Hauteurs pour les sous-schémas et exemples d'utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l'approximation diophantienne

Hugues Randriambololona

N° d'ordre : 6801

UNIVERSITE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

Présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

Par

Hugues RANDRIAMBOLOLONA

Sujet : Hauteurs pour les sous-schémas et exemples d'utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l'approximation diophantienne

Soutenue le 8 janvier 2002 devant la Commission d'examen

Jean-Benoît BOST
Antoine CHAMBERT-LOIR
Sinnou DAVID
Michel LAURENT
Patrice PHILIPPON
Christophe SOULÉ

Remerciements

Je remercie Jean-Benoît Bost d'avoir accepté de guider mes travaux et de m'avoir fait profiter de l'immense étendue de sa culture scientifique. Il s'est toujours montré très disponible pendant ces quatre ans et a fait preuve de beaucoup de patience, me prodiguant de nombreux conseils toujours très précis, et allant jusqu'à corriger les épreuves de mon texte dans les moindres détails typographiques. Surtout, il m'a proposé un sujet tellement riche et intéressant que cette thèse est loin de l'avoir épuisé et que j'aurai là matière à poursuivre mes recherches pendant de nombreuses années encore.

Je remercie Michel Laurent et Christophe Soulé d'avoir accepté le lourd travail de rapporteur, de s'en être acquitté malgré des délais relativement courts, et surtout de m'avoir communiqué des remarques utiles et précises pour l'amélioration du texte.

Je remercie enfin Antoine Chambert-Loir, Sinnou David et Patrice Philippon d'avoir accepté joyeusement de faire partie de ce jury.

Plus généralement je tiens à remercier tous ceux qui ont manifesté de l'intérêt pour ce travail. Ils ne sont pas particulièrement nombreux, mais je préfère quand même ne pas prendre le risque d'essayer de les nommer tous. Je remercie aussi tous ceux auprès de qui j'ai appris, qu'il s'agisse de mathématiques ou d'autres choses ; indirectement, cette thèse est en partie leur œuvre.

Ce texte a été dactylographié grâce aux moyens informatiques de l'École normale supérieure et à ceux de l'École nationale supérieure des télécommunications, indifféremment. Je tiens particulièrement à remercier le Service de prestations informatiques de l'ENS qui a prolongé la durée de vie de mon compte sur clipper bien au-delà de la fin de ma scolarité officielle, me permettant ainsi d'accéder à son irréprochable installation de LaTeX et au très utile forum de discussion électronique des élèves.

Je suis aussi reconnaissant envers l'équipe de mathématiques du département InfRes de l'ENST pour l'ambiance de travail chaleureuse qui y règne et pour la liberté qui m'y a été accordée, sans lesquelles ce travail ne serait peut-être pas parvenu à son terme naturel.

Enfin je n'oublie pas le rôle de ma famille qui, même si je l'ai tenue à l'écart de ce travail, a toujours été présente lorsque j'en avais besoin.

Abstract

In this thesis we define and study some notions in the context of Arakelov geometry that have an intrinsic interest and should find applications in diophantine approximation theory.

Most of the text is devoted to the elaboration of a theory of heights for subschemes and to the proof of "Hilbert-Samuel formulae" for these heights. For two important classes of subschemes (integral subschemes and "smooth with multiplicities" subschemes) we show that the height of the subscheme relative to a high power of a positive line bundle is asymptotically determined by the height of the associated cycle. The proof essentially uses the "arithmetic Hilbert-Samuel theorem" of Gillet and Soulé, and reduces to it using techniques from hermitian analytic geometry. Then we give a finer analysis of the asymptotic expansion of heights of certain particular subschemes. Notably, in the case of relative dimension zero, we express the constant term of the asymptotic expansion by means of the ramification of the subscheme, which solves a question of Michel Laurent concerning heights of interpolation matrices.

Finally, as an independant part, we show some applications of arakelovian methods to diophantine approximation problems. In particular, we give a new proof of a classical criterion for algebraic independance. The originality of this proof is that it does not use any elimination theory but only arguments from arithmetic intersection theory.

Keywords : Arakelov geometry, diophantine approximation, heights, arithmetic Hilbert-Samuel formula, algebraic independance criterion.

Table des matières

Introduction

Le but de cette thèse est de définir et d'étudier un certain nombre de notions dans le cadre de la géométrie d'Arakelov qui, d'une part, possèdent un intérêt intrinsèque et, d'autre part, sont susceptibles d'applications à la théorie de l'approximation diophantienne.

Les trois premiers quarts environ de cette thèse sont consacrés à l'élaboration d'une théorie des hauteurs pour les sous-schémas. L'intuition de la notion de hauteur est très ancienne – on peut la voir transparaître par exemple dans la méthode de «descente infinie» de Fermat – cependant elle n'a été mise en lumière et précisée qu'au début du vingtième siècle par Mordell, Northcott et Weil, à l'occasion notamment de la preuve de la finitude du rang du groupe des points rationnels d'une courbe elliptique (ou plus généralement d'une variété abélienne) sur un corps de nombres.

La hauteur d'un objet arithmétique peut s'interpréter comme une mesure de sa complexité, c'est-à-dire de la quantité d'information nécessaire pour le décrire. On dispose actuellement de nombreux points de vue sur la théorie des hauteurs, tous à peu près équivalents. Une définition «arakelovienne» des hauteurs a été introduite en 1983 par Faltings pour les variétés abéliennes, dans le cadre de la preuve des conjectures de Mordell et de Shafarevich. Plus généralement, la théorie de l'intersection arithmétique développée il y a une dizaine d'années par Gillet et Soulé fournit une théorie des hauteurs, admettant une définition géométrique intrinsèque, pour les *cycles* sur une variété arithmétique. Dans cette thèse on va montrer que la géométrie d'Arakelov fournit une notion tout aussi naturelle de hauteur pour les *sous-schémas* d'une variété arithmétique et en étudier les principales propriétés.

L'organisation du texte est la suivante.

Le premier chapitre renferme divers lemmes, définitions, conventions et calculs préliminaires qui seront utilisés par la suite.

C'est dans le deuxième chapitre que sont définies les hauteurs de sous-schémas. Soit $\mathcal{X}$ une variété arithmétique projective munie d'un fibré en droites hermitien positif $\overline{\mathcal{L}}$ et d'une forme volume. Si Σ est un sous-schéma de $\mathcal{X}$, on souhaite définir la hauteur d'ordre n de Σ, notée $h^{(n)}(\Sigma)$, comme le degré d'Arakelov du $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ (du moins, pour n assez grand) muni de métriques hermitiennes convenables. Il ne semble pas très intéressant de considérer les métriques hermitiennes restreintes sur les fibres de $\mathcal{L}|_\Sigma$ en les points complexes de Σ, car celles-ci ne rendent pas compte de la présence éventuelle d'éléments nilpotents dans le faisceau structural de Σ. On préfère construire les métriques directement sur l'ensemble des sections globales $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})$, par passage au quotient par l'application naturelle de restriction (du moins, lorsque celle-ci est génériquement surjective) des métriques L^2 sur l'ensemble $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ des sections de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur la variété ambiante $\mathcal{X}$. À un choix de normalisation près, une construction similaire avait déjà été proposée en 1990 par M. Laurent sous le nom de «fonction de Hilbert-Samuel arithmétique». Une particularité géométrique importante de ces hauteurs de sous-schémas est la suivante : si Σ est plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ et si l'entier n est assez grand, la hauteur $h^{(n)}(\Sigma)$ s'interprète comme la hauteur du point de Hilbert associé à Σ, relativement à un fibré en droites hermitien naturel sur le schéma de Hilbert correspondant. Autrement dit, on s'attend à ce que ces hauteurs aient un comportement agréable lorsque l'on considère des familles de sous-schémas.

Malgré le naturel de leur définition, on connaît peu de propriétés des hauteurs de sous-schémas. Par analogie avec la situation géométrique, on est conduit à conjecturer que ces hauteurs admettent un développement asymptotique dont le terme dominant devrait être polynomial en n et donné essentiellement par la hauteur du cycle associé à Σ. Ceci a été démontré par M. Laurent pour les sous-schémas réduits de dimension générique nulle de l'espace projectif standard, avec le formalisme des matrices d'interpolation. Peu d'autres cas étaient connus jusqu'à ce jour. Évidemment, lorsque $\mathcal{X}$ est munie d'une métrique kählérienne et que le sous-schéma Σ est égal à la variété $\mathcal{X}$ tout entière, ce «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les sous-schémas» n'est autre que le «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les variétés» démontré, dans le cas lisse, par Gillet et Soulé au moyen de leur théorème de Riemann-Roch arithmétique (et redémontré ensuite par Abbes et Bouche par une méthode directe). Plus généralement, lorsque Σ est un sous-schéma intègre génériquement lisse, il n'est pas difficile de se ramener au cas précédent : il faut alors comparer les métriques quotient sur $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})$ et les métriques L^2 obtenues par intégration des métriques restreintes sur les fibres de $\mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma}$ en les points complexes de Σ ; une inégalité dans un sens s'obtient au moyen des estimations de Cauchy et dans l'autre sens, au moyen d'un théorème d'extension L^2. La même méthode semble se généraliser au cas où Σ est un sous-schéma réduit mais de fibre générique éventuellement singulière. On doit alors remplacer le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique de Gillet et Soulé par sa généralisation au cas singulier obtenue par Zhang, et on dispose encore d'une version singulière d'un théorème d'extension avec contrôle de normes, selon une méthode suggérée à l'auteur par J.-B. Bost, utilisant la théorie des espaces de Stein. On trouvera ce résultat démontré dans l'annexe A.2 pour le cas des sous-schémas intègres de l'espace projectif. La situation devient en revanche plus compliquée dès que Σ n'est plus réduit.

L'auteur n'est pas parvenu dans cette thèse à étendre ce théorème de Hilbert-Samuel arithmétique au cas des sous-schémas non réduits en toute généralité. Cependant, dans le troisième chapitre, on démontre le résultat espéré, sous l'hypothèse additionnelle que les composantes multiples de Σ vérifient une certaine condition généralisant la notion de lissité (théorème 3.1.16). Cette hypothèse permet, d'une part, d'appliquer le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique aux faisceaux de jets sur le sous-schéma réduit $\Sigma^{\text{réd}}$ et d'autre part, de démontrer un théorème de relèvement de jets le long de Σ à la variété $\mathcal{X}$ tout entière avec contrôle des normes L^2 (théorème 3.1.10). À la fin du troisième chapitre, on raffine ce résultat en donnant une estimation du terme d'erreur (proposition 3.2.3), sous l'hypothèse que l'immersion de Σ dans $\mathcal{X}$ est (génériquement) régulière et définie par l'annulation d'une section globale d'un fibré vectoriel sur $\mathcal{X}$.

Après ce calcul du terme principal du développement asymptotique des hauteurs des sous-schémas intègres et des sous-schémas «lisses avec multiplicités», on s'est restreint à l'étude de certains sous-schémas très particuliers, en cherchant à établir un développement asymptotique de leurs hauteurs à un ordre plus élevé. Dans le quatrième chapitre on considère le cas, d'abord, d'un sous-espace linéaire d'un espace projectif, puis d'une réunion de deux sous-espaces linéaires. On montre (corollaire 4.3.6) que les hauteurs de ces sous-schémas admettent un développement asymptotique à un ordre arbitrairement grand, en s'attachant notamment à indiquer la nature arithmétique des constantes impliquées dans ce développement asymptotique ; on verra ainsi apparaître les valeurs aux entiers négatifs (aussi bien pairs qu'impairs) de la dérivée de la fonction zêta de Riemann. On montre enfin que les hauteurs d'un sous-schéma réunion de deux sous-espaces linéaires s'expriment essentiellement comme somme des hauteurs de chacun des sous-espaces linéaires et d'un certain nombre de termes correctifs (théorème 4.3.4 et corollaire 4.3.5). Aux places finies, ces termes correctifs résultent de l'apparition de composantes dégénérées dans le sous-schéma intersection des deux sous-espaces linéaires. Aux places infinies, ils traduisent le défaut d'orthogonalité de ces deux sous-espaces linéaires. Une particularité remarquable est que ces termes correctifs aux places finies et aux places infinies ont un comportement analogue, de telle sorte que, d'une certaine façon, on peut considérer le défaut d'orthogonalité de deux sous-espaces linéaires comme l'analogue métrique de l'apparition d'une composante essentielle immergée dans l'intersection de ces deux sous-espaces.

Dans le cinquième chapitre, on s'intéresse au cas des sous-schémas de dimension générique nulle d'un espace projectif. On montre que les hauteurs de ces sous-schémas admettent un développement asymptotique dont on calcule explicitement les trois premiers termes (théorème 5.2.2). Le terme principal de ce développement asymptotique est linéaire et s'exprime en fonction de la hauteur du cycle associé au sous-schéma ; le terme suivant est logarithmique et ne dépend que des multiplicités du sous-schéma en ses points à l'infini ; enfin le terme constant s'exprime essentiellement (après éventuelle extension du corps de base) en fonction de la ramification et d'une hauteur pour le «cône tangent total» du sous-schéma. On donne ensuite diverses applications, en expliquant notamment comment ce théorème répond à une question laissée ouverte par M. Laurent à propos du terme constant du développement asymptotique des hauteurs de matrices d'interpolation.

En annexe, on formule quelques conjectures généralisant les résultats démontrés dans ces trois chapitres, en proposant quelques approches possibles.

Les deux derniers chapitres (dont la lecture est indépendante de celle des quatre précédents) donnent quelques exemples d'utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l'approximation diophantienne. Dans le chapitre six, on redémontre le théorème dit «des six exponentielles» par la méthode des pentes de J.-B. Bost[1]. Sortie de son contexte, cette traduction n'est qu'un exercice de routine. Il serait intéressant cependant d'aller plus loin dans cette direction et d'essayer par exemple de démontrer un résultat d'indépendance algébrique en dimension supérieure par des arguments arakeloviens utilisant la géométrie intrinsèque

[1] une démonstration de ce même théorème par la même méthode vient d'être donnée indépendamment par É.Gaudron.

des données du problème.

On peut voir le chapitre sept comme une première étape en ce sens, quoique d'utilité et de portée encore assez limitées. On y (re-)démontre un critère pour l'indépendance algébrique semblable à celui publié par P. Philippon en 1986. Le point nouveau ici est que la démonstration, dont le plan s'inspire directement de celle d'un résultat analogue dû à M. Laurent et D. Roy, ne fait plus appel nulle part à la théorie de l'élimination, mais uniquement à la théorie de l'intersection arithmétique, appliquée à des fibrés en droites munis de métriques déformées au voisinage du point dont on veut estimer le degré de transcendance.

Remarquons que, bien qu'elle soit consacrée à plusieurs sujets relativement indépendants, cette thèse présente néanmoins une certaine unité. D'abord, il convient de signaler que de nombreuses méthodes sont communes dans l'approche qui a été faite de ces différents problèmes. Ensuite, il n'est pas exclu de trouver des liens plus profonds entre les différentes questions étudiées ici. Notamment, dans la mesure où les hauteurs de sous-schémas ont été introduites en vue d'applications à la théorie de l'approximation diophantienne, il n'y aurait rien de surprenant à ce qu'on puisse reformuler ou utiliser le critère d'indépendance algébrique dans un contexte où apparaitraient naturellement des hauteurs de sous-schémas.

Première partie

Généralités

Chapitre 1

Conventions et résultats préliminaires

1.1 Conventions

Soient A un anneau commutatif et E un A-module. Pour tout entier naturel n, on note

$$E^{\otimes n} \qquad (\text{resp. } S^n E, \quad \text{resp. } \bigwedge^n E)$$

la n-ième puissance tensorielle (resp. symétrique, resp. extérieure) de E. Conformément à [Bourbaki] A ch. III, $S^n E$ et $\bigwedge^n E$ sont des quotients de $E^{\otimes n}$.

Les sommes directes $TE = \bigoplus_n E^{\otimes n}$, $SE = \bigoplus_n S^n E$ et $\bigwedge E = \bigoplus_n \bigwedge^n E$ sont munies naturellement d'une structure de A-algèbre.

Plus généralement, si X est un schéma et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, on note $T\mathcal{F} = \bigoplus_n \mathcal{F}^{\otimes n}$ l'algèbre tensorielle de $\mathcal{F}$. Les algèbres symétrique $S\mathcal{F} = \bigoplus_n S^n\mathcal{F}$ et extérieure $\bigwedge \mathcal{F} = \bigoplus_n \bigwedge^n \mathcal{F}$ sont encore des quotients gradués de $T\mathcal{F}$.

Parfois on écrira aussi $\mathrm{Sym}^n\mathcal{F}$ pour $S^n\mathcal{F}$.

Dans ce texte, les espaces euclidiens ou hermitiens seront par définition toujours supposés de dimension finie. Les produits scalaires hermitiens seront antilinéaires par rapport à la première variable et linéaires par rapport à la deuxième.

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux espaces euclidiens ou hermitiens, $u : E \to F$ une application linéaire et $\lambda > 0$ un réel. On dira que u est une similitude de rapport λ si u est bijective et si pour tous $e_1, e_2 \in E$ on a*

$$< u(e_1), u(e_2) >_F = \lambda^2 < e_1, e_2 >_E .$$

On dira que u est une similitude partielle de rapport λ si l'application de $E/\ker(u)$ sur $\mathrm{Im}(u)$ induite par u est une similitude de rapport λ. On appellera isométrie (resp. isométrie partielle) une similitude (resp. une similitude partielle) de rapport 1.

Si E est un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire euclidien ou hermitien noté $< .,. >$, et si n est un entier, l'espace $E^{\otimes n}$ est muni d'un produit scalaire défini comme suit : si $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ sont des éléments de E, le produit scalaire des tenseurs élémentaires $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ et $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$ vaut

$$< e_1 \otimes \ldots \otimes e_n, f_1 \otimes \ldots \otimes f_n >_{E^{\otimes n}} = \prod_{i=1}^{n} < e_i, f_i > .$$

Les puissances symétriques de E sont munies du produit scalaire quotient, de telle sorte que :

$$< e_1. \cdots .e_n, f_1. \cdots .f_n >_{S^n E} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} < e_i, f_{\sigma(i)} > . \tag{1.1.1}$$

Les deux lemmes suivants sont des conséquences immédiates de la formule (1.1.1).

Lemme 1.1.2 *Soient E un espace euclidien ou hermitien et $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormale de E. Pour tout entier d et pour tout multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ de poids $d = |I| = i_1 + \cdots + i_n$, notons $e^I = e_1^{i_1}. \cdots .e_n^{i_n} \in S^d E$. Alors les e^I forment une base orthogonale de $S^d E$ et le carré de leur norme est l'inverse du coefficient multinomial correspondant :*

$$\|e^I\|^2_{S^d E} = \frac{i_1! \ldots i_n!}{d!}.$$

Lemme 1.1.3 *Soit E un espace euclidien ou hermitien muni d'une décomposition*

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} E_k$$

en somme directe orthogonale de certains de ses sous-espaces. Soient $d_1, \ldots, d_k$ des entiers et $d = d_1 + \cdots + d_k$. Alors l'application naturelle

$$S^{d_1} E_1 \otimes \ldots \otimes S^{d_k} E_k \to S^d E$$

est injective et définit une similitude sur son image, de rapport

$$\left(\frac{d_1! \ldots d_k!}{d!} \right)^{1/2} .$$

Les puissances extérieures de E seront munies du produit scalaire suivant :

$$< e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, f_1 \wedge \cdots \wedge f_n >_{\bigwedge^n E} = \det_{i,j} < e_i, f_j > . \tag{1.1.2}$$

On notera que ce produit scalaire diffère du produit scalaire quotient de celui de $E^{\otimes n}$ par un facteur $n!$.

Plus généralement, si X est un schéma et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre, alors pour tout entier n, la n-ième puissance extérieure du dual de $\mathcal{E}$ s'identifie au dual de la n-ième puissance extérieure de $\mathcal{E}$ grâce à l'accouplement

$$< .,. >: \bigwedge^n \mathcal{E} \times \bigwedge^n (\mathcal{E}^*) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

donné localement par la formule

$$< e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, l_1 \wedge \cdots \wedge l_n >= \det_{i,j} < l_i, e_j > \tag{1.1.3}$$

où les e_i et l_j sont des sections locales de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$, respectivement. Lorsque $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ (resp. $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$) et que $\mathcal{E} = E$ est un espace euclidien (resp. hermitien), on vérifie immédiatement que l'unique produit scalaire sur $\bigwedge^n E$ qui rende cet accouplement compatible avec les isomorphismes (anti-)linéaires canoniques de E sur E^* et de $\bigwedge^n E$ sur $(\bigwedge^n E)^*$ est celui donné par la formule (1.1.2).

Si X est une variété différentielle (réelle ou complexe) compacte munie d'une forme volume $d\mu$ et $\overline{E}$ un fibré vectoriel sur X muni d'une métrique hermitienne continue, on définit le produit scalaire L^2 sur l'espace des sections globales localement de carré sommable de $\overline{E}$ comme étant donné par la formule suivante :

$$< s, t >_{L^2}= \int_X < s, t > d\mu \tag{1.1.4}$$

où s et t sont des sections de E, et $< .,. >$ le produit hermitien sur E.

Soit X une variété analytique complexe. On rappelle que le complexifié du fibré tangent réel de X admet une décomposition en somme directe

$$(T_{\mathbb{R}}X)_{\mathbb{C}} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$$

où $T^{1,0}X$ est l'espace propre associé à la valeur propre i pour l'action de la structure complexe, et $T^{0,1}X = \overline{T^{1,0}X}$. En outre, $T^{1,0}X$ s'identifie naturellement au fibré tangent complexe de X. On note aussi

$$(T_{\mathbb{R}}X)^*_{\mathbb{C}} = T^{1,0}X^* \oplus T^{0,1}X^*$$

la décomposition duale du fibré cotangent.

Supposons maintenant que X est une variété kählérienne de dimension n. On appelle 2-forme associée à la métrique kählérienne de X la forme définie localement par

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \wedge \overline{\varphi_j} \tag{1.1.5}$$

où les φ_j forment une base unitaire du fibré cotangent $T^{1,0}X^*$. On vérifie que cette expression ne dépend pas du choix de la base. En outre, si x et y sont deux sections locales de $T^{1,0}X$, le produit scalaire de x et y défini par la structure kählérienne est égal à

$$2i\pi < \overline{x} \wedge y, \omega > \tag{1.1.6}$$

où le crochet représente la dualité entre $\bigwedge^2 (T_{\mathbb{R}}X)_{\mathbb{C}}$ et $\bigwedge^2 (T_{\mathbb{R}}X)^*_{\mathbb{C}}$. Inversement, cette construction met en bijection l'ensemble des formes ω fermées réelles de type $(1,1)$ et définies positives (*i.e.* telles que la forme sesquilinéaire donnée par (1.1.6) définisse un produit scalaire hermitien) et l'ensemble des structures hermitiennes sur X qui en font une variété kählérienne.

Si maintenant une telle structure est donnée, on définit la forme volume associée par la formule

$$d\mu = \omega^n. \tag{1.1.7}$$

Remarque 1.1.4 Sous les hypothèses précédentes, la partie réelle de la métrique hermitienne sur X définit une métrique riemannienne sur la variété réelle de dimension $2n$ sous-jacente. Notons dV_{Riem} la forme volume associée à cette métrique riemannienne. Alors les conventions (1.1.5) et (1.1.7) impliquent

$$d\mu = \frac{n!}{\pi^n} dV_{\mathrm{Riem}} = \frac{1}{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(B_{\mathbb{R}^{2n}}(1))} dV_{\mathrm{Riem}}.$$

1.2 Quelques notions de géométrie hermitienne élémentaire

1.2.1 Décomposition polaire

Proposition 1.2.1 (Décomposition polaire) *Soient E et F deux espaces hermitiens et*

$$u : E \to F$$

une application linéaire. Alors il existe un unique entier e, une unique suite finie strictement croissante de réels strictements positifs

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$$

et une unique décomposition de E et de F en somme directe orthogonale

$$E = E_0 \overset{\perp}{\oplus} \overset{\perp}{\bigoplus_{i \in \{1,\dots,e\}}} E_i$$

$$F = F_0 \overset{\perp}{\oplus} \overset{\perp}{\bigoplus_{i \in \{1,\dots,e\}}} F_i$$

tels que

i. $E_0 = \ker u$

ii. la projection orthogonale $F \to F_0$ identifie F_0 au conoyau $\operatorname{coker} u$.

iii. pour tout $i \in \{1, \dots, e\}$, u induit une similitude de rapport λ_i de E_i sur F_i.

Démonstration : Soit $u^* : F \to E$ l'adjoint de u. On prend pour λ_i les racines carrées des valeurs propres non nulles de $u^* u$, et E_i les espaces propres associés. On pose $F_i = u(E_i)$,

$E_0 = \ker u^*u = \ker u$, et $F_0 = (\bigoplus_i F_i)^\perp$. Alors par le théorème de décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints, on a bien

$$E = E_0 \overset{\perp}{\oplus} \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in\{1,\dots,e\}}} E_i.$$

En outre, si $x, y \in E_i$, on a

$$(u(x), u(y)) = (u^*u(x), y) = \lambda_i^2 (x, y),$$

tandis que si $x_i \in E_i$, $x_j \in E_j$ avec $i \neq j$, on a

$$(u(x_i), u(x_j)) = (u^*u(x_i), x_j) = 0,$$

i.e. $F_i \perp F_j$. Ceci donne la décomposition souhaitée de E et de F.

Inversement, si E et F admettent une telle décomposition, il résulte immédiatement de l'énoncé de la proposition que les E_i sont les espaces propres de u^*u associés aux valeurs propres λ_i^2. $\square$

Définition 1.2.2 *Avec les notations de la proposition, on dira que les réels $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ sont les valeurs caractéristiques non nulles de u. Si $\ker u$ n'est pas réduit à zéro, on dira que $0 = \lambda_0$ est aussi valeur caractéristique de u.*

Le sous-espace E_i est appelé espace caractéristique associé à la valeur caractéristique λ_i, et l'entier

$$m_i = \dim E_i$$

est appelé multiplicité de λ_i.

On appelle suite des valeurs caractéristiques de u avec multiplicités la suite $(\mu_j)_{j\in\{1,\dots,\dim E\}}$ définie par

$$\mu_j = \lambda_i \quad \text{si} \quad m_0 + \cdots + m_{i-1} < j \leq m_0 + \cdots + m_i.$$

La proposition peut se reformuler ainsi :

Corollaire 1.2.3 *Soient E et F deux espaces hermitiens et*

$$u : E \to F$$

une application linéaire. Alors il existe une unique décomposition en somme directe orthogonale de E et de F : $E = E_0 \overset{\perp}{\oplus} E'$, $F = F_0 \overset{\perp}{\oplus} F'$, une unique isométrie

$$\varphi : E' \xrightarrow{\sim} F'$$

et un unique endomorphisme auto-adjoint défini positif h (resp. k) de E' (resp. F') tels que

$$u = i \circ \varphi \circ h \circ p = i \circ k \circ \varphi \circ p, \tag{1.2.1}$$

où i est l'inclusion de F' dans F et p la projection orthogonale de E sur E'. Les endomorphismes h et k ont mêmes valeurs propres (avec multiplicités), égales aux valeurs caractéristiques non nulles de u.

Toujours avec les mêmes notations, on a la

Proposition 1.2.4 *L'adjoint*
$$u^* : F \to E$$
de u a mêmes valeurs caractéristiques non nulles avec multiplicités que u.

En outre, 0 est valeur caractéristique de u si et seulement si u n'est pas injective, et est valeur caractéristique de u^* si et seulement si u n'est pas surjective.

L'espace caractéristique de u^* associé à la valeur caractéristique λ_i est F_i (ceci est valable aussi pour $i = 0$) et s'envoie par u^* dans E_i.

Démonstration : Cela résulte immédiatement de la définition de l'adjoint et des propriétés de la décomposition polaire (on peut aussi l'obtenir directement en passant à l'adjoint dans la formule (1.2.1)). □

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la construction de la décomposition polaire telle qu'elle a été faite dans la démonstration de la proposition 1.2.1 :

Proposition 1.2.5 *Soient a et b deux réels. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. les valeurs caractéristiques de u sont toutes comprises dans l'intervalle $[a, b]$

ii. pour tout x dans E, on a
$$a\|x\| \leq \|u(x)\| \leq b\|x\|.$$

En particulier, la norme de u est égale à sa plus grande valeur caractéristique
$$\|u\| = \mu_{\dim E}.$$
Plus généralement, si k est un entier et si on note $\bigwedge^k u : \bigwedge^k E \to \bigwedge^k F$ la k-ième puissance extérieure de u, on a
$$\|\bigwedge^k u\| = \prod_{j=\dim E-k+1}^{\dim E} \mu_j.$$
On aurait pu se servir de cette propriété pour définir les valeurs caractéristiques.

Corollaire 1.2.6 *Soient $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces hermitiens et a et b deux réels. Supposons que toutes les valeurs caractéristiques de u appartiennent à l'intervalle $[a, b]$. Soient F' un sous-espace de F, E' l'image réciproque de F' par u,*
$$u' : E' \longrightarrow F'$$
la restriction de u à E' et
$$\overline{u} : E/E' \longrightarrow F/F'$$
l'application obtenue par passage au quotient. Alors les valeurs caractéristiques de u' (resp. de $\overline{u}$) appartiennent aussi à l'intervalle $[a, b]$.

DÉMONSTRATION : L'assertion sur u' est une conséquence immédiate de la proposition précédente. L'assertion sur $\overline{u}$ en résulte par passage à l'adjoint, au moyen de la proposition 1.2.4. □

1.2.2 Position relative de deux sous-espaces

1.2.2.1 Invariants du problème et lien avec les représentations unitaires du groupe diédral

Dans cette partie on se donne E un espace hermitien de produit scalaire $< .,. >$, et A et B deux sous-espaces vectoriels de E. On note respectivement p_A et p_B les projections orthogonales sur A et B, et $p_A|_B$ et $p_B|_A$ les restrictions de p_A à B et de p_B à A. Le résultat principal de cette section (théorème 1.2.11 et ses corollaires) énonce que la donnée d'un tel triplet (E, A, B) équivaut à la donnée d'une représentation unitaire du groupe diédral (définition 1.2.9), et que ces objets sont classifiés essentiellement par les valeurs caractéristiques de la projection $p_A|_B$ (ou $p_B|_A$).

On retrouve ainsi les résultats de [53], partie II. En particulier, on notera que les invariants ν introduits dans cette référence sont les valeurs caractéristiques du projecteur $p_B|_A$.

Lemme 1.2.7 *Les applications $p_A|_B$ et $p_B|_A$ ont mêmes valeurs caractéristiques non nulles avec multiplicités, et elles échangent leurs sous-espaces caractéristiques associés.*

En particulier, on a : $\|p_A|_B\| = \|p_B|_A\|$.

DÉMONSTRATION : Par définition des projections orthogonales, on a pour tous $a \in A$ et $b \in B$ la relation suivante :

$$< p_B(a), b >=< a, b >=< a, p_A(b) > .$$

Ainsi $p_A|_B$ et $p_B|_A$ sont adjointes l'une de l'autre. Le lemme est alors une conséquence immédiate de la proposition 1.2.4. □

Il est évident que les valeurs caractéristiques d'une projection sont toutes inférieures ou égales à 1. Par ailleurs, compte tenu de la définition de la décomposition polaire, on vérifie facilement la

Proposition 1.2.8 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. les sous-espaces $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$ de l'espace hermitien $E/(A \cap B)$ sont orthogonaux

ii. les valeurs caractéristiques de l'application $p_A|_B$ (resp. $p_B|_A$) appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$.

Si A et B vérifient ces deux assertions équivalentes, on dira qu'ils sont orthogonaux (au sens large).

Définition 1.2.9 *On appelle groupe diédral, noté D, le groupe défini par générateurs*

$$e_a, \quad e_b$$

et relations

$$e_a^2 = e_b^2 = e$$

(où e désigne l'élément neutre de D).

Si E est un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E, on note $\rho_{A,B} : D \to U(E)$ la représentation de D dans le groupe unitaire de E envoyant e_a (resp. e_b) sur la symétrie orthogonale par rapport à A (resp. B).

Proposition 1.2.10 *Toute représentation ρ de D dans $U(E)$ est de la forme $\rho_{A,B}$ pour des sous-espaces A et B uniquement déterminés.*

DÉMONSTRATION : Notons $s_a = \rho(e_a)$. Puisque $e_a^2 = e$, on a $s_a^2 = \mathrm{id}_E$, et comme ρ est unitaire, ceci implique que s_a est une symétrie orthogonale. On doit alors nécessairement avoir $A = \ker(\mathrm{id} - s_a)$, et avec les notations analogues $B = \ker(\mathrm{id} - s_b)$. Inversement, avec ce choix de A et B on vérifie facilement qu'on a bien $\rho = \rho_{A,B}$. □

Si n est un entier naturel, on notera $U(n)$ le groupe unitaire de l'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien standard.

Pour tout ν dans l'intervalle ouvert $]0,1[$ notons $E(\nu)$ la représentation de D dans $U(2)$ de la forme $\rho_{A(\nu),B(\nu)}$, où $A(\nu) = \mathbb{C}.(1,0) \subset \mathbb{C}^2$ et $B(\nu) = \mathbb{C}.(\nu, \sqrt{1-\nu^2}) \subset \mathbb{C}^2$.

On note R_a (resp. R_b) la représentation de D dans $U(1)$ qui envoie e_a sur $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et e_b sur $-\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ (resp. e_a sur $-\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et e_b sur $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$).

On note S la représentation de D dans $U(1)$ qui envoie e_a et e_b sur $-\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

On note enfin T la représentation triviale, *i.e.* la représentation de D dans $U(1)$ qui envoie e_a et e_b sur $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Théorème 1.2.11 *Soient E un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. On a

$$\dim A \cap (B^\perp) = r_a, \quad \dim(A^\perp) \cap B = r_b, \quad \dim(A+B)^\perp = s, \quad \dim A \cap B = t$$

et les valeurs caractéristiques de $p_A|_B$ (et de $p_B|_A$) différentes de 0 et 1 sont

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$$

avec multiplicités respectives

$$m_1, \ldots, m_e.$$

ii. Le sous-espace $A+B$ est de codimension s dans E, et il existe des vecteurs
$a_{0,j}$ $(1 \le j \le r_a)$ dans $A \cap (B^\perp)$,
$a_{i,j}$ $(1 \le i \le e,\ 1 \le j \le m_i)$ dans A,
$b_{0,j}$ $(1 \le j \le r_b)$ dans $(A^\perp) \cap B$,

$b_{i,j}$ $(1 \leq i \leq e,\ 1 \leq j \leq m_i)$ dans B et
c_j $(1 \leq j \leq t)$ dans $A \cap B$

tels que la famille formée des $(a_{0,j})_{1 \leq j \leq r_a}$, des $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq e, 1 \leq j \leq m_i}$ et des $(c_j)_{1 \leq j \leq t}$ (resp. la famille formée des $(b_{0,j})_{1 \leq j \leq r_b}$, des $(b_{i,j})_{1 \leq i \leq e, 1 \leq j \leq m_i}$ et des $(c_j)_{1 \leq j \leq t}$) forme une base orthonormale de A (resp. de B) et que pour tout couple (i, i') d'éléments de $\{1, \ldots, e\}$ et pour tous $1 \leq j \leq m_i$ et $1 \leq j' \leq m_{i'}$ on ait

$$< a_{i,j}, b_{i',j'} >= \lambda_i . \delta_{(i,j),(i',j')}. \tag{1.2.2}$$

iii. La représentation $\rho_{A,B}$ de D dans $U(E)$ est isomorphe à la représentation somme directe orthogonale

$$R_a^{\oplus r_a} \overset{\perp}{\oplus} R_b^{\oplus r_b} \overset{\perp}{\oplus} S^{\oplus s} \overset{\perp}{\oplus} T^{\oplus t} \overset{\perp}{\oplus} \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq i \leq e}} E(\lambda_i)^{\oplus m_i}. \tag{1.2.3}$$

DÉMONSTRATION : *i.* $\Rightarrow$ *ii.* Pour $1 \leq i \leq e$, notons A_i (resp. B_i) le sous-espace caractéristique de $p_B|_A$ (resp. $p_A|_B$) pour la valeur caractéristique λ_i, supposée par hypothèse différente de 0 ou 1. Lorsqu'il n'est pas réduit au sous-espace nul, on vérifie aisément que $A \cap (B^\perp)$ (resp. $(A^\perp) \cap B$) est le sous-espace caractéristique de $p_B|_A$ (resp. $p_A|_B$) pour la valeur caractéristique 0 et que $A \cap B$ est le sous-espace caractéristique de $p_B|_A$ et de $p_A|_B$ pour la valeur caractéristique 1. Choisissons $(a_{0,j})_{1 \leq j \leq r_a}$ (resp. $(b_{0,j})_{1 \leq j \leq r_b}$, resp. $(c_j)_{1 \leq j \leq t}$) une base orthonormale de $A \cap (B^\perp)$ (resp. $(A^\perp) \cap B$, resp. $A \cap B$) et pour tout $i \in \{1, \ldots, e\}$, $(a_{i,j})_{1 \leq j \leq m_i}$ une base orthonormale de A_i. Alors si l'on pose

$$b_{i,j} = \lambda_i^{-1} p_B(a_{i,j}),$$

on vérifie facilement que pour tout $i \in \{1, \ldots, e\}$, $(b_{i,j})_{1 \leq j \leq m_i}$ est une base orthonormale de B_i et que les relations (1.2.2) sont satisfaites.

ii. $\Rightarrow$ *iii.* Sous les hypothèses de *ii.*, on obtient un isomorphisme de E sur la représentation donnée par (1.2.3) en identifiant chaque droite $\mathbb{C}.a_{0,j}$ (resp. $\mathbb{C}.b_{0,j}$, resp. $\mathbb{C}.c_j$) à une copie de R_a (resp. R_b, resp. T), en identifiant $(A+B)^\perp$ à la représentation $S^{\oplus s}$ et, pour tous $1 \leq i \leq e$ et $1 \leq j \leq m_i$, en envoyant $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$) sur le vecteur $(1,0)$ (resp. $(\lambda_i, \sqrt{1-\lambda_i^2})$) d'une copie de $E(\lambda_i)$.

iii. $\Rightarrow$ *i.* On ne perd pas de généralité en supposant que la représentation (E, ρ) est égale à la somme directe (1.2.3). Alors, puisque $\rho(e_a)$ (resp. $\rho(e_b)$) laisse stable la décomposition (1.2.3), le sous-espace $A = \ker(\mathrm{id} - \rho(e_a))$ (resp. $B = \ker(\mathrm{id} - \rho(e_b))$) est égal à la somme directe orthogonale de ses intersections avec chacun des sommants de cette décomposition (on prendra garde au fait que ceci n'aurait pas été vrai en général pour n'importe quel sous-espace de E). On vérifie alors par un calcul immédiat que l'on obtient ainsi la décomposition de A (resp. B) selon les sous-espaces caractéristiques de $p_B|_A$ (resp. $p_A|_B$) et que les valeurs caractéristiques associées sont bien celles données dans le point *i.* $\square$

Définition 1.2.12 *Avec les notations du théorème, si E est un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E, on appelle invariants du triplet (E, A, B) la donnée des entiers r_a, r_b, s et t et des valeurs caractéristiques $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ (dans $]0,1[$) avec multiplicités $m_1, \ldots, m_e$.*

On notera que ces données permettent facilement de retrouver les dimensions de E, A et B grâce aux relations

$$\operatorname{rg} p_B|_A = \operatorname{rg} p_A|_B = t + \sum_{i=1}^{e} m_i = \dim A - r_a = \dim B - r_b$$

et

$$\dim E = \dim A + \dim B + s - t.$$

Corollaire 1.2.13 *Soient E (resp. E') un espace hermitien et A et B (resp. A' et B') des sous-espaces de E (resp. E'). Alors il existe une isométrie de E sur E' envoyant A sur A' et B sur B' si et seulement si les triplets (E, A, B) et (E', A', B') ont mêmes invariants.*

DÉMONSTRATION : Ceci résulte de l'équivalence entre *i.* et *iii.* dans le théorème 1.2.11. □

Corollaire 1.2.14 *À isomorphisme près, les représentations unitaires irréductibles de D sont R_a, R_b, S, T et les $E(\nu)$ pour $\nu \in]0,1[$.*

Toute représentation unitaire de D se décompose de façon essentiellement unique en somme directe orthogonale de représentations irréductibles.

DÉMONSTRATION : Ceci est une conséquence de la proposition 1.2.10 et de l'équivalence entre *i.* et *iii.* dans le théorème 1.2.11. □

1.2.2.2 Comportement par dualité

Conservons les notations du paragraphe précédent. Notamment, on se donne une espace hermitien E et deux sous-espaces A et B.

Proposition 1.2.15 *Si les invariants du triplet (E, A, B) sont r_a, r_b, s, t et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ avec multiplicités $m_1, \ldots, m_e$, alors l'application composée*

$$s_A \circ s_B$$

des symétries orthogonales par rapport à A et à B est une transformation unitaire dont les valeurs caractéristiques sont :

$$1 \text{ avec multiplicité } s + t,$$

$$-1 \text{ avec multiplicité } r_a + r_b,$$

et les

$$(\lambda_j \pm i\sqrt{1-\lambda_j})^2 \text{ avec multiplicités } m_j \text{ (pour } 1 \leq j \leq e\text{).}$$

DÉMONSTRATION : Par le théorème 1.2.11 (ou par le dernier corollaire) il suffit de traiter les cas où la représentation du groupe diédral associée à (E, A, B) est de la forme R_a, R_b, S, T ou $E(\nu)$. Alors, dans chacun de ces cas, la proposition se vérifie au moyen d'un calcul immédiat (pour le cas $E(\nu)$, on peut aussi remarquer que $s_A \circ s_B$ est la complexification de l'application composée de deux symétries orthogonales suivant des droites (réelles) d'angle $\arccos(\nu)$, donc est la complexification d'une rotation (réelle) d'angle $2\arccos(\nu)$). □

Corollaire 1.2.16 *Si les invariants du triplet (E, A, B) sont*

$$r_a, r_b, s, t$$

et

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$$

avec multiplicités

$$m_1, \ldots, m_e,$$

alors les invariants du triplet $(E, A^\perp, B^\perp)$ sont

$$r_b, r_a, t, s$$

et

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$$

avec multiplicités

$$m_1, \ldots, m_e.$$

Notamment les valeurs caractéristiques différentes de 0 et de 1 de $p_{A,B}$, $p_{B,A}$, $p_{A^\perp,B^\perp}$ et $p_{B^\perp,A^\perp}$ sont les mêmes avec mêmes multiplicités.

Démonstration : Cela résulte de la définition des invariants, de la proposition précédente, et du fait que

$$s_{A^\perp} \circ s_{B^\perp} = (-s_A) \circ (-s_B) = s_A \circ s_B.$$

□

1.2.2.3 Applications

Comme précédemment, soient E un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E. Notons

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$$

les valeurs caractéristiques de $p_A|_B$ (et de $p_B|_A$) comprises dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$, et

$$m_1, \ldots, m_e$$

leurs multiplicités.

On munit le produit direct

$$A/(A \cap B) \times B/(A \cap B)$$

du produit scalaire somme directe orthogonale des produits scalaires quotient sur $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$. On note $\alpha = \alpha_{A,B}$ l'application naturelle

$$\alpha : A/(A \cap B) \times B/(A \cap B) \xrightarrow{\sim} (A + B)/(A \cap B),$$

et

$$d_{A,B} = \| \bigwedge^{\max} \alpha \| \tag{1.2.4}$$

la norme de son déterminant. De façon équivalente, $d_{A,B}$ est la norme de l'isomorphisme (naturel au choix d'un signe près)

$$\bigwedge^{\max} A \otimes \bigwedge^{\max} B \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{\max} (A \cap B) \otimes \bigwedge^{\max} (A+B),$$

où l'on a choisi une identification de $A \cap B$ au noyau de la surjection $A \oplus B \twoheadrightarrow A+B$.

Notons enfin $\widetilde{A} = A/(A \cap B)$ et $\widetilde{B} = B/(A \cap B)$, et $R = \operatorname{rg} p_{\widetilde{B}}|_{\widetilde{A}} = \sum_{1 \leq i \leq e} m_i$.

Proposition 1.2.17 *Avec ces notations, les valeurs caractéristiques de α différentes de 1 sont les $(1+\lambda_i)^{1/2}$ et les $(1-\lambda_i)^{1/2}$, chacune avec multiplicité m_i.*

Démonstration : On ne perd pas de généralité en remplaçant E par $A+B$ et en quotientant le tout par $A \cap B$, de telle sorte qu'on peut supposer $A = \widetilde{A}$ et $B = \widetilde{B}$. Sous ces hypothèses, considérons les bases orthonormales $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq e, 1 \leq j \leq m_i}$ de A et $(b_{i,j})_{1 \leq i \leq e, 1 \leq j \leq m_i}$ de B introduites dans le théorème 1.2.11.*ii.*, et définissons dans $A \times B$ les sous-espaces

$$X_i = \operatorname{Vect} \{ (a_{i,j}, b_{i,j}) \mid j \in \{1, \ldots, m_i\} \}$$

$$Y_i = \operatorname{Vect} \{ (a_{i,j}, -b_{i,j}) \mid j \in \{1, \ldots, m_i\} \}$$

$$Z = (\ker p_B|_A \times \{0\}) + (\{0\} \times \ker p_A|_B).$$

Compte tenu de (1.2.2), on vérifie aisément, d'une part, que les X_i, les Y_i et Z sont deux à deux orthogonaux ; d'autre part, que la restriction de α à X_i (resp. Y_i, resp. Z) est une similitude de rapport $(1+\lambda_i)^{1/2}$ (resp. $(1-\lambda_i)^{1/2}$, resp. 1). Ceci détermine donc la décomposition polaire de α, et démontre la proposition. □

Corollaire 1.2.18 *Avec les notations précédentes :*

i. on a

$$d_{A,B}{}^2 = d_{\widetilde{A},\widetilde{B}}{}^2 = \prod_{i, \lambda_i < 1} (1-\lambda_i^2)^{m_i}$$

ii. les valeurs caractéristiques de α sont toutes comprises dans l'intervalle

$$\left[\left(1 - \sqrt{1 - d_{A,B}^2}\right)^{1/2}, \left(1 + \sqrt{1 - d_{A,B}^2}\right)^{1/2} \right] \; ;$$

de façon équivalente, pour tout x dans $A \times B$, on a

$$\left(1 - \sqrt{1 - d_{A,B}^2}\right)^{1/2} \|x\| \leq \|\alpha(x)\| \leq \left(1 + \sqrt{1 - d_{A,B}^2}\right)^{1/2} \|x\|$$

iii. on a les inégalités

$$1 \geq d_{A,B} \geq (1 - \|p_{\widetilde{B}}|_{\widetilde{A}}\|^2)^{R/2} \geq (1 - \|p_{\widetilde{B}}|_{\widetilde{A}}\|^2)^{1/2 . \min(\dim A, \dim B)}$$

et $d_{A,B} = 1$ si et seulement si A et B sont orthogonaux (au sens large), ou encore si et seulement si $p_{\widetilde{B}}|_{\widetilde{A}} = 0$.

DÉMONSTRATION : L'assertion $i.$ résulte de la proposition et du fait que la norme du déterminant d'une application linéaire est égale au produit de ses valeurs caractéristiques. Du fait que les λ_i sont toutes dans l'intervalle $[0,1]$, l'égalité $i.$ implique que pour tout $i \in \{1,\ldots,e\}$, on a $\lambda_i^2 \leq 1 - d_{A,B}^2$; compte tenu de la proposition, l'assertion $ii.$ en découle aussitôt (l'équivalence entre les deux formulations de $ii.$ constitue le corollaire 1.2.5). L'assertion $iii.$ se démontre de façon analogue, en utilisant le fait que $\|p_{\widetilde{B}}|_{\widetilde{A}}\| = \max\{\lambda_i \mid \lambda_i < 1\}$. □

Remarque 1.2.19 Compte tenu du corollaire, on peut considérer que $d_{A,B}$ constitue une mesure de l'orthogonalité de A et B. En outre, on voit que l'encadrement 1.2.18.*ii.* peut s'interpréter comme exprimant que, si $d_{A,B}$ est proche de 1, l'application α est presque une isométrie.

Il est facile maintenant de déterminer comment $d_{A,B}$ se comporte par dualité.

Corollaire 1.2.20 *Sous les hypothèses précédentes, notons $A^\perp$ (resp. $B^\perp$) l'orthogonal de A (resp. B) dans E. Alors on a*

$$d_{A^\perp,B^\perp} = d_{A,B}.$$

DÉMONSTRATION : Cela résulte immédiatement des corollaires 1.2.16 et 1.2.18. □

Il est possible aussi de faire jouer à A et B des rôles non symétriques. Notons $\beta = \beta_{A,B}$ l'isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\beta : A/(A \cap B) \xrightarrow{\sim} (A+B)/B.$$

Alors

Proposition 1.2.21 *Les valeurs caractéristiques de β sont les $(1-\lambda_i^2)^{1/2}$ avec multiplicité m_i. En particulier, on a $\|\det\beta\| = d_{A,B}$, et les valeurs caractéristiques de β sont toutes dans l'intervalle $[d_{A,B},1]$.*

DÉMONSTRATION : Comme dans la démonstration de la proposition précédente, on peut supposer que $A \cap B = 0$; on note encore $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les bases unitaires de A et B qui y ont été introduites. Alors $(A+B)/B$ s'identifie naturellement à l'orthogonal de B dans $A+B$ et, avec cette identification, on a

$$\beta(a_{i,j}) = a_{i,j} - p_B(a_{i,j}) = a_{i,j} - \lambda_i b_{i,j}.$$

Ainsi, compte tenu de (1.2.2), les $\beta(a_{i,j})$ sont deux à deux orthogonaux et de norme $(1-\lambda_i^2)^{1/2}$, ce qui implique la proposition. □

1.2.3 Cas de plusieurs sous-espaces

Les résultats du paragraphe précédent permettent d'obtenir certaines estimations sur la position d'un nombre quelconque de sous-espaces, à partir seulement des normes des projections de l'un sur l'autre deux à deux. Plus précisément, on montre que si des sous-espaces d'un espace hermitien sont «deux à deux presque orthogonaux», dans le sens où les projections de l'un sur l'autre sont de norme petite, alors ils sont «globalement presque orthogonaux», dans le sens où l'application naturelle du produit direct de ces sous-espaces sur leur somme est presque une isométrie, *i.e.* a toutes ses valeurs caractéristiques proches de 1.

Lemme 1.2.22 *Soit H un espace hermitien qui est somme directe de certains de ses sous-espaces $H_1, \dots, H_m$. Munissons le produit direct $H_1 \times \cdots \times H_m$ du produit scalaire somme directe orthogonale des produits scalaires restreints. On a deux applications linéaires inversibles naturelles*

$$\begin{array}{rccc} \alpha = \alpha_{H_1,\dots,H_m} : & H_1 \times \cdots \times H_m & \longrightarrow & H \\ & (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_m \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \gamma = \gamma_{H_1,\dots,H_m} : & H & \longrightarrow & H_1 \times \cdots \times H_m \\ & x & \longmapsto & (p_{H_1}(x), \dots, p_{H_m}(x)). \end{array}$$

Alors α et γ sont adjointes l'une de l'autre.

DÉMONSTRATION : Soient $x \in H$ et $y = (y_1, \dots, y_m) \in H_1 \times \cdots \times H_m$. Alors on a bien

$$\begin{aligned} < x, \alpha(y) > &=< x, y_1 > + \cdots + < x, y_m > \\ &=< p_{H_1}(x), y_1 > + \cdots + < p_{H_m}(x), y_m > \\ &=< \gamma(x), y > . \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.23 *Soient A et B deux sous-espaces d'un espace hermitien E avec $A \cap B = 0$, et λ_i les valeurs caractéristiques de $p_A|_B$ avec multiplicité m_i. Considérons l'application*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & A + B & \longrightarrow & A \times B \\ & x & \longmapsto & (p_A(x), p_B(x)) \end{array}$$

dont les composantes sont les projections orthogonales sur A et B. Alors les valeurs caractéristiques de γ différentes de 1 sont les $(1+\lambda_i)^{1/2}$ et les $(1-\lambda_i)^{1/2}$, chacune avec multiplicité m_i. En particulier, on a

$$\|\gamma^{-1}\|^2 = (1 - \|p_A|_B\|)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate du lemme précédent (dans le cas $m = 2$) et des propositions 1.2.4 et 1.2.17. La dernière assertion résulte du fait que la norme d'une application linéaire est égale à sa plus grande valeur caractéristique. □

Corollaire 1.2.24 *Soient A, B et C trois sous-espaces d'un espace hermitien tels que la somme $A + B + C$ soit directe. Alors on a l'inégalité*

$$\|p_{(A+B)}|_C\|^2 \leq \frac{\|p_A|_C\|^2 + \|p_B|_C\|^2}{1 - \|p_A|_B\|}.$$

Démonstration : Par transitivité des projections orthogonales sur des sous-espaces emboîtés, on a $p_A|_C = p_A|_{(A+B)} \circ p_{(A+B)}|_C$ et $p_B|_C = p_B|_{(A+B)} \circ p_{(A+B)}|_C$, d'où

$$p_{(A+B)}|_C = \gamma^{-1} \circ (p_A|_C, p_B|_C),$$

avec $\gamma = (p_A|_{(A+B)}, p_B|_{(A+B)}) : A+B \longrightarrow A\times B$. Le corollaire résulte alors de la proposition précédente. □

Corollaire 1.2.25 *Soit n un entier. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $A_0, \dots, A_n$ sont $n+1$ sous-espaces en somme directe dans un espace hermitien, et si*

$$M = \max_{i,j} \|p_{A_i}|_{A_j}\|^2 < \eta,$$

alors

$$\|p_{(A_1+\cdots+A_n)}|_{A_0}\|^2 < (n+\epsilon)M.$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$. Le corollaire précédent donne :

$$\|p_{(A_1+\cdots+A_n)}|_{A_0}\|^2 \leq \frac{\|p_{(A_1+\cdots+A_{n-1})}|_{A_0}\|^2 + \|p_{A_n}|_{A_0}\|^2}{1 - \|p_{(A_1+\cdots+A_{n-1})}|_{A_n}\|}.$$

Par définition on a $\|p_{A_n}|_{A_0}\|^2 \leq M$, et en appliquant l'hypothèse de récurrence d'une part à $A_0, \dots, A_{n-1}$, d'autre part à $A_1, \dots, A_n$, on trouve, si M est assez petit :

$$\|p_{(A_1+\cdots+A_{n-1})}|_{A_0}\|^2 < (n-1+\epsilon/2)M$$

et

$$1 - \sqrt{(n-1+\epsilon/2)M} < 1 - \|p_{(A_1+\cdots+A_{n-1})}|_{A_n}\| \leq 1.$$

En insérant ces deux estimations dans l'inégalité précédente, quitte à prendre M encore plus petit, on trouve le résultat souhaité. □

Soient E un espace hermitien et $A_1, \dots, A_m$ m sous-espaces de E en somme directe. L'application linéaire naturelle

$$\alpha_{A_1,\dots,A_m} : A_1 \times \cdots \times A_m \longrightarrow A_1 + \cdots + A_m$$

est bijective, mais n'est en général pas une isométrie. On note $d_{A_1,\dots,A_m} = \|\det \alpha_{A_1,\dots,A_m}\|$ la norme de son déterminant. Autrement dit, $d_{A_1,\dots,A_m}$ est le rapport de la similitude naturelle entre espaces hermitiens de dimension 1

$$\bigwedge^{\max} A_1 \otimes \ldots \otimes \bigwedge^{\max} A_m \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{\max} (A_1 + \cdots + A_m).$$

On remarquera que ces notations sont compatibles avec celles introduites dans le paragraphe précédent, dans le cas $m = 2$.

Proposition 1.2.26 *On a*

$$d_{A_1,\dots,A_m} = d_{A_1,A_2}.d_{(A_1+A_2),A_3}.\cdots.d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m} \leq 1.$$

Les valeurs caractéristiques de $\alpha_{A_1,\dots,A_m}$ sont toutes comprises dans l'intervalle

$$\left[\left(1-\sqrt{1-d^2_{A_1,\dots,A_m}}\right)^{(m-1)/2}, \left(1+\sqrt{1-d^2_{A_1,\dots,A_m}}\right)^{(m-1)/2}\right].$$

DÉMONSTRATION : On procède par récurrence sur m, en remarquant que $\alpha_{A_1,\dots,A_m}$ se factorise en

$$A_1 \times \cdots \times A_{m-1} \times A_m \xrightarrow{u} (A_1+\cdots+A_{m-1}) \times A_m \xrightarrow{v} A_1+\cdots+A_m$$

avec $u = \alpha_{A_1,\dots,A_{m-1}} \times Id_{A_m}$ et $v = \alpha_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}$. On trouve ainsi

$$d_{A_1,\dots,A_m} = \|\det u\|.\|\det v\| = d_{A_1,\dots,A_{m-1}}.d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence à $d_{A_1,\dots,A_{m-1}}$, on prouve la première assertion. L'application u admet pour valeurs caractéristiques celles de $\alpha_{A_1,\dots,A_{m-1}}$, auxquelles on a adjoint la valeur caractéristique 1 avec multiplicité $\dim A_m$. Par hypothèse de récurrence, les valeurs caractéristiques de $\alpha_{A_1,\dots,A_{m-1}}$ sont toutes dans l'intervalle

$$\left[\left(1-\sqrt{1-d^2_{A_1,\dots,A_{m-1}}}\right)^{(m-2)/2}, \left(1+\sqrt{1-d^2_{A_1,\dots,A_{m-1}}}\right)^{(m-2)/2}\right],$$

et il en est donc de même des valeurs caractéristiques de u. Autrement dit (corollaire 1.2.5), pour tout x dans $A_1 \times \cdots \times A_{m-1} \times A_m$, on a

$$\left(1-\sqrt{1-d^2_{A_1,\dots,A_{m-1}}}\right)^{(m-2)/2}\|x\| \leq \|u(x)\| \leq \left(1+\sqrt{1-d^2_{A_1,\dots,A_{m-1}}}\right)^{(m-2)/2}\|x\|.$$

Par ailleurs, le corollaire 1.2.18.*ii*. implique que pour tout y dans $(A_1+\cdots+A_{m-1}) \times A_m$, on a

$$\left(1-\sqrt{1-d^2_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}}\right)^{1/2}\|y\| \leq \|v(y)\| \leq \left(1+\sqrt{1-d^2_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}}\right)^{1/2}\|y\|.$$

En combinant ces deux encadrements, et en utilisant le fait que

$$d_{A_1,\dots,A_m} = d_{A_1,\dots,A_{m-1}}.d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m} \leq \min\{d_{A_1,\dots,A_{m-1}}, d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}\},$$

on trouve, pour tout x dans $A_1 \times \cdots \times A_{m-1} \times A_m$:

$$\begin{aligned}
&\left(1-\sqrt{1-d^2_{A_1,\dots,A_m}}\right)^{(m-1)/2}\|x\| \leq \\
&\quad \leq \left(1-\sqrt{1-d^2_{A_1,\dots,A_{m-1}}}\right)^{(m-2)/2}\left(1-\sqrt{1-d^2_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}}\right)^{1/2}\|x\| \leq \\
&\qquad \leq \|v(u(x))\| = \|\alpha_{A_1,\dots,A_m}(x)\|
\end{aligned}$$

et

$$\|\alpha_{A_1,\ldots,A_m}(x)\| = \|v(u(x))\| \leq$$
$$\leq \left(1+\sqrt{1-d^2_{A_1,\ldots,A_{m-1}}}\right)^{(m-2)/2}\left(1+\sqrt{1-d^2_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}}\right)^{1/2}\|x\| \leq$$
$$\leq \left(1+\sqrt{1-d^2_{A_1,\ldots,A_m}}\right)^{(m-1)/2}\|x\|,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 1.2.27 *Soit d un entier. Il existe deux constantes c et $\eta > 0$ (dépendant de d) telles que, pour tout espace hermitien E de dimension au plus d et pour tous sous-espaces $A_1,\ldots,A_m$ en somme directe dans E tels que*

$$M = \max_{1\leq i<j\leq m}\{\|p_{A_i}|_{A_j}\|^2\} \leq \eta,$$

on ait

$$1 \geq d_{A_1,\ldots,A_m} \geq 1 - cM.$$

Démonstration : On ne perd pas de généralité en supposant que les A_i sont tous non nuls. Alors, puisque ces sous-espaces sont en somme directe, on a nécessairement $m \leq d$. Par la proposition précédente on a

$$d_{A_1,\ldots,A_m} = d_{A_1,A_2}.d_{(A_1+A_2),A_3}.\cdots.d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}.$$

Pour démontrer le corollaire, il suffit donc de minorer chacun des termes de ce produit. Si M est assez petit, la minoration voulue est fournie par les corollaires 1.2.18.*iii.* et 1.2.25. □

1.2.4 Un résultat technique

Proposition 1.2.28 *Soient*

$$H_0 = Y_0 \overset{\perp}{\oplus} Z_0$$

un espace hermitien somme directe orthogonale de deux sous-espaces et T_0 un sous-espace de H_0 tel que $T_0 \cap Y_0 = \{0\}$.

