La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques: un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires

Jean-Jacques Dahan

Thèse
présentée par

Jean-Jacques DAHAN

Pour l'obtention du titre de
Docteur de l'Université Joseph Fourier-Grenoble 1

Spécialité :
Environnements Informatiques d'apprentissage humain
et didactique

LA DÉMARCHE DE DÉCOUVERTE EXPÉRIMENTALEMENT MÉDIÉE PAR CABRI-GÉOMÈTRE EN MATHÉMATIQUES

Un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires

---

4 Novembre 2005

Jury :

M.Michel CARRAL	**Professeur, IUFM de Toulouse ……………….**	**Co-Directeur de Thèse**
M. Roger CUPPENS	**Professeur Émérite Université Paul Sabatier Toulouse ..**	**Examinateur**
M. Jean-Jacques DUPIN	**Professeur, IUFM d'Aix-Marseille**	**Rapporteur, Président du Jury**
Mme Colette LABORDE	**Professeur, IUFM de Grenoble …………………...**	**Directrice de Thèse**
M. Jean-Marie LABORD	**Directeur de Recherche, CNRS ………………………….**	**Examinateur**
M. Bernard PARZYSZ	**Professeur Émérite Didirem Paris 7 ………………………**	**Rapporteur**

Remerciements

A l’issue de ce travail qui m’a passionné et pendant lequel je suis passé par tous les stades habituels d’une recherche, long démarrage avec l’impression d’errer dans un océan déjà exploré, longues phases de travail intense incluant des montagnes de lectures, phases épisodiques de découragement, soudain la joie d’avoir mis le doigt sur un problème intéressant, d’avoir saisi le fil d’Ariane puis la longue et interminable quête du bout du chemin, je réalise que certaines personnes ont joué un rôle crucial pour me permettre de tirer le mieux possible sur ce fil d’Ariane tissé de géométrie et didactique, du micromonde Cabri et d’informatique, d’empirisme et de rationalisme. Parmi elles je tiens à remercier tout particulièrement les membres de mon Jury :

♦Colette Laborde, ma Directrice de thèse qui m’a d’abord fait l’honneur d’accepter ce rôle, qui a su aux moments cruciaux me faire les remarques cruciales et m’indiquer la bonne direction.

♦Michel Carral mon Co-Directeur de thèse qui non seulement a su être disponible, mais a joué un rôle de cobaye actif dans mon travail en acceptant de chercher le problème de Lhuillier ; l’article qu’il en a tiré m’a permis d’étoffer mon travail par l’analyse d’une démarche de recherche experte d’un spécialiste de géométrie et de Cabri.

♦Bernard Parzysz qui a accepté d’être rapporteur de mon travail et qui est aussi l’inventeur des praxéologies G1 et G2 sur lesquelles je me suis appuyé tout en les complétant.

♦Jean-Jacques Dupin qui a aussi accepté d’être rapporteur d’un travail situé hors de son champ disciplinaire habituel, marquant ainsi l’intérêt qu’il portait à ma démarche mobilisant conjointement les connaissances didactiques en sciences expérimentales et en Mathématiques.

♦Roger Cuppens mon maître et mon ami qui a accepté d’être examinateur après avoir suivi mon travail pas à pas, qui a donné de son temps sans compter, pour relire, en particulier les versions finales, afin d’améliorer la forme et me faire des remarques très pertinentes sur le fond.

♦Jean-Marie Laborde sans qui ce travail n’aurait jamais existé et qui m’a fait le grand honneur d’être examinateur. Il a créé Cabri et par voie de conséquence, il m’a fait exister en tant que chercheur.

Je tiens aussi à remercier :

♦Bernard Geneves qui tout au long de ces années a été présent à chaque fois que j’ai eu besoin de lui pour tous les problèmes grands et petits qu’il a fallu surmonter. Je le remercie aussi pour avoir été le premier à remarquer à la suite d’une présentation faite à l’IREM de Toulouse que ma curiosité naturelle se portait sur le versant heuristique de l’apport des technologies et à m’encourager à axer mes travaux sur ce point particulier.

♦Bert Waits, le génial fondateur de T3 qui m’a encouragé à participer d’abord au congrès T3 de Dallas en 2000 et à ceux qui ont suivi : il m’a ouvert une fenêtre tellement enrichissante sur l’enseignement des Mathématiques aux Etats-Unis avec les nouvelles technologies et a permis à ma réflexion d’enrichir mon approche leibnizienne des Mathématiques d’une approche plus baconienne.

♦Les membres du groupe de recherche de Géométrie dynamique de l’IREM de Toulouse Roger Cuppens déjà cité, Joël Moreau, Jean-Paul Payry et Christiane Vaysse qui tout au long de ces années m’ont apporté leurs connaissances, leurs compétences. Nos séances de travail à l’IREM de Toulouse, souvent informelles ont toujours été créatives et ont été à elles seules des modèles de démarche expérimentale qui n’ont pu que me modeler pour réaliser ce travail de thèse.

Je remercie aussi tous mes collègues qui de près ou de loin ont contribué à forger ou conforter mon expérience dans les divers domaines utiles à mon travail de recherche, en particulier mes collègues de l'IUFM de Toulouse.

Je remercie enfin très chaleureusement Sophie Soury-Lavergne pour son aide efficace à la préparation de ma soutenance. Elle m'a permis de prendre conscience du réel apport de mon travail et de son originalité et donc de donner à ma soutenance une consistance en cohérence avec mon travail écrit.

J'ai enfin une pensée affectueuse pour mon amie Susan Taylor qui m'a offert la quiétude de son home anglais à Impington près de Cambridge pour ces longues journées de travail, solitaires, éprouvantes et gratifiantes pendant les étés 2003 et 2004 où j'ai réellement senti mon travail avancer.

SOMMAIRE

PARTIE 1

Partie 2

Chapitre 6 : ANALYSE D'UN ARBRE DÉCISIONNEL EN SCIENCES CLINIQUES…. p. 63

PARTIE 3

PARTIE 4

Partie 1

CHAPITRE 1 : Introduction

INTRODUCTION

L'auteur est à la fois enseignant en Lycée, formateur associé à l'IUFM de Toulouse et membre du groupe de recherche de géométrie dynamique de l'IREM de Toulouse. Il est depuis le début des années 70 impliqué dans l'intégration des TIC (Technologies de l'Information et la Communication) qu'il a contribué à diffuser à la fois dans son enseignement et en formation initiale et continue. La problématique de l'intégration des TIC est depuis longtemps l'une de ses préoccupations naturelles et ce, avant que les instructions des programmes de mathématiques ne deviennent aussi précises que celles des nouveaux programmes de seconde de 2000.

Nécessairement, c'est à partir de ses responsabilités et de ses problèmes d'enseignant soumis à cette problématique, qu'il a cherché à déceler les paramètres cruciaux de cette intégration par les enseignants. La pratique d'une démarche expérimentale est apparue, comme la suite va le montrer, comme l'un de ces paramètres cruciaux, d'autant que le corps enseignant est maintenant poussé à une telle pratique sans qu'une information précise lui ait été donnée préalablement en formation initiale ou en formation continue. L'intérêt de cette pratique, certes reconnue comme une activité mathématique favorisant les apprentissages et l'apprentissage des concepts, ne relevait jusqu'à une période rapprochée que de la sphère privée. Il a fallu les travaux de l'IREM de Montpellier sur la narration de recherche et ceux de l'IREM de Lyon sur les problèmes longs pour permettre à l'enseignant de lever une partie du voile cachant l'activité privée de l'élève.

Nous nous proposons de donner du sens à cette notion de démarche expérimentale en essayant de dégager ses caractéristiques formelles qui pourront nous permettre de donner aux enseignants une information réelle sur les intentions didactiques cachées derrière toutes les instructions nouvelles et derrière tous les types d'activités qui sont actuellement recommandées en liaison avec l'utilisation des TIC (Techniques de l'information et la communication) en classe.

RÉSUMÉ DU CHAPITRE

♦Notre point de départ est une situation de classe qui fait réagir un formateur IUFM (Institut universitaire de Formation des Maîtres) à une présentation d'un concept où l'implication active des élèves ne fut pas requise et à laquelle il va opposer une proposition scénarisant des expérimentations où élèves et professeur devraient être parties prenantes. Cette proposition intègre l'utilisation des NTE (Nouvelles Technologies de l'Éducation).

♦Nous présentons à titre d'illustration la conception de Marc Legrand où il met en parallèle sans les opposer réellement deux manières de concevoir les apprentissages : l'apprentissage des résultats et techniques particulières, d'une part, et l'apprentissage de la capacité à communiquer rationnellement, d'autre part. Il ne nie pas la nécessité du premier type d'apprentissage mais insiste sur son côté éphémère alors que le second type participe à la mise en place d'un savoir plus global.
Il envisage ensuite deux démarches qui lui paraissent résumer sa conception :
– Une démarche issue de notre pensée naturelle qui infère des **actions ;**
– Une démarche issue de notre pensée mathématique qui infère des « **mises au clair** de ce que nous acceptons comme des vérités ».

♦Nous présentons ensuite la conception de Colette Laborde concernant la formation des enseignants à l'usage des NTE et plus particulièrement le volet des usages possibles en classe. Elle s'appuie sur le contenu des nouveaux programmes de seconde (applicables en 2000) qui affirme le caractère incontournable de l'informatique qu'elle résume en « les nouvelles technologies sont introduites en classe pour **faire autrement**, de façon à **favoriser des apprentissages plus profonds** chez l'élève ».

On notera dans la partie du programme citée, « *Cette possibilité d'**expérimenter**, classiquement plus propre aux autres disciplines, doit ouvrir largement la dialectique entre **l'observation et la démonstration**, et, sans doute à terme, changer profondément la nature de l'enseignement.* ».
Là encore deux démarches sont recommandées qui sont générées par l'introduction d'une pratique incluant l'expérience. On rejoint ici les démarches proposées par Marc Legrand.

♦Nous concluons par une présentation de points qui nous paraissent éclairer les problèmes mis en évidence ci dessus et qui sont extraits d'un rapport de recherche soutenue par le CNRCE (Comité National de Coordination de la Recherche en Education). Ce rapport concerne la problématique de l'intégration des TIC à partir de l'analyse de travaux existants dans ce domaine au niveau international. Il s'attache à marquer la complexité et la multidimensionnalité des phénomènes d'intégration des TIC et insiste sur la variable temps, sur l'importance du rôle de l'enseignant et sur la dimension instrumentale.

1. NÉCESSITÉ D'UNE INGÉNIÉRIE NOUVELLE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION DE COSINUS EN QUATRIÈME

Le **hasard** des visites de Professeurs stagiaires dans le cadre de la fonction de formateur associé à l'IUFM de Toulouse de l'auteur l'a fait assister à une leçon de Quatrième de Collège français portant sur « l'introduction du cosinus de l'angle aigu de deux demi-droites » (Mars 1996). Devant la manière dont avaient été conçues la séance et la séquence : non implication des élèves à la mise en évidence de l'invariant (qui était l'objectif clair à atteindre : rapport de projection orthogonale d'une demi-droite sur une autre) par une activité de constructions, de mesures, de calculs de rapports devant les conduire avant la démonstration, certes faite par le Professeur à débattre et argumenter pour mettre en évidence par eux-mêmes cet invariant, celui a éprouvé
la **nécessité** de reconstruire cette leçon pour pallier les manques relevés. L'auteur disposait depuis quelques mois d'un nouvel outil qui commençait à lui révéler ses potentialités d'innovation dans la transposition de notions complexes : cet outil, la calculatrice rétroprojetable TI-92, contenait une version du logiciel de géométrie dynamique Cabri et un tableur associé, environnement propice à la gestion de données, en particulier pour détecter leur proportionnalité (ces données étant issues d'une capture dans une figure dynamique). Il fut donc amené à écrire un scénario complet de cette leçon où le Professeur disposait d'une TI-92 rétroprojetable et les élèves de leur calculatrice de collège. Ce scénario permettait au moins d'impliquer les élèves autant que le Professeur. Une partie **construction expérimentation conjecture** qui en était une caractéristique essentielle avait pour but de changer évidemment le mode d'apprentissage des élèves. Ce scénario fut présenté pour la première fois sous forme d'Atelier au Congrès de l'APMEP d'Albi (Octobre 1996) et a donné lieu à une publication dans la revue Plot. N° 80 (1998).

2. LES ENJEUX DIDACTIQUES (MARC LEGRAND ET COLETTE LABORDE)

2.1. MARC LEGRAND dans son article intitulé *« La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique»* publié dans Repères IREM N°27 TOPIQUES éditions 81-125 en 1997, déclare :
« ….le savoir mathématique fondamental, s'il passe nécessairement par l'apprentissage de résultats et de techniques particulières (dont la portée sera éphémère pour la plupart des citoyens), ne s'y réduit pas ; c'est un savoir beaucoup plus global qui participe au

développement de la personnalité du sujet et sa capacité à communiquer rationnellement ».

La réaction du formateur devant une absence d'activités mathématiques au cours de la séance évoquée au début est justifiée en partie par cette manière de concevoir les initiatives didactiques dans l'enseignement des Mathématiques. Marc Legrand comme le formateur n'aurait pas critiqué ce professeur stagiaire pour la manière dont il avait introduit cette notion à ce moment particulier de son apprentissage d'enseignant, mais l'occasion était trop belle de montrer comment, l'action, **une réelle action mathématique**, pouvait être envisagée. Marc Legrand précise d'ailleurs dans le même article :

« la PENSÉE NATURELLE est davantage tournée vers l'ACTION singulière et immédiate,

la PENSÉE MATHÉMATIQUE nous pousse à METTRE AU CLAIR ce sur quoi se fondent nos vérités »

Voilà pourquoi, la réaction du formateur a consisté à proposer « **une démarche expérimentale »** ayant pour but **d'impliquer les élèves** et les amener à « **découvrir » à partir de l'expérimentation** les résultats auxquels on voulait les confronter.

Le mot « **démarche** » est pris ici dans le sens d'«**une manière d'agir, de conduire sa raison** » suivant les acceptions du Littré et du Robert.
Le qualificatif d'« **expérimental** », toujours suivant les mêmes références signifie « qui utilise l'expérience », c'est à dire qui fait une tentative pour comprendre comment les choses se passent. Le mot « expérience » par son origine latine veut dire « faire l'essai de ».

Examinons maintenant l'expression « méthode expérimentale » qu'on trouve plus couramment dans la littérature concernant l'expérimental.
Dans une tentative de définition de la médecine scientifique, Claude Bernard propose cette définition :
« La méthode expérimentale, considérée en elle-même, n'est autre chose qu'un raisonnement à l'aide duquel nous soumettons méthodiquement nos idées à l'expérience des faits » **Claude Bernard Introd. ét . méd. Expér., Introd., p. 34**
Lalande, lui, donne une définition plus générale :
Parlant de la méthode expérimentale, il la qualifie ainsi : « celle qui consiste en l'observation, la classification, l'hypothèse et la vérification par des méthodes appropriées » **Lalande**

2.2. COLETTE LABORDE dans sa présentation intitulée « Intégration des NTE questions et amorces de réflexions face aux données nouvelles » au cours du Stage T3 France Arles 12-14 Juin 2000 rappelle d'abord que les formations des enseignants à l'usage des nouvelles technologies dans l'enseignement comportent deux volets :
- la maîtrise technique de la machine ou du logiciel ;
- et les usages possibles en classe.

Elle précise ensuite qu'à son avis ce deuxième volet est crucial quant à un réinvestissement en classe et constitue, de plus, la partie la plus difficile de la formation. Elle ajoute :
« si les nouvelles technologies sont introduites en classe ce n'est pas seulement pour faire plus vite et mieux ce que l'on faisait avant, mais pour **faire autrement**, de façon à **favoriser des apprentissages plus profonds** chez l'élève ».
Elle cite ensuite un extrait des « nouveaux programmes de seconde » en insistant sur leur introduction qui évoque le **caractère incontournable de l'informatique** et surtout les changements profonds qu'elle entraîne :

« L'informatique devenue aujourd'hui absolument incontournable permet de rechercher et d'observer des lois ***expérimentales*** *dans deux champs naturels d'application interne des Mathématiques : les nombres et les figures du plan et de l'espace. Cette possibilité d'****expérimenter****, classiquement plus propre aux autres disciplines, doit ouvrir largement la dialectique entre* ***l'observation et la démonstration****, et, sans doute à terme, changer profondément la nature de l'enseignement. Il est ainsi nécessaire de familiariser le plus tôt possible les élèves avec certains logiciels : en Seconde l'usage de logiciels de géométrie est indispensable. Un des apports majeurs de l'informatique réside aussi dans la puissance de simulation des ordinateurs : la simulation est ainsi devenue une pratique scientifique majeure : une approche en est proposée dans le chapitre statistique ».*

On retrouve dans ce texte une analyse dichotomique des champs d'utilisation possibles de l'expérimentation en sciences qui était déjà celle de Claude Bernard quand il affirmait :
« Les philosophes… ont admis deux méthodes scientifiques : la méthode inductive ou l'induction, propre aux sciences physiques, et la méthode déductive ou la déduction appartenant plus spécialement aux sciences mathématiques » **Claude Bernard Introd. med. expér., I, II, P. 83**

Intégration des TIC dans les ouvrages scolaires

Le mémoire professionnel de Marty et Vidal (IUFM de Toulouse 2004) contient une enquête statistique sur les principaux manuels scolaires qui ont été édités suite au nouveau programme évoqué : ce qui est étudié plus particulièrement, c'est l'intégration de la calculatrice dans ces manuels de manière qualitative et quantitative. Même si des distorsions sont notées, l'utilisation de la calculatrice est introduite de manière assez massive avec pour preuve immédiate et visuelle les copies d'écrans en quantité non négligeable. Le caractère incontournable de l'informatique au moins pour l'usage de la calculatrice dans le domaine de l'étude des fonctions a donc été avalisé largement par les éditeurs et leurs auteurs. Quand aux changements profonds qu'elle entraîne, ce même mémoire se demandait dans quelle mesure de jeunes professeurs n'ayant aucune formation dans ce domaine précis pouvaient utiliser les contenus de ces ouvrages pour leur propre formation avec comme objectif une utilisation pertinente avec la classe : la réponse a été largement négative (voir en **ANNEXE 1** quelques diagrammes présentés dans ce mémoire)

C'est donc tout naturellement que Colette Laborde se pose la question suivante :
« Comment donner suffisamment d'armes aux enseignants pour dépasser cette appréhension et les décider à utiliser pleinement les nouvelles technologies ? »
Elle considère comme un défi de permettre une adhésion qui se transforme en un réel investissement car il y a dans une formation adéquate un équilibre optimal à trouver pour montrer :
- La puissance et l'efficacité de la technologie afin d'accrocher les enseignants qui aiment leur discipline et peuvent alors **imaginer le champ immense de visualisation et d'expérimentation possibles** (**des expérimentations impossibles ou difficiles à faire dans la réalité** que ce soit en sciences physiques ou en mathématiques compte tenu des limitations du papier crayon).
- La simplicité d'usage en classe et le bénéfice qu'en tirent les élèves pour des apprentissages fondamentaux.
Elle propose des <u>tâches simples et cruciales</u> dans une progression qui s'appuie sur <u>l'élargissement des connaissances et des usages de la machine</u>. Elle précise d'ailleurs qu'il s'agit d'organiser en interaction une progression dans l'usage de la machine et dans les

connaissances disciplinaires, le conceptuel et le technique manipulatoire progressant en s'appuyant mutuellement.
Elle cite plus particulièrement l'usage de l'outil Trace dans Cabri comme révélateur de phénomènes remarquables que l'on ne peut voir en papier crayon. Nous présentons à titre d'exemple une manipulation montrée à ATCM en Malaisie (2002) où l'outil trace est utilisé pour révéler la ligne de niveau $MA^2+MB^2-AB^2 = 0$ **(ANNEXE 2)**

3. L'INTÉGRATION DES TIC DANS LE SYSTÈME ÉDUCATIF (RAPPORT DE RECHERCHE SEPTEMBRE 2000)

Un groupe de cinq équipes de recherche répondant à un appel d'offre du CNRCE a interrogé la littérature existante pour essayer de répondre en particulier aux questions suivantes :
« Comment les TIC sont-elles utilisées dans le système éducatif ? Modifient-elles la nature, les contenus et les modalités d'apprentissage ainsi que les acquis, le rapport au savoir et les attitudes des élèves, des étudiants et des enseignants ? »
Ce rapport conclut par la proposition d'un cahier des charges de l'intégration des TIC ; ce cahier s'adresse d'après les auteurs à la recherche sur l'intégration des TIC dans l'enseignement, en particulier en Mathématiques. Ces mêmes auteurs en attendent aussi des apports concrets aux innovations et dans la pratique usuelle de l'enseignement.
La réponse apportée par cette étude à l'éventuelle amélioration apportée par les TIC est partiellement contenue dans cette citation :
« L'idéologie dominante en France accorderait peu de place aux outils dans l'activité mathématique alors que le pragmatisme anglo-saxon considèrerait comme un donné l'existence des TIC et estimerait que leur introduction dans l'enseignement doit nécessairement se traduire par des améliorations ».
Cette affirmation doit être modulée par le fait que les domaines mathématiques auxquels il est fait référence dans les travaux utilisés pour la motiver sont en relation avec le calcul formel pour les anglo-saxons et la géométrie plane en France. Or on sait que le calcul formel renvoie dans la plupart des cas aux calculatrices graphiques ou symboliques alors que la géométrie même si elle est présente sur des calculatrices renvoie essentiellement à des logiciels.
Le rapport précise une autre raison des comportements décelés en France à travers le corpus analysé qui tient à la nature même des environnements de géométrie ; ceux-ci seraient caractérisés schématiquement par l'absence de réponse directe fournie à la question mathématique posée. À l'opposé, les environnements graphiques ou de calculs formels peuvent donner l'impression de potentialités mathématiques fortes, de suppression des aspects routiniers et calculatoires qui empêchaient jusqu'alors les élèves de se concentrer sur les aspects conceptuels.
Notons enfin les aspects de l'intégration que ce rapport propose d'approfondir :

- ♦La dimension instrumentale, l'articulation des techniques dans un environnement et celles en papier crayon (« connections » entre contextes d'après Noss et Hoyles) ;
- ♦Le temps ;
- ♦Les dispositifs d'enseignement et la gestion par l'enseignant ;
- ♦La technologie elle-même et l'interaction homme machine.

Concernant le troisième point, plus particulièrement, le rapport insiste sur le fait qu'une problématique de l'intégration des TIC implique l'analyse du rôle de l'enseignant. Les auteurs du rapport ont en effet noté le nombre modeste d'articles se rapportant à l'enseignant et à sa formation (ceci constituant un indice fort de la place dominante de l'élève dans les recherches sur les TIC) et l'un d'entre eux déclare plus concrètement qu'on regarde l'enseignant « par dessus l'épaule de l'élève ». Ils notent sans en tirer de conséquence une similitude entre les recherches sur l'intégration des TIC et les recherches en didactique des Mathématiques dans leur début qui se sont massivement tournées vers l'étude des connaissances des élèves. Ce qui ne les empêche pas de noter, concernant les **calculatrices graphiques** « qu'elles sont maintenant une donnée de l'enseignement des mathématiques : même si **le professeur ne fait rien pour leur intégration**, les élèves en possèdent et s'en servent. Les ordinateurs sont moins accessibles et leur usage est vu plus facilement comme problématique. ».

4. DE LA PROBLÉMATIQUE DE L'INTÉGRATION DES TIC À CELLE D'UNE PRATIQUE CORRÉLATIVE D'UNE DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE MÉDIÉE TECHNOLOGIQUEMENT, EN GÉOMÉTRIE

Revenons à la situation de départ de ce chapitre ; à part sa réaction purement professionnelle qui a consisté à analyser la séance observée et à produire un rapport pour l'institution formatrice IUFM (Institut universitaire de formation des maîtres), le formateur a réagi classiquement en innovateur au sens que lui donne Georges Glaeser. Il a imaginé le dispositif qu'il aurait expérimenté dans sa classe, lequel dispositif aurait « marché » inévitablement, car comme ajoute Glaeser « d'abord parce que l'innovateur est forcément motivé et qu'un Professeur enthousiaste enseigne sans doute mieux que celui qui délivre un message de routine ». Concernant les expériences pédagogiques des innovateurs, le reproche essentiel de Glaeser est le suivant « Impossible de savoir combien d'élèves sont restés passifs pendant la séance, ce que chacun a dit ou produit. Aucun effort de recherche n'a été accompli pour contrôler les modifications cognitives survenues chez chaque élève après cette expérience pédagogique ».

Dans le cas qui nous occupe, le formateur a pris une seconde initiative qui l'a fait sortir de son rôle d'innovateur au sens de Glaeser pour se glisser dans la peau d'un chercheur dans la mesure où il a eu l'occasion de faire réaliser un travail d'expérimentation du scénario proposé en classe.

4.1. Expérimentation « comparée » d'une ingéniérie d'intégration des TIC

Un binôme de Professeurs-stagiaires de l'IUFM de Toulouse, ne connaissant ni le logiciel Cabri ni la TI-92 se portèrent volontaires pour expérimenter ce scénario dans le cadre de leur mémoire professionnel, **l'une sans TI-92 et l'autre avec**. Le fait le plus marquant de ce travail fut la rencontre avec la notion de « milieu » ; en effet, l'intérêt vif et nouveau de ces Professeurs pour agréger si vite la connaissance d'un outil et consentir si librement à une réécriture complète d'une leçon qui paraissait si banale, trouvait sa source dans le désir de savoir, de prévoir et d'anticiper les réactions des élèves en fonction des rétroactions provoquées par la présence et les possibilités de ce nouvel outil de travail. La principale conclusion du mémoire est que **le travail de préparation de cours avec de nouveaux outils a changé leur manière de préparer leur cours en général** : leur souci d'impliquer les élèves devenait prioritaire et modifiait radicalement leur approche de l'acte d'enseigner ; le titre de leur mémoire a fini d'ailleurs par évoquer l'influence de l'outil dans la modification de leur enseignement que l'outil soit utilisé ou non : « Influence de la TI-92 sur notre enseignement » (Mémoire professionnel de Carrière et Lefrançois IUFM de Toulouse Midi-Pyrénées 1997).

L'outil devenait à lui-seul une variable qui pouvait changer la perception de l'acte d'enseigner.

4.2. Validation expérimentale des thèses sur l'intégration des TIC par le travail de Carrière et Lefrançois

Nous rappelions plus haut un des items du programme de mathématiques de seconde qui affirmait *« Cette possibilité d'**expérimenter,** »* *(par l'utilisation de l'informatique)* *« classiquement plus propre aux autres disciplines, doit ouvrir largement la dialectique entre **l'observation et la démonstration** »*.

Le programme caractérise donc l'expérimentation comme attachée plus spécifiquement à d'autres disciplines qu'il ne cite pas mais qu'il est aisé de deviner, les sciences expérimentales et physiques.
Ce qui frappe ensuite dans ce libellé, ce sont les deux expressions choisies « possibilité d'expérimenter » et « doit ouvrir largement ».
On peut pousser l'analyse sémantique jusqu'à faire l'exégèse suivante : l'expérimentation qui conduit à des observations était une pratique réservée aux sciences expérimentales ; cette pratique peu usitée dans l'enseignement des mathématiques dont l'activité centrale était la démonstration PEUT maintenant l'être grâce à l'activation d'un nouveau paramètre qu'est la présence de l'outil informatique. Celui-ci DOIT permettre de faire le pont entre une activité fortement associée à la discipline mathématique dans l'enseignement (la démonstration) et une autre qu'on reconnaît comme fortement associée aux sciences expérimentales (l'expérimentation) sans reconnaître l'importance prodigieuse de l'expérimentation dans le versant privé de l'activité de recherche mathématiques (même si celle-ci n'est pas explicitée).
Il n'est décliné à aucun moment les possibilités d'expérimenter.
Il n'est pas indiqué pourquoi cette pratique doit enrichir la démonstration d'un volet d'observation.
Ceci est bien naturel et d'ailleurs la suite des instructions précitées exprime une incertitude en notant qu'une telle nouvelle pratique DOIT *« sans doute à terme, changer profondément la nature de l'enseignement. ».*
Devant un tel *credo*, on pourrait avoir la même réaction que Georges Glaeser devant les innovateurs ou essayer de considérer ce même *credo* comme une hypothèse à valider.

Le mémoire de Carrière et Lefrançois vient valider l'hypothèse du changement profond de la nature de l'enseignement induit par la présence de l'outil informatique : le travail de transposition des apprentis-Professeurs a été plus que changé, il a été bouleversé.

Sont validées aussi dans ce mémoire les hypothèses de Colette Laborde qui concernent un abord différent par les NTE consécutif à une formation intégrant la maîtrise technique de la machine ou du logiciel et les usages possibles en classe.
Ce mémoire illustre enfin des possibilités d'expérimentations dans le champ de la géométrie du Collège et montre l'enrichissement de la phase pré-démonstrative dans ce même champ : sont ainsi éclairés par un exemple l'ouverture large de la dialectique observation démonstration évoquée dans les programmes de seconde et la possibilité d'actions inférées par une pensée naturelle précédant les mises au clair inférées par ce que Marc Legrand appelle la pensée mathématique.
Notons que ce mémoire aborde aussi le paramètre temps suggéré comme une piste importante de recherche dans le rapport évoqué précédemment et commandé par le CNRCE.

4.3. Survalidation par l'expérience complémentaire de Carrière et Lefrançois

Malgré les dizaines d'heures passées par ce binôme de Professeurs dans ce travail, celle qui avait hérité du scénario sans TI-92 dans l'expérience menée, a très rapidement éprouvé le besoin de recommencer une autre expérience scénarisée de la même manière sur un autre sujet mais en utilisant cette fois la TI-92. Le même formateur fut donc amené à nouveau à proposer à ces deux Professeurs-Stagiaires les grandes lignes d'un scénario sur l'introduction du Théorème de Pythagore avec un protocole identique à celui de la première expérience. La dévolution de ce projet nouveau a été encore plus grande que celle du projet précédent ; les Professeurs ont mené ce projet de bout en bout : écriture du scénario, discussion à deux, mise au point avec une importance toujours marquée du rôle du milieu, exécution du scénario avec et sans TI-92, le tout ayant d'ailleurs été filmé pour une meilleure analyse. La grande surprise de cette seconde expérience a été que la séquence exécutée par le Professeur n'utilisant pas la TI-92 mais un jeu de transparents préparé en fonction des observations faites chez sa collègue qui, elle, avait utilisé la TI-92, fut la plus réussie car ce fut celle qui fit participer le plus les élèves en les impliquant surtout dans le débat espéré **(ANNEXE 3)**. Ce fut une confirmation pour les Professeurs stagiaires qui en conclurent à ce moment là que l'utilisation de l'outil informatique pouvait avoir une influence très enrichissante sur leur enseignement.

4.4. La nature et le rôle de la démarche expérimentale médiée technologiquement

La démarche proposée par le formateur expert pour les expériences de Carrière et Lefrançois est une démarche intégrant l'expérimental, c'est-à-dire, pour aller vite, des actions sur les objets mathématiques de la classe ou sur leur modélisations dans l'environnement Cabri et de l'interprétation des effets de ces actions sur ces objets. Il n'y avait pas d'arrière plan-théorique qui soutenait telle ou telle initiative ou proposition d'initiative sinon que l'expertise mixte connaissances-technologie d'un enseignant innovateur.
Quel type d'actions étaient proposées ? Dans quel but ?
Quel types d'interprétations étaient attendues ? À quel niveau ? Avec quel objectif ?
Les actions s'enchaînent-elles suivant un ordre déterminé dépendant de leur nature qui serait à préciser ?
Ces actions ont-elles un rapport avec les actions que l'on pourrait mener au cours de la recherche d'un vrai problème du type problème ouvert ?
Ces actions doivent-elle mener à la découverte ? Si oui, comment et pourquoi ? Et sinon quel serait leur intérêt didactique ?

En résumé sans entrer dans l'inflation des questions qu'ouvre cette introduction, il est naturel de se questionner sur la nature d'une démarche intégrant l'expérimental en Mathématiques et plus particulièrement en Géométrie, d'une part dans la recherche de problèmes et d'autre part dans sa transposition en activités de classe.

5. LA PROBLÉMATIQUE DE LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE

Notre objectif, à partir de maintenant, consistera en une proposition de caractérisation formelle de ce que nous avons qualifié de démarche intégrant l'expérimental ou « démarche expérimentale » dans les activités de tentatives de résolutions de problèmes mathématiques, médiée par la technologie et dans notre travail, médiée essentiellement par le logiciel de géométrie dynamique Cabri.

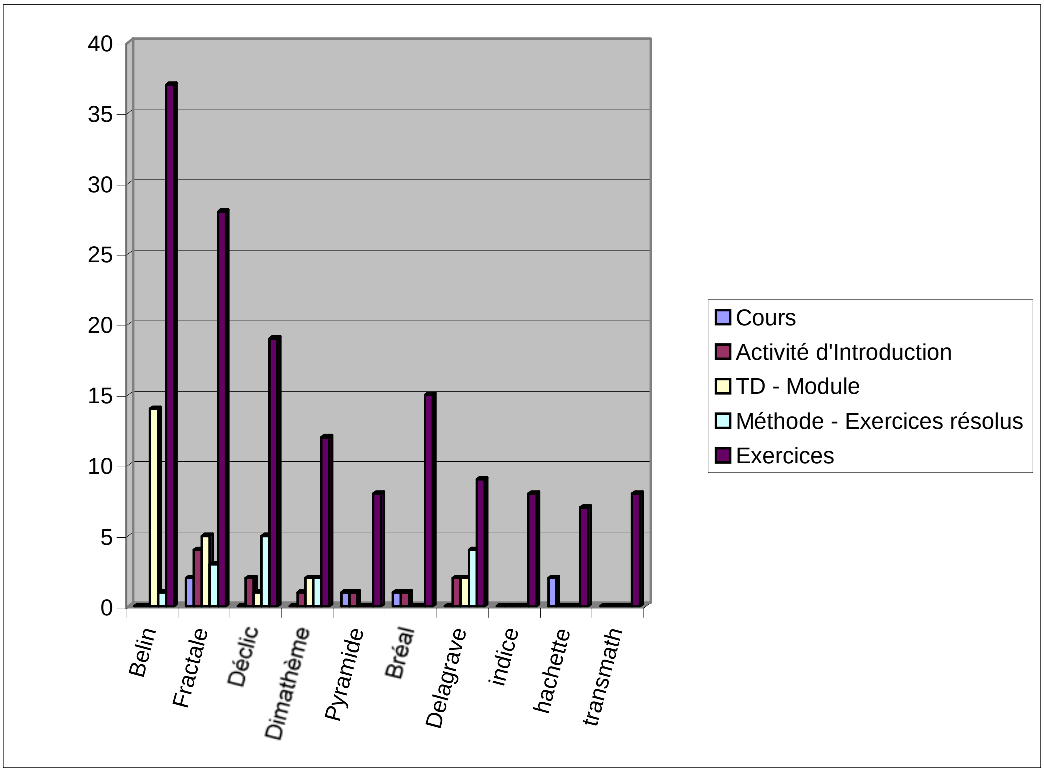
On proposera une caractérisation formelle à la suite d'une analyse de la littérature existante dans les divers domaines où la démarche expérimentale a cours naturellement, les sciences physiques, les sciences cliniques ou moins naturellement, les mathématiques.
Trois expérimentations viendront valider cette caractérisation à trois niveaux différents, niveau expert, niveau lycéen et niveau chercheur.
On essaiera ensuite de montrer que la connaissance de cette caractérisation devrait permettre aux enseignants de mieux analyser les activités de recherches d'élèves afin de prévoir ce qu'il est pertinent d'attendre d'eux. On essaiera aussi de montrer que cette connaissance devrait permettre de créer des problèmes où des phases spécifiques de la démarche expérimentale seront visées.

ANNEXE 1 (tableaux et graphiques extraits de VIDAL A., MARTY S., 2004)

•Tableau présentant le nombres de parties relatives à la calculatrice

	Nombre de partie faisant référence à la calculatrice					
Livres étudiés	Cours	Activités d'introduction	T.D.-modules	Méthodes-Exercices résolus	Exercices	Total
Belin	0	0	14	1	37	52
Fractale	2	4	5	3	28	42
Déclic	0	2	1	5	19	27
Dimathème	0	1	2	2	12	17
Pyramide	1	1	0	0	8	10
Bréal	1	1	0	0	15	17
Delagrave	0	2	2	4	9	17
Indice	0	0	0	0	8	8
Hachette	2	0	0	0	7	9
Transmath	0	0	0	0	8	8

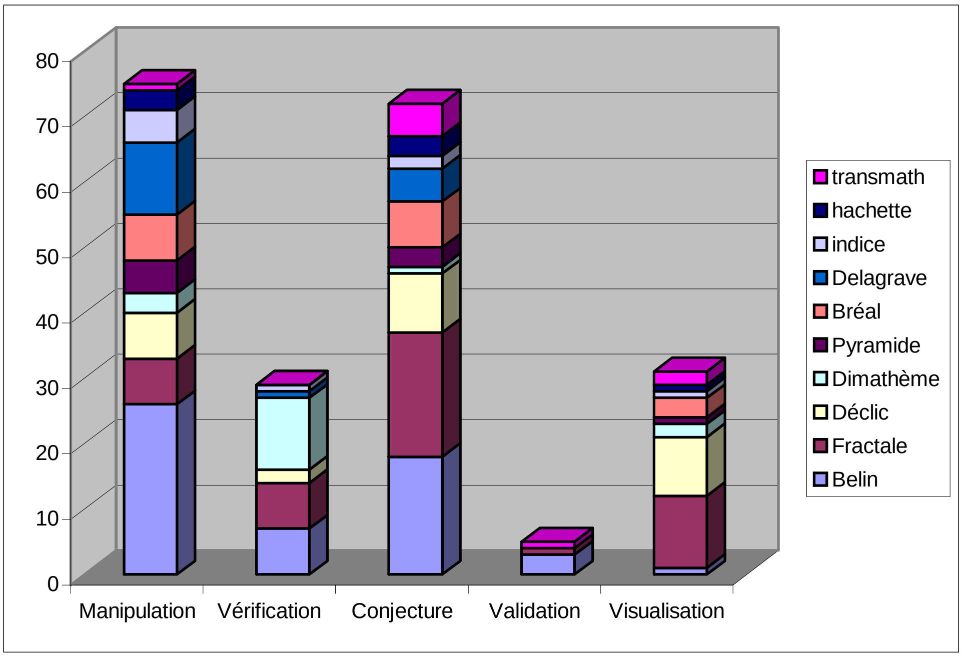
•Nombre de parties en fonction des livres



•**Tableau présentant les objectif des exercices et le nombre d'exercices utilisant ou non la calculatrice dans leurs résolutions**

	Objectif de l'exercice					La calculatrice est		
Livres étudiés	Mani-pulation	Véri-fication	Con-jecture	Vali-dation	Visua-lisation	utilisée	non utilisée, mais des connaissances sont nécessaires	non utilisée et pas de connais-sances nécessaires
Belin	26	7	18	3	1	46	6	0
Fractale	7	7	19	1	11	27	7	6
Déclic	7	2	9	0	9	18	9	0
Dimathème	3	11	1	0	2	16	1	0
Pyramide	5	0	3	0	1	7	2	0
Bréal	7	0	7	0	3	11	2	3
Delagrave	11	1	5	0	0	14	0	3
Indice	5	1	2	0	1	7	0	1
Hachette	3	0	3	0	1	6	0	1
Transmath	1	0	5	1	2	6	2	0

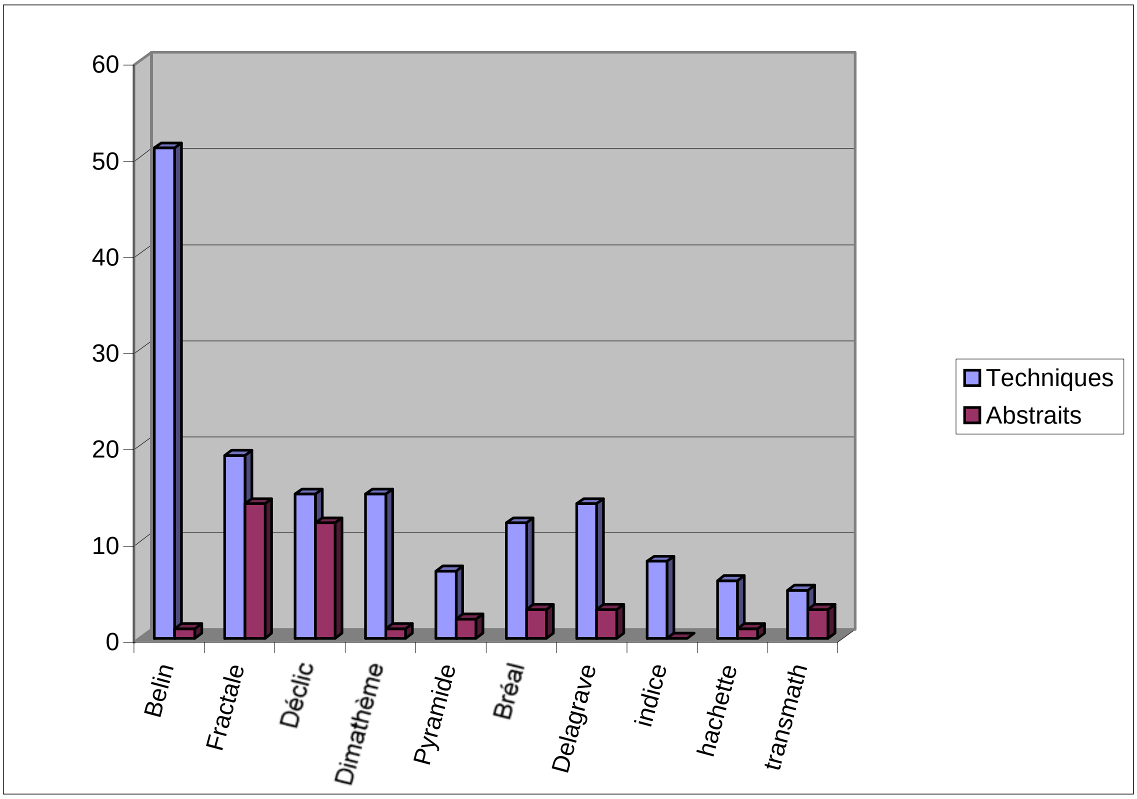
•**Nombres d'exercices en fonction des livres et de l'objectif attendu**



•tableau présentant les deux types possibles d'exercices

	Type de l'exercice	
Livres étudiés	Technique	Abstrait
Belin	51	1
Fractale	19	14
Déclic	15	12
Dimathème	15	1
Pyramide	7	2
Bréal	12	3
Delagrave	14	3
Indice	8	0
Hachette	6	1
Transmath	5	3

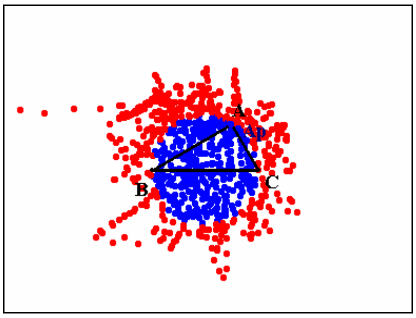
•Nombre d'exercices en fonction du type de l'exercice et des livres



ANNEXE 2

Exemple présenté à ATCM 2002

ABC étant un triangle donné, nous avons réalisé une construction conditionnelle qui superpose au point A
un point Ap rouge lorsque $AB^2 + AC^2 - BC^2$ est positif,
un point An bleu lorsque $AB^2 + AC^2 - BC^2$ est négatif.
Nous avons activé les traces des points Ap et An et avons tiré le point A en tous sens comme si nous voulions crayonner la page Cabri.
Nous avons ainsi obtenu l'écran reproduit ci-à droite :



La conjecture qui se dégage de manière fulgurante de cette utilisation de l'outil trace, c'est-à-dire celle qui énonce que l'ensemble des points A du plan vérifiant $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$ est le cercle de diamètre [AB], l'est évidemment par l'utilisation d'un théorème en acte (ici le théorème des valeurs intermédiaires simultanément dans les registres graphique et numérique).

ANNEXE 3

<u>Épisode du choix d'un point de la page Cabri permettant d'égaler BC² à AB² + AC²</u>

CAS DU PROFESSEUR AYANT UTILISÉ LA TI-92 EN CLASSE

♦Le Professeur avait préparé sur une page Cabri de sa TI92 rétroprojetable un triangle ABC quelconque à base BC horizontale avec A au dessus de BC.
Il avait construit les carrés s'appuyant extérieurement sur les 3 côtés de ce triangle Il avait mesuré et fait afficher leurs aires. Il avait fait calculer par la calculatrice intégrée de Cabri la somme des deux aires des carrés supérieurs et rapproché sur l'écran ce résultat de l'aire du carré inférieur.

♦Le Professeur demande aux élèves de lui dire comment tirer le point A pour obtenir l'égalisation des deux résultats mis en regard l'un de l'autre. Il avait auparavant tiré ce point dans tous les sens afin de leur montrer que la figure gardait les propriétés qui avaient permis de la construire tout en réactualisant les données.
Remarque :cette manière d'opérer est moins dynamique que celle proposée dès l'avènement de Cabri qui consistait, partant d'un triangle rectangle, de déplacer l'un des sommets en essayant de maintenir la contrainte de l'angle droit puis, observer la trace obtenue. La manière choisie l'a été, en particulier, parce que l'expérimentateur est le Professeur et non l'élève

♦Le Professeur s'attendait à ce que ses élèves lui demandent de bouger le point A de gauche à droite ou de haut en bas pour approcher une position répondant aux consignes imposées.

♦En réalité, les élèves lui proposent de « faire le triangle isocèle », puis de « faire le triangle équilatéral » puis de « faire le triangle aplati ». Cette dernière proposition aura pour conséquence de déstabiliser le Professeur qui n'avait pas prévu ce cas mais qui s'en sort néanmoins en demandant à l'élève ayant posé cette question d'essayer d'en trouver la réponse (sous-entendu sur son brouillon) pendant qu'elle va continuer. Par la suite, les élèves vont finir par demander au professeur de « faire le triangle rectangle ». Il est heureux que le professeur qui manipule ne se soit pas trouvé dans le cas du triangle isocèle rectangle quand il réagit à la première demande.
Remarque : quand le Professeur demande de bouger le point A, il demande implicitement de changer la forme du triangle ; il n'est donc pas surprenant que les élèves proposent des formes connues issues de leur bibliothèque de triangles.

CAS DU PROFESSEUR N'AYANT PAS UTILISÉ LA TI-92 EN CLASSE

♦Ce professeur ayant assisté à la séance incluant l'épisode précédent décida donc de parier sur l'invariance des réactions de ses propres élèves face aux mêmes consignes. En conséquence elle prépara un jeu de transparents superposables anticipant sur les demandes de ses élèves.

♦Cette fois, aucune surprise pour le professeur qui sortait de son chapeau le transparent qui répondait à la demande exacte faite par la classe, mais énormes surprises pour les élèves. Ceux-ci étaient abasourdis par le côté magique des manipulations du Professeur qui venait avec des transparents adéquats répondre à chacune de leur proposition. Ils avaient la certitude que leurs propositions ne pouvaient en aucun cas être prévisibles. Leur étonnement était d'autant plus grand que les répliques du Professeur par transparents interposés arrivaient automatiquement et adaptées aux propositions faites. Le couple Professeur-transparents devenait un milieu adapté à une activité auto-gérée de la classe.

Embryon d'analyse

L'analyse ***a priori*** qui prévoyait certaines initiatives des élèves s'est révélée erronée pour une raison toute simple : si les élèves étaient amenés à prendre des initiatives car les consignes étaient claires, les initiatives l'étaient non pas en fonction des représentations que pouvait se faire le professeur d'une utilisation pertinente et simple du logiciel mais des représentations des élèves de la notion d'action de résolution. Les élèves pensent qu'on attend d'eux une proposition de réponse et non une recherche à tâtons, la solution et pas une expérimentation : un simple problème de contrat finalement mal appréhendé par le Professeur.

L'analyse ***a posteriori*** que je viens de faire n'a pas été faite par le Professeur qui a assisté à cette leçon mais elle en a tiré des conséquences qui lui ont permis de créer des situations d'actions et de rétro-actions là où les élèves s'attendaient à n'obtenir que le jugement du professeur pilote. C'est peut-être ce que l'on peut appeler le « métier » : être moins surpris mais aussi anticiper mieux.

Partie 2

LA LITTÉRATURE SUR L'EXPÉRIMENTAL : CHOIX RÉALISÉS

1. LES QUATRE QUESTIONNEMENTS RETENUS

Le principe de la méthode utilisée repose essentiellement sur un questionnement de la littérature existante dans les domaines de l'expérimental avec :

Un questionnement de la littérature dans le domaine mathématique :
Recherche en didactique des mathématiques
Repères IREM
Petit X
Programmes de Mathématiques

Un questionnement de la littérature dans le domaine des sciences expérimentales :
Recherche en didactique des mathématiques
Didaskalia
Programmes de sciences physiques
Rapports de jury de CAPES (Certificat d'Aptidude au Professorat de l'Enseignement Secondaire)et d'agrégation

Un questionnement à partir de l'analyse d'un arbre décisionnel extrait du domaine des sciences cliniques :
Encyclopédie médico chirurgicale.

Ces trois questionnements seront précédés d'un **questionnement de l'auteur sur ses propres conceptions** qui s'appuieront en particulier sur les conceptions dégagées dans l'introduction et évidemment sur une connaissance préalable de certains points incontournables de la littérature sur l'expérience et l'heuristique.

2. SÉLECTION ET TRAITEMENT DES ARTICLES

Étape 1 (sélection des articles par mots-clés)

Nous avons cherché plus particulièrement tous les articles contenant des entrées avec les mots « expérience », « expérimentation », « démarche expérimentale », dans les revues précitées mais aussi dans la littérature didactique classique.

Après lecture de ces articles ou des extraits d'autres ouvrages sélectionnés, d'autres entrées pertinentes sont apparues comme « démarche scientifique », « induction », « analogie », « raisonnement plausible »,…(cette liste n'est pas exhaustive) qui ont donné lieu à une seconde sélection d'articles.

Étape 2 (relecture de l'ensemble des articles retenus)

Nous avons procédé ensuite :
À une relecture de la première série d'articles sélectionnés à la lumière de l'ensemble des entrées retenues et à la lecture de la seconde série d'articles toujours à la lumière de l'ensemble des entrées retenues.

Étape 3 (recherche étymologique)

Nous avons recherché les sens des mots clés dans le Littré, le Robert et l'Encyclopédia Universalis, ce qui nous servira tout au long de notre travail car il nous aura permis de préciser le sens des mots-clés sur lesquels nous nous appuierons dans la suite.

3. INFORMATIONS COLLECTÉES. INTÉRÊT DE LEUR APPORT

Dans l'ensemble, si on se situe au niveau d'une attente d'explicitation claire de la notion de démarche expérimentale, cette exploration n'aura pas permis d'atteindre ce but ; il en va de même pour les autre notions évoquées. Seul un auteur propose une définition claire du mot « investigation » (Robin Millar).

Si on se situe au niveau informatif sur les usages de ces mots et leur contexte d'utilisation, l'exploration a été plus riche en obtenant ce que nous appellerons des indices qui doivent permettre par recoupement de recomposer tout ou partie de la démarche expérimentale telle que concevable à partir de la littérature. Ces indices sont résumés à la fin de chacun de ces apports, souvent sous forme de schémas ou de diagrammes qui permettent de visualiser de manière linéaire **le déroulement formel d'une démarche de découverte expérimentalement médiée**.

4. LA MÉTHODE DE TRAVAIL ADOPTÉE

La formalisation qui se dégagera de cette recherche constituera un socle solide sur lequel nous nous appuierons pour proposer notre conception a priori de la décomposition probable d'une telle démarche de découverte basée sur l'expérimental.

Cette conception ***a priori*** sera forgée essentiellement à partir de l'analyse d'une démarche particulière (résolution de problème de boîte noire particulière), elle même choisie pour son adéquation à la mise en évidence des étapes d'une telle démarche.

Cette analyse tout en nous amenant à nos hypothèses de travail reliera celles-ci aux hypothèses issues de la recherche théorique synthétisées par notre quadruple analyse de la littérature sur l'expérimental.

PREMIÈRE APPROCHE DE LA NOTION DE DÉMARCHE DE DÉCOUVERTE EXPÉRIMENTALE

1. GÉNÉRALITÉS SUR LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE

1.1. Introduction :

Marie-Alberte Johsua et Samuel Johsua écrivaient dans leur article « L'expérimental dans l'enseignement scientifique » paru dans RDM (1987) :

« Ni la démarche expérimentale, ni l'expérience elle-même n'ont de statuts incontestés à travers la littérature. La référence qu'on y trouve si systématiquement est donc essentiellement ambiguë ».

Il paraît donc naturel de nous questionner en premier lieu sur notre représentation de cette notion de « démarche expérimentale » en liaison avec la « résolution de problèmes » et donc plus généralement avec l'heuristique.

1.2. Le mot « expérience »

– Le mot a pour origine latine « experientia » et plus particulièrement « experieri » qui signifie « faire l'essai de » ; il traduit initialement l'acte d'éprouver ou d'avoir éprouvé. Cet acte qui est donc en relation avec nos sens doit nous permettre d'enrichir nos connaissances, notre savoir ou nos aptitudes. Ce mot peut aussi être interprété
comme une tentative pour reconnaître comment une chose se passe,
comme l'action de provoquer une observation dans l'intention d'étudier certains phénomènes, de **contrôler ou suggérer** une certaine idée.

– On retrouve cette dernière interprétation chez Claude Bernard qui propose cette définition métaphorique de ce mot :

« ***Dans la langue française le mot expérience au singulier signifie, d'une manière générale et abstraite, l'instruction acquise par l'usage de la vie. Quand on applique à un médecin le mot expérience pris au singulier, il exprime l'instruction qu'il a acquise par l'exercice de la médecine. Il en est de même pour les autres professions, et c'est dans ce sens que l'on dit qu'un homme a acquis de l'expérience, qu'il a de l'expérience... Ensuite on a donné par extension et dans un sens concret le nom d'expérience aux faits qui nous fournissent cette instruction expérimentale des choses*** » Claude Bernard extrait du Robert

– Jean-Paul Allouche, lui, précise les deux sens du mot expérience en Français (dans un article intitulé « La recherche expérimentale en mathématiques ») : le sens de « vérification expérimentale » et celui d'« expertise ». Il note que cette ambiguïté n'existe pas dans d'autres langues et il cite l'Anglais où on utilise « experiment » et « experience » puis l'Allemand où on utilise « Experiment » et « Erfahrung ».

– **Du point de vue de la théorie de la connaissance**, on appelle expérience
aussi bien toute <u>connaissance immédiate et non inférentielle</u> que toute <u>connaissance médiate</u>, inférée ou induite à partir de données sensorielles, apprise et non innée.

– **Du point de vue de la philosophie des sciences**, on appelle expérience
toute procédure par laquelle une hypothèse est confrontée avec des faits.

– L'origine de cette hypothèse est différente suivant les théories auxquelles on se réfère :

Pour l'empirisme, toute – ou la plus grande partie de – la connaissance provient de l'expérience et est justifié par elle (conformément à l'idée lockéenne de la tabula rasa).

Pour le rationalisme, aucune connaissance n'est possible s'il n'existe pas de vérités innées ou ***a priori***.

– Dumarsais propose une définition de l'expérience qui n'oppose pas les conceptions empiristes et rationalistes « ***En Physique, le mot expérience se dit des épreuves que l'on fait pour découvrir les différentes opérations et le mécanisme de la nature*** » Dumarsais, Œuvres, t.v, p. 249. Il y parvient donc en ne précisant pas la place de la connaissance visée par l'expérience, ni en amont ni en aval de cette expérience.
En effet ces épreuves qu'il nomme expériences produisent des faits qui peuvent :

- ♦Générer des hypothèses si on se place dans la conception empiriste ou
- ♦Venir valider des hypothèses qui ont été formulées ***a priori*** si on se place dans la conception rationaliste.

On peut illustrer cette « complémentarité »
par la conception empiriste de Buffon quand il déclare
« ***Est-il bien difficile … de voir que nos idées ne viennent que par les sens… Dès lors, ne voit-on pas que les abstractions ne peuvent jamais devenir des principes d'existence ni de connaissances réelles, qu'au contraire ces connaissances ne peuvent venir que de résultats de nos sensations comparées, ordonnées et suivies, que ces résultats sont ce qui s'appelle l'expérience, source unique de toute science réelle, que l'emploi de tout autre principe est un abus… ?*** »
et celle rationaliste de Pascal :
« ***Deux choses instruisent l'homme de toute sa nature : l'instinct et l'expérience*** ». L'instinct est ici la connaissance ***a priori*** et l'expérience est l'épreuve qui vient valider cette connaissance ***a priori***.
– Lalande, lui aussi, rassemble ces deux conceptions dans ce qu'il appelle la méthode expérimentale, « ***celle qui consiste en l'observation, la classification, l'hypothèse et la vérification par des méthodes appropriées*** ». Il place l'expérience en amont d'où il induit une hypothèse qui est ensuite validée par des méthodes appropriées qui peuvent donc inclure à nouveau l'expérience. Cette vérification consiste en la vérification de conditions nécessaires impliquées par l'hypothèse.

L'expérience est donc un élément intervenant dans la génération de connaissances :
Soit en aval de la connaissance qui est une connaissance a priori et dans ce cas, elle sert à valider cette connaissance ***a priori***. On se place ici dans une logique déductive.
Soit en amont de la connaissance et dans ce cas elle sert à créer de la connaissance. On se place là dans un logique inductive.
Nous proposons donc :

Définition 1 : Une expérience est une procédure qui génère des faits observables avec comme fonction, une fonction de validation ou de génération d'hypothèses.

En conséquence, l'expérimentation pourrait être définie ***stricto sensu*** comme la réalisation d'une expérience. Dans ce cas, l'expérimentation se distinguerait de l'expérience de la même manière que la réalisation d'un programme informatique se distingue du programme en lui-même. Cette définition ne prendrait pas en compte les raisons qui motivent la réalisation de l'expérience : en effet l'expérience peut être une expérience de validation d'une hypothèse ***a priori*** ou une expérience de génération d'hypothèses.
Nous proposons donc :

Définition 2 : une expérimentation est la réalisation d'une expérience avec la fonction attribuée à cette expérience, validative (d'hypothèse) ou générative (d'hypothèse)

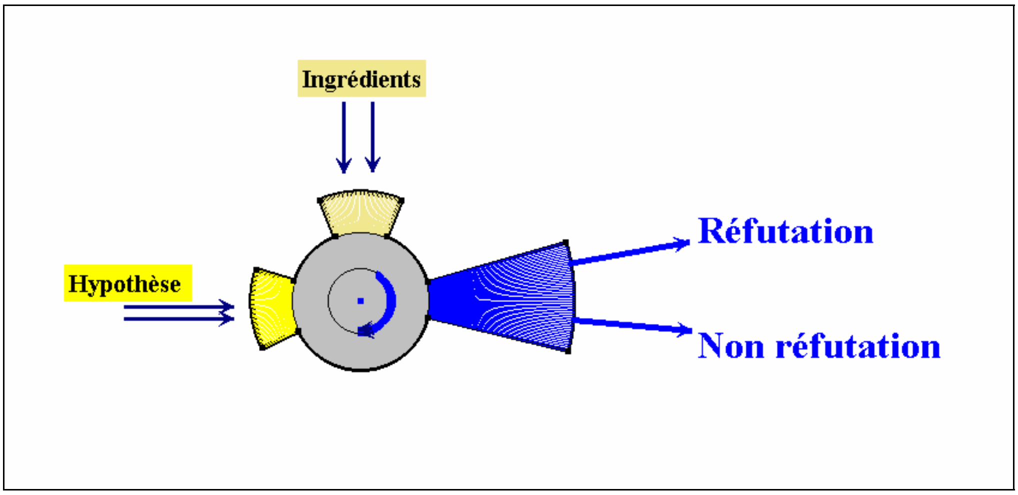


Schéma d'une expérience validative

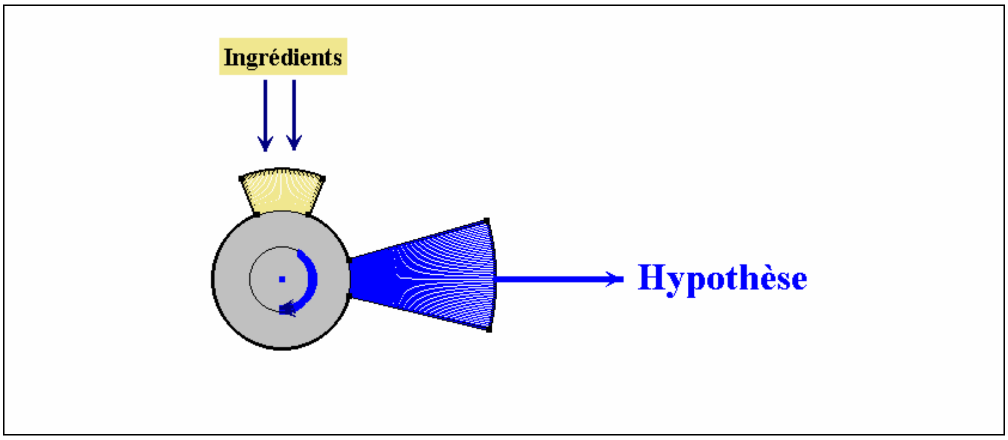


Schéma d'une expérience générative

1.3. Mathématiques et heuristique

1.3.1. Mathématiques et résolution de problèmes

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes ! Nous sommes partis de ce paradigme dans le monde actuel de l'enseignement des mathématiques en France pour voir comment (si) on enseigne la résolution de problèmes. À un niveau supérieur, il est généralement admis que le rôle fondamental de la recherche est moins de chercher que de trouver : un bon chercheur est un bon « trouveur ». Pour certains, comme Jean-Paul Allouche le rôle fondamental de la recherche est de poser des questions. Nous nous sommes vite rendu compte que les techniques de la découverte, « l'heuristique », se résumaient au mieux à la transmission de méthodes, de recettes pour résoudre certaines catégories de problèmes, c'est aussi l'algorithme miracle que fournit le Professeur à l'élève pour le « débloquer ». Cette remédiation étant d'ailleurs d'après la littérature la seule technique dont il dispose pour améliorer la transmission des connaissances.

Signalons néanmoins au niveau des méthodes, l'utilisation des boîtes à outils pour la résolution de problèmes : même si elle a été critiquée cette utilisation a au moins le mérite de permettre de déblayer le terrain et de faire envisager le problème sous divers points de vue (et éventuellement dans divers cadres).

Si on se place maintenant à un niveau plus théorique, notons que Popper rejetait l'idée que l'on puisse non seulement définir une méthode générale de découverte du nouveau (une heuristique générale), mais encore que l'on puisse jamais rebâtir ***a posteriori*** le cheminement réel qui y a conduit. La non existence d'une méthode générale semble être une conséquence des théorèmes d'incomplétude de Gödel. Ce qui est d'ailleurs important pour un enseignant, n'est pas de reconstituer la démarche exacte qui a permis de résoudre un problème, mais de fournir une méthode générale qui permette à ses élèves de résoudre une catégorie de problèmes semblables. Attachons nous donc tout particulièrement à la notion d'**activité mathématique** avant de nous intéresser néanmoins à la « **manière** » de découvrir, c'est à dire à l'heuristique.

1.3.2. Activité mathématique, activité expérimentale ?

Dans un contexte d'enseignement

L'activité mathématique pendant longtemps n'a pas été considérée comme une activité expérimentale dans le domaine de l'enseignement. En effet, cette activité a longtemps été résumée à la production de démonstrations générant des résultats nouveaux ce qui sous-entendait une conception déductiviste de l'art d'inventer. Suivant le canon leibnizien, toute découverte était le fruit d'une ou de déductions. La seule expérience (la production de faits observables) selon Louis Couturat était, dans cette optique, la déduction. Cela explique peu-être la place spéciale des Mathématiques dans l'enseignement français du XX^{e} siècle, épouvantail et outil de sélection : comment ne pas avoir peur d'une discipline qui propose de produire des démonstrations dont elle ne donne pas la règle de génération et pourquoi ne pas utiliser cette discipline pour repérer (sélectionner ?) ceux qui par leurs simples aptitudes à déchiffrer sauront résoudre ce type de problèmes ?

À l'opposé de cette conception, l'épistémologie anglo-saxonne se consacrera pour une part importante à l'étude de la nature du raisonnement inductif et de la place qu'il convient de lui accorder dans le processus de l'élaboration des connaissances. Notons que pour Francis Bacon dont cette épistémologie est l'héritière, l'activité scientifique est un processus d'invention reposant sur l'induction généralisée, ce qui peut se résumer dans un langage moderne dans une accumulation préalable de données sur lesquelles on raisonne par induction (« on laisse agir notre entendement »). Cette conception baconienne peut mener à une conception expérimentale de l'activité mathématique : expérimenter pour induire. L'évolution des programmes d'enseignement des Mathématiques français semble orientée dans une voie intégrant cette conception. La possibilité d'expérimenter est largement ouverte en particulier par l'utilisation des logiciels de géométrie ; cette manière de pratiquer les mathématiques dans un contexte d'enseignement rend l'activité mathématique, expérimentale, dans la mesure où cette activité inclut des expérimentations à base d'expériences validatives ou génératives d'hypothèses (vérifications logicielles ou calculatrices pour la validation et production de conjectures pour la génération d'hypothèses)

Dans un contexte de recherche

Dans l'article déjà cité de Jean-Paul Allouche, celui-ci, pour définir la notion d'expérience donne des exemples qui permettent de caractériser cette notion comme nous l'avons fait précédemment même s'il reste ambigu dans une distinction « expérience », « expérimentation ». On retrouve des expériences validantes et des expériences génératives de résultats nouveaux. Par exemple :

Comme expérience validante, il cite la vérification d'une conjecture sur la suite de Syracuse (du nom de l'Université américaine où elle a été « découverte ») définie par $f(n) = n/2$ si n est pair et $f(n) = (3n+1)/2$ si n est impair, qu'on peut réaliser par ordinateur jusqu'à des valeurs gigantesques mais qu'on ne sait pas démontrer pour tout n entier naturel (cette conjecture dit que pour tout n il existe un k tel que $f^k(n) = 1$, où f^k est pris au sens de la composition). Cette expérience peut être aussi envisagée comme générant la conjecture de manière inductive.

Il cite aussi comme expérience validante, la vérification d'une autre conjecture en théorie des nombres pour des nombres encore gigantesques alors que cette conjecture a été réfutée (la différence entre le nombre de nombres premiers inférieurs à x et le logarithme intégral de x est de signe constant jusqu'à de très grandes valeurs de x, mais change de signe une infinité de fois lorsque x tend vers l'infini : voir l'article de J.E. Littlewood aux Compte-rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 158 (1914) 1869-1872).

Ceci montre à la fois l'effet fécond de l'expérimentation dans la recherche en mathématique comme pourvoyeur d'un vivier de conjectures excitant l'imagination des mathématiciens mais aussi ses limites si celle-ci n'est pas complétée par des démonstrations. Jean-Paul Allouche justifie ainsi le souci des auteurs des nouveaux programmes de Mathématiques qui veulent « *ouvrir largement la dialectique entre **l'observation et la démonstration**, et, sans doute à terme, changer profondément la nature de l'enseignement.* » en offrant aux situations d'enseignement des mathématiques, « *Cette possibilité d'**expérimenter**, classiquement plus propre aux autres disciplines* »

Lors de la rédaction d'articles pour des revues spécialisées, la tendance bourbakisante a consisté, « *à taire les pistes qui n'ont pas abouti, les expérimentations fécondes ou cruciales* » et à rédiger « *en enchaînant les lemmes, propositions, corollaires et théorèmes* ».

Certains mathématiciens ont osé néanmoins changer ce protocole rigide : par exemple, au cours d'un article dans une revue reconnue, J. Brillhart et P. Morton expliquent leurs motivations, pistes en cul-de-sac, espoirs et déceptions lors de leur travail sur une suite classique une vingtaine d'années plus tôt (A case study in mathematical research : the Golay-Rudin-Shapiro sequence, American Mathematical Monthly 103 (1996) 854-869). On peut aussi signaler qu'il existe depuis 1992 une nouvelle revue spécialisée qui s'appelle « Experimental Mathematics ».

Le développement accéléré de l'informatique et ses applications dans les domaines de la recherche ou de l'éducation sous forme de logiciels ou de calculatrices de plus en plus puissantes accentue cette marche des mathématiques vers une pratique des « chercheurs de problèmes » intégrant l'expérimentation.

1.3.3. Heuristique

Nous avons vu que l'activité expérimentale, basée sur l'expérimentation générait ou était générée par les connaissances. La question qui se pose naturellement est celle du processus de génération de ces connaissances, c'est à dire du processus de découverte, l'heuristique. Il nous faut donc préciser cette notion d'heuristique.

Le mot « heuristique » vient du grec heuriskein qui veut dire « trouver »

Ce terme de méthodologie scientifique qualifie tous les outils intellectuels, tous les procédés et plus généralement toutes les démarches favorisant la découverte. On peut donc parler de l'art d'inventer ou des techniques d'inventions.

Le premier grand ouvrage spéculatif sur les conditions de la connaissance est l'Organon aristotélicien qui fait une place aux techniques qui permettent de découvrir des choses que l'on ignore. On peut d'ailleurs considérer que c'est une des tâches de la dialectique de proposer des méthodes de trouvailles. La dialectique est un art de la discussion et de l'examen dont la mission n'est pas la recherche de la vérité ; elle s'intéresse à l'opinion, au probable. Néanmoins elle fournit un ensemble d'instruments permettant de raisonner sur n'importe quel sujet.

La place accordée à l'étude de l'induction et à la recherche des ressemblances et analogies (***la venatio similitudinis***) dans la dialectique aristotélicienne peut nous faire considérer cette

dernière comme le creuset de tout développement ultérieur concernant les techniques heuristiques.
Sous l'influence des stoïciens, l'art de trouver va se définir dans une perspective pragmatique, les règles ne valant que par leur efficience pratique indépendamment de toute autre justification.
Encore aujourd'hui certains traités d'heuristique sont des mélanges hétéroclites de procédés sans autre légitimité que leur efficacité concrète supposée.

Les narrations de recherches développées au sein de l'IREM de Montpellier déclinent des techniques heuristiques avec un certain art de la discussion et de l'exposition ; elles constituent un retour vers une attitude dialectique aristotélicienne. Elles permettent le développement d' « explications » à partir de « descriptions ». Jean Largeaut considère qu'il n'y a pas de discontinuité entre « décrire » et « expliquer » et que « ***la description est le degré zéro de l'explication ou bien un cas trivial dégénéré de l'explication*** » (Encyclopédia Universalis article « description et explication » page 249).

À ce stade de nos développements, il paraît utile de comprendre comment l'expérimentation arrive dans le processus de découverte. Elle est naturellement le résultat d'un engagement dans une action (le plus souvent le fruit de la dévolution d'un problème), le résultat d'une initiative ; elle apparaît dans la littérature sous les vocables d' « exploration », d' « investigation », vocables que nous proposons d'étudier avant d'en fixer les sens que nous adopterons dans la suite de notre travail.

1.3.4. Les notions d'exploration et d'investigation

Le verbe « explorer » vient du latin « explorare ». D'après Pott, « plorare » aurait pris le sens de « aller » et avec « ex », « aller au loin ». Ce verbe avait en 1546 chez Rabelais le sens de « examiner, vérifier ». Resté inusité jusqu'au XIX^{e} siècle, on le retrouve avec le sens de « parcourir en examinant, en cherchant à découvrir », mais aussi « parcourir un pays mal connu en l'étudiant avec soin ». Dans le domaine médical, il prend le sens de « examiner les symptômes d'une maladie » ou « reconnaître l'état des tissus intérieurs, le fonctionnement des organes à l'aide d'instruments ou de procédés spéciaux ».
Le mot « exploration » signifie naturellement l'action d'explorer.
Le mot « explorateur » renvoie essentiellement à celui qu'on envoie à la découverte dans un pays pour en connaître l'étendue, la configuration. Il renvoie aussi dans le domaine chirurgical à un instrument destiné à l'exploration médicale, à reconnaître par exemple quelque chose dans un organe, dans une tumeur.

Le mot investigation vient du latin « investigatio ». Ce mot était assez rare au XVII^{e} siècle pour que Rousseau ait pensé en être le créateur. Il signifie principalement une recherche suivie et systématique sur un sujet, ou l'action de suivre à la trace, de rechercher attentivement. Ce mot recouvre les sens d'enquête, d'examen, d'information : on parle des investigations de la police. On parle aussi d'investigation pour un médecin quand on dit qu'il procède à une investigation par toucher, par auscultation. Quand Mérimée écrit « Il n'y a pas d'investigation qui lui semble inutile ou trop minutieuse dès qu'il en sort la preuve d'une vérité ou la réfutation d'une erreur » dans l'histoire du règne de Pierre le Grand, on perçoit une nécessité de cette action et une rigueur dans la manière de la mener. Quand Georges Sand écrit, dans la Mare au Diable, « il attachait un regard perçant sur le fermier qui soutenait cette investigation avec beaucoup d'impudence ou de candeur », le mot « investigation » inclut un caractère persistant de l'action avec une intensité soutenue.

On peut finalement concevoir l'exploration comme une action humaine qui a pour but d'aller recueillir des informations sur un phénomène non connu ou peu connu et ce, de la manière la

plus organisée possible, en recueillant le maximum de données qui devraient être interprétables.
Nous proposons donc :

Définition 3 : l'exploration c'est la recherche d'indices qui permettent d'avancer vers la connaissance d'un phénomène

L'investigation serait une exploration particulière avec des procédures éprouvées dans des champs bien délimités. Elle nécessitera un apprentissage préalable pour être menée efficacement.
Nous proposons donc :

Définition 4 : l'investigation c'est une exploration systématique avec des procédures connues dans des champs bien repérés.

Les définitions adoptées marquent l'inclusion de la notion d'investigation dans la notion d'exploration.

1.4. Une première définition de la démarche expérimentale

1.4.1. Le mot « démarche »

Le sens premier est celui du premier pas que l'on fait pour aller quelque part, pour sortir. Dans le sens poétique, on retrouve le sens de « marche ». De manière plus commune, la démarche caractérise une allure, une façon de marcher et par extension une manière d'agir et aussi une manière de conduire sa raison (on parle des démarches de l'intelligence). D'après le Littré, ce mot est aussi utilisé pour caractériser des **allées et venues**, des tentatives que l'on fait pour réussir une entreprise, pour mener à bien une affaire, un projet.

1.4.2. Démarche expérimentale, méthode expérimentale

La démarche expérimentale signifierait donc une manière d'agir et (ou) de raisonner cyclique, s'appuyant sur l'expérimentation. Son but est l'enrichissement des connaissances.

Définition 5 : on appelle démarche expérimentale, tout enchaînement (cyclique) d'actions ou de raisonnements s'appuyant sur des expérimentations ayant pour but une meilleure connaissance d'un phénomène.

La démarche expérimentale est donc une exploration particulière.
Nous distinguons donc la démarche expérimentale de la méthode expérimentale en ce sens que **la méthode expérimentale est une technique d'exploration s'appuyant sur l'expérimentation et qui a pour objectif spécifique d'atteindre des lois par l'induction**. La méthode expérimentale apparaît donc comme une démarche expérimentale particulière puisqu'elle s'appuie sur des expérimentations génératives.

2. MATHÉMATIQUES ET INSTRUMENTS TECHNOLOGIQUES

2.1. Activité mathématique médiée technologiquement, activité expérimentale ?

Quand un chercheur de problèmes (un enseignant, un enseigné ou un vrai chercheur), utilise une calculatrice ou un logiciel d'un ordinateur, nous considérerons l'objet technologique utilisé comme un instrument au sens de Rabardel, c'est-à-dire un outil (un artefact) avec ses schèmes d'utilisations. Si ce chercheur utilise cet instrument pour essayer de résoudre un problème, nous parlerons de cet instrument comme un médian. Nous parlerons aussi de recherche médiée pour une recherche utilisant un instrument médian.

Chez une personne en activité mathématique de recherche « classique » (en environnement dit papier-crayon), entre sa main qui écrit sur papier dans un langage symbolique LE (celui de la communication écrite mathématique de l'enseignement y compris les graphiques) ou sa bouche qui énonce dans un autre langage symbolique LO (celui de la communication orale mathématique de l'enseignement) les inférences produites par le travail de son cerveau il n'y a comme intermédiaire que la machine humaine. L'activité intellectuelle de recherche se développe dans un va-et-vient entre deux pôles : entre le signifié écrit ou déclaré et le signifiant qui n'est autre que l'énonciation par la machine humaine d'un état de perception du problème par le cerveau. Ce va-et-vient modifie sans cesse les deux pôles jusqu'à une stabilisation qui montre une perception complète des invariants ou des relations cherchées dans le problème traité.

Chez une personne en activité mathématique médiée technologiquement, il y a un intermédiaire réel, palpable physiquement par nos doigts (calculatrice ou logiciel d'un ordinateur) à qui l'on peut s'adresser dans un troisième langage LT et qui peut réagir pour donner des informations (dans ce langage) que son cerveau va recevoir, va décoder d'abord et interpréter en fonction de ses connaissances mathématiques et de sa connaissance du fonctionnement de l'objet technologique manipulé. Utiliser l'instrument technologique médian revient donc à accéder à une modélisation du cadre dans lequel l'instrument permet de travailler. L'activité mathématique n'est pas opérante sur les objets du problème mais sur certaines de leurs modélisations ; cette activité est donc une expérimentation telle que définie plus haut. De ce fait l'activité mathématique médiée technologiquement est une activité expérimentale ou du moins génère une activité expérimentale.

2.2. Instruments de physique, instruments technologiques en mathématiques

L'apparition de nouveaux instruments en physique a permis une exploration plus systématique du réel ; on a pu imaginer que grâce à ces instruments on pourrait forcer la nature à nous révéler ses secrets. En particulier on a pu réaliser des expériences qui ont permis par exemple d'observer des phénomènes non observables naturellement (expériences sous vide). On peut faire une analogie entre ces instruments de physique et les instruments technologiques qui sont les nouveaux instruments des mathématiques dans la mesure où ces derniers permettent déjà de nouvelles expérimentations qui n'étaient pas envisageables auparavant (calcul de dérivées successives avec un logiciel de calcul formel, déterminations instantanées de lieux avec un logiciel de géométrie dynamique, …).

2.3. Expérimentation papier crayon et expérimentation médiée technologiquement

Expérimentation papier crayon

On peut évidemment concevoir qu'un type de raisonnement (analyse, synthèse, analyse-synthèse, récurrence), qu'une méthode de résolution (décomposition canonique, recherche de points invariants d'une transformation), que la réalisation de graphiques manuels (lieux tracés point par point, courbes représentatives de fonctions, représentations de figures de l'espace en perspective cavalière) soient considérés comme des instruments médians puisque donnant accès à un modèle sur lequel sont réalisés des expérimentations conduisant à des observations et au traitement de ces observations. Ce traitement peut conduire à la résolution d'un problème ; dans le ***curriculum*** classique, l'utilisation de ces instruments **doit** conduire à la résolution du problème posé : cette utilisation n'est qu'un des ingrédients de la démonstration. L'activité mathématique classique peut donc être considérée comme une activité expérimentale dans la mesure où cette activité engendre de la connaissance. L'activité est le maître mot dans une conception constructiviste de l'apprentissage des mathématiques : pour

résoudre les problèmes à traiter, il faut d'abord les comprendre, les faire sien pour avoir envie de les attaquer **par des gestes, des mouvements, des actions** dont on veut recevoir la réaction.
Nous qualifions ces investigations utilisant les médians classiques précités qui sont des **médians internes (à l'expérimentateur, au chercheur de problèmes)**, **d'expérimentation papier-crayon** et ce n'est pas ce type d'expérimentation qui, ***a priori***, nous intéresse dans cette réflexion. Nous ne nous intéresserons donc pas aux expérimentations papier-crayon qui sont le fruit d'une activité mathématique dite classique avec les instruments usuels de cette activité.

Expérimentation médiée technologiquement

Cet autre type d'expérimentation est celui qui a été présenté en introduction. Analogue à l'expérimentation moderne dans les sciences expérimentales et nécessitant l'utilisation d'un instrument d'investigation, c'est cette expérimentation à laquelle nous allons nous intéresser en mathématiques avec, comme instruments d'investigation, les calculatrices ou les logiciels implantés sur ordinateurs. Notre expérience personnelle nous permet d'envisager la thèse selon laquelle ce type d'expérience va favoriser une plus grande activité d'exploration mathématique de la part de celui qui la pratique aussi bien le chercheur, l'enseignant ou l'enseigné.

Définition 6 : L'expérimentation médiée technologiquement est une expérimentation instrumentée avec une calculatrice ou un logiciel.

Une telle expérimentation est donc réalisée par des investigations avec des instruments médians externes (à l'expérimentateur).

2.4. Micromondes technologiques médians :

L'instrument utilisé (calculatrice ou logiciel) donne accès à un monde de réalités artificielles qui se veut un modèle du monde sur lequel notre esprit doit travailler pour résoudre le problème posé : ainsi les objets créés ont un comportement régulé par la théorie sous-jacente au modèle, on ne peut pas faire n'importe quoi avec eux quand on les manipule, tout comme avec un objet matériel. Ce monde de réalités artificielles est le Micromonde médian auquel nous donne accès l'instrument médian. Ces réalités artificielles sont considérées par l'expérimentateur comme le monde « réel » sur lequel il peut agir. Ainsi, comme le Physicien, pour accéder à une théorie, un modèle ou la solution d'un problème, l'expérimentateur va manipuler des objets « réels ». On peut penser que la différence est grande entre les Mathématiques et les Sciences expérimentales car dans une telle expérience, le Physicien manipulerait dans le monde réel des objets réels alors que le Mathématicien ne manipulerait que des entités virtuelles voulant représenter le réel (le réel étant les objets « abstraits » des Mathématiques). En réalité, l'utilisation de logiciels pour modéliser des phénomènes à étudier en Physique est devenue courante et rapproche les deux démarches.

2.5. Stratégies de résolution et expérimentation

Nous faisons l'hypothèse qu'expérimenter en utilisant des instruments médians augmente la dévolution d'un problème donc va générer des **initiatives** enchaînées, de la part de l'expérimentateur. Chacune de ces **initiatives** doit naturellement **inférer** une progression, matérialisée par une **interprétation** du résultat observable et observé de l'initiative prise. Cette initiative se manifeste d'abord dans une phase que nous qualifierons d'exploratoire car constituée d'une investigation. Cette hypothèse sera au moins validée avec Cabri-Géomètre comme instrument médian et pour un type de problème particulier (transformation cachée dans une boîte noire). Ces initiatives vont dépendre largement des connaissances mathématiques mais aussi des compétences techniques de l'expérimentateur. Dans l'état actuel de nos connaissances sur la « théorie de la connaissance », on ne connaît pas de stratégie gagnante à tous les coups pour résoudre un problème. Le moment crucial de la découverte, « l'illumination » reste une caractéristique locale de chaque découvreur ; cela peut rendre sceptique sur le rôle positif d'une expérimentation médiée technologiquement pour découvrir, selon un canon à mettre en place. Les difficultés dans les progrès de l'intelligence artificielle peuvent conforter ce scepticisme. Même, Polya insiste plus sur la préparation psychologique que sur des étapes objectivement mises en évidence. La marche vers la découverte est matérialisée par cette succession d'initiatives accouplées aux résultats qu'elles génèrent et surtout aux interprétations de ces résultats (c'est-à-dire la transposition des résultats obtenus dans le modèle en résultats du domaine théorique). On appellera stratégie de résolution expérimentale cet enchaînement d'investigations (pas nécessairement dans les mêmes champs).

Définition 7 : Une stratégie de résolution expérimentale est un processus cyclique composé de cycles (d'investigations) binaires, chaque cycle enchaînant une phase exploratoire puis une phase interprétative.

Sans entrer dans le détail, nous pouvons revenir vers Marc Legrand pour mieux comprendre les mots utilisés :
L'**exploratoire** aurait donc à voir avec l'**action** singulière et immédiate.
L'**interprétatif** aurait à voir avec la **mise au clair** de ce que les actions nous font apparaître comme vrai.

Tout ceci nous permet enfin de proposer une définition de la notion de démarche de découverte expérimentale :

Définition 8 : On appelle « démarche de découverte expérimentale » <u>la mise en place ordonnée</u> d'une stratégie de résolution expérimentale.

Telle que définie, cette démarche semble tout à fait analogue à une démarche de preuve au sens de Balacheff avec un va et vient entre théorie et expérience. Nous nous intéresserons particulièrement à la démarche de découverte expérimentale médiée par un instrument technologique.

3. CONCEPTION *A PRIORI* DU CONTENU DE LA DÉMARCHE DE DÉCOUVERTE EXPÉRIMENTALE MÉDIÉE TECHNOLOGIQUEMENT

Un problème étant donné, voici comment nous nous proposons de décrire de manière linéaire l'ordonnancement idéal des étapes usuellement parcourues pour le résoudre lorsque la résolution est ancrée sur l'expérimental médié technologiquement.

Phase 1	dévolution du problème par sa mise en place technologique	**Phase d'interprétation**
Phase 2	dévolution du problème par des manipulations de prise en charge	**Phase d'exploration**
Phase 3	choix des paramètres à étudier	**Phase d'interprétation**
Phase 4	manipulations conduisant à des données et aux captures de ces données (ces données sont des	**Phase d'exploration**

Phase 5	mesures ou des familles d'objets géométriques) analyse des données pour détecter des invariants (analyse d'un tableau de données ou analyse d'une courbe obtenue)	**Phase d'interprétation**
Phase 6	traitement des données pour mettre en évidence des relations entre les divers paramètres.	**Phase d'exploration**

Ces deux dernières phases conduisent à une conjecture et les étapes suivantes vont consister en un parcours de tentatives de validation ou d'invalidation.
Remarque : dans le tableau qui précède le mot « donnée » est utilisé dans le sens anglo-saxon de « data », c'est à dire de listes de « nombres » ou d' « objets » collectés au cours d'une expérimentation.

Notons qu'on retrouve point par point l'enchaînement des phases 1 à 6 décrites ci-dessus dans le travail réalisé par Luc Trouche avec sa classe et qui sera étudié dans le chapitre suivant (TROUCHE L, 1995, *«Eppur, si muove»* Repères IREM N°20 TOPIQUES éditions 16-28).

L'appel à la littérature didactique fournit des exemples de validation de cette hypothèse d'une démarche de découverte expérimentale médiée technologiquement décomposable en un enchaînement de cycles « exploration-interprétation ».

4. PORTRAIT-ROBOT DE LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE : ÉTAT DE NOTRE ENQUÊTE

L'analyse des mots habituellement utilisés pour parler des activités expérimentales menées avec pour but la découverte (dans le sens de résolution de problèmes) nous a permis d'avancer vers un premier portrait robot de la démarche de découverte expérimentale un peu plus formel que celui qui pouvait se dégager de l'exemple qui nous a permis d'entrer dans le sujet dans le chapitre d'introduction .

La démarche expérimentale est donc en résumé une stratégie de résolution se schématisant comme une chaîne de maillons binaires « **exploration-interprétation** » E_k-I_k. démarrant par un maillon unaire interprétatif ; ce dernier point résulte du fait que la tâche étant donnée, la démarche débutera par un travail de transposition de cette tâche dans l'environnement choisi. Cette transposition dépendra fortement des connaissances théoriques de l'expérimentateur, de sa culture ainsi que de ses compétences de manipulation toujours dans l'environnement choisi. Sa première action dans l'environnement technologique sera ainsi de l'ordre de l'interprétatif.

$$[I_1]\rightarrow [E_2\text{-}I_2]\rightarrow [E_3\text{-}I_3]\rightarrow\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow [E_{n-1}\text{-}I_{n-1}]\rightarrow [E_n\text{-}I_n]$$

Plus en détails :

I_1	E_2	I_2	E_3	I_3	E_4
Mise en place technologique	Manipulation de prise en charge	Choix de paramètres	Manipulation de productions de données	Recherche des invariants	Formalisation des invariants (lien entre paramètres)

E_4 peut donc synthétiser l'arrivée d'une conjecture

Les maillons binaires suivants sont essentiellement des couples manipulation-validation ou manipulation-invalidation. La manipulation est du domaine expérimental alors que la validation permet de réaliser le saut concret-abstrait ou encore perceptif-déductif.

5. LES PROCHAINES ÉTAPES DE NOTRE TRAVAIL

Cette analyse se doit d'être complétée par une analyse de la littérature ayant abordé ce sujet (même si cela a été fait de manière collatérale), en mathématiques, dans les sciences expérimentales et dans les sciences cliniques ; ceci sera fait au cours des trois chapitres suivants. Une synthèse conclura cette quadruple analyse dans un chapitre ultérieur pour dresser le portrait robot de la démarche de découverte expérimentale telle qu'imaginable après ces investigations.

Nous exhiberons ensuite un type de problème qui permettra par l'analyse de sa résolution une mise en évidence aisée des phases de la démarche expérimentale, validant notre quadruple analyse. Ce type de problème qu'on qualifiera de problème crucial à cause de ses qualités pour faire émerger la démarche de manière très apparente sera donc étudié au chapitre 9.

Les problèmes cruciaux qui seront les problèmes **spécifiques** de type « boîte noire » (transformations cachées) avec une recherche en groupe avec le logiciel Cabri seront exhibés après un passage préalable et préparatoire par les problèmes inversés.

L'analyse détaillée de la boîte noire « Fausse affinité » nous permettra de valider notre hypothèse de décomposition formelle de la démarche de découverte expérimentale et aussi de faire une proposition d'hypothèses plus fines qui constitueront le corps de notre travail. Nous présenterons préalablement le cadre théorique auquel il nous apparaît pertinent de nous référer, ce cadre reposera essentiellement sur les travaux de Parzysz, Duval, Millar et Boero et sur un complément que nous présenterons concernant des niveaux de géométrie que nous qualifierons d'informatique.

Une partie sera réservée à la méthodologie, même si certains points auront été préalablement explicités.

Nous proposerons enfin trois expériences de validation dans trois chapitres distincts qui nous permettront aussi d'affiner nos hypothèses de recherche, deux dans le champ des boîtes noires et une troisième dans le champ des problèmes « difficiles » essentiellement réalisée par un Mathématicien chercheur et expert dans l'utilisation du logiciel Cabri.

LA DÉMARCHE DE DÉCOUVERTE EN MATHÉMATIQUES

L'activité mathématique classique de recherche met en jeu des démarches de découverte spécifiques qui ne sont pas nécessairement expérimentales. Nous allons dans cette partie, interroger la littérature existante pour détecter toutes les propositions faites sur les éléments constitutifs d'une telle démarche. Il n'est évidemment pas question d'interroger toute la littérature, mais un échantillon représentatif d'auteurs, enseignants ou chercheurs en Mathématiques qui ont explicité leur réflexion éclairant ainsi le versant usuellement privé de leurs recherches. Tel un enquêteur nous allons chercher des indices, des idées, des formalisations, des décompositions qui doivent nous permettre de reconstituer *in fine* les constituants d'une démarche de découverte en mathématique. Poincaré, Polya, Glaeser, Trouche et Boero seront nos principaux guides. Notre objectif par la suite consistera à voire :

- si une activité de recherche mathématique médiée technologiquement peut générer une démarche expérimentale au sens où nous l'avons définie et aussi dans un sens qui apparaîtra à travers la littérature sur l'expérimental en sciences physiques et en sciences cliniques ;
- si une activité de recherche mathématique médiée technologiquement respecte les canons de la démarche classique de découverte.

1. LES TROIS PHASES DE LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME SELON POINCARÉ

Poincaré au cours de la Conférence sur l'invention mathématique en 1908 propose de décomposer cette résolution en 3 grands moments :

– la **maturation** qui est une phase de travail sur un problème ;

– la **découverte** résultat d'une inspiration ou d'une intuition ;

– la **vérification**, c'est à dire l'élaboration d'une démonstration.

Les deux premiers moments sont des moments privés qui relèvent de processus cognitifs auxquels Poincaré ne nous donne pas accès. La dernière phase, plus classique car moins dépendante d'actions médiées sur le réel du mathématicien ne nous donne guère d'information sur le contenu des expérimentations faites qui restent visiblement du domaine papier crayon.

2. LE PROGRÈS DANS LA MARCHE VERS LA SOLUTION SELON POLYA

Polya brosse dans la phrase qui suit une **description** de ce qui doit se passer pendant les phases que nous voulons mettre en évidence dans la partie de **la démarche de découverte expérimentale pré-conjecture** :

« Qu'est-ce que le progrès dans la marche vers la solution ? C'est une progression de la mobilisation et de l'organisation de nos connaissances, une évolution de notre conception du problème, une prévision croissante des étapes qui constitueront le raisonnement final ».

L'activité de résolution est une marche avec son côté cyclique sous-jacent : ce que nous propose Polya de plus que Poincaré dans cette phase pré-conjecture, c'est qu'il y a des changements d'une étape à l'autre qui sont relatifs aux connaissances mises en jeu mais aussi à la manière dont elles sont structurées. On est bien obligé de comprendre que ces changements sont les résultats d'actes, d'actions ; une ou des actions modifient l'ensemble des connaissances que nous mobilisons et la manière dont nous les mobilisons. On devine que cette progression, cette réorganisation des connaissances nous fait percevoir l'arrivée de la solution comme de moins en moins incertaine, de plus en plus plausible (suivant la terminologie de Polya) sans nous dire quels sont les indices qui nous permettent de prédire une convergence plus rapide à chaque étape de notre progression. En réalité Polya intègre la démarche de démonstration dans cette progression vers la solution. Il considère donc que les connaissances mobilisées évoluent jusqu'au moment où nous avons saisi non seulement la réponse mais la manière de la démontrer.

3. LES TROIS PHASES DE LA DÉMARCHE DE DÉCOUVERTE PRÉ-CONJECTURE À TRAVERS L. TROUCHE ET G. POLYA

3.1. Phases 1 et 2 selon Trouche

Dans son article intitulé « ***Eppur, si muove*** » Repères IREM N°20 TOPIQUES éditions 16-28, Luc Trouche relate et analyse une séance de recherche qu'on peut qualifier de recherche en groupe, concernant la détermination de la ou des paraboles admettant trois droites données par leurs équations comme tangentes. Son analyse de l'activité des élèves l'amène à proposer deux étapes :

– La **première étape** qu'il qualifie de **recherche brouillonne.**

Ceci se trouve justifié par le choix de coefficients entiers dans le désordre pour faire apparaître des paraboles variables.

– La **seconde** qu'il qualifie de **rationalisation des démarches.**

En effet au bout de 10min de recherche « les démarches pour cause d'économie de mouvement, vont se rationaliser ». La méthode attendue par le Professeur émerge et se répand rapidement comme toute méthode efficace. Le fait de travailler en groupes favorise cet essaimage ; les élèves fixent deux coefficients et font varier le troisième.

3.2. Phase 3 selon Polya et partiellement chez Trouche

<u>Concernant la progression vers la solution, Polya précise</u> :

« **notre avance** peut être lente imperceptible mais de temps à autre sa vitesse **s'accroît brusquement, par saut par bond**. Cette progression soudaine vers la solution s'appelle une idée lumineuse ».

Retenons de cette analyse une étape de progression soudaine par saut et par bond. À notre avis, ce qu'il qualifie d'idée lumineuse, c'est une étape cruciale, une étape où on observe une **accélération des initiatives** vers l'idée de la solution (on prend conscience d'un fait). Ces initiatives aboutissent effectivement à la solution ou plus exactement à une conjecture fortement plausible pour employer la terminologie de Polya.

<u>Si on revient à l'article de Trouche</u> :

Il inclut dans sa deuxième étape, l'apparition rapide des rôles respectifs des coefficients a, b et c que les élèves font ressortir sous des formes qui évoquent le mouvement. Cette apparition rapide qualifie ainsi une accumulation d'observations qui s'interprètent de plus en plus aisément. On retrouve ainsi une accélération des initiatives comme une conséquence de la rationalisation des initiatives antérieures.

4. LE PROCESSUS CYCLIQUE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME SELON GEORGES GLAESER (1976)

4.1. Schéma d'un processus heuristique

Pour Glaeser le processus de résolution d'un problème (pris dans le sens situation-qui-fait-problème et à opposer à une résolution insistant sur l'aspect algorithmique ou logique) a une structure cyclique avec au terme de chaque cycle une phase de vérification. Il propose d'ailleurs dans son article intitulé « Heuristique générale : estimation de la difficulté d'un problème » (CIEAEM, Commission Internationale pour l'Étude et l'amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Actes du 18^{e} congrès) une description du cycle en cinq phases, inspirée de John Dewey (1910) et de nombreux autres auteurs :

A. La préparation
B. Le bricolage

C. L’incubation
D. L’inspiration
E. La vérification

Il remarque la nature assez complexe de chacune des étapes mais note que les heuristiciens reconnaissent tous des schémas analogues.

4.2. Description de ces étapes

A. La préparation : c’est une mise en condition, une préparation psychologique dont la réussite dépend souvent de l’habileté pédagogique du Professeur. Le sujet doit mobiliser toutes ses facultés pour attaquer la question aussi efficacement que possible. Il peut le faire ou rester indifférent et passif : le rôle du professeur en étant plus provocateur avec un texte obscur favorisera l’engagement. Un brin de machiavélisme publicitaire s’impose selon Glaeser : il cite le génial Samuel Lloyd qui parvenait à transformer une question mathématiquement sans intérêt en un casse-tête tortureur qui ne laisse plus le chercheur en repos dès l’instant où il est empoigné par l’énoncé. Cette volonté de ne pas épargner à l’élève le soin de faire cet effort de clarification nécessaire pour bien s’approprier l’énoncé doit amener l’enseignant à intervenir pour répondre aux interrogations légitimes que se posent les élèves à ce moment précis. Il présente d’ailleurs cette remarque comme un argument qui s’oppose à l’introduction de tels problèmes d’heuristique aux examens.
En résumé, dans cette phase il va y avoir appropriation du problème par l’apprenti chercheur à condition que des paramètres soient bien choisis par celui qui propose le problème.

B. Le bricolage : la phase précédente conduit au désir de s’engager dans la recherche et pour cela le chercheur essaie d’adopter au plus vite une attitude active. La procédologie a dressé un long catalogue de conseils utiles pour amorcer de telles activités (Polya et Wickelgren par exemple). À part les conseils procédologiques classiques qui tournent autour du thème « faire fonctionner la situation » avec utilisation de cas limites, de cas particuliers ou analogues, avec utilisation de changement de cadres, avec emplois de divers types de représentations afin de mettre en valeur les divers éléments de l’énoncé, Glaeser cite un conseil procédologique très efficace, « la dynamisation des problèmes statiques ». Il dit textuellement :
« il s’agit d’imaginer les transformations qui permettent d’engendrer les divers éléments du problème (données ou inconnues) les uns par les autres et aussi de songer aux diverses constantes comme à des variables en puissance, des paramètres de manière à déformer la situation ».

Dans cette phase, Glaeser s’intéresse plus particulièrement aux échanges verbaux et gestuels entrant en jeu dans le processus heuristique lorsque ce processus concerne un groupe de chercheurs. Il note que ce n’est pas dans cette phase qu’il est fructueux de s’astreindre au purisme : un langage spécifique caractérise la communication dans cette phase où onomatopées et fragments de phrases incorrectes fournissent des clés de la compréhension de ce processus. Lorsque le chercheur travaille seul, il note que celui-ci se parle sans doute à lui-même comme dans le cas des jeunes enfants avec leur langage égocentrique qui se manifeste à voix haute ayant ainsi l’avantage d’être décrypté. Il ajoute que les convenances sociales abolissent rapidement cette faculté. Il donne comme exception le cas de Laurent Schwartz qui lorsqu’il travaillait seul avait pris l’habitude de parler seul, tenant un discours inintelligible même pour celui qui connaîtrait le contexte mathématique traité.
Dans cette phase, Glaeser évoque les questions annexes qui peuvent surgir et qui amènent le chercheur à utiliser des techniques très diverses allant de la recherche d’un nouveau problème à un effort de documentation en passant par l’exécution de quelques séquences algorithmiques.

Glaeser qualifie cette phase d'exploratoire ; pendant celle-ci le chercheur essaie de « se donner des idées ». Il parle **d'investigations désordonnées** qui mettent en jeu des aptitudes très disparates et particulièrement fatigantes par les ruptures de rythme qu'elles imposent :
« il (le chercheur) ne fait pas d'effort pour éviter des fautes de calculs ou pour dessiner des figures avec soin, tant qu'il n'est pas certain que ces résultats sont vraiment utiles. C'est ainsi que le chercheur est souvent induit en erreur par les idées qu'il se forge à la suite de déductions trop hâtives ».

Au cours de cette phase interviennent aussi les **premiers efforts d'analyse** qui consistent à décomposer la situation en éléments pertinents, à découvrir dans l'amas des données les concepts significatifs qui influent sur la solution.

C. L'incubation : c'est une phase de repos, une pause dans la recherche qui a un rôle d'autant plus significatif qu'elle est accompagnée de sommeil. Ce rôle est essentiellement un rôle de tri avec un bilan qui se fera dans un ordre rationnel à la reprise de la recherche. Glaeser développe cette thèse en s'appuyant sur les travaux de Passouant sur la physiologie du sommeil et de l'activité inconsciente.

D. L'inspiration : succédant à la lente préparation des phases précédentes, un « **paroxysme** du processus de recherche » surgit qui vient ordonner les éléments disparates disponibles avant l'incubation. C'est le plus souvent une reconnaissance de forme qui permet de dégager la structure de la solution. Ce sont les psychologues de la Gestalttheorie qui ont donné la meilleure description de cette phase. Un exemple est donné par Wickelgren où il raconte comment une classe d'élèves peu doués arrivent à réinventer en <u>sept heures</u> de temps l'artifice d'Euclide pour établir que l'ensemble des nombres premiers est infini.
Le rôle de l'Euréka comme caractérisant l'acte créatif, est ressenti avec violence par le chercheur. Il induit un besoin de révéler le secret de sa recherche à tout le monde. Il induit aussi une modification pratiquement irréversible du domaine de recherche. Le terme de micro euréka est utilisé pour traduire une découverte intermédiaire qui modifie aussi le stock des questions que l'on peut se poser et des manipulations qui méritent d'être entreprises.

E. La vérification :
Cette étape qui suit un euréka ou un micro euréka doit permettre d'entreprendre un effort de mise au point. Il s'agit de dresser un bilan soigné de ce qui est acquis pour que le cycle suivant puisse s'appuyer sur des bases solides. L'une des techniques utilisée est la rédaction vérificatrice où l'on doit se demander si chacun des pas faits dans cette démarche est bien fondé.
Dans un travail en groupe cette phase prend l'aspect d'une opposition à un partenaire qui, par exemple met en doute le bien fondé des conclusions.
Lorsqu'il travaille seul, le chercheur entame un dialogue avec lui-même où il essaie de réfuter les objections qu'on pourrait lui opposer.
Le travail de vérification doit inclure de refaire soigneusement des calculs qui auraient été exécutés rapidement au cours de la phase de bricolage.

En résumé cette étape est une mise en ordre des arguments qui permettent de prouver la conjecture puis sa démonstration.
Michel Carral résume ainsi ce qui se passe dans cette phase : « *dans la dynamique d'une idée, on avance avec des trous ; on fait comme si on savait. Si on arrive au résultat sans contradiction, on commence à boucher les trous* »

4.3. Problème de l'indépendance des cycles

Balacheff (1982) va plus loin en affirmant l'indépendance de ces cycles et en émettant l'hypothèse que la vérification joue un rôle central dans les processus intellectuels associés au passage d'un cycle à l'autre.

4.4. Macro-cycles, micro-cycles

À la suite de l'analyse qui vient d'être faite, ces cycles peuvent être interprétés de deux manières différentes :

— En tant que macro-cycles qui détaillent les différents temps d'un processus de découverte d'un problème, ce que nous avons appelé des phases de la démarche expérimentale.

— En tant que micro-cycles qui détaille les différents maillons d'un processus de découverte d'un résultat intermédiaire.

Dans les deux cas envisagés, il est difficile d'adhérer à cette thèse de l'indépendance de ces cycles.

Dans le premier cas, par exemple, Glaeser notait qu'à la suite d'un euréka le stock des questions que l'on peut se poser est modifié.

Dans le second cas, à la fin d'un cycle, un résultat solide est établi sur lequel on peut s'appuyer dans le cycle suivant. Ceci montre la dépendance des cycles.

Si on se réfère aux trois phases qui se dégageaient de l'analyse du paragraphe précédent, on pourrait accepter l'hypothèse de l'indépendance des cycles éventuellement dans la phase de la recherche brouillonne. On sent ensuite que la progression de la recherche avec cette étape de la rationalisation de la recherche et surtout l'accélération vers la solution ne peuvent aller de pair qu'avec une dépendance de plus en plus importante de ces cycles dans un sens évidemment à préciser.

Exemple du puzzle :

Si on prend l'exemple de la reconstitution de l'image cachée derrière un puzzle, on peut illustrer d'une certaine manière ce qui précède. En effet, si on exclut le cas d'un spécialiste des puzzles, c'est-à-dire de quelqu'un qui, d'expérience, dispose de stratégies de choix des morceaux (par exemple, débuter par les morceaux réalisant l'encadrement qui usuellement sont les seuls à avoir une arête rectiligne), on peut observer ceci :

Le départ se fait le plus souvent au hasard jusqu'à trouver des morceaux qui se complètent : on serait là dans la recherche brouillonne.

Dans un second temps, l'attention se concentre sur les quelques morceaux accolés par hasard pour rechercher avec des critères de couleurs et de forme d'autres morceaux qui viennent les compléter pour agrandir la partie solution. Cette méthode est réitérée à partir d'autres morceaux pour constituer des îlots de solutions.

Une accélération commence à se produire soudainement quand l'expérimentateur arrive à positionner de grands îlots les uns par rapport aux autres et qu'il va mobiliser simultanément de plus en plus de critères de sélections pour compléter de plus en plus rapidement les trous restants.

Dans ce travail, les cycles élémentaires seraient constitués du choix d'une pièce suivi de la vérification expérimentale ou en pensée validant ou invalidant ce choix. On sent bien que la composition d'un cycle dépend plus ou moins de la dernière validation, mais aussi du moment de la recherche où se trouve l'expérimentateur. Même dans la phase brouillonne, le fait d'avoir positionné une pièce contenant une couleur rare va influer fortement le choix de la pièce suivante surtout si cette couleur tranche avec les autres dans les morceaux restants. On voit donc bien la dépendance des cycles évoqués par Glaeser avec un coefficient variable entre 0 et 1 dans une échelle de 0 à 1 (0 et 1 pouvant être atteints).

5. PRODUCTIONS DE CONJECTURES ET CONSTRUCTION DE DÉMONSTRATIONS SELON P. BOERO ET N. DOUEK

Dans un article synthétique sur les différents aspects des activités mathématiques qui concernent les théorèmes, Paolo Boero est amené à proposer les six phases de productions de conjecture et de construction de démonstration qui suivent :

Phase 1 (production d'une conjecture) : cette phase inclut l'exploration de la situation-problème, l'identification de régularités, l'identification des arguments en faveur de la plausibilité de la conjecture. P. Boero note que cette phase appartient au versant privé du travail du mathématicien et que cette phase présente des similitudes avec la phase d'appropriation d'un énoncé.

Phase 2 (formulation de l'énoncé) : la conjecture est produite sous forme d'un énoncé suivant les conventions textuelles partagées.

Phase 3 (exploration du contenu et des limites de validité de la conjecture) : pour P. Boero cette phase consiste en l'élaboration heuristique de liens entre hypothèses et thèse et en l'identification des arguments appropriés pour la validation. P. Boero note encore que cette phase appartient habituellement au versant privé du travail du mathématicien.

Phase 4 (sélection et enchaînements d'arguments théoriques) : les arguments sont développés sous forme d'une chaîne déductive souvent guidée par l'analogie ou la connaissances de cas spécifiques appropriés. Cette phase est fréquemment résumée quand les mathématiciens présentent leur travail à leur collègues.

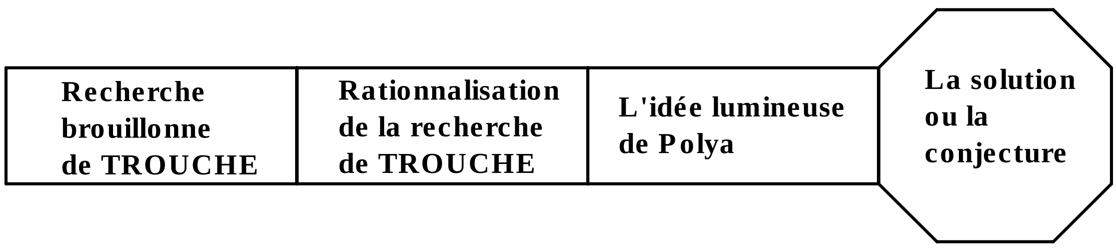
Phase 5 (démonstration mathématique ordinaire) : c'est ici l'organisation et l'enchaînement des arguments en une preuve qui soit acceptable selon les standards mathématiques en vigueur. Ces standards n'ont rien d'absolu : il suffit pour s'en convaincre de comparer des articles publiés aujourd'hui avec ceux publiés au XIX^{e} siècle ou des ouvrages scolaires de niveau différents (lycée et université) portant sur le même sujet.

Phase 6 (démonstration formelle) : La phase de la preuve formelle est souvent absente de l'élaboration des théorèmes et Thurston déclare d'ailleurs « qu'il est pratiquement impossible et vide de sens pour le mathématicien de produire une preuve formelle » et il ajoute « nous avons de bons procédés humains pour vérifier la validité mathématique ».

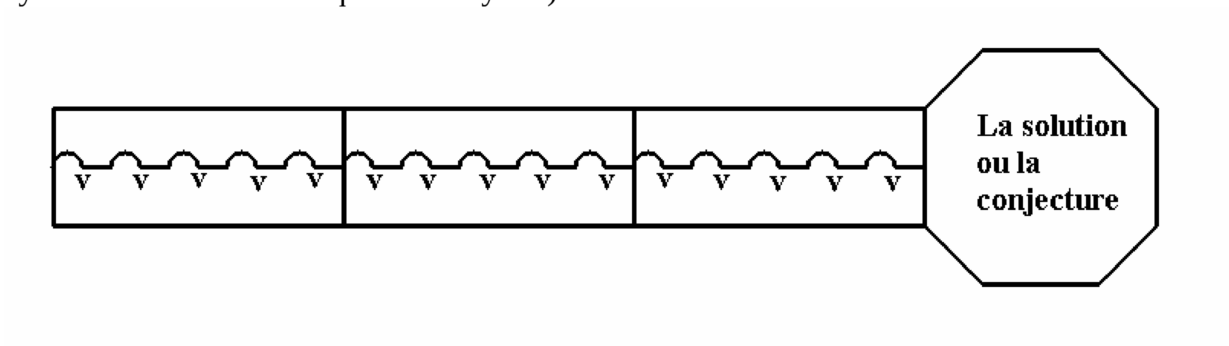
6. PORTRAIT-ROBOT DE LA DÉMARCHE DE DÉCOUVERTE : ÉTAT DE NOTRE ENQUÊTE

6.1. Portrait robot de la partie pré conjecture :

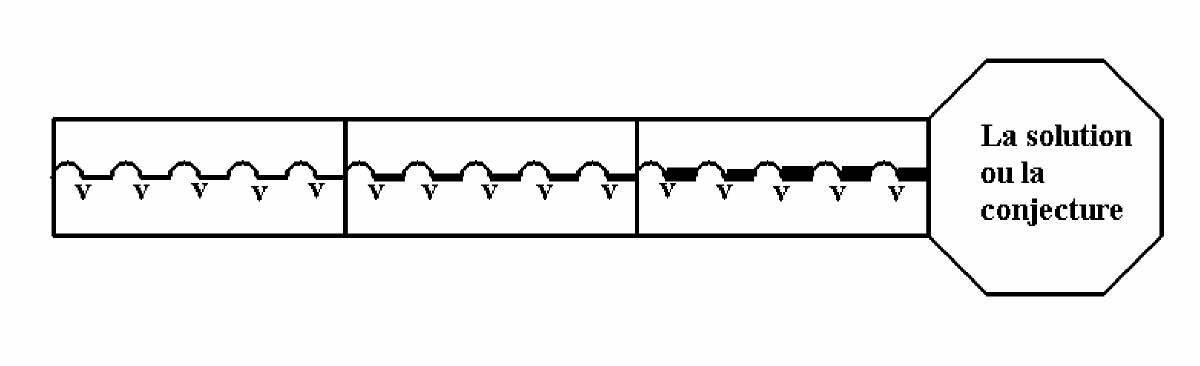
Les indices qui nous ont été apportés par cette analyse nous permettent de dégager **3 macro-étapes** qui s'enchaîneraient comme dans le schéma ci-dessous :



La cyclicité de cette démarche peut être schématisée tout au long de ces trois macro-étapes et même après par le schéma ci-dessous ; chaque cycle est symbolisé par un demi-cercle, chacun d'eux est suivi d'une phase de réorganisation des connaissances dans laquelle la vérification jouerait un rôle important ; cette phase de réorganisation est symbolisée par un segment dont l’origine est notée « v » (initiale de « validation ») qui précède le cycle suivant. Chacun de ces cycles pourraient être qualifié de **micro étape** (nous avons adopté ici l’interprétation des cycles de Glaeser en tant que micro cycles)

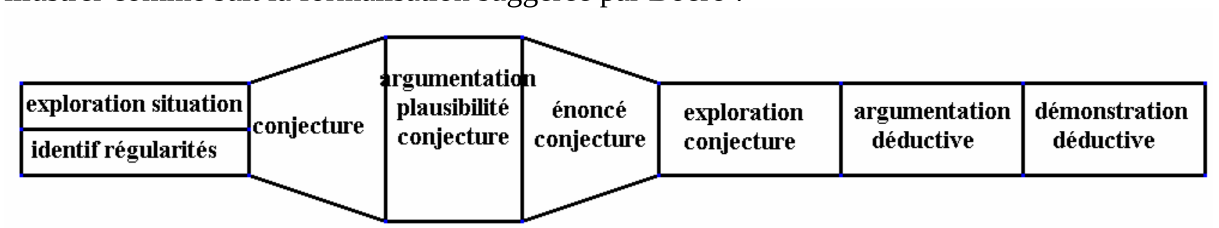


Le schéma suivant montre comment nous avons symbolisé la plus ou moins grande dépendance de ces cycles par une épaisseur plus ou moins grande du segment symbolisant la réorganisation des connaissances.



Remarque : il est à noter l’importance du travail de groupe qui a été un facteur favorisant l’émergence des deux premières macro-étapes. On retrouve cette importance dans la représentation de Glaeser.

6.2. Portrait robot de la partie post conjecture :
Si on résume sous forme d’un schéma semblable à celui du paragraphe précédent, on peut illustrer comme suit la formalisation suggérée par Boero :



Phase 1	**Phase 2**	**Phase 3**	**Phase 4**	**Phase 5**

La phase pré conjecture, tout en étant moins précise que dans la formalisation précédente, fait apparaître le binôme exploration-interprétation. Les interprétations concernent ici la détermination de régularités qui sont à l’origine de la conjecture.

D’autre part, la partie charnière de cette démarche autour de la conjecture sépare bien dans le polygone central, l’arrivée de la conjecture d’un début d’argumentation pour justifier sa plausibilité sans chercher spécialement de réfutation à ce stade. Ce n’est qu’ensuite que la conjecture est posée sous forme d’un énoncé suivant les standards en cours.

Concernant la partie post conjecture, nous nous concentrerons sur les deux phase mises en évidence avant une éventuelle démonstration suivant les canons standards. L’exploration de la conjecture va consister à découvrir des analogies permettant de conforter la conjecture, plus précisément suivant notre interprétation de vérifier des conditions nécessaires impliquées par la conjecture. La suivante qualifiée d'argumentation déductive consistera toujours suivant notre interprétation à vérifier **localement** des conditions nécessaires et suffisantes.

Ceci justifie ***in fine*** l'arrivée d'une phase de démonstration qui serait la vérification **globale** de conditions nécessaires et suffisantes, c'est-à-dire pas dans le modèle technologique utilisé pour l'expérimentation, ici Cabri (si évidemment c'est possible) mais à l'intérieur de la théorie mathématique.

Notons que, là encore, si on essaie de lier cette décomposition aux macro-cycles de Glaeser, on peut retrouver l'étape d'inspiration au moment de la phase de conjecture de Boero et jusqu'à la phase d'exploration de la conjecture ; on peut retrouver l'étape de validation dans les deux phases qui suivent.

L'EXPÉRIMENTAL DANS LES SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Nous allons interroger la littérature didactique des sciences expérimentales pour profiter du recul de ces disciplines dans leur rapport à l'expérimental que ce soit dans le domaine de la recherche ou même celui de l'enseignement. Nous verrons que contrairement à nos ***a priori*** sur ces disciplines, les mots les plus parlants les plus représentatifs, comme « expérience », « protocole », « démarche expérimentale », … ne sont pas toujours bien définis et demanderont à l'être à partir des documents qui y font référence.

1. INTÉRÊT DE LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE EN SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Michel Giuseppin dans son article intitulé « Place et rôle des activités expérimentales en sciences physiques » Didaskalia N° 9 page 109, sans donner de définition de la démarche expérimentale dit quel peut être à son avis l'intérêt des activités expérimentales (ce que nous avons appelé expérimentations : en effet, il distingue bien les activités expérimentales destinées à vérifier un modèle des activités expérimentales permettant de construire et structurer un modèle) :

« *Qu'apportent les activités expérimentales ? Grâce à de* ***nombreux allers-retours entre la réalité et sa modélisation****, elles doivent permettre à une plus grande population d'élèves d'accéder à un* **bon niveau de conceptualisation** ».

Il nous propose donc une caractéristique de ce type d'activités qui serait la cyclicité (allers-retours). Dans ses chaînons modélisation/réalité, on retrouve notre conception cyclique exploratoire/interprétatif.

Il considère l'expérimentation comme un élément constitutif des sciences expérimentales. Il considère aussi que le souci essentiel en sciences expérimentales est d'adopter une démarche propre aux sciences, **la démarche scientifique** qui recouvre elle-même le domaine expérimental.

2. LA DÉMARCHE SCIENTIFIQUE EN SCIENCES PHYSIQUES

2.1. Les quatre étapes de la démarche scientifique (programmes du 9 Juillet 1987)

OBSERVER ET ANALYSER UN FAIT EXPÉRIMENTAL

« L'observation permet de dégager des paramètres, l'analyse consiste à faire un tri et à procéder à un choix car tous les paramètres n'ont pas la même importance ».

CHOISIR ET ÉLABORER UN MODÈLE PHYSIQUE

« L'élaboration d'un modèle en fonction des hypothèses retenues est une phase difficile qui demande une bonne maîtrise des capacités … (contenus et savoirs-faire) et un bon esprit de décision ».

ORGANISER LES ÉTAPES DE LA RÉSOLUTION

« Ce qui distingue fondamentalement cette phase d'un savoir-faire, c'est l'autonomie dans la décision ». Ces étapes sont choisies parmi les savoir-faire acquis mais il faut les organiser, les hiérarchiser pour en tirer les conclusions.

PORTER UN JUGEMENT CRITIQUE

« Cela peut intervenir à propos d'un résultat, d'une série de mesures, d'une expérience, de l'utilisation d'un appareil, … » . Il s'agit de la phase décisive à travers laquelle se juge l'aptitude à pratiquer une démarche scientifique.

2.2. Commentaires immédiats

Telle que définie ci-dessus, la démarche scientifique apparaît comme une manière d'opérer incluant dans cet ordre une expérience générative et une expérience validative. Cette démarche précise le type de traitement à réaliser sur les données obtenues par l'expérience générative. Elle précise aussi que l'hypothèse générée doit être « prouvée » par les résultats d'une expérimentation qui doit être réalisée à cet effet. Cette démarche doit se conclure par une phase critique cruciale pour cette résolution expérimentale.

La première étape proposée consiste en l'observation et l'analyse d'un **fait expérimental** : ce dernier n'est autre que **l'ensemble des observables résultant d'une expérimentation (**cette expérimentation étant du type génératif**)**. Ceci justifie le fait qu'une telle démarche recouvre le domaine expérimental. Il s'agit là de prendre conscience des données qui sont produites par l'expérimentation et de choisir celles qui feront l'objet de l'étude.

