



**HAL**  
open science

# Etude de l'amplification non linéaire de signaux MIMO pour les terminaux radio-mobiles

Basel Rihawi

► **To cite this version:**

Basel Rihawi. Etude de l'amplification non linéaire de signaux MIMO pour les terminaux radio-mobiles. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Rennes 1, 2008. Français. NNT : . tel-00354492

**HAL Id: tel-00354492**

**<https://theses.hal.science/tel-00354492>**

Submitted on 20 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3728

# Thèse

présentée devant  
l'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Rennes I**

Mention : *Traitement du Signal et Télécommunications*

par  
Basel RIHAWI

Équipe d'accueil : Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes

École doctorale : Matisse

Composante universitaire : S.P.M.

## Analyse et réduction du Power Ratio des systèmes de radiocommunications multi-antennes

Soutenue le 20 Mars 2008 devant la commission d'examen

### *Composition du jury*

#### *Président*

M. Alain BOURDILLON      Professeur, Université de Rennes 1, Rennes

#### *Directeurs de Thèse*

M. Jacques PALICOT      Professeur, IETR/Supélec, Rennes

M. Yves LOUËT      Maître de Conférences, IETR/Supélec, Rennes

#### *Rapporteurs*

Mme Geneviève BAUDOIN      Professeur, ESIEE, Université Paris Est

M. Kosai RAOOF      Maître de Conférences HDR, UJF, Grenoble



# Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Alain BOURDILLON pour avoir accepté d'assurer la présidence de mon jury de thèse. J'aimerais lui manifester ma profonde gratitude pour sa disponibilité et son attention.

Pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter sur ma thèse, je remercie vivement Madame Geneviève BAUDOIN et Monsieur Kosai RAOOF respectivement Professeur à l'ESIEE (Université Paris Est) et maître de conférences HDR, UJF (Grenoble).

Un grand merci à Jacques PALICOT le directeur de la thèse pour avoir toujours suivi mes recherches avec grand intérêt.

Je remercie tout particulièrement Yves LOUËT pour son encadrement et ses propositions qui m'ont permis d'avancer efficacement dans mes travaux. Je tiens surtout à souligner la qualité rare des relations professionnelles et humaines d'un professeur qui m'aura constamment encouragé et motivé. Ce fut une joie et un honneur d'avoir travaillé à ses côtés. Encore merci Yves.

Je remercie aussi l'ensemble de l'équipe SCEE de supélec campus de Rennes pour son accueil et pour ces trois années au cours desquelles j'ai appris de nombreuses choses, aussi bien sur le plan technique que humain.

Toute mon amitié va notamment à Adel METREF et Aissa IKLEF au près de qui j'ai souvent eu de l'aide dans des problèmes de traitement de signal et télécommunications.

A l'ensemble de mes amis et compatriotes, j'exprime toute ma gratitude pour votre soutien continu et votre amitié.

Je tiens à exprimer à ma femme toute ma tendresse. Merci pour ton soutien ces trois ans et merci de partager mon quotidien.

Une pensée à toute ma famille restée au pays, à mon père, ma mère, mes frères et sœurs.



# Résumé

Les modulations multiporteuse (de type OFDM) ont des formes d'onde à fortes fluctuations d'amplitude (PAPR pour Peak-to-Average Power Ratio). Ainsi, de nombreux travaux ont pour objectif de décrire mathématiquement ces fluctuations puis de proposer des solutions visant à les réduire. Parallèlement, les systèmes de télécommunication ont tendance à se diversifier et se complexifier. Ainsi, l'ajout d'une ou plusieurs antennes en émission (MIMO) va modifier la configuration du signal reçu et donc son PAPR. La présence d'un amplificateur non linéaire (LNA) en réception impose alors de quantifier la valeur du PAPR.

L'objectif de cette thèse est de décrire le PAPR à la réception en prenant en compte l'influence des modifications du signal : filtrage de mise en forme, transposition RF et canal de propagation. Cette étude a été menée dans des contextes SISO puis MIMO, chacun d'entre eux étant décliné sous les aspects mono puis multiporteuse. Ensuite, deux méthodes de réduction du PAPR ont été proposées.

**Mots clés :** MIMO, SISO, OFDM, Amplificateur, PAPR

## Abstract

The multicarrier modulations like OFDM have waveforms with large amplitude fluctuations (PAPR for Peak-to-Average Power Ratio). Thus, a lot of work has been done to mathematically describe these fluctuations and to propose solutions to reduce them. Nowadays, telecommunication systems have become more diversified and more complex. Indeed, the addition of one or more antennas on the transmitter (MIMO) will change the shape of the received signal and thus its PAPR. The presence of a non-linear amplifier (LNA) at the receiver imposes the restriction on the value of PAPR.

The objective of this Ph.D. thesis is to describe the PAPR in the receiver, taking into account the effects of shaping filter, RF transposition and propagation channel. This study has been applied to SISO and then MIMO contexts, each of which will be treated under the single and then multicarrier aspects. Finally, two methods have been proposed for PAPR reduction.

**keywords :** MIMO, SISO, OFDM, Amplifier, PAPR



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des acronymes et abréviations</b>	<b>xi</b>
<b>Principales variables utilisées et notations mathématiques</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Éléments de communications numériques</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Chaîne de transmission numérique . . . . .	6
1.3 Codage de source et codage de canal . . . . .	7
1.4 Codage binaire à symbole (CBS) . . . . .	7
1.5 Codage symbole à signal (CSS) . . . . .	8
1.5.1 Filtre en racine de Nyquist . . . . .	9
1.5.2 Filtre de Nyquist . . . . .	10
1.6 Transposition de fréquence et amplification . . . . .	10
1.7 Canal, réception et démodulation . . . . .	11
1.8 Décodage symbole à signal . . . . .	12
1.9 Décodage binaire à symbole, décodage de canal et décodage de source . . .	13
1.10 Canaux de transmission . . . . .	14
1.10.1 Canal à bruit blanc additif gaussien (BBAG) . . . . .	14
1.10.2 Généralités sur le canal radio-mobile . . . . .	14
1.10.2.1 Analyse des évanouissements à petite échelle . . . . .	15
1.10.2.2 Méthodes pour combattre les distorsions . . . . .	18
1.11 Notions de diversité . . . . .	18
1.11.1 Diversité temporelle . . . . .	19
1.11.2 Diversité fréquentielle . . . . .	19
1.11.3 Diversité de polarisation . . . . .	20
1.11.4 Diversité spatiale . . . . .	20
1.12 Modulation multiporteuse de type OFDM . . . . .	21
1.12.1 Historique de l'OFDM . . . . .	21
1.12.2 Principe de la modulation OFDM . . . . .	23



1.12.3	Principe de la démodulation OFDM . . . . .	24
1.12.4	Réalisation numérique des opérations de modulation et de démodulation . . . . .	25
1.12.4.1	Implantation numérique du modulateur . . . . .	25
1.12.4.2	Implantation numérique du démodulateur . . . . .	26
1.12.5	OFDM et non-linéarités . . . . .	26
1.13	Amplificateurs de puissance (HPA) . . . . .	27
1.13.1	Notion de rendement . . . . .	28
1.13.2	Caractérisation de la non-linéarité d'amplitude et de la phase d'un amplificateur de puissance . . . . .	28
1.13.3	Les classes de fonctionnement . . . . .	31
1.14	Amplificateurs faible bruit (LNA) . . . . .	31
1.15	Conclusion . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Power Ratio dans un contexte SISO</b>	<b>33</b>
2.1	Introduction . . . . .	33
2.2	Définitions théoriques du Power Ratio (PR) . . . . .	34
2.2.1	Définitions des rapports de puissance en continu . . . . .	35
2.2.2	Définitions des rapports de puissance en échantillonné . . . . .	35
2.3	Liens entre le PR et les définitions usuelles . . . . .	35
2.3.1	Définition du PMEPR . . . . .	36
2.3.2	Définition du PAPR . . . . .	36
2.3.3	Relation entre le PMEPR et le PAPR . . . . .	36
2.3.4	Définition du Crest Factor (CF) . . . . .	37
2.3.5	Définition du Peak Envelope Power (PEP) . . . . .	37
2.3.6	Définition de l'Effective Peak Factor (EPF) et de la Complementary Cumulative Distribution Function (CCDF) . . . . .	37
2.4	Analyse du PR en modulations monoporteuse . . . . .	38
2.4.1	Influence du suréchantillonnage sur la mesure du PR . . . . .	38
2.4.2	Influence du filtre de Nyquist sur le PR . . . . .	38
2.4.3	Influence du filtre en racine de Nyquist sur le PR . . . . .	40
2.4.3.1	Étude de la convergence de $\tilde{s}(t)$ pour un facteur de roll off nul . . . . .	41
2.4.3.2	Étude de la convergence de $\tilde{s}(t)$ pour un facteur de roll off non nul . . . . .	41
2.4.3.3	Recherche du maximum de $ \tilde{s}(t) ^2$ . . . . .	42
2.4.3.4	Étude du maximum du filtre . . . . .	43
2.4.3.5	Expression du maximum de $ \tilde{s}(t) ^2$ . . . . .	43
2.4.3.6	Expression de la puissance moyenne $P_{\tilde{s}}$ en sortie du filtre . . . . .	47
2.4.3.7	Expression du PR en sortie du filtre . . . . .	47
2.4.3.8	Mise en évidence de l'influence des différents paramètres du filtre sur la distribution du PR . . . . .	49
2.4.3.9	Conclusion . . . . .	49
2.4.4	PR en sortie du canal de propagation . . . . .	51
2.5	Analyse du PR en modulations multiporteuse . . . . .	52
2.5.1	Définition et état de l'art . . . . .	52
2.5.2	Distribution du PR en sortie du filtre de mise en forme . . . . .	54

2.5.3	Influence du canal de propagation . . . . .	59
2.5.3.1	Cas d'un canal BBAG . . . . .	59
2.5.3.2	Cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats (Rayleigh flat fading) . . . . .	60
2.5.3.3	Cas d'un canal de Rayleigh de type multitrajets . . . . .	62
2.6	Conclusion . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Power Ratio dans un contexte MIMO</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction aux systèmes MIMO . . . . .	65
3.1.1	Modèle de canal MIMO . . . . .	67
3.1.2	Capacité des canaux MIMO . . . . .	68
3.1.2.1	Capacité du canal SISO . . . . .	68
3.1.2.2	Capacité du canal SIMO . . . . .	68
3.1.2.3	Capacité du canal MIMO . . . . .	69
3.1.3	Codage espace-temps (STC) . . . . .	69
3.1.3.1	Codes espace-temps en treillis (STTC) . . . . .	70
3.1.3.2	Codes espace-temps en Bloc orthogonaux(O-STBC) . . . . .	70
3.1.3.3	Les Codes espace-temps non orthogonaux . . . . .	72
3.2	Définition du Power Ratio (PR) des systèmes MIMO . . . . .	73
3.3	Analyse du PR en MIMO avec modulations monoporteuse . . . . .	73
3.3.1	Analyse du PR du signal reçu d'un système MIMO basé sur un schéma d'Alamouti . . . . .	74
3.3.2	Analyse du PR en MIMO basé sur d'autres codes espace-temps . . . . .	76
3.3.2.1	Cas d'un codage espace-temps en blocs orthogonaux avec commutation entre groupes d'antennes . . . . .	76
3.3.2.2	Cas d'un codage espace-temps en blocs non orthogonaux proposé par Jafarkhani . . . . .	78
3.3.3	Influence des canaux BBAG et de Rayleigh sur la distribution du PR . . . . .	80
3.3.4	Conclusion . . . . .	82
3.4	Analyse du PR des systèmes MIMO-OFDM . . . . .	82
3.4.1	Principe de l'association MIMO et OFDM . . . . .	82
3.4.2	Analyse du PR d'un système MIMO-OFDM basé sur un schéma d'Alamouti . . . . .	84
3.4.2.1	Cas d'un canal BBAG . . . . .	84
3.4.2.2	Cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats . . . . .	85
3.5	Conclusion . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Réduction du Power Ratio dans un contexte MIMO-OFDM</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction . . . . .	92
4.2	Etat de l'art des méthodes de réduction du PR dans un contexte MIMO-OFDM . . . . .	92
4.2.1	Méthode basée sur le "Selected Mapping" (SLM) . . . . .	93
4.2.1.1	SLM individuel . . . . .	93
4.2.1.2	SLM concurrent . . . . .	94
4.2.2	Méthode du Cross-Antenna Rotation and Inversion (CARI) . . . . .	95
4.2.2.1	Méthode du "Successive Suboptimal CARI (SS-CARI)" . . . . .	97
4.2.2.2	Méthode du "Random Suboptimal CARI (RS-CARI)" . . . . .	97

4.2.3	Méthode du "Unitary Rotation pour MIMO-OFDM" . . . . .	97
4.2.4	Autres méthodes . . . . .	98
4.3	Les méthodes dites à "Ajout de Signal" appliquées aux systèmes SISO-OFDM	99
4.3.1	Principe général . . . . .	99
4.3.2	Méthode de la "Tone Reservation" . . . . .	99
4.3.2.1	Description et performances . . . . .	99
4.3.2.2	Inconvénients de la "Tone Reservation" . . . . .	102
4.3.3	Amélioration de la méthode "Tone Reservation" . . . . .	102
4.3.3.1	Modélisation du problème de réduction du PR sous forme SOCP . . . . .	103
4.4	Extension de la méthode "Tone Reservation" à l'aide d'un algorithme de type SOCP pour les systèmes MIMO-OFDM : application aux porteuses adjacentes . . . . .	106
4.4.1	Modélisation du problème de la réduction du PR sous forme SOCP .	107
4.4.2	Modélisation du problème du PR sous forme SOCP avec contrainte sur la puissance moyenne relative . . . . .	112
4.4.3	Modélisation du problème du PR sous forme SOCP avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées . . . . .	114
4.4.4	Comparaison des performances des approches SOCP avec contrainte sur $\Delta E$ et avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées	116
4.5	Extension de la méthode "Tone Reservation" à l'aide de SOCP pour les systèmes MIMO-OFDM : application aux porteuses dans la bande utile . .	116
4.5.1	Présentation et intérêt . . . . .	116
4.5.2	Résultats et discussions . . . . .	117
4.6	Performances de la méthode SOCP (avec porteuses dans les bandes adja- centes) dans le cas d'un canal de Rayleigh . . . . .	119
4.7	Développement d'une méthode à la réception . . . . .	119
4.7.1	Méthode de "Jun" à l'émission . . . . .	119
4.7.2	Application de la méthode de "Jun" à la réception . . . . .	121
4.8	Conclusion . . . . .	122
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>125</b>
	<b>Publications personnelles</b>	<b>129</b>
	<b>Annexe</b>	<b>131</b>
	<b>A Interférences Entre Symboles (IES)</b>	<b>133</b>
A.1	Critère de Nyquist ou de non interférence entre symboles . . . . .	133
A.2	Filtre en racine de cosinus surélevé . . . . .	137
	<b>B Influence du Filtre de Nyquist sur le Power Ratio</b>	<b>143</b>
B.1	Analyse de la puissance moyenne . . . . .	143
B.2	Calcul d'un majorant pour le maximum de la puissance instantanée . . . .	144
B.2.1	Cas $\beta = 0$ . . . . .	144
B.2.2	Cas $\beta \neq 0$ . . . . .	145

---

B.3	Analyse du PR avec d'autres types de modulations . . . . .	147
B.4	Résultats de simulation . . . . .	148
<b>C</b>	<b>Optimisation convexe</b> . . . . .	<b>149</b>
C.1	Généralités . . . . .	149
C.2	Ensembles et fonctions convexes . . . . .	150
C.2.1	Ensembles convexes . . . . .	150
C.2.1.1	Définitions . . . . .	150
C.2.1.2	Exemples d'ensembles convexes . . . . .	150
C.2.1.3	Propriétés des ensembles convexes . . . . .	151
C.2.2	Fonctions convexes . . . . .	151
C.2.2.1	Définition . . . . .	151
C.2.2.2	Epigraphe d'une fonction . . . . .	152
C.2.2.3	Exemples de fonctions convexes . . . . .	152
C.2.2.4	Propriétés des fonctions convexes . . . . .	153
C.3	Problèmes d'optimisation convexe . . . . .	153
C.3.1	Définition . . . . .	155
C.3.2	Exemples de problèmes d'optimisation convexe . . . . .	155
C.3.2.1	La programmation linéaire . . . . .	155
C.3.2.2	La programmation quadratique . . . . .	156
C.3.2.3	La programmation quadratique avec contraintes quadra- tiques . . . . .	156
C.3.2.4	La programmation sur un cône de second ordre . . . . .	157
C.3.2.5	La programmation SemiDéfinie (SDP) . . . . .	160
C.4	Algorithmes et logiciels d'optimisation convexe . . . . .	160
C.4.1	Méthode des points intérieurs . . . . .	160
C.4.2	Logiciels d'optimisation convexe . . . . .	161
	<b>Table des figures</b> . . . . .	<b>163</b>
	<b>Liste des tableaux</b> . . . . .	<b>169</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>171</b>



# Liste des acronymes et abréviations

<b>ADSL</b>	<b>A</b> symetric <b>D</b> igital <b>S</b> ubscriber <b>L</b> ine
<b>ARQ</b>	<b>A</b> utomatic <b>R</b> epeat <b>r</b> e <b>Q</b> uest
<b>BBAG</b>	<b>B</b> ruit <b>B</b> lanc <b>A</b> dditif <b>G</b> aussien
<b>BPSK</b>	<b>B</b> inary <b>P</b> hase <b>S</b> hift <b>K</b> eying
<b>BPF</b>	<b>B</b> and <b>P</b> ass <b>F</b> ilter
<b>CAN</b>	<b>C</b> onvertisseur <b>A</b> nalogique <b>N</b> umérique
<b>CARI</b>	<b>C</b> ross <b>A</b> ntenna <b>R</b> otation and <b>I</b> nversion
<b>CBS</b>	<b>C</b> odage <b>B</b> inaire à <b>S</b> ymbole
<b>DBS</b>	<b>D</b> écodage <b>B</b> inaire à <b>S</b> ymbole
<b>CSS</b>	<b>C</b> odage <b>S</b> ymbole à <b>S</b> ignal
<b>CCDF</b>	<b>C</b> omplementary <b>C</b> umulative <b>D</b> istribution <b>F</b> unction
<b>CCETT</b>	<b>C</b> entre <b>C</b> ommun d'Études de <b>T</b> élécommunications et <b>T</b> élédiffusion
<b>CDMA</b>	<b>C</b> ode <b>D</b> ivision <b>M</b> ultiple <b>A</b> ccess
<b>CF</b>	<b>C</b> rest <b>F</b> actor
<b>CNA</b>	<b>C</b> onvertisseur <b>N</b> umérique <b>A</b> nalogique
<b>COFDM</b>	<b>C</b> oded <b>O</b> rthogonal <b>F</b> requency <b>D</b> ivision <b>M</b> ultiplexing
<b>CVX</b>	Boîte à outil d'optimisation convexe
<b>CSI</b>	<b>C</b> hannel <b>S</b> tate <b>I</b> nformation
<b>DAB</b>	<b>D</b> igital <b>A</b> udio <b>B</b> roadcasting
<b>DMT</b>	<b>D</b> iscrete <b>M</b> ulti- <b>T</b> one
<b>DSP</b>	<b>D</b> ensité <b>S</b> pectrale de <b>P</b> uissance
<b>DVB</b>	<b>D</b> igital <b>V</b> ideo <b>B</b> roadcasting
<b>DFT</b>	<b>D</b> iscrete <b>F</b> ourier <b>T</b> ransform
<b>EDGE</b>	<b>E</b> nhanced <b>D</b> ata rate for <b>G</b> SM <b>E</b> volution
<b>EPF</b>	<b>E</b> ffective <b>P</b> eak <b>F</b> actor
<b>FDM</b>	<b>F</b> requency <b>D</b> ivision <b>M</b> ultiplexing
<b>FEC</b>	<b>F</b> orward <b>E</b> rror <b>C</b> orrection
<b>FFT</b>	<b>F</b> ast <b>F</b> ourier <b>T</b> ransform
<b>GMSK</b>	<b>G</b> aussian-filtered <b>M</b> inimum <b>S</b> hift <b>K</b> eying
<b>GSM</b>	<b>G</b> lobal <b>S</b> ystem for <b>M</b> obile communications
<b>HF</b>	<b>H</b> igh <b>F</b> requency
<b>HPA</b>	<b>H</b> igh <b>P</b> ower <b>A</b> mplifier
<b>IBO</b>	<b>I</b> nput <b>B</b> ack <b>O</b> ff
<b>IES</b>	<b>I</b> nterférences <b>E</b> ntre <b>S</b> ymboles
<b>IDFT</b>	<b>I</b> nverse <b>D</b> iscrete <b>F</b> ourier <b>T</b> ransform
<b>IFFT</b>	<b>I</b> nverse <b>F</b> ast <b>F</b> ourier <b>T</b> ransform

---

<b>LO</b>	<b>Local Oscillator</b>
<b>LNA</b>	<b>Low Noise Amplifier</b>
<b>LPF</b>	<b>Low Pass Filter</b>
<b>MAQ</b>	<b>Modulation d'Amplitude en Quadrature</b>
<b>MC-CDMA</b>	<b>Multi-Carrier Code Division Multiple Access</b>
<b>MIMO</b>	<b>Multiple Input Multiple Output</b>
<b>MISO</b>	<b>Multiple Input Single Output</b>
<b>NU</b>	<b>Non Utilisées (pour les porteuses)</b>
<b>OBO</b>	<b>Output Back Off</b>
<b>OFDM</b>	<b>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</b>
<b>O-STBC</b>	<b>Orthogonal-Space Time Block Coding</b>
<b>PAPR</b>	<b>Peak to Average Power Ratio</b>
<b>PDF</b>	<b>Probability Density Function</b>
<b>PEP</b>	<b>Peak Envelop Power</b>
<b>PL</b>	<b>Programmation Linéaire</b>
<b>PMEPR</b>	<b>Peak to Mean Envelope Power Ratio</b>
<b>PR</b>	<b>Power Ratio</b>
<b>QPSK</b>	<b>Quadrature Phase Shift Keying</b>
<b>RC</b>	<b>Raised Cosine</b>
<b>RF</b>	<b>Radio Frequency</b>
<b>RSB</b>	<b>Rapport Signal sur Bruit</b>
<b>RIF</b>	<b>Filtre à réponse Impulsionnelle Finie</b>
<b>SISO</b>	<b>Single Input Single Output</b>
<b>SIMO</b>	<b>Single Input Multiple Output</b>
<b>SI</b>	<b>Side Information</b>
<b>SOCP</b>	<b>Second Order Cone Programming</b>
<b>SRRC</b>	<b>Square Root Raised Cosine</b>
<b>SSPA</b>	<b>Solid State Power Amplifier</b>
<b>STC</b>	<b>Space-Time Coding</b>
<b>STTC</b>	<b>Space-Time Trellis Coding</b>
<b>STBC</b>	<b>Space-Time Block Coding</b>
<b>SLM</b>	<b>SeLected Mapping</b>
<b>TEB</b>	<b>Taux d'Erreur Binaire</b>
<b>TR</b>	<b>Tone Reservation</b>
<b>TWTA</b>	<b>Travelling Wave Tube Amplifier</b>
<b>UMTS</b>	<b>Universal Mobile Telecommunications System</b>
<b>ULA</b>	<b>Uniform Linear Array</b>
<b>WLAN</b>	<b>Wireless Local Area Network</b>
<b>ZP</b>	<b>Zero Padding</b>

# Principales variables utilisées et notations mathématiques

## Variables utilisées

$B_m$	Étalement fréquentiel du signal
$B_c$	Largeur de bande de cohérence du canal
$B$	Bruit blanc additif gaussien
$D_s$	Débit symbole
$D_b$	Débit binaire
$d_n$	Séquence de bits d'information
$erf(\cdot)$	Fonction d'erreur
$erfc(\cdot)$	Fonction d'erreur complémentaire
$f_0$	Fréquence porteuse
$f_{d_{max}}$	Fréquence Doppler
$f_e$	Fréquence d'échantillonnage
$L$	Facteur de suréchantillonnage
$L_f$	Troncature du filtre de mise en forme en nombre de symboles
$m$	Nombre d'états de la modulation numérique
$N_e$	Nombre d'échantillons par temps symbole du filtre de mise en forme
$N$	Nombre total de sous-porteuses pour un signal OFDM
$N_s$	Nombre de symboles utilisés pour la simulation monoporteuse
$N_t$	Nombre d'antennes d'émission
$N_r$	Nombre d'antennes de réception
$N_p$	Nombre de trajets pour un canal à trajets multiples
$Pr(\cdot)$	Probabilité
$p(t)$	Filtre de mise en forme
$R$	Nombre de porteuses non utilisées dans un standard
$T$	Durée symbole
$T_c$	Temps de cohérence du canal
$T_m$	Étalement temporel maximal dans un canal à trajet multiples
$U$	Fonction d'échelon unité
$\sigma_b^2$	Variance du bruit blanc additif gaussien
$\sigma_c^2$	Variance des symboles $c_k$



**Notations mathématiques**

$x$	Scalaire
$x^*$	Conjugué de $x$
$\mathbf{x}$	Vecteur dans le domaine temporel
$\mathbf{X}$	Vecteur dans le domaine fréquentiel
$\mathbf{x}^T$	Vecteur transposé
$\bar{\mathbf{X}}$	Matrice
$E\{\mathbf{x}\}$	Espérance mathématique du vecteur aléatoire $\mathbf{x}$
$\odot$	Produit terme à terme de deux vecteurs de même taille
$ \mathbf{v} $	Module du vecteur $\mathbf{v}$
$\ \mathbf{v}\ $	Norme1 du vecteur $\mathbf{v}$
$\ \mathbf{v}\ _2$	Norme euclidienne du vecteur $\mathbf{v}$
$\ \mathbf{v}\ _\infty$	Norme infinie du vecteur $\mathbf{v}$
$\bar{\mathbf{I}}$	Matrice identité

# Introduction générale

Les premières études poussées concernant le facteur de crête d'un signal sont apparues de façon concomitante avec les standards de communications à base de modulations multipor-teuse (de type OFDM<sup>(1)</sup>), c'est à dire au début des années 90 [1, 2]. Ces standards, comme par exemple le Digital Audio Broadcasting (DAB) ou Hiperlan 2 ont en effet des formes d'onde à très fortes fluctuations d'amplitude, ce qu'il convient de contrôler au passage d'éléments non linéaires tels que l'amplificateur de puissance. Ce dernier joue en effet un rôle central dans la compréhension du problème : il s'avère que le rendement des amplifi-cateurs utilisés en pratique est d'autant plus faible (quelques pourcents) que l'on s'éloigne de la zone de saturation de l'amplificateur, là où justement la puissance de sortie et le rendement sont optimaux. Alors, pour éviter des phénomènes de saturation dus à de trop grandes fluctuations d'amplitude, un recul était habituellement pris de façon à amplifier le signal dans la zone linéaire de l'amplificateur, au détriment du rendement. Cette solution n'étant pas optimale, des recherches se sont alors peu à peu multipliées pour abaisser ces fluctuations d'amplitude afin de s'approcher au mieux de la saturation de l'amplificateur.

Ainsi, l'on a vu apparaître un nombre très important de travaux tendant dans un pre-mier temps à décrire mathématiquement ces fluctuations puis dans un second temps à proposer des solutions visant à résoudre ce qui est communément appelé aujourd'hui "le problème du PAPR<sup>(2)</sup>", le PAPR étant un paramètre qualifiant directement les fluctua-tions d'amplitude d'un signal. Il est défini comme le rapport de la puissance instantanée maximale et de la puissance moyenne du signal à analyser.

La description mathématique du PAPR est aujourd'hui bien claire dans le cas de l'OFDM : l'hypothèse gaussienne adoptée (du fait du théorème de la limite centrale) est d'autant mieux vérifiée que le nombre de porteuse est grand [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Ainsi, les approches statistiques aboutissant aux fonctions de répartition du PAPR (ou de façon équivalente à sa densité de probabilité) sont maintenant bien connues et donnent des ré-sultats très proches des simulations.

Pour ce qui concerne les méthodes de réduction du PAPR dans le cas de l'OFDM, il existe aujourd'hui un nombre incalculable de propositions : du codage [1, 9] au clipping [10] en passant par des méthodes inspirées de la compression du son [11] ou d'ajout de signal [12, 13], il est parfois difficile de se faire un idée claire sur le bien-fondé de certaines d'entre elles, tant les paramètres de qualification sont nombreux et parfois antagonistes.

---

<sup>(1)</sup>Orthogonal Frequency Division Multiplexing

<sup>(2)</sup>Peak to Average Power Ratio

Compte tenu du nombre très important de ces méthodes, le lecteur pourra se référer à [14] où une classification générale des méthodes de réduction du PAPR et de correction des non linéarité est proposée. En effet, agir sur un signal pour abaisser son PAPR se fait toujours au détriment d'un autre comme la complexité, l'augmentation de puissance moyenne, la dégradation du taux d'erreur binaire, la remontée des lobes secondaires ou encore la diminution du débit utile. Il semble cependant qu'aujourd'hui les méthodes à base d'ajout de signal soient regardées de plus en plus près du fait en particulier de leur forte capacité à réduire le PAPR, de la non dégradation du taux d'erreur binaire mais aussi du fait de la compatibilité descendante de la méthode, celle ci étant entièrement localisée à l'émetteur et le récepteur n'est pas modifié.

Ce qui est vrai sur le plan du PAPR pour les modulations multiporteuse ne l'est cependant pas dans le cas des modulations monoporteuse. D'une part, le PAPR est bien moindre, ce qui explique que partiquement aucune étude ne vise initialement à réduire le PAPR dans le cas des modulations monoporteuse, même si certaines d'entre elles sont complètement transparentes à la modulation (le clipping ou l'ajout de signal par exemple) et peuvent donc leur être appliquées directement. D'autre part, la description mathématique du PAPR est bien moins aisée [15], car le signal modulé ne peut bénéficier de l'hypothèse gaussienne hautement simplificatrice, comme cela est le cas en modulations multiporteuse.

Les études du PAPR vont maintenant au delà des modulations multiporteuse. Les systèmes de télécommunications allant en se diversifiant et se complexifiant, de nombreux travaux ont aujourd'hui pour objet l'étude du PAPR (à la fois en apportant des descriptions mathématiques et en proposant des méthodes de réduction) dans des contextes tels que la radio logicielle [16], les multistandards [17] ou les systèmes multi-antennes (ou MIMO<sup>(3)</sup>) [18]. Et c'est dans le contexte de ces derniers que ces travaux de thèse se situent. En effet, l'ajout d'une ou plusieurs antennes en émission va modifier la configuration du signal reçu (en comparaison du cas SISO<sup>(4)</sup>) et donc son PAPR. La présence d'un amplificateur non linéaire - le Low Noise Amplifier (LNA)- en réception impose alors de quantifier la valeur du PAPR. Cette approche constitue le fil directeur de ce travail qui a alors pour objectifs :

- de décrire le PAPR de proche en proche, de l'émission à la réception en prenant en compte l'influence des modifications du signal : filtrage de mise en forme, transposition RF, canal de propagation
- d'appliquer cette description aux contextes SISO puis MIMO, chacun d'entre eux étant décliné sous les aspects mono puis multiporteuse.
- de proposer des méthodes de réduction du PAPR à la réception.

L'articulation de ce travail est alors la suivante.

Le **chapitre 1** présente les éléments de communication numériques nécessaires à la bonne compréhension de ce document. Les principes des modulations mono puis multiporteuse sont rappelés ainsi que les modèles de canaux utilisés dans cette thèse (gaussien et de Rayleigh à évanouissements plats et à trajets multiples). Les contraintes liées à l'am-

---

<sup>(3)</sup>Multiple Input Multiple Output

<sup>(4)</sup>Single Input Single Output

plificateur de puissance sont ensuite exposées, en insistant sur la notion de rendement qui est directement liée à celle du PAPR.

Le **chapitre 2** a pour but d'évaluer le PAPR en réception dans un contexte SISO. La première partie du chapitre 2 se focalise sur la modulation monoporteuse. Après avoir donné une définition générale du PAPR (le PR<sup>(5)</sup>), l'influence du Codage Binaire à Symbole sur le PR (au point A de la figure 1, (a)) est exposée. Ensuite, une étude mathématique sur l'influence du filtre de mise en forme sur le PR est proposée (au point C de la figure 1, (a)). Dans cette étude, un filtre de mise en racine de Nyquist est considéré. L'objectif est alors de proposer une relation entre le PR après filtrage et les paramètres du filtre, c'est à dire essentiellement le facteur de roll off et sa longueur (troncature). Ensuite, l'influence de la transposition en fréquence est analysée. Il est montré que cette transposition augmente le PR d'au plus 3 dB. Enfin, le PR est évalué en réception, c'est à dire au point E de la figure 1, (a) en considérant un canal de Rayleigh à évanouissements plats. La seconde partie du chapitre 2 traite du contexte des modulations multiporteuse. Deux aspects sont abordés : l'influence du filtre de mise en forme (point C de la figure 1, (a)) puis l'influence du canal de propagation pour enfin d'évaluer le PR à la réception (point E de la figure 1, (a)). Des développements théoriques sont proposés dans le cas de canaux de Gauss puis de Rayleigh donnant des relations approchées des fonctions de répartition du PR. Les simulations confirment parfaitement ces développements théoriques.

Le **chapitre 3** a pour objectif d'évaluer le PR en réception d'un système MIMO. Ce chapitre débute par une présentation des systèmes MIMO en donnant les relations théoriques des capacités de transmission. La thèse se focalisant sur les systèmes MIMO codés (à base de codage espace-temps), une présentation est effectuée détaillant les différents codes de la littérature. Ensuite, après avoir donné une définition du PR pour un système MIMO, le PR est dans un premier temps analysé dans un contexte monoporteuse, c'est à dire aux points  $D_1$  à  $D_{N_t}$  de la figure 1, (b). Ensuite, l'influence du canal est analysée pour évaluer le PR en réception (point E de la figure 1, (b)). Dans ce cas, des canaux de Gauss et de Rayleigh sont considérés. Cette étude est ensuite transposée dans un contexte MIMO-multiporteuse avec l'analyse de l'influence du canal de propagation sur le PR et son évaluation en réception. Un code espace temps de type Alamouti est utilisé. Des développements théoriques permettent de confirmer parfaitement les simulations pour évaluer le PR en réception. Les canaux retenus sont des canaux de Gauss et de Rayleigh à évanouissements plats. Pour ce qui concerne le canal de Rayleigh à trajets multiples, des simulations sont proposées en fonction du nombre de trajets.

Les chapitres 2 et 3 étant focalisés sur l'évaluation de la fonction de répartition du PR en réception (de façon analytique ou par simulation), la suite du travail a été dédiée au développement de méthodes de réduction du PR de réception dans un contexte MIMO-OFDM. C'est l'objet du **chapitre 4**. Ce chapitre débute par un état de l'art des méthodes de réduction du PR dans des contextes MIMO-OFDM. Les méthodes inspirées du "Selected Mapping" ou du "Cross Antenna Rotation and Inversion" avec leurs différentes variantes sont détaillées. Cependant, l'inconvénient majeur de ces méthodes réside dans la transmission d'information extrinsèque (communément nommée Side Information pour

---

<sup>(5)</sup>Power Ratio

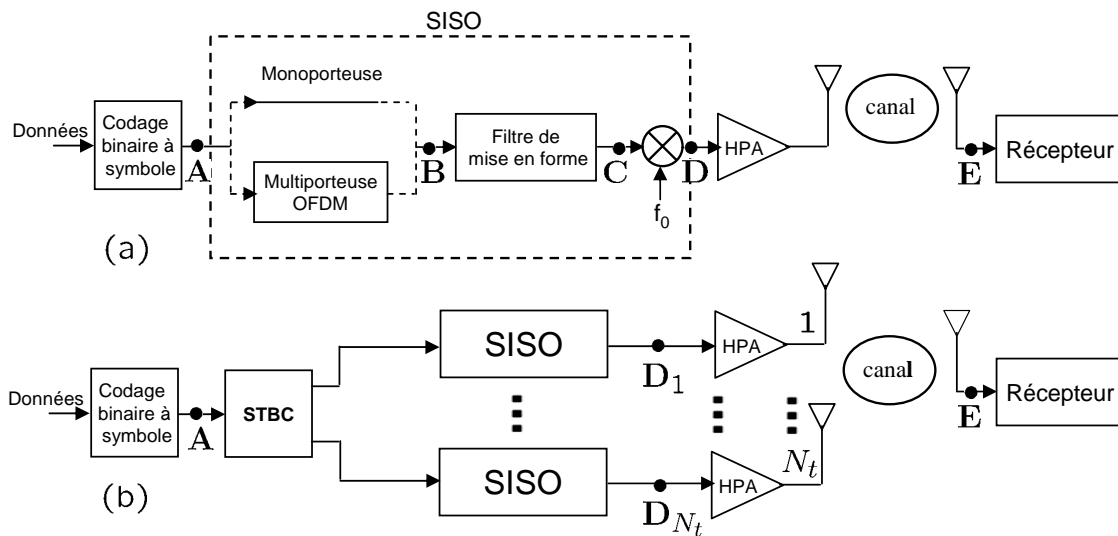


FIG. 1 – Les systèmes SISO et MIMO

SI) pour que le récepteur puisse tenir compte des modifications apportées par la méthode (située en émission) et afin de retrouver l'information utile. Cette transmission dégrade le débit utile et nécessite une modification du récepteur (même légère), ce qui ne peut être envisageable pour certaines applications. Nous nous sommes alors dans un premier temps focalisés sur une méthode ne nécessitant pas de transmission de SI et étant compatible avec la problématique imposée par les systèmes MIMO-OFDM. Nous avons alors étendu au cas MIMO la méthode dite de la Tone Reservation, classiquement développée pour les systèmes SISO. L'idée est d'insérer des porteuses de correction pour diminuer le PR tout en ne dégradant pas le taux d'erreur binaire. Ces porteuses ont été positionnées dans les bandes adjacentes des standards OFDM tout en respectant le masque d'émission. Ensuite, à la manière des porteuses pilotes dans le cas de l'OFDM, nous avons proposé (comme cela est actuellement le cas pour la future norme de télévision numérique DVT2) d'insérer des porteuses dédiées à la réduction du PR dans la bande utile, au détriment bien-sûr de l'efficacité spectrale. Des simulations sur des canaux de Rayleigh et de Gauss nous ont ensuite permis d'estimer les gains en terme de réduction du PR à la réception, cette méthode étant développée à l'émission.

Ensuite, nous avons tenu à proposer une méthode localisée entièrement à la réception afin de réduire le PR (de réception) pour tout type de signaux (mono et multiporteuse). Cette méthode s'inspire de la méthode dite de Jun et est ici développée en fréquence porteuse. L'idée est de générer un signal hors de la bande utile et dont les propriétés aboutissent à une réduction du PR global. Le fait que ce signal soit situé hors bande utile n'affecte pas le taux d'erreur binaire. Bien que développée dans un contexte multiporteuse, cette méthode peut être appliquée à tous types de signaux.

Enfin, le document se termine par une conclusion et les perspectives que l'ensemble de ce travail a identifié.

# Chapitre 1

## Éléments de communications numériques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Chaîne de transmission numérique</b>	<b>6</b>
<b>1.3</b>	<b>Codage de source et codage de canal</b>	<b>7</b>
<b>1.4</b>	<b>Codage binaire à symbole (CBS)</b>	<b>7</b>
<b>1.5</b>	<b>Codage symbole à signal (CSS)</b>	<b>8</b>
1.5.1	Filtre en racine de Nyquist	9
1.5.2	Filtre de Nyquist	10
<b>1.6</b>	<b>Transposition de fréquence et amplification</b>	<b>10</b>
<b>1.7</b>	<b>Canal, réception et démodulation</b>	<b>11</b>
<b>1.8</b>	<b>Décodage symbole à signal</b>	<b>12</b>
<b>1.9</b>	<b>Décodage binaire à symbole, décodage de canal et décodage de source</b>	<b>13</b>
<b>1.10</b>	<b>Canaux de transmission</b>	<b>14</b>
1.10.1	Canal à bruit blanc additif gaussien (BBAG)	14
1.10.2	Généralités sur le canal radio-mobile	14
<b>1.11</b>	<b>Notions de diversité</b>	<b>18</b>
1.11.1	Diversité temporelle	19
1.11.2	Diversité fréquentielle	19
1.11.3	Diversité de polarisation	20
1.11.4	Diversité spatiale	20
<b>1.12</b>	<b>Modulation multiporteuse de type OFDM</b>	<b>21</b>
1.12.1	Historique de l'OFDM	21
1.12.2	Principe de la modulation OFDM	23
1.12.3	Principe de la démodulation OFDM	24
1.12.4	Réalisation numérique des opérations de modulation et de démodulation	25
1.12.5	OFDM et non-linéarités	26
<b>1.13</b>	<b>Amplificateurs de puissance (HPA)</b>	<b>27</b>
1.13.1	Notion de rendement	28

1.13.2	Caractérisation de la non-linéarité d'amplitude et de la phase d'un amplificateur de puissance . . . . .	28
1.13.3	Les classes de fonctionnement . . . . .	31
<b>1.14</b>	<b>Amplificateurs faible bruit (LNA)</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>1.15</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>32</b>

## 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques généralités sur les communications numériques qui serviront à la bonne compréhension de la suite de ce manuscrit. Nous allons dans un premier temps décrire le fonctionnement d'une chaîne de transmission numérique, de la source d'information binaire au destinataire, par les étapes successives de codage, de modulation, d'amplification, de transmission dans un canal physique et de démodulation. Après avoir indiqué brièvement le fonctionnement d'une chaîne de transmission et le rôle des principaux éléments, nous introduirons le modèle classique du canal à bruit blanc additif gaussien. Ensuite, après avoir caractérisé les phénomènes de propagation de l'onde émise sur le canal radio-mobile, nous précisons le modèle équivalent des canaux à évanouissements que nous avons retenu. Nous ferons ensuite un inventaire rapide des techniques de diversité qui permettent de combattre les évanouissements et les distorsions provoquées par les canaux de transmission, amenant ainsi aux concepts des systèmes multi-antennes et de la technique de la modulation multiporteuse. Après un aperçu sur les modulations numériques en général, les modulations multiporteuse sont présentées, ainsi que leurs avantages sur les canaux sélectifs en fréquence. Cependant elles sont particulièrement sensibles aux non-linéarités des composants utilisés en pratique comme l'amplificateur de puissance. C'est pour cela que nous allons en donner les caractéristiques de gain, de rendement et de classe de fonctionnement.

## 1.2 Chaîne de transmission numérique

Les systèmes de transmission numérique véhiculent de l'information entre une source et un destinataire en utilisant un support physique comme le câble, la fibre optique ou encore, la propagation sur un canal radioélectrique. Les signaux transportés peuvent être soit directement d'origine numérique, comme dans les réseaux de données, soit d'origine analogique (parole, image...) mais convertis sous une forme numérique. Le principe du système de transmission est alors d'acheminer l'information de la source vers le destinataire avec le plus de fiabilité possible.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à une chaîne de transmission radio-fréquence (RF<sup>(1)</sup>) qui se compose de trois blocs principaux : l'émetteur, le canal de transmission et le récepteur. La figure 1.1 montre le schéma bloc d'une telle chaîne où les détails sont adaptés à notre étude : émetteur avec les codeurs de source et de canal, le codeur binaire à symbole (CBS), le codeur symbole à signal (CSS), la transposition de fréquence (mélangeur et oscillateur local (LO<sup>(2)</sup>) de fréquence  $f_0$ ), l'amplificateur de puissance (HPA<sup>(3)</sup>) et le

<sup>(1)</sup>Radio Frequency

<sup>(2)</sup>Local Oscillator

<sup>(3)</sup>High Power Amplifier

canal de transmission plus bruit  $b(t)$ . En réception, le signal reçu est amplifié par un amplificateur faible bruit (LNA<sup>(4)</sup>), démodulé et décodé.

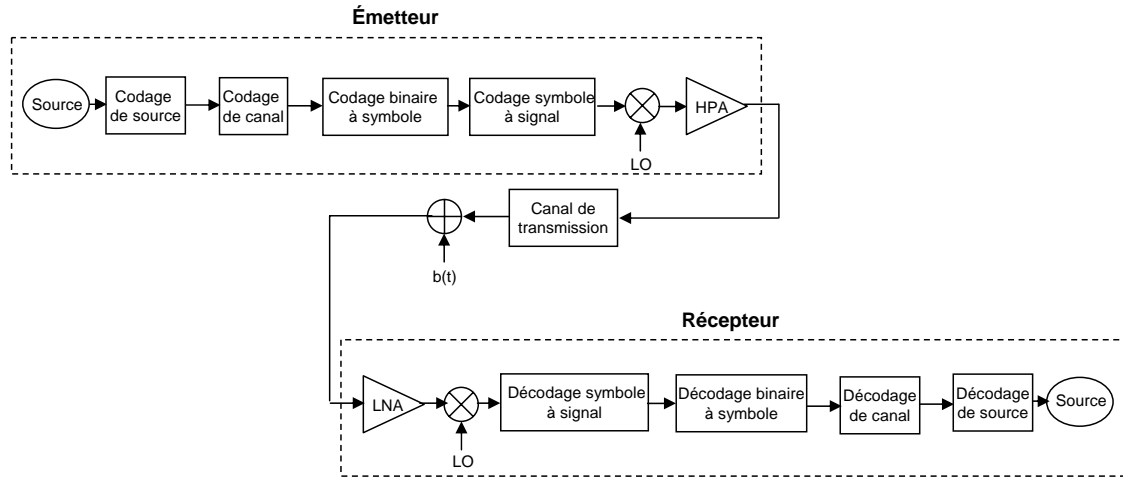


FIG. 1.1 – Schéma bloc d'une chaîne de transmission numérique

Plus de détails sur ces signaux et sur ces fonctions seront présentés dans le reste de ce chapitre.

### 1.3 Codage de source et codage de canal

Le but du codage de source est de représenter la source, qu'elle soit analogique ou numérique, avec un minimum de bits sans en diminuer la quantité d'information, c'est à dire de délivrer une source aussi proche que possible d'une source idéale. Cette séquence binaire en sortie du codeur de source est appelée séquence d'information. Notons que le code utilisé doit permettre d'effectuer l'opération inverse de décodage dans le récepteur. Cette séquence d'information est caractérisée par ce que l'on appelle le débit numérique  $D_b = 1/T_b \text{ bit/s}$  (où  $T_b$  est temps bit en s).

En pratique des erreurs peuvent se produire durant la communication, et elles sont principalement dues au bruit et aux interférences produites par le canal de transmission lui-même. Pour y remédier, on utilise un codage correcteur d'erreurs : des bits de redondance sont ajoutés aux informations numériques à transmettre, et ceux-ci permettent au récepteur de détecter et/ou corriger des erreurs. Ces codes ne sont pas abordés dans ce document, mais le lecteur intéressé peut se référer à [19].

### 1.4 Codage binaire à symbole (CBS)

Le codage binaire à symbole est l'étape qui associe les éléments binaires à des symboles, appelés symboles numériques. Le débit résultant  $D_s$  (débit symbole) est le nombre de symboles transmis par unité de temps. Il est mesuré en bauds et est égal au débit binaire

<sup>(4)</sup>Low Noise Amplifier



divisé par le nombre de bits représenté par chaque symbole ( $D_s = \frac{D_b}{\log_2 m}$  où  $m$  est le nombre d'états de la modulation).

La modulation la plus simple est la modulation d'amplitude à deux états. Chaque symbole  $c_k$  du signal discret correspond à un bit de donnée numérique à transmettre. Si on note "A" l'amplitude réelle du signal, les deux valeurs possibles pour  $c_k$  sont :

$$c_k \in \{-A, A\}. \quad (1.1)$$

Ces deux valeurs correspondent respectivement à 0 et 1. Il est également possible de coder plus de bits dans un même symbole, en définissant plus de valeurs possibles. Par exemple pour coder deux bits dans un seul symbole, on peut utiliser une modulation d'amplitude à 4 états :

$$c_k \in \{-3A, -A, A, 3A\}. \quad (1.2)$$

Par extension, on peut construire une modulation d'amplitude à  $2^n$  états, où chaque symbole code donc  $n$  bits.

Les symboles  $c_k$  peuvent être complexes, et il est donc envisageable de coder l'information dans la phase des symboles. Certaines applications nécessitent en effet un signal avec un module constant. Si on appelle  $m$  le nombre d'états, l'ensemble des symboles possibles est :

$$c_k \in \{Ae^{(2k+1)\frac{\pi}{m} + \varphi_0}, k = 0 \dots m-1\}, \quad (1.3)$$

où  $\varphi_0$  est la phase du premier symbole et  $m$  est une valeur de la forme  $2^n$ . Ainsi chaque symbole  $c_k$  code  $n$  bits et on note MDPm une modulation de phase à  $m$  états (mPSK<sup>(5)</sup>).

Enfin, il est possible de coder de l'information à la fois dans les parties réelles et imaginaires du symbole  $c_k$ . Cette technique est appelée modulation d'amplitude en quadrature, et est notée MAQm (mQAM<sup>(6)</sup>). Les MAQ les plus courantes utilisent le même codage sur les deux parties réelles et imaginaires. Dans ce cas  $m$  est de la forme  $2^{2n}$ , et chaque symbole code  $2n$  bits :  $n$  bits dans la partie réelle, et  $n$  dans la partie imaginaire. Par exemple la modulation MAQ16 utilise deux modulations d'amplitude à 4 états :

$$c_k = a_k + ib_k, \quad a_k, b_k \in \{-3A, -A, A, 3A\}. \quad (1.4)$$

Un codage binaire peut se représenter de manière graphique, appelée constellation, dont chaque point correspond à un symbole  $c_k$ , à côté duquel on indique éventuellement la donnée numérique que le symbole code. Par exemple les constellations des codages MDP8 et MAQ16 peuvent être représentées de la forme illustrée sur la figure 1.2, dans le cadre d'un codage de Gray [20].

## 1.5 Codage symbole à signal (CSS)

Le canal de transmission étant un milieu continu, avant de pouvoir y transmettre les symboles  $c_k$  il faut obtenir un signal continu par interpolation. Les symboles sont cadencés par une horloge à la fréquence  $\frac{1}{T}$ , où  $T$  est la durée d'un symbole. Le CSS associe à chaque symbole une forme d'onde particulière. Cet étage comprend généralement des opérations

<sup>(5)</sup>m Phase Shift Keying

<sup>(6)</sup>m Quadrature Amplitude Modulation

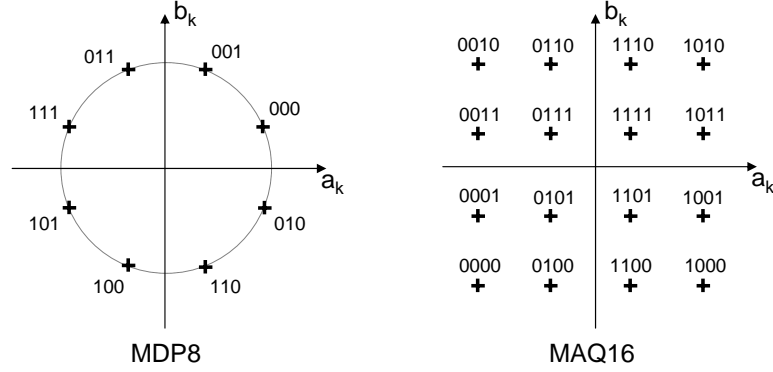


FIG. 1.2 – Exemples de constellations

d'adaptation du rythme d'échantillonnage, de filtrage et de conversion numérique analogique (CNA). La forme d'onde la plus naturelle serait la fonction porte de largeur  $T$  puisqu'elle n'engendre aucune superposition des symboles et ne nécessite pas de dispositif complexe de synchronisation des instants d'échantillonnage. La contrepartie de ce type de fonction aux variations brutales réside dans son grand encombrement spectral. En fait, il s'agit de trouver des formes d'onde permettant de limiter la largeur de bande tout en vérifiant le critère de Nyquist [21] (forme d'onde pouvant s'étaler sur plusieurs  $T$  pourvu qu'elle soit nulle aux instants d'échantillonnage, afin d'éviter les interférences entre symboles IES<sup>(7)</sup>) (voir annexe A). Ce choix doit tenir compte de la complexité de réalisation mais aussi de la sensibilité à l'instant d'échantillonnage. Une fonction assez souple répondant à ces critères, et en conséquence souvent utilisée, est la fonction en cosinus surélevé. Remarquons que le critère de Nyquist doit être respecté sur l'ensemble de la chaîne et c'est pourquoi on utilise généralement deux filtres en racine de Nyquist, un pour l'émission et un pour la réception. L'utilisation de certaines techniques telles que les modulations multiporteuses nécessitent des traitements supplémentaires avant le CNA.

Dans ce chapitre nous présentons les fonctions de transfert et les réponses impulsionnelles associées au filtre en racine de Nyquist et au filtre de Nyquist.

### 1.5.1 Filtre en racine de Nyquist

La fonction de transfert d'un filtre en racine de Nyquist est définie par :

$$P(|f|) = \begin{cases} T & \text{si } 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ T \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sin \left( \pi \frac{T}{\beta} \left( |f| - \frac{1}{2T} \right) \right) \right)} & \text{si } \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{si } \frac{1+\beta}{2T} \leq |f| \leq 1, \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $\beta$  est appelé facteur de roll-off, compris entre 0 et 1.

<sup>(7)</sup>IES : Interférences Entre Symboles

La réponse impulsionnelle associée est :

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \beta + 4\frac{\beta}{\pi} & \text{si } t = 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left[ \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\beta}\right) + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4\beta}\right) \right] & \text{si } t = \pm \frac{T}{4\beta} \\ \frac{\sin(\pi(1-\beta)\frac{t}{T}) + 4\beta\frac{t}{T} \cos(\pi(1+\beta)\frac{t}{T})}{\pi\frac{t}{T}(1-(4\beta\frac{t}{T})^2)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.6)$$

### 1.5.2 Filtre de Nyquist

La fonction de transfert d'un filtre de Nyquist est définie par :

$$P(|f|) = \begin{cases} T & \text{si } 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left( 1 + \cos\left(\pi\frac{T}{\beta}\left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right) \right) & \text{si } \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{si } \frac{1+\beta}{2T} \leq |f| \leq 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

La réponse impulsionnelle associée est :

$$p(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t) \cos(\frac{\pi\beta}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t \left( 1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2} \right)} \quad \forall t. \quad (1.8)$$

## 1.6 Transposition de fréquence et amplification

La transposition de fréquence est nécessaire dans le cas d'une transmission radio. En effet, un canal radio est caractérisé par une bande de fréquences précise, et afin de ne pas perturber les communications sur les autres canaux radio, il faut s'assurer que la transmission n'utilise que cette bande de fréquence. La largeur de cette bande  $\Delta f$  est souvent faible devant sa fréquence centrale  $f_0$ , et ainsi le signal qui y est propagé est dit à bande étroite. Le signal provenant du codeur symbole à signal (CSS) est quant à lui un signal en bande de base. La modulation, ou transposition de fréquence, consiste donc à décaler la fréquence centrale du signal pour respecter les caractéristiques imposées par le canal. La figure 1.3 montre la forme des densités spectrales de puissance (DSP<sup>(8)</sup>) du signal avant et après transposition de fréquence.

Parmi les opérations classiques de transposition à la fréquence  $f_0$ , la modulation d'amplitude est la plus simple. Pour cela le signal à moduler est multiplié par un signal sinusoïdal appelé porteuse. Le signal obtenu est le signal d'origine dont le spectre est décalé autour de la fréquence de la porteuse, et a pour largeur de bande celle du signal en bande de base. Si on appelle  $a(t)$  le signal à moduler et  $f_0$  la fréquence de la porteuse, le signal modulé  $u(t)$  est :

$$u(t) = a(t) \sin(2\pi f_0 t). \quad (1.9)$$

Il est possible de créer deux porteuses orthogonales à la même fréquence en les déphasant de  $\frac{\pi}{2}$ . Cette méthode s'appelle modulation en quadrature, et permet alors de moduler deux signaux  $u_I(t)$  et  $u_Q(t)$  avec chacune de ces porteuses et ainsi doubler la quantité d'information transmise dans la même bande de fréquence (figure 1.4). Comme on va le voir dans la section suivante, l'orthogonalité des porteuses assure que les deux signaux seront séparables à la réception. Dans ce cas,

$$u(t) = u_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - u_Q(t) \sin(2\pi f_0 t). \quad (1.10)$$

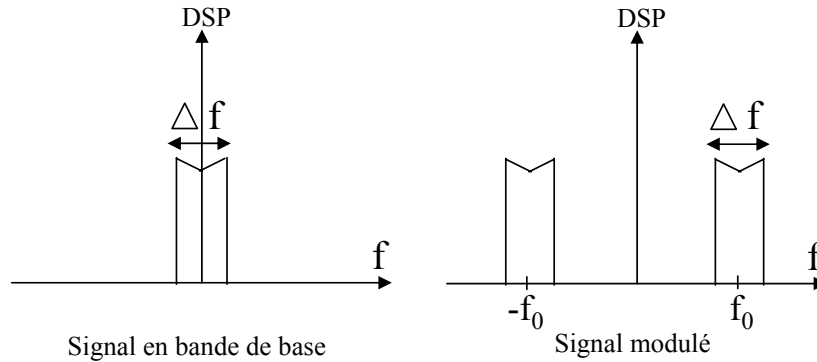


FIG. 1.3 – Spectres de signaux avant et après transposition de fréquence

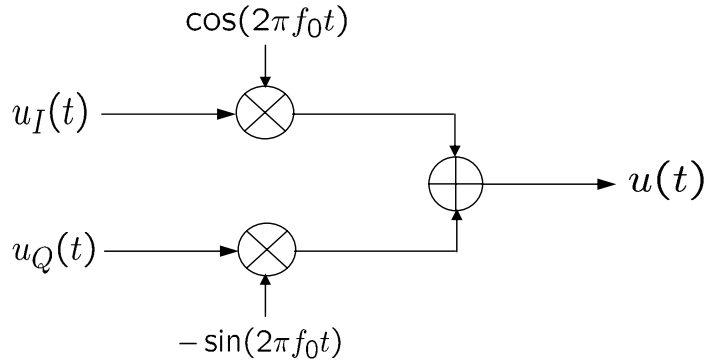


FIG. 1.4 – Schéma de réalisation d'un modulateur en quadrature

Un amplificateur est enfin nécessaire pour augmenter la puissance du signal afin que son niveau soit suffisant à la réception, compensant ainsi les pertes en espace libre. Dans le cas d'un canal radio, l'amplificateur est relié à une antenne qui rayonne et crée ainsi le signal radio. Dans le cas d'un canal filaire l'amplificateur est relié au câble. Plus de détails sur l'amplificateur sont donnés dans la partie 1.13.

## 1.7 Canal, réception et démodulation

Le canal de propagation perturbe le signal, en le déformant et en y ajoutant du bruit. Ces deux aspects seront abordés dans la partie 1.10, nous supposons dans un premier temps que le canal est sans bruit. Le récepteur recueille le signal transmis, par l'intermédiaire d'une antenne pour un canal radio ou directement depuis le câble pour une transmission filaire. Une fois le signal ré-amplifié par un amplificateur faible bruit (partie 1.14), il est nécessaire de le démoduler, c'est-à-dire de faire une nouvelle transposition de fréquence afin d'obtenir un signal en bande de base.

<sup>(8)</sup>PSD : Power Spectral Density

Si l'on connaît la fréquence de la porteuse  $f_0$ , une démodulation que l'on appelle cohérente permet de retrouver le signal d'origine. Pour cela le signal reçu  $u(t)$  est à nouveau multiplié par une sinusoïde à la fréquence porteuse  $f_0$  et le signal obtenu  $s(t)$  est alors la somme de deux signaux : le signal en bande de base qui contient l'information, et un second signal modulé à la fréquence  $2f_0$ . En réalisant un filtrage passe-bas le signal en bande de base  $a(t)$  peut être isolé :

$$s(t) = u(t) \sin(2\pi f_0 t) = a(t) \sin^2(2\pi f_0 t) = \frac{a(t)}{2} - a(t) \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2}. \quad (1.11)$$

Cette démodulation s'applique dans le cas d'une modulation classique, c'est à dire avec une seule porteuse. Dans le cas d'une modulation en quadrature, les deux signaux  $u_I(t)$  et  $u_Q(t)$  peuvent être retrouvés au niveau du récepteur en réalisant deux démodulations, avec deux porteuses déphasées également de  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{aligned} s_I(t) &= u(t) \cos(2\pi f_0 t) = u_I(t) \cos^2(2\pi f_0 t) - u_Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \frac{u_I(t)}{2} + u_I(t) \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2} - u_Q(t) \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{2} \\ s_Q(t) &= -u(t) \sin(2\pi f_0 t) = -u_I(t) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) + u_Q(t) \sin^2(2\pi f_0 t) \\ &= \frac{u_Q(t)}{2} - u_Q(t) \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2} - u_I(t) \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Au moyen d'un filtre passe-bas les deux signaux en bande de base sont isolés (figure 1.5).

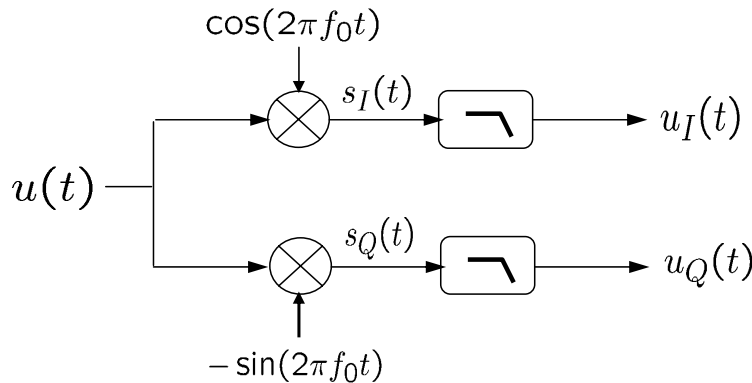


FIG. 1.5 – Schéma de réalisation d'un démodulateur en quadrature

## 1.8 Décodage symbole à signal

Comme nous l'avons évoqué dans partie 1.5, le décodeur symbole à signal est constitué, en plus des opérations duales des étages présents dans l'émission, d'étages de récupération de rythme d'échantillonnage, d'estimation des distorsions subies lors de la transmission, de filtrage (filtre adapté à la forme d'onde, égalisation ...).

## 1.9 Décodage binaire à symbole, décodage de canal et décodage de source

L'étape suivante consiste à déterminer les bits correspondant au symbole reçu ( $d_k$ ) après le décodage symbole à signal. Ce symbole peut être différent du symbole qui avait été envoyé ( $c_k$ ) à cause de perturbations introduites par le canal. La détection par maximum de vraisemblance est le critère optimal permettant de déterminer le symbole qui a été envoyé avec la plus grande probabilité. Pour cela on sélectionne le point de la constellation le plus proche du symbole reçu, et les bits qui sont associés à ce point de la constellation sont les bits qui ont été émis avec la plus grande vraisemblance. Le plan complexe est ainsi partitionné en zones de décision, chacune correspondant à un symbole de la constellation, et donc à un ensemble de bits particulier. Sur une constellation particulière, on peut représenter les limites de ces zones par des traits pointillés (on suppose que tous les symboles sont équiprobables) (figure 1.6).

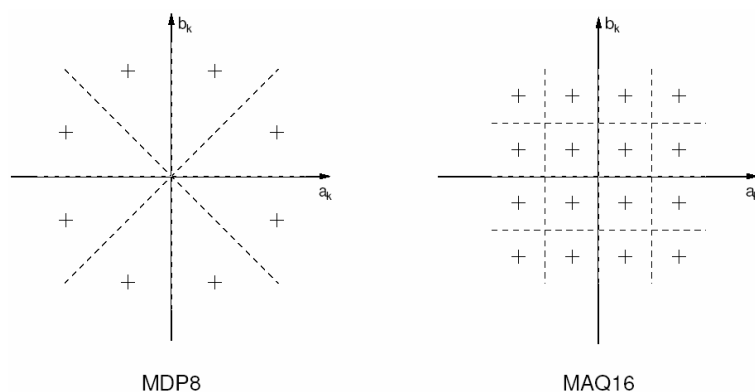


FIG. 1.6 – Frontières des zones de décision sur les constellations MDP8 et MAQ16

Le signal décidé, sous forme binaire, sera décodé grâce au décodeur canal. Ce décodeur est associé au codeur canal qui a été utilisé dans l'émetteur pour ajouter de la redondance aux informations transmises. Cette redondance est utilisée par le décodeur canal pour détecter des erreurs dans le flux binaire et éventuellement les corriger. Dans le cas d'un système FEC<sup>(9)</sup> les erreurs sont corrigées directement par le décodeur, et dans le cas d'un système ARQ<sup>(10)</sup> les erreurs sont seulement détectées et le système demande à l'émetteur de transmettre à nouveau les informations. Le message numérique résultant est finalement passé à travers le décodeur de source rendant ainsi un signal compatible avec son traitement par le destinataire.

