M}^\perp$  and on the controllable space  $\mathcal{M}$ .

The piston mode is a controllable mode and since controllable and uncontrollable subspaces are orthogonal to each other, combination of Eq. (9) with (10) provides

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left[ \langle \|\mathbf{P}(w_k^{\mathcal{M}^\perp})\|^2 \rangle + \langle \|\mathbf{P}(\mathbf{m}^T \cdot (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k))\|^2 \rangle \right] \quad (11)$$

$$= \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}^\perp} + \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}} \quad (12)$$

where  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}^\perp}$  characterizes an intrinsic residual perturbation and  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}}$  is the improvable part of the AO criterion.

### C. Control law optimization

Given the command law chosen in Eq. (5), the criterion to optimize is

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \langle \|\mathbf{P}(\mathbf{m}^T \cdot (\mathbf{b}_k - \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_{k-2}))\|^2 \rangle \quad (13)$$

$$= \langle \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{x} \rangle \quad (14)$$

where we use simplified notations [2], defining the matrix  $\mathbf{N}$  of which components are

$$\mathbf{N}_{i,j} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} (\mathbf{P}(m_i) | \mathbf{P}(m_j)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n_a, \quad (15)$$

and  $\mathbf{x} = \mathbf{b}_k - \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_{k-2}$ .

One must notice that the expression for the command in Eq. (5) is recursive. Using this property, Eq. (14) could be developed so as to be formulated as depending on all the successive and past data  $\mathbf{d}_{k-i}$ , with  $i$  from 1 to  $k$  and of the first command  $\mathbf{a}_0$ . Optimizing the developed criterion with respect to  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{Q}$  would then lead to an optimal solution. However, we decided in this paper to favour another approach, which consists in optimizing the criterion in Eq. (13), yet given and fixed the value of the previous command,  $\mathbf{a}_{k-2}$ . We do not assume anything about the origin of this previous command value, but just consider that we do know it perfectly. Whatever the current system state, we want to find the best stationary  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{Q}$  to apply. This means that the previous command is not considered as a stochastic parameter of the system but as a deterministic one. With such assumption, the full expression of the criterion to optimize is given by Eq. (14), and thus it is a quadratic form of  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{Q}$  operators.

Then optimizing this criterion for any time sample  $k$ , given  $\mathbf{d}_{k-1}$  and  $\mathbf{a}_{k-2}$ , the optimal command law implies  $\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}} / \partial \mathbf{Q} = 0$  and  $\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}} / \partial \mathbf{R} = 0$ . Linearity of all the operators provides

$$\frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{Q}} = 2\mathbf{N} \cdot \langle (\mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \rangle$$

Replacing data vector by its expression in Eq. (3) leads to

$$\frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{N} \cdot \left\langle \left( \mathbf{R} \cdot (\mathbf{y}_{k-2} + \mathbf{e}_{k-1}) + (\mathbf{Q} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{b}_k \right) \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \right\rangle.$$

As already mentioned above, we decided to consider  $\mathbf{a}_{k-2}$  as a given *deterministic* value, and more precisely not to assume anything about its origin and possible correlation with further wavefront perturbations  $\mathbf{b}_k$  and  $\mathbf{y}_{k-1}$ . Then, as phase slopes have null expectation and that the expectation of the actuators position to correct atmospheric phase perturbations are also null, then

$$\langle \mathbf{y}_{k-2} \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \rangle = \langle \mathbf{y}_{k-2} \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T = 0,$$

$$\langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \rangle = \langle \mathbf{e}_{k-1} \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T = 0$$

and

$$\langle \mathbf{M} \cdot \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T \rangle = \mathbf{M} \cdot \langle \mathbf{b}_k \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^T = 0.$$

As a consequence, we must choose  $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}$  to be sure to cancel the partial derivative of the criterion with respect to  $\mathbf{Q}$ . The control law in Eq. (5) then simplifies to

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2}) \quad (16)$$

Since  $\mathbf{a}_{k-2}$  is the command that affected  $\mathbf{d}_{k-1}$  closed-loop measurements, then Eq. (16) allows the control law to take into account its previous action in order to subtract it from the residual data so as to generate pseudo open-loop measurements

$$\tilde{\mathbf{d}}_{k-1} = \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2} = \mathbf{y}_{k-2} + \mathbf{e}_{k-1}. \quad (17)$$

Then, we can now optimize the criterion with respect to  $\mathbf{R}$ ,

$$\frac{\partial \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\mathcal{M}}}{\partial \mathbf{R}} = 2\mathbf{N} \cdot \left( \mathbf{R} \cdot \langle \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^T \rangle - \langle \mathbf{b}_k \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}^T \rangle \right).$$

It appears then that choosing

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{y}_{k-2}^T \rangle \cdot \left( \langle \mathbf{y}_{k-2} \cdot \mathbf{y}_{k-2}^T \rangle + \langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1}^T \rangle \right)^{-1} \quad (18)$$

is a sufficient condition to optimize the criterion.

### D. System modeling and control expression

The wavefront can be decomposed on an infinite-dimension basis  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  such that

$$w(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\mathbf{r}) w_i, \quad (19)$$

In practice, one needs to restrict the representation of the wavefront to a finite-dimension space truncating the basis to

$(h_i)_{1 \leq i \leq n}$  with  $n < \infty$ . For a given  $n$ , it is then possible to define  $\mathbf{F}$  the matricial representation of the linear application

$$\mathbf{F} : (\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathbb{R}); (h_i)_{1 \leq i \leq n}) \rightarrow (\mathcal{M}; (m_i)_{1 \leq i \leq n_a})$$

$$w \rightarrow w^{\mathbf{M}}. \quad (20)$$

$\mathbf{S}$  represents the linear WFS model from the basis  $(h_i)_{1 \leq i \leq n}$  to the canonical basis of  $\mathbb{R}^m$ . Finally, it is possible to define the stationary spatial and spatio-temporal covariance matrices of the wavefront  $\mathbf{C}_w = \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k \rangle$  and  $\mathbf{T}_w = \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_{k-2} \rangle$  for all  $k$  in this finite-dimension basis  $(h_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

With such notations, the control matrix  $\mathbf{R}$  in Eq. (18) becomes

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{C}_w \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1}, \quad (21)$$

where  $\mathbf{C}_e = \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T \rangle$ ,  $\forall k$ , is the stationary noise covariance matrix and

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \quad (22)$$

represents the temporal correlation of the turbulence. It is worth noticing that Eq. (21) is a general formulation of the reconstructor, valid for any  $n$  in  $\mathbb{N}$ , and for which notations could even be extended to the infinite-dimension description of the wavefront over  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

### E. Closed-Loop AO diagram

To simplify notations, we decompose the control law thanks to the three matrices  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  and  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_e)^{-1} \quad (23)$$

$$= (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1}.$$

$\mathbf{E}$  illustrates the turbulent wavefront estimation step, for which one may recognize the two equivalent expressions for the maximum *a posteriori* estimator [14].  $\mathbf{F}$  as defined in Eq. (20) corresponds to the fitting step, an orthogonal projection on the control space. The diagram of Fig. 1 summarizes the control architecture induced by Eq. (21), using the notations defined above and  $\mathbf{M}$  standing for the application of the DM influence functions. The  $z^{-1}$  variable comes from the discrete-time description, making use of z-transforms, and illustrates the delays. An Internal Model Control (IMC) [11] appears in the control architecture, for which the reference signal  $w_{\text{ref}}$  is null. This reference symbolizes the null wavefront distortions we are searching for. Figure 1 emphasizes two parallel paths: the one passing through the real plant, the combination of  $\mathbf{M}$  and  $z^{-1}\mathbf{S}$  blocks, and the one passing through the modeled interaction matrix  $z^{-1}\mathbf{G}$ . The interaction matrix  $\mathbf{G}$  is a linear model of the combination of DM and WFS real processes, as defined in Eq. (4). Properties of IMC apply so that if  $\mathbf{G}$  is a perfect model then the system is equivalent to an open-loop AO system. This is an interesting point for some AO concepts where

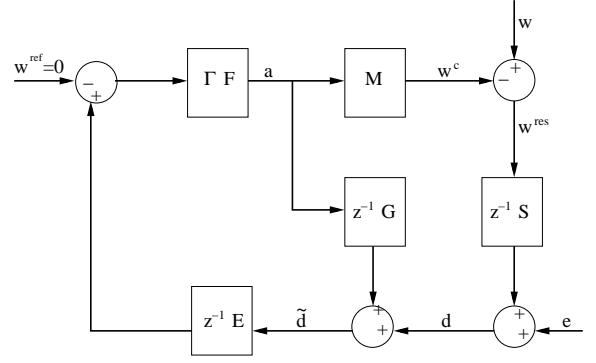


FIG. 1: Discrete-time diagram of the closed-loop AO system.  $\mathbf{M}$  stands for the application of the DM influence functions to the control vector.

a part of the control is made in open-loop, which would be the case for Multi-Objects AO systems. The results of the study presented here would then naturally apply to such systems.

The idea to build the pseudo open-loop measurements of Eq. (17) in the estimation part of the closed-loop AO problem has already been suggested by Ellerbroek [2] and used by Gilles [7]. However, the global architecture differs and Gilles added an *ad hoc* robust filter to the control law. At the moment, we have no filter of this kind inside our control structure. This need may arise with the study of modeling errors and their influence on stability. We expect to derive such a filter from a robustness analysis, which is underway.

### III. COMPUTATION OF THE COMMAND WITH FRIM

We detail in this section the low-computation procedure applied to reach the optimal command given by Eq. (23) and (21). It relies on the use of the Fractal Iterative Method (FrIM) [14].

#### A. System modeling approximations

In practice, the useful expression for  $\mathbf{R}$  from Eq. (21) depends on the sensing device modeling  $\mathbf{S}$  and on the DM influence functions  $\mathbf{m}$ .

In what follows, we consider the common Fried's model of a Shack-Hartmann wavefront sensing [3, 13, 14]. Furthermore, the influence functions  $(m_i)_{1 \leq i \leq n_a}$  for our DM are assumed to be two-dimensional linear splines centered at actuators locations. We thus can judiciously characterize the wavefront phase over a square grid larger than the pupil thanks to linear splines interpolation functions  $h_i$ , with a regular 2D-sampling of spatial period  $d$  equal to the subaperture size and to the actuators pitch. Thus, Eq. (19) is replaced by

$$w(\mathbf{r}) \simeq \sum_{i=1}^n h_i(\mathbf{r}) w_i = \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{w}, \quad (24)$$



with  $h_i = m_j$  if the  $i$ -th phase sample position is aligned with the  $j$ -th actuator location. The used algorithm for reconstruction, FrIM, is currently implemented to reconstruct the wavefront over a square grid of  $n = (2^p + 1) \times (2^p + 1)$  interpolation coefficients, with  $p$  an integer. The interpolation coefficients are equal to the wavefront samples.

Noise and wavefront covariance matrices are modeled with the same approximations as described in B echet *et al.* [1]. Considering a Shack-Hartmann observing a Natural Guide Star (NGS), measurements uncertainties can be assumed uniform and uncorrelated, so that

$$\mathbf{C}_e = \sigma_e^2 \mathbf{I}.$$

with  $\sigma_e^2$  the noise variance, expressed in square radian per subaperture size  $d$ . For the turbulent covariance, the fractal change of variable is used for either Kolmogorov or von K arm an description of the turbulence statistics. The linear invertible fractal operator  $\mathbf{K}$  allows to rewrite the wavefront in a basis of statistically independent modes [1], such that

$$\mathbf{w} = \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/6} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$$

with  $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ , *i.e.* following a standard normal stochastic distribution, and  $\mathbf{C}_w = (D/r_0)^{5/3} \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T$ . Factorizing the ratio  $(D/r_0)^{5/3}$  out from the covariance,  $\mathbf{K}$  becomes independent of  $r_0$  and of  $D/r_0$ . It only depends now on the number of wavefront samples across the diameter  $D/d$  and of the ratio  $D/L_0$ , where  $L_0$  is the outer scale of the spatial coherence of the turbulent wavefront.

With such models for the covariances, the computation procedure can now be decomposed into three steps: the reconstruction, the prediction and the fitting. The computation load is detailed below for each of these stages.  $\mathcal{N}(\mathbf{L})$  notation is used to represent the number of floating points operations required to apply an operator  $\mathbf{L}$  to a vector. We recall that the number of wavefront samples is  $n$  and with a Shack-Hartmann, the number of measurements  $m$  approximately equals  $2n$ .

## B. Reconstruction step

The MAP estimator of Eq. (23) can be rewritten as

$$\mathbf{E} = \mathbf{K} \cdot \left(\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mu_0 \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T$$

with  $\mu_0 = \sigma_e^2 (r_0/D)^{5/3}$ , which is the optimal priors weight in the Bayesian sense. This hyperparameter is inversely proportional to the squared SNR.

The reconstruction step consists in determining the best estimate of the phase perturbations, but in the independent modes space, *i.e.*

$$\widehat{\mathbf{u}}_k = \left(\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mu_0 \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \widetilde{\mathbf{d}}_{k-1}$$

This step includes the building of the pseudo open-loop data (See Eq. (17)).

One should notice that in classical notations of control theory, we should write  $\widehat{\mathbf{u}}_{k/k-2}$  or equivalently  $\widehat{\mathbf{w}}_{k/k-2}$ , instead of  $\widehat{\mathbf{u}}_k$  or  $\widehat{\mathbf{w}}_k$ . Indeed, we are currently estimating the best correction to compensate for  $\mathbf{w}_k$ , having observed  $\mathbf{w}_{k-2}$ . Our simplified notations are justified by the fact that the two-frame delay is permanent, and that it produces clearer equations.

Estimation of  $\widehat{\mathbf{u}}_k$  is done by solving iteratively the linear system  $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{b}_{k-1}$  with

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mu_0 \mathbf{I} \quad (25)$$

and

$$\mathbf{b}_{k-1} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \widetilde{\mathbf{d}}_{k-1}.$$

FrIM algorithm has been demonstrated to efficiently solve this system [14], with open-loop data instead of pseudo open-loop data. It is based on a diagonally Preconditioned Conjugate Gradients method (PCG). The solving here requires as many operations per iteration since  $\mathbf{A}$  is the same matrix. The explicit  $\mu_0$  in our formula (25) does not modify the counting, as in any case, an addition of  $n$  non-zero values must be applied. So, the application of  $\mathbf{A}$  to a vector requires  $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = 23n$  operations. The number of operations for the first iteration also is  $32n$  and the one for the subsequent iterations is  $34n$ .

The initialization of the algorithm differs since the first residual to be computed is

$$r^{\text{init}} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \left(\widetilde{\mathbf{d}}_{k-1} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{k-1}\right) - \mu_0 \widehat{\mathbf{u}}_{k-1} \quad (26)$$

We consider here a running AO system, so we make the system start from the previous final solution  $\widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$ . Indeed, the modal description of the wavefront may have not changed much from one loop to another, this is why such a strategy should make us start close from the optimal solution.

Once done the computation of  $\widetilde{\mathbf{d}}_{k-1}$ , Eq. (26) requires  $\mathcal{N}(r^{\text{init}}) \simeq 25n$  operations if one keeps  $\sigma_e^2$  integrated in the scaling factor of  $\mathbf{S}$  operator and  $(D/r_0)^{5/6}$  inside  $\mathbf{K}$  [14].

Introducing Eq. (17) inside Eq. (26) leads to

$$r^{\text{init}} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \left(\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{w}}_{k-1}\right) - \mu_0 \widehat{\mathbf{u}}_{k-1} \quad (27)$$

For the linear splines  $m_i$  and  $h_i$  chosen here,  $\mathcal{N}(\mathbf{G}) \simeq \mathcal{N}(\mathbf{S})$ . In other words, for the first AO loop, when no estimation is available yet, both  $\mathbf{a}_{k-2}$  and  $\widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$  are null, and  $\mathcal{N}(r^{\text{init}}) \simeq \mathcal{N}(\mathbf{S}) + \mathcal{N}(\mathbf{K}) = 10n$ . For the second AO loop,  $\mathbf{a}_{k-2}$  is null but  $\widehat{\mathbf{w}}_{k-1} = \mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$  has already been computed in the prediction step (*cf.* below). So the computation of the first residual from Eq. (27) for the second loop requires  $18n$  operations. Then, for all the subsequent AO loops, both vectors  $\mathbf{a}_{k-2}$  and  $\widehat{\mathbf{w}}_{k-1}$  have been previously estimated, and thus the computation of the first residual requires  $\mathcal{N}(r^{\text{init}}) \simeq 23n$  operations.

Starting the iterative algorithm from the last final solution  $\widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$  may impact on the required number of iterations  $N_{\text{iter}}$  for convergence, and then on the total computation load of the method, which is  $(21 + 34 N_{\text{iter}})n$  operations per AO loop.

Finally, once the iterative process stopped, the wavefront estimate is obtained by applying

$$\widehat{\mathbf{w}}_k = (r_0/D)^{5/3} \mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_k, \quad (28)$$

so that the total number of operations involved by the first step is  $(27 + 34 N_{\text{iter}})n$  operations.

### C. Prediction step

Our closed-loop AO correction does not include any model for the temporal evolution, but uses *a priori* statistical moments which are introduced thanks to the temporal correlation  $\mathbf{\Gamma}$ . Although such priors appear in Eq. (22), we never tried to model them accurately. We consider instead a rough approximation, and assume that the wavefront is almost unchanged from one loop to another, thus replacing the temporal correlation  $\mathbf{\Gamma}$  by the identity matrix  $\mathbf{I}$ . Under this approximation, the prediction step vanishes and so, no floating point operation is involved.

### D. Fitting step

Last step is often called the fitting step as it consists in fitting in the best way the estimated wavefront  $\widehat{\mathbf{w}}_k$  with the DM shape. This is simply achieved applying the orthogonal projector  $\mathbf{F}$  defined in Eq. (20). In our case, as the sampling period of the wavefront and the actuator pitch are equal and as the interpolation function for the wavefront are linear splines as the influence function ones, then this step is reduced to apply a projection on the subspace of actuators locations.  $\mathbf{F}$  is just a mask, involving  $n_a$  operations to be applied.

## IV. NUMBER OF ITERATIONS AND TOTAL COMPUTATION LOAD

The combination of all the steps described in Sect. III leads to a total number of operations scaling as  $(28 + 34N_{\text{iter}})n$ . Obviously, this load depends on the number of iterations the algorithm either needs to converge or can afford constrained by the AO loop frequency. While the minimum burden is defined by the number of operations obtained if only one iteration is made, the maximum burden is just bounded by the theoretical limit of conjugate gradients method which is known to converge in at most  $n$  iterations, exception made of rounding errors.

This is why we investigate in the following the convergence of the estimation step in closed-loop, and how far we would remain from the optimal solution if the AO loop frequency imposes to stop the procedure before convergence.

First, from a well-balanced error budget, we define a procedure to simulate corresponding AO systems. Then, simulations are done of such systems and assuming the iterative estimation is stopped after a given number of iterations, we analyze the effect on the correction quality.

The need for such a study reveals that computation load and correction quality are strictly linked.

### A. Error budget

Introducing the true wavefront  $\mathbf{w}_{k-2}$  two stages before the command  $\mathbf{a}_k$  is applied, one can divide the criterion of Eq. (9) in two main error contributions :

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_k^2 \rangle &= \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| \mathbf{P}(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-2} + \mathbf{w}_{k-2} - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}_k) \right\|^2 \right\rangle \\ &\simeq \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}} + \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{corr}} \end{aligned} \quad (29)$$

where delay error

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| \mathbf{P}(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-2}) \right\|^2 \right\rangle \quad (30)$$

and correction error

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{corr}} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| \mathbf{P}(\mathbf{w}_{k-2} - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{a}_k) \right\|^2 \right\rangle \quad (31)$$

are assumed mainly uncorrelated.

Combining Eqs. (5), (16), (21) and (23), the correction error defined in Eq. (31) becomes

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{corr}} &= \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| \mathbf{P}(\mathbf{w}_{k-2} - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}) \right\|^2 \right\rangle \\ &= \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{ML}} + \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{M}} \end{aligned} \quad (32)$$

where the error orthogonal to  $\mathcal{M}$  space  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{ML}}$  and the error on the controllable space  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{M}}$  are respectively

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{ML}} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| \mathbf{P}(\mathbf{w}_{k-2}^{\text{ML}}) \right\|^2 \right\rangle \quad (33)$$

and

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{M}} = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \left\langle \left\| \mathbf{P}(\mathbf{m}^T \cdot (\mathbf{b}_{k-2} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1})) \right\|^2 \right\rangle. \quad (34)$$

Last expression (34) has been simplified thanks to the assumptions  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$  made in the past section.

The error budget can thus be summarized by

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle \simeq \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{ML}} + \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{M}} + \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}}. \quad (35)$$

The uncontrollable error of Eq. (33) is called the fitting error of the system and is given by the Nyquist frequency of the DM. The respective influence of the two other terms in Eq. (35) is illustrated by the closed-loop simulation results of Fig. 2. During the  $k$ -th loop, 15 iterates  $(\widehat{\mathbf{u}}_{k,l})_{1 \leq l \leq 15}$  are computed, from which we can evaluate successive mean-square estimation errors

$$\langle \epsilon_{k,l}^2 \rangle^{\text{M}} = \left\langle \left\| \mathbf{P}(\mathbf{m}^T \cdot (\mathbf{b}_{k-2} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{k,l})) \right\|^2 \right\rangle. \quad (36)$$

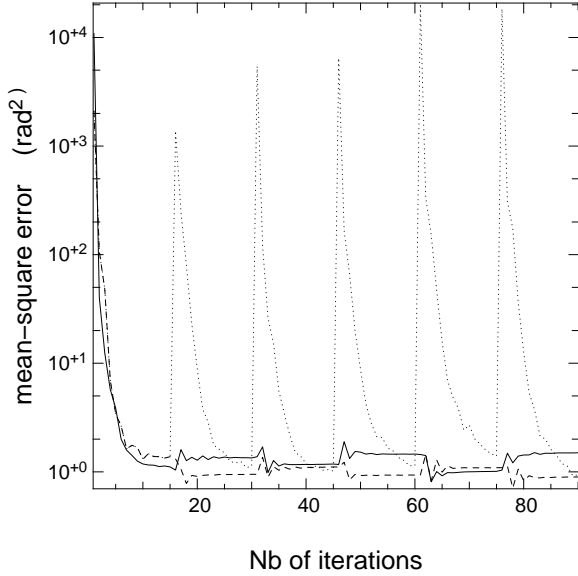


FIG. 2: Evolution of  $\langle \epsilon_{k,l}^2 \rangle^M$  along the PCG iterations in a closed-loop system with FrIM. Closed-loop frequency is fixed to 15 iterations of the PCG algorithm, and 6 successive loops are displayed. The number of degrees of freedom is  $n = 129 \times 129$ , with  $D/d = 128$  and  $r_0 = d$ . The measurement noise is a Gaussian white noise of standard deviation  $\sigma_e^2 = 1 \text{rad}^2/d$ . 3 different conditions turbulence evolution are simulated. *Solid curve*: observing a translating wavefront (shift of one tenth of the sub-aperture size per loop). *Dashed curve*: observing of a constant wavefront. *Dotted curve*: observing uncorrelated successive wavefronts.

The evolution of  $\langle \epsilon_{k,l}^2 \rangle^M$  along iterations, and for  $k = 1$  to  $k = 6$ , is plotted in Fig. 2, illustrating the convergence of the estimation procedure. By the way, the  $(k+1)$ -th loop starts with new measurements  $\mathbf{d}_k$ , and the initial estimate  $\hat{\mathbf{u}}_{k+1,0}$  for the iterative procedure is the final estimate of the previous loop  $\hat{\mathbf{u}}_{k,15}$ , so that the plotted  $\langle \epsilon_{k,0}^2 \rangle^M$  actually equals  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^M + \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}}$  at this particular instant. In Fig. 2, this is illustrated by the salient jumps every 15 iterations.

On the first hand, the significant jumps occurring every 15 iterations are due to the fact that a new wavefront  $\mathbf{w}_{k+1}$ , instead of  $\mathbf{w}_k$ , is used as the reference for the computation of the  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^M$ . Besides, the method does not converge toward the same value at every loop, even when the observed wavefront stays unchanged (dashed curve), at least because of the different noise realizations. Indeed, the level of the reconstruction error changes with both the wavefront and the noise samples. This is because the wavefront estimation is a random vector depending on two other random processes: the atmospheric turbulence and the measurement noise.

On the other hand, these three situations are characteristic of three different control strategies. First, the dashed curve can be considered as an optimal prediction. Since the observed wavefront is always the same, the temporal priors introduced by the simplification  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$  are perfect and then the various values to which  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^M$  is converging only reveal the change of noise realization with every new data set. On the contrary,

the dotted curve is characteristic of the worst temporal prediction. Estimated and observed wavefronts have nothing in common when the correction is applied. This is like starting the reconstruction from scratch at every new loop. Finally, the solid curve shows the more realistic situation of a translating turbulent layer. Here, the wavefront is shifted by one tenth of a subaperture for each step of the loop. Typically, for subapertures of dimension  $d = 30 \text{cm}$ , and for a closed-loop frequency of 500Hz (resp. 1kHz), this corresponds to a wind velocity of  $15 \text{m.s}^{-1}$  (resp.  $30 \text{m.s}^{-1}$ ). However, in this case, the temporal prediction is not optimal anymore.

In Fig. 2, the AO delay error contribution gradually decreases in the error budget of the simulation from the dotted case to the solid one and finally vanishes for the dashed curve. The number of iterations needed for convergence also decreases along with this delay contribution to the error. While some 10 iterations were needed for reconstruction from scratch [14], we see here that the optimal number of iterations does not only depends on the SNR, but also on the AO loop frequency. In order to study the total computation load, which means to determine the needs in number of iterations, we assume in the following that the error budget should be well-balanced. In other words, we should simulate AO systems for which

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}} \simeq \langle \epsilon_k^2 \rangle^M \quad (37)$$

where  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^M$  is the theoretical reconstruction error at convergence. In order to simulate such well-balanced systems, we analyse these two errors in the next paragraphs.

## B. Reconstruction error

The reconstruction error in Eq. (15) is approximated in our computations by

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^M \simeq \frac{1}{n_a} \text{tr} \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{P}^T \rangle \quad (38)$$

with again  $\mathbf{x} = \mathbf{b}_k - \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1}$ . Indeed, as the influence functions  $m_i$  are linear splines, the 2D integration of Hilbert norm in the computation of the error in Eq. (15) becomes a double trapezoidal rule for integration. For the large systems under study here, *i.e.* for  $n_a$  scaling as  $10^4 - 10^6$ , this computation is approximated using a double rectangular rule for the integration over the pupil area. This means that we can define the piston vector  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_a}$  with all components equal to 1, and

$$(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{x} | \mathbf{p}) \simeq \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{p} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_a}. \quad (39)$$

Hence, the approximation leading to Eq. (38), which is always used further. The operator  $\mathbf{P}$  becomes a matrix, of rank  $n_a$ , which is just the restriction of the previous operator  $\mathbf{P}$  (cf. Eq. (8)) to the chosen linear splines DM representation.

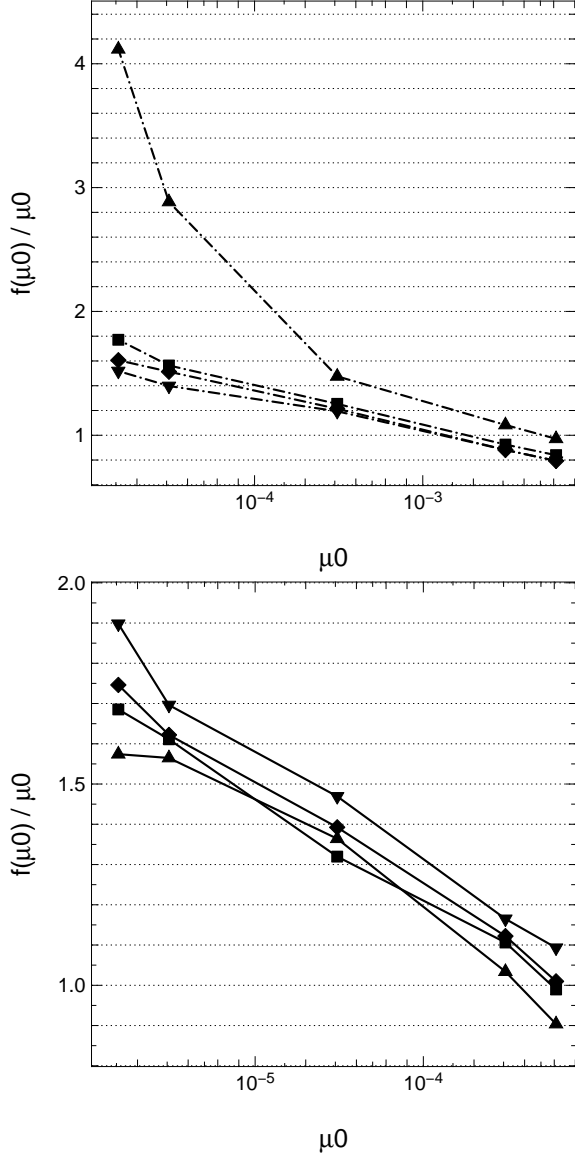


FIG. 3:  $f(\mu_0)/\mu_0 = \langle \epsilon_k^2 \rangle^M / \sigma_e^2$  vs  $\mu_0$ . *Upper*: a VLT-like system, with  $D/L_0 = 1/3$  and several values for the number of sub-apertures across the diameter  $D/d$ : 16 (triangles), 32 (squares), 40 (diamonds), and 64 (upside down triangles).  $\mu_0$  values for markers are:  $6.2 \times 10^{-3}$ ,  $3.1 \times 10^{-3}$ ,  $3.1 \times 10^{-4}$ ,  $3.1 \times 10^{-5}$  and  $1.55 \times 10^{-5}$ . *Lower*: an E-ELT-like system, with  $D/L_0 = 2$  and several  $D/d$ : 64 (upside down triangles), 84 (diamonds), 128 (squares), and 256 (triangles).  $\mu_0$  values for markers are:  $6.15 \times 10^{-4}$ ,  $3.076 \times 10^{-4}$ ,  $3.076 \times 10^{-5}$ ,  $3.076 \times 10^{-6}$  and  $1.54 \times 10^{-6}$ .

The reconstruction error can finally be developed to write

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_k^2 \rangle^M &= \frac{\sigma_e^2}{n_a} \text{tr} \left[ \mathbf{P} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} + \mu_0 \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \right] \\ \frac{\langle \epsilon_k^2 \rangle^M}{(D/r_0)^{5/3}} &= f(\mu_0) \end{aligned} \quad (40)$$

where  $f$  is just a function of  $\mu_0$  [1] when  $D/L_0$  and  $D/d$

are given. Figure 3 illustrates this dependency observing von Kármán turbulent wavefronts, for a VLT-like system (upper) and an ELT-like system (lower). This provides us with experimental laws for the reconstruction error depending on the system dimensions and the SNR, via iso- $\mu_0$  curves.

In order to simulate a well-balanced AO system, *i.e.* with Eq. (37) satisfied, we need to find an equivalent law for the delay error.

### C. Delay error

For given system dimension,  $\mu_0$ ,  $D/L_0$  and  $(D/r_0)^{5/3}$ , we need to build successive wavefronts with the statistical property

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}} \simeq \langle \epsilon_k^2 \rangle^M = (D/r_0)^{5/3} f(\mu_0). \quad (41)$$

A first possibility to simulate a running AO system producing a particular value for the delay error, was to consider Taylor's frozen flow hypothesis applied to a unique thin turbulent layer, under translation at a wind speed  $v$ . In the Hilbert space  $C^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , modeling a single layer under uniform translation, if  $w$  represents a realization of the continuous turbulent phase on this layer, we denote the current differential phase

$$\delta w(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau)$$

with  $\mathbf{v}\tau$ , the translation vector and  $\tau$  the AO correction delay, *i.e.* 2 frames. The structure function of a turbulent wavefront can be factorized as

$$\langle (w(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r}'))^2 \rangle = (D/r_0)^{5/3} \mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \quad (42)$$

for Kolmogorov or von Kármán statistics, so that  $\mathcal{D}_w$  does not depend anymore on  $r_0$ , nor on  $D/r_0$ . Furthermore,  $\delta w$  can also be characterized by a factorized structure function, which is

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\delta w}(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) &= 2 \mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) + 2 \mathcal{D}_w(\|\mathbf{v}\tau\|) \\ &\quad - \mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{v}\tau\|) - \mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau\|). \end{aligned} \quad (43)$$

However, for any random process  $x$  defined over the pupil  $\mathcal{A}$ , characterized by a structure function  $\mathcal{D}_x$ , one can demonstrate that [15]

$$a_x = \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \langle \|\mathbf{P} \cdot x\|^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}') \mathcal{D}_x(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (44)$$

This expression was previously used by Wallner [4, 15] for Kolmogorov structure function. For Kolmogorov statistics (normalized as in Eq. (42)),  $a_w = 1.0314$  [12, 15], but for von Kármán statistics,  $a_w$  also depends on  $D/L_0$ .

