Entrée à l'université / Ressources en ligne. Eclairages théoriques et actions didactiques dans deux champs de recherche en didactique des mathématiques

Ghislaine Gueudet

NOTE DE SYNTHESE PRESENTEE EN VUE DE
L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES
UNIVERSITE PARIS DIDEROT PARIS 7

GHISLAINE GUEUDET

ENTREE A L'UNIVERSITE
/
RESSOURCES EN LIGNE

ECLAIRAGES THEORIQUES ET ACTIONS DIDACTIQUES
DANS DEUX CHAMPS DE RECHERCHE
EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

JURY

Pr. Michèle ARTIGUE (directrice de recherche)	Université Paris Diderot-Paris VII
Pr. Maria-Alessandra MARIOTTI (rapportrice)	Université de Sienne, Italie
Pr. Carl WINSLØW (rapporteur)	Université de Copenhague, Danemark
Pr. Jean-Baptiste LAGRANGE	IUFM-Université de Reims
Pr. Jean-Luc DORIER	Université de Genève, Suisse
Pr. Gérard SENSEVY	IUFM-Université de Bretagne Occidentale

Remerciements

Michèle Artigue a accepté de diriger le travail de synthèse présenté ici. J'ai pu ainsi bénéficier directement de la lumière qu'elle apporte par ses travaux et sa présence au monde de la recherche en didactique des mathématiques. C'est une chance et un honneur exceptionnels, dont je lui suis extrêmement reconnaissante.

Je remercie Maria-Alessandra Mariotti, qui a accepté d'être rapportrice de cette synthèse, huit ans après avoir été rapportrice de ma thèse. Dans l'intervalle, j'ai échangé avec elle à de nombreuses occasions, qui ont toujours été aussi agréables qu'enrichissantes.
Je remercie Carl Winsløw qui a accepté d'être rapporteur de cette synthèse. Ses travaux limpides et profonds m'ont beaucoup apporté.

Jean-Baptiste Lagrange a accepté de faire partie de ce jury. Une dizaine d'années auparavant, il m'avait fait découvrir la recherche en didactique des mathématiques ; depuis, il n'a cessé de m'indiquer le cap à suivre, je l'en remercie.
Jean-Luc Dorier a accepté de faire partie de ce jury, et m'a fait bénéficier de ses précieux conseils pour l'écriture de cette synthèse. Il avait auparavant été pour moi le directeur de thèse idéal, je le remercie ici de tous ces apports.
Je remercie Gérard Sensevy pour avoir accepté de faire partie de ce jury, et pour tout ce qu'il a créé et crée au quotidien en dépit de circonstances rarement favorables. C'est de lui que parlent les collègues qui me disent que j'ai beaucoup de chance de travailler à Rennes, je suis parfaitement en accord avec ce genre de propos.

Le parcours dont témoigne cette synthèse a commencé au sein de l'IREM de Rennes, et du laboratoire de didactique formé à l'UFR de Mathématiques de Rennes. Je n'ai jamais quitté ces lieux hospitaliers, où j'ai beaucoup appris, en particulier grâce à Jean Julo.
J'ai eu la chance d'effectuer ma thèse dans l'équipe DDM et le laboratoire Leibniz de Grenoble. J'ai ensuite été recrutée à l'IUFM de Bretagne ; j'y ai été chaleureusement accueillie, par une équipe de collègues remarquables. J'ai pu vivre le développement du CREAD depuis son origine. Je me réjouis chaque jour de l'existence de ce lieu d'intelligence collective.
Les travaux que j'ai effectués doivent beaucoup à la collaboration avec des enseignants du premier comme du second degré, notamment au sein de groupes de recherche soutenus par l'INRP, et dans l'association Sésamath. Ces enseignants m'ont fait bénéficier sans compter de leur temps, de leur qualité d'écoute, et de leur admirable compétence professionnelle.
La décision prise en commun avec Claire Cazes, Magali Hersant et Fabrice Vandebrouck de nous lancer dans l'aventure de l'étude des bases d'exercices en ligne a représenté un tournant déterminant dans ma recherche. Nos travaux ont pu se développer ensuite dans le cadre du projet GUPTEn, se poursuivre et s'enrichir de nouvelles collaborations, en particulier avec Laetitia Bueno-Ravel.
Plus largement, la communauté de didactique des mathématiques, nationale et internationale, fait vivre des manifestations dont les apports scientifiques et humains ont nourrit ma trajectoire au fil des années, je citerai en particulier le séminaire national de didactique, les conférences CERME et les écoles d'été de didactique des mathématiques.
La préparation de l'école d'été 2007 a marqué le début d'un chemin de recherche partagé avec Luc Trouche. Nous avons déjà significativement avancé sur celui-ci, j'espère avoir la chance et le plaisir de poursuivre avec lui cet itinéraire au-delà même des horizons que nous entrevoyons actuellement.

J'exprime une gratitude profonde à toutes les personnes que j'ai côtoyées au long du parcours évoqué ci-dessus.

Je remercie comme je le fais souvent « mes parents, alliés et amis, actuellement en métropole » ou ailleurs. Cette formule antillaise m'a été transmise par Victoire Marie, qui m'a donné à voir ce que pouvaient être 107 années de joie de vivre. C'est à elle que je pense au moment de cette nouvelle étape de mon travail.

Sommaire

Introduction

Je présente ici la synthèse de recherches en didactique des mathématiques au cours desquelles j'ai étudié deux champs très différents :
- l'entrée à l'université, et en particulier les difficultés que pose l'enseignement de l'algèbre linéaire au début de l'université ;
- l'emploi de ressources en ligne pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux scolaires, et en particulier de ressources du type « bases d'exercices en ligne ».

Ce texte comporte donc deux chapitres distincts. Certaines interrogations sur l'emploi de ressources en ligne au début de l'université constituent une charnière articulant les thématiques des deux chapitres ; mais les problématiques considérées restent très différentes. Je tiens cependant à souligner des similitudes dans les démarches adoptées dans chaque chapitre.

– Dans les deux cas, des travaux portant sur un objet relativement restreint ont évolué vers des recherches d'une portée plus générale. Je suis ainsi passée d'un questionnement portant sur le rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire à l'étude des difficultés rencontrées à l'entrée à l'université. De même l'intérêt que j'ai porté aux phénomènes d'enseignement et d'apprentissage avec des bases d'exercices en ligne m'a progressivement conduite à la prise en compte globale des ressources susceptibles d'intervenir dans l'enseignement des mathématiques.
– Je me suis efforcée pour toutes les problématiques rencontrées d'éclaircir les apports possibles de différentes approches théoriques. J'ai ainsi eu recours à des approches cognitives, socio-culturelles, institutionnelles. J'ai mobilisé des outils théoriques issus de l'ergonomie cognitive, de la théorie des situations didactiques, de la théorie anthropologique du didactique. La possibilité d'articuler ces différentes approches, d'identifier le type de résultats qu'elles sont susceptibles de mettre à jour, d'en souligner les complémentarités est certainement un enjeu important pour la recherche en didactique.
– Un autre enjeu crucial pour la recherche est la proposition d'actions didactiques adossées aux résultats obtenus. Les types d'actions possibles sont nombreux ; dans les deux chapitres de cette synthèse, je me suis attachée à souligner des propositions pour l'enseignement ou la formation. Ces propositions peuvent porter sur des organisations mathématiques, des organisations didactiques ; elle peuvent prendre forme sur différents supports, donnant lieu à différentes ressources.

Je conclus cette synthèse par la présentation de perspectives de recherche. Celles-ci ne se répartissent pas en deux ensembles disjoints correspondant à chacun des deux champs évoqués ci-dessus. En effet, j'expose dans le second chapitre les concepts élémentaires d'une approche en cours d'élaboration, et qui conduit à centrer l'attention du chercheur sur la documentation des professeurs et celle des élèves. Je montrerai que cette approche, développée dans le prolongement de recherches exposées au deuxième chapitre, est susceptible d'éclairer de nombreuses questions de recherche, en particulier des questions portant sur les spécificités de l'enseignement supérieur évoquées au premier chapitre.

Chapitre 1

Eclairages théoriques sur l'entrée à l'université : l'exemple de l'algèbre linéaire.

Tout travail de recherche en didactique des mathématiques conduit à retenir un ou plusieurs cadres théoriques, et à choisir des modes de collecte et d'analyse de données. Ces choix engendrent un regard du chercheur sur son objet de recherche.

Dans une synthèse des travaux de recherche sur la transition secondaire-supérieur (Gueudet 2008*a* et 2008*b*), nous avons ainsi analysé les différentes perspectives adoptées par les chercheurs, et montré comment le regard choisi initialement conduisait à proposer différentes interprétations des difficultés rencontrées par les étudiants, différents moyens d'action. Nous allons reprendre ici cette démarche, en l'appliquant essentiellement à des recherches portant sur l'algèbre linéaire. Il ne s'agit pas d'effectuer une synthèse exhaustive de telles recherches, mais d'examiner comment les différentes vues qu'offrent divers regards théoriques peuvent être articulées pour enrichir la compréhension d'un objet de recherche.

Dans tous les cas, nous soulignerons ce qui peut être interprété comme des spécificités de l'algèbre linéaire ; et nous montrerons également ce que l'approche évoquée a apporté dans nos propres travaux.

Nous présenterons ainsi successivement trois perspectives.

- Dans la première (§1), nous considérons que les difficultés des étudiants proviennent du fait que ceux-ci sont confrontés à l'université avec des *savoirs complexes*, présentant des difficultés intrinsèques. Les recherches adoptant cette perspective articulent analyse *épistémologique* et analyse *cognitive*. Nous examinons plus précisément dans cette partie des travaux faisant appel à la *théorie APOS* (Dubinsky et McDonald 2001, Trigueros et Oktac 2005), au *statut* des notions enseignées (Robert 1998, Dorier 1997*a*), et enfin à la notion de *modèle intuitif* (Fischbein 1987, Gueudet-Chartier 2000). Ces approches mettent à jour des résultats très différents ; nous montrons qu'elles diffèrent même en amont par le type des difficultés des étudiants auquel elles s'intéressent. Elles semblent ainsi complémentaires, ce qui conduit naturellement à poser la question de la possibilité de coordonner des actions didactiques suggérées par chacune. Nous apportons des éléments de réponse à cette question.
- Dans la deuxième (§2), les difficultés sont plutôt attribuées à un manque de flexibilité des connaissances des étudiants. Ici il ne s'agit plus de savoirs spécifiquement complexes, mais d'une nécessité d'organisation des savoirs, de mise en réseau, permettant de passer de l'un à l'autre. La référence est constituée par les pratiques des mathématiciens, dont les connaissances sont ainsi organisées. En algèbre linéaire, la possibilité de recours à des dessins est une forme de flexibilité, dont nous avons étudié les spécificités en termes de *modèles figuratifs*, et *modèles géométriques* associés (Gueudet-Chartier 2000). Au-delà de la question du recours au dessin, il est possible de mettre en œuvre des *modes de raisonnement géométriques*, qui témoignent d'une forme de flexibilité spécifique à l'algèbre linéaire (Gueudet 2003). Plus généralement encore, certains travaux (Sierpinska 2000) identifient de nouvelles formes de flexibilité requises à l'entrée à l'université, et qui reposent sur la possibilité de référence à des situations connues, de mise en oeuvre de divers moyens de contrôle... Une action didactique associée à de tels travaux vise le développement de l'expérience mathématique des étudiants en mettant l'accent tout particulièrement sur les connexions et flexibilités que cette expérience permet de développer. Il s'agit donc de permettre le travail sur des problèmes complexes, variés, nécessitant de dépasser la simple application de techniques, ceci en tenant compte des contraintes de temps propres à

l'université. C'est l'objectif poursuivi par la conception du logiciel BRAISE, base d'exercices en ligne pour le niveau licence[1], que nous présentons donc également en partie 2 (Gueudet 2004*b*).

- Enfin dans la troisième (§3), l'attention est portée sur le changement d'institution lors du passage de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur, et sur les spécificités de l'institution universitaire. Un même savoir, dans deux institutions différentes, donne lieu à des organisations mathématiques différentes (Chevallard 2002). Ainsi certains types de tâches d'algèbre linéaire ont été rencontrés en géométrie au lycée, mais ont donné lieu à des organisations mathématiques sensiblement différentes, et ces ruptures sont susceptibles de causer des difficultés (Gueudet 2004*a*). Par ailleurs, l'entrée dans une nouvelle institution signifie pour l'élève devenant étudiant la rencontre avec de nouveaux enseignants, généralement mathématiciens. Au-delà du changement associé à cette rencontre, certaines caractéristiques des pratiques et des attentes des enseignants de l'université, leur variété en particulier, peuvent poser problème aux étudiants (Gueudet-Chartier 2000, Gueudet 2008*a*). Et le système des attentes de l'institution, le contrat didactique institutionnel (Chevallard 1989) à l'université sont eux aussi à questionner, et à étudier en les situant par rapport à ceux du secondaire. Ainsi même pour des organisations mathématiques similaires, le partage de responsabilités entre élève (ou étudiant) et professeur change d'une institution à l'autre. Il s'agit donc d'étudier ce partage ; nous nous penchons sur ce sujet dans (Gueudet et Lebaud 2008) en nous intéressant en particulier aux textes d'évaluation.