<sup>(9)</sup>Forward Error Correction

<sup>(10)</sup>Automatic Repeat reQuest

## 1.10 Canaux de transmission

### 1.10.1 Canal à bruit blanc additif gaussien (BBAG)

Le modèle de canal le plus fréquemment utilisé pour la simulation de transmissions numériques, qui est aussi un des plus faciles à générer et à analyser, est le canal à bruit blanc additif gaussien (BBAG) (figure 1.7). Ce bruit modélise à la fois les bruits d'origine interne (bruit thermique dû aux imperfections des équipements...) et le bruit d'origine externe (bruit d'antenne...). Ce modèle est toutefois plutôt associé à une transmission filaire, puisqu'il représente une transmission quasi-parfaite de l'émetteur au récepteur. Le signal reçu s'écrit alors sous la forme :

$$y(t) = x(t) + b(t), \quad (1.13)$$

où  $b$  représente le BBAG, caractérisé par un processus aléatoire gaussien de moyenne nulle, de variance  $\sigma_b^2$  et de densité spectrale de puissance bilatérale  $\frac{N_0}{2}$ . La densité de probabilité conditionnelle de  $y$  est donnée par l'expression :

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_b^2}}. \quad (1.14)$$

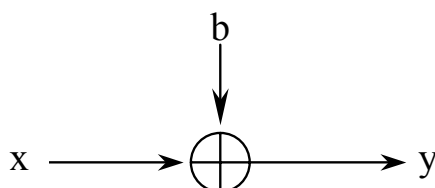


FIG. 1.7 – Représentation d'un canal à BBAG

**Le rapport signal sur bruit (RSB)** Lorsqu'il s'agit d'un bruit  $b(t)$  qui s'ajoute au signal étudié  $x(t)$ , le rapport signal sur bruit est le rapport de la puissance moyenne du signal  $y(t)$  et de la puissance moyenne du bruit  $b(t)$ .

Ce rapport caractérise la performance du récepteur. Plus, il est grand, moins le bruit perturbe le signal et les analyses qui en sont faites.

### 1.10.2 Généralités sur le canal radio-mobile

Afin d'assurer la couverture d'une zone géographique par un système radio-mobile, on utilise des antennes d'émission et de réception peu directives. Ainsi le signal émis se propage dans plusieurs directions et parvient au récepteur en empruntant des chemins différents, grâce aux réflexions sur les obstacles. Ce phénomène de propagation multi-trajets garantit la couverture d'une zone, mais engendre des difficultés au niveau du récepteur.

En effet, le signal reçu sur un canal radio-mobile résulte de la superposition de plusieurs répliques du signal émis caractérisées par des amplitudes, des phases et des angles d'arrivée

différents. Ceci se traduit par des variations de l'amplitude et de la phase du signal reçu, appelées évanouissements multi-trajets [22]. On distingue alors deux types d'évanouissements dont les origines et les manifestations sont différentes : les évanouissements à grande échelle et les évanouissements à petite échelle.

Les évanouissements à grande échelle se manifestent par l'atténuation de la puissance moyenne du signal reçu occasionnée lorsque l'émetteur et le récepteur sont séparés par une grande distance. Ce phénomène résulte des contours saillants du terrain (forêts, collines, groupe d'immeubles...) situés entre l'émetteur et le récepteur. Des analyses statistiques sur les évanouissements à grande échelle ont permis de caractériser l'atténuation moyenne en fonction de la distance. La distribution de l'atténuation est de type log-normale.

L'évanouissement à petite échelle se traduit par des modifications de l'amplitude et de la phase du signal dues à des petits changements (de l'ordre d'une demie longueur d'onde) du chemin parcouru par les signaux entre l'émetteur et le récepteur. Les trajets multiples provoquent un étalement temporel du signal reçu. D'un autre côté, en raison du déplacement de l'émetteur, du récepteur ou des obstacles, l'environnement de propagation de l'onde émise change, ce qui se traduit par des variations temporelles de l'amplitude et de la phase du signal reçu. Si le nombre de trajets est important, en vertu du théorème de la limite centrale, l'amplitude du signal reçu est une variable de Rice en présence d'un trajet direct. S'il n'existe pas de trajet direct, c'est une variable de Rayleigh. Nous allons restreindre au cas dit de Rayleigh.

Trois mécanismes de base interviennent lors de la propagation d'un signal sur un canal radio-mobile (figure 1.8) :

- la réflexion : lorsqu'une onde électromagnétique se heurte à une surface lisse dont les dimensions sont grandes devant la longueur d'onde du signal,
- la diffusion : lorsque l'onde entre en collision avec une surface irrégulière ou encore une surface dont les dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde. L'énergie réfléchie est diffusée dans toutes les directions,
- la diffraction : lorsque le trajet de l'onde entre l'émetteur et le récepteur est obstrué par un corps volumineux de dimensions grandes devant la longueur d'onde, causant la formation d'ondes secondaires derrière l'objet.

### 1.10.2.1 Analyse des évanouissements à petite échelle

Nous avons vu que, dans le cas d'un système radio-mobile utilisant des antennes peu directives, le récepteur reçoit plusieurs répliques du signal émis, caractérisées par des instants d'arrivée et des atténuations différentes, dépendant du chemin suivi. D'autre part, les déplacements de l'émetteur, du récepteur ou des obstacles provoquent une modification de la réponse impulsionnelle du canal, liée à l'effet Doppler. Nous allons maintenant caractériser ces différents phénomènes.

#### Caractérisation de l'étalement temporel

Le récepteur radio-mobile dispose de plusieurs répliques du signal émis, issues de trajets différents et retardés les uns par rapport aux autres. Le temps séparant l'arrivée du premier trajet de l'arrivée du dernier, noté  $T_m$  est appelé étalement temporel maximal. Pour caractériser la dispersion temporelle du canal, on utilise la notion de bande de cohérence du canal, notée  $B_c$ , définie comme la gamme de fréquences sur laquelle les amplitudes



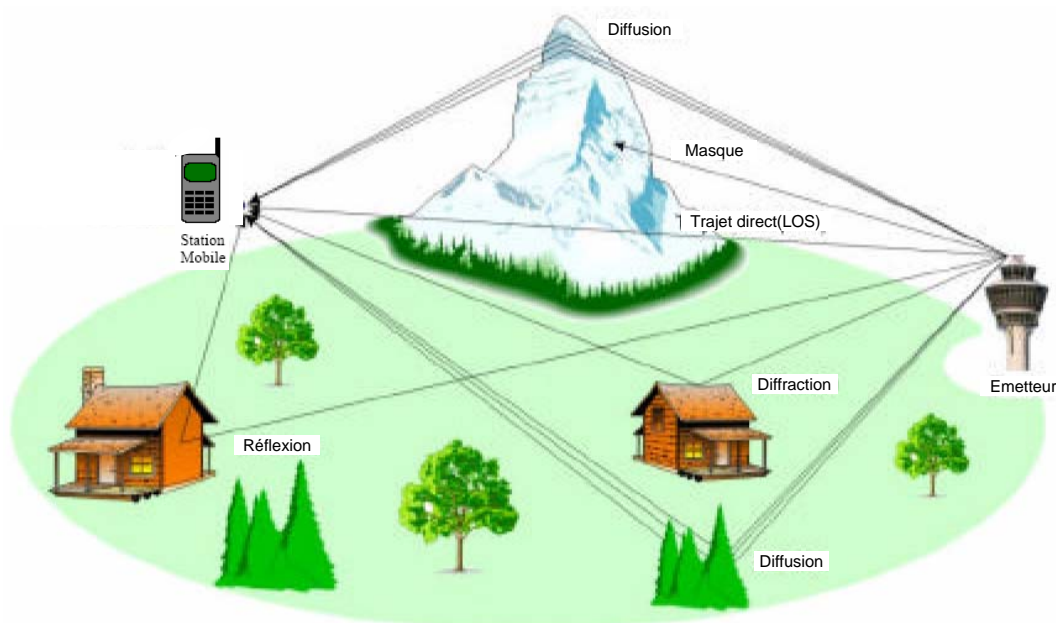


FIG. 1.8 – Illustration du phénomène de trajets multiples sur le canal radio-mobile

des différentes composantes fréquentielles du signal ont une forte corrélation, i.e subissent des atténuations semblables [22]. La bande de cohérence du canal est du même ordre de grandeur que l'inverse de l'étalement temporel maximal :  $B_c \sim 1/T_m$ .

Notons  $T$  la durée symbole du signal et  $W$  la bande de fréquences occupée par le signal. Si  $W$  est très inférieure à la bande de cohérence du canal  $B_c$  (ou  $T \gg T_m$ ), alors toutes les composantes fréquentielles du signal subissent des atténuations semblables : le canal est dit non sélectif en fréquence (phénomène de *flat fading*). Dans le cas contraire, ceci se traduit par la présence d'IES. En pratique, on cherche à rendre  $W \ll B_c$  afin d'éviter ce phénomène d'IES.

### Evolution temporelle du canal : effet Doppler

Lors du déplacement du mobile ou des obstacles, on observe une modulation de la fréquence porteuse de l'onde émise : c'est l'effet Doppler. L'excursion de fréquence maximale est égale à  $2f_{d_{max}}$ , où  $f_{d_{max}}$  est la fréquence Doppler, fonction à la fois de la longueur d'onde émise et de la vitesse de déplacement du mobile :

$$f_{d_{max}} = \frac{v}{\lambda}. \quad (1.15)$$

L'effet doppler se manifeste par la variation de la fréquence instantanée de l'onde sur chacun des trajets. Si  $\theta_i$  est l'angle d'arrivée du trajet, la variation de fréquence vaut  $f_{d_{max}} \cos(\theta_i)$ .

Ce phénomène provoque des fluctuations de l'amplitude et de la phase du signal reçu au cours du temps. Ces fluctuations sont généralement définies pour un coefficient de corrélation donné. Pour caractériser cette non-stationnarité, on définit le temps de cohérence

$T_c$  comme la durée pendant laquelle le canal ne varie pas ou alors très peu.  $f_{d_{max}}$  et  $1/T_c$  sont du même ordre de grandeur :  $f_{d_{max}} \sim 1/T_c$ .

Lorsque la durée d'un symbole est très inférieure au temps de cohérence du canal, le signal reçu ne varie pas ou alors très peu sur la durée d'un symbole, on parle d'évanouissements de Rayleigh lents (*slow fading*). Dans le cas contraire, on parle de *fast fading*.

En résumé, pour garantir la non sélectivité en fréquence (absence d'interférence entre symboles) et assurer la stationnarité du signal reçu d'un symbole  $T$ , il faut choisir  $T$  de telle sorte que :

$$T_m \ll T \ll T_c. \quad (1.16)$$

### Modèle de canal à trajets multiples

Nous considérons que le canal subit des évanouissements lents, c'est-à-dire que la durée d'un symbole est très inférieure au temps de cohérence du canal, et que le signal reçu ne varie donc pas ou très peu sur la durée d'un symbole. En tenant compte du bruit blanc additif gaussien, le signal équivalent en bande de base reçu à la sortie de ce canal à évanouissements lents comportant  $N_p$  trajets multiples s'exprime alors :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N_p-1} \alpha_n s(t - \tau_n) + b(t), \quad (1.17)$$

où le bruit BBAG complexe est représenté par  $b(t)$ , et  $\alpha_n$  et  $\tau_n$  caractérisent respectivement l'atténuation complexe et le retard affectant chaque trajet.

Dans le cas où le nombre  $N_p$  de trajets est important, ces trajets peuvent être regroupés en  $L_p$  paquets d'indice  $l$ , la valeur moyenne des  $N_l$  retards est notée  $\tau_l$ . Dans l'hypothèse où les trajets secondaires sont caractérisés par des atténuations indépendantes et identiquement distribuées  $\alpha_l$ , si  $N_l$  est suffisamment élevé, en vertu du théorème de la limite centrale, le groupe des  $N_l$  trajets secondaires est équivalent à un seul trajet principal. Ce trajet est caractérisé par l'atténuation complexe  $\alpha_l$  et le retard  $\tau_l$ . Le module de  $\alpha_l$  est une variable aléatoire de Rayleigh (figure 1.9) et sa phase suit une loi uniforme sur  $[0, 2\pi]$ . Pour rappel, la fonction densité de probabilité d'une variable de Rayleigh est donnée par :

$$Pr(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \quad x \geq 0, \quad (1.18)$$

où  $\sigma$  est le paramètre de Rayleigh (la valeur la plus probable). La moyenne et la variance de la variable sont respectivement données par  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$  et  $(2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2$ .

En pratique, cette hypothèse est généralement vérifiée et le signal reçu s'écrit alors sous la forme suivante :

$$y(t) = \sum_{l=0}^{L_p-1} \alpha_l s(t - \tau_l) + b(t). \quad (1.19)$$

A la sortie de l'échantillonneur, l'observation donne :

$$y_k = \sum_{l=0}^{L_p-1} \alpha_l s_{k-\tau_l} + b_k. \quad (1.20)$$

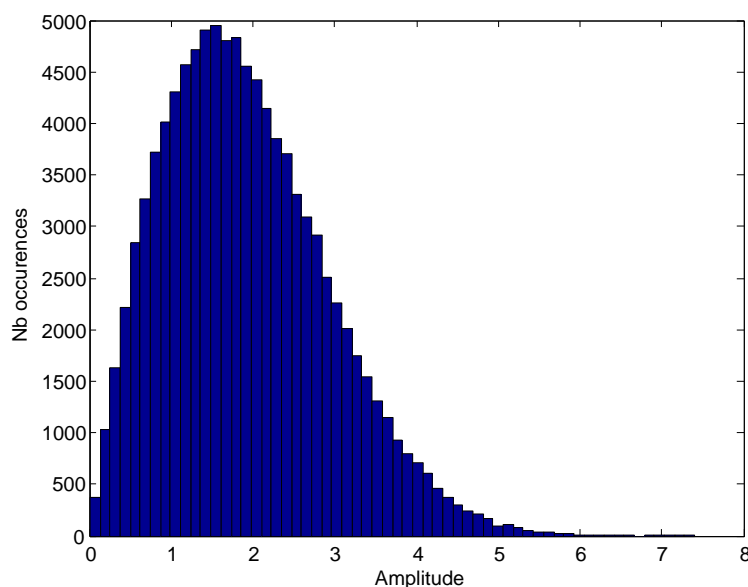


FIG. 1.9 – Distribution du module d’une variable gaussienne complexe (Rayleigh) de variance unitaire (100.000 valeurs générées).

### 1.10.2.2 Méthodes pour combattre les distorsions

Nous avons vu que les trajets multiples combinés au déplacement de l’émetteur, du récepteur et des obstacles engendrent un étalement temporel et des variations temporelles de l’amplitudes et de la phase du signal reçu. Les techniques utilisées pour combattre ces phénomènes dépendent de l’origine des distorsions : canal sélectif en fréquence ou non stationnarité du signal reçu. Ces techniques, énumérées ci-dessous, sont en général combinées.

- Canal sélectif en fréquence :
  - égalisation
  - étalement de spectre à séquence directe ou à saut de fréquence
  - multiplexage fréquentiel (à base de modulation OFDM<sup>(11)</sup>)
  - diversité fréquentielle
- Non stationnarité du signal reçu :
  - codage correcteur d’erreur et entrelacement
  - égalisation et synchronisation adaptative
  - diversité temporelle

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous focaliser sur deux d’entre elles : la diversité spatiale (MIMO) et le multiplexage fréquentiel (modulation OFDM).

## 1.11 Notions de diversité

La diversité est utilisée dans les systèmes de transmission pour combattre l’évanouissement à petite échelle causé par les trajets multiples. En effet, si plusieurs répliques de l’informa-

<sup>(11)</sup>Orthogonal Frequency Division Multiplexing

tion sont reçues par des liaisons dont les évanouissements respectifs sont indépendants les uns des autres, il y a une très forte probabilité pour que l'une de ces liaisons au moins ne subisse pas de fortes atténuations augmentant ainsi la fiabilité de la liaison. La diversité se révèle donc être un outil très puissant pour combattre les évanouissements et les interférences entre canaux de transmission, et permet notamment d'augmenter la capacité et la couverture des systèmes radios. Les trois formes de diversité traditionnellement exploitées en communications numériques sont la diversité temporelle, la diversité fréquentielle et la diversité spatiale [23].

### 1.11.1 Diversité temporelle

La diversité temporelle est utilisée pour combattre les évanouissements sélectifs en temps, et consiste à émettre plusieurs répliques du signal (ou des versions redondantes) dans des intervalles temporels séparés d'au moins le temps de cohérence du canal  $T_c$  (figure 1.10). Ce type de diversité est obtenu par l'utilisation conjointe d'un entrelaceur et d'un code correcteur d'erreur, ou encore par demande de répétition automatique. Le principal désavantage de ce procédé est bien sûr le retard induit par la diversité, et la baisse de débit utile.

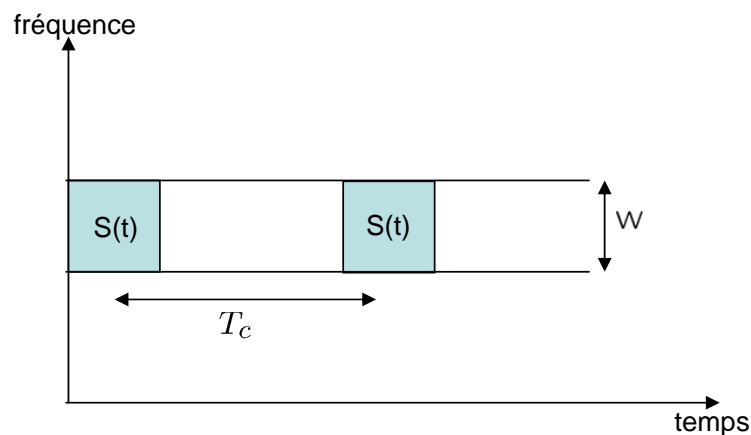


FIG. 1.10 – Le même signal est transmis sur plusieurs intervalles temporels

### 1.11.2 Diversité fréquentielle

La diversité fréquentielle est efficace lorsque les évanouissements du canal sont sélectifs en fréquence, et revient à émettre le même signal (ou des versions redondantes) sur plusieurs fréquences porteuses, dont l'écartement fréquentiel est d'au moins la bande de cohérence du canal  $B_c$  (figure 1.11). La diversité fréquentielle peut par exemple être exploitée par l'utilisation d'une modulation multiporteuse que nous allons présenter dans la partie 1.12. Les techniques d'étalement de spectre sont parfois considérées comme une façon de réaliser de la diversité fréquentielle. Ces techniques utilisent une séquence pseudo-aléatoire pour élargir le spectre du signal, autorisant ainsi une bonne résistance aux perturbations de

transmission. Elles ont d'ailleurs été initialement développées pour des applications militaires. L'étalement de spectre par séquence directe [24, 25, 26] et l'étalement par sauts de fréquence [27, 28] sont les plus répandus.

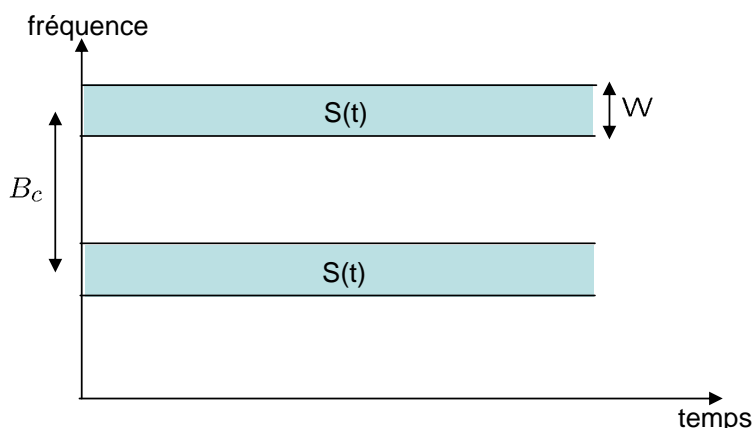


FIG. 1.11 – Le même signal est transmis sur plusieurs intervalles fréquentiels

### 1.11.3 Diversité de polarisation

Nous parlons de diversité de polarisation quand le même signal est émis et reçu simultanément sur des ondes polarisées orthogonalement et dont les caractéristiques de propagation sont indépendantes. Contrairement à la diversité spatiale, il n'y a pas de contrainte sur l'écartement relatif des antennes, et une diversité d'ordre 2 peut ainsi être facilement obtenue en utilisant une paire d'antennes de polarisations orthogonales [29, 30].

### 1.11.4 Diversité spatiale

Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement à la diversité spatiale, ou diversité d'antenne. Elle consiste à émettre ou recevoir l'information par plusieurs antennes, séparées dans l'espace d'au moins la distance de cohérence, qui correspond à la séparation minimale des antennes garantissant des évanouissements indépendants et dépend donc de l'angle de départ et/ou d'arrivée des multi-trajets. Cette distance de cohérence peut varier très largement selon le type et l'emplacement de l'antenne considérée. Des mesures empiriques ont montré une forte corrélation entre la hauteur de l'antenne d'une station de base et la distance de cohérence [31]. De grandes antennes imposent ainsi une grande distance de cohérence. Du côté du mobile, en revanche, généralement plus bas en altitude et donc soumis à de nombreux échos, la distance de cohérence reste raisonnable. D'une manière générale, une séparation de  $0.4\lambda$  à  $0.6\lambda$  semble adéquate pour le mobile, alors que pour une station de base, elle peut atteindre plus de  $10\lambda$ .

La diversité spatiale en réception, c'est-à-dire l'emploi d'antennes multiples du côté du récepteur uniquement est un sujet déjà bien présent dans la littérature [32], et est notamment à l'origine des techniques de combinaison des répliques abordées ci-dessous. L'observation issue de capteurs étant par ailleurs un mélange de signaux inconnus, la multiplicité des antennes réceptrices permet aussi la séparation de sources [33]. En revanche,

la diversité d'émission est un domaine de recherche en pleine évolution depuis quelques années. L'idée de base est d'envoyer l'information après un traitement spécifique à chaque antenne afin que le récepteur puisse combiner ces signaux pour obtenir de la diversité. Le premier système utilisant la diversité d'émission fut proposé par Wittneben en 1991 [34], puis amélioré en 1993. La diversité d'émission est en fait une diversité de modulation, les symboles subissant un préfiltrage à réponse impulsionnelle finie (RIF<sup>(12)</sup>) orthogonal introduisant de l'IES, avant leur émission sur les antennes. Le récepteur est alors confronté à un canal équivalent sélectif en fréquence avec des évanouissements indépendants. Cette idée fut reprise dans [35] sous le nom de diversité de retard, et est l'expression la plus simple des récents codes espace-temps.

La tendance actuelle est d'associer plusieurs antennes à la fois à l'émission et la réception, formant ainsi des systèmes multi-antennaires plus connus sous le nom de MIMO<sup>(13)</sup> [36], et qui permettent d'atteindre de hauts degrés de diversité. Ces systèmes, étudiés plus en détail dans le chapitre 3, réduisent clairement les fluctuations du signal et éliminent les évanouissements du canal.

## 1.12 Modulation multiporteuse de type OFDM

Nous avons vu qu'il existe plusieurs techniques pour combattre la distorsion provoquée par le canal sélectif en fréquence, parmi lesquelles les techniques multiporteuse. Dans cette partie, nous nous intéressons à une modulation multiporteuse particulière, le multiplex à division de fréquences orthogonales (OFDM), mais avant nous présentons un bref historique de ce type de modulation.

### 1.12.1 Historique de l'OFDM

La technique de transmission multiporteuse a été introduite dans les années 60. A cette époque, l'idée de transmettre un débit important sur plusieurs porteuses modulées à des débits moindres est apparue pour des applications de type HF<sup>(14)</sup>. On doit les premières réalisations à Bello [37] et à Zimmerman [38]. Le débit total était alors de 4800 *bits/s* pour une bande passante de 3kHz. Ce débit était réparti sur 34 porteuses espacées de 82 Hz. Déjà l'idée d'insérer un intervalle de garde était présente afin de limiter les interférences causées en partie par l'ionosphère. Ce modem portait le nom de KATHRYN. Par ailleurs, en 1957, Doelz et al. [39] et plus tard, en 1961, Franco et al. [40] l'utilisèrent pour des transmissions entre terminaux.

Cependant un des inconvénients majeurs était alors la complexité des équipements d'émission et de réception. Pour preuve, en 1970, Kaye et Georges [41] proposèrent une architecture optimale de récepteur en parallélisant les données à émettre. Une série d'égaliseurs, de lignes à retards et de filtres adaptés étaient alors nécessaires pour minimiser l'interférence entre symboles. A cette complexité du récepteur venait s'ajouter celle de l'émetteur.

C'est en 1971 que Weinstein et Ebert [42] utilisèrent pour la première fois la DFT<sup>(15)</sup> afin de générer autant de signaux orthogonaux qu'il y avait de porteuses, ce qui réduisit

---

<sup>(12)</sup>FIR : Finite Impulse Response

<sup>(13)</sup>Multi-Input Multi-Output

<sup>(14)</sup>High Frequency

<sup>(15)</sup>Discrete Fourier Transform

considérablement la complexité des systèmes. Des intervalles de garde étaient insérés entre les symboles afin de diminuer au mieux les interférences entre symboles. Ils ont par ailleurs montré qu'avec un codage différentiel des données, il était possible de s'affranchir d'une égalisation coûteuse en complexité au niveau de la partie réception. La modulation OFDM était née.

En 1980, Hirosaki [43], [44] proposa, toujours en utilisant la DFT, un récepteur à maximum de vraisemblance pour des porteuses modulées en phase et en amplitude (modulation MAQ). Il montra que la complexité était moindre que celle d'un système équivalent monoporteuse. Cette méthode fut appliquée en 1984 pour la réalisation d'un modem opérant à 256 kbits/s dans la bande 60-180 kHz [45].

En 1985, Cimini [46] eut l'idée d'insérer des porteuses dites " pilotes " afin d'estimer la réponse fréquentielle du canal. Ces porteuses étaient insérées et espacées régulièrement dans le spectre du signal OFDM.

Deux ans plus tard, Ruiz et Cioffi [47] élargissent la notion de Weinstein et Ebert en proposant un schéma d'émission et de réception utilisant respectivement la IDFT<sup>(16)</sup> et la DFT afin de moduler et de démoduler le signal. Ils jetèrent ainsi les bases de la notion de signal fréquentiel et temporel pour une modulation multiporteuse [48].

Vers la fin des années 80, le CCETT (Centre Commun d'Etudes de Télécommunications et Télédiffusion) est créé à Rennes et propose un système de transmission de type OFDM dans lequel une technique de multiplexage à division de fréquences orthogonales était associée à un codage combinant un code convolutif et un entrelacement [49, 50, 51, 52, 53]. Ainsi, les informations erronées véhiculées par les porteuses subissant des atténuations (dues aux échos destructifs du canal de transmission) seront corrigées grâce à celles transmises par les porteuses affectées par des échos constructifs. De ce fait, le système fut appelé COFDM, le "C" faisant référence au codage utilisé [54]. Cette technique novatrice a été validée pour la radiodiffusion numérique DAB<sup>(17)</sup>. Elle permet la diffusion d'un débit de 1.5 Mbits/s dans une largeur de bande de 1.5 MHz vers des terminaux fixes ou mobiles [55, 56, 57, 58]. Ainsi, dès Octobre 1988 au CCETT, les premières expériences concluantes de diffusion DAB faisant intervenir une telle technicité ont été menées. Ajoutons que ce procédé a été aussi adopté pour la diffusion terrestre de la télévision numérique (DVB-T) [54, 59, 60, 61, 62].

Parallèlement, dans les années 90, une technique mise au point par la société Bellcore en 1989 définit un système de transmission numérique permettant de fournir de nouveaux services interactifs à hauts débits sur le réseau téléphonique commuté classique (paire de cuivre torsadée), tout en autorisant le fonctionnement simultané du téléphone. C'est la technologie ADSL<sup>(18)</sup>. Elle est basée sur une modulation multiporteuse appelée DMT<sup>(19)</sup>, semblable à l'OFDM [63, 64]. Cette technique permet aujourd'hui de transmettre (en plus du signal téléphonique) un débit de plus de 100Mbits/s.

Entre 1999 et 2001, on voit apparaître les standards pour les WLAN's<sup>(20)</sup>, comme IEEE 802.11a/g nommé Wi-Fi [65] et ETSI HiperLAN II, qui adoptaient la modulation multiporteuse OFDM comme spécification principale de leur couche physique.

---

<sup>(16)</sup>Inverse Discrete Fourier Transform

<sup>(17)</sup>Digital Audio Broadcasting

<sup>(18)</sup>Asymmetric Digital Subscriber Line

<sup>(19)</sup>Discrete Multi-Tone

<sup>(20)</sup>Wireless Local Area Network's

En 2005 une amélioration de la technologie Wi-Fi se présente d'abord sur le marché des États Unis et ensuite en Europe. Le standard, appartenant toujours à la famille du Wi-Fi est le IEEE 802.16 et plus connu sous le nom du Wi-Max [66]. Ce système garantit un débit théorique jusqu'à 80 Mbps et une portée maximale de 50 km. Un an plus tard, un autre standard se présente sur la scène du Wi-Fi : le 802.11n. Il permet à la technologie Wi-Fi d'atteindre des débits théoriques entre 100 et 540 Mbps, en ajoutant l'utilisation de la technique « MIMO », et d'améliorer aussi la portée des réseaux sans fil. Début 2006, le procédé de modulation OFDM a été adopté par l'alliance WiMedia [67] pour les communications à très haut débit (480 Mbps) et à courte portée (10 m), basées sur la technologie « Ultra Wide Band ». Ces améliorations du système Wi-Fi représentent donc les nouvelles applications des réseaux « WLAN » pour tout ce qui est accès à internet via « hot spots », par exemple.

### 1.12.2 Principe de la modulation OFDM

Les modulations multiporteuse comme l'OFDM consistent à répartir les symboles sur un grand nombre de porteuses à bas débit, à l'opposé des systèmes conventionnels qui transmettent les symboles en série, chaque symbole occupant alors toute la bande passante disponible.

Pour répartir les données à transmettre sur les  $N$  porteuses, les symboles  $c_k$  sont groupés par paquets de  $N$ . Les symboles  $c_k$  ( $c_k = a_k + jb_k$ ) sont des nombres complexes définis à partir des éléments binaires par des constellations souvent de type MAQ à 4, 16, 64,  $2^n$  états.

La séquence de  $N$  symboles  $c_0, c_1, \dots, c_{N-1}$  constitue un symbole OFDM. Le  $k^{\text{ième}}$  symboles module un signal de fréquence  $f_k$ . Le signal résultant s'écrit sous forme complexe :  $c_k e^{2j\pi f_k t}$ .

L'enveloppe complexe du signal  $s(t) = s_I(t) + js_Q(t)$  correspondant à l'ensemble des  $N$  symboles réassemblés en un symbole OFDM (figure 1.12) :

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2j\pi f_k t}, \quad t \in [0, T]. \quad (1.21)$$

où  $T$  est la durée du symbole OFDM.

Les fréquences sont dites orthogonales si l'espace entre deux fréquences adjacentes  $f_k$  et  $f_{k+1}$  est  $\frac{1}{T}$ . Cette orthogonalité se justifie mathématiquement en considérant le produit scalaire usuel dans l'espace vectoriel défini par la base des exponentielles complexes de la figure 1.12. En effet, chaque porteuse modulant un symbole pendant une fenêtre rectangulaire temporelle de durée  $T$ , son spectre en fréquence est un sinus cardinal, fonction qui s'annule tous les multiples de  $\frac{1}{T}$  (figure 1.13). Dans ce cas,

$$f_k = f_0 + \frac{k}{T}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (1.22)$$

où  $f_0$  représente la première fréquence de la bande du signal.

Ainsi, lorsque l'échantillonnage est effectué précisément à la fréquence  $f_k$  d'une sous-porteuse, il n'y a aucune interférence avec les autres sous-porteuses. C'est ce qui permet de recouvrir les spectres des différentes porteuses et d'obtenir ainsi une occupation optimale du spectre.



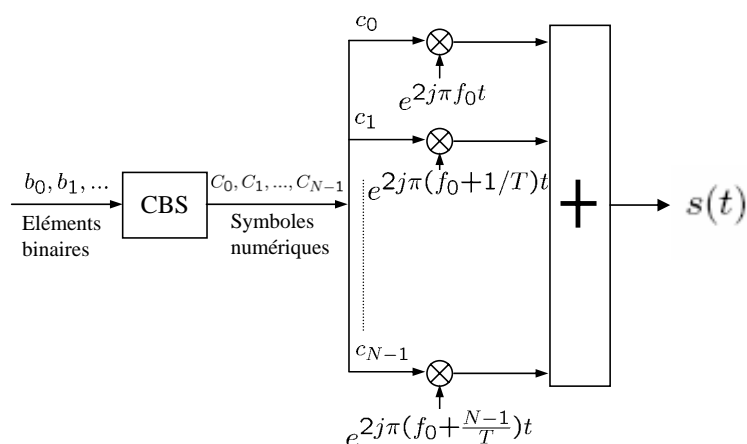


FIG. 1.12 – Schéma de principe du modulateur OFDM

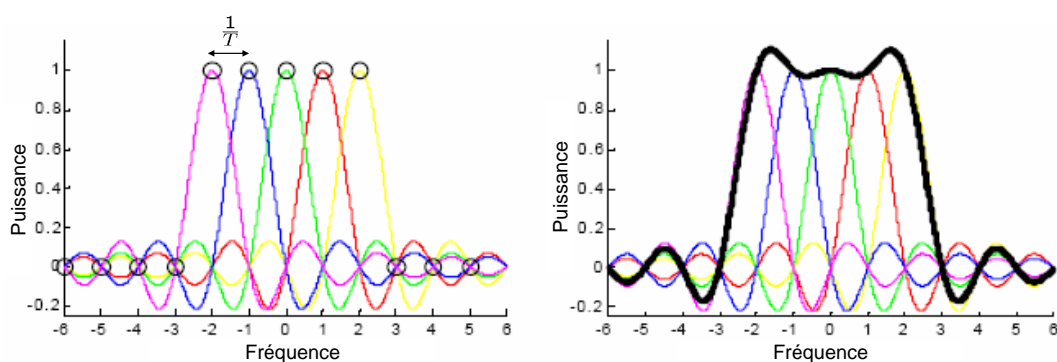


FIG. 1.13 – Allure de l'ensemble des spectres des porteuses d'un symbole OFDM

### 1.12.3 Principe de la démodulation OFDM

L'expression en bande de base du signal parvenu au récepteur s'écrit sur une durée symbole  $T$  :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H_k(t) e^{2j\pi(f_0 + \frac{k}{T})t}, \quad (1.23)$$

où  $H_k(t)$  est la fonction de transfert du canal autour de la fréquence  $f_k$  et à l'instant  $t$ . Cette fonction varie lentement et on la suppose constante sur la période  $T$ . La démodulation classique consiste à démoduler le signal suivant les  $N$  sous-porteuses suivant le schéma classique représenté sur la figure 1.14.

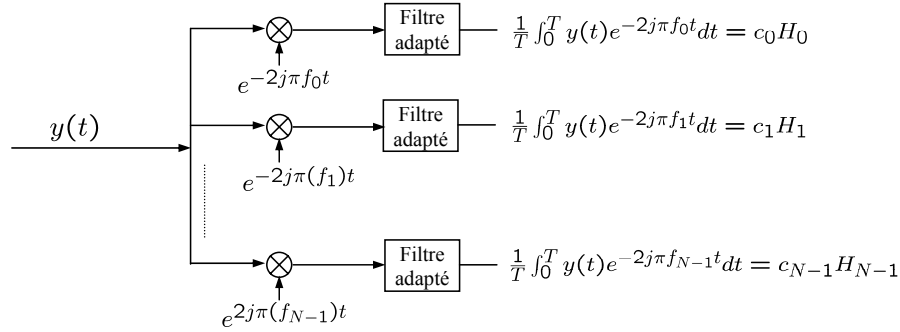


FIG. 1.14 – Schéma de principe du démodulateur OFDM (sans bruit)

### 1.12.4 Réalisation numérique des opérations de modulation et de démodulation

Dans les communications à haut débit, les débits sont limités par des contraintes physiques : le bruit dû aux imperfections des systèmes et la nature physique des composants affectent la transmission du signal émis. On réduit dans ce cas les erreurs de transmission en numérisant les informations. De plus l'implantation numérique offre aussi l'opportunité d'ajouter des codes correcteurs d'erreurs afin de protéger le signal des perturbations engendrées par le canal de transmission.

Cependant, la réalisation pratique de la modulation OFDM de façon directe (avec des oscillateurs et des mélangeurs) implique un circuit d'une complexité prohibitive. Heureusement, il est possible de réaliser respectivement le modulateur et le démodulateur par des Transformées de Fourier Discrète Inverse et Directe (IDFT et DFT, via l'algorithme de l'IFFT<sup>(21)</sup> et FFT<sup>(22)</sup>, si  $N$  est une puissance de 2). La complexité de ces opérations est de l'ordre de  $N \log_2 N$  par symbole OFDM.

#### 1.12.4.1 Implantation numérique du modulateur

D'après (1.21),  $s(t)$  est sous la forme :

$$s(t) = e^{2j\pi f_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2j\pi \frac{kt}{T}}. \quad (1.24)$$

En discrétisant ce signal (à une fréquence d'échantillonnage de Nyquist) et en le ramenant en bande de base pour l'étude numérique on obtient une sortie  $s(n)$  sous la forme :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2j\pi \frac{kn}{N}}. \quad (1.25)$$

Les  $s(n)$  sont donc obtenus par une Transformée de Fourier Inverse Discrète des  $c_k$ . En choisissant le nombre de porteuses  $N$  tel que  $N = 2^n$  (où  $n$  est un nombre entier), le

<sup>(21)</sup>Inverse Fast Fourier Transform

<sup>(22)</sup>Fast Fourier Transform

calcul de la Transformée de Fourier Inverse se simplifie et peut se réaliser avec une simple IFFT nous conduisant au schéma numérique présenté sur la figure 1.15 :

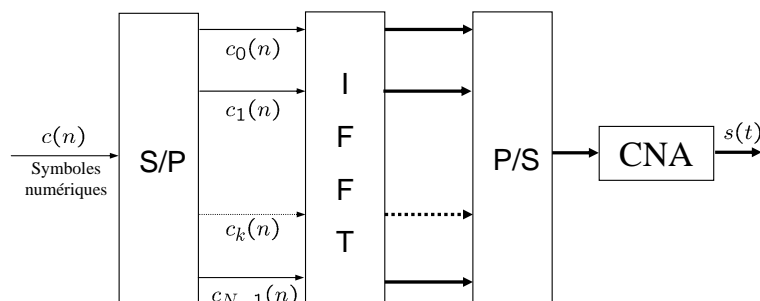


FIG. 1.15 – Modulateur OFDM numérique

#### 1.12.4.2 Implantation numérique du démodulateur

L'analyse théorique définit le signal discrétisé reçu au niveau du démodulateur sous la forme :

$$z(t_n) = z\left(\frac{nT}{N}\right) = z_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H_k e^{2j\pi \frac{kn}{N}}, \quad (1.26)$$

où  $z_n$  est la Transformée de Fourier Discrète Inverse de  $c_k H_k$ . La démodulation consiste donc à effectuer une Transformée de Fourier Directe Discrète de  $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_{N-1}]$ . Le nombre de porteuses ayant été choisi tel que  $N = 2^n$ , on peut réaliser ce calcul à l'aide d'une FFT. On obtient alors le schéma de principe illustré dans la figure 1.16 :

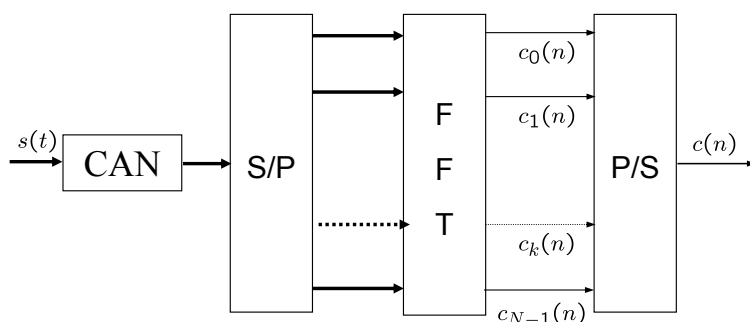


FIG. 1.16 – Démodulateur OFDM numérique

#### 1.12.5 OFDM et non-linéarités

Par construction, le signal OFDM temporel est la somme de  $N$  porteuses modulées. D'après le théorème de la limite centrale, si  $N$  tend vers l'infini, la distribution des valeurs prises par le signal OFDM temporel tend vers une variable aléatoire normale complexe.

Dans le cas des modulations monoporteuse, une telle sommation de porteuses n'intervient pas. Ainsi, si l'on compare les amplitudes instantanées de signaux mono et multiporteuse, on constate des différences importantes. Le signal multiporteuse a une dynamique plus grande, et on peut remarquer la présence de "pics" d'amplitude importante, contrairement au signal monoporteuse. Sur la figure 1.17, le signal du haut est un signal de type OFDM, et le signal du bas est un signal de type monoporteuse après filtrage de mise en forme. La description mathématique de la distribution des amplitudes d'un signal monoporteuse filtré reste aujourd'hui non résolue.

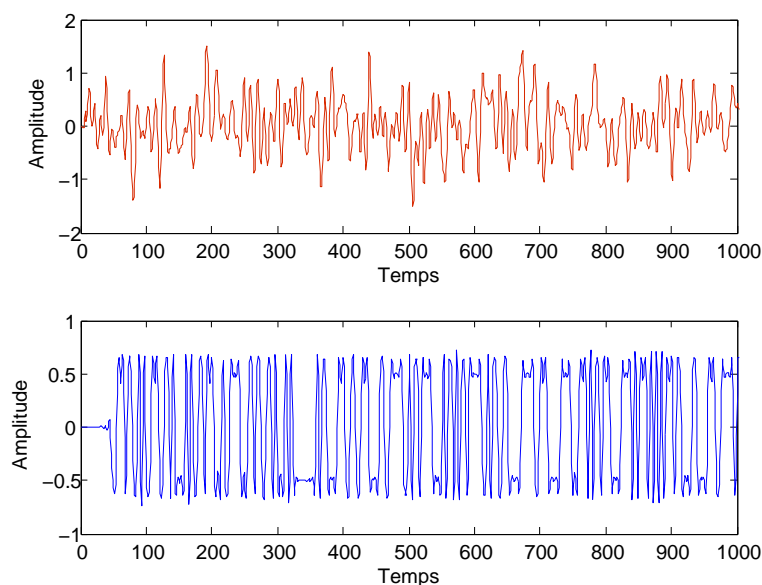


FIG. 1.17 – Signaux multiporteuse (haut) et monoporteuse (bas)

On peut quantifier cette caractéristique avec une grandeur appelée PR (Power Ratio), qui est le rapport entre la puissance maximale et la puissance moyenne d'un signal temporel. Si un signal non nul  $s(t)$  et de moyenne nulle est défini sur  $[0, T]$ , son PR sur cet intervalle est alors égal à :

$$\text{PR} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |s(t)|^2}{\frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt}. \quad (1.27)$$

Un PR élevé signifie que le signal possède une puissance maximale importante devant sa puissance moyenne, et donc que certaines valeurs prises par ce signal sont importantes par rapport aux valeurs moyennes. Autrement dit ceci signifie que des pics d'amplitude importante sont présents. Le PR sera analysé tout au long de cette thèse dans les chapitres suivants et ceci dans différents contextes.

### 1.13 Amplificateurs de puissance (HPA)

Pour assurer correctement l'acheminement des informations, les émetteurs ont besoin d'amplificateurs de puissance pour fournir une certaine puissance aux signaux (radio-fréquence)

et éviter qu'ils ne s'affaiblissent fortement lors de leur propagation dans l'espace libre [68]. L'amplificateur puise alors la puissance nécessaire utile au signal dans une source de courant continue qu'il injecte ensuite dans le signal.

D'une manière générale, deux types d'amplificateurs de puissance sont utilisés dans les systèmes de communications [69], [70] :

- l'amplificateur à tubes à ondes progressives (TWTA<sup>(23)</sup>) plus utilisé par exemple dans les transmissions satellites pour transmettre de fortes puissances [71].
- l'amplificateur à l'état solide (SSPA<sup>(24)</sup>) utilisé dans les transmissions radio terrestres pour transmettre de faibles puissances. C'est le cas par exemple du téléphone mobile [72].

### 1.13.1 Notion de rendement

La figure 1.18 illustre un bilan simplifié des différentes puissances mises en jeu lors de l'amplification d'un signal. Comme il est impossible d'avoir un transfert total de l'énergie vers le signal, la notion de rendement est alors à définir.

Le bilan de puissance est donné par la relation (1.28) :

$$P_e + P_{dc} = P_s + P_{diss}. \quad (1.28)$$

Les puissances d'entrée  $P_e$  et d'alimentation  $P_{dc}$  sont converties en puissance de sortie  $P_s$  et en perte (puissance dissipée)  $P_{diss}$ .

Deux notions de rendement sont en général définies dans la littérature [73] :

- Le rendement en puissance : il exprime le rapport entre la puissance de sortie et la puissance fournie par l'alimentation. Ce paramètre est d'autant important qu'il rend compte de la consommation de l'amplificateur. Il est donné par la relation ci-dessous :

$$\eta = \frac{P_s}{P_{dc}}. \quad (1.29)$$

- Le rendement en puissance ajoutée : il prend en compte la puissance d'entrée. Tout comme le rendement en puissance, il rend compte de la consommation de l'amplificateur. Il est donné par la relation ci-dessous :

$$\eta = \frac{P_s - P_e}{P_{dc}}. \quad (1.30)$$

### 1.13.2 Caractérisation de la non-linéarité d'amplitude et de la phase d'un amplificateur de puissance

La relation entrée-sortie, appelée aussi la caractéristique de transfert, a une allure typique pour tous les amplificateurs de puissance à l'état solide [74]. Les parties (a) et (b) de la Figure 1.19 (tirée de [75]) relatent la variation de la puissance de sortie en fonction de la puissance d'entrée, appelée aussi la caractéristique Amplitude/Amplitude ou encore la compression AM/AM. La partie (c) de cette figure présente le gain en puissance de l'amplificateur en fonction de la puissance d'entrée. Les caractéristiques se divisent en trois zones :

<sup>(23)</sup> Travelling Wave Tube Amplifier

<sup>(24)</sup> Solid State Power Amplifier

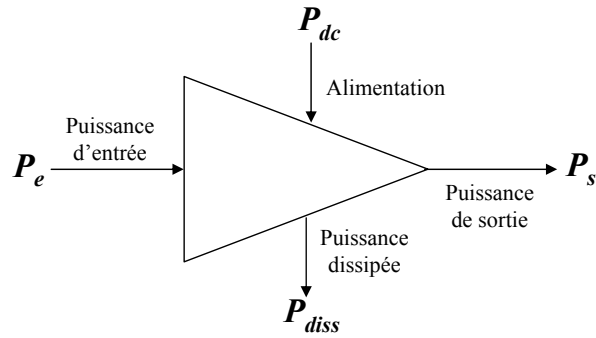


FIG. 1.18 – Bilan simplifié des différentes puissances mises en jeu dans un amplificateur de puissance

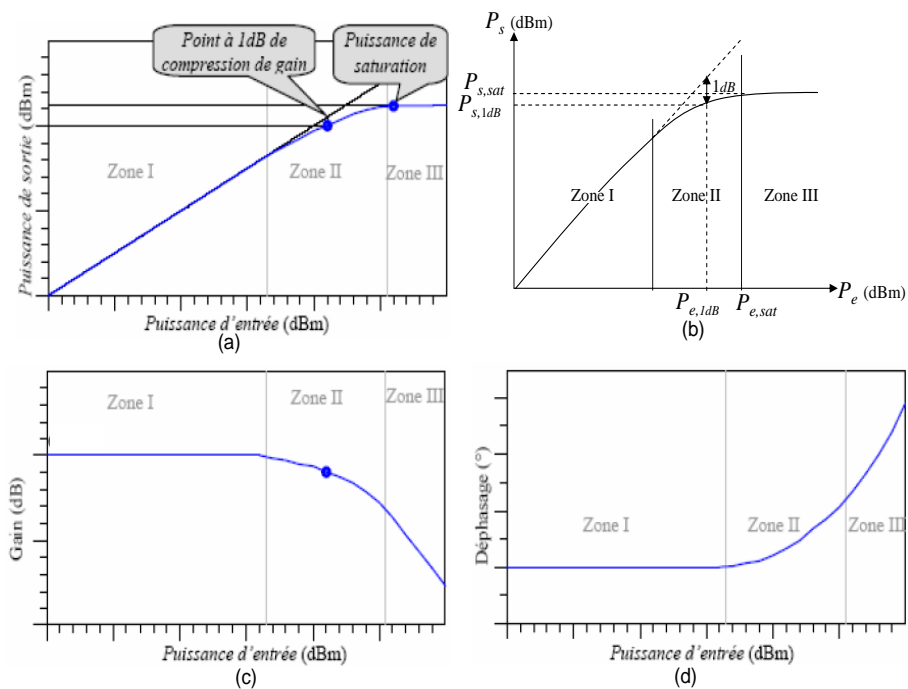


FIG. 1.19 – Exemple des caractéristiques typiques de la relation entrée - sortie d'un amplificateur de puissance de classe A

- I. **Zone linéaire** : dans cette zone, l'amplificateur a un comportement proche d'un système linéaire. La puissance de sortie est proportionnelle à la puissance d'entrée selon un rapport appelé gain de l'amplificateur. Les puissances d'entrées sont faibles. Les distorsions produites dans cette zone sont quasi inexistantes.
- II. **Zone de compression** : dans cette zone, la puissance de sortie n'est déjà plus proportionnelle à la puissance d'entrée. La courbe commence à s'incurver (par rapport la droite linéaire). Les distorsions du signal apparaissent et sont de plus en plus importantes. Le gain de l'amplificateur diminue pour de fortes puissances d'entrées. On parle de zone de compression du gain. Un point important est situé dans cette zone [68]. Il s'agit du point où l'écart entre la courbe de gain et le gain linéaire vaut 1 dB ( $P_{e,1dB}$ ), c'est un point caractéristique de l'amplificateur de puissance.
- III. **Zone de saturation** : à partir d'une certaine puissance d'entrée, la puissance de sortie devient quasiment constante et la courbe de gain décroît linéairement. La saturation se manifeste par un écrêtage du signal de sortie. La puissance de saturation en sortie est, elle aussi, une caractéristique de l'amplificateur désignée par  $P_{s,sat}$ .

La courbe exprimant le déphasage entre la sortie et l'entrée est appelée caractéristique Amplitude/Phase, ou aussi conversion AM/PM. La conversion AM/PM n'a pas d'allure de référence. Elle varie suivant la technique de conception et les conditions de fonctionnement de l'amplificateur [76]. Pour un amplificateur de classe A par exemple la courbe AM/PM reste constante dans la zone linéaire. Des variations commencent à apparaître autour du point à 1 dB de compression de gain  $P_{1dB}$  et peuvent être très importantes à proximité de la saturation, comme le montre la partie (d) de la figure 1.19.

Pour éviter ou du moins diminuer les effets néfastes dus à la non-linéarité des amplificateurs, on est souvent amené à surdimensionner l'amplificateur ou en d'autres termes à prendre un certain recul afin d'être dans la zone linéaire ou proche de cette zone. Ce recul se fait en général par rapport au point de compression à 1 dB ou par rapport à la puissance de saturation [77]. On définit alors les grandeurs qui sont le recul d'entrée (IBO<sup>(25)</sup>) et le recul de sortie (OBO<sup>(26)</sup>) utiles pour quantifier le dimensionnement de l'amplificateur.

Soient  $P_{s,1dB}$  la puissance de sortie au point de compression 1 dB et  $P_{e,1dB}$  la puissance d'entrée correspondante. La grandeur IBO généralement exprimée en dB, est le rapport entre la puissance d'entrée au point de compression 1 dB (ou de la puissance de saturation ramené à l'entrée) [75], [78] sur la puissance moyenne d'entrée  $P_e$  du signal.

$$IBO = \frac{P_{e,1dB}}{P_e} \quad \text{ou} \quad IBO(dB) = P_{e,1dB}(dBm) - P_e(dBm). \quad (1.31)$$

ou encore :

$$IBO = \frac{P_{e,sat}}{P_e} \quad \text{ou} \quad IBO(dB) = P_{e,sat}(dBm) - P_e(dBm). \quad (1.32)$$

De la même façon on définit le paramètre OBO qui est le rapport entre la puissance de sortie au point de compression 1 dB (ou de la puissance de saturation) et la puissance moyenne  $P_s$  de sortie du signal.

$$OBO = \frac{P_{s,1dB}}{P_s} \quad \text{ou} \quad OBO(dB) = P_{s,1dB}(dBm) - P_s(dBm). \quad (1.33)$$

---

<sup>(25)</sup>Input Back Off

<sup>(26)</sup>Output Back Off

ou encore [78] :

$$OBO = \frac{P_{s,sat}}{P_s} \quad \text{ou} \quad OBO(dB) = P_{s,sat}(dBm) - P_s(dBm). \quad (1.34)$$

Plus le recul d'entrée (ou de sortie) est élevé, plus l'amplificateur est surdimensionné, et par conséquent moins il y a des distorsions. Cette solution n'est cependant pas idéale dans la mesure où le rendement dans ce cas est faible. D'où l'intérêt de chercher des solutions alternatives pouvant concilier au mieux la linéarité et le rendement. La non linéarité sera alors corrigée par des techniques de linéarisation et le rendement amélioré par des techniques de réduction du PR. Dans [79], une technique de pré-distorsion numérique (de type polynomiale à mémoire) adaptative en bande de base est présentée. L'objectif est de linéariser l'amplificateur de puissance en prenant en compte ses effets mémoires.

### 1.13.3 Les classes de fonctionnement

Pour les SSPA constitués de plusieurs étages d'amplification à base de transistors, la notion de rendement est intimement lié aux caractéristiques statiques des transistors. Suivant donc la manière dont se fait le transfert de l'énergie, on distingue plusieurs classes de fonctionnement [73].

Le tableau 1.1 consigne les différentes sortes de classes de fonctionnement et leurs spécifications.

Classe	Linéarité	Rendement
A	grande plage de linéarité	rendement faible et consommation en absence de signal
AB	plage de linéarité et rendement satisfaisant (compromis entre classes A et B)	faible consommation en absence du signal
B	rendement appréciable	génération d'harmoniques paires
F	rendement élevé	génération d'harmoniques importantes

TAB. 1.1 – Présentation des classes de fonctionnement avec leurs avantages et inconvénients

## 1.14 Amplificateurs faible bruit (LNA)

Un amplificateur faible bruit est un dispositif électronique chargé de mettre en forme des signaux très faibles en provenance d'une antenne. Il est souvent placé à proximité du capteur, de manière à minimiser les pertes en ligne (canal). Ce type de solution est fréquemment utilisé pour les systèmes travaillant à des fréquences élevées, tels que le signal radio mobile.

Comme pour l'amplificateur de puissance, la linéarité de l'amplificateur faible bruit se caractérise par son point de compression à 1 dB.



## 1.15 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques généralités sur les transmissions numériques. Nous avons détaillé une chaîne classique de transmission. Les modèles de canaux que nous utiliserons dans cette thèse ont été décrits, en particulier les canaux à évanouissements qui caractérisent les communications radio-mobiles.

Pour combattre les évanouissements, les solutions les plus efficaces restent les techniques de diversité, qu'elles soient temporelles, spatiales ou encore fréquentielles, et un paragraphe leur a donc été consacré. Nous avons également présenté des généralités sur l'amplificateur pour une compréhension du phénomène de non-linéarité et de rendement.

Après avoir rappelé ces généralités utiles à la compréhension de l'ensemble du travail, nous allons maintenant aborder dans le deuxième chapitre de l'étude l'analyse du Power Ratio dans un contexte SISO<sup>(27)</sup> mono et multiporteuse.

---

<sup>(27)</sup>Single Input Single Output

## Chapitre 2

# Power Ratio dans un contexte SISO

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>33</b>
<b>2.2</b>	<b>Définitions théoriques du Power Ratio (PR)</b>	<b>34</b>
2.2.1	Définitions des rapports de puissance en continu	35
2.2.2	Définitions des rapports de puissance en échantillonné	35
<b>2.3</b>	<b>Liens entre le PR et les définitions usuelles</b>	<b>35</b>
2.3.1	Définition du PMEPR	36
2.3.2	Définition du PAPR	36
2.3.3	Relation entre le PMEPR et le PAPR	36
2.3.4	Définition du Crest Factor (CF)	37
2.3.5	Définition du Peak Envelope Power (PEP)	37
2.3.6	Définition de l'Effective Peak Factor (EPF) et de la Complementary Cumulative Distribution Function (CCDF)	37
<b>2.4</b>	<b>Analyse du PR en modulations monoporteuse</b>	<b>38</b>
2.4.1	Influence du suréchantillonnage sur la mesure du PR	38
2.4.2	Influence du filtre de Nyquist sur le PR	38
2.4.3	Influence du filtre en racine de Nyquist sur le PR	40
2.4.4	PR en sortie du canal de propagation	51
<b>2.5</b>	<b>Analyse du PR en modulations multiporteuse</b>	<b>52</b>
2.5.1	Définition et état de l'art	52
2.5.2	Distribution du PR en sortie du filtre de mise en forme	54
2.5.3	Influence du canal de propagation	59
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>

---

### 2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, l'amplificateur de puissance a son importance dans un système de télécommunications et plus particulièrement pour les systèmes radio mobiles. Le rendement de ces amplificateurs est faible (au plus 50%), leurs caractéristiques ne sont pas linéaires et une grande partie de la consommation du terminal est attribuée à l'amplificateur de puissance. Ainsi, l'utilisation de modulations à enveloppes constantes

telles que la GMSK<sup>(1)</sup> pour le GSM<sup>(2)</sup> est par exemple bien justifiée. En effet, ce type de modulations optimise l'efficacité de la fonction d'amplification en se plaçant au plus près de la saturation. Pour autant, la plupart des modulations normalisées aujourd'hui ne sont pas à enveloppes constantes, qu'elles soient mono ou multiporteuse et les conséquences d'une amplification de puissance non-linéaire du signal radio fréquence doivent être examinées avec la plus grande attention.

Le facteur PR (Power Ratio) défini comme le rapport entre la puissance instantanée et la puissance moyenne d'un signal donné permet de dimensionner les fluctuations de puissance vis à vis de l'amplificateur de puissance (et vice versa). Ce paramètre apparaît dans la littérature sous plusieurs appellations tels que PAPR<sup>(3)</sup>, PMEPR<sup>(4)</sup> ou encore CF<sup>(5)</sup>. Dans ce chapitre, nous donnons les définitions du PR apparues dans la littérature, puis l'influence du filtre de mise en forme (Nyquist et en racine de Nyquist) et du canal de transmission sur ce PR dans un contexte monoporteuse puis multiporteuse, pour des systèmes à une antenne d'émission et une antenne de réception (SISO<sup>(6)</sup>).

## 2.2 Définitions théoriques du Power Ratio (PR)

Palicot et Louët [80] ont proposé une expression générale appelée Power Ratio (PR) déclinée en plusieurs versions suivant les usages. Dans la suite de cette partie, plusieurs notations seront employées pour définir avec précision les conditions dans lesquelles le PR est calculé. Les indices c (pour continu), e (pour échantillonné), i (pour infini) et f (pour fini) seront combinés pour exprimer les quatre situations possibles du PR (figure 2.1).

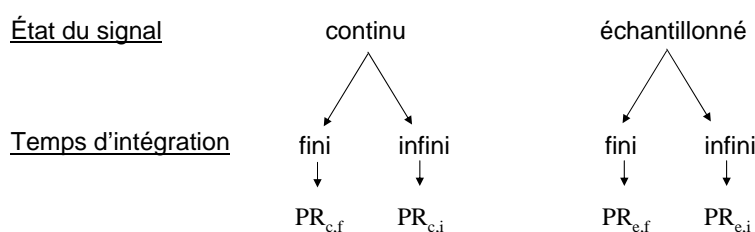


FIG. 2.1 – Les différentes configurations du PR

Le Power Ratio se définit de façon générale comme étant le rapport du maximum de la puissance instantanée d'un signal et de sa puissance moyenne (équation 1.27). Il traduit la variation de la puissance instantanée du signal par rapport à sa puissance moyenne et rend ainsi compte de la dynamique du signal.

Nous supposons dans la suite que les signaux étudiés sont ergodiques, c'est à dire que l'espérance statistique peut être calculée à l'aide de moyenne temporelle.

<sup>(1)</sup>Gaussian Minimum Shift Keying

<sup>(2)</sup>Global System for Mobile communication

<sup>(3)</sup>Peak to Average Power Ratio

<sup>(4)</sup>Peak to Mean Envelope Power Ratio

<sup>(5)</sup>Crest Factor

<sup>(6)</sup>Single Input Single Output

### 2.2.1 Définitions des rapports de puissance en continu

Pour être cohérent avec le signal analogique qui doit être amplifié, le PR infini est défini dans un cas continu. Le signal  $s(t)$  peut être soit un signal bande de base, soit un signal radio fréquence (RF), réel ou complexe. Dans le cas d'un signal bande de base (resp. RF), nous emploierons la notation spécifique  $\widetilde{PR}$  (resp.  $PR$ ). Si la notation PR est employée, alors cela signifie que la définition est valide dans les deux cas. Dans ces conditions,

$$\text{PR}_{c,i}\{s(t)\} = \frac{\max_t |s(t)|^2}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt}. \quad (2.1)$$

Lorsque le temps d'intégration est fini, comme c'est généralement le cas en pratique, la définition de ce nouveau rapport de puissance  $\text{PR}_{c,f}$  pour un temps d'intégration  $T$ , est alors défini comme :

$$\text{PR}_{c,f}(T)\{s(t)\} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |s(t)|^2}{\frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt}. \quad (2.2)$$

Cette définition est une déclinaison du  $\text{PR}_{c,i}$ . Lorsque  $T$  devient très grand, on retrouve la définition du rapport de puissance continu et infini et

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{PR}_{c,f}(T) = \text{PR}_{c,i}. \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Définitions des rapports de puissance en échantillonné

Lorsque l'on considère le signal échantillonné, notons  $N_e$  le nombre d'échantillons du signal  $\mathbf{s} = [s(0), \dots, s(N_e - 1)]$ . Alors le PR d'un signal échantillonné et fini s'écrit :

$$\text{PR}_{e,f}(N_e)\{\mathbf{s}\} = \frac{\max_{k \in [0, N_e - 1]} |s(k)|^2}{\frac{1}{N_e} \sum_{k=0}^{N_e - 1} |s(k)|^2}. \quad (2.4)$$

De la même manière que précédemment, si le calcul est fait sur un très grand nombre d'échantillons, on obtient le rapport de puissance échantillonné et infini. Il est donné par la relation suivante :

$$\text{PR}_{e,i}\{\mathbf{s}\} = \frac{\max_k |s(k)|^2}{\lim_{N_e \rightarrow \infty} \frac{1}{N_e} \sum_{k=0}^{N_e - 1} |s(k)|^2}. \quad (2.5)$$

Et nous avons :

$$\lim_{N_e \rightarrow \infty} \text{PR}_{e,f}(N_e) = \text{PR}_{e,i}. \quad (2.6)$$

## 2.3 Liens entre le PR et les définitions usuelles

Dans cette partie, nous clarifierons certaines appellations utilisées pour exprimer la dynamique d'un signal. Ce sont les appellations usuelles trouvées dans la littérature, qui malheureusement sont utilisées parfois de façon "abusive" entraînant des confusions.

