



HAL
open science

Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale

Jean-Pierre Lombard

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Lombard. Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Franche-Comté, 1999. Français. NNT: . tel-00351693

HAL Id: tel-00351693

<https://theses.hal.science/tel-00351693>

Submitted on 10 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
DE FRANCHE-COMTÉ**
Spécialité Sciences pour l'Ingénieur

**CONTRIBUTION A LA REDUCTION
DES MODELES ELEMENTS FINIS
PAR SYNTHESE MODALE**

par

Jean-Pierre LOMBARD

Soutenue le 14 Octobre 1999, devant la Commission d'Examen :

Rapporteurs

L. JEZEQUEL Professeur, Ecole Centrale de Lyon
P. LEVEL Professeur, Directeur de l'Institut des Sciences et
Techniques de Valenciennes
J-F. BESNIER Directeur scientifique de l'Institut de Recherches
de la Construction Navale, Nantes

Examineurs

J-C. MASSON Ancien Directeur scientifique de l'Institut de
Recherches de la Construction Navale, Nantes
R. FILLOD Professeur, Université de Franche-Comté
G. LALLEMENT Professeur, Université de Franche-Comté
J. PIRANDA Professeur, Université de Franche-Comté
N. BOUHADDI Maître de conférences, Université de Franche-Comté
C. STAWICKI Ingénieur de recherche, PSA Peugeot Citroën, Vélizy
M. BERTHILLIER Ingénieur de recherche, SNECMA, Villaroche

Invité

Remerciements

J'adresse tout d'abord mes vifs remerciements à Mr François BESNIER, Mr Louis JEZEQUEL, Mr Pascal LEVEL et Mr Jean-Claude MASSON qui ont accepté d'examiner ces travaux et d'en être les rapporteurs, ainsi qu'à Mr Marc BERTHILLIER et Mr Christophe STAWICKI pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ce mémoire.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Mr René FILLOD, directeur scientifique de ces travaux, pour la qualité et la constance de son encadrement et pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je tiens à remercier Mr Nourredine BOUHADDI pour sa disponibilité, ses conseils avisés et pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de notre travail de recherche.

Je remercie particulièrement Mr Gérard LALLEMENT et Mr Jean PIRANDA pour la qualité de leurs enseignements universitaires et pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe dynamique des structures.

Un vif merci à Mr Scott COGAN, Mr Sheng Jun HUANG, Mr Jean-Louis RAYNAUD, Mr Philippe SCHIAVONE et Mr Van Tuan VU pour les multiples discussions sur le sujet et les idées qui en sont ressorties.

Un grand merci à l'adresse de l'ensemble du personnel du Laboratoire et particulièrement à mes collègues de l'équipe dynamique, pour ces années sympathiques passées à leurs côtés.

Enfin, j'adresse mes profonds remerciements à mes amis et mes proches, en particulier à ma compagne Maryse et notre petite Léa, mes parents, mes frère et soeur pour leur affection et leurs encouragements.

Table des matières

Notations	1
Introduction générale	5
1 Relations de base en dynamique des structures	9
1.1 Hypothèses	9
1.2 Modèle dissipatif linéaire discret du second ordre	10
1.2.1 Domaine temporel	10
1.2.2 Domaine fréquentiel	10
1.3 Solutions des systèmes homogènes et propriétés	11
1.3.1 Système conservatif associé	11
1.3.2 Système dissipatif	12
1.4 Corrélations entre solutions propres complexes et réelles	13
1.4.1 Valeurs propres	13
1.4.2 Vecteurs propres	14
1.5 Calcul direct de la réponse forcée d'une structure dissipative	15
1.5.1 Réponse temporelle	15
1.5.2 Réponse fréquentielle	16
1.6 Obtention de la réponse forcée d'une structure dissipative par superposition modale	16
1.6.1 Transformation modale	16
1.6.2 Amortissement généralisé diagonal	17
1.6.3 Amortissement généralisé non diagonal	17
1.7 Troncature modale et correction statique	19
1.7.1 Phénomène de troncature modale	19
1.7.2 Procédure de correction statique	20
1.7.3 Illustrations	21

2	Réduction des modèles éléments finis	25
2.1	Domaines d'application	25
2.1.1	Analyses statiques et dynamiques linéaires	26
2.1.2	Analyses non-linéaires	26
2.1.3	Analyse des problèmes couplés	26
2.1.4	Problèmes d'optimisation et de recalage de modèle	27
2.1.5	Analyse de structures complexes	27
2.2	Définition d'ensembles de degré de liberté	28
2.3	Condensation	29
2.3.1	Projection des déplacements structurels sur une base de Ritz T	30
2.3.2	Réduction d'ordre par transformation "congruente"	31
2.3.3	Expansion des solutions du modèle réduit	32
2.3.4	Condensation en coordonnées physiques de type déplacement y .	32
2.3.5	Conservation des énergies modales	34
2.4	Synthèse modale	35
2.4.1	Particularités	35
2.4.2	Définition des sous-structures	36
2.4.3	Equilibre d'une sous-structure	37
2.4.4	Condensation d'une sous-structure	37
2.4.5	Equations de compatibilité aux frontières des sous-structures . .	38
2.4.6	Assemblage des sous-structures condensées	38
2.5	Réduction multi-niveaux	42
2.5.1	Réductions successives	42
2.5.2	Réduction des degrés de liberté de jonction	42
2.6	Bases de représentation du mouvement	43
2.6.1	Modes normaux	43
2.6.2	Réponses statiques	45
3	Synthèse des méthodes de réduction	49
3.1	Techniques à base de transformations "congruentes"	50
3.1.1	Réduction dynamique	50
3.1.2	Réduction statique de Guyan-Irons	51
3.1.3	Méthode de Craig-Bampton	55
3.1.4	Méthode de Martinez et <i>al.</i>	58
3.1.5	Assemblage explicite par localisation sur les degrés de liberté de jonction	60

3.2	Méthodes de type MacNeal	61
3.2.1	Méthode de MacNeal	61
3.2.2	Méthode de Rubin	63
4	Condensation adaptée au recalage et à l'optimisation de modèle	65
4.1	Principe et applications	66
4.1.1	Réanalyse approchée sur base réduite	66
4.1.2	Paramétrisation du modèle	66
4.1.3	Principe de la méthode	67
4.2	Détermination des réponses statiques résiduelles	68
4.2.1	Expression de la force due aux modifications	68
4.2.2	Base de forces associée aux modifications	69
4.2.3	Base de résidus associée aux modifications	71
4.3	Réductions multiples dans l'objectif de recalage de modèles de grande taille	71
4.3.1	Adaptation du modèle aux données observées	72
4.3.2	Formulation du problème de recalage	72
4.4	Application sur un modèle de portière de véhicule	74
4.4.1	Caractéristiques du modèle	74
4.4.2	Paramétrage du modèle	76
4.4.3	Base de réduction employée	76
4.4.4	Résultats obtenus lors de faibles perturbations	78
4.4.5	Résultats obtenus lors de fortes perturbations	82
4.5	Extension du principe dans le cadre de réduction par synthèse modale .	84
4.5.1	Synthèse modale à base de modes libres	84
4.5.2	Synthèse modale à base de modes à frontière bloquée	85
4.6	Conclusions	85
5	Méthode de synthèse modale proposée	87
5.1	Principe	87
5.2	Matrices de condensation des sous-structures compatibles	88
5.2.1	Modes libres enrichis de réponses statiques résiduelles	89
5.2.2	Modes contraints	90
5.2.3	Modes contraints enrichis de modes normaux compatibles	91
5.3	Assemblage des sous-structures par les forces de jonction et par trans- formation "congruente"	92
5.3.1	Principe de l'assemblage	92

5.3.2	Assemblage simultané des sous-domaines condensés	93
5.3.3	Assemblage différé des sous-domaines condensés (multi-niveaux)	95
5.4	Calcul des réactions à l'interface de la sous-structure	101
5.5	Résultats numériques: cas académiques	101
5.5.1	Plaque renforcée par un profilé en U	102
5.5.2	Plaques assemblées en équerre	106
5.6	Conclusions	108
6	Applications à des modèles industriels de type automobile	111
6.1	Plancher de charge de véhicule	112
6.1.1	Caractéristiques du modèle	112
6.1.2	Méthodes testées	114
6.1.3	Résultats	117
6.2	Caisse nue de véhicule	119
6.2.1	Caractéristiques du modèle	119
6.2.2	Méthode employée	122
6.2.3	Résultats	123
6.3	Conclusions	126
	Conclusion générale	127
	Références bibliographiques	131
	Annexes	139
A	Choix des degrés de liberté par factorisation de type QR	139
B	Rappels sur la décomposition en valeurs singulières	141

Liste des Figures

1.1	Visualisation des différentes contributions modales dans une réponse fréquentielle	23
1.2	Réponse fréquentielle de référence et erreurs absolues sur les prédictions obtenues par superposition modale	24
2.1	Partition des degrés de liberté	29
2.2	Analyse dynamique par condensation	30
2.3	Analyse par synthèse modale	36
2.4	Exemple d'une procédure de réduction à 2 niveaux	42
4.1	Recalage de modèle: réduction à 3 niveaux	74
4.2	Portière instrumentée (Panneau)	75
4.3	Portière instrumentée (Doublure)	75
4.4	Modèle éléments finis de la portière de véhicule	76
4.5	Zones paramétrées du modèle (Portière de véhicule)	77
4.6	Distance en forme des vecteurs propres issus des modèles initial et perturbé (faible perturbation) (Portière de véhicule)	78
4.7	Base de 380 modes: distance en forme entre les vecteurs propres issus du modèle perturbé de référence et prédits par le modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)	79
4.8	Base de 36 modes et 344 résidus statiques: distance en forme entre les vecteurs propres issus du modèle perturbé de référence et prédits par le modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)	79
4.9	Erreur relative sur les solutions propres prédites par les modèles condensés perturbés vis-à-vis du modèle perturbé de référence (Portière de véhicule)	80
4.10	Qualité de prédiction d'une réponse fréquentielle (au droit d'une excitation) à partir du modèle condensé perturbé (Portière de véhicule) . . .	81

4.11	Qualité de prédiction d'une réponse fréquentielle à partir du modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)	81
4.12	Distance en forme des vecteurs propres issus des modèles initial et perturbé (forte perturbation) (Portière de véhicule)	82
4.13	Base de 380 modes : distance en forme entre les vecteurs propres issus du modèle perturbé de référence et prédits par le modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)	83
4.14	Base de 36 modes et 344 résidus statiques : distance en forme entre les vecteurs propres issus du modèle perturbé de référence et prédits par le modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)	83
5.1	L'objet modèle condensé	96
5.2	Définition d'objets super-éléments	96
5.3	Assemblage des super-éléments	97
5.4	Cas mixte : 3 sous-ensembles de forces de jonction	98
5.5	Modèle éléments finis de la plaque renforcée	102
5.6	Erreur relative sur les fréquences propres prédites par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Plaque renforcée)	103
5.7	Erreur relative sur les vecteurs propres prédits par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Plaque renforcée)	103
5.8	Qualité de prédiction d'une réponse fréquentielle (au droit d'une excitation) à partir du modèle réduit à 20 degrés de liberté physiques (Plaque renforcée)	104
5.9	Qualité de prédiction d'une réponse fréquentielle (au droit d'un d.d.l. maître) à partir du modèle réduit à 20 degrés de liberté physiques (Plaque renforcée)	105
5.10	Qualité de prédiction des réponses fréquentielles à partir du modèle réduit (moyenne sur les 20 degrés de liberté physiques) (Plaque renforcée)	105
5.11	Modèle éléments finis de l'équerre	106
5.12	Erreur relative sur les fréquences propres prédites par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Equerre)	107
5.13	Erreur relative sur les vecteurs propres prédits par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Equerre)	108
6.1	Modèle éléments finis du plancher de charge	112
6.2	Premiers modes du plancher de charge	113
6.3	Super-élément 1 (Plancher de charge)	115

6.4 Super-élément 2 (Plancher de charge)	116
6.5 Super-élément 3 (Plancher de charge)	116
6.6 Modèle éléments finis du plancher formé de 3 super-éléments	116
6.7 Erreur relative sur les fréquences propres prédites par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Plancher de charge)	118
6.8 Erreur relative sur les vecteurs propres prédits par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Plancher de charge)	118
6.9 Structure caisse nue	120
6.10 Modèle éléments finis de la caisse nue (450 000 degrés de liberté)	120
6.11 Modèle éléments finis sous-structuré de la caisse	121
6.12 Densité de la connectivité des sous-structures du modèle caisse	121
6.13 Mode de torsion de la caisse	122
6.14 Mode de flexion de la caisse	122
6.15 Modèle éléments finis de la caisse formé de 6 super-éléments	123
6.16 Erreur relative sur les fréquences propres prédites par le modèle réduit vis-à-vis du modèle de référence (Caisse nue)	124
6.17 Erreur relative sur les vecteurs propres prédits par le modèle réduit vis- à-vis du modèle de référence (Caisse nue)	125
6.18 Erreur relative sur les sous-bases modales calculées avec le modèle réduit vis-à-vis du modèle de référence (Caisse nue)	125

Liste des Tableaux

5.1	Composition des bases de condensation (Equerre)	107
6.1	Composition des bases de condensation (Plancher de charge)	117
6.2	Caractéristiques des modèles réduits (Plancher de charge)	117

Notations

M	Matrice de masse
B	Matrice d'amortissement
K	Matrice de raideur
f	Vecteur des efforts appliqués
\widehat{f}_z	Vecteur des efforts appliqués sur l'ensemble z
f_z	Vecteur des efforts appliqués restreint sur les d.d.l. de l'ensemble z
y	Vecteur de réponse en déplacement
y_z	Vecteur de réponse en déplacement restreint sur les d.d.l. de l'ensemble z
f_r	Fréquence d'excitation
ω	Pulsation d'excitation
Z	Impédance dynamique
Γ	Flexibilité dynamique
<i>d.d.l.</i>	Degré(s) de liberté
<i>SCA</i>	Système conservatif associé
Y	Matrice modale du système conservatif
Λ	Matrice spectrale du système conservatif
N	Matrice de "norme" des vecteurs propres du système conservatif
y_ν	ν ième vecteur propre du système conservatif
λ_ν	ν ième valeur propre du système conservatif
ω_ν	ν ième pulsation propre du système conservatif
n_ν	"Norme" du ν ième vecteur propre du système conservatif
β	Matrice des amortissements généralisés
$\beta_{\nu\nu}$	Amortissement généralisé du ν ième mode propre
a_ν	Amortissement réduit du ν ième mode propre
Q_ν	Surtension du ν ième mode propre

U, A	Matrices d'état dans l'espace $2N$
g	Vecteur des efforts appliqués dans l'espace $2N$
x	Vecteur de la réponse dans l'espace $2N$
X	Matrice modale dans l'espace $2N$
S_{2N}	Matrice spectrale dans l'espace $2N$
D_{2N}	Matrice de "norme" des vecteurs propres dans l'espace $2N$
x_ν	ν ième vecteur propre dans l'espace $2N$
s_ν	ν ième valeur propre dans l'espace $2N$
dy_ν	ν ième vecteur propre du système dissipatif
d_ν	"Norme" du ν ième vecteur propre du système dissipatif
I	Matrice identité
T	Matrice de transformation <i>La transformation $T^T A T$ sera dite transformation "congruente", bien que T ne soit pas régulière, par analogie avec la définition des matrices congruentes</i>
T_d	Matrice de transformation de droite
T_g	Matrice de transformation de gauche
q, c	Vecteur des coordonnées réduites ou généralisées
L	Matrice de localisation
C	Matrice de couplage
Φ	Matrice de modes normaux (généraux)
Ω	Matrice de réponses statiques (générales)
Ψ	Matrice modale du système bloqué (contraint)
Δ	Matrice spectrale du système bloqué (contraint)
D	Matrice de réponses statiques du système bloqué (générales)
Θ	Matrice des modes contraints
G	Matrice de flexibilité d'une structure rendue isostatique
P	Matrice de filtrage des modes de corps rigide
S	Flexibilité statique (filtrée)
R	Flexibilité statique résiduelle (filtrée)
R_{Dy}	Matrice de flexibilité dynamique résiduelle (filtrée)
R_D	Terme dynamique de la matrice de flexibilité dynamique résiduelle
R_B	Flexibilité statique résiduelle du système bloqué

$()_A$	Quantité relative à une opération d'assemblage
$()_C$	Quantité relative à une opération de condensation
$()_{CB}$	Quantité relative à la réduction de Craig-Bampton
$()_D$	Quantité relative aux modes déformables
$()_\Delta$	Quantité relative à des modifications paramétriques
$()_{DY}$	Quantité relative à la réduction dynamique
$()_G$	Quantité relative à la réduction statique de Guyan et Irons
$()_I$	Quantité relative au système initial
$()_{MA}$	Quantité relative à la réduction de Martinez <i>et al.</i>
$()_{MN}$	Quantité relative à la réduction de MacNeal
$()_R$	Quantité relative aux modes de corps rigide
$()_{RF}$	Quantité relative au modèle réduit final (synthèse modale)
$()_{RO}$	Quantité relative à une réduction robuste
$()_{RU}$	Quantité relative à la réduction de Rubin
$()_{SE}$	Quantité relative à un super-élément
$()_{no}$	Quantité relative aux données non observées
$()_\nu$	Quantité relative au ν ème mode propre
$()_o$	Quantité relative aux données observées
$()^{elem}$	Quantité relative aux matrices élémentaires
$()^k$	Quantité relative à la sous-structure k
$()^m$	Quantité relative au modèle
$()^{mac}$	Quantité relative aux macro-éléments
$()^s$	Quantité relative à la structure

Introduction générale

La conception d'une structure mécanique nécessite généralement l'élaboration d'un *modèle de connaissance* construit à partir des données géométriques et matérielles. Il permet notamment d'appréhender de manière qualitative et de prédire numériquement le comportement structurel. Réduisant le nombre de prototypes nécessaires et donc les coûts de conception, cette étape de simulation est largement répandue aujourd'hui, facilitée par l'explosion ces 30 dernières années des moyens informatiques mis à la disposition des ingénieurs. La technique de modélisation la plus courante consiste à discrétiser la structure continue en un nombre fini d'entités élémentaires spatiales de forme géométrique simple interconnectées par des noeuds à leurs sommets afin de former un *modèle éléments finis*. Dans le domaine linéaire, on exploite essentiellement les modèles éléments finis à des fins d'analyses statiques, c'est à dire l'étude de la rigidité de la structure, et plus particulièrement d'analyses dynamiques, où l'on étudie le *comportement vibratoire* de la structure ainsi que sa *réponse à diverses excitations extérieures*. Les principaux objectifs de l'analyse dynamique consistent en l'amélioration du confort acoustique et le contrôle des niveaux vibratoires pouvant entraîner une instabilité structurale, une fatigue prématurée ou une destruction d'équipements de la structure.

Un modèle fiable ?

La précision et la fiabilité d'un modèle éléments finis dépend de la qualité de l'estimation des paramètres introduits. En premier lieu, on cherche donc à respecter au mieux la *géométrie de la structure* ainsi que les *caractéristiques des matériaux* employés. La compatibilité des outils logiciels actuels permet de générer un maillage éléments finis à partir du dessin de définition réalisé sur ordinateur. Les formes et géométries les plus complexes peuvent être fidèlement reproduites dans le modèle. Ce respect des données géométriques demande une *grande finesse de maillage*. Par exemple, dans un véhicule, la stabilité en comportement de tôles planes est assurée par des nervurages : la taille

des mailles employées et le respect de la géométrie des nervures influencent considérablement les prédictions dynamiques en terme de formes globales. Ainsi, parallèlement à l'essor de la puissance de calcul, voit-on apparaître des *modèles de très grande taille* (de l'ordre du million de degrés de liberté) respectant fidèlement la géométrie de la structure.

Cependant, il est *difficile d'estimer a priori certains paramètres* du modèle notamment au voisinage des zones de jonction des assemblages mécano-soudés (dans lesquelles on soupçonne des comportements fortement non-linéaires). De même, la prise en compte des contraintes internes induites lors des opérations de mise en forme et d'assemblage de la structure est délicate. Ainsi, quels que soient le raffinement et l'attention apportés à la modélisation, il convient *d'ajuster ces paramètres* afin d'obtenir un modèle significatif, proche de la réalité physique de la structure. Cette procédure de correction, étape que l'on nomme *recalage de modèle*, nécessite la réalisation de *mesures sur la structure*. Un modèle recalé, *validé vis-à-vis de l'expérience*, peut ensuite être utilisé pour des prédictions de comportement global de la structure sous différents cas de chargements, dans différentes configurations, condition impérative pour engager une *procédure d'optimisation* de la structure.

Un modèle réduit ?

Ainsi, la recherche de fiabilité des modèles conduit à l'élaboration de modèles fins de très grande taille, peu maniables dont on réajuste vis-à-vis de résultats d'essais certains paramètres impossibles à estimer a priori. La *réduction des modèles éléments finis dynamiques* répond naturellement à cet impératif de fiabilité. Quelle que soit la taille du modèle discret, on s'intéresse généralement au comportement dynamique dans une bande basses ou moyennes fréquences comportant quelques centaines de modes. La transformation du modèle décrit spatialement dans le "sous-espace modal" d'étude conduit à un modèle comportant un *nombre réduit de coordonnées utiles* tout en préservant la qualité de prédiction : cela induit une réduction importante des *coûts de calcul et de stockage*. De plus, l'usage d'une technique de *réduction en coordonnées physiques* permet l'*adaptation* de données issues du calcul aux mesures obtenues sur la structure et facilite les procédures d'ajustement des paramètres du modèle. De même, l'emploi de *bases de réduction robustes* vis-à-vis de modifications paramétriques du modèle génère des modèles réduits aptes à des *réanalyses approchées* utiles et économes d'un point de vue calcul lors de procédures itératives de recalage ou d'optimisation de modèle.

On peut définir quelques spécifications caractérisant un bon modèle réduit, spécifi-

cations que nous nous sommes fixées pour l'étude des méthodes de réduction, à savoir :

- une précision de prédiction maîtrisée,
- une robustesse vis-à-vis de perturbations de type paramétrique,
- des coordonnées réduites de type physique dans un objectif de couplage ultérieur avec d'autres modèles (réduits ou non réduits, acoustiques) ou de corrélation avec les mesures,
- une aptitude au calcul de réponses à des chargements extérieurs.

Les techniques de réduction de modèles éléments finis ne sont pas récentes : elles apparaissent en parallèle avec le développement des codes éléments finis dans les années 60-70 afin de répondre à des problèmes de capacités de calcul alors limitées. Ces méthodes sont apparentées à la *méthode de Ritz* qui consiste à projeter les matrices d'état du modèle dans un sous-espace défini à partir d'un nombre réduit de vecteurs de base. On attribue à Przemieniecki [62] le concept de *condensation par sous-structures* dédié à la résolution des problèmes d'analyse statique.

La réduction par *sous-structuration* ou *synthèse modale* répond plus spécifiquement à une approche de conception par sous-ensembles ainsi qu'à une recherche de modularité et de souplesse de calcul. Cette technique consiste en l'assemblage de plusieurs modèles réduits indépendamment les uns des autres. Elle est bien adaptée à l'*analyse de structures complexes*, composées d'un assemblage de sous-composants, typiques des secteurs de l'industrie automobile, ferroviaire, navale, aéronautique et spatiale. Ainsi, chaque sous-contractant, responsable de la réalisation d'un sous-ensemble fournit le modèle réduit de la sous-structure au maître d'oeuvre du projet qui assure l'assemblage du modèle réduit global et les analyses associées.

Dans le secteur automobile, les procédés récents d'assemblage par soudo-collage (gains en rigidité, en tenue aux chocs, en confort acoustique et en dissipation d'énergie vibratoire) multiplient les points de jonction sur les modèles associés. Les méthodes classiques de synthèse modale présentent un inconvénient majeur lorsque l'on a affaire à des structures à fort degré de connectivité : l'assemblage des sous-structures condensées est réalisé sur les déplacements de jonction, lesquels *pénalisent considérablement le modèle réduit en terme de taille des matrices réduites*. Ces coordonnées de jonction sont jugées inutiles et redondantes quant à la fiabilité du modèle réduit. On propose une méthode de synthèse modale inspirée de la technique de MacNeal où l'on s'affranchit de la présence de ces coordonnées dans le modèle réduit. L'originalité de la méthode réside

dans un procédé d'assemblage des sous-structures condensées basé sur l'*élimination des efforts de jonction résiduels par une transformation de type "congruente"*. Cette technique permet l'obtention d'un *modèle réduit sous-structuré exempt des coordonnées de jonction* et ce pour une précision au moins équivalente à celle obtenue avec les méthodes classiques de synthèse modale.

Plan du mémoire

On rappelle dans le chapitre 1 quelques notions de base en dynamique des structures où l'on évoque les aspects de troncature modale et de correction statique.

Le chapitre 2 est consacré aux généralités sur les techniques de réduction des modèles éléments finis tant dans une approche de condensation pure que de sous-structuration.

On présente dans le chapitre 3 les techniques de réduction les plus classiques sous une forme unifiée de condensation et synthèse modale. On s'assure dans la formulation des méthodes présentées de la prise en compte d'éventuels chargements externes, de l'obtention de modèles réduits intégralement exprimés en coordonnées physiques et de la compatibilité avec l'utilisation éventuelle de réponses statiques destinées à accroître la robustesse des modèles réduits.

Le chapitre 4 est consacré spécifiquement à l'étude de la robustesse du modèle réduit par adjonction dans la base de réduction de vecteurs statiques résiduels associés à un chargement représentatif des modifications paramétriques. Nous généralisons cette technique à la prédiction de réponses fréquentielles. La démarche employée est présentée dans l'objectif d'un recalage par adaptation d'un modèle paramétré de porte de véhicule à 30 000 degrés de liberté.

Le chapitre 5 est dédié à la méthode de synthèse modale proposée, où l'on détaille les différentes bases de condensation des sous-structures compatibles avec la méthode d'assemblage. On illustre les performances de la technique sur 2 cas-tests académiques. Le principe de réduction à plusieurs niveaux, c'est à dire la méthode de synthèse modale proposée suivie d'une condensation modale en coordonnées physiques, est appliqué à la prédiction de réponses forcées.

Dans le chapitre 6, on compare les résultats obtenus avec ceux des méthodes classiques sur 2 modèles de structures industrielles de type automobile : un plancher de charge de 45 000 degrés de liberté et une caisse nue de 450 000 degrés de liberté comportant 100 sous-structures. Cette dernière application illustre les performances de la technique proposée.

Chapitre 1

Relations de base en dynamique des structures

Nous considérons ici l'étude dynamique d'assemblages mécaniques à comportement linéaire. Nous rappelons quelques notions de base sur lesquelles s'appuie l'exposé. Ces rappels sont extraits des cours de Fillod [27], Lallement [45], Piranda [61] enseignants-chercheurs au Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat de Besançon (France) et plus généralement des ouvrages de Clough et Penzien [22], Géradin et Rixen [30] et Imbert [42].

Concernant la discrétisation des systèmes continus par la méthode des éléments finis, le lecteur se référera aux ouvrages de Bathe [6] et Zienkiewicz [73].

1.1 Hypothèses

Le comportement vibratoire continu de nombreuses structures réelles peut être généralement modélisé au moyen de systèmes discrets, auto-adjoints, dissipatifs et linéaires en terme de caractéristiques de raideur et de masse. Nous présentons nos travaux dans ce cadre bien que l'on puisse parfois leur trouver une application sous des hypothèses plus larges notamment dans les domaines de l'analyse non-linéaire ou l'analyse des systèmes tournants. De plus, on se place dans l'hypothèse où les systèmes mécaniques considérés sont faiblement amortis et conduisent à des modèles diagonalisables.

Dans la suite, les équations matricielles relatives au comportement structural sont obtenues après les réductions d'ordre relatives aux équations de liaisons de type cinématique et à l'application des conditions aux limites du système.

1.2 Modèle dissipatif linéaire discret du second ordre

1.2.1 Domaine temporel

Le comportement dynamique d'une structure, sous l'hypothèse d'un amortissement visqueux, peut être représenté par un système matriciel différentiel d'ordre N de la forme :

$$M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t) \quad (1.1)$$

où les matrices d'état du système M, B, K sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement, et de raideur structurelles; ces matrices sont carrées, d'ordre N , constantes, réelles, symétriques et définies non négatives; $f(t), y(t)$ sont respectivement les vecteurs des efforts appliqués à la structure et des déplacements structurels, exprimés sur les degrés de liberté du système.

Afin de s'affranchir des problèmes de couplage par l'amortissement, le problème (1.1) peut être formulé dans l'espace d'état ou espace $2N$. A l'aide d'une équation additionnelle de type $M\dot{y}(t) - M\dot{y}(t) = 0$ ainsi que d'un changement de variable $x(t)^T = \begin{bmatrix} y(t)^T & \dot{y}(t)^T \end{bmatrix}$, on obtient un système matriciel différentiel d'ordre $2N$, équivalent au problème (1.1), défini par :

$$\begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

soit :

$$U \dot{x}(t) - Ax(t) = g(t) \quad (1.3)$$

où les matrices A et $U \in R^{2N \times 2N}$ sont symétriques mais de signe indéfini.

1.2.2 Domaine fréquentiel

En régime harmonique stationnaire, par séparation de la variable temps et de la variable d'espace, les vecteurs d'entrée et de sortie du système s'expriment respectivement par :

$$f(t) = fe^{j\omega t}, \quad y(t) = ye^{j\omega t} \quad (1.4)$$

où f et y sont respectivement les vecteurs complexes des efforts appliqués et des déplacements à une pulsation d'excitation ω considérée, avec $\omega = 2\pi fr$, fr étant la fréquence d'excitation et $j^2 = -1$.

On notera que l'on utilise souvent une entrée comme référence de phase des entrées-sorties du système. Dans le cas où les composantes du vecteur des forces appliquées sont en phase à π près, le vecteur f des efforts est réel.

Les relations (1.4) appliquées à (1.1) nous donnent l'équation fréquentielle régissant le mouvement stationnaire d'une structure excitée par une force harmonique à la pulsation ω :

$$[K + j\omega B - \omega^2 M] y(\omega) = f(\omega) \quad (1.5)$$

On réécrit (1.5) sous la forme :

$$Z(\omega) y(\omega) = f(\omega) \quad (1.6)$$

où $Z(\omega)$ est l'impédance ou la raideur dynamique du système à la pulsation ω .

1.3 Solutions des systèmes homogènes et propriétés

1.3.1 Système conservatif associé

En l'absence d'amortissement et en régime libre harmonique, on associe au problème (1.1) le problème homogène :

$$[K - \omega^2 M] y = 0 \quad (1.7)$$

Ce système homogène admet N valeurs propres réelles $\lambda_\nu = \omega_\nu^2$, solutions auxquelles sont associés N vecteurs propres réels y_ν . Ces valeurs et vecteurs propres sont habituellement regroupés dans les matrices respectivement spectrale diagonale $\Lambda \in R^{NN}$ et modale $Y \in R^{NN}$ et vérifient la relation matricielle :

$$KY - MY\Lambda = 0 \quad (1.8)$$

Les solutions propres satisfont les conditions d'orthonormalité suivantes :

$$\begin{cases} Y^T M Y = N \\ Y^T K Y = N \Lambda \end{cases} \quad (1.9)$$

où $N \in R^{NN}$ est une matrice diagonale déterminant la norme des vecteurs propres.

En utilisant le symbole de Kronecker, les relations (1.9) s'écrivent :

$$\begin{cases} y_\sigma^T M y_\nu = n_\nu \delta_{\sigma\nu} \\ y_\sigma^T K y_\nu = n_\nu \omega_\nu^2 \delta_{\sigma\nu} \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans la suite de l'exposé, on adopte une normalisation unité ($N = I_N$).

L'extraction des solutions propres d'un système conservatif est couramment réalisée dans les codes éléments finis. On prédit ainsi les modes propres réels de vibration de la structure et les fréquences propres associées. La technique usuelle la plus efficace

d'un point de vue calcul est la méthode itérative de Lanczos par blocs avec décalage fréquentiel [26] [33] [47] permettant d'extraire les formes et fréquences propres dans une bande de fréquence donnée. On s'intéresse généralement au comportement basse fréquence de la structure et seul le calcul des premiers modes est effectué. On peut être conduit à élargir la fenêtre fréquentielle d'extraction lorsque l'on veut disposer d'une base de vecteurs de représentation.

1.3.2 Système dissipatif

En régime libre, le système homogène à (1.1) correspondant à des solutions $y(t) = e^{st}$ est défini par la relation :

$$[Ms^2 + Bs + K] y = 0 \quad (1.11)$$

Ce polynôme à coefficients réels de degré $2N$ en s admet donc $2N$ solutions propres s_ν, y_ν .

Dans l'hypothèse où l'amortissement dans la structure est de nature hypo-critique, les solutions propres sont complexes et apparaissent par paires conjuguées. A chaque valeur propre complexe $s_\nu, (\bar{s}_\nu), \nu = [1 \cdots N]$ correspond un vecteur propre complexe $y_\nu, (\bar{y}_\nu)$.

Les solutions propres du problème (1.11) satisfont des conditions d'orthonormalité que l'on met en évidence en passant dans l'espace d'état (1.3) :

$$[A - sU] x = 0 \quad (1.12)$$

où $x^T = [y^T, sy^T]$.

Les valeurs et vecteurs propres du problème homogène (1.12) sont regroupés dans les matrices respectivement spectrale à caractère diagonal $S_{2N} \in C^{2N \times 2N}$ et modale $X \in C^{2N \times 2N}$ et vérifient la relation matricielle :

$$AX = UX S_{2N} \quad (1.13)$$

ainsi que les conditions d'orthonormalité suivantes :

$$\begin{cases} X^T U X = D_{2N} \\ X^T A X = D_{2N} S_{2N} \end{cases} \quad (1.14)$$

où $D_{2N} \in C^{2N \times 2N}$ est une matrice diagonale déterminant la normalisation des vecteurs propres du système dissipatif.

En utilisant la notation de Kronecker, les relations (1.14) s'écrivent :

$$\begin{cases} x_\sigma^T U x_\nu = d_\nu \delta_{\sigma\nu} \\ x_\sigma^T A x_\nu = d_\nu s_\nu \delta_{\sigma\nu} \end{cases} \quad (1.15)$$

Compte tenu des particularités des solutions propres, et à l'aide d'un regroupement adéquat, on peut écrire :

$$S_{2N} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \overline{S} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} {}_dY & {}_d\overline{Y} \\ {}_dYS & {}_d\overline{YS} \end{bmatrix}, \quad D_{2N} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \overline{D} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

où ${}_dY \in C^{NN}$ est la matrice des modes complexes du système dissipatif.

Dans la suite de l'exposé, on adopte une normalisation unité ($D_{2N} = I_{2N}$).

L'extraction des solutions propres complexes d'un système dissipatif est réalisée à l'aide d'une technique de type Lanczos. Ce type d'analyse nécessite la modélisation de l'amortissement de la structure. Cette modélisation est le plus souvent délicate à estimer a priori. En effet, les pertes d'énergie dans une structure se font dans les jonctions entre les différents éléments de la structure et nous ne disposons pas actuellement de modélisation de ces dissipations d'énergie. C'est pourquoi les amortissements sont le plus souvent introduits dans le modèle sous forme d'amortissements modaux estimés ou mesurés sur des structures de même type.

1.4 Corrélations entre solutions propres complexes et réelles

Nous supposons ici que la matrice des amortissements généralisés est diagonale, c'est à dire que la transformation modale permet de diagonaliser les équations (1.1) ou (1.5). Un amortissement de type Rayleigh (ou amortissement proportionnel) $B = \alpha_0 M + \alpha_1 K$ ou plus généralement issu des séries de Caughey $B = M \sum_k \alpha_k [M^{-1}K]^k$ vérifie cette propriété. On peut également considérer l'hypothèse d'un amortissement de type modal (hypothèse de Basile) défini directement au moyen de coefficients $\beta_{\nu\nu}$ (relatifs à l'amortissement du mode ν) dans l'équation du mouvement généralisé (1.33) obtenue après transformation modale et vérifiant les relations $\beta_{\sigma\nu} = y_\sigma^T B y_\nu \delta_{\sigma\nu}$ où la matrice d'amortissement visqueux B n'est pas estimée a priori.

1.4.1 Valeurs propres

Sous cette hypothèse d'amortissement, et par analogie avec l'expression de la valeur propre d'un système à un degré de liberté, la valeur propre complexe s'exprime par :

$$s_\nu = -a_\nu \omega_\nu + j\omega_\nu \sqrt{1 - a_\nu^2} \quad (1.17)$$

où ω_ν est la pulsation propre du mode propre ν du système conservatif associé et a_ν est le coefficient d'amortissement réduit du mode ν (coefficient de surtension $Q_\nu = 1/2a_\nu$).

Pour les structures mécaniques faiblement dissipatives ($a_\nu^2 \ll 1$), on effectue une approximation sur la partie imaginaire des valeurs propres telle que :

$$s_\nu \approx -a_\nu \omega_\nu + j\omega_\nu \quad (1.18)$$

1.4.2 Vecteurs propres

Il existe une normalisation adéquate des vecteurs propres complexes permettant d'établir une correspondance avec les modes propres réels issus du système conservatif sous l'hypothèse d'un amortissement diagonalisable. Afin d'établir ce rapport, il convient de développer les relations d'orthonormalité (1.14) :

$${}_d Y^T B {}_d Y + S {}_d Y^T M {}_d Y + {}_d Y^T M {}_d Y S = I_N \quad (1.19)$$

$${}_d \bar{Y}^T B {}_d Y + \bar{S} {}_d \bar{Y}^T M {}_d Y + {}_d \bar{Y}^T M {}_d Y S = 0 \quad (1.20)$$

$$S {}_d Y^T M {}_d Y + {}_d Y^T K {}_d Y = S \quad (1.21)$$

$$\bar{S} {}_d \bar{Y}^T M {}_d Y + {}_d \bar{Y}^T K {}_d Y = 0 \quad (1.22)$$

On cherche donc à identifier un coefficient de normalisation convenable d'_ν permettant de satisfaire l'égalité ${}_d y_\nu \sqrt{d'_\nu} = y_\nu$ entre modes réels et modes complexes issus d'une normalisation unité.

En imposant ${}_d y_\nu \sqrt{d'_\nu} = y_\nu$ dans les relations (1.14), on obtient suite au partitionnement une relation analogue à (1.19) :

$$\beta + 2S = D' \quad (1.23)$$

S et D' étant des matrices diagonales, $\beta = Y^T B Y$ doit être diagonale, ce qui correspond à l'hypothèse d'amortissements proportionnels.

Soit pour le mode ν :

$$\beta_{\nu\nu} + 2s_\nu = d'_\nu \quad (1.24)$$

ou encore, compte-tenu de l'approximation (1.18) :

$$\beta_{\nu\nu} - 2a_\nu \omega_\nu + 2j\omega_\nu = d'_\nu \quad (1.25)$$

Comme :

$$\beta_{\nu\nu} = 2a_\nu \omega_\nu \quad (1.26)$$

on en déduit le coefficient de normalisation :

$$d'_\nu = 2j\omega_\nu \quad (1.27)$$

On établit donc la relation (1.28) entre mode réel et mode complexe :

$$y_\nu = {}_d y_\nu \sqrt{2j\omega_\nu} \quad (1.28)$$

Ainsi, sous l'hypothèse d'un amortissement diagonalisable, le vecteur propre du système conservatif associé est égal à la partie réelle du vecteur propre obtenu en multipliant le vecteur propre du système dissipatif par $\sqrt{2j\omega_\nu}$ (la partie imaginaire obtenue par cette transformation étant nulle). De plus, on déduit de la relation (1.28) une propriété intéressante des modes complexes :

$${}_d y_\nu = \frac{y_\nu}{\sqrt{2j\omega_\nu}} = \frac{y_\nu}{2\sqrt{\omega_\nu}}(1 - j) \quad (1.29)$$

Les parties réelle et imaginaire d'un vecteur propre complexe normalisé suivant (1.15) sont égales et opposées sous l'hypothèse d'une matrice d'amortissement généralisé diagonale.

Cependant, cette hypothèse est rarement vérifiée expérimentalement. Lorsque les fréquences propres des modes sont très proches (zones à forte densité modale), on observe un phénomène de couplage des modes du SCA par l'amortissement induit par des termes extra-diagonaux non négligeables dans la matrice d'amortissement généralisé β . Les relations entre solutions propres du système réel et les solutions du problème conservatif associé sont alors plus délicates à établir. On se référera aux procédures établies par Foltête [29] et Zhang [72].

1.5 Calcul direct de la réponse forcée d'une structure dissipative

On emploie les techniques de calcul direct des réponses essentiellement lorsque la structure présente des non-linéarités (amortissement dépendant de la fréquence par exemple). En effet, ce type d'analyse directe, où l'on inverse une matrice de la taille du problème à chaque itération ou à chaque pas de fréquence, est très coûteux d'un point de vue numérique.

