

Analyse et mise en œuvre de nouveaux algorithmes en méthodes spectrales

Driss Yakoubi

Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie
sous la direction de **Christine Bernardi**
et la co-direction de **Stéphane Del Pino**.

Plan

Modèle de turbulence : Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)

- Dans Ω_i , $i \in \{1, 2\}$

$$\text{Équation de Stokes} \quad -\nabla \cdot (\alpha_i(k_i)\nabla \mathbf{u}_i) + \text{grad } p_i = \mathbf{f}_i,$$

$$\text{Incompressibilité} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0,$$

$$\text{Équation d'ECT} \quad -\nabla \cdot (\gamma_i(k_i)\nabla k_i) = \alpha_i(k_i)|\nabla \mathbf{u}_i|^2.$$

- Sur la frontière Γ_i , $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, et $k_i = 0$.
- Sur l'interface **air-mer** Γ : $k_i = \lambda|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|^2$, et $\alpha_i(k_i)\partial_{\mathbf{n}_i}\mathbf{u}_i - p_i\mathbf{n}_i + \kappa_j(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| = \mathbf{0}$.

Données du problème

- Ω_i borné, convexe ou $C^{1,1}$, et $\partial\Omega_i = \Gamma_i \cup \Gamma$
- Les coefficients de diffusion et viscosité turbulente $\alpha_i, \gamma_i \geq \nu > 0 \in W^{1,\infty}$.
- $\lambda, \kappa_j > 0$: coefficient de friction.
- $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$: terme source.

- **Espace des vitesses** : $\mathbf{X}_i = \{\mathbf{v}_i \in H^1(\Omega_i)^d; \mathbf{v}_i|_{\Gamma_i} = \mathbf{0}\},$
- **Espace des pressions** : $L_0^2(\Omega_i) = \{q_i \in L^2(\Omega_i), \text{ telle que } \int_{\Omega_i} q_i = 0\},$
- **Espace des ECT** : $Y_i = \{k_i \in W^{1,r'}(\Omega_i); k_i|_{\Gamma_i} = 0\},$ où

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad \text{et } r > d.$$

$\forall (\mathbf{v}_i, q_i, \varphi_i) \in \mathbf{X}_i \times L_0^2(\Omega_i) \times W_0^{1,r}(\Omega_i)$, où $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, et $r > d$.

$$\int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i) \nabla \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_i p_i + \kappa_i \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \mathbf{v}_i = \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i,$$

et $\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u}_i q_i = 0.$

$k_i|_{\Gamma_i} = 0$, et $k_i|_{\Gamma} = \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$, et $\int_{\Omega_i} \gamma_i(k_i) \nabla k_i \nabla \varphi_i = \int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2 \varphi_i.$

Difficultés

- $|\nabla \mathbf{u}_i|^2 \in L^1(\Omega_i)^d$
- Couplage des 2 fluides par $\int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \mathbf{v}_i$, $k_i|_{\Gamma} = \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$.
- Couplage des équations par $|\nabla \mathbf{u}_i|^2$, α_i et γ_i .

Schéma Numérique

k_i^n donnée, $\implies \mathbf{u}_i^{n+1}$, et p_i^{n+1} , $\forall v \in \mathbf{X}_i$,

$$\int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_i - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_i p_i^{n+1} + \kappa_i \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \mathbf{v}_i = \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i,$$

et
$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} q_i = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega_i).$$

\mathbf{u}_i^{n+1} , p_i^{n+1} données, $\implies k_i^{n+1}$? $k_i^{n+1}|_{\Gamma_i} = 0$, $k_i^{n+1}|_{\Gamma} = \lambda |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2$,

et
$$\int_{\Omega_i} \gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1} \nabla \varphi_i = \int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 \varphi_i, \quad \forall \varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i).$$

Difficultés

- couplage à l'interface par le terme $\int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \mathbf{v}_i$,
- la fonction test φ est nulle sur tout $\partial\Omega_i$,
- production de l'énergie cinétique turbulente : $|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2$ sur Γ .