1. De nouveaux savoirs

Les difficultés rencontrées par les étudiants lors de leur entrée à l'université peuvent être attribuées au fait que les savoirs étudiés sont « abstraits », ou en tout cas « plus abstraits » que ceux qui sont présentés dans l'enseignement secondaire. Un tel constat peut provenir d'enseignants de l'université ; il est également formulé par des chercheurs, notamment dans des recherches relevant de l'Advanced Mathematical Thinking (Tall 1991, Selden et Selden 2005). Ainsi selon Edwards *et al.* (2005), pour définir la pensée mathématique avancée, il faut observer «le phénomène qui semble advenir pour la première fois dans l'expérience mathématique des étudiants au début de l'université, lorsqu'ils commencent à rencontrer des concepts abstraits, et une démarche déductive.» (p.16, notre traduction). L'expression « concept abstrait » nous semble devoir faire l'objet d'une attention particulière. Pour Edwards *et al.* (2005), sont abstraits les objets qui ne sont pas accessibles à nos cinq sens, mais d'autres auteurs proposent des interprétations différentes. Elucider le sens de l'adjectif *abstrait* dans ce contexte est un enjeu important pour les recherches s'intéressant à l'entrée dans le supérieur, et donc notamment pour celles sur l'algèbre linéaire que nous considérons ici.

Nous avons retenu trois exemples de recherches que nous allons examiner plus en détail dans les trois sections suivantes (§1.1, §1.2 et §1.3), en interrogeant systématiquement les formes spécifiques d'abstraction qu'elles mettent en avant. Nous discuterons de plus les articulations possibles de ces approches (§1.4).

1.1 Décomposition génétique des espaces vectoriels : la théorie APOS

La théorie *APOS* (Action-Processus-Object-Schema), élaborée par une équipe de chercheurs Nord-Américains réunis autour de Dubinsky (Dubinsky et McDonald 2001), s'inspire des travaux de Piaget (1970). Elle considère ainsi que la manière dont un savoir est appris dépend de la structure de ce savoir . En effectuant une *décomposition génétique* du savoir, il est donc possible de déterminer un ordre de présentation des concepts optimisant l'apprentissage. Ainsi la première étape dans une recherche fondée sur ce cadre théorique est une analyse du savoir en jeu, permettant d'en proposer une décomposition qui mettra en évidence les différentes conceptions que les étudiants peuvent avoir. Ces conceptions sont désignées par les termes : *conception–action, conception–processus, conception-objet ou conception-schéma*. Cette suite de conceptions est ordonnée, et l'étudiant doit

[1] Le niveau licence dans l'enseignement universitaire français actuel recouvre les trois premières années d'université.

normalement au cours de son apprentissage pouvoir passer d'une conception à l'autre dans cet ordre.
Nous allons présenter ce que recouvrent ces différentes conceptions en détaillant l'exemple d'une recherche exposée par Trigueros et Oktac (2005), qui appliquent la théorie APOS au cas de l'algèbre linéaire, et plus précisément aux notions d'espace vectoriel, sous-espace et combinaison linéaire.

Intérioriser des actions, encapsuler des processus : la définition de sous-espace vectoriel
Une *action* est une transformation des objets qu'un individu peut faire en réagissant à des indications qui lui donnent les pas à suivre. Considérons par exemple le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \{(t, 0, 2t+u+v, -u)$, avec t, u, v réels$\}$. Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, un étudiant qui en est à la *conception-action* devra effectuer toutes les vérifications correspondant à la définition générale de sous-espace vectoriel : F est bien non vide, et en calculant les coordonnées d'une combinaison linéaire de deux vecteurs de F, on voit que cette combinaison linéaire appartient encore à F.
Lorsqu'un individu répète certaines actions, et réfléchit sur ces actions, celles-ci sont *intériorisées* et deviennent un *processus* mental. Un étudiant parvenu à la *conception-processus* peut penser et prévoir les résultats d'une action sans en réaliser effectivement toutes les étapes. Ainsi pour l'exemple de l'ensemble F ci-dessus, cet étudiant pourra citer les étapes de la vérification sans effectuer tous les calculs, en invoquant par exemple un argument de linéarité quant à la représentation paramétrique qui caractérise les éléments de F pour en prédire le résultat.
Ensuite la réflexion sur le processus lui-même peut amener l'étudiant à percevoir ce processus comme un tout, comme une transformation globale : on dit alors qu'il a *encapsulé* le processus en un *objet*. Par exemple, un étudiant qui reconnaîtra en F le sous-espace engendré par les vecteurs (1,0,2,0) ; (0,0,1,-1) ; (0,0,1,0) est parvenu à la *conception-objet* (il ne s'agit pas de l'unique manifestation possible de cette conception, et le fait de passer de la description de F donnée par une représentation paramétrique à un système de vecteurs générateurs met certainement en jeu d'autres éléments que l'encapsulation d'un processus, mais ces aspects ne sont pas détaillés par Trigueros et Oktac).
Le *schéma* est l'ensemble des actions, des processus et des objets qui sont attachés à un concept donné.
Au début de son développement, la théorie APOS visait spécifiquement les savoirs enseignés à l'université. Les deux mouvements fondamentaux d'intériorisation et d'encapsulation peuvent certes se produire dans l'apprentissage à tous les niveaux. Mais les concepts rencontrés à l'université, notamment les ensembles munis de structures, comme dans le cas qui nous intéresse ici, nécessitent des intériorisations et encapsulations nombreuses et rapides : c'est la définition de « *concepts abstraits* » qui ressort d'une analyse de la théorie APOS. L'exercice qui consiste à vérifier un à un les axiomes conférant la structure d'espace vectoriel n'est pas pratiqué à de nombreuses reprises. L'étudiant doit pouvoir rapidement faire appel à des méthodes plus économiques pour étudier si un ensemble donné est un espace vectoriel : généralement, reconnaître qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace connu. Puis il doit pouvoir considérer les sous-espaces vectoriels eux-mêmes comme des objets, par exemple lorsqu'il démontre des résultats généraux[2] à propos de sommes de sous-espaces, ou de leurs images par des applications linéaires.

Théorie APOS et action didactique
De nombreux enseignements universitaires en Amérique du Nord ont été élaborés selon les

[2] Les écrits dont nous disposons à propos de l'algèbre linéaire dans APOS n'introduisent pas explicitement ce lien entre *conception-objet* et *résultats généraux*. C'est nous qui proposons cette restriction, car il nous semble que les processus cognitifs en œuvre ne seront pas les mêmes pour déterminer, par exemple, la somme de deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ donnés par des équations cartésiennes, et pour étudier le lien entre $E+(F\cap G)$ et $(E+F)\cap(E+G)$.

principes de la théorie APOS. Une décomposition génétique des concepts par les chercheurs précède dans tous les cas ces enseignements. Ils adoptent de plus, au-delà de ce fondement épistémologique, une structure commune appelée le *ACE teaching cycle* : *activities, class discussion, exercises*. Le travail sur un thème mathématique commence donc par des activités : ceci est cohérent avec l'idée qu'au début de l'apprentissage se situe l'action sur des objets. De plus, ces activités sont très spécifiquement choisies ; elles intègrent en particulier un travail avec le logiciel ISETL (*Interactive Set Language*), spécialement conçu par Dubinsky (1995) pour suivre les principes de APOS. Ces activités sont effectuées en petits groupes ; elles requièrent des étudiants un travail d'écriture de programmes simples, qui les amènent à réfléchir sur les différentes étapes des actions effectuées. Les activités sont suivies d'une mise en commun en classe, organisée par l'enseignant. Cette mise en commun demande aux étudiants un effort de formulation, susceptible de les mener à la réflexion nécessaire pour l'intériorisation comme pour l'encapsulation. Le cycle se termine par un travail sur des exercices traditionnels.
A propos du concept d'espace vectoriel, la décomposition génétique montre que l'étudiant doit agir sur des objets en utilisant les opérations : somme, et produit par un scalaire. Il doit effectuer des actions conduisant à vérifier les dix axiomes qui définissent la structure d'espace vectoriel. Ceci nécessite l'appel à des schémas qui auront dus être précédemment construits : schéma d'ensemble, d'opération binaire, de fonction (pour l'opération externe) et d'axiome. Dans le cadre de la théorie APOS, la vérification d'un axiome consiste à coordonner le processus général de vérification d'une propriété avec le processus spécifique correspondant à l'axiome en jeu, et à appliquer le tout à un ensemble et une ou plusieurs opérations spécifiques (Brown *et al.* 1997). L'aspect de coordination de processus est central dans le cas des espaces vectoriels, dans la définition desquels apparaît un nombre important d'axiomes de différentes natures. Chacun de ces axiomes est supposé déjà construit, c'est à dire en particulier disponible comme objet, pouvant être désencapsulé en processus. Cette coordination permet d'effectuer les actions nécessaires à la vérification complète, actions qui doivent être effectuées sur différents exemples, répétées pour être intériorisées en un seul processus de vérification. Ensuite ce processus est reconnu comme étant le même dans tous les cas : il est encapsulé, et l'objet espace vectoriel est construit, complétant le schéma
A propos des concepts d'espace vectoriel, sous-espace et combinaison linéaire, les activités avec ISETL portent sur des espaces vectoriels sur des corps finis. Par exemple, les étudiants définissent dans ISETL l'ensemble $K=Z/5Z$, puis K^2. Ils définissent ensuite sur K^2 les opérations : somme, produit par un scalaire, et programment une suite d'instructions ISETL permettant de vérifier que ces opérations sont internes. Cette suite d'instructions devient une nouvelle fonction de ISETL (nommée *is_closed_va*) : c'est la forme informatique de l'intériorisation. L'hypothèse qui est faite ici est que la répétition de ces intériorisations informatiques va accompagner l'intériorisation cognitive. On peut noter cependant que la nécessité de faire appel à des corps finis peut amener des complications supplémentaires. D'une part, il faut que les étudiants soient suffisamment familiers avec ces corps. Il est certes rapide de faire une liste exhaustive des éléments de $Z/5Z$. Mais il ne faut pas oublier que ces éléments sont des classes d'équivalence. L'enseignement proposé ici présuppose donc l'encapsulation de processus permettant de disposer d'un objet « classe d'équivalence ». De plus, ces espaces vectoriels sur des corps finis ne seront sans doute guère rencontrés par les étudiants après l'étape d'activités introductives.
Soulignons un dernier point relatif à cet enseignement d'algèbre linéaire avec APOS, à propos de la visualisation. Trigueros et Oktac (2005) signalent que la visualisation est considérée comme très importante dans APOS. Elle est incluse dans le cycle ACE avec les activités, ou avec la discussion. Il faudrait idéalement, selon ces auteurs, que les étudiants puissent visualiser les processus. Mais ceci est techniquement difficile à réaliser, donc la visualisation reste limitée à des objets statiques, et les étudiants doivent se représenter mentalement le processus (l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique, complétant le logiciel ISETL, pour résoudre ce problème n'est pas évoqué

par les auteurs ; nous évoquons plus loin d'autres recherches[3] qui ont fait ce choix).
Notons que si nous émettons ici quelques réserves sur les choix qui ont été effectivement opérés pour cet enseignement, nous ne le faisons pas dans l'idée d'une critique globale des actions didactiques fondées sur la théorie APOS. L'algèbre linéaire n'a donné lieu qu'à peu d'études dans le cadre de cette théorie ; d'autres domaines : groupes, suites, fonctions ont été nettement plus approfondis, et les enseignements basés sur ces recherches semblent avoir eu un impact positif sur les apprentissages réalisés par les étudiants (Weller *et al.* 2003).

1.2 L'algèbre linéaire formalisatrice, unificatrice, généralisatrice : statut des notions

Un courant de recherche très actif s'est développé en France au sujet de l'algèbre linéaire à partir de la fin des années quatre-vingts. L'essentiel des travaux correspondants est présenté dans Dorier (1997*a* et 2000). Dans ces travaux le point de vue épistémologique est dominant ; il est ancré dans une analyse historique très précise de la genèse de l'algèbre linéaire.

Analyse historique, statut des notions et difficultés des étudiants
Dorier (1997*b*) l'annonce dès le début de l'exposé de son analyse historique de la genèse de l'algèbre linéaire : « Le but de ce texte est d'essayer de dégager les étapes les plus importantes de cette évolution afin de nuancer la perfection un peu surfaite de l'algèbre linéaire. » (p.23). Il montre que cette genèse a été longue et complexe ; il en souligne certaines étapes, et met en évidence des points critiques. Nous rappelons brièvement ici certains de ces points, qui ont fondé des analyses didactiques ultérieures.
Dorier retrace un premier mouvement, qui s'étale du 18e siècle à la deuxième moitié du 19e, et qu'il identifie comme un mouvement d'unification. La résolution des équations linéaires et la manipulation de déterminants, tout d'abord réduites à des calculs techniques, évoluent vers une théorie plus générale qui met en évidence des caractéristiques du linéaire. Dans le même temps apparaît le calcul vectoriel, qui associe l'algébrique et le géométrique. L'évolution de la géométrie au cours de la première moitié du 19e siècle (et en particulier l'apparition des géométries non-euclidiennes) permet de dépasser l'obstacle constitué par la limitation à la dimension 3. La géométrie s'élargissant à la dimension *n*, l'aspect analytique amène un rapprochement entre le champ de la géométrie et celui des équations. Le rapprochement de ces deux courants : équations linéaires, et calcul vectoriel, amène une unification des problèmes linéaires en dimension finie.
Cependant on est à ce moment encore loin de l'algèbre linéaire sous sa forme moderne de théorie axiomatique. C'est un second mouvement, initié à la fin du 19e siècle, qui aboutira à cette forme moderne. Dans celui-ci, on observe d'une part des travaux dont l'objectif est explicitement de donner une forme axiomatique à la théorie, et d'autre part des recherches portant sur les problèmes linéaires en dimension infinie, problèmes d'analyse fonctionnelle en particulier. La forme axiomatique s'impose finalement lorsqu'il apparaît qu'elle permet d'unifier des méthodes, des problématiques en dimension infinie, et également de généraliser les méthodes de la dimension finie à la dimension infinie, permettant ainsi en particulier un certain regard géométrique sur les espaces de fonctions, de suites etc.
Ainsi l'algèbre linéaire prend forme pour des raisons de réorganisation du savoir, plutôt que de résolution de problèmes : ce constat historique laisse présager des difficultés didactiques. L'exploitation de ces résultats en didactique est liée à l'introduction par Robert (1998) du *statut* des notions mathématiques à enseigner. Il s'agit, pour une notion donnée, de se demander comment celle-ci s'insère dans des connaissances déjà introduites, et quelle est sa fonction. Déterminer le statut d'une notion passe par des analyses de programmes, mais également par des analyses épistémologiques. En s'appuyant sur le travail de Dorier, Robert conclut que l'algèbre linéaire est une théorie généralisatrice, unificatrice et porteuse d'un nouveau formalisme. Il s'agit donc ici