Alors il existe une constante $\kappa_0 > 0$ telle que, pour toute donnée d'un espace hermitien

$$H_1 = Y_1 \overset{\perp}{\oplus} Z_1$$

somme directe orthogonale de deux sous-espaces et pour tout sous-espace T_1 de H_1 tel que $T_1 \cap Y_1 = \{0\}$, pour toute application linéaire $\varphi : H_0 \to H_1$ vérifiant les conditions suivantes :

i. *φ est bijective*

ii. *$\varphi(Y_0) = Y_1$, $\varphi(Z_0) = Z_1$, $\varphi(T_0) = T_1$*

iii. *il existe $\eta_\varphi > 0$ tel que $\|\varphi(y_0)\| \leq \eta_\varphi\|y_0\|$ pour tout $y_0 \in Y_0$*

iv. *il existe $\zeta_\varphi > 0$ tel que $\|\varphi(z_0)\| \geq \zeta_\varphi\|z_0\|$ pour tout $z_0 \in Z_0$,* *on ait :*

$$\|p_{Y_1}|_{T_1}\| \leq \left(1 + \kappa_0^2 \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\right)^{-1/2}.$$

DÉMONSTRATION : On a

$$\ker p_{Z_0}|_{T_0} = T_0 \cap \ker p_{Z_0} = T_0 \cap Y_0 = \{0\}.$$

Ainsi $p_{Z_0}|_{T_0}$ est injective ; choisissons pour κ_0 la plus petite valeur caractéristique de $p_{Z_0}|_{T_0}$. On a alors bien $\kappa_0 > 0$ et, pour tout $t_0 \in T_0$, on aura l'inégalité

$$\|p_{Z_0}(t_0)\| \geq \kappa_0 \|t_0\|.$$

Les hypothèses de la proposition impliquent que $p_{Y_1} \circ \varphi = \varphi \circ p_{Y_0}$ et que $p_{Z_1} \circ \varphi = \varphi \circ p_{Z_0}$. Soit maintenant $t_1 \in T_1$, $t_1 \neq 0$. Puisque $T_1 = \varphi(T_0)$, on peut écrire $t_1 = \varphi(t_0)$, $t_0 \in T_0$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\|p_{Y_1}(t_1)\|^2}{\|t_1\|^2} &= \frac{\|p_{Y_1}(t_1)\|^2}{\|p_{Y_1}(t_1)\|^2 + \|p_{Z_1}(t_1)\|^2} \\
&= \frac{\|\varphi(p_{Y_0}(t_0))\|^2}{\|\varphi(p_{Y_0}(t_0))\|^2 + \|\varphi(p_{Z_0}(t_0))\|^2} \\
&= \left(1 + \frac{\|\varphi(p_{Z_0}(t_0))\|^2}{\|\varphi(p_{Y_0}(t_0))\|^2}\right)^{-1} \\
&\leq \left(1 + \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2} \frac{\|p_{Z_0}(t_0)\|^2}{\|p_{Y_0}(t_0)\|^2}\right)^{-1} \\
&\leq \left(1 + \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2} \frac{\|p_{Z_0}(t_0)\|^2}{\|t_0\|^2}\right)^{-1} \\
&\leq \left(1 + \kappa_0^2 \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Sous les hypothèses précédentes, soit d_{Y_1,T_1} la norme du déterminant de l'isomorphisme naturel

$$Y_1 \times T_1 \simeq Y_1 + T_1.$$

Alors :

Corollaire 1.2.29 *On a l'encadrement*

$$1 \geq d_{Y_1,T_1} \geq \left(1 - \left(1 + \kappa_0^2 \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\right)^{-1}\right)^{1/2.\min(\dim Y_1, \dim T_1)}.$$

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.2.18.*iii.* et de la proposition 1.2.28. □

1.3 Quelques résultats de géométrie hermitienne projective

1.3.1 Un calcul de normes

Soient N un entier et E un espace hermitien de dimension $N+1$. On note

$$\mathbb{P}_E = \mathbf{Proj}(\mathrm{Sym}^{\cdot} E)$$

l'espace projectif dont les points paramétrisent les hyperplans de E. On munit $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$ de l'unique métrique kählérienne invariante sous l'action du groupe unitaire de E et qui en fait un espace de volume 1 pour la mesure $d\mu$ associée (avec les conventions exposées au début de ce texte). Notons encore $\omega = \omega_{FS}$ la 2-forme associée à cette métrique, appelée forme de Fubini-Study. On rappelle que par (1.1.7), on a $d\mu = \omega^n$.

Le fibré en droites universel $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_E(1)$ est muni de la métrique $\|.\|_{FS}$ dite métrique standard ou de Fubini-Study : c'est la métrique quotient définie par la surjection canonique

$$\pi^* E \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1),$$

où $\pi : \mathbb{P}_E \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ est le morphisme structurel. Alors, avec nos conventions, la première forme de Chern de $\|.\|_{FS}$ est égale à ω_{FS}. Notons $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$ la n-ième puissance tensorielle du fibré en droites universel, et munissons l'espace des sections globales $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ de la norme L^2 définie en (1.1.4).

Dans le cas particulier où E est l'espace $\mathbb{C}^{N+1}$ muni du produit hermitien standard, on notera

$$\mathbb{P}_E = \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}} = \mathbf{Proj}\ \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$$

et on l'appellera l'espace projectif standard sur $\mathbb{C}$ de dimension N. On se propose ici de calculer les normes L^2 (introduites ci-dessus) sur $\Gamma(\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(n))$. L'espace $\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))$ s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré n en $N+1$ variables $X_0, \ldots, X_N$. Il est de rang $\begin{pmatrix} n+N \\ N \end{pmatrix}$.

Si $I = (i_0, \ldots, i_N)$ est un multi-indice de poids $n = |I| = i_0 + \cdots + i_N$ on note $X^I = X_0^{i_0}. \cdots .X_N^{i_N}$, et pour tout entier $m \geq n$ on pose

$$\begin{pmatrix} m \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ I, m-n \end{pmatrix} = \frac{m!}{i_0! \cdots i_N! (m-n)!}.$$

Lemme 1.3.1 *Les $(X^I)_{|I|=n}$ forment une base orthogonale de $\Gamma(\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(n))$ (pour la norme L^2).*

DÉMONSTRATION : Soient $u_0, \ldots, u_N$ des nombres complexes de module 1, et u la matrice diagonale $Diag(u_0, \ldots, u_N)$. C'est un élément du groupe unitaire $U(N+1)$. Par invariance de la forme volume $d\mu$ sous l'action de u, on obtient, pour tous multi-indices I et J de poids n, l'égalité

$$< X^I, X^J >_{L^2} = < (uX)^I, (uX)^J >_{L^2} = u_0^{j_0 - i_0}. \cdots .u_N^{j_N - i_N}. < X^I, X^J >_{L^2} .$$

Si $I \neq J$, on peut trouver des u_i tels que $u_0^{j_0-i_0}.\cdots.u_N^{j_N-i_N} \neq 1$, de telle sorte que

$$< X^I, X^J >_{L^2} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Avec les mêmes notations, on a encore le

Lemme 1.3.2 *Si I est un multi-indice de poids n, la norme L^2 de X^I vaut*

$$\|X^I\|_{L^2} = \begin{pmatrix} n+N \\ I \end{pmatrix}^{-1/2} = \left(\frac{i_0!\cdots i_N!N!}{(n+N)!}\right)^{1/2}.$$

Il s'agit du lemme 4.3.6 de [11]. Par commodité pour le lecteur, en voici une autre preuve.

Démonstration : Par invariance de $d\mu$ sous l'action du groupe unitaire, il existe une constante $C = C(n,d)$ telle que pour tout $t = (t_0, \dots, t_N)$ on ait

$$\|(t_0X_0 + \cdots + t_NX_N)^n\|_{L^2}^2 = C.(|t_0|^2 + \cdots + |t_N|^2)^n = C.\sum_{|I|=n} \begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix} |t^I|^2.$$

Mais d'autre part on a $(t_0X_0 + \cdots + t_NX_N)^n = \sum_{|I|=n} \begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix} t^I X^I$ donc par le lemme précédent,

$$\|(t_0X_0 + \cdots + t_NX_N)^n\|_{L^2}^2 = \sum_{|I|=n} \begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix}^2 |t^I|^2 \|X^I\|_{L^2}^2.$$

En identifiant les coefficients de t^I dans ces deux relations, on trouve

$$\|X^I\|_{L^2}^2 = C.\begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix}^{-1}.$$

Par ailleurs, en intégrant sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ la relation

$$1 = (\|X_0\|_{FS}^2(x) + \cdots + \|X_N\|_{FS}^2(x))^n = \sum_{|I|=n} \begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix} \|X^I\|_{FS}^2(x)$$

on trouve

$$1 = \sum_{|I|=n} \begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix} \|X^I\|_{L^2}^2 = \sum_{|I|=n} \begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix} .C. \begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix}^{-1} = C.\begin{pmatrix} n+N \\ N \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $C = \begin{pmatrix} n+N \\ N \end{pmatrix}^{-1}$ et

$$\|X^I\|_{L^2}^2 = \begin{pmatrix} n+N \\ N \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} n \\ I \end{pmatrix}^{-1},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 1.3.3 *Soient* $a_0, \dots, a_n$ *des nombres complexes, et posons*

$$s_a^n = (\overline{a_0}X_0 + \cdots + \overline{a_N}X_N)^n \in \Gamma(\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(n)).$$

Si $P \in \Gamma(\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(n))$ *est un polynôme homogène de degré* n*, on a alors*

$$< s_a^n, P >_{L^2} = \binom{n+N}{N}^{-1} P(a).$$

DÉMONSTRATION : la forme volume sur $\mathbb{P}^N$ étant invariante sous l'action du groupe unitaire, on peut supposer $a_1 = \cdots = a_N = 0$, auquel cas $s_a^n = \overline{a_0}^n X_0^n$. Le résultat est alors une conséquence immédiate du lemme précédent. □

Revenons au cas général. Si E est un espace hermitien de dimension $N+1$, on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \simeq S^n E.$$

Cet isomorphisme n'est pas isométrique (lorsque $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ est muni de la norme L^2 et que S^nE est muni de la norme puissance symétrique de celle de E). Cependant, avec les conventions du paragraphe précédent, on a le

Lemme 1.3.4 *L'isomorphisme canonique* $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\sim} S^nE$ *est une similitude de rapport* $\binom{n+N}{N}^{1/2}$, i.e. *on a l'identité*

$$\|.\|^2_{\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)), L^2} = \binom{n+N}{N}^{-1} \|.\|^2_{S^nE}.$$

DÉMONSTRATION : Le choix d'une base unitaire de E permet d'identifier $\mathbb{P}_E$ à l'espace projectif $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$. Il suffit alors de vérifier le lemme sur la base orthogonale formée des monômes X^I, où $|I| = n$. Or compte tenu de (1.1.1), on a

$$\|X^I\|^2_{S^n((\mathbb{C}^{N+1})^*)} = \frac{i_0!.\cdots.i_N!}{n!}.$$

En comparant avec le lemme 1.3.2, on trouve le résultat souhaité. □

1.3.2 Un calcul de décomposition polaire

Soient E un espace hermitien de dimension $N+1$ et $\mathbb{P}_E$ l'espace projectif défini au paragraphe précédent. Soient P un point de $\mathbb{P}_E$, F l'hyperplan de E défini par P, Δ l'orthogonal de F dans E, et δ un vecteur unitaire de Δ. Par l'identification naturelle

$$E \simeq \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(1))$$

on peut voir δ comme un élément de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(1))$ et, avec cette identification, le lemme 1.3.4 donne

$$\|\delta\|_{\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(1))} = (N+1)^{-1/2}.$$

Si n et d sont des entiers, la multiplication par $\delta^{\otimes d}$ définit une application linéaire

$$m_{\delta^{\otimes d}} : \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n+d)).$$

On se propose ici de déterminer la décomposition polaire de m.

Pour alléger les notations, on notera

$$A(n) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)).$$

La décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} \Delta$ induit pour tout n une décomposition en somme directe orthogonale

$$S^n E = \overset{\perp}{\bigoplus_{t=0\ldots n}} S^t F \otimes \Delta^{\otimes n-t}.$$

On définit $A(n)_t$ comme étant l'image de l'application composée

$$S^t F \otimes \Delta^{\otimes n-t} \hookrightarrow S^n E \xrightarrow{\sim} A(n).$$

Ainsi on a une décomposition

$$A(n) = \overset{\perp}{\bigoplus_{t=0\ldots n}} A(n)_t.$$

On remarquera que si P est le point de $\mathbb{P}_E$ représentant l'hyperplan F, la filtration associée à cette décomposition est la filtration sur $A(n)$ définie par la multiplicité du zéro en P. Autrement dit, si $s \in A(n) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$, on a $s \in \mathrm{Fil}^k A(n) = \bigoplus^{\perp}_{t=k\ldots n} A(n)_t$ si et seulement si s s'annule au moins à l'ordre k en P.

Proposition 1.3.5 *L'application*

$$m_{\delta^{\otimes d}} : A(n) \longrightarrow A(n+d)$$

admet pour valeurs caractéristiques les

$$\lambda_t = \left(\frac{(n+N).(n+N-1)\ldots(n-t+1)}{(n+d+N).(n+d+N-1)\ldots(n+d-t+1)} \right)^{1/2}, \qquad 0 \leq t \leq n,$$

avec pour espaces caractéristiques associés respectifs les $A(n)_t$.

DÉMONSTRATION : On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
S^t F \otimes \Delta^{\otimes n-t} & \xrightarrow{j} & S^n E & \xrightarrow{i} & A(n) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta^{\otimes d}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\
S^t F \otimes \Delta^{\otimes n+d-t} & \xrightarrow{j'} & S^{n+d} E & \xrightarrow{i'} & A(n+d)
\end{array}$$

qui prouve que m envoie $A(n)_t$ bijectivement sur $A(n+d)_t$.

Soit maintenant $x \in S^t F \otimes \Delta^{\otimes n-t}$. Par le lemme 1.3.4, i est une similitude de rapport $\binom{n+N}{N}^{-1/2}$, et par le lemme 1.1.3, j est une similitude sur son image, de rapport $\binom{n}{t}^{-1/2}$. On a donc

$$\|i \circ j(x)\| = \binom{n}{t}^{-1/2} \binom{n+N}{N}^{-1/2} \|x\|. \tag{1.3.1}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} \|i' \circ j'(x.\delta^{\otimes d})\| &= \binom{n+d}{t}^{-1/2} \binom{n+d+N}{N}^{-1/2} \|x.\delta^{\otimes d}\| \\ &= \binom{n+d}{t}^{-1/2} \binom{n+d+N}{N}^{-1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Ainsi si $y \in A(n)_t$, on peut écrire $y = i \circ j(x)$, de telle sorte que $m(y) = i' \circ j'(x.\delta^{\otimes d})$ et $\|m(y)\| = \lambda_t \|y\|$ où

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \binom{n}{t}^{1/2} \binom{n+N}{N}^{1/2} \binom{n+d}{t}^{-1/2} \binom{n+d+N}{N}^{-1/2} \\ &= \left(\frac{(n+N)!(n+d-t)!}{(n-t)!(n+d+N)!} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{(n+N).(n+N-1)\dots(n-t+1)}{(n+d+N).(n+d+N-1)\dots(n+d-t+1)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.6 En particulier, lorsque n et t sont fixés et que d tend vers l'infini, on retiendra que la proposition fournit l'équivalent

$$\lambda_t = \lambda_t(d) \sim_{d \to \infty} \left(\frac{(n+N)!}{(n-t)!} \right)^{1/2} .d^{-\frac{1}{2}(N+t)}. \tag{1.3.2}$$

1.4 Petits rappels de géométrie d'Arakelov

Dans cette thèse, on utilisera librement le langage de la géométrie d'Arakelov, pour lequel on renvoie principalement à [57]. Le lecteur pourra aussi consulter [3], [8], [11], [21], [24], [25], [27] et [37]. On se propose cependant ici de rappeler quelques définitions élémentaires et de préciser certaines conventions qui seront utilisées dans la suite du texte.

1.4.1 Modules hermitiens et théorie des pentes

Pour cette partie, on pourra consulter [9], [37] et [58].

Soit K un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, la valeur absolue $|.|_\mathfrak{p}$ sur le complété $K_\mathfrak{p}$ de K en $\mathfrak{p}$ sera normalisée de telle sorte que si $\varpi_\mathfrak{p}$ est une uniformisante en $\mathfrak{p}$, on ait

$$|\varpi_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = (|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})|)^{-1} = (\# k_\mathfrak{p})^{-1}$$

où $k_{\mathfrak{p}}$ est le corps résiduel en $\mathfrak{p}$. Avec ces normalisations, la formule du produit s'énonce ainsi : pour tout élément non nul x de K on a

$$\sum_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K} \log |x|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log |\sigma(x)| = 0,$$

où $|.|$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$.

On appelle module hermitien sur $\mathcal{O}_K$ un $\mathcal{O}_K$-module de type fini M tel que, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma} \mathbb{C}$ est muni d'un produit scalaire hermitien, ces données étant compatibles à la conjugaison complexe. On notera $\overline{M}$ le $\mathcal{O}_K$-module hermitien ainsi défini.

Soient L une extension finie de K, et $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L. Si τ est un plongement de L dans $\mathbb{C}$ et si σ est la restriction de τ à K, les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma} \mathbb{C}$ et $(M_{\mathcal{O}_L})_\tau = (M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L) \otimes_{\mathcal{O}_L,\tau} \mathbb{C}$ sont naturellement isomorphes, ce qui permet de munir $M_{\mathcal{O}_L}$ d'une structure de $\mathcal{O}_L$-module hermitien. On dira que c'est le $\mathcal{O}_L$-module hermitien déduit de $\overline{M}$ par extension des scalaires de K à L.

Si $\overline{M}$ est un $\mathcal{O}_K$-module hermitien et si $s_1, \ldots, s_r$ sont des éléments de M dont les images dans le K-espace vectoriel M_K forment une base de cet espace, on définit le degré arakelovien (ou degré d'Arakelov) normalisé de $\overline{M}$ comme étant le nombre réel

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\log \# M/(s_1, \ldots, s_n) \; - \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_{\bigwedge^r M_\sigma}\right)$$

(en cas d'ambiguïté sur l'anneau de base, on pourra préciser $\widehat{\deg}_K\overline{M}$ au lieu de $\widehat{\deg}\,\overline{M}$).

On vérifie aisément que cette expression ne dépend pas des choix faits, et qu'elle est invariante par extension finie de K : avec les notations précédentes, on a

$$\widehat{\deg}_K\overline{M} = \widehat{\deg}_L\overline{M_{\mathcal{O}_L}}.$$

En outre, puisque M est un module de type fini sur un anneau de Dedekind, il revient au même de dire que M est sans torsion, que c'est un $\mathcal{O}_K$-module projectif, qu'il est plat, ou encore que c'est un $\mathcal{O}_K$-module localement libre. Sous cette hypothèse on dira que $\overline{M}$ est un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien, de rang égal par définition à $\dim_K M_K$. Alors, si M n'est pas nul, on définit la pente de $\overline{M}$ par la formule

$$\widehat{\mu}(\overline{M}) = \frac{\widehat{\deg}\,\overline{M}}{\operatorname{rg} M}.$$

On dira que

$$0 \to \overline{M'} \to \overline{M} \to \overline{M''} \to 0$$

est une suite exacte courte de $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens si la suite des $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents est exacte et si les métriques sur M' (resp. M'') sont celles induites (resp. quotient) par celles de M. Alors, sous ces conditions, on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \widehat{\deg}\,\overline{M'} + \widehat{\deg}\,\overline{M''}.$$

En particulier, pour tout $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\overline{M}$, le $\mathcal{O}_K$-module de type fini M/M_{tors} est projectif et muni naturellement d'une structure de $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien. On a alors la relation

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\log \# M_{\text{tors}} + \widehat{\deg}\,\overline{M/M_{\text{tors}}}. \tag{1.4.1}$$

Soit maintenant $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien non nul. On définit la pente maximale de $\overline{E}$ comme étant la borne supérieure des pentes de ses sous-modules non nuls :

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \sup\{\widehat{\mu}(\overline{F}) \mid 0 \neq F \subset E\}.$$

Le fibré hermitien $\overline{E}$ sera dit semi-stable si

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E}).$$

Par exemple, le fibré libre $(\overline{\mathcal{O}}_K)^r$ de rang $r > 0$, muni des métriques standard définies par la base canonique, est semi-stable de pente nulle.

Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux $\mathcal{O}_K$-fibrés vectoriels hermitiens et $\varphi : E_K \to F_K$ une application $K-$linéaire non nulle. Pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$, on note $\|\varphi\|_\sigma$ la norme de l'application $\mathbb{C}-$linéaire φ_σ relativement aux normes de E_σ et F_σ. De même, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ et si $K_\mathfrak{p}$ est le complété de K relativement à $\mathfrak{p}$, on note $\|\varphi\|_\mathfrak{p}$ la norme de l'application $K_\mathfrak{p}-$linéaire $\varphi_{K_\mathfrak{p}} : E_{K_\mathfrak{p}} \to F_{K_\mathfrak{p}}$; plus précisément, avec les normalisations choisies, on a

$$\log\|\varphi\|_\mathfrak{p} = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(\varpi_\mathfrak{p}^n E) \subset F\}.\log \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}),$$

où $\varpi_\mathfrak{p}$ est une uniformisante de $K_\mathfrak{p}$. On définit alors la hauteur (normalisée) de φ comme suit :

$$h(\varphi) = h(\varphi, \overline{E}, \overline{F}) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\sum_\mathfrak{p} \log\|\varphi\|_\mathfrak{p} + \sum_\sigma \log\|\varphi\|_\sigma\Big). \tag{1.4.2}$$

Il résulte immédiatement des définitions que si E et F sont de rang un, alors $\widehat{\deg}\overline{E} = \widehat{\deg}\overline{F} + h(\varphi)$ d'où, plus généralement :

Lemme 1.4.1 *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux $\mathcal{O}_K$-fibrés vectoriels hermitiens de même rang et $\varphi : E_K \xrightarrow{\sim} F_K$ un isomorphisme de K-espaces vectoriels. Alors*

$$\widehat{\deg}\overline{E} = \widehat{\deg}\overline{F} + h\Big(\bigwedge^{\max}\varphi\Big).$$

Plus loin dans le texte, on utilisera l'inégalité de pentes suivante.

Proposition 1.4.2 *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux $\mathcal{O}_K$-fibrés vectoriels hermitiens et $\varphi : E_K \to F_K$ une application K-linéaire* injective. *Alors on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi).$$

DÉMONSTRATION : Soit E' un sous-fibré vectoriel non nul de E. Notons

$$\varphi(E')_{\mathrm{sat}} = \varphi(E')_K \cap F.$$

Il découle facilement des définitions qu'on a

$$\frac{1}{\operatorname{rg} E'} h\left(\bigwedge^{\operatorname{rg} E'} \varphi|_{E'_K}, \bigwedge^{\operatorname{rg} E'} \overline{E'}, \bigwedge^{\operatorname{rg} E'} \overline{\varphi(E')_{\mathrm{sat}}}\right) \leq h(\varphi|_{E'_K}, \overline{E'}, \overline{\varphi(E')_{\mathrm{sat}}}) \leq h(\varphi, \overline{E}, \overline{F})$$

d'où, par le lemme 1.4.1

$$\widehat{\mu}(\overline{E'}) \leq \widehat{\mu}(\overline{\varphi(E')_{\mathrm{sat}}}) + h(\varphi).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit alors de faire varier E' dans cette inégalité et de passer à la borne supérieure. □

Le lecteur intéressé trouvera une présentation bien plus approfondie de la théorie des pentes dans [9] appendice A, ou dans [10] section 4.1.

1.4.2 Quelques conventions en dimension supérieure

On commence par donner quelques définitions non standard qui seront utilisées dans la suite du texte.

Définition 1.4.3 *Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. On appelle pré-variété arithmétique sur $\mathcal{O}_K$ un schéma $\mathcal{X}$ projectif sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *dont la fibre générique $\mathcal{X}_K$ est lisse.*

Si en outre $\mathcal{X}$ est plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$*, on dira que c'est une variété arithmétique.*

Définition 1.4.4 *Une pré-variété arithmétique $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{O}_K$ sera dite* mesurée *si l'ensemble des points complexes $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ est muni d'une mesure strictement positive invariante sous l'action de la conjugaison complexe.*

Une pré-variété arithmétique $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{O}_K$ sera dite kählérienne *si l'ensemble des points complexes $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ est muni d'une structure kählérienne invariante sous l'action de la conjugaison complexe.*

Au moyen de la convention (1.1.7), toute pré-variété arithmétique kählérienne est munie d'une structure de pré-variété arithmétique mesurée.

Définition 1.4.5 *Si $\mathcal{X}$ est une pré-variété arithmétique sur $\mathcal{O}_K$, un fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module localement libre $\mathcal{E}$ tel que, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, le fibré $\mathcal{E}_\sigma$ sur $\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C})$ est un muni d'une métrique hermitienne C^∞, ces données étant invariantes sous l'action de la conjugaison complexe.*

On vérifie aisément que dans le cas particulier où $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on retrouve la notion de $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien définie précédemment.

Le rang de $\overline{\mathcal{E}}$ est par définition le rang du fibré sous-jacent $\mathcal{E}$ (c'est une fonction localement constante sur $\mathcal{X}$). Si $\overline{\mathcal{E}}$ est de rang constant égal à 1, on dira que c'est un fibré en droites (ou un faisceau inversible) hermitien.

Définition 1.4.6 *Un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur une pré-variété arithmétique $\mathcal{X}$ sera dit* positif *si $\mathcal{L}$ est ample et si la forme de courbure de $\overline{\mathcal{L}}$ est définie positive sur $\mathcal{X}(\mathbb{C})$.*

Si $\pi : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est une pré-variété arithmétique *mesurée* sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ d'un corps de nombres K et $\overline{\mathcal{E}}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\mathcal{X}$, la construction (1.1.4) permet pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ de définir un produit scalaire $< .,. >_{L^2,\sigma}$ sur $\Gamma(\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C}), \mathcal{E}_\sigma) = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})_\sigma$ et ainsi de munir $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ d'une structure de module hermitien sur $\mathcal{O}_K$. Si en outre $\mathcal{X}$ est plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $\overline{\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})}$ est un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien.

Un exemple important de variété arithmétique mesurée est l'espace projectif des quotients localement libres de rang un d'un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien, défini comme suit.

Soit $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $N+1$. On pose

$$\mathbb{P}_E = \mathbf{Proj}(\operatorname{Sym}^{\cdot} E).$$

C'est une variété arithmétique sur $\mathcal{O}_K$, au sens de la définition 1.4.3. Pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E_σ est muni d'un produit scalaire hermitien, et le schéma $(\mathbb{P}_E)_\sigma$ déduit de $\mathbb{P}_E$ par changement de base via σ s'identifie naturellement au schéma $\mathbb{P}_{E_\sigma}$ associé à E_σ au début du paragraphe 1.3.1. Ainsi $(\mathbb{P}_E)_\sigma(\mathbb{C})$ est muni de la structure kählérienne définie au paragraphe 1.3.1, et de la forme volume associée. Ceci fait de $\mathbb{P}_E$ une variété arithmétique mesurée.

Le fibré en droites universel $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}_E$ est encore muni à l'infini des métriques hermitiennes définies au paragraphe 1.3.1 ; de même pour ses puissances tensorielles. Pour tout n on a alors un morphisme naturel de $\mathcal{O}_K$-fibrés vectoriels hermitiens

$$\varphi_n : \overline{S^n E} \longrightarrow \overline{\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))},$$

qui est un isomorphisme sur les $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents et tel que, par le lemme 1.3.4, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, l'application $\mathbb{C}$-linéaire $(\varphi_n)_\sigma$ est une similitude de rapport $\binom{N+n}{N}^{-1/2}$.

Chapitre 2

Hauteurs de sous-schémas et lien avec la géométrie d'Arakelov des schémas de Hilbert

Dans ce chapitre on montre comment il est possible d'associer naturellement à tout sous-schéma d'une pré-variété arithmétique mesurée munie d'un fibré en droites hermitien positif (avec les définitions du paragraphe 1.4.2) une famille de hauteurs, indexées par un entier $n \in \mathbb{N}$. Lorsque l'on fait varier n, ces hauteurs se comportent essentiellement comme la «fonction de Hilbert-Samuel arithmétique» du sous-schéma, au sens de [38].

2.1 Métrisation des schémas de Hilbert

On utilisera librement dans ce texte les deux théorèmes suivants relatifs à la construction des schémas de Hilbert, dont on trouvera une démonstration dans [29] ou dans [36].

Soient S un schéma noethérien, X un schéma projectif sur S muni d'un fibré très ample noté $\mathcal{O}_X(1)$, $\pi : X \to S$ le morphisme structural de X, et P un polynôme numérique[1]. On note $Hilb^P_{X/S}$ le foncteur qui, à tout S-schéma T, associe l'ensemble des sous-schémas fermés de $X_T = X \times_S T$ plats sur T dont le polynôme de Hilbert (en chaque fibre) relativement à $\mathcal{O}_X(1)$ est égal à P.

Alors, sous ces hypothèses, on a le

Théorème 2.1.1 (Grothendieck) *Le foncteur $Hilb^P_{X/S}$ est représentable par un S-schéma projectif.*

On notera désormais $\mathbf{Hilb}^P_{X/S}$ le S-schéma projectif représentant le foncteur $Hilb^P_{X/S}$, dont l'existence est assurée par le théorème 2.1.1.

Soient maintenant T un S-schéma et Y un sous-schéma fermé de X_T plat sur T et de polynôme de Hilbert P. Notons $[Y]_H$ le T-point de $\mathbf{Hilb}^P_{X/S}$ représentant Y. Si n est un

[1] c'est-à-dire, un polynôme (à coefficients rationnels) dont les valeurs aux entiers suffisamment grands sont entières positives.

entier, on dira que Y satisfait à la condition $(*_n)$ si le morphisme de restriction

$$(\pi_{X_T/T})_* \mathcal{O}_{X_T}(n) \to (\pi_{Y/T})_*(\mathcal{O}_{X_T}(n)|_Y)$$

est surjectif et fait de $(\pi_{Y/T})_*(\mathcal{O}_{X_T}(n)|_Y)$ un quotient localement libre de rang $P(n)$ de $(\pi_{X_T/T})_* \mathcal{O}_{X_T}(n)$. Ainsi, si cette condition $(*_n)$ est vérifiée, $(\pi_{Y/T})_*(\mathcal{O}_{X_T}(n)|_Y)$ définit un T-point (noté $[Y]_G$) de la grassmannienne $\mathbf{G}_{P(n)}(\pi_* \mathcal{O}_X(n))$ des quotients localement libres de rang $P(n)$ de $\pi_* \mathcal{O}_X(n)$.

Avec ces notations, on a alors le

Théorème 2.1.2 *Il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 et pour tout S-schéma T, tout sous-schéma fermé Y de X_T plat sur T de polynôme de Hilbert P vérifie la condition $(*_n)$. En outre, le morphisme de schémas*

$$\eta_n : \mathbf{Hilb}^P_{X/S} \to \mathbf{G}_{P(n)}(\pi_* \mathcal{O}_X(n))$$

représentant la transformation naturelle du foncteur de Hilbert vers le foncteur grassmannien qui envoie $[Y]_H$ sur $[Y]_G$, est une immersion fermée.

Remarque 2.1.3 Une condition suffisante pour qu'un entier n_0 vérifie la condition énoncée dans le théorème 2.1.2 est que n_0 soit régulier au sens de Castelnuovo-Mumford relativement au morphisme $\pi : X \to S$, au faisceau $\mathcal{O}_X(1)$ et au polynôme P. Pour une discussion de cette notion on pourra consulter [45], chapitre 14.

On notera $\mathcal{M}_n$ l'image inverse du fibré en droites universel sur la grassmannienne par le plongement η_n défini dans le théorème 2.1.2. Par construction, si $[Y]_H$ est un T-point du schéma de Hilbert représentant un sous-schéma Y de X_T, la fibre en $[Y]_H$ de $\mathcal{M}_n$ s'identifie canoniquement au $\mathcal{O}_T$-module

$$\bigwedge^{P(n)} (\pi_{Y/T})_*(\mathcal{O}_{X_T}(n)|_Y).$$

Les constructions et théorèmes précédents restent valables lorsque l'on remplace le faisceau très ample $\mathcal{O}_X(1)$ par un faisceau $\mathcal{L}$ ample relativement à π.

Soient maintenant K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, $\pi : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ une pré-variété arithmétique (au sens de la définition 1.4.3) munie d'un fibré en droite hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ ample relativement à π, et P un polynôme numérique. On applique les résultats précédents avec $X = \mathcal{X}$, $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. On note $\mathcal{H} = \mathbf{Hilb}^P_{\mathcal{X}/S}$ le schéma de Hilbert correspondant. On va montrer que les faisceaux $\mathcal{M}_n$ définis sur $\mathcal{H}$ peuvent être munis naturellement d'une structure hermitienne.

Soient n_0 l'entier défini dans le théorème 2.1.1 et n un entier supérieur ou égal à n_0. Notons :

– $\mathcal{G}_n = \mathbf{G}_{P(n)}(\pi_* \mathcal{L}^{\otimes n})$ la grassmannienne des quotients localement libres de rang $P(n)$ de $\pi_* \mathcal{L}^{\otimes n}$,

– $\pi_{\mathcal{G}_n} : \mathcal{G}_n \to S$ et $\pi_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to S$ les projections canoniques,

– $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_n}(1)$ le fibré en droites universel sur $\mathcal{G}_n$ et

– $\eta_n : \mathcal{H} \to \mathcal{G}_n$ le plongement grassmannien défini par le théorème 2.1.2.

Par définition de $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_n}(1)$ on a une surjection canonique

$$\pi_{\mathcal{G}_n}^*(\bigwedge^{P(n)} \pi_*\mathcal{L}^{\otimes n}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{G}_n}(1)$$

qui se restreint via η_n en une surjection

$$\pi_{\mathcal{H}}^*(\bigwedge^{P(n)} \pi_*\mathcal{L}^{\otimes n}) \twoheadrightarrow \mathcal{M}_n.$$

Avec les conventions et définitions du paragraphe 1.4.2, supposons que $\mathcal{X}$ est mesurée. Alors $\pi_*\mathcal{L}^{\otimes n}$ est muni des normes L^2, et $\bigwedge^{P(n)} \pi_*\mathcal{L}^{\otimes n}$ est muni des normes puissance extérieure. Ainsi, en munissant $\mathcal{M}_n$ des normes quotient via la surjection précédente, on obtient sur $\mathcal{H}$ un fibré en droites hermitien, qu'on notera $\overline{\mathcal{M}_n}$.

2.2 Définition des hauteurs de sous-schémas

Avec les notations de la section précédente, soit Σ un sous-schéma de $\mathcal{X}$, plat sur $\mathcal{O}_K$, de polynôme de Hilbert P. Au sous-schéma Σ correspond un $\mathcal{O}_K$-point $[\Sigma]_H$ du schéma de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est-à-dire une section

$$i_{[\Sigma]_H} : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \to \mathcal{H}.$$

Si $n \geq n_0$ on définit la n-ième hauteur (normalisée) $h^{(n)}(\Sigma)$ du sous-schéma Σ comme la hauteur (cf. [11] et [57]) du point $[\Sigma]_G$ relativement au fibré hermitien $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{G}_n}(1)}$ sur $\mathcal{G}_n$, ou, ce qui revient au même, comme la hauteur du point $[\Sigma]_H$ relativement au fibré hermitien $\overline{\mathcal{M}_n}$ sur $\mathcal{H}$:

$$h^{(n)}(\Sigma) = h_{\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{G}_n}(1)}}([\Sigma]_G) = h_{\overline{\mathcal{M}_n}}([\Sigma]_H) = \widehat{\deg} i_{[\Sigma]_H}{}^* \overline{\mathcal{M}_n}.$$

Compte tenu de la définition des métriques sur $\overline{\mathcal{M}_n}$, ceci peut se réécrire comme suit. Pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, soit $\|.\|_{q,\sigma}$ la métrique sur $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)_\sigma$ obtenue par passage au quotient de la métrique L^2 sur $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma$ via la surjection

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma \twoheadrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)_\sigma.$$

Alors on a l'égalité

$$h^{(n)}(\Sigma) = \widehat{\deg}(\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma), \|.\|_q). \tag{2.2.1}$$

Plus généralement, soit Σ un sous-schéma fermé quelconque de $\mathcal{X}$, sans condition de platitude, défini par un faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}_\Sigma$. Pour tout entier n, notons

$$\operatorname{restr}_n : \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma) \tag{2.2.2}$$

l'application de restriction. L'image $\operatorname{Im}(\operatorname{restr}_n)$ de cette application de restriction est un quotient du $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$, et peut être munie des métriques quotient des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$. On obtient ainsi un $\mathcal{O}_K$-module hermitien, noté $\overline{\operatorname{Im}(\operatorname{restr}_n)}$.

Définition 2.2.1 *La n-ième hauteur du sous-schéma Σ (relativement à $\overline{\mathcal{L}}$) est le degré d'Arakelov normalisé du $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_n)}$:*

$$h^{(n)}(\Sigma) = \widehat{\deg}\,\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_n)}.$$

Dans la suite du texte, on utilisera indiféremment les termes «hauteur schématique» et «hauteur de sous-schéma».

Remarque 2.2.2 Puisque $\mathcal{L}$ est ample, l'application de restriction restr_n donnée par (2.2.2) est surjective pour tout entier n assez grand. Autrement dit on a

$$\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_n) = \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})$$

et la définition 2.2.1 des hauteurs schématiques redonne bien la formule (2.2.1).

Remarque 2.2.3 Comme on vient de le voir, les hauteurs du sous-schéma Σ sont définies pour tout entier n. Parfois cependant, pour obtenir certaines propriétés sur ces hauteurs, on devra faire une hypothèse plus forte sur l'entier n, par exemple que l'application de restriction est surjective sur la fibre générique, *i.e.*

$$\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_n)_K = \Gamma(\Sigma_K, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma_K}),$$

voire éventuellement que n est régulier au sens de Castelnuovo-Mumford relativement au polynôme de Hilbert de Σ_K.

La notion de hauteur définie précédemment s'appliquait aux sous-schémas fermés de $\mathcal{X}$. On va maintenant définir une notion analogue pour les sous-schémas fermés de la fibre générique $\mathcal{X}_K$. Supposons donc que Σ est un sous-schéma fermé de la fibre générique $\mathcal{X}_K$. On définit alors la n-ième hauteur schématique de Σ comme étant la n-ième hauteur schématique de l'adhérence schématique $\overline{\Sigma}$ de Σ dans $\mathcal{X}$:

$$h^{(n)}(\Sigma) = h^{(n)}(\overline{\Sigma}). \tag{2.2.3}$$

Exemple 2.2.4 Soient $\mathcal{X} = \mathbb{P}^N$ l'espace projectif standard sur $\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites universel sur $\mathcal{X}$ muni des métriques standard et p un point de $\mathcal{X}(\mathbb{Q})$ de coordonnées homogènes $(a_0 : \ldots : a_N)$ entières. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, les lemmes 1.1.3 et 1.3.4 impliquent que l'application naturelle de restriction

$$\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \mathcal{O}(n)|_p$$

est une similitude partielle de norme $\binom{N+n}{N}^{1/2}$. Ainsi on a

$$h^{(n)}(p) = n.h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(p) + \frac{1}{2}\log\binom{N+n}{N} = n.\log\frac{\sqrt{a_0^2+\cdots+a_N^2}}{\mathrm{pgcd}(a_0,\ldots,a_N)} + \frac{1}{2}\log\binom{N+n}{N}.$$

2.3 Propriétés élémentaires des hauteurs de sous-schémas

2.3.1 Invariance par extension du corps de base

Soient K un corps de nombres et L une extension finie de K. Soit $\mathcal{X}$ une pré-variété arithmétique sur $\mathcal{O}_K$ munie d'un fibré en droites hermitien ample $\overline{\mathcal{L}}$. Alors :

Lemme 2.3.1 *Pour tout sous-schéma fermé Σ de la fibre générique $\mathcal{X}_K$, l'adhérence $\overline{(\Sigma_L)}$ dans $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_L} = \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ du sous-schéma fermé Σ_L de $\mathcal{X}_L$ déduit de Σ par extension des scalaires de K à L, et le sous-schéma $(\overline{\Sigma})_{\mathcal{O}_L}$ de $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_L}$ déduit de l'adhérence $\overline{\Sigma}$ de Σ dans $\mathcal{X}$ par extension de l'anneau de base de $\mathcal{O}_K$ à $\mathcal{O}_L$, sont égaux.*

Démonstration : L'énoncé se démontrant localement, on peut remplacer $\mathcal{X}$ par un schéma affine $\operatorname{Spec} A$, où A est une $\mathcal{O}_K$-algèbre de type fini, et supposer que Σ est le sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec} A_K$ défini par l'idéal J de A_K. Notons $f : A \to A_K/J$ l'application naturelle. Alors $\overline{(\Sigma_L)}$ est le sous-schéma de $\operatorname{Spec} A_{\mathcal{O}_L}$ défini par l'idéal $\ker(f_{\mathcal{O}_L})$, tandis que $(\overline{\Sigma})_{\mathcal{O}_L}$ est le sous-schéma défini par l'idéal $(\ker f)_{\mathcal{O}_L}$; ces deux idéaux sont égaux par platitude de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_K$. □

Proposition 2.3.2 *i. Pour tout sous-schéma fermé Σ de $\mathcal{X}$, $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$ est un sous-schéma fermé de $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_L}$, et pour tout entier $n \geq 0$ on a*

$$h^{(n)}(\Sigma_{\mathcal{O}_L}) = h^{(n)}(\Sigma).$$

ii. Pour tout sous-schéma fermé Σ de la fibre générique $\mathcal{X}_K$, Σ_L est un sous-schéma fermé de $\mathcal{X}_L$, et pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$h^{(n)}(\Sigma_L) = h^{(n)}(\Sigma).$$

Démonstration : La première assertion résulte de l'invariance du degré arakelovien par extension du corps de base (au sens de la partie 1.4) et du fait que, par platitude de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_K$, les flèches verticales du diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})_{\mathcal{O}_L} & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})_{\mathcal{O}_L} \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\Gamma(\mathcal{X}_{\mathcal{O}_L}, \mathcal{L}^{\otimes n}_{\mathcal{O}_L}) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma_{\mathcal{O}_L}, \mathcal{L}^{\otimes n}_{\mathcal{O}_L}|_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}})
\end{array}$$

sont des isomorphismes, de telle sorte que

$$(\operatorname{Im}(\operatorname{restr}_n))_{\mathcal{O}_L} = \operatorname{Im}((\operatorname{restr}_n)_{\mathcal{O}_L}).$$

La seconde assertion résulte de la première, et du fait que l'opération d'adhérence schématique commute à l'extension de la base de l'anneau des entiers d'un corps de nombres à l'anneau des entiers d'une extension finie, comme cela est démontré dans le lemme. □

2.3.2 Propriété de hauteur

Soient K un corps de nombres et $\mathcal{X}$ une pré-variété arithmétique mesurée sur $\mathcal{O}_K$ munie d'un fibré en droites hermitien ample $\overline{\mathcal{L}}$.

Pour tout morphisme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_Y"'] & & Z \arrow[dl, "g_Z"] \\ & \mathcal{X} & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{X}$-schémas on note

$$\mathrm{restr}_{n,Z,Y} : \Gamma(Z, g_Z^* \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(Y, g_Y^* \mathcal{L}^{\otimes n})$$

l'application déduite naturellement de f.

Lemme 2.3.3 *Soient*

$$\Sigma' \subset \Sigma$$

deux sous-schémas fermés de $\mathcal{X}$ égaux sur la fibre générique :

$$\Sigma'_K = \Sigma_K.$$

Alors

- *pour tout entier n, on a*

$$h^{(n)}(\Sigma') \leq h^{(n)}(\Sigma)$$

et

$$h^{(n)}(\Sigma') \geq h^{(n)}(\Sigma) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})_{\mathrm{tors}}$$

- *si l'application de restriction* $\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma}$ *est surjective, alors*

$$h^{(n)}(\Sigma') \leq h^{(n)}(\Sigma) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} (\log \# \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})_{\mathrm{tors}} - \log \# \Gamma(\Sigma', \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma'})_{\mathrm{tors}})$$

- *si l'application de restriction* $\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'}$ *est surjective, alors*

$$h^{(n)}(\Sigma') \geq h^{(n)}(\Sigma) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} (\log \# \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})_{\mathrm{tors}} - \log \# \Gamma(\Sigma', \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma'})_{\mathrm{tors}}).$$

Démonstration : On a

$$\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'} = \mathrm{restr}_{n,\Sigma,\Sigma'} \circ \mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma}$$

donc

$$\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'}) = \mathrm{restr}_{n,\Sigma,\Sigma'}(\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})).$$

Ainsi $\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})$ s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'})$. Par ailleurs, par platitude de K sur $\mathcal{O}_K$ on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'})_K &= \mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X}_K,\Sigma'_K}) \\ &= \mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X}_K,\Sigma_K}) \\ &= \mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})_K.\end{aligned}$$

Ces deux faits impliquent que $\mathrm{restr}_{n,\Sigma,\Sigma'}$ induit par passage au quotient un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})/\,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'})/\,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'})_{\mathrm{tors}} \tag{2.3.1}$$

et que

$$\#\,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})_{\mathrm{tors}} \geq \#\,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'})_{\mathrm{tors}}. \tag{2.3.2}$$

De la définition 2.2.1 et des formules (1.4.1) et (2.3.1) on déduit l'égalité

$$h^{(n)}(\Sigma') = h^{(n)}(\Sigma) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(\log\#\,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})_{\mathrm{tors}} - \log\#\,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'})_{\mathrm{tors}})$$

qui, jointe à (2.3.2), fournit la première inégalité énoncée dans le lemme. Les autres inégalités résultent du fait que, puisque $\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})$ (resp. $\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'})$) est un sous-module de $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})$ (resp. de $\Gamma(\Sigma', \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma'})$), on a $\#\,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma})_{\mathrm{tors}} \leq \#\,\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})_{\mathrm{tors}}$ (resp. $\#\,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma'})_{\mathrm{tors}} \leq \#\,\Gamma(\Sigma', \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma'})_{\mathrm{tors}}$). □

Exemple 2.3.4 Si $\Sigma = \emptyset$ est le sous-schéma vide de $\mathcal{X}$, $\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_n)$ est le $\mathcal{O}_K$-module nul, de telle sorte que

$$h^{(n)}(\emptyset) = 0.$$

Plus généralement, si Σ est un sous-schéma de $\mathcal{X}$ génériquement vide, *i.e.*

$$\Sigma_K = \emptyset,$$

alors pour tout entier n on a

$$h^{(n)}(\Sigma) \geq 0.$$

On va maintenant montrer que, sous certaines hypothèses, les hauteurs de sous-schémas vérifient une propriété de finitude analogue à celle vérifiée par les différentes notions de hauteurs introduites dans d'autres contextes.

Soient donc P un polynôme numérique et n un entier. On suppose n régulier au sens de Castelnuovo-Mumford relativement à P. Alors :

Proposition 2.3.5 *i. Il existe un réel $C = C(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}, n, P)$ tel que, pour toute extension finie L de K et pour tout sous-schéma fermé Σ de $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_L}$ tel que le polynôme de Hilbert de la fibre générique Σ_L soit égal à P, on ait $h^{(n)}(\Sigma) \geq C$.*

ii. Pour tous réels C' et C'' il n'existe qu'un nombre fini de couples (L,Σ) où L est une extension de K de degré majoré par C' et Σ un sous-schéma fermé de $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_L}$ plat *sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_L$*, de polynôme de Hilbert égal à P et vérifiant l'inégalité $h^{(n)}(\Sigma)\leq C''$.*

DÉMONSTRATION : En appliquant le lemme 2.3.3 avec $\Sigma' = \overline{\Sigma_L}$, l'adhérence dans $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_L}$ de la fibre générique Σ_L de Σ, on voit que, pour démontrer la première assertion, il suffit de démontrer l'énoncé analogue avec l'hypothèse supplémentaire que Σ est plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_L$. Mais alors le résultat provient de ce que, sous cette hypothèse, du fait que n est régulier relativement à P, la hauteur de Σ est égale à la hauteur de son point de Hilbert, qui est définie par restriction d'une hauteur sur une grassmannienne dont on sait déjà qu'elle vérifie cette propriété. Ce dernier argument démontre aussi immédiatement la deuxième assertion. □

2.3.3 Une inégalité remarquable

Soit $\mathcal{X}$ une pré-variété arithmétique mesurée sur $\mathcal{O}_K$ munie d'un fibré en droites hermitien ample $\overline{\mathcal{L}}$.

Lemme 2.3.6 *Soit Σ un sous-schéma fermé de $\mathcal{X}$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{J}$. Pour tout entier n, munissons le $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}\mathcal{L}^{\otimes n})$ des métriques obtenues par restriction des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}^{\otimes n})$. Alors on a*

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\Sigma) &= \widehat{\deg}\overline{\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}^{\otimes n})} - \widehat{\deg}\overline{\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}\mathcal{L}^{\otimes n})} \\ &= h^{(n)}(\mathcal{X}) - \widehat{\deg}\overline{\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}\mathcal{L}^{\otimes n})} \end{aligned}$$

où $h^{(n)}(\mathcal{X})$ est la hauteur de $\mathcal{X}$ considéré comme sous-schéma de lui-même.

Remarque 2.3.7 On notera que ce lemme est valable pour tout entier n, et pas seulement à partir d'un certain rang.

DÉMONSTRATION : Cela résulte immédiatement du fait qu'avec les notations de la définition 2.2.1, la suite

$$0 \longrightarrow \overline{\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}\mathcal{L}^{\otimes n})} \longrightarrow \overline{\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}^{\otimes n})} \longrightarrow \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_n)} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens, au sens de la section 1.4.1. □

Si Σ_1 et Σ_2 sont deux sous-schémas fermés de $\mathcal{X}$ définis par des faisceaux d'idéaux $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$, on note $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ (resp. $\Sigma_1\cap\Sigma_2$) le sous-schéma réunion (resp intersection) de Σ_1 et Σ_2, *i.e.* le sous-schéma fermé de $\mathcal{X}$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{J}_1\cap\mathfrak{J}_2$ (resp. $\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2$). Comme dans le lemme, munissons les $\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}_i\mathcal{L}^{\otimes n})$ des métriques L^2. Alors pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, notons

$$d_\sigma^{(n)} = d_{\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}_1\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma,\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}_2\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma} \in]0,1]$$

la quantité associée au triplet $(\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma,\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}_1\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma,\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{J}_2\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma)$ définie par (1.2.4) (ou par le corollaire 1.2.18). Remarquons qu'au moyen des structures hermitiennes on peut identifier naturellement le quotient $\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma_i})_\sigma$ et à un sous-espace de $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma$, plus précisément à l'orthogonal de $\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{I}_i\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma$, de telle sorte que par le corollaire 1.2.20 on trouve

$$d_\sigma^{(n)} = d_{\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma_1})_\sigma,\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma_2})_\sigma}.$$

Proposition 2.3.8 *Avec les notations précédentes, pour tout entier n assez grand, les hauteurs schématiques $h^{(n)}(\Sigma_1)$, $h^{(n)}(\Sigma_2)$, $h^{(n)}(\Sigma_1\cup\Sigma_2)$ et $h^{(n)}(\Sigma_1\cap\Sigma_2)$ vérifient*

$$h^{(n)}(\Sigma_1\cup\Sigma_2)+h^{(n)}(\Sigma_1\cap\Sigma_2) = h^{(n)}(\Sigma_1)+h^{(n)}(\Sigma_2)+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}\log d_\sigma^{(n)}.$$

DÉMONSTRATION : Considérons la suite exacte de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-modules cohérents

$$0\longrightarrow \mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2\longrightarrow \mathfrak{I}_1\oplus\mathfrak{I}_2\longrightarrow \mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2\longrightarrow 0,$$

naturelle à un choix de signe près. Quitte à choisir n assez grand, on peut supposer

$$H^1(\mathcal{X},(\mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})=0.$$

Alors la suite

$$0\longrightarrow\Gamma(\mathcal{X},(\mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})\longrightarrow\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{I}_1\mathcal{L}^{\otimes n})\oplus\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{I}_2\mathcal{L}^{\otimes n})\longrightarrow\Gamma(\mathcal{X},(\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})\longrightarrow 0$$

est exacte et induit pour tout plongement $\sigma : K\hookrightarrow\mathbb{C}$ un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension un

$$\begin{aligned}&\bigwedge^{\max}\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{I}_1\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma\otimes\bigwedge^{\max}\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{I}_2\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma\\ &\qquad\stackrel{\sim}{\longrightarrow}\bigwedge^{\max}\Gamma(\mathcal{X},(\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma\otimes\bigwedge^{\max}\Gamma(\mathcal{X},(\mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma\end{aligned}$$

dont la norme est par définition la quantité $d_\sigma^{(n)}$. On a alors

$$\begin{aligned}&\widehat{\deg}\overline{\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{I}_1\mathcal{L}^{\otimes n})}+\widehat{\deg}\overline{\Gamma(\mathcal{X},\mathfrak{I}_2\mathcal{L}^{\otimes n})}\\ &\qquad=\widehat{\deg}\overline{\Gamma(\mathcal{X},(\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})}+\widehat{\deg}\overline{\Gamma(\mathcal{X},(\mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})}+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}\log d_\sigma^{(n)}\end{aligned}$$

et on conclut en appliquant le lemme 2.3.6 aux quatre sous-schémas Σ_1, Σ_2, $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ et $\Sigma_1\cup\Sigma_2$. □

Corollaire 2.3.9 *Sous les hypothèses de la proposition, supposons que l'un des deux sous-schémas soit génériquement vide, par exemple*

$$\Sigma_{2,K}=\emptyset.$$

Alors pour tout n assez grand on a l'égalité

$$h^{(n)}(\Sigma_1\cup\Sigma_2)=h^{(n)}(\Sigma_1)+h^{(n)}(\Sigma_2)-h^{(n)}(\Sigma_1\cap\Sigma_2).$$

DÉMONSTRATION : Si $\Sigma_{2,K}$ est vide, $\mathrm{Im}(\mathrm{restr}_{n,\mathcal{X},\Sigma_2})_\sigma \subset \Gamma(\Sigma_2, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma_2})_\sigma$ est nul pour tout σ, de telle sorte que

$$d_\sigma^{(n)} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 2.3.10 Soit Σ un sous-schéma fermé de $\mathcal{X}$. On va appliquer à Σ la théorie des cycles premiers associés et de la décomposition primaire, pour laquelle on renvoie à [EGA] IV §3 (ainsi qu'à [Bourbaki] AC ch. IV ou [41] §6 pour le cas affine). Notons

$$\mathrm{Ass}(\Sigma) = \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_\Sigma) = \{Z_1, \ldots, Z_{r+s}\}$$

l'ensemble des cycles premiers associés à Σ, c'est-à-dire l'ensemble des sous-schémas intègres Z_i de Σ tels que l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{\Sigma,Z_i}$ annule un élément non trivial de cet anneau (cf. [EGA] IV 3.1.1 et les références associées). Par [31] III prop. 9.7, on peut supposer que $Z_1, \ldots, Z_r$ s'envoient sur des points fermés de $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ et que $Z_{r+1}, \ldots, Z_{r+s}$ sont plats sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$. On dira que $Z_1, \ldots, Z_r$ sont les composantes essentielles verticales de Σ et que $Z_{r+1}, \ldots, Z_{r+s}$ sont ses composantes essentielles horizontales. Considérons maintenant une décomposition irredondante minimale (ou «réduite») de Σ, c'est-à-dire ([EGA] IV 3.2.5 et 3.2.6) la donnée de sous-schémas fermés $\Sigma^{(i)}$ $(1 \leq i \leq r+s)$ de Σ tels que $\mathrm{Ass}(\Sigma^{(i)}) = \{Z_i\}$ et que Σ soit égal à la réunion schématique des $\Sigma^{(i)}$:

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{r+s} \Sigma^{(i)}. \tag{2.3.3}$$

Notant $\mathfrak{I}_i$ l'idéal de $\mathcal{O}_\Sigma$ définissant $\Sigma^{(i)}$, cela revient à dire que les $\mathfrak{I}_i$ forment une décomposition primaire minimale de l'idéal nul de $\mathcal{O}_\Sigma$. Par [31] III prop. 9.7, les $\Sigma^{(i)}$ pour $r+1 \leq i \leq r+s$ sont plats sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ (on dira aussi qu'ils sont horizontaux). En outre, par compatibilité à la localisation de la formation des cycles premiers associés, les $\Sigma_K^{(i)}$ $(r+1 \leq i \leq r+s)$ forment une décomposition irredondante minimale de Σ_K, alors que pour $1 \leq i \leq r$, $\Sigma_K^{(i)}$ est vide. Ainsi, dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\Sigma & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{i=r+1}^{r+s} \mathcal{O}_{\Sigma^{(i)}} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathcal{O}_{\Sigma_K} & \xrightarrow{f_K} & \bigoplus_{i=r+1}^{r+s} \mathcal{O}_{\Sigma_K^{(i)}} \end{array}$$

les flèches naturelles f_K et h sont injectives. On a donc

$$\ker g = \ker f = \mathfrak{I}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{I}_{r+s}.$$

De façon équivalente, si l'on note H le sous-schéma fermé de Σ défini par l'idéal $\mathfrak{I} = \ker g$ (autrement dit,

$$H = \overline{\Sigma_K}$$

est l'adhérence de la fibre générique de Σ), alors H est égal à la réunion des $\Sigma^{(i)}$ horizontaux :

$$H = \bigcup_{i=r+1}^{r+s} \Sigma^{(i)}.$$

Remarquons que, par [31] III prop. 9.7, H est alors aussi le plus grand sous-schéma fermé de Σ plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Notons maintenant $\wp_1, \ldots, \wp_t$ les points fermés de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ images d'une composante essentielle verticale de Σ ; pour $1 \leq j \leq t$ notons $q_j = \# k(\wp_j)$ et V_j le sous-schéma fermé de Σ réunion de ceux des $\Sigma^{(i)}$ qui ont même image $\wp_j$ dans $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ (on prendra garde que V_j n'est pas nécessairement un $k(\wp_j)$-schéma ; il se peut en effet que l'image schématique d'un de ces $\Sigma^{(i)}$ ne soit pas réduite). Regroupant de cette façon les termes de la réunion (2.3.3), on obtient finalement une décomposition

$$\Sigma = H \cup V_1 \cup \cdots \cup V_t \tag{2.3.4}$$

de Σ comme réunion de son plus grand sous-schéma horizontal et d'un nombre fini de sous-schémas verticaux deux à deux disjoints. Par application répétée du corollaire précédent, on trouve alors, pour tout entier n assez grand :

$$h^{(n)}(\Sigma) = h^{(n)}(H) + \sum_{1 \leq i \leq t} (h^{(n)}(V_i) - h^{(n)}(H \cap V_i)).$$

Si n est assez grand, on a $h^{(n)}(V_i) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(V_i, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{V_i})$ et par le théorème de Hilbert-Samuel usuel, quitte à prendre n encore plus grand, on trouve $h^{(n)}(V_i) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} P_{V_i}(n) \log q_i$ où P_{V_i} est le polynôme de Hilbert-Samuel de V_i relativement à $\mathcal{L}$. Le même raisonnement appliqué à $H \cap V_i$ montre que pour tout n assez grand on a

$$h^{(n)}(\Sigma) = h^{(n)}(H) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{1 \leq i \leq t} (P_{V_i}(n) - P_{H \cap V_i}(n)) \log q_i \tag{2.3.5}$$

où notamment P_{V_i} et $P_{H \cap V_i}$ sont des polynômes numériques de degrés respectifs $\dim(V_i)$ et $\dim(H \cap V_i)$, tels qu'en outre $P_{V_i}(n) - P_{H \cap V_i}(n)$ soit positif pour n assez grand. Ainsi le calcul de $h^{(n)}(\Sigma)$ se ramène à celui de $h^{(n)}(H)$. Plus généralement, on pourra se restreindre dans l'étude du comportement asymptotique des hauteurs des sous-schémas de $\mathcal{X}$ au cas des sous-schémas plats sur la base.

Poursuivons maintenant l'énumération de corollaires de la proposition.

Corollaire 2.3.11 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux sous-schémas fermés de $\mathcal{X}$. Alors, pour tout entier n assez grand, on a*

$$h^{(n)}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) + h^{(n)}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \leq h^{(n)}(\Sigma_1) + h^{(n)}(\Sigma_2).$$

Démonstration : Cela résulte immédiatement de la proposition 2.3.8 et du fait que par construction, $0 < d_\sigma^{(n)} \leq 1$. $\square$

Corollaire 2.3.12 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux sous-schémas fermés de $\mathcal{X}$ tels que l'intersection $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ soit génériquement vide,* i.e.

$$(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)_K = \Sigma_{1,K} \cap \Sigma_{2,K} = \emptyset.$$

Alors on a

$$h^{(n)}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \leq h^{(n)}(\Sigma_1) + h^{(n)}(\Sigma_2).$$

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence directe du corollaire précédent et de l'exemple 2.3.4. □

On dispose enfin d'une extension du corollaire 2.3.11 au cas des sous-schémas de la fibre générique :

Corollaire 2.3.13 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux sous-schémas fermés de la fibre générique $\mathcal{X}_K$. Alors, pour tout entier n assez grand, on a*

$$h^{(n)}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) + h^{(n)}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \leq h^{(n)}(\Sigma_1) + h^{(n)}(\Sigma_2).$$

DÉMONSTRATION : Notons $\overline{\Sigma}$ le sous-schéma adhérence dans $\mathcal{X}$ d'un sous-schéma Σ de $\mathcal{X}_K$. On vérifie aisément qu'on a $\overline{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = \overline{\Sigma_1} \cup \overline{\Sigma_2}$. Par ailleurs, $\overline{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ est un sous-schéma fermé de $\overline{\Sigma_1} \cap \overline{\Sigma_2}$ et ces deux objets coïncident sur la fibre générique. Par le lemme 2.3.3 on a donc

$$h^{(n)}(\overline{\Sigma_1} \cap \overline{\Sigma_2}) \geq h^{(n)}(\overline{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}).$$

Alors, en appliquant le corollaire 2.3.11 et la définition des hauteurs des sous-schémas de la fibre générique, on trouve

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) + h^{(n)}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) &= h^{(n)}(\overline{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}) + h^{(n)}(\overline{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}) \\ &\leq h^{(n)}(\overline{\Sigma_1} \cup \overline{\Sigma_2}) + h^{(n)}(\overline{\Sigma_1} \cap \overline{\Sigma_2}) \\ &\leq h^{(n)}(\overline{\Sigma_1}) + h^{(n)}(\overline{\Sigma_2}) \\ &= h^{(n)}(\Sigma_1) + h^{(n)}(\Sigma_2), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Deuxième partie

Étude dans quelques cas particuliers du comportement asymptotique des hauteurs de sous-schémas

Dans les trois prochains chapitres on se propose d'étudier le comportement asymptotique des hauteurs de sous-schémas. On dispose de plusieurs motivations pour cela. Il s'agit, à la fois, de généraliser un «théorème de Hilbert-Samuel relatif» valable dans une situation géométrique analogue à la situation arithmétique considérée ici (cf. section A.1), et d'étendre au cas des sous-schémas le théorème de Hilbert-Samuel pour les variétés arithmétiques (cf. [1], [8], [27], [57] et [68]).

Lorsque le sous-schéma considéré est un sous-schéma intègre génériquement lisse, l'existence du terme dominant du développement asymptotique de ses hauteurs se ramène facilement au théorème de Hilbert-Samuel pour les variétés arithmétiques, au moyen d'un théorème d'extension L^2 qui n'est qu'un cas particulier élémentaire de ceux qui seront développés dans la suite du texte. Lorsque l'on passe à des sous-schémas plus généraux, on est confronté à deux difficultés : d'une part, l'apparition de singularités, d'autre part l'apparition de composantes non réduites. Le premier cas, celui des sous-schémas intègres éventuellement singuliers, est traité au début de l'annexe A.2 (lorsque la variété ambiante est l'espace projectif). Le second cas fait l'objet du chapitre trois ; on y introduit une notion de «lissité avec multiplicité» et on montre que le terme principal du développement asymptotique des hauteurs d'un sous-schéma vérifiant cette condition est bien égal à ce à quoi on s'attendait.