En pratique, ces techniques ne peuvent être appliquées que pour des problèmes à très faible nombre de degrés de liberté.

1.5.1 Réponse temporelle

On obtient la réponse temporelle d'un système mécanique dissipatif par une méthode d'intégration directe de type Newmark [6] [56] [71] du système matriciel d'équations

différentielles (1.1).

1.5.2 Réponse fréquentielle

La réponse en fréquence est obtenue par l'inversion du système matriciel (1.6) à chaque pulsation ω :

$$y(\omega) = \Gamma(\omega) f(\omega) \quad (1.30)$$

où $\Gamma(\omega) = Z^{-1}(\omega)$ est la flexibilité ou la souplesse dynamique du système.

1.6 Obtention de la réponse forcée d'une structure dissipative par superposition modale

Le calcul des réponses par superposition modale est souvent préféré aux méthodes directes. Le principe consiste à appliquer une transformation modale aux matrices M, B, K (respectivement les matrices U, A) du système à l'aide d'une base constituée des N vecteurs propres conservatifs (respectivement les $2N$ vecteurs propres dissipatifs). En pratique, on utilise une base tronquée à n modes (l'effet de troncature de la base est abordé dans le paragraphe 1.7) permettant ainsi de réduire l'ordre du système à résoudre (N degrés de liberté initiaux à n degrés de liberté réduits). De plus, si la matrice d'amortissement généralisé β est diagonale, les équations modales du mouvement sont découplées et le calcul de réponse en est simplifié. On distingue donc deux hypothèses selon le caractère de diagonalité de la matrice d'amortissement généralisé.

1.6.1 Transformation modale

Les accélérations, les vitesses et les déplacements du système (1.1) sont projetés sur la base tronquée des n vecteurs propres du SCA :

$$\ddot{y}(t) = Y\ddot{q}(t), \quad \dot{y}(t) = Y\dot{q}(t), \quad y(t) = Yq(t) \quad (1.31)$$

En utilisant les relations (1.31) dans l'équation (1.1) et après prémultiplication par Y^T , on obtient :

$$Y^T M Y \ddot{q}(t) + Y^T B Y \dot{q}(t) + Y^T K Y q(t) = Y^T f(t) \quad (1.32)$$

Compte-tenu des relations de norme (1.9) :

$$I\ddot{q}(t) + \beta\dot{q}(t) + \Lambda q(t) = Y^T f(t) \quad (1.33)$$

1.6.2 Amortissement généralisé diagonal

Sous cette hypothèse, la relation (1.33) conduit à n équations différentielles découplées de la forme :

$$\ddot{q}_\nu(t) + \beta_{\nu\nu}\dot{q}_\nu(t) + \omega_\nu^2 q_\nu(t) = y_\nu^T f(t) \quad (1.34)$$

où $\beta_{\nu\nu} = 2a_\nu\omega_\nu$.

Réponse temporelle

La solution $q_\nu(t)$ de l'équation (1.34) en régime hypocritique est alors exprimée par l'intégrale de Duhamel $q_\nu^D(t)$ à laquelle on adjoint une solution $q_\nu^I(t)$ dépendant des conditions initiales :

$$q_\nu^D(t) = \frac{1}{\omega_\nu^*} \int_0^t \sin(\omega_\nu^*(t-\tau)) e^{-a_\nu\omega_\nu(t-\tau)} y_\nu^T f(\tau) d\tau \quad (1.35)$$

$$q_\nu^I(t) = \left[q_\nu(0) \cos(\omega_\nu^* t) + \left(\frac{\dot{q}_\nu(0) + q_\nu(0) a_\nu \omega_\nu}{\omega_\nu^*} \right) \sin(\omega_\nu^* t) \right] e^{-a_\nu \omega_\nu t} \quad (1.36)$$

où $\omega_\nu^* = \omega_\nu \sqrt{1 - a_\nu^2}$, $q_\nu(0) = y_\nu^T M y(0)$, $\dot{q}_\nu(0) = y_\nu^T M \dot{y}(0)$.

On reconstitue la réponse temporelle à l'aide de l'expression :

$$y(t) = \sum_{\nu=1}^n q_\nu(t) y_\nu \quad (1.37)$$

où $q_\nu(t) = q_\nu^I(t) + q_\nu^D(t)$.

Réponse fréquentielle

A partir des équations (1.4), (1.31) et (1.34), on formule la réponse forcée harmonique du système sous la forme d'une somme de n fractions rationnelles :

$$y(\omega) = \sum_{\nu=1}^n \frac{y_\nu y_\nu^T f(\omega)}{\omega_\nu^2 - \omega^2 + j\omega\beta_{\nu\nu}} \quad (1.38)$$

soit regroupées matriciellement :

$$y(\omega) = Y(\Lambda + j\omega\beta - \omega^2 I)^{-1} Y^T f(\omega) \quad (1.39)$$

1.6.3 Amortissement généralisé non diagonal

Les équations du mouvement généralisé (1.33) issues de la transformation modale restent ici couplées par la matrice d'amortissement généralisé. On peut soit envisager

un calcul direct des réponses, le système (1.33) étant réduit à quelques degrés de liberté, soit adopter une transformation modale dans l'espace d'état. On utilise alors la matrice modale X du système dissipatif tronquée à $2n$ modes comme matrice de transformation, les vecteurs propres étant normés à l'unité $D_{2n} = I_{2n}$.

La projection des vecteurs d'état sur la base modale est définie par la relation :

$$\dot{x}(t) = X \dot{c}(t), \quad x(t) = Xc(t) \quad (1.40)$$

L'équation du mouvement (1.3) dans l'espace d'état devient compte-tenu de la transformation modale et de la norme employée :

$$I_{2n} \dot{c}(t) - S_{2n}c(t) = X^T g(t) \quad (1.41)$$

La transformation modale effectuée dans l'espace d'état permet de découpler les équations du mouvement. On obtient ainsi $2n$ équations différentielles d'ordre 1 :

$$\dot{c}_\nu(t) - s_\nu c_\nu(t) = x_\nu^T g(t) \quad (1.42)$$

Réponse temporelle

La solution $c_\nu(t)$ de l'équation (1.42) est de la forme :

$$c_\nu(t) = e^{s_\nu t} c_\nu(0) + \int_0^t e^{s_\nu(t-\tau)} x_\nu^T g(\tau) d\tau \quad (1.43)$$

où $c_\nu(0) = x_\nu^T Ux(0)$.

La réponse temporelle $x(t)$ dans l'espace d'état est reconstituée sur la base modale tronquée du système dissipatif :

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu(t) x_\nu \quad (1.44)$$

Réponse fréquentielle

Dans l'espace d'état, la réponse forcée de la structure due à une force harmonique est exprimée sous forme de fractions rationnelles par l'équation (1.45) :

$$y(\omega) = \sum_{\nu=1}^n \frac{{}_d y_\nu \quad {}_d y_\nu^T f(\omega)}{s - s_\nu} + \sum_{\nu=1}^n \frac{{}_d \bar{y}_\nu \quad {}_d \bar{y}_\nu^T f(\omega)}{s - \bar{s}_\nu} \quad (1.45)$$

où $s = j\omega$,

soit sous forme matricielle :

$$y(\omega) = {}_d Y (sI_n - S)^{-1} {}_d Y^T f(\omega) + {}_d \bar{Y} (sI_n - \bar{S})^{-1} {}_d \bar{Y}^T f(\omega) \quad (1.46)$$

Le principe de superposition modale est clairement illustré dans les formulations (1.38) (respectivement (1.45)) où la réponse forcée est égale à la somme des contributions des modes propres du système conservatif (respectivement dissipatif).

La réponse forcée en un point d'une structure au voisinage d'une fréquence propre dépend de plusieurs facteurs : un facteur de forme propre du mode au point considéré, un facteur de participation à la réponse des différents modes, caractérisé par le produit scalaire $y_\nu^T f$ (respectivement $dy_\nu^T f$ et $d\bar{y}_\nu^T f$), pondérés par $\omega_\nu^2 - \omega^2 + j\omega\beta_{\nu\nu}$ (respectivement $s - s_\nu$ et $s - \bar{s}_\nu$).

1.7 Troncature modale et correction statique

1.7.1 Phénomène de troncature modale

Le calcul de l'intégralité des modes propres n'est pas envisageable sur des modèles éléments finis de type industriel. Dans le cadre d'une analyse dynamique classique basse fréquence, on se contente d'extraire quelques dizaines de modes (les premiers modes du spectre), constituant ainsi une base modale tronquée.

L'application du principe de superposition modale à l'aide de cette base incomplète induit une erreur due à la troncature de la base, qui affecte la qualité des réponses calculées principalement en très basse fréquence et aux antirésonances. En effet, la contribution des modes de rang élevé non calculés n'est pas prise en compte dans la réponse forcée du système.

Dans la suite de l'exposé, on définit une partition de la matrice modale du système conservatif entre p_1 modes calculés et $p_2 = N - p_1$ modes non calculés (respectivement entre modes basses et hautes fréquences) regroupés dans les sous-bases modales complémentaires correspondantes Y_1 et Y_2 :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

et une partition de la matrice spectrale associée :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Afin de limiter l'impact de la troncature sur les réponses prédites, on peut élargir la base modale calculée Y_1 compte-tenu d'une bande d'analyse désirée : en général, on utilise les modes compris dans une bande fréquentielle allant de 1,5 à 3 fois la fréquence maximale que l'on veut étudier.

1.7.2 Procédure de correction statique

Il est plus judicieux d'appliquer une procédure de correction statique [37] [53] afin de minimiser l'erreur de troncature. Elle consiste à approcher dans la réponse forcée la contribution des modes non pris en compte dans la base de projection par leurs contributions statiques. On néglige ainsi dans la réponse forcée les forces d'inertie associées aux modes de rang élevé devant les forces élastiques.

On explicite la procédure dans le cas d'une réponse à une sollicitation harmonique. Compte-tenu de la partition définie en (1.47) et (1.48), l'expression de la réponse forcée (1.39) devient :

$$y(\omega) = Y_1(\Lambda_1 + j\omega\beta_1 - \omega^2 I_1)^{-1} Y_1^T f(\omega) + Y_2(\Lambda_2 + j\omega\beta_2 - \omega^2 I_2)^{-1} Y_2^T f(\omega) \quad (1.49)$$

En négligeant les termes dynamiques associés aux modes non calculés, on obtient :

$$y(\omega) \simeq Y_1 q_1(\omega) + Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T f(\omega) \quad (1.50)$$

où $q_1(\omega) = (\Lambda_1 + j\omega\beta_1 - \omega^2 I_1)^{-1} Y_1^T f(\omega)$.

La quantité matricielle $Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T$ est appelée flexibilité statique résiduelle. On la nomme également matrice des résidus R . On l'obtient en calculant la flexibilité statique S du système :

$$S = K^{-1} = Y \Lambda^{-1} Y^T \quad (1.51)$$

puis en soustrayant la partie statique relative aux p_1 modes retenus dans la base Y_1 :

$$R = Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T = K^{-1} - Y_1 \Lambda_1^{-1} Y_1^T \quad (1.52)$$

Seules les colonnes utiles de flexibilité (et flexibilité résiduelle) correspondant aux points d'entrées (degrés de liberté d'excitation) sont calculées.

Dans le cas de structure à position d'équilibre indifférente, la matrice de raideur K présente un défaut de valeur égale au nombre de modes de corps rigide et n'est pas inversible ; la matrice de flexibilité n'existe donc pas. On applique alors une procédure particulière consistant à définir une pseudo-flexibilité (ou flexibilité filtrée) via un filtrage du mouvement de corps rigide. Cette opération est décrite en détail dans le paragraphe 2.6.2. Dans la suite de l'exposé, on note indifféremment S la flexibilité et pseudo-flexibilité, et R la flexibilité résiduelle et la pseudo-flexibilité résiduelle.

On rappelle que les vecteurs résiduels de la base R sont K et M orthogonaux vis-à-vis des modes libres de la base tronquée Y_1 :

$$\left\| \begin{array}{l} RKY_1 = Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T KY_1 = 0 \\ RMY_1 = Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T MY_1 = 0 \end{array} \right. \quad (1.53)$$

L'expression de la réponse forcée harmonique (1.50) devient :

$$y(\omega) \simeq Y_1 q_1(\omega) + Rf(\omega) \quad (1.54)$$

Cette procédure de correction statique s'applique également au domaine temporel. La réponse temporelle (1.37) obtenue par superposition modale sur une base tronquée des p_1 premiers modes devient :

$$y(t) \simeq \sum_{\nu=1}^{p_1} q_\nu(t) y_\nu + Rf(t) \quad (1.55)$$

L'usage de la correction statique garantit une prédiction exacte de la partie statique des réponses. Cette procédure répond efficacement au problème de troncature. Le coût de calcul des résidus statiques étant limité, on privilégie l'emploi de la correction statique à l'usage d'une base modale étendue.

1.7.3 Illustrations

Nous présentons Figure 1.1 une fonction de réponse fréquentielle d'une structure libre dans une bande d'analyse $[0 - 70]$ Hz comprenant 5 modes déformables. On représente également les diverses contributions modales en déplacement ainsi qu'une réponse statique résiduelle (associée à la sous-base constituée des 5 premiers modes déformables).

La réponse de référence est calculée directement. On a choisi un amortissement de type modal $B = MY_1\beta_1Y_1^T M$ construit à l'aide d'une sous-base Y_1 , elle-même constituée de 15 modes déformables dotés d'un amortissement réduit commun de 1%.

Afin de mettre en évidence le niveau des erreurs de troncature modale, on présente Figure 1.2 les erreurs absolues en amplitude de déplacement de plusieurs prédictions de la même réponse forcée harmonique :

- superposition modale sur les 11 modes de la bande d'analyse (dont 6 modes de corps rigide),
- superposition modale sur les 11 modes de la bande d'analyse (dont 6 modes de corps rigide), enrichie de la réponse statique résiduelle,
- superposition modale sur une base étendue $[0 - 220]$ Hz correspondant à 3 fois la fréquence utile (Fu) et comprenant 6 modes de corps rigide et 12 modes déformables.

On observe l'effet des troncatures essentiellement au niveau des antirésonances de la réponse. Seule l'introduction du terme statique résiduel garantit une prédiction acceptable de la réponse dans la bande d'analyse désirée de $[0 - 70]$ Hz.

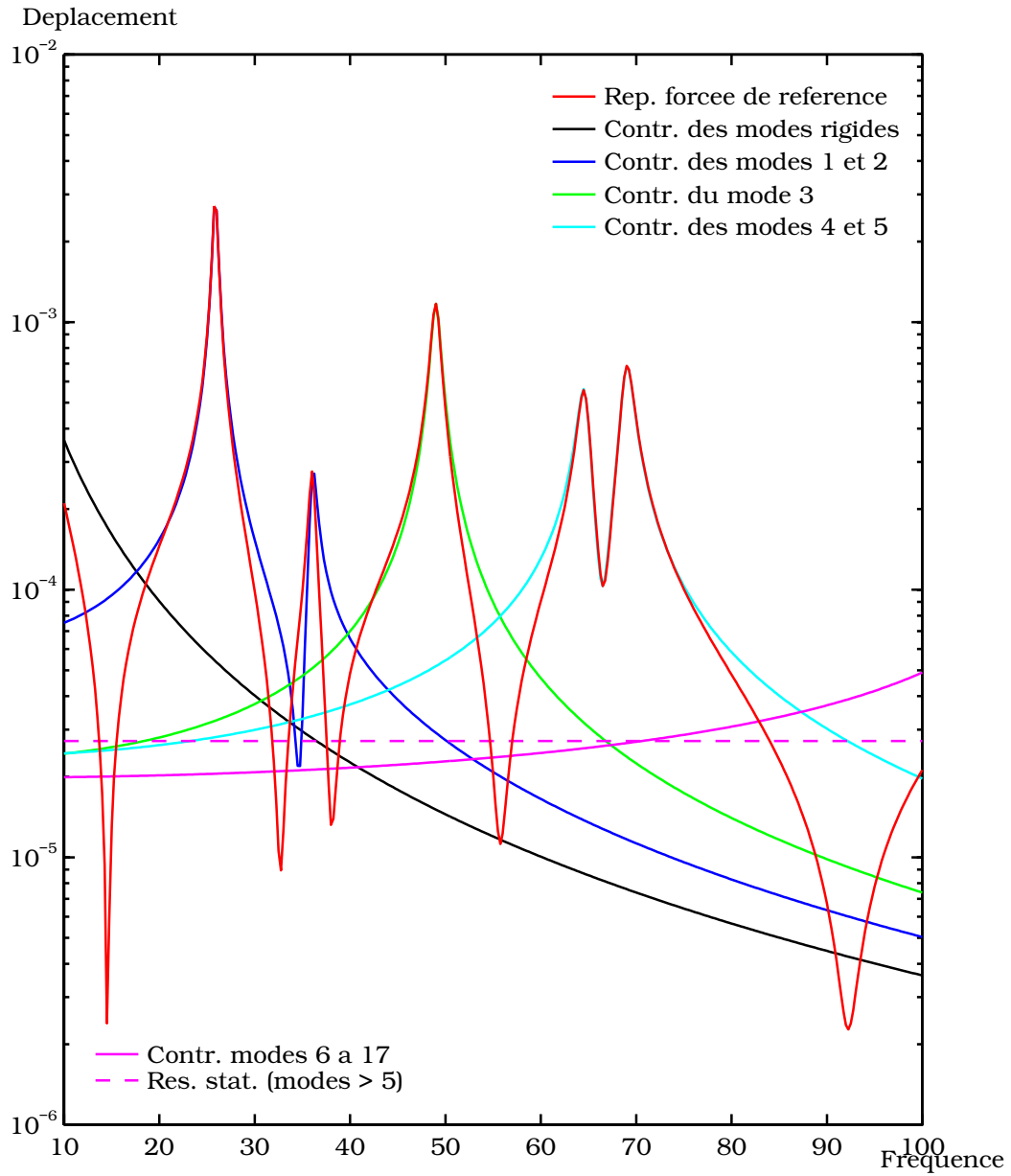


Figure 1.1 : Visualisation des différentes contributions modales dans une réponse fréquentielle

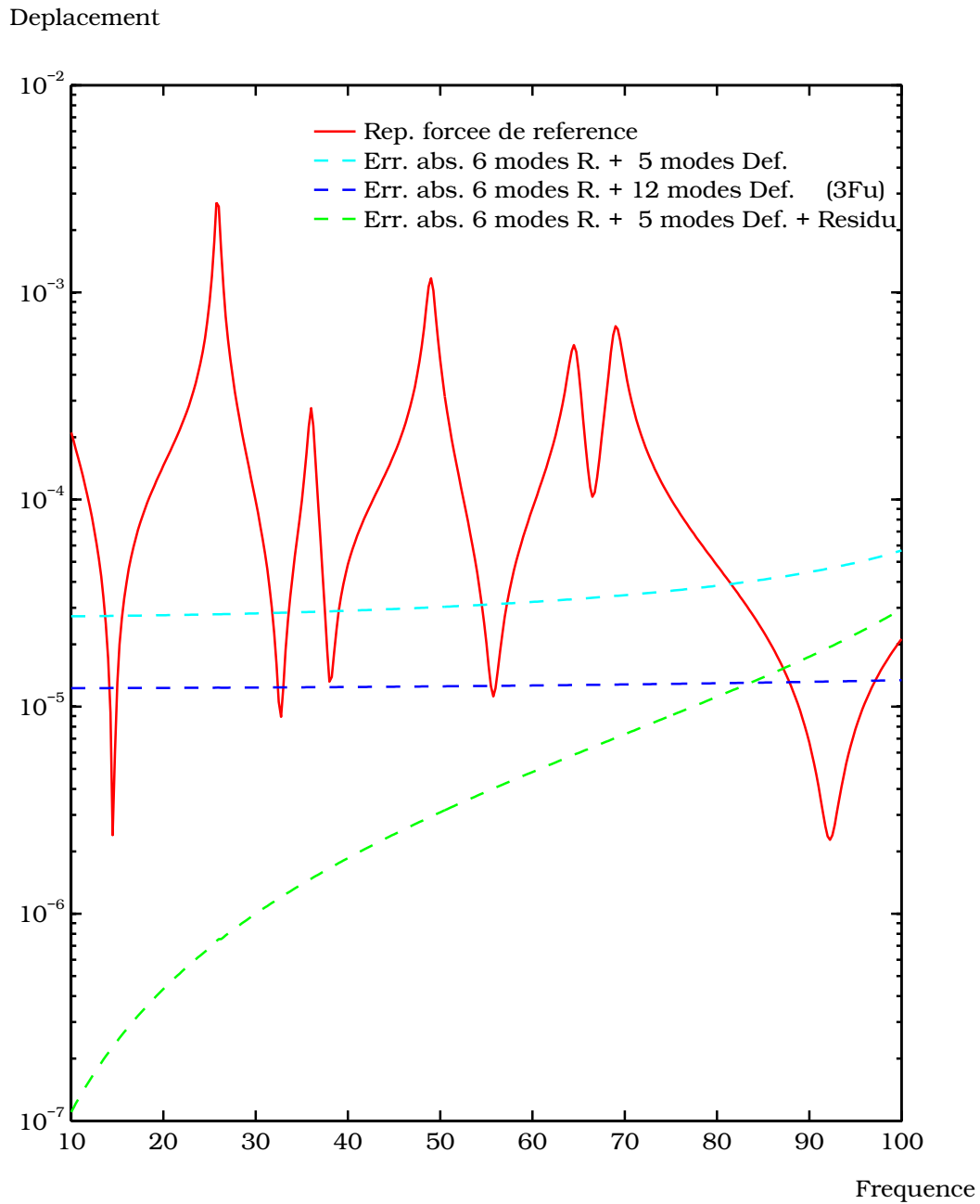


Figure 1.2 : Réponse fréquentielle de référence et erreurs absolues sur les prédictions obtenues par superposition modale

Chapitre 2

Réduction des modèles éléments finis

Nous abordons ici les notions de base communes aux techniques courantes de réduction des modèles éléments finis. Après avoir évoqué les domaines d'applications, nous définissons, dans un souci de clarté de l'exposé, les ensembles de degrés de liberté nécessaires à la formulation des méthodes de réduction. Nous avons choisi de présenter les principes de condensation pure et de synthèse modale dans ce même chapitre. En effet, la condensation directe est un cas particulier de synthèse modale à une sous-structure. De même, si l'on se place au niveau de la condensation d'une sous-structure, on peut considérer les contraintes imposées aux jonctions comme autant de sollicitations externes à la sous-structure (analogues à des points d'excitation).

Nous terminerons ce chapitre par une description non exhaustive des différents vecteurs utilisés dans les bases de réduction.

Les concepts et les méthodes de réduction des modèles, présentés dans ce chapitre et les chapitres suivants, sont formulés dans le domaine fréquentiel.

2.1 Domaines d'application

Les techniques de réduction des modèles éléments finis sont appliquées dans divers types d'analyse des structures. Elles sont compatibles avec quasiment l'intégralité des calculs de comportement en statique et dynamique linéaire. De plus, on les utilise également dans l'analyse de certains problèmes non-linéaires et des problèmes couplés multi-domaines (couplage fluides-structures). Enfin, les techniques d'optimisation ou de recalage de modèle font appel à la réduction des modèles afin de répondre aux

besoins de réanalyse approchée et/ou d'adaptation calculs/mesures.

2.1.1 Analyses statiques et dynamiques linéaires

Nous recensons les divers types d'analyse linéaire réalisables avec l'emploi de procédures de condensation ou de synthèse modale :

- réponse statique
- flambage
- extraction des modes réels, complexes
- réponse fréquentielle par calcul direct, par superposition modale
- réponse temporelle par calcul direct, par superposition modale

2.1.2 Analyses non-linéaires

Il est possible d'utiliser les modèles réduits dans le cadre de l'analyse de structures à comportement non-linéaire. Par exemple, les prédictions de réponses des systèmes où la raideur, l'amortissement ou les chargements appliqués à la structure varient en fonction du temps ou de la fréquence, nécessitent des calculs directs dont le coût est souvent prohibitif ; réalisés à l'aide des matrices réduites, ces calculs deviennent tout à fait envisageables [2] [9].

Ainsi, la synthèse modale autorise l'analyse dynamique de structures complexes où seules certaines sous-structures ont un comportement non-linéaire : les sous-structures à comportement linéaire sont condensées puis assemblées au reste de la structure avant l'analyse non-linéaire.

2.1.3 Analyse des problèmes couplés

On emploie également les méthodes de synthèse modale dans l'analyse des problèmes couplés de type vibro-acoustique, aéro-élastique ou plus généralement d'interactions fluides-structures. Hormis les réponses statiques et les modes normaux de la structure, les bases de projection permettant de réduire ces systèmes couplés font appel aux modes acoustiques et aux modes de ballottement. Le lecteur se référera aux ouvrages de Morand et Ohayon [55] et Ohayon et Soize [59]. D'autres types d'analyse couplée peuvent être abordés avec des méthodes de réduction similaires, à savoir les couplages de nature structure/électromagnétisme (structures actives) et structure/thermique.

2.1.4 Problèmes d'optimisation et de recalage de modèle

Réanalyse

La réduction de modèle s'inscrit naturellement dans les stratégies d'optimisation de comportements statique et dynamique de structures complexes maillées finement : en effet, un modèle condensé ou "sous-structuré" permet des réanalyses rapides et économiques, approchées ou quasi-exactes du système modifié globalement ou localement.

Lors de procédures de recalage à partir de modèle réduit, on observe les mêmes facilités de réanalyse au cours des itérations du processus. Dans le cadre de cette réanalyse approchée effectuée à l'aide du modèle réduit et des bases de réduction initiales, la robustesse de ces bases vis-à-vis des modifications paramétriques est primordiale et conditionne la précision du calcul.

Cette notion de robustesse est abordée dans le chapitre 4.

Adaptation

La réduction permet également l'adaptation des données du modèle aux données mesurées sur la structure. Les techniques d'adaptation autorisent l'emploi de procédures de corrections paramétriques, basées sur la réduction [67] ou l'expansion [40], quasi-linéaires par rapport aux paramètres (aux erreurs d'adaptation près).

L'adaptation réalisée par réduction des déplacements issus du modèle $y_{Mod}^{initial} \cong T_{Mod} y_{Mod}^{réduit}$ présente des propriétés communes aux techniques d'expansion de données observées $y_{Str}^{expansé} \cong T_{Mod} y_{Str}^{observé}$ [64] : la transformation utilisée pour l'adaptation est une transformation en coordonnées physiques, définie à partir du modèle, à l'aide de réponses statiques et/ou de modes normaux (cf paragraphe 2.3.4 et chapitre 3).

2.1.5 Analyse de structures complexes

La synthèse modale répond efficacement aux problèmes liés à la conception et à l'analyse de structures industrielles complexes, notamment dans l'organisation de grands projets où plusieurs partenaires sont responsables de la réalisation d'un sous-ensemble constituant. Une approche par sous-structures permet en effet, de par sa nature modulaire, de limiter l'impact d'une modification d'un équipement sur l'analyse du système global modifié, réduisant ainsi les coûts de calcul de façon drastique.

2.2 Définition d'ensembles de degré de liberté

Afin de clarifier la présentation des méthodes, nous définissons ici les partitions de l'ensemble des degrés de liberté. Ces partitions permettent de présenter les formulations de manière cohérente et qualifient les découpages vectoriels et matriciels correspondants.

Nous considérons une structure à N degrés de liberté actifs : la réduction d'ordre associée aux contraintes cinématiques de liaison entre degrés de liberté et aux conditions aux limites en déplacement a été effectuée.

Les divers sous-ensembles non-exclusifs de l'ensemble n des N degrés de liberté actifs sont notés :

- j : d.d.l. de "jonction" de la structure
L'ensemble j des degrés de liberté de jonction est vide dans une procédure de condensation pure et n'a d'existence que dans le cas d'une synthèse de sous-structures.
- i : d.d.l. "internes" à la structure
L'ensemble i est complémentaire à l'ensemble j sur l'ensemble n ($i \oplus j = n$).
- e : d.d.l. "forces externes" ($e \subset i$)
Cet ensemble regroupe les degrés de liberté internes potentiellement sollicitables au droit desquels une prise en compte statique des chargements est assurée via des réponses statiques.
- c : d.d.l. "complémentaires" ($c \subset i$)
L'ensemble c est complémentaire à l'ensemble e sur l'ensemble i ($c \oplus e = i$).
- m : d.d.l. "maîtres" ($m \subset c$)
L'ensemble m définit les degrés de liberté maîtres utilisés lors de transformations de coordonnées généralisées en coordonnées physiques.
- s : d.d.l. "esclaves" ($s \subset c$)
L'ensemble s est complémentaire à l'ensemble m sur l'ensemble c ($s \oplus m = c$).
- f : d.d.l. "forces" ($f \subset n$)
L'ensemble f regroupe les degrés de liberté de jonction j et les degrés de liberté de chargement e internes à la structure ($f = j \oplus e$).
- r : d.d.l. de "corps rigide"
L'ensemble r regroupe les degrés de liberté permettant de rendre isostatique une structure présentant des modes de corps rigide.

- d : d.d.l. "corps déformable"

L'ensemble d est complémentaire à l'ensemble r sur l'ensemble n ($d \oplus r = n$).

On visualise la partition des degrés de liberté Figure 2.1.

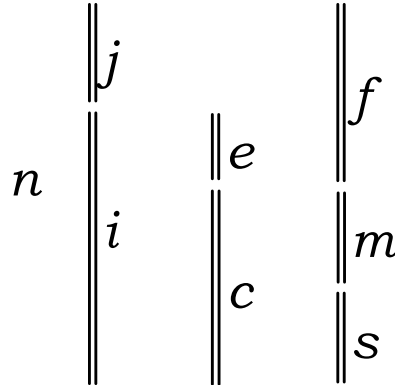


Figure 2.1 : Partition des degrés de liberté

Les ensembles f , m , s sont complémentaires ($n = f \oplus m \oplus s$).

2.3 Condensation

Le principe de condensation consiste à représenter correctement les comportements statiques et dynamiques d'un modèle initial à partir d'un modèle exprimé sur un nombre réduit de degrés de liberté. Pour cela, il convient d'établir une base de vecteurs de Ritz puis d'opérer à l'aide de cette base incomplète la réduction des matrices d'état par une relation de transformation "congruente". L'analyse désirée est effectuée à l'aide des matrices réduites et la solution du système initial est obtenue après reconstitution de la solution réduite sur la base de condensation (illustration Figure 2.2). On traite, dans ce paragraphe, indifféremment de la condensation d'un modèle ou d'une sous-structure dans le cadre d'une synthèse modale.

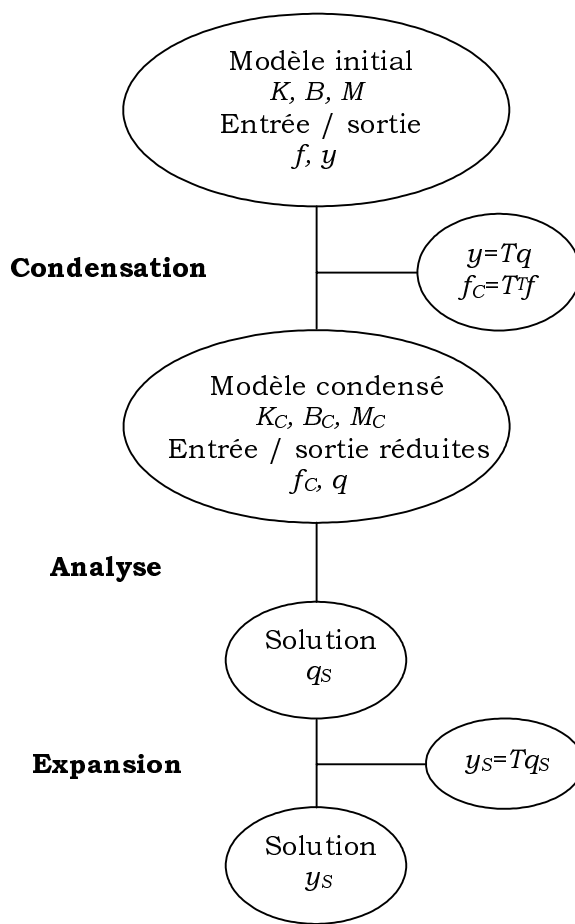


Figure 2.2 : Analyse dynamique par condensation

2.3.1 Projection des déplacements structurels sur une base de Ritz T

On définit une matrice de transformation singulière T entre le vecteur y des déplacements du modèle initial et le vecteur q des coordonnées q_i du modèle réduit :

$$\underset{(N1)}{y} = \underset{(Nq)}{T} \underset{(q1)}{q} = \sum_{i=1}^q \underset{(q1)}{T_i} q_i \quad (2.1)$$

La matrice de transformation $T \in R^{Nq}$ (où $q \ll N$) est une sous-base de projection de rang q . Les vecteurs de Ritz T_i sont fréquemment des vecteurs de réponse statique à un déplacement ou une force imposée et des vecteurs propres issus d'un problème aux valeurs propres relatif au modèle affecté d'éventuelles modifications structurales.

Les composantes q_i du vecteur q peuvent être des degrés de liberté physiques ou généralisées.

2.3.2 Réduction d'ordre par transformation "congruente"

La réduction d'ordre du système (1.5) est obtenue à l'aide de la relation (2.1) et d'une pré-multiplication par la transposée de la matrice de transformation T :

$$T^T [K + j\omega B - \omega^2 M] T q(\omega) = T^T f(\omega) \quad (2.2)$$

L'équation d'équilibre du système condensé (2.2) s'écrit sous la forme :

$$[K_C + j\omega B_C - \omega^2 M_C] q(\omega) = f_C(\omega) \quad (2.3)$$

où $K_C = T^T K T$, $B_C = T^T B T$, $M_C = T^T M T$ sont respectivement les matrices condensées de raideur, d'amortissement et de masse. Le vecteur $f_C(\omega) = T^T f(\omega)$ correspond au vecteur condensé des efforts appliqués.

Ainsi, le modèle initial de dimension N est projeté sur le sous-espace de dimension q , décrit par la transformation T .

Définition Le double produit matriciel $T^T A T = A_C$ sera défini comme une relation de transformation "congruente" de la matrice A par la matrice T (bien que la matrice T ne soit pas une matrice carrée régulière).

On réécrit l'équation (2.3) sous la forme :

$$Z_C(\omega) q(\omega) = f_C(\omega) \quad (2.4)$$

où Z_C est la raideur dynamique du système condensé.

On note que les propriétés d'orthogonalité de certains vecteurs de la transformation ne sont pas respectées numériquement pour des systèmes d'une certaine taille. L'exploitation de ces propriétés, dans un but d'économie de calcul, conduit à des problèmes numériques. Ainsi, les produits de transformation sont réalisés effectivement.

Le double produit est réalisé à l'aide d'un solveur exploitant le caractère creux des matrices d'état initiales. Les matrices condensées obtenues sont pleines et conservent les propriétés de symétrie, de signe et de défaut si l'on inclut les modes de corps rigide dans la transformation.

La qualité des prédictions réalisées à l'aide du système réduit dépend de l'erreur de projection ε (définie par la relation (2.5)) de la solution exacte y (calculée à l'aide du modèle non condensé) sur le sous-espace représenté par les vecteurs de Ritz T_i :

$$\varepsilon = [I_N - P_T] y \quad (2.5)$$

où $P_T = T (T^T T)^{-1} T^T$.

Le choix des vecteurs T_i est donc primordial.

2.3.3 Expansion des solutions du modèle réduit

Soient q_S les solutions obtenues après une analyse réalisée à l'aide du modèle réduit. Les solutions du système initial y_S sont reconstituées à partir des solutions q_S via la base de condensation T :

$$y_S = Tq_S \quad (2.6)$$

La solution reconstituée y_S est une approximation de la solution exacte y du système initial non condensé, définie par la relation (2.7) :

$$y_S = P_T y \quad (2.7)$$

2.3.4 Condensation en coordonnées physiques de type déplacement y

Afin de s'affranchir partiellement de l'étape de reconstitution des solutions physiques à partir des solutions généralisées issues du problème réduit, on peut définir une transformation permettant l'obtention d'un modèle réduit totalement exprimé en coordonnées physiques de type déplacement.

Inspirées des techniques d'expansion [57] [64], et d'une technique de synthèse modale [54] décrite dans le paragraphe 3.1.4, les procédures de retour en coordonnées physiques sont généralisées par Schiavone *et al.* [66] [68] à la transformation simultanée des coordonnées modales c et des coordonnées de type effort f en coordonnées physiques de type déplacement y .

Soit une base de transformation constituée de n_1 modes normaux Φ et n_2 réponses statiques Ω_f . Les coordonnées réduites associées sont respectivement c et f_f . La projection des N déplacements de la structure sur une telle base s'écrit :

$$y = \Phi c + \Omega_f f_f \quad (2.8)$$

On décompose l'ensemble des N degrés de liberté y en 2 sous-ensembles exclusifs y_m , y_f comprenant respectivement n_1 et n_2 degrés de liberté et le sous-ensemble complémentaire y_s . La relation (2.8) devient :

$$\begin{bmatrix} y_m \\ y_f \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Phi_f \\ \Phi_s \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} \Omega_{mf} \\ \Omega_{ff} \\ \Omega_{sf} \end{bmatrix} f_f \quad (2.9)$$

Dans un premier temps, on élimine les coordonnées généralisées c à l'aide de la relation (2.9) restreinte sur l'ensemble m :

$$c = \Phi_m^{-1} [y_m - \Omega_{mf} f_f] \quad (2.10)$$

Il convient de choisir soigneusement les degrés de liberté maîtres y_m de manière à ce que la sous-matrice modale Φ_m soit régulière, bien conditionnée et, de ce fait, numériquement inversible sans erreur. On sélectionne ces degrés de liberté maîtres par des techniques de factorisation de type QR avec pivotage [34] de la transposée de la sous-matrice modale Φ réduite aux degrés de liberté candidats. Ces procédures efficaces livrent avec rapidité la localisation des lignes (directions) les plus linéairement indépendantes de la base et garantissant pour Φ_m un nombre de conditionnement faible. La notion de sous-base candidate correspond à une pré-sélection de degrés de liberté "utiles" (par exemple les degrés de liberté de translation dont l'amplitude modale moyenne est supérieure à un seuil donné) réduisant ainsi considérablement le coût de la factorisation QR.

Il est possible d'imposer certains degrés de liberté dans la sélection : la factorisation s'effectue alors sur le sous-espace orthogonal au sous-espace correspondant aux directions imposées. On détaille dans l'annexe A le procédé de factorisation QR. Pour plus de détails, le lecteur se réfèrera aux travaux de Ramanitranja [64] et Schiavone [68].

En appliquant la transformation des coordonnées généralisées c (2.10) à la relation (2.9), on obtient :

$$\begin{bmatrix} y_m \\ y_f \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ \Phi_f \Phi_m^{-1} \\ \Phi_s \Phi_m^{-1} \end{bmatrix} y_m + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_{ff} - \Phi_f \Phi_m^{-1} \Omega_{mf} \\ \Omega_{sf} - \Phi_s \Phi_m^{-1} \Omega_{mf} \end{bmatrix} f_f \quad (2.11)$$

La seconde étape consiste à éliminer les coordonnées de type force f_f à l'aide de la relation (2.11) restreinte sur l'ensemble f :

$$f_f = (\Omega_{ff} - \Phi_f \Phi_m^{-1} \Omega_{mf})^{-1} [y_f - \Phi_f \Phi_m^{-1} y_m] \quad (2.12)$$

La matrice $(\Omega_{ff} - \Phi_f \Phi_m^{-1} \Omega_{mf})$ doit être inversible, ce qui suppose un choix convenable des degrés de liberté d'excitation.

Compte-tenu de la transformation des coordonnées de type force f_f (2.12), on obtient finalement une transformation en coordonnées physiques uniquement, analogue à

la transformation originelle (2.8) :

$$\begin{bmatrix} y_m \\ y_f \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_f \\ \Phi_s \Phi_m^{-1} - \tilde{\Omega}_{sf} \tilde{\Omega}_{ff}^{-1} \Phi_f \Phi_m^{-1} & \tilde{\Omega}_{sf} \tilde{\Omega}_{ff}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m \\ y_f \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

où :

$$\begin{cases} \tilde{\Omega}_{ff} = \Omega_{ff} - \Phi_f \Phi_m^{-1} \Omega_{mf} \\ \tilde{\Omega}_{sf} = \Omega_{sf} - \Phi_s \Phi_m^{-1} \Omega_{mf} \end{cases}$$

On note qu'il est possible d'éliminer les coordonnées de type effort f_f dans un premier temps puis les coordonnées généralisées c en second lieu, ou de les éliminer simultanément.

Le sous-espace vectoriel associé à la transformation en coordonnées physiques (2.13) est identique au sous-espace associé à la transformation en coordonnées généralisées (2.8) : il n'y a pas de perte d'informations, et les résultats obtenus sont identiques aux erreurs numériques près. Cependant, la robustesse de ces transformations vis-à-vis des perturbations ou modifications du modèle dépend considérablement du conditionnement des matrices à inverser.