[3] En particulier Sierpinska (2000).

d’une nouvelle vue du sens de l’expression « *concept abstrait* » : le statut de l’algèbre linéaire est le statut le plus abstrait parmi ceux définis par Robert. De plus ce statut ne découle pas de choix d’enseignements, mais de raisons épistémologiques profondes. Notons que Robert introduit également un sens légèrement différent de l’expression « *concept abstrait* » en définissant la notion de *niveau de conceptualisation* (Robert 1997). Un tel niveau est « un palier dans un champ de connaissances mathématiques (champ conceptuel), correspondant à une organisation cohérente d’une partie du champ, caractérisée par des objets mathématiques présentés d’une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes, et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré, et en utilisant ces méthodes. »(p.149) Robert déclare qu’il n’y a pas de hiérarchie absolue dans les niveaux ; cependant elle parle de niveau formel, unificateur, généralisateur, et le terme même de niveau fait apparaître ceux-ci comme une forme ordonnée du statut des notions.
Les chercheurs qui adoptent ce regard théorique (Dorier *et al.*1997*a*) en algèbre linéaire se focalisent sur des difficultés d’étudiants qui relèvent de *l’obstacle du formalisme* : pour ces étudiants « l’algèbre linéaire n’est qu’un catalogue de notions très abstraites qu’ils n’arrivent pas à se représenter ; de plus ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux.» (p.116) Ces étudiants ne parviennent pas à donner des exemples d’espaces vectoriels ; interrogés sur ce en quoi consiste l’algèbre linéaire, ils citent des concepts mais aucune utilisation de ceux-ci. Ces difficultés sont alors interprétées comme résultant du caractère formel, généralisateur, unificateur de l’algèbre linéaire.

Statut des notions et action didactique
L’analyse épistémologique, comme les observations et interprétations des difficultés des étudiants évoquées ci-dessus ont donné lieu à un enseignement expérimental de grande ampleur à l’Université de Lille (Rogalski 1997). Nous reviendrons dans les parties suivantes sur cet enseignement très complet, car les choix qui y ont été faits témoignent de la prise en compte de plusieurs perspectives. Ici nous soulignons simplement certains principes adoptés, directement liés au statut des notions.
En début d’enseignement, les étudiants travaillent sur des systèmes linéaires, de manière à dégager la notion centrale de rang. Simultanément, un travail préliminaire de logique vise à les familiariser avec le formalisme. Ce formalisme est par ailleurs volontairement adopté pour établir des résultats généraux sur les systèmes linéaires (de préférence au passage par des coordonnées) pour préparer la théorie générale. Les étudiants sont ensuite rapidement confrontés à des problèmes linéaires issus d’autres champs, pour dégager la nature unificatrice et généralisatrice de l’algèbre linéaire. De plus des interventions de type méta, c’est à dire des éléments de connaissance sur les mathématiques (Dorier *et al.* 1997*b*) soulignent cette nature.
Cet enseignement, qui a été mis en place entre 1989 et 2000 environ, semble avoir eu des effets positifs, en particulier sur l’acquisition de la notion de rang. Cependant, suite à des changements dans la composition de l’équipe enseignante, il n’a pas été poursuivi. Ceci soulève la question de la transmission d’un dispositif complexe au-delà de ses concepteurs initiaux.

1.3 Algèbre linéaire et géométrie : modèles intuitifs

Nous allons aborder ici nos propres travaux, débutés lors de notre thèse (Gueudet-Chartier 2000). Dans ces travaux, les concepts d’algèbre linéaire sont également considérés comme des “*concepts abstraits*”, et le sens de cet adjectif est précisé par les travaux de Fischbein (1987) auxquels nous nous sommes référée. Selon Fischbein, “nous éprouvons le besoin de *voir* avec notre pensée comme nous *voyons* avec nos yeux” (p.7). Ceci justifie son intérêt pour la notion d’*intuition*. Il définit celle-ci comme un *type de connaissances*, acceptées comme des *évidences*, et ce bien qu’elles *excèdent les faits tangibles*. Le rôle de l’intuition est de répondre à notre besoin naturel de certitudes. Pour analyser les interventions de l’intuition, en particulier en mathématiques, Fischbein introduit une notion de modèle :

> « Un système B représente un modèle du système A si, sur la base d'un certain isomorphisme, une description ou une solution produite dans A admet un correspondant cohérent dans B et vice versa. » (Fischbein 1987, p.121)

Fischbein distingue différents types de modèles. Nous retenons la notion de *modèle abstrait* (une théorie mathématique, qui fournit un modèle pour un phénomène concret) et celle de *modèle intuitif*, qui offre les caractéristiques d'une réalité concrète, bien qu'il dépasse souvent celle-ci. Cette opposition entre abstrait et concret, en lien avec la notion de modèle, est présente dans les travaux de Harel sur l'algèbre linéaire (1997). Harel introduit le principe de concrétisation : l'abstraction d'une structure à partir d'un modèle nécessite que les éléments du modèle aient aux yeux de l'étudiant un certain caractère concret. Ceci conduit l'auteur à mettre en place un enseignement expérimental dans lequel les notions élémentaires d'algèbre linéaire sont introduites en s'appuyant sur des espaces géométriques. Nos propres recherches s'inscrivent dans le prolongement de celles de Harel, et précisent grâce au cadre théorique fourni par Fischbein la notion de modèle dans le contexte de l'algèbre linéaire. Nous allons présenter ces travaux, mais nous voulons dans un premier temps souligner deux points importants.

- Tout d'abord, sur la définition de « *concept abstrait* » dans notre travail, qui ne doit pas être confondue avec la notion de *modèle abstrait* de Fischbein. Pour Fischbein l'adjectif *concret* réfère à des faits tangibles, ce que nous pouvons « voir » avec nos yeux. Vient ensuite tout ce qui relève de l'intuitif, et qui du point de vue cognitif conserve les caractéristiques du concret. Un concept *abstrait* est pour nous ici ce qui n'est pas *intuitif* (ni bien entendu concret).
- La théorie développée par Fischbein conduit naturellement, pour le cas de l'algèbre linéaire, à s'intéresser au lien entre algèbre linéaire et géométrie. Nous n'affirmons pas ici que nos travaux ont porté sur le rôle du géométrique en algèbre linéaire à cause du choix du cadre théorique fourni par Fischbein. Le déroulement chronologique, comme c'est souvent le cas, a eu lieu à l'inverse. Ceci n'est cependant pas contradictoire avec le fait que, la théorie de Fischbein impliquant une référence forte à la réalité qui peut être *vue*, elle confère dans le cas de l'algèbre linéaire un poids particulier au géométrique.

Modèles intuitifs, genèse historique et texte du savoir en algèbre linéaire.

Nous avons introduit dans notre travail deux types de modèles intuitifs : *les modèles géométriques*, qui sont des modèles issus d'une géométrie, et *les modèles figuratifs*, qui sont constitués d'ostensifs graphiques (Bosch et Chevallard 1999). Ceci nécessite bien entendu de préciser ce qui est considéré comme une *géométrie* : dans tout ce qui suivra, nous appelons *géométrie* une théorie mathématique qui est un modèle abstrait de l'espace physique (il s'agit ici d'éviter d'employer le terme *géométrie* dans un sens général qui pourrait conduire à considérer l'algèbre linéaire elle-même comme une *géométrie*). Il peut paraître paradoxal de qualifier de modèle intuitif des objets issus d'un modèle abstrait. Mais c'est précisément ce lien entre la géométrie et la réalité physique qui permet le développement *d'intuitions géométriques*, en conférant aux connaissances géométriques l'apparence d'une réalité concrète. Dans ce processus les *modèles figuratifs* vont avoir une importance particulière, car un modèle géométrique sera fréquemment associé à un modèle figuratif, permettant la visualisation. Cependant nous ne traiterons pas ici cet aspect qui sera détaillé en partie 2 de ce chapitre.

Fischbein distingue de plus, parmi les modèles intuitifs, les *modèles analogiques* (qui appartiennent à un champ de connaissance différent de celui de l'original) et les *modèles paradigmatiques* (qui constituent un exemple privilégié, considéré comme représentatif d'une catégorie donnée).

De tels modèles sont intervenus dans la genèse historique de l'algèbre linéaire. Nous avons ci-dessus mentionné le rôle qu'a pu jouer le calcul vectoriel ; le cap qui été franchi lorsque l'on a considéré que la géométrie pouvait dépasser la dimension 3 ; le rapprochement qui a alors été possible entre une géométrie en dimension *n* et les problèmes linéaires en analyse (ceci en nous référant à l'analyse historique effectuée par Dorier 1997*b*). Pour ce dernier point : rapprochement entre géométrie et problèmes linéaires en analyse, nous l'interprétons en termes de *modèles géométriques analogiques*. La géométrie généralisée a joué le rôle de modèle intuitif en analyse

(Gueudet 2004*a*). Ainsi Schmidt (1907), à propos des fonctions de carré sommable, puis des suites, parle de norme, d'orthogonalité, et même du théorème de Pythagore. Riesz (1907) associe la dualité suites/fonctions et la dualité analytique/synthétique en géométrie. Cette richesse des *modèles analogiques géométriques*, et l'importance de ces analogies dans le développement de la théorie moderne sont à rapprocher du caractère *unificateur* de l'algèbre linéaire souligné dans les travaux mentionnés en 1.2. C'est pourquoi nous approfondirons plus ici ce qui concerne les *modèles paradigmatiques*, point de vue spécifique à notre étude. Cette notion est proche de la conception empirique de la notion de modèle proposée par Sensevy et Santini (2006) s'appuyant notamment sur Cartwright (1999). Selon Cartwright, le modèle est à une loi scientifique ce que la fable est à une morale ; et pour un sujet donné, sur le plan cognitif c'est le modèle qui donne sens aux concepts scientifiques en jeu. Ainsi en algèbre linéaire, pour raisonner sur l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs dans un espace vectoriel quelconque, un étudiant pourra utiliser le support de l'espace géométrique en dimension 3, ainsi que l'image (mentale, ou le dessin) de trois vecteurs non coplanaires (nous détaillons un tel exemple en partie 2).

Dans la genèse historique de l'algèbre linéaire, des modèles géométriques paradigmatiques sont aussi intervenus. C'est le cas en particulier dans les travaux de Grassmann, qui publie en 1844 l'*Ausdehnungslehre* ou *théorie de l'extension*, un ouvrage fondamental dans ce processus de genèse. Dans cet ouvrage, les « illustrations géométriques », et les « applications à la géométrie » sont nombreuses, et présentes dans tout le livre à la suite de l'introduction d'une notion ou de la présentation d'une propriété. Il s'agit d'un *modèle paradigmatique*, issu d'une géométrie considérée comme application de la théorie générale. Ce modèle est indispensable au raisonnement, c'est lui qui permet la mise en fonctionnement des concepts présentés. Il est si important que Grassmann lui-même emploie parfois dans la théorie générale des termes qui devraient être réservés à la géométrie. Et Peano, qui fut l'un des premiers lecteurs de l'*Ausdehnungslehre*, publia en 1888 : « *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H.Grassmann* », un ouvrage dans lequel il présente essentiellement la théorie de l'extension restreinte à la géométrie. L'analyse historique met ainsi en évidence l'importance du modèle paradigmatique comme support au raisonnement, importance qui peut prendre des formes excessives, lorsqu'il devient difficile de sortir de ce modèle.

Une analyse des contenus d'algèbre linéaire exposés dans des manuels universitaires actuels (Gueudet-Chartier 2000, 2006) conduit à des constats sur les modèles géométriques qui sont en cohérence avec ceux issus de l'analyse historique. Un *modèle géométrique paradigmatique*, susceptible de soutenir la compréhension de concepts abstraits et d'être utilisé dans la résolution de problèmes généraux, se dégage : il s'agit des espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Les recours faits dans les manuels à ce modèle sont particulièrement nombreux dans le cadre de l'algèbre bilinéaire. Le modèle paradigmatique pour un espace euclidien E quelconque est dans ce cas constitué par $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$ *euclidiens*. On peut citer de nombreux exemples. Le calcul de la distance euclidienne d'un élément de E à un sous-espace de E est souvent présenté dans les manuels en s'appuyant sur l'exemple de la distance d'un vecteur à un plan dans $\mathbb{R}^3$ euclidien. De même pour la notion de distance associée à une norme, comme on peut le voir dans l'exercice ci-dessous (voir figure 1).

> Soit E un ensemble (non nécessairement un espace vectoriel). Une application : $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$
> est dite distance si elle vérifie les propriétés suivantes :
> a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$
> b) $d(x,y)=d(y,x)$
> c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
>
> 1) Montrer que si E est un espace euclidien, l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$
> définie par $d(v,w)= \| v-w \|$ définit une distance sur E dite distance associée à la norme.
> 2) Justifier cette définition en considérant $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
> *Extrait de Grifone (1990), p.297*

Figure 1 $\mathbb{R}^3$ *euclidien, modèle paradigmatique d'espace euclidien.*

De même les isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens sont parfois utilisées comme modèle paradigmatique pour les isométries d'un espace euclidien *E* quelconque.
$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens apparaissent aussi dans certains manuels, mais plus rarement, comme modèles analogiques dans des exemples, des résolutions d'exercices relevant d'autres domaines : espaces de fonctions, de suites, de polynômes en particulier...