### 2.3.1 Définition du PMEPR

Le PMEPR est utilisé quand le signal en bande de base est considéré (enveloppe complexe) au lieu du signal modulé [81]. Le PMEPR est alors une déclinaison du PR pour des signaux bande de base. À partir de ce signal complexe,  $\tilde{s}(t) = \tilde{s}_I(t) + j\tilde{s}_Q(t)$ , la définition du PMEPR est :

$$\text{PMEPR}\{\tilde{s}(t)\} = \frac{\max_t |\tilde{s}(t)|^2}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\tilde{s}(t)|^2 dt}. \quad (2.7)$$

Dans ces conditions  $\text{PMEPR} = \widetilde{PR}_{c,i}$ .

### 2.3.2 Définition du PAPR

Le PAPR est utilisé pour caractériser le PR de signaux radio fréquence [3]. Soit  $\tilde{s}(t)$  le signal en bande de base et  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  la fréquence porteuse. Le PAPR est alors défini par :

$$\text{PAPR}\{\tilde{s}(t)\} = \frac{\max_t |\text{Re}(\tilde{s}(t)e^{j\omega_0 t})|^2}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\text{Re}(\tilde{s}(t)e^{j\omega_0 t})|^2 dt}. \quad (2.8)$$

En utilisant la notation PR pour spécifier que le signal est radio fréquence,  $\text{PAPR} = PR_{c,i}$ .

### 2.3.3 Relation entre le PMEPR et le PAPR

La relation liant un signal RF (à la fréquence porteuse  $f_0$ ) au signal bande de base (correspondant) est donnée par :

$$s(t) = \Re(\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t}) \quad (2.9)$$

$$= \Re(\tilde{s}(t))\cos(2\pi f_0 t) - j\Im(\tilde{s}(t))\sin(2\pi f_0 t) \quad (2.10)$$

$$= \tilde{s}_I(t)\cos(2\pi f_0 t) - j\tilde{s}_Q(t)\sin(2\pi f_0 t). \quad (2.11)$$

De façon générale la fréquence porteuse est généralement choisie pour être plus grande que la bande du signal [82]. Dans ce cas et d'après l'équation (2.9), le maximum de la puissance instantanée du signal modulé est sensiblement identique à celui du signal bande de base c'est à dire :

$$\max_t |s(t)| \approx \max_t |\tilde{s}(t)|. \quad (2.12)$$

En ce qui concerne la puissance moyenne, nous pouvons écrire :

$$E\{|\tilde{s}_I(t)|^2\} = E\{|\tilde{s}_Q(t)|^2\} = \frac{1}{2}E\{|\tilde{s}(t)|^2\}, \quad (2.13)$$

où  $E\{\cdot\}$  désigne l'espérance mathématique. De l'équation (2.11), la puissance moyenne peut s'écrire :

$$E\{|s(t)|^2\} = \frac{1}{2}E\{|\tilde{s}_I(t)|^2\} + \frac{1}{2}E\{|\tilde{s}_Q(t)|^2\} = \frac{E\{|\tilde{s}(t)|^2\}}{2}. \quad (2.14)$$

Nous pouvons en tirer d'après les équations (2.12) et (2.14) que :

$$\begin{aligned}
\text{PAPR} &= \frac{\max_t |s(t)|^2}{E\{|s(t)|^2\}} \\
&\approx \frac{2 \max_t |\tilde{s}(t)|^2}{E\{|\tilde{s}(t)|^2\}} \\
&\approx 2\text{PMEPR}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Autrement dit nous avons [83] :

$$\text{PAPR}_{dB} \approx \text{PMEPR}_{dB} + 3 \text{ dB}. \tag{2.16}$$

Cette relation a une importance car elle a une incidence sur les performances de toutes les méthodes de réduction du PR réalisées en bande de base. En effet lorsqu'une méthode de réduction de PR est réalisée en bande de base sur un signal (à priori à fort PR) alors lorsque ce dernier est transposé en fréquence, le PR est dégradé de 3 dB. Il faut alors prendre en considération cette remarque avant l'amplification du signal (choix du recul).

### 2.3.4 Définition du Crest Factor (CF)

Le facteur de crête (CF) peut être utilisé et est défini comme la racine carrée du PAPR [84] ou du PMEPR [2] suivant le cas d'étude :

- CF =  $\sqrt{\text{PAPR}} = \sqrt{PR_{c,i}}$  en fréquence porteuse
- CF =  $\sqrt{\text{PMEPR}} = \sqrt{\widetilde{PR}_{c,i}}$  en bande de base

### 2.3.5 Définition du Peak Envelope Power (PEP)

L'appellation PEP (Peak Envelop Power) est utilisée pour exprimer la puissance maximale de l'enveloppe d'un signal [85]. Le lien entre PEP et le PR est que le PEP définit le numérateur du PR. Elle est donnée alors par la relation (2.17) :

$$\text{PEP} = \max_t |s(t)|^2. \tag{2.17}$$

### 2.3.6 Définition de l'Effective Peak Factor (EPF) et de la Complementary Cumulative Distribution Function (CCDF)

Le PR est d'une manière générale une variable aléatoire car les signaux pour lesquels il est calculé sont des variables aléatoires. Il est donc naturel de rechercher sa fonction de distribution. Pour ce faire, il faut rechercher plutôt une limite ou une approximation de celle-ci. C'est exactement ce que proposent certains auteurs dont Dinur [6] en étudiant l'"Effective Peak Factor" (EPF) défini comme :

$$Pr(\text{PR} \geq \text{EPF}) = \epsilon, \tag{2.18}$$

où  $\epsilon$  est un nombre aussi négligeable que possible.

L'EPF est donc un seuil pour lequel la probabilité que le PR soit plus grand que ce seuil est négligeable. Son calcul permet d'obtenir des majorants de la distribution du PR.

Cette fonction de la distribution du PR est plus connue sous le nom de CCDF<sup>(7)</sup> et est donnée par la relation :

$$CCDF(PR_0) = Pr[PR \geq PR_0]. \quad (2.19)$$

Cette fonction sera utilisée tout au long de ce manuscrit.

## 2.4 Analyse du PR en modulations monoporteuse

Les modulations à enveloppes constantes ont par construction un PR nul en  $dB$  (en bande de base). Or dans une chaîne de communications, celles-ci perdent leurs caractéristiques d'enveloppes constantes. C'est le constat que l'on fait lorsqu'elles attaquent l'amplificateur de puissance. Le suréchantillonnage et/ou le filtrage ont donc une influence sur la dynamique du signal. Dans la suite, l'analyse du PR consiste à prendre en compte l'effet du suréchantillonnage et du filtrage de mise en forme (Nyquist et en racine de Nyquist) et de donner une borne supérieure du PR.

### 2.4.1 Influence du suréchantillonnage sur la mesure du PR

En prenant comme exemple la modulation QPSK avec un filtre de mise en forme rectangulaire, le  $PR_{e,f}$  calculé à la fréquence symbole (fréquence d'échantillonnage  $f_e = \frac{1}{T}$ , où  $T$  est la période d'un symbole) vaut  $0 dB$  car les puissances instantanées et moyennes sont identiques. Cette valeur n'a cependant pas de sens dans un cas continu car elle ne prend pas en compte les valeurs des transitions entre symboles. En prenant ainsi une fréquence d'échantillonnage  $f_e = \frac{2}{T}$ , le  $PR_{e,f}$  vaut  $1.25 dB$ . En généralisant le calcul en prenant comme fréquence d'échantillonnage  $f_e = \frac{N_s}{T}$  (J.Palicot et Y. Louët [80]),

$$PR_{e,f} = 10 \log \frac{3N_s^2}{1 + 2N_s^2}.$$

On obtient donc en faisant tendre  $N_s$  vers l'infini :

$$PR_{e,i} = \lim_{N_s \rightarrow +\infty} PR_{e,f} = 10 \log(3/2) = 1.7609 dB$$

### 2.4.2 Influence du filtre de Nyquist sur le PR

Dans cette partie, on présente des résultats de l'influence du filtre de Nyquist sur le PR [80].

La réponse impulsionnelle du filtre de Nyquist de facteur de roll off  $\beta$  est définie par :

$$p(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t} \frac{\cos(\frac{\pi\beta}{T}t)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2}}, \quad (2.20)$$

où  $T$  est le temps symbole. Le PR sera analysé pour un temps continu ( $t$  réel). Le signal  $\tilde{s}(t)$  considéré sera alors défini par :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} (a_k + jb_k)p(t - kT), \quad (2.21)$$

---

<sup>(7)</sup>Complementary Cumulative Distribution Function

où  $N_s$  représente le nombre de symboles à l'entrée du filtre.

Dans le cas d'une modulation BPSK à la fréquence de Nyquist, le PR de  $\tilde{s}(t)$  peut être majoré par :

$$\text{PR}\{\tilde{s}(t)\} \leq \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)}. \quad (2.22)$$

En considérant que  $a_k$  et  $b_k$  ont les mêmes statistiques, le PR de  $\tilde{s}(t)$  dans le cas général d'une modulation MAQ à  $m$  états est alors majoré par :

$$\text{PR}\{\tilde{s}(t)\} \leq \left(\frac{\max(a_k)}{\sigma_a}\right)^2 \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)}, \quad (2.23)$$

où  $\sigma_a^2 = E\{a_k^2\}$ . Les relations 2.22 et 2.23 sont valables pour  $\beta \in ]0, 1]$ . Pour  $\beta = 0$ , il est montré que le PR est infini (voir annexe B).

La figure 2.2 compare ces majorations en modulations BPSK, QPSK et MAQ16 avec des simulations pour quatre valeurs différentes de  $\beta$  (0.9, 0.6, 0.3 et 0.05).

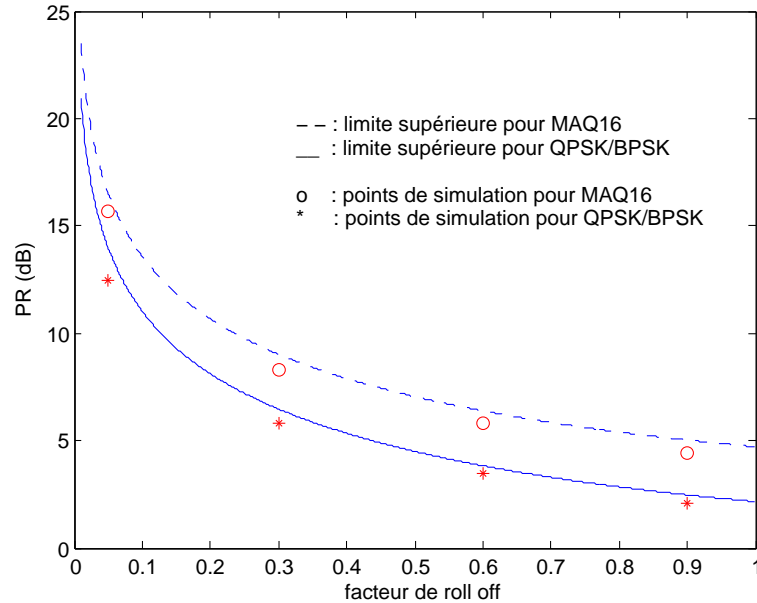


FIG. 2.2 – Illustration de l'influence du filtre de Nyquist sur le PR ( $\widetilde{PR}_{c,i}$ ) en fonction de  $\beta$

Le PR du signal modulé à la sortie du filtre de Nyquist est alors obtenu en additionnant le PR (en  $dB$ ) du signal modulé à un facteur  $f(\beta) = \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)}$  (en  $dB$ ) qui représente l'influence du filtre sur le PR.

Dans le cas de la modulation PSK, le PR vaut 1 (0  $dB$ ) à la fréquence symbole. Pour la modulation MAQ, le PR dépend du nombre d'états de la modulation. Le PR d'une constellation est calculé en considérant que les symboles sont équiprobables. Ainsi, le PR est calculé en divisant la grandeur au carré du plus grand symbole par la moyenne des symboles au carré (puissance moyenne des symboles) [86]. Le tableau 2.1 montre le



PR (exprimées en  $dB$ ) correspondant à plusieurs constellations. Ces valeurs sont ensuite ajoutées au facteur  $f(\beta)$  du tableau 2.2.

Constellation	PR
N-PSK	$\approx 0 \text{ dB}$
MAQ16	$2.6 \text{ dB}$
MAQ32	$2.3 \text{ dB}$
MAQ64	$3.7 \text{ dB}$
MAQ128	$4.3 \text{ dB}$

TAB. 2.1 – PR des constellations pour différents types de modulations à la fréquence symbole

Le tableau 2.2 montre une comparaison du facteur  $f(\beta)$  du filtre de Nyquist pour différentes valeurs de  $\beta$ . Ainsi, les tableaux 2.1 et 2.2 fournissent toutes les données nécessaires pour déterminer le PR maximum d'un signal monoporteuse filtré par un filtre de Nyquist.

$\beta$	$f(\beta)$
0.15	$9.3 \text{ dB}$
0.2	$8.1 \text{ dB}$
0.3	$6.5 \text{ dB}$
0.4	$5.4 \text{ dB}$
0.5	$4.5 \text{ dB}$

TAB. 2.2 –  $f(\beta)$  du filtre de Nyquist pour différentes valeurs de  $\beta$

Dans cette partie, l'influence du filtre de Nyquist sur le Power Ratio a été traité pour des raisons de simplicité. En pratique, c'est le filtre en racine de Nyquist qui est généralement utilisé à l'émission. C'est pour cela que nous allons dans la partie suivante analyser l'influence de ce filtre sur le PR.

### 2.4.3 Influence du filtre en racine de Nyquist sur le PR

L'expression en bande de base d'un signal  $\tilde{s}(t)$  en sortie du filtre en racine de Nyquist est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}(t) &= \sum_{k=0}^{N_s-1} c_k p(t - kT) \\
 &= \sum_{k=0}^{N_s-1} a_k p(t - kT) + j \sum_{k=0}^{N_s-1} b_k p(t - kT),
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

où  $c_k$  sont les  $N_s$  symboles à l'entrée du filtre et  $p(t)$  le filtre en racine de Nyquist.

La réponse impulsionnelle du filtre en racine de Nyquist de roll off  $\beta$  est défini comme :

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \beta + 4\frac{\beta}{\pi} & \text{si } t = 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left[ \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\beta}\right) + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4\beta}\right) \right] & \text{si } t = \pm \frac{T}{4\beta} \\ \frac{\sin\left(\pi(1-\beta)\frac{t}{T}\right) + 4\beta\frac{t}{T} \cos\left(\pi(1+\beta)\frac{t}{T}\right)}{\pi\frac{t}{T}(1-(4\beta\frac{t}{T})^2)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Nous sommes donc amené tout d'abord à étudier l'existence du PR de  $\tilde{s}(t)$ . Puis, nous chercherons le maximum de  $|\tilde{s}(t)|^2$ .

#### 2.4.3.1 Étude de la convergence de $\tilde{s}(t)$ pour un facteur de roll off nul

Pour  $\beta = 0$ , l'expression du filtre en racine de Nyquist devient :

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin\left(\pi\frac{t}{T}\right)}{\pi\frac{t}{T}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le filtre en racine de Nyquist, pour un facteur de roll off nul, étant un sinus cardinal, il oscille à l'infini. Il est donc possible que le PR soit infini. Pour démontrer que le PR en sortie du filtre peut être infini, il suffit de trouver un cas particulier où il est infini. Prenons par exemple le cas suivant :  $a_k = (-1)^k$ ,  $b_k = (-1)^k$  et  $t = -T/2$ . Nous obtenons alors :

$$\tilde{s}\left(t = -\frac{T}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N_s-1} \frac{1}{1+2k} + j \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N_s-1} \frac{1}{1+2k}. \quad (2.26)$$

Les parties réelles et imaginaires divergent quand  $N_s$  tend vers l'infini, et nous obtenons donc un PR infini. Dans la suite de notre étude nous excluons donc le cas du facteur de roll off nul.

#### 2.4.3.2 Étude de la convergence de $\tilde{s}(t)$ pour un facteur de roll off non nul

Le filtre en racine de Nyquist  $p(t)$  étant continu en 0 et  $\pm \frac{T}{4\beta}$ , l'expression du signal de sortie du filtre, pour tout  $t, k$  et pour  $\beta \in ]0, 1]$  est la suivante :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} c_k \frac{\sin\left(\pi(1-\beta)\frac{(t-kT)}{T}\right) + 4\beta\frac{(t-kT)}{T} \cos\left(\pi(1+\beta)\frac{(t-kT)}{T}\right)}{\pi\frac{(t-kT)}{T} \left(1 - (4\beta\frac{(t-kT)}{T})^2\right)}. \quad (2.27)$$

$\tilde{s}(t)$  converge si les sommes  $\sum_{k=0}^{N_s-1} a_k p(t-kT)$  et  $\sum_{k=0}^{N_s-1} b_k p(t-kT)$  convergent.

**Etude de la convergence de  $\sum_{k=0}^{N_s-1} a_k p(t-kT)$  (ou  $\sum_{k=0}^{N_s-1} b_k p(t-kT)$ )**

Puisque  $|a_k|$  est borné, nous obtenons la majoration :

$$\sum_{k=0}^{N_s-1} |a_k p(t-kT)| \leq \max_k |a_k| \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t-kT)|. \quad (2.28)$$

Soit,

$$\begin{aligned}
\max_k |a_k| \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| &\leq \max_k |a_k| \sum_{k=0}^{N_s-1} \left| \frac{1 + 4\beta \frac{(t-kT)}{T}}{\pi \frac{(t-kT)}{T} \left(1 - 4\beta \frac{(t-kT)}{T}\right) \left(1 + 4\beta \frac{(t-kT)}{T}\right)} \right| \\
&\leq \max_k |a_k| \sum_{k=0}^{N_s-1} \left| \frac{1}{\pi \frac{(t-kT)}{T} \left(1 - 4\beta \frac{(t-kT)}{T}\right)} \right| \\
&\leq \max_k |a_k| \sum_{k=0}^{N_s-1} \left| \frac{1}{\pi \left(\frac{t-kT}{T} - 4\beta \left(\frac{t-kT}{T}\right)^2\right)} \right|. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann, la série  $\sum_{k=0}^{N_s-1} \left| \frac{1}{\pi \left(\frac{t-kT}{T} - 4\beta \left(\frac{t-kT}{T}\right)^2\right)} \right|$  converge.

Donc  $\sum_{k=0}^{N_s-1} |a_k p(t - kT)|$  converge car elle est majorée par une série qui converge. Ainsi, la série  $\sum_{k=0}^{N_s-1} a_k p(t - kT)$  est absolument convergente et donc convergente.

En conclusion, le maximum de  $|\tilde{s}(t)|^2$  existe pour un roll off non nul, ce qui implique l'existence du PR. Nous allons donc maintenant rechercher ce maximum.

### 2.4.3.3 Recherche du maximum de $|\tilde{s}(t)|^2$

Le maximum de  $|\tilde{s}(t)|^2$  peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}
\max_t |\tilde{s}(t)|^2 &= \max_t \left| \sum_{k=0}^{N_s-1} c_k p(t - kT) \right|^2 \\
&= \max_t \left| \sum_{k=0}^{N_s-1} a_k p(t - kT) + j \sum_{k=0}^{N_s-1} b_k p(t - kT) \right|^2 \\
&= \max_t \left( \left( \sum_{k=0}^{N_s-1} a_k p(t - kT) \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^{N_s-1} b_k p(t - kT) \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Nous cherchons le maximum absolu, qui correspond au cas où l'on additionne le maximum de la partie réelle et le maximum de la partie imaginaire

$$\begin{aligned}
\max_t |\tilde{s}(t)|^2 &\leq \max_t \left( \left( \sum_{k=0}^{N_s-1} a_k p(t - kT) \right)^2 \right) + \max_t \left( \left( \sum_{k=0}^{N_s-1} b_k p(t - kT) \right)^2 \right) \\
&\leq \left( \max_t \left| \sum_{k=0}^{N_s-1} a_k p(t - kT) \right| \right)^2 + \left( \max_t \left| \sum_{k=0}^{N_s-1} b_k p(t - kT) \right| \right)^2 \\
&\leq \left( \max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |a_k| |p(t - kT)| \right)^2 + \left( \max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |b_k| |p(t - kT)| \right)^2 \\
&\leq \max_k |a_k|^2 \left( \max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| \right)^2 + \max_k |b_k|^2 \left( \max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| \right)^2.
\end{aligned}$$

Puisque  $\max_k |a_k|^2 = \max_k |b_k|^2$ ,

$$\max_t |\tilde{s}(t)|^2 \leq 2 * \max_k |a_k|^2 \left( \max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| \right)^2. \quad (2.30)$$

#### 2.4.3.4 Étude du maximum du filtre

Le filtre en racine de Nyquist comporte un pic principal en 0 (figure 2.3). Cela implique qu'il est possible que l'on obtienne un maximum en ce point, suivant les valeurs des filtres adjacents qui viennent s'ajouter de part et d'autre.

D'autre part le filtre en racine de Nyquist étant symétrique, lorsque l'on fait la somme  $\phi(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)|$ , deux filtres côte à côte se croisent en  $T/2 + kT$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), la valeur du filtre en  $T/2$  étant élevée, il est aussi possible que l'on obtienne un maximum en ce point. Il a été constaté deux comportements différents en fonction de la valeur du roll.

Si le facteur de roll off est inférieur à une valeur autour de 0.4 (obtenue par simulation),  $p(0) < 2p(\frac{T}{2})$  et la valeur maximale est située à  $t = \pm \frac{T}{2}$ . Par contre, si le facteur de roll off est supérieur à environ 0.4,  $p(0) > 2p(\frac{T}{2})$  et le maximum est situé à  $t = 0$ . Ces résultats peuvent être étendus à n'importe quel nombre  $N_s$  de symboles. Deux cas sont illustrés avec  $N_s = 7$  symboles et dont les réponses impulsionnelles du filtre de mise en forme sont tronquées à  $L_f = 6$  symboles. Sur la figure 2.4, le facteur de roll off est égal à 0.24. Dans ce cas, la valeur maximale est située à  $t = \pm \frac{T}{2}$ .

Sur la figure 2.5, le facteur de roll off est égal à 0.75, et le maximum est situé à  $t = 0$ .

#### 2.4.3.5 Expression du maximum de $|\tilde{s}(t)|^2$

Nous allons maintenant trouver l'expression du maximum de  $|\tilde{s}(t)|^2$ .

##### Expression du maximum de $|\tilde{s}(t)|^2$ pour un facteur de roll off inférieur à 0.4

Nous considérons dans cette étude un filtre tronqué à  $L_f = 2n$  symboles c'est-à-dire que si le nombre d'échantillons par temps symbole est égale à  $N_e$ , nous avons donc un filtre avec  $2nN_e$  coefficients.

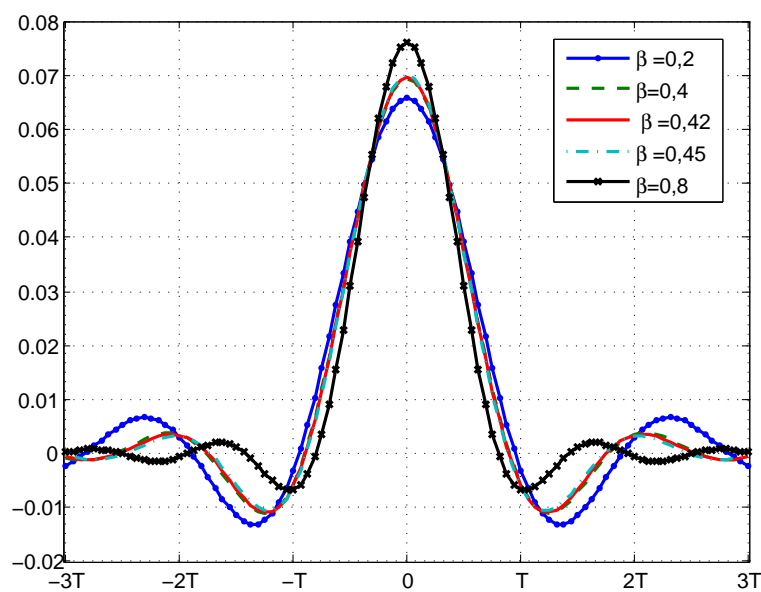


FIG. 2.3 – Superposition de filtre en racine de Nyquist pour différentes valeurs de roll off

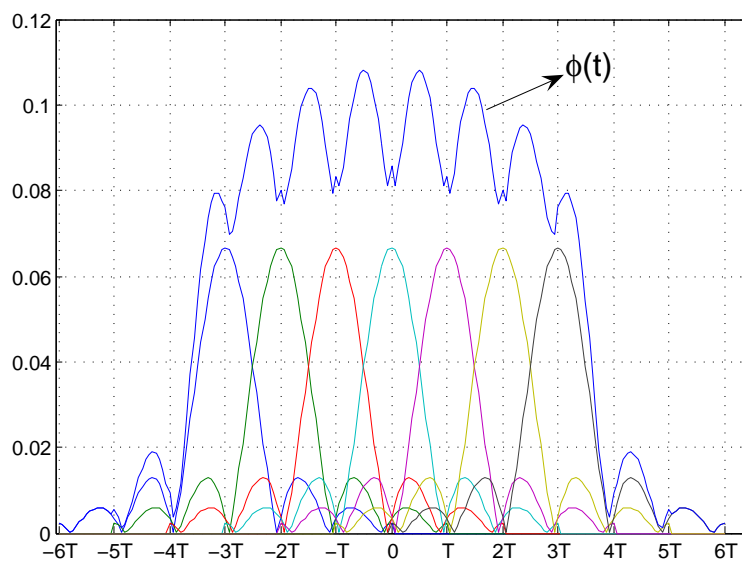
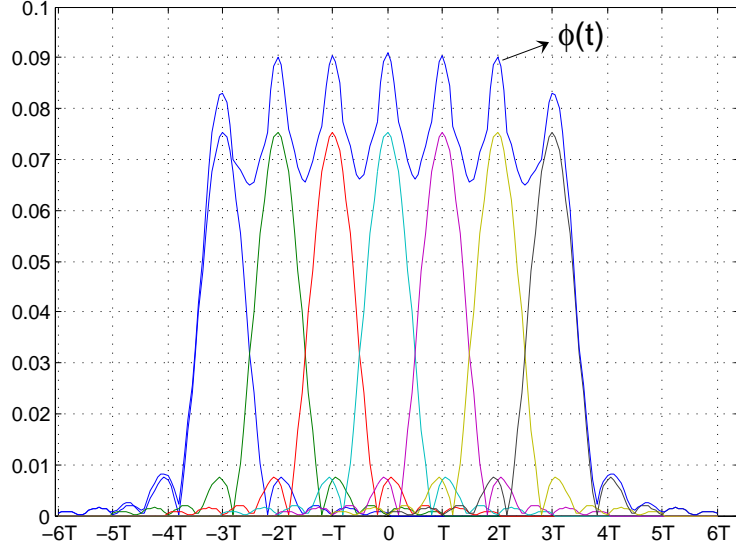


FIG. 2.4 – La fonction  $\phi(t)$  pour  $\beta = 0,24$ ,  $N_s = 7$  et  $L_f = 6$  symboles

$$\max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| = \sum_{k=0}^{n-1} |p(T/2 + kT)| + \sum_{k=0}^{n-1} |p(T/2 - kT)|. \quad (2.31)$$

Et puisque  $p(t)$  est symétrique par rapport à 0,

FIG. 2.5 – La fonction  $\phi(t)$  pour  $\beta = 0.75$ ,  $N_s = 7$  et  $L_f = 6$  symboles

$$\max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| = 2 * \sum_{k=0}^{n-1} |p(T/2 + kT)|. \quad (2.32)$$

L'expression en  $T/2 + kT$  donne :

$$\begin{aligned} p(T/2 + kT) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)(1-\beta)\right) + 2\beta(2k+1)\cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)(1+\beta)\right)}{\frac{\pi}{2}(2k+1)(1-(2\beta(2k+1)\beta)^2)} \\ &= \frac{(-1)^k \cos\left(\beta\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) + 2\beta(2k+1)(-1)^{k+1}\sin\left(\beta\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)}{\frac{\pi}{2}(2k+1)(1-(2 \times (2k+1)\beta)^2)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

L'expression du maximum de  $|\tilde{s}(t)|^2$  devient alors :

$$\begin{aligned} \max_t |\tilde{s}(t)|^2 &\leq 2 * \max_k |a_k|^2 \left( \max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| \right)^2 \\ &\leq 2 * \max_k |a_k|^2 \left( 2 \sum_{k=0}^{n-1} |p(T/2 + kT)| \right)^2 \\ &\leq 2 * \max_k |a_k|^2 \left( 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{(-1)^k \cos\left(\beta\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) + 2\beta(2k+1)(-1)^{k+1}\sin\left(\beta\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)}{\frac{\pi}{2}(2k+1)(1-(2 \times (2k+1)\beta)^2)} \right| \right)^2. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\max_t |\tilde{s}(t)|^2 \leq \begin{cases} 8 * \max_k |a_k|^2 \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{(-1)^k \cos\left(\beta\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) + 2\beta(2k+1)(-1)^{k+1}\sin\left(\beta\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)}{\frac{\pi}{2}(2k+1)(1-(2 \times (2k+1)\beta)^2)} \right| \right)^2 \\ \text{si } 0 < \beta \leq 0.4 \end{cases}$$

### Expression du maximum de $|\tilde{s}(t)|^2$ pour un facteur de roll off supérieur à 0.4

De même que précédemment :

$$\max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| = p(0) + \sum_{k=1}^n |p(kT)| + \sum_{k=1}^n |p(-kT)|. \quad (2.34)$$

Et puisque  $p(t)$  est symétrique par rapport à 0,

$$\max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| = p(0) + 2 * \sum_{k=1}^n |p(kT)|. \quad (2.35)$$

Par ailleurs, l'expression de  $p(kT)$  est :

$$p(kT) = \frac{\sin(k\pi(1 - \beta)) + 4k\beta \cos(k\pi(1 + \beta))}{k\pi(1 - (4k \times \beta)^2)}. \quad (2.36)$$

Ainsi, les expressions des cosinus et sinus se simplifient comme :

$$\begin{aligned} \sin(k\pi(1 - \beta)) &= \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \cos(\beta k\pi) - \sin(\beta k\pi) \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \\ &= (-1)^{k+1} \sin(\beta k\pi), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(k\pi(1 + \beta)) &= \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \cos(\beta k\pi) - \sin(\beta k\pi) \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \\ &= (-1)^k \cos(\beta k\pi). \end{aligned}$$

D'où

$$p(kT) = \frac{(-1)^{k+1} \sin(\beta k\pi) + 4k\beta(-1)^k \cos(\beta k\pi)}{k\pi(1 - (4k \times \beta)^2)}. \quad (2.37)$$

L'expression du maximum de  $|\tilde{s}(t)|^2$  est alors :

$$\begin{aligned} \max_t |\tilde{s}(t)|^2 &\leq 2 * \max_k |a_k|^2 \left( \max_t \sum_{k=0}^{N_s-1} |p(t - kT)| \right)^2 \\ &\leq 2 * \max_k |a_k|^2 \left( h(0) + 2 * \sum_{k=1}^n |p(kT)| \right)^2. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\max_t |\tilde{s}(t)|^2 \leq \begin{cases} 2 * \max_k |a_k|^2 \left( 1 - \beta + \frac{4\beta}{\pi} + 2 * \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^{k+1} \sin(\beta k\pi) + 4k\beta(-1)^k \cos(\beta k\pi)}{k\pi(1 - (4k \times \beta)^2)} \right| \right)^2 \\ \text{si } 0.4 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

### 2.4.3.6 Expression de la puissance moyenne $P_{\tilde{s}}$ en sortie du filtre

L'expression de la puissance moyenne  $P_{\tilde{s}}$  du signal filtré peut être exprimée par :

$$P_{\tilde{s}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_c(f) |P(f)|^2 df, \quad (2.38)$$

où  $\gamma_c(f) = \frac{E\{c_k^2\}}{T} = \frac{\sigma_c^2}{T}$  [87] est la densité spectrale de puissance des symboles  $c_k$  (sous l'hypothèse que les symboles sont non corrélés et à moyenne nulle) et  $\sigma_c^2$  la variance des symboles  $c_k$ .  $P(f)$  est la transformée de Fourier de  $p(t)$ , donnée par :

$$|P(f)| = \begin{cases} T & \text{si } 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ T \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sin \left( \pi \frac{T}{\beta} \left( |f| - \frac{1}{2T} \right) \right) \right)} & \text{si } \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = T$ , nous obtenons :

$$P_{\tilde{s}} = \sigma_c^2. \quad (2.39)$$

### 2.4.3.7 Expression du PR en sortie du filtre

Nous obtenons alors l'expression générale du PR :

$$\text{PR}\{\tilde{s}(t)\} \leq \begin{cases} \frac{8 \cdot \max |a_k|^2}{\sigma_c^2} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{(-1)^k \cos(\beta \frac{\pi}{2} (2k+1)) + 2\beta(2k+1)(-1)^{k+1} \sin(\beta \frac{\pi}{2} (2k+1))}{\frac{\pi}{2} (2k+1) (1 - (2 \times (2k+1)\beta)^2)} \right| \right)^2 & \text{si } 0 < \beta \leq 0.4 \\ \frac{2 \cdot \max |a_k|^2}{\sigma_c^2} \left( 1 - \beta + \frac{4\beta}{\pi} + 2 * \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^{k+1} \sin(\beta k \pi) + 4k\beta(-1)^k \cos(\beta k \pi)}{k\pi(1 - (4k \times \beta)^2)} \right| \right)^2 & \text{si } 0.4 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

(2.40)

La figure 2.6 illustre ces deux expressions. La simulation confirme parfaitement le résultat théorique.

La figure 2.7 représente le PR pour plusieurs valeurs de  $L_f$ . De cette figure, nous remarquons que lorsque le filtre est tronqué sur un nombre de temps symboles important, les valeurs de  $|p(t)|$  pour  $|t| > 12T$  sont très petites par rapport aux valeurs de  $|p(t)|$  pour  $|t| < 12T$ . On peut donc négliger les valeurs de  $|p(t)|$  pour  $|t| > 12T$  dans l'expression du PR. On en conclut que lorsque l'on augmente  $L_f$ , la valeur du PR tend vers une borne supérieure.

Nous allons maintenant étudier le comportement statistique du PR en fonction des différents paramètres du filtre de mise en forme (roll off, nombre de symbole, troncature, échantillonnage). Ceci se fera à l'aide de la fonction de distribution complémentaire (CCDF).



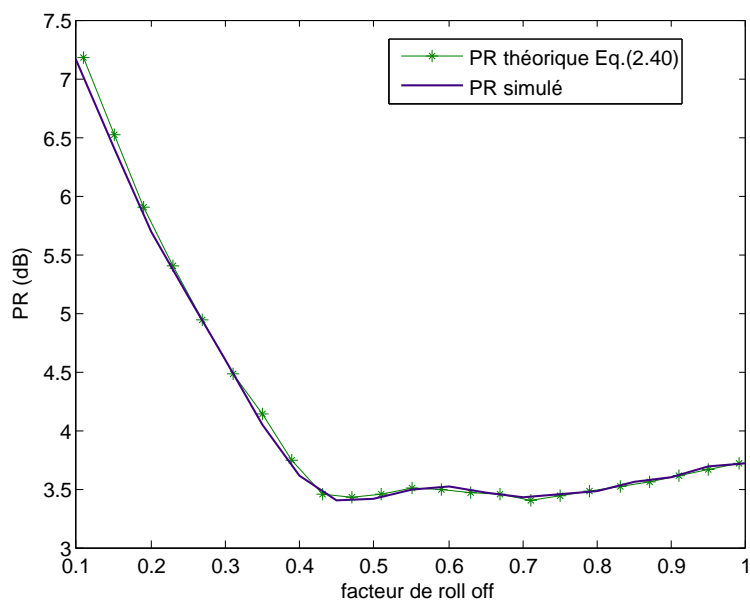


FIG. 2.6 – Comparaison entre les PR simulés et théoriques,  $N_s = 4096$ ,  $L_f = 24$  symboles, (constellation QPSK)

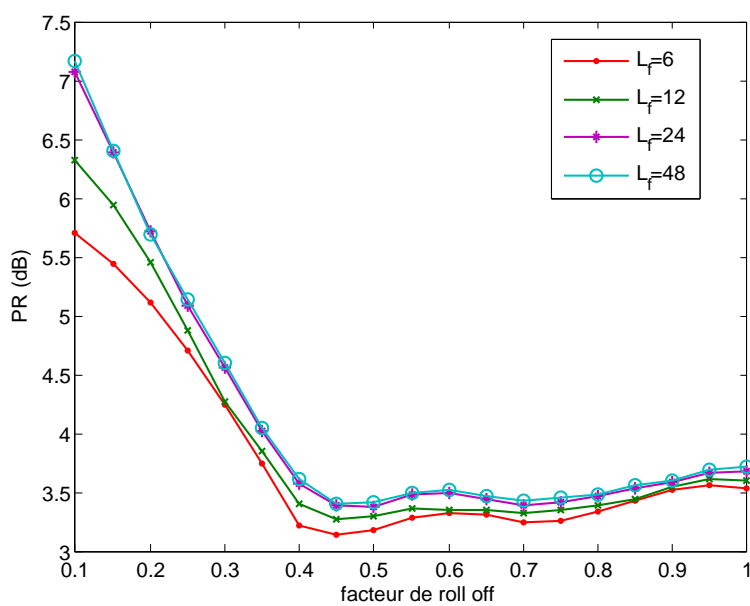


FIG. 2.7 – PR en sortie du filtre en fonction du facteur de roll off pour plusieurs valeurs de  $L_f$ ,  $N_s = 4096$ , (constellation QPSK)

### 2.4.3.8 Mise en évidence de l'influence des différents paramètres du filtre sur la distribution du PR

Dans cette partie, nous allons présenter l'influence des paramètres du filtre sur la distribution du PR en sortie du filtre.

– **Influence du facteur de roll off ( $\beta$ )**

Nous remarquons de la figure 2.8 que la distribution du PR varie fortement en fonction du facteur de roll off.

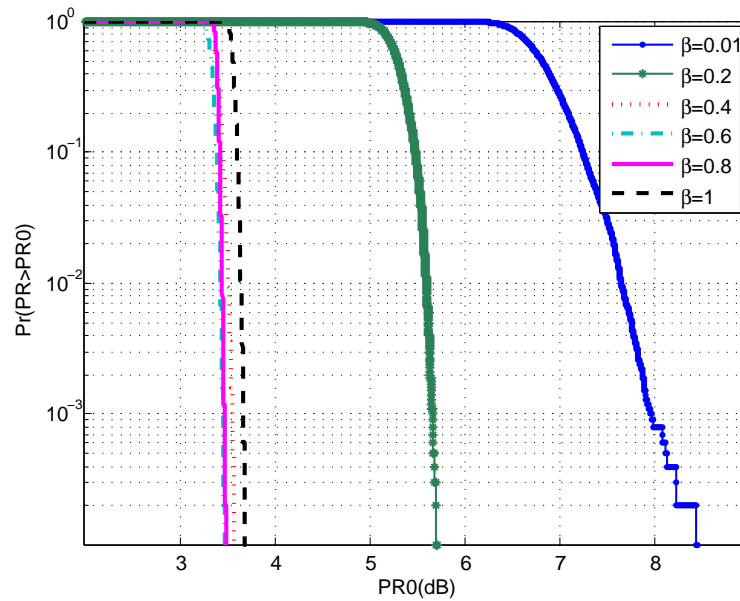


FIG. 2.8 – Comparaison des distributions du PR en sortie du filtre pour différents facteurs de roll off,  $N_s = 4096$ ,  $L_f = 24$ ,  $N_e = 4$

Les résultats présentés sur la figure 2.8 sont à mettre en parallèle de ceux obtenus sur la figure 2.6.

– **Influence de la troncature de la réponse impulsionnelle du filtre**

La longueur du filtre influence la fonction de répartition du PR en sortie (figure 2.9). A partir d'une troncature du filtre à 12 symboles, il y a peu de changement.

– **Influence du nombre d'échantillons par temps symboles du filtre ( $N_e$ )**

Si l'on augmente le nombre d'échantillons par temps symbole du filtre et que l'on fait en même temps du suréchantillonnage au niveau du signal d'entrée du filtre (on rajoute entre deux échantillons des zéros dont le nombre est égal au nombre d'échantillons par temps symboles), on s'aperçoit alors, que le nombre d'échantillons à partir de 2 n'influence pas la distribution du PR (figure 2.10).

### 2.4.3.9 Conclusion

Le signal en sortie d'un filtre en racine de Nyquist, pour une modulation monoporteuse, ne suivant pas une loi simple, on ne peut donc pas trouver exactement la fonction de répartition du PR en sortie du filtre. Par contre, nous avons établi une relation théorique donnant la borne supérieure du PR dans le cas d'un filtre en racine de Nyquist. Ces

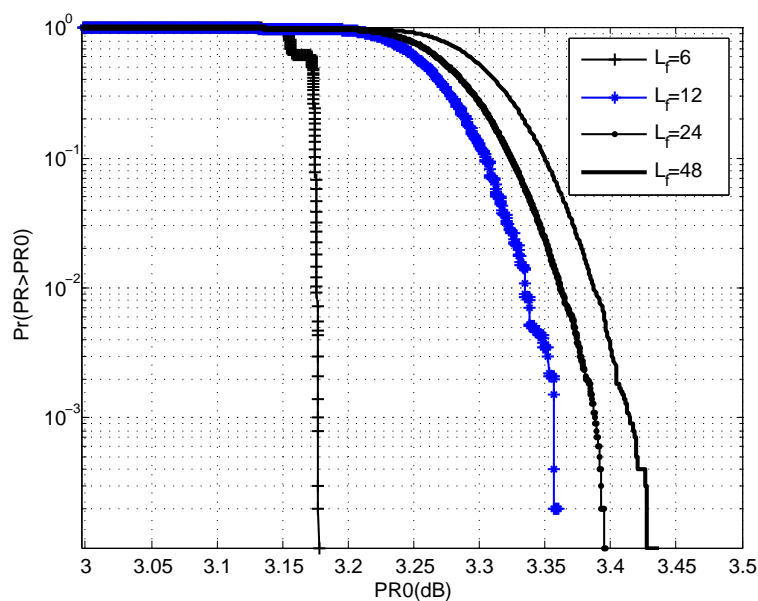


FIG. 2.9 – Comparaison de la distribution du PR en sortie du filtre pour différentes valeurs de  $L_f$ ,  $N_s = 4096$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $N_e = 4$

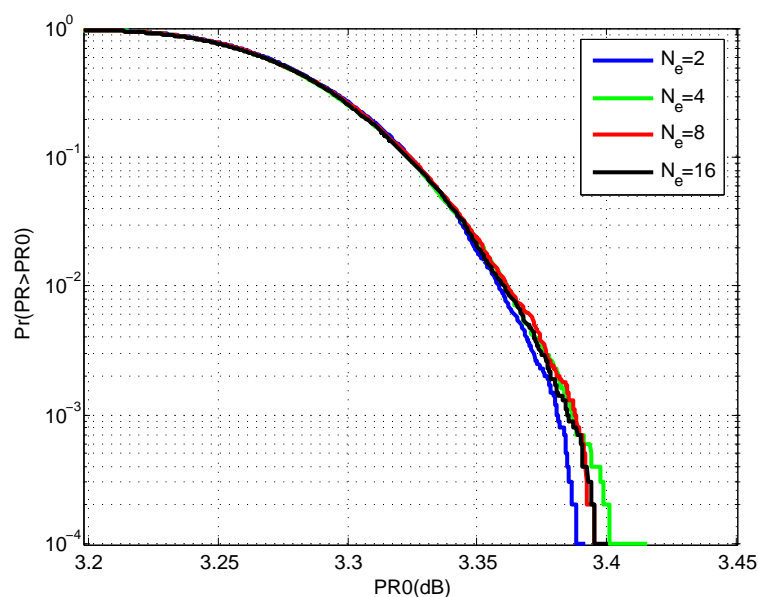


FIG. 2.10 – Comparaison de la distribution du PR en sortie du filtre pour différents nombres d'échantillons par temps symbole  $N_e$ ,  $N_s = 4096$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $L_f = 24$

développements ont été parfaitement validés. Ainsi, on conclue d'une part que le PR est très sensible aux valeurs du facteur de roll off lorsque celles ci sont comprises entre 0 et 0.4 : il varie en effet entre 3.5 dB et l'infini. D'autre part, pour des facteurs de roll off

compris entre 0.4 et 1, le PR évolue peu et est de l'ordre de 3.75 dB. Tous ces résultats sont valables pour un filtre de mise en forme de type racine de Nyquist.

Enfin, nous avons constaté que c'est le facteur de roll off qui influence le plus les variations du PR dans le cas monoporteuse avec filtrage en racine de Nyquist, en comparaison de la troncature et du nombre d'échantillons par temps symbole.

#### 2.4.4 PR en sortie du canal de propagation

Du fait de la difficulté à développer une expression analytique de la distribution du PR du signal en modulation monoporteuse, nous allons dans cette partie présenter des simulations de la distribution du PR du signal reçu perturbé par un canal de Rayleigh à évanouissements plats. La figure 2.11 montre les résultats de simulation de comparaison entre la distribution du PR du signal émis (en bande de base et en fréquence porteuse) et la distribution du PR du signal perturbé par un canal de Rayleigh à évanouissements plats. Ces distributions du PR sont obtenues en utilisant un filtre de mise en forme en racine de Nyquist.

On constate que le canal de Rayleigh à évanouissements plats dégrade le PR dans le cas d'une modulation monoporteuse. Nous avons constaté que cette dégradation est de l'ordre de la dizaine de dB pour un seuil de dépassement de  $10^{-4}$ . Une explication théorique semble ici difficile à mener compte tenu de la complexité de la densité de probabilité du signal monoporteuse. A l'opposé, cette réflexion dans le cas multiporteuse est plus aisée du fait de l'hypothèse gaussienne liée au signal émis. Ceci fait l'objet des parties suivantes.

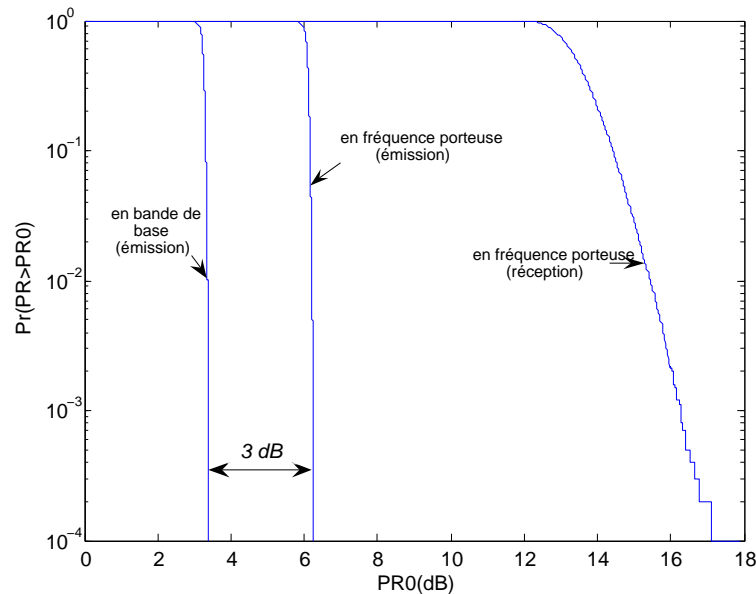


FIG. 2.11 – Distribution du PR du signal reçu perturbé par un canal de Rayleigh à évanouissements plats dans un système SISO-monoporteuse en utilisant un filtre en racine de Nyquist,  $N_s=1000$ , (constellation QPSK),  $\beta = 0.5$ ,  $N_e = 4$ ,  $L_f = 24$  symboles,  $RSB = 10$  dB.

## 2.5 Analyse du PR en modulations multiporteuse

### 2.5.1 Définition et état de l'art

Comme nous l'avons déjà évoqué dans le chapitre 1, une des caractéristiques principales des signaux multiporteuse est qu'ils sont à enveloppes non constantes avec une fluctuation importante des amplitudes. Cette particularité rend les signaux multiporteuse très sensibles aux non-linéarités des composants analogiques (en particulier les non-linéarités de l'amplificateur de puissance) de la chaîne de communications et constitue de ce fait une véritable contrainte.

Dans le cas de l'OFDM, nous rappelons que le PR est donné par la relation :

$$\text{PR}(\tilde{x}(t)) = \frac{\max_{t \in [0, T]} |\tilde{x}(t)|^2}{\frac{1}{T} \int_0^T |\tilde{x}(t)|^2 dt}, \quad (2.41)$$

où  $\tilde{x}(t)$  représente le signal bande de base d'un symbole OFDM à  $N$  sous-porteuses exprimé par :

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_I(t) + j\tilde{x}_Q(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2j\pi \frac{k}{T} t}. \quad (2.42)$$

$c_k$  est le symbole complexe de la  $k^{\text{ème}}$  sous-porteuse et  $T$  le temps d'un symbole OFDM. Cette définition du PR est cohérente avec celles posées en début de ce chapitre.

Lorsque le signal est échantillonné, il est donné par :

$$\tilde{x}(n/L) = \tilde{x}_I(n/L) + j\tilde{x}_Q(n/L) = \sum_{k=0}^{NL-1} c_k e^{2j\pi \frac{kn}{NL} t}, \quad (2.43)$$

où  $0 \leq n \leq NL - 1$  où  $L$  est le facteur de suréchantillonnage, servant à estimer au mieux le PR de  $\tilde{x}(t)$ .

Dans ce cas, le PR est donné par la relation :

$$\text{PR}\{\tilde{\mathbf{x}}\} = \frac{\max_{n \in [0, NL]} |\tilde{x}(n)|^2}{\frac{1}{NL} \left| \sum_{n=0}^{NL-1} \tilde{x}(n) \right|^2}. \quad (2.44)$$

Nous allons un dans un premier temps donner une borne supérieure [5] du PR du signal représenté par l'équation (2.42). Cette borne est :

$$\text{PR}\{\tilde{x}(t)\} \leq 3N \frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m} + 1}, \quad (2.45)$$

où  $m$  est le nombre d'états de la modulation.

Cette borne supérieure n'étant pratiquement jamais atteinte, des méthodes statistiques sont alors utilisées pour approcher la fonction de distribution du PR.

### Propriétés statistiques du signal OFDM

Le signal OFDM est une combinaison linéaire de  $N$  variables indépendantes identiquement distribuées, d'amplitudes différentes. C'est donc une variable aléatoire ayant de grandes

variations d'amplitude. Pour traduire cette variation d'amplitude, le seul calcul de la quantité définie par le PR (de fait variable aléatoire) n'est pas suffisant. Une étude statistique s'impose et cela passe par la détermination de la fonction de répartition du PR c'est à dire du calcul de la probabilité que le PR dépasse un seuil donné.

Aussi, d'après le théorème de la limite centrale, les parties réelles et imaginaires du signal OFDM suivent des lois gaussiennes centrées et de variance  $\frac{1}{2}E(|c|^2)$  lorsque le nombre de sous-porteuses  $N$  devient très élevé [88], [7], [89] comme l'illustre la figure 2.12.

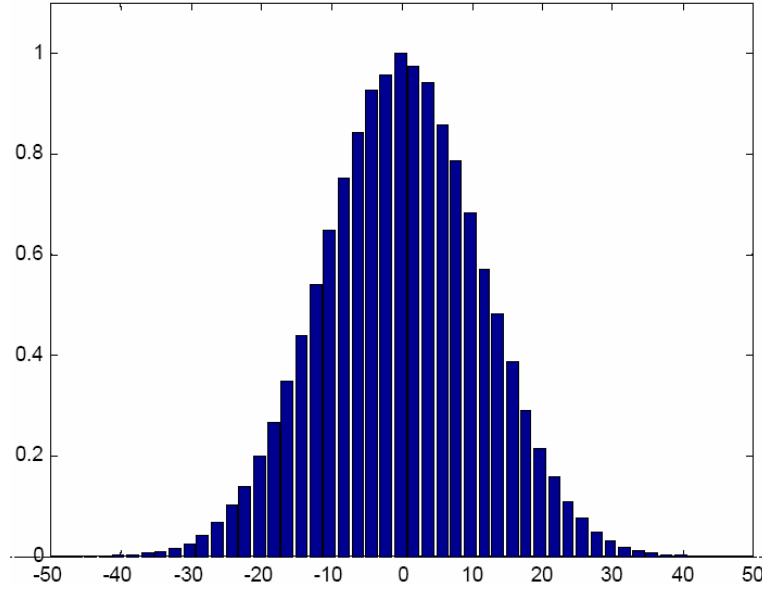


FIG. 2.12 – Histogramme de la partie réelle d'un signal OFDM,  $N = 128$

L'amplitude du signal OFDM suit alors une loi de Rayleigh. La figure 2.13 illustre la distribution de l'amplitude du signal OFDM.

De nombreux travaux ont permis de déterminer soit de façon empirique ou soit de façon analytique la fonction de répartition du PR. En supposant les échantillons mutuellement indépendants et décorrélés, Van Nee montre dans [88] que la CCDF du PR de  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{N-1}]$  peut être donnée par la relation (2.46) :

$$Pr[\text{PR}\{\tilde{\mathbf{x}}\} > \gamma] \approx 1 - (1 - e^{-\gamma})^N. \quad (2.46)$$

La relation (2.46) est cependant valable pour une valeur de suréchantillonnage  $L = 1$ . Pour un facteur de suréchantillonnage  $L > 4$ , [4] donne une approximation de la CCDF du PR par la relation (2.47) :

$$Pr[\text{PR}\{\tilde{\mathbf{x}}\} > \gamma] \approx 1 - (1 - e^{-\gamma})^{\alpha N}, \quad (2.47)$$

où  $\alpha \approx 2.8$  est une constante obtenue par simulation.

Encore plus récemment, Zhou [8] donne une meilleure approximation de la CCDF du PR par la relation (2.48) :

$$Pr[\text{PR}\{\tilde{\mathbf{x}}\} > \gamma] \approx N \sqrt{\frac{\pi}{3}} \gamma e^{-\gamma}. \quad (2.48)$$

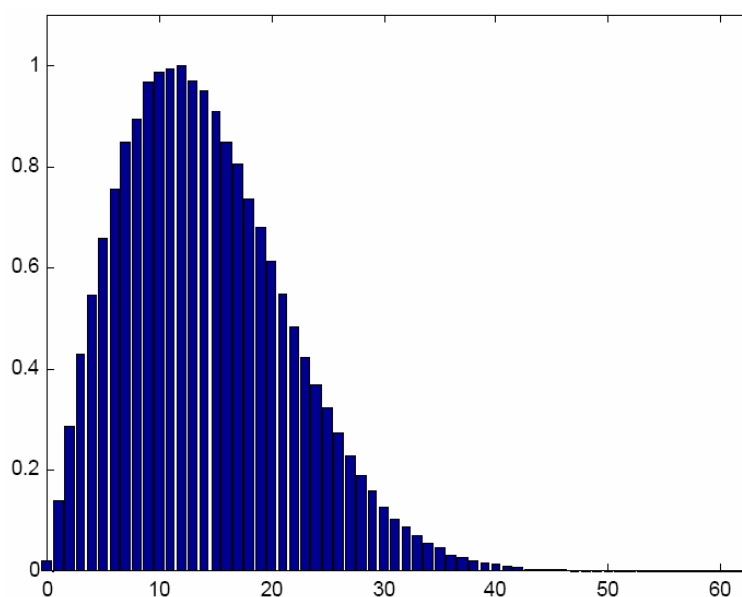


FIG. 2.13 – Histogramme de l'amplitude d'un signal OFDM,  $N = 128$

### Comparaison des fonctions de répartition du PR en OFDM

La figure 2.14 représente l'ensemble des CCDF théoriques pour  $N = 128$  sous-porteuses en QPSK. À partir de  $L = 4$ , on peut considérer que l'estimation du PR du signal OFDM continu est bonne.

Nous allons maintenant nous intéresser au PR en sortie du filtre de mise en forme.

#### 2.5.2 Distribution du PR en sortie du filtre de mise en forme

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence du filtre de mise en forme situé après la modulation OFDM (IFFT). Le filtre retenu pour cette étude est un filtre en racine de Nyquist. Comme ce filtre est linéaire, le signal de sortie  $\tilde{s}(t)$  possède certaines caractéristiques identiques au signal d'entrée (gaussien, centré, stationnaire, ...). Ce qui implique que la CCDF du PR en sortie du filtre est identique à celle en entrée du filtre (figure 2.15). Il en est de même pour les spectres d'entrée et de sortie (figure 2.16)

Maintenant nous allons étudier l'influence de différents paramètres :

- **Influence du nombre de sous-porteuses**

La relation (2.48) est valable pour un nombre de sous-porteuses suffisamment élevé. De plus, plus le nombre de sous-porteuses est élevé et plus le PR en sortie du filtre est élevé (figure 2.17).

- **Influence de la troncature de la réponse impulsionnelle du filtre**

La troncature de la réponse impulsionnelle du filtre n'influence pas la fonction de répartition du PR en sortie (figure 2.18).

- **Influence du facteur de roll off**

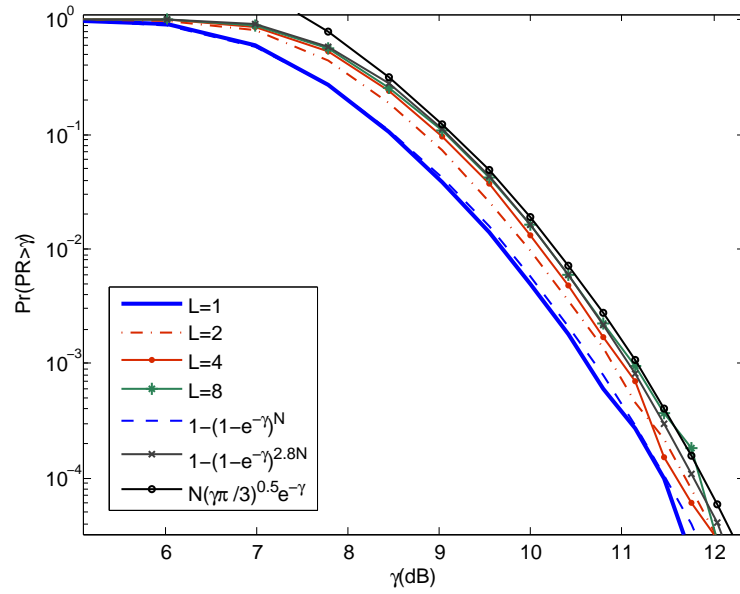


FIG. 2.14 – CCDF du PR pour  $L \in \{1, 2, 4, 8\}$  ( $N = 128$ , constellation QPSK) et quelques approximation théoriques (pour un signal OFDM en bande de base)

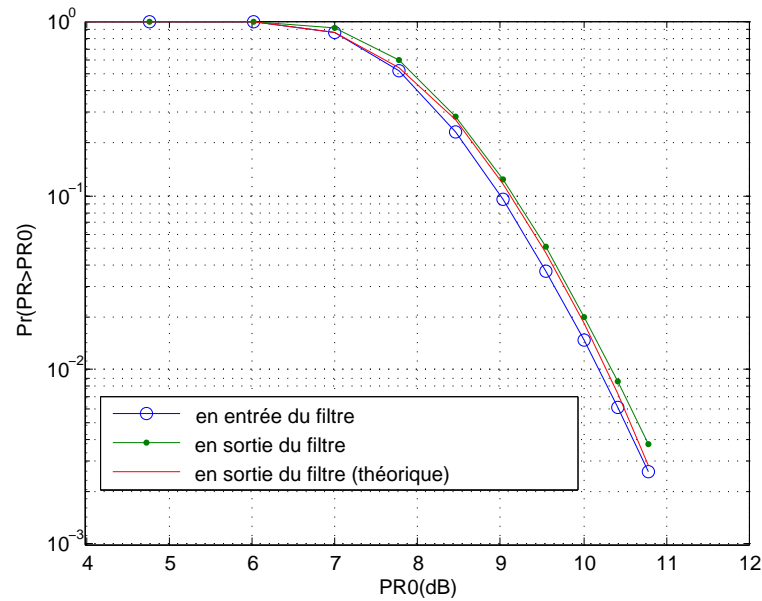


FIG. 2.15 – Comparaison entre les CCDFs du PR d'entrée, de sortie et théorique en entrée et en sortie,  $N = 128$ ,  $L = 4$ ,  $\beta = 0.2$

Nous remarquons que le PR en sortie du filtre n'est pas influencé par le facteur de roll off (figure 2.19).



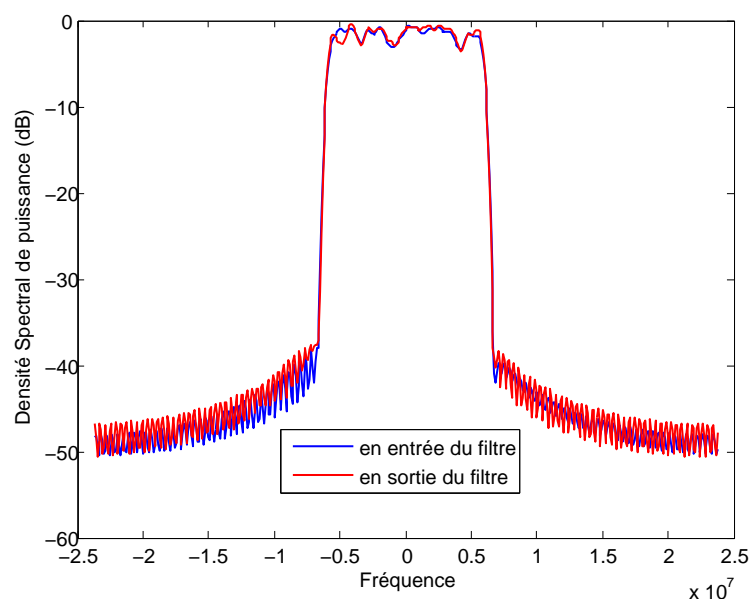


FIG. 2.16 – Comparaison entre les spectres d'entrée et de sortie,  $N = 128$ ,  $L = 4$ ,  $\beta = 0.5$

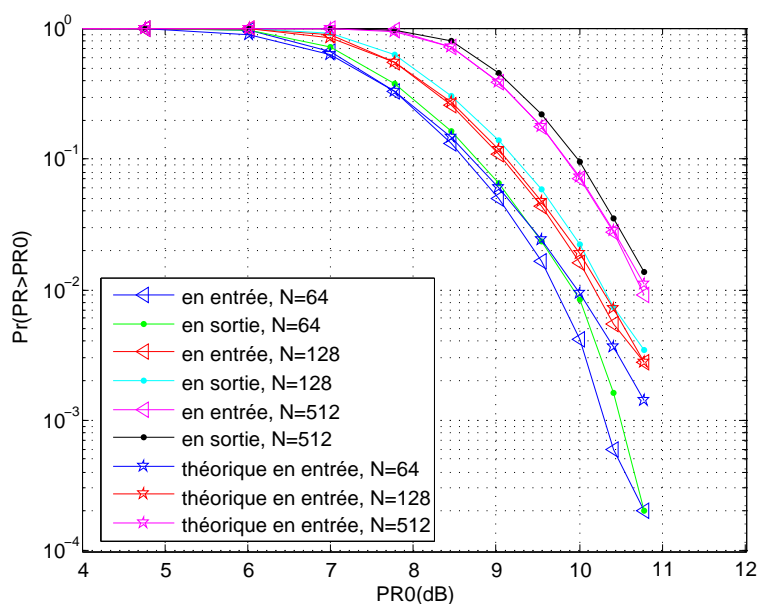


FIG. 2.17 – CCDFs du PR en entrée et en sortie du filtre pour différents nombres de sous-porteuses, constellation QPSK,  $L = 4$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $L_f = 24$  symboles

– **Influence du facteur de suréchantillonnage au niveau de la IFFT de la modulation OFDM**

Nous remarquons qu'avec un facteur de suréchantillonnage supérieur à  $L = 8$ , la CCDF du PR en entrée est bien identique au PR en sortie du filtre (figure 2.20).