Un modèle condensé exprimé en coordonnées de type déplacement permet de disposer de données physiques directement comparables à des données expérimentales ; un tel modèle simplifie donc les tâches de confrontation mesures/calculs et conduit à des techniques de recalage efficaces [60] [68].

2.3.5 Conservation des énergies modales

Les énergies modales de déformation Ep_ν et cinétiques Ec_ν des premiers modes du modèle initial sont généralement préservées par le modèle condensé issu d'une transformation "congruente".

Soit y_ν le ν ème mode propre du système initial et q_ν son homologue du système condensé, on écrit :

$$y_\nu = Tq_\nu + \varepsilon_\nu \quad (2.14)$$

où ε_ν représente l'erreur de projection du mode y_ν sur la base T .

Si l'erreur de projection ε_ν est négligeable devant la quantité Tq_ν ($|\varepsilon_\nu| \ll |Tq_\nu|$), alors les énergies modales du système initial et du système réduit sont voisines et s'écrivent :

$$\begin{cases} Ep_\nu = y_\nu^T K y_\nu \simeq q_\nu^T T^T K T q_\nu = q_\nu^T K_C q_\nu \\ Ec_\nu = y_\nu^T M y_\nu \simeq q_\nu^T T^T M T q_\nu = q_\nu^T M_C q_\nu \end{cases} \quad (2.15)$$

L'erreur de projection ε_ν est nulle si la matrice de transformation T permet de reconstituer exactement le $\nu^{i\text{ème}}$ mode propre de la structure ; c'est le cas si la transformation T contient une sous-base modale du modèle.

2.4 Synthèse modale

Les techniques de réduction par synthèse modale sont couramment utilisées lors d'analyses de modèles éléments finis complexes constitués d'assemblages de sous-modèles composants. L'intérêt spécifique de la réduction par synthèse modale est discuté dans le paragraphe 2.1.5.

Le principe consiste, dans un premier temps, à condenser chaque sous-structure indépendamment sur un nombre réduit de coordonnées à l'aide d'une transformation T_C propre à la sous-structure. Les sous-structures condensées sont ensuite assemblées au moyen d'une seconde transformation T_A , en respectant les équations de compatibilité en effort et déplacement aux frontières des sous-structures, de manière à former un modèle équivalent de taille réduite et d'une précision acceptable. Afin de clarifier l'exposé, le modèle obtenu est dénommé ici modèle réduit final ; il est exprimé sur l'ensemble des coordonnées réduites des sous-structures condensées. De même que dans le cas d'une condensation directe, l'analyse du système est réalisée sur le modèle réduit final et les solutions du modèle initial sont reconstituées à partir des solutions issues du modèle réduit final. On illustre les différentes phases d'une synthèse modale Figure 2.3.

2.4.1 Particularités

De nombreuses techniques de synthèse modale ont été proposées ; il est délicat de conclure abruptement sur le choix de la "technique universelle" à retenir. On peut dégager quelques caractéristiques indispensables à l'obtention de résultats acceptables issus d'un modèle réduit "sous-structuré" :

- il convient de choisir a priori un nombre convenable de modes normaux dans la base de condensation de chaque sous-structure selon son importance ou sa contribution dans le comportement dynamique de la structure complète. Une sous-structure souple nécessite une sous-base de projection relativement large (modes normaux en nombre important) alors qu'il peut suffire de prendre en compte un équipement très raide à l'aide d'une base uniquement constituée de réponses statiques.

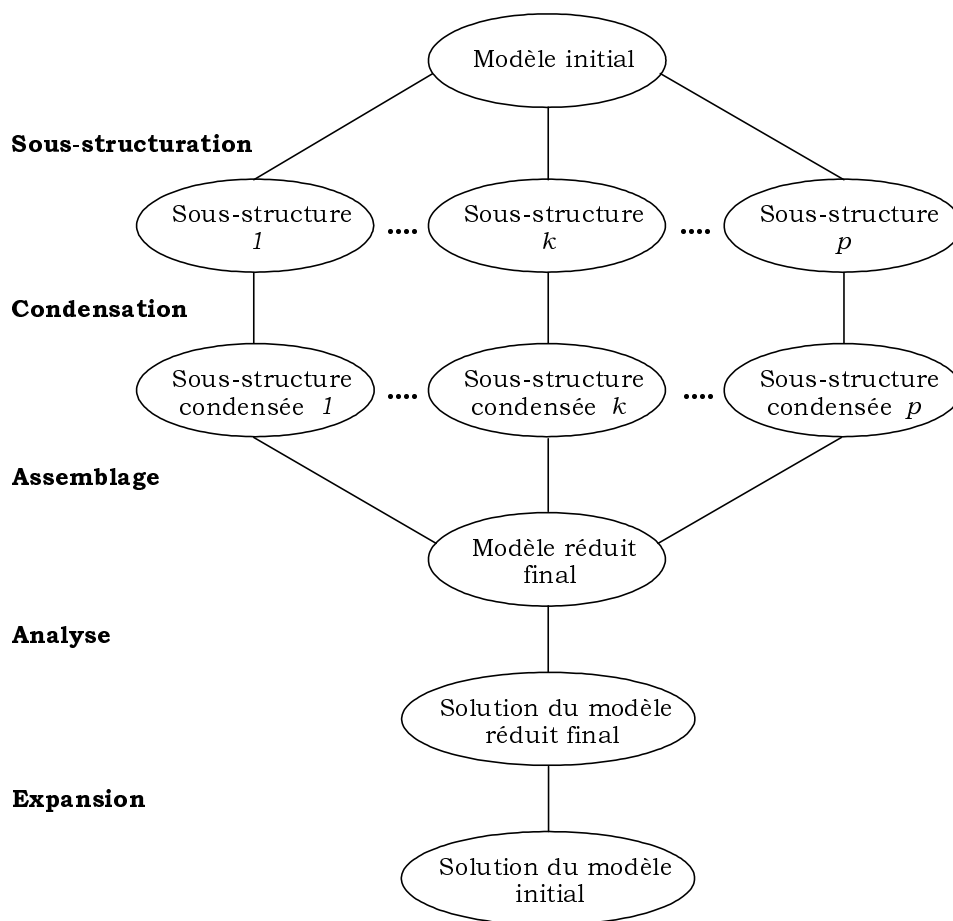


Figure 2.3 : Analyse par synthèse modale

- le nombre de modes composants de sous-structure doit être adapté en fonction de la bande d'analyse désirée.
- les efforts externes et les efforts de liaison appliqués à la sous-structure nécessitent l'inclusion, dans la base de condensation de la sous-structure, de réponses statiques calculées au droit des degrés de liberté concernés. Le modèle réduit est ainsi statiquement exact.

2.4.2 Définition des sous-structures

On note Z l'impédance du modèle global et Z^k l'impédance du k ième sous-système composant (sous-structure k , $k = 1 \dots p$).

Les modèles de sous-structures sont définis :

- à partir d'une opération de désassemblage du modèle initial à l'aide d'un pré-processeur (à partir de propriétés géométriques ou matérielles élémentaires par exemple), auquel cas on est assuré d'une parfaite coïncidence des maillages des sous-structures à leurs frontières.

- indépendamment ; les maillages sont alors réalisés par plusieurs sous-contractants. Il convient de fixer un cahier des charges précis afin d'obtenir des maillages de frontière compatibles.

On utilise couramment des liaisons de corps rigide de type biellette afin de rattraper les légers défauts de coïncidence des noeuds de raccordement.

2.4.3 Equilibre d'une sous-structure

Une sous-structure k , composant du modèle initial, est soumise aux efforts de liaison $\hat{f}_j^k(\omega)$ des composants adjacents et à d'éventuelles sollicitations extérieures $\hat{f}_e^k(\omega)$. L'équilibre de la sous-structure soumise à un tel système de forces s'écrit :

$$[K^k + j\omega B^k - \omega^2 M^k]y^k(\omega) = \hat{f}_j^k(\omega) + \hat{f}_e^k(\omega) \quad (2.16)$$

soit :

$$Z^k(\omega)y^k(\omega) = \hat{f}_j^k(\omega) + \hat{f}_e^k(\omega) \quad (2.17)$$

2.4.4 Condensation d'une sous-structure

Condensation par produit "congruent" de transformation

Dans les méthodes de synthèse modale les plus classiques, le modèle condensé de la sous-structure est obtenu par une relation de transformation "congruente" de façon analogue à la procédure décrite au paragraphe 2.3.

On construit une base de condensation T_C^k (coordonnées réduites associées q^k) permettant d'obtenir un modèle condensé Z_C^k de la sous-structure selon le procédé défini dans les équations (2.1) à (2.4). La relation d'équilibre (2.17) devient :

$$Z_C^k(\omega)q^k(\omega) = T_C^{kT}(\hat{f}_j^k(\omega) + \hat{f}_e^k(\omega)) \quad (2.18)$$

où $Z_C^k = T_C^{kT} Z^k T_C^k$ est l'impédance de la sous-structure k condensée.

Condensation par produit de transformation non symétrique

Certaines méthodes de synthèse modale (MacNeal [53] et Rubin [65]) emploient, lors de la réduction d'ordre de la sous-structure, un double produit matriciel non symétrique de transformation de droite $T_{C_d}^k$ et de gauche $T_{C_g}^k$ différentes. Les déplacements de la sous-structure k sont projetés sur la transformation de droite $T_{C_d}^k$:

$$y^k = T_{C_d}^k \begin{bmatrix} q^k \\ f_f^k \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

On intègre ici les forces f_f^k appliquées à la sous-structure comme coordonnées réduites associées à la transformation $T_{C_d}^k$.

Compte-tenu de certaines relations d'orthogonalité entre transformations de gauche et de droite (voir paragraphe 3.2), la relation d'équilibre (2.17) devient :

$$Z_C^k(\omega)q^k(\omega) = T_{C_g}^{kT}(\widehat{f}_j^k(\omega) + \widehat{f}_e^k(\omega)) \quad (2.20)$$

où $Z_C^k = T_{C_g}^{kT} Z^k T_{C_d}^k$ est l'impédance de la sous-structure k condensée.

Ces méthodes font appel à un assemblage spécifique (paragraphe 2.4.6).

2.4.5 Equations de compatibilité aux frontières des sous-structures

Les relations de couplage entre sous-structures sont exprimées sous la forme d'équations vectorielles de compatibilité en efforts et déplacements aux frontières, sur les degrés de liberté de raccordement.

Pour p sous-structures connectées sur une même frontière, on considère les relations suivantes à une pulsation ω donnée :

- continuité des déplacements à la frontière :

$$y_j^1(\omega) = \dots = y_j^k(\omega) = \dots = y_j^p(\omega) \quad (k = 1 \dots p) \quad (2.21)$$

- équilibre des efforts de liaison :

$$\sum_{k=1}^p \widehat{f}_j^k(\omega) = 0 \quad (2.22)$$

2.4.6 Assemblage des sous-structures condensées

Les p modèles réduits sont assemblés en respectant les équations de compatibilité des efforts et déplacements aux frontières des sous-domaines (2.21) et (2.22). On obtient un modèle réduit final Z_{RF} exprimé sur l'ensemble q_{RF} comprenant tout ou partie des coordonnées réduites des sous-structures condensées ($q_{RF} \subset \bigcup_{k=1}^p q^k$).

Assemblage de type "congruent"

On généralise ici les types d'assemblages réalisés par une seconde relation de transformation "congruente" T_A^k . Cette transformation d'assemblage est définie entre les coordonnées réduites q^k de la sous-structure k et l'ensemble des coordonnées q_{RF} du système réduit final :

$$q^k = T_A^k q_{RF} \quad (2.23)$$

On construit ainsi le modèle "assemblé" Z_A^k de la sous-structure k exprimé sur l'ensemble des coordonnées q_{RF} :

$$Z_A^k = T_A^{kT} Z_C^k T_A^k \quad (2.24)$$

L'équation d'équilibre de la sous-structure condensée (2.18) devient :

$$Z_A^k(\omega)q_{RF}(\omega) = T_A^{kT} T_C^{kT} (\hat{f}_j^k(\omega) + \hat{f}_e^k(\omega)) \quad (2.25)$$

Le modèle réduit final est obtenu par une sommation des p impédances Z_A^k des sous-structures :

$$Z_{RF} = \sum_{k=1}^p Z_A^k = \sum_{k=1}^p T_A^{kT} T_C^{kT} Z_C^k T_C^k T_A^k \quad (2.26)$$

L'équilibre du modèle réduit final est donné par l'équation :

$$Z_{RF}(\omega)q_{RF}(\omega) = \sum_{k=1}^p T_A^{kT} T_C^{kT} \hat{f}_e^k(\omega) \quad (2.27)$$

La somme des p efforts de jonction, exprimés sur l'ensemble des coordonnées réduites q_{RF} , doit être nulle :

$$\sum_{k=1}^p T_A^{kT} T_C^{kT} \hat{f}_j^k(\omega) = 0 \quad (2.28)$$

- **Cas particulier** : assemblage explicite

L'assemblage explicite de sous-structures sur les degrés de liberté de jonction est un cas particulier de cette formulation où la matrice d'assemblage de la sous-structure k est une simple matrice de localisation $T_A^k = L_A^k$; les coordonnées réduites q^k de la sous-structure sont simplement localisées sur l'ensemble des coordonnées q_{RF} du modèle réduit :

$$q^k = L_A^k q_{RF} \quad (2.29)$$

Cette procédure simple de couplage explicite des sous-structures condensées est employée dans de nombreuses méthodes de synthèse modale (voir chapitre 3). Son défaut principal réside dans la présence des degrés de liberté de jonction dans l'ensemble des coordonnées du modèle réduit final. Du fait de l'assemblage sur les degrés de liberté de jonction, les matrices d'état du modèle réduit final présentent un caractère creux par blocs. Cependant, la taille de ces matrices d'état (impact sur le coût de stockage mémoire) est fortement conditionnée par le nombre de ces degrés de liberté de jonction.

Assemblage par élimination des efforts de liaison résiduels

La procédure est détaillée dans le paragraphe 3.2.

Cet assemblage est spécifique aux techniques de synthèse modale de type MacNeal [53] et Rubin [65]. Le couplage des sous-structures condensées est réalisé par élimination des inconnues de type effort de liaison dans le second membre de l'expression (2.20). Les efforts f_j^k aux jonctions de la sous-structure k sont exprimés sur l'ensemble des coordonnées q_{RF} du modèle réduit et sur l'ensemble des forces externes \widehat{f}_e à l'aide des matrices de couplage respectives $C_{q_{RF}}^k(\omega)$ et $C_{f_e}^k(\omega)$:

$$f_j^k(\omega) = C_{q_{RF}}^k(\omega)q_{RF}(\omega) + C_{f_e}^k(\omega)\widehat{f}_e(\omega) \quad (2.30)$$

Les matrices de couplage $C_{q_{RF}}^k$ et $C_{f_e}^k$ sont définies à partir des équations de compatibilité (2.21) et (2.22) et de la relation de condensation de droite (2.19) de la sous-structure. Elles sont constantes dans la méthode de MacNeal et fonction de la pulsation ω dans la méthode de Rubin.

En éliminant les efforts de liaison f_j^k dans l'équation (2.20) par la relation (2.30), on obtient le modèle "assemblé" Z_A^k de la sous-structure k exprimé sur l'ensemble des coordonnées q_{RF} et soumis aux efforts externes généralisés $T_f^k \widehat{f}_e$:

$$Z_A^k(\omega)q_{RF}(\omega) = T_f^k \widehat{f}_e(\omega) \quad (2.31)$$

où :

$$\left\| \begin{array}{l} Z_A^k = Z_C^k - T_{C_g}^{kT} C_{q_{RF}}^k \\ T_f^k = T_{C_g}^{kT} [L_e^k + C_{f_e}^k] \end{array} \right.$$

L_e^k étant la matrice de localisation des efforts externes appliqués à la sous-structure k dans l'ensemble des efforts externes appliqués au modèle initial.

Le modèle réduit final est obtenu par simple sommation des p impédances Z_A^k :

$$Z_{RF} = \sum_{k=1}^p Z_A^k \quad (2.32)$$

L'équilibre du modèle réduit final est donné par l'équation :

$$Z_{RF}(\omega)q_{RF}(\omega) = \sum_{k=1}^p T_f^k \widehat{f}_e(\omega) \quad (2.33)$$

Les degrés de liberté de jonction sont absents de l'ensemble des coordonnées du problème réduit ; les matrices d'état associées sont pleines mais de taille faible.

Assemblage par contraintes de Lagrange sur les déplacements

L'assemblage des sous-structures condensées par relation "congruente" de transformation peut être réalisé en adoptant une formulation en coordonnées mixtes : soit l'ensemble composé des coordonnées réduites classiques q_{RF} et des coefficients multiplicateurs de Lagrange μ . La continuité du champ de déplacement aux interfaces des sous-structures est imposée par des équations de contrainte égalité Co_{jq} auxquelles on associe les coefficients multiplicateurs μ . Les équations de contrainte sont obtenues à partir des équations de compatibilité sur les déplacements de frontière (2.21) et des relations de condensation des sous-structures (de type (2.1)).

On obtient un modèle réduit final exprimé en coordonnées mixtes :

$$\begin{bmatrix} Z_C^*(\omega) & Co_{jq}^T \\ Co_{jq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{RF}(\omega) \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^*(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\text{où } Z_C^* = \begin{bmatrix} Z_C^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_C^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Z_C^p \end{bmatrix} \text{ et } f^*(\omega) = \begin{bmatrix} T_C^{1T} \hat{f}_e^1(\omega) \\ T_C^{2T} \hat{f}_e^2(\omega) \\ \vdots \\ T_C^{pT} \hat{f}_e^p(\omega) \end{bmatrix}$$

La résolution aux valeurs propres ou fréquentielle d'un tel système est effectuée après élimination des contraintes. Le rang r de la matrice Co_{jq} est généralement déficient :

$$r < \min(j, q) \quad (2.35)$$

Il convient de déterminer une matrice \hat{N} décrivant l'espace nul de la matrice des contraintes Co_{jq} . La solution du problème (2.34) est obtenue par projection du modèle sur ce sous-espace :

$$\hat{N}^T Z_C^*(\omega) \hat{N} \xi(\omega) = \hat{N}^T f^*(\omega) \quad (2.36)$$

Ohayon et *al.* [58] proposent une procédure basée sur une décomposition en valeurs singulières de la matrice des contraintes afin de déterminer \hat{N} .

Balmes [3] préconise l'utilisation d'une factorisation de type LU permettant la construction du sous-espace nul \hat{N} , notamment dans le cas de structures possédant de nombreux degrés de liberté de jonction.

Les solutions q_{RF} sont obtenues par expansion des solutions $\xi(\omega)$ issues de la résolution de (2.36) :

$$q_{RF}(\omega) = \hat{N} \xi(\omega) \quad (2.37)$$

2.5 Réduction multi-niveaux

2.5.1 Réductions successives

Une procédure de réduction d'un modèle peut être le résultat de plusieurs réductions successives. On dénomme cette succession de condensation réduction multi-niveaux. A chaque niveau de la procédure, on réduit l'ordre du système à l'aide d'une transformation calculée au niveau précédent. En synthèse modale, une réduction à plusieurs niveaux permet d'envisager un assemblage non simultané des sous-structures et de diminuer considérablement le nombre de coordonnées réduites du modèle final.

Cette stratégie nécessite une gestion rigoureuse de la base de données associée et implique des calculs additionnels de réponses statiques et modes normaux réalisés sur des systèmes de taille limitée mais ayant perdu leur caractère creux. Elle convient parfaitement à la réduction de modèles d'équipements connexes aux sous-structures, équipements dont seules les contributions statiques interviennent dans le comportement global. Un premier niveau de réduction consiste alors à condenser statiquement ces équipements et à assembler les modèles réduits correspondants sur les matrices non condensées des sous-structures porteuses. Il n'est pas nécessaire de conserver les matrices de transformation associées si l'on ne souhaite pas observer le comportement local de ces équipements.

On présente Figure 2.4 un exemple de réduction à plusieurs niveaux.

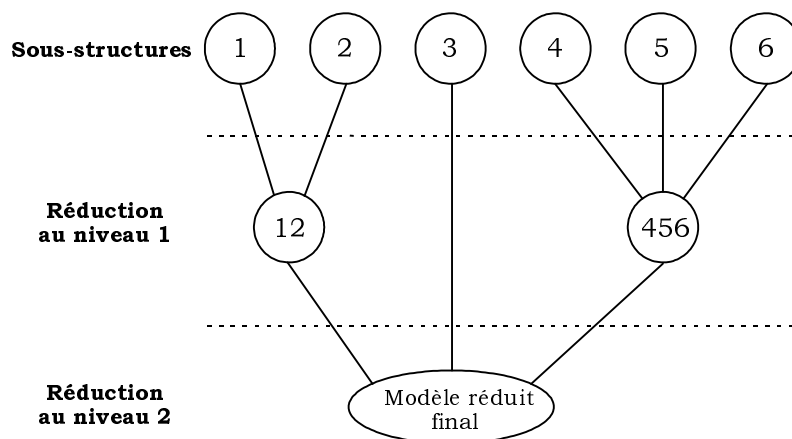


Figure 2.4 : Exemple d'une procédure de réduction à 2 niveaux

2.5.2 Réduction des degrés de liberté de jonction

Lors d'assemblages de sous-structures réalisés explicitement sur les degrés de liberté de jonction, la réduction multi-niveaux est un moyen de s'affranchir de la présence de

coordonnées de jonction surabondantes dans l'ensemble des coordonnées du modèle réduit final.

Plusieurs stratégies permettant la réduction des coordonnées de jonction inutiles sont proposées par Brahmi et *al.* [20] [21] : une première technique où l'on effectue une réduction statique des degrés de liberté de jonction après assemblage ; une seconde méthode plus performante où l'on projette les déplacements de chaque frontière sur une base commune. La base commune de projection est obtenue par concaténation de sous-bases modales restreintes aux degrés de liberté de jonction des sous structures, puis par extraction du sous-espace "utile" représentatif du mouvement d'interface, à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières. Les degrés de liberté de jonction sont ainsi réduits en un faible nombre de coordonnées généralisées d'interface. Balmes [3] exploite une technique similaire et l'applique à l'assemblage de sous-structures présentant des maillages de frontière incompatibles.

2.6 Bases de représentation du mouvement

Les bases de projection T , utilisées lors de la réduction des modèles, sont essentiellement constituées de deux classes de vecteurs : les vecteurs issus de la résolution d'un problème aux valeurs propres et les vecteurs obtenus par résolution d'un problème statique.

On recense ici, de manière non exhaustive, les types de vecteurs de base les plus courants. La dénomination de ces vecteurs provient des techniques de synthèse modale. Ceci n'empêche en aucune manière leur utilisation dans des procédures de condensation pure. Il suffit de transposer l'ensemble des degrés de liberté de jonction (notion spécifique à la synthèse modale) en un ensemble de degrés de liberté fixés arbitrairement.

2.6.1 Modes normaux

Ces vecteurs sont issus de la résolution d'un problème homogène associé au modèle (ou à la sous-structure) à condenser, ce modèle étant affecté d'éventuelles modifications structurales supplémentaires aux conditions aux limites naturelles.

Modes à interface libre

La résolution du problème homogène est effectuée sur le système simplement affecté des conditions aux limites naturelles. Les vecteurs propres obtenus ont valeur sur l'ensemble n des degrés de liberté actif et forment une base tronquée Y . Lorsque la sous-structure présente une position d'équilibre indifférente, la base tronquée Y se décompose en deux

sous-bases complémentaires : une sous-base constituée des modes de corps rigide Y_R et une sous-base composées des modes déformables Y_D .

Sur l'ensemble n des degrés de liberté actifs, cette base Y est définie par :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_R & Y_D \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Les modes à interface libre sont utilisés dans les techniques de synthèse modale proposées par Goldman [32], Hou [39], MacNeal [53], Martinez et *al.* [54] et Rubin [65].

Modes à interface bloquée

La base tronquée des modes à interface bloquée Ψ est obtenue par résolution du problème homogène associé au système exprimé sur l'ensemble i des degrés de liberté internes de la sous-structure. Les degrés de liberté de jonction (ensemble j) sont soumis à des conditions d'encastrement. Dans le cas d'une structure à position d'équilibre indifférente, les contraintes d'encastrement suffisent généralement à supprimer tout mouvement de corps rigide éventuel.

Sur l'ensemble n des degrés de liberté actifs, la base Ψ est définie par :

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_i \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Les modes à interface bloquée sont employés en supplément des modes statiques de liaison dans les méthodes de Hurty [41] et Craig et Bampton [24].

Modes à interface chargée

L'analyse modale est réalisée ici sur la sous-structure modifiée par adjonction de chargements en masse et raideur à ses frontières. Pour des chargements convenablement choisis, les modes obtenus sont proches des modes de l'ensemble de la structure assemblée et constituent ainsi une excellente base de représentation. La méthode des modes de branches de Gladwell [31], ainsi que les techniques proposées par Benfield et Hruda [7] et Jezequel [44] utilisent ce type de modes composants. La difficulté d'une telle procédure réside dans la détermination du chargement adéquat. Benfield et Hruda [7] proposent un chargement de l'interface constitué des sous-structures adjacentes condensées statiquement sur les degrés de liberté de jonction correspondants.

Modes à interface mixte

Les modes normaux sont ici obtenus par blocage de certains degrés de liberté de jonction. L'ensemble j des degrés de liberté de jonction est divisé en deux sous-ensembles

dont un seul est contraint à l'encastrement pendant l'analyse modale. Cette configuration d'interface particulière est proposée par MacNeal [53] en variante à sa méthode de synthèse modale et reprise par Tran [70].

2.6.2 Réponses statiques

Les bases de réponses statiques sont obtenues à partir d'une analyse statique de la structure soumise à des chargements ou des déplacements de type unité imposés successivement sur certains degrés de liberté. Dans ce paragraphe, on considère les réponses statiques associées à l'ensemble j des degrés de liberté de jonction. On précise que cet ensemble peut être éventuellement augmenté de certains degrés de liberté internes (ensemble e). Ces réponses statiques assurent, dans la base de projection, une prise en compte exacte de la partie statique du comportement issu de chargements dynamiques appliqués sur l'ensemble des degrés de liberté concernés.

Modes contraints (modes statiques de liaison)

Egalement dénommés modes statiques de liaison, ils furent introduits par Przemieniecki [62] et utilisés par Guyan [36], Irons [43], Hurty [41] et Craig et Bampton [24].

Les modes contraints Θ_j ($n \times j$) sont des réponses statiques des degrés de liberté internes correspondant à des déplacements unitaires successifs de chacun des degrés de liberté d'interface, les autres degrés de liberté d'interface étant bloqués. Soit la relation d'équilibre statique correspondant aux déplacements unité successivement imposés sur l'ensemble j :

$$\begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{jj} \\ \Theta_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

où F_j est la matrice des efforts statiques de réaction à l'interface dus aux déplacements imposés.

L'expression des modes contraints est donnée par la relation :

$$\Theta_j = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ \Theta_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ -K_{ii}^{-1} K_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Modes de flexibilité (modes d'attache)

Les modes de flexibilité statique ou de souplesse statique S_j ($n \times j$), que l'on nomme également modes d'attache, sont obtenus en appliquant successivement des forces unitaires sur l'ensemble j des degrés de liberté d'interface. Bamford et al. [5] intègrent ce type de réponse statique dans le cadre de synthèse modale de sous-structures à

position d'équilibre stable. Concernant les sous-structures à position d'équilibre indifférente, il convient d'appliquer une procédure particulière consistant à définir une pseudo-flexibilité (ou flexibilité filtrée) via un filtrage des mouvements de corps rigide.

• **Structure à position d'équilibre stable**

Soit la relation d'équilibre statique correspondant aux chargements unité successivement imposés sur l'ensemble j :

$$KS_j = I_j \quad (2.42)$$

où $I_j = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Les modes de flexibilité sont définis par la relation suivante :

$$S_j = K^{-1}I_j \quad (2.43)$$

On met en évidence une relation matricielle intéressante entre modes contraints et modes de flexibilité. Pour cela, on adopte une partition sur les ensembles de degrés de liberté j et i de la relation (2.42) :

$$\begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{jj} \\ S_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Suite à cette partition, on obtient l'expression suivante des modes de flexibilité :

$$S_j = \begin{bmatrix} S_{jj} \\ S_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{jj} - K_{ji}K_{ii}^{-1}K_{ij}]^{-1} \\ -K_{ii}^{-1}K_{ij} [K_{jj} - K_{ji}K_{ii}^{-1}K_{ij}]^{-1} \end{bmatrix} = \Theta_j S_{jj} \quad (2.45)$$

où la matrice S_{jj} correspond à l'inverse de la matrice de raideur condensée de Guyan.

• **Structure à position d'équilibre indifférente**

La matrice de raideur présente un défaut égal au nombre des modes rigides formant Y_R et n'est pas inversible. Il convient d'opérer un filtrage des mouvements de corps rigide de la structure afin d'accéder aux modes de pseudo-flexibilité. Cette procédure de filtrage est discutée dans de nombreux ouvrages et publications [25] [30] [42] [65].

Il convient d'adopter une partition de la matrice raideur sur les ensembles de degrés de liberté r et d :

$$K = \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rd} \\ K_{dr} & K_{dd} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Les degrés de liberté de l'ensemble r ($r \leq 6$) sont choisis judicieusement afin de rendre isostatique la structure sous l'action d'un système de forces appliqué au droit de ces degrés de liberté. On parle de forces d'auto-équilibre.

Nous définissons ensuite une matrice G singulière de défaut r telle que :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{dd}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

La matrice G correspond à la flexibilité de la structure rendue isostatique par blocage des degrés de liberté de l'ensemble r .

La matrice masse et les modes de corps rigide étant ordonnés selon la même partition (r et d), on construit une matrice de filtrage P des modes de corps rigide telle que :

$$P = I_{nn} - MY_R Y_R^T \quad (2.48)$$

La matrice de pseudo-flexibilité S_j de la structure libre est alors obtenue par une relation "congruente" de transformation de la matrice G par la matrice de filtrage P telle que :

$$S_j = P^T G P L_j \quad (2.49)$$

où L_j est une matrice de localisation des degrés de liberté de l'ensemble j .

Modes de flexibilité résiduelle (modes d'attache résiduels)

Les modes de flexibilité résiduelle R_j ($n \times j$), que l'on appelle également modes d'attache résiduels ou résidus statiques, sont introduits dans les techniques de synthèse modale par MacNeal [53] et Rubin [65]. Ces modes sont analogues à des modes d'attache S_j auxquels on a retiré la contribution statique des modes propres déjà retenus dans la représentation du mouvement de la sous-structure. Dans le cas de modes normaux à interface libre, l'expression des modes de flexibilité résiduelle est définie par la relation suivante :

$$R_j = S_j - Y_D \Lambda_D^{-1} Y_D^T L_j^T \quad (2.50)$$

où Y_D est la matrice modale tronquée des modes à interface libre déformables, et Λ_D la matrice spectrale associée.

Chapitre 3

Synthèse des méthodes de réduction

Ce chapitre est dédié aux rappels détaillés des techniques de réduction les plus classiques dans le domaine fréquentiel. L'énumération proposée ne peut être exhaustive, le sujet ayant fait l'objet de nombreux travaux et développements. Les procédures sont formulées dans *une approche de synthèse modale* ; elles sont néanmoins applicables en condensation pure, l'ensemble des degrés de liberté j est alors vide et l'ensemble f dégénère en l'ensemble e .

Dans la première partie du chapitre, nous traitons des techniques de synthèse modale dans lesquelles les sous-structures condensées sont assemblées explicitement sur les degrés de liberté de jonction. Cette procédure commune de couplage par simple localisation des degrés de liberté, présentée dans le paragraphe 2.4.6, est alors détaillée.

La seconde partie est consacrée aux techniques de synthèse modale de type MacNeal [53] et Rubin [65]. L'assemblage spécifique à ces deux méthodes est basé sur l'élimination des efforts de liaison résiduels (cf paragraphe 2.4.6) et permet l'obtention d'un modèle réduit final exempt des degrés de liberté de jonction.

Les méthodes de substitution modale de Benfield et Hruda [7] et de Gladwell [31] ne sont pas présentées dans ce chapitre. Concernant ces techniques particulières, on se réfère à l'ouvrage d'Imbert [42].

Afin d'alléger la présentation, les termes d'amortissement (matrice B) sont volontairement omis dans les équations de ce chapitre.

3.1 Techniques à base de transformations "congruentes"

Dans les méthodes présentées ci-après, les opérations de réduction et d'assemblage des sous-structures sont réalisées uniquement par des relations de transformations "congruentes". On rappelle l'équation d'équilibre (2.27) vérifiée par le modèle réduit final obtenu après réduction et assemblage des sous-structures :

$$Z_{RF}q_{RF} = \sum_{k=1}^p T_A^{kT} T_C^{kT} \hat{f}_e^k \quad (3.1)$$

où l'impédance du modèle réduit final Z_{RF} est la somme des impédances des p sous-structures réduites et assemblées :

$$Z_{RF} = \sum_{k=1}^p T_A^{kT} T_C^{kT} Z^k T_C^k T_A^k \quad (3.2)$$

3.1.1 Réduction dynamique

La technique de réduction dynamique consiste à représenter le comportement de la sous-structure sur un nombre réduit de coordonnées au moyen d'une transformation $T_{DY}(\omega)$ dépendant de la pulsation ω . Le modèle réduit est exprimé sur un ensemble de degrés de liberté physiques. Sous certaines conditions de sollicitations, le comportement dynamique du modèle initial est exactement préservé par le modèle réduit. L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le coût de calcul excessif de la matrice de transformation dynamique. On s'affranchit de ce problème par des techniques d'approximation ou linéarisation de la transformation. Ainsi, les techniques de Guyan [36] et Craig-Bampton [24] sont considérées comme des méthodes approchées de la technique de réduction dynamique. D'autres méthodes de réduction, issues de linéarisations plus affinées de la transformation $T_{DY}(\omega)$, dérivent de cette technique ; citons les variantes de Bouhaddi et Fillod [12] [13] et les travaux de Leung [48] [49].

Soit l'équilibre d'une sous-structure soumise à des chargements dynamiques :

$$[K - \omega^2 M] y = f \quad (3.3)$$

En adoptant une partition sur les deux ensembles de degrés de liberté complémentaires f ($f = j \oplus e$) et c , la relation (3.3) devient :

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fc} \\ K_{cf} & K_{cc} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{ff} & M_{fc} \\ M_{cf} & M_{cc} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} y_f \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_f \\ f_c \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

On réécrit le groupe des c lignes de l'équation (3.4) sous la forme :

$$y_c = - [K_{cc} - \omega^2 M_{cc}]^{-1} \{ [K_{cf} - \omega^2 M_{cf}] y_f + f_c \} \quad (3.5)$$

En l'absence de chargements dynamiques f_c sur l'ensemble c des degrés de liberté, on définit ainsi la relation de transformation dynamique $T_{DY}(\omega)$:

$$\begin{bmatrix} y_f \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ff} \\ - [K_{cc} - \omega^2 M_{cc}]^{-1} [K_{cf} - \omega^2 M_{cf}] \end{bmatrix} y_f \triangleq T_{DY}(\omega) y_f \quad (3.6)$$

Le modèle réduit obtenu par cette transformation est exprimé sur les degrés de liberté y_f . Il préserve exactement le comportement dynamique du modèle initial à la pulsation ω considérée en l'absence de sollicitations dynamiques f_c sur les degrés de liberté y_c condensés.

Définition On appelle système bloqué ou contraint la restriction du système dynamique aux degrés de liberté condensés par une transformation dynamique ou dérivée.

3.1.2 Réduction statique de Guyan-Irons

Technique initialement introduite par Przemieniecki [62] dans le cadre de l'analyse statique par sous-structuration, on attribue à Guyan [36] et Irons [43] son application à l'étude du comportement dynamique des structures.

Transformation statique T_G

La matrice de transformation T_G est constituée uniquement des modes statiques de liaison, ou modes contraints, définis dans le paragraphe 2.6.2 par la relation (2.41). La relation de condensation s'écrit :

$$y = T_G y_f \quad (3.7)$$

où $T_G = \Theta_f$.

Soit en développant les partitions f et c :

$$\begin{bmatrix} y_f \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ff} \\ -K_{cc}^{-1} K_{cf} \end{bmatrix} y_f \quad (3.8)$$

Les modes contraints Θ_f sont associés aux degrés de liberté de l'ensemble f , c'est à dire les degrés de liberté de jonction y_j imposés de la sous-structure et les degrés de liberté internes y_e . Certains degrés de liberté internes sont également imposés pour différents motifs tels que : la confrontation entre calculs et mesures, la visualisation des modes propres, la prise en compte statique de sollicitations extérieures, l'élargissement du domaine fréquentiel de validité de la condensation.

Modèle réduit associé

Le modèle réduit de sous-structure, issu de la réduction statique, satisfait l'équation d'équilibre suivante :

$$[K_G - \omega^2 M_G] y_f = f_f + \Theta_{cf}^T f_c \quad (3.9)$$

où $K_G = T_G^T K T_G$, $M_G = T_G^T M T_G$ et $\Theta_{cf} = -K_{cc}^{-1} K_{cf}$.

Les matrices réduites de rigidité K_G et de masse M_G sont pleines, de dimension ($f \times f$) et adoptent pour expression littérale :

$$\begin{cases} K_G = K_{ff} + K_{fc} \Theta_{cf} \\ M_G = M_{ff} + M_{fc} \Theta_{cf} + \Theta_{cf}^T [M_{cf} + M_{cc} \Theta_{cf}] \end{cases} \quad (3.10)$$

Le modèle réduit par transformation statique préserve exactement le comportement statique du modèle initial en l'absence de chargement sur l'ensemble c des degrés de liberté complémentaires, condensés suivant la relation (3.8).

Domaine fréquentiel de validité

La matrice de transformation statique T_G correspond à la matrice de transformation dynamique $T_{DY}(\omega)$ dans laquelle on néglige les effets dynamiques dus à l'inertie de la structure restreinte à l'ensemble c . Elle est donc utilisable dans le domaine des basses fréquences pour lequel il est justifié de remplacer $(K_{cc} - \omega^2 M_{cc})^{-1}$ par K_{cc}^{-1} .

On peut estimer le domaine de validité du modèle réduit par condensation statique à l'aide d'un calcul aux valeurs propres annexe. Il s'agit de déterminer la fréquence de coupure fr_c correspondant à la première fréquence propre du système bloqué (restreint sur l'ensemble c des degrés de liberté condensés) :

$$[K_{cc} - \omega^2 M_{cc}] y_c = 0 \quad (3.11)$$

Bouhaddi et Fillod [14] estiment le modèle réduit valable dans une bande fréquentielle $[0 - fr_c/3]$.

Choix des degrés de liberté conservés (maîtres)

La qualité des solutions issues du modèle réduit dépend fondamentalement du choix des degrés de liberté conservés (ensemble f). Plusieurs auteurs ont proposé des procédures de choix de ces degrés de liberté. Henshell et Ong [38] et Shah et Raymund [69] utilisent un choix basé sur une condensation statique itérative : à chaque itération, on élimine le degré de liberté correspondant au rapport le plus élevé des termes diagonaux (K_{diag}/M_{diag}) des matrices d'état condensées à l'étape précédente.

Plus récemment, des techniques exploitant l'information contenue dans la base modale libre tronquée ont été développées. On peut en effet estimer que le coût d'une extraction modale limitée est acceptable pour des structures ou des sous-structures de taille raisonnable. L'utilisation de la matrice modale permet de garantir une bonne observation des modes recherchés. On se réfère aux travaux de Lallement et Ramanitranja [46] [63] [64] concernant le choix des degrés de liberté dans le cadre d'une condensation pure et aux procédures développées par Bouhaddi et Fillod [15] dans le cadre de la sous-structuration.

On rappelle qu'une technique de sélection sous-optimale par simple factorisation QR avec pivotage [34] de la transposée de la matrice modale libre donne des résultats tout à fait acceptables. C'est en effet une procédure rapide permettant de déterminer p_1 degrés de liberté à retenir à partir d'une matrice modale constituée de p_1 modes libres.

Dans le cadre de la sous-structuration, les degrés de liberté de frontière étant imposés, on applique la factorisation sur le sous-espace orthogonal au sous-espace défini par les directions imposées des degrés de liberté de frontière. On se réfère à l'annexe A pour le détail opératoire. Il est également possible d'opérer un choix de type QR sur la base de modes à frontière bloquée associés.

Transformation statique par bande de fréquences

Une variante de la transformation statique consiste à inclure les effets d'inertie de la structure bloquée à une pulsation $\omega_0 = 2\pi fr_0$ donnée, fr_0 étant la fréquence de décalage à partir de laquelle on construit la transformation :

$$T_G^{\omega_0} = \begin{bmatrix} I_{ff} \\ - [K_{cc} - \omega_0^2 M_{cc}]^{-1} [K_{cf} - \omega_0^2 M_{cf}] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Le modèle réduit est valable dans une bande de fréquences centrée sur la fréquence de décalage fr_0 ; la largeur du domaine de validité et la détermination des fréquences de décalage sont discutées dans [68].

