



**HAL**  
open science

# Interactions onde-vortex en milieu stratifié tournant et transport à travers une barrière dynamique

Frédéric Moulin

► **To cite this version:**

Frédéric Moulin. Interactions onde-vortex en milieu stratifié tournant et transport à travers une barrière dynamique. Océan, Atmosphère. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2002. Français. NNT: . tel-00350836

**HAL Id: tel-00350836**

**<https://theses.hal.science/tel-00350836>**

Submitted on 7 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER**

**Discipline** : Mécanique des Milieux Géophysiques et Environnement

présentée et soutenue publiquement

par

**Frédéric MOULIN**

le 24 Octobre 2002

---

## **Interactions onde-vortex en milieu stratifié tournant et transport à travers une barrière dynamique**

---

### **Directeurs de thèse**

M. Emil HOPFINGER,	Directeur
M. Jan-Bert FLÓR,	Co-directeur

---

### **JURY**

M. Bernard LEGRAS,	Rapporteur, Président du jury
M. Jean-Marc CHOMAZ,	Rapporteur
M. Emil HOPFINGER,	Directeur de thèse
M. Jan-Bert FLÓR,	Co-Directeur de thèse
M. Thierry DAUXOIS,	Examineur
M. Leo MAAS,	Examineur

Thèse préparée au sein du  
**Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (L.E.G.I.)**  
**Equipe THEO**



## Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord les membres du jury, en commençant par Messieurs Bernard Legras et Jean-Marc Chomaz, qui en leur qualité de rapporteurs, ont lu avec un oeil très critique mon manuscrit. Je remercie également Monsieur Thierry Dauxois pour avoir accepté d'être examinateur, et Monsieur Leo Maas, pour s'être déplacé d'aussi loin à l'occasion de ma soutenance. Si l'intérêt qu'ils ont porté à mon manuscrit se mesure au nombre de questions qu'ils m'ont posé, je suis comblé!

Je remercie également Jan-Bert Flór, qui m'a encadré tout au long de ces trois années (et demi avec le stage de DEA), et qui m'a laissé librement explorer les différentes pistes exposées dans ce manuscrit. J'ai beaucoup apprécié la relation de travail, plus qu'une relation classique de thésard-directeur de thèse, qu'il a su mettre en place, même si cela a été pour moi sources d'inquiétudes et de cheveux blancs, particulièrement en fin de thèse. Enfin, je lui suis également redevable du petit coup de pouce financier indispensable pour relier la fin de thèse et le début du post-doc, qu'il a accepté de financer contrairement à la politique qui semble prévaloir dans le laboratoire...

Au sein de l'équipe THEO, mes remerciements vont à Pierre Carecchio, qui a été présent chaque fois que j'ai eu besoin de ses services, ou lorsque les ordinateurs déclaraient leur indépendance, à Emil Hopfinger, qui a accepté d'être mon directeur de thèse officiel, et qui a su redonner un coup de pouce à mon moral en berne au moment de la rédaction du manuscrit, à Chantal Staquet, à Béatrice Janiaud, avec qui j'ai surtout collaboré dans le cadre de mon activité de moniteur, et à Stephane Leblanc pour les discussions enrichissantes en K'fet et les éclaircissements sur la théorie WKB.

J'aimerais aussi remercier la 'Bande de Coriolis', plus particulièrement Henri Didelle, René Carcel, Joel Sommeria, Adam Fincham, Olivier Praud, Sylvain Sadoux, et plus récemment Martin Galmiche. Etant rattaché à 20% à Coriolis, j'ai abusivement profité de leurs locaux et de leur hospitalité (la preuve, je n'ai déchargé qu'une seule fois le sel!). Même si les expériences menées à Coriolis n'ont pu être exploitées et présentées dans ce manuscrit, je garde un excellent souvenir de mes passages 'là-bas' (sauf lorsque Adam essaie son frigo à processeur, suivi de Sylvain qui coupe le réseau le week-end, et de Henri qui nettoie à grandes eaux le local où s'est réfugié le disque dur contenant mes précieuses données. Heureusement, cela n'arrive pas tous les jours et je ne suis pas paranoïaque).

Bien évidemment, trois années dans le même laboratoire ne pourraient être humainement supportables sans la présence de frères et soeurs d'armes, j'ai nommé, 'les thésards'. J'adresse plus particulièrement mes plus sincères remerciements à Benjamin, champion du lancé de vortex allongé et futur deuxième docteur encadré autant que possible par Jan-Bert, Aude-'in', spécialiste des réservoirs de fusée qui ballotent, Moon gen, inventeur des 'tubilons' et du 'mode doux', ce qui n'enlève rien à ses compétences et à sa gentillesse, Marie, du gang des fumeurs du bureau G1.13, Cédric, pour son moral à tout casser, particulièrement nécessaire lorsqu'il s'agit d'écouter en hyper-fréquences le chant mélodieux des vortex dans un jet turbulent, et enfin Olivier de Coriolis, grand maître des 'tubilons' dans une cuve tournante stratifiée (et les ondes, hein?).





# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>xi</b>
<hr/>	
<b>Chapitre 1 Contexte géophysique</b>	
1.1 L'atmosphère . . . . .	1
1.1.1 Dynamique de la troposphère . . . . .	3
1.1.2 Dynamique de la stratosphère et formation du vortex polaire . . . . .	3
1.1.3 Echanges entre la troposphère et la stratosphère . . . . .	6
1.1.4 Mécanismes de formation et d'extension du trou d'ozone . . . . .	6
1.2 L'océan . . . . .	8
1.2.1 circulation et courants océaniques . . . . .	8
1.2.2 structure verticale en densité et ondes internes . . . . .	9
<hr/>	
<b>Chapitre 2 Généralités sur les interactions ondes-écoulement moyen</b>	<b>13</b>
2.1 Dynamique des fluides stratifiés en rotation . . . . .	13
2.1.1 Propriétés générales . . . . .	14
2.1.2 Ecoulements lents ( $T \gg 1/f$ ), en équilibre . . . . .	16
2.1.3 Ecoulements rapides ( $T < 1/f$ ) : ondes d'inertie-gravité . . . . .	19
2.2 Interactions entre des ondes d'inertie-gravité et un écoulement lent . . . . .	21
2.2.1 Prédiction de la théorie WKB . . . . .	21
2.2.2 Couches de réflexion et couches critiques . . . . .	27
2.3 effets non-linéaires et instabilités déclenchés par la propagation d'une onde dans un écoulement moyen . . . . .	31
<hr/>	
<b>Chapitre 3 Application aux interactions ondes-vortex</b>	<b>35</b>
3.1 Modèle de structure cohérente : le vortex axisymétrique . . . . .	35

3.2	Prédictions de la théorie WKB en coordonnées cylindriques . . . . .	37
3.2.1	Ecriture des équations en coordonnées cylindriques . . . . .	38
3.2.2	propriétés générales . . . . .	39
3.2.3	Effets quantitatifs de la courbure . . . . .	40
3.2.4	Résolutions numériques dans des écoulements plus réalistes . . . . .	41
3.3	Approche en modes azimutaux pour un vortex barotrope . . . . .	42
3.3.1	modes axisymétriques en stratifié ( $m = 0, f = 0$ ) . . . . .	42
3.3.2	effets de la rotation ( $m = 0, f \neq 0$ ) . . . . .	43
3.3.3	modes plus élevés ( $m > 0, f \neq 0$ ) . . . . .	44
3.3.4	couches de réflexion et couches critiques pour les modes azimutaux . . . . .	45
3.3.5	modes d'oscillation du vortex et pseudo-modes . . . . .	46
3.4	Remarques finales sur les deux approches . . . . .	47
<hr/>		
<b>Chapitre 4</b>	<b>Vortex généré par un disque tournant</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Experimental methods . . . . .	51
4.3	Observations . . . . .	53
4.3.1	Initial spinup . . . . .	53
4.3.2	Non-axisymmetric and long-time evolution . . . . .	54
4.3.3	Instability of the density front . . . . .	55
4.4	Axisymmetric models . . . . .	57
4.4.1	Stretching model . . . . .	58
4.4.2	Diffusive model . . . . .	62
4.5	Comparison with experimental results . . . . .	63
4.5.1	Initial spin-up, $t \geq 0$ . . . . .	64
4.5.2	Final axisymmetric state, $t > \tau_{su}, \tau_{diff}$ . . . . .	66
4.6	Concluding remarks . . . . .	69
<b>Bibliographie</b>		<b>73</b>
<hr/>		
<b>Chapitre 5</b>	<b>Observations expérimentales de l'interaction ondes-vortex et inter- prétation linéaire</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	77
5.2	WKB theory for vortex-like flows . . . . .	79
5.2.1	Inviscid propagation in a vortex flow . . . . .	80
5.2.2	Viscous propagation into a vortex-like flow . . . . .	86

5.3	Experimental and numerical methods . . . . .	87
5.3.1	Experimental set-up . . . . .	87
5.3.2	WKB numerical simulations . . . . .	90
5.4	Comparison between observations and WKB simulations . . . . .	91
5.4.1	interaction with baroclinic vortices . . . . .	91
5.4.2	wave interaction with barotropic vortices . . . . .	95
5.4.3	WKB simulations as a prediction tool . . . . .	101
5.5	Occurrence of wave breaking in the experiments . . . . .	101
5.5.1	Experimental observation of wave-breaking . . . . .	101
5.5.2	Prediction of wave-breaking by WKB simulations . . . . .	103
5.5.3	Conditions required for wave-breaking . . . . .	105
5.6	conclusion . . . . .	107
<b>Bibliographie</b>		<b>109</b>
<hr/>		
<b>Chapitre 6 Analyse du champ d'onde et aspects énergétiques de l'interaction</b>		<b>111</b>
6.1	Décomposition spectrale du champ de vitesse dans les interactions avec les vortex baroclines . . . . .	112
6.1.1	Analyse du champ d'onde . . . . .	112
6.1.2	Observation des modes piégés par colorant . . . . .	119
6.1.3	Analyse du champ du vortex . . . . .	120
6.2	Impact des interactions et du déferlement des ondes sur les vortex barotropes . . . . .	121
<hr/>		
<b>Chapitre 7 Mélange induit par l'interaction et le déferlement des ondes</b>		<b>125</b>
7.1	méthode expérimentale . . . . .	125
7.2	Observations expérimentales . . . . .	127
7.3	Processus de mélange . . . . .	129
7.3.1	mélange chaotique . . . . .	129
7.3.2	mélange par déferlement . . . . .	135
7.4	Localisation du mélange dans le champ de vitesse du vortex . . . . .	137
<hr/>		
<b>Chapitre 8 Conclusion</b>		<b>141</b>
<hr/>		
<b>Bibliographie</b>		<b>143</b>



# Table des figures

1.1	Profil vertical de température dans l'atmosphère . . . . .	2
1.2	Cellules de convection dans la Troposphère . . . . .	4
1.3	Vents zonaux dans la troposphère . . . . .	5
1.4	Echanges troposphère-stratosphère . . . . .	7
1.5	Profil vertical de la fréquence de flottaison dans l'océan . . . . .	9
1.6	Ondes dans l'océan . . . . .	11
2.1	Théorème d'Ertel . . . . .	15
2.2	Onde dans un écoulement cisailé verticalement . . . . .	24
2.3	Onde dans un écoulement cisailé horizontalement . . . . .	25
2.4	Onde dans un écoulement géostrophique . . . . .	26
2.5	Couche de réflexion linéaire . . . . .	29
2.6	Comportement linéaire près de la couche critique . . . . .	32
2.7	Comportements possibles lors de l'interaction ondes-écoulement moyen . . . . .	34
4.1	Experimental set-up to study the spin-up by a rotating disk . . . . .	52
4.2	Flow near the rotating disk . . . . .	53
4.3	Spin-up observed by PIV . . . . .	54
4.4	Growth of the unstable density front . . . . .	55
4.5	Wavelengths of the instability of the front . . . . .	56
4.6	Scheme of the flow for the stretching model . . . . .	57
4.7	Profiles predicted by the stretching model . . . . .	60
4.8	Profiles predicted buy the diffusive model . . . . .	63
4.9	Comparisons between experiments and models for the spin-up . . . . .	65
4.10	Comparisons between experiments and models for vertical profiles of vorticity . . . . .	67
4.11	Comparisons between experiments and models for radial prodiles of vorticity (1) . . . . .	68
4.12	Comparisons between experiments and models for radial prodiles of vorticity (1) . . . . .	69
5.1	Sketch of the wave interaction with a constant shear flow . . . . .	82
5.2	Ray propagating in front of a weakly baroclinic flow . . . . .	83
5.3	Energy along rays propagating against the flow for different values of the curvature parameter . . . . .	83
5.4	Final cross-sections for different values of the curvature parameter . . . . .	84
5.5	Ray propagating along a strongly baroclinic flow . . . . .	84
5.6	Energy along rays propagating in the same direction as the flow for different values of the curvature parameter . . . . .	85
5.7	Maximal energy amplification as a function of $Re_{wave}$ for different values of the curvature parameter . . . . .	87

---

5.8	Sketch of th experimental set-up for the study of wave-vortex interactions . . . . .	88
5.9	Flow of a baroclinic vortex generated by disk rotation . . . . .	89
5.10	Flow in the mid-plane for a barotropic vortex generated by siphoning through a perforated tube . . . . .	90
5.11	Weak interaction of waves propagating against a baroclinic flow . . . . .	92
5.12	Strong interaction of waves propagating against a baroclinic flow . . . . .	93
5.13	Views in a meridional plane of rays propagating against a baroclinic flow . . . . .	95
5.14	Weak interaction of waves propagating along a baroclinic flow . . . . .	96
5.15	Strong interaction of waves propagating long a baroclinic flow . . . . .	97
5.16	Views in a meridional plane of rays propagating along a baroclinic flow . . . . .	98
5.17	Interaction of waves with a weak barotropic vortex . . . . .	99
5.18	Ray traces for experiment of waves interacting with a barotropic vortex of figure 5.17(b, c) . . . . .	100
5.19	Interaction of waves with a barotropic vortex leading to wave breaking . . . . .	102
5.20	Details of breaking wave visualised with the shadowgraph technique . . . . .	103
5.21	Ray traces for experiment of waves interacting with a barotropic vortex of figure 5.19(b, c) . . . . .	104
5.22	Values in different WKB simulations of the non-dimensional numbers associated with instabilities . . . . .	106
6.1	Principe du filtrage par FFT des mesures PIV . . . . .	113
6.2	Analyse de la polarisation d'un champ d'onde . . . . .	114
6.3	Champs de divergence et vorticité pour l'expérience d'analyse de la polarisation . . . . .	115
6.4	Mode piégé rétrograde en spirale visualisé par des mesures PIV . . . . .	117
6.5	Ondes rétrogrades et cogrades visualisées par PIV . . . . .	118
6.6	Visualisation par colorant des modes pr�g�s rétrogrades . . . . .	119
6.7	Profils radiaux de vitesse d'un vortex barocline avant, pendant et après l'interaction	120
6.8	Evolution des profils radiaux de vitesse d'un vortex barotrope, sans ondes, puis avec déferlement d'onde . . . . .	123
7.1	Méthode expérimentale pour l'étude du mélange . . . . .	126
7.2	Schéma expliquant la forme bombée des lignes de colorant . . . . .	127
7.3	Observation expérimentale du mélange dans le plan médian . . . . .	128
7.4	Observation expérimentale du mélange dans un plan vertical . . . . .	128
7.5	Schéma expliquant la formation des zig-zags par un repliement de la nappe de colorant . . . . .	129
7.6	Observation expérimentale des lobes formés par la perturbation d'un trajectoire hétérocline . . . . .	130
7.7	Schéma des effets d'une perturbation périodique sur des trajectoires circulaires . . . . .	131
7.8	Simulations des effets d'une perturbation en mode azimutal sur la spirale de colorant dans un vortex gaussien . . . . .	133
7.9	Observation expérimentale des structures de mélange chaotique de la trajectoire $n = 2$ . . . . .	134
7.10	Observation expérimentale des structures de mélange chaotique de la trajectoire $n = 3$ . . . . .	134
7.11	Séquences temporelles à la période de l'onde dans la région médiane et la région haute du vortex barotrope . . . . .	136

---

7.12	Observation expérimentale de la formation de petites structures associées au déferlement . . . . .	137
7.13	Structure en champignon dans le champ de colorant, associée au déferlement . . .	138
7.14	Comparaison de la pénétration du mélange dans le champ du vortex pour deux expériences de déferlement différentes . . . . .	139





# Introduction générale

L'étude menée au cours de cette thèse était, comme le titre l'indique, fortement motivée par l'impact des ondes d'inertie-gravité sur le transport à travers la barrière dynamique que forme, par exemple, le vortex polaire. Nous sommes tous conscients désormais du problème de la formation du trou d'ozone au niveau des pôles, mais les processus qui assurent le transfert de ce déficit d'ozone vers les latitudes moyennes restent encore spéculatifs. Le déferlement des ondes d'inertie-gravité au bord du vortex polaire est un des processus proposés pour expliquer ce transport. Par ailleurs, les vortex et les ondes d'inertie-gravités sont présents dans la plupart des écoulements géophysiques, que ce soient les océans ou l'atmosphère, ce qui vient élargir le champ d'application de cette étude.

Nous commencerons par présenter dans un premier chapitre les grandes caractéristiques des dynamiques de l'océan et de l'atmosphère, pour introduire le vortex polaire et élargir le contexte géophysique de cette étude. Dans le chapitre 2, nous rappellerons des notions essentielles de la dynamique des fluides stratifiés en rotation pour préciser entre autres ce qu'on entend par ondes d'inertie-gravité, puis nous présenterons des résultats connus sur les interactions possibles entre ces ondes et des écoulements plus lents représentant les écoulements à grandes échelles de l'atmosphère et de l'océan. Cela sera l'occasion d'introduire la notion de couche critique et de montrer comment des ondes internes peuvent déferler. Dans le chapitre 3, nous nous concentrerons sur le cas plus particulier d'un écoulement lent de type vortex, axisymétrique. Nous appliquerons les équations de la théorie WKB, une théorie utilisée très largement dans l'étude de la propagation des ondes, à un écoulement de type vortex. Ensuite, sont discutées les similitudes entre cette description et celle basée sur une décomposition en modes aximutaux du champ d'onde en interaction avec un vortex.

Après ces descriptions essentiellement analytiques, nous passerons à l'exploitation des expériences sur la table tournante. Dans le chapitre 4, nous décrirons en détails le processus de génération d'un vortex par la rotation d'un disque tournant placé dans un fluide stratifié en rotation. Nous avons adopté cette méthode de génération pour modéliser la présence de cisaillements à la fois verticaux et horizontaux dans le vortex polaire et la plupart des vortex géophysiques. Dans le chapitre 5, des simulations numériques basées sur la théorie WKB seront comparées à des expériences d'interaction ondes-vortex avec des vortex "baroclines", générés par le disque tournant, et "barotropes", générés par aspiration à travers un tube perforé. Les conditions requises pour un déferlement des ondes seront discutées sur la base des expériences et des simulations. Dans le chapitre 6, nous présenterons des résultats expérimentaux complémentaires, venant confirmer le piégeage des ondes sous la forme de modes rétrograde en spirale dans les vortex baroclines, et précisant également les effets du déferlement des ondes sur l'évolution du vortex barotrope. Enfin, dans le chapitre 7, nous présenterons une étude du mélange induit par la propagation et le déferlement des ondes d'inertie-gravité autour d'un vortex barotrope.



# Contexte géophysique

L'objectif de ce premier chapitre est de décrire les grands aspects des dynamiques de l'atmosphère et de l'océan. On trouvera une description plus détaillée dans des ouvrages de référence comme Pedlosky (1979) et Gill (1982), ou bien dans les différents articles cités dans ce chapitre. Compte-tenu de l'objet de cette thèse, nous porterons une attention particulière à tous les phénomènes ondulatoires, ainsi qu'aux structures de type vortex. Nous mettrons également l'accent sur le processus de destruction de l'ozone, dans lequel le déferlement d'ondes d'inertie-gravité est susceptible de jouer un rôle important en termes de transport.

## 1.1 L'atmosphère

La source d'énergie responsable des mouvements atmosphériques est fondamentalement le rayonnement solaire. L'exposition des différentes régions de la planète dépend de l'inclinaison de la terre par rapport au soleil et de la saison considérée. L'absorption de l'énergie solaire se fait donc différemment selon l'altitude et la latitude. C'est ce déséquilibre qui donne naissance à des mouvements atmosphériques, fortement influencés par la rotation de la planète.

En ce qui concerne la répartition verticale de température dans l'atmosphère, la figure 1.1, tirée de l'ouvrage de Gill (1982), donne des prédictions pour la latitude  $35^{\circ}\text{N}$ . Un premier modèle simple, dit d'équilibre radiatif (ligne continue noire), est basé sur un équilibre entre le rayonnement solaire incident, le rayonnement émis par la surface terrestre, et l'absorption-émission par les différentes couches atmosphériques en fonction de leur composition chimique. Dans les basses couches de l'atmosphère, la présence d'eau et de dioxyde de carbone est responsable d'un effet de serre, bénéfique puisqu'il permet d'obtenir des températures de surface supérieures à ce qu'elles seraient en l'absence d'atmosphère. La température diminue avec l'altitude puis augmente à nouveau pour des altitudes supérieures à 10 km, là où la vapeur d'eau devient quasiment inexistante et où l'atmosphère contient une forte proportion d'ozone qui absorbe les rayons UV très énergétiques.

Dans la partie proche de la surface, la température décroît fortement avec l'altitude dans le modèle purement radiatif. Ce profil se révèle instable d'un point de vue dynamique. Puisque la pression diminue avec l'altitude, une parcelle d'air tend à s'échauffer adiabatiquement (sans échange de chaleur) quand on la déplace vers le bas. Si ce déplacement entraîne un changement de température de la parcelle d'air inférieur à la température de l'air environnant, une instabilité convective prend naissance. Pour pouvoir comparer efficacement la température de différentes parcelles d'air, il est nécessaire de s'affranchir des effets dûs à la variation verticale de pression, et une nouvelle grandeur, portant le nom de température potentielle, est introduite. Elle correspond

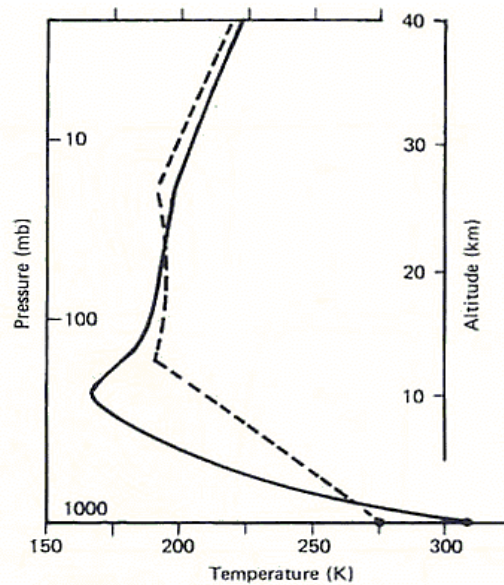


FIG. 1.1 – Profils verticaux de température dans l’atmosphère à la latitude 35°N, tiré de [Gill (1982)]. La ligne continue représente la prédiction d’un modèle purement radiatif, tandis que la ligne pointillée est issue d’un modèle radiatif-convectif.

à la température qu’aurait la parcelle d’air considérée si on la déplaçait adiabatiquement jusqu’à l’altitude zéro. Par le biais de cette nouvelle grandeur, on peut vérifier que l’instabilité convective apparaît pour des profils de température potentielle décroissant avec l’altitude. C’est justement le cas pour la basse couche de l’atmosphère dans le modèle radiatif, qui est donc convectivement instable. Il est alors possible de construire un modèle plus raffiné prenant en compte un équilibre entre flux radiatifs et convectifs de chaleur (ligne en pointillés de la figure 1.1), qui reproduit correctement les observations.

En tout point du globe, on retrouve une forme similaire à la figure 1.1 pour les profils de température, ce qui permet de distinguer une succession verticale de trois couches atmosphériques, caractérisées également par des différences de composition chimique :

- Une couche basse, s’étendant entre 0 et 12 km au niveau de l’équateur, et entre 0 et 8 km au niveau des pôles, associée à une diminution de température avec l’altitude et contenant de la vapeur d’eau. Cette couche porte le nom de troposphère. Elle est le siège de mouvements convectifs importants qui génèrent les structures météorologiques habituelles. C’est dans cette région qu’a lieu la plus grande partie des émissions d’origine humaine. Le sommet de cette couche porte le nom de tropopause.
- Une couche intermédiaire, jusqu’à 50 km, associée à une augmentation de la température avec l’altitude, très stable d’un point de vue dynamique. Cette couche contient l’essentiel de l’ozone atmosphérique et porte le nom de stratosphère du fait de sa stratification en température.
- Une couche supérieure, au-delà de 50 km, associée à une diminution rapide de la température avec l’altitude, portant le nom de mésosphère.

Les propriétés de la troposphère et de la stratosphère, qui sont les deux régions où se portera notre attention, sont donc très différentes, chimiquement et dynamiquement.

### 1.1.1 Dynamique de la troposphère

Considérons dans un premier temps la troposphère. En supprimant la rotation de la terre, et en imposant un flux solaire plus important dans les régions équatoriales que dans les zones polaires, le caractère instable de cette couche se traduirait par la formation de cellules de convection formées d'une cheminée ascendante au-dessus de l'équateur, et de zones descendantes aux latitudes plus élevées.

Compte-tenu de la rotation de la terre, la dynamique est en réalité fortement affectée par la force de Coriolis. Des observations et des modèles numériques montrent clairement que la zone d'ascendance aux tropiques est toujours présente, et qu'une première cellule, portant le nom de cellule de Hadley, se forme effectivement entre l'équateur et les tropiques. Le mouvement ascendant au niveau de l'équateur est compensé par des vents de surface dans la direction Nord-Sud, déviés vers l'Ouest sous l'effet de l'accélération de Coriolis (ils portent le nom anglais d'"Easterlies" car venant de l'Est). Une cellule contra-rotative moins puissante, portant le nom de cellule de Ferret, est présente au niveau des latitudes moyennes, associée à des vents de surface orientés dans la direction Sud-Nord et déviés vers l'Est par la force de Coriolis ("Westerlies"). Une troisième cellule au niveau des pôles vient compléter cette vision des mouvements troposphériques. Des variations saisonnières viennent modifier cette structure qui se déplace tantôt au Nord, tantôt au Sud, mais qui reste décelable en moyennant les différentes grandeurs sur une année. Cette variation saisonnière est illustrée dans la figure 1.2, tirée de l'article de Peixoto & Oort (1992), où sont indiquées les positions des différentes cellules en procédant à une moyenne sur l'année et pour chaque saison.

Le gradient horizontal de température entre les pôles et l'équateur a également un effet très important sur la répartition verticale des vents. En effet, ce gradient horizontal est en équilibre avec le gradient vertical de la composante zonale du champ de vitesse, selon une relation dite "du vent thermique" qui sera exposée de façon plus détaillée dans le chapitre suivant (voir équation (2.11)). La principale conséquence est une augmentation avec l'altitude de la composante zonale des vents orientés vers l'Est. On voit nettement ce renforcement des "Westerlies" dans la figure 1.3, tirée de l'article de Palmen & Newton (1969), jusqu'au sommet de la troposphère, où ils deviennent des vents violents portant le nom de "Jet-streams". Un premier jet est situé entre la cellule de Hadley et la cellule de Ferret, vers les latitudes  $\pm 30^\circ$ . On retrouve un autre jet vers les latitudes  $\pm 60^\circ$ , qui isole les masses d'air polaire des latitudes moyennes et porte le nom de jet circumpolaire.

La structure de la troposphère décrite jusqu'ici correspond à une image moyennée sur le mois ou l'année. Lorsqu'on regarde la forme des écoulements sur des échelles de temps plus courtes, de l'ordre de la journée pour les observations météorologiques, on retrouve nettement les structures de type vortex auxquelles nous sommes habituées, sous la forme de dépressions (cyclones) et d'anti-cyclones.

### 1.1.2 Dynamique de la stratosphère et formation du vortex polaire

La stratosphère se distingue de la troposphère par une distribution verticale de température qui la rend extrêmement stable (plus exactement, la température potentielle croît fortement avec l'altitude). Par conséquent, le rayonnement solaire ne cause ici absolument aucun mouvement convectif. Cependant, les forts gradients horizontaux de température, générés pendant les hivers de l'hémisphère Nord ou de l'hémisphère Sud, s'accompagnent d'un équilibrage sous la forme d'un déplacement des masses d'air vers le pôle plongé dans la nuit. Par conservation du moment cinétique, un courant zonal cyclonique (orienté vers l'Est) se forme, générant un vortex portant

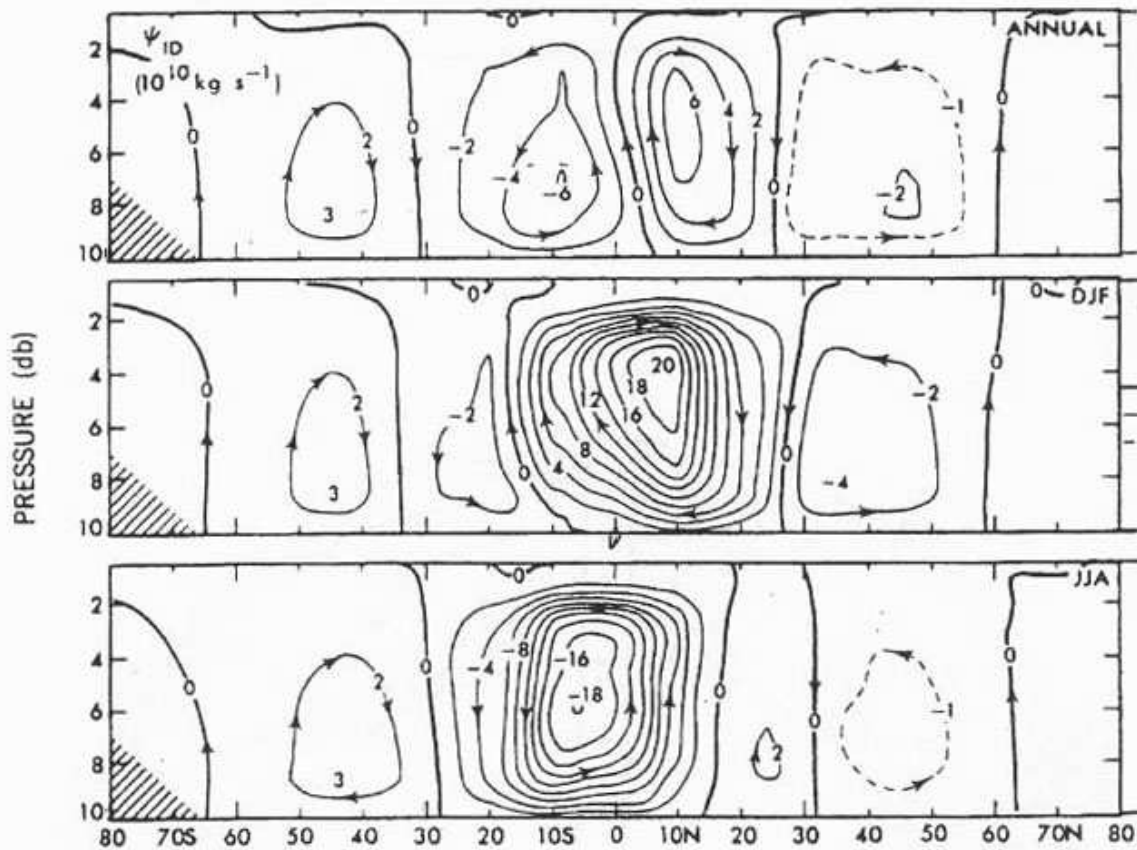


FIG. 1.2 – Fonctions de courant dans le plan méridien des cellules convectives dans la troposphère, tirées de l'article de [Peixoto & Oort (1992)]. La figure du haut correspond à une moyenne annuelle, tandis que les deux figures du bas donnent une image saisonnière, respectivement en hiver et été de l'hémisphère Nord.

le nom de vortex polaire. Par symétrie, les masses d'air du pôle estival s'étendent vers l'équateur, ce qui génère un mouvement anticyclonique, moins marqué que le vortex polaire.

Les caractéristiques exactes du vortex polaire varient avec les années, mais des valeurs typiques sont généralement admises (voir par exemple Polvani & Saravanan (2000)). Le coeur est en rotation rigide et la bordure du vortex se situe environ à la latitude  $60^\circ$  au niveau de la tropopause, avec des vitesses typiques de vent de l'ordre de  $60 \text{ m s}^{-1}$  à cette altitude. La vitesse du vent chute à zéro au niveau de la latitude  $40^\circ$ . Le rayon du coeur du vortex tend à augmenter avec l'altitude, la bordure atteignant la latitude  $45^\circ$  en haut de la stratosphère, où la vitesse du vent est de l'ordre de  $120 \text{ m s}^{-1}$ . La forme du vortex polaire est donc généralement cônica, avec à la fois des variations horizontales et verticales du champ de vitesse. Les vents dirigés vers l'Est juste au dessus de la tropopause sont en continuité avec le jet circumpolaire en haut de la troposphère.

L'absence de phénomènes convectifs dans la stratosphère limite le transport irréversible de l'air. Il est cependant admis qu'un transport méridien est généré par des processus ondulatoires. Jusqu'ici, les mouvements atmosphériques ont été décrits en moyennant les écoulements sur des échelles de temps longues, de l'ordre du mois ou de l'année. Cette description fait disparaître la propagation d'ondes, beaucoup plus rapides. Dans la stratosphère, on peut distinguer deux

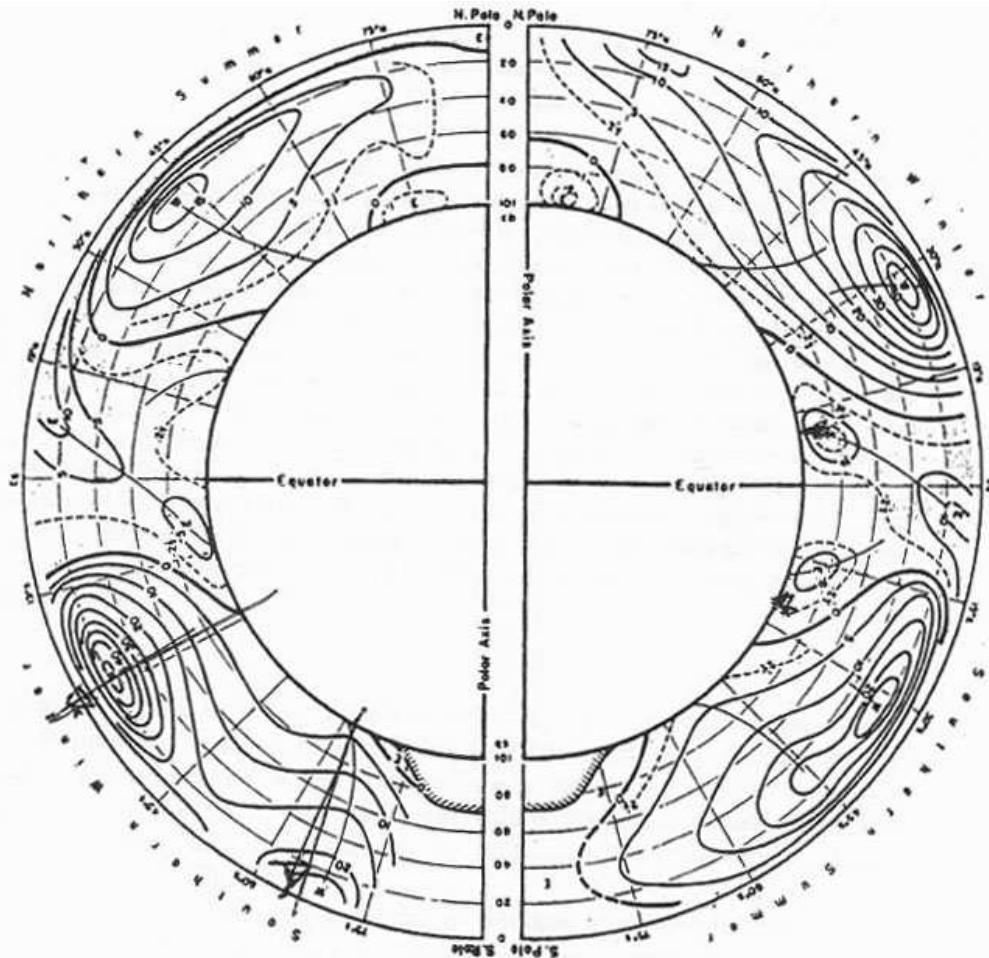


FIG. 1.3 – Contours de la composante zonale moyenne des vents dans la troposphère, tirée de l'article de [Palmen & Newton (1969)]. Les parties gauche et droite correspondent respectivement à l'été et l'hiver de l'hémisphère Nord.

catégories d'ondes : des ondes d'inertie-gravité, associées à la force de rappel verticale de la stratification stable et à la force de Coriolis considérée localement, et des ondes de Rossby, qui concernent des échelles beaucoup plus grandes et sont liées à la variation de la force de Coriolis avec la latitude. La présence de vents dirigés vers l'Est dans l'hémisphère plongé dans la nuit polaire permet la propagation d'ondes de Rossby générées par les grandes échelles de la topographie de surface. Ces ondes sont bloquées par la barrière dynamique que forment les vents au bord du vortex polaire, et un déferlement se produit à des latitudes moyennes. Cette région de déferlement porte le nom de "surf-zone" par référence au déferlement des vagues qui arrivent sur une plage. A l'endroit du déferlement, la quantité de mouvement transportée par l'onde est transférée en partie à l'écoulement de fond. Du fait de la polarisation spécifique des ondes de Rossby, le dépôt de quantité de mouvement est de signe constant et peut s'interpréter comme une force de frottement dirigée vers l'Ouest. L'équilibre entre le champ de vitesse et la température est alors rompu, et le rééquilibrage se fait par un léger transport vers le pôle (voir McIntyre (1995)). L'effet global de cette succession de rééquilibrages associé au déferlement des



ondes de Rossby est un transport méridional dans la stratosphère, de l'équateur vers le pôle, plus intense dans l'hémisphère plongé dans l'hiver. Ce transport par déferlement d'ondes porte le nom anglais de "gyroscopic pumping" puisque l'air stratosphérique est en rotation près du vortex polaire et présente un comportement gyroscopique. Ce transport dans la stratosphère est beaucoup plus lent que le transport convectif dans la troposphère.

### 1.1.3 Echanges entre la troposphère et la stratosphère

Cette description très générale des dynamiques de la troposphère et de la stratosphère a montré combien elles pouvaient être différentes. Cependant, puisque la composition de ces deux couches de l'atmosphère est également très différente, la question des échanges de composés chimiques entre elles est une question primordiale pour l'élaboration de modèles climatiques et pour l'évaluation de l'impact des pollutions d'origine humaine.

Différents auteurs (voir, par exemple, Holton *et al.* (1995)) proposent de subdiviser la stratosphère en deux régions, comme dans la figure 1.4 tirée de Haynes (1999). La haute stratosphère correspond à des altitudes supérieures à l'altitude de la tropopause au niveau de l'équateur, de l'ordre de 12 km. Les surfaces d'iso-valeurs de température potentielle, qui portent le nom de surfaces isentropiques, n'y présentent aucune intersection avec la tropopause. La basse stratosphère (appelée "Lowermost stratosphere" en anglais) est la partie de la stratosphère située en-dessous de cette altitude, en contact avec la troposphère le long de la tropopause dans chaque surface isentropique. La circulation méridionale dans la haute stratosphère, forcée par le déferlement d'ondes de Rossby aux latitudes moyennes, conduit à un transport vertical ascendant de composés troposphériques vers la stratosphère, à travers la tropopause au-dessus des zones équatoriales. Ces composés sont ensuite transportés vers les pôles où ils descendent jusqu'à la basse stratosphère. A cette endroit, les échanges entre la stratosphère et la troposphère peuvent prendre plusieurs formes. Le déferlement d'ondes de Rossby conduit à la génération de filaments d'air stratosphérique qui franchissent la position moyenne de la tropopause le long des surfaces isentropiques, et sont mélangés à l'air troposphérique par étirement et diffusion. Le déferlement d'ondes d'inertie-gravité est également susceptible de conduire à la génération de couches de mélange ou à un transport horizontal à travers la tropopause, en fonction du mécanisme d'instabilité à l'origine du déferlement.

### 1.1.4 Mécanismes de formation et d'extension du trou d'ozone

L'ozone stratosphérique est contenu à 90% dans la stratosphère et la mise en évidence au printemps de la destruction massive au coeur du vortex polaire de ce composant essentiel a donc suscité une grande surprise. L'explication de ce processus de destruction met en jeu à la fois la composition chimique et les dynamiques des couches atmosphériques.

Les composés chimiques responsables de cette destruction sont les CFC (Chlorofuorocarbones), produits par les activités humaines au niveau de la troposphère, où ils sont extrêmement stables. Le passage de ces composés de la troposphère à la stratosphère au niveau de la tropopause équatoriale se poursuit par un transport stratosphérique qui les amène à des altitudes de 20 km. Là, le rayonnement solaire est suffisant pour les détruire et libérer des atomes de Chlore qui se recombinent avec les molécules présentes pour former du  $HCl$  ou du  $ClONO_2$ . En l'absence d'eau dans la stratosphère, ces molécules sont désormais stables, même vis-à-vis des molécules d'ozone. Seuls des radicaux actifs de Chlore  $Cl$ ,  $ClO$  et  $Cl_2O_2$  sont en effet capables de détruire l'ozone, selon un cycle proposé par Molina & Rowland (1974). Cependant, les réactions chimiques proposées nécessitent un important flux solaire, disponible seulement aux basses lati-

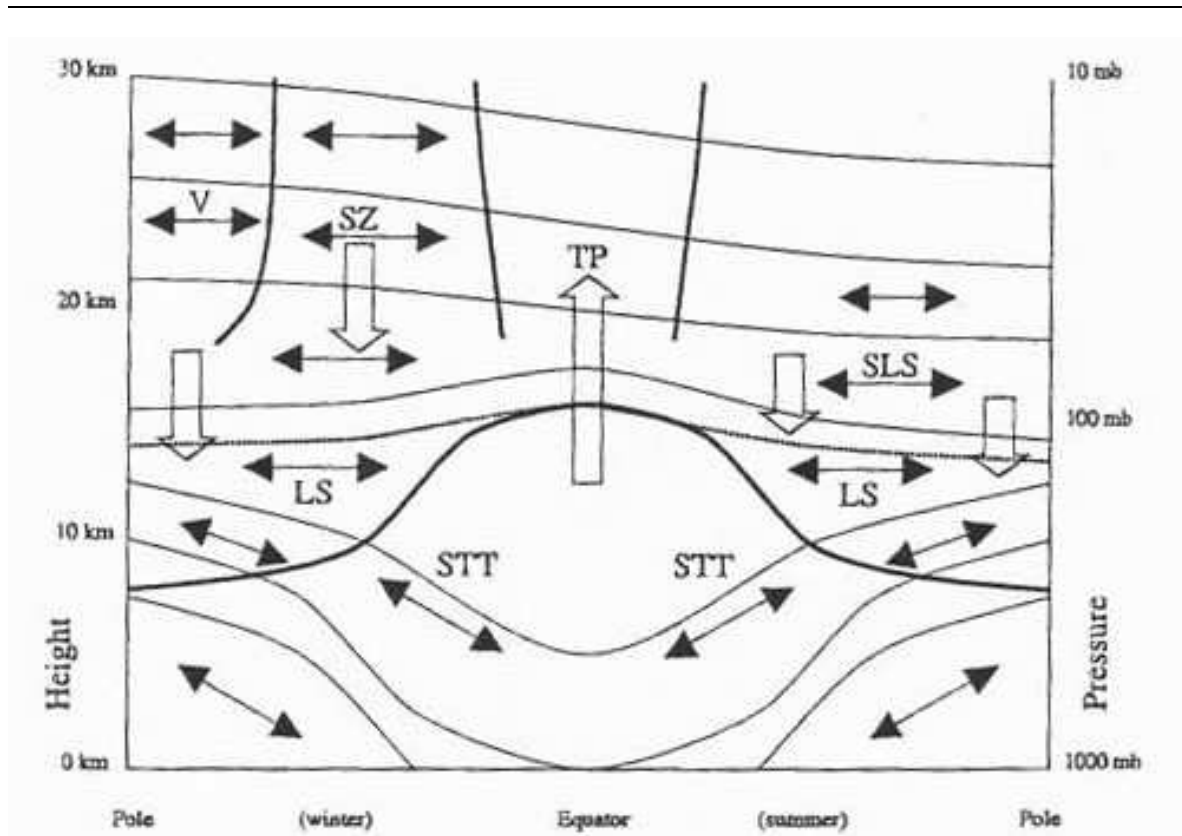


FIG. 1.4 – Schéma des processus d'échange entre la troposphère et la stratosphère tiré de l'article de [Haynes (1999)]. Les lignes continues quasi-horizontales correspondent aux surfaces d'iso-température potentielle. Les processus de transport à travers ces lignes isentropiques sont indiqués par des flèches creuses, tandis que les processus de transport par filamentation le long de ces surfaces sont marqués par des flèches noires quasi-horizontales. Les principales barrières s'opposant au transport, à savoir la tropopause, le bord du vortex polaire et les bords de la zone équatoriale, sont indiqués par des lignes continues épaisses. Les sigles correspondent aux six régions introduites par [Haynes (1999)] : le vortex polaire hivernal (V), la zone de déferlement ("surf zone") (SZ), la pompe tropicale (TP), la stratosphère estivale (SLS), et les deux basse stratosphères ("Lowermost Stratospher") (LS) qui correspondent aux parties de la stratosphère accessibles depuis la troposphère à travers la tropopause.

tudes, et totalement incapable d'expliquer une destruction massive d'ozone dans le coeur même du vortex polaire, plongé dans l'obscurité.

En réalité, la formation d'un important réservoir de composés actifs de destructeurs chlorés de l'ozone se fait grâce à une réaction hétérogène à la surface de cristaux de glace. Or, le coeur du vortex polaire, qui se forme pendant l'hiver, est le seul endroit où peuvent se former des nuages de cristaux de glace, grâce aux températures inférieures à 195K qui permettent la condensation de la vapeur d'eau très raréfiée dans l'air stratosphérique. Lorsque les cristaux de glace sont assez gros (température proche de 185 K) et perdurent assez longtemps, vers 20 km d'altitude dans le vortex polaire, la génération de radicaux actifs devient importante. La destruction d'ozone à cet endroit est alors quasi-totale au printemps, lorsque les rayons du soleil reviennent éclairer la zone polaire. L'isolation du coeur du vortex polaire est un paramètre primordial pour atteindre des températures suffisamment basses, ce qui explique la différence entre le trou d'ozone formé

dans les vortex polaires arctique et antarctique. Dans le dernier cas, le vortex est plus stable et subit moins de perturbations que son homologue arctique, ce qui conduit à une forte isolation de l'air polaire et une efficacité accrue du processus de génération des destructeurs d'ozone.

Malgré les progrès accomplis concernant l'explication du processus général de formation du trou d'ozone et la compréhension des phénomènes de transport dans l'atmosphère, les observations du déficit d'ozone à l'extérieur du vortex polaire se sont révélées supérieures aux prédictions des modèles, et divers auteurs ont proposé des mécanismes susceptibles d'expliquer ce décalage (voir McIntyre (1995), Legras (1999) et Haynes (1999)). La question principale est de savoir si le déficit d'ozone observé aux latitudes moyennes dans la basse stratosphère et dans la troposphère est simplement un effet de mélange de l'air stratosphérique appauvri en ozone avec l'air extérieur au vortex polaire, ou si une destruction supplémentaire d'ozone a bien lieu au moyen de destructeurs chlorés transportés avec l'air stratosphérique ayant transité par le vortex polaire. En particuliers, Tuck *et al.* (1993) ont émis l'hypothèse d'un renouvellement complet de l'air du vortex polaire sur une échelle de temps de un mois, en désaccord avec les échelles caractéristiques basées sur la circulation méridionale stratosphérique. McIntyre (1995) a proposé d'associer un tel renouvellement d'air à la partie basse du vortex, qu'il appelle le sous-vortex ("sub-vortex" en anglais), et qui correspond à la partie du vortex dont la température potentielle est inférieure à 400K. La barrière dynamique y est moins résistante, et la filamentation par les ondes de Rossby ou le déferlement d'ondes d'inertie-gravité y seraient alors responsables d'un transport important du coeur du sous-vortex vers la troposphère, conformément aux conjectures de Tuck *et al.* (1993).

## 1.2 L'océan

Les océans contiennent 98% de l'eau présente sur terre et constituent une importante réserve d'énergie au sein du système océan-atmosphère qui gouverne notre climat. Comme pour l'atmosphère, les variations saisonnières et régionales du rayonnement solaire conditionnent en partie sa dynamique. Cependant, une source supplémentaire et conséquente d'énergie vient de la présence d'une frontière commune avec l'atmosphère, les vents de surface transférant une partie de leur énergie aux océans par frottement.

### 1.2.1 circulation et courants océaniques

Les océanographes distinguent donc deux grandes familles de circulation dans les océans. La première porte le nom de circulation thermohaline, forcée par les variations de température et de salinité. L'évolution de la salinité dépend par exemple de l'évaporation en surface. Cette première circulation se produit à grande échelle aussi bien dans les directions horizontales que verticales. La seconde famille de circulation océanique est liée aux effets dynamiques des vents de surface, qui génèrent par frottement des mouvements océaniques de surface, dont les répercussions en profondeur dépendent de la force de Coriolis associée à la rotation de la terre et de la structure verticale en densité. A ces deux grandes familles de circulation on peut ajouter les courants générés par les forces de marée qui peuvent, dans certaines conditions, transférer de façon irréversible une partie de leur énergie vers des courants moyens ou bien vers des ondes internes.

La distinction entre les deux circulations est bien souvent difficile, comme par exemple dans le cas du Gulf-stream, conséquence de la circulation induite dans l'Atlantique par les vents de surface, et qui transporte d'importantes quantités d'eau, et donc de chaleur, vers le Nord, avec un effet important sur la circulation thermohaline forcée par les flux de chaleur et de flottaison sur ces masses d'eau... La structure des courants océaniques prend donc une forme difficile à synthétiser

sous la forme des schémas présentés dans la section consacrée à l'atmosphère. Cependant, les observations et les simulations numériques montrent que ces écoulements sont caractérisés par la formation de structures de type vortex.

### 1.2.2 structure verticale en densité et ondes internes

Dans la direction verticale, la concentration en sel et la température déterminent la répartition en densité dans les océans. Quel que soit l'endroit considéré, on retrouve la même forme du profil vertical de densité. En surface, sur une profondeur de 100 m environ, il existe une couche bien particulière qui porte le nom de couche de mélange de surface. Un modèle simple proposé par Kraus & Turner (1967) permet de décrire sa dynamique, basée sur les flux de chaleur et de flottaison en surface et l'entraînement des eaux plus profondes à la base. Cette couche surplombe une zone de densité croissante avec la profondeur, associée à une diminution de la température et une augmentation de la salinité, portant le nom de thermocline. Enfin, pour des profondeurs supérieures à 1 km environ, la densité croît plus lentement et permet de définir les régions de grande profondeur. La densité augmente donc avec la profondeur, ce qui assure une stratification stable, comme pour la stratosphère dans le cas de l'atmosphère. Dans le chapitre suivant, nous introduirons une grandeur portant le nom de fréquence de flottaison, qui permet de définir localement la force de la stratification (voir équation (2.4)). Dans la figure 1.5, on a reproduit un profil vertical typique de cette fréquence de flottaison avec la profondeur, tiré de l'article de Eckart (1961). On distingue nettement la thermocline, entre 400 et 1500 m, marquée par une augmentation de la stratification.

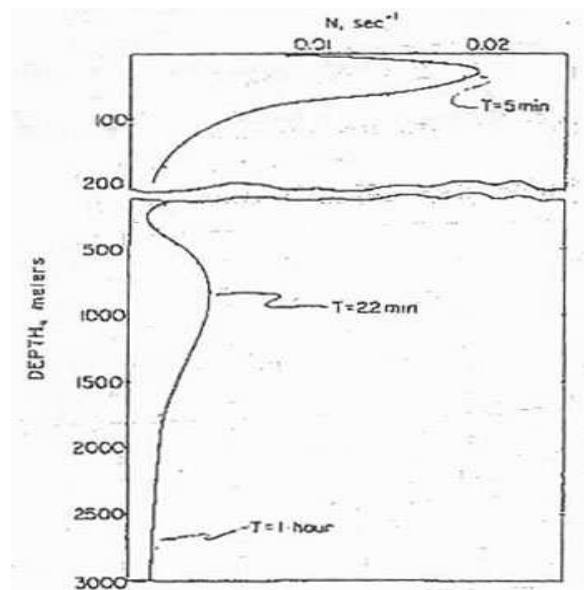


FIG. 1.5 – Profil vertical de la fréquence de flottaison dans l'océan, tiré de [Eckart (1961)]. La fréquence de flottaison est une mesure locale de la force de la stratification en densité. La période caractéristique des ondes internes, basée sur cette fréquence de flottaison, est indiquée dans les différentes régions caractéristiques (couche de surface, thermocline et couches profondes).

Si les grandes structures océaniques sur des échelles de temps supérieures à la journée sont facilement observables par satellites, des observations in-situ montrent la présence d'un champ

d'ondes internes important sur des échelles spatiales et temporelles plus courtes. Ces ondes sont associées à la présence d'une stratification stable en densité et à la force de Coriolis. Dans la figure 1.5, les périodes indiquées correspondent aux échelles de temps caractéristiques de ces ondes. On retrouvera des résultats importants sur le comportement des ondes dans l'océan dans l'ouvrage de Leblond & Mysak (1978).

Ces ondes transportent verticalement et horizontalement de l'énergie et pourraient interagir avec des structures cohérentes à des échelles plus grandes, tant spatialement que temporellement. Puisque ces structures cohérentes sont souvent des vortex, de tels phénomènes entrent dans le cadre de l'étude des interactions ondes-vortex. De précédents travaux ont été consacrés à la génération des ondes internes : Les fluctuations de pression dues à des structures atmosphériques en déplacement peuvent ainsi générer des ondes en surface, de même que les vitesses verticales qui apparaissent dans les zones de convergence ou de divergence forcées par les vents de surface. La topographie du fond des océans peut également générer des ondes en présence de courants océaniques, ou lors de marées. Enfin, l'évolution des structures océaniques peut dans certains cas conduire à l'émission d'ondes internes lorsque leur dynamique ne peut plus être décrite comme une succession d'états d'équilibre.

Des mesures du spectre des ondes en différents points du globe ont été réalisées et font apparaître de façon surprenante une forme générique, indépendamment des particularités locales des courants océaniques et de la topographie. Cette forme générale a été mise sur le compte d'un équilibre statistique entre les processus de génération des ondes internes, et leur évolution jusqu'à leur dissipation. Ainsi, de nombreuses interactions résonnantes entre ondes internes permettent un changement de longueur d'onde et de fréquence. De manière similaire, les ondes peuvent interagir avec les courants et les structures cohérentes, résultant en un changement de longueur d'onde, des réflexions ou bien une absorption à petite échelle. Enfin, ces interactions débouchent dans certains cas sur un déferlement et la formation de couches de mélange dont la dynamique peut être responsable de l'émission de nouvelles ondes internes. Dans la figure 1.6 a été reproduite une illustration tirée de l'article de Thorpe (1975) qui synthétise l'ensemble des processus responsables de la génération, de la transformation ou bien de l'absorption des ondes internes dans l'océan. Dans le cadre de cette thèse consacrée à l'interaction entre des ondes internes d'inertie-gravité et un vortex, un certain nombre de ces processus sont donc indirectement abordés.

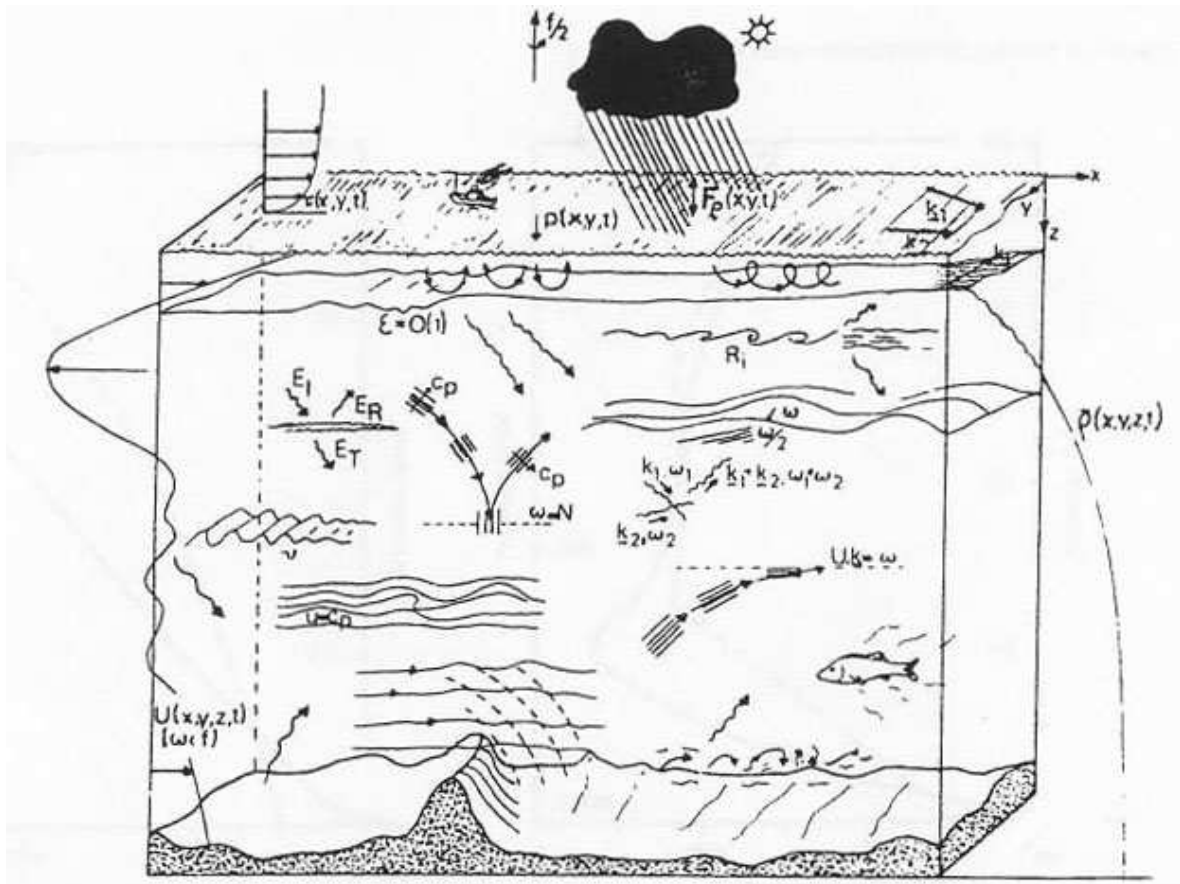


FIG. 1.6 – Schéma synthétisant les sources d'ondes et leurs interactions dans l'océan, tiré de l'article de [Thorpe (1975)].



## 2

# Généralités sur les interactions ondes-écoulement moyen

Dans les processus océaniques et atmosphériques décrits dans le chapitre précédent, un certain nombre de particularités ont été mises en évidence : la rotation de la terre joue un rôle prédominant et la distribution verticale en densité, ou bien en température potentielle pour l'atmosphère, a un impact important sur la dynamique. Dans le cadre de notre étude, nous considérerons une stratification stable du milieu, sous la forme de profils de température potentielle ou de densité croissant avec l'altitude.

L'objet de ce chapitre est de présenter de façon synthétique des résultats relatifs aux interactions ondes-écoulement. On pourra retrouver une description plus détaillée et exhaustive dans les livres de Leblond & Mysak (1978), Pedlosky (1979) et Gill (1982), ou bien dans les articles cités. Nous commencerons par rappeler quelques résultats généraux sur la dynamique des fluides stratifiés en rotation. Sur la base d'une séparation d'échelle en temps, nous distinguerons la dynamique des écoulements lents (échelle de temps caractéristiques  $T > 1/f$ ), de la dynamique des ondes d'inertie-gravité ( $T < 1/f$ ). Dans le cas général, ces deux catégories d'écoulement sont présentes simultanément. La propagation des ondes d'inertie-gravité au sein d'un écoulement lent, et ses conséquences, seront donc décrites dans une seconde partie, sur la base de travaux antérieurs consacrés à des écoulements unidirectionnels en coordonnées cartésiennes.

### 2.1 Dynamique des fluides stratifiés en rotation

Considérons tout d'abord un fluide de densité variable au repos dans un référentiel tournant à la vitesse  $\boldsymbol{\Omega}$  autour d'un axe parallèle à la composante locale de la gravité. Si on appelle  $\bar{\rho}_o$  la densité moyenne du fluide et  $\rho_o(z)$  l'écart de la valeur locale de densité par rapport à cette valeur moyenne, l'équilibre hydrostatique prend la forme  $0 = -(\bar{\rho}_o + \rho_o(z))g - \partial P_o / \partial z$  où  $P_o$  représente le champ de pression hydrostatique.

Considérons maintenant un écoulement dans ce milieu, caractérisé par un champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et des perturbations du champ de densité  $\tilde{\rho}$  et du champ de pression  $\tilde{P}$ , soumis à la force de Coriolis. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, qui consiste à négliger les variations de la densité sauf dans la composante verticale des équations du moment (voir Pedlosky (1979) pour plus de détails), et en négligeant les termes visqueux, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}_o} \mathbf{g} - \frac{\nabla \tilde{P}}{\bar{\rho}_o}. \quad (2.1)$$



Cette équation vectorielle est complétée par deux équations issues de l'équation de continuité (valables pour les écoulements dans l'atmosphère et l'océan dans des conditions précisées, par exemple, dans Gill (1982)) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (2.3)$$

où  $\rho$  est la densité totale,  $\rho = \bar{\rho}_o + \rho_o(z) + \tilde{\rho}$ .

L'équation vectorielle (2.1) traduit donc les effets de la rotation, sous la forme de l'accélération de Coriolis, et de la stratification, sous la forme d'un terme de flottaison  $(\tilde{\rho}/\bar{\rho}_o)\mathbf{g}$  qui résulte de la poussée d'Archimède ressentie par une particule fluide lorsqu'on la déplace hors de sa position d'équilibre au repos. Le système formé de l'équation (2.1) et des équations (2.2) et (2.3) est complet, constitué de cinq équations scalaires portant sur cinq inconnues  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , les trois composantes du champ de vitesse,  $\tilde{P}$  et  $\tilde{\rho}$ , les champs de pression et de densité. Dans la suite, nous éviterons la notation en  $\tilde{\phantom{x}}$  des perturbations du champ de densité et de pression par l'écoulement, et nous les écrirons désormais  $\rho$  et  $P$ .

### 2.1.1 Propriétés générales

#### Fréquence de flottaison $N$ et paramètre de Coriolis $f$

Pour mieux comprendre le sens physique de ce terme de flottaison, considérons une particule fluide de volume  $\Delta V$  que l'on déplace verticalement hors de sa position d'équilibre sur une hauteur  $Z$ . Ce déplacement génère alors un écart de densité  $\Delta\rho$  entre la particule et le fluide environnant, et, en l'absence de rotation, la particule fluide doit vérifier une forme simplifiée du principe fondamental de la dynamique, qui s'écrit :

$$\rho\Delta V \frac{d^2 Z}{dt^2} = -g\Delta\rho\Delta V.$$

Au premier ordre, l'écart en densité est proportionnel au déplacement vertical,  $\Delta\rho = -(d\rho_o/dz)Z$ , ce qui permet de réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + N^2 Z = 0,$$

où  $N$  est une fréquence qui porte le nom de fréquence de flottaison, ou bien fréquence de Brunt-Vassaila, et est définie à partir du profil vertical de densité au repos par la formule :

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}_o} \frac{d\rho_o}{dz}. \quad (2.4)$$

Ce modèle assez simpliste basé sur le déplacement d'une particule fluide montre que celle-ci se met alors à osciller à une fréquence caractéristique définie par (2.4), d'autant plus élevée que la stratification en densité est importante. On notera d'ailleurs qu'un profil de densité décroissant avec l'altitude débouche sur des valeurs négatives de  $N^2$ , ce qui résulte en une instabilité convective du fluide. Par ailleurs, pour un fluide compressible comme l'atmosphère, cette définition de la fréquence de flottaison doit être basée sur le profil de température potentielle pour s'affranchir des effets de compressibilité.

Si on applique maintenant l'équation (2.1) au référentiel terrestre, en projetant les trois composantes selon la latitude, la longitude et la verticale locale, l'accélération de coriolis prend

alors une forme plus simple, et se réécrit sous la forme  $f\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}$ , où  $f$  se nomme le paramètre de Coriolis et correspond à la projection sur la verticale locale (dont la direction est donnée par le vecteur gravité  $\mathbf{g}$ ) du vecteur rotation  $2\mathbf{\Omega}$ . On obtient ainsi un système d'équations équivalent à celui obtenu pour un fluide stratifié en rotation autour d'un axe parallèle à la verticale, avec un taux de rotation  $\Omega' = f/2$ . Le paramètre de Coriolis  $f$  dépend donc de la latitude  $\phi$  selon la relation  $f = 2\Omega \cos(\phi)$ .

Dans le référentiel terrestre, la valeur maximale du paramètre de Coriolis est  $f = 1.4e^{-4} s^{-1}$ . Pour les océans,  $N^2$  évolue avec la profondeur en fonction de la stratification locale. Des valeurs typiques sont indiquées dans la figure 1.5 du chapitre 1. Si on considère la valeur au grandes profondeurs,  $N \approx 0.02s^{-1}$  et la valeur maximale du paramètre de coriolis, on trouve un rapport  $N/f \approx 10$  pour les écoulements océaniques. Pour les écoulements atmosphériques dans la stratosphère, on trouve un rapport plus élevé,  $N/f \approx 100$ .

### conservation de la vorticité potentielle

L'équation d'évolution de la vorticité  $\omega$ , peut être déduite de ce système d'équations et permet la démonstration d'un théorème essentiel de la dynamique des fluides stratifiés en rotation, le théorème d'Ertel. Il concerne des écoulements sans viscosité pour lesquels le champ de densité est une fonction de la pression et de la température potentielle, ce qui est le cas pour les océans et l'atmosphère, et traduit la conservation pour une particule fluide en mouvement d'une quantité appelée vorticité potentielle et notée  $Q$ . La définition de  $Q$  et l'équation traduisant sa conservation s'écrivent alors

$$Q = \frac{(\omega + 2\mathbf{\Omega}) \cdot (\nabla\rho)}{\rho}, \quad (2.5)$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (2.6)$$

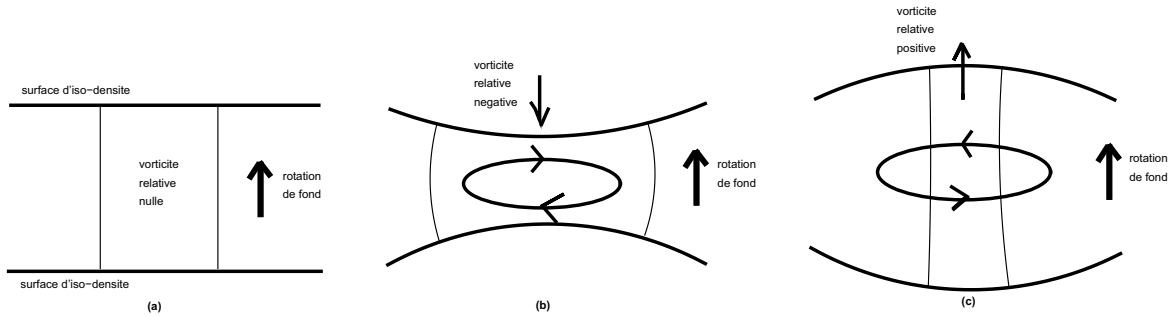


FIG. 2.1 – Schéma des processus de génération de vorticité par étirement et compression d'une colonne de fluide entre deux surfaces d'iso-densité. La flèche épaisse noire symbolise le vecteur rotation de fond  $f\mathbf{e}_z$ . (a) ; état initial sans écoulement avec rotation de fond  $\Omega$  positive. (b) ; les lignes d'iso-densité se rapprochent, ce qui augmente le gradient de densité entre les deux surfaces. La conservation de la vorticité potentielle conduit à la génération de vorticité verticale négative. La compression d'une colonne fluide génère donc un écoulement localement anticyclonique. (c) ; les lignes d'iso-densité s'éloignent, ce qui diminue le gradient de densité entre les deux surfaces. La conservation de la vorticité potentielle conduit à la génération de vorticité verticale positive. L'étirement d'une colonne fluide génère donc un écoulement localement cyclonique.