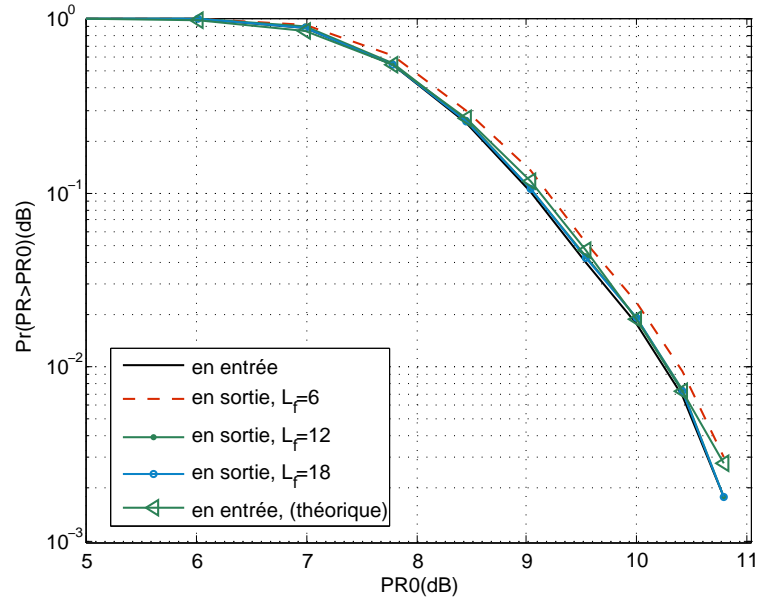


FIG. 2.18 – Comparaison des CCDFs du PR en sortie du filtre pour différentes valeurs de  $L_f$ , constellation QPSK,  $L = 4$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $N = 128$

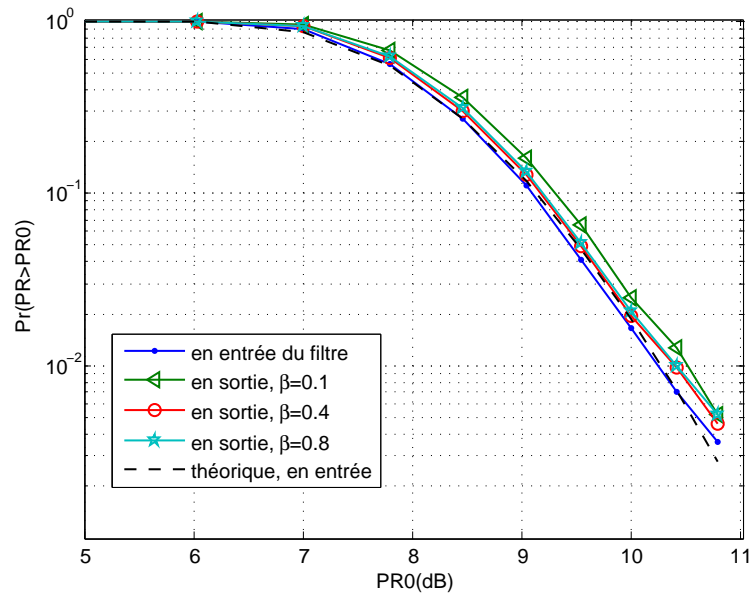


FIG. 2.19 – Comparaison des CCDFs du PR en sortie du filtre pour différents facteurs de roll off, constellation QPSK,  $L = 4$ ,  $N = 128$

– **Influence du nombre d'échantillons par temps symboles du filtre**

Si l'on augmente le nombre d'échantillons par temps symbole du filtre et que l'on fait en même temps du suréchantillonnage au niveau du filtre (on rajoute entre deux échantillons des zéros dont le nombre est égal au nombre d'échantillons par temps

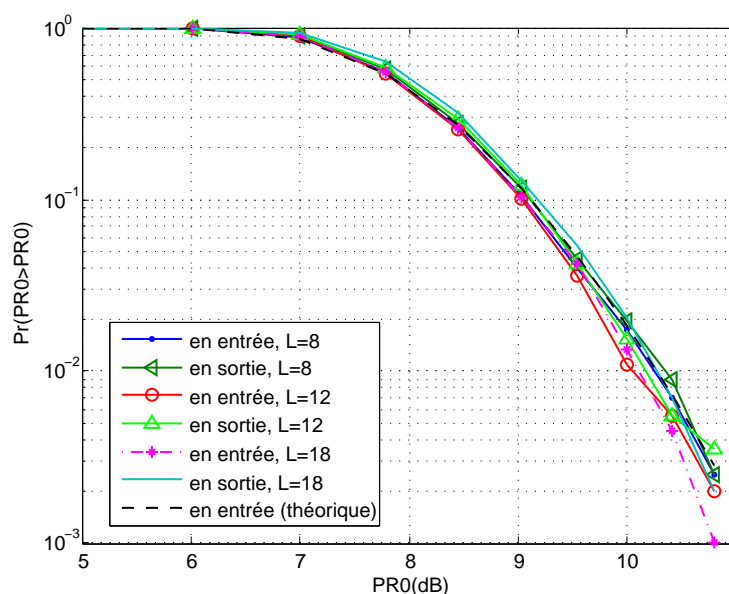


FIG. 2.20 – Comparaison des CCDFs du PR (théorique et simulation) pour différents facteurs de surechantillonnage, constellation QPSK,  $\beta = 0.2$ ,  $N = 128$

symbole) alors un suréchantillonnage de 8 au niveau de l'IFFT de la modulation OFDM est suffisant. On s'aperçoit alors, que l'on obtient de bons résultats avec 4 échantillons (suréchantillonnage de 4 au niveau du filtre) par temps symbole et un suréchantillonnage de 8 au niveau de l'IFFT (figure 2.21).

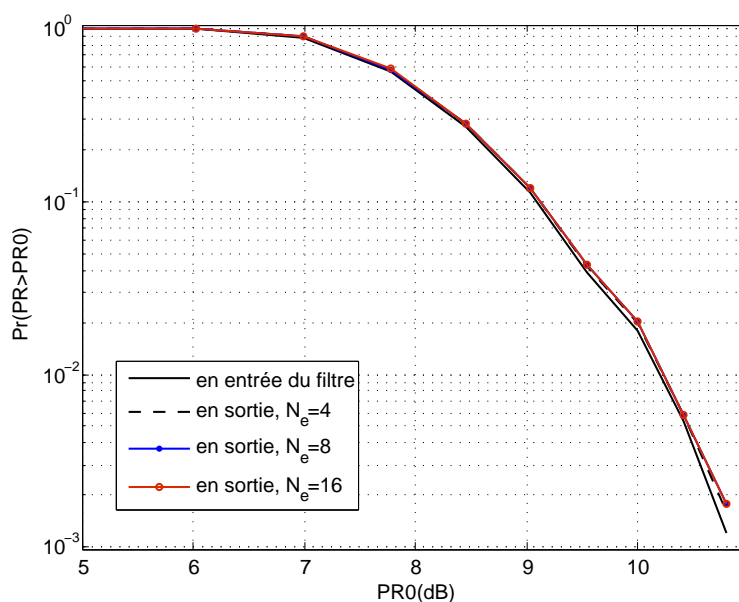


FIG. 2.21 – Comparaison des CCDFs du PR en sortie du filtre pour différents nombre d'échantillons par temps symbole  $N_e$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $L = 4$ ,  $N = 128$ ,  $L_f = 24$  symboles

– **Influence du type de modulation**

Le type de modulation n'influence pas le PR en sortie du filtre (figure 2.22).

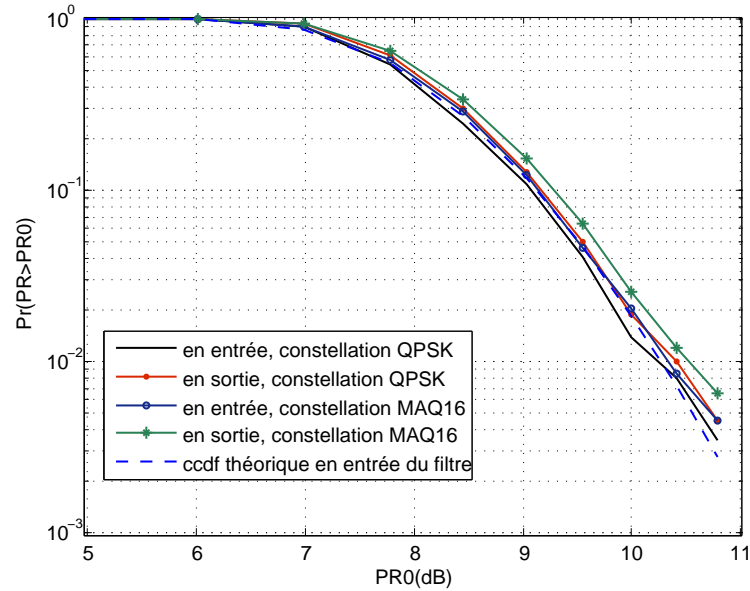


FIG. 2.22 – Comparaison entre les CCDFs du PR en sortie du filtre pour différents types de constellation,  $\beta = 0.2$ ,  $L = 4$ ,  $N = 128$ ,  $L_f = 24$  symboles

L'ensemble de ces simulations montre que les paramètres du filtre (roll off, longueur du filtre, suréchantillonnage et nombre de symboles) n'ont pas d'influence notable sur le PR de sortie dans le cas d'un filtre en racine de Nyquist et d'un signal OFDM.

Après avoir étudié l'influence du filtre de mise en forme, nous allons maintenant dans la partie suivante analyser l'impact du canal sur le PR.

### 2.5.3 Influence du canal de propagation

#### 2.5.3.1 Cas d'un canal BBAG

La figure 2.23 illustre un système SISO-OFDM (en fréquence porteuse).

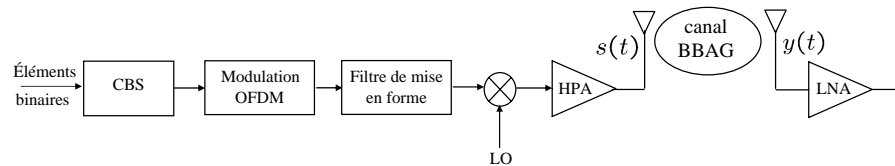


FIG. 2.23 – Schéma simplifié d'un système SISO-OFDM avec canal BBAG

Dans cette partie, nous analysons la CCDF du PR du signal  $y(t)$  exprimé comme :

$$y(t) = s(t) + b(t), \quad (2.49)$$

où  $b(t)$  est un bruit BBAG et  $s(t)$  est un signal OFDM issu de l'antenne d'émission.

Considérons  $z(t) = y^2(t)$ . La fonction de densité de probabilité ( $pdf^{(8)}$ ) de n'importe quel échantillon de  $z(t)$  est alors donnée par [90] :

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \frac{1}{\sqrt{z}} f_y(\sqrt{z}) U(z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{z}{2\sigma_y^2}} U(z), \end{aligned} \quad (2.50)$$

où  $\sigma_y^2$  est égale à  $\sigma_s^2 + \sigma_b^2$ ,  $f_y$  suit une loi gaussienne et  $U$  est la fonction d'échelon unité. Nous pouvons alors établir la fonction de répartition de  $z$  par intégration de (2.50).

Ainsi,

$$\begin{aligned} F_z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\frac{v}{2\sigma_y^2}} dv \\ &= \text{erf}\left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2}\sigma_y}\right), \end{aligned} \quad (2.51)$$

où  $\text{erf}(\cdot)$  est la fonction d'erreur définie par la relation :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (2.52)$$

Ainsi, la CCDF du PR du signal reçu continu  $y(t)$  est approximativement donnée par

$$\Pr[\text{PR}\{y(t)\} > PR_0] \approx 1 - \left(\text{erf}\left(\frac{\sqrt{PR_0}}{\sqrt{2}}\right)\right)^{2.8N}. \quad (2.53)$$

Le résultat de simulation est représenté sur la figure 2.25.

### 2.5.3.2 Cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats (Rayleigh flat fading)

Nous allons chercher la CCDF du PR d'un signal OFDM reçu perturbé par un canal de Rayleigh représenté sur la figure 2.24.

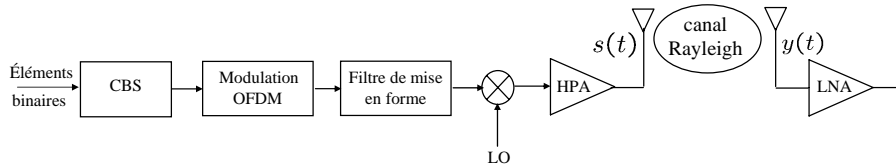


FIG. 2.24 – Schéma simplifié d'un système SISO-OFDM avec canal de Rayleigh

<sup>(8)</sup>Probability Density Function

A partir de cette figure, nous pouvons écrire pour n'importe quel échantillon de  $y(t)$  :

$$y(t) = \alpha(t)s(t) + b(t) = x(t) + b(t). \quad (2.54)$$

Un échantillon du signal reçu  $y(t)$  peut être exprimé comme :

$$y = \alpha s + b = x + b, \quad (2.55)$$

où  $\alpha$  est une variable aléatoire de Rayleigh qui caractérise l'atténuation du canal, dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma_\alpha^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2}}, \alpha \geq 0. \quad (2.56)$$

La densité de probabilité de  $x = \alpha s$ , où  $s$  est un signal OFDM qui suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_s$  peut être exprimée par :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha\left(\frac{x}{s}\right) f_S(s) \frac{1}{|s|} ds. \quad (2.57)$$

Après développements, nous trouvons :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sigma_\alpha\sigma_s} e^{-\frac{|x|}{\sigma_\alpha\sigma_s}}. \quad (2.58)$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire  $y$  est alors donnée par :

$$F_Y(y) = Pr[x + b \leq y] = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{b=-\infty}^{y-x} f_B(b) f_X(x) db dx. \quad (2.59)$$

Soit encore

$$\begin{aligned} F_Y(y) = Pr[x + b \leq y] &= \frac{1}{4} \left[ 2 + 2 \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma_b}\right) + e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\sigma_\alpha\sigma_s y}{2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \sigma_\alpha\sigma_s y}{\sqrt{2}\sigma_\alpha\sigma_s\sigma_b}\right) \right. \\ &\quad \left. - e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\sigma_\alpha\sigma_s y}{2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \sigma_\alpha\sigma_s y}{\sqrt{2}\sigma_\alpha\sigma_s\sigma_b}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.60)$$

où  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  est la fonction d'erreur complémentaire définie par

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (2.61)$$

Si nous considérons  $z = y^2$ , nous pouvons écrire la fonction de répartition :

$$F_Z(z) = F_Y(\sqrt{z}) - F_Y(-\sqrt{z}), \quad (2.62)$$

ou encore

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \frac{1}{2} \left[ 2 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2}\sigma_b}\right) + e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\sigma_\alpha\sigma_s\sqrt{z}}{2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \sigma_\alpha\sigma_s\sqrt{z}}{\sqrt{2}\sigma_\alpha\sigma_s\sigma_b}\right) \right. \\ &\quad \left. - e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\sigma_\alpha\sigma_s\sqrt{z}}{2\sigma_\alpha^2\sigma_s^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \sigma_\alpha\sigma_s\sqrt{z}}{\sqrt{2}\sigma_\alpha\sigma_s\sigma_b}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Grace à l'indépendance des  $N$  échantillons d'un symbole du signal  $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_{N-1}]$ , la probabilité qu'aucun d'entre eux ne dépasse  $PR_0$  est donnée par :

$$\begin{aligned} Pr \left[ \max_{0 \leq n < N} \{z\} \leq PR_0 \right] &\approx \left[ erf \left( \frac{\sqrt{PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_b} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\sigma_\alpha \sigma_s \sqrt{PR_0}}{2\sigma_\alpha^2 \sigma_s^2}} erf c \left( \frac{\sigma_b^2 + \sigma_\alpha \sigma_s \sqrt{PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_\alpha \sigma_s \sigma_b} \right) \\ &\left. - \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\sigma_\alpha \sigma_s \sqrt{PR_0}}{2\sigma_\alpha^2 \sigma_s^2}} erf c \left( \frac{\sigma_b^2 - \sigma_\alpha \sigma_s \sqrt{PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_\alpha \sigma_s \sigma_b} \right) \right]^N. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Enfin, la CCDF du PR du signal reçu s'exprime par :

$$\begin{aligned} Pr \left[ PR\{y(t)\} > PR_0 \right] &\approx 1 - \left[ erf \left( \frac{\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_b} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\sigma_\alpha \sigma_s \sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\sigma_\alpha^2 \sigma_s^2}} erf c \left( \frac{\sigma_b^2 + \sigma_\alpha \sigma_s \sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_\alpha \sigma_s \sigma_b} \right) \\ &\left. - \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\sigma_\alpha \sigma_s \sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\sigma_\alpha^2 \sigma_s^2}} erf c \left( \frac{\sigma_b^2 - \sigma_\alpha \sigma_s \sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_\alpha \sigma_s \sigma_b} \right) \right]^{2.8N}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

où  $P_m$  est la puissance moyenne de  $y(t)$  donnée par :

$$P_m = 2\sigma_\alpha^2 \sigma_s^2 + \sigma_b^2. \quad (2.66)$$

La figure 2.25 montre la comparaison de la CCDF du PR d'un signal OFDM perturbé par un canal BBAG avec celui qui est perturbé par un canal de Rayleigh à évanouissements plats. Les courbes sont obtenues par simulation de  $10^5$  symboles avec  $N = 1024$  sous-porteuses modulées en QPSK, le rapport signal sur bruit (RSB) est égal à 10 dB et le facteur de suréchantillonnage est  $L = 4$ . Nous pouvons remarquer que les courbes obtenues confirment parfaitement les résultats théoriques obtenus.

### 2.5.3.3 Cas d'un canal de Rayleigh de type multitrajets

Dans cette partie, nous allons montrer des simulations de CCDF du PR d'un signal OFDM perturbé par un canal de Rayleigh à trajets multiples présenté dans le premier chapitre (§1.10.2.1) par la relation :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N_p-1} \alpha_n s(t - \tau_n) + b(t). \quad (2.67)$$

La figure 2.26 montre la comparaison de la CCDF du PR d'un signal OFDM perturbé par un canal BBAG avec celui qui est perturbé par un canal de Rayleigh à trajets multiples. De cette figure, nous pouvons alors constater que plus le nombre de trajets est élevé et

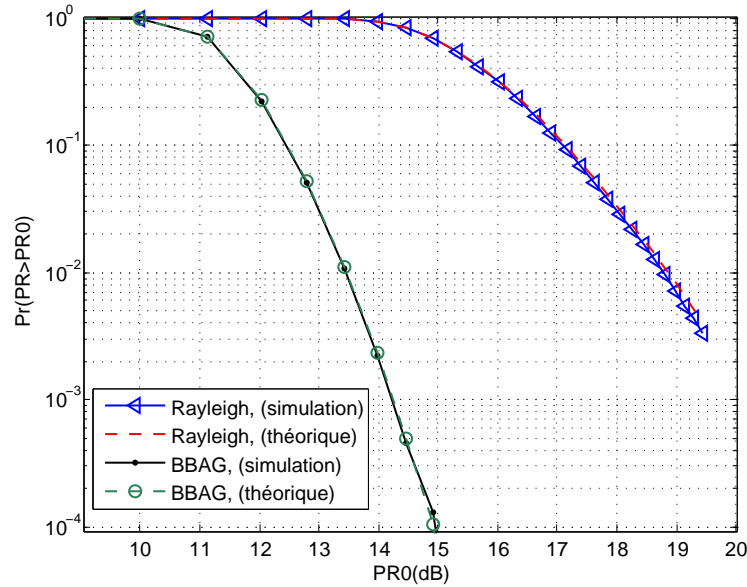


FIG. 2.25 – CCDFs du PR d'un signal reçu dans un système SISO-OFDM (canal BBAG et canal de Rayleigh à évanouissements plats)

plus le PR du signal reçu diminue (théoriquement, lorsque le nombre de trajets tend vers l'infini, la CCDF du PR d'un signal OFDM perturbé par un canal de Rayleigh à trajets multiples tend vers la CCDF du PR d'un signal OFDM perturbé par un canal BBAG). Cette diminution du PR n'est pas étonnante et nous pouvons l'interpréter grâce au théorème de la limite centrale. La borne inférieure du PR dans le cas d'un canal à trajets multiples est alors donnée par celle obtenue dans le cas du canal BBAG.

## 2.6 Conclusion

Le Power Ratio (PR) est un paramètre qui est généralement utilisé pour dimensionner le "recul" à prendre afin d'amplifier le signal dans une zone linéaire évitant ainsi les distorsions. Réduire alors le Power Ratio permettrait de diminuer le recul d'entrée afin de gagner en rendement. Mais tout d'abord, il est primordial de cerner cette notion de Power Ratio, ce que nous avons présenté au début de ce chapitre.

Compte tenu de la spécificité des signaux (monoporteuse, multiporteuse), nous en avons analysé le PR. Dans le cas monoporteuse, nous avons montré la nécessité de prendre en compte le suréchantillonnage dans le calcul du Power Ratio. Nous avons également, analysé l'influence du filtrage notamment le filtre de mise en forme (Nyquist et en racine de Nyquist) sur le Power Ratio. Nous en avons conclu que seul le facteur de roll off influençait grandement le PR en sortie du filtre. Nous avons ensuite analysé l'influence du canal sur le PR en réception. Dans le cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats, la dégradation du PR peut atteindre un dizaine de  $dB$  (pour un RSB de  $10\text{ dB}$  et pour un seuil de dépassement de  $10^{-4}$ ).



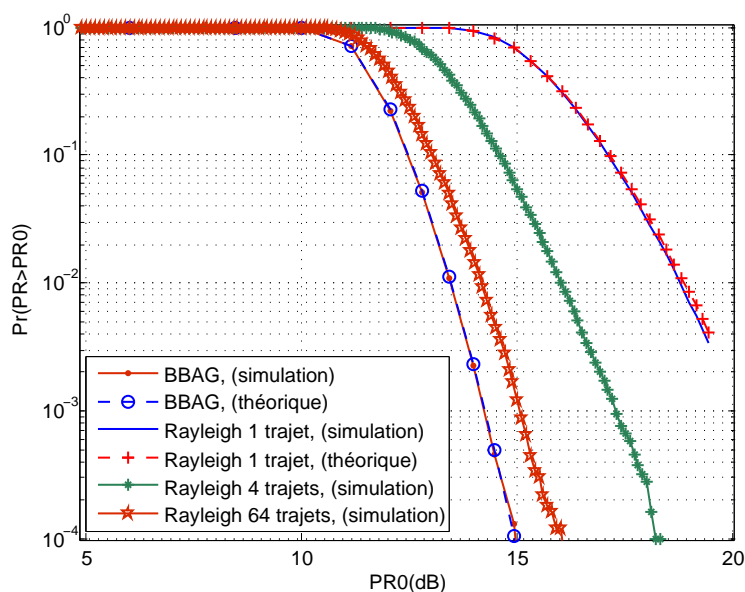


FIG. 2.26 – CCDFs du PR d'un signal reçu dans un système SISO-OFDM (canal BBAG, canal de Rayleigh à évanouissements plats (1 trajet) et à trajets multiples),  $N = 1024$ ,  $L = 4$ ,  $RSB = 10 \text{ dB}$ , constellation QPSK

Pour le cas multiporteuse, nous avons analysé l'influence du filtrage de mise en forme sur le PR. Le filtre retenu est un filtre en racine de Nyquist. Nous avons montré que ce filtre ne modifiait pas le PR du signal en sortie, ce dernier conservant ses propriétés gaussiennes. Nous avons ensuite théoriquement donné les expressions du PR des signaux perturbés par des canaux BBAG et de Rayleigh à évanouissements plats. Le canal BBAG ne modifie pas le PR alors que le canal de Rayleigh à évanouissements plats le dégrade d'environ  $6 \text{ dB}$  pour un seuil de dépassement de  $10^{-4}$ . Enfin, nous avons constaté que, dans le cas d'un canal de Rayleigh à trajets multiples, le PR diminuait lorsque le nombre de trajets augmentait. La borne inférieure du PR dans le cas d'un canal à trajets multiples est alors donnée par celle obtenue dans le cas du canal BBAG, et ceci en raison du théorème de la limite centrale.

Après avoir étudié le PR dans un cas SISO, nous allons analyser ce PR dans le cas des systèmes MIMO. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Power Ratio dans un contexte MIMO

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction aux systèmes MIMO</b>	<b>65</b>
3.1.1	Modèle de canal MIMO	67
3.1.2	Capacité des canaux MIMO	68
3.1.3	Codage espace-temps (STC)	69
<b>3.2</b>	<b>Définition du Power Ratio (PR) des systèmes MIMO</b>	<b>73</b>
<b>3.3</b>	<b>Analyse du PR en MIMO avec modulations monoporteuse</b>	<b>73</b>
3.3.1	Analyse du PR du signal reçu d'un système MIMO basé sur un schéma d'Alamouti	74
3.3.2	Analyse du PR en MIMO basé sur d'autres codes espace-temps	76
3.3.3	Influence des canaux BBAG et de Rayleigh sur la distribution du PR	80
3.3.4	Conclusion	82
<b>3.4</b>	<b>Analyse du PR des systèmes MIMO-OFDM</b>	<b>82</b>
3.4.1	Principe de l'association MIMO et OFDM	82
3.4.2	Analyse du PR d'un système MIMO-OFDM basé sur un schéma d'Alamouti	84
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>

---

### 3.1 Introduction aux systèmes MIMO

Les communications sur le canal radio-mobile se sont fortement développées ces dernières années, aussi bien en terme de nombre d'utilisateurs que de débit par utilisateur. Ceci entraîne la saturation des ressources radio-fréquence dans les lieux à forte densité de population. Dès lors, il existe une forte demande pour augmenter l'efficacité spectrale de ces communications.

Par ailleurs, les transmissions via le canal radio-mobile sont fortement perturbées par les évanouissements du signal, dus à la fois aux trajets multiples et aux interférences entre symboles comme nous l'avons vu dans le chapitre 1.

Ainsi, pour pallier ces inconvénients, une solution est étudiée depuis quelques années. Il s'agit d'une architecture de transmission basée sur l'utilisation de plusieurs antennes à l'émission et à la réception. Ces architectures, dites MIMO<sup>(1)</sup>, ont été développées par les laboratoires Bell en 1997 [91], [92]. Elles permettent d'atteindre à la fois de très hautes efficacités spectrales et de lutter efficacement contre les évanouissements du signal. L'idée générale est de tirer profit de la dimension spatiale du canal et d'exploiter les trajets multiples plutôt que de les supprimer.

Les systèmes MIMO réalisent un multiplexage spatial qui augmente la capacité de la transmission (figure 3.1).

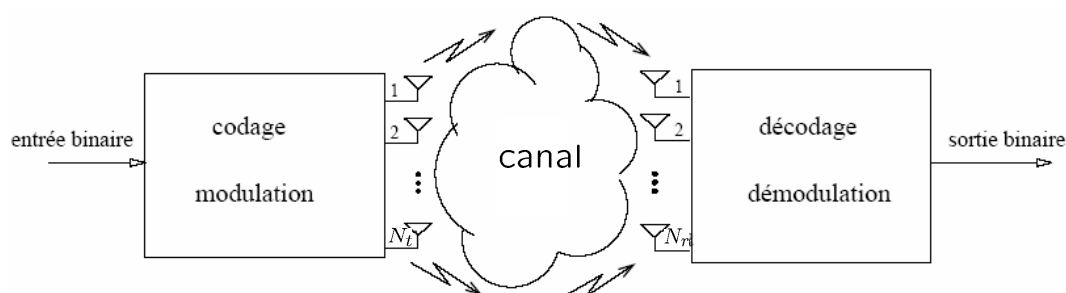


FIG. 3.1 – Schéma d'un système de transmission MIMO avec  $N_t$  émetteurs et  $N_r$  récepteurs

Les antennes émettrices transmettent chacune un symbole différent, indépendant de celui des autres antennes, mais en utilisant la même modulation, la même fréquence porteuse et en étant synchronisées. La bande passante utilisée reste identique à celle d'un système mono-émetteur (SISO), mais comme plusieurs symboles sont émis, l'efficacité spectrale augmente.

En présence de réflecteurs, le signal émis par une antenne arrive sous plusieurs versions, retardées et atténuées, sur chaque antenne réceptrice. La somme de ces échos forme des interférences qui peuvent être soit constructives, soit destructives (évanouissements). Si les antennes réceptrices sont suffisamment espacées, typiquement d'une demie-longueur d'onde, elles ne seront que rarement victimes d'évanouissements simultanés. Ceci facilite la récupération de l'information émise. Prenons par exemple une transmission SISO, avec des évanouissements de l'ordre de 20 à 40 dB [93]. Avec un système MIMO à seulement deux émetteurs et deux récepteurs, les évanouissements ne seront plus que d'environ 10 dB, soit un gain de 10 à 30 dB qui facilite grandement la réception.

Une autre intérêt des systèmes MIMO est de pouvoir utiliser toutes les techniques des transmissions SISO et toutes leurs formes de diversité. A cela s'ajoutent la diversité spatiale et la multiplexage spatial.

- La diversité spatiale consiste à utiliser plusieurs antennes de réception distantes d'au moins la distance de cohérence du canal (distance minimale pour obtenir des évanouissements indépendants),

<sup>(1)</sup>Multiple Input Multiple Output

- Le multiplexage spatial consiste à séparer les données en plusieurs voies parallèles, qui sont alors émises simultanément sur les différentes antennes. La capacité du système s'en trouve améliorée sans augmenter la puissance à l'émission.

### 3.1.1 Modèle de canal MIMO

Considérons un système MIMO avec  $N_t$  émetteurs et  $N_r$  récepteurs. On suppose que la bande de fréquence utilisée pour la transmission est assez étroite pour que le canal soit non sélectif en fréquence (canal à évanouissements plats). Chaque trajet entre une antenne émettrice et une antenne réceptrice peut alors être caractérisé par un gain complexe  $h_{ji}$  représentant le coefficient d'évanouissement entre le  $i^e$  émetteur et le  $j^e$  récepteur (figure 3.2). A la réception, chaque antenne reçoit la somme des symboles  $x_i$  transmis simultanément par chacune des  $N_t$  antennes émettrices. Le signal  $y_j$  reçu par la  $j^e$  antenne peut par conséquent s'écrire de manière discrète :

$$y_j = \sum_{i=1}^{N_t} h_{ji} x_i + b_j, \quad j = 1, \dots, N_r \quad (3.1)$$

où  $b_j$  représente un terme de bruit qui perturbe le signal, généralement considéré comme BBAG.

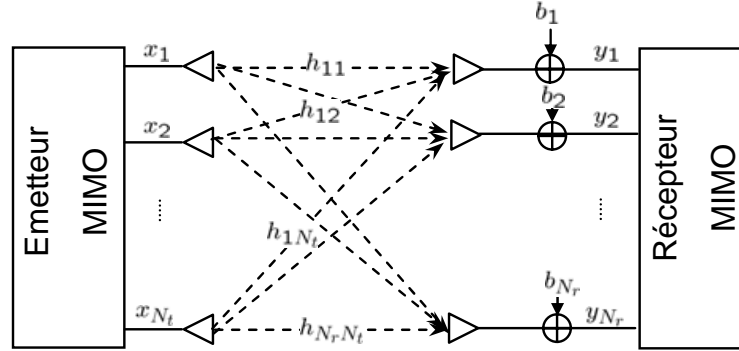


FIG. 3.2 – Schéma d'un système de transmission MIMO

Si l'on considère à présent l'ensemble des symboles reçus simultanément par les antennes, la relation précédente s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (3.2)$$

où  $\bar{\mathbf{H}}$  est la matrice de canal de taille  $N_r \times N_t$  définie par l'ensemble des trajets :

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1N_t} \\ h_{21} & \dots & h_{2N_t} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N_r 1} & \dots & h_{N_r N_t} \end{bmatrix},$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur des symboles émis de taille  $N_t \times 1$  et  $\mathbf{b}$  le vecteur de bruit de taille  $N_r \times 1$ .

La majorité des systèmes suppose une parfaite connaissance du canal (CSI<sup>(2)</sup>) à la réception, tandis que la connaissance du canal à l'émission n'est envisagée que dans certaines architectures et sous certaines conditions. En pratique, le canal est estimé par le récepteur à chaque paquet transmis grâce à une séquence d'apprentissage. Dans un contexte de communications purement aveugle, une stratégie peut consister à recourir à l'égalisation aveugle, dont un état de l'art est proposé dans [95]. D'un autre côté, les limites fondamentales des systèmes MIMO en terme de capacité sont approchées si les signaux transmis par les différentes antennes sont orthogonaux et si la répartition de l'énergie sur ces dernières est uniforme [96]. De ces études sont nées différentes architectures espace-temps unitaires [97] ou différentielles [98]. Nous allons aborder d'une manière générale ces techniques de codage espace-temps dans le paragraphe (§3.1.3).

### 3.1.2 Capacité des canaux MIMO

La capacité des systèmes MIMO est un sujet qui a été fortement étudié dans les années passées [93] [99], et dont nous ne présentons ici que les résultats principaux afin d'en montrer l'intérêt. Afin de pouvoir comparer les différentes capacités que nous allons voir, la puissance totale moyenne émise  $P_0$  reste constante. Lorsque le nombre d'antennes varie à l'émetteur, alors la puissance est répartie entre les  $N_t$  antennes de façon à ce que leur somme reste égale à  $P_0$ . Si aucune connaissance du canal n'est disponible à l'émetteur, la répartition de puissance uniforme est optimale en terme de capacité (chaque antenne émet une puissance  $P_0/N_t$ ) [91].

Pour les relations de capacité, les notations suivantes sont utilisées :

- La puissance du bruit est identique sur chaque antenne réceptrice et est notée  $\sigma_b^2$ ,
- $P_r$  est définie comme la puissance moyenne qui serait reçue sur chaque antenne si un seul émetteur utilisait toute la puissance  $P_0$  (donc un canal SIMO<sup>(3)</sup>),
- Le rapport signal sur bruit (RSB) sur chaque antenne de réception est  $\gamma_r = P_r/\sigma_b^2$ , et est indépendant de  $N_t$ .

#### 3.1.2.1 Capacité du canal SISO

La capacité d'un canal SISO est donnée par :

$$C_{SISO} = \log_2(1 + \gamma_r) \text{ bps/Hz}. \quad (3.3)$$

Elle augmente lentement, en fonction du logarithme de  $1 + \gamma_r$ . Lorsque le RSB est élevé, un gain de 3 dB sur  $\gamma_r$  ne fournira une augmentation de capacité que d'un bit par seconde par hertz (bps/Hz).

#### 3.1.2.2 Capacité du canal SIMO

La capacité d'un canal SIMO est donnée par [100] :

$$C_{SIMO} = \log_2(1 + \gamma_r N_r^2) \text{ bps/Hz}. \quad (3.4)$$

Cette capacité augmente en fonction du logarithme de  $1 + \gamma_r N_r^2$ , soit un peu plus rapidement que dans le cas SISO. Elle reste toutefois petite devant celle du canal MIMO, car la dimension spatiale du système n'est que partiellement exploitée.

---

<sup>(2)</sup>Channel State Information

<sup>(3)</sup>Single Input Multiple Output

### 3.1.2.3 Capacité du canal MIMO

Pour un canal MIMO, avec une puissance de  $P_0/N_t$  sur chaque émetteur, la capacité est [91], [100] :

$$C_{MIMO} = \log_2(\det[\bar{\mathbf{I}}_{N_r} + \frac{\gamma_r}{N_t} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^*]) \text{ bps/Hz}, \quad (3.5)$$

où  $\bar{\mathbf{I}}_{N_r}$  est une matrice identité de taille  $N_r$ . En particulier lorsque  $N_t$  et  $N_r$  sont grands, l'espérance de la capacité pour un canal de Rayleigh croît proportionnellement à  $N_r$  :

$$E[C_{MIMO}] \approx N_r \log_2(1 + \gamma_r) \text{ bps/Hz}. \quad (3.6)$$

La capacité augmente donc beaucoup plus vite que dans les cas SISO et SIMO. L'avantage en capacité des systèmes MIMO est principalement dû à l'exploitation des trajets multiples. Tout d'abord ils permettent au récepteur de différencier les différentes antennes d'émission, et donc d'émettre plusieurs symboles simultanément. Ensuite, chaque trajet est une réplique du signal émis, et est donc porteur d'information utile. Nous pouvons aussi dire que chaque trajet est l'équivalent du signal direct émis par une antenne virtuelle, ce qui augmente virtuellement le nombre d'antennes émettrices [101], [102].

Le prix à payer pour cette augmentation de la capacité est tout d'abord matériel, avec la multiplication des antennes et de leur électronique associée, mais aussi logiciel, avec des récepteurs nettement plus complexes et demandant plus de puissance de calcul.

### 3.1.3 Codage espace-temps (STC)

Le codage espace-temps (STC<sup>(4)</sup>) est une technique de diversité de transmission qui s'applique aux systèmes MISO<sup>(5)</sup> et MIMO. Cette technique s'avère être bien adaptée aux systèmes dans lesquels le récepteur est muni d'une seule antenne à cause d'une contrainte de coût et/ou d'espace. Citons par exemple le cas des réseaux cellulaires où les terminaux mobiles sont munis d'une seule antenne et où il est possible de munir la station de base de deux antennes ou plus. Les codes espace-temps permettent d'introduire de la décorrélation spatiale et temporelle entre les signaux émis, afin qu'à la réception le signal reçu soit bien décodé.

Une des premières formes de diversité de transmission est le saut d'antenne (antenna hopping). Dans cette technique l'émetteur alterne la transmission de ses symboles entre deux antennes ou plus afin d'atteindre le maximum de diversité. Considérons un émetteur avec deux antennes. Il peut transmettre une partie de ses symboles sur la première antenne puis les symboles restants sur l'autre.

Récemment, une multitude de techniques de codage ont vu le jour dans le but d'une meilleure utilisation de la diversité de transmission. Ces techniques de codage espace-temps peuvent être classées en deux catégories : (i) les codes espace-temps en treillis (STTC<sup>(6)</sup>), (ii) les codes espace-temps en Bloc (STBC<sup>(7)</sup>). Dans ce qui suit nous présentons brièvement ces deux techniques de codage en insistant sur les codes STBC, sur lesquels nous nous focalisons dans la suite de cette thèse.

---

<sup>(4)</sup>Space-Time Coding

<sup>(5)</sup>Multiple Input Single Output

<sup>(6)</sup>Space-Time Trellis Coding

<sup>(7)</sup>Space-Time Block Coding

### 3.1.3.1 Codes espace-temps en treillis (STTC)

Initialement le concept de codage espace-temps en treillis a été introduit par Tarokh, Seshadri et Calderbank dans leur papier de référence [103]. L'émetteur est constitué d'un ensemble de registres à décalage et de fonctions algébriques générant un mot de code de  $N_t$  symboles transmis simultanément par le réseau d'émission. Le récepteur utilise communément un algorithme de Viterbi pour rechercher le chemin avec la métrique la plus faible, et donc le plus probable.

Cette technique combine les avantages de la diversité spatiale avec ceux du codage en treillis. Cependant, l'inconvénient majeur des codes STTC est la complexité des algorithmes de décodage.

Afin d'éviter cette complexité de décodage, des codes espace-temps en bloc ont été proposés.

### 3.1.3.2 Codes espace-temps en Bloc orthogonaux(O-STBC)

Les codes espace-temps en blocs orthogonaux (O-STBC<sup>(8)</sup>) utilisent des symboles complexes issus d'une modulation suivie d'un codage à la fois en espace et en temps. Le but de ces codes est d'exploiter la diversité d'émission des systèmes multi-antennes. Cependant, ils n'exploitent pas la capacité des systèmes MIMO à cause de la redondance intrinsèque du code utilisé. La capacité des codes espace-temps en blocs orthogonaux considérant des canaux de Rayleigh décorrelés est :

$$C = \nu \cdot E\{\log_2(1 + \frac{\rho}{N_t} \chi_{2nm}^2)\}, \quad (3.7)$$

avec  $n = \min(N_t, N_r)$  et  $m = \max(N_t, N_r)$ ,  $\chi_{2nm}^2$  est une loi de chi-deux  $\chi^2$  à  $2nm$  degrés de liberté,  $\rho$  est le facteur de corrélation entre les canaux sur 2 durée symboles et  $\nu$  le rendement du code espace-temps défini comme le rapport entre le nombre de symboles  $N_s$  et le nombre de durées symboles  $T$  pendant lequel ces symboles ont été émis. On a donc  $\nu = N_s/T$ . Le code d'Alamouti est le seul code espace-temps en blocs à pouvoir exploiter la capacité optimale pour  $N_t = 2$  et  $N_r = 1$  grâce à son rendement unitaire [105]. Malgré ces inconvénients, ils ont l'avantage d'être simples à décoder, puisque décodables avec une simple combinaison linéaire des signaux reçus.

#### Le code espace-temps en blocs d'Alamouti

La capacité du code d'Alamouti avec  $N_t = 2$  et  $N_r = 1$  ayant un rendement de code  $\nu = 1$  considérant des canaux de Rayleigh décorrelés est :

$$C = E\{\log_2(1 + \frac{\rho}{2} \chi_4^2)\}. \quad (3.8)$$

Le code d'Alamouti appelé également code  $\mathcal{G}_2$  s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{X}}_{\mathcal{G}_2} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix},$$

<sup>(8)</sup>Orthogonal Space-Time Block Coding

avec  $\overline{\mathbf{X}}_{\mathcal{G}_2}$  la matrice espace-temps du signal transmis. Sous les hypothèses que les coefficients d'évanouissement sont constants sur deux durées symboles consécutives, le signal reçu est égal à :

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\overline{\mathbf{X}}_{\mathcal{G}_2} + \mathbf{b}, \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]$  est le vecteur reçu,  $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2]$  est le vecteur du canal constant sur deux temps symboles et  $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2]$  est un vecteur constitué de bruits blancs additifs gaussiens (BBAG).

Ce vecteur reçu est modifié pour le processus de décodage en un vecteur  $\mathbf{y}' = [y_1 \ y_2^*]^T$  menant à l'équation suivante :

$$\mathbf{y}' = \overline{\mathbf{H}}\mathbf{x} + \mathbf{b}', \quad (3.10)$$

avec

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ -h_2^* & h_1^* \end{bmatrix}.$$

### Les codes espace-temps en blocs de Tarokh

Le code d'Alamouti à deux antennes d'émission a été généralisé par Tarokh afin d'être appliqué à un nombre d'antennes d'émission plus élevé [106]. Tarokh a abouti à des codes espace-temps pour trois et quatre antennes d'émission. Cependant ces codes ont l'inconvénient d'avoir un rendement de code  $\nu$  inférieur au rendement unitaire du code d'Alamouti. Ces codes se nomment  $\mathcal{G}_3$  et  $\mathcal{G}_4$  pour les codes de rendement  $\nu = 1/2$  pour respectivement trois et quatre antennes. Les codes  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_4$  sont des codes de rendement  $\nu = 3/4$ . Les matrices des codes  $\mathcal{G}_3$ ,  $\mathcal{G}_4$ ,  $\mathcal{H}_3$ ,  $\mathcal{H}_4$  sont respectivement les suivantes :

$$\overline{\mathbf{X}}_{\mathcal{G}_3} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 \\ -x_3 & x_4 & x_1 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 \\ x_1^* & x_2^* & x_3^* \\ -x_2^* & x_1^* & -x_4^* \\ -x_3^* & x_4^* & x_1^* \\ -x_4^* & -x_3^* & x_2^* \end{bmatrix}^T,$$

$$\overline{\mathbf{X}}_{\mathcal{G}_4} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^* \\ -x_2^* & x_1^* & -x_4^* & x_3^* \\ -x_3^* & x_4^* & x_1^* & -x_2^* \\ -x_4^* & -x_3^* & x_2^* & x_1^* \end{bmatrix}^T,$$

$$\overline{\mathbf{X}}_{\mathcal{H}_3} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \frac{x_3}{\sqrt{2}} \\ -x_2^* & x_1^* & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{(-x_1 - x_1^* + x_2 - x_2^*)}{2} \\ \frac{x_3}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{(x_2 + x_2^* + x_1 - x_1^*)}{2} \end{bmatrix}^T,$$



$$\overline{\mathbf{X}}_{\mathcal{H}_4} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \frac{x_3}{\sqrt{2}} & \frac{x_3}{\sqrt{2}} \\ -x_2^* & x_1^* & \frac{x_3}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{(-x_1-x_1^*+x_2-x_2^*)}{2} & \frac{(-x_2-x_2^*+x_1-x_1^*)}{2} \\ \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{(x_2+x_2^*+x_1-x_1^*)}{2} & -\frac{(x_1+x_1^*+x_2-x_2^*)}{2} \end{bmatrix}^T.$$

### Codes espace-temps en blocs orthogonaux avec commutation entre groupes d'antennes

On peut appliquer le principe de commutation entre antennes (switching antennas) aux codes espace-temps en blocs orthogonaux. Dans un système MIMO à quatre antennes d'émission, le code O-STBC est choisi dans le but de garder un rendement  $\nu = 1$ . Le code d'Alamouti est appliqué alternativement aux antennes 1 et 2 puis aux antennes 3 et 4. Les symboles sont émis d'abord sur le premier groupe d'antennes 1 et 2 avec une puissance de  $P/2$ . Ensuite, les autres symboles sont émis sur le deuxième groupe d'antennes d'émission 3 et 4. La puissance totale émise par durée symbole est donc  $P$  avec une antenne de réception. La matrice que l'on obtient est la suivante :

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_2^1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{G}_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* & 0 & 0 \\ x_2 & x_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & -x_4^* \\ 0 & 0 & x_4 & x_3^* \end{bmatrix}.$$

Cette approche par commutation permet d'obtenir une diversité spatiale plus grande que le système initial à deux antennes, en particulier lorsqu'il existe de la corrélation entre antennes d'émission. La diversité apportée par le canal MIMO peut être collectée par le récepteur de manière différente grâce à cette commutation entre antennes tout en gardant un rendement de code unitaire avec le code d'Alamouti. On peut également appliquer cette commutation aux codes de Tarokh ou à d'autres codes espace-temps non orthogonaux.

#### 3.1.3.3 Les Codes espace-temps non orthogonaux

V. Tarokh a démontré qu'il n'existe pas de codes espace-temps en blocs orthogonaux à plus de deux antennes de rendement unitaire avec une diversité égale au nombre d'antennes d'émission [107]. Afin de conserver le rendement unitaire pour des systèmes à plus de deux antennes, le code espace-temps en blocs est nécessairement non orthogonal.

Nous nous intéressons aux codes espace-temps non orthogonaux à quatre antennes d'émission de rendement unitaire. La puissance totale émise est  $P$  avec une seule antenne d'émission. Pour un système à 4 antennes d'émission, chaque antenne émet un symbole sur chaque durée symbole, donc chaque antenne émet un symbole de puissance  $P/4$ .

### Code proposé par Jafarkhani

Le code espace-temps proposé par Jafarkhani dans [103] est le suivant :

$$\bar{\mathbf{X}}_{Jaf} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_2^1 & -\mathcal{G}_2^{2*} \\ \mathcal{G}_2^2 & \mathcal{G}_2^{1*} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}_{Jaf} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* & -x_3^* & x_4 \\ x_2 & x_1^* & -x_4^* & -x_3 \\ x_3 & -x_4^* & x_1^* & -x_2 \\ x_4 & x_3^* & x_2^* & x_1 \end{bmatrix}.$$

Sous les hypothèses que les coefficients d'évanouissement sont constants sur quatre durées symboles consécutives, le signal reçu pour  $N_t = 4$  antennes d'émission et  $N_r = 1$  antenne de réception est alors donné par :

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\bar{\mathbf{X}}_{Jaf} + \mathbf{b}. \quad (3.11)$$

## 3.2 Définition du Power Ratio (PR) des systèmes MIMO

Pour éviter des distorsions non linéaires dans les amplificateurs de puissance, le PR de tous les signaux émis doivent être simultanément aussi faibles que possible. Puisque la performance est régie par le PR des pires cas, le PR en émission noté  $\text{PR}_{MIMO-e}$  pour un système MIMO est défini comme le maximum des PRs mesurés sur chacune des antennes qui constituent l'émetteur. Le PR mesuré sur l'antenne  $i$  d'émission est définie comme le rapport de la puissance maximale du signal de la branche  $i$  et de sa puissance moyenne. Il peut donc être exprimé comme [104]

$$\text{PR}_{MIMO-e} = \max_{1 \leq i \leq N_t} \text{PR}_i, \quad (3.12)$$

où  $\text{PR}_i = \frac{\max |x_i(t)|^2}{E[|x_i(t)|^2]}$ . Ici,  $E[|x_i(t)|^2]$  représente la puissance moyenne du signal émis par la  $i^{\text{eme}}$  antenne.

Dans notre étude, nous nous intéressons au PR à la reception (à l'entrée de l'amplificateur à faible bruit LNA) noté  $\text{PR}_{MIMO-r}$ . Ainsi, nous définissons le PR d'un système MIMO à la réception comme le PR calculé sur une des antennes réceptrices, c'est-à-dire le PR de la somme des signaux reçus sur cette antenne :

$$\text{PR}_{MIMO-r} = \begin{cases} \text{PR}\{y_j\} = \text{PR}\left\{ \sum_{i=1}^{N_t} h_{ji}x_i + b_j \right\} \\ j = 1, \dots, N_r. \end{cases} \quad (3.13)$$

## 3.3 Analyse du PR en MIMO avec modulations monoporteuse

Les antennes multiples aux stations de base et aux terminaux dans le cas d'un système cellulaire génèrent une somme de plusieurs signaux à chaque antenne de réception. Ce signal doit être amplifié par un LNA. Malheureusement, les caractéristiques non-linéaires

du LNA et l'enveloppe non-constante du signal reçu vont produire des distorsions non-linéaires et des intermodulations.

Dans la suite, nous allons quantifier les fluctuations du signal reçu en déduisant le PR dans le cas d'un cas canal sans bruit et en donnant une simulation de la fonction de répartition de ce signal perturbé par un canal à BBAG et par un canal de Rayleigh à évanouissements plats.

### 3.3.1 Analyse du PR du signal reçu d'un système MIMO basé sur un schéma d'Alamouti

Le système de communications employant le modèle d'Alamouti est illustré sur la figure 3.3.

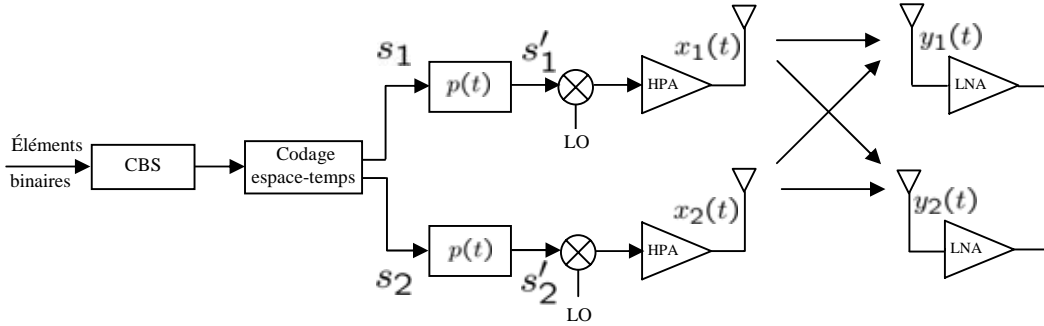


FIG. 3.3 – Système de communications employant le schéma d'Alamouti

Nous déduisons de la figure 3.3 des signaux à la sortie du codeur espace-temps d'Alamouti comme :

$$s_1(t) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} [c_{2k}\delta(t - 2kT) - c_{2k+1}^*\delta(t - (2k + 1)T)], \quad (3.14)$$

$$s_2(t) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} [c_{2k+1}\delta(t - 2kT) + c_{2k}^*\delta(t - (2k + 1)T)], \quad (3.15)$$

où  $\delta(t)$  est un impulsion de Dirac à l'instant  $t = 0$ .

Les signaux aux sorties des filtres de Nyquist  $p(t)$  sont alors :

$$s'_1(t) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} [c_{2k}p(t - 2kT) - c_{2k+1}^*p(t - (2k + 1)T)], \quad (3.16)$$

$$s'_2(t) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} [c_{2k+1}p(t - 2kT) + c_{2k}^*p(t - (2k + 1)T)]. \quad (3.17)$$

Maintenant, nous analysons le signal reçu par une des antennes du réception en considérant un amplificateur de puissance (HPA) linéaire à l'émetteur avec un gain  $G = 1$  et un canal sans bruit :

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \Re\{s'_1(t)e^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{s'_2(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \\
&= \Re\{(s'_1(t) + s'_2(t))e^{j2\pi f_0 t}\}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \Re\left\{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} [(c_{2k} + c_{2k+1})p(t - 2kT) \right. \\
&\quad \left. + (c_{2k}^* - c_{2k+1}^*)p(t - (2k + 1)T)]e^{j2\pi f_0 t}\right\},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

soit

$$y_1(t) = \Re\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k p(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t}\right\}, \tag{3.20}$$

où :

$$\alpha_k = \begin{cases} c_k + c_{k+1} & \text{si } k \text{ est pair} \\ c_k^* - c_{k+1}^* & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Dans le cas d'une modulation BPSK, on déduit les probabilités des symboles  $\alpha_k$  comme :

$$\begin{cases} Pr[\alpha_k = +2] = 0.25 \\ Pr[\alpha_k = 0] = 0.5 \\ Pr[\alpha_k = -2] = 0.25 \end{cases} .$$

La valeur maximale de  $\alpha_k$  est :

$$\max(|\alpha_k|) = 2.$$

D'autre part, la variance de  $\alpha_k$  est donnée par :

$$\sigma_\alpha^2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 p(\alpha_i), \tag{3.21}$$

où  $p(\alpha_i)$  est la probabilité des  $\alpha_i$ . Aussi,

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{4}(+2)^2 + \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{4}(-2)^2 = 2.$$

Finalement,

$$\frac{\max(|\alpha_k|^2)}{\sigma_\alpha^2} = \frac{4}{2} = 2. \tag{3.22}$$

D'après les équations 2.16 et 2.23, le PR du signal reçu par l'antenne-1 calculé à l'entrée de l'amplificateur à faible bruit vaut, en considérant un filtre de Nyquist de facteur de roll off  $\beta$  :

$$\begin{aligned}
PR\{y_1(t)\} &\leq \left(\frac{\max(\alpha_k)}{\sigma_\alpha}\right)^2 \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)} + 3_{dB} \\
&\leq 2 \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)} + 3_{dB}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Dans le cas d'une modulation QPSK, les  $\alpha_k$  ont les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} Pr[\alpha_k = +2 + j2] = \frac{1}{16} \\ Pr[\alpha_k = +2 - j2] = \frac{1}{16} \\ Pr[\alpha_k = +2] = \frac{2}{16} \\ Pr[\alpha_k = +j2] = \frac{2}{16} \\ Pr[\alpha_k = 0] = \frac{4}{16} \\ Pr[\alpha_k = -j2] = \frac{2}{16} \\ Pr[\alpha_k = -2] = \frac{2}{16} \\ Pr[\alpha_k = -2 + j2] = \frac{1}{16} \\ Pr[\alpha_k = -2 - 2j] = \frac{1}{16} \end{cases} ,$$

et on obtient,

$$\frac{\max(|\alpha_k|^2)}{\sigma_\alpha^2} = \frac{8}{4} = 2. \quad (3.24)$$

Le chapitre précédent a révélé que seul le facteur de roll off du filtre de mise en forme (Nyquist ou racine de Nyquist) influençait grandement la valeur du PR de sortie. C'est pour cette raison que dans un contexte de modulation monoporteuse, les variations du PR seront uniquement évaluées en fonction du roll off.

La figure 3.4 montre le PR du signal reçu  $y_1(t)$  en fonction de  $\beta$  (en utilisant filtre de Nyquist) comparé à un système SISO en utilisant une modulation BPSK ou QPSK (la courbe de simulation QPSK est confondue avec la courbe de simulation de BPSK). Les simulations ont été menées en générant  $10^4$  signaux de  $10^3$  symboles. La différence observée entre les résultats de simulation et théoriques pour des valeurs de roll off proches de 0 s'explique de la façon suivante : pour des valeurs de  $\beta$  proches de 0, les valeurs de PR sont beaucoup plus dispersées et la probabilité d'atteindre la valeur maximale du PR (pour des roll off faibles) est donc faible, ce qui impose un nombre de simulation important. Dans le cas présent,  $10^6$  signaux de  $N = 10^5$  symboles ont été simulés.

Enfin, conformément à ce qui était attendu, le PR (en réception) en MIMO est plus important que le PR en SISO.

### 3.3.2 Analyse du PR en MIMO basé sur d'autres codes espace-temps

Dans cette partie, nous analysons le PR des systèmes MIMO en utilisant différentes techniques de codage espace-temps définies dans ce chapitre. Nous comparons ainsi ce PR avec celui du cas SISO.

#### 3.3.2.1 Cas d'un codage espace-temps en blocs orthogonaux avec commutation entre groupes d'antennes

La figure 3.5 représente le cas d'un système MIMO  $4 \times 4$ .

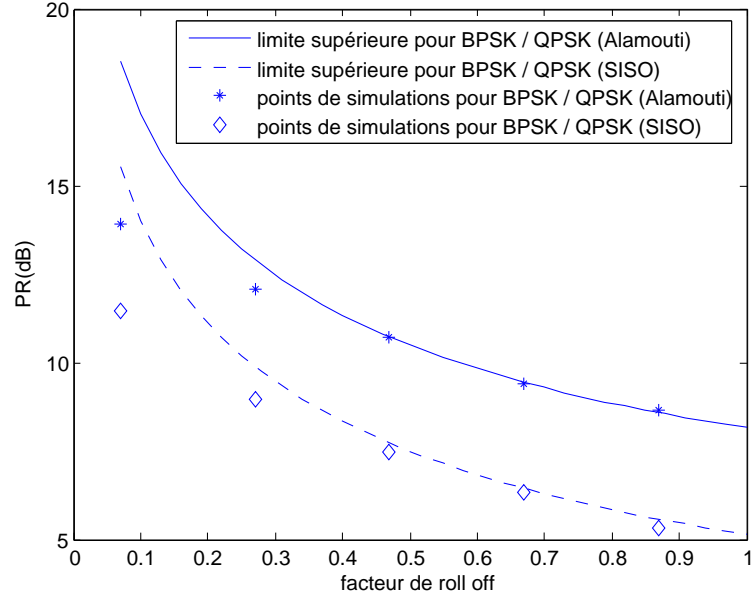


FIG. 3.4 – Le PR à la réception (canal sans bruit) d'un schéma d'Alamouti en fonction de  $\beta$

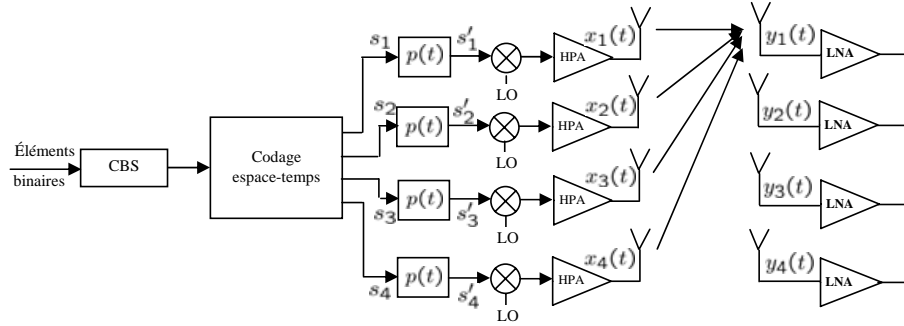


FIG. 3.5 – Système de communications MIMO  $4 \times 4$

D'après 3.1.3.2, nous pouvons écrire les relations des signaux aux sorties des filtres de mise en forme :

$$\begin{aligned}
 s'_1(t) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} [c_{4k}p(t-4kT) - c_{4k+1}^*p(t-(4k+1)T)], \\
 s'_2(t) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} [c_{4k+1}p(t-4kT) + c_{4k}^*p(t-(4k+1)T)], \\
 s'_3(t) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} [c_{4k+2}p(t-(4k+2)T) - c_{4k+3}^*p(t-(4k+3)T)], \\
 s'_4(t) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} [c_{4k+3}p(t-(4k+2)T) + c_{4k+2}^*p(t-(4k+3)T)].
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nous analysons le signal reçu par une des antennes réceptrices en considérant un HPA linéaire à l'émetteur avec un gain unitaire et un canal sans bruit. En considérant  $y_1$  le signal reçu sur l'antenne 1,

$$\begin{aligned}
y_1(t) = & \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} [(c_{4k} + c_{4k+1})p(t - 4kT) \right. \\
& + (c_{4k}^* - c_{4k+1}^*)p(t - (4k + 1)T) \\
& + (c_{4k+2} + c_{4k+3})p(t - (4k + 2)T) \\
& \left. + (c_{4k+2}^* - c_{4k+3}^*)p(t - (4k + 3)T)] e^{j2\pi f_0 t} \right\}, \quad (3.26)
\end{aligned}$$

ou encore,

$$y_1(t) = \Re \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k p(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\}. \quad (3.27)$$

Dans ce cas,

$$\alpha_k = \begin{cases} c_{4k} + c_{4k+1} & \text{pour } k=0,4,8,\dots,N-4 \\ c_{4k}^* - c_{4k+1}^* & \text{pour } k=1,5,9,\dots,N-3 \\ c_{4k+2} + c_{4k+3} & \text{pour } k=2,6,10,\dots,N-2 \\ c_{4k+2}^* - c_{4k+3}^* & \text{pour } k=3,7,11,\dots,N-1 \end{cases} .$$

Le PR du signal reçu par l'antenne-1 présenté à l'entrée de l'amplificateur à faible bruit vaut alors :

$$\text{PR}\{y_1(t)\} \leq \left( \frac{\max(\alpha_k)}{\sigma_\alpha} \right)^2 \frac{\pi^2/8\beta}{(1 - \beta/4)} + 3_{dB}. \quad (3.28)$$

Ici,  $\alpha_k$  a les caractéristiques suivantes, dans le cas de la modulation BPSK :

$$\begin{cases} Pr[\alpha_k = +2] = 0.25 \\ Pr[\alpha_k = 0] = 0.5 \\ Pr[\alpha_k = -2] = 0.25. \end{cases}$$

D'une façon similaire de celle utilisée pour le schéma d'Alamouti, le PR de  $\alpha_k$  est :

$$\frac{\max(|\alpha_k|^2)}{\sigma_\alpha^2} = \frac{4}{2} = 2 .$$

La figure 3.6 illustre le PR du signal reçu  $y_1(t)$  en fonction de  $\beta$ .