La seconde étape consiste à choisir une loi qui semble raisonnablement induite par le traitement des données sélectionnées dans la première étape.

La troisième étape, intitulée « organiser les étapes de la résolution », consiste en la conception et la réalisation d'une expérience validative de la loi conjecturée. La « résolution » ou « preuve » expérimentale consiste en la génération de données qui vont venir conforter la loi conjecturée. Le mot résolution est utilisé dans le sens où une réponse **plausible** est apportée par cette démarche ; le mot de preuve est plutôt utilisé comme une quasi-certitude que l'expérimentation ne réfute pas la loi **conjecturée**.

La quatrième étape est l'étape de la recherche de la cohérence des données produites et de la cohérence des raisonnements produits. Cette étape, nécessaire retour sur ce qui a été fait, est considérée comme décisive car c'est à ce moment que la preuve expérimentale est donnée ou réexaminée.

Les mots « conjecture » et « plausibilité » seront étudiés plus loin afin d'en fixer leur sens dans notre travail.

2.3. Démarche scientifique et méthode expérimentale

On retrouve dans ces quatre étapes proposées pour la démarche scientifique ci dessus, pratiquement à l'identique la définition de la méthode expérimentale donnée dans le Littré où elle est opposée à l'empirisme : « *en ceci qu'elle s'efforce d'atteindre et atteint en beaucoup de cas les lois des faits par l'induction, et puis de ces lois tire des déductions qu'elle vérifie, tandis que l'empirisme n'use ni d'induction ni de déduction et ne lie pas les faits* ».

Claude Bernard lui aussi nous permet de reconnaître cette démarche scientifique comme « une méthode expérimentale » quand il écrit :

« *La médecine scientifique ne peut se constituer, ainsi que les autre sciences, que par la voie expérimentale, c'est à dire par l'application immédiate et rigoureuse du raisonnement aux faits que l'observation et l'expérimentation nous fournissent. La méthode expérimentale, considérée en elle-même, n'est autre chose qu'un raisonnement à l'aide duquel nous soumettons méthodiquement nos idées à l'expérience des faits* » Claude Bernard Introd. ét . méd. Expér., Introd., p.34.

On retrouve bien dans ce qu'il appelle observation et expérimentation nos expérimentations générative et validative et dans ce qu'il qualifie d'application immédiate et rigoureuse du raisonnement aux faits expérimentaux, la génération et la validation critique de nouvelles connaissances.

2.4. Conclusion

La démarche scientifique en sciences expérimentales serait donc l'enchaînement d'une démarche expérimentale de découverte et d'une démarche expérimentale de validation, cette dernière démarche pouvant être qualifiée de preuve expérimentale. On retrouve *in fine* la méthode expérimentale de Claude Bernard.

Cela explique peut-être la forte connotation monstrative de l'expérimental dans l'enseignement des sciences physiques. La monstration faite par le Professeur se traduit par la présentation d'expérimentations génératives d'hypothèses ou d'expérimentations validant une hypothèse déjà présentée, par le Professeur. Cette monstration peut être obtenue par l'élève qui expérimente soit de manière validative pour confirmer ou réfuter une loi qu'on lui propose, soit de manière générative pour tenter de découvrir une loi associée à un phénomène qualitatif déjà mis en évidence (Voir les expériences d'optique de Mathilde Arragon sur la réfraction en annexe 1 et nos commentaires en annexe 2).

Il est à noter que le qualificatif de « **démarche expérimentale** » apparaît dans le rapport du jury du Capes 1994 où l'évaluation de l'épreuve sur dossier inclut notamment « l'analyse d'une démarche expérimentale et sa mise en œuvre dans diverses situations d'enseignement… ».

F. Perrot et M. Tadjeddine (Apprentissage de l'expérimentation en physique. I-La place de l'expérimentation dans les concours de recrutement Didaskalia 6 page 139) précisent : « *l'**expérimentation** s'apprend, c'est un fait…on apprend de la physique en pratiquant l'expérimentation : cette pratique ne doit pas se concevoir seulement dans une perspective d'enseignement mais aussi dans une perspective plus générale d'approfondissement de la discipline, dans une recherche de culture scientifique* ».

3. DE LA NOTION DE « SCIENCES » À LA NOTION DE « DÉMARCHE SCIENTIFIQUE »

Le qualificatif de « scientifique » utilisé ci-dessus mérite une attention particulière, tout comme le mot « sciences » auquel il est souvent fait référence avec un sens implicite. Nous allons essayer de fixer un sens que nous utiliserons par la suite.

Pascal notait déjà le lien fort entre science d'une part et expérience et raisonnement d'autre part, le développement de l'une dépendant fortement de l'utilisation des deux autres quand il écrivait :

« *Toutes les sciences qui sont soumises à l'expérience et au raisonnement, doivent être augmentées pour devenir parfaites ; les anciens les ont trouvées seulement ébauchées, et nous les laisserons à ceux qui viendront après nous en un état plus accompli que nous ne les avons reçues* » **Pascal Fragm. d'un traité du vide.**

3.1. Le mot « science »

Ce mot emprunté au latin « scientia » avec comme racine « scire » qui signifie « **savoir** » mais aussi du sanscrit « ki » qui signifie « **remarquer** », a donc rapport avec la connaissance mais aussi les connaissances.

Il peut signifier un système de connaissances sur une matière ou un savoir qu'on acquiert par la lecture et la méditation.

D'Alembert parle de la science du monde, c'est-à-dire l'art de se conduire avec les hommes pour tirer de leur commerce le plus grand avantage possible… Il fait référence à des connaissances utiles à la conduite de la vie : cela peut donc inclure la science du cœur, c'est-à-dire la connaissance des sentiments

Quand on évoque la science de la guerre, il s'agit là d'un art ou d'une pratique qui nécessite des connaissances, des règles.

Quand on évoque la science d'un ministre, il s'agit cette fois d'un savoir-faire que donnent les connaissances (expérimentales ou livresques) jointes à l'habileté.

Par extension et depuis le début du XIX^{e} siècle, on appelle « science » l'ensemble des connaissances relatives à une valeur universelle accouplé à l'étude de ces connaissances. Cette étude est basée sur un objet précis avec des méthodes déterminées s'appuyant sur des relations objectives vérifiables. En l'occurrence cet objet pour les sciences est la « vérité ».

Poincaré insiste tout particulièrement sur le fait que l'utilisation de l'expérimentation sans méthode ne peut permettre de faire de la science, c'est-à-dire d'atteindre une connaissance universelle. Il écrit en effet :
« *On fait la science avec des faits comme on fait une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres* » **Poincaré La science et l'hypothèse page 168**

3.2. La démarche scientifique en sciences

La démarche scientifique dans une science, à ce stade de notre travail, est une méthode qui permet le développement de cette science, c'est-à-dire la mise en évidence de plus de vérités relatives au domaine de son étude. Néanmoins Claude Bernard oppose, en référence à la philosophie, des méthodes spécifiques en sciences physiques et en mathématiques quand il écrit : « *Les philosophes… ont admis deux méthodes scientifiques : la méthode inductive ou l'induction, propre aux sciences physiques, et la méthode déductive ou la déduction appartenant plus spécialement aux sciences mathématiques* » **Claude Bernard Introd. med. expér., I, II, P. 83**

3.2.1. « L'induction »

Oresme donnait cette définition relativement moderne de ce mot quand il écrivait : « *Induction est quant de plusieurs cas particuliers, l'en conclut universelment* » Oresme Thèse de Meunier.

L'induction, c'est-à-dire l'action d'induire signifie « mener vers ». C'est plus précisément une manière de raisonner qui consiste à inférer une chose d'une autre.

C'est un acte de perception qui nous montre qu'un cas particulier appartient à une certaine classe de cas préalablement généralisés.

In fine une induction mène à une conjecture.

3.2.2. « La déduction »

Valéry était admiratif devant la puissance générative de la déduction dans le raisonnement par analyse qu'il attribue à Descartes : « *Descartes introduit l'idée admirable de déduire les solutions de la solution du problème résolu* » Valéry Variété V, p. 223

La « déduction » est l'action de déduire, verbe issu du latin « deducere » qui signifie « tirer, faire sortir ».

Ce peut aussi être un terme didactique qui signifie la conséquence tirée d'un raisonnement.

Dans le premier sens, c'est un procédé de pensée par lequel on conclut rigoureusement de propositions prises pour prémisses, à une proposition qui en résulte nécessairement.

À l'origine, c'était une sorte de synthèse où l'on va de la cause aux effets, du principe aux conséquences, du général au particulier, par une suite de propositions qui s'enchaînent et se soutiennent mutuellement.

In fine une déduction mène à une vérité universelle dès lors que les prémisses sont vraies.

3.2.3. « La conjecture »

Ce mot vient du latin « conjectura ». C'est essentiellement une opinion fondée sur des probabilités, des apparences. Conjecturer c'est imaginer, présumer, soupçonner, supposer.

Dans tout domaine de recherche de vérité, on est amené à conjecturer comme le notait l'historien Bainville : « *Dans tel et tel cas quel motif ont eu tel et tel d'agir comme ils l'ont fait ?… C'est dans cette partie de l'histoire, la plus intéressante mais la plus difficile qu'on est réduit aux hypothèses. Il faut conjecturer* » Bainville Lectures, p. 79.

Une conjecture est donc une hypothèse que l'on émet car on pense qu'elle est vraie ou du moins qu'elle a une probabilité raisonnable d'être vraie. Une conjecture est donc du niveau de l'opinion, c'est pourquoi en sciences mathématiques comme en sciences physiques la nécessité d'une preuve s'impose dans la démarche scientifique adaptée : la preuve expérimentale en sciences physiques et la démonstration en mathématiques ont pour but de convaincre une communauté qui participe au développement de la science (à l'augmentation de la science pour utiliser une terminologie baconienne).

Rappelons que la preuve expérimentale n'a pas pour objet de démontrer : elle peut réfuter une conjecture ou produire des données qui vont confirmer la conjecture, c'est-à-dire vérifier des conditions nécessaires. Ceci peut aussi arriver en mathématiques dans une phase de la recherche en amont de la démonstration. Cette vérification de condition nécessaire a un double objectif : se convaincre soi-même que la conjecture dont on pensait qu'elle avait des chances d'être vraie en a encore plus dans un sens probabiliste implicite mais convaincre une communauté de chercheurs intéressés au même problème. C'est de la plausibilité de la conjecture dont il est question en réalité.

3.2.4. « La plausibilité »

Le mot « plausible » est emprunté au latin « plausibilis » signifiant « digne d'être applaudi » (du verbe « plaudere »).

Une affirmation plausible est une affirmation qui mérite d'être applaudie donc qui est digne d'approbation, jusqu'à preuve du contraire est-il précisé dans le Littré. De nos jours, une affirmation plausible est une affirmation qui semble devoir être admise, qui mérite d'être prise en considération, qui a plus de chances de passer du stade de la conviction privée au stade de la conviction publique.

3.3. La démarche scientifique en mathématiques

3.3.1. La formation scientifique

Concernant la formation scientifique, le préambule des derniers programmes de mathématiques en présente les quatre composantes essentielles : « *…la spécificité de toute pratique mathématique : observation, abstraction, expérimentation, démonstration* ».

Il est frappant de noter l'analogie entre ces composantes et les étapes de la démarche scientifique en sciences physiques ou du moins avec les trois premières.

On peut aussi remarquer qu'il y a quand même des démonstrations en sciences physiques. Par exemple, en mécanique, des lois de Newtons on peut déduire (à l'aide d'une démonstration !) l'action d'un gyroscope. Si le gyroscope ne se comportait pas comme le montre la théorie, ce seraient les lois de Newton qui seraient fausses.

Ce même document qualifie l'observation de « *processus dynamique* » et précise que ce processus « *conduit à des questions et éclaire ainsi l'origine et le développement de certaines idées* ». Cette observation peut donc être interprétée comme une étape d'expérimentations qui peuvent être génératives ou bien validatives concernant le problème posé ou des problèmes voisins. Cette étape est une étape essentiellement axée vers l'induction. Cette composante est donc à mettre en parallèle avec l'étape « Observer et analyser un fait expérimental ».

L'abstraction est, pour sa part, considérée comme le cœur de l'activité mathématique avec son rôle capital de construction des objets mentaux même pour ceux qui ne deviendront pas des professionnels des mathématiques. Il est même précisé : « *il importe que les élèves expérimentent la force et le pouvoir de chaque niveau qu'ils abordent* ». On voit bien le rôle crucial de l'étape précédente qui va fournir des observables d'où le chercheur va essayer d'extirper un modèle au sens de loi, c'est-à-dire en mathématiques une propriété énoncée dans un cadre formel. Cette composante est donc à mettre en parallèle avec l'étape « Choisir et élaborer un modèle physique ».

Remarque : *on s'éloigne ici de la conception « Faire des Mathématiques, c'est résoudre des problèmes » pour mieux rendre compte de la définition de Dieudonné d'un mathématicien comme celui qui a démontré un théorème. On se rapproche de la conception « Faire des mathématiques, c'est obtenir des résultats (théorèmes, exemples, contre-exemples, …) à l'intérieur d'une théorie ». Par exemple, l'arithmétique (ou théorie des nombres) part d'un ensemble N des entiers (formalisé ou non), et par des règles admises, obtient des connaissances sur cet ensemble. Ceci est à mettre en parallèle avec les sciences physiques si on considère qu'il n'y a guère de différence avec les mathématiques : en effet, pourquoi un courant électrique, une force seraient plus « concrets » qu'un nombre, qu'un point, etc.*

Sans donner de définition de la notion d'expérimentation, ce document précise que celle-ci : « *permet notamment de trouver d'éventuels contre-exemples, de comprendre comment la question se résout dans des cas particuliers et en quoi les arguments valables se généralisent ou non, de faire des conjectures sur des questions voisines* ». Bien que plus procédologique que les précédents, cet alinéa indique bien, tout en les mêlant, des expérimentations validatives (une expérience validative sert à valider, dans le sens de rendre plus plausible ou surtout à invalider, dans le sens de réfuter) et des expériences génératives qui permettent de résoudre le problème dans des cas particuliers et de conjecturer en généralisant. On reste là encore dans une phase essentiellement inductive même si la résolution du problème dans des cas particuliers est obtenue en mathématiques par une expérimentation du type « déduction logique » (expérimentation générative papier crayon). Cette composante est donc à mettre en parallèle partiellement avec l'étape « Organiser les étapes de la résolution ».

Remarque : *un problème peut être une question générée expérimentalement. Par exemple, si on entre un nombre quelconque mais positif dans une calculatrice munie de la touche* $\boxed{\sqrt{\ }}$*, et si on tape (par hasard !) un grand nombre de fois sur cette touche, on finit par obtenir 1 (toujours !). La question « pourquoi cet événement se réalise-t-il toujours ? (quel que soit le nombre positif initialement entré) » est le problème qui est donc généré.*

Enfin « *la démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience… Apprendre à rédiger une démonstration constitue un élément important de la formation scientifique* ». Le rôle de preuve attribué à la démonstration pour convaincre définitivement une communauté est ici affirmé comme il l'est en sciences physiques quand on parle de résolution ou de preuve expérimentale. Cette composante est aussi à mettre en parallèle partiellement avec l'étape « Organiser les étapes de la résolution ».

3.3.2. Les huit moments de l'activité scientifique

De manière plus précise, les documents d'accompagnement de la classe de Première des mêmes programmes évoquent les huit moments de l'activité scientifique qui suivent :

Moment 1 : Formuler un problème
Moment 2 : Conjecturer un résultat
Moment 3 : Expérimenter sur des exemples
Moment 4 : Bâtir une démonstration
Moment 5 : Mettre en œuvre des outils théoriques
Moment 6 : Mettre en forme une solution
Moment 7 : Contrôler les résultats obtenus
Moment 8 : Évaluer leur pertinence au regard du problème posé

On peut constater que les moments 7 et 8 nous permettent de retrouver en moments finaux l'étape 4 de la démarche scientifique en sciences physiques « Porter un jugement critique ».

On peut comprendre la décomposition proposée comme une procédure ordonnée de résolution de problème, comme la démarche à suivre idéalement (remarquons cependant qu'il est difficile d'imaginer bâtir une démonstration sans mettre en œuvre des outils théoriques) ; néanmoins un premier point crucial de l'activité mathématique n'est même pas évoqué entre les moments 1 et 2 : comment arriver à la conjecture d'un résultat ? Il n'est fait allusion à aucune expérimentation préalable génératrice de faits observables eux-même inférant la conjecture du moment suivant. Cette phase manquante, contient donc une ou des initiatives expérimentales génératives, c'est-à-dire une phase qui est habituellement reconnue comme une phase caractérisant plutôt une démarche inductive propre aux sciences expérimentales.

L'expérimentation du moment 3 sur des exemples n'est pas très explicite : ce peut être une expérimentation de type génératif ; elle va consister à vérifier des conditions nécessaires simples c'est à dire à démontrer le résultat trouvé dans des cas particuliers (démontrer est ici pris dans le sens de déduction) ; elle est générative en ce sens qu'elle génère de la vérité mathématique ; elle peut aussi être considérée comme une expérimentation de type validatif dans la mesure où elle vient renforcer la conjecture par la vérification de quelques cas particuliers.

Un second point crucial manque aussi entre les moments 3 et 4 : comment passer de l'expérimentation sur des exemples à la création de la démonstration ? On reste encore dans une phase purement déductive : c'est l'expérimentation générative au sens de Leibniz. On revient donc de manière paradoxale à une phase sur laquelle l'enseignant reste sans véritable prise : il est laissé libre d'utiliser toutes les procédologies démonstratives qu'on voit fleurir dans grand nombre d'ouvrages scolaires. On comprend pourquoi l'APM (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) est amenée à déplorer que cela mène dans la formulation de beaucoup de sujets du baccalauréat à des questions contenant à la fois la réponse et la méthode à utiliser. On peut citer ce texte qui regrette avec un certain humour cette situation : « *Chacun sait que l'un des plus « beaux fleurons » de nos problèmes d'analyse au bac de ces dernières années était :* ***« en utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout n de N, on a… »*** ».

3.3.3. L'initiative expérimentale dans la démarche de découverte

3.3.3.1. L'APM et la démarche scientifique

Les nombreuses analyses produites par l'APM (et résumées dans la brochure : « Démarche scientifique et évaluation : pourquoi vouloir changer le baccalauréat ? », elle même tirée du bulletin de l'APMEP N° 443) depuis plusieurs années et concernant les sujets de baccalauréat de mathématiques montrent que ceux-ci « *sont trop stéréotypés, en marche d'escalier, avec micro-ascenseurs intégrés* » et que ce « *type d'épreuves va de pair avec un certain type d'enseignement, les deux s'appelant et se confortant mutuellement* ».

Ces analyses montrent aussi que les démarches que l'APM qualifie de « *démarches scientifiques fondamentales … ne sont généralement pas prises en compte dans ce type d'épreuve* ».

Voici une liste de telles démarches telles que citées par l'APM :

« *Expérimenter, conjecturer, prouver, réfuter, mathématiser, choisir des outils pertinents, représenter, optimiser, …* ».

On retrouve dans cette liste non exhaustive les ingrédients intervenant dans la démarche scientifique telle que mise en évidence aussi bien en sciences physiques qu'en mathématiques.

À la suite des initiatives prises par cette association et devant la constatation qu'aucune modification sensible de l'examen « baccalauréat » n'a été sérieusement envisagée, son comité a voté en Juin 2002 un texte issu du groupe de travail « Prospectives Bac ».

Ce texte précise que l'un des trois objectifs fondamentaux pour l'élève sur lesquels l'apprentissage des Mathématiques doit être centré est :

« *Développer son autonomie, sa créativité, son esprit critique* »

Et, en cohérence avec cette position, elle soutient certains principes concernant la nature et l'organisation de l'épreuve écrite du baccalauréat. Voici deux de ces principes que doivent respecter certaines parties d'une nouvelle forme de l'épreuve de mathématiques :

« *Parmi ces problèmes, en proposer un, destiné à favoriser l'autonomie, la prise d'initiative et la réflexion du candidat en prenant compte dans la correction, les démarches utilisées, dûment motivées et explicitées et les essais argumentés même s'ils n'ont pas abouti.* » et « *L'un des exercices permettra de juger plus particulièrement la qualité d'exposition, la précision des justifications et la cohérence de la démarche.* ».

3.3.3.2. Les problèmes avec prise d'initiative pour favoriser la démarche scientifique

De manière plus pratique, l'APM propose d'utiliser les problèmes qu'elle qualifie de « problèmes avec prise d'initiative » afin de favoriser un apprentissage des élèves s'appuyant sur les trois objectifs fondamentaux précédemment cités. Ces problèmes sont caractérisés par les trois points suivants :

1. Énoncé de préférence court, facile à comprendre par tous et fortement dévolutif (doit donner envie de s'investir dans la recherche).
2. Réponse non évidente et non donnée pas plus qu'une méthode de résolution.
3. Plusieurs démarches sont possibles et aucune n'est imposée ; le problème n'est pas une application du cours précédent ; l'élève doit pouvoir mettre en route une démarche scientifique : faire des essais (pas de feuille qui reste blanche…), tester ses résultats, prouver la validité de ses résultats, être capable d'argumenter, …

Ce qui est important dans ce schéma, c'est d'obtenir la dévolution du problème pour que l'élève prenne la décision d'entamer des actions et que ces actions respectent le schéma de la démarche scientifique. Ce schéma n'a d'ailleurs été à aucun moment décliné dans une version ordonnée.

Une expérimentation sur ce type de problème a été réalisée à l'initiative de la commission Attali (Commission Baccalauréat présidée par Paul Attali, Inspecteur général de Mathématiques) avec des élèves ordinaires de terminale S en 1999. Un problème de géométrie (exercice 7, page 9, brochure précitée) a été proposé sur une durée d'une heure. Il est curieux de constater que les copies obtenues ont servi aux enseignants concernés par cette expérimentation à élaborer une grille d'évaluation et un barème et non à mesurer l'impact de ce type de problème sur une meilleure génération de la démarche dite scientifique. La conclusion qui est donnée est que les enseignants sont capables de s'adapter à ce nouveau type d'évaluation, surtout si on leur laisse une large part d'autonomie. Cette expérimentation ne valide en aucun cas l'hypothèse de la génération d'une démarche scientifique chez des élèves à qui on propose ce type de problèmes où le souci premier est de mettre en route une recherche active. Le type de recherche générée n'est pas non plus étudié. Il est donc indispensable de se retourner vers la littérature didactique des sciences expérimentales qui, dans ce domaine, va nous fournir un support plus riche à la fois théorique et expérimental. Ce que l'APM appelle prise d'initiative se retrouve chez Robin Millar sous l'acception d'« investigation ouverte ».

4. LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION OUVERTE DANS LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

4.1. D'une investigation fermée à une investigation ouverte

Robin Millar rappelle dans son article « Investigation des élèves en sciences : une approche fondée sur la connaissance » (Didaskalia n° 9 1996), l'évolution de l'approche de l'activité de recherche scientifique au Royaume Uni vers un renforcement de l'importance des activités pratiques d'investigation ouverte et cela depuis le début des années 1980. Il rappelle d'ailleurs dans le tableau qui suit les différences entre une investigation de ce type et une tâche pratique standard de laboratoire qui était préalablement la norme :

	Tâche pratique « standard »	Investigation
tâche/question méthode conclusions	fermée fermée ouvertes	fermée ou ouverte ouverte ouvertes

On constate que l'évolution souhaitée par l'APM pour que l'on propose à nos élèves en Mathématiques, en plus des problèmes classiques fermés (où la question est fermée et éventuellement la méthode donnée pour une réponse qui reste ouverte) un problème similaire au problème avec prise d'initiative a donc été largement prise en compte au Royaume Uni en sciences physiques.

La colonne de gauche du tableau précédent qui décrit une activité standard de laboratoire avant cette prise en compte, s'intitule « tâche pratique standard » et on peut constater comment ce type de tâche semble paradoxal dans la mesure où il inclut la technique qui va être utilisée : d'un point de vue anthropologique, ce genre d'activité est une activité concernant la « résolution » d'une tâche avec la description de la technique qui doit être utilisée. Il n'y a donc pas de savoir-faire visé mais vraisemblablement une aptitude à comprendre et exécuter des manipulations expérimentales. On retrouve une telle conception chez Françoise Perrot et Mireille Tadjeddine quand elles listent les savoir-faire du domaine expérimental :

- la connaissance fonctionnelle du matériel ;
- la connaissance des méthodes d'expérimentation et de mesure ;
- la maîtrise gestuelle ;
- le respect des consignes en particulier celles qui ont trait à la sécurité.

La colonne de droite s'intitule cette fois investigation et elle décrit les phases d'une activité expérimentale qui vise les mêmes objectifs que les problèmes à prise d'initiative. On peut constater que la tâche peut être à construire dans la mesure où elle peut être ouverte (des exemples seront donnés plus loin concernant des investigations sur l'isolation thermique). La technique n'est pas donnée, elle est donc à rechercher parmi les techniques connues ou bien être aussi inventée (et non construite). Les initiatives sur la construction de la tâche et des techniques permettant son traitement visent donc ici explicitement un savoir-faire. Le mot investigation qui est utilisé ne l'est pas dans le sens d'expérimentation, même si cette activité peut contenir des expérimentations génératives ou validatives, mais dans le sens de démarche initiée par celui à qui est proposé un problème. Cette démarche consistera à générer la tâche permettant de traiter le problème et à générer aussi des techniques de « résolution » de cette tâche » (le mot « résolution » engobant les deux acceptions que nous lui avons attribuées). Les verbe « générer » que nous venons d'utiliser deux fois indique très précisément que des décisions prises pour accomplir cette investigation doivent être prises par le chercheur du problème. **Cette investigation est donc une démarche de découverte d'un problème qui est fortement personnalisée par les initiatives qui seront prises.**

4.2. Nécessité d'une évaluation des investigations ouvertes

Le problème d'un modèle d'évaluation des performances pour ce type d'activités d'investigations ouvertes s'est posé rapidement d'autant que, rappelle Millar, le « Curriculum National pour la Science » introduit, pour la première fois en 1989, l'évaluation finale à l'âge de seize ans (la fin de l'enseignement scientifique obligatoire pour tous les élèves) à quatre composantes de même importance : biologie, chimie, physique et investigation pratique (DFEE/WO 1995).

Le souci de l'APM de proposer d'introduire des problèmes avec prise d'initiative s'est complété comme vu précédemment du souci de son évaluation à l'examen final. Mais la seule expérimentation réalisée avec l'aval de la commission Attali n'a pas permis de voir quelles connaissances étaient mobilisées pour mener à bien ce type d'investigations et surtout lesquelles permettaient un véritable apprentissage.

4.3. L'alternative de Millar

Face à un modèle fondé sur les habiletés (conforme aux analyses de Gagné et Klopfer), Millar dans le cadre du projet de recherche PACKS (Procedural and Conceptual Knowledge in Science) propose comme alternative un modèle fondé sur la compréhension. Le principe de ce modèle est le suivant :

« La performance des élèves sur des tâches d'investigation est vue comme dépendant principalement de ce qu'ils savent et comprennent ».

On peut traduire autrement : la capacité de résoudre un problème suivant une démarche expérimentale à l'initiative du chercheur dépend plus de ce qu'il sait et comprend que de ses habiletés manipulatoires.

Il est donc pertinent d'analyser ce qui dans ce modèle peut nous permettre de mieux cerner les phases d'une démarche de découverte expérimentale instrumentée.

4.4. La démarche de type « investigation ouverte » selon Millar

4.4.1. Un exemple d'investigation sur lequel a été basée cette recherche :

Tâche proposée : « Trouver comment l'épaisseur des matériaux garnissant un sac isotherme pour boissons fraîches affecte la qualité de ce sac (pour la conservation de la fraîcheur) »

Matériel et indications données : du matériel est fourni, une horloge, un thermomètre, béchers et éprouvettes graduées, une réserve d'eau refroidie par la glace (l'utilisation de l'eau du robinet n'est pas exclue) et une réserve de trois sortes de matériaux d'emballage ; il est montré aussi comment on peut faire varier l'épaisseur de l'emballage en utilisant un plus ou moins grand nombre de couches.

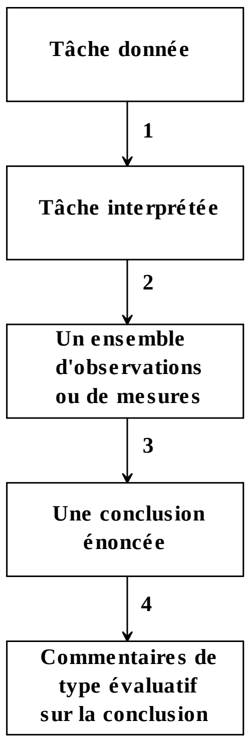
Un exemple d'initiative : après avoir modélisé le sac isotherme avec une éprouvette graduée entourée d'emballage à bulles (parce qu'ainsi cela « *ressemble plus à un sac isotherme* »), un groupe d'élève explique « *nous avons essayé* [de mesurer le changement de température] *pendant deux minutes et ça n'a pas changé. Donc nous allons essayer plus longtemps* ». Ce même groupe donne la raison de cette initiative complémentaire « *Oui, parce que si vous avez une boisson fraîche, vous n'allez pas la mettre dedans et la boire deux minutes après, n'est-ce pas ?* »

Cet exemple est l'un de ceux qui ont permis de dégager les étapes qui seront décrites dans le paragraphe suivant. Si on exclut le cas des enfants de 9 ans observés, pour lesquels l'investigation s'est souvent réduite à de l'activité, au pressant besoin de faire quelque chose dans l'apparente conviction que cela répondrait aux demandes de la tâche, cette expérience aura mis en évidence des initiatives, fruits d'une décision argumentée. Cette décision argumentée a à voir à notre avis avec le protocole de l'expérimentation. C'est pourquoi nous reviendrons sur cette notion que nous essaierons de définir précisément.

4.4.2. Les étapes d’une investigation typique

Nous reviendrons dans l’exposé de notre cadre théorique de recherche sur les résultats intéressants que nous retiendrons de ce travail portant sur les investigations sur l’isolation thermique. Ces résultats concernent le modèle des cadres d’investigations.

Nous en extrayons à ce stade de notre travail les étapes d’une telle investigation sous forme d’un organigramme descendant :



Cette investigation, c’est-à-dire cette exploration caractérisée par des étapes imposées (encadrées par des rectangles dans le schéma de gauche) n’est évidemment pas nécessairement linéaire mais peut inclure des boucles entre une étape plus tardive et une étape plus précoce à la lumière de certains événements. Le passage d’une étape à l’autre suppose des **décisions** et des choix implicites ou explicites.
Quatre catégories de compréhension interviennent dans ces décisions. Nous reviendrons sur ces catégories et plus particulièrement sur la première qui constitue le modèle des cadres d’investigations de Millar, dans le « cadre théorique » de notre recherche.

4.4.3. Recherche personnelle et recherche publique

Concernant l’ensemble des élèves observés au cours de ce travail, Millar note que « *peu d’entre eux semblent avoir franchi le pas d’une recherche personnelle à une recherche publique* », dans lequel l’important est la nécessité de constituer la preuve pour persuader les autres de ses propres conclusions.

Millar conclut sur ce sujet : « *Sans doute l’idée fondamentale que les élèves doivent apprendre au sujet de l’investigation scientifique est qu’elle vise la connaissance publique – des conclusions que l’on peut présenter et défendre ouvertement, la preuve expérimentale à l’appui de toute conclusion étant exhibée de manière claire et convaincante* »

4.4.4. Des caractéristiques fondamentales de la démarche expérimentale de découverte

En résumé nous avons détecté trois indices dans notre enquête sur la démarche expérimentale :

♦La preuve expérimentale se dégage comme étant une caractéristique importante d’une démarche expérimentale avec un fort ancrage sur la communauté de recherche.

♦La nécessité de prendre en compte les connaissances mobilisables pour se livrer à une tâche d’investigation semble être aussi un paramètre de la démarche expérimentale.

♦L’importance des connaissances est un facteur décisif dans la phase d’investigation.

5. LE PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL EN SCIENCES PHYSIQUES

5.1. Étude étymologique du mot « protocole »

Du latin protocollum et du grec kollao, coller, au début du XII^{e} siècle il avait la forme « protecolle » signifiant celui qui suggère, qui souffle. Au Moyen Âge dans son sens latin, c'était une sorte d'étiquette d'archives, une feuille collée à une charte et qui l'authentifiait. C'était aussi un recueil de formules en usage pour les actes publics, un formulaire indiquant la manière d'écrire à différentes personnes suivant leur rang. Par extension, un protocole pouvait être un recueil de règles à observer dans les cérémonies ou un document diplomatique constituant le procès-verbal d'une réunion, le texte d'un engagement. Dans son sens grec, il peut aussi signifier la première page du livre. N'oublions pas que dans un sens familier il peut s'agir d'un préambule.

Nous sommes donc amenés à proposer les définitions suivantes :

Définition 1 : on appelle protocole tout plan détaillé d'une investigation.

Définition 2 : on appelle protocole expérimental tout plan détaillé d'une expérimentation.

5.2. Le protocole suivant Giuseppin :

D'après Giuseppin, le protocole expérimental a pour objectif la résolution d'un problème, dans le sens de la vérification d'une loi. La définition précédente est donc respectée à condition de préciser que le protocole met en place une expérience validative. Il décompose le protocole en trois parties :

- **Le choix des constituants concrets de l'expérience.**
- **La description du montage,** de ses éléments concrets.
- **Le choix des paramètres de l'expérience** (choix des mesures à faire, des appareils de mesure, des domaines de variation).

La phase de mise au point définitive est considérée par Giuseppin comme particulièrement formatrice pour celui qui la réalise : il cite comme exemple l'introduction d'un potentiomètre 0-100 Ohms pour compenser la résistance de 23 Ohms de la bobine d'un dispositif et la difficulté à réaliser que la résistance était en réalité de 133 Ohms : quel cheminement enrichissant pour le formateur qui arrive à changer son potentiomètre pour un autre calibré 0-1000 Ohms !

La conception d'un protocole expérimental est une phase de réflexion qui mobilise l'ensemble des connaissances acquises à un instant donné. Nous retrouverons encore chez Millar l'importance des connaissances dans la mise en place d'une expérimentation.

5.3. Sa transposition en mathématiques

Il est difficile d'établir une correspondance biunivoque entre ces trois parties et trois autres en Mathématiques dans la mesure où le choix des constituants concrets de l'expérience, c'est le choix des données et la description du montage des éléments concrets, c'est la manière dont ces données vont être traitées ; cette dernière phase est mêlée à la suivante qui demande de traiter les données choisies.

6. PORTRAIT-ROBOT DE LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE : ÉTAT DE NOTRE ENQUÊTE

Le portrait-robot de la démarche expérimentale que nous proposons intègre tous les indices que nous avons relevés au cours de notre analyse en les associant dans les schémas suivants. Le premier schéma récapitule les phase pré-conjecture et le second les phases post-conjecture :

	-----------INVESTIGATION----------						
Connaissances + Tâche donnée	Connaissances + Tâche interprétée	PROTOCOLE			Expérience	Observation des paramètres choisis	Conjecture
		choix du matériel	description du montage	choix des paramètres			

Notons le rôle important attaché aux connaissances dans l'initiative d'investigation qui va consister à mettre en place un protocole, c'est-à-dire la scénarisation complète de l'action planifiée qui va constituer l'expérience à réaliser avec les paramètres précis à

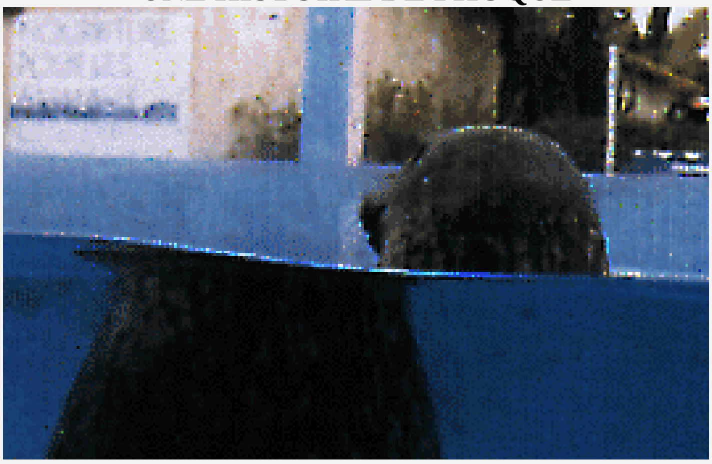
Conjecture	Validation ou Preuve expérimentale	Jugement critique ou Commentaire de type évaluatif

Dans cette phase post-conjecture, notons cette fois l'importance du débat dans la partie preuve expérimentale qui doit rendre à la recherche son vrai caractère, c'est-à-dire son caractère public.

ANNEXE 1

Le document qui suit est une retranscription (dont nous avons aménagé la présentation) d'un TP proposé par Mathilde Arragon sur le site de l'académie de Grenoble dans la partie « ressources TICE ». Ce Professeur de Physique montre une scénarisation possible de l'approche, la découverte et l'étude de la réfraction en introduisant quatre modèles parmi lesquels les lycéens auront à choisir après expérimentations.

UNE HISTOIRE DE PHOQUE



Problème à résoudre :
Dans quelles circonstances le phoque n'a-t-il plus la tête sur le corps?

1. BUT DU TP

Découvrir et définir le phénomène de réfraction. Modéliser ce phénomène par une loi mathématique. Entrevoir les phénomènes associés de réflexion et de dispersion.

2. MISE EN ÉVIDENCE DU PHÉNOMÈNE DE RÉFRACTION

Daniel Biboud, professeur de sciences physiques au lycée Marie Curie, emmène son fils à Marine Land et rapporte les photos suivantes, qu'il a lui même prises devant le bassin des phoques.


2.1. Observation, interprétations

Décrire dans votre compte-rendu ce que vous avez observé

Comment interpréter ce phénomène ?

2.2. Pour mieux comprendre ce phénomène

Réaliser une expérience réelle avec le matériel sur le bureau du Professeur :

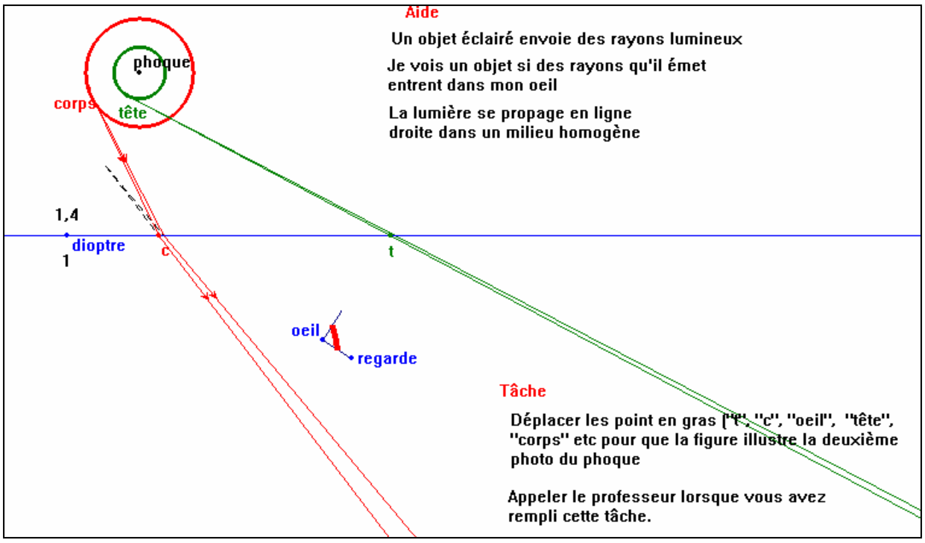
Un aquarium plein d'eau salée

Une bouteille avec son bouchon hors de l'eau

Décrire vos observations avec précision

Quand apparaît le phénomène de réfraction ?

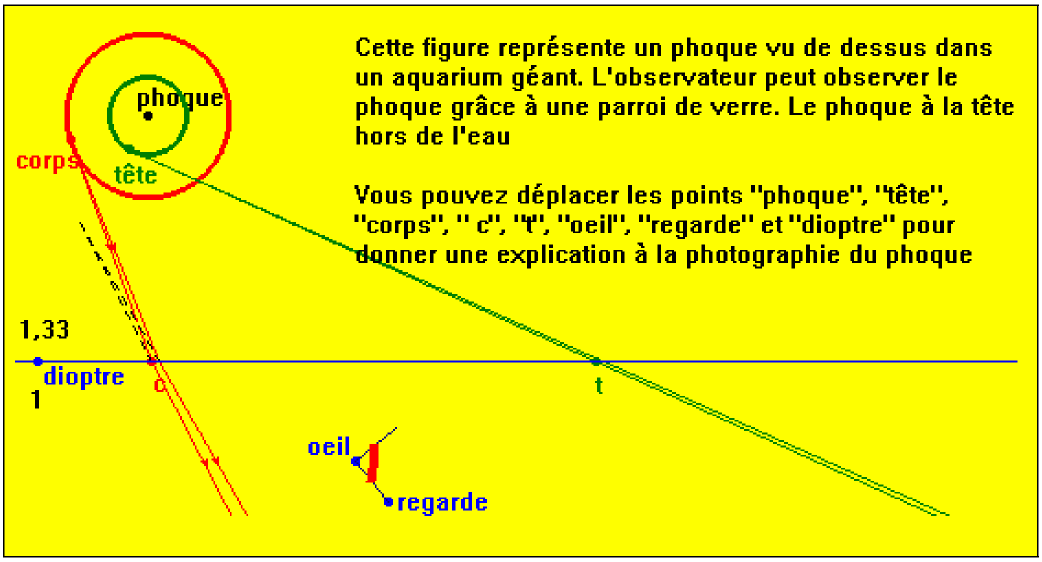
2.3. Réaliser une expérience virtuelle en animant la figure Cabri phoc[1].fig (proposée en lien)



Lire si nécessaire les explications complémentaires ci-dessous (proposées en lien)

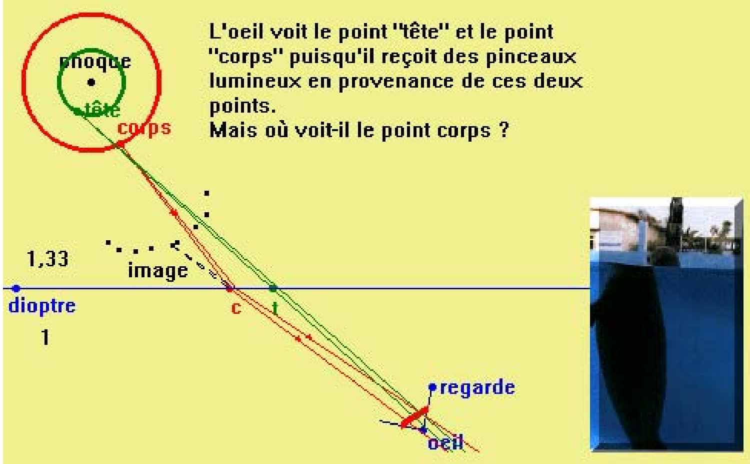
Explications :

Le modèle animé représente le phoque en vue de dessus. Il a été créé en respectant les lois de la réfraction en optique. On a cependant négligé la vitre par souci de simplification.

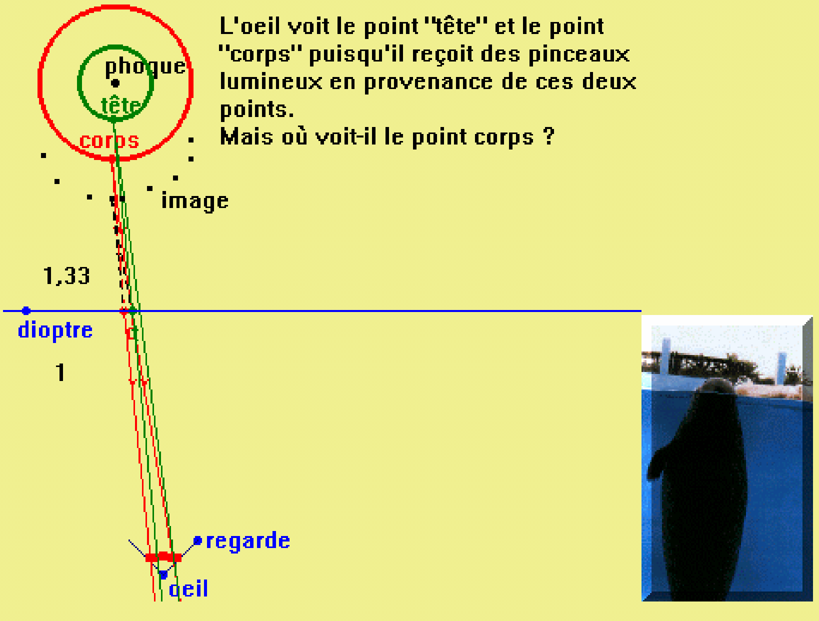


La notion d’image ponctuelle en optique a une signification bien précise. Elle représente le point de concours des rayons issus de l’objet ponctuel correspondant. Dans le cas de notre figure, on peut considérer que tous les rayons d’un pinceau de lumière provenant d’un point d’un phoque et qui pénètrent dans l’œil convergent en un point image. Cependant il n’y a pas de stigmatisme (lien).
Ce que l’on voit sur la photo, c’est l’image étendue du corps du phoque, ensemble des images ponctuelles issues de ce corps.

La page qui suit doit être imprimée pour être utilisée par les lycéens comme support de leurs réponses



Colorier en rouge "l'image" du corps du phoque
"L'image" du corps et la tête sont-elles alignées ?
Que se passe-t-il lorsque l'oeil et le centre du cercle "phoque" sont alignés sur une perpendiculaire au dioptre ?



Imprimer cette page et compléter éventuellement la figure pour répondre aux questions.

Donner maintenant votre définition du phénomène de réfraction

3. UNE APPROCHE HISTORIQUE

Le modèle animé dont vous vous êtes servi a été programmé en utilisant les lois de la réfraction en optique. Mais au fait, quelles sont-elles et qui les a énoncées ?
Quatre savants ont fait des propositions de loi :
Quelles lois sont exactes ?
Pour vous permettre de découvrir la vérité, lire leurs propositions puis réaliser des mesures (voir 4.)

Claude Ptolémée

Au sujet de ces résultats, Ptolémée s'est livré à des commentaires d'ordre qualitatif. Il a observé que :

- ♦Le rayon réfracté est situé dans le plan d'incidence (lien vers définition).
- ♦Les rayons perpendiculaires à la surface ne sont pas réfractés.
- ♦L'importance de la réfraction dépend de la densité des milieux.

Robert Grossetête

Il fut l'un des pionniers de la méthode expérimentale moderne en affirmant que l'expérimentation était le meilleur moyen d'étudier la réflexion et la réfraction de la lumière. La loi de réfraction qu'il avait proposée est que l'angle de réfraction est égal au double de l'angle d'incidence (lien vers définition).

Joannes Képler

Ce savant propose une relation de proportionnalité entre les angles d'incidence et de réfraction pour des valeurs d'angles petites.

René Descartes

La loi qu'il donne repose sur des résultats expérimentaux mais a également un caractère théorique. Elle fait intervenir la fonction trigonométrique sinus. Il existe une relation de proportionnalité entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction : $\sin i_2 = k*\sin i_1$, k étant un nombre caractérisant le milieu dans lequel est réfracté le rayon.

Vous manquez de vocabulaire pour comprendre ces affirmations ? Utiliser les documents 1 et 2 qui suivent (accessibles par un lien)

DOCUMENT 1

plan d'incidence
« plan qui comprend le rayon d'incidence et la perpendiculaire au dioptre au point d'incidence »

angle d'incidence
« angle que le rayon incident fait avec la perpendiculaire au dioptre au point

♦Donner la définition des mots ?
dioptre
rayon d'incidence
point d'incidence
♦Faire un schéma avec le dioptre, le rayon incident, le point d'incidence et marquer l'angle d'incidence.
Appeler votre professeur pour qu'il vérifie

DOCUMENT 2

Relation de proportionnalité

Deux grandeurs A et B varient de manière proportionnelles si on peut écrire la relation B = k*A où k est nécessairement une constante quelle que soit la valeur de A ou de B.

Pour vérifier que deux grandeurs sont proportionnelles, on peut donc utiliser deux

1-méthode numérique

Placer les couples de valeurs de A et de B dans un tableau et calculer dans une troisième colonne le rapport de A/B.

Si ce rapport est constant alors les deux grandeurs varient de manière proportionnelle.

La valeur du rapport B/A est donc la constante k dans la relation B = k*A.

A .	B .	A /B .

1-méthode graphique

Représenter les couples de valeurs de A et B sur un graphique en portant A en abscisse et B en ordonnée.

Si le graphe est une droite qui passe par l'origine du repère alors les deux grandeurs varient de manière proportionnelle.

4. UNE ÉTUDE EXPÉRIMENTALE RIGOUREUSE

4.1. Matériel :

Une demi-sphère en plexiglas

Une feuille de papier sur laquelle on a photocopié un rapporteur circulaire et l'emplacement de cette demi-lune.

Un banc d'optique et un pont.

Une source de lumière, une lentille et une fente.

4.2. Protocole expérimental et mesures :

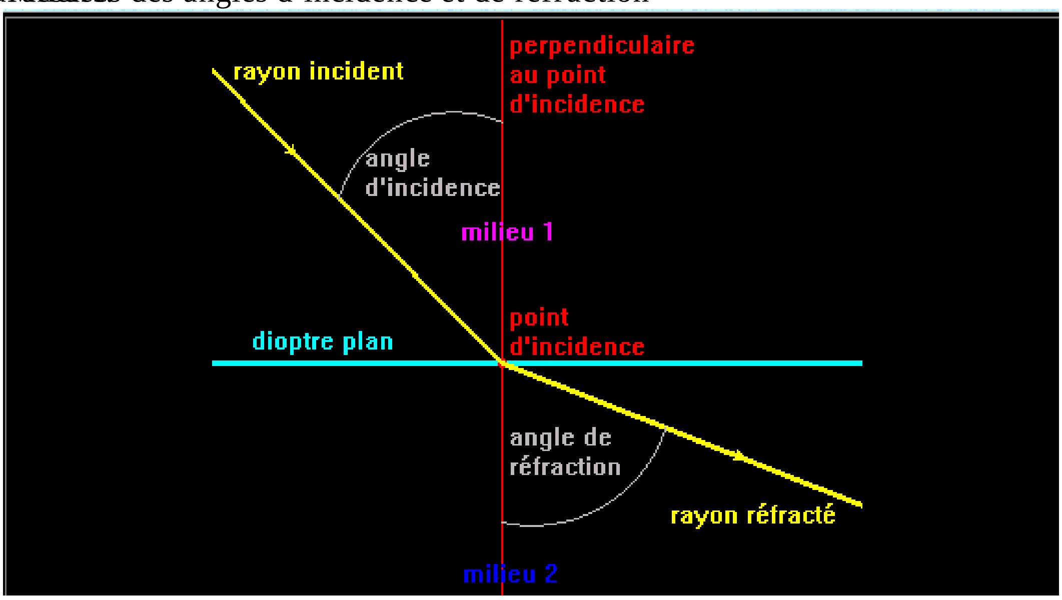
4.2.1. Créer un pinceau de lumière à bords parallèles.

Placer successivement sur le banc d'optique : la source, la fente, la lentille et le pont.

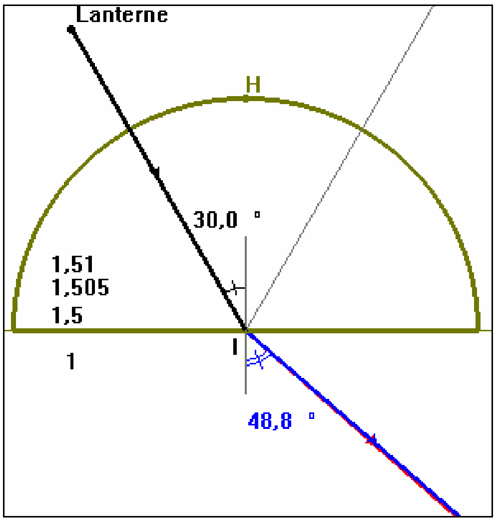
Observer la trace sur le pont du pinceau de lumière.

Régler la position de la lentille pour avoir un pinceau fin et lumineux à bords parallèles.

4.2.2. Mesures des angles d'incidence et de réfraction



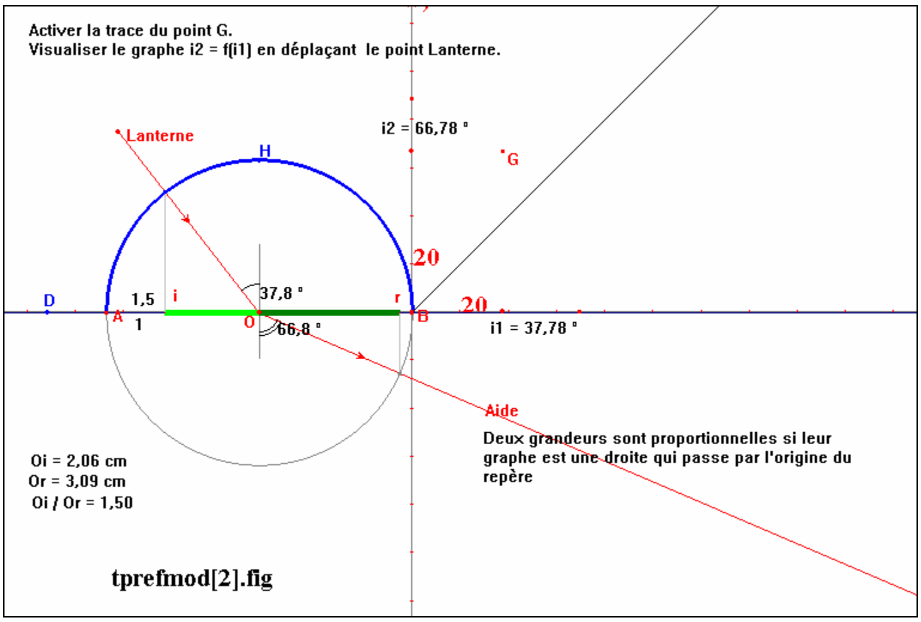
Placer la feuille avec son rapporteur sur le pont.
Centrer la demi-lune sur le rapporteur.
Placer la lanterne du côté arrondi de la demi-lune
Déplacer la feuille pour que le pinceau passe par le centre du rapporteur.
Repérer sur le schéma ci-dessus le vocabulaire.
Faire une série de mesures en notant les valeurs de l’angle d’incidence et de réfraction.
Tracer les rayons incidents et réfléchis correspondants sur votre feuille.



Si en effectuant vos mesures vous observez d’autres phénomènes (lien) que la réfraction…

5. RECHERCHE DE L’EXPRESSION MATHÉMATIQUE DE LA LOI

5.1. Comparer vos résultats à ceux du modèle animé (lien vers le fichier suivant)



Compléter le tableau suivant avec vos valeurs expérimentales et les valeurs théoriques

Angle d’incidence en °	Angle de réfraction expérimental en °	Angle de réfraction théorique en °

Les résultats théoriques et expérimentaux sont-ils en accord ?

5.2. Analyser les affirmations des savants à partir de vos valeurs expérimentales

Que pensez-vous de la loi de Claude Ptolémée ?
Que pensez-vous de la loi de Robert Grossetête ?
Que pensez-vous de la loi de Joannes Kepler ?
Que pensez-vous de la loi de René Descartes ?

Proposer un énoncé mathématique de la loi de réfraction

6. QUELQUES LIENS SUR L'INTERNET

ANNEXE 2

Voici une brève analyse de ce TP :

Des données issues du monde concret sont montrées pour susciter l'étonnement et poser une question : c'est la monstration.
Une première modélisation est proposée avec un aquarium pour simuler le phénomène observé et générer plus de données ; c'est une expérimentation générative.
Une seconde modélisation est proposée dans l'environnement Cabri (qui est programmé avec les lois à découvrir) pour expérimenter dans un but validatif (confirmer avec le modèle ce qui a été observé dans la réalité) mais aussi dans un but génératif (mettre en évidence le principe de la réfraction). Un lien est prévu pour assurer les connaissances nécessaires à la compréhension de l'expérience.
Quatre modèles sont proposés issus de l'histoire de la recherche en optique accompagnés de documents permettant encore de comprendre les termes théoriques utilisés.
Expérimentations génératives pour générer des données expérimentales (issues d'une expérimentation concrète) et des données théoriques (issues de l'expérimentation avec Cabri qui simule le modèle théorique).
Critique des modèles en fonction des données produites précédemment.
Choix et énoncé d'une loi modélisant la réfraction.

On peut remarquer qu'en raison de la complexité du phénomène à étudier, l'auteur de ce scénario a pris soin de donner les montages expérimentaux qui allaient être utilisés que ce soient les montages réels (utilisant aquariums, appareils de mesures, …) ou les montages virtuels (constructions de fichiers Cabri simulant la réfraction avec la loi de Descartes).
Le point crucial de cette étude expérimentale rigoureuse est de reposer sur un choix à faire entre plusieurs modèles qui constitue en sciences physiques la preuve expérimentale

ANALYSE D’UN ARBRE DÉCISIONNEL EN SCIENCES CLINIQUES

Cette partie a pu être réalisée grâce à la participation du professeur Marcel Dahan, praticien hospitalier et chef de service en chirurgie thoracique à l’Hôpital Larrey de Toulouse. Celui-ci m’a accordé un entretien afin de répondre aux questions que je me suis posées face à un arbre décisionnel découvert dans une publication extraite du traité de technique chirurgicale l’EMC[1].

1. LES SCIENCES CLINIQUES

1.1. Définition

Ces sciences ont comme objectif l’amélioration des thérapies par l’expérimentation sur des patients. Les patients, c’est à dire des humains chez qui une pathologie est diagnostiquée sont les objets sur lesquels les médecins (spécialistes d’une discipline particulière de cette science) vont agir pour essayer de traiter cette pathologie. Ils le font par l’intermédiaire d’outils suivant des procédures spécifiques appelées aussi « protocoles ».

1.2. L’expérimentation en sciences cliniques

Pour une pathologie donnée, l’expérimentation sur des patients consiste en :
Après le diagnostic établi, le médecin (l’expérimentateur) va appliquer au patient une technique connue utilisant un outil spécifique associé à cette technique. Il conjecture donc que l’utilisation de cet instrument (le mot « instrument » est pris dans le sens de Rabardel) va générer l’amélioration attendue. L’expérimentation est donc une expérimentation validative. Tant que la validation est obtenue, le médecin continuera à utiliser le même instrument. S’il arrive que l’expérimentation invalide l’utilisation de l’instrument, le médecin après une analyse fine de l’état du patient (comparaison des paramètres observés par rapport à ceux pour lesquelles l’expérimentation a validé l’utilisation de l’instrument), peut décider d’utiliser l’outil avec un protocole qu’il modifie suivant son expérience. Il est donc amené à transformer son instrument en un nouvel instrument, c’est-à-dire utiliser le même outil mais avec un autre schème d’usage (voir annexe).

L’expérimentation animale qui consiste à tester ces améliorations sur des animaux préalablement mis dans des conditions analogues à celles que l’on désire traiter chez les patients humains est une modélisation du réel de cette science.

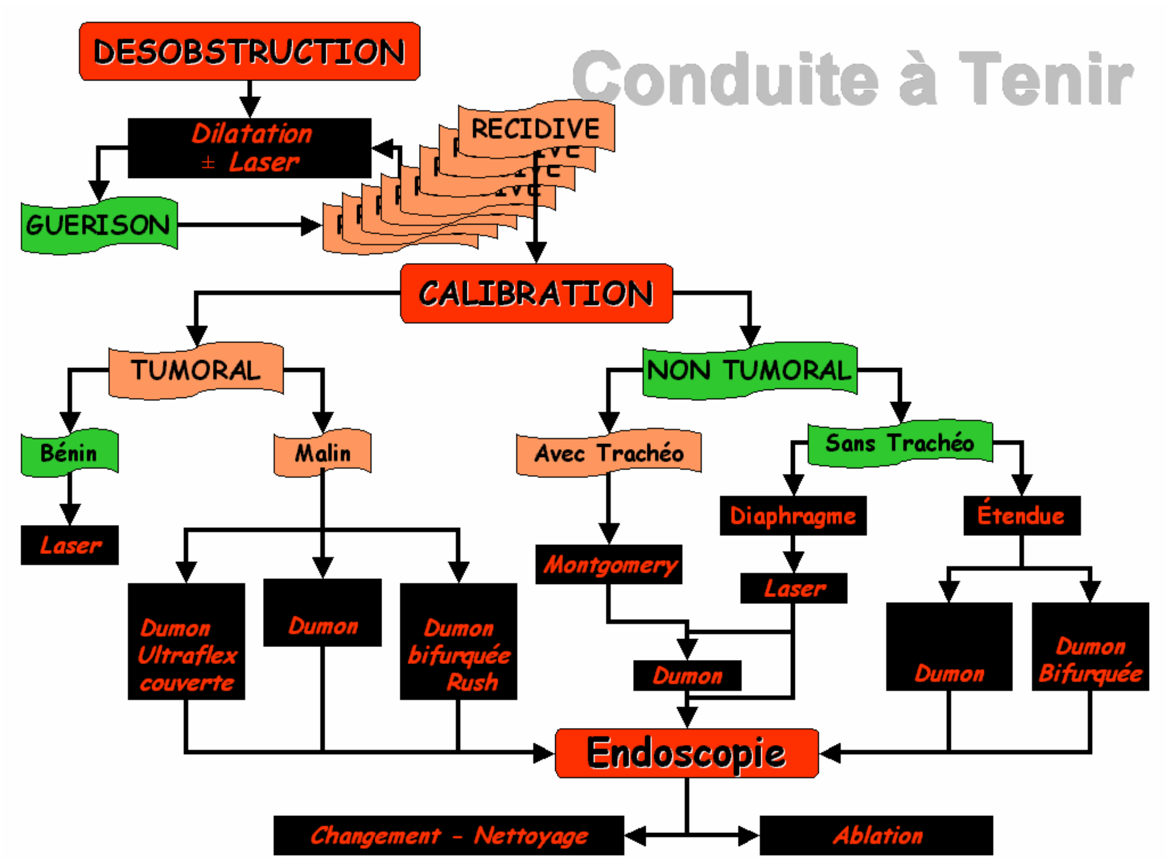
2. UN EXEMPLE DE DÉMARCHE D’EXPÉRIMENTATION CLINIQUE

2.1. Gestion des sténoses trachéo-bronchiques : cette gestion se fait aujourd’hui dans plus de 90% des cas par des méthodes endoscopiques. Ces sténoses étant des obstructions au niveau de l’arbre respiratoire, elles nécessitent des gestes de calibrage (désobstruction) bien réfléchis, garants d’un résultat satisfaisant à long terme.

Ces gestes, qui sont les expérimentations cliniques de cette science dans la discipline particulière de la chirurgie de la trachée et des bronches, sont résumés dans l’arbre décisionnel

[1] Encyclopédie Médico chirurgicale

ci-dessous et constituent le fruit de l'expérience clinique d'une équipe de spécialistes de chirurgie thoracique de Toulouse.



2.2. Description de cet arbre décisionnel :

Le Professeur Dahan a déclaré que cet arbre décisionnel était sa vérité aujourd'hui et que les cheminements indiqués dans cet arbre reflètent les différentes étapes des démarches qui ont conduit à sa conception. Notons qu'à tout moment de cette démarche, la décision d'une opération chirurgicale peut être prise (ablation d'un morceau de trachée et raccordement des deux bouts restants) mais cet arbre veut montrer le large spectre d'initiatives qui peuvent être prises par voie endoscopique et qui peuvent éviter l'intervention chirurgicale.

ACTE PRÉLIMINAIRE MENANT AU DIAGNOSTIC :

Devant un patient se présentant aux urgences avec des signes d'étouffement, l'interne qui le prendra en charge va constater cet étouffement et il pourra reconnaître assez facilement les signes cliniques d'une obstruction. Ce faisant il vient de se livrer à une expérimentation générative : à partir de faits observés et générés par l'état du patient, il a émis une hypothèse.

Pour valider cette hypothèse (diagnostic d'obstruction au niveau de l'arbre respiratoire), il va quand cela est possible interroger le patient ; il met donc en évidence d'autres faits observés qui viendront valider son premier diagnostic. Ce faisant, il se livre à une expérimentation validative (cette expérimentation peut se résumer à : le patient soumis à une pathologie génère des observables, les faits expérimentaux que l'interne utilise pour valider son hypothèse). L'interne peut aussi valider cette hypothèse plus fortement avec des investigations utilisant scanner (sorte de radio) ou fibroscopie (minuscule caméra introduite dans l'arbre respiratoire pour voir effectivement la sténose).

Une fois le diagnostic conforté par ces expérimentations validatives, le patient peut être dirigé vers le service spécialisé où sa pathologie sera traitée.

PREMIER ACTE APRÈS DIAGNOSTIC :

Devant un patient présentant une obstruction de l'arbre respiratoire, l'acte devant être réalisé en premier lieu est la **DÉSOBSTRUCTION**. Il doit permettre au patient de ne pas mourir d'étouffement. Cet acte est une expérimentation validative d'une hypothèse qui ne se réduit pas seulement au diagnostic fait par l'interne ; l'hypothèse s'énonce ainsi « le patient a une obstruction et un instrument spécifique doit supprimer cette obstruction ». La validation est obtenue par la disparition de l'état pathologique. L'expérimentation a généré un nouvel état, des faits observables qui sont interprétés comme la résolution du problème initial.

Première action recommandée : dilatation au laser, c'est-à-dire destruction par un faisceau laser des tissus obstruant le tube respiratoire (un protocole spécial indique comment réaliser cette action avec une combinaison d'outils spécifiques : laser monté sur un endoscope par exemple et d'autres conditions…).

Conséquences de cette première action

Cette action doit mener à la guérison à court terme ! Toutefois, la récidive de la sténose est possible obligeant à répéter ces manœuvres de désobstruction. L'utilisation du laser se fait donc en boucle au sens de la programmation ; c'est l'intuition et l'expérience du Praticien qui va décider du nombre de tentatives d'utilisations du laser à réaliser avant de passer aux recommandations suivantes de l'arbre décisionnel proposé (entre 2 et 4 fois).

DEUXIÈME ACTE, CONSÉQUENCE DES RÉSULTATS DE LA PREMIÈRE ACTION

Le but de cette deuxième étape n'est plus de désobstruer à la demande mais d'éviter les récidives : c'est la « **CALIBRATION** ». Elle a pour objectif de maintenir la trachée à une ouverture constante et suffisante pour respirer normalement, essentiellement avec différents types de prothèses.

Amélioration du diagnostic en deux temps

Pour cela il est capital pour le thérapeute de savoir si cette sténose est d'origine tumorale ou traumatique (post réanimation en général).

Si elle est due à une tumeur, celle-ci peut-être bénigne ou maligne ; par ailleurs, il est important de savoir si le patient est porteur ou pas d'une trachéotomie. Dans ce dernier cas, on doit encore se poser la question de l'aspect de la sténose, est-elle « courte en diaphragme ou longue ».

Seconde action, conséquence du diagnostic précédent

C'est essentiellement la pose d'une prothèse adaptée qui doit mener à une guérison stabilisée.

Troisième action :

C'est une vérification endoscopique de l'état de la prothèse implantée.

Quatrième action

Cette action est une conséquence de l'observation réalisée au cours de la troisième action ; il peut s'agir d'un nettoyage de la prothèse, de son changement ou enfin de son ablation définitive.

2.3. Analyse de cet arbre décisionnel :

Cet arbre peut être appréhendé à trois niveaux

Niveau 1 :

D'abord, il décrit **le chemin de la découverte** des chercheurs qui, devant l'obligation d'agir ont dû prendre des initiatives. La répétition d'une de ces initiatives a montré les avantages et les inconvénients de cette attitude. Le chercheur a donc suggéré au praticien cette prise d'initiative particulière quand celle-ci élimine des inconvénients d'une initiative précédente même si elle en introduit d'autres qui seront traités expérimentalement ultérieurement. Le chercheur suggère de manière plus globale une succession d'initiatives conditionnées par les

hypothèses intermédiaires de son problème. On peut penser à une transposition du savoir savant bâti expérimentalement en un savoir-faire pratique.
Par sa forme cet arbre est donc un arbre généalogique de découverte qui mène au traitement générique d'un problème particulier.

Niveau 2 :

Il peut être considérée comme **méthode de résolution expérimentale d'un problème** proposée au praticien pour qu'il ne se retrouve pas dans les positions antérieures de ceux qui n'avaient pas cette méthode à disposition. Ici, c'est l'efficacité qui est cherchée : la résolution du problème est une nécessité car la vie du patient en dépend ; il n'est pas tolérable de ne pas choisir l'action la plus pertinente permettant d'accéder le plus tôt possible à la résolution du problème.

Niveau 3 :

Cet arbre est un **objet d'enseignement** ; il est transmis à celui qui ne connaît pas la démarche avec comme objectif que celui-ci se l'approprie mais aussi il a une valeur formative à la démarche expérimentale clinique avec l'article dans lequel il est inclus qui détaille les protocoles intermédiaires. On peut considérer qu'on enseigne la démarche de découverte : découvrir étant ici pris dans le sens de l'amélioration de l'état de santé du patient sur lequel les actions de cette démarche vont être opérées.

2.3. Proposition de formalisation :

Le problème posé au praticien qui va tenter de le résoudre est un problème qui nécessite d'agir, de prendre des initiatives concrètes, de réaliser une action ou un enchaînement d'actions.

Considérons les couples (H(t) ; e(t)) où H(t) est une personne considérée à un instant t et e(t) est l'état d'une partie P du système de fonctionnement de H, état qui se mesure par les valeurs 1 ou 0 (1 s'il y a sténose, 0 sinon) à ce même instant t.

On pourrait appeler le couple (H(t) ; e(t)), état clinique de H relatif à P à l'instant t. La particularité de l'état clinique est sa possible instabilité, c'est-à-dire que la fonction $t \to e(t)$ est une fonction en escalier prenant les valeurs 0 ou 1 usuellement croissante au sens large. Cela veut dire que concernant P, e(t) peut passer de la valeur 0 à 1 (le problème survient) ou de la valeur 1 à 0 (le problème médical disparaît, c'est-à-dire, le problème est résolu).

Cet arbre décrit donc une succession d'états cliniques $E(t_k)$ partant d'un état clinique $E(t_0)$, chaque état clinique étant obtenu par une action (expérimentation au sens du praticien) durant un temps Δt sur l'état clinique précédent.

On peut schématiser la démarche utilisée dans un cas particulier (si elle respecte les recommandations de l'arbre décisionnel), de la manière linéaire qui suit ; cette démarche s'achève dès qu'on arrive à un état clinique où le second terme du couple reste stabilisé à 0 dans le temps :

$$\boxed{E(t_0) \xrightarrow{A(t_0;\Delta t_0)} E(t_0+\Delta t_0).......E(t_1) \xrightarrow{A(t_1;\Delta t_1)} E(t_1+\Delta t_1)........E(t_2) \xrightarrow{A(t_2;\Delta t_2)}}$$

$$\boxed{t_0+\Delta t_0 \leq t_1} \qquad \boxed{t_1+\Delta t_1 \leq t_2}$$

Notons que $A(t_n;\Delta t_n)$ symbolise l'action opérée à l'instant t_n et qui dure un temps Δt_n. Cette action s'opère sur l'état clinique $E(t_n)$ pour aboutir à l'état clinique $E(t_n+\Delta t_n)$ que le praticien laisse évoluer jusqu'à l'état clinique $E(t_{n+1})$. Cet état clinique va déclencher une nouvelle action suivante seulement s'il est de la forme (H ; 1).

2.4. Remarques suggérées par cette formalisation

Le fait que l'état clinique (H(t), 0) ne soit pas un état stable mais puisse à tout moment basculer à l'état pathologique (H(t), 1), oblige le médecin à prendre régulièrement des initiatives pour vérifier si cette bascule n'a pas eu lieu et éventuellement d'autres initiatives pour corriger le nouvel état clinique pathologique réapparu. Cette nécessité permanente d'expérimenter est donc générée par le fait que la solution du problème n'est pas assurée dans le temps. Si on voulait mettre nos élèves devant une telle situation en mathématiques, il faudrait envisager des problèmes où la solution serait stable par morceaux dans le temps. Par exemple on pourrait envisager de faire reconnaître à nos élèves une transformation cachée dans Cabri dont la définition changerait dans le temps. Il serait intéressant de voir si un tel problème génèrerait chez les élèves chercheurs des procédures de résolution analogues à celles observées en sciences cliniques.

3. LES CARACTÉRISTIQUE D'UNE TELLE DÉMARCHE

3.1. Un processus cyclique :

Cette démarche présentée ci-dessus montre son caractère cyclique et chaque cycle est composé des étapes suivantes :

Étape 1 : Mise en évidence du problème par la valeur du couple (H,e) de la forme (H,1), c'est-à-dire par la donnée d'un état clinique qui nécessite d'être modifié dans le sens de l'amélioration.

Étape 2 : Le praticien réalise un diagnostic, c'est-à-dire, il se donne les hypothèses de son problème (pour cela il fait appel à ses connaissances théoriques) pour choisir l'action adéquate qui devra permettre de traiter le problème, c'est-à-dire de passer à un état clinique ramené à la normale.

Étape 3 : Le praticien réalise son action qui doit ramener immédiatement le patient dans un état normal, c'est-à-dire, doit régler le problème au moins immédiatement après l'action.

Étape 4 : Régulièrement des vérifications sont faites pour s'assurer que l'état obtenu est stabilisé dans le temps.

Si oui, ce cycle est un cycle clôturant la démarche .

Sinon, le praticien est ramené dans les conditions du début du cycle décrit et ce cycle était finalement un cycle intermédiaire de la démarche.

3.2. Rôle des connaissances dans les prises de décision d'investigation :

L'investigation est ici l'action qui va être opérée ; cette investigation ne peut être inférée que par des connaissances théoriques très précises. Ces connaissances théoriques engendrent une utilisation possible d'outils spécifiques associée aux hypothèses mises en évidence dans le cadre des connaissances théoriques repérées.

3.3 Validation immédiate et validation différée :

Le problème est traité si l'action choisie, l'investigation réalisée conduit à la guérison (disparition de la sténose).

La validation immédiate est obtenue instantanément si la manipulation a été faite suivant le protocole associé à l'utilisation de l'outil choisi dans ses conditions usuelles d'usage (le geste manipulatoire a été correctement fait).

La validation différée est obtenue quand, après un temps plus ou moins long après la réalisation de l'action, l'état clinique reste celui qui a été obtenu après la réussite de l'action opérée.

3.4. Nécessité de la connaissance d'outils et de leurs usages (schèmes d'utilisation professionnels) :

Nous avons évoqué les outils qui sont présentés dans l'arbre décisionnel et qui sont susceptibles d'être utilisés. Ceux-ci sont largement décrits, schémas à l'appui. De plus, leurs protocoles d'utilisation sont aussi décrits de manière très précise. La manière de les utiliser est présentée avec leurs conditions précises d'utilisation et des schémas illustratifs nombreux et détaillés (voir un tel schéma en annexe). Leurs schèmes d'usages sont réglementés. Ces schèmes sont stabilisés dans le temps mais néanmoins peuvent évoluer. De nouvelles techniques plus performantes peuvent être découvertes par expérimentation (une telle expérimentation peut être définie comme une action à but thérapeutique) et être institutionnalisées en de nouveaux schèmes d'usage.

3.5. Évolution des outils et des usages

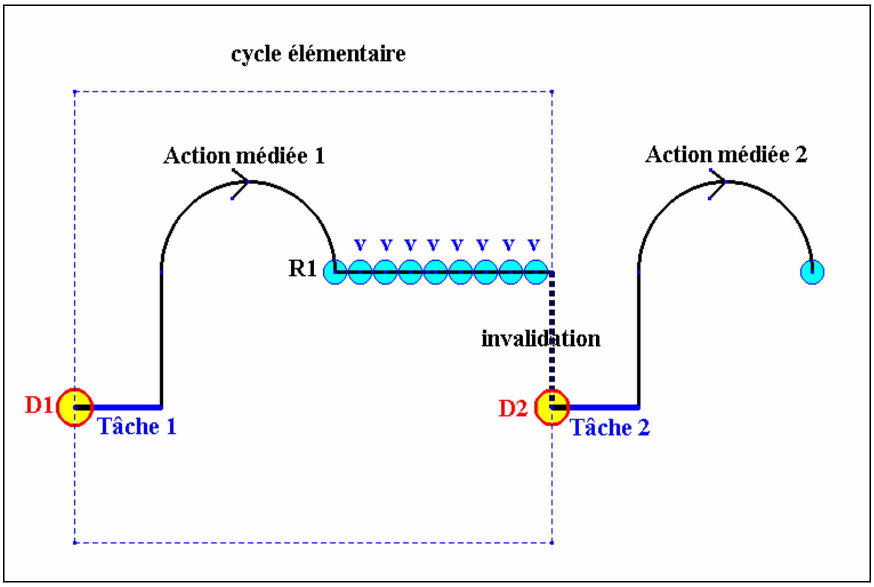
Les actions proposées dans l'arbre décisionnel recommandent donc l'utilisation d'outils spécifiques dans des conditions spécifiques pour des états cliniques spécifiques. Mais tous ces outils ont leurs avantages et leurs inconvénients. Les avantages se traduisent par une constance de la fonction e(t) à la valeur 0, sur un Δt le plus long possible mais leurs inconvénients peuvent se traduire par :

– Ou bien le basculement de la valeur de e(t) à la valeur 1, c'est-à-dire par la réapparition possible de la sténose après un intervalle de temps δt relativement cours (rechute).

– Ou bien des complications annexes préjudiciables pour la personne traitée (effets secondaires) et dans ce cas le praticien est amené soit à modifier l'outil soit à modifier le protocole pour essayer de minimiser ou supprimer les complications annexes, sachant que cette amélioration de l'expérimentation générera de nouveaux inconvénients. Ce nouveau couple (avantages, inconvénients) inférera le nouveau protocole associé éventuellement au nouvel outil créé ou aménagé à partir du précédent. Le nouveau schème d'utilisation va s'installer si l'expérimentation consistant en l'utilisation du nouvel outil avec son protocole associé a montré son efficacité au cours de répétitions multiples avec mises au points suivant la méthode des petits pas. Notons que les changements de stratégies à 180° sont exclus dans cet environnement expérimental et même considérés comme dangereux car la vie d'un patient est en jeu, ce qui n'est pas le cas en Mathématiques : une action sur un objet mathématique pour obtenir un résultat escompté même si elle est décidée de manière aléatoire peut être tentée ; de mêmes toutes les solutions possibles peuvent être testées mêmes si elles sont toutes invalidées expérimentalement. Il n'y a pas de pronostic vital impliqué par les échecs des tentatives faites.

4. PORTRAIT-ROBOT DE LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE : ÉTAT DE NOTRE ENQUÊTE

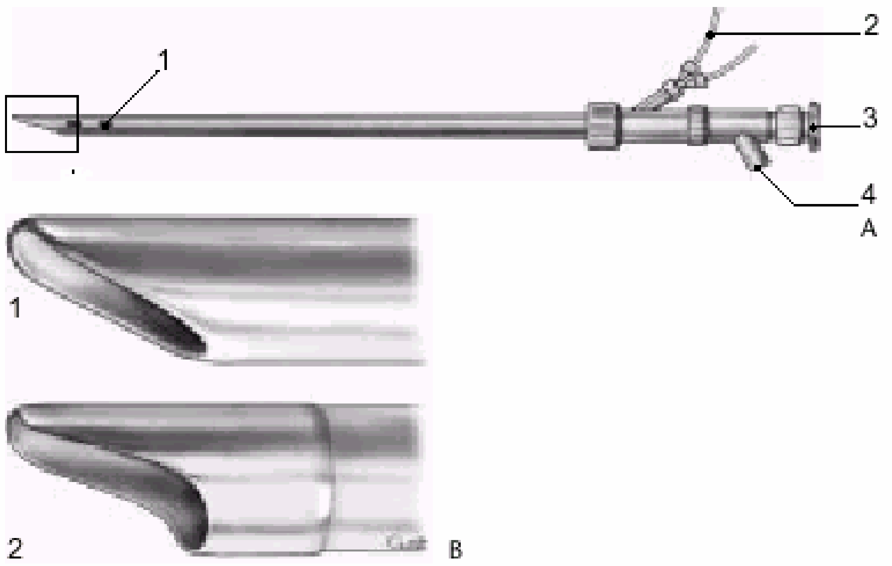
La démarche que nous décrivons est une démarche cyclique qui peut prendre l'aspect suivant :



D1 représente les données initiales (dans l'exemple présenté dans ce chapitre c'était le diagnostic d'obstruction résultat d'une ou d'expérimentations génératives) qui alliées aux connaissances mises en jeu vont inférer une tâche ; cette tâche va consister dans le choix et dans l'utilisation d'une action qui doit transformer les données en un résultat R1 qui devra être validé régulièrement dans le temps (le résultat n'est pas démontrable). Cette action est une expérimentation instrumentée de type validatif. Cette action nécessitera l'utilisation d'un matériel spécifique avec une technique appropriée et c'est en ce sens que nous la qualifions de « médiée ». Tant que le résultat reste validé, la démarche est interrompue (elle n'est jamais considérée comme finie). Le praticien a achevé sa première expérimentation.

Si une invalidation se produit, celle-ci conduit à une autre série de données D2 qu'il faudra traiter de manière analogue à D1, en prenant bien soin de réexaminer méticuleusement les données pour voir toutes les modifications qui sont apparues depuis la réalisation de l'action 1 ou même pour mettre en évidence des paramètres qui avaient été négligés dans D1.

ANNEXE



1 *Schéma du bronchoscope.*
A. Bronchoscope de Dumon 1. Fenêtre permettant la ventilation controlatérale ; 2. canaux opérateurs ; 3. canal pour optique, aspirateurs et pinces ; 4. canal pour respirateur.
B. Extrémités du bronchoscope. 1. Mousse pour dilatation ; 2. tranchante pour résection (Dumon).

Ce schéma illustre bien que devant un type de problème donné l'expérimentateur dispose d'un instrument et non d'un outil. Le schéma ci-dessus permet de visualiser l'outil en détail avec les schèmes d'usage recommandés, c'est-à-dire les techniques appropriées qui lui sont associées. L'équivalent en mathématiques expérimentalement médié par Cabri serait de disposer de Cabri-techniques spécifiquement associées à l'usage de Cabri dans la résolution d'une catégorie de problèmes. L'apparition de ces techniques dans notre travail correspondront à la mise en évidence de niveaux spécifiques de géométrie connexes à ceux de Parzysz auxquels nous nous référerons d'abord dans notre cadre théorique.

CADRE THÉORIQUE

1. EXPLOITATION HEURISTIQUE D'UNE FIGURE

Comme nous nous intéressons à la démarche de découverte expérimentale médiée par l'instrument Cabri et que Cabri donne accès à un monde de figures qui sont les fenêtres à travers lesquelles nous tentons de reconnaître les étapes d'une telle démarche, il est naturel de faire le point sur le lien **heuristique-expérimentation-figure**.

1.1. Heuristique selon Polya et Glaeser

1.1.1 L'heuristique selon Polya est l'art de résoudre des problèmes. Selon Glaeser, Polya développe dans ses ouvrages une **heuristique normative** qui se résume aux **conseils** qu'il donne à ceux qui veulent résoudre des problèmes.

Néanmoins, on trouve dans ces mêmes ouvrages une description des phases de la découverte au fil des exemples donnés. C'est dans un second temps que Polya s'appuie sur cette description pour isoler des méthodes ou des conseils (qualifiés respectivement d'algorithmes ou de procédologie par Glaeser en référence à Hirsch).

Par exemple, dans « Comment poser et résoudre un problème » (p. 148), il écrit : « En mathématiques comme en sciences naturelles et physiques, la découverte naît souvent de l'observation, de l'analogie et de l'induction ».

L'expérimentation telle que nous l'avons définie participe de l'observation et de l'induction quand elle générative. Elle produit les faits observables (les données) et le traitement inductif de ces faits observables peut générer une hypothèse qui est la découverte ou du moins la première étape vers une découverte prouvée (c'est-à-dire dont on va donner la preuve expérimentale ou la preuve mathématique, la démonstration). L'expérimentation serait donc potentiellement heuristique

1.1.2. L'heuristique selon Glaeser : celui-ci est plutôt intéressé dans son cadre didactique expérimental des Mathématiques par une **heuristique** qu'il qualifie de **descriptive** et qu'il caractérise comme **l'étude des démarches spontanées ou non** conduites par une personne confrontée à un problème. Il ne précise pas le niveau d'expertise de la personne confrontée au problème mais il reconnaît que les connaissances de cette personne vont influer sur les initiatives qu'elle va prendre (démarches spontanées ou non).

Il s'intéresse plus particulièrement à l'Intuition et l'Insight qu'il définit ainsi :

L'intuition est l'**aptitude** à **deviner une conclusion** à partir **d'informations incomplètes** qu'il appelle des indices (p. 114).

L'insight est l'**aptitude** à **deviner une conclusion** en présence **d'informations surabondantes**. Il permet donc de découvrir la structure cachée (p.114).

Là encore, une expérimentation de type génératif, produisant des données, est susceptible de mobiliser l'intuition ou l'insight de l'expérimentateur, c'est-à-dire respectivement de faire apparaître une généralité là où l'expérience produit du particulier ou de sélectionner une partie des données entre lesquelles un lien apparaîtra plus naturellement.

1.1.3. La notion de figure selon Jean-Marie Laborde

Au cours de la conférence plénière de la « 13th European Conference on Computational Geometry » qui s'est tenue à Antibes en 1999 Jean-Marie Laborde déclarait :

« ***So we can think of a figure as characterized by a set of properties, which could refer to as its specification. From a theoretical point of view, a figure is nothing else than a set of***

properties expressed in geometric terms, its specification. Dynamic geometry deals explicitly with configurations, where a configuration is a set of figures in the common sens, all sharing the same properties, or, one might say, the same “specifications”. This is how, from a naive perspective, geometry, geometric figures and dynamic geometry are linked »
Nous proposons cette traduction:
« ***Ainsi une figure peut être considérée comme caractérisée par un ensemble de propriétés que l’on peut appeler sa spécification. D’un point de vue théorique, une figure n’est rien d’autre qu’un ensemble de propriétés exprimées en termes géométriques, sa spécification. La géométrie dynamique s’occupe explicitement des configurations où une configuration est un ensemble de figures (le mot figure étant pris ici dans son acception commune) ayant toutes les mêmes propriétés ; on pourrait dire aussi, les mêmes « spécifications ». C’est ainsi que d’un point de vue naïf, la géométrie, les figures géométriques et la géométrie dynamiques sont reliées.*** »

Il nous paraît nécessaire de préciser que, pour nous, l’ordre des constructions est partie intégrante des spécifications d’une figure de Cabri. Par exemple la figure contenant un triangle et son cercle circonscrit (spécifications papier-crayon) peut être spécifiée par la donnée d’un triangle suivie de la construction du cercle circonscrit (lui-même obtenu par le passage par le point d’intersection de deux médiatrices) ou par la donnée d’un cercle suivie de la construction d’un triangle ayant ces trois sommets sur le cercle. Nous avons donc défini deux Cabri-figures différentes correspondant à une même figure papier-crayon. Les possibilités de manipulation de la figure dépendent de ses spécifications et plus particulièrement de l’ordre des constructions relatives à ses spécifications

La figure de Cabri qui est donc caractérisée par ses spécifications, va conserver celles-ci par manipulations. Le mouvement possible grâce à la dynamicité du logiciel va générer des données qui vont mobiliser intuition ou insight. Par exemple, l’activation du mode trace pour un objet particulier de la figure peut permettre de générer la nature de l’ensemble des positions de cet objet (intuition). Mais aussi, l’utilisation de l’outil « Cacher-Montrer » ou même des boutons « Cacher-Montrer » peut permettre de mettre de côté une grande partie des données de la figure pour se concentrer sur une partie d’entre elles afin de se replacer dans la situation précédente qui offrait la possibilité d’user de son intuition.

Nous venons de voir que dans l’environnement Cabri, l’expérimentation sur les figures pouvait aider l’expérimentateur à user de son intuition ou de son insight. Cette expérimentation nécessite une connaissance de l’instrument Cabri, c’est-à-dire de l’outil associé à des schèmes d’usages eux-mêmes heuristiques (ceci a été tout particulièrement noté pour les instruments utilisés en sciences clinique). Rappelons donc exactement la définition d’un schème selon Vergnaud.

1.1.3. Le concept de schème selon Vergnaud : résoudre un problème, c’est d’abord avoir envie de le résoudre, qu’il ait du sens, donc de disposer dans notre répertoire d’un ou plusieurs schèmes de traitement d’une situation qui a du sens. Vergnaud définit ainsi le schème :

Un schème est une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données.

Un schème est donc nécessairement composé de :
1 Un but ;
2 Un processus génératif de la conduite (qu’on peut analyser comme un ensemble de règles d’action, de prise d’information et de contrôle) ;
3 D’un système de concepts-en-actes et de théorèmes-en-actes qui permette de prélever l’information pertinente et de la traiter ;

4 Des possibilités d’inférence en situation (puisque aussi bien des ajustements, régulations et révisions sont possibles au cours du développement de l’activité).

L’expérimentation que l’on peut réaliser sur une figure de l’environnement Cabri dans le but de résoudre un problème, va dépendre de l’expertise de l’expérimentateur dans l’utilisation de l’instrument Cabri. Dans quelle mesure cette expérimentation va-t-elle mobiliser intuition et insight pour aller plus sûrement vers la découverte ? La question se résume de manière plus générale à : comment appréhender une figure pour rendre son traitement heuristique, c’est-à-dire pour mobiliser intuition ou insight plus sûrement vers la découverte ? Quels sont les schèmes d’usages qui vont rendre l’expérimentation productive de découverte ou qui vont donner plus de chances d’aller vers la découverte ? Raymond Duval a caractérisé les différentes appréhensions d’une figure et mis en évidence les appréhensions heuristiques que nous présentons dans le paragraphe suivant. Nous essaierons d’interpréter ces appréhensions dans le cas où la figure est une Cabri-figure.

1.2. Les différents fonctionnements d’une figure dans une démarche géométrique (Raymond Duval)

1.2.1. Une typologie des appréhensions d’une figure

Dans son article intitulé « Les différents fonctionnements d’une figure dans une démarche géométrique » (Repères IREM N° 17 Octobre 1994), R. Duval s’intéresse au fonctionnement heuristique d’une figure et est amené à proposer les différentes appréhensions d’une figure géométrique qui suivent :

L’APPRÉHENSION PERCEPTIVE :
C’est à son avis la plus immédiate, celle qui permet d’identifier ou de reconnaître immédiatement une forme ou un objet, soit dans un plan soit dans l’espace. Il ajoute que cette appréhension perceptive reste trop globale et s’en tient à des constatations.

L’APPRÉHENSION DISCURSIVE
Toujours à son avis la plus simple, celle où une figure est regardée par rapport à une dénomination (Soit un…), une légende ou une hypothèse qui en fixent certaines propriétés. Elle correspond de plus à une explicitation d’autres propriétés mathématiques que celles indiquées par la légende ou les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive.

L’APPRÉHENSION SÉQUENTIELLE
La mieux prise en compte dans le cadre de l’enseignement, c’est celle qui concerne l’ordre de construction d’une figure.

L’APPRÉHENSION OPÉRATOIRE
La plus méconnue, « bien que sa fonction d’exploration heuristique soit celle qui est la plus fréquemment invoquée pour justifier l’utilisation des figures dans une démarche géométrique. C’est celle qui est en liaison avec des modifications possibles de cette figure » ; Duval en distingue trois :

les modifications	**consistant**
MÉRÉOLOGIQUES	dans le partage d’une figure en parties pour les recombiner en une autre figure
OPTIQUES	dans l’agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure

POSITIONNELLES	soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle (Duval 1988)

En annexe 1, nous présentons une illustration de ces différentes appréhensions avec des exemples traités dans l'environnement Cabri. Nous y donnons aussi notre interprétation de ce que peut être une appréhension figurale dans un tel environnement.

1.2.2. La thèse de l'indépendance de ces appréhensions

Après avoir introduit les notions de structures dyadique et triadique de la représentation figurale dans une démarche géométrique, Duval en infère qu'un travail sur l'appréhension discursive ou sur l'appréhension séquentielle d'une figure ne développe pas des compétences d'exploitation heuristique d'une figure. Il ajoute : « Un travail spécifique et irremplaçable prenant en compte les facteurs de lisibilité relatifs aux modifications figurales s'avère donc nécessaire ».

L'appréhension opératoire est celle qui en raison de sa grande proximité avec l'appréhension perceptive implique un fonctionnement selon la structure triadique où les significations perceptives gardent leur autonomie par rapport à ce qu'elles représentent. Par conséquent, l'appréhension opératoire est celle qui permet l'exploitation heuristique d'une situation.

1.2.3.Compartimentalisation et traitement figural heuristique :

Duval a remarqué que les étudiants qui montrent des compétences dans les activités de déduction et de construction compartimentalisent celles-ci. C'est-à-dire que ces connaissances restent très souvent inutilisées et par conséquent leurs performances dans la résolution de problèmes sont beaucoup plus faibles qu'elles ne pourraient et ne devraient être.
Il pense donc qu'un travail spécifique de chacune de ces appréhensions et en particulier l'appréhension opératoire devrait permettre aux figures de devenir un registre d'exploration heuristique.

1.3. Expérimentation sur des figures

Lorsqu'une figure est le support principal de la recherche d'un problème, il est normal de se poser la question de ce que peut être une expérimentation qui permettrait d'avancer vers la solution : les différentes appréhensions ne décrivant pas les démarches qui les englobent, il est donc indispensable de faire le point sur les différents cadres possibles d'expérimentations connus. Nous nous proposons de nous servir des cadres suggérés par les travaux réalisés en sciences expérimentales et tout particulièrement par Johsua et Dupin en France et Robin Millar au Royaume uni en liaison avec deux approches du rôle de l'expérimentation en sciences. Les options possibles dans le recours à l'expérimental dans l'enseignement doivent permettre de prévoir les démarches possibles des apprentis chercheurs, c'est-à-dire des étudiants à qui un problème est soumis après avoir reçu un enseignement ayant eu recours à une démarche expérimentale spécifique.

2. LE RAPPORT À L'EXPÉRIMENTAL EN PHYSIQUE

2.1 Le rapport à l'expérimental en physique en France (selon S. et M-A Johsua)

Quand et comment recourt-on à l'expérimental en Mathématiques et en Physique ? Des éléments de réponses sont structurés dans l'article « Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique » (RDM vol 8 1987 et vol 9 1988). Les auteurs y notent en particulier que dans l'enseignement des Mathématiques, l'attrait du concret semble de plus en plus présent et demande à être questionné. Ils mènent une analyse à la fois didactique et épistémologique de cette problématique parallèlement en Mathématiques et en Physique. Le lien entre la constitution du savoir savant et sa transposition didactique est aussi évoqué, ce qui doit nous permettre d'enrichir notre compréhension de l'expérience dans une démarche heuristique. On peut traduire ce dernier point comme une tentative pour comparer le rôle de l'expérimentation dans la constitution de la science et le rôle de l'expérimentation dans l'enseignement de la science ou aussi comme une tentative pour comparer la manière d'expérimenter des chercheurs (pour faire la science) et la manière d'expérimenter des apprentis chercheurs (pour apprendre la science). Pour reprendre une terminologie issue de la théorie anthropologique de Chevallard, il s'agit aussi de voir comment est organisée la transposition didactique de la démarche de découverte expérimentale.

2.1.1. Théorie scientifique et base observationnelle

Le positivisme repose essentiellement sur le postulat d'une coupure entre théorie scientifique et base observationnelle ; la base observationnelle fournit le cadre de l'interprétation des algorithmes de la théorie. Cela implique qu'il faut postuler à la fois l'existence d'une base observationnelle complètement indépendante de toute théorie et la possibilité de réduire toutes les données théoriques à des données observables. Ce double postulat qui a été fortement contesté dès le début du XX^{e} siècle a conduit à une description moins unilatérale des rapports entre théorie et expérience comme détaillé dans le paragraphe suivant.

2.1.2. Modélisation et expérience :

Attachons nous d'abord à préciser

les notions de « modèle » et de « modélisation »

L'abstraction :

La dialectique exploration-interprétation renvoie à une autre dialectique qui est la dialectique concret-abstrait. Le processus intellectuel qui permet d'aller du concret à l'abstrait, celui qui permet à la pensée de se détourner de toute considération concrète est ce que l'on nomme usuellement l'abstraction. Plus précisément, on peut définir l'abstraction comme « *l'attitude opératoire qui devrait permettre à l'esprit scientifique de déterminer expérimentalement un ensemble de rapports constants entre des faits pour en abstraire inductivement une loi* ».

L'abstraction dans le sens que nous avons rappelé ainsi que dans les autres qui pourraient être acceptés est donc « *un travail formel structurant le donné selon quatre opération mentales bien distinctes : simplification, généralisation, sélection, schématisation. Celles-ci correspondent à quatre processus de cognition : idéation, conceptualisation, classification, modélisation* »

L'ultime processus intervenant dans l'abstraction est donc la modélisation : ce mot apparaît avec le verbe « modéliser » seulement en 1975 ; ce verbe a été créé pour donner au verbe modeler un sens spécifique en relation avec l'emploi didactique en sciences de la notion de modèle. Notons que le verbe anglais « to model » et le nom « modelling » apparaissent dans ce sens en 1965.

« Modèle »
Ce mot sous sa forme « modelle » (1542) est un emprunt fait par le langage des arts au mot italien « modello » (figure destinée à être reproduite) lui-même issu du latin tardif « modellus » altération du latin « modulus » (module, moule).
Dans un premier sens un « modèle » serait « un système représentant les structures essentielles d'une réalité ». Le mot anglais « model » est attesté dans ce sens dès 1913 (Niels Bohr) ; l'emploi en français ayant du suivre peu après.
Ce mot a donc eu pendant très longtemps le sens de « ce qui sert d'objet d'imitation pour faire ou reproduire telle ou telle chose ».
Plus tard ce terme a pris dans la méthodologie des sciences un sens dont l'origine est technologique : là, le modèle est la maquette, objet réduit et maniable qui reproduit sous forme simplifiée les propriétés d'un objet de grandes dimensions. Le modèle désigne donc « toutes les figurations ou reproductions qui servent les buts de la connaissance ».
Si on se réfère à Noël Mouloud (Encyclopedia Universalis), le modèle remplit deux fonctions majeures que l'on va retrouver dans la suite :
« ***Il peut être une matérialisation des énoncés de la science dans un objet concret, presque autonome, que l'intuition ou la pensée ont des facilités pour cerner*** ». Nommons ce type de modèle (M1).
« ***Il peut être aussi une transcription abstraite mais contrôlée par la pensée logique et mathématique, d'une réalité concrète, empirique, dont l'étude directe ne donnerait que des relations approximatives*** ». Nommons ce type de modèle (M2).

Revenons maintenant aux propositions de l'article de Johsua et Dupin :
En Physique
Le **modèle** en physique relève entièrement du domaine du théorique où une représentation d'une situation réelle est construite. Cette représentation suivant Halbwachs est, contrairement à l'option positiviste, une construction théorique. C'est donc un modèle du type (M2). L'expérience relève d'une suite d'actions sur la réalité, produites directement ou indirectement par l'homme. La validité du modèle est appréciée par le test de comparaison des valeurs calculées dans la théorie et celles mesurées dans l'expérience. Jusqu'à présent, concernant les modalités de production des modèles, Johsua précise que personne ne retient l'hypothèse d'une inférence conduisant des données observationnelles à la théorie modélisée. Pourtant, cette hypothèse est à la base de la réflexion pédagogique concernant les sciences physiques.
En Mathématiques
Là, le **modèle** est souvent considéré comme un champ d'interprétation d'une axiomatique ou d'une théorie (Badiou). Cette fois le modèle concerné est un modèle de type (M1). Néanmoins Lakatos décrit des mécanismes de **modélisation** en Mathématiques étonnamment proches de ceux de la Physique. Balacheff a d'ailleurs bien montré que le mécanisme de la preuve, loin de se résumer à la démonstration, fait usage d'un intense va-et-vient entre la théorie et l'expérience.
Si on veut considérer les Mathématiques comme une science expérimentale, il faut admettre que l'expérimentation porterait sur un domaine déjà mathématisé. Les objets mathématiques sur lesquels portent les expériences possibles qui devraient permettre par leur étude d'accéder au niveau de la structure nous fourniraient la base observationnelle donnant accès à la théorie. Dans ce cas, le modèle est généré par l'expérimentation ou bien l'expérimentation sert à montrer le modèle ; nous sommes devant un modèle de type (M2) : si par exemple, on considère la définition du corps des réels comme un modèle mathématique du continu géométrique perceptible, nous sommes encore devant un modèle de type (M2). Comme le plus souvent, en mathématiques, l'accent est mis sur la démonstration au niveau le plus

général, le domaine expérimental perd alors tout intérêt. L'environnement de géométrie dynamique Cabri donnant accès aux objets mathématiques et à la possibilité d'expérimenter sur ces objets peut être considéré, lui, comme un modèle de type (M1).

2.1.3. Les options « synthétique » et « analytique » dans le recours à l'expérimental

L'enseignement de la physique avec une composante expérimentale présente un premier choix :

– L'**option analytique** qui est celle où on renonce aux liens qui unissent modèles et phénomènes (théorie et expérience) ;

– L'**option synthétique** qui vise à une introduction simultanée des aspects conceptuels et phénoménologiques.

En Mathématiques, l'alternative entre les options « synthétique » et « analytique » est aussi présente, mais l'option « synthétique » est rarement observée en dehors des travaux de recherche.

Dans l'option analytique, deux sous-options sont possibles selon le point de départ choisi, « modèle » ou « expérience ».

Pour résumer,

En mathématiques, dès le niveau secondaire, le point de départ a été théorique (ère des Mathématiques modernes), la théorie étant la base sur laquelle les élèves appliquent et expérimentent suivant des règles fixées. Ensuite un renversement de tendances a été noté au primaire et dans les premières années du collège et maintenant dans le secondaire avec un recours systématiquement préconisé à l'expérimental, au concret comme point de départ.

En physique, le point de départ théorique existe, par exemple l'introduction de l'électromagnétisme par les équations de Maxwell, mais plutôt à des niveaux universitaires ; au niveau du secondaire ce choix n'est jamais pratiqué.

On note donc une prédominance de l'option analytique à point de départ expérimental.

Ce choix a posé un problème récurrent de méthode.

En physique, c'est la méthode expérimentale chère à Claude Bernard qui envahit le domaine pédagogique ; il s'agit de passer le plus vite possible des faits à la loi. Il faut faire parler l'expérience avant toute chose et dans ce qu'elle a de plus précis, les mesures qui génèrent des graphiques donc les lois par un processus d'induction par lequel l'élève construirait ses connaissances.

En Mathématiques, le retour du concret par l'intermédiaire des travaux pratiques en 1960 est prôné avec pour but d'amener le plus grand nombre vers l'essence abstraite des Mathématiques. La démarche préconisée par les promoteurs des mathématiques modernes, consiste à placer les élèves devant des « situations » mathématiques pour les habituer à réagir devant elles. La méthode a posé problème aux rédacteurs d'instructions qui n'ont trouvé d'autre solution que de séparer dans le temps et de façon drastique le recours à l'expérience et au concret d'un côté, le discours théorique de l'autre.

Dans un tel cadre, la liaison entre l'expérimental (concret) et le modèle (domaine conceptualisé) n'est pas considérée comme essentielle :

– Soit la priorité est mise sur l'expérience qui devient manipulation et le modèle est limité à l'apprentissage d'un langage.

– Soit la priorité est mise sur le modèle qui devient axiomatique et les expériences ne sont que des vérifications aussi abstraites que le modèle.

Le vrai problème disparaît dans un tel système :

La disparition de la modélisation fait que l'expérimental n'est plus producteur de sens pour les concepts à apprendre.
De plus, dans le domaine des activités expérimentales, « savoir manipuler » reste le seul objectif visé.

Le rapport scolaire à l'expérimental peut se résumer naïvement par deux options : – L'option inductiviste, fortement présente en Physique, qui prétend dégager une modélisation conceptuelle de l'observation ou de la pratique expérimentale concrète selon un cheminement naturel sans rupture majeure. – L'option de la rupture-démonstrative entre une série d'activités fermées sur elles-mêmes et une présentation axiomatique ultérieure d'un domaine théorique qui pourrait abstraitement y correspondre.

2.1.4. Cadre expérimental de transmission du modèle

2.1.4.1. Proposition expérimentale du problème ou monstration : l'existence des problèmes à résoudre n'est pas une donnée naturelle ; c'est d'abord un donné scientifique et ensuite un donné didactique. La transmission d'un problème à une classe qui le fait sien, que Brousseau appelle la dévolution, est appelée par les Physiciens la proposition. Cette proposition se fait de manière expérimentale par l'intermédiaire de la « monstration » : un phénomène est montré qui pose un problème à résoudre. Une monstration doit être efficace dans la mesure où elle doit éliminer sans le dire tous les éléments non pertinents au traitement ultérieur du problème proposé. La monstration doit être le passage éphémère vers les bases observationnelles, les « faits » de la démarche positiviste. L'étude des éléments pertinents est l'étape devant mener à la conceptualisation.
La différence, en mathématiques, est que le niveau expérimental est déjà mathématisé : un problème de robinets n'est pas un problème de physiciens, car l'hypothèse de l'écoulement du fluide à débit constant est implicite et préalable au discours mathématique. Cette monstration semble plus aisée en mathématiques en particulier à cause de l'espace dans lequel l'expérience peut être réalisée, un espace à un certain degré épuré, voire abstrait. L'isolement d'un phénomène demande en physique un travail didactique plus lourd qu'en Mathématiques ; la vérification de la commutativité de l'addition qui peut être faite en environnement papier-crayon simplement par répétition de la même expérience en est une illustration.

2.1.4.2. Transmission du modèle

Un modèle étant toujours postulé et jamais établi expérimentalement, deux types d'utilisation de l'expérimental sont possibles en Physique, fondées sur deux types de validation de la transmission du modèle.

Validations du modèle en Physique

Validation implicite ou opératoire
Le maître s'appuie sur une expérience de référence pour exposer le modèle ; chaque difficulté d'exposition sera surmontée grâce à un retour sur l'expérience de référence. Le but est de faire admettre la plausibilité du modèle en s'appuyant sur cette expérience de référence. L'étape suivante consistera à faire passer le modèle sous la responsabilité des élèves par des expériences de confirmation et de renforcement en particulier quand on veut établir plus solidement la plausibilité du modèle.

La validation du modèle est donc ici implicite et se résume à :

– la vérification de la correspondance du modèle à l'expérience de référence ou aux expériences de confirmations ;
– la mise en pratique du modèle ou certaines de ses implications dans des expériences de renforcement.

Validation explicite ou démarche de preuve
Il ne s'agit plus ici d'un processus de vérification de la correspondance modèle-expérience de référence mais d'un processus de débat élaboré en commun par les interlocuteurs qui vont substituer plusieurs modélisations possibles à celle amenée par l'expérience de référence. On retrouve la démarche de preuve au sens de Balacheff. Des expériences tests sont introduites cette fois pour essayer d'invalider telle ou telle proposition. Ce type de validation n'est pas incompatible avec le type précédent auquel on peut être ramené pour une validation opératoire du modèle sélectionné comme plausible.

Validations du modèle en Mathématiques
M.-A. Johsua et S. Johsua considèrent que la différence essentielle avec la physique, c'est qu'en Mathématiques le modèle est toujours ***a priori*** supposé démontrable. Ils proposent dans ce cas trois types de validations :

Validation opératoire implicite
Dans ce type de validation, la démonstration n'est même pas signalée. L'expérience monstrative sert d'expérience de référence et le discours expositif a pour but d'extraire les règles d'actions et de calculs. Ces règles doivent être admises ; il peut y avoir nécessité de les confirmer en répétant l'expérience de référence, ce qui est plus aisé en mathématiques pour les élèves. Cette validation est très fortement connectée à l'apprentissage des algorithmes.
Elle est donc obtenue à partir d'une expérimentation générative : cette expérimentation induit la loi à découvrir qui est immédiatement admise.
Plutôt que de parler de validation, il serait préférable de parler de la transmission du modèle du Professeur à l'élève par l'intermédiaire d'un exemple particulier à fort pouvoir génératif (une expérimentation produisant une donnée particulière). L'expérience est validative pour le Professeur qui la présente et générative pour l'élève qui la reçoit.

Validation opératoire formelle
La démonstration est prise en charge par le professeur et le modèle ne peut plus être contesté. L'algorithme à apprendre est institué, stoppant ainsi toute autre conjecture ou pratiques locales ou tâtonnantes. L'élève fait fonctionner le modèle pour l'acquérir.
L'expérimentation telle que nous l'avons définie est donc absente de ce type de validation.

Validation explicite démonstrative
S'il est exclu en Physique de démontrer le modèle, il est acceptable de produire des modèles à validité locale qui peuvent servir d'intermédiaires pour accéder aux modèles canoniques.
Il est possible de faire de même en Mathématiques si on définit des niveaux de rigueur successifs : par exemple, pour prouver qu'un angle est droit, on peut accepter une mesure avec un rapporteur au CM2, une démonstration dans le cadre d'une théorie locale en Quatrième et le calcul d'un produit scalaire en terminale.
Cette pratique de validation pose un problème plus particulier en Mathématiques : le changement de registre au moment du passage à la démonstration apparaît comme une contrainte forte. Il n'est même pas établi que la démonstration soit conçue comme nécessaire

dans ce type de validation alors qu'elle devrait être le point d'orgue d'une démarche de preuve (Balacheff 1982).

Dans ce cas, on constate que moins le niveau de rigueur est élevé plus l'expérimentation prend du sens : dans l'exemple précité, si on se place au premier niveau de rigueur envisagé, l'élève conjecture visuellement que l'angle est droit (expérimentation générative à partir d'un cas particulier) et il valide sa conjecture en mesurant avec le rapporteur (expérimentation validative). Si on se place au niveau supérieur de rigueur, l'expérimentation disparaît à nouveau complètement pour faire place à une démonstration qui, la plupart du temps, n'est possible que si l'élève a acquis les savoir-faire adéquats.

2.1.5. Rôle de l'expérimentation dans l'enseignement scientifique français

En résumé, on distingue deux manières de recourir à l'expérimental dans l'enseignement des sciences physiques et des mathématiques :

♦ La première qui disjoint les faits observables produits par expérimentation de la théorie (du modèle, de la loi) qui est censée être associée à ces faits ; c'est l'option analytique.

♦ La seconde qui mêle les faits observables produits par expérimentation et la théorie (du modèle, de la loi) qui est censée être associée à ces faits ; c'est l'option synthétique.

Le paradigme de cet enseignement en France est largement dominé par l'option analytique à point de départ expérimental.

La transposition en classe se réalise essentiellement de deux manières :

♦ Une expérimentation ayant pour rôle de permettre d'induire au plus vite une loi (expérience générative) suivie d'expérimentations de vérifications.

♦ La démonstration qui peut être considérée comme une expérimentation générant la loi, spécifiquement en mathématiques. En sciences physiques, il s'agit d'expérimenter pour faire le choix entre différents modèles (par l'intermédiaire d'un débat).

On constate que, dans cet environnement, l'expérience est proposée, imposée à l'expérimentateur. Les données observables sont souvent repérées pour lui et il n'a plus qu'à se laisser guider. L'initiative expérimentale est entre les mains de celui qui propose l'expérimentation : en général, c'est le Professeur qui conçoit et organise l'expérience pour l'étudiant qui doit en dégager ce que le Professeur avait prévu. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter un autre environnement expérimental plus ancré dans la tradition anglo-saxonne où l'expérimentateur se voit confier une tâche problématique pour laquelle il devra mobiliser ses connaissances tout autant que ses habiletés manipulatoires. L'apprentissage se fera cette fois dans la conception de l'investigation plus que dans la lecture unique des données générées et sélectionnées par celui qui propose l'expérimentation et qui n'est pas le sujet didactique en situation d'apprentissage.

2.2. Le rapport à l'expérimental en physique au Royaume Uni (modèle des cadres d'investigation selon Lubben et Millar)

2.2.1. Le modèle issu du projet PACKS

Dans son article intitulé « Investigation des élèves en sciences : une approche fondée sur la connaissance », Robin Millar présente les recherches menées dans le cadre du projet PACKS (« Procedural and Conceptual Knowledge in Science », c'est-à-dire, « Connaissances procédurales et conceptuelles en sciences ») et plus particulièrement le modèle qui met en relation la performance dans les tâches d'investigation scientifique et les différents aspects de la compréhension requise pour réussir de telles tâches.

Quatre catégories de compréhension sont mises en évidence dans l'organigramme qui suit : les catégories A, B, C et D sont celles apparaissant sur la partie gauche de cet organigramme. Millar rappelle que le passage d'une étape à l'autre dans la série des étapes à réaliser dans une investigation typique (étapes symbolisées sur la partie droite de l'organigramme : il y en a cinq) suppose des décisions implicites ou explicites et que les quatre catégories de compréhension précitées interviennent dans ces décisions de différentes manières.

2.2.2. Cadres d'investigation et compréhension de la preuve expérimentale

Dans le modèle PACKS, nous nous intéresserons d'abord à la catégorie A qui renvoie à la compréhension par les élèves du but de la tâche d'investigation qu'ils sont en train de réaliser. Millar appelle cette catégorie « cadre d'investigation ».
Il nous propose cette typologie des cadres d'investigation, que nous présentons dans le tableau suivant et qui a été mise au point d'une manière double, par analyse ***a priori*** puis modifiée et amélioré empiriquement :

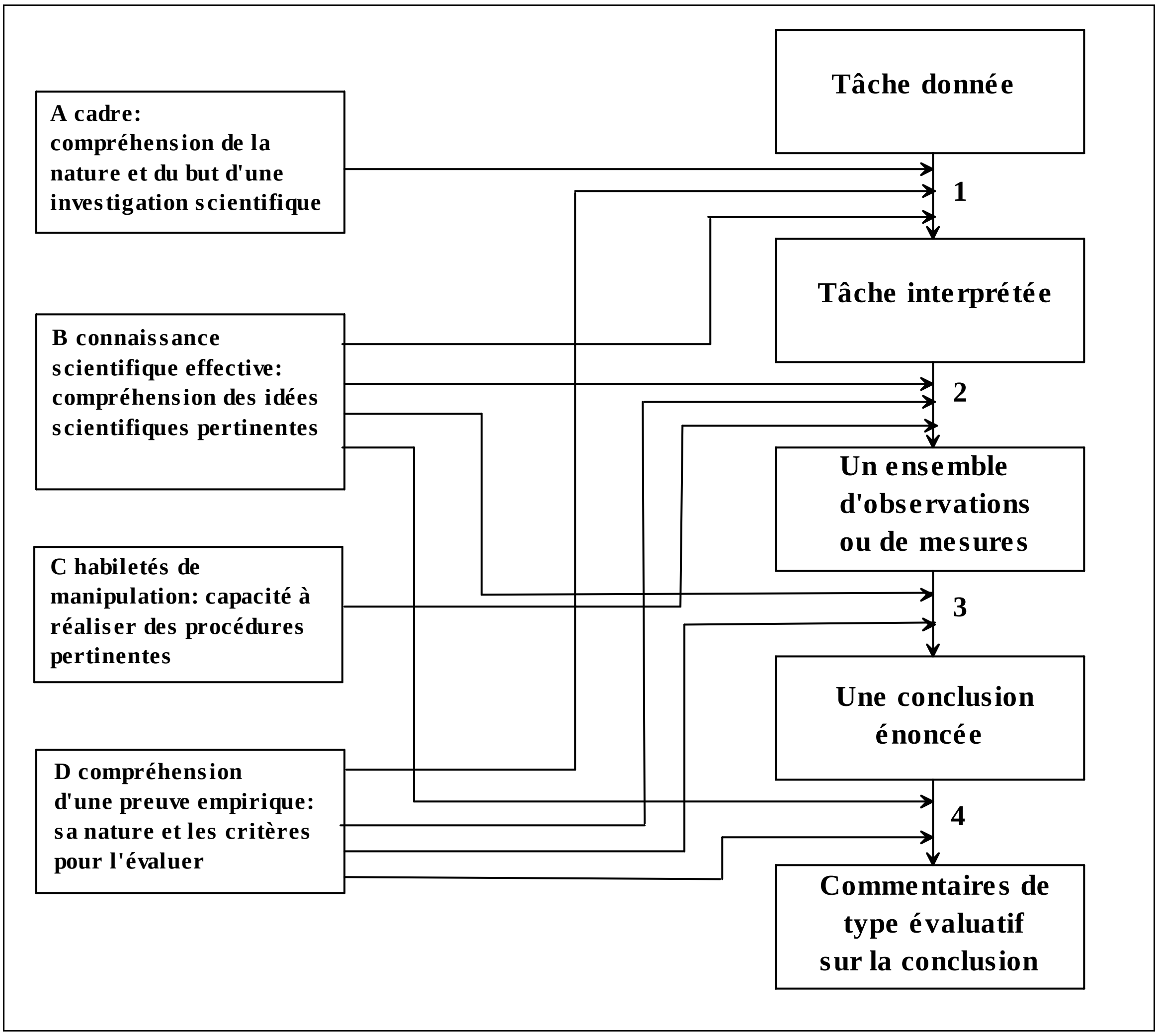
Cadre d'engagement	1	**Engagement et activité** utilisant le matériel proposé sans plan ou sans but évident
Cadre de modélisation	2A 2B 2C	**Modélisation** pour produire un effet physique souhaité **Modélisation** pour obtenir un effet souhaité **Modélisation** pour produire un phénomène souhaité
Cadre d'ingéniérie	3A 3B	**Ingénierie au hasard** : optimisation de l'effet souhaité par essai et erreur **Ingénierie par itération** : recherche d'une combinaison de facteurs optimisant l'effet souhaité
Cadre scientifique	4A 4B 4C 4D	**Scientifique empirique (comparaison)** : utilisation de deux valeurs (souvent des valeurs extrêmes) de variables indépendantes **Scientifique empirique (tendance)** : utilisation d'au moins trois valeurs de variables indépendantes pour établir une tendance **Scientifique empirique (relation)** : utilisation d'au moins trois valeurs de variables indépendantes pour établir une relation fonctionnelle **Scientifique explicatif** : utilisation de mesures pour tester une prévision fondée sur un modèle explicatif, moyen pour explorer l'utilité de ce modèle

Dans le même modèle PACKS, nous nous intéresserons ensuite à la catégorie D qui renvoie à la compréhension par les élèves de la preuve expérimentale. Millar précise à quels aspects du travail des élèves il se réfère quand il parle de ce type de compréhension à :

- des indices	qu'ils sont conscients	qu'il y a (inévitablement) de l'incertitude dans leurs données
- des indices	qu'ils connaissent	des manières d'évaluer le degré d'incertitude attaché à leurs données
- des indices	qu'ils savent	minimiser l'incertitude attachées à leurs données

- une réticence	à tirer une conclusion ferme	à partir de différences minimes dans leurs mesures ou une volonté de conclure qu' « on ne peut pas conclure »

Ces indices ont été clairement identifiés dans les expérimentations faites. Il s'agira de faire de même lors de l'utilisation ultérieure de ce modèle dans notre travail.
L'organigramme qui suit est donc celui qui résume le modèle PACKS reliant compréhension et performance dans l'investigation :



Nous avons commencé à noter une certaine corrélation entre le niveau de rigueur des mathématiques utilisées et la plus ou moins grande tendance à expérimenter pour aller vers la découverte. C'est pourquoi nous avons choisi de rappeler les niveaux de géométries proposés par Bernard Parzisz en relation avec des tâches de résolution de problèmes géométriques.
Ce cadre théorique proposé par Bernard Parzysz, qui a pour origine le modèle proposé par Alain Kuzniak et Catherine Houdement (autour d'un thème largement étudié par Berthelot et Salin), va nous permettre d'introduire les niveaux de géométrie concernés par les différentes phases de la démarche expérimentale telles que nous les mettrons en évidence. Nous espérons que cet appariement permettra par la suite de mieux maîtriser les ingénieries didactiques intégrant telle ou telle phase de cette démarche.

3. NIVEAUX DE GÉOMÉTRIE (PARZISZ)

3.1. Modèle de P. Van Hiele (1984) Parzysz présente comme suit ce modèle distinguant cinq niveaux dans le développement de la pensée géométrique chez l'enfant :

- Niveau 0 (visualisation) où les figures sont identifiées par leur aspect général.

