

Génération de signaux multifractals possédant une structure de branchement sous-jacente.

Geoffrey Decrouez

Cotutelle Internationale de Thèse préparée au Gipsa-Lab et à l'Université de
Melbourne (Australie)

Soutenance de thèse - Grenoble - 12 janvier 2009

Plan de l'exposé

Introduction aux fractales

Le processus MEBP

fBm

Le formalisme multifractal

Perspectives

English summary

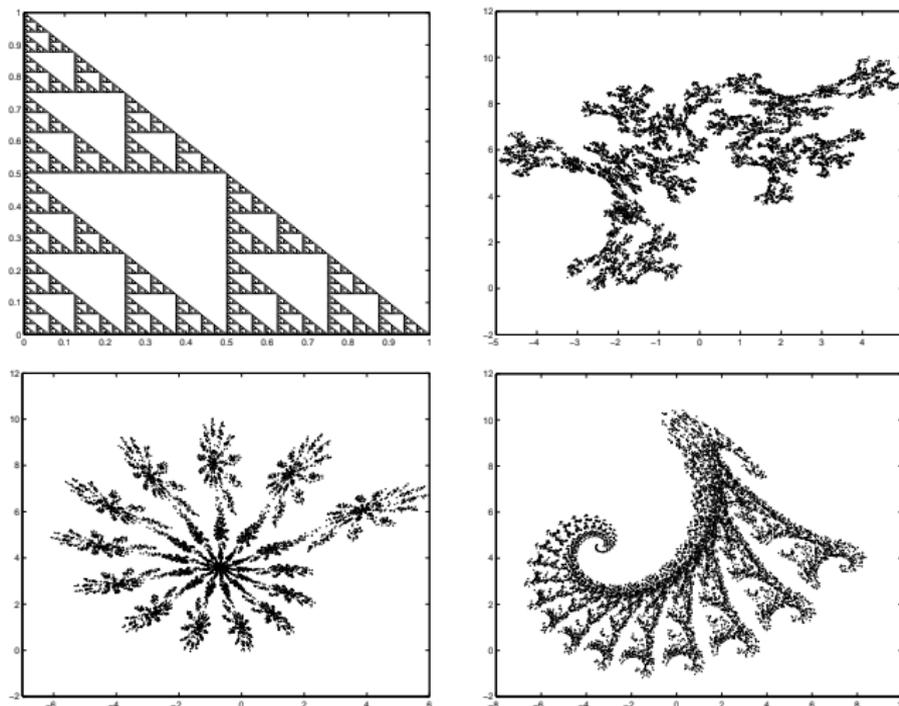


Figure: Ensembles auto-similaires.

Comment définir une fractale?

Premier paradigme: En termes de dimension

- ▶ Dimension Euclidienne? Dimension topologique? Dimension de Hausdorff?
- ▶ Certains ensembles peuvent avoir une dimension fractionnaire...

Soient $\delta > 0$ et $A \subset \mathbb{R}^p$.

$$\mathcal{H}_\delta^n(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^n \mid A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, |B_j| \leq \delta \right\}.$$



On définit

$$\mathcal{H}^n(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^n(A).$$

$\mathcal{H}^n(A)$ saute de ∞ à 0 lorsque n augmente. Il y a au plus un s tel que $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$.

Le point de transition est la dimension de Hausdorff de A :

$$D_{\mathcal{H}}(A) = \sup \{n \mid \mathcal{H}^n(A) = \infty\} = \inf \{n \mid \mathcal{H}^n(A) = 0\}.$$

En général, $D_{\mathcal{H}} \geq D_T$, la dimension topologique. Il existe d'autres définitions de dimension fractale, comme la dimension comptage de boîtes, ou la packing dimension.

Falconer (1997) remarque que la plupart des ensembles fractals K partagent les propriétés suivantes:

- ▶ K possède des détails/irrégularités à toutes les échelles.
- ▶ K ne peut pas être décrit à l'aide d'équations de la géométrie Euclidienne.
- ▶ K est approximativement, strictement ou statistiquement auto-similaire.
- ▶ La dimension de Hausdorff de K est souvent strictement plus grande que sa dimension topologique.
- ▶ K peut être construit la plupart du temps de manière simple, peut-être récursivement.

Comment définir une fractale?

Second paradigme: En terme de loi d'échelle

- ▶ Cette approche est mieux adaptée à l'étude des signaux.
- ▶ Des exemples incluent le mouvement Brownien, le mouvement Brownien fractionnaire, les processus auto-similaires, les processus H-SSSI...

DÉFINITION

Un processus X est dit auto-similaire avec index H si et seulement si

$$\forall c > 0 \quad \{X(ct), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{fdd}{=} \{c^H X(t), t \in \mathbb{R}\}.$$

Un changement d'échelle de temps est équivalent à un changement d'échelle d'amplitude.

La régularité de Hölder

- ▶ Information sur les fluctuations locales d'un signal.
- ▶ On compare $X(t_0)$ à l'aide d'un polynôme $P_{t_0}(t)$.

Le processus X appartient à $C_{t_0}^{h(t_0)}$ s'il existe un polynôme P_{t_0} de degré au plus égal à la partie entière de $h(t_0)$ tel que

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| \leq K|t - t_0|^{h(t_0)}$$

dans un voisinage de t_0 . La plus grande valeur H de $h(t_0)$ tel que $X \in C_{t_0}^{h(t_0)}$ est l'**exposant de Hölder** de X à $t = t_0$.

Monofractales vs Multifractales

Monofractales: Exposant de Hölder unique.

Multifractales: L'exposant de Hölder varie de manière erratique avec le temps.

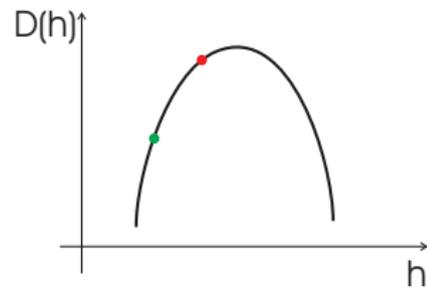
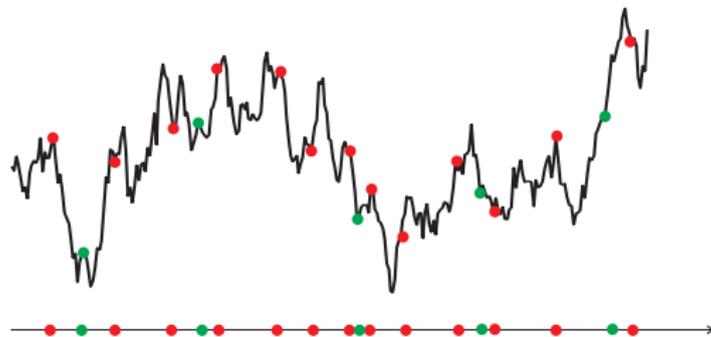
On a besoin d'une description globale des fluctuations locales du processus.

Idée: On considère la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points possédant un exposant de Hölder donné.

$$D(a) = D_{\mathcal{H}}(\{t \mid h(t) = a\})$$

D est appelé le **spectre de Hausdorff** du processus X .

Illustration



En pratique...

- ▶ Impossible d'estimer le spectre d'un processus directement.
- ▶ Des méthodes alternatives existent et ont donné naissance au **formalisme multifractal**.

Le formalisme multifractal est associé à l'étude des moments d'une quantité multirésolution $T_X(a, t)$, obtenue par comparaison du signal avec une fonction de référence $\psi(t)$ dilatée et translatée

$$T_X(a, t) = \langle X, \psi_{a,t} \rangle = |a|^{-1} \int X(u) \psi((u - t)/a) du$$

Un processus X possède une propriété de **loi d'échelle** si les moyennes temporelles de $T_X(a, t_k)$ suivent une loi de puissance lorsque $a \rightarrow 0$

$$\frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, t_k)|^q \simeq C_q |a|^{\zeta(q)}.$$

Lorsque $T_X(a, t_k)$ sont les **coefficients dominants** d'un processus, alors on a en toute généralité (S.Jaffard, B.Lashermes et P.Abry)

$$D(h) \leq \inf_{q \neq 0} (1 + qh - \zeta(q)).$$

- ▶ D'autres choix pour $T_X(a, t_k)$ sont envisageables.