### 3.3.2.2 Cas d'un codage espace-temps en blocs non orthogonaux proposé par Jafarkhani

Cette fois ci nous utilisons le code de Jafarkhani comme codage espace-temps présenté en 3.1.3.3. Nous pouvons écrire les expressions mathématiques des signaux aux sorties des filtres de Nyquist  $p(t)$ , comme :

$$\begin{aligned}
s'_1(t) = & \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} \left[ c_{4k} p(t - 4kT) - c_{4k+1}^* p(t - (4k + 1)T) \right. \\
& \left. - c_{4k+2}^* p(t - (4k + 2)T) + c_{4k+3} p(t - (4k + 3)T) \right], \quad (3.29)
\end{aligned}$$

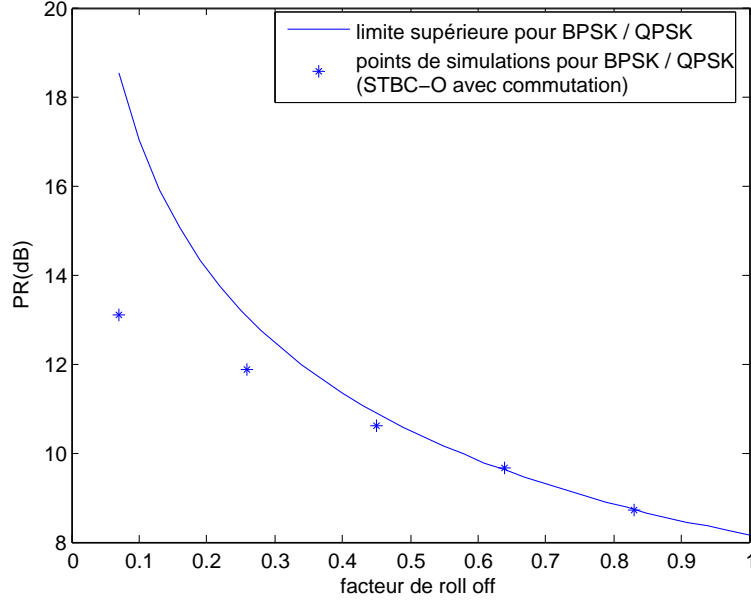


FIG. 3.6 – Le PR en fonction de  $\beta$  avec codage O-STBC avec commutation entre groupes d'antennes

$$\begin{aligned}
s'_2(t) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} \left[ c_{4k+1}p(t-4lT) + c_{4k}^*p(t-(4k+1)T) \right. \\
&\quad \left. - c_{4k+3}^*p(t-(4k+2)T) - c_{4k+2}p(t-(4k+3)T) \right], \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s'_3(t) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} \left[ c_{4k+2}p(t-4lT) - c_{4k+3}^*p(t-(4k+1)T) \right. \\
&\quad \left. + c_{4k}^*p(t-(4k+2)T) - c_{4k+1}p(t-(4k+3)T) \right], \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s'_4(t) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} \left[ c_{4k+3}p(t-4lT) + c_{4k+2}^*p(t-(4k+1)T) \right. \\
&\quad \left. + c_{4k+1}^*p(t-(4k+2)T) + c_{4k}p(t-(4k+3)T) \right]. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Nous analysons le signal reçu par une des antennes de réception en considérant un HPA linéaire à l'émetteur avec un gain unitaire et un canal sans bruit :

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_3(t). \quad (3.33)$$



$$\begin{aligned}
y_1(t) = & \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-3} \left[ (c_{4k} + c_{4k+1} + c_{4k+2} + c_{4k+3})p(t - 4lT) \right. \right. \\
& + (-c_{4k+1}^* + c_{4k}^* - c_{4k+3}^* + c_{4k+2}^*)p(t - (4k+1)T) \\
& + (-c_{4k+2}^* - c_{4k+3}^* + c_{4k}^* + c_{4k+1}^*)p(t - (4k+2)T) \\
& \left. \left. + (c_{4k+3} - c_{4k+2} - c_{4k+1} + c_{4k})p(t - (4k+3)T) \right] e^{j2\pi f_0 t} \right\}. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$y_1(t) = \Re \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k p(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\}, \quad (3.35)$$

où :

$$\alpha_k = \begin{cases} c_{4k} + c_{4k+1} + c_{4k+2} + c_{4k+3} & \text{pour } k=0,4,8\dots N-4 \\ -c_{4k+1}^* + c_{4k}^* - c_{4k+3}^* + c_{4k+2}^* & \text{pour } k=1,5,9\dots N-3 \\ -c_{4k+2}^* - c_{4k+3}^* + c_{4k}^* + c_{4k+1}^* & \text{pour } k=2,6,10\dots N-2 \\ c_{4k+3} - c_{4k+2} - c_{4k+1} + c_{4k} & \text{pour } k=3,7,11\dots N-1 \end{cases}$$

Le PR du signal reçu par l'antenne-1 présenté à l'entrée de l'amplificateur à faible bruit vaut alors :

$$\text{PR}\{y_1(t)\} \leq \left( \frac{\max(\alpha_k)}{\sigma_\alpha} \right)^2 \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)} + 3_{dB}. \quad (3.36)$$

Ici,  $\alpha_k$  a les caractéristiques suivantes dans le cas de la modulation BPSK :

$$\begin{cases} Pr[\alpha_k = +4] = 1/16 \\ Pr[\alpha_k = +2] = 4/16 \\ Pr[\alpha_k = 0] = 6/16 \\ Pr[\alpha_k = -2] = 4/16 \\ Pr[\alpha_k = -4] = 1/16 \end{cases}$$

Ainsi, le PR des  $\alpha_k$  est :

$$\frac{\max(|\alpha_k|^2)}{\sigma_\alpha^2} = \frac{16}{4} = 4.$$

La figure 3.7 montre le PR du signal reçu  $y_1(t)$  en fonction de  $\beta$ .

### 3.3.3 Influence des canaux BBAG et de Rayleigh sur la distribution du PR

Puisque les signaux en sortie des filtres de mise en forme ne suivent pas une loi simple comme les signaux OFDM par exemple, nous ne pouvons donc pas mettre en oeuvre une méthode mathématique pour décrire analytiquement le PR du signal reçu perturbé par un canal BBAG ou canal de Rayleigh à évanouissements plats. Nous allons donc ici donner des résultats de simulation de la distribution du PR (pour un schéma d'Alamouti à deux

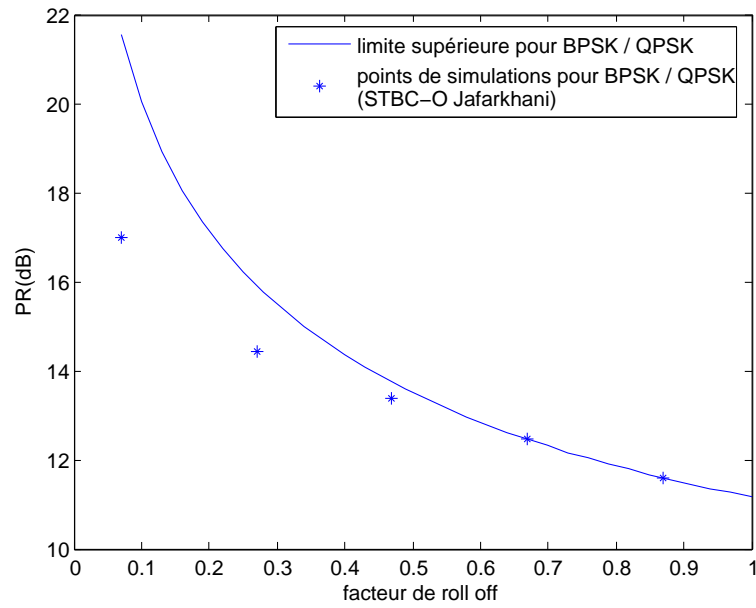


FIG. 3.7 – Le PR en fonction de  $\beta$  avec STBC non orthogonaux proposé par Jafarkhani

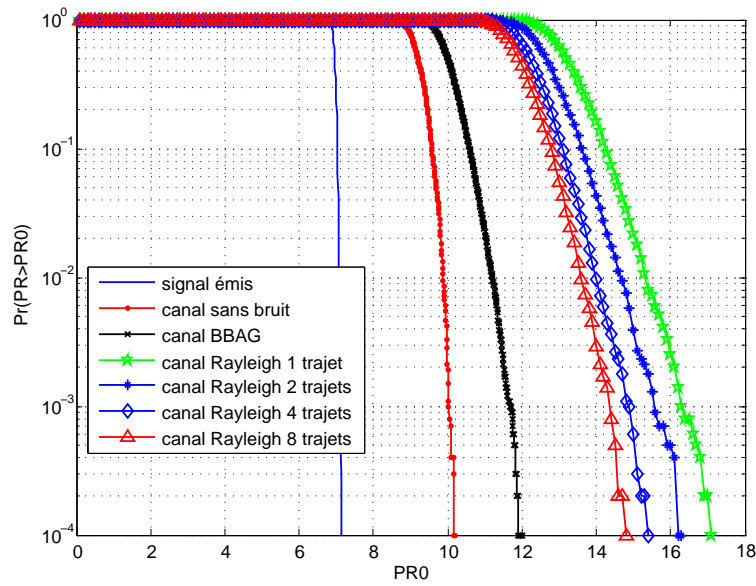


FIG. 3.8 – CCDF du PR des signaux dans un système MIMO à deux antennes,  $N_s = 1000$ , constellation QPSK,  $\beta = 0.5$ ,  $N_e = 4$ ,  $L_f = 12$  symboles,  $RSB = 10dB$

antennes) en réception dans le cas monoporteuse. La figure 3.8 illustre l'évolution du PR en fonction du canal.

Nous observons une dégradation de l'ordre de 5 dB (pour un RSB de 10 dB et pour un seuil de dépassement de  $10^{-4}$ ) entre les PR des signaux émis et reçus dans le cas d'un canal BBAG. Lorsque le canal est de type Rayleigh à évanouissements plats, cette dégradation est de l'ordre de 10 dB pour les mêmes paramètres. Dans le cas de canaux de Rayleigh à trajets multiples, cette dégradation diminue lorsque le nombre de trajets augmente. Encore une fois, la borne inférieure du PR dans le cas d'un canal à trajets multiples est alors donnée par celle obtenue dans le cas du canal BBAG, et ceci en raison du théorème de la limite centrale.

### 3.3.4 Conclusion

L'étude théorique menée montre que le PR du signal reçu dans un système MIMO-monoporteuse avec un canal sans bruit est plus grand que celui d'un simple système SISO-monoporteuse. Ces constatations ont été faites dans le cas de deux antennes d'émission. Il paraît certain qu'en augmentant fortement ce nombre d'antennes, la distribution du signal reçu tendra vers une gaussienne, du fait du théorème de la limite centrale. Cependant, ce cas ne paraît pas réaliste car en pratique le nombre d'antennes d'émission restera toujours limité à quelques unités.

Dans le cas d'un canal de Rayleigh à trajets multiples, nous avons constaté que le PR diminuait lorsque le nombre de trajets augmentait. La borne inférieure du PR dans le cas d'un canal à trajets multiples est alors donnée par celle obtenue dans le cas du canal BBAG, et ceci en raison du théorème de la limite centrale.

## 3.4 Analyse du PR des systèmes MIMO-OFDM

Le modèle de transmission pour les systèmes MIMO que nous avons vu en début de ce chapitre est un modèle à une bande étroite. Dans ce cas, le coefficient de propagation entre deux antennes est représenté par un nombre complexe. Si on élargit la bande passante, le canal peut être représenté par un filtre dont le nombre de coefficients dépend de la largeur de la bande considérée. La matrice de canal  $\bar{\mathbf{H}}$  devient alors une matrice de vecteurs, chaque vecteur correspondant au canal entre deux antennes. Ceci complique beaucoup le récepteur MIMO, et actuellement une solution simple et efficace est largement étudiée [108, 109, 110, 111] : la bande passante du système est divisée en sous-bandes étroites indépendantes [112], le récepteur MIMO travaillant indépendamment dans chaque sous-bande. La division en sous-bandes indépendantes est réalisée grâce à la modulation OFDM, solution classique sur les canaux à évanouissements.

### 3.4.1 Principe de l'association MIMO et OFDM

Comme nous venons de le voir, une des techniques les plus efficaces pour améliorer l'efficacité spectrale d'une communications radio est l'utilisation d'antennes multiples à l'émission et à la réception. Dans ce qui suit, nous considérons un système MIMO utilisant la modulation OFDM, où l'émetteur et le récepteur sont munis respectivement de  $N_t$  et  $N_r$  antennes. Les antennes sont disposées, de la façon la plus communément utilisée, appelée en anglais Uniform Linear Array (ULA). Les antennes sont alignées et uniformément espacées. La distance relative entre deux antennes adjacentes est donnée par :  $\Delta = \frac{d}{\lambda}$  où  $d$  est l'espace

séparant deux antennes et  $\lambda$  la longueur d'onde. La figure 3.9 présente le schéma de la chaîne de transmission du système MIMO-OFDM considérée dans la suite de ce chapitre.

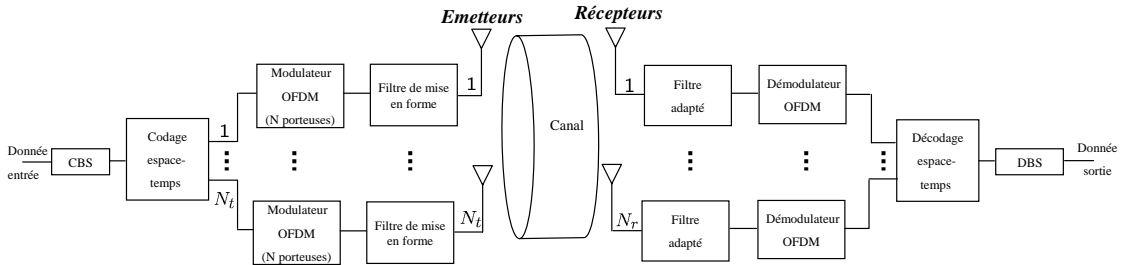


FIG. 3.9 – Principe d'un système MIMO-OFDM

Dans ce qui suit, nous décrivons le parcours suivi par le message comme il est illustré dans la figure 3.9 :

1. la séquence binaire passe à travers un modulateur numérique. Ce dernier associe à chaque séquence de  $m$  bits un symbole complexe selon une constellation de taille  $2^m$ ,
2. les symboles complexes sont par la suite répartis afin qu'ils soient transmis sur les  $N_t$  antennes de transmission. Comme le système MIMO étudié considère la modulation OFDM, nous disposons à l'entrée du canal de  $N \times N_t$  échantillons à émettre, où  $N$  représente le nombre de sous-porteuses pour le signal OFDM. Ainsi l'utilisation d'un modulateur espace-temps s'avère être une solution efficace afin de profiter des ressources en espace, temps et fréquence présentes,
3. les symboles passent ensuite à travers le modulateur OFDM avant d'être filtrés par le filtre de mise en forme,
4. le signal analogique résultant est transmis à travers le canal radio, où il se trouve affecté par le milieu de propagation,
5. à la réception, le récepteur à antennes multiples est constitué d'un filtre adapté au filtre limiteur de bande utilisé à l'émission, du démodulateur OFDM, du décodeur espace-temps, du démodulateur numérique.

Pour illustrer l'intérêt de l'association des systèmes MIMO avec la modulation OFDM, nous allons comparer les performances en terme de TEB (Taux d'Erreur Binaire) des deux systèmes avec un canal acoustique (milieu sous-marin), ce canal est très difficile pour la transmission horizontale notamment en raison des réflexions sur le fond [113]. Pour avoir une bonne comparaison, il faut mettre les deux systèmes dans les mêmes conditions, c'est à dire avec la même puissance émise, la même bande passante et le même débit. Pour obtenir le même débit il faut augmenter le nombre de bits par symbole pour l'OFDM. Sur la figure 3.10 tirée de [114], l'OFDM utilise une modulation MAQ256 et le MIMO-OFDM une modulation MAQ4, afin d'obtenir la même efficacité spectrale. Les performances du MIMO-OFDM sont nettement meilleures, illustrant pour cet exemple le net apport de la diversité spatiale, même combinée avec une modulation OFDM. De son côté la modulation OFDM permet d'élargir simplement la bande passante d'un système MIMO, et d'augmenter son débit tout en conservant sa grande efficacité spectrale.

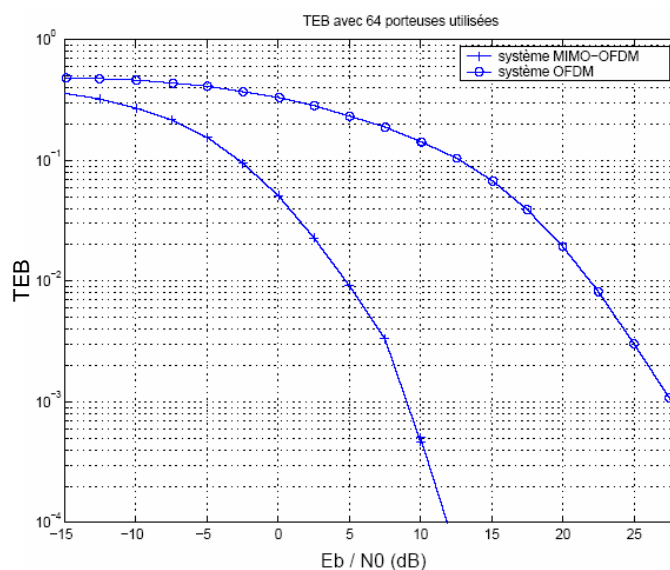


FIG. 3.10 – Comparaison entre l’OFDM et MIMO-OFDM pour un débit binaire et une bande passante identiques. L’OFDM utilise une MAQ256 et le MIMO-OFDM une MAQ4 avec 4 émetteurs et 8 récepteurs

### 3.4.2 Analyse du PR d’un système MIMO-OFDM basé sur un schéma d’Alamouti

#### 3.4.2.1 Cas d’un canal BBAG

La figure 3.11 illustre un système MIMO-OFDM (en fréquence porteuse) basé sur un schéma d’Alamouti  $2 \times 2$ .

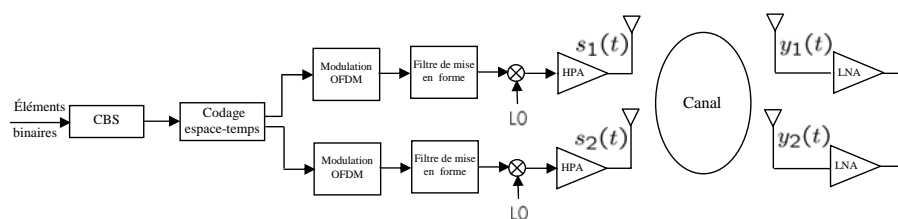


FIG. 3.11 – système MIMO-OFDM basé sur un schéma d’Alamouti

Dans cette partie, nous analysons la distribution du PR du signal  $y_1(t)$  exprimé comme :

$$y_1(t) = s_1(t) + s_2(t) + b(t), \quad (3.37)$$

où  $b(t)$  est un BBAG et  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  sont des signaux OFDM issus des antennes d’émission.

Considérons  $z_1(t) = y_1^2(t)$ . La *pdf*<sup>(9)</sup> de n'importe quel échantillon de  $z_1(t)$  est alors donnée par [90] :

$$\begin{aligned} f_{z_1}(z_1) &= \frac{1}{\sqrt{z_1}} f_{y_1}(\sqrt{z_1}) U(z_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{z_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_1}} e^{-\frac{z_1}{2\sigma_{y_1}^2}} U(z_1), \end{aligned} \quad (3.38)$$

où  $\sigma_{y_1}^2$  est égale à  $\sigma_{s_1}^2 + \sigma_{s_2}^2 + \sigma_b^2$ ,  $f_{y_1}$  suit une loi gaussienne et  $U$  est la fonction d'échelon unité.

Puis, nous pouvons obtenir la fonction de répartition de  $z_1$  par intégration de (3.38) comme :

$$\begin{aligned} F_{z_1}(z_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_1}} \int_0^{z_1} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\frac{v}{2\sigma_{y_1}^2}} dv \\ &= \text{erf}\left(\frac{\sqrt{z_1}}{\sqrt{2}\sigma_{y_1}}\right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ainsi, la CCDF du PR du signal reçu  $y_1(t)$  est approximativement donnée par :

$$Pr[\text{PR}\{y_1(t)\} > PR_0] \approx 1 - \left(\text{erf}\left(\frac{\sqrt{PR_0}}{\sqrt{2}}\right)\right)^{2.8N}. \quad (3.40)$$

Nous remarquons que l'expression obtenue en (3.40) est la même que celle obtenue pour le cas SISO-OFDM en (2.53). Donc ce résultat peut être généralisé : dans un canal BBAG et pour des systèmes de MIMO-OFDM, les signaux émis et reçus suivent des lois gaussiennes. La conséquence est que le canal BBAG n'influence pas la distribution de PR des signaux reçus, quelque soit le rapport signal sur bruit, dans un contexte MIMO-OFDM.

### 3.4.2.2 Cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats

Maintenant, nous analysons la CCDF du PR du signal  $y_1(t)$  dans un système MIMO-OFDM à deux antennes représenté sur la figure 3.11 dans le cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats. Un échantillon du signal reçu peut être exprimé comme

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + b \\ &= x_1 + x_2 + b \\ &= x + b, \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des variables aléatoires suivent une loi de Rayleigh, dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma_\alpha^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2}}, \quad \alpha \geq 0. \quad (3.42)$$

$x_1 = \alpha_1 s_1$  et  $x_2 = \alpha_2 s_2$  sont supposés indépendants, et  $x = x_1 + x_2$ . La *pdf* de  $x$  peut être écrite comme :

---

<sup>(9)</sup>Probability Density Function

$$\begin{aligned}
f_x(x) &= \int_{u=-\infty}^{\infty} f_{x_1}(u)f_{x_2}(x-u)du \\
&= \frac{\beta e^{-\frac{|x|}{\beta}} - \gamma e^{-\frac{|x|}{\gamma}}}{2(\beta^2 - \gamma^2)} ; \quad \beta \neq \gamma \\
&= \frac{e^{-\frac{|x|}{\delta}}(\delta + |x|)}{4\delta^2} ; \quad \delta = \beta = \gamma,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

où  $\beta = \sigma_{\alpha_1} \cdot \sigma_{s_1}$  et  $\gamma = \sigma_{\alpha_2} \cdot \sigma_{s_2}$ .

La CCDF du PR du signal continu  $y_1(t)$  dans le cas de  $\beta \neq \gamma$  peut alors être approximée par

$$\begin{aligned}
Pr[\text{PR}\{y_1(t)\} > PR_0] &\approx 1 - \left[ \frac{1}{2(\beta^2 - \gamma^2)} (2(\beta^2 - \gamma^2) \text{erf}\left(\frac{\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_b}\right) \right. \\
&+ \beta^2 e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\beta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\beta^2}} \text{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \beta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\beta\sigma_b}\right) \\
&- \beta^2 e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\beta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\beta^2}} \text{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \beta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\beta\sigma_b}\right) \\
&- \gamma^2 e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\gamma\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\gamma^2}} \text{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \gamma\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\gamma\sigma_b}\right) \\
&\left. + \gamma^2 e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\gamma\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\gamma^2}} \text{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \gamma\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\gamma\sigma_b}\right) \right]^{2.8N},
\end{aligned}$$

où  $P_m$  est la puissance moyenne de  $y_1(t)$  donnée par

$$P_m = 2(\beta^2 + \gamma^2) + \sigma_b^2. \tag{3.44}$$

Et la CCDF du PR de  $y_1(t)$  dans le cas de  $\beta = \gamma = \delta$  peut alors être approchée par

$$\begin{aligned}
Pr[\text{PR}\{y_1(t)\} > PR_0] &\approx 1 - \left[ \frac{1}{4\delta^2} (4\delta^2 \text{erf}\left(\frac{\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\sigma_b}\right) \right. \\
&+ \lambda_1 \text{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 + \delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\delta\sigma_b}\right) \\
&\left. - \lambda_2 \text{erfc}\left(\frac{\sigma_b^2 - \delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{\sqrt{2}\delta\sigma_b}\right) \right]^{2.8N},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

où

$$\lambda_1 = (2\delta^2 - \sigma_b^2 - \delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}) e^{\frac{\sigma_b^2 + 2\delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\delta^2}},$$

et

$$\lambda_2 = (2\delta^2 - \sigma_b^2 + \delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}) e^{\frac{\sigma_b^2 - 2\delta\sqrt{P_m \cdot PR_0}}{2\delta^2}}.$$

Dans le dernier cas,  $P_m$  est la puissance moyenne de  $y_1(t)$  :

$$P_m = 4\delta^2 + \sigma_b^2. \tag{3.46}$$

La figure 3.12 montre la CCDF du PR pour  $10^5$  symboles, avec  $N = 1024$  sous-porteuses modulées avec une constellation QPSK. Le facteur de suréchantillonnage est  $L = 4$  et le rapport signal sur bruit est égal à  $10 \text{ dB}$ . Nous pouvons observer que le PR diminue en fonction du nombre d'antennes de transmission.

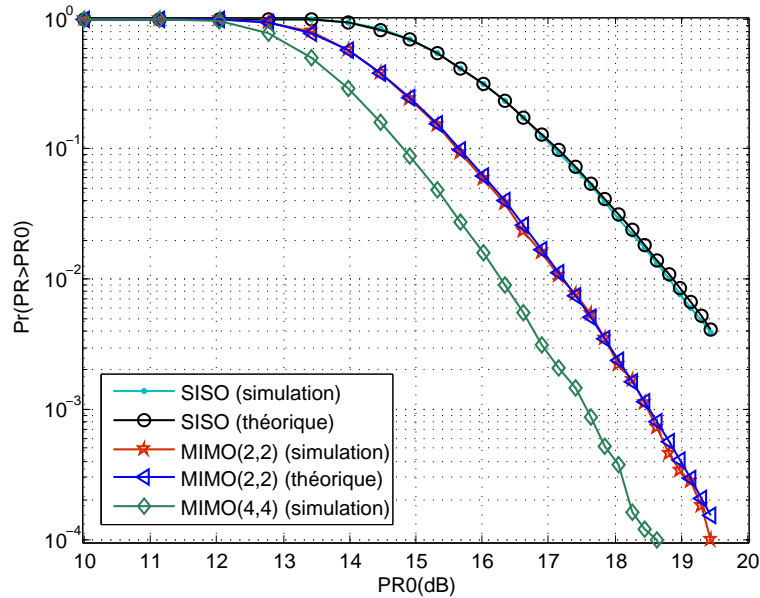


FIG. 3.12 – CCDF des PR des signaux reçus en SISO-OFDM, MIMO(2,2) et (4,4)-OFDM (canal de Rayleigh à évanouissements plats),  $RSB = 10 \text{ dB}$

La figure 3.13 compare les CCDF des PR pour plusieurs valeurs de  $RSB = \frac{P_m - \sigma_b^2}{\sigma_b^2}$ . Il est évident que le PR augmente en fonction du  $RSB$ .

La figure 3.14 compare la CCDF du PR d'un signal MIMO-OFDM perturbé par un canal BBAG avec celui qui est perturbé par un canal de Rayleigh à trajets multiples. De cette figure, nous pouvons alors constater que plus le nombre de trajets est élevé et plus le PR du signal reçu diminue (théoriquement, lorsque le nombre de trajets tend vers l'infini, la CCDF du PR d'un signal MIMO-OFDM perturbé par un canal de Rayleigh à trajets multiples tend vers la CCDF du PR d'un signal MIMO-OFDM perturbé par un canal BBAG).

### 3.5 Conclusion

La présence de plusieurs antennes en émission et en réception génère de la diversité spatiale dont il convient de tirer profit pour combattre le phénomène d'évanouissements ("fading"). S'il est aisé de profiter des multiples antennes réceptrices, l'extraction de la diversité spatiale en émission est moins directe et passe par l'utilisation de codes espace-temps dont on a introduit le principe. Dans ce chapitre, nous avons présenté les systèmes MIMO en définissant le modèle de canal, la capacité des canaux MIMO et les codes espace-temps (en treillis, en blocs orthogonaux et non orthogonaux). Nous avons vu que le code espace-temps d'Alamouti extrait très simplement la diversité due à deux antennes émettrices et



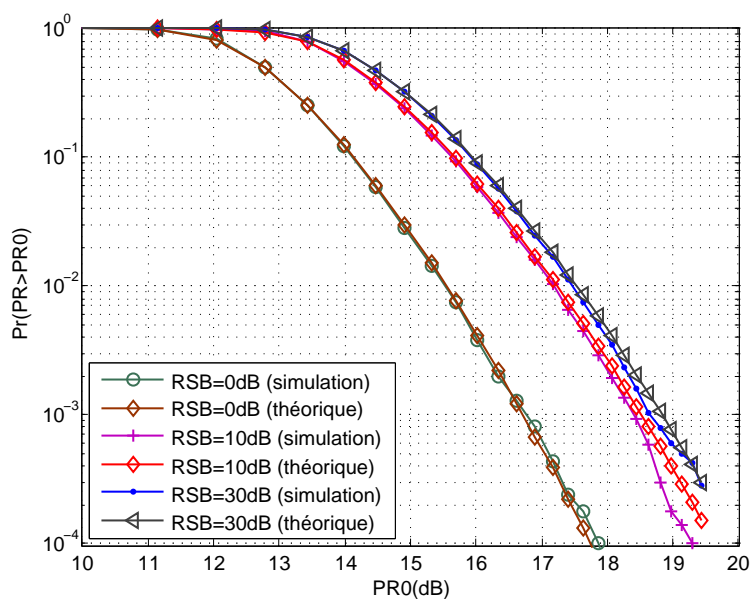


FIG. 3.13 – Comparaison des CCDFs du PR (théorique et simulation) du signal reçu en MIMO(2,2) (canal de Rayleigh à évanouissements plats) pour différentes valeurs de  $RSB$

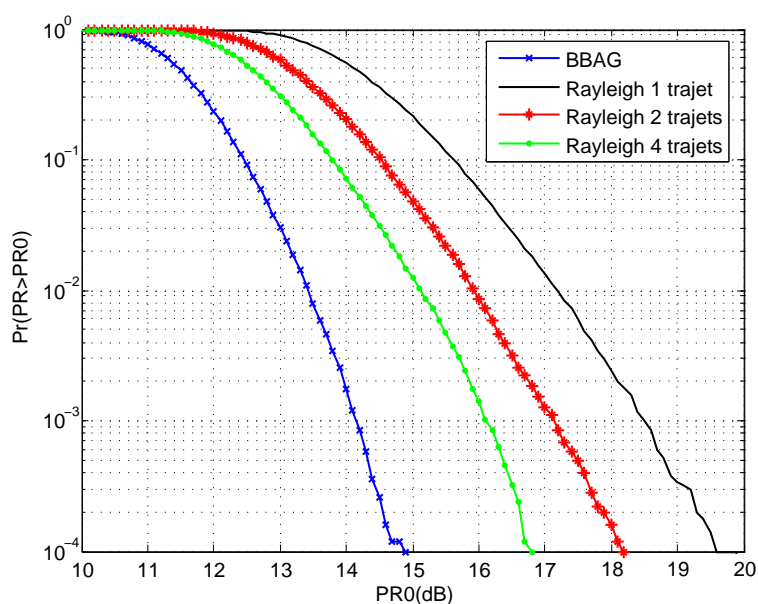


FIG. 3.14 – CCDF du PR d'un signal reçu en MIMO-OFDM à deux antennes (canal BBAG, canal de Rayleigh (à évanouissements plats et à trajets multiples)),  $N = 1024$ ,  $L = 4$ ,  $RSB = 10$  dB, constellation QPSK

a un rendement unitaire. C'est la raison pour laquelle nous l'avons choisi pour analyser le PR des systèmes MIMO (mono et multiporteuse).

Nous avons ainsi proposé une nouvelle définition du PR d'un système MIMO. Cette définition tient compte de l'influence du canal de propagation. Ce PR est calculé au niveau des antennes de réception.

Pour les systèmes MIMO-monoporteuse, nous avons déduit les expressions du PR du signal reçu pour les systèmes basés sur un schéma d'Alamouti, codes en blocs avec commutation entre groupes d'antennes et le code de Jafarkhani. Ces expressions théoriques ne prennent pas en compte l'effet du canal du fait de la complexité de la densité de probabilité du signal émis. Pour un faible nombre d'antennes d'émission, nous avons établi que le PR (en réception) se dégradait en fonction du nombre d'antennes d'émission.

Lorsque le canal MIMO est sélectif en fréquence, ce qui est le cas en pratique, l'association avec l'OFDM présente l'intérêt d'être simple à mettre en oeuvre et valable quelle que soit la technique multi-antennes considérée. Pour ces systèmes, nous avons analysé le PR du signal reçu perturbé par des canaux BBAG et de Rayleigh à évanouissements plats. En se basant sur une analyse mathématique appuyée par des simulations, nous avons montré que le signal sur une des antennes de réception d'un système MIMO-OFDM a une distribution égale à celles des signaux émis, et ceci pour un canal BBAG. Le PR n'est donc pas dégradé.

En ce qui concerne le canal de Rayleigh à évanouissements plats, les développements montrent une dégradation du PR par rapport au cas gaussien. Cette dégradation diminuait en fonction du nombre d'antennes d'émission. En ce qui concerne le canal de Rayleigh à trajets multiples, les développements montrent une diminution du PR par rapport au cas d'un canal à évanouissements plats.

Les conclusions majeures des chapitres 2 et 3 sont alors les suivantes :

- quelque soient le canal et la modulation considérés, le PR en réception est toujours supérieur ou égal au PR en émission. La dégradation est fonction du rapport signal sur bruit et/ou du type de canal (BBAG ou Rayleigh) et/ou du système d'émission considéré (SISO ou MIMO).

- la dégradation diminue si le canal considéré présente des trajets multiples nombreux ou si le nombre d'antennes d'émission augmente aussi fortement. Cette dernière condition n'est cependant pas très réaliste. C'est donc le nombre de trajets qui jouera un rôle prépondérant dans la diminution de cette dégradation.

- la borne inférieure du PR en réception est toujours donnée par celle obtenue dans le cas d'un canal BBAG par application immédiate du théorème de la limite centrale.

L'objectif de nos travaux étant la réduction du PR en réception, deux approches sont alors possibles : le réduire à l'émission (approche classique) ou directement à la réception. Le chapitre suivant propose donc deux méthodes de réduction du PR : une en émission et l'autre en réception. Les gains de PR obtenus seront alors comparés aux dégradations apportées par le canal. Dans ce chapitre, nous nous placerons dans un contexte MIMO-OFDM avec un canal de Rayleigh à évanouissements plats.



## Chapitre 4

# Réduction du Power Ratio dans un contexte MIMO-OFDM

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>92</b>
<b>4.2</b>	<b>Etat de l'art des méthodes de réduction du PR dans un contexte MIMO-OFDM</b>	<b>92</b>
4.2.1	Méthode basée sur le "Selected Mapping" (SLM)	93
4.2.2	Méthode du Cross-Antenna Rotation and Inversion (CARI)	95
4.2.3	Méthode du "Unitary Rotation pour MIMO-OFDM"	97
4.2.4	Autres méthodes	98
<b>4.3</b>	<b>Les méthodes dites à "Ajout de Signal" appliquées aux systèmes SISO-OFDM</b>	<b>99</b>
4.3.1	Principe général	99
4.3.2	Méthode de la "Tone Reservation"	99
4.3.3	Amélioration de la méthode "Tone Reservation"	102
<b>4.4</b>	<b>Extension de la méthode "Tone Reservation" à l'aide d'un algorithme de type SOCP pour les systèmes MIMO-OFDM : application aux porteuses adjacentes</b>	<b>106</b>
4.4.1	Modélisation du problème de la réduction du PR sous forme SOCP	107
4.4.2	Modélisation du problème du PR sous forme SOCP avec contrainte sur la puissance moyenne relative	112
4.4.3	Modélisation du problème du PR sous forme SOCP avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées	114
4.4.4	Comparaison des performances des approches SOCP avec contrainte sur $\Delta E$ et avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées	116
<b>4.5</b>	<b>Extension de la méthode "Tone Reservation" à l'aide de SOCP pour les systèmes MIMO-OFDM : application aux porteuses dans la bande utile</b>	<b>116</b>
4.5.1	Présentation et intérêt	116
4.5.2	Résultats et discussions	117
<b>4.6</b>	<b>Performances de la méthode SOCP (avec porteuses dans les bandes adjacentes) dans le cas d'un canal de Rayleigh</b>	<b>119</b>
<b>4.7</b>	<b>Développement d'une méthode à la réception</b>	<b>119</b>

---

4.7.1	Méthode de "Jun" à l'émission . . . . .	119
4.7.2	Application de la méthode de "Jun" à la réception . . . . .	121
4.8	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>122</b>

---

## 4.1 Introduction

Après avoir analysé dans le chapitre 3 le Power Ratio en réception d'un système MIMO-OFDM, ce chapitre a pour but dans un premier temps de donner un état de l'art des techniques de réduction du PR pour les systèmes MIMO-OFDM puis de présenter deux méthodes de réduction du PR en réception d'un système MIMO-OFDM.

Dans un contexte de télécommunications, les méthodes de traitement des non linéarités se situent soit côté émetteur, soit côté récepteur ou soient réparties entre l'émetteur et le récepteur. Les méthodes réparties entre l'émetteur et le récepteur sont les plus répandues. Ceci est dû au fait qu'un nombre très important de méthodes nécessitent la transmission d'information extrinsèque afin de permettre au récepteur de retrouver l'information utile.

Par ailleurs, un nombre plus réduit de méthodes se situent exclusivement à l'émission. Certains contextes particuliers peuvent exiger de telles méthodes, notamment lorsqu'il s'agit de respecter la compatibilité descendante d'un standard. En effet, dans un contexte de diffusion par exemple, il paraît impensable de modifier tous les récepteurs si une modification de l'émetteur devait intervenir. Cette notion de compatibilité descendante identifie donc les méthodes qui ne nécessitent pas de traitement à la réception.

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux méthodes de réduction du PR, en émission et en réception.

Pour ce qui concerne l'émission, nous avons déjà évoqué le fait qu'une grande majorité des techniques nécessite la transmission d'informations extrinsèques de l'émetteur vers le récepteur et donc une modification de ce dernier, ce qui constitue un inconvénient certain. Cette information est souvent dite side information (SI). C'est la raison pour laquelle nous nous focaliserons sur le principe de l'ajout d'un signal correcteur en réservant des porteuses attribuées à la réduction du PR. L'intérêt majeur de cette approche est qu'elle ne nécessite pas de transmission de SI. Initialement développée dans un contexte SISO-OFDM, nous étendrons alors cette méthode à un système MIMO-OFDM afin de réduire de façon conjointe le PR sur toutes les antennes d'émission.

Pour ce qui concerne la réception, nous allons adapter au cas MIMO-OFDM une méthode proposée initialement à l'émission en SISO-OFDM. Il s'agit de la méthode de "Jun" [115] qui consiste à ajouter en fréquence porteuse un signal hors bande du signal utile de façon à ce que le PR global soit diminué.

## 4.2 Etat de l'art des méthodes de réduction du PR dans un contexte MIMO-OFDM

Dans cette partie, nous allons présenter trois techniques de réduction du PR à l'émission appliquées aux systèmes MIMO-OFDM. Ce sont les méthodes du Selected Mapping (SLM), du Cross Antenna Rotation and Inversion (CARI) et de la rotation unitaire.

### 4.2.1 Méthode basée sur le "Selected Mapping" (SLM)

Nous devons cette technique pour le SISO-OFDM à Bäuml, Fischer et Huber [116]. Elle a été ensuite détaillée et agrémentée de précision dans [117] par Muller et Huber. Elle s'applique à un nombre quelconque de sous-porteuses. Soit  $\mathbf{S} = [S_1 \dots S_N]$  le signal OFDM temporel constitué de  $N$  échantillons. L'idée est de multiplier le vecteur  $\mathbf{S}$  par un vecteur  $\mathbf{P}^{(k)} = [P_1^{(k)} \dots P_N^{(k)}]$ ,  $k \in [0, K]$ . Le vecteur  $\mathbf{P}$  comporte  $N$  composantes et  $K$  représentants différents (statistiquement indépendants). Les  $P_i^{(k)}$  sont de la forme :

$$P_i^{(k)} = e^{j\varphi_i^{(k)}}. \quad (4.1)$$

Le nouveau signal  $\mathbf{S}'$  après pondération a donc pour expression :

$$\mathbf{S}'^k = \mathbf{S}\mathbf{P}^{(k)}, \quad k \in [0, K]. \quad (4.2)$$

Nous obtenons ainsi  $K$  signaux différents de  $N$  composantes. La méthode proposée par Bäuml, Fischer et Huber sélectionne la séquence d'indice  $k$  dont le PR est le plus faible. A l'indice  $k$  correspond un vecteur  $\mathbf{P}^k$  qu'il faudra protéger dans la transmission afin de retrouver le vecteur initial  $\mathbf{S}$ . La valeur de l'indice  $k$  sera alors transmise via un code correcteur d'erreurs. Les auteurs proposent d'utiliser  $P_i^k \in \{\pm 1, \pm j\}$ , ce qui est plus simple d'un point de vue implémentation du fait de l'absence de multiplications. La figure 4.1 illustre ce principe.

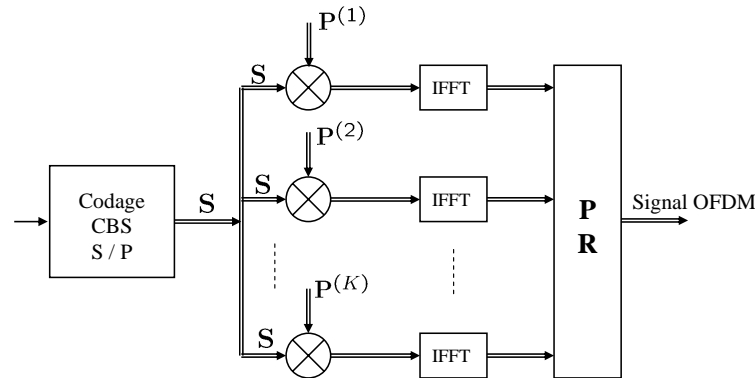


FIG. 4.1 – Schéma de principe de la méthode du "Selected Mapping"

Une extension de cette technique pour les systèmes MIMO-OFDM a été proposée par Lee [18]. Dans ces systèmes, la technique de Selected Mapping peut s'appliquer de deux façons différentes : le SLM individuel (individual SLM) et le SLM concurrent (concurrent SLM).

#### 4.2.1.1 SLM individuel

Considérons un système MIMO-OFDM avec  $N_t$  antennes d'émission, et à  $N$  sous-porteuses. Dans ce cas, l'approche SLM peut s'appliquer indépendamment sur chaque antenne (figure 4.2 (a)).

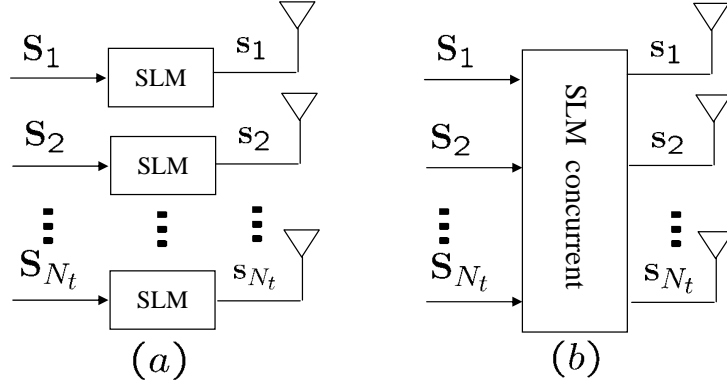


FIG. 4.2 – Schéma de la méthode du SLM pour les systèmes MIMO-OFDM ((a) individuel, (b) concurrent)

En conséquence, la CCDF du PR de la séquence sélectionnée aura pour expression :

$$P = \left( Pr[\text{PR} > PR_0] \right)^K = \left( 1 - (1 - e^{-PR_0})^N \right)^K. \quad (4.3)$$

Dans la méthode du SLM individuel, le nombre de bits par antenne sur lequel doit être codé l'indice  $k$  est de l'ordre de  $\log_2(K)$  bits. Ce nombre de bits est donc la redondance liée à la méthode, c'est à dire la side information (SI) nécessaire.

#### 4.2.1.2 SLM concurrent

Dans la méthode du SLM concurrente adaptée pour les systèmes MIMO-OFDM, les vecteurs  $\mathbf{S}_i$  transmis sur les  $N_t$  antennes sont multipliés par le même vecteur qui est un des  $K$  vecteurs  $\mathbf{P}^{(k)}$ . En conséquence, nous aurons  $K$  ensembles composés de  $N_t$  vecteurs différents. Puis, nous choisissons l'ensemble dont le PR moyen est le plus faible (figure 4.2 (b)). La CCDF du PR des symboles  $N_t N$ -OFDM générés d'une façon aléatoire sur toutes les  $N_t$  antennes de transmission est :

$$Pr[\text{PR}_{low} > PR_0] = \left[ 1 - (1 - e^{-PR_0})^{N_t \cdot N} \right]^K. \quad (4.4)$$

Pour une probabilité  $P$  donnée par  $P = Pr[\text{PR}_{low} > PR_0]$ , la dégradation de SLM concurrent comparée au SLM individuel peut être définie comme :

$$\text{PR}_d = \frac{\log_e(1 - [1 - P^{\frac{1}{K}}]^{\frac{1}{N}})}{\log_e(1 - [1 - P^{\frac{1}{K}}]^{\frac{1}{N_t \cdot N}})}, \quad (4.5)$$

où  $\log_e(x)$  est le logarithme naturel de l'élément  $x$ .

Puisque nous choisissons un seul vecteur  $\mathbf{P}^k$  pour avoir les  $N_t$  vecteurs avec le plus faible PR moyen, nous avons donc la même taille d'information de redondance ( $\text{SI} = \log_2(K)$  bits) qui peut être portée par les  $N_t$  antennes d'émission (chaque antenne en porte une partie).

La figure 4.3 (tirée de [18]) représente la CCDF du PR pour SLM individuel et concurrent.

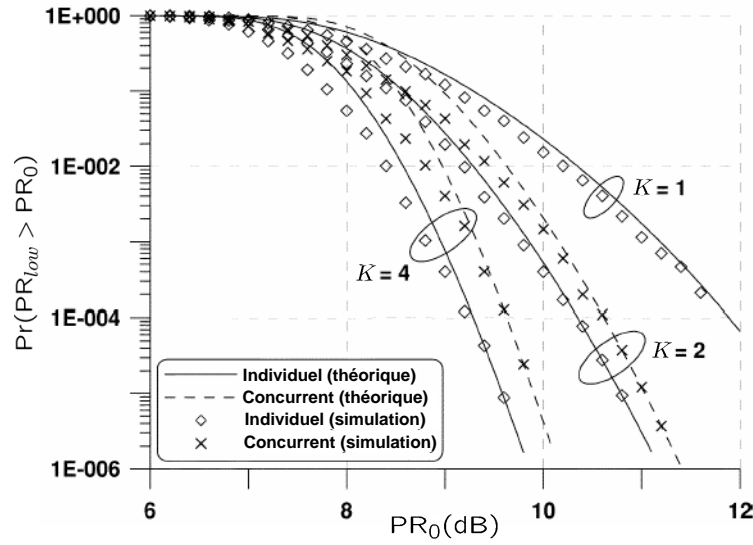


FIG. 4.3 – CCDF du PR d'un système MIMO-OFDM en utilisant les techniques SLM individuel et concurrent pour  $N = 128$ , QPSK,  $N_t = 2$ , et  $L = 4$

#### 4.2.2 Méthode du Cross-Antenna Rotation and Inversion (CARI)

Le principe de cette technique est d'effectuer une rotation et une inversion des blocs secondaires d'un symbole OFDM à travers toutes les antennes [118].

Pour comprendre cette technique, nous allons considérer un système MIMO-OFDM [119] basé sur un schéma d'Alamouti [106] (figure 4.4).

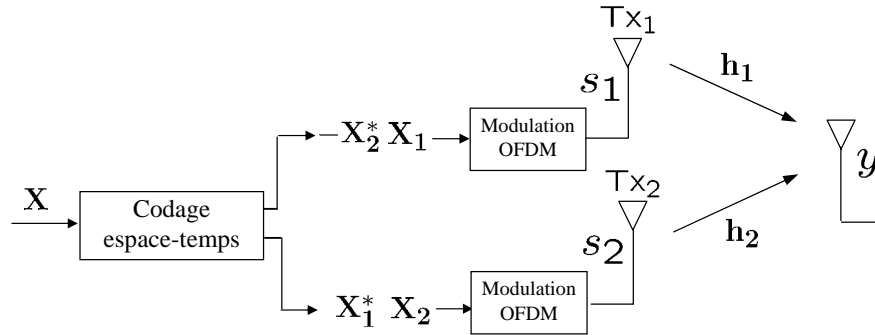


FIG. 4.4 – Schéma d'un système MIMO-OFDM à deux branches basé sur un schéma d'Alamouti

Pendant la première période de symbole, deux symboles OFDM, ( $\mathbf{X}_1 = [X_{1,0}, X_{1,1}, \dots, X_{1,N-1}]$  et  $\mathbf{X}_2 = [X_{2,0}, X_{2,1}, \dots, X_{2,N-1}]$ ) sont émis par des antennes 1 et 2, respectivement. Pendant la période de symbole suivante,  $-\mathbf{X}_2^*$  est émis



par l'antenne 1, et  $\mathbf{X}_1^*$  est émis par l'antenne 2, où le  $(\cdot)^*$  signifie l'opération complexe conjugué. Le canal est supposé fixe sur au moins deux symboles OFDM consécutifs.

$\mathbf{X}_i$  et  $\pm\mathbf{X}_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) ont les mêmes propriétés de PR. Par conséquent, avec un codage espace-temps en blocs orthogonaux, la réduction du PR doit être faite seulement durant la première période du symbole OFDM (avec un codage espace-temps en blocs non-orthogonaux, la réduction de PR doit être simultanément effectuée sur les symboles OFDM émis dans plusieurs périodes consécutives). Après avoir effectué la réduction de PR sur  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$ , nous obtenons deux séquences modifiées  $\tilde{\mathbf{X}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{X}}_2$  avec un PR le plus faible, qui seront émis pendant la première période de symbole. Puis, pendant la deuxième période de symbole,  $-\tilde{\mathbf{X}}_2^*$  et  $\tilde{\mathbf{X}}_1^*$  sont émis, qui ont le même PR que  $\tilde{\mathbf{X}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ , respectivement.

La méthode proposée (CARI) pour réduire le PR est représentée sur la figure 4.5.

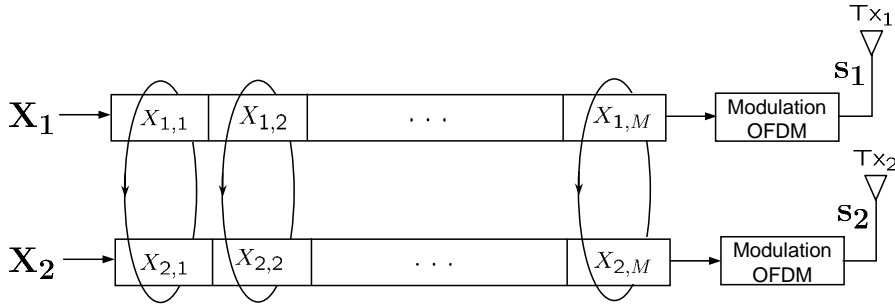


FIG. 4.5 – Schéma de principe de la méthode CARI

Cette figure montre comment chaque séquence OFDM  $\mathbf{X}_i = [\mathbf{X}_{i,1}, \mathbf{X}_{i,2}, \dots, \mathbf{X}_{i,M}]$ ,  $i = 1, 2$  est d'abord divisée en  $M$  blocs secondaires (subblocks) de même taille. Ensuite, au lieu de faire des rotations et inversions des éléments dans différents blocs secondaires de chaque antenne séparément comme en [120], des rotations et inversions des blocs secondaires seront effectuées à travers toutes les antennes. Par exemple, avec deux antennes, après l'application de la méthode CARI sur  $\mathbf{X}_{1,1}$  et  $\mathbf{X}_{2,1}$ , nous obtenons 4 ensembles des séquences OFDM différents. Ce sont : les ensembles originaux  $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{X}_{1,1}, \mathbf{X}_{1,2}, \dots, \mathbf{X}_{1,M}]$  et  $\mathbf{X}_2 = [\mathbf{X}_{2,1}, \mathbf{X}_{2,2}, \dots, \mathbf{X}_{2,M}]$ , l'ensemble original avec le premier bloc secondaire inversé  $\mathbf{X}_1 = [-\mathbf{X}_{1,1}, \mathbf{X}_{1,2}, \dots, \mathbf{X}_{1,M}]$  et  $\mathbf{X}_2 = [-\mathbf{X}_{2,1}, \mathbf{X}_{2,2}, \dots, \mathbf{X}_{2,M}]$ , l'ensemble original avec le premier bloc secondaire permuté  $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{X}_{2,1}, \mathbf{X}_{1,2}, \dots, \mathbf{X}_{1,M}]$  et  $\mathbf{X}_2 = [\mathbf{X}_{1,1}, \mathbf{X}_{2,2}, \dots, \mathbf{X}_{2,M}]$ , et finalement les mêmes que l'ensemble précédent mais avec inversion du premier bloc secondaire  $\mathbf{X}_1 = [-\mathbf{X}_{2,1}, \mathbf{X}_{1,2}, \dots, \mathbf{X}_{1,M}]$  et  $\mathbf{X}_2 = [-\mathbf{X}_{1,1}, \mathbf{X}_{2,2}, \dots, \mathbf{X}_{2,M}]$ . Ensuite, les mêmes opérations sont exécutées sur tous les autres blocs secondaires. Avec  $M$  blocs secondaires et 2 antennes,  $4^M$  ensembles des séquences peuvent être obtenus. De ces  $4^M$  ensembles des séquences, un ensemble  $\{\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2\}$  dont le PR est le plus faible est sélectionné pour la transmission.

Le critère proposé pour sélectionner  $\{\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2\}$  est le critère du minimum maximum (minimax) au lieu du critère minimum average (minaverage) proposé dans [120]. Pour chacun des  $4^M$  ensembles des séquences, nous calculons d'abord le PR de  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  et on l'appelle  $\{\text{PR}(\mathbf{X}_1), \text{PR}(\mathbf{X}_2)\}$ . Puis, nous trouvons le PR maximum de  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  et on l'appelle  $\max\{\text{PR}(\mathbf{X}_1), \text{PR}(\mathbf{X}_2)\}$ . Après identification des maximum pour chacun

des  $4^M$  ensembles des séquences, nous sélectionnons un ensemble avec le minimum de  $\max\{\text{PR}(\mathbf{X}_1), \text{PR}(\mathbf{X}_2)\}$ , pour la transmission, on l'appelle  $\{\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2\}$ .

#### 4.2.2.1 Méthode du "Successive Suboptimal CARI (SS-CARI)"

Dans le schéma SS-CARI [118], tout d'abord nous effectuons le CARI sur les blocs secondaires  $\mathbf{X}_{1,1}, \mathbf{X}_{2,1}$ , considérant que tous les autres blocs secondaires restent sans changement. Ainsi, nous obtenons 4 ensembles possibles. Puis, sans effectuer la rotation et l'inversion sur les blocs secondaires suivants (comme dans le CARI régulier), nous calculons le PR pour chacun des 4 ensembles décrits avant et celui ayant le plus petit des PR maximums est maintenu.

De même, dans la prochaine étape, nous effectuons le CARI sur les blocs secondaires  $\mathbf{X}_{1,2}, \mathbf{X}_{2,2}$  et des 4 ensembles, celui avec le plus petit des PR maximums est maintenu. En faisant ceci successivement pour tous les  $M$  blocs secondaires, l'ensemble des séquences  $\{\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2\}$  est trouvé selon le critère de minimax. Le nombre de permutations possibles avec SS-CARI est réduit à  $4M$ , tandis que le nombre d'information additionnelle (SI) est le même que celui de l'original CARI, égal  $S = 2M$ .

#### 4.2.2.2 Méthode du "Random Suboptimal CARI (RS-CARI)"

Avec le schéma de RS-CARI [118], nous produisons tout d'abord une matrice aléatoire de la dimension  $V \times M$ , exprimée comme

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,M} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{V,1} & r_{V,2} & \dots & r_{V,M} \end{bmatrix},$$

où  $V$  dénote le nombre total de permutations. Chaque élément de cette matrice est un nombre aléatoire entier suivant une distribution uniforme sur  $[1, 4]$ , la valeur 4 représente les différents ensembles de séquences décrits avant.

En effectuant des permutations sur les  $M$  blocs secondaires basés sur ce tableau aléatoirement généré,  $V$  différents ensembles peuvent être générés et nous choisissons l'ensemble des séquences  $\{\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2\}$  dont le PR maximum est le plus faible pour la transmission. Si le récepteur a la connaissance de la matrice aléatoire  $\overline{\mathbf{R}}$ , la quantité de l'information additionnelle nécessaire peut être encore réduite à  $S = \log_2 V$ .

La figure 4.6 (tirée de [118]) représente la CCDF du PR pour RS-CARI comparée avec celle du SLM.

#### 4.2.3 Méthode du "Unitary Rotation pour MIMO-OFDM"

Cette technique a été proposée par [121]. Le principe repose sur une application d'une rotation unitaire à travers des antennes d'émission. Dans ce cas, le PR maximum peut être diminué sur toutes les antennes d'émission. La rotation unitaire disperse la puissance maximum située sur une antenne d'émission dans les autres antennes d'émission. Ce schéma n'est pas limité à un système MIMO-OFDM mais peut être appliqué à n'importe quel système employant des antennes multiples à l'émission. La rotation unitaire peut être rendue transparente au récepteur de sorte qu'aucune perte dans la largeur de bande ne soit

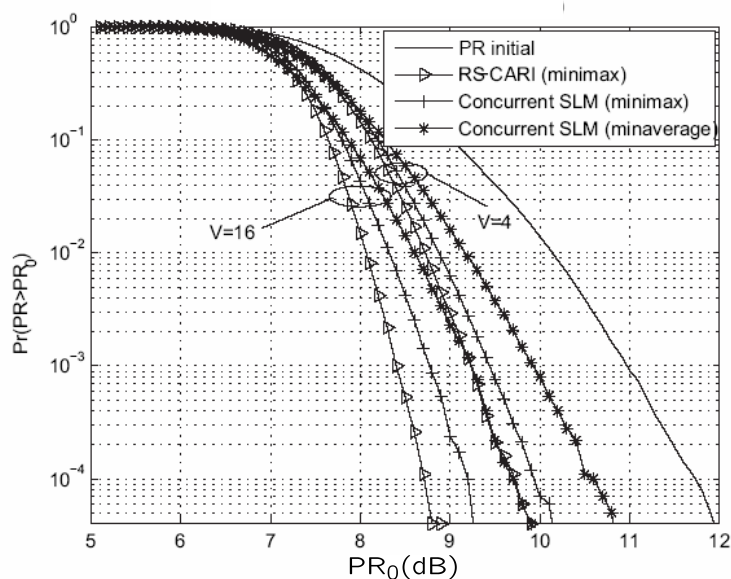


FIG. 4.6 – Comparaison des CCDFs du PR de MIMO-OFDM en utilisant les méthodes RS-CARI et SLM (individuel et concurrent) pour  $N = 128$ , modulation QPSK, 2 antennes d'émissions, et  $L = 4$

nécessaire pour indiquer quelle transformation a été employée à l'émetteur. Par conséquent cette technique offre une amélioration du PR de l'ordre de 2 dB sans transmission de SI.

#### 4.2.4 Autres méthodes

D'autres méthodes ont été développées dans le contexte MIMO-OFDM pour réduire le PR. Parmi ces méthodes, on peut citer :

- la méthode de "Subband Permutation" [122] : le gain de cette méthode est de l'ordre de 2 à 3 dB dans le cas de deux antennes d'émission. Il est important de noter que cette méthode nécessite la transmission de SI.
- la méthode "Polyphase Interleaving and Inversion" [123] : le gain de cette méthode dépend de la complexité et est de l'ordre de 2.5 à 3.5 dB pour un seuil de dépassement de  $10^{-3}$ . La transmission de SI est aussi nécessaire dans ce cas.

Les inconvénients majeurs liés à ces méthodes résident dans la transmission de SI, malgré une réduction importante du PR. Nous allons maintenant rappeler le principe des méthodes basées sur l'ajout d'un signal dans un contexte SISO-OFDM, ce qui va nous permettre ensuite d'en faire l'extension au cas MIMO-OFDM. Ce type d'approche ne nécessite pas de transmission de SI et donc pas de modification du récepteur.

## 4.3 Les méthodes dites à "Ajout de Signal" appliquées aux systèmes SISO-OFDM

### 4.3.1 Principe général

Dans un contexte d'ajout de signal, soit  $\mathbf{x}$  le signal temporel dont on souhaite diminuer le PR et  $\mathbf{c}$  le signal correctif. Alors, le signal  $\mathbf{c}$  est obtenu par optimisation et cela se traduit par la relation donnée par (4.6) :

$$\min_{\mathbf{c}} \text{PR}\{\mathbf{x} + \mathbf{c}\}. \quad (4.6)$$

La relation (4.6) montre que l'on peut appliquer cette démarche à un signal quelconque. La notion de compatibilité descendante prend ici tout son sens : le signal  $\mathbf{c}$  doit être ajouté de façon à ce que les données  $\mathbf{x}$  soient reçues avec le minimum (cas idéal, sans) de dégradation et sans modification du récepteur.

De façon équivalente, on peut aussi écrire la minimisation sous la forme :

$$\min_{\mathbf{C}} \text{PR}\{\text{ifft}(\mathbf{X} + \mathbf{C})\}, \quad (4.7)$$

où  $\mathbf{x} = \text{ifft}(\mathbf{X})$  et  $\mathbf{c} = \text{ifft}(\mathbf{C})$ . Cette dernière formulation a été utilisée dans un contexte OFDM où les données correctives étaient introduites sur les symboles "fréquentiels", c'est à dire juste avant l'IFFT d'émission.

L'avantage principal de ces méthodes (pour la majorité d'entre elles) est qu'elles sont élaborées de façon à être à compatibilité descendante, c'est à dire que le signal ajouté est hors de la bande utile ou en dehors des données utiles (cas par exemple des porteuses non utilisées des standards). Le récepteur n'est donc pas modifié.

Le fait d'ajouter un signal pour réduire le PR d'un autre signal n'est pas sans conséquence : il y a ajout d'une puissance additionnelle d'où une nécessité de la contrôler.

### 4.3.2 Méthode de la "Tone Reservation"

#### 4.3.2.1 Description et performances

La technique "Tone Reservation" est une méthode de réduction du PR dont le principe repose sur l'ajout d'un signal au signal original afin de diminuer son PR. Initialement, elle a été proposée par Jose Tellado-Mourelo [12] pour les signaux OFDM d'une façon générale sans spécification d'une norme particulière. L'idée de base de cette technique consiste à réserver et optimiser des porteuses pour générer le signal servant à réduire le PR et de sorte à garantir une compatibilité descendante. Le schéma de principe de la méthode est donné par la figure 4.7.

Dans cette méthode, l'émetteur et le récepteur s'accordent sur le nombre et les porteuses qui sont réservées pour porter le signal correcteur susceptible de diminuer le PR.

Soit  $\mathbf{X} = [X_0 \dots X_{\frac{N}{2}-1} X_{\frac{N}{2}} \dots X_{N-1}]$  le vecteur de données (symboles numériques) à partir duquel est généré le signal OFDM et soit  $\mathbf{C} = [C_0 \dots C_{\frac{N}{2}-1} C_{\frac{N}{2}} \dots C_{N-1}]$  le vecteur de réduction du PR.

Posons  $\mathcal{R} = \{i_0, \dots, i_{R-1}\}$  l'ensemble ordonné des indices des porteuses réservées (l'appellation Tone Reservation vient de ce principe) à la réduction du PR ( $R$  est le nombre de porteuses réservées avec  $R < N$ ). Ainsi, le vecteur à émettre devient  $\mathbf{X} + \mathbf{C}$ .

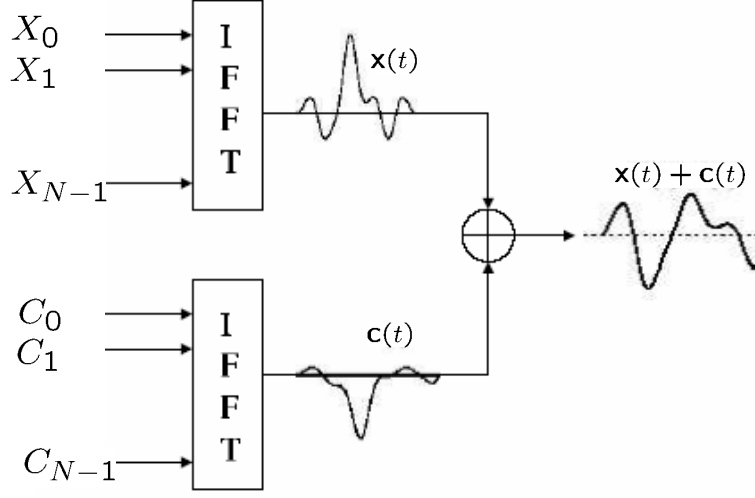


FIG. 4.7 – Schéma de principe de la méthode Tone Reservation

Par construction Tellado force les vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{C}$  à être orthogonaux c'est à dire :  $X_k C_k = 0$ . En d'autres termes nous avons :

$$X_k + C_k = \begin{cases} C_k, & k \in \mathcal{R} \\ X_k, & k \in \mathcal{R}^c, \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\mathcal{R}^c$  est le complément du  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{N}$  où  $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

Par suite, le signal temporel suréchantillonné résultant peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_L &= \mathbf{x}_L + \mathbf{c}_L \\ &= \bar{\mathbf{Q}}_L(\mathbf{X}_L + \mathbf{C}_L) \\ &= \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{X} + \mathbf{C}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $\bar{\mathbf{Q}}_L$  est la matrice d'IDFT (transformée de Fourier inverse discrète) de taille  $LN$  définie par la relation (4.10) et  $\bar{\mathbf{Q}}$  est une sous-matrice de  $\bar{\mathbf{Q}}_L$  constituée de ses  $\frac{N}{2}$  premières et dernières colonnes :

$$\bar{\mathbf{Q}}_L = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{NL}1 \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{NL}1 \cdot (NL-1)} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{NL}2 \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{NL}2 \cdot (NL-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{NL}n \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{NL}n \cdot (NL-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{NL}(NL-1) \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{NL}(NL-1) \cdot (NL-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Le signal temporel suréchantillonné résultant peut aussi se réécrire :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_L &= \mathbf{x}_L + \mathbf{c}_L \\ &= \mathbf{x}_L + \widehat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{C}},\end{aligned}\quad (4.11)$$

où  $\widehat{\mathbf{Q}}$  est la restriction de la matrice  $\overline{\mathbf{Q}}$  aux colonnes d'indices  $\{i_0, \dots, i_{R-1}\}$  et  $\hat{\mathbf{C}} = [C_{i_0} \dots C_{i_{R-1}}]$ .