- Niveau 1 (analyse) où l'enfant commence à discerner les propriétés des figures, mais sans pouvoir encore les expliciter.

- Niveau 2 (déduction informelle) où l'enfant peut établir des relations intra et interfigurales. Les définitions font sens, les résultats obtenus empiriquement sont souvent utilisés conjointement avec des techniques déductives.

- Niveau 3 (déduction formelle) où la déduction est perçue comme outil de validation, à l'intérieur d'un système axiomatique ; il en est de même du rôle respectif des notions primitives, des axiomes, des définitions, des théorèmes.

- Niveau 4 (rigueur) où l'élève (l'étudiant) est capable de se placer dans différents systèmes axiomatiques (géométries non euclidienne, par exemple) et de les comparer.

3.2. Le modèle de Houdement-Kuzniak qui s'inspire des travaux de Gonseth, définit trois types de géométries distingués par les rapports qu'entretiennent intuition, expérience et déduction, et dénommés respectivement :

– ***Géométrie naturelle* (G1),**

– ***Géométrie axiomatique naturelle* (G2),**

– ***Géométrie axiomatique formaliste* (G3).**

La première « confond géométrie et réalité » (comme dans les niveaux 0 et 1 de Van Hiele).

La seconde est conçue comme un « schéma » de cette réalité (niveaux 2 (?) et 3 de Van Hiele).

Dans la troisième, enfin, on « coupe le cordon ombilical » avec la réalité (niveau 4 de Van Hiele).

3.3. Les trois types de rapport à l'espace de Michel Henry dans l'enseignement / apprentissage de la géométrie:

Parzysz les rappelle ainsi avant de passer à sa proposition :

(i) **la situation concrète**.

(ii**) une première modélisation**, consistant en *« l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants. (...) La description qui en découle est alors une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. »* (loc. cit. p. 28).

(iii) **une mathématisation**, qui s'opère à partir du modèle précédent.

3.4. Le modèle de Parzysz constitue un essai de synthèse des modèles précédents ; il comporte en particulier une articulation légèrement différente de celle proposée par Houdement-Kuzniak. Les éléments sur lesquels repose ce modèle sont, d'une part, la nature des objets en jeu (physique *vs* théorique), d'autre part, les modes de validation (perceptif *vs* logico-déductif). Partant de la « réalité », ou encore du « concret » (G0), qui n'est pas géométrique, Parzysz oppose d'une part une géométrie non axiomatique, s'appuyant sur des situations concrètes qui sont idéalisées pour constituer le « spatio-graphique » (G1) et d'autre part une géométrie axiomatique, l'axiomatisation pouvant être explicitée complètement (G3) ou non (G2), et la référence au « réel » étant facultative pour G2 (mais pas pour G1) ; dans le dernier cas, il parle de géométrie *proto-axiomatique*. Ce que nous résumons ainsi :

Le modèle de Parzysz est constitué
D'une part, d'une géométrie non axiomatique

> **G1** qu'il qualifie de géométrie *proto-axiomatique* (à cause de la référence au réel), s'appuyant sur des situations concrètes qui sont idéalisées pour constituer le « spatio-graphique » .

Et d'autre part d'une géométrie axiomatique
composée de :

> **G3** où l'axiomatisation est explicitée complètement et de
> **G2** où l'axiomatisation n'est pas explicitée complètement et où la référence au « réel » est facultative.

Il schématise d'ailleurs la situation par le diagramme ci-après :

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">géométries non axiomatiques</td><td colspan="3">géométries axiomatiques</td></tr>
<tr><td>type de géométrie</td><td colspan="2">géométrie concrète (G0)</td><td colspan="2">géom. spatio-graphique (G1)</td><td colspan="2">géom. proto-axiomatique G2)</td><td>géométrie axiomatique (G3)</td></tr>
<tr><td>objets</td><td colspan="4">physiques</td><td colspan="3">théoriques</td></tr>
<tr><td>validations</td><td colspan="4">perceptives</td><td colspan="3">déductives</td></tr>
<tr><td>van Hiele</td><td>niveau 0</td><td colspan="2">niveau 1</td><td colspan="2">niveau 2</td><td>niveau 3</td><td>niveau 4</td></tr>
</table>

Du point de vue didactique, la distinction entre ces géométries apparaît dans les *ruptures de contrat* qui se produisent entre l'une et l'autre, et plus précisément :
- passage de G0 à G1 : matérialité des objets en jeu (bois, carton, paille, ...) ;
- passage de G1 à G2 : épaisseur des traits, des points ; justification par le perçu ;
- passage de G2 à G3 : propriétés jugées « évidentes ».

En se référant à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999), Parzysz considère G1 et G2 comme deux praxéologies qui, pour un même type de problèmes (comme par exemple les problèmes de construction sous des contraintes fixées), se distinguent à la fois au niveau des *techniques*, des *technologies* et des *théories*.

3.5. Une approche anthropologique de G1 et G2 (suivant le canon de Chevallard)

Techniques, technologie et théorie dans G1

♦ Les ***techniques*** utilisées pour la résolution de ce type de tâches sont essentiellement liées à l'usage d'instruments tels que règle graduée, compas, équerre, rapporteur (perception instrumentée).

♦ Les ***technologies*** (mode de validation) font également usage des instruments, qui sont alors utilisés pour contrôler le dessin construit par la constatation visuelle de coïncidences ou de superpositions : graduations de la règle, pointes du compas, bords de l'équerre, rayons du rapporteur, ...

♦ Le ***niveau théorique*** - absent dans la pratique usuelle - serait une théorie relative à la précision ou à l'économie des tracés (qui est effectivement attestée au début du 20e siècle).

Techniques, technologie et théorie dans G2, pour le même type de tâches

♦ Les ***techniques*** concernent des objets géométriques (droites, points, segments, cercles, ...) dont l'existence est assurée par des énoncés (définitions, axiomes, propriétés admises, ...), et l'usage des instruments permet d'en obtenir des représentations (dessins).

♦ Les ***technologies*** correspondantes consistent en la production d'un discours de type déductif appliqué aux données de l'énoncé et utilisant des éléments de G2 rencontrés antérieurement.

♦ Le ***niveau théorique*** est constitué par une géométrie axiomatique de type G3 (la géométrie affine euclidienne). Comme il a été dit cependant, une technique très générale dans G2 est la réalisation et l'étude de « figures » (dessins) sur lesquelles on fera éventuellement agir des techniques de G1 dans le but de rechercher des indices qui permettront d'aboutir à une démonstration.

En ce qui concerne les institutions dans lesquelles vivent ces différentes géométries, Parzysz estime, de façon très grossière, que G1 correspond à l'école élémentaire, tandis que G2 correspond au lycée et G3 à l'université. Mais pour le collège ? En fait, ce sont essentiellement les « figures », objets communs à G1 et G2, qui mettent ces deux géométries *en concurrence* chez des non-experts comme le sont les élèves de collège. Plus précisément, pour un élève donné confronté à une tâche de géométrie :

- si elle est perçue comme relevant de G1, elle conduira à s'appuyer sur des techniques de G1 (réalisation d'une « figure » + comparaison, superposition, mesurage, ...) ;
- si elle est perçue comme relevant de G2, elle conduira à s'appuyer sur des techniques de G2 (réalisation d'une « figure » + démonstration).

Notons enfin que G1 et G2 sont susceptibles de se contrôler l'une l'autre :

- *G2 contrôle G1:* si une contradiction perceptive est relevée sur la « figure » (G1), on peut rechercher dans G2 l'erreur de démonstration qui l'a produite ;
- *G1 contrôle G2* : si la conclusion d'un raisonnement géométrique surprend, le retour à la « figure » et aux techniques de G1 peut permettre de confirmer ou d'infirmer ce résultat.

3.6. Insuffisance de ce modèle dans l'utilisation d'un environnement informatique du type Cabri-Géomètre

La différence entre dessin et figure est souvent problématique pour des élèves de collège. L'utilisation d'un environnement comme Cabri devrait permettre rapidement de distinguer les deux concepts par l'appréhension opératoire générée par la dynamicité spécifique d'un tel logiciel. Se restreindre aux niveaux G1 et G2 proposés par Parzysz devient problématique quand on utilise Cabri pour des tâches géométriques car les outils de validation possibles sont d'une nature très différente ; ces outils méritent d'être exhibés et étudiés.

Si on prend l'exemple d'un lieu (L) qui perceptivement semble être un arc de cercle (**voir problème du chapitre 1 de la brochure IREM de Toulouse 165 : « Construire un triangle ABC dont les bissectrices intérieures sont données » Enseigner et Pratiquer les Mathématiques avec Cabri DAHAN J.-J.**), on peut, comme en papier-crayon, construire le cercle passant par trois points particuliers A, B et C de ce lieu, en construisant d'abord les médiatrices des segments [AB] et [BC], leur point d'intersection Ω puis le cercle de centre Ω et de rayon ΩA qui passe nécessairement par B et C. On peut en travaillant dans G1 obtenir le résultat « le lieu est un arc de cercle ». Mais si on positionne un point V sur notre lieu et qu'on teste avec Cabri l'appartenance de ce point variable au cercle construit, lorsque Cabri répond affirmativement pour toutes les positions de V, nous ne sommes plus dans G1 car la validation fait appel à des calculs analytiques en liaison avec les spécifications de la figure. De même, si on déplace l'un des trois points A, B ou C sur le lieu et que le test reste positif, la validation n'est pas une validation de G1 ; est-ce une validation de G2 ? La question mérite d'être posée. Si dans Cabri 2 Plus on demande les équations du lieu et du cercle construit, le fait d'obtenir la même équation peut faire penser à une validation de G2 : il n'en est rien pour des raisons qui seront étudiées plus loin. Il est donc indispensable d'entrer plus avant dans le domaine des figures de Cabri et des validations générées par cet environnement. Ceci nous permettra de compléter le modèle des niveaux de géométrie par deux modèles connexes aux niveaux G1 et G2 de Parsysz, qui sont des niveaux apparaissant spécifiquement lorsque les figures utilisées sont celles de l'environnement Cabri.

4. DEUX NIVEAUX DE GÉOMÉTRIE CONNEXES AUX NIVEAUX G1 ET G2 DU MODÈLE DE PARZYSZ : G1 ET G2 INFORMATIQUES

4.1. Exemples illustrant quelques caractérisations formelles de l'environnement Cabri et justifiant l'introduction des niveaux G1 et G2 informatiques

4.1.1. Points : rappelons que la page Cabri modélise un maillage d'un carré du plan de dimension 1m sur 1m. Elle donne donc accès aux points situés sur ce maillage. Il est capital de préciser quels sont ces points, quelle est la dimension de la maille de ce maillage. Il est aussi important de préciser **le lien entre ces points et ce qui est représenté à l'écran**.

♦Suivant que cette représentation est obtenue par un clic de la souris sur un point de l'écran (création d'un point libre avec l'outil « Point »).

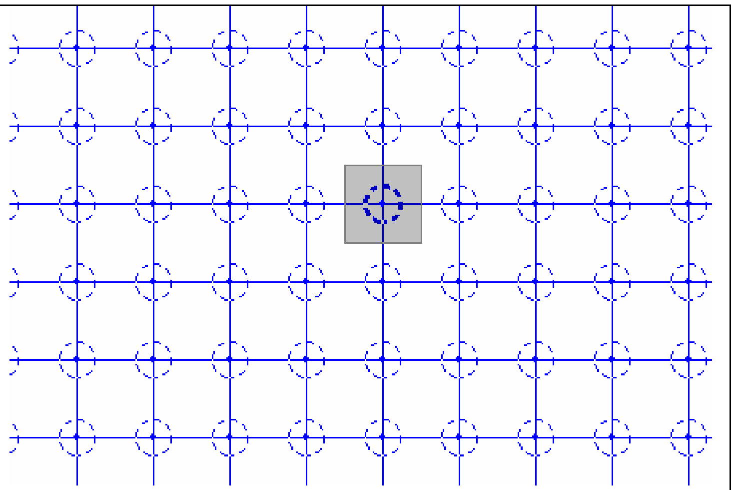
♦Ou que ce point est créé par report de mesure (en indiquant la précision possible de cette mesure).

♦Ou bien par une construction permettant d'accéder à d'autres points que ceux accessibles par simple clic de la souris (utilisation d'un levier par exemple).

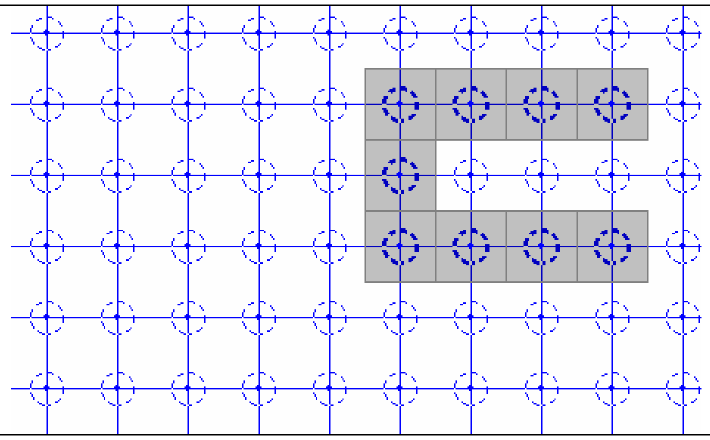
4.1.1.1. Niveau élémentaire de représentation : Les points générés (définis) par un clic de souris peuvent être repérés dans le plan en évaluant la distance entre deux points obtenus par les clics les plus proches sur une même droite horizontale ou verticale. Une méthode originale consiste à déplacer un point m sur un segment [ab] inclus dans l'axe des abscisses et de faire afficher la distance am. Avec un copier-coller sur ce nombre, on l'isole de la figure. On déplace la souris du déplacement minimum, on copie-colle la nouvelle distance puis on évalue avec la calculatrice la différence entre ces distances qui nous donne l'échelle ***e*** du maillage qui est avec la précision maximale acceptée par mon ordinateur et ma version de Cabri 2 Plus, **0.026315790cm ; *e*** est donc compris entre **0.0263157895cm** et **0.0263157905cm.** Le nombre d'intervalles de ce maillage par cm est donc compris entre les inverses des nombres précédents qui évalués à la calculatrice donnent : **37.99999852** et **37.99999996**. Le nombre d'intervalles par cm déterminés par les centres des pixels (on appelle pixel le point représenté à l'écran) est donc très voisin de **38** et le nombre de pixels par cm est donc très voisin de **38**.
Le nombre d'intervalles de ce maillage par mètre c'est-à-dire sur la largeur complète d'une page Cabri (qui rappelons le est bien plus grande que la portion visible sur l'écran) est donc compris entre 3799.999852 et 3799.999996. Le nombre d'intervalles par mètre déterminés par les centres des pixels est donc très voisin de 3800 et le nombre de pixels par mètre est donc très voisin de 3800.
Sur une page Cabri, on peut donc créer par clic de souris 3800*3800 « points-pixel », c'est à dire : 14 440 000 « points-pixels ». Sur un cm², on dispose donc de 38*38 « points-pixels » créables par clic de souris, soit 1 444 points-pixels

Une rapide validation consiste à évaluer le quotient 100/3800 qui donne exactement avec la précision maximale **0.026315790cm.** **g2exp1.fig**

On aboutit donc à la mise en évidence du **maillage possible et effectif par clics de souris**

La figure de droite symbolise le maillage virtuel du plan réalisé par Cabri pour les points accessibles par un clic de souris à chaque intersection d'une verticale et d'une horizontale. Un clic possible de souris est symbolisé par un cercle en pointillés fins. Le clic effectif est symbolisé par un cercle en pointillés épais qui a pour conséquence la création du pixel symbolisé par le carré gris. La dimension adoptée pour ce pixel correspond au style le plus fin des options de Cabri (dernier menu)	 Mesure de chaque maille : ***e*** = **0.026315790cm**

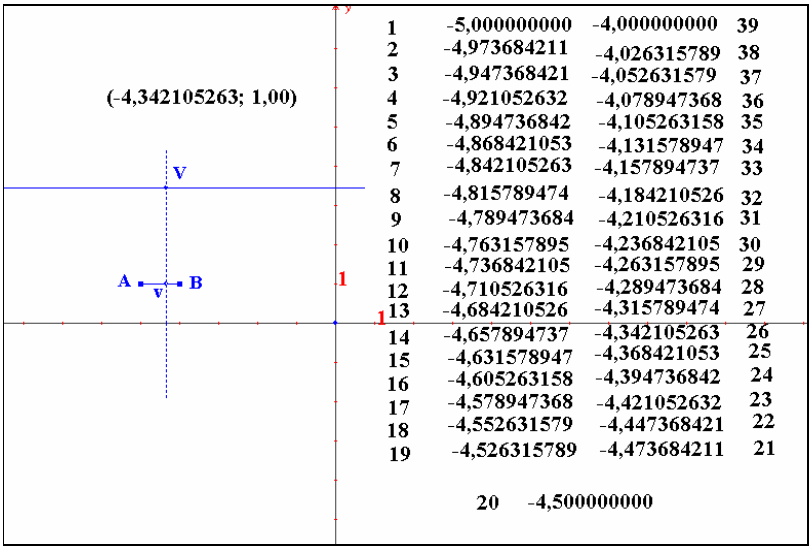
g2exp1bis.fig

Un déplacement très soigné pixel par pixel pourrait permettre de réaliser cette figure par dépôt de points libres par clic de souris.	

g2exp1ter.fig

Expérience de validation

On crée un segment [AB] dont les extrémités sont sur la grille (A(-5 ; 1) et B(-4 ; 1)) et un point v sur [AB] qu'on place en A après avoir fait affiché ses coordonnées avec la précision maximale. On déplace avec la souris le point v vers la droite et on copie-colle à chaque fois l'abscisse obtenue après chaque déplacement minimal. On obtient la figure suivante :



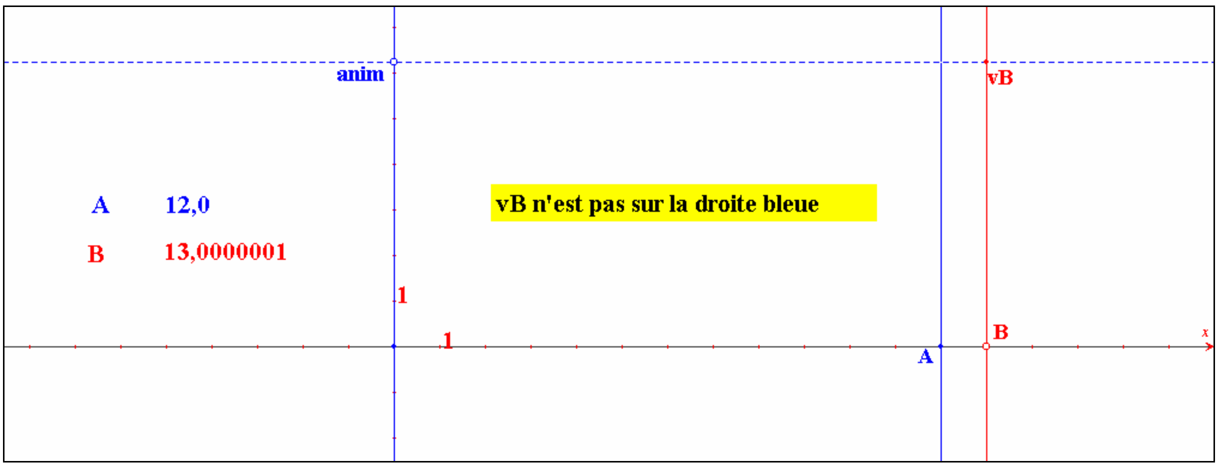
g2exp1six.fig

Cette expérience nous montre qu'il y a 39 pixel répartis sur 1cm y compris le premier et le dernier et 38 sans le dernier. Sur un mètre de largeur, il y aura donc 100*38 +1 points pixels soit 3801 points pixels. Ceci vient affiner notre premier calcul et comme 1/38 donne bien avec la calculatrice de Cabri 0.026315790cm, ce nombre est donc la représentation de Cabri de la fraction 1/38 (dans l'environnement dans lequel j'ai expérimenté).

4.1.1.2. Niveau supérieur de représentation

Chaque page de Cabri contient potentiellement plus de points que les points du maillage précédent accessibles par clic direct avec l'outil « Point ». Nous allons accéder au niveau « signifiant » des points de Cabri que nous allons bien différentier de leur niveau « signifié », c'est à dire de leur représentation. Néanmoins une bonne connaissance technique des caractéristiques du logiciel permettra relativement aisément de passer d'un niveau à l'autre.

Notons que si nous reportons deux nombres distincts créés avec l'outil « Nombre » sur l'axe des abscisses, nous obtenons en principe deux points distincts que nous appellerons A (en bleu) et B (en rouge) : ces points sont distincts si l'écart entre ces deux nombres est d'au moins 10^{-7}, du moins dans la configuration sous laquelle je travaille. Voici une expérience qui permet de repérer ce paramètre aisément



g2exp1ter.fig

Le montage réalisé est le suivant :

♦Un segment [CD] est créé sur l'axe des ordonnées du système d'axe ; C par report d'un nombre négatif, -5 par exemple et D par report d'un nombre positif, 5 par exemple. Une fois le segment construit on modifie les nombres ainsi, -5 en –50 et 5 en 50.

♦Un point appelé « anim » est créé sur ce segment.

♦Deux nombres sont créés, 12 et 13,0000001 qui sont respectivement reportés en A et B sur l'axe des abscisses.

♦Deux droites parallèles à l'axe des ordonnées passant respectivement par A et B sont créées, la première en bleue, et la seconde en rouge.

♦ La droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le pont « anim » est créée en pointillés bleus ainsi que son point d'intersection vB avec la droite rouge.

♦ Le résultat du test d'appartenance de vB à la droite bleue est réalisé et affiché.

L'expérience proposée :

Elle va consister d'abord à changer le 13,0000001 en 12,0000001. Nous vérifions ensuite en approchant le pointeur commandé par la souris que celui-ci demande bien « quel objet ? » et qu'il reconnaît bien deux points distincts : la question que nous allons résoudre est de savoir si ces points distincts de Cabri sont superposés ou non pour Cabri. Si ces points sont superposés alors vB appartiendra aussi pour Cabri à la droite bleue.

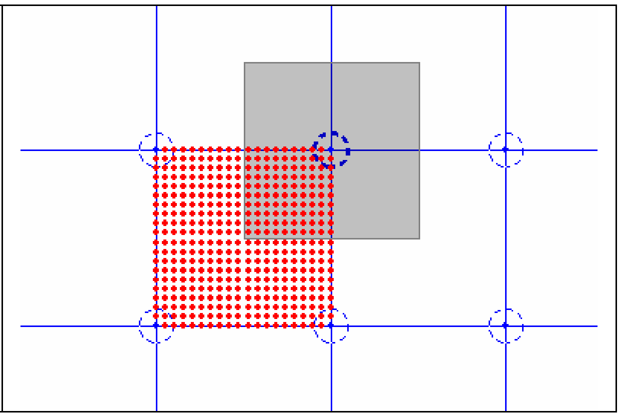
Nous constatons que jusqu'à un écart de 10^{-7}, tous les points vB sont reconnus comme n'étant pas sur l'objet droite bleue. Cette affirmation est vérifiée expérimentalement en lançant une animation du point « anim » sur son segment d'appartenance qui va générer une animation du point vB le long de la ligne rouge. Au cours de cette animation, nous pouvons constater que le résultat du test reste le même. On peut évidemment recommencer l'expérience pour autant de valeurs différentes que désirées pour l'abscisse de A (à condition de rester dans les limites de la page de Cabri, c'est à dire entre –50et +50).

Nous pouvons aussi constater que pour des écarts inférieurs à 10^{-7}, mais supérieurs ou égaux à 10^{-14} ce n'est plus le cas : les points A et B existent bien, ils sont donc bien Cabri distincts en étant néanmoins superposés. Les droites bleus et rouges sont elles aussi superposées.

Notons néanmoins une zone d'incertitude pour les écarts du type 10^{-8} ou 10^{-9}, pour lesquels Cabri est instable : il donne des résultats de tests contradictoires quand vb se déplace le long de sa droite d'appartenance.

Dans une des mailles précédentes délimitées par les centres de 4 pixels contiguës entre en réalité un point tous les 10^{-7}cm ; cela délimite un sous-maillage contenant **0.026315790cm /**10^{-7}cm = 263157 mailles à une unité près soit 263157 points à un point près. Un carré formé des quatre centres de quatre pixels contigus contient donc 263157² points accessibles par cabri soit 69 251 606 649 points environ. Chacun de ces points est représenté par l'un des quatre pixels formant le carré délimitant cette maille élémentaire

On aboutit donc à la mise en évidence du **maillage possible et effectif par reports de mesures**

On a donné une idée du sous-maillage en rouge à l'intérieur d'une maille délimité par quatre points contigus de cliquage. Les points rouges à l'intérieur du pixel représenté en gris seront représentés par ce même pixel. En réalité dans une maille élémentaire il doit y avoir 69 251 606 649 points accessibles indirectement.	

g2exp1pent.fig

Remarque : les conclusions qui précèdent doivent être tempérées par le fait que nous n'avons pas accès aux procédures associées aux outils de Cabri (pour des raisons commerciales que l'on comprend). On ne peut donc qu'imaginer comment marchent de telles procédures. Pour l'appartenance d'un point M à une droite d, il y a vraisemblablement calcul de la distance δ de M à d et un test du style :
si δ < k, le point M appartient à d ; si δ > k (ou égal à k ?), le point M n'appartient pas à d.
Notre travail a consisté en une estimation de k même si cette méthode dépend de la précision de la détermination des droites parallèles. Néanmoins, nous pouvons affirmer :
Que la précision est grande (de l'ordre de 10^{-7}) bien supérieure à celle du papier-crayon.
Qu'une suite d'actes Cabri crée une « erreur » et que le problème de la propagation des erreurs est complexe.
Que les oracles de Cabri peuvent se tromper dans un sens comme dans l'autre.

4.1.1.3. Lien entre ces niveaux

4.1.1.3.1. Remarque introductive

Il est possible en manipulant les points du premier niveau, c'est-à-dire les points-pixels accessibles par clics de souris de créer les points du second niveau et sur lequel Cabri travaille naturellement.

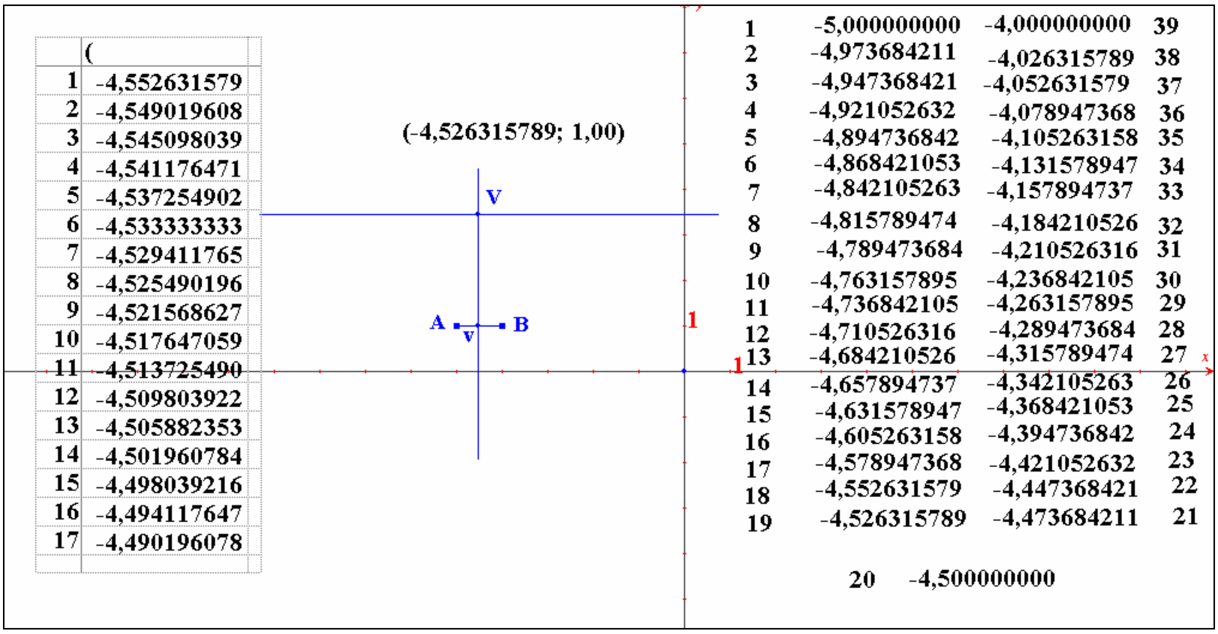
La page Cabri n'est pas une page de pixels.

Le niveau supérieur que nous avons repéré a permis d'accéder aux points « signifiés ».
Et le niveau inférieur à leur représentation que nous avons appelés points-pixels et qui sont ce que l'on peut qualifier de points « signifiants ».

……………………

4.1.1.3.2. Visualiser des points du second niveau avec les outils « Animation » et « Tableur »

Reprenons la figure ci-dessus et au lieu de tirer v à la main (en tirant et en cliquant sur la souris pour obtenir les points du niveau 1) lançons une animation de v le long de son segment d'appartenance et saisissons les coordonnées de ce point dans la table de Cabri. Nous obtenons par exemple le résultat suivant qui évidemment dépend de la manière dont on a tiré sur le ressort d'animation :

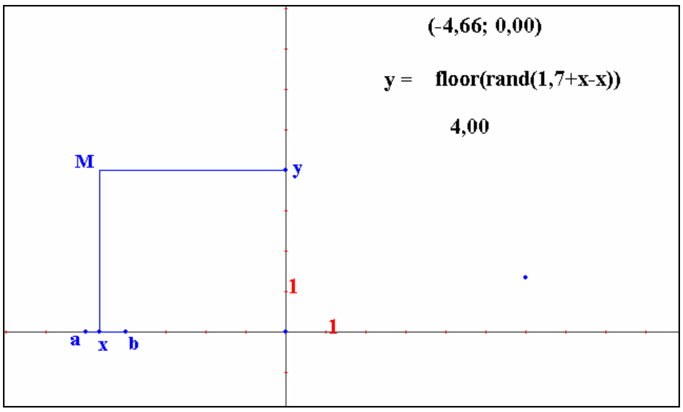


On se rend immédiatement compte en comparant les valeurs saisies dans la tables et celles qui avaient été notées clic après clic, que Cabri passe par des points qui ne sont pas des points-pixels du premier niveau : entre deux tels points l'écart était de l'ordre de 3.10^{-2} alors qu'ici les écarts entre deux points successifs déclarés par Cabri est de l'ordre de 4.10^{-3}. On pourrait obtenir des écarts encore plus faibles en tendant moins le ressort avant l'animation. Cabri passe d'un point à un autre du maillage du second niveau (points de l'environnement Cabri) mais la représentation utilise à mon avis le premier niveau (points-pixels). L'interprétation de tout ce qui peut être observé par l'utilisation de l'outil « Animation » va très vite sortir du niveau G1 pour atteindre un autre niveau qu'il faudra caractériser : nous proposerons G1 et G2 informatiques.

Nous allons maintenant montrer un exemple qui va encore permettre d'illustrer la différence entre point « signifiés » et points « signifiants » à partir de deux tracés de courbes de fonctions différents, l'un utilisant l'outil « Trace » et l'autre l'outil « Lieu »

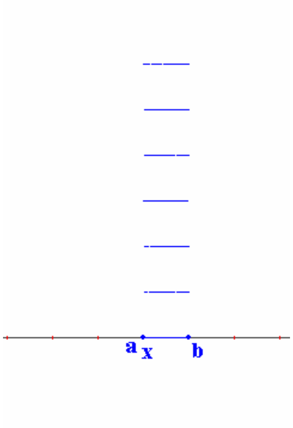
4.1.1.3.3. Visualiser des points du second niveau avec les outils « Animation » et « Trace »

Nous avons créé la fonction qui à tout x de l'intervalle [ab] fait correspondre un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 6. La fonction est définie par l'expression floor(rand(1,6+x-x)) qu'on applique à x pour obtenir y et enfin le point générique M de la courbe qui est tracé en tant que pixel (la plus petite épaisseur dans le format rond)

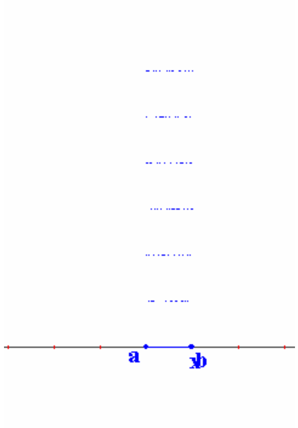


Remarque : nous avons utilisé l'écriture 6 + x – x pour 6 afin que le calcul du nombre aléatoire compris entre 1 et 6 dépende de x donc de la position du point x. Tout changement de position de x génère un nouveau calcul du nombre aléatoire.

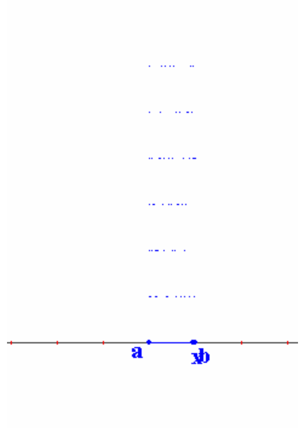
Cachons les segments qui définissent M et lançons une animation de x le long de [ab], après avoir activé la trace de M et positionné x à une extrémité de [ab]. On arrête cette animation quand x a atteint l'autre extrémité du segment. On doit voir apparaître un certain nombre de points de la courbe de la fonction donnée et normalement pas plus de 39 si x sautait d'un pixel à l'autre. Voici ce que l'on obtient pour différente tensions du ressort :



Tension de ressort faible



Tension de ressort moyenne



Tension de ressort forte

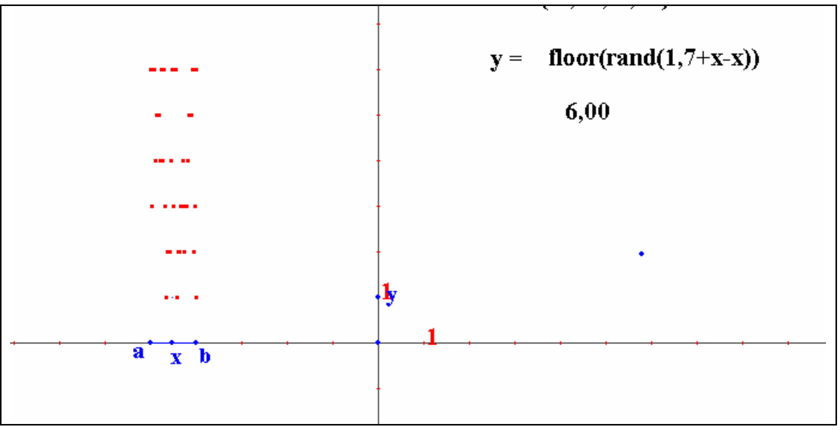
♦La première représentation a une G1 lecture paradoxale car chaque point-pixel de l'intervalle [ab] est surmonté de plusieurs points M de la courbe, presque tout le temps 6 (un ressort encore moins tendu aurait donné une représentation formée de 6 segments horizontaux). Ce qui se passe en réalité c'est que Cabri passe par des points du second niveau équirépartis sur l'intervalle [ab], calcule leurs images et les positionne au point pixel le plus proche c'est-à-dire à la verticale d'un même point (nous avons vu que, dans la même maille élémentaire, il y avait un grand nombre de points du second niveau par lesquels Cabri pouvait passer).

♦La seconde donne encore beaucoup trop de points superposés car Cabri réalise l'animation avec plus de 39 sauts par cm.

♦La troisième est un peu plus conforme à l'attente papier-crayon que nous avons de la courbe. Néanmoins si on fait un grossissement de la figure (voir ce grossissement en annexe 2) et qu'on compte les points, on se rend compte qu'on est encore dans le second niveau (on en compte plus de 50).

4.1.1.3.4. Visualiser des points du premier et du second niveau avec l'outil «Lieu»

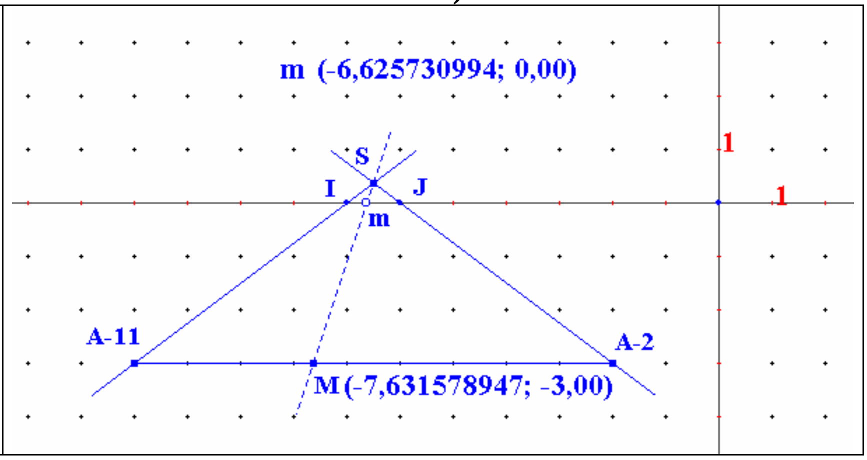
Si on règle dans les préférences le nombre de points d'un lieu à 39 en mode non relié et si on demande le lieu du point M quand x varie sur son segment d'appartenance, on obtient l'ensemble de points rouges à droite (ces points sont obligatoirement d'un format supérieur au pixel).



Ce lieu doit contenir exactement 39 points correspondant aux 39 abscisses pixelisées sur le segment [ab]. Or le grossissement fourni en annexe 3 montre qu'il est extrêmement difficile de compter les gros points rouges (comparer au point pixel bleu du premier niveau) en raison du chevauchement possible des points rouges.

4.1.1.3.5. Créer des points du second niveau à partir de points du premier niveau
Montage de l'expérience (« levier » de Jean-Marie Laborde)

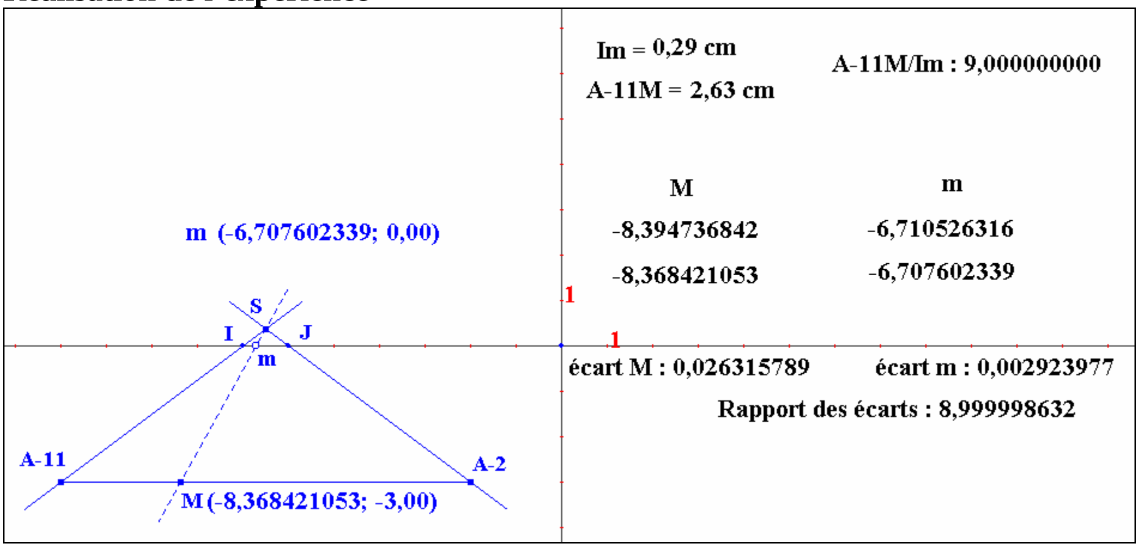
Un point M est créé sur le segment [A-11A-2] dont les extrémités sont posés sur la grille en sorte que A-11A-2 = 9cm. De même [IJ] est un segment de l'axe des abscisses dont les extrémités sont aussi posées sur la grille en sorte que IJ = 1cm



g2exp9.fig

Les droites (A_{-11}I) et (A_{-2}J) se coupent en S. Le point m est défini comme l'intersection de (SM) avec [IJ].
Le choix du segment d'appartenance de M fera que les points M tirés à la souris se positionneront obligatoirement sur des points-pixels et comme A-11A-2 = 9, il y aura 38*9 + 1 = 343 points pixels. Chaque position de M génèrera un point m sur [IJ] qui devra nécessairement être un point du second niveau représenté par l'un des 39 points pixels de [IJ].

Réalisation de l'expérience



g2exp9.fig

Comme il est indiqué sur la figure ci dessus, on récupère par des copier-coller les abscisses de positions intermédiaires successives du point pixel M (on vérifie que leur écart est bien de 1/38). On fait de même pour les abscisses des points m correspondants aux deux points M

précédents et on évalue encore leur écart à la calculatrice qui donne ici **0,002923977**. On a évalué enfin le rapport de ces écarts qui théoriquement, devrait nous donner exactement 9 alors que nous trouvons ici **8,999998632**.
Notons que si nous évaluons le rapport des distances $\mathbf{A_{-11}I/A_{-2}J}$**,** on trouve exactement 9, le 9 de l'environnement Cabri puisque l'affichage de ce rapport avec le maximum de décimales, ne fait apparaître que des 0 comme décimales.

4.1.2. Droites

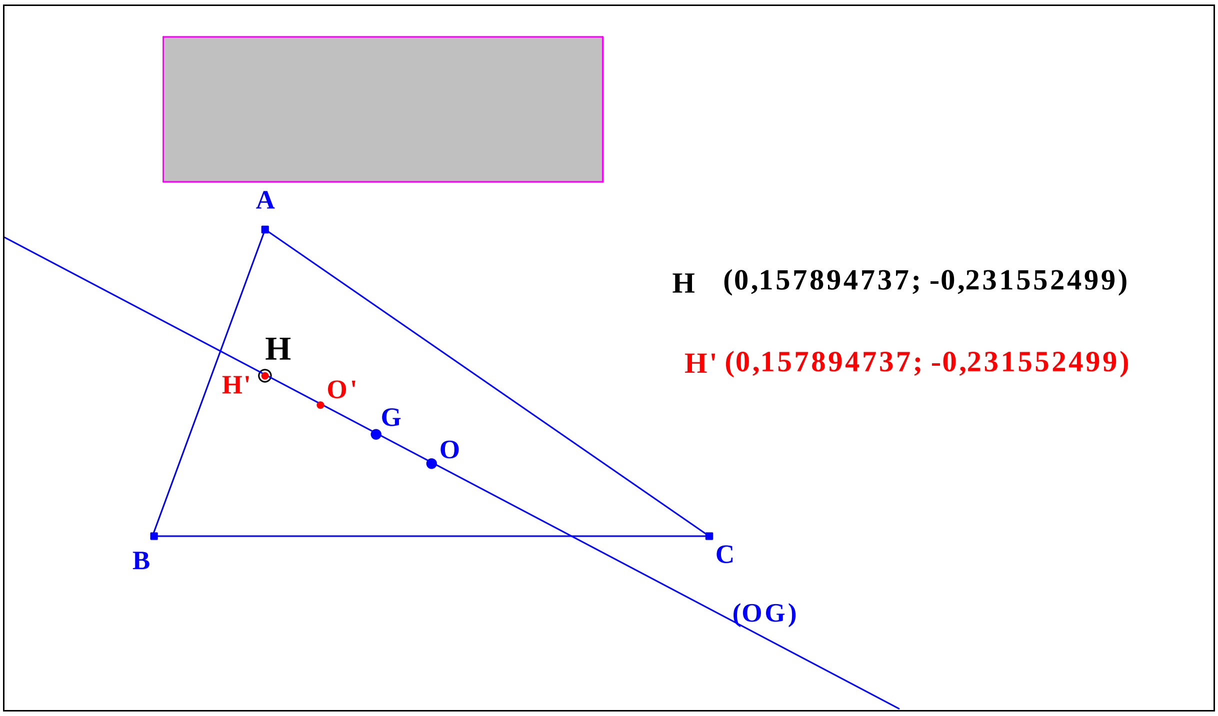
4.1.2.1. Problèmes d'alignement (droite d'Euler)

Si ABC est un triangle et O, G et H respectivement, le centre de son cercle circonscrit, son centre de gravité et son orthocentre, on peut valider l'alignement de ces points ainsi :

Manière 1 : On construit la droite (OG) et on teste l'appartenance de H à cette droite avec l'outil « appartient à ». La réponse est positive même si on déforme le triangle en tirant sur l'un de ses sommets. Cette expérience est validative au niveau de G2 informatique de l'hypothèse « les trois points O, G et H sont alignés ».

Manière 2 : On construit le point H' comme symétrique de G par rapport à O' (O' étant le symétrique de O par rapport à G. On demande les coordonnées des points H et H' avec la précision maximale autorisée et on constate l'égalité de toutes les décimales même si on continue de déformer le triangle.

Cette expérience est validative de l'hypothèse $\overrightarrow{OH}=3.\overrightarrow{OG}$ dans G1 informatique quand on tire sur un sommet du triangle et que la superposition de H et H' subsiste visuellement. La différence avec G1, vient du fait que cette validation est obtenue rapidement dans le temps et même dans les cas qui sont des cas problématiques dans G1 (où l'imprécision du tracé dans certains cas de figure peut mener à une invalidation au moins locale).
Cette expérience est validative de cette même hypothèse dans G2 informatique quand la validation est assurée par les égalités de coordonnées dans notre page Cabri-discrète ; l'induction qui nous permet de passer d'une affirmation d'un environnement discret (le modèle de la géométrie plane que constitue Cabri) à la même affirmation dans le plan de la géométrie abstraite peut être considérée comme une déduction de G2 informatique car la probabilité que l'affirmation soit fausse est extrêmement faible : la raison tient à deux paramètres : le premier tient dans les calculs faits par Cabri pour mener à l'affichage des coordonnées qui se basent sur les spécifications de la figure et le second dans la grande quantité de données validantes. Il est vrai qu'il faudrait étudier rigoureusement si l'égalité des coordonnées dans les Cabri-cas envisageables par déplacement avec la souris ou par report de mesures (dans la limite de la précision admise) implique nécessairement l'égalité dans tous les cas. Un ***a priori*** positif semble être justifié par la densité des décimaux dans **R** ou par un argument de continuité.



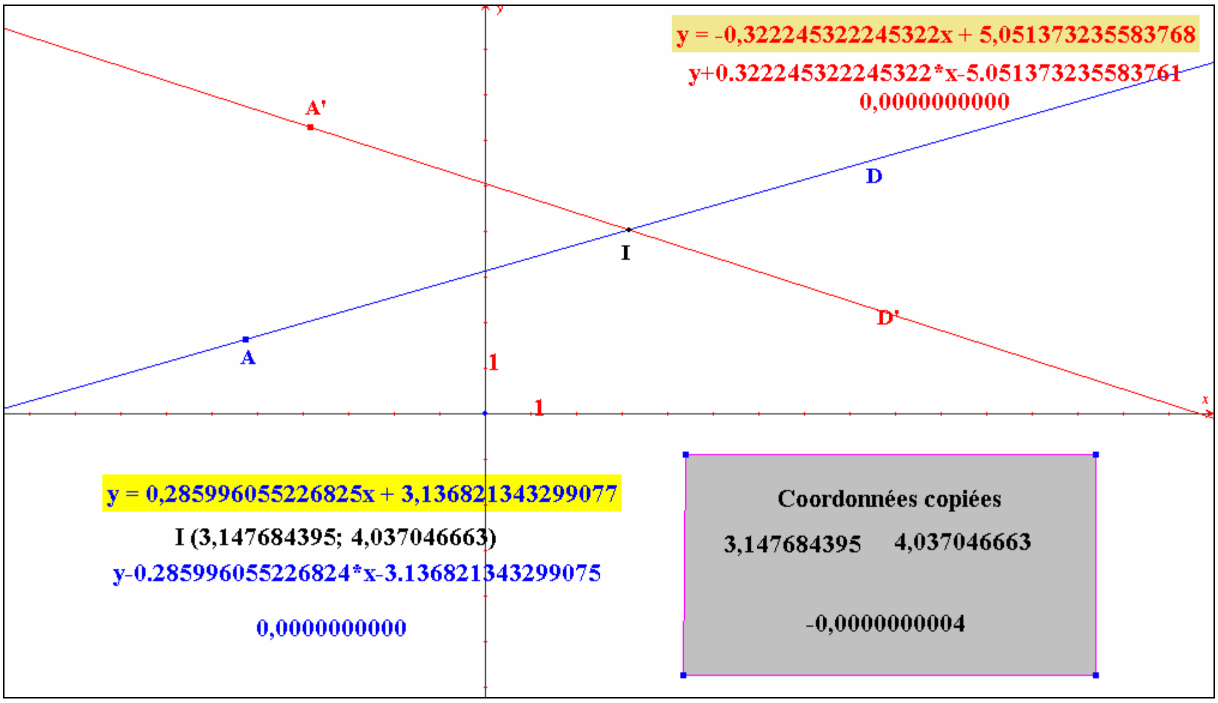
4.1.2.2. Problème d'intersection de droites

Première expérience : deux droites D et D' sont construites, non parallèles à l'axe des ordonnées, l'une passant par A, l'autre par A'. Leur point d'intersection I, est construit avec l'outil adéquat de Cabri. Ses coordonnées sont demandées et affichées avec le maximum de décimales autorisées. Notons que dans la suite toutes les valeurs demandées (y compris les équations) seront affichées avec la précision maximale.

On affiche les équations de ces deux droites puis on crée les fonctions de deux variables x et y, soit f(x ;y) et g(x,y) telles que f(x ;y) = 0 et g(x,y) = 0 soient des équations respectives de ces deux droites.

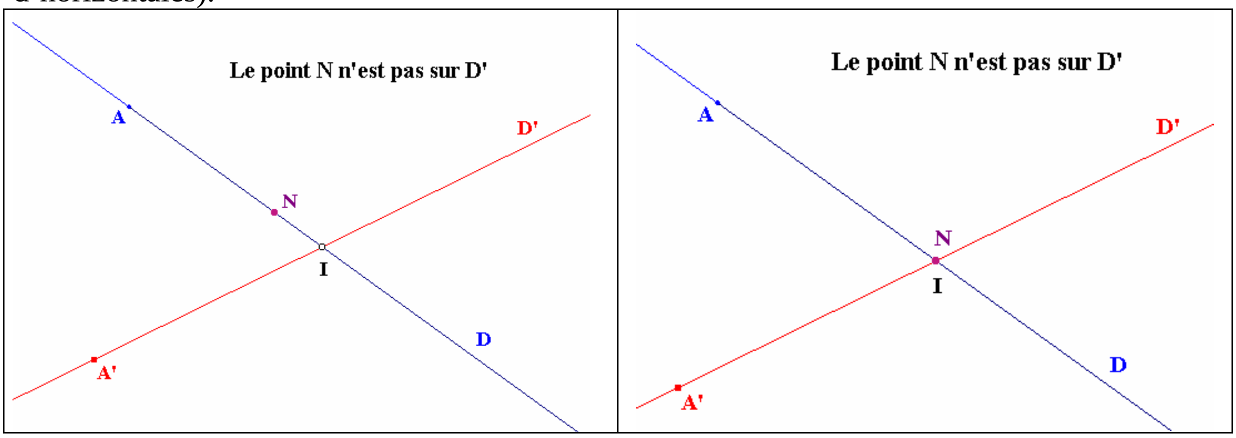
On applique ensuite chacune de ces deux expressions aux coordonnées de I pour obtenir 0,0000000000. Ceci valide dans G2 informatique que le point mis à l'intersection des deux droites est bien le point caractérisé par la spécification « intersection de D et D' ». Cela justifie aussi que l'outil « Intersection » est bien basé sur un calcul analytique avec une grande précision.

Notons que si nous copions/collons les coordonnées de I pour leur appliquer la fonction f(x,y), on ne trouve pas 0,0000000000 mais –0,0000000004 : cela veut peut être dire que Cabri travaille sur des coordonnées supplémentaires non affichées et que le copier-coller réaliserait une troncature sur ces coordonnées cachées.



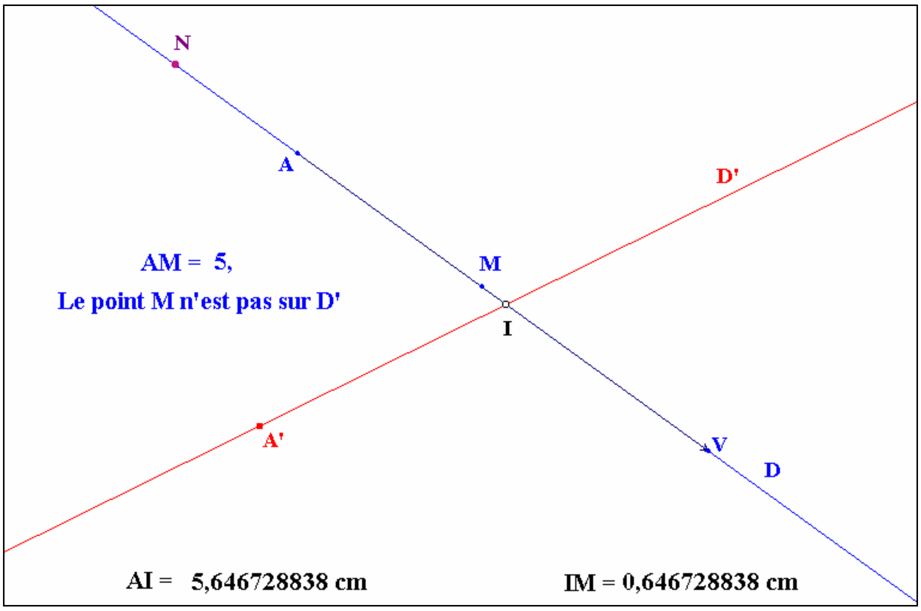
Seconde expérience

Pour une configuration analogue, si on crée un point N sur la droite D et si on le tire à la souris par clics successifs pour le superposer visuellement au point d'intersection I, le test d'appartenance de N à D' est négatif (sauf pour des positions particulières de verticales et d'horizontales).

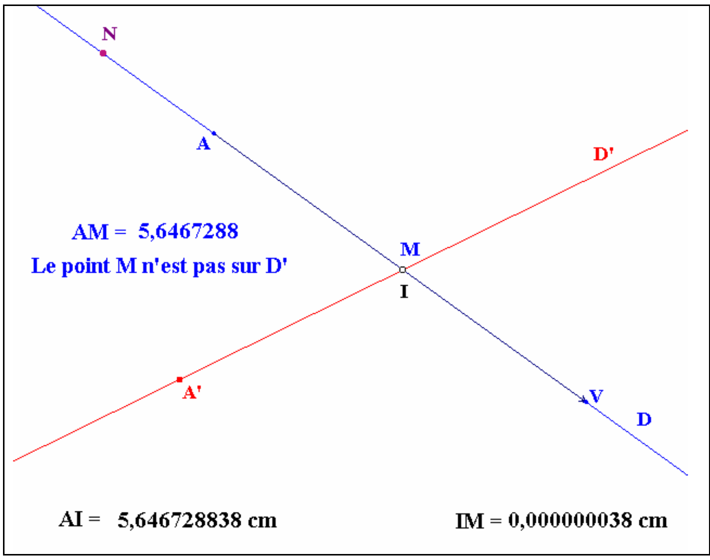


Pour pouvoir accéder à un point de D qui puisse être reconnu comme un point de D', nous allons agir par report de mesure.

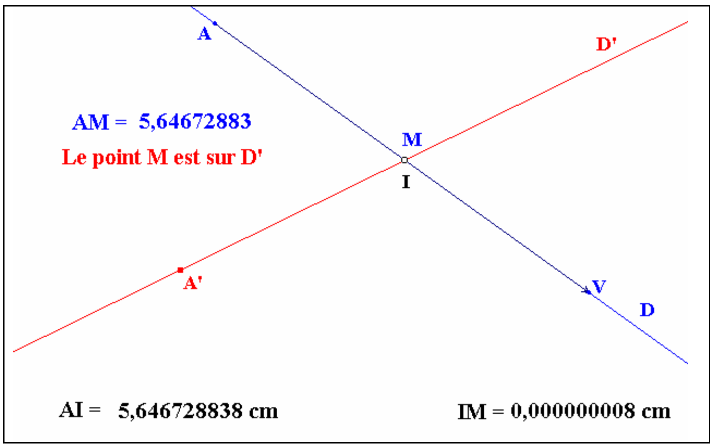
Pour cela nous créons sur la droite D un vecteur $\overrightarrow{AV}$ qui nous permettra de placer sur cette droite un point M par report d'un nombre qui aura été créé préalablement. Nous mesurons AI et IM. Nous testons enfin l'appartenance de M à la droite D'. Cette appartenance est invalidée dans le cas de figure ci-dessous.



Si on modifie ensuite le nombre permettant de positionner M en sorte que AM soit de plus en plus proche de AI, voici ce que l'on obtient :

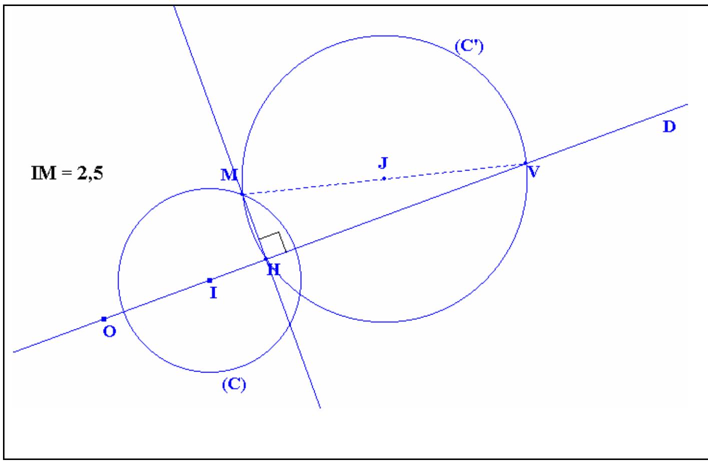


Si on copie jusqu'à la sixième décimale les décimales de AI, M n'est pas reconnu comme appartenant à D', mais comme on peut le constater sur la figure ci-dessous, dès le copiage de la septième décimale M est reconnu comme un élément de D'.



Il est curieux que l'appartenance soit acquise alors que la distance AM ne soit pas affichée nulle pour Cabri. Il doit y avoir calcul sur un certain nombre de décimales et le test d'appartenance doit être d(A, (D)) < ε pour un certain ε.

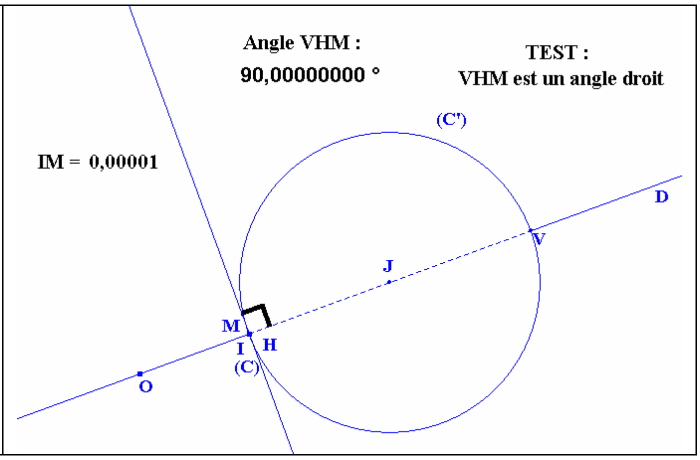
4.1.2.3. Problème d’orthogonalité



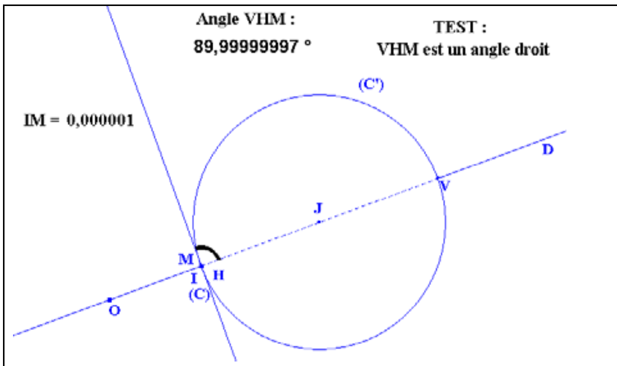
D est une droite donnée passant par un point O. (C) est le cercle centré en I, point de D et construit avec l’outil compas à partir d’un nombre édité sur l’écran (ici 2,5). M est un point construit sur (C) et V est un point construit sur D. (C’) est le cercle de diamètre VM dont le second point d’intersection avec D est nommé H. On trace la droite (HM) et on marque l’angle $\widehat{VHM}$ qui est naturellement marqué droit.

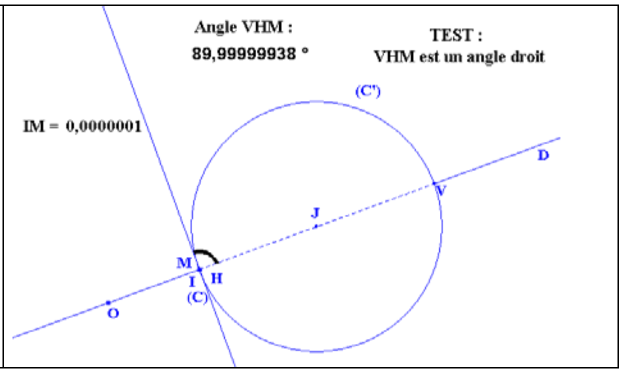
On affiche la mesure en degrés de ce dernier angle avec le maximum de décimales ; on obtient 90,00000000°. On teste ensuite l’orthogonalité de la droite (HM) et de la droite D : cette orthogonalité est validée même quand on déplace V ou M.

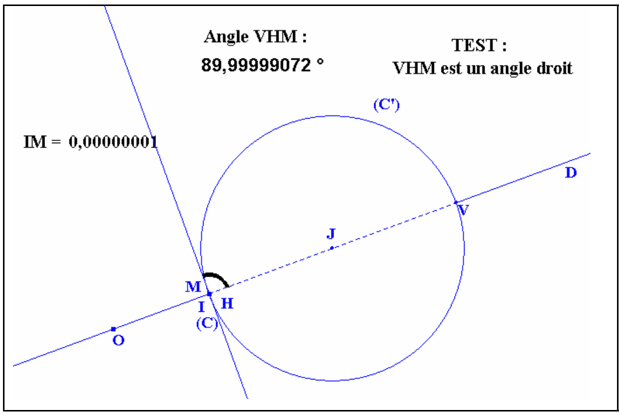
On modifie ensuite IM est on diminue sa valeur jusqu’à 0,00001 : aucun des affichages précédents ne changent.

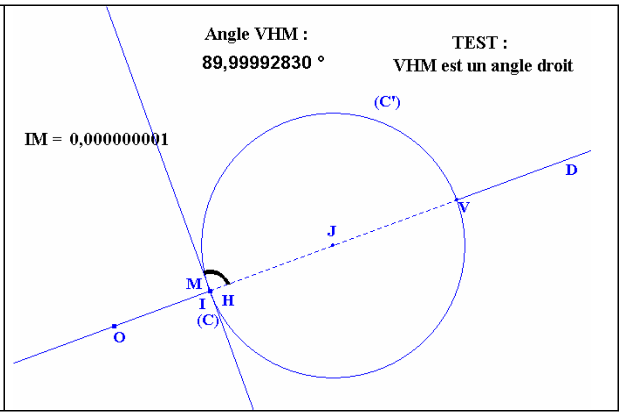


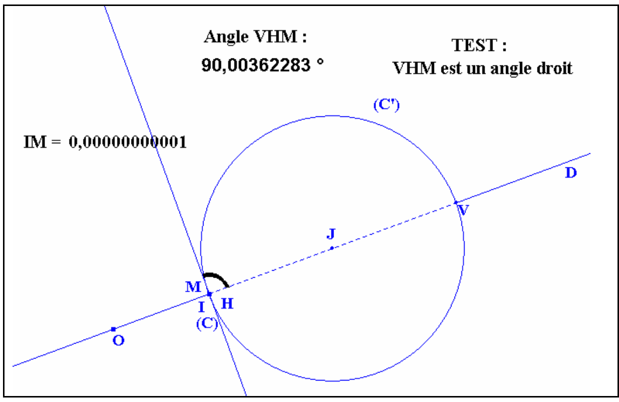
Mais si on continue à diminuer IM on obtient les affichages suivants :











Si on ajoute un autre 0 aux décimales de IM, la droite (HM) et la marque de l'angle disparaissent, l'angle VHM continue à ne plus être affiché à 90° mais le test continue à valider la qualité d'angle droit de l'angle $\widehat{VHM}$.

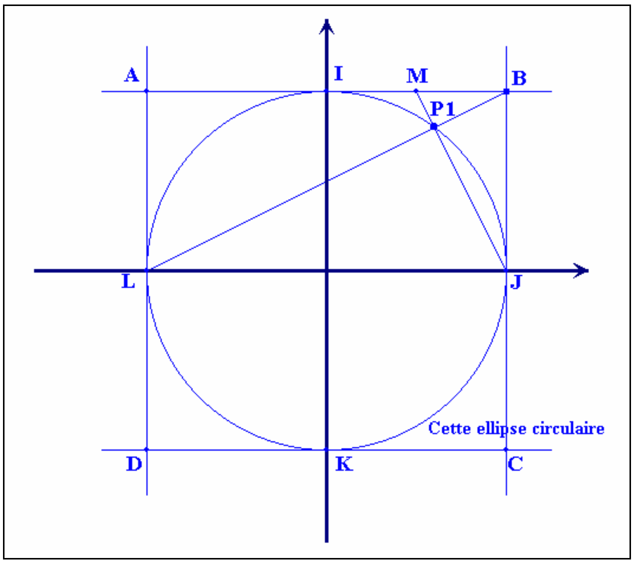
Conclusion : dans l'exemple donné pour lequel nous avons travaillé dans G2 informatique, nous avons pu constater une très grande fiabilité dans les inférences discursives de l'environnement Cabri jusqu'à une précision de l'ordre de 10^{-5}.

4.1.3. Coniques

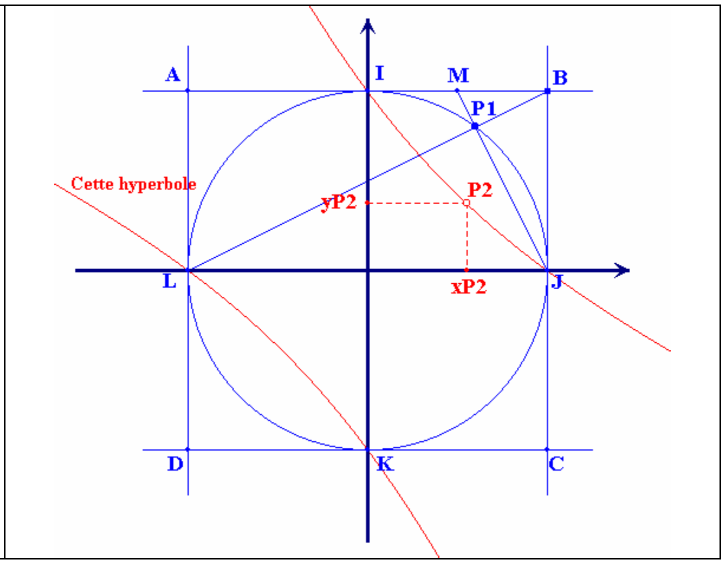
4.1.3.1.Cercle et ellipse :

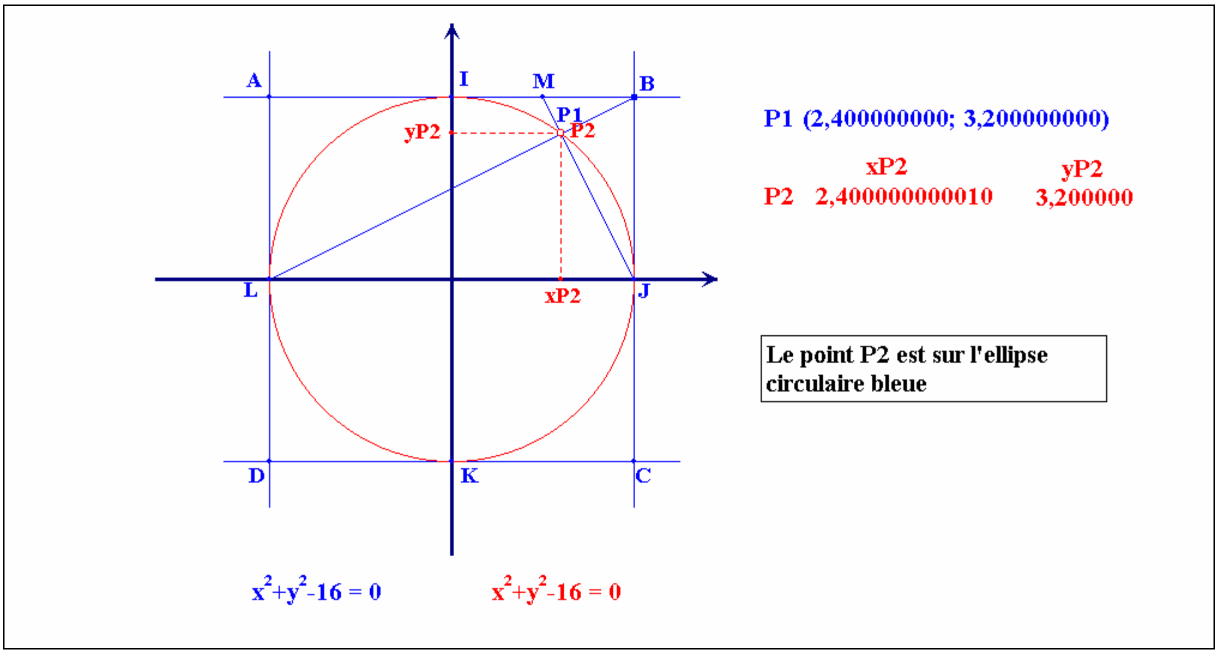
Un cinquième point du cercle inscrit dans un carré

Quand on construit sous Cabri la conique passant par les milieux des côtés d'un carré et le cinquième point P1 tel que construit ci-dessous (P1 est à l'intersection des segments [MJ] et [LB] où M est le milieu de [IB]), l'approche du curseur de la conique obtenue génère le message « cette ellipse circulaire ». Les spécifications de cette figure (au sens donné par Jean-Marie Laborde) conduisent effectivement à un cercle (le cercle passant par I, J, K et L est le cercle de centre O et passant par l'un de ces points ; d'autre part une démonstration élémentaire prouve que P1 appartient bien à ce cercle). Cabri reconnaît donc ces spécifications d'un cercle.

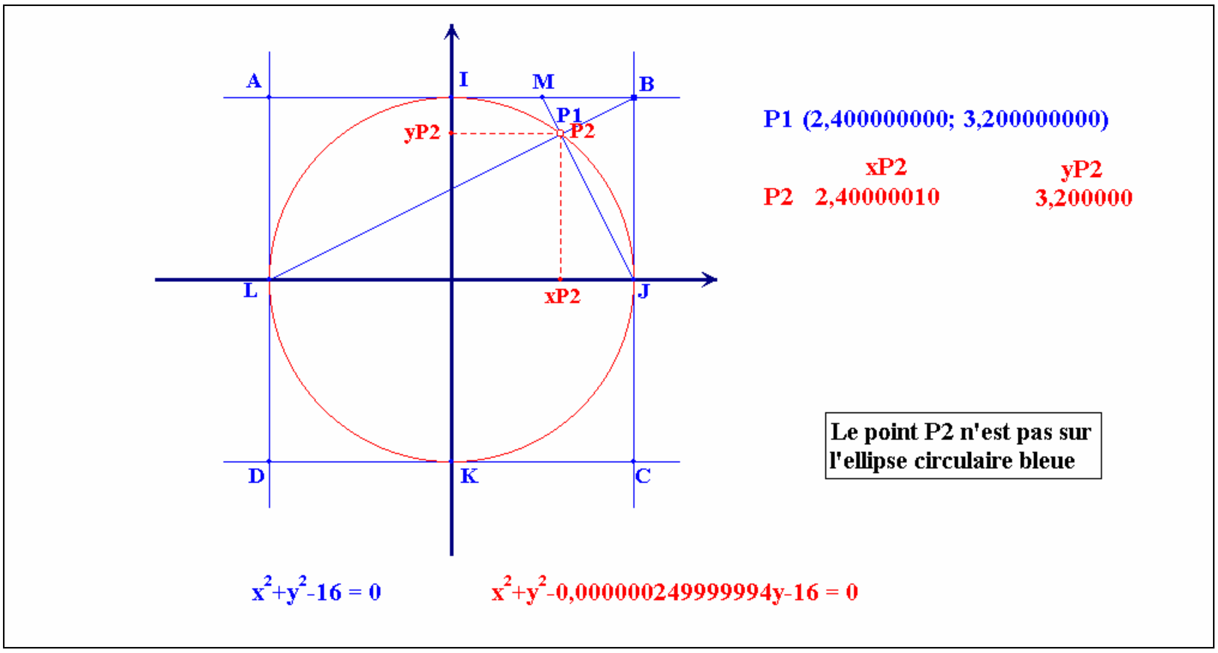


On peut s'interroger sur la fiabilité de la spécification Cabri en construisant un point P2 dont les coordonnées sont différentes de celles de P1 et en traçant la conique passant I, J, K, L et P2 au lieu de P1. Dans le cas de figure envisagé à droite, on obtient une hyperbole. On modifie les coordonnées de P2 afin de voir s'il est possible que Cabri reconnaisse cette seconde conique comme une ellipse circulaire lorsque P1 est différent de P2





Lorsque l'abscisse de P2 s'écarte de 10^{-11}, le point P2 est reconnu comme appartenant au cercle bleu initial qualifié par Cabri d'ellipse circulaire. Les équations des deux coniques sont d'ailleurs les mêmes. Rien ne permet d'affirmer que le point P2 soit le point P1.



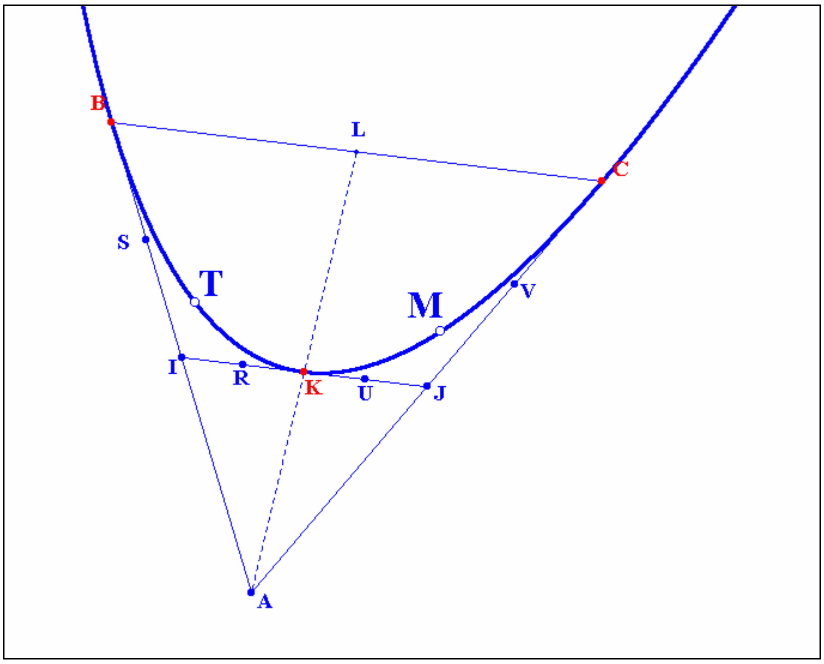
Ici l'abscisse de P2 s'écarte de 10^{-10} de l'abscisse de P1 et cette fois, le point P2 n'appartient plus pour Cabri au cercle construit initialement. On peut aussi constater que la seconde conique reste un cercle d'équation différente : ce cercle est centré sur l'axe des ordonnées

Conclusion : là encore, le travail discursif de Cabri est encore fiable pour des superpositions de coniques ou pour distinguer des coniques proches. Le niveau G2 informatique est ici aussi un niveau quasiment équivalent à G2.

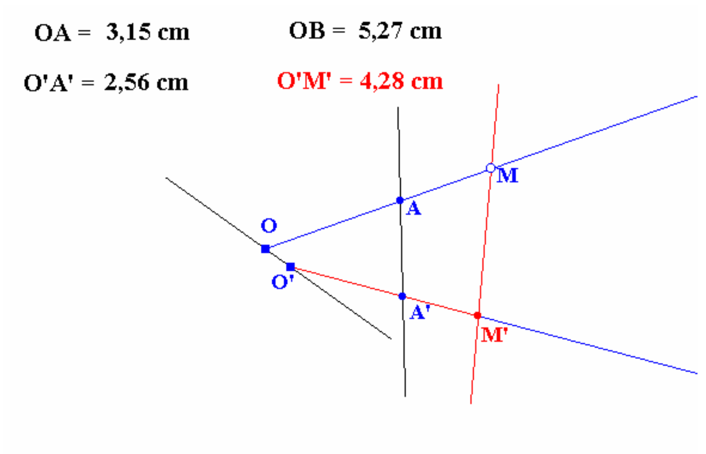
4.1.3.2. Parabole :

4.1.3.2.1. Construction d'une parabole passant par trois points non alignés

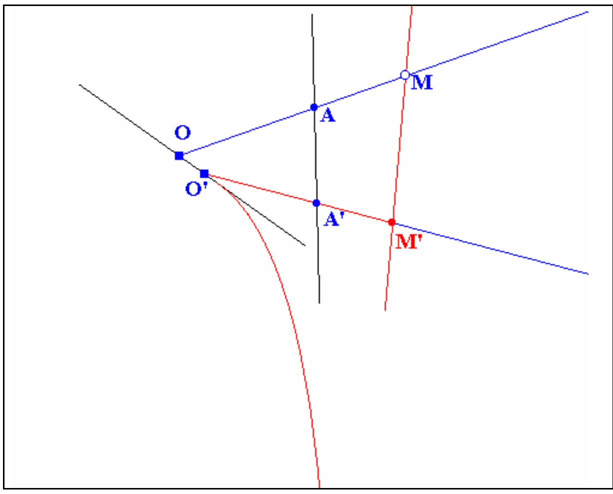
Voici une construction géométrique permettant d'obtenir avec l'outil « conique » de Cabri le tracé d'une parabole passant par trois points non alignés B, K, C du plan. Cet outil exigeant la donnée de 5 points particuliers, cette construction détaille comment obtenir deux autres points d'une parabole passant par ces trois points donnés.
L est le milieu de BC et A le symétrique de L par rapport à K.
I est milieu de AB, R le milieu de IK, S le milieu de IB et T le milieu de RS,
J est le milieu de AC, U le milieu de JK,V le milieu de JC et M le milieu de UV.
Cette construction assure que la conique passant par les cinq points B, T, K, M et C est une parabole ; Cabri reconnaît bien cette conique en tant que parabole quelles que soient les positions des trois points non alignés donnés (si on approche le curseur de cette conique lorsqu'on est en mode pointeur, on obtient le message « cette parabole »).



4.1.3.2.2. Reconnaissance d'une enveloppe en tant que parabole
(inspiré de DAHAN J., J., 1998, « Ce que Filou a derrière la tête ou histoires de paraboles » La lettre de T^3 N°3 T^3 Europe)

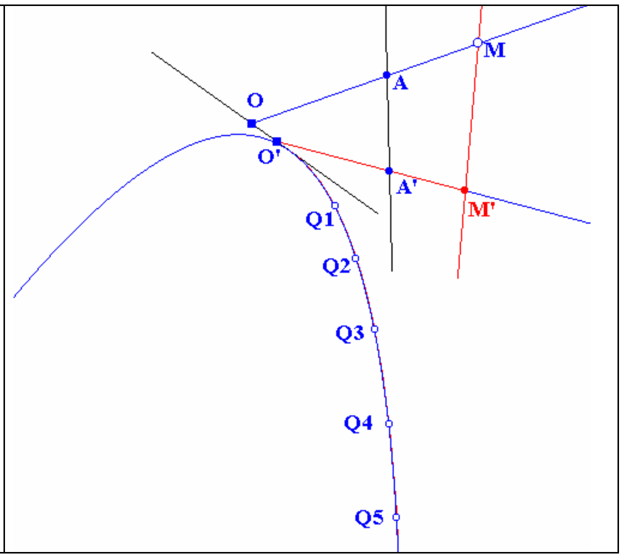
Deux demi-droites d'origines O et O' respectivement sont données, avec deux points A et M sur la première et le point A' sur la seconde. Le point M' est construit par report de mesure sur la seconde demi-droite du nombre $\frac{OM.O'A'}{OA}$ (ce dernier nombre est évalué avec la calculatrice de Cabri). C'est donc le point M' défini par la proportion $\frac{OM'}{OA'} = \frac{OM}{OA}$.	

La détermination de l'enveloppe de droites (MM') est possible dans l'environnement Cabri et elle donne la courbe rouge suivante :

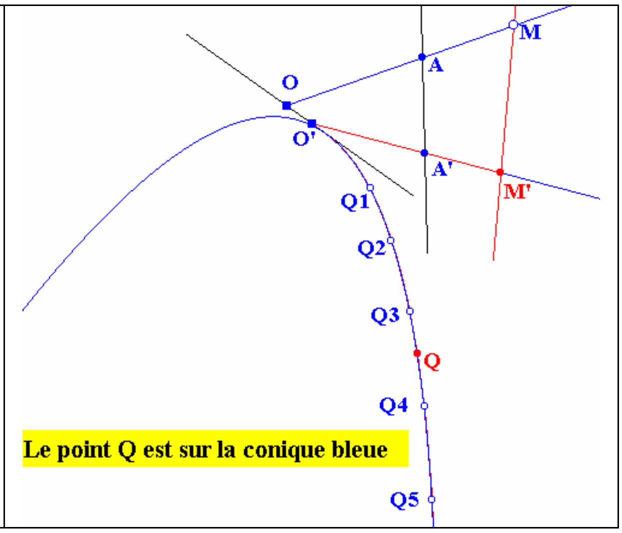


L’allure de la courbe nous fait soupçonner que celle-ci est un arc de conique. Cette conjecture est confortée par les constructions et les manipulations qui vont suivre.

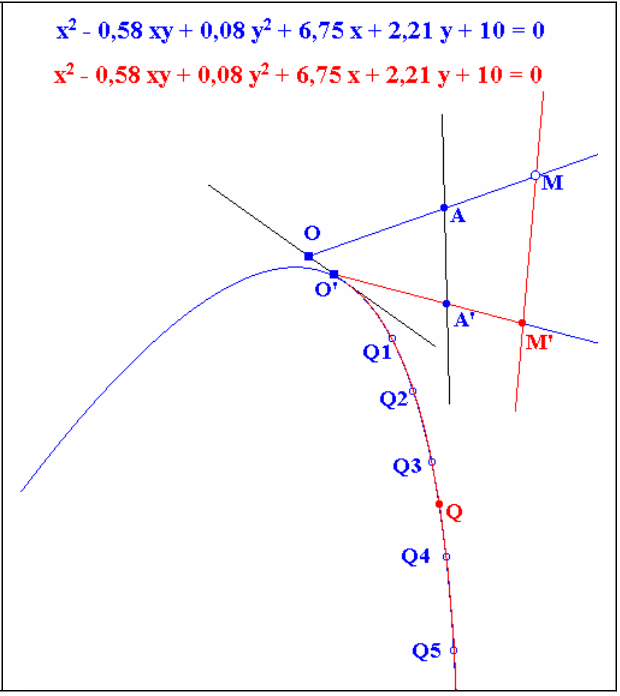
On construit en bleu la conique passant par cinq points Q1, Q2 , Q3, Q4 et Q5 quelconques de l’enveloppe rouge obtenue.
Cette conique semble se superposer à l’enveloppe rouge : ceci constitue une validation perceptive de la conjecture.
Si on déplace les points Q1, Q2 , Q3, Q4 ou Q5 sur l’enveloppe rouge, la superposition persiste : ceci augmente la plausibilité de la conjecture.



On peut aussi créer un point Q sur l’enveloppe rouge et tester son appartenance à la conique bleue. La réponse est toujours affirmative comme le montre la figure de droite, en effet cette réponse reste la même quand on déplace Q sur l’enveloppe rouge : cette exploration continue de renforcer la conjecture émise .



Si on demande les équations respectives de la conique et de l'enveloppe dans le repère par défaut de Cabri, on obtient la même équation :
Ceci conforte la conjecture affirmant que l'enveloppe rouge est une conique.



Si on augmente la précision de l'affichage des coefficients des équations des coniques, on constate que ceci sont exactement les mêmes : la plausibilité de la conjecture se renforce encore :

$$1{,}00023\, x^2 - 0{,}58977\, xy + 0{,}08693\, y^2 + 6{,}75602\, x + 2{,}21352\, y + 10 = 0$$

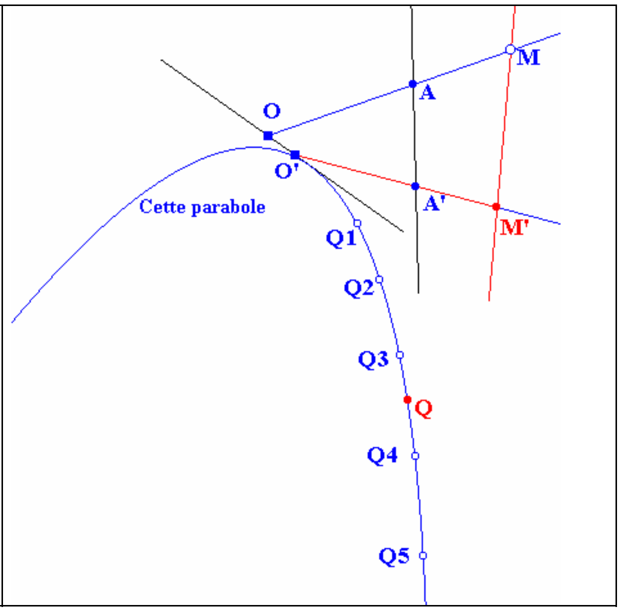
$$1{,}00023\, x^2 - 0{,}58977\, xy + 0{,}08693\, y^2 + 6{,}75602\, x + 2{,}21352\, y + 10 = 0$$

On commence à noter une différence d'une unité sur certains coefficients à partir de la dixième décimale :

$$1{,}0002315636\, x^2 - 0{,}5897749076\, xy + 0{,}0869384786\, y^2 + 6{,}7560244292\, x + 2{,}2135274180\, y + 10 = 0$$

$$1{,}0002315635\, x^2 - 0{,}5897749075\, xy + 0{,}0869384786\, y^2 + 6{,}7560244288\, x + 2{,}2135274179\, y + 10 = 0$$

Si on cache l'enveloppe rouge et si on approche le pointeur de la conique, comme on peut le voir sur la figure de droite, Cabri reconnaît une parabole et ce, pour toutes les positions « envisageables des points Q1, Q2 , Q3, Q4 et Q5 sur l'enveloppe. On peut aussi noter que l'équation de la conique ne change pas non plus, à condition de ne pas faire afficher plus de 9 décimales.



Toutes ces expérimentations conduisent à la conjecture très fortement plausible :

L’enveloppe des droites (MM’) est une parabole

Ce résultat a été démontré dans la brochure de l’IREM de Toulouse « De la proportionnalité aux coniques en passant par les lignes de niveaux avec la TI-92 » (de Jean-Jacques Dahan 1998) en utilisant le logiciel Derive puis par une démonstration formelle classique dans un article publié en Français (dans la lettre de T3) et en Anglais dans la Derive’s New Letter. Michel Carral et Roger Cuppens ont proposé la solution géométrique qui suit :
L’application qui à M fait correspondre M’ est une homographie. Il est donc connu (Chasles) que l’enveloppe des droites (MM’) est une conique. Quand M est à l’infini, M’ est à l’infini, donc cette conique est tangente à la droite de l’infini, c’est bien une parabole.

4.2. PROPOSITIONS POUR G1 ET G2 INFORMATIQUE

Nous proposons de rester dans le cadre de la théorie anthropologique de Chevallard pour caractériser les niveaux de géométrie que nous qualifions de G1 informatique et G2 informatique

4.2.1. Techniques, technologie et théorie dans G1 informatique

♦Les ***techniques*** utilisées pour la résolution de ce type de tâches sont essentiellement liées à l'usage d'instruments informatiques, ici Cabri avec ses outils de construction, ses outils de mesure (c’est une perception instrumentée par Cabri). Notons à part un outil méconnu de comparaison qui utilise la **« superposition après un copier-coller »** qui est plus qu’un décalquage : en effet ce copier-coller a la mémoire des constructions (pour preuve, quand on copie un objet dépendant, il est copié avec les objets indépendants dont il dépend).

♦Les ***technologies*** (mode de validation) font également usage des instruments de Cabri, qui sont alors utilisés pour contrôler le dessin construit, par la constatation visuelle de coïncidences ou de superpositions, par la constatation de différences de mesures « faibles » ou d’écarts de mesures « faibles »

♦Le ***niveau théorique*** est souvent présent sous la forme de conjectures faites dans G2 grâce à un travail inductif permis par les technologies précédemment mises en exergue et par des validations utilisant ces technologies : il consiste en réalité en une utilisation des technologies pour induire des résultats qui sont conjecturés dans G2 et dont la plausibilité est évaluée par les mesures faites par usage des technologies de G1 informatique, c’est-à-dire les outils de mesure et de calcul de Cabri mais pas les outils de test qui sont du niveau G2 informatique.

♦Conclusion

<u>G1 informatique est G1</u> à cause des techniques associées aux instruments de Cabri qui généralisent celles de l’environnement papier-crayon (cercle à la place de compas, droite à la place de la règle, report de mesure qui peut même reporter sur demi-droites, vecteurs, triangles, polygones, cercles et toutes les transformations).
<u>G1 informatique est informatique</u> à cause de l’échantillon discret du plan sur lequel Cabri travaille (calcule) et surtout à cause des modes de validation qui, même s’ils reposent sur des constatations visuelles de superposition, sont plus performants que dans G1 ; la raison essentielle de cette plus grande performance réside à la fois dans la précision des tracés même dans des cas limites et la dynamicité qui autorise des conjectures beaucoup plus plausibles.

4.2.2. Techniques, technologie et théorie dans G2 informatique

♦ Les ***techniques*** concernent des objets géométriques (droites, points, segments, cercles, ...) dont l'existence est assurée par des énoncés (définitions, axiomes, propriétés admises, ...), et l'usage de Cabri permet d'en obtenir des représentations compatibles avec leurs caractérisations théoriques (modèles sur l'écran). À la différence de G2, dans G2 informatique, on peut empiler des objets (superposer par exemple deux points qui seront considérés comme distincts bien qu'ayant les mêmes Cabri-coordonnées).

♦ Les ***technologies*** correspondantes consistent en la production par l'expérimentateur d'un discours de type déductif appliqué aux données de l'énoncé et utilisant des éléments de G2 ou G2 informatique rencontrés antérieurement. Elles s'appuient sur les outils de tests, « appartenance », « parallélisme », … qui travaillent à partir de calculs analytiques sur les points discrétisés de la page Cabri ; c'est le niveau déductif à la charge de Cabri qui caractérise en grande partie le qualificatif d'informatique que nous avons donné.

♦Le ***niveau théorique*** est constitué par une géométrie axiomatique de type G3 informatique (la géométrie affine euclidienne discrétisée à tous les points dont les coordonnées sont comprises entre –100 et +100 avec un pas de 10^{-9} dans ma version de Cabri sur mon ordinateur portable ; Cabri peut aussi utiliser des points à l'infini et des points construits avec des coordonnées supérieures à 100). Une technique très générale dans G2 informatique est la réalisation et l'étude de « figures » (dessins) sur lesquelles on fera éventuellement agir des techniques de G1 dans le but de rechercher des indices qui permettront d'aboutir à une Cabri-démonstration, c'est à dire à un retour à G2 informatique avec en particulier ses outils de test.

Remarque : l'empilement des points n'est pas à proprement parler exclu de l'environnement papier-crayon. Par exemple, si on trace une droite, si on trace deux points distincts sur cette droite et si on trace au crayon une droite passant par ces deux points, seule la connaissance d'un axiome permet de dire que ces deux droites sont les mêmes

4.2.3. Conclusion

<u>G2 informatique est G2</u> à cause du niveau déductif présent chez l'expérimentateur et dans l'outil lui-même et

<u>G2 informatique est informatique</u> à cause de l'échantillon discret du plan sur lequel Cabri travaille (calcule), ce qui « démultiplie » la plausibilité des conjectures issues des mesures réalisées sur les objets de ce niveau par rapport à G1 : il ne s'agit pas d'un super G1 mais bien d'un niveau connexe à G2 en raison de la forte connexion des calculs réalisés par Cabri et de l'axiomatique qui est derrière les modèles manipulés (et plus spécialement pour un utilisateur averti).

4.2.4. Remarque générale sur l'environnement papier-crayon

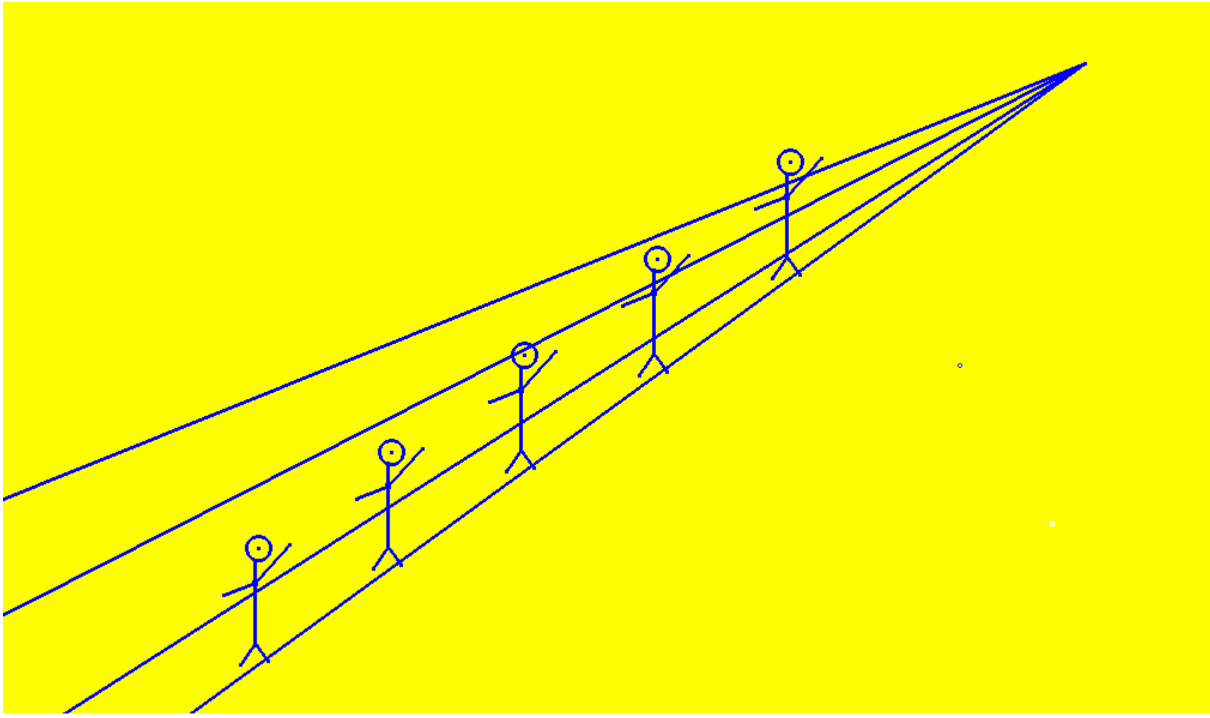
Il nous semble paradoxal qu'un des problèmes jamais abordés (ou presque) est celui du monde papier-crayon. Et pourtant comme dans Cabri, le nombre de points (ou d'objets) de départ possible est fini (ne serait-ce que parce que l'on vit dans un monde atomique) mais on fait comme si cet univers de possibles était infini : devant une figure signifiée, on raisonne dans le signifiant créant un décalage constant. De plus la validation est limitée par la précision de la vision. Il était normal de préciser tout cela dans l'environnement Cabri et de voir en quoi Cabri ajoute une énorme précision dans les tracés et les interprétations.

ANNEXE 1

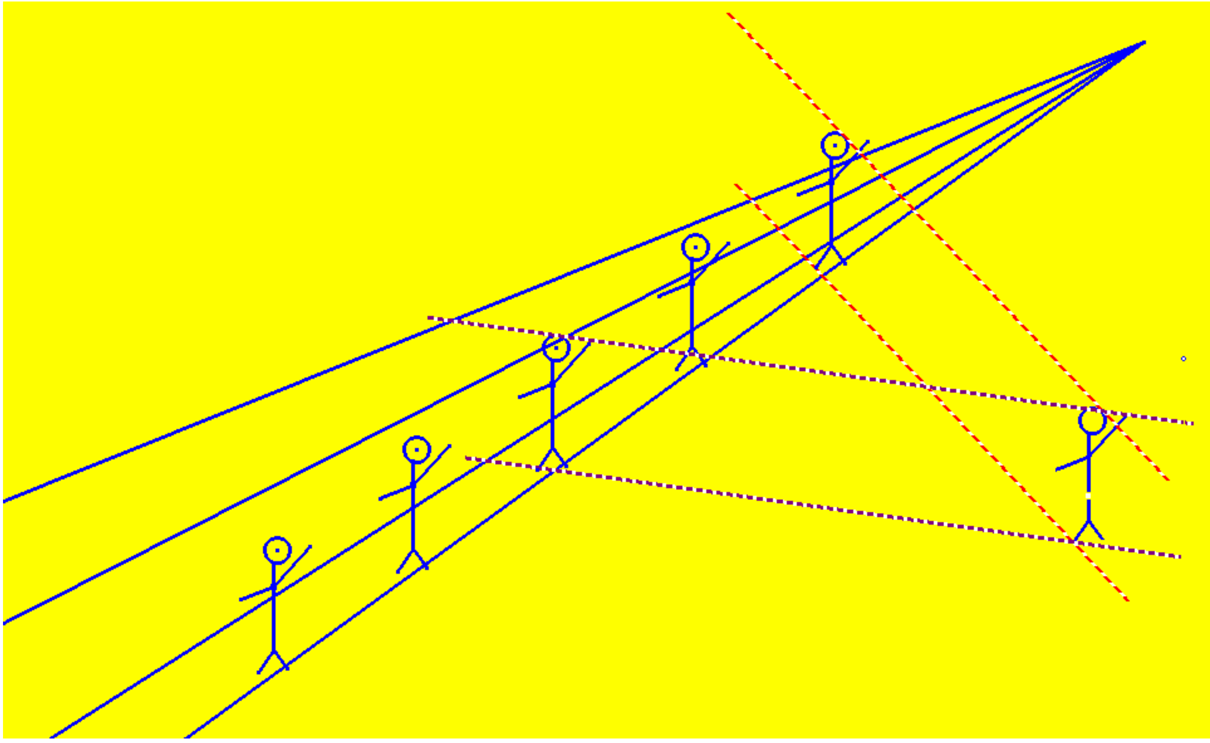
Duval considère quatre différentes appréhensions des figures que nous illustrons avec Cabri ci-dessous. Il considère très généralement la figure du monde papier-crayon qu'il confond avec un représentant de la figure telle que nous l'avons définie par ses spécifications. Dans Cabri l'appréhension n'a de sens que dynamique :
Ou bien les spécifications sont connues et la figure est appréhendée suivant les manipulations qui vont être générées.
Ou bien les spécifications ne sont pas connues et la figure va être appréhendée par les manipulations qui vont générer certaines de ses spécifications.

APPRÉHENSION PERCEPTIVE (Perceptive1.fig et Perceptive2.fig)

Le dessin qui suit qui est le représentant d'une Cabri-figure, quand il est appréhendé de manière perceptive, renvoie une image de l'espace en perspective avec des personnages de plus en plus grands alignés le long d'un couloir :

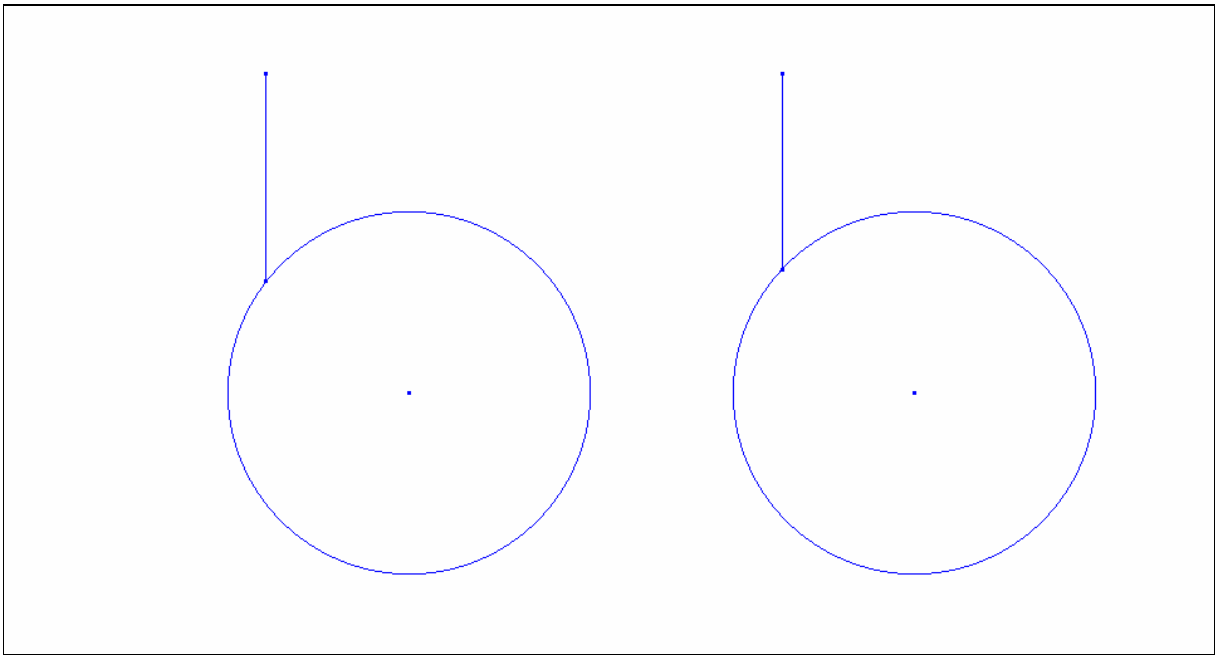


La Cabri-construction qui suit montre qu'en réalité tous les personnages ont la même dimension et c'est donc une interprétation immédiate de notre cerveau qui constitue le principe de ce type d'appréhension.
Le petit personnage ajouté en bas à droite de la figure peut être tiré identique à lui-même en conservant les couples de parallèles rouges et mauves qui sont présentes pour sortir de cette appréhension.



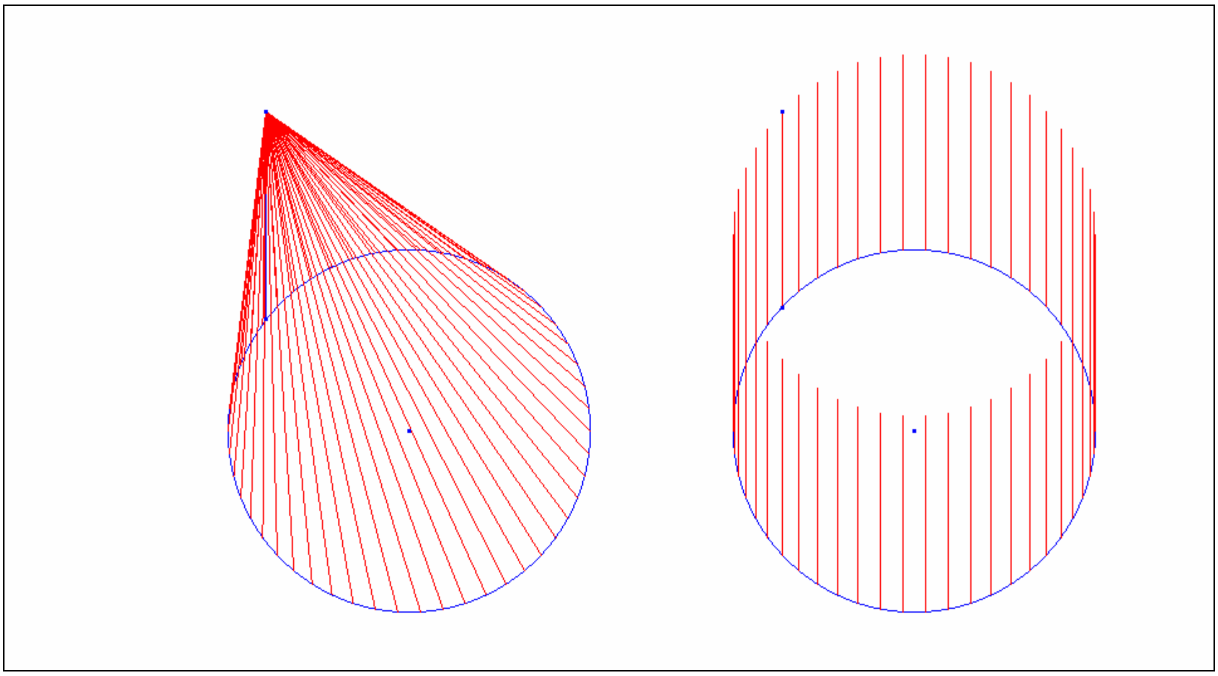
APPRÉHENSION SÉQUENTIELLE (sequent.fig et sequent2.fig)

La figure qui suit est composée de deux dessins identiques ; si on ne connaît pas les constructions qui ont conduit à leur réalisation, on ne pourra deviner comment les manipuler, les déformer, comment déplacer les objets qui les composent et même si cela est possible :



Une manière d'appréhender les constructions effectives qui ont conduit aux dessins précédents est d'expérimenter sur la figure fournie.

L’expérimentation proposée consiste à demander le lieu du segment quand le point de contact du segment avec le cercle varie. Dans les deux cas le lieu existe mais les résultats obtenus sont différents.

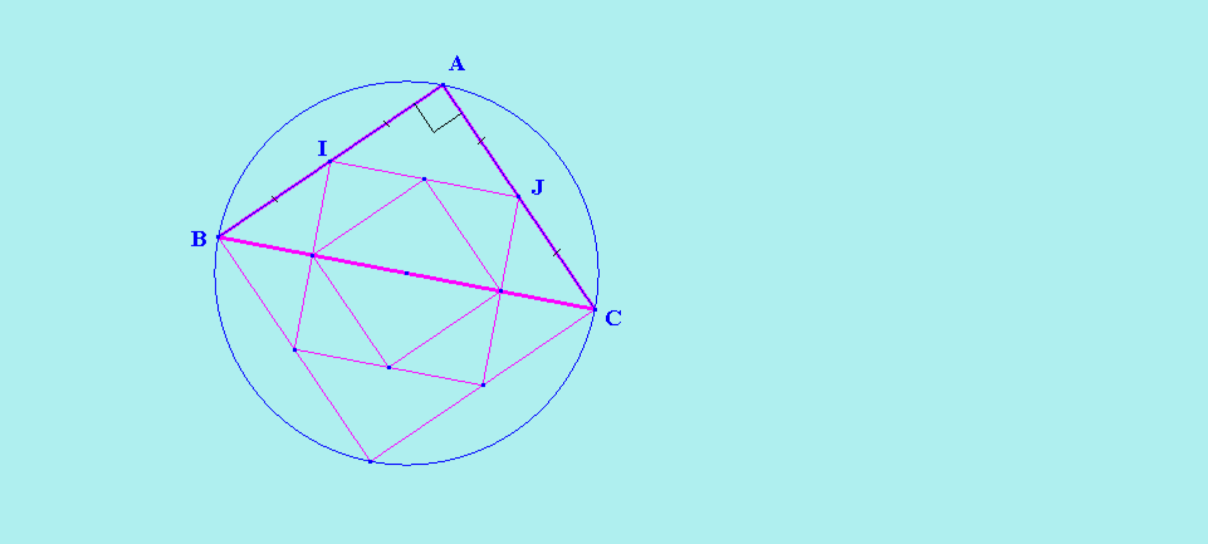


La figure ainsi obtenue peut être lue en termes des constructions qui les ont générées, c’est l’appréhension séquentielle (qui ici est fortement discursive car liée au résultat d’une expérimentation).
La figure de gauche a été construite en construisant un cercle puis un segment ayant comme extrémités un point du cercle et un point libre du plan, ce qui explique l’impression de cône donnée par le premier lieu.
La figure de droite a été construite en construisant un cercle puis un segment ayant comme extrémités un point du cercle et son image par une translation de vecteur un vecteur de direction verticale mais caché, ce qui explique l’impression de cylindre donnée par ce second lieu.

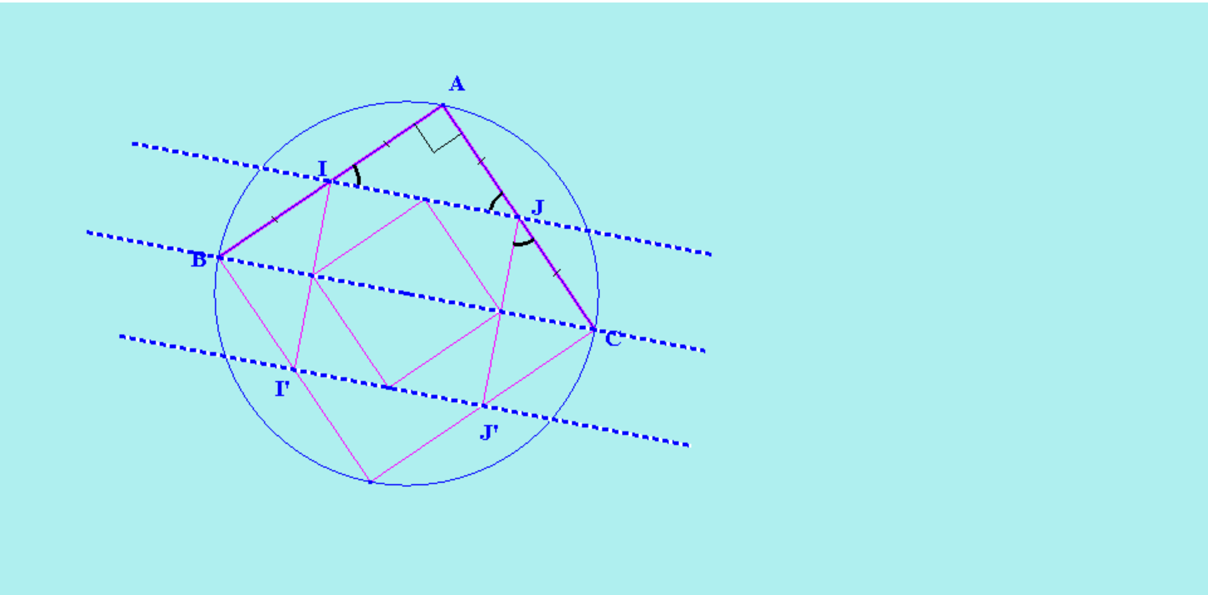
APPRÉHENSION DISCURSIVE (Discursive1.fig et Discursive2bis.fig)

L’appréhension discursive est liée à l’énoncé de propriétés qui ne sont pas données avec la figure mais qui en sont déduites par un discours déductif exprimé ou non.

La figure qui suit a été construite à partir d’un cercle puis d’un carré inscrit dans ce cercle ; on a ensuite construit le quadrilatère joignent les milieux des côtés de ce carré et on a réitéré le procédé. Un grand nombre de propriétés se déduisent de la lecture du dessin produit, concernant des parallélismes de droites, des valeurs d’angles, de la nature de quadrilatères qui sont des carrés…
Par exemple dans le triangle ABC, le théorème des milieux donne immédiatement (IJ)//(BC) et IJ = $\frac{1}{2}$BC et dans la foulée le premier quadrilatère est un losange avec un angle droit.

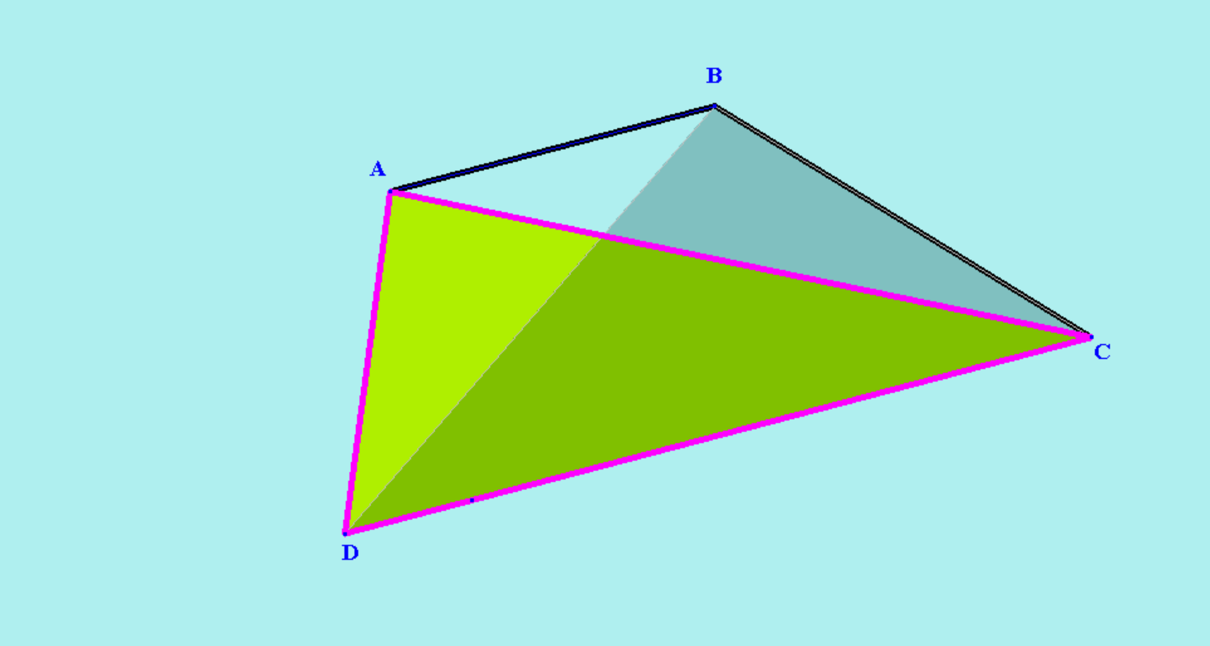


On voit (par déduction que l'un des angles de ce quadrilatère, $ est bien droit car les angles marqués en noirs valent 45°.

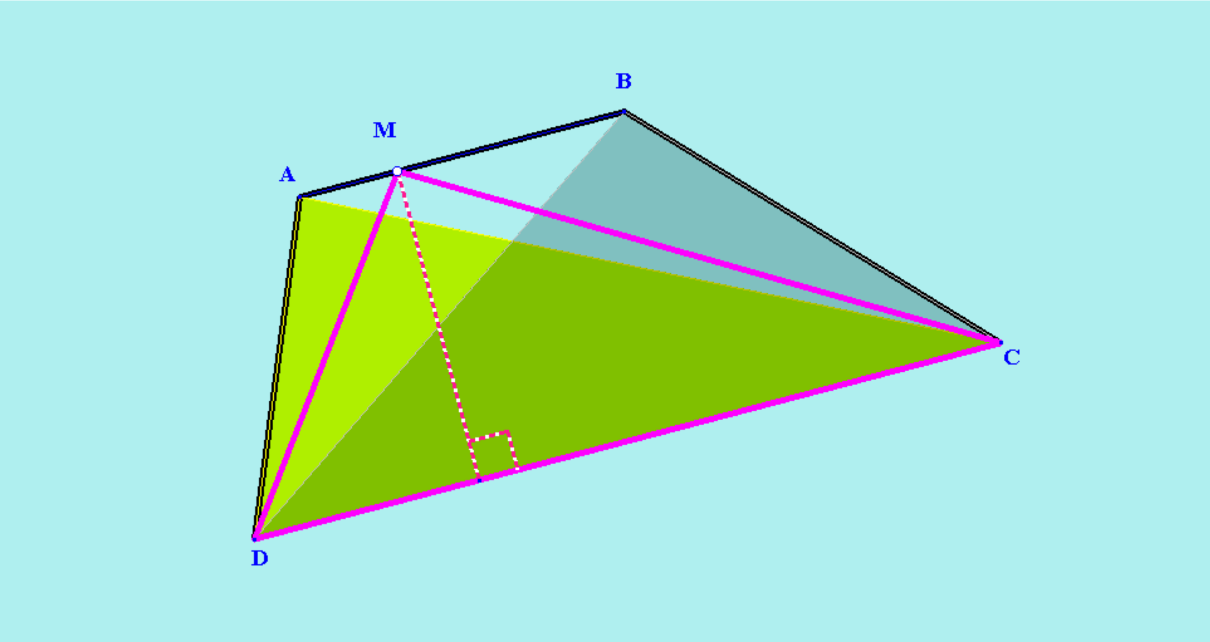


APPRÉHENSION OPÉRATOIRE (duvalop.fig)

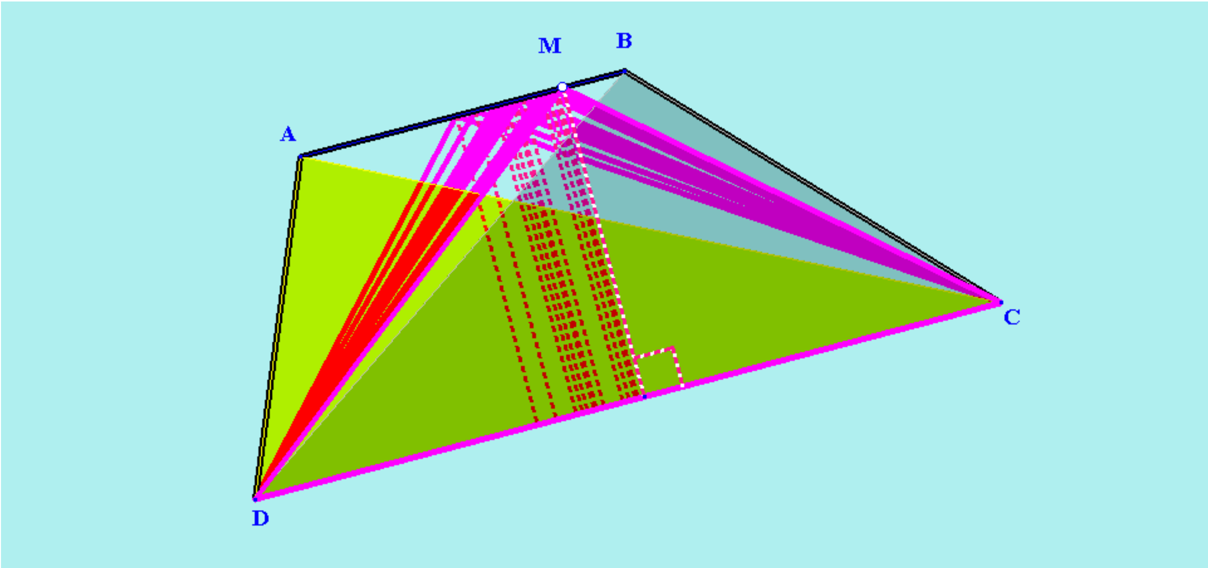
Nous donnons ci-dessous un seul exemple de telles appréhensions qui montre que cette appréhension est une appréhension que l'environnement Cabri devrait générer si une véritable instrumentation de ce logiciel était réellement réalisée.
La figure donnée est un trapèze avec comme tâche de démontrer l'égalité des aires des triangles ADC et BDC



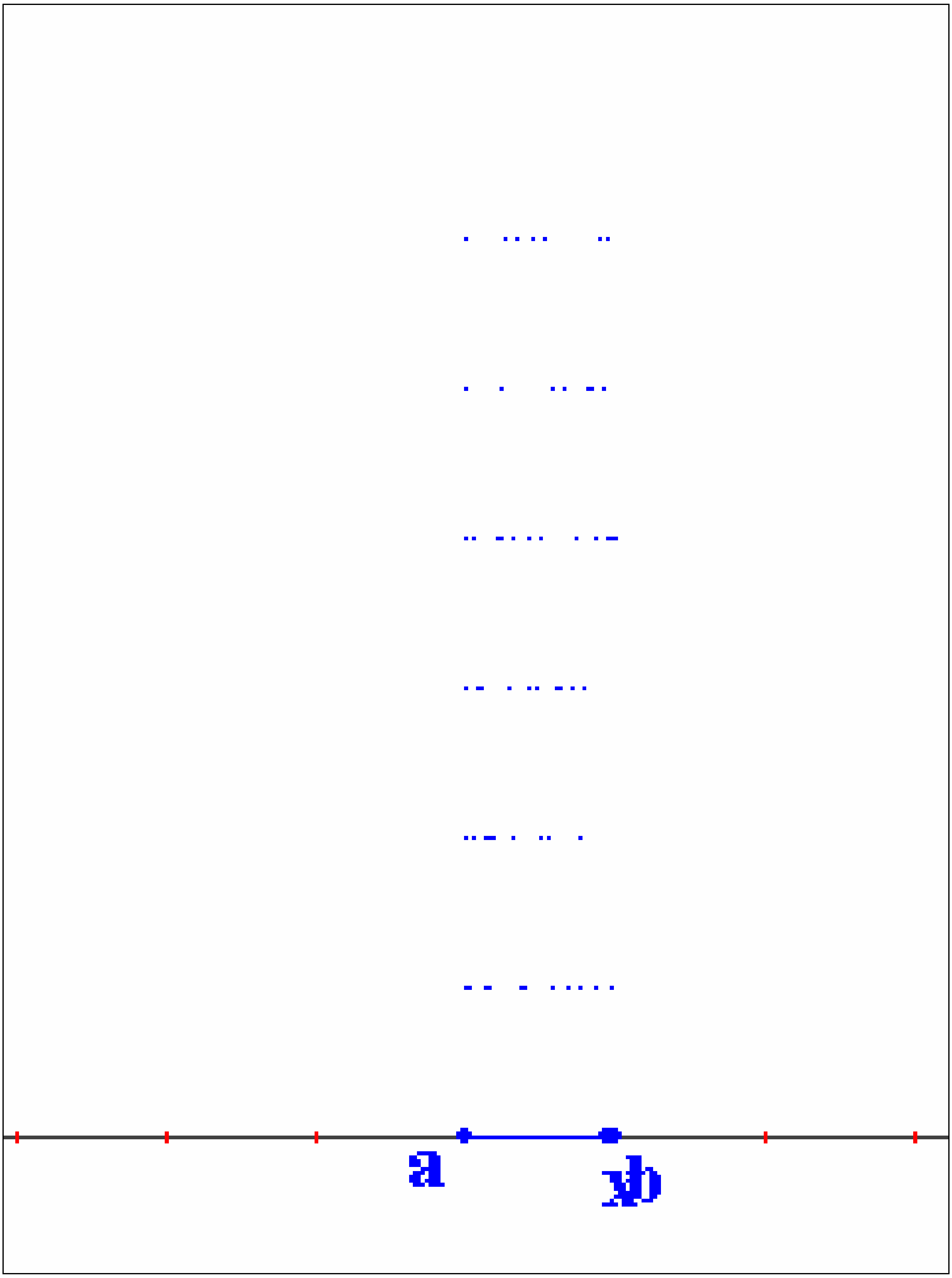
La figure suivante montre ce qu’est une appréhension opératoire de cette figure pour ce type de tâche ; imaginer un triangle mobile MDC avec M qui glisse le long de [AB] et donc le triangle MDC qui se déforme avec une base constante et une hauteur dont la mesure ne change pas, est une appréhension de ce type et on voit qu’elle est fortement heuristique du moins dans cet exemple.