Introduction aux fractales

Le processus MEBP

fBm

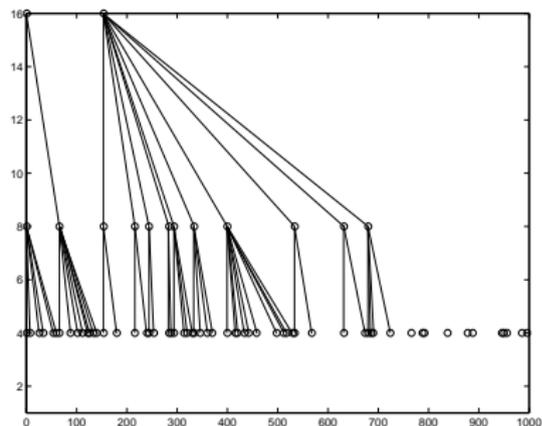
Le formalisme multifractal

Perspectives

English summary

Le processus EBP et l'arbre de branchement

- ▶ La construction du processus EBP est lié au concept d'arbre de branchement
- ▶ Arbre de branchement = Analyse temps-échelle d'un signal



- ▶ Z_k^n = nombre de sous-passages de taille 2^{n-1} qui composent le k -ième passage de niveau n .
- ▶ Soit p la distribution de Z_k^n : $p(x) = \mathbb{P}(Z_k^n = x)$.

DÉFINITION

Un processus est appelé processus **EBP** si son arbre de branchement est un processus de Galton-Watson (i.e. les Z_k^n sont i.i.d.)

DÉFINITION

p est une distribution **régulière** $\Leftrightarrow p(2) < 1$,

$\{x | p(x) > 0\} \subset \{2, 4, 6, \dots\}$ et $\sum_{x=1}^{\infty} x \log(x) p(x) < \infty$.

Et réciproquement?

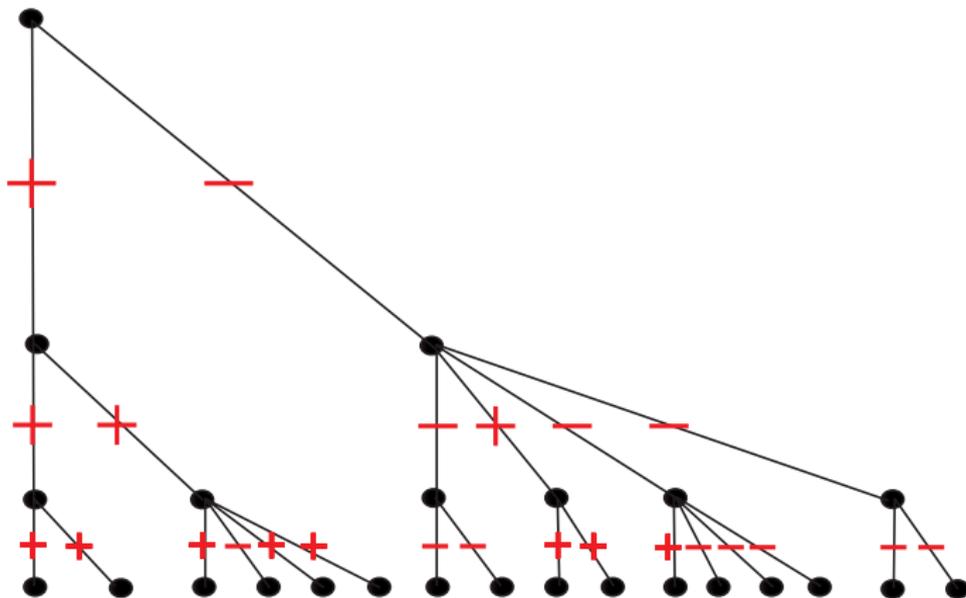
Etant donné un arbre de Galton-Watson, est-il possible d'associer un processus EBP?

Réponse: **OUI, PARFOIS**

On introduit d'autres notations.

- ▶ La **transformée de Laplace** d'une variable aléatoire X est donnée par $\Lambda(s) = \mathbb{E}(e^{-sX})$ pour s complexe tel que $\operatorname{Re}(s) \geq 0$.
- ▶ Soit α_k^n un vecteur de taille Z_k^n dont les composantes sont les types des Z_k^n sous-passages du passage père.
- ▶ Les $(Z_k^n - 2)$ premières entrées de α_k^n viennent par paire, chaque paire étant haut-bas ou bas-haut. Les deux dernières composantes sont soit haut-haut ou bas-bas. Soit $p_{c|z}(\cdot) = \mathbb{P}(\alpha_k^n = \cdot \mid Z_k^n = z)$ la **distribution des orientations**.

Avant d'aller plus loin...

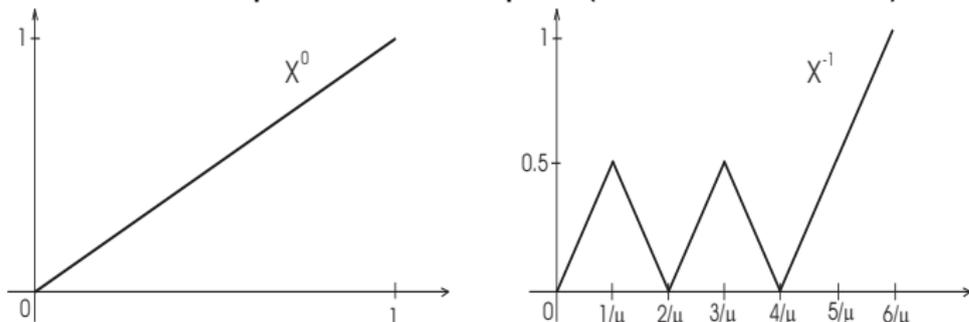


ρ : Distribution du nombre de fils, $p_{c|z}$: Distribution des orientations, μ : Nombre moyen de fils à un nœud.

Construction du processus EBP Canonique (CEBP)

- ▶ X = Limite lorsque $n \rightarrow -\infty$ d'une suite de marches aléatoires X^n de résolution 2^n et de durée μ^n .
- ▶ X^0 = Un simple passage de 0 à 1.
- ▶ Ensuite, remplacer chaque X^n passage de taille 2^n par un nombre aléatoire de sous-passages de taille 2^{n-1} et répéter la procédure.

Les deux premières étapes ($n = 0$ et $n = -1$)



X^{-1} a deux excursions et un passage direct.

Jones (2004): Pour toute distribution régulière p sur $2\mathbb{N}^*$ il existe un unique processus EBP continu X défini sur $[0, W]$ tel que

- ▶ Les orientations suivent la distribution $p_{c|z}$.
- ▶ La transformée de Laplace de la durée des passages satisfassent l'équation fonctionnelle de Poincaré $\psi(\mu s) = F(\psi(s))$, où $F(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p(j)s^j$ est la fonction génératrice.