Back to delay error, we have

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}} &= \frac{1}{S_{\mathcal{A}}} \langle \|\mathbf{P} \cdot \delta w\|^2 \rangle \\ &= \frac{(D/r_0)^{5/3}}{2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}') \mathcal{D}_{\delta w}(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (45)$$

Combining Eq. (43), (44) and (45), the relation between the error level  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}}$  and the shift rate  $\|\tau\mathbf{v}\|/D$  is

$$\frac{\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}}}{(D/r_0)^{5/3}} = \mathcal{D}_w(\|\tau\mathbf{v}\|) + 2a_w - 2 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}')\mathcal{D}_w(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \tau\mathbf{v}\|)^{5/3} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (46)$$

Numerical integration of the right hand side yields the reconstruction error level  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}}/(D/r_0)^{5/3}$  for any shift rate  $\|\tau\mathbf{v}\|/D$  and outer scale ratio  $D/L_0$ .

We could therefore simulate a very large turbulent wavefront of given statistics,  $D/L_0$ , and extract from this large layer successive samples shifted by  $\tau\mathbf{v}/D$ , producing the expected error level to satisfy Eq. (37).

Although easy to put in practice, such a method usually leads to wavefront displacements of a fraction of the sampling period  $d$ , sometimes down to  $d/100$ . It implies then to interpolate the wavefront phase between the original samples. We have not yet found a satisfying interpolation method for turbulent wavefront, since the smoothing effect of most famous basis of interpolating functions, such as bilinear splines or cubic splines, is too strong. As a consequence, the variance of phase perturbations over the pupil is not maintained constant along the translation steps. It has the correct value when the translated wavefront coincides with the generated samples, but then it decreases until translated values are just at equal distance from two original samples. In the same way, the supposed variance of the differential phase  $\delta w$  also decreases in practice when the wavefronts are interpolated between original samples. Even if the variance fluctuations induced by the interpolation method only were of a few percents, we decided to find another method to avoid this systematic effect.

The second approach models the temporal evolution of the wavefront thanks to a kind of boiling instead of a Taylor translation. In practice, we build new wavefronts  $w_k$  from a linear combination of the previous one  $w_{k-1}$  and a new turbulent layer  $w_{\text{new},k}$

$$w_k = \alpha_1 w_{k-1} + \alpha_2 w_{\text{new},k}$$

where  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are scalar coefficients and  $w_{\text{new},k}$  is uncorrelated to  $w_{k-1}$  for all  $k$ . For

$$\delta w = w_k - w_{k-2}, \quad (47)$$

$\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are constrained thanks to 2 assumptions. First,  $w_k$ ,  $w_{k-1}$  and  $w_{\text{new},k}$  must follow the same statistics, that is to be Gaussian process with the same normalized structure function  $\mathcal{D}_w$ . Next, the variance of the differential phase  $\delta w$  is given, equal to the desired  $\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}}$ . The first assumption implies

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \left\langle \left( \alpha_1 w_{k-1}(\mathbf{r}) + \alpha_2 w_{\text{new},k}(\mathbf{r}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha_1 w_{k-1}(\mathbf{r}') - \alpha_2 w_{\text{new},k}(\mathbf{r}') \right)^2 \right\rangle \\ &= \alpha_1^2 \mathcal{D}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \alpha_2^2 \mathcal{D}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

hence

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1. \quad (48)$$

The second constraint means that

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\delta w}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \left( \frac{r_0}{D} \right)^{5/3} \left\langle (w_k(\mathbf{r}) - w_{k-2}(\mathbf{r}) - w_k(\mathbf{r}') + w_{k-2}(\mathbf{r}'))^2 \right\rangle \\ &= \left( (\alpha_1^2 - 1)^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \right) \mathcal{D}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= 2\alpha_2^2 \mathcal{D}_w(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (49)$$

Last equality is obtained thanks to the constraint of Eq. (48). From the definition of Eq. (44),

$$\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}} = 2\alpha_2^2 a_w (D/r_0)^{5/3}, \quad (50)$$

so that

$$\alpha_1 = \sqrt{1 - \alpha_2^2} \quad (51)$$

and

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}}}{2a_w (D/r_0)^{5/3}}} = \sqrt{\frac{f(\mu_0)}{2a_w}}. \quad (52)$$

Thanks to these coefficients  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ , we can run well-balanced AO simulations.

#### D. Simulations results

The results of Sections IV B and IV C provide the means to simulate *a priori* well-balanced AO systems, for given system size, ratio  $D/L_0$  and SNR. The impact, on the error budget, of the allowed number of iterations is analysed thanks to such simulations. If the estimation convergence is achieved and if the correlation between terms in Eq. (35) can be neglected, the balance of Eq. (37) should be satisfied. Otherwise, the reconstruction error may be larger than expected

$$\frac{\langle \epsilon_k^2 \rangle^M}{(D/r_0)^{5/3}} \geq f(\mu_0) \simeq \frac{\langle \epsilon_k^2 \rangle^{\text{delay}}}{(D/r_0)^{5/3}}.$$

As a consequence, the total error budget is bounded, with

$$\rho = \frac{\langle \epsilon_k^2 \rangle}{2(D/r_0)^{5/3} f(\mu_0)} \geq 1$$

The results of the simulations are plotted in Fig. 4, thanks to the ratio  $\rho$ . The equilibrium condition in Eq. (37) is satisfied when this value is close to 1, or even smaller. The large range of simulated  $d/r_0$  and  $\sigma_e^2$  values allows to really explore a wide range of possible signal-to-noise ratios. The simulations conditions are aimed at illustrating possible cases for an Extremely Large Telescope, in order to demonstrate that FrIM closed-loop algorithm is well-adapted to large AO systems.

On the upper part of Fig. 4, the markers shape depends on the number of iterations allowed for FrIM computation, for a

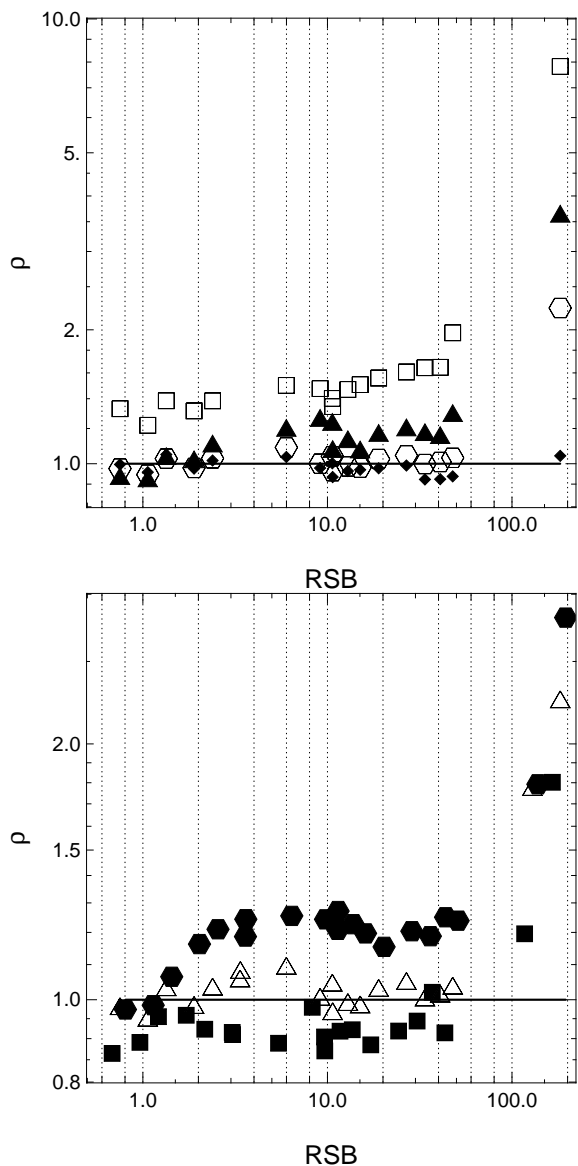


FIG. 4: Ratio  $\rho$  in Eq. (IV D) as a function of SNR. Simulations conditions corresponds to a SCAO system on an 42-meter telescope, with  $D/L_0 = 2$  with a central obstruction of  $0.28D$ . Each marker is the averaged MSE over 100 simulations of 100-loop runs, for each possible combination:  $r_0 = 0.1d, 0.5d, d, 2d$  and  $\sigma_e^2 = 5 \times 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$  and  $2 \text{ rad}^2$  per sub-aperture. *Upper*: fixed  $D/d = 128$  but varying number of iterations:  $N_{\text{iter}} = 1$  (squares), 2 (crosses), 3 (triangles) and 4 (hexagons). *Lower*: fixed  $N_{\text{iter}} = 1$  but varying number of sub-apertures across the diameter  $D/d = 64$  (squares), 84 (crosses), 128 (triangles) and 256 (hexagons).

constant system dimension. One can observe on the upper part of fig:wellbalancedCL that for the major part of the covered range for the SNR, three iterations are enough to maintain a well-balanced AO system. A restriction to one iteration per AO loop would usually lead to an global AO correction error multiplied by  $\sim 1.5$ .

Now regarding the dependency of this performance on the subaperture sampling  $D/d$ , the bottom of Fig. 4 illustrates the case when 3 iterations are allowed. We obtain again the satisfied condition of  $\rho \sim 1$  for  $D/d_l = 128$ . The convergence is accelerated for larger samplings  $d_l/D$ . This shows that the reconstruction convergence depends on the system dimension, what had not clearly been observed so far in wavefront reconstruction with FrIM.

## V. CONCLUSION

This paper brings a new approach for the control architecture, based on an Internal Model Control. This allows to optimize a criterion in the turbulent wavefront space of parameters, instead of simply trying to cancel measurements as was the aim of the classical integrators on AO systems.

This control law can easily be decomposed into three steps: reconstruction, prediction and fitting. For the widely spread case of a Shack-Hartmann model with a bilinear DM, we have demonstrated the low computational load of this method using FrIM algorithm:  $(27 + 34 N_{\text{iter}})n$  operations, with  $N_{\text{iter}}$  the number of iterations.

Finally, simulations of well-balanced AO systems lead to the conclusion that for the major range of signal-to-noise ratio on large AO systems, only three iterations are sufficient to maintain the equilibrium on the error budget. As a consequence, the command can be computed in  $130n$  operations.

- [1] Béchet, C., Tallon, M., & Thiébaud, É. submitted to ..., “Mean-Square Error of Maximum A Posteriori wavefront reconstruction step for large Adaptive Optics systems: algebraic analysis and application to the FRactal Iterative Method”, in [1]  
 [2] Ellerbroek, B. 1994, “First-Order Performance Evaluation of

- Adaptive Optics Systems for Atmospheric-Turbulence Compensation in Extended Field-of-View Astronomical Telescopes”, J. Opt. Soc. Am. A, 11, 783  
 [3] Fried, D. L. 1977, “Least-squares fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements”, J. Opt.

- Soc. Am., 67, 370
- [4] Gavel, D. & Wiberg, D. 2003, in (Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, Bellingham, WA), 890–901
- [5] Gavel, D. T. 2001, in *Beyond Conventional Adaptive Optics*, ed. R. Ragazzoni, N. Hubin, & S. Esposito, Conference (ESO, Garching, Germany)
- [6] Gendron, E. & Léna, P. 1994, “Astronomical adaptive optics. I. Modal control optimization”, *Astron. Astrophys.*, 291, 337
- [7] Gilles, L. 2005, “Closed-loop stability and performance analysis of least-squares and minimum-variance control algorithms for multiconjugate adaptive optics”, *Applied Optics*, 44, 993
- [8] Gilles, L., Vogel, C. R., & Ellerbroek, B. L. 2002, “Multi-grid preconditioned conjugate-gradient method for large-scale wave-front reconstruction”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 19, 1817
- [9] Kulcsar, C., Raynaud, H.-F., Petit, C., Conan, J.-M., & Viaris de Lesegno, P. 2006, “Optimal control, observers and integrators in adaptive optics”, *Optics Express*, 14
- [10] Le Roux, B., Conan, J.-M., Kulcsar, C., et al. 2004, “Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 21, 1261
- [11] Morari, M. & Zafriou, E. 1989, *Robust Process Control*, ed. N. J. Englewood Cliffs (Prentice Hall)
- [12] Noll, R. J. 1976, in *SPIE Conference*, Vol. 75, *Imaging through the atmosphere*, 39–42
- [13] Poyneer, L., Gavel, D., & Brase, J. 2002, “Fast Wave-front Reconstruction in Large Adaptive Optics Systems with Use of the Fourier Transform”, in [13], 2100–2111, 2100
- [14] Thiébaud, E. & Tallon, M. 2008, “Fast minimum variance wave-front reconstruction for extremely large telescopes”, submitted to *J. Opt. Soc. Am. A*
- [15] Wallner, E. P. 1983, “Optimal wave-front correction using slope measurements”, *J. Opt. Soc. Am.*, 73, 1771
- [16] Wiberg, D. M., Max, C. E., & Gavel, D. T. 2005, “Geometric view of adaptive optics control”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 22, 870
- [17] Yang, Q., Vogel, C. R., & L., E. B. 2006, “Fourier Domain preconditioned conjugate gradient algorithm for atmospheric tomography”, *Applied Optics*, 45, 5281

## 10.5 Les résultats et les conclusions

Le budget total de l'erreur de correction dans les simulations est borné

$$\rho = \frac{\langle \epsilon_k^2 \rangle}{2(D/r_0)^{5/3} f(\mu_0)} \geq 1 \quad (10.26)$$

en supposant que l'erreur de retard et l'erreur de reconstruction sont peu corrélées.

Les résultats des simulations sont représentés sur la figure 10.1, grâce au rapport  $\rho$ . Sur les deux premiers graphiques d'en haut, l'axe des abscisses est gradué en  $\mu_0$ , tandis que sur les deux suivants, il est gradué en RSB. Les résultats représentés sont toutefois les mêmes. La condition d'équilibre des erreurs de retard et de reconstruction est satisfaite lorsque  $\rho$  est inférieur à 1. On remarque sur les graphiques de gauche que cette condition est vérifiée plus ou moins sur toute la gamme de RSB à partir de 3 itérations. Contraindre l'algorithme à ne faire qu'une itération entraîne des valeurs de  $\rho$  de l'ordre de 1.5, ce qui signifie que l'erreur de reconstruction est approximativement le double de sa valeur à la convergence. Les graphiques de droite montre l'évolution de la condition d'équilibre,  $\rho \leq 1$ , lorsque le rapport  $D/d_l$  varie. On note que l'équilibre est atteint avec trois itérations pour  $D/d_l = 128$  (comme sur les graphiques de gauche), mais il faudrait alors davantage d'itérations sur un système deux fois plus grand.

En conclusion, on voit que pour un système  $D/d_l = 128$  sur un télescope de 42m, l'algorithme converge en trois itérations à peu près pour n'importe quel RSB susceptible de concerner une OAmC ou OAX. En revanche, la convergence en boucle fermée dépend fortement de la taille du système, ce qui n'était pas apparu de façon claire en reconstruction de surface d'onde.

L'optique adaptative de première lumière de l'E-ELT (OAmC) est prévue avec un dimensionnement  $D/d_l = 84$ . La méthode itérative de reconstruction FrIM MAP requiert, pour ces dimensions, trois itérations pour assurer la convergence sur un système d'OA équilibré. Ceci correspond à  $130 \times n$  opérations pour calculer la commande.





## Quatrième partie

# Validation de l'algorithme sur le simulateur Octopus



# Introduction

Cette dernière partie présente les résultats actuels des tests de validation menés sur Octopus, le simulateur d'optique adaptative (OA) complet de l'European Southern Observatory (ESO, Munich) dédié aux études d'optiques adaptatives à grands nombre de paramètres.

La méthode testée est le fruit des deux parties précédentes de ce manuscrit, elle est notée FrIM CMI par la suite. Je rappelle qu'elle consiste en une loi de commande par modèle interne (CMI) avec une reconstruction utilisant l'algorithme FrIM MAP et une projection orthogonale sur le miroir déformable (MD). Comme au chapitre précédent, la prédiction est remplacée par l'hypothèse d'une turbulence fixe.

Dans un premier chapitre, je présente le simulateur complet utilisé et ses particularités par rapport aux simulations simplifiées que j'ai menées jusqu'ici. Ceci donne lieu à une analyse des erreurs de modélisation et à des tests de reconstructions simples.

Ensuite, une fois que l'interfaçage entre Octopus et le code de FrIM CMI a été validé, la boucle fermée d'optique adaptative est simulée. La méthode FrIM CMI est alors comparée à deux autres commandes de type intégrateur, afin d'étudier leur comportement dans des conditions de fonctionnement diverses.



# Chapitre 11

## Le premier contact avec Octopus

L'acronyme Octopus signifie *Optimized Cluster Tool for adaptive Optics Parallel Unlimited Simulations*. C'est un simulateur complet développé à l'origine dans le cadre des études de concept et de dimensionnement d'optique adaptative pour le projet de télescope de 100 mètres de diamètre OWL (*Overwhelmingly Large telescope*) (Le Louarn et al., 2004). Suite à la révision du dimensionnement de ce télescope, les efforts européens sont désormais concentrés sur la construction de l'E-ELT, qui est prévu d'un diamètre de 42 mètres. Octopus sert donc pour les études d'optique adaptative de l'E-ELT. Parmi les simulateurs d'OA existant de par le monde, c'est le seul qui ait été particulièrement conçu pour les systèmes à grands nombre de degrés de liberté. Il est donc également très utile pour les études de systèmes d'optique adaptative de seconde génération pour le Very Large Telescope au Chili, c'est-à-dire d'optique adaptative extrême (OAX) sur un télescope de 8m.

### 11.1 La présentation d'Octopus

Octopus est un simulateur numérique par opposition à Cibola et Paola, développés respectivement par B. Ellerbroek<sup>1</sup> et L. Jolissaint<sup>2</sup>, qui sont analytiques. La simulation numérique facilite l'analyse conjointe d'un grand nombre de paramètres de simulation.

Octopus modélise

- des couches optiquement turbulentes dans l'atmosphère sous forme d'écrans de phase
- la dynamique de la turbulence par l'approximation de Taylor de la turbulence gelée
- la propagation de l'onde dans une direction de visée à travers les couches turbulentes (écrans de phase), soit par une propagation géométrique, soit par une propagation de Fresnel
- les mesures obtenues par les analyseurs de surface d'onde (ASO), soit de type Shack-Hartmann, soit de type pyramide
- la correction des miroirs à partir de la commande appliquée aux actionneurs et d'un modèle de fonctions d'influence, soit splines linéaires, soit gaussiennes tronquées, à deux dimensions.

Le corps d'Octopus est un ensemble d'ordinateurs de bureau, actuellement au

---

<sup>1</sup><http://cfao.ucolick.org/software/cibola.php>

<sup>2</sup><http://cfao.ucolick.org/software/paola.php>

nombre de 76 et regroupés sur un réseau rapide. Parmi eux se trouve une machine *maître* et les autres sont désignés comme des *esclaves*. Le code de simulation implémenté dans Octopus (en C et en C++) permet d'effectuer un grand nombre de calculs en parallèle. Les choix faits pour optimiser Octopus ont été détaillés par Le Louarn et al. (2004). La philosophie générale est de minimiser les appels et le stockage en mémoire, de paralléliser le plus possible les tâches, ceci tout en limitant les transferts de données entre les machines.

### 11.1.1 Les modèles utilisés par Octopus

Octopus modélise les couches turbulentes à partir de la méthode Fourier, présentée dans la section 7.1, mais en considérant le modèle de turbulence de von Kármán. C'est l'algorithme de McGlamery (1976) qui est employé. Afin que les bas ordres de la turbulence soient correctement modélisés, il est nécessaire de simuler des écrans de phase beaucoup plus larges que la surface d'onde à analyser. Octopus peut simuler plusieurs écrans de phase échantillonnés sur plus de  $8192 \times 8192$  points.

L'atmosphère au-dessus du télescope est représentée par un nombre fini de couches, 10 dans les tests que je présente ci-après. La propagation de l'onde à travers les couches dans une direction de visée peut être modélisée géométriquement ou par la propagation de Fresnel. Cette dernière entraînant de multiples transformées de Fourier, les tests présentés ont été réalisés avec le modèle géométrique afin de limiter les coûts calculatoires. Le modèle géométrique a comme principal défaut de négliger les effets de la scintillation, ce qui a un impact moindre sur un système de type optique adaptative extrême (OAX) (Fusco et al., 2006b).

Une fois que la surface d'onde dans le plan pupille est déterminée pour une direction d'analyse donnée, il faut modéliser le processus de mesure. Octopus peut simuler un analyseur de Shack-Hartmann ou un de type pyramide (Le Louarn et al., 2005). Comme dans les parties précédentes de ce manuscrit, c'est l'analyseur de Shack-Hartmann qui est utilisé pour les tests présentés dans la suite. Le modèle d'analyseur de Shack-Hartmann implémenté dans Octopus repose sur la propagation de l'onde d'après la théorie de la diffraction. La surface d'onde au niveau de la pupille est découpée en autant de portions qu'il y a des sous-pupilles. Chaque portion d'onde produit, par transformée de Fourier, une tache image dans le plan du détecteur (*cf.* figure 2.5). Derrière chaque sous-pupille, le détecteur est composé de plusieurs pixels. Les photons incidents sont simulés par Octopus à partir d'un paramètre de configuration qui précise le nombre moyen de photons incidents sur une sous-pupille. Ceci permet de s'affranchir des paramètres liés à cette quantité, que sont la magnitude de l'étoile, la transmission du système et le temps de pose. Octopus simule le bruit de photons sur le détecteur, à partir de la statistique de Poisson de cette perturbation. Comme sur une optique adaptative réelle, un algorithme de centrage est implémenté dans Octopus, afin de déterminer le déplacement de chaque tache image par rapport à sa position de référence. L'algorithme implémenté dans le simulateur repose sur un calcul d'inter-corrélations sans seuillage (Thomas et al., 2006). Ces déplacements sont convertis en mètres par taille de sous-pupille et sont fournis en tant que mesure de pentes locales par Octopus.

Par ailleurs, Octopus simule la correction par un miroir déformable. Il existe deux types de fonctions d'influence à 2 dimensions qu'Octopus puisse simuler ; des splines linéaires et des gaussiennes tronquées, pour lesquelles le couplage inter-actionneur est de l'ordre de 15%. Les fonctions d'influence gaussiennes sont plus proches de la réponse

d'un miroir piezo-électrique mais une commande uniforme sur tous les actionneurs ne produit pas une surface plane, *i.e.* un piston. À l'opposé, les splines linéaires reproduisent le piston lorsqu'une commande uniforme est envoyée, mais la dérivée première de la déformée du miroir n'est pas définie là où se trouvent les actionneurs. Ceci peut engendrer des artefacts dans l'évaluation numérique des performances du système.

Enfin, Octopus simule l'asservissement du système d'optique adaptative. La dynamique de l'atmosphère étant modélisée par l'hypothèse de Taylor de turbulence gelée, les écrans de phase sont déplacés à des vitesses de vent différentes suivant l'altitude, entre chaque prise de mesures. De plus, Octopus applique la commande au miroir avec un certain retard de boucle à paramétrer. Ainsi, la surface d'onde résiduelle est calculée en tenant compte de cette dynamique et de la correction. En boucle fermée, l'analyseur simulé par Octopus fournit les mesures de pentes de la surface d'onde résiduelle.

### 11.1.2 Les configurations testées

La démarche suivie au cours de ces tests de validation consiste à complexifier les configurations d'optique adaptative testées à mesure que les performances ont pu être analysées et interprétées. Ceci permet d'élucider les problèmes d'interfaçage des deux codes, Octopus et le code incluant la méthode FrIM CMI.

Tout d'abord, un système de taille raisonnable a été simulé, avec un seul analyseur et un seul miroir déformable observant une étoile de référence naturelle. Avec 40 sous-pupilles le long du diamètre de 8m du miroir primaire, ceci correspond à une optique adaptative extrême (OAX). Les deux premières configurations VLT<sub>1</sub> et VLT<sub>2</sub> sont détaillées dans la table 11.1. Les différences entre ces deux tests sont la présence de l'obstruction centrale dans la configuration VLT<sub>2</sub> et la réduction du champ de vue des sous-pupilles sur le ciel, afin d'obtenir un meilleur échantillonnage et donc limiter les non-linéarités de l'analyseur.

Par la suite, c'est un système d'optique adaptative de première lumière pour l'E-ELT qui a été simulé. Il comprend un analyseur et un miroir déformable, avec 84 sous-pupilles le long du diamètre du miroir primaire. Les deux dernières colonnes du tableau 11.1 détaillent les paramètres de cette configuration. Cette fois encore, ces tests se distinguent par la prise en compte ou non de l'obstruction centrale du télescope. Tous les autres paramètres restent identiques.

Pour toutes ces configurations, en boucle fermée, le retard global de la boucle est de 2 trames. Cela signifie que le chronogramme est identique à celui présenté sur la figure 9.2.

### 11.1.3 L'interfaçage et la procédure de simulation

Afin de faire communiquer le modèle du système, *i.e.* Octopus, avec le correcteur FrIM CMI, une interface a été bâtie sous forme d'échanges de fichiers.

Pour une configuration donnée, Octopus génère 2 fichiers de texte, comprenant les coordonnées des sous-pupilles des analyseurs et des actionneurs des miroirs. Les premières lignes de ces fichiers, `subapertures.txt` et `actuators.txt`, sont transcrites sur la figure 11.1. Les coordonnées sont indiquées en mètres. Les deux premières colonnes de chaque fichier indiquent les positions  $(x, y)$  du coin en bas à gauche des sous-pupilles actives ou des actionneurs. La dernière colonne identifie l'analyseur ou le miroir auquel les coordonnées de la ligne sont associées. Au cours des simulations, l'échange des fichiers de mesure (respectivement de commandes) se fait par le biais de fichiers



Configuration	VLT <sub>1</sub>	VLT <sub>2</sub>	E-ELT <sub>1</sub>	E-ELT <sub>2</sub>
$D$ (m)	8	8	42	42
type d'OA	OAX	OAX	OAmC	OAmC
nb d'ASO	1	1	1	1
nb de MD	1	1	1	1
$D/d_l$	40	40	84	
obstruction centrale	non	0.15 <i>D</i>	non	0.28 <i>D</i>
$r_0$ (cm) à $\lambda = 0.5\mu\text{m}$	15.9	15.9	13	13
$\lambda_{OA}$ (nm)	589	589	700	700
$\lambda_I$ ( $\mu\text{m}$ )	2.2	2.2	2.2	2.2
$a$	1.067 10 <sup>7</sup>	1.067 10 <sup>7</sup>	8.976 10 <sup>6</sup>	8.976 10 <sup>6</sup>
$\tau$ (ms)	-	2	-	2
$\tau_0(500\text{nm})$ (ms)	3	3	3	3
$(d_l/r_0)^{5/3}$	1.056	1.056	4.817	4.817
$N_{CCD}^2$	8 <sup>2</sup>	8 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>	6 <sup>2</sup>
bruit de lecture	non	non	non	non
$d_l/d_e$	10	10	16	16
FoV ("/ss-pup.)	4.86	2.4	2.4	2.4
$N_{\text{ph}}$	1000	1000	1000	1000

TAB. 11.1 – Paramètres des configurations testées sur Octopus.

subapertures.txt			actuators.txt		
-4.000000e + 00	-6.000000e - 01	0	-4.000000e + 00	-1.000000e + 00	0
-4.000000e + 00	-4.000000e - 01	0	-4.000000e + 00	-8.000000e - 01	0
-4.000000e + 00	-2.000000e - 01	0	-4.000000e + 00	-6.000000e - 01	0
-4.000000e + 00	0.000000e + 00	0	-4.000000e + 00	-4.000000e - 01	0
-4.000000e + 00	2.000000e - 01	0	-4.000000e + 00	-2.000000e - 01	0
-4.000000e + 00	4.000000e - 01	0	-4.000000e + 00	0.000000e + 00	0
-3.800000e + 00	-1.400000e + 00	0	-4.000000e + 00	2.000000e - 01	0
-3.800000e + 00	-1.200000e + 00	0	-4.000000e + 00	4.000000e - 01	0
-3.800000e + 00	-1.000000e + 00	0	-4.000000e + 00	6.000000e - 01	0
-3.800000e + 00	-8.000000e - 01	0	-4.000000e + 00	8.000000e - 01	0
-3.800000e + 00	-6.000000e - 01	0	-4.000000e + 00	1.000000e + 00	0
-3.800000e + 00	-4.000000e - 01	0	-3.800000e + 00	-1.600000e + 00	0
....	....	....	....	....	....

FIG. 11.1 – Exemples de fichiers de textes pour les coordonnées des sous-pupilles et des actionneurs. Les sous-pupilles sont repérées par les coordonnées du coin en bas à gauche de la sous-pupille. Pour les deux fichiers : la première colonne donne la coordonnée sur l'axe des  $x$ . La deuxième donne la coordonnée sur l'axe des  $y$ . La troisième colonne identifie le numéro d'analyseur ou le numéro du miroir associés.

de nombres flottants contenant autant de valeurs qu'il y a de lignes dans le fichier `subapertures.txt` (respectivement `actuators.txt`). La première valeur correspond à la sous-pupille dont les coordonnées sont sur la première ligne de `subapertures.txt`. La deuxième valeur de mesure à la sous-pupille identifiée par la deuxième ligne, et ainsi de suite. Il en va de même pour les actionneurs.

À partir de ces fichiers, le code de FrIM CMI génère des masques de pupille, de mesures, et d'actionneurs. Un certain nombre de paramètres de configuration sont fixés dans un fichier de texte annexe. Il contient notamment la longueur d'onde d'analyse  $\lambda_{AO}$ , une estimation de  $L_0$  et de  $r_0$ , le nombre de trames de retard (supposé entier) du système, éventuellement un nombre limite d'itérations autorisées pour les algorithmes de gradients conjugués préconditionnés intervenant dans le correcteur. Ce fichier peut aussi préciser le type de modèle d'analyseur qui doit être utilisé pour la reconstruction, *i.e.* le modèle  $SH3 \times 3$  ou celui de Fried (*cf.* section 8.3.2).

L'algorithme FrIM MAP pour la phase d'estimation décrite dans le chapitre 9 requiert également une estimation du niveau d'incertitude des mesures  $\sigma_e^2$ . Actuellement, l'algorithme de centrage d'Octopus ne fournit pas cette valeur. Il faut alors inclure une phase supplémentaire à la configuration du système. Pour cela, Octopus fournit une surface d'onde incidente au niveau de la pupille et le jeu de mesures bruitées associées. L'erreur de mesure  $\sigma_e^2$  (*cf.* équation de mesure (4.2)) est alors calculée comme la variance de l'écart entre les mesures d'octopus et celles obtenues par le modèle d'analyseur à utiliser pour la reconstruction.

Je précise aussi que les systèmes d'optique adaptative simulés ne fonctionnent pas en temps réel. Les calculs de déplacement d'écrans de phase, de propagation géométrique et la simulation des mesures prennent un temps supérieur à la période d'échantillonnage d'un système réel (quelques millisecondes). Avec les configurations d'E-ELT sur Octopus, le temps nécessaire à faire avancer le système d'une boucle se compte en secondes. Ceci explique que l'algorithme FrIM MAP n'est pas contraint non plus à respecter la fréquence de la boucle réelle. Les contraintes sur la méthode itérative sont donc représentées par le nombre d'itérations autorisé pour les gradients conjugués préconditionnés.

#### 11.1.4 Les outils pour l'analyse des performances

Les performances de la méthode sont quantifiées à partir du rapport de Strehl à  $2.2\mu\text{m}$ . Un rapport de Strehl courte pose est déterminé à chaque boucle et un rapport de Strehl longue pose est ajusté avec le temps. La FEP longue pose du système corrigé est estimée au fur et à mesure.

L'analyse de la méthode de commande dérivée au chapitre 9 entre dans le cadre de l'étude européenne de dimensionnement de l'ELT (*ELT Design Study*), qui a commencé en 2005 et termine à la fin de l'année 2008. Le groupe de travail *Algorithmes de reconstruction et de commande pour l'optique adaptative* a progressivement retenu deux algorithmes rapides pour les systèmes à grand nombre de degrés de liberté. L'un est issu du travail présenté dans ce manuscrit, FrIM CMI. L'autre est issu du travail initié par Correia, à l'ESO (Munich), et poursuivi par Montilla, à l'IAC (Canaries). Ce second correcteur repose sur un reconstruteur par transformée de Fourier comme présenté à la section 6.1, avec un intégrateur scalaire. Je la désigne dans la suite par l'acronyme FTR-I, pour *Fourier Transform Reconstructor* avec intégrateur. La méthode FTR-I,

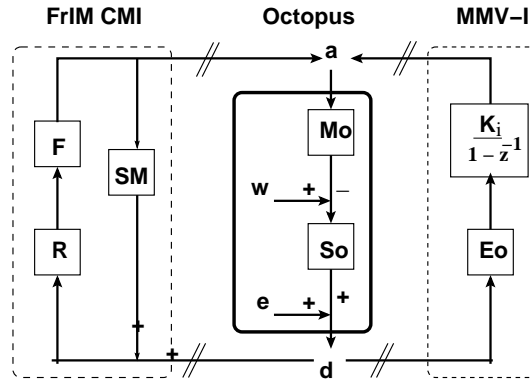


FIG. 11.2 – Schéma de la procédure de simulations, pour comparer les méthodes FrIM CMI et MMV-I. Au centre : Octopus avec ses propres modèles d’analyseur  $\mathbf{S}_o$ , de miroir  $\mathbf{M}_o$ , la surface d’onde incidente  $w$  et le bruit de mesure  $e$ . Les entrées d’Octopus sont les commandes  $\mathbf{a}$  et les sorties sont les mesures  $\mathbf{d}$ . À gauche : FrIM CMI.  $\mathbf{R}$  est le reconstructeur FrIM MAP.  $\mathbf{F}$  est le projecteur sur l’espace de commande et  $\mathbf{G} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}$  est le modèle interne de la matrice d’interaction du système. À droite : MMV-I.  $\mathbf{E}_o$  est la matrice de commande et  $K$  est le gain de l’intégrateur.

codée en MATLAB®,<sup>3</sup> a également été interfacée avec le simulateur Octopus. Cette année, les conclusions doivent être tirées quant aux performances de ces deux méthodes. Celles-ci sont en partie dictées par les tests comparatifs menés sur Octopus et présentés dans cette partie.