En revanche, on n'est pas parvenu à établir ce «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique» pour les sous-schémas présentant à la fois des multiplicités et des singularités. On s'est alors restreint à l'étude de sous-schémas très particuliers, cherchant à établir un développement asymptotique de leurs hauteurs à un ordre plus élevé. Dans le chapitre quatre on traite le cas d'abord d'un sous-espace linéaire d'un espace projectif, puis d'une réunion de deux tels sous-espaces linéaires, tandis que dans le chapitre cinq on étudie les hauteurs des sous-schémas de dimension générique nulle d'un espace projectif, qui généralisent les matrices d'interpolation de M. Laurent ([38]).

Chapitre 3

Sous-schémas lisses et certains de leurs épaississements

3.1 Sous-schéma «lisse avec multiplicité»

3.1.1 Un théorème d'extension L^2

On se propose ici de démontrer un théorème d'extension de jets de sections d'une grande puissance d'un fibré en droites positif le long d'un sous-schéma d'une variété projective complexe à la variété tout entière avec contrôle des normes L^2, moyennant une hypothèse de «lissité avec multiplicité» (définie ci-dessous) sur le sous-schéma. Ce théorème renforce un résultat de Zhang ([68], th 2.2), dont il est d'ailleurs inspiré. La démonstration procède en deux temps : on construit d'abord une extension C^∞ sur un voisinage de la sous-variété vérifiant certaines conditions convenables ; on peut alors obtenir une extension à la variété tout entière au moyen des estimées L^2 de Hörmander (via la formule de Bochner-Kodaira-Nakano) et de la méthode de Hörmander-Bombieri-Skoda.

Définition 3.1.1 *Soient k un corps et X un k-schéma algébrique. On dira que X est lisse avec multiplicité si le sous-schéma réduit $X^{\text{réd}}$ est lisse sur k et si le cône tangent $C_{X^{\text{réd}}}X$ à X le long de $X^{\text{réd}}$ est plat sur $X^{\text{réd}}$.*

Notons $\mathfrak{N}$ le nilradical de $\mathcal{O}_X$, c'est-à-dire le faisceau d'idéaux (nilpotent) définissant le sous-schéma fermé $X^{\text{réd}}$ de X. Par définition on a

$$C_{X^{\text{réd}}}X = \operatorname{Spec} \bigoplus_{t \geq 0} \mathfrak{N}^t / \mathfrak{N}^{t+1}.$$

Ainsi, dire que X est lisse avec multiplicité revient à dire que $X^{\text{réd}}$ est lisse et que chacun des faisceaux de jets $\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}$ est un fibré vectoriel (*i.e.* est localement libre) sur $X^{\text{réd}}$ (ceci résulte par exemple de [31] III prop. 9.2 (e) et du fait qu'une somme directe finie de faisceaux cohérents est plate si et seulement si chacun de ces faisceaux est plat).

Remarquons que cette condition implique en particulier que X n'a pas de composante essentielle immergée. L'implication réciproque n'est cependant pas vérifiée. Posons par exemple

$$X = \mathrm{Spec}(k[U,V,u,v]/(Uv - Vu, u^2, v^2, uv)) \simeq \mathrm{Spec}(A \oplus I)$$

où $A = k[U,V]$ et I est l'idéal de A engendré par U et V. Alors $X^{\text{réd}} = \mathrm{Spec}\, A = \mathbb{A}_k^2$ est lisse sur k et X est sans composante immergée car I est sans torsion. Cependant I n'est pas localement libre sur A (la fibre de I en l'origine étant de rang 2), donc X n'est pas lisse avec multiplicité.

Donnons maintenant un exemple important de sous-schéma lisse avec multiplicité :

Exemple 3.1.2 Soient X un k-schéma algébrique lisse et Σ un sous-schéma fermé lisse de X défini par un faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}$. Pour tout entier $n \geq 1$ notons $\Sigma^{<n>}$ le voisinage infinitésimal d'ordre n de Σ, c'est-à-dire le sous-schéma fermé de X défini par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}^n$. Alors $\Sigma^{<n>}$ est lisse avec multiplicité. En effet, sous ces hypothèses l'immersion de Σ dans X est régulière (cf. [EGA] IV 17.12.1 ou [22] App. B.7) et pour tout t on a un isomorphisme naturel $\mathfrak{I}^t/\mathfrak{I}^{t+1} = \mathrm{Sym}^t(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)$ qui fait de $\mathfrak{I}^t/\mathfrak{I}^{t+1}$ un fibré vectoriel sur $\Sigma = (\Sigma^{<n>})^{\text{réd}}$.

Plus loin dans le texte on aura besoin de pouvoir contrôler la norme uniforme des dérivées d'une section holomorphe d'un fibré vectoriel sur une variété analytique complexe compacte hermitienne en fonction de sa norme L^2. Ceci fera l'objet de la proposition 3.1.5 qui est une généralisation directe de [27], lemme 30 (on pourra aussi comparer avec [11], proposition 1.4.2, et avec les références qui y sont citées). La démonstration, directement adaptée de celle donnée dans [27] (où la méthode y est attribuée à Gromov), repose essentiellement sur les inégalités de Cauchy sous la forme des deux lemmes suivants.

Lemme 3.1.3 *Soient $d > 0$ un entier et $I = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice. Notons $S^{d-1}(r)$ la sphère de rayon r centrée en l'origine dans l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^d$ et $\sigma = \sigma_{S^{d-1}(r)}$ la mesure euclidienne sur $S^{d-1}(r)$. Alors il existe une constante $c_I > 0$ telle que pour toute fonction harmonique u à valeurs complexes définie sur un voisinage de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ et pour tout réel $r \in]0,1[$ on ait*

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{|I|} u}{\partial x^I}(0) \right|^2 &\leq \frac{c_I r^{-2|I|}}{\mathrm{vol}(S^{d-1}(r))} \int_{S^{d-1}(r)} |u|^2 d\sigma \\ &= r^{-2|I|-d+1} \frac{c_I}{\mathrm{vol}(S^{d-1}(1))} \int_{S^{d-1}(r)} |u|^2 d\sigma \end{aligned}$$

où $|I| = i_1 + \cdots + i_d$.

Démonstration : Pour tout x dans la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^d$ on a

$$u(x) = \int_{S^{d-1}(1)} P(x,y) u(y) d\sigma(y)$$

où P est le noyau de Poisson. Dérivant sous le signe somme et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{|I|}u}{\partial x^I}(0)\right|^2 &= \left|\int_{S^{d-1}(1)} \frac{\partial^{|I|}P}{\partial x^I}(0,y)u(y)d\sigma(y)\right|^2 \\ &\leq \frac{c_I}{\mathrm{vol}(S^{d-1}(1))}\int_{S^{d-1}(1)} |u(y)|^2 d\sigma(y)\end{aligned}$$

avec $c_I = \mathrm{vol}(S^{d-1}(1)) \int_{S^{d-1}(1)} |\partial^{|I|}P/\partial x^I(0,y)|^2 d\sigma(y)$. On conclut en remplaçant dans cette formule la fonction u par la fonction u_r définie par $u_r(x) = u(rx)$. $\square$

Lemme 3.1.4 *Soient $N \geq 0$, $t \geq 0$ et $e \geq 1$ trois entiers. Notons $B = B(0,3)$ la boule ouverte de rayon 3 dans $\mathbb{C}^N$ (muni de la métrique hermitienne standard). On se donne :*

- *g et p deux fonctions C^∞ sur B à valeurs réelles strictement positives,*
- *h_{ij} $(1 \leq i,j \leq e)$ des fonctions C^∞ sur B à valeurs complexes formant en tout point une matrice hermitienne définie positive de taille $e \times e$,*
- *$D_{ij} = \sum_{|I| \leq t} a_{Iij} \frac{\partial^{|I|}}{\partial z^I}$ $(1 \leq i,j \leq e)$ des opérateurs différentiels de degré t à coefficients complexes C^∞ sur B.*

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $w \in B$ de norme strictement inférieure à 1 et pour toutes fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_e$ de B dans $\mathbb{C}$, on ait

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{ij} h_{ij}(w)\overline{\left(\sum_k D_{ik}f_k(w)\right)}\left(\sum_l D_{jl}f_l(w)\right)\right) p(w)^n \\ &\qquad \leq C^2 n^{2t+2N} \int_{|z-w|<1} \left(\sum_{ij} h_{ij}(z)\overline{f_i(z)}f_j(z)\right) p(z)^n g(z) d\mu_{\mathbb{C}^N}(z),\end{aligned}$$

où $\mu_{\mathbb{C}^N}$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$.

Démonstration : Notons $m(h)$ (resp. $M(h)$) la plus petite (resp. plus grande) valeur propre de h sur la boule $|z| \leq 2$, $g_0 = \inf_{|z|\leq 2} g(z)$, $c' = (\sup_{|z|\leq 2} \|dp(z)\|)/(\inf_{|z|\leq 2} p(z))$ et $c = \max(c', 1)$ de telle sorte que

$$p(z) \geq p(w)(1 - c|z-w|)$$

pour $|w| \leq 1$ et $|z-w| \leq 1$. On a alors

$$\int_{|z-w|<1} (\sum_{ij} h_{ij}(z)\overline{f_k(z)} f_l(z)) p(z)^n g(z) d\mu_{\mathbb{C}^N}(z)$$

$$\begin{aligned}
&\geq m(h) g_0 \int_{|z-w|<1} (\sum_k |f_k|^2(z)) p(z)^n d\mu_{\mathbb{C}^N}(z) \\
&\geq m(h) g_0 p(w)^n \int_{|z-w|<1/c} (\sum_k |f_k|^2(z))(1-c|z-w|)^n d\mu_{\mathbb{C}^N}(z) \\
&= m(h) g_0 p(w)^n \int_0^{1/c} (1-cr)^n \int_{|z-w|=r} (\sum_k |f_k|^2(z)) d\sigma_{S(w,r)}(z) dr.
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Par ailleurs, par le lemme 3.1.3, pour tous i et k on a

$$\begin{aligned}
|D_{ik} f_k(w)|^2 &= |\sum_{|I|\leq t} a_{Iik}(w) f_k^{(I)}(w)|^2 \\
&\leq \binom{t+N}{N} \sum_{|I|\leq t} |a_{Iik}(w)|^2 \frac{c_I}{\mathrm{vol}(S^{2N-1}(1))} r^{-2|I|-2N+1} \int_{|z-w|=r} |f_k|^2
\end{aligned}$$

soit

$$\int_{|z-w|=r} |f_k|^2(z) d\sigma_{S(w,r)}(z) \geq \lambda r^{2t+2N-1} |D_{ik} f_k|^2(w)$$

avec $\lambda = \left(\binom{t+N}{N} (\sup_{Iik,|w|\leq 2} |a_{Iik}(w)|^2) \sum_I \frac{c_I}{\mathrm{vol}(S^{2N-1}(1))})\right)^{-1}$. Injectant ceci dans (3.1.1) on trouve

$$\int_{|z-w|<1} (\sum_{ij}^{e} h_{ij}(z)\overline{f_k(z)} f_l(z)) p(z)^n g(z) d\mu_{\mathbb{C}^N}(z)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\lambda m(h) g_0 p(w)^n}{e} \sum_{ik} |D_{ik} f_k(w)|^2 \int_0^{1/c} r^{2t+2N-1}(1-cr)^n dr \\
&\geq \frac{\lambda m(h) g_0 p(w)^n}{e^2} \sum_i |\sum_k D_{ik} f_k(w)|^2 c^{-2t-2N} \int_0^1 \rho^{2t+2N-1}(1-\rho)^n d\rho \,;
\end{aligned}$$

enfin on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho^{2t+2N-1}(1-\rho)^n d\rho &= B(2t+2N, n+1) = \frac{\Gamma(2t+2N)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2t+2N+n+1)} \\
&= \frac{1}{2t+2N} \left(\frac{(2t+2N)\dots 1}{(n+2t+2N)\dots(n+1)}\right) \geq \frac{1}{(2t+2N)(2n)^{2t+2N}},
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration (on peut prendre par exemple $C = \sqrt{\frac{e^2 M(h)(2t+2N)(2c)^{2t+2N}}{\lambda m(h) g_0}}$). $\square$

Proposition 3.1.5 *Soient X une variété analytique complexe compacte hermitienne de dimension N munie d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien E, d'un fibré en droites holomorphe hermitien L et d'une forme volume μ. Soient $t \geq 0$ un entier et $\xi_1, \ldots, \xi_t$ des champs de vecteurs C^∞ sur X. Alors il existe une constante C telle que pour tout entier $n \geq 1$ et pour toute section holomorphe globale s de $E \otimes L^{\otimes n}$ sur X, on ait*

$$\|\nabla_{\xi_1} \ldots \nabla_{\xi_t} s\|_{L^\infty} \leq C n^{t+N} \|s\|_{L^2}$$

où ∇ est la connexion sur $E \otimes L^{\otimes n}$ compatible aux structures complexe et hermitienne.

DÉMONSTRATION : Pour tout $x \in X$, soit $\varphi_x : B_{\mathbb{C}^N}(0,3) \xrightarrow{\sim} \Omega_x$ un isomorphisme biholomorphe de la boule de rayon 3 sur un voisinage de x. Soit A un ensemble fini de points de X tel que les $\varphi_\alpha(B_{\mathbb{C}^N}(0,1))$ (pour $\alpha \in A$) recouvrent X. Choisissons des trivialisations l_α de $\varphi_\alpha^* L$ et $(e_{1,\alpha}, \ldots, e_{\mathrm{rg}\, E,\alpha})$ de $\varphi_\alpha^* E$. Notons $p_\alpha = \varphi_\alpha^* \|l_\alpha\|^2$, $h_{ij,\alpha} = \varphi_\alpha^* < e_{i,\alpha}, e_{j,\alpha} >$ et g_α la fonction sur $B_{\mathbb{C}^N}(0,3)$ telle qu'on ait $\varphi_\alpha^* \mu = g_\alpha \mu_{\mathbb{C}^N}$ où $\mu_{\mathbb{C}^N}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^N$. Remarquons que, par la formule de Leibniz, pour tout entier n, pour toute fonction f, pour toutes sections e de E et l de L de classe C^∞ sur Ω_α, et pour tout champ de vecteurs ξ de classe C^∞ sur X, on a

$$\nabla_\xi (f e l^{\otimes n}) \;=\; ((\xi.f)e + f \nabla_\xi e) l^{\otimes n} \;+\; n\, f e l^{\otimes (n-1)} \nabla_\xi l.$$

Appliquant cette formule t fois, on trouve des opérateurs différentiels $D_{ij,\alpha}^{<t-u>}$ de degré $t-u$ à coefficients complexes C^∞ tels que, pour tout n et pour toute section s de $E \otimes L^{\otimes n}$ sur Ω_α s'écrivant

$$s = \sum_i f_i e_{i,\alpha} l_\alpha^{\otimes n}$$

on ait

$$\nabla_{\xi_1} \ldots \nabla_{\xi_t} s = \sum_i \left(\sum_{u=0}^{t} n^u \sum_k (D_{ik,\alpha}^{<t-u>} f_k) \right) e_{i,\alpha} l_\alpha^{\otimes n}.$$

Ainsi pour tous α et u les fonctions p_α, $h_{ij,\alpha}$ et g_α et les opérateurs différentiels $D_{ij,\alpha}^{<t-u>}$ vérifient les hypothèses du lemme précédent (en remplaçant t par $t-u$). Notons $C_{u,\alpha}$ les constantes obtenues en appliquant le lemme à ces données et $C = \max_{0 \leq u \leq t,\, \alpha \in A} C_{u,\alpha}$. Alors, si $\|\nabla_{\xi_1} \ldots \nabla_{\xi_t} s\|$ atteint son maximum en $x = \varphi_\alpha(w) \in \varphi_\alpha(B_{\mathbb{C}^N}(0,1))$ on trouve, avec les notations précédentes :

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_{\xi_1} \dots \nabla_{\xi_t} s\|^2_{L^\infty} &= \|\nabla_{\xi_1} \dots \nabla_{\xi_t} s(x)\|^2 \\
&= \left(\sum_{ij} h_{ij,\alpha}(w) \overline{(\sum_{u,k} n^u D^{<t-u>}_{ik,\alpha} f_k(w))} (\sum_{v,l} n^v D^{<t-v>}_{jl,\alpha} f_l(w)) \right) p_\alpha(w)^n \\
&\leq (t+1) \sum_{u=0}^{t} n^{2u} \left(\sum_{ij} h_{ij,\alpha}(w) \overline{(\sum_{k} D^{<t-u>}_{ik,\alpha} f_k(w))} (\sum_{l} D^{<t-u>}_{jl,\alpha} f_l(w)) \right) p_\alpha(w)^n \\
&\leq (t+1) \sum_{u=0}^{t} n^{2u} C^2 n^{2t-2u+2N} \int_{|z-w|<1} \left(\sum_{ij} h_{ij,\alpha}(z) \overline{f_i(z)} f_j(z) \right) p_\alpha(z)^n g_\alpha(z) d\mu_{\mathbb{C}^N}(z) \\
&\leq (t+1)^2 C^2 n^{2t+2N} \int_{\varphi_\alpha(B(0,2))} \|s\|^2 \leq (t+1)^2 C^2 n^{2t+2N} \|s\|^2_{L^2}
\end{aligned}
$$

ce qu'il fallait démontrer (quitte à remplacer C par $(t+1)C$). □

Lemme 3.1.6 *Soient p et N deux entiers naturels, avec $p < N$. Notons $z_1, \dots, z_N$ des coordonnées sur $\mathbb{C}^N$. Soient $s > 0$ un réel et f une fonction de classe C^∞ définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^N$. Alors la fonction $|f(z)|^2 (\sum_{p<i\leq N} |z_i|^2)^{-s}$ est localement intégrable si et seulement si f s'annule à l'ordre $\lfloor s \rfloor + p - N + 1$ le long de la sous-variété $z_{p+1} = \cdots = z_N = 0$.*

Démonstration : Soient z un point de la sous-variété $z_{p+1} = \cdots = z_N = 0$ et λ le plus petit ordre d'un jet non nul de f en z. Posant $\rho = (|z_{p+1}|^2 + \cdots + |z_N|^2)^{1/2}$, remplaçant f par son développement de Taylor et utilisant le théorème de Fubini, on se ramène à déterminer une condition sur λ pour que l'intégrale

$$
\int \mathrm{vol}(S^{2(N-p)-1}(\rho)) \rho^{2(\lambda-s)} d\rho = c \int \rho^{2(\lambda-s+N-p)-1} d\rho
$$

soit localement convergente. On trouve bien $\lambda > s + p - N$, soit $\lambda \geq \lfloor s \rfloor + p - N + 1$. □

Soient X une variété projective complexe lisse, L un fibré en droites holomorphe ample et $\mathfrak{J}$ un faisceau d'idéaux sur X,

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\
& \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} &
\end{tikzcd}
$$

l'éclaté de X le long du sous-schéma défini par $\mathfrak{J}$, $E \subset \widetilde{X}$ le diviseur exceptionnel et k un entier tel que $\mathfrak{J}L^{\otimes k}$ soit engendré par l'ensemble $V = \Gamma(X, \mathfrak{J}L^{\otimes k})$ de ses sections globales.

Par [EGA] II 3.1.8 (iii), on a un isomorphisme canonique

$$\varphi : \widetilde{X} = \operatorname{Proj} \bigoplus_{t \geq 0} \mathfrak{I}^t \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj} \bigoplus_{t \geq 0} \mathfrak{I}^t L^{\otimes tk} = P.$$

D'autre part, pour tout t on déduit de la surjection canonique $q^*V \twoheadrightarrow \mathfrak{I}L^{\otimes k}$ une surjection $q^* \operatorname{Sym}^t V \twoheadrightarrow \mathfrak{I}^t L^{\otimes tk}$ donc, par [EGA] II 3.6.2 (i), une immersion

$$i : P = \operatorname{Proj} \bigoplus_{t \geq 0} \mathfrak{I}^t L^{\otimes tk} \hookrightarrow \operatorname{Proj} \bigoplus_{t \geq 0} q^* \operatorname{Sym}^t V = X \times \mathbb{P}_V,$$

cette dernière égalité résultant de [EGA] II 3.5.3. Composant tout ceci avec la seconde projection $\mathrm{pr}_2 : X \times \mathbb{P}_V \longrightarrow \mathbb{P}_V$ on obtient un morphisme naturel

$$g = \mathrm{pr}_2 \circ i \circ \varphi : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}_V. \tag{3.1.2}$$

D'autre part, par [EGA] II 3.5.2 (ii) on a un isomorphisme naturel $i^* pr_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_V}(1) = \mathcal{O}_P(1)$ et, par [EGA] II 3.2.10, $\varphi^* \mathcal{O}_P(1) = \pi^* L^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1)$, d'où l'on déduit finalement par [EGA] II 8.1.7 une identification naturelle

$$g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_V}(1) = \pi^* L^{\otimes k}(-E). \tag{3.1.3}$$

Lemme 3.1.7 *Plaçons-nous sous les hypothèses précédentes et supposons en outre L muni d'une métrique hermitienne C^∞, notée $\|.\|_L$. Choisissons alors un produit scalaire hermitien sur V et munissons le fibré en droites universel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_V}(1)$ de la métrique de Fubini-Study associée, puis $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)$ de la métrique qui rende isométrique l'isomorphisme naturel* (3.1.3). *Alors, si $(s_1, \ldots, s_d)$ est une base orthonormale de V, en tout point $\widetilde{x}$ de $\widetilde{X}$ la norme de la section canonique* 1 *de $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)$ vaut*

$$\|1\|_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)}(\widetilde{x}) = (\|s_1\|^2_{L^{\otimes k}}(\pi(\widetilde{x})) + \cdots + \|s_d\|^2_{L^{\otimes k}}(\pi(\widetilde{x})))^{1/2}.$$

Remarque 3.1.8 On notera qu'on s'autorise ici n'importe quel produit scalaire hermitien sur V. En pratique, si X est munie d'une forme volume (par exemple si X a une structure kählérienne) on aura souvent intérêt à choisir sur V le produit scalaire L^2 d'intégration sur X. Alors, si en outre $\mathfrak{I} = \mathcal{O}_X$ est l'idéal unité (définissant le sous-schéma vide), on retrouve dans la quantité $(\|s_1\|^2_{L^{\otimes k}} + \cdots + \|s_d\|^2_{L^{\otimes k}})^{1/2}$ essentiellement le facteur de distorsion de la métrique de Bergman, étudié par exemple dans [13], [33], [60] ou [67].

DÉMONSTRATION : Remarquons que si $f : H \longrightarrow H'$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire entre deux espaces hermitiens, le réel $\sum_i \|f(h_i)\|^2$ ne dépend pas du choix de la base orthonormale $(h_i)_i$ de H (elle est égale à la trace de l'endomorphisme autoadjoint f^*f, ou encore à somme des carrés des valeurs caractéristiques de f). Ainsi la fonction $(\|s_1\|^2_{L^{\otimes k}} + \cdots + \|s_d\|^2_{L^{\otimes k}})^{1/2}$ sur X ne dépend pas du choix de la base orthonormale de V. Si $\widetilde{x}$ n'appartient pas à E, on peut donc supposer par exemple que $(s_2, \ldots, s_d)$ forme une base orthonormale de l'hyperplan de V formé des sections s'annulant en $\widetilde{x}$, de telle sorte que s_1 sera orthogonal à cet hyperplan et de norme 1. Par définition de la norme de Fubini-Study, on a donc

$$\|\pi^* s_1\|_{\pi^* L^{\otimes k}(-E)}(\widetilde{x}) = \|s_1\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_V}(1)}(g(\widetilde{x})) = 1$$

de telle sorte que

$$\|1\|_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E)}(\widetilde{x}) = \|\pi^* s_1\|^{-1}_{\pi^* L^{\otimes k}}(\widetilde{x}) = \|s_1\|^{-1}_{L^{\otimes k}}(\pi(\widetilde{x}))$$
$$= (\|s_1\|^2_{L^{\otimes k}}(\pi(\widetilde{x})) + \cdots + \|s_d\|^2_{L^{\otimes k}}(\pi(\widetilde{x})))^{-1/2}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 3.1.9 *Soient X une variété projective complexe lisse munie d'une métrique kählérienne et d'un fibré en droites holomorphe hermitien positif $(L, \|.\|)$, Y_0 un sous-schéma fermé lisse de X et t un entier naturel. Alors il existe une constante κ telle que, pour tout entier n assez grand et pour toute section w de classe C^∞ de $T^{0,1}X^* \otimes L^{\otimes n}$ sur X, $\overline{\partial}$-fermée et nulle à l'ordre $t+1$ sur Y_0 (ainsi $\mathrm{dist}(., Y_0)^{-t-1}w$ reste bornée sur $X \smallsetminus Y_0$), il existe une section u de classe C^∞ de $L^{\otimes n}$ sur X vérifiant les conditions suivantes :*
- *u s'annulle à l'ordre $t+1$ sur Y_0*
- *$\overline{\partial} u = w$*
- *$\|u\|^2_{L^2(X)} \leq \dfrac{\kappa}{n} \|\mathrm{dist}(., Y_0)^{-t-1} w\|^2_{L^\infty(X \smallsetminus Y_0)}$.*

Démonstration : On reprend en grande partie les arguments de [68], section 2. Notons $N = \dim X$, I_{Y_0} le faisceau d'idéaux définissant Y_0,

$$f : \widetilde{X} \longrightarrow X$$

l'éclatement de X le long de Y_0 et $E \subset \widetilde{X}$ le diviseur exceptionnel. Soit m un entier assez grand, de telle sorte que $I_{Y_0} L^{\otimes m}$ soit engendré par ses sections globales. Notons alors

$$g : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}_V$$

le morphisme qui s'en déduit naturellement, défini en (3.1.2). Munissons V du produit scalaire L^2 sur X et $\mathcal{O}_V(1)$ de la métrique de Fubini-Study associée. Ceci permet de munir $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)$ de l'unique métrique $\|.\|_E$ qui rende l'isomorphisme naturel

$$g^* \mathcal{O}_V(1) = f^* L^{\otimes m}(-E) \tag{3.1.4}$$

(défini en (3.1.3)) isométrique. On définit alors une fonction ρ sur X par la formule

$$f^* \rho = \|1\|_E$$

où 1 désigne la section canonique de $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)$. Le lemme 3.1.7 montre que si $(s_1, \ldots, s_d)$ est une base unitaire de V, on a en tout point $x \in X$

$$\rho(x) = (\|s_1(x)\|^2 + \cdots + \|s_d(x)\|^2)^{1/2} \tag{3.1.5}$$

(où $\|.\|$ est la métrique sur la fibre de $L^{\otimes m}$ en x). En outre par compabilité des métriques à (3.1.4) on a

$$f^* dd^c \log \rho^2 = dd^c \log \|1\|^2_E = \delta_E - c_1(\|.\|_E)$$
$$= \delta_E + g^* c_1(\|.\|_{\mathcal{O}_V(1)}) - m f^* c_1(\|.\|_L)$$
$$\geq -m f^* c_1(\|.\|_L)$$

d'où, par [18] III prop. (1.17.a), en utilisant le fait que f est propre et birationnel :

$$dd^c \log \rho^2 \geq -mc_1(\|.\|_L). \tag{3.1.6}$$

Notons $d\mu = \omega^n$ la mesure associée à la métrique kählérienne sur X et $Y_0^{(1)}, \dots, Y_0^{(e)}$ les composantes connexes du sous-schéma lisse Y_0. Pour tout $i \in \{1, \dots, e\}$ choisissons un voisinage U_i de $Y_0^{(i)}$ dans X (pour la topologie complexe), de façon que les U_i soient deux à deux disjoints. Pour tout i construisons une fonction $\psi_i \geq 0$ de classe C^∞ à support compact inclus dans U_i identiquement égale à 1 sur un voisinage ouvert V_i de $Y_0^{(i)}$, et W_i un voisinage de $Y_0^{(i)}$ d'adhérence compacte incluse dans V_i. Choisissons aussi des réels $\sigma_i > 0$ et posons

$$\sigma = \sigma_1 \psi_1 + \cdots + \sigma_e \psi_e.$$

Considérons le fibré en droites $M_n = (\bigwedge^N T^{1,0}X) \otimes L^{\otimes n}$ muni de la métrique (singulière) $\|.\|_{M_n} = \rho^{-\sigma} \|.\|_{\bigwedge^N T^{1,0}X} \|.\|_L^n$ (voir par exemple l'introduction de [17] pour une discussion rapide des fibrés vectoriels à métrique singulière). La courbure de ce fibré est donnée par

$$c_1(\|.\|_{M_n}) = dd^c(\sigma \log \rho^2) + c_1(\|.\|_{\bigwedge^N T^{1,0}X}) + n.c_1(\|.\|_L).$$

Remarquons que, hors de la réunion des W_i, la forme $dd^c(\sigma \log \rho^2)$ est C^∞ et que, dans V_i, on a $dd^c(\sigma \log \rho^2) = \sigma_i dd^c \log \rho^2 \geq -m\sigma_i c_1(\|.\|_L)$ par (3.1.6). Ainsi $dd^c(\sigma \log \rho^2)$ est minorée par une forme C^∞ globalement sur X. Choisissant alors une constante c strictement plus grande en tout point que l'inverse de la plus petite valeur propre de la forme de Chern de $\|.\|_L$ (relativement à la forme de Kähler ω) on trouve, pour tout n assez grand :

$$c_1(\|.\|_{M_n}) \geq \frac{n}{c} \omega,$$

et une application du corollaire 14.3 de [17] démontre le fait suivant :

Fait (estimées L^2 de Hörmander et méthode de Hörmander-Bombieri-Skoda). *Pour tout entier n assez grand et pour toute section w de classe C^∞ de $T^{0,1}X^* \otimes L^{\otimes n}$ sur X, $\overline{\partial}$-fermée et telle que l'intégrale $\int_X \|w\|^2 \rho^{-2\sigma} d\mu$ converge, il existe une section u de classe C^∞ de $L^{\otimes n}$ sur X telle que*

$$\overline{\partial} u = w$$

et que

$$\int_X \|u\|^2 \rho^{-2\sigma} d\mu \leq \frac{c}{n} \int_X \|w\|^2 \rho^{-2\sigma} d\mu \tag{3.1.7}$$

On applique ce résultat avec

$$\sigma_i = t + N - p_i$$

où

$$p_i = \dim Y_0^{(i)}.$$

Par (3.1.5), il existe des constantes κ_1 et κ_2 telles que pour tout $x \in X$ on ait

$$\kappa_1.\mathrm{dist}(x, Y_0) \leq \rho(x) \leq \kappa_2.\mathrm{dist}(x, Y_0).$$

Alors, pour toute fonction φ de classe C^∞ sur X, puisque $Y_0^{(i)}$ est lisse de dimension p_i et que σ est constante égale à σ_i au voisinage de $Y_0^{(i)}$, le lemme 3.1.6 implique que la fonction $|\varphi|^2\rho^{-2\sigma}$ est localement intégrable si et seulement si pour tout i, φ s'annule à l'ordre $\lfloor\sigma_i\rfloor + p_i - N + 1 = t + 1$ en tout point de $Y_0^{(i)}$, *i.e.* si et seulement si φ s'annule à l'ordre $t+1$ sur Y_0. Soit maintenant w une section de classe C^∞ de $T^{0,1}X^* \otimes L^{\otimes n}$ sur X, $\overline{\partial}$-fermée et nulle à l'ordre $t+1$ sur Y_0, de telle sorte que l'intégrale $\int_X \|w\|^2\rho^{-2\sigma}d\mu$ converge. Par le fait mentionné ci-dessus, il existe une section u de classe C^∞ de $L^{\otimes n}$ sur X telle que

$$\overline{\partial}u = w$$

et que

$$\int_X \|u\|^2\rho^{-2\sigma}d\mu \leq \frac{c}{n}\int_X \|w\|^2\rho^{-2\sigma}d\mu.$$

Par la discussion qui précède, ceci implique que u s'annule à l'ordre $t+1$ sur Y_0. D'autre part, on a

$$\|u\|^2_{L^2(X)} \leq \|\rho^\sigma\|^2_{L^\infty(X)}\int_X \|u\|^2\rho^{-2\sigma}d\mu$$

et

$$\int_X \|w\|^2\rho^{-2\sigma}d\mu \leq \|\mathrm{dist}(.,Y_0)^{-t-1}w\|^2_{L^\infty(X\smallsetminus Y_0)}\int_X |\mathrm{dist}(.,Y_0)|^{2(t+1)}\rho^{-2\sigma}d\mu,$$

et la proposition est démontrée avec $\kappa = c\|\rho^\sigma\|^2_{L^\infty(X)}\int_X |\mathrm{dist}(.,Y_0)|^{2(t+1)}\rho^{-2\sigma}d\mu$. □

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème d'extension L^2.

Soient X une variété projective complexe lisse munie d'une métrique kählérienne et d'un fibré en droites hermitien positif $(L, \|.\|)$, et Y un sous-schéma fermé de X. On suppose que Y est lisse avec multiplicité sur $\mathbb{C}$. Notons $Y_0 = Y^{\text{réd}}$ le sous-schéma réduit sous-jacent, $\mathfrak{I}_Y$ (resp. $\mathfrak{I}_{Y_0} = \sqrt{\mathfrak{I}_Y}$) le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ définissant Y (resp. Y_0) comme sous-schéma de X et $\mathfrak{N} = \mathfrak{I}_{Y_0}/\mathfrak{I}_Y$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_Y$ définissant Y_0 comme sous-schéma de Y. Par définition de la lissité avec multiplicité, le schéma réduit Y_0 est lisse sur $\mathbb{C}$, de telle sorte que l'immersion de Y_0 dans X est régulière et qu'on a une injection naturelle

$$\mathfrak{I}_{Y_0}/\mathfrak{I}^2_{Y_0} \hookrightarrow \Omega^1_{X/\mathbb{C}}|_{Y_0}.$$

Ceci permet de munir $\mathfrak{I}_{Y_0}/\mathfrak{I}^2_{Y_0}$ de la métrique restreinte de la métrique sur $\Omega^1_{X/\mathbb{C}}$ définie par la structure kählérienne et, pour tout entier t,

$$\mathfrak{I}^t_{Y_0}/\mathfrak{I}^{t+1}_{Y_0} = \mathrm{Sym}^t(\mathfrak{I}_{Y_0}/\mathfrak{I}^2_{Y_0})$$

de la métrique puissance symétrique de celle-ci. Alors, à nouveau par définition de la lissité avec multiplicité, le faisceau de jets

$$\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1} = (\mathfrak{I}^t_{Y_0} + \mathfrak{I}_Y)/(\mathfrak{I}^{t+1}_{Y_0} + \mathfrak{I}_Y)$$

est un fibré vectoriel quotient de $\mathfrak{I}^t_{Y_0}/\mathfrak{I}^{t+1}_{Y_0}$ et peut être muni de la métrique quotient. Munissant alors Y_0 de la structure kählérienne restreinte de celle de X, et de la forme volume associée, on peut ainsi définir une métrique L^2 sur l'espace des sections globales sur Y_0 de $\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}$ (et des fibrés qui s'en déduisent après tensorisation par le fibré en droites L).

Théorème 3.1.10 *Avec les notations précédentes, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_ϵ tel que, pour tout $n > n_\epsilon$, pour tout entier t et pour toute section holomorphe s de $(\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}$ sur Y_0, il existe une section holomorphe S de $\mathfrak{I}^t_{Y_0} L^{\otimes n}$ sur X relevant s et vérifiant*

$$\|S\|_{L^2(X)} \leq e^{n\epsilon}.\|s\|_{L^2(Y_0)}.$$

DÉMONSTRATION : Soit $\epsilon > 0$. Notons $N = \dim X$ et J_t l'application naturelle de $\mathfrak{I}^t_{Y_0}|_{Y_0}$ dans $\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}$. Par des arguments standard, on construit une famille finie $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X tels que, pour tout $i \in I$, U_i rencontre au plus une composante connexe de Y_0 et, pour tout $i \in I$, une section holomorphe l_i de L sur U_i et des fonctions holomorphes $h^{(t)}_{i,1}, \ldots, h^{(t)}_{i,e_{t,i}}$ sur U_i (où $e_{t,i}$ est le rang du fibré vectoriel $\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}$ sur $Y_0 \cap U_i$) s'annulant à l'ordre t le long de $Y_0 \cap U_i$ (autrement dit, $h^{(t)}_{i,k} \in \Gamma(U_i, \mathfrak{I}^t_{Y_0})$), qui vérifient les conditions suivantes :

(a) pour tout i, la section l_i définit une trivialisation de L sur U_i :

$$L|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}.l_i\ ;$$

(b) pour tout i, on a

$$e^{-\epsilon} \leq \|l_i\| \leq e^{\epsilon}$$

en tout point de U_i, et ∇l_i reste bornée sur U_i ;

(c) les $J_t h^{(t)}_{i,1}, \ldots, J_t h^{(t)}_{i,e_{t,i}}$ forment une base de la fibre de $\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}$ en tout point de $Y_0 \cap U_i$, base dont la matrice de Gram[1] admet toutes ses valeurs caractéristiques (qui sont aussi ses valeurs propres) dans l'intervalle $[e^{-\epsilon}, e^{\epsilon}]$ (autrement dit, les jets d'ordre t de $h^{(t)}_{i,1}, \ldots, h^{(t)}_{i,e_{t,i}}$ le long de Y forment une base «presque orthonormale» de $\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}$) ;

(d) les $h^{(t)}_{i,k}$ sont bornées uniformément, ainsi que toutes leurs dérivées ; autrement dit, pour tout entier u et pour tous champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_u$ de classe C^∞ définis globalement sur X, la fonction $\xi_1 \ldots \xi_u.h^{(t)}_{i,k}$ reste bornée sur U_i ;

(e) la réunion des $(U_i)_{i\in I}$ contient Y_0 ;

(f) si on note $B_{\mathbb{C}^N}$ la boule unité de $\mathbb{C}^N$ (pour la métrique standard) et si on considère $\mathbb{C}^p$ comme le sous-espace de $\mathbb{C}^N$ défini par l'annulation des $N - p$ dernières coordonnées, on a pour tout i un isomorphisme $U_i \simeq B_{\mathbb{C}^N}$ dont la restriction à Y_0 identifie $Y_0 \cap U_i$ à $\mathbb{C}^p \cap B_{\mathbb{C}^N}$, et qui est borné uniformément sur $B_{\mathbb{C}^N}$, ainsi que toutes ses dérivées.

On note $\pi_i : U_i \longrightarrow Y_0 \cap U_i$ la projection déduite de la restriction à $B_{\mathbb{C}^N}$ de la projection naturelle $\mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^p$ par l'isomorphisme précédent.

Pour tous i et j dans I, on définit une fonction g_{ij} holomorphe et partout non nulle sur $U_i \cap U_j$ par la formule

$$l_i = g_{ij} l_j.$$

[1] rappelons que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace hermitien E, sa matrice de Gram est la matrice $(< e_i, e_j >)_{1\leq i,j\leq n}$; c'est aussi la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ de l'application $f^* f$, où $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow E$ est l'application $\mathbb{C}$-linéaire canoniquement définie par $(e_1, \ldots, e_n)$.

De la condition (b) on déduit l'encadrement

$$e^{-2\epsilon} \leq |g_{ij}| \leq e^{2\epsilon} \tag{3.1.8}$$

en tout point de $U_i \cap U_j$.

Pour alléger les notations, notons

$$\underline{h}_i^{(t)} \in M_{e_{t,i},1}(\Gamma(U_i, \mathfrak{I}_{Y_0}^t))$$

le vecteur colonne dont les coordonnées sont les $h_{ik}^{(t)}$. Si $Y_0 \cap U_i \cap U_j$ est non vide on note $e_t = e_{t,i} = e_{t,j}$ et on définit une matrice de changement de base

$$\underline{P}_{ij} \in M_{e_t,e_t}(\Gamma(Y_0 \cap U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{Y_0}))^{\times}$$

par la formule

$$J_t \underline{h}_i^{(t)} = \underline{P}_{ij} J_t \underline{h}_j^{(t)}. \tag{3.1.9}$$

L'hypothèse (c) et la proposition 1.2.5 impliquent qu'en tout point de $Y_0 \cap U_i \cap U_j$, les valeurs caractéristiques de la matrice $\underline{P}_{ij}$ sont toutes dans l'intervalle $[e^{-2\epsilon}, e^{2\epsilon}]$.

Clairement les g_{ij} et les $\underline{P}_{ij}$ vérifient une relation de cocycle : $g_{ik} = g_{ij}g_{jk}$ et $\underline{P}_{ik} = \underline{P}_{ij}\underline{P}_{jk}$ sur $Y_0 \cap U_i \cap U_j \cap U_k$. Remarquons aussi que par définition des $\underline{P}_{ij}$, la fonction $\underline{h}_i^{(t)} - (\underline{P}_{ij} \circ \pi_j)\underline{h}_j^{(t)}$, définie sur $U_i \cap U_j$ et à valeurs dans $M_{e_t,1}(\mathbb{C})$, s'annule à l'ordre $t+1$ le long de Y_0. D'autre part par (d) et (f), les dérivées à tout ordre de cette fonction sont uniformément bornées sur $U_i \cap U_j$, d'où l'on déduit l'existence d'une constante C_1 telle que pour tout x dans $U_i \cap U_j$ on ait

$$\|\underline{h}_i^{(t)}(x) - \underline{P}_{ij}(\pi_j(x))\underline{h}_j^{(t)}(x)\| \leq C_1 \mathrm{dist}(x, Y_0)^{t+1} \tag{3.1.10}$$

où $\|.\|$ est la norme usuelle sur $M_{e_t,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{e_t}$. De la même façon il existe des constantes C_2 et C_3 telles que pour tout x dans U_i on ait

$$\|\underline{h}_i^{(t)}(x)\| \leq C_2 \mathrm{dist}(x, Y_0)^t \tag{3.1.11}$$

et

$$\mathrm{dist}(x, \pi_i(x)) \leq C_3 \mathrm{dist}(x, Y_0). \tag{3.1.12}$$

Remarquons aussi que, par (b), la différentielle de g_{ij} est unifomément bornée sur $U_i \cap U_j$. Appliquant (3.1.8), (3.1.12) et l'inégalité des accroissements finis, on trouve, pour tout n assez grand et pour tout x dans $U_i \cap U_j$:

$$g_{ij}(x)^n - g_{ij}(\pi_i(x))^n \leq C_4 e^{3n\epsilon} \mathrm{dist}(x, Y_0) \tag{3.1.13}$$

pour une constante C_4 convenable.

Enfin, par les méthodes usuelles de partition de l'unité, on construit un voisinage U de Y dans X et, pour tout i, une fonction φ_i réelle positive C^∞ sur X à support compact $K_i \subset U_i$, de telle sorte que la somme $\sum_{i \in I} \varphi_i$ soit identiquement égale à 1 dans U.

Soit maintenant $s \in \Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0})$. Pour tout $i \in I$, il existe e_t fonctions (où l'on a posé $e_t = e_{t,i}$) $\widetilde{f_{i,1}}, \ldots, \widetilde{f_{i,e_t}}$ holomorphes sur $Y_0 \cap U_i$ telles que, si l'on note

$$\underline{\widetilde{f}}_i \in M_{1,e_t}(\Gamma(Y_0 \cap U_i, \mathcal{O}_{Y_0}))$$

le vecteur ligne dont les coordonnées sont les $\widetilde{f_{i,k}}$, on ait

$$s|_{Y_0 \cap U_i} = \underline{\widetilde{f}}_i J_t \underline{h}_i^{(t)} l_i^{\otimes n}. \tag{3.1.14}$$

On définit alors $\underline{f}_i$ sur U_i par la formule $\underline{f}_i(x) = \underline{\widetilde{f}}_i(\pi_i(x))$ et on pose

$$v = \sum_{i \in I} \varphi_i \underline{f}_i \underline{h}_i^{(t)} l_i^{\otimes n}. \tag{3.1.15}$$

Soit maintenant x un point de U. Par définition, U est contenu dans la réunion des supports K_i des φ_i. Soit donc $i_0 \in I$ tel que $x \in K_{i_0}$. Puisque la somme des φ_i vaut identiquement 1 sur U, on a $\sum_{i \in I} \overline{\partial} \varphi_i = 0$ sur U et on peut écrire

$$\begin{aligned} \overline{\partial} v(x) &= \sum_{i \in I} \overline{\partial} \varphi_i . \underline{f}_i \underline{h}_i^{(t)} l_i^{\otimes n}(x) \\ &= \sum_{i \in I} \overline{\partial} \varphi_i . (\underline{f}_i \underline{h}_i^{(t)} l_i^{\otimes n} - \underline{f}_{i_0} \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n})(x). \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Par ailleurs, pour tout i on a

$$\begin{aligned} \underline{\widetilde{f}}_i J_t \underline{h}_i^{(t)} l_i^{\otimes n} = s &= \underline{\widetilde{f}}_{i_0} J_t \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n} \\ &= \underline{\widetilde{f}}_{i_0} \underline{P}_{i_0 i} J_t \underline{h}_i^{(t)} g_{i_0 i}^n l_i^{\otimes n} \end{aligned}$$

sur $Y_0 \cap U_{i_0} \cap U_i$, soit

$$\underline{\widetilde{f}}_i = g_{i_0 i}^n \underline{\widetilde{f}}_{i_0} \underline{P}_{i_0 i}$$

ou encore

$$\underline{f}_i(x) = (g_{i_0 i}^n \underline{\widetilde{f}}_{i_0} \underline{P}_{i_0 i})(\pi_i(x))$$

si $x \in U_{i_0} \cap U_i$. On trouve alors

$$\begin{aligned} &(\underline{f}_i \underline{h}_i^{(t)} l_i^{\otimes n} - \underline{f}_{i_0} \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n})(x) \\ &\quad = g_{i_0 i}(\pi_i(x))^n \underline{\widetilde{f}}_{i_0}(\pi_i(x)) \underline{P}_{i_0 i}(\pi_i(x)) \underline{h}_i^{(t)}(x) l_i^{\otimes n}(x) - \underline{f}_{i_0}(x) \underline{h}_{i_0}^{(t)}(x) l_{i_0}^{\otimes n}(x) \\ &\quad = \underline{\widetilde{f}}_{i_0}(\pi_i(x)) \underline{P}_{i_0 i}(\pi_i(x)) \underline{h}_i^{(t)}(x) \left(\frac{g_{i i_0}(x)}{g_{i i_0}(\pi_i(x))} \right)^n l_{i_0}^{\otimes n}(x) - \underline{\widetilde{f}}_{i_0}(\pi_{i_0}(x)) \underline{h}_{i_0}^{(t)}(x) l_{i_0}^{\otimes n}(x) \\ &\quad = -(\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x)) l_{i_0}^{\otimes n}(x) \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

avec

$$\alpha_1(x) = (\underline{\widetilde{f}}_{i_0}(\pi_{i_0}(x)) - \underline{\widetilde{f}}_{i_0}(\pi_i(x))) \underline{h}_{i_0}^{(t)}(x), \tag{3.1.18}$$

$$\alpha_2(x) = \widetilde{\underline{f}_{i_0}}(\pi_i(x))\underline{h}_{i_0}^{(t)}(x)\left(1 - \left(\frac{g_{ii_0}(x)}{g_{ii_0}(\pi_i(x))}\right)^n\right) \tag{3.1.19}$$

et

$$\alpha_3(x) = \widetilde{\underline{f}_{i_0}}(\pi_i(x)))\left(\frac{g_{ii_0}(x)}{g_{ii_0}(\pi_i(x))}\right)^n \left(\underline{h}_{i_0}^{(t)}(x) - \underline{P}_{i_0 i}(\pi_i(x))\underline{h}_i^{(t)}(x)\right). \tag{3.1.20}$$

On se propose de majorer ces trois quantités. On a d'abord

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\underline{f}_{i_0}}(\pi_{i_0}(x)) - \widetilde{\underline{f}_{i_0}}(\pi_i(x))\| &\leq \|d\widetilde{\underline{f}_{i_0}}\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})}\mathrm{dist}(\pi_{i_0}(x), \pi_i(x)) \\ &\leq \|d\widetilde{\underline{f}_{i_0}}\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})}(\mathrm{dist}(\pi_{i_0}(x), x) + \mathrm{dist}(x, \pi_i(x))) \\ &\leq 2C_3\|d\widetilde{\underline{f}_{i_0}}\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})}\mathrm{dist}(x, Y_0)\end{aligned}$$

par (3.1.12). Par ailleurs sur $Y_0 \cap U_{i_0}$ on a

$$s = \widetilde{\underline{f}_{i_0}} J_t \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n}$$

ce qui par (b) et (c) implique en tout point l'encadrement

$$e^{-(n+1)\epsilon}\|s\| \leq \|\widetilde{\underline{f}_{i_0}}\| \leq e^{(n+1)\epsilon}\|s\|, \tag{3.1.21}$$

et

$$\nabla s = d\widetilde{\underline{f}_{i_0}} J_t \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n} + \widetilde{\underline{f}_{i_0}} \nabla J_t \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n} + n\widetilde{\underline{f}_{i_0}} J_t \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n-1}\nabla l_{i_0},$$

ce qui, par (b), (c), (d), (f) et (3.1.21) implique

$$\begin{aligned}\|d\widetilde{\underline{f}_{i_0}}\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})} \leq{}& e^{(n+1)\epsilon}(\|\nabla s\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})} + \|\widetilde{\underline{f}_{i_0}} \nabla J_t \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n}\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})} \\ &+ n\|\widetilde{\underline{f}_{i_0}} J_t \underline{h}_{i_0}^{(t)} l_{i_0}^{\otimes n-1}\nabla l_{i_0}\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})}) \\ \leq{}& C_5 e^{3n\epsilon}(\|s\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})} + \|\nabla s\|_{L^\infty(Y_0\cap U_{i_0})})\end{aligned}$$

où C_5 est une constante ne dépendant que des $\underline{h}_i^{(t)}$, des l_i et de leurs dérivées. Combinant tout ceci à (3.1.11) et à la proposition 3.1.5, on trouve

$$\|\alpha_1\|(x) \leq C_6 e^{4n\epsilon}\|s\|_{L^2(Y_0)}\mathrm{dist}(x, Y_0)^{t+1}$$

pour tout x dans $U_i \cap U_{i_0}$, où C_6 est une constante ne dépendant pas de n ni de s. Ceci est la première majoration souhaitée.

Remarquons ensuite que par (3.1.8) et par (3.1.13) on a

$$\left|1 - \left(\frac{g_{ii_0}(x)}{g_{ii_0}(\pi_i(x))}\right)^n\right| \leq C_7 e^{5n\epsilon}\mathrm{dist}(x, Y_0)$$

pour tout x dans $U_i \cap U_{i_0}$. Joint à (3.1.11), à (3.1.21) et à la proposition 3.1.5 (appliquée avec $t = 0$), ceci implique

$$\|\alpha_2\|(x) \leq C_8 e^{6n\epsilon}\|s\|_{L^2(Y_0)}\mathrm{dist}(x, Y_0)^{t+1}.$$

Enfin, par (3.1.8), (3.1.10), (3.1.21) et la proposition 3.1.5, on a aussi

$$\|\alpha_3\|(x) \leq C_9 e^{6n\epsilon}\|s\|_{L^2(Y_0)}\mathrm{dist}(x, Y_0)^{t+1}.$$

En injectant ces trois majorations dans (3.1.17) puis dans (3.1.16), et en utilisant (b) et la finitude de I, on en déduit une constante C, indépendante de n et de s, telle que

$$\|\overline{\partial}v\|(x) \leq Ce^{8n\epsilon}\|s\|_{L^2(Y_0)}\mathrm{dist}(x, Y_0)^{t+1} \tag{3.1.22}$$

pour tout x dans la réunion des U_i. Puisque par construction $\overline{\partial}v$ est nulle hors de cette réunion, la majoration (3.1.22) est en fait valable pour tout x dans X.

Grâce à la proposition 3.1.9, on en déduit l'existence d'une section u de classe C^∞ de $L^{\otimes n}$ sur X vérifiant les conditions suivantes :
- u est nulle à l'ordre $t+1$ le long de Y_0 (donc $J_t u = 0$)
- $\overline{\partial}u = \overline{\partial}v$ sur X (*i.e.* $v - u$ est holomorphe)
- $\|u\|_{L^2(X)} \leq C' e^{8n\epsilon}\|s\|_{L^2(Y_0)}$

où C' est une constante ne dépendant pas de n.

D'autre part, en injectant (b), (d) et (3.1.21) dans (3.1.15) et en utilisant la proposition 3.1.5 (avec $t = 0$), on trouve une constante C'' (ne dépendant pas de n) telle qu'on ait

$$\|v\|_{L^2(X)} \leq C'' e^{2n\epsilon}\|s\|_{L^\infty(Y_0)} \leq C'' e^{3n\epsilon}\|s\|_{L^2(Y_0)}$$

pour n assez grand. Enfin, puisque les $\underline{h}_i^{(t)}$ s'annulent à l'ordre t le long de Y_0 on a

$$J_t v = \sum_{i\in I} J_t(\varphi_i \underline{f}_i \underline{h}_i^{(t)} l_i^{\otimes n}) = \sum_{i\in I} \varphi_i \underline{f}_i J_t \underline{h}_i^{(t)} l_i^{\otimes n} = s$$

et, quitte à remplacer ϵ par $\epsilon/12$ et à supposer n assez grand, on peut conclure la démonstration du théorème en posant

$$S = v - u.$$

□

3.1.2 Comparaison de normes

On commence par énoncer un lemme.

Lemme 3.1.11 *Soient*

$$f : E \longrightarrow F$$

une application $\mathbb{C}$-linéaire entre deux espaces hermitiens et E' un sous-espace de E. Supposons que l'application restreinte $f|_{E'} : E' \longrightarrow F$ soit surjective (ce qui implique a fortiori *que f est surjective). Soient $m \leq M$ deux réels strictement positifs. Alors*

i. la plus grande valeur caractéristique de f est inférieure ou égale à M si et seulement si pour tout x dans E on a $\|f(x)\| \leq M\|x\|$;

ii. la plus petite valeur caractéristique non nulle de $f|_{E'}$ est supérieure ou égale à m si et seulement si pour tout y dans F il existe x' dans E' tel que $y = f(x')$ et $\|x'\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$;

iii. la plus grande valeur caractéristique (resp. la plus petite valeur caractéristique non nulle) de f est supérieure ou égale à la plus grande valeur caractéristique (resp. la plus petite valeur caractéristique non nulle) de $f|_{E'}$.

Démonstration : Les deux premiers points résultent directement des définitions et le troisième est une conséquence directe des deux premiers. □

Ainsi, sous l'hypothèse que $f|_{E'}$ est surjective, pour borner simultanément les valeurs caractéristiques non nulles de f et de $f|_{E'}$, il suffit de majorer celles de f et de minorer celles de $f|_{E'}$.

On reprend maintenant les hypothèses et notations introduites dans l'énoncé du théorème 3.1.10 : X est une variété projective complexe lisse munie d'une métrique kählérienne et d'un fibré en droites hermitien positif $(L, \|.\|)$, Y un sous-schéma fermé de X lisse avec multiplicité, $Y_0 = Y^{\text{réd}}$ le sous-schéma réduit (lisse) sous-jacent et $\mathfrak{N}$ le nilradical de $\mathcal{O}_Y$. Rappelons qu'on a pour tout t une identification canonique de faisceaux de $\mathcal{O}_{Y_0}$-modules localement libres

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1} &= (\mathfrak{I}_{Y_0}^t + \mathfrak{I}_Y)/(\mathfrak{I}_{Y_0}^{t+1} + \mathfrak{I}_Y)\\ &= \mathfrak{I}_{Y_0}^t/(\mathfrak{I}_{Y_0}^{t+1} + \mathfrak{I}_{Y_0}^t \cap \mathfrak{I}_Y)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit par passage aux sections globales des applications de «restriction»

$$R_t : \Gamma(X, (\mathfrak{I}_{Y_0}^t + \mathfrak{I}_Y)L^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(Y_0, (\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}) \tag{3.1.23}$$

et de «jet»

$$J_t : \Gamma(X, \mathfrak{I}_{Y_0}^t L^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(Y_0, (\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}) \tag{3.1.24}$$

qui sont surjectives pour n assez grand. En outre, J_t s'obtient en composant R_t avec l'injection naturelle de $\Gamma(X, \mathfrak{I}_{Y_0}^t L^{\otimes n})$ dans $\Gamma(X, (\mathfrak{I}_{Y_0}^t + \mathfrak{I}_Y)L^{\otimes n})$. Ces espaces sont tous munis de structures hermitiennes au moyen des normes L^2.

Lemme 3.1.12 *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $t \geq 0$ et tout entier n assez grand, l'application R_t soit de norme inférieure à Cn^{t+N}.*

Démonstration : En relevant localement des bases de l'espace tangent à X au voisinage de points de Y_0, et en les étendant de façon C^∞ à X tout entier, on construit des champs de vecteurs $\xi_{11}, \ldots, \xi_{1t}, \ldots, \xi_{m1}, \ldots, \xi_{mt}$ de classe C^∞ définis globalement sur X tels que, pour tout $s \in \Gamma(X, (\mathfrak{I}_{Y_0}^t + \mathfrak{I}_Y)L^{\otimes n})$ et pour tout $y \in Y_0$ on ait

$$\|R_t s\|(y) \leq \sum_{i=1}^{m} \|\nabla_{\xi_{i1}} \ldots \nabla_{\xi_{it}} s\|(y).$$

Après utilisation de la proposition 3.1.5 et intégration sur Y_0, on obtient le résultat souhaité. □

Considérons maintenant la filtration décroissante finie du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Gamma(Y, L^{\otimes n}|_Y)$ donnée par les

$$Fil^t\Gamma(Y, L^{\otimes n}|_Y) = \Gamma(Y, \mathfrak{R}^t L^{\otimes n}|_Y).$$

Passant aux sections globales dans la suite exacte courte de faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules

$$0 \longrightarrow \mathfrak{R}^t L^{\otimes n}|_Y \longrightarrow \mathfrak{R}^{t+1} L^{\otimes n}|_Y \longrightarrow (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0} \longrightarrow 0$$

et utilisant l'amplitude de L, on obtient, si n est assez grand, un isomorphisme naturel

$$\Gamma(Y, \mathfrak{R}^t L^{\otimes n}|_Y)/\Gamma(Y, \mathfrak{R}^{t+1} L^{\otimes n}|_Y) = \Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}). \qquad (3.1.25)$$

Supposons donc que n soit assez grand pour que cette identification soit valable et, en outre, que l'application naturelle de restriction

$$\mathrm{restr} : \Gamma(X, L^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(Y, L^{\otimes n}|_Y)$$

soit surjective, de telle sorte qu'on puisse munir $\Gamma(Y, L^{\otimes n}|_Y)$ de la métrique quotient de la métrique L^2 sur $\Gamma(X, L^{\otimes n})$. On s'intéresse alors aux trois métriques sur $\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0})$ définies comme suit :

- d'une part, la métrique $\|.\|_{\mathrm{gr}}$, obtenue en considérant par (3.1.25) que $\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0})$ est le gradué associé à la filtration de $\Gamma(Y, L^{\otimes n}|_Y)$, et donc muni de la métrique de sous-quotient correspondant ;
- d'autre part, la métrique $\|.\|_{L^2(Y_0)}$ associée à la structure hermitienne sur le fibré vectoriel $(\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}$ héritée de la structure kählérienne sur X (suivant la discussion qui précède le théorème 3.1.10) ;
- enfin, la métrique $\|.\|_{q(J_t)}$ obtenue par passage au quotient par J_t de la métrique $L^2(X)$ sur $\Gamma(X, \mathfrak{I}^t_{Y_0} L^{\otimes n}) \subset \Gamma(X, L^{\otimes n})$.

Remarque 3.1.13 On pourrait encore considérer une quatrième métrique, définie par passage au quotient de l'application naturelle

$$\Gamma(Y_0, S^t N_{Y_0} \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}) \longrightarrow \Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}),$$

où $N_{Y_0} = \mathfrak{I}_{Y_0}/\mathfrak{I}^2_{Y_0} \subset \Omega^1_X|_{Y_0}$ est muni de la métrique définie par la structure kählérienne et $\Gamma(Y_0, S^t N_{Y_0} \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0})$ de la métrique L^2. Cependant, nous ne nous servirons pas de cette métrique dans la suite du texte.

Notons

$$\varphi_n : (\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}), \|.\|_{\mathrm{gr}}) \longrightarrow (\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}), \|.\|_{L^2(Y_0)}),$$

$$\psi_n : (\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}), \|.\|_{q(J_t)}) \longrightarrow (\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}), \|.\|_{L^2(Y_0)})$$

et

$$\chi_n : (\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}), \|.\|_{\mathrm{gr}}) \longrightarrow (\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0}), \|.\|_{q(J_t)})$$

les applications linéaires entre espaces hermitiens qui coïncident avec l'identité sur les espaces vectoriels sous-jacents, et fixons un réel ϵ strictement positif.

Proposition 3.1.14 *Avec ces notations, lorsque n est assez grand, les valeurs caractéristiques des applications φ_n, ψ_n et χ_n sont toutes dans l'intervalle $[e^{-n\epsilon}, e^{n\epsilon}]$.*

DÉMONSTRATION : Par transitivité des normes de sous-quotient, si n est assez grand, la métrique $\|.\|_{\mathrm{gr}}$ sur $\Gamma(Y_0, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes L^{\otimes n}|_{Y_0})$ s'identifie à la métrique $\|.\|_{q(R_t)}$ obtenue par passage au quotient par R_t (cf. (3.1.23)) de la métrique $L^2(X)$ sur $\Gamma(X, (\mathfrak{I}_{Y_0}^t + \mathfrak{I}_Y)L^{\otimes n}) \subset \Gamma(X, L^{\otimes n})$. Les valeurs caractéristiques de φ_n et de ψ_n sont donc exactement les valeurs caractéristiques non nulles de R_t et de J_t, respectivement. Pour encadrer ces dernières il suffit, par le lemme 3.1.11, de majorer celles de R_t, ce qui est fait dans le lemme 3.1.12 et de minorer celles de J_t, ce qui constitue exactement le résultat du théorème 3.1.10.