On appelle alors X le processus EBP Canonique (CEBP) avec distributions p et $p_{c|z}$. Soit $\mu = \sum_x xp(x)$ la taille moyenne d'une famille. Soit $H = \log 2 / \log \mu$, alors pour tout $a \in \{\mu^n, n \in \mathbb{Z}\}$,

$$X(t) \stackrel{fdd}{=} a^{-H} X(at) \text{ au sens des distributions finies.}$$

MEBP = CEBP + Changement de temps

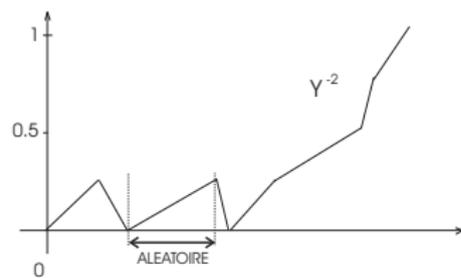
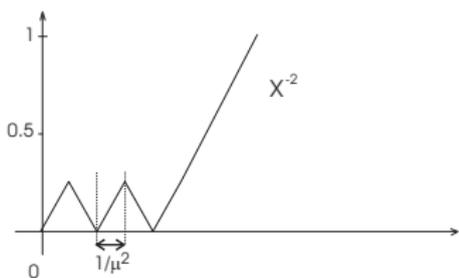
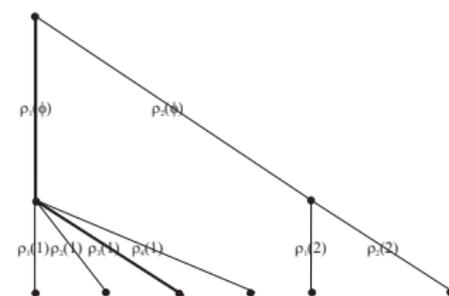
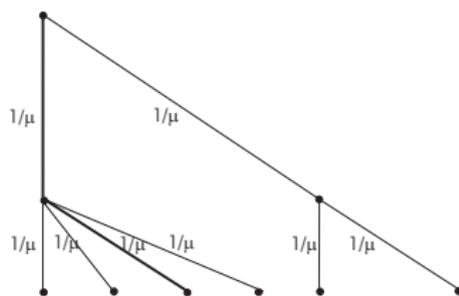
On considère X^n

CEBP La durée d'un passage est μ^n .

MEBP La durée d'un passage est aléatoire et déterminé par des poids sur l'arbre de branchement.

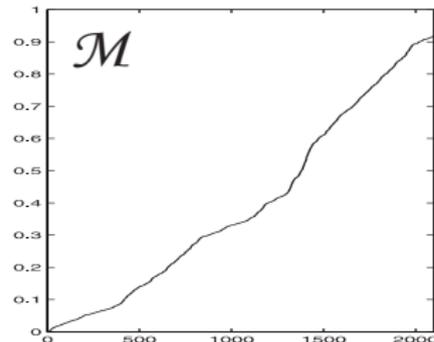
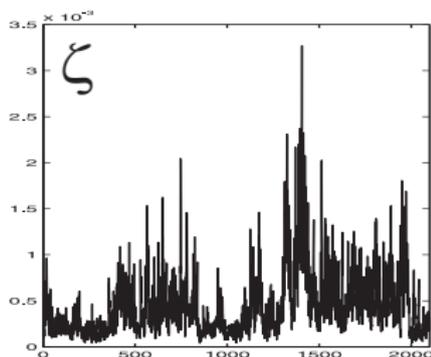
Motivation: Définir le changement de temps à partir de l'arbre de branchement permet une simulation *on-line* des processus MEBP.

En pratique...



Les poids sont utilisés pour définir une mesure ζ , qui servent à définir un processus non-décroissant \mathcal{M} :

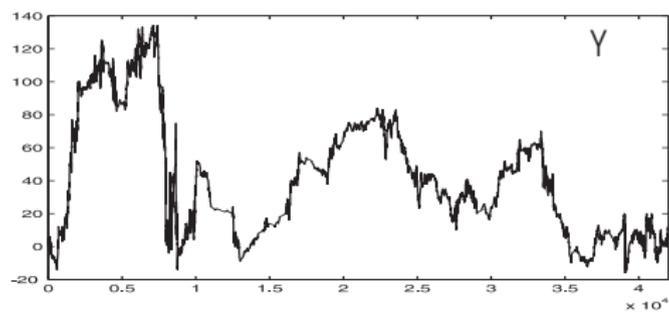
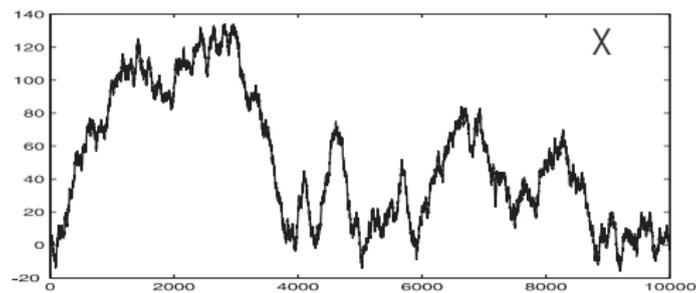
$$\mathcal{M}(t) = \zeta([0, t])$$



- ▶ On dénote par X le processus CEBP et par Y le processus MEBP après changement de temps.

$$Y = X \circ \mathcal{M}^{-1}$$

Illustration

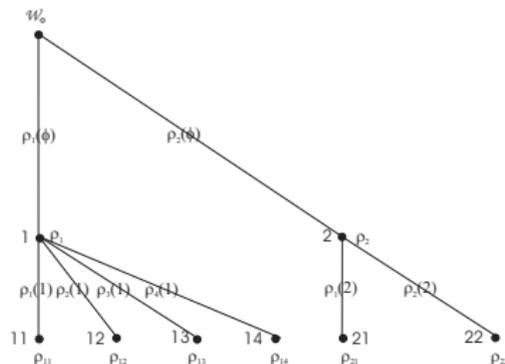


Construction de ζ

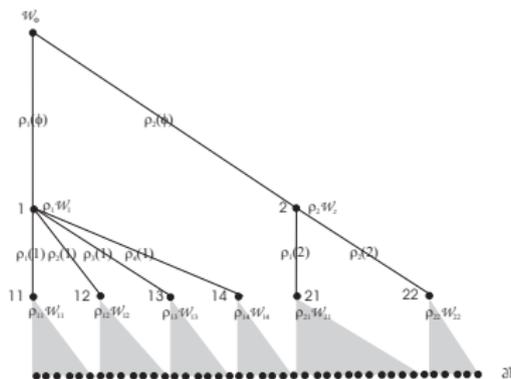
- ▶ $\mathbf{i} = i_1 \dots i_n =$ nœud de l'arbre et Z_i son nombre d'enfants.
- ▶ $\partial T =$ bordure de l'arbre.
- ▶ Soit $\mathbf{i} \in \partial T$. $\mathbf{i}|_n$ est la restriction de \mathbf{i} à la n -ième génération.

On attache un poids $\rho_j(\mathbf{i})$ sur la branche \mathbf{ij} où $1 \leq j \leq Z_i$. Soit

$\rho_{\mathbf{i}} := \prod_{k=1}^n \rho_{i_k}(\mathbf{i}|_{k-1})$ le produit des poids le long d'une lignée.



Comment les poids se comportent-ils sur la frontière de l'arbre?



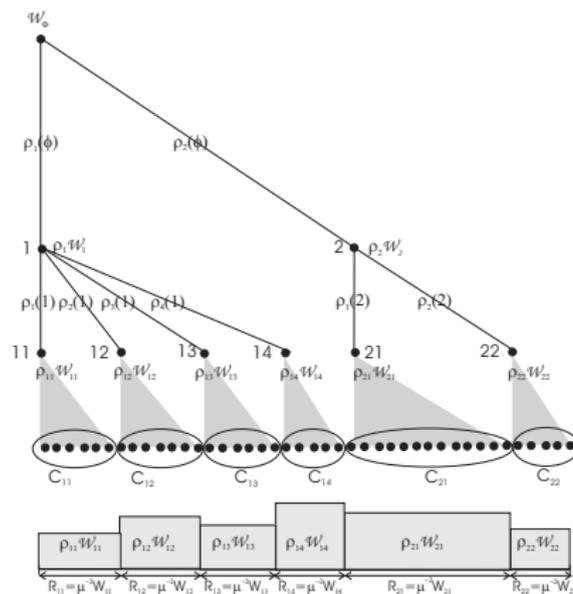
On définit \mathcal{W}_i la limite d'une martingale sur l'arbre pondéré, attachée au nœud i :

$$\mathcal{W}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{W}_i^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in \Upsilon_i, |j|=n} \rho_j$$

\mathcal{W}_i^n converge vers une limite non triviale sous certaines conditions.