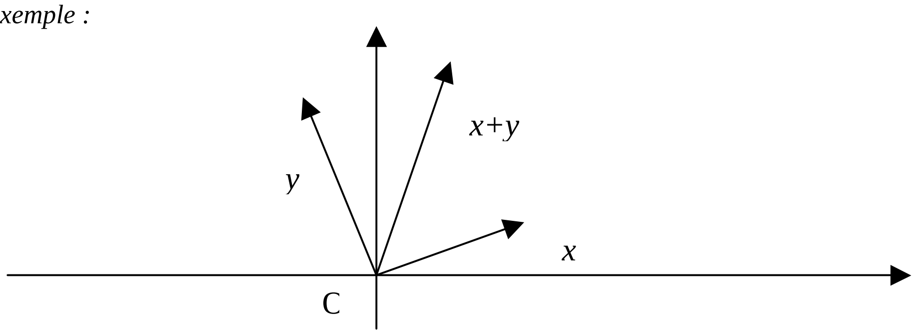
Difficultés des étudiants et propositions d'actions didactiques

Nous centrons notre regard ici sur les difficultés des étudiants en algèbre linéaire que l'on peut interpréter comme étant liées à un déficit de modèle géométrique. On peut citer tout d'abord des difficultés rencontrées par les étudiants dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et qui peuvent être interprétées comme signe de l'absence d'un modèle issu de la géométrie du lycée. C'est le cas par exemple lorsque des étudiants proposent un unique vecteur comme base d'un plan dans $\mathbb{R}^3$. Les résultats rencontrés dans l'étude de la géométrie dans l'espace au lycée devraient leur permettre d'éviter une telle erreur. Mais l'absence d'un modèle géométrique peut se ressentir au-delà de la dimension 3, et même en dehors d'espaces de type $\mathbb{R}^n$. Nous avons signalé que le modèle géométrique paradigmatique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens semblait pouvoir être fréquemment utile dans l'étude des espaces euclidiens en général. Nous allons présenter ici un exemple relevant des possibilités d'emploi de ce modèle, extrait de (Gueudet-Chartier 2004).
Au second semestre de l'année 2000-2001, nous avons observé l'intégralité d'un enseignement d'algèbre bilinéaire en deuxième année d'université. Il s'agissait de la première moitié d'un module d'enseignement comportant deux cours d'une heure quinze chacun, et deux séances de travaux dirigés de deux heures chaque semaine, sur une durée de douze semaines au total. A la suite de ce cours, nous avons rencontré huit étudiants (puis leur enseignant) pour un entretien. L'exemple présenté ici est issu de ces entretiens. Nous avons soumis aux étudiants l'exercice suivant :

Pythagore et polynômes
Soit E= $\mathbb{R}_3$ [X] l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, muni d'un produit scalaire. Soient P et Q deux éléments de E, de norme 1 et orthogonaux. Peut-on calculer la norme de P+Q ?

Dans le cours, le modèle de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens était couramment sollicité. En particulier, le théorème de Pythagore y était énoncé de la manière suivante :

Théorème : Soit q une forme quadratique et f la forme bilinéaire associée sur un espace E. Soient x et y appartenant à E orthogonaux relativement à f ; alors on a q(x+y)=q(x)+q(y).
Exemple :



$\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire usuel.
Soit a = la distance de x à O, b= la distance de y à O, et c = la distance de x+y à O, alors $a^2+b^2=c^2$.

***Figure 2** Le théorème de Pythagore dans le cours d'algèbre bilinéaire : $\mathbb{R}^2$ euclidien, modèle paradigmatique intuitif.*

Ici un lien avec le théorème de Pythagore rencontré dès le collège en géométrie est clairement recherché. Il est toutefois présenté avec le vocabulaire du cours, la notion de produit scalaire en particulier. On observe aussi la dualité affine-vectoriel, qui ne fait pas l'objet d'explications particulières (c'était le cas dans l'ensemble du cours). $\mathbb{R}^2$ euclidien est proposé par l'enseignant

comme modèle paradigmatique pour ce théorème ; c'est plus généralement le cas dans l'ensemble du cours d'algèbre bilinéaire. Mais ce théorème présenté en cours n'a été utilisé dans aucun des exercices proposés en travaux dirigés.
Lors de l'entretien, quatre étudiants parmi les huit ont correctement résolu l'exercice.
L'un d'entre eux a appliqué le théorème de Pythagore (sans le nommer ainsi toutefois) comme énoncé dans le cours, et a écrit :
« P et Q orthogonaux, donc $\|P+Q\|^2 = \|P\|^2 + \|Q\|^2 = 2.\ \|P+Q\| = \sqrt{2}$. »
Les trois autres ont fait un calcul en revenant au produit scalaire, ils retrouvaient ainsi le résultat énoncé dans le théorème :
« $\|P+Q\|^2 = \langle P+Q, P+Q\rangle = \|P\|^2 + 2\langle P,Q\rangle + \|Q\|^2 = 2.\ \|P+Q\| = \sqrt{2}$. »
Parmi les quatre autres étudiants, deux ont affirmé qu'il n'était pas possible de calculer la norme de la somme, on manquait d'informations. Deux autres pensaient que c'était possible, mais qu'il devait y avoir pour cela dans le cours une formule dont ils ne se souvenaient pas.
A la suite de la résolution, nous avons proposé aux étudiants le dessin ci-dessous, en leur demandant si ils pensaient qu'il illustrait bien la situation, et si ils auraient trouvé utile de l'avoir pour résoudre l'exercice.

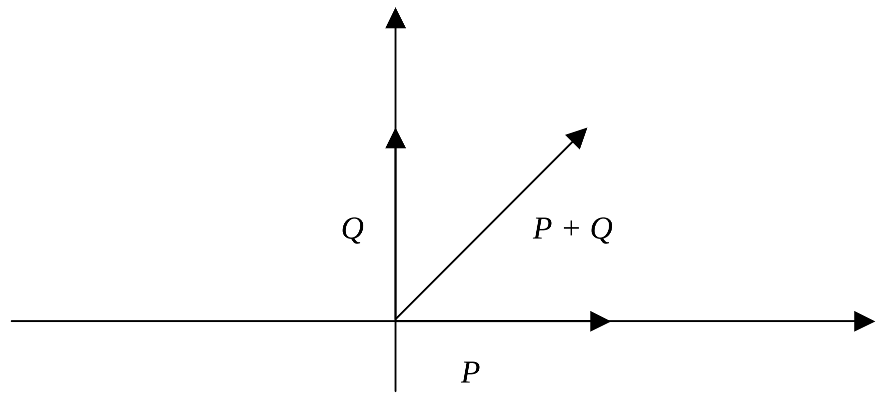


Figure 3 *Dessin proposé en entretien, exercice « Pythagore et polynômes »*

L'étudiant qui a appliqué le théorème a déclaré qu'il avait pensé à une telle représentation en résolvant l'exercice. Cinq autres ont associé ce dessin au théorème de Pythagore ; ils ont alors remarqué que ce théorème pouvait s'appliquer à l'énoncé proposé, et ont ainsi retrouvé, ou trouvé, la norme cherchée. Deux étudiants ont rejeté l'emploi de ce dessin, déclarant qu'on ne pouvait pas représenter des polynômes par des flèches.

Ainsi un seul étudiant a fait appel ici au théorème de Pythagore. Pour cet étudiant ce théorème est un outil qu'il peut utiliser dans différents espaces, indépendamment de la nature de leurs éléments. Il est impossible de déterminer précisément le rôle qu'a pu jouer pour cet étudiant le modèle de $\mathbb{R}^2$. Cependant le fonctionnement productif d'un modèle paradigmatique devrait produire de tels effets. Pythagore pour $\mathbb{R}^2$ est bien connu, les étudiants peuvent s'appuyer sur ce modèle pour retenir, et savoir utiliser, le théorème général. Pour les sept autres étudiants, on peut dire que ce rôle n'a pas été rempli. Le modèle était utilisé par l'enseignant comme allant de soi, l'emploi de $\mathbb{R}^2$ en tant que modèle n'a fait l'objet d'un travail spécifique ni durant le cours ni en exercice. On voit qu'en dépit des choix de l'enseignant, les étudiants interviewés n'ont pas recours au modèle paradigmatique. Le résultat à utiliser dans l'exercice proposé à l'entretien revient en mémoire à certains étudiants lorsque le dessin leur est présenté. Finalement, seuls les deux étudiants qui rejettent le dessin ne parviennent pas à résoudre l'exercice. Ceci indique l'importance de la question des modèles figuratifs dans notre étude. Cette question sera approfondie dans la partie suivante (chapitre 1, §2).

Il est possible de prendre appui sur les analyses en termes de modèles géométriques, analogiques et paradigmatiques, et de modèles figuratifs, pour proposer la structure d'un enseignement d'algèbre linéaire. L'emploi de modèles analogiques pourrait conduire à des choix semblables à ceux de l'ingénierie de Lille évoquée ci-dessus, puisqu'il s'agit d'unification. L'emploi de modèles paradigmatiques géométriques, et de modèles figuratifs associés permet de formaliser les nécessités de visualisation évoquées dans l'enseignement fondé sur APOS, et également pris en compte dans l'expérience de Lille.
Quant au contenu d'un modèle géométrique permettant le développement d'intuitions appropriées pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire, l'analyse épistémologique montre que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens semblent pouvoir convenir. Ce modèle peut intervenir comme modèle analogique pour des espaces de polynômes, de suites etc. mais également comme modèle paradigmatique pour l'enseignement des espaces euclidiens en général. L'étude des espaces euclidiens semble un terrain plus propice à l'emploi de modèles géométriques que celle de l'algèbre linéaire élémentaire. L'étude de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens est reconnue comme centrale, comme en témoigne le projet actuel de socle commun pour le niveau L en mathématiques. Celui-ci stipule en effet que « une bonne appropriation de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ du point de vue algébrique, analytique et géométrique » est l'un des quatre grands objectifs prévus dans le projet de socle commun pour le niveau L actuellement en discussion. Peut-on alors envisager un enseignement dans lequel les espaces euclidiens seraient le point d'entrée dans l'algèbre linéaire, au moins en partie ? L'étude de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens ne demande certainement pas d'avoir rencontré auparavant les notions de familles libres, familles génératrices, rang... dans toute leur généralité. Mais bien entendu, juger de la faisabilité d'un tel programme nécessite la mise en place d'un enseignement expérimental spécifique.

1.4 Approche épistémologique : bilan, et articulation des recherches

Nous ne prétendons pas avoir donné une vue complète des travaux qui ont fondé leur étude des difficultés des étudiants en algèbre linéaire sur une analyse épistémologique. Nous avons simplement retenu trois exemples qui nous semblent propres à mettre en évidence la diversité des constats auxquels une telle étude peut mener (et nous permettent également de situer nos propres travaux dans un panorama national et international). Nous allons revenir ici sur ce qui constitue cette diversité, et examiner les articulations possibles entre les différents résultats, mais également entre les actions didactiques que chaque étude suggère.

Analyse du savoir : des aspects privilégiés
Nous avons souligné dans chacune des parties ci-dessus que se dégageait un sens spécifique de l'expression « *concepts abstraits* » :
- concepts associant des objets encapsulés à partir de processus, eux-mêmes intériorisés à partir d'actions élémentaires dans le cas de la théorie APOS ;
- concepts unificateurs, généralisateurs, et porteurs d'un nouveau formalisme, dans l'approche en termes de statut des notions ;
- concepts nécessitant le recours à des modèles intuitifs, en particulier comme intermédiaires entre le concept et des ostensifs graphiques, dans l'approche en termes de modèles intuitifs.
Ce constat fournit une première réponse à la question « quelles articulations ? ». Le regard porté dès le départ sur ce qui fait la difficulté intrinsèque d'un concept est différent dans chaque étude. On peut donc légitimement supposer que les résultats obtenus par des recherches sur l'algèbre linéaire adoptant ces différents regards seront complémentaires. Quels sont ces résultats, et en quoi sont-ils spécifiques de l'algèbre linéaire ?
Un point est souligné par toutes ces analyses épistémologiques comme problématique : l'algèbre linéaire est une *théorie axiomatique*. La décomposition génétique du concept d'espace vectoriel proposée par APOS indique ainsi la coordination nécessaire des schémas d'ensemble, de vérification d'axiome, d'opération externe et d'opération interne. Les aspects formalisateurs,

unificateurs et généralisateurs sont eux aussi liés à l'axiomatique, qui est certainement formelle, et a vocation à unifier et généraliser. Et Fischbein (1987) affirme que toute théorie axiomatique nécessite le recours à un modèle intuitif pour appuyer le raisonnement.
La rencontre avec des théories axiomatiques est une caractéristique de l'entrée dans l'enseignement supérieur qui a peut-être été insuffisamment soulignée dans les études sur la transition secondaire-supérieur. En France, l'enseignement de l'algèbre linéaire dans le secondaire a été présenté comme emblématique de la réforme des mathématiques modernes. Mais cette réforme promouvait l'enseignement précoce de théories axiomatiques au-delà de l'algèbre linéaire. Les programmes du second degré actuellement en vigueur dans l'enseignement secondaire conduisent les étudiants à découvrir en première année d'université ce que sont un axiome et une théorie axiomatique. Quelles sont les difficultés attachées à cette découverte ? Sans faire de rapprochement hâtif entre les axiomes de la géométrie et ceux de l'algèbre linéaire, on peut aussi se demander si le contexte de la géométrie ne pourrait pas fournir un terrain plus propice à l'introduction d'axiomes (en dépit des difficultés reconnues de l'articulation entre la géométrie enseignée dans le secondaire et la géométrie axiomatique, voir Houdement et Kuzniak 2000) ? Ces questions indiquent la nécessité d'une recherche sur ce thème.
Les analyses épistémologiques indiquent-elles des caractéristiques plus spécifiques de l'algèbre linéaire ? Dans la décomposition génétique proposée par APOS, le fait qu'interviennent simultanément des schémas d'opération externe et opération interne semble caractéristique de l'algèbre linéaire. Toutefois ceci n'est pas indiqué comme porteur de difficultés particulières. En termes de statuts des notions, l'aspect *unificateur* est peut-être celui qui apparaît comme le plus spécifique (il est par ailleurs certainement aussi celui qui a conduit à la banalisation des concepts d'algèbre linéaire indiquée par Dorier 1997*a*). Les étudiants devront être capables de manipuler des espaces vectoriels de type $\mathbb{R}^n$, mais aussi des espaces de suites, de polynômes, de fonctions... Enfin en ce qui concerne les modèles intuitifs, ce que nous retenons comme spécifique est évidemment le lien avec la géométrie, la possibilité d'emploi de modèles géométriques, qui ouvre elle-même la voie au recours à des modèles figuratifs.