Ce théorème est en quelque sorte une transposition aux écoulements stratifiés tournants du théorème de Kelvin qui assure la conservation de la circulation autour d'un tube de vorticité

dans les écoulements homogènes sans rotation. Ici, les déplacements des surfaces d'iso-densité étirent ou compressent les lignes de vortacité absolue  $\omega + \mathbf{2}\boldsymbol{\Omega}$  et génèrent donc de la vortacité relative  $\omega$  respectivement positive ou négative, selon un processus schématisé dans la figure 2.1.

En fonction des échelles temporelles et spatiales considérées, un certain nombre d'approximations supplémentaires peuvent être admises pour simplifier le système d'équations (2.1), (2.2) et (2.3), ainsi que la forme générale du théorème d'Ertel (2.6). Dans la suite, on s'attachera à distinguer la dynamique des écoulements lents, c'est-à-dire évoluant sur des échelles de temps,  $T$ , bien supérieures à  $1/f$ , de celle des écoulements rapides, associée aux ondes d'inertie-gravité.

### 2.1.2 Écoulements lents ( $T \gg 1/f$ ), en équilibre

Considérons maintenant des écoulements géophysiques caractérisés par une échelle spatiale  $L$  et une vitesse caractéristique  $U$ . Une comparaison des ordres de grandeur dans l'équation 2.1 de l'accélération de Coriolis  $f \times \mathbf{u}$  et des termes non-linéaires  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u})$  conduit à l'introduction du nombre de Rossby,  $Ro = U/fL$ , qui mesure l'intensité des termes advectifs par rapport à la force de Coriolis. Dans le cas des écoulements atmosphériques et océaniques, on trouve des valeurs de  $Ro$  extrêmement basses, sauf pour quelques événements bien particuliers comme les tornades, et on peut donc négliger le terme non-linéaire dans l'équation du moment. Si, par ailleurs, on s'intéresse à des écoulements dont l'évolution temporelle se fait sur des échelles de temps  $T$  supérieures à  $1/f$ , les termes temporels sont eux aussi négligeables devant l'accélération de Coriolis, et les équations du moment se simplifient sous la forme

$$0 = fv - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$0 = -fu - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$0 = -\frac{g}{\rho_o} \rho - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.9)$$

Ces équations décrivent un état stationnaire d'équilibre connu sous le nom d'équilibre géostrophique, caractérisé par une direction de l'écoulement perpendiculaire au gradient de pression horizontale. Il traduit bien les observations atmosphériques aux grandes échelles horizontales (supérieures à l'échelle synoptique de 1000 km) et au-dessus de la couche limite atmosphérique (située dans le premier kilomètre de la troposphère). Par exemple, les structures anticycloniques sont associées à un champ de vitesse s'enroulant dans le sens des aiguilles d'une montre, en équilibre avec un champ de pression croissant perpendiculairement aux lignes d'iso-vitesse vers le coeur de l'anticyclone. Cet équilibre géostrophique est également vérifié pour les écoulements océaniques pour des échelles horizontales de l'ordre de 100 km.

Le champ de pression  $P$  joue alors le rôle d'une fonction de courant, et il est donc possible d'introduire une fonction  $\Psi = -(1/f\rho_o)P$ . Les équations de l'approximation géostrophique prennent alors une nouvelle forme :

$$\mathbf{u}_H = -\mathbf{e}_z \times \nabla \Psi \quad \text{et} \quad \rho = \bar{\rho}_o - \frac{f}{g} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.10)$$

Plaçons nous dans un repère orienté suivant l'écoulement, dans lequel la composante  $v$  de la vitesse est nulle. En dérivant (2.8) par rapport à  $z$  et en éliminant la pression  $P$  en employant (2.9), on aboutit à l'équation dite "du vent thermique" suivante :

$$f \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (2.11)$$

Le cisaillement vertical de vitesse horizontale est donc en équilibre avec un gradient horizontal de densité. Cette équation traduit, par exemple, le renforcement des vents dirigés vers l'Est lorsqu'on s'élève dans l'atmosphère, dû au gradient de température entre l'équateur et les pôles. Ce point était évoqué dans le chapitre 1 pour expliquer le renforcement des "Westerlies" avec l'altitude dans la troposphère.

Le système d'équations (2.7)-(2.9) est incomplet : tout d'abord, une infinité de champs de vitesse et de densité en sont solutions, et la dépendance temporelle a complètement disparu. Par contre, la connaissance du champ de vorticité potentiel et l'hypothèse de l'équilibre géostrophique traduit par les équations (2.7)-(2.9), permet une description unique de l'écoulement. Or, l'évolution temporelle du champ de vorticité potentielle est définie par le théorème d'Ertel (2.6). En décrivant l'écoulement par un champ de vorticité potentiel, on peut donc prédire son évolution.

La plupart des modèles océaniques et atmosphériques à grande échelle sont basés sur ce principe. La difficulté vient en général de l'opérateur d'inversion qui permet de calculer le champ de vitesse à partir du champ de vorticité potentielle (voir, par exemple, Hoskins *et al.* (1985) et McIntyre (2000) pour une discussion à ce sujet). Il est nécessaire de faire des approximations supplémentaires pour en obtenir une forme plus simple. Dans l'approximation quasi-géostrophique, par exemple, on considère des déplacements verticaux extrêmement faibles des surfaces d'isodensité, et les variations horizontales de densité sont négligées dans l'expression de la vorticité potentielle. En particuliers, pour des valeurs de  $Ro$  faibles et  $N > f$ , la vorticité  $\omega$  peut être remplacée par son équivalent géostrophique, orienté suivant la verticale, et les termes proportionnels aux variations horizontales du champ de densité peuvent être éliminés (voir Pedlosky (1979)). Cela permet d'introduire une nouvelle quantité, la vorticité potentielle quasi-géostrophique  $Q_{QG}$ , qui vérifie une équation de conservation s'écrivant :

$$\frac{d_H Q_{QG}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ -\nabla^2 \Psi + f - (f/N)^2 \partial^2 \Psi / \partial z^2 \right] = 0. \quad (2.12)$$

où  $\Psi$  est la fonction de courant définie en (2.10).

### Ondes de Rossby

L'évolution d'un écoulement géophysique sur des périodes de temps longues est donc déterminée par la répartition de vorticité potentielle. Or, dans le cas d'un fluide au repos sur une sphère en rotation, la vorticité potentielle de cet état de base augmente avec la latitude, du fait de l'augmentation du paramètre de Coriolis  $f$ . Un phénomène intéressant apparaît alors si on perturbe localement cet état de repos. Nous proposons ici de le décrire en considérant le cas d'une couche mince de fluide homogène dans laquelle on considère une perturbation bidimensionnelle, sans vitesse verticale. Supposons que le paramètre de Coriolis  $f$  évolue localement de façon linéaire,  $f = f_o + \beta y$ , où  $y$  est la direction longitudinale. On peut utiliser l'équation (2.12) en éliminant les dérivées verticales et en linéarisant la perturbation autour d'un état de base au repos ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ). La perturbation, décrite par  $\Psi$ , vérifie alors l'équation :

$$\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial t} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

Il s'agit d'une équation de propagation d'ondes dont la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = -\frac{\beta}{k^2 + l^2} k,$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde, et  $k$  et  $l$  les composantes du vecteur d'onde dans les directions latitudinales et longitudinales.

Ce résultat s'interprète de la manière suivante : le déplacement longitudinal et alterné d'un ensemble de particules fluides entraîne la génération d'un champ alterné de vorticité relative par conservation de la vorticité potentielle. Le champ de vitesse induit par cette vorticité relative tend à ramener les particules fluides vers leur position initiale d'équilibre, ce qui débouche sur un processus ondulatoire.

Il s'agit là d'ondes de Rossby planétaires, sans structure verticale, se propageant horizontalement. Ce modèle montre de façon simple comment la variation avec la latitude de la vorticité potentielle permet la propagation d'ondes qui présentent la particularité de se propager dans une direction particulière associée au signe de la relation de dispersion. McIntyre (2000) associe cette propriété au fait que le théorème d'Ertel, qui détermine l'évolution de la vorticité potentielle, ne contient qu'une seule dérivée temporelle. Etant donné que ce théorème sert de fondement à d'autres théories plus complexes comme l'approximation quasi-géostrophique, cette propriété reste valable pour les ondes de Rossby se propageant dans un milieu stratifié et possédant une structure verticale.

### Instabilité barocline

Outre les ondes de Rossby qui peuvent se propager sur un écoulement décrit dans le cadre de l'approximation quasi-géostrophique, des instabilités peuvent prendre naissance dans certaines conditions. On retrouve par exemple des instabilités barotropes, associée à des variations horizontales du champ de vitesse. Cependant, Eady (1949) fut le premier à aborder la question de la stabilité d'un écoulement de base stationnaire cisailé verticalement en vitesse vérifiant la relation du vent thermique (2.11), et à mettre en évidence un nouveau mécanisme d'instabilité pour les fluides stratifiés tournant, portant le nom d'instabilité barocline.

Le modèle d'Eady consiste en une couche de fluide stratifié, de fréquence de flottaison  $N$ , sur une hauteur  $H$ , avec un paramètre de coriolis  $f$  constant. L'évolution temporelle de cet écoulement est décrite dans le cadre de la théorie quasi-géostrophique et débouche sur un spectre de modes instables. Ces modes sont caractérisés par une distribution verticale en cosinus et sinus hyperboliques, avec un nombre d'onde vertical  $\alpha$ , et des composantes horizontales du vecteur d'onde  $k$  et  $l$ , où  $k$  correspond à la direction de l'écoulement. Les modes les plus instables correspondent à  $l = 0$  et à des valeurs de  $\alpha$  comprises entre 0 et  $2.3/H$ , avec une valeur maximale du taux de croissance en  $\alpha_{max} = 1.61/H$ , ce qui correspond à une longueur d'onde  $\Lambda_{max} = 2\pi NH/1.6f$ . Le taux de croissance est alors égal à  $\sigma_{max} = 0.31(f/N)dU/dz$ . Cette instabilité est donc caractérisée par une longueur d'onde minimale déterminée par les caractéristiques du milieu stratifié tournant et l'épaisseur de la couche considérée.

Charney (1947) s'est intéressé à la même problématique en prenant en compte la variation localement linéaire du paramètre de Coriolis avec la latitude,  $f = f_o + \beta y$ , et a obtenu des résultats similaires à ceux de Eady (1949) en ce qui concerne la forme de l'instabilité. Ainsi, le taux de croissance maximal est égal à  $0.29(f/N)dU/dz$  pour une longueur d'onde horizontale qui dépend cette fois de  $\beta$  au lieu de l'épaisseur de la couche, selon la formule  $\Lambda = 2\pi f_o(dU/dz)/1.26\beta N$ . D'autres travaux ont porté sur des écoulements de base et des conditions limites quelque peu différentes, sans pour autant changer radicalement les visions de cette instabilité proposées par les études de Eady (1949) et Charney (1947).

Pour les latitudes moyennes, les longueurs d'onde horizontales des modes les plus instables proposées dans les deux modèles co cident pour l'atmosphère. Ainsi, la longueur d'onde la plus instable basée sur l'épaisseur de la troposphère est de l'ordre de 4000 km aux latitudes moyennes,

en accord avec les observations météorologiques des tailles des structures troposphériques. Pour les océans, le rapport  $N/f$  est plus faible, tout comme l'épaisseur de la couche stratifiée, et les ordres de grandeur se rapprochent de 200 km aux latitudes moyennes, ce qui correspond aux échelles associées aux tourbillons générés par le gulfstream, par exemple. L'instabilité barocline joue un rôle extrêmement important dans la dynamique de l'atmosphère et des océans, particulièrement au niveau des latitudes moyennes, puisqu'elle limite la taille horizontale des structures dans cette région. Elle transforme ainsi l'énergie potentielle associée aux gradients de température Nord-Sud en énergie cinétique, sous la forme de vortex qui transportent efficacement la chaleur entre l'équateur et les pôles.

### 2.1.3 Écoulements rapides ( $T < 1/f$ ) : ondes d'inertie-gravité

Dans la partie précédente consacrée aux écoulements lents, c'est-à-dire sur des échelles de temps supérieures à  $1/f$ , la partie temporelle des équations portant sur la quantité de mouvement a été éliminée. Ici, nous nous intéressons à des échelles de temps plus courtes, et cette approximation n'est plus acceptable. Par contre, il reste possible de considérer des perturbations infinitésimales d'un état de base au repos, c'est-à-dire sans champ de vitesse, dans le cas d'une rotation et d'une stratification uniforme, caractérisées par  $f$  et  $N$ . L'aspect infiniment petit de cette perturbation autorise alors la linéarisation des équations (2.1), (2.2) et (2.3) autour de cet état de base, ce qui débouche (voir, par exemple, Leblond & Mysak (1978)) sur le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{g}{\rho_o} \rho - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.15)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.16)$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{d\rho_o}{dz} \quad (2.17)$$

Le terme en  $d\rho_o/dz$  de l'équation (2.17) est relié à la fréquence de Brunt-Vassaila, et comme ce système de cinq équations sur cinq inconnues est linéaire, diverses manipulations permettent de le ramener à une seule équation portant, par exemple, sur la vitesse verticale  $w$ , et s'écrivant :

$$\frac{\partial^2 (\Delta w)}{\partial t^2} + N^2 (\Delta_h w) + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (2.18)$$

Il s'agit d'une équation qui décrit le comportement d'ondes dites "d'inertie-gravité", puisque la force de Coriolis, force inertielle par excellence, et le terme de flottaison, associé à la stratification en densité, sont les deux forces de rappel qui permettent cette propagation. Dans un milieu est infini, et pour  $f$  et  $N$  constants, on recherche les solutions des équations linéaires (2.13)-(2.17) sous la forme d'ondes planes monochromatiques de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , de composantes  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$ .

L'équation de continuité (2.16) s'écrit alors  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$ , où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse de la perturbation. Cette relation implique un mouvement des particules du fluide perpendiculaire au vecteur d'onde, dans les plans de phase.

L'équation (2.18) permet de calculer très facilement la relation de dispersion de ces ondes, sous la forme :

$$\omega^2 = \frac{k_h^2 N^2 + k_z^2 f^2}{k_h^2 + k_z^2}, \quad (2.19)$$

où  $k_h$  est la composante horizontale du vecteur d'onde,  $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

En introduisant un angle  $\theta$  entre la direction verticale et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , cette relation de dispersion peut se réécrire sous la forme  $\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta + f^2 \cos^2 \theta$ , qui montre que la pulsation des ondes d'inertie-gravité ne dépend que de la direction de propagation et des propriétés du milieu. Par ailleurs, pour le cas  $N > f$  qui correspond à l'océan et l'atmosphère, le domaine de propagation de ces ondes s'étend donc entre  $f$  et  $N$ .

Cette relation de dispersion permet de déterminer la vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g$  qui correspond à la vitesse de propagation de l'énergie, et dont les trois composantes sont données par les formules :

$$v_{gx} = \frac{N^2 - \omega^2}{\omega k^2} k_x, \quad v_{gy} = \frac{N^2 - \omega^2}{\omega k^2} k_y, \quad v_{gz} = -\frac{\omega^2 - f^2}{\omega k^2} k_z, \quad (2.20)$$

où  $k$  est cette fois la norme du vecteur d'onde.

Ces expressions vérifient donc la relation  $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k} = 0$ , qui montre que la propagation de l'énergie de ces ondes se fait donc dans une direction perpendiculaire à la vitesse de phase. Cette propriété particulière apparaît de façon frappante dans des observations par méthode d'ombre de l'émission d'ondes par un cylindre oscillant (voir Lighthill (1978)). Les lignes de phase se propagent vers le haut à la fréquence d'oscillations du cylindre, tandis que la région où les ondes sont visibles s'étend de plus en plus vers le bas, à la vitesse de groupe, le long des lignes de phase.

Enfin, le système d'équations (2.13)-(2.17) peut être exploité pour déterminer la polarisation de l'onde, c'est-à-dire l'expression des différents champs, qui s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ b \\ \frac{P}{\rho_0} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \omega k_x + i f k_y \\ \omega k_y - i f k_x \\ -\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2} \omega k_z \\ i N^2 \frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2} k_z \\ \omega^2 - f^2 \end{bmatrix} \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega \mathbf{t})], \quad (2.21)$$

où  $b$  est la flottaison, reliée à la perturbation de densité par la relation  $b = -(g/\bar{\rho}_\sigma)\rho$ , et  $A$  est un facteur quelconque traduisant le fait que les équations sont linéaires et admettent donc des solutions d'amplitude indéterminée a priori.

Les ondes d'inertie-gravité sont associées à des mouvements verticaux et horizontaux, et transportent de l'énergie sous forme cinétique et potentielle. Une densité d'énergie  $E$  peut être calculée pour un champ d'onde monochromatique, définie comme la somme des énergies potentielles et cinétiques, et prend alors la forme suivante :

$$E = \frac{1}{2} \left( u^2 + v^2 + w^2 + \frac{b^2}{N^2} \right) = \left( A \omega \frac{k_h}{k_z} k \right)^2. \quad (2.22)$$

Les ondes de pulsation  $\omega$  proche de  $f$  sont caractérisées par une contribution majoritairement cinétique dans leur énergie, sous la forme d'un champ de vitesse essentiellement horizontal décrivant un cercle. Au contraire, les ondes de pulsation  $\omega$  proches de  $N$  sont associées à un mouvement vertical important, qui débouche sur une équi-partition de l'énergie en une partie potentielle et une partie cinétique due à la vitesse verticale. Dans le cas de l'atmosphère où le rapport  $N/f$  est très élevé, il est possible de séparer assez nettement ces deux familles d'ondes.

Les ondes proches de  $f$  correspondent alors aux oscillations quasi-inertielles ("near inertial oscillations" ou "NIO" en anglais), et les ondes proches de  $N$ , dans la partie haute fréquence du domaine de propagation, sont essentiellement de type gravitaire. Dans l'océan, le rapport  $N/f$  est plus faible et la séparation entre deux familles distinctes est plus difficile.

Les ondes d'inertie-gravité traduisent des états hors de l'équilibre géostrophique. Pour illustrer cette propriété, on peut évoquer le problème d'ajustement de Rossby : cela consiste à considérer un état initial hors d'équilibre pour un fluide en rotation, et à étudier son évolution. Gill (1982) détaille le cas d'une couche de fluide au repos, dont la hauteur subit une discontinuité. Dans ce contexte, les équations de l'écoulement permettent de montrer que le champ de vorticité potentielle est indépendant du temps, et puisque ce champ est connu au départ, il est facile d'en déduire l'état d'équilibre correspondant, qui est supposé décrire l'état final de l'écoulement. Or, cet état d'équilibre possède une énergie inférieure à l'énergie de l'état initial : la différence d'énergie est transportée à l'infini par des ondes de surface de fréquences supérieures à  $f$ . La transition entre l'état initial et l'état final en équilibre se fait donc par le biais de ces ondes, dont la structure à l'instant initial correspond à la différence entre le champ initial et le champ en équilibre. Pour des écoulements dans un milieu stratifié tournant, les ondes internes d'inertie-gravité jouent un rôle similaire aux ondes de surfaces émises lors du problème de réajustement de Rossby décrit ci-dessus, et transportent au loin la partie non équilibrée du champ initial.

## 2.2 Interactions entre des ondes d'inertie-gravité et un écoulement lent

Dans la partie précédente, nous avons introduit la notion d'écoulements lents, en équilibre géostrophique et marqués par le champ de vorticité potentielle. Nous avons ensuite introduit les ondes d'inertie-gravité, qui traduisent des états hors-équilibre. Ces ondes d'inertie-gravité ont été présentées en l'absence d'écoulement de base. Il est maintenant nécessaire de s'intéresser à leur propagation lorsqu'un écoulement de base existe déjà dans le fluide.

Dans le cas d'un fluide purement stratifié, Lelong & Riley (1991) considèrent une séparation complète des équations de Navier-Stokes en une partie ondulatoire et une partie lente décrite par le champ de vorticité verticale. Ils montrent alors que l'interaction d'un champ d'onde avec un champ de vorticité verticale conduit à la génération de nouvelles ondes avec une fréquence identique à l'onde de départ. Une autre approche consiste à linéariser les équations de Navier-Stokes autour de l'écoulement de fond. On obtient alors des équations perturbatives capables de décrire la propagation d'ondes d'inertie-gravité dans l'écoulement. Dans certaines conditions, il est possible d'utiliser la théorie WKB, qui consiste à traduire la propagation des ondes sous la forme de rayons.

### 2.2.1 Prédictions de la théorie WKB

Dans le cas général, les équations linéarisées autour d'un écoulement de base restent difficilement exploitables directement et nécessitent une résolution numérique. Cependant, si le champ d'onde est périodique et si les variations spatiales et temporelles de l'écoulement se font sur des échelles plus grandes que celles de l'onde, cette dernière peut être décrite localement sous la forme d'une onde plane monochromatique. Le vecteur d'onde et l'amplitude deviennent alors fonctions de l'espace. Il s'agit là d'une généralisation aux ondes d'inertie-gravité de l'équation eikonale introduite pour déduire la théorie de l'optique géométrique des équations de propagation des ondes électro-magnétiques. Cette approche fut tout d'abord initiée par Liouville et Green, avant



d'être adoptée par des auteurs plus récents qui lui ont donné son nom (approximation WKB pour Wentzel-Kramers-Brillouin). On pourra se reporter à la présentation de cette théorie par Gill (1982). Nous nous limiterons ici à donner les principaux résultats.

On notera désormais  $\mathbf{U}$ ,  $\rho$  et  $P$  les différents champs décrivant l'écoulement de base et  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\rho}$  et  $\bar{P}$  les champs associées aux ondes. La dépendance en temps du champ d'ondes est supposée périodique, caractérisée par une pulsation qui sera appelée pulsation absolue et notée  $\omega_{abs}$ . Dans le cadre de l'approximation WKB, ce champ d'ondes est décrit localement par un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Dans un référentiel se déplaçant avec la valeur locale de vitesse  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  de l'écoulement de base, la pulsation de l'onde dans ce nouveau référentiel, appelée pulsation intrinsèque et notée  $\omega_o$ . Sa valeur est déterminée par effet Doppler, selon la relation :

$$\omega_{abs} = \omega_o + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} \quad (2.23)$$

Les valeurs locales du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et de la pulsation intrinsèque  $\omega_o$  sont alors reliées par la relation de dispersion (2.19), où la pulsation  $\omega$  doit être remplacée par la pulsation intrinsèque  $\omega_o$ . Par ailleurs, le champ d'onde respecte également les relations de polarisation (2.21) où  $\omega$  doit être remplacé par  $\omega_o$ . La théorie WKB prédit que l'onde se propageant dans l'écoulement conserve une structure identique à celles des ondes se propageant dans un fluide au repos. Il faut se placer dans un référentiel se déplaçant avec le fluide pour obtenir cette équivalence.

L'énergie de l'onde se propage alors le long de rayons, des trajectoires dans l'espace définis par l'équation vectorielle :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U} + \mathbf{v}_g, \quad (2.24)$$

où  $\mathbf{v}_g$  est la vitesse de groupe intrinsèque, définie à partir des formules (2.20), en remplaçant  $\omega$  par  $\omega_o$ . Dans un référentiel se déplaçant avec le fluide, l'énergie se propage donc comme pour une onde dans un fluide au repos. La vitesse de l'écoulement  $\mathbf{U}$  qui apparaît dans l'équation (2.24) permet de décrire cette propagation d'énergie dans le référentiel absolu.

Par ailleurs, les composantes du vecteur d'onde évoluent également avec le temps, lorsque l'onde se propage le long des rais. Les équations déterminant cette évolution portent le nom d'équations de réfraction. En notation Newtonienne, elles s'écrivent :

$$\frac{dk_i}{dt} = r_i - \sum_{j=1,3} k_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (2.25)$$

où  $r_i$  est défini à partir du champ de fréquence de flottaison  $N$  par la relation :

$$r_i = -\frac{N}{\omega_o} \left( \frac{\omega_o^2 - f^2}{N^2 - f^2} \right) \frac{\partial N}{\partial x_i}$$

Les variations spatiales de la fréquence de flottaison  $N$  peuvent, par exemple, être dues à une stratification non linéaire du fluide au repos. L'onde ressent alors les effets de ces variations de  $N$  lors de sa propagation, d'une manière similaire à ce que ressentent des rayons lumineux lorsqu'ils se propagent dans un milieu d'indice optique variable. Les variations de  $N$  peuvent également être associées à l'écoulement de base, puisque nous avons vu au début de ce chapitre que les champs de densité et de vitesse sont en équilibre. En général, le champ de vitesse impose donc une configuration particulière du champ de densité, et la fréquence de flottaison  $N$  devient une fonction de l'espace.

Le système d'équations différentielles ordinaires (ODE) (2.24) et (2.25) est intégrable numériquement et décrit la propagation d'une onde dans un écoulement de base stationnaire à partir

d'un état initial. Cet état initial est défini par un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_o$  et une position  $\mathbf{r}_o$  de l'onde incidente. Cependant, ce système d'équations ne fournit aucune information sur l'évolution de l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation.

Dans la théorie WKB, un développement autour d'un petit paramètre permet d'obtenir à l'ordre le plus bas les résultats décrits jusqu'ici. Ce petit paramètre est généralement la longueur d'onde comparée aux échelles spatiales de l'écoulement. L'évolution de l'amplitude de l'onde est alors décrite par les équations à l'ordre suivant, sous une forme complexe. Bretherton (1966) a montré en considérant l'impulsion de l'onde,  $E/\omega_o$ , que son évolution le long d'un rai vérifie :

$$\frac{\partial(E/\omega_o)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{U} + \mathbf{v}_g)(E/\omega_o)) = 0. \quad (2.26)$$

La présence de dérivées spatiales de la vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g$  suppose donc le tracé de plusieurs rayons. Considérons un rayon central le long duquel on cherche à déterminer l'évolution de l'impulsion. En traçant des rayons initialement parallèles à ce rayon central, et formant un tube circulaire entourant le rayon central, l'équation (2.26) relie l'évolution de l'impulsion le long du rayon central à l'évolution de la forme du tube de rayons : elle traduit en effet la conservation du flux d'impulsion le long du tube. Lorsque les rayons du tube s'écartent, la conservation du flux conduit à une diminution de l'impulsion ; lorsqu'ils se rapprochent, elle conduit à une augmentation de l'impulsion. On retrouve les effets d'augmentation ou de diminution de l'intensité lumineuse par convergence ou divergence des rayons lumineux.

Dans le cas général, c'est-à-dire un écoulement quelconque, il est nécessaire de résoudre numériquement les équations. Par contre, dans le cas des écoulements uni-directionnels où le champ de vitesse peut s'écrire  $\mathbf{U}(\mathbf{r}) = U(x, z)\mathbf{e}_y$ , avec  $\mathbf{e}_y$  la composante parallèle à l'écoulement,  $k_y$  est conservée d'après (2.25) (en supposant par ailleurs que  $N$  ne dépend pas de  $y$ ). La pulsation intrinsèque  $\omega_o$  ne dépend plus alors que des coordonnées spatiales pour des rayons incidents parallèles entre eux, ce qui permet de définir avec précision dans l'espace les régions où les ondes peuvent se propager (là où  $|\omega_o| \in [f, N]$ ). Si en plus, une autre composante du vecteur d'onde est conservée, les équations de propagation peuvent être résolues analytiquement. Nous passons ici en revue des écoulements qui permettent cette résolution analytique, pour mettre en évidence les phénomènes les plus intéressants.

### cisaillement vertical de vitesse

Dans le cas d'un écoulement sans rotation de fond,  $f = 0$ , avec un cisaillement purement vertical,  $\mathbf{U} = U(z)\mathbf{e}_y$ , en présence d'une stratification linéaire  $N = cste$ , les composantes  $k_x$  et  $k_y$  du vecteur d'onde sont conservées. La pulsation intrinsèque  $\omega_o$  ne dépend alors que de  $z$ , d'après l'équation (2.23) et la théorie WKB prédit la dépendance suivante pour l'énergie  $E$  et la composante verticale du vecteur d'onde  $k_z$  :

$$\begin{aligned} k_z(z) &= k_h \sqrt{\frac{N^2 - \omega_o(z)^2}{\omega_o(z)^2}} \\ E(z) &\sim \frac{\omega_o(z)}{v_{gz}} = \frac{\omega_o(z)}{v_{gz}} = \frac{1}{k_h} \frac{N^2}{\omega_o(z) (N^2 - \omega_o(z)^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

où  $k_h$  est la composante horizontale du vecteur d'onde,  $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Pour une onde de pulsation absolue  $\omega_{abs}$  (positive par convention), on a  $\omega_o(z) = \omega_{abs} + k_y U(z)$ .

La figure 2.2 illustre le comportement d'une onde se propageant dans une direction parallèle à un écoulement cisailé verticalement.

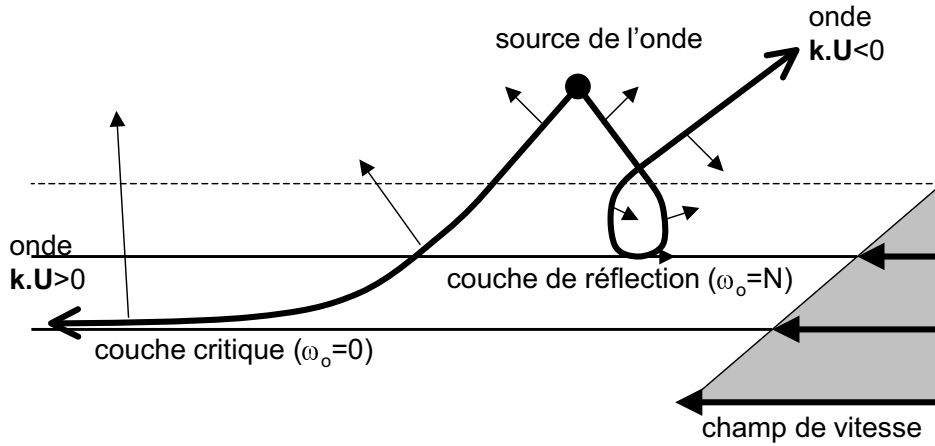


FIG. 2.2 – Propagation dans un écoulement cisailé verticalement  $U_y(z)$ . L'écoulement est dirigé de la droite vers la gauche. Les ondes sont générées au-dessus de l'écoulement, dans le même sens ou en sens contraire, ce qui conduit respectivement à un piégeage ou une réflexion.

Dans le cas où l'onde se propage vers le bas dans une direction opposée au sens du courant ( $k_y > 0$  et  $U(z) < 0$ ), la pulsation intrinsèque augmente vers la borne supérieure de propagation  $N$ . La vitesse de groupe intrinsèque prend une orientation de plus en plus verticale, tandis que sa norme tend vers zéro, et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est horizontal ( $k_z = 0$ ) lorsque  $\omega_o = N$ . L'énergie devient infinie au niveau de la couche où  $\omega_o = N$ , mais l'intégration de l'énergie sur une bande d'épaisseur finie au voisinage de cette couche débouche sur une valeur finie. Cela vient de la puissance en  $-1/2$  de la singularité dans la formule (2.27). L'onde met d'ailleurs un temps fini pour atteindre cette couche, ce qui est interprété comme un processus de réflexion. La démonstration rigoureuse de cette réflexion sera fournie dans le cadre plus général de la théorie linéaire un peu plus loin dans ce chapitre.

Dans l'autre cas, pour lequel l'onde se propage vers le bas dans le même sens que le champ de vitesse ( $k_y < 0$  et  $U(z) < 0$ ), la pulsation intrinsèque tend vers 0. La vitesse de groupe intrinsèque prend une orientation de plus en plus horizontale, tandis que sa norme tend vers zéro, et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est de plus en plus vertical, sa norme augmentant vers l'infini. L'énergie devient encore une fois infinie au niveau de la couche où  $\omega_o$  tend vers 0, et cette énergie reste également infinie lorsqu'on l'intègre sur une bande d'épaisseur finie au voisinage de cette couche, du fait de la puissance en  $-3/2$  de la singularité. L'onde met en effet un temps infini à atteindre cette couche, habituellement appelée couche critique, où toute l'énergie incidente vient s'accumuler.

### cisaillement horizontal de vitesse

Considérons maintenant le cas d'un écoulement cisailé horizontalement,  $\mathbf{U} = U(x)\mathbf{e}_y$ , avec une stratification linéaire,  $N = cste$ , et en rotation,  $f \neq 0$ . Les composantes  $k_y$  et  $k_z$  du vecteur d'onde sont alors conservées. La pulsation intrinsèque  $\omega_o$  ne dépend que de  $x$ , d'après l'équation (2.23), et la théorie WKB prédit la dépendance suivante pour l'énergie  $E$  et la composante horizontale du vecteur d'onde  $k_x$  :

$$k_x(x) = \sqrt{\frac{\omega_o(x)^2 - f^2}{N^2 - \omega_o(x)^2} k_z^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{\omega_o(x)^2 - \omega_c^2}{N^2 - \omega_o(x)^2} (k_y^2 + k_z^2)}$$

$$E(x) \sim \frac{\omega_o(x)}{v_{gx}} = \frac{\omega_o(x)^2 k_z^2 (N^2 - f^2)}{(N^2 - \omega_o(x)^2)^{3/2} (\omega_o(x)^2 - \omega_c^2)^{1/2} \sqrt{k_z^2 + k_y^2}} \quad (2.28)$$

où

$$\omega_c = \sqrt{\frac{f^2 k_z^2 + N^2 k_y^2}{k_z^2 + k_y^2}}$$

Ainsi, la pulsation intrinsèque peut prendre deux valeurs extrêmes,  $N$  et  $\omega_c$  ( $\omega_c > f$ ). La valeur minimale de la pulsation intrinsèque,  $\omega_c$ , correspond à la couche d'annulation de  $k_x$ . L'onde ne peut pas atteindre de couche pour laquelle sa pulsation intrinsèque prendrait la valeur  $f$  : cela correspondrait à un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  purement vertical, en contradiction avec la conservation de  $k_y$ .

Dans la figure 2.3, on a représenté une configuration dans laquelle une onde est émise vers champ de vitesse cisailé horizontalement. Pour une propagation de l'onde dans le même sens que le champ de vitesse ( $k_y U(x) > 0$ ), l'énergie devient infinie pour la couche où la pulsation intrinsèque prend la valeur  $\omega_c$ , mais de façon suffisamment lente pour qu'il s'y produise une réflexion. Au contraire, si l'onde se propage dans le sens contraire ( $k_y U(x) < 0$ ), sa pulsation intrinsèque va tendre vers  $N$  en un temps infini, et l'onde n'atteint jamais la couche où sa pulsation prendrait cette valeur extrême. On a donc cette fois une couche critique, et l'énergie de l'onde va s'accumuler près de celle-ci.

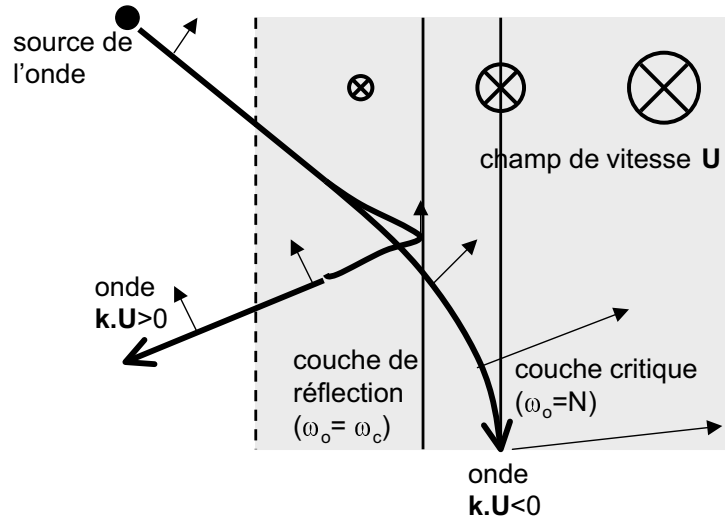


FIG. 2.3 – Propagation dans un écoulement cisailé horizontalement  $U_y(x)$ . L'écoulement est perpendiculaire à la feuille, et le schéma correspond à une projection dans le plan  $(0, x, z)$ . Les ondes sont émises dans la direction de l'écoulement ou en sens contraire, ce qui conduit respectivement à une réflexion ou un piègeage.

### écoulement géostrophique

Une configuration plus générale, avec cisaillements vertical et horizontal du champ de vitesse,  $\mathbf{U} = U(x, z)\mathbf{e}_y$  a été étudiée par Olbers (1980) pour un écoulement en équilibre géostrophique

dont les surfaces d'iso-vitesse sont parallèles entre elles. Dans ce cas, en effet, outre la conservation de  $k_y$ , il démontre la conservation de la composante du vecteur d'onde parallèle aux surfaces d'iso-vitesse.

Son étude montre l'existence de deux couches de réflexion inclinées, définies par des valeurs extrémales de la pulsation intrinsèque  $\omega_o(x, z) = N$  et  $\omega_o(x, z) = \omega_c$ , qui délimitent un domaine de propagation pour les ondes. Il introduit une couche intermédiaire, définie par  $\omega_o(x, z) = L$ , avec  $L$  une valeur comprise entre  $\omega_c$  et  $N$  qui dépend de l'écoulement de base et des caractéristiques du milieu  $f$  et  $N$ . Cette couche présente la particularité d'être traversée par l'onde dans un sens puis de devenir une couche critique pour cette même onde lorsque celle-ci revient à proximité après réflexion. Assez logiquement, l'auteur lui a donné le nom de "couche critique à effet de valve" ("valve-effect critical layer" en anglais).

Dans la figure 2.4, nous avons tracé les différents rayons caractéristiques dans un plan perpendiculaire au champ de vitesse. Ils correspondent à des ondes qui pénètrent dans un écoulement géostrophique avec une valeur initiale de la pulsation absolue leur permettant de franchir la couche critique à effet de valve  $\omega_o = L$  dans un sens. Ces ondes sont donc piégées le long de cette couche critique après une réflexion sur l'une des couches de réflexion  $\omega_o = \omega_c$  ou  $\omega_o = N$ .

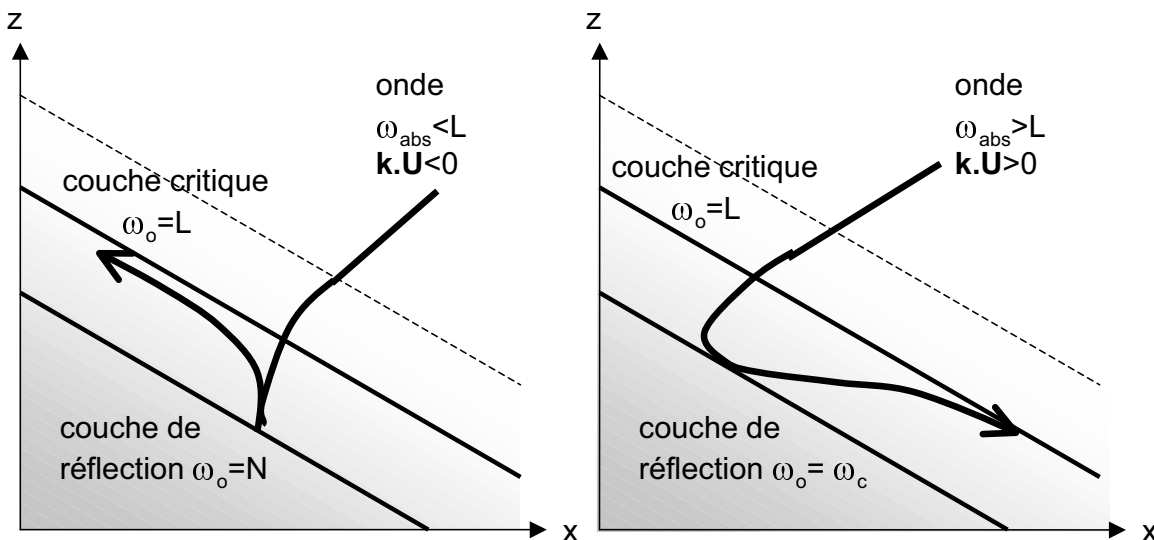


FIG. 2.4 – Propagation dans un écoulement géostrophique cisailé horizontalement et verticalement  $U_y(x, z)$ . L'écoulement croît vers les  $x$  et  $z$  négatifs, et est perpendiculaire à la feuille. La figure de gauche correspond à une onde se propageant face à l'écoulement. La figure de droite correspond à une onde se propageant dans le sens de l'écoulement. Ce schéma est inspiré de l'article de [Olbers (1980)].

Il est intéressant de noter que lorsque le cisaillement du champ de vitesse devient plutôt horizontal, la couche intermédiaire  $\omega_o(x, z) = L$  se rapproche de la couche de réflexion  $\omega_o(x, z) = N$ , en accord avec le cas limite du cisaillement purement horizontal. On retrouve la même cohérence avec le cas du cisaillement purement vertical, puisque cette couche intermédiaire se rapproche alors de la couche de réflexion  $\omega_o(x, z) = \omega_c$ ,  $\omega_c$  tendant simultanément vers 0 pour  $f = 0$ .

### 2.2.2 Couches de réflexion et couches critiques

Dans le cas d'écoulements unidirectionnels en coordonnées cartésiennes, les prédictions de la théorie WKB mettent en évidence la présence de régions de propagation et de régions interdites, délimitées par différentes couches. On pourra se reporter par exemple aux travaux de Galmiche (1999) ou Badulin & Shrira (1993). pour plus de détails sur les prédictions de la théorie WKB dans des configurations plus complexes. Cependant, la théorie WKB cesse d'être valide au voisinage de ces couches où elle prédit une amplification infinie de l'énergie, même si des critères basés sur l'aspect fini ou non du temps mis par l'onde pour les atteindre permettent de distinguer les couches de réflexion des couches critiques. Seules ces dernières sont associées à une amplification infinie de la norme du vecteur d'onde, qui conduit l'énergie de l'onde à rester piégée à cet endroit.

On présente ici des résultats plus précis sur le comportement du champ d'onde au voisinage de ces couches, dans le cas relativement simple d'un cisaillement de vitesse purement vertical en l'absence de rotation de fond,  $f = 0$ , et en présence d'une stratification linéaire  $N = Cste$ . On commence par introduire les équations linéaires de propagation des ondes dans cet écoulement, avant d'aborder successivement l'étude de la couche de réflexion  $\omega_o(z) = N$  et l'étude de la couche critique  $\omega_o(z) = 0$ .

#### Equations linéarisées

Puisque l'approximation WKB est incapable de décrire complètement la propagation de l'onde, il est nécessaire de revenir aux équations linéaires de propagation, obtenues par linéarisation des équations primitives (2.1) autour de l'écoulement de base. Pour un cisaillement vertical pur, elles se simplifient en une équation unique portant sur la vitesse verticale de l'onde, sous la forme (voir Booker & Bretherton (1967)) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 (w_{yy} + w_{zz}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial y}\right) (U_{zz}w_y) + N^2w_{yy} = 0 \quad (2.29)$$

En considérant des ondes monochromatiques se propageant dans une direction horizontale parallèle à l'écoulement ( $k_x = 0$ ), il est alors possible de rechercher des solutions sous la forme  $\tilde{w}(y, z, t) = \hat{w}(z) \exp[i(ky - \omega t)]$  où  $k$  représente cette fois la composante horizontale du vecteur d'onde et  $\omega$  la pulsation de l'onde dans le référentiel absolu ( $\omega$  qui correspond donc à la pulsation absolue  $\omega_{abs}$ ). La fonction  $\hat{w}$  vérifie alors une équation de Goldstein-Taylor simplifiée qui s'écrit :

$$\hat{w}_{zz} + \left(\frac{N^2}{(kU - \omega)^2} - \frac{U_{zz}}{k(kU - \omega)} - 1\right) k^2 \hat{w} = 0 \quad (2.30)$$

On reconnaît la définition de la pulsation intrinsèque  $\omega_o$  dans les termes  $\omega - kU$ . Les altitudes où l'approximation WKB est singulière correspondent aux couches  $\omega - kU = N$  et  $\omega - kU = 0$ .

#### couche de réflexion $\omega - kU = N$

Si on reprend la situation illustrée par la figure 2.2 dans le cas où l'onde se propage face au champ de vitesse, l'altitude de la couche de réflexion est définie par l'égalité  $\omega - kU(z) = N$ . En procédant à un changement de coordonnée verticale, l'altitude zéro choisie désormais à la position verticale de cette couche, il est alors possible de réécrire l'équation linéarisée (2.30) ainsi que les formules (2.27) dans le nouveau repère. On se restreindra ici au cas d'un cisaillement vertical constant d'intensité  $U_v = dU/dz > 0$ .

Pour l'équation linéarisée, on aboutit à l'écriture suivante :

$$\hat{w}_{zz} + \left( \frac{N^2}{(N - kU_v z)^2} - 1 \right) k^2 \hat{w} = 0 \quad (2.31)$$

où  $z$  représente la nouvelle coordonnée verticale.

Si on développe les fonctions de  $z$  au voisinage de la couche  $z = 0$ , et que l'on procède à un changement de variable  $z \rightarrow -\Lambda\epsilon$ , avec  $\Lambda = (N/2U_v k^3)^{1/3}$  une longueur caractéristique, on aboutit à l'expressions suivante au voisinage de  $z = 0$  :

$$\hat{w}_{\epsilon\epsilon} - \epsilon\hat{w} = 0. \quad (2.32)$$

Cette équation admet pour solutions les deux fonctions d'Airy  $Ai$  et  $Bi$ , la seconde étant divergente pour  $\epsilon$  tendant vers l'infini. Au voisinage de la couche où la pulsation intrinsèque tend vers  $N$ , l'approximation WKB prédisait une amplification infinie de l'énergie de l'onde, ce qui la rendait inadaptée. Au contraire, la théorie linéaire reste valable puisque l'équation (2.30) admet une solution continue pour la vitesse verticale, ce qui assure la continuité de toutes les composantes du champ d'onde.

Dans le nouveau repère, il est également possible de déterminer analytiquement les expressions du vecteur d'onde vertical  $k_z(z)$  et de l'amplitude de la vitesse verticale  $\tilde{w}(z)$  prédites par la théorie WKB, à partir des formules (2.27), (2.21) et (2.22). Dans le nouveau repère, on trouve alors les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{(WKB)} &= A \left( \frac{N - kU_v z}{\sqrt{kU_v z} \sqrt{2N - kU_v z}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ k_{z(WKB)} &= k \frac{(kU_v z)^{\frac{1}{2}} (2N - kU_v z)^{\frac{1}{2}}}{N - kU_v z} \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $A$  est une amplitude arbitraire.

Puisque ces expressions correspondent à une description du champ d'onde où les dépendances en  $z$  de la phase et de l'amplitude sont découplées, le champ d'onde réel prédit par le théorie WKB prend la forme suivante :

$$\hat{w}_{(WKB)}(z) = \tilde{w}_{(WKB)}(z) \cos(\theta(z) + \theta_o) \text{ avec } \theta(z) = \int_z^0 k_{zWKB}(u) du \quad (2.34)$$

où  $\Psi$  est donc la phase, dont  $k_z$  est la dérivée, et  $\theta_o$  est une phase arbitraire.

Cette dernière description correspond donc à une structure d'onde stationnaire en  $z$ , créée par la superposition d'une onde incidente se propageant vers le bas et d'une onde réfléchie se propageant vers le haut, le coefficient de réflexion étant imaginaire, de norme 1, et la phase arbitraire  $\theta_o$  étant liée au déphasage lors de la réflexion.

Finalement, puisque l'équation linéarisée (2.31) n'admet pas de solution propagative pour le demi-plan négatif  $z < 0$ , il est possible de l'intégrer numériquement depuis un point situé loin dans ce domaine non-propagatif, où l'équation prend la forme asymptotique  $\hat{w}_{zz} - k^2 \hat{w} = 0$ , dont la solution physiquement acceptable est de la forme  $\hat{w} = \exp(kz)$ . Dans la figure 2.5, on a tracé les courbes correspondant respectivement à la résolution numérique de l'équation linéaire (2.31), la courbe prédite par la théorie WKB décrite par (2.33), et la fonction d'Airy solution de (2.32). Cette dernière est la solution approchée de l'équation linéaire au voisinage de  $z = 0$ . Quant à la courbe prédite par la théorie WKB, l'amplitude  $A$  et la phase  $\theta_o$  des formules (2.34) sont choisies de manière à être le plus proche possible de la solution numérique pour  $z \gg 0$ . On constate

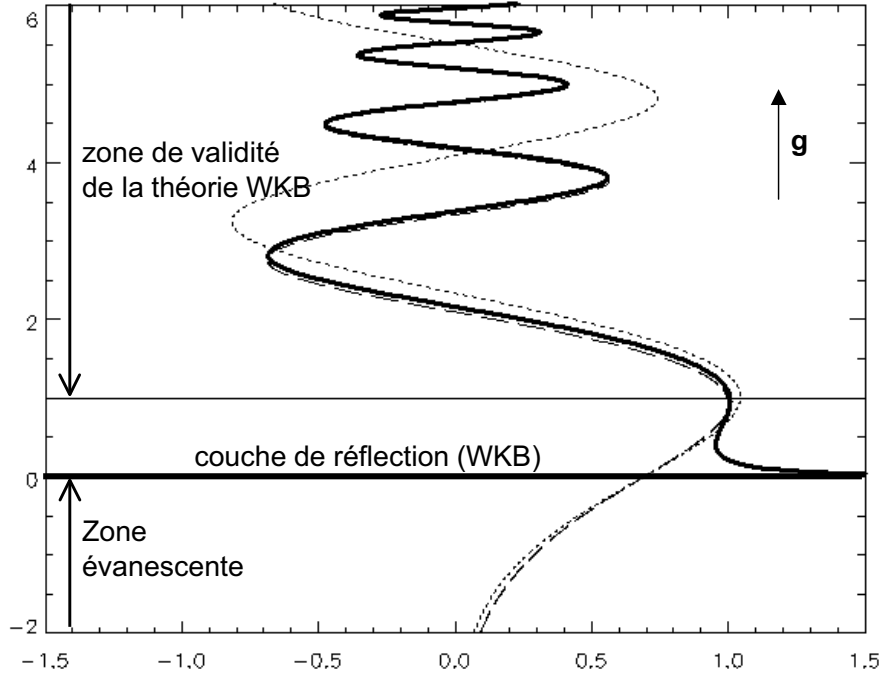


FIG. 2.5 – Solutions du champ de vitesse verticale de l'onde,  $\hat{w}(z)$ , près de la couche de réflexion  $\omega_o = N$ . La coordonnée horizontale donne la valeur de la vitesse; la coordonnée verticale correspond à l'altitude au-dessus de la couche de réflexion, adimensionnée par la longueur  $\Lambda = (N/2U_o k^3)^{1/3}$ . -----; solution non divergente en  $z < 0$  de l'équation linéaire (2.31). —; prédiction de la théorie WKB décrite par (2.34). ·····; fonction d'Airy vérifiant l'équation (2.32). Les deux lignes horizontales correspondent à la couche de réflexion et à la couche située à une distance  $\Lambda$  au-dessus. Ces deux lignes délimitent une région dans laquelle les prédictions de la théorie WKB cessent d'être valides.

ainsi que l'approximation WKB reste valide sur une large région au-dessus de la couche, pour des distances supérieures à  $\Lambda$ . Le comportement de l'onde au voisinage de  $z = 0$  est mieux décrite par la fonction d'Airy pour des distances inférieures à  $\Lambda$ .

Cette résolution dans un contexte simplifié des équations linéarisées permet d'élucider le raisonnement un peu rapide formulé à propos des couches de réflexion prédites par la théorie WKB. On voit donc que la singularité en puissance  $-1/2$  de la théorie WKB ne correspond pas à une singularité des équations linéaires de propagation, et que ces dernières prévoient une réflexion de l'onde incidente. En généralisant ce résultat à d'autres écoulements de base, une réflexion sera donc attendue au niveau des couches présentant le même type de singularité, faible, dans le cadre de la théorie WKB. Cette généralisation permet donc de prédire une réflexion sur les couches  $\omega_o = \omega_c$  pour les écoulements cisailés horizontalement, ou sur les couches  $\omega_o = \omega_c$  et  $\omega_o = N$  pour un écoulement en équilibre géostrophique.

### couche critique $\omega - kU = N$

La même approche peut être utilisée pour étudier le comportement de l'onde au voisinage de la couche critique  $\omega - kU(z) = N$  dans le cas d'un écoulement cisailé verticalement. Cependant, l'équation linéaire (2.31) elle-même devient également singulière à cet endroit, du moins pour un signal monochromatique. On présente ici les principaux résultats obtenus par d'autres auteurs



ayant étudié ce type de singularité.

*approche quasi-monochromatique*

Koop (1981) propose un développement asymptotique au voisinage de la couche critique sous la forme d'un développement de Taylor de la fonction  $\hat{w}$ , qui s'écrit alors  $\hat{w} = \sum a_n z^{n+\alpha}$ . A l'ordre le plus bas, la solution complète s'écrit :

$$\hat{w}(z) = A_1(z)^{\frac{1}{2}+i\mu} + A_2(z)^{\frac{1}{2}-i\mu}$$

où  $\mu$  est un facteur d'amortissement, défini par  $\mu = \sqrt{Ri - 1/4}$ , avec  $Ri = N^2/(\partial U/\partial z)^2$  le nombre de Richardson local. Pour des cisaillements verticaux intrasèquement stables vis-à-vis de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (voir Miles (1961) et Howard (1961)),  $Ri$  est toujours supérieur à  $1/4$  et le nombre  $\mu$  est donc positif.

Cependant, cette expression asymptotique présente une discontinuité au niveau de la couche  $z = 0$  et il est impossible de prolonger les parties  $z > 0$  et  $z < 0$  de ce développement pour une onde monochromatique. Par contre, en considérant une onde quasi-monochromatique, c'est-à-dire possédant une pulsation  $\omega$  dont la partie imaginaire est non nulle, ce prolongement devient possible. Pour une onde incidente se propageant vers le bas et arrivant par au-dessus, le champ d'onde est décrit par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} z > 0 \quad \hat{w} &= A |z|^{\frac{1}{2}} \exp^{-i\mu \ln|z|} \\ z < 0 \quad \hat{w} &= -iA |z|^{\frac{1}{2}} \exp^{-\mu\pi} \exp^{-i\mu \ln|z|} \end{aligned}$$

Le facteur d'amortissement de l'onde à travers la couche critique est donc très important, donné par le facteur  $\exp^{-\mu\pi}$ . Puisque l'onde est quasi-monochromatique, s'amplifiant lentement dans le temps, il devient difficile de procéder à des bilans énergétiques rigoureux. Les résultats de cette approche montrent que l'énergie de l'onde ne peut franchir la couche critique. L'augmentation infinie de la composante verticale du vecteur d'onde prédite par l'approximation WKB est par ailleurs en accord avec les oscillations de plus en plus rapides de la fonction  $|z|^{1/2} \exp(-i\mu \ln|z|)$  au voisinage de  $z = 0$ . Booker & Bretherton (1967) montre aussi que la composante du tenseur de Reynolds  $\overline{uw}$  subit une variation rapide de part et d'autre de la couche critique. Or, le transfert non-linéaire de l'énergie du champ d'ondes vers un écoulement moyen est justement lié à la variation spatiale de ce tenseur de Reynolds. La couche critique apparaît donc un lieu privilégié pour ce type de transfert d'énergie.

*approche par transformée de Laplace*

Booker & Bretherton (1967) proposent une approche basée sur la résolution de l'équation (2.29) par transformation de Laplace. L'écoulement étudié est similaire à celui discuté jusqu'ici, dans la mesure où Booker & Bretherton (1967) considèrent la formation d'un champ d'ondes stationnaires au-dessus d'une topographie. Un changement de repère par translation uniforme suffit pour se ramener à l'écoulement qui nous intéresse. La transformée de Laplace permet d'échapper aux singularités qui apparaissent dans le cas monochromatique et donne une vision plus précise de l'évolution du champ d'onde au voisinage de la couche critique.

Dans le cas d'un signal pseudo-monochromatique, c'est-à-dire une perturbation localisée loin de la couche et commençant à générer des ondes à l'instant  $t = 0$ , leur étude montre la mise en place progressive du champ d'ondes stationnaires se propageant vers la couche critique. En effet, pour les zones en-dehors de la couche critique, le comportement asymptotique aux temps

infiniment longs correspond à la solution monochromatique prédite par l'approche précédente et, dans une certaine mesure, par la théorie WKB. Une autre contribution lentement décroissante dans le temps vient se superposer à la solution monochromatique. Elle est interprétée par les auteurs comme l'absorption locale de la composante de Fourier du signal pour laquelle la zone considérée est une couche critique. En effet, le signal débute au temps  $t = 0$  et présente donc une structure spectrale étendue, centrée sur la fréquence du signal. Par contre, dans une petite région entourant la couche critique, d'épaisseur décroissante avec le temps, les deux contributions précédentes ne sont plus dissociables. La composante horizontale du champ de vitesse de l'onde augmente là indéfiniment avec le temps. Ces résultats sont schématisés dans la figure 2.6(1).

Dans le cas d'un signal d'étendue temporelle finie, modélisant la propagation d'un paquet d'ondes, seule subsiste la contribution d'amplitude décroissant lentement avec le temps (voir figure 2.6(2)). Booker & Bretherton (1967) donnent une expression pour cette contribution, qui correspond à un signal de longueur d'onde verticale croissant indéfiniment. On peut interpréter ce résultat comme une absorption du paquet d'onde dans le voisinage de la couche critique, sur une épaisseur verticale proportionnelle à l'étendue spectrale du paquet. La disparition progressive de l'énergie de l'onde peut paraître étonnante, mais rien ne garantit a priori la conservation de l'énergie dans les équations linéarisées autour de l'état de base. Les termes nonlinéaires négligés dans cette théorie transfèrent cette énergie vers un écoulement moyen. Cependant, l'amplification de l'énergie du paquet d'onde au voisinage de la couche critique peut aussi déclencher une instabilité avant que le transfert non-linéaire vers l'écoulement de base n'ait lieu.

## 2.3 effets non-linéaires et instabilités déclenchés par la propagation d'une onde dans un écoulement moyen

La théorie WKB, et dans un cadre plus général, la théorie linéaire, permettent de décrire avec succès la propagation des ondes d'inertie-gravité dans un écoulement moyen, pour des ondes d'amplitude infiniment petite. Cependant, des termes d'ordre supérieur ont été négligés dans la linéarisation. Si on reprend le système complet d'équations (2.1)-(2.2)-(2.3), et qu'on le compare à la somme des équations décrivant l'écoulement de base et les équations linéarisées autour de cet état de base pour les ondes, la différence entre les deux systèmes s'écrit sous la forme de termes couplés  $w(\partial u/\partial z)$ ,  $w(\partial v/\partial z)$ , etc. Pour des ondes d'amplitude faible,  $A$ , ces termes sont d'ordre supérieur  $O(A^2)$  et peuvent donc être traités comme un faible écart à la théorie linéaire. Il s'agit là d'une approche faiblement non-linéaire.

Lors de la propagation des ondes, ces termes non-linéaires peuvent être traités comme des termes de forçage pour un nouvel écoulement. Si la fréquence de ce forçage appartient au domaine  $[f, N]$ , on s'attend à la génération de nouvelles ondes. Si la fréquence de forçage est nulle, un transfert se produit vers un écoulement moyen. Dans le cas de l'interaction d'une onde de pulsation  $\omega$  avec un écoulement moyen, par exemple, les termes non-linéaires génèrent un forçage aux fréquences  $2\omega$  et  $0$ . La fréquence  $0$  correspond à une moyenne temporelle des termes non-linéaires : ces termes non-linéaires moyennés dans le temps peuvent être regroupés sous la forme d'un tenseur, le tenseur radiatif, dont les variations spatiales indiquent la localisation des termes de forçage (voir Lighthill (1978)). Dans certaines situations (voir les commentaires de McIntyre (2000) par exemple), une bonne approximation de ce tenseur radiatif est obtenue au moyen du tenseur de Reynolds,  $\overline{u_i u_j}$ .

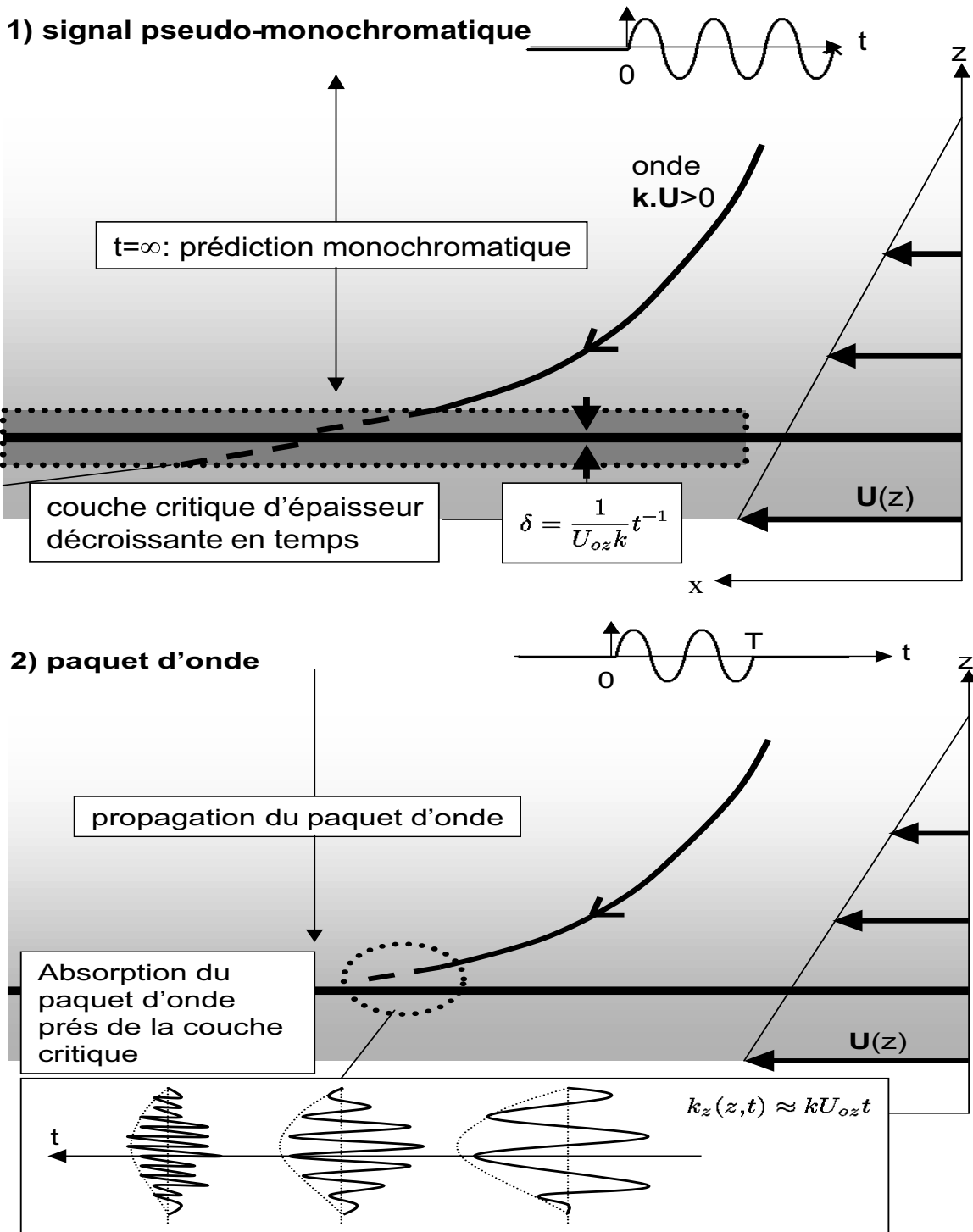


FIG. 2.6 – Résultats de la résolution des équations linéarisées par transformée de Laplace, tirés de l'article de [Booker & Bretherton (1967)]. La figure du haut (1) correspond à un signal pseudo-monochromatique, c'est-à-dire commençant à la date  $t = 0$  et maintenu indéfiniment ensuite. La figure du bas (2) correspond à un paquet d'onde de durée  $T$ .

La propagation d'un paquet d'onde, par exemple, génère des variations spatiales du tenseur de Reynolds qui transfèrent une partie de l'énergie de l'onde vers un écoulement moyen (voir Lighthill (1978)). On retrouve ce transfert pour des ondes monochromatiques avec amortissement visqueux, et Plumb & McEwan (1978) ont proposé une expérience basée sur ce phénomène pour expliquer le phénomène des oscillations biennales. Dans le cas de l'interaction résonnante de deux ondes monochromatiques de même pulsation, Galmiche *et al.* (2000) a vérifié numériquement un transfert d'énergie vers un écoulement moyen. Si on revient maintenant au cas d'une onde monochromatique se propageant dans un écoulement cisailé verticalement sans amortissement visqueux, Booker & Bretherton (1967) montrent que le tenseur de Reynolds est maintenu constant tout au long de la propagation pour une onde décrite dans le cadre de la théorie WKB. Par conséquent, lorsqu'un piégeage se produit le long d'une couche critique, le tenseur de Reynolds subit une variation brutale à cette endroit. Les couches critiques sont donc des lieux privilégiés de transfert d'énergie vers un écoulement moyen.

Dans le cadre de cette thèse, nous sommes particulièrement intéressés par ce qui peut se passer au voisinage des couches critiques. L'approche faiblement non-linéaire met en évidence la rôle de catalyseur des couches critiques pour un transfert vers un écoulement moyen. Cependant, étant donné l'accumulation d'énergie des ondes au niveau de ces couches, la théorie faiblement non-linéaire devient un cadre trop restrictif. Il est donc nécessaire de revenir aux équations complètes de la dynamique. Koop (1981) a réalisé des expériences de piégeage d'ondes le long d'une couche critique horizontale (cisaillement vertical), mais l'amortissement visqueux était trop important pour pouvoir observer des effets non-linéaires. Pour la même catégorie d'écoulement, Dörnbrack (1998) a réalisé des simulations numériques qui montrent que les ondes déferlent au voisinage de la couche critique par un mécanisme de retournement des couches de densité : l'amplification de l'énergie débouche sur une instabilité de l'écoulement total constitué de la superposition de l'écoulement de base et du champ d'onde. Un déferlement a aussi été trouvé numériquement par Staquet & Huerre (2002) dans le cas d'un écoulement cisailé horizontalement (écoulement barotrope) dans lequel les ondes sont piégées le long d'une couche critique horizontale. On voit donc au travers de ces simulations numériques, que le piégeage des ondes, ou simplement leur propagation, peut amener l'écoulement total vers un état instable. De l'énergie est alors extrait de l'écoulement de base et du champ d'onde pour être transférée vers l'instabilité. Dans les simulations numériques de Dörnbrack (1998) et Staquet & Huerre (2002), le déferlement génère rapidement une turbulence à petites échelles qui dissipe l'énergie transférée vers l'instabilité. Le processus de déferlement lui-même peut alors devenir une source d'ondes internes.