Convergence des suites $(\mathbf{u}_i^n)_n$ et $(k_i^n)_n$

Théorème

Si la suite $(\mathbf{u}_i^n, k_i^n)_n$ est bornée dans $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times W^{1,3}(\Omega_i)$ par M , alors il existe une constante $C(\Omega_i, \alpha_i, \gamma_i, \kappa_i, M, \mathbf{f}_i)$, telle que si $K = \frac{C}{\nu} < 1$, le schéma est contractant, dans le sens suivant

$$\sum_i^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_{0,\Omega_i} \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_{0,\Omega_i}, \quad \text{et}$$
$$\sum_i^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{0,\Omega_i} \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_{0,\Omega_i}.$$

Stokes

Fonction test $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n$, et on somme sur $i = 1, 2 \implies$ découplage des “deux fluides” grâce à la relation

$$\int_{\Gamma} \left[|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n| (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n) \right] \left[\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} - (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n) \right] \geq 0.$$

Et on obtient la relation $\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0.$

Énergie cinétique turbulente (ECT)

- Introduction du relèvement harmonique

$$R_i : H_{00}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega_i), \quad \forall \eta \in H_{00}^{1/2}(\Gamma), R_i(\eta) \in H^1(\Omega_i), \\ -\Delta R_i(\eta) = 0 \text{ dans } \Omega_i, \quad R_i(\eta)|_{\Gamma} = 0, \quad \text{et } R_i(\eta)|_{\Gamma_i} = \eta.$$

- $\varphi_i = k_i^{n+1} - k_i^n - R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) =$ la fonction test choisie.
- La production d'ECT à l'interface \implies estimation de $\| |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 \|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ en fonction de $\|k_i^n - k_i^{n-1}\|_0.$

Estimation de $\left\| \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right|^2 - \left| \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n \right|^2 \right\|_{H_0^1/2(\Gamma)}$

● On écrit
$$\left\| \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right|^2 - \left| \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n \right|^2 \right\|_{H_0^1/2(\Gamma)} = \left\| \left[(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n) \right] \left[(\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n) \right] \right\|_{H_0^1/2(\Gamma)}$$

● En suite,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n) \right] \left[(\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n) \right] \right\|_{H_0^1/2(\Gamma)} \\ & \leq C \left\| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n) \right\|_{H_0^1/2(\Gamma)} \left\| (\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n) \right\|_{W^{1-\frac{1}{3+\epsilon}, 3+\epsilon}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

● Enfin, on applique la continuité des opérateurs de **trace**.

Il reste à prouver la convergence de la pression

Convergence de $(p_i^n)_n$

Théorème (pression)

Soit $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$, on suppose qu'il existe une constante $M > 0$, telle que $\|\mathbf{u}_i^n\|_{W^{1,3}(\Omega_i)^d} \leq M$, alors il existe une constante $C(\Omega_i, \alpha_i, \gamma_i, M)$, telle que si

$K = \frac{C}{\nu} < 1$, la suite $(p_i^n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega_i)$. De plus, on a

$$\sum_{i=1}^2 \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\|_0^2 \leq C \left[\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 + \left\| |\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}|(\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}^2 \right].$$

La preuve est basée sur

- la condition **Inf-Sup** suivante $\beta_i = \inf_{q_i \in L^2(\Omega_i)} \sup_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i} \frac{\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_i q_i}{\|q_i\|_{L^2} \|\mathbf{v}_i\|_{H^1}}$,
- la convergence de $(\mathbf{u}_i^n, k_i^n)_n$,
- et la continuité de l'injection canonique $\gamma : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow L^3(\Gamma)$.

Conclusion : le schéma proposé est convergent.

Unicité de la solution

Théorème (Unicité)

Sous les conditions du Théorème de convergence, si il existe deux solutions du problème du couplage **océan-atmosphère**

$$\mathbf{U}, \bar{\mathbf{U}} \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,3}(\Omega_i), \quad \varepsilon > 0,$$

où $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_i, p_i, k_i)$ et $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{p}_i, \bar{k}_i)$, alors $\mathbf{U}_i = \bar{\mathbf{U}}_i$.