Propriétés utiles

- **Modes de corps rigide**

Dans l'hypothèse où la structure présente des mouvements d'ensemble, il est possible de déterminer une matrice des modes de corps rigide Y_R à l'aide de la transformation statique. Dans le cas de $r = 6$ modes rigides, la matrice de transformation T_{G_R} obtenue

par condensation statique *sur un noeud* (3 translations, 3 rotations) de la structure est une matrice des modes de corps rigide :

$$Y_R = T_{G_R} = \begin{bmatrix} I_{rr} \\ -K_{dd}^{-1} K_{dr} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

L'énergie de déformation associée à un mode rigide est nulle. Ainsi, les modes rigides vérifient les relations matricielles :

$$KY_R = 0 \quad (3.14)$$

et :

$$\Lambda_R = Y_R^T KY_R = 0 \quad (3.15)$$

Soit en développant (3.14) selon la partition en sous-ensembles r et d et à l'aide de la matrice des modes de corps rigide définie en (3.13) :

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rd} \\ K_{dr} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{rr} \\ -K_{dd}^{-1} K_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{rr} - K_{rd} K_{dd}^{-1} K_{dr} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

On obtient une propriété des matrices de raideur présentant un défaut de rang r :

$$K_{rr} - K_{rd} K_{dd}^{-1} K_{dr} = 0 \quad (3.17)$$

• Matrice de masse de corps rigide

On définit le repère R_c dont l'origine est le noeud de condensation et dont les axes sont les axes du repère global. La matrice de masse condensée par la transformation T_{G_R} n'est autre que la matrice de masse de corps rigide exprimée dans le repère R_c (3.18). En effet, les 6 vecteurs qui forment Y_R correspondent aux déplacements de corps rigide induits par les variations successives d'un seul degré de liberté du noeud sélectionné.

$$M_{G_R} = T_{G_R}^T M T_{G_R} \quad (3.18)$$

soit :

$$M_{G_R} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ & m & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ & & m & my_g & -mx_g & 0 \\ & & & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ sym & & & & I_{yy} & -I_{yz} \\ & & & & & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

avec m la masse du modèle, x_g, y_g, z_g les coordonnées du centre de masse dans le repère R_c , I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} les moments d'inertie et I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} les produits d'inertie exprimés dans le repère R_c .

3.1.3 Méthode de Craig-Bampton

Technique de synthèse modale la plus couramment employée, la méthode de Craig-Bampton [24] repose sur l'enrichissement de la transformation statique T_G par les vecteurs propres Ψ de la sous-structure à jonction bloquée. Cette transformation est utilisable en condensation pure. La base des modes bloqués Ψ associée à la transformation T_G constitue alors une excellente base de Ritz et le domaine de validité augmente considérablement vis-à-vis d'une simple transformation statique.

Transformation de Craig-Bampton T_{CB}

La transformation T_{CB} classique de type Craig-Bampton est définie sur les ensembles j des degrés de liberté de jonction et i des degrés de liberté internes :

$$T_{CB} = \begin{bmatrix} T_G & \Psi \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

On obtient ainsi la relation de condensation de la sous-structure en coordonnées mixtes :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ \Theta_{ij} & \Psi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

où $\Theta_{ij} = -K_{ii}^{-1}K_{ij}$ et c les p_1 coordonnées généralisées associées à la projection des déplacements internes sur les p_1 vecteurs propres de la structure calculés à jonction bloquée.

La formulation de Craig-Bampton est considérée comme une méthode approchée de la transformation dynamique $T_{DY}(\omega^2)$. En effet, la relation de condensation dynamique (3.6) restreinte aux degrés de liberté internes i s'écrit :

$$y_i = - [K_{ii} - \omega^2 M_{ii}]^{-1} [K_{ij} - \omega^2 M_{ij}] y_j \quad (3.22)$$

En développant le terme de flexibilité dynamique du système bloqué (restreint sur l'ensemble i des degrés de liberté condensés) sur la base des vecteurs propres associés tel que :

$$[K_{ii} - \omega^2 M_{ii}]^{-1} = \sum_{\nu=1}^i \frac{\Psi_{i\nu} \Psi_{i\nu}^T}{\Delta_\nu - \omega^2} = \Psi_i \Xi \Psi_i^T \quad (3.23)$$

$$= \sum_{\nu=1}^i \Psi_{i\nu} \Psi_{i\nu}^T \left(\frac{1}{\Delta_\nu} + \frac{\omega^2}{\Delta_\nu (\Delta_\nu - \omega^2)} \right) \quad (3.24)$$

$$= \Psi_i \Delta^{-1} \Psi_i^T + \Psi_i \tilde{\Xi} \Psi_i^T \quad (3.25)$$

$$= K_{ii}^{-1} + \Psi_i \tilde{\Xi} \Psi_i^T \quad (3.26)$$

Soit, dans l'équation (3.22) :

$$y_i = - \left[K_{ii}^{-1} K_{ij} + \Psi_i \left[\tilde{\Xi} \Psi_i^T K_{ij} - \omega^2 \Xi \Psi_i^T M_{ij} \right] \right] y_j \quad (3.27)$$

On parvient ainsi à la formulation de Craig-Bampton :

$$y_i = -K_{ii}^{-1} K_{ij} y_j + \Psi_i c \quad (3.28)$$

Modèle réduit associé

Formellement, le modèle réduit de sous-structure, issu de la réduction par une transformation de Craig-Bampton, satisfait l'équation d'équilibre suivante compte-tenu des relations de norme employées :

$$\left\{ \left[\begin{array}{cc} K_{G_{jj}} & 0 \\ 0 & \Delta \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} M_{G_{jj}} & \Theta_j^T M \Psi \\ \Psi^T M \Theta_j & I \end{array} \right] \right\} \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_j + \Theta_{ij}^T f_i \\ \Psi_i^T f_i \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

où $K_{G_{jj}}$ et $M_{G_{jj}}$ sont les matrices de raideur et de masse condensées par transformation statique réalisée sur l'ensemble j des degrés de liberté et Δ la matrice des valeurs propres associées aux modes à interface bloquée Ψ_i . On note que la matrice de raideur condensée est diagonale en sous-matrices.

Enrichissement de la base par des modes statiques

Il est possible d'enrichir la base des modes bloqués Ψ par des déformées statiques D du système bloqué. Par ce procédé, on cherche à compléter la base par un sous-espace de déplacement utile à la représentation du comportement, orthogonal à la base et composé de vecteurs linéairement indépendants. L'adjonction d'une sous-base statique permet également d'assurer la prise en compte de la partie statique de sollicitations internes à la sous-structure.

La transformation T_{CB} enrichie devient :

$$T_{CB} = \left[\begin{array}{ccc} T_G & \Psi & D \end{array} \right] \quad (3.30)$$

Soit l'expression de la relation de condensation :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & 0 \\ \Theta_{ij} & \Psi_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ c \\ \chi \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

On peut employer des vecteurs statiques additionnels à condition de leur faire subir un traitement adéquat, à savoir l'extraction de la partie orthogonale (par rapport à la

masse) aux modes Ψ_i du système bloqué, puis la normalisation par rapport à la masse du système bloqué, et enfin l'élimination des colonnes linéairement dépendantes.

L'utilisation de réponses statiques résiduelles $D_i = R_B F_B$ issues du système bloqué simplifie les procédures de traitement :

$$R_B F_B = S_B F_B - \Psi_i \Delta^{-1} \Psi_i^T F_B \quad (3.32)$$

où S_B est la flexibilité du système bloqué et F_B la matrice des chargements statiques appliqués.

Il convient simplement d'assurer l'indépendance linéaire des vecteurs résiduels et d'effectuer une opération de normalisation (voir chapitre 4).

Les réponses statiques résiduelles nécessaires à la prise en compte statique d'efforts sur des degrés de liberté internes (ensemble e) à la structure sont obtenues en appliquant des chargements statiques unitaires I_e successifs sur ces degrés de liberté :

$$R_{B_e} = S_B I_e - \Psi_i \Delta^{-1} \Psi_i^T I_e \quad (3.33)$$

Les coordonnées généralisées χ associées aux résidus statiques R_{B_e} correspondent aux sollicitations f_e internes à la sous-structure.

Transformation en coordonnées physiques

La relation de transformation peut être formulée en coordonnées physiques uniquement. On applique la procédure de retour en coordonnées physiques définie dans le paragraphe 2.3.4 sur la transformation enrichie de réponses statiques résiduelles afin de prendre en compte d'éventuels efforts internes (3.33).

Soit la relation de transformation en coordonnées mixtes :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & 0 \\ \Theta_{ij} & \Psi_i & R_{B_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ c \\ f_e \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

En adoptant une partition des degrés de liberté internes (ensemble i) en 3 sous-ensembles e , m , s et après une élimination successive des coordonnées généralisées c et des coordonnées de type effort f_e , on obtient la relation de transformation exprimée sur les coordonnées de déplacement y_j , y_e , y_m :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_e \\ y_m \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & 0 \\ 0 & I_{ee} & 0 \\ 0 & 0 & I_{mm} \\ \tilde{\Theta}_{sj} - \tilde{R}_{B_{se}} \tilde{R}_{B_{ee}}^{-1} \tilde{\Theta}_{ej} & \tilde{R}_{B_{se}} \tilde{R}_{B_{ee}}^{-1} & \tilde{\Psi}_{sm} - \tilde{R}_{B_{se}} \tilde{R}_{B_{ee}}^{-1} \tilde{\Psi}_{em} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ y_e \\ y_m \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

où :

$$\left\| \begin{array}{l} \tilde{\Psi}_{em} = \Psi_e \Psi_m^{-1} \\ \tilde{\Psi}_{sm} = \Psi_s \Psi_m^{-1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \tilde{\Theta}_{ej} = \Theta_{ej} - \tilde{\Psi}_{em} \Theta_{mj} \\ \tilde{\Theta}_{sj} = \Theta_{sj} - \tilde{\Psi}_{sm} \Theta_{mj} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \tilde{R}_{B_{ee}} = R_{B_{ee}} - \tilde{\Psi}_{em} R_{B_{me}} \\ \tilde{R}_{B_{se}} = R_{B_{se}} - \tilde{\Psi}_{es} R_{B_{se}} \end{array} \right.$$

Cette procédure peut être appliquée lorsque l'on enrichit la base bloquée Ψ_i par une base de vecteurs résiduels D_i . Le choix des degrés de liberté maîtres (ensemble m) est alors effectué sur la matrice $\begin{bmatrix} \Psi_i & D_i \end{bmatrix}$.

3.1.4 Méthode de Martinez et al.

Cette technique de synthèse modale [54] repose sur l'utilisation d'une base tronquée de modes libres Y à laquelle on adjoint les modes d'attache résiduels calculés au droit des degrés de liberté de jonction (ensemble j) et des degrés de liberté potentiellement excitables (ensemble e). Bien que cette méthode exploite la décomposition du mouvement proposée par MacNeal [53], elle se différencie, dans sa mise en oeuvre, par l'usage de transformations de condensation et d'assemblage "congruentes".

Transformation de Martinez et al. T_{MA}

La relation de transformation T_{MA} est définie à partir de la relation de superposition modale du mouvement de la sous-structure avec correction statique (1.54) au droit des efforts appliqués sur l'ensemble f :

$$y = Yc + R_f f_f \quad (3.36)$$

Compte-tenu de la partition des degrés de liberté sur les ensembles f ($f = j \oplus e$) et c , on obtient une première transformation T_{MA_1} :

$$\begin{bmatrix} y_f \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_f & R_{ff} \\ Y_c & R_{cf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f_f \end{bmatrix} \triangleq T_{MA_1} \begin{bmatrix} c \\ f_f \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

La relation (3.37) fait apparaître des coordonnées f_f de type efforts que l'on élimine au profit des coordonnées y_f de déplacement correspondantes. Ainsi, restreinte à l'ensemble c , l'expression (3.37) devient :

$$f_f = R_{ff}^{-1} [y_f - Y_f c] \quad (3.38)$$

A l'aide de la relation (3.38), Martinez et al. définissent une seconde transformation T_{MA_2} :

$$\begin{bmatrix} c \\ f_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{cc} \\ R_{ff}^{-1} & -R_{ff}^{-1} Y_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f \\ c \end{bmatrix} \triangleq T_{MA_2} \begin{bmatrix} y_f \\ c \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Le produit des transformations $T_{MA_1}T_{MA_2}$ génère la relation de condensation exprimée en coordonnées mixtes :

$$\begin{bmatrix} y_f \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ff} & 0 \\ R_{cf}R_{ff}^{-1} & Y_c - R_{cf}R_{ff}^{-1}Y_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f \\ c \end{bmatrix} \triangleq T_{MA} \begin{bmatrix} y_f \\ c \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Modèle réduit associé

Compte-tenu de la norme employée, le modèle réduit de sous-structure, obtenu par condensation à l'aide de la transformation T_{MA} , satisfait l'équation d'équilibre en l'absence de sollicitations sur l'ensemble c :

$$\left\{ \begin{bmatrix} R_{ff}^{-1} & -R_{ff}^{-1}Y_f \\ -Y_f^T R_{ff}^{-1} & \Lambda + Y_f^T R_{ff}^{-1}Y_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} J_{ff} & -J_{ff}Y_f \\ -Y_f^T J_{ff} & I_{ff} + Y_f^T J_{ff}^{-1}Y_f \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} y_f \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

où $J_{ff} = R_{ff}^{-1}R_f M R_f R_{ff}^{-1}$.

Les degrés de liberté y_f et les coordonnées généralisées c sont couplés par les matrices réduites de raideur et de masse de la sous-structure.

On se réfère à [20] et [54] concernant le détail opératoire conduisant à la relation (3.41).

Le modèle réduit obtenu préserve, de manière quasi-parfaite, le comportement dynamique (et statique) du modèle initial de la sous-structure, dans une bande fréquentielle correspondant aux modes libres inclus dans la transformation, et soumis à des chargements dynamiques (et statiques) sur l'ensemble f des degrés de liberté.

Transformation en coordonnées physiques

La relation de transformation T_{MA} peut être exprimée en coordonnées physiques uniquement. Pour cela, il convient de considérer la partition de l'ensemble c en 2 sous-ensembles m et s . Après élimination successive ou simultanée des coordonnées généralisées c et des coordonnées de type efforts f_f , on construit une transformation exprimée sur les coordonnées de déplacement y_f et y_m telle que :

$$\begin{bmatrix} y_f \\ y_m \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ff} & 0 \\ 0 & I_{mm} \\ \tilde{R}_{sf}\tilde{R}_{ff}^{-1} & \tilde{Y}_{sm} - \tilde{R}_{sf}\tilde{R}_{ff}^{-1}\tilde{Y}_{fm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f \\ y_m \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}_{fm} = Y_f Y_m^{-1} \\ \tilde{Y}_{sm} = Y_s Y_m^{-1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{R}_{ff} = R_{ff} - \tilde{Y}_{fm} R_{mf} \\ \tilde{R}_{sf} = R_{sf} - \tilde{Y}_{sm} R_{mf} \end{array} \right.$$

La base modale libre Y peut être enrichie de réponses statiques résiduelles R_Δ destinées à accroître la robustesse de la transformation dans le cadre de réanalyses du modèle perturbé (aspects développés dans le chapitre 4). Le choix des degrés de liberté maîtres (ensemble m) est alors effectué sur la matrice $\begin{bmatrix} Y & R_\Delta \end{bmatrix}$.

3.1.5 Assemblage explicite par localisation sur les degrés de liberté de jonction

L'assemblage des sous-structures condensées est réalisé explicitement sur les degrés de liberté de jonction de manière analogue à une procédure d'assemblage élémentaire.

Soit la forme commune des relations de transformations dynamique, statique, de Craig-Bampton ou de Martinez et *al.*, d'une sous-structure k , exprimée sur les degrés de liberté de jonction y_j^k et des coordonnées complémentaires q_r^k :

$$\begin{bmatrix} y_j^k \\ y_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ T_{ij}^k & T_{iq}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j^k \\ q_r^k \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

L'équilibre d'une sous-structure k condensée est donné par la relation (3.44) :

$$\begin{bmatrix} Z_{jj}^k & Z_{jq}^k \\ Z_{qj}^k & Z_{qq}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j^k \\ q_r^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_j^k + T_{ij}^{kT} f_i^k \\ T_{iq}^{kT} f_i^k \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

L'opérateur d'assemblage est une matrice de localisation L_A^k des coordonnées réduites y_j^k et q_r^k sur l'ensemble des coordonnées des sous-systèmes réduits q_{RF} . Soit, pour p sous-structures connectées sur une même frontière :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ q_r^k \end{bmatrix} = L_A^k q_{RF} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_{qq}^k & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ q_r^1 \\ \vdots \\ q_r^k \\ \vdots \\ q_r^p \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Le modèle réduit final exprimé sur les coordonnées q_{RF} satisfait la relation d'équi-

libre :

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p Z_{jj}^k & Z_{jq}^1 & \cdots & Z_{jq}^k & \cdots & Z_{jq}^p \\ Z_{qj}^1 & Z_{qq}^1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ Z_{qj}^k & 0 & & Z_{qq}^k & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ Z_{qj}^p & 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_{qq}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ q_r^1 \\ \vdots \\ q_r^k \\ \vdots \\ q_r^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p T_{ij}^{kT} f_i^k + (\sum_{k=1}^p f_j^k = 0) \\ T_{iq}^{1T} f_i^1 \\ \vdots \\ T_{iq}^{kT} f_i^k \\ \vdots \\ T_{iq}^{pT} f_i^p \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Les degrés de liberté de jonction y_j constituent l'essentiel des coordonnées q_{RF} du système réduit final. Cela constitue un inconvénient certain en terme de taille lors de la réduction d'une structure complexe maillée finement.

3.2 Méthodes de type MacNeal

Les méthodes de synthèse modale développées par MacNeal [53] et Rubin [65] présentent des aspects spécifiques, notamment dans la phase d'assemblage des sous-structures. Le couplage est réalisé par un procédé d'élimination des efforts de liaison résiduels et permet l'obtention d'un modèle réduit final exempt de coordonnées relatives aux jonctions des sous-structures. On présente les méthodes dans le cas d'un assemblage de deux sous-structures [25], soumises à des sollicitations extérieures.

3.2.1 Méthode de MacNeal

Les déplacements de sous-structure sont projetés sur une base constituée de modes libres et de modes de flexibilité résiduelle calculés au droit des degrés de liberté sollicités de l'ensemble f :

$$y = Yc + R_f f_f \quad (3.47)$$

Condensation de MacNeal

MacNeal utilise un produit de transformation non symétrique lors de la condensation de la sous-structure (voir paragraphe 2.4.4). Pour une sous-structure k , en adoptant une partition selon les ensembles i et j , la relation (3.47) définit la transformation de

droite $T_{MN_d}^k$:

$$\begin{bmatrix} y_j^k \\ y_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_j^k & R_{jj}^k & R_{je}^k \\ Y_i^k & R_{ij}^k & R_{ie}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^k \\ f_j^k \\ f_e^k \end{bmatrix} \triangleq T_{MN_d}^k \begin{bmatrix} c^k \\ f_j^k \\ f_e^k \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

La transformation de gauche $T_{MN_g}^k$ est constituée simplement de la base modale libre tronquée Y^k :

$$T_{MN_g}^k = Y^k \quad (3.49)$$

Modèle réduit associé

Après réduction effectuée par le produit des transformations de droite $T_{MN_d}^k$ et de gauche $T_{MN_g}^k$, on obtient la relation d'équilibre de la sous-structure réduite :

$$Y^{kT} [K^k - \omega^2 M^k] [Y^k c^k + R_j^k f_j^k + R_e^k f_e^k] = Y^{kT} [\hat{f}_j^k + \hat{f}_e^k] \quad (3.50)$$

Compte-tenu des relations d'orthogonalité (1.53) entre modes libres et résidus, cela nous conduit à :

$$[\Lambda^k - \omega^2 I^k] c^k = Y_j^{kT} f_j^k + Y_e^{kT} f_e^k \quad (3.51)$$

Assemblage de deux sous-structures

Le couplage des sous-structures par élimination des forces de liaison exploite les relations de compatibilité (2.21) et (2.22) ainsi que la relation de projection du mouvement des sous-structures (3.47) restreinte à l'ensemble j des degrés de liberté. Les efforts de jonction des sous-structures 1 et 2 sont exprimés par la relation :

$$f_j^1 = -f_j^2 = [R_{jj}^1 + R_{jj}^2]^{-1} [Y_j^2 c^2 + R_{je}^2 f_e^2 - Y_j^1 c^1 - R_{je}^1 f_e^1] \quad (3.52)$$

L'expression (3.52) introduite dans les relations (3.51) associées à chaque sous-structure nous donne l'équilibre du modèle réduit final :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \Lambda^1 + Y_j^{1T} \bar{R}_{jj}^{-1} Y_j^1 & -Y_j^{1T} \bar{R}_{jj}^{-1} Y_j^2 \\ -Y_j^{2T} \bar{R}_{jj}^{-1} Y_j^1 & \Lambda^2 + Y_j^{2T} \bar{R}_{jj}^{-1} Y_j^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I^1 & 0 \\ 0 & I^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} = C_e \begin{bmatrix} f_e^1 \\ f_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

où :

$$\left\| \begin{array}{l} \bar{R}_{jj} = R_{jj}^1 + R_{jj}^2 \\ C_e = \begin{bmatrix} Y_e^{1T} - Y_j^{1T} \bar{R}_{jj}^{-1} R_{je}^1 & Y_j^{1T} \bar{R}_{jj}^{-1} R_{je}^2 \\ Y_j^{2T} \bar{R}_{jj}^{-1} R_{je}^1 & Y_e^{2T} - Y_j^{2T} \bar{R}_{jj}^{-1} R_{je}^2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

3.2.2 Méthode de Rubin

La méthode de Rubin [65] dérive de la technique précédente avec l'emploi d'un résidu dynamique. L'effet des modes non pris en compte dans la base de projection de la sous-structure est approché par un développement au second ordre près de leur contribution dynamique (voir la relation (1.49)) :

$$Y_2 [\Lambda_2 - \omega^2 I_2]^{-1} Y_2^T \simeq Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T + \omega^2 Y_2 \Lambda_2^{-2} Y_2^T \quad (3.54)$$

$$= R + \omega^2 R_D \triangleq R_{Dy} \quad (3.55)$$

La partie dynamique du résidu R_{Dy} est définie par la relation (3.56) compte-tenu de la relation de norme (1.9) des vecteurs propres par rapport à la matrice masse :

$$R_D = Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T M Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T \quad (3.56)$$

$$= RMR \quad (3.57)$$

Soit l'expression du résidu dynamique :

$$R_{Dy} = R + \omega^2 RMR \quad (3.58)$$

Condensation de Rubin et modèle réduit associé

Les expressions des transformations et modèles réduits des sous-structures sont équivalentes à celles de la méthode de MacNeal ; il convient de considérer R_{Dy} en lieu et place du résidu statique R .

Les déplacements de la sous-structure k sont exprimés selon Rubin par la transformation de droite $T_{RU_d}^k$:

$$y^k = Y^k c^k + [R_f^k + \omega^2 R^k M^k R_f^k] f_f^k \triangleq T_{RU_d}^k \begin{bmatrix} c^k \\ f_f^k \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Assemblage de deux sous-structures

On effectue une approximation au second ordre près sur l'inverse de la somme des résidus dynamiques :

$$\overline{R}_{Dy_{jj}}^{-1} = [\overline{R}_{jj} + \omega^2 \overline{R}_{D_{jj}}]^{-1} \simeq \overline{R}_{jj}^{-1} - \omega^2 \overline{R}_{jj}^{-1} \overline{R}_{D_{jj}} \overline{R}_{jj}^{-1} \quad (3.60)$$

où :

$$\left\| \begin{array}{l} \overline{R}_{Dy_{jj}} = R_{Dy_{jj}}^1 + R_{Dy_{jj}}^2 \\ \overline{R}_{jj} = R_{jj}^1 + R_{jj}^2 \\ \overline{R}_{D_{jj}} = R_{D_{jj}}^1 + R_{D_{jj}}^2 \end{array} \right.$$

Afin de clarifier la présentation, on note :

$$\overline{R}_{Dy_{jj}}^{-1} = \overline{A}_{jj} - \omega^2 \overline{B}_{jj} \quad (3.61)$$

Après élimination des efforts de jonction à l'aide des équations de compatibilité (2.21) et (2.22), de la relation de projection du mouvement des sous-structures (3.59) et compte-tenu de l'approximation (3.60), le modèle réduit final satisfait l'équation d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \Lambda^1 + Y_j^{1T} \overline{A}_{jj} Y_j^1 & -Y_j^{1T} \overline{A}_{jj} Y_j^2 \\ -Y_j^{1T} \overline{A}_{jj} Y_j^2 & \Lambda^2 + Y_j^{2T} \overline{A}_{jj} Y_j^2 \end{array} \right] \\ -\omega^2 \left[\begin{array}{cc} I^1 + Y_j^{1T} \overline{B}_{jj} Y_j^1 & -Y_j^{1T} \overline{B}_{jj} Y_j^2 \\ -Y_j^{1T} \overline{B}_{jj} Y_j^2 & I^2 + Y_j^{2T} \overline{B}_{jj} Y_j^2 \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} = C_e(\omega^2) \begin{bmatrix} f_e^1 \\ f_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

où $C_e(\omega^2)$ est une matrice de couplage des forces extérieures :

$$C_e(\omega^2) = C_e^0 + \omega^2 C_e^1 + \omega^4 C_e^2$$

avec :

$$\left\| \begin{array}{l} C_e^0 = \left[\begin{array}{cc} Y_e^{1T} - Y_j^{1T} \overline{A}_{jj} R_{je}^1 & Y_j^{1T} \overline{A}_{jj} R_{je}^2 \\ Y_j^{2T} \overline{A}_{jj} R_{je}^1 & Y_e^{2T} - Y_j^{2T} \overline{A}_{jj} R_{je}^2 \end{array} \right] \\ C_e^1 = \left[\begin{array}{cc} Y_j^{1T} \overline{B}_{jj} R_{je}^1 - Y_j^{1T} \overline{A}_{jj} R_{Dje}^1 & Y_j^{1T} \overline{A}_{jj} R_{Dje}^2 - Y_j^{1T} \overline{B}_{jj} R_{je}^2 \\ Y_j^{2T} \overline{A}_{jj} R_{Dje}^1 - Y_j^{2T} \overline{B}_{jj} R_{je}^1 & Y_j^{2T} \overline{B}_{jj} R_{je}^2 - Y_j^{2T} \overline{A}_{jj} R_{Dje}^2 \end{array} \right] \\ C_e^2 = \left[\begin{array}{cc} Y_j^{1T} \overline{B}_{jj} R_{Dje}^1 & -Y_j^{1T} \overline{B}_{jj} R_{Dje}^2 \\ -Y_j^{2T} \overline{B}_{jj} R_{Dje}^1 & Y_j^{2T} \overline{B}_{jj} R_{Dje}^2 \end{array} \right] \end{array} \right\|$$

Cette technique de synthèse modale est plus précise que la méthode de MacNeal du fait de l'emploi d'un résidu enrichi d'un terme dynamique. Cela se traduit par la présence de termes de couplage dans la matrice masse du modèle réduit.

Ces deux techniques sont délicates à mettre en oeuvre et les procédures d'assemblage difficiles à systématiser. La technique de couplage par élimination induit également un phénomène de couplage des efforts appliqués entre les sous-structures.

Chapitre 4

Condensation adaptée au recalage et à l'optimisation de modèle

On aborde dans ce chapitre la notion de robustesse des bases de réduction d'un modèle vis-à-vis de perturbations paramétriques, la description géométrique du modèle et sa connectivité étant supposées figées. En effet, disposer d'une base de réduction capable de représenter le mouvement d'un modèle perturbé est primordial dans des procédures itératives de recalage ou d'optimisation : une telle base autorise des réanalyses approchées rapides et économiques en terme de calculs. Les techniques de réanalyse de système modifié ont fait l'objet de nombreuses recherches au L.M.A.R.C. : on se réfère pour plus de détails aux travaux de Aitrimouch [1], Berthod [10], Bouazzouni [11] et Cogan [23].

Les résultats les plus significatifs proviennent de l'usage d'une base modale tronquée enrichie de réponses statiques résiduelles dues à des chargements représentatifs des perturbations du système. On généralise l'emploi de cette base enrichie, dans une approche de type condensation, adaptée à la prédiction de réponses fréquentielles et permettant l'obtention d'un modèle réduit en coordonnées physiques.

L'influence du découplage des effets de paramètres physiques intervenant non-linéairement sur les matrices d'état est abordée.

Une stratégie de réduction à plusieurs niveaux est présentée dans le cadre spécifique d'une procédure itérative de recalage basée sur un résidu fréquentiel sur les entrées développée par Berriet [8], Schiavone [68] et Osmani [60]. Les performances de la méthode sont illustrées sur un modèle industriel.

Enfin, les procédures d'enrichissement des bases de réduction par des résidus statiques "utiles" sont formulées dans le cadre des techniques de synthèse modale.

Afin de compléter la présentation, on signale les travaux de Balmes [4] et Grihon [35] qui exploitent des techniques de réanalyse du même ordre.

4.1 Principe et applications

Les procédures de recalage ou d'optimisation de modèle nécessitent des étapes de réanalyse du modèle modifié. Pour des structures de grande taille, on ne peut envisager des extractions modales ou des prédictions de réponses fréquentielles directes, répétées à chaque modification du modèle : le coût de calcul associé est souvent dissuasif.

Une solution plus économique réside dans l'emploi de techniques de réanalyse approchée sur bases réduites au cours des itérations des procédures de correction paramétrique. La base de réduction T_{RO} est choisie de manière à représenter le mouvement du système initial d'impédance Z et du système soumis à des modifications paramétriques ΔZ données : la nature et la localisation de ces perturbations sont prédéfinies mais les amplitudes sont inconnues.

4.1.1 Réanalyse approchée sur base réduite

Le modèle est condensé initialement par la base de réduction T_{RO} :

$$Z_C = T_{RO}^T Z T_{RO} \quad (4.1)$$

La réanalyse approchée du système modifié à l'étape l du processus de correction paramétrique est réalisée sur le système modifié réduit Z_C^l défini par la relation :

$$Z_C^l = Z_C^{l-1} + \Delta Z_C^{l-1} \quad (4.2)$$

où $\Delta Z_C^{l-1} = T_{RO}^T \Delta Z^{l-1} T_{RO}$ et ΔZ^{l-1} est la correction d'impédance issue de l'étape $l - 1$ du processus.

En fin de procédure, on effectue généralement une réanalyse exacte du système recalé ou optimisé afin de s'assurer de la pertinence du comportement prédit de manière approchée. Lorsque le modèle subit de fortes modifications paramétriques, on doit envisager l'usage d'une ou deux réanalyses exactes supplémentaires au cours du processus itératif, la transformation T_{RO} étant réactualisée de fait.

4.1.2 Paramétrisation du modèle

La première étape d'une procédure de correction paramétrique consiste à fixer, estimer ou localiser les zones modifiables du modèle et à leur associer des paramètres de

correction. On parle de paramétrisation du modèle. Il s'agit de définir des ensembles d'éléments, ou macro-éléments, regroupant des éléments finis possédant des propriétés matérielles et/ou géométriques communes.

On définit une correction paramétrique de l'impédance Z du modèle selon l'expression :

$$\Delta Z = \Delta K + j\omega \Delta B - \omega^2 \Delta M \quad (4.3)$$

En introduisant la notion de macro-éléments :

$$\left\| \begin{aligned} K^{mac} &= \sum_{e=1}^{nelem} K_e^{elem} \\ B^{mac} &= \sum_{e=1}^{nelem} B_e^{elem} \\ M^{mac} &= \sum_{e=1}^{nelem} M_e^{elem} \end{aligned} \right. \quad (4.4)$$

on écrit la relation (4.3) sous la forme :

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^{np} [K_i^{mac}(\Delta p_i) + j\omega B_i^{mac}(\Delta p_i) - \omega^2 M_i^{mac}(\Delta p_i)] \quad (4.5)$$

où Δp_i représente la variation du paramètre de conception p_i à déterminer.

En général, les paramètres p_i interviennent non-linéairement dans les matrices de correction des macro-éléments. Il est possible de factoriser ces matrices sous la forme suivante :

$$Z_i^{mac}(p_i) = \sum_{\alpha} (p_i)^{\alpha} Z_{i\alpha}^{mac} \quad (4.6)$$

soit pour une variation du paramètre p_i :

$$Z_i^{mac}(\Delta p_i) = \Delta p_i \sum_{\alpha} \alpha (p_i)^{\alpha-1} Z_{i\alpha}^{mac} \quad (4.7)$$

Afin de s'affranchir des problèmes de conditionnement dans la résolution du problème de correction, on utilise des coefficients de correction adimensionnels : la relation (4.7) devient :

$$Z_i^{mac}(\Delta p_i) = \frac{\Delta p_i}{p_i} \sum_{\alpha} \alpha (p_i)^{\alpha} Z_{i\alpha}^{mac} \quad (4.8)$$

4.1.3 Principe de la méthode

L'équilibre dynamique du système modifié, soumis à des sollicitations dynamiques sur l'ensemble e des degrés de liberté, s'écrit :

$$[Z(\omega) + \Delta Z(\omega)] y(\omega) = \widehat{f}_e(\omega) \quad (4.9)$$

En introduisant la notion de forces dynamiques $f_{\Delta}(\omega)$ associées aux modifications $\Delta Z(\omega)$ du modèle, la relation (4.9) est "équivalente" à l'équilibre dynamique du modèle initial soumis aux sollicitations $\widehat{f}_e(\omega)$ et $f_{\Delta}(\omega)$:

$$Z(\omega)y(\omega) = \widehat{f}_e(\omega) + f_{\Delta}(\omega) \quad (4.10)$$

avec :

$$f_{\Delta}(\omega) = -\Delta Z(\omega)y(\omega) \quad (4.11)$$

La réponse dynamique du système modifié s'exprime par superposition modale sur une base tronquée Y des modes libres du système initial enrichie de résidus statiques R telle que :

$$y(\omega) \simeq Yc(\omega) + R \left[\widehat{f}_e(\omega) + f_{\Delta}(\omega) \right] \quad (4.12)$$

La base de réduction T_{RO} commune aux systèmes initial et modifié est construite à l'aide de la base libre tronquée Y du système initial, des résidus statiques R_e au droit des degrés de liberté sollicités (ensemble e) et des résidus statiques associés à une suite de chargements statiques F_{Δ} représentatifs des modifications ΔZ :

$$T_{RO} = \left[\begin{array}{ccc} Y & R_e & R_{\Delta} \end{array} \right] \quad (4.13)$$

4.2 Détermination des réponses statiques résiduelles

4.2.1 Expression de la force due aux modifications

D'après la relation (4.11), le vecteur d'effort $f_{\Delta}(\omega)$ associé aux modifications $\Delta Z(\omega)$ dépend de la réponse du système modifié $y(\omega)$.

En première approximation, on peut approcher cette réponse $y(\omega)$ par la réponse du système initial $y_I(\omega)$ développée sur la base tronquée de modes libres Y enrichie des résidus statiques R_e :

$$y(\omega) \simeq y_I(\omega) \quad (4.14)$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cc} Y & R_e \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} c(\omega) \\ \widehat{f}_e(\omega) \end{array} \right] \quad (4.15)$$

Cela nous conduit à l'expression $f_{\Delta}^0(\omega)$ de la force associée aux modifications :

$$f_{\Delta}^0(\omega) = -\Delta Z(\omega)y_I(\omega) \quad (4.16)$$

Une seconde approximation consiste à effectuer un premier calcul de souplesse associée aux forces d'erreur $f_{\Delta}^0(\omega)$; la réponse du système modifié $y(\omega)$ est approchée

au moyen de la relation (4.18) :

$$y(\omega) \simeq y_*(\omega) \quad (4.17)$$

$$\simeq S_f f_f(\omega) - S \Delta Z(\omega) \begin{bmatrix} Y & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\omega) \\ \widehat{f}_e(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Ainsi, on obtient l'expression $f_\Delta^1(\omega)$ de la force associée aux modifications paramétriques ΔZ , correspondant à un itéré de $f_\Delta^0(\omega)$:

$$f_\Delta^1(\omega) = -\Delta Z(\omega) y_*(\omega) \quad (4.19)$$

Il est possible de formuler par le même procédé les expressions du vecteur force de modification $f_\Delta^k(\omega)$ à un ordre k supérieur par simple itération.

4.2.2 Base de forces associée aux modifications

Il s'agit de générer une base de forces F_Δ représentative du sous-espace associé à l'ensemble des modifications potentielles à partir des relations (4.16) ou (4.19). Afin de simplifier la suite de l'exposé, on retient l'hypothèse définie dans la relation (4.16).

Sous-base de forces F_{Δ_i} de modification associée à un paramètre p_i

Pour chaque paramètre p_i , on calcule une sous-base F_{Δ_i} de forces associée. On néglige les modifications d'amortissement ΔB . Pour un paramètre p_i intervenant linéairement dans les matrices de masse et de raideur, la sous-base F_{Δ_i} est définie par l'expression :

$$F_{\Delta_i} = \begin{bmatrix} F_{\Delta_i}^K & F_{\Delta_i}^M \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

avec :

$$\left\| \begin{array}{l} F_{\Delta_i}^K = K_i^{mac} \begin{bmatrix} Y & R_e \end{bmatrix} \\ F_{\Delta_i}^M = M_i^{mac} \begin{bmatrix} Y & R_e \end{bmatrix} \end{array} \right\| \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda_{ee}^* \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

où les résidus R_e sont normalisés tels que :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{diag}(R_e^T M R_e) = \text{diag}(I_{ee}) \\ \text{diag}(R_e^T K R_e) = \text{diag}(\Lambda_{ee}^*) \end{array} \right\| \quad (4.22)$$

Dans le cas d'un paramètre non-linéaire défini dans la relation (4.6), il convient de découpler chaque effet associé à une puissance α et construire autant de sous-matrices $F_{\Delta_i}^\alpha$.

Dans l'hypothèse définie par la relation (4.19), la détermination de la sous-base F_{Δ_i} nécessite un calcul statique supplémentaire.

Réduction de la sous-base de forces F_{Δ_i}

La sous-base F_{Δ_i} n'est pas nécessairement de rang maximum. De plus, dans un souci d'économie de calcul et de manière à obtenir un nombre limité de résidus R_{Δ} , il convient de sélectionner les directions prépondérantes de chaque sous-base F_{Δ_i} . Pour ce faire, on effectue une décomposition en valeurs singulières (DVS) sur chacune des matrices $F_{\Delta_i}^K$ et $F_{\Delta_i}^M$.

Le détail de cette décomposition est rappelé dans l'annexe B.

Ainsi, la matrice rectangulaire $F_{\Delta_i}^K \in R^{Nn}$ ($n = m$ modes + e résidus) se décompose sous la forme suivante :

$$F_{\Delta_i}^K = \underset{(Nn)}{U} \underset{(Nn)(nm)(nn)}{\Sigma} \underset{(nm)(nn)}{V}^T \quad (4.23)$$

où U et V sont deux matrices réelles orthonormales et Σ est une matrice diagonale composée des n valeurs singulières de $F_{\Delta_i}^K$.

En ordonnant les valeurs singulières par ordre décroissant et suite à un découpage matriciel, la relation (4.23) s'écrit :

$$F_{\Delta_i}^K = \underset{(Nn_1)(n_1 n_1)(n_1 n)}{U_1} \underset{(n_1 n_1)}{\Sigma_1} \underset{(n_1 n)}{V_1}^T + \underset{(Nn_2)(n_2 n_2)(n_2 n)}{U_2} \underset{(n_2 n_2)}{\Sigma_2} \underset{(n_2 n)}{V_2}^T \quad (4.24)$$

où Σ_1 comporte les n_1 plus grandes valeurs singulières.

On obtient alors la réduction $\tilde{F}_{\Delta_i}^K$ recherchée de la sous-base $F_{\Delta_i}^K$, correspondant aux directions associées aux plus grandes valeurs singulières :

$$\tilde{F}_{\Delta_i}^K = F_{\Delta_i}^K V_1 \quad (4.25)$$

$$= U_1 \Sigma_1 \quad (4.26)$$

Les matrices Σ_1 et V_1 sont obtenues à partir de la résolution d'un problème aux valeurs propres de taille n . Le choix du nombre n_1 de valeurs singulières, et donc du nombre de colonnes à retenir, est fixé arbitrairement ou dépend d'un ratio associé à un conditionnement seuil $(\sigma_1^2/\sigma_{n_1}^2) \leq C_{seuil}$ [10].

Le filtrage défini dans les relations (4.25) ou (4.26) préserve la norme de la sous-base retenue. Ceci est utile dans la suite de la procédure afin de privilégier les modifications qui induisent une forte perturbation du système.