Par ailleurs, un troisième correcteur est utilisé dans les comparaisons. C’est la méthode de commande par défaut d’Octopus, codée par Le Louarn directement dans le simulateur. Il s’agit d’une méthode de type MMV avec un intégrateur scalaire (*cf.* diagramme en bas de la figure 9.1). Je détaille ici rapidement son principe.

La matrice d’interaction du système,  $\mathbf{G}$ , est calibrée, de façon simulée, à partir d’une base tronquée de modes de Karhunen-Loève de la turbulence projetés sur le miroir. Si on note  $\mathbf{C}_e$  la matrice de covariance du bruit et  $\mathbf{C}_w$  la matrice de covariance de la surface d’onde turbulente dans la base des modes de Karhunen-Loève également. La matrice de commande  $\mathbf{E}_o$  est obtenue par l’estimateur MAP

$$\mathbf{E}_o = (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \quad (11.1)$$

Cette matrice est utilisée en boucle fermée avec un intégrateur, sans modèle interne. En conséquence, la régularisation dans l’estimateur (11.1) n’est pas adaptée à la statistique de la surface d’onde résiduelle mesurée. Le poids de la régularisation est alors légèrement modifié afin de trouver un compromis entre la stabilité de l’estimation apportée par une régularisation et le biais engendré par la mauvaise adéquation de cette pénalisation à la statistique du signal.

J’ai déjà exposé sur la figure 6.1 les difficultés de mise en oeuvre d’un reconstructeur MMV sur un système d’optique adaptative à grand nombre d’actionneurs. Cependant, du point de vue de la qualité de la reconstruction, elle reste une référence pour interpréter les performances des deux nouveaux algorithmes. C’est pourquoi les configurations détaillées dans la table 11.1 sont également testées avec cette méthode. La figure 11.2 schématise la communication des méthodes de commande étudiées avec le simulateur

<sup>3</sup><http://www.mathworks.fr>

Octopus. La commande utilisant le reconstituteur MMV avec un intégrateur scalaire est notée dans la suite MMV-I. Si la commande FTR-I était représentée sur ce schéma, elle pourrait remplacer la boucle MMV-I dessinée à droite, en conservant le bloc intégrateur et en remplaçant  $\mathbf{E}_o$  par le reconstituteur FTR.

## 11.2 Les tests de correction statique

L'idée de cette première étape vers des simulations complètes d'optique adaptative est de qualifier la capacité de l'algorithme FrIM MAP à fournir une correction satisfaisante de la perturbation à partir d'une simple reconstruction. Dans cette section donc, la boucle n'est pas fermée et le retard de correction n'est pas modélisé. Les résultats démontrent la robustesse de l'estimateur FrIM MAP vis-à-vis d'erreur de modélisation de la turbulence et de l'analyseur.

Les *a priori* de la reconstruction utilise l'approximation fractale de la matrice de covariance de la turbulence tandis que la modélisation de la turbulence par Octopus repose sur l'approximation dans l'espace de Fourier. La plupart des simulateurs d'optique adaptative existant simule la turbulence d'après la méthode de Fourier de façon similaire à Octopus. Lorsque c'est cette même approximation qui est utilisée pour la régularisation du reconstituteur, il est difficile d'évaluer ses qualités. De façon analogue, pour les simulations de reconstruction présentées dans la partie II, l'approximation fractale pour la régularisation avait été employée pour simuler les surfaces d'onde turbulentes. Grâce aux simulations sur Octopus, il est donc possible d'évaluer la robustesse de l'approximation fractale pour la reconstruction.

L'analyseur de référence est par définition celui qui nous fournit les mesures. J'entends par là que si on utilise un analyseur réel, les incertitudes de modèle concernent l'approximation de ce système physique. En revanche, dans le cas du simulateur Octopus, les incertitudes de modèle sont illustrées par les approximations faites par notre correcteur, vis-à-vis du modèle *réel* que devient Octopus. C'est pour cette raison que dans la suite je privilégie l'étude des erreurs vis-à-vis du modèle d'analyseur simulé par Octopus.

Dans un premier temps, j'étudie les caractéristiques du modèle d'analyseur d'Octopus. Ensuite, je montre comment ce modèle est approximé par les modèles synthétiques de Fried et  $\text{SH3} \times 3$ .

### 11.2.1 La comparaison du modèle d'ASO d'Octopus au modèle linéaire des angles d'arrivée

J'ai rapidement évoqué, à la section 11.1.1, la procédure de modélisation des mesures par Octopus. J'étudie ici les écarts entre le modèle d'analyseur non bruité d'Octopus et le modèle théorique de l'analyseur de Shack-Hartmann basé sur les angles d'arrivée (AA) (*cf.* équation (2.3)).

Pour cela, je considère une surface d'onde incidente sur la pupille, fournie par Octopus. La représentation zonale de cette surface d'onde est donnée avec un pas d'échantillonnage  $d_e$ , inférieur au côté  $d_l$  d'une sous-pupille de l'analyseur. Les valeurs du rapport  $d_l/d_e$  pour les différentes configurations sont présentées dans la table 11.1. L'expression des mesures théoriques des équations (2.7)-(2.8) est alors approchée par

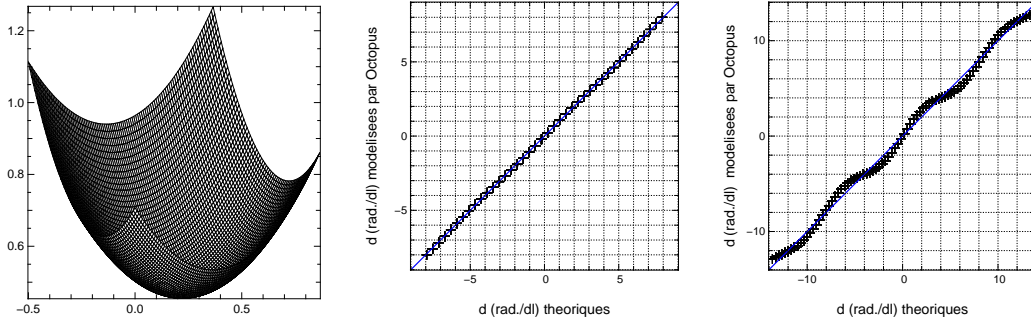


FIG. 11.3 – À gauche : représentation échantillonnée d'une surface d'onde égale à une simple défocalisation. Au centre et à droite : Valeurs de pentes locales (en  $x$  et  $y$ ) données par le modèle d'analyseur simulé par Octopus *vs.* celles données par le modèle  $\text{SH}_o$  (11.4). Au centre : configuration  $\text{VLT}_1$ . À droite : configuration  $\text{E-ELT}_1$

par la méthode des rectangles

$$\mathbf{d}^x(i, j) = \frac{d_e}{d_l} \sum_{k=0}^{k=d_l/d_e} [w((i + 1/2)d_l, (j - 1/2)d_l + k d_e) - w((i - 1/2)d_l, (j - 1/2)d_l + k d_e)] \quad (11.2)$$

$$\mathbf{d}^y(i, j) = \frac{d_e}{d_l} \sum_{k=0}^{k=d_l/d_e} [w((i - 1/2)d_l + k d_e, (j + 1/2)d_l) - w((i - 1/2)d_l + k d_e, (j - 1/2)d_l)] . \quad (11.3)$$

De ce calcul approché est défini un modèle d'analyseur nommé  $\text{SH}_o$ , tel que

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}_{\text{SH}_o} \cdot \mathbf{w} \quad (11.4)$$

Ce modèle d'analyseur  $\text{SH}_o$  est comparé ici au modèle d'Octopus.

### Sur une défocalisation

Dans un premier temps, la surface d'onde est déformée uniquement par une défocalisation

$$w(\mathbf{r}) = b r^2 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{A}, \quad (11.5)$$

où  $b$  est une constante donnant l'amplitude de la défocalisation. L'allure de la surface d'onde est illustrée à gauche de la figure 11.3. Cette déformation est produite par le miroir d'Octopus et est analysée en l'absence de turbulence atmosphérique.

Les mesures de pentes dans la direction  $x$  d'après l'équation (11.2) (respectivement dans la direction  $y$  d'après l'équation (11.3)) sont proportionnelles à la coordonnée  $x$  (respectivement à la coordonnée  $y$ ) du centre de la sous-pupille. On remarque que le modèle d'Octopus coïncide parfaitement avec le modèle linéaire théorique des AA pour la configuration  $\text{VLT}_1$  (au centre de la figure 11.3). En revanche, pour la configuration  $\text{E-ELT}_1$  simulée à droite de la figure 11.3, le modèle d'Octopus est non linéaire. Cet effet de non-linéarité est périodique, de période égale au champ de vue d'un pixel multiplié par  $a d_l$ . Cette non-linéarité est due à l'échantillonnage du détecteur. Elle révèle que le champ de vue des pixels est trop grand par rapport à la taille moyenne de la tache image. Dans le cas de la défocalisation générée par le miroir, l'onde lumineuse

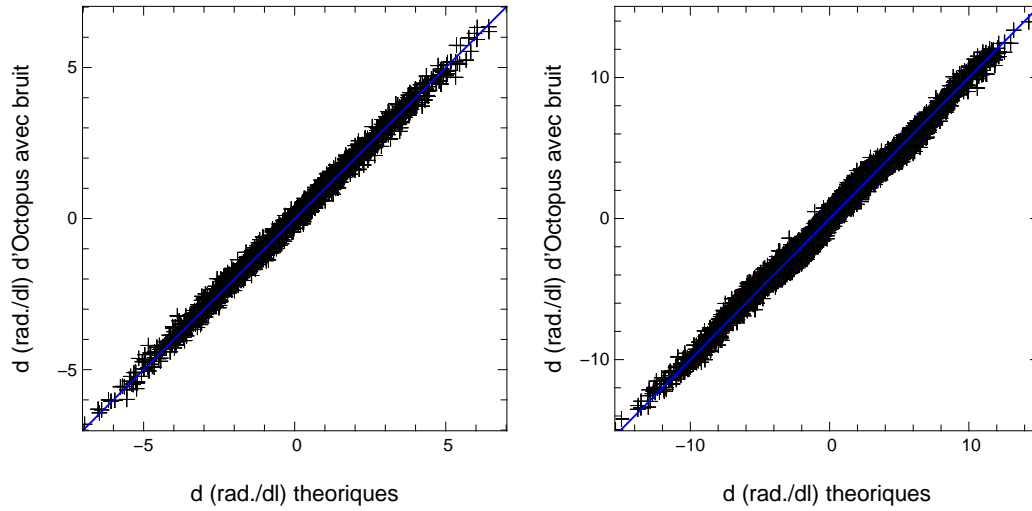


FIG. 11.4 – Comparaison du modèle d’Octopus, en présence de bruit de photons, et du modèle  $SH_o$ . Analyse d’une surface d’onde turbulente, *i.e.* en boucle ouverte. À gauche : configuration  $VLT_1$ . À droite : configuration  $E-ELT_1$ .

incidente simulée par Octopus est issue d’une fibre de calibration. La courbe de droite de la figure 11.3 montre que la fibre de calibration choisie génère une tache image trop petite.

Cette analyse fournit un premier aperçu des approximations de modélisation du processus de mesure. En pratique, elle permet surtout de s’assurer que les deux modèles calculent bien la même chose, à leurs approximations propres près. C’est également une façon de vérifier que les grandeurs échangées entre Octopus et l’algorithme de FrIM sont bien exprimées dans les mêmes unités, parce qu’il n’y a pas d’interface graphique ni de documentation.

### Sur une surface d’onde turbulente

La linéarité du modèle d’Octopus dépend de la taille des taches image générées par chaque sous-pupille. En présence de turbulence, ceci est fonction de la longueur de cohérence de la surface d’onde résiduelle. La figure 11.4 compare le modèle  $SH_o$  appliqué cette fois-ci à une surface d’onde turbulente, avec les données fournies par Octopus en incluant le bruit de photons. Les systèmes simulés sont le  $VLT_1$  (à gauche) et l’ $E-ELT_1$  (à droite). La turbulence est caractérisée par les paramètres associés à ces configurations dans la table 11.1. Les mesures de pentes sont effectuées sur une surface d’onde analysée en boucle ouverte. On note encore une légère non linéarité du modèle d’Octopus pour la configuration  $E-ELT_1$ , moins perceptible en raison du bruit de photons également présent.

La dispersion des points autour de la diagonale sur ces figures est le résultat de la non-linéarité de l’analyseur d’Octopus (incertitudes de centrage) et du bruit de photons. Ici les mesures sont simulées à fort flux, 1000 photons reçus en moyenne par sous-pupille, si bien que ce bruit de mesure global a une variance  $\sigma_e = 0.177 \text{ rad}/d_l$  pour le cas  $VLT_1$  et  $\sigma_e = 0.489 \text{ rad}/d_l$  pour le cas  $E-ELT_1$ .

### Sur une surface d'onde résiduelle

Lorsque la boucle du système d'optique adaptative est fermée, l'analyseur mesure les pentes de la surface d'onde résiduelle, qui sont supposées avoir une amplitude moyenne plus faible. Ainsi, c'est une portion centrale des graphiques de la figure 11.4 qui est observée. Ceci est illustré par les graphiques de gauche des figures 11.5 et 11.6, qui correspondent à un système VLT<sub>2</sub> et E-ELT<sub>1</sub> respectivement, en boucle fermée. L'incertitude de la mesure, incluant le bruit de photons et les incertitudes du centrage, est caractérisée par un écart-type  $\sigma_e = 0.148 \text{ rad}/d_l$  pour VLT<sub>2</sub> et  $\sigma_e = 0.279 \text{ rad}/d_l$  pour E-ELT<sub>1</sub>. Pour le cas E-ELT<sub>1</sub>, le fait de pouvoir concentrer la majorité des mesures dans un régime linéaire de l'analyseur permet de réduire fortement les erreurs de modélisation (près d'un facteur 4 en variance).

#### 11.2.2 Comparaison aux modèles d'ASO impliqués dans la reconstruction

Le modèle linéaire SH<sub>o</sub> fournit une modélisation assez précise de ce que donne l'analyseur simulé par Octopus, au vu des figures 11.3 et 11.4. Cependant, l'utilisation de ce modèle dans un reconstituteur serait très coûteux en temps de calcul et en espace mémoire. Comme dans le chapitre 8, ce sont le modèle de Fried et le modèle SH3 × 3 qui sont mis en oeuvre dans l'algorithme FrIM CMI sur Octopus.

Le chapitre 8 met déjà en évidence les différentes modélisations du repliement dans les mesures suivant les approximations du modèle d'analyseur effectuées. Les deux prochaines strophes illustrent la modélisation du repliement par le modèle de Fried et par le modèle SH3 × 3 lors de simulations en boucle fermée sur Octopus.

#### Le modèle de Fried

J'ai déjà abordé l'approximation de Fried pour modéliser le Shack-Hartmann (cf sections 2.2 et 8.3.2). Le modèle de Fried ne tient pas compte du repliement, ce qui implique un écart important entre les données fournies par Octopus et celles modélisées. Ceci est illustré par les graphiques du centre des figures 11.5 et 11.6. Ces graphiques sont placés à côté de ceux du modèle SH<sub>o</sub> (à gauche), afin de faciliter la comparaison des niveaux d'erreur. On remarque que les aspects non linéaires de l'analyseur d'Octopus dans le cas E-ELT<sub>1</sub> disparaissent pratiquement devant l'importance de l'erreur de modélisation du repliement.

La variance des erreurs de modélisation de Fried par rapport à l'analyseur d'Octopus est pour ces deux configurations, VLT<sub>2</sub> et E-ELT<sub>1</sub>,

$$\sigma_e = 0.53 \text{ rad.}/d_l \quad \text{et} \quad \sigma_e = 1.085 \text{ rad.}/d_l \quad (11.6)$$

respectivement. Ceci correspond à une incertitude des mesures due au repliement

$$\langle \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp\text{T}} \cdot \mathbf{S}_{\text{SH}_o}^{\text{T}} \cdot \mathbf{S}_{\text{SH}_o} \cdot \mathbf{w}^{\mathcal{M}\perp} \rangle = \alpha^{\text{repli}} \left( \frac{d_l}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (11.7)$$

avec  $\alpha^{\text{repli}}$  de l'ordre de 0.23 pour les deux configurations.

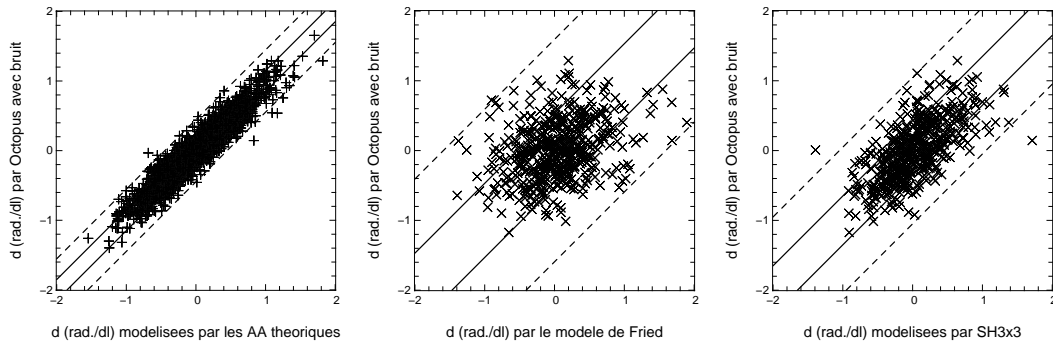


FIG. 11.5 – Comparaison du modèle d’Octopus en présence de bruit de photons et des modèles linéaires approchés sur des données en boucle fermée. La configuration de simulation correspond à  $VLT_2$ . En ordonnée, les mesures de pentes bruitées issues d’Octopus. En abscisse : Le modèle approché formulé par (11.2)-(11.3) (à gauche), le modèle de Fried (au centre) et le modèle  $SH3 \times 3$  (à droite). Les lignes en traits pleins indique l’écart-type de l’erreur  $\sigma_e$ , et celles en traits tiretés indiquent la limite à trois  $\sigma_e$ .

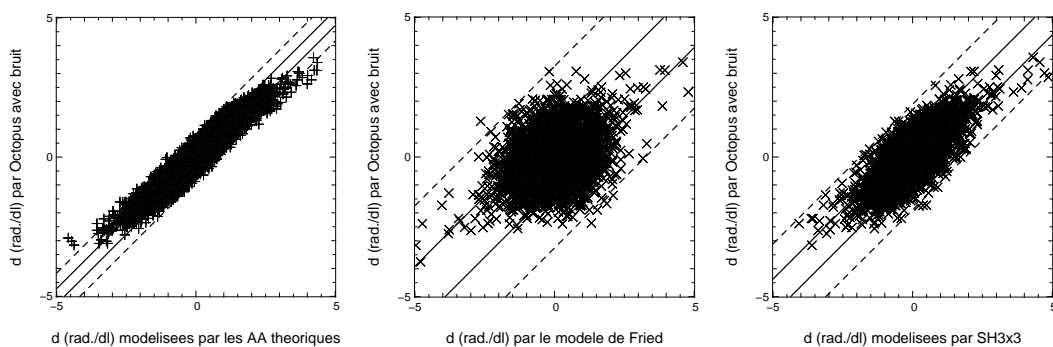


FIG. 11.6 – Même légende que pour la figure 11.5, mais la configuration simulée est  $E-ELT_1$ .



### Le modèle SH3 × 3

De la même façon que pour le modèle de Fried, j'ai comparé les mesures bruitées d'Octopus à celles modélisées par  $\mathbf{S}_{\text{SH3} \times 3}$ , défini à la section 8.3.2. Comme le modèle SH3 × 3 tient compte du repliement d'une partie des hautes fréquences, l'incertitude de la mesure modélisée liée au repliement est moindre. Ceci est observable sur les graphiques de droite des figures 11.5 et 11.6. Ce sont les mêmes données que les deux graphiques correspondants pour le modèle SH<sub>o</sub> et le modèle de Fried. On remarque que la corrélation des mesures est plus évidente que dans le cas du modèle de Fried (au centre).

Pour ces deux configurations VLT<sub>2</sub> et E-ELT<sub>1</sub>, l'incertitude de la mesure liée à la partie repliée qui n'est pas modélisée par SH3 × 3 est caractérisée par une variance proche de  $0.07 (d_l/r_0)^{5/3}$ . Cette variance d'erreur est celle qui s'ajoute à la variance  $\sigma_e^2$  du modèle SH<sub>o</sub>, pour donner l'erreur du modèle de mesure à considérer dans le reconstructeur FrIM MAP.

### Remarque sur l'erreur de modélisation aux bords

Sur les figures 11.4, 11.5 et 11.6, j'ai représenté les valeurs de pentes fournies exclusivement par les sous-pupilles entièrement éclairées. Dans toutes les simulations effectuées, Octopus était paramétré pour délivrer des mesures pour toutes les sous-pupilles illuminées sur plus de 75% de leur surface. L'algorithme de reconstruction FrIM MAP permet de prendre en compte des incertitudes de modèle non uniformes grâce à la matrice de corrélation du bruit  $\underline{\mathbf{C}}_e$ . Il est ainsi possible de diminuer le poids de l'attache aux données dans ces sous-pupilles aux frontières, sachant que la modélisation faite par l'analyseur  $y$  est plus incertaine.

Toutefois, dans les simulations présentées dans cette partie du manuscrit, l'algorithme de reconstruction FrIM MAP est utilisé avec une incertitude de mesure uniforme sur la pupille. Ceci est certainement responsable d'une dégradation de la correction à proximité des bords. Quelques simulations ont été réalisées depuis sur d'autres configurations, en ôtant les mesures venant des sous-pupilles aux frontières, sans que la différence de performance soit significative.

### 11.2.3 Simulations de correction statique

La reconstruction FrIM MAP converge de façon semblable à ce qui était observé sur les simulations de la partie II. La figure 11.7 montre un exemple de correction obtenue à partir d'une simple reconstruction avec FrIM MAP et une projection orthogonale sur le miroir. Les valeurs représentées correspondent aux rapports de Strehl (à 2.2μm) moyens obtenus pour 50 reconstructions FrIM MAP d'une même surface d'onde turbulente. Seule la réalisation du bruit change à chaque mesure. Les rapports de Strehl atteints en correction simple pour les configurations étudiées sont à peu près identiques, que le reconstructeur soit défini à partir du modèle de Fried ou du modèle SH3 × 3. La configuration VLT<sub>1</sub> (à gauche), de type OAX, permet d'atteindre des hauts rapports de Strehl, de l'ordre de 96%. Celle de l'E-ELT<sub>1</sub> (à droite) fournit un rapport de Strehl moyen d'environ 83%.

L'estimation de l'incertitude de mesure, qui permet de régler le poids relatif des *a priori* grâce à  $\mu_0$ , ne s'avère cependant pas optimale puisqu'un optimum de la correction est obtenu pour un hyperparamètre inférieur à 1. Il n'y a que dans le cas de la correction

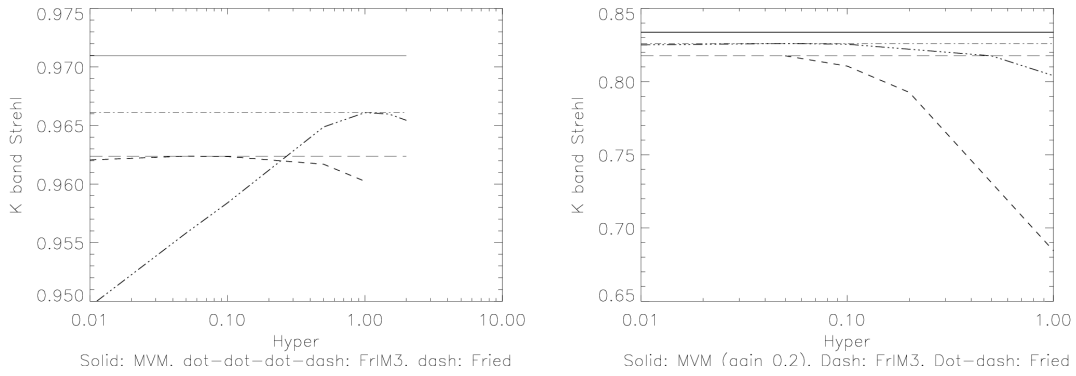


FIG. 11.7 – Rapport de Strehl (à  $2.2\mu\text{m}$ ) *versus* hyperparamètre  $\mu$ . Configurations VLT<sub>1</sub> (à gauche) et E-ELT<sub>1</sub> (à droite). Correction d’une surface d’onde grâce à l’algorithme FrIM MAP avec le modèle de Fried (trait tireté) ou le modèle SH3  $\times$  3 (trait pointillé-tireté). Les lignes horizontales représentent la meilleure correction atteinte par chacune des méthodes. À gauche : 96.2% (Fried) et 96.6% (SH3  $\times$  3) pour VLT<sub>1</sub>. À droite : 81.8% (Fried) et 82.6% (SH3  $\times$  3) pour E-ELT<sub>1</sub>. Le trait plein horizontal montre la performance de la correction de la MVM implémentée sur Octopus avec un intégrateur, après 50 boucles fermées sur la même surface d’onde fixe : 97.1% pour VLT<sub>1</sub> et 87.4% pour E-ELT<sub>1</sub>.

FrIM MAP avec le modèle SH3  $\times$  3 sur la simulation VLT<sub>1</sub> que l’hyperparamètre  $\mu$  optimal est de l’ordre de 1. Cette figure montre que l’analyse des erreurs de modèles effectuée dans cette section ne permet pas d’estimer correctement le poids optimal de la régularisation  $\mu_0$ . D’après l’étude présentée à la section 7.5, il est préférable de sous-estimer le poids optimal des *a priori* que de le surestimer. En conséquence, dans les simulations présentées ci-après, l’hyperparamètre est mis à la valeur 0.1, par défaut, excepté lorsqu’il s’agit de corriger une configuration de type VLT<sub>1</sub> avec le modèle SH3  $\times$  3.



## Chapitre 12

# Les performances d'OAmC en boucle fermée

La section 11.2 se concentre sur la correction statique afin de s'affranchir dans un premier temps des effets liés à l'évolution temporelle de la turbulence et à la loi de commande. Ceci constitue une étape importante dans les tests effectués sur Octopus, afin d'identifier les multiples sources d'erreurs, c'est-à-dire de dégradation de la correction. Les performances de correction statique de l'algorithme FrIM MAP sur Octopus étant connues, il est désormais possible de fermer la boucle.

Les tests en boucle fermée ont fait l'objet d'une présentation à la conférence SPIE à Marseille en juin 2008. L'article associé est inclus à la fin de ce chapitre. La correction appliquée dans ce chapitre se résume à la reconstruction FrIM MAP et à la projection sur l'espace des actionneurs, structurée à partir de la commande par modèle interne (CMI) présentée dans la section 9.6.1. Cette méthode est nommée FrIM CMI. Par défaut, le reconstituteur FrIM MAP est bâti à partir du modèle de Fried de l'analyseur.

Les performances de la méthode FrIM CMI sont évaluées par comparaison à deux autres algorithmes de commande en optique adaptative. L'un est noté MMV-I, s'agissant d'une commande classique de type multiplication matrice-vecteur (MMV) combinée avec un pur intégrateur, d'où la notation MMV-I. L'autre est la méthode de reconstruction par transformée de Fourier (FTR), elle aussi combinée à un contrôle de type intégral, d'où la notation FTR-I. La comparaison entre FrIM CMI et MMV-I est présentée dans l'article de conférence joint, mais seul le corps de ce chapitre réalise la comparaison complète avec les trois méthodes. Par ailleurs, certains points sont étudiés de façon plus approfondie, comme la stabilité vis-à-vis des défauts d'alignement ou la robustesse de la correction à très faible flux. Ce chapitre est finalement le fruit d'un travail collectif réalisé avec M. Le Louarn et I. Montilla. Chacun de nous trois a *fait tourner* les simulations avec la méthode de correction qu'il ou elle a implémentée.

La configuration de référence pour les tests est définie par les valeurs de la colonne E-ELT<sub>2</sub> dans la table 11.1. Octopus simule la turbulence atmosphérique sur 10 couches distribuées entre 0 et 18.5Km, avec environ 65% de l'énergie turbulence concentrée dans les 1 200 premiers mètres d'altitude au-dessus du télescope. Les tests font intervenir des variations de certains paramètres de la configuration E-ELT<sub>2</sub> afin d'évaluer la robustesse des méthodes FrIM CMI, FTR-I et MMV-I. Les modifications de la configuration E-ELT<sub>2</sub> par défaut ne concerne qu'un paramètre à la fois.

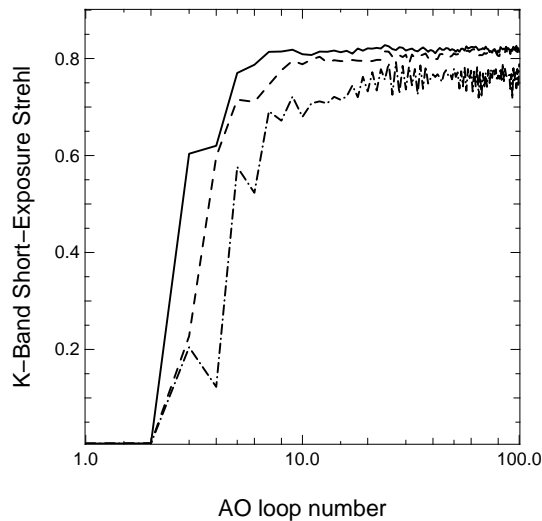


FIG. 12.1 – Fermeture de la boucle sur Octopus pour  $ELT_2$ . Rapport de Strehl courte pose au cours des boucles d’optique adaptative successives, avec un nombre restreint d’itérations autorisées pour le reconstructeur FrIM MAP par boucle. Trait plein : 3 itérations. Trait tireté : 2 itérations. Trait pointillé-tiré : 1 itération.

## 12.1 La convergence et nombre d’itérations

Le premier résultat remarquable concerne la fermeture de la boucle avec FrIM CMI. Elle est illustrée par la figure 12.1. Le rapport de Strehl courte pose, à  $2.2\mu\text{m}$ , est évalué à chaque boucle du système. Son évolution au cours des boucles, c’est-à-dire au cours du temps, est présentée pour différents nombres d’itérations autorisées pour la reconstruction FrIM MAP. L’algorithme itératif de reconstruction converge d’autant moins vite que le rapport signal-à-bruit augmente (*cf.* section 7.3.1). À partir de simulations de boucle d’optique adaptative simplifiées, le chapitre 10 met en évidence le besoin de 3 itérations pour obtenir un système bouclé avec un budget d’erreurs équilibré. Ici, dans un cas de fort rapport signal-à-bruit, la méthode fournit une performance satisfaisante avec seulement 2 itérations. On remarque qu’une seule itération autorisée entraîne une réponse *oscillante*.

Ces deux itérations signifient 1.8 Méga opérations en flottants par boucle. Pour le système E- $ELT_2$  simulé, comprenant 10080 mesures et 5402 actionneurs, cela représente 70 fois moins d’opérations que l’application d’une matrice de commande à un vecteur de mesures.

## 12.2 Les conditions de turbulence variables

La figure 12.2 présente la comparaison des algorithmes lorsque les conditions de turbulence atmosphérique évoluent. La courbe en pointillés matérialise l’erreur théorique associée au retard de la correction et au sous-dimensionnement du système. L’écart entre cette courbe est le rapport de Strehl engendré par chacune des méthodes correspond à l’erreur d’estimation de la correction  $\langle \epsilon^2 \rangle_{\mathcal{M}}$ . Pour le graphique de gauche, lorsque le paramètre de Fried de la turbulence  $r_0$  varie l’écart à la limite théorique est régulier pour toutes les méthodes. À droite, lorsque le temps de cohérence de la

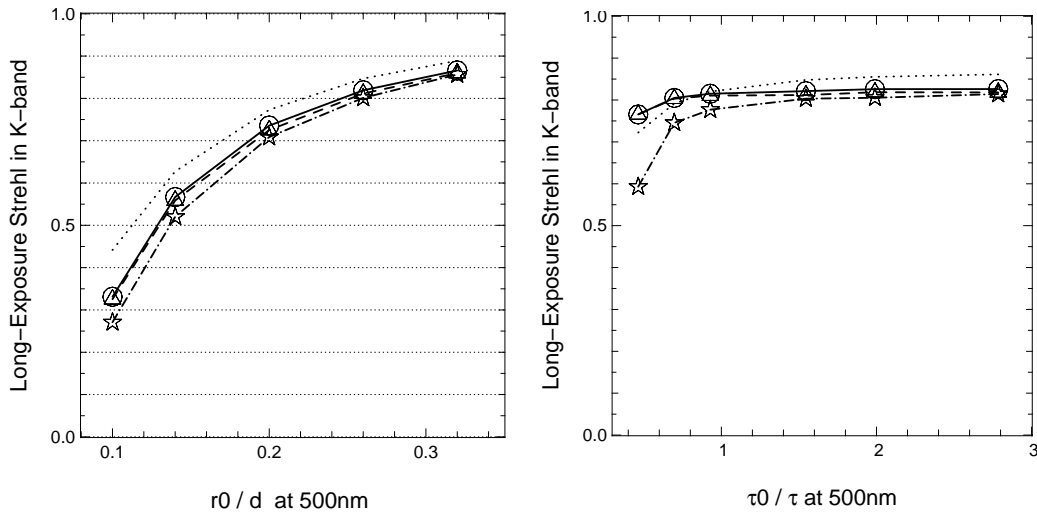


FIG. 12.2 – Rapport de Strehl longue pose (à  $2.2\mu\text{m}$ ) après 50 boucles en fonction des conditions de turbulence :  $r_0/d_l$  à 500nm (à gauche) et  $\tau/\tau_0$  à 500nm (à droite). Trait pointillé : Performance théorique déduite de l'erreur de sous-dimensionnement et de l'erreur due au retard. Cercles et trait plein : FrIM CMI. Triangles et traits tiretés : MMV avec intégrateur. Étoiles avec trait pointillé-tiré : FTR avec intégrateur.

turbulence devient très faible, les méthodes FrIM CMI et MMV-I produisent un Strehl longue pose supérieur à la valeur théorique. La courbe théorique suppose une décorrélation totale des erreurs dues au retard et au sous-dimensionnement. Le fait que cette limite soit dépassée montre simplement que ces deux erreurs sont corrélées.