Dans la figure 2.7, nous avons tracé un schéma résumant les processus possibles lors de la propagation d'une onde dans un écoulement moyen. Le champ de base et le champ d'onde y sont notés respectivement  $U_o, V_o, \dots$  et  $u, v, \dots$ , tandis qu'un champ d'interaction a été introduit, noté  $U_1, V_1, \dots$ , pour représenter les processus de transfert d'énergie. Ce champ d'interaction peut donc servir à représenter de nouvelles ondes ou un écoulement moyen, générés par les effets non-linéaires, ou encore un champ d'instabilité généré par la transition vers un état instable du champ total.

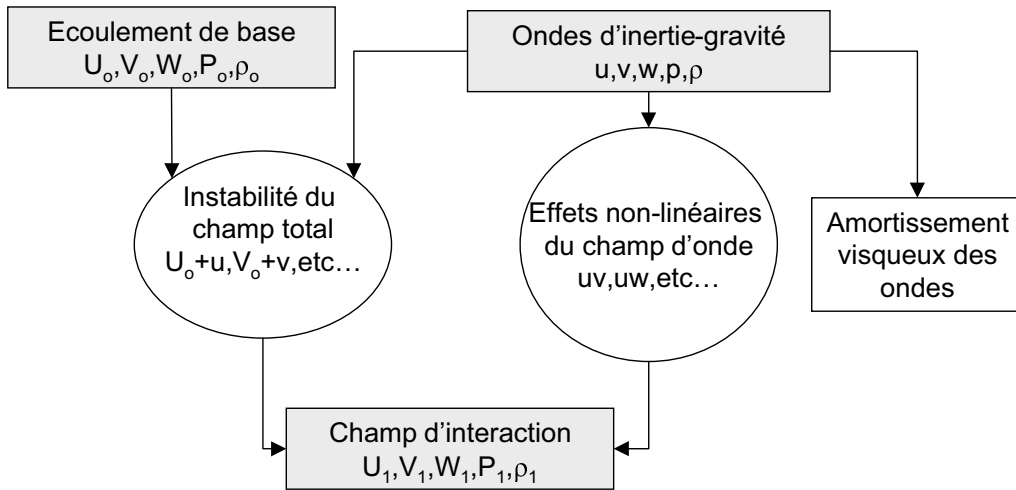


FIG. 2.7 – Bilan sur les transferts d'énergie lors de la propagation d'une onde dans un écoulement moyen.

### 3

## Application aux interactions ondes-vortex

Dans le chapitre 1, nous avons pu observer que les écoulements dans l'atmosphère et l'océan étaient caractérisés par la présence de structures cohérentes de type vortex, plongés dans un milieu où se propagent des ondes internes. Dans le chapitre 2, nous avons mis en évidence la possibilité de transferts entre les écoulements lents et les ondes, dans le cas d'écoulements de base uni-directionnels en coordonnées cartésiennes. L'objet de ce nouveau chapitre est de présenter de façon plus détaillée les vortex axisymétriques et de déterminer dans quelle mesure l'interaction des ondes avec un vortex présente des similarités avec ce qui a été dit au chapitre précédent.

Pour cela, nous commencerons par présenter quelques résultats relatifs à la structure et la stabilité d'un vortex en milieu stratifié tournant. Nous appliquerons ensuite les équations de la théorie WKB dans un référentiel cylindrique, pour pouvoir utiliser cette théorie dans le cas de l'interaction avec un vortex. La théorie WKB est en effet bien adaptée à l'étude de l'interaction dans le cas où les ondes incidentes présentent initialement une structure d'onde plane, ce qui est le cas dans les expériences présentées dans les chapitres 5, 6 et 7. Cependant, compte-tenu de la géométrie cylindrique de l'écoulement de base, il semble plus judicieux de décrire les ondes sous la forme de modes azimutaux. Quelques résultats importants obtenus par d'autres auteurs ayant adopté cette description seront présentés à la fin de ce chapitre.

### 3.1 Modèle de structure cohérente : le vortex axisymétrique

La présence de vortex dans les écoulements géophysiques a motivé un grand nombre de travaux portant sur leur dynamique, pour mieux modéliser les écoulements de l'atmosphère et des océans. Dans le cadre de cette thèse, nous avons adopté la même modélisation, en nous limitant à des vortex axisymétriques.

En réécrivant les équations (2.1)-(2.2)-(2.3) dans un référentiel cylindrique  $(0, r, \theta, z)$  pour un écoulement stationnaire purement azimutal,  $\mathbf{U} = U(r, z)\mathbf{e}_\theta$ , on aboutit à un système de trois équations. L'équation du moment dans la direction azimutale élimine toute dépendance azimutale du champ de pression  $P$  et l'équation du moment dans la direction verticale, conduit au même résultat pour la perturbation en densité  $\rho$ . Finalement, les relations issues de l'équation de continuité sont automatiquement vérifiées, et on aboutit à un système de deux équations :

$$-\frac{U^2}{r} = fU - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3.1)$$

$$0 = -\frac{g}{\rho_0}\rho - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.2)$$

L'élimination de la pression  $P$  conduit à une unique équation liant la vitesse à la densité :

$$\left(f + \frac{U}{r}\right)\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (3.3)$$

qui traduit la relation du vent thermique pour un vortex axisymétrique circulaire sans négliger le terme non-linéaire de force centrifuge  $U^2/r$ .

Cette équation relie donc entre elles deux inconnues, et le champ complet reste indéterminé, tout comme dans le cas de l'approximation géostrophique. Il est possible de lever cette indétermination en se donnant un champ de vorticité potentielle, l'équation (3.3) déterminant alors de façon unique les champs de vitesse et de densité, même si le terme non-linéaire de force centrifuge vient singulièrement compliquer l'affaire. Une autre manière d'aborder ce problème est de choisir soit le champ de vitesse, soit le champ de densité, l'autre champ étant déterminé par l'équation (3.3) qui traduit l'équilibre dynamique du vortex.

Compte tenu de la diversité des champs de vitesse et de densité possibles, un certain nombre de caractéristiques et de nombres sans dimension permettent de classer les vortex. Tout d'abord, on distingue assez nettement les vortex non-isolés des vortex isolés, ces derniers possédant une circulation du champ de vitesse nulle à l'infini. Ensuite, on peut choisir une échelle de vitesse basée sur la valeur maximale de la vitesse, notée  $U_{max}$ , et une échelle de longueur horizontale basée sur le rayon, noté  $R$ , où la vitesse prend cette valeur maximale. Enfin, le vortex étant généralement limité dans la direction verticale, particulièrement en présence de stratification, il est nécessaire d'introduire une échelle verticale du champ de vitesse notée  $H$ . Par ailleurs, le fluide stratifié tournant peut être caractérisé par le paramètre de Coriolis  $f$  en ce qui concerne la valeur de la rotation de fond, et la fréquence de Brunt-Vassaila  $N$  pour ce qui touche à la stratification.

Un premier nombre adimensionnel important est le nombre de Rossby  $Ro$ , défini ici comme  $Ro = U_{max}/fR$ , qui mesure l'importance relative de la force centrifuge du champ de vitesse à la force de Coriolis, et qui permet d'éliminer le terme centrifuge de l'équation (3.3) pour des valeurs faibles de  $Ro$ ; cette limite correspond aux vortex en équilibre géostrophique. Pour de tels vortex, le champ de densité est fléchi sur une échelle verticale correspondant à l'extension verticale  $H$  du champ de vitesse. Or, un tel champ est susceptible d'être instable du point de vue de l'instabilité barocline introduite plus haut. On peut assez naturellement considérer les champs de vitesse et de densité comme étant localement semblables à l'écoulement étudié par Eady (1949), et la longueur d'onde minimale de l'instabilité est alors de l'ordre de  $2\pi NH/1.6f$ . Cependant, une telle instabilité ne peut apparaître et se développer dans le champ du vortex qu'à condition que la longueur d'onde minimale soit inférieure à sa circonférence. En introduisant une longueur portant le nom de rayon interne de déformation  $r_I = NH/f$ , on montre que l'instabilité ne peut se développer que lorsque  $R > r_I$ , c'est-à-dire lorsque le rayon du vortex est supérieur au rayon de déformation. Ce critère a pu être vérifié dans un certain nombre d'expériences et de simulations numériques (voir, par exemple, l'article de synthèse de Hopfinger *et al.* (1993)).

Par ailleurs, la présence d'un cisaillement de vitesse horizontal peut générer une instabilité barotrope. Flierl (1988) a ainsi étudié les mécanismes d'instabilité de vortex isolés dans un fluide homogène en rotation, ou bien dans un système à deux couches de densités différentes, en se plaçant dans le cadre de l'approximation quasi-géostrophique. Les vortex ont une forme un peu particulière, puisqu'ils sont caractérisés par un coeur de vorticité cyclonique entouré d'un anneau de vorticité anticyclonique. Pour cette famille de vortex, il montre la possibilité

du développement d'une instabilité de type barotrope lorsque l'anneau de vorticité negative est suffisamment étroit, ce qui assure alors un cisaillement radial de vitesse azimutale suffisant pour la déclencher. Dans son étude, pour les vortex dont l'extension radiale de l'anneau est inférieure à celle du coeur, une instabilité appar it. Il montre également comment des instabilités baroclines peuvent prendre naissance lorsque le rayon du vortex devient supérieur au rayon de déformation interne défini à partir de la stratification en deux couches.

Outre les instabilités de type barocline et barotrope, dont la description est possible à partir de l'approximation quasi-géostrophique, un certain nombre de mécanismes d'instabilité peuvent appar tre, qui nécessitent une description différente, en-dehors de l'approximation quasi-géostrophique, par exemple par linéarisation autour de l'état de base comme cela sera fait pour aboutir aux équations des ondes d'inertie-gravité. On peut ainsi citer l'instabilité inertielle, qui prend naissance pour des profils de vorticité pour lesquels la vorticité absolue change de signe, et qui génère des rouleaux de convection d'axes azimutaux similaires à ceux observés pour une instabilité de type Taylor-Couette (voir, par exemple, Kloosterziel & van Heijst (1991)). Dans certaines conditions, un cisaillement extérieur au vortex peut conduire à une résonance de certains modes d'oscillation du vortex, qui croissent en amplitude et génèrent une instabilité dite "elliptique" puisqu'elle correspond le plus souvent à une résonance des modes elliptiques de l'écoulement de base (voir Miyazaki (1993) ou Eloy & Le Dizès (1993)). La présence d'un cisaillement vertical de vitesse azimutale suffisamment intense, c'est-à-dire tel que le nombre de Richardson,  $Ri = N^2/(\partial U/\partial z)^2$ , devient inférieur à 1/4, conduit à une instabilité de type Kelvin-Helmoltz (voir, par exemple, Miles (1961) et Howard (1961)). Lorsque la stratification elle-même, sous l'action d'une perturbation extérieure de type ondes par exemple, s'inverse localement, c'est-à-dire que le gradient vertical de densité  $\partial\rho/\partial z$  prend des valeurs négatives, on voit se développer une instabilité de convection portant le nom de "over-turning" pour une perturbation de type ondes. Cette instabilité existe pour les ondes seules (voir par exemple Orlandi (1972)) mais peut également naître de la perturbation du champ de densité du vortex. Enfin, lorsque le cisaillement de vitesse vertical n'est pas suffisant pour déclencher une instabilité de type Kelvin-Helmoltz, mais que différents processus de diffusion entrent en jeu avec des échelles de temps différentes, comme par exemple la diffusion de quantité de mouvement et la diffusion de sel, une instabilité (voir McIntyre (1970) et Baker (1971)) peut prendre naissance. Dans le cas de l'eau salée, cette instabilité dite de "double diffusion" appar it pour des valeurs de  $Ri$  inférieures à 175. Dans les parties expérimentales du chapitre 5, on utilisera les résultats obtenus à propos de certaines de ces instabilités pour déterminer la possibilité d'un déferlement des ondes et le mécanisme d'instabilité le plus probable.

### 3.2 Prédiction de la théorie WKB en coordonnées cylindriques

Pour pouvoir appliquer la théorie WKB à un écoulement axisymétrique, il faut transformer les équations des rayons (2.24) et de réfraction (2.25), écrites en coordonnées cartésiennes ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ), pour les traduire dans un référentiel cylindrique ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ ) centré sur le champ du vortex. Le champ du vortex est décrit par une composante azimutale non nulle de la vitesse  $\mathbf{U} = U(r, z)\mathbf{e}_\theta$ .



### 3.2.1 Ecriture des équations en coordonnées cylindriques

En ce qui concerne les équations des rayons (2.24), la transformation est directe, et leur réécriture dans le référentiel cylindrique prend la forme :

$$\frac{dr}{dt} = v_{gr} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{g\theta} + U}{r} \quad \frac{dz}{dt} = v_{gz} \quad (3.4)$$

Pour les équations de réfraction (2.25), un certain nombre de précautions sont nécessaires. En effet, si les premiers termes de droite, associées aux variations de la fréquence de Brunt-Vassaila  $N$  ont la forme d'un opérateur gradient, facilement transposable au cas cylindrique, les termes associés aux différentes composantes du gradient de vitesse forment un opérateur, appelé opérateur de distorsion dans la suite, plus difficile à transcrire en coordonnées cylindriques.

Considérons tout d'abord la partie gauche de ces équations. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \frac{d}{dr} (k_r \mathbf{e}_r + k_\theta \mathbf{e}_\theta + k_z \mathbf{e}_z) \\ &= \left( \frac{dk_r}{dt} \mathbf{e}_r + k_r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dk_\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + k_\theta \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + \frac{dk_z}{dt} \mathbf{e}_z \right) \end{aligned}$$

Puisque  $d\mathbf{e}_r/dt = (d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta$  et  $d\mathbf{e}_\theta/dt = -(d\theta/dt)\mathbf{e}_r$ , on aboutit à la relation :

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \left( \frac{dk_r}{dt} - k_\theta \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{dk_\theta}{dt} + k_r \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{dk_z}{dt} \right) \mathbf{e}_z \quad (3.5)$$

En coordonnées cartésiennes, l'opérateur de distorsion s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \text{distorsion} &= \left( -k_x \frac{\partial U_x}{\partial x} - k_y \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x \\ &+ \left( -k_x \frac{\partial U_x}{\partial y} - k_y \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y \\ &+ \left( -k_x \frac{\partial U_x}{\partial z} - k_y \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $U_x$  et  $U_y$  sont les composantes du champ de vitesse dans les directions  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , à ne pas confondre ici avec un gradient de vitesse.

Pour obtenir la contribution de cet opérateur de distorsion sur chacune des composantes des équations des rayons en coordonnées cylindriques, il convient d'exprimer les dérivées partielles  $(\partial U_x/\partial x)$ ,  $(\partial U_y/\partial x)$ , etc..., et les composantes du vecteur d'onde  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  en leurs équivalents cylindriques  $(\partial U/\partial r)$ ,  $\partial U/\partial z$ ,  $k_r$ ,  $k_\theta$  et  $k_z$ , puis de projeter l'expression obtenue sur  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_z$ . En ce qui concerne les expressions des dérivées partielles, on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial x} &= -\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \sin(\theta) \cos(\theta) + U_\theta \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} &= +\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \cos(\theta)^2 + U_\theta \frac{\sin(\theta)^2}{r} \\ \frac{\partial U_x}{\partial y} &= -\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \sin(\theta)^2 - U_\theta \frac{\cos(\theta)^2}{r} \\ \frac{\partial U_y}{\partial y} &= +\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \sin(\theta) \cos(\theta) - U_\theta \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} &= -\sin(\theta) \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y}{\partial z} &= \cos(\theta) \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.7)$$

En utilisant ces relations dans l'expression (3.6), et en projetant sur les différentes composantes du référentiel cylindrique, on aboutit à une expression relativement simple de l'opérateur distorsion dans le nouveau repère, sous la forme :

$$\mathbf{distorsion} = \left(-k_\theta \frac{\partial U}{\partial r}\right) \mathbf{e}_r + \left(k_r \frac{U}{r}\right) \mathbf{e}_\theta + \left(-k_\theta \frac{\partial U}{\partial z}\right) \mathbf{e}_z \quad (3.8)$$

Compte-tenu des formules (3.5) et (3.8), et de l'expression en cylindrique de l'opérateur de gradient associé aux variations spatiales de  $N$ , on aboutit alors à une nouvelle écriture des équations de réfraction dans un référentiel cylindrique sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dk_r}{dt} &= +k_\theta \frac{v_{g\theta} + U}{r} - \frac{N}{\omega_0} \left( \frac{\omega_0^2 - f^2}{N^2 - f^2} \right) \frac{\partial N}{\partial r} - k_\theta \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{dk_\theta}{dt} &= -k_r \frac{v_{g\theta}}{r} \\ \frac{dk_z}{dt} &= -\frac{N}{\omega_0} \left( \frac{\omega_0^2 - f^2}{N^2 - f^2} \right) \frac{\partial N}{\partial z} - k_\theta \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2.2 propriétés générales

En l'absence d'écoulement de base ( $U = 0$ ), les équations de réfraction se réduisent à deux équations portant sur les composantes radiales et azimutales du vecteur d'onde, sous la forme  $dk_r/dt = k_\theta(v_{g\theta}/r)$  et  $dk_\theta/dt = -k_r(v_{g\theta}/r)$ , qui correspondent à un échange entre ces deux composantes du vecteur d'onde assurant la conservation de la norme horizontale. Il s'agit d'un effet purement géométrique de passage en coordonnées cylindriques. En effet, la propagation d'une onde plane monochromatique dans un repère cartésien est rectiligne, et se traduit donc par la conservation des composantes du vecteur d'onde. En revanche, dans un repère cylindrique, cette propagation demeure rectiligne et s'accompagne d'un échange entre les composantes azimutales et radiales de manière à assurer la conservation des composantes cartésiennes.

En présence d'un écoulement de base azimutal ( $U \neq 0$ ), la situation se complique singulièrement. En multipliant la première équation du système (3.9) par  $k_r$  et la seconde équation par  $k_\theta$ , on obtient une équation d'évolution de la composante horizontale,  $k_h$ , sous la forme :

$$\frac{dk_h^2}{dt} = \frac{k_r k_\theta}{2} \left( \frac{U}{r} - \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (3.10)$$

On constate donc bien que lorsque  $U = 0$ , cette composante horizontale est conservée, mais également lorsque  $U/r - \partial U/\partial r = 0$ , ce qui correspond alors à une rotation de la composante horizontale du vecteur d'onde, sans changement de norme.

Contrairement au cas des écoulements uni-directionnels en coordonnées cartésiennes, aucune composante du vecteur d'onde n'est conservée dans le cas général. Par contre, les expressions des composantes horizontales de la vitesse de groupe dans (2.20) permettent de montrer que  $v_{gr}k_\theta = v_{g\theta}k_r$ . En appliquant cette équivalence à la seconde équation du système (3.9), on montre que  $(dk_\theta/dt)/k_\theta = -v_{gr}/r$ . Or,  $v_{gr} = dr/dt$  pour un rayon, et donc,  $d \ln(rk_\theta)/dt = 0$ . La conservation de  $k_\theta$  dans le cas cartésien uni-directionnel se transforme donc en conservation de  $rk_\theta$  dans le cas d'un écoulement de base axisymétrique. Pour un champ d'ondes incidentes en forme d'onde plane monochromatique, chaque rayon possède ses propres conditions initiales  $r_o$  et  $k_{\theta o}$ , et sera réfléchi ou piégé sur des couches différentes. La relation de conservation de la pulsation absolue s'écrit en effet :

$$\omega_{abs} = \omega_o + k_\theta U. \quad (3.11)$$

Ici, la composante  $k_\theta$  n'est plus conservée et son évolution dépend donc des conditions initiales, ou de façon équivalente, du rayon considéré. Par conséquent, la pulsation intrinsèque n'est plus une fonction de l'espace uniquement, comme c'était le cas pour les écoulements cartésiens avec des rayons incidents parallèles.

Cette dépendance de la pulsation intrinsèque vis-à-vis du rayon considéré a deux conséquences majeures. Tout d'abord, il devient impossible de déterminer avec précision les zones de propagation possible des ondes, puisque les couches de réflexion et les couches critiques dépendent à la fois de l'espace et du rayon considéré. Ensuite, en supposant l'existence de couches de piégeage au sein du vortex, les rayons composant un tube de rayons se retrouveront piégés dans des couches a priori différentes. Or, l'amplification infinie de l'énergie observée dans le cas des écoulements cartésiens est justement liée à l'écrasement complet de la section du tube de rayons, ces derniers convergeant vers une même couche (définissant une surface dans un cas tridimensionnel). On s'attend donc à ce que le piégeage dans le champ du vortex conduise à une amplification finie de l'énergie pour un tube de rayons initialement parallèles.

### 3.2.3 Effets quantitatifs de la courbure

Pour comparer la propagation d'ondes dans un écoulement type vortex à ceux déjà étudiés dans le cas cartésien, il nous a semblé intéressant de restreindre dans un premier temps la résolution numérique du système d'équations (3.4) et (3.9) à un écoulement simplifié. Puisque des solutions analytiques sont disponibles dans le cas d'écoulements cartésiens caractérisés par des gradients de vitesse constants, nous avons choisi un écoulement de type vortex  $U(r, z)$  particuliers, caractérisé par des gradients radial et vertical également constants. Par ailleurs, nous avons négligé les effets des variations spatiales de  $N$ , en les supposant faibles devant les effets du cisaillement sur l'évolution des composantes du vecteur d'onde.

Dans la première partie du chapitre 5, des résultats relatifs à cette famille d'écoulements seront présentés, basés sur un adimensionnement des équations de rayons (3.4) et de réfraction (3.9). La résolution numérique des équations de la théorie WKB en cylindrique montre que l'on retrouve en général qualitativement une partie du comportement prédit pour les écoulements cartésiens : les rayons sont bien réfléchis lorsque l'interaction est suffisamment forte, avant de se retrouver piégés. La longueur d'onde chute vers 0, ce qui fige l'énergie de l'onde au sein de l'écoulement. Dans les cas particuliers d'écoulements purement cisailés, en radial ou en vertical, la fusion entre la couche critique et une des couches de réflexion conduit alors à un piégeage direct de l'onde, sans réflexion.

L'effet de la courbure sera quantifié au moyen d'un nombre adimensionnel,  $L/R$ , où  $L$  représente la longueur maximale de pénétration de l'onde dans le champ de vitesse cisailé, calculée dans l'hypothèse d'un écoulement sans courbure. En effet, puisque  $N$  représente une borne supérieure au domaine de propagation des ondes (entre  $f$  et  $N$  en réalité), l'effet Doppler (2.23) aboutit à une réflexion et un piégeage de l'onde lorsqu'elle pénètre dans le champ de vitesse, sur une longueur radiale inférieure à  $L = N/(k_{\theta_0} U_L)$ .  $U_L$  est la valeur du cisaillement horizontal servant à dimensionner le temps dans la version adimensionnelle des équations WKB présentées dans le chapitre 5 ;  $k_{\theta_0}$  est la valeur de la composante azimutale du vecteur d'onde, parallèle à l'écoulement, au moment où elle pénètre dans le champ de vitesse. Le nombre  $L/R$  représente donc la comparaison entre cette longueur de pénétration et le rayon du champ de vitesse à l'endroit où l'onde commence à interagir, et permet de quantifier l'effet de la courbure. En effet, dans la limite où  $L/R \rightarrow 0$ , l'onde interagit rapidement sur une longueur faible devant le rayon de courbure de l'écoulement, et ne ressent pas les effets de la courbure. Cela est encore plus flagrant dans la version adimensionnée des équations de la théorie WKB présentées dans le cha-

pitre 5 :  $L/R$  apparaît comme un paramètre du système d'équations, permettant de retrouver la même forme que pour un écoulement unidirectionnel en coordonnées cartésiennes dans la limite  $L/R = 0$ . Pour des valeurs croissantes de ce paramètre  $L/R$ , les effets de la courbure sont de plus en plus importants. Tout d'abord, on constate un décalage entre le cas cartésien et le cas cylindrique en ce qui concerne le temps nécessaire pour aboutir à la première réflexion (vortex barocline). Cela résulte de la conservation de  $r k_\theta$ , qui implique une augmentation de la valeur absolue de  $k_\theta$  lorsque l'onde se propage vers le vortex. La réflexion tend donc à se produire plus tôt que dans le cas équivalent cartésien. De plus, l'étude des sections des tubes de rayons montre que l'aire tend vers une valeur finie aux temps infinis lors du piégeage. La valeur de cette limite finie croît avec l'effet de la courbure  $L/R$ . Cela vient confirmer le piégeage des rayons composant le tube au niveau de couches critiques différentes, ce qui aboutit à une amplification finie de l'énergie de l'onde.

Dans les expériences présentées dans les chapitres 5, 6 et 7, l'amortissement visqueux des ondes joue également un rôle important, particulièrement dans les expériences avec des vortex baroclines. Dans les expériences décrites par Booker & Bretherton (1967) pour un écoulement cisailé dans la direction verticale, l'effet de la viscosité est quantifié par un nombre de Reynolds  $Re_{wave} = U_z/\nu k^2$ . L'amplification de l'énergie de l'onde lors du piégeage près de la couche critique atteint une valeur maximale inversement proportionnelle à  $1/Re_{wave}$ . Dans le cas d'un écoulement de type vortex, on peut définir un nombre de Reynolds à partir des valeurs caractéristiques du cisaillement dans le vortex,  $Re_{wave} = \sqrt{U_z^2 + U_r^2}/\nu k^2$ , et l'amplification de l'énergie des ondes piégées dépend à la fois de  $L/R$  et de  $Re_{wave}$ . On montrera dans le chapitre 5 que les effets combinés de  $Re_{wave}$  et  $L/R$  peuvent limiter l'amplification de l'énergie de l'onde lors de son piégeage. Cette limitation par la courbure et la viscosité peuvent empêcher le déclenchement d'instabilités et restreindre les transferts non-linéaires vers un écoulement moyen.

### 3.2.4 Résolutions numériques dans des écoulements plus réalistes

Des simulations numériques de la propagation des ondes ont été réalisées par résolution des équations de la théorie WKB en coordonnées cylindriques (3.4) et (3.9), de manière à reproduire les expériences. Les résultats seront comparés aux expériences et discutés dans le chapitre 5. Nous nous contentons ici de décrire la méthode de simulation utilisée.

On choisit la position initiale des rayons de manière à représenter le champ d'onde généré par un cylindre oscillant : l'origine des rayons coïncide avec les positions extrêmes du cylindre, et leur direction de propagation initiale est perpendiculaire à l'axe du cylindre, l'angle avec la verticale étant déterminé par la relation de dispersion (2.19). L'évolution de l'énergie le long de chaque rayon est obtenue en traçant un tube initialement circulaire positionné autour du rayon, composé généralement de 8 à 32 rayons. La section perpendiculaire au rayon central de ce tube est calculée numériquement, ainsi que son aire, et l'évolution de l'énergie est déduite de la conservation du flux d'action de l'onde dans le cas non-visqueux. Dans le cas visqueux, l'amortissement du flux d'action de l'onde est calculé pas à pas le long du tube, grâce à l'équation tenant compte de la viscosité proposée par Booker & Bretherton (1967).

La résolution des équations de la théorie WKB est obtenue par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. La précision est vérifiée par rapport à la loi de conservation de la pulsation absolue que doivent vérifier les équations. Le champ de base  $U$  utilisé lors des simulations est soit un champ de vitesse issu des modèles numériques permettant de reproduire les vortex expérimentaux, soit une expression analytique assez simple permettant de reproduire suffisamment bien les observations et les modèles numériques. Le choix d'une description analytique du champ du vortex réduit considérablement le temps de calcul. Concernant la forme du champ de densité dans les

expériences, peu d'informations était disponibles, mais des mesures avec une sonde à conductivité ont montré que la valeur de la fréquence de flottaison  $N$  variait faiblement. Nous avons donc négligé les termes associés aux variations spatiales de  $N$  dans les équations de réfraction (3.9).

### 3.3 Approche en modes azimutaux pour un vortex barotrope

Plutôt que de considérer des ondes planes monochromatiques à l'extérieur du champ du vortex, entrant en interaction avec lui lors de leur propagation, il est également possible d'aborder ce problème en considérant des perturbations du champ de base du vortex sous la forme de modes azimutaux. Pour des vortex barotropes sans variations verticales de la vitesse azimutale  $U$ , on peut considérer des modes de nombre d'onde vertical  $k$ . Dans le cas d'une perturbation monochromatique à la pulsation  $\omega$ , les modes sont alors décrits mathématiquement par la formule :

$$f(\mathbf{r}) = \tilde{f}(r) \exp^{i(kz+m\theta-\omega t)} \quad (3.12)$$

où  $f$  représente une des cinq composante du champ de la perturbation (vitesse, pression et densité), et  $\tilde{f}(r)$  décrit la structure radiale du mode considéré, et  $m$  donne l'ordre azimutal.

Cette expression mathématique permet à la fois de décrire des processus de propagation, associés à des valeurs réelles de  $\omega$ , et des instabilités, caractérisées par une partie imaginaire non nulle de  $\omega$ . Les équations donnant la dépendance spatiale  $r$  de la perturbation sont obtenues par linéarisation des équations primitives autour de l'état de base. Cette méthode est donc similaire à celle adoptée pour obtenir les équations linéaires de propagation des ondes internes.

Nous commencerons par rappeler les résultats obtenus par Miyazaki & Fukumoto (1990) dans son étude sur les modes axisymétriques ( $m=0$ ) pour un vortex dans un fluide stratifié non tournant. Nous étendrons ensuite ces résultats au cas d'un fluide en rotation pour des modes azimutaux d'ordre plus élevés, en cherchant à montrer la cohérence de cette approche vis-à-vis de la théorie WKB.

#### 3.3.1 modes axisymétriques en stratifié ( $m = 0, f = 0$ )

Miyazaki & Fukumoto (1990) utilisent le fait que  $m = 0$  pour décrire le champ de perturbation sous la forme d'un potentiel  $\Psi(r, z, t)$  dont l'expression modale s'écrit :

$$\Psi(r, z, t) = \psi(r) \exp^{i(kz-\omega t)}$$

La partie radiale des composantes radiale et verticale du champ de vitesse  $u$  et  $w$  sont alors reliées à la fonction  $\psi$  par les relations  $\tilde{u}(r) = ik\psi(r)$  et  $\tilde{w}(r) = -(1/r)d(r\psi)/dr$ . Le problème linéaire se réduit à la résolution d'une équation linéaire sur  $\psi(r)$ , qui s'écrit :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + k^2 \frac{\omega^2 - \Phi(r)}{N^2 - \omega^2} \right) \psi = 0 \quad (3.13)$$

où  $N$  est la fréquence de Brunt-Vassaila et  $\Phi(r)$  la fonction de Rayleigh définie par :

$$\Phi(r) = 2 \frac{U}{r} \left( \frac{U}{r} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (3.14)$$

Cette fonction de Rayleigh joue un rôle extrêmement important dans le contexte de l'instabilité inertielle (voir Kloosterziel & van Heijst (1991)). En effet, si cette fonction prend des valeurs négatives dans l'écoulement de base, celui-ci devient potentiellement instable, sous la forme de

rouleaux de convection cotra-rotatifs qui s'enroulent autour de l'écoulement et sont donc décrits par des modes azimutaux  $m = 0$ . Potentiellement instable signifie ici que des valeurs négatives de la fonction de Rayleigh sont nécessaires pour pouvoir obtenir une partie imaginaire non nulle de  $\omega$ , mais que cela ne garantit pas l'existence d'une fonction  $\psi(r)$  vérifiant à la fois l'équation linéaire (3.13) et les conditions limites du problème. De manière à restreindre leur étude à des écoulements stables, Miyazaki & Fukumoto (1990) considèrent un vortex de Lamb, pour lequel  $\Phi(r)$  est toujours positif, et dont le champ de vitesse s'écrit :

$$U(r) = U_{max} \frac{R}{r} \left(1 - \exp^{-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right)$$

où  $U_{max}$  détermine la valeur maximale de la vitesse et  $R$ , le rayon du vortex.

Lorsque la valeur maximale  $\Phi(r)$  dans le vortex,  $\Phi_{max}$ , est inférieure à  $N^2$ , seules des ondes de pulsation  $\omega$  inférieures à  $N$  peuvent exister, caractérisées par une décroissance en  $r^{-1/2}$  de leur fonction radiale, représentant donc des ondes de gravité se propageant dans la totalité du domaine, et filtrées par le champ du vortex. Lorsque  $\Phi_{max}$  dépasse  $N^2$ , il existe en plus des ondes de pulsation  $\omega \in [\sqrt{\Phi_{max}}, N]$ , qui sont incapables de se propager en-dehors du vortex et restent piégées dans le champ de vitesse. Il s'agit de modes d'oscillation du vortex.

Ces résultats, obtenus pour un vortex barotrope et pour  $m = 0$ , sont difficilement applicables aux écoulements expérimentaux étudiés dans les chapitre suivants. Cependant, l'approche modale donne une vision complémentaire de l'approche basée sur la théorie WKB et se révélera plus utile pour interpréter certaines observations. Nous avons donc cherché à étendre qualitativement les résultats présentés par Miyazaki & Fukumoto (1990) à des écoulements en rotation et à des modes azimutaux d'ordre plus élevés.

### 3.3.2 effets de la rotation ( $m = 0$ , $f \neq 0$ )

Quand on inclut les effets d'une rotation de fond  $\Omega$  dans l'équation linéarisée (3.13), en procédant au changement de vitesse  $U(r) \rightarrow U(r) + \Omega r$ , la fonction de Rayleigh prend alors la forme :

$$\Phi(r) = \left(f + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r}\right) \left(f + \frac{2U}{r}\right) \quad (3.15)$$

où  $f = 2\Omega$  est le paramètre de Coriolis, et où on voit apparaître la vorticité absolue.

Encore une fois, des valeurs négatives de la fonction de Rayleigh  $\Phi(r)$  sont nécessaires pour obtenir une instabilité inertielle du vortex. On voit ici le rôle stabilisant de la rotation sur cette classe d'instabilité, du moins pour des vortex géostrophiques, pour lesquels les termes associés au champ de vitesse  $U(r)$  sont insuffisants pour obtenir des valeurs de  $\Phi$  négatives.

Par ailleurs, si on se restreint aux modes propagatifs de longueur d'onde très courtes, il est possible de décrire localement la variation de la phase par un vecteur d'onde radial  $k_r$  et de supposer une variation rapide de cette phase par rapport à l'amplitude. On retrouve alors la même approche que dans le cadre de la théorie WKB, et les termes les plus élevés de l'équation linéaire (3.13) donnent une relation de dispersion de la forme :

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \Phi}{N^2 - \omega^2} k^2 \quad (3.16)$$

Dans la limite des écoulements géostrophiques, la fonction de rayleigh  $\Phi$  co cide avec  $f^2$ , et on retrouve une relation de dispersion en tout point similaire à celle prédite par la théorie WKB pour des rayons se propageant droit vers le centre du vortex : ces rayons ont une composante initiale nulle de  $k_\theta$ , qui implique une vitesse de groupe azimutale  $v_{g\theta}$  elle aussi nulle. Dans ce cas, les

équations de réfraction (3.9) montrent que la composante azimutale du vecteur d'onde demeure nulle le long des rayons. L'absence d'effet Doppler implique alors que pulsation intrinsèque et la pulsation absolue sont égales en tout point du rayon,  $\omega_{abs} = \omega = \omega_o$ . La relation de dispersion (2.19) s'écrit alors comme (3.16)

Tous ces aspects montrent donc la cohérence entre la théorie WKB et la description en modes axisymétriques dans la limite des courtes longueurs d'onde, sauf en ce qui concerne la relation de dispersion, si on prend en compte les effets du champ de vitesse dans la fonction de Rayleigh. La relation de dispersion (3.16) laisse alors penser que l'onde ressent localement les effets du champ de vitesse, pas seulement sous la forme d'un transport advectif de l'énergie et d'une déformation du vecteur d'onde comme c'est le cas dans la théorie WKB, mais également au niveau de sa structure elle-même, autrement dit sa polarisation. Cela vient des hypothèses de validité de la théorie WKB, qui repose sur des écoulements à faibles nombres de Rossby et de Froude pour lesquels  $\Phi$  et  $f^2$  sont égales. D'un point de vue physique, la description en modes azimutaux semble plus réaliste : considérons un coeur cyclonique de vortex en rotation rigide ( $U(r) = \Omega' r$ ), où une onde courte se propage. Sa propagation est la même que dans un milieu tournant à la rotation  $\Omega + \Omega'$ . On s'attend donc à ce qu'elle vérifie la relation de dispersion (2.19) avec  $f = 2(\Omega + \Omega')$ . C'est bien ce que prédit l'approche en modes azimutaux, mais pas la théorie WKB, sauf lorsque  $\Omega \gg \Omega'$ , ce qui correspond à la limite des petits nombres de Rossby.

### 3.3.3 modes plus élevés ( $m > 0$ , $f \neq 0$ )

En reprenant la démarche de Miyazaki & Fukumoto (1990) et en l'appliquant à des modes pour  $m > 0$ , le système linéaire de cinq équations à cinq inconnues obtenu par linéarisation des équations primitives autour de l'état de base peut être ramené à une unique équation linéaire. Nous donnons ici, pour des raisons de clarté, un système de deux équations linéaires relatif aux composantes radiale et verticale de la vitesse, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{dr} &= - \left[ 1 + \frac{m}{\omega_o} \left( f + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) \right] \frac{\tilde{u}}{r} - i \left[ \frac{\omega_o^2 - N^2 m^2}{k \omega_o^2 f^2} + k \right] \tilde{w} \\ \frac{d\tilde{w}}{dr} &= i \frac{k(\omega_o^2 - \Phi(r))}{\omega_o^2 - N^2} \tilde{u} + \frac{m}{\omega_o} \left[ \frac{\omega_o^2 + N^2}{\omega_o^2 - N^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{U}{r} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{2U}{r} + f \right) \right] \tilde{w} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$\Phi$  est la fonction de Rayleigh définie de la même façon que dans l'expression (3.15), et  $\omega_o$  est une pulsation 'intrinsèque' définie par la relation

$$\omega_o = \omega - m \frac{U}{r} \quad (3.18)$$

qui correspond tout à fait à son homologue de la théorie WKB, le terme doppler  $U k_\theta$  étant remplacé au moyen d'une composante azimutale du vecteur d'onde  $k_\theta = m/r$ .

Compte-tenu de la complexité du système d'équations linéaire, une résolution numérique basée sur l'approche adoptée par Miyazaki & Fukumoto (1990) pourrait être adoptée. Sans rentrer dans les détails d'une telle résolution, un certain nombre de commentaires restent possibles en considérant la limite des très petites longueurs d'onde, comme cela a été fait dans le cas des modes axisymétriques  $m = 0$ . En décrivant donc la phase au moyen d'un vecteur d'onde radial  $k_r$  et en supposant des valeurs de  $k$  et  $k_r$  élevées, les termes prépondérants dans le système d'équations (3.17) permettent d'aboutir à la relation de dispersion suivante :

$$k_r^2 = \frac{\omega_o^2 - \Phi(r)}{N^2 - \omega_o^2} k^2. \quad (3.19)$$

On constate encore une fois que contrairement aux prédictions de la théorie WKB, l'onde ressent une sorte de paramètre de coriolis local  $\sqrt{\Phi}$  basé sur la rotation et sur les caractéristiques locales du champ de vitesse du vortex  $U(r)$ .

Si on considère maintenant que la composante azimuthale du vecteur d'onde peut s'écrire  $k_\theta = m/r$ , on peut encore une fois se placer dans la limite des petites longueurs d'onde, les termes prépondérants étant associés aux composantes  $k_\theta$ ,  $k_r$  et  $k$  du vecteur d'onde. Cela revient donc à travailler autour d'une position radiale  $r$  fixée et à ne considérer que les variations de la phase, en les supposant plus rapides que celles de l'amplitude. On notera d'ailleurs qu'il faut alors prendre des valeurs très élevées de  $m$ . Dans ce cas, les termes prépondérants dans le système (3.17) conduisent à une relation de dispersion de la forme :

$$k_r^2 + k_\theta^2 \left[ 1 + \frac{N^2 + \omega_o^2}{N^2 - \omega_o^2} \frac{\left(f + \frac{U}{r} + \frac{\partial U}{\partial r}\right) \left(\frac{U}{r} - \frac{\partial U}{\partial r}\right)}{\omega_o^2} \right] = \frac{\omega_o^2 - \Phi(r)}{N^2 - \omega_o^2} k^2. \quad (3.20)$$

Le champ de vitesse du vortex affecte la relation de dispersion à travers la fonction de Rayleigh  $\Phi$ , mais aussi à travers le terme multiplicatif devant  $k_\theta^2$ . Par contre, pour un vortex à très faible nombre de Rossby  $Ro$ , on peut garder seulement les termes prépondérants de la relation (3.20). Le terme multiplicatif devant  $k_\theta^2$  redevient égal à 1 et  $\Phi \rightarrow f^2$ . On retrouve alors la relation de dispersion (2.19) prédite par la théorie WKB.

### 3.3.4 couches de réflexion et couches critiques pour les modes azimuthaux

On retrouve une certaine cohérence entre la description en modes azimuthaux et la théorie WKB dans la limite des écoulements à faible nombre de Rossby et des petites longueur d'onde, puisque les relations de dispersion deviennent alors identiques. Cependant, l'approche modale donne des informations complémentaires sur l'effet du champ de vitesse sur la structure locale de l'onde pour des valeurs de  $Ro$  finies. Elle permet également de s'interroger sur la possibilité de phénomènes propagatifs à partir de l'étude de la relation de dispersion (3.20).

En travaillant à pulsation absolue fixée  $\omega$  et pour une famille de modes particuliers, caractérisée par la valeur de  $m$ , la pulsation intrinsèque  $\omega_o = \omega - mV(r)/r$  et la composante azimuthale  $k_\theta = m/r$  du vecteur d'onde deviennent des fonctions de l'espace. En fonction de la valeur du vecteur d'onde vertical  $k$ , la relation de dispersion (3.20) autorise alors des valeurs négatives ou positives de  $k_r^2$ . On peut supposer que des valeurs positives de  $k_r^2$  marquent des zones où la propagation des ondes devient possible, tandis que les régions négatives en  $k_r^2$  caractérisent des zones sans propagation. Ainsi, pour  $|\omega_o| \in [\sqrt{\Phi}, N]$ , il est toujours possible de choisir des valeurs suffisamment grandes de  $k$  dans la relation (3.20) pour aboutir à des valeurs de  $k_r^2$  positives, associées à un processus de propagation. Pour  $|\omega_o| \notin [\sqrt{\Phi}, N]$ , la situation est rendue complexe par la présence d'un facteur devant  $k_\theta^2$ . Si ce facteur reste positif, seules des valeurs négatives sont disponibles pour  $k_r^2$ , et la région considérée ne semble pas pouvoir supporter des phénomènes propagatifs. Par contre, si ce facteur devient négatif, on peut encore trouver des valeurs de  $k$  suffisamment petites pour que  $k_r^2$  soit positif, et des processus ondulatoires restent donc apparemment possibles.

Une attention particulière doit donc être portée aux couches où la pulsation intrinsèque  $\omega_o$  tend vers  $\sqrt{\Phi}$  ou bien vers  $N$ . Ces couches délimitent les régions de propagation dans le vortex :

- Dans le cas où la pulsation intrinsèque  $\omega_o$  tend vers  $\sqrt{\Phi}$ , les équations linéarisées (3.17) et la relation de dispersion (3.20) restent continues. Par similarité avec des ondes se propageant dans le même sens qu'un écoulement cisailé horizontalement en cartésien, on peut donc s'attendre à un processus de réflexion. Pour des modes azimuthaux de pulsation absolue



$|\omega| \in [f, N]$  générés en dehors du vortex, la pulsation intrinsèque  $\omega_o$  décroît lorsqu'ils pénètrent dans le vortex si et seulement si  $mU/r$  est positif, ce qui correspond bien à des modes tournants dans le même sens que l'écoulement. La propagation se poursuit jusqu'à une couche définie par  $\omega_o(r) = \sqrt{\Phi(r)}$ , où les modes se réfléchissent.

- Dans le cas où la pulsation intrinsèque  $\omega_o$  tend vers  $N$ , les équations linéarisées (3.17) et la relation de dispersion (3.20) présentent une singularité. Par similarité avec des ondes se propageant face à un écoulement cisailé horizontalement en cartésien, il s'agit sans doute là d'une couche critique. Elle ne peut être rencontrée que par des modes azimutaux rétrogrades, tournant dans le sens contraire à l'écoulement. Ceux-ci sont alors piégés près d'une couche définie par  $\omega_o(r) = N$ .

### 3.3.5 modes d'oscillation du vortex et pseudo-modes

Jusqu'ici, nous avons considérés des vortex pour lesquels les valeurs de la fonction de Rayleigh restaient positives et inférieures à  $N^2$ . Dans le cas des modes axisymétriques  $m = 0$ , Miyazaki & Fukumoto (1990) a démontré l'existence de modes piégés lorsque la valeur maximale de  $\Phi$  devient supérieure à  $N^2$ . Si on étend maintenant son approche aux cas des vortex en milieu tournant et pour  $m > 0$ , on trouve des résultats similaires.

Les modes libres sont associés à des valeurs de la pulsation absolue  $\omega$  telles que  $|\omega_{abs}| \in [f, N]$ . Ils correspondent à des perturbations capables de se propager en-dehors du champ du vortex, comme leur nom l'indique. Ils peuvent permettre de décrire l'interaction d'ondes internes se propageant initialement en-dehors du champ du vortex et entrant en interaction avec lui. En fonction du signe de  $mU/r$ , on s'attend donc à une réflexion de l'onde incidente, là où la pulsation intrinsèque tend vers  $\sqrt{\Phi}$ , ou bien un piégeage au voisinage d'une couche critique définie par  $\omega_o = N$ .

Lorsque  $|\omega| \notin [f, N]$ , la propagation de la perturbation loin du vortex devient impossible. Cependant, il peut exister des régions dans le vortex où la valeur de la pulsation intrinsèque  $\omega_o = \omega - mV/r$  pénètre dans l'intervalle  $[\sqrt{\Phi}, N]$ , ou bien  $[N, \sqrt{\Phi}]$  si  $\sqrt{\Phi} > N$ . Cela permet localement la propagation de cette perturbation. On retrouve alors la notion de modes piégés présentée par Miyazaki & Fukumoto (1990) dans le cas  $m = 0$ , qui nécessite la présence de valeurs de  $\Phi$  supérieures à  $N$ . Pour les valeurs de  $m$  supérieures à 1, l'effet Doppler permet l'existence de tels modes, même lorsque la fonction  $\Phi$  reste inférieure à  $N$ . Ces modes piégés correspondent alors à des modes d'oscillation du vortex, similaires aux modes de Kelvin qui s'appliquent aux filaments de vorticité (voir Saffman (1992)). Pour les modes cogrades caractérisés par des valeurs de  $mV/r$  positives, la région propagative de ces modes au sein du vortex est délimitée par une couche où la pulsation intrinsèque  $\omega_o = \omega - mU/r$  chute à la valeur locale de  $\sqrt{\Phi}$ , ce qui correspond à une couche de réflexion. Pour les modes rétrogrades caractérisés par des valeurs de  $mV/r$  positives, au contraire, la région est délimitée par une couche où la pulsation intrinsèque  $\omega_o = \omega - mV/r$  augmente jusqu'à la valeur locale de  $N$ , et présente donc des caractéristiques de couche critique. Dans le cas encore plus général où la fonction  $\Phi$  peut prendre des valeurs supérieures à  $N^2$ , la situation devient plus complexe.

L'apparition de couches critiques au sein du vortex barotrope nécessite une approche mathématique plus rigoureuse. Un certain nombre d'auteurs se sont penchés sur la question. Balmorth *et al.* (2001), par exemple, considèrent les perturbations modales bi-dimensionnelles ( $k = 0$ ) d'ordre  $m = 2$ , pour un vortex barotrope sans stratification. Leur article illustre assez bien les méthodes employées pour décrire les modes contenant une couche critique. Ils considèrent en particuliers le mode  $m = 2$ . En général, ces modes avec couche critique ne peuvent pas rester neutres, même en l'absence de viscosité : outre la dépendance temporelle périodique en  $\omega_{abs}$ , ils

subissent une lente décroissance temporelle. Ils portent donc le nom de "pseudo-modes", et la décroissance en temps peut être interprétée comme une absorption au niveau de la couche critique, par similarité avec l'absorption d'un paquet d'onde au voisinage d'une couche critique prédite par Booker & Bretherton (1967) pour un écoulement cisailé verticalement. Ces pseudo-modes sont également parfois considérés comme la limite, aux nombres de Reynolds infinis, de modes d'oscillation du vortex calculés en tenant compte de la viscosité.

### 3.4 Remarques finales sur les deux approches

L'approche par la théorie WKB et la description en modes azimutaux présentent donc un certain nombre de similarités. On remarquera d'ailleurs que la conservation de  $rk_\theta$  le long d'un rai de la théorie WKB en coordonnées cylindriques est cohérent avec une description modale où  $m$  est indépendant de l'espace. Dans la limite des nombres de Froude et de Rossby infiniment petits, on peut même utiliser le tracé d'un rayon de composante azimutale  $k_{\theta_0}$  à partir de la position  $r_o$  pour obtenir la forme du mode  $m = r_o k_{\theta_0}$ .

La théorie WKB appliquée à un écoulement de base type vortex permet de prédire l'évolution d'un paquet d'onde dans le champ du vortex, ou bien la formation progressive du champ d'onde pour une source quasi-monochromatique. Elle présente l'intérêt d'être bien adaptée à la description d'une onde initialement plane, ce qui sera le cas en première approximation dans les expériences, puisque nous utiliserons un cylindre pour générer les ondes. Par ailleurs, les équations sont relativement aisées à résoudre numériquement et fournissent un certain nombre d'informations sur l'évolution des caractéristiques locales de l'onde, particulièrement sa longueur d'onde et son amplitude. Nous montrerons dans le chapitre 5 dans le cas d'un écoulement relativement simple que l'on retrouve la plupart des résultats de la théorie WKB en coordonnées cartésiennes, à savoir l'existence de couches critiques et de réflexion, mais que la position de ces couches n'est plus définie avec précision, et que l'amplification de l'énergie reste finie au voisinage de la couche critique, sous l'effet de la courbure du champ du vortex. Cependant, l'application de cette théorie que nous proposerons repose sur un certain nombre d'hypothèses, en particulier des valeurs faibles du nombre de Rossby  $Ro = U_{max}/fR$  et du nombre de Froude  $Fr = U_{max}/NR$  du vortex, et des variations spatiales de la fréquence de Brunt-Vassaila  $N$  faibles devant les termes associés au champ de vitesse.

L'approche modale, quant à elle, présente l'avantage de reposer sur une linéarisation des équations primitives autour du champ du vortex, et suppose moins d'approximations. En particuliers, on voit apparaître les effets du champ de vitesse du vortex sur la relation de dispersion des ondes pour des valeurs finies de  $Ro$ . On retrouve également les singularités associées à la présence de couches critiques, bien localisées cette fois. Par ailleurs, cette approche permet de mettre en évidence l'existence ou non de modes piégés pour un large éventail de champs de vitesse du vortex. Malheureusement, les équations proposées concernent seulement des vortex barotropes, et les commentaires reposent essentiellement sur une discussion des ondes de courte longueur d'onde. Dans le cas des vortex baroclines et pour des longueurs d'onde quelconques, il est nécessaire de passer par une résolution numérique complexe. Cette approche reste donc difficile à exploiter pour interpréter les expériences présentées dans les chapitres 5 et 6.

Dans la suite, les prédictions de la théorie WKB en coordonnées cylindriques seront largement utilisées, tandis que l'approche modale sera restreinte à l'interprétation de la génération de modes azimutaux, observée dans certaines expériences.



# Vortex généré par un disque tournant

Pour l'étude expérimentale de l'interaction ondes-vortex, différentes configurations ont été explorées. En ce qui concerne la génération des vortex, plusieurs approches ont été adoptées. Dans un premier temps, l'écoulement autour d'un disque en rotation cyclonique, de rayon  $R$ , a été utilisé. Le vortex ainsi généré présente l'avantage d'être barocline, dans le sens où à la fois des cisaillements verticaux et horizontaux sont présents. Des expériences avec des disques de rayon  $R = 6$  et  $R = 12$  cm ont été réalisées. La formation du vortex et ses caractéristiques ont été étudiés en détails, pour différentes valeurs des paramètres expérimentaux. Cette étude a donné lieu à un article en préparation, intitulé "**On the spin-up by a rotating disk in a rotating stratified fluid**", que nous reproduisons de façon légèrement modifiée dans ce chapitre.

## Abstract

In a combined experimental and theoretical approach we investigate the response of a rotating stratified fluid to the local spin up by a small rotating disk of radius  $R$ . In an initial stage, of duration  $\tau_{su} = O(E_k^{-1/2}\Omega^{-1})$ , (with Ekman number,  $E_k = \nu/fH_o^2$ , based upon the vertical extent  $H_o = fR/N$  for a geostrophic flow of horizontal extent  $R$ , and  $\Omega$  the background rotation rate), fluid is ejected by the Ekman boundary layer, mixes and forms an intermediate density intrusion of which the spreading is arrested by background rotation. The flow evolution resembles a concentric source-sink configuration with the sink represented by the Ekman layer above the disk and the source the ejected fluid. Conservation of potential vorticity leads to the formation of a cyclonic vortex embedded in an anti-cyclonic ring. Before the fluid near the disk has completely spun up, at  $\tau_{su}$ , the mixed regions at the disk edge become unstable and the anticyclonic ring breaks up into smaller satellite vortices. The radial and axial viscous diffusion of momentum dominate the further flow evolution : the spin-up fluid takes the shape of an axisymmetric lens and the eventual state is characterized by a balance between viscous dissipation of momentum and the amount of momentum applied by the rotating disk. The initial stage, which can be characterized by an inertial-gravity motion, and the eventual stage, are modeled by the geostrophic balance and viscous diffusion equations, respectively, and both show a very good comparison with the experimental data. In addition, azimuthal instability modes of the fluid ejected by the Ekman boundary layer are discussed.

## 4.1 Introduction

The spin-up of rotating stratified fluids is relevant to the dynamics of many geophysical flows. Some examples are surface wind driven flows, the currents in coastal regions and the spin

up in closed basins and geophysical vortical flows. This paper is most relevant to the latter, the spin-up processes that play a role in the dynamics of ocean and atmospheric vortices; for example, meddies ( McWilliams (1985)), arctic eddies ( Manley & Hunkins (1985)), megaplume hydrothermal emissions ( Baker (1995)) and in the atmosphere the polar vortex. In this context we investigate the response of a rotating stratified fluid to the local spin up by a small rotating disk. The spin-up of stratified fluids has been considered for cylindrical containers, rectangular and conical containers, or for horizontally infinite rotating disks (for a review see Duck & Foster (2001)), but the local spin-up, such as generated by a small disk has not been explored in detail before. Experimental studies on a rotating disk in a rotating and/or stratified fluid have often been used to conjecture a specific flow aspect far related to spin-up.

The closest experimental study to the present investigation is the study by Baker (1971) and Calman (1977) who employed a small rotating disk at mid-depth in a rotating stratified fluid to investigate McIntyre's (1970) double diffusive instability. For Prandtl number larger than 1,  $Pr = \nu/\kappa$  (with  $\nu$  kinematic viscosity and  $\kappa$  buoyancy viscosity) the faster diffusion of momentum from the rotating disk than density leads to a convective instability which appears for Richardson numbers,  $Ri = N^2/(\partial u/\partial z)^2 < Pr/4$ , with  $N$  the buoyancy frequency,  $\partial u/\partial z$  the vertical shear and  $Pr/4 = 175$  for a salty solution. In these studies neither the spin-up of the flow near the disk is mentioned, nor is the ejection of fluid at the disk edge.

Based on thermal wind balance and hydrostatic balance, the vortex that will eventually result from the spin-up process above the disk will take a lenticular shape of aspect ration  $H/R = a f/N$ , with  $H$  half height and  $R$  the radius of the vortex and  $a$  a constant that depends on the Rossby number,  $Ro = \omega_d/f$  where  $\omega_d$  the disk vorticity and  $f$  the Coriolis parameter. In the limit of no stratification, Ekman pumping above and below the disk stretches and squeezes the fluid over the entire depth leading to a Taylor column. Hide & Titman(1967) explored this flow, which is controlled by the Ekman number and the disk's relative rotation speed, to investigate the detachment of vertical shear layers and the development of non axi-symmetric modes. In the limit of no background rotation, the ejected mixed fluid expands unlimited to the outer boundary setting up a meridional circulation over the horizontal width of the tank. Davies *et al.* (1995) used a disk of the tank size that rotated at the bottom of a stratified fluid to investigate the influence of the shear stress and the related importance of secondary circulation in relation to the mixing (see also Spence *et al.* (1992)). They also explored the mixing by a small rotating disk. In the presence of background rotation, the fluid ejected by the Ekman boundary is limited, and in geostrophic flows, expands up till the deformation radius.

When fluid is spin-up by a small rotating disk, the Ekman layer acts as a suction pump, with the disk surface the sink, and the edge its source. Most likely due to the nonlinear dynamics of the flow induced by the ejected fluid at the disk edge by the Ekman boundary, there are no analytical considerations on this particular flow. Kloosterziel (2000) analyses inertia-gravity waves and geostrophic vortices generated by suction or pumping forcing at a an upper rigid surface; the same forcing as one would achieve by means of a rotating disk and the consequent Ekman pumping or suction. Though this study focuses mainly on the radiation of waves, it contains interesting aspects that are relevant to the present study : Kloosterziel (2000) shows that in addition to waves, a vortex flow is eventually generated by this forcing, with a ratio aspect proportional to  $f/N$ . However, his approach is constrained to axi-symmetric inviscid flows, and the further evolution driven by viscous diffusion of momentum is not considered. This latter aspect of the flow evolution was considered analytically by Flierl & Mied (1985) who studied the related problem of the spin-down of a warm core ring in a continuously stratified fluid with viscous friction at the surface including vertical and horizontal diffusion of momentum and buoyancy. Based on their choice of horizontal and vertical mixing parameters, they find

that horizontal diffusion dominates the spin-down while Ekman down-welling acts only in the layer near the surface; vertical diffusion is found ineffective in causing azimuthal circulation. They conclude that the spin-down is a consequence of horizontal diffusion and the resulting meridional circulation. In contrast with their study, vertical and horizontal parameters for the momentum diffusion are equal in the present work, and the diffusive evolution is also driven by the rotating disk which provides momentum to the flow. The meridional circulation associated with this diffusive evolution may be quantitatively different.

We force a linearly stratified fluid by a cyclonic rotating disk at mid depth in a rotating tank. We show that the initial stage of the vortex is similar to a source-sink configuration driven by the circulation through the Ekman layer which forms on the disk surface, and is well predicted by a model based on conservation of potential vorticity. We show that the ejected fluid at the rim of the vortex becomes in general unstable and leads to a strongly non-axisymmetric transient evolution which seems to have an impact on the outer part of the flow. This initial stage is followed by a diffusive evolution that gradually fades out the vorticity distribution generated by stretching. We show that the diffusive evolution is usually overestimated by a purely diffusion model describing vertical and radial spreading of momentum from the rotating disk, since the meridional circulation induced by diffusive processes generally slows down the spreading of momentum. Agreement is found only for very old vortices, for which effects of stretching and compression have been completely faded out by momentum diffusion.

This paper is organised as follows : in section §4.2, we describe experimental methods used to visualise the flow near the disk and measure the velocity. Then, we present in section §4.3 experimental observations of the different stages, and discuss the mechanism responsible for the instability leading the non-axisymmetric stage. In section §4.4, two models are introduced subsequently, to reproduce the initial stage of the spin-up and the diffusive evolution, based respectively upon conservation of potential vorticity, and upon purely diffusion of momentum from the rotating disk. In section §4.5, observations and measurements for the experiments are compared to predictions from the two models, during the initial stage and the long-term evolution of the vortex flow. Non-dimensional numbers are introduced to distinguish diffusive driven experiments from stretching driven ones, and to determine when the diffusive transport of momentum has completely faded out the flow generated in the initial stage. Conclusions and perspectives are drawn in a last section.

## 4.2 Experimental methods

Experiments were carried out in a 1 m square tank of 45 cm depth, mounted on a rotating-table. A side view of the experimental set-up is sketched in figure 4.1. The tank was filled with a linearly salt-stratified fluid rotating with a uniform angular velocity  $\Omega$  about its vertical axis. The Coriolis parameter  $f = 2\Omega$  varied between  $0.13 \text{ rad s}^{-1}$  and  $0.7 \text{ rad s}^{-1}$ , and the buoyancy frequency  $N$  of the water solution, defined as  $N^2 = -(g/\rho_o) \frac{\partial \rho}{\partial z}$ , was taken between  $1.2 \text{ s}^{-1}$  and  $1.6 \text{ s}^{-1}$ . Experimental values of  $N$  were calculated measuring the density at different depths in the tank with a refractometer, or recording vertical density profiles with a conductivity probe. The fluid was spin-up by a horizontal disk of radius  $R$  ( $R = 6 \text{ cm}$  or  $R = 12 \text{ cm}$  and thickness  $3 \text{ mm}$ ) placed at mid height near the rotation axis of the turn-table and mounted on the axis of a motor embedded in a water-proof plastic cylinder. The distance from the tank base to the lower surface of the disk was  $20 \text{ cm}$ . The disk rotated about a vertical axis in cyclonic direction with a vertical vorticity  $\omega_d$  ranging from  $0.13 \text{ rad s}^{-1}$  to  $0.6 \text{ rad s}^{-1}$ . The value of the Rossby number  $Ro = \omega_d/f$  was varied between  $0.3$  and  $3.3$  whereas the horizontal Reynolds number,

$Re = \omega_d R^2 / \nu$ , was between 320 and 3700.

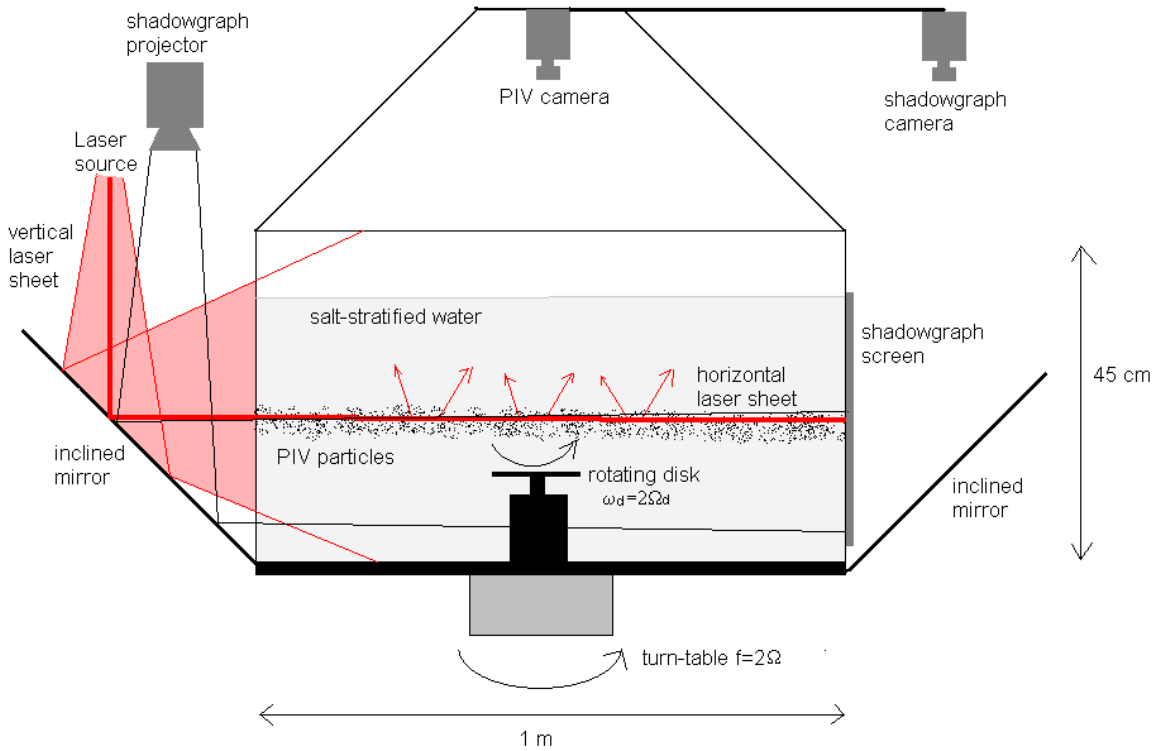


FIG. 4.1 – Sketch of the experimental setup.

To measure the horizontal velocity field in horizontal layers above the disk, the motion of tracer particles of diameter  $20 \mu m$ , seeded in the flow and illuminated from the side by a horizontal laser sheet, was recorded with a B&W CCD camera from the top. This camera was fixed to the rotating table and the images were written to the hard disk of a PC mounted on the rotating table. The horizontal velocity fields were then calculated by means of PIV techniques developed by Fincham *et al.* (see Fincham & Spedding (1997) and Fincham & Delerce (2000)). In addition, the flow near the disk surface and the edge was visualized with fluorescein dye released in the neighborhood of the disk or with thin white powder produced by the precipitation method of Honji *et al.* (1980). The latter method is based on the electrolytic generation of tiny particles by a solder wire used as an electrode, here attached to the edge of the disk. To visualize the vertical motions and the meridional circulation, the fluorescein dye or the solder particles were illuminated by a vertical laser sheet. The dye advection and the instabilities were visualized using a horizontal laser sheet.

Density fluctuations were detected by the shadowgraph method or by the vertical displacements of horizontal layers of fluorescein dye, illuminated with a vertical laser sheet. These horizontal layers were produced before the experiment by a grid of horizontal dyed wires.

## 4.3 Observations

### 4.3.1 Initial spinup

After the onset of the disk rotation, fluid in a thin boundary layer is brought into rotation and ejected centrifugally outwards (see figure 4.2), driving a radial and vertical circulation of fluid in the neighbourhood of the rotating disk. The outward transport near the disk surface is opposed by a vertical pumping of the fluid above the disk, whereas the fluid ejected at the edge of the rotating disk generates a circular density front which spreads out vertically and radially. In a vertical plane, streamlines of this meridional circulation are then forming closed loops with a downward direction in the region above the rotating disk and an upward direction in the region where the density front is generated.

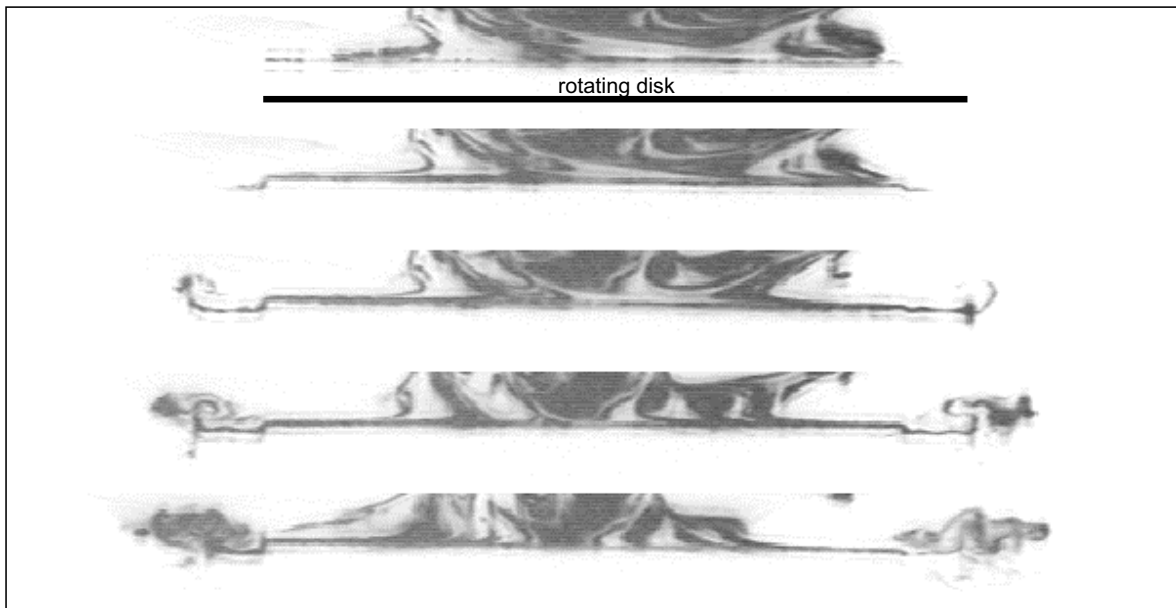


FIG. 4.2 – Side view visualization of the flow near the disk just after the onset of the disk rotation, showing the Ekman transport and the formation of the density front. Fluorescein dye has been introduced above the rotating disk before the onset of the disk rotation, and is illuminated by a vertical laser sheet. Values of the experimental parameters are :  $f = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_d = 1.0 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 12 \text{ cm}$ . Times : 2.4, 7.2, 12.0, 17.0 and 22.0 after the onset of the disk rotation.