Le PR du signal à émettre s'écrit maintenant :

$$\text{PR}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \frac{\max_k |x_k + c_k|^2}{E\{|x_k + c_k|^2\}}, \quad 0 \leq k \leq NL - 1. \quad (4.12)$$

L'objectif de la méthode est de réduire le PR sans toutefois augmenter la puissance moyenne transmise. Cela se traduit alors par :

$$\min_{\mathbf{c}} \text{PR}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \min_c \frac{\max_k |x_k + c_k|^2}{E\{|x_k|^2\}}, \quad 0 \leq k \leq NL - 1. \quad (4.13)$$

Comme le dénominateur n'est pas fonction du signal correctif  $\mathbf{c}$ , le problème de minimisation du PR est équivalent alors à la relation (4.14).

$$\begin{aligned}\min_c \max_k |x_k + c_k|^2 &= \min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{x} + \mathbf{c}\|_{\infty}^2 \\ &= \min_{\hat{\mathbf{C}}} \|\mathbf{x} + \widehat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{C}}\|_{\infty}^2\end{aligned}\quad (4.14)$$

où  $\|\mathbf{v}\|_{\infty}$ <sup>(1)</sup> dénote la norme infinie du vecteur  $\mathbf{v}$ .

Le problème de réduction du PR donné par la relation (4.14) est ainsi écrit sous forme d'un problème d'optimisation convexe de variable  $\hat{\mathbf{C}}$  [124]. Cette relation peut se mettre sous forme épigraphe comme le montre les relations (4.15) et (4.16).

$$\begin{aligned}\min_{\hat{\mathbf{C}}} \quad & t \\ \text{avec :} \quad & \|\mathbf{x} + \widehat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{C}}\|_{\infty}^2 \leq t\end{aligned}\quad (4.15)$$

En posant  $\hat{\mathbf{q}}_k^{lig}$  la  $k^{ieme}$  ligne de la matrice  $\widehat{\mathbf{Q}}$ , la relation (4.15) peut se réécrire :

$$\begin{aligned}\min_{\hat{\mathbf{C}}} \quad & t \\ \text{avec :} \quad & |x_k + \hat{\mathbf{q}}_k^{lig}\hat{\mathbf{C}}|^2 \leq t, \quad 0 \leq k \leq NL - 1\end{aligned}\quad (4.16)$$

La figure 4.8 montre la performance de la méthode TR. Comme nous pouvons le voir cette méthode diminue considérablement le PR. Cependant comme toutes les méthodes à "Ajout de signal", la méthode Tone Reservation entraîne une puissance additionnelle. Dans le cas de cette simulation la puissance moyenne relative est de l'ordre de 1.7 dB.

<sup>(1)</sup> La norme infinie d'un vecteur est le maximum des valeurs absolues de ses composantes

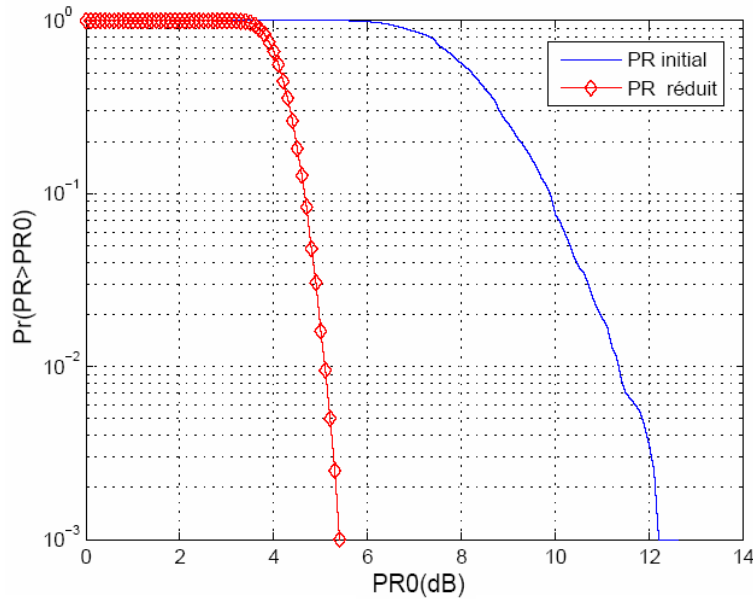


FIG. 4.8 – CCDF du PR pour un symbole OFDM en bande de base de taille  $N = 64$ , facteur de suréchantillonnage  $L = 4$  et  $R = 12$

#### 4.3.2.2 Inconvénients de la "Tone Reservation"

Comme cela été déjà mentionné, la méthode TR initialement proposée par [12] n'est pas à compatibilité descendante. De plus, la méthode TR utilise la Programmation Linéaire pour résoudre le problème de réduction de PR. Cependant, le choix de la Programmation Linéaire impose aux signaux (initial  $\mathbf{x}$  et inconnu  $\mathbf{c}$ ) d'être à bande de base réels. La méthode TR ne peut donc pas réduire le PR de tout signal OFDM. De plus elle diminue le débit par deux des signaux OFDM dont elle peut réduire le PR. Un autre inconvénient de cette méthode mais qui est inhérente à toutes les méthodes "ajout de signal" est l'augmentation de puissance moyenne relative.

#### 4.3.3 Amélioration de la méthode "Tone Reservation"

Dans sa thèse [16], S. Zabre a proposé une modélisation du problème de réduction du PR initialement posé par Tellado [12] par un SOCP<sup>(2)</sup> de telle sorte à prendre en compte tous types de signaux OFDM (bande de base réels et complexes). Il a appliqué cette modélisation sur des standards déjà existants (le standard IEEE 802.11a [126]), où les porteuses non utilisées de ce standard ont été utilisées pour la réduction du PR, ce qui garantit la compatibilité descendante.

S. Zabre a étudié également le problème d'augmentation de la puissance moyenne. Il a noté d'ailleurs la formalisation en ajoutant des contraintes C-SOCP<sup>(3)</sup> où C représente le

<sup>(2)</sup>Second-Order Cone Program

<sup>(3)</sup>Constraint-Second-Order Cone Program

cas lorsque on l'ajoute une ou plusieurs contraintes à la modélisation initiale du problème de réduction du PR sous forme SOCP.

#### 4.3.3.1 Modélisation du problème de réduction du PR sous forme SOCP

Contrairement donc à Tellado qui pose pour seule condition l'orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{C}$  (quite à utiliser des porteuses utiles comme porteuses réservées), S. Zabre a utilisé les porteuses non utilisées des standards.

Le principe de cette proposition est illustré par la figure 4.9 où le signal s'ajoute dans le domaine fréquentiel comme nous pouvons le constater.

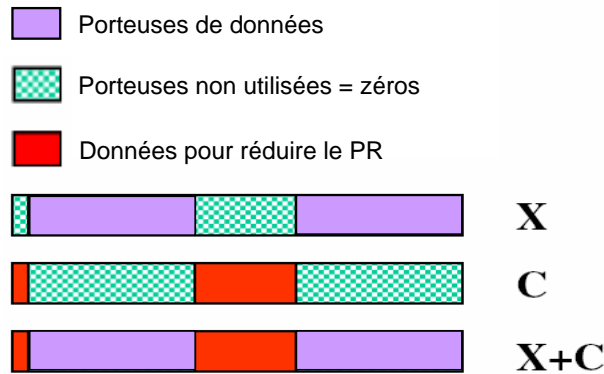


FIG. 4.9 – Exemple du standard IEEE 802.11a,  $N = 64$  porteuses, 48 porteuses de données,  $R = 12$ , 4 porteuses pilotes

Dans le cas de la norme IEEE 802.11a par exemple, seules 12 porteuses (initialement non utilisées par le standard) sont utilisées pour réduire le PR.

Puisque le problème de réduction du PR posé par Tellado est modélisé sous forme de problème min max, il peut se mettre sous la forme générale ci-dessous :

$$\begin{aligned} \min \quad & F^T Y \\ \text{avec :} \quad & \|A_m Y + H_m\| \leq E_m^T Y + g_m \\ & m=0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Le lien entre les variables de l'équation 4.17 et la formulation de la réduction du PR donnée par l'équation 4.16 est établi maintenant.

Il est indifférent de choisir  $|x_k + c_k|$  ou  $|x_k + c_k|^2$  dans le problème d'optimisation  $\min_c \max_k |x_k + c_k|^2$  comme le montre [125]. Ainsi la forme épigraphe donnée par la relation (4.16) peut se réécrire par :

$$\begin{aligned} \min_c \quad & t \\ \text{avec :} \quad & |x_k + c_k| \leq t, \quad 0 \leq k \leq NL - 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pour montrer que la relation donnée par (4.18) est bien un SOCP dont la relation est rappelée par (4.17), posons :



$$\varphi_{i_r}(n) = 2\pi \frac{i_r n}{NL}.$$

En écrivant :

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{r=0}^{R-1} C_{i_r} e^{j\varphi_{i_r}(n)} \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} (C_{i_r}^{re} + jC_{i_r}^{im})(\cos \varphi_{i_r}(k) + j \sin \varphi_{i_r}(k)) \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} [(C_{i_r}^{re} \cos \varphi_{i_r}(k) - C_{i_r}^{im} \sin \varphi_{i_r}(k)) + j(C_{i_r}^{re} \sin \varphi_{i_r}(k) + C_{i_r}^{im} \cos \varphi_{i_r}(k))], \end{aligned} \quad (4.19)$$

nous établissons que la relation (4.20) donnée ci-dessous :

$$|x_k + c_k| \leq t, \quad (4.20)$$

peut s'écrire sous la forme donnée par (4.21) :

$$|A_k Y + H_k| \leq E_k^T Y + g_k, \quad (4.21)$$

avec :

$$A_k = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{i_0}(k) & -\sin \varphi_{i_0}(k) & \dots & \cos \varphi_{i_{R-1}}(k) & -\sin \varphi_{i_{R-1}}(k) & 0 \\ \sin \varphi_{i_0}(k) & \cos \varphi_{i_0}(k) & \dots & \sin \varphi_{i_{R-1}}(k) & \cos \varphi_{i_{R-1}}(k) & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times (2R+1)}, \quad (4.22)$$

$$Y = \begin{bmatrix} C_{i_0}^{re} \\ C_{i_0}^{im} \\ i_0 \\ \vdots \\ C_{i_{R-1}}^{re} \\ C_{i_{R-1}}^{im} \\ i_{R-1} \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2R+1) \times 1}, \quad (4.23)$$

$$H_k = \begin{bmatrix} \Re(x_k) \\ \Im(x_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \quad (4.24)$$

$$E_k^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{2R+1}, \quad (4.25)$$

$$g_k = 0 \in \mathbb{R}, \quad (4.26)$$

où  $C_{i_k}^{re} = \Re(C_{i_k})$  et  $C_{i_k}^{im} = \Im(C_{i_k})$  et  $R$  le nombre de porteuses non utilisées.

En posant :

$$F_k^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{2R+1}, \quad (4.27)$$

et à partir des relations précédentes ((4.22) à (4.27)), le problème de réduction du PR modélisé sous forme de problème d'optimisation convexe donné par la relation (4.18) est bien un problème SOCP donné par la formule (4.17).

Ainsi, avec cette modélisation du problème de réduction du PR sous forme d'un problème SOCP, le PR de tous types de signaux OFDM est diminué (bande de base complexes ou réels) contrairement à la méthode "TR" qui ne traite que du cas bande de base réel. Les performances en terme de CCDF de la méthode TR améliorée sont illustrées par la figure 4.10.

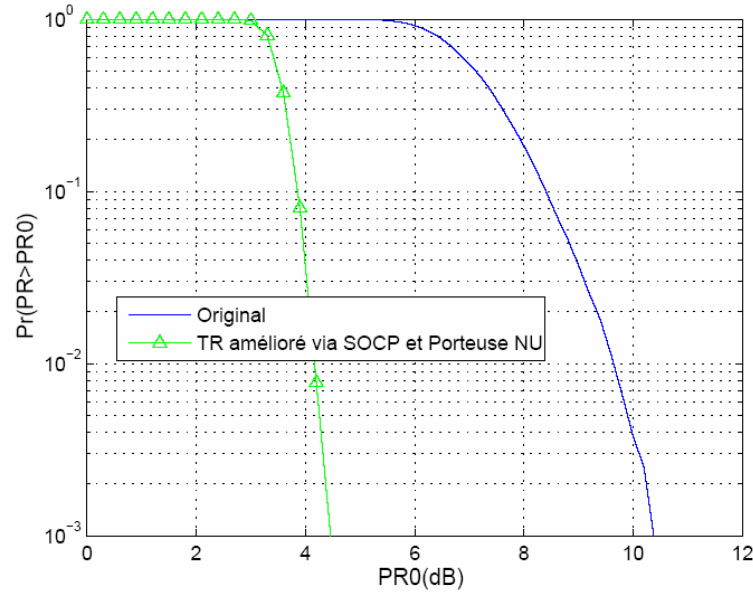


FIG. 4.10 – Performance en terme de CCDF du PR de la méthode TR améliorée à l'aide du SOCP : Utilisation des porteuses non utilisées comme porteuses réservées du standard IEEE 802.11a où  $N = 64$ ,  $R = 12$ ,  $L = 4$

De cette figure, nous pouvons constater une forte diminution du PR comme en témoigne la CCDF. La modulation utilisée est une MAQ16.

Comme toute méthode d'ajout de signal, la diminution du PR engendre également une augmentation de la puissance moyenne relative  $\Delta E$  [12].

En ajoutant une contrainte dans le problème d'optimisation, il s'écrit sous la forme donnée par la relation (4.28) :

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{avec :} \quad & |x_k + \hat{q}_{k,L}^{lig} \hat{\mathbf{C}}| \leq t, \quad 0 \leq k \leq NL - 1 \\ & \|\mathbf{x} + \hat{\mathbf{Q}}_L \hat{\mathbf{C}}\| \leq \sqrt{\lambda K} \end{aligned} \quad (4.28)$$

où  $K$  est une constante donnée par  $K = NL \cdot E(|\mathbf{x}|^2)$  et  $\lambda \geq \Delta E$  est une variable dont le choix est lié au dimensionnement de l'amplificateur de puissance.

La contrainte ajoutée ( $\| \mathbf{x} + \widehat{\mathbf{Q}}_L \widehat{\mathbf{C}} \| \leq \sqrt{\lambda K}$ ) est une contrainte linéaire. Le nouveau problème d'optimisation convexe ainsi obtenu et donné par la relation (4.28) reste ainsi un SOCP.

La figure 4.11 représente les différentes CCDF correspondant à différentes valeurs de  $\gamma = 10 \log_{10}(\lambda)$ . Nous pouvons alors constater que plus la contrainte est sévère et plus le PR se dégrade.

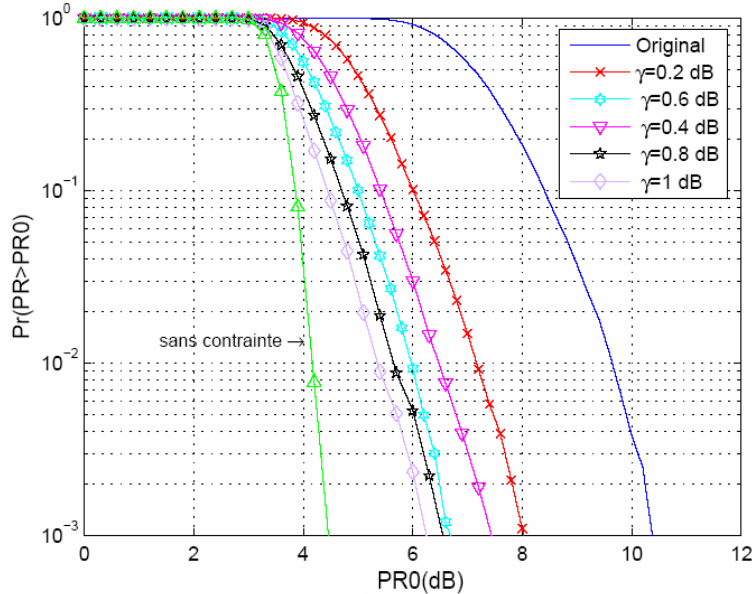


FIG. 4.11 – Performance en terme de CCDF du PR du signal optimisé pour plusieurs valeurs de  $\gamma$  dans le cas où la puissance additionnelle est limitée

#### 4.4 Extension de la méthode "Tone Reservation" à l'aide d'un algorithme de type SOCP pour les systèmes MIMO-OFDM : application aux porteuses adjacentes

Dans cette partie, nous proposons une extension de la méthode "Tone Reservation" à l'aide de SOCP pour les systèmes MIMO-OFDM à deux antennes basés sur un schéma d'Alamouti sachant que l'on peut généraliser cette extension aux autres systèmes MIMO-OFDM.

Dans les systèmes MIMO-OFDM, il est évident que se posera le problème de l'amplification non-linéaire sur chaque branche (correspondant à chaque antenne). La solution la plus simple serait alors d'appliquer la méthode de "TR" à l'aide de SOCP sur chacune des branches. Les gains en terme de réduction du PR (performances en terme de CCDF, puissance additionnelle transmise, etc...) seront alors identiques à ceux présentés précédemment. Cependant, un inconvénient de cette approche sera sans conteste la complexité engendrée.

Le schéma de principe de cette première approche est donné par la figure 4.12.

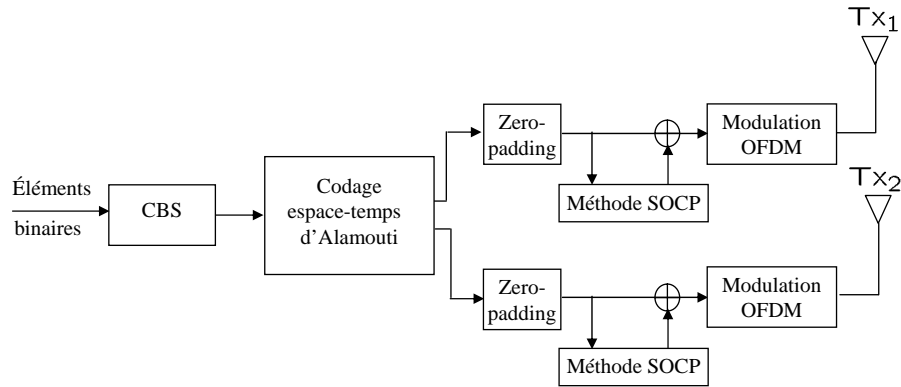


FIG. 4.12 – Application de la méthode TR améliorée à l'aide de SOCP sur chaque branche d'un système MIMO-OFDM

Compte tenu de la complexité accrue que cette approche (application de la méthode de réduction sur chaque branche) engendre, nous proposons une nouvelle modélisation du problème de réduction du PR propre à la configuration du système MIMO-OFDM. Il s'agit en réalité d'insérer la méthode de réduction du PR juste avant le codage espace-temps. Dans ce cas, le PR est conjointement réduit sur chaque branche. Mais cette approche nécessite une ré-modélisation du problème de réduction du PR. Le schéma de principe de cette approche est donné par la figure 4.13.

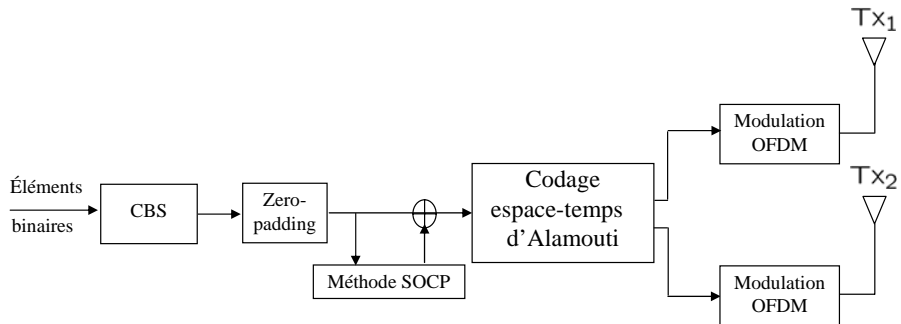


FIG. 4.13 – Application de la méthode TR améliorée à l'aide du SOCP avant le codage espace-temps

#### 4.4.1 Modélisation du problème de la réduction du PR sous forme SOCP

Pour remodeliser le problème de réduction du PR, nous l'illustrons par un schéma simple d'un système MIMO-OFDM basé sur un schéma d'Alamouti (figure 4.14).

Soit  $\mathbf{X} = [X_0 \ X_1 \ \dots \ X_{\frac{N}{2}-1} \ X_{\frac{N}{2}} \ \dots \ X_{N-2} \ X_{N-1}]$  le vecteur de données initiales à transmettre (c'est à dire les symboles numériques avant le codage espace-temps).  $\mathbf{X}_1 = [X_0 \ -X_1^* \ \dots \ X_{\frac{N}{2}-1} \ -X_{\frac{N}{2}}^* \ \dots \ X_{N-2} \ -X_{N-1}^*]$  et  $\mathbf{X}_2 = [X_1 \ X_0^* \ \dots \ X_{\frac{N}{2}} \ X_{\frac{N}{2}-1}^* \ \dots \ X_{N-1} \ X_{N-2}^*]$

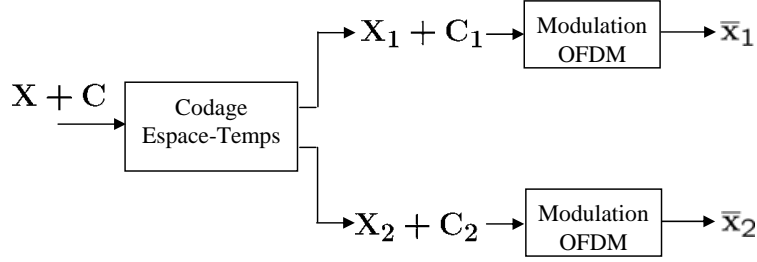


FIG. 4.14 – Structure d'un système MIMO-OFDM à deux antennes

sont les sorties du codeur espace-temps.

Soit  $\mathbf{C}$  le signal ajouté à  $\mathbf{X}$  dans le domaine fréquentiel pour réduire le PR, où  $\mathbf{C} = [C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{\frac{N}{2}-1} \ C_{\frac{N}{2}} \ \dots \ C_{N-2} \ C_{N-1}]$ ,  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  sont générés par le codeur espace-temps sur chacune des branches du système MIMO.

Posons :  $\mathbf{x}_1 = \text{ifft}(\mathbf{X}_1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \text{ifft}(\mathbf{X}_2)$ ,  $\mathbf{c}_1 = \text{ifft}(\mathbf{C}_1)$ ,  $\mathbf{c}_2 = \text{ifft}(\mathbf{C}_2)$  et  $\mathbf{c} = \text{ifft}(\mathbf{C})$  les signaux temporels obtenus respectivement des vecteurs de données  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}$ .

L'objectif de cette approche consiste alors à trouver un vecteur correcteur  $\mathbf{C}$  (dans le domaine fréquentiel) de sorte que  $\mathbf{X} + \mathbf{C}$  réduise conjointement le PR des signaux sur chaque antenne.

A partir de la figure 4.14, les signaux aux sorties des modulateurs OFDM dans le domaine temporel peuvent être exprimés comme :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_1 \\ &= \mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{Q}}_L (\mathbf{C} \odot \mathbf{A}_1 - \mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_2), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{x}_2 + \mathbf{c}_2 \\ &= \mathbf{x}_2 + \overline{\mathbf{Q}}'_L (\mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_1 + \mathbf{C} \odot \mathbf{A}_2), \end{aligned} \quad (4.30)$$

où  $(\cdot)^*$  représente l'opération de complexe conjugué,  $\odot$  le produit terme à terme de deux vecteurs de même taille et  $\overline{\mathbf{Q}}'_L$  une matrice formée par la permutation des lignes paires avec les lignes impaires de  $\overline{\mathbf{Q}}_L$  :

$$\overline{\mathbf{Q}}_L = \frac{1}{\sqrt{LN}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{LN}1 \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{LN}1 \cdot (LN-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{LN}(LN-2) \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{(LN-2)\pi}{LN}(LN-1)} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{LN}(LN-1) \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{(LN-1)\pi}{LN}(LN-1)} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{Q}}'_L = \frac{1}{\sqrt{LN}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{LN}1 \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{LN}1 \cdot (LN-1)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{LN}(LN-1) \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{(LN-1)\pi}{LN}(LN-1)} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{LN}(LN-2) \cdot 1} & \dots & e^{j\frac{(LN-2)\pi}{LN}(LN-1)} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0]^T$  et  $\mathbf{A}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 1]^T$  sont des vecteurs de taille  $NL \times 1$  où  $[\cdot]^T$  dénote la transposée du vecteur.

Les PRs des signaux à émettre peuvent être écrit comme

$$\text{PR}_1 = \frac{\max_k |x_{1,k} + c_{1,k}|^2}{E\{|x_{1,k} + c_{1,k}|^2\}}, \quad 0 \leq k \leq NL - 1, \quad (4.31)$$

$$\text{PR}_2 = \frac{\max_k |x_{2,k} + c_{2,k}|^2}{E\{|x_{2,k} + c_{2,k}|^2\}}, \quad 0 \leq k \leq NL - 1, \quad (4.32)$$

et le PR du système MIMO est donné par [104] :

$$\text{PR}_{MIMO-e} = \max\{\text{PR}_1, \text{PR}_2\}. \quad (4.33)$$

Donc, notre objectif est de réduire le  $\text{PR}_{MIMO-e}$  ce qui signifie réduire le  $\text{PR}_1$  et  $\text{PR}_2$  d'une manière conjointe. Dans un premier temps, l'algorithme de SOCP ne tient pas compte du problème d'augmentation de la puissance moyenne. Ainsi, le problème de la minimisation de PR est équivalent aux relations (4.34) et (4.35) suivantes :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}_1} \max_k |x_{1,k} + c_{1,k}|^2 &= \min_{\mathbf{c}_1} \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_1\|_\infty^2 \\ &= \min_{\mathbf{C}} \|\mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{Q}}_L(\mathbf{C} \odot \mathbf{A}_1 - \mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_2)\|_\infty^2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}_2} \max_k |x_{2,k} + c_{2,k}|^2 &= \min_{\mathbf{c}_2} \|\mathbf{x}_2 + \mathbf{c}_2\|_\infty^2 \\ &= \min_{\mathbf{C}} \|\mathbf{x}_2 + \overline{\mathbf{Q}}'_L(\mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_1 + \mathbf{C} \odot \mathbf{A}_2)\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Le problème d'optimisation convexe formulé par les équations (4.34) et (4.35) est alors équivalent à :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{C}} \quad & t \\ \text{avec} \quad & \|\mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{Q}}_L(\mathbf{C} \odot \mathbf{A}_1 - \mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_2)\|_\infty \leq t \\ & \|\mathbf{x}_2 + \overline{\mathbf{Q}}'_L(\mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_1 + \mathbf{C} \odot \mathbf{A}_2)\|_\infty \leq t. \end{aligned} \quad (4.36)$$

La formulation représentée par (4.36) est équivalente à celle du SOCP.

La figure 4.15 montre les CCDFs du PR des signaux originaux et optimisés (sans imposer d'une contrainte sur l'augmentation de la puissance moyenne) pour des symboles QPSK générés aléatoirement. Le système MIMO-OFDM utilise 2 antennes avec  $N = 256$  porteuses par antenne, parmi lesquelles, 56 porteuses non utilisées (comme dans la norme IEEE 802.16 WiMAX) qui sont utilisées pour ajouter le signal correctif. Comme nous pouvons le voir, le PR est réduit d'environ de 7 dB pour un seuil de dépassement de  $10^{-3}$  ( $L = 4$ ).

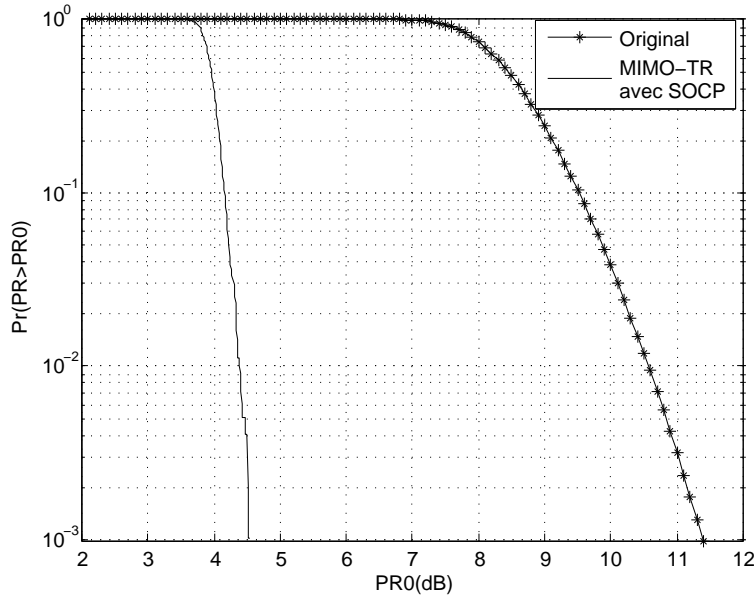


FIG. 4.15 – Performance en terme de CCDF du PR de la méthode TR améliorée à l'aide du SOCP pour un système MIMO-OFDM (MIMO 2x2,  $N = 256$ ,  $R = 56$  et  $L = 4$ ), sans contrainte sur la puissance moyenne

Nous illustrons aussi à travers la figure 4.16 les spectres des signaux obtenus avant et après application de la méthode de réduction du PR modélisée sous forme de SOCP. Nous traçons sur cette figure le masque imposé par le standard que nous utilisons dans nos simulations (IEEE 802.16 WiMAX). Le spectre du signal après réduction du PR (signal optimisé) présente des pics aux emplacements des porteuses non utilisées (celles que nous avons dédiées à la réduction du PR) visibles sur la partie supérieure de la figure (nous n'avons pas une explication de la présence de ces pics aux emplacements des premières porteuses non utilisées, ces constats ont aussi été fait dans [16]). Aussi, nous constatons qu'une partie du spectre du signal optimisé est hors du masque toujours visible sur la partie supérieure de la figure 4.16. Le "Zoom" de cette partie de la figure 4.16 est illustré par la figure 4.17.

Par suite, la puissance ajoutée par les porteuses non utilisées doit rester aussi faible que possible. En conséquence, le spectre du signal optimisé (dont le PR est réduit) respectera dans ce cas le masque imposé par le standard.

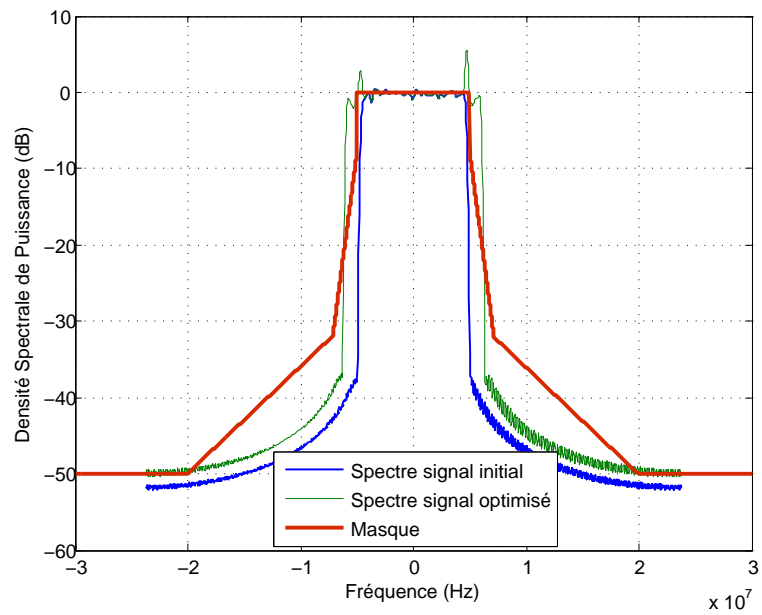


FIG. 4.16 – Spectre de signal après la méthode TR améliorée à l'aide du SOCP pour un système MIMO-OFDM, sans contrainte sur la puissance moyenne

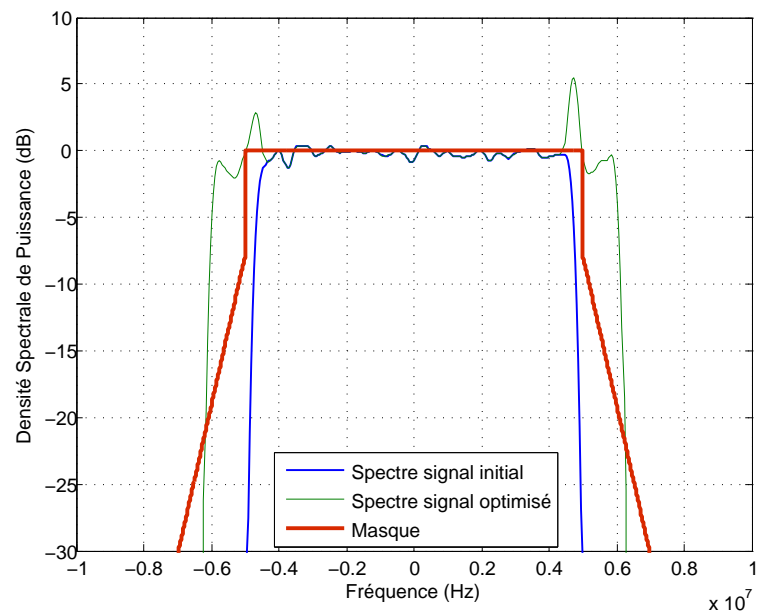


FIG. 4.17 – Zoom sur le spectre : illustration du non respect du masque du standard du signal optimisé, sans contrainte sur la puissance moyenne



#### 4.4.2 Modélisation du problème du PR sous forme SOCP avec contrainte sur la puissance moyenne relative

Comme toutes les méthodes basées sur de l'ajout de signal, elles ont en commun le même inconvénient. En effet, pour transmettre le signal ajouté, il faut une certaine puissance. Cette puissance additionnelle ne sert qu'à diminuer le Power Ratio du signal à amplifier. Il faut cependant tenir compte de cette puissance dans le bilan de liaison complet. Il est donc évident que cette puissance additionnelle doit être la plus faible possible pour que la méthode soit viable en pratique. La seule modélisation sous forme SOCP pour réduire le PR n'est plus suffisante pour répondre à cet inconvénient. C'est pourquoi, il faut modéliser le problème sous forme de SOCP en imposant d'une contrainte supplémentaire, en particulier, avec la contrainte d'une puissance additionnelle inférieure à un certain seuil acceptable pour l'application.

Donc, ajouter un signal  $\mathbf{c}$  au signal  $\mathbf{x}$  pour réduire le PR augmente la puissance de transmission. Nous rappelons que la puissance moyenne  $\Delta E$  d'augmentation relative, due à la réduction de PR est définie comme [12] :

$$\Delta E_{dB} = 10 \log_{10} \frac{E\{\|\mathbf{x} + \mathbf{c}\|_2^2\}}{E\{\|\mathbf{x}\|_2^2\}}. \quad (4.37)$$

Ce paramètre doit être aussi faible que possible afin d'éviter la saturation d'amplificateur de puissance. En effet, il est facile de comprendre que si on augmente indéfiniment la puissance moyenne de signal  $\mathbf{x} + \mathbf{c}$ , le PR résultant est de 0 dB et lié à un signal qui ne peut pas être transmis. Ainsi, la puissance moyenne relative peut être écrite comme :

$$\Delta E_{dB} \leq \gamma. \quad (4.38)$$

Cette condition peut être traduite comme :

$$E\{\|\mathbf{x} + \mathbf{c}\|_2^2\} \leq \lambda E\{\|\mathbf{x}\|_2^2\}. \quad (4.39)$$

où  $\lambda = 10^{\frac{\gamma}{10}}$ .  $\gamma$  est une constante liée à la caractéristique de l'amplificateur de puissance.

La condition ci-dessus peut être ajoutée comme contrainte dans le problème d'optimisation. Alors l'algorithme SOCP pour MIMO-OFDM dans ces conditions devient :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{C}} \quad & t \\ \text{avec} \quad & \|\mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{Q}}_L(\mathbf{C} \odot \mathbf{A}_1 - \mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_2)\|_\infty \leq t \\ & \|\mathbf{x}_2 + \overline{\mathbf{Q}}_L(\mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_1 + \mathbf{C} \odot \mathbf{A}_2)\|_\infty \leq t \\ & \|\mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{Q}}_L(\mathbf{C} \odot \mathbf{A}_1 - \mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_2)\| \leq \sqrt{\lambda K_1} \\ & \|\mathbf{x}_2 + \overline{\mathbf{Q}}_L(\mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_1 + \mathbf{C} \odot \mathbf{A}_2)\| \leq \sqrt{\lambda K_2}. \end{aligned}$$

où  $K_1 = NL \cdot E(|\mathbf{x}_1|^2)$  et  $K_2 = NL \cdot E(|\mathbf{x}_2|^2)$ . Par exemple, si  $\gamma = 0.2$  dB, alors la puissance des porteuses non utilisées représente au maximum 4.7% de la puissance totale des porteuses de données.

La figure 4.18 trace la CCDF du PR du signal optimisé pour plusieurs valeurs de  $\gamma$  en reprenant les mêmes paramètres de simulation utilisés pour la figure 4.15. Comme nous pouvons voir, le PR diminue avec l'augmentation de  $\gamma$ .

La figure 4.19 illustre les spectres obtenus avant et après la méthode de réduction. Nous remarquons l'absence de pics (contrairement à la figure 4.16). Cependant nous pouvons remarquer que le spectre du signal optimisé ne respecte pas totalement le masque du standard pour la valeur de  $\gamma = 0.6$  dB comme nous pouvons le voir sur la figure 4.20.

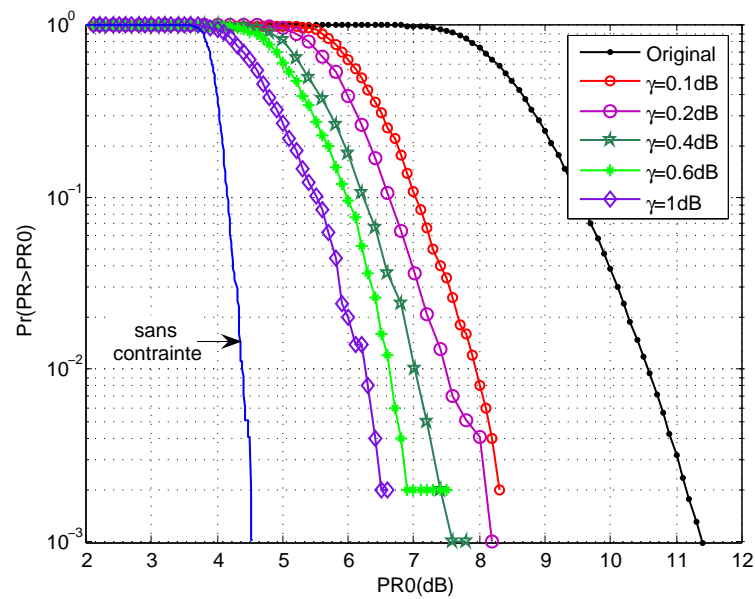


FIG. 4.18 – Performance en terme de CCDF du PR du signal optimisé pour plusieurs valeurs de  $\gamma$ , dans le cas où la puissance additionnelle est limitée

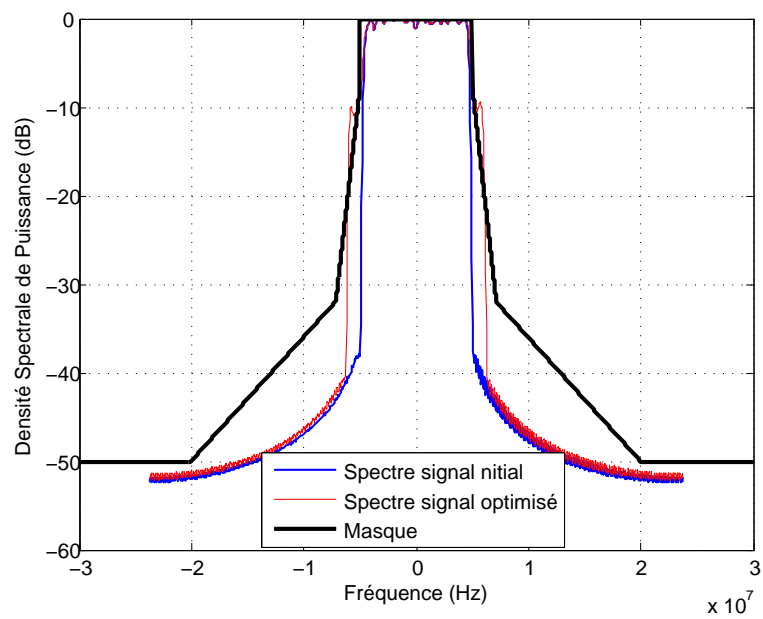


FIG. 4.19 – Spectre du signal optimisé après SOCP avec contrainte sur  $\Delta E$ ,  $\gamma = 0.6 \text{ dB}$

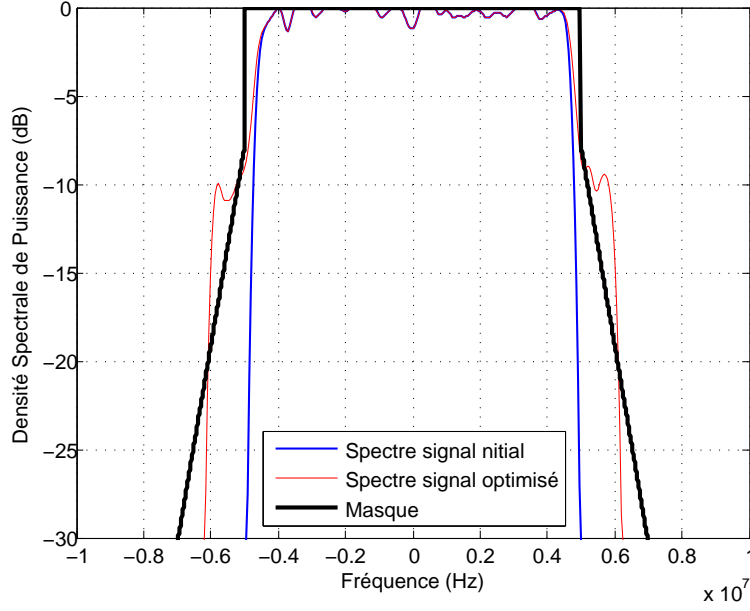


FIG. 4.20 – Zoom sur le spectre du signal optimisé après SOCP avec contrainte sur  $\Delta E$ ,  $\gamma = 0.6 \text{ dB}$

#### 4.4.3 Modélisation du problème du PR sous forme SOCP avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées

Dans le cas présent nous imposons des contraintes sur la puissance de chacune des porteuses non utilisées. Celles-ci ne devront pas dépasser un certain seuil de sorte à garantir une très faible augmentation de la puissance moyenne relative et aussi à ce que le spectre du signal optimisé reste sous le masque d'émission.

Notre problème d'optimisation devient alors :

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{C}} \quad & t \\
 \text{avec} \quad & \|\mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{Q}}_L(\mathbf{C} \odot \mathbf{A}_1 - \mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_2)\|_\infty \leq t \\
 & \|\mathbf{x}_2 + \overline{\mathbf{Q}}'_L(\mathbf{C}^* \odot \mathbf{A}_1 + \mathbf{C} \odot \mathbf{A}_2)\|_\infty \leq t. \\
 & |C_k| \leq \delta_k, \quad k \in \mathcal{R}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

où  $\mathcal{R}$  désigne l'ensemble des indices des porteuses non utilisées et  $\delta_k$  les valeurs instantanées du masque d'émission. La dernière ligne de l'équation 4.40 représente ainsi la contrainte imposée sur les porteuses réservées afin qu'elles respectent le masque d'émission.

Les performances en terme de CCDF du PR ainsi que le spectre obtenu et le TEB sont illustrées respectivement par les figures 4.21, 4.22 et 4.23. Pour ces résultats nous utilisons une constellation QPSK. L'augmentation de la puissance moyenne relative  $\Delta E$  associée est alors de  $0.573 \text{ dB}$ . Nous pouvons constater d'une part une bonne performance en terme de CCDF (figure 4.21) et d'autre part que le spectre respecte le masque d'émission (figure 4.22). Enfin, nous constatons que le TEB, conformément à ce qui a déjà été évoqué, n'est

pas dégradé suite à l'application de la méthode de Tone Reservation sur les porteuses non utilisées (figure 4.23).

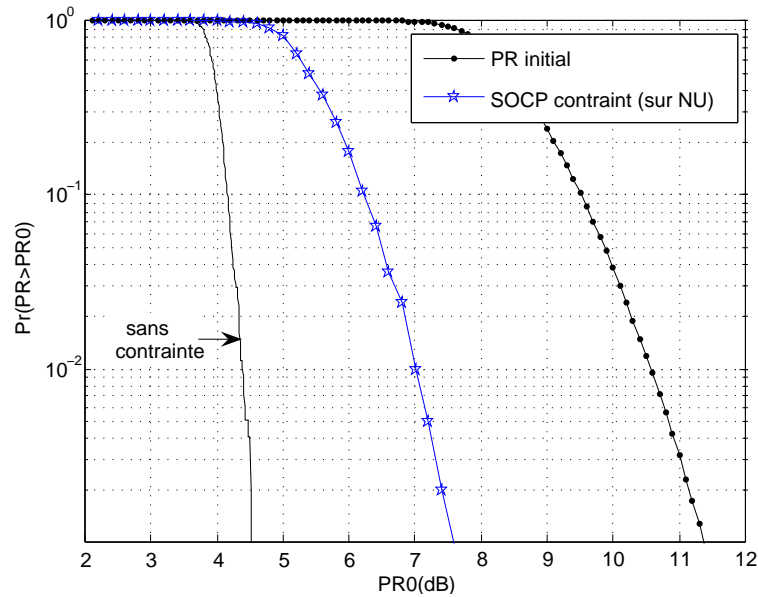


FIG. 4.21 – CCDF du PR du signal optimisé après SOCP, avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées

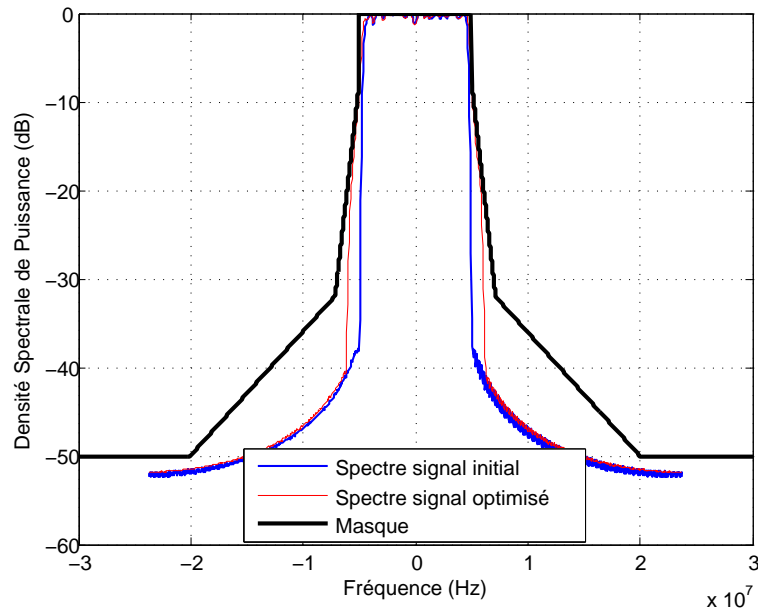


FIG. 4.22 – Spectre du signal optimisé après SOCP, avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées

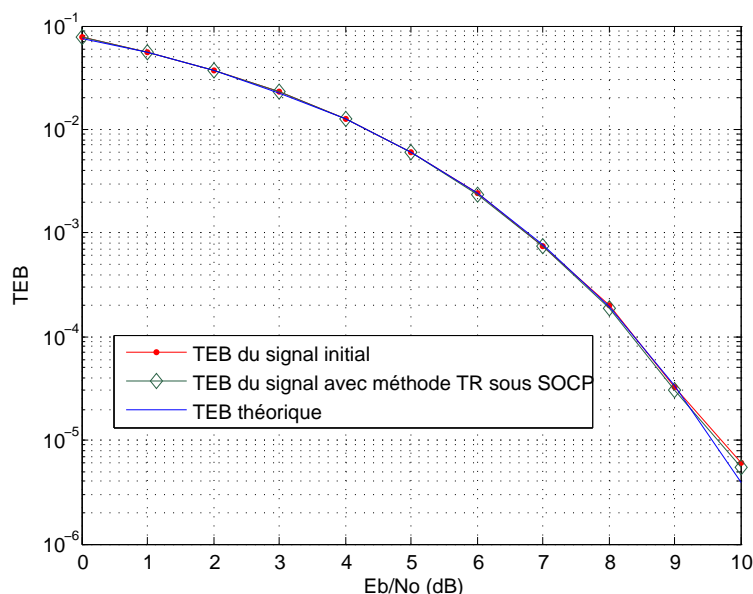


FIG. 4.23 – Taux d'Erreur Binaire avec et sans méthode de TR avec SOCP

#### 4.4.4 Comparaison des performances des approches SOCP avec contrainte sur $\Delta E$ et avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées

En imposant une contrainte sur le masque (c'est à dire sur les porteuses non utilisées), nous avons constaté une augmentation de puissance  $\Delta E$  de  $0.573 \text{ dB}$ . Lorsque nous superposons les CCDF du PR obtenues par les deux algorithmes SOCP avec cette même puissance moyenne relative (figure 4.24), il est clair que celui avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées présente plus d'intérêt, malgré une légère dégradation du PR. En effet, uniquement dans ce cas, le masque du standard est respecté.

### 4.5 Extension de la méthode "Tone Reservation" à l'aide de SOCP pour les systèmes MIMO-OFDM : application aux porteuses dans la bande utile

#### 4.5.1 Présentation et intérêt

Nous avons proposé dans la partie 4.4 une méthode pour réduire le PR d'un système MIMO-OFDM pouvant être appliquée à un standard déjà existant. Il s'agit d'utiliser les porteuses adjacentes (non utilisées) des standards. Cependant, l'inconvénient d'exploiter ces porteuses adjacentes réside dans la remontée des lobes secondaires du spectre du signal en dehors du masque imposé par le standard. La solution naturelle que nous avons alors proposée a été de rajouter une contrainte pour contrôler la puissance de chaque porteuse de correction, ce qui augmente par conséquent la complexité de l'algorithme SOCP.

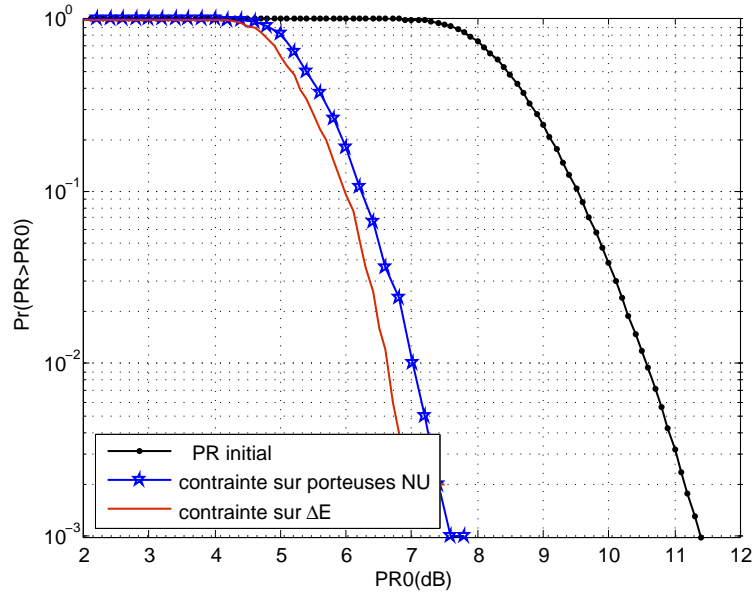


FIG. 4.24 – Superposition des CCDF du PR du signal optimisé pour deux conditions différentes (sur les porteuses non utilisées et sur la puissance moyenne totale),  $\Delta E = 0.573 \text{ dB}$

L'approche que nous allons maintenant présenter consiste à réserver des porteuses de correction (pour réduire le PR) dans la bande utile du standard comme cela est classiquement le cas en OFDM pour les porteuses pilotes afin d'estimer le canal (et pour la synchronisation). Cependant, il est clair que cela se fera au prix d'une légère dégradation de l'efficacité spectrale à condition que le nombre de ces porteuses reste faible, ce qui sera le cas en pratique (quelques pourcents). Cette approche prend tout son sens dans le cas où un standard est en cours de normalisation et où un certain nombre de porteuses seront alors spécifiquement allouées à la réduction du PR. Dans la suite, nous allons appliquer ce principe au standard IEEE 802.16 WiMAX (déjà existant) pour montrer sa faisabilité.

#### 4.5.2 Résultats et discussions

La figure 4.25 illustre les performances en terme de réduction du PR en fonction du nombre de porteuses allouées dans la bande utile, sur les 200 porteuses du standard IEEE 802.16 WiMAX à deux antennes d'émission (même système MIMO-OFDM que dans la partie précédente). Comme attendu, les gains en PR augmentent lorsque le nombre de ces porteuses augmente. Comme précédemment, la conséquence réside dans l'augmentation de la puissance moyenne  $\Delta E$  du signal à amplifier. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1.

La conclusion majeure de cette étude est la suivante : prenons par exemple le cas où 4 porteuses sont réservées dans la bande utile (2%). Dans ce cas, nous avons montré que la réduction du PR et l'augmentation de la puissance moyenne étaient respectivement de 3.5 dB et 0.58 dB. Des performances exactement similaires ont été obtenues lorsque 56

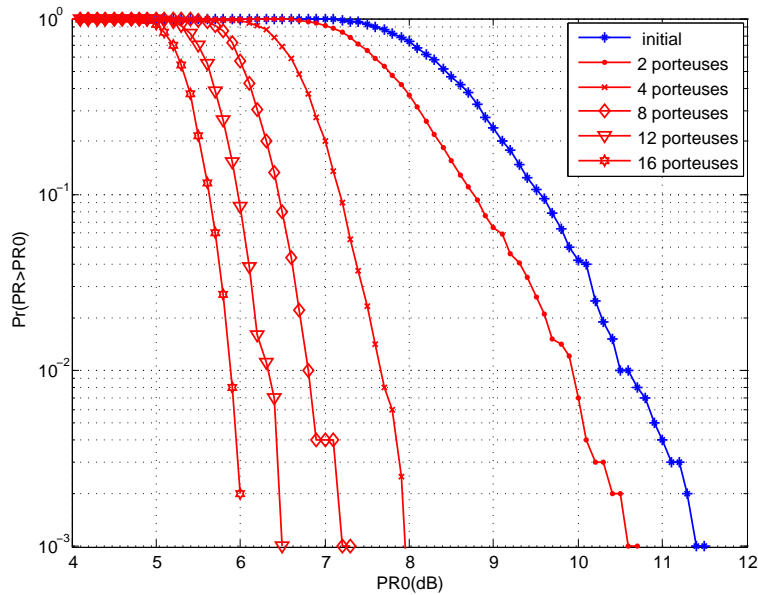


FIG. 4.25 – CCDF du PR en fonction du nombre de porteuses réservées dans la bande utile (sur 200) , constellation QPSK,  $L = 4$

Nombre de porteuses réservées	2 sur 200	4 sur 200	8 sur 200	12 sur 200	16 sur 200
Pourcentage de porteuses réservées	1%	2%	4%	6%	8%
$\Delta E$	0.24 dB	0.58 dB	0.69 dB	0.87 dB	1.04 dB
Gain en réduction du PR (pour un seuil de $10^{-3}$ )	$\approx 0.9$ dB	$\approx 3.5$ dB	$\approx 4.5$ dB	$\approx 5$ dB	$\approx 5.4$ dB

TAB. 4.1 – Résultats numériques des courbes représentées sur la figure 4.25

porteuses sont dédiées à la réduction du PR dans les bandes adjacentes (en respectant le masque d'émission, figure 4.24). Pour des raisons évidentes de complexité (on optimise seulement 4 porteuses au lieu de 56), il paraît donc bien plus efficace de réserver peu de porteuses dans la bande utile plutôt que d'utiliser un grand nombre de porteuses dans les bandes adjacentes. L'explication à cela est que les puissances "disponibles" dans la bande utile sont bien plus importantes que dans les bandes adjacentes, sachant bien-sûr que la réduction de PR est complètement liée à la puissance totale apportée par les porteuses de correction. Cependant, il est évident que cette allocation de porteuses dans la bande utile s'accompagne d'une légère dégradation de l'efficacité spectrale du même ordre que la proportion de porteuses allouées (ici 2%).

La figure 4.26 illustre d'autre part le spectre d'un signal sur une des deux antennes d'émission. Comme prévu, les porteuses allouées pour la réduction du PR ont des puissances plus élevées que les porteuses de données. Des études plus poussées en prenant en compte l'amplification de puissance devront déterminer par la suite les performances de

cette approche en mesurant en particulier les remontées des lobes secondaires et le taux d'erreur binaire en fonction du recul du signal d'entrée à amplifier.

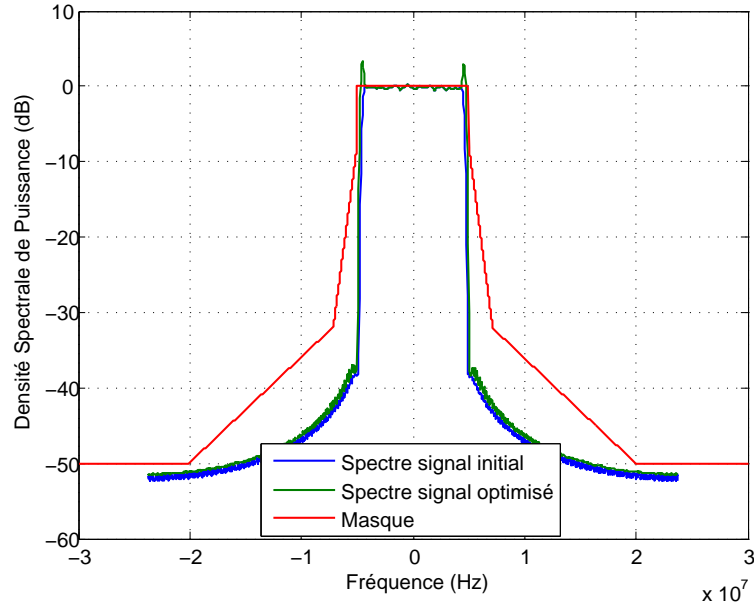


FIG. 4.26 – Spectre du signal émis sur une antenne du système MIMO-OFDM , constellation QPSK,  $L = 4$ , avec 4 porteuses allouées dans la bande utile

## 4.6 Performances de la méthode SOCP (avec porteuses dans les bandes adjacentes) dans le cas d'un canal de Rayleigh

Dans cette partie nous présentons les performances de la méthode que nous avons développée en 4.4. Ces performances sont évaluées par les CCDF du PR du signal reçu d'un système MIMO-OFDM à deux antennes de type WiMAX 802.16. La figure 4.27 montre les CCDF des PR (en radio fréquence) des signaux émis et reçus (perturbés par un canal de Rayleigh à évanouissements plats) avec et sans application de la méthode de réduction du PR à émetteur.

Malgré un léger gain de l'ordre de 1 dB entre les PR des signaux reçus (avec et sans méthode à l'émission), il semble que l'application d'une méthode de réduction de PR à l'émission pour réduire le PR en réception ne soit pas complètement justifiée. C'est pourquoi il semble plus naturel de développer directement des méthodes à la réception.

## 4.7 Développement d'une méthode à la réception

### 4.7.1 Méthode de "Jun" à l'émission

Cette technique de réduction du PR a été proposée par Yang Yun [115] pour un signal en RF à l'émission. L'intérêt de la technique est de fournir à l'amplificateur de puissance



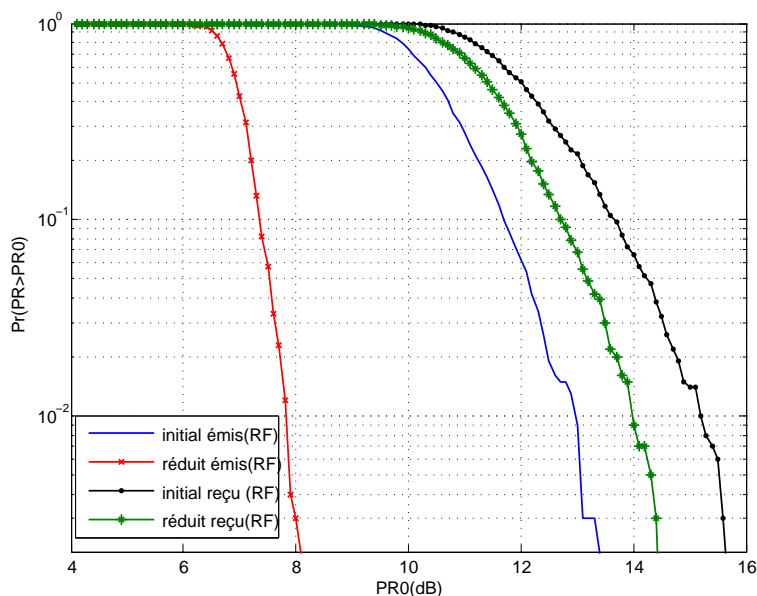


FIG. 4.27 – CCDF du PR des signaux émis et reçus dans un système MIMO-OFDM de deux antennes avec et sans méthode de TR ,  $N = 256$ , 56 porteuses nulles dans le cas sans méthode, constellation QPSK,  $L = 4$

un signal à enveloppe constante à partir d'un signal multiporteuse (donc à enveloppe non constante) large bande. Elle consiste donc à ajouter un signal artificiel (hors bande utile) au signal multiporteuse afin de diminuer le PR du signal multiporteuse. A la sortie de l'amplificateur, le signal amplifié est filtré par un filtre passe bande ( $BPF^{(4)}$ ) pour éliminer le signal artificiel ; il ne reste plus que le signal utile qui est alors propagé.

Pour générer le signal artificiel, une modulation d'amplitude est utilisée pour une facilité d'analyse et de calcul. La fréquence porteuse du signal artificiel est hors de la bande utile car cette dernière est supprimée par filtrage passe bande juste après amplification. Le schéma de principe de la méthode est donné par la figure 4.28.

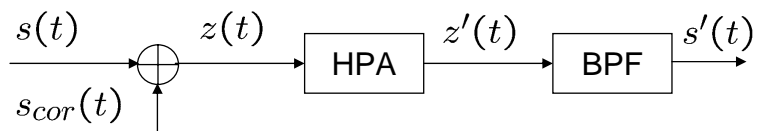


FIG. 4.28 – Schéma de principe de la méthode de Jun

<sup>(4)</sup>Band Pass Filter

### 4.7.2 Application de la méthode de "Jun" à la réception

Dans cette partie, nous appliquons la méthode de "Jun" en réception où la technique propose une diminution de l'enveloppe du signal à l'entrée de l'amplificateur faible bruit par ajout de signal artificiel. La figure 4.29 illustre un schéma bloc d'application de la méthode en réception où les LPF<sup>(5)</sup> et BPF représentent respectivement des filtres passe-bas et passe-bande.

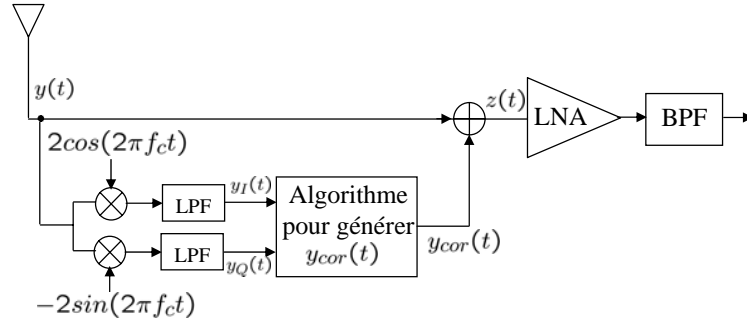


FIG. 4.29 – schéma de l'algorithme de reduction du PR

L'algorithme pour générer le signal correctif  $y_{cor}(t)$  est le suivant : soient  $y_I(t)$  et  $y_Q(t)$  les composantes en phase et en quadrature du signal reçu dans un système MIMO-OFDM.