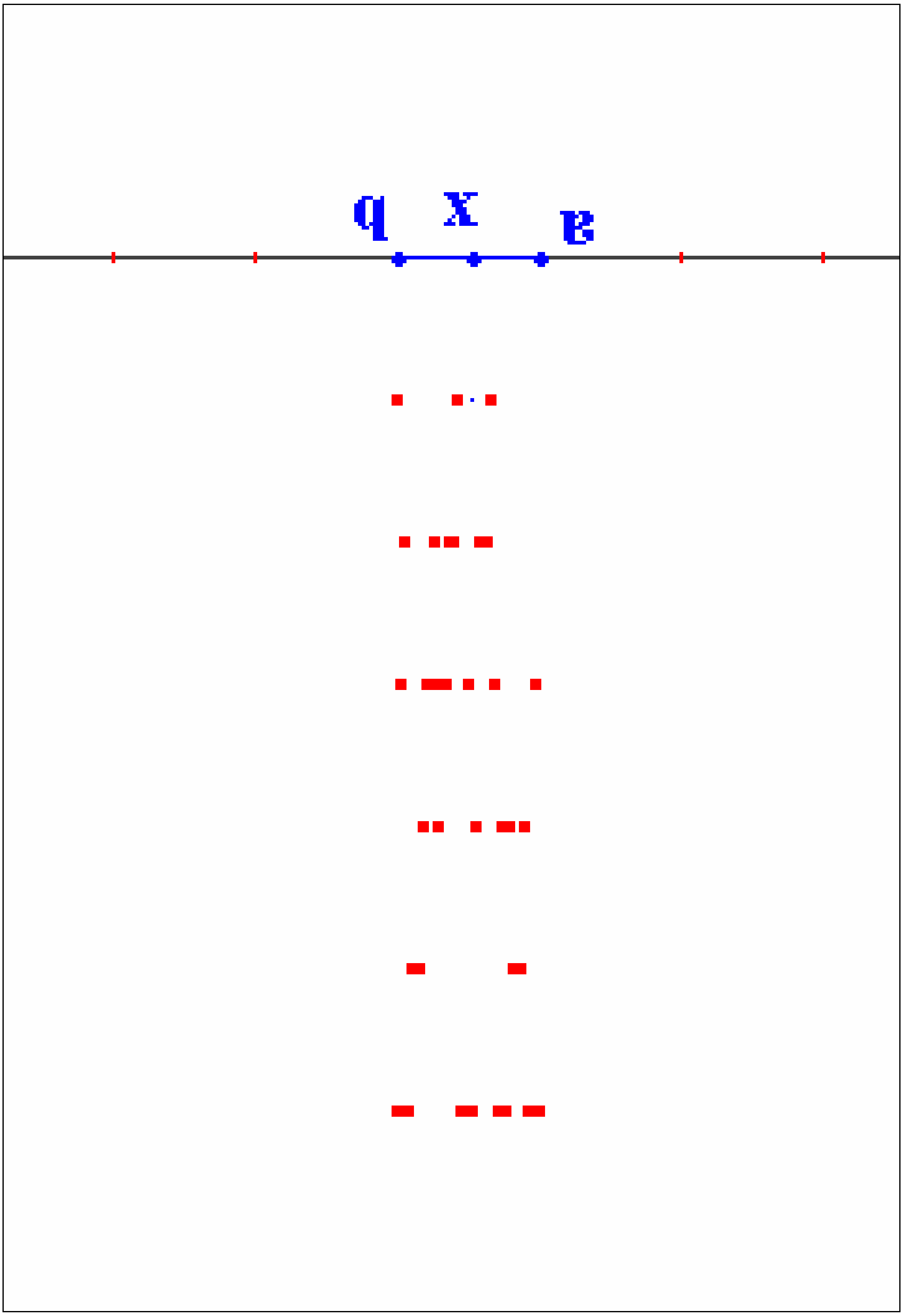
On a ajouté ci-dessous une variante des manipulations possibles sous Cabri :
On a activé les traces du triangle MBC, de la hauteur issue de M relative à [DC], puis on a lancé une brève animation de M le long de [AB]

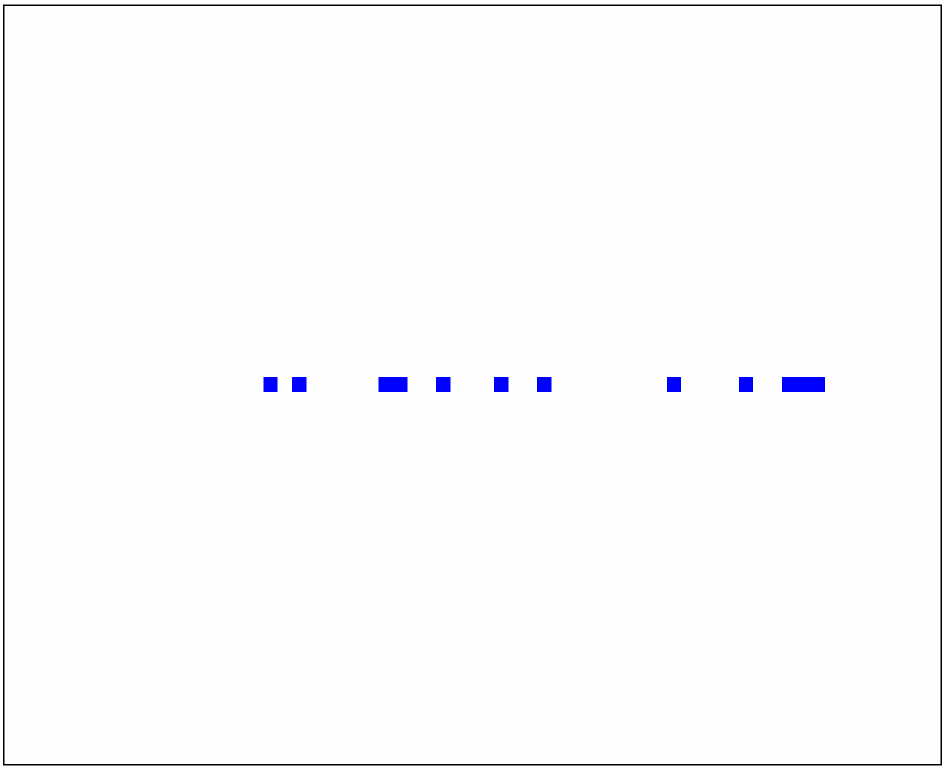

M
B
A
C
D

ANNEXE 2



ANNEXE 3





Grossissement d’une partie de la figure de l’annexe 1 après rognage

Partie 3

CHAPITRE 8 : Problématique

PROBLÉMATIQUE

1. LES QUESTIONS QUE NOUS POSONS

La démarche expérimentale pratiquée dans le cadre d'une recherche de problèmes en Mathématiques, l'est plus ou moins suivant le type de problèmes posés et suivant le type d'instruments utilisés. On peut se demander :

Question 1 : Existe-t-il un type de problème nécessitant **obligatoirement** la pratique d'une démarche expérimentale pour son traitement ? Avec quels chercheurs et dans quelles conditions ?

Question 2 : La démarche expérimentale générée par la tentative de résolution de tels problèmes peut-elle être le modèle d'une démarche idéale ? qui permette en particulier de retrouver des modélisations partielles déjà connues ?

Question 3 : Quelle est la décomposition formelle d'une telle démarche ? Quelles phases peut-on mettre en évidence avant et après la conjecture ? Quelles types d'expérimentations sont menées dans chacune de ces phases ? Quels sont les cadres d'investigation mobilisés au cours de ces différentes phases ? Dans quels niveaux de géométrie spécifiques, le chercheur se place-t-il naturellement au cours de ces différentes phases ?

Question 4 : Quel peut être l'apport de la connaissance de cette décomposition dans la maîtrise des ingéniéries didactiques (plutôt « des génies didactiques » pour rester Français et respecter la proposition de Rudolf Bkouche) relatives à la conception de problèmes adaptés à une véritable activité mathématique allant vers la découverte ?

Question 5 : La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri se développe-t-elle de la même manière chez un apprenti-chercheur et chez un chercheur expert ? La connaissance d'une décomposition formelle de cette démarche permettra-t-elle de mettre en évidence les phases qui devront faire l'objet d'un travail de transposition afin que l'apprenti-chercheur en prenne conscience pendant son travail heuristique ?

2. LES HYPOTHÈSES QUE NOUS AVANÇONS

2.1. GÉNÉRATION D'UNE DIALECTIQUE EXPLORATION-INTERPRÉTATION

La démarche de recherche de transformations cachées **avec Cabri-Géomètre comme instrument médian** génère **chez les publics à qui on les propose** de la démarche expérimentale **avec des enchaînements d'activités d'exploration et d'activités d'interprétation** (incluant des essais-erreurs).

2.2. MISE EN ÉVIDENCE DES MACRO- ET MICRO-ÉTAPES DE LA DÉMARCHE (TOUT PARTICULIÈREMENT DANS LES RECHERCHES EN GROUPES)

Ces problèmes de boîtes noires sont des problèmes **mettant en évidence** les **macro-étapes** et les **micro-étapes** d'une **démarche expérimentale** en Mathématiques et plus particulièrement en géométrie. Cette mise en évidence est particulièrement **favorisée** par une **recherche en groupe** pilotée par un **sherpa**. Alors que la démarche se décompose en un enchaînement de macro-étapes, chaque macro-étape se décompose elle-même en un enchaînement de micro-étapes.

Nous faisons l’hypothèse supplémentaire que la modification du niveau d’expertise des personnes à qui le problème est soumis fera varier la longueur de certaines phases de recherche par rapport à d’autres.

2.3. LES MACRO-ÉTAPES PRÉ-CONJECTURES ÉMERGENT NATURELLEMENT LES MICRO-ÉTAPES NON MAIS MODÉLISENT UN RAISONNEMENT PAR ANALYSE-SYNTHÈSE

Les **macro-étapes** sont de deux types, **pré-conjecture** et **post-conjecture** :
3.1. Nous faisons l’hypothèse que la **démarche pré-conjecture** est celle qui **émerge de manière naturelle** aussi bien dans les publics experts que chez les étudiants ou lycéens
3.2. Nous faisons aussi l’hypothèse que la **démarche post-conjecture** est une démarche qui **n’émerge pas de manière naturelle** pour deux raisons au moins : manque de temps et difficulté d’entrer de manière naturelle dans une phase de validation expérimentale (le fait que la phase de démonstration formelle survienne habituellement après l’énoncé de la conjecture amenée expérimentalement peut constituer un obstacle à ce type de validation).
3.3. Nous faisons ensuite l’hypothèse que cette démarche post-conjecture si elle est pratiquée, est une modélisation d’un raisonnement par analyse-synthèse à des niveaux à préciser.

2.4. LES MICRO-ÉTAPES SONT DÉCOMPOSABLES DE MANIÈRE QUATERNAIRE MONTAGE, PROTOCOLE, EXPÉRIMENTATION, INTERPRÉTATION

Les **micro-étapes** apparaîtront effectivement, dans un premier temps comme :

Des maillons binaires du type EXPLORATION-INTERPRÉTATION
pour être affinées dans un second temps au cours des expérimentations qui valideront la décomposition de la démarche expérimentale médiée, en des **maillons quaternaires** du type

MONTAGE, PROTOCOLE, EXPÉRIMENTATION, INTERPRÉTATION où

♦Le **montage** est la construction proposée avec l’ordre des constructions intermédiaires.
♦Le **protocole** est la description des actions qui vont être opérées sur la construction, statiques ou dynamiques.
♦L’**expérimentation** est la réalisation du protocole avec les résultats observés déclarés au niveau du signifié.
♦L’**interprétation** est la traduction de ces observations à un niveau plus avancé, celui du signifiant, ou du moins un niveau l’approchant.

2.5. MISE EN ÉVIDENCE D’UN NIVEAU DE GÉOMÉTRIE QUALIFIÉ D’INFORMATIQUE

La **démarche expérimentale** pratiquée dans un **environnement informatique NÉCESSITE** de **SE PLACER** à des moments spécifiques dans un **niveau géométrique ou des niveaux géométriques connexes à ceux du cadre de Parzisz** ; ces niveaux seront qualifiés de G_1 Informatique et G_2 Informatique.

2.6. MEILLEURE CONNAISSANCE DU TRIANGLE [CHERCHEUR-APPRENTI CHERCHEUR-MODÈLE EXHIBÉ]

Nous faisons l'hypothèse que la connaissance détaillée des phases de la démarche expérimentale telles qu'elles apparaîtront au cours de ce travail, mises en relation avec un travail de recherche expérimentale effectuée par un Mathématicien chercheur permettront :
D'établir un **parallèle** entre l'activité du chercheur et celle de l'apprenti chercheur dans la **phase pré-conjecture**.
De **préciser les phases d'activités du chercheur** dans sa démarche expérimentale post-conjecture et les **comparer au modèle** que notre recherche aura exhibé.

2.7. VIABILITÉ DIDACTIQUE DU MODÈLE

Nous faisons l'hypothèse de la **viabilité** de notre modèle pour **analyser** des démarches expérimentales et en particulier :
Pour analyser les **narrations de recherche** ou **les résolutions de problèmes longs** et préciser les phases qui sont concernées dans ce travail spécifique qui lie l'expérimental à l'écrit, le signifiant au signifié.
Pour analyser certains **exercices ou problèmes proposés dans des ouvrages scolaires** et diagnostiquer plus précisément leurs objectifs d'apprentissage.
Pour éventuellement proposer des règles formelles à respecter pour une mise en place d'une ingéniérie didactique de l'expérimental utilisant l'informatique.

Cette toute dernière hypothèse ne sera peut-être pas validée au cours de ce travail mais il paraît naturel de la proposer pour une suite à ce travail.

Partie 4

MISE EN ÉVIDENCE DES PROBLÈMES CRUCIAUX

Il s'agit dans ce chapitre de mettre en évidence des problèmes que nous qualifierons de « **problèmes cruciaux** » pour la formalisation de la démarche expérimentale : ceux dont la résolution vont être propices à l'émergence d'une pratique de la démarche expérimentale pour leur résolutions et qui en même temps peuvent nous aider à mettre en évidence les différentes phase de cette démarche.

Nous nous focaliserons d'abord sur l'exemple des problèmes inversés ; nous tenterons de réaliser une étude formelle de ces problèmes et en proposerons une caractérisation.

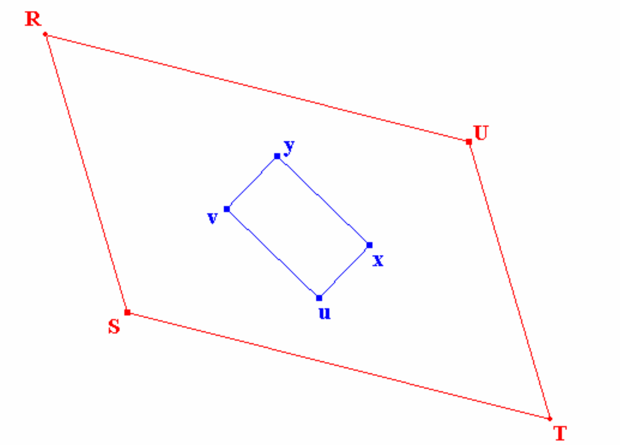
Cette analyse montrera les limites de l'utilisation de ce type de problèmes pour faire émerger les étapes que nous cherchons à mettre en évidence (celles de la démarche de découverte expérimentale), mais la caractérisation de ce type de problème nous permettra de nous concentrer sur des problèmes généralisant ceux-ci, les problèmes de transformations cachées dans une boîte noire dans l'environnement Cabri-Géomètre. Rappelons une de nos hypothèses de recherche qui est que ces problèmes sont les problèmes cruciaux qui vont rendre apparentes les phases de la démarche expérimentale médiée.

C'est seulement dans le chapitre suivant que nous montrerons effectivement l'intérêt de ces problèmes pour l'objectif d'obtention aisée d'une visualisation plus fine de la démarche expérimentale.

1. LA PISTE DES PROBLÈMES INVERSÉS. ANALYSE DE L'EXPÉRIMENTAL PROPOSÉ DANS UN TEL PROBLÈME

1.1. Le choix initial des problèmes inversés

Créer un problème qui doive générer une démarche expérimentale pour sa résolution par utilisation du logiciel Cabri renvoie au concept de boîte noire tel que présenté par P.M. Charrière (1993) sur un travail préalable de B. Capponi (voir université d'été 1993). L'idée qui se dégage de l'exemple ci-dessous où un parallélogramme RSTU est donné ainsi qu'un autre xyvu qui en dépend est qu'une expérimentation générative va être nécessaire pour attaquer la résolution d'un tel problème : ici, deviner comment le second parallélogramme est construit à partir du premier.



L'environnement dans lequel est posé le problème et la façon dont il est posé, vont aussi générer un enchaînement d'expérimentations génératives et validatives : il est en effet demandé de construire un parallélogramme ainsi que le parallélogramme qui en dépend et de comparer le résultat obtenu par la macro-construction qui a servi à passer du premier parallélogramme présenté au second.

Parmi les exercices rencontrés dans les ouvrages scolaires où cette idée est sous-jacente, mais dans un environnement papier crayon, nous en avons repéré dans le livre de Première S des éditions Belin 2001 (**Analyse d'un tableau de valeur ou d'une courbe** : exercices 100, 101, 102, 103, 104 et 105 pages 22 et 23. **Recherches de fonctions du second degré** : exercices 108, 109, 110 et 111 pages 48 et 49). Ces exercices intègrent soit une copie d'écran de Cabri, soit des copies d'écrans de tableurs qui résument les données d'une expérimentation. La tâche est, comme dans la boîte noire présentée plus haut de deviner comment ont été obtenues les données présentées.

Il nous a paru pertinent de nous focaliser sur ce type de problèmes que la littérature qualifie de « problèmes inversés », pour essayer de détecter leur réelle pertinence au sens d'une aide à la formalisation de la démarche expérimentale médiée.

Pour décrire puis caractériser ces objets didactiques nous avons choisi un exercice qui a fait l'objet de multiples présentations et publications et qui de plus a été expérimenté plusieurs années d'affilée dans les classes de seconde dont l'auteur a eu la responsabilité.

1.2. Contexte dans lequel le problème inversé choisi a été proposé

La description qui suit est extraite de la brochure IREM de Toulouse « Enseigner et pratiquer les Mathématiques avec Cabri », (chapitre N° 13 : « Un exemple de transposition de problème inversé en classe ») ; l'enseignant présente en classe les fonctions de référence en utilisant la TI-92 rétroprojetable avec le protocole suivant (une partie de la réalisation est aussi exposée) :

Première séance :

Présentation dynamique aux élèves d'une construction géométrique permettant à partir d'un point d'abscisse x de l'axe des abscisses de construire le point de l'axe des ordonnées d'ordonnée x^2 (cette expression formelle n'est évidemment pas donnée aux élèves).

Le point M de coordonnées x et y est construit et son couple de coordonnées est affiché.

La monstration réalisée par le Professeur consiste en :

L'animation de x pour voir se déplacer y, M et visualiser le changement dans l'affichage des coordonnées de M.

La visualisation de la trace de M puis la création de la courbe de la fonction carrée à partir de l'outil « Lieu ».

La proposition du problème à résoudre qui consiste à découvrir un lien entre x et y explicitable par une formule algébrique.

Une animation de x avec capture des coordonnées du point M qui décrit la courbe dans le tableur associé à la page Cabri dans les colonnes c1 et c2.

Le traitement des données sous la forme de création de colonnes dépendant des deux premières capturées c'est-à-dire x et y, ces nouvelles colonnes étant des combinaisons des deux premières par utilisation des opérations usuelles fortement suggérée par la question du professeur à la classe « nous cherchons s'il y a un rapport entre c1 et c2 ». La classe finit par proposer par exemple ci = c1/c2 puis c2/c1 qui donne les mêmes résultats que c1.

Interprétation sous forme d'une conjecture : $y = x^2$.

Démonstration de cette conjecture

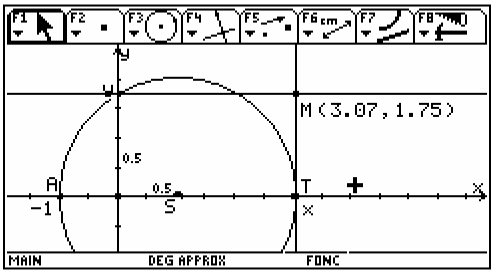
Deuxième séance

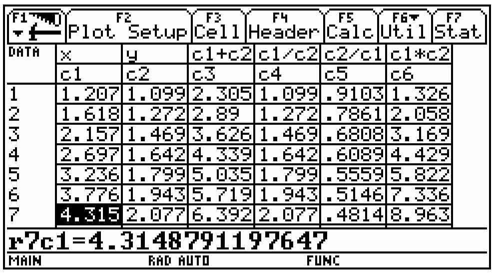
Une séance en tout point analogue à la première est bâtie avec comme objectif, cette fois l'introduction de la fonction inverse. Une différence essentielle dans la mise en place : les élèves ont pour consignes de suivre et de participer sans prendre de notes. Quand le travail en commun est achevé, ceux-ci reçoivent une feuille polycopiée contenant les captures d'écran utiles à la narration illustrée du travail achevé. Les élèves doivent réaliser cette narration illustrée en se servant des captures d'écran fournies

Évaluation
Dans le devoir surveillé suivant, le problème qui suit a été intégré.

1.3. Le problème avec une proposition d'analyse

Exercice





DATA	x	y	c1+c2	c1/c2	c2/c1	c1*c2
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	1.207	1.099	2.305	1.099	.9103	1.326
2	1.618	1.272	2.89	1.272	.7861	2.058
3	2.157	1.469	3.626	1.469	.6808	3.169
4	2.697	1.642	4.339	1.642	.6089	4.429
5	3.236	1.799	5.035	1.799	.5559	5.822
6	3.776	1.943	5.719	1.943	.5146	7.336
7	4.315	2.077	6.392	2.077	.4814	8.963

r7c1=4.3148791197647

x est un nombre de l'axe des abscisses, ***y*** est le nombre de l'axe des ordonnées obtenu par la construction ci-dessus, à partir de A positionné à –1. On se propose de découvrir la relation fonctionnelle qui permet d'évaluer ***y*** en fonction de ***x***.
Dans un premier temps, par animation de ***x*** on capture une série de couples (***x*** ; ***y***) dans un tableau et on fait le **traitement** ci-dessus.

Si on n'avait pas précisé le contexte dans lequel ce traitement est proposé (analogie avec des traitement réalisés en classe pour la mise en évidence des fonctions carrée et inverse), on pourrait qualifier celui-ci de divinatoire : comment en effet avoir l'idée du traitement algébrique des colonnes de données avec certaines opérations plutôt qu'avec d'autres ?
Le choix de cet exercice a pour objectif de dégager à partir de ce modèle les caractéristiques des problèmes inversés.
Note : on peut si on veut transformer cet exercice en un exercice plus ouvert pour les élèves avec la possibilité de mieux traiter la rupture entre le registre du tableur et le registre formel, en relâchant les contraintes, c'est-à-dire donner comme consignes de répéter cette capture de données pour plusieurs positions de A correspondant à des abscisses négatives simples et analyser les tableaux obtenus, les comparer pour essayer avec plus de chances de succès de conjecturer la bonne relation (**cette expérimentation n'a pas été faite**).

ANALYSE DE LA DÉMARCHE

•**PROTOCOLE** : construction d'une figure pilotable par ***x*** (O1) produisant **y** (O2) sous l'effet d'une action A à déterminer.
(Amélioration possible : rendre la figure pilotable avec un second paramètre de relâchement de contraintes sinon les décisions d'action vont dépendre du niveau d'expertise : justement pareil pour les boîtes noires).
•**EXPÉRIMENTATION** : Animation de ***x*** et capture des données (***x*** ; ***y***) dans plusieurs cas
•**OBSERVATION** des (O1 ; O2) : ici rien.
……………………………………………………………………………………………………..
•**TRAITEMENT** induisant une mise en œuvre de connaissances et un changement de cadre numérique/algébrique.
•**CONJECTURE** sur l'action A.
•**VALIDATION EXPÉRIMENTALE** : plusieurs types pour augmenter la plausibilité
•**SYNTHÈSE** : démonstration formelle déductive.

Notons que ce qui est réellement proposé dans ce problème, ce sont seulement les étapes qui suivent les 3 premières indiquées dans l'analyse qui précède : l'expérience est seulement décrite avec les données qu'elle permet de collecter. La démarche pré-conjecture telle qu'elle apparaît dans notre analyse ***a priori*** est escamotée pour éviter la manipulation technique c'est-à-dire l'appel à des connaissances techniques. Néanmoins, la connaissance du logiciel est nécessaire ; la notion d'animation utilisée dans l'énoncé demande une appréhension séquentielle de la figure fournie, c'est-à-dire de deviner le protocole de construction : il est impératif de comprendre que si ***x*** est pilotable, il est l'objet indépendant dont en particulier ***y*** doit dépendre. L'expérience a été réalisée : sa compréhension nécessite cette fois une appréhension opératoire optique pour faire le lien entre cette animation et les données capturées dans c1 et c2. Le traitement de ces données est aussi imposé par l'énoncé et le travail à réaliser est un travail de tri de données qui doit permettre de remonter du registre numérique de la fonction à déterminer au registre formel qui est celui attendu. Il y a d'abord un appel à l'insight avant l'appel à l'intuition

Le changement de contexte (au sens de **Noss** et **Hoyles**) est fort ; ici il demande de relier un contexte de proposition de géométrie dynamique à celui d'une résolution algébrico-numérique plus proche du contexte papier crayon. Ceci peut expliquer la difficulté non apparente de ce problème ; cette difficulté est apparue au cours de l'évaluation du travail réalisé en devoir surveillé et s'est traduite par un fort pourcentage d'élèves refusant préalablement d'aborder cet exercice même si celui-ci reproduit des situations de classe retravaillées avant le travail en temps limité. Cette observation qui a été faite plusieurs années d'affilée dans les mêmes conditions d'expérimentation conforte cette hypothèse.

Il apparaît donc que la part prise par l'expérimental dans ce type de problème est virtuelle. Dans la proposition du problème, l'expérimentation fait partie des données (même si celle-ci a été réalisée technologiquement) puisque l'expérience est seulement décrite, les observations dégagées sous forme de données numériques. Le rôle du chercheur du problème se ramène à du traitement de données réalisé par analogie avec des traitements déjà faits au cours de résolution de problèmes du même type.

Ces remarques préliminaires pourraient nous faire rejeter dès maintenant ce type de problèmes pour être les vecteurs de notre tentative de décomposition formelle de la démarche expérimentale. Nous nommons de bons vecteurs de cette tentative, des « problèmes cruciaux ». Mais une étude plus minutieuse devrait nous faire comprendre pourquoi un expert a pu être amené à proposer de tels problèmes dans le cadre d'une intégration des TICE à support expérimental même si ce support est virtuel pour le chercheur du problème. Leur caractérisation va nous guider vers les problèmes de boîtes noires après une étude appropriée dans le chapitre suivant.

1.4. Essai de caractérisation des problèmes inversés :

Cette caractérisation sera faite en opposition à la notion de problème dit « **direct** ».
Les notations utilisées seront les suivantes :

Action =A, Objet 1 = O_1 , Objet 2 = O_2 .

1.4.1. Le problème « DIRECT »

Problème classique (PROB DIR) : • **Une action A est donnée** • A est appliquée à O_1 connu • **Déterminer l'objet produit** •Réponse: $\mathbf{O_2}$	Ce **PROB DIR** se schématise par les inférences suivantes : Inférence : $\boxed{O_1 \xrightarrow{A} O_2\ ?}$

Le travail attendu dans un tel problème est de l'ordre du raisonnement déductif ; la connaissance de propriétés attachées à l'action A va permettre de prévoir, éventuellement sans expérimenter, le résultat cherché. Ceci permet de comprendre les raisons invoquées par

certains pour dénier l'intérêt de l'utilisation des « nouvelles » technologies ; dans de tels problèmes, posés dans un « environnement classique », point n'est besoin en effet d'aller chercher un logiciel de géométrie dynamique pour découvrir que l'image d'une droite par une translation est une autre droite. La connaissance des propriétés de la translation permet en effet d'avoir le résultat sans faire le détour par une validation expérimentale informatique.
On peut en effet résumer ce problème :
D'une part à ses données, la donnée de A, la donnée de O_1, la donnée aussi des propriétés de A appliquée à tout objet d'une famille dont O_1 fait partie
D'autre part à sa question qui n'est autre que la détermination de $\mathbf{O_2 = A(O_1)}$

1.4.2. Le problème « INVERSÉ »

Problème inversé (PROB INV) :	Ce PROB INV se schématise par les inférences suivantes :
• **Une action A est inconnue** • A appliquée à O_1 connu donne O_2 connu • **Déterminer l'action** • Réponse : **A** (non nécessairement unique)	Inférence : $\boxed{O_1 \xrightarrow{A?} O_2}$

Le travail attendu dans un tel problème est de l'ordre du raisonnement inductif ; ici c'est la connaissance de données obtenues par expérimentation et les réelles connaissances de l'expérimentateur ou de celui à qui sont soumises les données recueillies qui **doivent** permettre une mise en relation entre les données « entrées » O_1 et les données « sorties » O_2. Notons qu'ici, quand on parle d'objet O_1, il s'agit plutôt d'une famille d'objets qu'on va créer dans l'expérimentation pour obtenir la famille d'objets O_2. Dans ce type de problème, l'expérimentation s'avère obligatoire pour se mettre dans les conditions d'une possibilité d'induction concernant l'action à déterminer.

Dans un tel problème, il n'est pas imaginable d'opposer des arguments du type de ceux présentés dans le paragraphe précédent, car l'éventualité de la découverte de la réponse concernant l'action A passe par l'expérimentation productrice de cas particuliers.

1.5. Problèmes inversés et démarche expérimentale

1.5.1. La démarche sous-jacente dans un tel problème

Le problème inversé consiste donc en la détermination d'une action inconnue dont on peut relever les effets sur une famille d'objets O_1 qu'elle transforme en une autre famille d'objets O_2.
La démarche qui est proposée dans l'environnement Cabri pour tenter de déterminer A est une démarche dont l'initiative est prise par l'auteur du problème : on peut reconstituer cette démarche à partir des questions qu'il pose.
L'exécution d'un protocole utilisant les outils de Cabri va générer des données, les couples (O1, O2) ; on retrouve là une caractéristique des expériences de monstration en sciences physiques qui produisent des données qui doivent être facilement interprétables, c'est-à-dire conduire aussi vite que possible au modèle à découvrir.
Il y a une recherche brouillonne où l'auteur propose de réaliser des opérations sur ces données et d'observer les résultats obtenus. Il y a production d'objets inférés par les couples (O1, O2).
Il y a une rationalisation de cette recherche quand on réussit à faire se concentrer le chercheur du problème sur les données numériques interprétables algébriquement. Il y a focalisation sur certains objets inférés particuliers.

Il y a l'illumination qui donne cette interprétation et l'enchaînement accéléré d'étapes qui conduisent à la conjecture. Il y a la reconnaissance d'une liaison entre O_1 et O_2 qui doit conduire à une conjecture sur l'action cherchée.

On peut imaginer une **validation opératoire** de la conjecture faite ou mieux une **démonstration** de la formule conjecturée à partir des données géométriques du problème.

1.5.2. Pourquoi un tel problème ne peut-être un « problème crucial »

Les étapes que nous avons fait apparaître dans l'analyse qui précède ne sont pas apparues au cours d'une recherche de problème ouvert nécessitant une prise d'initiative pour déclencher l'investigation et la poursuivre jusqu'à la conjecture. La mise en évidence de ces étapes est fortement corrélée à l'auteur qui a créé le problème : il a lui-même mis en scène une expérimentation de monstration qui doit conduire inévitablement au résultat cherché ; un problème crucial aurait dû permettre que le chercheur de ce problème reçoive ce problème sous une forme simple qui l'oblige à prendre des initiatives qui ne doivent pas lui être imposées. Le changement de contexte qui oblige à sauter du contexte de la géométrie à celui de la géométrie dynamique puis à celui du tableur et enfin à celui de l'algèbre formelle est un paramètre fort qui complexifie la tâche attendue. Cette tâche ne peut être réalisée que par enchaînements de techniques dans des contextes différents. Ce manque d'unité dans les contextes d'investigation (graphique, tableur, géométrique) conduit l'auteur à concevoir et à décrire ces investigations dans l'énoncé du problème ne laissant à la charge du receveur du problème qu'une partie mince et complexe de la découverte de la solution.

1.5.3. Quelques caractéristiques d'un « problème crucial »

Un problème crucial est un problème qui permettrait de déclencher des investigations du receveur de ce problème dans un contexte unique. Ces investigations doivent être menées impérativement pour glaner des observations interprétables. Un changement de contexte ne doit pas permettre de trouver la solution sans investigation (dans l'exemple proposé, un raisonnement géométrique ou analytique permettait de trouver la solution). Il faudra donc maîtriser les outils du contexte dans lequel la recherche s'effectue.

Dans un problème inversé, ce qui devait produire de l'expérimentation était le fait que l'inconnue était une action dont la nature devait être déterminée par les effets qu'elle produisait sur une famille d'objets O1 ; si l'expérimentateur n'arrive pas à interpréter les effets de cette action, il se retrouve en situation d'échec et ne peut prendre l'initiative de faire opérer son action sur une autre famille d'objets O'_1 pour essayer de se mettre dans une situation plus favorable d'interprétation. Cette impossibilité de réaliser de nouvelles investigations est due au fait que dans le problème qui était proposé, le contexte de résolution était en réalité un contexte fortement associé à l'environnement papier crayon qui décrivait une expérimentation et demandait l'interprétation formelle de ce qui était relaté. L'investigation ne pourra être possible pour un tel type de problème de détermination d'une action inconnue que si le receveur du problème le reçoit avec le contexte technologique dans lequel ce problème a été conçu.

Les problèmes de boîtes noires sous leur variante « détermination de constructions ou de transformations cachées » qui ont déjà fait l'objet de nombreux travaux dans l'environnement Cabri (Capponi, Charrière, Houben et Van Hamme, Dahan), semblent répondre au cahier des charges qui a commencé à être brossé dans les lignes précédentes. C'est pourquoi nous allons concentrer notre recherche sur ces problèmes spécifiques.

2. DE LA PISTE DES PROBLÈMES INVERSÉS À CELLE DES BOÎTES NOIRES

Les boîtes noires que présente P.M. Charrière dans la monographie du CIP « Apprivoiser la Géométrie avec Cabri-Géomètre » admettent le plus souvent comme objet initial ou objets initiaux des objets non simples de géométrie plane (au plus simple un segment ou une configuration du type triangle ou polygone) et comme objet finaux, le plus souvent des objets du même type ou plus complexes. Même si des stratégies sont développées dans cette brochure, comme elles sont présentées sous forme d'un catalogue, elles ne garantissent pas qu'un chercheur les connaissant sera conduit à une démarche expérimentale, qui plus est, canonique. C'est pourquoi, nous avons eu l'idée de concevoir des boîtes noires simplifiées au maximum au niveau des objets initiaux (un point) et des objets finaux (un point, image du précédent par une transformation cachée dans une macro-construction).

Dans l'article que nous avons présenté en 2000 à la 6th Summer Academy (ACDCA Portoroz Slovenia) intitulé « Another approach of Teaching Mathematics with new technologies », nous avons montré une simulation de résolution d'une telle boîte noire qui cachait une transformation géométrique non triviale dans l'environnement Cabri. Nous notions à ce sujet que « de nouveaux exercices, de nouveaux problèmes et de nouveaux examens étaient la conséquence d'une nouvelle régulation des liens fondamentaux entre l'enseignant et les mathématiques, l'enseignant et l'apprenant et l'apprenant et les Mathématiques » Cette nouvelle régulation passait par une pratique d'une démarche d'investigation médiée c'est-à-dire une démarche expérimentale médiée, objectivée le plus souvent par un défi à relever (les défis proposés par Luc Trouche à ses élèves de Montpellier dans l'expérimentation qui a donné lieu à la publication « Expérimenter et prouver. Faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques » IREM De Montpellier 1998). Nous notions aussi que ces problèmes nécessitaient du temps et que, ce qui peut être évalué, c'est davantage les stratégies que le succès.

Il nous a semblé que parmi les problèmes de boîtes noires, ceux qui ont pour objectif la détermination d'une transformation cachée dans l'environnement Cabri-Géomètre, sont des problèmes qui, s'ils sont proposés à des receveurs qui ont une connaissance minimale des outils de Cabri et de leurs usages en Mathématiques, peuvent générer un grand éventail d'investigations. Ils sont donc susceptibles de nous aider à décomposer la démarche expérimentale médiée. On peut espérer que si, de plus, de tels problèmes sont proposés dans un cadre de recherche publique qui favorise le débat entre pairs, on pourra atteindre une modélisation de cette démarche plus pertinente que celle qui se dégagerait d'une recherche ou de plusieurs recherches privées.

Dans le chapitre suivant nous allons voir de plus près pourquoi ces problèmes peuvent être considérés comme des problèmes cruciaux de la mise en évidence formelle des étapes d'une démarche expérimentale médiée.

L'OBJET DIDACTIQUE BOÎTE NOIRE, RÉVÉLATEUR DE LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE MÉDIÉE

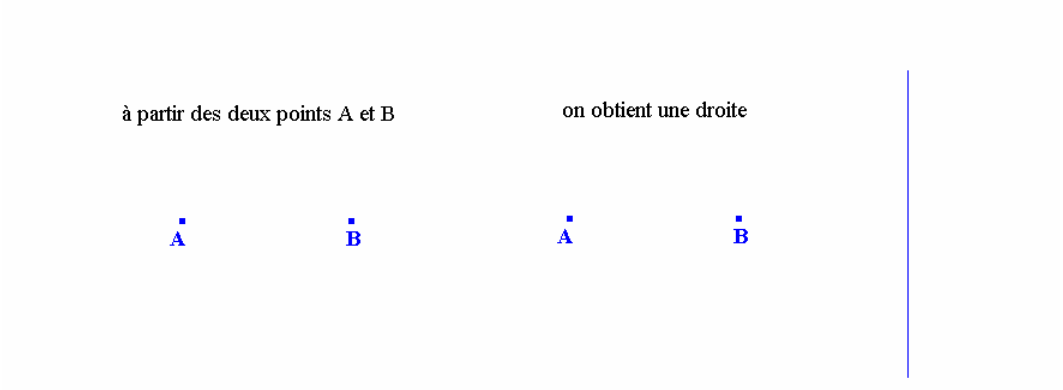
1. LES QUALITÉS DIDACTIQUES DE L'OUTIL « BOÎTE NOIRE »

1.1. La notion de boîte noire

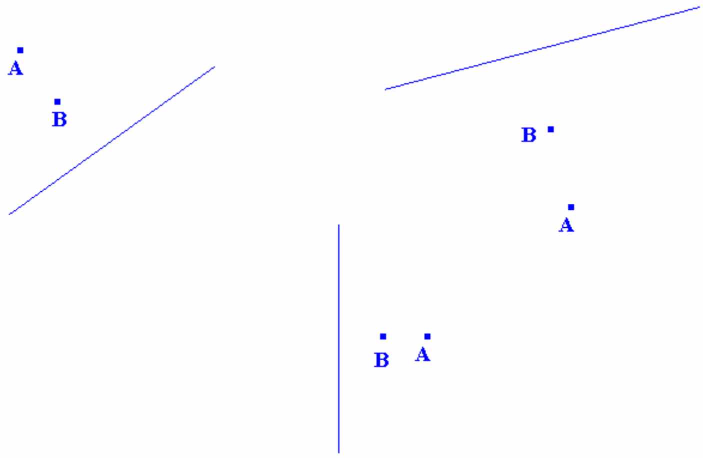
Bernard Capponi qui est à l'origine de cette notion l'évoque ainsi dans son article « Utilisation du logiciel Cabri-géomètre en classe » (Université d'été -Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur : utilisation du logiciel Cabri-géomètre en classe - Grenoble 9-13 Juillet 1993) :
« ***L'idée de « boîte noire » développée autour de Cabri-géomètre consiste à donner à l'élève une macro-construction produisant une certaine construction à partir d'objets initiaux, sa tâche étant alors d'analyser le comportement de la figure produite pour réaliser une construction identique*** »

Vincent Boury dans son mémoire de DEA de sciences cognitives (INPG Grenoble, 1992/93) intitulé « **La distinction entre figure et dessin en géométrie : étude d'une « boîte noire » sous Cabri-géomètre** » précise un peu mieux ce qu'est une boîte noire au sens de Bernard Capponi :
« ***Dans une tâche de type boîte noire, on donne aux élèves un Cabri-dessin à l'écran de l'ordinateur, qu'ils peuvent manipuler en utilisant les diverses fonctionnalités du logiciel. Ils doivent reconstruire à l'aide de celles-ci le même Cabri-dessin ayant un comportement identique lors du déplacement de l'un de ses éléments. Cette tâche requiert donc des élèves qu'ils identifient les propriétés géométriques caractéristiques de ce Cabri-dessin, en un mot la figure géométrique sous-jacente***. ».

Pierre-Marie Charrière dans sa monographie du CIP de Novembre 1996, préfère une présentation à la fois analogique et exemplifiée de ce qu'il appelle « l'idée boîte noire » :
Il commence par donner un exemple arithmétique, d'où la solution se dégage par une approche inductive (on peut ici parler d'expérimentation générative) :
« ***Si vous lisez 1, 4, 9, 16, 25 ? … vous pouvez penser 36 ! Car vous aurez découvert un processus permettant à partir de 1 de trouver 4, à partir de 2 de trouver 9, à partir de 3 de trouver 16, etc …(peut-être avez-vous découvert ce processus ?)*** »
Il propose ensuite de faire de même avec des objets géométriques en présentant les deux Cabri-dessins suivants :



Il note d'abord que « ***ce dessin est ambigu et que l'activité n'a plus de sens dans l'univers papier-crayon mais que le logiciel a été conçu de manière à conserver les liens entres les objets géométriques*** » Il présente ensuite une copie d'écran montrant différentes figures obtenues par des déplacements des points A et B :



différentes figures obtenues par le déplacement des points A et B

Il caractérise enfin cette boîte noire par la tâche qui lui est associée :
« ***L'objectif pour l'élève, sera de trouver le procédé de construction*** »

1.2. Les boîtes noires, version « transformation cachée dans l'environnement Cabri »
Dans le même texte que celui cité ci-dessus Bernard Capponi, suggérait la possibilité de « ***reprendre l'idée pour faire étudier des transformations géométriques comme la translation ou la rotation en collège*** ». Il précisait que ces transformations « ***pouvaient être étudiées d'abord à partir de leurs effets*** ». Nous allons focaliser notre attention sur un tel type de boîte noire qu'on peut ainsi définir :

Définition d'un tel problème : sur une page Cabri, un point libre est donné (ce point peut donc être tiré), un autre point apparaît simultanément qui est l'image du point précédent par une transformation géométrique non accessible (ce point est donc commandé par le mouvement du point libre).
Ce problème de boîte noire consiste en la détermination de la transformation cachée.

Domaines d'expérimentation de ces boîtes noires
Ces boîtes noires utilisées dans divers contextes :

- ♦recherche en classe pilotée par le professeur ;
- ♦recherche par des publics en formation initiale ou continue ;
- ♦monstration de problèmes nécessitant obligatoirement des démarches d'investigation qui n'ont pas leur équivalent dans l'environnement papier crayon.

ont montré dans notre expérience personnelle un certain nombre de qualités favorisant l'apparition d'une démarche expérimentale riche confirmant les observations de Charrière puis Houben et Van Hamme. Ceux-ci, ont montré en 1994 que de tels problèmes posés dans l'environnement Cabri favorisaient en effet une telle démarche auprès de publics aussi divers. Quelques-unes de ces qualités sont détaillées ci-dessous.

1.3. Qualités des boîtes noires favorables à l'apparition d'initiatives investigatrices de type expérimental

UNE PREMIÈRE QUALITÉ (obligation d'investigation)

Des données minimales dans un contexte délibérément informatique qui forcent celui qui reçoit le problème, à expérimenter ; la seule visualisation des données d'un tel problème non seulement ne permet pas mais empêche une activité de résolution en pensée. La prise d'initiative avec le **médian informatique** qui est à la fois **l'outil et l'environnement** du problème (c'est-à-dire le contexte au sens de Noss et Hoyles) est obligatoire et est une condition ***sine qua non*** de TOUT démarrage. Les expérimentations doivent faire apparaître des effets produits, elles sont donc a priori génératives. La conjecture générée peut éventuellement inférer une analyse qui prend la forme d'une expérimentation validative. Boury note dans son mémoire pour des élèves de collège une aptitude plus naturelle à produire des conjectures qu'à les analyser, c'est à dire à les valider dans l'environnement Cabri.

UNE DEUXIÈME QUALITÉ (visibilité des investigations)

Dans toutes les expériences faites (voir une typologie plus loin), une grande variété d'activités, le plus souvent cachées dans le travail mathématique académique, deviennent observables. Tout « l'inavouable » finit par émerger : tout ce qui, en aucun cas, ne peut transparaître dans un travail fait à la maison par des élèves ou des étudiants, dans un travail en temps limité ou dans des copies d'examen de type académique. Le « observer, conjecturer, démontrer » de la démarche scientifique ou expérimentale (suivant les auteurs dans la littérature didactique ou de la noosphère) prend corps. La partie usuellement privée du travail d'investigation est observable et peut donc passer au niveau public : la réfutation peut naître face à une argumentation de type primitif. Il y a les mots (le signifié au sens de Saussure) et il y a le sens des mots (le signifiant, toujours au sens de Saussure). Mettre du sens derrière les mots, en particulier derrière le mot « observer » sera possible en décomposant toutes les étapes pré-conjectures de la démarche expérimentale. Nous avons déjà vu dans nos analyses ***préliminaires***, qu'à lui seul ce mot ne peut résumer toute l'activité pré-conjecture.

UNE TROISIÈME QUALITÉ (discrétisation de la démarche)

Le travail de résolution est **discrétisé** permettant ainsi, si nécessaire un compte rendu à chaque fois fidèle de ce qui est fait, **initiative par initiative** : le médian informatique force la discrétisation en mettant nécessairement l'accent sur le côté technique appelé vulgairement « presse-bouton » qui ralentit le rythme et permet une observation fine de ce qui se passe.

♦Notons que la fonctionnalité « historique » de Cabri permet au chercheur de revenir pas à pas de manière séquentielle sur toutes les constructions qui ont été le fruit de son investigation ; elle permet aussi à l'enseignant d'avoir un accès au cheminement de l'élève du moins dans les décisions opérées.

♦Le pointeur intelligent qui permet de repérer plusieurs points au même endroit, qui permet aussi de se demander quel objet on va choisir pour telle ou telle manipulation, accentue cette discrétisation opératoire. On peut donc constater que la construction sous Cabri accentue l'appréhension séquentielle de la figure dans une appréhension corrélativement opératoire : la dichotomie proposée par Duval semble donc plus difficile à réaliser dans cette situation particulière

L'action de presser le bouton n'est que le point d'orgue de la mise en place de la mini expérience, elle-même résultat de l'initiative prise. Avant donc de presser sur les boutons, c'est-à-dire avant de réaliser l'expérience qu'on a décidé d'effectuer :

→ Il faut mettre en place un certain matériel (faire une figure dans Cabri, éventuellement une construction élémentaire) avec l'objectif de sa manipulation ultérieure, c'est-à-dire d'une action qu'on prévoit d'effectuer, c'est le protocole qu'on met en place (on peut prévoir de

tirer sur un point pour observer le mouvement d'un autre ; on peut activer la trace d'un point dépendant pour observer et garder la trace de son déplacement quand on va animer un certain point dont il dépend).
→ Le montage de cette mini-expérience est fortement paramétré par les connaissances de l'expérimentateur. La stratégie adoptée n'est neutre à aucun moment : c'est pour cela que beaucoup de non-dits peuvent en plus être exhibés d'un compte-rendu d'une telle démarche.

UNE QUATRIÈME QUALITÉ (génération d'un débat)
Les initiatives proposées sont simples et produisent un signifié, une trace sur l'écran qui est perçue différemment par les interlocuteurs. Les propositions des uns vont entrer en conflit avec les interprétations des autres et favoriser la génération d'un débat, d'une démarche de preuve au sens de Balacheff. Ce dialogue externe ou interne est selon Glaeser, rappelons-le, une marque des processus heuristiques.

1.4. Les appréhensions des figures au cours de la démarche d'investigation

La construction pas à pas de la figure mise en place favorisera une appréhension séquentielle de cette figure dans la démarche de recherche et nous savons que cette appréhension n'est pas celle qui est propice à un rapprochement vers la solution (Duval). Néanmoins, la dynamicité de l'environnement et les manipulations réalisées suivant le protocole décidé ou improvisé, favoriseront une appréhension opératoire de cette figure ; nous savons qu'une telle appréhension est favorable à la découverte de la déformation qui va nous faire approcher de la solution (toujours Duval).

2. DES « BOITES NOIRES » EN GÉNÉRAL AU MODÈLE PARTICULIER PROPOSÉ À L'ANALYSE

2.1. Introduction

Dans une première approche qui a été l'approche de l'enseignant innovateur-expert, nous n'avons vu dans cet objet didactique que le côté ludique car extra curriculaire et nous avons difficilement pu en imaginer une utilisation cohérente avec un enseignement académique orienté « évaluation ». Pourtant P.M. Charrière notait déjà que « ***Résoudre une boîte noire est proche du comportement ludique. Comme le joueur d'échec, il est nécessaire d'anticiper*** ». Il affirmait aussi que « ***l'activité Boites noires se prête très bien à une évaluation*** ». La nécessité impérative de disposer d'un matériel informatique et du logiciel Cabri a longtemps découragé notre désir d'utiliser des dispositifs didactiques incluant l'utilisation de cet objet. Néanmoins, la possibilité d'utiliser une calculatrice rétroprojetable pour proposer de tels problèmes a favorisé une intégration de tels dispositifs didactiques dans notre pratique d'enseignant et de formateur :
→ Dans notre enseignement en classe de seconde, de Première S ou STT et terminales S ou STT ;
→ en formation initiale dans notre enseignement didactique dirigé vers les PLC2 de mathématiques à l'IUFM de Midi-Pyrénées ;
→ en formation continue avec des Professeurs de Lycée ou de Collèges ;
→ au cours de contacts avec des chercheurs et enseignants de diverses nationalités.

Nous pouvons dire que ce qui suit constitue un exemple de la manière dont le chercheur peut utiliser les données générées par l'enseignant dans sa pratique sur le long terme pour s'aider à forger son ***a priori*** sur l'apport des boîtes noires dans la formalisation de la démarche de découverte expérimentalement médiée (dans le cas où enseignant et chercheur sont la même personne).

Nous présentons en annexe comment nous avons été amené à inclure au cours de nos activités d'enseignant des situation-problèmes du type boîtes noires, version transformation cachées. Le protocole adopté pour la gestion du déroulement de telles activités est l'un de ceux suggérés par P.M. Charrière :
« ***Résoudre une boîte noire en groupe, une personne manipulant sous les ordres des autres (nécessité d'une tablette rétroprojetable)*** ».

2.2. Le protocole « boîte noire » adopté

Après de multiples expérimentations et de multiples réglages des paramètres opérationnels de ces boîtes noires en classe, une stabilisation s'est réalisée avec les quelques caractéristiques suivantes :

Matériel utilisé : calculatrice TI-92 rétroprojetable équipée du logiciel de géométrie dynamique Cabri avec sa tablette de rétro projection posée sur un rétroprojecteur, un écran jouxtant le tableau noir ou blanc de la classe. Le matériel est disposé de telle sorte que le manipulateur puisse être debout dans l'allée centrale et puisse se tourner (tout en opérant) vers chaque intervenant.

Les participants : un groupe homogène de 15 à 20 élèves ou étudiants ou professeurs-stagiaires. Pour les classes de lycée, on a donc opéré avec des groupes de modules, en tout état de cause, en demi-classe. La notion d'homogénéité est comprise ici dans un sens très précis :

> **Le niveau scolaire ou universitaire** ou de formation en Mathématiques des membres du groupe est similaire (on ne considère absolument pas les « aptitudes » mathématiques qui restent différentes).
>
> **Le niveau de connaissance du logiciel** doit être à peu près le même ; ici il s'agit plus de comprendre ce qu'on peut éventuellement lui demander que de savoir ce qu'il peut faire explicitement. Il est courant d'ailleurs que l'opérateur que j'étais, utilise un outil ou une combinaison d'outils pour effectuer une manipulation qu'aurait aimé faire un intervenant. Notons qu'une certaine homogénéisation se fait naturellement pendant l'expérimentation : au début interviennent seulement ceux qui pensent connaître le mieux le logiciel et progressivement les autres entrent dans la dynamique de la séance en proposant d'éventuelles actions plutôt que l'utilisation d'un outil spécifique.

Montage mis en place : une boîte noire a été créée et enregistrée sous forme d'une macro-construction afin que la visualisation des objets cachés soit ne montre rien, soit ne donne aucune indication sur la manière dont le point image a été créé à partir du point antécédent (quelques exemples de tels montages ont été montrés à Cabriworld 2 Montréal 2001). Sur l'écran apparaissent seulement deux points d'épaisseurs différentes. Le professeur est prêt à piloter sa TI-92. Les participants sont face à l'écran avec papier et crayon pour une éventuelle prise de notes.

Ceci est la présentation et la description du matériel d'une expérience en sciences expérimentales

Instructions pré-expérimentales : le professeur manipulateur montre à l'écran les deux points, montre qu'un seul des deux points peut être saisi et tiré dans tous les sens et fait constater que le mouvement du point manipulé est accompagné d'un déplacement du second point. Il fait « constater » que la position du second point dépend de la position du premier suivant une construction géométrique qu'il a lui même cachée. L'objectif du travail proposé à la classe est de découvrir la nature de cette construction, c'est-à-dire la nature géométrique de la transformation cachée transformant le premier point en le second. Pour cela, le professeur est à la disposition des intervenants pour effectuer avec sa calculatrice toutes les manipulations qui lui seront proposées jusqu'à la découverte de la solution. Les intervenants ont le droit de prendre des notes. Le Professeur ne répondra à aucune question autre que des questions techniques.

Nous présentons en ANNEXE 1 les recherches de trois boîtes noires qui ont été effectivement menées par des élèves du niveau de première S (pendant l'année scolaire 2001/2002) aux cours de séances d'une heure de module en salle d'informatique et par groupe de deux.
Nous présentons en ANNEXE 2 un retour et en même temps une réflexion didactique sur l'arrivée des boîtes noires dans nos scénarios d'enseignements

2.3. Recherches et diffusion de stratégies « experts »

2.3.1. Méthodologie de découvertes de stratégies « experts »

Devant les stéréotypes d'attaque que j'ai pu observer au cours des démarrages des recherches des premières boîtes noires expérimentées, j'ai éprouvé le besoin de m'imaginer cherchant un tel problème pour voir quelles attaques spécifiques mes connaissances de Cabri allaient me faire concevoir. J'ai présenté à la 6th Summer Academy ACDCA 2000, une boîte noire que j'avais préalablement cherché à résoudre avec les outils que ma qualité d'expert m'a fait mettre en évidence.

Pour cela, j'ai créé diverses boîtes noires avec des noms aléatoires que j'ai enregistrées dans mon disque dur : ces boîtes noires utilisaient des constructions non habituelles qui rendaient leur résolution quasiment impossible. Quelques mois plus tard, j'ai essayé de résoudre l'une d'entre elles, prise elle aussi au hasard parmi celles préparées. J'ai donc mis au point un certain nombre de procédures spécifiques pour tenter de venir à bout d'une telle tâche.

Ce sont ces procédures qui ont été présentées avec la boîte noire en question : le but recherché était de montrer qu'effectivement, comme le rappelait Colette Laborde, la technologie peut générer de nouvelles activités mathématiques et pas seulement illustrer ce qui peut se faire sans elle.

2.3.2. Diffusion des stratégies expertes : au fil de mes expériences, je distillais certaines de ces stratégies à mes publics pour, pensais-je, enrichir la panoplie de leurs outils d'attaque pour les boîtes noires qui leur seraient proposées ultérieurement. Par exemple :

→ activer les traces des points antécédents et images, écrire son nom en tirant sur le point indépendant et observer ce que donnait la trace du point dépendant pour éventuellement mettre la main sur une solution qui pourrait être trivialement conjecturable (S1) ;

→ redéfinir le point indépendant sur une droite et demander le lieu du point image puis bouger la droite initialement créée (S2).

De telles stratégies avaient déjà été mises en évidence par Houben et VanHamme (CEIAEM 1994 et Actes du colloque inter-IREM Géométrie 1994).

L'impact de cette diffusion était plus que variable et leur intégration n'a pu réellement être observée que lorsque leur utilisation était cohérente avec la stratégie personnelle de l'intervenant. De la même manière qu'un lycéen répugne toujours à donner des solutions d'une équation qu'il a découvertes comme solutions évidentes, souvent ces mêmes élèves rechignent à utiliser la stratégie S1 citée plus haut qui déflorerait le problème trop vite, montrant ainsi le besoin des intervenants devant un problème dont on a obtenu la dévolution, que ce problème soit un problème consistant (qui doit résister par nécessité aux premières attaques « rudimentaires »).

Remarque : La différence avec les activités de « manip » en sciences physiques est ici flagrante puisque la donnée des instructions détaillées de la « manip » suffit pour réaliser celle-ci En sciences physiques, le protocole est donc imposé. Ici, dans la tentative de résolution de la boîte noire, le protocole se bâtit au fur et à mesure des initiatives : le champ des manipulations reste ouvert tout au long de la recherche.

2.4. Un modèle de démarche de résolution d'une boîte noire

Mon expérience de la pratique en classe et en face de publics à former, a grandi dans le temps ; le mot expérience est à prendre au tout premier degré, c'est-à-dire une grande pratique dans les conditions précisées dans le protocole ci-dessus. J'ai donc été amené à proposer dans un mini-cours animé à Cabriworld 2 une boîte noire cherchée avec les intervenants puis j'ai montré comment on pouvait techniquement concevoir la macro cachant la transformation à découvrir. Cette boîte noire sera désormais nommée « ***fausse affinité***».

J'ai donc rédigé un compte rendu de la recherche de cette boîte noire qui n'est pas un compte rendu fidèle de ce qui s'est passé, c'est une transposition réaliste de ce qui s'est passé en partie, ce qui aurait pu se passer et qui s'est passé en d'autres circonstances et que ma mémoire avait gardé ; disons que ma mémoire a fait une reconstitution fidèle de ce que contenait toutes les boîtes résolues qu'elle avait en réserve, elle a reconstitué **un modèle** que j'ai donc été amené à utiliser comme **objet d'étude** quand j'ai voulu, partant de mon expérience, essayer de reconstituer les étapes de la démarche expérimentale médiée.
Ceci constitue donc ma méthodologie pour parvenir à mon hypothèse de recherche.

2.5. Expérimentation et investigation : la pertinence *a priori* du modèle choisi

L'analyse du modèle choisi, la boîte noire « ***fausse affinité*** » doit permettre de décomposer la démarche suivie en une succession d'expériences montées avec comme objectif la résolution d'un problème posé, en l'occurrence un problème de boîte noire. Nous espérons donc mettre en évidence les phases d'investigation par des caractéristiques clairement repérables qui constitueront le modèle de décomposition que nous soumettrons plus loin dans notre travail à validation.

En sciences expérimentales, l'équivalent de cette démarche n'existe pas habituellement : l'expérimentation a un protocole imposé pour arriver à faire dégager des données observées la loi que l'on veut faire découvrir. L'expérimentateur est un manipulateur guidé vers un but qu'il ne peut éviter : ses connaissances sont utilisées en priorité pour comprendre les constituants théoriques de l'expérimentation. Elles ne sont pas utilisées comme dans les boîtes noires pour prendre des initiatives, pour réaliser des investigations, pour concevoir lui-même l'expérience qui doit le mener à un but qu'il ne connaît pas ou qu'il connaît mais qu'il ne saurait valider en montant lui-même l'expérience de validation.
P.M. Charrière affirme que les boîtes noires donnent priorité à la démarche scientifique et il note que « ***Devant un phénomène qui dérange, interpelle, l'homme de science cherche une explication, une loi, qu'il mettra à l'épreuve*** ».

Une exception a déjà été évoquée, celle des cadres d'investigations de Robin Millar dans le projet PACKS. S'appuyant sur leurs connaissances, des élèves ont eu à monter des expériences pour étudier des liens entre des paramètres de phénomènes physiques concrets (rappelons qu'il s'agissait de l'isolation thermique). La résolution de ces problèmes présente didactiquement des analogies avec celle des problèmes inversés : en effet, les élèves doivent travailler simultanément dans plusieurs contextes : le contexte concret du problème posé, le contexte du modèle qu'ils arrivent à créer avec le matériel fourni, le contexte de leur représentation génétique du phénomène, le contexte formel des paramètres pertinents à sélectionner, ce qui rend complexe l'utilisation de ces investigations pour modéliser les étapes d'une démarche expérimentale plus générale.

3. ANALYSE DE LA BOÎTE NOIRE DITE « SYMÉTRIE GLISSÉE»

3.1. Du schéma « hypothèse-conclusion » à la dialectique « exploration-interprétation »

La démarche formalisée la plus connue en Mathématiques, la démarche hypothético-déductive, est celle qui nous est venue à l'esprit pour tenter une découverte par analogie. Le mot démarche contient l'idée de marche avec utilisation successive des deux jambes et répétition périodique de ce mouvement binaire. Le préfixe « dé » du mot démarche étant associé à une caractéristique spécifique à la manière d'opérer les avancées de jambes ; tout bipède sait marcher en effectuant la répétition de mêmes actions mécaniques mais chaque bipède a une manière caractéristique de marcher, sa « démarche ».

Notons que le qualificatif de va-et-vient est un qualificatif qu'on retrouve souvent dans la littérature pour caractériser des alternances opératoires dans le domaine expérimental. Glaeser parlait déjà en 1976 de la structure cyclique du processus de résolution, ce que nous avons déjà évoqué.

Ici, il serait peut-être plus judicieux de parler de dialectique « exploration / interprétation », car ces deux éléments se nourrissent plus ou moins l'un de l'autre (il y a progression et non circuit).

Or dans la démarche hypothético-déductive, on retrouve une répétition périodique de maillons binaires « hypothèse-conclusion » qui crée par enchaînement une chaîne hypothético-déductive. La représentation simultanée dans notre esprit des multiples chaînes de résolution de boîtes noires et de ces enchaînements de maillons binaires hypothèse-conclusion a créé l'illumination au sens où on l'entend habituellement dans la théorie de la découverte. L'analogie, appuyée par les références citées dans les analyses préliminaires allait se résumer ainsi :

LA DÉMARCHE DE RÉSOLUTION DE BOÎTE NOIRE
EST UNE DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE

pouvant être décomposée de manière isomorphe à la démarche hypothético-déductive en

UN ENCHAÎNEMENT DE MAILLONS BINAIRES

Dans la deuxième partie de son discours de la méthode, Descartes décrivait ainsi l'esprit de sa méthode, bien similaire à notre raisonnement analogique :

« Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutûme de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre ».

Il est assez paradoxal d'utiliser des « méthodes » rationalistes pour mettre en évidence des étapes d'une démarche de type empirique.

À partir de là, la nécessité de décoder la boîte noire « ***fausse affinité*** » (« décoder » est pris dans le sens, analyse de son déroulement avec la grille de décomposition « enchaînement maillons exploration-interprétation »), s'est imposée pour essayer de faire apparaître un tel enchaînement (micro-décomposition) et commencer à caractériser son contenu (macro-décomposition).

3.2. Méthodologie de l’analyse qui va suivre

Cette superposition de la démarche de résolution de la boîte noire « ***symétrie glissée*** » avec une chaîne de maillons binaires a été très vite réalisée. Il a suffi ensuite d’en dérouler son compte rendu de manière linaire dans une page Excel pour voir entrer celui-ci dans le moule cadencé de ces maillons binaires.

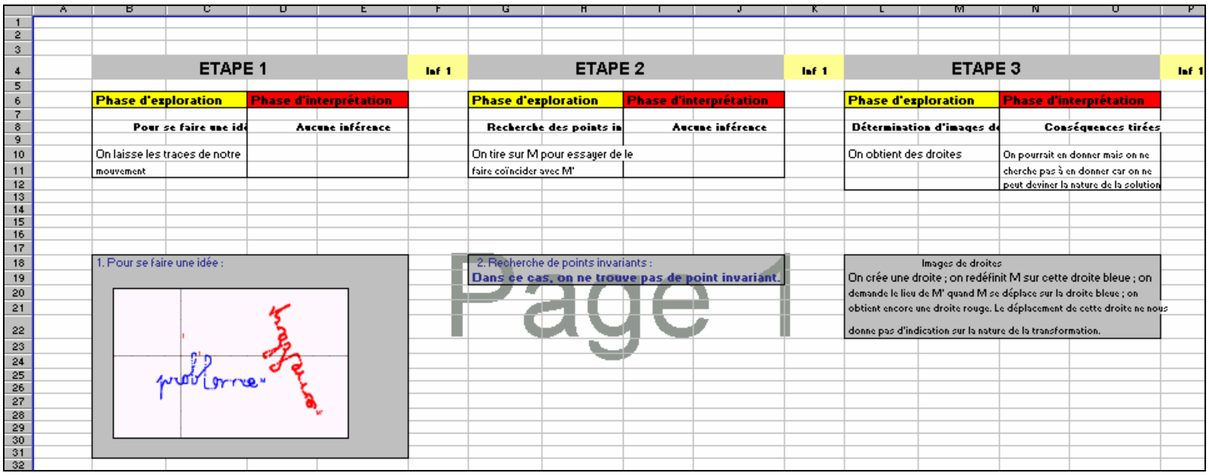
Ces maillons sont très vite apparus comme constitués d’une **phase d’exploration** enchaînée à une **phase d’interprétation**. Le document Excel dans lequel la démarche a été déroulée contenait deux parties superposées :

Le compte rendu déroulé qui était le signifié explicite de la démarche

Notre traduction des implicites qui était le signifiant de cette démarche

Les pages constituant le document Excel ont été imprimées en format paysage puis accolées pour prendre l’aspect d’un long parchemin déroulé longitudinalement afin de nous aider à essayer de visualiser une décomposition plus globale de la démarche.

Dans la copie de la première page EXCEL reproduite ci-dessous, on voit bien apparaître les deux parties évoquées ci-dessus sous forme de bandes :



→ L’une contenant les maillons binaires répétés un grand nombre de fois avec des espaces qu’il fallait bien interpréter, chaque maillon binaire étant représenté par un tableau à deux lignes et deux colonnes, la première ligne contenant les titres « phase d’exploration », « phase d’interprétation », la deuxième ligne contenant les signifiants selon notre traduction des signifiés déroulés dans la bande suivante.

→ L’autre contenant le copier-coller du document étudié, c’est-à-dire le signifié de la démarche, chaque phrase ou chaque figure étant mise sous le maillon binaire dans lequel notre signifié avait traduit le signifiant.

3.3. Apparitions de nouvelles hypothèses après cette mise en place

La visualisation de ce long parchemin génère instantanément une question de bon sens : y-a-t-il un lien spécifique entre ces différents maillons, une exploration est-elle dépendante de la suivante ou pas ? La réponse à cette question apparaît évidente : le lien est évidemment plus ou moins fort ; une étude fine permet de mettre en évidence trois catégories de liens que nous qualifierons dans la suite d’inférentiels de type 1, 2 ou 3 (faible, normal ou fort) qui n’apparaissent pas de manière aléatoire dans cette chaîne. Au contraire, leur présence permet comme pour des classes d’équivalence de mettre en évidence des sous-chaînes contenant spécifiquement ces liens, ces sous-chaînes sont qualifiées plus loin de chaînons et leur étude s’impose naturellement de même que les liens particuliers entre ces chaînons qu’il faut distinguer des liens entre le dernier maillon binaire d'un chaînon et le premier maillon binaire du chaînon suivant qui sont qualifiés de rupture et dont l'étude est aussi faite.

Le chapitre suivant sera constitué du déroulement brut du parchemin ainsi composé auquel on aura ajouté une troisième bande contenant les chaînons qui seront mis en évidence dans l'analyse détaillée que nous ferons de la démarche de résolution de la boîte noire « ***symétrie glissée***» ultérieurement. Le tout mènera a une formalisation de la décomposition de la démarche expérimentale.

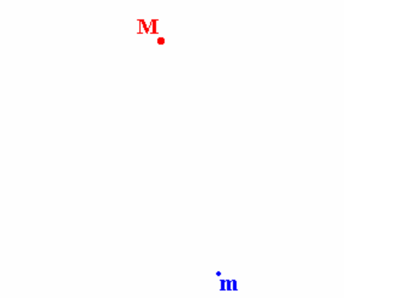
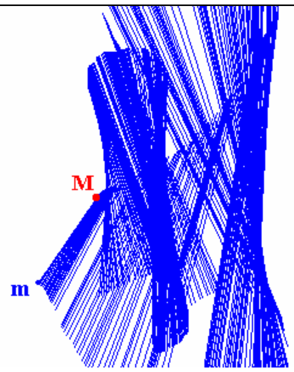
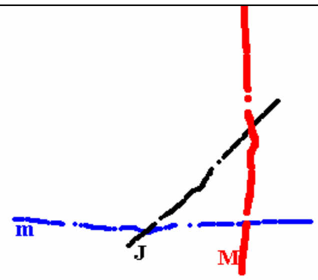
ANNEXE 1 (boîtes noires)

Nous allons présenter quelques exemples de boîtes noires dans leur version « transformation cachée ».
Le premier objectif de cette annexe est de réaliser une approche exemplifiée de cet objet didactique particulier auquel nous allons faire appel très largement tout au long de notre travail.
Le second objectif, tout aussi important, est de prendre conscience des niveaux G1 informatique et G2 informatique dans lesquels Cabri nous conduit et qui sont bien distincts des niveaux G1 et G2 du modèle de Parzysz comme mis en évidence dans le chapitre détaillant le cadre théorique de notre travail.

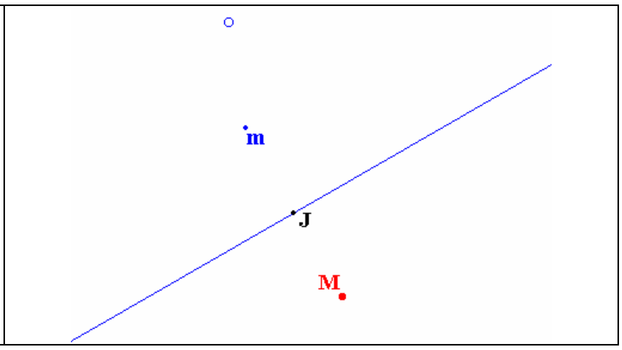
BOÎTE NOIRE 1

Sur une page Cabri, nous avons caché une rotation centrée en un point I non visible et d'angle 90° et nous montrons diverses investigations qui ont conduit à sa résolution. Cette présentation permettra de découvrir les spécificités d'une telle recherche. La narration qui suit relate approximativement les étapes qui ont pu être observées au cours de différentes recherches menées par des élèves de Première S en laboratoire d'informatique et par groupe de deux avec le Professeur qui n'était pas neutre ; celui-ci menait sa classe afin de développer un débat scientifique pour faire émerger le maximum d'initiatives. Les débats ne sont pas relatés à ce stade de notre travail.

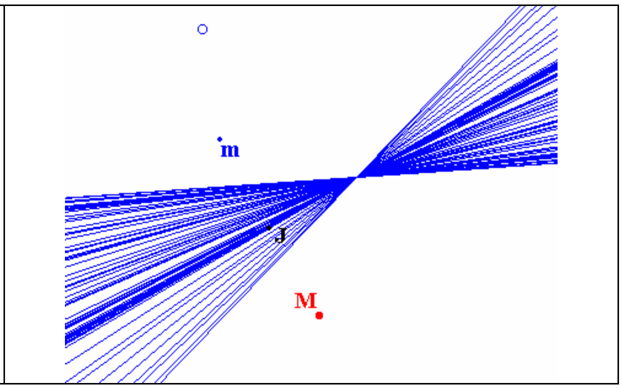
Les commentaires qui accompagnent cette narration doivent permettre une meilleure compréhension didactique de l'objet étudié.

 m est le point indépendant et M est son point image par la transformation cachée.	 Ici après avoir tracé le segment [mM] et avoir activé sa trace, on a tiré le point m dans tous les sens.	 Là, on a construit le milieu J du même segment, on a activé les traces des 3 points m, M et J puis on a tiré m selon une direction approximativement horizontale.

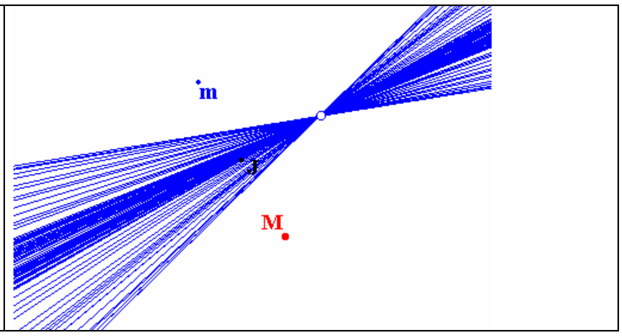
Ici, on a construit la médiatrice de [mM], activé sa trace dans le but de tirer le point m dans tous les sens. Préalablement, on aura mis un point cerclé en réserve (méthode des confettis).



On tire le point m dans tous les sens.

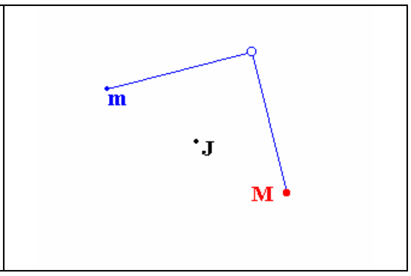


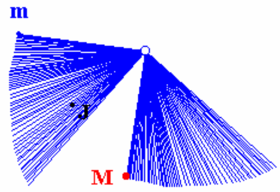
On vient déposer le point en réserve sur le point qui a l'air d'être le point de concours de toutes ces droites (ces droites sont concourantes dans G1 mais le sont-elles dans G2).



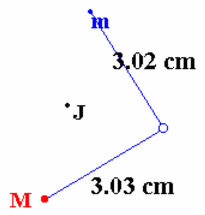
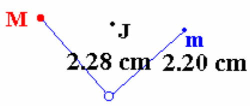
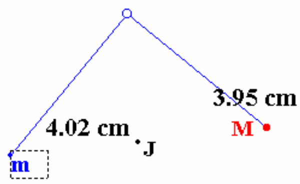
On se débarrasse ensuite des traces et de la médiatrice. Quand on tire à nouveau sur le point m, le point M a l'air de le suivre en sorte que [mM] pivote autour du point de réserve. On trace donc les segments joignant ce point de réserve qu'on baptisera R aux points m et M.

Ces segments sont isométriques dans G1 (ils ont l'air visuellement de même longueur) même quand on déplace m. Ces segments sont aussi orthogonaux dans G1 (l'angle qu'ils font a l'air visuellement droit).



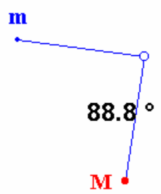
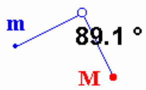
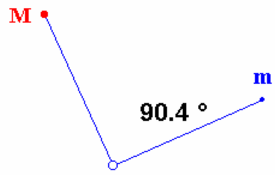
Une confirmation visuelle est obtenue en activant les traces des segments et en tirant sur le point m.	

Les mesures de ces segments avec Cabri pour différentes positions de m donnent les valeurs qui suivent :

L’égalité des distances au point R particulier positionné à la précision du dragage près est infirmée dans G1 informatique mais nous fait conjecturer que dans G2, il pourrait exister un point vérifiant cette propriété (à condition de le construire dans G2).

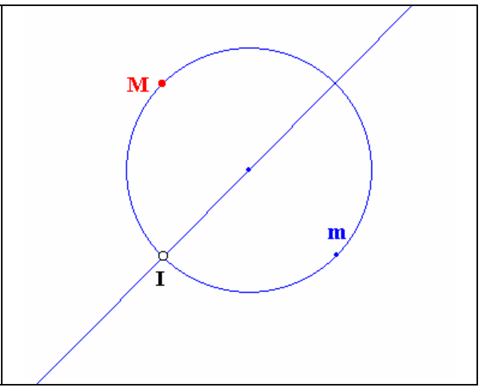
Les mesures des angles $\widehat{mRM}$ avec Cabri pour différentes positions de m donnent les valeurs qui suivent :

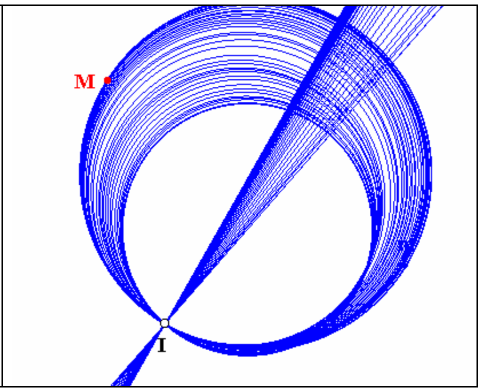
Les valeurs affichées qui sont différentes de 90° pour des raisons analogues à celles évoquées plus haut infirment donc dans G1 informatique l’hypothèse de l’angle droit. Néanmoins, là aussi, il nous fait conjecturer l’existence possible dans G2, d’un point R pour lequel cet angle vaudra bien 90° (à condition de le construire dans G2).

Finalement, dans G1, nous concluons que très vraisemblablement, notre transformation cachée est une rotation de centre R et d’angle 90°.
Si on se plonge dans G1 informatique, cette conjecture est infirmée mais en génère une autre dans G2 : la transformation cachée est une rotation d’angle 90° de centre à déterminer, dans G2 évidemment, c’est-à-dire par des constructions du niveau théorique de la géométrie axiomatique dont Cabri est le modèle.

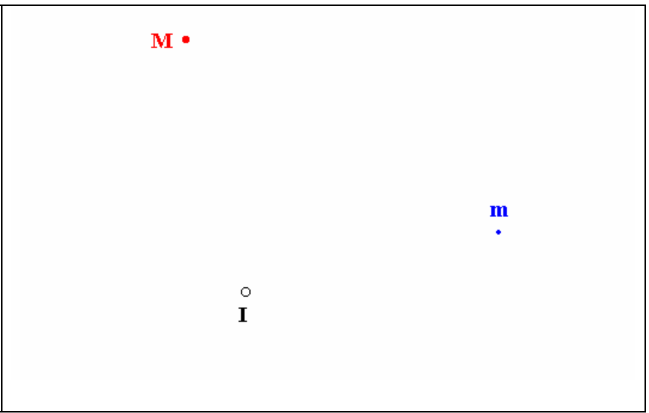
Recul théorique : si la transformation cherchée est bien celle que nous avons conjecturé être, alors le centre I se trouvera à une intersection du cercle de diamètre [mM] et de la médiatrice de [mM].
Cette construction est faite dans G2 informatique et donne le point I visible sur l'écran qui peut éventuellement être traité comme un point de G1.



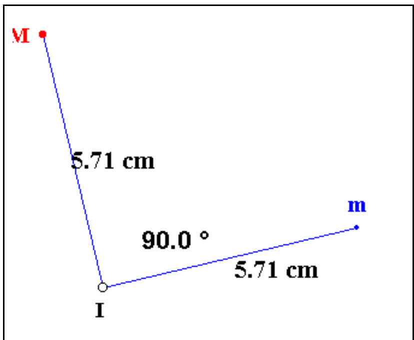
Une manière de valider la fixité de ce point dans G1 est d'activer les traces du cercle est de la médiatrice utilisée et de tirer sur m. On peut constater visuellement que le point I ne bouge pas et que tous nos objets dépendants passent par ce point I.

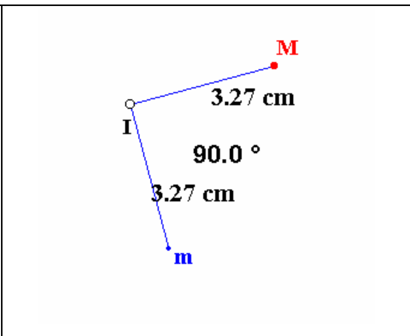


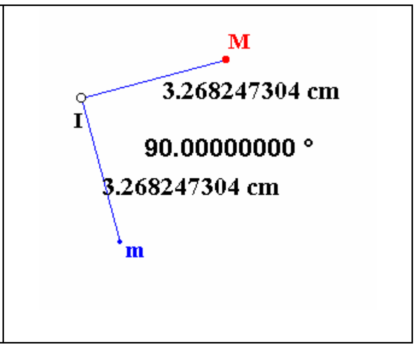
Il est infiniment plus convaincant d'utiliser le fait que I a été construit dans un environnement modélisant G2 et même G3. Pour cela libérons le point I obtenu pour une position particulière de m en le redéfinissant comme un point libre et en le punaisant dans la foulée pour ne pas perdre son positionnement obtenu dans G2 mais aussi G2 informatique. On peut maintenant effacer le cercle et la médiatrice utilisée.



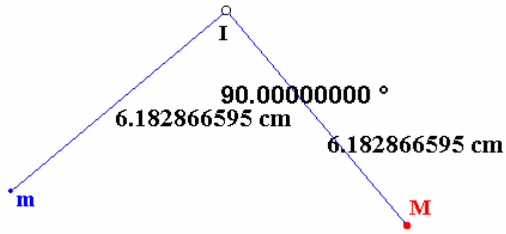
Nous pouvons maintenant effectuer sur ce point de G2 construit dans un G2 informatique, les vérifications de mesures de distances et d'angles qui cette fois donnent :







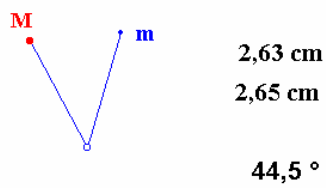
La conjecture est cette fois confortée dans G2 informatique. Elle l'est d'autant plus qu'on augmente la précision de l'affichage des mesures.

Si on va jusqu'à la précision maximum et qu'on bouge le point m, toutes les positions qu'on essaie, valident l'égalité des distances et celle de l'angle à 90°	

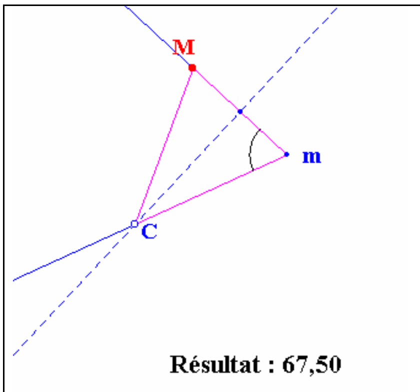
La boîte noire est donc résolue localement dans G2 informatique (dans le domaine où on a fait varier M ; on peut imaginer des constructions plus subtiles donnant le même résultat dans ce domaine et un autre ailleurs comme cela est fait dans l'exemple 2 de l'annexe 2 du chapitre 20) : I a été défini à partir d'une position particulière de m et on a vérifié dans G2 informatique que ce point construit par des constructions de G2 était bien le centre de la rotation d'angle 90° transformant tous les points considérés m en leurs M associés.

BOÎTE NOIRE 2

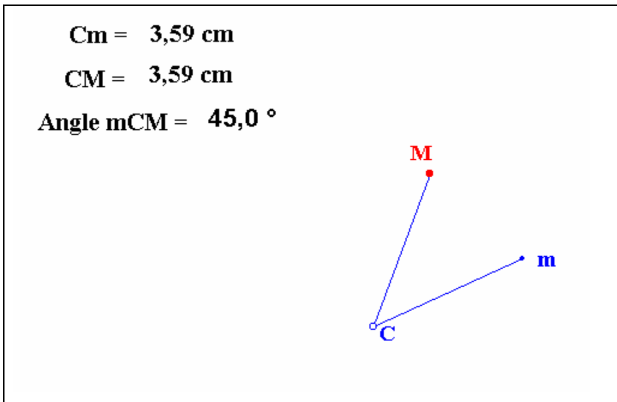
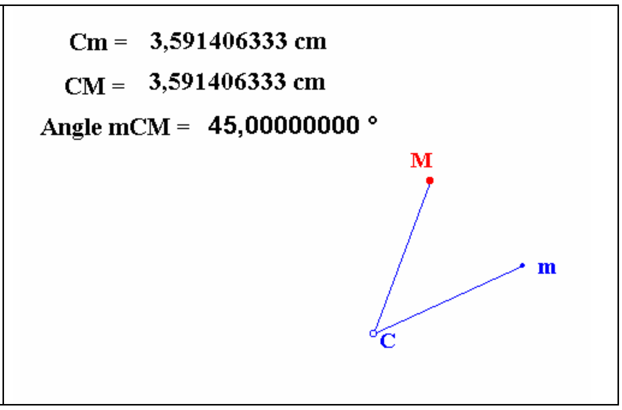
La seconde boîte noire est du même type que la précédente ; elle a été proposée aux élèves qui avaient participé à la résolution de la précédente toujours dans les mêmes conditions que pour la boîte noire 1. Une seule différence, le Professeur n'intervient pas et laisse les groupes chercher et communiquer (même dispositif que celui de Luc Trouche pour l'exemple relaté dans l'article « Eppur si muove »). Les élèves ne savaient pas qu'ils avaient affaire à une rotation mais leur attention s'est portée naturellement vers cette transformation. Le but du travail proposé était de voir si les élèves allaient pouvoir réutiliser pertinemment les outils du logiciels mobilisés au cours de la résolution de la boîte noire 1 et s'ils allaient aussi naturellement reproduire une stratégie de raisonnement analogue à celle développée au cours de la boîte noire 1. L'angle choisi a été un angle de 45°.
Ce qui a été observé, c'est que les phase qui mènent à la conjecture apparaissent naturellement (mise en évidence du point fixe et de la constance de l'angle dans G1) mais il y a une difficulté à faire le saut dans G2 pour la validation : en effet les élèves ne font pas la différence entre G1informatique et G2 informatique :

Dans G1 informatique, il visualisent, ils superposent, il égalisent des valeurs approximatives données par l'outil informatique ; c'est licite car ils manipulent les objets de G1. C'est ce qu'il font quand après avoir positionné et punaisé un point repéré comme invariant par superposition de m et M, ils effectuent les mesures ci à droite, ils tirent sur m pour faire les observations d'égalité approximative des distances et d'un angle variant aux alentours de 45° qui évidemment est un angle de référence de la littérature pédagogique en mathématiques et en physique et qu'enfin ils conjecturent que la transformation cachée est une rotation d'angle 45°.	

Le débat n’a pas fait apparaître la nécessité d’aller plus loin, c’est-à-dire d’essayer de caractériser la position du centre sur la page Cabri en fonction des données du problème (les différents couples (m ; M) disponibles). La rupture théorique est vraiment forte et il a fallu à ce moment mon intervention pour obtenir la construction de l’éventuel centre de cette rotation conjecturée, comme suit :

	Le raisonnement auquel a été conduite la classe est le suivant : si la transformation est bien une rotation de centre C et d’angle 45°, alors le triangle mMC est isocèle de sommet C et d’angle au sommet 45°. Par conséquent, le point C peut être défini comme l’intersection de la médiatrice de [mM] et de l’image de la demi-droite [mM) par la rotation de centre m et d’angle (180°-45°)/2= 67.5° (calculé avec la calculatrice de Cabri). Une construction par arc capable aurait pu être évidemment utilisée.

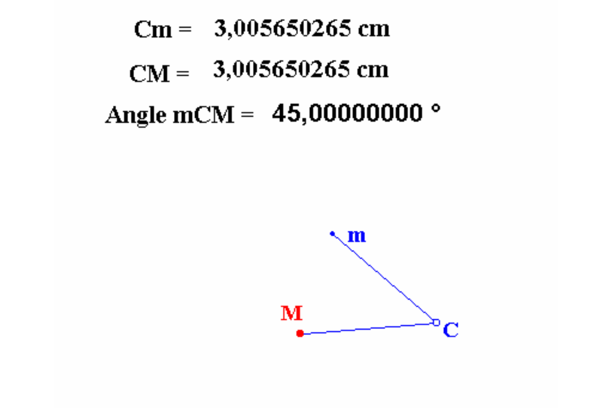
Là encore notons les maladresses récurrentes consistant à vérifier l’égalité de Cm et CM et l’obtention de 45° pour l’angle pour diverses positions de m. Ce qui évidemment ne valide rien puisque dans ce cas, le point C est dépendant du couple (m ; M) utilisé pour le construire. Le fait de rendre libre C et le punaiser pour faire ultérieurement les mesures précédentes est fortement ancré dans G2. Ces vérifications sont du domaine de G2 informatique car ce point C pour Cabri n’est pas un point comme le point déposé comme un confetti au jugé : c’est un point construit.
Les deux écrans qui suivent valident seulement la construction de C pour le couple de points donnés : c’est une validation qui est du niveau G2 informatique car elle valide des constructions de G2 informatique avec des outils de G2 informatique.

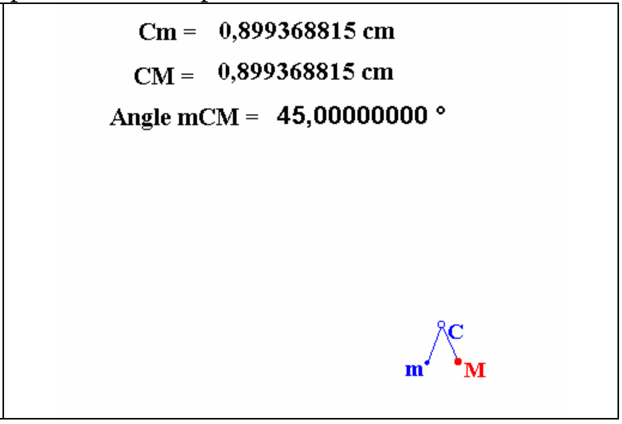
	

Dans G2 informatique, comme les objets manipulés sont des objets de G2 sur lesquels on G2-raisonne, des mesures non exactes obtenues par l’outil informatique Cabri ne doivent pas conduire à une conjecture d’exactitude mais à une infirmation alors que des mesures exactes doivent conduire à une très forte plausibilité d’exactitude (si évidemment, on s’en tient à des constructions « simples »). C’est en cela que nous parlerons à ce stade de raisonnement quasi-théorique.

Pour obtenir la validation G2 informatique de la conjecture, il faut multiplier les mesures. En ce sens on pourrait peut-être ajouter le qualificatif de locale pour le type de validation.

Notons que si une invalidation doit survenir, il est nécessaire d'aller à l'affichage maximum des décimales. Voici quelques écrans qui ici viennent confirmer fortement la conjecture (Cabri-preuve, analyse synthèse quasi théorique)
Remarque : certains chercheurs experts dans l'utilisation de Cabri, à cause de la grande habitude qu'ils ont du logiciel et une bonne connaissance du domaine étudié, peuvent avoir une idée de la généralité de la figure (ou plutôt du dessin la représentant), ce qui fait que paradoxalement, ils deviennent économes de déplacements de points !

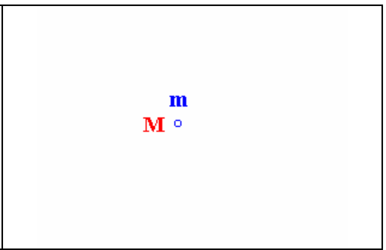




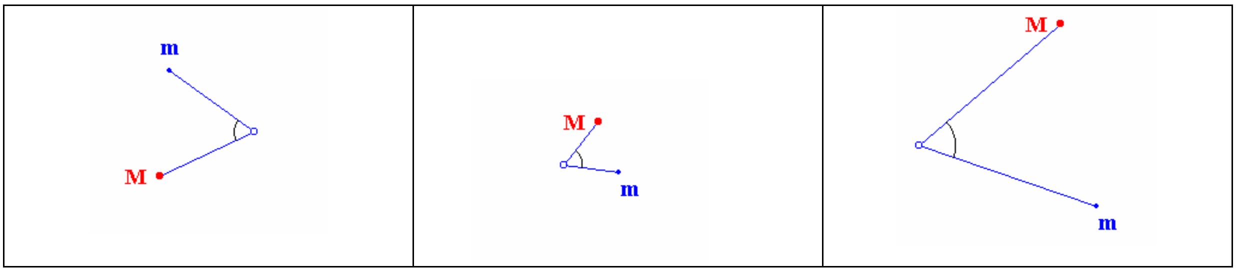
Cette rupture théorique conduit à un travail complémentaire qui dans le cas qui vient d'être traité mène quand même à une validation. La boîte noire 3 a été proposé dans un troisième temps pour pallier l'apparente inutilité opératoire pour les élèves de cette étape. Elle doit permettre de se placer dans une situation plus voisine des situations expérimentales des sciences physiques où le travail sur les mesures conduit très rarement à des mesures dites « exactes »

BOÎTE NOIRE 3

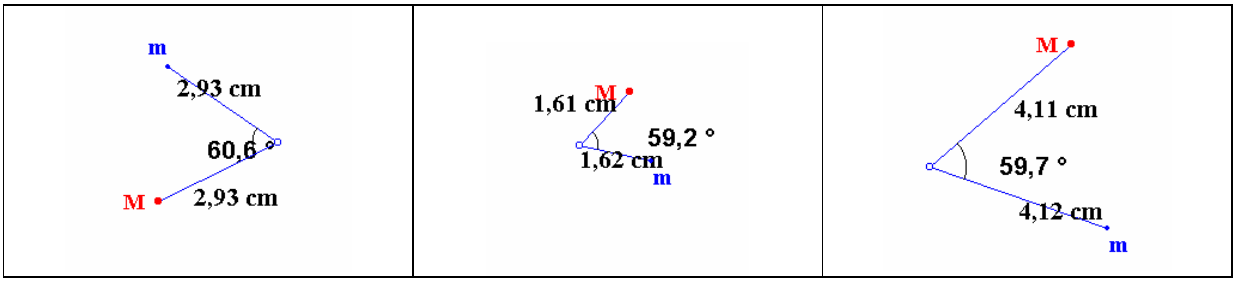
Là encore, nous avons choisi une rotation mais cette fois nous avons réglé le paramètre angle à la valeur $\boxed{60.1°}$.(nous sommes dans G2 informatique car cet angle est un angle dans la mémoire de Cabri et les objets mathématiques qui en dépendent et qui seront utilisés le seront avec cette valeur spécifique). Ceci devant nous permettre de faire apparaître plus nettement les phases de vérification théorique générables par une bonne utilisation du niveau G2 informatique qui inclut à la fois les constructions de G2 réalisées sous Cabri et les validations sous forme de mesures sur ces mêmes objets réalisées par Cabri.

Les élèves ont donc déplacé m jusqu'à trouver une position où ce point se superpose à son image M. Ils ont ensuite amené un point confetti sur cette position (point libre qui était en réserve). Ils ont punaisé le point confetti à cette position pour éviter de changer sa position et surtout éviter de le déplacer au moment d'écarter m de cette position là.	

Après avoir écarté m, les élèves tracent les segments [Rm] et [RM], ils marquent l'angle $\widehat{mRM}$; ils déplacent ensuite le point m pour visualiser ce qui l'est dans les trois écrans qui suivent.

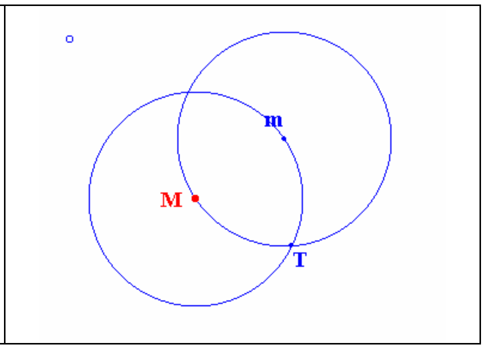


Ce travail fait dans G1 les conduit à émettre une conjecture de G1 : la transformation est une rotation.
Pour faire une incursion dans G2, ils vont passer par G1 informatique en demandant à Cabri de mesurer les segments [Rm] et [RM] et l'angle $\widehat{mRM}$ pour différentes positions de m pour obtenir des écrans du type suivant :



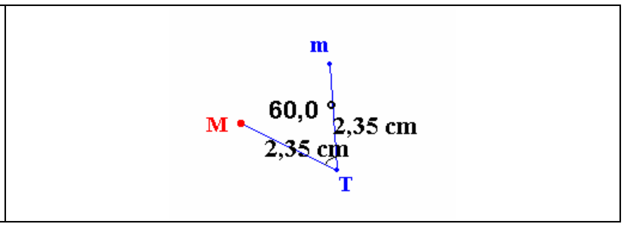
Les investigations réalisées conduisent à la conjecture de G1 « la transformation est une rotation d'angle 60° : ceci montre comment les élèvent savent tirer parti des mesures fournies par le logiciel concernant un point (le confetti) qui a été G1-construit et non G2-construit. Ces quelques exemples servent en même temps de validation dans G1. Le paramètre « trouver des valeurs exactes validant une conjecture » est un paramètre qui peut pousser les élèves à faire le saut théorique qui permet de basculer dans G2.

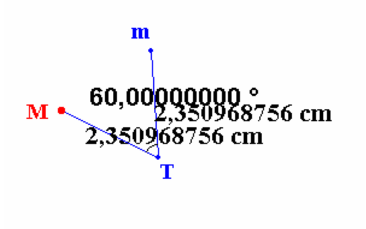
Les élèves construisent le point qui voit un segment particulier [mM] sous un angle de 60° et qui vérifie Rm = RM, c'est-à-dire le centre de la rotation d'angle 60° transformant un point particulier m en son correspondant M. Ceci est un travail de G2 même s'il est réalisé sous Cabri (Cabri respecte l'axiomatique avec laquelle G2 est sous-tendu)



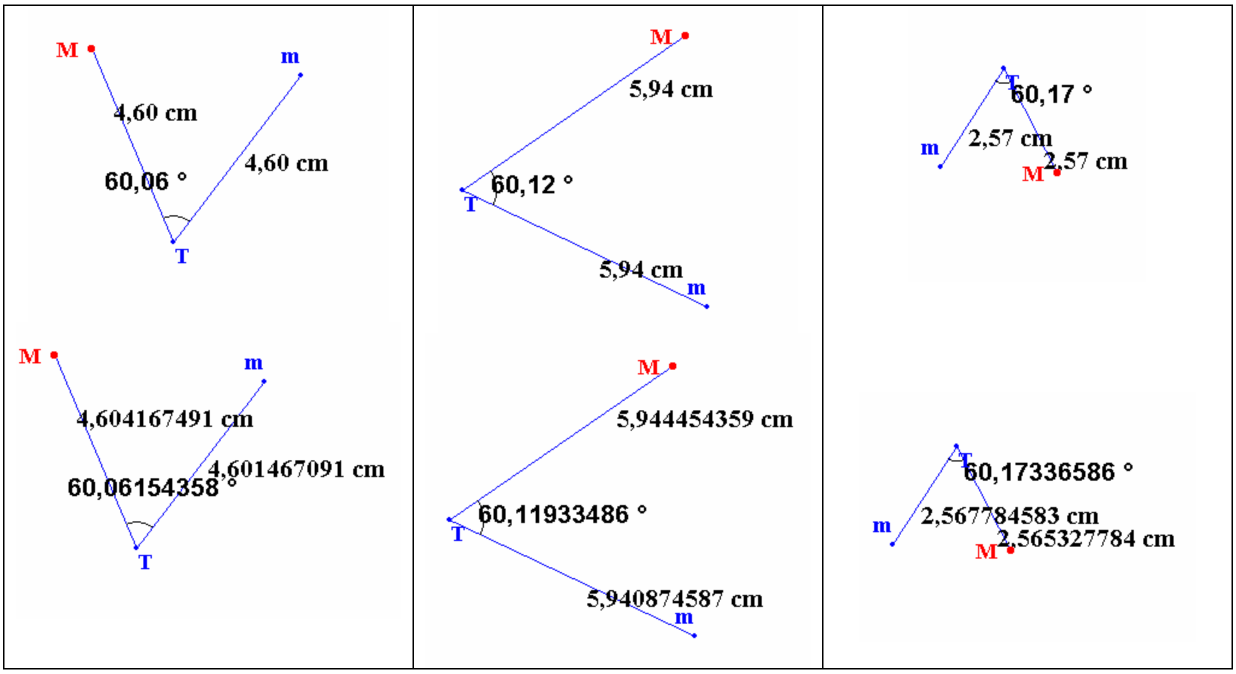
La figure est construite en sorte que le triangle mMT soit équilatéral direct. Le point T est rendu libre à l'emplacement où il vient d'être construit puis punaisé. Les cercles de construction sont effacés.

Les mesures réalisées valident la G2-construction dans G1 :



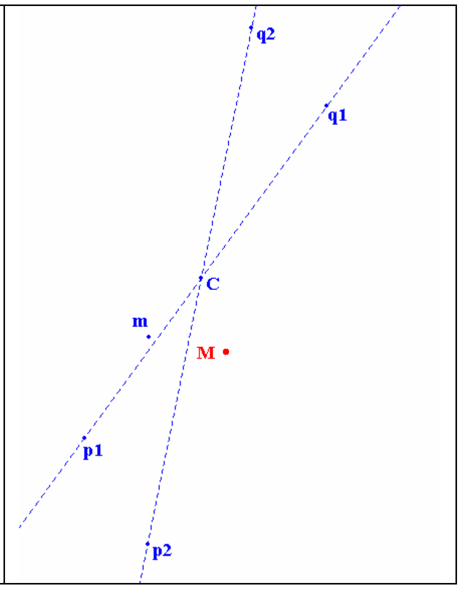
La validation dans G2 s'obtient en augmentant le nombre de décimales affichées pour les 3 mesures obtenues :	

.
La validation de la conjecture va être réalisée en changeant la position de m et voici ce que l'on obtient, suivant qu'on laisse l'affichage des décimales par défaut où qu'on demande l'affichage du maximum de décimales.

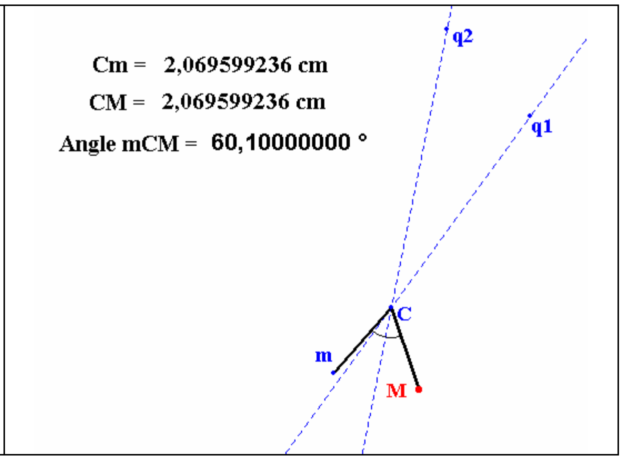


La première ligne conduit à une validation dans G1 mais une invalidation dans G2, faite au niveau G2 informatique. Il serait faux, ayant connaissance des informations de la seconde ligne de maintenir la conjecture car la construction ayant été faite au niveau G2, les mesures devraient être validantes au niveau G2 et si elles ne le sont pas c'est que la conjecture a la quasi certitude d'être fausse.
Une autre stratégie doit alors être mise en œuvre que les élèves n'ont pas trouvée, mais qui l'a été grâce à l'organisation d'un débat scientifique qui a conduit à faire l'analyse suivante : si la transformation cachée est bien une rotation, alors son centre se situera à l'intersection de deux positions particulières de la médiatrice de [mM], ce raisonnement est du niveau G2 et les constructions qu'il implique doivent être réalisées dans G2 et plus spécialement dans G2 informatique :
Il s'agira de rendre indépendantes deux médiatrices des points qui ont servi à les définir pour obtenir le nécessaire centre qu'il faudra valider dans d'autres Cabri-cas. C'est ce qu'on appellera un raisonnement par analyse théorique et synthèse théorique.

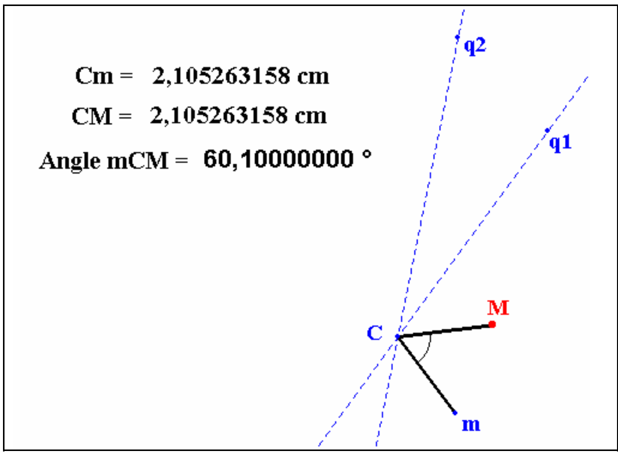
On construit donc la médiatrice d'un segment [mM], on y place deux points p1 et q1 qu'on redéfinit comme points libres et qu'on punaise ; on efface la médiatrice et on trace en pointillés la droite (p1q1). On recommence pour une seconde position du couple(m ;M) et on obtient la droite (p2q2). Le point C qu'on définit comme le centre nécessaire d'une éventuelle rotation est l'intersection de ces deux droites dans l'environnement Cabri. La G2-validation va consister à comparer les Cabri-mesures des segments [Cm] et [CM] et à évaluer l'éventuelle constance de la mesure de l'angle $\widehat{mCM}$ pour diverses positions de m.

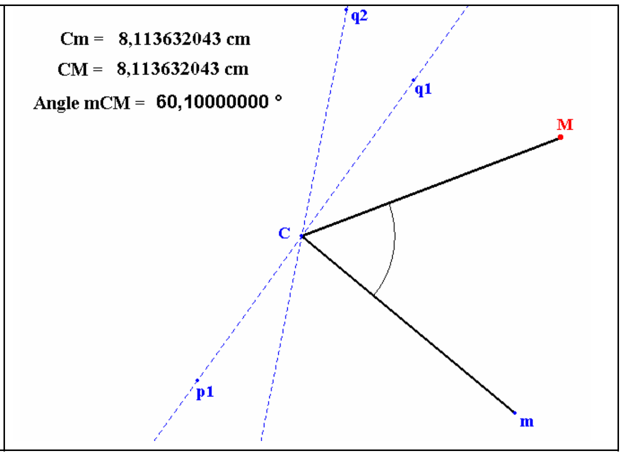


On fait afficher dans la foulée les mesures des segments Cm et CM et la mesure de l'angle $\widehat{mCM}$. Les mesures affichées des segments sont les mêmes, ce qui valide seulement la construction de C dans G2, mais de plus la valeur affichée de l'angle est 60.1° ce qui nous donne notre G2-conjecture pour la mesure de l'angle.



Pour maintenant valider la G2 conjecture dans G2 informatique, il suffit de voir si ces constatations perdurent en changeant la position de m. C'est bien ce qui se passe et en voici deux exemples capturés.





ANNEXE 2 (Témoignage)

Annexe 2.1. Une genèse qui a son importance
Témoignage de notre expérience d'enseignant (susciter la motivation en formation continue)

« J'ai toujours remarqué que l'action nécessaire de capturer l'attention de mon auditoire était le paramètre le plus important (dans la mesure où tous les autres en dépendent) que mon expérience d'enseignant m'ait apporté pour améliorer les conditions de transmission des connaissances ou des apprentissages dont j'avais la charge. Cette activité préparatoire au sens psychologique du terme est née à l'I.P.S.T. (Institut de Promotion Supérieur du Travail de Toulouse) où j'ai eu la responsabilité d'enseigner au niveau de la classe terminale à des adultes salariés qui désirait obtenir l'ESEUB (Examen Spécial d'Entrée dans les Universités, type B, c'est-à-dire « scientifique »). Les cours magistraux avaient lieu en amphithéâtre les mardi soir et jeudi soir de 18h à 20h et le samedi matin de 10h à 12h. J'enseignais en même temps dans le cadre de ma fonction principale dans une classe terminale du lycée Bellevue de Toulouse. Il est apparu très rapidement que les démarches d'enseignement du même objet au même niveau mais dans deux **« contextes »** différents ne pouvaient se faire dans les mêmes conditions : en particulier s'est imposée à moi la nécessité d'une introduction impérative avant de démarrer chaque séance de formation continue à l'IPST.

→ Cela pouvait être un long rappel des résultats vus la fois précédente qui permettrait à tous de suivre (soit pour gérer l'absence au cours précédent de certains, due à des occupations de travail impératives, soit pour faire une transition douce entre le monde du travail et le monde de l'étude, soit pour montrer l'intérêt que l'enseignant porte à leur projet de promotion sociale).

→ Cela pouvait être l'évocation d'un problème historique en liaison avec la leçon qui allait être abordée et que je vulgarisais à ma manière (pour leur faire aborder la discipline d'une autre façon, pour mettre les Mathématiques en perspective, pour introduire une démarche différente).

En bref tout autant d'initiatives qui me permettaient de voir enfin les yeux briller du feu de celui qui veut savoir : j'obtenais l'adhésion de l'auditoire à la démarche dans laquelle je l'entraînais même si je savais que ce serait la démarche classique que j'utilisais avec mes adolescents du lycée Bellevue. »

Annexe 2.2. Ses conséquences dans un autre cadre
Suite de ce témoignage « susciter la motivation en formation initiale »

« Bien des années plus tard, je fus confronté à un problème qui bien que différent dans la forme s'avéra être fortement analogue à celui que je viens d'évoquer. Responsable d'une classe de seconde, j'avais affaire à des élèves de niveaux très hétérogènes, pendant une durée très limitée de temps dans la semaine, peu motivés par la perspective de pratiquer une discipline imposée mais non consentie. Le résultat était que l'attention était difficile à obtenir en début de séance, la mise en place très fastidieuse et l'intérêt des élèves faible. J'ai repensé en priorité à mes collègues d'éducation physique qui ne mettaient jamais leurs élèves en situation d'effort physique normal instantanément mais qui commençaient toujours par une phase d'échauffement et une motivation par la voix. C'était finalement mon activité préparatoire, mais le problème était de découvrir ce qui pouvait être l'analogue de cet échauffement et qui pourrait me faire retrouver une lueur dans les yeux de mes élèves.

La notion de défi présente dans les boites noires ainsi que la possibilité technique d'en présenter à l'aide de la calculatrice rétroprojetable TI-92 en classe est apparue rapidement (on retrouve d'ailleurs des exercices défis dans le travail que Luc Trouche a fait et a publié avec ses élèves). S’est ensuite imposée l’idée de proposer à chaque début de séance un problème de recherche de « boîte noire » sous forme de feuilleton (10 minutes à chaque séance) avec l’idée sous-jacente que cette activité me permettrait de familiariser mes élèves avec le logiciel que je voulais leur faire utiliser en salle d’informatique par la suite. Après le premier effet de surprise, ne serait-ce qu’à cause des conditions matérielles de la recherche et l’impératif de dialogue qui seul permettait de progresser (puisque dans l’activité dite presse-bouton, j’étais le seul à presser les boutons mais sur ordre venant de la classe), la dévolution était rapidement réalisée et les 10 minutes à chaque fois trop vite passées.

Les problèmes de classe évoquées au début étaient rapidement réglés puisque chaque début de séance était attendu avec impatience tout autant que le résumé de la recherche de la fois précédente que je faisais pour remettre la classe dans l’état où elle était restée à la fin de l’épisode précédent. La mise en route ne posait donc plus aucun problème. Et même quand le temps imparti à cette activité d’échauffement était achevé, je pouvais remarquer qu’une évolution favorable du contrat didactique était induite par ce type d’activité, même dans les moments autres : en particulier, les problèmes d’attention et de discipline s’estompaient pendant ces autres phases de travail en classe comme si « mériter le moment de boîte noire » était une conséquence directe d’un changement de leur comportement dans les phases classiques de cours, une espèce de réciprocité entre les comportements du professeur et de la classe. Le professeur ayant changé un paramètre de son action dans sa liaison avec la classe, implicitement un paramètre des actions de la classe envers le professeur devait changer.

Sans entrer maintenant dans le détail de ce qui a pu être obtenu en fonction des objectifs locaux fixés par le professeur apprenti chercheur à ces moments de « boîte noire », on peut affirmer qu’une impression positive a induit la continuation de l’introduction de tels moments à divers instants et divers niveaux de mon enseignement avec une évolution progressive des objectifs qui étaient assignés à ces moments. »

2.3. Les traces de ces expériences

2.3.1. Les notes personnelles : elles ont consisté en une transcription pas à pas du déroulement de la recherche pour mon usage personnel : le but initial était de pouvoir faire un résumé concis de la recherche faite au cours de l’épisode précédent pour établir une continuité avec l’épisode du jour.

2.3.2. Les notes des intervenants : les élèves devaient prendre en note individuellement tout ce qui était fait afin d’en faire un compte-rendu de la recherche réalisée qui serait évalué. Ce qui était obtenu était, du moins au début, un descriptif détaillé à l’extrême de toutes les manipulations réalisées sans l’âme mathématique. Elles dénotent ce que le physicien appelle les compétences expérimentales

Partie 5

DÉCOUPAGE CYCLIQUE DE LA DÉMARCHE DE RÉSOLUTION DE LA BOÎTE NOIRE
« Symétrie glissée »

Nous présentons ci dessous le texte intégral de la résolution de la boîte noire que nous avons intitulé « **Symétrie glissée** ». Ce texte est directement extrait des actes du congrès Cabriworld 2. La boîte noire choisie est la troisième qui fut présentée

Dans une première approche nous allons mettre une ligne de pointillés à chaque fois que nous aurons repéré la fin d'un cycle exploration-interprétation. Nous aurons obtenu la décomposition de la démarche en micro-étapes.

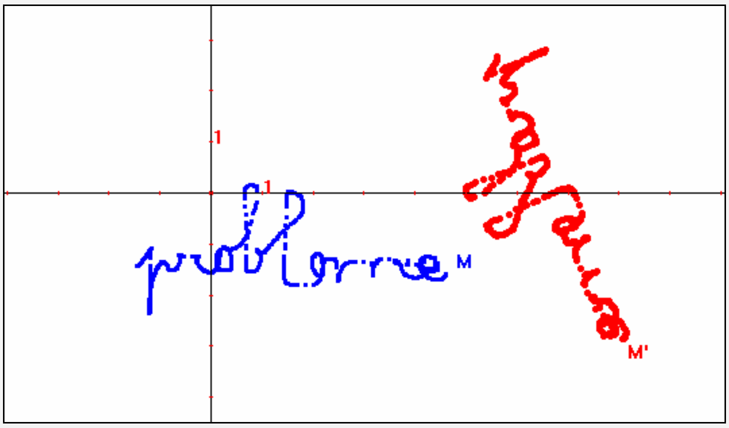
Une fois ce travail réalisé, nous présenterons ces cycles de manière horizontale dans le chapitre suivant avec comme objectif l'obtention d'un découpage en macro-étapes analogues à celles mises en évidence dans nos analyses préliminaires.

DÉBUT DE LA TRANSCRIPTION DU TEXTE ORIGINAL ⟶

BOÎTE NOIRE 3

(réinvestissement des stratégies d'attaques et de résolutions)

1. Pour se faire une idée :



……………………………………………………………………………………………………

2. Recherche de points invariants :

Dans ce cas, on ne trouve pas de point invariant.

……………………………………………………………………………………………………

3. Images de droites et cercles

Images de droites :

On crée un droite ; on redéfinit M sur cette droite bleue ; on demande le lieu de M' quand M se déplace sur la droite bleue ; on obtient encore une droite rouge. Le déplacement de cette droite ne nous donne pas d'indication sur la nature de la transformation.

……………………………………………………………………………………………………

Images de cercles :

On crée un cercle bleu ; on redéfinit le point M sur ce cercle : la droite rouge disparaît pour laisser la place à un cercle rouge isométrique au premier.

……………………………………………………………………………………………………

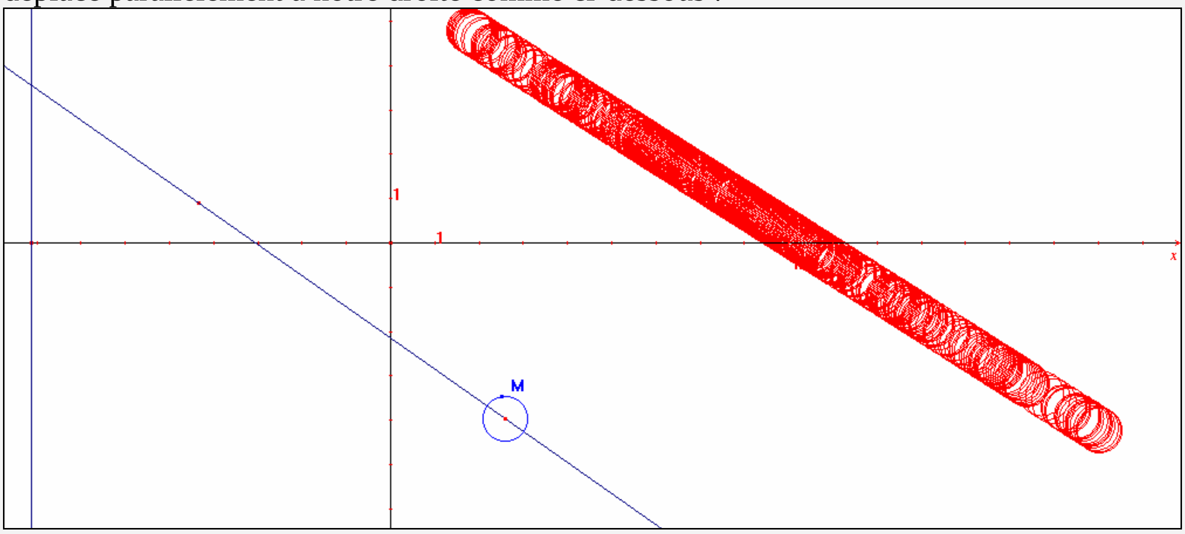
Mais ici quand on fait tourner le point M dans un sens sur le cercle bleu, alors le point M’ tourne dans l’autre sens sur le cercle rouge.