The boundary layer is formed after a few disk rotations and exhibits a thickness of a few millimeters, in agreement with previous analytical and numerical studies (see i.e. Greenspan (1968)) which have shown that, even for values of the Rossby number close to unity, the thickness of such boundary layers are the same as that of Ekman layers based on the geostrophic approximation, and given by  $\sqrt{\nu/2f}$ . The density front forms at the edge of the disk and is generated by mixing the ejected fluid with ambient fluid at rest. It was observed from the motion of solder particles introduced at the edge of the disk that the fluid at the front acquired anticyclonic azimuthal velocity whereas the fluid close to the disk was transported by the Ekman layer and acquired cyclonic azimuthal velocity. Therefore, the nose of the density front is moving in the anticyclonic direction, with azimuthal velocity growing and becoming cyclonic when getting closer to the edge of the disk.



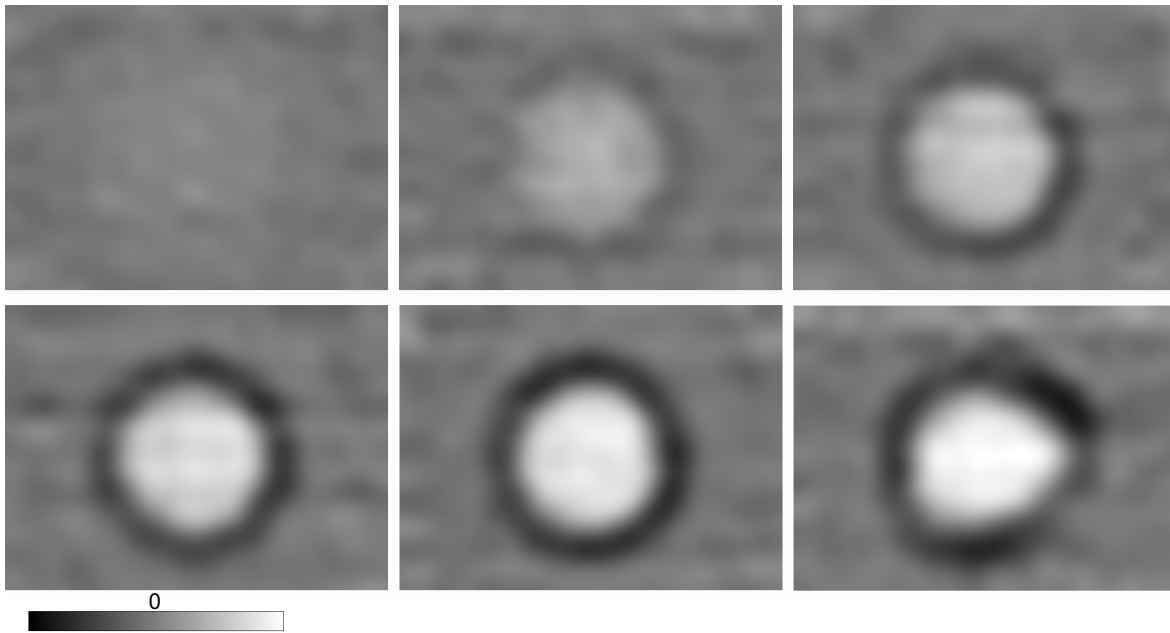


FIG. 4.3 – time-sequence of the vertical vorticity field from PIV measurements in an horizontal plane 2 cm above the disk, just after the onset of the disk rotation, showing the generation of cyclonic vorticity by stretching of background vorticity and the formation of an anticyclonic ring above the growing density front.

In the region above the disk, the Ekman suction stretches the background vorticity, thus generating cyclonic vorticity. Figure 4.3 shows a time sequence of the vertical vorticity field from measurements in a horizontal plane above the rotating disk. An anticyclonic ring is also generated in the region above the density front, associated with the compression of the background vorticity, thus generating anticyclonic vorticity.

In the far field, this initial flow is close to that induced by a time-dependant source-sink configuration : the source is associated with the Ekman suction ; the sink corresponds to the generation of the density front and its spreading. As the vorticity of fluid near the disk surface increases, also the suction speed driven by the Ekman boundary layer decreases proportionally. Therefore, the growth rate of the vortex generated by the Ekman circulation decreases with time.

### 4.3.2 Non-axisymmetric and long-time evolution

Generally, the density front generated by the ejected spun-up fluid is found to be unstable and wave-like irregularities appear. As the instability develops (see figure 4.4), the anticyclonic ring breaks up into satellite vortices which merge and eventually evolve to a pattern with usually two or three anticyclonic satellites.

At this stage, the cyclonic core is teared apart by the strain generated by the anticyclonic vortices, which themselves diffuse laterally. Depending on the strengths of the satellites relative to the vortex core and their diffusive spreading, the vortex breaks up into two dipoles or gradually returns to an axisymmetric state. In the former case, the dipoles propagate away from the disk and the same spin-up sequence repeats, perturbed by the flow of the surrounding dipoles. In the latter case, vertical and azimuthal diffusion of vorticity smooth azimuthal variations, leading to an almost Gaussian vorticity profile at large distances from the disk.

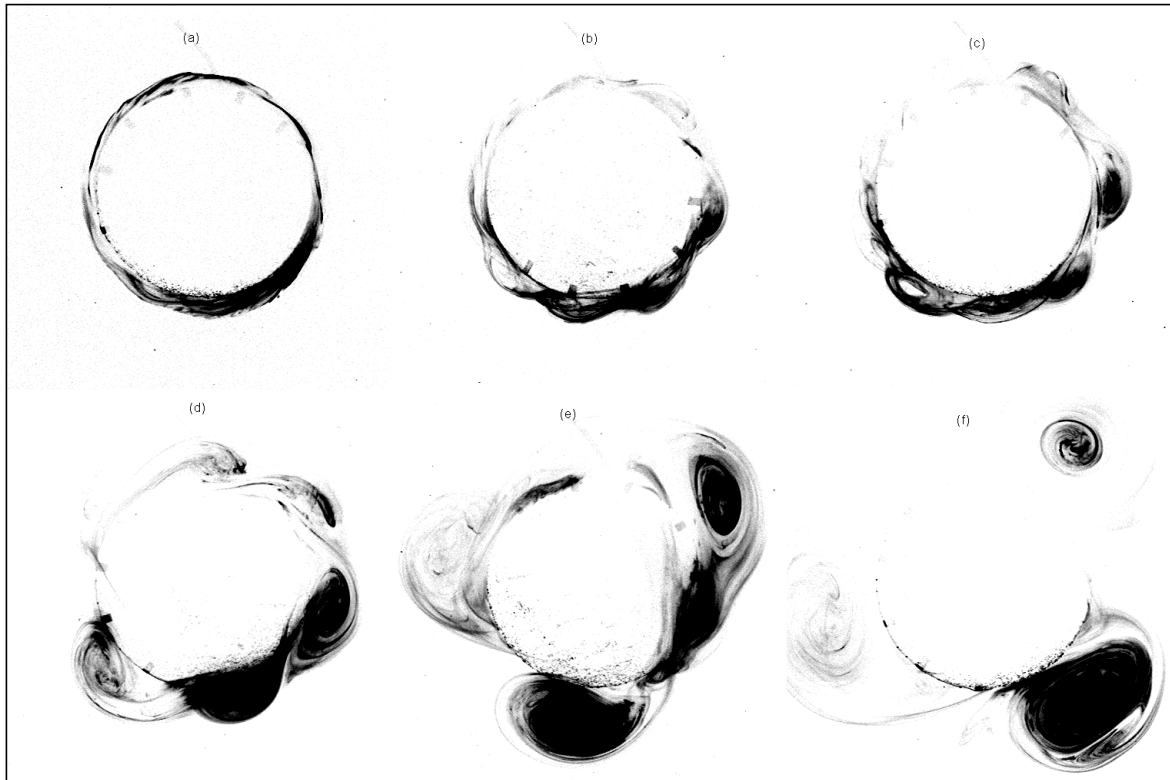


FIG. 4.4 – Top view visualization of the baroclinically unstable density front. The flow is visualised by solder particles, generated at the rim of the disk before the onset of the disk rotation, and illuminated by a horizontal laser sheet located just above the disk. Values of the experimental parameters :  $f = 0.6 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_d = 0.3 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 12 \text{ cm}$ . Times : 28, 47, 66, 112, 164 and 260 s after the onset of the disk rotation.

On very large times and for Richardson number  $Ri = N^2 / (\frac{\partial u}{\partial z})^2$  below 175, double diffusion instabilities occur, as observed formerly by McIntyre (1970). This instability is easily detected by shadowgraph method but has only a weak effect on the diffusion processes, being neglected in the present study.

### 4.3.3 Instability of the density front

In order to determine the nature of this instability, experiments were carried out with the larger disk ( $R = 12 \text{ cm}$ ) for different values of the experimental parameters. The vertical and radial extents  $H_f$  and  $L_f$  of the front were measured from flow visualisations with solder particles or fluorescein dye released close to the edge of the disk (see figure 4.2). The horizontal wave-length of the instability was measured by illuminating the dye or the solder particles with a horizontal laser sheet like in pictures of figure 4.4. During the growth of the density front, the value of the Burger number  $Bu = (NH_f / fL_f)^2$ , based on measurements of the radial and vertical extents  $H_f$  and  $L_f$  of the front, were found to be high, initially, and decreased with time as the front spread out radially. The values of this Burger number when the instability becomes visible are given in table 4.1. For the different experiments, the order of magnitude is the same as the critical value required to give rise to a baroclinic instability. For instance, in the Eady model (see Eady (1949)), the critical value of the Burger number is  $Bu_c = 0.6$  and the most unstable mode

	$\omega_d s^{-1}$	$f s^{-1}$	$N s^{-1}$	$H_f cm$	$L_f cm$	Bu	$\Lambda_{exp} cm$
aa	0.6	0.6	1.8	1.5	4.0	1.3	15.0
ae	0.6	0.6	1.8	1.5	3.2	2.0	15.0
ac	0.3	0.6	1.5	1.0	2.0	1.6	9.0
as	0.3	0.7	1.8	1.0	2.7	0.9	10.0
aw	0.6	0.7	1.8	1.5	1.8	2.1	12.0
ax	0.3	0.5	1.3	1.0	1.8	2.1	15.0
ba	0.2	0.5	1.3	1.0	2.8	0.9	19.0

TAB. 4.1 – Measurements of density front extents and instability wavelength for different experiments with the large rotating disk  $R = 12 cm$ .  $\omega_d$  : disk vorticity,  $f$  : Coriolis parameter,  $N$  : Buoyancy frequency,  $H_f$  : vertical extent of the density front,  $L_f$  : horizontal extent of the density front,  $Bu$  : estimation of the value for the Burger number  $Bu = (NH_f/fL_f)^2$  at the onset of the instability,  $\Lambda_{exp}$  : experimental measurement of the instability wavelength.

has a wave-length  $\lambda_{bc} \approx 4NH_f/f$ . Models with different boundary conditions (see Drazin & Reid (1981)) predict critical values of the Burger number and wave-length of the most unstable mode quite close to the ones obtained in the Eady model. Beside baroclinic instabilities, previous studies on barotropic instabilities (see Hide & Titman(1967)) have indicated that the horizontal shear may become an important source of energy for this class of instabilities, for which the most unstable wavelength is given by  $\lambda_{bt} \approx 2L_f$ . In order to compare the experimental results

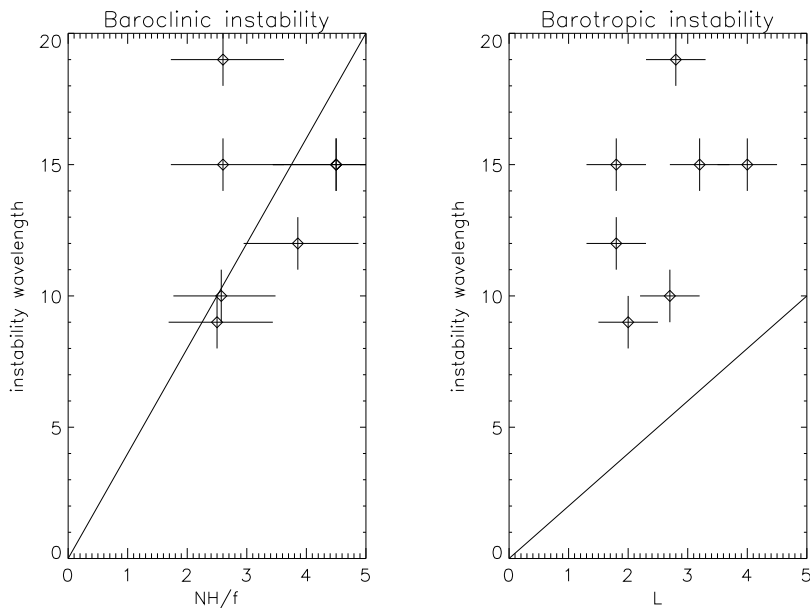


FIG. 4.5 – Comparisons between the observed instability wavelengths  $\lambda$  with predictions from baroclinic (a) and barotropic (b) models (—). The errors bars are determined by errors on the density front horizontal and vertical extents  $H$  and  $L$ .

with the theoretical predictions for the baroclinic and barotropic instabilities, measurements of the instability wave-length have been represented as a function of  $NH_f/f$  in figure 4.5(a), and as a

function of  $L_f$  in figure 4.5(b). The experimental values are in agreement with the predictions for baroclinic instability, whereas the values predicted by barotropic instability are smaller, thus suggesting baroclinic instability as the driving mechanism for the observed patterns.

## 4.4 Axisymmetric models

Following the observations described in the previous section, the flow around the rotating disk can be divided into three regions, as illustrated in figure 4.6. Region **I** corresponds to the Ekman layer of thickness  $\delta = \sqrt{\nu/2f}$  where the fluid is transported radially outwards. Region **II** corresponds to the density front generated by the fluid ejected at the edge of the disk. From here, we will focus on the flow in Region **III**, away from the boundary layer and the density front. The observations showed that the transport of fluid along the Ekman boundary layer leads to

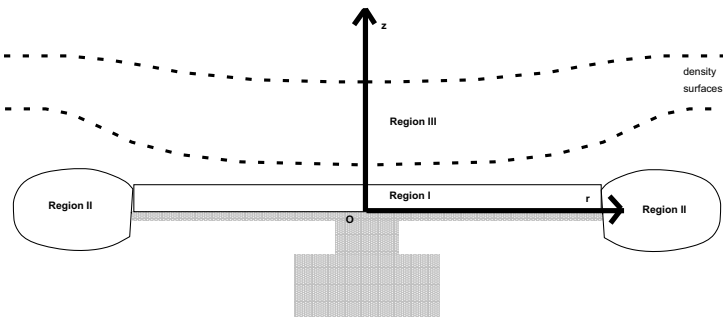


FIG. 4.6 – Scheme of the flow for the stretching model, with region **I** the boundary layer, region **II** the density front generated by ejected fluid of region **I**, and region **III**, where fluid is spin-up by stretching and compression of background vorticity, extending on a limited height  $H$  because of the stratification.

a descent of iso-density surfaces above the disk and generates the density front. Therefore, the flow in Region **III** can be interpreted as a sink located on the disk surface and a source located at the edge of the disk. The strength of this source-sink configuration is given by the Ekman suction velocity at the top of the boundary layer, and is then proportional to the difference of rotation between the base of the flow in region **III** and the rotating disk. In a first approximation, the viscous effects in region **III** can be neglected and a relationship between the displacement of the isodensity surfaces and the vorticity generation can be established using conservation of absolute potential vorticity. This approach will be presented in detail in the next subsection as the stretching model and will provide a typical time scale  $\tau_{su}$  for the local spin-up by vortex stretching as well as a typical vertical lengthscale  $H$  for the vortex generated eventually.

During the entire evolution, the flow in region **III** exhibits vertical and horizontal shear, giving rise to diffusive transport of momentum. This transport is described by a separate model, the diffusive model, based on the assumption that the flow evolution in region **III** is fully driven by momentum diffusion from the rotating disk, thus neglecting the generation of vorticity by stretching of the background vorticity.

In reality, both processes, stretching of background vorticity and diffusion, contribute more or less to the generation of momentum in region **III**, depending on the flow stage. In general, we can separate an initial flow stage during which Ekman suction results in vortex stretching on a vertical scale  $H$  and a time scale  $\tau_{su}$ , and a subsequent stage dominated by the radial and vertical diffusion of momentum with a diffusive time-scale  $\tau_{diff}$ . When  $\tau_{su} < \tau_{diff}$ , the separation in two

successive stages will be well observed in the experimental measurements. For  $\tau_{diff} < \tau_{su}$ , this separation becomes meaningless and the spin-up of fluid in region **III** is completely driven by diffusive processes. For the two cases, on time scales  $t \gg \tau_{diff}$ , momentum diffusion will govern the flow evolution and fade out any initial vorticity distribution generated by vortex stretching. The two models proposed here will allow us to determine the relative contribution of the two processes, stretching and diffusion, during the flow evolution.

#### 4.4.1 Stretching model

We consider an inviscid evolution from rest for the flow in region **III**, the dynamics being driven by the Ekman transport in region **I**.

In accordance with experimental observations showing a slow Ekman suction, we will neglect the time-dependant terms in the momentum equation. Then, the flow in region **III** can be fully described by an equation expressing the balance between the strengths of the centrifugal force, the Coriolis force and the buoyancy force, and an equation expressing the conservation of the potential vorticity from rest. To solve these two equations, boundary conditions at the bottom of region **III** have to be specified.

The only known boundary condition at the bottom of region **III** is a dynamical one, expressed as the continuity of the vertical velocity between the top of the Ekman boundary layer and the bottom of region **III**. However, knowing a stationary flow solution in the region **III**, it is easy to calculate the vertical flux of fluid through the bottom boundary required to obtain this solution, and therefore, a dynamical coupling can be established between a family of stationary flow solutions in region **III** and the Ekman layer dynamics in order to describe the flow evolution.

In this section, we will first solve the set of equations governing the flow in region **III** for some specific boundary conditions. We will then deduce the flux of fluid through the bottom boundary for this family of stationary solutions. Finally, we will deduce the flux evolution with time from the Ekman vertical velocity and use this result to obtain the time dependence of the flow in the region **III** as well as a typical time-scale  $\tau_{su}$  for the whole spin-up process.

#### Stationary flow solutions

In order to describe the spin-up process step by step, we are now considering stationary flow solutions for the fluid in region **III**. It must be kept in mind that during the spin-up, the velocity at the bottom of this region is different from the velocity on the disk surface, and that a typical scale  $\omega_b$  for the vertical vorticity at the base of the flow will be introduced, different from the vertical vorticity scale on the disk surface, noted  $\omega_d$  in the previous sections.

We consider a fluid of density  $\rho$  satisfying Boussinesq condition, in a cylindrical coordinate system  $(r, \theta, z)$ , of which the origin is located at the center of the rotating disk. The difference between the density  $\rho$  and the basic state is represented by a linear density profile  $\bar{\rho}(z)$  and a deviation from this profile  $\tilde{\rho}$ , so that

$$\rho(r, z) = \rho_o + \bar{\rho}(z) + \tilde{\rho}(r, z).$$

The velocity field in the final flow of the region **III** is only described by its azimuthal component  $v$ . The conservation of the potential vorticity (Ertel's theorem) between the initial state (fluid at rest) and the present stationary state reads

$$\vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\omega}_a = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} f \text{ where } \vec{\omega}_a = \vec{\omega} + f \vec{e}_z.$$

which becomes

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z}\right) \left(f + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right) + \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z}\right) \left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\rho_o}{g} N^2 f.$$

Calling  $\omega_b$  the typical value of the vertical vorticity at the bottom of region **III** and scaling the equation above with  $(r, z) \rightarrow (Rr, (fR/N)z)$  and  $(v, \tilde{\rho}) \rightarrow ((\omega_b R/2)v, (\rho_o/g)N\omega_b R\tilde{\rho})$ , this yields

$$\left(1 - Ro_b \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z}\right) \left(1 + \frac{Ro_b}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r}\right) + \frac{Ro_b}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r}\right) = 1 \quad (4.1)$$

with  $Ro_b$  the Rossby number defined as  $Ro_b = \frac{\omega_b}{f}$ , so that the thermal wind balance can be represented by

$$\frac{1}{2} \left(1 + Ro_b \frac{v}{r}\right) \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r}. \quad (4.2)$$

Integration of the equation (4.2) along the radial coordinate, using the fact that  $\tilde{\rho}$  vanishes at infinite radius, yields

$$\tilde{\rho}(r, z) = \frac{1}{2} \int_r^\infty \frac{\partial v}{\partial z} \left(1 + Ro_b \frac{v}{u}\right) du.$$

Using this relationship to eliminate the vertical partial derivative of the density perturbation in equation (4.1), differentiation along the  $r$  coordinate leads to a nonlinear differential equation for the azimuthal velocity

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Ro_b}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + Ro_b \frac{v}{r}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \left(1 + \frac{Ro_b}{2} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)\right)^2 - \frac{Ro_b}{2} \\ & \left[2 \left(1 + Ro_b \frac{v}{r}\right) \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + Ro_b \left(-\frac{v}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] \left(1 + \frac{Ro_b}{2} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)\right) \\ & + \left(1 + \frac{Ro_b^2}{4} \left(1 + Ro_b \frac{v}{r}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right) \left(-\frac{v}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

To solve this equation, we have to choose some relevant boundary conditions. Since the vorticity on the disk surface ( $r < 1$ ) for the final state of the flow at the end of the spin-up have to be constant and equal to the disk vorticity  $\omega_d$ , we choose to consider here a family of flow solutions with a constant vertical vorticity profile on the bottom boundary for  $r < 1$  (the bottom vorticity  $\omega_b$  used to scale the equations is equal to this constant vorticity). For  $r > 1$ , the vertical vorticity is negative but the radial extent of this anticyclonic ring nor its vorticity profile are known. In accordance with experimental observations, we state that the vortex is isolated and that the circulation (or the flux of vertical vorticity on the enclosed area) far away from the disk is equal to zero. To investigate the influence of the radial extent of the anticyclonic ring on the flow structure, we solved the equation with a constant negative vorticity ring for  $r > 1$ , for three different values of the non-dimensional radial extent  $L$  of this ring, but its influence was found to be weak. For simplicity, now, numerical results for  $L = 1.0$  will be presented (see Appendix A for further discussion on the effect of  $L$ ).

In the geostrophic limit of  $Ro_b = 0$ , equation (4.3) is linear, becoming

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0 \quad (4.4)$$

and can be solved by a numerical relaxation method or by Hankel transform of the boundary conditions (see i.e. Clercx *et al.* (2001)). Complete agreement was found for the solutions obtained by the two methods, and the vertical extent of the vortex flow solution was in good accordance with the results of Kloosterziel (2000), who studied the generation of waves and vortices by a similar source-sink configuration at an upper-rigid surface of a rotating stratified fluid. Further comparison between our flow solutions and his analytical solutions could not be achieved since the boundary conditions are different.

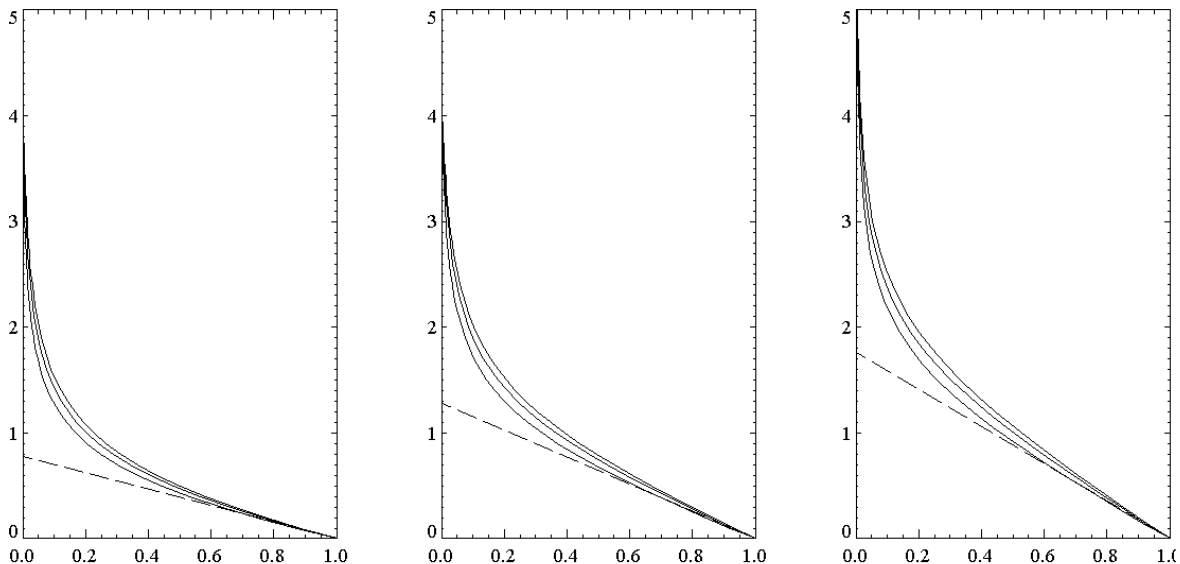


FIG. 4.7 – Profiles of non-dimensional vertical vorticity  $\omega_z/\omega_d$  above the center of the rotating disk, predicted by the stretching model for different values of the Rossby number  $Ro_b$ . The vertical coordinate has been scaled with  $fR/N$ . Results from the stretching model with  $L = 0.5, 1.0, 1.5$  are represented by solid lines. Figures from left to right correspond respectively to  $Ro_b = 0.0, Ro_b = 1.0$  and  $Ro_b = 2.0$ . Dashed lines indicate the slope used to calculate the vertical extent,  $H$ .

For the ageostrophic balanced states, associated with finite values of  $Ro_b$ , the vertical extent of the vortex increases with  $Ro_b$  (see figure 4.7). This effect appears in the thermal wind equation 4.2, where the non-linear term  $Ro_b \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial z}$  associated with the centrifugal force amplifies the impact of the velocity shear on the density field. Since the impact of  $L$  on the vertical size  $H$  (discussed in the appendix) is weak, the dependence of  $H$  with  $Ro_b$  will be estimated using the results for  $L = 1.0$ , and yields

$$H_{(L=1.0)} = \frac{fR}{N} (0.8 + 0.6Ro_b). \quad (4.5)$$

### Evolution with time of the flow

To predict the evolution of the flow with time, the numerical solutions for axisymmetric stationary flows in region **III**, described above, have to be coupled to the Ekman circulation driven by region **I**.

For each stationary flow solution, the maximal displacement of iso-density surfaces is found at the center of the disk. Integration of equation (4.1) along the vertical direction for  $r = 0$ , using the fact that  $\tilde{\rho}$  vanishes at infinite  $z$ , gives the value of the density perturbation at the center of

the disk, which reads, in non-dimensional units

$$\tilde{\rho}(r = 0, z = 0, Ro_b) = - \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}\omega(z, r = 0)}{1 + \frac{Ro_b}{2}\omega(z, r = 0)} dz$$

where  $\omega(z, r = 0)$  is the nondimensional vertical vorticity along the vertical axis located above the center of the disk.

This density perturbation is then associated with a vertical downward displacement from rest,  $d$ , of the density surface crossing the center of the disk. It is straightforward to show that  $d$  is defined, in non-dimensional units, by

$$d(Ro_b) = Ro_b \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}\omega(z, r = 0)}{1 + \frac{1}{2}Ro_b\omega(z, r = 0)} dz \quad (4.6)$$

The values of  $d$  can be easily calculated using the numerical solutions of equation (4.3).

During the spin-up, the displacement  $d$  of the density surface at the bottom of region **III** is driven by the vertical velocity at the top of the boundary layer and has to fulfill the following dimensional equation

$$\frac{fR}{N} \frac{\partial d}{\partial t} = w_{Ekman} = \sqrt{\frac{\nu}{2f}} (\omega_d - \omega_b) \quad (4.7)$$

where  $\nu$  is the kinematic viscosity.

If we introduce  $\alpha(t)$  as the ratio of spin-up achieved at time  $t$  ( $\alpha(t = 0) = 0$  and  $\alpha(t = \infty) = 1$ ), then the vorticity at the base of region **III** can be written  $Ro_b = \alpha(t)Ro$  where  $Ro = \omega_d/f$  is the value of the Rossby number based on the vorticity of the rotating disk. The equation governing the evolution of  $\alpha$  with time can be deduced from equation (4.7) and reads

$$\frac{fR}{N} \frac{\partial}{\partial t} (d(\alpha(t)Ro)) = \sqrt{\frac{\nu}{2f}} (1 - \alpha(t))\omega_d. \quad (4.8)$$

For low values of  $Ro_b$ , the expression for the function  $d(Ro_b)$  can be approximated by  $d(Ro_b) \approx a(L)Ro_b$ , where  $a(L)$  is a constant depending on the choice of the model ( $a(L)$  extends from 0.55 to 0.66 for  $L$  between 0.5 and 1.5). The analytical solution of (4.8) then reads

$$\alpha(t) = 1.0 - \exp\left(-\frac{a(L)N}{R} \sqrt{\frac{\nu}{2f}} t\right) \quad (4.9)$$

which, after taking an average value for the constant  $a(L)$  yields a typical spin-up time scale

$$\tau_{su} = 1.6 \sqrt{\frac{2f}{\nu}} \frac{R}{N} = 0.9 E_k^{-\frac{1}{2}} \Omega^{-1}. \quad (4.10)$$

with  $E$  the Ekman number,  $E_k = \nu/fH_o^2$ , based on the vertical extent,  $H_o$ , of the vortex generated in the geostrophic limit (given by equation (4.5) for  $Ro_b = 0$ ).

The latter definition of the spin-up time is in accordance with studies on the linear spin-up of stratified fluids (see i.e. Foster *et al.* (1992)) and shows the similarity between the local spin-up in the neighbourhood of a small rotating disk and the spin-up in cylindrical tanks.

For large values of  $Ro_b$ , the function  $d(Ro_b)$  can not be approximated by a linear relationship anymore, especially to describe the end of the spin-up, and equation (4.8) has to be solved numerically. These results will be presented in the next section.



Finally, it is worth to estimate the importance of the time-dependent term  $\frac{\partial v}{\partial t}$  which appears in the fully time-dependent form of the thermal wind equation (4.2) and was neglected in the present approach. Clearly, the non-dimensionnal number  $(f\tau_{su})^{-1}$  must be low for the assumption to remain valid. In our experiments, the maximal value of this number was around 0.18, but in most cases, this value remained under 0.1, corresponding to the domain of validity of the model.

#### 4.4.2 Diffusive model

Here, we consider a purely diffusive evolution from rest of the flow in region **III**. Such an evolution is expected to occur when the time and vertical length scales of the flow predicted by the stretching model are small compared with the scales of the diffusive processes. For instance, when the vertical extent of the vortex predicted by the stretching model is small, diffusive processes can transport momentum on time scales smaller than the inviscid spin-up time  $\tau_{su}$ . Besides, on times far larger than the spin-up time  $\tau_{su}$ , diffusive transport of momentum may also overcome the momentum generated by the vortex stretching. In a first approximation, the rotating disk will be considered as a source of momentum and all other effects, such as stretching of background vorticity and radial or vertical movements will be neglected.

The evolution of the azimuthal velocity  $v(r, z, t)$  can then be described by a two-dimensional diffusion equation (see e.g. Clercx *et al.* (2001)). Using the scaling  $(r, z, t) \rightarrow (Rr, Rz, R^2/\nu)$  and  $v \rightarrow (\omega_d R/2)v$ , where  $\omega_d$  is the vorticity of the body rotation of the disk,  $R$  is the disk radius and  $\nu$  is the kinematic viscosity, it takes the following non-dimensionnal form

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (4.11)$$

At  $t = 0$ , the disk starts to rotate in a fluid at rest, so that the initial conditions are

$$\begin{aligned} t = 0 & \quad v(r < 1, 0, 0) = r \text{ and } v(r, z, 0) = 0 \text{ elsewhere} \\ t > 0 & \quad v(r < 1, z = 0, t > 0) = r. \end{aligned} \quad (4.12)$$

This problem was solved numerically by a Runge-Kutta algorithm of fourth order. During the numerical integration, the velocity on the disk tends to decrease with time, as could be expected for a free diffusive evolution. Therefore, the profile of vorticity on the disk surface was maintained constant at each step of the integration and very short time-steps were chosen in order to limit the numerical noise.

In figure 4.8, the evolution of the vertical vorticity profile above the center of the disk is plotted, next to the solution for an infinite rotating disk. Initially, the two evolutions are exactly the same, but around a non-dimensionnal time 0.2, when the vertical and horizontal extents of the flow induced by the finite rotating disk are close, vertical diffusion slows down relatively the growth of  $\omega(z)$  (see figure 4.8). The dimensional value  $\tau_\nu$  of this time is given by

$$\tau_\nu = 0.2 \frac{R^2}{\nu}. \quad (4.13)$$

For  $t$  larger than  $\tau_\nu$ , the further evolution becomes similar to the problem of a point source of momentum located at the disk center.

For  $t < \tau_\nu$ , a one-dimensional analytical expression for the diffusive problem can be used to estimate the vertical extent of the vortex as a function of time. Using the same definition as for the stretching model, based on the slope of the vorticity profile above the center of the disk, the evolution of the vertical extent of the vortex follows

$$H_\nu(t) = \sqrt{\pi \nu t}. \quad (4.14)$$

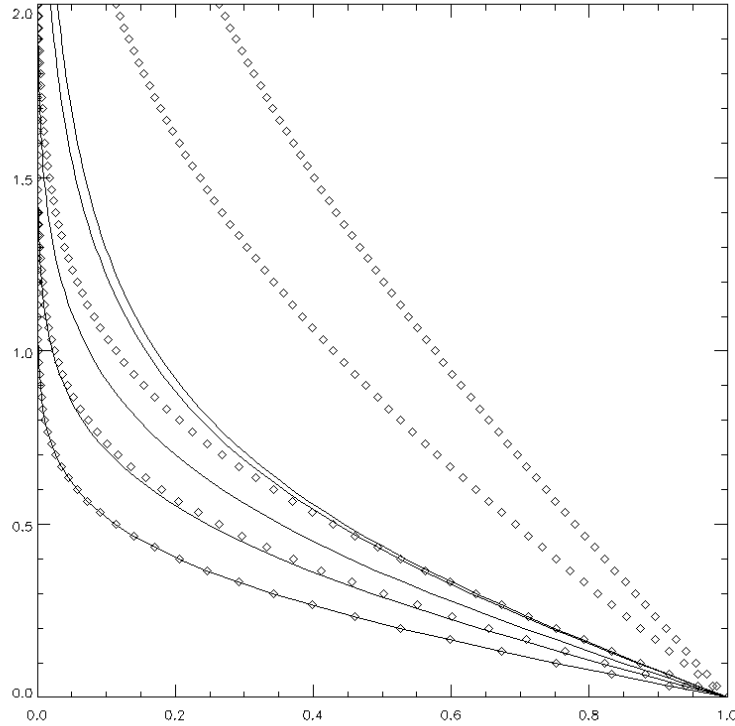


FIG. 4.8 – Evolution of the profile of non-dimensionnal vertical vorticity  $\omega_z/\omega_d$  above the center of the rotating disk, predicted by the diffusive model. The vertical coordinate  $z$  is scaled with the disk radius  $R$ . Solid lines represent the predictions of the diffusive model for non-dimensionnal times,  $t/(R^2/\nu)$ , 0.05, 0.1, 0.2, 0.8 and 1.6 respectively, and the diamonds represent the results of the corresponding one-dimensional analytical solution.

For  $t = \tau_\nu$ , the vertical extent as defined here equals  $0.8R$ .

## 4.5 Comparison with experimental results

Experiments were carried out with two values of the disk radius,  $R = 6$  cm and  $R = 12$  cm, and various values of the relevant experimental parameters  $\omega_d, f$  and  $N$ . During the initial spin-up of fluid around the rotating disk, before the development of the density front instability, PIV measurements in a horizontal plane (typically 2 cm above the disk) provide information about the evolution of the vertical vorticity. After the development of the instability of the density front and once the vortex recovered a quasi-stationary axi-symmetric state, PIV measurements are carried out in horizontal planes at different heights above the disk in order to obtain a view of the fully three dimensionnal structure of the vortex. Values of the experimental parameters as well as the relevant non-dimensionnal numbers introduced in the previous sections are given in table 4.2 for various experiments. In the next subsection, we will compare measurements obtained for the initial axi-symmetric evolution just after the onset of the disk rotation with predictions by the stretching model and the diffusive model. Subsequently, we will consider measurements and predictions for the final axi-symmetric state.

	$f \text{ s}^{-1}$	$N \text{ s}^{-1}$	$R \text{ cm}$	$\omega_d \text{ s}^{-1}$	$t \text{ min}$	$Ro$	$N/f$	$Re$	$(\tau_{su}f)^{-1}$
vs	0.50	1.19	6.0	0.31	29	0.63	2.38	560	0.02
vt	0.50	1.19	6.0	0.31	42	0.63	2.38	560	0.02
wc	0.13	1.17	6.0	0.31	28	2.49	9.29	560	0.18
xh	0.18	1.16	6.0	0.18	24	1.00	6.45	320	0.11
xl	0.18	1.16	6.0	0.60	13	3.33	6.45	1080	0.11
xq	0.31	1.16	6.0	0.18	20	0.57	3.69	320	0.05
yl	0.38	1.16	6.0	0.31	21	0.84	3.09	560	0.04
ze	0.63	1.45	6.0	0.18	18	0.29	2.32	320	0.02
zh	0.63	1.45	6.0	0.31	20	0.50	2.32	560	0.02
zk	0.63	1.45	6.0	0.47	18	0.74	2.32	850	0.02
zn	0.31	1.45	6.0	0.47	16	1.49	4.64	850	0.06
zr	0.31	1.45	6.0	0.31	15	1.00	4.64	560	0.06
ab	0.26	1.4	12.0	0.13	40	0.52	5.47	940	0.04
ad	0.26	1.4	12.0	0.24	44	0.93	5.47	1730	0.04
af	0.26	1.4	12.0	0.38	33	1.49	5.47	2700	0.04
ah	0.26	1.4	12.0	0.52	31	2.05	5.47	3700	0.04
ai	0.38	1.4	12.0	0.13	18	0.35	3.67	940	0.02
an	0.38	1.4	12.0	0.38	35	1.00	3.67	2700	0.02

TAB. 4.2 – Values of experimental parameters for stable vortices generated by a rotating disk. The Rossby number  $Ro$  is defined as  $Ro = \omega_d/f$ . The Reynolds number  $Re$  is based upon the radius of the rotating disk,  $Re = \omega_d R^2/\nu$ .  $\tau_{su}$  is the spin-up time defined in equation (4.10).

#### 4.5.1 Initial spin-up, $t \geq 0$

Figure 4.9 shows measurements of the maximum vertical vorticity in a layer 2 cm above the rotating disk and predictions from the stretching and diffusive models as a function of time for four representative experiments.

For large  $N/f$  (see figure 4.9(a)), the stretching model predicts a very low increase of the central vorticity in the region above the rotating disk, obtained on a time-scale given by  $\tau_{su}$ . The diffusive model predicts then a larger increase of vorticity and reproduces very well the experimental measurements. For small  $N/f$  (see figure 4.9(b)), the initial growth of vorticity is well predicted by the stretching model, while underestimated by the diffusive model. In the latter case, the spin-up process is initially dominated by the stretching of background vorticity through Ekman suction, and is faster than what is predicted by the diffusive model.

The relevant parameter to distinguish between these two behaviours is the one that compares the diffusive time-scale with the inviscid spin-up time. The diffusive time-scale, noted  $\tau_{diff}$  and based on the vertical extent of the vortex predicted by the stretching model, can be inferred from equation (4.14) and is given by

$$\tau_{diff} = \left(\frac{0.8fR}{N}\right)^2 \frac{1}{\pi\nu}. \quad (4.15)$$

Compared with the spin-up time  $\tau_{su}$ , it gives ratio  $\gamma$

$$\gamma = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{su}} \approx \left(\frac{f}{N}\right)^2 \frac{\tau_\nu}{\tau_{su}}. \quad (4.16)$$

In table 4.3, values of this parameter are given for the experiments presented in figure 4.9.

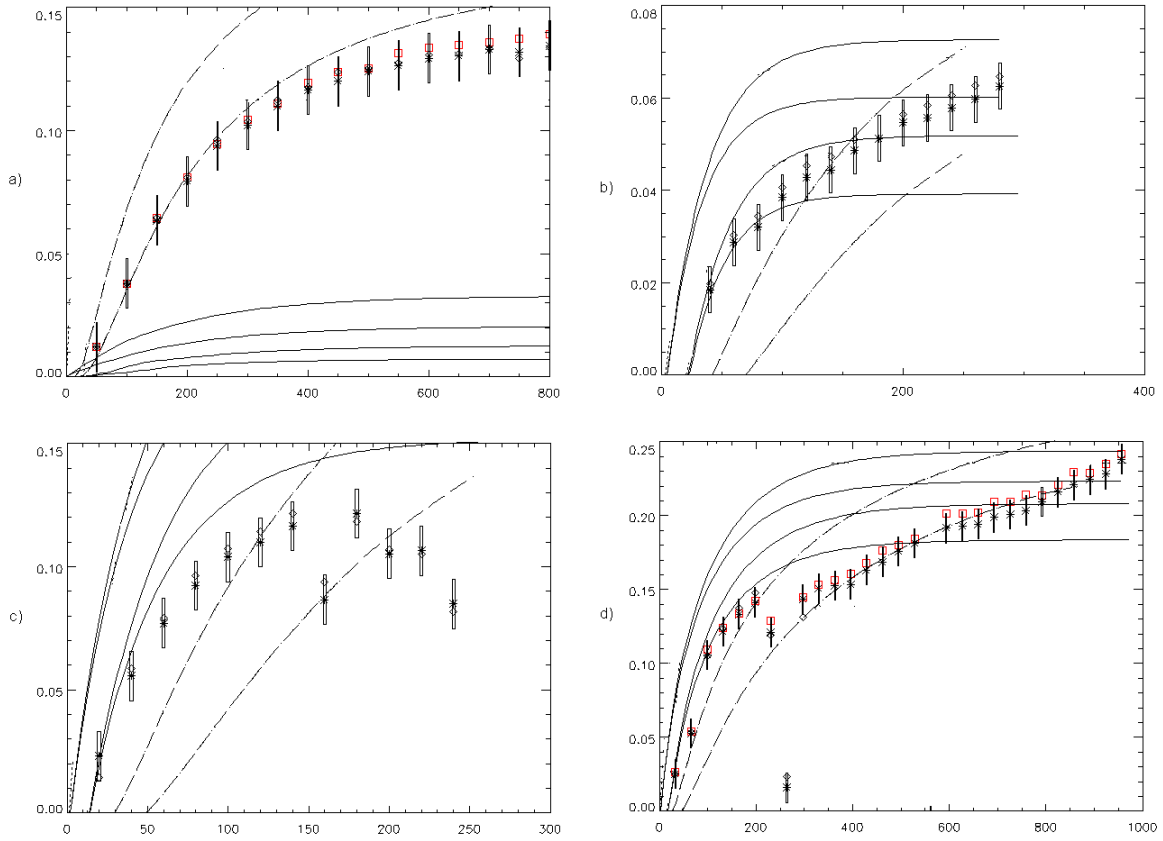


FIG. 4.9 – Evolution of the vertical vorticity  $\omega_z$  at 2 cm above the center of the rotating disk for experiments a) wc, b) ze, c) zk and d) an (see table 4.3 for experimental parameters). - - - -; diffusive model for heights 1.75 cm and 2.25 cm. —; stretching model with  $L = 0.5$  and  $L = 1.5$ , heights 1.75 cm and 2.25 cm and with two initial times taking account or not of the delay in the Ekman layer formation (around  $1/f$ ). \*; experimental values based upon PIV measurements.

	$Ro$	$N/f$	$\tau_{su}$ s	$\tau_\nu$ s	$\gamma$
wc	2.49	9.29	43	720	0.2
ze	0.29	2.32	46	720	2.9
zk	0.74	2.32	46	720	2.9
an	1.00	3.67	124	2880	1.7

TAB. 4.3 – Experiments for the study of the spin-up just at the onset of the disk rotation. Definitions of  $\tau_{su}$ ,  $\tau_\nu$  and  $\gamma$  are given in equations (4.10), (4.13) and (4.16).

For  $\gamma < 1$ , the spin-up is completely due to diffusion which overcomes very quickly the weak inviscid generation of vorticity predicted by the stretching model (see figure 4.9(a)). For  $\gamma > 1$ , momentum is initially created mainly by stretching, as is shown in figures 4.9(b) and 4.9(c) where experimental measurements are well reproduced by the stretching model. The diffusion time scale  $\tau_{diff}$  is then big enough in comparison with  $\tau_{su}$  for the flow evolution to be separated in two stages. The Ekman circulation associated with the first stage gradually vanishes for times larger

than  $\tau_{su}$  and the evolution is then driven by diffusive processes in a second stage. This diffusive evolution appears clearly in the right part of figure 4.9(b) where the long-time growth of vorticity is well correlated with the prediction of the diffusive model. It is also obvious in figure 4.9(d), the experimental curve returning to the curve predicted by the diffusive model after the transition to the non-axisymmetric transient stage associated with the instability of the density front.

#### 4.5.2 Final axisymmetric state, $t > \tau_{su}, \tau_{diff}$

Here, we consider the final axi-symmetric state. In order to compare the experimental measurements and the model predictions, we use vertical and radial profiles of vertical vorticity measured in different horizontal planes. These measurements were carried out at different times of observation  $t$  for the different experiments, and a relevant scaling has to be introduced.

Scaling  $t$  with  $\tau_{diff}$ , defined by equation (4.15) in the geostrophic limit, yields

$$t_{obs} = \frac{t}{\tau_{diff}} = \left(\frac{N}{f}\right)^2 \frac{t}{\tau_\nu}$$

Since  $\tau_{diff}$  represents the time required for diffusive processes to generate the same flow as the one obtained in  $\tau_{su}$  by stretching of background vorticity,  $t_{obs}$  gives a good estimation of the amount of vorticity transported along diffusive processes in comparison with the vorticity generated by the stretching.

For finite values of the Rossby number,  $Ro$ , the definition of  $\tau_{diff}$  can be improved using the dependance of the vertical extent  $H$  with  $Ro$ , expressed by equation (4.5), and a new non-dimensional observation time  $t_{obs}[Ro]$  can be calculated.

Values of the relevant non-dimensional numbers for the four typical experiments discussed below are given in table 4.4.

	$t$ min	$Ro$	$N/f$	$\tau_\nu$ min	$t_{obs}^*$	$t_{obs}^*[Ro]$
wc	28	2.49	9.29	12	201.4	25.6
ad	44	0.93	5.47	48	27.4	9.8
ze	18	0.29	2.32	12	8.1	5.5
ai	18	0.35	3.67	48	5.1	3.2

TAB. 4.4 – Experimental parameters and non-dimensionnal observation times for the experiments of figures (4.10), (4.11) and (4.12).  $t_{obs}$  is the non-dimensional time defined in equation (4.5.2), while  $t_{obs}[Ro]$  takes account of the finite value of the Rossby number.

#### Vertical profiles of vertical vorticity above the center of the disk

For the experiments presented in table 4.4, experimental profiles and predictions from the diffusive and stretching models are plotted in figure 4.10. For high values of  $t_{obs}^*[Ro]$  (see figures 4.10(a) and 4.10(b)), the experimental measurements are very well reproduced by the diffusive model. In these two experiments, the observation time  $t$  is even larger than the diffusive time  $\tau_\nu$ , which marks the limit between the one-dimensional and three-dimensional diffusive regimes. The initial vorticity distribution generated by stretching is then faded out by the diffusive transport of vertical vorticity from the disk surface.

For moderate values of  $t_{obs}^*[Ro]$  (see figures 4.10(c) and 4.10(d)), the experimental measurements are located between the curves predicted by the inviscid and diffusive models. Surprisingly,

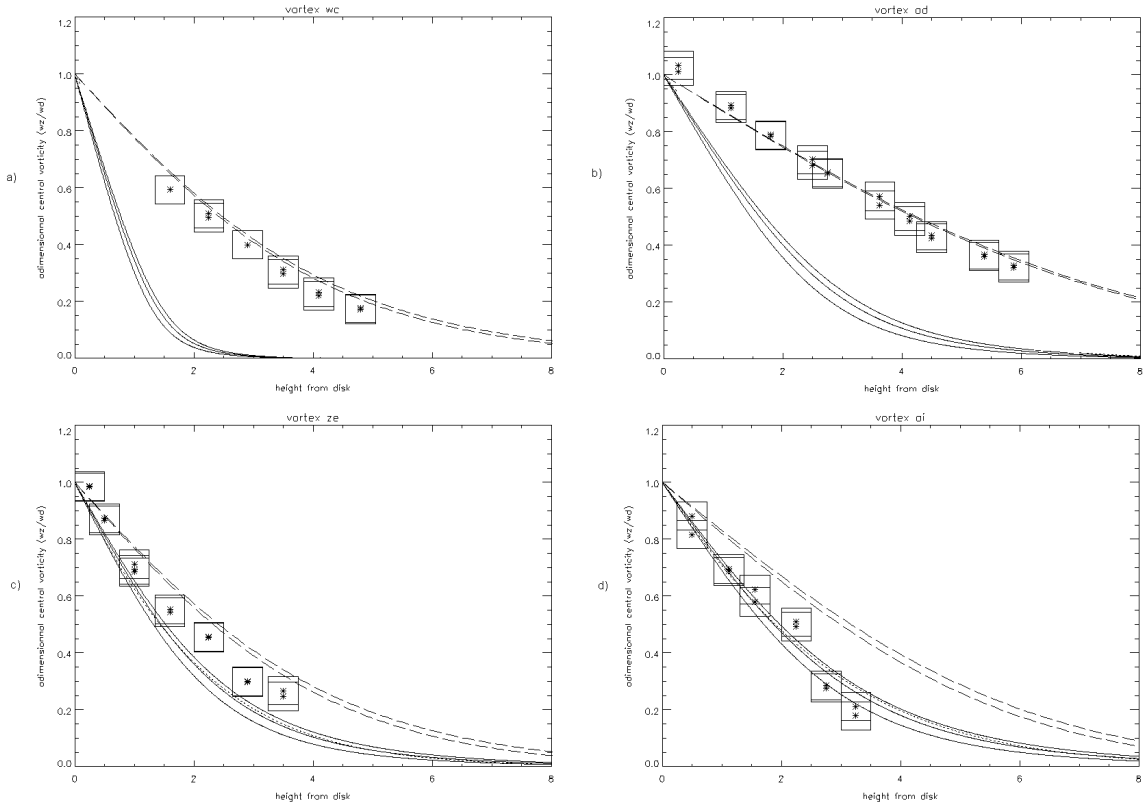


FIG. 4.10 – Vertical profiles of non-dimensional vertical vorticity  $\omega_z/\omega_d$  above the center of the rotating disk for experiments a) wc, b) ad, c) ze and d) ai (see table 4.4 for experimental parameters). - - - -; diffusive model. —; stretching model with  $L = 0.5$ ,  $L = 1.0$  and  $L = 1.5$ . \*; experimental values based upon PIV measurements. An error of about  $\pm 0.25$  cm was found for the height of the horizontal laser sheet, and the vorticity was evaluated carefully, using the velocity field obtained by PIV, with a precision around  $\pm 5\%$ .

the diffusive transport of vorticity does not simply add up to the vorticity already generated by the inviscid stretching of density surfaces. Indeed, further observations of the displacement of density surfaces, marked by fluorescein dye, showed that the initial downward displacement forced by the Ekman circulation on a time-scale  $\tau_{su}$  is followed by a slow upward displacement on a larger time-scale which tends to take the density surfaces back to their initial position. As the diffusion of momentum tends to decrease the vertical shear, the thermal wind balance expressed by equation (4.2) is broken and iso-density surfaces move back upward. This upward displacement is associated with radial outflow and vortex compression and thus decreases locally the value of the vertical vorticity. By continuity, some inward transport occurs near the disk surface. This mechanism explains why the diffusive transport of momentum above the rotating disk is partially cancelled by the vortex compression effect, and the spin-up is slower than what would be produced by diffusive processes alone. Such a meridional circulation was also discussed by Clercx *et al.* (2001) in their study on the spin-down of pancake-like vortices. They pointed out that this circulation is driven by diffusion and may generate a 'vortex stretching' effect in the mid plane of the vortex, which leads to a slower spin-down than predicted by a purely diffusive model. In a related study by Flierl & Mied (1985) on the diffusive spin-down of oceanic warm

core rings and consequent meridional circulation, a similar slower decay for the baroclinic mode than for the barotropic mode was found.

### Radial profiles of vorticity

In figures 4.11 and 4.12, radial profiles of vertical vorticity at different heights above the rotating disk are plotted for two different experiments. The predictions by the diffusive model and the stretching model with  $L = 0.5$  are presented in figures 4.11(a), 4.12(a) and 4.11(b), 4.12(b) respectively. Stretching models with higher values of  $L$  ( $L = 1.0$  and  $L = 1.5$ ) were always predicting a size of the anticyclonic ring too large when compared with the experimental observations and thus, will not be presented here. For large values of the non-dimensionnal

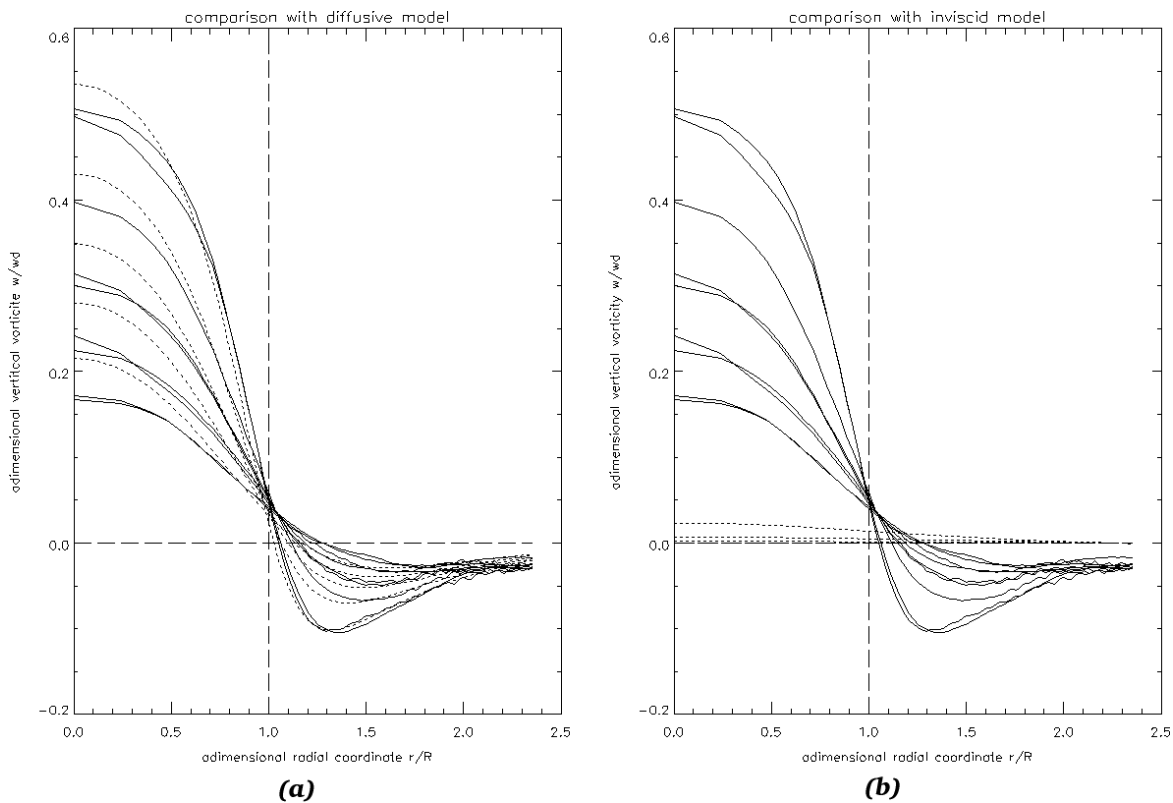


FIG. 4.11 – Radial profiles of non-dimensional vertical vorticity  $\omega_z/\omega_d$  at different heights above the rotating disk for experiment  $wc$  (see table 4.4 for experimental parameters). —; experimental curves based upon PIV measurements. - - - -; curves predicted by the diffusive model for figure (a), and by the stretching model with  $L = 0.5$  for figure (b). Heights above the disk of the horizontal planes where PIV measurements were carried out are 2.25, 2.9, 2.5, 4.1, 4.8 cm.

time  $t_{obs}[Ro]$  (see figures 4.11), good agreement is found between the diffusive model and the experimental measurements. Here again, the initial vorticity pattern generated by stretching is completely overwhelmed by the diffusive transport of momentum from the disk surface.

For moderate values of the non-dimensionnal observation time  $t_{obs}^*[Ro]$  (see figure 4.12), the experimental radial profiles in the region above the rotating disk are underestimated by the inviscid model and overestimated by the diffusive one, a consequence of the 'vortex compression'

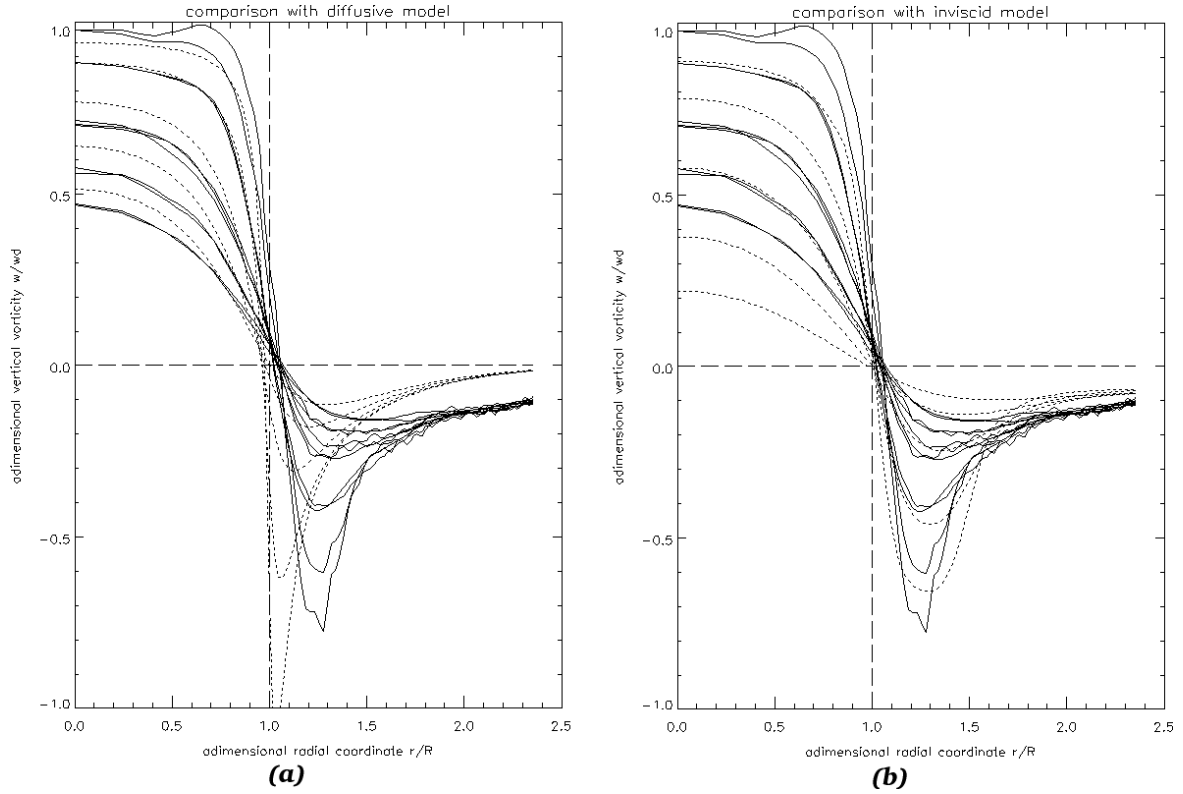


FIG. 4.12 – Radial profiles of non-dimensional vertical vorticity  $\omega_z/\omega_d$  at different heights above the rotating disk for experiment *ze* (see table 4.4 for experimental parameters). —; experimental curves based upon PIV measurements. - - - -; curves predicted by the diffusive model for figure (a), and by the stretching model with  $L = 0.5$  for figure (b). Heights above the disk of the horizontal planes where PIV measurements were carried out are 0.25, 0.5, 1.0, 1.6, 2.25 cm.

process mentioned above. For the anticyclonic ring, neither the inviscid nor the diffusive models are able to describe it, since it was formed after a transition through a baroclinic unstable stage. Indeed, the diffusive model tends to predict a very sharp vorticity profile close to the edge of the rotating disk, in contradiction with the smooth experimental profile, and the inviscid model with  $L = 0.5$  does not fit very well the observations (The discrepancy is still larger with the other values of  $L$ ). Scrutinizing the shadowgraph images of the flow near the edge of the rotating disk indicate unstationnary flow and small scale mixing for moderate values of  $t_{obs}[Ro]$ . The diffusive processes tend to sharpen the velocity profile near the edge of the disk and may lead to shear instabilities. The competition between the sharpening of the profile by diffusion and the smoothing associated with small scale mixing would then explain the unstationnary flow observed in the experiments. Eventually, the fluid around the disk has spin-up so that the shear reduces and instabilities near the disk disappear.

## 4.6 Concluding remarks

We have presented experimental observations and measurements for the spin-up of fluid by a cyclonically rotating disk in a rotating stratified fluid, with values of the ratio  $N/f$  over 1 and



Rossby number, based on the vorticity of the rotating disk, close to unity.

Observations showed that, just after the onset of the disk rotation, a meridional circulation was driven by an Ekman boundary layer on the disk surface, forming a circular density front at the edge of the disk and able to generate cyclonic and anti-cyclonic vorticity in the neighbourhood of the disk by respectively stretching and compression of the background vorticity. A model was introduced, based on the conservation of potential vorticity from rest. This model showed good agreement with the measurements during this first stage of the spin-up in case diffusion acts on a larger time-scale,  $\tau_{diff}$ , than the inviscid spin-up time  $\tau_{su}$ . Here, the vorticity is initially generated by stretching above the rotating disk. For experiments with diffusive processes acting on a time-scale  $\tau_{diff}$  smaller than the inviscid spin-up time  $\tau_{su}$ , a separate model is based on the diffusion of momentum from the disk surface, modelling successfully the experimental data. It shows that the spin-up in this stage is completely driven by diffusive processes, which generated vorticity in regions far from the disk surface faster than the Ekman layer driven circulation. A parameter  $\gamma$ , based on the experimental parameters and the models, was proposed to determine the limit between these two flow regimes just after the onset of the disk rotation.

In contrast with the studies on the spin-up of fluid in cylindrical tanks, the experimental observations showed that the free density front generated at the edge of the disk by the Ekman circulation was usually baroclinically unstable and could be responsible for a strongly non-axisymmetric evolution of the flow before the end of the spin-up. This non-axisymmetric evolution had a strong impact on the whole spin-up process when it led to a global destabilization of the vortex core, as observed in experiments where the core was teared apart and the flow evolved into a two-dipole pattern. In the work presented here, we focused mainly on flows which remained stable during the front instability, and were found to return eventually to an axisymmetric state.

The evolution of the vertical extent of the stable vortices on time scales larger than the inviscid and diffusive spin-up times  $\tau_{su}$  and  $\tau_{diff}$  (i.e. over 10 times) can be well described by the purely diffusive model. However, experiments with a large contribution from the stretching of background vorticity to the initial spin-up showed a discrepancy with the predictions of the models for times just after the return to an axisymmetric state. To explain this discrepancy, a secondary circulation induced by the diffusive processes was proposed, in accordance with observations and other works on free vortices, leading to the less effective spreading of momentum than predicted by a purely diffusive transport.

The model based on the stretching and compression processes appears weakly affected by the radial extent of the negative vorticity region outside the edge of the vortex. The agreement with experimental measurements suggests a weak sensitivity of the spin-up of fluid above the disk to the growth of the density front, for times just after the onset of the rotation. However, the development of the instability of the density front is expected to have an impact on the spin-up, especially beyond the disk edge. A more detailed study of the dynamics of the density front is required to explain the shape of the negative vorticity profiles for times just after the return to an axisymmetric state.

## Appendix A : Influence of the boundary conditions on solutions of the stretching model

To solve the equation (4.3) for the stretching model, boundary conditions are required, but the size and the shape of the negative vorticity ring observed in the experiments are 'a priori' unknown. In section 4.1, we assumed a constant vorticity anticyclonic ring of radial extent  $L$ . For this particular shape, the non-dimensionnal form of the boundary conditions on the plane

$z = 0$  read

$$\begin{aligned}
 v_\theta(r, z = 0) &= r \text{ for } r \leq 1 \\
 v_\theta(r, z = 0) &= \frac{1}{(1+L)^2 - 1} \left( -r + \frac{(L+1)^2}{r} \right) \text{ for } r \in [1, L] \\
 v_\theta(r, z = 0) &= 0 \text{ for } r \geq 1+L
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Equation (4.3) was solved numerically by a relaxation method on a grid of non-dimensional dimensions  $[0, 5] \times [0, 5]$  with a resolution of  $50 \times 50$ . The Rossby number  $Ro_b$  was taken between 0.0 and 4.0, and the radial extent  $L$  was  $L = 0.5, 1.0$  and  $1.5$ .

The impact of  $L$  on the flow pattern above the rotating disk was investigated, using vertical profiles of central vorticity like those plotted in figure 4.7. The vertical size  $H$  of the vortex was estimated, using the inverse value of the slope of these profiles, and its dependence on Rossby number,  $Ro_b$ , for each value of  $L$  leads to

$$\begin{aligned}
 H(Ro_b)_{(L=0.5)} &= \frac{fR}{N} (0.75 + 0.50Ro_b) \\
 H(Ro_b)_{(L=1.0)} &= \frac{fR}{N} (0.8 + 0.58Ro_b) \\
 H(Ro_b)_{(L=1.5)} &= \frac{fR}{N} (0.87 + 0.64Ro_b)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Equations (4.18) shows a very weak dependence of the vertical extent  $H$  on the radial extent  $L$  in comparison with its dependence on Rossby number. Therefore, the equation for  $L = 1.0$  was used in the second part of section 4.1 to obtain an averaged definition of the inviscid spin-up time  $\tau_{su}$ , inferred from the vertical extent of the flow.