Preuve

Mêmes techniques et étapes utilisées pour montrer la convergence \implies

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0, \quad \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0.$$

Comme $K < 1 \implies \mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i$, et $k_i = \bar{k}_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Enfin, la condition **Inf-sup** $\implies p_i = \bar{p}_i$.

(\mathbf{u}_i, p_i, k_i) est une solution du modèle

Théorème (Limite)

Sous les conditions du Théorème de convergence, la suite $(\mathbf{u}_i^n, p_i^n, k_i^n)_n$ converge vers une solution (\mathbf{u}_i, p_i, k_i) du modèle du couplage **océan-atmosphère**.

Idées de la preuve

- inégalités de **Cauchy-Schwarz, Hölder, Poincaré, Poincaré-Friedrichs...**,
- injections de **Sobolev**,
- la densité de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$,
- la continuité des opérateurs de trace : $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$,
- pour $k_i|_{\Gamma} = \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$: on écrit $= \lambda|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)|, \dots$

- Approximation de la solution par des polynômes de haut degré
- Utilisation de base **tensorisée** de polynômes **orthogonaux**, (**Legendre**)
- On a choisi l'approche **Galerkin**, avec **intégration numérique** (quadrature de **Gauss-Lobatto** :)

trouver $u_\delta \in H_\delta$, **t.q** $\forall v \in H_\delta, a(u_\delta, v_\delta) = \ell(v_\delta)$,

- $H_\delta = \mathbb{P}_{N_x} \otimes \mathbb{P}_{N_y} \otimes \mathbb{P}_{N_z}$, $u_\delta = \sum_{i,j,k=0}^{N_x, N_y, N_z} u_{ijk} L_i(x) L_j(y) L_k(z)$,

- Les matrices obtenues ne sont pas **creuses** \implies résolution par des méthodes itératives (gc, big...) : calcul **direct** du produit **matrice** \times **vecteur**
 - complexité algorithmique réduite à $O(N^{d+1})$,
 - économie de stockage mémoire.

Quelques méthodes spectrales dans des domaines complexes

- Décomposition de domaine en sous-domaines : Éléments spectraux : BERNARDI-MADAY,...
- Utilisation d'éléments courbes :
 - les transformations de GORDON-HALL,
 - utilisation en méthodes spectrales MADAY-RØNQUIST,
- CANUTO-HUSSAINI-QUARTERONI-ZANG.

Description de la nouvelle méthode

Espace discret

Espace discret : $H_\delta = \mathbb{P}_{N_x} \otimes \mathbb{P}_{N_y} \otimes \mathbb{P}_{N_z} =$ Ensemble des polynômes de degré $\leq N_{x,y,z}$ dans chaque direction .

Notre méthode repose sur deux idées

- **traitement des CL de Dirichlet par pénalisation (méthode de Nitsche) :**

remplacer la condition au limite de **Dirichlet** sur $\partial\Omega$,

$$u = g \quad \text{par} \quad \frac{1}{\varepsilon} u + \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon} g,$$

- **et approximation de la géométrie :**

$\Omega = \cup_{i=0}^{+\infty} D_i$, où D_i sont des pavés, (par exemple : **octree**)

Donc, **approcher** Ω par : $\Omega_m = \cup_{i=0}^m D_i$.

\implies

- **coût** dépend du niveau de l'*octree* m , et
- **Perte d'orthogonalité** de la base (pb de conditionnement).

Volumiques

Exemple : le problème $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$

\implies évaluer les $\int_{D_i} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{D_i} f v$, $0 \leq i \leq m$, avec la formule de

Gauss-Lobatto-Legendre,

Surfaciques

Création d'un maillage de triangles $(T_i)_i$ de $\partial\Omega$,

ensuite, évaluation des $\int_{T_i} f$ grâce à une formule de quadrature .