Lorsque  $r_0$  ou  $\tau_0$  change, FrIM CMI (cercles et trait plein) produit toujours le meilleur rapport de Strehl. La méthode MMV-I a une performance comparable. Néanmoins, on peut préciser que, pour obtenir cette performance, la méthode MMV-I doit restreindre les mesures prises en compte à celles issues des sous-pupilles illuminées sur 90% de leur surface. La méthode FrIM CMI garde toutes les mesures fournies par Octopus (*i.e.* taux d'illumination de 75% minimum) et applique une incertitude de mesure uniforme sur toute la pupille (*cf.* remarque à la fin de la section 11.2.2).

La méthode FTR-I conduit généralement à un rapport de Strehl légèrement inférieur aux deux autres méthodes.

### 12.3 La stabilité vis-à-vis des erreurs d'alignements du système

Les défauts d'alignements du système d'optique adaptative introduisent des erreurs de modélisation. La robustesse vis-à-vis de ces erreurs a été étudiée en décalant la grille de position des actionneurs par rapport à celle des coins des sous-pupilles de l'analyseur. Le déplacement est fait dans une seule direction,  $x$ , colinéaire à un des axes d'échantillonnage. Plusieurs décalages ont été simulés, identifiés par le rapport de la translation à la taille d'une sous-pupille  $d_l$ . L'évolution du rapport de Strehl courte pose pour les trois méthodes lors des 50 premières itérations est illustré sur la figure 12.3. Les méthodes MMV-I et FTR-I montrent des pertes de performance significatives à partir d'un défaut d'alignement de  $3d_l/8$ . Il faudrait poursuivre le nombre de boucles simulées pour observer si le système est instable.

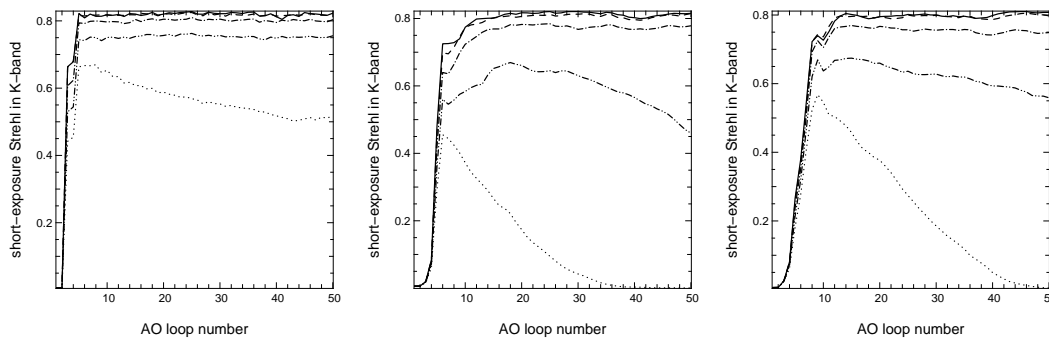


FIG. 12.3 – Évolution du rapport de Strehl courte pose au cours de 50 premières boucles d’optique adaptative en fonction du défaut d’alignement du miroir : aucun (trait plein),  $d_l/8$  (trait tireté),  $d_l/4$  (trait pointillé tireté),  $3d_l/8$  (trait pointillé-pointillé-tireté) et  $d_l/2$  (trait pointillé). À gauche : FrIM CMI. Au centre : MMV-I. À droite : FTR-I.

Sur les 50 premières boucles, FRIM CMI montre un comportement stable même pour un défaut d’alignement de  $3d_l/8$ . En revanche, la chute du rapport de Strehl pour un décalage de  $d_l/2$  semble annoncer une instabilité.

Ces premières études ont été approfondies en poursuivant la simulation sur 1000 boucles. Elles sont illustrées par les graphiques de la figure 12.4. À gauche, le défaut d’alignement est de  $3d_l/8$ , et avec 5 itérations par boucle pour le reconstructeur FrIM MAP, le rapport de Strehl est stable. Je n’ai pas effectué cette simulation avec un nombre plus faible d’itérations. De surcroît, il conserve un niveau supérieur à 70%, tandis que les autres méthodes représentées sur la figure 12.3 n’atteignent ce niveau de performance à aucun moment au cours des 50 premières boucles pour un tel défaut d’alignement.

À droite, pour un défaut d’alignement d’une demi-sous-pupille, FrIM CMI ne permet plus de corriger correctement le système, même pour une reconstruction avec un grand nombre d’itérations (20). Le comportement est instable.

## 12.4 La performance à faible flux

Les algorithmes sont comparés pour différents nombre moyens de photons  $N_{ph}$  incidents par sous-pupille : 1000, 100, 10 et 1 photons. Le rapport de Strehl longue pose après cinquante boucles pour chaque méthode (100 boucles pour  $N_{ph} = 1$  photon) est tracé à gauche de la figure 12.5. On remarque que l’avantage de l’algorithme FrIM CMI disparaît pour 1 photon moyen reçu par sous-pupille. L’évolution du rapport de Strehl courte pose est représenté sur le graphique de droite de la figure 12.5. Ce cas de figure,  $N_{ph} = 1$  photon, correspond à une situation dans laquelle un grand nombre de sous-pupille ne reçoivent pas de photons, autrement dit elles sont *éteintes*. S’il n’y a pas de flux entrant dans une sous-pupille, il n’y a pas de tache image sur le détecteur et donc pas de mesure de pente associée à cette sous-pupille. Octopus délivre des valeurs de pentes nulles là où il n’y a pas eu de mesure effective. Mais Octopus peut également préciser à chaque boucle quelle sous-pupille n’a pas reçu de flux.

Dans les simulations présentées sur le graphique de gauche de la figure 12.5, aucun des algorithmes n’est conscient de l’extinction de certaines sous-pupilles. Ils traitent tous trois des jeux de mesures  $\mathbf{d}$  remplis majoritairement d’éléments nuls. Cette façon de faire correspond à inventer des données, ce qui d’un point de vue de la com-

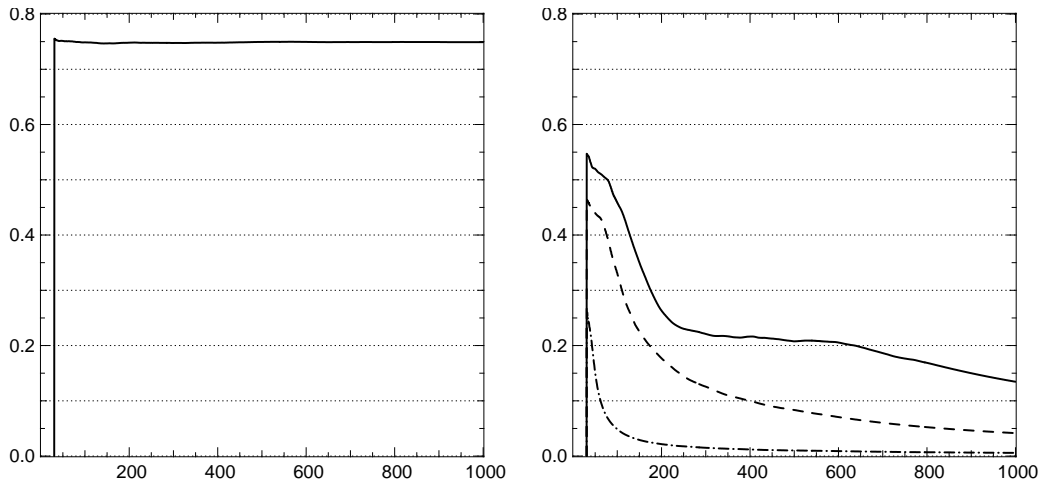


FIG. 12.4 – Évolution du rapport de Strehl longue pose (à  $2.2\mu\text{m}$ ) au cours des 1000 premières boucles. À gauche : Le défaut d’alignement du miroir est de  $3d_l/8$  et le nombre d’itérations autorisées pour FrIM MAP est 5. À droite : Le défaut d’alignement du miroir est d’une demi-sous-pupille ( $d_l/2$ ) et le nombre d’itérations autorisées pour le reconstructeur FrIM MAP est alternativement 2 (trait pointillé tireté), 5 (trait tireté), 20 (trait plein).

mande peut s’avérer problématique. Toutefois, les courbes montrent que les méthodes de reconstruction avec l’intégrateur scalaire, FTR-I et MMV-I, sont particulièrement performantes dans ce cas.

Ce n’est pas le cas de FrIM CMI. La perte d’information provoquée par cette absence de flux dégrade fortement les performances de la commande.

Par ailleurs, l’algorithme FrIM CMI a l’avantage de pouvoir tenir compte de ces absences de mesures dans son estimation. En effet, à la section 6, j’ai expliqué que l’algorithme FrIM MAP utilise les gradients conjugués sans précalculer la matrice  $\mathbf{A}_{\text{frac}}$  du système à résoudre (*cf.* équation (6.21)). Chacun des éléments de cette matrice est appliqué à un vecteur par un algorithme qui lui est propre. Il est ainsi facile de modifier la matrice diagonale  $\mathbf{C}_e^{-1}$  pour tenir compte à chaque boucle de l’extinction de certaines sous-pupilles. Ceci implique simplement de remplacer les éléments diagonaux correspondants par des zéros. Une telle stratégie est plus *honnête* dans le sens où il n’y a pas d’*invention* de données. Cependant, en pratique, lorsque FrIM CMI tient compte de ces sous-pupilles éteintes, ses performances ne s’améliorent pas. Elles sont plus ou moins identiques. Ceci s’explique notamment par le fait que de l’information a été retirée. Certes, cette information, les pentes nulles des sous-pupilles éteintes, est inventée mais elle joue le rôle d’*a priori* pour régulariser la dynamique de la commande.

D’après les caractéristiques du système d’optique adaptative décrites dans la table 11.1, en supposant une bande spectrale de 100nm pour le détecteur de l’analyseur et un taux de transmission global du système optique de 0.5, alors un cas  $N_{\text{ph}} = 10$  photons correspond à une étoile de référence de magnitude  $m_v = 12.7$  et un cas  $N_{\text{ph}} = 1$  photon correspond à une étoile de référence de magnitude  $m_v = 15.2$ . Il est important que l’algorithme de commande de l’optique adaptative soit encore performant sur une étoile de référence de magnitude de 11 au moins. C’est pourquoi le problème spécifique à la correction à faible flux a été étudié de façon plus approfondie. La dernière partie de cette section est consacrée à cette étude.



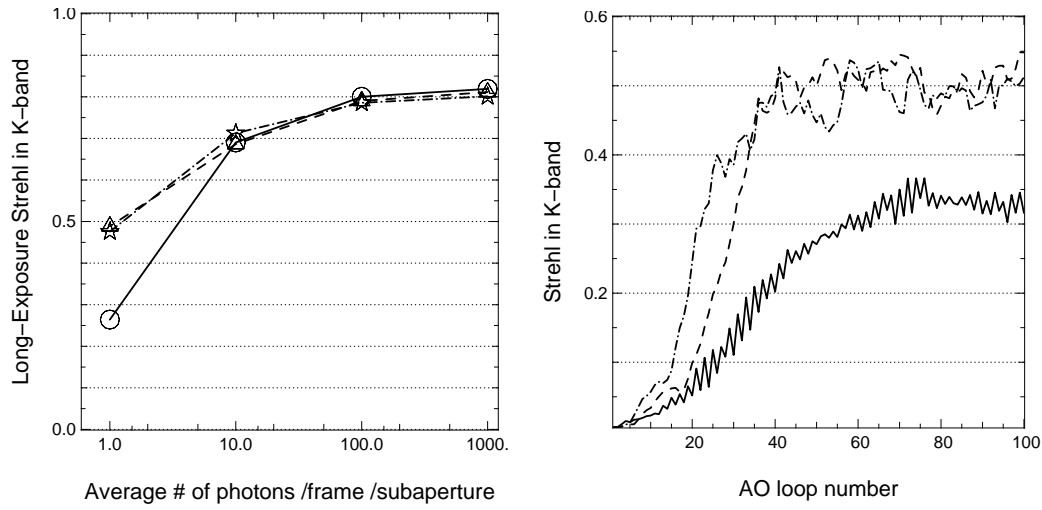


FIG. 12.5 – À gauche : Rapport de Strehl longue pose (à  $2.2\mu\text{m}$ ) en fonction de  $N_{\text{ph}}$ . Évaluation au bout de 50 boucles pour  $N_{\text{ph}} = 1000$ , 100 et 10 photons et au bout de 100 pour  $N_{\text{ph}} = 1$  photon. Même légende que pour la figure 12.2. À droite : Évolution du rapport de Strehl courte pose au cours des boucles pour  $N_{\text{ph}} = 1$  photon.

Pour cela, je reprends l'analyse du correcteur faite dans la section 9.6. La méthode FrIM CMI est caractérisée par le diagramme situé en haut de la figure 9.3, avec  $Q_{\text{MI}}(z) = 1$ . En théorie, ce diagramme est équivalent à celui situé en bas de la figure 9.3, avec

$$\mathbf{Q}(z) = Q_{\text{MI}}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} z^{-2} Q_{\text{MI}}(z))^{-1}. \quad (12.1)$$

Les deux méthodes FTR-I et MMV-I peuvent également être représentées par le diagramme du bas de la figure 9.3, mais avec un correcteur  $\mathbf{Q}$  scalaire, de type intégrateur, *i.e.*

$$\mathbf{Q}(z) = \frac{K_i}{1 - z^{-1}} \mathbf{I}. \quad (12.2)$$

Puisque les méthodes FTR-I et MMV-I tirent profit de l'intégration à faible flux, j'investigue la possibilité d'approximer la matrice  $\mathbf{Q}(z)$  de l'équation (12.1) par un intégrateur scalaire comme décrit par l'expression (12.2). L'approximation la plus évidente à faire consiste à écrire que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{I}$ , dans l'équation (12.1). On obtient alors la commande POLC proposée par Gilles (2005), et schématisée par le diagramme du bas de la figure 9.5.

C'est ce choix d'un correcteur  $\mathbf{Q}(z)$  intégrateur scalaire qui est fait ici pour modifier l'algorithme FrIM CMI et le comparer aux deux autres méthodes FTR-I et MMV-I à faible flux. Je nomme ce nouveau correcteur FrIM CMI-I. En remplaçant dans l'équation (12.1),  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{G}$  par l'identité et  $\mathbf{Q}(z)$  par l'expression (12.2), on obtient

$$Q_{\text{MI}}(z) = \frac{K_i}{1 + K_i z^{-2} - z^{-1}}. \quad (12.3)$$

L'algorithme FrIM CMI-I repose alors sur l'architecture présentée en haut de la figure 9.3, avec  $Q_{\text{MI}}(z)$  donné par la formule (12.3). Par ailleurs, le reconstruteur FrIM MAP utilisé dans la méthode FrIM CMI-I prend en compte l'extinction des sous-pupilles en modifiant la matrice  $\underline{\mathbf{C}}_e^{-1}$  à chaque boucle.

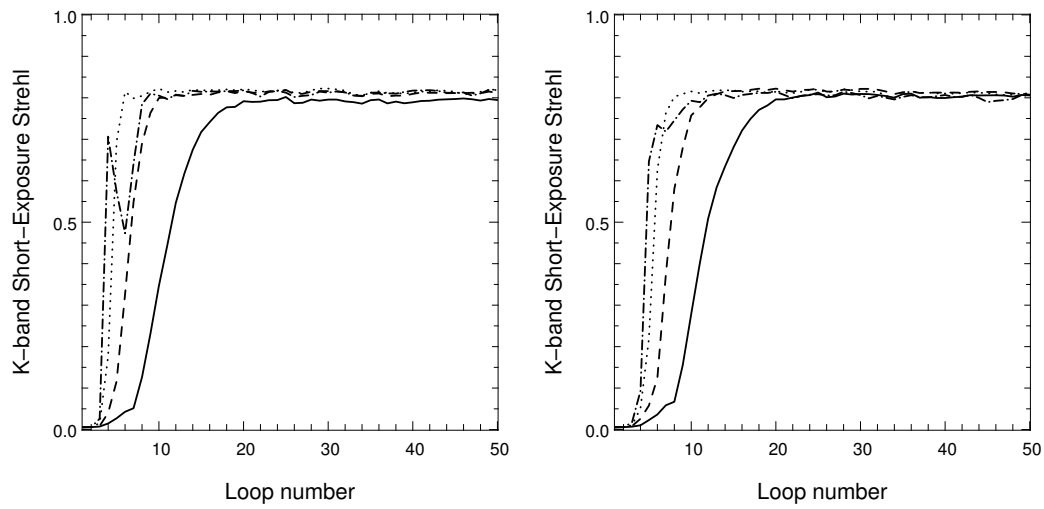


FIG. 12.6 – Évolution du rapport de Strehl courte pose (à  $2.2\mu\text{m}$ ) au cours des 50 premières boucles, pour différentes valeurs de gain de l'intégrateur  $K_i = 0.5$  (trait pointillé-tiré),  $0.4$  (trait pointillé),  $0.3$  (trait tireté) et  $0.2$  (trait plein). À gauche : FrIM CMI-I. À droite : MMV-I.

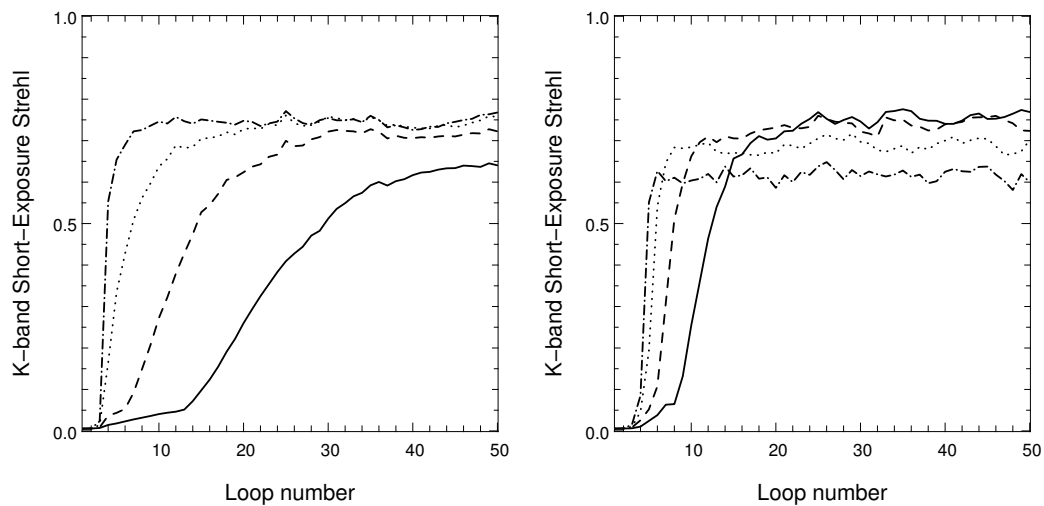


FIG. 12.7 – Même légende que la figure 12.6 mais pour  $N_{\text{ph}} = 10$  photons.

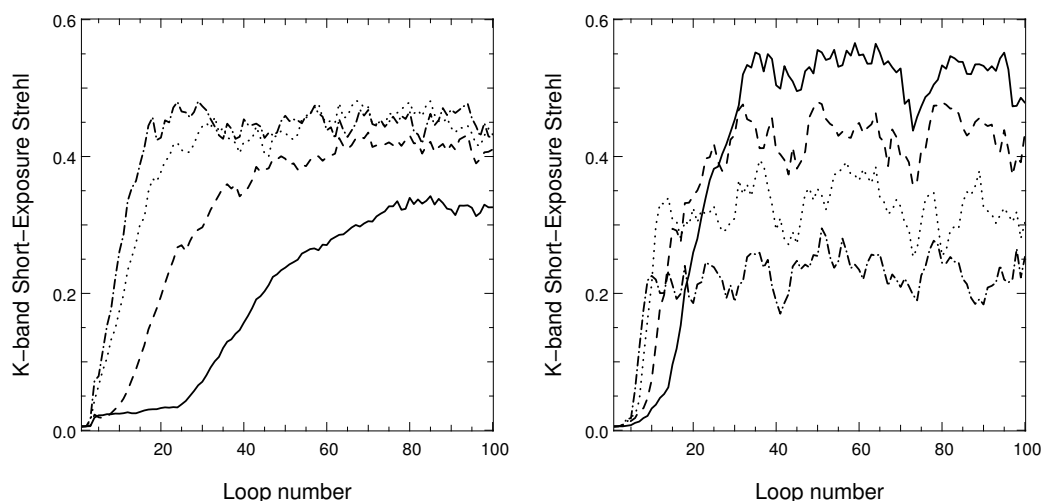


FIG. 12.8 – Même légende que la figure 12.6 mais pour  $N_{\text{ph}} = 1$  photon.

Les résultats obtenus par cette nouvelle méthode sont présentés sur les figures 12.6, 12.7 et 12.8, pour  $N_{\text{ph}} = 100$ , 10 et 1 photon respectivement. Ces résultats de simulations appellent plusieurs remarques :

- Les meilleurs Strehl fournis par les deux méthodes sont comparables, si on ne tient pas compte de la courbe de gain 0.2 pour l’algorithme MMV-I à  $N_{\text{ph}} = 1$  photon, dont l’allure très agitée est peu satisfaisante.
- Les meilleurs rapport de Strehl et la plus grande vitesse de convergence sont obtenus avec un gain  $K_i = 0.5$  pour FrIM CMI-I, indépendamment du flux moyen.
- Pour MMV-I, le meilleur rapport de Strehl coïncide avec le gain le plus faible et la vitesse de convergence la plus lente.
- Lorsque le gain décroît, la vitesse de convergence de FrIM CMI-I est plus affectée que celle de MMV-I.

Les performances de ce nouvel algorithme de commande sont donc très intéressantes. Par ailleurs, la correction de FrIM CMI-I pour  $N_{\text{ph}} = 10$  et 100 photons est équivalente à celle fournie par FrIM CMI; de l’ordre de 70% et 80% respectivement pour ces deux flux. Puisqu’il s’agit d’ajouter un correcteur scalaire à la procédure de calcul de la commande, le coût calculatoire additionnel n’est que de l’ordre de  $\mathcal{O}(n_a)$ . En conséquence, le nombre d’opérations en flottants requises pour l’algorithme global reste proportionnel à  $n$ .

Les propriétés de stabilité de l’algorithme modifié, FrIM CMI-I, vis-à-vis des variations des propriétés de la turbulence et des défauts d’alignement du système n’ont toutefois pas été étudiées. Ceci doit être envisagé si son utilisation se généralise.

## 12.5 Performances of FrIM with an internal model control law on the ESO end-to-end adaptive optics simulator

Les pages suivantes reproduisent la publication qui a fait l’objet d’une présentation à la conférence SPIE de Marseille en juin 2008. Il contient les principaux résultats de ce chapitre, mais la comparaison avec la méthode FTR-I n’est cependant pas incluse.

# Performances of the Fractal Iterative Method with an internal model control law on the ESO end-to-end ELT Adaptive Optics simulator

Béchet C.<sup>a</sup>, Le Louarn M.<sup>b</sup>, Tallon M.<sup>a</sup> and Thiébaud É.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Université de Lyon, Lyon, F-69003, France ; Université Lyon 1, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval, F-69230, France ; CNRS, UMR 5574, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon ; Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, F-69007, France

<sup>b</sup>ESO, Karl-Schwarzschild-Strasse 2 D-85748 Garching bei München, Germany

## ABSTRACT

Adaptive Optics systems under study for the Extremely Large Telescopes gave rise to a new generation of algorithms for both wavefront reconstruction and the control law. In the first place, the large number of controlled actuators impose the use of computationally efficient methods. Secondly, the performance criterion is no longer solely based on nulling residual measurements. Priors on turbulence must be inserted. In order to satisfy these two requirements, we suggested to associate the Fractal Iterative Method for the estimation step with an Internal Model Control.<sup>1</sup>

This combination has now been tested on an end-to-end adaptive optics numerical simulator at ESO, named Octopus. Results are presented here and performance of our method is compared to the classical Matrix-Vector Multiplication combined with a pure integrator. In the light of a theoretical analysis of our control algorithm, we investigate the influence of several errors contributions on our simulations. The reconstruction error varies with the signal-to-noise ratio but is limited by the use of priors. The ratio between the system loop delay and the wavefront coherence time also impacts on the reachable Strehl ratio. Whereas no instabilities are observed, correction quality is obviously affected at low flux, when subapertures extinctions are frequent. Last but not least, the simulations have demonstrated the robustness of the method with respect to sensor modeling errors and actuators misalignments.

**Keywords:** closed-loop control, algorithm, simulations, iterative method, Extremely Large Telescopes, adaptive optics

## 1. INTRODUCTION

This paper presents the procedure, analysis and first conclusions of our simulations of FrIM closed-loop algorithm on Octopus, the ESO adaptive optics (AO) simulator. FrIM names, all along this paper, not only the maximum *a posteriori* (MAP) reconstructor suggested by Thiébaud & Tallon,<sup>2</sup> but also the closed-loop internal model control (IMC) presented earlier by Béchet *et al.*<sup>3</sup> The first aim of this performance test is to analyze FrIM behavior when embedded in an end-to-end Monte Carlo AO simulator. Up to now, the same algorithm was used for both the simulation of the turbulence when testing FrIM, and the statistical model of the regularization. In other words, the priors were perfect. The WFS was also perfectly modeled.

FrIM performance study on Octopus is done in comparison with another method implemented on the same single-conjugate AO (SCAO) simulator as a reference, a classical Matrix-Vector Multiply (MVM) associated to a scalar pure integrator. We note this method MVM-I in the remainder of this paper.

The large variety of configurations and simulated conditions have provided a characterization of FrIM performance on Octopus. The main results are presented hereafter, for a particular SCAO configuration of interest.

The remainder of this paper is outlined as follows. Section 2 describes the simulations conditions. The parameters of the considered standard SCAO system are detailed and the interface between Octopus and the two control methods is explained. From the choice of the simulation parameters, Sect. 3 provides a qualitative analysis of modeling discrepancies concerning the turbulence and the wavefront sensing process, between Octopus and FrIM approaches. Then, in Sect. 4, the simulations results are displayed and interpreted.

---

Further author information: (Send correspondence to Clémentine Béchet)

Clémentine Béchet: E-mail: Bechet@obs.univ-lyon1.fr, Telephone: (+33) 4 78 86 83 78

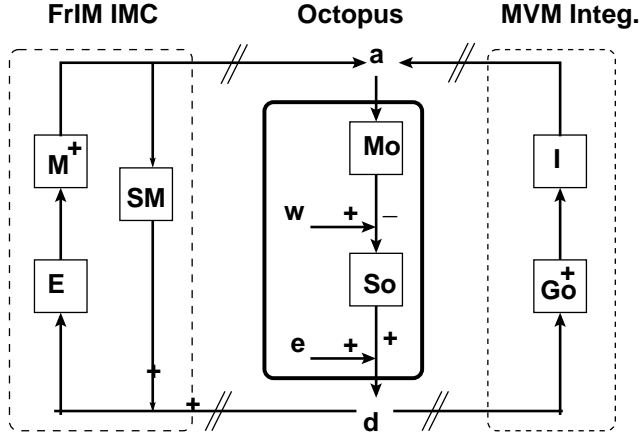


Figure 1. Simulations architecture, for comparisons between FrIM and MVM-I. **At the center:** Octopus is the AO simulator, with  $\mathbf{M}_o$  its DM model,  $\mathbf{S}_o$  its WFS model,  $\mathbf{w}$  the turbulent perturbation and  $\mathbf{e}$  the photon noise. Inputs for Octopus are the commands  $\mathbf{a}$ , and outputs are the WFS data  $\mathbf{d}$ . **On the left:** FrIM with its IMC.  $\mathbf{E}$  is the FrIM MAP reconstructor,  $\mathbf{M}^+$  is the pseudo-inverse of FrIM DM model, and  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}$  is FrIM model of the interaction matrix of the system. **On the right:** MVM-I control.  $\mathbf{G}_o^+$  represents the command matrix calibrated on Octopus,  $\mathbf{I}$  symbolizes the integrator control.

## 2. SIMULATED CONDITIONS: DESCRIPTION AND AIMS

### 2.1 Characteristic Parameters of the AO System

The tested configuration is inspired from the first light AO system description for the E-ELT.<sup>4</sup> Thus, the simulated system is a SCAO, on an Extremely Large Telescope (ELT) of diameter  $D = 42\text{m}$ , with a central obstruction of  $0.28D$ . The single wavefront sensor (WFS) is a Shack-Hartmann with 84 subapertures across the diameter, so that the subaperture side is  $d = 50\text{cm}$  long. The deformable mirror (DM) has bilinear influence functions, in Fried's geometry with respect to the WFS lenslet array. Only the subapertures for which more than 75% of the area remain inside the aperture are considered as providing useful measurements. Every AO loop produces 10080 outputs (wavefront slopes) and 5402 inputs (actuators commands). Such a large AO system is assumed to have a two-frame delay  $\tau = 2\text{ms}$ , accounting for the exposure time of the WFS, the read time of the detector and the computation time for the reconstruction and control.

The sensing process is assumed in the visible, more precisely at  $\lambda_{AO} = 700\text{nm}$ , while the correction quality is assessed assuming observation in K-band at  $\lambda_l = 2.2\mu\text{m}$ . Each subaperture has a field of view (FoV) of  $2.4''$ , covered by  $6 \times 6$  CCD pixels. No read-out noise is considered for the detector. Another simulated parameter is kept fixed all along the study: the outer scale of the spatial coherence of the phase  $L_0 = 25\text{m}$  for von Kármán model of the turbulence. The value has been chosen close to the median value at Paranal.<sup>5</sup>

Performance of FrIM is investigated here with respect to fluctuations of a few characteristic parameters for the system: value of the computational power available, values of Fried's parameter  $r_0$  and coherence time  $\tau_0$ , DM misalignments and guide star magnitude. The default values considered for the simulations are  $r_0 = 13\text{cm}$  at  $0.5\mu\text{m}$ ,  $\tau_0 = 3\text{ms}$ , 1000 photons/subaperture/frame on average. A deviation from these values will be mentioned further when it occurs.

One must also notice that when FrIM is compared to MVM-I, the same seed is used in the simulation, leading to exactly the same realization of the random perturbations. The displayed results here come from a single closed-loop run for each simulation condition.

### 2.2 FrIM Implementation in OCTOPUS

FrIM particular architecture had to be linked with Octopus code. The left part of Fig. 1 illustrates the communication between the AO simulator and the control algorithm. The MVM-I control has been also tested on the same configurations with Octopus, and is sketched on the right part of Fig. 1. In both cases, the interface with the simulator consists of 2 vectors. Outputs of Octopus are the WFS data  $\mathbf{d}$  at the bottom of Fig. 1, and inputs to be sent to Octopus are the commands  $\mathbf{a}$ , on the top of Fig. 1.

The control analysis of a system always starts with a modeling of the process. In the case of AO systems, this means to model a DM, a WFS and possibly the perturbations statistics. Some approaches only require to model the global process, *i.e.* the combination of the DM and the WFS, thanks to an interaction matrix (IM) which can be calibrated observing a source without turbulence.<sup>6</sup> By the way, the MVM-I calibrates the IM  $\mathbf{G}_o$  on Octopus and applies a regularized inversion to compute a command matrix  $\mathbf{G}_o^+$ . Other approaches exist, based on a formal model of the DM and of the WFS. The IM can either be a full new model or just the combination of these two elementary models. FrIM relies on two linear sparse models,  $\mathbf{M}$  for the DM and  $\mathbf{S}$  for the WFS. The IM for FrIM is simply considered to be  $\mathbf{G} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}$ . Furthermore, according to Béchet *et al.*,<sup>3</sup> FrIM MAP reconstructor can be written as

$$\mathbf{E} = \mathbf{K} \cdot \left( \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mu_0 \mathbf{I} \right)^{-1} \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \quad (1)$$

where  $\mathbf{K}$  is FrIM fractal operator and  $\mu_0 = \sigma_e^2 (r_0/D)^{5/3}$ , with  $\sigma_e^2$  the variance of the errors on measurement model.  $\mathbf{K}$  is a sparse algorithm depending only on  $D/L_0$  and on the dimension of the sampled wavefront to estimate.  $\mu_0$  corresponds to the square of the inverse of the signal-to-noise ratio (SNR). Next, the fitting step of FrIM in Fig. 1 consists in applying  $\mathbf{M}^\dagger$ , the pseudo-inverse of the DM.