If we now consider radial profiles of vorticity in horizontal planes, such as those plotted in figures 4.11(b) and 4.12(b), the radial extent  $L$  determines the size of the negative vorticity region in all the horizontal planes. Radial profiles evolve from a step-like pattern on the disk surface  $z = 0$  to a gaussian-like pattern away from it, with smoother vorticity gradients, and the radial position of the zero vorticity point remains always close to the radius of disk. As a consequence, variations of the flow characteristics in the vertical and radial directions are strongly dissociated, and only the latter direction is affected by the radial extent  $L$  of the anticyclonic ring.



# Bibliographie

- [Baker (1971)] BAKER, D. J. 1971 Density gradients in a rotating stratified fluid : experimental evidence for a new instability. *Science*. **172**, 1029–1031.
- [Baker (1995)] BAKER, E.T. 1995 Characteristics of hydrothermal discharge following amagmatic intrusion. *Hydrothermal Vents and Processes, Geol. Soc. Spec. Pub.* **87**, 65-76.
- [Calman (1977)] CALMAN, J. 1977 Experiments on high richardson number instability of a rotating stratified shear flow. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **1**, 277–297.
- [Clercx *et al.* (2001)] CLERCX, H. J. H., BECKERS, M., VERZICCO, R. & VAN HEIJST, G. F. J. 2001 Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid : experiments, model and numerical simulations. *J. Fluid Mech.* **433**, 1–27.
- [Davies *et al.* (1995)] DAVIES, P. A., GUO, Y., BOYER, D. L. & FOLKARD, A. M. 1995 The flow generated by the rotation of a horizontal disk in a stratified fluid. *Fluid Dynamics Research* **17**, 27–47.
- [Drazin & Reid (1981)] DRAZIN & REID 1981 *Hydrodynamic stability*. Springer.
- [Duck & Foster (2001)] DUCK, P.W. & FOSTER, M.R. 2001 Spin-up of Homogeneous and Stratified Fluids. *Ann. Rev. Fluid Mech* **33**, 231-263.
- [Eady (1949)] EADY, E. T. 1949 Long waves and cyclone waves. *Tellus* **1**, 33–52.
- [Fincham & Spedding (1997)] FINCHAM, A. & SPEDDING, G. 1997 Low cost, high resolution DPIV for measurements of turbulent fluid flow. *Experiments in Fluids* **23**, 449–462.
- [Fincham & Delerce (2000)] FINCHAM, A. & SPEDDING, G. 2000 Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids* **29**, S013–S022.
- [Flierl & Mied (1985)] FLIERL, G. R. & MIED, R. P. 1985 Frictionally induced circulations and spin-down of a warm-core ring. *J. of Geophysical Research* **90**, 8917–8927.
- [Foster *et al.* (1992)] FOSTER, M. R., SPENCE, G. S. M. & DAVIES, P. 1992 The transient response of a contained rotating stratified fluid to impulsively started surface forcing. *J. Fluid Mech.* **243**, 33–50.
- [Greenspan (1968)] GREENSPAN, H. P 1968 *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press.
- [Griffith & Linden (1981)] GRIFFITH, R. W. & LINDEN, P. F. 1981 The stability of buoyancy-driven coastal currents. *Dyn. Atmos. Oceans.* **5**, 281–306.
- [Hide & Titman(1967)] HIDE, R. & TITMAN, C. W. 1967 Detached shear Layers in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **29**, 39–60.
- [Honji *et al.* (1980)] HONJI, H., TANEDA, S. & TATSUDO, M. 1980 Some practical details of the electrolytic precipitation method of flow visualisation. *Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ.* **28**, 83–89.

- [Kloosterziel (2000)] KLOOSTERZIEL, R. 2000 Surface forced internal waves and vortices in uniformly stratified and rotating fluids. *J. Fluid Mech.* **421** 39–81.
- [Manley & Hunkins (1985)] MANLEY, T.O. & HUNKINS, H. 1985 Mesoscale eddies of the arctic ocean. *J. Geophys. Res.* **90** (C3), 4911-4930.
- [McIntyre (1970)] MCINTYRE, M. E. 1970 Diffusive destabilization of the baroclinic circular vortex. *Geophysical Fluid Dynamics* **1**, 19–57.
- [McWilliams (1985)] MCWILLIAMS, J.C. 1985 Submesoscale, coherent vortices in the ocean. *Geophys. Rev.*, **23**, 165-182.
- [Spence *et al.* (1992)] SPENCE, G.S.M., FOSTER, M.R. & DAVIES, P.A. 1992 The transient response of a contained rotating stratified fluid to impulsively started surface forcing. *J. Fluid Mech.* **243** 33–50.

# Observations expérimentales de l'interaction ondes-vortex et interprétation linéaire

Afin d'étudier expérimentalement l'interaction d'ondes d'inertie-gravité avec un vortex, un écoulement avec cisaillements verticaux et horizontaux a été généré par le disque tournant présenté au chapitre précédent. Des vortex quasi-stationnaires et axisymétriques ont été choisis, qui correspondent à des valeurs élevées du temps adimensionnel  $t_{obs}^*[Ro]$ . Cela permet de distinguer plus nettement le champ d'ondes dans les mesures par PIV, et de connaître avec précision la structure tridimensionnelle de l'écoulement. Ces vortex sont caractérisés par un cisaillement vertical du même ordre que le cisaillement horizontal. D'autres méthodes ont été testées pour générer des vortex baroclines (par exemple, une approche similaire à celle de Clercx *et al.* (2001)), mais il est en général difficile de créer des vortex lenticulaires puissants dans une cuve stratifiée en rotation, puisque la diffusion verticale amortit rapidement l'écoulement dans les cas où le vortex reste stable.

En complément de ces vortex baroclines, nous avons adopté une autre méthode de génération de vortex libres et puissants : un tube de 1.5 cm de diamètre perforé sur une hauteur de 10 cm est introduit verticalement à mi-hauteur dans la cuve. Le fluide est aspiré à travers les perforations par une pompe. Le mouvement radial sur une hauteur de 10 cm environ génère alors un écoulement cyclonique dont l'intensité croît avec le volume aspiré. Après le retrait du tube, on obtient un vortex très allongé ( $> 10$  cm en hauteur), le profil radial de vitesse à mi-hauteur étant bien décrit par une répartition gaussienne de vorticité. Le rayon du vortex, défini comme la coordonnée radiale où la vitesse est maximale, augmente avec le temps par diffusion radiale de la quantité de mouvement. La circulation du vortex dans le plan à mi-hauteur diminue très lentement, sur une échelle de temps en accord avec l'extension verticale du vortex. Le vortex ainsi créé est stable, même pour des valeurs importantes de la vitesse azimutale, et sa position reste relativement stationnaire, ce qui facilite les mesures et observations expérimentales. Il est caractérisé par une évolution du profil de vitesse dans le plan médian facile à modéliser par un vortex bi-dimensionnel de Lamb-Oseen. Les vortex ainsi générés sont caractérisés par un cisaillement vertical faible devant le cisaillement radial dans une large région de part et d'autre du plan médian. Des cisaillements verticaux plus importants sont présents aux extrémités mais s'amortissent graduellement par diffusion.

Pour générer les ondes, nous avons utilisé des cylindres placés horizontalement dans la cuve, et oscillant verticalement ou horizontalement. Le diamètre du cylindre,  $D$ , permet expérimenta-

lement de choisir la longueur d'onde dominante des ondes générées (voir Appleby & Crighton (1987), par exemple, pour des détails sur la forme analytique du champ généré par les oscillations d'un cylindre en l'absence de viscosité, et Lighthill (1978), pour des images expérimentales des ondes générés par un cylindre). L'amplitude des oscillations,  $A$ , affecte peu la longueur d'onde dominante, mais augmente l'extension spatiale du champ d'onde. Pour des valeurs de  $A$  infiniment petites, des résultats théoriques prédisent une proportionalité entre l'amplitude du déplacement et l'amplitude des ondes. Cependant, nous avons constaté expérimentalement que les oscillations du cylindre génèrent un mélange important. L'amplitude de l'onde générée ne correspond donc pas en général à l'amplitude des oscillations (pour des valeurs de  $A$  de l'ordre du rayon du cylindre). Des mesures par PIV dans des expériences sans vortex sont donc nécessaires, avant les expériences d'interaction, pour connaître l'amplitude du champ d'onde généré. Les diamètres des cylindres utilisés sont compris entre 0.5 et 5.0 cm. L'amplitude des oscillations peut être réglée indépendamment entre 0.0 et 3.0 cm. D'autres méthodes ont été testées pour générer des ondes, comme par exemple un cerceau ou une surface ondulée, mais le champ d'onde généré par un cylindre présente l'avantage d'être facilement modélisable et caractérisé par une longueur d'onde dominante dépendant uniquement du diamètre.

L'utilisation de vortex générés par un disque tournant ou par aspiration, et la génération des ondes par des cylindres oscillants permet de reproduire relativement facilement les expériences par des simulations numériques basées sur l'approximation WKB en coordonnées cylindriques (voir section 3.2.4). Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la comparaison des observations expérimentales de l'interaction d'ondes d'inertie-gravité avec ces simulations. Nous discuterons tout d'abord les effets de la courbure de l'écoulement et de l'amortissement visqueux sur la propagation des ondes, par des simulations dans un écoulement simple avec cisaillement constant. Ensuite, nous mettrons en évidence un bon accord entre les champs d'onde expérimentaux et les champs d'onde prédits par les simulations WKB, avant d'utiliser cet accord pour expliquer le déclenchement ou non du déferlement des ondes piégées dans le vortex. Ces aspects de l'interaction ondes-vortex sont décrits dans un article en préparation intitulé "**Experiments on the propagation and breaking of inertia-gravity waves in a vortex flow**", reproduit ici dans une forme adaptée au manuscrit :

## Abstract

We experimentally investigate the interaction of inertia-gravity waves with vortices in a rotating stratified fluid and compare results with WKB simulations. Baroclinic pancake-shaped vortices as well as more elongated-shaped barotropic vortices are considered. We show that waves are trapped in the vortex.

For baroclinic vortices, incident waves with low frequency propagating against the vortex flow are reflected and trapped afterwards along an inclined critical layer similar to the valve-effect critical layer found by Olbers (1980) for a geostrophic current. Incident waves with high frequency, propagating along the vortex flow, are trapped in the outer part of the vortex. For barotropic vortices, waves propagating against the vortex flow are wrapped and trapped around the vortex, along almost vertical layers. The flow curvature leads to a finite amplification of the wave energy density and an enlargement of the trapping region, in contrast with previous studies on wave propagation through a background unidirectional flow in Cartesian coordinates.

WKB simulations capture the wave patterns shown in the experiments, and provide further information about the wave-breaking. In the case of baroclinic vortices, they show that waves are very quickly damped when trapped in the vortex flow, without leading to wave-breaking.

In the case of barotropic-like vortices with strong horizontal shear, reduced vertical shear, and large wave-length waves, they predict an increase of the wave amplitude until marginal stability criteria are broken, indicating the occurrence of wave-breaking. To determine the occurrence of wave breaking, we introduce a Reynolds number,  $Re_{wave} = \sqrt{U_L^2 + U_H^2} / \nu k^2$ , with  $U_L$  and  $U_H$  typical values of the vortex flow shear in the radial and vertical directions respectively,  $\nu$  the kinematic viscosity and  $k$  the wave-number for the incident waves. These Re-values are low for experiments with baroclinic vortices and high enough for wave breaking to occur in experiments with barotropic vortices and large wavelengths. Predictions from WKB simulations and experimental observations suggest a buoyancy induced instability as the responsible mechanism for wave breaking.

## 5.1 Introduction

For a single vortex, the interaction with planar waves depends on the ratio of the phase speeds of the vortex and wave,  $R/T_v$ , and  $\Lambda/T_w$ , respectively, where  $R$  is the vortex radius,  $\Lambda$  the wave length and  $T_v$  and  $T_w$  the vortex and wave periods. When the phase speed of the wave is larger than the maximum velocity in the vortex,  $\Lambda/T_w > R/T_v$ , the waves propagate without being affected by the presence of the vortex and the vortex preserves its coherence (see e.g. Flór *et al.* (1994)). In contrast, when  $\Lambda/T_w < R/T_v$  the waves are constrained by the Doppler effect and either reflect, break or are absorbed in a critical layer. These effects also depend on the curvature of the flow field in the vortex, as becomes clear when introducing an interaction length  $L = \Lambda T_v / T_w$  of the wave with the vortex. The interaction is again small when  $L/R > 1$ , corresponding to the first case, while the interaction is strong for values  $L/R < 1$ .

When the vortex curvature can be neglected, ( $L/R \rightarrow 0$ ) i.e. for waves interacting with a unidirectional shear flow, reflection absorption or wave-breaking can be expected, as has been shown experimentally (e.g. Koop (1981)) and theoretically (Booker & Bretherton (1967), Ivanov (1974), Olbers (1980), Badulin & Shrira (1984), Badulin & Shrira (1993)) and more recently in numerical studies by Dörnbrack (1998) and Staquet & Huerre (2002). Here we focus on the interactions of planar waves with an individual vortex for  $L < R$ , thus including effects of curvature. We continue, with a brief introduction on the WKB approach and the wave interaction with a uni-directional flow below.

The WKB theory applies mainly to background flows with low Rossby and Froude numbers, but appears also fruitful to describe the propagation in less restrictive flow conditions. Basically, it assumes the phase of the wave to evolve on time and space scales shorter than the scales associated with the changes in the amplitude. Local values of the wave-number and the frequency of the wave can be deduced from the spatial and temporal derivations of the phase function, and the energy propagates along rays whose trajectory is inferred from the local values of the group velocity and the background flow. The time-dependence of the wave field is given by its absolute frequency  $\omega_{abs}$ , corresponding to the wave frequency before the beginning of the interaction. During the interaction, this time-dependence is conserved, and the intrinsic frequency  $\omega_o$  of the wave, defined as its frequency in a referential moving with the local mean flow velocity  $\mathbf{U}$ , is inferred from the Doppler shifting relationship which takes the form

$$\omega_{abs} = \omega_o + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} \quad (5.1)$$

where  $\mathbf{k}$  is the local wave-number.

Further insight in the wave-flow interactions processes were obtained from uni-directional flows in Cartesian coordinates, for which the WKB theory predicts a conservation of the wave-number component parallel to the flow. Then, the Doppler relationship leads to a wave intrinsic



frequency  $\omega_o$  depending only on the spatial position  $\mathbf{r}$ . Therefore, the space is clearly divided into regions where waves can propagate ( $|\omega_o| \in [f, N]$ ) or are arrested ( $|\omega_o| < f$  or  $|\omega_o| > N$ ). The different limits between these regions are well defined and known as reflection or critical layers. The WKB theory predicts an infinite amplification of energy when waves approach these limits, so that the wave pattern can not be described anymore in the framework of this theory. However, the linear approximation becomes then useful to predict the behaviour of waves in the neighbourhood of these layers, leading to a distinction between reflection layers, where linear approximation remains valid, and critical layers, where even the linear approximation becomes singular and predicts a trapping of waves and an infinite amplification of energy.

Complete analytical solutions of the WKB equations exist for a purely vertical sheared velocity field without background rotation  $f = 0$  (Koop (1981)). Koop (1981) compared these analytical predictions with experiments. The layer where the intrinsic frequency goes to  $N$  was found to be a reflection layer, while the layer where the intrinsic frequency goes to  $0$  was found to be a critical layer. Viscous damping of waves was taken in account by Koop (1981) to show that the wave energy was strongly damped in their experiments and explained why wave-breaking could not be observed. This flow was considered numerically by Dörnbrack (1998), showing the occurrence of a wave breaking process, triggered by a convective instability. Olbers (1980) considered a geostrophic current with a constant direction for the velocity, and showed that the components of the wave-number parallel to the iso-velocity surfaces were conserved. A new layer was defined, based on a value of the intrinsic frequency between  $f$  and  $N$ , that waves crossed or where they were trapped, depending on their propagation direction before approaching this so called 'valve-effect' critical layer. In the limit of purely horizontally or vertically sheared velocity fields, this critical layer merges with respectively the  $\omega_o = 0$  or  $\omega_o = N$  critical layers studied by Koop (1981) and Staquet & Huerre (2002). Staquet & Huerre (2002) observed in numerical simulations that waves propagating against the flow were trapped near a critical layer  $\omega_o = N$ , in agreement with predictions from the WKB theory, and led to wave breaking through a buoyancy induced instability. For general background flows, some theoretical studies (see, i.e. Badulin & Shrira (1993)) showed that these trapping and reflection processes are still present in the framework of the WKB theory, but their results were not compared to experiments or numerical simulations.

Here, we present experimental observations and measurements of the propagation of inertia-gravity waves in vortex flows. Baroclinic vortices are generated by a horizontal rotating disk, of which the flow characteristics are known from Moulin & Flor (2002); barotropic-like vortices are generated by siphoning fluid through a perforated tube. The WKB simulations are compared with experimental results, and in case wave-breaking occurs, the WKB theory serves as a prediction tool and provides information about the instability mechanism. In contrast with previous works on uni-directional flows in Cartesian coordinates, effects of the flow curvature and of the viscous damping are taken into account.

In section §5.2, the WKB approximation will be applied to axi-symmetric background flows in cylindrical coordinates. The effect of the curvature on the wave propagation, and more specifically, on the wave energy amplification, will be considered for a simple flow with constant vertical and radial shear. For an interaction length  $L$  and radius  $R$ , the effect of the curvature is negligible in the limit  $L/R \rightarrow 0$ . Subsequently, we will discuss the impact of both the flow curvature and the viscous damping on the energy amplification, introducing a wave Reynolds number  $Re_{wave}$  based on the incident wave characteristics and the flow shear. In section §5.3, the experimental set-up and the measurement methods will be presented, followed by a description of the WKB simulations. In section §5.4, we present observations and measurements of the interaction of waves with baroclinic and barotropic vortices, and the WKB simulations, followed by observations

of breaking waves interacting with a barotropic vortex, in section §5.5. In this same section, conditions required for wave-breaking are discussed. Finally, the conclusions are summarized and discussed in section §5.6.

## 5.2 WKB theory for vortex-like flows

If the scales of the background flow are large compared to the wave-length, the interaction of waves with this flow may be treated within the framework of geometric optics, also called the WKB theory. This theory is reviewed in many textbooks in a general context (see, e.g., Lighthill (1978); Leblond & Mysak (1978)), and is based on an asymptotic expansion in a small-parameter  $\epsilon$ , defined as the wave-length compared to typical spatial scales of the background flow. Lowest order yields the local wave structure, i.e. its wave-number and the dispersion relation, and the second order determines the evolution of the wave-number and the amplitude. The amplitude vary on a scale of order unity corresponding to scales of the background flow, while the wave-number evolves on a shorter scale of order  $O(1/\epsilon)$ . Inertia-gravity waves may then be described by this asymptotic expansion when the background flow correspond to low Rossby and Froude numbers, i.e.  $Ro = U/Rf = O(\epsilon)$  and  $Fr = U/Nf = O(\epsilon)$ , with  $U$ ,  $R$ , maximum velocity and size of the vortex, respectively,  $f$ , Coriolis parameter and  $N$  buoyancy frequency. Under these conditions, only the local fields of the flow are retained in the dispersion relation and gradients will appear in equations driving the wave-number evolution.

Here, we apply the WKB theory to a monochromatic wave field whose time-dependance is given by its absolute frequency  $\omega_{abs}$ . the intrinsic frequency  $\omega_o$  of the wave, defined as its frequency in a referential moving with the local mean flow velocity  $\mathbf{U}$ , is inferred from the Doppler shifting relationship (5.1) and is linked to the local components of the wave-number  $k_x, k_y$  and  $k_z$  by the following dispersion relationship :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_h^2 N^2 + k_z^2 f^2}{k_h^2 + k_z^2}}. \quad (5.2)$$

The wave field is described by the three components of the velocity  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$ , the pressure  $\tilde{P}$  and the buoyancy  $\tilde{b} = (g/\rho_o)\tilde{\rho}$ , where  $\tilde{\rho}$  is the density perturbation. These different components of the wave field fullfill the polarisation relationships which read

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{b} \\ \frac{\tilde{P}}{\rho_o} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \omega_o k_x + i f k_y \\ \omega_o k_y - i f k_x \\ -\frac{\omega_o^2 - f^2}{N^2 - \omega_o^2} \omega_o k_z \\ i N^2 \frac{\omega_o^2 - f^2}{N^2 - \omega_o^2} k_z \\ \omega_o^2 - f^2 \end{bmatrix} \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{abs} t), \quad (5.3)$$

where  $A$  is an amplification factor which evolve on time and spatial scales larger than for the wave phase. The wave energy propagates along rays defined by the ray equations

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U} + \mathbf{v}_g \quad (5.4)$$

where  $\mathbf{v}_g$  is the intrinsic group velocity of the wave, whose components are given by the formula

$$v_{gx} = \frac{N^2 - \omega_o^2}{\omega_o k^2} k_x, \quad v_{gy} = \frac{N^2 - \omega_o^2}{\omega_o k^2} k_y, \quad v_{gz} = -\frac{\omega_o^2 - f^2}{\omega_o k^2} k_z$$

where  $k$  is the norm of the wave-number  $\mathbf{k}$ . The evolution of the wave-number components along a ray can be inferred from the Doppler relationship and yields the refraction equations (using Newtonian notations)

$$\frac{dk_i}{dt} = -\frac{N}{\omega_o} \left( \frac{\omega_o^2 - f^2}{N^2 - f^2} \right) \frac{\partial N}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^3 k_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}. \quad (5.5)$$

Equations (5.4) show that in the WKB theory, the wave energy is advected by the local fluid velocity  $\mathbf{U}$ , and the Doppler effect (5.1) is interpreted in equations (5.5) in a distortion of the wave-number vector by the local background shear and by the variations of the Brunt-Vassaila frequency. Integration of the set of ordinary differential equations (5.4) and (5.5) from an initial state, defined by a position vector  $\mathbf{r}_o$  and incident wave characteristics  $\mathbf{k}_o$ , gives the ray along which the wave energy propagates, and the evolution of the wave characteristics along this ray.

Another equation is required to predict the evolution of the wave amplitude along the ray, proportional to the amplification factor  $A$  which appears in equations (5.3). Bretherton (1966) showed that the higher order equations that drive the amplitude evolution in the WKB approximation, could be simplified into :

$$\nabla \cdot \left[ (\mathbf{v}_g + \mathbf{U}) \frac{E}{\omega_o} \right] = 0, \quad (5.6)$$

describing the energy evolution.  $E$ , the local density of energy, includes kinetic and potential parts, and is defined by  $E = 1/2(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2 + \tilde{b}^2/N^2)$  where  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  and  $\tilde{b}$  are the velocity and buoyancy parts of the wave field.  $E$  is linked to the amplification factor  $A$  by the relationship

$$E = \left( A \omega_o \frac{k_h}{k_z} k \right)^2.$$

For a tube of rays instead of a ray alone, equation (5.6) represents the conservation of the wave action  $E/\omega_o$  flux along this tube of rays. When the tube section area decreases, flux conservation leads to an increase of the wave-action. Therefore, the wave-action increases (decreases) when rays converge (diverge).

In all the studies on uni-directional Cartesian flows, based on conservation of the wave-number component parallel to the background flow, the intrinsic frequency  $\omega_o$  depends only on the spatial position. Critical or reflection layers are well defined and are the same for all rays forming an initially parallel tube. Therefore, when the wave approaches a critical layer, cross-sectional area of the ray tube goes to zero and the conservation of wave action flux described by equation (5.6) leads to an infinite amplification of the energy  $E$ . This explanation does not hold for flows with curvature, since each ray approaches its own critical layer, leading to a finite amplification of the energy.

### 5.2.1 Inviscid propagation in a vortex flow

The ray and refraction equations (5.4) and (5.5), once transformed into a cylindrical reference frame  $(r, \theta, z)$  for a purely azimuthal velocity field  $U_\theta(r, z)$  (see §3.2.1 for details), read

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_{gr} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{V_{g\theta}}{r} = \frac{U + v_{g\theta}}{r} \\ \frac{dz}{dt} &= v_{gz} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dk_r}{dt} &= +k_\theta \frac{v_{g\theta} + U}{r} - \frac{N}{\omega_0} \left( \frac{\omega_0^2 - f^2}{N^2 - f^2} \right) \frac{\partial N}{\partial r} - k_\theta \frac{\partial U}{\partial r} \\
 \frac{dk_\theta}{dt} &= -k_r \frac{v_{g\theta}}{r} \\
 \frac{dk_z}{dt} &= -\frac{N}{\omega_0} \left( \frac{\omega_0^2 - f^2}{N^2 - f^2} \right) \frac{\partial N}{\partial z} - k_\theta \frac{\partial U}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

In order to investigate the effect of the flow curvature on the amplification of wave energy, we will focus on simple flows where the velocity shear is constant. In a first approximation, we will neglect the variations of the Brunt-Vassaila frequency  $N(\mathbf{r})$ . We consider the upper outer region of a lens-shaped vortex with approximately constant shear and zero velocity outside. In this region, the velocity field of this vortex is

$$\begin{aligned}
 U_\theta(r, z) &= U_L(R - r) - U_H z & \text{for } U_L r + U_H z < U_L R \\
 U_\theta(r, z) &= 0.0 & \text{for } U_L r + U_H z > U_L R
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

where  $R$  is the radial position at which the incident wave begins to penetrate into the vortex field,  $U_L$  and  $U_H$  are the absolute values of the shear in the radial and vertical directions, and are defined positive.

The incident wave has an initial azimuthal component  $k_\theta$  and a frequency  $\omega_{abs}$  and propagates toward the vortex flow field with an initial horizontal angle  $\alpha$  with the azimuthal direction. The flow pattern and incident wave orientation are illustrated in figure 5.1.

For an equivalent Cartesian uni-directional flow with exactly the same values of the velocity shear, the wave propagation would occur on a horizontal length scale,  $L$ , deduced from the Doppler equation (5.1), and defined as  $L = N/k_\theta U_L$ . non-dimensional ray and refraction equations are deduced from (5.7) and (5.8), after scaling the coordinates  $r \rightarrow R + Lr^*$ ,  $z \rightarrow Lz^*$ ,  $\theta \rightarrow (L/R)\theta^*$ ,  $t \rightarrow (1/U_L)t^*$ , the constant velocity field shears  $U_r \rightarrow U_L$ ,  $U_z \rightarrow U_H$ , the velocity  $U(r, z) \rightarrow -U_L Lr^* + U_H Lz^*$ , and the wave characteristics  $\omega_o \rightarrow N\omega_o^*$ ,  $k \rightarrow k_\theta k^*$ ,  $v_g \rightarrow N/k_\theta v_g^*$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= v_{gr} \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{v_{g\theta} - r - \frac{U_H}{U_L} z}{1 + \frac{L}{R} r} \\
 \frac{dz}{dt} &= v_{gz}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dk_r}{dt} &= k_\theta \left( 1 + \frac{L}{R} \frac{v_{g\theta} - r - \frac{U_H}{U_L} z}{1 + \frac{L}{R} r} \right) \\
 \frac{dk_\theta}{dt} &= -\frac{L}{R} \frac{v_{g\theta} k_r}{1 + \frac{L}{R} r} \\
 \frac{dk_z}{dt} &= \frac{U_H}{U_L} k_\theta
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

where  $r$  is a local radial coordinate located at the beginning of the flow for  $z = 0$  (see figure 5.1), and  $*$  has been dropped.

This non-dimensional set of equations depends on a few non-dimensional parameters,  $N/f$ ,  $L/R$  and  $U_H/U_L$  which measures the baroclinicity of the flow. The solution depends also on the characteristics of the incident wave, its frequency  $\omega_{abs}$  and its incident angle  $\alpha$ . In the second

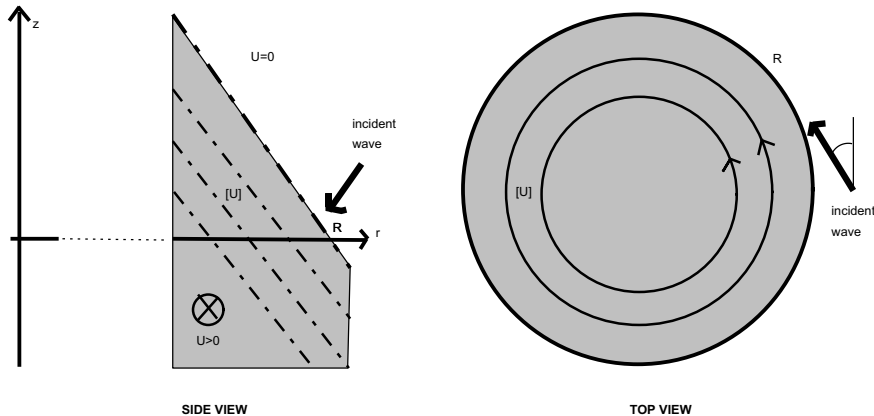


FIG. 5.1 – Sketch of the wave interaction with a constant shear flow (see text).

equation in (5.11), the azimuthal component of the wave-number  $k_\theta$  is not conserved anymore. In non-dimensional form, it appears that this difference of behavior with the unidirectional Cartesian situation increases with the relative interaction length  $L/R$ , which will give a measure of the curvature effect on the interaction between the waves and the background flow.

No component of the wave-number is conserved and, therefore, no analytical solution is available. A numerical approach is then required for a finite value of the non-dimensional parameter  $L/R$ . The equations were solved using a fourth order Runge-Kutta algorithm applied to the six-component vector  $(k_r, k_\theta, k_z, r, \theta, z)$ . Numerical solutions were also obtained using a five-component vector and replacing one of the refraction equation by the Doppler equation (5.1), but no quantitative difference was found. The energy evolution along a ray was calculated by tracing a circular tube of rays, initially parallel and surrounding the central ray. Values of the area of cross-sections of this tube were numerically estimated at each time step; here equation (5.6) is interpreted as a conservation of the wave action flux along the tube to infer the energy evolution along the central ray. In the limit  $L/R = 0$ , equations turning to be the same as for a Cartesian unidirectional flow, analytical solutions were available and compared successfully to numerical simulations.

In contrast with the uni-directional Cartesian case, all the components of the wave vector are changing along a ray, so that the intrinsic frequency of the wave depends on the spatial position as well as the ray considered. The main consequence is that the wave is expected to be trapped in a way similar to the unidirectional cases, but the rays do not converge to the same critical layer, and the cross-sectional area of a tube of rays may not go to zero, leading to an only finite amplification of the energy in the trapping region.

First, we considered waves propagating in front of a vortex flow with low baroclinicity  $U_H/U_L$  and  $\alpha = 3\pi/4$ . To investigate the influence of the curvature  $L/R$ , all the other parameters ( $w_{abs}$ ,  $N/f$ ) were fixed. In figure 5.2, meridional and top view of a ray are plotted for some value of  $L/R$  and is representative of what was found for other values of  $L/R$ . The wave first reflects on a reflection level where  $\omega_o$  approaches  $N$  (at  $z = -0.35$ ), and is then trapped near a critical layer, in agreement with results from Olbers (1980) obtained in the limit  $L/R = 0$ .

In figure 5.3, the evolution of the energy from the beginning of the interaction is plotted for different values of  $L/R$  and for the Cartesian limit  $L/R = 0$ . The sharp peak observed in the curves with low  $L/R$  corresponds to the reflection of waves on the layer  $\omega_o = N$ , where the WKB approximation predicts an infinite amplification of energy. Previous studies have shown

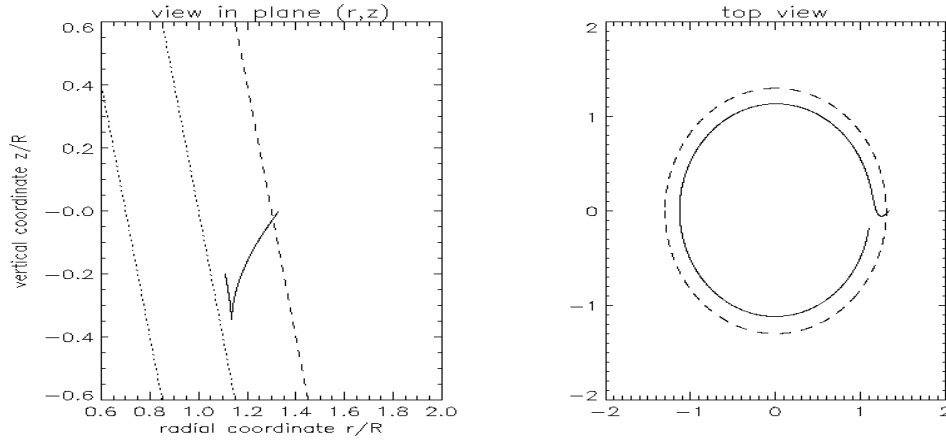


FIG. 5.2 – Ray propagating in front of a weakly baroclinic flow ( $U_H/U_L = 0.25$ ) in the meridional plane ( $r, z$ ) (left) and top view (right). —, ray; - - - - -, limit of the non-zero velocity field; ·····, iso-velocity surfaces.

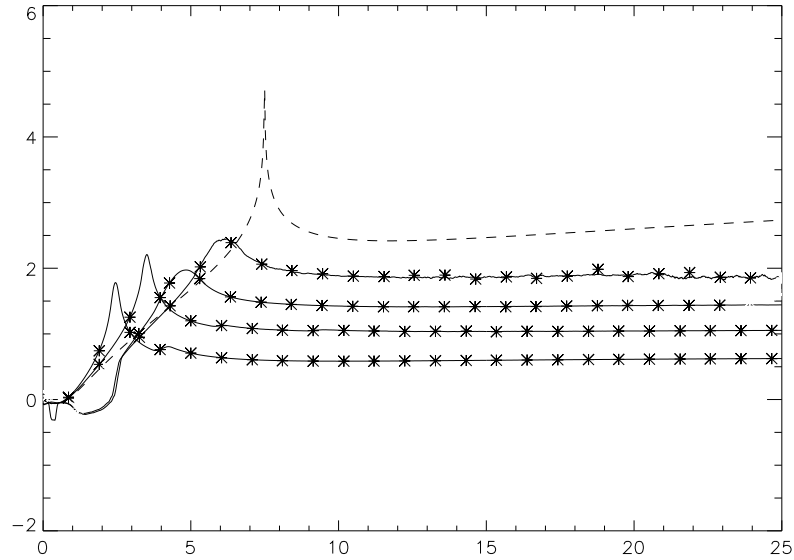


FIG. 5.3 – Evolution of energy (logarithmic scale) along rays propagating in front of a weakly baroclinic flow ( $U_H/U_L = 0.25$ ), for different values of  $L/R$ . - - - - -, analytical solution for  $L/R = 0$ ; —, numerical solutions for  $L/R = 0.54, 0.20, 0.07, 0.02$ .

that the predictions with the WKB approximation remained valid before and after this reflection. Therefore, the parts of the curve before and after the reflection should be linked by a smooth profile, instead of a peak, to reproduce the real energy evolution in the neighbourhood of the reflection layer.

In the Cartesian limit  $L/R = 0$ , all the rays of the tube are trapped at the same critical level, and the area of the tube cross-section goes to zero as time goes to infinity, leading to an

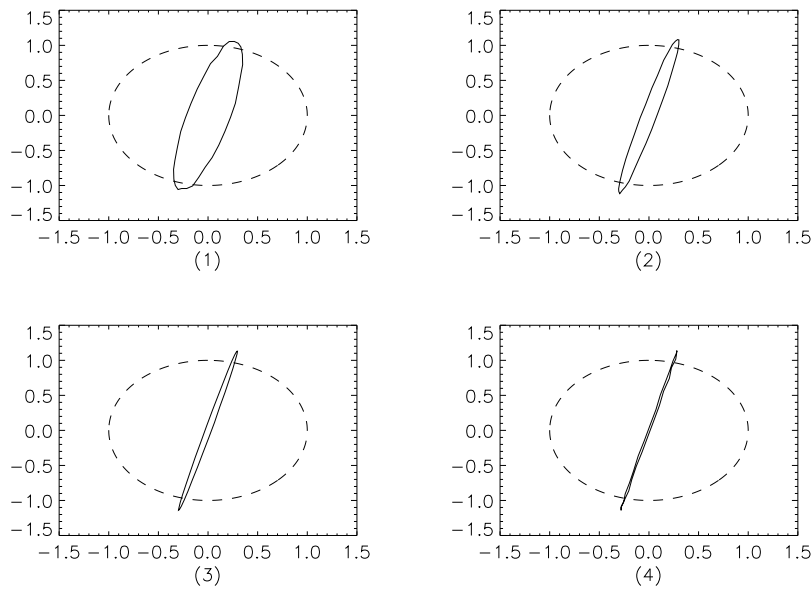


FIG. 5.4 – Cross-sections of the tube of rays traced in figure 5.3 at  $t = 25$ . ----, initial circular shape; —, final shape at  $t = 25$ . Values of  $L/R$  : (1) 0.54, (2) 0.20, (3) 0.07, (4) 0.02 .

unlimited growth of the wave energy. For a finite value of the curvature  $L/R$ , each ray converges to its own critical level, and the cross-section of a initially circular tube of rays takes an elliptical shape like in the Cartesian limit, but the small axis length does not go to zero anymore. Indeed, the section area goes to a finite value as time goes to infinity, and leads to the finite increase of energy observed in curves of figure 5.3. Finally, cross-sections of the tube for the different values of  $L/R$  are plotted in figure 5.4 and clearly show that the area of the final elliptical shape decreases as  $L/R$  goes to zero. Waves are trapped in the mean flow and the wavelength decreases with time like in the Cartesian uni-directional situation, but the energy reaches a finite value.

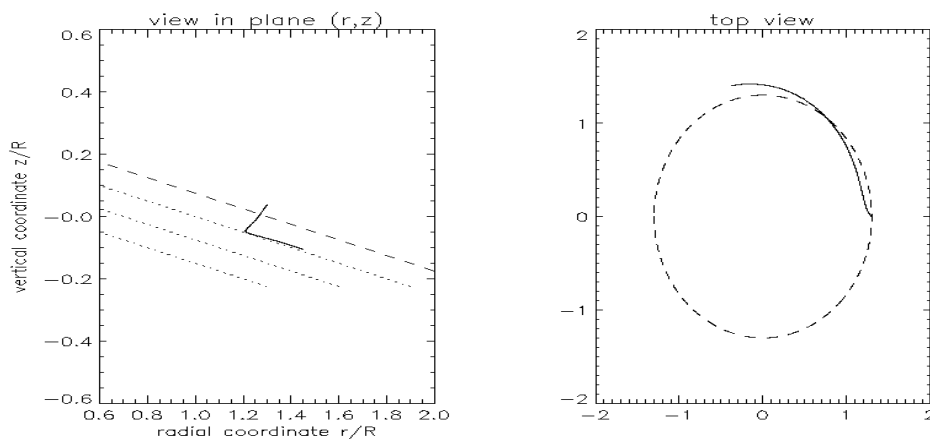


FIG. 5.5 – ray propagating along a strongly baroclinic flow ( $U_H/U_L = 4.0$ ) in the meridional plane  $(r, z)$  (left) and top view (right). —; ray. ----; limit of the non-zero velocity field. ·····; iso-velocity surfaces.

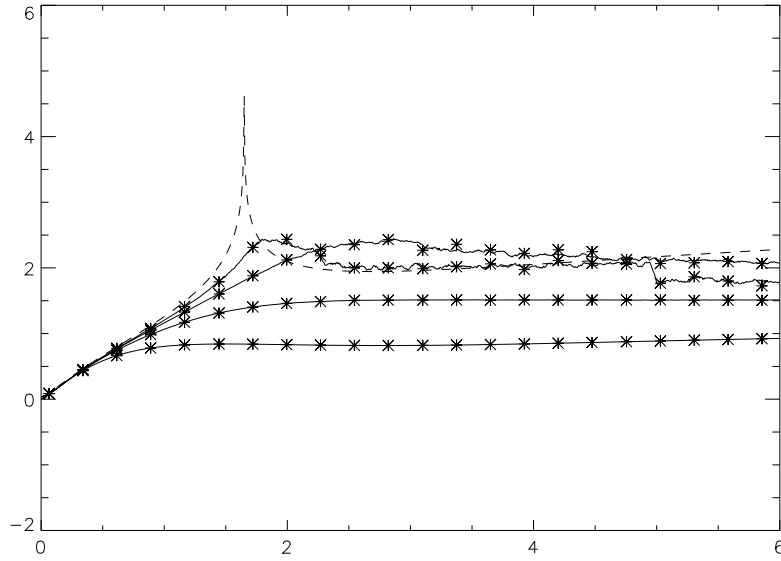


FIG. 5.6 – Evolution of energy (logarithmic scale) along rays propagating in the same direction as a strongly baroclinic flow ( $U_H/U_L = 4.0$ ), for different values of  $L/R$ . - - - -; analytical solution for  $L/R = 0$ . —; numerical solutions for  $L/R = 0.89, 0.21, 0.08, 0.03$ .

In figure 5.5, meridional and top views of a ray propagating along a vortex flow with high value of baroclinicity  $U_H/U_L$  and  $\alpha = \pi/4$ , are plotted for some value of  $L/R$  and are representative of what was found for other values of  $L/R$ . The wave first reflects at the reflection level of minimal intrinsic frequency,  $\omega_c$ , and is then trapped near a critical layer where the intrinsic frequency is just above  $\omega_c$ , in agreement with results from Olbers (1980) obtained in the limit  $L/R = 0$ . In figure 5.6, the evolution of the energy along rays are plotted for different values of  $L/R$ . In these simulations, all the other parameters  $\omega_{abs}$ ,  $N/f$  are kept constant. The section area of a tube of rays goes to zero when the wave approaches the critical layer for  $L/R = 0$ , while for finite  $L/R$ , the section area goes to a finite value as time goes to infinity and this area decreases with increasing  $L/R$ . Therefore, the effect of  $L/R$  on the energy amplification for waves trapped in this strongly baroclinic flow is the same as for a wave propagating in front of a weakly baroclinic vortex.

The influence of the other non-dimensional parameters  $N/f$ ,  $U_L/U_H$  and of the wave initial characteristics  $\omega_{abs}$  and  $\alpha$  have been investigated, and the same behavior as for the waves considered in figures 5.3 and 5.6 was observed.

These WKB predictions for a constant shear flow show that the curvature leads to a finite amplification of energy and that the discrepancy with predictions for an equivalent unidirectional Cartesian flow increases with  $L/R$ . However, trapped waves still undergo a decrease of their wavelength towards zero, and derivated components of the wave field keep on growing linearly with time. Conservation of the energy density  $E$  may still leads to non-linear effects or breaking events. For instance, the local value of the buoyancy frequency, inferred from the superposition of the buoyancy background field and the buoyancy wave field, oscillates with the wave frequency around its average value  $N^2$ , and it is straightforward to show that these oscillation grow in amplitude as time goes on, even for constant value of the energy density. Obviously, this increase



of the oscillations will generate negative gradients of density associated with over-turning of the waves. Therefore, the flow curvature does not prevent non-linear effects or wave-breaking, but surely tends to delay their occurrence in comparison with equivalent uni-directional flows in Cartesian coordinates. Besides, previous experimental studies have shown that viscosity can suppress them, and viscous effects have to be included in WKB simulations aiming at reproducing our experiments. Combined effects of curvature and viscosity are then considered in the next section for the simple flow described by (5.9).

### 5.2.2 Viscous propagation into a vortex-like flow

In order to predict the viscous damping of the wave energy in the framework of the WKB approximation, a modified version of the wave-action equation (5.6) is used, which reads (see Booker & Bretherton (1967))

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ (\vec{v}_g + \vec{U}) \frac{E}{\omega_o} \right] = -\nu k^2 \frac{E}{\omega_o} \quad (5.12)$$

where  $\nu$  is the viscosity of the fluid and  $k$  is the norm of the wave-number.

In contrast with the inviscid case, where the equation was interpreted as a conservation of the wave action, the wave action decreases here along the ray. The dissipation (r.h.s. of equation (5.12)) can be evaluated numerically by calculating the volume of a portion of the tube of rays. The decrease in the wave action along this portion is then easily obtained and the evolution of wave energy along a ray is computed step by step.

Booker & Bretherton (1967) pointed out that the wave is constrained by viscous effects, and reaches a maximal value when the growth rate of energy associated with the trapping process is balanced by the viscous damping rate, which increases with the decrease in wavelength. For a purely vertical shear flow without background rotation and waves propagating along the horizontal flow direction (see Booker & Bretherton (1967)), the maximal value of the energy amplification becomes a function of the non-dimensional number  $U_H/\nu k_y^2$ , where  $U_H$  is the vertical velocity shear, and  $k_y$  is the component of the wave number parallel to the flow.

For other Cartesian uni-directional flows studied by Olbers (1980) and Staquet & Huerre (2002), the maximal value of energy amplification depends also on the other non-dimensional parameters such as  $N/f$ ,  $U_L/U_H$  and so on. Without aiming at a full description of the dependence of this maximal energy amplification with non-dimensional parameters, we can follow Booker & Bretherton (1967) and estimate the relative importance of the trapping effect compared to the viscous damping by a Reynolds number,  $Re_{wave}$ , defined as

$$Re_{wave} = \frac{\sqrt{U_L^2 + U_H^2}}{\nu k^2} \quad (5.13)$$

where  $U_L$  and  $U_H$  are respectively the horizontal and vertical velocity shears and  $k$  is the norm of the wave-vector.

For high  $Re_{wave}$ , the amplification will follow the predictions of the inviscid model for a long time, and the interaction is expected to give rise to strong nonlinear effects. On the other hand, for low  $Re_{wave}$ , the viscous damping will quickly suppress any energy amplification and all the incident wave energy will be dissipated by diffusive processes.

In figure 5.7, the dependance of the maximal value of energy amplification is plotted as a function of  $Re_{wave}$  for waves propagating against the vortex flow with low baroclinicity  $U_L/U_H$  and  $\alpha = 3\pi/4$ . This maximal value is deduced from energy evolution curves of figure 5.2, where

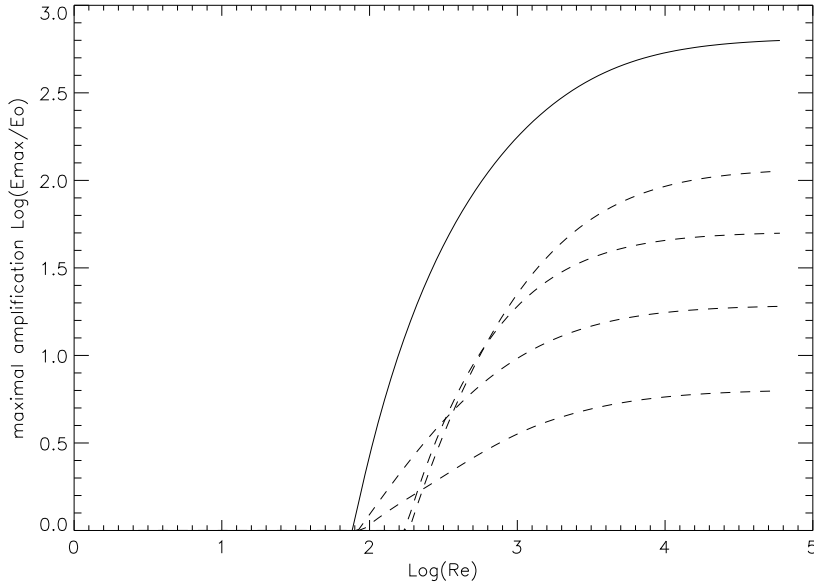


FIG. 5.7 – Maximal energy amplification as a function of the  $Re_{wave}$  (logarithmic scales) for different values of  $L/R$  and rays propagating in front of a weakly baroclinic flow ( $U_H/U_L = 0.25$ ). —; prediction for  $L/R = 0$ . - - - -; predictions for  $L/R = 0.54, 0.20, 0.07, 0.02$ .

the reflection peak was replaced by a smooth profile. The solid line corresponds to the zero-curvature limit  $L/R = 0$ . A minimal value of  $Re_{wave}$  is then required for an amplification to occur. Dashed lines correspond to different values of the curvature  $L/R$ . As  $L/R$  increases, the minimal value of  $Re_{wave}$  required to observe an amplification decreases weakly, but the amplification obtained for high  $Re_{wave}$  decreases strongly with  $L/R$ .

Combined effects of viscous damping and curved topology have then a quantitative impact on the wave energy amplification during its interaction with a mean flow, and therefore are taken in account in the experiments presented in the next section.

## 5.3 Experimental and numerical methods

### 5.3.1 Experimental set-up

Experiments were carried out in a 1 m square tank of 45 cm depth, mounted on a rotating-table. A side view of the experimental set-up is sketched in figure 5.8. The tank was filled with a linearly salt-stratified fluid rotating with a uniform angular velocity  $\Omega$  about its vertical axis. The Coriolis parameter  $f = 2\Omega$  varied between  $0.1 \text{ rad s}^{-1}$  and  $0.7 \text{ rad s}^{-1}$ , and the buoyancy frequency  $N$  of the water solution, defined as  $N^2 = -(g/\rho_0)\partial\rho/\partial z$ , was taken between  $1.0 \text{ s}^{-1}$  and  $1.6 \text{ s}^{-1}$ . Experimental values of  $N$  were calculated measuring the density at different depths in the tank with a refractometer, or recording vertical density profiles with a conductivity probe.

To generate *baroclinic vortices* with vertical and horizontal velocity shear, the fluid was spun-up by a horizontal disk of radius  $R$  ( $R = 6 \text{ cm}$  or  $R = 12 \text{ cm}$  and thickness 3 mm) placed at mid height near the rotation axis of the turn-table and mounted on the axis of a motor embedded in a water-proof plastic cylinder. The distance from the tank base to the lower surface of the disk

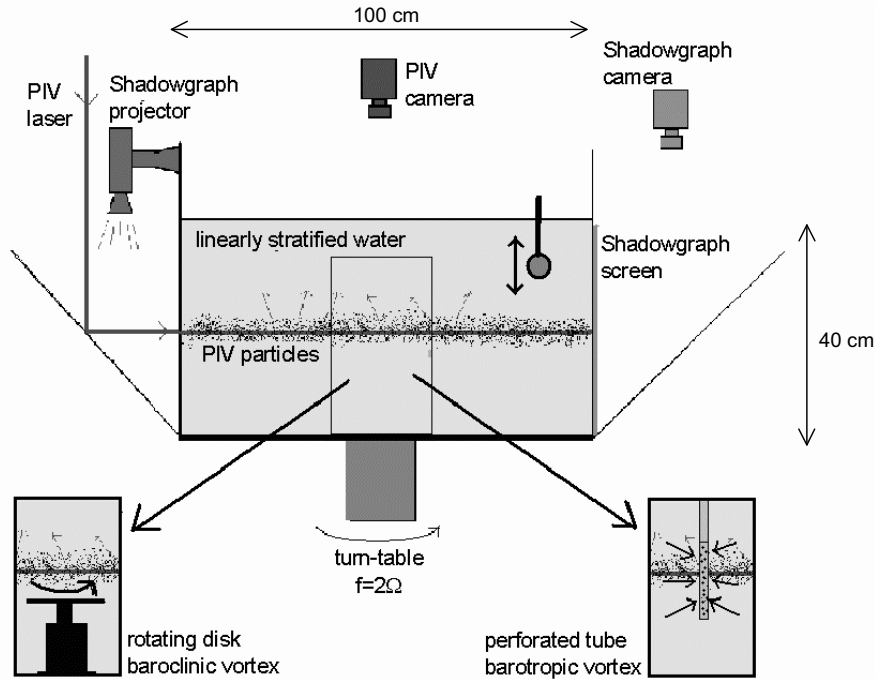


FIG. 5.8 – Sketch of the experimental set-up.

was 20 cm. The disk rotated about a vertical axis in cyclonic direction with a vertical vorticity  $\omega_d$  ranging from  $0.13 \text{ rad s}^{-1}$  to  $0.6 \text{ rad s}^{-1}$ . The value of the Rossby number  $Ro = \omega_d/f$  was varied between 0.3 and 3.3 whereas the horizontal Reynolds number,  $Re = \omega_d R^2/\nu$ , was between 320 and 3700. The structure and time evolution of the vortex generated by the rotation of the disk was investigated in a previous study (see Moulin & Flor (2002)). In the present work, a well defined azimuthal flow was required to investigate the interaction with waves, and this condition was achieved by waiting long enough after the onset of the disk rotation. As shown in Moulin & Flor (2002), for times far larger than the diffusive time  $\tau_{sv} = 0.2R^2/\nu$ , the flow is well described by a purely diffusive model. The vertical extent of the vortex flow is then generally comparable with its radial extent, given by the disk radius  $R$ . Radial and vertical values of the shear  $U_L$  and  $U_H$  based on the value of the disk velocity at the edge leads then to a baroclinicity parameter  $U_H/U_L$  around unity for the vortex. Figure 5.9 shows the agreement between PIV measurements of vertical vorticity above the disk and predictions from the diffusive model for very large times.

To generate *barotropic vortices* with strong radial shear compared to the vertical shear, a 1.5 cm diameter tube which was perforated over a vertical extent of 10 cm, was introduced vertically in the centre of the tank. A radial inflow was generated by siphoning with a pump. By conservation of momentum, a cyclonic flow forms, of which the circulation  $\Gamma = \oint U_\theta(r) dr$  depends on the total volume,  $V$ , pumped through the tube. After removing the tube, this forcing resulted typically in a vortex with a gaussian vorticity profile in the mid-plane, which slowly diffused radially outwards. Assuming a uniform inwards radial flow on a vertical extent  $H = 10 \text{ cm}$  during the generation, conservation of absolute vorticity would yield a relationship between  $\Gamma$  and  $V$  that reads  $\Gamma = fV/H$ . PIV measurements of  $\Gamma$  in the mid-plane after removal of the tube are generally lower than this prediction, because of friction on the tube surface, displacements of iso-density surfaces and vertical diffusion of momentum. Moreover, vertical diffusion of momentum yields

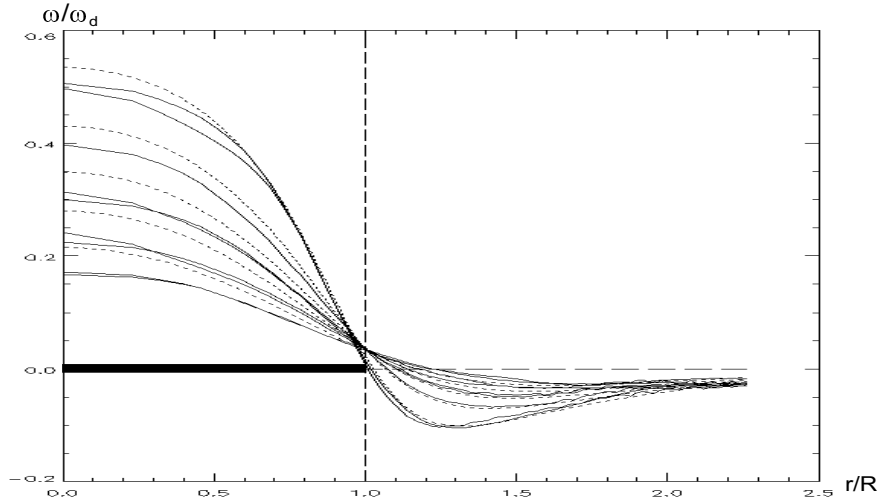


FIG. 5.9 – Radial profiles of non-dimensional vertical vorticity  $\omega_z/\omega_d$  at different heights for a vortex generated by a rotating disk.  $\omega_d$  is the vertical vorticity of the rotating disk. —; experimental curves based upon PIV measurements, - - - -; curves predicted by the diffusive model of [Moulin & Flor (2002)]. Values of the experimental parameters :  $f = 0.13 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.2 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 6 \text{ cm}$ ,  $\omega_d = 0.31 \text{ s}^{-1}$ . Heights above the disk of the horizontal planes where PIV measurements were carried out are 2.25, 2.9, 2.5, 4.1, 4.8 cm.

to a slow decay of  $\Gamma$  with time after removal of the tube, associated with weak vertical diffusion of momentum. In order to predict the evolution of the vortex flow, numerical integration of a diffusive equation for momentum was carried out (see Clercx *et al.* (2001) for details on this equation). The initial state is a constant vorticity tube of height 10 cm and radius 1 cm, which evolves quickly into a gaussian-like distribution of vorticity in the radial direction, and a smooth profile in the vertical direction. Figure 5.10 shows excellent agreement between PIV measurements of radial profiles of vertical vorticity in a mid-plane at different times, and predictions deduced from the numerical integration of the diffusive equation. The evolution of the vortex radius,  $R_{max}$ , defined as the radial position of the maximal velocity in the mid-plane, is also well estimated by the diffusive law for a Lamb-Oseen vortex with an initial value of  $R_{max} = 1.5 \text{ cm}$  at the time when the vortex is created. Radial profiles of azimuthal velocity in the mid-plane are then well fitted by the solution of a two-dimensionnal diffusive equation :

$$U_\theta(r, t) = \Gamma/2\pi r(1 - \exp^{-(r/R(t))^2}), \quad (5.14)$$

with  $R(t)$  a function of time related to the radius of the vortex by  $R_{max}(t) = 1.12R(t) = 1.12 * 2\sqrt{\nu t}$ .

Since the initial value of  $R_{max}$  just after the removal of the tube is around 1.6 cm, the time coordinate  $t$  is chosen to be equal to 50 s when the tube is removed. The radius of the vortex increases with time along  $R_{max}(t) = 1.12 * 2\sqrt{\nu t}$ , while the maximal value of velocity,  $U_{max}$  is inferred from the relationship  $0.75(\Gamma/2\pi) = R_{max}U_{max}$ , valid for a Gaussian vorticity distribution. Therefore, by changing the volume and the time of the interaction, the characteristics of the vortex are well known and used to describe the background flow in the WKB simulations.

Inertia-gravity waves were generated by the vertical oscillation of a horizontal cylinder, where the cylinder diameter  $D$  ranged from 0.5 cm to 5.0 cm, and the amplitude was chosen independently between 0.5 and 3 cm. Different interaction configurations for each kind of vortex were

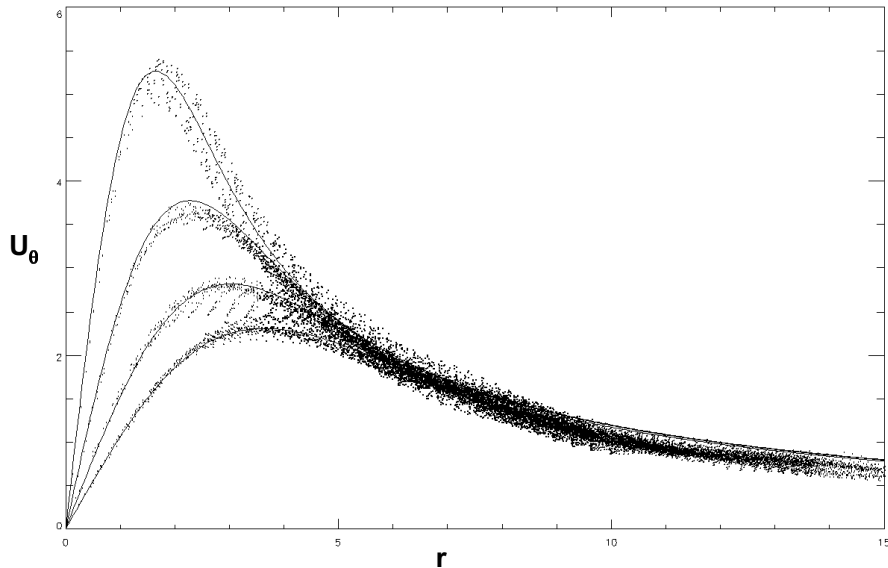


FIG. 5.10 – Radial profiles of vertical vorticity  $\omega_z$  in the mid-plane at different times for a vortex generated by aspiration. —; experimental curves based upon PIV measurements at times 25, 91, 172, 251 s after removal of the tube. - - - -; curves predicted by the diffusive model at times 30, 90, 170 and 250 s from an initial uniform vorticity distribution. Values of experimental parameters :  $f = 0.4 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.05 \text{ s}^{-1}$ ,  $V = 3.4 L$ . Measured circulation,  $\Gamma/2\pi = 12.0 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

then investigated by changing the diameter, the position and the oscillation frequency of the cylinder.

To measure the velocity in horizontal planes during the interaction, the PIV method developed by Fincham & Delerce (2000) was used. Values of the vertical vorticity and the horizontal divergence were then calculated using their algorithms. The evolution in the density field was recorder from shadowgraph images.

### 5.3.2 WKB numerical simulations

The WKB simulations, based on equations (5.4) and (5.5), served to interpret these experimental observations. In order to reproduce closely the experimental background velocity of baroclinic vortices, numerical solutions of the diffusive model presented in Moulin & Flor (2002) were used. Variations in buoyancy frequency  $N$  were neglected, since its impact on the wave propagation is relatively weak compared to that of the velocity field. For the barotropic vortices, numerical solutions of a diffusion equation were able to reproduce these measurements and used as a background flow for the WKB simulations.

The planar wave pattern generated by the oscillating cylinder was found to be well described by a group of parallel rays originating from the cylinder. Though the spatial spectrum of waves generated by an oscillating body is large (see Appleby & Crighton (1987)), it is experimentally confirmed (see, e.g., Lighthill (1978)) that the dominant wavelength of these waves approximately equal to twice the diameter of the cylinder. This experimental value was used to initialize the WKB simulations. Solving was then carried out for a group of rays whose origins were located at the cylinder surface extremal positions (depending upon the diameter and the amplitude of the oscillations), with an initial wave-length  $\Lambda = 2D$ , and the oscillation frequency,  $\omega_{abs}$ , equal

to the experimental values.

In order to investigate the stability of the flow, marginal stability conditions are considered for different instability classes. More specifically, negative values of the local vertical density gradient and the Rayleigh function,  $Ra = (f + u_\theta/r + \partial u_\theta/\partial r)(f + 2u_\theta/r)$  ( $u_\theta$  is the azimuthal velocity field) are assumed to lead to over-turning and centrifugal instabilities (see, e.g., Orlandi (1972), Kloosterziel & van Heijst (1991)), respectively. Local values of the Richardson number,  $Ri = N^2/[(\partial u_\theta/\partial z)^2 + (\partial u_r/\partial z)^2]$  ( $u_\theta$  and  $u_r$  are azimuthal and radial velocity fields), below 1/4 are assumed to trigger Kelvin-Helmoltz instabilities (see, e.g., Howard (1961), Miles (1961)). The velocity and density fields which appear in these expression correspond to total fields, obtained by superposition of the background vorticity field and wave fields. Local values with time of the relevant non-dimensionnal numbers  $Ra$ ,  $Ri$  and  $[-g/\rho_o(\partial\rho/\partial z)]/N^2$  are deduced from numerical solutions for the background flow and predictions of the local wave field by WKB simulations. Since the WKB simulations only predict the energy amplification, initial values of the wave energy are inferred from comparisons between PIV measurements of the wave field velocity and predictions of the WKB simulations. Minimal values of the non-dimensionnal numbers reached during a wave period are calculated by changing the wave phase between 0 and  $2\pi$ . When the marginal stability criteria is broken during a wave period, we consider that it indicates the occurrence of the corresponding instability.

## 5.4 Comparison between observations and WKB simulations

### 5.4.1 interaction with baroclinic vortices

We consider a vortex generated by a rotating disk. Due to diffusive processes, the vertical and radial extents are comparable in the experiments ( $t > \tau_{su}$ ), and the strength of the shear in radial and vertical directions depends on the vorticity at the disk surface,  $U_L = U_H \approx \omega_d/2$ . The velocity field of the vortex extends typically on a radial distance twice the disk radius (see Moulin & Flor (2002)). For each ray generated by the oscillating cylinder, a value of the penetration length  $L$  may be deduced from the initial value of the wave-vector azimuthal component,  $k_{\theta o}$ , and the radial velocity shear,  $U_L$ , reading  $L = 2N/k_{\theta o}\omega_d$ .  $L$  is the distance on which the Doppler shifting would change the intrinsic frequency  $\omega_o$  of the wave by an amount equal to  $N$ , in a constant horizontal shear uni-directional flow. Since  $\omega_o \in [f, N]$ ,  $L$  gives an upper limit for the penetration of waves inside the vortex flow.  $k_{\theta o}$  depends on the ray, but have an upper limit, equal to the horizontal component  $k_h$  of waves generated by the cylinder (which depends on the dominant wave vector  $k = \pi/D$  and the dispersion relationship (5.2)).  $L$  for the different rays will therefore be greater than  $2N/k_h\omega_d$  for the incident rays, and this minimal value will be noted  $L_m$ .  $L_m/R$  will be used to compare quantitatively the flow curvature felt by waves in the different experiments.

In experiments with  $L_m/R \gg 1$ , the Doppler shifting expressed by equation (5.1) is weak. The penetration length is then larger than the vortex, and the change in  $\omega_o$  is not large enough to prevent the propagation of waves through the vortex velocity field. In experiments where  $L_m/R$  becomes  $O(1)$  or lower than 1, some rays may encounter layers where their intrinsic frequency reaches one of the propagation limits  $f$  or  $N$ . Therefore, we will present experiments with  $L_m/R = O(1)$ .

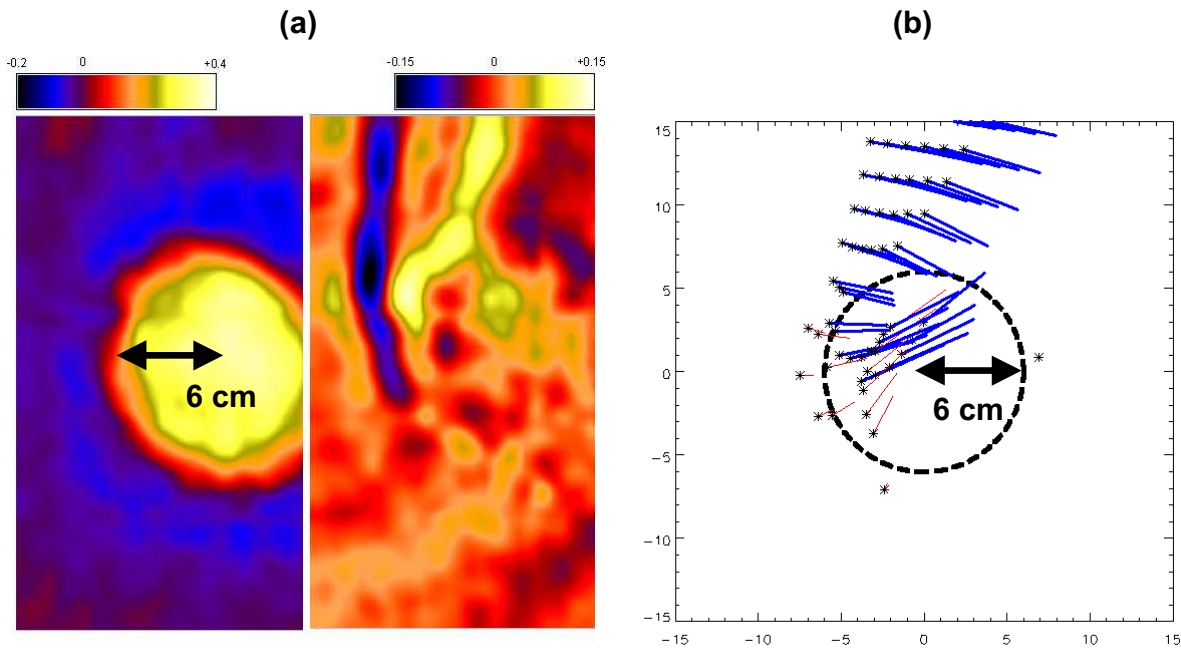


FIG. 5.11 – Interaction of waves propagating in front of a vortex generated by a rotating disk. Waves are generated on the upper left of the camera field and propagate to the right. (a) ; vertical vorticity and horizontal divergence field from PIV measurements in a horizontal plane 2 cm above the rotating disk. (b) ; cross-section in a horizontal plane 2 cm above the disk of rays from WKB simulation. The dashed circle in (b) represents the rotating disk. Solid lines are the horizontal wave-lengths of rays crossing the plane. Experimental conditions :  $f = 0.18 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_d = 0.44 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 6 \text{ cm}$ ,  $D = 1.5 \text{ cm}$ ,  $A = 1.5 \text{ cm}$ ,  $\omega_{abs} = 0.84 \text{ s}^{-1}$ . With these experimental parameters,  $k_h = 1.24 \text{ cm}^{-1}$  and  $L_m/R = 0.86$ .