Les \mathcal{W}_i définissent une **mesure** ν sur la frontière de l'arbre.

On dénote par C_i le cylindre $\{\mathbf{j} \in \partial\Upsilon \mid \mathbf{j}|_n = \mathbf{i}\}$, et on définit la mesure ν d'un cylindre $\nu(C_{\mathbf{i}|_n}) = \rho_{\mathbf{i}|_n} \mathcal{W}_{\mathbf{i}|_n}$ pour $\mathbf{i} \in \partial\Upsilon$.



La mesure ζ est l'image de ν en passant de ∂T à \mathbb{R} .

- ▶ $T_k^n = k$ -ième temps de passage de niveau n du processus CEBP X .

$$T_{k+1}^n = \inf\{t > T_k^n \mid X(t) \in 2^n\mathbb{Z}, X(t) \neq X(T_k^n)\}$$

- ▶ $\mathcal{T}_k^n = k$ -ième temps de passage de niveau n du processus MEBP $Y = X \circ \mathcal{M}^{-1}$.

On définit alors

$$\mathcal{I}_k^n := \mathcal{M}(T_k^n) = \zeta([0, T_k^n]) = \sum_{\psi(\mathbf{i}) \leq k} \rho_{\mathbf{i}} \mathcal{W}_{\mathbf{i}} \quad \mathbf{i} \in \Upsilon_n$$

mais cela est-il valide pour tout t ?

Réponse: NON

ν possède un support discret.

Jusqu'à présent, on a associé un **cylindre** à un nœud \mathbf{i} de l'arbre. L'idée est de lui associer un **intervalle réel**:

$$R_{\mathbf{i}} = [T_{\psi(\mathbf{i})-1}^{-|\mathbf{i}|}, T_{\psi(\mathbf{i})}^{-|\mathbf{i}|}[$$

où $\psi(\mathbf{i})$ est la position du nœud \mathbf{i} au sein de la génération n .
Pour un t donné, soit $\mathbf{i} \in \partial T$ tel que $t \in R_{\mathbf{i}|n}$ pour tout $n \geq 0$.

PROPOSITION

La longueur du plus large de ces intervalles tend vers 0 lorsque n tend vers $-\infty$.

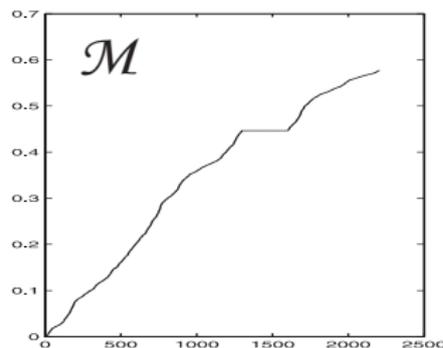
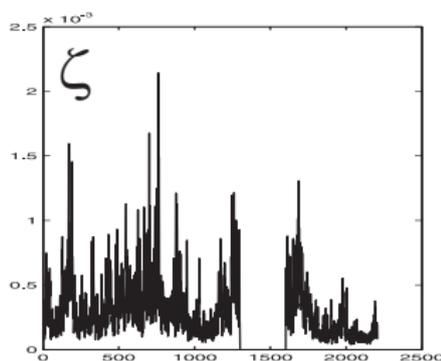
On a donc, $\{t\} = \bigcap R_{\mathbf{i}|n}$ et on peut définir

$$\mathcal{M}(t) = \zeta([0, t]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta([0, T_{\psi(\mathbf{i}|n)}^{-|\mathbf{i}|n}]).$$

Continuité des traces du processus MEBP

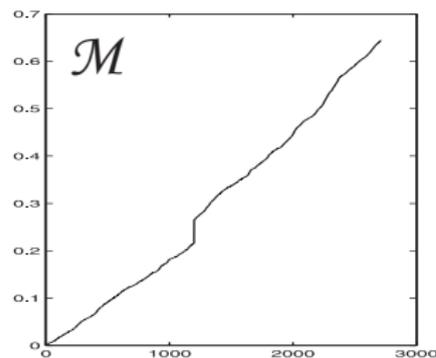
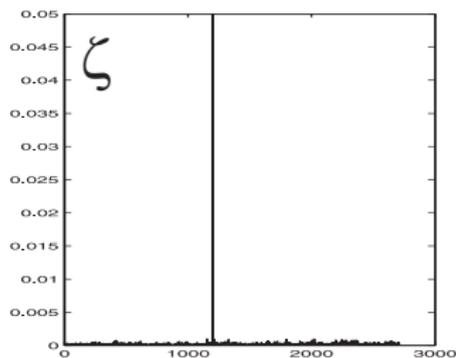
$$Y = X \circ \mathcal{M}^{-1} \text{ avec } X \text{ continu}$$

Y est continu $\Leftrightarrow \mathcal{M}^{-1}$ est continu.



\Rightarrow Il faut qu'aucun intervalle ne possède une ζ -mesure nulle, c'est à dire, $\rho_i \mathcal{W}_i > 0$.

Continuité de \mathcal{M}



\mathcal{M} est continu $\Leftrightarrow \zeta$ n'a pas d'atomes.

$\Leftrightarrow \rho_{\mathbf{i}|_n} \mathcal{W}_{\mathbf{i}|_n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$

PROPOSITION

Sous certaines hypothèses,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{\mathbf{i} \in \partial \Upsilon_n} \rho_{\mathbf{i}|_n} \mathcal{W}_{\mathbf{i}|_n} = 0 \quad p.s.$$

Résumé

HYPOTHÈSE 1 On suppose que $\mathbb{E} \sum_{i=1}^{Z_1} \rho_i = 1$,

$0 > \mathbb{E} \sum \rho_i \log \rho_i > -\infty$, $\mathbb{E} \sum_{i=1}^{Z_1} \rho_i \log \sum_{i=1}^{Z_1} \rho_i < \infty$ et qu'il existe

$\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{E} Z_1^{1+\epsilon} < \infty$

HYPOTHÈSE 2: On suppose

$$P(\sum_i \rho_i = 1) < 1, \quad P(\rho_i \leq 1) = 1 \text{ et}$$

$$\text{pour tout } p > 1, \quad \mathbb{E} \left[\left(\sum_i \rho_i \right)^p \right] < \infty.$$

Résumé

THÉORÈME

Soit p une distribution régulière et X le processus CEBP correspondant.