……………………………………………………………………………………………………

Quand on anime le cercle bleu en le tirant par son centre, il semblerait qu’il existe une direction de droite suivant laquelle le cercle rouge poursuit le cercle bleu avec un décalage constant.

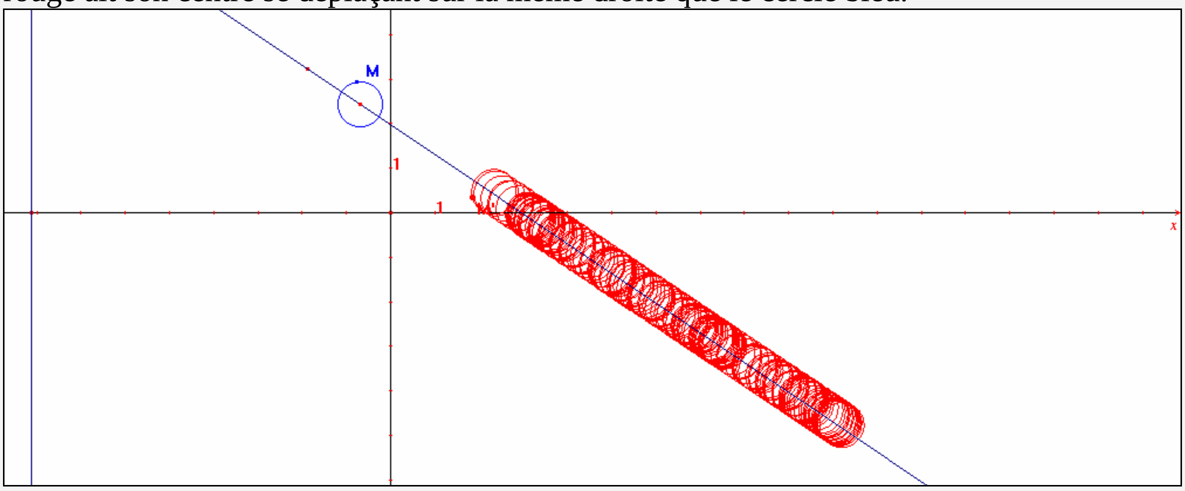
……………………………………………………………………………………………………

On trace donc une droite sur laquelle on va faire glisser le centre du cercle bleu. On active la trace du cercle rouge pour pouvoir choisir la direction de droite telle que le cercle rouge se déplace parallèlement à notre droite comme ci-dessous :



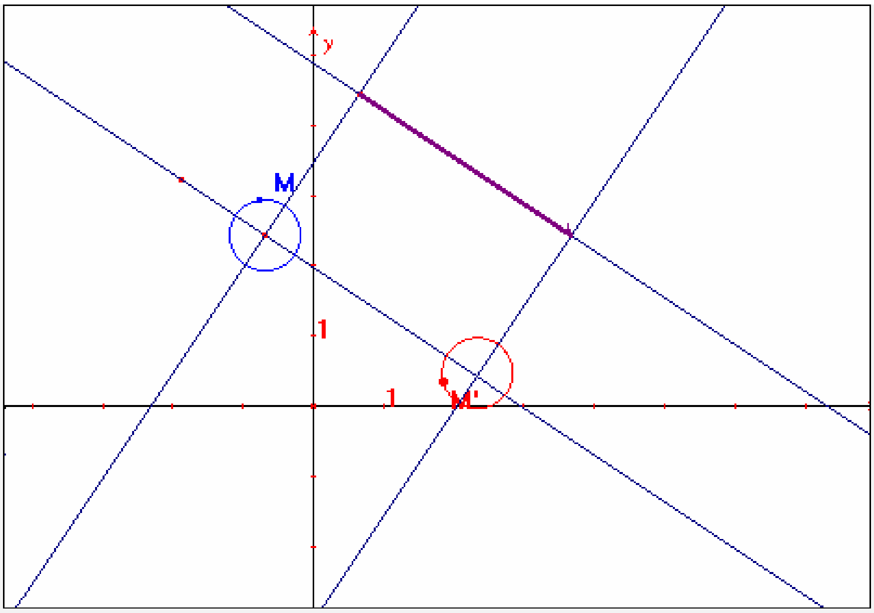
……………………………………………………………………………………………………

Faisons maintenant glisser cette droite parallèlement à elle même jusqu’à ce que le cercle rouge ait son centre se déplaçant sur la même droite que le cercle bleu.

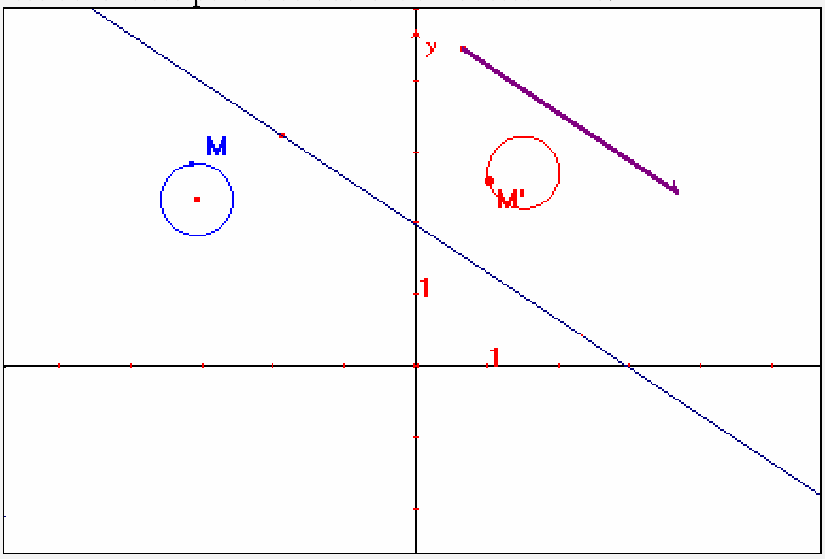


……………………………………………………………………………………………………

La construction suivante permet d’obtenir le vecteur de la translation transformant ce cercle bleu particulier en ce cercle rouge

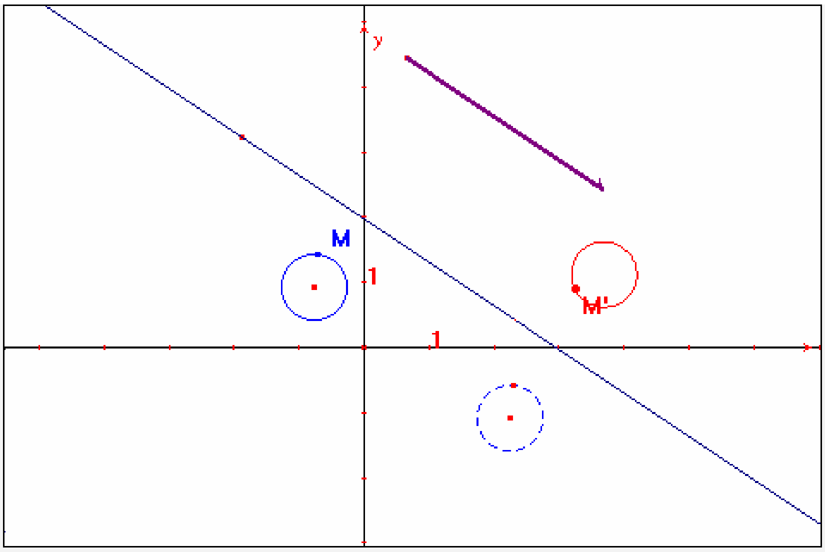


……
Redéfinissons l'origine et l'extrémité de ce vecteur, comme des points libres; ainsi ce vecteur dont les extrémités auront été punaisée devient un vecteur fixe.



……
Si on bouge le cercle bleu, la conjecture apparaît nettement.

……
Pour une confirmation visuelle on fait apparaître le cercle image du cercle bleu par la translation ayant pour vecteur, le vecteur précédemment construit.



……………………………………………………………………………………………

4. Conjecture :

La transformation proposée EST-SERAIT la composée d'une translation de vecteur à déterminer et d'une réflexion par rapport à une droite à préciser sachant qu'elle a la direction de ce vecteur.

……………………………………………………………………………………………

5. Détermination de la nature exacte de la transformation proposée

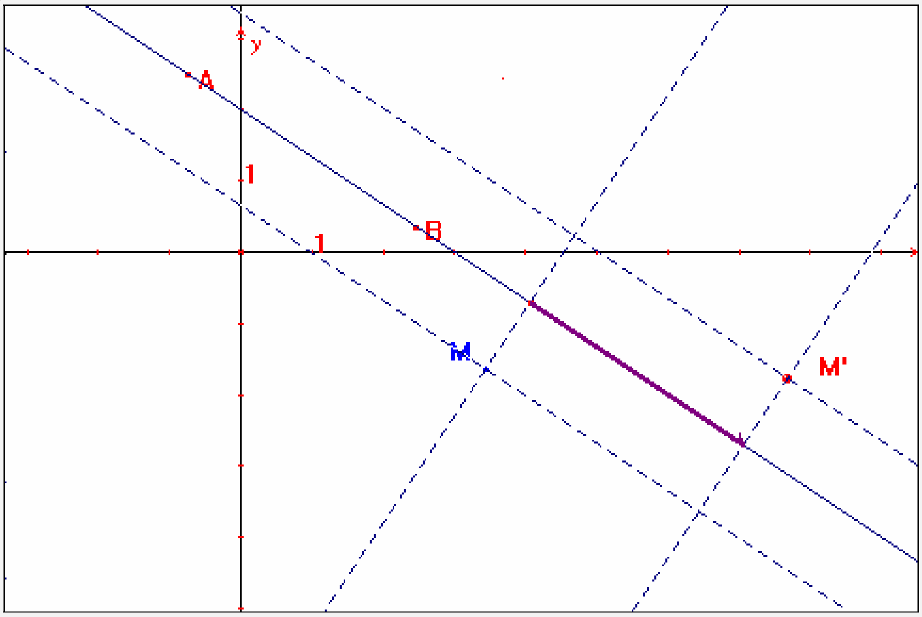
par ANALYSE THÉORIQUE-SYNTHÈSE EXPÉRIMENTALE

ANALYSE THÉORIQUE

Si notre transformation est bien du type conjecturé alors le milieu de [MM'] sera toujours sur l'axe de la réflexion.

……………………………………………………………………………………………

Construisons les milieux A et B de ce segment pour deux positions particulières de M (les redéfinir immédiatement comme points et les punaiser) et traçons la droite (AB).

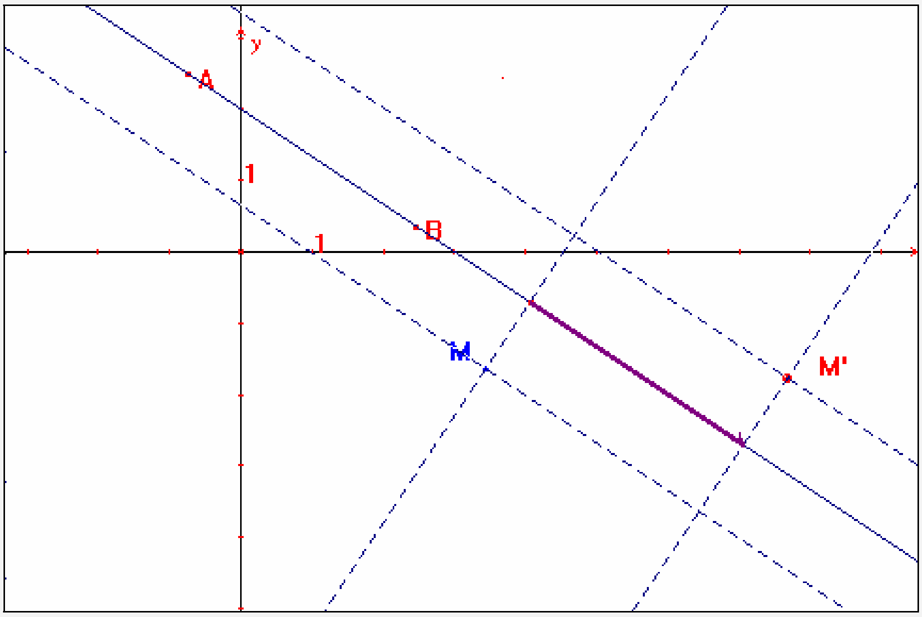


……………………………………………………………………………………………

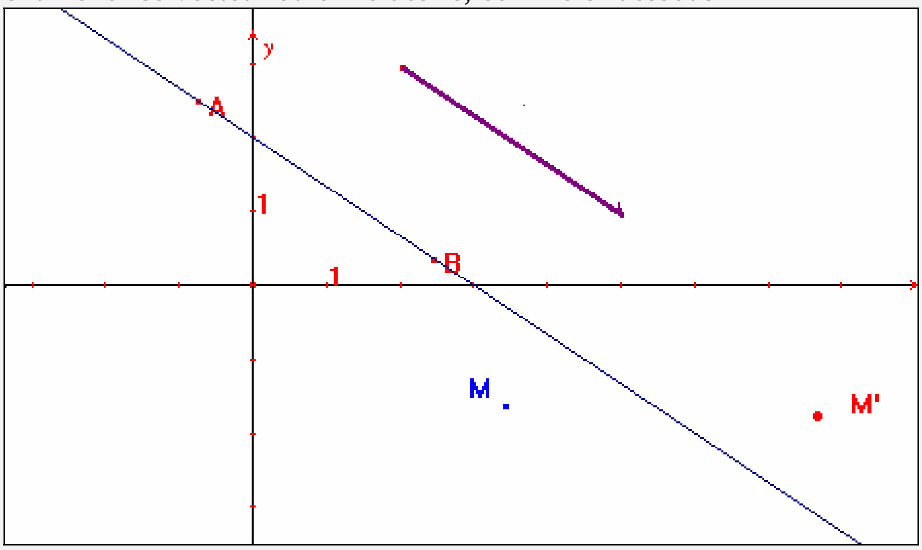
Si notre transformation est bien du type conjecturé alors, le vecteur de la translation est toujours porté par un côté du rectangle construit avec MM' comme diagonale, ce côté ayant la direction de l'axe de la réflexion.

…………………………………………………………………………………………………

Après avoir construit ce vecteur, on redéfinit ses extrémités pour le fixer définitivement



On peut ainsi amener ce vecteur où on le désire, comme ci-dessous



…………………………………………………………………………………………………

Cette analyse théorique nous amène donc à mettre en évidence une droite et un vecteur sur la page du logiciel qui seraient les éléments caractéristiques de la transformation conjecturée.

SYNTHÈSE EXPÉRIMENTALE

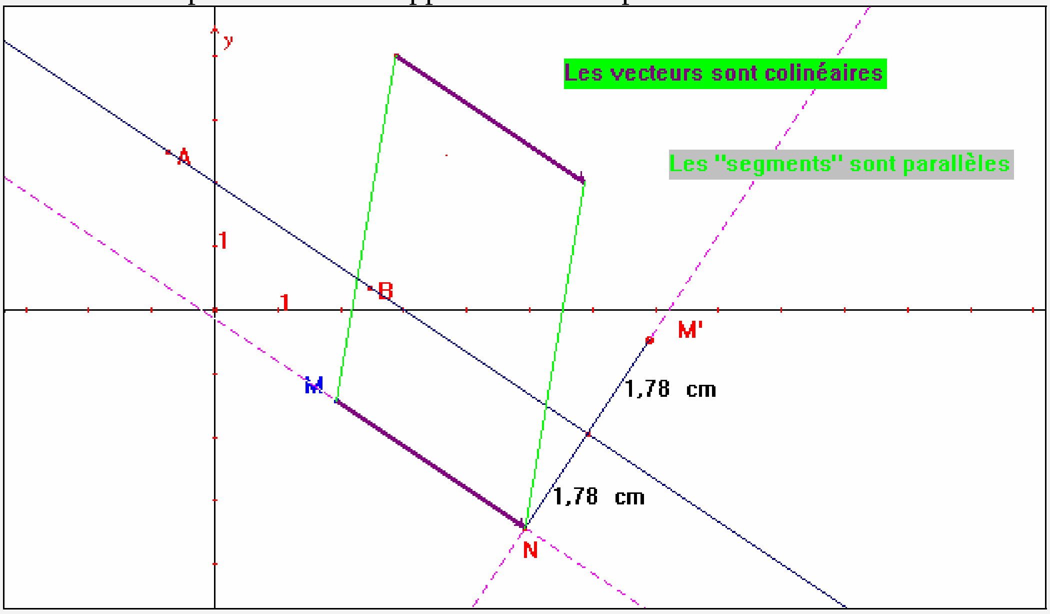
Vérifions que notre transformation est bien confondue avec celle conjecturée avec les éléments caractéristiques mis en évidence et ce, pour un maximum de points de la page expérimentable de Cabri.

…………………………………………………………………………………………………

Par M, on trace la parallèle à la droite (AB) et par M' la perpendiculaire à (AB). Ces deux droites se coupent en N.

Vérifions que N et M’ sont toujours à égales distances de (AB) : affichons pour cela les mesures des deux segments joignant respectivement N et M à ce segment, perpendiculairement à (AB)

Vérifions que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est toujours égal au vecteur précédemment construit : demandons au logiciel si le quadrilatère qu’ils définissent est bien un parallélogramme en demandant si les couples de droites supports sont bien parallèles



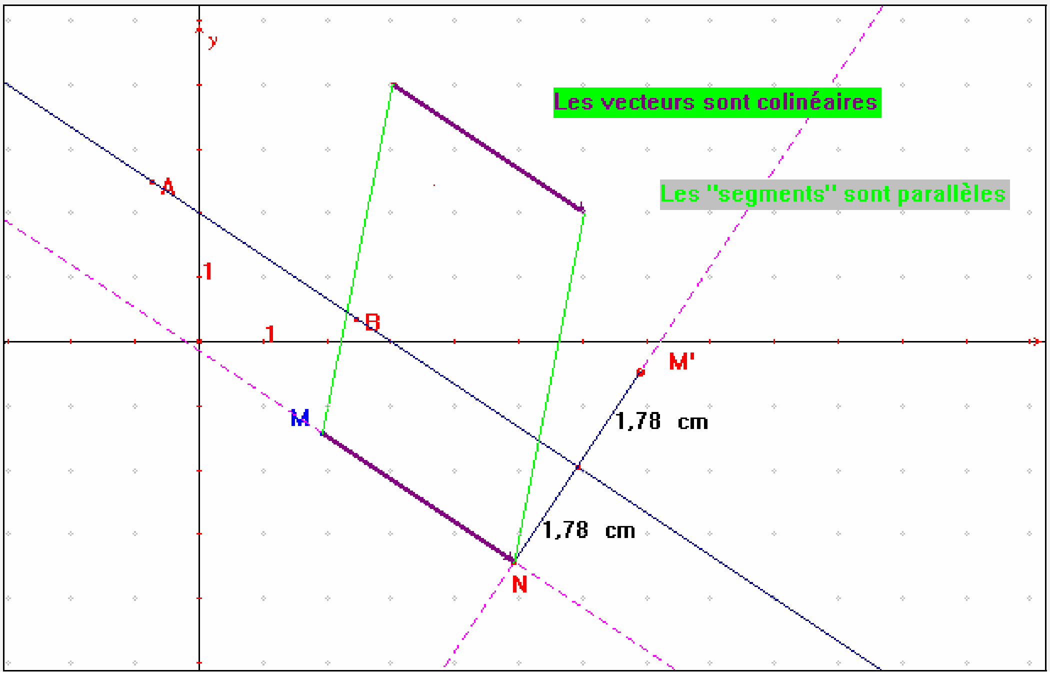
Cette synthèse expérimentale nous amène donc à conclure que la transformation donnée semble bien être celle conjecturée car nous sommes limités par le nombre de vérifications logicielles permises.

……………………………………………………………………………………………

Remarque : Si on fait afficher la grille, on peut aller plus loin dans la précision des caractéristiques de la transformation :

……………………………………………………………………………………………

le vecteur serait (3 ; -2) et la droite passerait par (0 ; 2) tout en admettant ce vecteur comme vecteur directeur.



Là encore pour valider cette conjecture avec Cabri, il faut redéfinir le vecteur de la translation et l’axe de la réflexion puis faire une nouvelle validation logicielle.
…………………………………………………………………………………………………….

⟶ **FIN DE LA TRANSCRIPTION DU TEXTE ORIGINAL**

Décrivons la démarche que nous allons suivre à partir de maintenant pour avancer dans la validations de nos hypothèses :

Cette démarche va nous permettre d’exhiber notre proposition de cadre formel de la démarche expérimentale, c’est typiquement une démarche empirique du type de celle que Newton décrivait comme sienne dans une lettre à Oldenbourg en Juillet 1676 quand il décrivait la méthode par laquelle il était parvenu à la théorie de la gravitation universelle :
« ***La vraie méthode, vous le savez, pour s’enquérir des propriétés des choses, c’est de les déduire des expériences. Et je vous ai dit que la théorie que j’ai proposée m’est venue, non pas en inférant, c’est ainsi et ce n’est pas autrement…, mais en la dérivant d’expériences d’où elle se conclut positivement et directement. C’est pourquoi la manière dont il convient de l’examiner, c’est de considérer si les expériences que je propose prouvent effectivement les parties de la théorie auxquelles elles s’appliquent, ou encore de poursuivre d’autres expériences auxquelles on peut penser pour soumettre la théorie à l’examen*** ».
Remarquons que dans ce texte le mot expérience est utilisé dans deux sens bien distincts :
– Premièrement dans le sens d’une expérience première, d’un ensemble d’observations accumulées dont on peut dériver une théorie.
– Deuxièmement, dans le sens d’une expérience seconde, élaborée, à l’examen de laquelle on soumet la théorie qui s’apparente donc à ce qu’on appelle « expérimentation » en tant qu’elle peut être reproduite avec un contrôle rigoureux de ses variables, en tant qu’elle est construite et pas donnée.
Nous pouvons résumer en disant que pour Newton, l’expérience remplit deux fonctions, celle de source de la connaissance scientifique mais aussi celle de vérification des connaissances.

Dans notre démarche nous retrouvons l’expérience première qui se synthétise dans la boîte noire « ***Symétrie glissée*** ». Cette dernière contient la base observationnelle d’où nous allons exhiber notre modèle de démarche expérimentale. La base observationnelle contient toutes les connaissances avec lesquelles nous allons l’exploiter, c’est-à-dire toutes nos connaissances ***a priori*** du modèle à découvrir.
L’expérience seconde sera constituée des expérimentations de validation qui viendront confirmer la validité du modèle proposé quitte à y apporter quelques aménagements.

MACRO DÉCOMPOSITITION DE LA DÉMARCHE DE RÉSOLUTION DE LA BOÎTE NOIRE « Symétrie glissée »

1. DÉROULEMENT DES MICRO-ÉTAPES POUR FAIRE APPARAÎTRE DES MACRO-ÉTAPES

Comme annoncé à la fin du chapitre précédent, nous reprenons horizontalement le découpage réalisé en explicitant les cycles $\boxed{\text{exploration-interprétation}}$ séparés par des liaisons qui sont précisées.

Ces liaisons seront notées $\boxed{\text{inf 1}}$, $\boxed{\text{inf 2}}$ et $\boxed{\text{inf 3}}$. Les étapes mises en évidence, ne sont pas toutes des cycles exploration-interprétation. Elles apparaissent comme dans le compte-rendu original dans la bande médiane de notre document et en gris.

Dans la bande inférieure du document, apparaissent les propositions de regroupements des micro-étapes en macro-étapes mises en évidence par analogie avec celles qui ont pu être mises en évidence dans nos diverses analyses préliminaires.

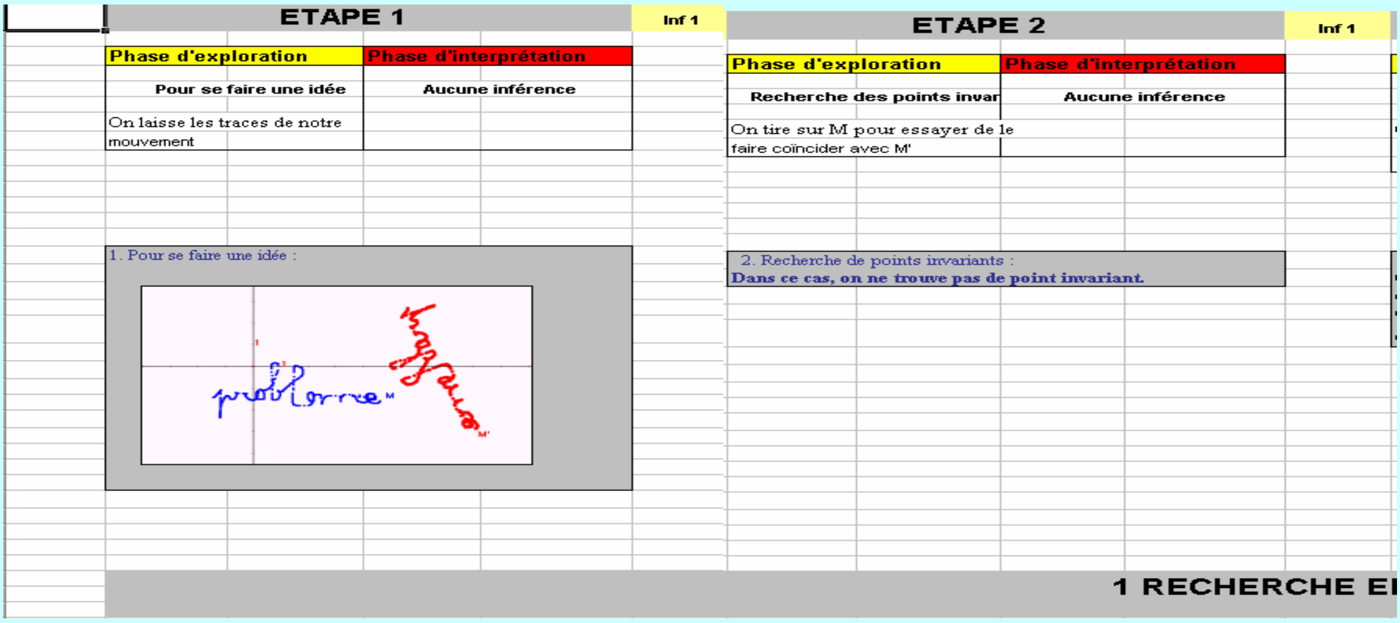
Toutes ces propositions seront exposées et justifiées dans le chapitre suivant où elles prendront une allure plus formalisée et plus explicite.

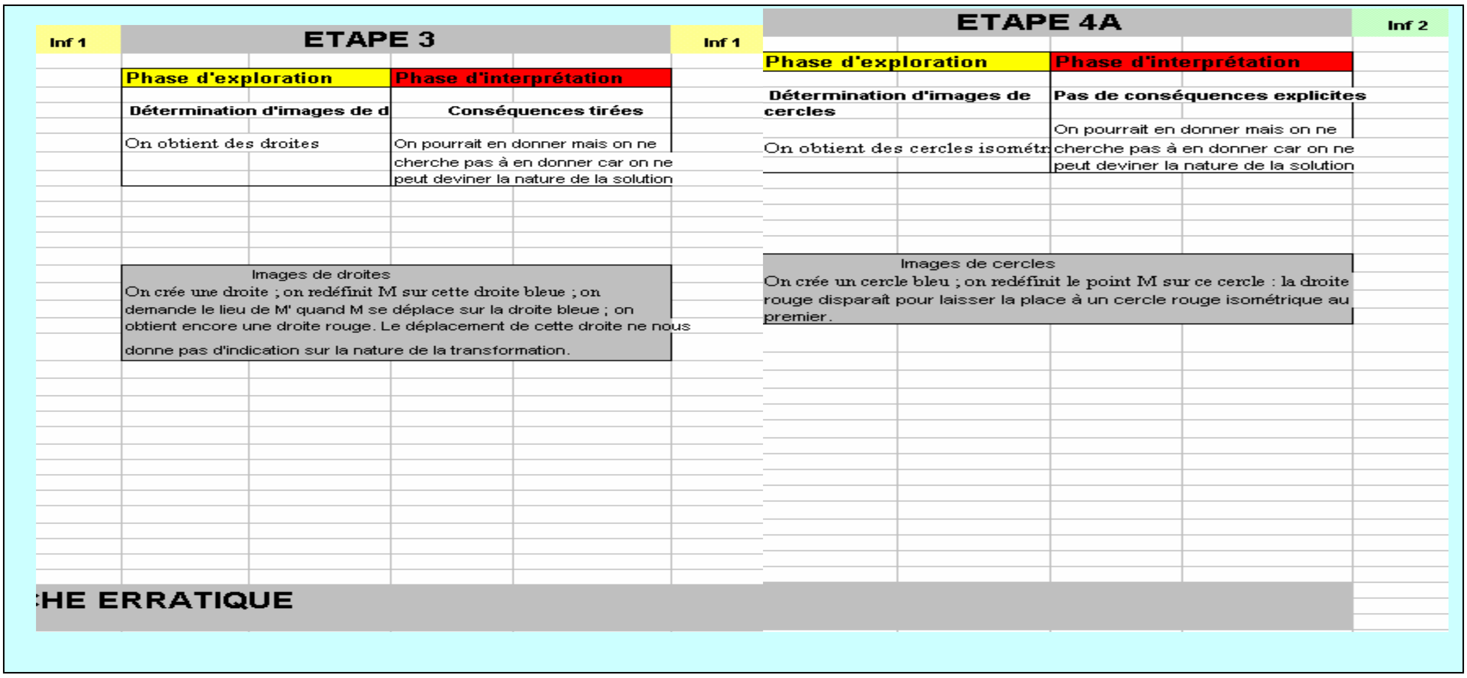
La bande supérieure est réservée à notre analyse de la résolution à partir du document étudié et de nos documents personnels relatifs à cette recherche.

La présentation du déroulement se fera dans des cadres ocres (DÉCOUPAGES HORIZONTAUX), alors que le détail sera présenté dans des cadres bleus pour une meilleure lisibilité (DÉTAILS).


ETAPE 1
Inf 1
Phase d'exploration
Phase d'interprétation
Pour se faire une idée
Aucune inférence
On laisse les traces de notre mouvement
1. Pour se faire une idée :
ETAPE 2
Inf 1
Phase d'exploration
Phase d'interprétation
Recherche des points invar
Aucune inférence
On tire sur M pour essayer de le faire coïncider avec M'
2. Recherche de points invariants :
Dans ce cas, on ne trouve pas de point invariant.
ETAPE 3
Inf 1
Phase d'exploration
Phase d'interprétation
Détermination d'images de d
Conséquences tirées
On obtient des droites
On pourrait en donner mais on ne cherche pas à en donner car on ne peut deviner la nature de la solution
Images de droites
On crée une droite ; on redéfinit M sur cette droite bleue ; on demande le lieu de M' quand M se déplace sur la droite bleue ; on obtient encore une droite rouge. Le déplacement de cette droite ne nous donne pas d'indication sur la nature de la transformation.
ETAPE 4A
Inf 2
Phase d'exploration
Phase d'interprétation
Détermination d'images de cercles
Pas de conséquences explicites
On obtient des cercles isométr
On pourrait en donner mais on ne cherche pas à en donner car on ne peut deviner la nature de la solution
Images de cercles
On crée un cercle bleu ; on redéfinit le point M sur ce cercle : la droite rouge disparaît pour laisser la place à un cercle rouge isométrique au premier.
1 RECHERCHE ERRATIQUE

DÉTAILS 1


ETAPE 1
Inf 1
Phase d'exploration
Phase d'interprétation
Pour se faire une idée
Aucune inférence
On laisse les traces de notre mouvement
1. Pour se faire une idée :
ETAPE 2
Inf 1
Phase d'exploration
Phase d'interprétation
Recherche des points invar
Aucune inférence
On tire sur M pour essayer de le faire coïncider avec M'
2. Recherche de points invariants :
Dans ce cas, on ne trouve pas de point invariant.
1 RECHERCHE EI



Inf 1 ETAPE 3 Inf 1

Phase d'exploration	Phase d'interprétation
Détermination d'images de d	Conséquences tirées
On obtient des droites	On pourrait en donner mais on ne cherche pas à en donner car on ne peut deviner la nature de la solution

Images de droites
On crée une droite ; on redéfinit M sur cette droite bleue ; on demande le lieu de M' quand M se déplace sur la droite bleue ; on obtient encore une droite rouge. Le déplacement de cette droite ne nous donne pas d'indication sur la nature de la transformation.

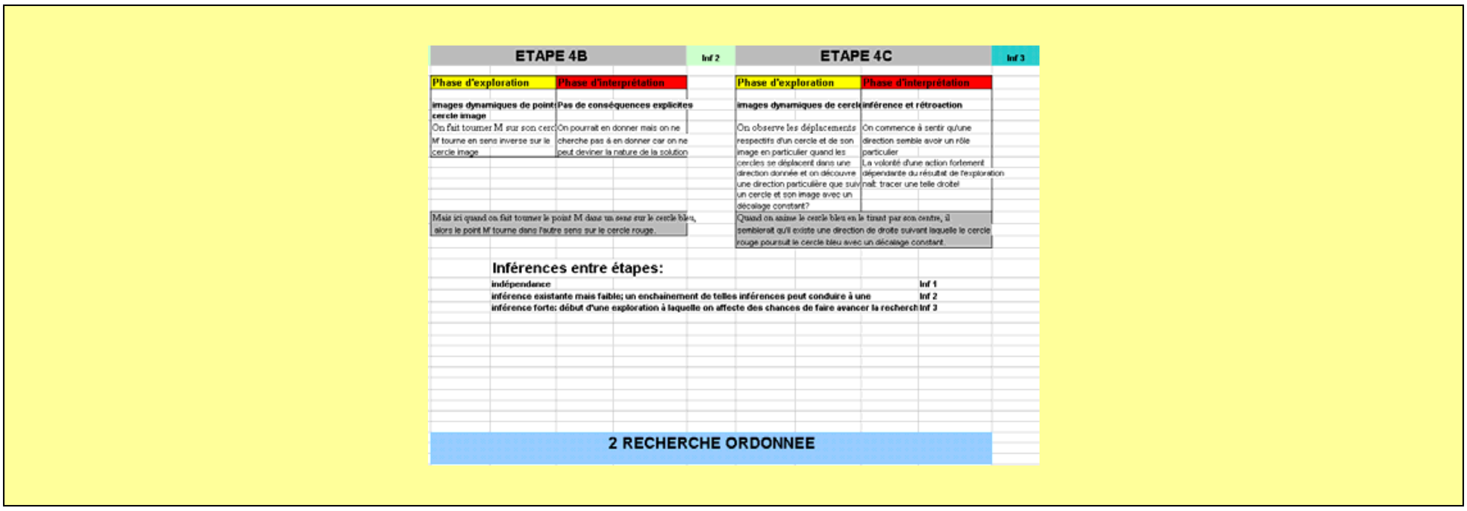
ETAPE 4A Inf 2

Phase d'exploration	Phase d'interprétation
Détermination d'images de cercles	Pas de conséquences explicites
On obtient des cercles isométr	On pourrait en donner mais on ne cherche pas à en donner car on ne peut deviner la nature de la solution

Images de cercles
On crée un cercle bleu ; on redéfinit le point M sur ce cercle : la droite rouge disparaît pour laisser la place à un cercle rouge isométrique au premier.

:HE ERRATIQUE

DÉCOUPAGE HORIZONTAL 2



DÉTAILS 2

ETAPE 4B Inf 2

Phase d'exploration	Phase d'interprétation
images dynamiques de points cercle image	Pas de conséquences explicites
On fait tourner M sur son cerc M' tourne en sens inverse sur le cercle image	On pourrait en donner mais on ne cherche pas à en donner car on ne peut deviner la nature de la solution

Mais ici quand on fait tourner le point M dans un sens sur le cercle bleu, alors le point M' tourne dans l'autre sens sur le cercle rouge.

ETAPE 4C Inf 3

Phase d'exploration	Phase d'interprétation
images dynamiques de cercle	inférence et rétroaction
On observe les déplacements respectifs d'un cercle et de son image en particulier quand les cercles se déplacent dans une direction donnée et on découvre une direction particulière que suiv un cercle et son image avec un décalage constant?	On commence à sentir qu'une direction semble avoir un rôle particulier La volonté d'une action fortement dépendante du résultat de l'exploration naît: tracer une telle droite!

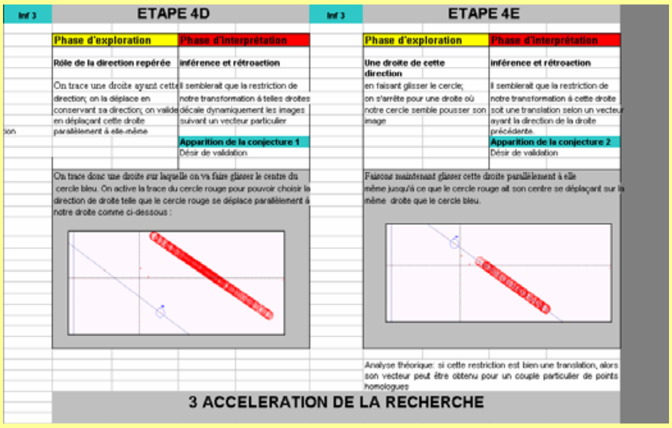
Quand on anime le cercle bleu en le tirant par son centre, il semblerait qu'il existe une direction de droite suivant laquelle le cercle rouge poursuit le cercle bleu avec un décalage constant.

Inférences entre étapes:

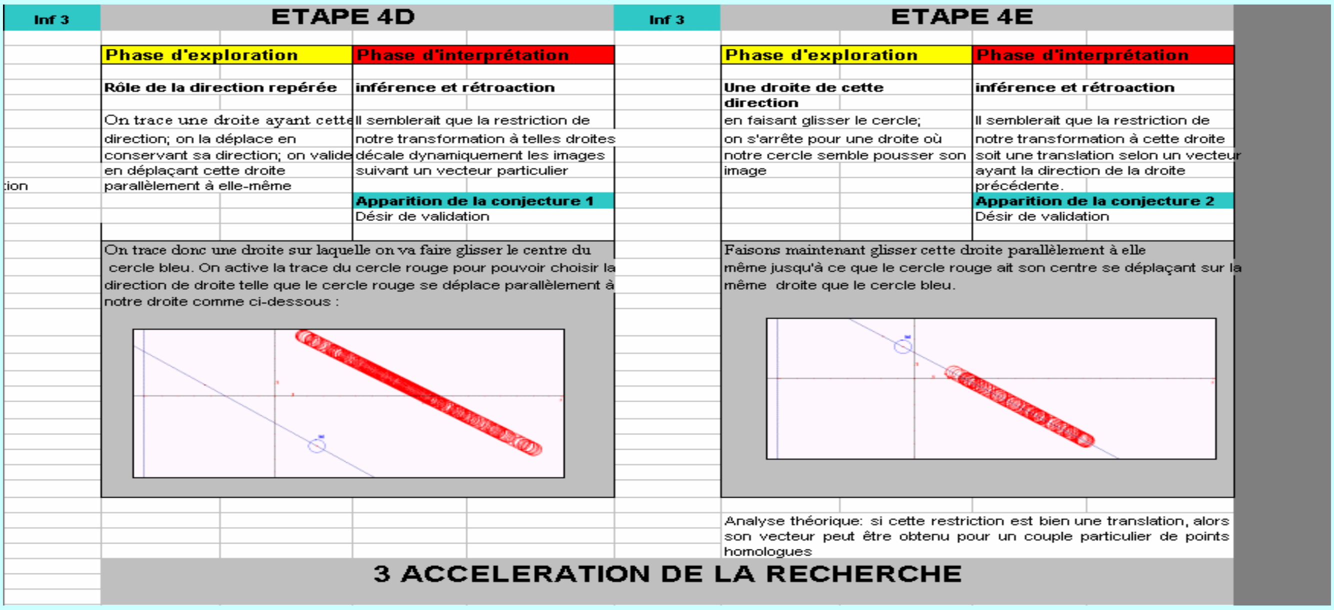
indépendance	Inf 1
inférence existante mais faible; un enchaînement de telles inférences peut conduire à une	Inf 2
inférence forte: début d'une exploration à laquelle on affecte des chances de faire avancer la recherch	Inf 3

2 RECHERCHE ORDONNEE

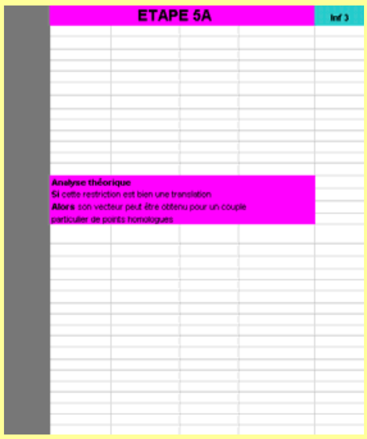
DÉCOUPAGE HORIZONTAL 3



DÉTAILS 3

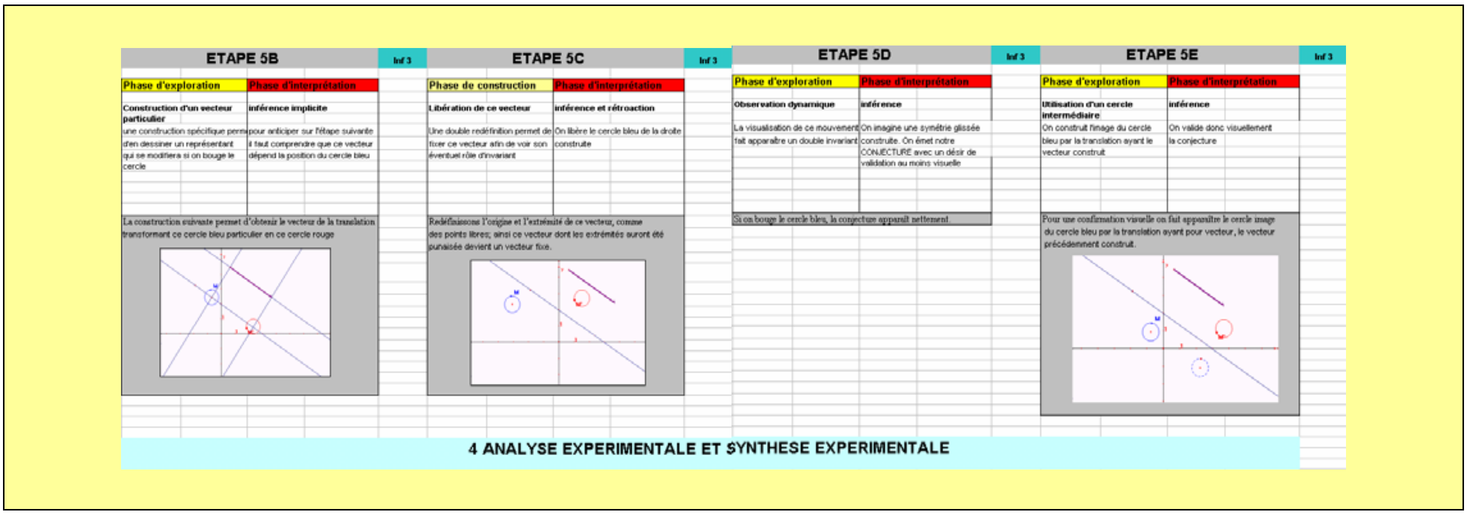


DÉCOUPAGE HORIZONTAL 4

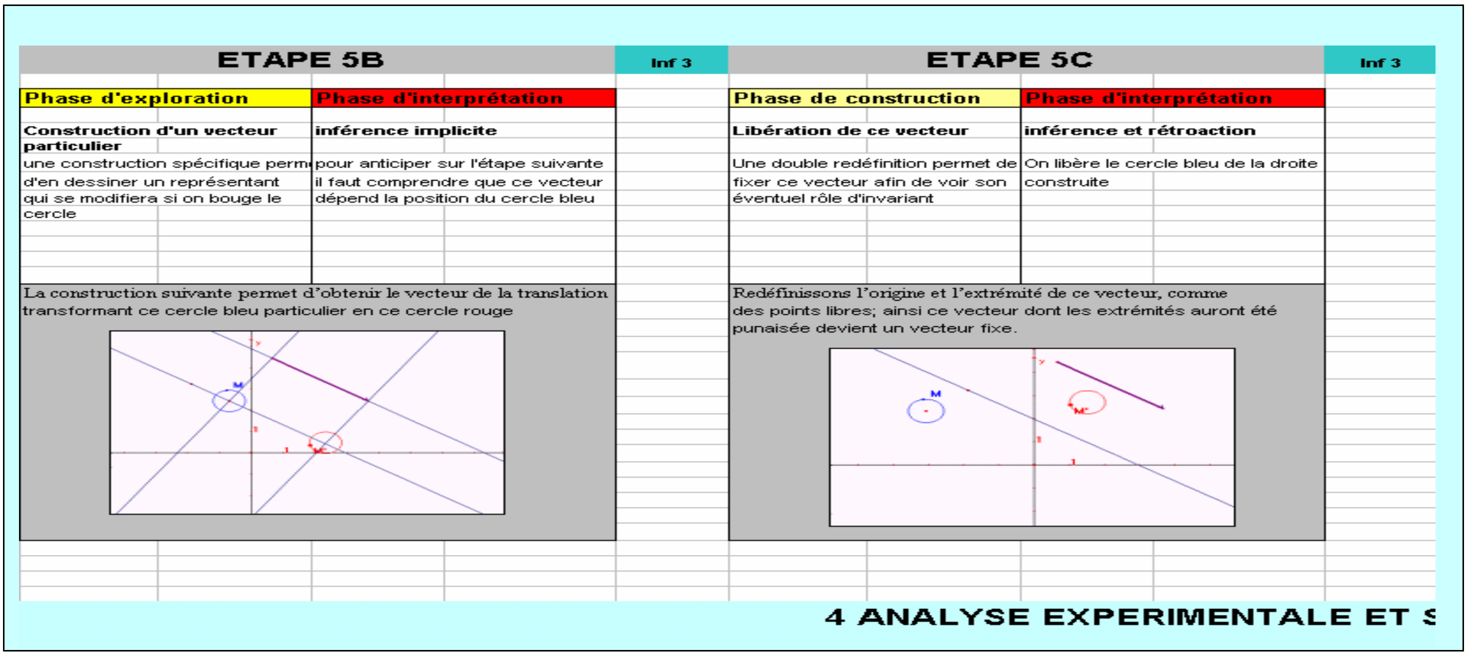


DÉTAILS 4

DÉCOUPAGE HORIZONTAL 5



DÉTAILS 5

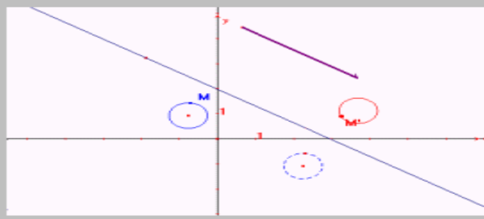


ETAPE 5D		Inf 3
Phase d'exploration	**Phase d'interprétation**	
Observation dynamique	**inférence**	
La visualisation de ce mouvement fait apparaître un double invariant	On imagine une symétrie glissée construite. On émet notre CONJECTURE avec un désir de validation au moins visuelle	

Si on bouge le cercle bleu, la conjecture apparaît nettement.

ETAPE 5E		Inf 3
Phase d'exploration	**Phase d'interprétation**	
Utilisation d'un cercle intermédiaire	**inférence**	
On construit l'image du cercle bleu par la translation ayant le vecteur construit	On valide donc visuellement la conjecture	

Pour une confirmation visuelle on fait apparaître le cercle image du cercle bleu par la translation ayant pour vecteur, le vecteur précédemment construit.



SYNTHESE EXPERIMENTALE

DÉCOUPAGE HORIZONTAL 6

Inf 3 | ETAPE 6

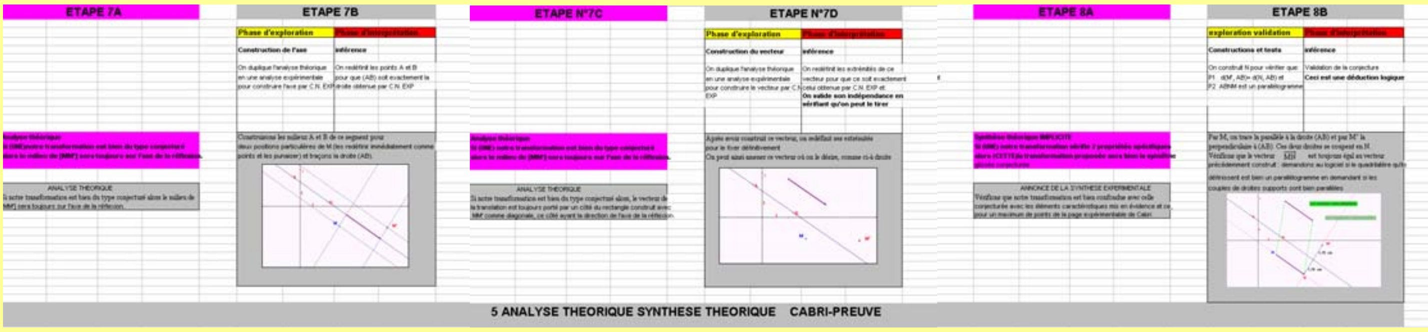
ENONCE DE LA CONJECTURE
La transformation proposée EST-SERAIT la composée d'une translation de vecteur à déterminer et d'une réflexion par rapport à une droite à préciser sachant qu'elle a la direction de ce vecteur.

DÉTAILS 6

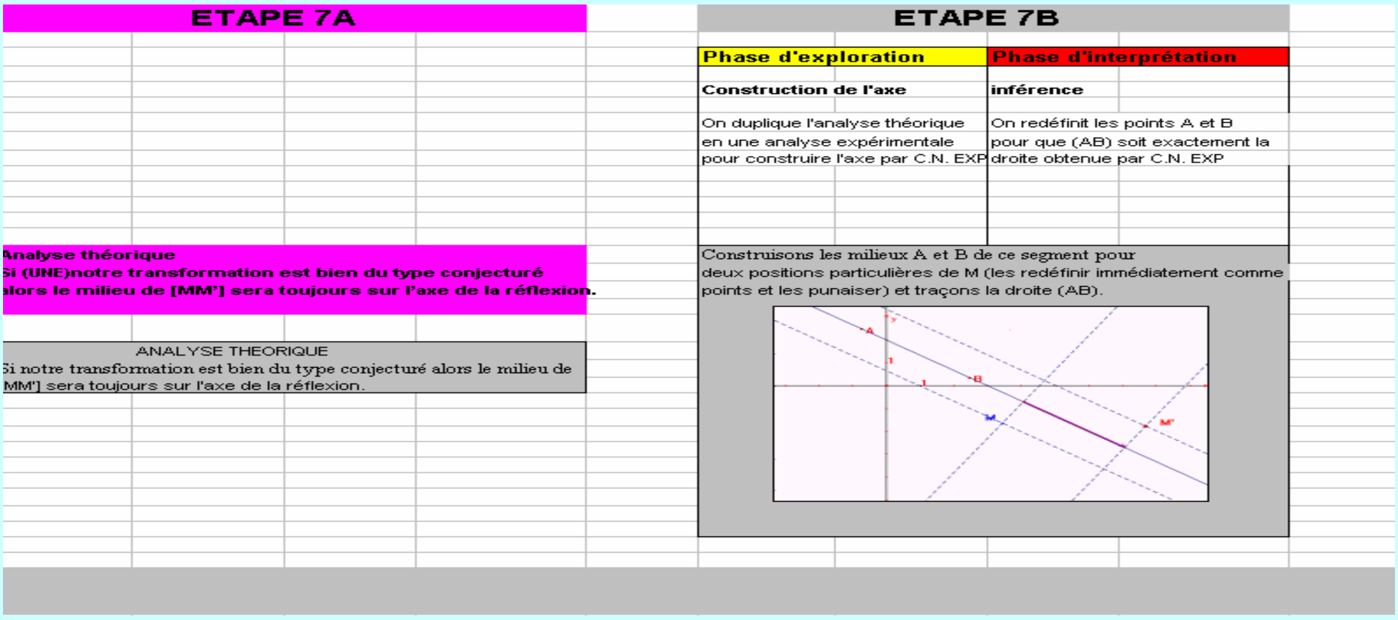
Inf 3	ETAPE 6

ENONCE DE LA CONJECTURE
La transformation proposée EST-SERAIT la composée d'une translation de vecteur à déterminer et d'une réflexion par rapport à une droite à préciser sachant qu'elle a la direction de ce vecteur.

DÉCOUPAGE HORIZONTAL 7



DÉTAILS 7



ETAPE N°7C

Analyse théorique
Si (UNE) notre transformation est bien du type conjecturé alors le milieu de [MM'] sera toujours sur l'axe de la réflexion.

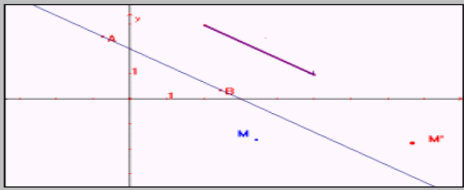
ANALYSE THEORIQUE

Si notre transformation est bien du type conjecturé alors, le vecteur de la translation est toujours porté par un côté du rectangle construit avec MM' comme diagonale, ce côté ayant la direction de l'axe de la réflexion.

ETAPE N°7D

Phase d'exploration	Phase d'interprétation
Construction du vecteur	**inférence**
On duplique l'analyse théorique en une analyse expérimentale pour construire le vecteur par C.N EXP	On redéfinit les extrémités de ce vecteur pour que ce soit exactement celui obtenue par C.N. EXP et: **On valide son indépendance en vérifiant qu'on peut le tirer**

Après avoir construit ce vecteur, on redéfinit ses extrémités pour le fixer définitivement
On peut ainsi amener ce vecteur où on le désire, comme ci-à droite



5 ANALYSE THEORIQUE SYNTHESE THEORIQUE CABRI-PREUVE

ETAPE 8A

Synthèse théorique IMPLICITE
Si (UNE) notre transformation vérifie 2 propriétés spécifiques alors (CETTE)la transformation proposée sera bien la symétrie glissée conjecturée

ANNONCE DE LA SYNTHESE EXPERIMENTALE

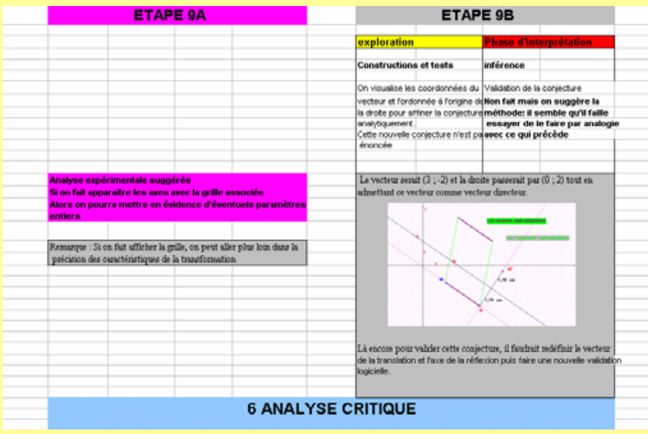
Vérifions que notre transformation est bien confondue avec celle conjecturée avec les éléments caractéristiques mis en évidence et ce, pour un maximum de points de la page expérimentable de Cabri

ETAPE 8B

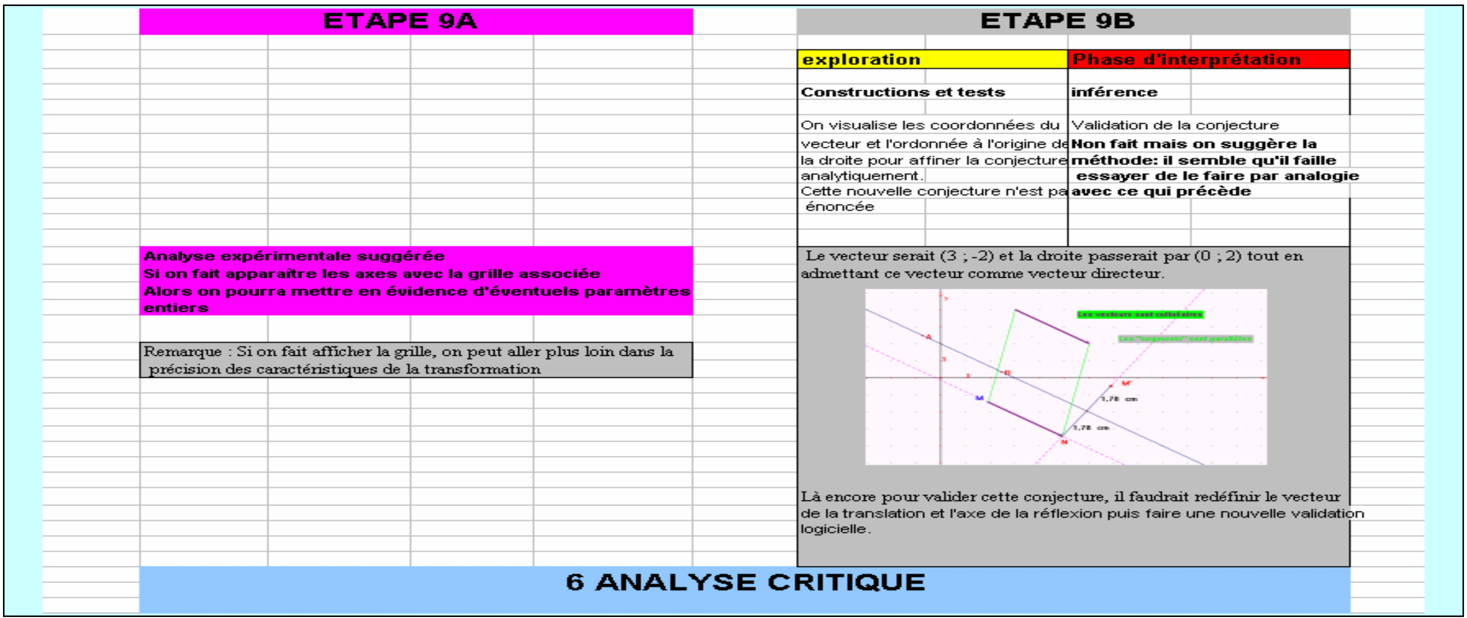
exploration validation	Phase d'interprétation
Constructions et tests	**inférence**
On construit N pour vérifier que: P1 d(M', AB)= d(N, AB) et P2 ABNM est un parallélogramme	Validation de la conjecture **Ceci est une déduction logique**

Par M, on trace la parallèle à la droite (AB) et par M' la perpendiculaire à (AB). Ces deux droites se coupent en N.
Vérifions que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est toujours égal au vecteur précédemment construit : demandons au logiciel si le quadrilatère qu'ils définissent est bien un parallélogramme en demandant si les couples de droites supports sont bien parallèles

DÉCOUPAGE HORIZONTAL 8



DÉTAILS 8



2. RECONNAISSANCE DES CADRES D'INVESTIGATIONS DANS CHAQUE MICRO ÉTAPE

Dans les tableaux ci-dessous nous dégageons les différents cadres d'investigations qui ont été utilisés (suivant la typologie de Millar) dans chacune des micro-étapes. Ces cadres sont regroupés dans chacune des phases mises en évidence après le déroulement précédent.

1 RECHERCHE ERRATIQUE			
ÉTAPE 1 Cadre d'engagement 1	**ÉTAPE 2** Cadre d'ingéniérie au hasard 3A	**ÉTAPE 3** Cadre scientifique empirique 4A	**ÉTAPE 4A** Cadre scientifique empirique 4A

2 RECHERCHE ORDONNÉE	
ÉTAPE 4B Cadre de modélisation 2B	**ÉTAPE 4C** Cadre de modélisation 2C

3 ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE	
ÉTAPE 4D Cadre d'ingéniérie par itération 3B	**ÉTAPE 4E** Cadre d'ingéniérie par itération 3B

4 ANALYSE EXPÉRIMENTALE ET SYNTHÈSE EXPÉRIMENTALE			
ÉTAPE 5B Cadre de modélisation 2C	**ÉTAPE 5C** Cadre de modélisation 2C	**ÉTAPE 5D** Cadre scientifique empirique 4B	**ÉTAPE 5E** Cadre de modélisation 2C

5 ANALYSE THÉORIQUE ET SYNTHÈSE THÉORIQUE		
ÉTAPE 7B Cadre scientifique explicatif 4D	**ÉTAPE 7D** Cadre scientifique explicatif 4D	**ÉTAPE 8B** Cadre scientifique explicatif 4D

6 ANALYSE CRITIQUE
ÉTAPE 9B Cadre scientifique explicatif 4D

3. MISE EN ÉVIDENCE DES TYPES D'APPRÉHENSIONS FIGURALES DANS CHAQUE MICRO ÉTAPE

Dans les tableaux ci dessous nous indiquons les différents types d'appréhensions figurales que nous avons reconnus (suivant la typologie de Duval) dans chacune des micro-étapes. Ces types sont regroupés dans chacune des phases mises en évidence après le déroulement réalisé au paragraphe 1. Nous noterons en gras les appréhensions perceptives et opérationnelles heuristiquement favorables.

1 RECHERCHE ERRATIQUE			
ÉTAPE 1 Appréhension opératoire positionnelle **Appréhension perceptive** Appréhension discursive (tentative)	**ÉTAPE 2** **Appréhension opératoire positionnelle** **Appréhension perceptive** Appréhension discursive (tentative)	**ÉTAPE 3** Appréhension séquentielle **Appréhension perceptive** Appréhension discursive **Appréhension opératoire positionnelle** Appréhension discursive (tentative)	**ÉTAPE 4A** Appréhension séquentielle **Appréhension perceptive** Appréhension discursive **Appréhension opératoire positionnelle (virtuelle)** Appréhension discursive (tentative)

2 RECHERCHE ORDONNÉE	
ÉTAPE 4B **Appréhension opératoire positionnelle** **Appréhension perceptive**	**ÉTAPE 4C** **Appréhension opératoire positionnelle** **Appréhension perceptive** Appréhension discursive **Appréhension opératoire positionnelle** Appréhension discursive

3 ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE	
ÉTAPE 4D **Appréhension opératoire positionnelle** Appréhension discursive	**ÉTAPE 4E** **Appréhension opératoire positionnelle** Appréhension discursive

4 ANALYSE EXPÉRIMENTALE ET SYNTHÈSE EXPÉRIMENTALE			
ÉTAPE 5B Appréhension séquentielle Appréhension discursive	**ÉTAPE 5C** Appréhension séquentielle Appréhension discursive **Appréhension opératoire positionnelle** Appréhension discursive	**ÉTAPE 5D** **Appréhension opératoire positionnelle** Appréhension discursive	**ÉTAPE 5E** **Appréhension opératoire positionnelle** Appréhension discursive

5 ANALYSE THÉORIQUE ET SYNTHÈSE THÉORIQUE		
ÉTAPE 7B Appréhension discursive Appréhension séquentielle	**ÉTAPE 7D** Appréhension discursive	**ÉTAPE 8B** Appréhension discursive Appréhension séquentielle **Appréhension opératoire positionnelle** Appréhension discursive

6 ANALYSE CRITIQUE
ÉTAPE 9B **Appréhension perceptive** Appréhension discursive

4. ANNONCE DE LA MISE EN ÉVIDENCE DES NIVEAUX DE GÉOMÉTRIE DANS CHAQUE MICRO ÉTAPE

Nous gardons pour le chapitre suivant la mise en évidence des niveaux de géométrie concernés par chacune de ces micro étapes. Une étude détaillée est nécessaire pour ce travail qui fait intervenir les niveaux connexes aux niveaux de Parzysz que nous avons déjà présentés sous l'intitulé de niveau G1 informatique et G2 informatique.

DÉCOMPOSITION FORMELLE D'UNE DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE MÉDIÉE

Dans un problème de boîte noire il est à noter la différence entre le signifiant du problème, de fait dans G2, dans le monde réel des Mathématiques c'est-à-dire dans l'abstraction ou du moins dans une abstraction certaine par rapport à G1, et son signifié qui est proposé dans G1, l'expérimentation se faisant d'abord dans G1 puis dans un **G2 modélisé par Cabri** avec comme objectif de conclure dans G2 (notons que Cabri qui est un G1 fournit une réalisation - un modèle - d'une géométrie théorique G3); je nommerai ce dernier cadre « Géométrie axiomatique virtuelle » ou « Géométrie II Informatique » ou « G2 informatique ».

1. UN ENCHAÎNEMENT DE MAILLONS BINAIRES ET DE LIENS INFÉRENTIELS (LA CHAÎNE EXPÉRIMENTALE)

L'analyse de la résolution de la boîte noire faite à partir de la transposition présentée dans les actes de Cabriworld 2 (document Excel présenté dans le chapitre 12 dans une version Word et dans sa forme originale dans le chapitre 11), fait apparaître deux bandes présentant de manière linéaire le document brut « le signifié » (bande inférieure) et l'interprétation que nous proposons comme étant son « signifiant » (bande supérieure).
Cette démarche apparaît ici comme un ENCHAÎNEMENT DE :

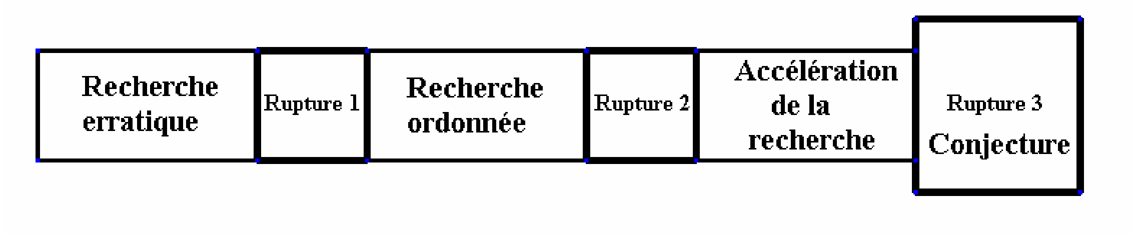
(M)(L)	(M) **Maillons binaires** « phase exploratoire-phase interprétative » et de (L) **Liens inférentiels** de trois types qualifiés de : INFÉRENCE 1 OU FAIBLE, INFÉRENCE 2 OU NORMALE et INFÉRENCE 3 OU FORTE.

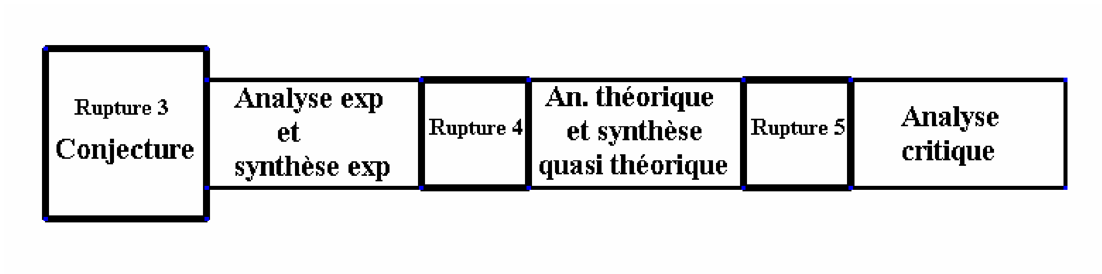
qui constitue la chaîne que nous avons étudiée comme il a été indiqué ci-dessus ; cette étude nous conduit donc à proposer la décomposition ci-dessous :

LA CHAÎNE OBSERVÉE

$$\mathbf{(M_1)(L_1)\ (M_2)(L_2)\ (M_3)(L_3)\ (M_4)(L_4)\ (M_5)(L_5)\ \ldots\ldots\ (M_{l-1})(L_{l-1})\ (M_l)(L_l)}$$

se décompose en une successions de plusieurs chaînons :





CHAÎNONS SUCCESSIFS	PHASES CORRESPONDANTES	COMMENTAIRES
Chaînon 1 **$(M_1)(L_1)$……. $(M_i)(L_i)$**	RECHERCHE ERRATIQUE	phase de recherche tous azimuts dans G1
…………………………… **Chaînon 2** **$(M_{i+1})(L_{i+1})$…….$(M_j)(L_j)$**	………………………… RECHERCHE ORDONNÉE	………………………… phase d'approche dans une direction donnée
…………………………… **Chaînon 3** **$(M_{j+1})(L_{j+1})$… $(M_k)(L_k)$**	…………………………… ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE	…………………………… suite de sous-conjectures et de leurs validations
…………………………… **Chaînon 4** **$(M_{k+1})(L_{k+1})$…. $(M_l)(L_l)$**	…………………………… ANALYSE EXPÉRIMENTALE et SYNTHÈSE EXPÉRIMENTALE	…………………………… preuve expérimentale par analyse-synthèse (Validation opératoire selon Joshua)
…………………………… **Chaînon 5** **$(M_{l+1})(L_{l+1})$…. $(M_m)(L_m)$**	…………………………… ANALYSE THÉORIQUE et SYNTHÈSE QUASI-THÉORIQUE Validation quasi-explicite	…………………………… preuve Cabri-théorique (Validation explicite ou démarche de preuve selon Joshua)
…………………………… **Chaînon 6** **$(M_{m+1})(L_{m+1})$… (M_n)**	…………………………… ANALYSE CRITIQUE	…………………………… vérifications pour conforter la Cabri-certitude de l'étape précédente

Ces chaînons successifs s'articulent par des **liaisons spécifiques inter-chaînons** qui sont des moments de rupture dans la démarche. Chaque liaison marque la fin d'un chaînon (donc d'une stratégie d'expérimentation) et annonce le chaînon suivant (c'est-à-dire l'amorce d'une nouvelle stratégie d'expérimentation).

2. LES RUPTURES

Cinq liaisons inter-chaînons spécifiques ont été mises en évidence dans l'analyse en cours qui ont été qualifiées de RUPTURES :

Chaînon 1 / RUPTURE 1 / Chaînon 2

RUPTURE 1 : c'est une **première avancée** qui marque la fin de la recherche erratique et qui amorce la dévolution du problème à celui à qui il est soumis. Des enchaînements « raisonnés » semblent surgir ou pouvoir surgir ; nous qualifions de tels enchaînements de « raisonnés » dans le sens où ils réalisent un lien de bon sens entre deux explorations consécutives (ce que Balacheff appelle raisonnement pour le différencier des enchaînements hypothèse-déduction de la démonstration). Cette première avancée permet donc d'entrer dans une phase de recherche qui peut sembler plus ordonnée (…), plus prometteuse de découverte(s).

Cette rupture semble marquer le passage
d'une investigation dans un cadre scientifique empirique

à une investigation dans un cadre de modélisation.

Chaînon 1 / Rupture 1/ **Chaînon 2 / RUPTURE 2 / Chaînon 3**

RUPTURE 2 : c'est la première approche de la découverte, c'est la première piste engendrant la première conjecture émise dans le cadre G2 qui marque la fin de la recherche ordonnée des données interprétables de G1. On entre ainsi dans une phase à activité de raisonnement logique mathématique plus dense dans G2 avec des phases de validation dans G1. On va donc assister à une phase d'accélération de la recherche pour se rapprocher de la découverte.

Cette rupture semble marquer le passage
d'une investigation dans un cadre de modélisation
à une investigation dans un cadre d'ingéniérie par itération.

Chaînon 1 / Rupture 1/**Chaînon 2** / Rupture 2/ **Chaînon 3 / RUPTURE 3 / Chaînon 4**

RUPTURE 3 : c'est la découverte d'une conjecture solutionnant en partie notre problème qui semble marquer la fin de la phase d'accélération et faire entrer dans une phase plus théorique de validation dans G2 à travers l'environnement Cabri ; c'est l'entrée dans l'analyse-synthèse expérimentale visualisant ainsi une modélisation du raisonnement par analyse-synthèse.

Cette rupture semble marquer le passage
d'une investigation dans un cadre d'ingéniérie par itération
à une investigation dans un cadre, essentiellement de modélisation.

Chaînon 4 / RUPTURE 4 / Chaînon 5

RUPTURE 4 : l'apparition de la conjecture ultime marque la fin de la phase d'analyse-synthèse expérimentale pour entrer dans la démarche de Cabri-preuve.

Cette rupture semble marquer le passage
d'une investigation dans un cadre de modélisation
à une investigation dans un cadre scientifique explicatif.

Chaînon 5 / RUPTURE 5 / Chaînon 6

RUPTURE 5 : la Cabri-preuve n'empêche pas le doute de subsister dans la mesure où les validations de l'environnement Cabri sont plus sûres que celles de l'environnement papier-crayon, mais pas certaines. Un changement de cadre naît souvent de ce doute et d'autres vérifications sont faites dans ce nouveau cadre ou éventuellement encore dans le précédent.

Cette rupture semble ne pas être une rupture au sens des cadres d'investigation
car il semble qu'on reste dans un cadre scientifique explicatif.

3. ÉTUDE DES DIFFÉRENTES PHASES DE RECHERCHE

3.1. RECHERCHE ERRATIQUE

Avec la légende suivante, le schéma ci-dessous synthétise notre proposition de représentation de cette phase

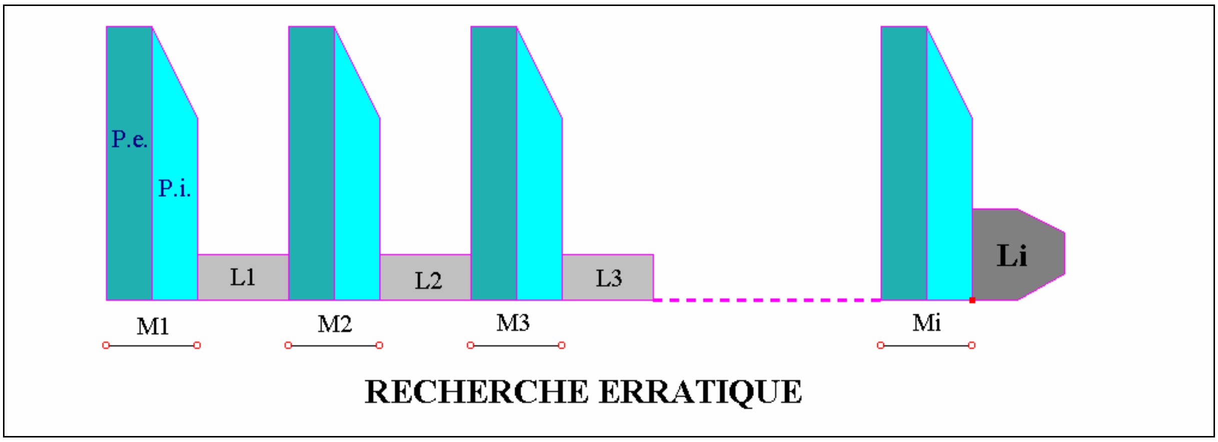
P.e. : Phase d'exploration

P.i. : Phase d'interprétation

M_i : Maillon binaire exploration-interprétation numéroté i

Li : Lien inférentiel faible numéroté i

Li : premier lien inférentiel normal marquant la rupture 1



3.1.1. Le malentendu didactique

Dans cette phase, chaque tentative d'exploration semble être indépendante des précédentes. Cette phase peut être qualifiée de phase de tâtonnements par le chercheur : il donne l'impression à chaque fois d'explorer quelque chose de différent, de faire des essais aléatoires.

Ce qui se passe souvent en situation de classe, quand un tel problème est proposé, c'est qu'un malentendu au niveau du contrat didactique semble engendrer cette attitude, soit de l'individu, soit du groupe qui ne comprend pas qu'il est dans une phase de recherche au sens noble de la recherche. Dans cette recherche, le démarrage donne rarement un accès direct à la solution, et le déroulement de cette recherche va demander un investissement en temps pour l'action et la rétroaction (**voir les problèmes longs proposés par Gilles Aldon à l'IREM de Lyon ou les travaux de l'IREM de Dijon présentés à Poitiers : Faire de maths en classe INRP ADIREM 2003**). L'individu ou le groupe pensent qu'ils cherchent pour « découvrir » (le sens de ce verbe est double évidemment) le voile qui cache la solution. Cette analogie n'est pas fortuite dans la mesure où, pour les participants à la recherche, une action et une seule doit permettre d'amener la réponse au problème posé ; si donc la réponse n'apparaît pas immédiatement, la réaction logique est de changer complètement l'attaque pour que le voile que l'on va soulever découvre autre chose que ce qu'aurait pu révéler l'action précédente. Notons que ce malentendu peut s'établir même quand ce n'est pas la première fois qu'un tel problème est proposé.

3.1.2. Inférences faibles et logique de débat

En réalité chacune des inférences liant les premiers maillons de notre chaîne qualifiées d'inférences faibles, engendre une tentative d'exploration qui dépend néanmoins des résultats observées dans les tentatives précédentes dans la mesure où on effectue rarement deux fois la même tentative. Il y a une mémoire des actes passés : nous avons pu noter que, souvent, ce n'était pas le cas dans les recherches menées en groupe où les individus proposent en tant qu'individus et non pas en tant que membre du groupe ; ils excluent la logique du débat dans le groupe. Bizarrement, ils s'imposent une auto-discipline personnelle de débat (un individu suivant sa propre démarche et ignorant celle des autres peut être amené à proposer une tentative de manipulation déjà proposée et opérée précédemment, cette proposition étant inférée par sa proposition personnelle précédente).

Cette première phase nous montre la mise en place d'un débat où la confrontation des idées se fait de manière multiforme :

– un débat qui anime le groupe composé d'individus ;
– un débat interne à chaque individu.

Au début, le débat de groupe est une juxtaposition de débats personnels dans la mesure où chaque individu propose une succession d'actions ne prenant pas en compte les autres actions proposées mais seulement les siennes (il n'est pas rare de voir un individu proposer une piste déjà proposée par un autre membre du groupe).
Après des salves désordonnées de propositions individuelles, le groupe commence petit à petit à vivre dans la mesure où un dialogue s'amorce entre les individus pour comprendre en particulier les motivations des actions proposées par les autres, jusqu'à ce qu'une avancée survienne (là encore le groupe commence à intervenir pour mettre en évidence les doublons quand ils surviennent). C'est cette avancée qui mettra fin à cette première phase de recherche.

Notons que ce dialogue est un moteur pour une progression de la recherche vers la solution ou du moins pour une meilleure explicitation des données qui sont les conditions nécessaires qui doivent émerger.

3.1.3. Analyse de l'avancée

Cette avancée peut être provoquée par un individu qui va dominer le groupe par l'intime conviction qu'il tient un bout du fil d'Ariane et proposer une action qui pour la première fois va aller dans la continuité de l'action précédente.
Souvent un individu propose une action à la suite de laquelle il perçoit une continuité logique possible. Il propose donc lui-même une action en continuité de la précédente.
Plus rarement, c'est un individu qui propose une action à la suite de laquelle un autre individu va percevoir une continuité logique possible. Cet autre individu est ici amené à proposer lui-même une action en continuité.

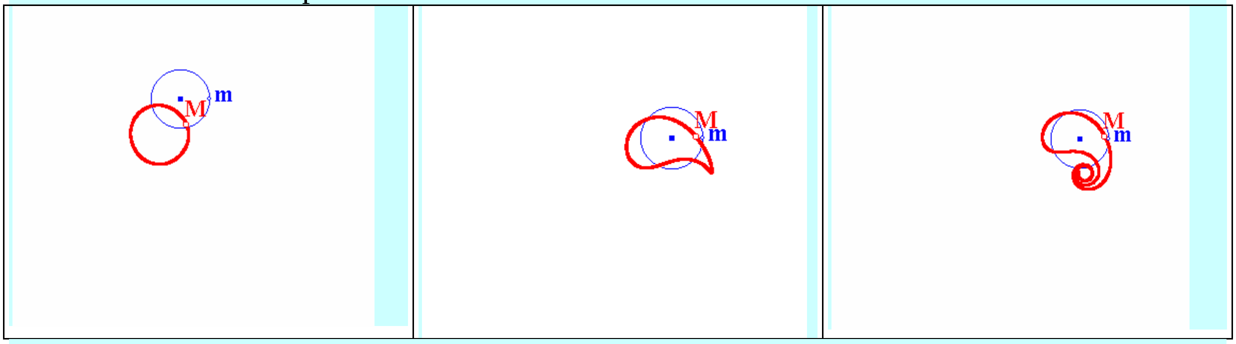
3.1.4. Dépendance cognitive donc relative des maillons liés par des inférences faibles

Les premières explorations proposées dans cette phase de recherche erratique, qui est une constante des observations que nous avons réalisées dans les démarches de résolution de boîtes noires, varient néanmoins d'un public à un autre. Les propositions faites dépendent très fortement des connaissances mathématiques du public concernant la notion de transformations et des connaissances du public concernant le logiciel utilisé.

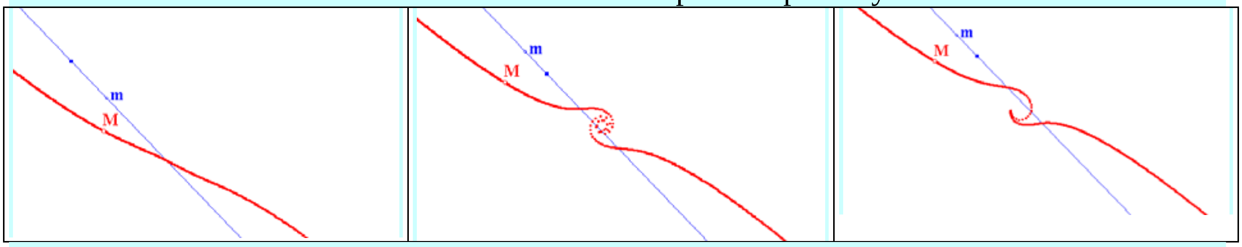
Notons que la démarche scientifique nécessite impérativement « connaissances » et « savoir faire » (Didaskalia 6 page 139). Ici ces composantes apparaissent aussi comme des conditions nécessaires pour amorcer la démarche de recherche expérimentale en Mathématiques

Ces premières explorations dépendent aussi de l'expérience du public sur les recherches de résolutions de problèmes de boîtes noires. **Cela peut conduire à l'atrophie ou à la disparition pure et simple de cette première phase**. Dans de tels cas on peut néanmoins forcer cette phase à apparaître en fabriquant une boîte noire à la fois simple dans sa conception géométrique et compliquée dans les interprétations qu'on peut en inférer avec les attaques usuelles des chercheurs expérimentés en boîtes noires : nous avons pu constater combien il était facile de cette façon de solutionner ce problème (de la disparition de la première phase) quand a été proposée aux membres du groupe de recherche de « géométrie dynamique » de l'IREM de Toulouse une boîte noire difficile à solutionner. Malgré leurs connaissances mathématiques élevées, leur connaissance du logiciel non moins élevée, malgré les premières attaques pertinentes qui auraient pu venir à bout d'une transformation classique, la même phase erratique avec les mêmes caractéristiques est apparue avec la compétition entre individus (compétitions qu'on voit apparaître à tous les niveaux où nous avons expérimenté), engendrant quasi systématiquement une avancée comme notée ci-dessus.
Voici quelques copies d'écran montrant quelles investigations menées de manière ordonnée par les membres de mon groupe IREM les a conduits à enchaîner sur la phase erratique qu'ils croyaient avoir évitée :

1ère investigation : le point indépendant m bleu est redéfini sur un cercle bleu, le lieu de son image M a été demandé au logiciel qui l'a renvoyé en rouge. Les expérimentateurs ont tirés sur le centre du cercle pour obtenir successivement :



2nde investigation : le point m est redéfini sur une droite bleue, le cercle précédemment utilisé a été effacé, le lieu de M est réactualisé immédiatement. Les expérimentateurs translatent la droite horizontalement en tirant sur le premier point ayant servi à la définir.



Citation : « *On sait qu'un « expert » d'un domaine particulier peut ne plus se comporter en expert lorsqu'il est placé dans une situation non familière, même lorsqu'elle ressort à son domaine d'expertise* ». Bernard Parzysz

3.1.5. Cadres d'investigation et appréhensions figurales dans cette phase

Nous avons noté que le cadre d'investigation privilégié dans cette phase semblait être le cadre scientifique empirique, éventuellement accouplé aux cadres d'engagement et d'ingéniérie au hasard.
L'appréhension des figures réalisées est majoritairement du type « opératoire positionnelle » et chaque micro-étape se conclut avec une « appréhension discursive ». C'est le binôme exploration-interprétation qu'on retrouve avec cette grille de lecture.

3.1.6. Une caractérisation du chaînon « recherche erratique » désordre apparent

Dans cette phase, chaque maillon binaire contient une phase exploratoire où l'investigation a pour but d'observer quelque chose d'interprétable et une phase d'interprétation réduite à son expression la plus simple qui est la description brute de ce qui est vu (l'interprétation est quasi nulle même si au niveau du signifié on n'en est pas certain).
Les liens faibles observés entre chaque maillon semblent être en relation avec les connaissances de l'expérimentateur. Mêmes si les explorations proposées semblent indépendantes, elles ne le sont que dans la mesure où l'exploration d'un maillon n'est pas la continuation de l'exploration du maillon précédent provoquée par la phase interprétative qui le suit.
Un cadre d'investigation scientifique empirique et une appréhension figurale d'abord opératoire positionnelle puis discursive semblent caractériser les maillons de ce chaînon.

3.2. RECHERCHE ORDONNÉE

Avec la légende suivante, le schéma ci-dessous synthétise notre proposition de représentation de cette phase :

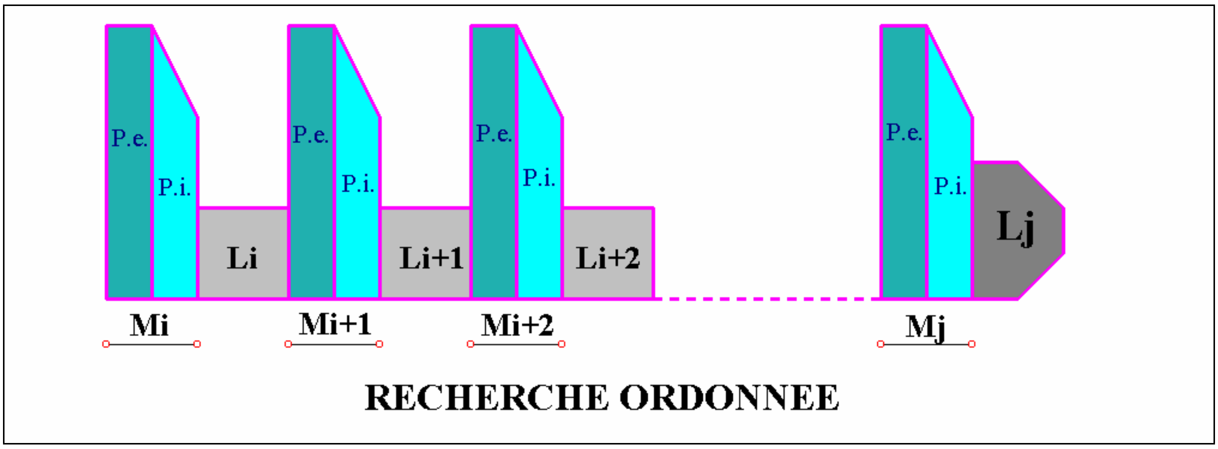
P.e. : Phase d'exploration

P.i. : Phase d'interprétation; M_i

Maillon binaire exploration interprétation numéroté i

Li : Lien inférentiel normal numéroté i

Lj : premier lien inférentiel fort marquant la rupture 2



Pour utiliser une analogie sémantique avec la bataille navale :

Dans la phase précédente, l'expérimentateur artilleur tire un peu au hasard sur un objectif qu'il ne voit pas, dans une zone assez large qui a-t-on vu dépend des connaissances de l'équipage et de son savoir-faire en artillerie. Tant que rien n'est en vue, c'est-à-dire tant que l'observation des impacts des tirs effectués ne provoque pas de réactions chez celui qui a donné l'ordre de tir ou chez ceux qui l'entourent, la communauté ne va pas changer de tactique et enchaîner ces tirs aléatoires : on a vu qu'en réalité le qualificatif d'aléatoire est sujet à modulations puisqu'il y a une certaine cohérence dans le choix des cibles due à l'**unité** de l'équipage (équipage de mousses, équipage de marins, équipages d'élèves officiers) au moment de l'attaque.

Dans la phase de recherche ordonnée, il va y avoir une concentration des tirs, provoquée initialement par le dernier tir de la salve précédente (c'est la rupture 1) lequel a donné lieu à une réaction de l'équipage en ce sens qu'un ou plusieurs membres de l'équipage vont interpréter le dernier impact de la première série de tirs comme un signe de la présence de l'objet visé dans la zone atteinte. La série suivante de tirs va se concentrer autour de la zone de l'impact du dernier tir de la première salve avec l'espoir d'avoir à nouveau des impacts interprétés comme des succès ou du moins comme une meilleure approche de l'objectif visé.

3.2.1. Inférences normales et apparition d'un débat

Nous avons noté qu'une inférence normale liait le dernier maillon binaire du chaînon précédent au premier maillon binaire du chaînon actuel. Ici, après avoir observé la nature de l'image d'un cercle, les investigations vont rester concentrées sur les images de cercles : **c'est en cela que l'inférence devient normale car elle marque une stabilisation du champ d'expérimentation**. Les initiatives prises vont chercher à voir successivement.

- Comment se comporte l'image d'un point circulant sur ce cercle.
- Comment se comporte l'image de ce cercle quand on le tire dans le plan ;
- Jusqu'à le déplacer suivant des directions fixes et sentir le rôle particulier que semblerait avoir une direction bien particulière.

Une dynamique se crée qui permet un enchaînement plus systématique dans l'investigation : on accumule des observations autour d'un thème donné « images de cercles » à partir d'expériences faites dans le domaine d'une géométrie concrète, représentative qui serait celle de la géométrie G1 de Parzisz, sans validation de quelqu'ordre que ce soit sinon évidemment que visuelle (on en reste au niveau du constat). Les liaisons qualifiées de normales le sont ainsi essentiellement en raison de l'unité du choix stratégique qu'elles permettent d'établir entre les initiatives prises dans chaque phase exploratoire du maillon binaire introduit.

La problématique du débat semble se centrer ou plutôt se concentrer autour de l'étude d'une stratégie particulière concernant le thème sélectionné dans la première inférence normale, c'est-à-dire à l'occasion de ce que nous appelé la première rupture ou premier lien inter-chaînons.

3.2.2. Les intervenants dans le débat

Dans ce débat, à ce stade :

Il y a les individus qui animent le débat (animateurs)

En proposant des investigations s'enchaînant « normalement » (au sens de liaisons normales inter-maillons) qui essaient de les interpréter en faisant des remarques souvent naïves du genre « ça ne tourne pas dans le même sens » (en parlant par exemple des images d'un point tournant sur un cercle). Ceci montre bien que l'on est essentiellement dans G1.

Il y a les individus qui parlent pour faire des remarques (arbitres)

Des remarques pouvant être de l'ordre de la stratégie : ici certains ont pu proposer de tirer sur le cercle de départ pour voir les modifications des images, tirant partie de la potentialité dynamique du logiciel et permettant ainsi de faire une conjecture en acte puisque la conjecture en question n'est pas émise du moins dans le document signifié (nous ne pouvons dire si elle l'était dans le signifiant de ceux qui ont pu observer le résultat produit par Cabri).

Ou des remarques de bon sens : certains rappelant que telle ou telle proposition d'investigation a déjà été expérimentée, ou d'autres demandant les raisons d'une investigation proposée car souvent celle-ci n'est pas cohérente avec la représentation de la manipulation des objets de G1 qui est liée à une manipulation papier-crayon (par exemple : nous avons pu noter une question du genre « pourquoi faire tourner le point sur le cercle ? » à laquelle évidemment la réponse apportée n'a pu être que « pour voir ! »).

Il y a les individus qui se taisent mais qui attendent leur heure (sous-marins)

Alors qu'un nombre très restreint d'individus acceptent d'animer la phase qualifiée d'erratique, leur nombre augmente dès qu'on passe à cette phase qualifiée d'ordonnée mais la majorité, bien qu'attentive et souvent captivée, reste silencieuse. Il nous a semblé longtemps difficile de qualifier l'activité de ceux qui entrent dans cette catégorie jusqu'au jour où nous avons pu observer l'événement suivant qui sera relaté dans le chapitre 14 (boîte noire « homothétie » expérimentée en module dans une classe de première scientifique) :

Le cas d'Élodie : Une élève, qu'on peut qualifier de bonne élève dans le sens classique du terme (attentive, travailleuse, écoutant et tirant parti des conseils donnés, appliquée ordonnée, méthodique et très réservée), avait assisté de manière extrêmement passive au déroulement des deux premières phases de la recherche proposée à son groupe. J'ai pu observer tout ce que je décris parce que le jour de la résolution en groupe de la boîte noire « homothétie », je manipulais ma Voyage 200 rétroprojetable où j'avais programmé ma Cabri boîte noire, assis près d'elle. Tout d'un coup, alors qu'elle était restée silencieuse jusque là, cette élève prend la parole d'une voie ferme puissante et décidée, pour proposer une investigation (proposition de construction et manipulation qui devait valider la conjecture qu'elle s'était faite en pensée et

que je pensais deviner). C'était la première fois de l'année que cette élève prenait la parole de sa propre initiative.
Sa proposition montrait sans aucun doute possible que son attention avait été mobilisée, qu'elle avait digéré les propositions faites, qu'elle avait probablement testé en pensée pas mal d'hypothèses mais que la représentation de son rôle d'élève en liaison avec la tâche qui lui incombait la poussait à ne pas intervenir pendant les phases qu'usuellement elle prend soin de cacher ; en effet, ses devoirs sont des modèles de propreté et de présentation où la rédaction est une rédaction achevée comparable à celle de nos livres scolaires, où aucune place n'est laissée aux hésitations, aux essais, à tous ces moments fastidieux et nécessaires qui préparent l'apparition de la première conjecture ayant de grandes chances d'être validée. Elle était vraisemblablement dans la situation de l'élève qui, après avoir lu son énoncé, attend patiemment les indications successives que ne manque pas de lui donner habituellement son professeur afin d'augmenter ses chances de découvrir la solution. Elle a donc attendu que les éléments apportés soient assez parlants pour voir émerger la solution et décider d'assumer son rôle conformément au contrat usuel « je propose quand j'ai trouvé » et non pas « je réalise des investigations pour obtenir des hypothèses supplémentaires ».

Ce cas particulier, n'est en réalité pas aussi singulier qu'il peut y paraître dans une première analyse, car il met en évidence un comportement qui n'est certes pas le comportement de tous les élèves qui se taisent pendant ces deux phases mais le comportement de beaucoup de ces individus (il peut d'ailleurs s'agir d'élèves comme de jeunes professeurs ou de professeurs confirmés). Nous avons très souvent observé cette émergence brutale, comme une résurgence d'une source qui serpentait de manière souterraine pour réapparaître soudainement quand son lit souterrain disparaissait. Beaucoup d'individus interviennent quand ils sentent que les hypothèses qui leur étaient fournies devenaient largement suffisantes pour convaincre de manière « quasi-démonstrative ». Le qualificatif de sous-marins que je propose me semble approprié à un tel comportement qui est quasi prévisible. En effet, comme un sous-marin qui manque de réserve d'oxygène et qui est donc condamné à refaire surface à un moment ou un autre, ces individus (qui sont entrés dans le débat en n'acceptant que la partie réception de celui-ci) vont finir, dévolution oblige, par réagir au trop plein d'informations en acceptant la partie émission orale officielle. Cette socialisation se focalise à la fin de cette phase de recherche ordonnée quand apparaît la première piste, la première idée, la première sous-conjecture. Notons que l'ouverture de cette première piste n'est pas nécessairement le fait d'individus sous-marins.
Il y a enfin les individus qui se taisent constamment (les réservés)
Notons le rôle crucial du compte-rendu de recherche qui peut participer à leur implication mais surtout qui peut permettre à l'organisateur du débat de pouvoir accéder autant que faire se peut à l'activité des individus de cette catégorie.

3.2.3. Des inférences normales vers la première inférence forte

Pourquoi une inférence devient forte et provoque la seconde rupture ? Pourquoi va-t-on entrer dans une phase qui, à première vue, quand on analyse le signifiant qui est le notre, semble bien similaire à la phase de recherche ordonnée ? Jusque-là, de manière méthodique, on accumule des résultats d'observations, des données qui gravitent autour d'un thème précis et le thème ne va pas changer. Ces données sont du niveau de la « monstration visuelle » : ce que l'on voit suffit à nous convaincre que la traduction que nous en faisons est la bonne ; nous sommes au niveau de l'immédiateté de l'expérience au niveau de la connaissance sensible. Lorsqu'on dit après avoir vu l'écran que l'image d'un cercle est un cercle, l'expérimentateur n'a pas douté un instant que la transposition qu'il a faite dans G2 de la visualisation faite dans G1 pouvait être fausse. Il y aurait pu y avoir une expérience de validation dans le micromonde

Cabri (du genre : faire passer un cercle par trois points de l'image et demander à Cabri si les points de l'image sont sur le cercle en question) mais cette expérience n'a pas été faite et c'est ce qui caractérise l'appartenance de notre maillon binaire à ce chaînon 2. L'inférence normale ne va devenir forte que lorsqu'on va réaliser que l'investigation qui va être menée dans le maillon suivant est une investigation qui va permettre de valider avec Cabri, c'est-à-dire valider dans G1 un résultat qui a été conjecturé dans G2 « Il existe une droite du plan possédant une certaine propriété en liaison avec la transformation cherchée ». Les objectifs des maillons vont brutalement changer : **de l'objectif « accumulation de données » G1/G2 équivalentes, du moins en acte on passe à l'objectif « validation dans G1 de conjectures de G2 ».**

3.2.4. Cadres d'investigation et appréhensions figurales dans cette phase

Nous avons noté que les cadres d'investigation privilégiés dans cette phase semblaient être des cadres de modélisation ; il s'agit de mettre en évidence par exemple des images de cercles.

L'appréhension des figures réalisées est un enchaînement d'appréhension « opératoire positionnelle » et d'appréhension perceptive pour chaque micro-étape ; une « appréhension discursive » semble conclure cette phase de recherche ordonnée.

3.2.5. Une caractérisation du chaînon « recherche ordonnée » apparente mise en ordre

Dans cette phase, les maillons binaires se suivent de manière raisonnée et circonscrite autour d'un thème. L'investigation a lieu dans G1 et l'interprétation se fait dans G1 avec de temps en temps des retours vers G0. Les liaisons sont normales en ce sens qu'elles maintiennent l'unité thématique de l'investigation.

Des investigations dans un cadre de modélisation alliées à une appréhension opératoire positionnelle ou perceptive semblent caractériser ce chaînon.

3.3. ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE

3.3.1. Description de cette phase

Cette phase préparée par la rupture 2 dans laquelle un « résultat » du domaine de G2 semble émerger (une direction repérée dans G1 semble jouer un rôle particulier…), va démarrer par une exploration qui n'est pas anodine. Elle est pleine de sous-entendus au niveau du protocole mis en place pour confirmer dans G1 cette presque G2-conjecture : les validations faites dans G1 sont du domaine de l'approximation ; en effet aucune expérimentation n'est proposée pour vérifier des superpositions au moins sur l'écran. Néanmoins, ce type de validation même grossière accélère le processus de découverte car il infère une nouvelle conjecture qui va appeler sa validation comme si l'expérimentateur entrant dans cette phase avait mis la main sur le fil d'Ariane. Ici chacun des maillons binaires représente une traction sur ce fil qui incite l'expérimentateur à tirer et tirer encore comme s'il était, à partir de là, condamné à trouver plus et approcher d'autant plus la solution.

3.3.2. Rôle spécifique des connaissances dans cette phase

Il est certain que parmi les initiatives possibles grâce au caractère dynamique et l'interactivité du logiciel, il en est une qui attire comme un aimant c'est le déplacement linéaire des objets tirés. Dans le cas qui nous occupe, le fait que l'expérimentateur ait à disposition le concept de direction l'a amené à faire des tentatives qui l'ont conduit à des déplacements d'objets (cercle antécédent et son objet image de G1) suivant la même direction. Usuellement, si le Professeur laisse le pilotage de la manipulation à un sherpa (terminologie de Trouche), on remarque que celui-ci commence par des mouvements de souris horizontaux ou verticaux. L'expérimentateur ne manipule pas à l'aveuglette ; il n'y a pas de manipulation aléatoire dans un intervalle de temps de longueur raisonnable : toutes les expériences menées à tous les niveaux confirment cette affirmation. S'il y a une hypothèse qu'il semble raisonnable de faire, c'est que l'entrée dans cette phase est caractérisée par l'arrivée de la notion d'invariant. **Dès qu'un invariant fait son apparition** dans la démarche que nous cherchons à décrire, **la première inférence forte nous fait basculer de la phase de recherche ordonnée à la phase d'accélération de la recherche**. Le chaînon qui commence à se constituer va voir se succéder des émergences d'invariants intermédiaires s'inférant les uns les autres avec des phases de validation, elles aussi accélérées, donc brouillonnes. Des velléités pour mettre un peu de logique « démonstrative » sont notées de manière épisodique avec des soucis de validations partiellement dans G2 : dans le cas où on a senti un invariant de type translation on peut se contenter dans le cadre de G1 de vérifier la constance de la distance d'un point à son image. Le concept de vecteur ainsi que ses différentes approches passées resurgissent pour inférer les initiatives qui sont prises par l'expérimentateur pour réaliser l'expérience dont il a décidé le protocole : c'est lui qui décide de positionner les objets dans une certaine position, de les manipuler dans un certain ordre pour obtenir une confirmation « sensible » de la conjecture ou plutôt de la sous-conjecture émise.

3.3.3. Rôle de médiation de l'expérience entre deux niveaux de « signifiés »

On peut donc constater que l'expérience ne précède pas la connaissance : les connaissances infèrent des expériences qui sont donc fortement dépendantes de ces connaissances. Le protocole expérimental est généré par les connaissances comme on l'a vu ci-dessus. Les expérimentations faites dans G1 vont stimuler les connaissances de G2 qui vont à nouveau générer des expérimentations dans G1 pour cerner des invariants de G2 de plus en plus localisés dans G1 (on retrouve ce va-et-vient entre G1 et G2 que Parzysz avait déjà noté) L'expérimentation apparaît donc comme une médiation de l'expression d'un signifié flou, « concrètement » descriptif, d'une situation donnée vers l'expression de ce signifié clarifié et abstrait dans un domaine plus formel

3.3.4. La formalisation d'une conjecture, source d'une rupture epistémologique ? d'un obstacle cognitif ?

Cette formalisation peut être plus ou moins explicite, mais elle est en tous cas implicite à travers le protocole adopté dans le chaînon suivant (construction d'un couple de points particuliers formé d'un point et de son image par redéfinition pour isoler un vecteur qui sera fixe par la suite). Elle marque donc la fin de cette phase et une pause dans la recherche : souvent d'ailleurs, on note une grande difficulté de l'auditoire participant à se concentrer sur la suite à donner à cette recherche.

Cette rupture est en réalité une rupture forte car c'est une rupture qu'on peut qualifier d'épistémologique, dans la mesure où l'apparition du formel est associée à l'apparition de l'abstrait, du monde mathématique tel qu'il est représenté dans les esprits des participants et donc une activité d'où l'expérimental est nécessairement exclu.

On retrouve ici la rupture notée par Johsua dans une démarche expérimentale avec option analytique à point de départ expérimental : nous sommes dans le cas où la phase expérimentale a été privilégiée atrophiant ***de facto*** la phase théorique (la validation du modèle).

C'est ici que la pertinence du dispositif « boîte noire » apparaît le mieux. Le problème étant posé dans le micromonde Cabri, même s'il appelle une solution dans G2, la validation de celle-ci ne pourra se faire en dernier ressort que dans ce même micromonde, forçant ainsi le participant à trouver une procédure argumentative qui va modéliser le raisonnement par analyse-synthèse et montrer le rôle très fort à affecter aux conditions nécessaires comme outils de renforcement de la plausibilité d'un résultat conjecturé. Remarque : rendre une hypothèse plus plausible, au sens de Polya, c'est aussi vérifier plus de conditions nécessaires, c'est-à-dire plus de propriétés impliquées logiquement par cette hypothèse dans G2.

3.3.5. Cadres d'investigation et appréhensions figurales dans cette phase

Nous avons noté que le cadre d'investigation privilégié dans cette phase semblait être le cadre d'ingéniérie par itération.

L'appréhension des figures réalisées est un enchaînement d'appréhension « opératoire positionnelle » et « d'appréhension discursive ». Chaque manipulation semble permettre de saisir les éléments cachés de la transformation comme des constructions analogues à celles que proposerait un énoncé classique : chaque fois c'est une conjecture qui est mise en évidence dans cette appréhension discursive.

3.3.6. Une caractérisation du chaînon « accélération de la recherche »

Dans cette phase, les maillons binaires s'enrichissent grâce aux liaisons fortes qui les connectent. La phase d'exploration contient la mise en place de la construction qui va valider la conjecture précédente et les manipulations associées ; la phase interprétative va valider ou non la conjecture et aboutir par interprétation des manipulations faites à une autre conjecture. Le lien fort peut ainsi s'établir entre un maillon et le suivant qui viendra valider la conjecture concluant le précédent. Les conjectures sont faites dans G2 et les validations plutôt et majoritairement dans G1. Elles s'accumulent pour affiner la conjecture de solution de notre problème. Ce chaînon se conclut par l'énoncé de la conjecture dans G2 d'une réponse partielle ou complète au problème posé.

Des investigations dans un cadre d'ingéniérie par itération alliées à une appréhension opératoire positionnelle puis discursive semblent caractériser ce chaînon.

À ce stade on commence à avoir une idée précise de la réponse.

3.4. ANALYSE « EXPÉRIMENTALE » ET SYNTHÈSE « EXPÉRIMENTALE »

3.4.1. Modélisation d'un tel chaînon

Il consiste en l'attaque d'une conjecture par un traitement par analyse-synthèse à la suite d'une préparation « abstraite », une amorce qui est une analyse théorique faite donc dans G2. Cette amorce constitue la rupture 3, qualifiée de rupture théorique. On peut dire que cette analyse théorique se situe même dans G3 et la synthèse est imaginée dans G2. Ce qui caractérise cette phase, c'est que l'expérience effectivement menée l'est dans le micromonde Cabri (notons que le problème de G2 est proposé dans sa transposition dans ce micromonde qui est un intermédiaire entre G1 et G2 : Parzysz n'a pas proposé de classification pour un tel monde géométrique ; nous avons proposé « niveau G2 Informatique » et non « niveau G1 Informatique »). Cette préparation est à peine perceptible dans le compte-rendu, ce qui traduit la situation réelle de la fréquente absence de celle-ci dans les faits observées et certainement observables.

3.4.2. Caractérisation d'un tel chaînon

C'est d'abord un **souci de rigueur** qui semble en être une caractérisation immédiate : on peut traduire en disant que, bien que travaillant dans un modèle du monde géométrique euclidien, le micromonde Cabri, bien que manipulant des objets réels, comme le physicien (attention pas les objets réels de la géométrie mais leur représentation dans le modèle Cabri), l'expérimentateur les manipule comme s'il avait affaire à des objets abstraits (c'est-à-dire cette fois les objets réels de la géométrie abstraite, théorique, axiomatisée, …). Il travaille dans G1, il manipule dans G1 en pensant, en raisonnant dans G2. Cette confusion crée nécessairement une complexification du processus :

a. Des décisions sont prises dans G2 :

isoler un vecteur liant un point particulier à son image, …

b. Ces décisions sont exécutées dans G1 (qui, ne l'oublions pas, est ici au moins inclus dans G2 Informatique) :

on trace le vecteur liant un point particulier à son image.

c. Ces actes sont amendés par un codicille dans G2 Informatique, pour pouvoir préparer une validation qu'on voudrait dans G2.

En réalité, le codicille a commencé à être exécuté dans la phase précédente : on a déterminé un vecteur égal au vecteur cité et on a libéré les extrémités pour rendre réellement ce vecteur fixe dans le logiciel, c'est-à-dire non dépendant des mouvements du point mobile.

d. Validation dans G2 Informatique dans un premier temps, puis rapidement abandon de telles validations pour revenir à des validations plus visuelles. On use des possibilités dynamiques du logiciel (c'est un G1 amélioré), mais on n'use pas ses potentialités mathématiques (pour rester dans le G2 Informatique qui est le modèle qui colle le plus à G3).

On aurait pu vérifier dans Cabri que le vecteur fixe est toujours égal au vecteur liant un point générique à son image, c'est-à-dire vérifier par exemple qu'un quadrilatère est bien un parallélogramme avec les outils de test, ce qui aurait donné une validation dans G2 informatique mais, ici, le compte-rendu analysé suggère simplement une validation visuelle par animation dans G1.

C'est finalement **l'apparition d'une logique formalisée** dans les validations des conjectures successives qui, caractérise cette phase : le raisonnement par analyse-synthèse est pratiqué méthodiquement même si le cadre de son application est expérimental, c'est-à-dire dans G1 et au mieux par moments dans G2 Informatique. On peut avoir l'impression d'être encore dans la phase d'accélération de recherche car les initiatives s'enchaînent, la conjecture s'enrichit pour approcher une solution. Mais tant que la conjecture finale n'a pas été découverte ou énoncée ou envisagée de manière implicite, on observe cette fluctuation de la rigueur (ou plutôt du niveau de rigueur), c'est-à-dire une impossibilité de rester de manière permanente dans la zone G2/G2 Informatique pour des incursions encore fréquentes dans G1.

Le signifié recherché est approché de plus en plus dans cette phase instable par des signifiants qui s'affinent au gré des validations plutôt dans G1 que dans G2 Informatique.

La différence fondamentale vient du fait que les liens forts qui connectent les maillons dans cette phase ont un **contenu connectif logique** plus explicitement détectable que dans la phase précédente.

3.4.3. Cadres d'investigation et appréhensions figurales dans cette phase

Nous avons noté que le cadre d'investigation privilégié dans cette phase semblait être le cadre de modélisation incluant éventuellement le cadre scientifique empirique.

L'appréhension des figures réalisées l'est suivant deux types de couples d'appréhension :

– Un couple opératoire positionnel/appréhension discursive.

– Et un couple séquentiel/appréhension discursive.

3.4.4. Une caractérisation du chaînon « analyse expérimentale et synthèse expérimentale»

Une conjecture fortement ancrée dans G2 amorce cette phase où les maillons binaires contiennent des analyses-synthèses pures d'un point de vue logique. L'analyse théorique se dédouble d'une analyse jumelle dans G1 Informatique suivie d'une vérification souvent visuelle faite dans G1 par souci d'économie (vérification ergonomique). Chaque lien fort est une amorce « analyse théorique ». Cette phase se conclut par une conjecture marquée du sceau d'une première validation expérimentale faite dans G1.

Des investigations dans un cadre de modélisation par itération alliées à une appréhension séquentielle puis discursive ou opératoire positionnelle puis discursive semblent caractériser ce chaînon.

À ce stade on commence à avoir la certitude de la réponse avec une bonne plausibilité due aux validations faites dans G1 ; ce sont d'ailleurs ces validations expérimentales que nous qualifions de synthèse expérimentale. Nous avons souvent noté dans nos activités de recherche de problèmes, cette phase de fébrilité où sentant la solution très proche on agit de manière économique en temps pour se persuader aussi vite que possible qu'on a bien raison. C'est une économie des procédures d'atterrissage : on cherche à vérifier rapidement si les paramètres d'atterrissage sont corrects pour décider si l'atterrissage est vraiment proche. Il nous est arrivé aussi très souvent, après avoir atteint une quasi-certitude pour une conjecture de nous apercevoir que nous ne tenions qu'une solution partielle ou bien que nous nous trompions carrément après une dernière et rapide tentative de validation (Glaeser avait noté une telle éventualité dans sa phase de vérification : « le caractère affectif et passionnel de l'Euréka est une cause fréquente de mauvaises surprises »).

En s'inspirant de la formalisation proposée par Joshua, on pourrait parler de phase de **validation opératoire.** Ici on ne conservera pas son hypothèse sur le caractère implicite de la validation car, dans notre domaine mathématique, la conjecture explicite remplace le modèle à valider.

3.5. ANALYSE THÉORIQUE ET SYNTHÈSE THÉORIQUE

3.5.1. Une très forte rupture annonciatrice

Joshua note déjà que dans le cadre d'une démarche à point de départ expérimental en Mathématiques, le changement de registre au moment du passage à la démonstration apparaît alors comme une contrainte forte.

La rupture 4 qui introduit cette phase de Cabri-preuve doit mener de la conjecture rendue fortement plausible à cette phase de démonstration avec les outils du modèle de G2/G3 dont nous disposons, c'est-à-dire de l'environnement Cabri qui représente le niveau G2 Informatique de validation qui est très voisin du niveau G2 et même parfois de G3 (la gestion de l'infini présente dans Cabri y compris dans la version du logiciel sous TI-92 nous a permis de présenter la construction d'une conique générique incluant le cas de la parabole lors d'une conférence donnée à Cabriworld 1 : un extrait des actes est présenté en annexe).

Cette Cabri-preuve est la preuve maximum que peut donner l'outil informatique.

Cette phase est une phase rarement atteinte dans les expériences que nous avons réalisées. Elles n'ont pu l'être que lorsque le public arrivait après les différentes phases à une conjecture déjà rencontrée et pour laquelle la manière de Cabri-démontrer avait été montrée (expériences faites en module avec une classe de Première S pour reconnaître une rotation).

3.5.2. Validation par analyse-synthèse quasi-théorique

L'analyse-synthèse qui va être pratiquée est d'une pureté formelle identique à celle qui est pratiquée dans G3 quand on la comprend comme un raisonnement dans G2 Informatique, c'est-à-dire dans l'environnement Cabri qui est un modèle de la Géométrie axiomatisée G3 avec des outils spécifiques de comparaison de mesures portant sur des objets de G2 Informatique qui sont les équivalents dans le modèle des preuves calculatoires de G2 ou G3.

L'outil redéfinition est utilisé plusieurs fois dans G2 Informatique pour positionner dans la page Cabri des points fixes définissant l'axe éventuel de notre symétrie glissée en même temps que le vecteur de cette symétrie comme reliant un point particulier à son image. Les éléments de cette symétrie sont déterminés exactement dans G2 Informatique, comme ils le sont dans G2 ou dans G3. La vérification se fait par l'intermédiaire d'une propriété caractéristique de G2 : la transformation est une symétrie glissée si et seulement si AB = MN et ABNM est un parallélogramme. Cette vérification ne peut être faite que dans l'environnement Cabri car, rappelons-le, cette transformation a été donnée dans cet environnement. Les réponses positives données par le logiciel sont nombreuses et mêmes très nombreuses. On pourrait avoir une preuve complète dans cet environnement, si on validait cette conjecture avec les outils de Cabri pour tous les points de la page de Cabri, ce que nous n'avons jamais fait, ni jamais fait faire, ni jamais vu faire. Les vérifications faites sont assez nombreuses et sous-tendues par des vérifications de propriétés de G1 et non de G0. La plausibilité se transforme en certitude, en Cabri-certitude. Pour beaucoup de chercheurs qui utilisent Cabri, cette Cabri-certitude est une certitude qui n'appelle pas nécessairement une démonstration même quand le problème initial est un problème posé dans G2 ou G3 et qui a été modélisé dans Cabri, et qui peut donc être traité par une démarche de preuve démonstrative.

3.5.3. De la Cabri-preuve à la preuve ; vers la dernière rupture

Dans la boîte noire étudiée, on constate que la démarche ne prend pas fin à ce stade là mais qu'une autre phase de validation du même type a l'air de se reproduire. La conjecture est très fortement validée, quasiment prouvée, mais un doute subsiste ; par suite, des possibilités de réfutations subsistent et le bon expérimentateur est tenté d'aller se rassurer avant d'utiliser éventuellement l'outil qu'il a reconnu comme étant réellement celui qu'il a reconnu , ce qui crée la rupture expérimentale sans changement de registre qui va conduire à la dernière phase que nous avons repérée.

3.5.4. Cadres d'investigation et appréhensions figurales dans cette phase

Nous avons noté que le cadre d'investigation privilégié dans cette phase semblait être le cadre scientifique explicatif.

L'appréhension des figures réalisées l'est essentiellement suivant l'appréhension discursive mais mobilise aussi les autres catégories d'appréhensions.

3.5.5. Une caractérisation du chaînon « analyse théorique et synthèse théorique »

C'est la phase de démonstration de la conjecture dans l'environnement expérimental informatique, c'est-à-dire dans G2 Informatique. Les outils de validation sont les mêmes au niveau des constructions, mais sont les outils spécifiques du modèle pour les validations de propriétés, outils de tests ou de mesures portant sur un grand nombre d'observations.

Des investigations dans un cadre scientifique explicatif alliées à une appréhension majoritairement discursive semblent caractériser ce chaînon.

En s'inspirant encore de la formalisation proposée par Johsua, on pourrait parler ici de phase de **validation quasi-explicite.** Nous avons ajouté le préfixe quasi car la démarche de preuve est une démarche de quasi-preuve ; le test en effet est effectué dans G2 Informatique (Cabri-preuve). Néanmoins, Joshua note que cette phase est caractérisée par un « recours à une nouvelle catégorie d'expériences » comme nous l'avons nous-même noté.

Remarque : L'explication est déductive, la crédibilité est inductive, allant des conséquences aux prémisses ; or la crédibilité n'est pas une valeur logique (l'énoncé d'observation peut être vrai et l'hypothèse générale fausse). Dès lors, il n'y a pas à distinguer deux méthodes (sinon de façon superficielle), **mais deux sortes de rationalité : la rationalité logique, qui transmet des valeurs de vérité, et la rationalité du jugement, qui transmet des valeurs de crédibilité** (Encyclopédia Universalis, article sur l'Empirisme).

3.6. ANALYSE CRITIQUE

3.6.1. L'après-démonstration

Cette « après-démonstration », aussi curieux que cela paraisse, est une phase qu'on observe assez fréquemment après la fin de la phase précédente quand celle-ci a eu lieu. On peut interpréter ce phénomène en pensant qu'on a provoqué un besoin de la validation par conditions nécessaires chez ceux qui ont adhéré à cette démarche. C'est peut-être le cas. Il est étonnant de remarquer que cette survalidation arrive aussi quand on n'est pas sûr de la preuve apportée.

Un cas observé en classe de seconde : dans une copie d'un devoir maison, un élève devait prouver un résultat géométrique ; il effectue une démonstration correcte au niveau des enchaînements déductifs, puis passe à un autre paragraphe qu'il intitule « démonstration » et qui contient une vérification du résultat obtenu pour deux ou trois cas particuliers. Cet élève avait probablement réalisé cette démonstration par imitation, pour faire plaisir à son professeur, mais n'avait pas compris ce qu'était réellement une démonstration ; sa survalidation n'était pour lui qu'une argumentation pour montrer comment il s'était convaincu.

Toutes proportions gardées, cette étape de survalidation arrive naturellement pour valider une conjecture qui n'a pas été complètement et certainement validée. Ce sont les expériences de confirmation de Johsua.

3.6.2. Recherche d'une réfutation possible

Dans le cadre de la boîte noire étudiée, à la Cabri-certitude de la preuve précédente est associé un Cabri-doute qui ne demande qu'à être questionné ; le questionnement d'autres conditions nécessaires crédibilisant encore plus la certitude de notre conclusion de la phase précédente arrive là naturellement car ce questionnement constitue encore d'autres chances de réfutations. En effet, le chercheur se donne ainsi d'autres occasions de retrouver des erreurs de tous genres qui ont pu se produire au cours des différentes phases précédentes. C'est ce souci de cohérence qui est recherché en sciences expérimentales et dont l'absence est notée tout particulièrement dans les parties finales des devoirs surveillés de Mathématiques (COPPÉ S., 1996)). L'exemple des sciences cliniques montre un environnement dans lequel des vérifications régulières sont faites même après que le problème ait été résolu. La partie finale de la preuve est une partie où l'attention et le regard critique sont maintenus dans cette discipline comme il devrait l'être à tout instant dans une activité de recherche et de preuve.