### waves propagating against the vortex flow $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U} < 0$

When waves propagate against the vortex flow, the Doppler shifting leads to an increase of the intrinsic frequency  $\omega_o$ . As  $\omega_o$  increases towards  $N$ , the intrinsic group velocity,  $\mathbf{v}_g$ , becomes increasingly vertical and decreases in amplitude; part of the wave energy is advected by the horizontal flow of the vortex. This transport of wave energy is demonstrated in the horizontal divergence field shown in figure 5.11(a). Waves penetrating into the flow are transported to the left in comparison with waves propagating in the upper part, away from the vortex. In the WKB simulation corresponding to this experiment, only a few rays are found to reflect on layers where their intrinsic frequency  $\omega_o$  reaches  $N$ . Moreover, reflected rays keep on propagating afterwards and eventually escape the vortex flow. In figure 5.11(b), we plotted the positions of rays crossing a horizontal plane 2 cm above the rotating disk, for comparison with the horizontal divergence field shown in figure 5.11(a). Horizontal wavelengths for these rays are also shown. Some reflected rays cross this plane when propagating upwards, but since downwards and upwards waves can not be separated in the measurements in a horizontal plane, these reflected rays may still be present in figure 5.11(a). These results show good agreement between WKB theory and observations. In shadowgraph observations of similar experiments, with high initial value of the absolute frequency, waves are deformed while penetrating the vortex flow, but no reflected waves are detected. As a consequence of the sensivity of this method to the direction of waves propagation, reflected waves do not appear in these images, since they are scattered in many

different directions after the interaction.

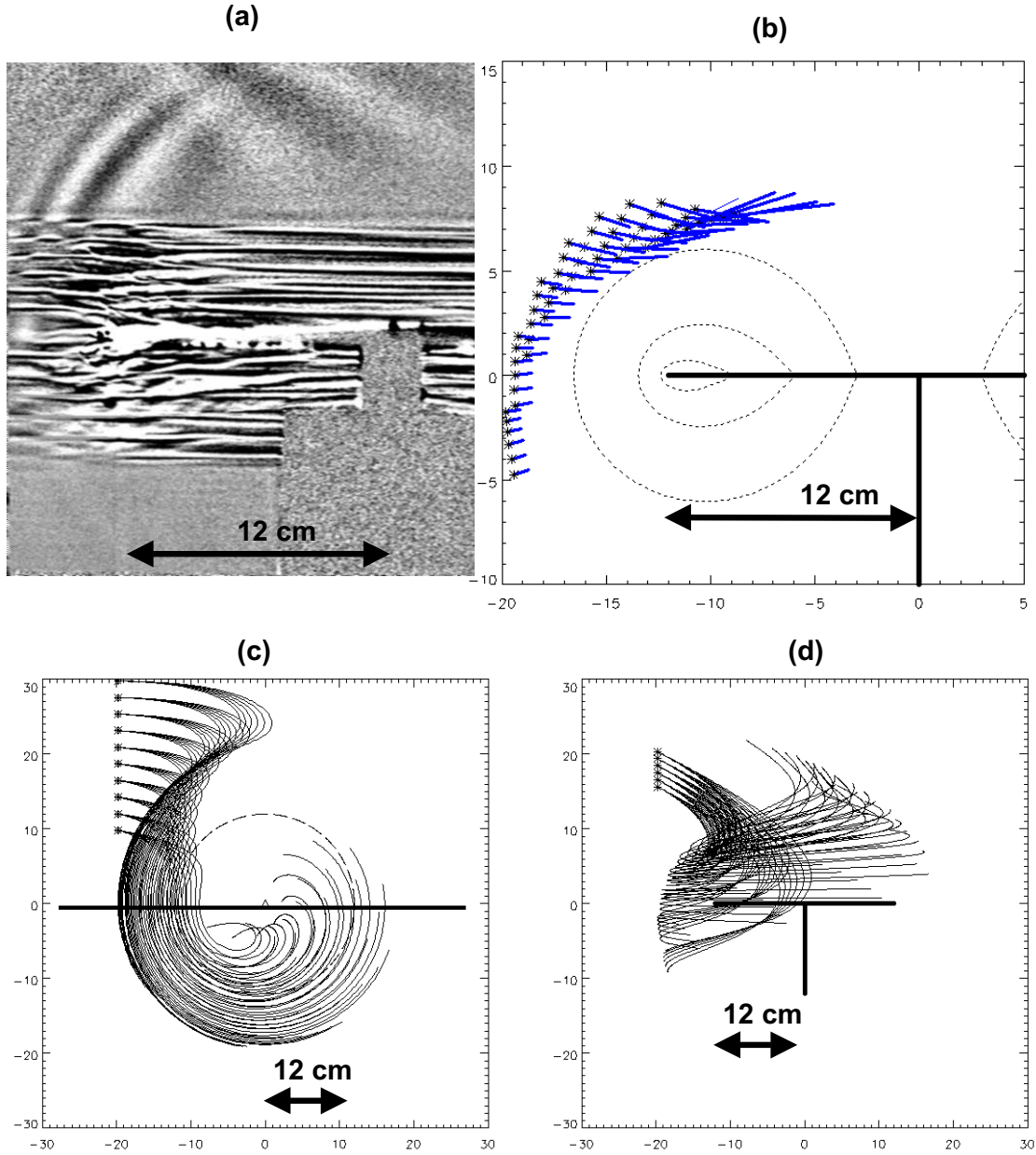


FIG. 5.12 – Interaction of waves propagating in front of a vortex generated by a rotating disk. (a); shadowgraph visualisation. Waves are generated on the upper left and propagate downwards to the right. (b); cross-section in a vertical plane of rays from WKB simulation. (c),(d); respectively top and side views of rays from the WKB simulation. The thick solid line in (c) represents the position of the cross-section vertical plane for (b). The circles in (b) and (d) represent the rotating disk. Solid lines in (b) are the wave-length projection of rays in the cross-section plane. Experimental conditions :  $f = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_d = 0.43 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 12 \text{ cm}$ ,  $D = 1.5 \text{ cm}$ ,  $A = 1.5 \text{ cm}$ ,  $\omega_{abs} = 0.7 \text{ s}^{-1}$ . With these experimental parameters,  $k_h = 0.85 \text{ cm}^{-1}$  and  $L_m/R = 0.6$ .



In experiments with absolute frequency closer to  $f$  and still lower  $L_m/R$ , reflected waves are found to be trapped into the vortex flow. Figures 5.12(a) and 5.12(b) present, respectively, a shadowgraph image of wave trapping and results from the corresponding WKB simulation. When waves begin to interact with the vortex flow, they are advected and gradually disappear, since their propagation is not parallel to the shadowgraph screen. However, upwards propagating waves appear and grow gradually in amplitude (see left part of figure 5.12(a)). The WKB simulation presented in figure 5.12(b) reproduces this pattern well : the rays correspond to reflected waves which are trapped in the vortex flow after reflection, and the radial and vertical components of the wave-vector increases indefinitely with time. In the vertical cross-section plane where rays are plotted in figure 5.12(b), the propagation is almost parallel to the shadowgraph screen and rays appear in the shadowgraph image.

This behaviour is qualitatively predicted by Olbers (1980) for a uni-directional flow : due to the vertical and horizontal shear, critical layers exist for values of the intrinsic frequency,  $\omega_c$ , located between  $f$  and  $N$ , defined by  $\omega_c^2 = [f^2(\partial U/\partial z)^2 + N^2(\partial U/\partial r)^2]/[(\partial U/\partial z)^2 + (\partial U/\partial r)^2]$ . In a curved flow, (5.8) shows that the components of the wave-number for trapped waves increase with time following  $k_r \approx -k_\theta(\partial U/\partial r - U/r)t$  and  $k_z \approx -k_\theta(\partial U/\partial z)t$ . Critical layers are then expected in a lenticular vortex for  $\omega_c^2 = [f^2(\partial U/\partial z)^2 + N^2(\partial U/\partial r - U/r)^2]/[(\partial U/\partial z)^2 + (\partial U/\partial r - U/r)^2]$ . Following the same reasoning as Olbers (1980), incident waves are expected to be trapped along these critical layers only if they first crossed them when they propagate towards the reflection layer  $\omega_o = N$ . The intrinsic frequency of waves with a high absolute frequency increases quickly to  $N$ , and waves do not cross a critical layer and escape the vortex flow after reflection. Experiments in the same experimental conditions as for the figure 5.12 were carried out with increasing values of the absolute frequency, and show that the trapped wave pattern eventually disappears in shadowgraph images.

The positions of the critical layers are revealed by the ray pattern in a meridional plane (see figure 5.13). In figure 5.13(a), rays penetrating the vortex flow from above reflect on a layer where  $\omega_o = N$ , and are trapped after this reflection ; rays at the left "missed" the vortex flow and do not reflect, but are trapped along critical layers in the lower part of the vortex. For absolute frequency closer to  $N$  and weaker interaction (larger value of  $L/R$ ) in figure 5.13(b), some rays reflect on  $\omega_o = N$  but are not trapped, since their intrinsic frequency  $\omega_o$  remains always larger than the frequency required for trapping.

### waves propagating along the vortex flow $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U} > 0$

When waves propagate in the same direction as the azimuthal velocity of the vortex, the Doppler shifting leads to a decrease of the intrinsic frequency  $\omega_o$ . As  $\omega_o$  decreases, the radial component of the wave-vector,  $k_r$ , increases gradually from negative to positive values, a minimal value of the radial position being reached when  $k_r = 0$ . After this reflection, waves keep on propagating downwards and radially outwards. In figure 5.14(b), we plotted the positions of rays crossing a horizontal plane 2 cm above the rotating disk, for comparison with the horizontal divergence field shown in figure 5.14(a). Waves generated on the right upper part of the figure 5.14(a) are advected by the vortex flow, and are eventually pushed away from the vortex, in agreement with predictions of the WKB simulation. However, the wave field in the lower-right part of figure 5.14(a) is not well captured by the WKB simulation : in this experiment, the Doppler shifting is weak (large value of  $L_m/R$ ) and rays penetrate deeply in the vortex core and are likely to reflect at the disk surface, an effect which is not taken in account in the WKB simulations.

Even for experiments with lower values of  $L_m/R$ , required for a strong interaction, shadow-

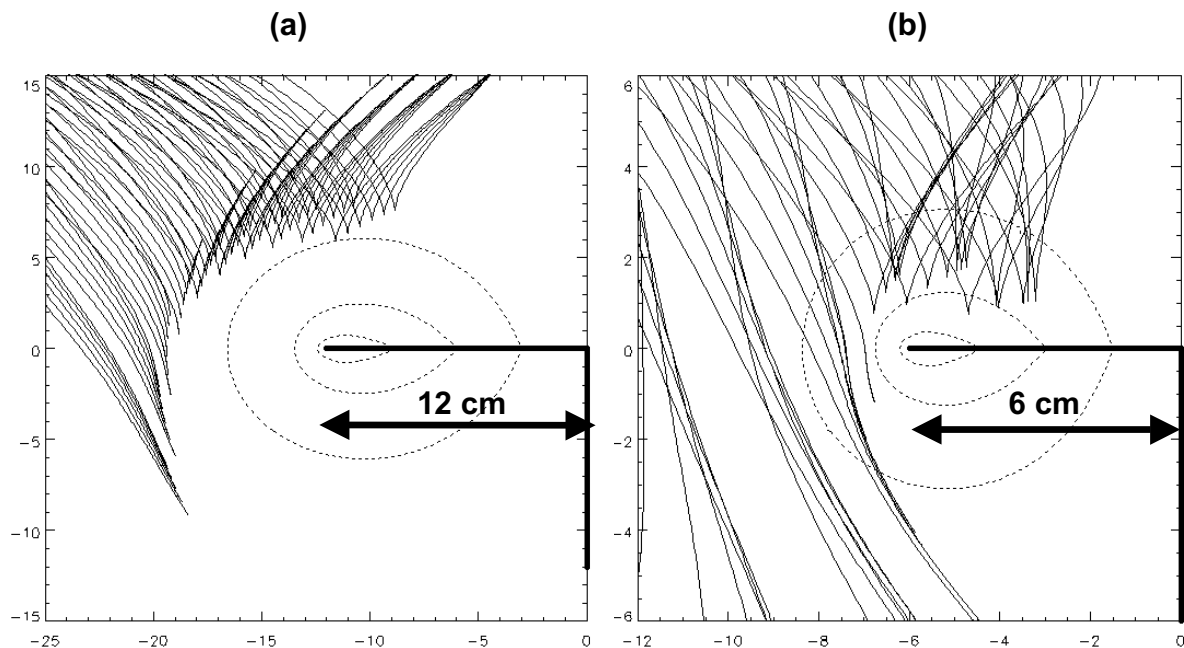


FIG. 5.13 – Rays of waves propagating in front of a vortex flow generated by a rotating disk, in the  $(r, z)$  coordinates system. (a) ; same WKB simulation as for figure 5.11. (b) ; same WKB simulation as for figure 5.12. Thick solid lines represent the rotating disk. - - - - ; contours of 0.25, 0.5 and 0.75 the maximal velocity at the edge of the disk.

graph images like in figure 5.15(a) show that no upwards propagating waves are detected, in contrast with experiments where waves propagate against the flow. In the neighbourhood of the disk, no wave patterns were observed, since high values of the disk vorticity  $\omega_d$  are required to reach low values of  $L_m/R$ , leading in general to the formation of double diffusion layers in the region where waves are expected to be trapped (see, i.e. Baker (1971)). However, the wave-induced motion of these layers indicates that wave energy is trapped around the edges of the rotating disk. This concentration of trapped wave energy is well represented by the WKB simulation for some incident rays shown in figures 5.15(b) and 5.15(c).

The ray patterns obtained with WKB simulations, plotted in a meridional plane  $(0, r, z)$  in figure 5.16, show where waves are reflected and the positions of the critical layers. In figure 5.16(b), the interaction is weak and the rays escape the vortex flow ; their shape is close to what would be observed without vortex. In figure 5.16(a), rays are trapped after reflection. Trapping was generally observed for high values of the absolute frequency, as predicted by the WKB simulations. For low values of the absolute frequency, waves are quickly reflected by the decrease of the intrinsic frequency but do not encounter critical layers when they propagate outwards after reflection, as predicted qualitatively by Olbers (1980).

#### 5.4.2 wave interaction with barotropic vortices

Barotropic-like vortices are generated by a vertical line sink. The fluid of different depth was siphoned through a perforated tube. The waves are generated by oscillations of a long circular horizontal cylinder, of length 30 cm and diameter 2.5 or 5.0 cm, placed near the bottom of the tank. The vertical distance between the vortex center and the cylinder is around 15 cm. The

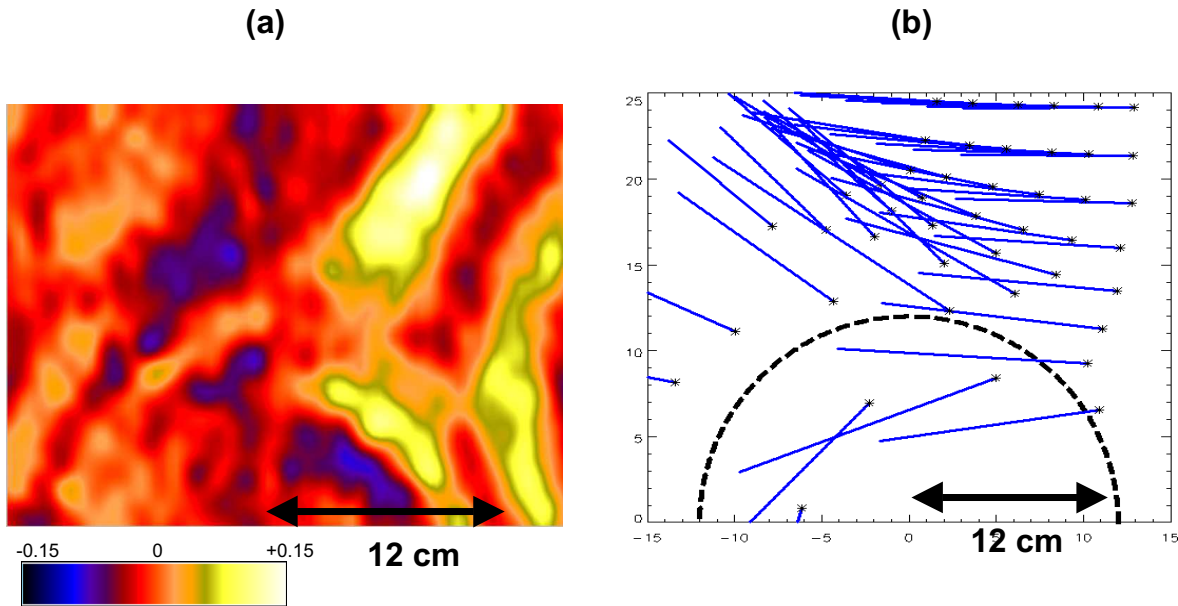


FIG. 5.14 – Interaction of waves propagating in the same direction as a vortex generated by a rotating disk. (a); horizontal divergence field from PIV measurements in a horizontal plane 2 cm above the rotating disk. (b); cross-section in a horizontal plane 2 cm above the disk of rays from WKB simulation. The dashed circle in (b) represents the rotating disk. Solid lines are the horizontal wave-lengths of rays crossing the plane. Experimental conditions :  $f = 0.26 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_d = 0.22 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 12 \text{ cm}$ ,  $D = 1.5 \text{ cm}$ ,  $A = 2.0 \text{ cm}$ ,  $\omega_{abs} = 0.5 \text{ s}^{-1}$ . With these experimental parameters,  $k_h = 0.65 \text{ cm}^{-1}$  and  $L_m/R = 1.6$ .

cylinder is placed such that the waves cross the center of the vortex ; during the interaction, the mid of the wave front is located at the vortex center. Thus, at one side, waves propagate against the vortex flow, while at the other side they propagate along.

The circulation of the vortex,  $\Gamma$ , depends on the total pumped volume ; its radial profile has a Gaussian shape with radius  $R$  increasing with time by radial diffusion of momentum. The velocity profile outside the vortex core remains unchanged and is given by  $U(r) \approx \Gamma/2\pi r$ . As time goes on, a maximal value of the radial shear,  $U_L$  is deduced from the radius and maximal velocity of the vortex in the mid-plane, reading  $U_L = U_{max}/R_{max}$ . Minimal value of the penetration length for rays generated by the cylinder reads  $L_m = NR_{max}/k_h U_{max}$  and may be compared to the radius  $R_{max}$  of the vortex core. Vortices generated by this method exhibit a velocity field with a radial shear stronger than vertical shear, and correspond to high values of  $U_L/U_H$ , with vertical shear  $U_H = U_{max}/H$ , and vertical extent  $H \approx 10 \text{ cm}$ . In experiments with  $L_m/R \gg 1$ , rays are again weakly affected by the Doppler shifting in (5.1), and keep on propagating without reflection or being trapped in critical layers. For  $L_{max}/R_{max} \approx O(1)$ , Doppler shifting becomes stronger and some rays are trapped.

Figure 5.17(a) shows a typical shadowgraph picture of the wave interaction with a barotropic vortex. The waves are generated from below by a 2.5 cm diameter cylinder and are visible around the vertical axis where they accumulate. Phase lines, marked by the dark and light regions, are almost aligned with the vortex vertical axis in the region surrounding the mid-plane. They propagate towards the vortex center and exhibit slow oscillations in the vertical direction with a wavelength of about 5 cm. In the upper and lower parts of the vortex, phase lines become more inclined : because of vertical shear present in these regions, the vertical component of the

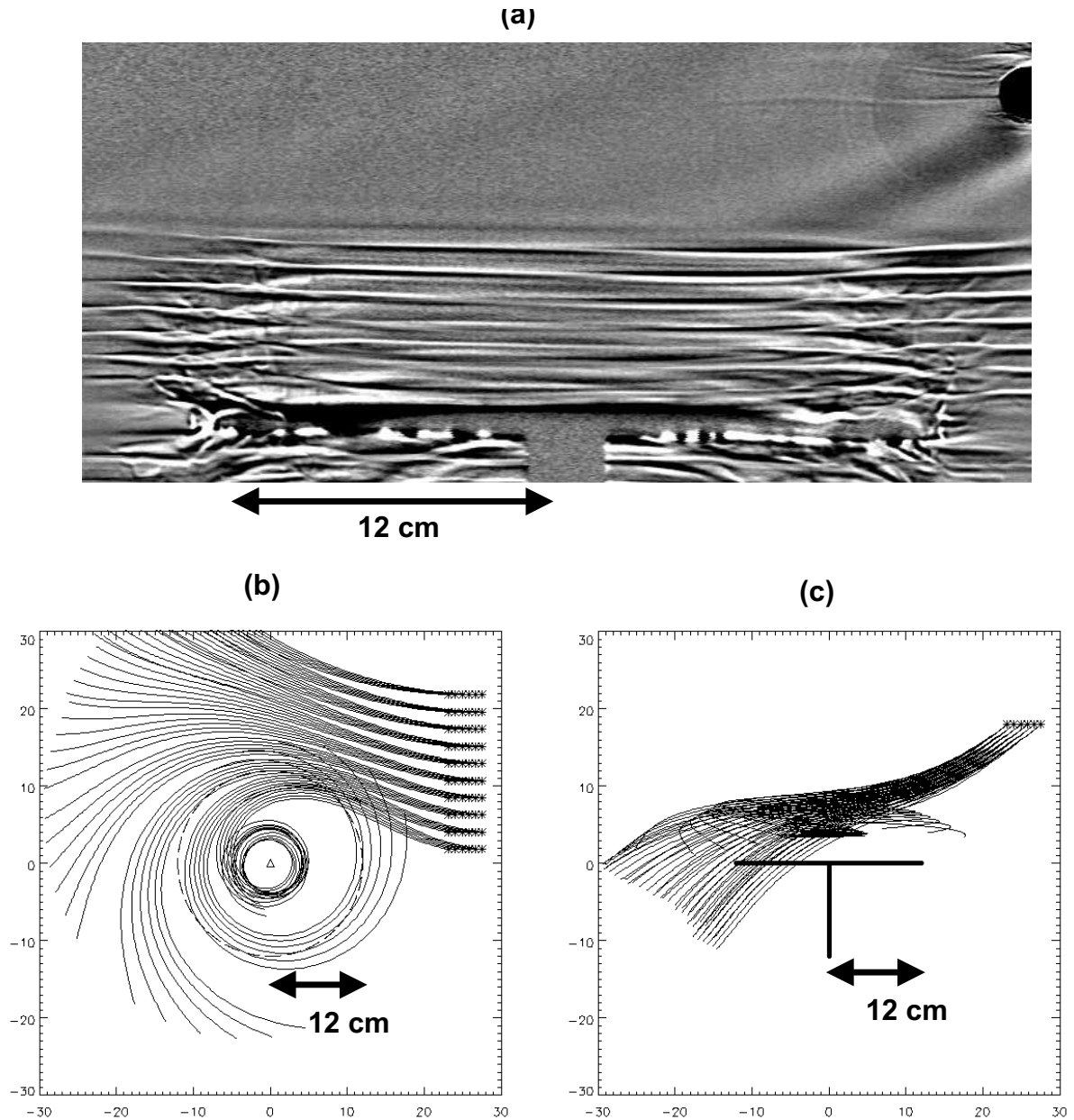


FIG. 5.15 – Interaction of waves propagating in the same direction as a vortex generated by a rotating disk. (a); shadowgraph visualisation. (b),(c); respectively top and side views of rays from the WKB simulation. The thick solid line in (c) represents the rotating disk. Experimental conditions :  $f = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_d = 0.53 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 12 \text{ cm}$ ,  $D = 1.5 \text{ cm}$ ,  $A = 1.5 \text{ cm}$ ,  $\omega_{abs} = 1.0 \text{ s}^{-1}$ . With these experimental parameters,  $k_h = 1.5 \text{ cm}^{-1}$  and  $L_m/R = 0.27$

wave-number also increases. The vertical vorticity and horizontal divergence fields for a similar experiment (see figures 5.17(b) and 5.17(c), respectively) show that the vortex core is marked by a circular patch of vorticity (see figure 5.17(b)); the waves propagate from right to left, with large horizontal wave-lengths, while waves close to and in the vortex propagate in front of the vortex flow (counter-clock rotation). Their wave-length decreases when they approach the vortex

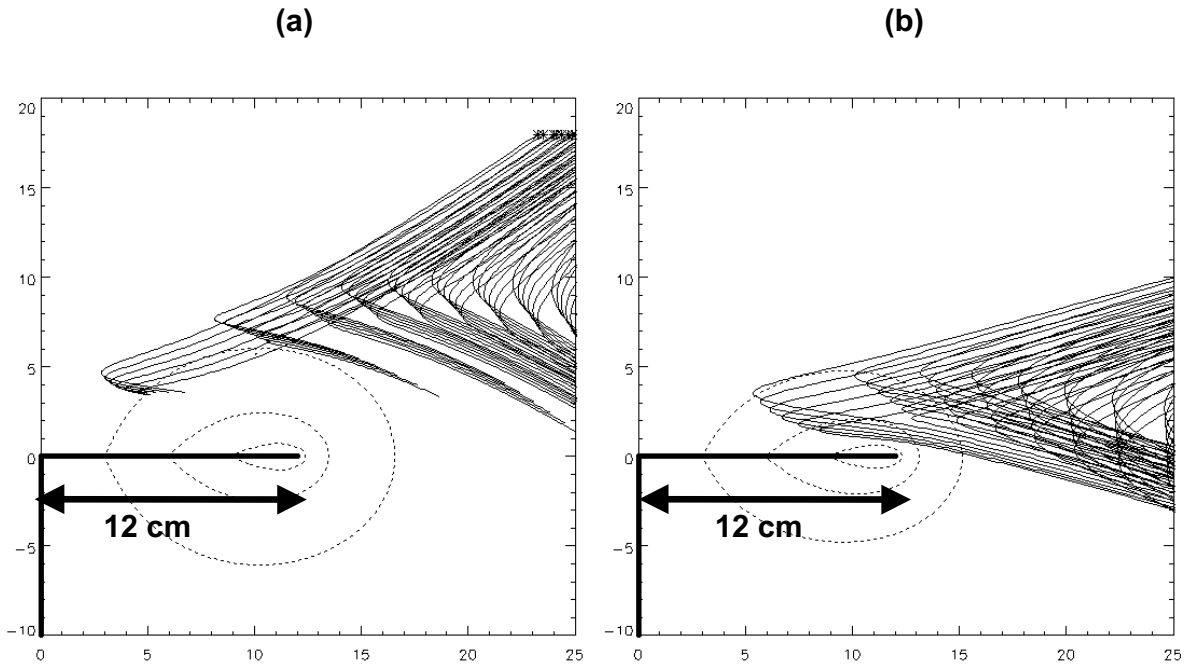


FIG. 5.16 – Rays of waves propagating along the vortex generated by a rotating disk in the  $(r, z)$  coordinates system. (a); WKB simulation of figure 5.14. (b); WKB simulation of figure 5.15. Thick solid lines represent the rotating disk. -----; contours of 0.25, 0.5 and 0.75 the maximal velocity at the edge of the disk.

core.

A WKB simulation was carried out to reproduce the experiment of figures 5.17(b), (c), of which the results are shown in figure 5.18. Rays propagating initially along the flow reflect at the core of the vortex and are subsequently scattered away. Moreover, the decrease in the intrinsic frequency during the interaction leads to a decrease of the vertical component of the group velocity, and most of these rays follow a quasi-horizontal trajectory (see dashed lines in figure 5.18(b)). In the cross-section of rays in the mid-plane plotted in figure 5.18(c), positions of these rays, propagating along the flow, reproduce the upper-left wave pattern of the experimental figure 5.17(c). This part of the incident wave field corresponds to waves which are transported along the vortex flow, and escape without being trapped. These rays are not visible in shadowgraph images since their wave-vector is not parallel to the screen.

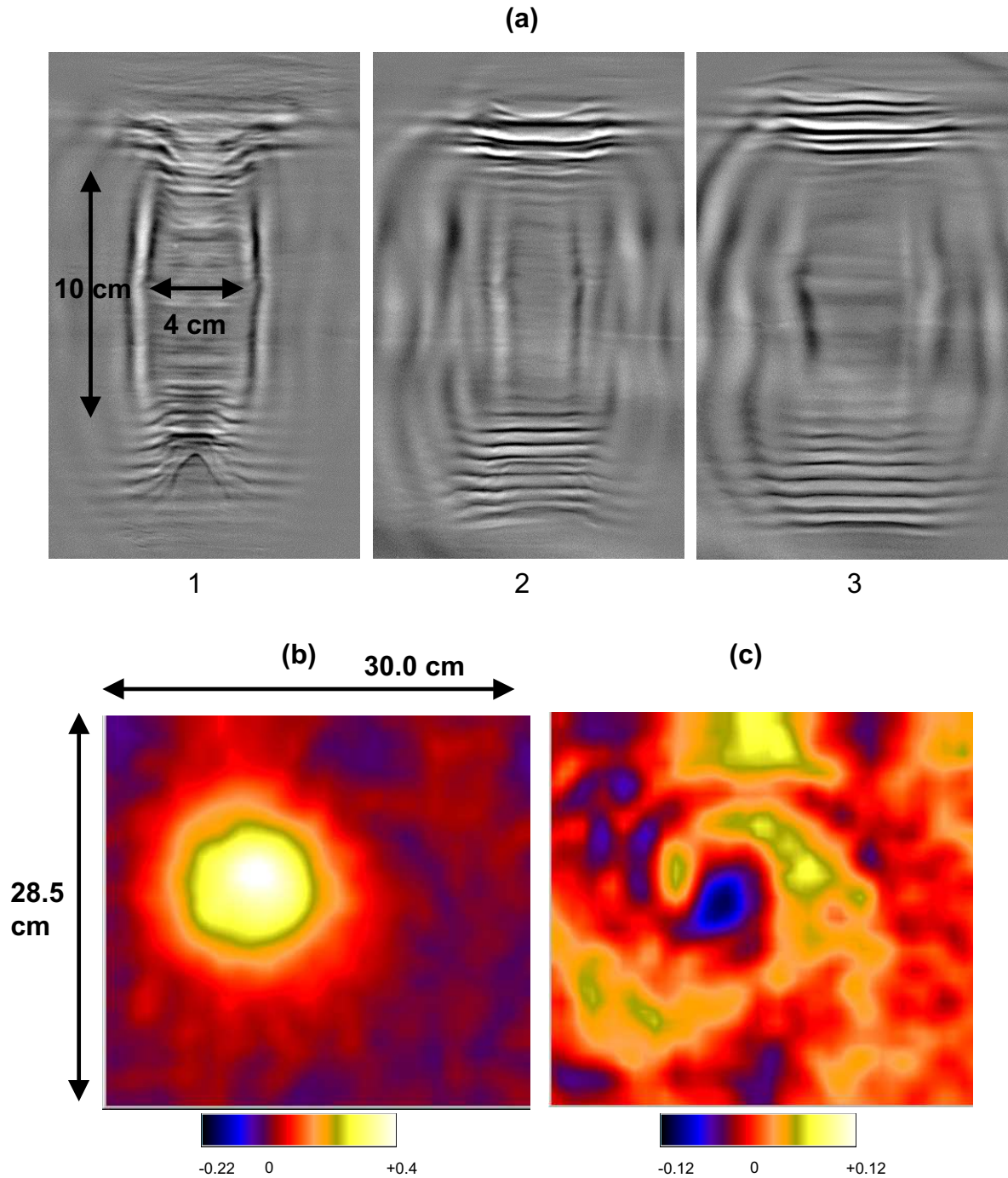


FIG. 5.17 – Interaction of waves propagating into a barotropic vortex. Waves are generated from the right near the bottom of the tank and propagate from below to the left towards the vortex. The cylinder diameter is  $D = 2.5$  cm. (a); sequence of side views by shadowgraph method for an experiment with  $f = 0.5$  s<sup>-1</sup>,  $N = 1.44$  s<sup>-1</sup>,  $V = 2.4$  L,  $D = 2.5$  cm,  $A = 2.0$  cm,  $\omega_{abs} = 0.8$  s<sup>-1</sup>. Times of observation : (1); 100 s, (2); 180 s, (3); 290 s after the removal of the tube. Waves are generated at the right, starting at the first image. (b),(c); vertical vorticity and horizontal divergence fields (scales are in s<sup>-1</sup>) from PIV measurements in the mid-plane for an experiment with  $f = 0.4$  s<sup>-1</sup>,  $N = 1.00$  s<sup>-1</sup>,  $V = 1.4$  L,  $D = 2.5$  cm,  $A = 2.0$  cm,  $\omega_{abs} = 0.75$  s<sup>-1</sup>. At the time of observation,  $R_{max} \approx 5.0$ /cm and  $U_{max} \approx 0.7$  cms<sup>-1</sup>, corresponding to  $\Gamma/2\pi \approx 4.7$  cm<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>.

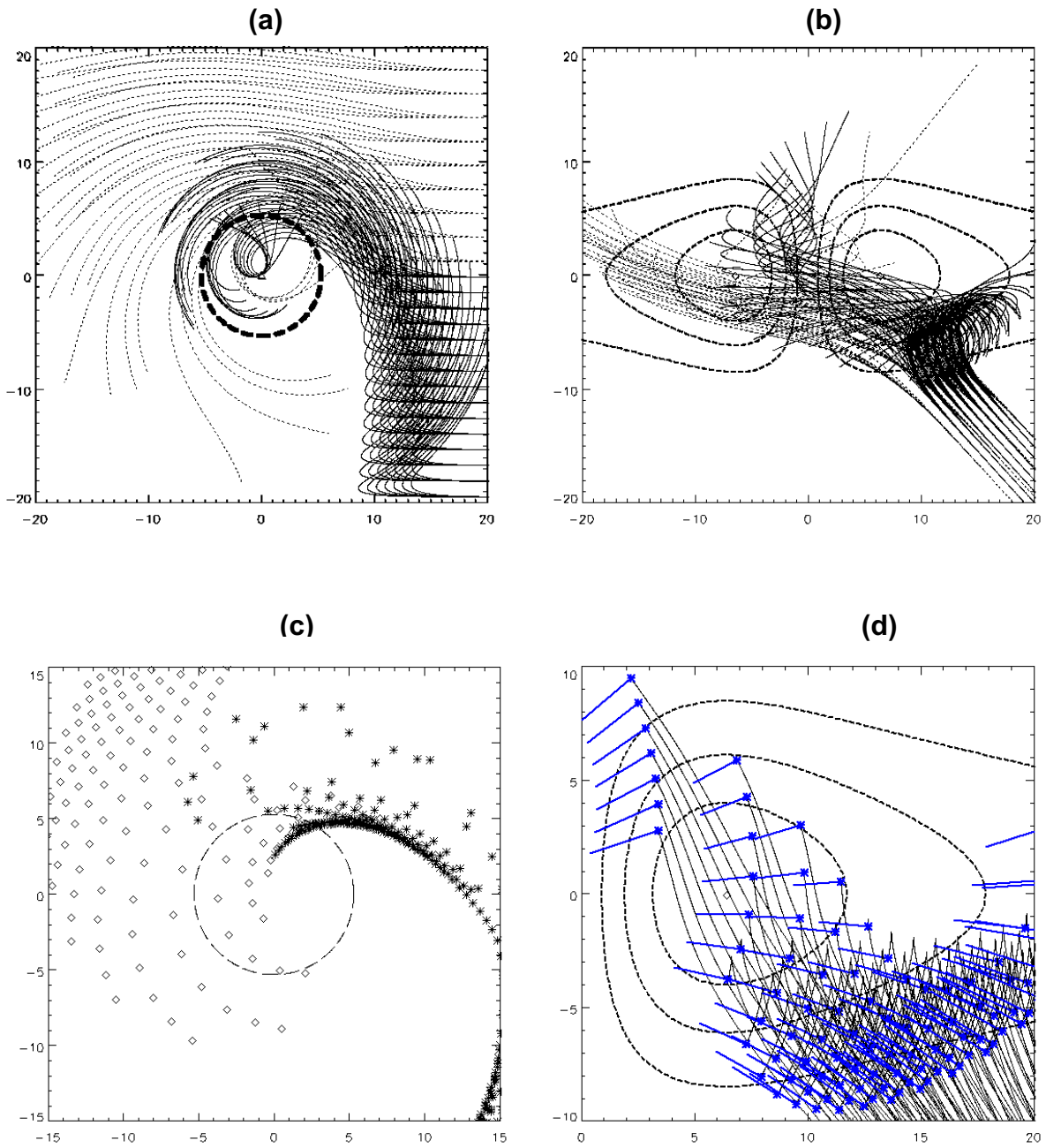


FIG. 5.18 – Ray traces for experiment of waves interacting with a barotropic vortex of figure 5.17(b, c). (a) top and (b) side views of rays. (c) cross-section in the mid height horizontal plane of rays. Diamonds : incident waves propagating in the same direction as the flow. Stars : incident waves propagating in front of the flow. (d) view in the  $(r, z)$  coordinates system of trapped rays. Thick solid lines represents the wave-length vectors at time  $t = 100$  s. -----; contours of 0.25, 0.5 and 0.75 the maximal velocity of the flow. The simulation was carried out up to  $t = 100$  s.

According to the WKB simulation, most rays propagating against the vortex flow are trapped in the vortex. Some encounter a reflection layer at  $\omega_o = N$ , while other cross the mid-plane without reflection before being trapped. Figure 5.18(d) shows the trapped waves in the meridional plane  $(0, r, z)$ , and projection in this plane of the wave-lengths for these rays, around the end of the simulation, are also indicated. WKB predictions are in agreement with shadowgraph images of figure (5.17a) and confirm the increase of the wave-number in the direction of the vortex axis. As time goes on, trapped rays increase in their wave-number radial component,  $k_r$ , leading to the wave pattern around the vortex axis observed in figure 5.17(a). The horizontal cross-section (see figure 5.17(c)) displays the positions of the rays for comparison with figure 5.17(c). The qualitative agreement is good : waves propagating against the flow are transported to the right, spiraling into the vortex while gradually decreasing in wave-lengths.

For barotropic vortices, the high radial shear compared to the vertical shear leads to critical layers which correspond to values of the intrinsic frequency close to  $N$ , following Olbers (1980). For intermediate values of the absolute frequency,  $\omega_{abs}$ , waves propagating along the vortex flow decrease in intrinsic frequency, so they never meet a critical layer. However, waves propagating against the vortex flow are likely to cross a critical layer along which they will be trapped. In contrast to baroclinic vortices, only rays propagating against a barotropic vortex have a chance to be trapped.

### 5.4.3 WKB simulations as a prediction tool

Results for baroclinic vortices confirm the existence of critical layers and suggest characteristics very close to those predicted by Olbers (1980). Because of  $U_L/U_H \approx 1$ , these critical layer are distinct from reflection layers and are associated with values of the intrinsic frequency different from  $N$ . For experiments with barotropic vortices, the distinction between the reflection layer  $\omega_o = N$  and critical layers disappears because of high  $U_H/U_L$ , and only waves propagating against the flow are trapped into the vortex.

Comparisons between WKB simulations and experiments show that WKB simulations are a good tool to predict the behaviour of waves propagating in the vortex flow. Quantitative comparisons between measurements by PIV in horizontal planes or shadowgraph visualisations, and predictions of the ray positions (figures 5.11(a)-5.11(b), 5.12(a)-5.12(b), 5.14(a)-5.14(b) and 5.17(c)-5.18(c)), are useful to interpret complicated wave patterns in the experiments. In the next section, this agreement will be extended to energy considerations. It will provide further insight into the wave-breaking mechanism and into the experimental conditions required for this breaking to occur.

## 5.5 Occurrence of wave breaking in the experiments

### 5.5.1 Experimental observation of wave-breaking

Figure 5.19 presents typical shadowgraph images, vertical vorticity and divergence fields for an experiment of wave interaction with a relatively intense barotropic vortex and waves generated with the 5.0 cm diameter cylinder.



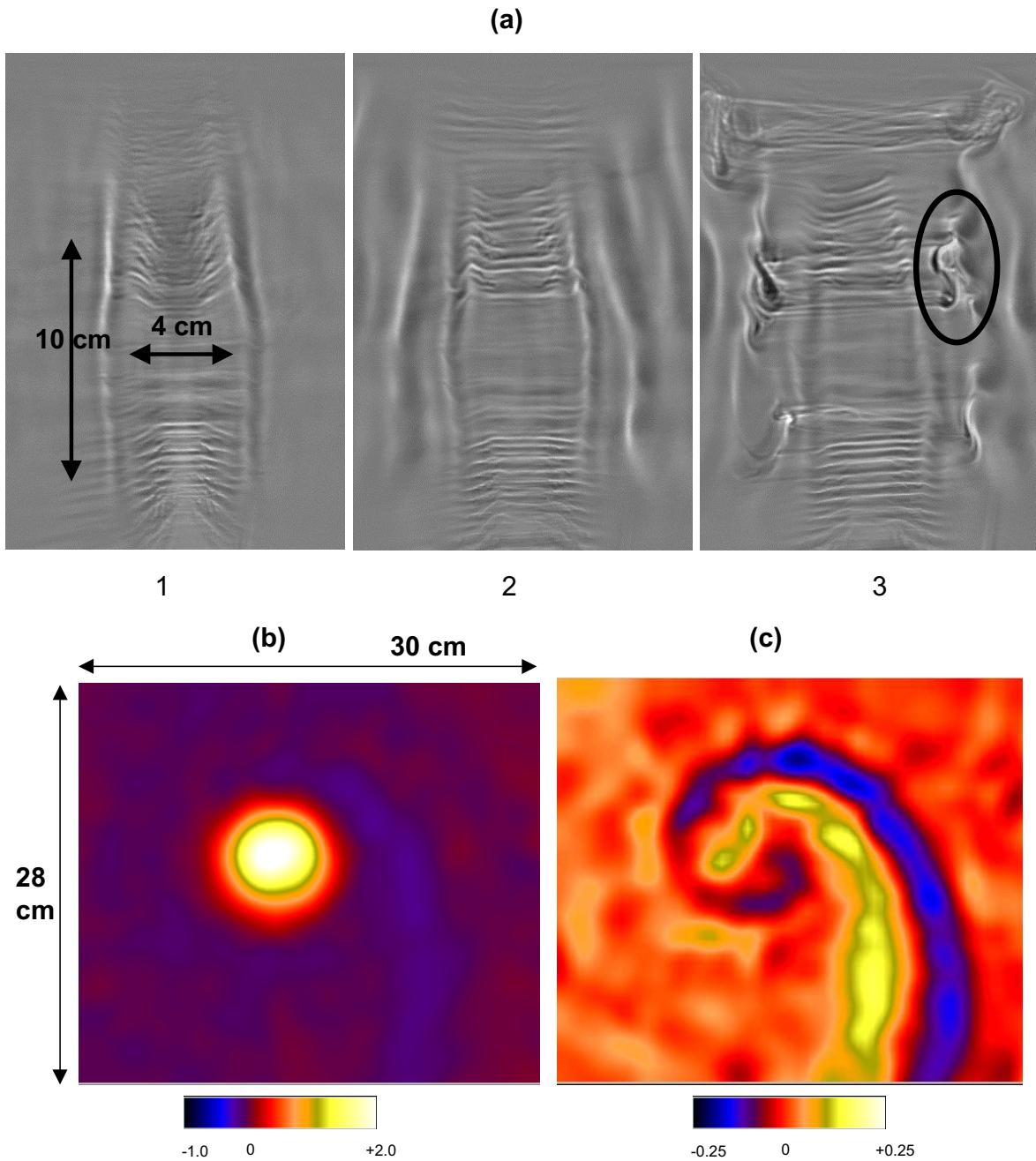


FIG. 5.19 – Interaction of waves propagating into a barotropic vortex flow. Waves are generated from the right near the bottom of the tank and propagate from below to the left towards the vortex. The cylinder diameter is  $D = 5.0$  cm. (a); sequence of side views by shadowgraph method for an experiment with  $f = 0.5$  s<sup>-1</sup>,  $N = 1.26$  s<sup>-1</sup>,  $V = 4.8$  L,  $D = 5.0$  cm,  $A = 1.0$  cm,  $\omega_{abs} = 0.88$  s<sup>-1</sup>. Times of observation : (1) ; 79 s, (2) ; 123 s, (3) ; 137 s after the removal of the tube. Waves are generated from the right around the time of the first image. (b),(c) ; vertical vorticity and horizontal divergence fields from PIV measurements in the mid-plane for an experiment with  $f = 0.4$  s<sup>-1</sup>,  $N = 1.5$  s<sup>-1</sup>,  $V = 3.2$  L,  $D = 5.0$  cm,  $A = 2.0$  cm,  $\omega_{abs} = 0.53$  s<sup>-1</sup>. At the time of observation,  $R_{max} \approx 2.5/cm$  and  $U_{max} \approx 2.5$  cm s<sup>-1</sup>, corresponding to  $\Gamma/2\pi \approx 8.3$  cm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>.

Waves which appear in the mid-plane (see figure 5.19(c)) are all propagating against the flow. Waves propagating along the flow are advected horizontally and are scattered away from the camera field. The horizontal wave-length of the wave pattern tends to decrease when approaching and turning along the vortex core. Unfortunately, this becomes quickly below the measurement resolution. In shadowgraph pictures (see figure 5.19(a)), waves begin to appear shortly after the onset of the cylinder oscillations, and accumulate around the vortex. Like in figure 5.17(a), they propagate towards the vortex center and phase lines are almost parallel to the vertical axis of the vortex. However, slow oscillations along the vertical direction are not so obvious, due to larger vertical wave-lengths of the incident waves. Gradually, the intensity of the wave pattern increases, as inferred from the increase of the contrast, until some waves begin to break. This breaking starts in general at the extremities of the vortex. Wave-breaking was not detected by PIV measurements because of intrinsic limitations of this method.

A close up of the wave breaking in figure 5.20 reveals an initially one-side overturning motion in the density field. The radial extent of the mixing induced by this overturning is around 2 cm in the images and corresponds to the apparent radial wave-length of the wave pattern. The vertical extent is harder to determine, since mixing tends to spread vertically and other breaking events begin to appear along the entire vortex

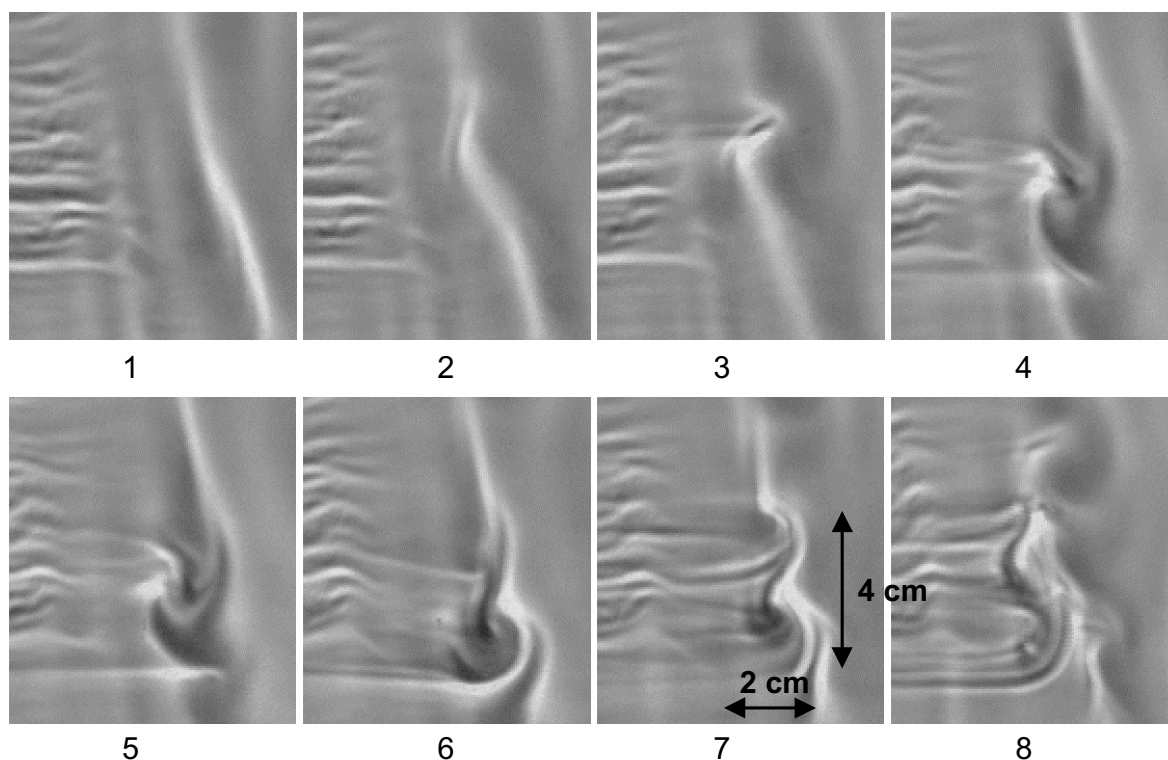


FIG. 5.20 – Details of a breaking wave visualised with the shadowgraph technique (marked by an ellipse in figure 5.19(a)). Times of pictures are respectively 0.0, 1.5, 2.5, 4.0, 4.5, 5.5, 7.5 and 9.5 s.

### 5.5.2 Prediction of wave-breaking by WKB simulations

Figure 5.21 presents results of a WKB simulation for the experiment 5.19 where wave-breaking occurs. Top and side views 5.21(a), 5.21(b) show how waves propagating initially along the flow

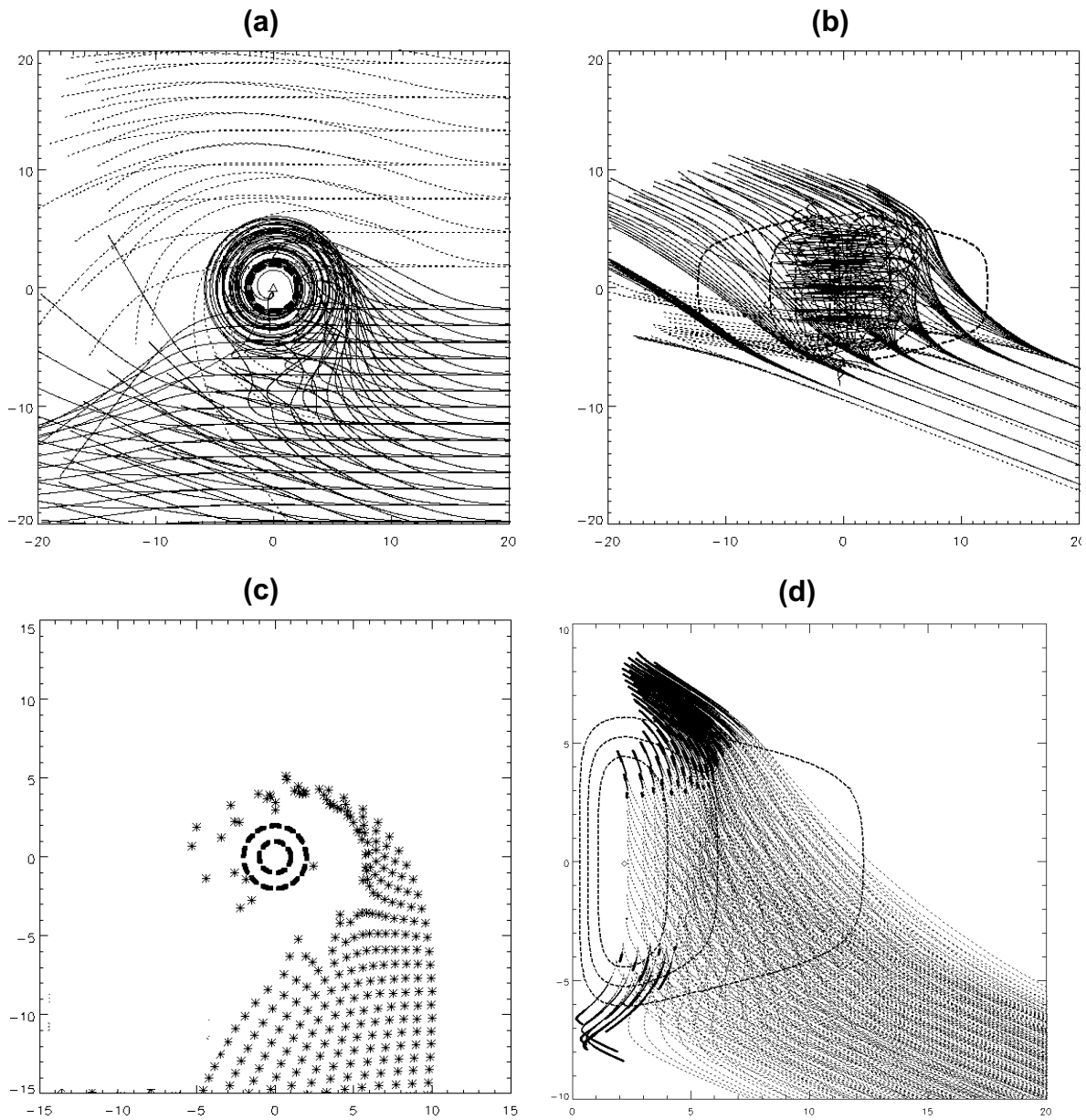


FIG. 5.21 – Ray traces for experiment of waves interacting with a barotropic vortex of figure 5.19(b, c). (a) top and (b) side views of rays. (c) cross-section in the mid height horizontal plane of rays. incident rays propagating along the flow do not cross this plane. \*; incident waves propagating against the flow. (d) view in the  $(r, z)$  coordinates system of trapped rays. - - - - -; contours of 0.25, 0.5 and 0.75 the maximal velocity of the flow. ·····; rays where  $[(-g/\rho)\partial\rho/\partial z]/N^2$  remains positive. —; parts of the rays where it takes negative values. Simulation was carried out for times up to  $t = 50$  s.

reflect and escape the vortex in a wide range of directions. They also show that a large part of rays propagating against the flow are trapped and wrapped around the vortex. In figure 5.21(c), a cross-section in the mid-plane shows that only rays propagating in front of the flow are crossing this plane in the camera field, in agreement with experimental measurements of figure 5.19(c). The wave pattern predicted by the WKB simulation is also in accordance with the experimental one.

In order to investigate the development of unstable states in the flow during the interaction, Minimal values of the non-dimensional numbers  $Ri$ ,  $Ra$ , and  $[(-g/\rho)\partial\rho/\partial z]/N^2$  on a wave-period were calculated along trapped rays. The initial amplitude of waves in the WKB simulation was chosen in order to get values of vertical vorticity and horizontal divergence equal to the PIV measurements for waves in the lower parts of figures 5.21(c) and 5.19(c). Minimal values of  $Ra$  remain always positive, and some minimal values of  $Ri$  eventually cross the critical limit of  $1/4$ . Before that, negative values of  $[(-g/\rho)\partial\rho/\partial z]/N^2$ , corresponding to positive vertical density gradients are found as time goes on, especially for rays trapped in the upper and lower parts of the vortex. In figure 5.21(d), trapped rays are plotted in the meridional plane  $(0, r, z)$  and parts of the rays where positive vertical density gradients are reached are indicated by thick lines. They correspond to regions where over-turning is expected to occur.

Therefore, both experiments and WKB simulations indicate the occurrence of wave-breaking events. The WKB simulations suggest an instability driven by overturning of the density field as the responsible mechanism, in accordance with shadowgraph images of figure 5.19(a). Moreover, experiments and WKB simulations also agree on the preferential location of the initial instabilities at the extremities of the vortex.

### 5.5.3 Conditions required for wave-breaking

The agreement between WKB simulations and experiments was investigated for different experimental configurations. Figure 5.22 shows typical evolution of the non-dimensional numbers  $Ri$ ,  $Ra$ ,  $[(-g/\rho)\partial\rho/\partial z]/N^2$  along trapped rays in WKB simulations of figures 5.12, 5.15 and 5.21.

In experiments with baroclinic vortices, the initial value of the wave amplitude in the WKB simulation is chosen so that  $[(-g/\rho)\partial\rho/\partial z]/N^2$  takes a minimal value equal to 0. It corresponds to an upper limit for the wave amplitude generated by the cylinder, since stronger waves would break by over-turning instability in the experiments. Because of strong viscous damping (relatively low  $Re_{wave}$ ), the wave energy decreases during the propagation, and even the amplification due to the trapping can not balance this decrease (see figures 5.22(a) and 5.22(b)). The wave energy goes to zero as  $t \rightarrow \infty$ . Minimal values of the non-dimensional numbers  $Ri$ ,  $Ra$ ,  $[(-g/\rho)\partial\rho/\partial z]/N^2$  never go below the critical levels required for instabilities, respectively  $1/4$ , 0 and 0, and return to their values in the vortex flow. To increase the wave amplification and be closer to instability conditions, experiments were carried out for strong vortices, with disk vorticity  $\omega_d$  up to  $0.6 \text{ s}^{-1}$ , with waves generated by a  $2.5 \text{ cm}$  diameter cylinder :  $Re_{wave}$  is then around 30. However, both experiments and WKB simulations confirm the viscous damping of trapped waves, without breaking.

In experiments with barotropic vortices, values of  $Re_{wave}$  are larger than for baroclinic vortices, and the trapping effect is expected to balance the viscous damping of the wave energy. For initial amplitude of incident waves high enough, values of the non-dimensional numbers below critical levels may then be reached. In the WKB simulation of figure 5.22(c), minimal values of  $[(-g/\rho)\partial\rho/\partial z]/N^2$  cross the 0 critical level, and leads to a buoyancy-driven instability. Similar evolutions of the non-dimensional numbers are found for all the unstable trapped rays plotted in figure 5.21(d).

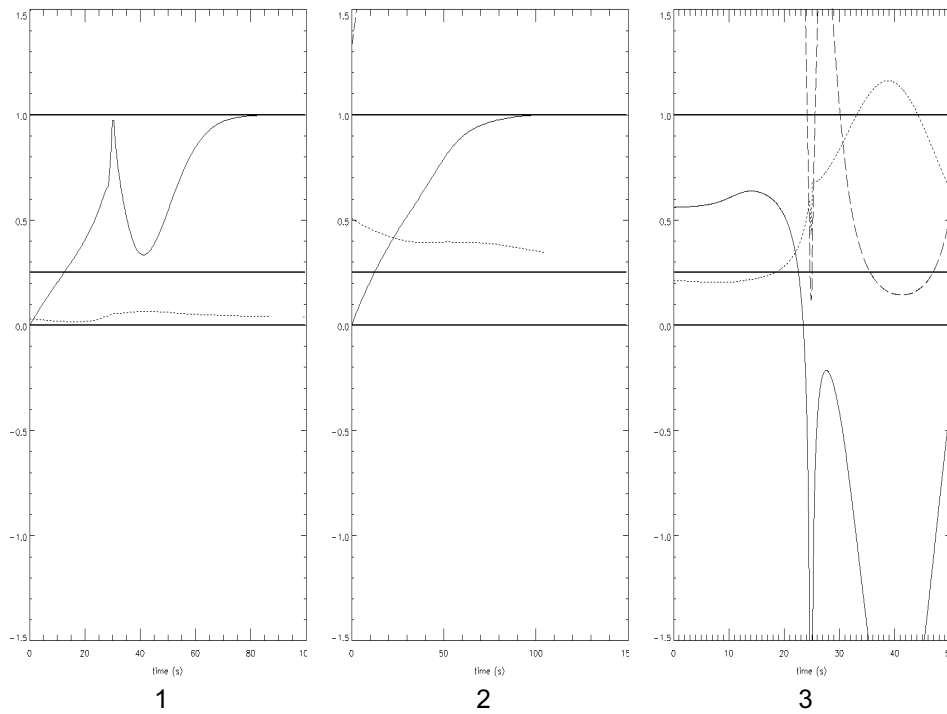


FIG. 5.22 – Minimal values along a trapped ray of the non-dimensional numbers relevant for centrifugal, Kelvin-Helmholtz and overturning instabilities. -----; minimal values of  $Ri$ . .....; minimal values of  $Ra$ . ———; minimal values of  $[(-g/\rho)\partial\rho/\partial z]/N^2$ , for (1); WKB simulation of figure 5.12, (2); WKB simulation of figure 5.15, (3); WKB simulation of figure 5.21.

	f	N	V	$\Gamma/2\pi$	$U_L(0)$	$D$	$\omega_{abs}$	$A$	$t$	$Re_{wave}(0)$	$Re_{wave}$	breaking
	$s^{-1}$	$s^{-1}$	$L$	$cm^2 s^{-1}$	$s^{-1}$	cm	$s^{-1}$	cm	s			
ea	0.5	1.44	2.4	8.0	2.3	2.5	0.8	2.0	74	150	60	no
eb	0.5	1.44	4.8	15.0	4.4	2.5	0.8	2.0	80	280	110	no
fa	0.5	1.25	2.5	8.0	2.3	5.0	0.8	1.0	61	595	260	yes
fb	0.5	1.25	4.8	15.0	4.4	5.0	0.8	1.0	65	1115	495	yes
ed	0.5	1.3	5.0	15.0	4.4	5.0	0.8	3.0	50	1115	590	yes

TAB. 5.1 – Values of parameters in experiments with barotropic vortices. Waves are generated just after the vortex generation, and the generator is located 15 cm away from the vortex in the radial direction, and near the bottom of the tank.  $\Gamma$ ; vortex circulation measured by PIV in similar experiments without waves.  $U_L(0)$ ; maximal radial shear just after the vortex generation, based upon an initial gaussian profile with radius  $R_{max} = 1.6$  cm.  $D$ ; diameter of the cylinder.  $\omega_{abs}$ ; absolute frequency of waves.  $A$ ; amplitude of the cylinder oscillations.  $t$ ; delay from the vortex generation for trapped waves to appear around the vortex.  $Re_{wave}(0)$ ; initial value of the Reynolds number just after the vortex generation, calculated with (5.13) from  $U_L(0)$  and  $k = \pi/D$ .  $Re_{wave}$ ; value of the Reynolds number when trapped waves begin to appear. The value of  $U_L$  used to calculate  $Re_{wave}$  is deduced from the viscous evolution for a Lamb-Oseen vortex with  $R_{max} = 1.6$  cm at time  $t = 0$ .

To investigate the effects of experimental parameters  $D$ ,  $A$  and  $Re_{wave}$  on the breaking of waves in a barotropic vortex flow, experiments and WKB simulations were carried out for waves generated by 2.5 cm and 5 cm diameter cylinders, and vortices of different strengths (measured by their circulation  $\Gamma$ ). Values of  $\Gamma$  are based upon PIV measurements in the mid-plane of vortices generated with similar experimental conditions (same values of  $f$  and  $V$ ) and evolving alone. Values of  $Re_{wave}$  and experimental results concerning the wave-breaking are given in table 5.1. For the experiments with the 2.5 cm diameter (experiments *ea* and *eb*), WKB simulations predict wave-breaking for initial wave amplitude above a critical value. However, amplitudes of the waves measured by PIV in similar experiments show that the initial amplitudes are below the critical value deduced from the WKB simulations. Therefore, wave-breaking is not observed in the experiments, in agreement with WKB simulations. For the experiments with the 5.0 cm diameter (experiments *fa*, *fb* and *ed*), the minimal amplitude of incident waves required for wave-breaking to be predicted by the WKB simulations is below the amplitude of waves in the experiments, deduced from PIV measurements. Wave-breaking is therefore observed in the experiments : for low  $A$  (experiment *fa* and *fb*), breaking events occur at the extremities of the vortex. For high  $A$  (experiment *ed*), the incident wave field is more energetic, and breaking spreads out gradually to the entire vortex.

## 5.6 conclusion

In this combined experimental and analytical effort, we have investigated the propagation of inertia-gravity waves in an axisymmetric vortex. Critical layers may exist when the waves have an absolute frequency close to  $N$  and propagate along the flow, or when their absolute frequency is close to  $f$  and they propagate against the flow. We have found that they are present in baroclinic vortices when the penetration length of waves,  $L$ , becomes lower than the radial extent  $R$  of the flow. This selective trapping process was predicted by WKB simulations and interpreted through similarities with valve-effect critical layers introduced by Olbers (1980). For the baroclinic vortices of the present study, vertical and horizontal shears are of the same order, and lead to critical layers corresponding to values of the wave intrinsic frequency in the middle of the propagation range. Trapping of the waves propagating against a barotropic vortex flow was also observed in the experiments and was in agreement with WKB simulations.

Wave-breaking events were detected by shadowgraph visualisation in experiments with large wave-length waves interacting with barotropic vortices. The combined experimental and WKB results suggest that the most relevant parameter to predict the breaking of waves inside the vortex flow is a Reynolds number,  $Re_{wave} = \sqrt{U_L^2 + U_H^2} / \nu k^2$ , with  $U_L$  and  $U_H$  the radial and vertical shears,  $\nu$  the kinematic viscosity and  $k$  the wave-number of incident waves. This Reynolds number measures qualitatively the growth rate of the wave amplitude due to the trapping effect, compared with the damping rate due to viscosity. For baroclinic vortices, this number  $Re_{wave}$  was low and WKB simulations confirmed that waves are quickly damped during the interaction, without triggering any instability. For barotropic vortices with larger values of  $Re_{wave}$  (typically  $Re_{wave} > 200$ ) breaking occurred for large amplitude waves. WKB simulations showed that negative gradients of density were generated along trapped waves, due to the very weak viscous damping and the increase of the radial component of the wave-vector. These negative density gradients are due to overturning motions and lead to buoyancy induced instabilities, in accordance with density fluctuations observed during wave-breaking.

For baroclinic vortices, the trapping of waves along critical layers was confirmed by the WKB simulations. The results for intense barotropic vortices suggest that wave breaking may also occur

in baroclinic vortices for higher values of  $Re_{wave}$  (around 200) than in the experiments presented here. But the baroclinicity of the flow, measured by  $U_H/U_L$ , would drive different polarisations for the trapped waves. Moreover, Lens-shaped vortices are sheared in the vertical and horizontal directions, and diffuse the regions where the condition for breaking is met. In other words, there is a general criteria given by both, baroclinicity  $U_H/U_L$  and the above mentioned Re-number, which determines whether breaking occurs or not. The exact form of this criterium is still open for research.