From Eq. (1), FrIM only requires *a priori* estimation of  $D/L_0$  and  $\mu_0$ . The simulations here are made assuming that the outer scale of the phase perturbations  $L_0$  is well-known. For a rough estimation of  $\mu_0$ , errors on measurement model are qualitatively assessed in the next section. As a consequence, both algorithms MVM-I and FrIM have a hyperparameter to be tuned to optimize the performance. While the MVM requires to adjust the integrator gain,  $\mu_0$  needs to be optimized for FrIM. At the moment, no automatic tuning was implemented for these hyperparameters. When unspecified, the integrator gain for the MVM-I method equals 0.45.

### 3. MODELS DISCREPANCIES AND ERRORS

The first interest in validating FrIM algorithm on an external AO simulator is to check for robustness of our previous studies<sup>1-3</sup> with respect to model discrepancies. This section enhances the distinct modeling approaches.

#### 3.1 Models of the Turbulence in the Atmosphere

Dealing with simulations for AO on ELTs, von Kármán's model of the turbulence in the atmosphere is used to take into account saturation of the structure function of the phase perturbations at large scale.<sup>5,7</sup> From this theoretical model, Octopus simulates turbulence thanks to an approximation of the spectral density of the phase perturbations in discrete layers distributed in altitude. The use of Fourier Transform (FT) leads to random turbulent wavefronts.<sup>8</sup> The simulated turbulence is characterized by 10 layers distributed from 0 to 18.5Km, with  $\sim 65\%$  of the turbulence strength concentrated up to 1.2Km of altitude above the telescope aperture.

The Fractal Iterative Method (FrIM) relies on a Bayesian approach assuming that the statistics of the turbulent perturbations can be approximated by a fractal description of the spatial covariance matrix of the phase.<sup>2</sup> Consistency of our priors with the signal is an interesting issue for not being a regularization methods based on Fourier space description of the turbulence (approximation with a Block Circulant matrix with Circulant Blocks).<sup>9</sup>

As far as we only test single-conjugate AO (SCAO), the system just sees the resulting optical path differences in the aperture plane  $\delta(x, y)$ , in radians.

#### 3.2 Models of the Shack-Hartmann WFS

Octopus simulates the sensing process according to wave propagation and diffraction theory, thus forming spots on the detector of each subaperture. Then, a center of gravity algorithm, without thresholding, is used to compute the displacement of the centroids of the spots.<sup>10</sup> The data  $\mathbf{d}$  coming from Octopus finally scale as optical path differences, in meters, between the two sides of each subaperture.

On the opposite, FrIM only relies on geometrical optics principle to describe the WFS. The theoretical angles of arrival, along  $x$  and  $y$  axis respectively, of the centroid obtained in a subaperture centered at coordinate  $(x_i, y_j)$  are

$$\alpha^x(i, j) = \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} [\delta(x_i + d/2, y_j + y) - \delta(x_i - d/2, y_j + y)] dy \quad (2)$$

$$\alpha^y(i, j) = \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} [\delta(x_i + x, y_j + d/2) - \delta(x_i + x, y_j - d/2)] dx \quad (3)$$

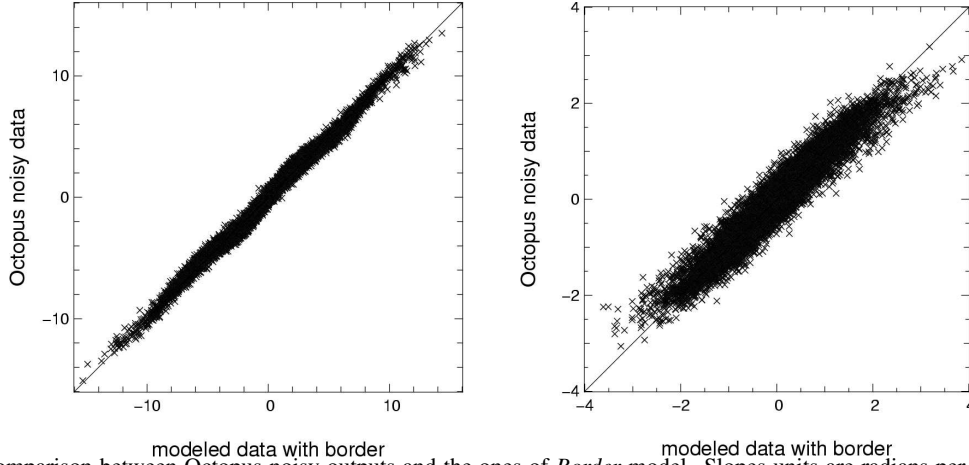


Figure 2. Comparison between Octopus noisy outputs and the ones of *Border* model. Slopes units are radians per subaperture. Solid line is plotted as a reference, for equal data. **On the left:** observing one turbulent wavefront, in open-loop. **On the right:** observing residuals, in closed-loop.

These angles of arrival can be converted into path differences between the two sides of a subaperture,  $d\alpha$  in meters.

The discrepancy between such geometrical approach and Octopus outputs is investigated thanks to 2 numerical models. Assuming that Octopus simulated phase screens are sampled in the pupil plane at the spatial frequency of  $N_{pix}/d$ , then the integral inside Eqs. (2) and (3) can be approximated by Riemann integration rule. We call this model *Border*, and it can be described as a sparse linear operator. Data in every subaperture result from the application of the sparse operation

$$\alpha_b^x(i, j) = \frac{1}{(N_{pix} - 1)d} \sum_{i=1}^{i=N_{pix}} \widehat{\delta}(i, N_{pix}) - \widehat{\delta}(i, 1) \quad (4)$$

$$\alpha_b^y(i, j) = \frac{1}{(N_{pix} - 1)d} \sum_{i=1}^{i=N_{pix}} \widehat{\delta}(N_{pix}, i) - \widehat{\delta}(1, i) \quad (5)$$

where  $\widehat{\delta}$  represents the small pattern of  $N_{pix} \times N_{pix}$  phase screens samples over the subaperture, extracted from Octopus full phase screens.

Figure 2 displays the discrepancies between Octopus data and *Border* model. On the left part, a turbulent wavefront is observed, providing the comparison of open-loop slopes. One should first notice the slight non linearities due to the large range of slopes values, and a non optimized pixel sampling on the CCD.<sup>10</sup> Photon noise is present in Octopus data, corresponding to an average flux of 1000 photons/subaperture/frame. The global error of *Border* model with respect to Octopus data, including model and measurement noise, appears approximately Gaussian, with zero-mean and an estimated variance of  $0.18 \text{ rad}^2/\text{subaperture}$ . On the right part of Fig. 2, closed-loop residual perturbations are observed. The non linearities disappear, since slopes values are small. The global noise associated to *Border* model in this configuration is slightly reduced, to an estimated variance of  $0.14 \text{ rad}^2/\text{subaperture}$ .

Unfortunately, *Border* model is both computationally too expensive and too accurate, to be involved in a wavefront reconstruction on extremely large telescopes. FrIM is a fast method, partly for using an approximate model of *Border*, an even sparser description usually called Fried's model. In Fried's approximation of the Shack-Hartmann device, the integral in Eqs. (2) and (3) is approximated by trapezoid numerical integration with just two values, at the corners. Then, the approximate angles of arrival can be written as

$$\alpha_j^x(i, j) = \frac{1}{2d} [\delta(x_i + d/2, y_j - d/2) + \delta(x_i + d/2, y_j + d/2) - \delta(x_i - d/2, y_j - d/2) - \delta(x_i - d/2, y_j + d/2)] \quad (6)$$

$$\alpha_j^y(i, j) = \frac{1}{2d} [\delta(x_i - d/2, y_j + d/2) + \delta(x_i + d/2, y_j + d/2) - \delta(x_i - d/2, y_j - d/2) - \delta(x_i + d/2, y_j - d/2)] \quad (7)$$

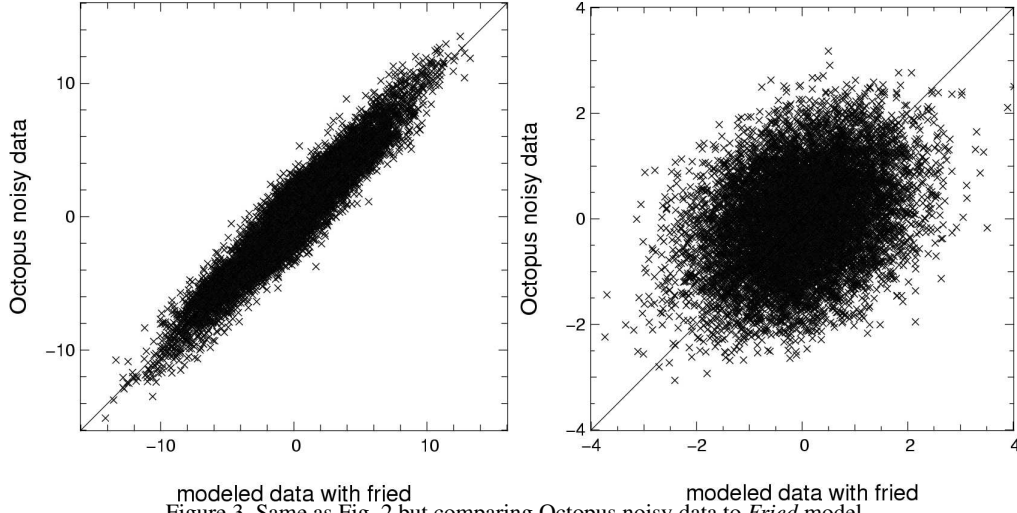


Figure 3. Same as Fig. 2 but comparing Octopus noisy data to *Fried* model.

This leads to the so-called *Fried* model  $\mathbf{S}$ , which is used by FrIM algorithm. The discrepancy between Octopus data and *Fried* model is illustrated by Fig. 3. As for *Border* model in Fig. 2, the left part corresponds to turbulent wavefront (open-loop) and the right one is obtained observing a residual phase screen. In both cases, the global error of the model can be described by a zero-mean Gaussian statistics. While in open-loop the global error variance reaches  $9.4 \text{ rad}^2/\text{subaperture}$ , the closed-loop configuration drops down the error variance to  $3.2 \text{ rad}^2/\text{subaperture}$ . The comparison of the right parts of Fig. 2 and 3 demonstrates the high aliasing contribution to the measurement error induced by *Fried*'s approximation for such a sampling  $d/r_0$ .

From Eq. (1), FrIM application can benefit from an estimation of the noise variance  $\sigma_e^2$  of the measurement model. There exists theoretical analysis of the error produced by aliasing<sup>11</sup> and of the photon noise contribution to the centroid uncertainties.<sup>10</sup> From such studies, one can try to find an analytical expression for the noise variance estimate. However, it was not the scope of the study to fully modelize what Octopus simulates, and on the contrary, one takes advantage here of the fact that FrIM only requires to adjust a global ratio  $\mu_0$  between data and priors weights.

### 3.3 Model of the Deformable Mirror

The simulated DM has analytical bilinear influence functions. Octopus and FrIM actually have exactly the same DM model, represented by the matrix  $\mathbf{M}$  or  $\mathbf{M}_o$ .

## 4. SIMULATIONS RESULTS

### 4.1 Convergence of FrIM

FrIM is an iterative method with fast convergence. It has been demonstrated that for signal-to-noise ratio and coherence time of the wavefront such that the reconstruction and the delay errors approximately equal, only one or two iterations are required to reach convergence.<sup>3</sup> The standard simulations conditions for FrIM on Octopus may slightly differ from this trade-off, this is why the first test consists in checking the convergence speed of the correction. For this, Fig. 4 illustrates the convergence curves of FrIM on Octopus, for several number of iterations allowed in the iterative method. If 1 iteration seems to provide a significant loss in performance, 2 iterations appears to be sufficient to reach convergence.

From computation considerations on FrIM method developed by B chet *et al.*,<sup>1</sup> 2 iterations of FrIM on this system in closed-loop implies  $\sim 1.58 \cdot 10^6$  floating points operations. Compared to MVM-I, FrIM requires 70 times less computations.



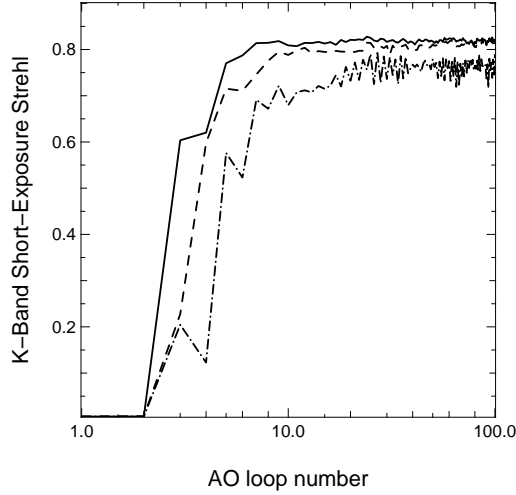


Figure 4. Short-Exposure Strehl ratio with FrIM correction in K-Band at  $2.2\mu\text{m}$ . Authorized number of iterations in the Fractal Iterative Method : 3 (solid), 2 (dash) and 1 (dot-dash).

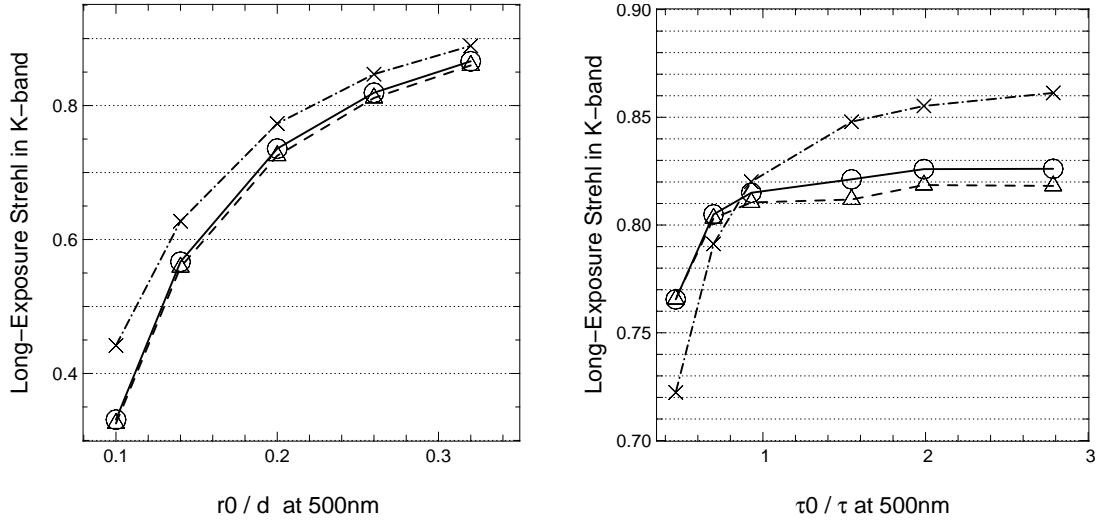


Figure 5. Long-Exposure Strehl ratio in K-band at  $2.2\mu\text{m}$ , depending on  $r_0$  value at 500nm (**on the left**) and on  $\tau_0$  value (**on the right**). A reference theoretical curve is plotted (*dotted-dashed line with crosses*) corresponding to the Strehl ratio assuming fitting and delay errors only. *Solid line with circles*: FrIM, with the Internal Model Control. *Dashed line with triangles*: MVM-I.

#### 4.2 Varying Seeing Conditions

FrIM performance is investigated now with respect to seeing conditions, *i.e.*  $r_0$  and  $\tau_0$  values. Figure 5 displays the long-exposure Strehl ratio evolution comparing FrIM and MVM-I controls. For both studies, FrIM and MVM-I demonstrate similar performance. On both sides of the figure, a reference curve is plotted in dotted-dashed line, which correspond to a theoretical estimate of the Strehl ratio assuming fitting and delay errors only.

According to Hudgin's study,<sup>12</sup> the variance of the error due to fitting of the bilinear DM on the turbulent wavefront can be written

$$\sigma_{\text{fitting}}^2 = 0.287(d/r_0)^{5/3}$$

An *experimental* coefficient of 0.26 has been computed from the SCAO configuration simulated here, applying the projection of Octopus turbulent phase screens on the DM actuators space. Our coefficient is slightly lower than Hudgin's

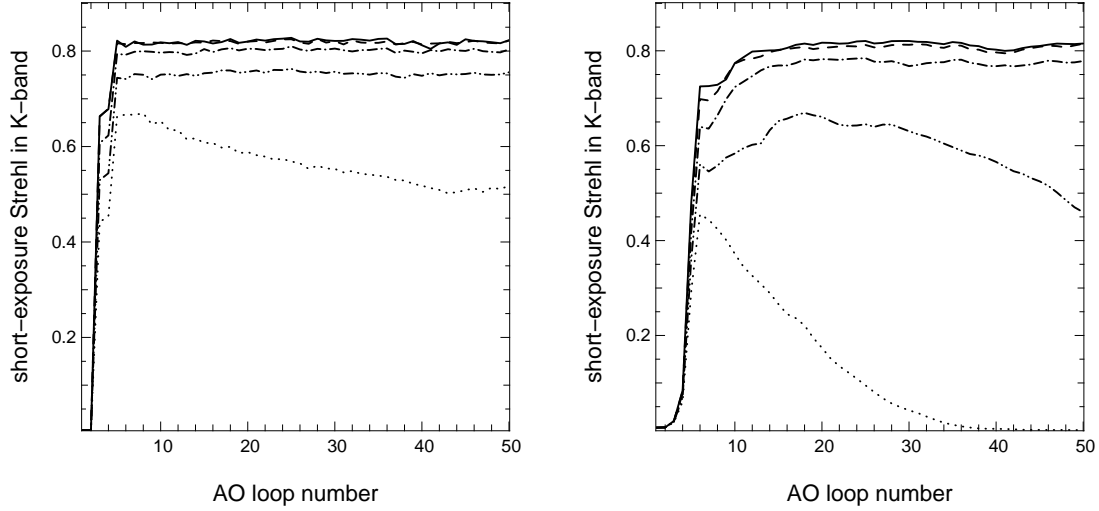


Figure 6. Short-exposure Strehl ratio in K-band at  $2.2\mu\text{m}$  along AO loops for several misalignments of the DM. **On the left** : FrIM with the IMC. **On the right** : MVM-I. For both methods, the simulated misalignments correspond to 0% (solid), 12.5% (dashed), 25% (dotted-dashed), 37.5% (dotted-dotted-dashed), 50% (dotted) of the subaperture size along one  $x$ -axis.

estimate. The discrepancy can be due to the use of von Kármán's model for the turbulence here, instead of Kolmogorov's one.

The delay error fluctuates with the characteristic wind speed of turbulence  $V$ , computed from a weighted integral of the layers wind speeds. For each simulated condition, the delay error can be estimated by

$$\sigma_{\text{delay}}^2 = 6.88(V\tau/r_0)$$

where  $\tau = 2\text{ms}$  is the AO system delay and  $r_0$  here is Fried's parameter at  $2.2\mu\text{m}$ .

FrIM as well as MVM-I performance with respect to  $r_0$  values are consistent with the reference curve (dotted-dashed line) accounting for delay and fitting errors. The reconstruction error produces the remaining discrepancy. When modifying the wind speeds of the turbulent layers, on the right part of Fig. 5, FrIM and MVM-I once again have similar behavior. However, for the largest delay errors, the reference curve is more pessimistic than the undergone simulation.

The conclusion of these tests is that even if FrIM only relies on an approximate model of the system, it is as efficient as a classical MVM-I method with its painful calibration of the IM on an ELT.

### 4.3 DM Misalignments

The impact of a particular model error is investigated now, which are the misalignments between DM actuators and the Shack-Hartmann lenslet grid. The error is generated translating the whole actuators grid of a certain percentage of the subaperture dimension, along  $x$ -direction. It is assumed that neither FrIM nor the calibrated IM have detected this model error.

Figure 6 presents the Strehl ratio convergence curves along the AO loops, depending on such DM misalignments. First, on the left part of Fig. 6, one can notice that FrIM shows an unstable behavior for a misalignment of 50% of a subaperture. On the opposite side of the figure, MVM-I is already unstable for 37.5% of a subaperture. So, FrIM is more stable with respect to DM misalignments than MVM-I method. Secondly, one can notice that the Strehl ratio with FrIM is less affected by the DM misalignments than in the case of MVM-I control. This greater robustness is consistent with the larger stability range observed previously.

### 4.4 Varying Guide Star Magnitude

Figure 7 illustrates the study of FrIM performance with guide star magnitude variations, and the comparison is made again with MVM-I control. On the right part of Fig. 7, the long-exposure Strehl ratio in K-band demonstrates that the two methods lead to similar performance, as far as subaperture extinctions are not dominant.

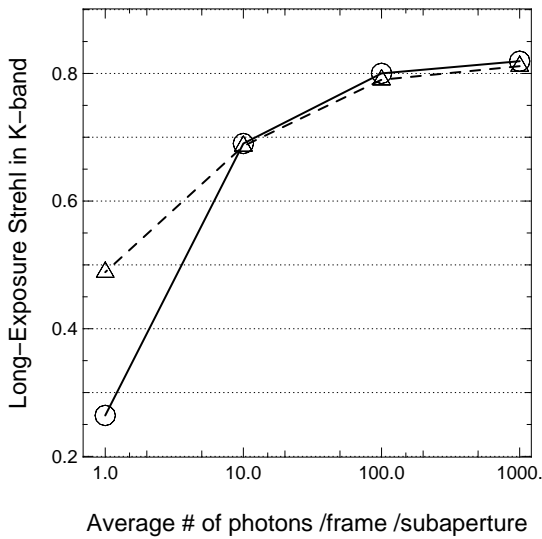


Figure 7. Long-Exposure Strehl ratio in K-band at  $2.2\mu\text{m}$ , depending on the guide star magnitude. Abscissae scales as the average number of photons received per subaperture and per frame. *Solid line with circles* : FrIM, with the IMC. *Dashed line with triangles* : MVM-I.

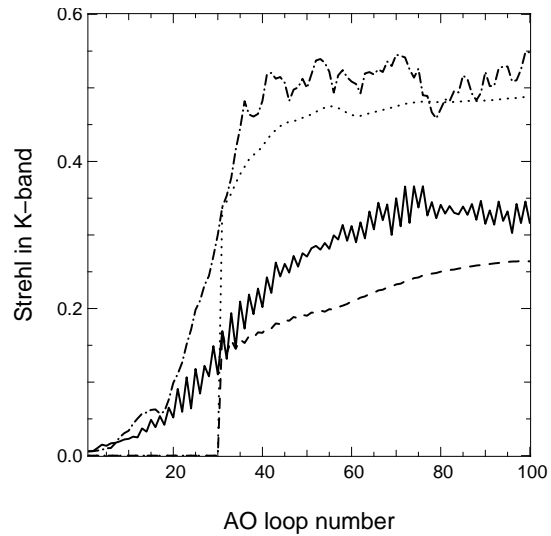


Figure 8. Evolution of the Strehl ratio in K-band at  $2.2\mu\text{m}$  along AO loops, for an average of 1 photon per subaperture per frame. Short-exposure Strehl is displayed during 100 loops. *Solid line* : FrIM, with the IMC. *Dotted-dashed line* : MVM-I. Long-exposure Strehl is displayed only after 30 loops. *Dashed line* : FrIM, with the IMC. *Dotted line* : MVM-I.

In the case of an average of 1 photon per subaperture per frame, on the right side of Fig. 7, FrIM does not even reach 30% of long-exposure Strehl after 100 AO loops, while the MVM-I already provides  $\sim 50\%$ . For the two methods, no flux information is provided to the algorithms and a null measurement is used where no photon is received. However, in case flux information is available, FrIM could take into account the non uniformity of the measurement errors adapted to every new data set, thanks to the number of photons received in each subaperture. Although not plotted here, no significant improvement of performance has been obtained with such a strategy. The low Strehl of FrIM for so few photons simply enhances the lack of a model for the temporal evolution of the turbulence in the current implementation of FrIM control. Strategies to include priors on turbulence temporal evolution inside FrIM control are currently under study.

## 5. CONCLUSION

FrIM algorithm in closed-loop has been successfully validated on Octopus, ESO end-to-end simulator. The tests demonstrated very good performance even with an approximate theoretical model for the sensing process, instead of calibrating a full interaction matrix. Furthermore, FrIM method requires 70 times less computations per loop than the MVM-I control for the simulated  $84 \times 84$  geometry of the SCAO system. FrIM is also more robustness with respect to DM misalignments than the MVM-I control, providing good correction until a shift of more than 35% of a subaperture is encountered.

Last, FrIM provides good correction when the guide star flux gets lower, until large subaperture extinctions occur. This is consistent with there is currently no particular strategy inside FrIM algorithm to take into account temporal prior knowledge on turbulence. As a consequence, each loop correction is based on very few relevant data. This temporal aspect of the control algorithm is the object of further tests to be done with FrIM on Octopus.

## ACKNOWLEDGMENTS

This activity is supported by the European Community (Framework Programme 6, ELT Design Study, contract No 011863).

## REFERENCES

- [1] Béchet, C., Tallon, M., and Thiébaud, E., "FRIM: minimum-variance reconstructor with a fractal iterative method," *Proc. SPIE* **6272** (2006).

- [2] Thiébaud, E. and Tallon, M., “Fast minimum variance wavefront reconstruction for extremely large telescopes,” *submitted to Journ.Opt.Soc.Am. A.* (2008).
- [3] Béchet, C., Tallon, M., and Thiébaud, E., “Closed-loop adaptive optics performance with frim,” in [*Adaptive Optics: analysis and methods*], *Proc. Opt. Soc. Am. Conf.: Vancouver BC.* (2007).
- [4] Le Louarn, M., Vérinaud, C., Korhikoski, V., Hubin, N., and Marchetti, E., “Adaptive optics simulations for the European Extremely Large Telescope,” *Proc. SPIE* **6272** (2006).
- [5] Ziad, A., Conan, R., Tokovinin, A., Martin, F., and Borgnino, J., “From the grating scale monitor to the generalized seeing monitor,” *Applied Optics* **39**, 5415 (2000).
- [6] Roddier, F., [*Adaptive Optics in Astronomy*], Cambridge University Press (1999).
- [7] Conan, R., *Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation à Haute Résolution Angulaire en Astronomie*, PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis (2000).
- [8] Le Louarn, M., Verinaud, C., and Korhikoski, V., “Simulation of MCAO on (extremely) large telescopes,” *Comptes Rendus Physique* **6**, 1070–1080 (2005).
- [9] Yang, Q., Vogel, C. R., and Ellerbroek, B. L., “Fourier domain preconditioned conjugate gradient algorithm for atmospheric tomography,” *Applied Optics* **45**(21), 5281–5293 (2006).
- [10] Thomas, S., Fusco, T., Tokovinin, A., Nicolle, M., Michau, V., and Rousset, G., “Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **371**, 323–336 (2006).
- [11] Rigaut, F., Véran, J.-P., and Lai, O., “An analytical model for shack-hartmann-based adaptive optics systems,” *Proc. SPIE* **3353**, 1038 (1998).
- [12] Hudgin, R. H., “Wave-front compensation error due to finite corrector-element size,” *J. Opt. Soc. Am.* **67**(3), 393–395 (1977).



# Conclusion

Les télescopes hectométriques constituent à proprement parler une nouvelle génération de télescopes. En effet, leurs dimensions imposées par un miroir primaire de plusieurs dizaines de mètres de diamètre sont révélatrices d'une volonté d'explorer l'univers à une nouvelle échelle. L'optique adaptative a un rôle essentiel dans la conception de ces nouveaux géants ; elle est le gage de leur suprématie. Pour cela, les concepts d'optique adaptative sont revisités et complexifiés.

Parmi les défis que posent ces grands télescopes pour l'optique adaptative, il y a la commande en temps réel d'un système de correction multivariables de plus en plus grand. Alors que la multiplication matrice-vecteur qui fait office sur les systèmes d'optique adaptative actuels montre ses limites, le travail présenté dans ce manuscrit ouvre de nouvelles perspectives pour commander de façon optimale et rapide un système d'optique adaptative à grand nombre de degrés de liberté. Trois grandes étapes peuvent être identifiées dans la construction de cette commande, qui correspondent aux trois grandes parties présentées : l'étude de la reconstruction optimale, l'étude de la loi de commande en boucle fermée et les tests de performance de cette méthode de commande.

Dans un premier temps, en analysant les défis spécifiques à la reconstruction de surface d'onde sur un grand nombre de paramètres, j'ai pu montrer que l'estimateur FrIM MAP permet un gain significatif en performance sur les reconSTRUCTEURS classiques. Typiquement, l'erreur de reconstruction peut être divisée par 2 en variance pour un faible rapport signal à bruit. L'analyse de l'impact des erreurs de modélisation et des erreurs d'*a priori* aide à comprendre comment tirer le meilleur profit du reconSTRUCTEUR FrIM MAP, en surestimant l'échelle externe de la turbulence ou en sous-estimant le poids des *a priori* par exemple.

Dans un deuxième temps, l'approche problème inverse poursuivie en boucle fermée a permis d'introduire une nouvelle loi de commande pour l'optique adaptative, FrIM CMI. Cette commande par modèle interne permet d'exploiter la méthode de reconstruction MAP rapide. Par ailleurs, pour cette méthode itérative, la configuration en boucle fermée réduit le coût calculatoire de la correction.

Enfin, la confrontation de cette loi de commande FrIM CMI au simulateur Octopus a confirmé les performances intéressantes de la méthode et une certaine robustesse de la commande. Elle a également mis en évidence ses lacunes à très faible flux et offre la possibilité de relier cette approche à d'autres commandes existantes, comme la commande de type *pseudo open-loop* (POLC).

La comparaison de FrIM CMI avec les commandes de type intégrateur, FTR-I et MMV-I, également implémentées sur Octopus met en évidence les atouts respectifs des diverses approches. Ceci est encore plus vrai pour les tests actuellement en cours sur le simulateur et qui ne sont pas présentés dans ce manuscrit. Ils concernent les prochaines difficultés à dépasser. D'une part, l'araignée d'un télescope hectométrique risque de

dissimuler des sous-pupilles entières derrière ses branches ce qui peut compromettre la correction si la reconstuction n'est pas régularisée de façon optimale. D'autre part, les premiers pas en optique adaptative de couche limite (OACL) sont amorcés. Même si la boucle d'optique adaptative a été fermée, les performances doivent encore être analysées.

## Cinquième partie

### Annexes





## Annexe A

# Fast Minimum Variance Wavefront Reconstruction for Extremely Large Telescopes

# Fast minimum variance wavefront reconstruction for extremely large telescopes

Eric Thiébaud and Michel Tallon

Université de Lyon, F-69000 Lyon, France; Université de Lyon 1, F-69622 Villeurbanne, France; Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, F-69561 Saint-Genis Laval cedex, France; CNRS, UMR 5574; Ecole Normale Supérieure de Lyon, F-69007 Lyon, France. \*

We present a new algorithm, FRIM (for FRactal Iterative Method), aiming at the reconstruction of the optical wavefront from measurements provided by a wavefront sensor. As our objective is adaptive optics on extremely large telescopes, our algorithm was designed with speed and best quality in mind. The latter being achieved thanks to regularization that enforces prior statistics. To solve the regularized problem, we use the conjugate gradient method which let us benefit from the sparsity of the wavefront sensor model matrix and avoids the storage and inversion of a huge matrix. The prior covariance matrix is however non-sparse and we derive a fractal approximation of the Karhunen-Loève basis thanks to which the regularization by Kolmogorov statistics can be computed in  $O(N)$  operations,  $N$  being the number of phase samples to estimate. Finally we propose an effective preconditioning which also scales as  $O(N)$  and yields the solution in 5–10 conjugate gradient iterations for any  $N$ . The resulting algorithm being therefore  $O(N)$ . As an example, for a  $128 \times 128$  Shack-Hartmann wavefront sensor, FRIM appears to be more than 100 times faster than classical vector-matrix multiplication method.

© 2008 Optical Society of America

OCIS codes: 010.7350, 100.3190, 110.1080.

## 1. Introduction

The standard and most used method for adaptive optics (AO) control is based on a vector-matrix multiply (VMM) of the vector of wavefront sensor measurements by the so-called control matrix [1]. This operation gives an update of the commands to be sent to the deformable mirrors to adjust the correction of the corrugated incoming wavefronts. The control matrix is precomputed, generally using modal control optimization [2]. The complexity of computing the control matrix by using standard methods scales as  $O(N^3)$ , where  $N$  is the number of unknowns (phase samples or actuator commands), and applying real time VMM scales as  $O(N^2)$ . This computational burden can be reasonably handled on current AO systems where  $N \lesssim 10^3$ .

For future Extremely Large Telescopes (ELT's), the considered numbers of actuators will be in the range  $10^4 - 10^5$ . This huge increase is the result of both the larger diameter of the ELT's [3] and the emergence of new architectures for the AO systems, either using a greater density of actuators (Extreme AO) or combining several deformable mirrors and wavefront sensors (multi-conjugate AO, multi-objects AO) [4]. The necessary computational power for real time control on such systems is currently unattainable when using standard methods.