Concaténation des sous-bases de forces

On construit la base de forces F_{Δ} représentative de l'ensemble des modifications ΔZ potentielles par concaténation, soit pour p paramètres linéaires :

$$F_{\Delta} = \left[\tilde{F}_{\Delta_1}^K \quad \tilde{F}_{\Delta_i}^M \quad \dots \quad \tilde{F}_{\Delta_p}^K \quad \tilde{F}_{\Delta_p}^M \right] \quad (4.27)$$

On note que la matrice F_{Δ} présente un caractère creux.

4.2.3 Base de résidus associée aux modifications

Calcul des résidus statiques

Les résidus sont calculés de manière classique (paragraphe 2.6.2), la flexibilité étant filtrée si nécessaire :

$$R_{\Delta}^* = SF_{\Delta} - Y_D \Lambda_D^{-1} Y_D^T F_{\Delta} \quad (4.28)$$

Traitement de la base de résidus

On peut appliquer une décomposition en valeurs singulières à la matrice de résidus R_{Δ}^* afin de garantir une parfaite indépendance linéaire des colonnes de la matrice, selon une procédure analogue à celle décrite dans les relations (4.23) à (4.26) :

$$R_{\Delta}^* \simeq U_1 \Sigma_1 V_1^T \quad (4.29)$$

On obtient la base de résidus \tilde{R}_{Δ} filtrée et réduite :

$$\tilde{R}_{\Delta} = R_{\Delta}^* V_1 \quad (4.30)$$

Les résidus obtenus sont normalisés par rapport à la masse du système initial et constituent la matrice de résidus R_{Δ} recherchée :

$$diag(R_{\Delta}^T M R_{\Delta}) = diag(I_{\Delta\Delta}) \quad (4.31)$$

La base de réduction T_{RO} définie par la relation (4.13) est alors de rang maximum et son conditionnement est faible.

On peut également envisager un traitement numérique des vecteurs résiduels par une procédure d'orthogonalisation : dans ce cas, on conserve la totalité des vecteurs statiques calculés.

4.3 Réductions multiples dans l'objectif de recalage de modèles de grande taille

On présente dans ce paragraphe une stratégie de réduction à plusieurs niveaux, adaptée à une procédure de recalage de modèle éléments finis industriel. Cette procédure est basée sur l'utilisation d'un résidu sur les entrées et nécessite l'adaptation de la taille du modèle à la taille des données observées sur la structure [8], [60], [68].

4.3.1 Adaptation du modèle aux données observées

Cette adaptation est réalisée en deux étapes dans le cas d'un modèle de grande taille. Une première réduction par condensation ou synthèse modale permet l'obtention d'un modèle réduit d'impédance Z_1 de niveau 1 de quelques centaines de degrés de liberté, en coordonnées physiques (ou mixtes) :

$$Z_1 = T_1^T Z T_1 \quad (4.32)$$

L'emploi de bases de réduction robustes T_1 au niveau 1, aptes à représenter les déplacements du modèle corrigé, autorise une réactualisation du modèle à ce niveau de réduction illustrée par la relation (4.2). Ce modèle réactualisé est réanalysé à chaque itération du processus : les modes propres et les réponses statiques résiduelles nécessaires sont calculés et constituent les vecteurs de la base de réduction T_2 de niveau 2.

La seconde réduction fournit un modèle réduit de niveau 2 de la taille des degrés de liberté instrumentés, en coordonnées physiques :

$$Z_2 = T_2^T Z_1 T_2 \quad (4.33)$$

La dimension de la base de condensation T_2 dépend du nombre o de positions des observations réalisées sur la structure. Généralement, ce nombre o est inférieur au nombre de vecteurs statiques résiduels nécessaires à l'obtention d'une base T_2 suffisamment robuste. Cela justifie la réactualisation de la base de condensation T_2 à chaque itération l du processus de recalage à partir du modèle réduit Z_1^l de niveau 1.

4.3.2 Formulation du problème de recalage

L'équilibre dynamique du modèle initial s'écrit :

$$Z^m(\omega)y^m(\omega) = f^m(\omega) \quad (4.34)$$

L'équilibre dynamique de la structure est régi par une relation analogue :

$$Z^s(\omega)y^s(\omega) = f^s(\omega) \quad (4.35)$$

où l'on exprime l'impédance Z^s de la structure par la relation :

$$Z^s = Z^m + \Delta Z^m \quad (4.36)$$

On définit un résidu ε sur les grandeurs d'entrée tel que :

$$\varepsilon(\omega) = f^s(\omega) - f^m(\omega) \quad (4.37)$$

$$= \Delta Z^m(\omega)y^s(\omega) - Z^m(\omega)(y^m(\omega) - y^s(\omega)) \quad (4.38)$$

Le modèle initial est réduit au niveau 1 (relation (4.32)). La structure étant partiellement observée, on formule le résidu ε (4.38) au niveau 2 par réduction des matrices d'impédance Z_1^m et de correction ΔZ_1^m sur les degrés de liberté y_o^m instrumentés (relation (4.33)).

L'expression de la matrice de transformation résultant des deux réductions appliquées est définie par les relations :

$$\begin{bmatrix} y_o^m \\ y_{no}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{oo} \\ T_{no}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_o^m \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$= T^m y_o^m \quad (4.40)$$

où $T^m = T_1 T_2$.

Le résidu ε (4.38) à minimiser, formulé au niveau 2, devient :

$$\varepsilon_2(\omega) = \Delta Z_2^m(\omega) y_o^s(\omega) - Z_2^m(\omega) (y_o^m(\omega) - y_o^s(\omega)) \quad (4.41)$$

où :

$$\begin{cases} Z_2^m = T_2^T T_1^T Z^m T_1 T_2 \\ \Delta Z_2^m = T_2^T T_1^T \Delta Z^m T_1 T_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

Afin de minimiser l'influence des incertitudes de mesure sur la solution ΔZ_2^m de (4.41), il convient de filtrer le résidu ε_2 à l'aide de la souplesse dynamique du modèle réduit au niveau 2 :

$$\tilde{\varepsilon}_2(\omega) = Z_2^m(\omega)^{-1} \varepsilon_2(\omega) \quad (4.43)$$

Le problème (4.41) peut être condensé à un niveau 3, sur une base T_3 commune aux données modèle et structure. On construit cette transformation T_3 à partir d'une décomposition en valeurs singulières de réponses statiques et de vecteurs propres du modèle condensé Z_2^m au niveau 2, et de réponses fréquentielles mesurées.

Un filtrage du type de celui défini par la relation (4.43) est alors réalisé au niveau 3.

On présente Figure 4.1 un schéma descriptif de la procédure de réduction à 3 niveaux adoptée dans le cadre d'un recalage exploitant un résidu basé sur les entrées.

La fonction coût associée à ce type résidu est quadratique. Le problème de recalage est quasi-linéaire vis-à-vis des paramètres de correction sous l'hypothèse d'une condensation robuste.

Le problème obtenu est de taille réduite. Il autorise des séries de résolutions effectuées à l'aide de mesures aléatoirement bruitées. Un traitement statistique des résultats obtenus, en terme de dispersion des solutions paramétriques, permet une localisation des paramètres effectifs. La solution paramétrique terminale est obtenue dans

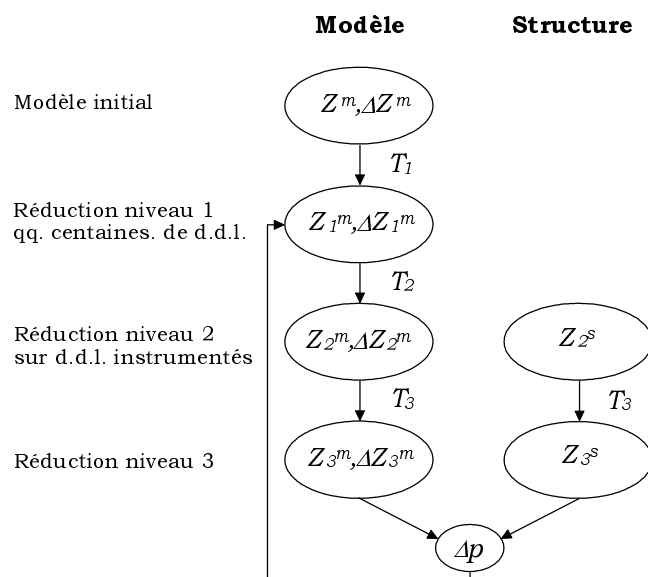


Figure 4.1 : Recalage de modèle : réduction à 3 niveaux

la moyenne des solutions générées à l'aide des résolutions réalisées avec les paramètres effectifs.

L'ensemble de ces procédures est présenté en détail dans [8] [60] [67] [68].

4.4 Application sur un modèle de portière de véhicule

On propose l'illustration de la méthode dans le cadre du recalage d'un modèle de portière de véhicule. L'objectif est de disposer d'un modèle réduit paramétré, obtenu par une condensation de niveau 1, robuste et capable de représenter correctement les 20 premiers modes déformables de la structure compris dans une bande fréquentielle [0-200] Hz pour différents états paramétriques.

4.4.1 Caractéristiques du modèle

La structure est représentative des difficultés de modélisation des structures complexes. Elle est constituée de l'assemblage d'un panneau renforcé d'une doublure fortement nervurée et découpée, et de pièces de renforts au niveau des charnières et anti-chocs. L'assemblage est réalisé principalement par collage, pliage et sertissage et par quelques points de soudure.

On présente Figures 4.2 et 4.3 la structure instrumentée en configuration suspendue.

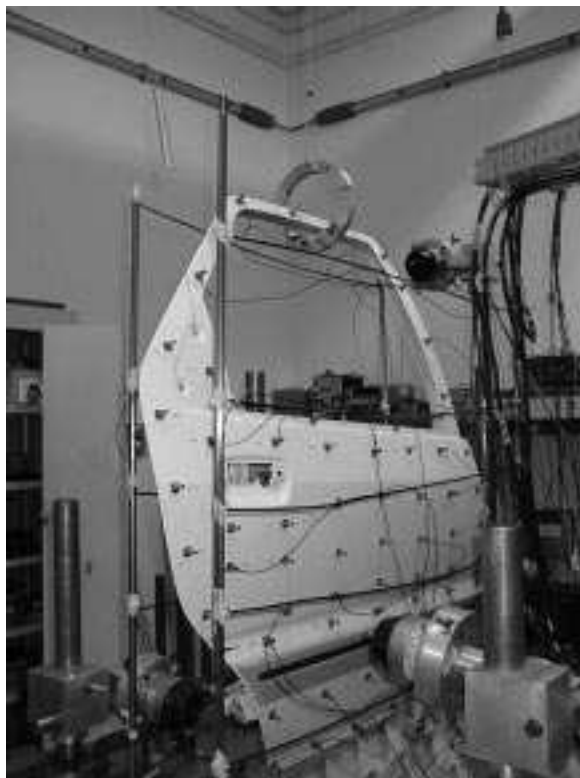


Figure 4.2 : Portière instrumentée (Panneau)

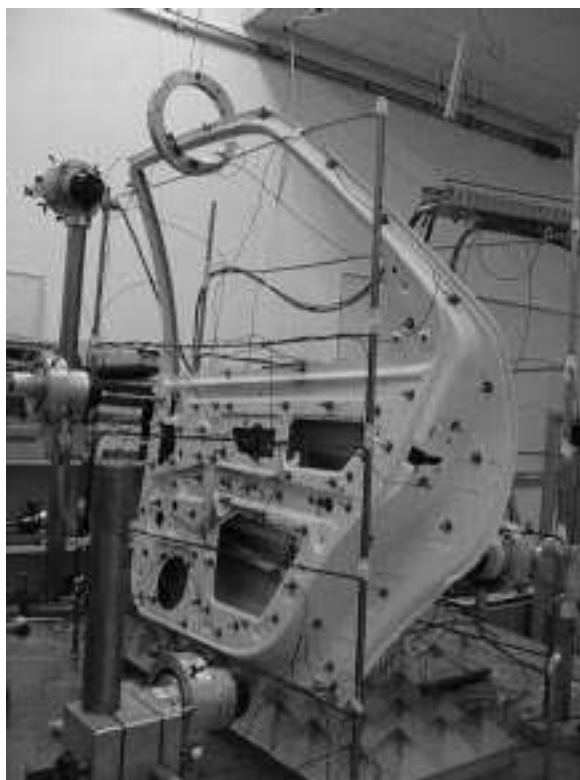


Figure 4.3 : Portière instrumentée (Doublure)

Le modèle de la structure comporte 30 000 degrés de liberté (Figure 4.4). Les éléments utilisés sont de types coque triangle et quadrangle, poutre, biellette rigide, masse ponctuelle et non structurelle.

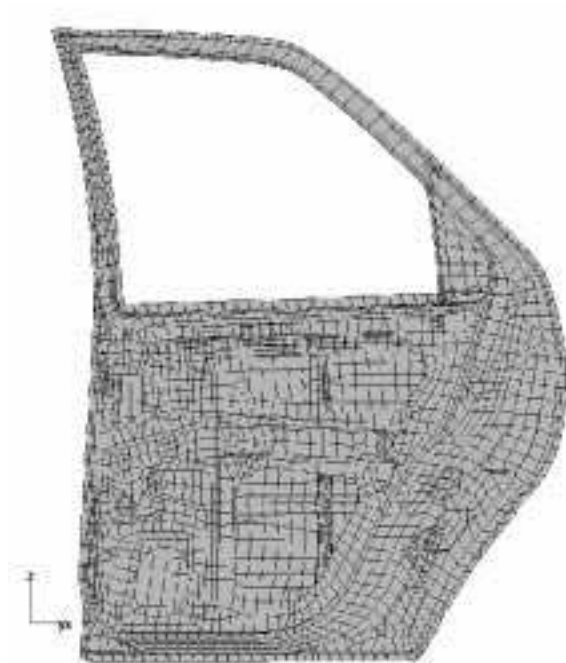


Figure 4.4 : Modèle éléments finis de la portière de véhicule

4.4.2 Paramétrage du modèle

Afin de valider la technique, on simule le comportement de la structure réelle par des perturbations connues de zones du modèle initial dont la modélisation est supposée erronée.

Deux niveaux de perturbations sont appliqués : un niveau faible représentatif des corrections admissibles et un niveau plus élevé afin de chercher les limites de la méthode.

On définit 23 zones paramétrées : 13 en épaisseur et 10 en module de Young (Figure 4.5) comprenant les zones nervurées, les zones de plis (contour) et renforcées.

4.4.3 Base de réduction employée

La base de réduction est construite à l'aide de 36 modes libres, 4 vecteurs de résidus statiques associés aux points d'excitation de la structure et 340 vecteurs de résidus associés aux zones définies.

La taille du modèle réduit de niveau 1 est de 380 degrés de liberté.

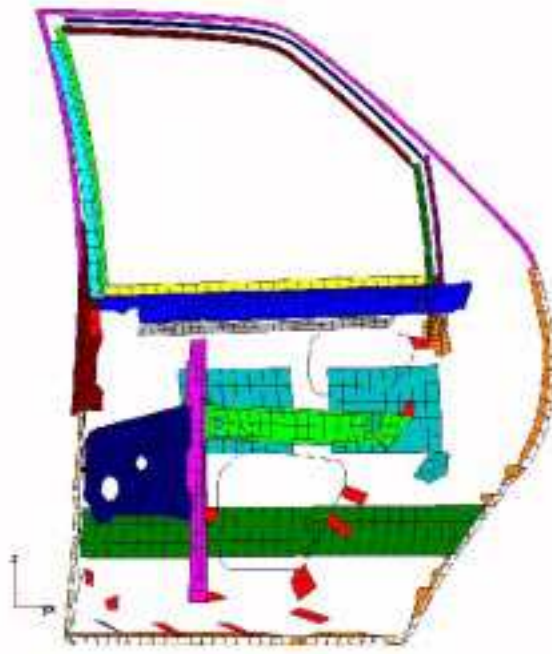


Figure 4.5 : Zones paramétrées du modèle (Portière de véhicule)

La base de forces $f_{\Delta}^0(\omega)$ associée aux modifications a été calculée à l'aide de la relation (4.16) dans laquelle les déplacements de la structure perturbée sont approchés à l'aide du modèle initial au moyen d'une base de 50 modes libres (dont les 6 modes rigides) et des 4 vecteurs de résidus statiques d'excitation. On signale que les tests effectués à l'aide d'une base de forces calculées au second ordre par la relation (4.19) donne des résultats analogues dans la configuration présentée.

Concernant les zones paramétrées en épaisseur, on procède au découplage des effets de membrane, de flexion et de cisaillement. On retient 24 vecteurs de forces d'erreur pour chacune des 13 zones de type épaisseur, soit 8 vecteurs pour l'effet de membrane, 8 vecteurs pour l'effet de flexion-cisaillement et 8 vecteurs associés à l'effet de masse. Les zones associées au module de Young font l'objet de 10 vecteurs de forces. Après calcul des réponses statiques résiduelles associées à la base de forces d'erreur, on retient 340 vecteurs résiduels après le filtrage décrit dans le paragraphe 4.2.3.

A titre de comparaison, on présente parallèlement les résultats obtenus à partir d'un modèle réduit de taille identique, construit à l'aide d'une base modale libre de 380 vecteurs.

4.4.4 Résultats obtenus lors de faibles perturbations

Distance modèle initial / modèle perturbé

Les zones paramétrées font l'objet de perturbations arbitrairement choisies ; certaines zones sont assouplies et d'autres raidies. Les valeurs nominales des modules de Young sont multipliées par 0.5 ou 2. Les valeurs nominales des épaisseurs sont multipliées par 0.8 ou 1.3.

On présente Figure 4.6 la distance en forme entre les 30 premiers vecteurs propres déformables des modèles non condensés initiaux et perturbés, à l'aide du critère d'assurance modale (Mac) défini par la relation :

$$Mac_{\sigma\nu} = \frac{(y_{\sigma}^T y_{\nu})^2}{\|y_{\sigma}\|^2 \|y_{\nu}\|^2} \quad (4.44)$$

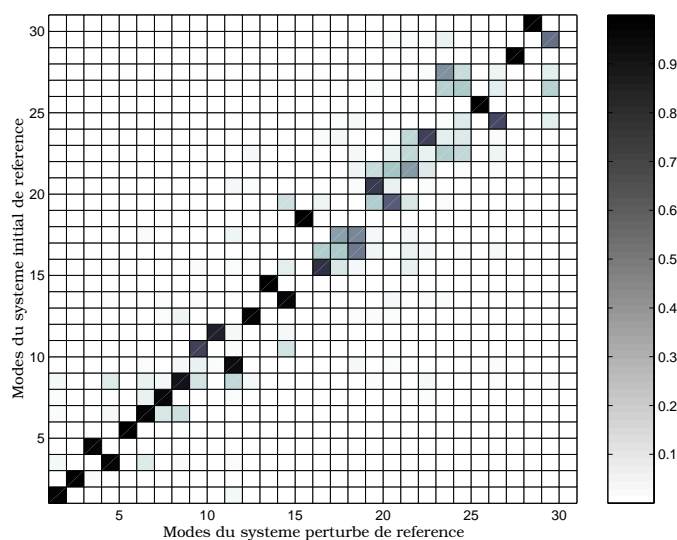


Figure 4.6 : Distance en forme des vecteurs propres issus des modèles initial et perturbé (faible perturbation) (Portière de véhicule)

Résultats modaux

Les vecteurs propres calculés à partir du modèle réduit perturbé sont expansés à l'aide de la base de réduction initiale (obtenue à l'aide du modèle non perturbé) puis comparés aux vecteurs propres obtenus à partir du modèle perturbé de référence. La base employée est constituée de 380 modes libres. On illustre Figure 4.7 la distance en forme (relation (4.44)) entre ces vecteurs.

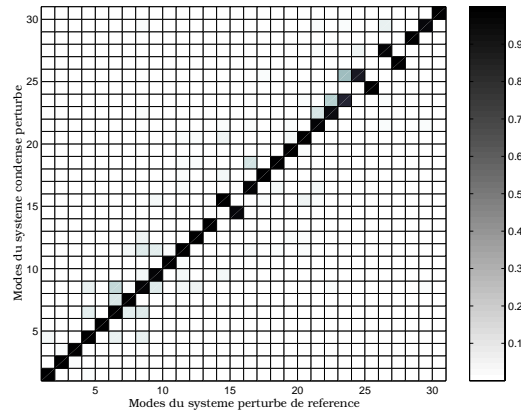


Figure 4.7 : Base de 380 modes : distance en forme entre les vecteurs propres issus du modèle perturbé de référence et prédits par le modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)

De même, on présente Figure 4.8 la distance en forme entre les vecteurs obtenus par le même procédé lors de l'usage de la base comportant les résidus statiques associés aux forces d'erreur.

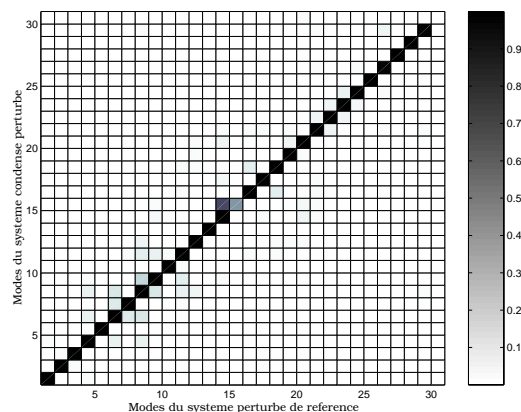


Figure 4.8 : Base de 36 modes et 344 résidus statiques : distance en forme entre les vecteurs propres issus du modèle perturbé de référence et prédits par le modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)

Afin de chiffrer l'erreur de prédiction réalisée en exploitant le modèle réduit, on présente également Figure 4.9 les erreurs relatives sur les fréquences propres ε_f et sur les vecteurs propres ε_y (définies par les relations (4.45) et (4.46)) :

$$\varepsilon_f = \frac{|f_C - f_{exact}|}{f_{exact}} \quad (4.45)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\|y_C - y_{exact}\|}{\|y_{exact}\|} \quad (4.46)$$

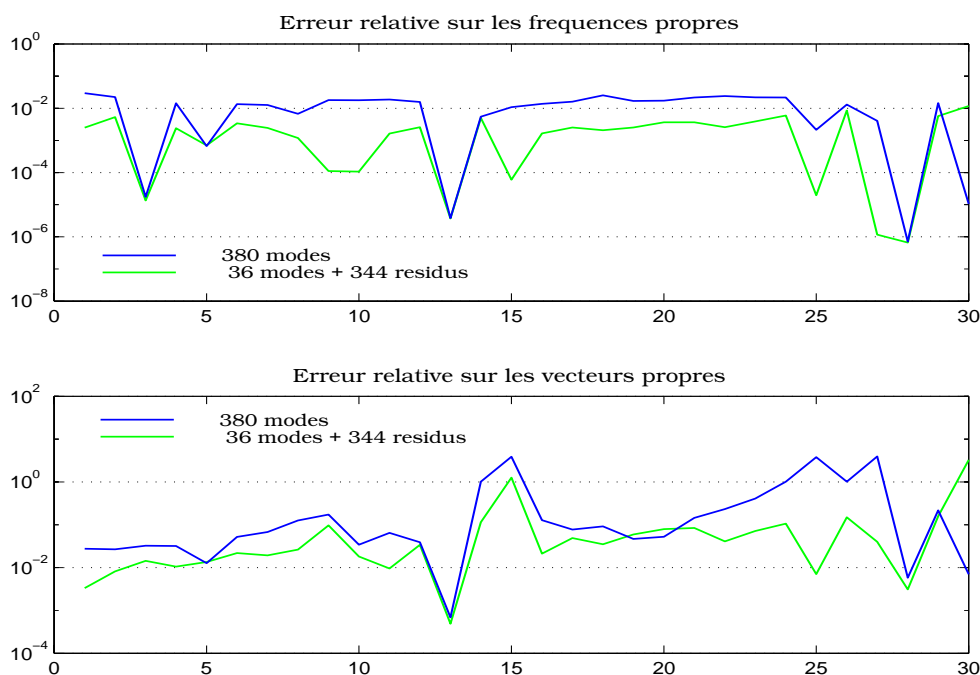


Figure 4.9 : Erreur relative sur les solutions propres prédites par les modèles condensés perturbés vis-à-vis du modèle perturbé de référence (Portière de véhicule)

Les formes des vecteurs propres prédits par les modèles condensés sont cohérentes avec la référence (Figures 4.7 et 4.8). La Figure 4.9 nous montre que les prédictions modales obtenues à l'aide du modèle réduit par la base modale enrichie de réponses statiques résiduelles sont les plus proches de la référence : l'erreur relative est inférieure à 1% sur les fréquences, est inférieure à 10% sur les vecteurs propres excepté pour le 15ème mode qui correspond à un mode local, non représentable sur la base de réduction.

Résultats fréquentiels

On présente Figures 4.10 et 4.11 deux fonctions de réponse fréquentielle en amplitude prédites par le modèle réduit perturbé (base de modes et résidus statiques) vis-à-vis des références établies à partir des modèles initial et perturbé.

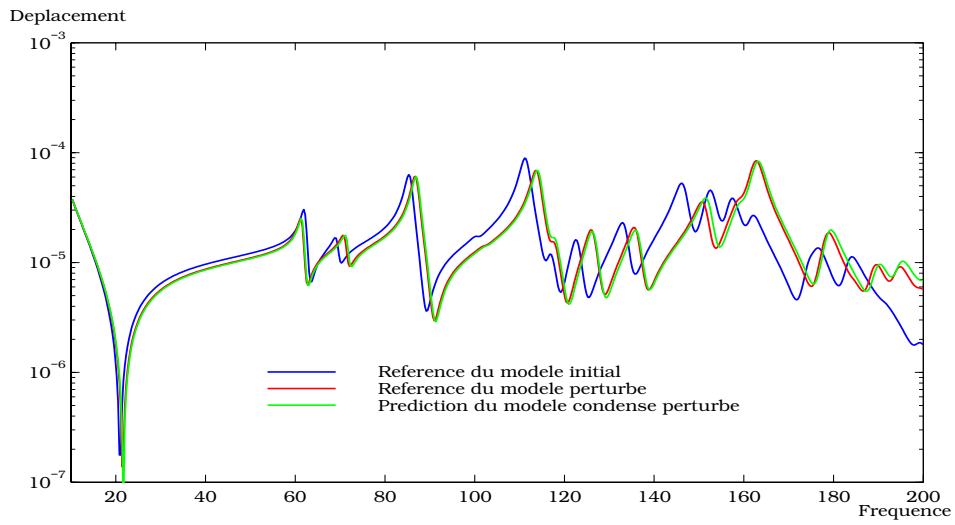


Figure 4.10 : Qualité de prédiction d'une réponse fréquentielle (au droit d'une excitation) à partir du modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)

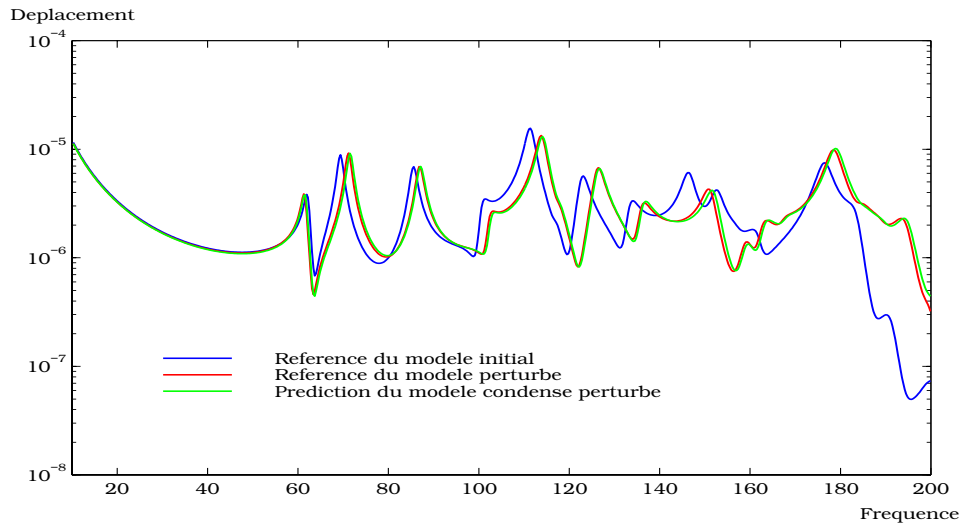


Figure 4.11 : Qualité de prédiction d'une réponse fréquentielle à partir du modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)

Les termes dissipatifs sont introduits sous la forme d'amortissements modaux de coefficient réduit d'une valeur de 1%.

On obtient une prédiction correcte des réponses dans la bande de fréquences d'analyse. Des tests additionnels ont démontré l'utilité d'inclure les termes statiques au droit des excitations en supplément des modes propres (relation (4.15)) lors de la détermination des forces d'erreur dans le cadre de réanalyses fréquentielles.

4.4.5 Résultats obtenus lors de fortes perturbations

Distance modèle initial / modèle perturbé

Les valeurs nominales des modules de Young sont multipliées par 0.2 ou 5. Les valeurs nominales des épaisseurs sont multipliées par 0.5 ou 1.5. La Figure 4.12, correspondant à la distance en forme (relation (4.44)) entre les 30 premiers vecteurs propres déformables des modèles non condensés initiaux et perturbés, illustre la nature élevée du niveau de la perturbation appliquée.

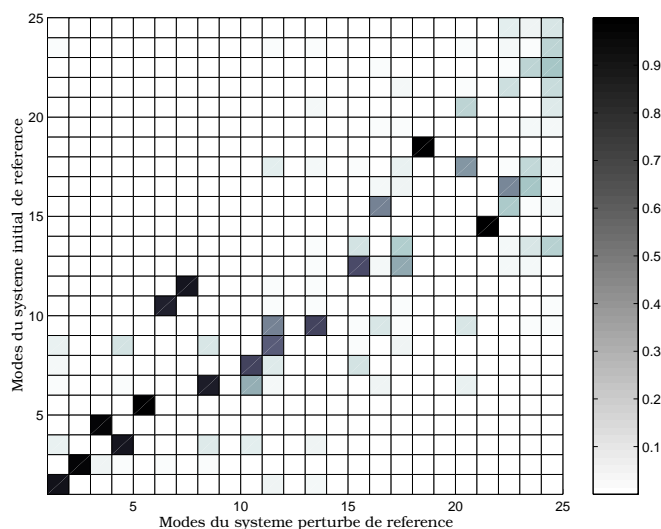


Figure 4.12 : Distance en forme des vecteurs propres issus des modèles initial et perturbé (forte perturbation) (Portière de véhicule)

A titre indicatif, l'écart entre les résultats modaux identifiés sur la structure réelle et les modes du modèle est du même ordre de grandeur.

Résultats modaux

Après expansion, les vecteurs propres issus des modèles réduits perturbés sont comparés aux modes du système perturbé de référence: on visualise Figures 4.13 et 4.14 les

distances en forme entre ces vecteurs.

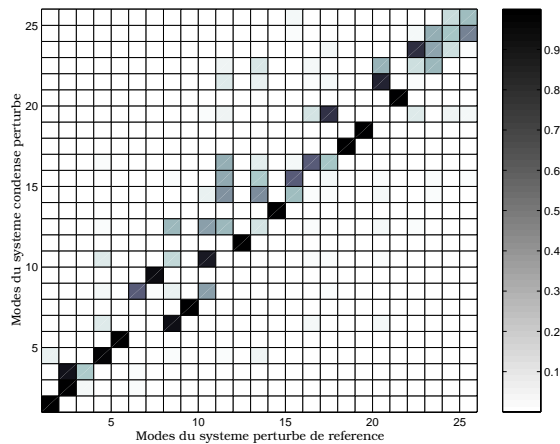


Figure 4.13 : Base de 380 modes : distance en forme entre les vecteurs propres issus du modèle perturbé de référence et prédits par le modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)

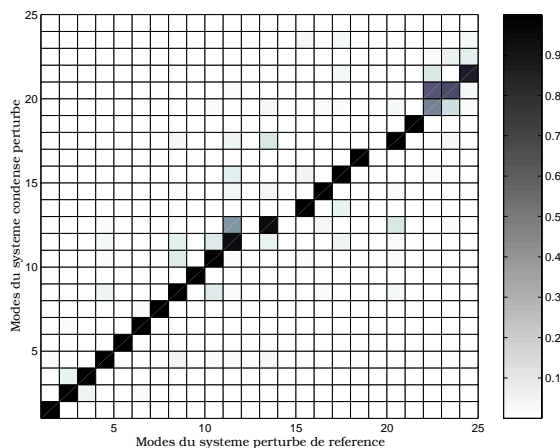


Figure 4.14 : Base de 36 modes et 344 résidus statiques : distance en forme entre les vecteurs propres issus du modèle perturbé de référence et prédits par le modèle condensé perturbé (Portière de véhicule)

Malgré le niveau élevé de la perturbation appliquée, le modèle condensé à l'aide de la base de modes enrichis par des résidus statiques, autorise une excellente prédiction des 11 premières solutions propres sans aucun croisement de modes. Les erreurs relatives commises sur ces solutions sont du même ordre de grandeur que dans le cas de la perturbation de faible niveau.

Le modèle réduit purement modal est largement mis en défaut sur ce niveau de perturbation.

4.5 Extension du principe dans le cadre de réduction par synthèse modale

Quelques travaux d'évaluation de la robustesse des méthodes de synthèse modale vis-à-vis de perturbations paramétriques [16] [18] ont montré que l'on ne pouvait privilégier l'une ou l'autre de ces méthodes. On observe simplement une bonne robustesse des méthodes de synthèse modale lorsque les perturbations sont relatives à des paramètres intervenant linéairement et concernent l'intégralité d'une sous-structure. On peut montrer que les transformations de condensation et d'assemblage des sous-structures demeurent quasiment invariantes pour des perturbations de cette nature.

Afin d'accroître la robustesse des modèles réduits par synthèse modale, on propose d'adjoindre des réponses statiques résiduelles associées aux modifications paramétriques dans les bases de réduction des sous-structures. Ceci doit conduire à des résultats, en terme de robustesse des bases de transformation, du même ordre que dans une approche de type condensation.

L'équilibre dynamique d'une sous-structure k modifiée est exprimé par la relation (4.9) où les sollicitations dynamiques sur l'ensemble f des degrés de liberté de la sous-structure sont décomposées en deux chargements : un chargement \hat{f}_e interne à la sous-structure et un chargement \hat{f}_j appliqué aux jonctions :

$$[Z^k(\omega) + \Delta Z^k(\omega)] y^k(\omega) = \hat{f}_e^k(\omega) + \hat{f}_j^k(\omega) \quad (4.47)$$

4.5.1 Synthèse modale à base de modes libres

Dans le cadre d'une technique de synthèse modale à base de modes libres, la base de réduction enrichie T_{RO}^k de la sous-structure k est définie par l'expression :

$$T_{RO}^k = \begin{bmatrix} Y^k & R_e^k & R_\Delta^k & R_j^k \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

La base de forces F_Δ^k associées aux modifications ΔZ^k de la sous-structure est construite de manière analogue à la procédure définie dans le paragraphe 4.2.2 où les relations (4.21) s'écrivent (on omet l'indice k de la sous-structure) :

$$\left\| \begin{array}{l} F_{\Delta_i}^K = K_i^{mac} \begin{bmatrix} Y & R_e & R_j^- \end{bmatrix} \\ F_{\Delta_i}^M = M_i^{mac} \begin{bmatrix} Y & R_e & R_j^- \end{bmatrix} \end{array} \right. \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{ee}^* & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{jj}^* \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

où la matrice R_j^- est obtenue par réduction de la matrice des résidus statiques R_j au moyen d'une décomposition en valeurs singulières, et où les résidus R_e et R_j^- sont normalisés tels que :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{diag}(R_e^T M R_e) = \text{diag}(I_{ee}) \\ \text{diag}(R_e^T K R_e) = \text{diag}(\Lambda_{ee}^*) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \text{diag}(R_j^{-T} M R_j^-) = \text{diag}(I_{jj}) \\ \text{diag}(R_j^{-T} K R_j^-) = \text{diag}(\Lambda_{jj}^*) \end{array} \right\| \quad (4.50)$$

Le filtrage des vecteurs statiques de jonction par une DVS est justifié dans le cas d'une forte connectivité de la sous-structure.

4.5.2 Synthèse modale à base de modes à frontière bloquée

On peut enrichir les bases de condensation de sous-structure de type Guyan ou Craig-Bampton par des réponses statiques du système bloqué. La base de réduction de type Craig-Bampton enrichie est définie par la relation :

$$T_{RO}^k = \left[\begin{array}{cccc} \Theta_j^k & \Psi^k & R_{B_e}^k & R_{B_\Delta}^k \end{array} \right] \quad (4.51)$$

Les bases de forces $F_{B_\Delta}^k$ sont alors calculées à l'aide des matrices des macros-éléments et de la base de réduction de la sous-structure, restreintes sur les degrés de liberté du système bloqué. La procédure est similaire à celle décrite dans le paragraphe précédent, avec notamment une réduction de la sous-base des modes contraints (restreinte aux degrés de liberté du système bloqué) par une décomposition en valeurs singulières.

Dans le cas d'une projection du mouvement de la sous-structure sur une base de Guyan, les réponses statiques associées aux modifications correspondent à des termes de flexibilité pure du système bloqué.

4.6 Conclusions

L'utilisation de vecteurs additionnels obtenus par des chargements statiques représentatifs des forces de perturbation permet la construction de modèles réduits robustes. Les modèles de ce type répondent aux besoins de réanalyse rencontrés lors de procédures de recalage ou d'optimisation de modèles éléments finis de grande taille.

La technique employée est généralisable dans les procédures de réduction par synthèse modale.

La construction des résidus statiques de la base de réduction ne faisant appel à aucune procédure itérative, les gains numériques associés à l'utilisation d'une telle réanalyse sont considérables.

Dans le cadre d'une technique de recalage par réduction de modèles, la base de réduction obtenue permet l'obtention d'un modèle réduit en coordonnées physiques adapté aux données observées. La robustesse du modèle de niveau 1 permet de représenter correctement l'état du modèle modifié réduit aux niveaux 2 et 3 à chaque itération, contribuant ainsi à la convergence de la procédure de recalage.

Il est nécessaire de considérer les termes statiques au droit des excitations dans l'établissement de la base de réduction lors de réanalyses fréquentielles.

De même, il convient de découpler les effets dus à des paramètres non-linéaires tels que l'épaisseur d'une coque.

On peut envisager quelques études supplémentaires concernant la validation de la technique dans le cadre d'une synthèse modale et plus généralement concernant le traitement des forces d'erreur et des réponses statiques générées de manière à retenir les vecteurs statiques les plus "utiles" à la représentation du mouvement de la structure perturbée.

Chapitre 5

Méthode de synthèse modale proposée

5.1 Principe

La technique développée, présentée dans les publications [19] [28] [50], est inspirée de la méthode de MacNeal [53] (paragraphe 3.2). L'assemblage des sous-structures condensées est réalisé par élimination des efforts de jonction résiduels et le modèle réduit final obtenu ne comporte pas de degrés de liberté de jonction ou de coordonnées associées à des réponses statiques au droit de ces degrés de liberté.

L'originalité de la variante proposée réside dans l'utilisation de transformations "congruentes" pour les phases de condensation et d'assemblage des sous-structures. Le modèle réduit final obtenu par la méthode présentée vérifie les relations (3.1) et (3.2) définies dans le paragraphe 3.1. On rappelle l'expression de l'impédance Z_{RF} du modèle réduit (l'indice k étant relatif à la $k^{\text{ième}}$ sous-structure) :

$$Z_{RF} = \sum_k T_A^{kT} T_C^{kT} Z^k T_C^k T_A^k \quad (5.1)$$

Cette formulation conduit à un gain non négligeable dans la précision des résultats (paragraphe 5.5).

De plus, on propose l'utilisation de diverses bases de condensation compatibles [51] avec le procédé d'assemblage proposé (modes contraints éventuellement enrichis de modes normaux, réponses statiques résiduelles associées à des zones perturbées de la sous-structure).

Les bases de condensation proposées peuvent faire l'objet de procédures de retour en coordonnées physiques (définies dans le paragraphe 2.3.4) : on obtient ainsi un modèle

réduit exclusivement exprimé sur des coordonnées de type déplacement internes aux sous-structures.

5.2 Matrices de condensation des sous-structures compatibles

Le caractère commun des matrices de condensation compatibles avec la méthode d'assemblage présentée réside dans la *conservation explicite des coordonnées* f_j^k de type efforts de jonction dans les coordonnées réduites associées à chaque sous-structure condensée :

$$y^k = T_C^k \begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\text{où } T_C^k = \begin{bmatrix} T_{C_q}^k & T_{C_j}^k \end{bmatrix}.$$

Les coordonnées f_j^k sont associées à une sous-base de vecteurs statiques $T_{C_j}^k$ homogène à des vecteurs de flexibilité statique.