# Bibliographie

- [Appleby & Crighton (1987)] APPLEBY, J.C. & CRIGHTON, D.G. 1987 Internal gravity waves generated by oscillations of a sphere. *J. Fluid Mech.* **183**, 439–450.
- [Baker (1971)] BAKER, D. J. 1971 Density gradients in a rotating stratified fluid : experimental evidence for a new instability. *Science*. **172**, 1029–1031.
- [Badulin & Shrira (1984)] BADULIN, S.I., SHRIRA, V.I. & TSIMRING, L.SH. 1984 The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents. *J. Fluid. Mech.* **158**, 199–218.
- [Badulin & Shrira (1993)] BADULIN, S.I. & SHRIRA, V.I. 1993 On the irreversibility of internal-wave dynamics due to wave trapping by mean flow inhomogeneities. Part 1. Local analysis. *J. Fluid Mech.* **251**, 21–53.
- [Bretherton (1966)] BRETHERTON 1966 The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow. *Quart J. R. Met. Soc.* **92**, 466–480.
- [Booker & Bretherton (1967)] BOOKER & BRETHERTON 1967 The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.* **27**, 513–539.
- [Bretherton & Garret (1969)] BRETHERTON & GARRET 1969 *Wavetrains in inhomogeneous moving media. Proc. Roy. Soc. A* **302**, 529–554.
- [Clercx *et al.* (2001)] CLERCX, H. J. H., BECKERS, M., VERZICCO, R. & VAN HEIJST, G. F. J. 2001 Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid : experiments, model and numerical simulations. *J. Fluid Mech.* **433**, 1–27.
- [Dörnbrack (1998)] DÖRNBRACK, A. 1998 Turbulent mixing by breaking gravity waves. *J. Fluid Mech.* **375**, 113–141.
- [Fincham & Delerce (2000)] FINCHAM, A. & SPEDDING, G. 2000 Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids* **29**, S013–S022.
- [Flór *et al.* (1994)] FLÓR, J.B., FERNANDO, H.J.S. & VAN HEIJST, G.J.F. 1994 The evolution of an isolated turbulent region in a two-layer fluid. *Phys. Fluids* **6**(1), 287–296.
- [Howard (1961)] HOWARD, L.N. 1961 Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.* **10**, 158–160.
- [Ivanov (1974)] IVANOV, Y.A. & MOROZOV, Y.G. 1974 Deformation of internal gravity waves by a stream with horizontal shear. *Oceanology* **14**, 457–.
- [Kloosterziel & van Heijst (1991)] KLOOSTERZIEL, R.C. & VAN HEIJST, G.J.F. 1991 An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **223**, 1–.
- [Koop (1981)] KOOP, C.G. 1981 A preliminary investigation of internal gravity waves with a steady shearing motion. *J. Fluid Mech.* **113**, 347–386.
- [Leblond & Mysak (1978)] LEBLOND, P. H. & MYSAK, L. A. 1978 *Waves in the ocean. Elsevier Oceanography Series 20* pp601.



- [Lighthill (1978)] LIGHTHILL, J. 1978 *Waves in Fluids*. Cambridge University Press.
- [McIntyre (1995)] MCINTYRE, M.E. 1995 The stratospheric polar vortex and sub-vortex : fluid dynamics and mid-latitude ozone loss. *Philos. Trans. R. Soc. London* **352**, 227-240.
- [Miles (1961)] MILES, J.W. 1961 On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.* **10**, 496–508.
- [Moulin & Flor (2002)] MOULIN & FLOR 2002 On the spin-up by a rotating disk in a rotating stratified fluid. *chapter 5*.
- [Olbers (1980)] OLBERS 1980 The propagation of Internal Waves in a geostrophic current. *J. Physical Oceanography* **11**, 1224–1233.
- [Orlanski (1972)] ORLANSKI, I. 1972 On the breaking of standing internal gravity waves. *J. Fluid Mech.* **54** part 4, 577–598.
- [Staquet & Huerre (2002)] STAQUET, C. & HUERRE, G. 2002 On transport across a barotropic shear flow by breaking inertia-gravity waves. *Phys. of Fluids* **14**, 6, 1993–2006.

## 6

# Analyse du champ d'onde et aspects énergétiques de l'interaction

Dans le chapitre précédent, nous avons comparé les expériences à des simulations WKB, pour des ondes générées par un cylindre. Nous avons en particuliers démontré les similarités entre la propagation dans un vortex et les écoulements unidirectionnels en coordonnées cartésiennes : pour les vortex baroclines, l'existence de couches critiques à effet de valve distinctes des couches de réflexion est confirmée, en accord avec les études de Olbers (1980) dans le cas cartésien. Pour les vortex barotropes, on retrouve un piégeage des ondes se propageant face à l'écoulement et un déferlement par instabilité convective, qui ressemble aux résultats numériques de Staquet & Huerre (2002) obtenues dans le cas cartésien. Dans le cas d'un vortex axisymétrique, les couches critiques ne sont plus définies précisément dans l'espace, puisque le vecteur d'onde azimutal n'est plus conservé. Les simulations WKB deviennent donc indispensables pour déterminer quelles ondes sont piégées, et l'amplification de l'énergie de l'onde est moindre que dans les écoulements uni-directionnels. De plus, la viscosité joue un rôle extrêmement important dans les expériences, et doit absolument être prise en compte dans les simulations WKB pour comprendre l'absence de déferlement d'ondes dans les expériences avec les ondes de courte longueur d'onde.

Ce bon accord entre les simulations WKB et les expériences soulève un certain nombre de questions. Tout d'abord, les conditions dans lesquelles ces simulations ont été réalisées sont loin d'être justifiées : l'approximation WKB repose sur des hypothèses de faibles nombres de Rossby et de Froude, et les variations spatiales de la fréquence de Brunt-Vassaiala ont été négligées dans les simulations. Or, dans les expériences, ces hypothèses simplificatrices ne sont pas toujours vérifiées. Par ailleurs, si les simulations WKB prennent en compte les effets de la viscosité et expliquent l'absence de déferlement pour des valeurs de  $Re_{wave}$  et de l'amplitude initiale des ondes trop faibles, elles deviennent totalement inutilisables à partir du moment où le déferlement commence à se produire. Enfin, elles ne donnent pas d'information sur les effets non-linéaires.

Dans ce chapitre, nous nous proposons donc de poursuivre l'étude de l'interaction d'un point de vue expérimental. Dans une première partie, nous nous consacrerons à une étude expérimentale plus poussée de la propagation des ondes dans les vortex baroclines générés par un disque en rotation. Pour cela, nous procéderons à une analyse spectrale des champs de vitesse mesurés par PIV, de manière à extraire le champ d'onde du champ total. Dans une seconde partie, nous exposerons des résultats relatifs aux expériences avec les vortex barotropes, dans le cas où un déferlement se produit et a un impact sur l'évolution du vortex.

## 6.1 Décomposition spectrale du champ de vitesse dans les interactions avec les vortex baroclines

Les vortex baroclines générés par la rotation du disque présentent l'intérêt d'être quasiment stationnaires d'un point de vue temporel (évolution extrêmement lente lorsque  $t > \tau_{su}$ ), et de demeurer fixes dans l'espace grâce au forçage. Par ailleurs, le champ d'onde généré par un batteur périodique présente une dépendance temporelle quasi-périodique. A condition de disposer de mesures suffisamment rapides du champ de vitesse (fréquence d'acquisition au moins deux fois plus élevée que la fréquence de l'onde), sur des échelles de temps assez longues, il devient possible d'extraire le signal de l'onde par filtrage spectral.

Des mesures expérimentales ont donc été réalisées en respectant ces contraintes. Les images de particules ont été traitées par les algorithmes PIV développés par Fincham & Delerce (2000), qui permettent de prendre en compte la rotation et la déformation des particules de fluide, sur une grille suffisamment fine pour pouvoir détecter des ondes de faible longueur d'onde. En observant le signal temporel des composantes de la vitesse en chaque point de la grille, on voit clairement apparaître la fréquence associée à l'onde, sous la forme d'oscillations. On calcule la transformée de Fourier rapide (FFT) de ce signal en chaque point de la grille pour une série d'images pendant l'interaction. La composante de fourier associée à l'onde apparaît alors nettement dans le spectre.

Nous avons cherché dans un premier temps à détecter la présence de composantes doubles de la pulsation de base. En effet, les interactions non-linéaires sont susceptibles de générer des ondes harmoniques, de fréquence double de celle de l'onde incidente, ou bien un transfert vers un écoulement moyen. Nous pensions pouvoir détecter par cette méthode la génération d'harmoniques lors de l'interaction, en choisissant des ondes incidentes de fréquence relativement basses. Malheureusement, d'un point de vue expérimental, le générateur lui-même devient une source d'harmoniques dès lors que la fréquence de ces harmoniques appartient au domaine de propagation. Cette approche a donc été abandonnée, et nous avons adopté des fréquences plus élevées ( $\omega_{abs} > N/2$ ), pour empêcher cette génération parasite au niveau du batteur. Les harmoniques sortent alors du domaine de propagation et seul le transfert d'énergie vers l'écoulement de base reste possible.

Dans ces conditions, une seule fréquence apparaît dans les spectres de Fourier. En sélectionnant une fenêtre spectrale centrée sur cette fréquence de l'onde, on obtient alors par transformée de Fourier inverse, le champ associé aux ondes. En retranchant ce champ d'onde au champ total, on obtient un champ qui correspond au vortex. Le principe de cette décomposition est schématisé dans la figure 6.1.

### 6.1.1 Analyse du champ d'onde

#### Analyse de la polarisation

Dans le cadre de l'approximation WKB, l'onde respecte localement la relation de dispersion (2.19) et les relations de polarisation (2.21), où  $\omega$  est remplacé par la pulsation intrinsèque  $\omega_o$ . Dans les relations de polarisation, on constate que le champ de vitesse horizontal de l'onde décrit une ellipse dont l'excentricité dépend des caractéristiques du milieu  $f$  et  $N$ , et de la pulsation intrinsèque  $\omega_o$  : l'ellipse devient un cercle lorsque  $\omega_o = f$ , et l'ellipse la plus excentrique est obtenue pour  $\omega_o = N$ , avec un rapport du grand axe sur le petit axe égal à  $N/f$ .

Dans un certain nombre d'expériences, nous avons donc traité des séquences temporelles de champs de vitesse par FFT. Nous avons ensuite analysé en chaque point de la grille le mouvement du champ d'onde, de manière à détecter un mouvement elliptique suffisamment net. L'excentricité

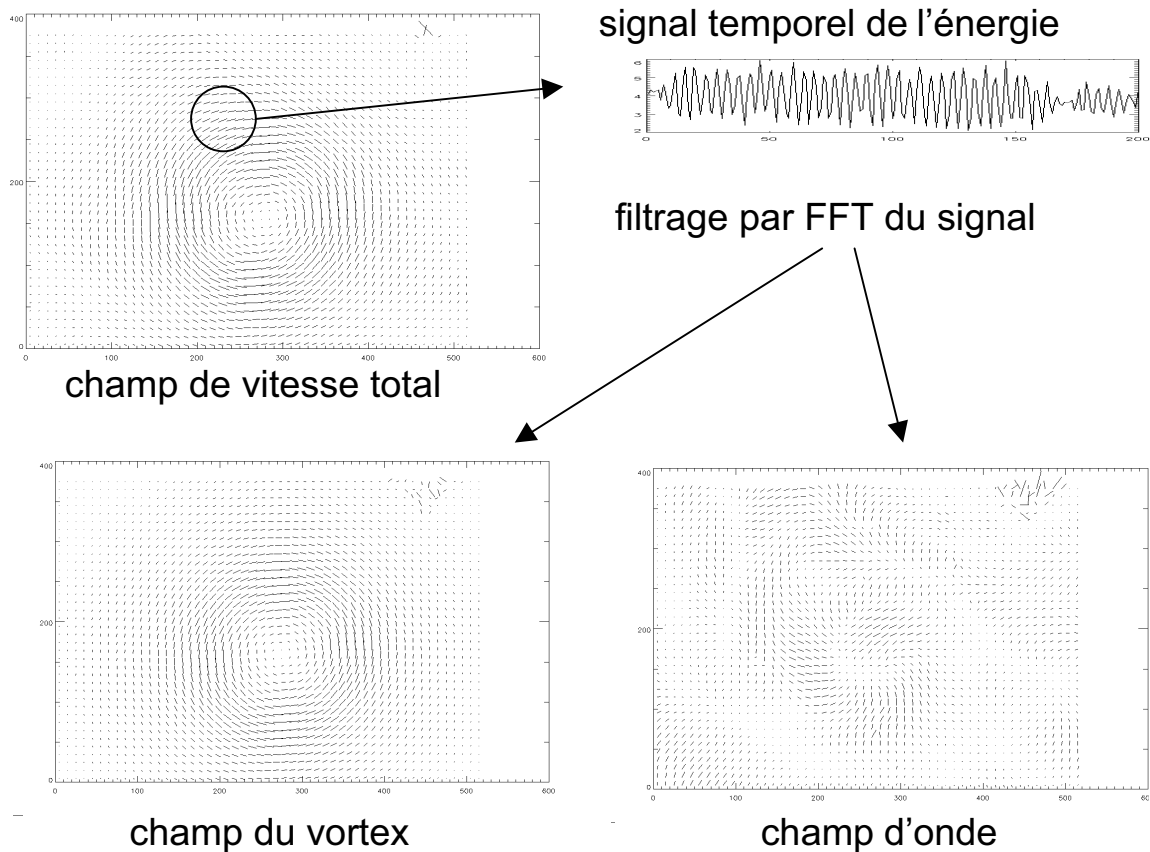


FIG. 6.1 – Principe de la décomposition du champ de vitesse par transformée de Fourier rapide. La figure en haut à gauche correspond au champ de vitesse obtenu par PIV dans une tranche horizontale. Le profil temporel en énergie cinétique pour un point de la grille est donné en haut à droite : on voit clairement les oscillations périodiques associées aux ondes. En éliminant les fréquences autour du pic du champ d'onde dans les spectres obtenus par transformée de Fourier rapide (FFT), on reconstitue par transformation inverse le champ du vortex qui est tracé dans la figure en bas à gauche, tandis que la partie du spectre localisée autour de la fréquence des ondes permet de reconstituer le champ d'onde, tracé dans la figure en bas à droite.

de ce mouvement elliptique est alors convertie en valeur de la pulsation intrinsèque  $\omega_o$ . Dans la figure 6.2, nous avons reproduit les résultats de ce traitement pour une expérience avec un vortex relativement puissant ( $\omega_d = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ) généré par le disque de rayon  $R = 12 \text{ cm}$ . Les ondes étaient générées par un batteur formé d'une surface ondulée déplacée horizontalement et placée en haut à droite de l'image : les ondes incidentes se propagent majoritairement dans la direction de l'écoulement, mais une partie pénètre de face dans le champ du vortex (celles en haut à droite dans l'image).

Dans le haut de la figure 6.2, on voit apparaître une partie du champ d'onde qui se déplace de la droite vers la gauche et qui correspond à la partie des ondes incidentes transportées par le champ de vitesse du vortex. La pulsation intrinsèque correspond à la valeur de  $\omega_{abs}$  pour la partie la plus haute de la figure. Lorsqu'on descend vers le coeur du vortex (indiqué par un cercle noir donnant la taille du disque tournant), cette pulsation intrinsèque prend des valeurs plus

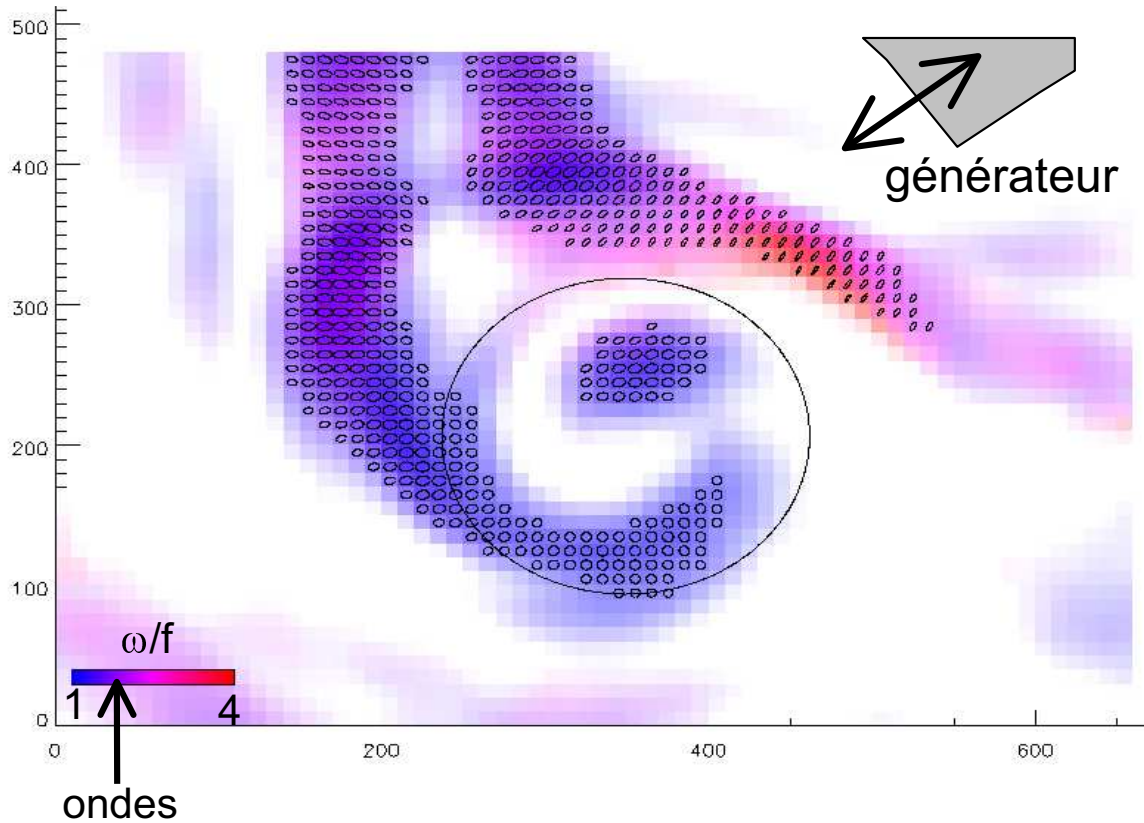


FIG. 6.2 – Analyse de la polarisation du champ d'onde. En chaque point de la grille, la polarisation du champ d'onde est indiquée sous la forme d'une ellipse plus ou moins excentrique, et l'excentricité de cette ellipse est interprétée comme une mesure de la pulsation intrinsèque. La valeur de la pulsation intrinsèque est tracée par une couleur, bleue pour des valeurs proches de  $f$  et rouges pour des valeurs proches de  $N$ . L'intensité de la couleur est proportionnelle à l'intensité du champ d'onde. Seuls les points de la grille où le mouvement dépasse un seuil minimal d'amplitude et de corrélation avec un mouvement elliptique sont tracés. Les conditions expérimentales sont les suivantes : mesures par PIV dans un plan situé 2 cm au-dessus du disque de rayon  $R = 12\text{cm}$  et en rotation à  $\omega_d = 0.5\text{ s}^{-1}$ , dans un fluide stratifié tournant caractérisé par  $f = 0.5\text{ s}^{-1}$  et  $N = 1.7\text{ s}^{-1}$ . Les ondes sont générées en haut à droite par un batteur constitué d'une surface ondulée oscillant à la pulsation  $\omega_{abs} = 0.85\text{ s}^{-1}$ , soit une période  $T = 7.5\text{ s}$ . Mesures par PIV toutes les 1.2 s.

basses. En haut à droite de la figure, on distingue une partie du champ d'ondes qui correspond à des rayons se propageant initialement en face du champ de vitesse du vortex, et dont la pulsation intrinsèque augmente vers la valeur maximale  $N$  lors de l'interaction, caractérisée par une polarisation elliptique très marquée et une couleur rouge. Ce comportement est en accord avec les résultats exposés dans le chapitre précédents : les ondes incidentes se propageant dans le sens du vortex sont réfléchies (couleur violette-bleue) tout en étant transportée plutôt horizontalement ; les ondes incidentes faisant face à l'écoulement voient leur pulsation intrinsèque augmenter (couleur rouge) et "plongent", car leur vitesse de groupe devient plutôt verticale.

Par contre, la présence d'une polarisation plutôt circulaire autour du cœur du vortex est plus difficile à interpréter. En effet, on s'attend à un piégeage d'une partie des ondes dans le champ du vortex, ce qui pourrait expliquer cette détection du champ d'onde autour du vortex. Il est plus

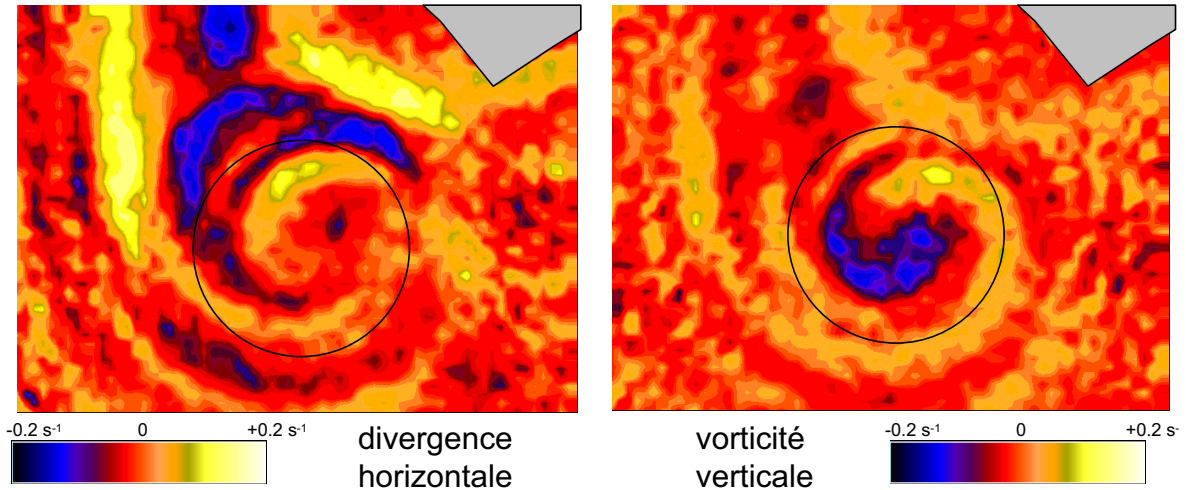


FIG. 6.3 – Champs de divergence et de vorticité d'une des images de la séquence temporelle analysée dans la figure 6.2. Seul le champ d'onde est présent, grâce au filtrage par FFT. Les échelles de vorticité et de divergence sont indiquées au niveau des barres colorées.

prudent de revenir au champ d'onde brut pour interpréter ces mouvements proches du coeur du vortex. Dans la figure 6.3, nous avons reproduit les champs de vorticité et de divergence dans une des images de la séquence temporelle analysée dans la figure 6.2. On retrouve les champs d'onde se propageant le long de l'écoulement et face à l'écoulement, respectivement en haut à gauche et en haut à droite. L'analyse des mouvements de ces parties du champ d'onde montrent clairement un accord avec les ellipses tracées dans la figure 6.2. Par contre, lorsqu'on se rapproche du coeur du vortex, la situation devient plus compliquée : il existe des ondes de petites longueurs d'onde se propageant dans le sens contraire au vortex, ainsi que des mouvements ondulatoires plutôt dans le sens de l'écoulement, à des longueurs d'onde plus élevées. Seules les secondes sont détectées par notre analyse de la polarisation du mouvement, car elles sont associées à des mouvements du champ de vitesse plus importants.

La méthode d'analyse de la polarisation repose en fait sur l'existence d'une seule onde au point considéré. Elle donne alors des résultats concluants quant à la pulsation intrinsèque de l'onde considérée. Cependant, dans le coeur du vortex, il est extrêmement fréquent de voir se superposer plusieurs ondes. Le mouvement elliptique correspond alors à une superposition des mouvements elliptiques de chacune des ondes, et l'excentricité n'est plus reliée à la pulsation intrinsèque. Par exemple, en imaginant la superposition d'une onde de polarisation circulaire ( $\omega_o$  proche de  $f$ ) et d'une onde de polarisation très excentrique ( $\omega_o$  proche de  $N$ ), on obtient finalement un mouvement elliptique, avec une valeur intermédiaire de l'excentricité qui ne correspond à aucune des deux ondes.

### Génération de modes par le piégeage des ondes

Puisque l'analyse de la polarisation du champ d'ondes n'est plus possible dans les régions proches du coeur du vortex où se propagent simultanément plusieurs ondes, il est nécessaire de revenir à une observation des mesures filtrées par FFT pour faire ressortir le champ associé aux ondes.

Dans la figure 6.3, le champ d'onde est assez complexe dans le voisinage du vortex, mais

peut encore être interprété par la théorie des rayons. La partie du champ d'onde se propageant initialement dans le sens de l'écoulement est responsable des ondes se propageant de droite à gauche, situées en haut à gauche des images et identifiées par l'analyse de la polarisation dans la figure 6.2. Elle est également responsable de mouvements ondulatoire se propageant dans le sens co-grade au voisinage du coeur du vortex, et qui sont détectés par l'analyse de la polarisation. La partie du champ d'onde se propageant initialement face à l'écoulement est responsable des ondes à droite en haut du vortex dans les images de la figure 6.3, correctement interprétées par l'analyse de la polarisation. Par contre, ces ondes se propageant face au vortex se prolongent vers le coeur du vortex sous la forme d'ondes, plus courtes, visibles dans la partie haute du coeur du vortex. Ces ondes ne sont pas détectées clairement par l'analyse de la polarisation, et viennent en perturber l'interprétation en termes de pulsation intrinsèque  $\omega_o$  puisqu'elles se superposent aux ondes co-grades.

D'autres expériences ont été réalisées afin de clarifier l'existence de plusieurs ondes au sein du vortex. Dans la figure 6.4, on a tracé les résultats d'une expérience similaire, où des mesures par PIV dans une couche à 3 cm au-dessus du disque ont été réalisées et filtrées par FFT. Nous avons pris soin de choisir une grille très fine et d'avoir des conditions expérimentales optimales pour le traitement PIV (en particuliers, une bonne densité de particules). Le vortex est un petit peu plus faible ( $\omega_d = 0.38 \text{ s}^{-1}$ ). Les ondes se propageant de droite à gauche, situées en haut à gauche dans les images, se prolongent par un enroulement dans le sens du vortex. Cela correspond à des ondes se propageant dans le même sens que l'écoulement. Cet enroulement correspond à des ondes qui se sont réfléchies dans un plan horizontal au-dessus du plan de visualisation, et qui poursuivent leur propagation vers le bas en se propageant hors du vortex : la vitesse de phase radiale est dirigée vers l'extérieur. Par ailleurs, des ondes se propageant face à l'écoulement sont présentes autour du coeur du vortex, sous la forme d'une spirale qui s'enroule dans le sens horaire. Cette spirale correspond à un piégeage des ondes se propageant initialement face à l'écoulement, qui se réfléchissent sur une couche où  $\omega_o = N$ , avant d'être piégées lorsqu'elles remontent : conformément aux prédictions de la théorie WKB, ces ondes se propagent dans le sens rétrograde, avec une vitesse de phase radiale toujours dirigée vers l'intérieur du vortex. Cette spirale, observée par PIV, correspond aux ondes piégées observées par méthode d'ombre dans la figure 5.12(a) du chapitre précédent.

Dans la figure 6.5, on a repris les mêmes conditions expérimentales, exception faite de la pulsation absolue de l'onde, qui est plus élevée. Le champ en haut de l'image se déplace cette fois encore plus à droite puisque les ondes incidentes ont une vitesse de groupe plus verticale. La propagation des ondes vers la gauche se prolonge par des ondes se propageant vers l'extérieur et s'enroulant dans le sens du vortex à sa gauche. La spirale rétro-grade de la figure 6.4 a disparu et est remplacée par une portion de mode rétrograde, positionnée en haut du coeur du vortex et s'enroulant en sens opposé à l'écoulement. Du fait de l'augmentation de la pulsation absolue  $\omega_{abs}$ , les ondes faces au vortex sont réfléchies en  $\omega_o = N$  plus rapidement et sont moins facilement piégées que dans l'expérience précédente, ce qui explique la disparition partielle de la spirale. Par contre, les ondes se propageant dans le sens de l'écoulement mettent plus de temps à se réfléchir mais sont plus facilement piégées, comme cela est visible dans l'enroulement des ondes se propageant vers l'extérieur. Ces observations sont donc conformes aux résultats présentés dans le chapitre 5.

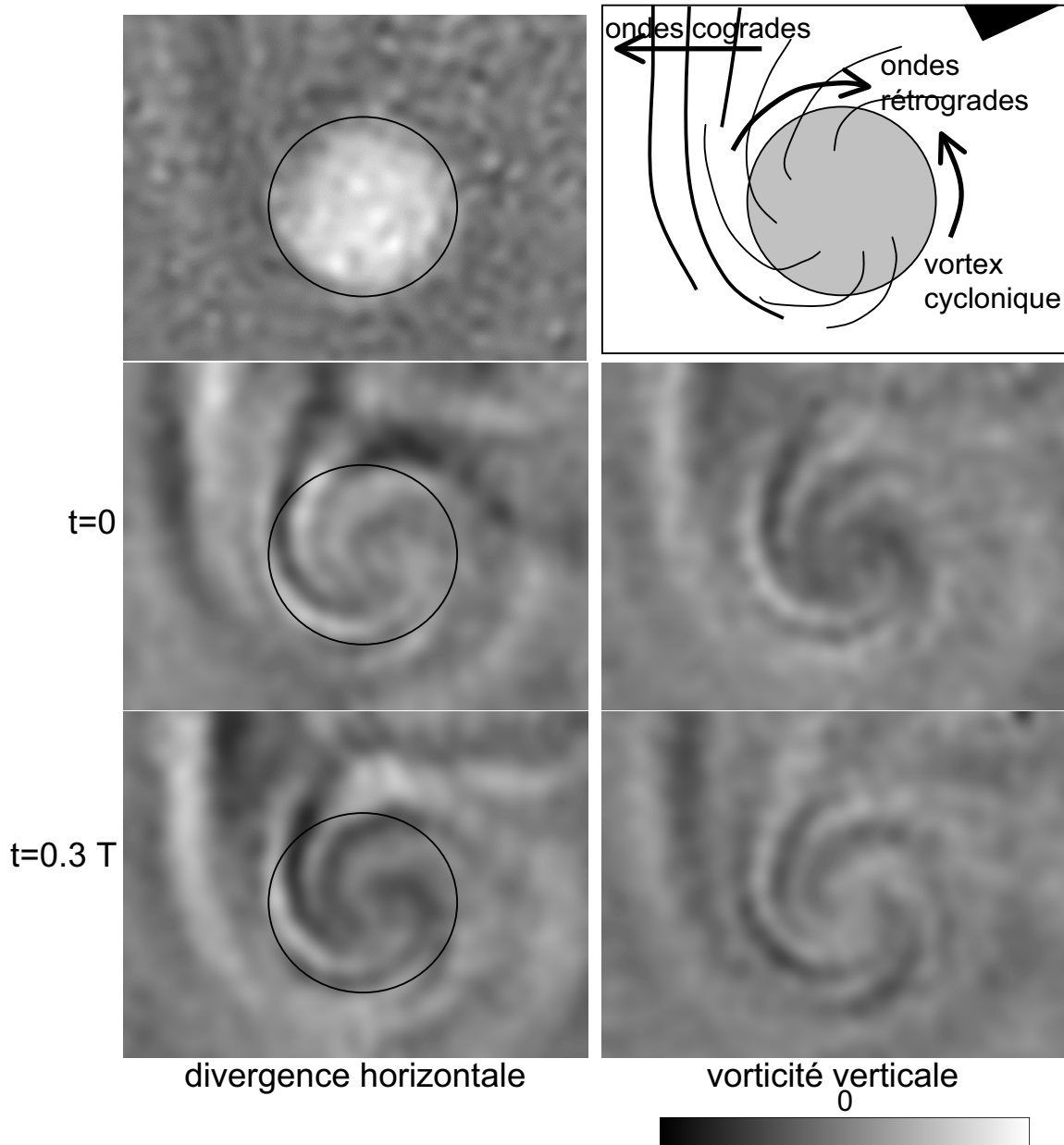


FIG. 6.4 – Séquence temporelle de la vorticité verticale et la divergence horizontale du champ d'onde extrait des mesures PIV par filtrage FFT. L'image en haut de la figure à gauche correspond au champ de vorticité du vortex au début de la séquence. Le schéma en haut à droite indique le sens d'écoulement du vortex, la position approximative du batteur (coin en haut à droite) ainsi que les familles d'ondes visibles dans les mesures par PIV. Les échelles de vorticité et de divergence sont respectivement de  $[-0.2s^{-1}, -0.2s^{-1}]$  et  $[-0.2, 0.2]$ . Les conditions expérimentales sont les suivantes : mesures par PIV dans un plan situé à 3 cm au-dessus du disque de rayon  $R = 12\text{ cm}$ , en rotation à  $\omega_d = 0.38\text{ s}^{-1}$ , dans un fluide stratifié tournant caractérisé par  $f = 0.5\text{ s}^{-1}$  et  $N = 1.5\text{ s}^{-1}$ . Les ondes sont générées en haut à droite par un batteur constitué d'une surface ondulée oscillant à la pulsation  $\omega_{abs} = 0.8\text{ s}^{-1}$ , soit une période  $T = 8.0\text{ s}$ . Mesures par PIV toutes les 1.2 s.



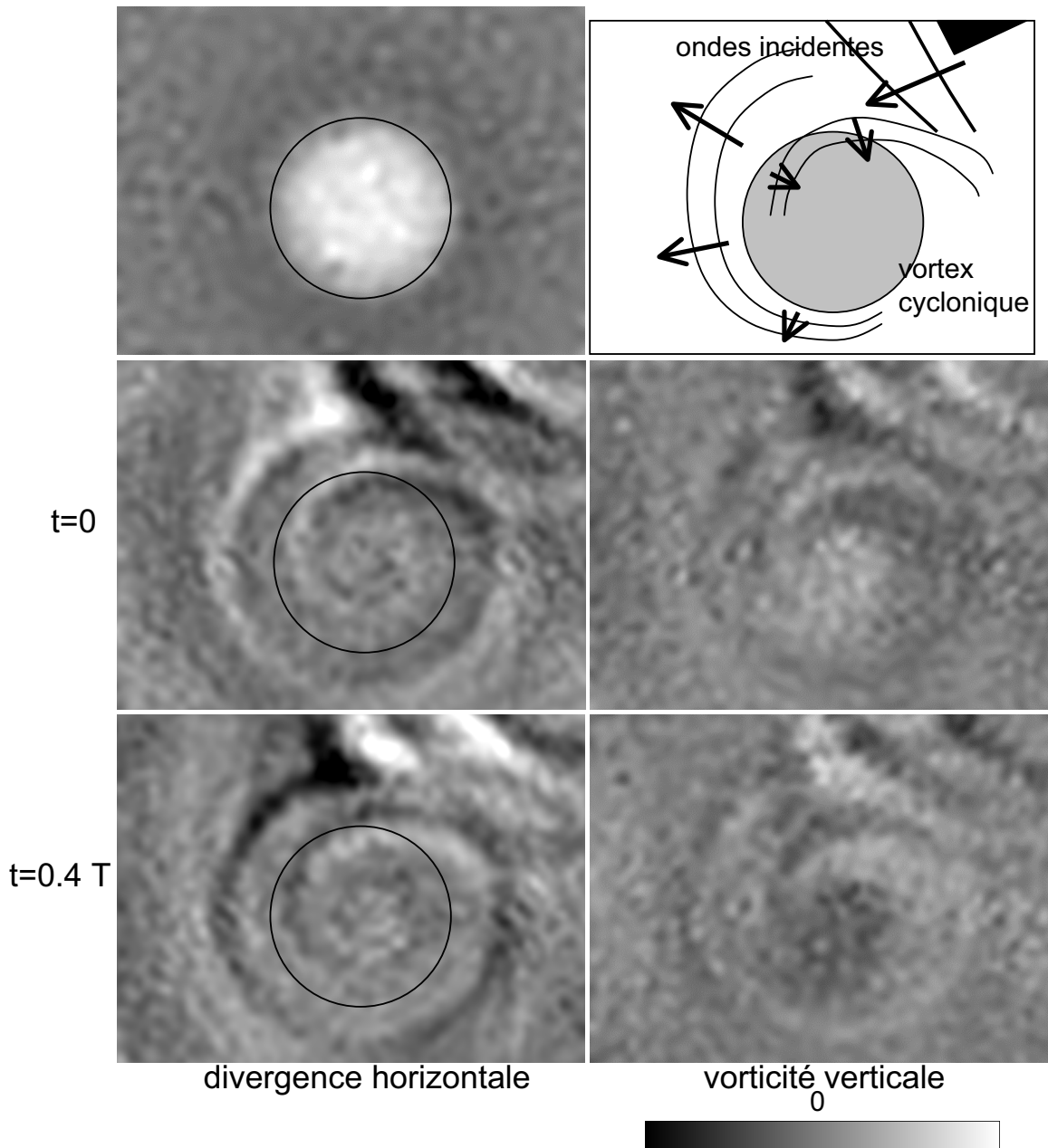


FIG. 6.5 – Séquence temporelle de la vorticité verticale et de la divergence horizontale du champ d'onde extrait des mesures PIV par filtrage FFT. L'image en haut à gauche de la figure à gauche correspond au champ de vorticité du vortex au début de la séquence. Le schéma en haut à droite indique le sens d'écoulement du vortex, la position approximative du batteur (coin en haut à droite) ainsi que les familles d'ondes visibles dans les mesures par PIV. Les échelles de vorticité et de divergence sont respectivement de  $[-0.2, 0.2]$  et  $[0.2, 0, 2]$ . Les conditions expérimentales sont les suivantes : mesures par PIV dans un plan situé à 3 cm au-dessus du disque de rayon  $R = 12$  cm et en rotation à  $\omega_d = 0.38$  s<sup>-1</sup>, dans un fluide stratifié tournant caractérisé par  $f = 0.5$  s<sup>-1</sup> et  $N = 1.5$  s<sup>-1</sup>. Les ondes sont générées en haut à droite par un batteur constitué d'une surface ondulée oscillant à la pulsation  $\omega_{abs} = 1.05$  s<sup>-1</sup>, soit une période  $T = 6.0$  s. Mesures par PIV toutes les 1.2 s.

### 6.1.2 Observation des modes piégés par colorant

En introduisant de la fluoroscéine dans l'écoulement, au-dessus du vortex, et en éclairant par une tranche laser horizontale, on obtient en général une forme circulaire de la distribution de colorant. Dans les zones extérieures à ce cercle, du colorant est présent dans les couches inférieures au plan laser. Lors de la génération d'ondes, les mouvements verticaux amènent ce colorant dans le plan laser, et des filaments apparaissent dans les images. En ne colorant que la région au bord du vortex, cela permet de faire apparaître les modes piégés.

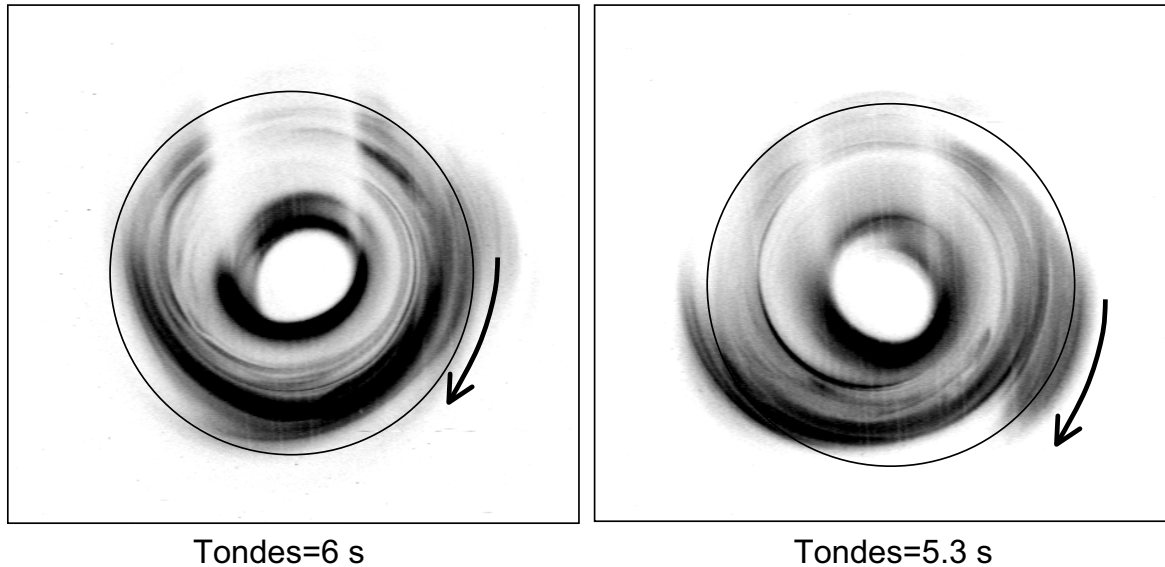


FIG. 6.6 – Visualisation par colorant des modes piégés. Les conditions expérimentales sont les mêmes que dans les figures 6.4 et 6.5. De la fluoroscéine a été introduite au-dessus du vortex et est éclairée par un plan laser horizontal environ 3 cm au-dessus du disque tournant. La génération de modes propagatifs piégés est détectée par la formation de filaments de colorant, qui apparaissent aux endroits où le mouvement vertical des ondes amène de la fluoroscéine dans le plan laser. Les flèches noires indiquent la direction de propagation des filaments de colorant, et par conséquent, des ondes ainsi détectées.

Dans la figure 6.6, on a reproduit des images de colorant mettant en évidence ces modes piégés dans des conditions expérimentales similaires à celles des figures 6.4 et 6.5. La visualisation par colorant permet de confirmer l'existence des modes piégés par une méthode différente de la PIV.

On peut remarquer dans le centre des images une zone sans colorant, qui résulte de la méthode d'introduction du colorant : nous avons injecté la fluoroscéine vers le bord du disque, sans chercher à colorer le centre. Par contre, les observations expérimentales montrent que sous l'action des ondes, le trou central prend une forme légèrement elliptique, et que la fluoroscéine pénètre lentement de plus en plus profondément vers le centre. Compte-tenu des caractéristiques du vortex, il est peu probable qu'un transport chaotique puisse rendre compte de ce phénomène, mais la présence de couches de double diffusion dans les expériences avec les vortex baroclines peut accélérer significativement un transport radial par rapport à de la diffusion simple, particulièrement si les couches de double diffusion sont périodiquement perturbées par les ondes.

### 6.1.3 Analyse du champ du vortex

Une fois le champ d'onde retiré du champ total, le reste correspond au champ du vortex. Cela revient à éliminer les composantes proches de la fréquence de l'onde dans le spectre FFT. Il est alors possible de se concentrer sur l'évolution du champ du vortex, pour détecter un dépôt d'énergie par l'interaction. Ce travail a été effectué pour un certain nombre d'expériences. Ici, nous avons choisi de présenter une expérience particulière, mais les remarques formulées restent valables pour les autres expériences. Il s'agit d'une acquisition de 400 paires d'images, avec un pas de temps de 1.2s. La génération des ondes commence vers la 100ème acquisition et le batteur cesse de bouger vers la 300ème acquisition. La période du batteur est de 7.5s, et l'acquisition est donc suffisamment rapide pour autoriser un filtrage par FFT du signal.

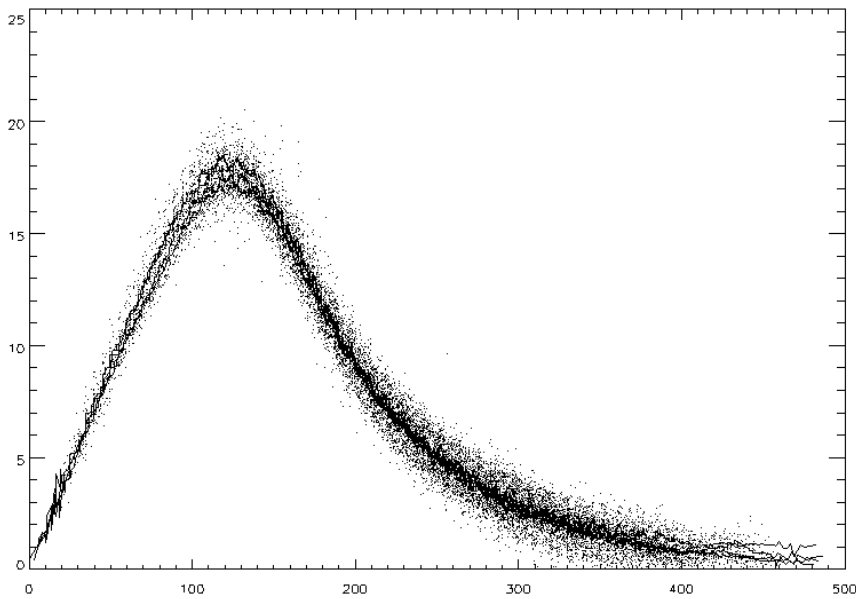


FIG. 6.7 – Profils radiaux de vitesse du vortex à différents instants dans l'expérience de la figure 6.4. Les temps sont de 12s, 120s, 240s et 420s, et les ondes sont générées entre 120s et 360s. Les points correspondent aux mesures PIV en différents points de la grille, tandis que les courbes continues sont obtenues par lissage des profils. L'échelle spatiale est calculée en nombre de pixels, ce qui donne une vitesse en pixels/s et une coordonnée radiale en pixels.

Dans la figure 6.7, on a représenté des profils radiaux de vitesse pour quatre temps différents durant l'expérience, la distribution de vitesse autour du centre du vortex restant fortement circulaire dans le cas du champ de vortex. On constate qu'il est impossible de détecter une évolution nette de ce profil. En particulier, il est impossible de distinguer le profil avant le début de l'interaction de celui bien après la fin de l'émission des ondes.

Dans les expériences analysées grâce à cette méthode, aucune évolution importante des profils radiaux n'a pu être mesurée. Cela vient confirmer l'interprétation linéaire donnée dans le chapitre 4, basée sur des comparaisons avec des simulations WKB qui montrent un fort amortissement visqueux du champ d'onde. Bien sûr, l'amortissement visqueux pourrait lui aussi conduire à des variations spatiales du tenseur radiatif qui mesure justement le taux de transfert de l'énergie du champ d'ondes vers un champ moyen (voir par exemple McIntyre (2000)), mais il semble que ce taux soit beaucoup trop bas dans les expériences pour pouvoir être détecté.

## 6.2 Impact des interactions et du déferlement des ondes sur les vortex barotropes

Dans les expériences avec les vortex barotropes générés par aspiration, présentés dans le chapitre précédent, le vortex se déplace pendant les expériences dans le champ de la caméra, et évolue rapidement dans le temps par diffusion. Un traitement par FFT du signal obtenu par des mesures PIV est donc impossible. Par contre, plusieurs expériences ont montré que l'évolution du profil radial du vortex dans le plan médian (au niveau du milieu du vortex) est reproduite assez fidèlement par un simple modèle diffusif. On peut également estimer l'évolution temporelle du rayon du vortex,  $R_{max}$ , définie comme le rayon où sa vitesse est maximale, à partir de la loi d'évolution en  $R_{max}(t) = 1.12 * 2\sqrt{\nu t}$  du rayon pour un vortex de Lamb-Oseen. Juste après la création du vortex, c'est-à-dire au moment du retrait du tube, le profil de vorticité est gaussien avec  $R_{max} \approx 1.6 \text{ cm}$ . Cela correspond à un temps  $t_o \approx 50 \text{ s}$  pour un vortex diffusif. Si on appelle  $t$  le temps écoule depuis la création du vortex par aspiration, on trouve une assez bonne estimation du rayon par la formule  $R_{max} = 1.12 * 2\sqrt{\nu(t + t_o)}$  (voir commentaires à ce propos dans le chapitre 5).

Fort de ces constatations, nous avons donc réalisé des expériences d'interactions dans lesquelles une première acquisition est réalisée sans ondes, pour pouvoir mesurer l'évolution du vortex seul dans le plan médian. Cette évolution est en général bien reproduite par le modèle diffusif. Ensuite, une seconde acquisition est réalisée en présence des ondes, dans des conditions aussi proches que possibles en ce qui concerne la génération du vortex (même débit de la pompe, même volume retiré, même temps de déclenchement de l'acquisition). De cette manière, nous sommes capables de générer des vortex aussi identiques que possibles, et après un traitement des acquisitions pour en retirer le champ de vitesse, nous pouvons comparer les champs de vitesse associés au vortex avec et sans ondes.

Dans toutes les expériences avec des ondes générées par un cylindre de  $2.5 \text{ cm}$  de diamètre, aucun impact de l'interaction sur l'évolution du vortex n'a pu être détectée. Dans ces conditions, il convient de noter que l'interaction ne débouche pas sur un déferlement, comme cela est expliqué dans le chapitre 5. L'amortissement visqueux des ondes piégées limite alors considérablement les transferts d'énergie vers le champ de base, ce qui empêche sa détection par PIV. Dans les expériences avec des ondes générées par un cylindre de  $5.0 \text{ cm}$ , les résultats du chapitre 5 montrent qu'un déferlement est possible. Mais dans le cas où les ondes sont générées continuellement, le mélange conduit à une perturbation très importante du champ du vortex. Les champs de vitesse calculés par PIV deviennent souvent difficile à interpréter : l'extraction du champ de vitesse associé au vortex lui-même devient sujette à caution. Nous avons cherché à limiter ces inconvénients en générant les ondes pendant un laps de temps suffisamment court, tout en conservant le phénomène de déferlement. Il est alors possible d'extraire le profil radial de vitesse du vortex avant et après le déferlement.

Dans la figure 6.8, nous comparons des mesures par PIV de profils radiaux de vitesse du vortex dans une expérience sans ondes, et dans une expérience similaire avec déferlement. Avant le déferlement des ondes, le modèle numérique diffusif introduit dans le chapitre 5 reproduit assez fidèlement l'évolution du vortex, avec ou sans ondes. Après le déferlement, ce modèle numérique continue à prédire l'évolution du vortex sans ondes, comme cela a pu être vérifié pour d'autres vortex. Par contre, le profil radial du vortex subissant un déferlement présente un raidissement assez net de sa partie extérieure.

Une analyse plus fine des images de particules montre que le déferlement apparaît dans la zone extérieure du vortex, dans la région où se produit le raidissement du profil de vitesse. Dans les

images de PIV, de petites structures de vorticit   sont g  n  r  es par le d  ferlement, et m  langent la zone ext  rieure du vortex. Le d  ferlement tend donc    uniformiser et dissiper la quantit   de mouvement autour du vortex, ce qui explique la chute de la composante azimutale du champ de vitesse dans la derni  re image de la figure 6.8 et le raidissement du profil    l'ext  rieur du vortex. Par contre, le coeur semble peu affect   par le d  ferlement : en effet, il continue      tre bien pr  dit par le mod  le diffusif. Il est important de noter que les ondes ne sont g  n  r  es que pendant une dur  e limit  e, pour pouvoir d  tecter l'effet sur le profil du vortex. Le confinement    la bordure ext  rieure de l'impact sur le profil est donc la cons  quence du d  ferlement, mais le vortex a aussi subi une phase de restabilisation, soit par des processus visqueux, soit par une redistribution des particules fluides. Ce r  sultat n'est donc pas en contradiction avec les observations du m  lange pr  sent  es dans le chapitre 7, dans lesquelles nous verrons que le m  lange induit par le d  ferlement dans des conditions exp  rimentales similaires p  n  tre plus profond  ment dans le vortex que ne peuvent le laisser penser,    premi  re lecture, les mesures par PIV pr  sent  es ici.

Ces mesures montrent que le d  ferlement des ondes aboutit finalement    un d  p  t de vorticit   n  gative dans la zone de d  ferlement, et    un raidissement du profil de vitesse. Compte-tenu de la nature du d  ferlement, un m  lange important se produit, dans les directions radiales et verticales. Or, l'effondrement de couches m  lang  es au sein d'un fluide stratifi   tournant conduit en g  n  ral    la formation de vorticit   n  gative par compression des colonnes de fluide. Ce processus pourrait expliquer le d  p  t de vorticit   n  gative par le d  ferlement des ondes d'inertie-gravit   dans nos exp  riences.

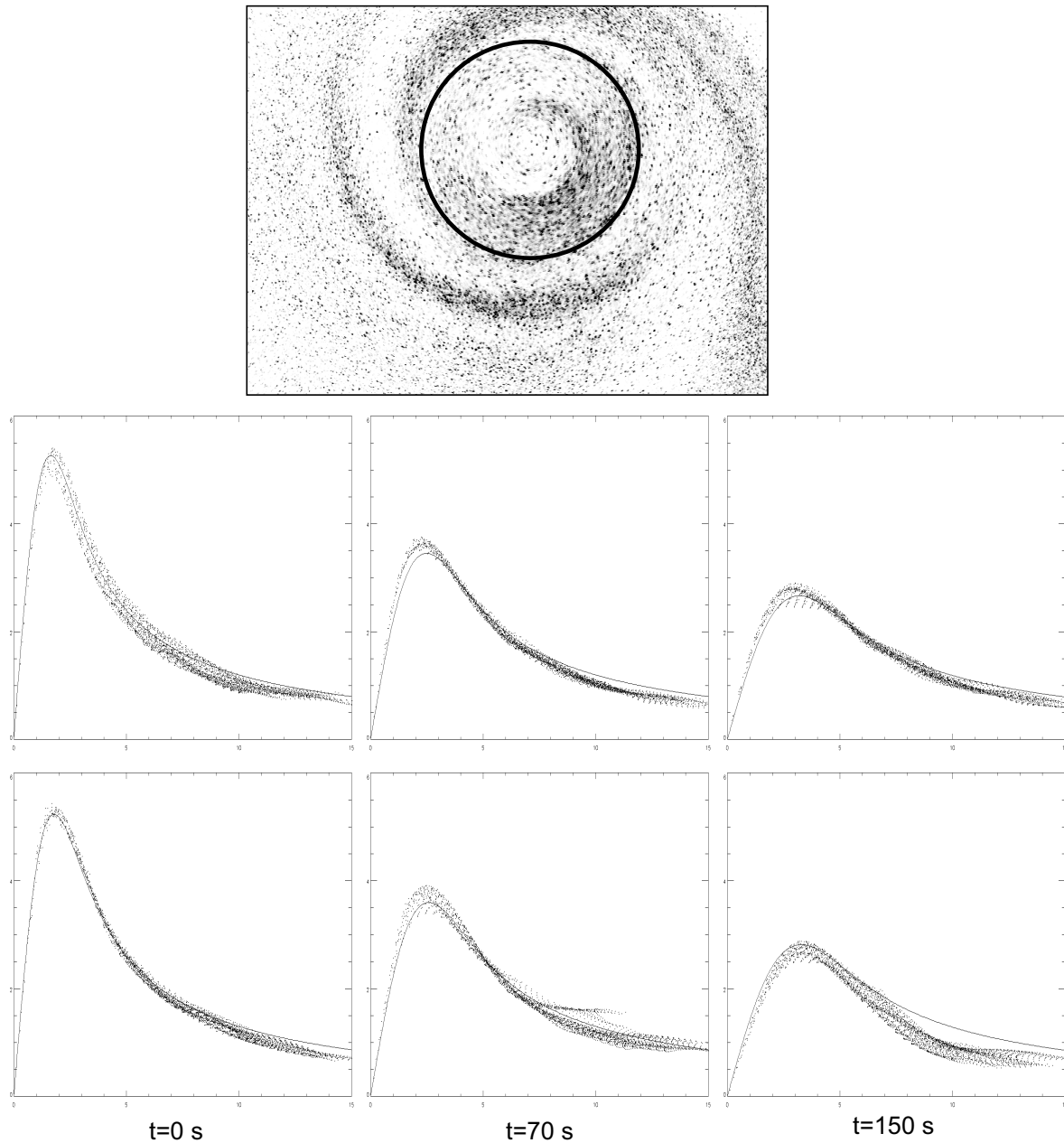


FIG. 6.8 – Evolution des profils radiaux de vitesse de vortex barotropes, sans puis avec des ondes déferlentes. L'image en haut correspond à une image du champ de particules juste avant le déferlement : les zones concentrées correspondent à des particules déplacées verticalement par l'onde, qui sont amenées d'une couche inférieure plus dense. Cette succession de couches denses marque la présence de l'onde. Les ondes sont générées à droite de l'image par un cylindre de diamètre  $D = 5.0$  cm. Le cercle noir correspond à une distance de 5 cm autour du centre du vortex. Les profils au milieu de la figure correspondent à une expérience sans ondes. Les profils du bas correspondent à l'expérience avec ondes et déferlement. Les courbes continues noires correspondent aux prédictions du modèle diffusif, et les points sont des mesures expérimentales. Les conditions de l'expérience sont les suivantes :  $f = 0.5$  s<sup>-1</sup>,  $N = 1.5$  s<sup>-1</sup>,  $V = 3.5$  L,  $\omega_{abs} = 0.8$  s<sup>-1</sup>. Les temps indiqués correspondent aux temps d'acquisition par PIV, et cette acquisition a commencé environ 15 s après le retrait du tube d'aspiration. Les ondes sont générées entre  $t = 12$  s et  $t = 78$  s, et le déferlement dans le plan de visualisation se déclenche au temps  $t = 120$  s.



# Mélange induit par l'interaction et le déferlement des ondes

Dans les chapitres précédents, nous avons mené une étude essentiellement dynamique de l'interaction des ondes avec un vortex. Nous avons montré comment les ondes se propagent et sont piégées dans les vortex baroclines, et comment ce piégeage déclenche un déferlement dans le cas des vortex barotropes. Dans ce dernier chapitre, nous présentons des résultats relatifs au mélange induit par l'interaction et le déferlement des ondes au voisinage d'un vortex barotrope. Nous commencerons par présenter la méthode expérimentale adoptée et les observations. Nous interpréterons enfin ces observations, en distinguant deux mécanismes distincts générant le mélange : un transport chaotique associé aux perturbations des lignes de courant du vortex par les ondes, et les mouvements turbulents déclenchés par le déferlement des ondes.

## 7.1 méthode expérimentale

Suite à plusieurs essais infructueux d'introduction d'un colorant après la génération du vortex par aspiration, nous avons adopté une démarche consistant à introduire le colorant avant. L'écoulement créé progressivement par l'aspiration est similaire à celui d'un point vortex localisé au niveau du tube. Il est caractérisé par un champ de vitesse en  $1/r$ , avec un fort taux de cisaillement : les régions colorées avant l'aspiration sont rapidement étirées et des concentrations importantes sont nécessaires pour continuer à observer la répartition de colorant sur des durées assez longues. De manière à obtenir une distribution de colorant bien répartie sur l'ensemble du vortex, avant l'interaction avec les ondes, nous traçons un plan vertical de fluoroscéine très concentrée à travers la cuve. La figure 7.1 illustre cette méthode : un fil imbibé d'une solution concentrée de fluoroscéine puis séché, est lesté de plombs et introduit d'un côté de la cuve (le séchage permet de limiter le relargage de fluoroscéine dans l'eau pendant la descente du fil). Le fil est déplacé à travers la cuve et génère un plan vertical de fluoroscéine. Le tube perforé est ensuite introduit au niveau de ce plan vertical de colorant. Dans les images en bas de la figure 7.1, on voit la distribution de fluoroscéine éclairée respectivement par un plan laser horizontal à mi-hauteur, et un plan laser vertical contenant l'axe du vortex. Dans un plan horizontal à mi-hauteur (c'est-à-dire à l'altitude du centre du vortex), l'écoulement créé par aspiration génère une spirale. La symétrie de cette spirale dépend de la localisation du tube par rapport au plan vertical initial de fluoroscéine. Le coeur du vortex est en général bien mélangé dans un cercle d'environ 4 cm de diamètre : cela est dû au mélange créé par la remontée du tube, et au resserrement très important des lignes de colorant qui finissent par s'étaler et se recouvrir les unes et les autres



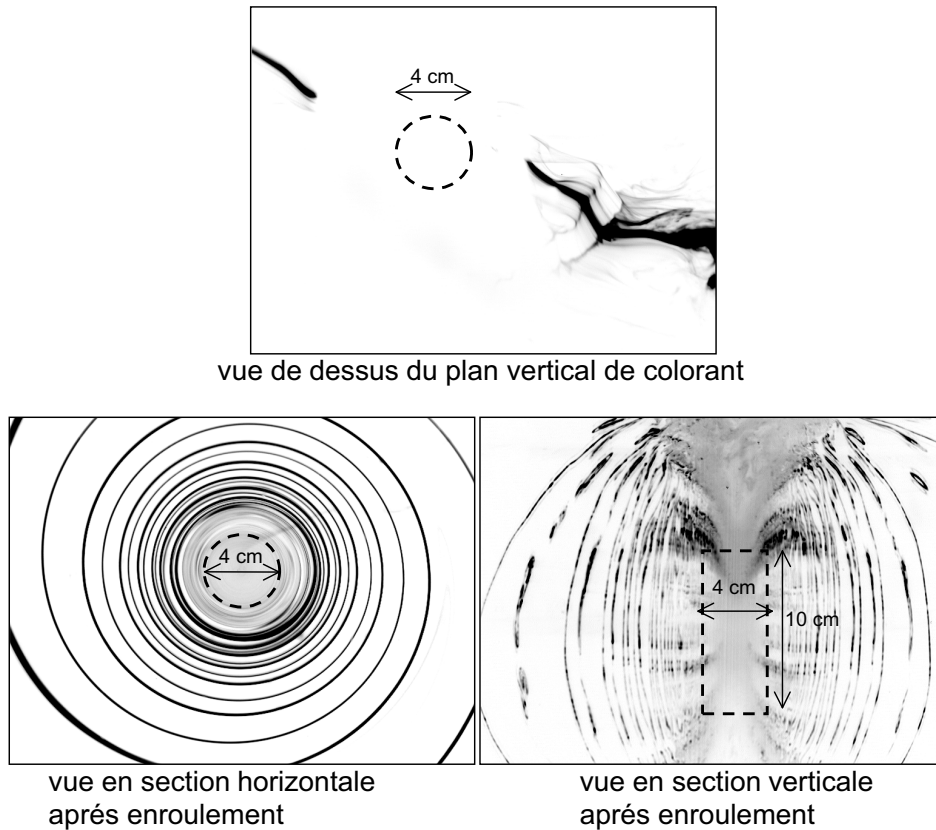


FIG. 7.1 – Méthode expérimentale pour l'étude du mélange. L'image en haut est une image du plan de fluoroscéine éclairé par un plan horizontal avant le début de l'aspiration. Une partie du plan vertical est cachée par le dispositif d'aspiration. Les images en bas correspondent respectivement aux images obtenues en éclairant par une tranche laser horizontale ou verticale, après le retrait du tube d'aspiration.

par diffusion.

Dans un plan vertical passant par l'axe du vortex, on distingue également la présence du coeur très mélangé à mi-hauteur. Le plan vertical de colorant a pris la forme de lignes verticales bombées vers l'extérieur, ce qui s'interprète de la manière suivante : lors de l'aspiration, l'écoulement généré progressivement se met en équilibre avec le champ de densité. Pour un vortex cyclonique en équilibre géostrophique, l'équation du vent thermique (2.11) prédit un déplacement des surfaces d'isodensité vers le centre du vortex. Dans une région située de part et d'autre du plan médian, le mouvement radial d'aspiration est donc freiné par un mouvement radial vers l'extérieur associé au resserrement des surfaces d'iso-densité. Par conservation de la masse, ce déficit de mouvement radial vers l'intérieur dans le plan médian est compensé par une amplification dans les parties hautes et basses du vortex. Ce processus est schématisé dans la figure 7.2. Par ailleurs, on note que le diamètre de la zone mélangée augmente lorsqu'on s'éloigne du plan médian. Pour expliquer cette augmentation, il est nécessaire de considérer la forme tridimensionnelle de l'écoulement dans ces régions : la présence d'un cisaillement vertical superposé au cisaillement horizontal étire plus efficacement la nappe de fluorescéine que le simple cisaillement horizontal, et conduit plus rapidement à des processus de diffusion. De plus, ces régions sont associées à des valeurs du cisaillement vertical suffisantes pour déclencher des instabilités de double diffusion (voir McIntyre

(1970) et Baker (1971)), visibles aux extrémités du vortex dans les images par méthode d'ombre de la figure 5.19.

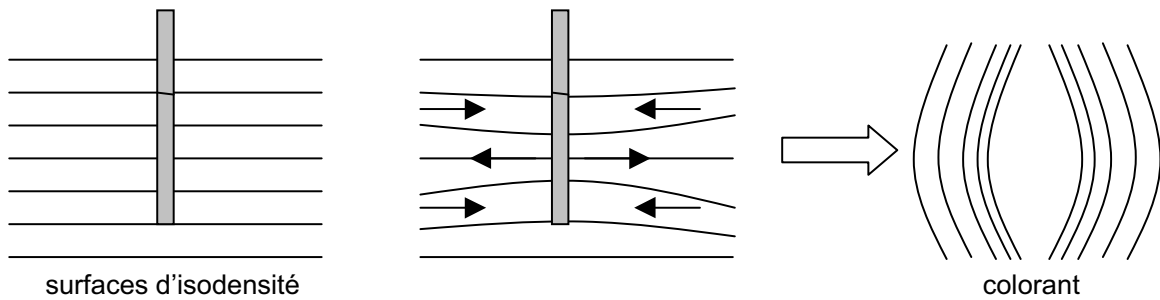


FIG. 7.2 – Schéma explicatif de la forme bombée des lignes de colorant dans une tranche laser verticale. L'image à gauche correspond à la répartition initiale des surfaces d'isodensité. L'image au centre correspond à leur position en cours d'aspiration ; les mouvements radiaux générés par le déplacement vertical des surfaces d'iso-densité sont indiqués par les flèches. L'image à droite correspond à la forme, exagérée, des lignes de colorant à la fin de l'aspiration.

## 7.2 Observations expérimentales

Pour étudier le mélange induit par l'interaction et le déferlement des ondes avec le vortex barotrope, des ondes générées par un cylindre de 5 cm de diamètre ont été choisies. Des vortex puissants ( $V > 3 L$ ) ont été utilisés pour obtenir des valeurs de  $Re_{wave}$  assez élevées (supérieures à 200, conformément aux conclusions du chapitre 5). Après la génération du vortex, nous avons attendu en général quelques dizaines de secondes avant de déclencher la génération des ondes, pour que les perturbations générées par la remontée du tube aient eu le temps de s'amortir. Dans les figures 7.3 et 7.4, nous présentons des séquences d'images pour une expérience typique, de manière à mettre en évidence les caractéristiques du mélange.

A partir du moment où les ondes pénètrent dans le champ du vortex, des structures en zig-zag apparaissent très clairement dans la figure 7.3(1). Cette première phase correspond à l'enroulement des lignes de phase des ondes autour du vortex (enroulement visible dans l'image du champ de particules en haut de la figure 6.8 et dans les images par méthode d'ombre de la figure 5.19). Ces structures en zig-zag apparaissent également dans la figure 7.4(1), aux endroits indiqués par des ellipses et à des distances radiales de l'axe du vortex comparables à celles dans les images du plan horizontal. Même si les images dans le plan vertical et dans le plan horizontal sont obtenues dans deux expériences différentes, la date d'apparition, la forme et la localisation radiale sont identiques et sont associées à la même structure de mélange : il s'agit d'un repliement local de la nappe de colorant, selon une direction plutôt verticale. Dans la figure 7.5, nous avons schématisé comment des coupes verticales ou horizontales de ce repliement donnent naissance aux formes en zig-zag des figures 7.3(1) et 7.4(1). La formation de ces repliements de la nappe de colorant s'explique bien dans le contexte de la théorie du mélange chaotique. Nous reviendrons sur cette interprétation de façon plus détaillée dans la partie suivante.