Diversité des difficultés considérées et articulations possibles des actions didactiques
Nous avons souligné ci-dessus, et nous répétons ici, que ces approches différentes ne conduisent pas simplement à proposer des interprétations différentes des difficultés des étudiants : c'est le type même de difficultés auxquelles les chercheurs s'intéressent qui change d'une approche à l'autre. Difficultés à manipuler efficacement la définition d'espace vectoriel ; difficulté à produire des exemples particuliers de tels espaces ; difficulté à faire appel à un modèle géométrique pour établir un résultat...
Suite à ces constats, on pourrait faire l'hypothèse que la conséquence à en retirer est qu'il faut entreprendre simultanément tous les types d'actions didactiques qu'elles suggèrent. Cette option est malheureusement difficilement réalisable, car chacune de ces approches épistémologiques conduit à proposer une refonte pratiquement complète de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Et bien entendu ces refontes ne se superposent pas. Par exemple débuter un enseignement d'algèbre linéaire par l'étude de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens n'amène pas un travail spécifique sur la définition d'espace vectoriel, permettant d'intérioriser celle-ci.
Il ne s'agit pas non plus d'affirmer que les différentes préconisations sont incompatibles. Nous souhaitons simplement souligner que leur articulation nécessite une réflexion spécifique. Il est ainsi possible d'envisager un enseignement débutant par l'étude de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens, puis considérant d'autres exemples d'espaces euclidiens de dimension 2 ou 3, et simultanément des espaces de dimension supérieure, pour rendre sensibles les besoins d'unification et de généralisation. La définition générale d'espace vectoriel euclidien pourrait alors être spécifiquement travaillée... Nous n'approfondirons pas ces suggestions, en dehors d'un contexte qui permettrait de leur donner forme concrètement, en particulier une équipe d'enseignants susceptible de s'investir dans une

expérimentation associée.
Nous insistons en revanche sur le fait qu'une approche basée sur l'analyse du savoir met en lumière certains aspects de ce savoir, mais ne peut pas les éclairer tous. Ainsi toute proposition de refonte du curriculum basée sur les résultats de telles recherches devrait être précédée d'une revue relativement complète des travaux de ce type, et d'un effort d'articulation.

2. De nouvelles flexibilités

Certaines recherches considèrent quant à elles des difficultés des étudiants liées à des facteurs qui apparaissent sous différents noms mais peuvent globalement être considérés comme un manque de *flexibilité*. « Quant à elles » ici ne doit pas être compris comme une opposition avec les travaux exposés dans la partie précédente. Parfois les résultats établis sont proches ; parfois les auteurs sont les mêmes. Mais le regard porté sur l'objet de recherche, ici les difficultés rencontrées par les étudiants à l'entrée dans le supérieur change. Il n'est plus guidé par une analyse des savoirs, mais des *situations* rencontrées, des *pratiques mathématiques* attendues. Robert (1998) écrit ainsi :

> « La simple considération des programmes permet de constater que les mathématiques enseignées à partir du lycée commencent à ressembler (et cela s'accentue au fur et à mesure de la scolarité) aux mathématiques « des experts » (mathématiciens professionnels), tant en ce qui concerne les savoirs que les pratiques attendues. » (p.141.)

Les mathématiques à la fin du lycée ou au début du supérieur, et les pratiques mathématiques attendues, ressemblent aux pratiques des mathématiciens, à leurs façons de faire des mathématiques. Robert explique que les connaissances des mathématiciens sont organisées. Ils ne considèrent pas des concepts isolés, mais des réseaux organisés de connaissances et de concepts. Quand ils rencontrent un problème nouveau, ils peuvent ainsi faire appel à des situations voisines, des stratégies appropriées... Ils peuvent aussi employer différents modes de raisonnement, différents cadres, différents registres, et passer de l'un à l'autre. Fixer le regard sur cet horizon, pour interpréter les difficultés des étudiants, conduit à des interprétations nouvelles. La difficulté à résoudre un problème n'est plus interprétée comme une conséquence des concepts particuliers auxquels il est fait appel. Elle provient du fait que l'étudiant n'a pas à sa disposition un réseau de situations proches auxquelles il pourrait avoir recours. Il ne dispose pas de différents modes de raisonnement qui lui permettraient d'effectuer des tentatives de résolution, et de les contrôler. Il n'a pas la flexibilité nécessaire pour passer d'un cadre à l'autre, pour changer de registre...
Dans le contexte de l'algèbre linéaire, les questions d'emploi de dessins apparaissent naturellement quand on adopte ce type de questionnement, nous abordons cet aspect au §2.1. Mais il ne s'agit pas bien entendu de la seule forme de flexibilité requise en algèbre linéaire. En §2.2, nous nous pencherons sur des formes plus générales de flexibilité, notamment en termes de modes de pensée, mode de raisonnement. En § 2.3 nous faisons une synthèse des résultats établis dans les différents travaux évoqués, et des actions didactiques qu'ils suggèrent. Nous présentons enfin en §2.4 une action didactique spécifique, destinée à accroître les capacités de flexibilité des étudiants, et à laquelle nous avons participé : le logiciel BRAISE.

2.1 Dessins, registre graphique, modèles figuratifs

Toutes les études sur l'algèbre linéaire mentionnent d'une manière ou d'une autre le recours au *dessin*, les nécessités de *visualisation*... Quelles sont les difficultés attachées à ce recours, quelles en sont les potentialités ? Nous synthétisons dans cette partie des résultats de recherches sur cette forme spécifique de flexibilité, dans le cas de l'algèbre linéaire, et soulignons les apports d'une approche en termes de *modèles géométriques et figuratifs*.

Registre graphique, modèles figuratifs, et difficultés des étudiants.
Pavlopoulou (1994) étudie dans sa thèse l'emploi de différents registres de représentation sémiotique (Duval 1996) en algèbre linéaire et les difficultés de changement de registres. Elle distingue en particulier le registre graphique, le registre des tableaux, et celui de l'écriture

symbolique. Elle observe les difficultés de conversion de registres rencontrées par les étudiants, en particulier quand le registre graphique est impliqué. En analysant des manuels, elle montre que la conversion de registres ne fait pas l'objet d'un travail spécifique ; en général les manuels privilégient le registre symbolique, et font parfois appel au registre graphique sans expliciter le passage de l'un à l'autre. Pavlopoulou a mis en place un enseignement expérimental portant sur la conversion de registres. Celui-ci a eu des effets nettement positifs sur la capacité des étudiants à effectuer des tâches de conversion pure ; et relativement positifs également lorsque ces tâches de conversion apparaissaient au sein d'une résolution de problèmes.
Dans notre travail la question de l'emploi de dessins est abordée en termes de *modèles figuratifs*, en cohérence avec notre référence aux travaux de Fischbein. Certains constats rejoignent ceux de Pavlopoulou, en particulier sur le fait que le recours à des modèles figuratifs n'est pas explicitement travaillé avec les étudiants, ceci apparaissant dans les manuels mais aussi dans les réponses faites par les enseignants à un questionnaire (Gueudet 2004*a*, nous revenons sur ce questionnaire en §3). Toutefois les travaux de Fischbein amènent des observations spécifiques.
Tout d'abord, Fischbein souligne l'importance de l'intuition, mais aussi les *danger*s de celle-ci. L'emploi de modèles, et de modèles figuratifs en particulier peut parfois être fait de manière *inadaptée*, et susciter des difficultés, voire conduire à des erreurs. Un tel choix de modèle figuratif inadapté est observable par exemple pour l'exercice classique suivant (Gueudet-Chartier 2000) :

Soient u, v, w, trois vecteurs deux à deux non colinéaires. Peut-on affirmer que la famille {u,v,w} est libre ?

Certains étudiants représentent les trois vecteurs sous forme d'une base de $I\!R^3$, ce qui les conduit à affirmer que la famille est libre. Ici le modèle géométrique fourni par $I\!R^2$ permet plus facilement de fournir la réponse, avec un contre-exemple, et un modèle figuratif adapté. Autre exemple, de nature différente : lors de l'introduction de la notion générale d'orthogonalité, le modèle figuratif associé dans l'enseignement secondaire à l'orthogonalité, et figurant un angle droit, s'oppose à la compréhension du fait qu'un vecteur peut être orthogonal à lui-même. Ce modèle figuratif est associé au modèle géométrique de $I\!R^2$ ou $I\!R^3$euclidiens, qui ne fournissent pas des modèles adaptés pour un espace non-euclidien.
En fait, l'emploi d'un modèle figuratif en algèbre linéaire est productif si celui-ci est associé à un modèle géométrique adapté.
Les ostensifs graphiques (Bosch et Chevallard 1999) intervenant en algèbre linéaire sont peu nombreux, ils peuvent sembler très simples : flèches, segments, parallélogrammes. Cependant leur emploi soulève des difficultés spécifiques. Hillel (1997) cite l'exemple d'étudiants qui, devant déterminer la projection orthogonale de la fonction sinus (restreinte à l'intervalle [0,1]) sur le sous-espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, pour le produit scalaire défini par $<f,g>= \int_0^1 f(t)g(t)dt$, cherchent le vecteur « le plus proche », avec l'idée du « plus proche » de la courbe représentative de la fonction sinus. Ces étudiants n'ont pas perçu, selon lui, l'aspect métaphorique de la définition de la projection orthogonale sur un sous-espace donné. L'enseignant s'était appuyé sur le cas de la projection orthogonale sur un plan dans $I\!R^3$, illustrée par un dessin ; cet exemple a induit en erreur les étudiants dans le cas cité. Le recours à une interprétation en termes de modèles nous semble susceptible d'éclairer ce type de difficultés. Le modèle figuratif proposé par l'enseignant est associé au modèle géométrique de $I\!R^3$ euclidien, considéré par l'enseignant comme un modèle paradigmatique d'espace euclidien. Les étudiants ne savent pas associer ce modèle paradigmatique au cas général, et restent bloqués à l'intérieur du modèle.
C'est une raison centrale de la complexité du recours à des modèles figuratifs en algèbre linéaire. Employer de tels modèles, au-delà du cas de l'espace géométrique de dimension 2 ou 3 demande un passage intermédiaire par des modèles géométriques. L'emploi d'un tel modèle intermédiaire indique la nécessité de mettre en œuvre une forme de flexibilité complexe.

L’exemple « Pythagore et polynômes » cité ci-dessus (figure 3, §1.3) peut être interprété de la sorte : l’emploi d’un dessin requiert d’abord un passage entre un espace de polynômes de dimension 4 ; le sous-espace de dimension 2 pertinent pour la situation considérée (c’est le sous-espace engendré par les polynômes P et Q), puis $\mathbb{R}^2$ euclidien comme modèle paradigmatique.

Potentialités du modèle figuratif en algèbre linéaire

Pour mettre à jour des potentialités spécifiques, nous allons nous appuyer sur un autre exemple issu du même questionnaire, et étudié en détail dans (Gueudet-Chartier 2006). Dans Cet exemple va nous permettre de relever des difficultés des étudiants, mais également de souligner des potentialités intéressantes (que nous développons au § 2.2) associées au recours à un modèle figuratif. Nous avons proposé aux étudiants l’exercice suivant :

Déterminer la longueur de la diagonale d’un cube de côté 1 dans $\mathbb{R}^n$.

Donnons quelques éléments rapides d’analyse a priori de cet exercice. Il était précisé au départ que $\mathbb{R}^n$ était à considérer comme espace euclidien muni du produit scalaire canonique. Une première difficulté dans cet exercice est liée au vocabulaire : ces étudiants n’avaient jamais entendu utiliser les termes « cube » ou « diagonale » en dimension n. Ainsi la capacité même à donner du sens à cet énoncé montre l’existence chez ces étudiants d’un modèle qui permet d’interpréter dans $\mathbb{R}^n$ des termes qui n’étaient connus que dans le contexte de la géométrie affine euclidienne du plan et de l’espace (telle qu’elle est enseignée en France au lycée) sans nécessité de précision supplémentaire. Ensuite deux solutions principales leur étaient accessibles :

-une solution analytique : la longueur de la diagonale du cube est la distance entre le point O de coordonnées (0,...0) et le point A de coordonnées (1,1,...1). Cette distance vaut donc $\sqrt{n}$.

-une solution utilisant une récurrence (qu’on ne demandait pas ici de rédiger formellement). En dimension 2, le cube est un carré, sa diagonale est de longueur $\sqrt{2}$. Supposons que la longueur pour une dimension n donnée soit $\sqrt{n}$, en dimension $n+1$ on peut appliquer le théorème de Pythagore. On a un triangle rectangle formé par la diagonale d’une face (or une face d’un ($n+1$)-cube est un n-cube), un côté du cube, et la diagonale du cube (qui est l’hypoténuse). Ainsi on peut montrer qu’en dimension $n+1$ la longueur de la diagonale est bien $\sqrt{n+1}$.

Parmi les huit étudiants interrogés, quatre ont été arrêtés par le vocabulaire géométrique. Pour ces étudiants, le terme « cube » ne pouvait être employé qu’en dimension 3. Lors de l’entretien, nous leur demandions de réfléchir à ce que l’on pourrait désigner avec le terme « cube » en dimension 2, et tous admettaient que l’on pouvait considérer un carré comme un cube en dimension 2. Ils calculaient alors la longueur des diagonales, pour $n=2$ et $n=3$, mais restaient incapables d’aller au-delà.