*Sous l'**HYPOTHÈSE 1** on peut construire un processus non-décroissant \mathcal{M} tel que \mathcal{M}^{-1} soit continu, et définir alors*

$$Y(t) = X \circ \mathcal{M}^{-1}(t) \text{ pour tout } t \in [0, \mathcal{W}_\emptyset].$$

*Si en plus l'**HYPOTHÈSE 2** est vérifiée, alors \mathcal{M} est continu.*

Introduction aux fractales

Le processus MEBP

fBm

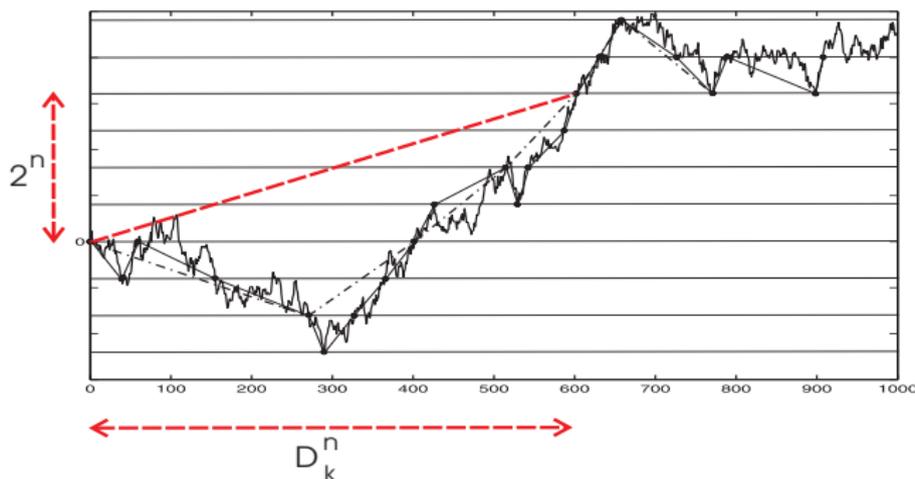
Le formalisme multifractal

Perspectives

English summary

Le mouvement Brownien

- ▶ Soient D_k^n et Z_k^n la durée d'un passage et le nombre de sous-passages du k -ième passage de niveau n .
- ▶ Soit V_j^n défini par $V_j^n = 0$ si la j -ième excursion de niveau n est haut-bas et $V_j^n = 1$ si elle est bas-haut.



THÉORÈME

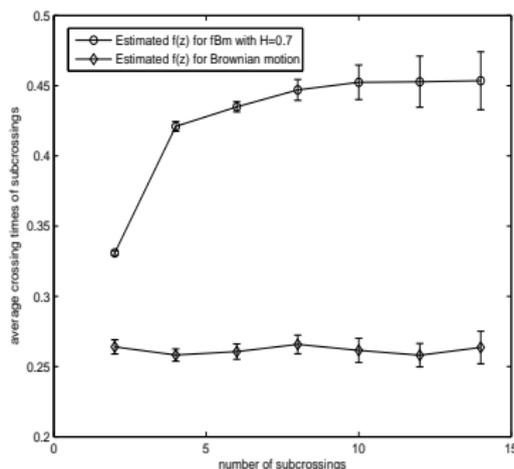
(Hambly 1995) Le **mouvement Brownien** est l'unique processus continu B pour lequel

- ▶ $B(0) = 0$ et $B(1)$ ont une variance unité;
- ▶ Pour chaque n les D_k^n , $k = 1, 2, \dots$ sont i.i.d. avec transformée de Laplace $\mathbb{E}e^{-sD_k^n} = 1 / \cosh(2^{-n+1/2}s^{1/2})$;
- ▶ Les Z_k^n sont i.i.d. pour tout n et k , avec $\mathbb{P}(Z_k^n = 2^i) = 2^{-i}$, $i = 1, 2, \dots$;
- ▶ Les V_j^n sont i.i.d. pour tout n et j , avec $\mathbb{P}(V_j^n = 0) = \mathbb{P}(V_j^n = 1) = 1/2$.

On calcule la durée moyenne des sous-passages pour un fBm après conditionnement sur la taille de la famille du passage père.

$$f(z) := \alpha \mathbb{E}(D_{i_k}^n \mid Z_i = z)$$

où α nous assure que $\sum z f(z) \mathbb{P}(Z = z) = 1$.



Afin d'imiter ce comportement, on définit les poids ρ sur l'arbre de branchement comme suit

$$\rho \mid (Z = z) = \hat{f}_{\text{fBm}}(z).$$

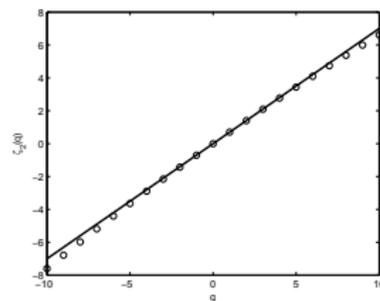
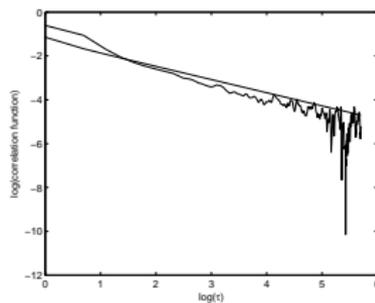
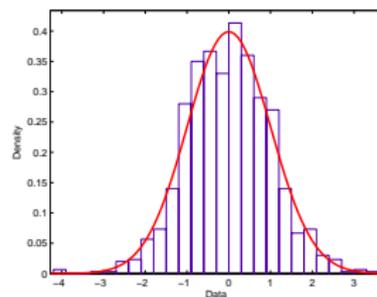
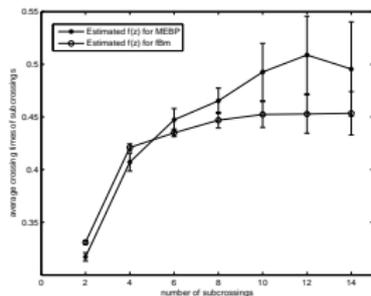
Avec cette définition, renormaliser par α assure que $\mathbb{E} \sum \rho = 1$, qui est une hypothèse fondamentale pour l'existence des processus MEBP.

Mais... pourquoi cela devrait-il marcher?

En définissant les poids de cette manière, la durée moyenne des sous-passages après conditionnement sur la taille du passage père du processus MEBP est

$$\mathbb{E}(\rho_{\mathbf{i}k} \mathcal{W}_{\mathbf{i}k} \mid Z_{\mathbf{i}} = z) = \hat{f}_{\text{fBm}}(z) [\mathbb{E}\rho]^n$$

Résultats numériques obtenus pour un fBm avec $H = 0.7$



Illustration

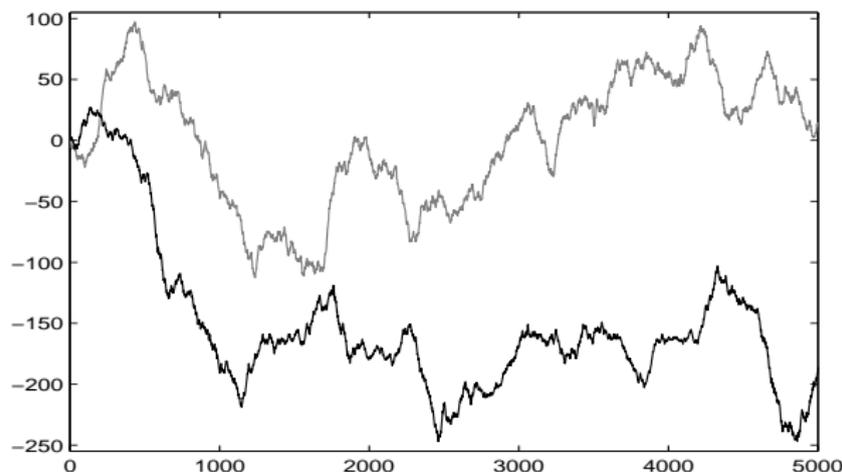


Figure: Une réalisation d'un fBm généré à l'aide de l'algorithme de Chan-Wood (en gris) et une réalisation d'un processus MEBP imitant un fBm (en noir).

Introduction aux fractales

Le processus MEBP

fBm

Le formalisme multifractal

Perspectives

English summary

But: Déterminer le spectre des processus CEBP et MEBP.

On rappelle la définition de l'exposant de Hölder:

DÉFINITION

Soient $\epsilon > 0$, $I_\epsilon = [t - \epsilon, t + \epsilon]$ et X une fonction continue.

$$h(t) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(2\epsilon)} \log \sup_{|u-t| < \epsilon} |X(u) - X(t)|$$

Spectre de Hausdorff: $D(a) = D_{\mathcal{H}}(\{t \mid h(t) = a\})$

HYPOTHÈSE 3 On suppose que pour tout $p > 0$, $\mathbb{E}Z_\emptyset^p < \infty$.