Théorème (Projection)

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^d , t.q $\partial\Omega$ est de $C^{m-1,1}$, et soit $u \in H^m(\Omega)$, alors il existe une constante $c(\Omega, m) > 0$, telle que

$$\|u - \Pi_N^\Omega u\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad \text{et} \quad (1)$$

$$\|u - \Pi_N^{1,\Omega} u\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}. \quad (2)$$

La preuve est basée sur

- Mettre Ω dans un pavé **P**
- les estimations d'erreurs d'approximation polynômiale sur des domaines tensoriels, **Bernardi-Maday**
- le Théorème d'extension linéaire **Guilbarg-Trudinger**,

Conditions aux limites naturelles

Considérons le problème variationnel suivant : $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_0 uv + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_{\partial\Omega} b_0 uv,$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} fv + \int_{\partial\Omega} gv.$$

Et soit le problème approché : $\forall q \in H_{\delta} = (\mathbb{P}_N)^3$, $a(u_{\delta}, q) = \ell(q)$.

Théorème

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^d , tel que $\partial\Omega$ est $C^{0,1}$. Si $u \in H^m(\Omega)$, il existe une constante $c(\Omega, m, a) > 0$, telle que

$$\|u - u^{\delta}\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

En outre si Ω est convexe ou $C^{1,1}$ alors

$$\|u - u^{\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

La preuve se base sur

- le Théorème de projection (Ω quelconque),
- le Lemme de **Céa**
- l'argument de dualité d'**Aubin-Nitsche** (pour l'erreur L^2).

Conditions aux limites de **Dirichlet** : Pénalisation

(Méthode de Nitsche)

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

et $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, tels que,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \ell(v), \quad \text{et} \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad a(u_\varepsilon, w) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon w = \ell(w)$$

Théorème (Nitsche, Babuška)

On a les estimations d'erreur suivantes

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}, \quad \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

$$\text{et} \quad \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

La preuve est basée sur

- la convergence forte $u_\varepsilon \rightarrow u$, dans $H^1(\Omega)$ (**Aubin, Lions, Maury, etc....**),
- écrire $\int_\Omega \nabla(u - u_\varepsilon) \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} (u - u_\varepsilon)v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v, \dots$
- l'argument de dualité d'**Aubin-Nitsche**, pour l'erreur L^2 .

Estimations *a priori*

$$(P) \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

et $(P_\varepsilon) \quad u_\varepsilon^\delta \in H_\delta$, tels que,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_\Omega f v, \quad \text{et} \quad \forall v^\delta \in H_\delta, \quad a(u_\varepsilon^\delta, v^\delta) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon^\delta v^\delta = \int_\Omega f v^\delta.$$

Théorème

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^d , dont le bord $\partial\Omega$ est de $C^{0,1}$, et soit $f \in H^{m-2}(\Omega)$. Si $u \in H^m(\Omega)$, il existe $c(\Omega, m) > 0$, telle que

$$\|u - u_\varepsilon^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(N^{1-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

en outre si Ω est convexe ou $C^{1,1}$ alors

$$\|u - u_\varepsilon^\delta\|_0 \leq c \left(N^{-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right).$$

- $\|u - u_\varepsilon^\delta\|_{H^1, L^2} \leq \|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^1, L^2} + \|u_\varepsilon - u\|_{H^1, L^2}$,
- $u \in H^m \implies u_\varepsilon \in H^m$, et $\|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^1, L^2} \leq c N^{\sigma-m} \|u_\varepsilon\|_{H^m}$, $\sigma \in \{0, 1\}$,
- $\|u_\varepsilon - u\|_{H^1, L^2} \leq c_1 \varepsilon^{1-\gamma} \|u_\varepsilon\|_{H^m}$, $\gamma = 0, \frac{1}{2}$.