3.6.3. Cadres d'investigation et appréhensions figurales dans cette phase

Nous avons noté que le cadre d'investigation privilégié dans cette phase semblait être encore le cadre scientifique explicatif.

L'appréhension des figures réalisées l'est essentiellement suivant les appréhension perceptive et discursive.

3.6.4. Une caractérisation du chaînon « analyse critique »

Cette phase est caractérisée par des expérimentations dont le but est double, survalidation du résultat obtenu ou son éventuelle réfutation dans le cadre de G2 Informatique. Elle marque une fin de la démarche expérimentale étudiée mais peut n'être qu'une fin provisoire car une réfutation n'est pas exclue à ce stade du processus suivi.
Des investigations dans un cadre scientifique explicatif alliées à une appréhension perceptive et discursive semblent caractériser ce chaînon.

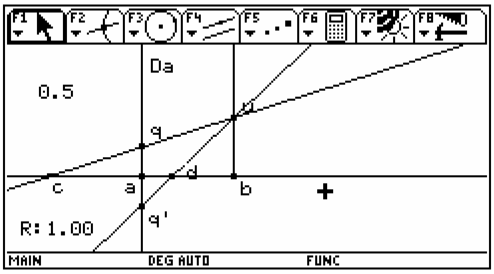
Cette étape correspond à la quatrième étape de la démarche scientifique selon les programmes de physique de 1987.

ANNEXE

Cette annexe contient le début du compte-rendu de la conférence donnée par Mathilde Arragon et Jean-Jacques Dahan au cours du congrès Cabriworld 1 qui s'est tenu à Sao Paulo en 1999. Cette conférence s'intitulait « De la division harmonique à la formule de conjugaison » (« From the cross ratio to the conjugation formula ») Nous en donnons ci-dessous la traduction de l'original rédigé en Anglais.

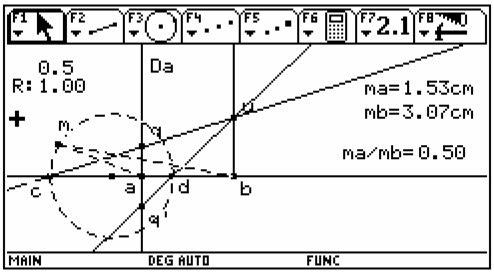
1. UNE CONSTRUCTION CLASSIQUE MENANT À UNE MACRO-CONSTRUCTION PERFORMANTE (JJD)

On donne d'abord dans le plan deux points a et b ainsi qu'un nombre, 0.5, par exemple. La figure suivante a été construite de sorte que les points a et b vérifie l'égalité des rapports ca/cb et da/db au nombre 0.5 donné précédemment.



Sur la figure de gauche :
bu = 1; aq = aq' = 0.5
et le résultat 1.00 est obtenu en calculant le rapport 0.5/0.5 (ceci est une astuce qui nous permet d'éviter de déclarer le nombre 1 comme objet initial de la macro que nous allons créer).

On trace le cercle centré au milieu de [cd] et passant par d. Attention : d est choisi et non c (une nouvelle astuce pour voir comment « Cabri » gère l'infini). L'animation du point m sur ce cercle nous permet de conjecturer que tout point m de ce cercle vérifie ma/mb = 0.5



On peut même constater que si on redéfinit m comme point libre du plan, ce rapport change suivant que m est situé à l'intérieur ou à l'extérieur de ce cercle : ma/mb < 0.5 à l'intérieur et ma/mb > 0.5 à l'extérieur.
Cette expérimentation mène donc à la conjecture finale qui est : « l'ensemble des points m du plan tel que le rapport ma/mb soit égal à 0.5 est un cercle centré sur la droite (ab) ». On peut généraliser cette conjecture à des nombres autres que 0.5 :
Conjecture1: l'ensemble des points m tels que ma/mb = k est un cercle centré sur la droite (ab) (dans l'éventualité où k = 1, nous savons que cet ensemble n'est pas un cercle mais la médiatrice du segment [ab]).

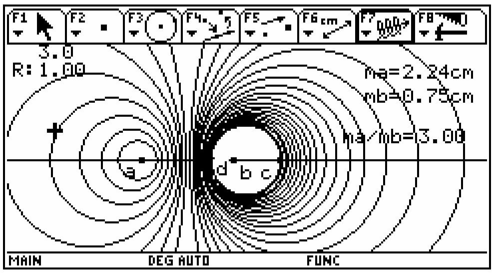
Vous trouverez à l'adresse internet www.ac-grenoble.fr/phychim/confjjma/index.htm **la preuve de cette conjecture : une preuve géométrique classique mais aussi une preuve basée sur l'utilisation du module de calcul formel de la TI-92.**

Conclusion: la construction décrite permet de créer la macro nommée « linivo » ainsi définie.

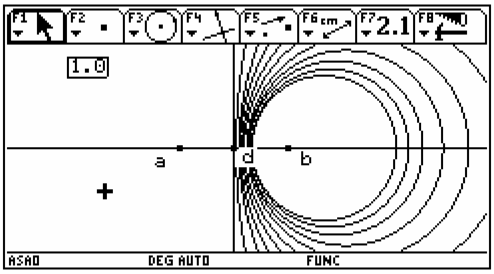
Objets initiaux : Un premier point (jouant le rôle de a), un second point (jouant le rôle de b) et un nombre k (jouant le rôle de 0.5).
Objets finaux : le «cercle » ensemble des points m tels que ma/mb = k.

Avant d'utiliser cette macro-construction, cachons toutes les constructions pour ne conserver que les points a et b, la droite (ab) et le nombre k déclaré, soit ici 0.5.

Nous activons la trace du cercle construit et nous obtenons la représentation de droite après avoir lancé une animation du nombre 0.5 (qui va prendre successivement les valeurs 0.6, 0.7, etc.



Quand le nombre 1 est choisi, on peut constater que le cercle se transforme en la médiatrice de [ab]; Cabri a construit le cercle centré à l'infini sur la droite (ab) et passant par le point d qui dans ce cas existe (c'est le milieu de [ab]). Les autres cercles ont été obtenus sur la figure de droite pour des valeurs de k vérifiant k > 1.



Remarque: si nous utilisons les mêmes notations pour les points et leurs abscisses sur un axe porté par la droite (ab), nous obtenons la relation :

$$\mathbf{2.(a.b+c.d)=(a+b).(c+d)}$$

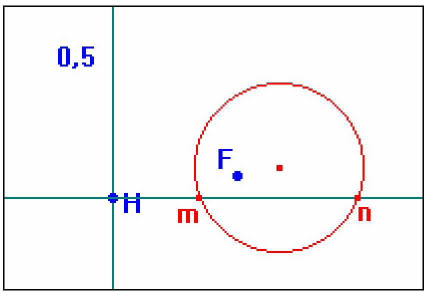
Si « a » est l'origine de l'axe, cette dernière relation devient :

$$\mathbf{2/b = 1/c + 1/d.}$$

Ces formules caractérisent quatre points qui sont en division harmonique. Cette formule ressemble étrangement à la formule de conjugaison bien connue en optique. Nous verrons plus loin qu'en effet ceci n'est pas fortuit !

2. LA DÉCOUVERTE DES CERCLES FOCAUX GRÂCE À CETTE MACRO-CONSTRUCTION (JJD)

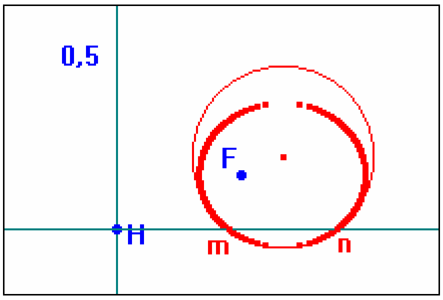
H est point d'une droite (D) (verticale ici) . Construisons la perpendiculaire à (D) passant par H. F est un point du plan extérieur à (D). Éditons un nombre, 0.5 par exemple.
Appliquons la macro « linivo » à F, H et 0.5 dans cet ordre ; nous obtenons l'ensemble des points p du plan tels que pF/ph = 0.5, c'est-à-dire le cercle rouge de la figure de droite.



Une application classique

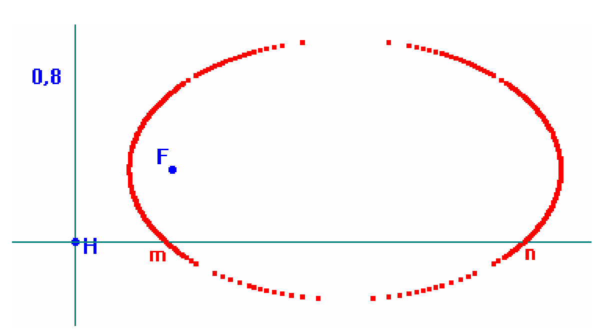
Les points d'intersection m et n de ce cercle avec la perpendiculaire à (D) issue de H appartiennent à l'ensemble des points M du plan tels que MF/MH= 0.5 (ici MH représente la distance de M à la droite (D)).

Ainsi, quand H décrit la droite (D), m et n décrivent cet ensemble de points : on reconnaît bien évidemment la conique de directrice (D), de foyer F et d'excentricité e = 0.5. La figure de droite représente une ellipse que nous avons obtenue par les traces laissées par m et n quand on a tiré H le long de (D).

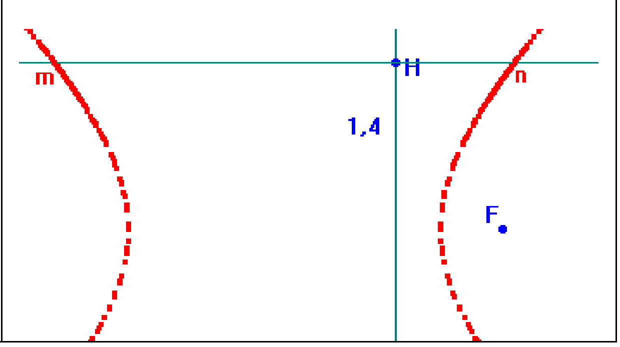


Les trois figures suivantes illustrent les trois cas classiques de coniques suivant la valeur de l'excentricité ; elles ont été obtenues simplement en modifiant la valeur de k et en tirant à chaque fois sur H pour générer respectivement une ellipse, une hyperbole et enfin une parabole.

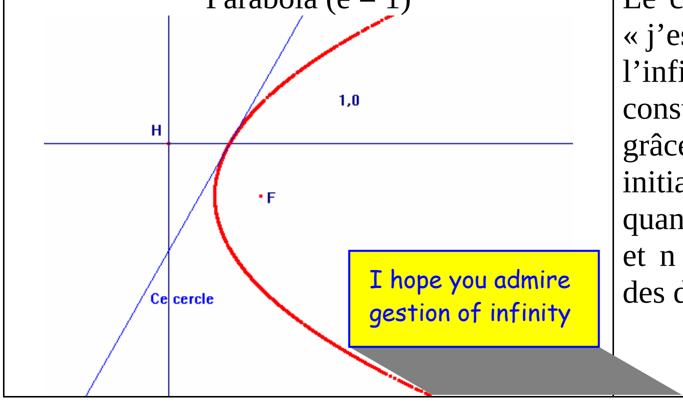
Ellipse (e = 0.8)



Hyperbola (e =1.4)



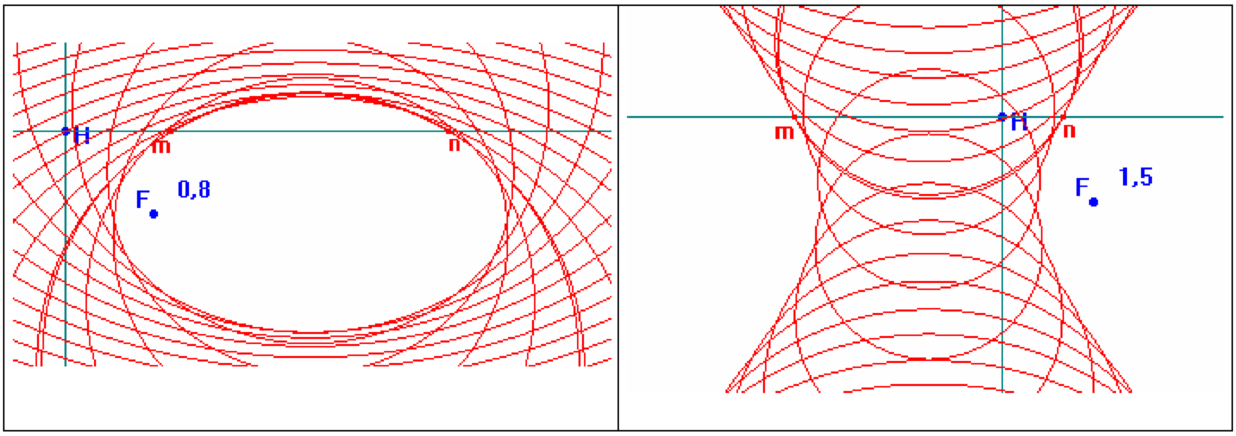
Parabola (e = 1)

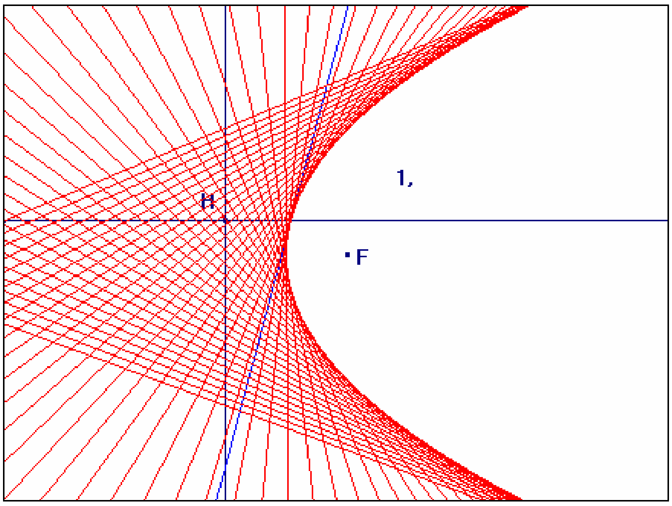


Le commentaire écrit en jaune se traduit par « j'espère que vous appréciez la gestion de l'infini ». Il met l'accent sur le fait que la construction de la parabole a été possible grâce au fait que le cercle construit initialement restait un cercle (cercle-droite) quand k = 1 et que donc la construction de m et n était encore possible (en réalité un seul des deux points est à distance finie)

Une application originale

Au lieu de construire les points m et n comme cela a été fait, conservons le cercle obtenu par application de la macro « linivo ». Demandons le lieu de ce cercle quand H décrit (D) respectivement dans chacun des trois cas précédents. Nous obtenons les trois représentations suivantes.





Oh, surprise ! Tous ces cercles semblent envelopper notre conique, que cette conique soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole (dans ce dernier cas, ce sont les cercles-droites qui enveloppent la parabole). Toutes ces expérimentations suggèrent la conjecture suivante :
Conjecture 2 ; soit une droite (D), un point F et un nombre e>0 définissant la conique, ensemble des points du plan tels que MF/MH=e, les cercles définis pour chaque point H par MF/MH=e enveloppent cette conique extérieurement (ou sont bitangents à cette conique extérieurement)
On pourra trouver une preuve de ce résultat dans la brochure publiée par l'IREM de TOULOUSE en 1998 « De la proportionnalité aux coniques en passant par les lignes de niveaux avec la TI-92 ». La démonstration présentée est une démonstration analytique réalisée en utilisant le module de calcul formel de la TI-92.

Ces cercles ont été étudiés depuis longtemps en mathématiques : ils sont connus sous le nom de « cercles focaux de seconde espèce » (ou bitangent extérieurement à une conique). Je dois reconnaître que je dois la redécouverte de ces cercles à Cabri (ce dont je suis fier car cette redécouverte a été le fruit d'une démarche expérimentale de découverte). En se documentant

dans la littérature concernant ces cercles, on peut découvrir une propriété encore plus originale :
Dans le cas de l'hyperbole, tous ces cercles sont vus d'un foyer sous un angle constant. N'est-ce pas magnifique ?

Partie 6

PRÉSENTATION DES EXPÉRIMENTATIONS ET DE LA MÉTHODOLOGIE ADOPTÉE

1. NOS HYPOTHÈSES DE RECHERCHE SUR LA DÉCOMPOSITION FORMELLE DE LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE MÉDIÉE

1.1. Rappels des caractérisations mises en évidence dans le chapitre 13

RECHERCHE ERRATIQUE

Dans cette phase, chaque maillon binaire contient une phase exploratoire où l'investigation a pour but d'observer quelque chose d'interprétable et une phase d'interprétation réduite à son expression la plus simple qui est la description brute de ce qui est vu (l'interprétation est quasi nulle même si au niveau du signifiant on n'en est pas sûr).

Les liens faibles observés entre chaque maillon semblent être en relation avec les connaissances de l'expérimentateur. Mêmes si les explorations proposées semblent indépendantes, elles ne le sont que dans la mesure où l'exploration d'un maillon n'est pas la continuation de l'exploration du maillon précédent provoquée par la phase interprétative qui le suit.

Un cadre d'investigation scientifique empirique et une appréhension figurale d'abord opératoire positionnelle puis discursive semblent caractériser les maillons de ce chaînon.

RECHERCHE ORDONNÉE

Dans cette phase, les maillons binaires se suivent de manière raisonnée et circonscrite autour d'un thème. L'investigation a lieu dans G1 et l'interprétation se fait dans G1 avec de temps en temps des retours vers G0. Les liaisons sont normales en ce sens qu'elles maintiennent l'unité thématique de l'investigation.

Des investigations dans un cadre de modélisation alliées à une appréhension opératoire positionnelle ou perceptive semblent caractériser ce chaînon

ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE

Dans cette phase, les maillons binaires s'enrichissent grâce aux liaisons fortes qui les connectent. La phase d'exploration contient la mise en place de la construction qui va valider la conjecture précédente et les manipulations associées ; la phase interprétative va valider ou non la conjecture et aboutir par interprétation des manipulations faites à une autre conjecture. Le lien fort peut ainsi s'établir entre un maillon et le suivant qui va venir valider la conjecture concluant le précédent. Les conjectures sont faites dans G2 et les validations plutôt et majoritairement dans G1. Elles s'accumulent pour affiner la conjecture de solution de notre problème. Ce chaînon se conclut par l'énoncé de la conjecture dans G2 d'une réponse partielle ou complète au problème posé.

Des investigations dans un cadre d'ingéniérie par itération alliées à une appréhension opératoire positionnelle puis discursive semblent caractériser ce chaînon.

ANALYSE EXPÉRIMENTALE ET SYNTHÈSE EXPÉRIMENTALE

Une conjecture fortement ancrée dans G2 amorce cette phase où les maillons binaires contiennent des analyses-synthèse pures d'un point de vue logique. L'analyse théorique se dédouble d'une analyse jumelle dans G1 Informatique suivie d'une vérification souvent visuelle qui est donc faite dans G1 par souci d'économie (vérification écologique). Chaque lien fort est une amorce « analyse théorique ». Cette phase se conclut par l'atteinte d'une conjecture marquée du sceau d'une première validation expérimentale faite dans G1

Des investigations dans un cadre de modélisation par itération alliées à une appréhension séquentielle puis discursive ou opératoire positionnelle puis discursive semblent caractériser ce chaînon.

ANALYSE THÉORIQUE ET SYNTHÈSE THÉORIQUE

C'est la phase de démonstration de la conjecture dans l'environnement expérimental informatique c'est à dire dans G2 Informatique. Les outils de validation sont les mêmes au niveau des constructions mais sont les outils spécifiques du modèle pour les validations de propriétés, outils de tests ou de mesures portant sur un grand nombre d'observations.

Des investigations dans un cadre scientifique explicatif alliées à une appréhension majoritairement discursive semblent caractériser ce chaînon.

ANALYSE CRITIQUE

Cette phase est donc caractérisée par des expérimentations dont le but est double, survalidation du résultat obtenu ou son éventuelle réfutation dans le cadre de G2 Informatique. Elle marque une fin de la démarche expérimentale étudiée mais peut n'être qu'une fin provisoire car une réfutation n'est pas exclue à ce stade du processus suivi.

Des investigations dans un cadre scientifique explicatif alliées à une appréhension perceptive et discursive semblent caractériser ce chaînon.

1.2. Synthétisation de nos hypothèses sous forme de tableau

PHASE DE RECHERCHE	CARACTÉRISATION	CADRE INVESTIGATION	APPRÉHENS. FIGURALE	NIVEAU GÉOMÉTRIE
Recherche erratique	exploration n'inférant pas une interprétation	scientifique empirique	opératoire positionnelle puis discursive	non étudié
Recherche ordonnée	exploration respectant une unité thématique	modélisation	opératoire positionnelle ou perceptive	G1
Accélération de la recherche	enchaînement de conjectures et de leurs validations	ingéniérie par itération	opératoire positionnelle puis discursive	conjectures G1 validations G2
Analyse expérimentale Synthèse expérimentale	les liens forts sont des analyses théoriques suivies de vérifications visuelles	modélisation par itérations ?	opératoire positionnelle ou séquentielle puis discursive	analyse G1 info validation G1
Analyse théorique Synthèse théorique	validation théorique avec les outils du logiciel	scientifique explicatif	discursive	G2 info
Analyse critique	expériences de survalidation ou de réfutation	scientifique explicatif	perceptive et discursive	G2 info

Pour ne pas alourdir ce tableau nous n'avons pas inclus la nature des liens inférentiels de chaque phase repérée ; rappelons les néanmoins :
Liens faibles dans la phase de recherche erratique.
Liens normaux dans la phase de recherche ordonnée.
Liens forts dans la phase d'accélération de la recherche et aussi dans les autres phases.

2. MÉTHODOLOGIE DE LA PHASE DE VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE NOS HYPOTHÈSES DE RECHERCHE

La décomposition à laquelle nous venons d'arriver et qui constitue la plus grande partie de notre hypothèse de recherche a été mise en évidence en utilisant les problèmes de transformations cachées et plus particulièrement le problème dit de la boîte noire « ***fausse affinité*** ».

Notre validation portera donc :

D'abord sur des problèmes du même type (validations 1 et 2)
♦ Proposés à un public d'experts (validation 1)
♦ Puis proposés à un public d'enseignés, lycéens de Première S (validation 2)

Ensuite sur un problème difficile de détermination de lieu (validation 3)
♦ Avec l'analyse de la proposition de solution de Bernard Capponi (qui nous a amené ce problème)
♦ Puis l'analyse de la recherche sur le long terme de ce problème par Michel Carral (faite à partir de l'article fruit de ce travail)

2.1. Protocole pour la validation 1 (chapitre 15)

Cette première expérimentation de validation a eu lieu à Liège pendant le colloque de géométrie co-organisé par l'IREM de Liège-Luxembourg et la commission Inter-Irem de géométrie. Les conditions exactes de cette expérimentation sont détaillées dans le chapitre 15. Son analyse après son compte-rendu permettront de valider la plupart des hypothèses mises en évidence dans le tableau précédent concernant les phases pré- conjectures avec les cadres d'investigations, les appréhensions figurales et les niveaux de géométrie repérés. La durée de la recherche observée a été de 45 minutes.

2.2. Protocole pour la validation 2 (chapitre 16)

Cette seconde expérience a été dédoublée : en effet elle a été menée séparément avec deux groupes de modules d'une même classe de Première S du Lycée Raymond Naves à Toulouse (classe dont j'étais le Professeur de Mathématiques) dans la deuxième partie de l'année scolaire 2002/2003. Cette fois, les conditions exactes de cette expérimentation sont détaillées dans le chapitre 16. Chaque séance de module a donné lieu à une observation durant aussi 45 minutes. Les analyses de ces recherches faites à la fois à partir des notes prises par moi et par deux rapporteurs dans chaque groupe mènent aussi à une large validation des hypothèses sur les phases pré-conjectures même si pour l'un des groupes, la troisième phase n'a pu être atteinte.

2.3. Protocole pour la validation 3 (chapitre 17)

Nous avons d'abord réalisé de la même manière l'analyse de la résolution d'un problème de lieu qui nous avait été narrée par Bernard Capponi expert s'il en est de l'utilisation du logiciel Cabri-géomètre en géométrie et plus particulièrement des boîtes noires dans cette

environnement dont il a la paternité. Cette analyse va faire apparaître les phases post-conjectures qui n'étaient pas apparues aux cours de nos expériences de validation limitées à 45 minutes.
Nous nous sommes ensuite livrés à la même analyse de la recherche de ce problème effectivement réalisée sur le long terme par un chercheur avec les schèmes de recherche propres à un vrai chercheur (je veux dire par là, un expérimentateur qui non seulement connaît des Mathématiques et ici en particulier de la Géométrie mais qui connaît aussi le logiciel Cabri pratiquement depuis la conception de celui-ci et sait l'utiliser pour enrichir son travail habituel de chercheur dans l'environnement papier-crayon, un expérimentateur qui sait aller jusqu'au bout de la recherche quitte à la prolonger au gré des trouvailles bibliographiques réalisées).
Cette analyse confortera nos hypothèses très largement en montrant comment la démarche est idéalisée quand elle est réalisée par un Professionnel.

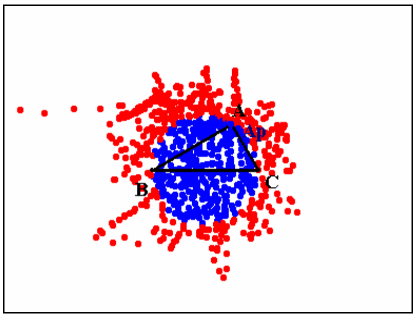
VALIDATION EXPÉRIMENTALE DU MODÈLE SUR UN PUBLIC EXPERT

1. PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIENCE DE LIÈGE

Nous avons animé au cours du colloque « Enseignement de la géométrie dans le secondaire » organisé par l'IREM de Liège-Luxembourg et la commission Inter-Irem (France) de géométrie à l'Université de Liège (15/17 Mai 2003) un atelier intitulé :
« Trois exemples pour illustrer la démarche expérimentale en Mathématiques avec Cabri ».

Nous avons mené cet atelier face à un public d'une quinzaine de personnes que nous qualifierons d'experts dans le domaine de la géométrie et de la didactique mais dont nous ne savions pas quelle était la compétence dans l'utilisation du logiciel Cabri que nous allions utiliser, ni même le niveau d'instrumentation. Un ordinateur portable connecté à un système de vidéo projection a été utilisé pour les présentations préliminaires (exemples 1 et 2) et pour la recherche proposée au public (exemple 3).

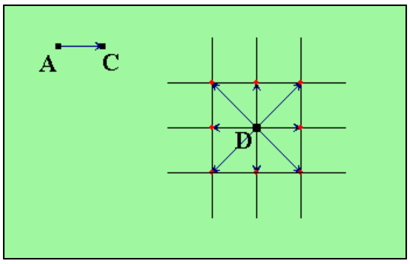
Le premier exemple a été une présentation de ce que pouvait être une monstration de la propriété caractéristique de Pythagore avec une expérience montée dans l'environnement Cabri. Cette expérience permet de visualiser les points du plan vérifiant l'égalité $MA^2 + MB^2 = BC^2$ (en utilisant des constructions conditionnelles, le caractère dynamique de Cabri ainsi que l'outil « Trace ») et donc de conjecturer avec un fort degré de certitude le résultat que nous connaissons (voir détails dans une annexe du chapitre 1 d'introduction).



Ce premier exemple avait pour but d'instrumenter le public à une utilisation spécifique de certains outils de Cabri dans des contextes spécifiques ; il devait permettre aussi à ceux qui n'avaient pas une maîtrise du logiciel d'intégrer rapidement la potentialité opératoire de l'instrument. Nous pensons en particulier aux fonctionnalités de « Trace », de « Redéfinition » et de « Lieu » qui ont été largement utilisées.

Le compte rendu écrit pour les actes de ce colloque montre le lien fort avec les sciences expérimentales, avec en particulier l'étape du montage qui est mise en évidence et le protocole expérimental qui est montré de manière explicite. Cet exemple sera repris dans un chapitre ultérieur pour développer les concepts de montage et de protocole dans la démarche expérimentale en Mathématiques, puis dans un autre chapitre pour voir comment la connaissance précise de ces notions peut permettre de générer une ingéniérie didactique dans un enseignement voulant intégrer les nouvelles technologies par le biais de l'expérimental.

Le second exemple a aussi été monstratif mais il a utilisé un niveau de connaissances mathématiques supérieur. Il a montré comment on pouvait programmer un saut aléatoire d'un point d'une grille à l'un des points voisins grâce à une macro. Il a montré la simulation d'une promenade aléatoire sur une grille. On a montré comment on pouvait créer un nouvel outil en enchaînant 10 fois d'affilée la précédente macro.



Ce second exemple avait pour but de présenter ou re-présenter au public des outils plus sophistiqués comme les transformations ou la calculatrice (tout en montrant évidemment une utilisation originale de Cabri). Il était important que la notion de macro soit bien comprise car elle allait être utilisée dans le troisième exemple qui va faire l'objet principal de ce chapitre.

Là encore le compte-rendu de cet exemple dans les actes insiste sur les notions de montage et de protocole dans l'expérience présentée dans le Micromonde Cabri.

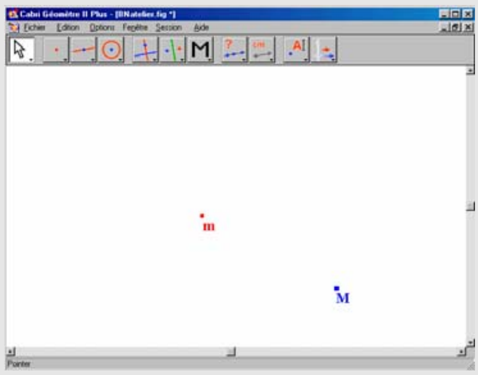
Le troisième exemple est celui qui a été proposé au cours des dernières 45 minutes de cet atelier et qui contrairement aux deux premiers a vu le public nous piloter pour les manipulations qu'il désirait voir réaliser. Nous avons donc été le **sherpa** du public expert, dégageant ainsi les expérimentateurs des connaissances spécifiquement techniques pouvant parasiter leurs initiatives. Nous allons, dans le paragraphe suivant, décrire le déroulement de cette recherche puis, dans un paragraphe ultérieur, analyser les différentes phases de cette recherche et voir si la démarche utilisée est conforme à la caractérisation formelle proposée dans le chapitre précédent.

2. DÉROULEMENT DE LA RÉSOLUTION DE LA BOÎTE NOIRE PROPOSÉE (compte rendu)

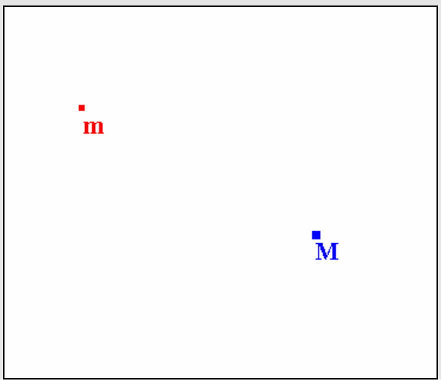
Le mot résolution doit être pris dans l'acception suivante : **suite des actions et des discours développés** par le public pour essayer de découvrir une transformation cachée. Ce mot n'indique en aucun cas que la solution va être trouvée, c'est-à-dire que le problème va être résolu. Il est à noter que le fait de travailler dans l'environnement Cabri, nous empêche de résoudre ***in fine*** le problème mais force les chercheurs expérimentateurs qui pensent aboutir, à des tentatives de validations qui permettent de mieux comprendre les dernières phases de la décomposition proposée au chapitre précédent.

2.1. ENTRÉE EN MATIÈRE

Un fichier Cabri que j'ai préparé est ouvert et l'écran de l'ordinateur rétro projeté apparaît ; deux points m et M de couleurs et d'épaisseurs différentes. Ce sont les seuls présents sur la page Cabri (BNLIEGE.fig)



2.2. PROPOSITION DU PROBLÈME

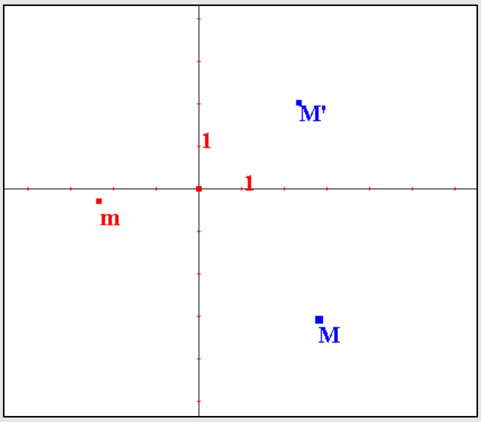


Je fais constater aux participants que je peux me saisir du point rouge m pour le tirer où je le désire, que le déplacement de m commande le déplacement de M et que je ne peux me saisir du point M. J'affirme que le point m a été transformé en M par une transformation que je connais et qui est cachée dans une macro-construction (outil que j'ai créé, transformant tout point de la page Cabri en son image par ma transformation cachée).

Le but du problème est la mise en évidence de cette transformation par tous les moyens qui seront proposés par les participants. Je me contenterai comme il a été dit plus haut, d'être le « sherpa » (dans le sens proposé par Luc Trouche). En réalité, je serai un peu plus puisque je précise que je demanderai à Cabri de réaliser toute manipulation possible à condition qu'elle soit suggérée par l'auditoire.

2.3. PREMIÈRE ATTAQUE

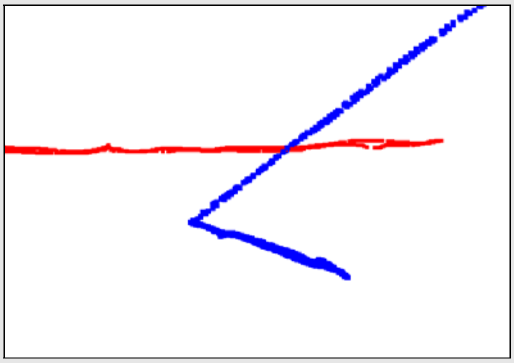
Le démarrage se fait sans hésitation ; la première proposition fuse : on me demande d'appliquer la transformation cachée au point image M pour voir s'il ne se transforme pas en m. L'expertise du public fait d'entrée de jeu prendre une initiative spécifique jusqu'alors jamais rencontrée auparavant : la transformation f vérifie-t-elle fof = identité ?
Je suis obligé pour ce faire de faire apparaître le système d'axes car ma macro construction admet ces axes comme objets initiaux et j'applique la macro à M pour obtenir M'.



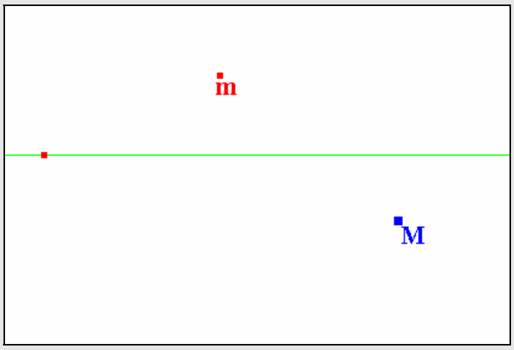
Le public peut constater que le point M' image de M n'est pas confondu avec m. Je tire le point m dans tous les sens de manière aléatoire sur la page sans pouvoir réussir à le superposer à M'. Je propose donc de cacher à nouveau les axes avant de continuer. On me demande aussi d'effacer le point M', ce que je fait.

2.4. SECONDE ATTAQUE

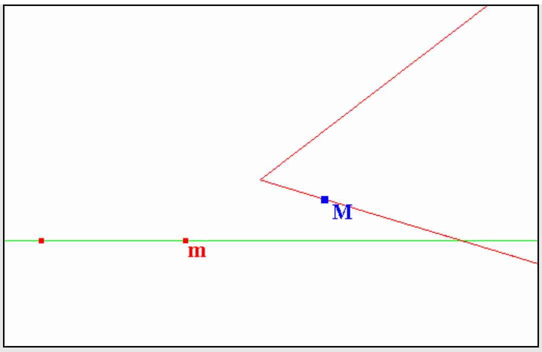
On me demande de déplacer horizontalement le point m après avoir préalablement activées les traces de m et M. On obtient le résultat ci-contre qui surprend le public.



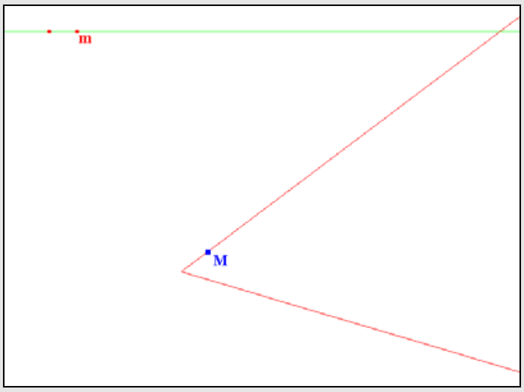
Il m'est demandé ensuite de faire apparaître l'image d'une droite, ce qui est réalisé de la manière suivante : On construit d'abord une droite qui apparaît ici horizontale.



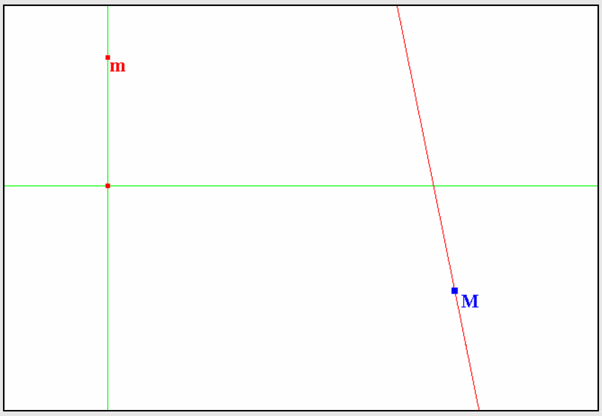
On redéfinit le point m comme point de la droite créée, je demande le lieu de M quand m varie sur cette droite et on voit donc apparaître l'écran de droite où cette image **semble** être constituée de la réunion de deux demi-droites de même origine.

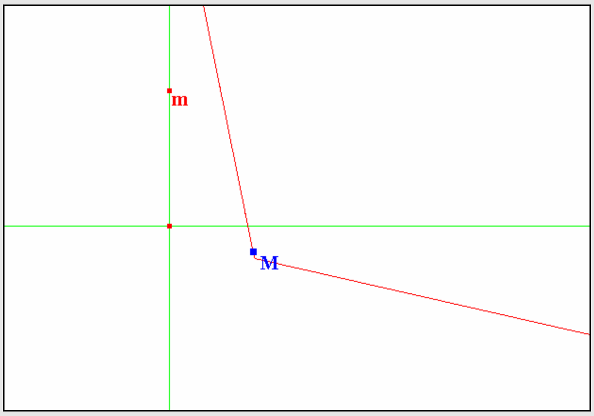


Il m'est demandé de déplacer la droite d'appartenance de m, ce que je fais en tirant sur le point initialement créé pour cette droite. Celle ci se déplace parallèlement à elle même et l'image change de position mais ne change pas de forme



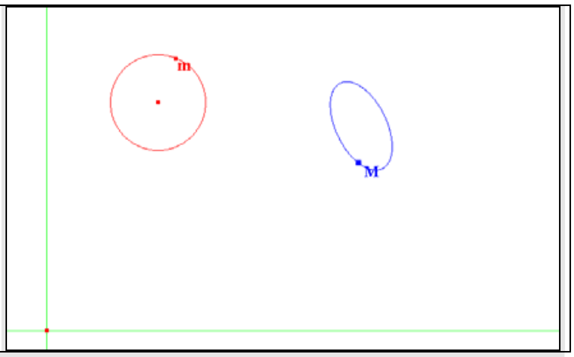
Le public désire ensuite voir apparaître l'image d'une droite perpendiculaire à la précédente. Je trace donc une droite perpendiculaire à la précédente et redéfinis le point m sur cette droite. L'image est réactualisée instantanément. Les deux écrans suivants montrent comment cette image peut changer suivant la position de cette perpendiculaire





Je sens mon public déstabilisé par l'originalité des images possibles mais son expérience en géométrie et son début d'expertise des outils spécifiques de logiciel lui fait proposer une autre initiative.

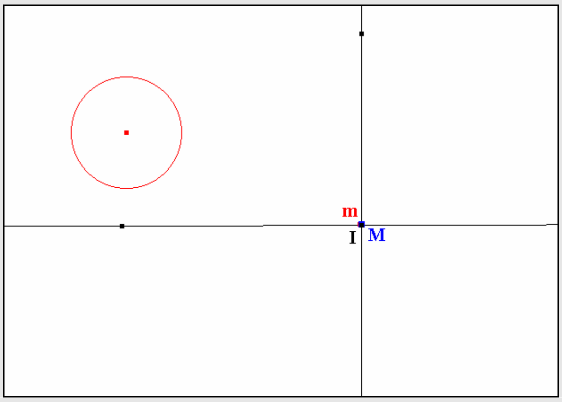
On me demande de déterminer l'image d'un cercle. Je construis donc un cercle et redéfinis le point m sur ce cercle pour faire apparaître son image qui a la forme ovale que l'on voit ci à droite. On me fait tourner m sur son cercle d'appartenance et le public constate que son image M tourne dans le même sens sur sa courbe image qui est qualifiée par certains d'ellipse.

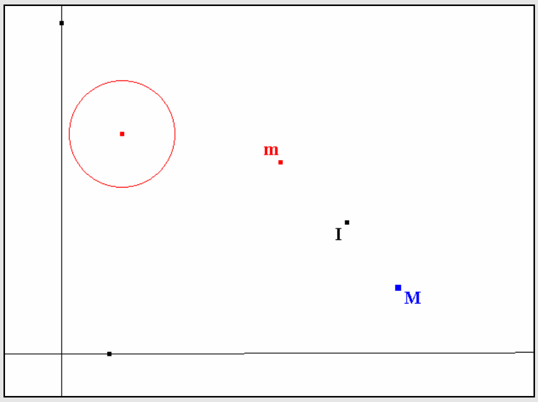


La piste de recherches d'images d'objets classiques, droites et cercles dans des configurations particulières est soudainement abandonnée.

2.5. LA PISTE DES POINTS INVARIANTS

Le public me demande de libérer le point m pour essayer de le mouvoir jusqu'à une position où il pourra être superposé à son image. Le guidage est rapide et efficace. Le public s'accorde rapidement pour privilégier un point qu'on me demande de marquer. Pour cela j'adopte l'attitude de « sherpa amélioré » en donnant une construction qui me permet de tracer un point repérant cette position particulière de m. Il suffit de tracer une première droite passant par un premier point puis une seconde droite passant par un second point (ces deux droites ont été créées pratiquement perpendiculaires sur l'écran qui suit). Il suffit ensuite de les positionner en sorte qu'elles se coupent sur la position voulue, de créer leur point d'intersection I puis de redéfinir ce point comme un point libre donc ne dépendant plus des droites qui ont servi à le créer.

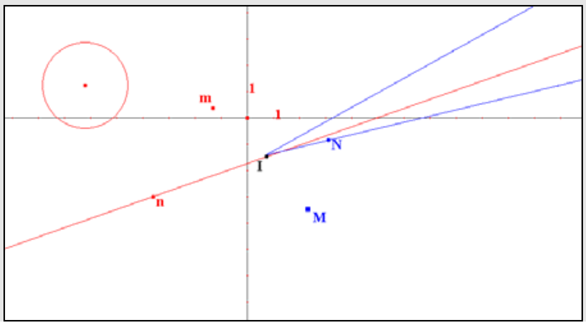




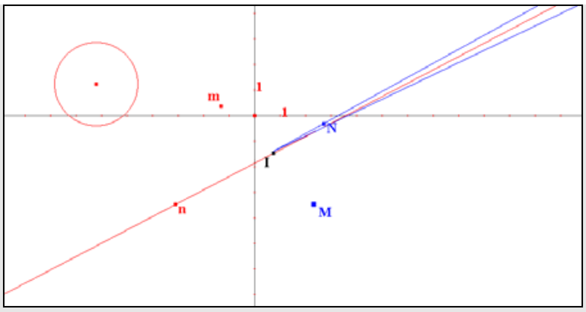
Sur le dernier écran, on a tiré sur le point m pour l'écarter de cette position particulière, laissant apparaître le point I qui semble être un point invariant de la transformation.

2.6. RETOUR A DES RECHERCHES D'IMAGES DE DROITES

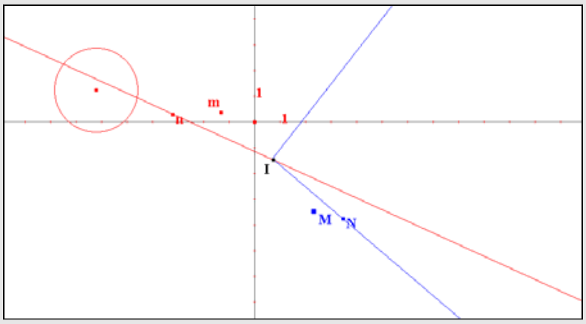
Il m'est demandé immédiatement après de déterminer l'image d'une droite passant par ce point I. On en trace donc une sur laquelle on crée un point générique n à qui on applique la macro pour obtenir son image N. Le lieu de N nous donne l'image désirée.



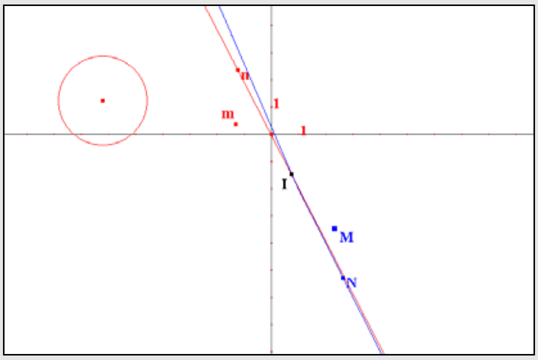
On me demande ensuite de faire pivoter cette droite autour de I ; on arrive à faire se rapprocher notre paire de « demi-droites » de la droite d'appartenance de n.



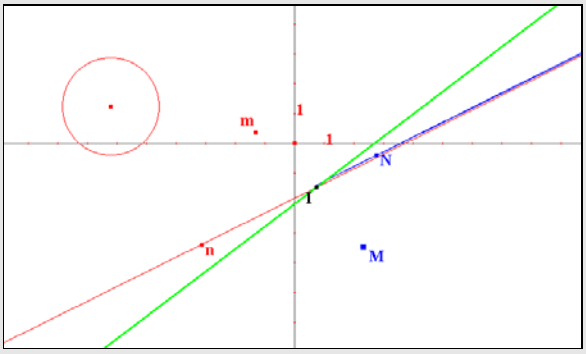
On me fait continuer cette exploration comme suit :



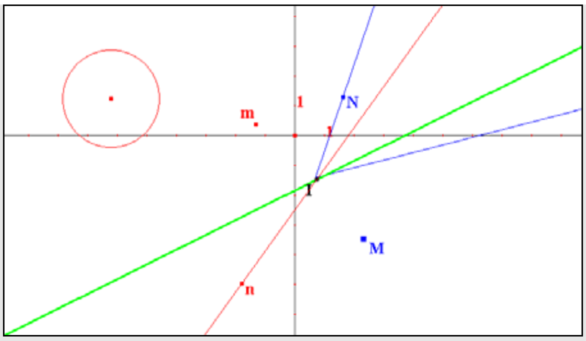
On essaie ensuite de me faire trouver une position où la droite donnée se superpose à son image :



On me fait ensuite revenir à la position précédente où l'image de notre droite semblait être une demi-droite. On me demande de tracer la droite (passant par I) sur laquelle notre droite et son image semble être incluses.

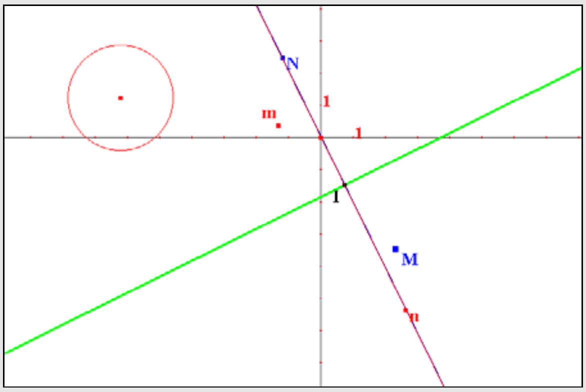


On a donc tracé une droite quelconque verte passant par I.



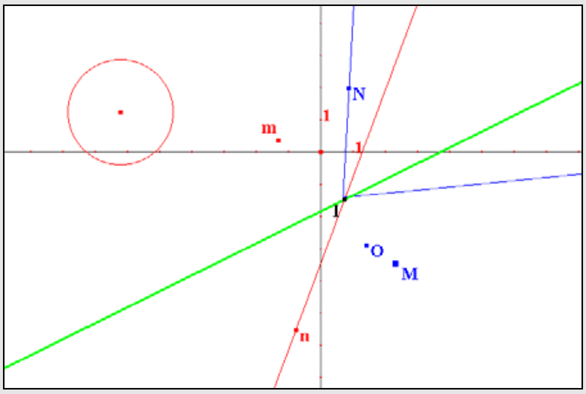
On a fait pivoter cette droite jusqu'à la position recherchée puis on a écarté la droite d'appartenance de n laissant bien visible la droite désirée.

On me fait à nouveau pivoter la droite rouge jusqu'à la position où son image se superpose à elle :



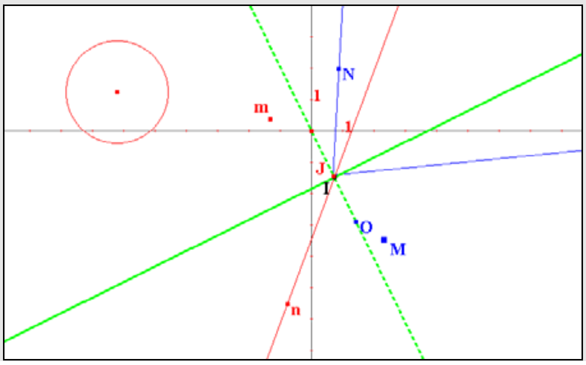
On fait remarquer qu'on obtient une droite ayant direction orthogonale à la direction verte semblant passer par l'origine o du repère et que la restriction de la transformation cherchée semble être une symétrie par rapport à la droite verte.

Pour valider cette conjecture, on me demande d'écarter la droite rouge pour construire l'image de l'origine o par la transformation cachée en appliquant la macro qui la cache. On obtient le point O :



La conjecture semble validée visuellement. On me propose quand même de construire le milieu du segment [oO]. On trouve le point J qui semble se superposer à I.

Je note qu'on ne me demande pas de mesurer l'angle fait par la droite verte et [oO], mais de tracer la droite (oO) qui apparaît ici en pointillés

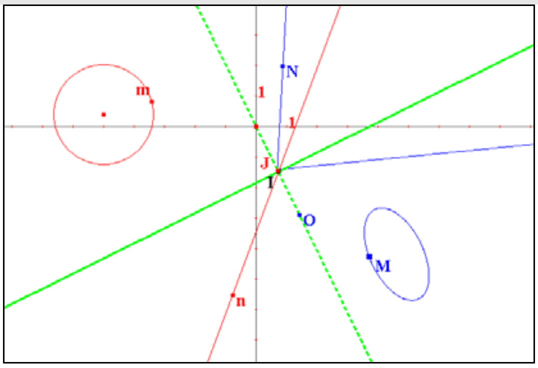


L'attention du public se concentre maintenant sur le cercle qui avait été laissé de côté. La suite va montrer que les participants vont essayer d'établir un lien entre ces images et les droites précédemment mises en évidence.
………………………..

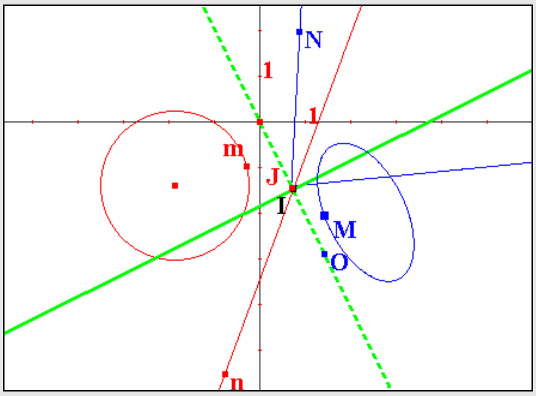
2.7. RETOUR À DES RECHERCHES D'IMAGES DE CERCLES

La proposition d'investigation qui est faite est la suivante : trouver l'image d'un cercle centré en I. Pour cela, nous avons été amenés à faire dans l'ordre les manipulations qui suivent :

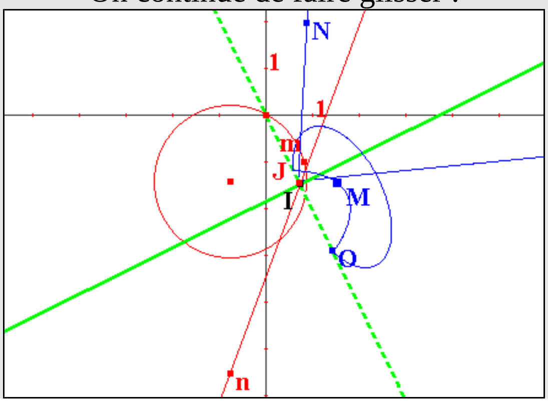
On commence donc par redéfinir le point m comme un point du cercle oublié et on voit donc apparaître son image en bleu qui a une forme ovale :



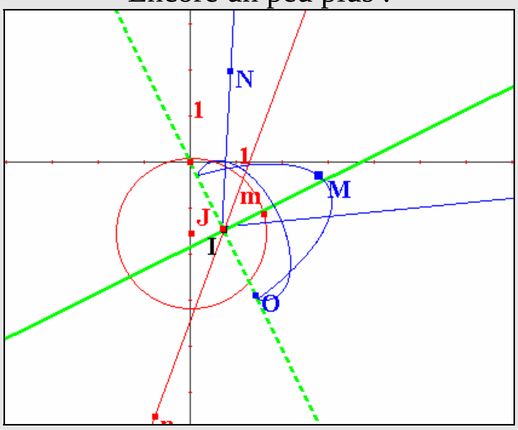
Ensuite on se saisit du centre pour faire glisser le cercle rouge ; on voit simultanément son image évoluer :



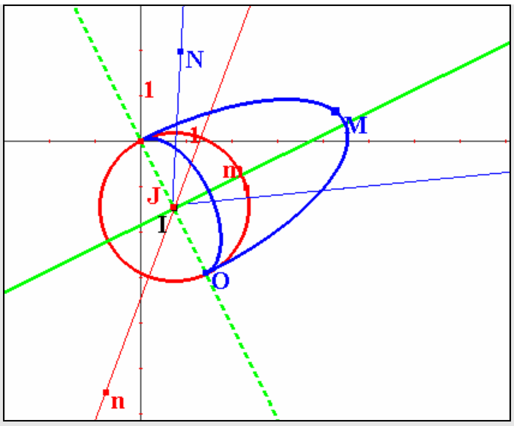
On continue de faire glisser :



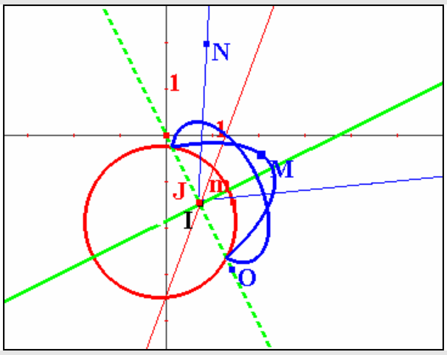
Encore un peu plus :

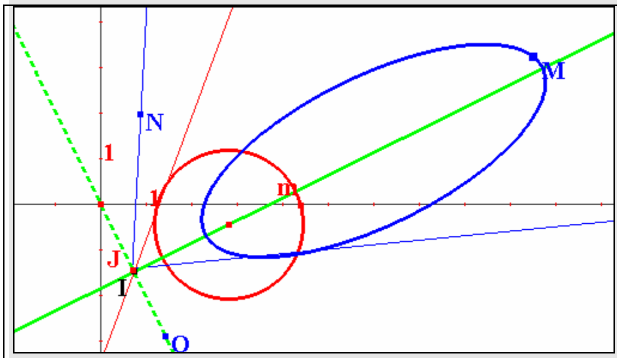


La surprise est déjà grande ; elle augmente encore plus quand on arrive à la position recherchée :



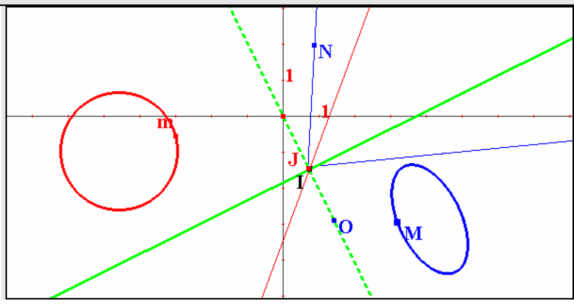
Surprise mais pas découragement car vraisemblablement la symétrie de la figure incite les participants à proposer de faire glisser ce cercle le long de la droite verte. On obtient pour commencer :





Cet écran a été obtenu quand on a fait glisser le centre vers la droite. Certains participants prononce le mot d'affinité dans des affirmations du type « il y a une affinité », « ça contient une affinité » et d'autres que je n'ai pu percevoir.

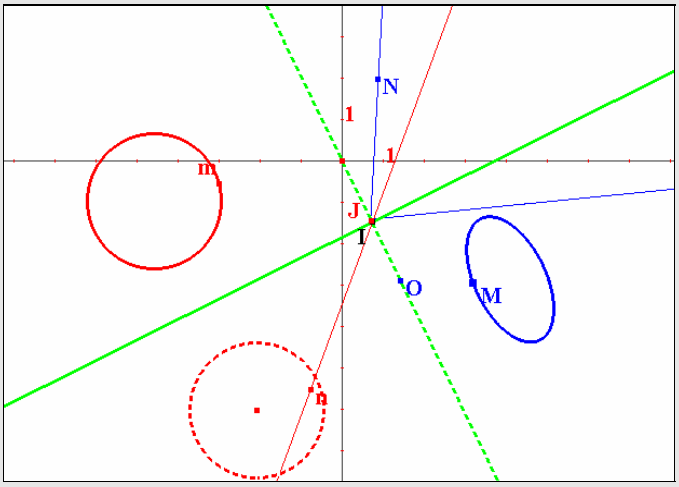
Immédiatement après cette manipulation, il m'est demandé de repositionner le cercle à sa position initiale. L'écran obtenu est le suivant :



Cette fois c'est le mot symétrie qui surgit : on m'évoque une symétrie axiale d'axe la droite verte.

2.8. UNE DERNIÈRE CONSTRUCTION-INVESTIGATION POUR ESSAYER D'ABOUTIR

Cette évocation est suivie quasi instantanément de la demande de construction du symétrique du cercle de départ par rapport à cette droite verte. Le cercle obtenu est dessiné ci-dessous en pointillés.



Le temps qui était imparti à cet atelier étant dépassé, nous décidons de mettre fin à la recherche.

2.9. QUELQUES REMARQUES EN GUISE DE CONCLUSION PROVISOIRE

2.9.1. Quelques remarques brutes

La boîte noire n'a pas été solutionnée, mais :

Des initiatives ont été prises, variées et en liaison forte avec les connaissances mathématiques du public, ses réflexes mais aussi ses connaissances du logiciel (notons que la première partie de l'atelier, très monstrative a permis une instrumentation accélérée de ce public particulier).

Les investigations menées se sont assez rapidement enchaînées de manière structurée après une phase d'accumulations de données.

Les conjectures pensées n'ont jamais été explicitées de manière claire.

Les validations ont souvent été du type visuel et rarement du type visuel-abstrait dans le micromonde Cabri (par exemple on n'a pas essayé pour valider une hypothèse de symétrie axiale, de vérifier les propriétés mathématiques caractérisant le fait que deux points étaient bien disposés de manière symétrique, c'est-à-dire une propriété de distance et d'orthogonalité).

Le temps limité de cette recherche peut expliquer les remarques faites dans les lignes qui précèdent.

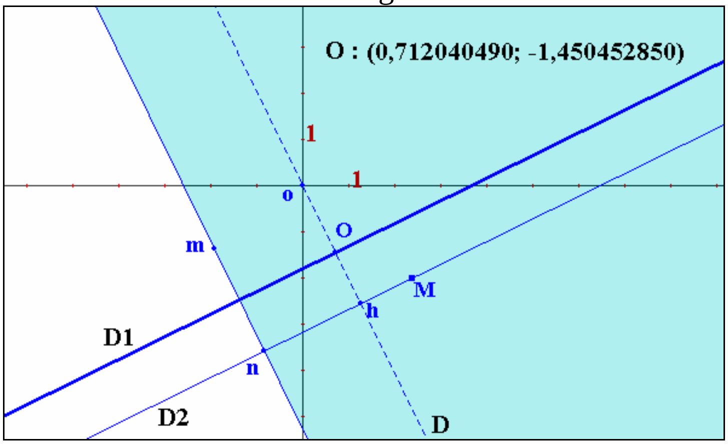
La transformation cachée était définie comme suit :

Dans le repère par défaut de Cabri d'origine o, on donne d'abord le point O par des coordonnées choisies arbitrairement mais qui restent fixes ; on donne la droite D = (oO) puis la droite D1 qui lui est perpendiculaire en le milieu I de [oO]. La transformation cachée est la composée de la symétrie orthogonale u par rapport à D1 par la transformation v ainsi définie :

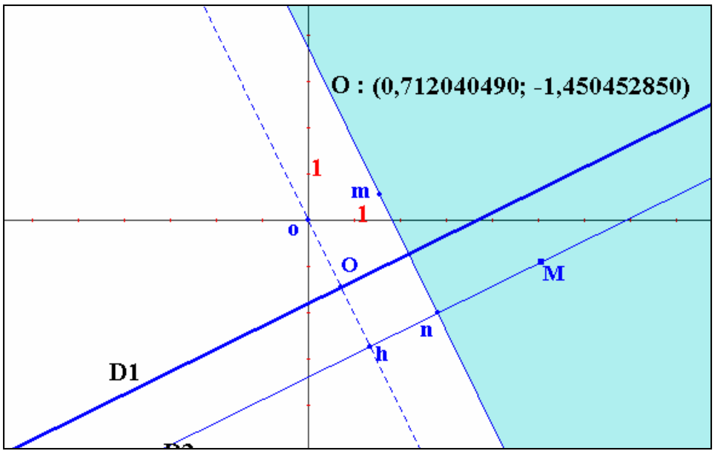
V : n $\longrightarrow$ M où (nM) est perpendiculaire à D en h, où h est le projeté orthogonal de n sur D, où nM = $\frac{3}{2}$.nh et où M est situé dans le demi-plan bleu bordé par (nm) (plan supérieur droit).

Les deux figure ci-dessous figure ci permettent d'envisager les deux cas de figures pour la construction de M :

Cas où m est situé à gauche et sous D :



Cas où m est situé à droite et sur D :



2.9.2. Les objectifs de cet atelier

Les objectifs immédiats étaient de montrer :

♦qu'une instrumentation à l'outil Cabri était possible à partir d'une recherche de boîte noire menée en commun, y compris avec un public d'experts en géométrie sous la forme d'un « **débat argumentatif** » (à distinguer du débat scientifique de Marc Legrand puisque celui qui propose le problème n'intervient à aucun moment pour orienter la recherche ou la recadrer) ;

♦qu'une dévolution rapide de tels type de problèmes pouvait être obtenue avec un groupe non guidé ;

♦qu'une démarche expérimentale effective se met en place avec un débat scientifique particulier (que nous avons qualifié de « **débat argumentatif** ») qui prend une forme originale et riche : c'est un dialogue où chaque question est une proposition d'investigation et chaque réponse ou critique en est une autre qui vient lui répondre comme un écho déviant ou amplificateur. La démarche déjà observée de multiples fois avec des publics de tous âges et de tous niveaux est confirmée avec un public expert en géométrie.

Les objectifs plus profonds :

Cet atelier a constitué pour nous une validation des hypothèses que nous avons formulées sur la caractérisation formelle d'une démarche expérimentale en Mathématiques. La suite de ce chapitre aborde l'analyse de la résolution telle qu'elle a été menée dans cet atelier. Il conclura sur l'adéquation d'une telle décomposition avec des aménagements qui seront précisés. Une telle décomposition pourra prendre la forme d'une grille de lecture et d'analyse de démarches expérimentales. L'utilisation de cette grille permettra ***in fine*** de mieux réfléchir à une ingéniérie didactique intégrant l'expérimental dans l'enseignement des Mathématiques et dans la conception de problèmes plus consistants que les problèmes fermés qui sont le lot des évaluations dans notre système éducatif.

2.9.3. En guise de conclusion

La tâche de résolution de problème nécessite la connaissance de techniques qui sont le plus souvent données pour ne pas laisser l'élève perdu au milieu de l'océan des théorèmes. Les problèmes de boîtes noires donnent l'occasion à l'élève de :

♦ ne pas exiger les techniques qui habituellement lui sont indispensables,

mais au contraire de

♦ se livrer librement à des investigations en liaison avec des techniques auxquelles il fera appel spontanément, c'est-à-dire d'être réellement actif au sens mathématique du terme.

Notre devoir est de réfléchir à la manière dont la transposition didactique des notions abordées par ce biais se met en place. Il ne faudrait pas que des schèmes d'usages se mettent en place de manière sauvage dans ce type de démarche, la démarche expérimentale où l'induction a la place importante que lui reconnaissait Polya il y a plus de cinquante ans. Les protocoles expérimentaux des sciences expérimentales se retrouvent dans la démarche expérimentale en mathématiques dans les méthodes d'investigations, les procédures pilotées par le professeur : on retrouve donc l'instrumentation qui peut concerner les outils abstraits comme les outils technologiques.

3. ANALYSE DE LA DÉMARCHE DE RÉSOLUTION DE LA BOÎTE NOIRE PROPOSÉE (avec mise en évidence des phases formalisées au chapitre précédent)

3.1. Phase 1 (phase de recherche erratique)

3.1.1. Le malentendu didactique :

Au « 2.3. Première attaque », on a l'impression que le public a reçu ce problème comme un défi, une défiance vis à vis des connaissances qui sont les leurs et qui devraient leur permettre de résoudre le problème ; leur attaque est plus une attaque contre celui qui propose le problème que contre le problème à résoudre. Cette attaque originale du public (c'est la première fois qu'une telle attaque nous a été proposée dans des situations du genre de celle de ce jour), avait pour but et ceci n'est évidemment que notre interprétation de nous montrer que :

♦son niveau d'expertise était non seulement réel mais élevé dans le domaine des transformations. Ses premières actions peuvent donc être interprétées comme des actes ostensifs à cet égard ;

♦ le public avait perçu notre problème comme un problème ayant pour objectif de mettre en défaut ses compétences mathématiques en les faisant « sécher ». Sa première initiative va donc consister à se saisir immédiatement de la figure donnée de manière opérationnelle montrant ainsi son aptitude à dégager des caractéristiques heuristiques fortes de la figure manipulable.

♦ les connaissances théoriques les plus élevées devaient être considérées comme connues et surtout opérationnelles. Il se place donc unilatéralement au niveau G3 montrant ainsi qu'il va visualiser rapidement un invariant important pour la résolution.

Le malentendu didactique est ici patent : le public pense que nous attendons une réponse, si ce n'est la réponse. Il veut donc montrer qu'il entre très rapidement dans la phase de découverte en se plaçant dans un niveau de géométrie qui est au moins G2, en appréhendant la figure essentiellement de manière opérationnelle. Il veut se convaincre qu'il est capable d'entrer très rapidement, au moins dans une phase d'analyse synthèse expérimentale qui selon notre proposition de décomposition de la démarche expérimentale serait une phase avancée de cette démarche. Son expertise dans un domaine qu'il circonscrit aux transformations « classiques » du plan ne doit pas être mise en doute.

3.1.2. Mise en place d'une expérience (montage, protocole, exploration, interprétation)

Cette attaque consiste donc en la mise en place d'une expérience comme suit :

Expérience 0
Montage ou construction *: ce montage est mis en place en liaison avec les connaissances spécifiques de ceux qui conçoivent ce montage (connaissance ou reconnaissance de transformations f admettant des points m vérifiant (fof)(m)=m). On construit donc l'image de m par f, soit f(m).*
Protocole *: ici ce protocole n'est pas explicite ; c'est nous-même qui le prenons en charge en décidant que celui-ci était implicite alors que la proposition faite au départ était de rechercher si le point M pouvait être confondu avec son image.*

Le mot « protocole » est peut être utilisé ici de manière abusive dans la mesure où celui-ci est plutôt réservé à une succession d'actions prévues à l'avance qui doivent conduire à un résultat connu de l'expérimentateur. Disons simplement que cette succession d'actions ne prendra le statut de protocole que si celle-ci conduit à une inférence claire. La reproductibilité de cette succession d'actions avec la reproductibilité des interprétations inférentes est la caractéristique de ce que nous appellerons « protocole expérimental ». Ici donc, le protocole est simplement une PROPOSITION D'EXPLORATION dans une direction donnée avec des manipulations imposées et une interprétation ouverte.

Exploration (recherche de données interprétables) *: faite par nous, elle ne montre pas qu'on peut trouver sur la page Cabri des points répondant à la condition (fof)(m)=m*
Interprétation *: ici l'interprétation est inexistante ; le public espérait circonscrire ses recherches à une famille de transformations connues mais en réalité, il aboutit à un cul-de-sac.*

On pouvait ainsi penser que d'entrée, nous nous situions déjà dans une phase avancée de la recherche, la **phase de recherche ordonnée et peut-être d'accélération**.

Notons que nous entrons involontairement mais fugacement dans le jeu du public puisque nous tirons le point m dans tous les sens pour montrer que le point (fof)(m) n'arrive pas à être positionner sur m comme on voulait essayer de l'obtenir. Ceci était notre manière de recentrer le contrat pour replacer les participants dans une activité mathématique de laquelle le sherpa devait être exclu. C'était un moyen d'obtenir la dévolution du problème en dehors de tout rapport personnel à celui qui le propose. Nous avons donc, sans le vouloir, introduit une mini-dose de débat scientifique avant de revenir à notre débat plus particulier, le débat argumentatif

3.1.3. Reconnaissance de la phase de recherche erratique

En tout état de cause, le fait que la partie interprétative soit vide montre qu'en réalité, nous sommes déjà dans la phase de recherche erratique. Une action demandée par le public, « effacer le point M' » avant de continuer, montre aussi que l'exploration suivante sera indépendante de l'exploration qui vient de s'achever. Cette action est une **matérialisation d'un lien inférentiel faible**, caractéristique de l'appartenance de nos initiatives à la phase de **recherche erratique**.
Cette seconde attaque dans « 2.4. Seconde attaque », va se matérialiser dans G1 ; elle va nous montrer qu'en réalité nous sommes en pleine phase de recherche erratique.

Expérience 0'
Le montage *va consister en l'activation des traces de m et M de deux couleurs différentes.*
Le protocole *va consister en la proposition du dragage de m à la souris le long d'une direction approximativement horizontale pour observer la trace décrite par l'image.*
L'exploration *va consister en l'application du protocole.*
L'interprétation *elle, va consister en la « lecture mathématique » du graphique qui s'est « tracé » ; ce que l'on voit a la forme approximative d'un V pivoté de 90° vers la droite autour de sa pointe. Cette lecture mathématique n'est pas faite de manière explicite mais on peut la deviner grâce à la proposition d'investigation suivante qui demande de faire apparaître l'image d'une droite, c'est-à-dire qui demande explicitement de passer de G1 à G2.*
Ce que l'expérimentateur obtient *donc comme données expérimentalement collectées, ce sont des points approximativement alignés d'une couleur et leurs images disposées suivant une ligne brisée ressemblant à un V d'une autre couleur.*
Ce que l'expérimentateur imagine-conjecture-interprète*, c'est que l'image de la droite approximativement tracée est la réunion de deux demi-droites de même origine.*

Le lien inférentiel qui va annoncer le prochain maillon n'est plus un lien inférentiel faible puisque la phase interprétative qui s'achève n'est pas vide mais elle va précéder une exploration plus structurée autour du thème des images de droites par la transformation inconnue. Ce lien inférentiel est le premier lien inférentiel qualifié de normal dans cette recherche. Il symbolise la première rupture vers une phase de recherche ordonnée.

3.1.4. Niveaux de géométrie

	Recherche erratique
Dans notre expérience	Investigations d'abord dans G2 puis G1 par notre intermédiaire. Interprétations dans G1 ou plutôt un niveau G0 avec lecture dans G1.
Dans notre modèle	Investigations plutôt privées dans G1. Interprétations dans G0 ou un G1 appauvri.

3.1.5. Appréhensions figurales et cadres d'investigation

Expérience 0	**Expérience 0'**
Appréhension séquentielle Appréhension opératoire positionnelle	Appréhension opératoire positionnelle Appréhension perceptive Appréhension discursive

Cadre de modélisation 2B Cadre d'ingéniérie 3A	Cadre de modélisation 2C

3.2. Phase 2 (phase de recherche ordonnée)

3.2.1. L'accroche :

La proposition de déterminer l'image d'une droite va nous amener dans G2. Le résultat de l'exploration précédente faite « à la main » dans G1 a été interprétée implicitement comme un point de départ pertinent pour une exploration plus ordonnée :

Plus ordonnée d'abord dans le sens de la **rigueur** : la droite dont on va chercher l'image est une droite du modèle informatique de notre géométrie euclidienne, le Cabri-modèle. Les utilisateurs perçoivent la pertinence de ce Cabri-modèle à partir d'éléments subjectifs et pourtant prégnants : le tracé obtenu par l'outil droite est plus précis que celui obtenu par tirage d'un point dont la trace est activée. La droite tracée avec l'outil « droite » est donc une vraie droite sur laquelle les calculs faits par Cabri sont plus recevables.

Plus ordonnée aussi dans le sens d'une unité de recherche autour d'un thème qui a été choisi par l'accroche précédemment citée.

3.2.2. Enchaînement de maillons exploration-interprétation autour d'un thème :

Expérience 1

Montage : *en réalité on modifie et aménage le montage précédent ; on trace une droite qu'on peut disposer « horizontalement », on redéfinit le point m pour qu'il appartienne à cette droite.*

Protocole : *il consiste à demander le lieu de M quand m décrit la droite à laquelle il appartient puis à déplacer la droite parallèlement à elle même. Cette exploration doit être décrite et d'éventuelles interprétations faites.*

Exploration : *quand les actions prévues par le protocole sont exécutées, il apparaît d'abord le lieu des images qui prend encore la forme d'un V dans la même position que dans l'expérience précédente. Notons qu'aucune conclusion n'est tirée oralement : ce que l'on visualise l'est dans un G1 informatique. Cette visualisation a* ***de facto*** *un statut de vérité cautionné par des actions dans l'environnement Cabri.*

Interprétation : *il n'y a en effet pas de doute dans l'esprit des participants au sujet de la nature géométrique des images obtenues qui sont considérées comme des réunions de demi-droites ou des droites. Aucune validation au niveau G2 n'est réalisée : on pourrait envisager de tracer une droite passant par deux points d'une supposée demi-droite et tester l'appartenance de M à la droite tracée quand m est tiré sur sa droite d'appartenance.*

On pourrait croire à ce moment précis retomber dans la phase de recherche erratique puisque les interprétations faites restent stériles concernant une éventuelle conjecture. Néanmoins, l'expérience suivante qui est proposée reste bien dans une continuité thématique de l'expérience précédente. **La liaison est bien une liaison inférentielle de type normal**. Au lieu de déterminer des images de droites on va passer à des tentatives de détermination d'images de cercles.

Expérience 2 :

Montage : *on aménage à nouveau le montage précédent ; on trace un cercle et on redéfinit le point m pour qu'il appartienne à cette cercle.*

Protocole : *il consiste d'abord à observer l'influence de la modification du montage sur l'effet de notre transformation puis à faire tourner m sur son cercle d'appartenance pour observer le mouvement de son image sur l'image visualisée du cercle (remarque : s'il est*

envisagé de faire se mouvoir m, il n'est envisagé, ni de déplacer le cercle en tirant sur son centre ni de changer le rayon du cercle en tirant sur l'un de ses points afin d'accumuler des données qui, une fois interprétées, pourront générer des liens inférentiels du moins normaux, sinon forts)
Exploration : *quand m est redéfini sur le cercle, l'image du cercle est réactualisée suivant un « ovale » et M tourne dans le même sens que m.*
Interprétation : *l'ovale est interprété par certains comme une ellipse ; de l'ovale de G0/G1, on passe à l'ellipse de G2 sans aucune validation (une validation aurait consisté à tracer une conique passant par cinq points de cet ovale et à tester l'appartenance de M à cette conique que Cabri aurait reconnu comme une ellipse si cela « était » le cas).*

L'interprétation pauvre dans G2 conduit les participants à revenir à la phase de recherche erratique pour tenter à nouveau une autre piste dans une thématique différente.
L'initiative qui consiste à désolidariser le point M du cercle pour aller s'intéresser aux éventuels points invariants de la transformation, matérialise un lien inférentiel faible liant un maillon dont l'interprétation n'a pas permis de progresser à un maillon où l'exploration est d'un autre type. Ce lien est un lien qui n'avait pas été prévu par le modèle sur lequel nous travaillons dans la mesure où ce lien inférentiel faible permet de revenir à une phase positionnée en amont. On pourrait pour distinguer ce lien inférentiel de ceux prévus par le modèle, le qualifier de **lien inférentiel faible régressif**.

3.2.3. Niveaux de géométrie

	Recherche ordonnée
Dans notre expérience	Investigations publiques dans G1 Interprétations dans G1 ou G2, mais sans validation dans G2
Dans notre modèle	Investigations publiques dans G1 Interprétations dans G1 avec de possibles retours dans G0

3.2.4. Appréhensions figurales et cadres d'investigation

Expérience 1	**Expérience 2**
Appréhension séquentielle Appréhension opératoire positionnelle Appréhension perceptive	Appréhension séquentielle Appréhension opératoire positionnelle Appréhension perceptive
Cadre de modélisation 2C	Cadre de modélisation 2B

3.3. Phase 3 (retour à une phase de recherche erratique)

Expérience 3 :
Montage : *on revient au montage initial, c'est-à-dire la figure de base proposée.*
Protocole : *on doit tirer le point m à la souris jusqu'à une position où il coïncide avec son image M, on doit ensuite marquer sur la page Cabri un point à cet emplacement.*
Exploration : *un tel point semble exister même si sa position est repérée par essais de positions successives. La* ***tâche*** *de repérage-marquage de ce point est réalisée suivant une* ***technique*** *spécifique à l'environnement Cabri (possibilité de redéfinition). Cette technique a été donnée à l'auditoire qui n'aurait pu l'utiliser autrement. Notons que cette partie peut être*

comparée à la phase de réglage en sciences expérimentales où on cherche à fixer certains paramètres de l'expérience. Ici ce sera la position particulière d'un point « invariant » en vue d'une utilisation ultérieure dans une autre expérience.
***Interprétation** : le public acquiert la « certitude » que la transformation proposée admet bien un point invariant simplement de manière visuelle. La superposition approximative de deux points qui intervient dans G1 est automatiquement interprétée comme une propriété de G2. Cette certitude est une certitude de circonstance ; elle permet de faire comme si, pour avoir un point d'ancrage pour une recherche dans G2.*

Cette « certitude » va inférer à nouveau un lien inférentiel normal pour refaire basculer la recherche dans une phase de recherche ordonnée fortement connectée à l'existence de ce point particulier. Ce lien est donc à nouveau un lien de rupture entre deux phases.

Nous pouvons remarquer que la mise en évidence de ce point invariant aurait pu se faire dès la première attaque ; cela n'a pas été le cas car l'exploration n'a pas été systématique et le tirage du point m a été réalisé en se concentrant sur (fof)(m). Nous nous sommes donc trouvé dans une situation analogue à celle que Glaeser qualifie de « solution inaperçue ».

3.3.1. Niveaux de géométrie

	Recherche erratique
Dans notre expérience	Investigations dans G1 informatique Interprétations dans G2, mais non validées dans G2
Dans notre modèle	Investigations plutôt privées dans G1 Interprétations dans G0 ou un G1 appauvri

3.3.2. Appréhensions figurales et cadres d'investigation

Expérience 3
Appréhension opératoire positionnelle Appréhension perceptive Appréhension discursive
Cadre d'ingéniérie 3A

3.4. Phase 4 (nouvelle bascule vers une phase de recherche ordonnée)

3.4.1. Images de droites passant par le « point » invariant I

Expérience 4 :
***Montage :** on écarte le cercle inutile ainsi que les deux droites ayant servi à positionner I du champ expérimental. On trace une droite passant par I (qui pourra donc pivoter autour de I). On place un point n sur cette droite (ce point décrira cette droite et seulement cette droite) ; on détermine son image N en utilisant la macro cachant notre transformation ;*
***Protocole :** demander le lieu de N quand n décrit sa droite d'appartenance. Faire pivoter la droite d'appartenance de n pour observer l'évolution des images de cette droite. Repérer des positions de superpositions même partielles de la droite et de son image*

Exploration : *naturellement, on voit l'image en V se déformer, avec ses branches qui se rapprochent jusqu'à se confondre en une demi-droite ou qui s'écartent jusqu'à former une droite. On trace une* ***droite verte*** *au premier emplacement repéré. Pendant cette phase, le repère par défaut de Cabri est apparent (il a servi à l'utilisation de notre macro pour la détermination de l'image de n).*
On repère la seconde position particulière de la droite d'appartenance de n, où celle-ci se superpose à son image. On observe que cette droite semble passer par l'origine du repère et même qu'elle a l'air orthogonale à la première.
On arrive au cours de cette exploration à émettre la première conjecture.
Interprétation *: ce qui est observé conduit le public à conjecturer que la restriction de notre transformation à la droite repérant cette seconde position (qui semble être confondue avec la droite joignant o et son image) est la symétrie orthogonale par rapport à la droite verte.*

3.4.2. Niveaux de géométrie

	Recherche ordonnée
Dans notre expérience	Investigations dans G1 informatique Interprétations dans G1
Dans notre modèle	Investigations publiques dans G1 Interprétations dans G1 avec de possibles retours dans G0

3.4.3. Appréhensions figurales et cadres d'investigation

Expérience 4
Appréhension séquentielle Appréhension opératoire positionnelle
Cadre de modélisation 2C

3.4.4. Premier lien inférentiel fort, première sous-conjecture :
La **conjecture** faite est la matérialisation du premier lien inférentiel fort qui va faire basculer cette fois la recherche dans sa phase d'accélération.

3.5. Phase 5 (phase d'accélération de la recherche)

3.5.1. Mise en place d'une première expérience de validation d'une conjecture
On veut valider que la restriction à la perpendiculaire à la droite verte de notre transformation est la symétrie orthogonale par rapport à cette droite verte. L'expérimentation proposée va consister en une vérification de quelques conditions nécessaires dans G1 (visuel) avec une légère incursion dans G2 (vérification visuelle qu'un milieu déterminé par Cabri semble se superposer à I).

Expérience 5 :
Montage : *On prend la figure dans l'état où elle a été laissée. On détermine l'image O de o par notre transformation en utilisant la macro ; on trace la droite (oO) et on utilise l'outil milieu pour marquer le milieu du segment [oO].*
Protocole : *observer la position de (oO) par rapport à la droite verte ainsi que la position de I.*

Exploration : *l'observation visuelle confirme l'orthogonalité de (oO) avec la droite verte ; elle confirme aussi la superposition visuelle du milieu de [oO] avec le point I.*
Interprétation *: ce qui est observé rend plausible la conjecture émise au moment de la liaison inférentielle forte. Notons que cette plausibilité aurait pu être renforcée dans le domaine G1/G2 informatique par des vérifications portant sur d'autres points que o.*

3.5.2. Second lien inférentiel fort vers une cascade de conjectures :
Ce lien se matérialise par la focalisation de l'attention du public sur le cercle mis à l'écart du champ opératoire qui va être utilisé pour les expériences qui vont suivre.

3.5.3. Successions d'expériences vers la découverte :
Tout d'abord on se fixe pour objectif de déterminer l'image d'un cercle centré en I.
Expérience 6 :
Montage : *On redéfinit le point m sur le cercle mis de côté.*
Protocole : *Déplacer le cercle jusqu'à amener son centre sur I.*
Exploration : *un ovale apparaît comme l'image du cercle et cet ovale se brise dès que le cercle commence à traverser la droite en pointillés; on arrive à la position désirée qui incite une exploration non prévue dans le protocole l'ovale se recompose dès que le cercle se retrouve de l'autre côté de cette droite.*
Interprétation *: ce qui est observé surprend mais la symétrie de la figure va inciter le public à proposer une autre expérience.*

Le lien inférentiel fort entre ces deux expériences consiste à focaliser l'expérimentation sur des cercles plus particuliers que ceux qui avaient été utilisés auparavant.

Expérience 7 :
Montage : *Redéfinir le centre sur la droite verte.*
Protocole : *Déplacer ce centre le long de cette droite.*
Exploration : *la symétrie est conservée et la déformation de l'ovale dans la direction de la droite verte va pousser à une première conjecture.*
Interprétation *: le mot de conjecture est un peu fort à ce moment de la recherche mais néanmoins c'est le mot correct dans la mesure où le mot « affinité » est lancé sans autre précision, où on peut entendre « il y a une affinité ! ».*

Un autre lien inférentiel fort va générer le besoin de relire la figure de départ à la lumière de ce qui vient d'être vu ou imaginé.

Expérience 8 :
Montage : *Redéfinir le centre comme point libre.*
Protocole : *Ramener le centre à sa position initiale.*
Exploration : *sans qu'il soit fait d'autre manipulation, la visualisation du cercle et de son image à cette position initiale va encore générer une proposition qui n'était pas venue auparavant et qui donc a été provoquée par les manipulations faites dans l'expérience précédente.*
Interprétation *: cette fois la « symétrie orthogonale par rapport à la droite verte » est citée.*

Le dernier lien inférentiel fort qui va précéder la dernière expérience va consister à utiliser cette symétrie pour à nouveau réinterpréter les données de la figure.

Expérience 9 :
Montage : *construire l'image du cercle par la symétrie orthogonale d'axe vert.*
Protocole : *observer.*
Exploration : *observer.*
Interprétation *: aucune puisque l'atelier est arrêté à ce moment là.*

Nous sommes arrivés très près de la conjecture finale qui devait nous faire basculer dans la phase suivante qui n'aura donc pas été validée par cet atelier.

3.5.4. Niveaux de géométrie

	Accélération de la recherche
Dans notre expérience	Investigations dans G1 avec conjectures dans G2 Validations dans G1 avec des tentatives d'intrusion dans G2
Dans notre modèle	Conjectures publiques dans G2 Validations publiques dans G1

3.5.5. Appréhensions figurales et cadres d'investigation

Dans le tableau ci-dessous, nous utilisons l'abréviation « App. » pour « Appréhension »

Expérience 5	**Expérience 6**	**Expérience 7**	**Expérience 8**	**Expérience 9**
App. séquentielle App. perceptive App. discursive	App. opératoire positionnelle	App. opératoire positionnelle	App. opératoire positionnelle	App. séquentielle
Cadre de modélisation 2C	Cadre d'ingéniérie 3B	Cadre d'ingéniérie 3B Cadre scientifique 4D	Cadre de modélisation 2B Cadre scientifique 4D	Cadre de modélisation 2A …

4. PROPOSITION D'AMÉLIORATION DU MODÈLE À LA SUITE DE CETTE ANALYSE

4.1. Récapitulatif de l'analyse

Si on note « MPEI » le maillon quaternaire « Montage-protocole-exploration-interprétation », voici comment nous décomposons la démarche de notre public expert en nous servant du modèle exhibé dans le chapitre précédent :

PHASE 1 : PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

[Exp 0 : MPEI] **Lien Inf faible** [Exp 0' : MPEI]

Lien Inf Normal de rupture

PHASE 2 : PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

[Exp 1 : MPEI] **Lien Inf Normal** [Exp2 : MPEI]

Lien Inf faible régressif de rupture

PHASE 3 : PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

[Exp 3 : MPEI]

Lien Inf Normal de rupture

PHASE 4 : PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

[Exp 4 : MPEI]

Lien Inf Fort de rupture

PHASE 5 : PHASE D'ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE

[Exp 5 : MPEI] **Lien Inf Fort** [Exp6 : MPEI] **Lien Inf Fort** [Exp 7 : MPEI] **Lien Inf Fort** [Exp8 : MPEI] **Lien Inf Fort** [Exp9 : MPEI]

4.2. Validation des trois premières phases

Cette analyse conforte l'hypothèse de l'existence des trois premières phases, phase de recherche erratique, phase de recherche ordonnée et phase d'accélération de la recherche qui arrivent bien dans cet ordre. Nous notons néanmoins une possibilité de retour à une phase amont par un lien qui n'avait pas été envisagé en terme de lien de rupture entre phases, c'est celui qui a été qualifié de **régressif**.

4.3. Amélioration du modèle des maillons

Ce qui frappe immédiatement dans cette analyse, c'est la transformation de maillons binaires en maillons quaternaires ; chaque action proposée est une expérience qui nécessite un montage spécifique associé à un protocole spécifique. Montage et protocole étaient implicites dans les maillons binaires. Ces deux parties montage et protocole s'ajoutent de manière explicite aux parties d'exploration et d'interprétation pour composer des maillons quaternaires.

4.4. Validation du modèle des liens inférentiels

Les liens inférentiels des trois types prévus apparaissent bien entre chaque maillon même s'ils sont virtuels, c'est-à-dire que leur existence est liée à la nature du maillon qui le précède et de celui qui le suit.

4.4.1. Des liens inférentiels intra-phase

À l'intérieur de chaque phase, entre chaque maillon, un lien du type prévu est mis en évidence.

4.4.2. Des liens inférentiels de rupture

Entre chaque phase, un tel lien est aussi mis en évidence établissant le changement de phase.
4.4.3. Apparition de liens inférentiels régressifs
Il apparaît en plus des liens interphases qui ramènent à une phase antérieure (en l'occurrence ici un). Il semble raisonnable de prévoir une telle éventualité dans le cas général.

4.5. Validation des appréhensions figurales de chaque phase

Dans le tableau qui suit, nous allons détailler pour chacune des trois phases apparaissant dans notre expérience, les appréhensions que nous avons mises en évidence grâce à la boîte noire Montréal (sous l'intitulé ***« a priori*** ») et les appréhensions qui sont apparues dans cette expérience (sous l'intitulé « ***a posteriori*** »). Elles seront validées ou non suivant les résultats de la comparaison.

Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération de la recherche
VALIDÉE ***A priori*** **:** opératoire positionnelle ***A posteriori*** **:** majoritairement opératoire positionnelle	**VALIDÉE** ***A priori*** **:** opératoire positionnelle et perceptive ***A posteriori*** **:** séquentielle puis opératoire positionnelle et perceptive	**VALIDÉE** ***A priori*** **:** opératoire positionnelle et discursive ***A posteriori*** **:** majoritairement opératoire positionnelle avec du séquentiel et du discursif

Nous pouvons constater que notre expérience vient valider les types d'appréhensions que nous avions mises en évidence dans notre modèle a priori de démarche expérimentale médiée.

4.6. Validation des cadres d'investigation de chaque phase

Dans le tableau qui suit, nous allons aussi détailler pour chacune des 3 phases apparaissant dans notre expérience, les cadres d'investigations que nous avons mis en évidence grâce à la boîte noire Montréal (sous l'intitulé « ***a priori*** ») et les cadres d'investigations qui sont apparus dans cette expérience (sous l'intitulé « ***a posteriori*** »). Elles seront validées ou non suivant les résultats de la comparaison.

Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération de la recherche
NON VALIDÉE ***A priori*** **:** Scientifique empirique 4D ***A posteriori*** **:** Modélisations 2B, 2C et ingéniérie 3A	**VALIDÉE** ***A priori*** **:** Modélisations ***A posteriori*** **:** Modélisations	**VALIDÉE** ***A priori*** **:** Ingéniérie par itération 3B ***A posteriori*** **:** Modélisations et ingéniérie par itération 3B

Ici, notre expérience valide largement les cadres d'investigations des phases de recherche ordonnée et d'accélération de la recherche. En ce qui concerne la première phase, la phase de recherche erratique, on ne retrouve pas les mêmes cadres d'investigations. Une première explication tiendrait à la nature erratique de cette recherche qui amènerait l'expérimentateur à user de cadres d'investigations différents suivants les problèmes posés. Cette explication peut constituer une hypothèse que notre expérience de validation suivante pourra nous amener à valider.

4.7. Bilan de l'analyse *a posteriori*

4.7.1. Le paramètre « temps »

Il apparaît qu'une durée d'une heure est une durée suffisante pour faire émerger les trois phases pré-conjecture. Ceci confirme les remarques analogues issues de nos expériences personnelles de résolutions de boîtes noires du même type dans le même contexte avec divers publics non spécialement experts.

4.7.2. La décomposition formelle des micro-étapes

Cette expérimentation nous a fait passer d'une conception ***a priori*** binaire de chaque micro-étape, « exploration, interprétation », à une conception ***a posteriori*** quaternaire, « montage, protocole, exploration, interprétation ». Nous avons remarqué que les deux parties ajoutées étaient virtuellement contenues dans le maillon binaire ***a priori***.

4.7.3. La décomposition formelle des macro-étapes

L'expérimentation a validé très fortement notre décomposition en trois phases qui sont bien du type de celles proposées dans notre modèle ***a priori***, « phase de recherche erratique, phase de recherche ordonnée, phase d'accélération de la recherche ». Nous avons pu néanmoins remarquer que cet enchaînement n'était pas toujours celui indiqué précédemment dans l'ordre énoncé : il pouvait y avoir des régressions, c'est-à-dire des retours à des phases amonts avant une nouvelle progression dans l'ordre de notre modèle a priori.

4.7.4. Les liens inférentiels

Ces liens ont aussi été validés, aussi bien les liens intra-chaînons (ceux liant les micro-étapes dans une macro-étape donnée), que les liens inter-chaînons (qualifiés de rupture et liant une macro-étape à une autre). Nous avons vu apparaître de nouveaux liens, de la famille des liens inférentiels qualifiés de rupture, qui reliaient une macro-étape à une macro-étape amont : nous les avons aussi nommés liens inférentiels régressifs. Notons que la validation des liens est une conséquence naturelle de la validation des différentes phases (macro-étapes) et de leurs composants internes (micro-étapes).

4.7.5. Les niveaux de géométrie

Les tableaux comparatifs réalisés dans le paragraphe précédent valident largement les niveaux de géométrie proposés dans notre modèle ***a priori*** ; on peut résumer comme suit ainsi les hypothèses validées. Notons que lorsqu'on parle d'investigations privées (dans le sens de individuelles, personnelles), on veut signifier que les individus proposent de manière indépendante sans trop interférer les uns sur les autres. Notons aussi que lorsqu'on parle d'investigation publique, on veut signifier que ce sont les individus qui continuent à proposer mais qu'ils rétro-agissent les uns sur les autres dans ce que nous appelons un débat argumentatif où il peut y avoir des interventions de réfutations comme des interventions de demandes d'éclaircissements.

Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération de la recherche
Investigations privées dans G1. Interprétations privées dans un G1 appauvri	Investigation publique dans G1. Interprétation publique dans G1	Investigation publique dans G1. Conjectures dans G2. Validations publiques dans G1

4.7.6. Les appréhensions figurales

Une grande analogie dans les appréhensions figurales a été notée entre les appréhensions repérées dans notre modèle ***a priori*** et celles mises en évidence au cours de notre expérience de validation. Une forte présence de l'appréhension opératoire positionnelle semble justifier un chemin de la découverte qui se dégage rapidement, confirmant ainsi que l'appréhension opératoire est bien une appréhension à haute teneur heuristique comme mis en évidence par Duval. La présence dans ces phases pré-conjecture d'une appréhension discursive montre si besoin est, qu'en plus de leur valeurs heuristiques, les figures montées puis manipulées permettent de comprendre les caractéristiques mathématiques classiques des constructions cachées. Cela veut dire que de tels problèmes conduisent à l'appréhension des figures qu'ils génèrent en sorte que la valeur heuristique du contexte de recherche augmente et que l'explicitation de la réponse formelle s'en trouve aussi favorisée.

4.7.7. Les cadres d'investigations

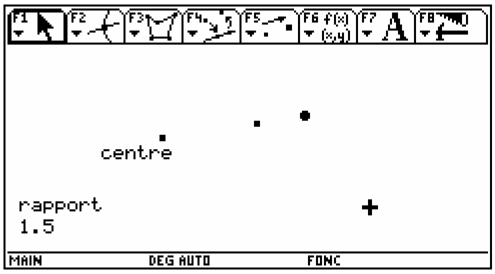
La encore une grande similitude des cadres d'investigations a été notée pour ce qui concerne les deux dernières phases pré-conjecture. Par contre, cela n'a pas été le cas pour la première phase. Nous avons noté un début d'explication qui demande à être confirmé : la recherche tous azimuts qui caractérise cette phase de recherche erratique conduirait l'expérimentateur a utiliser de manière « aléatoire » de nombreux cadres possibles d'investigations !

VALIDATION EXPÉRIMENTALE DU MODÈLE SUR UN PUBLIC DE LYCÉENS DE PREMIÈRE S

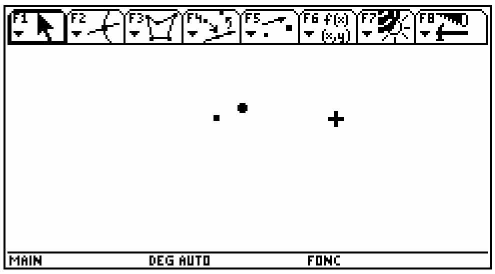
1. PRÉSENTATION DES EXPÉRIENCES

Les expériences qui suivent ont été réalisées en Avril 2003 dans ma classe de Première S du Lycée Raymond Naves à Toulouse. Elles l'ont été au cours de deux séances de module où la même boîte noire a été proposée aux deux groupes formés chacun d'une demi-classe, la première séance a eu lieu de 8h à 9h et la seconde de 9h à 10h le même jour (chaque groupe se composait d'une quinzaine d'élèves ; les deux groupes étaient d'un niveau mathématique comparable).

La boîte noire cachait une homothétie dont le centre avait été placé arbitrairement dans la page Cabri d'une calculatrice Voyage 200 de Texas Instrument, le rapport de cette homothétie avait été choisi égal à 1.5. Cette séance devait servir d'introduction à la leçon sur les transformations et en particulier à la notion d'homothétie.



Un écran de Voyage 200 est rétro-projeté face aux élèves : j'avais programmé dans un fichier de l'application Cabri l'image d'un petit point en un gros point par une homothétie de centre dont j'ai choisi la position et de rapport égal à 1.5. Je me suis assis au milieu des élèves, près du rétroprojecteur et j'ai piloté la calculatrice face au tableau.



Le rapport est caché en dehors de l'écran et le centre est aussi caché avec l'outil « Cacher-montrer ». Je me suis arrangé pour ne pas avoir à montrer cet objet caché. Notons qu'il est possible avec une macro construction de cacher effectivement ce point, ce qui n'était pas indispensable pour les expériences menées ce jour. L'écran rétro-projeté apparaît donc comme l'écran de droite.

Dans chaque groupe, deux élèves sont chargés des minutes de la séance qui me seront remises la semaine suivante. Ces documents rédigés manuellement en grande partie transcrits dans la suite, sont disponibles.

2. COMPTE-RENDUS DE L'EXPÉRIENCE FAITE AVEC LE GROUPE 1

2.1. Compte-rendus élèves : Élodie M. et **Aurélie T.** ont rédigé chacune un compte-rendu minuté, transcrits parallèlement ci-dessous :

Minutage	**Compte-rendu Élodie M**	**Compte-rendu Aurélie T**
8h09	Les élèves ont l'air de dire que le petit point bouge mais pas le gros (lorsqu'on déplace le petit point). La position du gros point dépend du petit. Alexandre est moins précis que Karine. Ce qu'il dit est correct	Soit la fonction où un gros point dépend du petit point sur la page dynamique de Cabri. Problème : boîte noire. Quelle est la transformation cachée dans la boîte noire ? Comment le gros point dépend du petit ?

8h12	mais n'est pas purement mathématique. Quelle peut-être la transformation permettant de transformer le petit point en le gros ?	(lorsqu'on bouge le petit point, le gros bouge également).

8h16	**Karine** : apparaître les axes **Ludovic** : faire apparaître le lieu du gros point noir.	**Karine** : on peut faire apparaître les axes **Ludovic** : il faut trouver le lieu du point noir. **Julien** : Du gros. **Mickaël** : nous devons faire apparaître les coordonnées des points.

8h18	**Mickaël** : faire apparaître les coordonnées des points. **Florent** : tracer le lieu du petit point avec le gros point. **Professeur :** le point n'appartient pas à un objet (le gros point).	**Mickaël:** (répète) faire apparaître les coordonnées. **Florence** : traçons le lieu du gros point avec le petit point. **Julien** : Ludovic l'a déjà fait. **Cabri** : (traduction du Prof) « ce point n'appartient pas à un objet ».

8h20	**Surveillante** : examine les élèves du regard. **Professeur** : le point ne se déplace pas sur une courbe.	**(entrée de la surveillante).** **Professeur** : toujours rien de brillant.

8h21		**Cabri** (en Français) « le point ne se déplace pas sur la courbe ».

8h22 **8h23**	**Florent :** déplacer le point sur l'axe des abscisses. **Claire** : …pour observer le mouvement. **Julien/Ludovic/Mickaël** : veulent déplacer les coordonnées , « là nous les voyons mal ».	**Florent** : il faut le déplacer sur l'axe des abscisses. **Claire :** déplaçons le pour observer le mouvement. **Côté gauche de la salle** : oui pour sur abscisse. **Claire** : Non ! **Mickaël** : on ne voit pas bien les coordonnées ! **Tous** : (énervés) veulent arranger la place des coordonnées sur l'écran.

8h24 **8h25**	Petit point sur abscisse donc ordonnée égale 0. **Karine** : quand on déplace le petit point, le gros point se déplace de part et d'autre du petit. **Professeur** : la droite à 45° ne dépend pas du point.	**Ludovic** : le point est sur l'axe des abscisses donc de coordonnées 0. **Karine** : Florence n'est pas d'accord sur la place du point. **Florent** : on peut avoir une droite indépendante du point ? C'est pour mettre l'origine de ce repère à –1,45.

8h26	**Florent** : tracer une droite indépendante du point pour mettre l'origine de ce point à –1,45 = X.	
8h27	**Jean** : mettre le petit point à l'origine du repère de l'ordonnée.	Tracé de cette droite. **Jean** : on peut mettre le point à l'origine ? **Alexandre** : (agitation)
8h29	Redéfinir le point sur la droite parallèle aux ordonnées.	**Jean** : il faut redéfinir le point sur la droite.
8h30	**Florent** : autre axe de symétrie. Claire : est-ce possible de mettre la « trace » du gros point ?	**Florent** : il y a un autre axe de symétrie. **Claire** : c'est possible de mettre « trace » du point ? Le gros point.

8h32	**Florence/Julien/Mickaël** : il faut cacher la droite.	**Mickaël et autres** : cachons la droite ! **Claire** : il faut bouger le petit point en formant un carré.
8h33	Avec le petit point décrire un carré. Le gros point décrit un grand carré lui aussi.	**Mickaël** : oui mais à peu près car, comment ?
8h34	Redéfinir le point sur un objet ; le petit point sur le carré qu'on vient de tracer.	Tracé du carré pour après redéfinir le petit point sur le carré, c'est sûr qu'il y est. Le petit point ne se met pas sur le carré !
8h35	De plus, « tracer » la trace du gros point quand le petit se déplace sur le carré.	Replaçons le ?
8h36	Florence : demander le lieu car fonction.	**Prof** : il n'y a pas plus simple ? **Florence** : Grâce au lieu ! car on est sur une fonction.
8h37		**Tous** : ça forme un carré ! **Jean** : on ne peut pas faire un autre carré ?

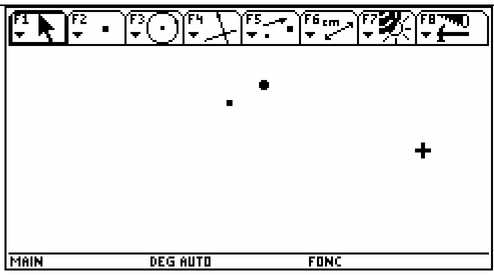
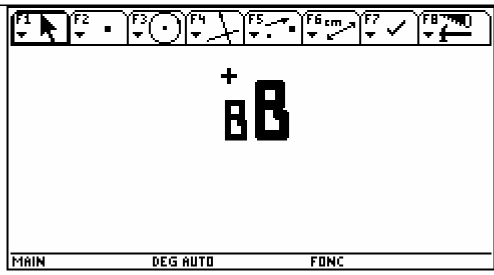
8h38	Bouger le centre du carré. Le carré tracé par le petit point semble être proportionnel à la grandeur du carré du gros point.	Nous bougeons le centre du carré. **Mickaël** : Ah ! C'est mieux ! Nous agrandissons le carré **Karine** : on peut avoir un autre polygone ?
8h39	**Karine** : décrire avec le petit point un pentagone.	**Karine** : un polygone à 5 côtés. **Tous** : il est bien placé.
8h41	**Claire** : propose de refaire pareil (petit point sur polygone). Le gros point décrit aussi un polygone.	**Claire** : Mettre le point sur le polygone. (Foutoir)→Tout le monde réagit car il y a une figure très étrange. **Karine** : Nous devons trouver le centre du carré. **Jean** : Oui le carré qui a disparu.
8h43	**Jean** : Tracer les diagonales du grand carré. **Mickaël répond à Jean** : « Ça ne sert à rien ! ».	**Jean** : Traçons les diagonales du grand carré. **Mickaël** : Pourquoi Jean a demandé ça ? Ça ne sert à rien !

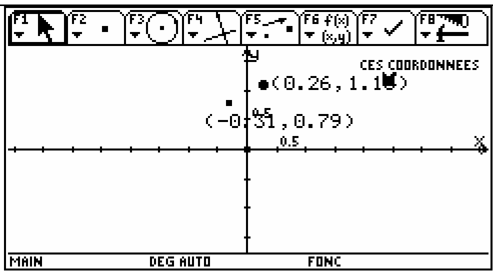
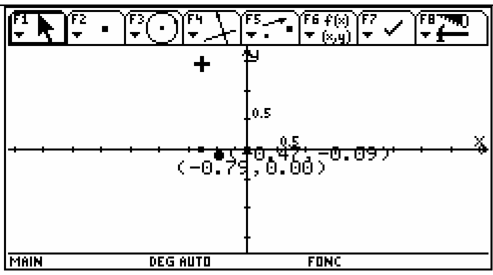
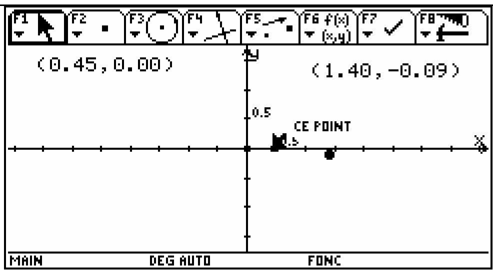
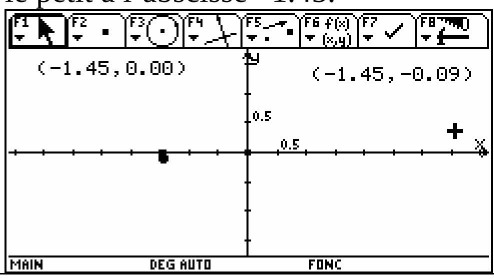
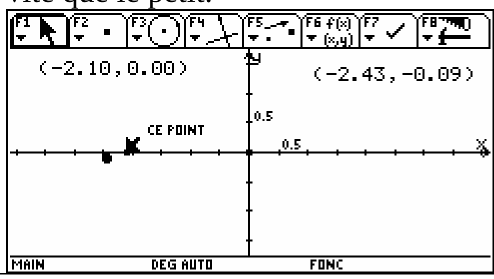
8h45	**GROS TROU** **Florence** : le gros point semble être l'agrandissement du petit point lorsqu'il se déplace.	**(GROS TROU)** **Florence** : (Très confus) → on relie les centres des deux carrés : En fait le gros point semble être l'agrandissement du petit

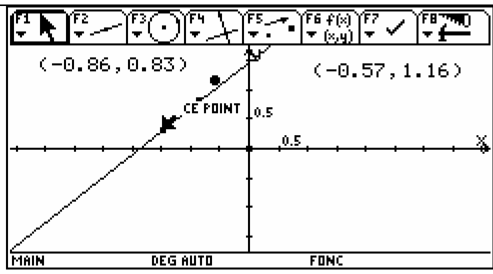
		dans l'arrière-plan (elle parle de lumière).

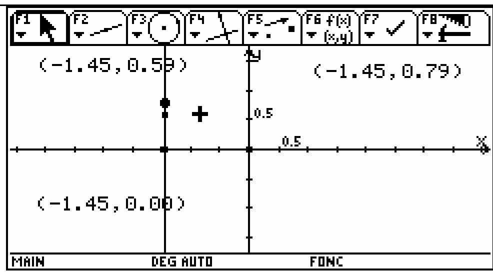
8h47 **8h48**	Comprend pas l'histoire de l'arrière- plan de Florence. **Illumination de Marianne** : Figure dans l'espace. **Florent** : barycentre serait le centre de symétrie de… (il ne sait pas).	**Tous** : (personne comprend) Quelle lumière ? Arrière-plan ? **Marianne** : Oui ! c'est un agrandissement **Marianne** : Trouvons le point… Figure dans l'espace. **Florent** : (parle de symétrie centrale) → Trouvons le barycentre, centre de symétrie… (Il abandonne).
8h51 **8h53**	**Claire :** Relier les sommets des carrés par des droites. Pas besoin de tracer la quatrième reliure avec le gros point et son petit. **Mickaël** : C'est une pyramide dans l'espace. **Professeur :** premier retour papier espace.	**Marianne** : Relions les points. **Claire :** Ceux des sommets correspondant aux carrés. **Florence** : Relions par des droites. **Eva** : Pas besoin de faire un $4^{\text{ième}}$ carré. **Mickaël** : Dans l'espace c'est comme une pyramide. **Professeur :** premier retour papier espace. **Marianne et Claire** (font un dessin de pyramide).
8h55	Redéfinir le gros polygone.	**Mickaël** : Il faut redéfinir le 1^{er} polygone.
8h57	**Professeur** : Coordonnées des droites concourantes au cas où ça se détruise.	Nous notons les coordonnées des droites concourantes au cas où ça se détruise → Les points s'alignent.

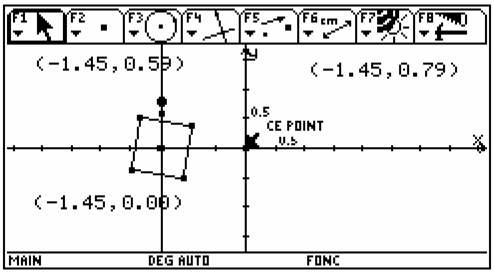
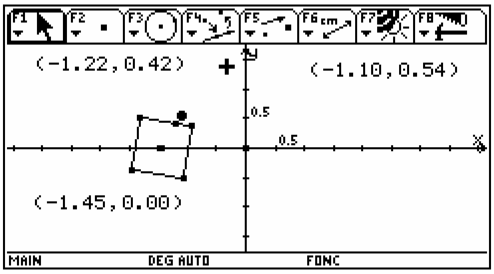
2.2. Mon compte-rendu : ayant été le sherpa de cette expérience, je me suis fondu dans le « milieu » pour réagir de manière aussi neutre que possible ; mes interventions n'ont eu pour but que d'éclaircir des points techniques qui ne devaient pas faire obstacle aux initiatives proposées par les élèves. J'ai utilisé tous les fichiers intermédiaires que j'ai enregistrés au fur et à mesure de l'avancée de cette recherche. Voici donc ci-dessous ma transcription de ce qui s'est passé :

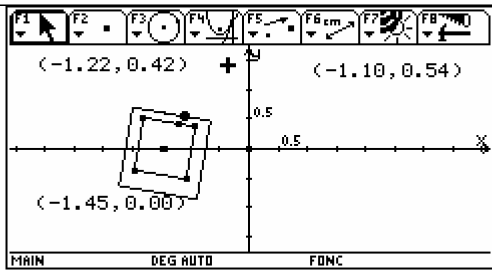
8h09	 Ceci est l'écran présenté pour soumettre la boîte noire. J'ai tiré sur le petit point après avoir fait constaté que je ne peux pas tirer sur le gros point.	 Cet écran qui n'a pas été réalisé aurait permis, après avoir activé les traces des deux points, de remarquer que le tracé de la lettre « B » avec le petit point engendre le tracé d'une autre lettre « B » agrandie par rapport à la précédente. Il aurait permis d'approcher plus rapidement la solution (approche opérationnelle

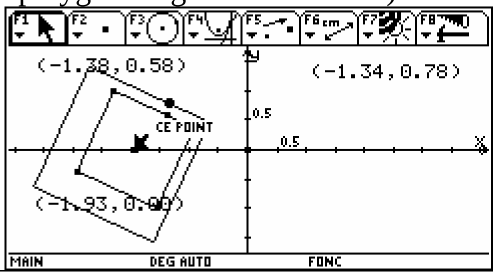
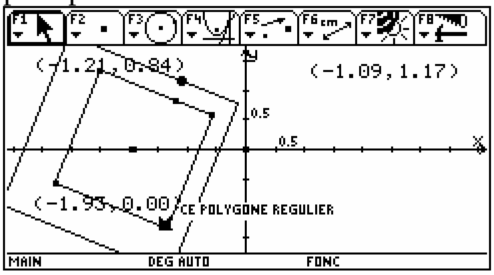
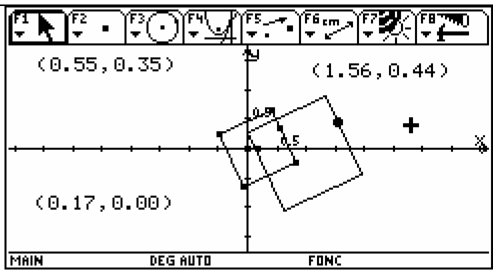
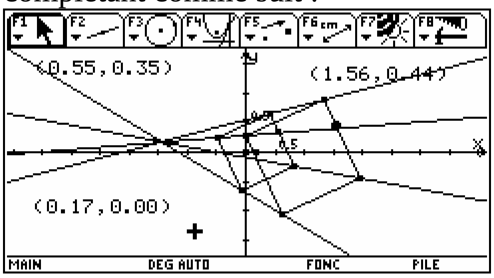
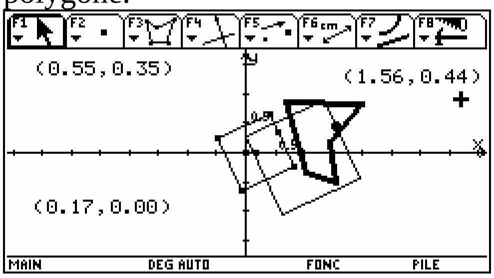
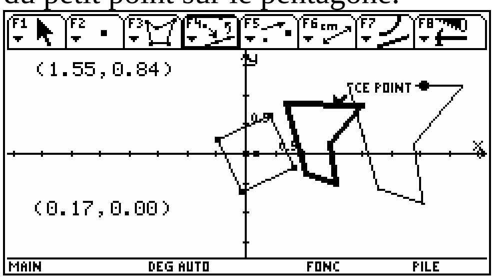
		selon Duval).
8h16		Je fais apparaître les axes ainsi que les coordonnées des deux points comme demandé par les élèves. Je fais constater aux élèves que Cabri ne me donne rien quand je demande le lieu du gros point quand le petit varie. J'explique que cela est normal car le petit point n'a pas été défini comme point appartenant à un objet.
8h22		Les élèves demandent d'amener le petit point sur l'axe des abscisses pour le déplacer le long de cet axe. Lorsque le point est amené sur l'axe, ils sont passablement gênés par l'affichage inadéquat des coordonnées que je suis donc obligé d'écarter.
8h22		Après avoir positionné, à gauche les coordonnées du petit point et à droite les coordonnées du gros point, je déplace le petit point le long de l'axe des abscisse. Lorsqu'on déplace ce petit point vers la droite, le gros se déplace horizontalement encore plus loin vers la droite.
8h25	Lorsqu'on déplace le petit point vers la gauche, le gros point finit par rattraper le petit à l'abscisse –1.45. 	Puis continue à se déplacer vers la gauche, horizontalement mais, plus vite que le petit. 

8h25	Les élèves demandent de déplacer le petit point sur une autre droite. Je trace une droite inclinée approximativement à 45° qui visuellement passe par le petit point : je fais remarquer que cette droite est indépendante du petit point qui d'ailleurs ne lui appartient pas (dans la page Cabri) tant que celui-ci n'a pas été redéfini sur cette droite.	 Le déplacement du petit point génère un déplacement du gros le long de cette droite, approximativement. Les élèves veulent aussi faire passer cette droite par le point de l'axe des abscisses, d'abscisse –1.45.

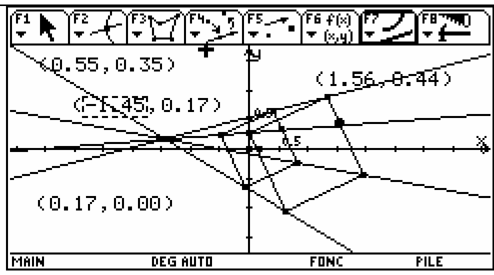
8h26	Pendant le déplacement de cette droite qui doit amener son origine à –1.45, les élèves veulent que je positionne cette droite parallèle à l'axe des ordonnées et que je déplace le petit point sur cette droite. Les élèves constatent que le gros point reste sur la droite verticale. Ils évoquent un axe de symétrie après avoir vu le gros point passer sous le petit au voisinage de l'axe des abscisses.	 Une élève veut activer la trace du gros point mais sous la pression d'autres propositions, celle ci est abandonnée.

8h32	À la demande des élèves, un carré est tracé, afin de mettre le petit point dessus. La droite sur laquelle se trouvait celui-ci est cachée 	Le petit point est donc redéfini sur ce carré  Notons que le centre du carré a été positionné sur le point d'intersection de la droite cachée avec l'axe des abscisses, donc à l'abscisse –1.45.

	Après discussion, on renonce à activer la trace du gros point pour voir comment il se déplace quand le petit point va être tiré sur son carré d'appartenance. Les élèves finissent par opter pour la demande du lieu du gros point quand le petit varie avec comme argument « une dépendance fonctionnelle » entre les deux points…	 Les élèves ont la certitude que le lieu obtenu est aussi un carré.

8h38	Toujours à la demande des élèves, le centre du carré est déplacé, ici vers la gauche (notons que le premier point inférieur droit reste fixe car c'est ce point qui a été utilisé comme premier point pour créer le carré avec l'outil « polygone régulier » de Cabri). 	La, je déplace ce point particulier pour agrandir le carré d'appartenance du petit point. 
8h39	 Quand on arrive à cette position, une élève commence à évoquer un arrière-plan, de la lumière, un gros point qui serait l'agrandissement du petit sans que les autres comprennent.	Une grande période d'excitation survient où les propositions des élèves fusent sans qu'ils puissent se mettre d'accord pour me demander une manipulation particulière. Néanmoins, j'écoute et j'attends : J'observe Marianne qui se saisit d'une feuille de brouillon et qui dessine succinctement la figure rétro-projetée en la complétant comme suit :  Ses camarades ébahis, l'entendent parler de figure dans l'espace.
	Je construis maintenant un pentagone quelconque car les élèves veulent mettre le petit point sur un tel polygone. 	Ceci est réalisé ici par la redéfinition du petit point sur le pentagone.  Les élèves sont surpris à la fois par l'étrangeté de la figure et par la disparition du gros carré, à tel point que certains veulent retrouver son

		centre et pour cela je suis obligé de revenir à la figure précédente avec cette fois le gros pentagone qui disparaît.

8h51	Le pentagone est même supprimé ; il m'est demandé cette fois de joindre les sommets respectifs du grand et du petit carré (ce que Marianne avait réalisé sur papier). Comme la sonnerie retentit, les élèves prennent une dernière initiative : après avoir constaté le concours de ces droites, ils me demande de conserver les coordonnées de ce point au cas où on perdrait des constructions.	 On définit donc l'intersection de deux de ces droites et on fait afficher les coordonnées de ce point : (-1.45,0.17).