La relation (5.2) est équivalente à l'expression :

$$\begin{bmatrix} y_j^k \\ y_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{C_{jq}}^k & T_{C_{jj}}^k \\ T_{C_{iq}}^k & T_{C_{ij}}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

L'équilibre du modèle réduit de la sous-structure k est défini par la relation :

$$Z_C^k \begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} = T_C^{kT} (\hat{f}_j^k + \hat{f}_e^k) \quad (5.4)$$

$$\text{où } Z_C^k = T_C^{kT} Z^k T_C^k = \begin{bmatrix} Z_{C_{qq}}^k & Z_{C_{qf_j}}^k \\ Z_{C_{f_jq}}^k & Z_{C_{f_jf_j}}^k \end{bmatrix}.$$

On notera que les matrices d'état du modèle condensé Z_C^k sont souvent de rang numériquement déficient. En effet, les réponses statiques résiduelles à la jonction sont calculées en des degrés de liberté d'autant plus proches que le maillage est fin. Le défaut de rang observé à ce stade de la réduction est sans conséquence pour le problème condensé final de la structure assemblée. Ainsi, on ne peut effectuer d'analyses statique, modale ou fréquentielle sur le modèle réduit de la sous-structure. Pour cela, il convient de considérer uniquement la restriction $Z_{C_{qq}}$ des matrices d'état sur l'ensemble des coordonnées q^k , restriction correspondant à la sous-structure condensée non assemblée ($f_j^k \equiv 0$).

Les différentes bases proposées font l'objet de validations numériques dont les résultats sont présentés dans le paragraphe 5.5.

Il est possible d'utiliser des bases de condensation de nature différente afin de réduire les modèles de sous-structures selon leurs natures et leurs contributions dans le comportement global de la structure.

On omet dans ce paragraphe l'indice supérieur k relatif à la $k^{\text{ième}}$ sous-structure.

5.2.1 Modes libres enrichis de réponses statiques résiduelles

La base de condensation T_C est construite à partir de la relation (1.54) de superposition modale avec correction statique, relation analogue à l'équation (3.36) :

$$y = Yc + R_f f_f \quad (5.5)$$

En vue d'une prédiction de réponses fréquentielles à l'aide du modèle réduit (dans le cadre d'une confrontation modèle / structure réelle), on conserve explicitement des degrés de liberté de forces "externes" appliquées sur l'ensemble e . Il en résulte une faible augmentation de la taille du problème final. En pratique, on fixe à priori quelques degrés de liberté potentiels d'excitation par sous-structure. On obtient donc une famille de degrés de liberté physiques dans le système réduit final dans laquelle on peut définir un choix optimal de manière à exciter les modes contenus dans la bande fréquentielle d'intérêt. En approche modale, ce choix est inutile et il n'est pas nécessaire d'inclure dans la base les réponses statiques résiduelles correspondantes.

Dans un souci d'accroître la robustesse du modèle réduit, il convient d'adjoindre à la base modale tronquée Y des résidus statiques R_Δ relatifs à des chargements statiques représentatifs des modifications structurales éventuelles (technique présentée dans le chapitre 4). Dans l'hypothèse d'un passage en coordonnées physiques, le choix des degrés de liberté maîtres (ensemble m) est alors effectué sur la matrice $\begin{bmatrix} Y & R_\Delta \end{bmatrix}$.

On précise que la base de condensation d'une sous-structure dont la contribution dans le comportement global de la structure est purement statique, est composée des modes rigides éventuels de la sous-structure et des vecteurs de pure flexibilité statique.

Transformation en coordonnées généralisées

Le système réduit final est exprimé intégralement en coordonnées généralisées associées aux modes libres et aux réponses statiques résiduelles. A l'aide de la partition des degrés de liberté sur les ensembles j , e et c , la relation de condensation de la sous-structure

s'écrit :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_e \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_j & R_{je} & R_{jj} \\ Y_e & R_{ee} & R_{ej} \\ Y_c & R_{ce} & R_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f_e \\ f_j \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Transformation en coordonnées physiques

En appliquant une procédure de passage en coordonnées physiques (voir paragraphe 2.3.4), la base de condensation (5.6) peut être définie exclusivement sur des degrés de liberté internes à la sous-structure (ensemble m et e) par la relation :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_e \\ y_m \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{je}\tilde{R}_{ee}^{-1} & \tilde{Y}_{jm} - \tilde{R}_{je}\tilde{R}_{ee}^{-1}\tilde{Y}_{em} & \tilde{R}_{jj} - \tilde{R}_{je}\tilde{R}_{ee}^{-1}\tilde{R}_{ej} \\ I_{ee} & 0 & 0 \\ 0 & I_{mm} & 0 \\ \tilde{R}_{se}\tilde{R}_{ee}^{-1} & \tilde{Y}_{sm} - \tilde{R}_{se}\tilde{R}_{ee}^{-1}\tilde{Y}_{em} & \tilde{R}_{sj} - \tilde{R}_{se}\tilde{R}_{ee}^{-1}\tilde{R}_{ej} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e \\ y_m \\ f_j \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

où :

$$\left\| \begin{array}{l} \tilde{Y}_{jm} = Y_j Y_m^{-1} \\ \tilde{Y}_{em} = Y_e Y_m^{-1} \\ \tilde{Y}_{sm} = Y_s Y_m^{-1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \tilde{R}_{jj} = R_{jj} - \tilde{Y}_{jm} R_{mj} \\ \tilde{R}_{ej} = R_{ej} - \tilde{Y}_{em} R_{mj} \\ \tilde{R}_{sj} = R_{sj} - \tilde{Y}_{sm} R_{mj} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \tilde{R}_{je} = R_{je} - \tilde{Y}_{jm} R_{me} \\ \tilde{R}_{ee} = R_{ee} - \tilde{Y}_{em} R_{me} \\ \tilde{R}_{se} = R_{se} - \tilde{Y}_{sm} R_{me} \end{array} \right\|$$

5.2.2 Modes contraints

La technique proposée permet l'assemblage de sous-structures condensées par des transformations de type Guyan-Irons. On retrouve la forme de la transformation proposée par Przemieniecki [62] dans le cadre de l'analyse statique. Cependant, les degrés de liberté maîtres (ensemble e) de la transformation associés aux modes contraints Θ_e , sont exclusivement choisis parmi les degrés de liberté internes à la sous-structure (ensemble i). La base de vecteurs statiques de jonction nécessaire à l'assemblage est constituée des vecteurs de flexibilité du système bloqué (ensembles $j \oplus c$) au droit des degrés de liberté de jonction.

La base de condensation est définie par l'expression :

$$y = T_G y_e + S_{B_j} f_j \quad (5.8)$$

où $T_G = \Theta_e$.

Compte-tenu des partitions j , e et c , la relation (5.8) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_e \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{je} & S_{B_{jj}} \\ I_{ee} & 0 \\ \Theta_{ce} & S_{B_{cj}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e \\ f_j \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Cette base est bien adaptée pour les sous-structures ou équipements très rigides dont les contributions au mouvement global sont essentiellement statiques. Le mouvement de corps rigide de la sous-structure est décrit par la sous-base des modes contraints (sous réserve d'un choix adéquat des degrés de liberté de l'ensemble e).

5.2.3 Modes contraints enrichis de modes normaux compatibles

La base de transformation (5.9) peut être enrichie à l'aide de différentes bases modales afin d'augmenter le domaine de validité du modèle réduit de la sous-structure et donc du modèle réduit final. Les transformations présentées peuvent être exprimées en coordonnées physiques (paragraphe 2.3.4).

Modes bloqués (associés à des degrés de liberté maîtres de Guyan internes à la sous-structure)

On propose une relation de condensation analogue dans la forme à la relation (3.34) (technique de Craig-Bampton) mais différente dans la distribution des degrés de liberté. En effet, les modes normaux sont calculés à partir du système bloqué associé aux degrés de liberté maîtres internes à la sous-structure, relatifs à la sous-base de Guyan. En retirant la contribution statique des modes retenus aux termes de flexibilité de jonction, on introduit la flexibilité résiduelle du système bloqué. La relation de condensation s'exprime alors en coordonnées mixtes :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_e \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{je} & \Psi_j & R_{B_{jj}} \\ I_{ee} & 0 & 0 \\ \Theta_{ce} & \Psi_c & R_{B_{cj}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e \\ c \\ f_j \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

On note que l'on perd, dans ce cas, le sens physique habituel des modes normaux utilisés dans la technique de Craig-Bampton associés au blocage des frontières des sous-structures. Il convient d'élargir la base Ψ des modes bloqués issus du système esclave si l'on choisit de verrouiller la sous-structure par un grand nombre de degrés de liberté maîtres.

Modes libres

Les modes contraints de Guyan peuvent être complétés par des sous-bases modale Y et statique résiduelle R associées à la sous-structure libre. La compatibilité entre ces termes et les modes contraints Θ_e est obtenue en cherchant à identifier les sous-bases B_1

et B_2 de la relation (5.11) qui satisfont l'expression (5.12). On introduit temporairement l'ensemble $b = j \oplus c$, regroupant les degrés de liberté des ensembles j et c :

$$y_b = \Theta_{be}y_e + B_1c + B_2f_j \quad (5.11)$$

$$y = Yc + R_jf_j \quad (5.12)$$

En partitionnant la relation (5.12) sur les ensembles e et b , on identifie l'expression des sous-bases B_1 et B_2 recherchées :

$$B_1 = Y_b - \Theta_{be}Y_e \quad (5.13)$$

$$B_2 = R_{bj} - \Theta_{be}R_{ej} \quad (5.14)$$

La relation de condensation est exprimée de manière détaillée par la relation :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_e \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{je} & Y_j - \Theta_{je}Y_e & R_{jj} - \Theta_{je}R_{ej} \\ I_{ee} & 0 & 0 \\ \Theta_{ce} & Y_c - \Theta_{ce}Y_e & R_{cj} - \Theta_{ce}R_{ej} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e \\ c \\ f_j \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

On signale que l'emploi des termes de flexibilité pure en lieu et place des flexibilités résiduelles conduit aux mêmes résultats numériques. Les sous-espaces représentés par les transformations sont identiques. Simplement, les conditionnements des matrices de transformation et des matrices réduites augmentent.

5.3 Assemblage des sous-structures par les forces de jonction et par transformation "congruente"

5.3.1 Principe de l'assemblage

La technique d'assemblage, analogue dans son principe à la technique de MacNeal [53] (voir paragraphe 3.2) consiste à exprimer les efforts de jonction résiduels f_j^k de chaque sous-structure k en fonction de l'ensemble des coordonnées q^k généralisées, mixtes ou physiques (selon les transformations T_C^k utilisées) des sous-structures. Cette opération définit les transformations "congruentes" d'assemblage T_A^k des sous-structures.

Le modèle réduit final Z_{RF} , obtenu par la relation (5.1), est fonction uniquement des coordonnées q^k .

$$Z_{RF} = \sum_k T_A^{kT} T_C^{kT} Z^k T_C^k T_A^k \quad (\text{Rappel})$$

où :

$$y^k = T_C^k \begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} \quad (\text{Rappel})$$

La phase d'assemblage des sous-structures peut être réalisée simultanément sur l'ensemble des k sous-structures mais également différée en plusieurs étapes : on définit alors la notion d'assemblage différé et l'on introduit le concept d'objet super-élément.

Les résultats obtenus selon le type d'assemblage utilisé sont identiques (voir chapitre 6).

5.3.2 Assemblage simultané des sous-domaines condensés

Afin de simplifier l'exposé, on considère n sous-structures couplées sur une frontière commune.

On rappelle la relation de transformation (5.3) relative à la condensation d'une sous-structure k :

$$\begin{bmatrix} y_j^k \\ y_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{C_{jq}}^k & T_{C_{jj}}^k \\ T_{C_{iq}}^k & T_{C_{ij}}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

A l'aide de la restriction de la transformation (5.16) sur l'ensemble j des degrés de liberté, on exprime les efforts de jonction f_j^k en fonction des coordonnées physiques de jonction y_j^k et des coordonnées réduites q^k d'une sous-structure k :

$$f_j^k = T_{C_{jj}}^{k-1} \left[y_j^k - T_{C_{jq}}^k q^k \right] \quad (5.17)$$

Pour n sous-structures, on obtient la relation (5.18) satisfaisant l'équation de compatibilité en efforts résiduels (2.22) :

$$\sum_{k=1}^n f_j^k = \sum_{k=1}^n T_{C_{jj}}^{k-1} \left[y_j^k - T_{C_{jq}}^k q^k \right] = 0 \quad (5.18)$$

L'équation de compatibilité en déplacements $y_j = y_j^k \quad \forall k$, nous donne l'expression des déplacements de jonction y_j fonction des coordonnées réduites q^k de l'ensemble des sous-structures :

$$y_j = \left[\sum_{k=1}^n T_{C_{jj}}^{k-1} \right]^{-1} \sum_{k=1}^n T_{C_{jj}}^{k-1} T_{C_{jq}}^k q^k \quad (5.19)$$

En reportant la relation précédente (5.19) dans la relation (5.17), on obtient l'expression des efforts de jonction propres à chaque sous-structure fonction des coor-

données réduites q^k de l'ensemble des sous-structures :

$$f_j^k = T_{C_{jj}}^{k-1} \left[\left[\sum_{k=1}^n T_{C_{jj}}^{k-1} \right]^{-1} \sum_{k=1}^n \left[T_{C_{jj}}^{k-1} T_{C_{jq}}^k q^k \right] - T_{C_{jq}}^k q^k \right] = T_{A_j}^k \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Cette relation permet d'exprimer le membre de droite de la transformation (5.16) sous la forme (5.21) et définit la transformation d'assemblage T_A^k de la sous-structure k :

$$\begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A^k \\ T_{A_j}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} = T_A^k \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

La double transformation $T_C^k T_A^k$ (5.22) conduit ainsi à la condensation de la sous-structure k sur ses propres coordonnées réduites et celles des sous-structures adjacentes :

$$y^k = T_C^k T_A^k \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Ainsi, en appliquant la transformation d'assemblage T_A^k , la relation d'équilibre (5.4) de la sous-structure k condensée devient :

$$Z_A^k \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} = T_A^{kT} T_C^{kT} (\hat{f}_j^k + \hat{f}_e^k) \quad (5.23)$$

où $Z_A^k = T_A^{kT} Z_C^k T_A^k = T_A^{kT} T_C^{kT} Z^k T_C^k T_A^k$.

Après une sommation des n relations (5.23), on obtient l'expression :

$$\sum_{k=1}^n Z_A^k \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n T_A^{kT} T_C^{kT} (\hat{f}_j^k + \hat{f}_e^k) \quad (5.24)$$

On vérifie aisément par calcul formel la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^n T_A^{kT} T_C^{kT} \hat{f}_j^k = 0 \quad (5.25)$$

Le modèle réduit final Z_{RF} est obtenu et vérifie l'équation d'équilibre :

$$Z_{RF} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n T_A^{kT} T_C^{kT} \hat{f}_e^k \quad (5.26)$$

où $Z_{RF} = \sum_{k=1}^n Z_A^k$.

Dans l'hypothèse où l'on conserve les degrés de liberté physiques y_e^k associés aux efforts extérieurs appliqués dans l'ensemble des coordonnées q^k des sous-structures condensées, le terme $T_A^{kT} T_C^{kT}$ de la relation (5.26) est équivalent à une matrice de localisation qui ne modifie pas les forces appliquées.

5.3.3 Assemblage différé des sous-domaines condensés (multi-niveaux)

Approche orientée objet

Cette stratégie d'assemblage différé s'inscrit parfaitement dans le concept de synthèse modale par sous-domaine. En effet, dans l'hypothèse d'un assemblage simultané, une modification locale du modèle (par exemple sur une région constituée d'un ensemble de sous-structures) nécessite non seulement une réactualisation des transformations de condensation T_C^k des sous-structures modifiées mais également la réactualisation des transformations d'assemblage T_A^k de toutes les sous-structures.

On propose une procédure d'assemblage à plusieurs niveaux visant à limiter le coût associé à la phase de réactualisation des transformations d'assemblage.

Afin d'illustrer l'intérêt d'une telle stratégie, on considère toutes les sous-structures condensées comme des objets interdépendants. Ces objets sont soumis à des contraintes de compatibilité à leurs interfaces (contraintes appliquées sur les coordonnées de type efforts de jonction f_j^k), que l'on symbolise par des liens inter-objets (illustration Figure 5.1).

Ces objets peuvent être assemblés et forment alors un nouvel objet que l'on nomme super-élément.

On illustre Figure 5.2 une phase de définition de super-éléments.

Les liens internes existants entre les objets d'un même super-élément sont supprimés lors de la création de l'objet super-élément. Cet objet super-élément né d'un assemblage conserve uniquement des liens externes avec les autres objets existants à

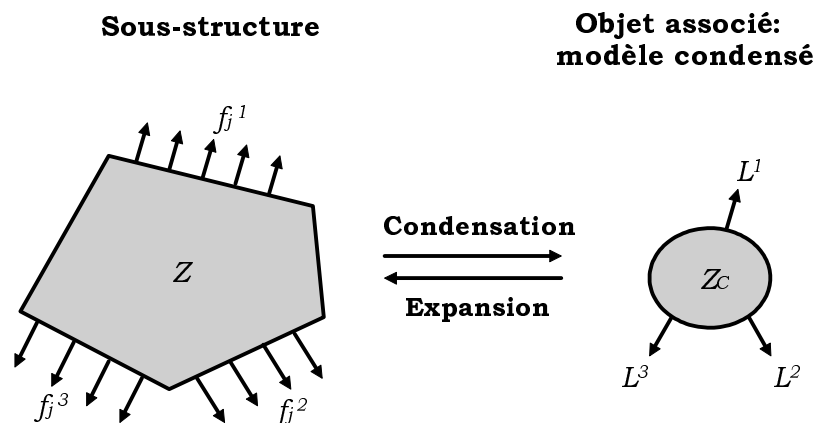


Figure 5.1 : L'objet modèle condensé

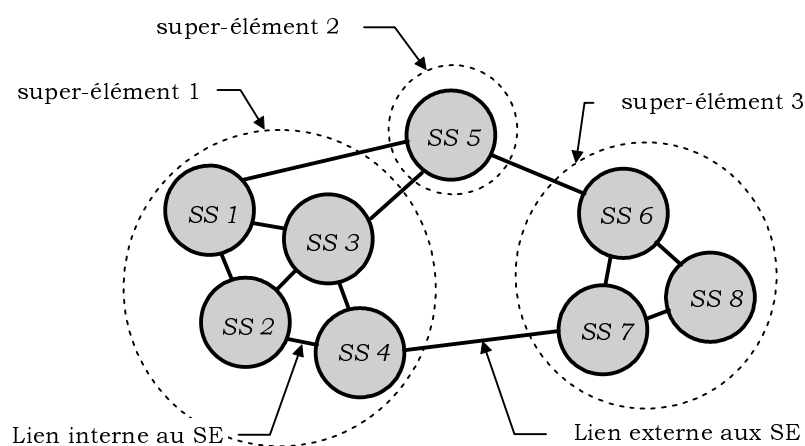


Figure 5.2 : Définition d'objets super-éléments

l'étape considérée (objets pouvant être d'autres super-éléments ou des sous-structures) (illustration Figure 5.3).

En résumé, à chaque assemblage d'objets, les liens internes au super-élément formé sont éliminés.

Chaque objet représente un modèle réduit d'une ou plusieurs sous-structures assemblées et peut être analysé, optimisé ou confronté à des mesures. On notera que le dernier objet généré représente le modèle réduit final de la structure.

Le choix des groupements d'objets (définition des super-éléments) est adapté par l'ingénieur en fonction des objectifs de modifications ou d'optimisations structurales.

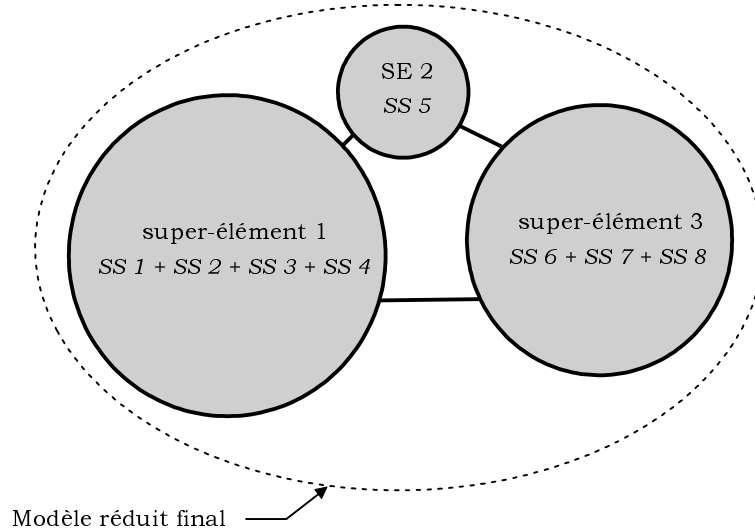


Figure 5.3 : Assemblage des super-éléments

Formulation de l'assemblage par super-élément

On distingue deux cas dans la présentation de la formulation :

- un cas simple où l'on considère que les liens (efforts de jonction) éliminés lors de l'assemblage d'un super-élément sont uniquement internes.
- un cas mixte où certains degrés de liberté de jonction peuvent être internes et externes au super-élément (typiquement 3 sous-structures connectées sur une même frontière et dont 2 seulement vont former un super-élément).

• Cas simple

La création d'un super-élément consiste à construire les transformations d'assemblage relatives aux n sous-structures constituant l'objet super-élément, permettant d'exprimer les forces de jonction internes au super-élément sur les coordonnées réduites des n sous-structures augmentées des coordonnées de type efforts de jonction externes au super-élément.

Cette transformation est dérivée du procédé d'assemblage des sous-structures exposé dans le paragraphe précédent (voir relation (5.21)). Il convient simplement de subdiviser l'ensemble des coordonnées de type efforts de jonction en un sous-ensemble interne f_{jint}^k et un sous-ensemble externe f_{jext}^k à la sous-structure n concernée ($j = jint \oplus jext$).

On construit la transformation T_{ASE}^k de la sous-structure k (ici, $k = 1 \dots n$), relative à l'assemblage d'un super-élément, permettant d'exprimer le membre de droite de la

relation (5.16) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^k \\ f_{jext}^k \\ f_{jint}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_q^k \\ L_{f_{jext}^k} \\ T_{ASEjint}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \\ f_{jext}^1 \\ \vdots \\ f_{jext}^n \end{bmatrix} = T_{ASE}^k \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \\ f_{jext}^1 \\ \vdots \\ f_{jext}^n \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

où L_q^k et $L_{f_{jext}^k}$ sont des matrices de localisation.

Les forces de jonction externes au super-élément f_{jext}^k sont assimilées aux coordonnées réduites q^k des sous-structures et ne sont pas modifiées dans la transformation d'assemblage T_{ASE}^k .

• Cas mixte

On est amené à prendre en compte 3 sous-ensembles complémentaires parmi les coordonnées efforts de jonction de la sous-structure condensée : un sous-ensemble interne f_{jint}^k , un sous-ensemble externe f_{jext}^k et un sous-ensemble dit mixte f_{jmixt}^k des efforts de jonction à la fois internes et externes au super-élément. On illustre cette configuration de jonction Figure 5.4.

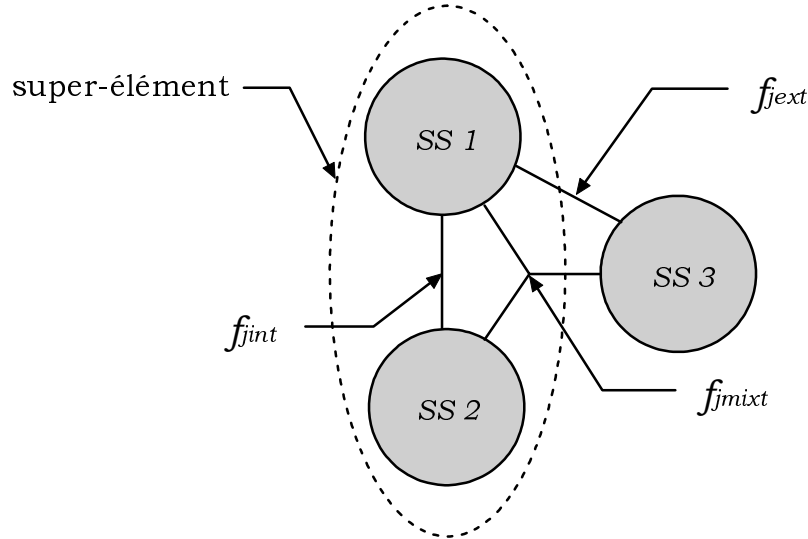


Figure 5.4 : Cas mixte : 3 sous-ensembles de forces de jonction

Afin d'alléger l'écriture, on définit l'ensemble des efforts de jonction $f_{\tilde{j}}^k$ regroupant les sous-ensembles interne f_{jint}^k et mixte f_{jmixt}^k ($\tilde{j} = jint \oplus jmixt$). Comme précédemment, on considère les forces de jonction externes f_{jext}^k comme des coordonnées réduites

q^k qui ne seront pas modifiées par la transformation d'assemblage du super-élément et on les regroupe ainsi dans l'ensemble \tilde{q}^k ($\tilde{q} = q \oplus jext$).

On exprime les efforts de jonction $f_{\tilde{j}}^k$ internes et mixtes sous une forme analogue à la relation (5.17) :

$$f_{\tilde{j}}^k = T_{C_{\tilde{j}\tilde{j}}}^{k-1} \left[y_{\tilde{j}}^k - T_{C_{\tilde{j}\tilde{q}}}^k \tilde{q}^k \right] \quad (5.28)$$

Afin de pouvoir raccorder d'autres objets super-éléments ou sous-structures au super-élément assemblé, on doit prendre en compte les efforts de jonction des objets extérieurs au super-élément, sur l'ensemble des degrés de liberté de type mixte dans l'équilibre des efforts aux interfaces.

Pour un ensemble de n sous-structures d'un super-élément, on obtient ainsi une relation dérivée de l'expression (5.18) :

$$\sum_{k=1}^n f_{\tilde{j}}^k = \sum_{k=1}^n T_{C_{\tilde{j}\tilde{j}}}^{k-1} \left[y_{\tilde{j}}^k - T_{C_{\tilde{j}\tilde{q}}}^k \tilde{q}^k \right] = \sum_{k=1}^n f_{jmixt}^k \quad (5.29)$$

L'application de l'équation de compatibilité, en terme d'égalité des déplacements de jonction, donne l'expression des coordonnées de jonction $y_{\tilde{j}}$ de l'ensemble \tilde{j} fonction des coordonnées réduites \tilde{q}^k considérées et des forces de jonction de type mixte f_{jmixt}^k :

$$y_{\tilde{j}} = \left[\sum_{k=1}^n T_{C_{\tilde{j}\tilde{j}}}^{k-1} \right]^{-1} \sum_{k=1}^n \left[T_{C_{\tilde{j}\tilde{j}}}^{k-1} T_{C_{\tilde{j}\tilde{q}}}^k \tilde{q}^k + f_{jmixt}^k \right] \quad (5.30)$$

En introduisant la relation (5.30) dans la relation (5.28), on obtient l'expression des forces de jonction propres à chaque sous-structure $f_{\tilde{j}}^k$ fonction des coordonnées réduites \tilde{q}^k et des forces de jonction de type mixte f_{jmixt}^k :

$$f_{\tilde{j}}^k = T_{C_{\tilde{j}\tilde{j}}}^{k-1} \left[\left[\sum_{k=1}^n T_{C_{\tilde{j}\tilde{j}}}^{k-1} \right]^{-1} \sum_{k=1}^n \left[T_{C_{\tilde{j}\tilde{j}}}^{k-1} T_{C_{\tilde{j}\tilde{q}}}^k \tilde{q}^k + f_{jmixt}^k \right] - T_{C_{\tilde{j}\tilde{q}}}^k \tilde{q}^k \right] = T_{A_{SEj}}^k \begin{bmatrix} \tilde{q}^k \\ f_{jmixt}^k \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Cette relation permet d'exprimer le membre de droite de la transformation (5.16) sous la forme (5.32) et définit la transformation d'assemblage T_{ASE}^k :

$$\begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^k \\ f_{jext}^k \\ f_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_q^k \\ L_{f_{jext}}^k \\ T_{ASE_j}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \\ f_{jext}^1 \\ \vdots \\ f_{jext}^n \\ f_{jmixt}^1 \\ \vdots \\ f_{jmixt}^n \end{bmatrix} = T_{ASE}^k \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \\ f_{jext}^1 \\ \vdots \\ f_{jext}^n \\ f_{jmixt}^1 \\ \vdots \\ f_{jmixt}^n \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

où L_q^k et $L_{f_{jext}}^k$ sont des matrices de localisation.

Modèle réduit final

Le nombre de niveaux de super-élément n'est pas limité. On associe une transformation d'assemblage $T_{ASE}^{k(l)}$ à chaque regroupement d'objets au niveau l . On obtient le modèle réduit final en terme de matrices réduites par des produits "congruents" multiples selon le nombre de niveaux de super-élément définis.

Plusieurs chemins opératoires conduisent au modèle réduit final. Le choix de l'itinéraire de réduction est adapté selon les objectifs envisagés.

- **Réduction pas-à-pas**

Les matrices réduites $Z^{(l)}$ des objets sont calculées à chaque niveau l de réduction (k objets au niveau $l-1$) et l'opération est répétée jusqu'au dernier niveau de réduction :

$$Z^{(l)} = \sum_k T_{ASE}^{k(l)T} Z^{(l-1)} T_{ASE}^{k(l)} \quad (5.33)$$

- **Réduction directe**

Les matrices de transformation sont regroupées en une seule matrice T_{RF}^k par produits matriciels :

$$T_{RF}^k = T_C^k \prod_l T_{ASE}^{k(l)} \quad (5.34)$$

Le modèle condensé final est obtenu par sommation des sous-structures réduites par les transformations T_{RF}^k :

$$Z_{RF} = \sum_k Z_A^k = \sum_k T_{RF}^{kT} Z^k T_{RF}^k \quad (5.35)$$

5.4 Calcul des réactions à l'interface de la sous-structure

Soit q_S un vecteur solution du problème réduit final (5.26).

Le calcul des forces de réaction R_{jS}^k à l'interface d'une sous-structure, dues à un déplacement q_S du modèle global, n'est pas immédiat à l'instar des méthodes de type Guyan-Irons, Craig-Bampton ou Martinez.

Au niveau d'une sous-structure k , le vecteur solution est reconstituée par l'expression :

$$\begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix}_S = T_A^k q_S \quad (5.36)$$

Le terme $f_j^k = T_{A_j}^k q_S$ correspond à l'effort de réaction *résiduel* à l'interface de la sous-structure. Afin d'accéder à la totalité de la réaction à l'interface, il convient d'établir une procédure additionnelle (relations (5.37) à (5.39)).

En l'absence de chargement interne, l'équilibre de la sous-structure condensée (5.4) s'exprime par la relation :

$$Z_C^k \begin{bmatrix} q^k \\ f_j^k \end{bmatrix} = T_C^{kT} \hat{f}_j^k \quad (5.37)$$

On utilise la transformation T_{MA_2} définie dans la méthode de Martinez par la relation (3.39) afin d'obtenir explicitement les efforts de jonction au second membre de l'expression (5.37) :

$$T_{MA_2}^{kT} Z_C^k T_{MA_2}^k \begin{bmatrix} q^k \\ y_j^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_j^k \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Ainsi, les efforts de réaction R_{jS}^k à l'interface sont obtenus par l'expression :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ R_{jS}^k \end{bmatrix} = T_{MA_2}^{kT} Z_C^k T_A^k q_S \quad (5.39)$$

5.5 Résultats numériques : cas académiques

Les résultats obtenus sur deux exemples académiques sont présentés.

Dans le premier exemple, on confronte la méthode proposée avec les techniques de MacNeal et Rubin pour des modèles réduits de même taille. On valide également le principe de double condensation en coordonnées physiques.

Le second exemple est dédié aux tests comparatifs des différentes bases de condensation proposées.

La stratégie proposée est appliquée sur 2 modèles de structures industrielles de grande taille dans le chapitre 6.

5.5.1 Plaque renforcée par un profilé en U

La structure testée, illustrée Figure 5.5, est constituée d'un assemblage de 2 sous-structures, une plaque et un profilé en U, encastrées sur un côté. Le modèle éléments finis assemblé comporte 3240 degrés de liberté, soit une répartition en 1980 degrés de liberté pour la plaque et 1380 degrés de liberté pour le profilé. Les degrés de liberté de jonction sont au nombre de 120.

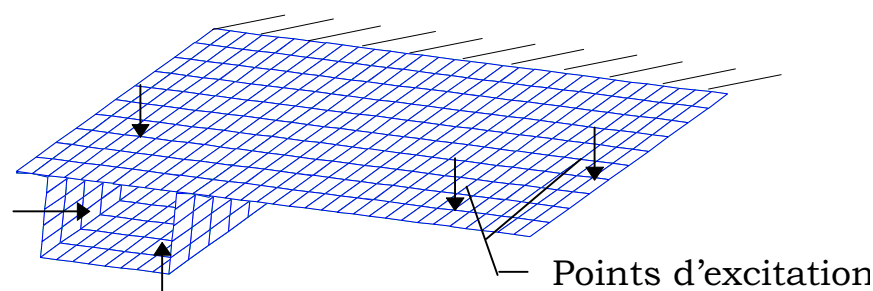


Figure 5.5 : Modèle éléments finis de la plaque renforcée

Les éléments utilisés sont de type coque mince à 4 noeuds et 6 degrés de liberté.

Comparaison de 3 méthodes de sous-structuration

On compare la précision des solutions propres d'un modèle réduit obtenu à partir des méthodes de MacNeal, Rubin (voir paragraphe 3.2) et de la technique proposée en configuration modes libres et flexibilité résiduelle. Les systèmes réduits sont de tailles identiques et exprimés en coordonnées généralisées.

Pour les 3 méthodes testées, on retient respectivement 95 et 35 modes normaux dans les bases de projection des déplacements de la plaque et du profilé. La taille des systèmes réduits par les 3 méthodes est donc de 130.

Les 60 premières solutions propres reconstituées sur tous les degrés de liberté, obtenues par les 3 méthodes, sont comparées aux solutions exactes calculées à l'aide du système complet. Le domaine fréquentiel représenté est $[0 - 900]$ Hz. On rappelle dans les relations (5.40) et (5.41) les critères des erreurs relatives sur les fréquences propres ε_f et sur les vecteurs propres ε_y :

$$\varepsilon_f = \frac{|f_C - f_{exact}|}{f_{exact}} \quad (5.40)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\|y_C - y_{exact}\|}{\|y_{exact}\|} \quad (5.41)$$

Les résultats sont illustrés Figures 5.6 et 5.7.

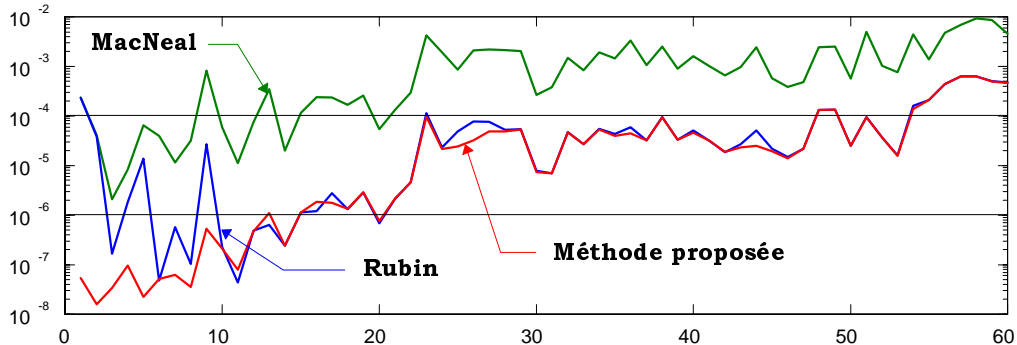


Figure 5.6 : Erreur relative sur les fréquences propres prédites par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Plaque renforcée)

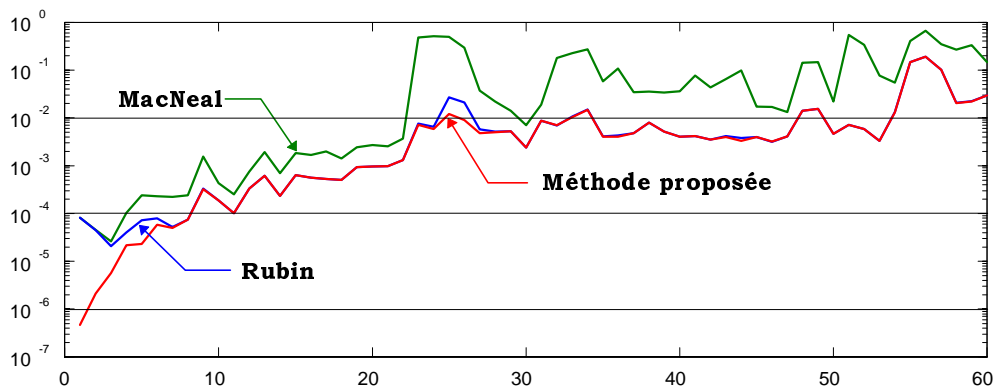


Figure 5.7 : Erreur relative sur les vecteurs propres prédites par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Plaque renforcée)

Le système réduit par la méthode de MacNeal permet de calculer 22 modes avec une précision inférieure à 2% sur les vecteurs propres. La technique de Rubin et la méthode proposée permettent le calcul de plus de 50 modes à une précision équivalente.

Cet exemple montre l'intérêt d'une formulation par transformation "congruente". Bien que les bases de réduction soient identiques à celles utilisées dans la technique de MacNeal, la formulation proposée permet des prédictions avec une précision supérieure. Cette précision est du même ordre que celle obtenue avec une technique de type Rubin : la méthode proposée ne nécessite pas le calcul d'un résidu dynamique et d'application d'une force fonction de la pulsation dans le calcul d'une réponse forcée.

Performances d'une double condensation dans le cadre de la prédiction de réponses en fréquence

On étudie maintenant la qualité de réponses fréquentielles prédites à partir d'un modèle réduit en coordonnées physiques obtenu après une double condensation : une synthèse modale par la méthode proposée (transformation de condensation d'une sous-structure définie par la relation (5.7)) suivie d'une condensation modale avec des résidus statiques (définie par la relation (3.42)).

On construit en premier un modèle intermédiaire en coordonnées physiques à 135 degrés de liberté, soit 95 degrés de liberté maîtres (ensemble m), 3 degrés de liberté de forces externes (ensemble e) pour la plaque et 35 degrés de liberté maîtres (ensemble m), 2 degrés de liberté de forces externes (ensemble e) pour le profilé en U.

Le système obtenu est ensuite condensé à nouveau de manière à disposer d'un modèle final en coordonnées physiques de taille comparable au nombre de modes présents dans la bande d'intérêt. On se fixe, a priori, une bande utile de $[0 - 300]$ Hz. La taille du système final est de 20 degrés de liberté (15 degrés de liberté maîtres (ensemble m) et 5 degrés de liberté de forces externes (ensemble e). Les 15 vecteurs propres et les vecteurs de flexibilité résiduelle composant la seconde transformation sont calculés à partir du modèle intermédiaire à 135 degrés de liberté physiques. Un amortissement modal de 1% est introduit sur chaque mode dans le calcul des réponses.

On présente Figures 5.8, 5.9 et 5.10 quelques réponses fréquentielles exactes et prédites à partir du modèle final à 20 degrés de liberté. La Figure 5.10 présente la moyenne des fonctions de réponse en fréquence observées sur les 20 degrés de liberté du modèle final.