Des intrusions de lignes de fluorescéine dans la zone homogène proche du cœur sont ensuite visibles dans la partie haute du vortex. Elles sont indiquées par des ellipses dans la figure 7.4(2). Cette région correspond aux zones préférentielles de déferlement visualisées par méthode d'ombre dans la figure 5.19. Finalement, des structures à petites échelles finissent par apparaître également

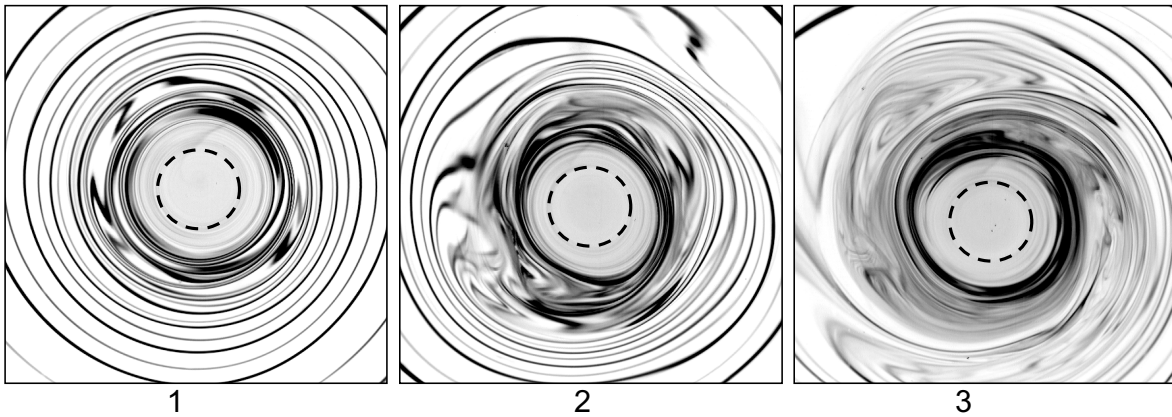


FIG. 7.3 – Séquence d'images de la distribution de fluorescéine dans le plan médian. (1) ; au début de l'interaction, au moment où les ondes pénètrent dans l'écoulement. (2) ; plusieurs périodes d'onde plus tard, avec augmentation du mélange chaotique et début du déferlement. (3) ; lorsque le déferlement se produit sur toute la verticale. Le cercle en pointillés correspond à un diamètre de 4 cm. Les conditions expérimentales sont les suivantes :  $f = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.3 \text{ s}^{-1}$ ,  $V = 3 L$ , temps de pompage 100 s,  $D = 5.0 \text{ cm}$ ,  $A = 3.0 \text{ cm}$  et  $\omega_{abs} = 0.85 \text{ s}^{-1}$ . Les temps des images après le retrait du tube sont : (1) ;  $t=65 \text{ s}$ , (2) ;  $t=103 \text{ s}$ , (3) ;  $t=124 \text{ s}$ . Les ondes sont générées à  $t=34 \text{ s}$  à droite des images, dans un plan inférieur.

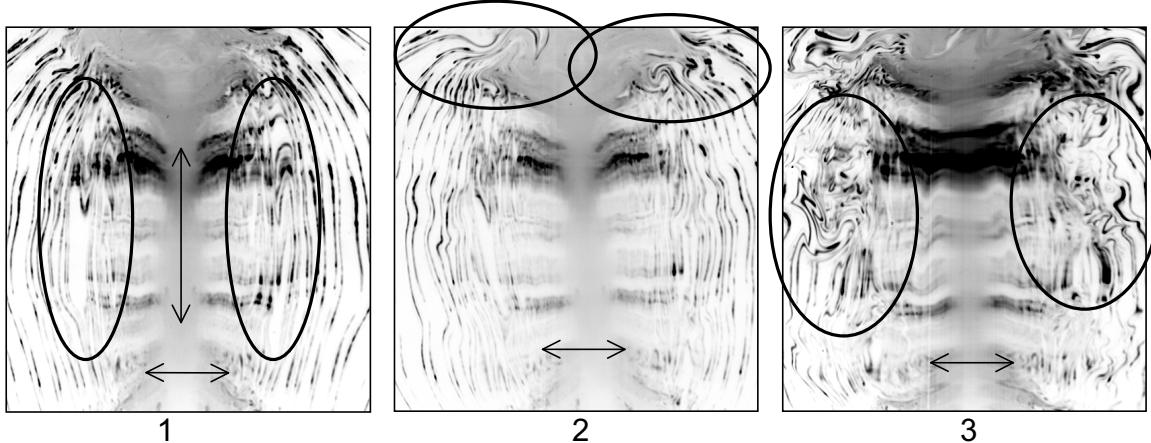


FIG. 7.4 – Séquence d'images de la distribution de fluorescéine dans un plan vertical passant par l'axe du vortex. (1) ; au début de l'interaction, au moment où les ondes pénètrent dans l'écoulement. Les flèches horizontales et verticales correspondent respectivement à des longueurs de 4 et 10 cm. (2) ; quelques périodes d'onde plus tard, avec augmentation du mélange chaotique. (3) ; lorsque le déferlement se produit sur toute la verticale. Les ellipses marquent les régions commentées dans le corps du texte. Les conditions expérimentales sont les suivantes :  $f = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.21 \text{ s}^{-1}$ ,  $V = 5 L$ , temps de pompage 90 s,  $D = 5.0 \text{ cm}$ ,  $A = 2.0 \text{ cm}$  et  $\omega_{abs} = 0.9 \text{ s}^{-1}$ . Les temps des images après le retrait du tube sont : (1) ;  $t=59 \text{ s}$ , (2) ;  $t=70 \text{ s}$ , (3) ;  $t=120 \text{ s}$ . Les ondes sont générées vers  $t=24 \text{ s}$ , en bas à droite des images.

dans les figures 7.3(3) et 7.4(3) aux temps plus longs, qui correspondent à la phase d'étalement vertical du déferlement des ondes, observée clairement dans les images par méthode d'ombre.

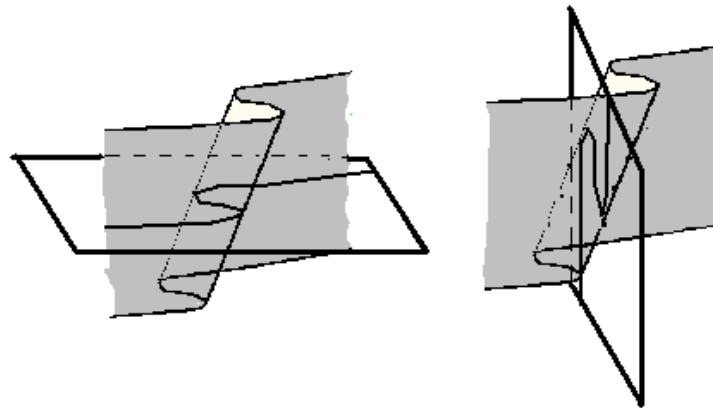


FIG. 7.5 – Schéma explicatif de la formation des zig-zags. La nappe de fluoroscéine est repliée, le pli étant incliné par rapport à la verticale. Dans des sections verticales et horizontales de cette nappe, l'intersection prend la forme de zig-zags.

## 7.3 Processus de mélange

Compte-tenu des observations au colorant (figures 7.3 et 7.4) et par méthode d'ombres (figure 5.19), deux processus de mélange sont à l'oeuvre, que nous traitons séparément.

### 7.3.1 mélange chaotique

Dans les premières images où apparaissent les structures en zig-zag (figures 7.3(1) et 7.4(1)), l'onde n'a pas encore déferlé. Ces structures sont la conséquence du piégeage sans déferlement des ondes autour du coeur du vortex : le champ de vitesse complet correspond à la superposition du champ du vortex et du champ d'onde, et seule la formation de lobes par transport chaotique permet d'expliquer le repliement de la nappe de colorant. Nous nous proposons ici d'illustrer notre propos par un rappel de quelques notions sur le transport chaotique et par une simulation numérique du transport de colorant pour un champ de vitesse modélisant les expériences. Nous interpréterons ensuite les observations expérimentales à partir de ce modèle.

#### quelques rappels

Dans l'ouvrage de Wiggins (1992), on trouve exposée en détails la théorie du chaos dans les systèmes dynamiques, qui peut s'appliquer à l'étude du mélange dans notre écoulement. Pour des études plus proches de celle adoptée ici, on pourra se pencher sur les articles de Krasny & Nitsche (2002) et Wonhas & Vassilicos (2001), qui traitent du mélange dans des écoulements de type vortex.

Dans un écoulement stationnaire bi-dimensionnel, il existe des points fixes, où la valeur de la vitesse est nulle. Ces points fixes sont soit des points elliptiques, les lignes de courant formant des ellipses autour, soit des points hyperboliques, les lignes de courant venant buter ou bien s'amorcer en ces points. Les points hyperboliques sont reliés entre eux par des trajectoires hétéroclines, ou bien reliés à eux-même par une trajectoire homocline. Le reste de l'écoulement est constitué de lignes de courant fermées sur elles-même, périodiques, ou bien s'éloignant à l'infini.

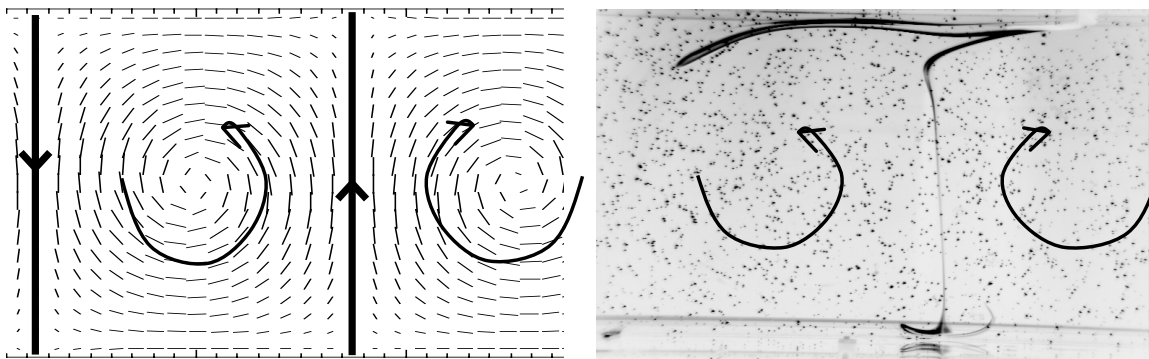


FIG. 7.6 – Exemple expérimental de formation de lobes lors de la perturbation d'une trajectoire hétérocline. L'écoulement de base, formé d'une allée de vortex, est schématisé à gauche. Les séparatrices sont indiquées par des lignes verticales épaisses. L'image de droite correspond à l'expérience, où du colorant très concentré a été introduit au niveau du point hyperbolique du bas. On observe la formation de lobes successifs qui partent de part et d'autre du point hyperbolique du haut.

Lorsqu'on perturbe cet écoulement par la superposition d'un champ périodique en temps, de période  $T$ , les lignes de courant de l'écoulement total évoluent avec le temps. Il est donc plus facile de placer des traceurs dans l'écoulement et de calculer leur position à chaque pas de temps  $T$  (section de Poincaré). La théorie du chaos montre que certaines trajectoires sont stables vis-à-vis de la perturbation, c'est-à-dire que l'orbite tracée par un traceur dont on calcule la position après un nombre infini d'itérations prend une forme proche de la trajectoire non perturbée. Par contre, d'autres trajectoires deviennent instables et les orbites correspondantes dans une section de Poincaré prennent une forme très différente de la trajectoire non perturbée. Par exemple, les trajectoires hétéroclines joignant deux points hyperboliques sont instables : l'orbite prend la forme d'un repliement en lobes qui vient s'écraser sur le point hyperbolique vers lequel se dirige l'écoulement. D'un point de vue expérimental, on peut tracer cette trajectoire perturbée au moyen de colorant, comme dans la figure 7.6.

En-dehors des trajectoires hyperboliques, certaines trajectoires fermées sur elles-mêmes deviennent également instables. On peut définir un nombre de rotation, noté  $n$ , d'une trajectoire fermée sur elle-même, par la formule  $n = Tt/T$ , où  $Tt$  est le temps de parcours de la trajectoire considérée. Il a été montré que les trajectoires pour lesquelles  $n$  est irrationnel restent stables dans la section de Poincaré (voir Wiggins (1992)). Par contre, les trajectoires pour lesquelles  $n$  est rationnel,  $n = p/q$ , peuvent se déstabiliser pour former une succession de points elliptiques, entourés d'orbites fermées, et de points hyperboliques, reliés par de nouvelles orbites hétéroclines. Dans le cas particulier d'un vortex bi-dimensionnel, les trajectoires initiales forment des cercles, et certains cercles sont déstabilisés par la perturbation, comme schématisé dans la figure 7.7. Les trajectoires déstabilisées forment en général des bandes de résonance, dont la largeur dépend du nombre de rotation  $n$  et des caractéristiques spatiales de l'écoulement et de la perturbation. Pour des perturbations de faible amplitude, des résultats théoriques et analytiques permettent de prédire l'efficacité du mélange chaotique. Pour des amplitudes finies, des simulations numériques sont nécessaires.

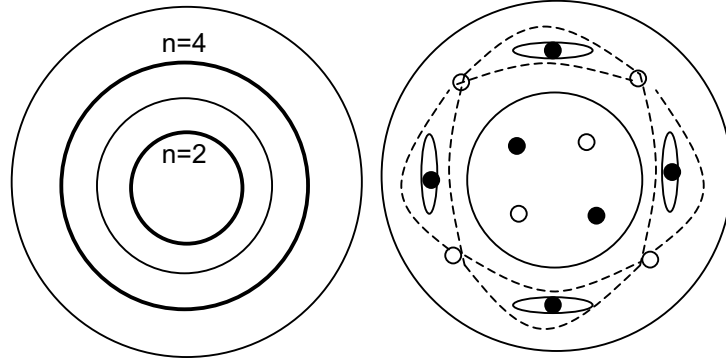


FIG. 7.7 – Trajectoires déstabilisées par une perturbation périodique dans un écoulement de type vortex. La figure de gauche correspond aux trajectoires non perturbées. Les trajectoires où  $n$ , le nombre de rotation, est rationnel sont marquées en trait épais. La figure de droite correspond à leur transformation par la perturbation, lors d'un tracé en section de Poincaré. Les trajectoires  $n = 2$  et  $n = 4$  deviennent une succession de points hyperboliques (pleins) et elliptiques (creux) et forment des bandes de résonance. Les trajectoires stables ( $n$  irrationnel) forment des orbites bien définies.

### modèle de vortex gaussien perturbé

Considérons les conditions expérimentales des figures 7.4 et 7.3 au début de l'interaction avec les ondes : le champ d'onde vient s'enrouler autour du cœur du vortex et perturbe celui-ci. Si on note  $T$  la période de l'onde, de l'ordre de 7.5 s dans les expériences, on constate que le champ de vitesse évolue de façon lente par rapport à cette échelle de temps. En effet, le champ de vitesse du vortex dans le plan médian évolue en première approximation comme pour un vortex gaussien diffusif, et le rayon suit donc une loi en  $1.12 \times 2\sqrt{\nu t}$  avec une valeur initiale proche de 1.6 cm au moment du retrait du tube. Par ailleurs, la circulation du vortex reste quasiment constante dans les expériences, et le champ de vitesse loin du cœur évolue très peu. On peut donc modéliser notre écoulement comme un vortex gaussien stationnaire sur lequel vient se superposer une perturbation périodique en temps, de période  $T_0$ .

Nous pouvons donc modéliser le vortex par une distribution gaussienne de vorticités indépendante du temps, le champ de vitesse azimutal adimensionnel s'écrivant alors :

$$U_\theta = \frac{1}{r} (1 - \exp^{-r^2}) \quad (7.1)$$

Sa vitesse maximale est égale à  $U_m = 0.67$ , à une distance  $R_m = 1.12$  qui nous permettra de définir son rayon. Les trajectoires autour du vortex ont donc une période  $T_t = 2\pi r / U_\theta(r)$ , qui croît de  $2\pi$  en  $r = 0$  vers  $\infty$  à l'infini.

Nous avons réalisés des simulations de la formation d'une spirale de colorant similaire à nos expériences en utilisant un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 pour calculer le transport de près de 5000 traceurs ponctuels disposés initialement sur une demi-ligne s'appuyant sur le centre du vortex. Après un certain temps, nécessaire pour obtenir une structure en spirale du colorant, nous avons ensuite superposé au champ du vortex une perturbation à divergence nulle de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{u_\theta}{r} &= \epsilon \left[ -\frac{2}{m} \exp^{-r^2} \sin(\Phi) - \frac{k}{m} \frac{1}{r} (1 - \exp^{-r^2}) \cos(\Phi) \right] f(t) \\ u_r &= \epsilon \frac{1}{r} (1 - \exp^{-r^2}) \cos(\Phi) f(t) \end{aligned} \quad (7.2)$$

avec  $\Phi = m\theta + kr - \omega t$  la phase de l'onde,  $m$  le nombre azimuthal,  $k$  le vecteur d'onde radial,  $\epsilon$  l'amplitude de la perturbation et  $\omega$  sa pulsation. Pendant la phase de formation de la spirale (jusqu'à  $t = t_o$ ), nous imposons une valeur nulle à la perturbation, ce qui se traduit par  $f(t) = 0$  pour  $t < t_o$ . Ensuite, nous générons le champ d'onde en un laps de temps proportionnel à sa période, et  $f(t)$  s'écrit  $f(t) = 1 - \exp(-\omega(t - t_o))$  pour  $t > t_o$ .

Nous avons choisi cette forme de la perturbation pour représenter un champ d'onde croissant en amplitude dans la zone proche du rayon du vortex, et à divergence nulle. Dans les expériences, le champ d'onde est plus complexe. La composante radiale du vecteur d'onde,  $k$ , augmente lorsqu'on se rapproche du coeur du vortex et le champ d'onde correspond à la superposition de plusieurs modes azimutaux  $m = 1, 2, \dots$ . De plus, les mouvements verticaux deviennent importants du fait de la polarisation gravitaire ( $\omega_o \rightarrow N$ ). Cependant, notre objectif est modeste, à savoir expliquer l'apparition de zig-zags dans les observations au colorant. Le modèle de perturbation proposé ici est donc suffisant pour simuler leur apparition.

Dans les images à gauche de la figure 7.8, on a reproduit les résultats obtenus pour différentes valeurs du nombre azimutal  $m$  pour une perturbation de pulsation  $\omega = 0.5$ , et de nombre d'onde radial  $k = 2\pi$  (soit une longueur d'onde de 1.0, comparable au rayon du vortex). Puisque la période des trajectoires circulaires du vortex s'écrit  $T_t(r) = 2\pi r / U_\theta(r)$ , les nombres de rotation de ces trajectoires valent  $n(r) = r\omega / U_\theta(r)$ .

Dans les simulations numériques de la figure 7.8, à gauche, on observe un comportement chaotique dans des bandes de résonances qui correspondent à  $n = m$ . L'effet sur la spirale de colorant dépend en fait de la position de l'intersection de la spirale dans la bande résonnante. On obtient en général la formation de lobes en forme de zig-zags. Pour mettre en évidence les positions des points elliptiques, des simulations ont été réalisées avec des traceurs répartis initialement le long de la trajectoire résonnante ( $n = m$ ), et correspondent aux images de droite de la figure 7.8. On observe l'apparition de lobes au niveau des points elliptiques. Les points hyperboliques sont situés entre les points elliptiques, là où la densité de traceurs devient progressivement plus faible.

### mélange chaotique dans les expériences

Dans les expériences, la spirale générée par l'aspiration est en général plus dense que dans les simulations numériques précédentes. On s'attend donc à ce que plusieurs portions de la spirale de colorant appartiennent à une bande de résonance. Dans les images dans le plan horizontal comme dans la figure 7.3, il est possible de détecter les formes en zig-zag dès leur apparition et de suivre leur mouvement après chaque intervalle de temps  $T_o$  correspondant à la période de l'onde. Cela permet de déterminer le nombre de rotation  $n$  de la trajectoire à laquelle elles appartiennent.

Dans la figure 7.9, on a reproduit une succession de formes en zig-zag correspondant à la bande de résonance  $n = 2$ . On constate bien que chaque zig-zag retourne à sa position au bout de  $t = nT_o = 2T_o$ , et on voit nettement croître l'extension des zig-zags au cours du temps. De façon similaire, la figure 7.10 reproduit l'évolution d'une portion de la spirale située près de la trajectoire  $n = 3$  : le zig-zag retourne à sa position initiale en  $t = nT_o = 3T_o$  et on voit nettement sa croissance aux temps intermédiaires  $t = 0, T_o, 2T_o$ . Ces formes correspondent donc à des portions de spirale situées dans les bandes de résonance  $n = 2$  et  $n = 3$  au moment de la génération des ondes. La bande de résonance  $n = 1$  est elle-aussi présente, mais la distribution initiale de colorant (une bande noire près de cette trajectoire) ne permet pas de mettre en évidence de façon claire une figure simple de mélange chaotique.

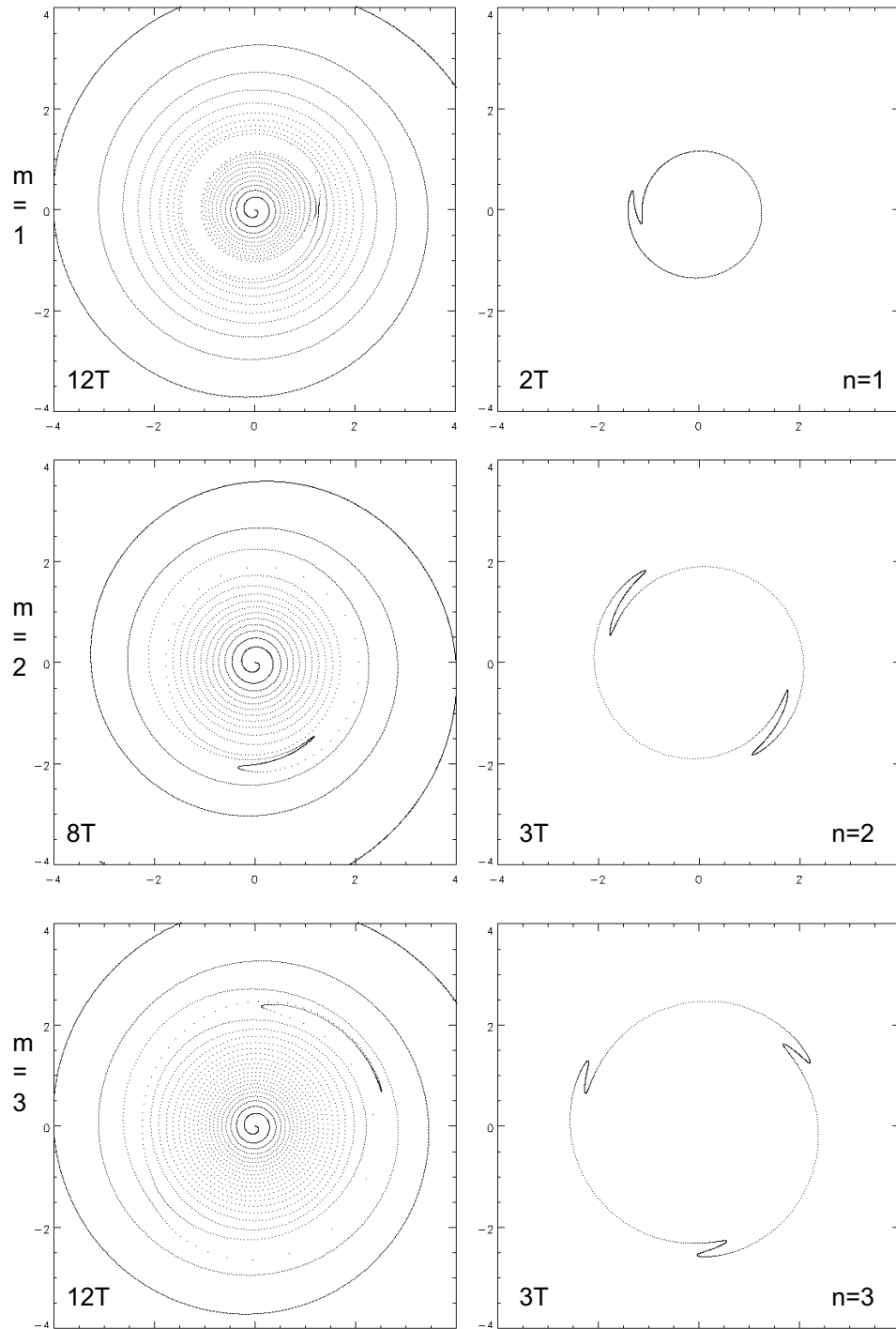


FIG. 7.8 – Figures illustrant l'effet d'une perturbation sur l'évolution d'une spirale de colorant. Le champ de base est celui du vortex gaussien (7.1) et la perturbation est décrite par les formules (7.2) avec  $\omega = 0.5, k_r = 2\pi$  et  $\epsilon = 0.01$ . Les images à gauche correspondent à une simulation à partir d'une demi-ligne de colorant et font apparaître les bandes de résonance. Les figure à droite correspondent à des simulations avec un répartition initiale circulaire de traceurs, placée au niveau de la trajectoire instable. Cette dernière vérifie  $n = m$ , où  $n$  est le nombre de rotation et  $m$  le mode azimutal de la perturbation. De haut en bas,  $m$  prend successivement les valeurs 1, 2 et 3. Le temps de calcul en  $T = 2\pi/\omega$  est indiqué pour chaque figure.



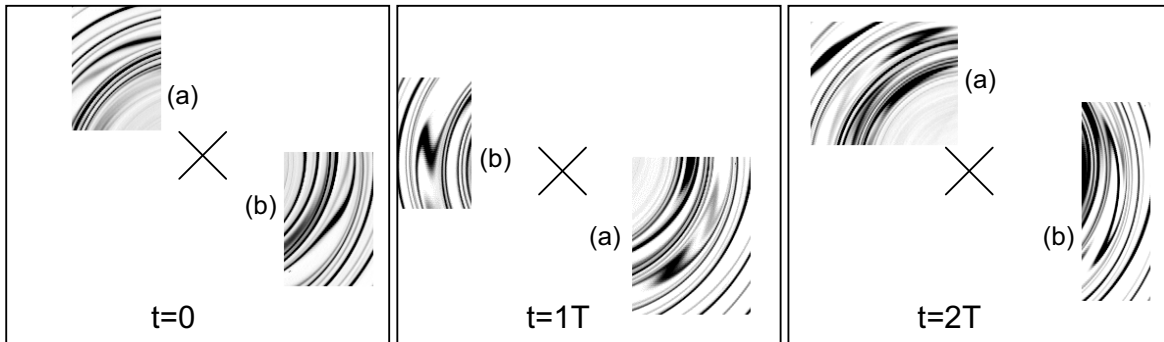


FIG. 7.9 – Observation expérimentale de la croissance des zig-zags sur la trajectoire de nombre de rotation  $n = 2$  dans l'expérience de la figure 7.3. Les temps sont indiqués en multiples de la période de l'onde. Les portions de spirale sélectionnés sont nommées (a) et (b) et retournent à leur position initiale au bout du temps  $t = 2T$ , où  $T$  est la période de l'onde.

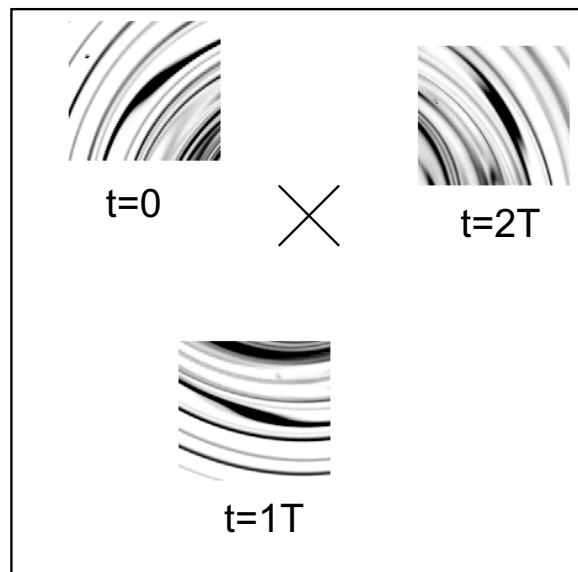


FIG. 7.10 – Observation expérimentale de la croissance des zig-zags sur la trajectoire de nombre de rotation  $n = 3$  dans l'expérience de la figure 7.3. Les temps sont indiqués en multiples de la période de l'onde. La portion de spirale sélectionnée retourne à sa position initiale au bout du temps  $t = 3T$ . Sa forme et sa position correspondent aux temps  $t = 0, T$  et  $2T$ , où  $T$  est la période de l'onde.

On aboutit donc à un bon accord entre les figures de mélange observées expérimentalement dans le plan horizontal médian et celles simulées numériquement au moyen d'un vortex gaussien perturbé, ce qui confirme l'origine chaotique des repliements observés dans les expériences.

Le modèle bidimensionnel des simulations numériques peut être étendu à la situation expérimentale tridimensionnelle au début de l'interaction. En effet, le champ d'onde dans les expériences présente en première approximation une dépendance périodique avec l'altitude  $z$ , qui correspond à un déphasage de la forme  $k_z z$  dans la définition de la phase  $\Phi$  dans les équations (7.2). La position des points elliptiques et hyperboliques le long des bandes résonnantes subit donc un décalage proportionnel à ce terme de phase. Si on suppose que le champ du vortex reste indépendant de  $z$  et que l'on s'intéresse à la position des points elliptiques et hyperboliques, ils forment donc des lignes inclinées quasi-verticales, avec un déphasage en  $k_z z$  de leur position azimutale. Le repliement autour des points elliptiques dans un plan horizontal se traduit donc par un repliement penché de la nappe verticale de colorant, comme dans le schéma de la figure 7.5. Le mélange chaotique permet donc d'expliquer le repliement de la nappe de colorant et la formation des zig-zags dans les premières images des figures 7.4 et 7.3. Par contre, à partir du moment où toutes les bandes résonnantes sont déstabilisées par les ondes, le développement du mélange chaotique génère des repliements successifs qu'il devient extrêmement difficile d'interpréter dans les visualisations dans un plan vertical. Cela pose d'ailleurs un problème pour distinguer les effets du transport chaotique des effets du déferlement des ondes.

Dans les expériences de déferlement, nous avons pris soin de choisir des vortex suffisamment puissants pour que les ondes générées avec le batteur de diamètre 5 cm soient bien piégées et finissent par déferler. Nous avons donc choisi des vortex générés par des volumes d'aspiration supérieurs à 3 L, caractérisés par des circulations  $\Gamma$  supérieures à  $2\pi \times 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  lorsque  $f = 0.5 \text{ s}^{-1}$ , d'après des mesures par PIV dans un plan médian. En général, la fréquence de flottaison était de l'ordre de  $N = 1.5 \text{ s}^{-1}$ , et les ondes étaient générées à une période,  $T_o$ , de l'ordre de 8 s. Puisque la circulation,  $\Gamma$ , est quasiment constante au cours du temps, la période  $Tt$  des trajectoires en fonction de  $r$  est donnée par la formule  $Tt = (2\pi)^2 r^2 / \Gamma$  à l'extérieur du coeur du vortex. On trouve donc une position de la trajectoire  $n = Tt/T_o = 1$  au-delà de 3 cm ( $r(n = 1) = 3.5 \text{ cm}$  pour  $\Gamma/2\pi = 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ). Les autres bandes de résonance ( $n = 2$ ,  $n = 3$ , etc) se trouvent en général à l'extérieur ( $r(n = 2) = 5.0 \text{ cm}$  et  $r(n = 3) = 6.2 \text{ cm}$  pour  $\Gamma/2\pi = 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ). Par ailleurs, le piégeage des ondes dans une couche critique située à l'extérieur du coeur du vortex limite l'amplitude des perturbations qui pourraient être responsables d'un transport chaotique dans la région du coeur. On constate donc que les bandes de résonance sont en général situées à des rayons supérieurs au rayon du vortex, initialement de l'ordre de 1.6 cm ( $t=50 \text{ s}$ ), et qui croît par diffusion jusqu'à des valeurs de l'ordre de 3 cm ( $t=50+120 \text{ s}$ ) au moment où le déferlement commence à se produire dans le plan médian.

### 7.3.2 mélange par déferlement

Des visualisations par méthode d'ombre dans des configurations similaires montrent que le déferlement est présent dans les expériences des figures 7.3 et 7.4, initialement dans les parties hautes du vortex, puis sur sa totalité. Cependant, l'impact du déferlement des ondes sur le mélange vient se superposer aux effets du transport chaotique : les résultats présentés dans le chapitre 5 et les visualisations par méthode d'ombre montrent que le déferlement se produit au voisinage d'une couche de piégeage située à l'extérieur du coeur du vortex, dans la même région que les bandes de résonance du transport chaotique.

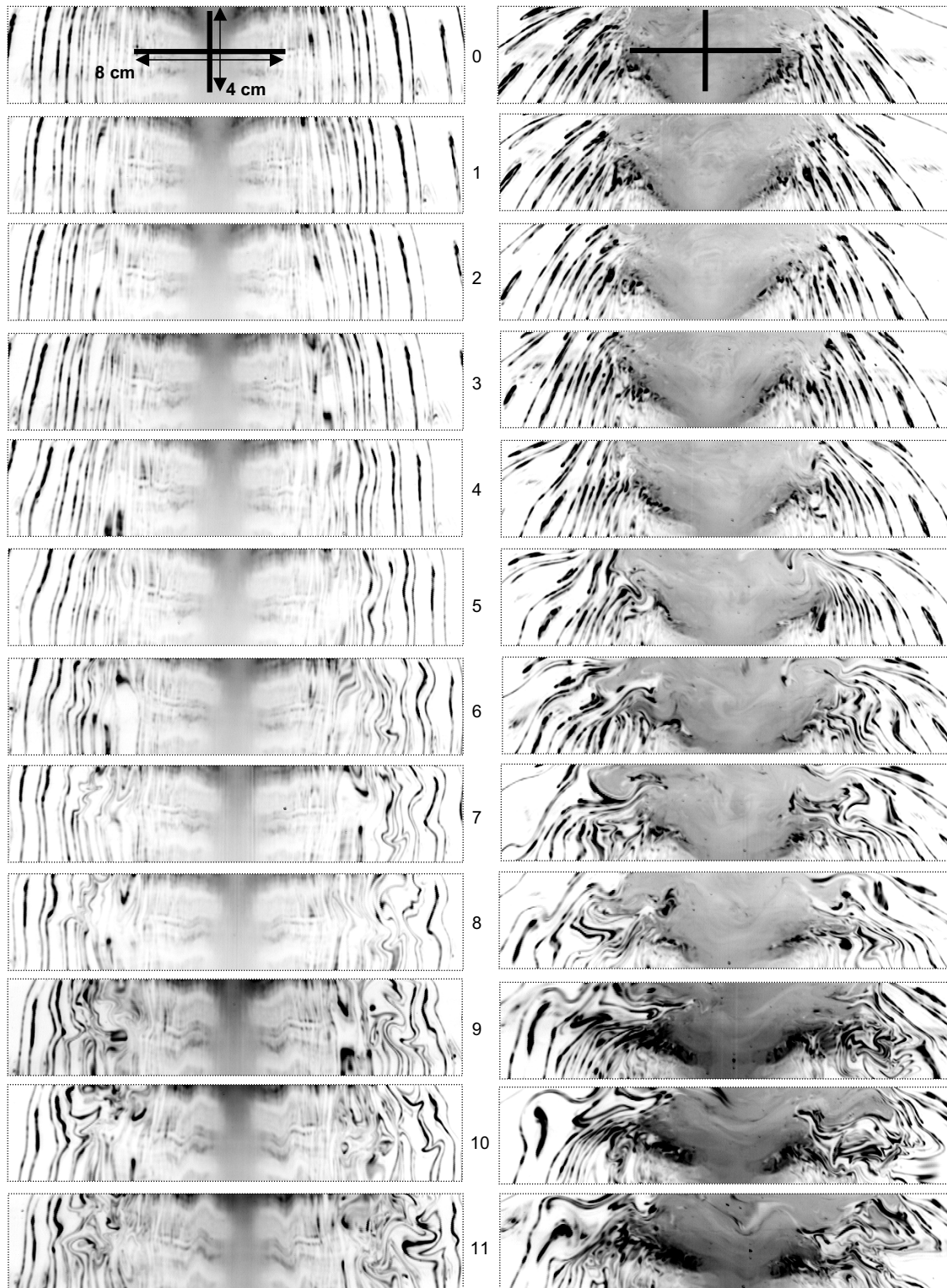


FIG. 7.11 – Séquences temporelles de la distribution de colorant dans les régions médianes (images de gauche) et hautes (images de droite) de la figure 7.4. La période temporelle du séquençage correspond à la période des ondes,  $T_o = 7 s$ . Les échelles verticales et horizontales sont indiquée dans les premières images. Les conditions expérimentales sont indiquées dans la légende de la figure 7.4, et le temps des premières images en haut est  $t=30 s$  après le retrait du tube.

Dans la figure 7.11, nous avons reproduit une séquence temporelle périodique, à la période de l'onde  $T_o$ , de la distribution de colorant dans une région proche du plan médian, et dans la partie haute du vortex pour l'expérience de la figure 7.4.

Dans la région haute du vortex (images de droite de la figure 7.11, on distingue assez rapidement l'intrusion de certaines parties de la spirale de colorant au sein de la zone mélangée en forme de cône. Dans le chapitre 5, nous avons déjà signalé le déferlement plus rapide des ondes aux extrémités du vortex, et cette intrusion peut donc être interprétée comme un mélange induit par le déferlement. Par ailleurs, dans cette partie du vortex, le champ de vitesse est nécessairement plus faible, et les processus de mélange par transport chaotique y sont moins rapides. Cela est confirmé par l'absence de structures de repliement dans les premières images (1-2-3), au contraire de ce qui se produit dans le plan médian.

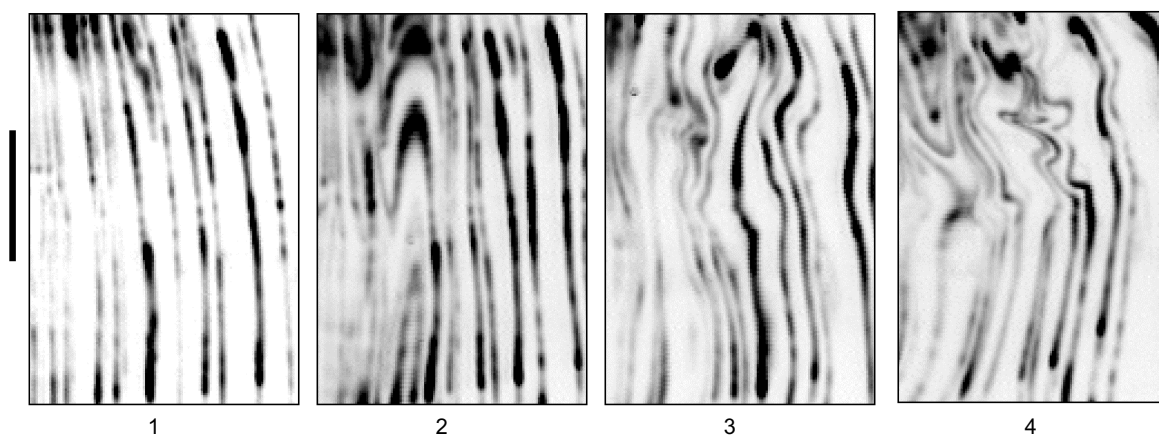


FIG. 7.12 – Observation plus précise de la formation de petites structures associées au déferlement. Il s'agit d'une séquence d'images agrandies de la bordure extérieure du vortex, au-dessus du plan médian, dans les images de colorant de la figure 7.4. L'échelle est indiquée par la ligne épaisse noire, qui correspond à une longueur de 2.3 cm. Les temps sont respectivement de 7.1, 60, 81 et 86 s.

Dans la région médiane (images de gauche de la figure 7.11), on repère de petites formations en zig-zag dans les premières images (2-3-4), associées au mélange chaotique. Assez rapidement, des petites échelles apparaissent dans ces images (5-6-7), associées soit au mélange chaotique qui crée une succession de repliements, soit au déferlement des ondes qui génère localement une instabilité de type convectif comme signalé au chapitre 5. Le développement rapide de ces petites structures rappelle quand même le second mécanisme. La distinction entre ces petites structures et les repliements du transport chaotique apparaît plus clairement dans la séquence d'images de la figure 7.12. Par ailleurs, des structures en forme de champignons apparaissent dans la distribution de colorant et marquent la présence de déferlement. Nous reproduisons un exemple de structure en champignon dans la séquence de la figure 7.13.

## 7.4 Localisation du mélange dans le champ de vitesse du vortex

Compte-tenu des conditions expérimentales dans lesquelles ont été menées les expériences pour étudier le mélange, les vortex sont puissants ( $\Gamma > 10 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ) et les ondes pénètrent peu dans le coeur du vortex. Cela est confirmé par la position des bandes de résonance à l'extérieur du coeur, et par les observations au colorant et par méthode d'ombre (voir figures

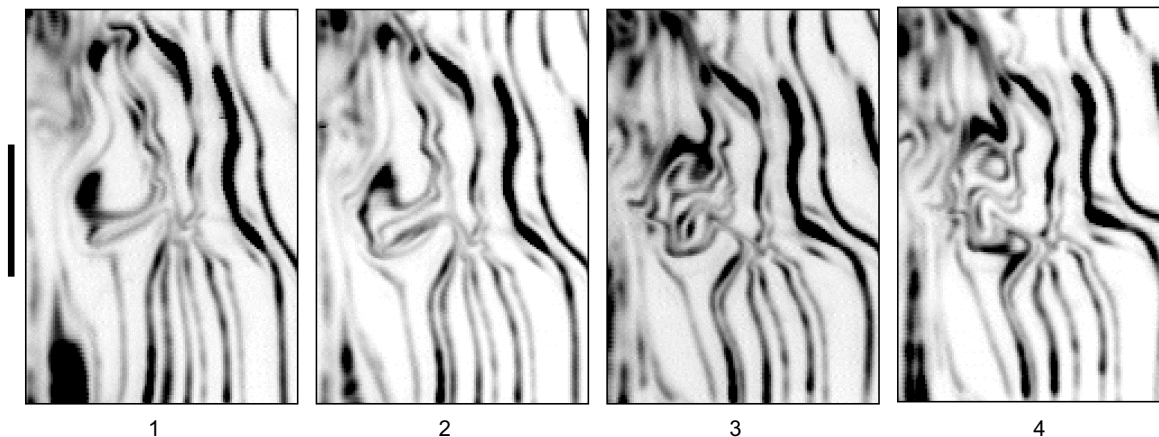


FIG. 7.13 – Observation plus précise d’une structure en champignon associée au déferlement. Il s’agit d’une séquence d’images agrandies de la bordure extérieure du vortex, au-dessus du plan médian, dans les images de colorant de la figure 7.4. L’échelle est indiquée par la ligne épaisse noire, qui correspond à une longueur de 2.3 cm. Les temps sont respectivement  $t=96, 96.6, 97.3$  et 98 s.

5.17 et 5.19). Par ailleurs, le déferlement se déclenche également à l’extérieur du coeur, dans la zone d’accumulation d’énergie de l’onde. Dans les images au colorant dans un plan vertical, on constate bien que les lignes proches du coeur restent stables (non mélangées) sur un certain diamètre, jusqu’au début de la formation de petites structures associées au déferlement. Par contre, l’effet des mouvements turbulents générés par le déferlement a tendance à pénétrer plus profondément dans le champ du vortex.

Pour illustrer l’influence des conditions expérimentales sur cette pénétration du mélange dans le champ du vortex, nous reproduisons des séquences de deux images, avant et après déferlement, pour deux expériences différentes, dans la figure 7.14. Dans la séquence de gauche, l’expérience est la même que celle de la figure 7.4, avec un vortex puissant ( $V = 5.0 L$ , soit  $\Gamma/2\pi \approx 15 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ) et jeune ( $t=24$  s après le retrait du tube au moment où les ondes sont générées). L’amplitude du batteur,  $A = 2.0 \text{ cm}$ , génère un champ d’onde associé à un mouvement vertical de  $\pm 0.5 \text{ cm}$  (mesure avec le déplacement du colorant loin du vortex). Les mouvements induits par le déferlement ne parviennent pas à pénétrer profondément dans le vortex, et celui-ci reste intact sur un diamètre de l’ordre de 8 cm, comme cela est visible dans l’image 7.14(1b). Par contre, dans la séquence de droite pour une expérience avec une amplitude du batteur de 3 cm (soit un mouvement vertical de l’ordre de  $\pm 1.0 \text{ cm}$  mesuré grâce au déplacement du colorant), un vortex un peu moins puissant ( $V = 3 L$ , soit  $\Gamma/2\pi \approx 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ), et plus vieux ( $t=60$  s après le retrait du tube au moment où les ondes sont générées), le piégeage des ondes se produit un peu plus près du coeur et la turbulence est plus énergétique. On constate alors que le champ de colorant est érodé plus profondément, et que seule une région de diamètre de l’ordre de 5 cm reste intacte dans l’image 7.14(2b).

Dans ces expériences, la génération des ondes est maintenue constante après la mise en marche du batteur et la turbulence générée par le déferlement est constamment alimentée. La situation est donc différente de l’expérience de la figure 6.8, destinée à détecter un effet sur le champ de vitesse du vortex, où le champ d’ondes est généré pendant un intervalle de temps fini. Dans ce dernier cas, la turbulence générée par le déferlement n’est plus entretenue et le mélange qu’elle induit est vraisemblablement plus limité que dans des expériences avec forçage continu

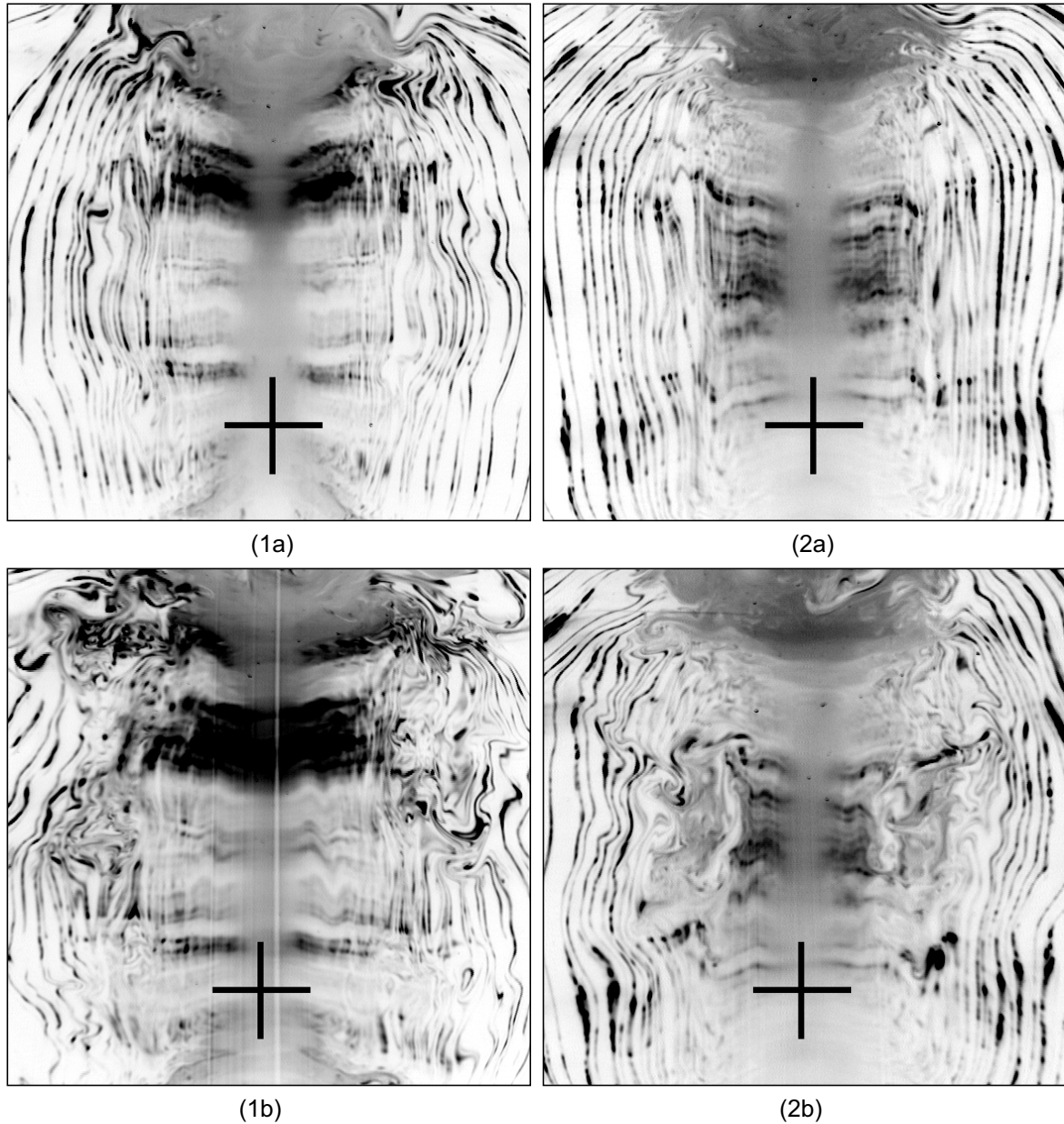


FIG. 7.14 – Observation du mélange induit par l'interaction et le déferlement des ondes. Les images de gauche (1a) et (1b) correspondent à une expérience avec un vortex très résistant. Les conditions expérimentales sont les suivantes :  $f = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.21 \text{ s}^{-1}$ ,  $V = 5 L$ ,  $A = 2.0 \text{ cm}$  et  $\omega_{abs} = 0.8 \text{ s}^{-1}$ . Les temps des images après le retrait du tube sont les suivantes : (1a) ; 74 s et (1b) ; 124 s. Les ondes sont générées à  $t=24 \text{ s}$  et le déplacement vertical du colorant est de l'ordre de 1.0 cm loin du vortex. Les images de droite (2a) et (2b) correspondent à une expérience avec les conditions expérimentales suivantes :  $f = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 1.16 \text{ s}^{-1}$ ,  $V = 4 L$ ,  $A = 3.0 \text{ cm}$  et  $\omega_{abs} = 0.9 \text{ s}^{-1}$ . Les temps des images après le retrait du tube sont les suivantes : (2a) ; 111 s et (2b) ; 160 s. Les ondes sont générées à  $t=61 \text{ s}$  et le déplacement vertical du colorant est de l'ordre de 2.0 cm.

du déferlement. L'effet limité sur le coeur du vortex du déferlement dans les mesures du profil radial par PIV de la figure 6.8 n'est donc pas en contradiction avec la pénétration importante du mélange dans la figure 7.14(2b).

## Conclusion

Dans cette étude, nous avons apporté des résultats expérimentaux nouveaux sur l'interaction des ondes d'inertie-gravité avec des écoulements de type vortex.

Les vortex ont d'abord été simulés expérimentalement par l'écoulement généré par la rotation cyclonique d'un disque horizontal. Une étude détaillée de la mise en rotation du fluide autour de ce disque a été réalisée. Dans la phase finale, aux temps supérieurs à  $\tau_{diff} = 0.2R^2/\nu$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $R$  le rayon du disque, l'écoulement évolue par diffusion de quantité de moment sous la forme d'un vortex isolé, caractérisé par des cisaillements verticaux et horizontaux de même ordre de grandeur. Grâce à ces vortex, nous avons montré expérimentalement comment les ondes d'inertie-gravité se propageant dans le champ de vitesse d'un vortex barocline peuvent être piégées. Nous avons également mis en évidence la génération de modes en spirale rétrogrades associés à ce piégeage dans le cas d'ondes se propageant face à l'écoulement. Les observations et les mesures expérimentales ont été comparées avec succès à des simulations numériques dans le cadre de l'approximation WKB, qui ont permis une meilleure interprétation des informations obtenues au moyen des expériences. Ces simulations nous ont également permis de montrer comment l'amortissement visqueux de l'énergie des ondes empêche le déclenchement d'un déferlement dans les expériences avec des vortex générés par le disque tournant. Un nombre de Reynolds des ondes,  $Re_{wave}$ , introduit pour mesurer l'efficacité relative du piégeage par rapport à l'amortissement visqueux, permet de comparer les configurations expérimentales. Dans les expériences avec le disque tournant, les valeurs de  $Re_{wave}$  étaient trop faibles ( $Re_{wave} < 32$ ) pour que les ondes piégées puissent déclencher une instabilité au sein de l'écoulement.

Pour obtenir des valeurs plus élevées de ce nombre de Reynolds, des vortex générés par aspiration et des ondes de plus grande longueur d'onde ont également été utilisés. Le déferlement des ondes a alors pu être obtenu expérimentalement avec cette nouvelle configuration (pour  $Re_{wave} > 200$ ). Les observations par méthode d'ombre et par colorant, ainsi que les simulations WKB, montrent que l'instabilité responsable du déferlement est étroitement liée au retournement local du champ de densité. Cela vient de la polarisation essentiellement gravitaire des ondes piégées dans le vortex, qui est une conséquence du caractère très barotrope des vortex générés par aspiration. L'impact du déferlement sur l'évolution du vortex a pu être mesuré dans le plan médian passant par le centre du vortex, et prend la forme d'un dépôt de vorticités négatives autour du cœur positif du vortex. Cela aboutit à un raidissement du profil de vitesse du vortex. Le mélange induit par l'interaction et le déferlement des ondes a aussi été étudié expérimentalement : les ondes sont piégées à l'extérieur du cœur du vortex, et du transport chaotique est généré par l'interaction. Ensuite, les mouvements turbulents générés par le déferlement pénètrent plus profondément dans le champ de vitesse, et mélangent plus efficacement la zone extérieure du



vortex ; cette zone de mélange augmente en taille avec l'énergie des ondes déferlantes.

Le caractère barotrope des vortex générés par aspiration joue par ailleurs un rôle important dans le processus de sélection des ondes incidentes piégées. On constate expérimentalement que les ondes se propageant face à ces vortex sont très facilement piégées, alors que dans les expériences avec des vortex baroclines, seule une partie des ondes incidentes se retrouvent dans une configuration débouchant sur leur piégeage. Pour des vortex encore plus baroclines ( $U_H/U_L > 1$ ), on peut s'attendre à ce qu'une partie encore plus faible des ondes incidentes soient captées par l'écoulement. Or les expériences avec déferlement mettent en évidence un lien entre l'énergie fournie par les ondes piégées et l'efficacité du mélange induit par le déferlement. Pour un même champ d'ondes incidentes, l'énergie fournie par piégeage des ondes sera moindre pour un vortex barocline que pour un vortex barotrope, et une "section efficace" du vortex pourrait être introduite pour comparer l'énergie capturée par des vortex de baroclinicité  $U_H/U_L$  variable.

# Bibliographie

- [Appleby & Crighton (1987)] APPLEBY, J.C. & CRIGHTON, D.G. 1987 Internal gravity waves generated by oscillations of a sphere. *J. Fluid Mech.* **183**, 439–450.
- [Badulin & Shrira (1993)] BADULIN, S.I. & SHRIRA, V.I. 1993 On the irreversibility of internal-wave dynamics due to wave trapping by mean flow inhomogeneities. Part 1. Local analysis. *J. Fluid Mech.* **251**, 21–53.
- [Baker (1971)] BAKER, D. J. 1971 Density gradients in a rotating stratified fluid : experimental evidence for a new instability. *Science*. **172**, 1029–1031.
- [Balmorth *et al.* (2001)] BALMORTH, N.J., LLEWELLYN SMITH, S.G. & YOUNG, W.R. 2001 Disturbing vortices. *J. Fluid Mech.* **426**, 95–133.
- [Booker & Bretherton (1967)] BOOKER, J.R. & BRETHERTON, F.P. 1967 The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.* **27**, 513–539.
- [Bretherton (1966)] BRETHERTON 1966 The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow. *Quart J. R. Met. Soc.* **92**, 466–480.
- [Bretherton & Garret (1969)] BRETHERTON, F.P. & GARRET 1969 *Wavetrains in inhomogeneous moving media*. *Proc. Roy. Soc. A* **302**, 529–554.
- [Charney (1947)] CHARNEY, J. G. 1947 The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteorol.* **4**, 135–163.
- [Clerc *et al.* (2001)] CLERCX, H. J. H., BECKERS, M., VERZICCO, R. & VAN HEIJST, G. F. J. 2001 Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid : experiments, model and numerical simulations. *J. Fluid Mech.* **433**, 1–27.
- [Dörnbrack (1998)] DÖRNBRACK, A. 1998 Turbulent mixing by breaking gravity waves. *J. Fluid Mech.* **375**, 113–141.
- [Eady (1949)] EADY, E. T. 1949 Long waves and cyclone waves. *Tellus* **1**, 33–52.
- [Eckart (1961)] ECKART, C. 1961 Internal waves in the ocean. *Phys. Fluids* **4**, 791–799.
- [Eloy & Le Dizès (1993)] ELOY, C. & LE DIZÈS, S. 1993 Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field. *Physics of Fluids* **13**(3), 660–676.
- [Fincham & Delerce (2000)] FINCHAM, A. & SPEDDING, G. 2000 Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids* **29**, S013–S022.
- [Flierl (1988)] FLIERL, G.R. 1988 On the instability of geostrophic vortices. *J. Fluid Mech.* **197**, 349–388.
- [Galmiche (1999)] GALMICHE, M. 1999 Interaction turbulence-champs moyens et ondes de gravité internes dans un fluide stratifié, *Thèse de l'INPT*.
- [Galmiche *et al.* (2000)] GALMICHE, M., THUAL, O. & BONNETON, P. 2000 Wave/wave interaction producing horizontal mean flows in stably stratified fluids. *Dyn. Atmos. Oceans* **31**, 193–207.

- [Gill (1982)] GILL, E. A. 1982 Atmosphere-Ocean dynamics. *International Geophysics Series* **30**.
- [Haynes (1999)] HAYNES P. 1999 Transport, stirring and mixing in the atmosphere. *NATO ASI Series Physics* **373**, 229–272.
- [Holton *et al.* (1995)] HOLTON, P., HAYNES, P., MCINTYRE, M. E., DOUGLAS, R. A., ROOD, B. R. & PFISTER, L. 1995 Stratosphere-Troposphere exchanges. *Revs. Geophys. Space Phys.* **33**, 403–439.
- [Hoskins *et al.* (1985)] HOSKINS, B.J., MCINTYRE, M.E. & ROBERTSON, A.W. 1985 On the use and significance of isentropic potential-vorticity maps. *Q.J.R. Met. Soc.* **111**, 877–946.
- [Houghton (1986)] HOUGHTON, J.T. 1986 The physics of atomspheres (2nd Edition. *Cambridge University Press* pp271.
- [Hopfinger *et al.* (1993)] HOPFINGER, E.J. & VAN HEIJST, G.J.F. 1993 Vortices in rotating fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 241–289.
- [Howard (1961)] HOWARD, L.N. 1961 Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.* **10**, 158–160.
- [Kloosterziel & van Heijst (1991)] KLOOSTERZIEL, R.C. & VAN HEIJST, G.J.F. 1991 An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **223**, 1–.
- [Koop (1981)] KOOP, C.G. 1981 A preliminary investigation of internal gravity waves with a steady shearing motion. *J. Fluid Mech.* **113**, 347–386.
- [Kraus & Turner (1967)] KRAUS, E. B. & TURNER, J. S. 1967 A one-dimensional model of the seasonal thermocline. II. The general theory and its consequences. *Tellus* **19**, 98–105.
- [Krasny & Nitsche (2002)] KRASNY, R. & NITSCHKE, M. 2002 The onset of chaos in vortex sheet flow. *J. Fluid Mech.* **454**, 47–69.
- [Leblond & Mysak (1978)] LEBLOND, P. H. & MYSAK, L. A. 1978 Waves in the ocean. *Elsevier Oceanography Series 20* pp601.
- [Legras (1999)] LEGRAS B. 1999 The ozone hole. *NATO ASI Series Physics* **373**, 273–???
- [Lelong & Riley (1991)] LELONG, M.P. & RILEY, J.J. 1991 Internal wave-vortical mode interactions in strongly stratified flows. *J. Fluid Mech.* **232**, 1–19.
- [Lighthill (1978)] LIGHTHILL, J. 1978 Waves in Fluids. *Cambridge University Press*.
- [Maassen (2000)] MAASSEN, S.R. 2000 Self-organization of confined two-dimensional flows. *Eindhoven : Technische Universiteit Eindhoven* pp193.
- [McIntyre (1970)] MCINTYRE, M. E. 1970 Diffusive destabilization of the baroclinic circular vortex. *Geophysical Fluid Dynamics* **1**, 19–57.
- [McIntyre (1995)] MCINTYRE, M. E. 1995 The stratospheric polar vortex and sub-vortex : Fluid dynamics and midlatitude ozone loss. *Phil. Tran. Roy. Soc. London* **352**, 227–240.
- [McIntyre (2000)] MCINTYRE, M. E. 2000 On global-scale atmospheric circulations. Dans *Perspectives in Fluid Dynamics*, édité par G.K Batchelor, H.K. Mofatt et M.G. Worster, Cambridge University Press, 557–624.
- [Miles (1961)] MILES, J.W. 1961 On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.* **10**, 496–508.
- [Miyazaki & Fukumoto (1990)] MIYAZAKI, T. & FUKUMOTO, Y. 1990 Axisymmetric waves on a vertical vortex in a stratified fluid. *Phys. Fluids A* **3**(4), 606–616.

- 
- [Miyazaki (1993)] MIYAZAKI, T. 1993 Elliptical instability in a stably stratified rotating fluid. *Phys. Fluids A* **5**(11), 2702–2709.
- [Molina & Rowland (1974)] MOLINA, M.J. & ROWLAND, F. 1974 Stratospheric sink for chlorofluoromethanes : Chlorine atom catalysed destruction of ozone. *Nature* **249**, 810.
- [Olbers (1980)] OLBERS 1980 The propagation of Internal Waves in a geostrophic current. *J. Physical Oceanography* **11**, 1224–1233.
- [Orlanski (1972)] ORLANSKI, I. 1972 On the breaking of standing internal gravity waves. *J. Fluid Mech.* **54** part 4, 577–598.
- [Peixoto & Oort (1992)] PEIXOTO, J. P. & OORT, A. H. 1992 Physics of climate. *American Institute of Physics, New-York* pp520.
- [Palmen & Newton (1969)] PALMEN, E. & NEWTON, C. W. 1969 Atmospheric circulation systems. *Academic Press, New-York* 603pp.
- [Pedlosky (1979)] PEDLOSKY, J. 1979 "Geophysical Fluid Dynamics". *Springer-Verlag* Berlin and New-York.
- [Plumb & McEwan (1978)] PLUMB, R.A. & MCEWAN, A.D. 1978 The instability of a forced standing wave in a viscous stratified fluid : a laboratory analogue of the quasi-biennial oscillation. *J. Atmosph. Sci.* **35**, 1827–1839.
- [Polvani *et al.* (1995)] POLVANI, L. M., WAUGH, D. W. & PLUMB, A. R. 1995 On the subtropical edge of the stratospheric surf zone. *J. Atmosph. Sci.* **52**, 9, 1288–1309.
- [Polvani & Saravanan (2000)] POLVANI, L. M. & SARAVANAN, R. 2000 The Three-Dimensional structure of breaking rossby waves in a polar wintertime stratosphere. *J. Atmosph. Sci.* **57**, 3663–3685.
- [Polvani & Kushner (2002)] POLVANI, L. M., & KUSHNER, J. P. 2002 Tropospheric response to stratospheric perturbation in a relatively simple general circulation model. *Geophysical Research Letters* **29**, 7, 18-1–18-4.
- [Saffman (1992)] SAFFMAN, P.G. 1992 "Vortex Dynamics", *Cambridge monographs on Mechanics and Applied Mathematics*, Cambridge University Press, 308pp.
- [Staquet & Huerre (2002)] STAQUET, C. & HUERRE, G. 2002 On transport across a barotropic shear flow by breaking inertia-gravity waves. *Phys. of Fluids* **14**, 6, 1993–2006.
- [Thorpe (1975)] THORPE, S. A. 1975 The excitation, dissipation and interaction of internal waves in the deep ocean. *J. Geophys. Res.* **80**, 328–338.
- [Tuck *et al.* (1993)] TUCK, A. F., RUSSEL, J. M. & HARRIES, J. E. 1993 Stratospheric dryness : antiphased dessiccation over Micronesia and Antarctica. *Geophys. Res. Lett.* **20**, 1227–1230.
- [Wonhas & Vassilicos (2001)] WONHAS, A. & VASSILICOS, J.C. 2001 Mixing in frozen and time-periodic two-dimensional vortical flows. *J. Fluid Mech.* **442**, 359–385.
- [Wiggins (1992)] WIGGINS, S. 1992 *Chaotic Transport in Dynamical Systems*. Springer.

---

**RESUME en français :**

L'interaction entre des ondes d'inertie-gravité et un vortex en milieu stratifié tournant est étudiée expérimentalement, et numériquement au moyen de simulations basées sur la théorie WKB, ou théorie des rais. Cette étude est réalisée dans le cadre d'applications aux écoulements géophysiques. On considère l'interaction d'ondes planes avec un vortex cyclonique: des vortex forcés, plutôt baroclines, sont créés par la rotation d'un disque tournant; des vortex libres allongés, plutôt barotropes, sont créés par aspiration. Contrairement aux écoulements uni-directionnels, dans des écoulements axisymétriques, les simulations WKB et les expériences confirment l'existence de 'couches' critiques, d'épaisseur finie, où certaines ondes sont piégées. Les simulations WKB reproduisent bien les expériences et sont mises à contribution pour expliquer le déclenchement du déferlement: on introduit un nombre de Reynolds d'interaction,  $Re_{wave}$ , qui mesure la valeur relative du taux de décroissance de la longueur d'onde lors du piégeage par rapport au taux d'amortissement visqueux. Pour les vortex baroclines, les couches critiques sont inclinées et les ondes piégées ne déclenchent pas de déferlement, du fait de valeurs trop faibles du nombre de Reynolds. Pour les vortex barotropes, les couches critiques sont quasi-verticales, et la majeure partie des ondes se propageant face à l'écoulement y sont piégées, provoquant un déferlement dans les expériences où le nombre de Reynolds est suffisamment élevé ( $Re_{wave} > 200$ ). Ce déferlement est associé à une inversion locale du champ de densité, qui déclenche une instabilité convective, et conduit à un dépôt de vortécité négative dans la zone extérieure du vortex. Quant au mélange, il est associé à deux mécanismes distincts: la perturbation du vortex par le champ d'ondes forme des bandes de mélange chaotique; le déferlement génère des zones turbulentes, dont la pénétration vers le cœur du vortex dépend de l'énergie apportée par les ondes déferlentes.

---

**TITRE en anglais :**

wave-vortex interactions in a rotating stratified fluid and transport through a dynamical barrier.

---

**RESUME en anglais :**

The interaction between inertia-gravity waves and vortices in a rotating stratified fluid is studied experimentally, and numerically using simulations based on the WKB theory also known as the ray theory. This study is carried out in the context of applications to geophysical flows. We consider the interaction of planar waves with cyclonic vortices: forced baroclinic vortices are generated by a small rotating disk whereas free rather barotropic vortices are generated by an elongated sink. In contrast to uni-directional flows, wave energy in axi-symmetric flows does not increase infinitely along critical surfaces. WKB simulations and experiments conjecture the existence of critical 'layers', of finite thickness, along which waves are trapped. WKB simulations capture the wave pattern observed in the experiments, and are used to predict the occurrence of wave breaking. We introduce an interaction Reynolds number for trapped waves,  $Re_{wave}$ , which measures the ratio between the rate of decrease in wave-length and their viscous damping rate. For baroclinic vortices, the critical layers are inclined due to vertical shear and waves trapped along them do not break, due to low values of the Reynolds number. For barotropic vortices, the critical layers are almost vertical and most of the waves propagating against the flow are trapped, leading to wave breaking when the value of the Reynolds number is high enough, typically  $Re_{wave} > 200$ . This wave breaking is due to a local inversion of the density field, which drives a buoyancy-induced instability, and leads to the generation of negative vorticity in the outer region of the vortex. Mixing is driven by two distinct processes: vortex streamlines are destabilised by periodic wave disturbances and change into bands of chaotic mixing; wave breaking generates patches of turbulence of which the penetration into the vortex core depends on the amount of energy provided by breaking waves.

---

**DISCIPLINE :** Mécanique des milieux géophysiques et environnement.

---

**MOTS-CLES :** Fluide stratifié tournant, Dynamique des vortex, Ondes internes d'inertie-gravité, Théorie WKB, Instabilités hydrodynamiques, Mise en rotation, Mélange.

---

**ADRESSE DU LABORATOIRE :** Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (L.E.G.I.), B.P. 53, 38041 GRENOBLE Cédex 9.