More efficient algorithms are thus required and have been worked out in the recent years. Poyneer *et al.* [5] have derived an accurate Fourier transform wavefront reconstructor

by solving the boundary problem in circular apertures. This reconstructor scales as  $O(N \log N)$  and is shown to be effective for Extreme AO [6]. MacMartin [7] studied several approximated approaches like a multiple-layers hierarchic reconstruction scaling as  $O(N)$ .

Although least-square algorithms give suitable results for Single Star AO systems (classical AO or Extreme AO), minimum variance reconstruction is required to minimize the effects of the missing data or unseen modes in the other AO schemes [8]. In the context of minimum variance for multi-conjugate AO, Ellerbroek [9] could apply sparse matrix techniques (Cholesky factorization) by using a sparse approximation of the turbulence statistics, and by introducing as low-rank adjustments, the nonsparse matrix terms arising from the global tip/tilt measurement errors associated with laser guide stars. But the interactions of the layers in their tomographic modeling make the sparse direct decomposition methods not so efficient [10].

Iterative methods are also extensively studied in this context. Their main asset is to compute iteratively the unknowns from the measurements by using direct sparse matrices, so the storage of a precomputed inverse full matrix is no more necessary. One major problem with iterative methods is the increase of the number of iterations with the number of unknowns to estimate [11–13]. As an example, Wild *et al.* [14] have proposed to use the closed-loop AO system itself as an iterative processor, but the performance of the least squares reconstruction depends on the loop frequency of the AO system, which should be higher than usual.

The most successful iterative methods in AO are now based on preconditioned conjugate gradient (PCG) [15], where some

---

\*Corresponding author: thiebaut@obs.univ-lyon1.fr

of the approximated previous reconstruction methods are embedded as preconditioners to achieve a small number of iterations (see section 4). Gilles *et al.* [16] have described a multigrid PCG algorithm, mainly aimed at Extreme AO and scaling as  $O(N \log N)$ . The multigrid preconditioner is somehow related to the multiple-layers hierarchic reconstruction [7]. This wavefront reconstruction method has been improved with a faster approximation of the turbulence statistics, scaling as  $O(N)$  [17]. The multigrid PCG algorithm has also been developed for multi-conjugate AO [18]. In this case, the structure of the matrix is more complex and brings some limitations. More recently, a Fourier domain preconditioner was introduced [19, 20] in the context of multi-conjugate AO, with a faster reconstruction than multigrid PCG. In this case, the preconditioner is related to the Fourier transform wavefront reconstructor [5]. Both multigrid and Fourier domain preconditioners are examined for the Thirty Meter Telescope project [21].

In this work, we propose novel methods to address the two critical points previously seen in iterative methods for wavefront reconstruction: estimation of the atmospheric phase covariance matrix and preconditioning.

We need a sparse representation of the inverse of the atmospheric phase covariance matrix to efficiently introduce priors in the minimum variance estimator. Currently, we have the choice between a good representation in the Fourier domain with a  $O(N \log N)$  complexity [16, 20] and a widely used sparse biharmonic approximation introduced by Ellerbroek [9], less accurate [20], but scaling as  $O(N)$ . With FRM, we introduce a so-called ‘‘fractal operator’’ as a multiscale algorithm with  $O(N)$  complexity. This operator, both accurate and very fast, was inspired by the mid-point method of Lane *et al.* [22] to generate a Kolmogorov phase screen. It can be used for any wavefront structure function. It allows us to apply very efficiently the phase covariance matrix to any vector.

We show that this fractal operator is also very efficient when used as a preconditioner. It allows the wavefront reconstruction to be iteratively computed in the Karhunen-Loève space. We additionally use a classical Jacobi preconditioner, or a new ‘‘optimal diagonal preconditioner’’ to further improve the convergence: the number of iterations is finally  $\lesssim 10$  whatever the size of the system, with a number of floating point operations  $\sim 34 \times N$  per iteration. So the method is globally  $O(N)$ .

In the following, we first derive the analytical expression of the minimum variance restored wavefront and the equations to be solved. We then introduce the fractal operator allowing fast computation of the regularization term in an iterative method such as the conjugate gradients. We then propose two cheap preconditioners to yet speed up the iterative algorithm. Results are finally given through various numerical simulations.

## 2. Minimum variance solution

### A. Model of data

We assume that the wavefront sensor provides measurements of phase spatial derivatives (slopes or curvatures) linearly re-

lated to the wavefront seen by the sensor:

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{n} \quad (1)$$

where  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^M$  is the *data* vector provided by the sensor,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^M$  is the vector of sampled wavefront values,  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  is the sensor response matrix and  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^M$  accounts for the noise and model errors. This equation is general as long as the wavefront sensor is linear. As a typical case, we will however consider a Shack-Hartmann wavefront sensor with Fried’s geometry [23] in our simulations and for the evaluation of the efficiency of the algorithm.

### B. Optimal wavefront reconstructor

The estimation of the wavefront  $\mathbf{w}$  given the data  $\mathbf{d}$  is an inverse problem which must be solved by using proper regularization in order to improve the quality of the solution whereas avoiding noise amplification or ambiguities due to missing data [24]. In order to keep the problem as simple as possible, we first introduce the requirement that the solution be a linear function of the data, in other words, the restored wavefront writes:

$$\tilde{\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R} \cdot \mathbf{d} \quad (2)$$

where  $\mathbf{R}$  is the restoration matrix and  $\mathbf{d}$  the wavefront sensor measurements. Some quality criterion is needed to derive the expression of the restoration matrix  $\mathbf{R}$ . For instance, we can require that, on average, the difference between the restored wavefront  $\tilde{\mathbf{w}}$  and the true wavefront  $\mathbf{w}$  be as small as possible by minimizing  $\langle \|\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}\|^2 \rangle$  where  $\langle \cdot \rangle$  denotes the expected value of its argument. Interestingly, minimizing (on average) the variance of the residual wavefront yields the optimal Strehl ratio [25] since:

$$\text{SR} \simeq \exp\left(-\frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\text{pupil}} [\tilde{w}(\mathbf{r}) - w(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r}\right) \quad (3)$$

where  $\mathbf{r}$  is the position in the pupil,  $\mathcal{A}$  is the area of the pupil and  $w(\mathbf{r})$  is the wavefront phase in radian units. The *best* reconstruction matrix according to our criterion then writes:

$$\mathbf{R}^\dagger = \arg \min_{\mathbf{R}} \langle \|\mathbf{R} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{w}\|^2 \rangle. \quad (4)$$

Accounting for the facts that the wavefront  $\mathbf{w}$  and the errors  $\mathbf{n}$  are uncorrelated and have zero means, *i.e.*  $\langle \mathbf{n} \rangle = 0$  and  $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$ , the minimum variance reconstructor expands as [26]:

$$\mathbf{R}^\dagger = \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^T + \mathbf{C}_n)^{-1}, \quad (5)$$

where  $\mathbf{C}_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T \rangle$  is the covariance matrix of the errors and  $\mathbf{C}_w \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^T \rangle$  is the *a priori* covariance matrix of the wavefront. Applying this reconstructor to the data  $\mathbf{d}$  requires to solve a linear problem with as many equations as there are measurements. Generally, wavefront sensors provide more measurements than wavefront samples (about twice as many for a Shack-Hartmann or a curvature sensor). Fortunately, making use of Sherman-Morrison-Woodbury formula [27], the expression in Eq. (5) can be rewritten as:

$$\mathbf{R}^\dagger = (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \quad (6)$$

which involves solving just as many linear equations as there are wavefront samples. The linear reconstructor defined in Eq. (6) is the expression to be preferred in our case.

### C. Links with other approaches

Using expression in Eq. (6) for the reconstructor, the minimum variance restored wavefront writes:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^\dagger &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}^\dagger \cdot \mathbf{d} \\ &= (\mathbf{S}^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d} \end{aligned}$$

which is also the solution of the quadratic problem:

$$\mathbf{w}^\dagger = \arg \min_{\mathbf{w}} \{ (\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{d})^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{d}) + \mathbf{w}^\text{T} \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \cdot \mathbf{w} \}$$

where  $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{d})^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{d})$  is the so-called  $\chi^2$  which measures the discrepancy between the data and their model and  $\mathbf{w}^\text{T} \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \cdot \mathbf{w}$  is a Tikhonov regularization term which enforces *a priori* covariance of the unknowns. Thus Eq. (6) is also the result of the maximum a posteriori (MAP) problem. The usual hyper-parameter is here hidden in  $\mathbf{C}_w$  which is proportional to  $(D/r_0)^{5/3}$ , where  $r_0$  is the so-called Fried's parameter [28]. As already noticed by other authors (see *e.g.* Rousset [29]), minimum variance estimator is directly related to Wiener optimal filtering.

Actual adaptive optics systems make use of some expansion of the wavefront on a basis of modes, regularization being achieved by setting to zero the ill-conditioned modes. This technique is similar to truncated singular value decomposition (TSVD) [29]. Since truncature results in aliasing, we expect that the MAP solution be a better approximation of the wavefront. A somewhat smoother effect than crude mode truncature could be obtained by solving:

$$\mathbf{w}_\mu = \arg \min_{\mathbf{w}} \{ (\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{d})^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{d}) + \mu \|\mathbf{w}\|^2 \}$$

where hyper-parameter  $\mu$  allows to tune the regularization level required to avoid noise amplification [24].

### D. Iterative Method

Computing the optimal wavefront can be done in different ways. For instance, the matrix  $\mathbf{R}$  can be computed once, according to Eq. (5) or Eq. (6), and then applied to every data set  $\mathbf{d}$ . Since it requires the numerical inversion of a  $N \times N$  matrix, the direct computation of  $\mathbf{R}$  scales as  $\mathcal{O}(N^3)$  operations [12]. The reconstructor  $\mathbf{R}$  is a  $N \times M$  matrix and is not sparse in practice. Hence, the storage of  $\mathbf{R}$  requires  $MN \approx 2N^2$  floating point numbers and computing  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{d}$  requires  $\approx 2MN \approx 4N^2$  floating point operations. For large numbers of degrees of freedom  $N \propto (D/r_0)^2$ , the computer time spend by the matrix-vector multiplication can be too long for real time applications. Moreover the memory requirement (*e.g.* for  $N \approx 10^4$ , 1.5 Gb of memory are needed to store  $\mathbf{R}$ ) may be such that memory page faults dominate the computation time of matrix-vector multiplication.

To avoid the direct matrix inversion and the plain matrix-vector product required by the explicit computation of  $\mathbf{R}$ , we

```

initialisation:
  compute  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0$  for some initial guess  $\mathbf{x}_0$ 
  let  $k = 0$ 
until convergence do
  solve  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k$  for  $\mathbf{z}_k$            (apply preconditioner)
   $\rho_k = \mathbf{r}_k^\text{T} \cdot \mathbf{z}_k$ 
  if  $k = 0$ , then
     $\mathbf{p}_k = \mathbf{z}_k$ 
  else
     $\mathbf{p}_k = \mathbf{z}_k + (\rho_k/\rho_{k-1}) \mathbf{p}_{k-1}$ 
  endif
   $\mathbf{q}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_k$ 
   $\alpha_k = \rho_k / (\mathbf{p}_k^\text{T} \cdot \mathbf{q}_k)$            (optimal step size)
   $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$ 
   $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{q}_k$ 
   $k \leftarrow k + 1$ 
done

```

Fig. 1. Preconditioned conjugate gradient algorithm for solving  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  where  $\mathbf{A}$  is a symmetric positive definite matrix and  $\mathbf{M}$  is a preconditioner. The unpreconditioned version of the algorithm is simply obtained by taking  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ , hence  $\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k$ .

use an iterative method to solve the linear system

$$(\mathbf{S}^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d} \quad (7)$$

which leads to the optimal wavefront  $\mathbf{w}$  for every data set  $\mathbf{d}$ . For the purpose of the discussion, Eq. (7) can be put in the more generic form:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (8)$$

where, in the case of Eq. (7),  $\mathbf{x} = \mathbf{w}$  and:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1} \quad (9)$$

is the so-called left hand side matrix, whereas

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}^\text{T} \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d} \quad (10)$$

is the so-called left hand side vector.

Barrett *et al.* [15] have reviewed a number of iterative algorithms for solving a linear system like (8). An advantage of these methods is that they do not explicitly require the matrix  $\mathbf{A}$ : it is sufficient to be able to compute the product of matrix  $\mathbf{A}$  (or its transpose) with any given vector. The iterative algorithm therefore fully benefits from the possibility to compute the matrix-vector products in much less than  $\mathcal{O}(N^2)$  operations when  $\mathbf{A}$  is sparse or has some special structure. This is specially relevant in our case since applying  $\mathbf{A}$  can be achieved by very cheap matrix-vector products as shown in Sect. 2E and Sect. 2F. The drawback of iterative methods is that the computational burden scales as the number of iterations required to approximate the solution with a sufficient precision. In the worst cases, the number of iterations can theoretically be as high as the number of unknown  $N$  [12, 13]. In practice and because of numerical rounding errors, ill-conditioning of the system in Eq. (7) can result in a much higher number of iterations, even on small systems. This problem can however be greatly reduced by means of a good preconditioner [13, 15].

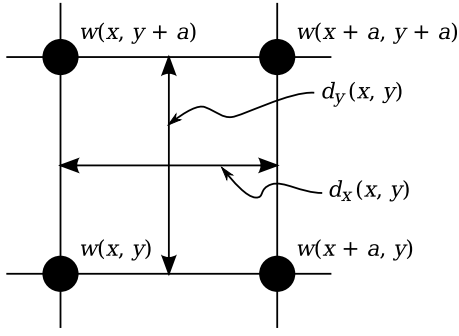


Fig. 2. Wavefront sensor with Fried's geometry as used for our simulations. The black circles stand for phase samples  $w(x, y)$ , at the corners of the square subapertures of size  $a$ . This model is exact if we assume that the wavefront at any point in the pupil is obtained from a bilinear interpolation of phase samples at the corner of the subapertures.

By construction,  $\mathbf{A}$  given by Eq. (9) is a symmetric positive definite matrix and the conjugate gradient (CG) [15] is the iterative method of choice to solve the system in Eq. (8). Figure 1 shows the steps of the CG algorithm to solve the system  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . This method is known to have a quadratic convergence rate, and can be accelerated by using a proper preconditioner  $\mathbf{M} \approx \mathbf{A}$  for which solving  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{r}$  for  $\mathbf{z}$  is much cheaper than solving Eq. (8) for  $\mathbf{x}$ . The preconditioner can also be directly specified by its inverse  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}^{-1}$  such that  $\mathbf{Q} \approx \mathbf{A}^{-1}$  and then  $\mathbf{z} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}$  in the CG algorithm. Without a preconditioner, taking  $\mathbf{M} = \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , where  $\mathbf{I}$  is the identity matrix, yields the unpreconditioned version of the CG algorithm. In Sect. 4 we investigate various means to obtain an effective preconditioner for the wavefront reconstruction problem.

In the remaining of this section, we derive means to quickly compute the dot product with the matrix  $\mathbf{A}$  in Eq. (9). To that end, we consider separately the Hessian matrix  $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \cdot \mathbf{S}$  of the likelihood term and that of the regularization term  $\mathbf{C}_w^{-1}$ .

#### E. Computation of the likelihood term

Most adaptive optics systems use either a Shack-Hartmann sensor which provides measurements of the local gradient of the wavefront or a curvature sensor which measures the local curvature of the wavefront [1]. Since such sensors probe local spatial derivatives of the wavefront, their response can be approximated by local finite differences which yields a very sparse linear operator  $\mathbf{S}$ . Though some non-sparse matrix terms can appear due to tilt indetermination with laser guide stars or to accounting of natural guide star tip/tilt sensors. Owing to the low rank of these modes, sparse matrix models can still be applied [9]. Thus, denoting  $N_{\text{dif}}$  the number of wavefront samples required to compute the local finite differences, only  $\approx M \times N_{\text{dif}}$  out of  $M \times N$  coefficients of  $\mathbf{S}$  are non-zero. For instance, Fig. 2 shows the Fried's geometry of the Shack-Hartmann sensor model [23] which we used in our numerical simulations. The error free slopes are related to the wavefront

by:

$$\begin{aligned} d_x(x, y) &= \frac{1}{2} [w(x+a, y+a) + w(x+a, y) \\ &\quad - w(x, y+a) - w(x, y)] \\ d_y(x, y) &= \frac{1}{2} [w(x+a, y+a) - w(x+a, y) \\ &\quad + w(x, y+a) - w(x, y)] \end{aligned} \quad (11)$$

where  $(x, y)$  are the pupil coordinates,  $d_x$  and  $d_y$  are the slopes along the  $x$  and  $y$  directions and  $a$  is the sampling step. Hence  $N_{\text{dif}} = 4$ , in our case, whatever the number of degree of freedoms is. Besides, to a good approximation, wavefront sensors provide uncorrelated measurements [1], hence the covariance matrix  $\mathbf{C}_n$  of the errors can be taken as a diagonal matrix:

$$\mathbf{C}_n \approx \text{diag}(\text{Var}(n)) \quad (12)$$

where  $\text{Var}(n)$  is the vector of noise and error variances. Since  $\mathbf{C}_n$  is diagonal, its inverse  $\mathbf{C}_n^{-1}$  is diagonal and trivial to compute. Finally, the matrices  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{C}_n^{-1}$  are sparse and such that the dot product by  $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S}$  can be computed in  $O(N)$  operations.

#### F. Fast estimation of the regularization term

Unlike  $\mathbf{C}_n$  and  $\mathbf{C}_n^{-1}$ , neither  $\mathbf{C}_w$  nor  $\mathbf{C}_w^{-1}$  are sparse. In spite of this, we introduce here a way to derive an approximation for  $\mathbf{C}_w^{-1}$  so that it can be applied to a vector with a small number of operations.

By spectral factorization of  $\mathbf{C}_w$  which is a real symmetric matrix, the covariance of the wavefront can be written:

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Z}^T$$

where  $\mathbf{Z}$  is an orthogonal matrix, *i.e.*  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{I}$ , of which the columns form an orthonormal basis of eigenvectors of  $\mathbf{C}_w$  and  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  is a diagonal matrix of which the diagonal entries are the eigenvalues of  $\mathbf{C}_w$ . Being a covariance matrix,  $\mathbf{C}_w$  is positive definite and all its eigenvalues are strictly positive. Hence:

$$\mathbf{C}_w^{-1} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{Z}^T,$$

where  $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_N)$ . Then the regularization term writes:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{w} \\ &= \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{w}\|_2^2, \end{aligned}$$

where  $\mathbf{\Lambda}^{-1/2} = \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_N^{-1/2})$ . Introducing the new variables:

$$\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{w} \quad \text{with} \quad \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \cdot \mathbf{Z}^T, \quad (13)$$

the regularization term simply writes:

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{C}_w^{-1} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{u}\|_2^2. \quad (14)$$

Reciprocally, given the variables  $\mathbf{u}$ , the wavefront is obtained by:

$$\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad \text{with} \quad \mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Lambda}^{1/2}. \quad (15)$$

With this definition of  $\mathbf{K}$ , the covariance of the wavefront writes:

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T. \quad (16)$$

The expected value of  $\mathbf{u}$  is  $\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{K}^{-1} \cdot \langle \mathbf{w} \rangle = \mathbf{0}$  and the covariance of  $\mathbf{u}$  is the identity matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_u &= \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T \rangle = \mathbf{K}^{-T} \cdot \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^T \rangle \cdot \mathbf{K}^{-1} \\ &= \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

This gives rise to a method for generating a wavefront since it is sufficient to generate a set  $\mathbf{u}$  of  $N$  independent random values following a normal law,  $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , and to take  $\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$  to obtain a random wavefront with the proper covariance. In other words, the columns of  $\mathbf{K}$  form a Karhunen-Loève basis of the random values  $\mathbf{w}$ . This method for generating a turbulent wavefront has been introduced by Roddier [30] for the Zernike polynomials expansion of the wavefront. The drawback of using the Karhunen-Loève basis, is that it requires to inverse a potentially huge  $N \times N$  matrix  $\mathbf{C}_w$ . For the purpose of simulating turbulent wavefronts and observing that they have a fractal structure, Lane *et al.* [22] have shown that  $\mathbf{K}$  can be approximated in  $O(N)$  operations by a mid-point algorithm. By using a similar algorithm the regularization term can be computed in only  $O(N)$  operations as shown in the following.

### 3. Fractal operators

#### A. Principle and structure function

The mid-point algorithm [22] starts at the largest scales of the wavefront and step-by-step builds smaller scales by interpolating the wavefront values at the previous scale and by adding a random value with a standard deviation computed so that the new wavefront values and their neighbors have the proper structure function. Using  $\mathbf{K}_j$  to denote the linear operator which generates the wavefront values at  $j$ -th scale, the linear operator  $\mathbf{K}$  can be factorized as:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{K}_p \quad (17)$$

where  $p$  is the number of scales,  $\mathbf{K}_p$  generates the 4 outermost wavefront values and  $\mathbf{K}_1$  generates the wavefront values at the finest scale. The original mid-point algorithm cannot be used directly for our needs because it is not invertible. In this section, we reconsider the mid-point algorithm to derive new expressions of the  $\mathbf{K}_j$ 's such that they are sparse, invertible and such that their inverses are also sparse.

The structure function of the wavefront is the expected value of the quadratic difference between two phases of a turbulent wavefront:

$$\langle [w(\mathbf{r}_i) - w(\mathbf{r}_j)]^2 \rangle = f(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (18)$$

It is stationary (shift-invariant) and isotropic since it only depends on the distance  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  between the considered positions  $\mathbf{r}_i$  and  $\mathbf{r}_j$  in the wavefront. For a turbulent wavefront obeying Kolmogorov's law:

$$f(r) = 6.88 \times (r/r_0)^{5/3} \quad (19)$$

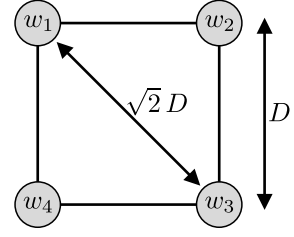


Fig. 3. The four initial values for wavefront generation, at the corners of the support.

From the structure function, we can deduce the covariance of the wavefront between two positions in the pupil:

$$C_{i,j} = \langle w_i w_j \rangle = \frac{1}{2} (\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - f_{i,j})$$

where  $w_i = w(\mathbf{r}_i)$  is the wavefront phase at position  $\mathbf{r}_i$  with variance  $\sigma_i^2 = \text{Var}(w_i)$  and where  $f_{i,j} = f(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$  is the value of the structure function for a distance  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ . The wavefront variances (thus the covariance) are not defined for pure Kolmogorov statistics but could be defined by other models of the turbulence such as the von Kármán model. Nevertheless, any structure function  $f$  can be used by our algorithm: in case the variance is undefined, we will show that the  $\sigma_i^2$ 's appear as free parameters and that choosing suitable variance values is not a problem.

#### B. Generation of outermost values

The first point to address is the initialization of the mid-point recursion, that is the generation of the four outermost corner values. Lane *et al.* [22] used 6 random values to generate the 4 initial corners. It is however required to use exactly the same number of random values  $\mathbf{u}$  as there are wavefront samples in  $\mathbf{w}$  otherwise the corresponding linear operator  $\mathbf{K}$  cannot be invertible. This is possible by slightly modifying their original algorithm.

The four initial wavefront values (Fig. 3) have the following covariance matrix:

$$\mathbf{C}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{cases} c_0 = \sigma^2 \\ c_1 = \sigma^2 - f(D)/2 \\ c_2 = \sigma^2 - f(\sqrt{2}D)/2 \end{cases}$$

where  $\sigma^2$  is the variance (assumed to be the same) of the four initial phases and where  $D$  is the distance between points 1 and 2 (see Fig. 3). Having the same variances  $\sigma^2$  for the four outermost wavefront phase seems natural since none of these points play a particular role. For the four outer wavefront samples, the matrix of eigenvectors is:

$$\mathbf{Z}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Note that the eigenvectors (columns) defined on these four

samples are (in order) *piston*, *waffle* [7], *tip* and *tilt*. The eigenvalues are:

$$\lambda_{\text{out}} = \begin{pmatrix} c_0 + 2c_1 + c_2 \\ c_0 - 2c_1 + c_2 \\ c_0 - c_2 \\ c_0 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sigma^2 - f(D) - f(\sqrt{2}D)/2 \\ f(D) - f(\sqrt{2}D)/2 \\ f(\sqrt{2}D)/2 \\ f(\sqrt{2}D)/2 \end{pmatrix}.$$

In case of pure Kolmogorov statistics,  $\sigma^2$  must be chosen so that  $\mathbf{K}$  is invertible. This is achieved if the eigenvalue of the *piston*-like mode is strictly positive, hence:

$$\sigma^2 > f(D)/4 + f(\sqrt{2}D)/8.$$

We have chosen  $\sigma^2$  so that the smallest covariance, which is  $c(\sqrt{2}D)$  between the most remote points, is exactly zero:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} f(\sqrt{2}D). \quad (20)$$

Of course, when a von Kármán model of turbulence is chosen, both  $\sigma^2$  and  $f$  are fixed by the model; Eq. (20) is to be used only for Kolmogorov case.

The operators  $\mathbf{K}_{\text{out}}$  and  $\mathbf{K}_{\text{out}}^{-1}$  write:

$$\mathbf{K}_{\text{out}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & -b & -c & 0 \\ a & b & 0 & -c \\ a & -b & c & 0 \\ a & b & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{\text{out}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/a & 1/a & 1/a & 1/a \\ -1/b & 1/b & -1/b & 1/b \\ -2/c & 0 & 2/c & 0 \\ 0 & -2/c & 0 & 2/c \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\text{with: } a = \sqrt{4\sigma^2 - f(D) - f(\sqrt{2}D)/2}, \\ b = \sqrt{f(D) - f(\sqrt{2}D)/2}, \\ c = \sqrt{f(\sqrt{2}D)}.$$

The operator  $\mathbf{K}_{\text{out}}$  is a *compact* version of  $\mathbf{K}_p$  in Eq. (17):  $\mathbf{K}_p = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{K}_{\text{out}} \cdot \mathbf{P}$  where  $\mathbf{P}$  is the  $4 \times N$  linear operator which selects the values in  $\mathbf{u}$  (or  $\mathbf{w}$ ) corresponding to the outermost corners. Obviously  $\mathbf{K}_p$  is a sparse operator (only 12 non-zero coefficients out of  $N \times N$ ). The inverse of  $\mathbf{K}_p$  is  $\mathbf{K}_p^{-1} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{K}_{\text{out}}^{-1} \cdot \mathbf{P}$  which has the same sparsity.

### C. Generation of wavefront samples at smaller scales

Given the wavefront with a sampling step  $r$ , the mid-point algorithm generates a refined wavefront with a sampling of  $r/2$  by a perturbed interpolation:

$$w_0 = \alpha_0 u_0 + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j w_j \quad (23)$$

where  $w_0$  is the wavefront value at the mid-point position,  $u_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  is a normally distributed random value and  $N_{\text{int}}$  is the number of wavefront samples from the previous scale which are used to generate the new sample (see Fig. 4). Equation (23) comes from a generalization of the principle of the original mid-point algorithm. Since we proceed from the

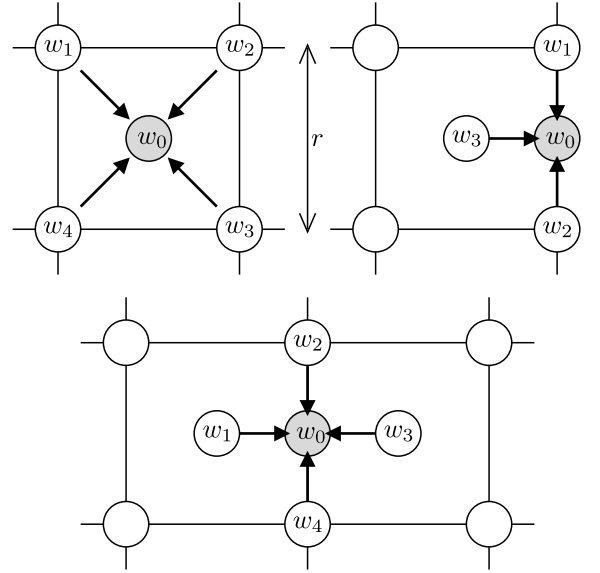


Fig. 4. Wavefront refinement. To generate a grid with cell size  $r/2$ , new values (in gray) are generated from wavefront values (in white) of a grid with cell size equal to  $r$ . Top left: new value from 4 values  $r/\sqrt{2}$  apart. Top right: new edge value from 3 values  $r/2$  apart. Bottom: new value from 4 values  $r/2$  apart.

largest scale to smaller ones, all the operations can be done *in-place*: the value of  $w_0$  computed according to Eq. (23) replacing that of  $u_0$ . It is then immediately apparent that a random wavefront computed by this algorithm scales as  $\mathcal{O}(N_{\text{int}} \times N) = \mathcal{O}(N)$  since the number of neighbors  $N_{\text{int}} \sim 4$  does not depend on the number of wavefront samples  $N$ .

The  $N_{\text{int}} + 1$  scalars  $\alpha_j$  have to be adjusted so that the structure function between  $w_0$  and any of the  $w_{i=1, \dots, N_{\text{int}}}$  matches the chosen one:

$$f_{i,0} \stackrel{\text{def}}{=} \langle (w_0 - w_i)^2 \rangle \\ = \alpha_0^2 + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j f_{i,j} - \sum_{1 \leq j < k \leq N_{\text{int}}} \alpha_j \alpha_k f_{j,k} \\ + \left( 1 - \sum_{k=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_k \right) \left( \sigma_i^2 - \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j \sigma_j^2 \right) \quad (24)$$

where  $f_{i,j} = f(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$  and  $C_{i,j} = \langle w_i w_j \rangle$  are the structure function and covariance between wavefront samples  $i$  and  $j$ , and where  $\sigma_i^2 = C_{i,i}$  is the variance of sample  $i$ . Note that to obtain Eq. (24) we have accounted for the fact that  $u_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  and hence  $\langle u_0^2 \rangle = 1$  and, since  $u_0$  and  $w_{j=1, \dots, N_{\text{int}}}$  are uncorrelated,  $\langle u_0 w_{j=1, \dots, N_{\text{int}}} \rangle = 0$ . This makes  $N_{\text{int}}$  equations, whereas there are  $N_{\text{int}} + 1$  unknown parameters  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{N_{\text{int}}}\}$ : an additional constraint is needed.

In original mid-point algorithm, Lane *et al.* [22] choose to normalize the sum of the interpolation coefficients and use the constraint that  $\sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j = 1$ . In that case, Eq. (24) simplifies



and the coefficients are obtained by solving:

$$f_{i,0} = \alpha_0^2 + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j f_{i,j} - \sum_{1 \leq j < k \leq N_{\text{int}}} \alpha_j \alpha_k f_{j,k} \quad (25)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j = 1.$$

Note that all the variances  $\sigma_j^2$  are implicit with these constraints.

We consider here another constraint which is to have the same variance, says  $\sigma^2$ , for all the wavefront samples. In other words, we consider wavefront with stationary (shift-invariant) statistical properties. This is justified by the objective to reconstruct phase corrugations in several layers for atmospheric tomography. With this choice, the additional equation is provided by  $\langle w_0^2 \rangle = \sigma^2$  and the interpolation coefficients  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{N_{\text{int}}}\}$  are obtained by solving the system of  $N_{\text{int}} + 1$  equations:

$$f_{i,0} = \alpha_0^2 + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j f_{i,j} - \sum_{1 \leq j < k \leq N_{\text{int}}} \alpha_j \alpha_k f_{j,k} + \sigma^2 \left( 1 - \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j \right)^2 \quad \text{for } i = 1, \dots, N_{\text{int}}$$

$$\sigma^2 = \alpha_0^2 + \sigma^2 \left( \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j \right)^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq N_{\text{int}}} \alpha_j \alpha_k f_{j,k}.$$

The system can be further simplified to:

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} (2\sigma^2 - f_{i,j}) \alpha_j = 2\sigma^2 - f_{i,0} \quad \text{for } i = 1, \dots, N_{\text{int}} \quad (26)$$

$$\alpha_0^2 = \left[ 1 - \left( \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j \right)^2 \right] \sigma^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq N_{\text{int}}} \alpha_j \alpha_k f_{j,k},$$

where the first  $N_{\text{int}}$  equations form a linear system which must be solved to obtain the  $\alpha_{j=1, \dots, N_{\text{int}}}$  and where substituting these values in the last equation yields the value of  $\alpha_0$ . It is worth noting that by using the covariances instead of the structure function, the system in Eq. (26) is equivalent to:

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} C_{i,j} \alpha_j = C_{0,i} \quad \text{for } i = 1, \dots, N_{\text{int}} \quad (27)$$

$$\alpha_0^2 = \sigma^2 - \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} C_{0,j} \alpha_j.$$

The expressions of the interpolations coefficients for the different cases illustrated by Fig. 4 are derived in Appendix A. To assess the accuracy of the statistics approximated by the fractal operator, we have computed the structure function of phase screens  $\mathbf{w}$  computed by our implementation of the mid-point algorithm, *i.e.* as  $\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$  with  $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Figure 5 shows that the 2D structure function is almost isotropic and demonstrates the good agreement of our approximation with the theoretical law.