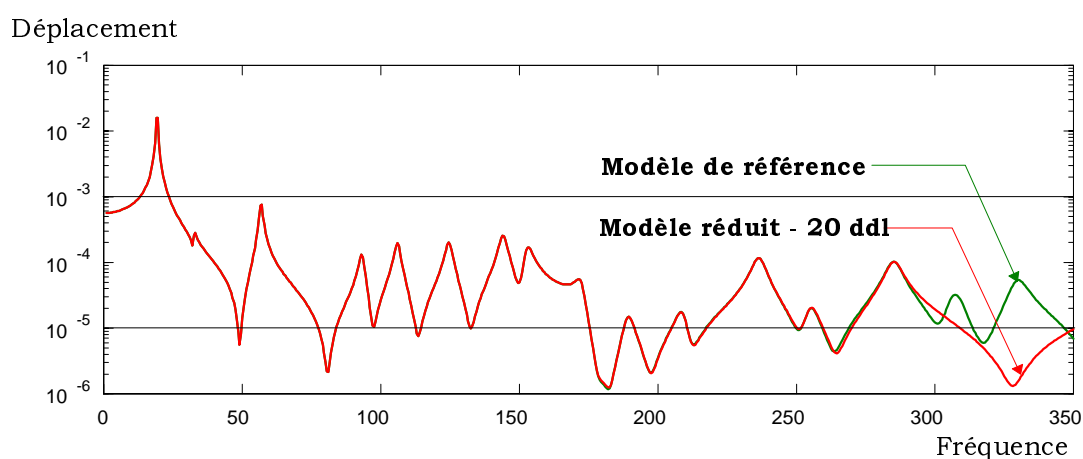


Figure 5.8 : Qualité de prédiction d'une réponse fréquentielle (au droit d'une excitation) à partir du modèle réduit à 20 degrés de liberté physiques (Plaque renforcée)

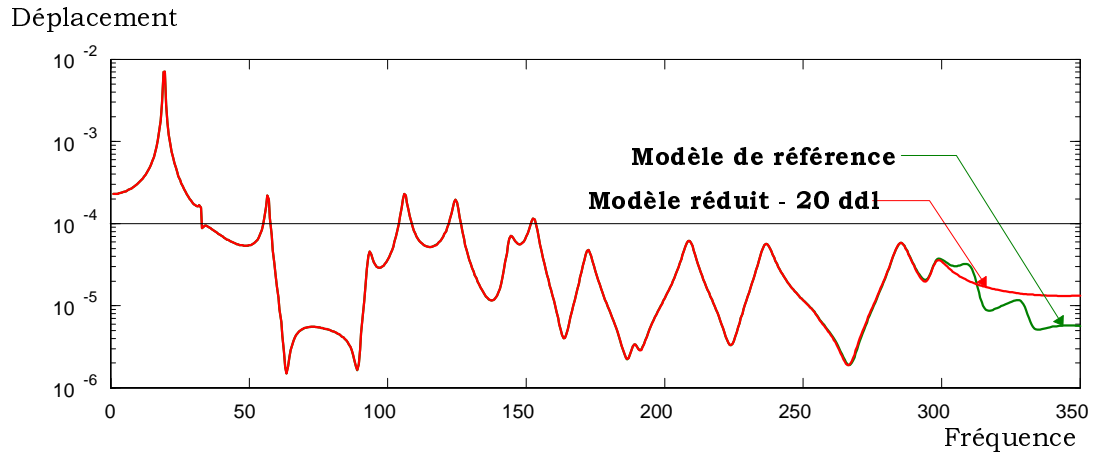


Figure 5.9 : Qualité de prédiction d’une réponse fréquentielle (au droit d’un d.d.l. maître) à partir du modèle réduit à 20 degrés de liberté physiques (Plaque renforcée)

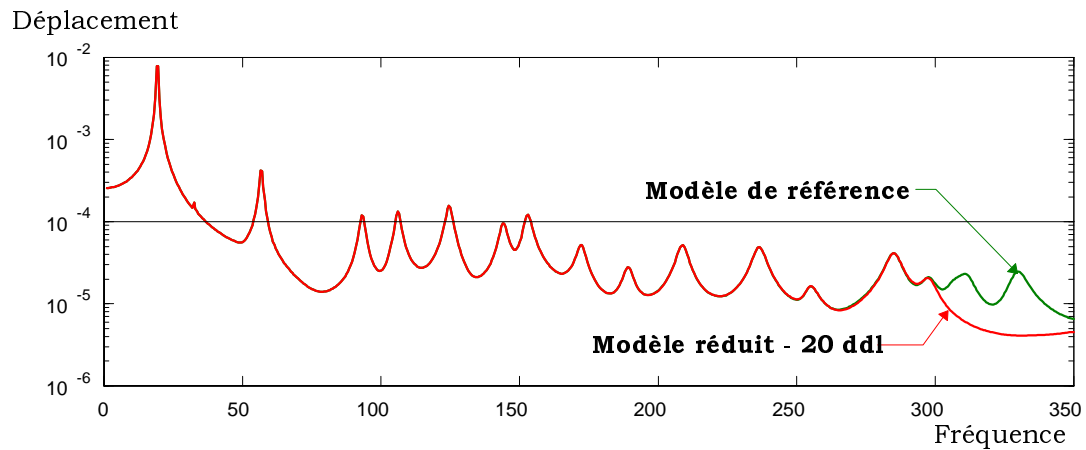


Figure 5.10 : Qualité de prédiction des réponses fréquentielles à partir du modèle réduit (moyenne sur les 20 degrés de liberté physiques) (Plaque renforcée)

Le comportement dynamique du modèle initial est correctement prédit et préservé par le modèle réduit en coordonnées physiques à 20 degrés de liberté dans la bande utile fixée $[0 - 300]$ Hz, qui contient les 15 premiers modes.

5.5.2 Plaques assemblées en équerre

On propose une validation de la méthode proposée avec différentes bases de condensation sur une structure libre de 2500 degrés de liberté, constituée d'un assemblage de 5 plaques en équerre illustré Figure 5.11. Les éléments utilisés sont de type coque mince à 3 ou 4 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud. On dénombre 222 degrés de liberté de jonction.

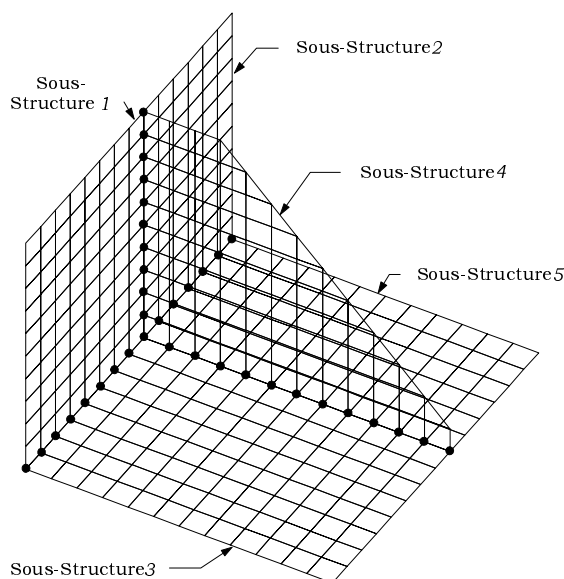


Figure 5.11 : Modèle éléments finis de l'équerre

Les formulations testées, proposées dans le paragraphe 5.2, sont les suivantes :

- modes libres et flexibilité résiduelle (relation (5.7))
- modes contraints internes enrichis de modes libres et de flexibilité résiduelle compatibles (relation (5.15))
- modes contraints internes enrichis de modes et de flexibilité résiduelle du système bloqué associé (relation (5.10))
- modes contraints internes et flexibilité du système bloqué associé (relation (5.9))

On présente également à titre comparatif les résultats obtenus avec une méthode de type Craig-Bampton avec la présence des degrés de liberté de jonction dans le modèle réduit final.

La composition des bases de condensation des méthodes testées est détaillée dans le Tableau 5.1.

Méthodes de réduction	Code	Modes rigides	Modes libres	Modes bloqués	Modes de flexibilité	Modes contraints	Taille modèle
Modes libres	A	30	60	-	594	-	90
Modes contraints + modes libres	B	-	60	-	594	59	119
Modes contraints + modes bloqués	C	-	-	60	594	59	119
Modes contraints	D	-	-	-	594	125	125
Craig-Bampton	E	-	-	60	-	594	282

Tableau 5.1 : Composition des bases de condensation (Equerre)

On présente Figures 5.12 et 5.13 les erreurs relatives ε_f et ε_y définies par les relations (5.40) et (5.41), sur les 40 premières solutions propres prédites à l'aide des modèles réduits et reconstituées sur tous les degrés de liberté.

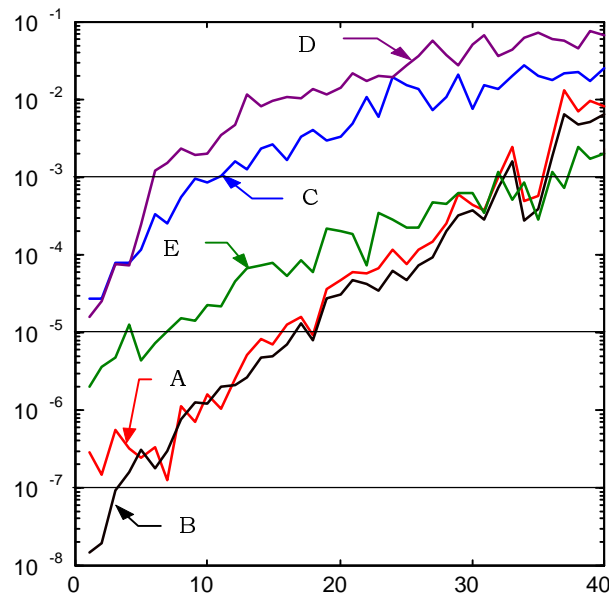


Figure 5.12 : Erreur relative sur les fréquences propres prédites par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Equerre)

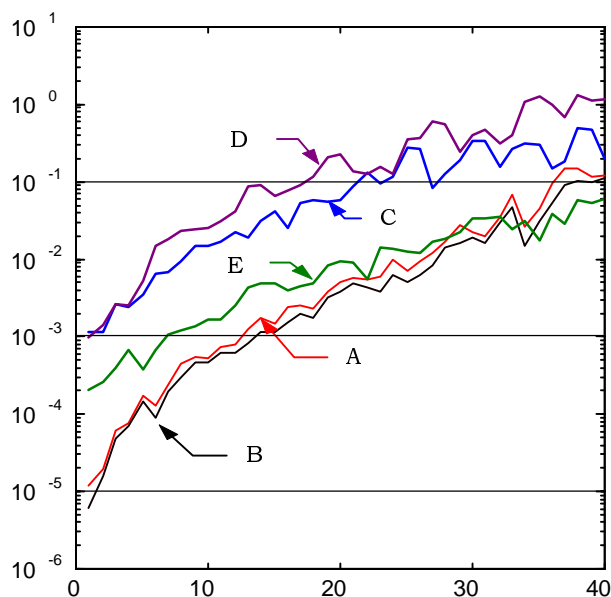


Figure 5.13 : Erreur relative sur les vecteurs propres prédits par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Equerre)

Bien que la structure soit rigidifiée, les bases de modes libres ou de modes contraints enrichis de modes libres donnent les meilleurs résultats. L'adjonction de modes contraints aux modes libres améliore faiblement les résultats.

Les résultats obtenus avec la technique de Craig-Bampton sont d'une moins bonne précision bien que la taille du modèle réduit soit 3 fois supérieure à celle du modèle obtenu avec une base de modes libres.

Les résultats obtenus par synthèse modale à l'aide des bases de modes contraints sont acceptables sur les 15 premiers modes calculés. L'emploi de modes bloqués associés aux modes contraints augmente sensiblement la qualité des bases de condensation.

5.6 Conclusions

L'emploi de formulations de transformations "congruentes" est à privilégier quant à la précision des résultats.

La méthode d'assemblage simultané par les efforts de jonction est validée.

L'absence des degrés de liberté physiques de jonction de l'ensemble des coordonnées réduites ne dégrade pas la précision d'un modèle réduit par synthèse modale.

Il est possible d'employer différentes bases de condensation compatibles avec la technique d'assemblage proposée.

Sous réserve d'inclure des réponses statiques au droit des excitations internes aux

sous-structures dans les bases de réduction, on obtient un modèle réduit capable de prédire de façon correcte le comportement de la structure soumise à des chargements dynamiques. Cela reste valable dans le cas d'une condensation à plusieurs niveaux en coordonnées physiques.

Chapitre 6

Applications à des modèles industriels de type automobile

On présente dans ce chapitre les résultats de la technique de synthèse modale proposée dans le chapitre 5, appliquée à 2 modèles de structures industrielles de type automobile, soit un plancher de charge et une caisse nue.

Le test réalisé sur le plancher de charge a pour objectif la comparaison des résultats obtenus avec la technique présentée vis-à-vis des méthodes classiques ainsi que la validation de l'assemblage à plusieurs niveaux.

Le modèle de caisse est représentatif d'une structure complexe et présente un haut degré de connectivité. La technique proposée est particulièrement adaptée à la réduction d'un tel modèle par synthèse modale et ses performances en terme de précision de prédiction et en terme de taille du modèle réduit sont ainsi mis en évidence.

Les tests numériques présentés dans ce chapitre ont été réalisés dans le cadre de contrats industriels [16] [17] proposés par la Direction des Recherches et Affaires Scientifiques du G.I.E. P.S.A. Peugeot-Citroën (centre d'essais Citroën de Vélizy-Villacoublay (78)). Les méthodes testées (méthodes de Craig-Bampton, Martinez et proposée) ont donné lieu à l'élaboration d'un outil logiciel de réduction par synthèse modale [52] développé sur la plate-forme Proto-Dynamique (LMARC/Intespace) en langage Matlab (MathWorks, Inc.) et interfacé au moyen du langage Dmap avec le code éléments finis Nastran (MacNeal-Schwendler Corporation).

6.1 Plancher de charge de véhicule

6.1.1 Caractéristiques du modèle

La structure modélisée correspond à la partie inférieure non équipée du coffre d'un véhicule (Figure 6.1). Elle est constituée d'un assemblage de 27 pièces élémentaires que l'on considère comme autant de sous-structures.

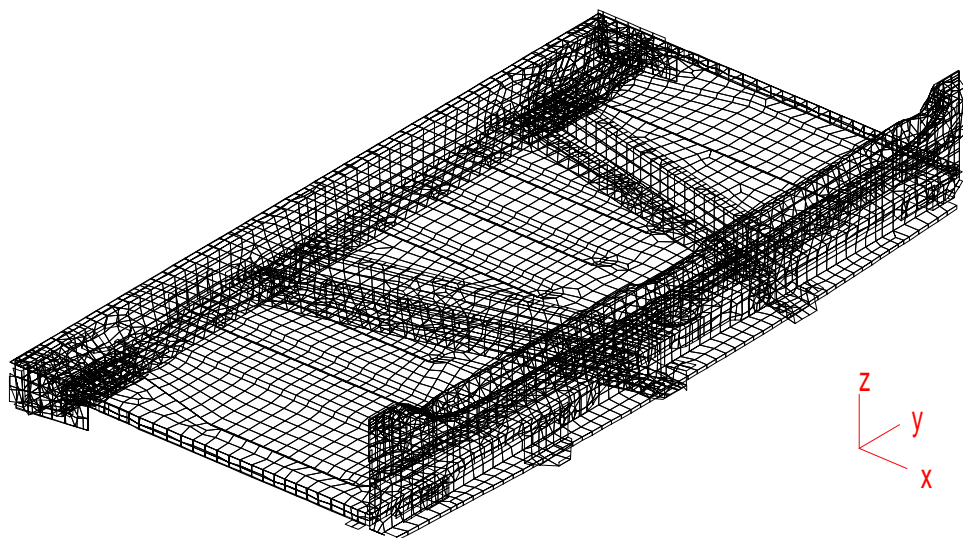


Figure 6.1 : Modèle éléments finis du plancher de charge

Les sous-structures les plus importantes sont la plaque nervurée de base, les profilés en U obliques qui font office de raidisseurs et les renforts avant et arrière.

Le modèle est maillé en éléments coques de type triangle et quadrangle à 6 degrés de liberté par noeud et comporte environ 45 500 degrés de liberté.

On dénombre 209 noeuds de soudure soit 1254 degrés de liberté de jonction.

Les conditions aux limites appliquées au modèle sont de type encastrement sur les bords latéraux (2×11 noeuds encastres).

On définit une bande d'analyse $[0 - 300]$ Hz comprenant 27 modes déformables. On appelle fréquence utile (Fu) la borne supérieure de la bande d'analyse (Fu = 300 Hz).

Les premiers modes de la structure sont visualisés Figure 6.2.

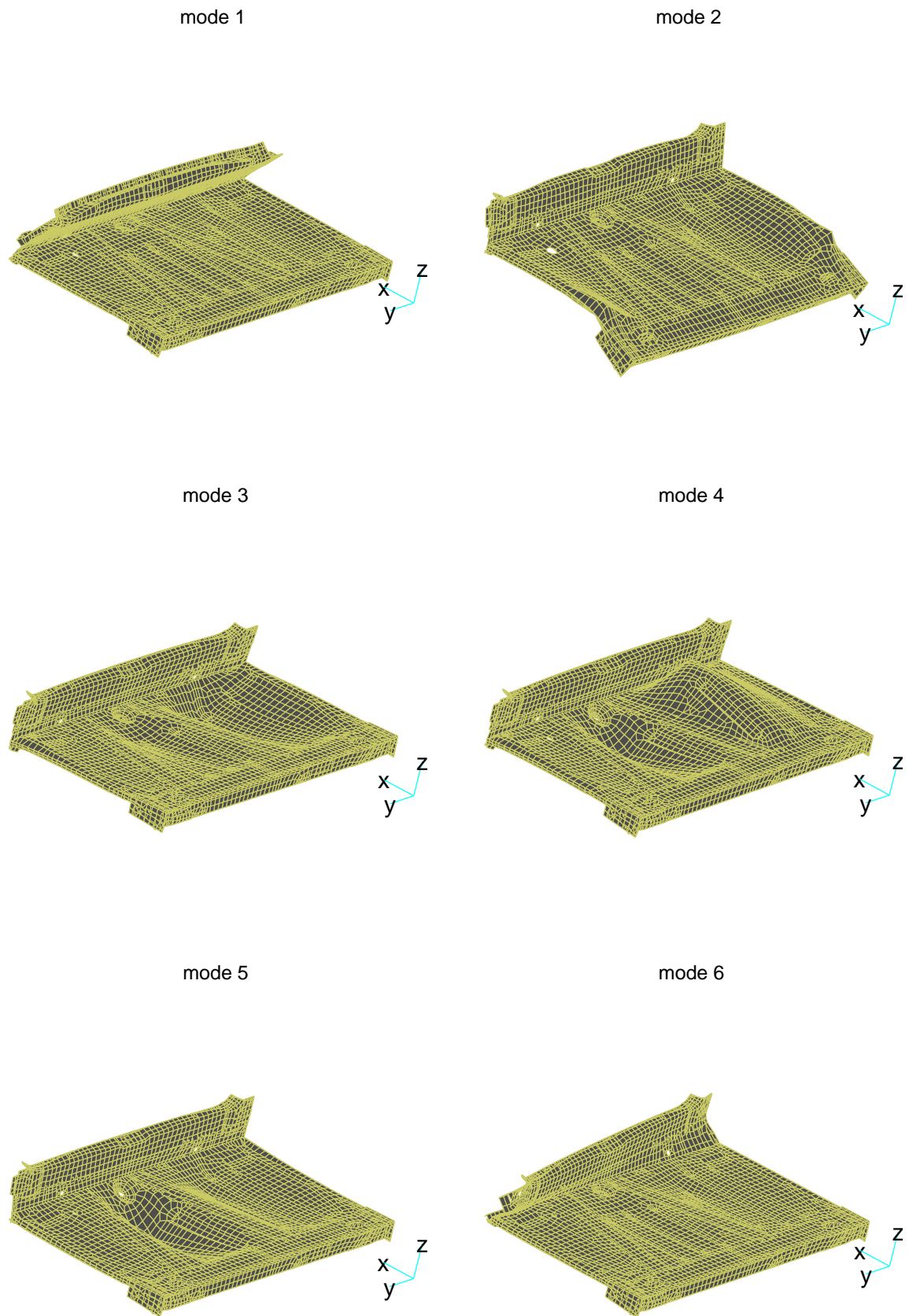


Figure 6.2 : Premiers modes du plancher de charge

6.1.2 Méthodes testées

Méthode de Martinez

Les bases de condensation des sous-structures sont formées à partir des vecteurs de flexibilité résiduelle au droit des degrés de liberté de jonction et des modes normaux à interface libre (paragraphe 3.1.4).

Le nombre de modes libres par sous-structure est choisi selon un critère fréquentiel empirique : on inclut dans la base de réduction les modes composants dont les fréquences propres sont comprises dans une bande fréquentielle de 0 à $3 \times F_u$ (Fréquence utile), soit une bande $[0 - 900]$ Hz. Ce critère est généralement satisfaisant, y compris pour les structures souples rigidifiées localement.

La taille du modèle réduit est de 1756 degrés de liberté répartis en 1254 degrés de liberté de jonction et 502 coordonnées généralisées associées aux modes composants.

Méthode de Craig-Bampton

Les transformations de condensation des sous-structures sont définies à l'aide des modes contraints au droit des degrés de liberté de jonction et des modes normaux à interface bloquée (paragraphe 3.1.3).

On retient initialement les modes bloqués dans une bande de 0 à $7 \times F_u$, soit une bande $[0 - 2100]$ Hz. La taille du modèle réduit est de 1743 degrés de liberté répartis en 1254 degrés de liberté de jonction et 489 coordonnées généralisées associées aux modes composants.

Il est délicat de définir un critère fréquentiel valable pour déterminer a priori le nombre de modes composants à frontière bloquée dans les bases de condensation. En effet, les fréquences propres de ces modes dépendent fortement de la localisation des noeuds de jonction.

On peut remédier à ce problème en effectuant deux calculs additionnels par sous-structure : un calcul des fréquences propres sur la sous-structure non condensée à frontière libre et un calcul des fréquences propres sur la sous-structure condensée par la base de Craig-Bampton, effectués dans une bande fréquentielle de 0 à F_u . On estime que le nombre de modes composants est suffisant lorsque les erreurs relatives en fréquence sont de l'ordre de $1/100$ dans cette bande fréquentielle.

Cette procédure génère un coût de calcul supplémentaire qui reste cependant inférieur à celui engendré par un calcul de vérification de la validité réalisé à l'aide du modèle global. De plus, on peut restreindre cette procédure aux sous-structures les plus importantes.

Méthode proposée

On emploie la technique proposée dans le chapitre 5 dans sa configuration initiale (relation (5.5)) : les bases de condensation sont définies à l'aide des modes à interface libre et des vecteurs de flexibilité résiduelle au droit des degrés de liberté de jonction. Les vecteurs de base utilisés sont identiques aux vecteurs employés dans la méthode de Martinez. Le critère de choix du nombre de modes composants à interface libre reste le même.

- **Assemblage simultané**

On réalise un assemblage simultané des sous-structures.

Le modèle réduit obtenu est exprimé uniquement sur les coordonnées généralisées associées aux modes à interface libre de sous-structure, soit 502 coordonnées.

- **Assemblage différé**

Afin de valider la procédure d'assemblage à plusieurs niveaux, on définit 3 super-éléments 1, 2 et 3 regroupant respectivement 7, 11 et 9 sous-structures (Figures 6.3, 6.4, 6.5 et 6.6). Les sous-structures condensées sont assemblées et forment ces 3 entités. Les efforts de jonction permettant l'assemblage des 3 super-éléments sont conservés dans chaque ensemble de coordonnées réduites. On procède ensuite à l'assemblage des 3 super-éléments.

Le modèle réduit obtenu est de taille identique au précédent, soit 502 coordonnées.

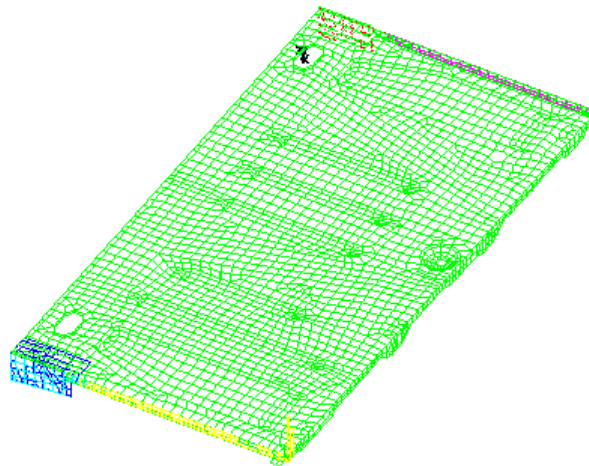


Figure 6.3 : Super-élément 1 (Plancher de charge)

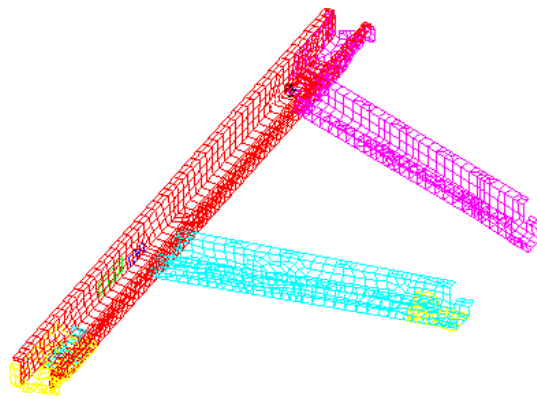


Figure 6.4 : Super-élément 2 (Plancher de charge)

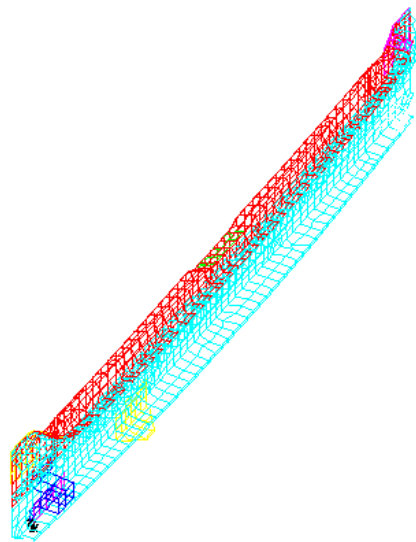


Figure 6.5 : Super-élément 3 (Plancher de charge)

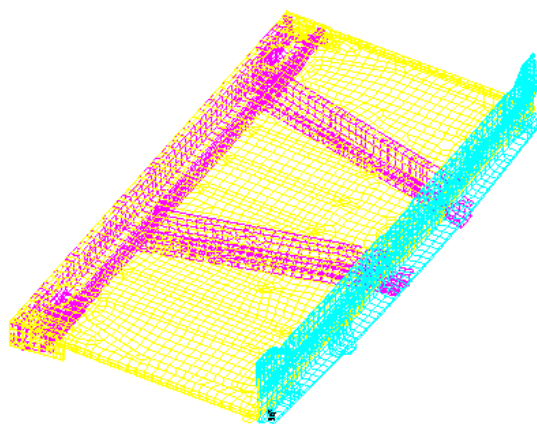


Figure 6.6 : Modèle éléments finis du plancher formé de 3 super-éléments

6.1.3 Résultats

A titre indicatif, on présente dans les Tableaux 6.1 et 6.2 la composition des bases de condensation et quelques caractéristiques des différents modèles réduits.

Méthodes de réduction	Martinez	Craig-Bampton	proposée
Modes de flexibilité résiduelle	1254	-	1254
Modes contraints	-	1254	-
Modes de corps rigide	162	-	162
Modes à interface libre	340	-	340
Modes à interface bloquée	-	489	-
Taille du modèle réduit	1756	1743	502

Tableau 6.1 : Composition des bases de condensation (Plancher de charge)

Méthodes de réduction	Martinez	Craig-Bampton	proposée
Taille des matrices réduites (nombre de coordonnées)	1756	1743	502
Taille des matrices réduites (occupation mémoire en Mégaoctets)	15	15	2
Temps réel de la résolution aux valeurs propres (sec.)	1250	1230	90

Tableau 6.2 : Caractéristiques des modèles réduits (Plancher de charge)

On présente les résultats de prédiction obtenus à l'aide des 4 méthodes en terme d'erreurs relatives sur les fréquences propres (Figure 6.7) et vecteurs propres reconstitués (Figure 6.8) vis-à-vis du modèle de référence.

On rappelle dans les relations (6.1) et (6.2) les critères d'erreur relative sur les fréquences propres ε_f et sur les vecteurs propres ε_y :

$$\varepsilon_f = \frac{|f_C - f_{exact}|}{f_{exact}} \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\|y_C - y_{exact}\|}{\|y_{exact}\|} \quad (6.2)$$

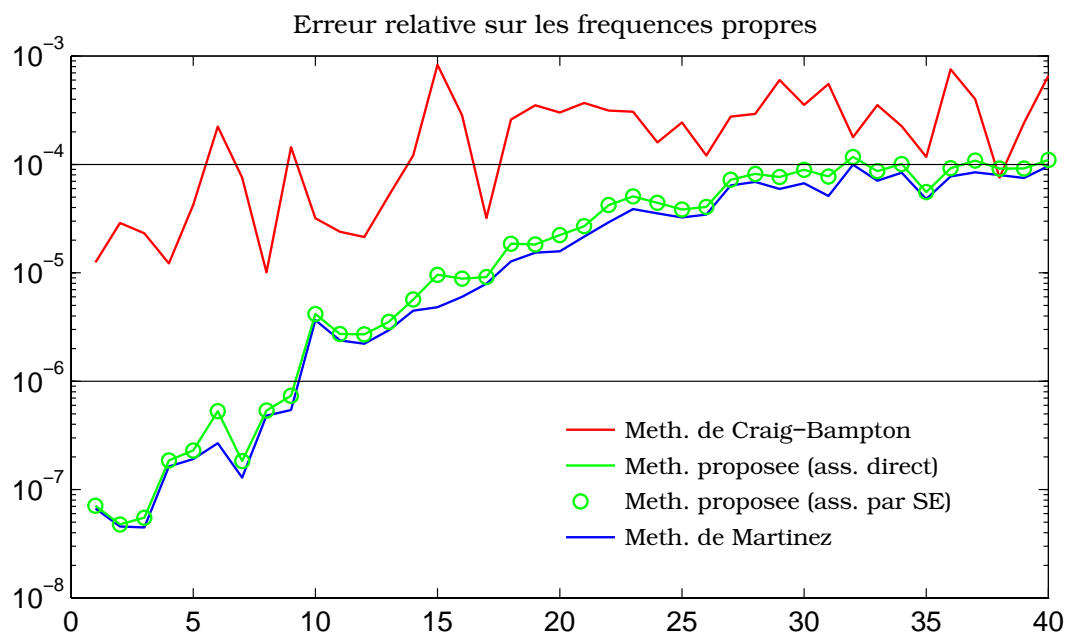


Figure 6.7 : Erreur relative sur les fréquences propres prédites par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Plancher de charge)

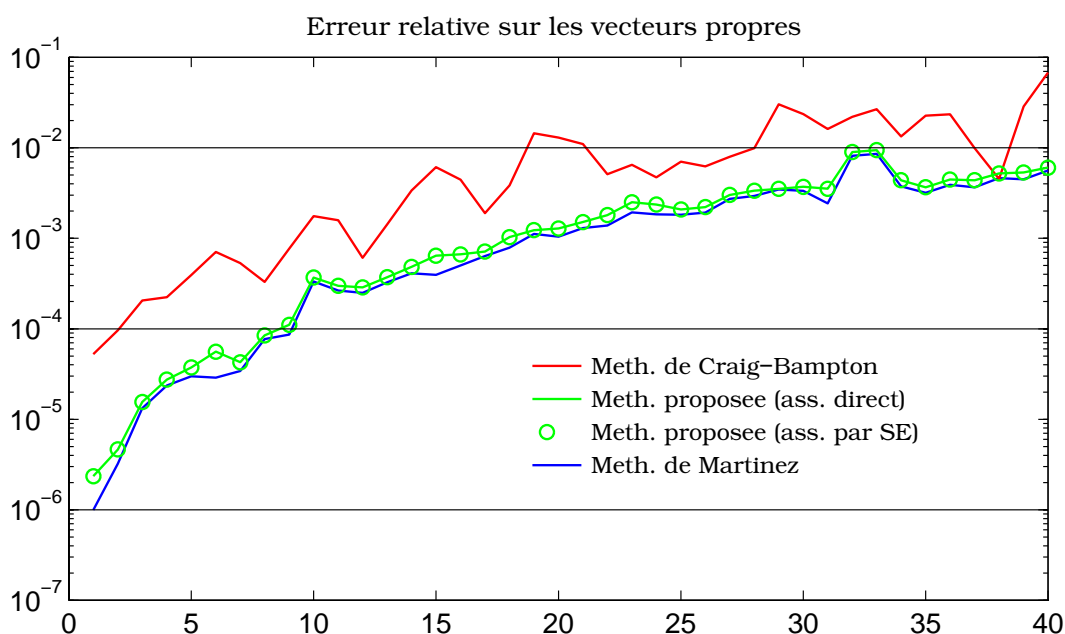


Figure 6.8 : Erreur relative sur les vecteurs propres prédits par les modèles réduits vis-à-vis du modèle de référence (Plancher de charge)

Les 3 méthodes testées donnent des résultats très acceptables dans la bande d'analyse fixée (27 premiers modes déformables). L'erreur relative commise sur la prédiction des fréquences propres est inférieure à 1/1000 pour l'ensemble des méthodes. L'erreur relative commise sur les vecteurs propres est inférieure à 1% pour les techniques proposée et Martinez, inférieure à 5% avec le modèle réduit de Craig-Bampton.

Bien que les modèles réduits de Craig-Bampton et de Martinez soient de taille comparable, l'usage de modes à interface libre donne des résultats plus précis et linéaires, ceci pour un nombre inférieur de modes composants déformables calculés.

La méthode proposée donne des résultats de prédiction analogues à ceux obtenus par la méthode de Martinez, le modèle réduit étant exempt des degrés de liberté de jonction. Les bases initiales de condensation sont identiques. L'élimination des degrés de liberté de jonction pendant l'assemblage des sous-structures condensées ne dégrade pas le résultat de prédiction. La présence de ces degrés de liberté de jonction dans le modèle réduit final ne contribue pas à la précision du modèle réduit.

Les résultats obtenus par la méthode proposée avec un assemblage différé des sous-structures sont identiques vis-à-vis de ceux obtenus avec un assemblage simultané. Cette procédure d'assemblage par super-éléments est donc validée.

6.2 Caisse nue de véhicule

6.2.1 Caractéristiques du modèle

La structure étudiée est une caisse nue de véhicule de catégorie moyenne non équipée (Figure 6.9). Elle est constituée d'un assemblage initial de 130 pièces (éléments de tôle mince) physiques de diverses tailles connectées par plus de 3500 points de soudure.

La structure est représentative des assemblages mécano-soudées de grande taille et à fort degré de connectivité.

Le modèle éléments finis complet associé comporte 450 000 degrés de liberté (Figure 6.10). Le maillage est considéré comme fin : la dimension moyenne de l'arête d'une maille est de l'ordre de 20 mm.

Les éléments du maillage sont de type coque mince triangulaire ou quadrangulaire. Les points de soudure sont représentés soit par des noeuds communs entre pièces soit par des liaisons de type élément biellette rigide.

L'épaisseur des tôles est comprise entre 6/10 et 2 mm. La raideur élémentaire est alimentée par les effets de membrane, flexion et cisaillement.

Après regroupement des pièces de petite taille (dont le modèle comporte moins de



Figure 6.9 : Structure caisse nue

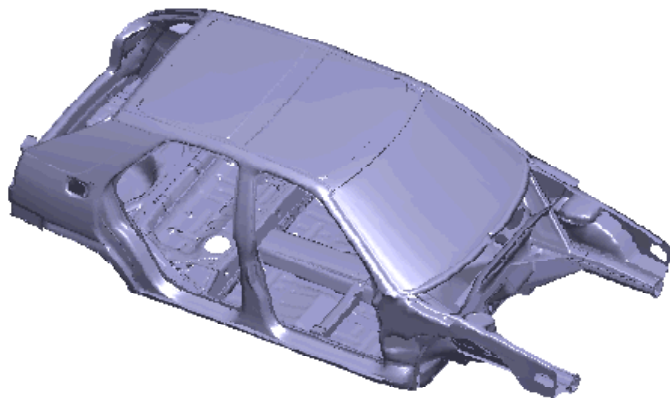


Figure 6.10 : Modèle éléments finis de la caisse nue (450 000 degrés de liberté)

150 éléments finis) sur des pièces adjacentes, on dénombre 94 sous-structures (Figure 6.11).

Le modèle éléments finis présente plus de 21 500 degrés de liberté de jonction. On illustre le couplage des sous-structures Figure 6.12, où l'on visualise les termes non nuls de la matrice de couplage exprimée en noeuds de jonction. La taille mémoire correspondant aux termes non nuls de cette matrice de couplage exprimée en degrés de liberté de jonction est de l'ordre de 195 Mégaoctets (hors index de localisation).

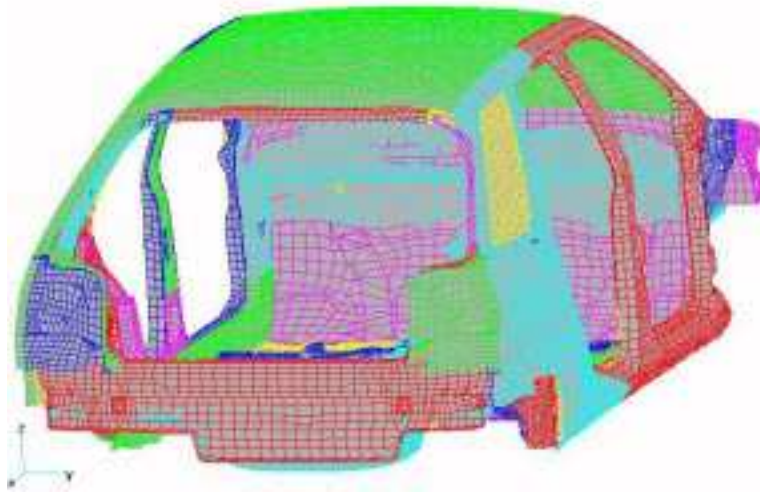


Figure 6.11 : Modèle éléments finis sous-structuré de la caisse

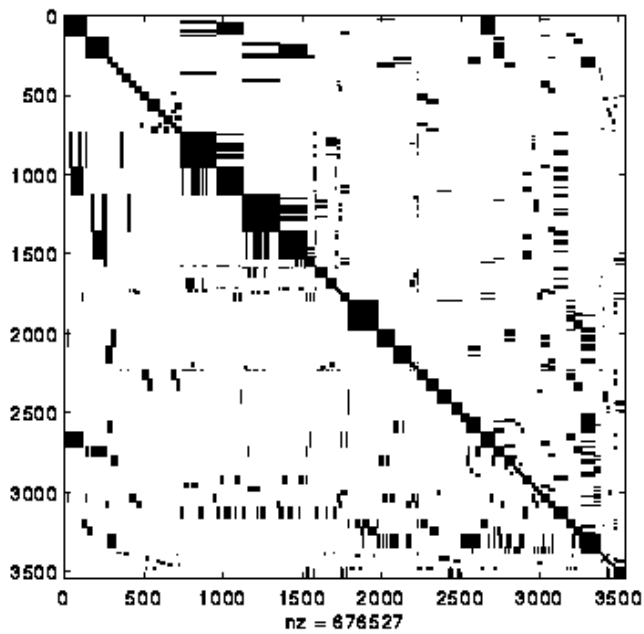


Figure 6.12 : Densité de la connectivité des sous-structures du modèle caisse

La bande d'analyse est fixée a priori ($[0 - F_u]$) et comprend 30 modes déformables. Les conditions aux limites de la structure sont de type libre.

La structure présente seulement 2 modes de déformation d'ensemble dans la bande d'analyse, soit un mode de torsion (Figure 6.13) suivi d'un mode de flexion (Figure 6.14).

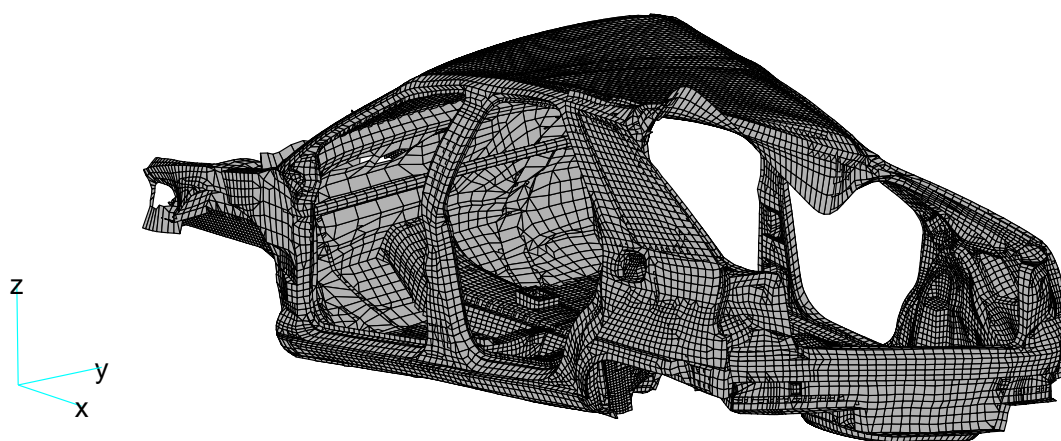


Figure 6.13 : Mode de torsion de la caisse

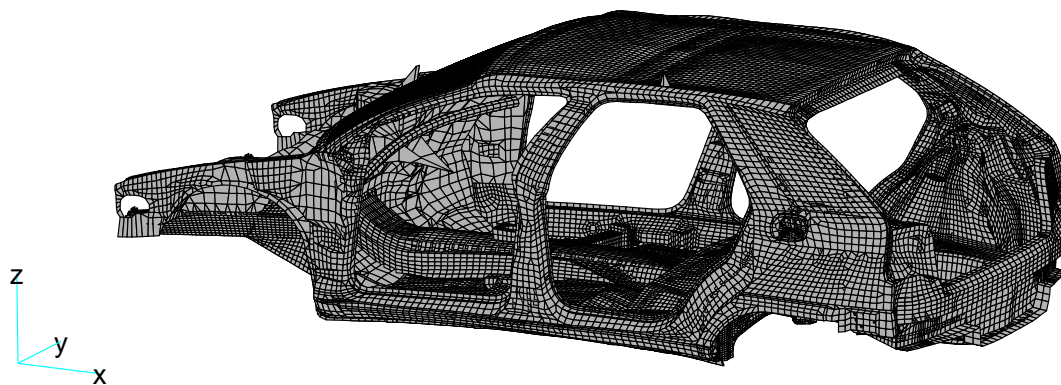


Figure 6.14 : Mode de flexion de la caisse

6.2.2 Méthode employée

On applique la méthode de synthèse modale proposée dans sa formulation modes composants à interface libre et flexibilité résiduelle au droit des degrés de liberté de jonction.