FreeFEM3D

- Code **C++** de la famille freefem
 - résolution par éléments finis de Pb 3D (scalaires, vectoriels, ...)
 - langage utilisateur proche des mathématiques permettant l'écriture facile d'algorithmes complexes
 - formulation faible ou forte dans le langage
- Géométrie
 - en non structuré : maillage fournit par l'utilisateur
 - par domaines fictifs (pénalisation pour Dirichlet) : utilisation de CSG

Objectifs (cahier des charges)

- Intégrer la méthode spectrale à FreeFEM3D :
 - passage de **EF** à **Spectrale** transparent pour l'utilisateur,
 - permettre le mélange de **EF** et **Spectrale** pour un même calcul
- Résolution dans des domaines tensoriels et non-tensoriels
- $\mathbb{P}_n - \mathbb{P}_k$

Stratégies

- Écriture d'une maquette **C++** 1D
 - acquisition d'expérience en vue du 3D,
 - premiers tests « non tensoriels »
- Diviser pour régner
 - implémentation d'opérateurs de base
 - mise en place de tests unitaires

Conception C++

- Factorisation du code **tensoriel/non tensoriel**,
- Interopérabilité **EF** et **Spectrale** :
 - interpolation « automatique » : `SpectralFunction` hérite de `ScalarFunction`

Résolution de $-\Delta u = 1$ avec $u = 0$ sur le bord.

On approche la condition limite par : $\frac{1}{\epsilon}u + \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$.

Éléments finis

```
vector a=(0,0,0); vector b=(1,1,1);
vector n=(10,10,10);
mesh m=tetrahedrize(structured(n,a,b));
```

```
femfunction u(m)=0;
solve(u) in m
{
  test(v)
    int[0,1,2,3,4,5](1E3*u*v)
    + int(grad(u)*grad(v))
    = int(v);
}
```

```
save(vtk, "u", u, m);
```

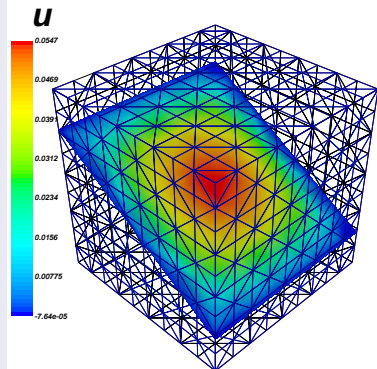
Spectrale

```
vector a=(0,0,0); vector b=(1,1,1);
vector n=(10,10,10);
mesh m=spectral(n,a,b);
```

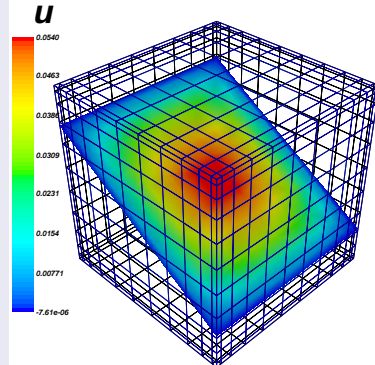
```
sfunction u(m)=0;
solve(u) in m
{
  test(v)
    int[0,1,2,3,4,5](1E3*u*v)
    + int(grad(u)*grad(v))
    = int(v);
}
```

```
save(vtk, "u", u, m);
```

Éléments finis



Spectrale

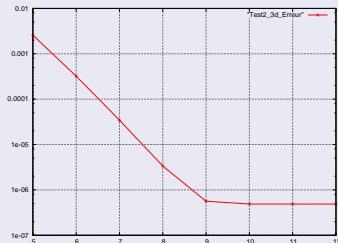


Convergence vers la solution analytique d'un problème vectoriel de la forme :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f}, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