Parmi les étudiants pour lesquels le vocabulaire n’a pas posé de problème, un a proposé la solution analytique. Cet étudiant s’est appuyé sur deux dessins, l’un pour la dimension 2, l’autre pour la dimension 3. Sur ces deux dessins figuraient uniquement un repère d’origine O, et le point A de coordonnées (1,1) pour le cas $n=2$ et (1,1,1) pour le cas $n=3$. Cet étudiant a effectué, de sa propre initiative, une conversion dans un registre analytique. Pour cette conversion il a eu recours au modèle géométrique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$euclidiens, et au modèle figuratif associé.

Les trois autres étudiants ont développé une récurrence informelle. Deux d’entre eux en particulier, qui avaient dessiné un carré pour le cas $n=2$, puis un cube pour le cas $n=3$, ont identifié sur leur dessin la configuration du triangle rectangle comme permettant de déduire le résultat en dimension $n+1$ à partir du résultat en dimension n.

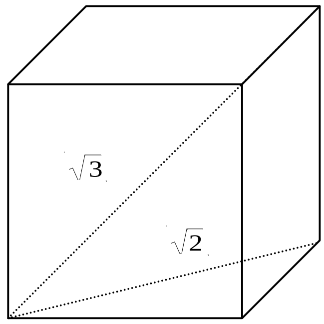


Figure 4 *Longueur de la diagonale du cube, lien entre la dimension 2 et la dimension 3*

Ces étudiants sont restés gênés par le fait qu'ils ne parvenaient pas à se doter d'une représentation visuelle correcte de ce peut être un cube en dimension *n* quelconque. Mais ils parvenaient à utiliser leur dessin, représentant au départ une situation en dimension 3 (et donc comportant également de la dimension 2, et le lien dimension 2-dimension 3), pour illustrer le passage de la dimension *n* à la dimension *n+1*. Ceci était essentiel dans leur résolution de l'exercice.

Pouvoir faire un *dessin en dimension 3* (ce qui soulève déjà des problèmes de représentation liés à la perspective par exemple), et identifier sur ce dessin le *processus conduisant de la dimension 2 à la dimension 3* est un recours au modèle figuratif qui peut être très productif dans les exercices. Mais un tel emploi ne peut pas être développé sans être contrôlé, piloté par des connaissances d'algèbre linéaire en dimension 2 et 3. En réalité il ne s'agit pas uniquement d'emploi du registre graphique, ou d'un modèle figuratif, mais d'une forme spécifique de flexibilité. Le recours au dessin en algèbre linéaire requiert, nous l'avons dit, le passage par des modèles géométriques intermédiaires. Mais au-delà, il s'agit de développer des modes de raisonnement particuliers, nous allons détailler ce point maintenant.

2.2 Formes de flexibilité en algèbre linéaire

Au-delà des aspects relatifs aux dessins, les recherches qui attribuent les difficultés rencontrées par les étudiants à la nouvelle flexibilité des pratiques mathématiques attendues identifient divers aspects de ces pratiques, relevant de différentes formes de flexibilités. Ainsi, parmi les recherches présentées dans Dorier (1997*a* et 2000), nous avons déjà mentionné les travaux de Pavlopoulou (1994), qui traitent de la flexibilité entre registres de représentation sémiotique. Nous avons également déjà évoqué, en partie 1, l'expérimentation de Lille (Rogalski 1997). Dans celle-ci, l'un des principes retenus était précisément la proposition de changements de cadres (Douady 1986) ou de points de vue. Dans le cours comme dans les exercices, des passages d'un cadre formel à un cadre numérique ou géométrique étaient ainsi organisés. En ce qui concerne les changements de point de vue, on peut retenir que cet enseignement expérimental mettait en particulier l'accent sur l'articulation cartésien-paramétrique. L'étude de celle-ci a été développée dans la thèse de Alves Dias (1998), en croisant des données issues de l'expérimentation lilloise avec d'autres, recueillies au Brésil notamment. Alves Dias montre que cette articulation est spécifiquement complexe, et va au-delà d'une simple conversion de registres. La prise en compte de cette complexité dans l'enseignement de Lille (contrairement à ce qui est habituellement pratiqué) permet d'accompagner les étudiants dans le développement de cette forme de flexibilité, fondamentale en algèbre linéaire.

Nous avons en outre évoqué ci-dessus les travaux de Hillel (1997) : cet auteur considère qu'il y a en algèbre linéaire trois niveaux de description. Le niveau géométrique de l'espace à 2 ou 3 dimensions ; le niveau de $\mathbb{R}^n$; et le niveau de la théorie générale (notons que ces niveaux de description sont clairement proches d'une interprétation en termes de modèle géométriques) Hillel analyse les difficultés liées au passage d'un niveau à l'autre. La prise en compte d'aspects géométriques apparaît également dans le travail de Sierpinska *et al.* (1997), qui distinguent en algèbre linéaire trois modes de pensée : synthétique-géométrique, analytique-arithmétique et structurel. Dans certains exercices, un mode de pensée structurel est attendu, et les étudiants ne parviennent pas à les résoudre car ils demeurent à l'intérieur d'un mode analytique-arithmétique. Dans Sierpinska (2000), en plus de ces trois modes de pensée spécifiques à l'algèbre linéaire, l'auteur distingue deux modes généraux : le mode de pensée pratique, et le mode de pensée théorique.

Les résultats établis par ces travaux traduisent une relative convergence de vues. Nous retenons cependant que les formes de flexibilité concernées peuvent être plus ou moins générales. Les modes de pensée pratique et théorique introduits par Sierpinska (2000) désignent des phénomènes qui dépassent nettement le cas de l'algèbre linéaire. Ils peuvent s'appliquer à l'ensemble des pratiques mathématiques attendues au début de l'université, voire à d'autres niveaux scolaires. Mais des formes de flexibilité plus spécifiques de l'algèbre linéaire (ou d'un ensemble de domaines incluant l'algèbre linéaire) sont mises à jour, comme les niveaux de description introduits par Hillel. La notion de point de vue, qui pourrait indiquer une forme générale de flexibilité, a surtout pris corps dans les travaux de Alves Dias. Ainsi même si l'articulation cartésien-paramétrique dépasse le cas de l'algèbre linéaire, nous considérons qu'il s'agit d'une forme de flexibilité spécifique. Le recours aux modèles géométriques que nous avons étudié semble également spécifique. Nous avons en particulier introduit la notion de mode de raisonnement géométrique en algèbre linéaire (Gueudet 2003). Afin d'illustrer cette distinction entre flexibilité générale, et flexibilité spécifique à l'algèbre linéaire, nous allons présenter ci-dessous tout d'abord les travaux sur les modes de pensée de Sierpinska (2000), puis nos propres travaux (Gueudet 2003).

Mode de pensée pratique et mode de pensée théorique en algèbre linéaire.

Sierpinska (ibid.) développe les notions de « *pensée pratique* » (« practical thinking ») et « *pensée théorique* » (« theoretical thinking »), inspirées des travaux de Vygotsky. La pensée théorique a les caractéristiques suivantes : le raisonnement est basé sur des connections logiques et sémantiques entre concepts ; les connections entre concepts sont faites sur la base de relations structurelles, dues à des concepts plus généraux. A l'opposé dans la pensée pratique ces connections relèvent d'associations empiriques, ou de références à des exemples particuliers. La pensée pratique est tournée vers l'action, tandis que la pensée théorique s'exprime plutôt à travers des textes. Les mathématiciens ont recours aux deux modes de pensée, qui leur sont tous deux nécessaires. En revanche les étudiants au début de l'université semblent bien souvent ne disposer que du mode de pensée pratique, et ceci peut en particulier être observé dans le cas de l'algèbre linéaire.

Sierpinska rapporte des observations effectuées lors d'un enseignement d'algèbre linéaire utilisant le logiciel Cabri pour une découverte de la notion d'application linéaire. Elle relève différentes sortes de difficultés des étudiants, qui peuvent toutes être interprétées comme des manifestations de pensée pratique, dans des circonstances où une pensée théorique était nécessaire.

Certaines difficultés sont liées au langage. Dans la pensée théorique, le langage, et les systèmes sémiotiques sont des objets de réflexion. A l'opposé dans la pensée pratique ils sont considérés comme *transparents*. Ceci entraîne des difficultés en particulier dans la manipulation de définitions. Sierpinska cite ainsi le cas d'étudiants devant compléter une définition de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire (à la suite d'une activité de construction sur Cabri). La phrase proposée était : « Si k est un scalaire et v est un vecteur, alors le vecteur kv est un vecteur w tel que........ » (p.217, notre traduction). Certains étudiants complètent en écrivant « $w=kv$ ». Ceci traduit une pensée pratique, dans laquelle la multiplication est précisément l'action d'écrire une formule du type « $w=kv$ ». D'autres difficultés également relatives aux définitions relèvent de l'écrasement d'une définition générale sur des exemples prototypiques. Sierpinska observe ainsi que certains étudiants concluent que les applications linéaires sont des rotations, des homothéties, des projections...et des combinaisons linéaires de celles-ci. Cet écrasement provient du mode de pensée pratique. De même les difficultés de type « généralisation abusive » sont attribuées au mode de pensée pratique. Selon Sierpinska, ce mode de pensée est nécessaire ; elle affirme même que les mathématiciens travaillent eux aussi la plupart du temps avec un mode de pensée pratique. Mais elle souligne deux formes de flexibilité liées à ce mode de pensée. Tout d'abord, la possibilité d'en sortir. Les experts savent passer au mode de pensée théorique lorsqu'ils sont confrontés à une situation inhabituelle, une contradiction apparente etc. Mais il y a également une forme de flexibilité « interne » au mode de pensée pratique des mathématiciens. En effet, la « pratique » en question est leur pratique de scientifiques, liée à une longue expérience de situations et de problèmes connus. Ce n'est évidemment pas le cas pour les étudiants, qui manquent bien entendu de l'expérience fournie par des années de travail en mathématiques. Nous revenons ci-dessous (§2.3) sur ce point qui nous semble extrêmement important et sur ses conséquences en termes d'actions didactiques.

Modes de raisonnement géométriques en algèbre linéaire
Nous appelons *mode de raisonnement géométrique en algèbre linéaire* le recours à un modèle géométrique associé à un modèle figuratif, et ne prenant pas appui uniquement sur l'analytique (Gueudet 2003). Le choix d'écarter ainsi le recours à l'analytique est fondé sur l'observation suivante. On se place dans le cas d'un espace vectoriel E, en dimension n quelconque. L'isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$ permet dans de nombreux problèmes d'utiliser des coordonnées. Il est parfois pertinent, pour un tel raisonnement analytique, de commencer par examiner les cas $n=2$, $n=3$.... Ensuite le passage à la dimension n peut se faire en se basant simplement sur des régularités algébriques ou arithmétiques, comme lorsque le terme général d'une suite est conjecturé à partir de ses premiers termes. Nous écartons donc ce type de raisonnement, dans lequel en particulier aucun modèle figuratif n'intervient.
En observant les raisonnements présentés dans les manuels, on note des recours à des modèles géométriques qui relèvent de ce que nous avons appelé un *mode de raisonnement géométrique en algèbre linéaire*. C'est le cas en particulier des deux procédés suivants, fréquemment utilisés :

- *Réduction de la dimension* : pour certains problèmes en dimension n, au moins une étape clef de la résolution se déroule dans un sous-espace de dimension 2 ou 3. Par exemple, pour montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G n'est pas un sous-espace vectoriel, dès que l'un n'est pas inclus dans l'autre, on peut bâtir un contre-exemple à la stabilité par l'addition. On prend un vecteur u de F et un vecteur v de G, u n'appartenant pas à G, ni v à F. Il est simple ensuite de prouver que la somme $u+v$ n'appartient pas à la réunion FUG. Cette preuve peut d'ailleurs être associée à un dessin, par exemple celui de la figure 5 ci-dessous.

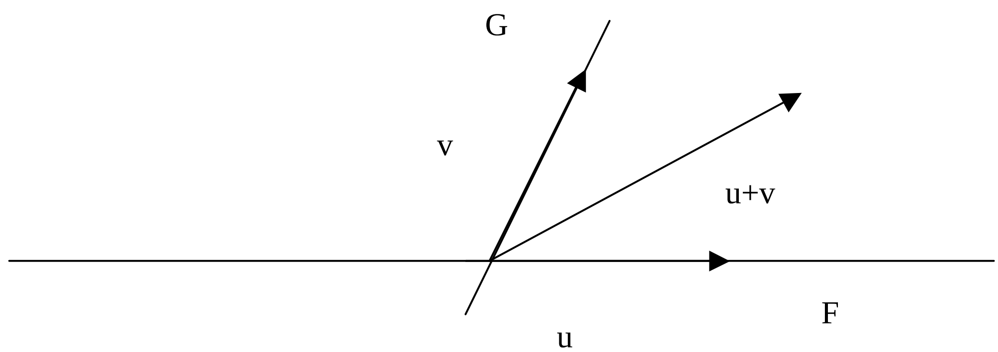


Figure 5 *Une réunion de deux sous-espaces vectoriels qui n'est pas un sous-espace vectoriel*

- *Accroissement de la dimension* : on rencontre un tel phénomène en particulier lorsqu'un résultat d'algèbre linéaire est prouvé par récurrence. Plus généralement, il arrive dans certains problèmes que le mode de passage de la dimension p à la dimension $p+1$ donne la clef du problème. Dans ce cas, comprendre le passage de la dimension 2 à la dimension 3 peut fournir des pistes de résolution fondamentales. C'est le cas pour le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, qui se trouve dans certains manuels illustré par le dessin de la figure 6.