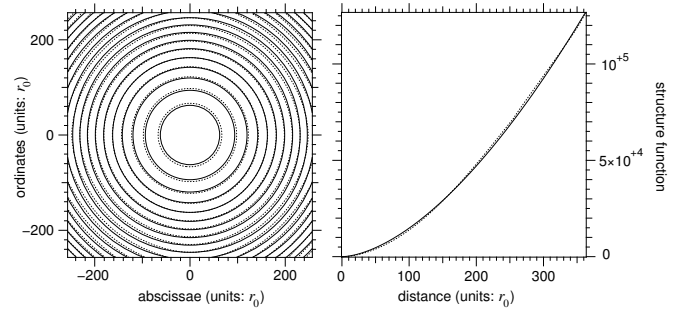


Fig. 5. Structure function. *Left*: 2D isocontours; *right*: 1D profile computed by radial averaging. *Solid lines*: Kolmogorov law  $6.88 \times (r/r_0)^{5/3}$ ; *dotted lines*: average of 1000 structure functions generated with the mid-point method.

#### D. The inverse operator

According to the factorization in Eq. (17), the inverse of  $\mathbf{K}$  is:

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}_p^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{K}_2^{-1} \cdot \mathbf{K}_1^{-1}. \quad (28)$$

In section 3 B, the inverse of the outermost operator  $\mathbf{K}_p$  has been derived and shown to be sparse — see Eq. (22). To compute the  $\mathbf{K}_j^{-1}$ 's for the inner scales ( $j < p$ ), it is sufficient to solve Eq. (23) for  $\mathbf{u}_0$ , which trivially yields:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{\alpha_0} \left( \mathbf{w}_0 - \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_j \mathbf{w}_j \right), \quad (29)$$

where  $\{w_1, \dots, w_{N_{\text{int}}}\}$  are the neighbors of  $w_0$  (Fig. 4). Since in Eq. (29), the  $u_j$ 's only depends on the  $w_j$ 's, the  $\mathbf{K}_j^{-1}$ 's can be applied in any order. However, by proceeding from the smallest scales toward the largest ones as in Eq. (28), the operator  $\mathbf{K}^{-1}$  can be performed *in-place*. This property may be important to avoid memory page faults and to speed-up the computation. Finally, from Eq. (21) and Eq. (29), it is clear that applying the  $\mathbf{K}_j^{-1}$ 's require exactly as many operations as for the  $\mathbf{K}_j$ 's and that computing  $\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{u}$  requires  $\mathcal{O}(N)$  operations.

#### E. The transpose operator

Iterating from the smallest scale to the largest one, it is easy to derive an algorithm to apply the transpose operator  $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}_p^T \cdot \dots \cdot \mathbf{K}_2^T \cdot \mathbf{K}_1^T$  to a given vector. The following algorithm computes  $\mathbf{z} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{v}$  for any input vector  $\mathbf{v}$ :

```

copy input vector:  $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{v}$ 
for the smallest scale to the largest scale, do
  for  $j = 1, \dots, N_{\text{int}}$  do
     $\mathbf{z}_j \leftarrow \mathbf{z}_j + \alpha_j \mathbf{z}_0$ 
  done
 $\mathbf{z}_0 \leftarrow \alpha_0 \mathbf{z}_0$ 
done
apply  $\mathbf{K}_{\text{out}}^T$  at the largest scale of  $\mathbf{z}$ 
return  $\mathbf{z}$ 

```

It is important to note that the loop must be performed *in-place* for the algorithm to work. From the structure of this algorithm, it is clear that the multiplication of a vector by the transpose operator is performed in  $O(N)$  operations.

#### F. The inverse transpose operator

The operator  $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}_1^{-T} \cdot \mathbf{K}_2^{-T} \cdot \dots \cdot \mathbf{K}_p^{-T}$  works from the largest scale to the smallest one. The following algorithm computes  $\mathbf{z} = \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{v}$  for any input vector  $\mathbf{v}$ :

```

copy input vector:  $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{v}$ 
apply  $\mathbf{K}_{\text{out}}^{-T}$  at the largest scale of  $\mathbf{z}$ 
from the largest scale to the smallest scale, do
   $z_0 \leftarrow z_0/\alpha_0$ 
  for  $j = 1, \dots, N_{\text{int}}$  do
     $z_j \leftarrow z_j - \alpha_j z_0$ 
  done
done
return  $\mathbf{z}$ 

```

Again, the operation can be done *in-place* (the copy of the input vector  $\mathbf{v}$  is only required to preserve its contents if needed), and the number of operations is  $O(N)$ .

## 4. Preconditioning

Preconditioning is a general mean to speed up the convergence of iterative optimization methods [15] such as the PCG algorithm described in Fig. 1. Preconditioning is generally introduced as finding an invertible matrix  $\mathbf{M}$  such that the spectral properties of  $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}$  are more favorable than that of  $\mathbf{A}$  (*i.e.* lower condition number and/or more clustered eigenvalues), then the transformed system

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (30)$$

which has the same solution as the original system  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  can be solved in much fewer iterations. In this section, we consider different means for preconditioning the phase restoration problem: explicit change of variables and diagonal preconditioners.

#### A. Fractal operator as a preconditioner

Preconditioning is also equivalent to an *implicit* linear change of variables [13]: using the preconditioner  $\mathbf{M} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$  in the algorithm of Fig. 1 is the same as using the (unpreconditioned) conjugate gradient algorithm to solve the optimization problem with respect to  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}$ . Following this we have considered using the Karhunen-Loève basis to solve the problem with respect to the variables  $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{w}$ . In this case, it is however advantageous in terms of number of floating points operations to use an *explicit* change of variables and to directly solve the problem for  $\mathbf{u}$  rather than for  $\mathbf{w}$  with a preconditioner  $\mathbf{M} = \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}^{-1}$ . Introducing this change of variable in Eq. (7) and using Eq. (16), the system to solve becomes:

$$\left( \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{u} = \left( \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d} \right). \quad (31)$$

After  $\mathbf{u}$  is found by the iterative algorithm, the restored wavefront is given  $\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$ . We expect improvements in the

convergence of the iterative method by using  $\mathbf{u}$  instead of  $\mathbf{w}$  because this yields an *a priori* covariance matrix equals to the identity matrix [31]. Improved speedup may be still possible by using a preconditioner on  $\mathbf{u}$  as we discuss in the following.

#### B. Diagonal preconditioners

Diagonal preconditioners may not be the most efficient ones but are very cheap to use [15] and are thus considered here. When the variable  $\mathbf{x}$  in Eq. (8) follows a known statistics, an optimal preconditioner  $\mathbf{M}$  can be computed so that  $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}$  is, on average, as close as possible to the identity matrix. This *closeness* can be measured in two different spaces: in the data space or in the parameter space.

In the *data space*, this criterion writes:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \arg \min_{\mathbf{M}} \langle \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}\|^2 \rangle \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial \langle \|\mathbf{A} - \mathbf{M}\| \cdot \mathbf{x} \|^2 \rangle}{\partial \mathbf{M}} = 2(\mathbf{M} - \mathbf{A}) \cdot \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T \rangle \\ \Leftrightarrow \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_x, \end{aligned} \quad (32)$$

where  $\mathbf{C}_x \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T \rangle$  is the covariance matrix of  $\mathbf{x}$ . Of course, if  $\mathbf{M}$  is allowed to be any matrix and since  $\mathbf{C}_x$  has full rank, the solution to Eq. (32) is  $\mathbf{M} = \mathbf{A}$ . However, for a diagonal preconditioner,  $\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{m})$ , only the diagonal terms of Eq. (32) have to be considered; this yields:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{m}) = \text{diag}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_x) \cdot \text{diag}(\mathbf{C}_x)^{-1}. \quad (33)$$

For  $\mathbf{x} = \mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  then  $\mathbf{C}_x = \mathbf{I}$  and Eq. (32) simplifies to:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{A}), \quad (34)$$

which is the well known Jacobi preconditioner [15].

Taking  $\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}^{-1}$  and minimizing the statistical distance in the *parameter space* yields:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \arg \min_{\mathbf{Q}} \langle \|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 \rangle \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial \langle \|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 \rangle}{\partial \mathbf{Q}} = 2(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{A}^T \\ \Leftrightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{A}^T &= \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{A}^T. \end{aligned} \quad (35)$$

For a diagonal preconditioner,  $\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{q})$ , only the diagonal terms of Eq. (35) have to be considered; hence:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{q}) = \text{diag}(\mathbf{C}_x \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \text{diag}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (36)$$

Finally, when  $\mathbf{x} = \mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ :

$$Q_{i,i} = \frac{A_{i,i}}{\sum_j A_{i,j}^2}, \quad \text{and} \quad Q_{i,j \neq i} = 0. \quad (37)$$

In contrast to Jacobi preconditioner, this *optimal* preconditioner is expensive to compute since every element of matrix  $\mathbf{A}$  must be evaluated to compute the denominator. This however have to be done only once for all for a given left-hand side matrix  $\mathbf{A}$ . The improvements given by the diagonal preconditioners in Eq. (34) and Eq. (37) are compared in the next section.

## 5. Simulations and Results

### A. Summary of the various possibilities

Our previous study gives rise to 6 different possibilities to solve Eq. (8). By using Eq. (16), we can first iteratively solve for  $\mathbf{w}$ :

$$(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}^{-1}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d}, \quad (38)$$

using the sparse model matrix  $\mathbf{S}$  and the fractal operators  $\mathbf{K}^{-1}$  and  $\mathbf{K}^{-T}$  introduced in Sect. 2 E and Sect. 3 to quickly apply the left-hand side matrix. Although the a priori covariance matrix of  $\mathbf{w}$  is not the identity, we have checked the speedup brought by the diagonal preconditioners defined in Eq. (34) and Eq. (37) with  $\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}^{-1}$ .

Solving the problem in the Karhunen-Loève basis, requires to iteratively solve:

$$(\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d} \quad (39)$$

for  $\mathbf{u}$  and then do  $\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$ . In this case,  $\mathbf{C}_u = \mathbf{I}$  so we expect somewhat faster convergence by using one of the preconditioners defined in Eq. (34) and Eq. (37) with  $\mathbf{A} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{I}$ .

### B. Comparison of the rates of convergence

When comparing the efficiency of the six different possibilities, we need to take into account that the number of floating point operations may be different for each of them. The aim is not to derive an accurate number of operations which would depend on the specific implementation of the algorithms, but rather to get a general estimate. For instance, the  $\mathbf{K}$ 's dependence on  $r_0$  can be factorized out and included in operator  $\mathbf{C}_n$  with no extra computational cost. This kind of optimization was not considered here. As detailed in Appendix B, the number of operations is marginally increased by the preconditioning and does not depend on which variables ( $\mathbf{w}$  or  $\mathbf{u}$ ) are used when starting from an arbitrary initial vector. A small difference only appears when starting the algorithms with an initial zero vector, as summarized in Table 1.

For wavefront reconstruction, when comparing the total number of operations,  $N_{\text{ops}}$ , for a given number of (P)CG iterations,  $N_{\text{iter}}$ , such that  $N_{\text{iter}} \geq 1$ , we will use these equations:

$$\begin{aligned} N_{\text{CG}}^{\text{ops}} &\sim (N_{\text{overhead}} + 33 N_{\text{CG}}^{\text{iter}}) N, \\ N_{\text{PCG}}^{\text{ops}} &\sim (N_{\text{overhead}} + 34 N_{\text{PCG}}^{\text{iter}}) N, \end{aligned} \quad (40)$$

where  $N_{\text{overhead}} = 4$  when working with variable  $\mathbf{w}$ , and  $N_{\text{overhead}} = 10$  when explicitly working with variable  $\mathbf{u}$ .

In order to assess the speed of the reconstruction, we have tested the different wavefront reconstruction algorithms on a number of different conditions. For every simulation, the wavefront sensor sampling is such that the size of the Shack-Hartmann subaperture is equal to Fried's parameter  $r_0$ . A wavefront is first generated, the measurements are estimated using the current wavefront sensor model,  $\mathbf{S}$ , and a stationary uncorrelated random noise  $\mathbf{n}$  is added to the simulated slopes in accordance with Eq. (1). Noise level is given by its standard

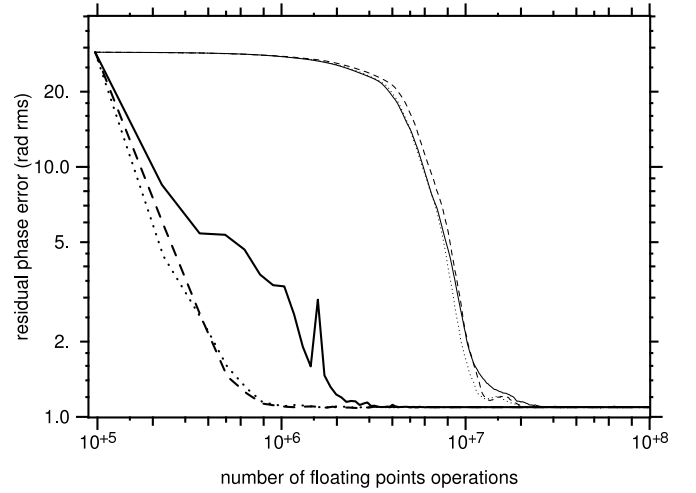


Fig. 6. Phase error as a function of the number of operations. Curves are the median value of 100 simulations with  $D/r_0 = 65$ ,  $\sigma_{\text{noise}} = 1$  rad/subaperture and  $r_0$  has the same size as one subaperture. Solid curves are for CG, dashed curves are for PGC with Jacobi preconditioner, dotted curves are for PGC with optimal diagonal preconditioner. Thin curves are for (P)GC onto the wavefront samples  $\mathbf{w}$ , whereas thick curves are for (P)GC onto the wavefront generator  $\mathbf{u}$ .

deviation  $\sigma_{\text{noise}}$  in radians per subaperture, where the radians here correspond to phase differences between the edges of the subapertures. At each iteration of the algorithm, the residual wavefront is computed as the difference between the current solution and the initial wavefront. The root mean squared error of the residual wavefront is computed over the pupil, piston removed. Piston mode is the only removed mode. A central obscuration is always introduced, with a diameter 1/3 the diameter of the pupil.

The presented graphs sample two AO system  $65 \times 65$  and  $257 \times 257$  in size, and several levels of noise from 1 rad/subaperture down to 0.05 rad/subaperture are examined. On each curve, the 6 algorithms are compared. All the curves plot the median value obtained for 100 simulations under the same conditions. The different algorithms were applied to the same simulated wavefronts and sensor data.

The graphs have been plotted assuming a number of floating point operations given by Eq. (40), where here the number of unknowns is  $N = 4225$  and  $N = 66049$  for AO systems  $65 \times 65$  and  $257 \times 257$  respectively.

Various observations can be drawn from these curves.

- Solving by using  $\mathbf{w}$  as unknowns is much slower than with  $\mathbf{u}$ , by more than one order of magnitude for a  $65 \times 65$  system, and 2 orders of magnitude for  $257 \times 257$ . This demonstrates the effect of using the fractal operator as a preconditioner.
- With  $\mathbf{w}$ , the algorithm does not show any improvement of the residual error for a long time before to find its way through the solution. In contrast, the very first steps with  $\mathbf{u}$  already show a tremendous reduction of

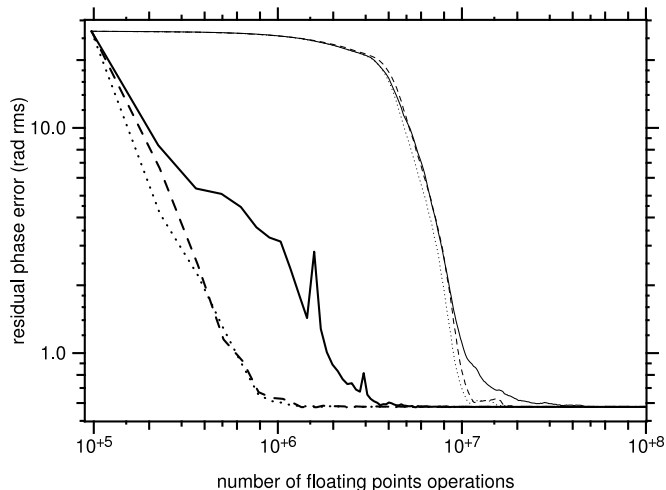


Fig. 7. Same as Fig. 6 but for  $\sigma_{\text{noise}} = 0.5$  rad/subaperture.

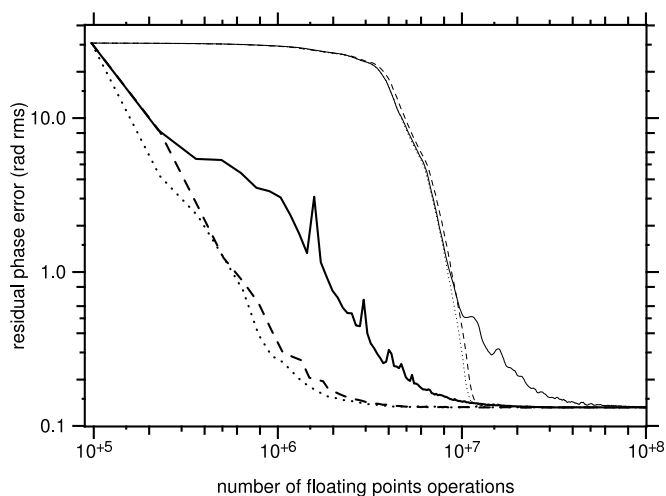


Fig. 8. Same as Fig. 6 but for  $\sigma_{\text{noise}} = 0.1$  rad/subaperture.

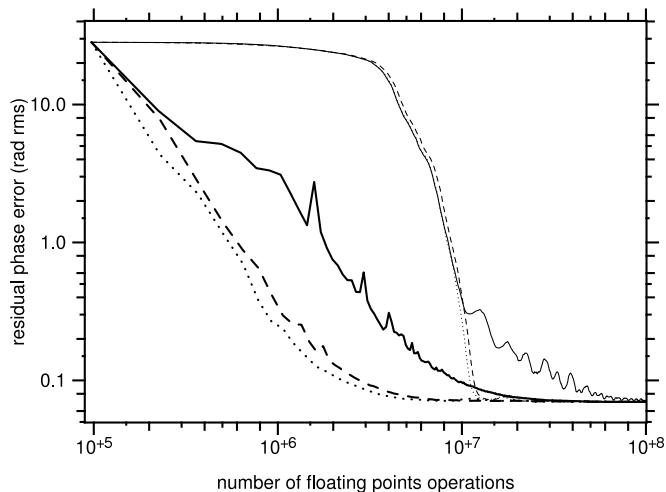


Fig. 9. Same as Fig. 6 but for  $\sigma_{\text{noise}} = 0.05$  rad/subaperture.

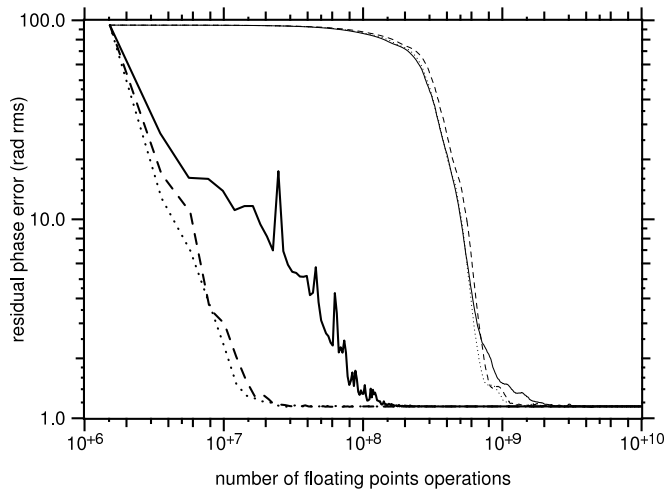


Fig. 10. Same as Fig. 6 but for  $D/r_0 = 257$  and  $\sigma_{\text{noise}} = 1$  rad/subaperture.

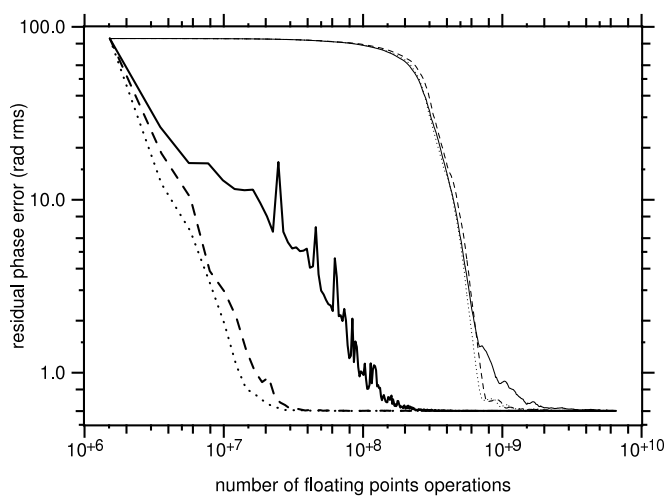


Fig. 11. Same as Fig. 6 but for  $D/r_0 = 257$  and  $\sigma_{\text{noise}} = 0.5$  rad/subaperture.

the residual error.

- When solving for  $\mathbf{w}$ , diagonal preconditioners are only useful at the very end of the convergence, mainly in case of high signal-to-noise ratio. In contrast, the effect of the diagonal preconditioners is very effective from the beginning when working with  $\mathbf{u}$ .
- When working with  $\mathbf{u}$ , the difference between the two diagonal preconditioners is significant but not critical. The optimal diagonal preconditioner yields slightly faster convergence.
- When  $\sigma_{\text{noise}}$  decreases, the convergence of the two fastest methods takes longer to reach a lower residual errors, as expected, but the rate of convergence keeps steady.

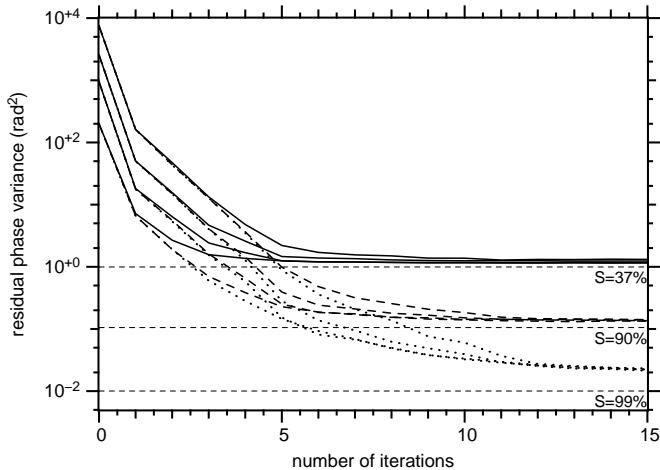


Fig. 12. Decrease of the residual phase variance as a function of the number of iterations when using  $\mathbf{u}$  as unknowns and optimal diagonal preconditioner. Each set of curves is the median value of 100 reconstructions. Three sets of curves are plotted for different values of  $\sigma_{\text{noise}}^2$ : 1 (solid), 0.09 (dashed), and 0.01  $\text{rd}^2/r_0$  (dotted). In each set of curves, the size of the system increases from bottom to top: 32, 64, 128 and 256 subapertures along the diameter of the pupil. Levels of Strehl ratios are indicated. The curves show that 5 to 10 iterations are enough in most cases for a full reconstruction.

### C. Number of iterations

From the previous section, we now consider only the fastest method, using both  $\mathbf{u}$  as unknowns and the optimal diagonal preconditioner. The aim here is to assess the number of iterations needed to restore the wavefront. As in the previous section, we consider one subaperture per  $r_0$ , so the variance of the incoming wavefronts increases with the size of the system. Figure 12 shows how the residual phase variance decreases at each iteration for various configurations of the system, in size ( $33 \times 33$ ,  $65 \times 65$ ,  $129 \times 129$ ,  $257 \times 257$ ), and in noise level ( $\sigma_{\text{noise}}^2 = 1$ , 0.09 and 0.01  $\text{rd}^2/r_0$ ). In the first iterations, we can see that the behavior of the algorithm does not depend on the signal to noise ratio. Further, the final value obtained does not depend on the size of the system. Strehl levels corresponding to the residual phase variance are indicated. The curves show that 5 to 10 iterations only are enough in most cases for a full reconstruction.

In order to remove the effect of starting from different initial phase variances, the curves have been plotted on Fig. 13, normalized by the initial variance. The curves show that the behavior of the algorithm is the same in any situation, the curves being only separated by the different values of the final variance, which depends on the noise level. They also show that the variance is already reduced by a factor  $\sim 1/40$  at the first iteration only,  $\sim 1/100$  at the second iteration and  $\sim 10^{-4}$  after 6 iterations. This steep descent will be an asset in closed-loop.

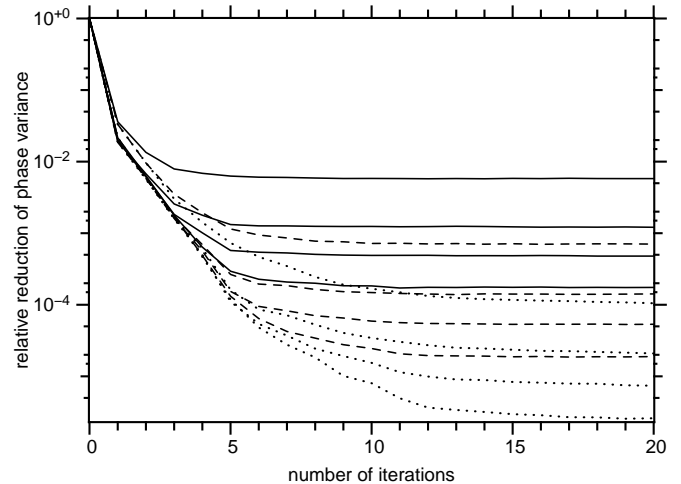


Fig. 13. The same curves as those in Fig. 12 are plotted here, normalized by the initial variance of the phase. This shows a high relative attenuation ( $\sim 1/40$ ) after the first iteration, in any configuration. In each set of curves:  $\sigma_{\text{noise}}^2 = 1$  (solid), 0.09 (dashed), and 0.01  $\text{rd}^2/r_0$  (dotted); the size of the system increases from top to bottom: 32, 64, 128, and 256 subapertures along the diameter of the pupil.

## 6. Conclusion

We have introduced FRIM, a new minimum variance iterative algorithm for fast wavefront reconstruction and fast control of an adaptive optics system. Combining fast regularization and efficient preconditioning, regularized wavefront reconstruction by FRIM is an  $O(N)$  process, where  $N$  is the number of wavefront samples.

FRIM takes advantage of the sparsity of the model matrix  $\mathbf{S}$  of wavefront sensors (or interaction matrices) and makes use of a "fractal operator"  $\mathbf{K}$  for fast computation of the priors. Based on a generalization of the mid-point algorithm [22],  $\mathbf{K}$  is not sparse but is implemented so that it requires only  $O(N) \simeq 6N$  operations. Our modifications with respect to the original algorithm allow the operator to be invertible and the generated wavefront to be stationary. We have derived algorithms for computing  $\mathbf{K}^{-1}$ ,  $\mathbf{K}^T$  and  $\mathbf{K}^{-T}$  in the same number of floating point operations. In our simulations, we consider a modified Kolmogorov law but any stationary structure function or covariance can be implemented in our approach. The property of stationarity is expected to be helpful for turbulence tomography.

Another breakthrough comes from the efficiency of the fractal operator when used as a preconditioner. Combining a fractal change of variables and an optimal diagonal preconditioner, we were able to reduce the number of iterations in the range of 5 – 10 whatever is the size of the AO system. The exact number of iterations mainly depends on the signal to noise ratio of the measurements.

It is beyond this work to compare with all the other methods currently studied in response to the huge increasing of the number of degrees of freedom for the AO system on ELTs. Nevertheless, we can easily compare to standard vector ma-

trix multiplication (VMM). Assuming uncorrelated noise, the simulations show that the number of operations with FRIM is  $N_{\text{ops}} \sim (23 + 34 N_{\text{iter}}) N$ , where the number of PCG iterations is  $N_{\text{iter}} \lesssim 10$  for any number of degrees of freedom  $N$ . For up to  $N = 1.3 \times 10^4$  degrees of freedom (*i.e.*  $D/r_0 \leq 128$ ), one wavefront estimation (from scratch) involves  $\lesssim 6 \times 10^6$  operations, that is a bandwidth of  $\sim 500$  Hz for a machine capable of 3 Gflops which is typical of current workstations. Conversely, conventional (non-sparse) matrix multiplication would require  $\sim 4 N^2 \sim 7 \times 10^8$  operations to compute the wavefront: our method is more than 100 times faster. Furthermore, since the operations can be done *in-place*, it is expected that the computation with FRIM could all be done in cache memory.

The next step of this work is to extend the theory to closed-loop and to assess the performances and the properties of the algorithm in this regime. Since the wavefront is not allowed to change a lot from one step of the AO loop to the other, the algorithm will always starts close to the solution: the number of iterations is expected to be yet lower. This study is not yet completed but preliminary results have proved the efficiency of FRIM in the case of closed loop adaptive optics [32, 33].

## Acknowledgments

This project forms part of the "ELT Design Study" and is supported by the European Commission, within its Framework Programme 6, under contract No 011863. This work was also supported by contract No 0712729 with ESO, The European Southern Observatory.

The algorithms and the simulations presented in this article have been implemented in Yorick, a free data processing language written by D. Munro (<http://yorick.sourceforge.net/>).

## Appendix A: Derivation of the interpolation coefficients

In this appendix, we detail the computation of the interpolation coefficients involved in the different configurations shown by Fig. 4. Denoting  $r$  the step size in the grid before the refinement, the distances between the points considered in this refinement step are:  $\sqrt{2}r$ ,  $r$ ,  $r/\sqrt{2}$ , or  $r/2$  (Fig. 4). Hence the only covariances required in our computations are:

$$\begin{aligned} c_0 &= c(0) &= \sigma^2 \\ c_1 &= c(r/2) &= \sigma^2 - f(r/2)/2 \\ c_2 &= c(r/\sqrt{2}) &= \sigma^2 - f(r/\sqrt{2})/2 \\ c_3 &= c(r) &= \sigma^2 - f(r)/2 \\ c_4 &= c(\sqrt{2}r) &= \sigma^2 - f(\sqrt{2}r)/2 \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

where  $c(r)$  and  $f(r)$  are respectively the covariance and the structure function for a separation  $r$ .

### 1. Square configuration

For the interpolation stage illustrated by the top-left part of Fig. 4 and according to Eq. (27), the interpolation coefficients

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  are obtained by solving:

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_3 & c_4 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_3 & c_4 \\ c_4 & c_3 & c_0 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_3 & c_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Solving this linear system and plugging the solution into Eq. (27) leads to:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 &= \frac{c_2}{c_0 + 2c_3 + c_4}, \\ \alpha_0 &= \pm \sqrt{c_0 - \frac{4c_2^2}{c_0 + 2c_3 + c_4}}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Note that the sign of  $\alpha_0$  is irrelevant.

### 2. Triangle configuration

In original mid-point algorithm [22], the values at the edges of the support (top-right part of Fig. 4) were generated from only the two neighbors on the edge, ignoring the third interior neighbor (denoted  $w_3$  in the figure). Here, according to Eq. (27), the interpolation coefficients  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  for this stage are obtained by solving:

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & c_0 & c_2 \\ c_2 & c_2 & c_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Solving this linear system and plugging the solution into Eq. (27) leads to:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 &= \frac{c_1 (c_0 - c_2)}{c_0 (c_0 + c_3) - 2c_2^2} \\ \alpha_3 &= \frac{c_1 (c_0 - 2c_2 + c_3)}{c_0 (c_0 + c_3) - 2c_2^2} \\ \alpha_0 &= \pm \sqrt{c_0 - \frac{c_1^2 (3c_0 - 4c_2 + c_3)}{c_0 (c_0 + c_3) - 2c_2^2}} \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

### 3. Diamond configuration

The interpolation coefficients for the stage in the bottom part of Fig. 4 can be deduced from Eq. (A2) by replacing  $r$  by  $r/\sqrt{2}$ , then:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 &= \frac{c_1}{c_0 + 2c_2 + c_3}, \\ \alpha_0 &= \pm \sqrt{c_0 - \frac{4c_1^2}{c_0 + 2c_2 + c_3}}. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

## Appendix B: Computational Burden

In order to estimate the number of floating point operations, we need to carefully detail the steps of the CG method and count the number of operations involved in the multiplication by the different linear operators  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{K}$ , *etc.* Figure 1 summarizes the steps of the (PCG) algorithm [15] to solve Eq. (8).

algorithm step	floating point operations
initialization: general case	$\sim 25 N$
zero initial vector in $\mathbf{u}$ space	$\sim 12 N$
zero initial vector in $\mathbf{w}$ space	$\sim 6 N$
1st CG iteration	$\sim 31 N$
any subsequent CG iteration	$\sim 33 N$
total after $N_{\text{iter}} \geq 1$ iterations	$\sim (23 + 33 N_{\text{iter}}) N$
1st PCG iteration	$\sim 32 N$
any subsequent PCG iteration	$\sim 34 N$
total after $N_{\text{iter}} \geq 1$ iterations	$\sim (23 + 34 N_{\text{iter}}) N$

Table 1. Number of operations involved in conjugate gradients (CG) and preconditioned conjugate gradients (PCG) applied to the wavefront restoration problem solved by our algorithm. The integers  $N$  and  $N_{\text{iter}}$  are respectively the number of unknowns and number of iterations. For a reconstruction, we assume an initial null guess in the initialization step: in this case the number of operations at this step is reduced down to  $\sim 6 N$  or  $\sim 12 N$  when respectively  $\mathbf{w}$  or  $\mathbf{u}$  are used as unknowns.