Enfin, l'assertion sur les valeurs caractéristiques de χ_n résulte de celles sur φ_n et ψ_n en remarquant que $\chi_n = (\psi_n)^{-1} \circ \varphi_n$ et en remplaçant ϵ par $\epsilon/2$. □

3.1.3 Hauteur d'un sous-schéma lisse avec multiplicité et hauteur du cycle associé

Soient $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, $\pi : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ une pré-variété arithmétique kählérienne[2], $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitien positif[3] sur $\mathcal{X}$. On va d'abord donner ici sous la forme d'un lemme une variante du théorème 8 de [27][4].

Lemme 3.1.15 (Théorème de Hilbert-Samuel «tordu» pour les pré-variétés arithmétiques) *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$, localement libre sur la fibre générique $\mathcal{X}_K$ et muni d'une métrique hermitienne C^∞ invariante sous l'action de la conjugaison complexe. Si $\mathcal{F}$ n'est pas le faisceau nul, notons $p+1$ la dimension du support $|\mathcal{F}|$ de $\mathcal{F}$ (avec $p \geq -1$) et*

$$[\mathcal{F}] = \sum_{Z=\overline{\{z\}} \in \mathrm{Ass}_{p+1}(\mathcal{F})} \mathrm{lg}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}}(\mathcal{F}_z).[Z] \in Z_{p+1}\mathcal{X}$$

le cycle de dimension maximale associé à $\mathcal{F}$. Alors pour n tendant vers l'infini on a le développement asymptotique

$$\widehat{\deg}(\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}), \|.\|_{L^2(\mathcal{X})}) = (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{p+1}.[\mathcal{F}])\frac{n^{p+1}}{(p+1)!} + O(n^p \log n).$$

DÉMONSTRATION : La preuve utilisera des arguments similaires à ceux de la remarque 2.3.10 ; on renvoie à nouveau à [EGA] IV §3 pour la théorie des cycles premiers associés et de la décomposition primaire, ainsi qu'à [Bourbaki] AC ch. IV ou à [41] §6 pour la version affine de cette théorie. Notons

$$\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) = \{Z_1, \ldots, Z_{r+s}\}$$

[2] *i.e.* un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ de fibre générique lisse dont l'ensemble des points complexes est muni d'une structure kählérienne invariante sous l'action de la conjugaison complexe (déf. 1.4.3 et 1.4.4).

[3] *i.e.* un fibré en droites ample muni d'une métrique hermitienne C^∞ de courbure positive invariante sous l'action de la conjugaison complexe (déf 1.4.6).

[4] à propos de ce «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique» on pourra aussi consulter par exemple [1], [8] ou [57] ; on trouvera aussi une généralisation du théorème au cas singulier dans [68], mais nous n'en aurons pas l'utilité ici.

l'ensemble des cycles premiers associés à $\mathcal{F}$. On supposera que $Z_1, \ldots, Z_r$ sont maximaux et que $Z_{r+1}, \ldots, Z_{r+s}$ sont immergés. Considérons une décomposition irredondante réduite de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire ([EGA] IV 3.2.5 et 3.2.6) la donnée de quotients $\mathcal{F}_i$ de $\mathcal{F}$ $(1 \leq i \leq r+s)$ tels que pour tout i on ait

$$\mathrm{Ass}(\mathcal{F}_i) = \{Z_i\}$$

et que l'homomorphisme naturel

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+s} \mathcal{F}_i \tag{3.1.26}$$

soit injectif. Rappelons aussi ([EGA] IV 3.2.6) que si Z_i est une composante maximale de $|\mathcal{F}|$, *i.e.* si Z_i n'est pas immergée, alors $\mathcal{F}_i$ ne dépend pas du choix de la décomposition primaire ; plus précisément, notant z_i le point générique de Z_i et i_{z_i} l'injection de z_i dans $\mathcal{X}$, on a

$$\mathcal{F}_i = \mathrm{Im}(\mathcal{F} \longrightarrow (i_{z_i})_*(i_{z_i})^*\mathcal{F}) \tag{3.1.27}$$

pour $i \leq r$. Par compatibilité de la formation des cycles premiers associés à la localisation, les cycles premiers horizontaux de $\mathcal{F}$ sont canoniquement en bijection avec les cycles premiers associés au faisceau $\mathcal{F}_K$ sur la fibre générique $\mathcal{X}_K$ qui, étant par hypothèse lisse, est réunion disjointe

$$\mathcal{X}_K = \coprod_{\alpha=1}^{a} (\mathcal{X}_K)^\alpha \tag{3.1.28}$$

de ses composantes connexes $(\mathcal{X}_K)^\alpha$ (qui sont sont des K-schémas projectifs intègres lisses). De (3.1.28) on déduit naturellement la décomposition en somme directe

$$\mathcal{F}_K = \bigoplus_{\alpha=1}^{a} \mathcal{F}_K|_{(\mathcal{X}_K)^\alpha}$$

et, puisque $\mathcal{F}_K$ est localement libre, ses cycles premiers associés sont les $(\mathcal{X}_K)^\alpha$ sur lesquels $\mathcal{F}_K$ n'est pas nul. Ainsi aucun d'entre eux n'est immergé, et il en est de même pour les cycles premiers horizontaux associés à $\mathcal{F}$. Quitte à changer l'ordre des numérotations, on pourra donc supposer que les cycles premiers horizontaux de $\mathcal{F}$ sont $Z_1, \ldots, Z_{r'}$ avec $r' \leq r$, et que les cycles premiers associés à $\mathcal{F}_K$ sont les $(\mathcal{X}_K)^i$ $(1 \leq i \leq r')$ avec

$$(\mathcal{X}_K)^i = (Z_i)_K.$$

Remarquons alors que la décomposition

$$\mathcal{F}_K = \bigoplus_{i=1}^{r'} \mathcal{F}_K|_{(\mathcal{X}_K)^i} = \bigoplus_{i=1}^{r'} \mathcal{F}_K|_{(Z_i)_K} \tag{3.1.29}$$

est une décomposition irredondante de $\mathcal{F}_K$ et, puisque tous les cycles premiers associés à $\mathcal{F}_K$ sont maximaux, une telle décomposition est unique ; comparant avec la décomposition irredondante de $\mathcal{F}_K$ obtenue en localisant celle de $\mathcal{F}$ donnée par les $\mathcal{F}_i$, on trouve

$$\mathcal{F}_K|_{(Z_i)_K} = (\mathcal{F}_i)_K$$

pour $1 \leq i \leq r'$, d'où
$$(\mathcal{F}_i)_K = (\mathcal{F}_i)_K|_{(Z_i)_K}.$$
Ainsi le noyau $\mathfrak{K}_i$ de la surjection canonique
$$\mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}_i|_{Z_i}$$
est génériquement nul ; mais on a aussi $\mathrm{Ass}(\mathfrak{K}_i) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{F}_i) = \{Z_i\}$, d'où $\mathfrak{K}_i = 0$, de telle sorte que
$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i|_{Z_i}$$
est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}_{Z_i}$-module.

Pour $1 \leq i \leq r'$, munissons Z_i de sa structure de *variété* arithmétique kählérienne (cf. déf. 1.4.3 et 1.4.4 ; on rappelle que Z_i est *plat* sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$) héritée de la structure de pré-variété arithmétique kählérienne de $\mathcal{X}$; rappelons aussi que par hypothèse, le $\mathcal{O}_{Z_i}$-module $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i|_{Z_i}$ est localement libre sur la fibre générique $(Z_i)_K$ (et de rang constant puisque $(Z_i)_K$ est intègre). Munissant $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{L}|_{Z_i}$ des métriques restreintes de celles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{L}$, on est alors dans les conditions d'application du théorème 8 de [27] : avec les définitions de [27], sections 2.1 et 2.5.1, Z_i est une variété arithmétique projective intègre et $\mathcal{F}_i$ un faisceau cohérent hermitien sur Z_i et, notant $p_i + 1 \geq 1$ la dimension de Z_i et $e_i \geq 1$ le rang de $(\mathcal{F}_i)_K$, on a pour n tendant vers l'infini
$$\widehat{\deg}(\Gamma(Z_i, \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}), \|.\|_{L^2(Z_i)}) = e_i(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}})^{p_i+1}.[Z_i]) \frac{n^{p_i+1}}{(p_i+1)!} + O(n^{p_i} \log n). \tag{3.1.30}$$

Par ailleurs, pour $i > r'$, notant q_i le cardinal du corps résiduel du point fermé $\wp_i$ de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ image de Z_i, on trouve, au moyen du théorème de Hilbert-Samuel (géométrique) :
$$\begin{aligned}\widehat{\deg}\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \#\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \\ &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \lg_{\mathcal{O}_{K,\wp_i}}(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \log q_i \\ &= \mathrm{rg}(\mathcal{F}_i)_{z_i} (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}})^{p_i+1}.[Z_i]) \frac{n^{p_i+1}}{(p_i+1)!} + O(n^{p_i})\end{aligned} \tag{3.1.31}$$
où z_i est le point générique de Z_i et $p_i + 1 \geq 0$ la dimension de Z_i.

Localisant sur la fibre générique l'homomorphisme f donné par (3.1.26), on retrouve la décomposition (3.1.29) de $\mathcal{F}_K$; en particulier, on voit que f_K est un isomorphisme. Remarquons aussi que, puisque les $(Z_i)_K$ $(1 \leq i \leq r')$ sont des composantes connexes deux à deux disjointes de $\mathcal{X}_K$, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ les r' espaces hermitiens $(\Gamma(Z_i, \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma, \|.\|_{L^2(Z_{i,\sigma}(\mathbb{C}))})$ forment une décompostion en somme directe orthogonale de $(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma, \|.\|_{L^2(\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C}))})$ qui correspond à la décomposition donnée par f_σ :
$$(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma, \|.\|_{L^2(\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C}))}) = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq i \leq r'}} (\Gamma(Z_i, \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma, \|.\|_{L^2(Z_{i,\sigma}(\mathbb{C}))}). \tag{3.1.32}$$

Notons $\mathcal{K} = \ker f$ et $\mathcal{C} = \operatorname{coker} f$. Par la discussion qui précède, on a $\mathcal{K}_K = \mathcal{C}_K = 0$. En outre, pour $1 \leq i \leq r$ (*i.e.* lorsque Z_i n'est pas immergée), notons z_i le point générique de

Z_i. Par (3.1.27) on a $\mathcal{F}_{z_i} = (\mathcal{F}_i)_{z_i}$; d'autre part, pour $j \neq i$, $1 \leq j \leq r+s$, $\mathcal{F}_j$ est supporté par la partie fermée Z_j de $\mathcal{X}$ qui ne contient pas z_i, d'où $(\mathcal{F}_j)_{z_i} = 0$. Ainsi l'homomorphisme localisé f_{z_i} est un isomorphisme et le support de $\mathcal{K}$ (resp. de $\mathcal{C}$) ne contient aucun point générique d'un cycle associé maximal de $\mathcal{F}$, donc *a fortiori* ne contient aucun point générique d'un cycle associé de dimension maximale $p+1$. Autrement dit $\mathcal{K}$ et $\mathcal{C}$ sont supportés par des fermés génériquement vides et de dimension au plus p, de telle sorte que par le théorème de Hilbert-Samuel (géométrique) on a

$$\widehat{\deg}\mathcal{K} = O(n^p) \quad \text{et} \quad \widehat{\deg}\mathcal{C} = O(n^p). \tag{3.1.33}$$

Mettant ensemble (3.1.26), (3.1.30), (3.1.31), (3.1.32) et (3.1.33) on trouve

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}), \|.\|_{L^2(\mathcal{X})}) = & \sum_{1 \leq i \leq r'} \widehat{\deg}(\Gamma(Z_i, \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}), \|.\|_{L^2(Z_i)}) \\ & + \sum_{r' < i \leq r+s} \widehat{\deg}\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) + O(n^p) \\ = & \sum_{1 \leq i \leq r+s} \mathrm{rg}(\mathcal{F}_i)_{z_i} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{p_i+1}.[Z_i]) \frac{n^{p_i+1}}{(p_i+1)!} + O(n^p \log n).\end{aligned}$$

Ne conservant dans cette dernière somme que les termes correspondant aux cycles de dimension maximale (*i.e.* tels que $p_i = p$) et intégrant les autres dans le $O(n^p \log n)$, on obtient le résultat souhaité. □

On peut maintenant énoncer le théorème. Comme précédemment on considère une prévariété arithmétique kählérienne $\mathcal{X}$ munie d'un fibré en droites hermitien positif ; on se donne alors un sous-schéma fermé Σ de $\mathcal{X}$ plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ dont la fibre générique Σ_K est *lisse avec multiplicité*. Notons $(\Sigma^{\text{réd}})^{(i)}$ $(1 \leq i \leq f)$ les composantes irréductibles de $\Sigma^{\text{réd}}$; on supposera $(\Sigma^{\text{réd}})^{(i)}$ de dimension générique égale à p pour $1 \leq i \leq f'$ et strictement inférieure à p pour $f' < i \leq f$. Par hypothèse le cône $C_{\Sigma_K^{\text{réd}}}\Sigma_K$ est défini sur $\Sigma_K^{\text{réd}}$ par un faisceau d'algèbres localement libres, dont le rang sur $(\Sigma^{\text{réd}})^{(i)}$ sera noté e_i. Notons enfin $[\Sigma] = \sum_{i=1}^{f'} e_i[(\Sigma^{\text{réd}})^{(i)}] \in Z_{p+1}(\mathcal{X})$ le cycle de dimension maximale associé à Σ.

Théorème 3.1.16 *Sous ces hypothèses, lorsque n tend vers l'infini, on a*

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\Sigma) &= \sum_{i=1}^{f'} \frac{e_i}{(p+1)!} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n})^{p+1}.[(\Sigma^{\text{réd}})^{(i)}]) + o(n^{p+1}) \\ &= \frac{n^{p+1}}{(p+1)!}.h_{\overline{\mathcal{L}}}([\Sigma]) + o(n^{p+1}). \end{aligned} \tag{3.1.34}$$

Démonstration : Notons $\mathfrak{N}$ le nilradical de $\mathcal{O}_\Sigma$. On a une filtration décroissante finie du $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ donnée par les $\Gamma(\Sigma, \mathfrak{N}^t \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$. Par (3.1.25), si n est assez grand, les gradués associés admettent l'identification naturelle

$$\Gamma(\Sigma, \mathfrak{N}^t \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)/\Gamma(\Sigma, \mathfrak{N}^{t+1}\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma) = \Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{N}^t/\mathfrak{N}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}}).$$

Quitte à supposer n encore plus grand, on peut supposer l'application de restriction

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$$

surjective, munir $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ des métriques quotient, et $\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}})$ des métriques de sous-quotient correspondantes, que nous noterons $\|.\|_{\text{gr}}$. Alors, par définition des hauteurs de sous-schéma et par additivité du degré d'Arakelov, on a

$$h^{(n)}(\Sigma) = \sum_{t \geq 0} \widehat{\deg}(\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}}), \|.\|_{\text{gr}}). \tag{3.1.35}$$

Par ailleurs, la restriction à $\Sigma^{\text{réd}}$ des structures hermitiennes de $\mathcal{X}$ fait de Σ une pré-variété arithmétique (au sens de la définition 1.4.3). En outre, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, par les constructions analogues à celles précédant l'énoncé du théorème 3.1.10 appliquées à $X = \mathcal{X}_\sigma$ et $Y = \Sigma_\sigma$, le fibré vectoriel $((\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}})_\sigma$ sur $\Sigma_\sigma^{\text{réd}}$ dispose naturellement d'une métrique hermitienne. Ceci permet alors de munir $\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}})_\sigma$ de la métrique $\|.\|_{L^2(\Sigma_\sigma^{\text{réd}})}$ obtenue par intégration sur $\Sigma_\sigma^{\text{réd}}$.

Notons

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_n^{(t)} : (\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}}), \|.\|_{\text{gr}}) \\ \longrightarrow (\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}}), \|.\|_{L^2(\Sigma^{\text{réd}})})\end{aligned}$$

l'application entre $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens qui est égale à l'identité sur les $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents. On a alors

$$\begin{aligned}&\widehat{\deg}(\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}}), \|.\|_{\text{gr}}) \\ &\quad = \widehat{\deg}(\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}}), \|.\|_{L^2(\Sigma^{\text{réd}})}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_\sigma \log \| \bigwedge^{\max} \varphi_\sigma \|.\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

Par la proposition 3.1.14, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_ϵ tel que pour tout $n > n_\epsilon$ les valeurs caractéristiques de φ_σ soient toutes dans l'intervalle $[e^{-n\epsilon}, e^{n\epsilon}]$. On a alors

$$\left| \log \| \bigwedge^{\max} \varphi_\sigma \| \right| \leq \epsilon . n \operatorname{rg} \Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}}).$$

Par ailleurs, par le théorème de Hilbert-Samuel classique, $\operatorname{rg} \Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}})$ est un polynôme en n de degré (au plus) p. Ceci montre que

$$\log \| \bigwedge^{\max} \varphi_\sigma \| \underset{n \to \infty}{=} o(n^{p+1}). \tag{3.1.37}$$

Appliquant le lemme 3.1.15 on trouve alors

$$\begin{aligned}&\widehat{\deg}(\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, (\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma^{\text{réd}}}), \|.\|_{L^2(\Sigma^{\text{réd}})}) \\ &\qquad \underset{n \to \infty}{=} \sum_{i=1}^{f'} \frac{e_{t,i}}{(p+1)!} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n})^{p+1} . [(\Sigma^{\text{réd}})^{(i)}]) + o(n^{p+1})\end{aligned}$$

où $e_{t,i}$ est le rang du fibré vectoriel $(\mathfrak{R}^t/\mathfrak{R}^{t+1})_K$ sur $(\Sigma_K^{\text{réd}})^{(i)}$. Combiné avec (3.1.35), (3.1.36) et (3.1.37), ceci termine la démonstration du théorème. □

3.2 Sous-schéma défini par l'annulation d'une section d'un fibré vectoriel transverse à la section nulle

En restreignant les hypothèses du théorème 3.1.16 on peut obtenir un meilleur contrôle du terme d'erreur $o(n^{p+1})$ dans la formule (3.1.34).

Pour ce faire, on utilisera le théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi-Manivel, au sujet duquel on pourra consulter [19] et [40], sous la forme suivante.

Lemme 3.2.1 *Soient X une variété analytique complexe projective lisse de dimension N munie d'une forme de Kähler ω, $(L, \|.\|)$ un fibré en droites hermitien positif sur X, et Y une sous-variété de X définie par l'annulation d'une section globale s partout transverse à la section nulle d'un fibré vectoriel E de rang $N-p$ sur X (ceci implique en particulier que Y est lisse de dimension p). Alors il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout entier n assez grand et pour toute section $h \in \Gamma(Y, L^{\otimes n}|_Y)$, il existe une section $H \in \Gamma(X, L^{\otimes n})$ telle que*

$$h = H|_Y$$

et

$$\|H\|_{L^2(X)} \leq M\|h\|_{L^2(Y)}.$$

DÉMONSTRATION : On cherche à se mettre dans les conditions d'application du théorème 1 de [40]. Choisissons une métrique hermitienne sur E. Notons $P = \operatorname{Proj}\operatorname{Sym} E^\vee$ le fibré en espace projectif des droites de E, $\pi : P \to X$ la projection naturelle et σ la section du fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{E^\vee}(-1)$ définie par s au-dessus de l'ouvert $\pi^{-1}(X \setminus Y)$ de P. Notons aussi $K_X = \det TX^\vee$ et $K_Y = \det TY^\vee$ les fibrés en droites canoniques sur X et Y, respectivement. Le fibré $\mathcal{O}_{E^\vee}(-1)$ étant muni des métriques héritées de $E^\vee$, la forme $c_1(\mathcal{O}_{E^\vee}(-1))$ est négative sur les fibres de π, de telle sorte que, puisque ω est positive, quitte à multiplier ω par une constante (ce qui ne change pas la conclusion du lemme), on peut supposer

$$\pi^*\omega \geq c_1(\mathcal{O}_{E^\vee}(-1)).$$

Par ailleurs, si $\alpha > 0$ est un réel suffisamment petit, la forme $\alpha\pi^*\omega + c_1(\mathcal{O}_{E^\vee}(-1))$ est négative sur les fibres de π, de telle sorte que pour tout entier n assez grand, par l'hypothèse de positivité sur L on a

$$\frac{1}{N-p}\pi^* c_1(L^{\otimes n} \otimes K_X^\vee) \geq \alpha\pi^*\omega + c_1(\mathcal{O}_{E^\vee}(-1)).$$

Enfin soit X' le complémentaire dans X d'un diviseur ample transverse à Y. On peut alors appliquer le théorème 1 de [40] (avec $X = X'$ et $L = L^{\otimes n} \otimes K_X^\vee$).

Soient donc $h \in \Gamma(Y, L^{\otimes n}|_Y)$ et $g \in \Gamma(Y, K_Y \otimes (\det E)^{-1} \otimes K_X^{-1} \otimes L^{\otimes n}|_Y)$ tel que

$$h = g \otimes \wedge^{N-p} ds$$

(comparer avec le paragraphe 1.2 de [40]). On a alors

$$\|g\|_{L^2(Y)} \leq C_1 \|h\|_{L^2(Y)}$$

avec $C_1 = (\inf_Y \| \wedge^{N-p} ds\|)^{-1}$. Par le théorème 1 de [40] il existe une section H de $L^{\otimes n}$ holomorphe sur X' telle que

$$\int_{X'} \frac{\|H\|^2}{\|\sigma\|^{2(N-p-1)}(1+\|\sigma\|^2)^2} d\mu_X \leq M' \int_{Y\cap X'} \|g\|^2 d\mu_Y$$

où M' est une constante ne dépendant pas de n. Puisque X est normale, la section H se prolonge naturellement de X' à X tout entière, et le lemme est démontré avec $M = \|\sigma\|_{L^\infty(X)}^{N-p-1}(1+\|\sigma\|^2_{L^\infty(X)})C_1\sqrt{M'}$. □

Remarque 3.2.2 Il n'est pas vrai en général qu'une sous-variété lisse d'une variété lisse sur $\mathbb{C}$ est le schéma des zéros d'une section d'un fibré vectoriel transverse à la section nulle. On va donner un contre-exemple reposant sur la notion de sous-canonicité, introduite par Serre (à ce sujet voir par exemple [4] section 4.(a)). Soient X un schéma et Y un sous-schéma défini par l'annulation d'une section s d'un fibré vectoriel E sur X. Par définition le faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}_Y$ définissant Y est l'image de l'application $s : E^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_X$. On a donc une surjection $E^\vee \longrightarrow \mathfrak{I}_Y$ dont la restriction à Y donne une surjection

$$E^\vee|_Y \xrightarrow{s} \mathfrak{I}_Y/\mathfrak{I}_Y^2 = N_{Y,X}^\vee.$$

Dire que s est transverse à la section nulle signifie que cette dernière surjection est un isomorphisme. Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire que X et Y sont des variétés lisses sur un corps k. Sur Y on a la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow N_{Y,X}^\vee \longrightarrow (T_X^\vee)|_Y \longrightarrow T_Y^\vee \longrightarrow 0,$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} K_Y = \det T_Y^\vee &\simeq (\det T_X^\vee|_Y) \otimes (\det N_{Y,X}^\vee)^{-1} \\ &\simeq \left((\det T_X^\vee) \otimes (\det E^\vee)^{-1}\right)|_Y \end{aligned}$$

se prolonge en un fibré en droites sur X (on dit alors que Y est sous-canonique).

Considérons par exemple $k = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{P}^3$ et Y la cubique gauche, c'est-à-dire l'image du plongement de Veronese

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3.$$

On a $Y \simeq \mathbb{P}^1$ donc $\deg_Y K_Y = 2g_Y - 2 = -2$. Or si K_Y se prolongeait en un fibré en droites L sur X, $\deg_Y K_Y = \deg_Y L|_Y = (c_1(L).[Y])$ serait multiple de $\deg[Y] = 3$. Ainsi Y n'est pas sous-canonique donc, *a fortiori*, la cubique gauche dans $\mathbb{P}^3$ n'est pas le schéma des zéros d'une section globale d'un fibré vectoriel de rang 2.

Revenons maintenant au calcul de hauteurs de sous-schémas. On supposera que $\mathcal{X}$ est une pré-variété arithmétique de dimension relative N sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ munie de métriques kählériennes et d'un fibré en droites hermitien positif $\overline{\mathcal{L}}$. Soit Σ un sous-schéma réduit de $\mathcal{X}$, plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, dont la fibre générique Σ_K est définie par l'annulation d'une section globale s partout transverse à la section nulle d'un fibré vectoriel E de rang $N-p$ sur $\mathcal{X}_K$.

Proposition 3.2.3 *Sous ces hypothèses, pour tout entier n assez grand, on a l'encadrement*

$$p/4.\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{p!}n^p\log n+O(n^p)\leq$$
$$h^{(n)}(\Sigma)-\frac{n^{p+1}}{(p+1)!}.h_{\overline{\mathcal{L}}}([\Sigma])$$
$$\leq(N+p/4)\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{p!}n^p\log n+O(n^p).$$

où $h_{\overline{\mathcal{L}}}([\Sigma])=(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}})^{p+1}.[\Sigma])$ *et* $\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})=(c_1(\mathcal{L}_K)^p.[\Sigma_K])$.

Démonstration : Pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, on dispose de deux métriques sur $\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)_\sigma$.

- D'une part, la restriction à Σ des structures hermitiennes de $\mathcal{X}$ fait de Σ une pré-variété arithmétique (au sens de la définition 1.4.3), et on peut munir $\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)_\sigma$ de la métrique $\|.\|_{L^2(\Sigma_\sigma)}$.
- D'autre part, si n est assez grand, l'application de restriction

$$\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}^{\otimes n})\longrightarrow\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$$

  est surjective, et on peut munir $\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)_\sigma$ de la métrique $\|.\|_{q,\sigma}$ obtenue par passage au quotient de la métrique $\|.\|_{L^2(\mathcal{X}_\sigma)}$ sur $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma$.

Notons
$$\varphi:(\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma),\|.\|_q)\longrightarrow(\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma),\|.\|_{L^2(\Sigma)})$$
l'application entre $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens qui est égale à l'identité sur les $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents.

Par définition des hauteurs de sous-schémas, on a

$$\begin{aligned}h^{(n)}(\Sigma)&=\widehat{\deg}_n(\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma),\|.\|_q)\\&=\widehat{\deg}_n(\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma),\|.\|_{L^2(\Sigma)})+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma\log\|\bigwedge^{\max}\varphi_\sigma\|.\end{aligned}$$

Par le théorème 8 de [27] (ou par le lemme 3.1.15) on a

$$\widehat{\deg}_n(\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma),\|.\|_{L^2(\Sigma)})\underset{n\to\infty}{=}\frac{n^{p+1}}{(p+1)!}.h_{\overline{\mathcal{L}}}([\Sigma])+\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{4(p-1)!}n^p\log n+O(n^p).$$

Par le lemme 3.1.12 appliqué avec $t=0$, il existe une constante C telle que, pour tout entier n assez grand, les valeurs caractéristiques de φ_σ soient toutes inférieures à Cn^N. Puisque le rang de $\Gamma(\Sigma,\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ est un polynôme de terme principal $\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{p!}n^p$, on trouve bien
$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma\log\|\bigwedge^{\max}\varphi_\sigma\|\leq N.\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{p!}n^p\log n+O(n^p)$$
ce qui démontre l'une des inégalités cherchées.

Par ailleurs, par le lemme 3.2.1, il existe une constante M telle que, pour tout entier n assez grand, les valeurs caractéristiques non nulles de φ_σ soient toutes supérieures à M. Comme précédemment ceci implique

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma}\log\|\bigwedge^{\max}\varphi_\sigma\|\geq O(n^p),$$

ce qui démontre l'autre inégalité. $\square$

Chapitre 4

Réunion de deux sous-espaces linéaires d'un espace projectif

4.1 Préliminaires

4.1.1 Rappels sur les nombres de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

Pour un exposé plus complet de tout ce qui est traité dans ce paragraphe, on pourra consulter [Bourbaki] FVR ch. VI.

On définit une suite de polynômes à coefficients rationnels, appelés polynômes de Bernoulli, par la relation de récurrence suivante : B_0 est le polynôme constant égal à 1, et pour tout $n \geq 1$, B_{n-1} étant connu, B_n est l'unique polynôme vérifiant

$$B_n{}' = nB_{n-1} \tag{4.1.1}$$

et

$$\int_0^1 B_n = 0. \tag{4.1.2}$$

On vérifie aisément qu'alors, pour tout n, le polynôme B_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 1. Par exemple, on a

$$B_0(X) = 1, \qquad B_1(X) = X - \frac{1}{2}, \qquad B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$$
$$B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X, \qquad B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}.$$

On définit le n-ième nombre de Bernoulli comme le terme constant du n-ième polynôme de Bernoulli :

$$b_n = B_n(0) \in \mathbb{Q}.$$

Alors, on déduit de (4.1.1) l'égalité

$$B_n(X) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} b_m X^{n-m}, \tag{4.1.3}$$

valable pour tout n, et la condition (4.1.2) se traduit par la relation

$$b_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}b_k \tag{4.1.4}$$

qui permet de calculer les nombres de Bernoulli par récurrence.

On remarquera que les polynômes $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ vérifient les mêmes conditions de récurrence que les polynômes de Bernoulli. Ces deux suites de polynômes sont donc égales ; notamment, pour tout n on a

$$B_n(0) = (-1)^n B_n(1).$$

Par ailleurs, la condition (4.1.2) implique qu'on doit avoir

$$B_n(0) = B_n(1) \qquad \text{(pour tout } n \geq 2). \tag{4.1.5}$$

Ceci implique que $b_n = B_n(0)$ est nul pour n impair supérieur ou égal à 3.

Soit maintenant f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $[0,1]$. La relation (4.1.1) permet d'effectuer des intégrations par parties successives pour calculer l'intégrale $\int_0^1 f$. On trouve en effet

$$\begin{aligned}\int_0^1 f &= \int_0^1 B_0 f\\ &= [B_1 f]_0^1 - \int_0^1 B_1 f'\\ &= [B_1 f - \frac{1}{2}B_2 f']_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 B_2 f''\\ &= \dots\end{aligned}$$

soit, pour tout entier $m \geq 1$ (en utilisant l'annulation des nombres de Bernoulli d'indice impair)

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \sum_{k=1}^{m}\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) - \frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}f^{(2m+1)}.$$

Pour tout entier $n \geq 2$ notons désormais $\widetilde{B_n}$ l'unique fonction réelle 1-périodique égale à B_n sur l'intervalle $[0,1]$ (remarquons que $\widetilde{B_n}$ est bien définie et continue par (4.1.5)). Soient alors $\mu < \nu$ deux entiers relatifs et f une fonction C^∞ sur l'intervalle $[\mu,\nu]$. En sommant les égalités obtenues par application du calcul d'intégrales précédent aux translatées de f, on trouve (formule sommatoire d'Euler-Maclaurin) :

$$\begin{aligned}\sum_{j=\mu}^{\nu} f(j) = \int_\mu^\nu f(t)dt + \frac{1}{2}(f(\mu)+f(\nu)) +\\ + \sum_{k=1}^{m}\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(\nu) - f^{(2k-1)}(\mu)) + \frac{1}{(2m+1)!}\int_\mu^\nu \widetilde{B_{2m+1}}f^{(2m+1)}.\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

4.1.2 Un calcul de série

L'objet de ce paragraphe est d'établir le lemme suivant.

Lemme 4.1.1 *Soient $\mu \geq 0$ et $m > \mu/2$ deux entiers. Alors on a le développement asymptotique*

$$\sum_{j=1}^{n} j^{\mu} \log j \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\mu+1} n^{\mu+1} \log n - \frac{1}{(\mu+1)^2} n^{\mu+1} + \frac{1}{2} n^{\mu} \log n$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{2k}}{2k} \left(\binom{\mu}{2k-1} n^{\mu-2k+1} \log n - \sum_{d=1}^{2k-1} \frac{(-1)^d}{d} \binom{\mu}{2k-1-d} n^{\mu-2k+1} \right)$$
$$- \zeta'(-\mu) + O(n^{\mu-2m})$$

où $\zeta'(-\mu)$ est la valeur en $-\mu$ du prolongement analytique de la dérivée de la fonction zêta de Riemann.

Remarque 4.1.2 On notera que le coefficient $\binom{\mu}{2k-1}$ est nul pour $2k-1 > \mu$. Le développement asymptotique ne comporte donc pas de terme en $n^l \log n$ pour $l < 0$.

Remarque 4.1.3 De par ce lemme on verra apparaître les valeurs aux entiers négatifs de la dérivée de la fonction zêta dans les développements asymptotiques de hauteurs de sous-espaces linéaires. Il pourra être intéressant de comparer comment ces nombres interviennent aussi dans le théorème de Riemann-Roch arithmétique de [27], via les calculs de [26] et [63]. Toutefois, on remarquera que seules figurent dans [27] les valeurs aux entiers impairs, alors qu'ici on pourra aussi voir apparaître les valeurs aux entiers pairs, comme le montrera le calcul de $h^{(n)}(\mathbb{P}^2)$ donné dans l'exemple 4.2.7.

Démonstration : Pour tout nombre complexe s définissons une fonction

$$f_s : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$f_s(x) = x^s \log x = e^{s \log x} \log x.$$

On vérifie immédiatement que

$$\int_1^x f_s = \frac{1}{s+1} x^{s+1} \log x - \frac{1}{(s+1)^2} x^{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \tag{4.1.7}$$

et, par la formule du binôme, que pour tout l

$$\frac{1}{l!} f_s^{(l)}(x) = \binom{s}{l} x^{s-l} \log x - \sum_{d=1}^{l} \frac{(-1)^d}{d} \binom{s}{l-d} x^{s-l}. \tag{4.1.8}$$

En insérant (4.1.7) dans la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin (4.1.6) on trouve

$$\sum_{j=1}^{n} f_s(j) = \frac{1}{s+1}n^{s+1}\log n - \frac{1}{(s+1)^2}n^{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2}n^s \log n + \\ + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{2k}}{(2k)!}(f_s^{(2k-1)}(n) - f_s^{(2k-1)}(1)) + \frac{1}{(2m+1)!}\int_1^n \widetilde{B_{2m+1}} f_s^{(2m+1)} \tag{4.1.9}$$

ceci étant valable pour tout s.

Pour $\operatorname{Re} t > 1$ on a

$$\zeta(t) = \sum_{j\geq 1} j^{-t} = \sum_{j\geq 1} e^{-t\log j}$$

et

$$\zeta'(t) = -\sum_{j\geq 1} e^{-t\log j}\log j,$$

d'où pour $\operatorname{Re} s < -1$

$$\sum_{j\geq 1} f_s(j) = -\zeta'(-s).$$

Ainsi, supposons $\operatorname{Re} s < -1$ et faisons tendre n vers l'infini dans (4.1.9). Par (4.1.8), les termes $f_s^{(l)}(n)$ tendent vers 0. En outre, la fontion $\widetilde{B_{2m+1}}$ est continue et 1-périodique donc bornée, d'où l'on déduit, encore par (4.1.8), que l'intégrale $\int_1^\infty \widetilde{B_{2m+1}} f_s^{(2m+1)}$ converge. On trouve alors finalement

$$-\zeta'(-s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{2k}}{(2k)!} f_s^{(2k-1)}(1) + \frac{1}{(2m+1)!}\int_1^\infty \widetilde{B_{2m+1}} f_s^{(2m+1)}. \tag{4.1.10}$$

Remarquons (à nouveau par (4.1.8)) que l'intégrale $\int_1^\infty \widetilde{B_{2m+1}} f_s^{(2m+1)}$ est encore convergente pour $\operatorname{Re} s < 2m$, et qu'alors, par unicité du prolongement analytique, l'égalité (4.1.10) reste valable pour $\operatorname{Re} s < 2m$.

On peut alors prendre $s = \mu$ et terminer la démonstration du lemme en injectant (4.1.8) et (4.1.10) dans (4.1.9) et en remarquant, grâce à (4.1.8) et à l'annulation de $\binom{\mu}{2m+1}$, qu'on a bien

$$\int_1^\infty \widetilde{B_{2m+1}} f_\mu^{(2m+1)} - \int_1^n \widetilde{B_{2m+1}} f_\mu^{(2m+1)} = \int_n^\infty \widetilde{B_{2m+1}} f_\mu^{(2m+1)} \underset{n\to\infty}{=} O(n^{\mu-2m}).$$

$\square$

Remarque 4.1.4 Pour $\mu = 0$, le lemme 4.1.1 donne

$$\sum_{j=1}^{n} \log j \underset{n\to\infty}{=} n\log n - n + \frac{1}{2}\log n - \zeta'(0) + O(n^{-1}).$$

En comparant ceci avec la formule de Stirling on retrouve la relation bien connue

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi).$$

4.2 Hauteurs schématiques d'un sous-espace linéaire

On se propose ici de donner un développement asymptotique des hauteurs schématiques d'un sous-espace linéaire d'un espace projectif. Pour ce faire, on commence (au premier paragraphe) par donner un tel développement asymptotique dans le cas particulier des hauteurs de l'espace projectif standard considéré comme sous-schéma de lui-même, c'est-à-dire pour le degré d'Arakelov des $\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))$ munis des métriques L^2. L'existence de ce développement asymptotique peut être établie essentiellement de deux façons. La première méthode consisterait à utiliser le théorème de Riemann-Roch arithmétique de [27] et à développer l'expression de la torsion analytique, suivant par exemple [7]. La deuxième méthode, celle qui sera utilisée ici, procède par un calcul élémentaire direct. Il s'agit essentiellement d'approfondir les formules obtenues dans [38] proposition 3.

4.2.1 Hauteurs de l'espace projectif standard considéré comme sous-schéma de lui-même

Notons $\mathbb{P}^N$ l'espace projectif standard de dimension relative N sur $\mathbb{Z}$ muni de sa structure de variété arithmétique mesurée usuelle, et $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites universel sur $\mathbb{P}^N$ muni des métriques standard. Plus précisément, $\mathbb{P}^N$ est l'espace projectif des quotients localement libres de rang un du $\mathbb{Z}$-fibré vectoriel hermitien libre $\overline{\mathbb{Z}^{N+1}}$, dont la construction est donnée à la fin du paragraphe 1.4.2. Considérant $\mathbb{P}^N$ comme sous-schéma de lui-même, on note

$$\eta_N^{(n)} = h^{(n)}(\mathbb{P}^N) \tag{4.2.1}$$

sa n-ième hauteur schématique, relativement au fibré $\overline{\mathcal{O}(1)}$.

Lemme 4.2.1 *On a*

$$2.\eta_N^{(n)} = \binom{n+N}{N}(\log(n+N)! - \log N!) - (N+1)\mathcal{S}$$

où

$$\mathcal{S} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n-j+N}{N} \log j.$$

Démonstration : Par définition des hauteurs de sous-schémas, $\mathbb{P}^N$ considéré comme sous-schéma de lui-même étant défini par le faisceau d'idéaux nul, on a

$$h^{(n)}(\mathbb{P}^N) = \widehat{\deg}(\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n)), \|.\|_{L^2}).$$

Par les résultats des paragraphes 1.3.1 et 1.4.2, $\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))$ s'identifie au $\mathbb{Z}$-module libre des polynômes homogènes de degré n en les variables $X_0, \ldots, X_N$ et, après plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, les monômes X^I (pour $|I| = n$) forment une base orthogonale de $\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))_{\mathbb{C}}$. Par le lemme 1.3.2 on a alors

$$2.\eta_N^{(n)} = -\sum_{|I|=n} \log \|X^I\|^2 = -\sum_{i_0+\cdots+i_N=n} \log \frac{i_0! \ldots i_N!.N!}{(n+N)!}.$$

Remarquons que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $l \in \{0, \ldots, N\}$ le nombre de $(N+1)$-uplets $(i_0, \ldots, i_N)$ tels que $i_l = k$ et $i_0 + \cdots + i_N = n$ est égal à $\binom{n-k+N-1}{N-1}$, d'où

$$2.\eta_N^{(n)} = \binom{n+N}{N}(\log(n+N)! - \log N!) - (N+1)\mathcal{S}$$

avec

$$\mathcal{S} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+N-1}{N-1} \log k!.$$

En écrivant $\log k! = \sum_{j=1}^{k} \log j$ et en utilisant la relation $\sum_{k=j}^{n} \binom{n-k+N-1}{N-1} = \binom{n-j+N}{N}$, on trouve l'expression souhaitée. □

Introduisons maintenant les nombres harmoniques

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et les nombres de Stoll

$$\begin{aligned} \sigma_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} H_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(N+1-k)\frac{1}{k} & \\ = \frac{N+1}{2}H_N - \frac{N}{2} & \quad (4.2.2) \\ = \frac{N+1}{2}(H_{N+1} - 1). & \quad (4.2.3) \end{aligned}$$

Il est bien connu (voir p. ex. [11] lemme 3.3.1) qu'on a

$$\sigma_N = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\mathbb{P}^N). \quad (4.2.4)$$

Lemme 4.2.2 *On a*

$$\sum_{\mu=0}^{N} \frac{(-1)^\mu}{\mu+1}\binom{N}{\mu} = \frac{1}{N+1} \quad (4.2.5)$$

et

$$\sum_{\mu=0}^{N} \frac{(-1)^\mu}{(\mu+1)^2}\binom{N}{\mu} = \frac{H_{N+1}}{N+1}. \quad (4.2.6)$$

Démonstration (simplifiée par rapport à la preuve originale de l'auteur grâce à une remarque de C. Soulé) : La première somme peut aussi s'écrire

$$\int_0^1 (1-x)^N dx,$$

ce qui démontre (4.2.5).

De la même façon la deuxième somme vaut

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\int_0^x (1-y)^N dy dx &= \frac{1}{N+1}\int_0^1 \frac{1-(1-x)^{N+1}}{x}dx \\ &= \frac{1}{N+1}\int_0^1 \frac{1-t^{N+1}}{1-t}dt \\ &= \frac{1}{N+1}\int_0^1 (1+t+\cdots+t^N)dt\end{aligned}$$

(où l'on a posé $t = 1-x$), ce qui démontre (4.2.6). □

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Proposition 4.2.3 *Pour tout entier $r > 0$, les hauteurs schématiques de $\mathbb{P}^N$ admettent un développement asymptotique*

$$\eta_N^{(n)} \underset{n\to\infty}{=} a_{N+1}n^{N+1} + b_N n^N \log n + a_N n^N + b_{N-1}n^{N-1}\log n + \cdots + b_0 \log n + a_0 + \\ + c_{-1}n^{-1} + c_{-2}n^{-2} + \cdots + c_{-r}n^{-r} + O(n^{-r-1})$$

avec

$$a_{N+1} = \frac{\sigma_N}{(N+1)!} \tag{4.2.7}$$

$$b_N = \frac{1}{4(N-1)!} \tag{4.2.8}$$

$$a_N = \frac{1}{2N!}((N+1)\sigma_N - \log N! - \frac{N}{2}\log 2\pi) \tag{4.2.9}$$

et plus généralement, pour $0 \leq i \leq N$:

$$a_i \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\log N! + \mathbb{Q}\zeta'(0) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta'(-N+i) \tag{4.2.10}$$

$$b_i \in \mathbb{Q} \tag{4.2.11}$$

et enfin, pour tout $i > 0$:

$$c_{-i} \in \mathbb{Q}. \tag{4.2.12}$$

Démonstration : Introduisons les nombres de Stirling de première espèce

$$s_{n,k} \in \mathbb{Z} \qquad (n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n)$$

définis par la formule (cf. [2] §III.2)

$$\begin{aligned}[x]_n = n!\binom{x}{n} &= x(x-1)\dots(x-n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} s_{n,k}x^k.\end{aligned}$$

En particulier on a

$$s_{n,0} = 0, \qquad s_{n,1} = (-1)^{n-1}(n-1)!, \tag{4.2.13}$$

$$s_{n,2} = (-1)^n (n-1)! H_{n-1}, \tag{4.2.14}$$

$$s_{n,n-1} = -\frac{n(n-1)}{2} \tag{4.2.15}$$

et

$$s_{n,n} = 1. \tag{4.2.16}$$

Par le lemme 4.2.1 on a

$$2N!\eta_N^{(n)} = [n+N]_N(\log(n+N)! - \log N!) - (N+1)!\mathcal{S} \tag{4.2.17}$$

avec

$$\begin{aligned} N!\mathcal{S} &= \sum_{j=1}^{n} [n-j+N]_N \log j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda=0}^{N} s_{N,\lambda} (n-j+N)^\lambda \log j \\ &= \sum_{\lambda=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\lambda-\mu} (-1)^\mu s_{N,\lambda} \frac{\lambda!}{\mu!\nu!(\lambda-\mu-\nu)!} N^\nu n^{\lambda-\mu-\nu} \sum_{j=1}^{n} j^\mu \log j. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

En utilisant le lemme 4.1.1 dans (4.2.18), en reportant cette expression dans (4.2.17) et en utilisant la formule de Stirling pour développer le terme $\log(n+N)!$ de (4.2.17), on obtient immédiatement (4.2.10), (4.2.11) et (4.2.12).

Pour obtenir (4.2.7), (4.2.8) et (4.2.9), il faut calculer explicitement les premiers termes du développement de (4.2.17), modulo $O(n^{N-1}\log n)$.

On a

$$n^{\lambda-\mu-\nu} \sum_{j=1}^{n} j^\mu \log j = O(n^{\lambda-\nu+1} \log n)$$

donc on peut ne conserver dans (4.2.18) que les termes

$$A: \qquad \lambda = N, \quad \nu = 0$$

$$B: \qquad \lambda = N, \quad \nu = 1$$

et

$$C: \qquad \lambda = N-1, \quad \nu = 0,$$

autrement dit

$$N!\mathcal{S} = A + B + C + O(n^{N-1}\log n)$$

avec, compte tenu de (4.2.15) et (4.2.16) :

$$A = \sum_{\mu=0}^{N} (-1)^{\mu} \binom{N}{\mu} n^{N-\mu} \sum_{j=1}^{n} j^{\mu} \log j$$
$$= \sum_{\mu=0}^{N} (-1)^{\mu} \binom{N}{\mu} n^{N-\mu} (\frac{1}{\mu+1} n^{\mu+1} \log n - \frac{1}{(\mu+1)^2} n^{\mu+1} + \frac{1}{2} n^{\mu} \log n)$$
$$- n^N \zeta'(0) + O(n^{N-1} \log n),$$

$$B = \sum_{\mu=0}^{N-1} (-1)^{\mu} \binom{N}{\mu} N(N-\mu) n^{N-\mu-1} \sum_{j=1}^{n} j^{\mu} \log j$$
$$= \sum_{\mu=0}^{N-1} (-1)^{\mu} \binom{N}{\mu} N(N-\mu) n^{N-\mu-1} (\frac{1}{\mu+1} n^{\mu+1} \log n - \frac{1}{(\mu+1)^2} n^{\mu+1}) + O(n^{N-1} \log n)$$

et

$$C = \sum_{\mu=0}^{N-1} (-1)^{\mu+1} \frac{N(N-1)}{2} \binom{N-1}{\mu} n^{N-\mu-1} \sum_{j=1}^{n} j^{\mu} \log j$$
$$= \sum_{\mu=0}^{N-1} (-1)^{\mu+1} \frac{N(N-1)}{2} \binom{N-1}{\mu} n^{N-\mu-1} (\frac{1}{\mu+1} n^{\mu+1} \log n - \frac{1}{(\mu+1)^2} n^{\mu+1}) + O(n^{N-1} \log n).$$

Ainsi on trouve

$$N!\mathcal{S} = \alpha n^{N+1} \log n + \beta n^{N+1} + \gamma n^N \log n + \delta n^N + O(n^{N-1} \log n) \qquad (4.2.19)$$

avec, compte tenu du lemme 4.2.2 :

$$\alpha = \sum_{\mu=0}^{N} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu+1} \binom{N}{\mu} = \frac{1}{N+1}$$

$$\beta = -\sum_{\mu=0}^{N} \frac{(-1)^{\mu}}{(\mu+1)^2} \binom{N}{\mu} = -\frac{1}{N+1} H_{N+1}$$

$$\gamma = \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu+1} \frac{N!}{\mu!(n-\mu-1)!} (N - \frac{N-1}{2}) = \frac{N+1}{2}$$

et

$$\delta = -\zeta'(0) - \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{(-1)^\mu}{(\mu+1)^2} \frac{N!}{\mu!(N-\mu-1)!} \frac{N+1}{2}$$
$$= -\zeta'(0) - \frac{N(N+1)}{2} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{(-1)^\mu}{(\mu+1)^2} \binom{N-1}{\mu} = \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{N+1}{2} H_N.$$

Par ailleurs on a

$$[n+N]_N = n^N + \frac{N(N+1)}{2} n^{N-1} + O(n^{N-2})$$

et

$$\log(n+N)! = (n+N+\frac{1}{2})\log(n+N) - (n+N) + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(n^{-1})$$

avec

$$\log(n+N) = \log n + N.n^{-1} + O(n^{-2})$$

d'où

$$\begin{aligned}[n+N]_N(\log(n+N)! - \log N!) = \rho n^{N+1}\log n + \sigma n^{N+1} + \\ + \tau n^N \log n + \upsilon n^N + O(n^{N-1}\log n),\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

avec

$$\rho = 1$$
$$\sigma = -1$$
$$\tau = N + \frac{1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{N^2+3N+1}{2}$$

et

$$\upsilon = -\frac{N(N+1)}{2} + \frac{1}{2}\log 2\pi - \log N!.$$

En injectant (4.2.19) et (4.2.20) dans (4.2.17), on trouve bien, puisque $\rho - (N+1)\alpha = 0$, que le développement asymptotique de $\eta_N^{(n)}$ ne comporte pas de terme en $n^{N+1}\log n$, et que les coefficients suivants sont donnés par

$$a_{N+1} = \frac{1}{2N!}(\sigma - (N+1)\beta) = \frac{1}{(N+1)!}\sigma_N$$

(où l'on a utilisé (4.2.3)),

$$b_N = \frac{1}{2N!}(\tau - (N+1)\gamma) = \frac{1}{4(N-1)!}$$

et (en utilisant (4.2.2))

$$a_N = \frac{1}{2N!}(\upsilon - (N+1)\delta) = \frac{1}{2N!}((N+1)\sigma_N - \log N! - \frac{N}{2}\log 2\pi),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 4.2.4 Considérant le terme $\lambda = \mu = N$, $\nu = 0$ de la somme (4.2.18), on voit que le terme $\zeta'(-N)$ apparaît avec un coefficient non nul (plus précisément, égal à $(-1)^N \frac{N+1}{2.N!}$) dans le terme constant du développement asymptotique de $h^{(n)}(\mathbb{P}^N)$ en puissances de n et $\log n$ pour n tendant vers l'infini. Notons que les valeurs aux entiers pairs strictement négatifs de la dérivée de la fonction zêta sont reliées aux valeurs aux entiers impairs positifs de cette même fonction zêta par la formule suivante : pour $N = 2k$, on a

$$\zeta'(-2k) = (-1)^k \frac{(2k)!}{\pi^{2k} 2^{2k+1}} \zeta(2k+1).$$

On obtient cette égalité par exemple en dérivant l'équation fonctionnelle

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

([59] § II 3.3, th. 3 ; voir aussi [50] ou [62]) de la fontion zêta et en l'évaluant en $s = -2k$.

4.2.2 Application : un calcul de torsion analytique

Soit E un fibré vectoriel hermitien sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Pour tout entier q notons

$$\overline{\partial} : A^{0,q}(\mathbb{P}^N, E) \longrightarrow A^{0,q+1}(\mathbb{P}^N, E)$$

l'opérateur de Cauchy-Riemann usuel, $\overline{\partial}^*$ son adjoint formel et

$$\Delta_q = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^* \overline{\partial} : A^{0,q}(\mathbb{P}^N, E) \longrightarrow A^{0,q}(\mathbb{P}^N, E)$$

le laplacien associé. La fonction

$$\zeta_q(s) = \operatorname{Tr}(\Delta_q^{-s} | \ker(\Delta_q)^{\perp})$$

est définie pour $\operatorname{Re} s$ assez grande et admet un prolongement analytique holomorphe au voisinage de $s = 0$. Suivant [49] la torsion analytique de E est définie comme

$$T(\mathbb{P}^N(\mathbb{C}), E) = \sum_{q=0}^{N} (-1)^{q+1} q \zeta_q'(0).$$

Corollaire 4.2.5 *Avec ces notations, la torsion analytique $T(\mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \mathcal{O}(n))$ admet pour n tendant vers l'infini un développement asymptotique à tout ordre r, de la forme*

$$\begin{aligned} T(\mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \mathcal{O}(n)) = \beta_N n^N \log n + \alpha_N n^N + \beta_{N-1} n^{N-1} \log n + \cdots + \beta_0 \log n + \alpha_0 + \\ + \gamma_{-1} n^{-1} + \gamma_{-2} n^{-2} + \cdots + \gamma_{-r} n^{-r} + O(n^{-r-1}) \end{aligned}$$

avec

$$\beta_N = \frac{1}{2(N-1)!}$$

$$\alpha_N = -\frac{1}{2(N-1)!}\log 2\pi = \frac{1}{(N-1)!}\zeta'(0)$$

et plus généralement, pour $0 \leq i \leq N$ *:*

$$\alpha_i \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta'(0) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta'(-N+i)$$

$$\beta_i \in \mathbb{Q}$$

et enfin, pour tout $i > 0$ *:*

$$\gamma_{-i} \in \mathbb{Q}.$$

DÉMONSTRATION : Notons $(\lambda(\mathcal{O}(n)), h_Q)$ le fibré déterminant de $\mathcal{O}(n)$ muni de la métrique de Quillen (cf. [6] et [27]). Par définition on a

$$h_Q = e^{T(\mathbb{P}^N(\mathbb{C}),\mathcal{O}(n))} h_{L^2}$$

où h_{L^2} est la métrique hermitienne sur $\lambda(\mathcal{O}(n))$ définie par le produit scalaire L^2 relativement à la forme volume $\omega^N/N!$ sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Remarquons que cette forme volume diffère par un facteur $1/N!$ de celle fournie par la convention (1.1.7), de telle sorte qu'on trouve

$$h^{(n)}(\mathbb{P}^N) = \widehat{\deg}(\lambda(\mathcal{O}(n)), h_{L^2})) - \frac{1}{2}\operatorname{rg}(\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n)) \log N!$$

d'où

$$T(\mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \mathcal{O}(n)) = 2\left(h^{(n)}(\mathbb{P}^N) - \widehat{\deg}(\lambda(\mathcal{O}(n)), h_Q)\right) + \binom{n+N}{N}\log N!. \qquad (4.2.21)$$

Considérons les séries formelles suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Td}}(X) = \frac{X}{1-e^{-X}} &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{b_k}{k!}X^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}X^2 - \frac{1}{720}X^4 + \ldots\end{aligned}$$

où les b_k sont les nombres de Bernoulli,

$$\underline{I}_N(X) = \left(\frac{X}{1-e^{-X}}\right)^{N+1} \int_0^1 \frac{\psi(t,X) - \psi(t,0)}{t} dt$$

où $\psi(t,X) = \frac{1}{tX} - \frac{e^{-tX}}{1-e^{-tX}} = -\sum_{k\geq 0}\frac{b_{k+1}}{(k+1)!}t^k X^k$ de telle sorte que

$$\underline{I}_N(X) = -\frac{1}{12}X - \frac{N+1}{24}X^2 + \ldots,$$

et

$$\underline{R}(X) = \sum_{\substack{m\geq 1 \\ \text{impair}}} (2\zeta'(-m) + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m})\zeta(-m))\frac{X^m}{m!}.$$

Suivant [26] et [27], à tout fibré vectoriel holomorphe E sur une variété complexe on attache une classe caractéristique $R(E)$ dans la cohomologie paire de cette variété, définie uniquement par les conditions suivantes : R commute à l'image inverse, est additive dans les suites exactes courtes et, pour tout fibré en droites L, vérifie

$$R(L) = \underline{R}(c_1(L)).$$

Munissons le fibré tangent $T\mathbb{P}^N$ de la métrique hermitienne héritée de la suite exacte courte

$$\mathcal{E}_N : \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus(N+1)} \longrightarrow T\mathbb{P}^N \longrightarrow 0.$$

Par le théorème de Riemann-Roch arithmétique on a (cf. [27])

$$\widehat{\deg}(\lambda(\mathcal{O}(n)), h_Q)) = \left(\left(\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{O}(n)})\widehat{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^N) - a(\mathrm{ch}(\mathcal{O}(n)_{\mathbb{C}})\mathrm{Td}(T\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}})R(T\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}})\right).[\mathbb{P}^N]\right). \tag{4.2.22}$$

Notons $\widehat{x} = \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(1)})$ et $\omega = \omega_{FS} = c_1(\|.\|_{\mathcal{O}(1)})$. Par [26] § 2.2, utilisant la suite $\mathcal{E}_N$, on trouve :

$$\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{O}(n)}) = \exp(n\widehat{x}),$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^N) &= \underline{\mathrm{Td}}(\widehat{x})^{N+1} + a(\widetilde{\mathrm{Td}}(\mathcal{E}_N) \\ &= \underline{\mathrm{Td}}(\widehat{x})^{N+1} + a(\underline{I}_N(\omega))\end{aligned}$$

(où $\widetilde{\mathrm{Td}}(\mathcal{E}_N)$ est la classe caractéristique secondaire de Bott-Chern associée à $\mathcal{E}_N$; cf. [12]),

$$\mathrm{ch}(\mathcal{O}(n)_{\mathbb{C}}) = \exp(n\omega),$$

$$\mathrm{Td}(T\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}) = \underline{\mathrm{Td}}(\omega)^{N+1}$$

et

$$R(T\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}) = (N+1)\underline{R}(\omega).$$

Injectant tout ceci dans (4.2.22) puis dans (4.2.21), utilisant qu'on a

$$(\widehat{x}^{N+1}.[\mathbb{P}^N]) = \sigma_N \in \mathbb{Q}$$

et, pour tout $0 \leq k \leq N$,

$$(\widehat{x}^{N-k}a(\omega^k).[\mathbb{P}^N]) = (a(\omega^N).[\mathbb{P}^N]) = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q},$$

on trouve le résultat souhaité ; remarquons notamment, d'une part, que $\widehat{\deg}(\lambda(\mathcal{O}(n)), h_Q)$ est un polynôme en n dont les deux termes de plus haut degré, provenant uniquement du produit $\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{O}(n)})\widehat{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^N)$, sont donnés par

$$((n^{N+1}/(N+1)! + (N+1)/2\,.\,n^N/N!)\widehat{x}^{N+1}.[\mathbb{P}^N] = \frac{\sigma_N}{(N+1)!}n^{N+1} + \frac{(N+1)\sigma_N}{2.N!}n^N,$$

compensant ainsi certains des termes donnés par (4.2.7) et (4.2.9) et, d'autre part, que le terme en $\log N!$ présent dans (4.2.21) compense exactement celui fourni par (4.2.17). □

Exemple 4.2.6 Pour $N = 1$ on a

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\mathbb{P}^1) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \log \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} \\ &\underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{4}n^2 \quad + \quad \frac{1}{4}n\log n \quad + \quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\zeta'(0)\right) n \\ &\quad + \quad \frac{1}{3}\log n \quad + \quad \left(\frac{13}{24}+\frac{1}{2}\zeta'(0)-\zeta'(-1)\right) \quad + \quad O(n^{-1}), \end{aligned}$$

la différence entre $h^{(n)}(\mathbb{P}^1)$ et l'expression donnée ci-dessus prenant les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{pour} & n = 1 \ : & 0,1549979\ldots \\ & n = 10 \ : & 0,0200684\ldots \\ & n = 100 \ : & 0,0020753\ldots \\ & n = 1000 \ : & 0,0002082\ldots\ . \end{array}$$

Par ailleurs, par le théorème de Riemann-Roch arithmétique, on a, avec les notations de la démonstration du corollaire :

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}(\lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)), h_Q)) &= \Bigg(\bigg((1+n\widehat{x}+\frac{n^2}{2}\widehat{x}^2)((1+\frac{1}{2}\widehat{x}+\frac{1}{12}\widehat{x}^2)^2+a(-\frac{1}{12}\omega)) \\ &\qquad\qquad - a(2.(2\zeta'(-1)+\zeta(-1))\omega)\bigg).[\mathbb{P}^1]\Bigg) \\ &= \frac{n^2}{4} \ + \ \frac{n}{2} \ + \ \frac{1}{4} - 2\zeta'(-1) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$T(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}(n)) \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2}n\log n \ + \ \zeta'(0).n \ + \ \frac{2}{3}\log n \ + \ \left(\frac{7}{12}+\zeta'(0)+2\zeta'(-1)\right) \ + \ O(n^{-1}).$$

Exemple 4.2.7 Pour $N = 2$ on a

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\mathbb{P}^2) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \log \frac{2.i!j!(n-i-j)!}{(n+2)!} \\ &\underset{n\to\infty}{=} \frac{5}{24}n^3 \quad + \quad \frac{1}{4}n^2\log n \quad + \quad \left(\frac{15}{16}-\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{2}\zeta'(0)\right) n^2 \\ &\quad + \quad \frac{7}{8}n\log n \quad + \quad \left(\frac{85}{48}-\frac{3}{4}\log 2+\frac{3}{2}\zeta'(0)-\frac{3}{2}\zeta'(-1)\right) n \\ &\quad + \quad \frac{11}{16}\log n \quad + \quad \left(\frac{27}{16}-\frac{1}{2}\log 2+\zeta'(0)-\frac{9}{4}\zeta'(-1)+\frac{3}{4}\zeta'(-2)\right) \\ &\quad + \quad O(n^{-1}), \end{aligned}$$

la différence entre $h^{(n)}(\mathbb{P}^2)$ et l'expression donnée ci-dessus prenant les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{rll} \text{pour} & n=1 : & 0,2427951\ldots \\ & n=10 : & 0,0291442\ldots \\ & n=100 : & 0,0029666\ldots \\ & n=1000 : & 0,0002971\ldots\ . \end{array}$$

Par ailleurs, par le théorème de Riemann-Roch arithmétique, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)),h_Q)) = \Bigg(\Bigg(&(1+n\widehat{x}+\frac{n^2}{2}\widehat{x}^2+\frac{n^3}{6}\widehat{x}^3)((1+\frac{1}{2}\widehat{x}+\frac{1}{12}\widehat{x}^2)^3+a((1+\frac{3}{2}\omega)(-\frac{1}{12}\omega))) \\ &- a((1+n\omega)(1+\frac{3}{2}\omega).3.(2\zeta'(-1)+\zeta(-1))\omega)\Bigg).[\mathbb{P}^2]\Bigg) \\ = {} & \frac{5}{24}n^3 + \frac{15}{16}n^2 + \left(\frac{4}{3}-3\zeta'(-1)\right)n + \left(\frac{19}{32}-\frac{9}{2}\zeta'(-1)\right)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} T(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}),\mathcal{O}(n)) \;&=\; 2(h^{(n)}(\mathbb{P}^2)-\widehat{\deg}(\lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)),h_Q))) + \binom{n+2}{2}\log 2 \\ &\underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2}n^2\log n + \zeta'(0).n^2 + \frac{7}{4}n\log n \\ &\quad + \left(\frac{7}{8}+3\zeta'(0)+3\zeta'(-1)\right)n + \frac{11}{8}\log n \\ &\quad + \left(\frac{35}{16}+2\zeta'(0)+\frac{9}{2}\zeta'(-1)+\frac{3}{2}\zeta'(-2)\right) + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

Le lecteur intéressé pourra aussi consulter [66] qui contient des calculs très proches de ceux effectués ici. Mieux, on pourra trouver dans [35] l'expression de la torsion analytique pour les fibrés vectoriels hermitiens sur les espaces symétriques en toute généralité.