THÉORÈME

*Soit X un processus CEBP avec distribution régulière p , de moyenne μ . On suppose que le nombre de fils est borné, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $p(x) = 0$ pour tout $x \geq M$. Aussi, on suppose que l'**HYPOTHÈSE 3** est vérifiée. Alors, pour tout t ,*

$$h(t) = \frac{\log 2}{\log \mu} \quad (1)$$

avec probabilité 1.

En d'autres termes, le processus CEBP est **monofractal**...

Simulations

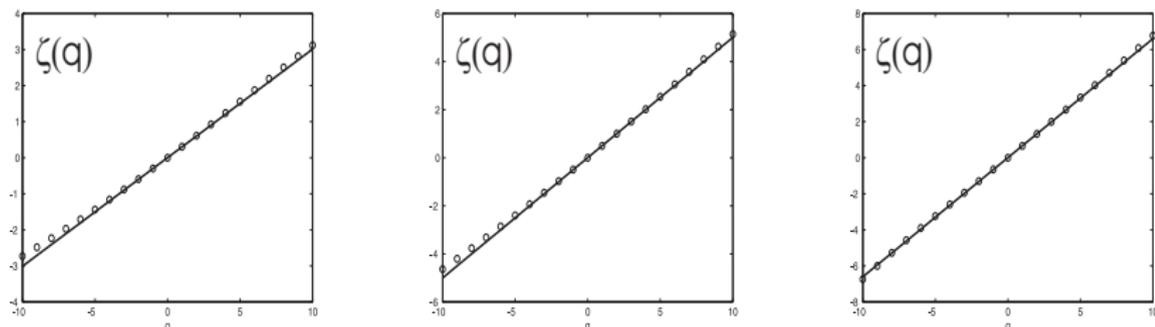


Figure: Fonctions de partition de processus CEBP. La distribution du nombre de fils est $P(Z = k) = \theta(1 - \theta)^{(k-2)/2}$, avec $k = 2, 4, 6, \dots$ et $\theta = 0.2, 0.5$ et 0.7 , de gauche à droite. L'estimation ('o') est obtenue après moyennage de 100 réalisations. La fonction théorique est donnée en trait noir. Les intervalles de confiance sont trop petits pour être présentés.

Borne supérieure pour le spectre de \mathcal{M}

THÉORÈME

Soit p une distribution régulière de moyenne μ . On suppose un nombre fini de fils à chaque nœud, des poids i.i.d. et que les **HYPOTHÈSES 1, 2 et 3** sont vérifiées. Soit $T(q) = -\log_{\mu} \mathbb{E} \rho^q$. Une borne supérieure pour le spectre de Hausdorff de \mathcal{M} est donné par

$$D(a) \leq \inf_{q \in \mathbb{R}} (1 + qa - T(q)).$$

On rappelle qu'avec les coefficients dominants on a

$$D(a) \leq \inf_{q \in \mathbb{R}} (1 + qa - \zeta(q)).$$

Mais il n'y a aucune raison *a priori* pour que ζ et T soient les mêmes!

Simulations

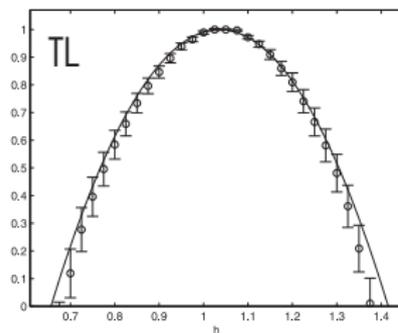
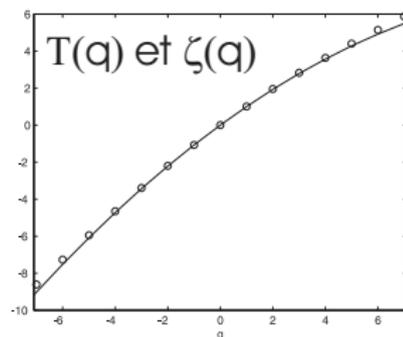


Figure: Estimation de la fonction de partition de \mathcal{M} . Fonction de partition $\zeta(q)$ (à gauche) et sa transformée de Legendre (à droite), estimée à l'aide de la méthode des coefficients dominants.

Que peut-on conclure de ces simulations?

On considère la transformée de Legendre-Fenchel du spectre $D(a)$:

$$\xi(q) = \inf_q (1 + qa - D(a))$$

La transformée de Legendre-Fenchel de $\xi(q)$ donne alors une borne supérieure pour $D(a)$, avec égalité si $D(a)$ est concave.

En outre, pour tout $q \in \mathbb{R}$, (S.Jaffard, B.Lashermes et P.Abry)

$$\zeta(q) = \xi(q)$$

Conclusion?

Qu'en est-il des processus MEBP?

Pour commencer, on considère le cas du mouvement Brownien: $Y = B \circ \mathcal{M}^{-1}$. On montre alors que

THÉORÈME

*Soit $Y = B \circ \mathcal{M}^{-1}$ un processus MEBP, où B est un mouvement Brownien. On suppose que les **HYPOTHÈSES 1 et 2** sont vérifiées. Soient $D_H^{\mathcal{M}}$ et D_H^Y les spectres de Hausdorff de Y et \mathcal{M} respectivement. Alors*

$$D_H^Y(a) = 2aD_H^{\mathcal{M}}(1/2a).$$

\Rightarrow La borne supérieure obtenue pour \mathcal{M} nous donne une borne supérieure pour le spectre de Y .

Simulations

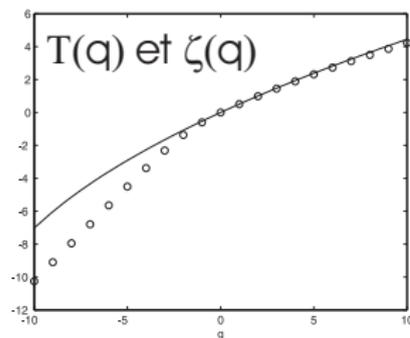
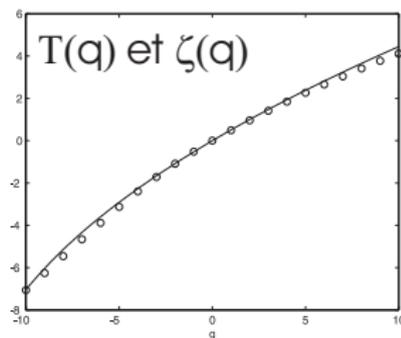
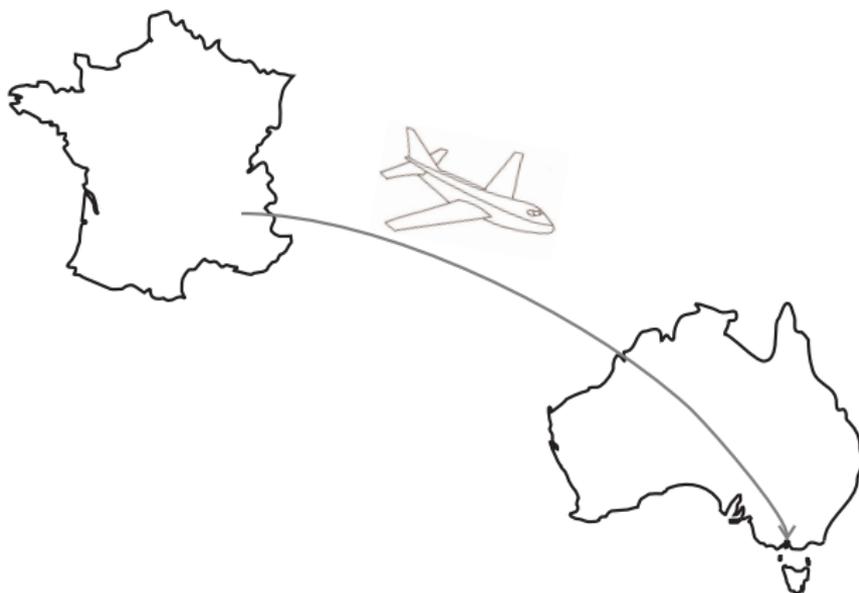


Figure: Estimation de $\zeta(q)$ pour de mouvements Browniens en temps multifractal. Les poids sont lognormaux. On rééchantillonne respectivement tous les 14 et 6 unités de temps.