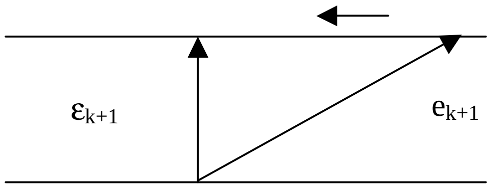


Figure 6 *Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.*

De tels raisonnements ne sont pas a priori hors de portée des étudiants. Dans l'exemple du cube donné ci-dessus, deux étudiants avaient identifié la configuration du triangle rectangle dont l'hypoténuse était la diagonale recherchée : ils avaient donc effectué une réduction de la dimension. Ceci leur avait permis de comprendre le principe de passage entre dimension 2 et dimension 3, qu'ils avaient généralisé à un principe de passage entre dimension *n* et dimension *n+1*, c'est à dire qu'ils avaient effectué un accroissement de la dimension. Mais seuls deux étudiants ont raisonné de cette manière. Ces processus de réduction ou d'accroissement de la dimension peuvent être fructueux en algèbre linéaire, et il est certain qu'ils ne font pas l'objet d'un enseignement explicite.
Employer un modèle figuratif en algèbre linéaire est complexe, car il faut y associer un modèle géométrique intermédiaire. C'est cependant possible dans la résolution de nombreux problèmes d'algèbre linéaire. En effet, la compréhension d'une situation d'algèbre linéaire en dimension 2, en dimension 3, et du mécanisme faisant passer de la dimension 2 à la dimension 3 permet dans bien des cas d'appuyer un raisonnement général. Par ailleurs, il suffit parfois d'isoler un sous-espace de dimension 2 ou 3 dans lequel se situe la résolution du problème.
On peut parler ici d'une forme de flexibilité entre *dimensions*. Il ne s'agit pas de généralisation : travailler en dimension 2, puis 3, puis *n*, et enfin passer à la dimension infinie n'a jamais constitué une solution efficace aux difficultés rencontrées par les étudiants en algèbre linéaire. Ce que nous soulignons ici est l'importance de pouvoir passer d'une dimension à l'autre, le passage de la dimension *n* à la dimension 2 étant tout aussi riche que celui qui peut parfois être effectué en sens inverse.

2.3 Formes de flexibilité et actions didactiques

Nous avons souligné ci-dessus (§2.1 et §2.2) différentes formes de flexibilité en algèbre linéaire. Quelles peuvent être les actions didactiques visant le développement de ces formes de flexibilité ? Il nous a semblé pertinent de distinguer dans les recherches flexibilité spécifique à l'algèbre linéaire, et flexibilité générale. La même distinction est pertinente pour les actions didactiques à entreprendre.
Dans nos propres travaux, nous avons identifié une flexibilité spécifique entre dimensions. Comment développer chez les étudiants la flexibilité entre dimensions, en algèbre linéaire ? Ceci demande de leur proposer des problèmes adaptés, dans la résolution desquels cette flexibilité est en jeu. Elle pourra alors être identifiée comme telle, mise en évidence par l'enseignant comme une méthode utile. Les actions didactiques visant le développement de formes de flexibilité spécifiques consistent principalement à proposer des problèmes adaptés, dont la résolution met en jeu ces flexibilités. La résolution de ces problèmes permet la fréquentation des formes de flexibilité nécessaires, et leur mise en évidence explicite par les enseignants. On trouve de telles propositions, par exemple, dans les travaux de Alves Dias (1998) et Pavlopoulou (1994) déjà évoqués.
En ce qui concerne les formes de flexibilité plus générales, la question des actions didactiques à entreprendre est complexe, nous allons montrer ici pourquoi. Dans les travaux de Sierpinska que nous avons détaillés ci-dessus, nous avons souligné en particulier la flexibilité intrinsèque au mode de pensée pratique des mathématiciens, qui ont recours à des situations connues pour accompagner

leur action. Les mathématiciens ont mémorisé de nombreuses situations auxquelles ils peuvent se référer. Ceci leur donne la possibilité de développer plusieurs types de raisonnements, éventuellement simultanément, ce qui fournit également un moyen de contrôle de la validité d'un des raisonnements utilisés. La situation est évidemment différente en ce qui concerne les étudiants. Lithner (2000) montre que les étudiants développent des raisonnements basés sur leurs expériences passées (« reasoning based on established experience »), sur ce qui leur est familier. De plus ils établissent parfois des connexions fondées sur des éléments de surface, non pertinents. Mais la principale difficulté provient du fait que leur expérience est mécaniquement limitée.
Ainsi l'action didactique associée est naturellement dirigée vers l'enrichissement de l'expérience mathématique des étudiants. Mais enrichir cette expérience, si c'est un objectif susceptible de faire l'unanimité des enseignants, n'est pas simple à réaliser dans la pratique. A l'université il semble que le temps didactique s'accélère (Praslon 2000) ; les nouveaux concepts sont nombreux, des exercices de compréhension immédiate, d'application de techniques, sont aussi nécessaires. Comment permettre dans le même temps aux étudiants de se familiariser avec les différents modes de raisonnement qu'il serait utile qu'ils connaissent ? C'est ainsi la question du temps de travail des étudiants qui est posée. En France, dans les conditions institutionnelles actuelles, l'année universitaire dure entre 24 et 26 semaines. Les étudiants de première année spécialistes de mathématiques suivent entre 10h et 12h heures de cours et travaux dirigés de mathématiques hebdomadaires. A titre de comparaison, en classes préparatoires mathématiques supérieures MPSI (Mathématiques, Physique et Sciences de l'Ingénieur), les élèves ont 12h de mathématiques par semaine, auxquelles s'ajoute une heure d'interrogation orale ; et on retient surtout que l'année s'étale sur 36 semaines. Modifier cet état de fait relève de choix politiques, hors de la portée des chercheurs. Pour passer des résultats de recherche à l'action didactique, un levier plus accessible pourrait être non seulement de proposer des problèmes variés pendant les séances de travaux dirigés, mais également de chercher à agir sur le travail mathématique des étudiants *hors classe*.
Nous allons présenter ci-dessous un projet auquel nous avons participé, et qui visait précisément à offrir aux étudiants la nécessaire variété de problèmes, et à s'affranchir partiellement des contraintes de temps, en recourant à un support du type « *base d'exercices en ligne* ».

2.4 Enrichir l'expérience des étudiants : le projet BRAISE

Nous présentons dans ce paragraphe le projet BRAISE : Base Raisonnée d'Exercices; dont il sera également question dans le chapitre 2 de cette note de synthèse. Dans notre parcours de recherche, BRAISE constitue en effet l'articulation entre les questions liées à l'entrée dans le supérieur, et celles qui portent sur les conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques de l'emploi de ressources en ligne.
Le logiciel BRAISE (http-BRAISE[4], et annexe A) : « Base Raisonnée d'Exercices de mathématiques » a été conçu par une équipe d'enseignants-chercheurs de l'Université Rennes 1 dans l'objectif de fournir aux étudiants une gamme variée d'exercices de mathématiques correspondant au programme des deux premières années d'université et librement accessibles. Il s'agissait de contribuer à enrichir leur expérience mathématique en proposant des exercices qui ne sont pas uniquement techniques, et en accompagnant ceux-ci de nombreux textes. Et il s'agissait également de tenter de s'affranchir des contraintes de temps, en fournissant un support pour le travail hors classe des étudiants. Pour permettre ce travail hors classe, il ne suffit pas de retenir le support matériel d'une base d'exercices en ligne (les étudiants disposent tous d'accès Internet simples à l'université). Il faut également que le contenu permette le travail en autonomie, en dehors des heures de travaux dirigés. C'est pourquoi nous avons élaboré un environnement proposant des aides, une solution détaillée, des idées à retenir… Dans ce paragraphe nous revenons sur les

[4] Nous indiquons par la notation http-XXX l'entrée XXX de la biblio-webographie, qui correspond à une adresse web.

principaux choix effectués pour la conception du logiciel BRAISE (ces choix ont été présentés de manière plus détaillée dans Gueudet et Houdebine 2003). La question du travail fait par les étudiants sur BRAISE, de ce qu'ils apprennent en réalisant ce travail, sera en effet abordée dans le chapitre 2.

A la rentrée 2007, le logiciel BRAISE comporte deux chapitres : *les suites*, avec 89 exercices, et *l'algèbre linéaire*, 160 exercices. Un chapitre sur les fonctions est en cours d'élaboration, dans le cadre du projet Unisciel[5].

Les exercices sont répartis par thèmes (15 thèmes pour les suites, 28 pour l'algèbre linéaire), mais un même exercice peut appartenir à deux thèmes différents.

A chaque exercice est associée une liste de caractéristiques qui permettent l'accès par mots-clés :

- son *niveau* (facile, moyen, difficile, très difficile);
- le nom des *thèmes* auxquels il appartient, avec un commentaire pour chacun ;
- la *nature de la tâche* ;
- les *difficultés particulières* que l'étudiant peut décider d'éviter ; avec un commentaire pour chacune.

D'autre part, l'environnement de l'exercice comporte en dehors des éléments mentionnés ci-dessus les informations suivantes :

- Des aides :
  - des *éléments de cours* utilisables ;
  - des *méthodes et techniques* utilisables ;
  - une aide *graphique*, pour certains exercices ;
  - une aide appelée "*indications*" sous la forme traditionnelle d'orientation vers une procédure.
- Des éléments de *solutions* ;
- Des *idées à retenir* (une, ou au plus deux idées).

Ainsi un étudiant travaillant en autonomie avec BRAISE choisit une liste de mots-clés. Il lui est proposé ensuite la liste des exercices correspondant à ses critères, exercices qui sont essentiellement identifiés par leurs titres. L'étudiant choisit alors d'ouvrir un exercice, et accède à une page comportant l'énoncé de l'exercice et des liens vers les différents textes évoqués ci-dessus (voir écrans de BRAISE en annexe A).

Nous avons choisi dans BRAISE de proposer des exercices variés, qui ne se limitent pas aux nécessaires exercices techniques. Au-delà de ce principe de départ, nous avons effectué d'autres choix didactiques, portant essentiellement sur l'environnement d'un exercice, et également dirigés vers le développement de l'expérience mathématique des étudiants.

- Sur les *indications* et *solutions* : Nous suggérons le plus souvent possible plusieurs indications, et donnons plusieurs solutions. Il s'agit à la fois que l'étudiant ne soit pas confronté à une solution entièrement différente de celle dans laquelle il s'est engagé, et qu'il fréquente, par la lecture de ces textes, des types de raisonnements variés.

-Sur les *aides graphiques* : on retrouve ici l'idée de flexibilité, le recours au dessin. Des aides graphiques sont proposées le plus souvent possible, pour les suites comme pour l'algèbre linéaire.

-Sur les *éléments de cours* et les *méthodes* : nous avons souhaité que BRAISE soit aussi un moyen pour les étudiants de travailler le cours. C'est pourquoi à chaque exercice sont associés des liens pointant vers les éléments de cours pertinents pour l'exercice. Ceux-ci sont rédigés sous forme de textes brefs, comportant éventuellement d'autres liens. Par ailleurs des textes décrivent des points de méthodes qui ne font pas toujours l'objet d'écrits dans l'enseignement habituel, comme « tester

[5] Le projet BRAISE a débuté en 2000 à l'initiative de l'IREM de Rennes et de l'UFR mathématiques de l'Université Rennes 1. Il a ensuite été rattaché au campus numérique de Bretagne, entre 2002 et 2006.

si un ensemble est un sous-espace vectoriel », « construire une application linéaire »…
-Sur les *idées à retenir* : il s'agit ici le plus souvent d'un résultat qui pourrait figurer dans un cours avec le statut de « remarque », résultat qui a été utilisé, ou mis en évidence, au cours de l'exercice. C'est une conséquence directe de théorèmes connus, qu'un enseignant n'explicitera pas nécessairement dans son cours, ou en tout cas qui ne sera pas écrite. Ces idées à retenir relèvent de ce que Sackur *et al.* (2005) appellent des connaissances d'ordre II : des règles du jeu mathématique. Par exemple :

**Si f est une projection d'un espace E, alors $E = Ker\ f \oplus Imf$. Par contre, E peut être la somme directe du noyau et de l'image d'un endomorphisme qui n'est pas une projection.*

** Le produit de deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^2$ est commutatif. Ce n'est pas le cas pour les rotations affines du plan.*

Qu'en est-il des utilisations de BRAISE par des étudiants ? L'idée initiale des concepteurs était de permettre à des étudiants de la première année d'université jusqu'à l'agrégation de disposer d'une ressource leur permettant un travail autonome en dehors des enseignements traditionnels. Une telle utilisation de BRAISE existe, en particulier pour la préparation aux concours de recrutement d'enseignants, et plus précisément pour le CAPLP2 Mathématiques-Sciences physiques et pour l'agrégation interne de mathématiques. Mais il est rapidement apparu que le travail en autonomie complète ne pouvait pas demeurer l'objectif principal pour des étudiants de début d'université, ne serait-ce que parce qu'un premier temps de travail encadré est nécessaire pour les inciter à se servir ensuite du logiciel en autonomie. Pour les étudiants de première et deuxième année en particulier, la présence d'un professeur lors de l'emploi de la base semble nécessaire. Ceci rejoint d'ailleurs les observations faites à propos de l'Université en Ligne par (Cazes et Vandebrouck 2003). Seuls les exercices techniques sont traités sans enseignant ; or BRAISE comporte peu d'exercices techniques. Dans le cas de BRAISE, l'emploi en travaux dirigés sur machine réduit évidemment l'éventail des choix offerts aux étudiants : en effet, le choix des thèmes sera nécessairement restreint par l'enseignant. Cependant même dans un tel emploi, l'environnement des exercices permet aux étudiants une certaine autonomie, et le développement d'un rythme de travail personnel.