4.2.3 Hauteurs d'un sous-espace linéaire d'un espace projectif

Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $N+1$, $\mathbb{P}_E = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\, E)$ l'espace projectif associé à $\overline{E}$ muni des structures à l'infini définies au paragraphe 1.4.2 et Λ un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}_E$ de codimension $N-M$. Par définition d'un sous-espace linéaire, il existe une suite exacte courte de $\mathcal{O}_K$-fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

avec $\mathrm{rg}\, F = N-M$, $\mathrm{rg}\, Q = M+1$ et telle que Λ soit défini par l'idéal homogène $F.\mathrm{Sym}\, E$ de $\mathrm{Sym}\, E$. On a alors un isomorphisme naturel de schémas

$$\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_Q \tag{4.2.23}$$

et pour tout $n > 0$ un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F.S^{n-1}E & \longrightarrow & S^nE & \longrightarrow & S^nQ & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \varphi_n \downarrow \simeq & & \widetilde{\varphi_n} \downarrow \simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathfrak{I}_\Lambda \mathcal{O}(n)) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) & \xrightarrow{\text{restr.}} & \Gamma(\Lambda, \mathcal{O}(n)|_\Lambda) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Proposition 4.2.8 *Sous ces hypothèses, on a*

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\Lambda) &= \eta_M^{(n)} + \binom{n+M}{M+1}\widehat{\deg}\overline{Q} + \frac{1}{2}\binom{n+M}{M}\log\binom{n+N}{N} - \frac{1}{2}\binom{n+M}{M}\log\binom{n+M}{M} \\ &= \eta_M^{(n)} + \binom{n+M}{M+1}\widehat{\deg}\overline{Q} + \frac{1}{2}\binom{n+M}{M}\log\frac{(n+N)\dots(n+M+1)}{N\dots(M+1)} \end{aligned}$$

où, conformément au paragraphe précédent, on a posé $\eta_M^{(n)} = h^{(n)}(\mathbb{P}^M)$.

Démonstration : Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que Q est libre (par [43] ch. 1 lemme 1.5, il suffit de montrer que tout idéal de $\mathcal{O}_K$ devient principal dans une extension convenable ; ceci peut se démontrer élémentairement, mais on peut aussi remarquer qu'il s'agit d'une propriété bien connue du corps de classes de Hilbert). Le choix d'une base de Q détermine alors un isomorphisme (non canonique)

$$q : \mathcal{O}_K^{M+1} \xrightarrow{\sim} Q.$$

Notons alors ψ_n l'isomorphisme naturel de $\Gamma(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}(n))$ sur $S^n(\mathcal{O}_K^{M+1})$ et considérons l'application composée

$$\overline{\Gamma(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}(n))} \xrightarrow{\psi_n} S^n(\overline{\mathcal{O}_K^{M+1}}) \xrightarrow{S^n q} S^n\overline{Q} \xrightarrow{\widetilde{\varphi_n}} \overline{\Gamma(\Lambda, \mathcal{O}(n)|_\Lambda)}$$

(chacune de ces flèches étant un isomorphisme sur les $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents), où l'on a muni $\overline{\Gamma(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}(n))}$ des normes $L^2(\mathbb{P}^M)$, $S^n(\overline{\mathcal{O}_K^{M+1}})$ des normes puissance symétrique des normes standard, $S^n\overline{Q}$ des normes puissance symétrique des normes quotient de celles de $\overline{E}$ et $\overline{\Gamma(\Lambda, \mathcal{O}(n)_\Lambda)}$ des normes quotient des normes $L^2(\mathbb{P}_E)$ sur $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$. Par définition on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}(n))} = \eta_M^{(n)}.$$

Par ailleurs, par le lemme 1.3.4, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, $(\psi_n)_\sigma$ est une similitude de rapport $\binom{n+M}{M}^{1/2}$, tandis que $(\widetilde{\varphi_n})_\sigma$ est obtenue par passage au quotient de $(\varphi_n)_\sigma$ qui est une similtude de rapport $\binom{n+N}{N}^{-1/2}$, donc est de même. On en déduit

$$h(\bigwedge^{\max}\psi_n) = \frac{1}{2}\binom{n+M}{M}\log\binom{n+M}{M}$$

et

$$h(\bigwedge^{\max}\widetilde{\varphi_n}) = -\frac{1}{2}\binom{n+M}{M}\log\binom{n+N}{N}.$$

D'autre part le lemme 1.4.1 donne

$$h(\bigwedge^{\max} q) = \widehat{\deg}\overline{\mathcal{O}_K^{M+1}} - \widehat{\deg}\overline{Q} = -\widehat{\deg}\overline{Q}$$

d'où, par le lemme 4.2.10 ci-après,

$$h(\bigwedge^{\max} S^n q) = -\binom{n+M}{M+1}\widehat{\deg}\overline{Q}.$$

Une nouvelle utilisation du lemme 1.4.1 donne alors

$$\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\Lambda, \mathcal{O}(n)|_\Lambda)} = \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}(n))} - h(\bigwedge^{\max} \psi_n) - h(\bigwedge^{\max} S^n q) - h(\bigwedge^{\max} \widetilde{\varphi_n}),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 4.2.9 Par la proposition 4.2.3, le terme principal du développement asymptotique des hauteurs $h^{(n)}(\Lambda)$ est donc

$$\frac{\sigma_M + \widehat{\deg}\overline{Q}}{(M+1)!}n^{M+1}.$$

On retrouve ainsi, au moyen du théorème 3.1.16 (un sous-espace linéaire est évidemment «génériquement lisse avec multiplicité»), le fait bien connu que la hauteur du cycle associé à Λ est

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([\Lambda]) = \sigma_M + \widehat{\deg}\overline{Q}.$$

Lemme 4.2.10 *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux $\mathcal{O}_K$-fibrés vectoriels hermitiens de même rang $M+1$ et $\varphi : E_K \stackrel{\sim}{\to} F_K$ un isomorphisme de K-espaces vectoriels. Alors pour tout entier n on a*

$$h(\bigwedge^{\max} S^n \varphi) = \binom{n+M}{M+1} h(\bigwedge^{\max} \varphi).$$

Démonstration : Il suffit de montrer que pour toute place v (finie ou infinie) et pour tout K_v-isomorphisme $\psi : E_v \stackrel{\sim}{\longrightarrow} F_v$ on a

$$\| \bigwedge^{\max} S^n \psi \|_v = \| \bigwedge^{\max} \psi \|_v^{\binom{n+M}{M+1}}.$$

Pour ce faire, au moyen de la théorie des diviseurs élémentaires (si v est finie) ou de la théorie des valeurs caractéristiques (si v est infinie), on se ramène au cas où $E_v = F_v = K_v^{M+1}$ et où ψ est donnée par une matrice diagonale $Diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_M)$. Alors $S^n\psi$ est donnée par la matrice diagonale dont les termes sont les monômes de degré n en les λ_i. Si l'on fait le produit de tous ces monômes, chaque λ_i apparaît avec multiplicité $\frac{n}{M+1}\binom{n+M}{M} = \binom{n+M}{M+1}$, ce qu'il fallait démontrer. □

4.3 Hauteurs d'un sous-schéma réunion de deux sous-espaces linéaires

On commence par établir quelques lemmes qui s'inscrivent dans la lignée des résultats de la section 1.2.

Lemme 4.3.1 *Soient E un espace hermitien et A un sous-espace de E. Pour tout entier $n \geq 1$, la puissance symétrique $S^n A$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $S^n E$. Alors la projection orthogonale sur $S^n A$ est la puissance symétrique n-ième de la projection orthogonale sur A :*

$$p_{S^n A} = S^n p_A.$$

DÉMONSTRATION : On a clairement $S^n p_A(x) = x$ si x appartient à $S^n A$ et $S^n p_A(y) = 0$ si y appartient à $(A^\perp . S^{n-1} E) = \ker p_{S^n A}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 4.3.2 *Soient E un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E. Notons*

$$\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{\dim A}$$

les valeurs caractéristiques de la projection $p_B|_A$ de A sur B, comptées avec leurs multiplicités. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, les valeurs caractéristiques (avec multiplicités) de la projection $p_{S^n B}|_{S^n A}$ sont exactement les monômes de degré n en les μ_j.

DÉMONSTRATION : Cela résulte du lemme précédent et du calcul des valeurs caractéristiques d'une puissance symétrique. □

Si m est un entier, on définit maintenant une série formelle P_m en m indéterminées par la formule suivante :

$$\begin{aligned} P_m(X_1, \ldots, X_m) &= \prod_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \smallsetminus \{0\}} (1 - X_1^{\alpha_1} \ldots X_m^{\alpha_m})^{-1} \\ &= \sum_{n_1, \ldots, n_m \geq 0} p_m(n_1, \ldots, n_m) X_1^{n_1} \ldots X_m^{n_m} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

où $p_m(n_1, \ldots, n_m)$ est le nombre de décompositions du m-uplet $(n_1, \ldots, n_m)$ en somme de m-uplets d'entiers non tous nuls. Par exemple pour $m = 1$, $p_1(n)$ est le nombre de partitions de l'entier n (cf. [32] ch. XIX). Remarquons aussi que si $m' > m$ on a $P_{m'}(X_1, \ldots, X_m, 0, \ldots, 0) = P_m(X_1, \ldots, X_m)$. On notera donc plus simplement $P(X_1, \ldots, X_m)$ cette quantité.

Soient alors E un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E. Notons r_a, r_b, s, t et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ (avec multiplicités $m_1, \ldots, m_e$) les invariants du triplet (E, A, B) et posons $m = m_1 + \cdots + m_e$. Pour tout entier n posons

$$d^{(n)} = d_{S^n A, S^n B},$$

la mesure d'orthogonalité des sous-espaces $S^n A$ et $S^n B$ de $S^n E$, comme définie par (1.2.4). Enfin soit ϵ un réel dans l'intervalle ouvert $]\lambda_e, 1[$.

Proposition 4.3.3 *Sous ces hypothèses, il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_{t-1}$ tels qu'on ait le développement asymptotique*

$$\log d^{(n)} \underset{n\to\infty}{=} c_{t-1}n^{t-1} + \cdots + c_1 n + c_0 + O(\epsilon^n)$$

(rappelons que $t = \dim A \cap B$). En outre on a

$$c_{t-1} = -\frac{1}{2.(t-1)!}\log P(\underbrace{\lambda_1^2,\ldots,\lambda_1^2}_{m_1 \text{ fois}},\ldots,\underbrace{\lambda_e^2,\ldots,\lambda_e^2}_{m_e \text{ fois}}).$$

Démonstration : Par définition des invariants on a $\operatorname{rg} p_B|_A = \operatorname{rg} p_A|_B = m+t$. Notons $\nu_1, \ldots, \nu_{m+t}$ les valeurs caractéristiques non nulles de $p_B|_A$ (ou de $p_A|_B$) comptées avec leurs multiplicités. Autrement dit

$$\nu_j = \lambda_i \qquad \text{si} \qquad m_1 + \cdots + m_{i-1} < j \leq m_1 + \cdots + m_i$$

et

$$\nu_j = 1 \qquad \text{si} \qquad m < j \leq m + t.$$

Par le lemme précédent, les valeurs caractéristiques non nulles de $p_{S^nA}|_{S^nB}$ sont les monômes en les ν_j. Par le corollaire 1.2.18, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\log d^{(n)} &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{m+t}=n\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_m>0}} \log(1-(\nu_1^{\alpha_1}\ldots\nu_{m+t}^{\alpha_{m+t}})^2)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{0<\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m\leq n} \binom{n-\alpha+t-1}{t-1}\log(1-(\nu_1^{\alpha_1}\ldots\nu_m^{\alpha_m})^2)\\
&= \mathcal{S}_n - \mathcal{E}_n
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m>0} \binom{n-\alpha+t-1}{t-1}\log(1-(\nu_1^{\alpha_1}\ldots\nu_m^{\alpha_m})^2)$$

et

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m>n} \binom{n-\alpha+t-1}{t-1}\log(1-(\nu_1^{\alpha_1}\ldots\nu_m^{\alpha_m})^2).$$

Utilisant le fait que les $\log(1-(\nu_1^{\alpha_1}\ldots\nu_m^{\alpha_m})^2)$ décroissent en $(\lambda_e)^\alpha$ on obtient l'estimation $\mathcal{E}_n = O(\epsilon^n)$. On termine alors la démonstration on décomposant les coefficients binômiaux $\binom{n-\alpha+t-1}{t-1}$ intervenant dans l'expression de $\mathcal{S}_n$ suivant les puissances de n et en regroupant les termes de façon à exprimer $\mathcal{S}_n$ comme un polynôme en n. $\square$

Théorème 4.3.4 *Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $N+1$ et Λ_1 (resp. Λ_2) un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}_E$ de codimension $N-M_1$ (resp. $N-M_2$), donc de dimension générique M_1 (resp. M_2). Notons M la dimension générique de $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ (en convenant que le schéma vide est de dimension strictement négative). Notons aussi*

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow E \longrightarrow Q_1 \longrightarrow 0 \quad \textit{et} \quad 0 \longrightarrow F_2 \longrightarrow E \longrightarrow Q_2 \longrightarrow 0$$

les suites exactes courtes de $\mathcal{O}_K$-modules projectifs définissant Λ_1 et Λ_2. Alors il existe $\epsilon \in]0,1[$ et des réels $c_0, \ldots, c_M$ tels qu'on ait le développement asymptotique

$$h^{(n)}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) + h^{(n)}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) - h^{(n)}(\Lambda_1) - h^{(n)}(\Lambda_2) \underset{n\to\infty}{=} c_M n^M + \cdots + c_0 + O(\epsilon^n).$$

En particulier on a

$$c_M = -\frac{1}{2.M!.[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log P(\underbrace{\lambda_{1,\sigma}^2, \ldots, \lambda_{1,\sigma}^2}_{m_{1,\sigma}\ fois}, \ldots, \underbrace{\lambda_{e_\sigma,\sigma}^2, \ldots, \lambda_{e_\sigma,\sigma}^2}_{m_{e_\sigma,\sigma}\ fois}),$$

où les $\lambda_{i,\sigma}$ (avec multiplicités $m_{i,\sigma}$) sont les valeurs caractéristiques différentes de 0 et de 1 des projections $p_{F_{1,\sigma}}|_{F_{2,\sigma}}$ dans E_σ.
Enfin, pour tout entier $n \geq 1$, on a $h^{(n)}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) + h^{(n)}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) - h^{(n)}(\Lambda_1) - h^{(n)}(\Lambda_2) = 0$ si et seulement si pour tout σ les sous-espaces linéaires $\Lambda_{1,\sigma}(\mathbb{C})$ et $\Lambda_{2,\sigma}(\mathbb{C})$ de $\mathbb{P}_{E,\sigma}(\mathbb{C})$ sont orthogonaux (au sens large).

Démonstration : Au moyen des structures hermitiennes on identifie $\Gamma(\Lambda_1, \mathcal{O}(n)|_{\Lambda_1})_\sigma$ et $\Gamma(\Lambda_2, \mathcal{O}(n)|_{\Lambda_2})_\sigma$ à des sous-espaces de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))_\sigma$, et $Q_{1,\sigma}$ et $Q_{2,\sigma}$ à des sous-espaces de E_σ. Puisque l'application naturelle $S^n E_\sigma \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))_\sigma$ est une similitude, les triplets

$$(\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))_\sigma, \Gamma(\Lambda_1, \mathcal{O}(n)|_{\Lambda_1})_\sigma, \Gamma(\Lambda_2, \mathcal{O}(n)|_{\Lambda_2})_\sigma)$$

et

$$(S^n E_\sigma, S^n Q_{1,\sigma}, S^n Q_{2,\sigma})$$

ont mêmes invariants. Alors le théorème résulte de la proposition 2.3.8, du corollaire 1.2.20, de la proposition précédente, et du fait que $(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)_K$ est le sous-espace linéaire de $(\mathbb{P}_E)_K$ défini par le sous-espace $(F_1+F_2)_K$ de E_K, de telle sorte que $(Q_{1,\sigma} \cap Q_{2,\sigma}) = (F_{1,\sigma}+F_{2,\sigma})^\perp \subset E_\sigma$ est bien de dimension $M+1$. □

Rappelons que si $\mathcal{X}$ est une variété arithmétique et Σ un sous-schéma de la fibre générique $\mathcal{X}_K$, on note $\overline{\Sigma}$ l'adhérence schématique de Σ dans $\mathcal{X}$. Alors :

Corollaire 4.3.5 *Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $N+1$ et Λ_1 (resp. Λ_2) un sous-espace linéaire de la fibre générique $(\mathbb{P}_E)_K$ de codimension $N-M_1$ (resp. $N-M_2$), donc de dimension M_1 (resp. M_2). Notons M la dimension du sous-espace linéaire $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ de $(\mathbb{P}_E)_K$. Notons aussi $\wp_1, \ldots, \wp_r$ les points fermés de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ images de composantes essentielles verticales de $(\overline{\Lambda_1}) \cap (\overline{\Lambda_2})$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$ notons $q_i = \#k(\wp_i)$ le cardinal du corps résiduel en $\wp_i$ et d_i la dimension de la fibre $((\overline{\Lambda_1}) \cap (\overline{\Lambda_2}))_{\wp_i}$. Alors il existe un réel $\epsilon \in]0,1[$, un polynôme Q de degré inférieur ou égal à M à coefficients réels et, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, un polynôme numérique P_i de degré inférieur ou égal à d_i tels qu'on ait le développement asymptotique*

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \underset{n\to\infty}{=} & \ h^{(n)}(\Lambda_1) + h^{(n)}(\Lambda_2) \\ & - h^{(n)}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) + Q(n) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{i=1}^{r} P_i(n) \log q_i + O(\epsilon^n). \end{aligned}$$

Démonstration : Le plus grand sous-schéma plat de $\Sigma = (\overline{\Lambda_1}) \cap (\overline{\Lambda_2})$ est

$$H = \overline{((\overline{\Lambda_1}) \cap (\overline{\Lambda_2}))_K} = \overline{(\overline{\Lambda_1})_K \cap (\overline{\Lambda_2})_K}$$
$$= \overline{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}.$$

Le corollaire se démontre alors en insérant dans le théorème la définition des hauteurs de sous-schémas de la fibre générique et en utilisant la remarque 2.3.10 relative à la décomposition du sous-schéma Σ de $\mathcal{X}$ comme réunion de son plus grand sous-schéma plat H et de sous-schémas primaires verticaux V_i. Avec ces notations et compte tenu de la remarque 2.3.10, le corollaire est vérifié en prenant $Q(n) = c_M n^M + \cdots + c_0$ le polynôme fourni par le théorème précédent, et $P_i = P_{V_i} - P_{H \cap V_i}$ où P_{V_i} (resp. $P_{H \cap V_i}$) est le polynôme de Hilbert-Samuel de V_i (resp. $H \cap V_i$) relativement à $\mathcal{O}(1)$. □

Il convient d'essayer de donner une interprétation aux termes du développement asymptotique donné par le théorème. On peut considérer que le terme $h^{(n)}(\Lambda_1) + h^{(n)}(\Lambda_2)$ constitue d'une certaine façon le terme principal du développement asymptotique de $h^{(n)}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ et que le terme $-h^{(n)}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$ est un terme correctif naturel. Les autres termes, quant à eux, peuvent s'interpréter comme mesurant une «dégénérescence» de l'intersection de Λ_1 et Λ_2.

Plus précisément, avec les choix faits à la fin de la démonstration du corollaire, chaque terme $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} P_i(n) \log q_i$ traduit la présence de composantes essentielles de $\Sigma = (\overline{\Lambda_1}) \cap (\overline{\Lambda_2})$ supportées par sa fibre au-dessus de $\wp_i$. Remarquons qu'*a priori* la seule borne dont on dispose sur la dimension d_i de $\Sigma_{\wp_i}$ est $d_i \leq \max(M_1, M_2)$ (cette inégalité résulte de la platitude de $\overline{\Lambda_1}$ et $\overline{\Lambda_2}$). Puisque par ailleurs, par les propositions 4.2.3 et 4.2.8, $h^{(n)}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$ est un $O(n^{M+1})$, il n'est pas exclu qu'un des termes «de dégénérescence» $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} P_i(n) \log q_i$ puisse apporter une contribution d'ordre égal ou supérieur à celle du terme correctif «naturel» $-h^{(n)}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$. Une condition suffisante pour cela est que parmi les composantes essentielles de Σ apparaissant aux places finies, il y en ait une qui ne soit pas immergée. Si en outre la hauteur (usuelle) $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([\Lambda_1 \cap \Lambda_2])$ du cycle $[\Lambda_1 \cap \Lambda_2]$ est non nulle, cette condition suffisante est aussi nécessaire.

Quant au terme $Q(n)$, comme cela résulte des constructions, il traduit le défaut d'orthogonalité des sous-espaces linéaires $\Lambda_{1,\sigma}(\mathbb{C})$ et $\Lambda_{2,\sigma}(\mathbb{C})$ de $\mathbb{P}_{E,\sigma}(\mathbb{C})$. Il est tentant de vouloir attribuer à ce terme une signification géométrique analogue à celle des termes de dégénérescence précédents, c'est-à-dire de considérer ce défaut d'orthogonalité comme une dégénérescence de l'intersection de Λ_1 et Λ_2 aux places infinies. Plus précisément, il est frappant de remarquer que cette contribution archimédienne en $O(n^M)$ est du même ordre de grandeur que celle qu'apporterait une composante essentielle immergée de $(\overline{\Lambda_1}) \cap (\overline{\Lambda_2})$.

Voici un dernier corollaire qui constitue une généralisation (dans un cas singulier) du théorème 3.1.16.

Corollaire 4.3.6 *Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien et Λ_1 et Λ_2 deux sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}_E$. Notons $d+1$ la dimension (absolue) du sous-schéma réunion $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ de*

$\mathbb{P}_E$. *Notons* $[\Lambda_1 \cup \Lambda_2]$ *le cycle de dimension maximale associé à* $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$, i.e.

$$[\Lambda_1 \cup \Lambda_2] = \begin{cases} [\Lambda_1] + [\Lambda_2] & si\ \dim \Lambda_1 = \dim \Lambda_2 = d+1\ \ et\ \Lambda_1 \neq \Lambda_2, \\ [\Lambda_i] & si\ \dim \Lambda_i = d+1 > \dim \Lambda_{3-i}, \\ [\Lambda_1] & si\ \Lambda_1 = \Lambda_2. \end{cases}$$

Alors pour tout entier $r \geq 1$ *les hauteurs du sous-schéma* $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ *admettent un développement asymptotique de la forme*

$$h^{(n)}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \underset{n \to \infty}{=} a_{d+1} n^{d+1} + b_d n^d \log n + a_d n^d + b_{d-1} n^{d-1} \log n + \cdots + b_0 \log n + a_0 + \\ + c_{-1} n^{-1} + c_{-2} n^{-2} + \cdots + c_{-r} n^{-r} + O(n^{-r-1})$$

avec en particulier

$$a_{d+1} = \frac{(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}(1)})^{d+1}.[\Lambda_1 \cup \Lambda_2])}{(d+1)!} = \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([\Lambda_1 \cup \Lambda_2])}{(d+1)!}.$$

DÉMONSTRATION : Cela résulte directement du théorème, compte tenu des propositions 4.2.3 et 4.2.8. □

Chapitre 5

Sous-schéma de dimension générique nulle d'un espace projectif

Dans toute cette partie, on se donne K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré hermitien localement libre de rang $N+1$, $\mathbb{P}_E = \mathbf{Proj}\,\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_K} E$ l'espace projectif des quotients de E localement libres de rang 1, et $\overline{\mathcal{O}(1)}$ le faisceau en droites universel sur $\mathbb{P}_E$ muni des métriques de Fubini-Study.

Notre objectif est de donner un développement asymptotique des hauteurs d'un sous-schéma Σ de $\mathbb{P}_E$, plat de dimension relative nulle sur la base $S = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$.

5.1 Résultats et définitions préliminaires

5.1.1 Décomposition du sous-schéma en réunion de sous-schémas dont le support est une section

Soit Σ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$, plat de dimension relative 0 sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$. Le schéma Σ est projectif et quasi-fini sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$, donc fini ([EGA] III 4.4.2), donc affine ([EGA] II 6.1.4), *i.e.* $\Sigma = \mathrm{Spec}\,A$ où $A = \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)$. L'anneau A est fini et plat sur $\mathcal{O}_K$. Le polynôme de Hilbert de Σ relativement à $\mathcal{O}(1)$ est alors constant, égal à la longueur

$$l = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(A)$$

de Σ.

Fixons un plongement $K \hookrightarrow \overline{K}$ de K dans sa clôture algébrique. Soient

$$p_1, \ldots, p_e \in \mathbb{P}_E(\overline{K})$$

les points géométriques de la fibre générique de Σ. On supposera dans ce paragraphe que les points $p_1, \ldots, p_e$ sont définis sur K.

Algébriquement, les points $p_1, \ldots, p_e$ correspondent aux idéaux premiers (maximaux) $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_e$ de A_K. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, e\}$, le localisé Σ_{p_i} est le spectre de l'anneau local $A_{K,\mathfrak{M}_i}$, qui est une K-algèbre de dimension finie. Pour tout entier t, on définit la longueur (sur K) du t-ième jet de Σ en p_i comme étant l'entier

$$r_{t,p_i} = r_{t,p_i}(\Sigma) = \dim_K \mathfrak{M}_i^t / \mathfrak{M}_i^{t+1}.$$

En particulier $r_{t,p_i}(\Sigma) = 0$ si t est assez grand.

On définit la multiplicité de Σ en p_i comme étant l'entier

$$m_{p_i} = \dim_K A_{K,\mathfrak{M}_i} = \sum_t r_{t,p_i}.$$

Ainsi on a la relation

$$l = \lg(\Sigma) = \sum_i m_{p_i} = \sum_{i,t} r_{t,p_i}.$$

Notons $P_1, \ldots, P_e$ les fermetures dans $\mathbb{P}_E$ (ou, ce qui revient au même, dans Σ) de $p_1, \ldots, p_e$, respectivement, et décrivons comment ceci se traduit algébriquement.

Comme tout anneau artinien, A_K se décompose en produit de ses localisés :

$$A_K = \prod_{i=1}^{e} A_{K,\mathfrak{M}_i}$$

et, par hypothèse, pour tout $i \in \{1 \ldots e\}$, le point p_i de la fibre générique de Σ est un schéma affine d'anneau $A_K/\mathfrak{M}_i \simeq K$. Notons

$$\wp_i = \ker(A \to A_K/\mathfrak{M}_i)$$

l'idéal premier de A relevant $\mathfrak{M}_i$, de telle sorte qu'on a des identifications naturelles

$$A_{K,\mathfrak{M}_i} \simeq A_{\wp_i}$$

et

$$K \simeq A_K/\mathfrak{M}_i \simeq A_{\wp_i}/\wp_i A_{\wp_i} = \mathrm{Frac}(A/\wp_i).$$

Alors la fermeture P_i de p_i dans $\Sigma = \operatorname{Spec} A$ est le sous-schéma fermé défini par $\wp_i$. Autrement dit, P_i est un schéma affine d'anneau $A/\wp_i$; on a en outre un isomorphisme canonique $A/\wp_i \simeq \mathcal{O}_K$ (ceci résulte du fait que $A/\wp_i$ est un sous-anneau de $A_{\wp_i}/\wp_i A_{\wp_i} \simeq K$ et est fini sur $\mathcal{O}_K$). Ainsi $P_1, \ldots, P_e$ sont les images de sections $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathbb{P}_E$.

Le lemme suivant montre que $\wp_1, \ldots, \wp_e$ sont les idéaux premiers minimaux de A ; autrement dit $P_1, \ldots, P_e$ sont les supports des composantes irréductibles de Σ, de telle sorte que le cycle associé à Σ est

$$[\Sigma] = \sum_i m_{p_i}.[P_i] \in Z_1(\mathbb{P}_E).$$

Lemme 5.1.1 *Soient K un corps, R un anneau intègre noethérien de corps de fractions K, et A un anneau fini et plat sur R. Alors un idéal premier de A est minimal si et seulement s'il est au-dessus de l'idéal nul de R. Autrement dit, les idéaux premiers minimaux de A s'identifient naturellement aux idéaux premiers (maximaux) de l'anneau artinien A_K.*

DÉMONSTRATION : Soit $i : R \longrightarrow A$ le morphisme canonique. Soit $x \in R$ non nul. Comme R est intègre, la multiplication par x est injective dans R donc, puisque A est plat sur R, elle est injective dans A. Ceci implique que i est une injection. On peut alors appliquer le premier théorème de Cohen-Seidenberg ([41] th 9.3.ii, ou [55] ch III prn 2), qui implique que tout idéal premier de A au-dessus de l'idéal nul de R est minimal. Inversement, soit $\wp$ un idéal premier minimal de A. Alors $\wp$ est un idéal premier associé du A-module A ([41] th 6.5.iii), *i.e.* il existe $a \in A$ non nul tel que $\wp = \mathrm{Ann}_A(a)$. En particulier, si $x \in \wp \cap R$, la multiplication par x n'est pas injective sur A. Ceci implique $x = 0$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Enfin on notera $\Sigma^{(i)}$ la fermeture dans Σ du localisé Σ_{p_i}. Le schéma $\Sigma^{(i)}$ est fini et plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ et son support est P_i.

Algébriquement, $\Sigma^{(i)}$ est le sous-schéma fermé de $\Sigma = \operatorname{Spec} A$ défini par le noyau du morphisme

$$A \longrightarrow A_{K,\mathfrak{M}_i} \simeq A_{\wp_i}.$$

Autrement dit, $\Sigma^{(i)}$ est un schéma affine d'anneau $A^{(i)}$, où $A^{(i)}$ est l'image de A dans $A_{\wp_i}$.

On obtient ainsi une décomposition de Σ comme réunion schématique des $\Sigma^{(i)}$:

$$\Sigma = \bigcup_{i=1\ldots e} \Sigma^{(i)}.$$

5.1.2 Métrisation des cônes tangents

On fera dans ce paragraphe l'hypothèse supplémentaire que le support de Σ est l'image P d'une section de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ dans $\mathbb{P}_E$ (par exemple, Σ est l'un des $\Sigma^{(i)}$ introduits dans le paragraphe précédent).

Soient $\mathfrak{I}_{P,\Sigma}$ et $\mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}_E}$ les faisceaux d'idéaux définissant P comme sous-schéma fermé de Σ et de $\mathbb{P}_E$, respectivement. Si t est assez grand, on a $\mathfrak{I}^t_{P,\Sigma} = 0$.

Le schéma P étant affine d'anneau $\Gamma(P, \mathcal{O}_P) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}_E}) = \mathcal{O}_K$, on confondra indifféremment faisceaux cohérents sur P et $\mathcal{O}_K$-modules de type fini.

On définit les cônes tangents en P à Σ et à $\mathbb{P}_E$ respectivement comme les P-schémas affines

$$C_P\Sigma = \operatorname{Spec} \bigoplus_{t \geq 0} \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma})$$

et

$$C_P\mathbb{P}_E = \operatorname{Spec} \bigoplus_{t \geq 0} \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}_E}).$$

On utilisera le lemme suivant, qui est en fait une conséquence de la lissité des espaces projectifs le long de leurs sections.

Lemme 5.1.2 *Soient S un schéma noethérien et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur S. Notons $\mathbb{P} =$* **Proj** $\mathrm{Sym}^{\cdot}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}$*. Soient P l'image schématique d'une section $S \longrightarrow \mathbb{P}$ et $\mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}}$ le faisceau d'idéaux définissant P. Alors pour tout entier t, le S-faisceau $\mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}}$ est localement libre, et on a un isomorphisme naturel*

$$\mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}} = \mathrm{Sym}^t_{\mathcal{O}_S}\mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}}/\mathfrak{I}^2_{P,\mathbb{P}}.$$

DÉMONSTRATION : Le résultat à prouver étant local sur S, on peut supposer que $\mathcal{E}$ est le fibré trivial de rang $N+1$. En recouvrant $\mathbb{P}^N$ par des ouverts principaux, on se ramène au cas où P est l'image de la section nulle de l'espace affine $\mathbb{A}^N$, et alors le résultat est évident. $\square$

En outre, on remarquera que, par [EGA] IV.17.2.5.1, $\mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^2_{P,\mathbb{P}_E}$ s'identifie naturellement à $\Omega^1_{\mathbb{P}_E/\mathcal{O}_K}|_P$, la fibre en P du faisceau des différentielles de $\mathbb{P}_E$. Pour alléger les notations, on notera Ω le $\mathcal{O}_K$-module

$$\Omega = \Gamma(P, \Omega^1_{\mathbb{P}_E/\mathcal{O}_K}|_P).$$

Si σ est un plongement de K dans $\mathbb{C}$, Ω_σ est l'espace cotangent à la variété complexe $(\mathbb{P}_E)_\sigma(\mathbb{C})$ en P_σ. Il peut donc être muni du produit scalaire hermitien défini par la structure kählérienne sur $(\mathbb{P}_E)_\sigma(\mathbb{C})$. Ceci définit sur Ω une structure de $\mathcal{O}_K$-module hermitien, noté $\overline{\Omega}$.

Compte tenu du lemme précédent, on peut faire l'identification

$$\mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}_E} = \mathrm{Sym}^t_{\mathcal{O}_K}\Omega,$$

et munir $\mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}_E}$ des métriques puissance symétrique induites. On obtient ainsi un fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}_E}}$ sur P.

On munit alors $\mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma}$ des métriques quotient induites par la surjection

$$\mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}_E} \twoheadrightarrow \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma}.$$

Définition 5.1.3 *Avec les conventions précédentes, la hauteur (normalisée) du cône tangent à Σ en P est*

$$h(C_P\Sigma) = \sum_{t\geq 0} \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma})}.$$

5.2 Énoncé du théorème

On revient maintenant à la situation générale : Σ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ plat de dimension relative nulle sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$. Fixons un plongement $K \hookrightarrow \overline{K}$ de K dans sa clôture algébrique. Soient

$$p_1, \ldots, p_e \in \mathbb{P}_E(\overline{K})$$

les points géométriques de la fibre générique de Σ.

Il existe une extension finie L de K telle que les points $p_1, \ldots, p_e$ soient définis sur L. On peut alors utiliser les notations du paragraphe 5.1.1 pour le sous-schéma $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$ de $\mathbb{P}_{E,\mathcal{O}_L}$ déduit de Σ par extension de l'anneau de base. Remarquons déjà que les entiers

$$m_{p_i} = m_{p_i}(\Sigma_{\mathcal{O}_L}) = m_{p_i}(\Sigma_{\mathcal{O}_{\overline{K}}})$$

et

$$r_{t,p_i} = r_{t,p_i}(\Sigma_{\mathcal{O}_L}) = r_{t,p_i}(\Sigma_{\mathcal{O}_{\overline{K}}})$$

ne dépendent pas du choix de L.

Le schéma $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$ est réunion schématique

$$\Sigma_{\mathcal{O}_L} = \bigcup_{i=1\ldots e} \Sigma_{\mathcal{O}_L}^{(i)}$$

des fermetures des localisés de sa fibre générique. Les supports des $\Sigma_{\mathcal{O}_L}^{(i)}$ sont les composantes irréductibles P_i du support de $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$, qui sont donc par hypothèse les images de sections de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L$.

On peut alors appliquer les constructions du paragraphe 5.1.2 et munir les cônes tangents $C_{P_i}\Sigma_{\mathcal{O}_L}^{(i)}$ de structures hermitiennes.

Remarque 5.2.1 On prendra bien garde à ne pas confondre $C_{P_i}\Sigma_{\mathcal{O}_L}^{(i)}$ avec le cône tangent $C_{P_i}\Sigma_{\mathcal{O}_L}$ de $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$ le long de P_i. En effet, bien qu'ils coïncident sur la fibre générique, le premier est en général seulement un sous-schéma fermé du second.

On vérifie facilement que la quantité

$$h(C_{tot}\Sigma) = \sum_i h(C_{P_i}\Sigma_{\mathcal{O}_L}^{(i)})$$

ne dépend pas du choix de L. On l'appelle hauteur (normalisée, sur K) du cône tangent total de Σ.

Notons enfin $\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}} = \coprod_i \Sigma_{\mathcal{O}_L}^{(i)}$ le schéma réunion disjointe des $\Sigma_{\mathcal{O}_L}^{(i)}$ et $\nu : \widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}} \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{O}_L}$ le morphisme naturel. On vérifie aisément que ν induit un isomorphisme naturel $(\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}})_L = \Sigma_L$ et, par ailleurs, que $\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}^{\text{réd}}$ est la normalisation de $\Sigma_{\mathcal{O}_L}^{\text{réd}}$. En particulier, $\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}$ est naturellement un sous-faisceau d'anneaux de $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}}$, et ces deux objets sont égaux sur la fibre générique ; autrement dit, $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}}/\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}$ est un faisceau de torsion sur $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$.

On vérifie aisément que le réel

$$\operatorname{ramif}^{\log}(\Sigma) = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(\Sigma_{\mathcal{O}_L}, \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}}/\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}})$$

ne dépend pas du choix de L. On l'appellera ramification logarithmique normalisée de Σ (sur K).

On peut alors énoncer le

Théorème 5.2.2 *Soit Σ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ plat de dimension relative nulle et de longueur l sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *Alors, avec les notations précédentes, les hauteurs (normalisées) du sous-schéma Σ admettent le développement asymptotique*

$$h^{(n)}(\Sigma) \underset{n\to\infty}{=} a.n \ + \ b.\log n \ + \ c \ + \ O(n^{-1})$$

où

$$a \ = \ h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([\Sigma]) \ = \ \sum_i m_{p_i}.h(p_i),$$

$$b \ = \ \frac{1}{2}\sum_{i,t}(N+t).r_{t,p_i} \ = \ \frac{l}{2}.N + \frac{1}{2}\sum_{i,t} t.r_{t,p_i}$$

et

$$c \ = \ h(C_{tot}\Sigma) \ - \ \operatorname{ramif}^{\log}(\Sigma) \ - \ \frac{l}{2}\log N! \ - \ \frac{1}{2}\sum_{i,t} r_{t,p_i}.\log t!.$$

Indiquons les grandes lignes de la démonstration du théorème. Les hauteurs de sous-schémas étant invariantes par extension de l'anneau de base, on peut supposer que les points géométriques $p_1, \dots, p_e$ de Σ sont définis sur K, de telle sorte que $h(C_{tot}\Sigma) = \sum_i h(C_{P_i}\Sigma^{(i)})$ et $\operatorname{ramif}^{\log}(\Sigma) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\log \#\Gamma(\Sigma, \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma)$.

Le morphisme

$$\nu : \widetilde{\Sigma} = \coprod_i \Sigma^{(i)} \longrightarrow \Sigma = \bigcup_i \Sigma^{(i)}$$

induit un morphisme de $\mathcal{O}_K$-modules

$$\psi_n : \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) \longrightarrow \bigoplus_i \Gamma(\Sigma^{(i)}, \mathcal{O}(n)|_{\Sigma^{(i)}}) = \Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*\mathcal{O}(n))$$

obtenu en prenant la somme directe des morphismes de restriction.

Par construction, si l'on se restreint à la fibre générique, la réunion

$$\Sigma_K = \coprod_{i=1\dots e} (\Sigma^{(i)})_K = \coprod_{i=1\dots e} \Sigma_{p_i}$$

est disjointe, de telle sorte que le morphisme $\psi_{n,K}$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

Par le lemme 1.4.1 on peut donc écrire

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\Sigma) &= \widehat{\deg}\overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)} \\ &= \sum_i \widehat{\deg}\overline{\Gamma(\Sigma^{(i)}, \mathcal{O}(n)|_{\Sigma^{(i)}})} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\sum_{\mathfrak{p}} \log\|\psi_n\|_{\mathfrak{p}} + \sum_\sigma \log\|\psi_n\|_\sigma\Big), \end{aligned} \qquad (5.2.1)$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ et σ parcourt les plongements de K dans $\mathbb{C}$.

Compte tenu de la définition des hauteurs de sous-schémas, on a

$$\widehat{\deg}\overline{\Gamma(\Sigma^{(i)}, \mathcal{O}(n)|_{\Sigma^{(i)}})} = h^{(n)}(\Sigma^{(i)}).$$

Ainsi, pour démontrer le théorème 5.2.2, il suffit, d'une part de savoir le démontrer pour les $\Sigma^{(i)}$, ou, plus généralement, de savoir démontrer le théorème sous l'hypothèse supplémentaire que le support de Σ est une section, ce qui fait l'objet de la proposition 5.2.3 ; d'autre part, de savoir estimer les normes de ψ_n (ou, en fait, certaines de leurs sommes) aux places finies et infinies, ce qui fait l'objet des propositions 5.2.4 et 5.2.5.

Proposition 5.2.3 *Sous les hypothèses du théorème 5.2.2, si l'on suppose en outre que le support de Σ est une section P de* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$*, les hauteurs schématiques de Σ admettent le développement asymptotique*

$$h^{(n)}(\Sigma) \underset{n\to\infty}{=} a.n \ + \ b.\log n \ + \ c \ + \ O(n^{-1})$$

où

$$\begin{aligned} a &= h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([\Sigma]) \ = \ l.h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([P]), \\ b &= \frac{1}{2}\sum_t (N+t).r_{t,P} \ = \ \frac{l}{2}.N + \frac{1}{2}\sum_t t.r_{t,P} \end{aligned}$$

et

$$c \ = \ h(C_P\Sigma) \ - \ \frac{l}{2}\log N! \ - \ \frac{1}{2}\sum_t r_{t,P}.\log t!.$$

Proposition 5.2.4 *Avec les notations introduites après l'énoncé du théorème 5.2.2, on a, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$:*

$$\log\|\psi_n\|_{\mathfrak{p}} = -\log\#(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}\,/\,\mathcal{O}_\Sigma)_{\mathfrak{p}}.$$

En particulier, cette quantité est nulle pour presque tout $\mathfrak{p}$.

Proposition 5.2.5 *Avec les notations précédentes, il existe un réel $\epsilon < 1$ tel que, pour tout σ, on ait*

$$\log\|\psi_n\|_\sigma \underset{n\to\infty}{=} O(\epsilon^n).$$

Compte tenu de (5.2.1), on vérifie bien que ces propositions impliquent le théorème 5.2.2. La démonstration de ces trois propositions fait l'objet des deux sections suivantes.

5.3 Cas où le support est une section

Le but de cette partie est de démontrer la proposition 5.2.3.

5.3.1 Filtration

On suppose ici que le support de Σ est un sous-schéma P, image d'une section de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ dans $\mathbb{P}_E$. Cette section détermine un sous-fibré F de E, localement libre de rang N, et tel que E/F soit localement libre de rang 1.

Si n est un entier assez grand, on munit les modules $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$ et $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ des filtrations

$$Fil^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) = \Gamma(\Sigma, \mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(n)|_\Sigma)$$

et

$$Fil^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathfrak{I}_P^t \mathcal{O}(n)).$$

Les gradués associés $gr^\cdot$ seront munis des métriques de sous-quotients (on remarquera que, par transitivité des métriques de sous-quotients lors du passage à des sous-quotients emboîtés, puisque le $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$ est déjà muni des métriques quotient de celles de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$, on peut considérer indifféremment $Fil^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$ comme un sous-quotient de $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$ ou de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$).

Avec les notations de la partie précédente, puisque le schéma Σ est affine et que le fibré $\mathcal{O}(1)$ est inversible, on a

$$r_t(\Sigma) = r_{t,P}(\Sigma) = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}\, gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma).$$

Cette dernière quantité ne dépend donc pas de n.

Lemme 5.3.1 *On a*

$$h^{(n)}(\Sigma) = \sum_{t \geq 0} \widehat{\deg}\left(\overline{gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)}\right).$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la définition des hauteurs des sous-schémas, et de l'additivité du degré arakelovien. □

5.3.2 Un théorème de presque-isométrie

Pour tout t on a une surjection naturelle

$$gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \twoheadrightarrow gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma).$$

On note $K_t(n)$ le noyau de cette surjection, et on munit $gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n)$ des métriques quotient. Ainsi on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-modules projectifs de type fini

$$\beta_{n,t} : gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n) \xrightarrow{\sim} gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$$

qui n'est en général pas isométrique.

On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}&\left(\overline{gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)}\right)\\ &= \widehat{\deg}\left(\overline{gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n)}\right) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|\det \beta_{n,t}\|_\sigma. \quad (5.3.1)\end{aligned}$$

On se propose maintenant d'estimer ces $\|\det \beta_{n,t}\|_\sigma$. Ayant fixé un plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, on obtient un problème purement archimédien. On pourra donc supposer que E est un espace hermitien de dimension $N+1$, que Σ est un sous-schéma fermé de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_E$ dont le support est un point, et faire les constructions analogues à celles qui précèdent.

Théorème 5.3.2 *Sous ces hypothèses, pour tout t fixé, on a quand n tend vers l'infini :*

$$\| \det \beta_{n,t} \| = 1 - O(n^{-1}).$$

Démonstration : Soient Δ l'orthogonal de F dans E (où F est l'hyperplan de E défini par P), et δ un générateur unitaire de Δ. D'après la proposition 1.3.5, l'espace $A(n) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ admet une décomposition en somme directe orthogonale

$$A(n) = \overset{\perp}{\bigoplus_{0 \leq s \leq n}} A(n)_s$$

où $A(n)_s$ est l'image de l'application composée

$$S^s F \otimes \Delta^{\otimes n-s} \hookrightarrow S^n E \xrightarrow{\sim} A(n).$$

En outre, l'égalité

$$Fil^t A(n) = \overset{\perp}{\bigoplus_{t \leq s \leq n}} A(n)_s$$

induit des identifications naturelles isométriques valables pour tout n assez grand

$$\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) / \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathfrak{I}_P^{t+1} \mathcal{O}(n)) = A(n) / Fil^{t+1} A(n) = \overset{\perp}{\bigoplus_{0 \leq s \leq t}} A(n)_s$$

et

$$A(n)_s = gr^s \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)).$$

On note

$$I_\Sigma(n) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathfrak{I}_\Sigma \mathcal{O}(n)) \subset A(n).$$

Posons alors

$H_0 = A(n) \ / \ ((Fil^t A(n) \cap I_\Sigma(n)) + Fil^{t+1} A(n))$
$Y_0 = Fil^t A(n) \ / \ ((Fil^t A(n) \cap I_\Sigma(n)) + Fil^{t+1} A(n))$
$Z_0 = A(n) \ / \ Fil^t A(n) \ = \ (Fil^t A(n))^\perp$
$T_0 = (I_\Sigma(n) + Fil^{t+1} A(n)) \ / \ ((Fil^t A(n) \cap I_\Sigma(n)) + Fil^{t+1} A(n)).$

On a ainsi par construction

$$H_0 = Y_0 \overset{\perp}{\oplus} Z_0$$

et

$$T_0 \cap Y_0 = \{0\}.$$

En outre, on a des isomorphismes isométriques naturels

$$gr^t \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) / K_t(n) = Y_0$$

et

$$gr^t \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) = (Y_0 + T_0) / T_0.$$

Ainsi la quantité $\| \det \beta_{n,t} \|$ à estimer est égale à la norme du déterminant de l'isomorphisme

$$Y_0 \xrightarrow{\sim} (Y_0 + T_0)/T_0,$$

ou encore :

$$\| \det \beta_{n,t} \| = d_{Y_0,T_0}$$

où d_{Y_0,T_0} est la norme du déterminant de l'isomorphisme

$$Y_0 \times T_0 \xrightarrow{\sim} Y_0 + T_0$$

défini dans la section 1.2.2.

Soit d un entier (qu'on fera ensuite tendre vers l'infini). De la même façon que précédemment, posons

$H_1 = A(n+d) \ / \ ((Fil^t A(n+d) \cap I_\Sigma(n+d)) + Fil^{t+1} A(n+d))$

$Y_1 = Fil^t A(n+d) \ / \ ((Fil^t A(n+d) \cap I_\Sigma(n+d)) + Fil^{t+1} A(n+d))$

$Z_1 = A(n+d) \ / \ Fil^t A(n+d)$

$T_1 = (I_\Sigma(n+d) + Fil^{t+1} A(n+d)) \ / \ ((Fil^t A(n+d) \cap I_\Sigma(n+d)) + Fil^{t+1} A(n+d)),$

et considérons l'application

$$\varphi : H_0 \longrightarrow H_1$$

induite par l'application $m_{\delta^{\otimes d}}$ de multiplication par $\delta^{\otimes d}$ sur $A(n)$.

L'application $m_{\delta^{\otimes d}}$ envoie $A(n)$ dans $A(n+d)$, préserve les filtrations de ces espaces et envoie $I_\Sigma(n)$ dans $I_\Sigma(n+d)$. En outre, elle envoie bijectivement $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)/\mathfrak{I}_P^{t+1}\mathcal{O}(n))$ sur $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n+d)/\mathfrak{I}_P^{t+1}\mathcal{O}(n+d))$. Ceci implique que φ est bijective, et vérifie :
$\varphi(Y_0) = Y_1$, $\varphi(Z_0) = Z_1$, $\varphi(T_0) = T_1$.

L'espace Z_0 est somme directe orthogonale

$$Z_0 = \overset{\perp}{\bigoplus_{0 \leq s \leq t-1}} A(n)_s$$

de sous-espaces caractéristiques de $m_{\delta^{\otimes d}}$, de valeurs caractéristiques associées

$$\lambda_s = \left(\frac{(n+N).(n+N-1)\dots(n-s+1)}{(n+d+N).(n+d+N-1)\dots(n+d-s+1)} \right)^{1/2}$$

(cf. proposition 1.3.5). On remarque que la suite des λ_s est décroissante, de telle sorte qu'en posant

$$\zeta_\varphi = \lambda_{t-1},$$

on a

$$\|\varphi(z_0)\| \geq \zeta_\varphi \|z_0\|$$

pour tout $z_0 \in Z_0$.

Par ailleurs Y_0 est un quotient de l'espace caractéristique $A(n)_t$, sur lequel $m_{\delta^{\otimes d}}$ est une similitude de rapport λ_t. Ainsi, en posant

$$\eta_\varphi = \lambda_t,$$

on a

$$\|\varphi(y_0)\| = \eta_\varphi \|y_0\|$$

pour tout $y_0 \in Y_0$.

Les hypothèses de la proposition 1.2.28 sont toutes vérifiées, et l'on peut appliquer le corollaire 1.2.29 et l'estimation (1.3.2) qui donnent

$$1 \geq \|\det \beta_{n+d,t}\| = d_{Y_1,T_1} \geq \left(1 - \left(1 + \kappa_0^2 \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\right)^{-1}\right)^{1/2.\min(\dim Y_1, \dim T_1)} = \ldots$$

$$\cdots = \left(1 - \left(1 + \kappa_0^2 \frac{\lambda_{t-1}^2}{\lambda_t^2}\right)^{-1}\right)^{1/2.\min(\dim Y_1, \dim T_1)} \underset{d\to\infty}{=} 1 - O(d^{-1})$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remarque 5.3.3 Compte tenu de la proposition 1.2.21, on obtient un résultat plus fin : pour t fixé, toutes les valeurs caractéristiques de $\beta_{n,t}$ sont dans un intervalle de la forme $[1 - O(n^{-1}), 1]$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi on peut considérer d'une certaine façon que $\beta_{n,t}$ «tend» à devenir une isométrie.

On notera donc que, dans le cas particulier étudié ici, le théorème constitue une version considérablement renforcée de la proposition 3.1.14.

5.3.3 Conclusion

Il s'agit maintenant d'estimer le terme $\widehat{\deg}\overline{gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n)}$ de la formule (5.3.1).

Proposition 5.3.4 *On a*

$$\widehat{\deg}\overline{gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n)}$$
$$= n.r_t.h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P) + \widehat{\deg}\overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma})} + \frac{r_t}{2}.\log\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right),$$

où $\overline{\mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma}}$, considéré comme $\mathcal{O}_K$-module métrisé, est la t-ième composante de l'algèbre du cône tangent à Σ en P, munie des métriques utilisées dans la définition 5.1.3, et où r_t est le rang de $\mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma}$.

Démonstration : Notons $\overline{\Omega}$ le $\mathcal{O}_K$-module hermitien

$$\Omega = \Omega^1_{\mathbb{P}_E/\mathcal{O}_K}|_P = \Gamma(P, \mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^2_{P,\mathbb{P}_E})$$

muni à l'infini des produits scalaires hermitiens définis par la métrique kählérienne sur le fibré cotangent de $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$, comme cela a été indiqué dans le paragraphe 5.1.2.

Le schéma P étant affine et canoniquement isomorphe à $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on considérera indifféremment tous les objets en jeu soit comme des faisceaux cohérents sur P, soit comme des

$\mathcal{O}_K$-modules de type fini. On a alors des isomorphismes naturels valables pour tout entier n assez grand :

$$gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) = \mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}_E} \otimes \mathcal{O}(n)|_P = S^t\Omega \otimes \mathcal{O}(n)|_P$$

et

$$gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) = \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma} \otimes \mathcal{O}(n)|_P$$

qui induisent un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_t(n) & \longrightarrow & gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) & \longrightarrow & gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & {\scriptstyle f}\big\downarrow\simeq & & \big\downarrow\simeq & & \\ & & & & S^t\Omega \otimes \mathcal{O}(n)|_P & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma} \otimes \mathcal{O}(n)|_P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'où un isomorphisme (non isométrique en général)

$$g : gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma} \otimes \mathcal{O}(n)|_P$$

induit par f. On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} &\widehat{\deg}\overline{gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n)} \\ &\quad = \widehat{\deg}\overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma} \otimes \mathcal{O}(n))} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma \log\|\det g\|_\sigma \\ &\quad = r_t.\widehat{\deg}\overline{\Gamma(P, \mathcal{O}(n))} + \widehat{\deg}\overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma})} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma \log\|\det g\|_\sigma \\ &\quad = n.r_t.h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P) + \widehat{\deg}\overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma})} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma \log\|\det g\|_\sigma. \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration de la proposition, il faut calculer les $\|\det g\|_\sigma$. Fixons donc une place σ, et munissons tous les objets des structures hermitiennes associées.

Le point P définit un hyperplan F de E, et on a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\kappa : T^*_{P,\mathbb{C}}\mathbb{P}_E = \Omega = I_{P,\mathbb{P}_E}/I^2_{P,\mathbb{P}_E} \simeq F \otimes \mathcal{O}(-1)|_P.$$

Le terme de gauche de cet isomorphisme est muni du produit scalaire défini par la métrique kählérienne, tandis que le terme de droite est muni du produit scalaire induit par celui de E et par la métrique de Fubini-Study.

Lemme 5.3.5 *L'isomorphisme κ est une isométrie.*

DÉMONSTRATION : Quitte à choisir une base orthonormale de E, on peut supposer que $\mathbb{P}_E$ est l'espace projectif standard $\mathbb{P}^N$. Par invariance du problème sous les transformations unitaires, on peut supposer que P est le point de coordonnées homogènes $(1 : 0 : \ldots : 0)$. Alors $F \otimes \mathcal{O}(-1)|_P$ s'identifie à l'espace $\mathbb{C}^N$ muni du produit scalaire canonique, tandis que, si l'on note $(dz_j)_j$ les coordonnés sur $\mathbb{C}^N$, le produit scalaire sur $T^*_{P,\mathbb{C}}\mathbb{P}_E$ est donné par la 2-forme $i/2\pi.\sum_j dz_j \wedge \overline{dz_j}$. Compte tenu des conventions (1.1.5) et (1.1.6), ces deux métriques sont égales. □

Lemme 5.3.6 *L'isomorphisme*

$$f : gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\sim} S^t\Omega \otimes \mathcal{O}(n)|_P$$

est une similitude de rapport

$$\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right)^{1/2}.$$

Démonstration : On utilise la factorisation de f en

$$gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\sim} S^tF \otimes \mathcal{O}(n-t)|_P \xrightarrow{(S^t\kappa\otimes 1)^{-1}} S^t\Omega \otimes \mathcal{O}(n)|_P.$$

Par la formule (1.3.1), la première flèche est une similitude de rapport $\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right)^{1/2}$, tandis que par le lemme précédent, $S^t\kappa \otimes 1$ est une isométrie, ce qui donne le résultat. □

Terminons maintenant la démonstration de la proposition. La métrique sur $\mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma} \otimes \mathcal{O}(n)|_P$ étant la métrique quotient induite par π, on trouve que g est définie par passage au quotient de la similitude f. Ainsi g est une similitude de même rapport, et on a

$$\log \|\det g\| = \frac{1}{2}.\operatorname{rg}(g).\log\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right) = \frac{r_t}{2}.\log\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition 5.2.3. En mettant bout à bout le lemme 5.3.1, la formule (5.3.1), le théorème 5.3.2 et la proposition 5.3.4, on trouve

$$\begin{aligned} h^{(n)}(\Sigma) &= \sum_{t\geq 0} \widehat{\deg}\left(\overline{gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)}\right) \\ &= \sum_{t\geq 0} \widehat{\deg}\left(\overline{gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n)}\right) + O(n^{-1}) \\ &= \sum_{t\geq 0} (n.r_t.h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P) + \\ &\qquad + \widehat{\deg}\overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma})} + \frac{r_t}{2}.\log\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right) + O(n^{-1})). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$\log\frac{(n+N)!}{(n-t)!} \underset{n\to\infty}{=} (N+t).\log n + O(n^{-1})$$

on trouve

$$h^{(n)}(\Sigma) = \ a.n \ + \ b.\log n \ + \ c \ + O(n^{-1})$$

avec :

$$
\begin{aligned}
a &= \sum_{t\geq 0} r_t.h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P) \;=\; l.h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P) \;=\; h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([\Sigma]),\\
b &= \frac{1}{2}\sum_{t\geq 0}(N+t).r_t \;=\; \frac{l}{2}.N + \frac{1}{2}\sum_{t\geq 0} t.r_t
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
c &= \sum_{t\geq 0} \widehat{\deg}\overline{\Gamma(P,\mathfrak{I}^t_{P,\Sigma}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\Sigma})} \;-\; \sum_{t\geq 0}\frac{r_t}{2}\log(N!t!)\\
&= h(C_P\Sigma) \;-\; \frac{l}{2}\log N! \;-\; \frac{1}{2}\sum_{t\geq 0} r_t.\log t!.
\end{aligned}
$$

Ceci démontre la proposition 5.2.3.

5.4 Déduction du cas général

5.4.1 Étude aux places non-archimédiennes

On se propose ici de démontrer la proposition 5.2.4. On reprend donc les notations du paragraphe 5.2 et on se donne $\mathfrak{p}$ un point fermé de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$.

Définition 5.4.1 *On appelle anneau semi-local un anneau n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. Un schéma X sera dit semi-local si X est le spectre d'un anneau semi-local. Il revient au même de dire que X est affine et n'a qu'un nombre fini de points fermés.*

Ainsi, tout schéma fini sur le spectre d'un anneau local est semi-local. En particulier, $\Sigma_{\mathfrak{p}} = \Sigma \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ est semi-local.

Proposition 5.4.2 *Soit X un schéma semi-local. Alors tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X est trivial.*

DÉMONSTRATION : Notons $x_1,\ldots,x_r$ les points fermés de X. Par le théorème chinois, pour tout i, il existe $f_i \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ telle que pour tout j, on ait $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ dans le corps résiduel de x_j. Par ailleurs, puisque X est affine, en tout point $\mathcal{L}$ est engendré par ses sections globales. Alors si l_i est une section globale de $\mathcal{L}$ engendrant $\mathcal{L}$ en x_i, $l = x_1l_1 + \cdots + x_rl_r$ est une section globale de $\mathcal{L}$ l'engendrant en tout point. Ceci démontre que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X.l$ est trivial. □

On est maintenant en mesure de prouver la proposition 5.2.4. Puisque Σ est affine sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur Σ, on a un isomorphisme naturel

$$
\Gamma(\Sigma,\mathcal{L})_{\mathfrak{p}} = \Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}},\mathcal{L}),
$$

et il en est de même pour $\widetilde{\Sigma}$. Soit maintenant l une section de $\Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}}, \mathcal{O}(n))$ qui trivialise $\mathcal{O}(n)$ sur $\Sigma_{\mathfrak{p}}$. Alors $\nu^* l$ trivialise $\nu^*\mathcal{O}(n)$ sur $\widetilde{\Sigma}$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}}, \mathcal{O}_{\Sigma_{\mathfrak{p}}}) & \xrightarrow{\psi_{0,\mathfrak{p}}} & \Gamma(\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}}}) \\
l \big\downarrow \simeq & & \nu^* l \big\downarrow \simeq \\
\Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}}, \mathcal{O}(n)) & \xrightarrow{\psi_{n,\mathfrak{p}}} & \Gamma(\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}}, \nu^*\mathcal{O}(n)).
\end{array}$$

Or $\psi_{0,\mathfrak{p}}$ s'identifie canoniquement à l'injection naturelle $\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}}}$. Ainsi $\psi_{0,\mathfrak{p}}$ et $\psi_{n,\mathfrak{p}}$ sont toutes deux injectives et ont des conoyaux isomorphes, de telle sorte que

$$\|\psi_n\|_{\mathfrak{p}} = \#(\operatorname{coker} \psi_{n,\mathfrak{p}})^{-1} = \#(\operatorname{coker} \psi_{0,\mathfrak{p}})^{-1} = \#(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} \,/\, \mathcal{O}_{\Sigma})_{\mathfrak{p}}{}^{-1},$$

ce qu'il fallait démontrer.