Perspectives

- ▶ Détermination du spectre multifractal de \mathcal{M} .
- ▶ Détermination du spectre multifractal de processus MEBP.
- ▶ Considération du problème inverse.
- ▶ Etude de la mesure ν définie sur la bordure de l'arbre. Quelques points du spectre de Hausdorff sont connus.

Let's go to Australia...



English summary

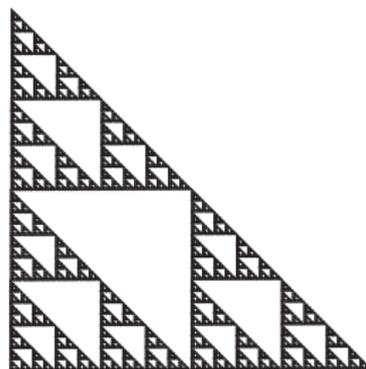
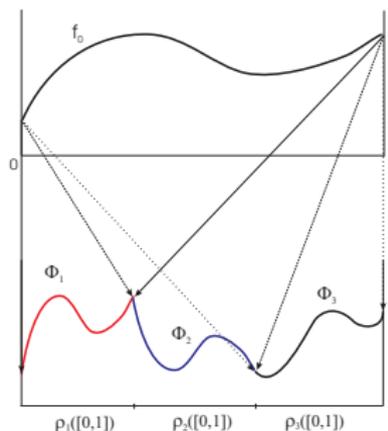
This PhD was prepared in cotutelle between **Gipsa-lab** in Grenoble and the Department of Mathematics and Statistics at the **University of Melbourne**, Australia.

In agreement with the international cotutelle convention signed by both universities, I present an English summary of my doctoral research work.

My Australian completion talk was presented the 21st of October 2008 at the University of Melbourne.

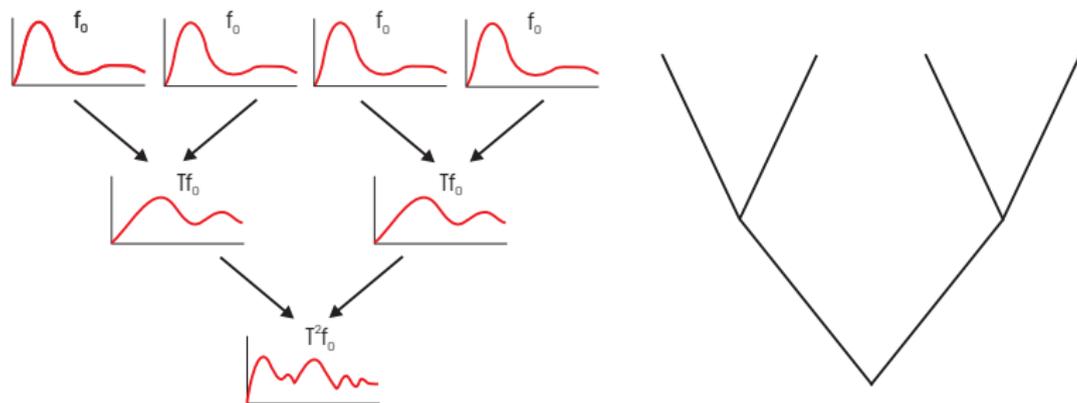
First Model: Galton-Watson Iterated Function Systems

Consider the transformation T :



$$(Tf_0)(x) = \sum_{i=1}^M \phi_i[f_0(\varrho_i^{-1}(x)), \varrho_i^{-1}(x)] \mathbf{1}_{\varrho_i([0,1])}(x)$$

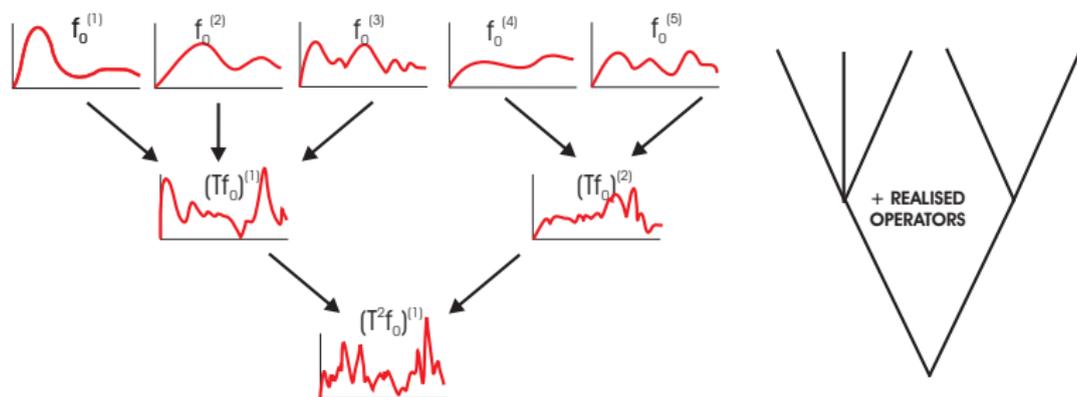
- ▶ We iterate the procedure. Let T^n be the n -th iterate of T .
- ▶ **Iterated Function Systems** have an M -ary underlying construction tree:



$M = 2$ here.

Under certain conditions, $T^n f_0 \rightarrow f^*$ as $n \rightarrow \infty$.

Idea: Allow a Galton-Watson construction tree.



The operator T becomes:

$$(Tf)(x) = \sum_{j=1}^{\nu_\emptyset} \phi_{\emptyset,j} [f^{(j)}(\varrho_{\emptyset,j}^{-1}(x)), \varrho_{\emptyset,j}^{-1}(x)] \mathbf{1}_{\varrho_{\emptyset,j}(\mathbb{X})}(x)$$

Question: Conditions for $T^n f_0$ to converge to some fixed point?

- ▶ Let r_j be the contraction factor of ϱ_j with $0 < r_j < 1$ a.s.
- ▶ Let s_j be the a.s. Lipschitz constant of $\phi_j(\cdot, \cdot)$

THEOREM

If for some $1 < p < +\infty$, $\mathbb{E} \sum_{j=1}^{Z_0} r_j \int |\phi_j(0, x)|^p dx < +\infty$, and

$\lambda_p = \mathbb{E} \sum_{j=1}^{Z_0} r_j s_j^p < 1$, there exists a unique function f^* which satisfies $f^* = Tf^*$ in \mathbb{L}_p . Moreover, for all $f_0 \in \mathbb{L}_p(\mathbb{X})$,

$$d_p^*(T^n f_0, f^*) \leq \frac{\lambda_p^{n/p}}{1 - \lambda_p^{1/p}} d_p^*(f_0, Tf_0) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