If the unknowns are the wavefront samples, then  $\mathbf{x} = \mathbf{w}$  and:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}^{-1}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Starting the algorithm with  $\mathbf{w}_0$ , the initial residuals write:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{w}_0 \\ &= \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_0) - \mathbf{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{w}_0. \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

If the unknowns are the wavefront generators, then  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  and:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{I}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot \mathbf{d}, \end{aligned}$$

where  $\mathbf{I}$  is the identity matrix. Starting the algorithm with  $\mathbf{u}_0$ , the initial residuals are:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0 \\ &= \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_n^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_0) - \mathbf{u}_0. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Making use of possible factorizations (some of the  $\alpha_i$ 's have the same values), applying any one of the operators  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}^T$ ,  $\mathbf{K}^{-1}$ , or  $\mathbf{K}^{-T}$  involves the same number of floating point operations:

$$\begin{aligned} N_{\text{ops}}(\mathbf{K}) &= N_{\text{ops}}(\mathbf{K}^T) = N_{\text{ops}}(\mathbf{K}^{-1}) = N_{\text{ops}}(\mathbf{K}^{-T}) \\ &= 6 N_u - 14 \\ &\sim 6 N, \end{aligned}$$

where  $N$  is the number of degrees of freedom of the system,  $N_u \sim N$  is the number of elements in vector  $\mathbf{u}$  and, in our notation,  $N_{\text{ops}}(\mathbf{L})$  is the number of floating point operations required to apply a linear operator  $\mathbf{L}$  to a vector.

Since we consider uncorrelated data noise,  $\mathbf{C}_n^{-1}$  is diagonal and:

$$N_{\text{ops}}(\mathbf{C}_n^{-1}) = M \sim 2 N;$$

however note that these  $\sim 2 N$  floating point operations per iteration can be saved for stationary noise (*i.e.*  $\mathbf{C}_n^{-1} \propto \mathbf{I}$ ).

For Fried's model of wavefront sensor and after proper factorization:

$$N_{\text{ops}}(\mathbf{S}) = N_{\text{ops}}(\mathbf{S}^T) \sim 4 N.$$

This assumes, in particular, that the data were pre-multiplied by 2 (see section [see Eq. (11)]).

Finally, whatever the unknowns are ( $\mathbf{w}$  or  $\mathbf{u}$ ), the total number of floating point operations required to apply the left hand side matrix  $\mathbf{A}$  to a given vector is:

$$\begin{aligned} N_{\text{ops}}(\mathbf{A}) &\sim 2 N_{\text{ops}}(\mathbf{K}) + 2 N_{\text{ops}}(\mathbf{S}) + N_{\text{ops}}(\mathbf{C}_n^{-1}) + N \\ &\sim 23 N. \end{aligned}$$

The last  $N$  comes from the addition of likelihood and regularization terms.

From equations (B1) and (B2), using either  $\mathbf{w}$  or  $\mathbf{u}$  as the unknowns, initialization of the CG, *i.e.* computation of the initial residuals  $\mathbf{r}_0$ , involves

$$\begin{aligned} N_{\text{ops}}(\mathbf{r}_0) &\sim 2 N_{\text{ops}}(\mathbf{K}) + 2 N_{\text{ops}}(\mathbf{S}) + N_{\text{ops}}(\mathbf{C}_n^{-1}) + M + N \\ &\sim 25 N \end{aligned}$$

operations. Note that, if the algorithm is initialized with  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  (a vector of zeroes), this number of operations is significantly reduced down to  $\sim 6 N$  and  $\sim 12 N$  when respectively  $\mathbf{w}$  and  $\mathbf{u}$  are used as unknowns. Also note that there may be additional  $\sim 6 N$  operations to compute  $\mathbf{w}$  from  $\mathbf{u}$  when necessary.

Whatever are the considered variables, the number of unknowns is  $\sim N$ , hence any dot product in the CG algorithm involves  $2 N - 1 \sim 2 N$  floating point operations. The first CG iteration (Fig. 1) requires two dot products ( $2 N - 1 \sim 2 N$  floating point operations each) to compute  $\rho_k$  and  $\alpha_k$ , applying  $\mathbf{A}$  once and two vector updates (involving  $\sim 2 N$  operations each); hence a total of  $\sim 31 N$  operations. Any subsequent iteration requires an additional vector update to compute the conjugate gradient direction; hence  $\sim 33 N$  operations. Finally, preconditioning by a diagonal preconditioner simply adds  $\sim N$  operations per iteration.

The number of floating operations required by the different versions of the reconstruction algorithm are summarized in table 1 and by Eq. (40). Note that in the general case, the number of operations does not depend on which variables  $\mathbf{w}$  or  $\mathbf{u}$  are used. There is a difference of  $\sim 6 N$  operations in the initialization step only when the algorithm is started with a zero initial vector (see table 1).

## References

1. F. Roddier, *Adaptive Optics in Astronomy* (Cambridge University Press, 1999).

2. E. Gendron and P. Léna, "Astronomical adaptive optics. I. Modal control optimization," *Astron. Astrophys.* **291**, 337–347 (1994).
3. M. Le Louarn, N. Hubin, M. Sarazin, and A. Tokovinin, "New challenges for adaptive optics: extremely large telescopes," *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **317**, 535–544 (2000).
4. N. Hubin, B. L. Ellerbroek, R. Arsenault, R. M. Clare, R. Dekany, L. Gilles, M. Kasper, G. Herriot, M. Le Louarn, E. Marchetti, S. Oberti, J. Stoesz, J.-P. Véran, and C. Vérinaud, "Adaptive optics for Extremely Large Telescopes," in "Scientific Requirements for Extremely Large Telescopes," , vol. 232 of *IAU Symposium*, P. A. Whitelock, M. Dennefeld, and B. Leibundgut, eds. (Cambridge University Press, 2005), vol. 232 of *IAU Symposium*, pp. 60–85.
5. L. A. Poyneer, D. T. Gavel, and J. M. Brase, "Fast wavefront reconstruction in large adaptive optics systems with use of the Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 2100–2111 (2002).
6. L. A. Poyneer, D. Dillon, S. Thomas, and B. A. Macintosh, "Laboratory demonstration of accurate and efficient nanometer-level wavefront control for extreme adaptive optics," *Appl. Opt.* **47**, 1317–1326 (2008).
7. D. G. MacMartin, "Local, hierarchic, and iterative reconstructors for adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 1084–1093 (2003).
8. B. Le Roux, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, L. M. Mugnier, and T. Fusco, "Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 1261–1276 (2004).
9. B. L. Ellerbroek, "Efficient computation of minimum-variance wave-front reconstructors with sparse matrix techniques," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 1803–1816 (2002).
10. C. R. Vogel, "Sparse matrix methods for wavefront reconstruction revisited," in "Advancements in Adaptive Optics," , vol. 5490 of *SPIE Conference*, D. Bonaccini, B. L. Ellerbroek, and R. Ragazzoni, eds. (Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, Bellingham, WA, 2004), vol. 5490 of *SPIE Conference*, pp. 1327–1335.
11. W. H. Southwell, "Wave-front estimation from wavefront slope measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **70**, 998–1006 (1980).
12. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C* (Cambridge University Press, 1992), 2nd ed.
13. J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization* (Springer Verlag, 2006), second edition ed.
14. W. J. Wild, E. J. Kibblewhite, and R. Vuilleumier, "Sparse matrix wave-front estimators for adaptive-optics systems for large ground-based telescopes," *Opt. Lett.* **20**, 955–957 (1995).
15. R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. V. der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods* (SIAM, Philadelphia, PA, 1994).
16. L. Gilles, C. R. Vogel, and B. L. Ellerbroek, "Multigrid preconditioned conjugate-gradient method for large-scale wave-front reconstruction," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 1817–1822 (2002).
17. L. Gilles, "Order-N sparse minimum-variance open-loop reconstructor for extreme adaptive optics," *Opt. Lett.* **28**, 1927–1929 (2003).
18. L. Gilles, B. L. Ellerbroek, and C. R. Vogel, "Preconditioned conjugate gradient wave-front reconstructors for multiconjugate adaptive optics," *Appl. Opt.* **42**, 5233–5250 (2003).
19. C. R. Vogel and Q. Yang, "Fast optimal wavefront reconstruction for multi-conjugate adaptive optics using the Fourier domain preconditioned conjugate gradient algorithm," *Opt. Express* **14**, 7487–7498 (2006).
20. Q. Yang, C. R. Vogel, and B. L. Ellerbroek, "Fourier domain preconditioned conjugate gradient algorithm for atmospheric tomography," *Appl. Opt.* **45**, 5281–5293 (2006).
21. L. Gilles, B. Ellerbroek, and C. Vogel, "A comparison of Multigrid V-cycle versus Fourier Domain Preconditioning for Laser Guide Star Atmospheric Tomography," in "Signal Recovery and Synthesis," , B. L. Ellerbroek and J. C. Christou, eds. (Optical Society of America, Washington, USA, 2007), OSA topical meetings, p. paper JTUA1.
22. R. G. Lane, A. Glindemann, and J. C. Dainty, "Simulation of a kolmogorov phase screen," *Wave in random media* **2**, 209–224 (1992).
23. D. L. Fried, "Least-squares fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 370–375 (1977).
24. E. Thiébaud, "Introduction to image reconstruction and inverse problems," in "Optics in Astrophysics," , R. Foy and F.-C. Foy, eds. (Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2005), NATO ASI, p. 397.
25. J. Herrmann, "Phase variance and Strehl ratio in adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 2258–2259 (1992).
26. A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation* (SIAM, 2005).
27. A. Tarentola and B. Valette, "Inverse problems = quest for information," *Journal of Geophysics* **50**, 159–170 (1982).
28. D. L. Fried, "Statistics of a geometric representation of wavefront distortion," *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 1427–1435 (1965).
29. G. Rousset, "Wavefront sensing," in "Adaptive optics for astronomy," , vol. 423 of *Proc. NATO ASI Series C*, D. M. Alloin and J.-M. Mariotti, eds. (Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1993), vol. 423 of *Proc. NATO ASI Series C*, pp. 115–137.
30. N. Roddier, "Atmospheric wavefront simulation using zernike polynomials," *Opt. Eng.* **29**, 1174–1180 (1990).
31. J. Skilling and R. K. Bryan, "Maximum entropy image reconstruction: general algorithm," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **211**, 111–124 (1984).
32. C. Béchet, M. Tallon, and E. Thiébaud, "FRIM: minimum-variance reconstructor with a fractal iterative



- method,” in “Advances in Adaptive Optics II.”, , vol. 6272 of *SPIE Conference*, D. B. C. B. L. Ellerbroek, ed. (2006), vol. 6272 of *SPIE Conference*, p. 62722U.
33. C. Béchet, M. Tallon, and E. Thiébaud, “Closed-Loop AO Performance with FrIM,” in “Adaptive Optics: Analysis and Methods,” (2007), Conference of the Optical Society of America, p. JTua4.

## Annexe B

# Transformée de Laplace et Transformée en $z$

### B.1 Transformée de Laplace : représentation en temps continu

Pour un signal  $x(t)$ , fonction continue du temps, la transformée de Laplace  $X(s)$  est définie par

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (\text{B.1})$$

### B.2 Transformée en $z$ : représentation en temps discret

Si on note  $\bar{x}$  le signal  $x$  échantillonné avec un période d'échantillonnage  $T_e$ , tel que

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_e) \delta(t - k T_e) \quad (\text{B.2})$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac.  $\bar{x}$  fournit une représentation de  $x$  en temps discret.

La transformée de Laplace de ce signal  $\bar{x}$  s'écrit

$$\bar{X}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_e) e^{-k s T_e} \quad (\text{B.3})$$

En appliquant le changement de variable  $z = e^{-s T_e}$ , on obtient la transformée en  $z$  du signal discret  $\bar{x}$

$$\bar{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_e) z^{-k} \quad (\text{B.4})$$



# Bibliographie

- R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, et H. Van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, Philadelphia PA, 1994.
- J.-M. Conan, G. Rousset, et P.-Y. Madec. Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(7) :1559–1570, July 95.
- R. Conan. *Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation à Haute Résolution Angulaire en Astronomie*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2000.
- C. Correia. Fourier-domain preconditioned conjugate gradient. Rapport technique, ELT Design Study WP 09 600, 2006.
- C. Correia, C. Kulcsar, J.-M. Conan, et H.-F. Raynaud. Hartmann modelling in the discrete spatial-frequency domain ; application to real-time reconstruction in adaptive optics. Dans *Adaptive Optics Systems*, volume 7015 de *Proc. SPIE*, 2008.
- C. Dessenne, P.-Y. Madec, et G. Rousset. Optimization of a predictive controller for closed-loop adaptive optics. *Appl. Opt.*, 37(21) :4623, July 1998.
- B.L. Ellerbroek. First-order performance evaluation of adaptive optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended field-of-view astronomical telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(2) :783–805, Feb. 1994.
- B.L. Ellerbroek. Including outer scale effects in zonal adaptive optics calculations. *Appl. Opt.*, 36(36) :9456–9467, 1997.
- B.L. Ellerbroek. Efficient computation of minimum-variance wave-front reconstructors with sparse matrix techniques. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(9) :1803–1816, 2002.
- B.L. Ellerbroek, C. Van Loan, N.P. Pitsianis, et R.J. Plemmons. Optimizing closed-loop adaptive-optics performance with use of multiple control bandwidths. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(11) :2871, 1994.
- B.L. Ellerbroek et D.W. Tyler. Modeling the combined effect of static and varying phase distortions on the performance of adaptive optical systems. *Appl. Opt.*, 38 (18) :3857–3868, 1999.
- S. Esposito, A. Riccardi, et O. Feeney. Closed-loop performance of pyramid wavefront sensor. Dans T. D. Steiner et P. H. Merritt, éditeurs, *Laser weapons technology*, volume 4034 de *Proc. SPIE*, pages 184–189, 2000.

- R.A. Fisher. *Theory of statistical estimation*. 1925.
- R. Foy et A. Labeyrie. Feasibility of adaptive telescope with laser probe. *Astron. Astrophys.*, 152 :29–31, 1985.
- R. Foy, A. Migus, F. Biraben, G. Grynberg, P.R. McCullough, et M. Tallon. The polychromatic artificial sodium star : a new concept for correcting the atmospheric tilt". *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 111, 1995.
- K.R. Freischlad et C.L. Koliopoulos. Modal estimation of a wavefront from difference measurements using the discrete Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 3(11) : 1852–1861, 1986.
- D. L. Fried. Least-squares fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 67(3) :370–375, 1977.
- D.L. Fried. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.*, 56(10) :1372, 1966.
- D.L. Fried. Anisoplanatism in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1), January 1982.
- T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, L. Mugnier, et V. Michau. Optimal wave-front reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18 (10) :2527–2538, 2001.
- T. Fusco, C. Petit, G. Rousset, J.-F. Sauvage, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, P. Baudoz, M. Kasper, E. Fedrigo, P. Rabou, P. Feautrier, M. Downing, P. Gigan, J.-M. Conan, J.-L. Beuzit, N. Hubin, F. Wildi, et P. Puget. Design of the extreme ao system for sphere, the planet-finder instrument of the vlt. Dans B. Ellerbroek et D. Bonaccini, éditeurs, *Advancements in Adaptive Optics II*, volume 6272 de *Proc. SPIE*, June 2006a.
- T. Fusco, G. Rousset, J.-F. Sauvage, C. Petit, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, M. Nicolle, M. Kasper, P. Baudoz, et P. Puget. High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets : Application to the sphere instrument. *Opt. Express*, 14(17) :7515–7534, 2006b.
- T. Fusco, S. Thomas, M. Nicolle, A. Tokovinin, V. Michau, et G. Rousset. Optimization of center of gravity algorithms in a shack-hartmann sensor. Dans B. L. Ellerbroek et D. Bonaccini Calia, éditeurs, *Advances in Adaptive Optics II*, volume 6272 de *Proc. SPIE*, 2006c.
- D.T. Gavel. Technology challenges to adaptive optics on extremely large telescopes. Dans R. Ragazzoni, N. Hubin, et S. Esposito, éditeurs, *Beyond Conventional Adaptive Optics*, Conference. ESO, Garching, Germany, 2001.
- D.T. Gavel et D. Wiberg. Toward Strehl-Optimizing Adaptive Optics Controllers. Dans P.L. Wizinovich et D. Bonaccini, éditeurs, *Adaptive Optical System technologies II*, volume 4839 de *SPIE Conference*, pages 890–901. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, Bellingham, WA, 2003.
- E. Gendron et P. Lena. Astronomical adaptive optics. 1 : Modal control optimization. *Astron. & Astroph.*, 291 :337–347, Novembre 1994.

- E. Gendron et P. Lena. Astronomical adaptive optics. II. Experimental results of an optimized modal control. *Astron. Astrophys.*, 111 :153–+, Mai 1995.
- L. Gilles. Closed-loop stability and performance analysis of least-squares and minimum-variance control algorithms for multiconjugate adaptive optics. *Applied Optics*, 44 (6) :993–1002, 2005.
- L. Gilles et B.L. Ellerbroek. Shack-hartmann wavefront sensing with elongated sodium laser beacons :centroiding versus matched filtering. *Applied Optics*, 45(25) :6568–6576, September 2006.
- L. Gilles, B.L. Ellerbroek, et C.R. Vogel. Layer-oriented multigrid wavefront reconstruction algorithms for multi-conjugate adaptive optics. Dans *Adaptive Optics System Technologies II*, volume 4839–118 de *Proc. SPIE*, 2002a.
- L. Gilles, B.L. Ellerbroek, et C.R. Vogel. Preconditioned conjugate gradient wave-front reconstructors for multiconjugate adaptive optics. *Applied Optics*, 42(26) :5233–5250, Sept. 2003.
- L. Gilles, C.R. Vogel, et B.L. Ellerbroek. Multigrid preconditioned conjugate-gradient method for large-scale wave-front reconstruction. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(9) :1817–1822, 2002b.
- A. Glindemann, R.G. Lane, et J.C. Dainty. Simulation of Time-evolving Speckle Patterns using Kolmogorov Statistics. *Journal of Modern Optics*, 40(12) :2381–2388, 1993.
- J.W. Goodman. Roberts and Company Publishers, Englewood, CO, 3rd édition, 2005.
- G.C. Goodwin et K.S. Sin. *Adaptive filtering prediction and control*. 1984.
- D.P. Greenwood. Mutual coherence function of a wave front corrected by zonal adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 69 :549–554, 1979.
- J. Herrmann. Least-squares wave front errors of minimum norm. *J. Opt. Soc. Am.*, 70 (1) :28–35, January 1980.
- K. Hinnen, M. Verhaegen, et N. Doelman. Exploiting the spatio-temporal correlation in adaptive optics using data-driven  $\mathcal{H}_2$ -optimal control. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(6) : 1714–1725, 2007.
- R.H. Hudgin. Wave-front compensation error due to finite corrector-element size. *J. Opt. Soc. Am.*, 67(3) :393–395, 1977.
- R.E. Hufnagel et N.R. Stanley. Modulation transfer function associated with image transmission through turbulent media. *J. Opt. Soc. Am.*, 54(1) :52, 1964.
- L. Jolissaint. Optical turbulence generators for testing astronomical adaptive optics systems : a review and designer guide. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 118 :1205–1224, September 2006.
- C. Kulcsar, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, et P. Viaris de Lesegno. Optimal control, observers and integrators in adaptive optics. *Optics Express*, 14(17), August 2006.

- R. G. Lane, A. Glindemann, et J. C. Dainty. Simulation of a Kolmogorov phase screen. *Waves in Random Media*, 2(3) :209–224, 1992.
- R.G. Lane et M. Tallon. Wavefront reconstruction using a shack-hartmann sensor. *Appl. Opt.*, 31(32) :6902, 1992.
- M. Le Louarn et M. Tallon. Analysis of modes and behavior of a multiconjugate adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(5), 2002.
- M. Le Louarn, C. Vérinaud, et V. Korkiakoski. Simulation of MCAO on (extremely) large telescopes. *Comptes Rendus Physique*, 6 :1070–1080, Décembre 2005.
- M. Le Louarn, C. Vérinaud, V. Korkiakoski, et E. Fedrigo. Parallel simulation tools for AO on ELTs. Dans D. Bonaccini Calia, B. L. Ellerbroek, et R. Ragazzoni, éditeurs, *Advancements in Adaptive Optics*, volume 5490 de *SPIE Conference*, pages 705–712, Octobre 2004.
- M. Le Louarn, Ch. Vérinaud, N. Yaitskova, V. Korkiakoski, E. Fedrigo, et N. Hubin. Simulations of (mc)ao for a 100m telescope. 2004.
- B. Le Roux. *Commande Optimale en Optique Adaptative classique et multiconjuguée*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2003.
- B. Le Roux, J.-M. Conan, C. Kulcsar, H.-F. Raynaud, L. Mugnier, et T. Fusco. Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21 (7) :1261–1276, 2004.
- L. Lessard, M. West, D. MacMynowski, et S. Lall. Warm-started wavefront reconstruction for adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(5) :1147–1155, 2008.
- D.P. Looze, M. Kasper, S. Hippler, O. Beker, et R. Weiss. Optimal compensation and implementation for adaptive optics systems. *Exper. Astron.*, 15(2) :67–88, 2003.
- P.-Y. Madec. Adaptive optics in astronomy. Chapitre Control techniques, pages 131–154. Cambridge University Press, 1999.
- E. Marchetti, R. Brast, B. Delabre, R. Donaldson, E. Fedrigo, C. Frank, N. Hubin, J. Kolb, J.-L. Lizon, M. Marchesi, S. Oberti, R. Reiss, J. Santos, C. Soenke, S. Tordo, A. Baruffolo, P. Bagnara, et The CAMCAO Consortium. On-sky Testing of the Multi-Conjugate Adaptive Optics Demonstrator. *The Messenger*, 129 :8–13, Septembre 2007.
- F. Martin, R. Conan, A. Tokovinin, A. Ziad, H. Trinquet, J. Borgnino, A. Agabi, et M. Sarazin. Optical parameters relevant for high angular resolution at paranal from gsm instrument and surface layer contribution. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 144 : 39–44, 2000.
- B.L. McGlamery. Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images. Dans J. C. Urbach, éditeur, *Proc. Int. Soc. Opt. Eng.*, volume 74 de *SPIE Conference*, pages 225–233, 1976.
- M. Morari et E. Zafiriou. *Robust Process Control*. Prentice Hall, 1989.

- T.J. Morris, R.W. Wilson, R.M. Myers, T. Butterley, R.G.M. Rutten, et G. Talbot. Performance predictions of the GLAS Rayleigh laser guide star adaptive optics system for the 4.2-m William Herschel Telescope. Dans *Advances in Adaptive Optics II*, volume 6272 de *SPIE Conference*, Juillet 2006.
- L. Mugnier, A. Blanc, et J. Idier. Advances in imaging and electron physics. volume 141, Chapitre Phase diversity : a technique for wavefront sensing and for diffraction-limited imaging, pages 1–76. Elsevier, 2006.
- R.M. Myers, A.J. Longmore, C. R. Benn, D.F. Buscher, P. Clark, N. A. Dipper, N. Doble, A. P. Doel, C. N. Dunlop, X. Gao, T. Gregory, R. A. Humphreys, D.J. Ives, Oestensen R., P. T. Peacocke, R. G. Rutten, C. J. Tierney, A. J. A. Vick, M. R. Wells, R. W. Wilson, S. P. Worswick, et A. Zadrozny. Naomi adaptive optics system for the 4.2-m william herschel telescope. Dans Peter L. Wizinowich ; Domenico Bonaccini, éditeur, *Adaptive Optical System Technologies II*, pages 647–658, 2003.
- M. Nicolle. *Analyse de front d'onde pour les optiques adaptatives de nouvelle génération : optiques adaptatives à large champ et optique adaptative extrême*. PhD thesis, Faculté des sciences d'Orsay, 2006.
- M. Nicolle, T. Fusco, G. Rousset, et V. Michau. Improvement of shack-hartmann wavefrontsensor measurement for extreme adaptive optics. *Opt. Lett.*, 29(23) :2743–2745, 2004.
- R.J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 66 :207–211, Mars 1976.
- R.J. Noll. Phase estimates from slope-type wave-front sensors (T). *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 68 :139–+, 1978.
- R.R. Parenti et R.J. Sasiela. Laser-guide-star systems for astronomical applications. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(1) :288–309, January 1994.
- R.N. Paschall et D.J. Anderson. Linear quadratic Gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements. *Appl. Opt.*, 32(31) : 6347–6358, 1993.
- K.B. Petersen et M.S. Pedersen. The matrix cookbook, Février 2007. Version February 10, 2007.
- C. Petit. *Etude de la commande optimale en OA et OAMC, validation numérique et expérimentale*. PhD thesis, Université Paris XIII, Décembre 2006.
- L.A. Poyneer. Advanced techniques for Fourier transform wavefront reconstruction. Dans Peter L. Wizinowich et Domenico Bonaccini, éditeurs, *Adaptive Optical System Technologies II*, volume 4839, pages 1023–1034. SPIE, 2003.
- L.A. Poyneer, D. Dillon, S. Thomas, et B.A. Macintosh. Laboratory demonstration of accurate and efficient nanometer-level wavefront control for extreme adaptive optics. *Appl. Opt.*, 47(9) :1317–1326, 2008.
- L.A. Poyneer, D.T. Gavel, et J.M. Brase. Fast wave-front reconstruction in large adaptive optics systems with use of the fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(10) : 2100–2111, Oct. 2002.



- L.A. Poyneer, B.A. Macintosh, et J.-P. Véran. Fourier transform wavefront control with adaptive prediction of the atmosphere. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(9) :2645, september 2007.
- L.A. Poyneer, M. Troy, B. Macintosh, et D.T. Gavel. Experimental validation of fourier-transform wave-front reconstruction at the palomar observatory. *Opt. Lett.*, 28(10) : 798–800, 2003.
- L.A. Poyneer et J.-P. Véran. Optimal modal Fourier-transform wavefront control. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(8) :1515–1526, 2005.
- R. Ragazzoni. Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *Journal of Modern Optics*, 43 :289–293, 1996.
- R. Ragazzoni et J. Farinato. Sensitivity of a pyramidic wave front sensor in closed loop adaptive optics. *Astron. Astrophys.*, 350, 1999.
- R. Ragazzoni, J. Farinato, et E. Marchetti. Adaptive optics for 100-m-class telescopes : new challenges require new solutions. Dans P. L. Wizinowich, éditeur, *Adaptive Optical Systems Technology*, volume 4007 de *SPIE Conference Series*, pages 1076–1087, jul 2000.
- F. Rigaut, G. Rousset, P. Kern, J. C. Fontanella, J. P. Gaffard, F. Merkle, et P. Léna. Adaptive optics on a 3.6-m telescope - Results and performance. *Astron. Astrophys.*, 250 :280–290, Octobre 1991.
- F. Rigaut, D. Salmon, R. Arsenault, J. Thomas, O. Lai, D. Rouan, J. P. Véran, P. Gigan, D. Crampton, J. M. Fletcher, J. Stilburn, C. Boyer, et P. Jagourel. Performance of the Canada-France-Hawaii Telescope Adaptive Optics Bonnette. *Publ. Astron. Soc. Pacific*, 110 :152–164, Février 1998.
- F. Rigaut, J.-P. Véran, et O. Lai. An analytical model for shack-hartmann-based adaptive optics systems. Dans D. Bonaccini et R.K. Tyson, éditeurs, *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353 de *SPIE Conference*, pages 1038–1048, Kona, Hawaii, March 1998.
- F. Roddier. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. *Progress in Optics*, Chapitre V. North-Holland Publishing Company, 1981.
- F. Roddier. Curvature sensing and compensation : a new concept in adaptive optics. *Applied Optics*, 27 :1223–1225, 1988.
- N. Roddier. Atmospheric wavefront simulation using zernike polynomials. *Opt. Eng.*, 29 :1174–1180, 1990.
- X. Rondeau, E. Thiébaud, M. Tallon, et R. Foy. Phase retrieval from speckle images. *Journ. Opt. Soc. Am. A*, in press, 2008.
- G. Rousset. Adaptive optics in astronomy. Chapitre 5, pages 91–130. Roddier, F., 1999.
- G. Rousset, J.L. Beuzit, N. Hubin, E. Gendron, C. Boyer, P.Y. Madec, P. Gigan, J.C. Richard, M. Vittot, J.P. Gaffard, F. Rigaut, et P. Léna. The Come-On-Plus Adaptive Optics System : Results and Performance. Dans F. Merkle, éditeur, *European Southern Observatory Astrophysics Symposia*, volume 48, pages 65–+, Janvier 1994.

- M. Schöck, R. Foy, M. Tallon, L. Noethe, et J.-P. Pique. Performance analysis of polychromatic laser guide stars used for wavefront tilt sensing. *MNRAS*, 337 : 910–920, 2002.
- J.R. Shewchuck. An introduction to conjugate gradient method without the agonizing pain. 1994.
- H.W. Sorenson. Least-Square Estimation : From Gauss to Kalman. Dans *IEEE Spectrum*, volume 7, pages 63–68, 1970.
- M. Séchaud. Adaptive optics in astronomy. Chapitre 4, pages 57–88. Roddier, F., 1999.
- M. Tallon et R. Foy. Adaptive telescope with laser probe - Isoplanatism and cone effect. *Astron. & Astroph.*, 235 :549–557, Août 1990.
- A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 2005.
- A. Tarantola et B. Valette. Inverse Problems : Quest for Information. *Journal of Geophysics*, 50 :159–170, 1982.
- V.I. Tatarski. *Wave propagation in a turbulent medium*. Dover Publications, Inc. New York, 1961.
- E. Thiébaud et M. Tallon. Fast minimum variance wavefront reconstruction for extremely large telescopes. *submitted to J. Opt. Soc. Am. A*, 2008.
- S. Thomas. *Étude d'une optique adaptative pour l'astronomie dans le visible*. PhD thesis, Sciences fondamentales et Appliquées, 2005.
- S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau, et G. Rousset. Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor. *Mon. Not. Royal Astron. Soc.*, 371 :323–336, Septembre 2006.
- H. Trinquet et J. Vernin. A statistical model to forecast the profile of the index structure constant  $C_N^2$ . *Environmental Fluid Mechanics*, 7 :397–+, 2007.
- M.A. van Dam, D. Le Mignant, et B.A. Macintosh. Performance of the keck observatory adaptive-optics system. *Appl. Opt.*, 43(29) :5458–5467, 2004.
- J.-P. Véran. *Estimation de la réponse impulsionnelle et restauration d'image en optique adaptative : Application au système d'optique adaptative du Télescope Canada-France-Hawaii*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Télécommunications, 1997.
- C. Vérinaud. On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor. *Optics Communications*, 233 :27–38, 2004.
- C. Vérinaud, N. Hubin, M. Kasper, J. Antichi, P. Baudoz, J.-L. Beuzit, A. Boccaletti, A. Chalabaev, K. Dohlen, E. Fedrigo, C. Correia Da Silva, M. Feldt, T. Fusco, A. Gandorfer, R. Gratton, H. Kuntschner, F. Kerber, R. Lenzen, P. Martinez, E. Le Coarer, A. Longmore, D. Mouillet, R. Navarro, J. Paillet, P. Rabou, F. Rahoui, F. Selsis, H. M. Schmid, R. Soummer, D. Stam, C. Thalmann, J. Tinbergen, M. Turatto, , et

- N. Yaitskova. The epics project for the european extremely large telescope : outcome of the planet finder concept study for owl. Dans B. L. Ellerbroek et D. Bonaccini Calia, éditeurs, *Advances in Adaptive Optics II*, volume 6272 de *Proc. SPIE*, 2006.
- C. Vérinaud, M. Le Louarn, V. Korkiakoski, et M. Carbillet. Adaptive optics for high-contrast imaging : pyramid sensor versus spatially filtered shack-hartmann sensor. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 357 :26–30, 2005.
- E.P. Wallner. Optimal wave-front correction using slope measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(12) :1771–1776, 1983.
- J.Y. Wang. Optical resolution through a turbulent medium with adaptive phase compensations. *J. Opt. Soc. Am.*, 67(3) :383, 1977.
- J.Y. Wang et J.K. Markey. Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion. *J. Opt. Soc. Am.*, 68(1) :78, 1978.
- D.M. Wiberg, C.E. Max, et D.T. Gavel. A spatial non-dynamic LQG controller : part I, application to adaptive optics. Dans *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 3326–3332. IEEE, Piscataway, NJ, USA ; USA, 2004a.
- D.M. Wiberg, C.E. Max, et D.T. Gavel. A spatial non-dynamic LQG controller : Part II, theory. Dans *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 3333–3338. IEEE, Piscataway, NJ, USA ; USA, 2004b.
- Q. Yang, C.R. Vogel, et Ellerbroek B.L. Fourier domain preconditioned conjugate gradient algorithm for atmospheric tomography. *Applied Optics*, 45(21) :5281–5293, July 2006.
- A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin, J. Maire, et D. Mourard. Towards the Monitoring of Atmospheric Turbulence Model. *Astron. Astrophys.*, 414, 2004.
- A. Ziad, R. Conan, A. Tokovinin, F. Martin, et J. Borgnino. From the grating scale monitor to the generalized seeing monitor. *Applied Optics*, 39 :5415, 2000.