Les modes composants des bases de condensation des sous-structures sont choisis à l'aide du critère fréquentiel défini précédemment, soit les modes dont les fréquences sont inférieures à $3 \times F_u$ (Fréquence utile).

Le total des modes composants satisfaisant ce critère est de 2000. Ils représentent 10% de l'ensemble des vecteurs des bases de condensation des sous-structures. On recense 564 modes de corps rigide parmi les 2000 modes composants.

Le modèle réduit final comprend 2000 coordonnées généralisées et la taille mémoire des matrices réduites est de 32 Mégaoctets.

On emploie une procédure d'assemblage différée: les sous-structures condensées sont assemblées en premier lieu en 6 super-éléments (Figure 6.15). On procède ensuite à l'assemblage des super-éléments et on obtient le modèle réduit final.

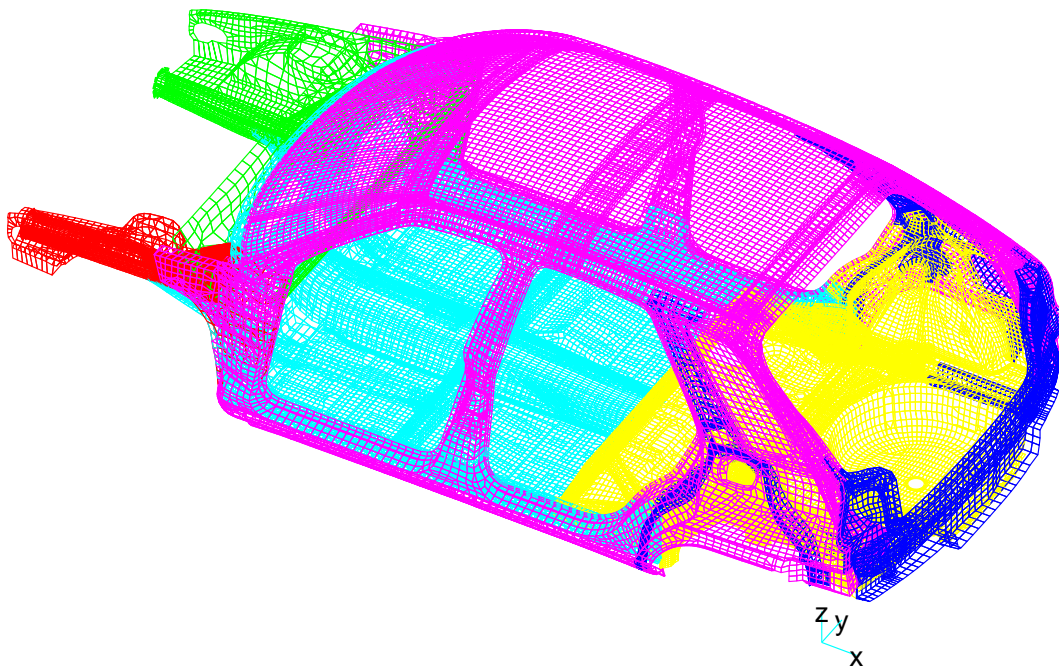


Figure 6.15 : Modèle éléments finis de la caisse formé de 6 super-éléments

6.2.3 Résultats

Les solutions propres sont calculées à partir du modèle réduit à 2000 degrés de liberté dans la bande $[0 - 2 F_u]$ qui contient 180 modes déformables. Les vecteurs propres sont reconstitués sur l'ensemble des degrés de liberté à l'aide des bases de réduction.

On compare les solutions propres prédites par le modèle réduit vis-à-vis des solutions propres obtenues à partir d'un calcul de référence effectué sur le modèle complet.

On présente Figures 6.16 et 6.17 les erreurs relatives ε_f sur les fréquences propres et ε_y sur les vecteurs propres reconstitués (critères définis dans les relations (6.1) et (6.2)).

Compte-tenu de la forte densité modale dans la bande d'analyse, on observe des couplages en forme entre les vecteurs propres. On introduit un critère additionnel ε_p défini par l'expression (6.4) basé sur l'erreur de projection d'un mode de référence sur une sous-base Y_C constituée du mode de même rang et des modes adjacents prédits par le modèle réduit.

L'erreur de projection $e_{p(\nu)}$ du mode de rang ν est exprimée par la relation :

$$e_{p(\nu)} = y_{exact(\nu)} - Y_C [Y_C^T Y_C]^{-1} Y_C^T y_{exact(\nu)} \quad (6.3)$$

où $Y_C = \begin{bmatrix} y_{C(\nu-2)} & y_{C(\nu-1)} & y_{C(\nu)} & y_{C(\nu+1)} & y_{C(\nu+2)} \end{bmatrix}$.

Le critère d'erreur ε_p , que l'on nomme erreur relative sur les sous-bases modales, est défini par l'expression :

$$\varepsilon_p = \frac{\|e_p\|}{\|y_{exact}\|} \quad (6.4)$$

On visualise cette erreur relative Figure 6.18.

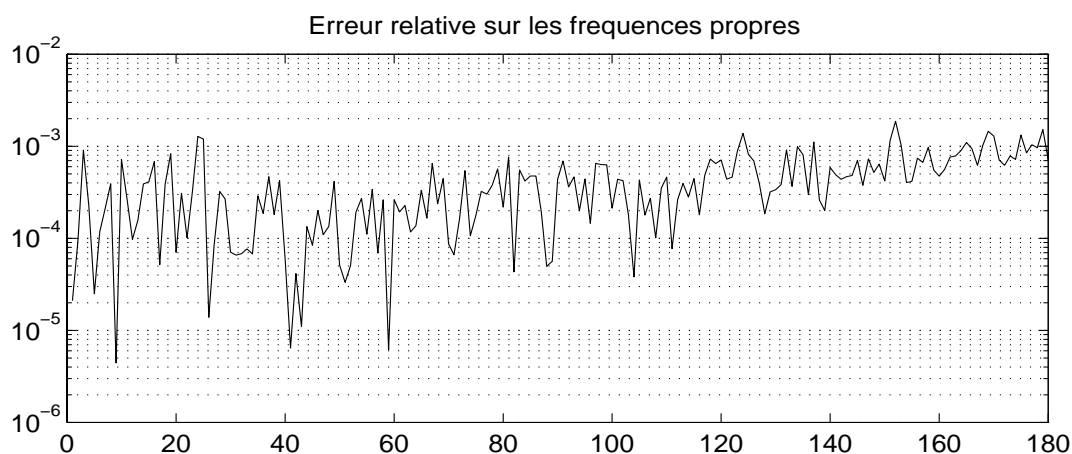


Figure 6.16 : Erreur relative sur les fréquences propres prédites par le modèle réduit vis-à-vis du modèle de référence (Caisse nue)

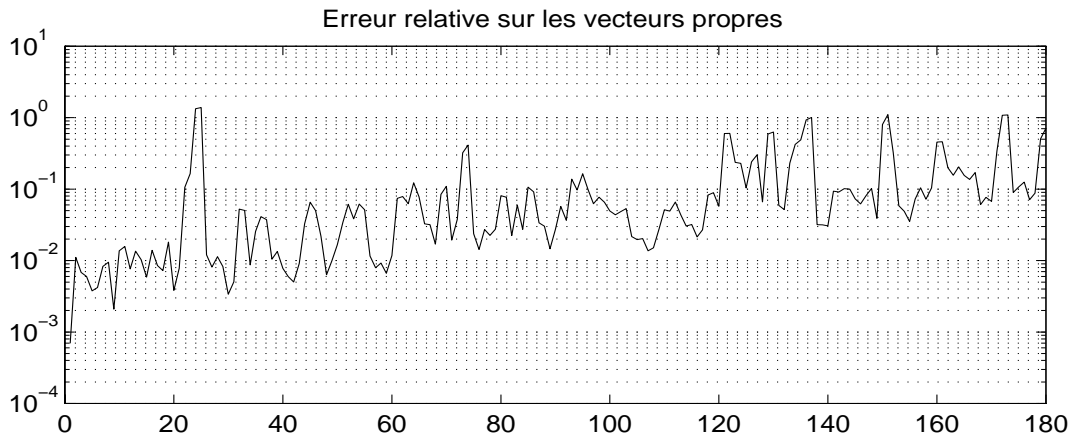


Figure 6.17 : Erreur relative sur les vecteurs propres prédits par le modèle réduit vis-à-vis du modèle de référence (Caisse nue)

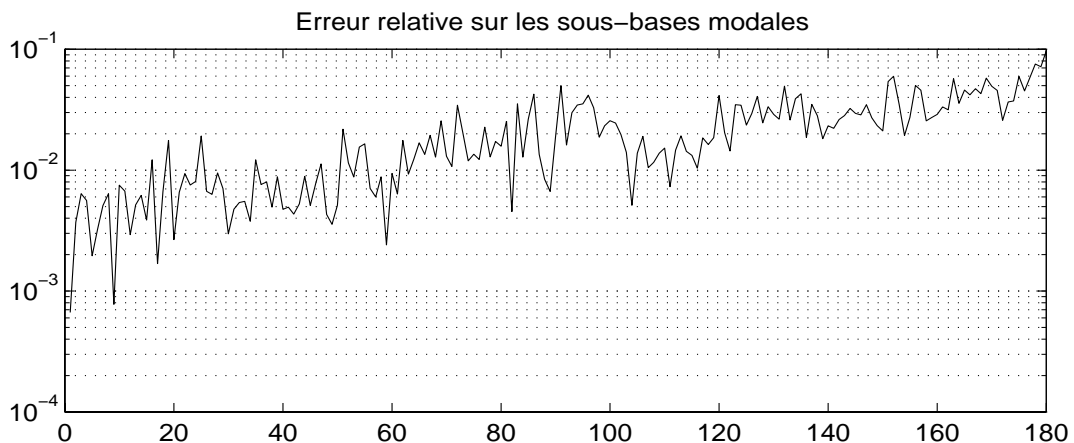


Figure 6.18 : Erreur relative sur les sous-bases modales calculées avec le modèle réduit vis-à-vis du modèle de référence (Caisse nue)

L'examen des erreurs relatives montre que le modèle réduit préserve le comportement dynamique dans la bande $[0 - 2 F_u]$. La précision en fréquence est de l'ordre de $1/1000$. L'erreur commise sur les vecteurs propres est au plus de l'ordre de 10% pour les vecteurs propres non affectés de couplage en forme. La prise en compte de ce couplage nous conduit à une erreur inférieure à 10% sur les sous-bases modales.

Le critère fréquentiel de choix du nombre de modes composants ($3 \times$ la bande utile) s'avère correct sur cette application et présente une marge de sécurité raisonnable. Il est donc applicable aux structures complexes fortement rigidifiées.

6.3 Conclusions

Un modèle éléments finis de 450 000 degrés de liberté peut être réduit à un modèle de taille acceptable (quelques milliers de degrés de liberté), dont le domaine utile est fixé a priori, en une seule procédure de synthèse modale.

Il est nécessaire d'utiliser pour des modèles de cette taille et présentant de surcroît une forte connectivité une technique de synthèse modale supprimant les degrés de liberté de jonction (ou du moins les degrés de liberté de jonction non désirés dans les coordonnées du modèle réduit), dans l'objectif de disposer d'un modèle réduit final efficace dans une procédure d'analyse dynamique répétitive.

La méthode proposée dans ses différentes formulations d'assemblage est validée.

Elle permet l'obtention de modèles réduits exempt des degrés de liberté de jonction, donc de plus petites tailles vis-à-vis de l'emploi de méthodes classiques type Martinez ou Craig-Bampton, ceci pour une précision équivalente.

Lorsque l'analyse du comportement dynamique de la structure complète est effectuée dans une bande fréquentielle utile $[0 - F_u]$, le critère de calcul des modes composants à interface libre dans une bande $[0 - 3 F_u]$ est tout à fait satisfaisant.

Conclusion générale

Les techniques de réduction de modèles éléments finis concernent les modèles de grande taille. Cette étude a nécessité la mise en place d'outils logiciels et matériels permettant d'appréhender ce type de problème, ainsi que la maîtrise de macro-langages de programmation. Cette étude a donc été réalisée avec un souci constant de prise en compte des contraintes liées à la modélisation des structures de type industriel. Les exemples présentés, fournis par le G.I.E PSA Peugeot-Citroën, ont été traités à l'aide d'un outil logiciel, interfacé avec le code de calcul Nastran, réalisé durant cette étude et livré à l'entreprise.

Nous avons testé sur un cas industriel (modèle de porte de véhicule à 30 000 degrés de liberté) la robustesse d'un modèle réduit comportant 23 paramètres. L'adjonction dans la base de réduction, de vecteurs de réponses statiques résiduelles à des chargements successifs représentatifs des perturbations paramétriques, constitue un excellent sous-espace suffisamment large pour représenter les solutions approchées du système soumis à diverses combinaisons paramétriques. L'utilisation de tels modèles réduits paramétrés et robustes lors de réanalyses approchées apporte une économie de calcul considérable vis-à-vis de réanalyses exactes ; ceci s'avère d'autant plus efficace que la taille du modèle est grande. L'intérêt de cette technique de réanalyse couplée avec des procédures itératives de recalage de modèle ou d'optimisation de comportement par sensibilité, par adaptation, séquentielles ou génétiques n'est plus à démontrer. De plus, cette stratégie doit être applicable dans le cadre de procédures de synthèse modale.

Les modèles réduits peuvent être exprimés intégralement en coordonnées physiques par une transformation des coordonnées généralisées sans aucune perte d'information. Ceci simplifie et peut parfois supprimer totalement l'étape de reconstitution des solutions sur certains points du maillage, lesquels peuvent être imposés a priori. La prise en compte des chargements externes par des réponses statiques dans les bases de réduction est compatible avec l'ensemble des méthodes de réduction. Ainsi, on garantit

une excellente prédiction des réponses forcées ainsi qu'un couplage possible du modèle réduit avec d'autres modèles et maillages.

La méthode de synthèse modale proposée a été comparée aux méthodes classiques (Craig-Bampton et Martinez) sur un modèle de plancher de charge à 45 000 degrés de liberté. Les résultats obtenus montrent l'intérêt de la technique présentée en terme de taille du modèle réduit et ce pour une précision au moins équivalente. La stratégie d'assemblage différée a été validée. Elle répond aux impératifs de modularité de l'assemblage exigés d'une technique de synthèse modale. Appliquée au modèle de caisse nue comportant 94 sous-structures, 450 000 degrés de liberté dont 21 500 degrés de liberté de jonction, cette stratégie a permis l'obtention d'un modèle réduit à 2000 coordonnées préservant la bande d'analyse fixée a priori. Le critère fréquentiel utilisé de choix a priori du nombre de modes composants semble fiable et n'a jamais été mis en défaut lors de nos nombreux tests.

La technique présentée supprime les degrés de liberté de jonction non désirés dans le modèle réduit final et, dans sa formulation, n'implique pas d'approximations supplémentaires sur l'information de couplage des sous-structures. Ainsi, ce procédé original de synthèse modale permet l'obtention d'un modèle réduit précis et représentatif du comportement basse fréquence de structures complexes exempt de l'information redondante des degrés de liberté de jonction. Il est bien adapté aux structures présentant une forte connectivité.

Différentes bases de condensation des sous-structures sont compatibles avec l'assemblage par élimination des efforts de jonction et ont été testées sur un cas académique. Parmi les transformations proposées, on retient la base constituée de modes contraints (éventuellement enrichis de modes libres afin d'augmenter la bande de validité) qui permet l'assemblage, par les efforts de jonction, de sous-structures condensées par une technique de Guyan.

La stratégie de réduction à plusieurs niveaux en coordonnées physiques (synthèse modale suivi d'une seconde condensation) a été validée dans le cadre de prédiction de réponses à des chargements dynamiques internes aux sous-structures. L'emploi de réponses statiques dans un objectif de robustesse et au droit des sollicitations externes allié à l'usage de transformations en coordonnées physiques et de stratégies de réduction à plusieurs niveaux constituent un outil performant d'adaptation des données issues du modèle aux données observées sur la structure lors de procédures itératives de recalage. L'erreur due à l'adaptation dépend essentiellement de la capacité de la base à représenter les déplacements du système modifié lors de la réanalyse approchée du

modèle. Ainsi, à l'itération zéro ou à chaque réanalyse exacte de la base de réduction, le modèle réduit adapté aux points d'observation de la structure reflète de façon quasi-parfaite l'état du modèle global. L'erreur due à la réduction est faible et maîtrisée.

Perspectives d'application et de recherche

De nombreux points restent à valider ou méritent des investigations plus poussées. Concernant l'utilisation de réponses statiques dans un but de robustesse, il convient d'étudier plus avant la sélection ou le filtrage des vecteurs à retenir. On doit chercher naturellement une base de réduction la plus "utile", dont la robustesse est la plus forte vis-à-vis d'un nombre de vecteurs statiques le plus faible. De plus, cette stratégie demande à être testée en synthèse modale dans les différentes formulations présentées dans cette étude.

Nous avons traité de la réduction des modèles essentiellement dans le cadre d'analyses vibratoires en basses fréquences. Il peut être utile d'obtenir des modèles réduits fiables en milieu de spectre par bande de fréquences, notamment pour des applications de type contrôle actif. Il conviendrait alors d'approcher la contribution des modes de rang inférieur dans la bande d'analyse par un ou quelques vecteurs appropriés qui restent à définir.

Quelques formulations présentées, telles que la réduction en coordonnées physiques, la prise en compte statique des chargements éventuels et la technique de synthèse modale proposée, peuvent être implantées à brève échéance dans un code de calcul industriel ouvert.

On souhaite tester la méthode de synthèse modale proposée, dans sa formulation en coordonnées physiques, sur une structure complexe de type aéronautique ou spatiale afin de la confronter aux spécifications demandées dans ces secteurs.

A plus long terme, on entrevoit ce qui sera la modélisation future des structures complexes : un assemblage de modèles fins réduits paramétrés, éventuellement extraits d'une bibliothèque, systématiquement réajustés vis-à-vis de résultats d'expérience, le modèle final étant qualifié par un essai global.

La réduction des modèles éléments finis dynamiques reste un outil utile, indispensable à l'ingénieur mécanicien et adapté à l'évolution des stratégies de modélisation.

Références bibliographiques

- [1] AITRIMOUC H., " *Analyse de structures mécaniques modifiées,*" Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1993.
- [2] BALMES E., " *Model reduction for systems with frequency dependant damping properties,*" 15th International Modal Analysis Conference, 1997, Vol.1, pp.223-229.
- [3] BALMES E., " *Use of generalized interface degrees of freedom in component synthesis,*" 14th International Modal Analysis Conference, 1996, Vol.1, pp.204-210.
- [4] BALMES E., " *Modèles expérimentaux complets et modèles analytiques réduits en dynamique des structures,*" Habilitation à Diriger des Recherches, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 1997.
- [5] BAMFORD R., WADA B.K., GARBA J.A., CHISHOLM J., " *Dynamics analysis for large structural systems,*" Synthesis of Vibrating Systems, ASME Booklet, 1971, pp.57-71.
- [6] BATHE K.J., " *Finite Element Procedures,*" Third Printing, Printice-Hall of India, New Delhi, 1996.
- [7] BENFIELD W.A., HRUDA R.F., " *Vibration analysis of structures by component mode substitution,*" American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1971, Vol.9, No.7, pp.1255-1261.
- [8] BERRIET R., " *Etude de méthodes de correction paramétrique de modèles en élasto-dynamique,*" Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1995.

- [9] BERTHILLIER M., DUPONT C., CHANEZ P., SAURAT F., "Réponse forcée aéroélastique des aubes de turbomachines," Revue Française de Mécanique, 1998, No.1998-4, pp.265-275.
- [10] BERTHOD C., "Identification paramétrique de grandes structures : réanalyse et méthode évolutionnaire," Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1998.
- [11] BOUAZZOUNI A., "Contribution à l'identification de structures linéaires dissipatives dans le domaine fréquentiel," Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1995.
- [12] BOUHADDI N., FILLOD R., "Substructuring using a linearized dynamic condensation method," Computers & Structures, 1992, Vol.45, pp.679-683.
- [13] BOUHADDI N., FILLOD R., "Model reduction by a simplified variant of dynamic condensation," Journal of Sound and Vibration, 1996, Vol.191, No.2, pp.233-250.
- [14] BOUHADDI N., FILLOD R., "Condensation dynamique de Guyan : domaine de validité," Mécanique Industrielle et Matériaux, Revue du G.A.M.I., 1992, Vol.44, No.4, pp.9-10.
- [15] BOUHADDI N., FILLOD R., "A method for selecting master dof in dynamic substructuring using the Guyan condensation method," Computers & Structures, 1992, Vol.45, pp.941-946.
- [16] BOUHADDI N., FILLOD R., LOMBARD JP., OSMANI N., "Stratégies de condensation et sous-structuration afin de réduire la taille de M.E.F. véhicule," Rapport final de contrat PSA Peugeot-Citroën, Juin 1998.
- [17] BOUHADDI N., FILLOD R., LOMBARD JP., OSMANI N., VIVOT O., "Condensation du M.E.F. d'une caisse complète de véhicule automobile," Rapport final de contrat PSA Peugeot-Citroën, Mars 1998.
- [18] BOUHADDI N., HUANG SJ., LOMBARD JP., "Robustesse des modèles condensés vis-à-vis des perturbations paramétriques," Mécanique Industrielle et Matériaux, Revue du G.A.M.I., Décembre 1998, Vol.51, No.4, pp.188-190.
- [19] BOUHADDI N., LOMBARD JP., "Improved free interface substructures representation method," Computers & Structures, à paraître.

- [20] BRAHMI K., " *Double condensation en sous-structuration dynamique,*" Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1996.
- [21] BRAHMI K., BOUHADDI N., FILLOD R., " *Reduction of junction degrees of freedom in certain methods of dynamic substructure synthesis,*" 13th International Modal Analysis Conference, 1995, Vol.2, pp.1763-1769.
- [22] CLOUGH R.W., PENZIEN J., " *Dynamics of structures,*" Mc Graw-Hill International Ed., 1993.
- [23] COGAN S., " *Réanalyse des structures à partir de données expérimentales : rigidification et substitution,*" Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1990.
- [24] CRAIG R.R., BAMPION M.C.C., " *Coupling of substructures for dynamics analyses,*" American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1968, Vol.6, No.7, pp.1313-1319.
- [25] CRAIG R.R., CHANG C.J., " *On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis,*" AIAA/ASME 18th Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 1977, Vol.B, pp.89-99.
- [26] ERICSSON T., RUHE A., " *The spectral transformation Lanczos method for the numerical solution of large sparse generalized symmetric eigenvalue problems,*" Mathematics of Computation, 1980, Vol.35, pp.1251-1268.
- [27] FILLOD R., " *Contribution à l'identification des structures mécaniques linéaires,*" Thèse d'Etat, Université de Franche-Comté, 1980.
- [28] FILLOD R., BOUHADDI N., STAWICKI C., LOMBARD JP., OSMANI N., VIVOT O., " *Synthèse modale de structures spatiales à haut degré de connectivité,*" 5^{ème} Conférence Française des Utilisateurs des Logiciels MSC, 1998, 18 p.
- [29] FOLTETE E., " *Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires,*" Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1998.
- [30] GERADIN M., RIXEN D., " *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures,*" Ed. Masson, Paris, 1996, 2^{ème} Ed.
- [31] GLADWELL G.M.L., " *Branch mode analysis of vibrating systems,*" Journal of Sound and Vibrations, 1964, Vol.1, pp.41-59.

- [32] GOLDMAN R.L., " *Vibration analysis by dynamic partitioning,*" American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1969, Vol.7, No.6, pp.1152-1154.
- [33] GOLUB G.H., UNDERWOOD R., " *The block Lanczos method for computing eigenvalues,*" in *Mathematic Software III* (J.R. Rice ed.), Academic Press, New York, 1977, pp.361-377.
- [34] GOLUB G.H., VAN LOAN C.F., " *Matrix computations,*" North Oxford Academic Publishers Ltd, London, 1986.
- [35] GRIHON S., MAHE M., SEIGNEURET F., " *Une méthode de réduction de modèle pour la réanalyse modale et aéroélastique de structure d'avion,*" 4ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA-AFM, Giens, 1999, pp.173-178.
- [36] GUYAN R.J., " *Reduction of stiffness and mass matrices,*" American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1965, Vol.3, pp.380.
- [37] HANSTEEN O.E., BELL K., " *On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics,*" Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1979, Vol.7, No.5, pp.405-411.
- [38] HENSHELL R.D., ONG J.H., " *Automatic masters for eigenvalue economization,*" Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1975, Vol.3, pp.375-383.
- [39] HOU S. N., " *Review of modal synthesis techniques and a new approach,*" The Shock and Vibration Bulletin, 1969, No.40, pp.25-39.
- [40] HUANG S.J., LALLEMENT G., " *Updating of finite element models based on a parametric decoupling procedure,*" Mechanical Systems and Signal Processing, 1999, Vol.13, No.3.
- [41] HURTY W.C., " *Dynamic analysis of structural systems using component modes,*" American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1965, Vol.3, No.4, pp.678-685.
- [42] IMBERT J.F., " *Analyse des structures par éléments finis,*" Cépadues Ed., Toulouse, 1995.
- [43] IRONS B.M., " *Structural eigenvalue problems: elimination of unwanted variables,*" American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1965, Vol.3, pp.961-962.

- [44] JEZEQUEL L., "A hybrid method of modal synthesis using vibration tests," Journal of Sound and Vibrations, 1985, Vol.100, pp.191-210.
- [45] LALLEMENT G., "Systèmes discrets" et "Identification paramétrique," Cours de DEA AOEMS, Université de Franche-Comté, 1995.
- [46] LALLEMENT G., RAMANITRANJA A., COGAN S., "Optimal sensor deployment: application to model updating," Journal of Vibration and Control, 1998, No.4, pp.29-46.
- [47] LANCZOS C., "An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators," Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1950, Vol.45, pp.255-282.
- [48] LEUNG Y.T., "An accurate method of dynamic substructuring with simplified computation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979, Vol.14, pp.1241-1256.
- [49] LEUNG Y.T., "A simple dynamic substructure method," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1988, Vol.16, pp.827-837.
- [50] LOMBARD JP., BOUHADDI N., FILLOD R., "A variant of the MacNeal component mode synthesis method based on a congruent transformation," 15th International Modal Analysis Conference, 1997, Vol.1, pp.92-100.
- [51] LOMBARD JP., BOUHADDI N., OSMANI N., "Elimination des degrés de liberté de jonction dans l'assemblage de sous-structures condensées," Mécanique Industrielle et Matériaux, Revue du G.A.M.I., 1998, Vol.51, N.2, pp.106-109.
- [52] LOMBARD JP., VIVOT O., FILLOD R., BOUHADDI N., "Réduction de modèles éléments finis par synthèse modale de sous-structures, Guide d'utilisation (Version 1.0)," Contrat PSA Peugeot-Citroën, Août 1998
- [53] MACNEAL R.H., "A hybrid method of component mode synthesis," Computers and Structures, 1971, Vol.1, pp.581-601.
- [54] MARTINEZ D.R., MILLER A.K., CARNE T.G., "Combined experimental/analytical modeling of shell/payload structures," Combined Experimental/Analytical Modeling of Dynamic Structural Systems (D.R. Martinez and A.K. Miller editors), AMD, ASME, 1985, Vol.67, pp.167-184.

- [55] MORAND H.J.P., OHAYON R., "Interactions fluides-structures," Recherches en Mathématiques Appliquées, Ed. Masson, Paris, 1992.
- [56] NEWMARK N., "A method of computation for structural dynamics," ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, 1959, Vol.85, pp.67-94.
- [57] O'CALLAHAN J., AVITABILE P., RIEMER R., "System equivalent reduction expansion process (SEREP)," 7th International Modal Analysis Conference, 1989, Vol.1, pp.29-35.
- [58] OHAYON R., SAMPAIO R., SOIZE C., "Dynamic substructuring of damped structures using singular value decomposition," Journal of Applied Mechanics, 1997, Vol.64, pp.292-298.
- [59] OHAYON R., SOIZE C., "Structural acoustics and vibration : mechanical models, variational formulations and discretization," Academic Press, 1998.
- [60] OSMANI N., "Recalage par condensation de modèles," Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1999.
- [61] PIRANDA J., "Analyse modale et recalage de modèle," Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Franche-Comté, 1994.
- [62] PRZEMIENIECKI J.S., "Matrix structural analysis of substructures," American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1963, Vol.1, pp.138-147.
- [63] RAMANITRANJA A.N., LALLEMENT G., "Choix optimal des degrés de liberté maîtres de la condensation de Guyan. Application à l'identification paramétrique," Mécanique Industrielle et Matériaux, Revue du G.A.M.I., 1996, Vol.49, No.2, pp.95-97.
- [64] RAMANITRANJA A.N., "Identification paramétrique : adaptation entre la structure et son modèle par expansion," Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1996.
- [65] RUBIN S., "Improved component-mode representation for structural dynamic analysis," American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1975, Vol.13, No.8, pp.995-1006.
- [66] SCHIAVONE P., BOUHADDI N., "Modèles condensés adaptés au calcul de réponses fréquentielles," Mécanique Industrielle et Matériaux, Revue du G.A.M.I., 1996, Vol.49, No.2, pp.79-81.

- [67] SCHIAVONE P., OSMANI N., FILLOD R., BOUHADDI N., "Localisation et recalage par condensation de modèle," Mécanique Industrielle et Matériaux, Revue du G.A.M.I., 1998, Vol.51, No.4, pp.185-187.
- [68] SCHIAVONE P., "Localisation et recalage par condensation de modèles," Thèse de Doctorat en Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté, 1999.
- [69] SHAH V.N., RAYMUND M., "Analytical selection of masters for reduced eigenvalue problems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1982, Vol.18, pp.89-98.
- [70] TRAN D.M., "Méthodes de synthèse modale mixtes," Revue Européenne des Eléments Finis, 1992, Vol.1, No.2, pp.137-179.
- [71] WILSON E.L., FARHOOMAND I., BATHE K.J., "Nonlinear dynamic analysis of complex structures," International Journal of Earthquake Engineering and structural dynamics, 1973, Vol.1, pp.241-252.
- [72] ZHANG Q., "Identification modale et paramétrique de structures mécaniques auto-adjointes et non auto-adjointes," Thèse d'Etat, Université de Franche-Comté, 1987.
- [73] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., "The finite element method, fourth edition," Vol.1, "Basic formulation and linear problem," Mc Graw Hill Book Compagny, 1989.

Annexes

A Choix des degrés de liberté par factorisation de type QR

Le choix d'une sous-base modale bien conditionnée est nécessaire lors des procédures de passage en coordonnées physiques, dans une phase de réduction de modèles (paragraphe 2.3.4). Il convient de sélectionner les degrés de liberté de la base modale dont les directions associées aux lignes choisies de la matrice modale sont les plus linéairement indépendantes. On obtient ainsi une sous-matrice modale bien conditionnée dont l'inversion ne dégrade pas la précision de prédiction du modèle réduit.

Les procédures de choix de degrés de liberté de ce type sont également employées lors de la sélection des degrés de liberté maîtres de la condensation de Guyan ou la sélection optimale des positions d'observation d'une structure lors d'essais dynamiques [46], [63] et [64].

On rappelle ici la mise en oeuvre de la factorisation de type QR avec pivotage d'une sous-base modale dans le cadre de la sélection de degrés de liberté. On se réfère à l'ouvrage de Golub et Van Loan [34] pour plus de détails sur l'algorithme.

Soit B ($c \times m$) la base modale restreinte aux degrés de liberté candidats à la sélection. Elle comporte c lignes correspondant aux degrés de liberté et m colonnes correspondant aux vecteurs propres ($c > m$).

- **Sélection de m degrés de liberté**

On décompose la transposée de la sous-matrice modale B par la relation matricielle suivante :

$$B^T \Pi = QR \tag{A.1}$$

où $\left\| \begin{array}{l} Q (c \times c) \text{ est une matrice orthogonale } (Q^T Q = I_{cc}) \\ R (c \times m) \text{ est une restriction d'une matrice triangulaire sup\u00e9rieure} \\ \text{dont les valeurs absolues des termes diagonaux sont d\u00e9croissantes} \\ \Pi (m \times m) \text{ est une matrice de permutation des colonnes de } B^T \text{ } (\Pi^T \Pi = I_{mm}) \end{array} \right.$

Le pivotage est assur\u00e9 par la matrice de permutation Π des colonnes de B^T . Cette matrice Π localise les m colonnes les plus ind\u00e9pendantes lin\u00e9airement.

En pratique, il n'est pas n\u00e9cessaire d'effectuer la factorisation int\u00e9grale. Le calcul des matrices Q et R est inutile pour la s\u00e9lection d\u00e9sir\u00e9e.

La d\u00e9termination de la matrice de permutation Π est \u00e9quivalente \u00e0 une s\u00e9quence it\u00e9rative de recherche de directions les plus orthogonales d\u00e9crite ci-apr\u00e8s.

Classiquement, le premier vecteur choisi correspondant au premier degr\u00e9 de libert\u00e9 s\u00e9lectionn\u00e9 est la colonne de la matrice B^T de plus grande norme.

Supposons que k vecteurs colonne aient \u00e9t\u00e9 choisis apr\u00e8s $k - 1$ it\u00e9rations. Ils forment la matrice $B_k^T (m \times k)$ et le sous-espace vectoriel associ\u00e9 $Vect(B_k^T)$. On nomme $B_{c-k}^T (m \times (c - k))$ la matrice des vecteurs colonne candidats restants.

On construit alors l'op\u00e9rateur de projection $P_k^\perp (m \times m)$ sur le sous-espace orthogonal \u00e0 $Vect(B_k^T)$:

$$P_k^\perp = I_{mm} - B_k^T (B_k B_k^T)^{-1} B_k \quad (\text{A.2})$$

On projette les vecteurs de la matrice B_{c-k}^T \u00e0 l'aide de l'op\u00e9rateur P_k^\perp tels que :

$$B_{c-k}^{TP} = P_k^\perp B_{c-k}^T \quad (\text{A.3})$$

Le vecteur colonne (et donc le degr\u00e9 de libert\u00e9) retenu \u00e0 l'it\u00e9ration k est le vecteur le plus orthogonal \u00e0 $Vect(B_k^T)$. Il correspond au vecteur de plus grande norme de la matrice $B_{c-k}^{TP} (m \times (c - k))$.

• **S\u00e9lection de $m - i$ degr\u00e9s de libert\u00e9 avec i degr\u00e9s de libert\u00e9 impos\u00e9s**

Certains degr\u00e9s de libert\u00e9 peuvent \u00eatre impos\u00e9s dans la s\u00e9lection pour des raisons d'observabilit\u00e9 de la structure ou pour satisfaire des sp\u00e9cifications (visualisation de r\u00e9ponses ou de d\u00e9form\u00e9es modales aux degr\u00e9s de libert\u00e9 consid\u00e9r\u00e9s).

Soit $B_i (i \times m)$ la base modale restreinte aux degr\u00e9s de libert\u00e9 impos\u00e9s et $B_{c-i} ((c - i) \times m)$ la base modale restreinte aux degr\u00e9s de libert\u00e9 candidats.

La factorisation QR est effectu\u00e9e sur la matrice B_{c-i}^{TP} dont le sous-espace associ\u00e9 $Vect(B_{c-i}^{TP})$ est orthogonal \u00e0 $Vect(B_i^{TP})$. La matrice B_{c-i}^{TP} est obtenue par une proc\u00e9dure similaire \u00e0 la pr\u00e9c\u00e9dente :

$$B_{c-i}^{TP} = \left(I_{mm} - B_i^T (B_i B_i^T)^{-1} B_i \right) B_{c-i}^T \quad (\text{A.4})$$

B Rappels sur la décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières est un outil très utile en calcul matriciel. Elle permet notamment de déterminer le rang r d'une matrice et d'en extraire r vecteurs orthogonaux représentant un sous-espace de dimension r .

La décomposition en valeurs singulières est détaillée dans [34] et [45].

Soit une matrice $A \in C^{mn}$ de rang $r \leq p$ ($p = \min(m, n)$).

Il existe des matrices unitaires $U \in C^{mm}$, $V \in C^{nn}$ et une matrice diagonale $\Sigma \in R^{mm}$ telles que :

$$A = U\Sigma\bar{V}^T \quad (\text{B.5})$$

Les p éléments diagonaux σ_i de la matrice Σ sont appelées valeurs singulières de la matrice A et sont positifs ou nuls. Par convention, on les range par ordre décroissant.

Les carrés des valeurs singulières σ_i^2 correspondent aux valeurs propres des problèmes (B.6) et (B.7).

Les matrices unitaires U et V sont formés respectivement des vecteurs propres u_i et v_i issus des problèmes (B.6) et (B.7). Ces vecteurs sont nommés respectivement vecteurs singuliers de gauche et de droite de la matrice A .

$$\left[A\bar{A}^T - \sigma_i^2 I_{mm} \right] u_i = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\left[\bar{A}^T A - \sigma_i^2 I_{nn} \right] v_i = 0 \quad (\text{B.7})$$

La matrice étant de rang r , on compte r valeurs singulières non nulles.

Les matrices U et V satisfont les relations d'orthonormalité suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} \bar{U}^T A\bar{A}^T U = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0) \\ \bar{U}^T U = I_{mm} \\ \bar{V}^T \bar{A}^T A V = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0) \\ \bar{V}^T V = I_{nn} \end{array} \right. \quad (\text{B.8})$$

Le conditionnement de la matrice A est donné par le rapport σ_1/σ_r .

La matrice A de rang r vérifie la relation (B.9) :

$$A = U_1 \Sigma_1 \bar{V}_1^T \quad (\text{B.9})$$

où les matrices U_1 ($m \times r$) et V_1 ($n \times r$) sont formés des r vecteurs singuliers de gauche et de droite associés aux r valeurs singulières non nulles regroupées dans Σ_1 ($r \times r$).

CONTRIBUTION A LA REDUCTION DES MODELES ELEMENTS FINIS PAR SYNTHESE MODALE

Résumé

Une approche synthétique des méthodes de réduction de modèles éléments finis dynamiques de structures mécaniques est présentée dans ce mémoire.

Une nouvelle technique de synthèse modale est proposée : elle permet l'obtention de modèles réduits exempts de coordonnées de jonction. Ses performances sont comparées vis-à-vis des méthodes de sous-structuration classiques lors de la réduction de modèles de structures automobiles. Un modèle sous-structuré d'une caisse nue de véhicule de 450 000 d.d.l., présentant une forte

connectivité, est condensé à 2 000 d.d.l. par cette méthode.

L'usage de transformations en coordonnées physiques avec la prise en compte des chargements appliqués est généralisé à l'ensemble des méthodes de réduction.

La robustesse des modèles réduits paramétrés est traitée ainsi que les techniques d'adaptation, par réductions multiples, des données issues du modèle aux observations mesurées sur la structure dans des objectifs de recalage de modèle et d'optimisation de comportement.

Mots clés : Dynamique des structures, modèle réduit paramétré, condensation, synthèse modale, réanalyse, recalage de modèle, optimisation.

CONTRIBUTION TO FINITE ELEMENTS MODELS REDUCTION BY COMPONENT MODE SYNTHESIS

Abstract

A synthetic methodology for the dynamic reduction of finite elements models of mechanical structures is presented in this thesis.

A new technique of component mode synthesis is proposed which allows the elimination of the junction degrees of freedom. The performance of this approach is compared to traditional methods of substructuring currently used on models of automobile structures. A substructured model of a body-in-white, containing 450 000 d.o.f. and having a dense connectivity, is

condensed down to 2 000 d.o.f. with this method.

The idea of transforming to physical coordinates while taking into account the applied loads is generalized to the all reduction methods studied.

The robustness of the parameterized reduced models is also examined with respect to structural modifications.

Finally, the technique of response adaptation, by multiple reductions, of the model data to the observations measured on the structure is studied in view of model updating and behavior optimization.

Key words : Structural dynamics, parameterized reduced model, condensation, component mode synthesis, reanalysis, model updating, optimization

U.F.R. des Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat UMR 6604
24, Chemin de l'Épitaphe 25000 Besançon