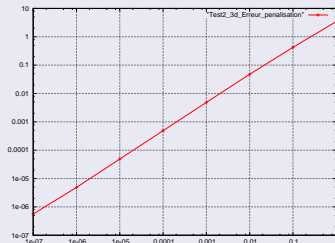
$N \in \{5, \dots, 12\}$

$\varepsilon = 10^{-7}$



$N = 15$

$\varepsilon \in [10^{-7}, 1]$



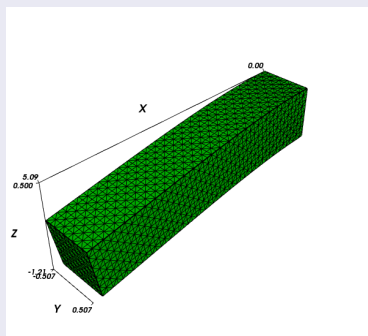
Élasticité linéaire

Résolution en déplacement

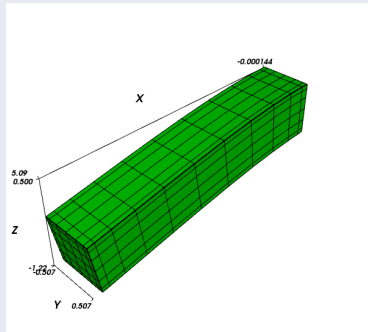
$$\int_{\Omega} \mu \sum_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u}_j \partial_{x_i} \mathbf{v}_j + \int_{\Omega} \mu \sum_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u}_j \partial_{x_j} \mathbf{v}_i + \int_{\Omega} \lambda \sum_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u}_i \partial_{x_j} \mathbf{v}_j = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

$$\Omega =]0, 5[\times] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \mu = 500, \lambda = 1000 \text{ et } \mathbf{f} = (0, 0, -1)$$

Éléments finis $50 \times 10 \times 10$



Spectrale $10 \times 5 \times 5$



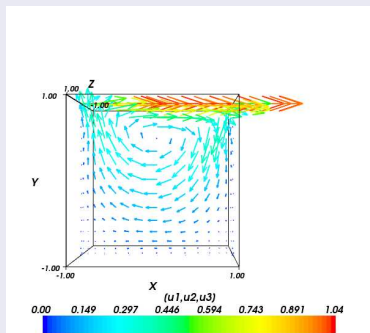
Stokes

$$-\Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega$$

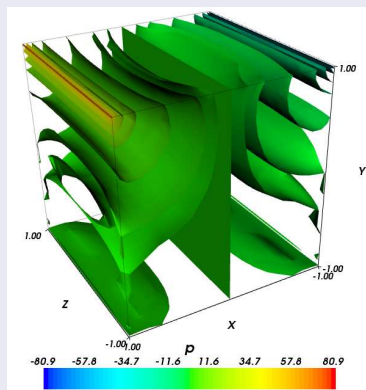
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

Paramètres de discrétisation et pénalisation : $N = 15$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

la vitesse



la pression

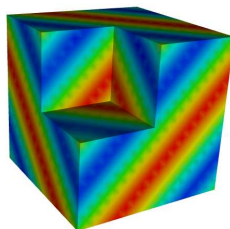
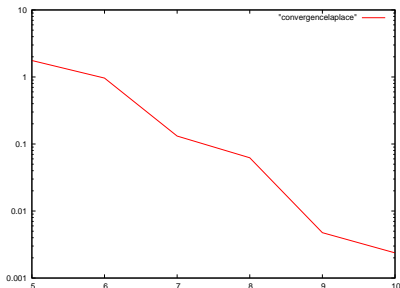


Laplace

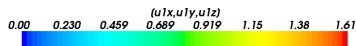
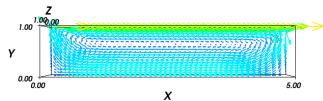
On considère le problème aux limites suivant

$$-\Delta u = 3\pi^2 \sin(\pi(x + y + z)) \quad \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \quad \text{et}$$
$$u = \sin(\pi(x + y + z)) \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

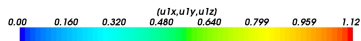
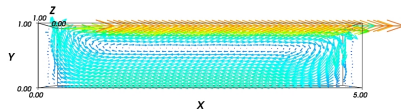
$\Omega_1 =]-1, 0[\times]-1, 1[\times]-1, 1[$, $\Omega_2 =]0, 1[\times]-1, 0[\times]-1, 1[$,
et $\Omega_3 =]0, 1[\times]0, 1[\times]-1, 0[$.