2.3. Analyse de la démarche

2.3.1 Analyse brute (mise en évidence des maillons quaternaires)

Expérience 1
Montage : *faire apparaître les axes.*
Protocole : *demander le lieu du gros point quand le petit bouge.*
Exploration : *cette exploration n'est pas réalisable car le petit point n'appartient pas à un objet.*
Interprétation : *donc pas d'interprétation.*

Expérience 2
Montage : *compléter le précédent montage en affichant les coordonnées des deux points.*
Protocole : *demander encore le lieu du gros point quand le petit bouge.*
Exploration : *cette exploration n'est toujours pas réalisable car le petit point n'appartient toujours pas à un objet.*
Interprétation : *encore pas d'interprétation.*

Expérience 3
Montage : *compléter le précédent montage en positionnant le petit point sur l'axe des abscisses.*
Protocole : *déplacer le petit point le long de l'axe des abscisses.*
Exploration : *pendant cette exploration l'affichage des coordonnées perturbe la visualisation de ce qui se passe.*
Interprétation : *la gêne observationnelle empêche toute interprétation.*

Expérience 4
Montage : *reprendre le précédent montage et changer la position de l'affichage des coordonnées.*
Protocole : *déplacer le petit point le long de l'axe des abscisses.*
Exploration : *le déplacement du petit point le long de l'axe des abscisses génère un déplacement du gros point le long d'une parallèle à cet axe située légèrement sous cet axe. Quand le petit point s'éloigne vers la droite, le gros point s'en éloigne encore plus. Même remarque du côté gauche.*
Interprétation : *pas d'interprétation mathématique en terme d'image de droite.*

Expérience 5
Montage : *tracer une droite en position oblique et positionner le petit point sur cette droite.*
Protocole : *déplacer le petit point le long de cette droite.*
Exploration : *le déplacement du petit point le long de cette droite génère un déplacement du gros point le long de cette droite légèrement au-dessus avec le même phénomène observé précédemment d'écartement du gros point par rapport au petit. Le gros point monte plus vite et plus haut que le petit. Le gros point descend plus vite et plus bas que le petit point.*
Interprétation : *toujours pas d'interprétation mathématique en terme d'image de droite.*

Expérience 6
Montage : *amener la droite oblique en position verticale à l'abscisse –1.45.*
Protocole : *déplacer le petit point le long de cette droite.*
Exploration : *le déplacement du petit point le long de cette droite génère un déplacement du gros point le long de cette même droite légèrement au dessus avec encore le même phénomène observé précédemment (écartement du gros point par rapport au petit). Le gros point monte plus vite et plus haut que le petit. Le gros point descend plus vite et plus bas que le petit point.*
Interprétation : *cette fois le mot symétrie apparaît mais sans traduire une symétrie au sens d'une transformation mais plutôt une symétrie dans les observations (deux petits points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ont des images symétriques par rapport à l'axe des abscisses.*

Expérience 7
Montage : *construction d'un carré centré sur l'axe des abscisses à l'abscisse –1.45. Redéfinir le petit point sur ce carré.*
Protocole : *demander le lieu du gros point quand le petit varie sur le carré.*
Exploration : *le lieu obtenu ressemble à un carré plus grand que le premier.*
Interprétation : *le lieu obtenu est interprété comme un carré sans aucun doute dans l'esprit des élèves.*

Expérience 8
Montage : *même montage.*
Protocole : *déplacer et modifier les dimensions et la disposition du carré.*
Exploration : *le lieu obtenu ressemble toujours à un carré dont la taille est toujours plus grande que le premier et semble proportionnelle à la taille du premier.*
Interprétation : *les lieux obtenus sont toujours interprétés comme des carrés sans aucun doute dans l'esprit des élèves. Après un retour papier, la figure est interprétée comme une figure de l'espace.*

Expérience 9
Montage : *construction d'un pentagone quelconque.*
Protocole : *redéfinition du petit point sur ce pentagone et observation du résultat de cette redéfinition.*
Exploration : *le gros carré disparaît et un polygone « semblable » au premier apparaît.*
Interprétation : *certains élèves ne comprennent pas la disparition du gros carré et sont surpris par l'apparition du nouveau pentagone d'où retour sur l'expérience précédente.*

Expérience 10
Montage : *remettre le petit point sur le carré de départ.*

Protocole : *tracer les quatre droites joignant les sommets du carré de départ aux sommets correspondants du « carré » image.*
Exploration : *ces droites semblent concourantes ; on note donc les coordonnées du point d'intersection de deux d'entre elles.*
Interprétation : *on arrive à une conjecture sur la concourance de ces droites en un point particulier (qui doit être important aux yeux des élèves puisqu'ils demandent de conserver les coordonnées de ce point).*

2.3.2. Analyse en liaison avec le modèle de démarche proposé (mise en évidence des différentes phases)

Phase erratique : cette phase inclut les expériences de 1 à 4 de manière claire et non ambiguë. En effet, chaque maillon se conclut par une absence d'interprétation mathématique ou métamathématique. Les liens sont aussi de manière non ambiguë des liens inférentiels de type faibles. Bien que l'expérience 4 s'achève sur une absence d'interprétation explicite, le contenu de l'expérience 5 montre que le lien entre ces deux expériences est le premier lien de type normal qui apparaît dans cette démarche : cette expérience 5 montre que le public veut se concentrer sur un type bien ciblé d'expérimentations. Ce lien est donc un lien inférentiel normal de rupture entre phase erratique et phase ordonnée.
Phase ordonnée : cette phase inclut les expériences de 5 à 10 ; l'exploration se concentre sur les images de droites puis de carrés et polygones. On note des velléités d'approche de la phase d'accélération par des apparitions fugaces d'invariants. Il y a aussi une progression dans les registres d'exploration ; au départ dans G1, les élèves déterminent point par point les images des points des droites choisies alors que pour les polygones, le lieu du point image fait apparaître directement cette image. Dans l'utilisation des outils, on se place dans G2 mais la lecture du résultat obtenu se fait dans le registre G1 (on voit un carré et on ne doute pas que le l'image ne soit pas un carré).
On est très proche d'une première conjecture et on peut imaginer sans risque que si on avait pu disposer d'un temps plus long, cette expérience 10 aurait été la dernière de cette phase annonçant ainsi le premier lien inférentiel fort de rupture vers la phase d'accélération de la recherche.
Les liens inférentiels peuvent ne pas paraître « normaux » si on se fie aux contenus des items « interprétation ». Ces interprétations sont en réalité les signifiés-interprétations alors que les signifiants-interprétations sont de type quasi normal : il suffit de constater que d'une expérience à l'autre on reprend un protocole identique ou légèrement amélioré sur un montage qui se complexifie (une construction qui envisage des cas plus généraux).

Notons que le **paramètre « temps »** vient de montrer le bout de son nez ; seulement deux des trois premières phases les plus couramment mises en évidence sont apparues.

La recherche a duré en tout 48 minutes

2.3.3. Bilan formalisé

Ce bilan qui suit va constituer une validation de l'arrivée et du contenu des deux premières phases pré-conjecture telles que présentées dans notre modèle ***a priori***. Voici la décomposition de la démarche de résolution analysée précédemment :

PHASE 1 : PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

[Exp 1: MPEI] **Lien Inf faible** [Exp 2 : MPEI] **Lien Inf faible**
[Exp 3 : MPEI] **Lien Inf faible** [Exp 4 : MPEI]

Lien Inf Normal de rupture

PHASE 2 : PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE
[Exp 5 : MPEI] **Lien Inf Normal** [Exp6 : MPEI] **Lien Inf Normal** [Exp7 : MPEI] **Lien Inf Normal** [Exp8 : MPEI] **Lien Inf Normal** [Exp9 : MPEI] **Lien Inf Normal** [Exp10 : MPEI]

2.3.4. Niveaux de géométrie

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

Expérience 1	**Expérience 2**	**Expérience 3**	**Expérience 4**
G2	G2	G1	**G0**

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

Expérience 5	Expérience 6	Expérience 7	Expérience 8	Expérience 9	Expérience 10
G0/G1	G0/G1	G2	G1/G2	G2/G1	G2/G1

2.3.5. Appréhensions figurales

POUR LES MICRO ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

Expérience 1	**Expérience 2**	**Expérience 3**	**Expérience 4**
Séquentielle	Séquentielle	Opératoire positionnelle	Opératoire positionnelle

POUR LES MICRO ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

Expérience 5	Expérience 6	Expérience 7	Expérience 8	Expérience 9	Expérience 10
Séquentielle Opératoire positionnelle	Séquentielle Opératoire optique	Séquentielle Perceptive	Opératoire positionnelle Discursive	Séquentielle Perceptive	Séquentielle Discursive

2.3.6. Cadres d'investigations

POUR LES MICRO ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

Expérience 1	**Expérience 2**	**Expérience 3**	**Expérience 4**
Engagement	Engagement	Modélisation 2A	Modélisation 2A

POUR LES MICRO ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

Expérience 5	Expérience 6	Expérience 7	Expérience 8	Expérience 9	Expérience 10
Ingéniérie	Ingéniérie	Modélisation	Modélisation	Modélisation	Modélisation

3. COMPTE-RENDUS DE L'EXPÉRIENCE FAITE AVEC LE GROUPE 2

3.1. Compte-rendus élèves : Lauranne C et **Lise G** ont rédigé chacune un compte-rendu minuté, transcrits parallèlement ci-dessous :

Minutage	**Compte-rendu Lauranne C.**	**Compte-rendu Lise G.**
9h09	Il y a deux poins sur l'écran : un	Nous avons deux points, un gros et petit.

9h14	gros et un petit. Le gros dépend du petit puisqu'il bouge quand on déplace l'autre. Par quel procédé est-on passé d'un point à l'autre ? On commence : **Sandra** : demande si on peut voir ce qui est caché. Il n'y a rien de caché. **Quentin** : on peut bouger le point (petit) n'importe où ? → Apparemment. **Gauthier** : est-ce que la distance entre les deux points varie beaucoup.	Le petit point dépend du gros. Comment le gros point dépend du petit ? Par quel procédé mathématique le gros point peut-il dépendre du petit ? Début **Sandra** : Y a-t-il des choses cachées ? Non, il n'y a rien de caché. **Quentin** : Où bouge le gros point ? N'importe où. **Gauthier** : on va mesurer la distance du gros point au petit point pour voir si elle varie quand on bouge le petit point. On voit que la distance varie.

9h17	On met le gros point en mode trace et on fait bouger le petit, de gauche à droite, puis de bas en haut. La trace laissée ne donne pas de nouvelles idées. On enlève le mode trace.	**Gauthier** : Essayons de mettre le gros point en mode trace et de bouger le petit point. Cela ne donne rien.

9h18	**Nicolas :** demande d'afficher les axes.	**Nicolas :** On pourrait afficher les axes.

9h20	**Sandra :** demande que l'on trace le cercle de centre le petit point et passant par le gros point. **Nicolas** : constate que les axes ne servent à rien. On déplace le petit point centre du cercle. **Jean** : le cercle change de diamètre. C'est le cas en allant vers la gauche ; il diminue puis ré augmente progressivement.	**Sandra :** On va tracer un cercle de centre le petit point et passant par le gros point. **Nicolas** : Les axes ne servent à rien. **Tout le monde :** On va déplacer le petit point. **Jean** : Le cercle change de rayon quand on déplace le petit point. **Sophie** : Essayons de déplacer le petit point vers la gauche. Le cercle se diminue puis s'agrandit.

9h22	**Bénédicte** : plutôt que de continuer à faire changer le rayon, il serait plus intéressant de connaître le rayon minimum du cercle. **Quentin** : existe-t-il un point où les deux points de départ seraient superposés. **Les autres** : où le rayon est nul. On déplace le petit point pour parvenir à trouver ce point.	**Bénédicte** : On s'arrête où le rayon du cercle est le plus petit possible. **Quentin (avec l'aide de Jean)**: Est-ce qu'on peut trouver un rayon nul pour ce cercle, où les deux points sont confondus.

9h25	**Jean :** ça nous sert à quoi de trouver le point où le rayon est nul ? **Pierre** : c'est de la découverte. On ne sait pas, on verra. **Hypothèse de Jean** : il y a deux points cachés et on obtient le gros point avec une composée de vecteurs du petit point avec les deux autres.	**Jean :** Au fait, ça sert à quoi de trouver l'endroit où les deux points sont confondus ? Il doit y avoir deux points cachés et on obtient le gros point avec une composée de vecteur du petit point avec les deux autres (les deux points cachés).

9h27	**Sur l'intervention de Nicolas,** on retire les axes. **Quentin**: propose de tracer un segment allant du petit point au gros point. **Sandra** : voudrait savoir pourquoi le diamètre du cercle varie, « c'est quand même bizarre ». **Pierre** : je pensais à une fonction dans l'espace. **Les initiatives de Quentin sont jugées inutiles.** On demande à Quentin d'expliquer ce qu'il voulait faire.	**Nicolas :** il faudrait enlever les axes. **Quentin** : On va tracer un segment reliant le petit point au gros point. **Sandra** : Pourquoi le rayon du cercle diminue puis augmente quand on déplace le petit point ?

9h31	**Amandine :** interrogée, n'a pas d'idée. Propose de remettre les axes et d'en placer l'origine au niveau du point où le rayon du cercle vaut 0. On centre alors l'écran par rapport aux axes.	**Amandine :** Que veux-tu faire Quentin ? Il faudrait remettre les axes et placer l'origine de ces axes à l'endroit où les deux points sont presque confondus. **Jean** : On devrait centrer l'écran par rapport aux axes.

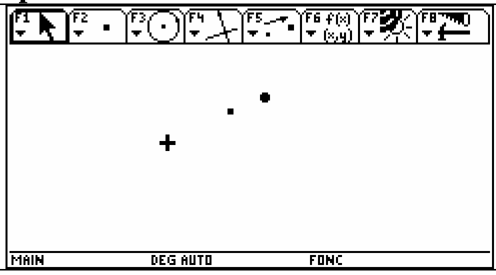
9h34	**Gauthier :** demande le lieu du gros point par rapport au petit. C'est impossible car le petit ne se déplace pas sur une courbe. **Jean** : afficher les coordonnées des deux points pour voir s'il y a une fonction. On efface le cercle et les segments. Les rapporteurs arrêtent Jean qui propose une nouvelle idée avant que l'on ait fini d'exécuter et d'expliquer la précédente.	**Gauthier :** On demande le lieu du gros point par rapport au petit. **Tout le monde** : Le petit point ne se déplace pas sur une courbe. **Jean** : On va afficher les coordonnées des deux points pour voir s'il y a une fonction qui les lie. **Tout le monde** : On efface le cercle et le segment. **Lauranne et Lise** : Il faut continuer sur les idées commencées.

9h38	**Pierre :** demande que l'on place le	**Pierre :** on va mettre le petit point sur

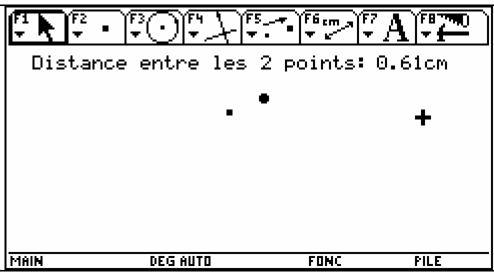
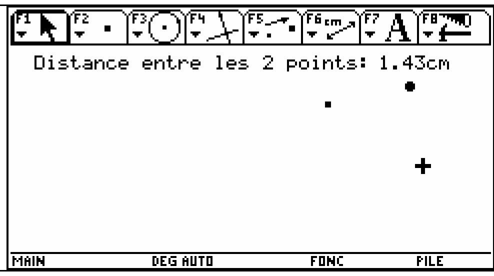
	petit point sur l'axe des abscisses. Le lieu demandé tout à l'heure apparaît alors. Ce lieu a l'air d'être sur la droite des abscisses lui aussi. **Pierre et Jean** : pensent à un barycentre.	l'axe des abscisses. **Constatation :** Quand le petit point est sur l'axe des abscisses, le lieu du gros point est l'axe des abscisses. **Pierre et Jean** : On pense à un barycentre.
9h40	On enlève les coordonnées. **Lauranne, Lise, Pierre et Jean** (discussion intense) : On veut enlever le petit point de l'axe et voir si les deux point sont alignés avec l'origine.	**Pierre :** Il faut enlever les coordonnées. **Jean** : Il faut enlever le petit point de l'axe des abscisses et le mettre sur le plan général. Les deux points et l'origine sont-ils alignés ?
9h43	**Tout le monde :** n'a pas compris l'idée des barycentres. On exécute l'idée de Jean. **Amandine** : rappelle qu'il fallait voir si les points sont alignés avec l'origine. On trace une droite passant par les deux points et on demande si elle passe par l'origine.	**Jean :** fait la même remarque qu'à 9h41. **Tout le monde** : On trace la droite passant par les deux points puis on demande si l'origine des axes est sur la droite.
9h46	La droite n'y passe pas exactement mais la précision n'était pas exacte pour l'origine des axes. La droite tourne autour d'un axe, aaah !	**Constatation**: La droite tourne (presque) autour de l'origine. **Bénédicte** : Quand on bouge le petit point n'importe où, la droite tourne autour de l'origine.
9h47	On déplace les points. **Bénédicte :** il y a un barycentre qui lie les trois points. Un des points serait le barycentre des deux autres.	**Bénédicte :** On a les deux points de départ (le petit et le gros) et l'origine. Un de ces points serait le barycentre des deux autres.
9h48	**Élodie** : calculer les distances de l'origine au petit point puis au gros point pour voir si elles sont égales.	**Jean :** Le gros point est le barycentre de l'origine et du petit point. **Élodie** : On va voir si la distance entre l'origine et le petit point est égale à k×distance entre l'origine et le petit point.
9h50	On déplace le petit point. Y a-t-il une relation entre les distances ? On divise la grande par la petite. On obtient 1.48. **Amandine** : propose de bouger le point et de refaire le calcul pour vérifier si le résultat est le même. Ce n'est pas le cas, il se modifie mais reste proche.	Élodie : Quelle relation y a-t-il entre les points ? On divise la distance entre l'origine et le gros point par la distance entre l'origine et le petit point (Ici on trouve 1.48). On prend deux autres mesures en bougeant le petit point et on fait le même calcul.

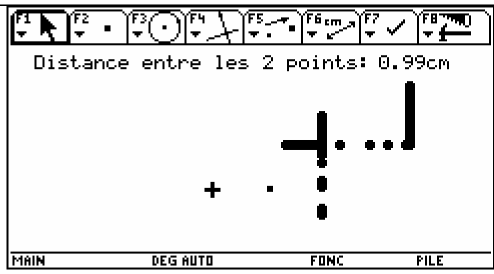
9h52	**Élodie** : ne sait pas quoi penser du résultat.	

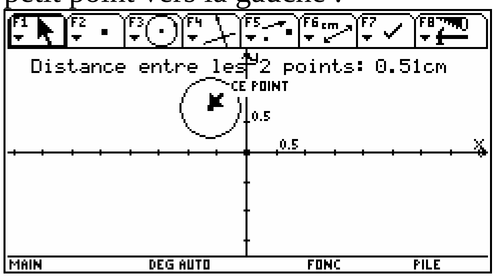
3.2. Mon compte-rendu :

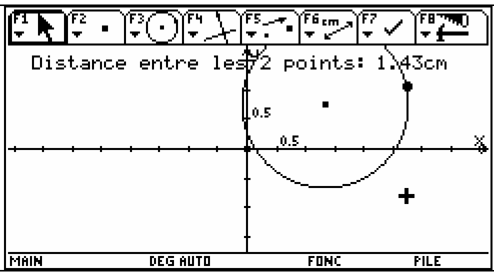
9h09		Le problème est posé à partir de l'écran de gauche. Le petit point est tiré pour montrer que son « tirage » génère le déplacement du gros point. La question posée concerne la nature géométrique de la construction permettant de construire le gros point à partir du petit.

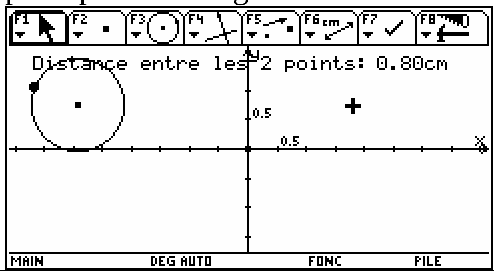
9h14	On me demande de montrer les objets cachés ; j'élude la question en affirmant qu'il n'y en a pas. Je montre ensuite que le petit point peut être tiré n'importe où et dans n'importe quelle direction pour répondre à une interrogation concernant la liberté dynamique réelle de ce point. Il est dit que le gros point se déplace n'importe où lui aussi. Une autre question arrive concernant la variation de la distance entre les deux points. Je fais donc afficher cette distance et je bouge le petit point. Les élèves constate que cette distance varie et, même, peut varier beaucoup :

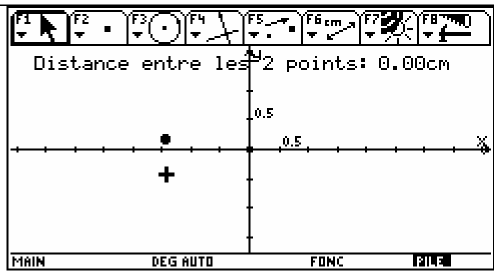
		

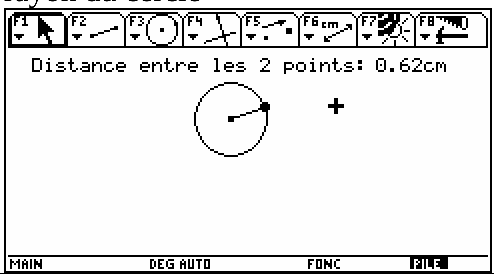
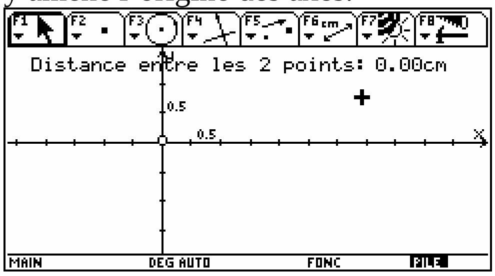
9h17	On active la trace du gros point puis on tire horizontalement et verticalement sur le petit point. On obtient l'écran de droite. Aucune conclusion n'est tirée de ce qui est observé. Il est donc décidé d'abandonner cette piste et donc de désactiver la trace du gros point.	

9h18	Comme demandé, les axes sont affichés. Le cercle centré au petit point et passant par le gros point est aussi construit :	Il est demandé ensuite de déplacer le petit point vers la gauche :  Il est constaté que dans un premier

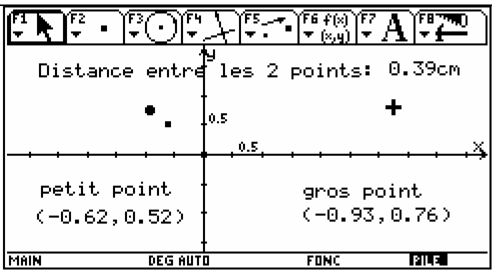
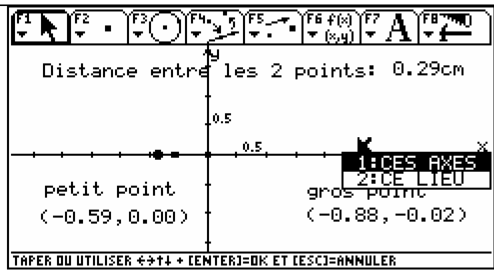
		temps son diamètre diminue,

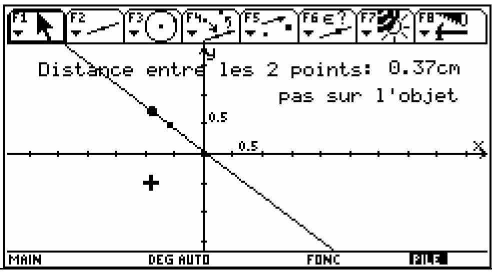
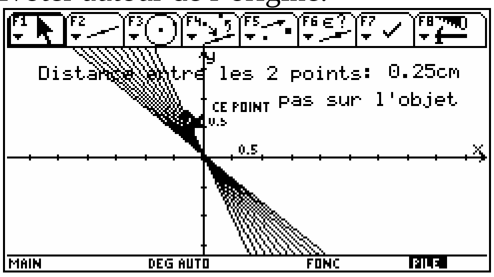
	puis dans un second temps qu'il se met à croître de nouveau si on continue le déplacement du petit point plus vers la gauche : 	

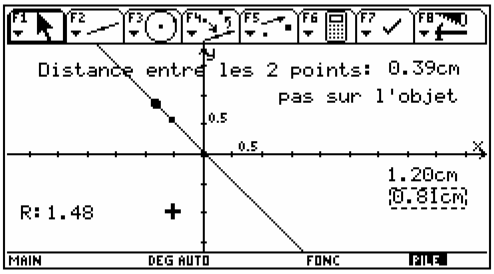
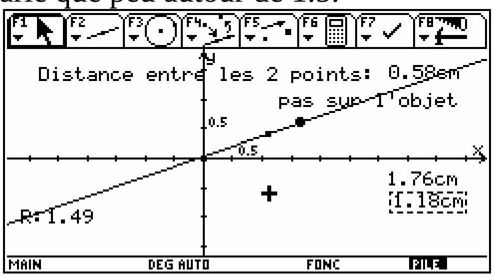
9h22	Chez les élèves, un intérêt pour cette configuration prend corps. Il veulent s'intéresser au minimum de la distance des deux points ; cette question est même reformulée en la recherche d'une position du petit point où le gros point vient se superposer à lui.	

9h27	Les axes sont retirés. Un segment est tracé joignant les deux points ; le cercle centré en le petit point et passant par le gros point est lui aussi tracé. On tire à nouveau sur le grand point au grand étonnement de certains élèves qui constatent les variations du rayon du cercle 	On repère à nouveau la position où les deux points semblent se superposer et on y amène l'origine des axes.  On peut constater sur l'écran précédent que la distance affichée (0.00cm) est celle qui sépare les deux points.

9h34	Il est demandé d'afficher les coordonnées des deux points dans une position quelconque qui ne soit pas la position à l'origine :	On demande ensuite de redéfinir le petit point sur l'axe des abscisses pour obtenir le lieu du gros point :

	 Le but était de découvrir un lien fonctionnel entre ces données. Aucune initiative n'est prise dans ce sens.	 Comme on peut le constater sur cet écran, ce lieu a l'air de se superposer à l'axe des abscisses.

9h40	Les coordonnées sont enlevées. Le petit point est désolidarisé de l'axe des abscisses pour voir si la droite passant par ces deux points contient l'origine. Ceci a l'air vrai visuellement mais est infirmé par le test Cabri. 	Néanmoins la conviction des élèves n'est pas ébranlée concernant cette appartenance. La manipulation du petit point montre que notre droite semble pivoter autour de l'origine.  Sur cet écran, on a préalablement activé la trace de cette droite.

9h50	Pour voir s'il y a une relation entre les distances de nos deux points à l'origine, ces distances sont affichées et leur rapport calculé. On trouve ici, 1.48. 	On tire sur le petit point pour constater que ce rapport bien que non constant ne varie que peu autour de 1.5.  L'élève qui a proposé cette exploration reconnaît elle-même ne pas pouvoir tirer une conséquence intéressante de ces observations.

3.3. Analyse de la démarche

3.3.1 Analyse brute (mise en évidence des maillons quaternaires)

Avant le démarrage d'une quelconque expérience, ce groupe désire vérifier le montage proposé ; on désire vérifier qu'il n'y a pas d'objet caché (ceci rappelle la situation de classe concernant un problème autour de la recherche de l'échelle d'une carte dans l'activité donnée à des Premières STT où la stratégie de certains élèves s'était réduite à essayer de lire l'échelle par transparence malgré la barre noire tracée pour éliminer ce renseignement *crucial). On désire vérifier aussi que le petit point est bien animable partout dans la page Cabri.*

Expérience 1
Montage : *faire afficher la distance des deux points.*
Protocole : *bouger le petit point pour voir si cette distance varie.*
Exploration : *l'expérimentation donne une distance variable.*
Interprétation : *pas d'interprétation explicite mais implicitement la fonction distance de la variable, le petit point, n'est pas une fonction constante.*

Expérience 2
Montage : *activer la trace du gros point.*
Protocole : *tirer sur le petit point de gauche à droite et de haut en bas.*
Exploration : *l'expérimentation laisse des traces horizontales quand le petit point se déplace horizontalement et des traces verticales quand le petit point se déplace verticalement.*
Interprétation : *pas d'interprétation !*

Expérience 3
Montage : *désactiver le mode trace, faire apparaître les axes et construire le cercle centré au petit point et passant par le gros point (certains font remarquer que les axes ne servent à rien, sans dire pourquoi ; on verra plus loin qu'en réalité, ils seront indispensables).*
Protocole : *déplacer le petit point longitudinalement.*
Exploration : *on constate que quand on déplace le petit point de gauche à droite de l'écran, le rayon du cercle décroît puis croit.*
Interprétation : *pas d'interprétation.*

Expérience 4
Montage : *retirer les axes et tracer le segment joignant le petit point au gros point.*
Protocole : *tirer sur le point jusqu'à trouver une position où la distance entre les deux points soit égale à 0.*
Exploration : *cette exploration est menée avec succès car une position est localisée.*
Interprétation : *il y a une position où les deux points se superposent (cette interprétation a été explicitée au moment de la mise en place du protocole).*

Expérience 5
Montage : *amener l'origine des axes à cette position, remettre le petit point dans une position quelconque et faire afficher les coordonnées des deux points.*
Protocole : *déplacer le petit point et observer les coordonnées affichées pour essayer de repérer une relation fonctionnelle.*
Exploration : *non réalisée (objectif perdu en chemin).*
Interprétation : *aucune.*

Expérience 6
Montage : *redéfinir le petit point sur l'axe des abscisses.*
Protocole : *déterminer le lieu du gros point.*
Exploration : *le gros point a l'air d'être sur l'axe des abscisses ; de plus son lieu a l'air d'être inclus dans cet axe ou du moins très proche de cet axe d'après la question « quel objet » qu'affiche Cabri quand on approche le pointeur de l'axe des abscisses.*
Interprétation : *on conjecture que l'image de l'axe des abscisses par la transformation cachée est l'axe des abscisses lui-même.*

Expérience 7
Montage : *effacer les coordonnées affichées, libérer le petit point de l'axe des abscisses et tracer le droite joignant ces deux points.*
Protocole : *vérifier la conjecture « la droite passant par ces deux points passe aussi par l'origine ».*
Exploration : *la vérification visuelle est faite dans le cas de figure en cours mais est infirmée par le test d'appartenance de Cabri.*
Interprétation : *sous forme de conjecture « l'origine du repère fait toujours partie de la droite joignant les deux points donnés ».*

Expérience 8
Montage : *si on appelle m et M respectivement le petit et le gros point, mesurer om et oM.*
Protocole : *évaluer le rapport oM/om et observer les variations de ce rapport quand on déplace le petit point m.*
Exploration : *ce rapport vaut d'abord 1.48 et même s'il change quand on tire sur m, il varie très peu autour de ce nombre.*
Interprétation : *elle n'est pas explicitement faite mais on est très voisin d'une conjecture qui pourra être vérifiée.*

3.3.2. Analyse en liaison avec le modèle proposé de la démarche (mise en évidence des différentes phases)

Mise en évidence d'une phase préliminaire : On doit noter qu'on n'entre pas ici immédiatement dans la phase erratique mais dans une phase préliminaire de vérification du montage. Cette phase n'avait pas été prévue dans le modèle proposé.

Phase erratique : celle-ci se compose des expériences ou maillons de 1 à 3 ; des initiatives sont prises qui mènent à des observations dont le public ne tire pas partie. Cela justifie la nature faible des liens inférentiels entre ces différents maillons. Le lien suivant l'expérience 3, s'il semble être de type faible à la fin de cette expérience car celle-ci ne s'achève pas sur une interprétation explicite montrant qu'on va se concentrer sur un thème précis, est en réalité le premier de type normal car le contenu de l'expérience 4 montre une prise d'initiative se concentrant sur l'étude de la distance entre le petit et le gros point devant conduire à la détermination d'un point invariant de la transformation cachée.

Phase ordonnée : celle-ci se compose des expériences ou maillons de 4 à 6. De l'étude de la déformation visuelle du cercle tracé en passant par l'étude de la déformation visuelle du segment tracé jusqu'à la visualisation d'une distance nulle, la conviction d'avoir trouvé un point où l'image est confondue avec ce point est forte sinon certaine. L'expérimentation dans G1 est menée avec une méthodologie d'un G2 expérimentateur : la recherche des points invariants, même si elle n'est pas ressentie ainsi, est effective et montre un niveau d'abstraction plus élevé que celui qui transparaît dans l'expérimentation. Le fait de déplacer les axes pour amener l'origine sur cette position spéciale montre le désir d'appuyer la découverte d'un invariant géométrique dans le registre analytique. Les liens normaux le sont au sens où les expérimentateurs concentrent leurs initiatives autour d'un objectif qui se précise rapidement. La conjecture là aussi, si elle n'est pas explicite, va voir son statut validé par l'arrivée de l'expérience 6 où on voit une attention encore plus forte donnée à ce point que l'on va essayer de mettre en relation avec des configurations manipulées précédemment. Cette dernière remarque justifie la nature forte du lien entre expérience 6 et expérience 7.

Phase d'accélération : elle démarre à l'expérience 7, se continue par l'expérience 8 et est inachevée. La validation visuelle de l'alignement des sommets correspondants marque cette accélération. Les images des carrés, on l'a déjà noté, sont considérées comme des carrés agrandis. C'est peut-être la raison pour laquelle la figure est analysée de manière plus fine avec la mesure des distances *om* et *oM* et surtout l'évaluation de leur rapport. Cette accélération se confirme quand on déplace le point m et qu'on observe une quasi-constance du rapport *oM/om*. On sent que la recherche s'emballe et qu'on est proche de la conjecture finale. Cette conjecture finale va vraisemblablement s'énoncer dans G2 : cette vraisemblance est confortée par la croissance de considérations numérico-formelles dans les interprétations des observations faites après manipulations, c'est à dire faites après de nombreux essais. Le public a mis en évidence des conditions nécessaires fortement plausibles qui auraient pu les amener à la fin de cette phase d'accélération.

La recherche a duré en tout, 41 minutes

3.3.3. Bilan formalisé

Nous allons nous engager dans la même démarche que celle réalisée lors de l'expérience précédente. Voici donc les macro- et micro-étapes que nous venons de dégager de cette expérience sont les suivantes :

PHASE 0 : PHASE PRÉLIMINAIRE

Expériences de vérifications du montage

PHASE 1 : PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

[Exp 1: MPEI]**Lien Inf faible**[Exp 2 : MPEI]**Lien Inf faible**[Exp 3 : MPEI]

Lien Inf Normal de rupture

PHASE 2 : PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

[Exp 4 : MPEI] **Lien Inf Normal** [Exp5 : MPEI] **Lien Inf Normal**
[Exp5 : MPEI] **Lien Inf Normal** [Exp6 : MPEI]

Lien Inf Fort de rupture

PHASE 3 : PHASE D'ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE

[Exp 7 : MPEI] **Lien Inf Fort** [Exp8 : MPEI]

3.3.4. Niveaux de géométrie

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
G1	G1	G2/G1

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

Expérience 4	Expérience 5	Expérience 6
G2/G1	G1	G1

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE D'ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE

Expérience 7	Expérience 8
G1	G1

3.3.5. Appréhensions figurales

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
Opératoire positionnelle Optique	Opératoire positionnelle Optique	Opératoire positionnelle Optique

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

Expérience 4	Expérience 5	Expérience 6
Séquentielle Opératoire positionnelle	Opératoire positionnelle	Opératoire positionnelle Discursive

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE D'ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE

Expérience 7	Expérience 8
Optique	Séquentielle Opératoire positionnelle

3.3.6. Cadres d'investigations

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ERRATIQUE

Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
Scientifique explicatif 4D	Scientifique explicatif 4C	Scientifique explicatif 4B

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE DE RECHERCHE ORDONNÉE

Expérience 4	Expérience 5	Expérience 6
Modélisation 2C	Scientifique explicatif 4D	Scientifique explicatif 4D

POUR LES MICRO-ÉTAPES DE LA PHASE D'ACCÉLÉRATION DE LA RECHERCHE

Expérience 7	Expérience 8
Scientifique explicatif 4D	Scientifique explicatif 4D

4. BILAN SYNTHÉTIQUE DES DEUX ANALYSES, ANALYSE *A POSTERIORI*

4.1. Validations des phases pré-conjecture du modèle *a priori*

Il apparaît que dans un temps limité, un temps analogue a celui mis en évidence dans l'expérience de Liège, environ 45 minutes, il est raisonnable de repérer les trois premières phases mises en exergue dans la décomposition formelle ***a priori***. Ce qui a été fait au cours de cette double expérimentation.

4.2. Validations des micro-étapes des phases pré-conjecture du modèle *a priori*

On note que la décomposition quaternaire des maillons de la chaîne expérimentale est confirmée ; montage et protocole prennent naturellement la place mise en évidence dans la validation du chapitre précédent.

On note encore la difficulté de parvenir aux autres phases : le fait de ne pas avoir atteint la bonne conjecture suffit à expliquer cet état de fait. Il faudra donc, si on veut valider ces phases, faire une expérimentation qui portera essentiellement sur cette partie spéciale. Il faudra par exemple demander de justifier qu'une transformation cachée est bien d'un type donné et d'en demander ses caractéristiques.

Les deux résolutions ont été menées de manière très différentes avec des progressions sur deux phases pour l'une et sur trois phases pour l'autre. La plus courte en temps a été celle qui a le mieux approché la solution (au sens de l'observateur extérieur évidemment, car l'allongement du temps de recherche dans les deux groupes n'aurait pas obligatoirement confirmé cette impression).

4.3. Validation des niveaux de géométrie du modèle *a priori*

Rappelons le tableau résumant les niveaux de géométries mis en évidence dans notre modèle ***a priori*** qui avait été validé par l'expérimentation du chapitre précédent avec un public expert

Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération de la recherche
Investigations privées dans G1. Interprétations privées dans un G1 appauvri.	Investigation publique dans G1. Interprétation publique dans G1.	Investigation publique dans G1. Conjectures dans G2. Validations publiques dans G1.

Si on récapitule ce qui a été obtenu au cours des deux expérimentations précédentes

Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération de la recherche
1er groupe G2, G2, G1, G0 2nd groupe G1, G1, G2/G1	1er groupe G0/G1, G0/G1, G2, G1/G2, G2/G1, G2/G1 2nd groupe G2/G1, G1, G1	1er groupe Rien 2nd groupe G1,G1

Le modèle est largement **VALIDÉ** par cette double expérimentation qui montre une forte prégnance du niveau G1 de géométrie.

On retrouve une recherche erratique souvent privée au niveau G1 même si des tentatives pour se placer dans G2 sont repérées (qui n'aboutissent d'ailleurs pas) : seules les techniques de G2 sont utilisées c'est -à-dire la construction d'objets mathématiques aux instruments, ici avec le logiciel Cabri, c'est pourquoi, nous avons pu envisager de parler de niveau G2 informatique. La technologie associée à G2 qui s'appuie sur un discours déductif (lui-même s'appuyant sur un fond de théorie axiomatique) n'est jamais utilisée.

On retrouve aussi une recherche ordonnée généralement publique (ce ne sont plus des monologues juxtaposés mais des dialogues argumentatifs), s'articulant sur le niveau G1. La encore le niveau G2 est signalé pour des constructions avec le logiciel d'objets mathématiques précis.

On retrouve enfin cette phase de recherche ordonnée si le temps accordé pour cette recherche est assez long. Nous avons noté que pour ce type de problème posé dans les conditions décrites, 45 minutes peuvent suffire mais un temps plus long peut être nécessaire. Dans l'expérimentation qui a laissé apparaître cette troisième phase, le niveau G1 est le seul qui ait été utilisé toujours dans un contexte publique. Si le niveau G2 ne l'a pas été, c'est qu'aucune conjecture ou sous-conjecture claire n'a pu être émise : elle l'aurait été dans ce cas dans G2.

4.4. Validation des appréhensions figurales du modèle *a priori*

Dans le tableau qui suit, nous allons détailler, pour chacune des trois phases apparaissant dans notre expérience, les appréhensions que nous avons mises en évidence grâce à la boîte noire Montréal (sous l'intitulé « ***a priori*** ») et les appréhensions qui sont apparues dans cette expérience (sous l'intitulé « ***a posteriori*** »). Elles seront validées ou non suivant les résultats de la comparaison.

Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération de la recherche
VALIDÉE ***A priori* :** opératoire positionnelle ***A posteriori* :** **Groupe 1** Séquentielle et opératoire positionnelle **Groupe 2** opératoire positionnelle et optique	**VALIDÉE** ***A priori* :** opératoire positionnelle et perceptive ***A posteriori* :** **Groupe 1** Toutes les appréhensions interviennent **Groupe 2** Majoritairement opératoire positionnelle	**VALIDÉE** ***A priori* :** opératoire positionnelle et discursive ***A posteriori* :** **Groupe 1** Rien **Groupe 2** Optique, séquentielle et opératoire positionnelle

Nous pouvons constater que notre expérience vient valider les types d'appréhensions que nous avions mises en évidence dans notre modèle ***a priori*** de démarche expérimentale médiée.
Nous notons que l'appréhension opératoire positionnelle semble être un invariant fort dans cette recherche spécifique de boîte noire sous Cabri. Le logiciel avec ses potentialités dynamiques vient accentuer la présence de cette appréhension.

Les appréhensions séquentielles viennent marquer des moments d'initiatives de constructions et les appréhensions discursives viennent marquer les moments d'interprétations des phénomènes générés par les actions engagées.

4.5. Validation des cadres d'investigation du modèle *a priori*

Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération de la recherche
NON VALIDÉE ***A priori* :** Scientifique empirique 4D ***A posteriori* :** **Groupe 1** Engagement et modélisation	**VALIDÉE** ***A priori* :** Modélisations ***A posteriori* :** **Groupe 1** Modélisations	**EN SUSPENS** ***A priori* :** Ingéniérie par itération 3B ***A posteriori* :** **Groupe 1** Rien

Groupe 2 Scientifiques	**Groupe 2** Modélisations et scientifiques	**Groupe 2** Scientifique explicatif

Ici, notre expérience valide largement les cadres d'investigations de la phase de recherche ordonnée.

Par contre pour la phase d'accélération de la recherche, il semblerait que l'hypothèse de notre modèle soit cette fois invalidée. Néanmoins, notons qu'une des deux expérimentations ne nous pas permis d'atteindre cette phase et que la seconde n'a pas permis d'arriver à une conjecture ou sous-conjecture explicite. Nous pourrons donc nous en tenir à une validation ou une invalidation encore possible.

Comme dans l'expérimentation de Liège, en ce qui concerne la première phase, la phase de recherche erratique, on ne retrouve pas les mêmes cadres d'investigations. L'hypothèse du modèle ***a priori*** est invalidée mais l'hypothèse qui avance qu'on ne peut prévoir un type spécifique de cadre d'investigation dans cette phase est, elle, validée.

VALIDATION EXPÉRIMENTALE DU MODÈLE À PARTIR DE LA RECHERCHE DU PROBLÈME DIFFICILE DE LHUILLIER FAITE PAR UN CHERCHEUR

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME DIFFICILE

1.1. Caractérisation d'un problème difficile

Le caractère difficile d'un problème n'est pas de nature intrinsèque, ce caractère est à relier essentiellement aux connaissances de celui à qui il est posé et du contexte dans lequel il est posé.

Un problème est difficile quand il vérifie au moins les conditions suivantes :
♦ sa résolution n'est pas triviale ;
♦ sa résolution ne fait pas appel à une notion bien repérée dans le ***curriculum*** scolaire ;
♦ celui à qui on le pose ne peut savoir ***a priori*** s'il va savoir le résoudre ni même si ses connaissances seront suffisantes pour une éventuelle résolution.

En quelque sorte, un problème qu'on pourrait qualifier de consistant dans la mesure où, pour avoir des chances d'avancer, il faudra prendre des initiatives, ne serait-ce que pour mettre en évidence des solutions particulières. Cette prise d'initiatives est favorisée dans les problèmes de boîtes noires, c'est ce qui a été vu et validé dans les chapitres précédents. Nous faisons l'hypothèse que, dans ce type de problème, l'émergence des phases non encore validées de notre modèle ***a priori*** de démarche expérimentale, sera favorisée

1.2. L'arrivée de ce problème dans notre travail :

Ce problème nous a été « posé » pour la première fois par Bernard Capponi de l'IREM de Grenoble. Le « cercle des géomètres disparus », groupe dont Bernard Capponi fait partie, s'intéressait particulièrement à ce problème (il en cherchait la preuve du résultat qui lui avait été soufflée par l'expérimentation faite sous Cabri). Bernard Capponi montra cette expérimentation pendant le Congrès de l'APMEP de Marseille. Il faut reconnaître qu'il nous montra sa transposition de cette expérimentation. Même s'il n'a jamais affirmé que cette démarche était point par point celle qu'il avait eue avec Cabri, sa présentation a l'avantage d'afficher la représentation que se fait un expert de Cabri d'une utilisation pertinente de ce logiciel dans une démarche de recherche expérimentale.
Cette représentation est-elle conforme à notre modèle ***a priori*** ?

Pour répondre à cette question nous nous proposons dans un premier temps de soumettre cette démarche au crible de notre modèle.

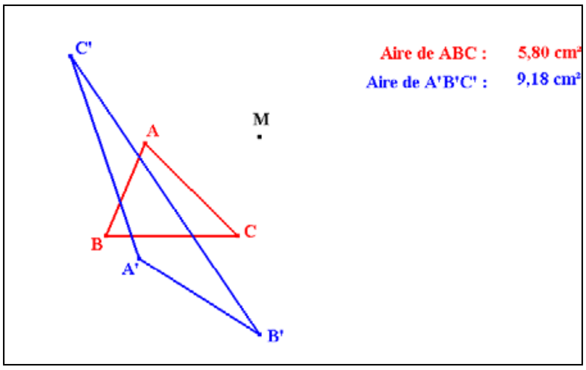
Dans un second temps, nous analyserons la recherche de ce problème menée de bout en bout par un chercheur à qui nous l'avons proposé. Là encore, l'analyse sera faite au crible de notre modèle.

Enfin, nous comparerons la démarche suivie à celle de Bernard Capponi pour voir en particulier si ce type de problème favorise l'apparition des dernières phases de notre modèle non validées par les expérimentations précédentes (nous pensons tout particulièrement aux phases post conjecture).

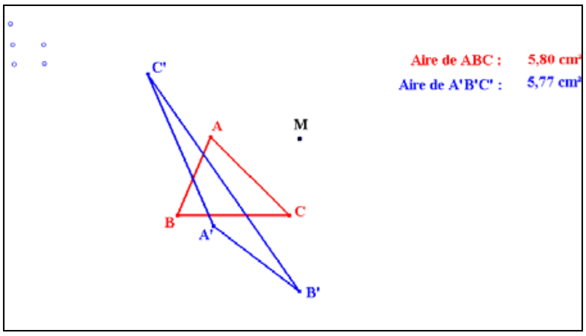
1.3. La monstration faite par Bernard Capponi

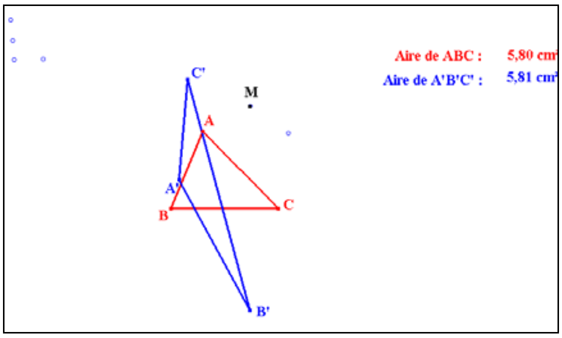
Sur une page Cabri, il représente un triangle quelconque ABC et un M point quelconque du plan ; il construit les symétriques respectifs A', B' et C' du point M par rapport aux droites

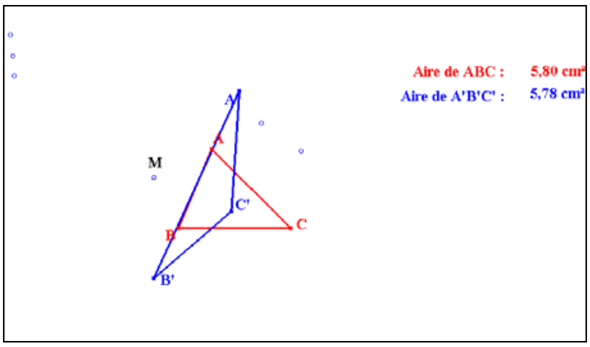
(BC), (CA) et (AB), qui déterminent le triangle A’B’C’. Il nous pose ensuite le problème suivant :
« ***Existe-t-il des positions du point M égalant les aires des triangles ABC et A’B’C’ ? Si oui les déterminer toutes.*** »
Son but n’était pas que nous cherchions, mais de nous présenter un compte-rendu clair ou plutôt éclairci, ordonné de la recherche sous Cabri qui a conduit à la conjecture dont son groupe de recherche cherchait la preuve (au sens de la démonstration).
Il commence par afficher les aires des triangles :

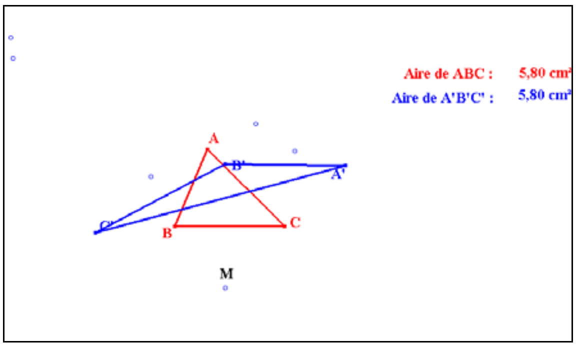


Il me propose ensuite de tirer sur M pour repérer des positions pouvant être solutions ; il cherche de telles positions dans un voisinage de la position initiale de M. Il fait cette recherche après avoir mis en réserve quelques points libres en haut à gauche de l’écran. Il trouve rapidement une position où les aires sont très voisines (il n’arrive pas à les égaler). Néanmoins il va se saisir d’un point de réserve pour l’amener sur cette position qui restera donc repérée. Il recommence ainsi plusieurs fois autour du triangle.

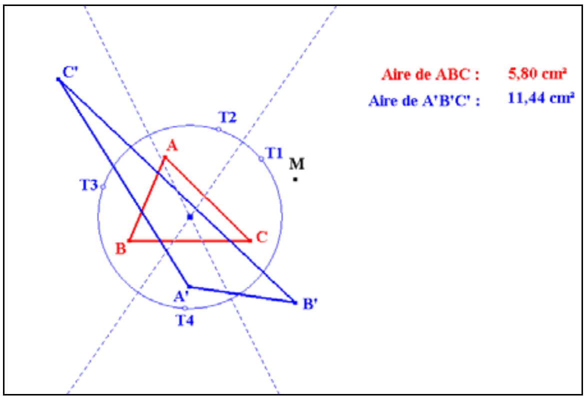




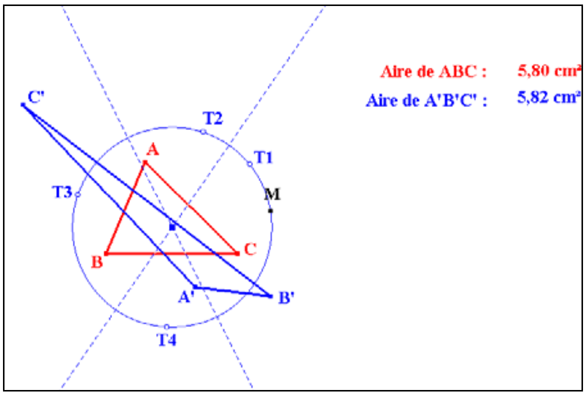




Après les trois premiers points mis en évidence, il constate que ceux ci ne sont pas alignés et que si l’ensemble cherché n’est pas trop compliqué ce pourrait être un cercle passant par ces trois points. Il cherche et détermine un quatrième point. Il construit ensuite le cercle passant par les trois premiers points (en utilisant la construction du cercle circonscrit à un triangle c'est-à-dire en déterminant l'intersection de deux médiatrices)

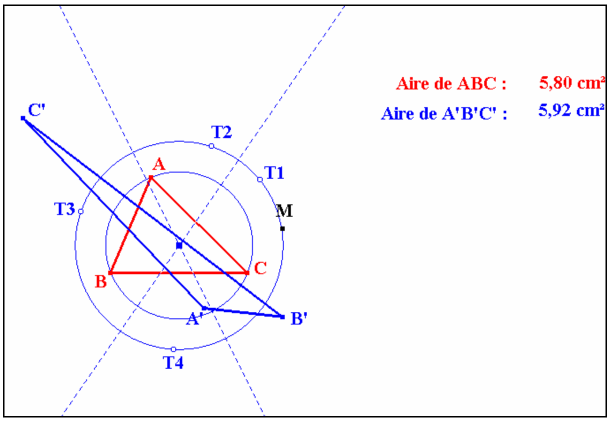


Il me fait constater visuellement que le quatrième point repéré, T4 a bien l'air d'appartenir à ce cercle.
Pour valider la conjecture qu'il n'énonce pas mais à laquelle il m'a poussé, il me propose d'amener le point M sur le cercle et cela à plusieurs endroits différents si possible en suivant la courbure du cercle.

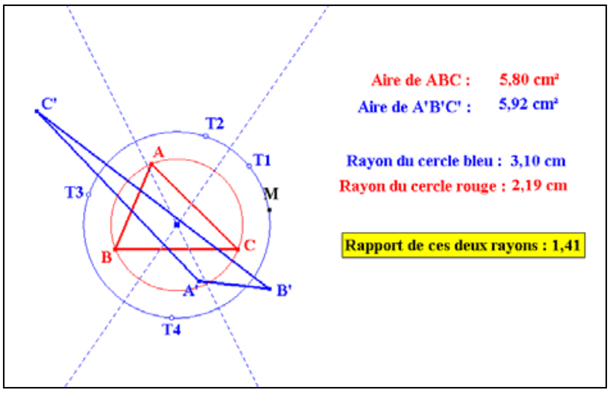


La validation en déplaçant le point M à la main, si elle est bonne au début de la manipulation (voir figure précédente avec une différence de 0.02cm² entre les deux aires), malheureusement devient moins précise quand on essaie d'autres positions de M. C'est pourquoi, Bernard propose de redéfinir le point M sur le cercle tracé pour que le problème de l'appartenance soit réglée pour le logiciel. On tire ensuite le point sur ce cercle et on se rend compte que l'écart entre les deux aires persiste mais varie entre 5.60 et 5.90, le plus souvent aux alentours de 5.80 d'autant plus qu'on reste voisin des points ayant servi à tracer le cercle bleu.
Bernard me propose de m'intéresser à ce cercle et en particulier à son centre pour voir si ce ne serait pas un point particulier du triangle ABC.

Il commence à tracer un cercle centré au centre du cercle bleu, écarte le curseur pour fixer le rayon et s'arrête en A. Oh ! surprise, ce cercle passe aussi visuellement par B et C. Notre solution me dit-il, serait donc un cercle centré au centre du cercle circonscrit de ABC, concentrique à celui-ci et de rayon à déterminer en fonction de celui de ABC.

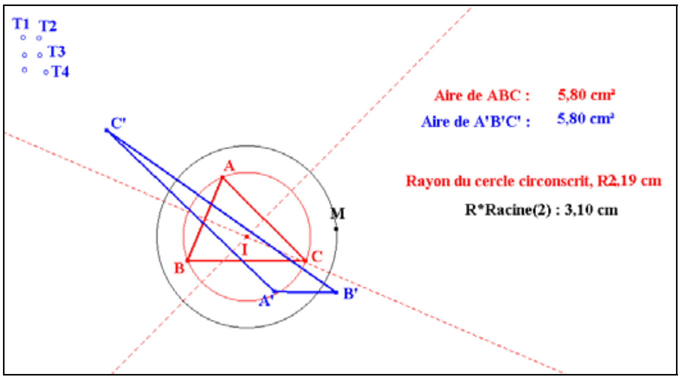


Il fait donc afficher les rayons respectifs de ces cercles et calcule leur rapport avec la calculatrice intégrée de Cabri. Le nombre obtenu, 1.41 a de quoi éveiller la curiosité, d'autant que la décimale suivante est un 1 alors que $\sqrt{2}$ qui a comme écriture décimale approchée 1.414 a un 4 comme troisième décimale.

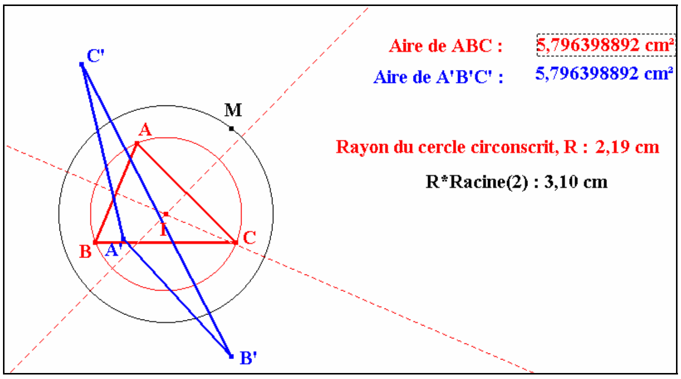


Il énonce donc la conjecture à laquelle il m'a amené dans un processus monstratif analogue à celui d'une expérience de physicien :
L'ensemble des points M du plan tels que le triangle A'B'C' ait une aire égale à celle du triangle ABC est le cercle centré au centre du cercle circonscrit de ABC et ayant pour rayon R. $\sqrt{2}$ **où R est le rayon du cercle circonscrit.**
Sans que nous ayons le temps de souffler, il reprend la souris pour me faire la vérification de sa conjecture :

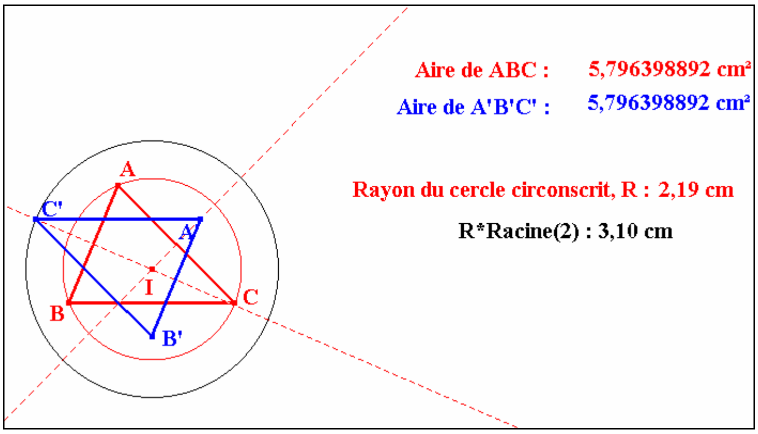
Il redonne sa liberté à M, détruit toutes les constructions faites pour arriver à la conjecture. Il construit le cercle circonscrit à ABC en rouge (il est centré en I) et fait afficher son rayon R. Il calcule à la calculatrice **R.**$\sqrt{2}$ **.** Il utilise ensuite le compas pour construire le cercle centré en I et ayant pour rayon le nombre obtenu. Il redéfinit le point M sur ce cercle et on peut constater l'égalité des deux aires. Il tire ensuite sur le point M pour lui faire occuper toutes les positions intermédiaires possibles sur ce cercle et on continue à constater que les deux aires restent affichées égales jusqu'à la seconde décimale.



Pour rendre encore plus plausible sa vérification, il augmente au maximum le nombre de décimales affichées ; on peut constater l'égalité de toutes les décimales pour toute position qu'on pourrait choisir sur le cercle tracé.



Arrivé à ce stade de cette présentation qui fut assez rapide (une dizaine de minutes sur le coin d'une table), je pensais que Bernard en avait fini : j'étais plus que convaincu par cette Cabri-vérification ! Je n'étais pas arrivé au bout de mes surprises.
Il désolidarisa à nouveau M de son cercle d'appartenance pour bien vérifier qu'en le déplaçant ailleurs, on ne risquait pas de trouver de points solutions qui n'auraient pas été repérés par notre investigation.
Quand on écartait le point M de plus en plus loin à l'extérieur du cercle, l'aire du triangle A'B'C' augmentait de plus en plus et à ce moment-là, je fus saisi d'un petit vertige car je réalisais que si en s'écartant dans un sens l'aire augmentait, si on animait le point M dans l'autre sens, cette aire allait diminuer puis ré augmenter, mais quand ? C'est seulement à ce moment, au cours de cette exhibition, que mon cerveau put prendre le relais mais Bernard me dépassa bien rapidement en tirant le point M vers l'intérieur du triangle et je ne pus, comme il voulait m'y amener, que constater que l'aire de notre grand triangle se rapprochait de plus en plus de l'aire du triangle de départ au fur et à mesure que le point M se rapprochait du centre du cercle circonscrit I. Il devança mes désirs en redéfinissant le point M en I et surprise qui finalement n'en fut pas une, les deux aires s'égalaient à nouveau parfaitement.



Enfin, il revient à une version de la figure où le point M était sur le grand cercle et il se met à modifier les dimensions du triangle : il me fait constater que le résultat conjecturé sur un triangle se généralisait naturellement, d'où la curieuse conjecture finale qui appelait une démonstration rigoureuse.

L'ensemble des points M du plan tels que le triangle A'B'C' ait une aire égale à celle du triangle ABC est la RÉUNION du cercle de rayon R.$\sqrt{2}$ centré au centre du cercle circonscrit de ABC (où R est le rayon de ce cercle circonscrit) ET le centre du cercle circonscrit.

1.4. Analyse de cette démarche monstrative en liaison avec le modèle proposé

1.4.1. Première approche de la démarche :

Proposition du problème.
Recherche exhaustive de quelques points solutions.
Arrivée rapide d'une première conjecture (on est dans G1 avec de l'intuition).
Validation visuelle dans G1 (il y a de la déduction).
Arrivée de la seconde conjecture toujours dans G1.
Arrivée de la troisième conjecture dans G1/G2.
Validation dans G2 informatique de ces trois conjectures.
Tentative de survalidation et infirmation de la conjecture.
Découverte de la nouvelle conjecture.

Il manque évidemment la démonstration classique pour avoir la confirmation définitive, la plausibilité à 100%.

1.4.2. Les maillons quaternaires de la chaîne expérimentale :

Expérience 1 de proposition du problème
Montage : *construire un triangle ABC, un point M et ses symétriques respectifs par rapport aux trois cotés de ABC qui détermine un triangle A'B'C'.*
Protocole virtuel : *chercher les positions de M égalant les aires des deux triangles.*
Exploration virtuelle : *chercher et découvrir ces positions.*
Interprétation virtuelle : *ce sera la réponse.*

Expérience 2
Montage : *c'est le montage proposé dans l'expérience de proposition.*

Protocole : *déplacer M jusqu' à repérer plusieurs positions pouvant répondre à la question. L'expérimentation sera donc faite dans G1 dans le monde sensible modélisé par la page de travail Cabri.*
Exploration : *c'est l'exécution du protocole avec dépôt manuel de points aux emplacements repérés. Les quatre points déposés le sont en des positions non alignées.*
Interprétation : *c'est une « intuition » qui conduit à l'inférence déductive suivante : « si l'ensemble des points cherchés n'est pas trop compliqué alors c'est un cercle passant par ces quatre points ».*

D'où le besoin de validation qui constitue le corps du lien inférentiel conduisant à l'expérience suivante :

Expérience 3
Montage : *construire le cercle passant par les trois premiers points déposés ; son centre sera l'intersection des médiatrices de [T1T2] et [T2T3].*
Protocole : *observer la position de T4 par rapport à ce cercle.*
Exploration : *le protocole exécuté nous mène à l'appartenance de T4 à ce cercle.*
Interprétation : *les quatre points déposés sont bien cocycliques dans G1 et on commence la validation de la première conjecture « l'ensemble des points cherchés est un cercle ».*

Expérience 4 de validation
Montage : *reprendre le montage dans l'état où il a été laissé à la fin de la précédente expérience.*
Protocole : *déplacer « approximativement » le point M sur ce cercle pour observer le comportement des aires (on travaille donc toujours dans G1).*
Exploration : *on est conduit à constater que les aires sont approximativement égales.*
Interprétation : *c'est une validation conditionnelle qui s'énonce ainsi « si les constructions étaient exactes et si le point M était réellement positionné sur le cercle (si on était dans G2) alors les mesures des aires seraient égales le qualificatif « égales » étant pris dans son acception mathématique » et non dans l'acception « égalité de valeurs approchées ».*

Expérience 5
Montage : *construire un cercle centré au centre du cercle précédemment construit.*
Protocole : *modifier le rayon de ce cercle en tirant sur l'un de ses points (ce protocole est le résultat d'une intuition incluse dans le lien inférentiel précédent cette expérience).*
Exploration : *une position est repérée où le cercle variable passe par A, B et C.*
Interprétation : *le centre du premier cercle serait donc le centre du cercle circonscrit (une observation faite dans le niveau G1 permet de faire une conjecture dans le niveau G2) et on arrive à la **conjecture 1** : « l'ensemble des points cherchés est un cercle concentrique au cercle circonscrit à ABC et de rayon supérieur à celui du cercle circonscrit ».*

Expérience 6
Montage : *reprendre le montage dans l'état où il a été laissé à la fin de la précédente expérience. Afficher les rayons respectifs de ces deux cercles (le premier et celui qui avait l'air d'être le cercle circonscrit à ABC).*
Protocole : *calculer et afficher le rapport de ces aires.*
Exploration : *le résultat du calcul s'affiche sous la forme 1.41.*
Interprétation : *la encore le résultat affiché et reçu dans le niveau G1 est interprété comme* $\sqrt{2}$ *donc dans le niveau G2 ; ces sauts successifs montrent que la conjecture prend corps*

dans un registre plus abstrait que les éléments concrets observés dans G1. La seconde conjecture prend corps sous la forme finale, conjecture 2 : « l'ensemble des points cherchés est un cercle concentrique au cercle circonscrit du triangle ABC est son rayon est égal à $R.\sqrt{2}$ où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC ».

Expérience 7
Montage : *revenir au montage initial en éliminant des constructions faites dans les expériences qui précèdent. Construire le cercle circonscrit à ABC puis le cercle de même centre ayant comme rayon $R.\sqrt{2}$ où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC. Redéfinir M sur ce dernier cercle.*
Protocole : *déplacer M sur ce cercle et observer les modifications des aires affichées de ABC et A'B'C'.*
Exploration : *on observe que les aires affichées ne changent pas et restent égales jusqu'à la deuxième décimale.*
Interprétation : *les points de ce cercle vérifient la propriété attendue d'égalité d'aire. Cette vérification qu'on qualifie usuellement de Cabri-preuve est du domaine de G2 car les points M appartiennent à un cercle en raison de la propriété caractéristique géométrique qui est du domaine de G2 mais pour être plus précis du domaine de G2 informatique puisque nous utilisons la* ***modélisation de G2*** *par* ***Cabri et certains de ses schèmes d'utilisation*** *qui nous l'avons vu pouvait aussi être considéré à d'autres moments comme* ***une modélisation de G1*** *mais* ***avec d'autres schèmes d'utilisation****.*

Expérience 8
Montage : *on ne change dans le montage précédent que l'affichage du nombre de décimales qu'on augmente à sa valeur maximale.*
Protocole : *même protocole qu'à l'expérience précédente.*
Exploration : *même exploration et mêmes observations sur toutes les décimales affichées.*
Interprétation : *renforcement de la conjecture 2.*

Expérience 9 d'analyse critique (ou de survalidation vérificative)
Montage : *désolidariser M de son cercle d'appartenance, c'est-à-dire le redéfinir en tant que point libre.*
Protocole : *déplacer M à la souris pour vérifier qu'il n'y a pas de points hors du précédent cercle d'appartenance de M égalant les deux aires de nos deux triangles.*
Exploration : *découvrir qu'un point proche du centre du cercle circonscrit semble être aussi solution.*
Interprétation : *la dernière conjecture est invalidée mais une nouvelle plus précise se dessine, conjecture 3 « l'ensemble trouvé dans la conjecture 2 est complété par un point ».*

Expérience 10
Montage : *faire une copie du montage précédent sur cette copie.*
Protocole : *redéfinir M au centre de ce cercle et observer les aires.*
Exploration : *les aires sont égalées.*
Interprétation : *confirmation de la conjecture 3.*

Expérience 11 ou validation terminale
Montage : *reprendre le montage de l'expérience 9.*
Protocole : *redéfinir M sur le cercle de rayon $R.\sqrt{2}$, déformer le triangle ABC et observer les modifications des aires affichées.*

Exploration : *les aires changent et restent égales deux à deux.*
Interprétation : *la conjecture 3 devient fortement plausible (étaiement de la conjecture sur les cas Cabri-observables).*

1.4.3. La décomposition suivant les phases du modèle :
Voici la décomposition à laquelle nous arrivons en analysant les 11 expériences constituant la démarche de recherche proposée par Bernard Capponi :

Phase 1 : phase de proposition du problème (Expérience 1)

	Expérience 1
Niveau de géométrie	G1
Appréhensions figurales	Discursive et séquentielle
Cadres d'investigations	Pas de cadre

Phase 2 : phase de recherche erratique (Expérience 2)

	Expérience 2
Niveau de géométrie	G1 informatique
Appréhensions figurales	Opératoire positionnelle Perceptive Discursive
Cadres d'investigations	Ingéniérie au hasard 3A

Une seule expérience permet de trouver une bonne conjecture (n'oublions pas que nous analysons une reconstitution telle qu'elle nous a été proposée) ce qui va permettre de shunter les phases de recherche ordonnée et d'accélération de la recherche. Le cadre d'investigation qui permet d'avancer très vite, le cadre d'ingéniérie au hasard est un cadre pertinent à cause de l'outil utilisé (Cabri et sa mise à jour automatique des affichages numériques) qui permet d'explorer au hasard et de conjecturer dans la foulée lorsqu'on est un expert en géométrie. Cette conjecture est la conséquence d'un théorème en acte inclus dans l'un des schèmes d'utilisation de Cabri : on admet implicitement la continuité de la variation de l'aire affichée par rapport à la position du point qui le commande. Cela permet de se convaincre que, si un affichage donne un nombre voisin de 1, le point qui génère cet affichage est un point très proche d'un point solution. Ceci nous renvoie aux indices du modèle PACKS de Robin Millar quand celui-ci parle de la compréhension des indices qui nous font prendre conscience de l'incertitude des données.
Une autre explication plus pragmatique, dans l'exemple particulier que nous analysons est la forte valeur monstrative de la démarche présentée ; cette démarche a pour but de réaliser la dévolution du problème au spectateur et le convaincre de l'efficacité immédiate de l'outil géométrie dynamique et plus spécialement de Cabri. Ceci est confirmé par l'ordre des appréhensions figurales mises en jeu : d'abord une appréhension opératoire positionnelle fortement associée au caractère dynamique de l'outil utilisé, ensuite une appréhension perceptive montrant qu'il y a des informations sensibles à recevoir et enfin l'appréhension discursive qui montre que ces données sensibles sont interprétées formellement et permettent d'accéder à la réalité mathématique, c'est-à-dire le niveau logico-déductif.

Phase 3 : phase d'analyse expérimentale et synthèse expérimentale (Expériences 3 et 4)

	Expérience 3	**Expérience 4**
Niveau de géométrie	G1	G1 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle Perceptive	Opératoire positionnelle Perceptive Discursive
Cadres d'investigations	Modélisation 2C	Scientifique explicatif 4D

Nous sommes bien dans G1 pour commencer où la technique utilisée est l'instrument qui permet de tracer le cercle passant par 3 points et la technologie relève de la superposition du quatrième point sur le cercle tracé. Le cadre d'investigation est un cadre de modélisation qui résulte de la conjecture « les points trouvés sont sur un cercle et les points cherchés aussi » : le choix de ce cadre dépend de l'expérience de celui qui résout le problème, donc de son aptitude à conjecturer une cocyclicité de points non alignés avant d'aller chercher plus compliqué. Le modèle « cercle » apparaît vite (peut-être trop vite pour des chercheurs « lambda »). Les constructions nécessaires pour la construction du centre de ce cercle font appel à une appréhension séquentielle de la figure et l'appréhension perceptive est mobilisée pour inférer la très plausible appartenance de T4 à ce cercle.
L'expérience 3 se résume à « si les points cherchés sont sur un cercle alors le cercle est celui qui passe par T1, T2 et T3 et de plus il passe par T4 » ce qui est validé comme il a été indiqué précédemment.

Dans l'expérience 4 qui se résume à « si la solution cherchée est un cercle alors le cercle tracé est très voisin du cercle solution et tout point du cercle tracé vérifiera approximativement la propriété d'égalité des aires » le niveau repéré est bien encore un G1 tant aux niveaux des techniques que des technologies. Si nous l'avons qualifié d'informatique c'est que l'utilisation de l'instrument Cabri enrichit la technologie au niveau de la quantité des mesures réalisées et au niveau de la rapidité de ces mesures. Cette partie synthèse expérimentale semble être ce que Millar qualifie de cadre d'investigation scientifique explicatif (le modèle mis en évidence au cours de l'expérience précédente est validé par superpositions perçues sur l'écran de l'ordinateur qui modélise notre réel mathématique qui serait un spatio-graphique informatique). Les appréhensions figurales mises en jeu successivement sont bien celles qui sont mobilisées idéalement dans une investigation médiée par Cabri : du mouvement dans l'appréhension opératoire positionnelle qui permet de générer des phénomènes, de la visualisation dans l'appréhension perceptive et de l'interprétation validative dans l'appréhension discursive.

Phase 4 : phase de recherche ordonnée (Expérience 5)

	Expérience 5
Niveau de géométrie	G1/G2
Appréhensions figurales	Opératoire positionnelle Perceptive Discursive
Cadres d'investigations	Modélisation 2C

La nécessité d'en savoir plus sur le cercle trouvé nous fait revenir dans la phase de recherche ordonnée par une thématique précise. Le cadre d'investigation est un cadre de modélisation faisant intervenir les cercles concentriques au cercle trouvé et cela, de manière dynamique ; cela explique l'appréhension d'abord opératoire positionnelle qui induit la perception d'une position intermédiaire passant par les trois points ABC. L'appréhension discursive permet de mettre en évidence le rôle particulier du cercle circonscrit. La bascule G1/G2 des niveaux de géométrie s'opère quand on passe d'une appréhension dynamique et opératoire de la figure (G1) à l'appréhension discursive qui fait utiliser un discours déductif (G2) pour arriver à une conjecture qui va en appeler d'autres, d'où naturellement la phase suivante et attendue suivant le modèle ***a priori***.

Phase 5 : phase d'accélération de la recherche (Expérience 6)

	Expérience 6
Niveau de géométrie	G1/G2
Appréhensions figurales	Séquentielle Perceptive Discursive
Cadres d'investigations	Scientifique explicatif 4D

Nous avons déjà expliqué le changement de niveaux G1/G2 qui est produit par l'intuition qui permet de passer de la perception du 1.41 à l'interprétation en $\sqrt{2}$. Cette fois, l'appréhension initiale est séquentielle : des constructions, mesures et calculs sont effectués dans un ordre bien déterminé pour mener à la perception dans G1et l'interprétation dans G2. L'investigation est de type scientifique explicatif car elle mène à une conjecture formelle qui devra être validée. Notre modèle ***a priori*** prévoit l'arrivée d'une phase d'analyse expérimentale et de synthèse expérimentale ; c'est une phase plus avancée de ce modèle qui est mise en évidence ci-dessous.

Phase 6 : phase d'analyse théorique et de synthèse quasi théorique (Expériences 7 et 8)

	Expérience 7	**Expérience 8**
Niveau de géométrie	G2 informatique	G2 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle Opératoire positionnelle Perceptive Discursive	Séquentielle Opératoire positionnelle Perceptive Discursive
Cadres d'investigations	Scientifique explicatif 4D	Scientifique explicatif 4D

Le niveau G2 est assuré tant au stade des techniques que de la technologie : le cercle circonscrit est bien tracé avec Cabri mais en utilisant des caractéristiques mathématiques (utilisant un discours logico-déductif) ; il en est de même pour la construction de son homothétique dans l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$. Le niveau où nous nous situons est qualifié d'informatique car les vérifications d'appartenance qui seront faites avec le logiciel auront une plausibilité sans aucune mesure avec celles qui pourraient l'être en environnement papier crayon. Ces vérifications sont d'un ordre opératoire dans le micro-monde Cabri alors qu'elles restent dans un ordre perceptif dans l'environnement papier crayon ; on pourrait parler d'une vérification quasi analytique en regard d'une vérification visuelle. Le cadre d'investigation est typiquement scientifique explicatif car il va vérifier l'adéquation entre le modèle produit et le phénomène qui doit avoir lieu dans le cadre du modèle découvert. L'appréhension opératoire positionnelle de la figure permet de produire des données qui viennent valider le modèle explicatif avancé (ici le cercle de centre le centre du cercle circonscrit et de rayon $R\sqrt{2}$, où R est le rayon du cercle circonscrit). L'analyse théorique est produite par un raisonnement du

type « si les points qui conviennent sont bien sur le cercle envisagé expérimentalement alors ces points devraient être sur le cercle envisagé mais construit rigoureusement à partir de ses propriétés caractéristiques ». Ce n'est donc pas une analyse « théorique » ***stricto sensu*** puisqu'elle ne consiste pas à faire la preuve démonstrative de :
« si un point convient, alors il est sur un cercle particulier ayant des caractéristiques repérées », mais par une inférence du type :
« si les points qui semblent convenir sont sur un cercle repéré expérimentalement, alors, vraisemblablement, ils seront sur un cercle dont l'intuition nous fait deviner les caractéristiques mathématiques ».
La synthèse est menée de manière tout à fait classique aussi bien dans l'expérience 7 que la 8 ; nous la qualifions de quasi théorique dans la mesure où elle s'intéresse bien à la vérification de l'implication :
« si un point appartient à ce cercle particulier, alors celui-ci vérifie l'égalité des aires », mais où cette vérification ne peut être de l'ordre du démonstratif déductif mais du démonstratif au niveau des points choisis sur le cercle de Cabri. La précision des calculs du logiciel permet encore d'approcher la certitude de la vérité de cette implication sur un nombre assez grand d'exemples avec toujours une très forte plausibilité.
Notons que l'enchaînement des appréhensions que nous avons noté semble un enchaînement idéal dans un environnement de géométrie dynamique pour une telle phase : après une étape de constructions claires, une animation permet de percevoir les éléments qui vont être interprétés comme les invariants à repérer.

Phase 7 : phase d'analyse critique (Expérience 9)

	Expérience 9
Niveau de géométrie	G1
Appréhensions figurales	Opératoire positionnelle Perceptive Discursive
Cadres d'investigations	Ingéniérie par itération 3B

On retombe bien au niveau G1 dans la mesure où on bouge le point variable sur la page Cabri mais que la perception des effets produits reste au niveau du sensible sans un saut formel qui ferait passer à G2. Les visualisations successives des aires affichées justifient que nous sommes bien dans un cadre d'investigation par itération. L'appréhension discursive intervient quand l'expérimentateur réalise par une appréhension perceptive que la manière dont l'aire affichée varie va l'amener vraisemblablement à repérer un point qui n'avait pas été envisagé dans la première investigation par itération autour du triangle, c'est-à-dire le centre du cercle circonscrit lui-même. ***In fine***, il fait une nouvelle conjecture qui vient affiner la précédente qui avait été validée « localement ». On peut lier cette phase à la phase de vérification dans la démarche d'expérimentation en sciences cliniques quand le praticien après ses actes opératoires va voir de plus près si l'état clinique correspond à l'état attendu.

Phase 8 : d'analyse critique, d'analyse théorique et de synthèse quasi théorique
(Expérience 10)

	Expérience 10
Niveau de géométrie	G2 G2 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle Perceptive

	Discursive
Cadres d’investigations	Scientifique explicatif 4D

Le fait de se placer en le centre du cercle circonscrit justifie le saut au niveau G2 et le fait que ce placement soit réalisé grâce à l’outil « redéfinition » de Cabri justifie le qualificatif d’informatique. Cette construction fait donc appréhender la figure séquentiellement avant qu’une appréhension perceptive nous montre un affichage d’aires égales qui est interprété dans une appréhension discursive comme « le centre du cercle circonscrit est effectivement un autre point solution », la plausibilité de cette interprétation étant maximum dans l’environnement Cabri (ce qui peut être qualifié de Cabri-preuve). Là encore le cadre d’investigation a permis de valider l’hypothèse « un point particulier associé au triangle donné est solution » par une mesure faite dans l’environnement spécifique Cabri.

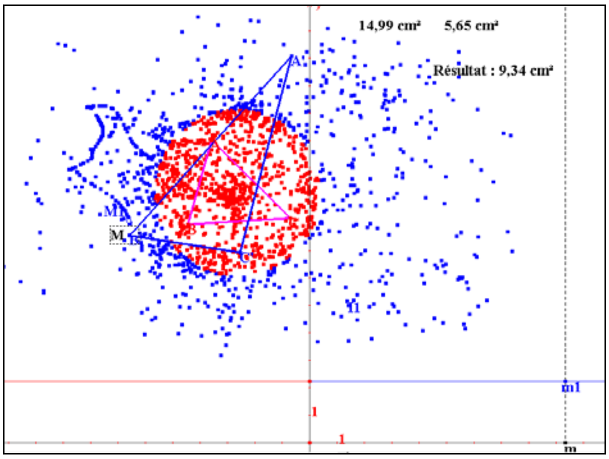
Phase 9 : phase d’analyse critique (Expérience 11)

	Expérience11
Niveau de géométrie	G1
Appréhensions figurales	Opératoire optique Perceptive Discursive
Cadres d’investigations	Ingéniérie au hasard 3A

Cette nouvelle conjecture fait à nouveau basculer l’expérimentateur dans une nouvelle phase d’analyse critique qui va lui faire explorer à nouveau le plan de manière aléatoire pour essayer de repérer éventuellement des positions écartées dans les investigations précédentes. Le cadre d’investigation est donc un cadre d’ingéniérie au hasard au niveau de G1 avec une appréhension d’abord opératoire optique ; les données affichées et reçues par l’expérimentateur sont interprétées essentiellement, non pas comme une validation de la dernière conjecture faite mais comme une non invalidation de cette conjecture jusqu’à preuve du contraire. On retrouve encore ici l’incertitude des sciences cliniques à chaque fin de phase d’expérimentation.

1.4.4. Remarque sur une expérimentation possible plus performante pour avancer plus vite vers la conjecture

Sur l’écran Cabri ci-dessous, nous avons utilisé une construction conditionnelle qui permet de visualiser de deux couleurs différentes les points M générant une différence d’aire positive ou négative. Cette construction diffusée depuis déjà quelques années est une construction que nous avions initialement utilisée pour visualiser les lignes de niveau de MA/MB (et donc d’autres de la même famille) en particulier au cours d’un atelier du congrès de L’A.P.M.E.P. de Nice et paru dans un numéro spécial de la Revue PLOT (N° 101-102)



On a activé la trace de deux points superposés à M, l'un bleu qui existe quand la différence d'aire est positive et l'autre rouge qui existe quand la différence d'aire est négative. Ceci explique pourquoi si on tire le point M en tous sens sur la page Cabri, les traces génèrent bien la conjecture 2 ou du moins permettent d'avancer plus vite vers la conjecture donc devrait permettre aux expérimentateurs d'avancer plus loin que les 3 premières phases du modèle de notre démarche ***a priori***.

Note sur la construction utilisée : cette construction et la manière de l'utiliser est un montage fondamental pour conjecturer les natures de lieux du type f(M) = 0 avec le protocole adéquat qui donne nécessairement une idée de la réponse quand celle-ci ne contient pas des points isolés ou des points aux voisinages desquels f(M) garde un signe constant. Cette méthode peut être qualifiée de **« balayage systématique avec trace automatisée »**. La lecture interprétative des traces laissées fait appel à une utilisation du théorème des valeurs intermédiaires ou plus précisément à son utilisation en actes.
On peut trouver les détails de cette construction dans la brochure de l'IREM de Toulouse « Enseigner et pratiquer les Mathématiques avec Cabri » de Jean-Jacques Dahan

2. RECHERCHE RÉALISÉE PAR UN CHERCHEUR

2.1. Proposition du problème :

Nous avons proposé ce problème à Michel Carral à qui nous avons demandé de réaliser sa propre recherche, sans imposer de délai. Après une bonne année de recherche, en pointillés, celui-ci a finalement rédigé un article narrant sa recherche (dans les actes du colloque inter-IREM de Géométrie de Liège 2003). Nous analyserons cette recherche par comparaison à notre modèle ***a priori***.

2.2. Présentation de l'article « Chercher avec Cabri » narrant la recherche menée par Michel Carral :

Cet article débute par un long préambule où le chercheur présente les objectifs sous-tendus. Il déclare en particulier :
« Je me propose … de montrer comment… Cabri permet de comprendre une situation géométrique grâce à l'environnement mathématique qu'il génère, comment il est une aide à sa résolution et à la validation des résultats obtenus ».
Il continue par l'énoncé de l'exercice proposé ou plutôt l'énoncé tel qu'il a été interprété avec ses connaissances spécifiques :
« Soit un triangle ABC et un point P de son plan. On note A', B', C', les symétriques de P par rapport aux côtés BC, AC et AB du triangle.
Trouver le lieu géométrique des points du plan tels que l'aire du triangle A'B'C' soit égale à celle du triangle ABC ».
Entre la tâche donnée et la tâche interprétée, il y a au moins un saut formel (saut bien repéré dans le modèle des cadres d'investigation de Robin Millar) qui est fait quand Michel Carral interprète ce problème comme une détermination de lieu, mot qui n'avait pas été utilisé lorsque le problème lui a été proposé.

2.3. Analyse de la démarche en liaison avec le modèle proposé

2.3.1. Les maillons quaternaires de la chaîne expérimentale :

Expérience 1
Montage : *construire un triangle ABC, un point P et ses symétriques respectifs par rapport aux trois cotés de ABC qui détermine un triangle A'B'C'. afficher les aires de ces deux triangles puis calculer et afficher leur rapport.*
Protocole : *déplacer P au hasard jusqu'à repérer des positions correspondant à un rapport égal à 1.*
Exploration : *le déplacement est réalisé et une telle position est repérée près ou dans le triangle et d'autres le sont suffisamment loin dans toutes les directions.*
Interprétation : *une conjecture peut être faite qui avance qu'il y a un point particulier solution et une famille d'autres dans toutes les directions du plan symbolisées par des demi-droites s'éloignant du triangle.*

Remarque d'ordre procédologique : rechercher d'abord près de la figure donnée puis plus loin.
Création d'outils complémentaires pour faciliter les expériences qui suivent : création de deux macros.

Expérience 2 (expérience multiple)
Montage : *construire pour différents triangles ABC ayant approximativement les formes particulières classiques les triangles A'B'C' correspondants au point P qu'on aura préalablement associé au triangle (on utilisera les macros créées).*
Protocole : *déplacer chaque point P jusqu'à détecter approximativement la position cherchée.*
Exploration : *réalisation effective du protocole.*
Interprétation : *pour chaque triangle on reconnaît le point P associé comme un certain point particulier. Ensuite on reconnaît le centre du cercle circonscrit par recoupement des cas. Ceci est une conjecture plus précise.*

Expérience 3 validation avec Cabri
Montage : *reprendre le montage initial et construire le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.*
Protocole : *redéfinir P en ce centre, observer la modification du rapport affiché ; augmenter la précision de cet affichage.*
Exploration : *le nombre affiché est 1 et l'augmentation de la précision d'affichage ne modifie pas la valeur lue.*
Interprétation : *la conjecture est validée.*

Le chercheur sort à ce moment là de la phase expérimentale pour accomplir une phase formelle où il propose trois démonstrations de cette conjecture pour mieux appréhender le problème et mieux le comprendre.

Expérience 4
Montage : *reprendre la figure de départ avec le centre du cercle circonscrit ω qui est construit.*
Protocole *déplacer P de ω vers l'extérieur du triangle et observer les variations du rapport des aires.*

Exploration : *ce rapport diminue de 1 à 0 pour augmenter ensuite indéfiniment.*
Interprétation : *arrivée d'une nouvelle conjecture qui avance qu'à part ω il y a un point solution sur chaque demi-droite issue de ω .*

Expérience 5
Montage : *tracer un cercle de centre ω et redéfinir P sur ce cercle.*
Protocole : *déplacer P sur ce cercle et observer les variations du rapport. Recommencer pour d'autres cercles.*
Exploration : *la réalisation du protocole conduit à constater la constance du rapport sur chacun de ces cercles..*
Interprétation : *c'est la conjecture A qui est énoncée par Michel Carral.*

Digression du chercheur : il note un théorème qui serait la conséquence du résultat conjecturé.
Théorème : ………………………………………..
Le chercheur sent toujours le besoin de mettre en liaison les éventuelles découvertes avec les connaissances voisines (démarche quasi empirique).

Expérience 6
Montage : *reprendre le montage précédent*
Protocole : *modifier le rayon du cercle et observer les variations du rapport des aires plus précisément qu'à l'expérience précédente.*
Exploration : *on réalise le protocole et on remarque que le rapport décroît de 1 à 0 pour croître ensuite ; on remarque aussi que la valeur 0 de ce rapport semble être approchée ou atteinte quand le cercle est le cercle circonscrit à ABC.*
Interprétation : *c'est une conjecture qui avance que pour tout point du cercle circonscrit le rapport est égal à 0. Cette conjecture est aussitôt validée démonstrativement en faisant appel à une connaissance relative à la droite de Simson d'un triangle. La démonstration de cette conjecture rend plus plausible la conjecture A car elle amène la démonstration d'une conjecture impliquée par la conjecture A.*

Expérience 7
Montage : *tracer un cercle de centre ω et construire un triangle ABC inscrit dans ce cercle. Construire un point P.*
Protocole : *faire afficher le rapport d'aires associé à ce point (en utilisant l'une des macros créées). Faire parcourir le cercle au point A et observer le rapport. Modifier le rayon du cercle et recommencer avec A, B et C.*
Exploration : *la réalisation du protocole conduit à constater la constance du rapport quand A se déplace sur le cercle.*
Interprétation : *c'est la* ***conjecture B*** *qui est énoncée par Michel Carral qui permet de mieux appréhender les propriétés probables de la figure.*
Conjecture B : …………………………………….
Expérience 8
Montage : *tracer une droite issue de ω et redéfinir P sur cette droite ; mesurer et afficher la distance ωP.*
Protocole : *faire afficher le système d'axes. Reporter ωP sur l'axe des abscisses et le rapport des aires associé à P sur l'axe des ordonnées. Construire le point admettant ωP et le rapport d'aires comme coordonnées. Demander le lieu de ce point M quand P varie.*

Exploration : *la lieu obtenu est une courbe qui décroît de l'ordonnée 1 à l'ordonnée 0 pour croître ensuite indéfiniment.*
Interprétation : *c'est la validation du fait qu'il existe des points éloignés du triangle répondant à notre question (points du lieu d'ordonnée 1).*

Expérience 9
Montage : *créer un nouveau système d'axes d'origine ω dont l'axe des abscisses est porté par la droite portant P et l'axe des ordonnées est arbitraire.*
Protocole : *Demander les coordonnées de P(x;0) dans le nouveau système d'axe et construire dans le système d'axes initial le point N de coordonnées x et le rapport d'aires associé à P. Demander le lieu de N quand P varie et si nécessaire modifier les unités du nouveau système d'axes pour les égaler à celles du système d'axes par défaut.*
Exploration : *la réalisation du protocole conduit à l'obtention d'une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ayant même forme que la précédente qui peut venir se superposer à la précédente si on égale effectivement les unités des deux systèmes d'axes.*
Interprétation : *la courbe visualisée est interprétée comme une parabole ou une valeur absolue de parabole. C'est donc encore une nouvelle conjecture qui apparaît.*

Expérience 10
Montage : *tracer la parallèle à l'axe des abscisses du repère contenant les lieux à partir du point de coordonnées (0 ;1)*
Protocole : *estimer la valeur de d pour laquelle le rapport des aires semble être égale une seconde fois à 1.*
Exploration : *Michel Carral ne donne pas cette estimation et il le justifie par le fait que sa version du logiciel Cabri ne reconnaît pas des points d'intersection de droites avec des lieux.*
Interprétation : *il n'y donc pas de partie interprétative autre que le refus de mesure approximativement. En effet, le point d'intersection qui intéresse l'expérimentateur ne pourrait être construit en sorte que toute modification des paramètres de la figure laisse ce point à la même place que ses propriétés géométriques lui imposeraient de se trouver. Michel Carral sera d'ailleurs amené à l'occasion de l'expérience 13 de donner cette justification.*

Expérience 11
Montage : *tracer une conique passant par cinq points d'une branche du second lieu ; tracer une autre conique passant par cinq points du second lieu non recouvert par la première conique.* ***Protocole :*** *observer l'éventuelle superposition des coniques avec le second lieu. En particulier on changera les positions des points définissant les coniques sur le lieu où ils ont été créés.*
Exploration : *la réalisation du protocole conduit à constater visuellement la superposition des coniques tracées avec le lieu. Néanmoins le test d'appartenance d'un point du lieu à la conique qui le couvre n'est pas toujours positif !!!*
Interprétation : *c'est une autre conjecture qui énonce que le lieu des points N est formé de deux paraboles symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.*

Expérience 12
Montage : *le même que le précédent.*
Protocole : *demander les équations des coniques tracées.*
Exploration : *on demande les équations pour visualiser leurs formes qui sont celles de morceaux de paraboles.*
Interprétation : *les formes obtenues sont celles d'une valeur absolue de fonction paire du second degré, c'est donc une validation de la dernière conjecture.*

Expérience 13 virtuelle, en pensée
Montage : *tracer le point d'intersection de l'horizontale y = 1 avec la partie montante du lieu dans un logiciel qui pourrait donner les coordonnées de cette intersection.*
Protocole : *demander les coordonnées du point d'intersection de l'horizontale y = 1 avec la partie montante du lieu.*
Exploration : *il faudrait demander les coordonnées en questions. Michel Carral qualifie de Cabri-stable un tel résultat (nous avons donné une explication de ce qualificatif dans la partie interprétation de l'expérience 10).*
Interprétation : *Michel Carral ne veut pas faire cette expérience car il est persuadé que la visualisation de ce résultat numérique même stable par modification des paramètres de la figure n'apportera rien.*

Bilan théorique ou analyse théorique à point de départ expérimental :
À ce moment précis le chercheur quitte son logiciel pour raisonner logiquement en dehors de toute manipulation expérimentale avec le logiciel. Il entre dans une phase de déduction logique. Partant des conjectures qu'il a exhibées et qu'il admet provisoirement, il va en déduire des conclusions qui pourront être soumises au crible de la validation expérimentale avec Cabri.
L'accouplement des conjectures « le second lieu est une valeur absolue de parabole » et « cette parabole atteint son minimum pour x = R rayon du cercle circonscrit à ABC » lui permet de trouver formellement les équations de ce lieu et d'en déduire par une résolution d'équation simple que nécessairement le rapport d'aire égale à 1 est atteint pour x = $R\sqrt{2}$.
On reconnaît ici une démarche de type quasi-empirique (Hillary Putnam).

Expérience 14
Montage : *Tracer le cercle de centre* ω et de rayon $R\sqrt{2}$. *Redéfinir P sur ce cercle.*
Protocole : *Déplacer P le long de ce cercle et observer l'affichage du rapport d'aire et éventuellement augmenter la précision de l'affichage.*
Exploration : *on réalise le protocole et le rapport s'affiche à 1 et ce résultat ne se modifie pas quand on augment la précision.*
Interprétation : *la conclusion issue de l'analyse théorique précédente est validée expérimentalement. La conjecture finale est donc validée expérimentalement, cette conjecture s'énonçant finalement ainsi « Le lieu cherché est formé de la réunion du centre du cercle circonscrit et de l'homothétique du cercle circonscrit par l'homothétie de centre* ω *et de rapport* $R\sqrt{2}$ *(*ω *étant le centre du cercle circonscrit à ABC).*

Étaiement de la conjecture ou phase d'augmentation théorique de la plausibilité de la conjecture
Le chercheur en utilisant un raisonnement déductif d'analyse va tirer des conditions nécessaires générées par la conjecture ; ces conséquences vont constituer des propriétés géométriques particulières qui vont être reconnues comme des propriétés vraies, c'est-à-dire déjà démontrées. Cette reconnaissance prendra donc le statut de validation de la conjecture qui se trouve ainsi confortée. Nous parlons d'augmentation théorique de la plausibilité dans la mesure où la validation est une validation démonstrative portant non sur la conjecture mais sur une ou des conditions nécessaires impliquées par la conjecture dont nous allons croire de plus en plus à sa véracité.
Validation avec l'étude du cas où P est positionné en le centre du cercle circonscrit.
Validation avec le point de Lemoine.

Démonstration analytique
La recherche commence vraiment pour établir la preuve démonstrative du résultat conjecturé dans la mesure où le chercheur estime qu'après tout ce travail expérimental et théorique, cette recherche vaut la peine d'être conduite.
Il est à noter une démarche tout à fait surprenante du chercheur qui passe le plus clair de son temps à un travail de recherche dans la littérature. Cette recherche historique lui permet de s'imprégner de tous les paramètres du problème et surtout d'y trouver la démonstration cherchée. Cette fréquentation des chercheurs qui avant lui avaient abordé ce problème ou des problèmes connexes lui donnera une vision plus générale de la configuration étudiée et le désir d'aborder les généralisations envisageables (ce qui sera fait dans une partie ultérieure mais ne faisait pas partie de notre commande de recherche initiale).

2.3.2 La décomposition suivant les phases du modèle :
Voici la décomposition à laquelle nous arrivons en analysant les 11 expériences constituant la démarche de résolution de Michel Carral :

Phase 1 : phase de recherche erratique (Expérience 1)

	Expérience 1
Niveau de géométrie	G1 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle, opératoire positionnelle et perceptive
Cadres d'investigations	Ingéniérie au hasard 3A

Le niveau G1 est justifié par l'utilisation d'une figure construite aux instruments ; les technologies (le mode de validation ici) font aussi appel aux instruments mais le fait que ces instruments soient ceux du logiciel Cabri nous fait qualifier le niveau de géométrie de G1 informatique. Un ordre de construction bien précis dans le montage fait appréhender la figure de manière séquentielle. Les indications de manipulations du protocole amènent à une appréhension opératoire positionnelle (déplacement du point P) et simultanément à une appréhension perceptive des rapports d'aires affichés pour repérer d'éventuelles positions de P répondant à notre condition. La manière d'opérer où le point P est tiré au hasard pour percevoir les zones possibles pouvant contenir des solutions est typique d'un cadre d'investigation du type ingéniérie au hasard : cette méthode de type essai-erreur, possible dans l'environnement papier-crayon associé usuellement à G1 devient heuristiquement performante dans le micro-monde Cabri où les tests sont instantanés, d'une grande précision, et assez nombreux dans un temps très limité pour repérer de manière perceptive une bonne approche de la solution. C'est pourquoi ce niveau G1, où nous situons cette première expérience, est qualifié d'informatique.
Notons enfin que cette expérience est reconnue comme une expérience de la phase de recherche erratique à cause essentiellement du cadre d'investigation choisi. Ce cadre est choisi car, ***a priori***, l'expérimentateur ne sait comment attaquer mathématiquement le problème. Il écrit d'ailleurs juste avant la narration de sa recherche :
« L'exercice, du moins sous cette forme, n'est pas un exercice classique, ce qui fait que l'on se trouve un peu désarmé, un peu comme les élèves devant certains exercices que nous leur proposons. ».

Phase 2 : phase de recherche ordonnée et d'accélération de la recherche (Expérience 2)

Le fait que l'expérience de départ ait été positive dans le sens où des indices suffisants sont apparus au chercheur pour concentrer son exploration dans un domaine précis, montre que la première rupture a donc lieu entre les phases 1 et 2 qui nous fait basculer effectivement dans la phase de recherche ordonnée

	Expérience 2
Niveau de géométrie	G1 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle, opératoire positionnelle, perceptive et discursive
Cadres d'investigations	Ingéniérie au hasard 3A et scientifique empirique 4B (tendance)

Le fait que l'expérimentateur trace des triangles ayant approximativement les formes particulières usuelles peut nous faire penser que nous sommes dans G0 : en effet, celui-ci réalise ce qu'en papier-crayon on appelle des schémas. En réalité, le traitement de ces diverses figures nécessite l'utilisation de deux macros préalablement créées qui nous placent au niveau informatique et à un niveau G1 dans la mesure où les interprétations sont au niveau de la reconnaissance d'objets mathématiques (reconnaissances de points particuliers du triangle).

Là encore un ordre de construction bien précis nous fait appréhender les figures de manière séquentielle, le déplacement des points P jusqu'à des positions où le rapport des aires approche 1 nécessite une appréhension à la fois opératoire et perceptive. L'appréhension discursive est celle qui permet de reconnaître des positions particulières de P (points remarquables du triangle).

La manière d'explorer nous place successivement dans un cadre d'ingéniérie au hasard dans la mesure où on recherche les positions de P de manière aléatoire même si c'est dans une zone particulière (dans le triangle ou près du triangle), puis dans un cadre scientifique de tendance quand on cherche à reconnaître un point remarquable du triangle qui puisse être solution de notre problème dans les différentes figures explorées. C'est ce travail dans ce cadre qui génère la première conjecture dans G2.

Phase 3 : phase d'analyse expérimentale et synthèse expérimentale (Expérience 3)

	Expérience 3
Niveau de géométrie	G1/G2 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle perceptive et Discursive
Cadres d'investigations	Scientifique explicatif 4D

Le niveau de cette expérience est G1 dans la mesure où les constructions sont faites aux instruments, informatique dans la mesure où ce sont les instruments de Cabri et G2 dans la mesure où la redéfinition du point P sur le cercle circonscrit est calculé en arrière-plan par le logiciel avec les caractéristiques mathématiques de la figure.

L'ordre des constructions, redéfinition, mesures et calculs justifient une appréhension d'abord séquentielle de la figure réalisée au montage. La visualisation du rapport d'aire justifie l'appréhension perceptive qui conduit à la validation de la conjecture précédente, elle même générée par une appréhension discursive.

Le cadre d'investigation scientifique explicatif est justifié par l'objectif de validation de l'expérience.

La phase dans laquelle nous avons située l'expérience, analyse expérimentale et synthèse expérimentale, se justifie par la vérification d'une condition nécessaire impliquée par la conjecture. Cette vérification d'une conjecture issue de l'expérience est faite de manière expérimentale.

Phase 4 : phase de recherche erratique (Expérience 4)

Un redémarrage apparaît ici car le chercheur se lance dans une nouvelle recherche où il donne l'impression de repartir de zéro.

	Expérience 4
Niveau de géométrie	G1
Appréhensions figurales	Opératoire, perceptive et discursive.
Cadres d'investigations	Ingéniérie par itération 4D

Au niveau de géométrie, cette expérience se situe dans G1 car on bouge des points de manière radiale par rapport au centre du cercle circonscrit de ABC et on réalise des mesures et des calculs aux instruments. On pourrait éventuellement qualifier ce niveau d'informatique dans la mesure où les instruments utilisés au cours de cette expérience sont des instruments de Cabri ; en réalité, tout ce qui est réalisé aurait pu l'être dans l'environnement papier-crayon au détail près que le calcul d'une aire dans le monde papier-crayon est déjà problématique) puisque la précision nécessaire à l'obtention de la conjecture atteinte ne nécessitait pas l'utilisation des instruments du logiciel. Seule différence, la rapidité d'exécution de ces expérimentations avec Cabri.

La manipulation du point P de manière radiale est la conséquence d'une appréhension opératoire de cette figure et la conjecture concernant les variations du rapport d'aires est la conséquence d'une appréhension d'abord perceptive (on voit le rapport se modifier) puis discursive (la modification du rapport est interprétée en terme de variations de fonction).

Le cadre d'ingéniérie par itération se justifie par le choix d'un déplacement radial itéré pour mettre en évidence un phénomène commun de variations.

Phase 5 : phase de recherche ordonnée (Expériences 5,6,7 et 8)

La rupture qui a lieu entre la phase précédente et celle-ci conduit à une rationalisation de la recherche puisque le chercheur va concentrer ses investigations autour d'un thème précis qu'il va approfondir.

	Expérience 5	**Expérience 6**	**Expérience 7**	**Expérience 8**
Niveau de géométrie	G1	G1/G2 informatiques	G1 informatique	G1 informatique
Appréhensions	Séquentielle,	Opératoire,	Séquentielle,	Séquentielle,

figurales	opératoire, perceptive et discursive	perceptive et discursive	opératoire, perceptive et discursive	perceptive et discursive
Cadres d'investigations	Scientifique empirique 4C et scientifique explicatif 4D	Scientifique explicatif 4D	Scientifique explicatif 4D	Scientifique empirique 4C

Notons dans cette série d'expériences souvent un enchaînement dans cet ordre d'appréhensions de la figure 1, séquentielle, 2, opératoire, 3, perceptive et 4, discursive qui dénotent que la recherche se rationalise mais surtout qu'elle est organisée par le chercheur qui commence à savoir où il va et qui utilise des techniques qui vont l'amener systématiquement à des interprétations positives. L'appréhension séquentielle traduit une construction réfléchie et donc ordonnée de la figure de l'expérience, l'appréhension opératoire traduit la mise en mouvement de certains objets de la figure conçue pour l'expérience, l'appréhension perceptive traduit l'action de visualisation des paramètres pertinents de la figure ou du moins leur évolution et enfin l'appréhension discursive traduit la capacité de l'expérimentateur de donner du sens mathématique aux phénomènes perçus.

Cette organisation positive de l'investigation est confirmée par le cadre d'investigation majoritairement présent dans cette phase, le cadre scientifique explicatif qui montre que l'expérimentateur a une idée précise du modèle qu'il veut mettre en évidence dans son investigation. Le cadre d'investigation empirique montre que le chercheur sait utiliser l'outil Cabri pour avancer quand les idées viennent à manquer. Cette capacité du chercheur à utiliser Cabri de manière pertinente est aussi confirmée par les niveaux de géométrie que nous avons repérés comme étant systématiquement informatiques ; la présence même épisodique d'un niveau G2 montre la volonté du chercheur de s'appuyer sur des technologies du type de la déduction formelle.

Commentons simplement l'expérience 5 qui, à elle seule, synthétise toute l'analyse qui précède :

Le chercheur a senti que les cercles concentriques centrés en ω pourraient avoir une importance spécifique, c'est pour cela que son cadre d'investigation est un cadre scientifique explicatif et que l'expérience qu'il monte doit éclairer le rôle de ces cercles pour le solutionnement du problème posé.

Dès lors l'organisation de son investigation semble suivre systématiquement le canevas idéal ;

1/ Il construit une figure précise (un cercle centré en ω) et positionne les éléments sur lesquels il va concentrer ses observations (il redéfinit P sur ce cercle). L'appréhension séquentielle résume ses actions jusque là.

2/ Il anime les éléments qu'il a prévu d'animer (il tire le point P le long du cercle tracé puis il modifie la dimension du cercle et recommence). Il appréhende là, son montage de manière opératoire.

3/ Il concentre son attention sur l'affichage du rapport d'aires pendant les animations. La figure est appréhendée de manière perceptive.

4/ La perception de la constance du rapport le long d'un même cercle est interprété de manière déductive en liaison avec la solution que l'on approche.

Dans tous les cas, l'usage des instruments classiques justifient le niveau G1 et la perception des résultats dans l'environnement spécifique Cabri avec son arrière plan théorique et analytico-numérique puissant justifie le qualificatif d'informatique.

Remarque : une attitude caractéristique d'un chercheur est à noter entre les expériences 5 et 6 ; celui-ci sort délibérément du contexte Cabri pour se lancer dans une démarche

quasi empirique qui consiste à entrer dans un cadre formel conditionné, c'est-à-dire qu'il entre dans le contexte d'une dialectique de raisonnement déductif. Il suppose la conjecture avancée comme vraie, s'en sert d'hypothèse dans un raisonnement déductif classique et en déduit un théorème qui est évidemment conditionné par la véracité de la conjecture de départ. On constate que le chercheur ne reste pas le nez sur son problème et qu'à tout moment il est capable de sortir d'un contexte pour entrer dans un autre afin d'enrichir sa vision du problème et des apports possibles à ses connaissances du moment (nous concevons la notion de changement de contexte dans le sens qui lui est donné par Noss et Hoyles).

Phase 6 : phase d'accélération de la recherche (Expériences 9 et 10)

	Expérience 9	**Expérience 10**
Niveau de géométrie	G2 informatique	G1
Appréhensions figurales	Séquentielle, et discursive	Séquentielle et perceptive
Cadres d'investigations	Scientifique explicatif 4D	Scientifique empirique 4B

Cette phase d'accélération conduit à une accumulation de conjectures très ciblées avant, enfin, une conjecture importante : les niveaux parcourus sont à la fois G2 et G1. La reconnaissance de parabole se fait dans G1 et la reconnaissance d'une valeur absolue de parabole nécessite un changement de cadre (du graphique à l'algébrique) puis un recours au déductif donc à un plongement dans G2. Les appréhensions figurales sont d'abord séquentielles car l'expérimentateur réalise pour commencer un montage, c'est-à-dire qu'il construit une figure très précise avec un ordre de construction tout aussi précis. La première conjecture est obtenue après une partie interprétative où la notion de parabole apparaît dans un cadre d'investigation scientifique explicatif. L'intersection qui pourrait être perçue dans la deuxième expérience dans une appréhension naturellement perceptive permettrait de dégager une tendance résultat du cadre d'investigation empirique utilisé.
Le cadre scientifique explicatif semble fortement corrélé à l'apparition des conjectures.

Phase 7 : phase d'analyse expérimentale et synthèse expérimentale (Expérience 11)

	Expérience 11
Niveau de géométrie	G2 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle, perceptive, opératoire et discursive
Cadres d'investigations	Scientifique explicatif 4D

Cette phase peut se résumer en deux sous-phases :
1/ Une expérience qui consiste à modéliser l'implication « si nos courbes sont des paraboles (donc des coniques) alors toute conique de Cabri passant par cinq points d'une de nos courbes se superpose à cette courbe ».
2/ Une expérience qui consiste à modéliser l'implication « si une conique passant par cinq points de notre lieu se superpose au lieu alors le lieu est une conique et même une parabole si Cabri reconnaît bien cette conique comme une parabole ».
On reconnaît bien un raisonnement par analyse synthèse expérimental dans G2 informatique : nous utilisons bien une technologie du déductif fortement ancrée sur les possibilités mathématiques et technologiques du logiciel.

On reconnaît encore l'enchaînement idéal des appréhensions figurales d'un chercheur « expérimenté » avec le canevas ordonné des appréhensions 1, séquentielle, 2, perceptive, 3, opératoire et 4, discursive. Le cadre d'investigation s'ancre de plus en plus dans un cadre scientifique explicatif dans la mesure où on cherche à valider des conjectures fortement plausibles.

Phase 8 : phase d'analyse théorique et synthèse théorique (Expérience 12)

	Expérience 12
Niveau de géométrie	G1/G2 informatiques
Appréhensions figurales	Séquentielle, perceptive et discursive
Cadres d'investigations	Scientifique

Il est difficile de prétendre que cette expérience se situe au niveau G1 informatique quand on réalise le travail mathématique fait par le logiciel pour reconnaître une parabole et surtout donner des équations qui permettent d'en déduire les propriétés conjecturées de parité et de valeur absolue dans le domaine fonctionnel ; c'est pourquoi nous prétendons qu'il y a du G2 informatique même si ce n'est pas le cas exclusivement.

Dans cette expérience le montage est inchangé par rapport au précédent donc on ne retrouve pas l'appréhension séquentielle caractéristique d'une initiative d'une nouvelle construction en vue d'une exploration spécifique. L'appréhension perceptive permet de prendre connaissance des équations affichées et l'appréhension discursive permet de déduire des formes d'équations obtenues les propriétés géométriques conjecturées (c'est-à-dire que le lieu est formé de la réunion de deux morceaux de paraboles représentatives de deux fonctions du second degré paires et opposées).

L'investigation est typiquement scientifique dans la mesure où le modèle est reconnu à partir d'équations aux formes caractéristiques.

Le raisonnement sous-tendu par cette expérience est le suivant :

« Si nos deux paraboles sont bien du type conjecturé à l'expérience précédente alors leurs équations vont avoir des formes spécifiques » et « Si les équations ont ces formes spécifiques dans tous les cas alors les paraboles sont réellement du type conjecturé ».

Phase 9 : phase d'accélération de la recherche (Expérience 13)

	Expérience 13
Niveau de géométrie	G1 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle et perceptive
Cadres d'investigations	Scientifique empirique 4C (relation)

Le tracé d'une droite horizontale et la détermination de son intersection avec le lieu nous placent bien au niveau G1, évidemment informatique. Ce pourrait être un G2 si l'expérience était réellement faite et si les coordonnées affichées permettaient de faire une conjecture que la même expérience en papier crayon ne pourrait permettre d'obtenir.

L'appréhension séquentielle est le résultat d'une initiative de construction et l'appréhension perceptive, virtuelle ici, permettrait de prendre connaissance de données « calculées » par le logiciel.

Si cette expérience avait été réalisée, l'intention aurait été d'induire des donnée obtenues un lien de corrélation entre les variables et les nombres affichés : nous sommes donc bien dans un cadre d'investigation scientifique 4C de relation.

Nouvelle sortie du contexte Cabri pour l'exécution d'une démonstration formelle quasi-empirique dans un contexte papier-crayon.

Phase 10 : phase d'analyse théorique et synthèse théorique (Expérience 14)

	Expérience 14
Niveau de géométrie	G2 informatique
Appréhensions figurales	Séquentielle, opératoire, perceptive et discursive
Cadres d'investigations	Scientifique explicatif 4D

Nous sonnes enfin dans une phase d'analyse théorique est de synthèse théorique car les hypothèses utilisés sont du domaine de G2 (aussi bien au niveau géométrique que numérique), les inférences au niveau du logico-déductif. Le qualificatif d'informatique est justifié par exemple par la possibilités d'augmentation de la précision qui ne perturbe pas l'affichage lui-même résultat d'un comportement G2 du logiciel dans ses calculs.

On retrouve encore le canevas idéal d'une exploration bien menée avec enchaînement ordonné des appréhensions 1, séquentielle, 2, opératoire, 3, perceptive et 4 discursive.

Le cadre scientifique explicatif est celui de cette expérience qui consiste à tester un modèle avec des données qui sont tirées de la figure réalisée.

Le raisonnement sous-tendu par cette expérience se résume à :

« Si le cercle de centre ω et de rayon $R\sqrt{2}$ est solution de notre problème alors tout point de ce cercle génèrera un rapport d'aire égale à 1 » et à l'implication cachée.

« Si un point génère un rapport d'aire égale à 1 alors ce point est sur ce cercle ou en ω ».

Partie 7

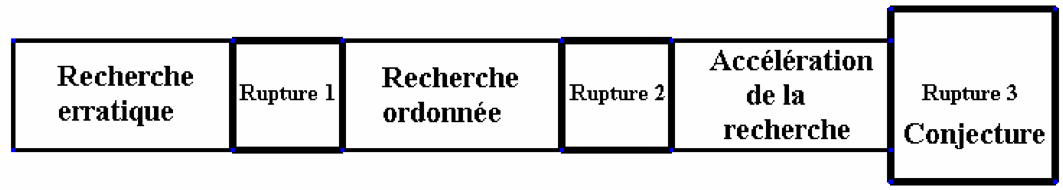
BILAN

1. DÉCOMPOSITION FORMELLE DE LA DÉMARCHE DE DÉCOUVERTE EXPÉRIMENTALEMENT MÉDIÉE PAR CABRI

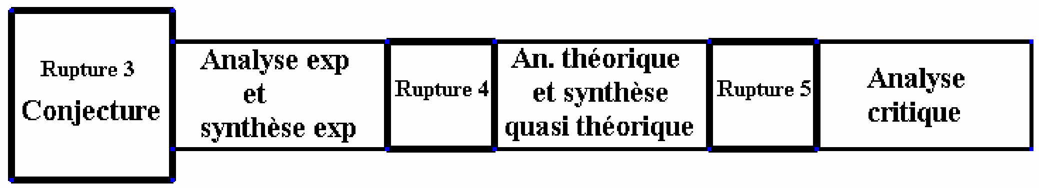
1.1. Les phases postulées d'une démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri

Rappelons dans un premier temps la décomposition postulée ***a priori*** grâce à l'analyse de la résolution de la boîte noire « Fausse affinité » pour, dans un second temps analyser ***a posteriori*** les validations ou invalidations que nous permettent nos expérimentations.

Phases pré-conjecture :



Phases post-conjecture :



1.2. Phases pré-conjecture

Le premier tableau ci-dessous indique pour chacune de nos expérimentations si celles-ci ont validé ou non l'apparition des trois phases pré conjecture que nous avions postulées et qui étaient respectivement les phases de recherche erratique, de recherche ordonnée et d'accélération de la recherche

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche
Validation 1	**validée**	**validée**	**validée**
Validation 2	**Gpe 1** **validée** **Gpe 2** **validée**	**Gpe 1** **validée** **Gpe 2** **validée**	**Gpe 1** **Non validée** **Gpe 2** **validée**
Validation 3	**Capponi** **validée** **Carral** **validée**	**Capponi** **validée** **Carral** **validée**	**Capponi** **validée** **Carral** **validée**

L'apparition de ces trois phases est donc validée avec une forte plausibilité aussi bien dans les conditions d'expérimentation de Charrière avec un public expert (expériences de validation 1) ou un public lycéen (expériences de validation 2) que dans des conditions de recherche idéales par un vrai chercheur (expériences de validation 3 avec Bernard Capponi ou Michel Carral).

Les deux premières expériences de validation permettent en plus de préciser qu'un temps de 45 minutes suffit à faire dégager ces trois phases toujours dans les conditions d'expérimentation de Charrière lorsqu'il s'agit de tenter de solutionner une boîte noire du type « transformation cachée ».

Notons que si le groupe 1, concerné par l'expérience de validation 2, n'a pas atteint la phase d'accélération de la recherche, cela est dû à un manque de temps lui-même conséquence d'une stratégie du moins maladroite sinon trop influencée, parasitée par les connaissances récentes dégagées en classe.

1.3. Phases post-conjecture

Le second tableau ci dessous indique pour chacune de nos expérimentations si celles-ci ont validé ou non l'apparition des trois phases post-conjecture que nous avions postulées et qui étaient respectivement les phases d'analyse-synthèse expérimentale, d'analyse-synthèse théorique et d'analyse critique

	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Validation 1	**Non validée**	**Non validée**	**Non validée**
Validation 2	**Gpe 1** **Non validée** **Gpe 2** **Non validée**	**Gpe 1** **Non validée** **Gpe 2** **Non validée**	**Gpe 1** **Non validée** **Gpe 2** **Non validée**
Validation 3	**Capponi** **validée** **Carral** **validée**	**Capponi** **validée** **Carral** **validée**	**Capponi** **validée** **Carral** **validée**

L'apparition de ces trois phases est donc invalidée dans les conditions d'expérimentation de Charrière avec un public expert (expériences de validation 1) ou un public lycéen (expériences de validation 2). Cette invalidation semble d'abord liée au manque de temps (notons que le temps a déjà été insuffisant pour la validation de l'apparition de la phase d'accélération de la recherche dans le groupe 1 de lycéens). Il n'est néanmoins pas sûr qu'un temps plus long accordé à la recherche aurait généré ces phases post-conjecture. Ces phases sont les constituants de la preuve expérimentale dont le besoin n'aurait pas été nécessairement ressenti par le public expert pour des raisons de contrat (le contrat était de trouver la transformation cachée : il n'était pas précisé qu'il fallait la « prouver » ou la « démontrer »). On peut faire des remarques du même type pour le public lycéen qui n'est pas, en plus, habitué à développer une démarche de démonstration dans un environnement informatique.
Par contre cette apparition est très largement validée aussi bien quand un problème de boîte noire est traité par un expert que quand un problème plus difficile est cherché par un chercheur professionnel. La phase d'analyse critique qui est une phase importante de la démarche expérimentale en sciences expérimentales fait largement partie de l'activité de recherche du chercheur qui travaille avec Cabri ou non.