5.4.2 Étude aux places archimédiennes

On se propose ici de démontrer la proposition 5.2.5. En fait, le problème étant purement archimédien, on va démontrer le résultat suivant, un peu plus général :

Proposition 5.4.3 *Soient E un espace hermitien de dimension $N+1$ et Σ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ qui est réunion (disjointe) d'un nombre fini de sous-schémas $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_e$ dont les supports respectifs sont des points $p_1, \ldots, p_e$ (ainsi Σ est de dimension 0). Pour tout entier n assez grand, munissons $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n))$ ainsi que les $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ des normes quotient de la norme L^2 sur $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$. Alors il existe un réel $\epsilon \in [0,1[$ tel que, pour tout n assez grand, la norme du déterminant de l'application naturelle*

$$\psi_n : \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \prod_{1\leq i\leq e}^{\perp} \Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$$

soit dans l'intervalle $[1-\epsilon^n, 1]$.

Pour démontrer cette proposition, il nous faut établir quelques lemmes et résultats préliminaires. Pour tout i, notons F_i l'hyperplan de E représenté par p_i et Δ_i l'orthogonal de F_i. Choisissons un élément s_i de norme 1 dans Δ_i. Alors, grâce à l'isomorphisme naturel $E \simeq \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(1))$, on peut considérer s_i comme une section globale de $\mathcal{O}(1)$, de norme $(N+1)^{-1/2}$ (cf. lemme 1.3.4). On a alors $\|s_i\|(p_i) = 1$ et $\|s_i\|(p) < 1$ si $p \neq p_i$. En outre, les p_i étant deux à deux distincts, on peut trouver des voisinages U_i de p_i (pour la topologie complexe) deux à deux disjoints. Il existe alors un réel $\eta < 1$ tel que, pour tout i, on ait $\|s_i\|(p) < \eta$ pour tout $p \notin U_i$. Ceci implique que pour tout couple d'indices (i,j) avec $i \neq j$, et pour tout $p \in \mathbb{P}_E$, on a

$$| < s_i, s_j >_{FS} (p)| < \eta. \tag{5.4.1}$$

Soit l la longueur de Σ. Notons $\mathfrak{I}_{p_i}$ le faisceau d'idéaux définissant p_i comme sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ et $p_i^{<l>}$ le sous-schéma obtenu en épaississant p_i à l'ordre l, c'est-à-dire le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}^l_{p_i}$. Alors pour tout i, Σ_i est un sous-schéma fermé de $p_i^{<l>}$.

Soit n un entier assez grand. La présence du produit scalaire L^2 sur $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ permet d'identifier $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n))$ ainsi que les $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ et les $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ à des sous-espaces de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$, plus précisément aux orthogonaux des noyaux des surjections correspondantes. En outre, par transitivité des normes quotient, cette identification fait de $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ un sous-espace de $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n))$ et de $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$.

Si l'on note $A(n) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$, conformément aux notations du paragraphe 1.3.2 on obtient pour tout i une filtration décroissante

$$Fil_i^t A(n) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathfrak{I}^t_{p_i}\mathcal{O}(n))$$

sur $A(n)$ définie par l'ordre d'annulation en p_i, et pour chaque t, le gradué associé $A(n)_{t,i} = Fil_i^t A(n)/Fil_i^{t+1}A(n)$ s'identifie canoniquement à l'image de l'application composée naturelle

$$S^t F_i \otimes \Delta_i^{\otimes n-t} \longrightarrow S^n E \xrightarrow{\sim} A(n).$$

Ceci implique notamment que, pour $l \geq 1$,

$$\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n)) = Fil_i^l A(n)^{\perp} = \overset{\perp}{\bigoplus_{0\leq k<l}} A(n)_{k,i}$$

s'identifie canoniquement à l'image de l'application composée naturelle

$$S^{l-1}E \otimes \Delta_i^{\otimes n-l+1} \longrightarrow S^n E \xrightarrow{\sim} A(n).$$

Autrement dit, si on note

$$m_{s_i^{n-l+1}} : A(l-1) \longrightarrow A(n)$$

l'application définie par la multiplication par $s_i^{n-l+1} \in A(n-l+1)$, on a

$$\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n)) = m_{s_i^{n-l+1}}(A(l-1)).$$

Lemme 5.4.4 *Si $i \neq j$, il existe un réel $\epsilon < 1$ tel que, si n est assez grand, en considérant $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ et $\Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ comme des sous-espaces de $A(n)$, la norme de la projection orthogonale de $\Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ sur $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ vérifie la majoration suivante :*

$$\|p_{\Gamma(p_i^{<l>},\mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(p_j^{<l>},\mathcal{O}(n))}\| \leq \epsilon^n.$$

Démonstration : Par la proposition 1.3.5 et par la remarque qui la suit, les $A(l-1)_{k,i}$ pour $0 \leq k < l$ sont les espaces caractéristiques de l'application de multiplication par s_i^{n-l+1}

$$m_{s_i^{n-l+1}} : \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(l-1)) \longrightarrow \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$$

et la plus petite des valeurs caractéristiques $\lambda(n)_{k,i}$ associées vérifie une minoration de la forme

$$\lambda(n)_{l-1,i} \underset{n\to\infty}{>} c.n^{-\frac{1}{2}(N+l-1)}.$$

Ainsi il existe une constante $c > 0$ telle que si n est assez grand, tout élément

$$t_i \in \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$$

s'écrive de façon unique

$$t_i = s_i^{n-l+1}.u_i$$

pour $u_i \in \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(l-1))$, et on a

$$\|t_i\| \geq c.n^{-\frac{1}{2}(N+l-1)}\|u_i\|.$$

D'autre part, considérons

$$t_j = s_j^{n-l+1}.u_j \in \Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n)).$$

Appliquant (5.4.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned}
| < t_i, t_j > | &= \left| \int_{\mathbb{P}_E} < t_i, t_j >_{FS} (p) d\mu(p) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{P}_E} < u_i, u_j >_{FS} (p) (< s_i, s_j >_{FS} (p))^{n-l+1} d\mu(p) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{P}_E} | < u_i, u_j >_{FS} (p) | .\eta^{n-l+1} d\mu(p) \\
&\leq \|u_i\|.\|u_j\|.\eta^{n-l+1}.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout choix de ϵ dans l'intervalle $]\eta, 1[$, on a, grâce aux inégalités précédentes et si n est assez grand :

$$\begin{aligned}
\|p_{\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))}\| &= \min_{\substack{t_i \in \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n)) \setminus \{0\} \\ t_j \in \Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n)) \setminus \{0\}}} \frac{< t_i, t_j >}{\|t_i\|.\|t_j\|} \\
&\leq \min_{\substack{u_i \in \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(l)) \setminus \{0\} \\ u_j \in \Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(l)) \setminus \{0\}}} \frac{\|u_i\|.\|u_j\|.\eta^{n-l+1}}{\|u_i\|.\|u_j\|.c^2.n^{-(N+l-1)}} \\
&\leq \epsilon^n,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 5.4.5 *Si $i \neq j$, il existe un réel $\epsilon < 1$ tel que, si n est assez grand, en considérant $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ et $\Gamma(\Sigma_j, \mathcal{O}(n))$ comme des sous-espaces de $A(n)$, la norme de la projection orthogonale de $\Gamma(\Sigma_j, \mathcal{O}(n))$ sur $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ vérifie la majoration suivante :*

$$\|p_{\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(\Sigma_j, \mathcal{O}(n))}\| \leq \epsilon^n.$$

DÉMONSTRATION : Puisque pour tout k, $\Gamma(\Sigma_k, \mathcal{O}(n))$ est un sous-espace de $\Gamma(p_k^{<l>}, \mathcal{O}(n))$, on a

$$\|p_{\Gamma(\Sigma_i,\mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(\Sigma_j,\mathcal{O}(n))}\| \leq \|p_{\Gamma(p_i^{<l>},\mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(p_j^{<l>},\mathcal{O}(n))}\|.$$

On conclut alors en appliquant le lemme précédent. $\square$

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition. En posant $H = \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n))$ et $H_i = \Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$, l'application ψ_n est égale à l'application

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{H_1,\ldots,H_e} : & H & \longrightarrow & H_1 \times \cdots \times H_e \\ & x & \longmapsto & (p_{H_1}(x), \ldots, p_{H_e}(x)) \end{array}$$

dont les composantes sont les projections orthogonales sur $H_1, \ldots, H_e$. Par le lemme 1.2.22 et la proposition 1.2.4, la norme du déterminant de γ est égale à la quantité $d_{H_1,\ldots,H_e}$ introduite au paragraphe 1.2.3. Alors l'encadrement souhaité sur $d_{H_1,\ldots,H_e}$ est fourni directement par le corollaire 1.2.27 à partir du lemme précédent.

5.5 Applications

5.5.1 Hauteurs des matrices d'interpolation

Le but de cette partie est de résoudre une question posée par Michel LAURENT dans [38] à propos du terme constant du développement asymptotique des hauteurs de matrices d'interpolation. On montre que ces hauteurs s'interprètent naturellement en termes de hauteurs de sous-schémas, auxquelles on peut alors appliquer le théorème 5.2.2. On donne ensuite diverses interprétations de ce terme constant en fonction de la géométrie des sous-schémas mis en jeu.

Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Soient l et N deux entiers, et α_μ $(1 \leq \mu \leq l)$ des points de $\mathbb{P}^N(K)$ deux à deux distincts. Notons Z l'adhérence de la réunion des α_μ dans $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$. C'est un sous-schéma fermé, plat de dimension relative zéro sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, et de longueur l.

Pour tout $\mu \in \{1, \ldots, l\}$, choisissons des coordonnées homogènes

$$(\alpha_{\mu,0} : \ldots : \alpha_{\mu,N})$$

de α_μ, à valeurs dans K. Pour tout entier n, ceci permet de définir une application «d'évaluation»

$$\begin{array}{rccc} A_n : & K[X_0, \ldots, X_N]_n & \longrightarrow & K^l \\ & P & \mapsto & (P(\alpha_{\mu,0}, \ldots, \alpha_{\mu,N}))_{1 \leq \mu \leq l} \end{array}$$

où $K[X_0, \ldots, X_N]_n$ est le K-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n en les variables $X_0, \ldots, X_N$. Pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, on identifie $K[X_0, \ldots, X_N]_n \otimes_\sigma \mathbb{C}$ au produit symétrique $\operatorname{Sym}^n(\mathbb{C}^{N+1})$ au moyen de la base formée des monômes en $X_0, \ldots, X_N$, et on le munit du produit scalaire hermitien puissance symétrique n-ième du produit scalaire hermitien standard sur $\mathbb{C}^{N+1}$. On munit aussi $K^l \otimes_\sigma \mathbb{C} = \mathbb{C}^l$ du produit scalaire hermitien standard.

Dans [38] on définit la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique f_Z de Z par la formule

$$f_Z(n) = h(A_n)$$

où $h(A_n)$ est la hauteur (normalisée) de l'application linéaire A_n, c'est-à-dire

$$h(A_n) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \log \| \bigwedge^l A_n\|_\sigma + \sum_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K} \log \| \bigwedge^l A_n\|_{\mathfrak{p}}\Big)$$

(pour que ceci ait un sens il faut supposer que A_n est de rang maximal, ce qui est le cas dès que n est assez grand). Par la formule du produit, cette expression ne dépend bien que du sous-schéma Z, et pas des choix des coordonnées projectives des points.

Il est démontré dans [38] qu'il existe une constante, notée $\chi(\mathcal{O}_Z)$ (par analogie avec le théorème de Hilbert-Samuel «classique» pour les courbes algébriques), telle que la fonction f_Z admette le développement asymptotique

$$f_Z(n) \underset{n\to\infty}{=} nh([Z]) + \chi(\mathcal{O}_Z) + o(1),$$

où $h([Z]) = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([Z]) = (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}(1)})^N.[Z])$ est la hauteur du cycle associé à Z. Il y est demandé d'interpréter cette constante en fonction de la ramification de Z sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, notamment en fonction du faisceau des différentielles relatives $\Omega_{Z/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K}$. On se propose ici, dans un premier temps, de relier la fonction f_Z aux hauteurs du sous-schéma Z et, dans un second temps, de fournir l'interprétation souhaitée de ce terme constant $\chi(\mathcal{O}_Z)$.

Proposition 5.5.1 *Sous les hypothèses précédentes, on a, pour tout n assez grand :*

$$f_Z(n) = h^{(n)}(Z) - \frac{l}{2}\log\binom{N+n}{N},$$

où $h^{(n)}(Z)$ est la hauteur du sous-schéma Z de l'espace projectif $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ relativement au fibré $\mathcal{O}(n)$ muni de la métrique de Fubini-Study.

DÉMONSTRATION : Notons $\overline{E}_n$ le $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\Gamma(\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}, \mathcal{O}(n))$ muni des normes $\|.\|_{L^2(\mathbb{P}^N_\sigma)}$. Notons $\overline{F}_n$ le $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\operatorname{Sym}^n(\mathcal{O}_K^{N+1})$ tel que, pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\operatorname{Sym}^n(\mathcal{O}_K^{N+1})_\sigma = \operatorname{Sym}^n(\mathbb{C}^{N+1})$ soit muni de la norme puissance symétrique de la norme standard de $\mathbb{C}^{N+1}$. Notons enfin $\overline{G}$ le $\mathcal{O}_K$-module hermitien $(\mathcal{O}_K)^l$ muni des normes standard. Soit

$$\varphi : E_n \xrightarrow{\sim} F_n$$

l'isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-modules déterminé par la base $X_0, \ldots, X_N$ de $\Gamma(\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}, \mathcal{O}(1))$. Par définition, A_n définit une application K-linéaire

$$A_n : (F_n)_K \longrightarrow G_K$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
(E_n)_K & \xrightarrow{\varphi_K} & (F_n)_K \\
{\scriptstyle (\mathrm{restr}_{n,Z})_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A_n} \\
\Gamma(Z, \mathcal{O}(n)|_Z)_K & \xrightarrow{\sim} & G_K
\end{array}$$

où $\mathrm{restr}_{n,Z} : \Gamma(\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}(n)|_Z)$ est l'application de restriction.

Notons $J_n = F_n \cap \ker A_n$ et $I_n = \varphi^{-1}(J_n)$. Si l'on munit F_n/J_n des normes quotient de celles de $\overline{F}_n$, et si l'on suppose n assez grand, A_n induit par passage au quotient un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$\widetilde{A}_n : (F_n/J_n)_K \xrightarrow{\sim} G_K$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}\,\overline{F_n/J_n} &= h(\widetilde{A}_n) + \widehat{\deg}\,\overline{G} \\
&= h(A_n).
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Par ailleurs, n étant toujours supposé assez grand, on a $I_n = \ker \mathrm{restr}_{n,Z}$ et donc, par définition des hauteurs schématiques,

$$\widehat{\deg}\,\overline{E_n/I_n} = h^{(n)}(Z). \tag{5.5.2}$$

De (5.5.1) et (5.5.2) on déduit l'égalité

$$h(A_n) = h^{(n)}(Z) - h(\bigwedge^l \widetilde{\varphi})$$

où, conformément à (1.4.2),

$$\begin{aligned}
h(\bigwedge^l \widetilde{\varphi}) &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|\bigwedge^l \widetilde{\varphi}\|_\sigma + \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K} \log \|\bigwedge^l \widetilde{\varphi}\|_{\mathfrak{p}}\Big) \\
&= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|\bigwedge^l \widetilde{\varphi}\|_\sigma
\end{aligned}$$

est la hauteur de l'isomorphisme $\widetilde{\varphi} : E_n/I_n \xrightarrow{\sim} F_n/J_n$ induit de φ par passage au quotient. Or, pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, le lemme 1.3.4 indique que φ_σ est une similitude de rapport $\binom{n+N}{N}^{1/2}$. Il en est donc de même pour $\widetilde{\varphi}_\sigma$, et ceci termine la démonstration de la proposition. $\square$

Corollaire 5.5.2 *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $\mu \in \{1, \ldots, l\}$, notons Z_μ l'adhérence schématique de α_μ dans $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ (ou, ce qui revient au même, dans Z). Soient $\widetilde{Z}$ le schéma réunion disjointe de $Z_1, \ldots, Z_l$, et*

$$\nu : \widetilde{Z} \longrightarrow Z$$

le morphisme dont les composantes sont les inclusions naturelles. Alors on a

$$\chi(\mathcal{O}_Z) = -\mathrm{ramif}^{\log}(Z) = -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(Z, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{Z}}/\mathcal{O}_Z). \tag{5.5.3}$$

Démonstration : On applique le théorème 5.2.2 avec $\Sigma = Z$. Dans la discussion précédant le théorème 5.2.2, on peut prendre $L = K$ et $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{Z}$, de telle sorte que $\mathrm{ramif}^{\log}(Z) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \#(\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{Z}}/\mathcal{O}_Z)$. Pour tout $\mu \in \{1, \dots, l\}$ on a l'égalité $\Sigma^{(\mu)} = P_\mu = Z_\mu$, de telle sorte que le cône tangent $C_{P_\mu}\Sigma^{(\mu)}$ s'identifie à $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ et est muni des métriques triviales ; en particulier, on a $h(C_{tot}\Sigma) = 0$, $r_{0,P_\mu} = 1$ et $r_{t,P_\mu} = 0$ si $t \geq 1$. On trouve donc

$$h^{(n)}(Z) \underset{n\to\infty}{=} nh([Z]) + \frac{lN}{2}\log n - \frac{l}{2}\log N! - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\log \#(\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{Z}}/\mathcal{O}_Z).$$

Compte tenu de l'estimation

$$\log \binom{N+n}{N} \underset{n\to\infty}{=} N\log n - \log N! + O(n^{-1}),$$

le corollaire se déduit en comparant le développement asymptotique précédent et celui donné à la proposition 5.5.1. □

Pour la suite, on rappelle quelques notions sur les réseaux et les discriminants, d'après [54], chapitres I et III.

Soient R un anneau de Dedekind et K le corps des fractions de R. Si M est un R-module de longueur finie, on sait (théorème de Jordan-Hölder) qu'il existe une filtration décroissante $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_m = 0$ de M et une suite $(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m)$ d'idéaux maximaux de R telles que, pour tout i, le quotient M_{i-1}/M_i soit isomorphe au R-module simple $R/\mathfrak{p}_i$ et que, à permutation près, la suite $(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m)$ ne dépend pas du choix de la filtration. On définit alors la caractéristique d'Euler-Poincaré de M, notée $\chi_R(M)$, comme l'idéal

$$\chi_R(M) = \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i, \tag{5.5.4}$$

de R, qui ne dépend pas des choix faits.

Si V est un K-espace vectoriel de dimension n, on appelle réseau (ou R-réseau) de V un sous-R-module X de V qui engendre V et est de type fini sur R. Si X et X' sont deux réseaux de V, les puissances extérieures maximales $\bigwedge^n X$ et $\bigwedge^n X'$ s'identifient naturellement à des réseaux du K-espace vectoriel de dimension un $\bigwedge^n V$. On définit la caractéristique d'Euler-Poincaré relative $\chi_R(X : X')$ comme l'unique idéal fractionnaire vérifiant

$$\bigwedge^n X' = \chi_R(X : X') \bigwedge^n X. \tag{5.5.5}$$

En particulier, si X' est inclus dans X, le R-module X/X' est de longueur finie et on a $\chi_R(X : X') = \chi_R(X/X')$.

Au moyen de la théorie des diviseurs élémentaires, on montre que si u est un K-automorphisme de V, et si X est un réseau de V, on a

$$\chi_R(X : uX) = (\det u). \tag{5.5.6}$$

Supposons maintenant que V est muni d'une forme K-bilinéaire non dégénérée T. La forme T définit un isomorphisme K-linéaire de V sur son dual, d'où l'on déduit par (1.1.3) un isomorphisme de $\bigwedge^n V$ sur son dual, ou, ce qui revient au même, un isomorphisme (que nous noterons encore T) entre K-espaces vectoriels de dimension un

$$T : \bigwedge^n V \otimes_K \bigwedge^n V \xrightarrow{\sim} K.$$

Si X est un réseau de V, le discriminant

$$\mathfrak{d}_R(X,T)$$

de X par rapport à T est par définition l'idéal fractionnaire de K image de $\bigwedge^n X \otimes_R \bigwedge^n X$ par cet isomorphisme T.

Indiquons quelques propriétés du discriminant ([54], III §2, propositions 3, 4 et 5) :

Lemme 5.5.3 *i. Si X est un R-module libre de base $(e_1, \dots, e_n)$, on a*

$$\mathfrak{d}_R(X,T) = (\det_{1\le i,j\le n} T(e_i, e_j)).$$

ii. Si $X^\vee$ est l'ensemble des $y \in V$ tels que pour tout $x \in X$ on ait $T(x,y) \in R$, alors

$$\mathfrak{d}_R(X,T) = \chi_R(X^\vee, X).$$

iii. Si X et X' sont deux réseaux de V, on a

$$\mathfrak{d}_R(X',T) = \chi_R(X,X')^2 \mathfrak{d}_R(X,T).$$

Plus loin dans le texte, on utilisera le résultat suivant :

Lemme 5.5.4 *Soient T_1 et T_2 deux formes K-bilinéaires non dégénérées sur V. Il existe un unique automorphisme K-linéaire t de V tel que pour tous x et y dans V on ait $T_2(x,y) = T_1(tx,y)$, et alors pour tout réseau X de V on a*

$$\mathfrak{d}_R(X,T_2) = (\det t)\mathfrak{d}_R(X,T_1).$$

Démonstration : Après localisation, c'est une conséquence directe du lemme 5.5.3.*i*.

Soit A une K-algèbre (commutative) de dimension finie. On appelle ordre (ou R-ordre) de A un sous-R-anneau de A qui est un réseau de A. On note $\mathrm{tr}_{A/K}$ l'application trace de A sur K, c'est-à-dire l'application K-linéaire de A dans K qui associe à tout élément a de A la trace de l'endomorphisme de multiplication par a dans A.

On dira que A est séparable si la forme K-bilinéaire «trace»

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & K \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{tr}_{A/K}(xy) \end{array} \tag{5.5.7}$$

est non-dégénérée. Si K est de caractéristique nulle, une telle K-algèbre A est séparable si et seulement si elle est réduite.

Sous ces hypothèses, si $\mathcal{O}$ est un ordre de A, on appelle discriminant de $\mathcal{O}$, noté

$$\mathfrak{d}_R(\mathcal{O}),$$

le discriminant du réseau $\mathcal{O}$ de A relativement à la forme trace (5.5.7).

Remarque 5.5.5 Puisque l'application $\mathrm{tr}_{A/K}$ envoie $\mathcal{O}$ dans R, le discriminant $\mathfrak{d}_R(\mathcal{O})$ est un idéal effectif de R.

Soient K' est une extension séparable finie de K et R' la fermeture intégrale de R dans K'. Si M est un R-module de longueur finie, on a clairement

$$\chi_{R'}(M_{R'}) = \chi_R(M)R'.$$

Si V est un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme K-bilinéaire T non dégénérée, notons T' la forme K'-bilinéaire sur $V_{K'}$ déduite de T par extension des scalaires. Pour tout R-réseau X de V, le R'-module $X_{R'}$ s'identifie naturellement à un R'-réseau de $V_{K'}$, et on a

$$\mathfrak{d}_{R'}(X_{R'}, T') = \mathfrak{d}_R(X, T)R'.$$

De ceci et du fait que la trace d'une application linéaire est invariante par extension des scalaires, on déduit que si A est une K-algèbre finie séparable et $\mathcal{O}$ un R-ordre de A, $\mathcal{O} \otimes_R R'$ s'identifie naturellement à un R'-ordre de la K'-algèbre séparable $A \otimes_K K'$, et on a

$$\mathfrak{d}_{R'}(\mathcal{O} \otimes_R R') = \mathfrak{d}_R(\mathcal{O})R'. \tag{5.5.8}$$

Notons désormais $S = \operatorname{Spec} R$, et soit Σ un schéma fini et plat de longueur l sur S. On suppose que Σ est réunion schématique de sous-schémas fermés $\Sigma^{(i)}$ $(1 \leq i \leq l)$ qui sont des sections de S deux à deux distinctes. Notons $\widetilde{\Sigma}$ le schéma réunion disjointe des $\Sigma^{(i)}$ et $\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ le morphisme naturel. Notons A la K-algèbre séparable

$$A = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_K = \Gamma(\widetilde{Z}, \mathcal{O}_{\widetilde{Z}})_K.$$

On dispose de deux ordres de A :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \\ \widetilde{\mathcal{O}} &= \Gamma(\widetilde{Z}, \mathcal{O}_{\widetilde{Z}}) = \Gamma(Z, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{Z}}). \end{aligned}$$

Proposition 5.5.6 *Sous ces hypothèses, on a*

$$\mathfrak{d}_R(\mathcal{O}) = \chi_R(\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})^2.$$

DÉMONSTRATION : Notons p_i le point générique de $\Sigma^{(i)}$. On a un isomorphisme naturel «d'évaluation» entre K-algèbres séparables

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev} : & A & \xrightarrow{\sim} & K^l \\ & f & \mapsto & (f(p_\mu))_{\mu \in \{1, \ldots, l\}}. \end{array}$$

Du fait que $\widetilde{\Sigma}$ est réunion disjointe de copies de $\operatorname{Spec} R$, l'image de $\widetilde{\mathcal{O}}$ par l'application ev est l'ordre canonique R^l de K^l, de R-base $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_l$, où les ϵ_i sont les idempotents de rang 1 de la K-algèbre K^l. Ceci implique que

$$\mathfrak{d}_R(\widetilde{\mathcal{O}}) = (\det_{1 \leq i,j \leq l} \mathrm{tr}(\epsilon_i \epsilon_j)) = (\det_{1 \leq i,j \leq l} \delta_{ij}) = (1)$$

et la proposition découle du lemme 5.5.3.*iii*. □

Dans le cas particulier où K est un corps de nombres et où R est un localisé de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K, on dispose naturellement d'une application norme, notée N, définie sur le groupe des idéaux fractionnaires de K et à valeurs dans $\mathbb{Q}_+^*$. Si M est un R-module de longueur finie, alors M est de cardinal fini et on a

$$\# M = N(\chi_R(M)). \tag{5.5.9}$$

Définition 5.5.7 *Sous ces hypothèses, soit A une K-algèbre finie séparable et $\mathcal{O}$ un ordre de A. On définit le discriminant logarithmique normalisé de $\mathcal{O}$, noté* $\operatorname{discr}_R^{\log}(\mathcal{O})$ *(ou* $\operatorname{discr}^{\log}(\mathcal{O})$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté) comme le réel*

$$\operatorname{discr}^{\log}(\mathcal{O}) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log N(\mathfrak{d}_R(\mathcal{O})).$$

Si K' est une extension finie de K, et si R' est la fermeture intégrale de R dans K', pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{I}$ de R on a

$$N(\mathfrak{I}R') = N(\mathfrak{I})^{[K':K]}.$$

De ceci et de (5.5.8) on déduit que le discriminant logarithmique normalisé est invariant par extension des scalaires :

$$\operatorname{discr}_{R'}^{\log}(\mathcal{O} \otimes_R R') = \operatorname{discr}_R^{\log}(\mathcal{O}).$$

Théorème 5.5.8 *Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $N+1$ et Z un sous-schéma* réduit *de $\mathbb{P}_E$ plat de dimension relative zéro sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. *On a alors*

$$h^{(n)}(Z) \underset{n\to\infty}{=} n.h([Z]) + \frac{\lg Z}{2} \log \binom{N+n}{N} - \frac{1}{2} \operatorname{discr}^{\log}(\mathcal{O}_Z) + O(n^{-1}).$$

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate du théorème 5.2.2, de la proposition 5.5.6 et de la formule (5.5.9). □

Corollaire 5.5.9 *Sous les hypothèses de la proposition 5.5.1 et du corollaire 5.5.2, si Z est le sous-schéma associé à une matrice d'interpolation, la K-algèbre $\mathcal{O}_Z \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ est séparable, et on a*

$$\chi(\mathcal{O}_Z) = -\frac{1}{2} \operatorname{discr}^{\log}(\mathcal{O}_Z).$$

DÉMONSTRATION : Cela découle du théorème précédent et de la proposition 5.5.1.

Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'on suppose en outre que Z est localement intersection complète. il est possible, au moyen de la théorie des résidus et de la dualité de

Grothendieck (cf. [30] et [16]), d'exprimer la valeur de la constante $\chi(\mathcal{O}_Z)$ en fonction du module des différentielles relatives de Z sur $\mathcal{O}_K$. Pour ce faire, on commence par démontrer un résultat local.

Soit R un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Notons v la valuation normalisée de R et ϖ une uniformisante.

Posons $S = \operatorname{Spec} R$, et soit Σ un schéma fini et plat de longueur l sur S. On suppose que Σ est local, est intersection complète, et est réunion schématique de sous-schémas fermés $\Sigma^{(i)}$ $(1 \leq i \leq l)$ qui sont des sections de S deux à deux distinctes (ceci implique notamment que les anneaux locaux R et $\mathcal{O}_\Sigma$ ont même corps résiduel). Notons $\widetilde{\Sigma}$ le schéma réunion disjointe des $\Sigma^{(i)}$, et $\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ le morphisme naturel.

Proposition 5.5.10 *Sous ces hypothèses, on a*

$$\chi_R(\Omega^1_{\Sigma/S}) = \mathfrak{d}(\mathcal{O}_\Sigma) = \chi_R(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma)^2.$$

DÉMONSTRATION : La deuxième égalité n'est autre que la proposition 5.5.6. Montrons la première égalité. Puisque Σ est local et intersection complète, on peut supposer que Σ est le sous-schéma de l'espace affine $\mathbb{A}^n_S = \operatorname{Spec} R[x_1, \ldots, x_n]$ défini par un idéal $I \subset (\varpi, x_1, \ldots, x_n)^2$ engendré par une suite régulière $(f_1, \ldots, f_n)$. On dispose sur Σ de la suite exacte conormale

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{A}^n_S/S}|_\Sigma \longrightarrow \Omega^1_{\Sigma/S} \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse, I/I^2 est un $\mathcal{O}_\Sigma$-module libre de rang n, de base formée des classes résiduelles $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}$ de $f_1, \ldots, f_n$. En outre, $\Omega^1_{\mathbb{A}^n_S/S}|_\Sigma$ est aussi un $\mathcal{O}_\Sigma$-module libre de rang n, de base $dx_1, \ldots, dx_n$. Dans ces bases, δ est l'application linéaire de matrice $(\partial f_j/\partial x_i)_{1\leq i,j\leq n}$. Remarquons en particulier que δ est une application $\mathcal{O}_\Sigma$-linéaire entre $\mathcal{O}_\Sigma$-modules libres de même rang, donc, puisque par hypothèse $\mathcal{O}_\Sigma$ est un R-module libre de rang l, δ est aussi une application R-linéaire entre R-modules libres de même rang ; puisque son conoyau est de torsion, δ est injective.

Par un résultat bien connu (cf. [22], appendice A, lemme A.2.6 ou exemple A.2.3, appliqué pour l'anneau $A = \mathcal{O}_\Sigma$), on a

$$\lg_{\mathcal{O}_\Sigma}(\operatorname{coker} \delta) = \lg_{\mathcal{O}_\Sigma}(\operatorname{coker} \textstyle\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \delta).$$

Puisque R est de valuation discrète et que R et $\mathcal{O}_\Sigma$ ont même corps résiduel, un $\mathcal{O}_\Sigma$-module M est de longueur finie si et seulement si il est de longueur finie en tant que R-module, et alors sa longueur sur R est égale à sa longueur sur $\mathcal{O}_\Sigma$; on a alors $\chi_R(M) = \mathfrak{m}^{\lg M}$. L'égalité précédente implique donc, en posant

$$\omega = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_\Sigma}(\textstyle\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} I/I^2, \bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \Omega^1_{\mathbb{A}^n_S/S}|_\Sigma),$$

que

$$\chi_R(\Omega^1_{\Sigma/S}) = \chi_R(\omega/\textstyle\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \delta). \tag{5.5.10}$$

Par [30] chapitre III §9 et proposition 8.2, ω est un faisceau dualisant pour le morphisme structural $\Sigma \longrightarrow S$, et on a un isomorphisme de dualité

$$\varphi : \omega = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\Sigma}(\mathcal{O}_\Sigma, \omega) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}_\Sigma, R).$$

Pour tout R-anneau $\mathcal{O}$, le R-module $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}, R)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}$-module de la façon suivante : si $f \in \mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}, R)$ et $x \in \mathcal{O}$, on définit $xf \in \mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}, R)$ par la formule $(xf)(y) = f(xy)$ pour tout $y \in \mathcal{O}$. Dans le cas particulier $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\Sigma$, la fonctorialité de la dualité de Grothendieck implique que l'isomorphisme φ est compatible à cette structure de $\mathcal{O}_\Sigma$-module, *i.e.* que φ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_\Sigma$-modules. Remarquons que ω est un $\mathcal{O}_\Sigma$-module libre de rang un ; un générateur de ω est donné par l'élément α de $\omega = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\Sigma}(\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} I/I^2, \bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \Omega^1_{\mathbb{A}^n_S/S}|_\Sigma)$ qui envoie le générateur $\overline{f_1} \wedge \cdots \wedge \overline{f_n}$ de $\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} I/I^2$ sur le générateur $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ de $\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \Omega^1_{\mathbb{A}^n_S/S}|_\Sigma$. Alors $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}_\Sigma, R)$ est un $\mathcal{O}_\Sigma$-module libre de rang un, engendré par $\varphi(\alpha)$.

Par définition, $\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \delta$ est l'élément de $\omega = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\Sigma}(\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} I/I^2, \bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \Omega^1_{\mathbb{A}^n_S/S}|_\Sigma)$ qui envoie le générateur $\overline{f_1} \wedge \cdots \wedge \overline{f_n}$ de $\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} I/I^2$ sur l'élément $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n$ de $\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \Omega^1_{\mathbb{A}^n_S/S}|_\Sigma$. Par la propriété (R6) des résidus, énoncée dans [30] chapitre III §9, et dont on pourra trouver une démonstration dans [16] appendice A (la preuve repose sur des calculs dûs à Tate et publiés dans [42], appendice), l'image de $\bigwedge^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \delta$ par φ est l'application trace de $\mathcal{O}_\Sigma$ sur R.

Notons qu'on a l'égalité

$$\bigwedge\nolimits^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \delta = t\alpha$$

avec

$$t = \det_{1 \leq i,j \leq n} \partial f_j / \partial x_i \ \in \mathcal{O}_\Sigma.$$

Ceci implique, d'une part, que

$$\chi_R(\omega / \bigwedge\nolimits^n_{\mathcal{O}_\Sigma} \delta) = \chi_R(\mathcal{O}_\Sigma / t), \tag{5.5.11}$$

et d'autre part, par $\mathcal{O}_\Sigma$-linéarité de φ et par la propriété des résidus énoncée ci-dessus, que $\mathrm{tr}_{\mathcal{O}_\Sigma/R} = t\varphi(\alpha)$, *i.e.* pour tout $x \in \mathcal{O}_\Sigma$ on a

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{O}_\Sigma/R}(x) = (\varphi(\alpha))(tx).$$

On définit une forme K-bilinéaire T_1 sur $\mathcal{O}_\Sigma \otimes_R K$ par la formule

$$T_1(x, y) = (\varphi(\alpha))_K (xy)$$

pour $x, y \in \mathcal{O}_\Sigma \otimes_R K$. Dire que $\varphi(\alpha)$ est un générateur du $\mathcal{O}_\Sigma$-module $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}_\Sigma, R)$ signifie que le morphisme de $\mathcal{O}_\Sigma$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\Sigma & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}_\Sigma, R) \\ x & \mapsto & x\varphi(\alpha) = (\varphi(\alpha))(x\,.\,) \end{array}$$

est un isomorphisme, ou encore, que $\mathcal{O}_\Sigma$, considéré comme un R-réseau de $\mathcal{O}_\Sigma \otimes_R K$, est auto-dual pour T_1, soit, par le lemme 5.5.3.*ii*, que

$$\mathfrak{d}_R(\mathcal{O}_\Sigma, T_1) = (1).$$

Par abus de notation, notons encore t l'endomorphisme K-linéaire de multiplication par t dans le K-espace vectoriel $\mathcal{O}_\Sigma \otimes_R K$, et soit T_2 la forme bilinéaire trace sur $\mathcal{O}_\Sigma \otimes_R K$. Alors pour tous x et y dans $\mathcal{O}_\Sigma \otimes_R K$ on a $T_2(x,y) = T_1(tx,y)$, et du lemme 5.5.4 et de (5.5.6) on déduit

$$\mathfrak{d}_R(\mathcal{O}_\Sigma) = \mathfrak{d}_R(\mathcal{O}_\Sigma, T_2) = (\det_K t) = \chi_R(\mathcal{O}_\Sigma / t\mathcal{O}_\Sigma).$$

La proposition découle alors de cette dernière égalité et de (5.5.10) et (5.5.11). $\square$

Proposition 5.5.11 *Soient R un anneau de Dedekind et Σ un schéma fini et plat sur $S = \operatorname{Spec} R$. On suppose que Σ est séparable sur R et localement intersection complète. Alors on a*

$$\chi_R(\Omega^1_{\Sigma/S}) = \mathfrak{d}_R(\mathcal{O}_\Sigma).$$

Démonstration : Quitte à faire une extension séparable finie de la base, on peut supposer que Σ est est réunion de sections $P_1, \ldots, P_l$ de S. Notons $\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ le morphisme de normalisation, où $\widetilde{\Sigma}$ s'identifie au schéma réunion disjointe de $P_1, \ldots, P_l$. Par la proposition 5.5.6, on a

$$\mathfrak{d}_R(\mathcal{O}_\Sigma) = \chi_R(\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma)^2.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\chi_R(\Omega^1_{\Sigma/S}) = \chi_R(\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma)^2.$$

Pour ce faire, il suffit de montrer que pour tout point fermé x de Σ on a

$$\chi_{R_\mathfrak{p}}((\Omega^1_{\Sigma/S})_x) = \chi_{R_\mathfrak{p}}((\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma)_x)^2 \tag{5.5.12}$$

où $\mathfrak{p}$ est l'image de x dans S.

Par compatibilité de la formation du faisceau des différentielles relatives au changement de base, on a $(\Omega^1_{\Sigma/S})_x = \Omega^1_{\Sigma_x/S_\mathfrak{p}}$. Par ailleurs, notons $\widetilde{\Sigma}^{[x]}$ le schéma réunion disjointe des composantes de Σ qui passent par x. C'est un sous-schéma (ouvert et fermé) de $\widetilde{\Sigma}$, et on a clairement

$$(\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma)_x = (\nu_* \mathcal{O}_{(\widetilde{\Sigma}^{[x]})} / \mathcal{O}_\Sigma)_x = \nu_* \mathcal{O}_{(\widetilde{\Sigma}^{[x]}),\mathfrak{p}} / \mathcal{O}_{\Sigma,x}.$$

Enfin $(\widetilde{\Sigma}^{[x]})_\mathfrak{p}$ s'identifie naturellement à la normalisation $\widetilde{\Sigma_x}$ de Σ_x, et la formule (5.5.12) n'est alors autre que la proposition 5.5.10. $\square$

Corollaire 5.5.12 *Soient K un corps de nombres, $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $N+1$ et Z un sous-schéma de $\mathbb{P}_E$ plat de dimension relative zéro sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. *Supposons Z réduit et localement intersection complète. Alors on a*

$$h^{(n)}(Z) \underset{n \to \infty}{=} n.h([Z]) + \frac{\lg Z}{2} \log \binom{N+n}{N} - \frac{1}{2.[K:\mathbb{Q}]} \log \#(\Omega^1_{Z/\mathcal{O}_K}) + O(n^{-1}).$$

Démonstration : Cela résulte de la proposition précédente, du théorème 5.5.8 et de la définition de $\operatorname{discr}^{\log}(\mathcal{O}_Z)$. $\square$

Remarque 5.5.13 On serait tenté de vouloir généraliser le résultat précédent en faisant l'hypothèse, *a priori* plus faible, que Z n'est pas localement intersection complète mais le devient après extension des scalaires à l'anneau des entiers d'une extension finie de K. Cependant, ceci n'apporte aucune généralité supplémentaire. En effet, si cette condition est vérifiée, alors, par ([EGA] IV 19.1.5 (ii)), c'est que Z lui-même est déjà localement intersection complète.

5.5.2 Cônes infinitésimaux

Soient S un schéma noethérien, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang $N+1$, $\mathbb{P}_E = \mathbf{Proj}\,\mathrm{Sym}^{\cdot}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}$ l'espace projectif des quotients de $\mathcal{E}$ localement libres de rang un, $\pi : \mathbb{P}_E \longrightarrow S$ le morphisme structural, et $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites universel sur $\mathbb{P}_E$.

Soit P un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$, image d'une section

$$i_P : S \hookrightarrow \mathbb{P}_E.$$

Notons $\mathcal{F}$ l'«hyperplan» de $\mathcal{E}$ représenté par P, *i.e.*

$$\mathcal{F} = i_P^* \ker(\pi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)),$$

de telle sorte qu'on a une suite exacte courte de $\mathcal{O}_S$-modules localement libres

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow i_P^*\mathcal{O}(1) \longrightarrow 0,$$

et que dans la suite du texte on fera l'identification

$$i_P^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{E}/\mathcal{F}.$$

Par construction, la surjection $\pi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)$ envoie $\pi^*\mathcal{F} \subset \pi^*\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{I}_P\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(1)$, où $\mathfrak{I}_P$ est le faisceau d'idéaux définissant P comme sous-schéma de $\mathbb{P}_E$. La $\mathcal{O}_S$-algèbre $\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{E}$ est munie de la filtration $(\mathcal{F}.\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{E})$-adique, de telle sorte que pour tout t on a :

$$Fil^s\,\mathrm{Sym}^t\,\mathcal{E} = \mathcal{F}^{\cdot s}.\mathcal{E}^{\cdot t-s} = \mathrm{Im}(\mathcal{F}^{\otimes s} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E}^{\otimes t-s} \longrightarrow \mathrm{Sym}^t\,\mathcal{E}), \qquad (0 \leq s \leq t).$$

En particulier, on a $Fil^t\,\mathrm{Sym}^t\,\mathcal{E} = \mathrm{Sym}^t\,\mathcal{F}$. On déduit de ce qui précède une flèche naturelle $\pi^*(Fil^s\,\mathrm{Sym}^t\,\mathcal{E}) \longrightarrow \mathfrak{I}_P^s\mathcal{O}(t)$ et, par adjonction, un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules, dont on vérifie aisément que c'est un isomorphisme :

$$\alpha_{s,t} : Fil^s\,\mathrm{Sym}^t\,\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \pi_*(\mathfrak{I}_P^s\mathcal{O}(t)) \tag{5.5.13}$$

(cet énoncé étant local sur S, on se ramène au cas où $S = \mathrm{Spec}\,R$ est affine, où $\mathbb{P}_E$ est l'espace projectif standard sur R, et où P est le point de coordonnées homogènes $(1:0:\ldots:0)$, et on conclut au moyen d'un calcul explicite). Plus généralement, la collection des $\alpha_{\cdot,\cdot}$ fournit un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres filtrées de $\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{E}$ sur $\bigoplus_{t\geq 0}\pi_*(\mathcal{O}(t))$, cette dernière étant munie de la filtration déterminée par l'ordre d'annulation en P.

Par ailleurs, pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ on a un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} \pi_*\mathcal{M} & \xrightarrow{\text{cano}} & \pi_*(\mathcal{M}/\mathfrak{I}_P\mathcal{M}) \\ \| & & \| \\ i_P^*\pi^*\pi_*\mathcal{M} & \xrightarrow{\text{adj}} & i_P^*\mathcal{M}, \end{array} \tag{5.5.14}$$

d'où, pour $\mathcal{M} = \mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(t)$, un morphisme naturel de $\mathcal{O}_S$-modules, dont on vérifie aisément, à nouveau par un calcul local sur S, que c'est un isomorphisme :

$$\beta_t : \pi_*(\mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(t)) \xrightarrow{\sim} i_P^*(\mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(t)). \tag{5.5.15}$$

Ainsi on déduit de (5.5.13), (5.5.14) et (5.5.15) l'identification naturelle

$$\operatorname{Sym}^t \mathcal{F} = \pi_*(\mathfrak{I}_P^t/\mathfrak{I}_P^{t+1}) \otimes_{\mathcal{O}_S} i_P^*\mathcal{O}(t). \tag{5.5.16}$$

Soit maintenant Σ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ défini par un faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}_\Sigma$. Notons

$$I_\Sigma = \bigoplus_{t\geq 0} \pi_*(\mathfrak{I}_\Sigma\mathcal{O}(t)) \subset \bigoplus_{t\geq 0} \pi_*(\mathcal{O}(t)) = \operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{E}$$

l'idéal homogène saturé définissant Σ.

Compte tenu de (5.5.16), on définit aussi un idéal homogène J_Σ de la $\mathcal{O}_S$-algèbre $\operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{F}$ comme suit : pour tout t, la composante homogène de degré t de J_Σ est

$$\begin{aligned} (J_\Sigma)_t &= \pi_*\left(\frac{\mathfrak{I}_\Sigma \cap \mathfrak{I}_P^t}{\mathfrak{I}_\Sigma \cap \mathfrak{I}_P^{t+1}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_S} i_P^*\mathcal{O}(t) \\ &\subset \pi_*\left(\frac{\mathfrak{I}_P^t}{\mathfrak{I}_P^{t+1}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_S} i_P^*\mathcal{O}(t) = \operatorname{Sym}^t \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{5.5.17}$$

Définition 5.5.14 *Avec ces notations, on appelle* cône tangent plongé *de Σ en P le sous-schéma fermé $K_P\Sigma$ de $\mathbb{P}_E$ défini par l'idéal homogène $(J_\Sigma . \operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{E})$ de $\operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{E}$.*

Plus généralement :

Définition 5.5.15 *Soit $\mathfrak{K}$ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$.*

On dira que $\mathfrak{K}$ est un cône de sommet P si l'idéal homogène saturé de $\operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{E}$ définissant $\mathfrak{K}$ est engendré par des éléments (homogènes) de la sous-$\mathcal{O}_S$-algèbre $\operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{F}$ de $\operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{E}$.

On dira qu'un cône $\mathfrak{K}$ de sommet P est infinitésimal si son support est égal à P.

Si $\mathfrak{K}$ est un cône de sommet P et I l'idéal homogène saturé de $\operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{E}$ définissant $\mathfrak{K}$ comme sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$, on dira que l'idéal homogène $J = I \cap \operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{F}$ de $\operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{F}$ est l'idéal associé à $\mathfrak{K}$ (ou, inversement, que $\mathfrak{K}$ est le cône associé à J). On a alors $I = (J . \operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{E})$. Ainsi si Σ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ (on ne suppose pas que Σ est un cône), l'idéal J_Σ de $\operatorname{Sym}^{\cdot} \mathcal{F}$ défini par (5.5.17) est l'idéal associé au cône tangent plongé $K_P\Sigma$.

Remarque 5.5.16 Un idéal homogène J de $\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{F}$ définit un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_F = \mathbf{Proj}\ \mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{F}$ dont l'image inverse par la projection naturelle $(\mathbb{P}_E \smallsetminus \{P\}) \longrightarrow \mathbb{P}_F$ est la trace sur $(\mathbb{P}_E \smallsetminus \{P\})$ du cône $\mathfrak{K}$ associé à J. Cependant l'adhérence de cette image inverse est en général seulement un sous-schéma fermé de $\mathfrak{K}$: si l'idéal J de $\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{F}$ n'est pas saturé, il se peut que P apparaisse dans $\mathfrak{K}$ avec une multiplicité plus grande. En revanche, on vérifie (au moyen d'un calcul local sur S) que l'idéal $(J.\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{E})$ de $\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{E}$ est toujours saturé.

Remarque 5.5.17 Supposons qu'il existe un sous-$\mathcal{O}_S$-module inversible $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$ qui fournisse un scindage

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{L} \tag{5.5.18}$$

(c'est le cas par exemple dès que S est affine). Cette donnée détermine un isomorphisme φ du cône tangent (usuel) à $\mathbb{P}_E$ en P, $C_P\mathbb{P}_E = \mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\vee})$, sur l'ouvert $D(\mathcal{L})$ de $\mathbb{P}_E$ dont les points représentent les hyperplans de $\mathcal{E}$ supplémentaires de $\mathcal{L}$; cet isomorphisme φ envoie la section nulle de $C_P\mathbb{P}_E$ sur P. Alors si C est un sous-schéma fermé de $C_P\mathbb{P}_E$ défini par un idéal *homogène* $\widetilde{J} = \bigoplus_{t\geq 0}(\widetilde{J})_t$ de $\mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\vee})$, le cône $\mathfrak{K}$ associé à l'idéal homogène $J = \bigoplus_{t\geq 0}(\widetilde{J})_t \otimes \mathcal{L}^{\otimes t}$ de $\mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{F}$ est l'adhérence dans $\mathbb{P}_E$ de $\varphi(C)$. En particulier, si Σ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ contenant P, le cône tangent $C_P\Sigma$ s'identifie naturellement au sous-schéma fermé de $C_P\mathbb{P}_E$ défini par l'idéal homogène $\bigoplus_{t\geq 0}\pi_*((\mathfrak{I}_\Sigma \cap \mathfrak{I}_P^t)/(\mathfrak{I}_\Sigma \cap \mathfrak{I}_P^{t+1}))$ de $\bigoplus_{t\geq 0}\pi_*(\mathfrak{I}_P^t/\mathfrak{I}_P^{t+1}) = \mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\vee})$ et on a

$$K_P\Sigma = \overline{\varphi(C_P\Sigma)}.$$

En particulier, si le support de Σ est égal à P, le cône tangent plongé $K_P\Sigma$ est infinitésimal et les schémas $C_P\Sigma$ et $K_P\Sigma$ sont isomorphes ; cependant on prendra garde au fait qu'en général, cet isomorphisme dépend du choix du scindage (5.5.18).

Revenons maintenant à la situation générale (on ne suppose pas $\mathcal{F}$ facteur direct de $\mathcal{E}$).

Lemme 5.5.18 *Soit C un sous-schéma fermé de $C_P\mathbb{P}_E = \mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathcal{F}\otimes(\mathcal{E}/\mathcal{F})^{\vee})$ défini par un idéal* homogène *$\widetilde{J}$ de $\mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathcal{F}\otimes(\mathcal{E}/\mathcal{F})^{\vee})$. Alors il existe un unique sous-schéma fermé $\mathfrak{K}$ de $\mathbb{P}_E$ qui soit un cône de sommet P et dont le cône tangent (usuel) $C_P\mathfrak{K}$, considéré comme sous-schéma fermé de $C_P\mathbb{P}_E$, soit égal à C.*

Démonstration : Notons $(\widetilde{J})_t = \widetilde{J} \cap \mathrm{Sym}^t(\mathcal{F}\otimes(\mathcal{E}/\mathcal{F})^{\vee})$, de telle sorte que, par hypothèse, on a $\widetilde{J} = \bigoplus_{t\geq 0}(\widetilde{J})_t$. Posons alors $J = \bigoplus_{t\geq 0}(\widetilde{J})_t \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{F})^{\otimes t} \subset \mathrm{Sym}^{\cdot}\mathcal{F}$, et soit $\mathfrak{K} \subset \mathbb{P}_E$ le cône associé à J. Le fait que $\mathfrak{K}$ vérifie les conditions demandées et est unique pour cette propriété peut se démontrer localement sur S ; ainsi on peut supposer que S est affine et que $\mathcal{F}$ est facteur direct de $\mathcal{E}$. Alors le lemme résulte de la remarque 5.5.17 et du fait que le cône tangent (usuel) à C en l'origine s'identifie à C lui-même. $\square$

On en déduit immédiatement :

Proposition 5.5.19 *Si Σ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$, $K_P\Sigma$ est l'unique sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ qui soit un cône de sommet P et dont le cône tangent en P soit égal à celui de Σ.*

On aboutit enfin à la caractérisation suivante des cônes :

Proposition 5.5.20 *Soit $\mathfrak{K}$ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$, défini par l'idéal homogène saturé $I_{\mathfrak{K}} = \bigoplus_{t\geq 0} \pi_*(\mathfrak{I}_{\mathfrak{K}}\mathcal{O}(t))$ de* $\mathrm{Sym}^{\cdot}\,\mathcal{E} = \bigoplus_{t\geq 0}\pi_*(\mathcal{O}(t))$. *Notons encore $J_{\mathfrak{K}}$ l'idéal de* $\mathrm{Sym}^{\cdot}\,\mathcal{F}$ *associé au cône tangent plongé $K_P\mathfrak{K}$, comme défini par* (5.5.17). *Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. le sous-schéma $\mathfrak{K}$ de $\mathbb{P}_E$ est un cône de sommet P ;

ii. les sous-schémas $\mathfrak{K}$ et $K_P\mathfrak{K}$ de $\mathbb{P}_E$ sont égaux ;

iii. on a $J_{\mathfrak{K}} = I_{\mathfrak{K}} \cap \mathrm{Sym}^{\cdot}\,\mathcal{F}$.

Démonstration : L'équivalence de i et ii résulte de la proposition 5.5.19, et ii implique iii par définition. Remarquons ensuite que, pour tout sous-schéma $\mathfrak{K}$ de $\mathbb{P}_E$, on a une flèche naturelle

$$\psi : I_{\mathfrak{K}} \cap \mathrm{Sym}^{\cdot}\,\mathcal{F} \longrightarrow J_{\mathfrak{K}}$$

dont la composante homogène de degré t est donnée par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathfrak{K}} \cap \mathrm{Sym}^t\,\mathcal{F} & \xrightarrow{\psi_t} & (J_{\mathfrak{K}})_t \\ \| & & \| \\ \pi_*((\mathfrak{I}_{\mathfrak{K}} \cap \mathfrak{I}_P^t)\mathcal{O}(t)) & \xrightarrow{\text{cano}} & \pi_*\left(\left(\frac{\mathfrak{I}_{\mathfrak{K}}\cap\mathfrak{I}_P^t}{\mathfrak{I}_{\mathfrak{K}}\cap\mathfrak{I}_P^{t+1}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}} \mathcal{O}(t)\right). \end{array}$$

Le noyau de ψ_t est

$$\ker\psi_t = \pi_*((\mathfrak{I}_{\mathfrak{K}} \cap \mathfrak{I}_P^{t+1})\mathcal{O}(t)) \subset \pi_*(\mathfrak{I}_P^{t+1}\mathcal{O}(t)) = 0.$$

Ainsi ψ est toujours injective, et il s'agit de montrer que si ψ est surjective, $\mathfrak{K}$ est un cône. Pour ce faire, on peut supposer que S est affine d'anneau $\mathcal{O}_S$ et que $\mathcal{F}$ admet un supplémentaire trivial dans $\mathcal{E}$, engendré par un élément $T \in \mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_S.T.$$

Soit $x \in I_{\mathfrak{K}}$ homogène de degré n. On peut alors écrire

$$x = \sum_{m=0}^{n} x_m.T^{n-m}$$

avec $x_m \in \mathrm{Sym}^m\,\mathcal{F}$. Supposons qu'on ait montré $x_m \in I_{\mathfrak{K}}$ pour $m < m_0$. Alors

$$x' = x - \sum_{m<m_0} x_m.T^{n-m} = \sum_{m=m_0}^{n} x_m.T^{n-m}$$

appartient à $I_{\mathfrak{K}}$ et $x'.T^{-(n-m_0)}$ définit une section de $(\mathfrak{I}_{\mathfrak{K}} \cap \mathfrak{I}_P^{m_0})\mathcal{O}(m_0)$ sur l'ouvert $D(T)$ de $\mathbb{P}_E$, ouvert qui contient P. Par construction, l'image de cette section dans $(J_{\mathfrak{K}})_{m_0} = \pi_*(((\mathfrak{I}_{\mathfrak{K}}\cap\mathfrak{I}_P^{m_0})/(\mathfrak{I}_{\mathfrak{K}}\cap\mathfrak{I}_P^{m_0+1}))\otimes\mathcal{O}(m_0))$ est égale à x_{m_0} et, par surjectivité de ψ, ceci implique

$x_{m_0} \in I_{\mathfrak{K}}$. Ainsi, par récurrence sur m, tous les x_m appartiennent à $I_{\mathfrak{K}}$, ce qui signifie bien que $I_{\mathfrak{K}}$ est engendré par son intersection avec $\mathrm{Sym}^{\cdot} \mathcal{F}$, et montre que *iii* implique *i*. $\square$

On va maintenant donner un complément au théorème 5.3.2. On suppose $S = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$ et on se donne un espace vectoriel hermitien E de dimension $N+1$. Le fibré en droites universel $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}_E$ est muni des métriques quotient de la surjection $\pi^* E \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)$, et pour tout n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ est muni des métriques L^2 relativement à la forme volume canonique. On se donne P l'image d'une section $i_P : \mathrm{Spec}\, \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}_E$, et $\mathfrak{K}$ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ contenant P. Si n est assez grand, l'application de restriction $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}})$ est surjective, et on munit $\Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}})$ des métriques quotient.

On munit $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ et $\Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}})$ des filtrations données par l'ordre d'annulation en P

$$Fil^t \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathfrak{I}_P^t \mathcal{O}(n))$$

et

$$Fil^t \Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}}) = \Gamma(\mathfrak{K}, \mathfrak{I}_P^t \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}})$$

et on munit les gradués associés des métriques de sous-quotient.

Pour tout t, on a alors une surjection naturelle

$$b_{n,t} : gr^t \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \twoheadrightarrow gr^t \Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}}),$$

et :

Proposition 5.5.21 *Sous ces hypothèses, si $\mathfrak{K}$ est un cône de sommet P, l'application linéaire $b_{n,t}$ est une isométrie partielle.*

Démonstration : Notons F l'hyperplan de E défini par P et Δ l'orthogonal de F dans E. Au moyen de la structure hermitienne, on peut identifier $gr^t \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ à un sous-espace vectoriel de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$. Ceci fournit une décomposition

$$\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) = \overset{\perp}{\bigoplus_t} gr^t \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$$

dont l'image par la similitude du lemme 1.3.4 est la décomposition

$$\mathrm{Sym}^n E = \overset{\perp}{\bigoplus_t} \Delta^{\otimes(n-t)}. \mathrm{Sym}^t F$$

de $\mathrm{Sym}^n E$. L'hypothèse que $\mathfrak{K}$ est un cône signifie que le noyau K_n de l'application de restriction $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}})$ est compatible à cette décomposition, *i.e.*

$$K_n = \overset{\perp}{\bigoplus_t} (K_n \cap gr^t \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))).$$

Ceci implique que la métrique sur $gr^t \Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}})$ considéré comme sous-quotient du quotient $\Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}})$ de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ est égale à sa métrique en tant que quotient du sous-quotient $gr^t \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

On revient maintenant aux hauteurs de sous-schémas. On a $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on se donne $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-module hermitien localement libre de rang $N+1$, et on munit $\mathbb{P}_E$ des structures hermitiennes définies au début de ce chapitre.

En remplaçant le théorème de presque-isométrie partielle 5.3.2 par la proposition 5.5.21 dans la démonstration de la proposition 5.2.3 (et en utilisant le fait que la propriété pour un sous-schéma de $\mathbb{P}_E$ d'être un cône est conservée par changement de base), on trouve :

Corollaire 5.5.22 *Soit $\mathfrak{K}$ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ plat de dimension relative zéro sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$*. On suppose que $\mathfrak{K}$ est un cône infinitésimal de sommet P. Alors, avec les notations du théorème 5.2.2, pour tout entier n tel que l'application naturelle de restriction*

$$\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{K}, \mathcal{O}(n)|_{\mathfrak{K}})$$

soit surjective, la n-ième hauteur schématique de $\mathfrak{K}$ est donnée par la formule suivante :

$$h^{(n)}(\mathfrak{K}) = n.h([\mathfrak{K}]) \;+\; \sum_{t\geq 0} \frac{r_t}{2}.\log\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right) \;+\; h(C_P\mathfrak{K}).$$

Ceci peut encore s'écrire de la façon suivante :

Corollaire 5.5.23 *Sous les hypothèses du corollaire précédent, notons $J \subset \operatorname{Sym}^{\cdot} F$ l'idéal associé au cône $\mathfrak{K}$. Alors on a*

$$h^{(n)}(\mathfrak{K}) = n.\operatorname{rg}(S^{\cdot}F/J).h(P) + \sum_{t\geq 0} \frac{\operatorname{rg}(S^tF/J_t)}{2}.\log\left(\frac{(n+N)!}{(N+t)!(n-t)!}\right) + \sum_{t\geq 0} \widehat{\deg}\,\overline{(S^tF/J_t)}.$$

Démonstration : Ceci résulte du corollaire précédent et du lemme 5.3.6 appliqué avec $n = t$. $\square$

Remarquons que l'isomorphisme de $F \otimes (E/F)^\vee$ sur l'espace cotangent $T_P\mathbb{P}_E^*$ permet de décrire un cône $\mathfrak{K}$ comme le sous-schéma défini par l'idéal formé des fonctions dont les jets s'annulent suivant une certaine sous-algèbre de $\operatorname{Sym}^{\cdot} T_P\mathbb{P}_E$. Ainsi les corollaires précédents permettent de calculer exactement les hauteurs de $\mathfrak{K}$ en termes de cette sous-algèbre.

Enfin, il convient de signaler le résultat suivant :

Proposition 5.5.24 *Soit Σ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$ plat de dimension relative zéro sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *et de support égal à P. Notons $K_P\Sigma$ le cône tangent plongé de Σ. Alors on a*

$$h^{(n)}(\Sigma) \underset{n\to\infty}{=} h^{(n)}(K_P\Sigma) + O(n^{-1}).$$

Démonstration : Cela résulte du théorème 5.2.2 (ou, plus simplement, de la proposition 5.2.3), et du fait que Σ et $K_P\Sigma$ ont même cône tangent (usuel) en P, comme l'affirme la proposition 5.5.19. $\square$

Annexe à la partie II : bilan et comparaison des cas arithmétique et géométrique

On va rassembler ici les résultats disparates obtenus dans les divers cas particuliers étudiés dans la partie II de cette thèse. On va notamment essayer de leur trouver une structure commune susceptible de relever d'un énoncé conjectural plus général, un tel énoncé étant d'autant plus intéressant qu'il s'avérerait être l'analogue arithmétique d'un résultat bien connu dans la situation géométrique correspondante.

A.1 La situation géométrique

Le principe de la géométrie d'Arakelov est de développer une théorie de l'intersection pour les variétés définies sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres analogue à celle dont on dispose pour les variétés fibrées sur une courbe complète définie sur un corps ; le rôle des constructions hermitiennes effectuées aux places infinies dans le cadre arithmétique est de fournir un analogue de l'hypothèse de complétude du cas géométrique.

On se propose ici de procéder en sens inverse. Soient donc k un corps, S une courbe lisse projective sur k, $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow S$ un morphisme projectif dominant et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathcal{X}$ ample relativement à π. Par analogie avec la définition d'une pré-variété arithmétique, on supposera que la fibre de $\mathcal{X}$ au-dessus du point générique de S est lisse ; cependant, il apparaîtra clairement dans la suite qu'on ne se sert nulle part de cette hypothèse.