L'enveloppe du signal est donnée par :  $E(t) = \sqrt{y_I^2(t) + y_Q^2(t)}$ .

Si l'enveloppe dépasse un certain seuil  $C$  ( $E(t) \geq C$ ), un signal artificiel correctif  $y_{cor}(t)$  est généré pour donner un signal résultant  $z(t) = y(t) + y_{cor}(t)$ . Le signal  $y_{cor}(t)$  est donné sous la forme :

$$y_{cor}(t) = a(t) \cos 2\pi f_r t, \quad (4.41)$$

où  $f_r = f_c + \Delta f$ .

Ainsi, nous avons :

$$z(t) = b_I(t) \cos\{2\pi f_c t\} - b_Q(t) \sin\{2\pi f_c t\}, \quad (4.42)$$

où

$$\begin{aligned} b_I(t) &= y_I(t) + a(t) \cos\{2\pi \Delta f t\}, \\ b_Q(t) &= y_Q(t) + a(t) \sin\{2\pi \Delta f t\}. \end{aligned}$$

L'enveloppe du signal somme  $z(t)$  s'écrit alors comme :  $E_z(t) = \sqrt{b_I^2(t) + b_Q^2(t)}$ .

Pour que le signal  $z(t)$  soit à enveloppe constante, il faut que pour tout  $t$ ,

$$E_z^2(t) = C^2. \quad (4.43)$$

La résolution de l'équation (4.43) aboutit à

$$a(t) = -B(t) \pm \sqrt{B^2(t) - y_I^2(t) - y_Q^2(t) + C^2}, \quad (4.44)$$

<sup>(5)</sup>Low Pass Filter

où  $B(t) = y_I(t) \cos\{2\pi\Delta ft\} + y_Q(t) \sin\{2\pi\Delta ft\}$ .

La figure 4.30 illustre la performance en terme de CCDF du PR du signal reçu perturbé par un canal de Rayleigh à évanouissements plats. Les simulations ont été effectuées sur un signal OFDM reçu sur un antenne d'un système MIMO-OFDM à deux antennes d'émission (256 porteuses, constellation QPSK,  $L = 2$ ).

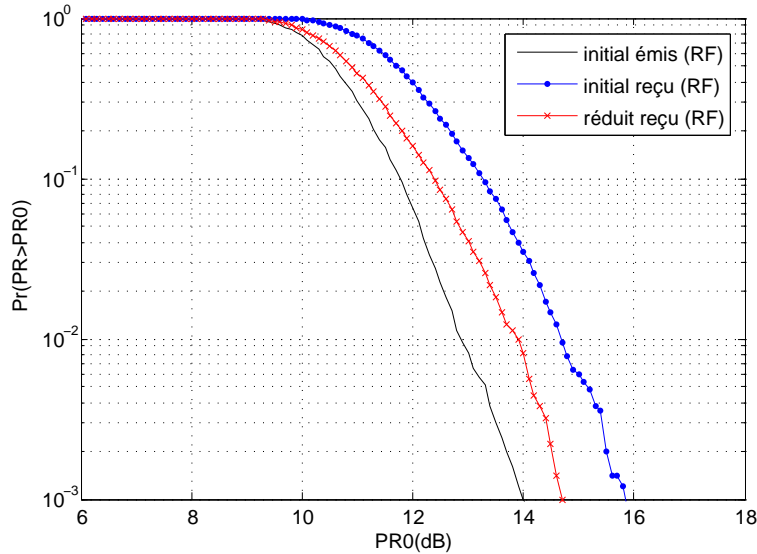


FIG. 4.30 – CCDF du PR avant et après l'ajout d'un signal artificiel au signal reçu dans un système MIMO-OFDM de deux antennes,  $N = 256$ , constellation QPSK,  $L = 2$

La figure 4.31 représente les densités spectrales du signal reçu  $y(t)$  et du signal correctif  $y_{cor}(t)$ . Elle permet de voir que l'ajout de signal artificiel  $y_{cor}(t)$  se fait bien en dehors de la bande utile. En conséquence, le taux d'erreur binaire ne sera pas affecté (ou de façon insignifiante) par l'application de cette méthode.

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'état de l'art des techniques du réduction du PR à l'émission pour les systèmes MIMO-OFDM. Compte tenu des objectifs que nous nous sommes fixés (compatibilité descendante et non dégradation du TEB), nous avons appliqué la méthode dite de "Tone Reservation" à l'aide du SOCP pour réduire de façon conjointe le PR à l'émission des systèmes MIMO-OFDM. Les porteuses de correction ont été dans un premier temps ajoutées dans les bandes adjacentes du multiplex OFDM. Des gains significatifs de réduction du PR ont été obtenus. La contrepartie de cette méthode étant l'augmentation de la puissance moyenne, une contrainte dans l'algorithme SOCP a été ajoutée pour la limiter, au détriment bien sûr des gains en réduction du PR. Cependant, il a été constaté que le masque d'émission du standard étudié n'était pas respecté. Pour cela, nous avons alors imposé une contrainte dans l'algorithme SOCP relative au masque spectral du standard à la place de la contrainte sur la puissance moyenne. Ainsi, nous

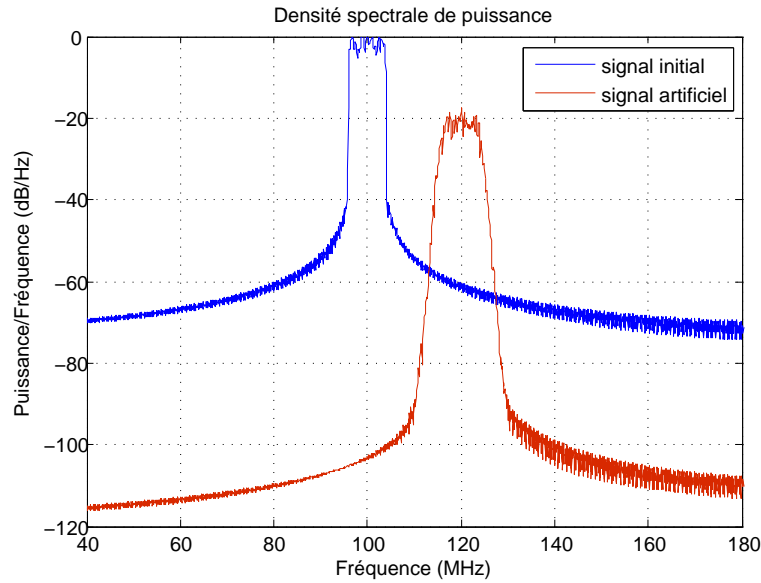


FIG. 4.31 – Spectres du signal reçu et du signal correctif

avons constaté que l'augmentation de la puissance moyenne était de l'ordre de  $0.573 \text{ dB}$ . En appliquant alors l'algorithme SOCP avec  $0.573 \text{ dB}$  de contrainte sur la puissance moyenne, il a été constaté une légère dégradation du PR au détriment de l'approche avec contrainte sur le masque spectral. Il semble donc plus avantageux d'imposer une contrainte sur le masque plutôt que sur la puissance moyenne, car cette dernière ne respecte pas automatiquement le masque d'émission.

Pour éviter d'importantes remontées spectrales dans les bandes adjacentes, les porteuses allouées ont été ensuite positionnées dans la bande utile à la façon des fréquences pilotes pour l'égalisation ou la synchronisation comme c'est classiquement le cas en OFDM. En procédant ainsi, nous avons constaté que le gain en réduction du PR augmente lorsque le nombre de porteuses allouées augmente, au détriment d'une légère dégradation de l'efficacité spectrale, du même ordre que la proportion de porteuses allouées parmi celles utiles. Dans les simulations présentées, ce nombre varie de 1% à 6% pour des gains respectifs en réduction du PR de 1 à  $5.5 \text{ dB}$ . Cette étude a montré que pour des raisons évidentes de complexité, il paraît bien plus efficace de réserver peu de porteuses dans la bande utile plutôt que d'utiliser un grand nombre de porteuses dans les bandes adjacentes. L'explication à cela est que les puissances "disponibles" dans la bande utile sont bien plus importantes que dans les bandes adjacentes, sachant bien-sûr que la réduction de PR est complètement liée à la puissance totale apportée par les porteuses de correction. Cependant, il est évident que cette allocation de porteuses dans la bande utile s'accompagne d'une légère dégradation de l'efficacité spectrale du même ordre que la proportion de porteuses allouées (ici 2%).

Ensuite, nous avons constaté que le développement de la méthode de TR à l'émission permettait de gagner en terme de réduction du PR à la réception (dans la cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats) en comparaison au cas où aucune méthode n'est

appliquée. Dans le cas d'un système MIMO-OFDM avec  $N = 256$  et  $R = 56$  porteuses réservées, le gain obtenu en réduction du PR à la réception est de l'ordre de  $1 \text{ dB}$ . Nous avons ensuite directement appliqué une méthode de réduction du PR en réception. Il s'agit d'une méthode d'ajout de signal hors bande en fréquence porteuse (méthode de Jun). Ce qui nous a permis d'obtenir, dans le cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats un gain en réduction de PR de l'ordre de  $1.5 \text{ dB}$ .

Enfin, dans les deux approches proposées, le TEB n'est pas dégradé car le principe de base des méthodes développées est justement d'ajouter un signal de correction hors bande utile.

# Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire présente les travaux effectués au sein de l'équipe SCEE de Supélec, campus de Rennes, sur les caractérisations, analyses et réductions du Power Ratio des systèmes radiocommunications multi-antennes.

Dans un premier temps, nous avons brièvement décrit le fonctionnement d'une chaîne de transmission ainsi que les techniques de base telles que les modulations numériques usuelles et plus précisément les modulations MAQ et QPSK utilisées dans la majeure partie de nos études. Les différents modèles de canaux rencontrés en pratique ont été présentés, notamment les canaux BBAG et à évanouissements de Rayleigh. Ce dernier est le mieux adapté aux communications radio-mobiles dans un environnement multi-trajets. Ensuite, la modulation multiporteuse OFDM a été présentée et permet de traiter simplement le phénomène d'interférences dû à la sélectivité fréquentielle en transformant le canal de propagation en canaux à évanouissements plats. Aussi, nous avons présenté les différentes sortes de diversité en particulier la diversité spatiale susceptible d'améliorer la qualité de transmission sur ce type de canaux. Cependant le signal OFDM temporel possédant un fort Power Ratio (PR), et pour des raisons de coût et d'efficacité énergétique, il n'est généralement pas possible de placer dans l'émetteur et le récepteur des amplificateurs linéaires sur toute la dynamique du signal. La solution sous optimale du recul était alors privilégiée, jusqu'à ce que des méthodes de réduction du PR soient envisagées pour les standards de communications numériques présents et futurs.

Pour palier au problème des signaux à forts PR, nous nous sommes intéressés en premier lieu à l'analyse du PR dans les systèmes SISO-(mono et multiporteuse) et MIMO-(mono et multiporteuse). Puis en second lieu nous avons proposé deux approches pour la réduction en réception du PR, une à l'émission et l'autre à la réception. La particularité de nos contributions réside dans le fait que nous avons analysé l'influence des canaux (BBAG et de Rayleigh) sur le PR des signaux reçus en SISO et MIMO.

L'objectif visé dans le **deuxième chapitre** était l'analyse du PR dans le contexte SISO. Nous avons cité une série de définitions pour traduire la notion de variations d'amplitude d'un signal. Cette démarche s'inscrivait dans le souci d'éviter les confusions souvent faites dans l'usage des paramètres tels que le PMEPR, le PAPR ou le CF (qui expriment aussi la notion de variation de puissance), d'où l'appellation Power Ratio pour désigner tout simplement le rapport de puissance maximale instantanée et puissance moyenne d'un signal. Les signaux dans un système SISO pouvant être monoporteuse ou multiporteuse, nous avons analysé le Power Ratio dans ces deux différentes formes. Dans le cas monoporteuse, nous avons présenté l'intérêt du suréchantillonnage dans le calcul du PR et l'influence

du filtre de Nyquist sur ce dernier. Ensuite, nous avons étudié l'influence du filtre en racine de Nyquist en montrant que seul le facteur de roll off affectait de façon importante le PR en sortie du filtre et que le PR est infini pour un roll off nul. Une borne supérieure du PR a ensuite été établie en fonction du roll off. Puis, nous avons présenté quelques simulations qui ont mis en évidence l'influence du canal sur le PR en réception dans un système SISO-monoporteuse. Dans le cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats, la dégradation du PR peut alors atteindre une dizaine de  $dB$ .

Pour le cas multiporteuse, nous avons analysé l'influence du filtre de mise en forme sur le PR. Il a été montré que ce filtre ne modifiait pas le PR du signal en sortie, ce dernier conservant ses propriétés gaussiennes. Nous avons ensuite établi les expressions analytiques du PR pour des canaux BBAG et de Rayleigh à évanouissements plats. Le canal BBAG ne modifie pas le PR alors que le canal de Rayleigh à évanouissements plats le dégrade d'environ  $6\text{ dB}$  pour un seuil de dépassement de  $10^{-4}$ . Nous avons constaté aussi que, dans le cas d'un canal de Rayleigh à trajets multiples, le PR diminue lorsque le nombre de trajets augmente. La borne inférieure du PR dans le cas d'un canal à trajets multiples est alors donnée par celle obtenue dans le cas du canal BBAG, et ceci en raison du théorème de la limite centrale.

Dans le **troisième chapitre**, nous avons présenté les systèmes MIMO en définissant le modèle de canal, leurs capacités et les codes espace-temps (en treillis, en blocs orthogonaux et non orthogonaux). Le code espace-temps d'Alamouti a été choisi pour analyser le PR des systèmes MIMO (mono et multiporteuse).

Nous avons ainsi proposé une nouvelle définition du PR des signaux reçus d'un système MIMO. Cette définition tient compte de l'influence du canal de propagation.

Pour les systèmes MIMO-monoporteuse, nous avons déduit les expressions du PR du signal reçu pour les systèmes basés sur un schéma d'Alamouti, les codes en blocs avec commutation entre groupes d'antennes et le code de Jafarkhani. Ces expressions théoriques ne prennent pas en compte l'effet du canal vu la complexité de la densité de probabilité du signal émis. Nous avons enfin établi que le PR (en réception) augmente en fonction du nombre d'antennes d'émission (canal sans bruit) mais diminue lorsque le nombre de trajets d'un canal de Rayleigh augmente (du fait du théorème de la limite centrale).

Lorsque le canal MIMO est sélectif en fréquence, ce qui est le cas en pratique, l'association avec l'OFDM présente un intérêt important. Pour ces systèmes, nous avons analysé le PR du signal reçu perturbé par des canaux BBAG et de Rayleigh à évanouissements plats. En se basant sur une analyse mathématique appuyée par des simulations, nous avons montré que le signal sur une des antennes de réception d'un système MIMO-OFDM a une distribution égale à celles des signaux émis, et ceci pour un canal BBAG. Le PR n'est donc pas dégradé. En ce qui concerne le canal de Rayleigh à trajets multiples, les développements montrent une diminution du PR par rapport au cas d'un canal à évanouissements plats. Encore une fois, la borne inférieure du PR dans le cas d'un canal à trajets multiples est donnée par celle obtenue dans le cas du canal BBAG, et ceci en raison du théorème de la limite centrale.

L'objectif du **quatrième chapitre** est la réduction du PR en réception. Deux approches sont alors possibles : le réduire à l'émission (approche classique) ou directement à la réception. Donc, nous avons dans un premier temps présenté l'état de l'art des tech-

niques de réduction du PR à l'émission pour les systèmes MIMO-OFDM. Compte tenu des objectifs que nous nous sommes fixés (compatibilité descendante et non dégradation du TEB), nous avons appliqué la méthode dite de "Tone Reservation" à l'aide du SOCP pour réduire de façon conjointe (sur toutes les antennes) le PR à l'émission. Les porteuses de correction ont été dans un premier temps ajoutées dans les bandes adjacentes du multiplex OFDM. Des gains significatifs de réduction du PR ont été obtenus. La contrepartie de cette méthode réside cependant dans l'augmentation de la puissance moyenne. Une contrainte dans l'algorithme SOCP a alors été ajoutée pour la limiter, au détriment bien sûr des gains en réduction du PR. Cependant, il a été constaté que le masque d'émission du standard étudié n'était pas automatiquement respecté. Pour cela, nous avons imposé une contrainte dans l'algorithme SOCP relative au masque d'émission du standard à la place de la contrainte sur la puissance moyenne.

Pour éviter d'importantes remontées spectrales dans les bandes adjacentes, les porteuses allouées ont été ensuite positionnées dans la bande utile. En procédant ainsi, nous avons constaté que le gain en réduction du PR augmente avec le nombre de porteuses allouées, au détriment d'une légère dégradation de l'efficacité spectrale, du même ordre que la proportion de porteuses allouées parmi celles utiles. Cette étude a par ailleurs montré que pour des raisons évidentes de complexité, il paraît bien plus efficace de réserver peu de porteuses dans la bande utile plutôt que d'utiliser un grand nombre de porteuses dans les bandes adjacentes. L'explication à cela est que les puissances "disponibles" dans la bande utile sont bien plus importantes que dans les bandes adjacentes, sachant bien-sûr que la réduction de PR est complètement liée à la puissance totale apportée par les porteuses de correction.

Ensuite, nous avons constaté que le développement de la méthode de TR à l'émission permettait de gagner en terme de réduction du PR à la réception (dans le cas d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats) en comparaison au cas où aucune méthode n'est appliquée. Dans le cas d'un système MIMO-OFDM avec  $N = 256$  et  $R = 56$  porteuses réservées, le gain obtenu en PR à la réception est de l'ordre de  $1 \text{ dB}$ . Nous avons ensuite directement appliqué une méthode de réduction du PR en réception. Il s'agit d'une méthode d'ajout de signal hors bande en fréquence porteuse (méthode de Jun). Ce qui nous a permis d'obtenir, dans le cas d'un canal de Rayleigh (à évanouissements plats) un gain en réduction de PR de l'ordre de  $1.5 \text{ dB}$ . Dans les deux approches proposées, le TEB n'est pas dégradé car le principe de base des méthodes développées est justement d'ajouter un signal de correction hors bande utile.

Les études menées dans le cadre de cette thèse ouvrent de nombreuses perspectives, tant sur le plan analytique que des méthodes de réduction du PR.

Tout d'abord, nous avons constaté une réelle difficulté à établir une expression théorique de la distribution du PR dans le cas d'une modulation monoporteuse filtrée. Ce problème ne semble pas aujourd'hui résolu. Il pourrait être intéressant de s'y attacher afin de comprendre au mieux théoriquement les fluctuations du PR en fonction du facteur de roll off. Ceci permettra d'expliquer par exemple pourquoi le PR, dans le cas d'un filtre en racine de Nyquist, évolue différemment de part et d'autre d'une valeur de roll off située autour de 0.4.



Cette étude théorique sur le PR en monoporteuse pourra ainsi être naturellement prolongée par une étude théorique sur l'influence du canal (BBAG et Rayleigh) afin d'estimer le PR en réception.

Sur l'aspect des méthodes, nous en avons principalement évalué les performances à l'aide de la fonction de répartition du PR (CCDF) sans prendre en compte d'influence des amplificateurs (émission et réception). Nous sommes bien conscient qu'une étude complète devra inclure le HPA et le LNA ainsi que d'autres composants non linéaires (mélangeurs, convertisseurs, ...). Cette étude devra alors établir un lien entre les taux d'erreur binaire, les reculs d'entrée (IBO) et les caractéristiques des amplificateurs (linéarité, facteur de bruit, ...). Pour être tout à fait complet, une étude de complexité des algorithmes devra enfin être menée car nous sommes bien conscients que l'optimisation convexe (SOCP) reste complexe et doit être simplifiée, sans doute au prix d'une dégradation des gains obtenus sur le PR. Des algorithmes sous optimaux au SOCP ont d'ailleurs été proposés récemment (de type gradient).

Ensuite, à la vue des résultats fournis, il nous semble particulièrement intéressant de prolonger l'étude sur l'insertion de porteuses de correction du PR dans la bande utile. Au prix d'une très légère dégradation de l'efficacité spectrale, les gains en réduction du PR et en complexité sont importants et pourraient être une solution élégante pour réduire le PR, au même titre que des porteuses pilotes sont utilisées aujourd'hui en OFDM pour l'estimation de canal. Il est à noter que cette stratégie est par exemple à l'étude actuellement dans les réflexions autour de la future norme de télévision numérique terrestre (DVBT2) (forum DVB et projet européen CELTIC B21C - Broadcast for the 21th Century).

Enfin de façon plus prospective, le principe d'ajout de signal pourrait être étendu à un principe d'ajout d'antennes virtuelles qui porteraient les informations liées à la réduction du PR et ceci de façon complètement transparente pour le récepteur.

# Publications personnelles

## Revue

- Basel Rihawi and Yves Louët, "PAPR Reduction Scheme with SOCP for MIMO-OFDM Systems", International Journal of Communications, Network and System Sciences (IJCNS), Vol.1, No. 1, February 2008.

## Conférences internationales

- Basel Rihawi, Yves Louët and Sidkiéta Zabré, "PAPR Reduction Scheme with SOCP for MIMO-OFDM", IEEE WICOM 07, Shanghai, China, September 2007.
- Basel Rihawi and Yves Louët, "Gaussian and Flat Rayleigh Fading Channel Influences on PAPR Distribution in MIMO-OFDM Systems", European Wireless Conference 07, Paris, France, April 2007.
- Basel Rihawi and Yves Louët, "Peak to Average Power Ratio analysis in MIMO Systems", ICTTA 06, Damas, Syria, April 2006.
- Steredenn Daumont, Basel Rihawi and Yves Louët, "Root-Raised Cosine filter influences on PAPR distribution of single carrier signals", ISCCSP 08, St. Julians, Malta, March 2008.

## Conférence nationale

- Basel Rihawi et Yves Louët, "Influence des canaux Gaussien et de Rayleigh sur la distribution du PAPR dans les systèmes MIMO-OFDM", Grets 07, Troyes, France, Septembre 2007.

## Séminaire

- Basel Rihawi, "Influence des canaux Gaussien et de Rayleigh sur la distribution du PAPR dans les systèmes MIMO-OFDM", Séminaire SCEE du 1<sup>er</sup> Mars 2007, Supélec, Campus de Rennes.

**Divers**

- Basel Rihawi, "Etude de l'amplification non-linéaire de signaux MIMO pour les terminaux radio-mobile", Doctoriales de Bretagne 2005, Saint Brieuc (France), 20-25 Novembre 2005.

# Annexe



## Annexe A

# Interférences Entre Symboles (IES)

L'interférence entre symboles apparaît à la sortie du filtre de réception. Elle est caractérisée par la contribution des autres symboles transmis sur le symbole, que l'on désire détecter. L'échantillonneur fournit au détecteur à seuil, une suite d'échantillons à la rapidité de modulation  $D_s = \frac{1}{T}$ . L'échantillon  $y(nT + t_0)$  sert à décider la valeur du symbole  $c_n$ . La constante  $t_0$  est choisie de telle sorte que les filtres utilisés puissent être causaux. L'échantillon est défini par :

$$y(nT + t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k p(nT + t_0 - kT) + b(nT + t_0). \quad (\text{A.1})$$

Il est composé de trois termes :

1. La contribution du symbole  $c_n$  à l'observation est  $c_n p(t_0) = c_n$ .
2. L'interférence entre les symboles, qui prend en compte la contribution de l'ensemble des symboles transmis sur cet échantillon. C'est une perturbation, un bruit supplémentaire défini par :

$$IES = \sum_{k=-\infty; k \neq 0}^{\infty} c_k p(nT + t_0 - kT). \quad (\text{A.2})$$

3. La contribution du bruit apportée par le canal de transmission est toujours  $b(nT + t_0)$  de variance  $\frac{N_0}{2}$ .

Les statistiques de l'IES sont très délicates à obtenir. Par contre on peut obtenir une condition, d'expression simple pour les modulations numériques à bande étroite, qui annule l'IES.

### A.1 Critère de Nyquist ou de non interférence entre symboles

Les fonctions  $p(t)$  qui satisfont le critère d'IES nulle, sont telles que, quelle que soit la suite de symboles émise  $\{c_k\}$ , l'IES soit nulle

$$IES = \sum_{k=-\infty; k \neq 0}^{\infty} c_{n-k} p(t_0 + kT) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Donc  $p(t_0 + kT) = 0$  est nulle quel que soit  $k \neq 0$ . Pour lutter aussi contre le bruit additif apporté par le canal BBAG, on considère que la condition de filtrage adapté est réalisée. Pour simplifier les expressions, on pose  $t_0 = 0$ . Si le filtre d'émission est causal, le filtre adapté est anticausal et la réponse impulsionnelle de l'ensemble de ces deux filtres est réelle paire et la fonction de transfert globale est réelle et positive. Soit l'expression de la condition de non IES

$$p(kt) = \delta_{k,0}, \quad (\text{A.4})$$

où  $\delta_{k,0}$  est le symbole de kronecker. On peut exprimer la condition de non IES, sur la fonction  $p(t)$  en utilisant un peigne de Dirac

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(0)\delta(t). \quad (\text{A.5})$$

On utilise la propriété du produit d'une fonction par une distribution de Dirac

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t). \quad (\text{A.6})$$

Les relations (A.3), (A.4) et (A.5) sont équivalentes. En prenant les transformées de Fourier des deux membres de la relation (A.5),

$$P(f) \otimes \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) = p(0) = 1. \quad (\text{A.7})$$

On effectue le produit de convolution terme à terme et on l'exprime à l'aide de la fonction  $P(f)$ .

Soit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - \frac{n}{T}) = T, \quad (\text{A.8})$$

ou en fonction de la fonction de transfert du filtre d'émission

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |G(f - \frac{n}{T})|^2 = T. \quad (\text{A.9})$$

L'expression en fréquence du critère de IES nulle est très simple, mais elle apporte deux remarques :

1. La largeur, bilatérale, du filtre  $P(f)$  est au moins égale à  $1/T$ . La largeur de bande minimale pour transmettre une modulation numérique linéaire est égale à la moitié de la rapidité de modulation  $B \geq \frac{1}{2T}$ .
2. Si la fonction  $P(f)$  est continue et de support  $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$ , alors  $P(\frac{1}{T}) = 0$

Le critère de Nyquist se réduit à la relation :

$$P(f) + P(f - 1/T) = T = \text{constante pour } f \in [0, 1/T].$$

Soit en utilisant la symétrie  $P(f) = P(-f)$ , on obtient la relation de symétrie sur la bande de transition du filtre global de transmission

$$P\left(\frac{1}{2T} + f\right) + P\left(\frac{1}{2T} - f\right) = T,$$

en particulier

$$P\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{T}{2}.$$

Une solution particulière est le filtre de fonction de transfert en cosinus surélevés :

$$P(|f|) = \begin{cases} T & \text{pour } 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{T}{\beta} \left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right)\right) & \text{pour } \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{pour } \frac{1+\beta}{2T} \leq |f| \leq 1. \end{cases}$$

où,  $0 \leq \beta \leq 1$  est le facteur de roll off. Ces fonctions sont représentées sur la figure A.1.

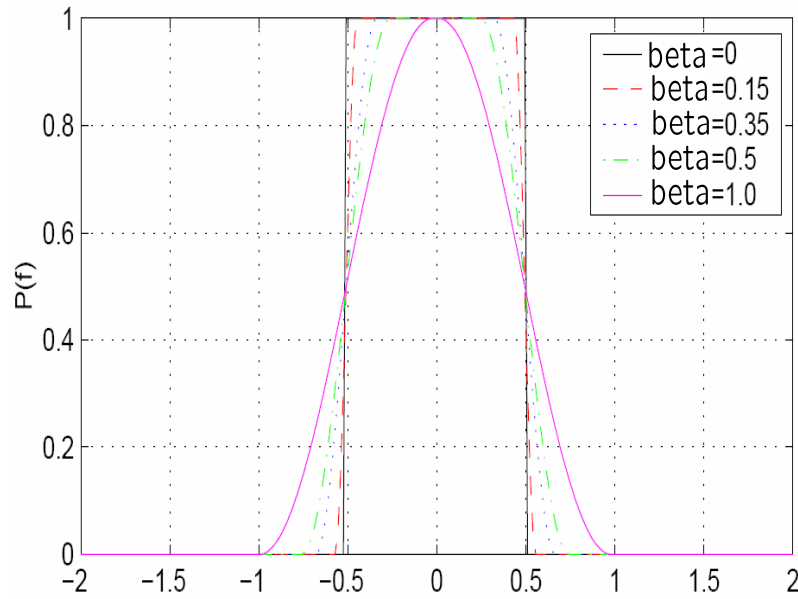


FIG. A.1 – Fonctions de transfert des filtres en cosinus surélevés

Le facteur de roll off est une mesure de l'excès de la bande passante du filtre, c'est-à-dire, la bande passante occupée au-delà de la largeur de bande de Nyquist  $\frac{1}{2T}$ . Si on note l'excès de bande passante par  $\Delta f$ , alors :

$$\beta = \frac{\Delta f}{\left(\frac{1}{2T}\right)} = \frac{\Delta f}{D_s/2} = 2T\Delta f, \quad (\text{A.10})$$



Donc, la bande passante d'un filtre en cosinus surélevé est souvent définie comme la largeur de la partie non nulle de son spectre, c'est-à-dire :

$$BW = \frac{1}{2}D_s(1 + \beta). \quad (\text{A.11})$$

La réponse impulsionnelle du filtre en cosinus surélevé est définie par la transformée de Fourier d'un cosinus surélevé

$$p(t) = p(0) \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t} \frac{\cos(\frac{\pi\beta}{T}t)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2}}. \quad (\text{A.12})$$

Ces fonctions sont représentées sur la figure A.2. On remarque que les oscillations de la réponse impulsionnelle des filtres augmentent lorsque l'on diminue la largeur de bande ( $\beta$  diminue) du filtre en cosinus surélevé. La dynamique, ou le Power Ratio du signal augmente lorsque sa largeur de bande diminue. Un compromis doit être trouvé en fonction des conditions de fonctionnement du système considéré.

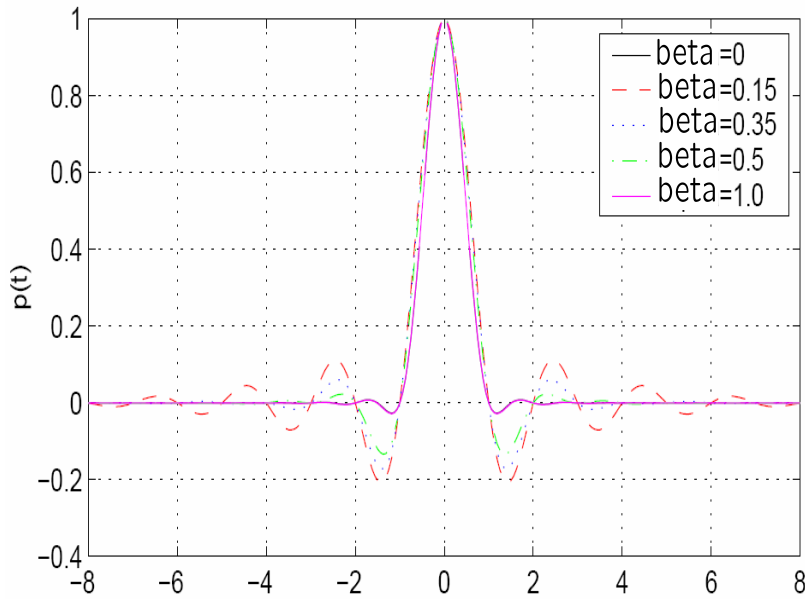


FIG. A.2 – Réponses impulsionnelles des filtres en cosinus surélevés

Pour satisfaire le critère de Nyquist, le module de la fonction de transfert des filtres d'émission et de réception doivent être en "racine de Nyquist" ou de façon générique en racine de cosinus surélevés.

En résumé :

- Le filtre global est un filtre de Nyquist, en particulier un filtre en cosinus surélevé.
- Le filtre d'émission est un filtre en racine de Nyquist.
- Le filtre de réception est adapté au filtre d'émission. C'est aussi un filtre en racine de Nyquist.

## A.2 Filtre en racine de cosinus surélevé

Un filtre en racine de cosinus surélevés a pour fonction de transfert

$$G(|f|) = \begin{cases} T & \text{si } 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{T}{\beta} \left( |f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) \right) \right) & \text{si } \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{si } \frac{1+\beta}{2T} \leq |f| \leq 1 . \end{cases}$$

Ces fonctions sont représentées sur la figure A.3 et pour réponse impulsionnelle

$$g(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t) \cos(\frac{\pi\beta}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t \left( 1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2} \right)} \quad \forall t. \quad (\text{A.13})$$

Ces fonctions sont représentées sur la figure A.4 Notons que le critère de non IES n'est pas vérifié par le filtre d'émission  $g(t)$  mais seulement par le filtre global  $p(t)$  dont la fonction de transfert satisfait bien le critère de non IES.

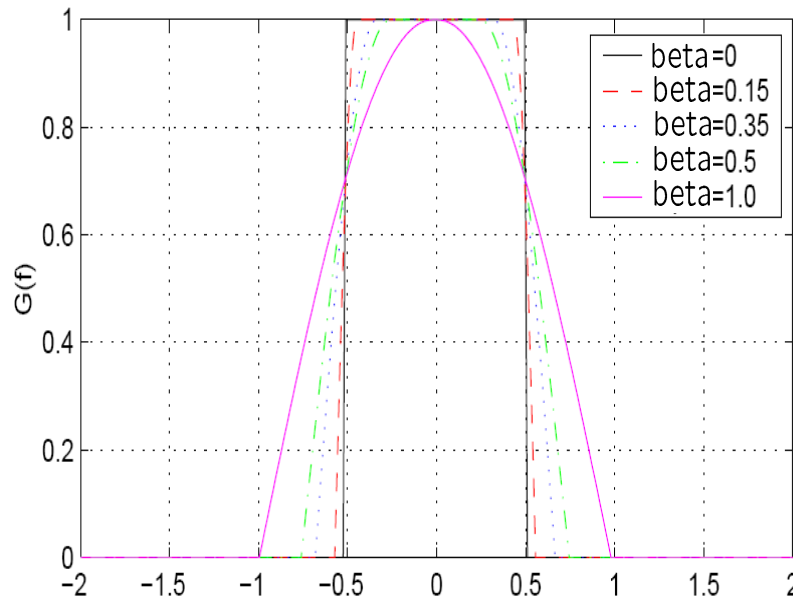


FIG. A.3 – Fonctions de transfert des filtres en racine cosinus surélevés

### Troncature

L'avantage du filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevés est que le signal en sortie du correspondant filtre adapté n'a pas d'IES. Cependant, ce filtre a un support temporel infini.

En pratique, cette réponse impulsionnelle est tronquée sur une durée finie. La conséquence de cette troncature est la présence de lobes latéraux non nuls dans le domaine

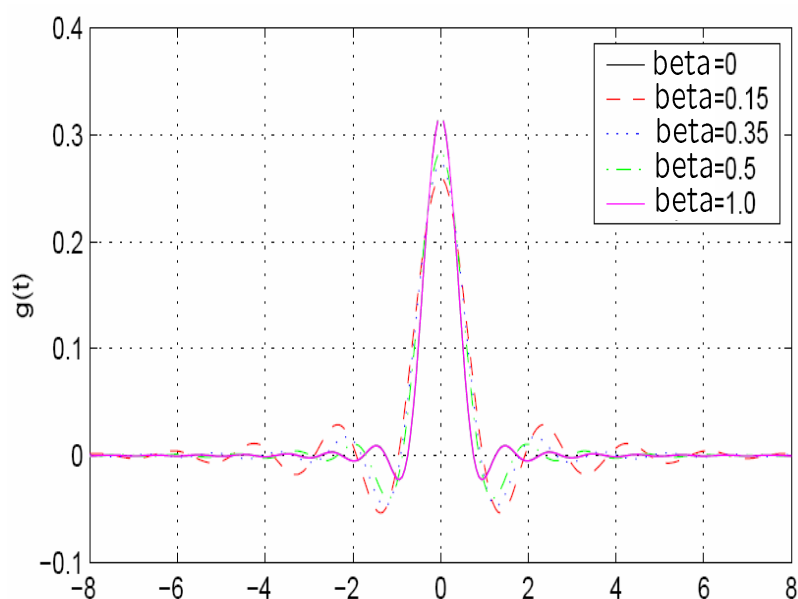


FIG. A.4 – Réponses impulsionnelles des filtres en racine cosinus surélevés

fréquentiel : le spectre n'est plus nul pour  $|f| > \frac{1+\beta}{2T}$  (comme il est illustré dans les figures A.5 à A.7).

Dans la figure A.5, la réponse impulsionnelle donnée par A.13 est échantillonnée à  $N_e = 4$  échantillons/symbole et est tronquée à seulement 4 symboles comme le montre la partie haute de la figure. La partie basse de la figure A.5 montre la conséquence dans le domaine fréquentiel : remontée des lobes latéraux et ondulation importante dans la bande passante. L'atténuation de la coupe-bande est seulement de  $18 \text{ dB}$ , ce qui n'est pas suffisante pour des applications pratiques.

Dans la figure A.6, la réponse impulsionnelle donnée par A.13 est échantillonnée à  $N_e = 4$  échantillons/symbole et est tronquée à 8 symboles comme le montre la partie haute de la figure. Dans le domaine fréquentiel, nous constatons que l'ondulation dans la bande passante a été éliminée et que les lobes latéraux sont maintenant atténués d'environ  $25 \text{ dB}$ .

Dans la figure A.6, la réponse impulsionnelle donnée par A.13 est échantillonnée à  $N_e = 4$  échantillons/symbole et est tronquée à 16 symboles comme le montre la partie haute de la figure. Maintenant, les lobes latéraux sont atténués d'environ  $32 \text{ dB}$ .

Il est clair que plus la durée de la réponse impulsionnelle augmente, plus le spectre approche au spectre idéal.

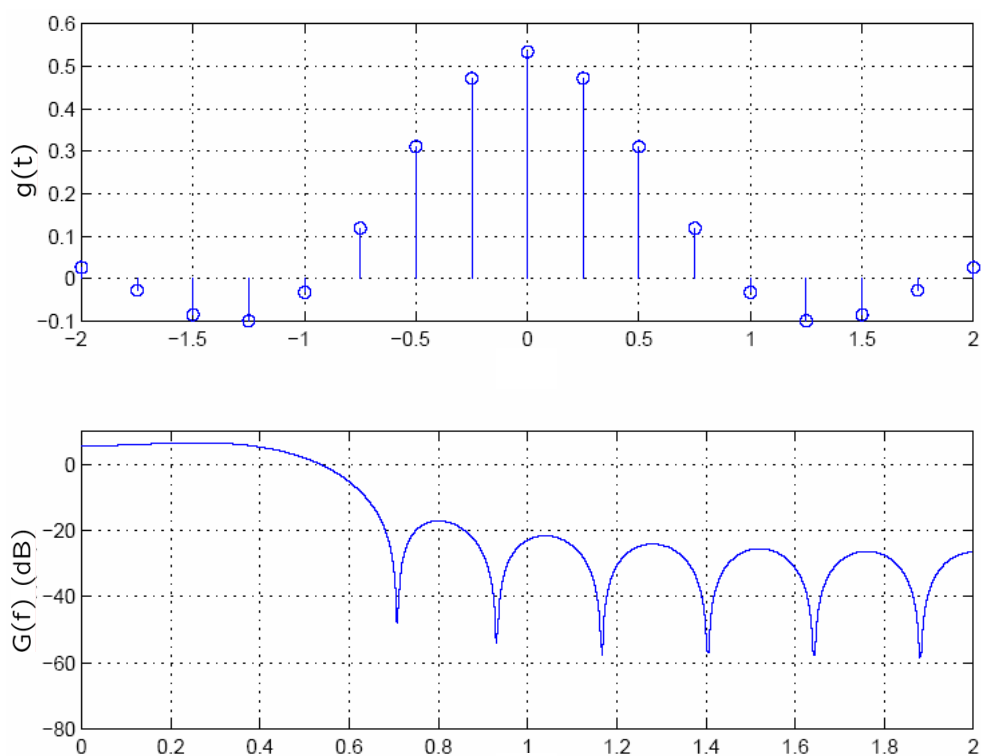


FIG. A.5 – Les effets de la troncature au filtre en racine de cosinus surélevés. Haute : le filtre est échantillonné à  $N_e = 4$  échantillons/symbole avec  $\beta = 0.5$  et tronqué à 4 symboles. Basse : le spectre correspondant.

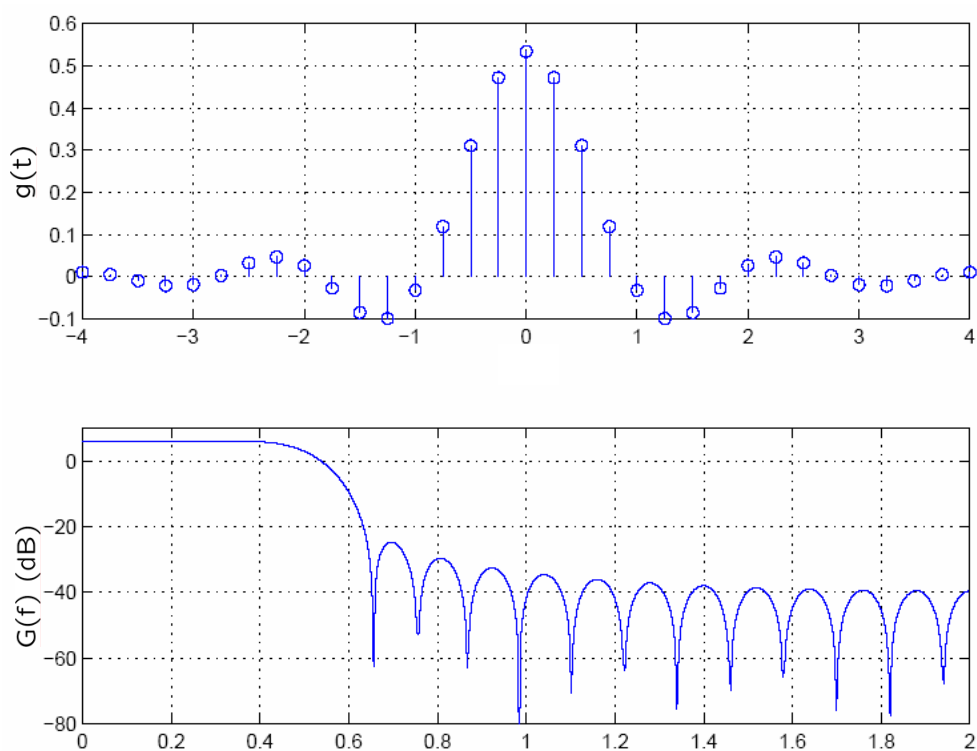


FIG. A.6 – Les effets de la troncature au filtre en racine de cosinus surélevés. Haute : le filtre est échantillonné à  $N_e = 4$  échantillons/symbole avec  $\beta = 0.5$  et tronqué à 8 symboles. Basse : le spectre correspondant.

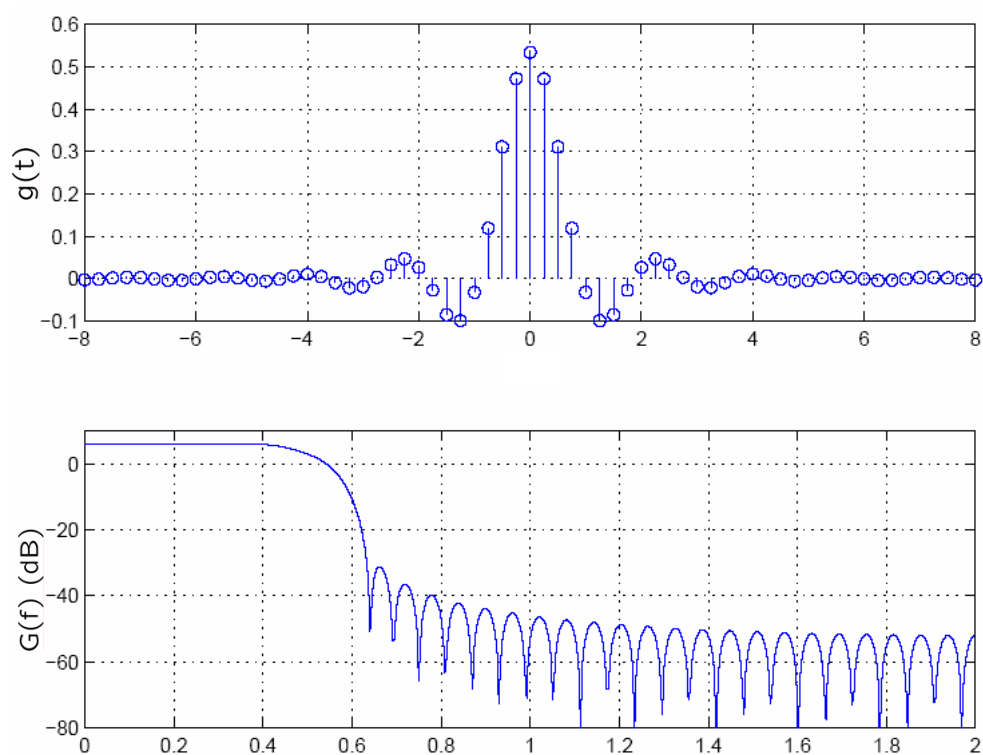


FIG. A.7 – Les effets de la troncature au filtre en racine de cosinus surélevés. Haute : le filtre est échantillonné à  $N_e = 4$  échantillons/symbole avec  $\beta = 0.5$  et tronqué à 16 symboles. Basse : le spectre correspondant.



## Annexe B

# Influence du Filtre de Nyquist sur le Power Ratio

La réponse impulsionnelle du filtre de Nyquist de facteur de roll off  $\beta$  est définie par la relation (B.1) :

$$p(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t) \cos(\frac{\pi\beta}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t \left(1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2}\right)}, \quad (\text{B.1})$$

où  $T$  représente la période d'un symbole et  $\beta$  le roll off.

Notons que le PR est analysé avec un facteur de suréchantillonnage infini. Le PR est calculé dans le cas continu infini c'est à dire sur un temps d'intégration grand, en d'autres termes sur un nombre élevé de symboles.

Le signal complexe bande de base s'exprime alors :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} (a_k + jb_k)p(t - kT). \quad (\text{B.2})$$

Pour une modulation BPSK, nous avons  $a_k \in \{-1, +1\}$  et  $b_k = 0$ .

Les développements qui suivent consisteront dans un premier temps à l'analyse théorique de la moyenne et du maximum de la puissance instantanée (pour l'estimation du infinite continuous Power Ratio) dans le cas de la modulation BPSK, et dans un second temps pour les autres types de modulations.

### B.1 Analyse de la puissance moyenne

Soit  $e(t)$  un signal à l'entrée d'un filtre de Nyquist avec :

$$e(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} a_k \delta(t - kT). \quad (\text{B.3})$$

La puissance moyenne à la sortie  $P_m$  peut s'exprimer :

$$P_m = E\{\tilde{s}(t)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_e(f) P^2(f) df, \quad (\text{B.4})$$



où  $\gamma_e(f)$  est la densité spectrale de puissance du signal d'entrée  $e(t)$  et  $P(f)$  la transformée de Fourier de  $P(t)$ .

En utilisant la relation de Benett et en faisant l'hypothèse que les symboles sont décorrélés et de moyenne nulle, nous pouvons établir :

$$\gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}. \quad (\text{B.5})$$

L'intégration de  $P(f)^2$  donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^2(f)df = T(1 - \frac{\beta}{4}). \quad (\text{B.6})$$

De par les équations (B.5) et (B.6) nous déduisons que :

$$P_m = \sigma_a^2(1 - \frac{\beta}{4}). \quad (\text{B.7})$$

Il reste à estimer le maximum de la puissance instantanée du signal  $\tilde{s}(t)$ .

## B.2 Calcul d'un majorant pour le maximum de la puissance instantanée

Pour ce calcul, nous distinguons deux cas de figures  $\beta = 0$  et  $\beta \neq 0$ .

### B.2.1 Cas $\beta = 0$

le signal  $\tilde{s}(t)$  s'écrit donc :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} a_k \frac{\sin(\frac{\pi(t-kT)}{T})}{\frac{\pi(t-kT)}{T}}. \quad (\text{B.8})$$

Il est facile de montrer que la fonction-série  $\tilde{s}(t)$  diverge. En effet, il suffit de trouver une séquence de symboles  $a_k$  et un temps donné  $t$  pour lequel la série diverge. Ce qui est effectivement le cas lorsque nous prenons :

- $a_k = (-1)^k$
- $t = \frac{-T}{2}$ .

Dans ces conditions, nous avons :

$$\tilde{s}(t) = \tilde{s}(-\frac{T}{2}) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N_s-1} \frac{1}{1+2k}. \quad (\text{B.9})$$

Cette série diverge car il s'agit d'une série harmonique. Il en est de même pour  $|\tilde{s}(t)|$  (la série est positive) et donc pour  $|\tilde{s}^2(t)|$ .

Par suite :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \text{PR}\{\tilde{s}(t)\} = +\infty. \quad (\text{B.10})$$

**B.2.2 Cas  $\beta \neq 0$** 

Afin de faciliter les calculs, nous normalisons la période symbole :  $T = 1$ .

Nous avons donc :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} a_k \frac{\sin(\pi(t-k)) \cos(\pi\beta(t-k))}{\pi(t-k) \sqrt{1-4\beta^2(t-k)^2}}. \quad (\text{B.11})$$

Pour étudier la convergence de la série, nous étudions sa convergence absolue.

Comme :

$$\left| \frac{\sin(\pi(t-k)) \cos(\pi\beta(t-k))}{\pi(t-k) \sqrt{1-4\beta^2(t-k)^2}} \right| \leq \frac{1}{|1-4\beta^2(t-k)^2|}, \quad (\text{B.12})$$

et constatant que le second membre est une série de Riemann lorsque  $N_s$  tend vers l'infini et ce quelque soit  $t$ , nous déduisons que pour  $\beta \neq 0$ , la série converge absolument (lorsque  $N_s$  tend vers l'infini) et donc converge simplement.

D'où :

$$\lim_{\beta \neq 0} \text{PR}\{\tilde{s}(t)\} \neq +\infty. \quad (\text{B.13})$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz,  $|\tilde{s}(t)|^2$  peut être majoré par :

$$\sum_{k=0}^{N_s-1} \left( \frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)} \right)^2 \sum_{k=0}^{N_s-1} \left( \frac{\cos(\pi\beta(t-k))}{\sqrt{1-4\beta^2(t-k)^2}} \right)^2. \quad (\text{B.14})$$

Posons

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} \left( \frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)} \right)^2.$$

Nous montrons (quand  $N_s$  tend vers l'infini) dans un premier temps que :

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} \left( \frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)} \right)^2 < 1, \quad (\text{B.15})$$

puis dans un second temps nous montrerons que :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} \left( \frac{\cos(\pi\beta(t-k))}{\sqrt{1-4\beta^2(t-k)^2}} \right)^2 \leq 2 \left( \frac{\pi^2}{16\beta} - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.16})$$

$\psi(t)$  peut s'écrire aussi :

$$\psi(t) = \left( \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right)^2 \sum_{k=0}^{N_s-1} \frac{1}{(t-k)^2}. \quad (\text{B.17})$$

En utilisant le fait que nous avons :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{(t-k)^2} = \left( \frac{\pi}{\sin(\pi t)} \right)^2, \quad (\text{B.18})$$

nous obtenons, pour tout  $t$  non entier,

$$\psi(t) + \psi(-t) = 1 + \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2. \quad (\text{B.19})$$

De plus comme,

$$\psi(-t) \left(\frac{\pi t}{\sin(\pi t)}\right)^2 = \sum_{k=0}^{N_s-1} \frac{t^2}{(t+k)^2} > 1. \quad (\text{B.20})$$

Nous en déduisons donc :

$$\psi(t) < 1.$$

Maintenant, nous analysons la relation (B.16). Nous considérons bien entendu, que  $N_s$  tend vers l'infini.

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} \left( \frac{\cos(\pi\beta(t-k))}{1-4\beta^2(t-k)^2} \right)^2,$$

$\varphi$  admet un maximum en  $t = \frac{N_s}{2}$ . Ceci est illustré par la figure B.1.

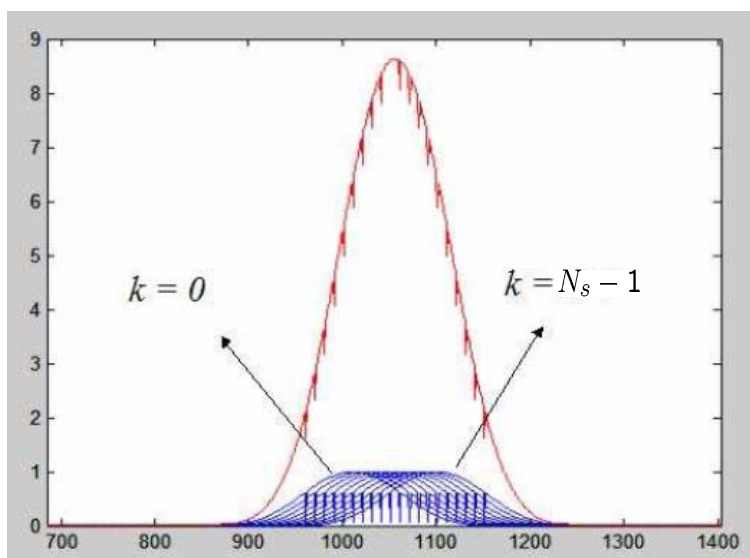


FIG. B.1 – fonction  $\varphi(t)$

$\varphi(t)$  est la courbe supérieure sur la figure B.1. Elle représente la somme des  $N_s$  fonctions élémentaires  $\left(\frac{\cos(\pi\beta(t-k))}{1-4\beta^2(t-k)^2}\right)^2$ . Nous constatons effectivement qu'elle présente un maximum à  $t = \frac{N_s}{2} = 1050$ .

En ce maximum,

$$\varphi\left(t = \frac{N_s}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N_s/2} \left( \frac{\cos(\pi\beta k)}{1-4\beta^2 k^2} \right)^2.$$

Pour exploiter cette somme, nous utilisons la formule d'Euler Mac-Laurin.  
Posons :

$$\sum_{k=1}^n F(k) = A + B \quad (\text{B.21})$$

où

$$\begin{aligned} - A &= \int_0^n F(t) dt \\ - B &= -\frac{1}{2}(F(0) - F(n)) + \frac{1}{2}(F'(n) - F'(0)) + \dots \end{aligned}$$

avec

$$F(k) = \left( \frac{\cos(\pi\beta k)}{1 - 4\beta^2 k^2} \right)^2.$$

L'idée maintenant c'est de faire tendre  $n$  vers l'infini (assimilé à  $\frac{N_s}{2}$ ) pour calculer le PR maximal.

Nous montrons, à l'aide du théorème des résidus que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left( \frac{\cos(\pi\beta t)}{1 - 4\beta^2 t^2} \right)^2 dt = \frac{\pi^2}{16\beta}, \quad (\text{B.22})$$

pour  $\beta \in ]0, 1[$ .

De plus, nous avons :

$$F(0) = 1, F(n) = 0 \text{ et } F^{(p)}(n) = F^{(p)}(0) = 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Ainsi, de par les relations (B.14), (B.15), (B.16) et (B.22) nous en déduisons que :

$$|\tilde{s}^2(t)| \leq 1 + 2 \left( \frac{\pi^2}{16\beta} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{8\beta}. \quad (\text{B.23})$$

Par suite, le PR dans le cas d'une modulation monoporteuse BPSK avec  $\sigma_a^2 = 1$  et de roll off  $\beta \neq 0$  est majoré par la relation :

$$\text{PR}_{BPSK} \leq \frac{\pi^2/8\beta}{(1 - \beta/4)}. \quad (\text{B.24})$$

### B.3 Analyse du PR avec d'autres types de modulations

Soit le signal bande de base :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} (a_k + jb_k)p(t - kT). \quad (\text{B.25})$$

Etant donné que les symboles  $a_k$  et  $b_k$  ont la même statistique, il est facile de montrer pour une modulation MAQ, l'expression générale du PR :

$$\text{PR}_{MAQ} \leq \left( \frac{\max(a_k)}{\sigma_a} \right)^2 \frac{\pi^2/8\beta}{(1 - \beta/4)}. \quad (\text{B.26})$$

Ainsi, pour une MAQ4,

$$\text{PR}_{MAQ4} \leq \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)}. \quad (\text{B.27})$$

Cette expression est exactement la même que pour la modulation BPSK.

Pour la MAQ16 on a :

$$\text{PR}_{MAQ16} \leq \frac{9}{5} \frac{\pi^2/8\beta}{(1-\beta/4)}. \quad (\text{B.28})$$

## B.4 Résultats de simulation

la figure B.2 ci-dessous compare les majorations obtenues en modulations BPSK, QPSK et MAQ16 avec des simulations en fonction du roll off. Pour des valeurs de  $\beta$  proche de 1, les simulations ont été menées en générant  $10^4$  signaux de  $N = 10^3$  symboles. Pour ces valeurs de  $\beta$ , les densités de probabilités du PR sont très peu étalées, donnant ainsi des valeurs de facteur de crête très proches les unes des autres. Par contre pour des valeurs de  $\beta$  proches de 0, du fait de la divergence de la série, les valeurs du PR sont beaucoup plus dispersées et cela nécessite de générer  $10^6$  signaux de  $N_s = 10^5$  symboles.

Ces résultats montrent les très fortes adéquations entre les majorations théoriques proposées et les simulations.

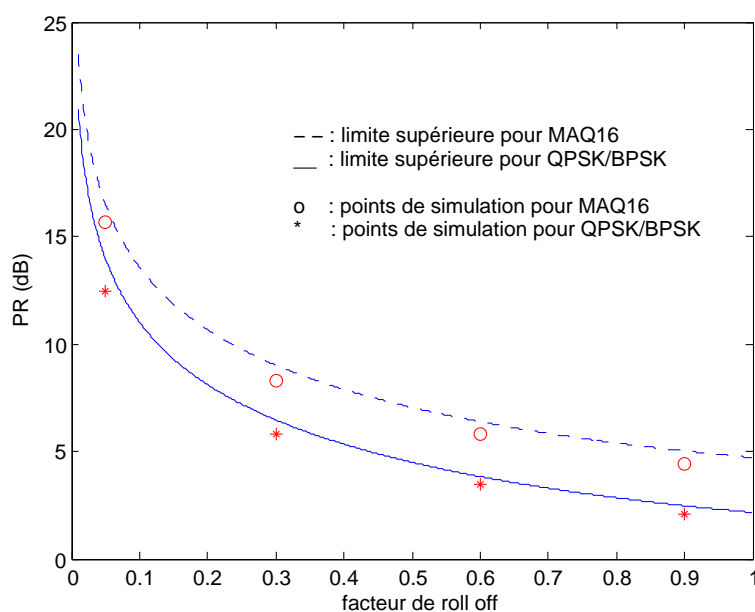


FIG. B.2 – Illustration du PR en sortie d'un filtre de Nyquist en fonction du roll off

## Annexe C

# Optimisation convexe

### C.1 Généralités

Trouver le plus court chemin pour aller d'un point A à un point B (gain en temps, en énergie), minimiser les coûts de production (gain économique), minimiser les risques sont des exemples qui illustrent de l'intérêt que l'homme manifeste à optimiser. Cette quête a toujours existé et paraît liée à sa survie, à son évolution. Ainsi et pendant longtemps la recherche de l'optimum est restée empirique, basée surtout sur l'observation et la déduction.

De ce besoin d'optimiser est né une branche des mathématiques consacrée à l'étude et à la détermination des extremums (minimum(s) ou maximum(s)). Alors qu'initialement, les approches utilisées pour déterminer des extremums étaient des approches analytiques, la venue des ordinateurs a permis d'utiliser des approches algorithmiques capables de traiter des problèmes de complexité conséquente.

Aujourd'hui, notre quotidien est submergé de nombreux systèmes technologiques (véhicules, automates, systèmes électroniques, etc.) dans lesquels le besoin d'optimiser telle ou telle partie est nécessaire soit pour des raisons d'ingénierie, de design, ou encore pour des raisons économiques. De là est née la nécessité de comprendre, d'appréhender le comportement de ces systèmes, de fonctionnement de plus en plus complexe et exigeant afin de proposer des modèles d'optimisations viables. A cela s'ajoute aussi la nécessité de développer des algorithmes de résolution efficaces, peu complexes et s'exécutant dans un temps "acceptable" où la notion d'"acceptable" est laissée à l'arbitrage du concepteur.

De façon générale, les techniques d'optimisation jouent un rôle de plus en plus important pour la conception des systèmes et des équipements de toute nature, et pour un grand nombre de décisions techniques et économiques. En particulier, elles sont de plus en plus utilisées dans le domaine du traitement du signal.

Nous nous intéressons ici, à la classe des problèmes d'optimisation convexe. De nombreux problèmes d'ingénierie, en particulier dans le domaine du traitement du signal sont modélisés sous forme de problèmes d'optimisation convexe. Ces problèmes ont la particularité d'avoir des propriétés très intéressantes qui peuvent être exploitées pour mettre au point des algorithmes de complexité raisonnable pour les résoudre.

Dans cette annexe nous définirons tout d'abord la notion de convexité : qu'est qu'un ensemble ou une fonction convexe ? Ensuite nous définirons la notion de problème d'optimisation convexe puis nous donnerons des exemples de problèmes d'optimisation convexe.

Nous donnerons également des exemples de problèmes de traitement du signal pouvant être modélisé sous forme de problème d'optimisation convexe notamment sous forme de second order cone programming (SOCP). Nous terminerons en donnant des exemples d'algorithmes applicables aux problèmes d'optimisation convexe et des exemples de logiciels ou de boîtes à outils résolvant les problèmes d'optimisation convexe.

## C.2 Ensembles et fonctions convexes

### C.2.1 Ensembles convexes

#### C.2.1.1 Définitions

Un ensemble est dit convexe si et seulement si pour tout couple de points appartenant à cet ensemble, l'ensemble des points du segment ayant pour extrémité la paire de point appartient à l'ensemble [127], [124].

La définition ci-dessus peut s'écrire mathématiquement comme suit :

Considérons un sous ensemble  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  où  $n$  est un entier naturel.

L'ensemble  $M$  est dit convexe si  $\forall x, y \in M$  et  $\forall \lambda \in [0, 1]$   $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$

#### C.2.1.2 Exemples d'ensembles convexes

**Exemple 1** : L'ensemble des solutions d'un système d'équations (d'inégalités ou d'égalités) fini

$$Ax \leq b, \quad Cy = d \quad (\text{C.1})$$

(où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $x, y$  sont les inconnues des deux systèmes) connu sous l'appellation polyèdre est un ensemble convexe.

**Exemple 2** : la boule de centre  $x_c$  et rayon  $r$  définie par :

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_c\| \leq r\} \quad (\text{C.2})$$

est un ensemble convexe.

**Exemple 3** : l'ellipsoïde de centre  $x_c$  et rayon  $r$  définie par :

$$\mathcal{E} = \{x : (x - x_c)P^T(x - x_c) \leq r\} \quad (\text{C.3})$$

(où  $P$  est une matrice symétrique de taille  $n$ ) est un ensemble convexe.

**Exemple 4** : le cône de second ordre ou cône de Lorentz de dimension  $k$  défini par la relation suivante : (C.4) et illustré par la figure C.1.

$$\mathcal{C}_k = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}^{k-1}, t \in \mathbb{R}, \|x\| \leq t\} \quad (\text{C.4})$$

est un ensemble convexe.