2. LES PROBLÈMES CRUCIAUX DE NOTRE RECHERCHE

Dans notre problématique nous nous demandions si les problèmes de boîte noire version « transformation cachée » pouvaient être des **problèmes cruciaux** de notre recherche, c'est-à-dire des problèmes dont la démarche de résolution pouvaient :

être propices à l'émergence d'une pratique de la démarche expérimentale (critère 1) ;
permettre une formalisation de la démarche de découverte expérimentale (critère 2) ;
nous aider à mettre en évidence les différentes phase de cette démarche (critère 3).

Le critère 1 est largement validé par toutes les expérimentations faites : que ce soit un public expert, un public de lycéens ou un public de chercheurs, les analyses des différentes recherches menées ont montré un enchaînement d'expérimentations que nous avons fini par caractériser ***a posteriori*** par une forme quaternaire montage-protocole-exploration-interprétation améliorant ainsi la forme binaire postulée ***a priori*** exploration-interprétation.

Le critère 2 est aussi largement validé : les expérimentations sur un public expert ou un public lycéen dans les conditions de Charrière en temps limité ont permis une formalisation de la démarche de découverte expérimentale pré-conjecture validant le modèle postulé. Les expérimentations sur un public de chercheurs ont permis une formalisation plus complète de la démarche de découverte expérimentale incluant la démarche pré-conjecture et la démarche post-conjecture

Le critère 3 est donc validé dans les mêmes conditions que le critère 2 : néanmoins on note que les phases du modèle postulé ne se reproduisent pas nécessairement à l'identique ; des retours en arrière ou des sauts sont possibles à l'intérieur de la phase pré-conjecture comme dans la phase post-conjecture

3. NIVEAUX DE GÉOMÉTRIE

3.1. Bilan synthétique

Le premier tableau synthétique ci-dessous récapitule les niveaux de géométrie mis en évidence au cours de nos trois expérimentations. Nous avons choisi d'y indiquer les niveaux qui apparaissaient majoritairement dans chacune des phases de notre modèle :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Validation 1	Invest : G1 info Interp : G2	G1, G1 info, G2	Conj: G1 Val: G2			
Validation 2	**Gpe 1** G1 et G2 **Gpe 2** G1	**Gpe 1** G1 vers G1/G2 **Gpe 2** G1	**Gpe 1** **Gpe 2** G1	**Gpe 1** **Gpe 2**	**Gpe 1** **Gpe 2**	**Gpe 1** **Gpe 2**
Validation 3	**Capponi** G1 info **Carral** G1 info	**Capponi** G1/G2 **Carral** G1 info	**Capponi** G1/G2 **Carral** G1 info	**Capponi** G1/G1info **Carral** G2 info	**Capponi** G2/G2 info **Carral** G1/G2 info	**Capponi** G1 **Carral** G1

3.2. Analyse *a posteriori*

Le premier tableau annexe qui suit rappelle les niveaux de géométrie que nous avons postulés dans chaque phase de notre modèle :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Modèle postulé	G1 G1 info	G1 info	Conj dans G2 Val dans G1	G1 info G1	G2 info	G2 info

Dans la recherche erratique, les niveaux **G1 et G1 info sont largement validés** dans les démarches des chercheurs professionnels qui ne s'embarrassent pas dans cette phase de prise en main du problème d'une approche déductive. Le niveau G1 info est largement utilisé montrant leur aptitude à utiliser l'instrument Cabri. Cette validation doit être modulée pour les publics expert et lycéen qui n'hésitent pas à se positionner dans G2, montrant ainsi qu'ils pensent approcher la solution rapidement et veulent la valider rigoureusement.

Dans la recherche ordonnée, le niveau **G1 info n'est pas spécialement validé** ; une grande disparité d'approche caractérise cette phase. L'unité thématique de la recherche n'induit pas la mise systématique à un niveau spécifique.

Dans la phase d'accélération de la recherche, le modèle « conjectures dans **G2** avec validation dans **G1 »** n'est pas validé. À part Michel Carral qui reste au niveau G1 info pendant toutes les phases pré-conjecture, dans toutes les autres expérimentations, un va-et-vient entre G1 et G2 semble caractériser cette phase.

Dans la phase d'analyse-synthèse expérimentale, le niveau **G1/G1 info est validé par Bernard Capponi** et **invalidé par Michel Carral** qui passe dans G2 info.

Dans la phase d'analyse-synthèse théorique, le niveau **G2 info est validé**.

Dans la phase d'analyse critique, le niveau **G2 info que nous avions postulé est invalidé** au profit de **G1**. Cette phase semble donc être une phase où le chercheur ne cherche pas à faire un effort déductif qui le placerait dans G2.

3.3. Modèle *a posteriori* pour les niveaux de géométrie

Nous pouvons donc maintenant proposer le modèle qui suit pour les niveaux de géométrie associés aux six différentes phases de notre modèle de démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Modèle *a posteriori* Modèle *A priori*	G1 G1 info **Validé**	Niveau variable Non validé	Niveau variable Non validé	G1 info G1 **Validé**	G2 info **Validé**	G1 Non validé

4. APPRÉHENSIONS FIGURALES

4.1. Bilan synthétique

Le second tableau synthétique ci-dessous récapitule les appréhensions figurales mises en évidence au cours de nos trois expérimentations. Nous avons choisi d'y indiquer les appréhensions qui apparaissaient majoritairement dans chacune des phases de notre modèle :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Validation 1	Op pos	Op pos	Op pos			
Validation 2	**Gpe 1** Op pos **Gpe 2** Op pos	**Gpe 1** Op pos **Gpe 2** Op pos	**Gpe 1** **Gpe 2** Op pos	**Gpe 1** **Gpe 2**	**Gpe 1** **Gpe 2**	**Gpe 1** **Gpe 2**
Validation 3	**Capponi** Op pos **Carral** Op pos	**Capponi** Op pos **Carral** Toutes	**Capponi** Autres **Carral** Autres	**Capponi** Op pos **Carral** Autres	**Capponi** Toutes **Carral** Toutes	**Capponi** Op pos opt

4.2. Analyse *a posteriori*

Le second tableau annexe qui suit rappelle les appréhensions figurales que nous avons postulées dans chaque phase de notre modèle :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Modèle postulé	Op pos discursive	Op pos perceptive	Op pos discursive	Seq +discurs Op pos+disc	Discursive	Perceptive et discursive

Dans les phases pré-conjecture de la démarche, une **appréhension opératoire** est largement **validée** dans tous les types d'expérimentations (1, 2 et 3). Il semblerait donc que cette appréhension (non usuelle dans les attaques de problèmes dans les situations de classe classiques) soit fortement corrélée à l'utilisation du logiciel Cabri et en particulier à cause de ses potentialités dynamiques.

Dans les phases post conjecture, les **appréhensions postulées** sont largement **invalidées** ; mais cette invalidation ne se fait pas au profit d'une appréhension spécifique. Seuls les chercheurs professionnels sont concernés et il est normal de constater qu'ils mobilisent à ce stade qui est le stade bien classique de la démonstration toutes les appréhensions possibles. Il resterait à vérifier si dans les conditions de Charrière avec un public expert ou un public de lycéen qui accéderaient à ce stade post-conjecture, cette invalidation perdurerait ou si les appréhensions que nous avions postulées seraient validées complètement ou partiellement.

4.3. Modèle *a posteriori* pour les appréhensions figurales

Nous pouvons donc maintenant proposer le modèle qui suit pour les appréhensions figurales associées aux six différentes phases de notre modèle de démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Modèle *a posteriori*	Op pos	Op pos	Op pos	Toutes	Toutes	Opératoire
Modèle *A priori*	**Validé**	**Validé**	**Validé**	Non validé	Non validé	Non validé

5. CADRES D'INVESTIGATION

5.1. Bilan synthétique

Le troisième tableau synthétique ci-dessous récapitule les cadres d'investigation mis en évidence au cours de nos trois expérimentations. Nous avons choisi d'y indiquer les cadres d'investigation qui apparaissaient majoritairement dans chacune des phases de notre modèle :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Validation 1	Modélisation Ingéniérie	Modélisation	Modélisation Ingéniérie et scientifique			
Validation 2	**Gpe 1** Engag, mod **Gpe 2** Scient expl	**Gpe 1** Ing, mod **Gpe 2** Mod, sci expl	**Gpe 1** **Gpe 2** Scient expl	**Gpe 1** **Gpe 2**	**Gpe 1** **Gpe 2**	**Gpe 1** **Gpe 2**
Validation 3	**Capponi** Ing has **Carral** Ing has	**Capponi** Modélisation **Carral** Scientifique	**Capponi** Scient expl **Carral** Ing has, sci emp, sci expl	**Capponi** Mod, sci expl **Carral** Scient expl	**Capponi** Scient expl **Carral** Scientifique	**Capponi** Ing it, sc expl, ing has

5.2. Analyse *a posteriori*

Le troisième tableau annexe qui suit rappelle les appréhensions figurales que nous avons postulées dans chaque phase de notre modèle :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Modèle postulé	Scient empir	Modélisation	Ingéniérie par itération	Modélisation	Scient expl	Scient expl

Dans la recherche erratique, le cadre **scientifique empirique** est **invalidé**. Les expérimentations 1 et 2 font apparaître autour d'un **cadre de modélisation** prégnant d'autres cadres ; cette dispersion est probablement due à l'incertitude d'un début de recherche, donc caractéristique de cette phase. L'expérimentation 3 montre que les chercheurs se placent dans un **cadre d'ingéniérie au hasard** : ils savent ce qu'ils veulent obtenir et savent quels paramètres modifier pour approcher le résultat escompté à tâtons.

Dans la recherche ordonnée, le cadre de **modélisation** est largement **validé** même si on observe un cadre scientifique explicatif en particulier chez Michel Carral ; chez ce dernier, c'est le besoin d'établir le plus rapidement possible une relation fonctionnelle entre les données produites par ses expérimentations qui le pousse dans un tel cadre.

Dans la phase d'accélération de la recherche, le cadre **d'ingéniérie par itération** est **invalidé** au profit d'un cadre essentiellement scientifique.

Dans la phase d'analyse-synthèse expérimentale, le cadre de **modélisation** est **partiellement invalidé** au profit d'un cadre **scientifique explicatif**.

Dans la phase d'analyse-synthèse théorique, le cadre **scientifique** est **validé**.

Dans la phase d'analyse critique, le **scientifique** semble aussi être **validé (**cette nuance est présente en raison du manque expérience de validation disponible : seule l'observation de la recherche de Capponi est disponible**)**.

5.3. Modèle *a posteriori* pour les cadres d'investigation

Nous pouvons donc maintenant proposer le modèle qui suit pour les cadres d'investigation associés aux six différentes phases de notre modèle de démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri :

	Recherche erratique	Recherche ordonnée	Accélération recherche	An-Synth exp	An-Synth théorique	Analyse critique
Modèle *a posteriori*	Scient empir	Modélisation	Ingéniérie par Itération	Modélisation	Scient expl	Scient expl
Modèle *A priori*	Non validé	Validé	Non validé	Non validé ?	Validé	Validé ?

6. LES MICRO ÉTAPES DE LA DÉMARCHE DE DÉCOUVERTE EXPÉRIMENTALEMENT MÉDIÉE PAR CABRI RENDANT L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE EXPÉRIMENTALE

Les analyses des trois expériences de validations nous ont permis de décomposer les démarches suivies en un enchaînement de maillons quaternaires

Montage-protocole-exploration interprétation

dont les regroupements ont fait apparaître les macro-étapes que nous avions postulées pour la démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri.

Chacun de ces maillons est le résultat d'une initiative impulsée par le couple Boîte noire-Cabri et par l'interprétation du maillon précédent.

Notre travail a montré comment un problème de boîte noire recherché dans les conditions de Charrière générait quasi systématiquement une activité expérimentale dans le sens où chaque initiative a pour résultat une mini-expérience avec toutes les caractéristiques qui lui sont attachées en sciences expérimentales. Parmi ces caractéristiques, l'utilisation d'un environnement expérimental qui est ici le modèle de la géométrie proposé par Cabri, permet de rendre l'activité de recherche mathématique expérimentale dans le sens où cette utilisation fait de cette activité usuellement purement discursive, un enchaînement de mini expériences codifiées comme en sciences physiques :

Le montage est ici la construction d'une Cabri-figure qui est associée à ses spécifications, c'est-à-dire en particulier à des manipulations ultérieures qui dépendent de ces spécifications.

Le protocole est fortement lié au montage : c'est la manière dont la figure va être traité par le logiciel à travers les manipulations de l'expérimentateur. Si le protocole doit être changé, il y a de fortes chances que le montage, c'est-à-dire la figure, nécessite de l'être. Il s'agit du réglage des paramètres qui va permettre à l'expérience de produire les données qui pourront être traitées. Nous avons noté que, souvent, une modification du montage sous Cabri pouvait être intelligemment obtenue grâce à l'outil « Redéfinition ».

L'exploration, c'est l'exécution du protocole comme en sciences expérimentales ; elle peut mener à des sous-expériences quand l'expérimentateur veut légèrement modifier le montage en cours de route. Des données sont produites qui vont être traitées dans la dernière étape du maillon quaternaire.

L'interprétation permet en utilisant intuition ou insight de traiter ces données, soit pour générer une hypothèse (expérimentation générative), soit pour valider une hypothèse faite au cours d'un maillon précédent (expérimentation validative). On retrouve les possibilités de génération d'une loi ou de validation d'une loi postulée en sciences expérimentales.

Nous avons validé l'hypothèse selon laquelle la recherche de boîtes noires suivant les conditions de Charrière rendait l'activité de recherche mathématiques expérimentale ; cette activité du moins pendant la partie pré-conjecture étant semblable à celle de chercheurs professionnels dans la mesure où elle peut être décomposable dans les deux cas en un enchaînement de maillons quaternaires (qu'on pourrait qualifier de maillons expérimentaux) qu'on peut regrouper dans des parties qui constituent les phases postulées pour ce type de démarche, c'est-à-dire la phase de recherche erratique, la phase de recherche ordonnée et enfin la phase d'accélération de la recherche.

CONCLUSION

Nous savions déjà que l'utilisation de Cabri Géomètre générait déjà des démarches d'expérimentation dans ses utilisations en monstration ou en aide à la découverte de conjectures dans des problèmes simples et basiques.

1. Nos travaux ont montré que :

1.a. Les problèmes de boîtes noires (dans leur version transformation cachée) généraient dans leur recherche une démarche d'expérimentation pour conduire à la découverte, découverte de niveau 1 (la conjecture) et découverte de niveau 2 (conjecture et preuve expérimentale).

1.b. Une recherche publique menée dans les conditions de Charrière de ce type de problème fait apparaître les trois grandes étapes conduisant à la conjecture, que les chercheurs soient des lycéens ou des professeurs experts en géométrie, et quand la recherche se limite à environ 45 minutes. Une telle recherche conduit en général à une découverte de niveau 1.

1.c. Une recherche idéale modélisée par celle menée par un chercheur à la fois expert en géométrie et dans l'utilisation du logiciel Cabri fait apparaître toutes les phases du modèle que nous avons postulées : les phases pré et post-conjecture jusqu'à la phase d'analyse critique.

1.d. La démarche de preuve expérimentale qui englobe plus particulièrement la phase post-conjecture de la recherche expérimentalement médiée, nécessite du temps. Si un temps de 45 minutes semble suffisant pour faire émerger une conjecture dans les conditions proposées par Charrière, il semble indispensable de laisser beaucoup plus de temps pour permettre la génération des phases post-conjecture.

2. Nous avons aussi montré que les problèmes de boîtes noires version « transformations cachées » :

2.a. sont des problèmes adaptés pour générer chez tout public une démarche expérimentale fortement heuristique, qui met en évidence de manière quasi-automatique les trois phases d'expérimentation pré-conjecture qui sont les phases que nous avons qualifiées

- d'erratiques,
- d'ordonnées,
- d'accélération.

2.b. ont validé chez des publics de chercheurs l'apparition des phases post-conjecture que nous avons qualifiées

- d'analyse-synthèse expérimentale,
- d'analyse-synthèse théorique (ou quasi théorique),
- d'analyse critique.

2.c. permettent aussi de mettre en évidence aussi bien les niveaux de géométrie spécifiquement associés à ces phases que les appréhensions figurales et les cadres d'investigation mobilisés qui sont :

- plutôt les niveaux G1/G1 info dans la partie pré-conjecture, plutôt G2/G2 info dans la partie post-conjecture et G1 plus spécifiquement dans la dernière phase d'analyse critique.

- une appréhension opératoire fortement heuristique qui semble être le grand invariant d'une telle démarche.
- des cadres de modélisation et des cadres scientifiques, ces derniers apparaissant plus particulièrement dans la partie post conjecture.

2.d. permettent encore de décomposer chaque phase en un enchaînement d'expérimentations qualifiées de maillons quaternaires « montage-protocole-exploration-interprétation » qui sont soit validatives, soit génératives suivant les phases.

3. Concernant les démarches comparées de chercheur non professionnel et celles de chercheur professionnel, nous avons constaté :

3.a. que le paramètre temps a été important dans la mesure où il n'a pas permis aux chercheurs non professionnels d'aborder la partie post-conjecture de la démarche, c'est-à-dire la partie de preuve expérimentale confirmant d'une certaine manière l'hypothèse de la rupture démonstrative faite par Johsua.

3.b. que la manière dont cette preuve expérimentale était gérée dans l'exemple que nous avons donné en sciences cliniques pouvait suggérer une modification structurelle de nos problèmes de boîtes noires rendant ces derniers producteurs de plus de doutes donc probablement meilleurs générateurs des phases post-conjecture de la démarche de découverte expérimentale. Cette modification consisterait à rendre la transformation cachée dépendante du temps : ceci est une piste de prolongement de notre travail qui pourrait permettre de faire apparaître toutes les phases pré- et post-conjecture dans un temps raisonnable.

PERSPECTIVES

1. PROLONGEMENTS POSSIBLES DE NOTRE TRAVAIL

1.1. Créer des problèmes ayant les caractéristiques des boîtes noires version transformation cachée pour voir si leur recherche génère aussi les phases pré-conjectures que nous avons mises en évidence (voir en annexe 1 l'exemple du Sudoku).

1.2. Proposer des problèmes de boîtes noires version transformation cachée amputés de la partie pré-conjecture, c'est-à-dire consistant en la preuve que la transformation cachée est ou n'est pas une transformation qu'on donnera afin d'observer le développement de la phase post-conjecture (voir en annexe 2 trois exemples pouvant illustrer cette piste).

2. UTILISATIONS POSSIBLES DE NOTRE TRAVAIL

2.1. Analyser des recherches de problèmes ouverts ou à prises d'initiatives tirés de la littérature pour voir dans quelle mesure ils permettent le développement d'une démarche expérimentale de découverte dans le sens où nous l'avons définie.

2.2. En particulier, **analyser des narrations de recherche** aux différents niveaux qui sont disponibles pour voir si les problèmes proposés ont généré ou non une démarche expérimentale de découverte. On pourrait essayer de voir quelles phases apparaissent plus spécifiquement pour utiliser ces problèmes de manière plus systématique dans l'apprentissage en en connaissant leurs potentialités (Annexe 3).

2.3. **Concernant les recherches de problèmes longs** (Annexe 4), nous pouvons essayer de voir quelles phases de la démarche elles favorisent ou sur quelles phases de cette recherche les enseignants focalisent leurs observations ou quelles techniques usent les enseignants pour amener les élèves à parcourir des phases absentes ou mal parcourues.

2.4. **La méthode expérimentale pour les concours d'entrée dans les grandes écoles** : il serait intéressant de passer au crible de notre modèle la méthode expérimentale proposée par François Guénard et Henri Lemberg dans leur ouvrage « La méthode expérimentale en mathématiques Expérimentations à l'aide de Mathematica, Maple et de la TI92-89. Exercices corrigés posés à l'oral des concours d'entrée aux grandes écoles d'ingénieurs » (éditions Springer 2001) où ils proposent une manière de résoudre des exercices tels que ceux cités dans le titre de leur ouvrage. La démarche proposée commence toujours par une expérimentation médiée par un logiciel de calcul formel pour « trouver » le résultat ; ils nomment cette phase « recherche-expérimentation » qui se conclut par une conjecture énoncée clairement. Chaque exercice se conclut par la démonstration formelle classique qui a été amenée par l'expérimentation initiale. Un travail pour le futur pourrait être une analyse fine des démarches proposées pour voir si la similitude entre notre modèle et le modèle utilisé par ces Professeurs de classes préparatoires va au delà des mots et des expressions utilisées

3. INTÉRÊT DE NOTRE TRAVAIL POUR LES ENSEIGNANTS

3.1. La connaissance de ces phases pré- et post-conjecture d'une démarche de recherche expérimentale peut permettre aussi bien de favoriser l'apparition de ces phases par un choix de consignes appropriées que de savoir repérer à quel stade de la recherche se trouve l'élève qui cherche.

3.2. Faire une classification des problèmes suivant les étapes qu'ils génèrent plus spécifiquement. Ce travail est un objectif de futures recherches ; celles-ci pourront s'appuyer sur des problèmes proposés par des enseignants connaissant la démarche que nous postulons dans le cadre de la recherche d'un problème largement ouvert.

3.3. Analyser des sujets d'exercices ou d'activités proposées dans les manuels en relation avec le modèle que nous avons mis en évidence (voir annexe 5 basée sur des sujets d'ateliers TICE proposés dans le manuel de Première S des éditions Belin 2001)
3.4. Une piste d'activité purement informatique (voir annexe 6 montrant un des fichiers proposés dans TSM Resources 2004 Technology for Secondary/College Mathematics)

4. INTÉRÊT DE NOTRE TRAVAIL POUR LES ENSEIGNÉS

4.1. Savoir qu'une conjecture est atteinte naturellement après les trois étapes pré-conjectures que nous avons mises en évidence peut permettre à l'apprenti chercheur de mieux formaliser son travail, de lui donner un cadre clair dans lequel il évolue.

4.2. Concernant les trois étapes pré-conjecture :

♦Savoir que la recherche erratique est le fruit de prises d'initiatives (une initiation à cette recherche peut justement être réalisée avec des recherches de boîtes noires) : le résultat de ces initiatives doit être un déclic, sinon cette phase perdure.

♦Savoir que la recherche ordonnée se concentre sur un thème particulier, une idée particulière toujours avec des prises d'initiatives pour générer de l'information à traiter.

♦Savoir que l'accélération de la recherche est la suite des initiatives prises pour collecter des informations relatives à une idée très précise que l'on commence à avoir et chercher à valider cette idée.

4.3. Concernant les trois étapes post-conjecture :

♦Une conjecture doit être renforcée par une vérification expérimentale de ses conséquences qui se fait au niveau perceptif, puis prouvée par une vérification expérimentale qui se fait avec des techniques déductives (cette démarche déductive peut être le fruit de l'outil informatique)

♦Un doute doit néanmoins toujours subsister dans une preuve en environnement informatique.

4.4. Concernant la preuve dans l'environnement Cabri :

Savoir que l'environnement Cabri offre des conditions de preuves très souvent fiables au contraire de l'environnement papier-crayon. Par exemple un lieu qui est conjecturé être une parabole en environnement papier-crayon l'est de manière perceptive et donc n'est pas prouvé comme tel ; au contraire, si les spécifications de ce lieu en font une parabole, il y a de très forte chances que Cabri le reconnaisse comme tel (c'est la caractérisation du niveau G2 informatique où se situe la réponse donnée par Cabri).

5. INTÉRÊT DE LA RECHERCHE DE TRANSFORMATIONS CACHÉES DANS DES BOÎTES NOIRES

Se servir de l'analyse de telles recherches pour mettre en évidence avec les élèves les étapes d'une démarche de découverte expérimentale, puis se servir du modèle dégagé pour les recherches d'autres problèmes en environnement informatique ou pas.

6. ÉPILOGUE

Pour résumer en quelques mots l'intérêt de notre travail, notre objectif en même temps que nos espoirs, dans une optique didactique et pédagogique, nous avons choisi d'utiliser les mots de Pierre (élève de Quatrième) qui dit à son avis quel est l'intérêt de la pratique de la narration de recherche :

« *C'est bien car ça permet de voir comment on cherche et de pouvoir modifier cette façon et que notre recherche soit plus efficace* »

> Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée
> Bonafé F., Chevalier A., Combes M-C, Deville A.,Dray L. Robert J-P, Sauter M.
> Co-édition 2002 I.R.E.M. de Montpellier, A.P.M.E.P.

ANNEXE 1

Grille de SUDOKU

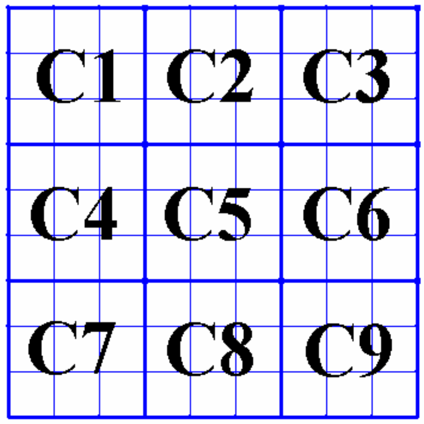
Popularisé par le Times en Angleterre, ce jeu consiste à remplir une grille de 9×9 comme la grille de la figure de droite en sorte que chaque ligne, chaque colonne et chaque carré gras contienne une et une seule fois chacun des neufs nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1			2	8	7			
								3
9			6	3				1
				7				6
7	9	5		6	1	2		
8	3		5					
3								
		7			9			5
2		1	7			6		4

Comme pour les boîtes noires, des initiatives sont obligatoires pour avancer vers la solution ; des essais au hasard devraient cesser rapidement en raison de réfutations inévitables générées par des doublons sur des lignes, des colonnes ou des carrés gras 3×3. La phase erratique pure semble devoir être limitée dans le temps pour faire place à la phase ordonnée où le joueur va se concentrer sur une technique qu'il va chercher à appliquer pour remplir le plus de cases possibles. On peut aussi s'attendre à le voir approcher la solution en proposant plusieurs nombres pour une même case en attendant d'éliminer certaines propositions ultérieurement. On peut s'attendre à voir apparaître des niveaux d'appréhension de la grille analogues aux niveaux de géométrie G1 et G2 suivant que les nombres sont appréhendés de manière perceptive (pour valider ou invalider) ou discursive (pour générer des possibilités de nombres dans des cases données). On retrouverait donc ainsi les ingrédients expérimentaux de la démarche expérimentale, c'est-à-dire des expérimentations génératives et des expérimentations validatives.

Descriptions de quelques techniques heuristiques de résolution

Pour mieux comprendre ces techniques, nous proposons les numérotations suivantes :
Pour les 81 cases : Case (Ligne ***i*** ; Colonne ***j***) (***i*** et ***j*** variant de 1 à 9)
Pour les 9 carrés gras : Carré **C*k* (*k*** variant de 1 à 9)
Ces notations sont illustrées par les deux graphiques qui suivent.



Colonnes

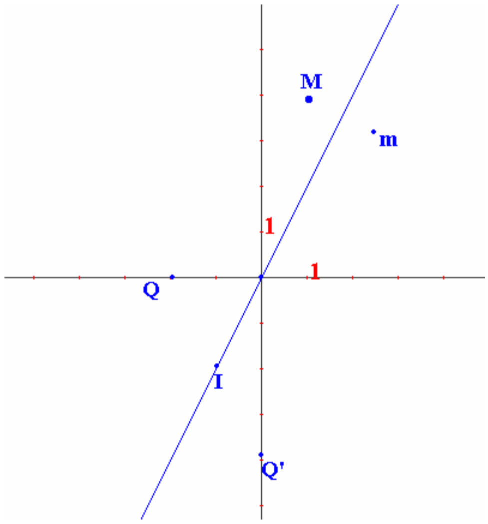
Lignes	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1			2	8	7			
2									3
3	9			6	3				1
4					7				6
5	7	9	5		6	1	2		
6	8	3		5					
7	3								
8			7			9			5
9	2		1	7			6		4

L'une de ces techniques consiste à remarquer que d'une part, il y a un 9 dans les carrés C1 et C4 et que l'on ne peut retrouver ce nombre dans ces carrés et que d'autre part, 9 est absent du carré C7 et doit donc être placé dans l'une des cases vides de ce carré.
Une autre technique consiste tout en se concentrant sur les mêmes trois carrés à noter qu'un nombre 9 est dans la colonne 1, qu'un autre nombre 9 est dans la colonne 2 et que par conséquent un autre nombre 9 peut être placé dans la colonne 3.
L'accouplement de ces deux techniques conduit à rejeter toutes les positions de la troisième colonne des carrés C1 et C4 pour choisir l'unique position possible du carré C7 à la ligne 7 et à la colonne 3
Ce problème avec l'exposé de ces quelques techniques rappelle le problème des reines qui avait été posé à K. F. Gauss et que celui-ci résolut après deux premières réponses fausses (énoncé du problème : disposer le maximum de reines sur un échiquier en sorte que chacune d'entre elles soit hors de portée de toute autre). Notons néanmoins que la solution du problème des reines suppose une recherche arborescente (avec impasses et retours arrière) alors que pour notre problème de Sudoku, pour l'exemple proposé ci-dessus ou tout autre exemple du même niveau, Roger Cuppens a mis en évidence une solution « linéaire ».

ANNEXE 2

1. Exemple 1 où la conjecture reste validée dans la phase post conjecture

1.1. Le fichier générant la macro « sym orth oui ou non.mac »



On commence par réaliser la construction suivante pour pouvoir ensuite enregistrer dans la macro « sym orth oui ou non.mac », la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation y = 2x.
On se sert du système d'axes pour placer sur l'axe des x un point quelconque Q dont on demande les coordonnées (x_Q ; 0). La calculatrice sert ensuite à calculer $2x_Q$ qu'on reporte en Q' sur l'axe des ordonnées. Le point I milieu de [QQ'] est un point de la droite y = 2x. Ainsi, la droite (OI) est cette droite. On crée ensuite un point libre m dans le plan dont on construit le symétrique orthogonal M par rapport à cette dernière droite

Cette construction enregistrée sous forme de macro, avec comme objet initiaux, le système d'axes, un point quelconque Q de l'axe des abscisses (Q différent de l'origine) et un point libre m et avec comme objet final le point M, permet de cacher la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation y = 2x.

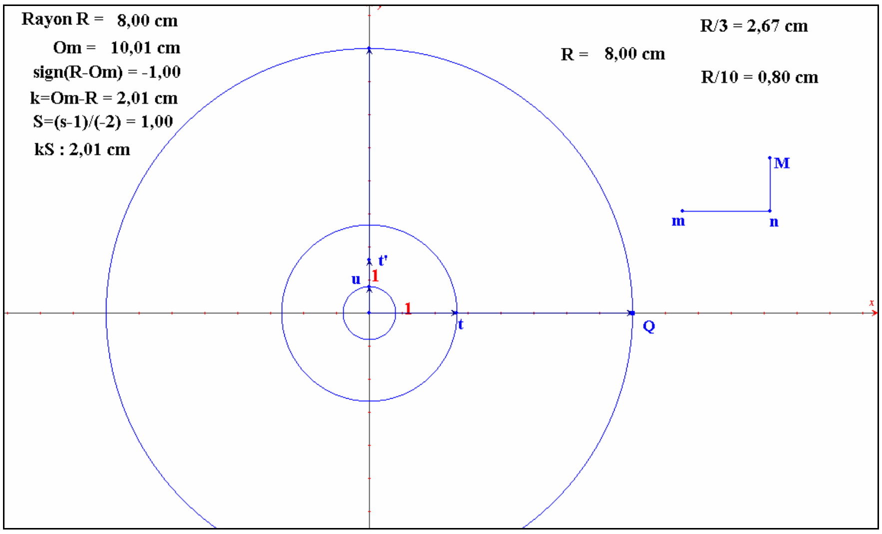
1.2. Utilisation possible de la macro « sym orth oui ou non.mac »

1.2.1. Un problème pour générer les phases post-conjecture
Un fichier Cabri contenant cette macro faisant apparaître seulement un point libre m et son image par la macro est fourni avec comme consigne **de démontrer que la transformation cachée est une symétrie orthogonale par rapport à une droite à préciser.**
1.2.2. Un analyse ***a priori*** de la démarche de recherche
On peut s'attendre à une appréhension opératoire et perceptive de la figure dans la mesure où l'expérimentateur va tirer sur m pour essayer de deviner la position d'une droite qui serait l'axe de symétrie. Il va entrer dans la phase de recherche ordonnée dans la mesure où il concentrera son attention sur la recherche d'une droite particulière.
L'accélération de la recherche devrait très vite arriver, dans la mesure où il va rapidement conjecturer qu'une telle droite passe par l'origine. Il devrait donc tracer une droite passant par l'origine et valider expérimentalement la position en tirant encore sur m. Les expérimentations sont au départ génératives pour mettre en évidence la droite recherchée et ensuite validatives pour approcher ou découvrir la bonne position. Le travail imaginé serait un travail dans G1 avec des vérifications visuelles. Le cadre d'investigation serait un cadre d'ingéniérie au hasard.
On peut espérer l'arrivée de la **bonne conjecture** dans la phase précédente si l'expérimentateur a l'idée d'essayer une droite passant par un point à coordonnées entières proche des positions repérées perceptivement.
On constate déjà que le problème posé ne permet pas de faire l'économie des phases pré-conjectures mais on peut espérer que la relative fermeture de la question va permettre à la

recherche de se développer comme nous l'avons imaginé ou du moins plus vite que dans un problème complètement ouvert.
La phase d'analyse synthèse expérimentale devrait arriver avec une vérification perceptive de la propriété « M est le symétrique orthogonal de m par rapport à la droite tracée » dans G1 informatique pour de nombreuse positions de m.
La phase d'analyse synthèse théorique, dans G2 informatique, se déroulerait dans la vérification des propriétés caractéristiques de la symétrie orthogonales, ici, test d'orthogonalité et d'égalités de distances pour encore de nombreuses positions de m.
On ne peut espérer qu'une phase de doute génère la phase d'analyse critique qui conclut notre modèle de démarche expérimentale de découverte.

Remarque : si l'expérimentateur a l'idée de tracer la médiatrice de [mM] et de demander son équation. Son expérimentation serait du type génératif dans G2 informatique, incluse dans une phase ordonnée de la recherche qui peut passer à la phase d'accélération si l'interprétation est la bonne conjecture. Cette phase d'accélération de la recherche se déroule s'il tire sur le point m pour constater que l'équation de cette médiatrice reste affichée sous la forme y = 2x ; il reste dans le niveau G2 informatique en pratiquant cette fois une expérimentation validative de la conjecture émise. Cette dernière expérimentation peut être aussi interprétée comme appartenant à la phase d'analyse-synthèse théorique, partie analyse seulement. La phase de synthèse théorique est parcourue si l'expérimentateur trace la droite d'équation y = 2x, s'il construit le symétrique orthogonal m' de m par rapport à cette droite et s'il vérifie la superposition de m' et M par l'égalité permanente de leurs coordonnées avec un affichage maximum des décimales.

2. Exemple 2 où la conjecture reste validée localement dans la phase post-conjecture
2.1. Le fichier générant la macro « ftransform.mac»

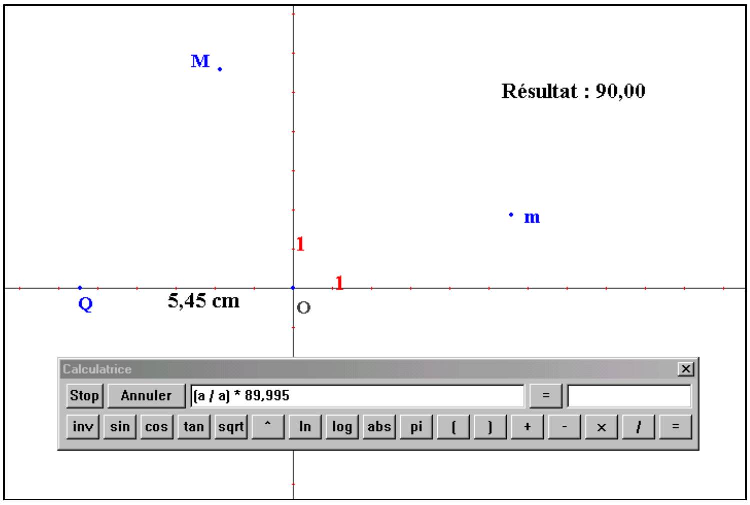


La construction réalisée dans le fichier précédent permet de transformer :
Tout point m du plan intérieur au cercle de centre O et de rayon OQ en son translaté par la translation de vecteur $\vec{Ot} = \frac{1}{3}\vec{OQ}$

Et tout point m extérieur au même cercle en un point M tel que $\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{mn} + \overrightarrow{nM}$ où $\overrightarrow{mn} = \overrightarrow{Ot}$ et $\overrightarrow{nM} = \overrightarrow{Ot'}$ où $\overrightarrow{Ot'}$ est un multiple de $\overrightarrow{Ou}$ (ce dernier vecteur ayant une norme égale à $\frac{1}{10}OQ$) ; en réalité $\overrightarrow{Ot'} = (Om - R)\,\overrightarrow{Ou}$.
Cette transformation est enregistrée sous forme d'une macro nommée « ftransform.mac», avec, comme objets initiaux, le système d'axes, un point quelconque Q de l'axe des abscisses (Q différent de l'origine et assez loin de l'origine) et un point libre m et avec comme objet final le point M.

2.2. Utilisation possible de la macro « ftransform.mac »
2.2.1. Un problème pour générer les phases post-conjecture
Un fichier Cabri contenant cette macro faisant apparaître seulement un point libre m et son image M par la macro est fourni. La consigne est donnée sous forme de question :
Cette transformation cachée est-elle une translation ? si oui, le prouver, sinon le prouver aussi. On n'hésitera pas à valider de manière dynamique toute preuve expérimentale.
2.2.2. Un analyse ***a priori*** de la démarche de recherche
On peut espérer d'une telle consigne qu'elle va permettre une validation dans G1 très rapidement ou même G1 informatique et de passer rapidement à la phase d'analyse-synthèse expérimentale. On peut en effet imaginer que l'expérimentateur va appréhender la figure de manière opérationnelle dans un cadre d'investigation scientifique en tirant sur m et en constatant de manière perceptive une invariance dans les positions relatives de m et M.
On peut aussi espérer une utilisation de G2 informatique pour aborder l'analyse-synthèse théorique. L'expérimentateur opèrera à ce niveau, en mesurant la longueur du segment [mM], en testant le parallélisme de ce segment à une droite horizontale et en tirant sur m pour constater une invariance des propriétés constatées qui caractérisent la translation. Il appréhende ainsi sa figure de manière discursive et opérationnelle dans un cadre d'investigation scientifique.
On peut espérer enfin que le tirage du point m assez loin de l'origine conduira à la réfutation attendue. La poursuite de l'exploration sur une plus grande partie de l'écran devrait permettre à l'expérimentateur qui continue à appréhender la figure de manière opérationnelle, de se placer dans un cadre d'investigation scientifique explicatif et l'amener effectivement à se placer dans la phase d'analyse critique.

3. Exemple 3 où la conjecture est invalidée dans la phase post-conjecture
3.1. Le fichier générant la macro « angle droit.mac»



Le fichier visualisé ci dessus permet de construire l'image du point libre m par la rotation de centre O et d'angle 89,995° en sorte que cette transformation soit cachée dans une macro intitulée « angle droit.mac». Ceci est rendu possible en se servant d'un angle en degré qui est le résultat du calcul $\frac{OQ}{OQ} * 89,995$ où Q est un point arbitraire de l'axe des abscisses. On peut constater sur la capture d'écran précédente que le résultat de ce calcul est affiché sous la forme 90,00 en raison du réglage par défaut du nombres de décimales affichées. Ce réglage didactique doit permettre une confusion initiale avec une rotation d'angle droit.

Cette transformation est enregistrée sous forme d'une macro nommée « angle droit.mac», avec, comme objet initiaux, le système d'axes, un point quelconque Q de l'axe des abscisses (Q différent de l'origine) et un point libre m et, comme objet final le point M. Elle cache la rotation de centre O et d'angle 89,995°

3.2. Utilisation possible de la macro « angle droit.mac »

3.2.1. Un problème pour générer les phases post-conjecture

Un fichier Cabri contenant cette macro faisant apparaître seulement un point libre m et son image M par la macro est fourni. La consigne est donnée sous forme de question :

a/ Prouver que cette transformation cachée est une rotation de centre O et d'angle à préciser.

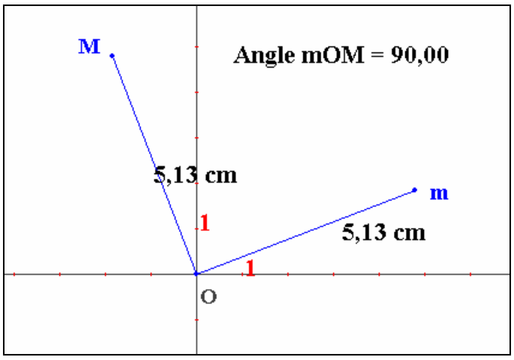
b/ Construire le milieu I de [mM], puis le cercle de centre I et de rayon Im. Essayer de « prouver » avec Cabri que M appartient à ce cercle.

Essayer encore avec Cabri de « prouver » que O appartient à ce cercle. Quelle remarque peut-on faire ?

c/ Construire les segments [Om] et [OM], puis la marque de l'angle $\widehat{mOM}$. Quelle remarque peut-on faire ? Quelle est l'angle de la rotation donnée ?

3.2.2. Un analyse ***a priori*** de la démarche de recherche

a/ On peut s'attendre à une entrée dans la phase d'analyse-synthèse pratique avec des mesures de Om, OM et de l'angle $\widehat{mOM}$, au constat de l'égalité de Om et OM et au constat de l'égalité affichée $\widehat{mOM} =$ 90,00° sans mouvement ; cela correspond au niveau G1 informatique. On peut s'attendre à l'entrée dans cette phase aussi de manière purement perceptive, c'est-à-dire, l'expérimentateur remarque visuellement les deux propriétés précédentes qui perdurent quand on tire sur m ; nous sommes dans G1 informatique.

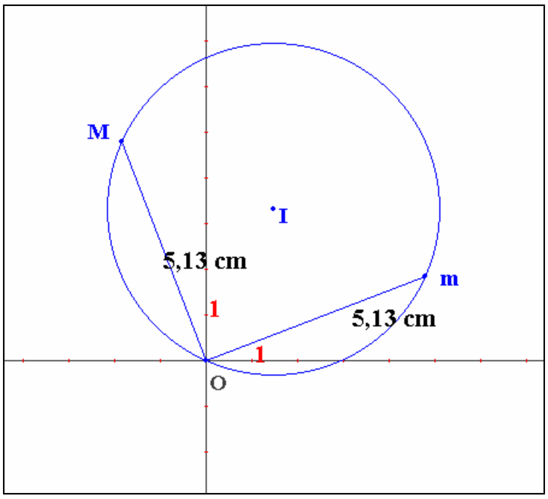


La phase d'analyse-synthèse théorique peut être atteinte par les affichages des mesures précédentes alliés à leur invariance par animation du point m dans tous les sens.

On aurait donc bien atteint la preuve expérimentale, la Cabri-preuve qui l'est spécifiquement au niveau G2 informatique.

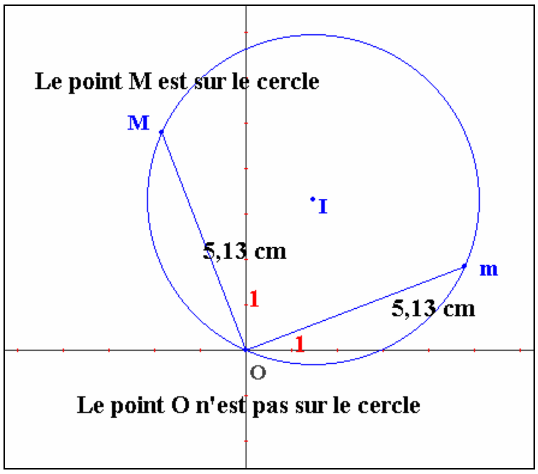
Le but des questions suivantes est de forcer l'arrivée de la phase d'analyse critique.

b/ On peut s'attendre à une entrée dans la phase d'analyse-synthèse pratique par la constatation visuelle de l'appartenance de M et O au cercle construit. Cette phase visuelle se déroule entièrement dans G1 informatique quand on tire sur m et que les appartenance perdurent visuellement.



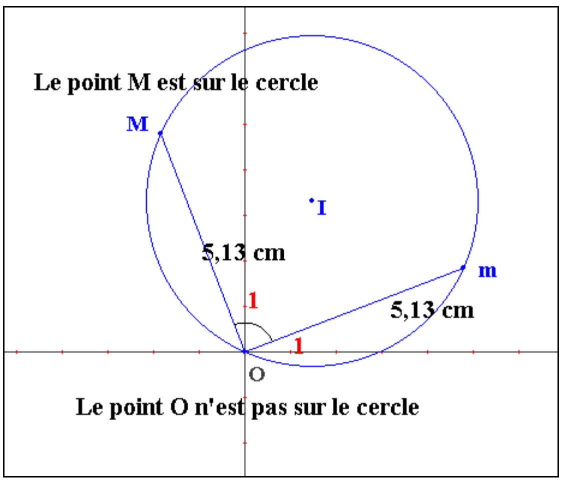
L'entrée dans la phase d'analyse-synthèse théorique devrait par exemple se faire par l'utilisation des outils de test de Cabri qui donnent une réponse affirmative pour M (ce qui paraît naturel vu la spécification du cercle construit) mais une réponse négative pour O.

Le déroulement de cette phase aurait lieu pendant qu'on tire sur m pour voir perdurer les mêmes résultats de test. Cette phase se déroule spécifiquement au niveau G2 informatique en raison de l'appréhension discursive faite par Cabri pour donner les résultats de test.



Cette dernière Cabri-preuve contredit le fait que la transformation cachée soit une rotation de centre O et d'angle 90°. On peut donc constater que l'utilisation du niveau G2 informatique alliée à la vérification de plus de conditions nécessaires déduites de la conjecture peut conduire à la phase d'analyse critique.

c/ L'affichage de la marque qui n'est pas celle d'un angle droit doit venir confirmer que l'angle $\widehat{mOM}$ n'est pas un angle droit. L'analyse critique se voit ainsi justifiée dans un tel exemple. L'affichage de plus de décimales de la mesure de l'angle faite par Cabri doit permettre de découvrir le véritable invariant de la transformation cachée qui est 89,995°.



ANNEXE 3

EXEMPLE 1 AU NIVEAU COLLÈGE

1. Le problème

Narration de Magali (Narration de recherche : une nouvelle pratique pédagogique. Sauter M. Repères IREM N° 30 1998) pour le problème donné sous la forme suivante :

Marjorie dispose de 28 pièces, les unes de 5F, les autres de 10F.
L'ensemble de ces 28 pièces représente une somme de 215F. Peux-tu trouver le nombre de pièces de 5F, le nombre de pièces de 10F que possède Marjorie ?
Raconte sur ta feuille de copie, avec le plus de précision possible, les différentes étapes de ta recherche.
Quelles sont les idées, les remarques que tu as faites. Décris les observations qui t'ont fait changer de méthode ou qui t'ont permis d'avancer.

2. Analyse de la narration de Magali avec notre grille

Magali commence sa narration par la description des deux initiatives qu'elle a prises l'une après l'autre (« Je vais essayer une multiplication… Alors je vais essayer une division »). Ces initiatives échouent toutes les deux et Marjorie en fait la constatation avec une justification pour la première initiative (« Non ce n'est pas ça car le nombre est trop grand ») du niveau de l'analyse critique et sans justification pour la seconde (« Non, ce n'est pas encore ça »). **Ces deux initiatives expérimentales constituent la phase erratique de sa recherche** où elle essaie de combiner les données avec des opérations connues. Son cadre d'investigation est typiquement un cadre d'investigation caché derrière un cadre qui se voudrait un **cadre de modélisation.**
Elle décrit dans un second temps sa nouvelle initiative, fruit de sa réflexion qu'on peut qualifier de méthode d'analyse des cas ; elle se place ainsi dans un cadre d'investigation qui est un **cadre d'ingéniérie**. Elle entre dans une **phase de recherche ordonnée** dans la mesure où elle se concentre sur une technique bien déterminée et dans la mesure où elle écrit « je pense qu'un tableau peut m'aider à trouver la solution » mais aussi « Cette méthode est un peu longue mais je n'en ai pas d'autre ».
La **phase d'accélération de la recherche** se réduit à la lecture de la bonne partie du tableau qui donne directement la solution. Le paragraphe intitulé solution commence par la vérification que les données lues conviennent bien avant l'énoncé explicite de la solution.

3. Quelques conclusions

On peut donc constater qu'un problème susceptible d'être résolu par analyse de tous les cas peut conduire à la suppression pure et simple de la partie post-conjecture ou du moins à sa réduction à sa plus simple expression. Si, comme celui-ci de tels problèmes sont posés dans le cadre des entiers naturels avec un domaine des possibles très restreint, des possibilités de réfutation de résultats trop fantaisistes sont possibles.
Une première analyse de la recherche narrée même rapide a donc été possible avec la grille produite par les résultats de notre travail. Une telle analyse pourrait être poursuivie et affinée.

EXEMPLE 2 AU NIVEAU COLLÈGE-LYCÉE

1. Le problème

Narration d'Adélaïde (Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée. Bonafé F., Chevalier A., Combes M-C, Deville A., Dray L., Robert J-P, Sauter M. Co-édition 2002 I.R.E.M. de Montpellier, A.P.M.E.P.).

Vous avez un cube de 10cm d'arête, vous appelez A un sommet de ce cube, combien y-a-t-il de point(s) sur les arêtes du cube à 15 cm du sommet A ?

L'énoncé précédent est celui qui a été proposé en classe de troisième et donc celui qui fait l'objet de la narration de recherche d'Adélaïde. Un autre énoncé a été posé en classe de Seconde, plus compliqué, sous la forme suivante :

Vous disposez d'un cube de 10 cm d'arête et vous désignez par A un de ses sommets. Déterminer tous les points du cube situés à 15cm du point A.

2. Analyse de la narration d'Adélaïde avec notre grille

♦Les deux premières expérimentations décrites par Adélaïde constituent la **phase ordonnée** de sa recherche ; ce sont deux expérimentations apparemment indépendantes, l'une s'appuyant sur une représentation en perspective cavalière où la fuyante fait un angle de 45° avec l'horizontale et où le coefficient de la perspective vaut 1, l'autre s'appuyant sur deux patrons qu'elle utilise montés et démontés. Nous somme plutôt dans la phase ordonnée de la recherche à cause de l'unité thématique des techniques (recherche d'intersection d'un cercle avec des arêtes sur différents modèles). Aucune de ces deux expérimentations ne lui permet de penser qu'elle a progressé vers la découverte de la solution et pourtant dans l'étape suivante elle va agir comme si le résultat atteint au cours de la première expérimentation était une conjecture à valider.

Première expérimentation : Adélaïde s'engage dans un cadre d'investigation qui est un cadre de modélisation. Sa modélisation n'est pas la bonne puisqu'elle explore cette représentation en perspective avec une technique de géométrie plane utilisant le compas pour déterminer des points à distance donnée d'un point donné. Elle met en évidence avec cette technique quatre points sur quatre arêtes distinctes qui seraient les points solutions. Elle est néanmoins consciente que son exploration n'est pas rigoureuse quand elle écrit « je sais que sur un dessin à plat, en perspective, les mesures sont fausses, donc je ne sais pas si ces points sont bien à 15 cm de A !?! ». Son exploration s'est faite au niveau G1 alors que son argumentation critique veut donner une impression de logique déductive et se placerait plutôt dans G2.

Seconde expérimentation : elle réalise un premier patron qu'elle se sent obliger de déplier car elle ne sait pas tracer de cercle dans l'espace *(« j'ai un petit problème car une fois le carée montée je n'arrive pas à tracer un cercle de 15 cm de rayon et de centre A* »). Elle trouve trois points d'intersection mais n'étant pas satisfaite de sa figure dépliée elle pense que sa non réussite est due au fait que le patron qu'elle utilise avait placé son point A dans une position non adéquate pour résoudre son problème. Elle utilise donc un second patron et bute devant la même difficulté de ne pas pouvoir valider les trois points trouvés par un tracé de cercle dans l'espace.

Ces deux expérimentations se concluent par : « J'abandonne l'idée des patrons » qui pourrait nous faire croire que nous sommes dans la phase de recherche erratique ; on pourrait accepter cette interprétation si on la reliait à l'indépendance des cadres de recherche de chaque expérimentation.

♦Sa troisième idée l'amène directement dans une phase **d'analyse-synthèse plutôt théorique** ancrée dans G2 à cause du niveau déductif présent avec l'utilisation du théorème de Pythagore. Elle fait comme si les points trouvés par la construction de sa première expérimentation étaient les bons.

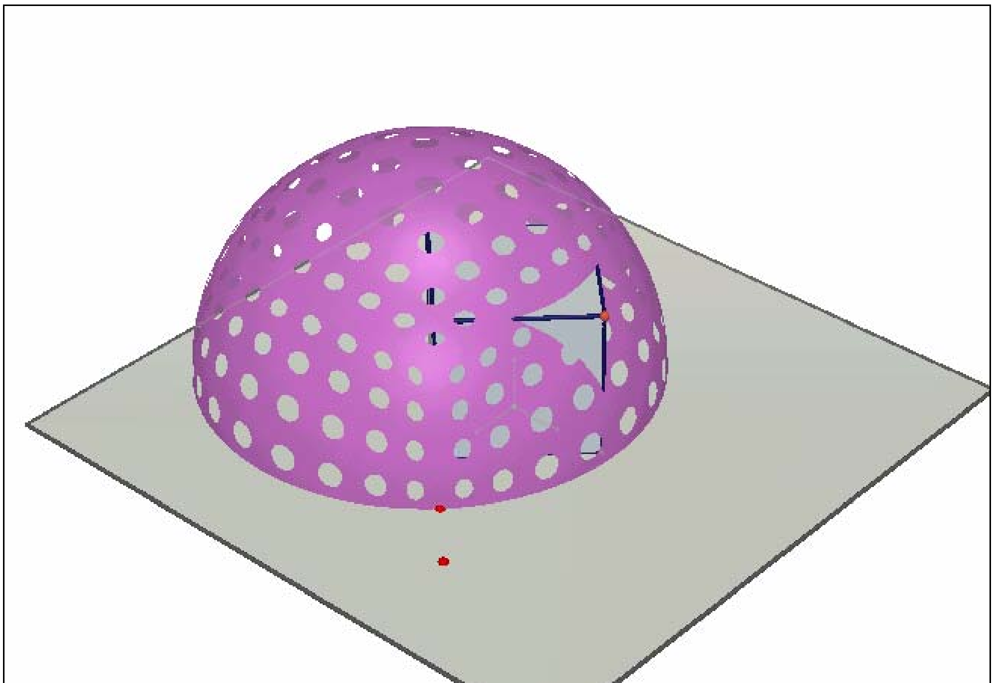
Elle part donc de la conjecture : « le point t trouvé par la première construction sur [bb'] est réellement à 15 cm de A »

Analyse : elle suppose que ce point est solution et en déduit par un calcul utilisant le théorème de Pythagore que la distance Bt vaut approximativement 11,2 alors que sur son dessin elle mesure 6,2. Elle en tire d'abord la conclusion que la perspective est trompeuse avant

d'affirmer que ce résultat lui permet de placer t. Elle réalise que le côté du cube est 10cm, ce qui la fait basculer dans la synthèse.
Synthèse : elle note « Bien sûr, je n'ai pas réfléchi, il sort du carré de 10 cm d'arêtes ! ».
Sa conclusion est « J'arrête avec Pythagore, il me vient une autre idée… »
♦Enfin les deux dernières étapes de la recherche la placent typiquement dans la phase d'accélération de la recherche pour aboutir à un résultat qui sera très proche du bon résultat : en tout état de cause la conjecture énoncée est correcte car elle affirme l'existence d'un point solution sur chacune des arêtes [C'D'], [C'B'] et [CC'].
Elle déduit grâce au résultat obtenu au cours de la phase précédente qu'il ne peut y avoir de points solutions sur certaines arêtes particulières par un raisonnement fait dans G2.
Elle calcule ensuite toujours grâce au théorème de Pythagore la distance AC' pour arriver à démontrer que celle-ci est supérieure à 15cm.
Chacune des informations produites permet d'approcher plus la solution qui est énoncée sans démonstration.

3. Quelques conclusions

Cette narration a montré la difficulté pour un élève de Troisième à prendre des initiatives expérimentales dans l'espace à cause de la difficulté connue du passage de l'objet 3D à sa représentation et vice versa. La phase pré-conjecture est donc plus alimentée par un travail déductif en géométrie plane quand cela est possible ; il a fallu en effet un travail dans G2 moins expérimental pour générer la phase d'accélération de la recherche elle même non expérimentale mais déductive. L'utilisation d'un logiciel de géométrie tel Cabri 3D devrait permettre de surmonter cette difficulté à prendre des initiatives expérimentales en donnant à l'élève un accès direct aux objets de l'espace qu'il veut créer ou manipuler. Ici, il aurait pu visualiser directement l'intersection d'un cube et d'une sphère centrée en l'un de ces sommets.
Néanmoins notre grille d'analyse nous a permis de faire cette analyse et de bien voir ce va-et-vient entre les phases pré- et post-conjectures et la forte prégnance du niveau G2.



ANNEXE 4

LES PROBLÈMES LONGS.

1. Introduction

Toutes les remarques que nous allons faire dans ce paragraphe nous ont été inspirées par la lecture détaillée de
Apprendre dans la durée : une tentative dans les classes de première.
Michel Bridenne et Denis Gardes Irem de Dijon
(Extrait de : Faire des Maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes.
Ouvrage coordonné par Colomb J., Douaire J. et Noirfalise R. Co-édition INRP ADIREM).
Cet article contient en particulier les énoncés de deux problèmes longs traités sur des périodes de six à sept mois suivant un protocole bien précis. Les élèves de différentes classes travaillent par groupes de trois ou quatre et chacun est considéré comme un chercheur et un producteur de solution. Des communications par courrier électronique sont prévues entre groupes ayant le même numéro, le Professeur ayant accès à ce courrier qui doit permettre la diffusion de la recherche aussi bien que la critique des propositions reçues. Le Professeur scande le travail de recherche tout au long de l'année en demandant à ses élèves la production de rapports de recherche intermédiaires, en organisant des séminaires où chaque groupe fait oralement le bilan de sa recherche devant toute la classe, en proposant en cours d'année des exercices qui doivent apporter des techniques pour résoudre des tâches du problème long qui ont justement été problématiques. Le Professeur peut aussi poser dans les devoirs en temps limité des questions relatives aux échanges de courrier électronique auxquels il a eu accès.
Les problèmes présentés dans cet article sont :

♦D'une part, le problème du tracé d'une ligne TGV qui doit relier une gare à un tunnel avec des contraintes données :

- Éviter des zones circulaires données matérialisant l'emplacement d'une centrale nucléaire, une forêt et un marécage.
- Traverser une rivière à un endroit précis…la longueur de la ligne doit être inférieure à 35 kilomètres…
- La réalisation du tracé doit être réalisée sous l'un des logiciels Derive).

Ce problème s'inspire fortement de celui proposé par Gilles Aldon à l'IREM de Lyon.

♦D'autre part, le tracé de la trajectoire d'un avion qui doit relier un point donné en altitude à la piste d'atterrissage en passant entre montagnes et nuages avec toujours une série de contraintes. La consigne est de représenter à la fois les obstacles et la trajectoire retenue avec le logiciel Derive. Ce problème s'inspire de celui proposé par Luc Trouche à ses élèves en 1998 : les élèves produisent par groupes de deux, en une heure, une solution sur l'écran de la calculatrice TI-92. Dans ce dernier cas nous disposons des solutions obtenues avec les commentaires du professeur mais pas des minutes des recherches.

2. Nos remarques

Ce type de problème qui, à prime abord, a l'air simple de l'avis même des élèves s'avère très rapidement compliqué. Cela explique que dans certaines sections, les élèves bloquent devant l'insuffisance de leurs connaissances ou que si la recherche est néanmoins entamée, les élèves ont du mal à sortir du registre dans lequel ils ont abordé la recherche.
Cette complexité réside sûrement dans le fait que ce problème va nécessiter pour sa résolution, la résolution de nombreux sous-problèmes qu'il va falloir repérer. Cette contrainte didactique est évidemment voulue pour justifier le temps long accordé à la recherche. Elle justifie la nécessité de donner des exercices qui vont faire émerger les techniques défaillantes que le professeur veut fournir en cours de route.

Il semble donc que ce type de problème n'est **pas propice** à l'émergence d'une **phase erratique** qui permettrait des essais dans des directions bien différentes et des registres bien différents. L'élève en général entre directement dans une phase de **recherche ordonnée** quand il se focalise sur des segments et des arcs de cercles qu'il enchaîne pour modéliser la trajectoire demandée. Il travaille au niveau de G1 et son cadre d'investigation est un cadre d'ingéniérie. Son appréhension de la figure est perceptive.
L'accélération de la recherche le conduit dans G2 quand il veut construire des courbes dérivables en tous points (respect des tangences) mais très vite il a besoin d'aide au niveau mathématique car il n'a pas les connaissances de géométrie analytique qui lui permettraient de programmer les objets simples (qu'il manipule ou trace sur papier-crayon) dans Derive.
Pour pallier ce dysfonctionnement prévisible, le système en place avait prévu une communication inter-groupes qui n'a pas bien fonctionné et des séances d'exercices palliatifs, c'est-à-dire ayant un lien avec les blocages théoriques constatés. Les enquêtes reproduites dans l'article étudié montrent que, même si certains élèves profitent de cet apport, pas mal d'autres l'ignorent.
Le système voudrait aussi par la communication développer l'esprit critique : on voit bien l'importance que le Professeur affecte à la communication quand il propose l'exercice suivant en devoir surveillé en classe :

> « Le point A est sur la droite (d_1) d'équation y = 4 et a pour abscisse 0.
> Le point B est sur la droite (d_2) d'équation y = (25/36)x – 179/24 et a pour abscisse 16,5.
> L'un de vos groupes parents vous a envoyé une méthode pour trouver l'équation d'une parabole tangente aux deux droites (d_1) et (d_2) en A et B respectivement.
> Voici leur travail :
> [Transcription du travail du groupe parent sur 26 lignes]
> **Le résultat est-il exact ?**
> Sinon où se situe et quelle est la première erreur. Propose alors une réponse exacte, en la justifiant. Si oui, le raisonnement proposé est-il acceptable ? Sinon quel raisonnement proposes-tu ? »

Les auteurs de l'article dénombrent lorsque la résolution du problème long N° 1 est menée à bien dix types de tâche que nous considérons comme non triviales comme par exemple :
T6 : déterminer une équation d'un cercle tangent à deux droites données sécantes.
L'utilisation des techniques relatives à ces types de tâches va se faire essentiellement dans la phase **d'analyse-synthèse théorique**, c'est-à-dire dans sa partie démonstration. C'est semble-t-il le talon d'Achille de la recherche de ce type de problèmes car le système doit se charger de rééquilibrer le milieu pour que la démarche ait des chances de se dérouler normalement vers la vérification théorique des contraintes imposées.
Les éléments dont nous disposons dans cet article ainsi que la connaissance que nous avons de ce type de problème ne nous permettent pas d'aller plus avant dans une analyse d'une démarche de recherche d'un tel type de problème, ce que d'ailleurs nous ne cherchons pas à faire.

3. Conclusions
Nous avons pu, en restant dans notre modèle de démarche expérimentale, détecter les phases qui étaient travaillées, celles qui émergeaient et surtout celles qui n'émergeaient pas naturellement et pour lesquelles le professeur est obligé de mettre en place des béquilles pour leur donner des chances de se développer.

ANNEXE 5

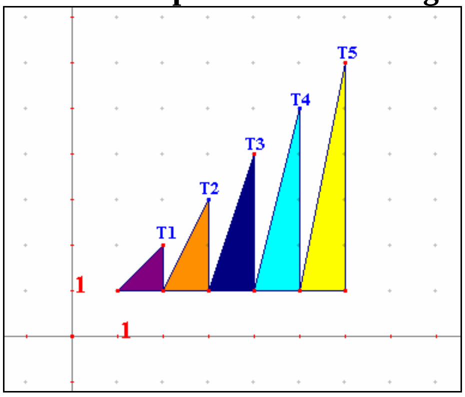
ANALYSE D'ACTIVITÉS PROPOSÉES DANS LE LIVRE DE PREMIÈRE S DE BELIN 2001

Pour chacune des quatre activités sélectionnées, un fichier Cabri au moins est fourni sur CD ROM pour expérimenter ; le sujet proposé commence systématiquement par une copie d'écran donnant une idée de ce qui va être expérimenté et un paragraphe intitulé « Si vous voulez construire le fichier » qui donne les grandes lignes des constructions à réaliser pour obtenir le montage expérimental qui sera utile. Des macro-constructions sont aussi fournies qui doivent permettre d'expérimenter plus facilement, c'est-à-dire de ne pas perdre de temps à des constructions annexes qui risquent de faire perdre à l'expérimentateur le fil conducteur du problème à résoudre.

ATELIER TICE 138 PAGE 138

1. Énoncé

Une suite de périmètre de triangles



> SI VOUS VOULEZ CONSTRUIRE LE FICHIER

On a construit 5 triangles T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 1 cm et n cm (n représentant le numéro du triangle)

> On a placé les sommets de ces triangles sur la grille associée au système d'axes.

1.a. Construire, selon le même procédé, les triangles T_6 à T_{15}.

b. Faire afficher les périmètres des triangles de T_{10} à T_{15}.

c. Faire calculer et afficher les différences des périmètres de tous les triangles consécutifs à partir de T_{10}. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la suite des périmètres de ces triangles dans l'ordre de leur numérotation ?

2.a. Faire afficher les périmètres de T_6 et T_7 puis calculer et afficher la différence de ces périmètres. Ce résultat conforte-t-il la conjecture émise à la question **1.c.** ?

b. Pour tout entier naturel non nul, on désigne par P_n le périmètre du triangle T_n. Exprimer $u_n = P_{n+1} - P_n$ en fonction de n.

Éditer dans une liste de la calculatrice les différences $u_1 = P_2 - P_1$, $u_2 = P_3 - P_2$ jusqu'à $u_{19} = P_{20} - P_{19}$. Comparer la liste obtenue avec celle affichée à la question **1.c.**

> Sur l'écran de calcul, taper : seq(u(N), N, 1, 19,1)→ L1 puis Enter ou Exe, en remplaçant u(N) par la formule, avec la variable N.

2. Analyse *a priori* de l'activité proposée

Cette activité est basée sur trois expérimentations :

Une première utilisant le fichier Cabri fourni qui n'est que le début du montage pour arriver à faire une conjecture fausse sur la suite des différences des périmètres de deux triangles consécutifs. C'est donc une expérimentation générative.

Une seconde pour invalider la conjecture précédente. C'est une expérimentation validative.

Une troisième utilisant une calculatrice programmable pour éditer la liste de ces différences à partir d'une formule générale préalablement établie.

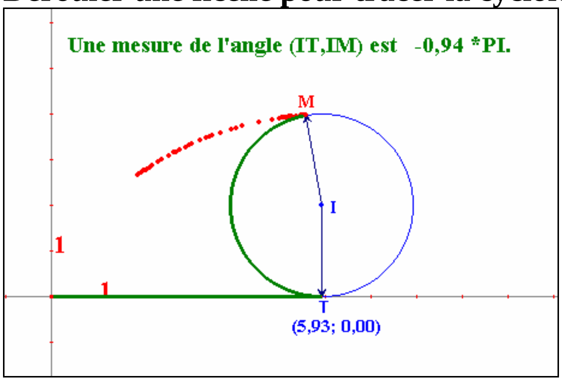
Cette troisième expérimentation étant validative de la conjecture précédente.

Les questions 1.a., 1.b. et 1.c. permettent de compléter le montage en construisant les triangles T_6 à T_{15} et de générer dans G1 informatique l'affichage des différences de périmètres à partir de T_{10}. Cet affichage présente une suite de nombres semblant constante et égale à 2,00 cm (en réalité, c'est un arrondi dû au réglage par défaut du nombre de décimales dans Cabri). Les consignes plongent donc le chercheur dans la phase **d'accélération de la recherche** pour que, par une appréhension perceptive des nombres affichés, la conjecture émerge. Des périmètres affichés, du genre, 31,03 cm et 29,04 cm devraient déclencher la survenue d'une phase **d'analyse critique**. L'auteur du sujet, pour être sûr de provoquer l'arrivée de cette phase, propose toujours dans G1 informatique dans la question 2.a. d'afficher les périmètres de T_6 et T_7, pour ensuite afficher la différence T_7 - T_6 qui ne donne pas 2,00 cm, mais 1,99 cm. La conjecture précédente devrait donc être invalidée et provoquer un changement dans le réglage de l'affichage du nombre de décimales pour provoquer la bonne conjecture de la convergence de la suite vers 2 (ce qui n'est ni fait ni suggéré). Les consignes ont placé l'élève pour ces deux expérimentations dans un cadre d'investigation scientifique empirique (menant à la découverte d'une relation).
La première partie de la question 2.b. consiste en la mise évidence de la formule donnant le terme général de la suite. On pourrait s'attendre à une entrée dans une phase d'analyse-synthèse théorique ; il n'en est rien. La connaissance de cette formule doit servir à générer les termes de la suite dans le tableur d'une calculatrice programmable : la phase qui devrait apparaître peut être soit une phase d'accélération de la recherche si elle conduit à la bonne conjecture (expérimentation générative dans ce cas), soit une phase d'analyse-synthèse pratique si elle vient seulement invalider la conjecture de la question 1.c. La dernière partie de la question 2.b. induit plutôt la deuxième possibilité même si on ne sait pas si l'expérimentateur va lire les termes de la table sur la table elle-même (où le nombre de décimales est limité par la largeur de la colonne) ou sur la ligne d'affichage qui contient le maximum de décimales affichables.

ATELIER TICE 156 PAGE 290

1. Énoncé

Dérouler une ficelle pour tracer la cycloïde



> DESCRIPTION DU FICHIER

> Pour représenter une roue qui roule sans glisser, on a créé un point I sur la droite d'équation y = 2 avec l'outil **Point sur objet**, et l'intersection T de l'axe des abscisses et de la perpendiculaire à cet axe passant par I. Puis on a créé le cercle centré en I et passant par T. M a été obtenu en reportant $-x_T$ sur le cercle C à partir de T avec l'outil **Report de mesure** en cliquant successivement et dans cet ordre sur le nombre, le cercle et enfin le point T.

a. Lorsque M a effectué moins d'un quart de tour vers la droite, comparer OT à la longueur de l'arc TM situé à gauche de T.
En déduire la construction de M donnée ci-dessus.
b. On fait tourner la roue vers la droite. Représenter les positions de M qui correspondent aux abscisses de T suivantes : $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}$, 3π, $\frac{7\pi}{2}$, 4π. On évaluera pour cela l'angle orienté $(\overrightarrow{IT},\overrightarrow{IM})$ en fonction de l'abscisse de T.

> Tirer sur I pour que l'abscisse de T prenne les valeurs voulues. Vérifier que le fichier fourni donne bien le même angle.

c. Faire apparaître la courbe décrite par le point M ; cette courbe est connue sous le nom de cycloïde.

> Utiliser l'outil **Trace** ou l'outil **Lieu**.

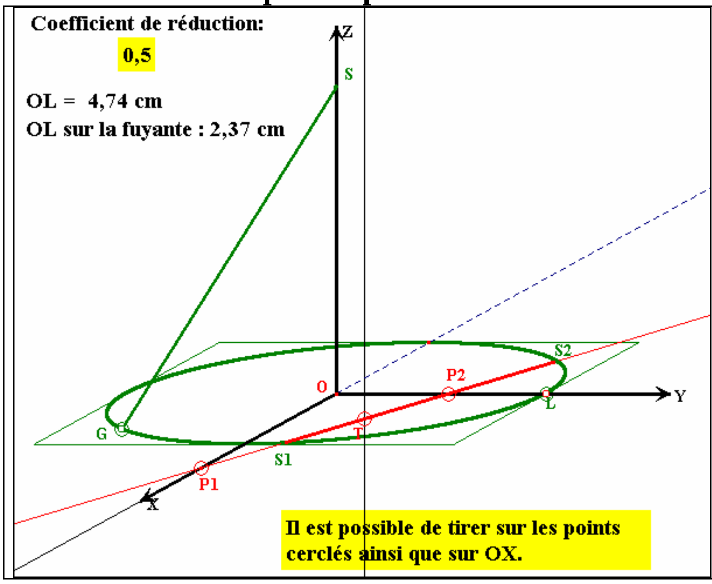
2. Analyse *a priori* de l'activité proposée

Cette activité qui a pour but la modélisation du mouvement d'une roue et la visualisation de la cycloïde ne comporte qu'une expérimentation validative : elle va consister à vérifier que le modèle produit donne bien les mêmes résultats que les résultats théoriques préalablement établis.
Elle comporte une expérimentation générative qui fait apparaître la cycloïde.
Les questions a et b, de l'ordre du théorique, doivent permettre de comprendre le montage proposé qui est un modèle d'une roue qui tourne, mais aussi d'un point particulier de cette roue. L'expérimentation proposée dans G1 informatique doit permettre de vérifier que les positions de M calculées théoriquement sont bien les mêmes sur le fichier fourni. L'appréhension perceptive est la seule mobilisée dans cette expérimentation. Si la réalisation du fichier avait été déléguée à l'expérimentateur, il aurait fallu que celui-ci se place dans un cadre d'investigation de modélisation pour le réaliser.
La question c. qui demande de faire apparaître la courbe place l'expérimentateur dans G1 informatique, celui-ci appréhendant la figure de manière opératoire s'il tire sur M après avoir activé la trace de ce point. Celle-ci le placera dans G2 informatique s'il demande le lieu de M quand I varie.

ATELIER TICE 67 PAGE 313

1. Énoncé

Section d'un cône par un plan vertical



> DESCRIPTION DU FICHIER À UTILISER

L'espace est représenté en perspective cavalière et est muni d'un repère orthonormal d'axes (Ox), (Oy) et (Oz). Le coefficient de réduction de la perspective affiché est choisi arbitrairement et est modifiable.
On a représenté un cercle horizontal (C) de centre O, inscrit dans un carré dont les côtés sont parallèles aux axes (Ox) et (Oy). On a placé un point quelconque G de ce cercle et un point S de l'axe (Oz).

On a tracé le segment [SG]. Rappelons que l'ensemble des segments [SG] décrit un cône lorsque G parcourt le cercle (C).

> On notera qu'on peut changer l'angle de la fuyante en tirant la demi-droite [Ox).

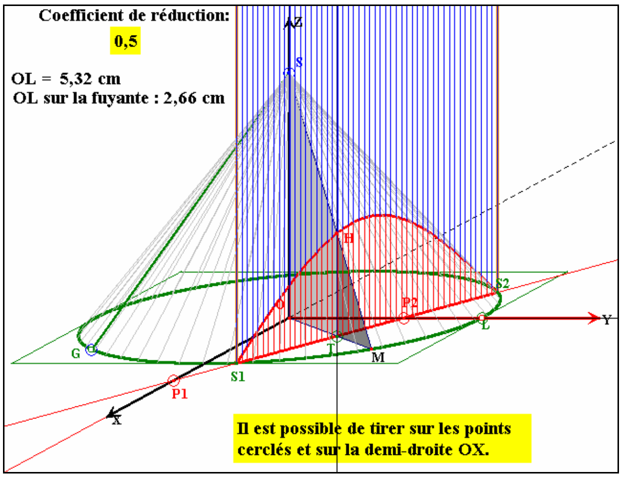
1. On considère deux points P_1 et P_2 respectivement sur (Ox) et (Oy) qui définissent une droite du plan horizontal (xOy). La droite (P_1P_2) coupe le cercle en S1 et S2. On note P le plan vertical contenant (P_1P_2). Soit T un point du segment $[S_1S_2]$ et (D) la parallèle à (Oz) passant par T. Prouver que (D) est contenue dans le plan P.

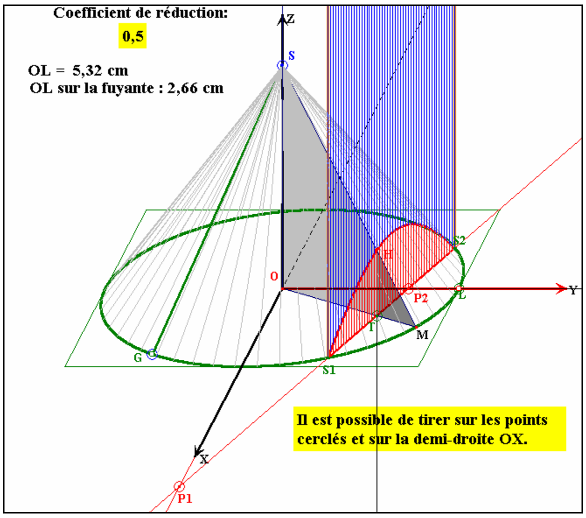
2.a. Le plan Q défini par (Oz) et par (D) coupe le cercle (C) en deux points. Démontrer que ces points appartiennent à la droite (OT). On désigne par M celui qui vérifie : T $\in$ [OM]. Le plan P coupe le cône en un point H de (D). Démontrer que H est le point d'intersection de cette droite et d'un segment que l'on précisera.
b. En déduire que l'intersection du cône avec le plan P peut être obtenue avec le logiciel comme lieu d'un point quand un autre point varie sur un segment. Préciser ces deux points et le segment.
Faire apparaître cette intersection. Visualiser ses diverses formes suivant la position du plan P.

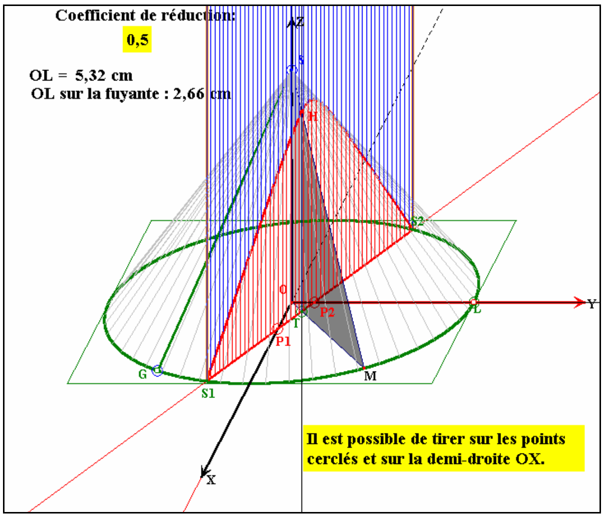
2. Analyse *a priori* de l'activité proposée

Cette activité a pour but de construire l'intersection d'un cône à axe vertical avec un plan vertical. Une seule expérimentation est prévue à la fin de l'énoncé qui doit faire apparaître l'intersection en question en tant que lieu. C'est donc une expérimentation générative. Les multiples utilisations de ce fichier en classe et en séance de travail dirigé informatique nous ont conduit vers une phase initiale de prise en main du fichier par des manipulations guidées.
Ces manipulations doivent permettre une appréhension opératoire de la Cabri-figure. Les conséquences prévisibles de cette appréhension sont une meilleure aptitude à utiliser la figure pour expérimenter de manière générative sans être guidé explicitement comme l'énoncé le fait à la question 2.b. Notre expérience montre qu'une phase de prise en main de 15 minutes est suffisante mais qu'une recherche par groupe de deux en salle informatique nécessite du temps pour arriver à la solution. Une recherche de 40 minutes permet en général au moins à un ou deux groupes sur les sept ou huit en activité d'arriver à la bonne solution.
Si on revient aux consignes explicites de l'activité, elles sont contradictoires avec l'utilisation que nous en avons personnellement faites.
Les questions 1 et 2.a. demandent de démontrer les points qui doivent permettre de déduire dans la question 2.a. la technique de construction sous Cabri de l'hyperbole intersection. Alors que le titre de l'activité suggère un travail expérimental médié par Cabri, en réalité, les consignes mettent l'élève dans une situation papier-crayon qui correspondrait à la phase d'analyse-synthèse théorique. L'expérimentation est donc typiquement une expérimentation que nous avions qualifiée de papier-crayon, le résultat de l'expérimentation étant la conclusion de la démonstration demandée. L'expérimentation médiée par Cabri qui consiste à demander le tracé de l'hyperbole en tant que lieu est le résultat d'une appréhension discursive de la figure qui est fortement guidée. Il est curieux de constater qu'une appréhension opératoire est prévue dans la dernière consigne quand on demande de « Visualiser ses diverses formes suivant la position du plan P » alors que le problème doit être résolu. Un fichier contenant toutes les constructions intéressantes à visualiser ainsi que l'hyperbole intersection est fourni dans le CD ROM accompagnant le livre du Professeur.

À droite la capture d'écran est la copie de ce fichier fourni. Nous présentons ci-dessous quelques autre captures d'écran résultats de l'application de la dernière consigne.

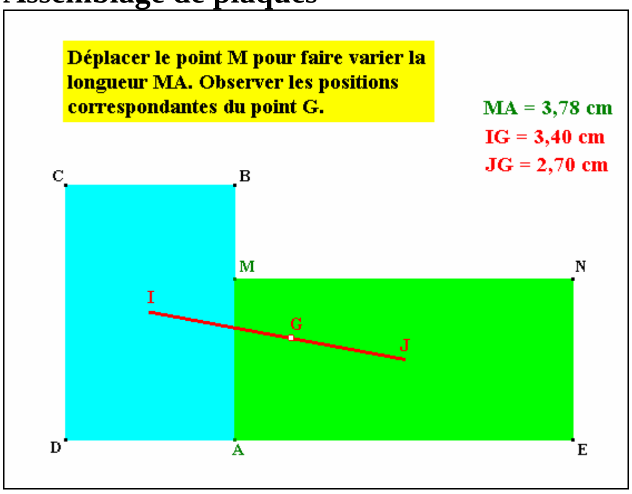






ATELIER TICE 103 PAGE 359

1. Énoncé
Assemblage de plaques



> SI VOUS VOULEZ CONSTRUIRE LE FICHIER

On a construit le rectangle ABCD de largeur AD = 4 cm et de longueur AB = 6 cm. On a placé un point M sur le segment [AB] et construit le rectangle AENM de longueur AE = 8 cm tel que A soit un point du segment [DE]

> Visualiser le repère et la grille pour placer les points A, B, C, D et E.

> Placer M sur le segment [AB] et construire les droites perpendiculaires en M à (AB) et en E à (AD) pour obtenir N.

Les rectangles représentent deux plaques homogènes d'épaisseur constante. Leurs masses respectives sont proportionnelles à leurs aires. On a placé les centres de gravité respectifs I et

J des rectangles ABCD et AENM et G le centre de gravité de l'ensemble constitué des deux plaques.

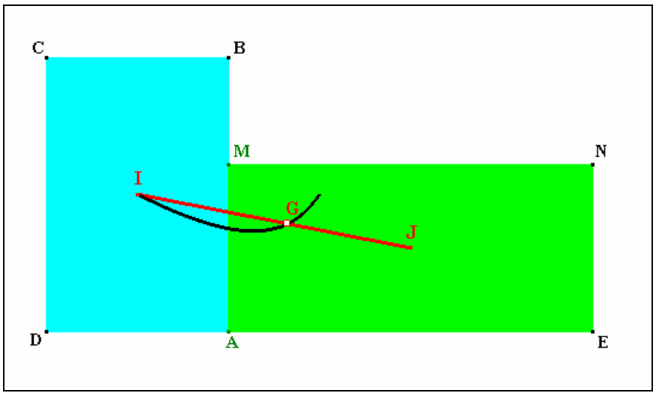
> Les points I et J sont définis comme intersections des diagonales des rectangles.
> On a construit les polygones ABCD et AMNE pour afficher leurs aires et définir le barycentre G avec la macro-construction **Barycentre_de_2_points**.
> On cache enfin tous les éléments inutiles.

1. Déplacer le point M sur le segment [AB] et observer les positions correspondantes du point G.
2.a. Comment faut-il déplacer le point M sur [AB] pour que le point G se rapproche du point I ?
b. Expliquer pourquoi.
3.a. Placer M pour que G soit au milieu du segment [IJ].
b. Calculer la longueur du segment [MA] correspondante.
4.a. Placer le point M pour que G soit sur le segment [AB].
b. Quelle conjecture peut-on faire à propos du rapport $\frac{GI}{GJ}$ quand G appartient à [AB] ?
Démontrer cette conjecture et en déduire la longueur MA correspondante.

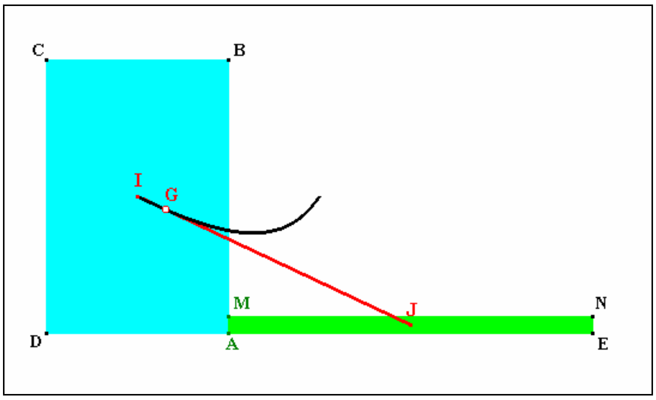
2. Analyse *a priori* de l'activité proposée

Cette activité a pour objectif de déterminer les valeurs d'un paramètre (position du point M sur le segment [AB]) dans un assemblage de plaques rectangulaires pour amener le centre de gravité G de l'ensemble sur des positions imposées par des contraintes.
Elle repose au moins sur les quatre expérimentations imposées dans les questions 1, 2, 3 et 4.

Expérimentation 1 :
Il est demandé à la question 1 de tirer sur le point G pour visualiser les positions intermédiaires de G. Cette manière opératoire d'appréhender la figure doit permettre de mieux comprendre le phénomène. Il n'a été demandé ni la trace, ni le lieu de G (représenté ci-dessous en noir) quand M varie. Néanmoins cette expérimentation est du type génératif car elle doit permettre de générer des observations que l'auteur du sujet espère génératives. On peut espérer **stimuler la phase de recherche erratique** situé plutôt dans G1 ou G1 informatique. La recherche proposée se situe dans un cadre d'investigation de modélisation.

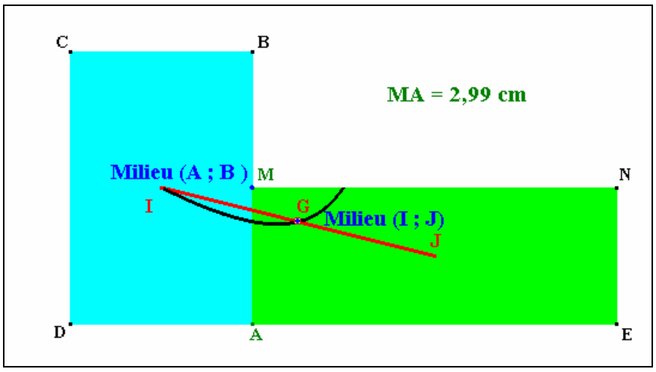


Expérimentation 2 : encore de type **opératoire, l'appréhension** imposée par l'énoncé de la question 2.a. va pousser l'expérimentateur dans un **cadre d'investigation d'ingéniérie au hasard** pour repérer le déplacement de M qui va amener le point G à se rapprocher du point I. On va faire défiler pendant cette expérimentation les **trois phases pré-conjecture** de notre modèle de démarche et rester dans G1 informatique. Le rapprochement de G du point I provoque un allongement et un écrasement du rectangle MAEN. Cette expérimentation est **générative** de la réponse à la question posée.



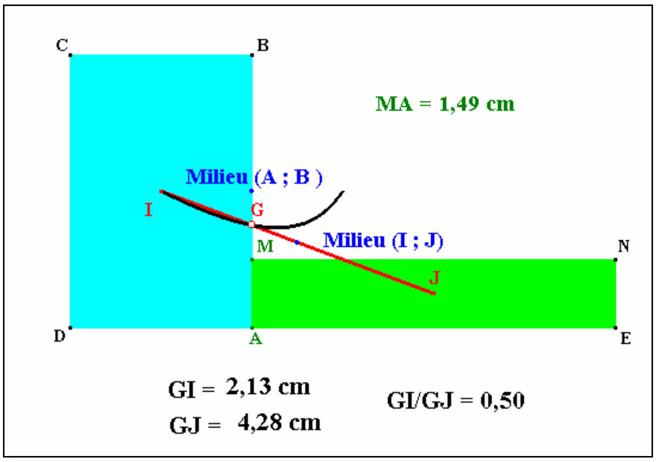
Cette perception engendre une appréhension discursive dans G2 qui justifie G = I quand M = A (réponse à la question 2.b.). Cette appréhension discursive peut se dérouler successivement dans les phases d'analyse-synthèse expérimentale dans G1, puis théorique dans G2 et G2 informatique.

Expérimentation 3 :
Cette expérimentation du même type que l'expérimentation précédente doit permettre de trouver la position de M vérifiant la contrainte « G est le milieu de [IJ] ». Le fait de tirer sur M pour amener G sur le milieu de [IJ] permet d'appréhender la figure de manière encore opératoire pour conjecturer très vite que M doit être situé au milieu de [AB]. La conjecture réalisée dans G1 l'est de manière perceptive, encore après un parcours rapide des **trois phases pré-conjecture** de notre modèle de démarche. L'affichage de MA est une expérimentation validant la conjecture dans G1 informatique.
Si l'expérimentateur crée les deux milieux respectifs des segments [IJ] et [AB] et s'il vérifie sa conjecture par superposition de G sur le premier milieu quand M se superpose au second, il aura parcouru la phase d'analyse-synthèse expérimentale qui sera une preuve expérimentale du niveau G1.



Si l'expérimentateur redéfinit M en le milieu de [AB] et s'il vérifie par un test Cabri que G est le milieu de [IJ], il aura parcouru la phase d'analyse-synthèse théorique qui sera la Cabri-preuve du niveau G2 informatique avec une appréhension discursive dans un cadre d'investigation scientifique explicatif.

Expérimentation 4 :
L'analyse qu'on peut faire de cette expérimentation est point par point la même que l'analyse de l'expérimentation précédente. Elle consiste cette fois à repérer la position de M amenant G sur le segment [AB] et de manière corrélative les valeurs du rapport GI/GJ et de la distance MA.

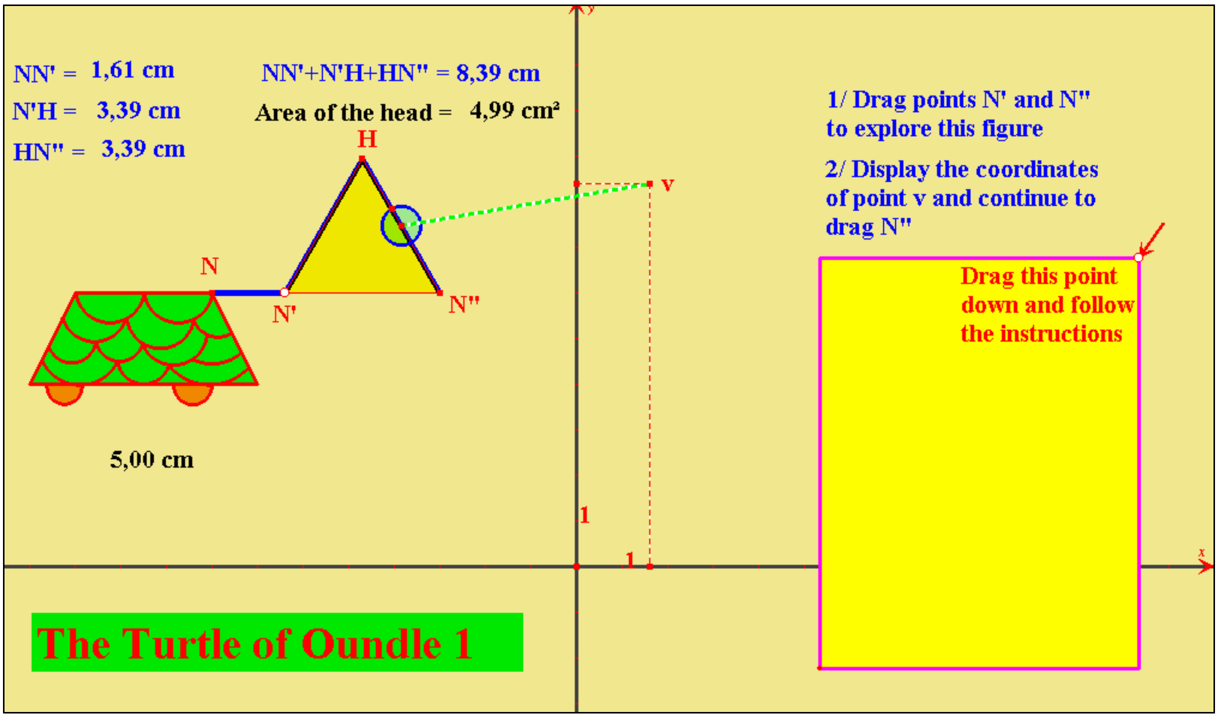


Remarques générales sur les quatre analyses faites
Les exemples étudiés se sont prêtés à une analyse a priori des démarches qui pourraient être générées en liaison avec les phases de la démarche de notre modèle. Une meilleure connaissance de ce modèle devrait permettre de modifier les consignes pour mieux équilibrer les phase pré- et post-conjecture.

ANNEXE 6

Proposition d'activité et de recherche entièrement en environnement informatique
Cette activité a été proposée à TSM 2004 sous forme d'un fichier Cabri (sous la forme qui est détaillée ci-dessous) et mise à disposition des participants des ateliers de ce stage dans le CD-ROM qui a été conçu par les animateurs.

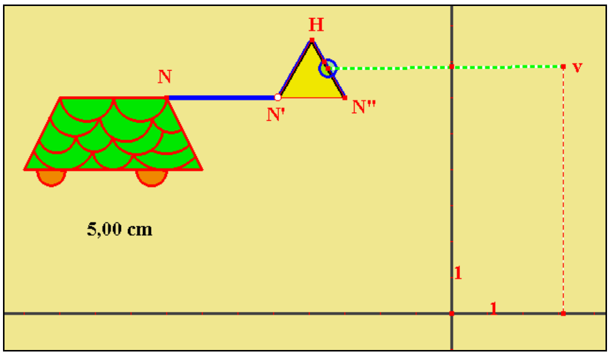
Une activité d'introduction des fonctions du second degré (avec la tortue d'Oundle)

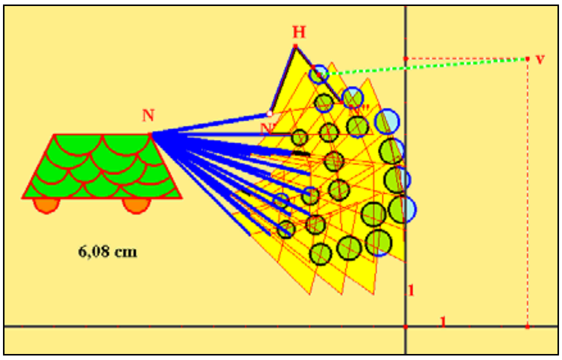


Si on déroule le rideau jaune comme il est demandé pour suivre les instructions, apparaissent cinq séries de consignes (demandes d'expérimentations ou de reconnaissance d'une définition) que nous traduisons ainsi :

1/ Tirer sur les points N' et N'' pour explorer la figure.
2/ Demander l'affichage des coordonnées de v et continuer à tirer sur le point N'.
3/ Vous pouvez en déduire que la courbe décrite par v est la courbe d'une fonction g : quelle est la variable x et que représente g(x) ?
4/ Demandez le lieu de v quand N' varie pour obtenir cette courbe. Tirer à nouveau sur les points N' et N'' » pour obtenir une conjecture au sujet de la fonction g..
5/ Construire une conique passant par cinq points de ce lieu et demander son équation.

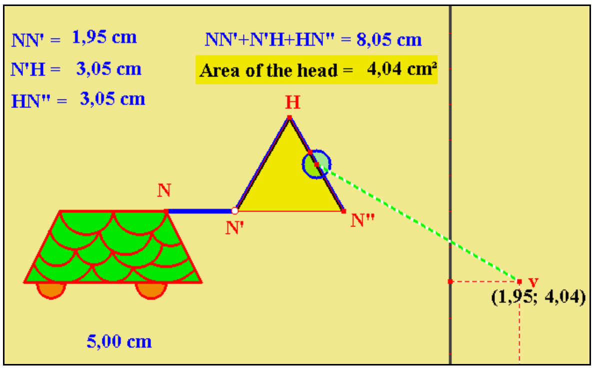
Question 1
Cette **première expérimentation** permet de comprendre certaines spécifications de la figure proposée, c'est-à-dire d'appréhender la figure de **manière séquentielle** dans **G1 informatique** : N' est le point sur le segment [NN''] (figure de gauche ci-dessous), N'' est un point créé sur la grille associée aux axes (figure de droite ci-dessous) et enfin la tête de la tortue semble être équilatérale. Un travail dans G2 informatique aurait consisté à tester avec l'oracle de Cabri les égalités des côtés de ce triangle (outil « Équidistants ? »). Cette expérimentation est générative dans un cadre d'investigation d'engagement, du moins au départ. La phase simulée est la **phase erratique** : elle donne des informations indépendantes qui n'ont pas pour l'instant de lien avec un quelconque problème.





Question 2

La **seconde expérimentation** permet de voir les coordonnées de v se modifier (en même temps que toutes les données affichées) quand on tire sur le point N'. Elle permet de faire appel à l'insight de l'expérimentateur qui doit faire le lien entre les coordonnées de v et certains autres résultats affichés : l'abscisse de v serait NN' et l'ordonnée de v serait l'aire du triangle représentant la tête.



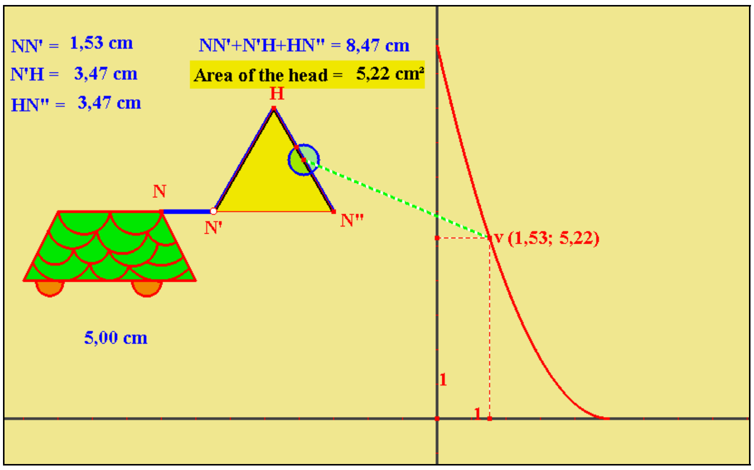
Nous pouvons remarquer que les consignes de cette question demandent seulement de tirer sur N' sans en tirer de conclusion spéciale : néanmoins on doit s'attendre à cette mobilisation de l'insight comme dans une expérience en sciences physiques où on opère dans un cadre d'investigation scientifique empirique. Le niveau de géométrie concerné est le niveau G1 informatique. G2 informatique aurait été mobilisé par le calcul des différences des nombres présumés égaux avec un affichage maximum de décimales pour plusieurs positions de N. Les consignes font entrer progressivement dans la phase de **recherche ordonnée** en se concentrant sur les coordonnées de v.

Question 3

La conjecture faite, interprétée formellement, donne la réponse à la question 3 : la courbe de v est la courbe de la fonction g qui à toute valeur de x comprise entre 0 et NN'' fait correspondre la mesure de l'aire du triangle N'HN''.

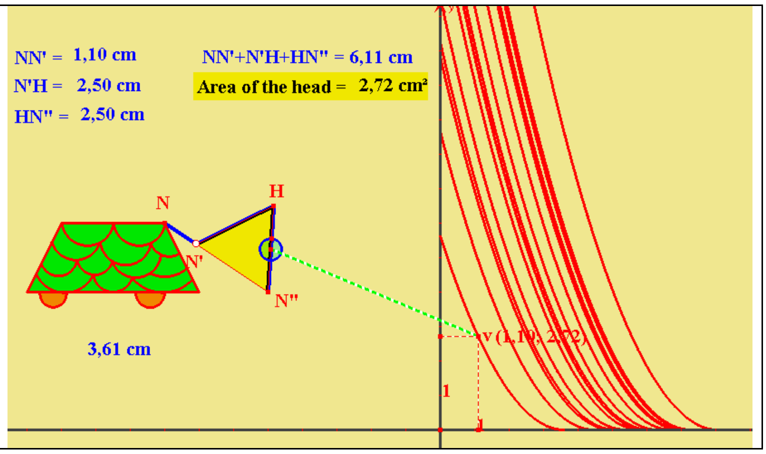
Question 4

La **troisième expérimentation** générative quand elle fait apparaître le lieu ici en rouge devient validative quand on tire sur N pour constater que le point v glisse bien le long de ce lieu. On rentre dans **l'accélération de la recherche** quand on constate visuellement que la courbe semble être un arc de parabole (appréhension perceptive dans G1 informatique).



Le cadre d'investigation est ici un cadre de modélisation

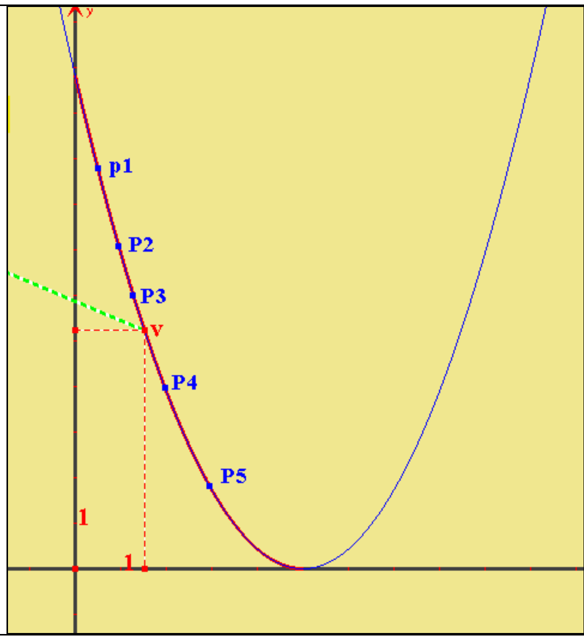
Ici l'appréhension opérationnelle de la tortue quand on tire sur N'' doit générer les courbes de g correspondantes qui, elles, sont saisies de manière perceptive comme des arcs de parabole dans G1 informatique. Le nombre d'arcs générés justifie un cadre d'investigation scientifique explicatif.



La conjecture qui doit être fortement validée à la fin de cette accélération de la recherche est : « la fonction g est une fonction quadratique ». Cette conjecture peut être directement survalidée dans Cabri 2 Plus en demandant l'équation du lieu obtenu qui est bien une expression du second degré en x.

Question 5

Cette dernière expérimentation est la phase d'analyse synthèse expérimentale où l'analyse montre bien qu'une conique passant par cinq points particuliers du lieu se superpose à notre lieu (niveau G1 informatique) mais aussi que toute conique passant par cinq points quelconques du lieu vient aussi se superposer à notre lieu. La synthèse est obtenue par le fait que ces coniques semblent être la même conique. De plus en mode pointeur, l'approche du curseur de la conique génère systématiquement le message « cette parabole ». Le cadre d'investigation est un cadre scientifique explicatif. L'appréhension est perceptive mais aussi et surtout discursive. La demande de l'équation apporte les mêmes commentaires que le message précédent.



Notons que pour basculer dans G2 informatique, il aurait fallu tester l'appartenance de v à la conique construite pour le maximum de positions intermédiaires de v sur le lieu et de positions différentes des points P1, P2, P3, P4 et P5 sur le lieu et qui définissent la conique. Dans ce cas là, la phase parcourue aurait été la phase d'analyse-synthèse théorique.

Remarque finale : à l'exception de la phase d'analyse critique qui n'a pas été spécialement amenée dans les consignes cette activité est celle qui a mobilisé toutes les phases de la démarche expérimentale de découverte telles que nous les avons postulées et validées dans notre travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALDON G., 1995, Une voiture à la dérive, *Repères IREM* N° 21, 27-44.

[2] ARRAGON M., 2000, *« Un TP sur la réfraction pour les nouveaux programmes de seconde 2000»*, document élève pour un TP sur la réfraction.
http://www.ac-grenoble.fr/phychim/confjjma/jjpnf2000/phoc/tphoc.htm
(dernière vérification du lien : Octobre 2005)

[3] ARRAGON M., DAHAN J.J., 2000, De la division harmonique à la formule de conjugaison, Congrès Cabriworld 1, Sao Paulo, 1999.
http://www.ac-grenoble.fr/phychim/confjjma/
(dernière vérification du lien : Octobre re 2005)

[4] ARRAGON M., DAHAN J.J., 2001, Satellisation et méthode d'Euler avec Cabri, Congrès Cabriworld 2, Montréal, 2001.
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/montrealbis/CR0confmontreal.htm
(dernière vérification du lien : Octobre 2005)

[5] ARTIGUE M., GRAS R., LABORDE C., TAVIGNOT P., 1994, *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

[6] ARTIGUE M., 1995, Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des Mathématiques, *Repères IREM* N°19, 77-108.

[7] ASTOLFI J., DAROT E., GINSBURGER-VOGEL Y., TOUSSAINT J., 1997, *Mots-clés de la didactique des sciences Repères, définitions, bibliographies*, De Boeck Université, Bruxelles.

[8] BALACHEFF N., 1982, Preuve et démonstration en Mathématiques au Collège, *Recherches en didactique des mathématiques*, 3, (3), 261-303.

[9] BARBIN E., 1997, Sur les relations entre épistémologie histoire et didactique, *Repères IREM* N° 27, 63-80.

[10] BARBIN E., 1993, Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages ?, *Repères IREM* N° 12, 91-113.

[11] BETTINELLI B., 1991, Intuition et démonstration chez Archimède, *Repères IREM* N° 2, 12-29.

[12] BKOUCHE R, 2002, Du raisonnement à la démonstration, *Repères IREM* N° 47, 41-64.

[13] BOERO P., 1999, Choix des thèmes de travail et des tâches pour l'approche des théorèmes, *in Actes de la X^e^ école d'été de didactique des Mathématiques, Tome 2*, 59-63.

[14] BONAFE F., 1993, Les narrations de recherche : un outil pour apprendre et démontrer, *Repères IREM* N° 12, 5-14.

[15] BONAFÉ F., CHEVALIER A., COMBES M-C., DEVILLE A., DRAY L., ROBERT J.P., SAUTER M., 2002, *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*, IREM de Montpellier et APMEP.

[16] BOUHINEAU D., 1997, *Construction automatique des figures géométriques & Programmation Logique avec Contraintes*, thèse de doctorat Université Joseph Fourier-Grenoble I.

[17] BOURY V., 1993, *La distinction entre figure et dessin en géométrie : étude d'une boîte boire sous Cabri-Géomètre*, DEA Sciences cognitives, INP Grenoble.

[18] BOUVIER J.P., BELNA J.P., CHADENAS J., DAHAN J.J., EGGER B., GÉRARD J.C., GIRARD D., HOUDART I., REBOUT R., SLOWIK J.M., 2001, *Maths 1reS*, Éditions Belin.

[19] BRIDENNE M., GARDES D., 2004, Apprendre dans la durée : une tentative dans les classes de première *in Faire des Maths en classe ? Didactique et analyse des pratiques enseignantes*, INRP ADIREM, 219-250, INRP, Paris.

[20] BROUSSEAU G., 1986, Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques,* 7, (2), 33-115.

[21] BROUSSEAU G., 1998, *Théorie des situations didactiques,* La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

[22] CAPPONI B., 1993, Utilisation du logiciel Cabri-Géomètre en classe *in Actes de l'Université d'été « Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur : utilisation du logiciel Cabri-Géomètre en classe»*, Grenoble 1993.

[23] CAPPONI B., CLAROU P., LABORDE C., 2001, *Géométrie avec cabri. Scénarios pour le lycée »*, Collection Objectif Multimédia, CDDP de l'Académie de Grenoble.

[24] CARRAL M., 2003, Chercher avec Cabri , *in Enseigner la géométrie dans le secondaire, Actes du colloque Inter-Irem Géométrie,* Liège, p. 159-180.

[25] CHARRIÈRE P.M., 1994, *Boîtes noires avec Cabri-Géomètre*, contribution au concours « Soutien à l'utilisation pédagogique de l'ordinateur, seconde édition », Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques, Neuchatel, Suisse.

[26] CHARRIÈRE P.M., 1996, *Apprivoiser la géométrie avec Cabri-Géomètre»*, Monographie du Centre informatique pédagogique, Genève.

[27] CHEVALLARD Y., 1991, *La Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné* suivi de *Un exemple de la transposition didactique* avec JOHSUA M.A., La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

[28] CHEVALLARD Y., 1998, La notion d'organisation praxéologique, *in* Actes de l'Université d'été de La Rochelle, *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

[29] COPPE S., 1996, Vérifications en devoir surveillé, *Repères IREM* N° 22, 13-32.

[30] CUPPENS R., 1996, *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre Tome 1*, Publication de l'APMEP N° 104, Paris.

[31] DAHAN J.J., 1998, Ce que Filou a derrière la tête ou histoires de parabole, *in La lettre de T^3* N°3, Enseignement et nouvelles technologies T^3 Europe, Paris.

[32] DAHAN J.J., 1998, What Filou has behind his head or stories about parabolas, *in* The Derive-Newsletter N° 34, *The bulletin of the Derive user group + TI92*, Vienne.

[33] DAHAN J.J., 1998, *De la proportionnalité aux coniques en passant par les lignes de niveaux avec la TI-92*, Brochure de l'IREM de Toulouse 161.

[34] DAHAN J.J., 1998, *Des maths dynamisées par la TI-92 (Collège),* Journées APMEP d'Albi, Plot N° 80.

[35] DAHAN J.J., 2000, Another approach of Teaching Mathematics with New Technologies», contributed presentation, *in Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy in Portoroz,* BK Teachware Publishing, Hagenberg, Austria.

[36] DAHAN J.J., 2001, *Enseigner et pratiquer les Mathématiques avec Cabri Lycée : tome 1*, Brochure de l'IREM de Toulouse 165.

[37] DAHAN J.J., 2001, Apprentissage à la recherche de problèmes inversés. Approche des problèmes difficiles, Mini-cours, Congrès Cabriworld 2, Montréal, 2001.
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/montrealminicours/cm0confmontreal.htm
(dernière vérification du lien : Octobre 2005)

[38] DAHAN J.J., 2002, Le nouveau programme de seconde avec Cabri, *Plot N°101-102*, 32-40.

[39] DAHAN J.J., 2002, How to teach Mathematics in showing all the hidden stages of a true research : examples with Cabri, invited paper, *in Proceedings of the 7th Asian Technology Conference in Mathematics,* ATCM Inc, U.S.A., 61-75.

[40] DAHAN J.J., 2002, 3 exemples pour illustrer la démarche expérimentale en mathématiques avec Cabri , *in Enseigner la géométrie dans le secondaire, Actes du colloque Inter-Irem Géométrie*, Liège, 133-158.

[41] DAHAN J.J., 2004, The turtle of Oundle, *in* CD ROM TSM resources (fichier Cabri), Douglas Butler Publishing, Oundle.

[42] DAHAN M., BERJAUD J., BROUCHET L., RÉGNARD JF, MAGDALEINAT P., 2002, Chirurgie de la trachée et des bronches. Techniques endoscopiques, in *Encyclopédie Médico Chirurgicale*, Éditions Scientifiques Médicales Elsevier SAS, Techniques chirurgicales-Thorax, 42-145, Paris.

[43] DEHAENE S., 1996, *La bosse des maths*, Éditions Odile Jacob, Paris.

[44] DOUADY R, 1992, Des apports de la didactique des Mathématiques à l'enseignement, *Repères IREM*, 152-158.

[45] DUVAL R., 1994, Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM* N° 17, 121-138.

[46] FRIEDELMEYER J.P., 1998, Les aires : outil heuristique outil démonstratif, *Repères IREM* N° 31, 39-62.

[47] GUÉNARD F., LEMBERG H., 2001, *La méthode expérimentale en Mathématiques Expérimentation à l'aide de Mathematica, Maple et de la TI92-89,* Springer, Paris.

[48] GLAESER G., 1976, Heuristique. Estimation de la difficulté d'un problème, *in La problématique et l'enseignement de la mathématique*, *Actes de la XVIII^e rencontre de la CIEAEM*, Louvain-la-Neuve, Belgique.

[49] GLAESER G., 1986, *Une introduction à la didactique expérimentale des Mathématiques*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

[50] GLAESER G., 1990, *Analyse et Synthèse*, Publication APMEP N° 76, Paris.

[51] HADAMARD J., 1911, *Leçons de Géométrie Élémentaire tome 2 (géométrie dans l'espace)*, exercices 840 à 845, Armand Colin, Paris.

[52] HOUBEN J.-P., VANHAMME J. 1994, Les transformations du plan à l'aide de Cabri-Géomètre, *in Représentations graphique et symbolique de la maternelle à l'université*, *Actes de la 46^ième rencontre de la CIEAEM*, Tome 2.

[53] HOUDEMENT C., KUZNIAK A., 1998-99, Géométrie et paradigmes géométrique, *Petit X* N° 51, IREM de Grenoble.

[54] ILIOVICI G., ROBERT P., 1937, *Géométrie*, exercice 345 page 365, Librairie de l'Enseignement Technique Eyrolles, Paris.

[55] JOHSUA M.A., JOHSUA S., 1987, Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique (première partie), *Recherches en didactique des mathématiques,* 8, (3), 231-266.

[56] JOHSUA M.A., JOHSUA S., 1988, Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique (deuxième partie), *Recherche en didactique des mathématiques,* 9, (1), 5-30.

[57] JOHSUA S., DUPIN J.J., 1989, *Représentations et modélisations : le débat scientifique dans la classe et l'apprentissage de la Physique*, Peter Lang, Paris.

[58] JOHSUA S., DUPIN J.J., 1993, *Introduction à la didactique des sciences et des Mathématiques,* P.U.F, Paris.

[59] HOCHART C., SCHNEIDER M., 1996, Une approche heuristique de l'analyse, *Repères IREM* N° 25, 35-62.

[60] KUHN T., 1990, *La tension essentielle tradition et changement dans les sciences*, N.R.F. Paris.

[61] KUNTZ G., 1993, L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a, *Repères IREM* N° 11, 5-31

[62] KUNTZ G., 1994, De l'intelligence artificielle aux fiches-méthodes, *Repères IREM* N° 16, 11-27.

[63] LABORDE C., CAPPONI B., 1994, Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 14 (1), 165-210.

[64] LAKATOS I., 1984, *Preuves et réfutations Essai sur la logique de la découverte en mathématiques*, Hermann, Paris.

[65] LEBOSSÉ-HÉMERY, 1961, *Géométrie, classe de Mathématiques, programmes de 1945*, p. 363, Fernand Nathan, Paris.

[66] LEGRAND M., 1997, La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique, *Repères IREM* N° 27, 81-125.

[67] MARGOLINAS C., 1993, *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

[68] MARTY S., VIDAL A., 2004, *La calculatrice en classe de seconde*, Mémoire professionnel IUFM Midi-Pyrénées.

[69] MATHY P., 1997, *Donner du sens au cours de sciences*, De Boeck Université, Bruxelles.

[70] MOHAY P., 1994, Propos sur le problem solving, *Repères IREM* N° 16, 71-82.

[71] NOSS R., HOYLES C., 1996, *Windows on Mathematical Meanings*, Mathematic Education Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays Bas.

[72] OLIVERO F., 2002, *The proving process within a dynamic geometry environment*, thèse de Ph. D., Bristol University, UK.

[73] PARZYSZ B., 2001, Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, *in Colloque de la COPIRELEM, Tours 2001*, Presses de l'université d'Orléans, IREM d'Orléans.

[74] PARZYSZ B., 2003, Articulation et déduction dans une démarche géométrique en PE1, *in Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques.* Tome 2 (Démarches et savoirs à enseigner) chap. 1 (Espace et géométrie), 107-125. Ed. ARPEME.

[75] PARZYSZ, B. et JORE, F. : Qu'ont-ils retenu du collège ? Le rapport à la géométrie des futurs professeurs des écoles, *in* L. Trouche (éd.) *Actes du colloque inter-IREM Quelles*

géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental, 107-118. Ed. IREM de Montpellier 2002.

[76] PERROT F., TADJEDDINE M., 1995, Apprentissage de l'expérimentation en physique. 1-La place de l'expérimentation dans les concours de recrutement, *Didaskalia* N° 6.

[77] PETERSEN J., 1990, *Problèmes de constructions géométriques*, Éditions Jacques Gabay, Paris.

[78] POLYA G., 1967, *La découverte des Mathématiques*, Dunod, Paris.

[79] POLYA G., 1989, *Comment poser et résoudre un problème*, Éditions Jacques Gabay, Paris.

[80] RABARDEL P., 1997, *Les hommes et les technologies*, Armand Colin Collection U, Paris.

[81] SAUTER M., 1998, Narration de recherche : une nouvelle pratique pédagogique, *Repères IREM* N° 30, 9-21.

[82] SAUTER M., 2000, Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège, *Repères IREM* N° 39, 7-20.

[83] SCHEIDECKER-CHEVALLIER M, 1999, La Mathématisation de la chimie au cours de son histoire, *Repères IREM* N° 36, 87-102.

[84] TROUCHE L, 1995, Eppur, si muove, *Repères IREM* N° 20, 16-28.

[85] TROUCHE L, 1996, Masques, *Repères IREM* N° 24, 43-64.

[86] TROUCHE L, 1998, *Expérimenter et prouver Faire des Mathématiques au lycée avec des calculatrices symbolique ?*, IREM de Montpellier.

[87] VIENNOT L., 1996, *Raisonner en physique La part du sens commun*, De Boeck Université.

[88] VYGOTSKI L., 1997, *Pensée et langage*, La Dispute, Paris.

Dictionnaires et encyclopédie :

[89] LITTRÉ E., 1966, *Dictionnaire de la langue française,* Gallimard Hachette, Paris.

[90] REY A., 1992, *Dictionnaire historique de la langue française,* Dictionnaires Le Robert, Paris.

[91] ROBERT P., 1964, *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française. Les mots et les associations d'idées,* Société du nouveau Littré, Paris.

[92] Encyclopédia Universalis 1997

RÉSUMÉ

Notre travail est centré sur la démarche de découverte reposant sur des expérimentations réalisées avec Cabri-Géomètre. L'analyse d'un corpus débordant le cadre des Mathématiques clarifie la manière dont la découverte arrive ou est transmise, ainsi que le rôle de l'expérimentation dans ces processus. Elle justifie notre hypothèse de décomposition de la démarche de découverte expérimentale en macro-étapes pré- et post-conjectures elles-mêmes décomposables en micro-étapes du type exploration-interprétation. L'analyse de la résolution d'une boîte noire particulière permet d'affiner notre modèle a priori de la démarche de découverte en y précisant le rôle de la figure (Duval), les niveaux de géométrie (praxéologies G1 et G2 de Parzysz) et leurs prolongements que nous développons (G1 et G2 informatiques), les cadres d'investigations (Millar) et la place de la preuve expérimentale (Johsua).
Les analyses des expérimentations mises en place permettent de disposer d'un modèle amélioré qui doit permettre aux enseignants d'avoir une connaissance minimale des étapes heuristiques du travail de leurs élèves, de concevoir des activités d'études et de recherches ayant des objectifs précis en liaison avec les étapes formalisées de notre modélisation et d'envisager leur possible évaluation.
Des analyses d'activités existantes avec notre grille montrent la validité du modèle étudié. Des propositions d'activités ont été construites pour favoriser l'apparition de telle ou telle phase de la recherche ; elles montrent la viabilité de ce modèle dans la conception d'ingénieries didactiques générant une démarche conforme à la démarche postulée.

MOTS CLÉS

Appréhension figurale, boîte noire, cadre d’investigation, démarche expérimentale, démarche scientifique, expérience, expérimentation, exploration-interprétation, heuristique, investigation ouverte, montage, niveau G1, niveau G2, niveau G1 informatique, niveau G2 informatique, phase post-conjecture, phase pré-conjecture, praxéologie, problème crucial, problème inversé, problème difficile, protocole, recherche erratique, recherche ordonnée,