Pour le problème qui nous intéresse, la situation géométrique est en un sens beaucoup plus simple que dans le cas arithmétique. En effet, alors que dans le cas arithmétique il ne semble pas y avoir de moyen naturel de munir un sous-schéma fermé général d'une pré-variété arithmétique de structures hermitiennes, dans le cas géométrique en revanche, un sous-schéma fermé de $\mathcal{X}$ est automatiquement projectif sur S.

On va maintenant décrire le problème géométrique analogue au problème arithmétique du calcul des hauteurs d'un sous-schéma. La principale référence dont on se servira ici est [22], notamment les chapitres 15 et 18. La courbe S étant lisse, le groupe de Grothendieck $K_\circ S$ des faisceaux cohérents sur S est naturellement isomorphe au groupe de Grothendieck $K^\circ S$ des fibrés vectoriels sur S. On dispose en outre d'un homomorphisme d'anneaux

$$\mathrm{ch} : K^\circ S \longrightarrow A(S),$$

appelé caractère de Chern, à valeurs dans l'anneau de Chow de S. Si E est un fibré vectoriel sur S, on a

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{rg}(E)[S] + c_1(E)$$

où $\mathrm{rg}(E)$ est le rang de E, $[S] \in A_1(S)$ est la classe fondamentale de S et $c_1(E) \in A_0(S)$ la première classe de Chern de E. On dispose enfin d'un morphisme naturel, noté $\int_S$, de $A_0(S)$ dans $\mathbb{Z}$. Tout ceci permet de définir une application degré sur $K_\circ S$, notée deg, comme l'application composée

$$\deg : K_\circ S \xrightarrow{\sim} K^\circ S \xrightarrow{\mathrm{ch}} A(S) \xrightarrow{\mathrm{pr}_0} A_0(S) \xrightarrow{\int_S} \mathbb{Z}.$$

La question est alors la suivante : *étant donné un sous-schéma fermé Σ de $\mathcal{X}$, comment se comporte l'entier* $\deg((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma))$ *lorsque n tend vers l'infini ?*

On supposera ici Σ de dimension strictement positive, notée $d+1$. On note $[\Sigma]$ le cycle de dimension maximale associé à Σ. Autrement dit, si $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_e$ sont les supports des composantes irréductibles de dimension $d+1$ de Σ, on pose

$$[\Sigma] = \sum_i \mathrm{lg}(\mathcal{O}_{\Sigma,\Sigma_i})[\Sigma_i] \in Z_{d+1}\Sigma \subset Z_{d+1}\mathcal{X}.$$

Notons enfin i_Σ l'inclusion de Σ dans $\mathcal{X}$ et K le corps des fonctions rationnelles sur S.

Théorème A.1.1 *Sous ces hypothèses, il existe un polynôme numérique P de degré $d+1$, $P(X) = a_{d+1}X^{d+1} + a_d X^d + \cdots + a_0$, tel que pour tout entier n assez grand on ait*

$$\deg((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)) = a_{d+1}n^{d+1} + a_d n^d + \cdots + a_0.$$

Le coefficient de degré maximal de ce polynôme est

$$a_{d+1} = \frac{(c_1(\mathcal{L})^{d+1}.[\Sigma])}{(d+1)!} \tag{A.1.1}$$

où l'on a noté $(c_1(\mathcal{L})^{d+1}.[\Sigma])$ l'image naturelle dans $\mathbb{Z}$ de $c_1(\mathcal{L})^{d+1} \cap [\Sigma] \in A_0(\mathcal{X})$ par $\int_{\mathcal{X}}$. Le coefficient sous-dominant de ce polynôme est

$$a_d = \frac{1}{d!}\Big((c_1(\mathcal{L})^d.\mathrm{Td}(\Sigma)_d) + (g-1)(c_1(\mathcal{L}_K)^d.[\Sigma]_K)\Big) \tag{A.1.2}$$

où g est le genre de S et $\mathrm{Td}(\Sigma)_d$ la composante d-dimensionnelle de la classe de Todd généralisée de Σ, définie dans [22] § 18.3.

Démonstration : Remarquons d'abord que, par amplitude de $\mathcal{L}$, pour n assez grand, la classe dans $K_\circ S$ de $(\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ coïncide avec l'image directe par $\pi|_\Sigma$ de la classe de $\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma$ dans $K_\circ \Sigma$, telle que définie dans [22] §18.1. On applique alors le théorème 18.3 de [22] à $X = \Sigma$. Avec les notations de ce théorème, puisque S est une courbe lisse, pour tout α dans $K^\circ S$ on a

$$\tau_S(\alpha) = \mathrm{ch}(\alpha) \cap \mathrm{Td}(S)$$

où $\mathrm{Td}(S) = \tau_S(\mathcal{O}_S) = \mathrm{td}(T_S) = [S] + \frac{1}{2}c_1(T_S)$ est la classe de Todd (usuelle) de S. En particulier on a $\int_S c_1(T_S) = 2 - 2g$ (cf. [22] ex. 15.2.1).

On a donc

$$
\begin{aligned}
\deg((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)) &= \int_S \mathrm{ch}((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma))_0 \\
&= \int_S (\mathrm{Td}(S)^{-1}\tau_S((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)))_0 \\
&= \int_S (\tau_S((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)))_0 - \frac{1}{2}\int_S c_1(T_S)\cap(\tau_S((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)))_1
\end{aligned}
\tag{A.1.3}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\tau_S((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)) &= (\pi|_\Sigma)_*\tau_\Sigma(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma) \\
&= (\pi|_\Sigma)_*(\mathrm{ch}(\mathcal{L})^n \cap \mathrm{Td}(\Sigma))
\end{aligned}
\tag{A.1.4}
$$

où $\mathrm{Td}(\Sigma) = \tau_\Sigma(\mathcal{O}_\Sigma) \in A(\Sigma)_\mathbb{Q}$ est la classe de Todd (généralisée) de Σ. Par la propriété (5) du théorème 18.3 de [22] on a

$$
\mathrm{Td}(\Sigma) = \mathrm{Td}(\Sigma)_{d+1} + \mathrm{Td}(\Sigma)_d + \cdots + \mathrm{Td}(\Sigma)_0
$$

avec pour tout i, $\mathrm{Td}(\Sigma)_i \in A_i(\Sigma)_\mathbb{Q}$ et

$$
\mathrm{Td}(\Sigma)_{d+1} = [\Sigma] \in A_{d+1}(\Sigma).
$$

Par ailleurs on a

$$
\mathrm{ch}(\mathcal{L})^n = 1 + \cdots + \frac{n^d}{d!}c_1(\mathcal{L})^d + \frac{n^{d+1}}{(d+1)!}c_1(\mathcal{L})^{d+1} + \cdots .
$$

Ainsi on trouve

$$
(\mathrm{ch}(\mathcal{L})^n \cap \mathrm{Td}(\Sigma))_0 = r_{d+1}n^{d+1} + r_d n^d + \cdots + r_0 \in A_0(\Sigma)_\mathbb{Q}
$$

avec $r_i = \frac{1}{i!}c_1(\mathcal{L})^i \cap \mathrm{Td}(\Sigma)_i$, d'où notamment

$$
r_{d+1} = \frac{1}{(d+1)!}c_1(\mathcal{L})^{d+1} \cap [\Sigma].
$$

Par le même raisonnement

$$
(\mathrm{ch}(\mathcal{L})^n \cap \mathrm{Td}(\Sigma))_1 = s_d n^d + \cdots + s_0 \in A_1(\Sigma)_\mathbb{Q}
$$

avec $s_i = \frac{1}{i!}c_1(\mathcal{L})^i \cap \mathrm{Td}(\Sigma)_{i+1}$, d'où notamment

$$
s_d = \frac{1}{d!}c_1(\mathcal{L})^d \cap [\Sigma]
$$

de telle sorte que $(\pi|_\Sigma)_* s_d = e_d[S] \in A_1(S)_\mathbb{Q}$ avec

$$
e_d = \frac{1}{d!}(c_1(\mathcal{L}_K)^d.[\Sigma]_K).
$$

On conclut en injectant tout ceci dans (A.1.4) puis dans (A.1.3). □

Remarque A.1.2 On trouvera dans [34], théorème 4, un résultat un peu plus fin. On construit dans [34] une application Div définie sur $K_\circ S$ à valeurs dans le groupe de Picard de S, étendant naturellement l'application «puissance extérieure maximale» pour les fibrés vectoriels. Alors, avec les notations précédentes, pour n assez grand, l'élément $\mathrm{Div}((\pi|_\Sigma)_*(\mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma))$ de $\mathrm{Pic}(S)$ dépend polynomialement de n.

A.2 Terme dominant du développement asymptotique des hauteurs de sous-schémas

Comparant les théorèmes et corollaire 3.1.16, 4.3.6, 5.2.2 et A.1.1, on est naturellement conduit à se poser la question suivante :

Question A.2.1 *Soient K un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{X}$ une pré-variété arithmétique mesurée sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ *munie d'un fibré en droites hermitien positif $\overline{\mathcal{L}}$. Soit Σ un sous-schéma fermé de $\mathcal{X}$ de dimension (absolue) $d+1$. Notons $[\Sigma] \in Z_{d+1}\mathcal{X}$ le cycle de dimension maximale associé à Σ,* i.e.

$$[\Sigma] = \sum_i \operatorname{lg}(\mathcal{O}_{\Sigma,\Sigma_i})[\Sigma_i]$$

où $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_e$ sont les supports des composantes irréductibles de dimension $d+1$ de Σ. Est-il vrai que les hauteurs (normalisées) de Σ admettent pour n tendant vers l'infini le développement asymptotique

$$h^{(n)}(\Sigma) = a.n^{d+1} + o(n^{d+1})$$

avec $a = \frac{(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}.[\Sigma])}{(d+1)!}$?

Outre les cas déjà traités dans la partie II (dont le plus général est sans doute celui des sous-schémas lisses avec multiplicité), on dispose encore d'une classe importante de sous-schémas pour lesquels la réponse à la question A.2.1 est positive : les sous-schémas intègres (éventuellement singuliers). On traite ici le cas où la variété ambiante est l'espace projectif, cependant le cas général ne semble pas devoir poser de réelle difficulté supplémentaire.

Théorème A.2.2 *Soit Σ un sous-schéma fermé* intègre *de dimension $d+1$ de l'espace projectif standard $\mathbb{P}^N$ sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ *qu'on munit du fibré en droites hermitien positif $\overline{\mathcal{O}(1)}$ usuel. Alors pour n tendant vers l'infini les hauteurs du sous-schéma Σ admettent le développement asymptotique*

$$h^{(n)}(\Sigma) = \frac{(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}.[\Sigma])}{(d+1)!} n^{d+1} + o(n^{d+1}).$$

Démonstration : On dispose sur le $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ de deux structures hermitiennes : la norme $\|.\|_{L^2(\Sigma)}$ obtenue par intégration de la métrique restreinte, et la norme $\|.\|_q$ obtenue par passage au quotient de la norme L^2 sur $\mathbb{P}^N$. Par le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique singulier de Zhang ([68] th. 1.4), le degré d'Arakelov du $\mathcal{O}_K$-module hermitien $(\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma), \|.\|_{L^2(\Sigma)})$ admet un développement asymptotique dont le terme dominant est égal à celui énoncé dans le théorème. Raisonnant alors comme à la fin de la démonstration du théorème 3.1.16, on voit qu'il ne reste plus qu'à montrer que pour tout $\epsilon > 0$, l'homomorphisme canonique entre les $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens $(\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma), \|.\|_q)$ et $(\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma), \|.\|_{L^2(\Sigma)})$ admet toutes ses valeurs caractéristiques (pour tout plongement de K dans $\mathbb{C}$) dans l'intervalle $[e^{-n\epsilon}, e^{n\epsilon}]$ pour n assez grand. On s'est ainsi ramené à un énoncé purement complexe. Alors, de la même façon que dans la preuve de la proposition

3.1.14, la majoration de ces valeurs caractéristiques est une conséquence de la proposition 3.1.5 (appliquée avec $t = 0$), tandis que la minoration résulte d'un énoncé de relèvement de sections de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ de Σ à $\mathbb{P}^N$ avec contrôle des normes L^2 ou, ce qui revient au même grâce à la proposition 3.1.5, avec contrôle des normes L^∞, grâce au lemme suivant. $\square$

Lemme A.2.3 *Soient $\mathbb{P}^N$ l'espace projectif complexe standard muni du fibré en droites hermitien positif $\mathcal{O}(1)$, Σ un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^N$ et ϵ un réel strictement positif. Alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour toute section $s \in \Gamma(\Sigma, L^{\otimes n}|\Sigma)$, il existe $S \in \Gamma(\mathbb{P}^N, L^{\otimes n})$ vérifiant $s = S|_\Sigma$ et $\|S\|_{L^\infty(\mathbb{P}^N)} \leq e^{n\epsilon}\|s\|_{L^\infty(\Sigma)}$.*

Démonstration (suivant une méthode suggérée à l'auteur par J.-B. Bost) : Considérons l'espace affine $\mathbb{A}^{N+1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{N+1}$ comme le cône C sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, ou encore comme l'espace total du fibré $\mathcal{O}(-1)$ dans lequel on aurait contracté la section nulle («blow-down») en un point. Par construction, la métrique de Fubini-Study sur les fibres de $\mathcal{O}(-1)$ induit la métrique standard sur $\mathbb{C}^{N+1}$. Notons $C_\Sigma \subset \mathbb{A}^{N+1}$ le cône sur Σ, c'est-à-dire le sous-ensemble analytique de $C = \mathbb{C}^{N+1}$ défini par l'idéal homogène saturé $I = \bigoplus_{n\geq 0} I_n$ de Σ dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N] = \bigoplus_{n\geq 0}\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))$. Notons Ω la boule unité de $C = \mathbb{C}^{N+1}$ et $\Omega_\Sigma = \Omega \cap C_\Sigma$. Ce sont des espaces de Stein. En outre Ω (resp. Ω_Σ) s'identifie naturellement au fibré en disque de $\mathcal{O}(-1)$ (resp. de $\mathcal{O}(-1)|_\Sigma$) dans lequel la section nulle aurait été contractée en un point, et la frontière $\partial\Omega$ (resp. $\partial\Omega_\Sigma$) s'identifie naturellement au fibré en cercle de $\mathcal{O}(-1)$ (resp. de $\mathcal{O}(-1)|_\Sigma$). Notons $\mathcal{O}(\Omega)$ et $\mathcal{O}(\Omega_\Sigma)$ les anneaux des fonctions holomorphes sur Ω et sur Ω_Σ, respectivement ; ce sont des espaces de Fréchet pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Plus précisément, pour tout réel $r \in]0,1[$ notons $K(r)$ la boule fermée de rayon r dans C, $K_\Sigma(r) = K(r) \cap C_\Sigma$, et $\|.\|_{K(r)}$ et $\|.\|_{K_\Sigma(r)}$ les normes uniformes sur $K(r)$ et sur $K_\Sigma(r)$, respectivement. Alors, pour tout entier n, un élément de $\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))$ (resp. du quotient $\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))/I_n$) définit une fonction homogène de degré n sur Ω (resp. sur Ω_Σ), et $\mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{O}(\Omega_\Sigma)$) est le complété de l'anneau $\bigoplus_{n\geq 0}\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))$ (resp. $\bigoplus_{n\geq 0}\Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))/I_n$) relativement à la famille des normes $\|.\|_{K(r)}$ (resp. $\|.\|_{K_\Sigma(r)}$) pour $r \in]0,1[$. Ainsi, par la version pour les espaces de Fréchet du théorème de Banach de l'application ouverte, l'application naturelle de restriction

$$\mathcal{O}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega_\Sigma),$$

qui est surjective puisque Ω est de Stein, est ouverte ; autrement dit, pour tout $r \in]0,1[$ il existe $\rho \in]0,1[$ et $\alpha > 0$ tels que l'image de la boule unité de $(\mathcal{O}(\Omega), \|.\|_{K(r)})$ par l'application de restriction contienne la boule de rayon α de $(\mathcal{O}(\Omega_\Sigma), \|.\|_{K_\Sigma(\rho)})$, ou encore, pour toute $s \in \mathcal{O}(\Omega_\Sigma)$, il existe $S \in \mathcal{O}(\Omega)$ vérifiant $s = S|_{\Omega_\Sigma}$ et

$$\|S\|_{K(r)} \leq \alpha^{-1}\|s\|_{K_\Sigma(\rho)}. \tag{A.2.1}$$

Choisissons par exemple $r = e^{-\epsilon/2}$. Soient n un entier et $s \in \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$. Si n est assez grand, on a une identification naturelle $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) = \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))/I_n$ et s définit un élément de $\mathcal{O}(\Omega_\Sigma)$ homogène d'ordre n. Notant $\|.\|_{L^\infty(\Sigma)}$ la norme uniforme sur $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$ on a donc

$$\|s\|_{K_\Sigma(\rho)} = \rho^n\|s\|_{L^\infty(\Sigma)}.$$

Soit alors $S' \in \mathcal{O}(\Omega)$ relevant s et vérifiant la majoration (A.2.1). Par les estimations de Cauchy, si l'on note S la composante homogène de degré n de S', on a $\|S\|_{K(r)} \leq \|S'\|_{K(r)}$, donc *a fortiori* S vérifie aussi la majoration (A.2.1). Ainsi on a bien trouvé $S \in \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n))$ relevant s et vérifiant

$$\begin{aligned}\|S\|_{L^\infty(\mathbb{P}^N)} = r^{-n}\|S\|_{K(r)} &= e^{n\epsilon/2}\|S\|_{K(r)} \\ &\leq \alpha^{-1}e^{n\epsilon/2}\|s\|_{K_\Sigma(\rho)} = \alpha^{-1}e^{n\epsilon/2}\rho^n\|s\|_{L^\infty(\Sigma)} \\ &\leq \alpha^{-1}e^{n\epsilon/2}\|s\|_{L^\infty(\Sigma)}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Formulons maintenant quelques remarques permettant d'effectuer certaines réductions dans l'énoncé de la quetion A.2.1.

D'abord, grâce à la remarque 2.3.10, on voit que pour répondre positivement à la question A.2.1 dans le cas général, il suffit de savoir le faire sous l'hypothèse supplémentaire que Σ est plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$.

Ensuite, dans le cas kählérien, le terme principal du développement asymptotique de $h^{(n)}(\Sigma)$ ne devrait pas dépendre de la pré-variété $\mathcal{X}$ dans laquelle Σ se plonge. Plus précisément :

Proposition A.2.4 *Soient $\mathcal{X}$ une pré-variété arithmétique kählérienne sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ *et $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitien positif sur $\mathcal{X}$. Soit $\mathcal{Y}$ un sous-schéma fermé génériquement lisse de $\mathcal{X}$. Munissons $\mathcal{Y}$ de la structure de pré-variété arithmétique kählérienne héritée de $\mathcal{X}$. Si Σ est un sous-schéma fermé de $\mathcal{Y}$ (donc aussi de $\mathcal{X}$) de dimension $d+1$, pour tout entier n on notera $h_{\mathcal{X}}^{(n)}(\Sigma)$ et $h_{\mathcal{Y}}^{(n)}(\Sigma)$ les hauteurs de Σ relativement à $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ et à $(\mathcal{Y}, \overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{Y}})$, respectivement. Alors lorsque n tend vers l'infini on a*

$$h_{\mathcal{Y}}^{(n)}(\Sigma) = h_{\mathcal{X}}^{(n)}(\Sigma) + o(n^{d+1}).$$

DÉMONSTRATION : Supposons n assez grand, de telle sorte que toutes les applications de restriction que l'on aura à considérer soient surjectives. Notons $\|.\|_{L^2(\mathcal{X})}$ et $\|.\|_{L^2(\mathcal{Y})}$ les normes L^2 de l'espace des sections de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur $\mathcal{X}$ et sur $\mathcal{Y}$, respectivement, $\|.\|_{q(\Sigma,\mathcal{X})}$ et $\|.\|_{q(\Sigma,\mathcal{Y})}$ les normes sur $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ quotient respectivement des normes $\|.\|_{L^2(\mathcal{X})}$ et $\|.\|_{L^2(\mathcal{Y})}$, et $\|.\|_{q(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$ la norme sur $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}})$ quotient de $\|.\|_{L^2(\mathcal{X})}$. Notons

$$\varphi_n : (\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma), \|.\|_{q(\Sigma,\mathcal{X})}) \longrightarrow (\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma), \|.\|_{q(\Sigma,\mathcal{Y})})$$

et

$$\psi_n : (\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}}), \|.\|_{q(\mathcal{Y},\mathcal{X})}) \longrightarrow (\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}}), \|.\|_{L^2(\mathcal{Y})})$$

les morphismes de $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens qui coïncident avec l'identité sur les $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents. Par la proposition 3.1.14 (appliquée avec $t = 0$), pour tout $\epsilon > 0$, les valeurs caractéristiques des $\psi_{n,\sigma}$ restent dans l'intervalle $[e^{-n\epsilon}, e^{n\epsilon}]$ si n est choisi assez grand. Par transitivité des normes quotient, $\|.\|_{q(\Sigma,\mathcal{X})}$ est la norme quotient de $\|.\|_{q(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$ par l'application de restriction de $\mathcal{Y}$ à Σ, de telle sorte que φ_n est l'application déduite de ψ_n par passage au quotient par cette même application de restriction. Par le corollaire 1.2.6, les valeurs caractéristiques des $\varphi_{n,\sigma}$ restent donc elles aussi dans l'intervalle $[e^{-n\epsilon}, e^{n\epsilon}]$ quand n tend vers l'infini. D'autre part, puisque par le théorème de Hilbert-Samuel (géométrique) la dimension des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma})_\sigma$ est (à partir d'un certain rang) un polynôme en n de degré d, ceci implique l'estimation

$$\left|\log \| \bigwedge^{\max} \varphi_n \|_\sigma \right| \leq \epsilon n^{d+1}$$

pour n assez grand. Puisque par le lemme 1.4.1 on a

$$h_{\mathcal{Y}}^{(n)}(\Sigma) - h_{\mathcal{X}}^{(n)}(\Sigma) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_\sigma \log \| \bigwedge^{\max} \varphi_n \|_\sigma,$$

ceci termine la démonstration. $\square$

Enfin, par des arguments analogues, on montre que le terme dominant du développement asymptotique des hauteurs d'un sous-schéma Σ d'une pré-variété arithmétique mesurée $\mathcal{X}$ ne dépend pas de la mesure sur $\mathcal{X}(\mathbb{C})$. Ainsi dans l'étude de la question A.2.1, on ne perd pas de généralité en supposant $\mathcal{X}$ munie d'une structure kählérienne.

Indiquons maintenant quelques méthodes envisageables pour aborder la question A.2.1.

A.2.a. Une première approche serait de généraliser les méthodes du chapitre 3, visant au moyen d'un théorème de relèvement L^2 de jets à se ramener au théorème de Hilbert-Samuel pour les variétés arithmétiques. La principale difficulté est que les faisceaux de jets qui apparaissent dans le cas général sont seulement des sous-quotients du fibré cotangent à $\mathcal{X}$ qui n'ont aucune raison *a priori* d'être localement libres sur la fibre générique. Peut-être est-il envisageable d'approximer d'une certaine façon ces faisceaux cohérents par des fibrés vectoriels ; par exemple, en remarquant que ces faisceaux cohérents sont localement libres sur un ouvert du sous-schéma, et en procédant par une récurrence sur la dimension ? Remarquons que, puisqu'un sous-schéma de dimension générique nulle est automatiquement «génériquement lisse avec multiplicité», une telle récurrence sur la dimension serait bien initiée, grâce au théorème 3.1.16.

Quoi qu'il en soit, on peut remarquer que la discussion précédente amène naturellement à généraliser la question A.2.1 sous la forme «tordue» suivante : *étant donné un faisceau cohérent $\mathcal{M}$ sur le schéma réduit $\Sigma^{\text{réd}}$, supposant que $\mathcal{M}$ s'exprime comme sous-quotient d'un fibré vectoriel hermitien $\mathcal{E}$ sur $\Sigma^{\text{réd}}$, calculer le degré d'Arakelov de $\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ lorsque ce $\mathcal{O}_K$-module est muni des métriques de sous-quotient héritées des métriques L^2 sur $\Gamma(\Sigma^{\text{réd}}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$.*

A.2.b. Une deuxième approche s'inspirerait directement de la démonstration donnée par Abbes et Bouche dans [1] du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique. Pour simplifier on supposera que $\mathcal{L}$ est tres ample et admet une section globale $s \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ dont le diviseur associé $\mathcal{Y}$ rencontre proprement Σ (du moins, sur la fibre générique), et que $\mathcal{X}$ est muni des structures kählériennes définies par la forme de Chern de $\overline{\mathcal{L}}$. On procède alors par récurrence sur la dimension de Σ_K. Si n est un entier assez grand, on a une suite exacte de $\mathcal{O}_K$-modules

$$0 \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n-1}|_\Sigma) \xrightarrow{s_n} \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma) \longrightarrow \Gamma(\Sigma \cap \mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma\cap\mathcal{Y}}) \longrightarrow 0 \tag{A.2.2}$$

où l'on a noté s_n l'application de multiplication par s de $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n-1}|_\Sigma)$ dans $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$, et où $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ est muni des métriques quotient des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$; on munit alors $\Gamma(\Sigma\cap\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma\cap\mathcal{Y}})$ des métriques quotient de ces métriques par la suite exacte (A.2.2). Une observation fondamentale est que, par transitivité des métriques quotient, ces métriques sur $\Gamma(\Sigma\cap\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma\cap\mathcal{Y}})$ sont aussi les métriques quotient des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$; autrement dit, ce sont les métriques servant à définir les hauteurs du sous-schéma $\Sigma \cap \mathcal{Y}$. Ainsi on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)} = h^{(n)}(\Sigma)$$

et

$$\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\Sigma\cap\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma\cap\mathcal{Y}})} = h^{(n)}(\Sigma\cap\mathcal{Y}).$$

On munit aussi $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n-1}|_\Sigma)$ des métriques quotient des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n-1})$, de telle sorte que par additivité du degré d'Arakelov dans les suites exactes courtes et par le lemme 1.4.1 on trouve

$$\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)} - \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\Sigma\cap\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma\cap\mathcal{Y}})} = \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n-1}|_\Sigma)} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma \log \| \bigwedge^{\max} s_n\|_\sigma .$$

Autrement dit, si n_0 est un entier suffisamment grand, il existe une constante C_{n_0} telle que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$h^{(n)}(\Sigma) = C_{n_0} + \sum_{n_0<k\leq n}\left(h^{(n)}(\Sigma\cap\mathcal{Y}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_\sigma \log\|\bigwedge^{\max} s_n\|_\sigma\right).$$

Supposons la réponse à la question A.2.1 positive pour $\Sigma\cap\mathcal{Y}$, autrement dit, supposons qu'on ait le développement asymptotique

$$h^{(n)}(\Sigma\cap\mathcal{Y}) \underset{n\to\infty}{=} \frac{(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d.[\Sigma\cap\mathcal{Y}])}{d!} n^d + o(n^d).$$

Alors répondre à la question A.2.1 pour Σ équivaut à résoudre le problème analytique suivant :

Question A.2.5 *Soient X une variété projective complexe munie d'un fibré en droites hermitien positif très ample $\overline{\mathcal{L}}$, Σ un sous-schéma fermé de X de dimension d et s une section globale de $\mathcal{L}$ dont le diviseur rencontre proprement Σ. Pour tout n assez grand, munissons les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ des normes quotient des normes L^2 sur $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ et notons*

$$s_n : \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n-1}|_\Sigma) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$$

l'application de multiplication par s. Est-il vrai que, lorsque n tend vers l'infini, le rapport

$$\frac{\log\|\bigwedge^{\max} s_n\|}{n^d}$$

tend vers une limite finie égale à

$$-\int_X \log \|s\| \delta_{[\Sigma]} \omega^d$$

où $\delta_{[\Sigma]}\omega^d$ *est le courant d'intégration (relativement à la forme volume héritée de la structure kählérienne) sur le cycle de dimension* d *associé à* Σ *?*

Remarquons qu'on sait répondre positivement à cette question (et donc aussi à la question A.2.1) lorsque $\Sigma = X$ est le sous-schéma défini par le faisceau d'idéaux nul. Évidemment, grâce aux résultats d'extension L^2 développés dans le chapitre 3 de cette thèse, il est facile de voir que ceci implique que la réponse à la question A.2.5 est encore positive lorsque Σ est supposé lisse avec multiplicité. On dispose d'au moins deux démonstrations de ce résultat dans le cas particulier $\Sigma = X$. La première, dans [1], th. 3.7, repose sur des méthodes de noyau de la chaleur. La seconde, dans [14], th. 13.13, utilise des techniques d'analyse micro-locale. Il serait intéressant d'examiner si l'une de ces démonstrations n'est pas susceptible de se généraliser au cas d'un sous-schéma quelconque.

A.2.c. À défaut de pouvoir répondre entièrement à la question A.2.1, on serait déjà assez satisfait de montrer que le rapport

$$\frac{h^{(n)}(\Sigma)}{n^{d+1}}$$

tend vers une limite finie (sans chercher à interpréter cette limite en termes de théorie de l'intersection arithmétique). Il semble raisonnable de vouloir aborder ce problème au moyen d'arguments de théorie de la capacité, en généralisant les résultats de [51] et [52].

Si $\mathcal{X}$ est une variété projective sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ équidimensionnelle et géométriquement réduite, si $\mathcal{L}$ un fibré en droites très ample sur $\mathcal{X}$, et si l'on munit les $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ de métriques hermitiennes vérifiant certaines conditions de compatibilité, l'existence de la capacité sectionnelle démontrée dans [52] signifie que les $\overline{\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})}$ vérifient un théorème de Hilbert-Samuel analogue à celui conjecturé ici. Il serait intéressant de voir dans quelle mesure on peut généraliser les méthodes de [52], ou bien en s'affranchissant de l'hypothèse de réduction faite sur $\mathcal{X}$, ou bien en ne considérant non plus seulement les $\mathcal{O}_K$-modules $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$, mais aussi des modules «tordus» $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ pour $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$ suffisamment général.

A.3 Termes suivants

A.3.a. Les proposition 4.2.8, corollaire 4.3.6 et théorème 5.2.2 semblent indiquer que la généralisation suivante de la question A.2.1 devrait avoir une réponse positive :

Question A.3.1 *Soit* Σ *un sous-schéma fermé de dimension* $d+1$ *d'une pré-variété arithmétique mesurée* $\mathcal{X}$ *sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *de dimension* $N+1$ *munie d'un fibré en droites hermitien positif* $\overline{\mathcal{L}}$. *Existe-t-il deux réels* a *et* b *tels que, pour* n *tendant vers l'infini, les hauteurs du sous-schéma* Σ *admettent le développement asymptotique suivant :*

$$h^{(n)}(\Sigma) = a.n^{d+1} + b.n^d \log n + o(n^d \log n) \quad ?$$

Ou, plus généralement, sous les mêmes hypothèses :

Question A.3.2 *Les hauteurs de Σ admettent-elles un développement asymptotique de la forme*

$$h^{(n)}(\Sigma) \underset{n\to\infty}{=} a_{d+1}n^{d+1} + b_d n^d \log n + a_d n^d + b_{d-1}n^{d-1}\log n + \cdots + b_0 \log n + a_0 + \\ + c_{-1}n^{-1} + c_{-2}n^{-2} + \cdots + c_{-r}n^{-r} + O(n^{-r-1})$$

à tout ordre r ?

Il est raisonnable de conjecturer que la constante b introduite dans la question A.3.1 devrait pouvoir s'exprimer uniquement en fonction de la géométrie de Σ aux places à l'infini. La proposition 3.2.3 fournit un encadrement de cette constante b lorsque la fibre générique Σ_K est définie par l'annulation d'une section globale d'un fibré vectoriel sur $\mathcal{X}_K$ transverse à la section nulle. On a alors

$$d/4.\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{d!} \leq b \leq (N + d/4)\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{d!}. \tag{A.3.1}$$

Remarquons que la borne inférieure $b = d/4.\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{d!}$ est atteinte dans le cas où Σ est l'espace projectif standard considéré comme sous-schéma de lui-même (proposition 4.2.3) cependant que la borne supérieure $b = (N + d/4)\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{d!}$ n'a été atteinte dans les cas étudiés ici que sous l'hypothèse triviale $N = d = 0$. Par exemple, dans le cas où Σ est un sous-espace linéaire de l'espace projectif, la proposition 4.2.8 donne $b = (N/2 - d/4)\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{d!}$. Il est possible que la démonstration de l'encadrement (A.3.1) donnée ici n'ait pas été optimale. Remarquons par exemple que la borne supérieure $b \leq (N + d/4)\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{d!}$ a été établie au moyen du lemme 3.1.5, fournissant une borne sur la norme L^∞ de la restriction d'une section globale de $\mathcal{L}$ à la sous-variété Σ en fonction de sa norme L^2 sur la variété tout entière, puis en intégrant sur Σ cette borne sur la norme L^∞ pour obtenir une borne sur la norme L^2 de cette restriction. Peut-être ceci pourrait-il être amélioré, en établissant une variante du lemme 3.1.5 directement pour la norme L^2 de la restriction, sans passer par la norme L^∞. Il est probable que ceci permette d'améliorer la borne supérieure sur b, sous la forme $b \leq (N - 3d/4)\frac{\deg(\mathcal{L}_K|_{\Sigma_K})}{d!}$. Cependant, à ce jour, l'auteur n'envisage pas de méthode susceptible de permettre de calculer explicitement cette constante b en toute généralité.

A.3.b. On constate un autre phénomène remarquable lorsque l'on compare les termes constants donnés par les théorème 5.2.2 et corollaire 5.5.12 avec leurs analogues géométriques.

Soient S une courbe projective lisse sur un corps algébriquement clos k et Σ un k-schéma projectif réduit de dimension 1 muni d'un morphisme fini et plat $\pi : \Sigma \longrightarrow S$ et d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ ample relativement à π. On fera l'hypothèse que Σ est réunion de sous-schémas fermés $\Sigma^{(i)}$ ($i \in \{1, \ldots, l\}$) deux à deux distincts qui sont des courbes projectives lisses, images de sections

$$\sigma_i : S \xrightarrow{\sim} \Sigma^{(i)} \subset \Sigma.$$

Notons

$$\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$$

le morphisme de normalisation et $\widetilde{\pi} = \pi \circ \nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow S$. Par [22] exemples 18.3.3 et 18.3.4.a on a

$$\mathrm{Td}(\Sigma) = \nu_* \mathrm{Td}(\widetilde{\Sigma}) - \sum_{P \in \Sigma(k)^{\mathrm{sing}}} \delta_P [P]$$

avec

$$\delta_P = \lg(\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma)_P.$$

Appliquant alors les formules (A.1.3) et (A.1.4) à Σ et à $\widetilde{\Sigma}$, on déduit de ce qui précède la relation

$$\deg(\pi_*(\mathcal{L}^{\otimes n})) = \deg(\widetilde{\pi}_*(\nu^* \mathcal{L}^{\otimes n})) - \sum_P \delta_P = \deg(\widetilde{\pi}_*(\nu^* \mathcal{L}^{\otimes n})) - \dim_k \Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma).$$

En outre, par les hypothèses faites précédemment, $\widetilde{\Sigma}$ s'identifie à la réunion disjointe de l copies de S et on a

$$\deg(\widetilde{\pi}_*(\nu^* \mathcal{L}^{\otimes n})) = \sum_{i=1}^{l} \deg(\sigma_i^* \mathcal{L}^{\otimes n}) = n \sum_{i=1}^{l} \deg(\sigma_i^* \mathcal{L}) = n \sum_{i=1}^{l} (c_1(\mathcal{L}).[\Sigma^{(i)}]),$$

d'où, finalement :

$$\deg(\pi_*(\mathcal{L}^{\otimes n})) = n.(c_1(\mathcal{L}).[\Sigma]) - \dim_k \Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma). \tag{A.3.2}$$

On remarquera que le terme constant de ce polynôme est l'analogue du terme de ramification fourni par le théorème 5.2.2. Plus précisément, par le théorème 5.2.2 (ou encore, par le théorème 5.5.8 et la discussion qui le précède), si Σ est un sous-schéma réduit de $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ qui est réunion de l sections de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on a

$$h^{(n)}(\Sigma) \underset{n \to \infty}{=} n.h([\Sigma]) + \frac{l}{2} \log \binom{N+n}{N} - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma) + O(n^{-1}). \tag{A.3.3}$$

Considérons maintenant la situation légèrement différente suivante. Soient S une courbe projective lisse sur un corps algébriquement clos k et Σ un k-schéma projectif réduit de dimension 1 muni d'un morphisme fini et plat $\pi : \Sigma \longrightarrow S$ et d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ ample relativement à π. On fera l'hypothèse que Σ est localement intersection complète. Alors, par [22], corollaire 18.3.1.b, on a

$$\mathrm{Td}(\Sigma) = \mathrm{td}(T_\Sigma) = [\Sigma] + \frac{1}{2} c_1(T_\Sigma)$$

où conformément aux notations de [22], T_Σ est le fibré tangent virtuel de Σ. Injectant ceci dans le théorème A.1.1 (ou, directement, dans (A.1.3) et (A.1.4)) on trouve

$$\begin{aligned}\deg(\pi_*(\mathcal{L}^{\otimes n})) &= n.(c_1(\mathcal{L}).[\Sigma]) + \frac{1}{2}(c_1(T_\Sigma).[\Sigma]) - \frac{1}{2}(c_1(T_S).\pi_*[\Sigma]) \\ &= n.(c_1(\mathcal{L}).[\Sigma]) + \frac{1}{2}((c_1(T_\Sigma) - \pi^* c_1(T_S)).[\Sigma]) \\ &= n.(c_1(\mathcal{L}).[\Sigma]) - \frac{1}{2}(c_1(T^\vee_{\Sigma/S}).[\Sigma]).\end{aligned} \tag{A.3.4}$$

À nouveau, le terme constant obtenu dans le cas géométrique est l'analogue du terme constant obtenu dans la situation arithmétique correspondante. En effet, par le corollaire 5.5.12, si Σ est un sous-schéma réduit de $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ fini et plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, sous l'hypothèse que Σ est localement intersection complète on a

$$h^{(n)}(\Sigma) \underset{n\to\infty}{=} n.h([\Sigma]) + \frac{\lg \Sigma}{2} \log \binom{N+n}{N} - \frac{1}{2.[K:\mathbb{Q}]} \log \#(\Omega^1_{\Sigma/\mathcal{O}_K}) + O(n^{-1}). \tag{A.3.5}$$

Il est frappant que (A.3.2) et (A.3.4) présentent des termes constants analogues à ceux de (A.3.3) et (A.3.5) respectivement, alors que ces derniers présentent en outre un terme d'ordre logarithmique. On peut se demander si ce phénomène ne témoignerait pas, pour tout sous-schéma fermé Σ d'une variété arithmétique $\mathcal{X}$, de l'existence d'une métrique naturelle sur les $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)_\sigma$ ou, du moins, sur leur puissance extérieure maximale, qui généraliserait la métrique de Quillen utilisée dans l'énoncé du théorème de Riemann-Roch arithmétique, de telle sorte que les termes logarithmiques (entre autres) proviennent de la différence entre cette métrique et celle utilisée dans la définition des hauteurs de sous-schémas. Remarquons cependant que, compte tenu de l'expression du terme logarithmique donnée dans le théorème 5.2.2, il est peu vraisemblable qu'une telle métrique se comporte continûment dans les familles plates de sous-schémas.

A.3.c. Une dernière question naturelle est la suivante, motivée par les proposition 2.3.8 et théorème 4.3.4.

Question A.3.3 *Soient Y_1 et Y_2 deux sous-schémas d'une variété analytique complexe projective X munie d'une forme volume et d'un fibré en droites hermitien positif $\overline{\mathcal{L}}$. Comment le réel*

$$d^{(n)} = d_{\Gamma(Y_1, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{Y_1}), \Gamma(Y_2, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{Y_2})}$$

mesurant l'orthogonalité des quotients $\Gamma(Y_1, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{Y_1})$ et $\Gamma(Y_2, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{Y_2})$ de $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ se comporte-t-il lorsque n tend vers l'infini ? En particulier, si l'on note M la dimension de l'intersection $Y_1 \cap Y_2$, le rapport

$$\frac{\log d^{(n)}}{n^M}$$

tend-il vers une limite finie, calculable en fonction de la géométrie de Y_1 et Y_2 au voisinage de $Y_1 \cap Y_2$?

Supposons qu'on dispose, en réponse à la question A.3.3, de l'estimation (relativement faible) suivante :

$$\log d^{(n)} \underset{n\to\infty}{=} O(n^{\max(\dim Y_1, \dim Y_2)}). \tag{A.3.6}$$

Soient alors Σ_1 et Σ_2 deux sous-schémas d'une pré-variété arithmétique mesurée munie d'un fibré en droites hermitien positif. Alors, compte tenu de la proposition 2.3.8 et de l'estimation (A.3.6), pour que la réponse à la question A.2.1 soit positive pour le sous-schéma $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, il suffirait qu'elle le soit pour chacun des sous-schémas Σ_1, Σ_2 et $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Ainsi, au moyen d'une récurrence sur la dimension, une réponse du type (A.3.6) à la question A.3.3 permettrait, dans l'étude de la question A.2.1, de se ramener au cas des sous-schémas de support irréductible.

Troisième partie

Deux exemples d'utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l'approximation diophantienne

Chapitre 6

Une preuve du théorème des six exponentielles par la méthode des pentes

6.1 Introduction

On se propose ici de donner une démonstration par la méthode des pentes (voir le paragraphe 1.4.1, ainsi que [9] appendice A) du résultat suivant :

Théorème 6.1.1 *Soient a_1, a_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et b_1, b_2, b_3 trois nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des six nombres*

$$\exp(a_i b_j) \qquad (1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 3)$$

est transcendant.

Une démonstration similaire à la nôtre a été obtenue indépendamment par É. Gaudron dans [23], annexe à la partie 2. On pourra aussi trouver une démonstration élémentaire du théorème 6.1.1, reposant sur la construction d'une fonction auxiliaire, dans [64]. Le lecteur pourra consulter [65] pour obtenir de nombreuses généralisations de ce théorème, ainsi que des compléments historiques.

6.2 Choix des fibrés hermitiens

Pour démontrer le théorème 6.1.1, on raisonne par l'absurde en supposant que le corps

$$K = \mathbb{Q}((e^{a_i b_j})_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3})$$

est algébrique. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K.

Les nombres complexes a_1 et a_2 étant linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, les fonctions $f_1(z) = \exp(a_1 z)$ et $f_2(z) = \exp(a_2 z)$ sont algébriquement indépendantes.

On choisit deux entiers r et s et on pose

$$E = \mathcal{O}_K^{r^2} \qquad \text{et} \qquad F = \mathcal{O}_K^{s^3}$$

qu'on munit des métriques hermitiennes naturelles.

On définit une application K-linéaire φ de E_K dans F_K comme suit : en identifiant E_K au K-espace vectoriel des polynômes en f_1 et f_2 de degré strictement inférieur à r par rapport à chaque variable, φ est l'évaluation d'un tel polynôme en les s^3 points de la forme $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$ pour $0 \leq \beta_1, \beta_2, \beta_3 < s$ (ces points sont tous distincts puisque b_1, b_2 et b_3 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$). Autrement dit, pour $[p_{\alpha_1,\alpha_2}]_{0\leq\alpha_1,\alpha_2<r} \in E_K$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi([p_{\alpha_1,\alpha_2}]_{\alpha_1,\alpha_2<r}) &= [(\sum_{\alpha_1,\alpha_2<r} p_{\alpha_1,\alpha_2} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2})(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3)]_{\beta_1,\beta_2,\beta_3<s} \\ &= [\sum_{\alpha_1,\alpha_2<r} p_{\alpha_1,\alpha_2} \prod_{1\leq i\leq 2, 1\leq j\leq 3} (e^{a_i b_j})^{\alpha_i \beta_j}]_{\beta_1,\beta_2,\beta_3<s} \\ &\in K^{s^3} = F_K.\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Lemme 6.2.1 *Il existe une constante λ telle que, si $s \geq \lambda r^{2/3}$, l'application φ est injective.*

DÉMONSTRATION : Notons $a = \max(|a_1|, |a_2|)$ et $b = \max(|b_1|, |b_2|, |b_3|)$. Par le lemme de Tijdeman ([61], corollaire au théorème 1), si $P(X_1, X_2)$ est un polynôme non nul à coefficients complexes de degré $< r$ en X_1 et X_2, la fonction $f(z) = P(f_1(z), f_2(z))$ a au plus $3r^2 + 8arR$ zéros dans tout disque de rayon R. Supposons φ non injective, et soit P un élément non nul du noyau de φ. Alors la fonction $f(z) = P(f_1(z), f_2(z))$ admet s^3 zéros dans un disque de rayon $R = 3bs$. Ainsi, si φ n'est pas injective, on a l'inégalité $s^3 \leq 3r^2 + 24abrs$. Ceci démontre le lemme, avec par exemple $\lambda = 3 + 3ab$. □

Pour tout entier t, on note F_t le sous-$\mathcal{O}_K$-module de F, de rang $s^3 - t^3$, défini comme suit :

$$F_t = \{(q_{\beta_1,\beta_2,\beta_3})_{\beta_1,\beta_2,\beta_3<s} \mid q_{\beta_1,\beta_2,\beta_3} = 0 \text{ si } \beta_1, \beta_2, \beta_3 < t\}.$$

Ceci définit une filtration

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_s = 0.$$

On note $E_t = E \cap \varphi^{-1}(F_{t,K})$. Ceci définit une filtration de E, et on note φ_t l'application (injective) induite par φ sur les gradués associés :

$$\varphi_t : (E_t/E_{t+1})_K \to (F_t/F_{t+1})_K.$$

Alors, de l'inégalité de pentes énoncée dans la proposition 1.4.2 on déduit l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
0 = \widehat{\deg}\overline{E} &= \sum_t \widehat{\deg}\overline{E_t/E_{t+1}} \\
&\leq \sum_t (\operatorname{rg} E_t - \operatorname{rg} E_{t+1})\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E_t/E_{t+1}}) \\
&\leq \sum_t (\operatorname{rg} E_t - \operatorname{rg} E_{t+1})(h(\varphi_t) + \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F_t/F_{t+1}})) \\
&= \sum_t (\operatorname{rg} E_t - \operatorname{rg} E_{t+1})h(\varphi_t)
\end{aligned}
\tag{6.2.2}
$$

la dernière égalité venant du fait que $\overline{F_t/F_{t+1}}$ s'identifie au fibré libre de rang $(t+1)^3 - t^3$ muni des métriques triviales.

6.3 Évaluation des normes

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$. De la relation (6.2.1) on déduit l'existence d'une constante $C(\mathfrak{p})$ telle que, pour tout t, on ait l'inégalité

$$\log \|\varphi_t\|_{\mathfrak{p}} \leq C(\mathfrak{p}).rs. \tag{6.3.1}$$

Plus précisément, on peut prendre $C(\mathfrak{p}) = \sum_{i,j} \log |\exp(a_i b_j)|_{\mathfrak{p}}$. En particulier, on peut supposer $C(\mathfrak{p}) = 0$ pour presque tout $\mathfrak{p}$.

De la même façon, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, on déduit de (6.2.1) l'existence d'une constante $C(\sigma)$ telle que, pour tout t, on ait l'inégalité

$$\log \|\varphi_t\|_{\sigma} \leq C(\sigma).rs. \tag{6.3.2}$$

Cependant, si t est assez grand, on peut au moyen d'un lemme de Schwarz obtenir une inégalité plus fine sur $\log \|\varphi_t\|_{\sigma}$, en procédant comme suit.

Fixons le plongement σ, et considérons K comme un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soient $t \geq 1$ un entier et $p = (p_{\alpha_1,\alpha_2}) \in E_t$. On note

$$F(z) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2 < r} p_{\alpha_1,\alpha_2} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}(z)$$

et

$$Q(z) = \prod_{\beta_1,\beta_2,\beta_3 < t} (z - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \beta_3 b_3).$$

Par définition de E_t, la fonction $F(z)/Q(z)$ est entière.

Si R est un réel > 0 et f une fonction entière, on notera $|f|_R = \sup_{z=R} |f(z)|$.

Posons

$$R(t) = t \log t. \tag{6.3.3}$$

Alors si t est assez grand, on a

$$R(t) > 2. \sup_{\beta_1,\beta_2,\beta_3<t+1} \{|\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3|\}. \tag{6.3.4}$$

Si z est un complexe de module $R(t)$, l'inégalité (6.3.4) implique que, pour tous $\beta_1, \beta_2, \beta_3 < t$, on a $|z - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \beta_3 b_3| \geq R(t)/2$, d'où

$$|Q(z)| \geq (R(t)/2)^{t^3}. \tag{6.3.5}$$

Soient alors γ_1, γ_2, γ_3 trois entiers $< t+1$, et $z_0 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3$. Posons $b = \max\{1, |b_1|, |b_2|, |b_3|\}$. Alors on a trivialement l'inégalité

$$|Q(z_0)| \leq (6bt)^{t^3}. \tag{6.3.6}$$

De plus, par (6.3.4), on a $|z_0| < R(t)$. En appliquant le principe du maximum et les inégalités (6.3.5) et (6.3.6), on trouve

$$\begin{aligned} |F(z_0)| = |Q(z_0)| \left|\frac{F}{Q}(z_0)\right| &\leq |Q(z_0)| \left|\frac{F}{Q}\right|_{R(t)} \\ &\leq \left(c\frac{t}{R(t)}\right)^{t^3} |F|_{R(t)} \leq \|p\| e^{c'rR(t)} \left(c\frac{t}{R(t)}\right)^{t^3} \end{aligned}$$

où c et c' sont des constantes convenables. On en déduit :

$$\log \|\varphi\|_\sigma \leq c'rR(t) - t^3(\log c + \log \frac{R(t)}{t}). \tag{6.3.7}$$

6.4 Conclusion

Soit maintenant m un entier assez grand, de telle sorte que (6.3.4) soit satisfaite pour tout $t \geq m$. Supposons qu'on ait $s > m$ et que s vérifie la condition du lemme 6.2.1 (de telle sorte que φ soit injective). Alors en combinant l'inégalité (6.2.2) et les majorations (6.3.1), (6.3.2) et (6.3.7), on trouve

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1 - \operatorname{rg} E_m / \operatorname{rg} E) \sup_{t<m} h(\varphi_t) + (\operatorname{rg} E_m / \operatorname{rg} E) \sup_{t\geq m} h(\varphi_t) \\ &\leq Crs + (\operatorname{rg} E_m / \operatorname{rg} E)(CrR(t) - t^3(C + \log(R(t)/t))) \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

pour un certain $t \geq m$ et pour une certaine constante C.

Par injectivité de φ, on a $\operatorname{rg} E_m \geq r^2 - m^3$, donc $\operatorname{rg} E_m / \operatorname{rg} E \geq 1 - m^3/r^2$. En prenant $m \approx r^{5/8}$ et $s \approx \lambda r^{2/3}$ (où λ est la constante donnée par le lemme 6.2.1), en remplaçant R par son expression (6.3.3), et en utilisant dans (6.4.1) l'encadrement $m \leq t \leq s$, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &\leq Crs + (\operatorname{rg} E_m / \operatorname{rg} E)(CrR(s) - m^3(C + \log(R(m)/m))) \\ &\leq C' r^{5/3} \log r - C'' r^{15/8} \end{aligned}$$

pour des constantes positives C' et C'' adéquates. Il suffit alors de choisir r assez grand pour obtenir la contradiction initialement souhaitée.

Chapitre 7

Un critère d'indépendance algébrique arakelovien

La plupart des démonstrations de résultats d'indépendance algébrique, que ce soit en petit ou en grand degré de transcendance (cf. [46]) reposent sur un critère dont le prototype est celui démontré par P. Philippon dans [47]. Les outils utilisés principalement pour démontrer un tel critère relèvent en général de la théorie de l'élimination. Cependant, dans [56], C. Soulé a expliqué comment le mécanisme des hauteurs, qui joue un rôle crucial dans la démonstration du critère (voir par exemple [47] ou [48]), s'interprétait en termes de géométrie d'Arakelov[1].

Dans cette optique, on se propose ici de donner une démonstration d'un critère pour l'indépendance algébrique, dans laquelle tous les arguments de théorie de l'élimination ont été remplacés par des raisonnements faisant appel à la théorie de l'intersection arithmétique. Dans ses grandes lignes, la preuve suit celle donnée par M. Laurent et D. Roy dans [39] d'un critère pour l'indépendance algébrique avec multiplicités. La traduction en langage arakelovien des arguments permettant de prendre en compte les multiplicités ne semble pas devoir poser de problème mais, par souci de simplicité, on a donné ici une version sans multiplicités de ce critère.

Toutefois, on notera que le critère «arakelovien» ainsi obtenu ne présente, en lui-même, pas grand intérêt. D'abord, il n'est valable que sur le corps des nombres complexes, alors que les critères démontrés au moyen de la théorie de l'élimination peuvent en général aussi s'appliquer au cas p-adique. Ensuite, même sur $\mathbb{C}$, le critère énoncé ici est un peu moins fin que celui de [47]. Peut-être ce dernier point peut-il être amélioré.

Techniquement, la preuve repose sur l'introduction de métriques déformées sur les puissances du fibré en droites universel sur l'espace projectif. La construction de ces métriques déformées fait l'objet de la première section de ce chapitre.

[1] la théorie des hauteurs du point de vue arakelovien ayant été auparavant introduite (et appliquée avec succès à d'autres problèmes) dans [20].

7.1 Notations et constructions préliminaires

7.1.1 Construction de métriques déformées

Soient m un entier, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension $m+1$ et $\mathbb{P}_E$ l'espace projectif des hyperplans de E muni de la structure kählérienne définie au paragraphe 1.3.1. Si $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ sont des éléments de $E^\vee$ et x et y les éléments de $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$ qu'ils engendrent, on pose

$$\mathrm{d}(x,y) = \frac{\|\widetilde{x}\wedge\widetilde{y}\|_{\bigwedge^2 E^\vee}}{\|\widetilde{x}\|_{E^\vee}\|\widetilde{y}\|_{E^\vee}}$$

avec la normalisation (1.1.2) pour la norme puissance extérieure. De façon équivalente,

$$\mathrm{d}(x,y) = \left(1 - \frac{|(\widetilde{x},\widetilde{y})_{E^\vee}|^2}{\|\widetilde{x}\|^2_{E^\vee}\|\widetilde{y}\|^2_{E^\vee}}\right)^{1/2}.$$

Cette expression ne dépend pas du choix des représentants $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ de x et y. Elle est en outre invariante sous l'action naturelle du groupe unitaire $U(E)$ sur $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$. Remarquons que le choix d'une base unitaire de E détermine un isomorphisme isométrique de $\mathbb{P}_E$ sur l'espace projectif standard $\mathbb{P}^m$. Après action d'une transformation unitaire, on peut supposer que cet isomorphisme envoie x sur le point de coordonnées homogènes $(1:0:\ldots:0)$ et y sur $(\cos\varphi:\sin\varphi:0:\ldots:0)$ pour un unique $\varphi\in[0,\pi/2]$ convenablement choisi ; on a alors

$$\mathrm{d}(x,y) = \sin\varphi.$$

Le plus court segment de géodésique joignant ces deux points est la courbe

$$t\in[0,\varphi]\mapsto(\cos t:\sin t:0:\ldots:0)$$

dont la longueur est précisément

$$\mathrm{dist}_{\text{géod}}(x,y) = \varphi\in[0,\pi/2]$$

(ceci résulte de la normalisation choisie pour la forme de Kähler sur $\mathbb{P}^m$; voir par exemple le lemme 5.3.5). Pour tous x et y dans $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$ on a donc

$$\mathrm{d}(x,y) = \sin(\mathrm{dist}_{\text{géod}}(x,y)).$$

Par le fait que pour tous réels a et b dans l'intervalle $[0,\pi/2]$ on ait $\sin(a+b)\leq\sin a+\sin b$ si $a+b\leq\pi/2$ et $\sin a+\sin b\geq 1$ sinon, ceci implique que d définit bien une distance sur $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$.

Notons $\|.\|_{E,0} = \|.\|_E$ la norme hermitienne sur E et $\pi:\mathbb{P}_E\to\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ le morphisme structural. Rappelons que suivant les constructions du paragraphe 1.3.1, le fibré en droites universel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$ sur $\mathbb{P}_E$ est muni de la métrique $\|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),0}$ définie par passage au quotient de la norme $\|.\|_{E,0}$ par la surjection naturelle $\pi^*E\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$. On notera parfois aussi

$\|.\|_{FS} = \|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),0}$ et on dira qu'il s'agit de la métrique de Fubini-Study. Par définition la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}_E$ est la première forme de Chern de cette métrique :

$$\omega_{FS} = c_1(\|.\|_{FS}).$$

Fixons alors θ un élément de $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$ et notons l_θ une forme linéaire sur E de norme 1 représentant θ (ainsi l_θ est uniquement déterminée à multiplication par un complexe de module 1 près). Pour tout réel $U \geq 0$ on définit une norme hermitienne $\|.\|_{E,U}$ sur E par la formule suivante :

$$\|x\|_{E,U}^2 = \|x\|_{E,0}^2 + (e^{2U} - 1)|l_\theta(x)|^2$$

pour $x \in E$. De façon équivalente, on a $\|x\|_{E,U} = \|\lambda_U(x)\|_{E,0}$ où λ_U est l'endomorphisme autoadjoint de E égal à l'identité sur le noyau H_θ de l_θ et à la multiplication par e^U sur l'orthogonal de H_θ.

Définition 7.1.1 *Avec ces notations, la métrique déformée d'amplitude U (centrée en θ) sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$ est la métrique $\|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}$ définie par passage au quotient de la norme hermitienne $\|.\|_{E,U}$ par la surjection naturelle $\pi^*E \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$.*

Remarquons que pour $U = 0$ on retrouve ainsi la métrique de Fubini-Study.

Proposition 7.1.2 *Avec ces notations, on a*

$$\|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U} = e^{\varphi_U}\|.\|_{FS}$$

où φ_U est la fonction définie par

$$\varphi_U(\alpha) = -\frac{1}{2}\log(e^{-2U}(1 - \mathrm{d}(\alpha,\theta)^2) + \mathrm{d}(\alpha,\theta)^2)$$

pour $\alpha \in \mathbb{P}_E(\mathbb{C})$.

Démonstration : Soient α un point de $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$ et $\widetilde{\alpha}$ un élément non nul de $E^\vee$ relevant α. Considérons un élément s de E et notons encore s son image naturelle dans $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1))$. Par construction on a

$$\|s\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}(\alpha) = \frac{|\widetilde{\alpha}(s)|}{\|\widetilde{\alpha}\|_{E^\vee,U}}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\|.\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}}{\|.\|^2_{FS}}(\alpha) &= \frac{\|\widetilde{\alpha}\|^2_{E^\vee,0}}{\|\widetilde{\alpha}\|^2_{E^\vee,U}} \\
&= \frac{\|\widetilde{\alpha}\|^2_{E^\vee,0}}{\|\lambda_U^*(\widetilde{\alpha})\|^2_{E^\vee,0}} \\
&= \frac{\|\widetilde{\alpha}\|^2_{E^\vee,0}}{\|\widetilde{\alpha}\|^2_{E^\vee,0} + (e^{-2U} - 1)|(\widetilde{\alpha}, l_\theta)_{E^\vee,0}|^2} \\
&= \frac{1}{1 + (e^{-2U} - 1)(1 - \mathrm{d}(\alpha,\theta)^2)}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remarquons en particulier qu'en tout point, φ_U est positive ou nulle et qu'elle atteint son maximum, égal à U, en $\alpha = \theta$. On notera ω_U la forme de Chern de la métrique $\|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}$. On a donc

$$\omega_U = \omega_{FS} - 2dd^c\varphi_U.$$

Il convient de signaler que, par construction, la forme ω_U est encore positive.

Remarque 7.1.3 On a construit les métriques déformées sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$ à partir de normes hermitiennes sur E obtenues en dilatant la norme hermitienne initiale. On aurait aussi pu faire une construction analogue avec des normes non hermitiennes, de la façon suivante.

À toute norme N sur un espace vectoriel E de dimension $m+1$ sur $\mathbb{C}$ on associe une métrique (continue) $\|.\|$ sur le fibré en droites universel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}_E$ des hyperplans de E, définie comme suit : en tout point α de $\mathbb{P}_E$, $\|.\|(\alpha)$ est la norme quotient de N pour la projection canonique de E sur la fibre de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$ en α.

La métrique ainsi définie sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$ est positive. En effet, en dualisant, il suffit de montrer que si s est une section locale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(-1)$ ne s'annulant pas, alors $\log\|s\|(x)$ est une fonction plurisousharmonique de x (où l'on a muni $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(-1)$ de la métrique duale). Une fonction de plusieurs variables est plurisousharmonique si et seulement sa restriction à chaque droite affine (complexe) l'est. On se ramène donc au problème unidimensionnel qui suit.

Soient $E = \mathbb{C}^2$ muni d'une norme N, $E^\vee$ muni de la norme duale, $X = \mathbb{P}_E(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\pi : X \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ la projection canonique, $(1 : z)$ une coordonnée locale holomorphe sur X au voisinage de $(1 : 0)$, et $u(z)$ une section locale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(-1)$ ne s'annulant pas. Par compatibilité des normes quotient à la dualité, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(-1)$ est muni de la métrique $\|.\|$ induite par l'inclusion $i : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(-1) \hookrightarrow \pi^*E^\vee$, et on veut montrer que $\log\|u(z)\|$ est une fonction sousharmonique de z. Par [18] ch. I exemple (7.4.b), il suffit de montrer que l'ensemble des couples

$$\{(w,z) \in \mathbb{C}\times B \mid \ \log|w| + \log\|u(z)\| < 0\}$$

est pseudoconvexe, où B est un ouvert pseudo-convexe de X. Or cet ensemble s'identifie au fibré en disques unitaires de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(-1)$, via la trivialisation définie par u, et il est bien pseudoconvexe, car image inverse par l'application holomorphe i du fibré en disques unitaires de $\pi^*E^\vee$ qui est convexe, donc pseudoconvexe.

Ceci étant fait, pour $s \in \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1))$, posons

$$\|s\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{P}_E} \|s\|(x).$$

Alors, par le théorème de Hahn-Banach, ceci permet de retrouver la norme initiale sur E : on a

$$\|s\|_{L^\infty} = N(s),$$

où l'on a fait l'identification canonique $E = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1))$.