Illustration

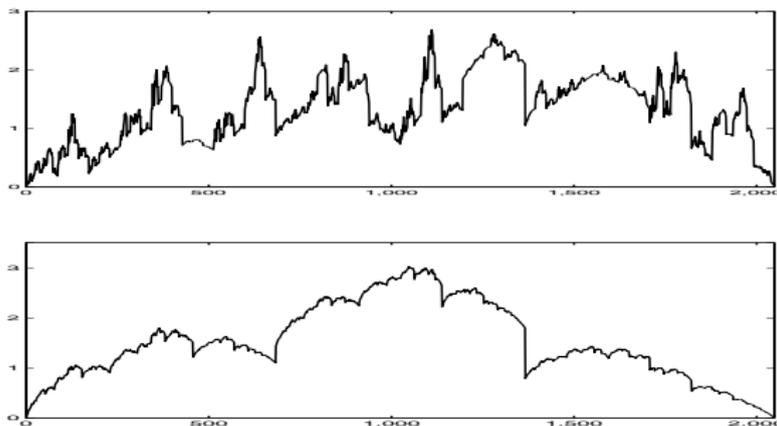


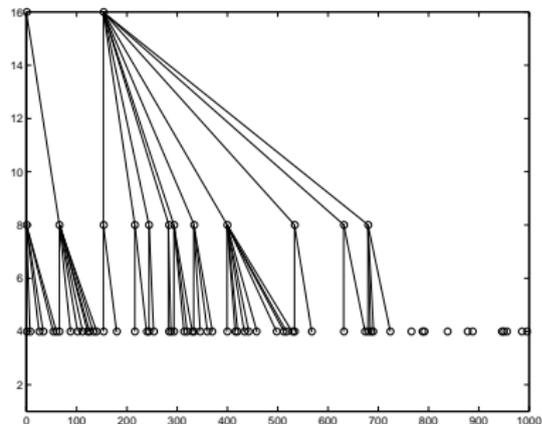
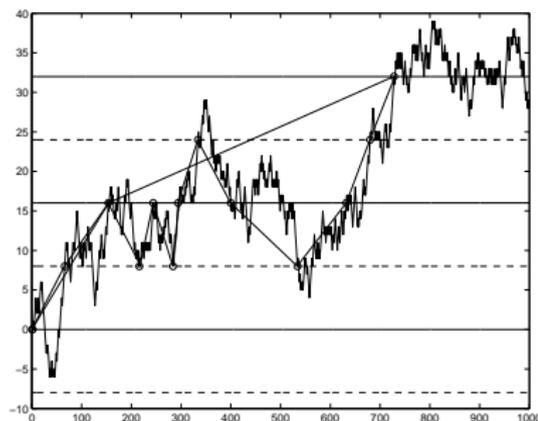
Figure: A realisation of a fixed point (top) and its mean (bottom).

Question: Is the fixed point multifractal?

Second Model: Multifractal Embedded Branching Process (MEBP)

MEBP = Time change Canonical Embedded Branching Process (CEPB)

Crossing tree



Definition

A process is called an **EBP** if the crossing tree is a Galton-Watson process.

Reciprocally, it is sometimes possible to construct an EBP given a Galton-Watson tree (Jones, 2004). Restrictions exist on the offspring distribution.

We identify one of them to be the Canonical Embedded Branching Process (**CEBP**).

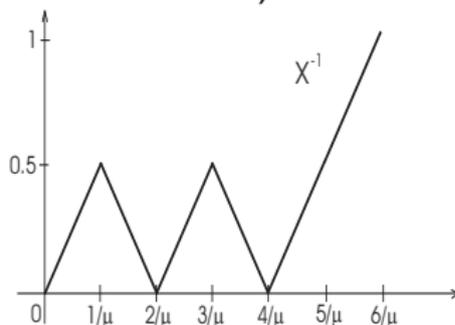
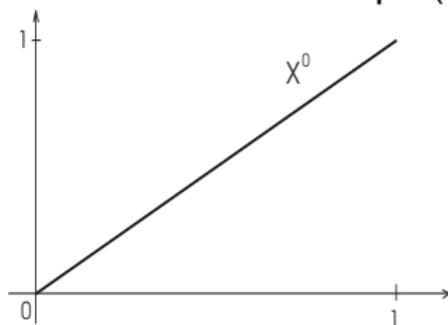
THEOREM

CEBP are monofractals.

Construction of the CEBP

- ▶ $X =$ Limit as $n \rightarrow -\infty$ of a sequence of random walks X^n with step size 2^n and duration μ^n .
- ▶ $X^0 =$ A single crossing from 0 to 1.
- ▶ Then, replace each X^n crossing of size 2^n by a random number of subcrossings of size 2^{n-1} and repeat the procedure.

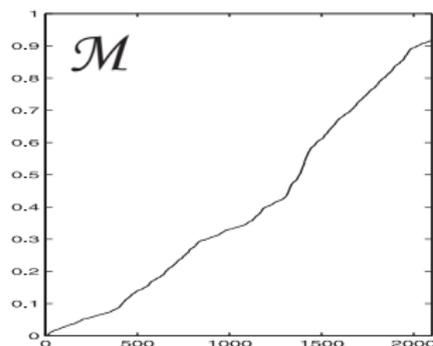
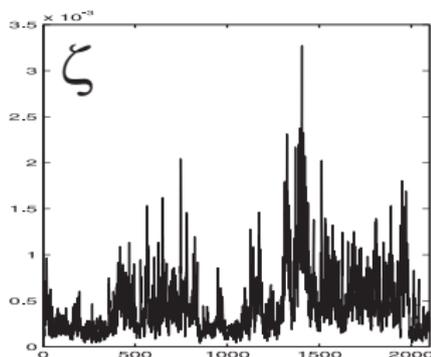
First 2 steps ($n = 0$ and $n = -1$)



X^{-1} has two **excursions** and one **direct crossing**.

CEBP Attach to each branch of the tree a constant weight $1/\mu$ and define the duration of a crossing to be the product of the weights along a line of descent.

MEBP Attach random weights to each branch of the tree and define in a similar fashion the duration of a crossing to be the product of all random weights along a line of descents. Weights are used to define a measure ζ , used to define a **chronometer** (a non-decreasing process) $\mathcal{M}(t) = \zeta([0, t])$.



Existence of MEBP

ASSUMPTION 1 Suppose $\mathbb{E} \sum_{i=1}^{Z_1} \rho_i = 1$, $0 > \mathbb{E} \sum \rho_i \log \rho_i > -\infty$,

$\mathbb{E} \sum_{i=1}^{Z_1} \rho_i \log \sum_{i=1}^{Z_1} \rho_i < \infty$ and there exists $\epsilon > 0$ such that

$$\mathbb{E} Z_1^{1+\epsilon} < \infty$$

ASSUMPTION 2: Suppose

$$P(\sum_i \rho_i = 1) < 1, P(\rho_i \leq 1) = 1 \text{ and}$$

$$\text{for all } p > 1, \mathbb{E} \left[\left(\sum_i \rho_i \right)^p \right] < \infty.$$

Existence of MEBP

THEOREM

Let p be a regular offspring distribution and X the corresponding canonical EBP process.

If **ASSUMPTION 1** holds then we can construct a chronometer \mathcal{M} such that \mathcal{M}^{-1} is continuous, and so define

$$Y(t) = X \circ \mathcal{M}^{-1}(t) \text{ for all } t \in [0, \mathcal{W}_\emptyset].$$

Moreover, if in addition **ASSUMPTION 2** holds then \mathcal{M} is continuous.

Multifractal formalism for MEBP

We have derived an upper bound for the Hausdorff spectrum of \mathcal{M} . Moreover,

THEOREM

Let $Y = B \circ \mathcal{M}^{-1}$ be an MEBP process, where B is a CEBP process, which reduces to a Brownian motion. Suppose **ASSUMPTION 1** and **ASSUMPTION 2** hold. Let $D_H^{\mathcal{M}}$ and D_H^Y be the Hausdorff spectra of Y and \mathcal{M} respectively. Then

$$D_H^Y(a) = 2aD_H^{\mathcal{M}}(1/2a).$$

\Rightarrow The upper bound obtained for \mathcal{M} provides an upper bound for Y . Simulations using wavelet leaders support the theory.