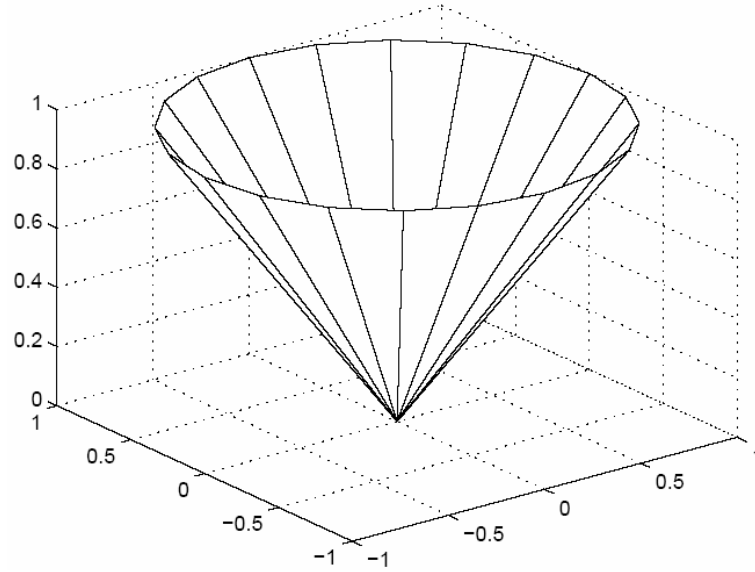


FIG. C.1 – Ensemble convexe : cône

### C.2.1.3 Propriétés des ensembles convexes

Soit  $M_1, \dots, M_k$  des ensembles convexes de  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des réels.

Alors les ensembles définis par :

$$\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : x_i \in M_i \ i = 1 \dots k \right\} \quad (\text{C.5})$$

et

$$\bigcap_{i=1}^k M_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in M_1 \text{ et } x \in M_2 \text{ et } \dots x \in M_k\} \quad (\text{C.6})$$

sont des ensembles convexes.

## C.2.2 Fonctions convexes

### C.2.2.1 Définition

Soit  $M$  un ensemble convexe.

Une fonction  $f$  est dite convexe sur  $M$  si :

$$\forall x, y \in M, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (\text{C.7})$$

Géométriquement, cette définition s'interprète de la façon suivante et comme le montre la figure C.2 : toute corde joignant deux points du graphe  $f$  est au dessus de ce graphe [127], [124].



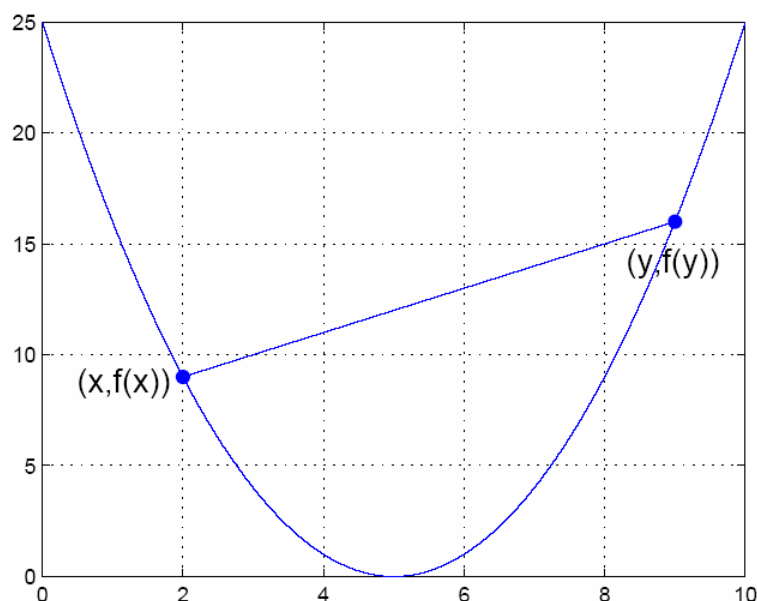


FIG. C.2 – Fonction convexe

### C.2.2.2 Epigraphe d'une fonction

La convexité d'une fonction peut être exprimée en introduisant son épigraphe  $E$  donnée par :

$$E = \{(x, t) | x \in M, t \in \mathbb{R}, f(x) \leq t\}$$

Par suite, une fonction est dite convexe si et seulement si son épigraphe est un ensemble convexe.

### C.2.2.3 Exemples de fonctions convexes

Nous donnons dans cette partie quelques exemples de fonctions convexes. Nous donnons des exemples sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$  et sur  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

**Exemple sur  $\mathbb{R}$  :**

- les fonctions affines :  $f(x) = ax + b$  où  $a, b \in \mathbb{R}$
- les fonctions exponentielles :  $f(x) = e^{ax}$  où  $a \in \mathbb{R}$
- les fonctions puissances :  $f(x) = x^\alpha$  où  $x \in \mathbb{R}^+$  et pour  $\alpha \geq 1$  ou  $\alpha \leq 0$

**Exemple sur  $\mathbb{R}^n$  :**

- les fonctions affines :  $f(x) = a^T x + b$
- les normes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \|x\|_p \\ &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(x) &= \|x\|_\infty \\ &= \max_k |x_k| \end{aligned}$$

**Exemple sur  $\mathbb{R}^{m \times n}$  :**

les fonctions affines :

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{tr}(A^T x + b) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{i,j} X_{i,j} + b \end{aligned}$$

#### C.2.2.4 Propriétés des fonctions convexes

- Si  $f$  est une fonction convexe alors la fonction  $\alpha f$  est convexe pour  $\alpha \geq 0$
- la somme de fonctions convexes est une fonction convexe.
- la composée d'une fonction convexe  $f$  avec une fonction affine  $Ax + b$  est convexe. Autrement dit :  $f(Ax + b)$  est convexe si  $f$  convexe
- le maximum de fonctions convexes définies sur le même domaine est une fonction convexe. Autrement dit : Si  $f_1, \dots, f_n$  sont convexes sur  $M$  alors la fonction  $f(x) = \max\{f_1, \dots, f_n\}$  est convexe.

Cependant, l'intérêt de la convexité réside dans la propriété ci-dessous :

**Théorème :** Tout optimum local d'une fonction convexe sur un ensemble convexe est un optimum global.

**Preuve :** Soit  $x$  un minimum local de  $f$ .

Supposons de plus que  $x$  ne soit pas un minimum global.

Alors il existe  $y$  tel que  $f(y) < f(x)$  et comme  $f$  est convexe nous avons :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) < f(x)$$

$x$  ne peut donc pas être un minimum local puisque en tout point du segment  $]x, y]$ , la valeur de  $f$  est inférieure à celle de  $f(x)$ .

Dans le cas général, la résolution par un algorithme d'un problème d'optimisation est une tâche "compliquée". En effet, nous savons que c'est à partir d'un point initial  $x_0$  que les algorithmes recherchent le minimum local. Si la fonction  $f$  admet plusieurs minima, le résultat va dépendre du choix du point initial  $x_0$ . Nous comprenons alors l'intérêt lorsque la fonction  $f$  est convexe (minimum local = minimum global). Le problème devient moins complexe. Quelque soit le choix du point initial, le minimum global sera alors atteint.

Dans la suite, nous définissons un problème d'optimisation. Nous nous intéressons plus spécifiquement aux problèmes d'optimisation convexe. Nous mettons l'accent en particulier sur la description du SOCP (un exemple de problème d'optimisation convexe) car c'est sous cette forme que notre problème de réduction du PR est modélisé.

## C.3 Problèmes d'optimisation convexe

Comme nous l'avons déjà dit, l'optimisation est une branche des mathématiques consacrée à l'étude des extremums (minimum(s) ou maximum(s)), de l'étude de leur existence à leur détermination.

L'utilisation de l'optimisation dans des problèmes de la vie quotidienne peut se décliner en trois phases :

- la modélisation : elle consiste à formaliser le problème auquel on est confronté sous forme mathématique. On matérialise alors sous forme d'une expression mathématique la fonction (on parle de fonction de coût en mathématique) à optimiser ainsi que les contraintes si elles existent.
- analyse et étude du modèle : elle consiste à travers des propriétés mathématiques (théorique) de dire si le modèle obtenu est réalisable c'est à dire s'il existe des solutions au modèle d'optimisation. Il s'agit donc de l'étude des propriétés du modèle.
- mise en œuvre algorithmique : cette étape consiste à mettre en œuvre des algorithmes (s'ils n'existent pas) et leur implémentation sur processeurs. Cela sous entend des algorithmes peu complexes, efficaces, s'exécutant sur des plages de temps "acceptables", notion à définir suivant l'application.

D'une façon générale, un problème d'optimisation s'écrit mathématiquement de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll}
 \min & f_0(x) \\
 \text{sous} & \\
 \text{contrainte :} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 & h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p
 \end{array} \tag{C.8}$$

où

- $x \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'optimisation ou le vecteur de variables de décision.
- $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de coût ou l'objectif.
- $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$  sont les contraintes d'inégalités.
- $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$  sont les contraintes d'égalités.

La valeur pour laquelle le minimum est atteint est appelée minimum  $x^*$  et on note :

$$x^* = \inf \{f_0 | f_i \leq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m \text{ et } h_j(x) = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, p\}$$

$x^* = \infty$  si le problème n'est pas réalisable c'est à dire qu'il n'existe aucune variable  $x$  qui satisfasse les contraintes [124].

Le problème d'optimisation donné par la relation (C.8) peut se réécrire sous la forme suivante : (C.9) donnée ci-dessous.

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) \tag{C.9}$$

où  $x \in \mathcal{D} = (\bigcap_{i=1}^m \text{dom} f_i) \cap (\bigcap_{i=1}^p \text{dom} h_i)$ .

Notons que  $\text{dom} f_i = \{x \in \mathbb{R}^n | f_i(x) \leq 0\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

$\mathcal{D}$  est appelé domaine admissible du problème.

Le problème est dit non contraint lorsqu'il n'y a pas de contraintes c'est à dire lorsque  $m = p = 0$ .

Nous nous intéressons dans la suite aux problèmes d'optimisation convexe. Nous mettrons l'accent sur le cas particulier du problème d'optimisation SOCP, modèle de notre problème de réduction du PR et bien d'autres problèmes du traitement du signal. Signalons que nos problèmes d'optimisation sont de dimensions finies comme nous pouvons le constater à travers la définition donnée par la relation (C.8).

### C.3.1 Définition

Un problème d'optimisation convexe est un problème d'optimisation qui s'écrit sous la forme donnée par la relation (C.10) :

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{sous} & \\ \text{contrainte :} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{array} \quad (\text{C.10})$$

où  $f_0, f_1, \dots, f_m$  sont des fonctions convexes.

Les problèmes d'optimisation convexe peuvent se mettre sous différentes formes équivalentes [124] soit en éliminant la contrainte d'égalité, soit en introduisant des contraintes d'égalités, soit en l'écrivant sous forme épigraphe.

Nous donnons la forme épigraphe

La forme équivalente épigraphe du problème d'optimisation convexe générale (C.10) est donnée par la relation (C.11).

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{sous} & \\ \text{contrainte :} & f_0(x) - t \leq 0 \\ & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{array} \quad (\text{C.11})$$

Notre problème de réduction du PR est écrit sous cette forme pour ensuite se décliner sous la forme d'un SOCP.

Il faut entendre par équivalence ici, le fait que la solution de l'un est aisément obtenue à partir de la solution de l'autre et vice versa.

**Propriété :** L'ensemble des points admissibles d'un problème d'optimisation convexe est convexe.

Cette propriété est d'autant plus importante qu'elle permet de conclure que tout minimum local d'un problème d'optimisation convexe est un minimum global.

## C.3.2 Exemples de problèmes d'optimisation convexe

### C.3.2.1 La programmation linéaire

La programmation linéaire (PL) est certainement le problème d'optimisation le plus connu. Elle est beaucoup utilisée dans de nombreuses modélisations notamment dans des problèmes de minimisation de coût de production (en économie, en ingénierie).

Un problème de PL est un problème d'optimisation convexe dont la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires [127], [124].

La forme générale d'une programmation linéaire est donnée par la relation (C.12).

$$\begin{array}{ll}
\min & c^T x + d \\
\text{sous} & \\
\text{contrainte :} & Gx \leq T \\
& Ax = b
\end{array} \tag{C.12}$$

où  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$

Dans de nombreux cas la constante  $d$  de la fonction de coût est souvent omise car en réalité elle n'affecte pas l'ensemble des points admissibles donc n'affecte pas non plus la valeur de  $x$  solution du problème.

D'un point de vue géométrique, les contraintes linéaires forment un polyèdre convexe.

Ainsi, le problème de programmation linéaire consiste alors à minimiser une fonction affine sur un polyèdre.

### C.3.2.2 La programmation quadratique

Un problème d'optimisation convexe est appelé programmation quadratique lorsque la fonction de coût est quadratique et les fonctions contraintes sont affines [124].

La programmation quadratique s'exprime de façon générale sous la forme donnée par la relation (C.13) :

$$\begin{array}{ll}
\min & \frac{1}{2}x^T Px + q^T x + r \\
\text{sous} & \\
\text{contrainte :} & Gx \leq T \\
& Ax = b
\end{array} \tag{C.13}$$

où  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice carrée (de taille  $n$ ) semidefinie positive,  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

L'ensemble des points admissibles dans ce cas aussi est un polyèdre.

Ainsi la programmation quadratique consiste à minimiser une fonction quadratique sur un polyèdre.

### C.3.2.3 La programmation quadratique avec contraintes quadratiques

Un problème d'optimisation convexe est appelé programmation quadratique avec contraintes quadratiques lorsque la fonction de coût ainsi que la contrainte inégalité sont quadratiques [124].

Elle s'exprime de façon générale sous la forme donnée par la relation (C.14) :

$$\begin{array}{ll}
\min & \frac{1}{2}x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\
\text{sous} & \\
\text{contrainte :} & \frac{1}{2}x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& Ax = b
\end{array} \tag{C.14}$$

où  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$  sont des matrices carrées (de taille  $n$ ) semidefinies positives.

L'ensemble des points admissibles d'une programmation quadratique avec contraintes quadratiques est une intersection d'ellipsoïdes lorsque  $P_i > 0$ .

Dans ce cas, une programmation quadratique se resume à la minimisation d'une fonction quadratique sur une intersection d'ellipsoïdes.

Ajoutons qu'une programmation linéaire est un cas particulier d'une programmation quadratique (lorsque  $P = 0$  dans (C.13)) elle même un cas particulier de la programmation quadratique avec contraintes quadratiques (il suffit d'avoir  $P_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ ).

### C.3.2.4 La programmation sur un cône de second ordre

Une programmation sur un cône de second ordre est un problème d'optimisation convexe dont la fonction coût est linéaire et les contraintes inégalités sont des cônes de second ordre ou cône de Lorentz (donné par la relation (C.4)).

Une programmation sur un Cône de Second Ordre est appelé en anglais second order cone programming en abrégé (SOCP). C'est cette abréviation que nous utiliserons tout au long de notre étude.

La forme générale d'un SOCP est donnée par la relation (C.15) ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} \min & f^T x \\ \text{sous} & \\ \text{contrainte :} & \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i \quad i = 1, \dots, m \\ & Fx = g \end{array} \quad (\text{C.15})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'optimisation, et les paramètres du problème sont  $f \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_i \in \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $g \in \mathbb{R}^p$ .

La contrainte d'inégalité :  $\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i$  est appelée contrainte cône de second ordre.

Lorsque  $n_i = 1$  pour  $i = 1, \dots, m$ , le SOCP se resume dans ce cas à une programmation linéaire :

$$\begin{array}{ll} \min & f^T x \\ \text{sous} & \\ \text{contrainte :} & 0 \leq c_i^T x + d_i \quad i = 1 \dots m \\ & Fx = g \end{array} \quad (\text{C.16})$$

Il est également facile de constater que lorsque tous les  $c_i = 0$  alors la contrainte cône de second ordre devient  $\|A_i x + b_i\| \leq d_i$  et le SOCP se resume dans ce cas à une programmation linéaire sous Contrainte Quadratique.

La programmation linéaire, la programmation quadratique, tout comme la programmation quadratique avec contrainte quadratique sont des cas particuliers de SOCP. D'un autre côté, le SOCP est lui même moins général que la programmation Semi définie (relation (C.15)). En effet, le cône de second ordre peut être décrit en utilisant une inégalité matricielle grâce à l'équivalence suivante :

$$\|u\| \leq t \iff \begin{pmatrix} tI & u \\ u^T & t \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{C.17})$$

En utilisant la relation (C.17), le SOCP peut s'écrire sous forme d'un SDP comme le montre la relation (C.18) :

$$\begin{aligned}
& \min && f^T x \\
& \text{sous} && \\
& \text{contrainte :} && \begin{pmatrix} (c_i^T x + d_i)I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^T & c_i^T x + d_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, m \\
& && Fx = g
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Il faut cependant préciser que résoudre un SOCP à partir de sa modélisation sous forme d'un SDP n'est pas aisé car la complexité sera encore plus grande [125].

### Exemples de problèmes d'optimisation pouvant se mettre sous la forme d'un SOCP :

Nous donnons dans cette partie des exemples de problèmes d'optimisation convexe qui peuvent se formuler comme un SOCP.

**Exemple 1** : programmation quadratique sous contraintes quadratiques.

Considérons la forme générale d'une programmation quadratique sous contraintes quadratiques donnée par la relation (C.14) que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{aligned}
& \min && \frac{1}{2}x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\
& \text{sous} && \\
& \text{contrainte :} && \frac{1}{2}x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& && Ax = b
\end{aligned}$$

Nous supposons dans le cas présent pour simplifier que les matrices  $P_i$  sont définies positives sachant que même dans le cas général la PQCQ peut être formulée comme un SOCP [125]. Nous pouvons alors écrire (C.14) par :

$$\begin{aligned}
& \min && \|P_0^{\frac{1}{2}}x + P_0^{-\frac{1}{2}}q_0\|^2 + r_0 - q_0^T P_0^{-1}q_0 \\
& \text{sous} && \\
& \text{contrainte :} && \|P_i^{\frac{1}{2}}x + P_i^{-\frac{1}{2}}q_i\|^2 + r_i - q_i^T P_i^{-1}q_i \leq 0 \quad i = 1 \dots m \\
& && Ax = b
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Cette relation peut alors se mettre facilement sous forme d'un SOCP comme le montre la relation sous forme épigraphe (C.20) :

$$\begin{aligned}
& \min && t \\
& \text{sous} && \\
& \text{contrainte :} && \|P_0^{\frac{1}{2}}x + P_0^{-\frac{1}{2}}q_0\| \leq t \\
& && \|P_i^{\frac{1}{2}}x + P_i^{-\frac{1}{2}}q_i\| \leq (q_i^T P_i^{-1}q_i - r_i)^{\frac{1}{2}} \quad i = 1 \dots m \\
& && Ax = b
\end{aligned} \tag{C.20}$$

où  $(x, t)$  est la nouvelle variable multidimensionnelle d'optimisation.

Nous pouvons ainsi conclure que tout problème de PQCP peut se mettre sous forme d'un SOCP.

**Exemple 2** : problème de minimisation de sommes de normes

Le problème d'optimisation non contraint donné par la relation (C.21) :

$$\min \sum_{i=1}^p \|F_i x + g_i\| \quad (\text{C.21})$$

où  $F_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$  et  $g_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  peut bien se mettre sous la forme d'un SOCP en introduisant les variables auxiliaires d'optimisation  $t_1, \dots, t_p$  :

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^p t_i \\ & \text{sous} \\ & \text{contrainte : } \|F_i x + g_i\| \leq t_i \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Les variables d'optimisation deviennent  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $t_i \in \mathbb{R}$ .

Nous concluons que tout problème d'optimisation qui minimise une somme de normes avec éventuellement une contrainte inégalité linéaire peut bien se mettre sous la forme d'un SOCP.

**Exemple 3** : problème de minimisation de maximum de normes

De façon similaire, les problèmes de minimisation d'un maximum de normes données par la relation (C.23) :

$$\min \max_{i=1, \dots, p} \|F_i x + g_i\| \quad (\text{C.23})$$

peut se mettre de façon équivalente sous forme d'un SOCP.

$$\begin{aligned} & \min t \\ & \text{sous} \\ & \text{contrainte : } \|F_i x + g_i\| \leq t \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Les variables d'optimisation deviennent  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

Nous concluons que tout problème d'optimisation qui minimise un maximum de normes avec éventuellement une contrainte inégalité linéaire peut bien se mettre sous la forme d'un SOCP.

De nombreux problèmes de traitement du signal sont en effet des problèmes qui requièrent la minimisation d'un max de normes. Nous pouvons citer en exemple le problème de réduction du PR qui est l'objet de cette thèse, le problème de synthèse de diagrammes



d'un réseau d'antennes [128], le problème de conception de filtre FIR [125]. Tous ces problèmes peuvent donc se résoudre sous la forme d'un SOCP comme écrit précédemment. C'est sous la forme d'un SOCP justement que nous modélisons notre problème de réduction de PR.

### C.3.2.5 La programmation SemiDéfinie (SDP)

un problème de programmation SemiDéfinie est un problème d'optimisation convexe dont la fonction de coût est linéaire et les contraintes inégalités se résument à une contrainte Inégalité Matricielle Affine. Cette contrainte est appelée aussi contrainte LMI. Le SDP est aussi appelé problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI.

D'après les parties précédentes toutes les classes d'optimisation convexe (PL, PQCQ, SOCP) sont des cas particuliers de SDP.

La forme générale d'un SDP est donnée par la relation ( C.25) :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f^T x \\
 \text{sous} \quad & \\
 \text{contrainte :} \quad & x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n + G \leq 0 \\
 & Fx = g
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

où  $G$  et les  $F_i$  sont des matrices symétriques.

## C.4 Algorithmes et logiciels d'optimisation convexe

Il existe de nombreux algorithmes spécifiques (simplex pour la programmation linéaire) ou généraux (méthode des points intérieurs pour tout problème d'optimisation convexe) pour résoudre des problèmes d'optimisation convexe. L'objectif de cette section est de décrire une des grandes familles d'algorithmes

généralement utilisés pour trouver numériquement les extremums des différents problèmes d'optimisation convexe décrits plus haut. Il s'agit de la méthode des points intérieurs.

Aussi, il existe un certain nombre de logiciel et de boîtes à outils (du domaine public ou commercial) qui permettent de résoudre numériquement ces problèmes d'optimisation. Beaucoup de ces logiciels utilisent justement la méthode des points intérieurs. Nous énumérons dans la suite quelques uns de ces logiciels. Nous avons utilisé un d'entre eux (CVX) pour effectuer nos simulations dans le cadre de la réduction du PR.

### C.4.1 Méthode des points intérieurs

L'idée de base des méthodes des points intérieurs est de minimiser une fonction auxiliaire par une méthode de Newton classique. Cette fonction auxiliaire est composée de la fonction objectif et des contraintes éventuelles. D'une façon générale, les fonctions auxiliaires sont une combinaison linéaire de la fonction de coût et des logarithmes des contraintes. Celles-ci sont au préalable exprimées sous forme d'inégalités positives [128]. Le logarithme constitue en réalité une barrière infranchissable pour une contrainte devenant négative.

Nous présentons dans la suite de cette section, l'utilisation de la méthode des points intérieurs pour résoudre un problème de programmation linéaire donné par la relation (C.12) et rappelé ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & \text{sous} \\ & \text{contrainte : } Ax + b > 0 \end{aligned} \tag{C.26}$$

Dans ce cadre, les fonctions auxiliaires peuvent s'exprimer d'une façon générale de trois manières. On parle dans ces cas de :

- fonction de pénalité : elle est définie par :

$$\varphi(x) \triangleq \begin{cases} \alpha c^T x + \phi(x) & x \in \mathcal{A} \\ \infty & x \text{ sinon} \end{cases} \tag{C.27}$$

$\alpha$  est le paramètre de pénalité.

- fonction de l'épigraphe : elle est définie par :

$$\varphi(x) \triangleq \begin{cases} -q \log(u - c^T x) + \phi(x) & x \in \mathcal{A}, c^T x > u \\ \infty & x \in \mathcal{A} \text{ ou } c^T x > u \end{cases} \tag{C.28}$$

- fonction de potentiel : elle est définie par :

$$\varphi(x) \triangleq \begin{cases} -q \log(-u + c^T x) + \phi(x) & x \in \mathcal{A}, c^T x > u \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.29}$$

La fonction  $\phi(x)$  appelée fonction barrière est définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} -q \sum_{i=1}^n \log(a_i^T x + b_i) & x \in \mathcal{A} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.30}$$

L'ensemble des points admissibles est défini par :

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a_i^T x + b_i > 0, i = 1, \dots, n\} \tag{C.31}$$

Ainsi, nous comprenons que suivant la fonction auxiliaire qu'elle minimise, la méthode des points intérieurs est différente.

Nous notons que ces méthodes de points intérieurs sont d'abord apparues pour la programmation linéaire. Elles sont utilisées dans le même esprit pour d'autres types de problèmes d'optimisation convexe notamment le SOCP.

## C.4.2 Logiciels d'optimisation convexe

Il existe de nombreux logiciels ou de boîtes à outils (commercial ou du domaine public) pour résoudre des problèmes d'optimisation convexe. Certains sont spécifiques et ne visent qu'à résoudre un problème d'optimisation bien précis. D'autres au contraire ont la vocation d'être plus généralistes et se donnent pour objectif de résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation.

Des logiciels ou boîtes à outils qui sont généralistes, nous pouvons citer CVX, YALMIP, SEDUMI, SDPA, SDPT3, SDPSOL, CSDP, SP, SDPHA, DSDP, MOSEK (commercial)

etc... Nous nous intéressons au premier cité car c'est la boîte à outils que nous avons utilisée dans nos simulations.

Le choix de cette boîte à outils CVX [129] s'explique par sa facilité d'utilisation. La connaissance de quelques commandes de cette boîte à outils est suffisante pour trouver numériquement les solutions de n'importe quel problème d'optimisation convexe. La seule difficulté consiste à formuler son problème pratique en un problème d'optimisation convexe. Cette boîte à outils est implémentée sous MATLAB ce qui nous a permis d'utiliser l'environnement très "convivial" de ce programme pour développer nos modèles. C'est un interface car il fait appel au logiciel SEDUMI [130] pour résoudre les problèmes. Ajoutons que SEDUMI utilise comme algorithme la méthode des points intérieurs pour SDP et SOCP.

En somme, les principales caractéristiques de cette boîte à outils sont :

- facile à installer puisqu'elles sont entièrement basées sur MATLAB
- facile à apprendre
- facile à utiliser : vous définissez vos contraintes et fonctions objectif en utilisant le code intuitif et standard de MATLAB.
- cette boîte à outils est du domaine public.

# Table des figures

1	Les systèmes SISO et MIMO . . . . .	4
1.1	Schéma bloc d'une chaîne de transmission numérique . . . . .	7
1.2	Exemples de constellations . . . . .	9
1.3	Spectres de signaux avant et après transposition de fréquence . . . . .	11
1.4	Schéma de réalisation d'un modulateur en quadrature . . . . .	11
1.5	Schéma de réalisation d'un démodulateur en quadrature . . . . .	12
1.6	Frontières des zones de décision sur les constellations MDP8 et MAQ16 . .	13
1.7	Représentation d'un canal à BBAG . . . . .	14
1.8	Illustration du phénomène de trajets multiples sur le canal radio-mobile . .	16
1.9	Distribution du module d'une variable gaussienne complexe (Rayleigh) de variance unitaire (100.000 valeurs générées). . . . .	18
1.10	Le même signal est transmis sur plusieurs intervalles temporels . . . . .	19
1.11	Le même signal est transmis sur plusieurs intervalles fréquentiels . . . . .	20
1.12	Schéma de principe du modulateur OFDM . . . . .	24
1.13	Allure de l'ensemble des spectres des porteuses d'un symbole OFDM . . . .	24
1.14	Schéma de principe du démodulateur OFDM (sans bruit) . . . . .	25
1.15	Modulateur OFDM numérique . . . . .	26
1.16	Démodulateur OFDM numérique . . . . .	26
1.17	Signaux multiporteuse (haut) et monoporteuse (bas) . . . . .	27
1.18	Bilan simplifié des différentes puissances mises en jeu dans un amplificateur de puissance . . . . .	29
1.19	Exemple des caractéristiques typiques de la relation entrée - sortie d'un amplificateur de puissance de classe A . . . . .	29
2.1	Les différentes configurations du PR . . . . .	34
2.2	Illustration de l'influence du filtre de Nyquist sur le PR ( $\widehat{PR}_{c,i}$ ) en fonction de $\beta$ . . . . .	39
2.3	Superposition de filtre en racine de Nyquist pour différentes valeurs de roll off . . . . .	44
2.4	La fonction $\phi(t)$ pour $\beta = 0.24$ , $N_s = 7$ et $L_f = 6$ symboles . . . . .	44
2.5	La fonction $\phi(t)$ pour $\beta = 0.75$ , $N_s = 7$ et $L_f = 6$ symboles . . . . .	45
2.6	Comparaison entre les PR simulés et théoriques, $N_s = 4096$ , $L_f = 24$ symboles, (constellation QPSK) . . . . .	48
2.7	PR en sortie du filtre en fonction du facteur de roll off pour plusieurs valeurs de $L_f$ , $N_s = 4096$ , (constellation QPSK) . . . . .	48

2.8	Comparaison des distributions du PR en sortie du filtre pour différents facteurs de roll off, $N_s = 4096$ , $L_f = 24$ , $N_e = 4$ . . . . .	49
2.9	Comparaison de la distribution du PR en sortie du filtre pour différentes valeurs de $L_f$ , $N_s = 4096$ , $\beta = 0.5$ , $N_e = 4$ . . . . .	50
2.10	Comparaison de la distribution du PR en sortie du filtre pour différents nombres d'échantillons par temps symbole $N_e$ , $N_s = 4096$ , $\beta = 0.5$ , $L_f = 24$ . . . . .	50
2.11	Distribution du PR du signal reçu perturbé par un canal de Rayleigh à évanouissements plats dans un système SISO-monoporteuse en utilisant un filtre en racine de Nyquist, $N_s=1000$ , (constellation QPSK), $\beta = 0.5$ , $N_e = 4$ , $L_f = 24$ symboles, $RSB = 10$ dB. . . . .	51
2.12	Histogramme de la partie réelle d'un signal OFDM, $N = 128$ . . . . .	53
2.13	Histogramme de l'amplitude d'un signal OFDM, $N = 128$ . . . . .	54
2.14	CCDF du PR pour $L \in \{1, 2, 4, 8\}$ ( $N = 128$ , constellation QPSK) et quelques approximation théoriques (pour un signal OFDM en bande de base) . . . . .	55
2.15	Comparaison entre les CCDFs du PR d'entrée, de sortie et théorique en entrée et en sortie, $N = 128$ , $L = 4$ , $\beta = 0.2$ . . . . .	55
2.16	Comparaison entre les spectres d'entrée et de sortie, $N = 128$ , $L = 4$ , $\beta = 0.5$ . . . . .	56
2.17	CCDFs du PR en entrée et en sortie du filtre pour différents nombres de sous-porteuses, constellation QPSK, $L = 4$ , $\beta = 0.2$ , $L_f = 24$ symboles . . . . .	56
2.18	Comparaison des CCDFs du PR en sortie du filtre pour différentes valeurs de $L_f$ , constellation QPSK, $L = 4$ , $\beta = 0.2$ , $N = 128$ . . . . .	57
2.19	Comparaison des CCDFs du PR en sortie du filtre pour différents facteurs de roll off, constellation QPSK, $L = 4$ , $N = 128$ . . . . .	57
2.20	Comparaison des CCDFs du PR (théorique et simulation) pour différents facteurs de surechantillonnage, constellation QPSK, $\beta = 0.2$ , $N = 128$ . . . . .	58
2.21	Comparaison des CCDFs du PR en sortie du filtre pour différents nombre d'échantillons par temps symbole $N_e$ , $\beta = 0.2$ , $L = 4$ , $N = 128$ , $L_f = 24$ symboles . . . . .	58
2.22	Comparaison entre les CCDFs du PR en sortie du filtre pour différents types de constellation, $\beta = 0.2$ , $L = 4$ , $N = 128$ , $L_f = 24$ symboles . . . . .	59
2.23	Schéma simplifié d'un système SISO-OFDM avec canal BBAG . . . . .	59
2.24	Schéma simplifié d'un système SISO-OFDM avec canal de Rayleigh . . . . .	60
2.25	CCDFs du PR d'un signal reçu dans un système SISO-OFDM (canal BBAG et canal de Rayleigh à évanouissements plats) . . . . .	63
2.26	CCDFs du PR d'un signal reçu dans un système SISO-OFDM (canal BBAG, canal de Rayleigh à évanouissements plats (1 trajet) et à trajets multiples), $N = 1024$ , $L = 4$ , $RSB = 10$ dB, constellation QPSK . . . . .	64
3.1	Schéma d'un système de transmission MIMO avec $N_t$ émetteurs et $N_r$ récepteurs . . . . .	66
3.2	Schéma d'un système de transmission MIMO . . . . .	67
3.3	Système de communications employant le schéma d'Alamouti . . . . .	74
3.4	Le PR à la réception (canal sans bruit) d'un schéma d'Alamouti en fonction de $\beta$ . . . . .	77
3.5	Système de communications MIMO $4 \times 4$ . . . . .	77
3.6	Le PR en fonction de $\beta$ avec codage O-STBC avec commutation entre groupes d'antennes . . . . .	79

3.7	Le PR en fonction de $\beta$ avec STBC non orthogonaux proposé par Jafar-khani . . . . .	81
3.8	CCDF du PR des signaux dans un système MIMO à deux antennes, $N_s = 1000$ , constellation QPSK, $\beta = 0.5$ , $N_e = 4$ , $L_f = 12$ symboles, $RSB = 10dB$ . . . . .	81
3.9	Principe d'un système MIMO-OFDM . . . . .	83
3.10	Comparaison entre l'OFDM et MIMO-OFDM pour un débit binaire et une bande passante identiques. L'OFDM utilise une MAQ256 et le MIMO-OFDM une MAQ4 avec 4 émetteurs et 8 récepteurs . . . . .	84
3.11	système MIMO-OFDM basé sur un schéma d'Alamouti . . . . .	84
3.12	CCDF des PR des signaux reçus en SISO-OFDM, MIMO(2,2) et (4,4)-OFDM (canal de Rayleigh à évanouissements plats), $RSB = 10 dB$ . . . . .	87
3.13	Comparaison des CCDFs du PR (théorique et simulation) du signal reçu en MIMO(2,2) (canal de Rayleigh à évanouissements plats) pour différentes valeurs de $RSB$ . . . . .	88
3.14	CCDF du PR d'un signal reçu en MIMO-OFDM à deux antennes (canal BBAG, canal de Rayleigh (à évanouissements plats et à trajets multiples)), $N = 1024$ , $L = 4$ , $RSB = 10 dB$ , constellation QPSK . . . . .	88
4.1	Schéma de principe de la méthode du "Selected Mapping" . . . . .	93
4.2	Schéma de la méthode du SLM pour les systèmes MIMO-OFDM ((a) individuel, (b) concurrent) . . . . .	94
4.3	CCDF du PR d'un système MIMO-OFDM en utilisant les techniques SLM individuel et concurrent pour $N = 128$ , QPSK, $N_t = 2$ , et $L = 4$ . . . . .	95
4.4	Schéma d'un système MIMO-OFDM à deux branches basé sur un schéma d'Alamouti . . . . .	95
4.5	Schéma de principe de la méthode CARI . . . . .	96
4.6	Comparaison des CCDFs du PR de MIMO-OFDM en utilisant les méthodes RS-CARI et SLM (individuel et concurrent) pour $N = 128$ , modulation QPSK, 2 antennes d'émissions, et $L = 4$ . . . . .	98
4.7	Schéma de principe de la méthode Tone Reservation . . . . .	100
4.8	CCDF du PR pour un symbole OFDM en bande de base de taille $N = 64$ , facteur de suréchantillonnage $L = 4$ et $R = 12$ . . . . .	102
4.9	Exemple du standard IEEE 802.11a, $N = 64$ porteuses, 48 porteuses de données, $R = 12$ , 4 porteuses pilotes . . . . .	103
4.10	Performance en terme de CCDF du PR de la méthode TR améliorée à l'aide du SOCP : Utilisation des porteuses non utilisées comme porteuses réservées du standard IEEE 802.11a où $N = 64$ , $R = 12$ , $L = 4$ . . . . .	105
4.11	Performance en terme de CCDF du PR du signal optimisé pour plusieurs valeurs de $\gamma$ dans le cas où la puissance additionnelle est limitée . . . . .	106
4.12	Application de la méthode TR améliorée à l'aide de SOCP sur chaque branche d'un système MIMO-OFDM . . . . .	107
4.13	Application de la méthode TR améliorée à l'aide de SOCP avant le codage espace-temps . . . . .	107
4.14	Structure d'un système MIMO-OFDM à deux antennes . . . . .	108
4.15	Performance en terme de CCDF du PR de la méthode TR améliorée à l'aide du SOCP pour un système MIMO-OFDM (MIMO 2x2, $N = 256$ , $R = 56$ et $L = 4$ ), sans contrainte sur la puissance moyenne . . . . .	110

4.16	Spectre de signal après la méthode TR améliorée à l'aide du SOCP pour un système MIMO-OFDM, sans contrainte sur la puissance moyenne . . . . .	111
4.17	Zoom sur le spectre : illustration du non respect du masque du standard du signal optimisé, sans contrainte sur la puissance moyenne . . . . .	111
4.18	Performance en terme de CCDF du PR du signal optimisé pour plusieurs valeurs de $\gamma$ , dans le cas où la puissance additionnelle est limitée . . . . .	113
4.19	Spectre du signal optimisé après SOCP avec contrainte sur $\Delta E$ , $\gamma = 0.6$ dB	113
4.20	Zoom sur le spectre du signal optimisé après SOCP avec contrainte sur $\Delta E$ , $\gamma = 0.6$ dB . . . . .	114
4.21	CCDF du PR du signal optimisé après SOCP, avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées . . . . .	115
4.22	Spectre du signal optimisé après SOCP, avec contrainte sur la puissance des porteuses non utilisées . . . . .	115
4.23	Taux d'Erreur Binaire avec et sans méthode de TR avec SOCP . . . . .	116
4.24	Superposition des CCDF du PR du signal optimisé pour deux conditions différentes (sur les porteuses non utilisées et sur la puissance moyenne totale), $\Delta E = 0.573$ dB . . . . .	117
4.25	CCDF du PR en fonction du nombre de porteuses réservées dans la bande utile (sur 200) , constellation QPSK, $L = 4$ . . . . .	118
4.26	Spectre du signal émis sur une antenne du système MIMO-OFDM , constellation QPSK, $L = 4$ , avec 4 porteuses allouées dans la bande utile . . . . .	119
4.27	CCDF du PR des signaux émis et reçus dans un système MIMO-OFDM de deux antennes avec et sans méthode de TR , $N = 256$ , 56 porteuses nulles dans le cas sans méthode, constellation QPSK, $L = 4$ . . . . .	120
4.28	Schéma de principe de la méthode de Jun . . . . .	120
4.29	schéma de l'algorithme de reduction du PR . . . . .	121
4.30	CCDF du PR avant et après l'ajout d'un signal artificiel au signal reçu dans un système MIMO-OFDM de deux antennes, $N = 256$ , constellation QPSK, $L = 2$ . . . . .	122
4.31	Spectres du signal reçu et du signal correctif . . . . .	123
A.1	Fonctions de transfert des filtres en cosinus surélevés . . . . .	135
A.2	Réponses impulsionnelles des filtres en cosinus surélevés . . . . .	136
A.3	Fonctions de transfert des filtres en racine cosinus surélevés . . . . .	137
A.4	Réponses impulsionnelles des filtres en racine cosinus surélevés . . . . .	138
A.5	Les effets de la troncature au filtre en racine de cosinus surélevés. Haute : le filtre est échantillonné à $N_e = 4$ échantillons/symbole avec $\beta = 0.5$ et tronqué à 4 symboles. Basse : le spectre correspondant. . . . .	139
A.6	Les effets de la troncature au filtre en racine de cosinus surélevés. Haute : le filtre est échantillonné à $N_e = 4$ échantillons/symbole avec $\beta = 0.5$ et tronqué à 8 symboles. Basse : le spectre correspondant. . . . .	140
A.7	Les effets de la troncature au filtre en racine de cosinus surélevés. Haute : le filtre est échantillonné à $N_e = 4$ échantillons/symbole avec $\beta = 0.5$ et tronqué à 16 symboles. Basse : le spectre correspondant. . . . .	141
B.1	fonction $\varphi(t)$ . . . . .	146
B.2	Illustration du PR en sortie d'un filtre de Nyquist en fonction du roll off . . . . .	148

---

C.1	Ensemble convexe : cône . . . . .	151
C.2	Fonction convexe . . . . .	152





# Liste des tableaux

1.1	Présentation des classes de fonctionnement avec leurs avantages et inconvénients . . . . .	31
2.1	PR des constellations pour différents types de modulations à la fréquence symbole . . . . .	40
2.2	$f(\beta)$ du filtre de Nyquist pour différentes valeurs de $\beta$ . . . . .	40
4.1	Résultats numériques des courbes représentées sur la figure 4.25 . . . . .	118



# Bibliographie

- [1] T .A. Wilkinson and A.E. Jones, "Minimisation of the Peak-to-Mean Envelope Power Ratio of Multicarrier Transmission Schemes by block coding", Proceedings of IEEE Vehicular Technology Conferences, pp. 825-829, July 1995.
- [2] B.M. Popovic, "Synthesis of Power Efficient Multi-tone Signals with Flat Amplitude Spectrum", IEEE Transactions on Communications, Vol. 39, No. 7, pp. 1031-1033, July 1991.
- [3] M. Sharif, M. Gharavi-Alkhansari and B.H. Khalaj, "On the Peak-to-Average Power of OFDM Signal Based on Oversampling", IEEE Transactions on Communications, Vol 51, No 1, pp. 72-78, January 2003.
- [4] R. Van Nee and A. De Wild, "Reducing the peak-to-average power ratio of ofdm". In Proc. IEEE Vehicular Technology Conference, 1998.
- [5] C. Tellambura, "Computation of the Continuous-Time PAP of an OFDM Signal with BPSK Subcarriers", IEEE Communications letters, vol. 5, No. 5, May 2001.
- [6] N.Dinur and D.Wulich, "Peak-to-average power ratio in high-order OFDM," IEEE Trans. Communications, vol. 49, pp. 1063-1072, June 2001.
- [7] H. Ochiai and H. Imai, "On the distribution of the Peak-to-Average Power Ratio in OFDM Signals", IEEE Transactions on. Communications, Vol.49, No.2,pp. 282-289, 2001.
- [8] X. Zhou and Jr. James Caffery, "A new distribution bound and reduction scheme for OFDM PAPR", Wireless Personal Multimedia Communications, 1 :128-162, October 2002.
- [9] J.A. Davis and J. Jedwab, "Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences and Reed-Muller codes" IEEE Trans. On. Inform. Theory, Vol. 45, n°7, pp. 2397-2417, November 1999.
- [10] X. Li and L.J. Cimini, "Effects of clipping and filtering on the performance of OFDM", Proceedings of VTC'97, 1997.
- [11] X. Wang, T. Tjhung and C.S Ng, "Reduction of peak to average power ratio of OFDM system using a companding technique", IEEE Trans. Broad., vol. 45, n°3, pp. 303-307, September 1999.
- [12] J. Tellado-Mourello, "Peak to Average Power Ratio Reduction for multicarrier modulation", PhD Thesis, Stanford University, September 1999.
- [13] A. Aggarwal and T. Meng, "A convex Interior-Point Method for Optimal OFDM PAR Reduction", Proc. ICC 05, Seoul, Korea, May 2005.

- [14] Y.Louet and J. Palicot, "A classification of methods for efficient power amplification of signals", *Annals of Telecom*, to be published in 2008.
- [15] D. Wulich and L. Goldfeld, "Bound of the Distribution of Instantaneous Power in Single Carrier Modulation", *IEEE Trans. Wireless Communications*, vol 4, n°4, pp 1773-1778, July 2005.
- [16] S. Zabre, "Amplification non-linéaire d'un multiplex de porteuses modulés à fort Facteur de Crête", thèse, Université de Rennes 1, Avril 2007.
- [17] J. Palicot, Y. Louet, S. Hussain and S. Zabre, "Frequency Domain Interpretation of Power Ratio Metric for Cognitive Radio Systems", *Proceedings of IET Communications Journal*, to be published in 2008.
- [18] Y-L. Lee, Y-H. You, W-G. Jeon, J-H Paik and H-K. song, "Peak-to-Average Power Ratio in MIMO-OFDM Systems Using Selective Mapping," *IEEE Communications letters*, vol. 7, No. 12, December. 2003.
- [19] G. Cohen, J. Dornstetter et P. Godlewski, "Codes correcteurs d'erreurs. Une introduction au codage algébrique", ISBN : 2-225-82538. Masson. 1992.
- [20] A. Glavieux et M. Joindot, "Communications numériques. Introduction", ISBN : 2-225-85194. Masson. 1996.
- [21] J.C. Bic, D. Duponteil et J.C. Imbeaux, "Elements de communications numériques - Transmission sur fréquence porteuse", Dunod, 1986.
- [22] S. Benedetto and E. Biglieri, "Principle of digital transmission with wireless applications", Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999.
- [23] H. Bölcskei and A. J. Paulraj, "The Communications Handbook", chapter Multiple-input multiple-output (MIMO) wireless systems. CRC Press, 2001.
- [24] R. Gold, "Optimum binary sequences for spread-spectrum multiplexing", *IEEE Trans. Inform. Theory*, pp. 619-621, October 1967.
- [25] G.L. Turin, "Introduction to spread spectrum antimultipath techniques and their application to urban digital radio", *IEEE Proceedings*, Vol. 68, No. 3, pp. 328-353, March 1980.
- [26] G. Burel, C. Boudier and O. Berder, "Detection of direct sequence spread spectrum transmissions without prior knowledge", In *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference (Globecom)*, volume 1, pages 236-239, San Antonio (TX), USA, November 2001.
- [27] M. Gudmundson, "Generalized frequency hopping in mobile radio systems", *Proc. IEEE Vehic. Technol. Conf.*, pp. 788-791, May 1993.
- [28] O. Berder, C. Boudier, and G. Burel, "Identification of frequency hopping communications", In *Proceedings of WSEAS Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC)*, pages 3851-3856, Vouliagmeni, Greece, July 2000.
- [29] N.Prayongpun, K. Raouf , "MIMO Channel Capacities in Presence of Polarization Diversity with and without Line-of-Sight Path," *Journal WSEAS Trans. on Commun.*, vol. 5, no. 9, pp. 1744-1750, September 2006.
- [30] R. G. Vaughan, "Polarization diversity in mobile communications", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 39 :177-186, August 1990.

- [31] V. Erceg, L. Greenstein, S. Tjandra, S. Parkoff, A. Gupta, B. Kulic, A. Julius and R. Bianchi, "An empirically based path loss model for wireless channels in suburban environments", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 17(7) :1205-1211, July 1999.
- [32] W. C. Jakes, "Microwaves mobile communications", McGraw-Hill, New-York, 1982.
- [33] A. Mansour, C. Jutten, and P. Loubaton, "Adaptive subspace algorithm for blind separation of independent sources in convolutive mixture", *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(2) :583-586, February 2000.
- [34] A. Wittneben, "Basestation modulation diversity for digital simulcast", In *Proceedings of the IEEE Vehicular Technology Conference (VTC'91)*, pages 848-853, May 1991.
- [35] N. Seshadri and J. H. Winters, "Two signaling schemes for improving the error performance of frequency-division-duplex (FDD) transmission systems using transmitted antenna diversity", *International Journal of Wireless Information Networks*, 1(1) :49-59, January 1994.
- [36] M.A. Khalighi, K. Raouf, and G. Jourdain, "Capacity of wireless communication systems employing antenna arrays", *Journal of Wireless Personal Communications*, No. 23, PP 321-352, Kluwer academic publishers, 2002.
- [37] P.A. Bello, "Selective fading limitations of the Kathryn modem and some system design considerations", *IEEE Trans. Commun. Technol.*, Vol. 13, pp. 320-333, September 1965.
- [38] M.S. Zimmerman and A.L. Kirsch, "The AN/GSC-10 (KATTHRYN) variable rate data modem for HF radio", *IEEE Trans. Commun. Technol.* Vol. 15, pp. 197-205, April. 1967.
- [39] M.L. Doelz, E.T. Heald and D.L. Martin, "Binary data transmission techniques for linear systems", *Proc. IRE*, Vol. 45, pp. 656-661, May 1957.
- [40] G.A. Franco and G. Lachs, "An orthogonal coding technique for Communications", *IRE Intern. Conv. Rec.*, Vol. 9, pp. 126-133, 1961.
- [41] A.R. Kaye and D.R. George, "Transmission of multiplexed PAM signals over multiple channels and diversity systems", *IEEE Tans. Commun. Technol.*, Vol. 18, pp.520-526, October 1970.
- [42] S.B. Weinstein and P.M. Ebert, "Data transmission by frequency division multiplexing using the Discrete Fourier Transform", *IEEE Trans. Commun. Technol.*, Vol. 19, n. 5, Oct. 1971.
- [43] B. Hirosaki, "An orthogonally multiplexed QAM system using the Discret Fourier Transform", *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 29, pp. 982-989, July 1981.
- [44] B. Hirosaki, "A maximum likelihood receiver for an orthogonal multiplexed QAM system", *IEEE J. Select. Areas Commun.*, Vol. 2, pp. 757-764, September 1984.
- [45] B. Hirosaki, S. Hasegawa and A. Sabato, "Advanced groupband data modem using orthogonally multiplexed QAM techniques", *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 34, pp. 587-592, June 1986.
- [46] L.J. Cimini, "Analysis and simulations of a digital mobile channel using orthogonal frequency division multiplexing", *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 33, pp. 665-675, July 1985.

- [47] A. Ruiz and J.M. Cioffi, "A frequency domain approach to combined spectral shaping and coding", Proc. ICC, pp. 1711-1715, 1987.
- [48] J.A.C. Bingham, "Multicarrier modulation for data transmission : an idea whose time has come", IEEE Communications Magazine, Vol. 29, n. 5, pp. 5-14, May 1990.
- [49] M. Alard and R. Lassalle, "Principles of modulation and channel coding for digital broadcasting for mobile receivers", EBU Technical Review, n. 224, pp. 168-190, August 1987.
- [50] D. Catellain, B. Sueur and B. Le Floch, "Les réseaux hertziens de diffusions numériques : du DAB à la TV numérique" L'écho des recherches, n. 152, deuxième trimestre 1993.
- [51] CH. Dosch, P.A. Ratliff and D. Pommier, "First public demonstrations of COFDM/MASCAM. A milestone for the future of radio broadcasting", EBU Review Technical, n. 232, pp. 275-283, December 1988.
- [52] B. Le Floch, M. Alard and C. Berrou, "Coded Orthogonal Frequency Division Multiplex", Proceedings of the IEEE, Vol. 83, n. 6, pp. 982-996, June 1995.
- [53] W.Y. Zou and Y. Wu, "COFDM : an overview", IEEE Trans. Broadc., Vol. 19, pp. 628-634, March 1995.
- [54] H. Sari, G. Karam and I. Jeanclaude, "Transmission techniques for digital TV Broadcasting", IEEE Communications Magazine, pp. 100-109, February 1995.
- [55] B. Ledoux, "COFDM-6 Field tests", IEEE Transactions on Consumer Electronics, Vol. 42, n. 3, August 1993.
- [56] J.C. Rault, D. Castelain and B. Le Floch, "The coded orthogonal frequency division multiplexing (COFDM) technique, and its applications to digital radio broadcasting towards mobile receivers", Proceedings of Globecom 89, December 1989.
- [57] J. Wolf, "Field Strength measurements in DAB networks with test receivers ESVB", News from Rodhe, Schwarz, n. 139, pp. 22-23, 1992.
- [58] Y. Wu and W.Y. Zou, "Performances simulations of COFDM for Broadcast applications", SMPTE Journal, May 1995.
- [59] P. Combelles, J.L. Sicre, P. Penard and C. Joanblanq, "Diffusion terrestre de télévision numérique", REE, n. 5, May 1996.
- [60] J.F. Hélar and B. Le Floch, "Treillis coded orthogonal frequency division multiplexing for Digital Video Transmission", Proceedings of Globecom 91, 1991.
- [61] M. Guillet, J.Y. Chouinard, M. Trichard and Y. Wu, "COFDM for Digital ATV Terrestrial Distribution over 6 MHz channel", IEE Intern. Broadcasting Convention, n.413, pp. 29-34, September 1995.
- [62] P. Hayet and J.M. Guillaud, "Modem OFDM pour la télévision numérique", Revue annuelle LEP, 1992.
- [63] W.Y. Chen and D.L. Waring, "Applicability of ADSL to support video dial tone in the copper loop", IEEE Commun. Magazine, May 1994.
- [64] T.R. Hsing, C.T. Chen and J.A. Bellisio, "Video communications and services in the copper loop", IEEE Communications Magazine, January 1993.
- [65] Portail Internet de l'Alliance pour le Wi-Fi, <http://www.wi-fi.org>.

- [66] Portail Internet de support pour la Technologie Wi-Max, <http://www.wimaxforum.org>.
- [67] Portail Internet de l'Alliance WiMedia, <http://www.wimedia.org>.
- [68] A. Guy, "Etude, conception et réalisation d'un système de linéarisation d'amplificateurs de puissance à état solide pour des applications spatiales", Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, Mai 2000.
- [69] H. Abdulkader, "Application de réseaux de neurones à des chaînes de transmission numérique par satellite - gradient naturel", Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, Juin 2003.
- [70] S. Bouchired, "Equalization of time-varying non-linear channels using neural networks : Application to the satellite mobile channel", Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 1999.
- [71] A. A. M. Saleh, "Frequency independent and frequency dependent nonlinear model of TWT amplifiers", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-29, pp. 1715-1720, November 1981.
- [72] C. Rapp, "Effects of HPA-nonlinearity on a 4-DPSK/OFDM-signal for a digital sound broadcasting system", *Proceedings of the Second European Conference on Satellite Communications*, Liege, Belgium, pp. 179-184, October 22-24, 1991.
- [73] F. Launey, "Contribution à la modélisation comportementale des amplificateurs de puissance", Thèse de doctorat, Université de Nantes, Septembre 2003.
- [74] P.B. Kenington, "High Linearity RF Amplifier Design", Artech House, October-2000.
- [75] Ammar Chaker, "Influence de l'amplificateur de puissance sur une chaîne de transmission multiporteuses : prise en compte de l'effet mémoire", Thèse de doctorat, Université Cergy-Pontoise, Juillet 2004.
- [76] S. C. Cripps, "RF Power Amplifiers for Wireless Communications", Artech House, April 1999.
- [77] S. Ragusa, "Écrêtage Inversible pour l'Amplification Non-Linéaire des Signaux OFDM dans les Terminaux Mobiles", Thèse de Doctorat, Université Joseph FOURIER, Grenoble, Juin 2006.
- [78] E. Costa and S. Pupolin, "QAM-m-OFDM System Performance in the Presence of a non-linear Amplifier and Phase Noise", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, No.3, March 2002.
- [79] P. Jardin and G. Baudoin, "Filter Lookup Table Method for Power Amplifier Linearization", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 56, Issue 3, pp. 1076-1087, May 2007.
- [80] J. Palicot et Y. Louët, "Power Ratio definitions and analysis in single carrier modulation", *EUSIPCO05*, Antalya, Turkey, 2005.
- [81] M. Sharif and B.H. Khalaj, "Peak to Mean Envelope Power Ratio of oversampled OFDM Signals : an analytical approach", *Proc. of IEEE Int. Conf. Communications*, Vol. 5, Helsinki, Finland, pp. 1476-1480, June 2001.
- [82] J. Tellado-Mourello, "Peak to Average Power Ratio Reduction for multicarrier modulation", PhD Thesis, Stanford University, September 1999.



- [83] Y. Louët et J. Palicot, "Synthèse de la notion de facteur de crête et application aux modulations monoporteuse", Grets05, Louvain-la-Neuve, Belgique, 2005.
- [84] M. Friese, "Multitone Signals with Low Crest Factor", IEEE Trans. On Communications, Vol. 45, No. 10, pp. 1338-1344, October 1997.
- [85] M. Friese, "Multicarrier modulation with low peak-to-average power ratio", IEE Electr. Lett., vol. 32, no. 8, pp. 713-714, April 1996.
- [86] F. Xiong, "Digital Modulation Techniques", Artech House, pp. 430, 2000.
- [87] A. Glavieux et M. Joindot, "Communications numériques", MASSON, 1994.
- [88] R. Van Nee and R. Prasad, "OFDM for wireless multimedia communications", universal personal communications, Artech House publishers, Chapter 6, January 2000.
- [89] A. D. S. Jayalath and C. R. N. Athaudage, "On the PAR reduction of OFDM signal Using Multiple Signal Representation" IEEE Communications Letters, pp. 425-427, July 2004.
- [90] A. Papoulis and S. U. Pillai, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes," fourth edition, McGraw-Hill, 2002.
- [91] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas", Wireless Personal Communications, volume 6, pages 311-335, March 1998.
- [92] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden and R. A. Valenzuela, "V-BLAST : An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel", In Proceedings of the URSI International Symposium on Signal, Systems and Electronics (ISSSE), pages 295-300, Pisa, Italy, September 29 - October 2 1998.
- [93] H. Bölcskei, D. Gesbert and A. J. Paulraj, "On the capacity of OFDM-based multi-antenna systems", Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Istanbul, Turkey, June 2000.
- [94] B. Le Floch, M. Alard and C. Berrou, "Coded orthogonal frequency division multiplex", IEEE Proceedings, volume 83, pages 982-996, 1995.
- [95] R. Liu and L. Tong, "Special issue on blind systems identification and estimation", Proceedings of the IEEE, volume 86, No. 10, October 1998.
- [96] T. L. Marzetta and B. M. Hochwald, "Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh flat fading", IEEE Transactions on Information Theory, pages 139-157, January 1999.
- [97] B. M. Hochwald and T. L. Marzetta, "Unitary space-time modulation for multiple-antenna communications in Rayleigh flat fading", IEEE Transactions on Information Theory, pages 543-564, March 2000.
- [98] B. L. Hughes, "Differential space-time modulation", IEEE Transactions on Information Theory, pages 2567-2578, November 2000.
- [99] M. A. Khalighi, J. M. Brossier, G. Jourdain and K. Raoof, "Water filling capacity of Rayleigh MIMO channels", Proceedings of the IEEE Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC), San Diego (CA), USA, September 30 - October 3 2001.

- [100] J.H. Winters, "On the capacity of radio communication systems with diversity in a Rayleigh fading environment", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, volume 5, pages 871-878, June 1987.
- [101] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna gaussian channels", *European Transactions on Telecommunications*, volume 10, pages 585-595, 1999.
- [102] P. F. Driessen and G. J. Foschini, "On the Capacity Formula for Multiple Input-Multiple Output Wireless Channels : A Geometric Interpretation", *IEEE Transactions on Communications*, volume 47, pages 173-176, February 1999.
- [103] V. Tarokh, H. Jafarkhani and A. R. Calderbank, "Space-time block codes from orthogonal designs", *IEEE Transactions on Information Theory*, pages 1456-1467, July 1999.
- [104] R.F.H. Fischer and M. Hoch, "Peak-to-Average Power Ratio Reduction in MIMO OFDM", *IEEE International Conference on Communications (ICC07)*, Glasgow, United Kingdom, June 2007.
- [105] F. Boixadera and J. Boutros, "Capacity considerations for wireless multiple-input multiple-output channels", *Workshop on Multiaccess, Mobility and Teletraffic for Wireless Communications*, volume 4, Venice, Italy, October 1999.
- [106] S. M. Alamouti, "A simple transmit diversity technique for wireless communication", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, pages 1451-1458, October 1998.
- [107] V. Tarokh, S. Alamouti and P. Poon, "New detection schemes for transmit diversity with no channel estimation", *IEEE International Conference on Universal Personal Communications*, volume 2, pages 917-920, October 1998.
- [108] H. Sampath, S. Talwar, V. Erceg and A. Paulraj, "A Fourth-Generation MIMO-OFDM Broadband Wireless System : Design, Performance, and Field Trial Results", In *IEEE Communications Magazine*, volume 40, pages 143-149, September 2002.
- [109] O. Berder, L. Collin, G. Burel and P. Rostaing, "Digital transmission combining BLAST and OFDM concepts : experimentation on the UHF COST 207 channel", In *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference (Globecom)*, volume 1, pages 141-145, San Antonio (TX), USA, November 2001.
- [110] H. Sampath, P. Stoica and A. Paulraj, "Generalized Linear Precoder and Decoder Design for MIMO Channels Using the Weighted MMSE Criterion", In *IEEE Transactions on Communications*, volume 49, pages 2198-2206, December 2001.
- [111] Y. G. Li, J. Chuang and N. R. Sollenberger, "Transmitter diversity for OFDM systems and its impact on high-rate data wireless networks", In *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, volume 17, pages 1233-1243, July 1999.
- [112] H. Bolcskei, D. Gesbert and A. J. Paulraj, "On the Capacity of OFDM-based Spatial Multiplexing Systems", In *IEEE Transactions on Communications.*, volume 50, pages 225-234, February 2002.
- [113] D. Jourdain, "Caractérisation expérimentale du canal sous-marin petit fond pour la transmission acoustique horizontale", thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, Juin 1996.
- [114] L. Collin, "Optimisation de systèmes multi-antennes basée sur la distance minimale", thèse, Université de Bretagne Occidentale, Décembre 2002.

- [115] Y. Jun, Y. Jiawei and Li Jiandong, "Reduction of The Peak-to-Average Power Ratio of The Multicarrier Signal Via Artificial Signals", Proceeding of ICCT, pp. 581-585, 2000.
- [116] R.Bäumel, R.Fischer and J. Huber, "Reducing the Peak-to-Average power ratio of Multicarrier Modulation by Selected Mapping", Electronics Letters, vol. 32, No. 22, pp. 2056-2057, October 1996.
- [117] S. Muller and B. Huber, "A comparison of peak power reduction schemes for OFDM", IEEE Global Telecommunication Conference, pp. 338-341, 1998.
- [118] M. Tan, Z. Latinovic and Y. Bar-Ness, "STBC MIMO-OFDM Peak-to-Average Power Ratio Reduction by Cross-Antenna Rotation and Inversion", IEEE Communications letters, vol. 9, No. 7, July 2005.
- [119] K. F. Lee and D. B. Williams, "A space-time coded transmitter diversity technique for frequency selective fading channels," in Proc. IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, pp. 149-152, 2000.
- [120] M. Tan and Y. Bar-Ness, "OFDM peak-to-average power ratio reduction by combined symbol rotation and inversion with limited complexity", Proc. IEEE GLOBECOM, pp. 605-610, December 2003.
- [121] H. Lee, D. N. Liu, W. Zhu and M. P. Fitz, "Peak Power Reduction Using a Unitary Rotation in Multiple Transmit Antennas", Department of Electrical Engineering, University of California Los Angeles, October 2005.
- [122] K. W. PARK and Y. S. CHO, "A PAPR Reduction Method for MIMO-OFDM Systems Using Subband Permutation", IEICE Trans. Commun., vol.E89-B, no.1 January 2006.
- [123] Z. Latinovic and Y. Bar-Ness, "SFBC MIMO-OFDM Peak-to-Average Power Ratio Reduction by Polyphase Interleaving and Inversion", IEEE communications letters, vol. 10, no. 4, April 2006.
- [124] S. Boyd and L. Vandenberghe, "Convex optimization", <http://www.stanford.edu/boyd/>
- [125] M. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd and H. Lebret, "Applications of second order cone programming", Linear Algebra and its Applications, 284 :193-228, Special Issue on Linear Algebra in Control, Signals and Image Processing, November 1998.
- [126] "Wireless Lan medium access control (MAC) and physical layer (PHY) specifications : High-speed physical layer in the 5 GHz Band,. IEEE Std 802.11a-1999, Sept. 1999.", <http://wlan.ref-union.org/pages/docs/pdf/802.11a-1999.pdf>
- [127] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, "Convex Optimization in engineering : Modeling, Analysis, Algorithms", [www.isa.ewi.tudelft.nl/roos/courses/WI4218/tud00r.pdf](http://www.isa.ewi.tudelft.nl/roos/courses/WI4218/tud00r.pdf) -
- [128] H. Lebret, "Synthèse de diagramme de reseaux d'antennes par optimisation convexe", Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, Novembre 1994.
- [129] M. Grant, Stephen Boyd and Yinyu Ye, "CVX - Matlab Software for Disciplined Convex Programming", <http://www.stanford.edu/boyd/cvx/>
- [130] Jos F. Sturm, "SeDuMi : software for optimization over symmetric cones", <http://sedumi.mcmaster.ca>.