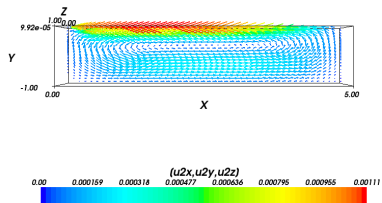
Éléments finis



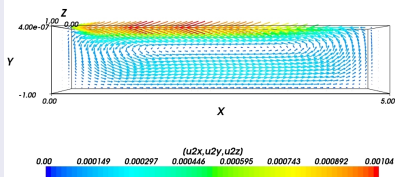
Spectrale



Éléments finis



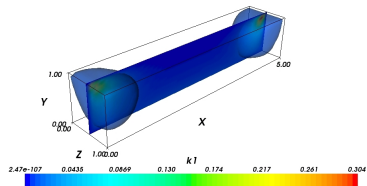
Spectrale



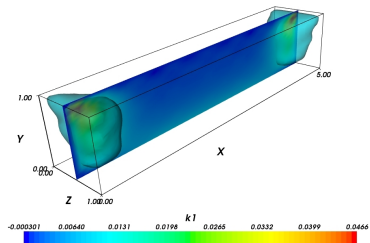
Énergie cinétique turbulente atmosphérique : valeur de l'isosurface est 10^{-2}

1/2

Éléments finis



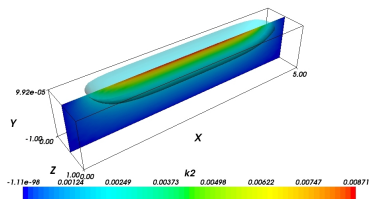
Spectrale



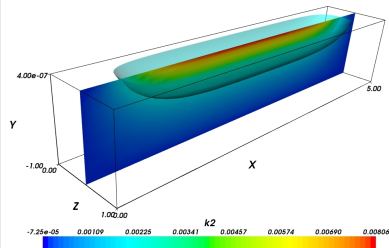
Énergie cinétique turbulente océanique : valeur de l'isosurface est 2.10^{-3}

2/2

Éléments finis

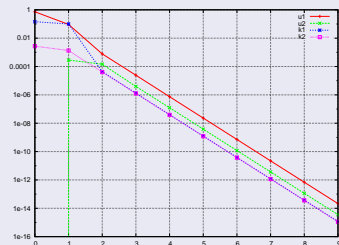


Spectrale

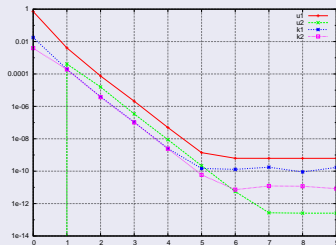


Courbes de convergence

Éléments finis



Spectrale



Conclusion

- Schéma tridimensionnel, et aussi bidimensionnel
- **Convergence exponentielle** du schéma vers la solution désirée
- Indépendant de la méthode utilisée (**EF, Spectrale**)
- Hypothèses supplémentaires de régularité en **3D**, mais pas en **2D**
- Algorithme semblable pour un modèle d'un seul fluide turbulent

Perspectives

- Étude de la convergence du schéma dans le cas des viscosités non bornées, de la forme $\nu + \sqrt{\tau + k}$,
- Cas d'une solution localement unique \implies Théorème de **Brezzi-Rappaz-Raviart**
- Ajout du terme de transport : $\mathbf{u} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\gamma(k) \nabla k) = \alpha(k) |\nabla \mathbf{u}|^2$
- Réduire les hypothèses de régularité en dimension 3 ?

Conclusion

- Code 3D **Tensoriel/ Non Tensoriel** (Legendre) **intégré** à FreeFEM3D
- Respect du cahier des charges :
 - Problèmes scalaires ou vectoriels, $\mathbb{P}_n - \mathbb{P}_k$, elliptiques, non symétriques, non linéaires
 - Prise en main facile, couplage avec **EF** possible,...
- Nouvelle méthode Spectrale dans des domaines à géométrie complexes
 - Analyse numérique de la méthode
 - Problème de coût
 - Pavage de Ω
 - Perte d'orthogonalité \implies mauvais conditionnement

Perspectives

- **Analyse** : prise en compte des erreurs de quadrature
- Mise en place de préconditionneurs pour rendre la méthode compétitive
- **Lagrange**, **Eléments spectraux**,...