On va donner maintenant un autre moyen de construction des métriques déformées sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$. Notons M le schéma de déformation au cône normal du sous-schéma $\{\theta\}$ de $\mathbb{P}_E$, *i.e.* l'éclaté de $\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1$ en le sous-schéma $\{\theta\} \times \{\infty\}$. Notons $\pi_M : M \to \mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1$ la projection naturelle. Si p et q sont deux entiers, notons $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E\times\mathbb{P}^1}(p,q) = \mathrm{pr}_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(p) \otimes \mathrm{pr}_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q)$ le fibré en droites naturel de bidegré (p,q) sur $\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1$. On notera aussi $\mathcal{O}_M(p,q) = \pi_M^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E\times\mathbb{P}^1}(p,q)$. Remarquons que ce faisceau est muni d'une métrique naturelle (provenant des métriques de Fubini-Study sur chacun des facteurs).

Le faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}$ définissant $\{\theta\}\times\{\infty\}$ comme sous-schéma de $\mathbb{P}_E\times\mathbb{P}^1$ est engendré par ses sections globales de bidegré $(1,1)$. On en déduit (par (3.1.2)) un morphisme naturel

$$f : M \to \mathbb{P}_H$$

où $H = \Gamma(\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1, \mathfrak{I}\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E\times\mathbb{P}^1}(1,1))$. Notons D le diviseur exceptionnel sur M (c'est-à-dire l'image inverse par π_M du sous-schéma $\{\theta\} \times \{\infty\}$ de $\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1$). On a alors (cf. (3.1.3)) une identification naturelle

$$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_H}(1) = \mathcal{O}_M(1,1)(-D).$$

Remarquons que H est naturellement muni des normes L^2 sur $\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1$ (pour la mesure produit), de telle sorte que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_H}(1)$, puis $\mathcal{O}_M(1,1)(-D)$ et plus généralement tous les $\mathcal{O}_M(p,q)(nD)$ (via l'égalité $\mathcal{O}_M(p,q)(nD) = \mathcal{O}_M(1,1)(-D)^{\otimes -n} \otimes \mathcal{O}_M(p+n,q+n)$) héritent de métriques naturelles.

Identifions l'ouvert $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\smallsetminus\{\infty\}$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}$ et, pour tout réel $U \geq 0$, notons α_U le point de coordonnée $\sqrt{e^{2U}-1}$. Puisque π_M est un isomorphisme hors du diviseur exceptionnel, l'inclusion naturelle de $\mathbb{P}_E = \mathbb{P}_E \times \{\alpha_U\}$ dans $\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1$ se relève en une inclusion

$$i_U : \mathbb{P}_E \hookrightarrow M$$

et on a un isomorphisme naturel $i_U^*\mathcal{O}_M(1,0)(-D) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$.

Proposition 7.1.4 *Sous ces hypothèses, notons $\|.\|'_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}$ la métrique sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)$ déduite par restriction par i_U de la métrique naturelle sur $\mathcal{O}_M(1,0)(-D)$. Alors on a*

$$\|.\|'_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U} = \frac{1}{\sqrt{2(m+1)}}\|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}$$

où $\|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}$ est la métrique déformée définie au début de ce chapitre.

Démonstration : Notons $\rho = \|1\|_{\mathcal{O}_M(D)}$ où 1 est la section canonique du faisceau $\mathcal{O}_M(D)$. Par définition, pour tout point $(\widetilde{x,y}) \in M(\mathbb{C})$ s'envoyant par π_M sur $(x,y) \in \mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on a

$$\|.\|_{\mathcal{O}_M(1,0)(-D)}(\widetilde{x,y}) = \|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)}(x)/\rho(\widetilde{x,y})$$

donc, spécialisant en $y = \alpha_U$,

$$\|.\|'_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}(x) = \|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)}(x)/\rho(i_U(x)). \tag{7.1.1}$$

Par ailleurs, par le lemme 3.1.7, pour toute base orthonormale $(h_1,\ldots,h_d)$ de H, on a $\rho = (\|h_1\|^2_{\mathcal{O}_M(1,1)} + \cdots + \|h_d\|^2_{\mathcal{O}_M(1,1)})^{1/2}$. Choisissons une base orthonormale $(e_1,\ldots,e_m)$

de l'hyperplan de E défini par θ et complétons-la en une base orthonormale $(e_0, \dots, e_m)$ de E. Notons aussi (X_0, X_1) la base canonique de $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, ordonnée de telle sorte que le point ∞ admette pour coordonnées homogènes $(0:1)$. Alors $(e_0 \otimes X_0, \dots, e_m \otimes X_0, e_0 \otimes X_1, \dots, e_m \otimes X_1)$ est une base orthogonale de $\Gamma(\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1}(1,1)) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)) \otimes \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ et par le lemme 1.3.4, pour tous i et j, les normes L^2 des éléments de cette base vérifient

$$\|e_i \otimes X_j\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1}(1,1), L^2(\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1)} = \|e_i\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1), L^2(\mathbb{P}_E)} \|X_j\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1), L^2(\mathbb{P}^1)} = \frac{1}{2(m+1)}.$$

D'autre part, en tout point de $\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1$ on a

$$\sum_{\substack{0 \le i \le m \\ 0 \le j \le 1}} \|e_i \otimes X_j\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1}(1,1)} = \Big(\sum_{0 \le i \le m} \|e_i\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)}\Big)\Big(\sum_{0 \le j \le 1} \|X_j\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)}\Big) = 1$$

donc, puisque H est l'hyperplan de $\Gamma(\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E \times \mathbb{P}^1}(1,1)))$ orthogonal à $e_0 \otimes X_1$, on trouve

$$\rho = (2(m+1)(1 - \|e_0 \otimes X_1\|^2_{\mathcal{O}_M(1,1)}))^{1/2}.$$

Maintenant, en $x \in \mathbb{P}_E(\mathbb{C})$, on a $\|e_0\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1)}(x) = 1 - \mathrm{d}(x,\theta)^2$ et en $\alpha_U = (1 : \sqrt{e^{2U} - 1}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on a $\|X_1\|^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)}(\alpha_U) = \frac{e^{2U}-1}{1+e^{2U}-1} = 1 - e^{-2U}$, donc

$$\rho(i_U(x)) = (2(m+1)(1 - (1 - e^{-2U})(1 - \mathrm{d}(x,\theta)^2)))^{1/2} = (2(m+1))^{1/2} e^{-\varphi_U(x)}.$$

On conclut en injectant ceci dans (7.1.1) et comparant avec la proposition 7.1.2. $\square$

On retiendra de ceci que les métriques déformées $\|.\|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1),U}$ se recollent pour redonner (à une constante multiplicative près) la métrique naturelle sur le fibré $\mathcal{O}_M(1,0)(-D)$ sur le schéma M de réduction au cône normal de θ dans $\mathbb{P}_E$.

7.1.2 Rappels sur les nombres de Lelong généralisés

Pour toute cette partie, on renvoie à [18], chapitre III.

Soit X une variété analytique complexe hermitienne. Une forme de bidegré (p,p) sur X est dite fortement positive si elle est localement combinaison linéaire à coefficients réels positifs de formes

$$(i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1}) \wedge \cdots \wedge (i\alpha_p \wedge \overline{\alpha_p})$$

où les α_i sont des 1-formes. Un courant est dit positif s'il est localement dans le cône dual du cône des formes fortement positives. Une forme est dite positive si elle est positive en tant que courant. Enfin un courant est dit fortement positif s'il est localement dans le cône dual du cône des formes positives. Ceci implique qu'une forme est fortement positive si et seulement si elle l'est en tant que courant. En bidegré et en bidimension $(0,0)$ ou $(1,1)$, les notions de positivité et de positivité forte coïncident. Si u est une fonction plurisousharmonique, $dd^c u$ est un courant positif. Si Z est un sous-ensemble analytique de X équidimensionnel, le courant d'intégration sur Z est positif.

Suivant [5], si u est une fonction plurisousharmonique localement bornée et T un courant positif fermé, on pose

$$(dd^c u) \wedge T = dd^c(uT), \tag{7.1.2}$$

avec la convention usuelle $dd^c = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}$; on prendra garde que cette convention diffère par un facteur 1/2 de celle de [18].

Le courant $(dd^c u) \wedge T$ est encore un courant positif fermé.

On va maintenant définir les nombres de Lelong généralisés, suivant [18] section III.5. Supposons X de Stein et soit $\varphi : X \longrightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique. On pose

$$S(r) = \{x \in X \mid \varphi(x) = r\} \quad \text{et} \quad B(r) = \{x \in X \mid \varphi(x) < r\}.$$

Définition 7.1.5 *Soient T un courant positif fermé de bidimension (p,p) et R un réel tel que $B(R) \cap \mathrm{Supp}T$ soit d'adhérence compacte dans X. La mesure $T \wedge (dd^c\varphi)^p$ étant définie par applications successives de* (7.1.2)*, pour tout $r \in]-\infty, R[$ on pose*

$$\nu(T, \varphi, r) = \int_{B(r)} T \wedge (dd^c\varphi)^p.$$

C'est une fonction positive croissante de r et on définit le nombre de Lelong généralisé de T relativement au poids φ comme

$$\nu(T, \varphi) = \lim_{r \to -\infty} \nu(T, \varphi, r) \geq 0.$$

Un calcul rapide utilisant essentiellement la formule de Stokes (et à propos duquel on peut consulter [18] ch. III (5.5)) montre que si $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante C^1, alors

$$\int_{B(r)} T \wedge (dd^c(\chi \circ \varphi))^p = \chi'(r)^p \nu(T, \varphi, r). \tag{7.1.3}$$

On utilisera cette formule dans la situation suivante :

- $X = \mathbb{C}^m$
- $T = \delta_Z$ est le courant d'intégration sur un cycle effectif Z de dimension complexe p (*i.e.* combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de sous-ensembles analytiques fermés purement de dimension p)
- $\varphi(z) = \log \|z\|^2$ où $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ et $\|z\|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2$
- χ est la fonction exponentielle.

En posant $r = \log \rho^2$ on trouve

$$\begin{aligned}
\nu(T, \varphi, \log \rho^2) &= \nu(T, \varphi, r) \\
&= \chi'(r)^{-p} \int_{B(r)} T \wedge (dd^c(\chi \circ \varphi))^p \\
&= \rho^{-2p} \int_{\|z\| < \rho} \delta_Z \wedge (dd^c(\chi \circ \varphi))^p.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} dd^c(\chi\circ\varphi) &= dd^c(|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2)\\ &= \frac{i}{2\pi}(dz_1\wedge d\overline{z}_1+\cdots+dz_m\wedge d\overline{z}_m)\\ &= \frac{1}{\pi}(dx_1\wedge dy_1+\cdots+dx_m\wedge dy_m)\end{aligned}$$

est la 2-forme associée à la métrique hermitienne standard sur $\mathbb{C}^m$ dont la partie réelle est la métrique euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^{2m}$, de telle sorte que, par le théorème de Wirtinger (cf. [28] p. 31 ou [18] section III.1.D.) et par la remarque 1.1.4, on trouve

$$\int_{||z||<\rho}\delta_Z\wedge(dd^c(\chi\circ\varphi))^p=\frac{p!}{\pi^p}\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(Z\cap B_{\mathbb{C}^m}(\rho))$$

où $B_{\mathbb{C}^m}(\rho)$ est la boule de rayon ρ pour la métrique euclidienne standard sur $\mathbb{C}^m=\mathbb{R}^{2m}$ et $\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(Z\cap B_{\mathbb{C}^m}(\rho))$ est le volume de $Z\cap B_{\mathbb{C}^m}(\rho)$ pour la mesure sur Z déduite naturellement de cette structure euclidienne. On trouve donc finalement

$$\nu(\delta_Z,\varphi,\log\rho^2)=\frac{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(Z\cap B_{\mathbb{C}^m}(\rho))}{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(B_{\mathbb{C}^p}(\rho))}. \qquad (7.1.4)$$

Faisant tendre ρ vers 0, on retrouve les propriétés des nombres de Lelong usuels : $\nu(\delta_Z,\varphi)$ est la multiplicité de Z en l'origine. Une autre conséquence importante de la formule (7.1.4) est que le rapport

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(Z\cap B_{\mathbb{C}^m}(\rho))}{\rho^{2p}}$$

est une fonction croissante de ρ. Pour tout ceci, on peut consulter [18], formules III.(5.6) à III.(5.9).

On va maintenant établir une version projective de cet énoncé affine. Pour ce faire, on utilisera essentiellement la proposition suivante :

Proposition 7.1.6 *Soient $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ l'espace projectif standard muni de la distance* d *définie au début de ce chapitre, ω_{FS} la forme de Fubini-Study et α le point de coordonnées homogènes $(1:0:\ldots:0)$. Notons*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^m(\mathbb{C})\\ & (z_1,\ldots,z_m) & \mapsto & (1:z_1:\ldots:z_m)\end{array}$$

le plongement usuel. Pour $r\in[0,1[$ notons $B_{\mathbb{P}^m}(r)$ la boule de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ centrée en α et de rayon r (pour la distance d*). Donnons-nous Z un cycle effectif de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ de dimension p et notons*

$$\mathrm{Vol}_{FS}(Z\cap B_{\mathbb{P}^m}(r))=\int_{Z\cap\{\mathrm{d}(\alpha,\beta)<r\}}\omega_{FS}^p|_Z(\beta)=\int_{B_{\mathbb{P}^m}(r)}\delta_Z\omega_{FS}^p.$$

Alors si $\rho=\sqrt{r^2/(1-r^2)}$ (donc $r^2=\rho^2/(1+\rho^2)$), on a

$$\mathrm{Vol}_{FS}(Z\cap B_{\mathbb{P}^m}(r))=r^{2p}\nu(\delta_{f^*Z},\varphi,\log\rho^2)$$

où, comme précédemment, on a noté φ la fonction $\varphi(z)=\log\|z\|^2$ pour $z\in\mathbb{C}^m$.

Démonstration : Sur $\mathbb{C}^m$ définissons une fonction

$$\psi(z) = \log(1 + (|z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2)) = \log(1 + \|z\|^2).$$

Alors ψ est plurisousharmonique et on a

$$dd^c\psi = f^*\omega_{FS}.$$

D'autre part, si $\beta = (1 : z_1 : \ldots : z_m) = f(z) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{d}(\alpha, \beta)^2 = \frac{\|z\|^2}{1+\|z\|^2} < r^2$ si et seulement si $\|z\|^2 < \rho^2 = \frac{r^2}{1-r^2}$, ou encore si et seulement si $\psi(z) < \log(1 + \rho^2)$. Ceci implique

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{FS}(Z \cap B_{\mathbb{P}^m}(r)) &= \int_{\mathrm{d}(\alpha, f(z)) < r} \delta_Z.\omega_{FS}^p(f(z)) \\
&= \int_{\psi < \log(1+\rho^2)} \delta_{f^*Z}.(f^*\omega_{FS})^p \\
&= \int_{\psi < \log(1+\rho^2)} \delta_{f^*Z}.(dd^c\psi)^p \\
&= \nu(\delta_{f^*Z}, \psi, \log(1 + \rho^2)).
\end{aligned}$$

De plus on a par définition

$$\psi = \log(1 + e^\varphi)$$

de sorte que

$$dd^c(e^\psi) = dd^c(e^\varphi)$$

et, en utilisant deux fois (7.1.3) avec $\chi(x) = e^x$, on trouve

$$\begin{aligned}
\nu(\delta_{f^*Z}, \psi, \log(1 + \rho^2)) &= \frac{1}{(1 + \rho^2)^p} \int_{\psi < \log(1+\rho^2)} \delta_{f^*Z}.(dd^c(e^\psi))^p \\
&= \frac{1}{(1 + \rho^2)^p} \int_{\varphi < \log \rho^2} \delta_{f^*Z}.(dd^c(e^\varphi))^p \\
&= \left(\frac{\rho^2}{1 + \rho^2}\right)^p \nu(\delta_{f^*Z}, \varphi, \log \rho^2)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 7.1.7 *Avec les notations de la proposition 7.1.6, le rapport*

$$\frac{\mathrm{Vol}_{FS}(Z \cap B_{\mathbb{P}^m}(r))}{r^{2p}}$$

est une fonction croissante de r.

Démonstration : Par la proposition on a

$$\frac{\mathrm{Vol}_{FS}(Z \cap B_{\mathbb{P}^m}(r))}{r^{2p}} = \nu(\delta_{f^*Z}, \varphi, \log \rho^2),$$

où $\rho = \sqrt{r^2/(1 - r^2)}$ est une fonction croissante de r. Mais le courant $\delta_{f^*Z} \wedge (dd^c\varphi)^p$ est positif, ce qui fait que $\nu(\delta_{f^*Z}, \varphi, \log \rho^2)$ est une fonction croissante de ρ, et termine la démonstration. □

Corollaire 7.1.8 *Avec les notations de la proposition 7.1.6, on a*

$$\mathrm{Vol}_{FS}(B_{\mathbb{P}^m}(r)) = r^{2m}.$$

DÉMONSTRATION : Cela résulte immédiatement de la proposition, en prenant $Z = \mathbb{P}^m$, puis en appliquant (7.1.4). Remarquons qu'on aurait aussi pu établir aisément cette formule au moyen d'un calcul direct. □

Ceci permet de reformuler un peu plus élégamment les résultats de la proposition, sous la forme qui suit : si Z est un cycle effectif de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ de dimension p et si $\rho = \sqrt{r^2/(1-r^2)}$ (de telle sorte que $f^*B_{\mathbb{P}^m}(r) = B_{\mathbb{C}^m}(\rho)$), on a

$$\nu(\delta_{f^*Z}, \psi, \log(1+\rho^2)) = \mathrm{Vol}_{FS}(Z \cap B_{\mathbb{P}^m}(r)), \tag{7.1.5}$$

$$\nu(\delta_{f^*Z}, \varphi, \log \rho^2) = \frac{\mathrm{Vol}_{FS}(Z \cap B_{\mathbb{P}^m}(r))}{\mathrm{Vol}_{FS}(B_{\mathbb{P}^p}(r))} = \frac{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(f^*Z \cap B_{\mathbb{C}^m}(\rho))}{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(B_{\mathbb{C}^p}(\rho))} \tag{7.1.6}$$

et

$$\frac{\mathrm{Vol}_{FS}(Z \cap B_{\mathbb{P}^m}(r))}{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(f^*(Z \cap B_{\mathbb{P}^m}(r)))} = \frac{p!}{\pi^p}(1-r^2)^p, \tag{7.1.7}$$

où φ et ψ sont les fonctions sur $\mathbb{C}^m$ définies par $\varphi(z) = \log \|z\|^2$ et $\psi(z) = \log(1+\|z\|^2)$.

Corollaire 7.1.9 *Soient Z_1 et Z_2 deux cycles effectifs de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$* de même dimension. *Soit $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, $f(z_1, \ldots, z_m) = (1 : z_1 : \ldots : z_m)$ le plongement usuel, envoyant l'origine sur $\alpha = (1 : 0 : \ldots : 0)$. Alors si B est une boule de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ centrée en α dont l'intersection avec Z_2 est relativement d'intérieur non vide, on a*

$$\frac{\mathrm{Vol}_{FS}(Z_1 \cap B)}{\mathrm{Vol}_{FS}(Z_2 \cap B)} = \frac{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(f^*(Z_1 \cap B))}{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(f^*(Z_2 \cap B))}.$$

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate de (7.1.7). □

7.2 Énoncé et principe de la démonstration du théorème

Soit K un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$. Quitte à remplacer K par $K[i]$, on supposera K totalement imaginaire. Soit $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $m+1$. Le schéma $\mathbb{P}_E$ et les fibrés $\overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(n)}$ sont munis des structures hermitiennes habituelles, définies au paragraphe 1.4.2. Notons $\lambda_{\max}^{(0)}$ le plus grand des minima successifs [2] de $\overline{E}$, c'est-à-dire le plus petit réel tel qu'il existe des éléments $X_0, \ldots, X_m$ de E qui forment une base de E_K et tels que pour tout i et pour tout plongement τ de K dans $\mathbb{C}$ on ait $\|X_i\|_\tau \leq \lambda_{\max}^{(0)}$. Choisissons donc une telle base, et posons enfin $\lambda_{\max} = \max(1, \lambda_{\max}^{(0)})$.

[2] voir [15] ou [44] pour une définition générale des minima successifs.

Fixons maintenant σ un plongement de K dans $\mathbb{C}$, et θ un point de $\mathbb{P}_{E,\sigma}(\mathbb{C})$. Appliquons alors les constructions du paragraphe 7.1.1 à l'espace hermitien E_σ et au point θ. Plus précisément, dans cette situation, pour tout réel $U \geq 0$, notons encore φ_U la fonction dont l'expression est donnée dans l'énoncé de la proposition 7.1.2. On note alors $\overline{\mathcal{L}}_U$ le fibré trivial de rang 1 sur $\mathbb{P}_E$ muni de la métrique $\|.\|_U$ définie comme suit : pour tout plongement τ de K dans $\mathbb{C}$ et pour tout point α de $\mathbb{P}_{E,\tau}(\mathbb{C})$, la norme en α de la section canonique 1 de $\overline{\mathcal{L}}_U$ vaut

$$\|1\|_U(\alpha) = \begin{cases} e^{\varphi_U(\alpha)} & si\ \tau = \sigma \\ e^{\varphi_U(\overline{\alpha})} & si\ \tau = \overline{\sigma} \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

Plus généralement, on pose

$$\overline{\mathcal{L}}_U(n) = \overline{\mathcal{L}}_U \otimes \overline{\mathcal{O}}(n)$$

et on note encore $\|.\|_U$ la métrique sur $\overline{\mathcal{L}}_U(n)$. En particulier, pour $n = 1$ et au plongement σ, on retrouve la métrique déformée d'amplitude U définie au début de ce chapitre ; tandis que pour tout n et pour tout plongement différent de σ et $\overline{\sigma}$, la métrique $\|.\|_U$ coïncide avec la métrique standard sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(n)$.

On prendra garde toutefois que la métrique sur $\overline{\mathcal{L}}_U(n)$ n'est pas la n-ième puissance tensorielle de la métrique sur $\overline{\mathcal{L}}_U(1)$.

Si U est un réel positif ou nul et n un entier strictement positif, pour tout sous-schéma intègre W de $\mathbb{P}_E$ de dimension $e+1$ tel que W_K soit non vide, on pose

$$p_{U,n}(W) = \frac{(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e+1}.W)}{n^e \deg W_K}$$

et

$$\rho_W = \mathrm{d}(\theta, |W_\sigma|) = \inf_{w \in |W_\sigma|(\mathbb{C})} \mathrm{d}(\theta, w).$$

Ceci étant fait, on peut maintenant énoncer le théorème.

Théorème 7.2.1 *Soit $p \geq 0$ un entier naturel. Supposons qu'il existe deux suites croissantes $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et une suite $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(k))$ telles que*

i. les rapports $\dfrac{V_k}{k^{p+1}}$ et $\dfrac{V_k}{k^p T_k}$ tendent vers l'infini quand k tend vers l'infini ;

ii. pour tout Q dans $\mathcal{F}_k$ on ait $\log \|Q\|_{V_k, L^\infty} \leq T_k$;

iii. les $Q \in \mathcal{F}_k$ n'aient pas de zéro commun dans la boule $B(\theta, e^{-V_{k-1}})$ (pour la distance d définie au début de ce chapitre).

Alors le degré de transcendance sur K du corps $K(\theta)$ est strictement supérieur à p.

On trouvera un exemple typique d'utilisation d'un critère analogue à celui-ci dans [47].

La démonstration du théorème repose sur les quatre lemmes suivants.

Lemme 7.2.2 *Soient U un réel positif ou nul, $d \geq 0$ un entier et Z un sous-schéma intègre de $\mathbb{P}_E$ de dimension $d+1$ dont la fibre générique Z_K est non vide. Supposons $\rho_Z < e^{-U}$. Alors*

$$((\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^{d+1} - \widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}).Z) \leq -\frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}(U - C(d, m, \deg Z_K))$$

où $C(d, m, \deg Z_K) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\deg Z_K}{2}(d.(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m-1}) + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{d}))$.

Lemme 7.2.3 *Pour tout réel $U \geq 0$, tous entiers $d \geq 0$ et $n \geq 1$, et tout cycle effectif $Z \in Z_{d+1}(\mathbb{P}_E)$, on a*

$$((\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{d+1} - n^{d+1}\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}).Z) \leq ((\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^{d+1} - \widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}).Z).$$

Lemme 7.2.4 *Soient U et V des réels positifs ou nuls, $n \geq 1$ un entier, W un sous-schéma intègre de $\mathbb{P}_E$ de dimension $e+1 \geq 1$ dont la fibre générique W_K est non vide, et P un élément de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(n))$ non identiquement nul sur W. Supposons $V \geq \min(U, -\log \rho_W)$. Alors :*

- *si $e > 0$, il existe un sous-schéma intègre $W' \subset W$ de dimension e et de fibre générique non vide, tel que*

$$p_{U,n}(W') \leq p_{U,n}(W) + \log \|P\|_{V, L^\infty(\mathbb{P}_E(\mathbb{C}))} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\log 2\,;$$

- *si $e = 0$, on a*

$$p_{U,n}(W) \geq -(\log \|P\|_{V, L^\infty(\mathbb{P}_E(\mathbb{C}))} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\log 2).$$

Lemme 7.2.5 *Soient U un réel positif, $n \geq 1$ un entier et W un sous-schéma intègre de dimension $e+1$ dont la fibre générique est non vide. Alors*

$$p_{U,n}(W) \geq (e+1)(\frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\log \rho_W - n \log \lambda_{\max}).$$

Montrons comment ces lemmes impliquent le théorème.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe un entier naturel $d \leq p$ et un sous-schéma intègre Z de $\mathbb{P}_E$, de dimension générique d, donc de dimension absolue $d+1$, tel que $\theta \in |Z_\sigma|(\mathbb{C})$. Alors pour tout n on a $\rho_Z = 0 < e^{-V_n}$, et on peut appliquer les lemmes 7.2.2 et 7.2.3 à $U = V_n$. Après division par $n^d \deg Z_K$, on trouve :

$$p_{V_n,n}(Z) = \frac{(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_{V_n}(n))^{d+1}.Z)}{n^d \deg Z_K} \leq -\frac{2}{[K:\mathbb{Q}]\deg Z_K}\frac{V_n}{n^d} + O(n). \tag{7.2.1}$$

Fixons maintenant un entier n_0 et montrons que pour tout $n > n_0$ on a

$$p_{V_n,n}(Z) \geq -(d+1)(T_n + n\log\lambda_{\max} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\log 2 + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}V_{n_0}). \tag{7.2.2}$$

Compte tenu de l'inégalité (7.2.1) et du fait que $d \leq p$, ceci contredira l'hypothèse *i.* du théorème et terminera la démonstration.

Raisonnons par l'absurde et supposons donc que (7.2.2) n'est pas vérifiée. Il existe alors un sous-schéma intègre W de Z génériquement non vide et de dimension absolue $e+1 \geq 1$ minimale, tel que

$$p_{V_n,n}(W) < -(e+1)(T_n + n \log \lambda_{\max} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2 + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} V_{n_0}). \tag{7.2.3}$$

Par le lemme 7.2.5 on a donc

$$\begin{aligned}(e+1)(\frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log \rho_W - n \log \lambda_{\max}) &\leq p_{V_n,n}(W) \\ &< -(e+1)(T_n + n \log \lambda_{\max} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2 + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} V_{n_0}) \\ &\leq -(e+1) n \log \lambda_{\max} - \frac{2(e+1)}{[K:\mathbb{Q}]} V_{n_0}\end{aligned}$$

d'où

$$\log \rho_W < -V_{n_0}.$$

Soit alors $k \leq n$ maximal tel que $\log \rho_W < -V_{k-1}$. Alors, si $k < n$, on a $\log \rho_W \geq -V_k$, et sinon, $k = n$ donc $V_k = V_n$. Dans tous les cas, on a $V_k \geq \min(V_n, -\log \rho_W)$.

Par ailleurs, puisque $\log \rho_W < -V_{k-1}$ et que par l'hypothèse *iii.* les éléments de $\mathcal{F}_k$ n'ont pas de zéro commun dans $B(\theta, e^{-V_{k-1}})$, il existe $Q \in \mathcal{F}_k$ non identiquement nul sur W. En choisissant convenablement $i \in \{0, \ldots, m\}$, l'élément $P = X_i^{n-k} Q$ de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(n))$ est lui aussi non identiquement nul sur W. On peut donc appliquer le lemme 7.2.4 à W et P avec $U = V_n$ et $V = V_k$. Remarquons qu'on a

$$\|P\|_{V_k, L^\infty} \leq \lambda_{\max}^{n-k} \|Q\|_{V_k, L^\infty} \leq \lambda_{\max}^n e^{T_k},$$

par l'hypothèse *ii.*

Alors, si $e > 0$, le premier cas du lemme 7.2.4 fournit $W' \subset W$ de dimension e et de fibre générique non vide, vérifiant

$$\begin{aligned}p_{V_n,n}(W') &\leq p_{V_n,n}(W) + \log \|P\|_{V_k, L^\infty} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2 \\ &< -(e+1)(T_n + n \log \lambda_{\max} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2 + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} V_{n_0}) \\ &\qquad + T_k + n \log \lambda_{\max} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2 \\ &\leq -e.(T_n + n \log \lambda_{\max} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2 + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} V_{n_0})\end{aligned}$$

ce qui contredit la minimalité de e dans (7.2.3). Et de la même façon, si $e = 0$, par le second cas du lemme on a

$$\begin{aligned}p_{V_n,n}(W) &\geq -(\log \|P\|_{V_k, L^\infty(\mathbb{P}_E(\mathbb{C}))} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2) \\ &\geq -(T_k + n \log \lambda_{\max} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2)\end{aligned}$$

contredisant à nouveau (7.2.3). Ceci achève la démonstration du théorème.

7.3 Démonstration des lemmes

7.3.1 Démonstration du lemme 7.2.2

Rappelons qu'on avait noté $\omega_U = \omega_{FS} - 2dd^c\varphi_U$ la forme de courbure de $\overline{\mathcal{L}}_U(1)$, qui est positive. Par hypothèse, il existe $\alpha \in |Z|_\sigma(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{d}(\theta, \alpha) < e^{-U}$.

De [11] formule (3.2.3) et du fait que les fibrés hermitiens $\overline{\mathcal{O}}(1)$ et $\overline{\mathcal{L}}_U(1)$ coïncident partout excepté aux plongements σ et $\overline{\sigma}$, on déduit

$$((\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^{d+1} - \widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}).Z)$$
$$= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\int_{Z_\sigma}(-\varphi_U)\sum_{i+j=d}\omega_{FS}^i\omega_U^j + \int_{Z_{\overline{\sigma}}}(-\varphi_U)\sum_{i+j=d}\omega_{FS}^i\omega_U^j\right)$$

(on a noté $\int_{Z_\sigma}$ le courant d'intégration contre le cycle Z_σ ; remarquer aussi le facteur $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}$, qui n'est pas présent dans [11], et qui ici vient de ce que, d'après les conventions de la section 1.4.1, on considère toujours dans cette thèse des degrés d'Arakelov *normalisés*).

Ainsi la démonstration du lemme 7.2.2 se ramène à l'énoncé sur $\mathbb{C}$ suivant :

Lemme 7.3.1 *Soient E un espace hermitien de dimension $m+1$, θ un point de $\mathbb{P}_E$, U un réel positif et Z un cycle effectif de dimension d. On suppose qu'il existe un point $\alpha \in |Z|$ tel que $\mathrm{d}(\theta, \alpha) < e^{-U}$. Alors on a*

$$\int_Z \varphi_U \sum_{i+j=d}\omega_{FS}^i\omega_U^j \geq U - C(d, m, \deg Z). \tag{7.3.1}$$

Démonstration : On procède par récurrence sur la dimension d de Z. Si $d = 0$, l'hypothèse sur α et la positivité de φ_U impliquent

$$\int_Z \varphi_U \sum_{i+j=d}\omega_{FS}^i\omega_U^j = \int_Z \varphi_U \geq \varphi_U(\alpha) = -\frac{1}{2}\log(e^{-2U} + (1-e^{-2U})\mathrm{d}(\theta,\alpha)^2)$$
$$\geq -\frac{1}{2}\log(e^{-2U} + (1-e^{-2U})e^{-2U})$$
$$\geq -\frac{1}{2}\log(2e^{-2U}) = U - \frac{1}{2}\log 2 = U - C(0, m, \deg Z).$$

Supposons maintenant l'inégalité (7.3.1) établie en dimension $d-1$. Soit $s \in \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1))$

telle que $\Sigma = \mathrm{div} s$ rencontre proprement Z. On a $\omega_{FS} = dd^c(-\log \|s\|^2_{FS}) + \delta_\Sigma$, et

$$\begin{aligned}
\int_Z \varphi_U \sum_{i+j=d} \omega^i_{FS}\omega^j_U &= \int_Z \varphi_U \omega^d_U + \int_Z \varphi_U.(dd^c(-\log\|s\|^2_{FS}) + \delta_\Sigma) \sum_{i+j=d-1} \omega^i_{FS}\omega^j_U \\
&= \int_Z \varphi_U \omega^d_U + \int_Z \log\|s\|_{FS}.(-2dd^c\varphi_U) \sum_{i+j=d-1} \omega^i_{FS}\omega^j_U + \int_Z \delta_\Sigma \varphi_U \sum_{i+j=d-1} \omega^i_{FS}\omega^j_U \\
&= \int_Z \varphi_U \omega^d_U + \int_Z \log\|s\|_{FS}.(\omega_U - \omega_{FS}) \sum_{i+j=d-1} \omega^i_{FS}\omega^j_U + \int_{Z.\Sigma} \varphi_U \sum_{i+j=d-1} \omega^i_{FS}\omega^j_U \\
&= \int_Z \varphi_U \omega^d_U + \int_Z \log\|s\|_{FS}\omega^d_U - \int_Z \log\|s\|_{FS}\omega^d_{FS} + \int_{Z.\Sigma} \varphi_U \sum_{i+j=d-1} \omega^i_{FS}\omega^j_U \\
&= \int_Z \log\|s\|_U \omega^d_U - \int_Z \log\|s\|_{FS}\omega^d_{FS} + \int_{Z.\Sigma} \varphi_U \sum_{i+j=d-1} \omega^i_{FS}\omega^j_U.
\end{aligned}$$

En supposant $s(\alpha) = 0$, on a $\alpha \in |Z| \cap |\Sigma|$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour minorer le dernier terme de cette somme :

$$\int_{Z.\Sigma} \varphi_U \sum_{i+j=d-1} \omega^i_{FS}\omega^j_U \geq U - C(d-1, m, \deg Z)$$

(remarquer que $\deg(Z.\Sigma) = \deg Z$). D'autre part, on peut choisir s dans la sphère unité de $\|.\|_{U,L^\infty}$, de telle sorte qu'en tout point $\log\|s\|_{FS} \leq \log\|s\|_U \leq 0$. De tout ceci on déduit la minoration

$$\int_Z \varphi_U \sum_{i+j=d} \omega^i_{FS}\omega^j_U \geq U - C(d-1, m, \deg Z) + \int_Z \log\|s\|_U.\omega^d_U.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour presque toute s dans la sphère unité $\mathcal{S}$ de l'hyperplan $\mathcal{H}$ de $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(1))$ annulateur de α muni de la norme $\|.\|_{U,L^\infty}$. Faisant varier s dans $\mathcal{S}$ et moyennant par rapport à la mesure de probabilité μ sur $\mathcal{S}$ invariante sous l'action du groupe unitaire de la norme $\|.\|_{U,L^\infty}$ sur $\mathcal{H}$, on trouve finalement

$$\int_Z \varphi_U \sum_{i+j=d} \omega^i_{FS}\omega^j_U \geq U - C(d-1, m, \deg Z) + \int_{\mathcal{S}}\int_Z \log\|s\|_U \omega^d_U d\mu(s).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que pour tout cycle effectif $Z \subset \mathbb{P}_E$ de dimension d, on a

$$\int_{\mathcal{S}}\int_Z \log\|s\|_U \omega^d_U d\mu(s) \geq -\frac{\deg Z}{2}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m-1}) - \frac{\deg Z}{2d}. \tag{7.3.2}$$

Remarquons que cette dernière intégrale double ne fait intervenir que la métrique déformée $\|.\|_U$, et pas la métrique initiale. Ainsi, en choisissant une base de E orthonormale pour la norme déformée $\|.\|_{E,U}$, on peut calculer cette intégrale double en remplaçant $\mathbb{P}_E$ par l'espace projectif standard, la métrique $\|.\|_U$ par la métrique standard, et la forme ω_U par la forme de Fubini-Study ; on peut aussi supposer que α est le point de coordonnées homogènes $(1 : 0 : \ldots : 0)$. L'inégalité (7.3.2) est alors un cas particulier du lemme suivant :

Lemme 7.3.2 *Soit Z un cycle effectif de dimension d dans l'espace projectif standard $\mathbb{P}^m$ sur $\mathbb{C}$. Notons α le point de coordonnées homogènes $(1:0:\ldots:0)$ de $\mathbb{P}^m$, $\mathcal{S}$ la sphère unité (pour la norme $\|.\|_{FS,L^\infty}$) de l'hyperplan de $\Gamma(\mathbb{P}^m,\mathcal{O}(1))$ annulateur de α, μ la mesure de probabilité sur $\mathcal{S}$ invariante sous l'action du groupe unitaire, $H_{m-1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}$ le $(m-1)$-ième nombre harmonique, $\deg(Z)\in\mathbb{N}$ le degré de Z et $\nu(Z)\in\mathbb{N}$ la multiplicité de Z en α, c'est-à-dire (avec les notations la définition 7.1.5 et de la proposition 7.1.6) $\nu(Z)=\nu(\delta_{f^*Z},\varphi)$. Alors on a*

$$-\frac{\deg(Z)}{2d}\leq\int_{\mathcal{S}}\int_Z\log\|s\|\omega_{FS}^d d\mu(s)+\frac{\deg(Z)}{2}H_{m-1}\leq-\frac{\nu(Z)}{2d}.$$

Démonstration : Pour tout $\beta\in|Z|$ de coordonnées homogènes $(\beta_0:\beta_1:\ldots:\beta_m)$ normalisées de telle sorte que $|\beta_0|^2+|\beta_1|^2+\cdots+|\beta_m|^2=1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}}\log\|s(\beta)\|d\mu(s) &= \int_{|s_1|^2+\cdots+|s_m|^2=1}\log|\beta_1 s_1+\cdots+\beta_m s_m|d\mu(s)\\ &= \int_{S^{2m-1}}\log|z_1|d\mu_{S^{2m-1}}(z)+\log\sqrt{|\beta_1|^2+\cdots+|\beta_m|^2}\\ &= -\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1})+\log\mathrm{d}(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

(on trouvera ce dernier calcul d'intégrale détaillé par exemple dans [38], prop. 5) de telle sorte que, en inversant l'ordre d'intégration dans l'intégrale double, on trouve

$$\int_{\mathcal{S}}\int_Z\log\|s\|\omega_{FS}^d d\mu(s)=-\frac{\deg(Z)}{2}H_{m-1}+\int_Z\log\mathrm{d}(\alpha,\beta)\omega_{FS}^d(\beta). \tag{7.3.3}$$

Posons

$$v(r)=\int_{B_{\mathbb{P}^m}(r)}\delta_Z\omega_{FS}^d=\int_{Z\cap\{\mathrm{d}(\alpha,\beta)\leq r\}}\omega_{FS}^d(\beta).$$

Par la théorie des nombres de Lelong généralisés, et plus précisément par les proposition 7.1.6 et corollaire 7.1.7, le rapport $\frac{v(r)}{r^{2d}}$ est une fonction croissante de r dont la limite pour r tendant vers 0 vaut $\nu(Z)$. Puisque par ailleurs on a $v(1)=\deg(Z)$, ceci implique pour tout $r\in[0,1]$ l'encadrement

$$\nu(Z)r^{2d}\leq v(r)\leq\deg(Z)r^{2d}$$

et ainsi on dispose pour la quantité

$$-\int_Z\log\mathrm{d}(\alpha,\beta)\omega_{FS}^d(\beta)=-\int_0^1\log(r)\frac{d}{dr}v(r)dr=\int_0^1\frac{v(r)}{r}dr$$

de l'encadrement

$$\frac{\nu(Z)}{2d}=\int_0^1\nu(Z)r^{2d-1}dr\leq-\int_Z\log\mathrm{d}(\alpha,\beta)\omega_{FS}^d(\beta)\leq\int_0^1\deg(Z)r^{2d-1}dr=\frac{\deg(Z)}{2d},$$

ce qui, compte tenu de (7.3.3), termine la démonstration du lemme 7.3.2. □

Ceci termine la démonstration du lemme 7.3.1. □

Ceci termine la démonstration du lemme 7.2.2.

7.3.2 Démonstration du lemme 7.2.3

Puisque $\|.\|_U = e^{\varphi_U}\|.\|_{FS}$, on a, avec les notations de [11],

$$\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1)) - \widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1)) = a(-2\varphi_U)$$

d'où l'on déduit pour tout j (voir par exemple le début de la preuve de la proposition 3.2.2 de [11])

$$\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^j - \widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^j = a(-2\varphi_U \sum_{r+s=j-1} \omega_U^r \omega_{FS}^s).$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1-j}\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^j.Z) &= (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}.Z) - 2(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1-j}a(\varphi_U \sum_{r+s=j-1} \omega_U^r \omega_{FS}^s).Z) \\
&= (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}.Z) - 2(a(\varphi_U \omega_{FS}^{d+1-j} \sum_{r+s=j-1} \omega_U^r \omega_{FS}^s).Z) \\
&= (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}.Z) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\int_{\mathbb{P}_E(\mathbb{C})} \varphi_U \delta_Z \omega_{FS}^{d+1-j} \sum_{r+s=j-1} \omega_U^r \omega_{FS}^s \\
&\leq (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}.Z)
\end{aligned}$$

puisque φ_U est positive, que Z est effectif et que les formes ω_U et ω_{FS} sont positives.

Appliquant cette inégalité, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
&(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{d+1}.Z) = ((\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1)) + (n-1)\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1)))^{d+1}.Z) \\
&= \quad (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^{d+1}.Z) + \sum_{j=0}^{d} \binom{d+1}{j} (n-1)^{d+1-j}(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1-j}\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^j.Z) \\
&\leq \quad (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^{d+1}.Z) + \sum_{j=0}^{d} \binom{d+1}{j} (n-1)^{d+1-j}(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}.Z) \\
&= \quad ((\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(1))^{d+1} + (n^{d+1}-1)\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{O}}(1))^{d+1}).Z),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

7.3.3 Démonstration du lemme 7.2.4

On pose $W.\mathrm{div}P = \sum_i n_i W_i$, où les W_i sont intègres de dimension e. On a donc $\sum_i n_i \deg W_{i,K} = n \deg W_K$.

Par [11] formule (3.2.2) on a

$$(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^e.(W.\mathrm{div}P)) = (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e+1}.W) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\tau:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \int_{W_\tau} \log\|P\|_U.c_1(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^e. \tag{7.3.4}$$

Par ailleurs, de l'encadrement

$$\max(\mathrm{d}^2, e^{-2U}) \leq \mathrm{d}^2 + e^{-2U} - \mathrm{d}^2 e^{-2U} \leq 2\max(\mathrm{d}^2, e^{-2U}),$$

valable pour d^2 et e^{-2U} dans l'intervalle $[0,1]$, on déduit les inégalités

$$\begin{aligned} e^{\varphi_U} &= (\mathrm{d}(\theta,.)^2 + e^{-2U} - \mathrm{d}(\theta,.)^2 e^{-2U})^{-1/2} \\ &\leq \min(e^U, 1/\mathrm{d}(\theta,.)) \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

et

$$\begin{aligned} e^{\varphi_V} &= (\mathrm{d}(\theta,.)^2 + e^{-2V} - \mathrm{d}(\theta,.)^2 e^{-2V})^{-1/2} \\ &\geq \frac{1}{2}\min(e^V, 1/\mathrm{d}(\theta,.)). \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

L'hypothèse $V \geq \min(U, -\log \rho_W)$ équivalant à l'inégalité $e^V \geq \min(e^U, 1/\mathrm{d}(\theta,.))$ en tout point de W_σ, on déduit de (7.3.5) et (7.3.6) la majoration

$$\frac{\|.\|_U}{\|.\|_V} = e^{\varphi_U - \varphi_V} \leq 2$$

sur W_σ. Par invariance sous l'action de la conjugaison complexe, cette majoration est aussi valable sur $W_{\overline{\sigma}}$. Enfin on a toujours $\|.\|_U = \|.\|_V (= \|.\|_0)$ aux plongements différents de σ et $\overline{\sigma}$.

Ainsi, en tout point de W_τ, on trouve

$$\log \|P\|_U \leq \begin{cases} \log \|P\|_{V,L^\infty} + \log 2 & \text{si } \tau \text{ est égal à } \sigma \text{ ou } \overline{\sigma} \\ \log \|P\|_{V,L^\infty} & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_\tau \int_{W_\tau} \log \|P\|_U . c_1(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^e \leq (n^e \deg W_K)(\log \|P\|_{V,L^\infty} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\log 2). \tag{7.3.7}$$

Combinant (7.3.4) et (7.3.7) on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{i,\, W_{i,K} \neq \emptyset} n_i n^{e-1} \deg W_{i,K} . p_{U,n}(W_i) &= \sum_{i,\, W_{i,K} \neq \emptyset} n_i (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^e . W_i) \\ &\leq \sum_i n_i (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^e . W_i) = (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^e . (W.\mathrm{div} P)) \\ &= (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e+1} . W) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \int_{W_\tau} \log \|P\|_U . c_1(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^e \\ &\leq (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e+1} . W) + (n^e \deg W_K)(\log \|P\|_{V,L^\infty} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\log 2). \end{aligned}$$

Autrement dit, posant $\lambda_i = \frac{n_i n^{e-1} \deg W_{i,K}}{n^e \deg W_K}$ pour i tel que $W_{i,K}$ soit non vide, on a

$$\sum_{i,\, W_{i,K} \neq \emptyset} \lambda_i \, p_{U,n}(W_i) \;\leq\; p_{U,n}(W) + \log \|P\|_{V,L^\infty} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2. \tag{7.3.8}$$

On distingue alors deux cas.

Si $e = 0$, W_K est un point et pour tout i, $W_{i,K}$ est vide. Ainsi dans (7.3.8) la somme $\sum_{i, W_{i,K} \neq \emptyset} \lambda_i \, p_{U,n}(W_i)$ est nulle, ce qui fournit la minoration de $p_{U,n}(W)$ souhaitée.

Si $e > 0$, pour tout i tel que $W_{i,K}$ soit non vide on a $\lambda_i > 0$; en outre, la somme des λ_i vaut $\sum_{i, W_{i,K} \neq \emptyset} \lambda_i = 1$. On déduit alors de (7.3.8) par un argument de convexité élémentaire qu'il existe un i tel que $W_{i,K}$ soit non vide et que

$$p_{U,n}(W_i) \leq p_{U,n}(W) + \log \|P\|_{V,L^\infty} + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]} \log 2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

7.3.4 Démonstration du lemme 7.2.5

Il s'agit de montrer que si W est un sous-schéma intègre de dimension $e+1$ de $\mathbb{P}_E$ dont la fibre générique W_K est non vide, on a

$$(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e+1}.W) \geq (e+1) n^e \deg W_K \left(\frac{2 \log \rho_W}{[K:\mathbb{Q}]} - n \log \lambda_{\max} \right). \tag{7.3.9}$$

Remarquons d'abord qu'il existe $j \in \{0, \ldots, m\}$ tel que X_j ne soit pas identiquement nul sur W. On pose alors $L = X_j^n \in \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_E}(n))$. Notons

$$W.\mathrm{div} L = \sum_i n_i W_i \in Z_e \mathbb{P}_E$$

le cycle d'intersection de W et de $\mathrm{div} L$, où les n_i sont des entiers strictement positifs et les W_i des sous-schémas de $\mathbb{P}_E$ intègres de dimension e.

Par construction, on a

$$\|L\|_{0,L^\infty} \leq \lambda_{\max}^n.$$

D'autre part, en tout point de W_σ on a $\varphi_U \leq -\log \mathrm{d}(\theta, .) \leq -\log \rho_W$ (cf. (7.3.5)). Ainsi, en tout point de W_τ on a

$$\log \|L\|_U \leq \begin{cases} -\log \rho_W + n \log \lambda_{\max} & \text{si } \tau \text{ est égal à } \sigma \text{ ou } \overline{\sigma} \\ n \log \lambda_{\max} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Compte tenu de [11], formule (3.2.2), ceci implique

$$
\begin{aligned}
(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e+1}.W) &= (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e}.(W.\mathrm{div}L)) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\tau}\int_{W_\tau}\log\|L\|_U.c_1(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^e \\
&\geq (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e}.(W.\mathrm{div}L)) - \frac{n^e\deg W_K}{[K:\mathbb{Q}]}(-2\log\rho_W + n[K:\mathbb{Q}]\log\lambda_{\max}) \\
&\geq \sum_{i,\, W_{i,K}\neq\emptyset} n_i(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e}.W_i) + n^e\deg W_K\left(\frac{2\log\rho_W}{[K:\mathbb{Q}]} - n\log\lambda_{\max}\right).
\end{aligned}
\tag{7.3.10}
$$

On procède alors à la démonstration de (7.3.9) par récurrence sur e.

Si $e=0$, $W_{i,K}$ est vide pour tout i donc la somme $\sum_{i,\, W_{i,K}\neq\emptyset} n_i(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e}.W_i)$ est nulle, et (7.3.10) se réduit bien à (7.3.9).

Supposons maintenant $e>0$ et (7.3.9) démontrée pour tout sous-schéma intègre de dimension e de fibre générique non vide. On peut alors dans (7.3.10) appliquer cette hypothèse de récurrence aux W_i et on trouve

$$
\begin{aligned}
(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e+1}.W) &\geq \sum_{i,\, W_{i,K}\neq\emptyset} n_i(\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}}_U(n))^{e}.W_i) + n^e\deg W_K\left(\frac{2\log\rho_W}{[K:\mathbb{Q}]} - n\log\lambda_{\max}\right) \\
&\geq \sum_{i,\, W_{i,K}\neq\emptyset} n_i.en^{e-1}\deg W_{i,K}\left(\frac{2\log\rho_{W_i}}{[K:\mathbb{Q}]} - n\log\lambda_{\max}\right) \\
&\qquad + n^e\deg W_K\left(\frac{2\log\rho_W}{[K:\mathbb{Q}]} - n\log\lambda_{\max}\right) \\
&\geq (e+1)n^e\deg W_K\left(\frac{2\log\rho_W}{[K:\mathbb{Q}]} - n\log\lambda_{\max}\right),
\end{aligned}
$$

puisque $\rho_{W_i}\geq\rho_W$ et $\sum_{i,\, W_{i,K}\neq\emptyset} n_i\deg W_{i,K} = \deg(W.\mathrm{div}L)_K = n\deg W_K$.

Ceci termine la démonstration du lemme.

Bibliographie

[Bourbaki] N. Bourbaki : *Éléments de mathématique.* Livre A : Algèbre ; FVR : Fonctions d'une variable réelle ; AC : Algèbre commutative. Hermann, Masson.

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Éléments de géométrie algébrique.* Publications mathématiques de l'IHÉS **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1960-1967).

[1] A. Abbes, T. Bouche : *Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique".* Annales de l'Institut Fourier, Grenoble **45** - 2 (1995) pp. 375-401.

[2] M. Aigner : *Combinatorial Theory.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **234**. Springer-Verlag 1979.

[3] S. Arakelov : *An intersection theory for divisors on an arithmetic surface.* Izvest. Akad. Nauk **38** (1974) pp. 1179-1192

[4] W. Barth : *Report on vector bundles.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, 1983) pp. 783-789.

[5] E. Bedford, B. Taylor : *A new capacity for plurisubharmonic functions.* Acta Math. **149** (1982) pp. 1-41.

[6] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé : *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles III : Quillen metrics on holomorphic determinants.* Comm. in Math. Physics **115** (1988) pp. 301-351.

[7] J.-M. Bismut, E. Vasserot : *The Asymptotics of the Ray-Singer Analytic Torsion Associated with High Powers of a Positive Line Bundle.* Communications in Math. Phys. **125** (1989) pp. 355-367.

[8] J.-B. Bost : *Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques.* Séminaire Bourbaki n° **731**, 1990/91. Astérisque **201-203** (1992) pp. 43-88.

[9] J.-B. Bost : *Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres.* Séminaire Bourbaki n° **795**, 1994/95. Astérisque **237** (1996) pp. 115-161.

[10] J.-B. Bost : *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields.* Publications mathématiques de l'IHÉS **93** (2001) pp. 161-221.

[11] J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé : *Heights of Projective Varieties and Positive Green Forms.* Journal of the AMS, Vol. **7** (1994) pp. 903-1027.

[12] R. Bott, S. Chern : *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections.* Acta Math. **114** (1968) pp. 71-112.

[13] T. Bouche : *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif.* Annales de l'Institut Fourier, Grenoble **40** (1990) pp. 117-130.

[14] L. BOUTET DE MONVEL, V. GUILLEMIN : *The Spectral Theory of Toeplitz Operators.* Annals of Mathematics Studies **99**. Princeton University Press 1981.

[15] J. CASSELS : *An introduction to the geometry of numbers.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **99**. Springer-Verlag 1971.

[16] B. CONRAD : *Grothendieck Duality and Base Change.* Lecture Notes in Mathematics **1750**. Springer-Verlag 2000.

[17] J.-P. DEMAILLY : *Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation*, in J. BERTIN, J.-P. DEMAILLY, L. ILLUSIE, C. PETERS : *Introduction à la théorie de Hodge.* Panoramas et Synthèses, n° **3**. Société Mathématique de France 1996, pp. 3-111.

[18] J.-P. DEMAILLY : *Complex Analytic and Differential Geometry.* Document électronique `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.ps.gz` (1997).

[19] J.-P. DEMAILLY : *On the Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 extension theorem*, in *Complex Analysis and Geometry.* P.DOLBEAULT et al. (eds.), Progress in Math. **188**. Birkhäuser 1999.

[20] G. FALTINGS : *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern.* Inventiones Math. **73** - 3 (1983) pp. 349-366.

[21] G. FALTINGS : *Calculus on arithmetic surfaces.* Annals of Math. **119** - 2 (1984) pp. 387-424.

[22] W. FULTON : *Intersection theory (2nd ed.).* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge Vol. **2**. Springer-Verlag 1998.

[23] É. GAUDRON : *Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif.* Thèse, Université de Saint-Étienne, 2001.

[24] H. GILLET, C. SOULÉ : *Arithmetic intersection theory.* Publications mathématiques de l'IHÉS **72** (1990) pp. 94-174.

[25] H. GILLET, C. SOULÉ : *Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metrics I, II.* Annals of Math. **131** (1991) pp. 163-203, 205-238.

[26] H. GILLET, C. SOULÉ : *Analytic torsion and the arithmetic Todd genus.* With an Appendix by D. ZAGIER. Topology **30** - 1 (1991) pp. 21-54.

[27] H. GILLET, C. SOULÉ : *An arithmetic Riemann-Roch theorem.* Inventiones Math. **110** (1992) pp. 473-543.

[28] P. GRIFFITHS, J. HARRIS : *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley 1978.

[29] A. GROTHENDIECK : *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV : Les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki n° **221**, 1960/61, in *Fondements de la géométrie algébrique.*

[30] R. HARTSHORNE : *Residues and Duality.* Lecture Notes in Mathematics **20**. Springer-Verlag 1966.

[31] R. HARTSHORNE : *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics **52**. Springer-Verlag 1977.

[32] G. HARDY, E. WRIGHT : *An Introduction to the Theory of Numbers (5th ed.).* Oxford University Press 1979.

[33] G. KEMPF : *Metrics on invertible sheaves on abelian varieties*, in *Topics in Algebraic Geometry (Guanajuato, 1989).* Aportaciones Mat. Notas Investigación **5**, Soc. Mat. Mexicana (1992) pp. 107-108.

[34] F. KNUDSEN, D. MUMFORD : *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "Div".* Math. Scand. **39** (1976) pp. 19-55.

[35] K. KÖHLER : *Holomorphic torsion on Hermitian symmetric spaces.* J. Reine Angew. Math. **460** (1995) pp. 93-116.

[36] J. KOLLAR : *Rational Curves on Algebraic Varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge Vol. **32**. Springer-Verlag 1996.

[37] S. LANG : *Introduction to Arakelov theory.* Springer-Verlag 1988.

[38] M. LAURENT : *Hauteur de matrices d'interpolation*, in *Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Luminy 1990.* P. PHILIPPON (ed.), de Gruyter 1992, pp. 215-238.

[39] M. LAURENT, D.ROY : *Criteria of algebraic independence with multiplicities and approximation by hypersurfaces.* J. Reine Angew. Math. **536** (2001) pp. 65-114.

[40] L. MANIVEL : *Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré hermitien.* Math. Zeitschrift **212** (1993) pp. 107-122.

[41] H. MATSUMURA : *Commutative Ring Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics **8**. Cambridge University Press 1986.

[42] B. MAZUR, L. ROBERTS : *Local Euler characteristics.* Inventiones Math. **9** (1970) pp. 201-234.

[43] J. MILNOR : *Introduction to Algebraic K-Theory.* Annals of Mathematics Studies **72**. Princeton University Press 1971.

[44] H. MINKOWSKI : *Geometrie der Zahlen.* Teubner 1896, réimpr. Johnson 1968.

[45] D. MUMFORD : *Lectures on Curves on an Algebraic Surface.* With a section by G. BERGMAN. Annals of Mathematics Studies **59**. Princeton University Press 1966.

[46] Y. NESTERENKO, P. PHILIPPON (éditeurs) : *Introduction to algebraic independence theory.* Lecture Notes in Mathematics **1752**. Springer-Verlag 2001.

[47] P. PHILIPPON : *Critères pour l'indépendance algébrique.* Publications mathématiques de l'IHÉS **64** (1986) pp. 5-52.

[48] P. PHILIPPON : *Sur des hauteurs alternatives.* I. : Math. Ann. **289** - 2 (1991) pp. 255-283. II. : Ann. Inst. Fourier, Grenoble **44** - 4 (1994) pp. 1043-1065. III. : J. Math. Pures Appl. (9) **74** - 4 (1995) pp. 345-365.

[49] D. RAY, I. SINGER : *Analytic torsion for complex manifolds.* Annals of Math. **98** (1973) pp. 154-177.

[50] B. RIEMANN : *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Monatsberichte der Berliner Akademie (1859) pp. 671-680, in *Oeuvres de Riemann.* Blanchard 1968.

[51] R. RUMELY, C. LAU : *Arithmetic Capacities on $\mathbb{P}^n$.* Math. Zeit. **215** (1994) pp. 533-560.

[52] R. RUMELY, C. LAU, R. VARLEY : *Existence of the Sectional Capacity.* Memoirs of the AMS no. **690** (2000).

[53] W.M. Schmidt : *On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations.* Annals of Math. **85** (1967) pp. 430-472.

[54] J.-P. Serre : *Corps locaux.* Hermann 1968.

[55] J.-P. Serre : *Algèbre locale - Multiplicités (3e éd.).* Lecture Notes in Mathematics **11**. Springer-Verlag 1975.

[56] C. Soulé : *Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants*, in Journées Arithmétiques, Luminy, 1989. Astérisque **198-200** (1991) pp. 355-371.

[57] C. Soulé, D. Abramovich, J.-F. Burnol, J. Kramer : *Lectures on Arakelov Geometry.* Cambridge studies in advanced mathematics **33**. Cambridge Univrsity Press 1992.

[58] L. Szpiro : *Degrés, intersections, hauteurs*, in *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell.* Astérisque **127** (1985) pp. 11-28.

[59] G. Tenenbaum : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Cours spécialisés, n^{o} **1**. Société Mathématique de France 1995.

[60] G. Tian : *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds.* Journal of Differential Geometry **32** (1990) pp. 99-130.

[61] R. Tijdeman : *On the number of zeros of general exponential polynomials.* Indigationes Math. **33** (1971) pp. 1-7.

[62] E. Titchmarsh : *The theory of the Riemann zeta function.* Oxford Univ. Press 1951.

[63] I. Vardi : *Determinants of Laplacians and multiple gamma functions.* SIAM J. Math. Anal. **19** (1988) pp. 493-507.

[64] M. Waldschmidt : *Nombres transcendants.* Lecture Notes in Mathematics **402**. Springer-Verlag 1974.

[65] M. Waldschmidt : *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **326**. Springer-Verlag 2000.

[66] L. Weng : *Regularized determinants of Laplacians for hermitian line bundles over projective spaces.* J. Math. Kyoto Univ. **35** - 3 (1995) pp. 341-355.

[67] S. Zelditch : *Szegö Kernels and a Theorem of Tian.* International Mathematics Research Notices 1998, no. 6 pp. 317-331.

[68] S. Zhang : *Positive line bundles on arithmetic varieties.* Journal of the AMS, Vol. **8** (1995) pp. 187-221.

Numéro d'impression : 2401
Premier trimestre 2002

Résumé

Dans cette thèse on définit et étudie un certain nombre de notions dans le cadre de la géométrie d'Arakelov qui, d'une part, possèdent un intérêt intrinsèque et, d'autre part, sont susceptibles d'applications à la théorie de l'approximation diophantienne.

La plus grande partie du texte est consacrée à l'élaboration d'une théorie des hauteurs pour les sous-schémas et à la preuve de «formules de Hilbert-Samuel» pour ces hauteurs. Pour deux classes importantes de sous-schémas (les sous-schémas intègres et les sous-schémas «lisses avec multiplicités») on montre que la hauteur du sous-schéma relativement à une grande puissance d'un fibré en droites positif est asymptotiquement déterminée par la hauteur du cycle associé. La démonstration repose essentiellement sur le «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique» de Gillet et Soulé, auquel elle se ramène par l'utilisation de techniques de géométrie analytique hermitienne. On fait ensuite une analyse plus fine du développement asymptotique des hauteurs de certains sous-schémas particuliers. Notamment, dans le cas de la dimension relative zéro, on exprime le terme constant du développement asymptotique en fonction de la ramification du sous-schéma, ce qui résout une question de Michel Laurent sur les hauteurs des matrices d'interpolation.

Enfin, dans une partie indépendante, on expose diverses applications de méthodes arakeloviennes à des problèmes d'approximation diophantienne. En particulier on donne une nouvelle démonstration d'un critère classique d'indépendance algébrique dont l'originalité est qu'elle n'utilise plus de théorie de l'élimination mais uniquement des techniques de théorie de l'intersection arithmétique.

Mots-clés : géométrie d'Arakelov, approximation diophantienne, hauteurs, formule de Hilbert-Samuel arithmétique, critère d'indépendance algébrique.