En fin de partie 1, nous avions montré que chaque questionnement épistémologique n'éclairait que certains aspects des concepts en jeu, et faisait ainsi émerger des résultats distincts. Dans la partie 2, nous avons souligné une distinction entre formes de flexibilité spécifiques à l'algèbre linéaire et formes de flexibilité générales. Cependant nous notons qu'il se dégage plutôt un consensus des chercheurs sur ce que sont les pratiques des mathématiciens professionnels, sur les interprétations des difficultés des étudiants en termes d'écart à ces pratiques, et sur la nécessité de développer l'expérience mathématique des étudiants. Nous reviendrons en conclusion (§4) sur les raisons probables de ces convergences de vues. Ce que nous voulons souligner ici, c'est que ces recherches conduisent à questionner la richesse des contenus mathématiques habituellement proposés, le temps de travail encadré des étudiants, c'est à dire des choix effectués par *l'institution universitaire*. Elles indiquent donc que les difficultés ne proviennent pas exclusivement des *caractéristiques cognitives des étudiants*, inadaptées pour des savoirs porteurs de difficultés intrinsèques (§1), ou insuffisamment flexibles (§2). Certains choix de l'institution sont en cause, et des recherches où le regard serait porté prioritairement sur des questions *institutionnelles* sont ainsi nécessaires.

3. Une nouvelle institution

La transition secondaire-supérieur est de manière évidente une transition institutionnelle, et le changement d'institution est porteur de difficultés. Comme le souligne Artigue (2007), certaines de ces difficultés sont celles que l'on retrouve dans tout passage d'une institution scolaire à une autre, alors que d'autres sont spécifiques à l'entrée dans le supérieur. Ainsi tout changement d'institution empêche l'enseignant de faire appel à une mémoire didactique collective (Matheron 2000). Chaque institution a sa propre culture mathématique (Artigue 2004, 2007), ensemble de pratiques et de valeurs qui restent implicites. L'absence de communication entre les acteurs de deux institutions

scolaires entraîne une méconnaissance de cette culture.
Au-delà de ce problème général de communication, des spécificités de l'entrée dans le supérieur apparaissent lorsque l'on s'interroge sur ce que sont les cultures institutionnelles de l'enseignement secondaire, de l'enseignement supérieur, et sur les différences susceptibles d'engendrer des difficultés (Praslon 2000). Comment fait-on des mathématiques dans une institution donnée ? Répondre à une telle question nécessite de prendre en compte plusieurs dimensions. Il s'agit d'abord de comprendre comment est structuré le savoir proposé aux élèves et aux étudiants. Cette structuration effectuée par les institutions peut être étudiée en termes d'organisations mathématiques (Chevallard 1992*a*), nous détaillons cet aspect au §3.1. Il s'agit également d'analyser comment les enseignants présentent effectivement le savoir, et ce qu'ils attendent des étudiants à l'université ; nous examinons ce point au §3.2. Les implicites de la culture mathématique peuvent également être interprétés en termes de contrat didactique. Il s'agit alors d'éclaircir ce qu'est un contrat didactique institutionnel, et ce que sont les règles d'un tel contrat en mathématiques à l'université. Analyser ces règles nécessite de se poser la question des attentes de l'institution, en particulier au travers des évaluations ; nous traitons ce point au §3.3. En §3.4 nous évoquons les actions didactiques appuyées sur des recherches adoptant une perspective institutionnelle.
Nous nous référons dans cette partie à des travaux sur l'algèbre linéaire, et à des recherches portant de manière générale sur la transition secondaire-supérieur. Ainsi cette partie 3 nous amène, plus que les deux précédentes, à considérer des études qui dépassent le champ de l'algèbre linéaire. Cet élargissement de notre propos découle de deux raisons principales. Tout d'abord peu de recherches sur l'algèbre linéaire ont adopté une perspective institutionnelle sur certaines questions. Par ailleurs, ce questionnement institutionnel nous a amenée à effectuer des recherches sur les spécificités de l'université, au-delà du thème de l'algèbre linéaire. Ces travaux, encore en cours, sont évoqués en §3.3 et seront développés dans le troisième chapitre de cette note de synthèse, consacré à nos perspectives de recherche.

3.1 La structuration du savoir par les institutions

La théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992*a)* introduit notamment la notion d'organisations mathématiques, ou praxéologies mathématiques. Une telle organisation est composée d'un type de tâches T, d'une technique τ permettant d'accomplir ce type de tâches, d'une technologie θ, c'est à dire un discours expliquant cette technique, et d'une théorie Θ. La composition de ces organisations dépend de l'institution d'enseignement considérée. Ainsi pour le chercheur, étudier les organisations mathématiques permet de percevoir comment un savoir donné est transposé dans l'institution qu'il considère, de comparer deux institutions...
Dans le cas de l'algèbre linéaire nous avons effectué une analyse des organisations mathématiques de première et deuxième année d'université en les comparant à celles qui, au lycée en géométrie, impliquaient des notions voisines. Toute praxéologie, relative à un type de tâches T donné, est attachée à une institution. Pour ce qui nous concerne ici, il s'agit dans un premier temps d'observer si certains types de tâches sont présents dans les deux institutions. Il faut ensuite pour ces types de tâches comparer les praxéologies en jeu dans l'institution « enseignement secondaire », et celles qui apparaissent dans l'institution « enseignement supérieur ».
Voici un exemple de type de tâches présent dans les deux institutions (Gueudet 2004*a*):
$T_{baseorth}$ *: Montrer qu'une famille de vecteurs donnés forme une base orthogonale ou orthonormale de l'espace (euclidien) considéré.*
Les praxéologies associées à $T_{baseorth}$ diffèrent selon l'institution considérée.
A l'université, pour un espace euclidien *E* de dimension *n* donnée, on dispose d'une famille de *n* vecteurs. La technique principalement employée consiste alors à calculer les produits scalaires de ces vecteurs pris deux à deux, de manière à montrer que le produit de deux vecteurs distincts est nul

(et éventuellement que ces vecteurs sont de norme 1, pour une base orthonormée). La technologie associée repose sur la définition d'orthogonalité, et surtout sur la propriété : « une famille orthogonale est libre », qui assure que l'on a bien une base (famille libre de *n* vecteurs dans un espace de dimension *n*).

On rencontre même des tâches appartenant au type $T_{baseorth}$ dans des espaces de Hilbert, lorsqu'il faut prouver qu'une famille donnée est une base hilbertienne d'un espace *H*. Notons que ce cas présente une difficulté supplémentaire notable, liée à la dimension infinie, puisqu'il faut de plus montrer que l'espace engendré par cette famille est dense dans *H*.

Au lycée, en Terminale S, une base orthonormale de l'espace est définie comme un triplet de vecteurs deux à deux orthogonaux, et de norme 1. Les exercices correspondant au type de tâche $T_{baseorth}$ consistent donc à montrer que trois vecteurs donnés forment une base orthonormale de l'espace. Ces vecteurs peuvent être définis comme éléments d'une configuration spatiale particulière ; dans ce cas la technique associée sera complètement différente de celle présentée ci-dessus, elle reposera sur des propriétés de la figure en jeu.

En revanche si les vecteurs sont donnés par leurs coordonnées, la technique sera la même qu'à l'université : calcul des produits scalaires. Mais la technologie correspondante ne contient plus la propriété « une famille orthogonale est libre », ni même la propriété qui pourrait lui correspondre au lycée : « trois vecteurs deux à deux orthogonaux sont non coplanaires ». En effet, la nécessité de non-coplanarité n'apparaît pas dans la définition de base orthonormale de l'espace vue au lycée, simplement présentée comme une famille de trois vecteurs deux à deux orthogonaux. Le modèle figuratif associé fait apparaître comme une évidence spatiale la non-coplanarité de ces vecteurs, qui n'est donc pas mentionnée dans la définition.

On observe donc en particulier l'absence de discours technologique. Dans le cas spécifique de la géométrie vue au secondaire et de l'algèbre linéaire, pour des types de tâches semblables dans les deux institutions il est fréquent que les évidences spatiales remplacent le bloc technologico-théorique. Mais au-delà, des recherches qui ont considéré la transition secondaire-supérieur avec un regard institutionnel ont identifié ce déficit de discours technologique comme une des caractéristiques de l'enseignement secondaire susceptible de poser problème au supérieur.

Bosch *et al*. (2004) étudient les difficultés des étudiants entrant à l'université, en particulier à propos de la notion de limite, et interprètent ces difficultés comme des conséquences des caractéristiques des organisations mathématiques proposées au secondaire. Ces auteurs montrent que les étudiants, au début de l'université, ne connaissent généralement qu'une seule technique pour un type de tâche donné. Et une fois un résultat produit, ils éprouvent de nombreuses difficultés à l'interpréter. Bosch *et al*. n'étudient pas le cas de l'algèbre linéaire ; mais leurs observations peuvent cependant s'y appliquer. En effet dans le cas de l'algèbre linéaire et de la géométrie enseignées à l'université, on observe fréquemment de telles difficultés d'interprétation, comme dans l'exemple ci-dessous (figure 7).

Soit m un paramètre réel. On considère les points A(1,1-m,2m), B(1+m, 1-2m, -m) et le plan P dont une équation cartésienne est x-2y+z=3. Etudier l'intersection de la droite (AB) et du plan P. (exercice extrait de Dorier 1998)

Dans cet exercice, les étudiants utilisent le plus souvent la technique suivante : écrire une représentation paramétrique de la droite *(AB)*, et remplacer dans l'équation du plan P les coordonnées *x, y, z* par leur expression paramétrique. L'application de cette technique aboutit à l'équation $m=1$: le paramètre introduit pour décrire la droite *(AB)* disparaît, car en fait la droite *(AB)* est parallèle au plan *P*. Donc l'intersection est soit vide, soit égale à la droite elle-même. Or les étudiants confrontés à l'écriture $m=1$ concluent dans leur grande majorité que pour $m=1$, il y a une solution unique, et sinon pas de solution. En effet, généralement la résolution de systèmes impliquant un ou plusieurs paramètres les amène à chercher des conditions de compatibilité. Et la différence entre le paramètre *m*, donné dans l'énoncé, et le paramètre *t* qu'ils ont pu introduire pour la représentation paramétrique de la droite est délicate à percevoir ; ils perdent de vue le fait qu'ils recherchaient en fait une valeur de *t*.

Figure 7 *Difficultés à interpréter géométriquement un résultat.*

Ces difficultés sont selon Bosch *et al*. (2004) non pas la conséquence de modes de pensée inadéquats ou de manques de flexibilité, mais de la manière dont les savoirs sont enseignés dans le secondaire. Ces auteurs montrent que dans le secondaire, pour un type de tâches donné, une unique technique est proposée. Les techniques sont souvent identifiées aux ostensifs qui permettent de les accomplir ; peu de justifications sont requises. On ne demande que très rarement d'interpréter un résultat, de modéliser une situation ou même de travailler avec un modèle fourni. Et il est rare que plusieurs organisations mathématiques, autour de types de tâches voisins soient réellement articulées. Les organisations mathématiques proposées dans le secondaire sont pour ces différentes raisons qualifiées de ponctuelles, rigides, et incomplètes.

Winsløw (2008) étudie lui aussi la transition secondaire-supérieur en analysant les praxéologies. Ceci l'amène à distinguer deux types de transitions dans les organisations mathématiques, transitions qui ne se trouvent pas nécessairement placées à l'entrée de l'université. La première est une transition qui mène d'une activité mathématique surtout axée au lycée sur le bloc practico-technique [T, τ] vers une activité impliquant des organisations mathématiques plus complètes, c'est à dire intégrant aussi la partie technologico-théorique. Ceci rejoint des résultats que nous avons établis à propos des types de tâches présents en géométrie dans le secondaire puis en algèbre linéaire : nous avons souligné l'absence d'un discours technologique en géométrie, et le remplacement de celui-ci par des évidences spatiales. On peut citer, toujours dans le cas de l'algèbre linéaire, un autre exemple de ce premier type de transition à propos de la notion de déterminant. Les élèves au lycée savent que pour étudier la colinéarité de deux vecteurs de coordonnées *(a,b)* et *(c,d)* du plan, ils peuvent écrire sous forme de tableau : $\begin{vmatrix} ac \\ bd \end{vmatrix} = ad - bc.$

Si le résultat trouvé est nul, les deux vecteurs sont colinéaires. Ils peuvent faire le lien entre la disposition en tableau et la notion de proportionnalité, ou de produit en croix. Mais les élèves de lycée n'ont évidemment pas accès à la notion de déterminant, qui seule permet de généraliser le processus, pour n vecteurs en dimension n. Cette notion est introduite en première année d'université, et dès lors, les étudiants disposent d'une organisation mathématique autour du type de tâches « déterminer si une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n est libre » qui comporte plusieurs techniques, dont le calcul du déterminant, chacune étant justifiée par une technologie.

Le second type de transition distingué par Winsløw est le suivant. Le bloc *technologico-théorique* [θ,Θ] d'une organisation mathématique connue devient le bloc *practico-technique* [T, τ] d'une nouvelle praxéologie. Par exemple les étudiants doivent au début de l'enseignement d'algèbre linéaire prouver qu'une application est linéaire. Dans ce cas, la définition d'application linéaire fournit une technologie. Ensuite on peut leur demander par exemple de montrer que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de son espace de départ ; dans ce cas la même définition fait partie de la technique. Cette évolution évoque la dialectique outil-objet.

Une telle analyse doit naturellement être prolongée par l'étude de la manière dont les savoirs sont effectivement présentés ; il s'agit donc d'analyser non plus les manuels universitaires, mais les choix des enseignants.

3.2 Les enseignants de l'université : diversité et hétérogénéité

Adopter un regard institutionnel implique aussi un questionnement des pratiques et des attentes des enseignants. Changer d'institution, pour des élèves, signifie en effet la rencontre avec un groupe d'enseignants aux caractéristiques nouvelles. Ce point de vue indique de manière évidente une potentialité de ruptures spécifiques lors du passage du secondaire au supérieur (de même, lors du passage du primaire au secondaire ; tandis que le passage du collège au lycée ne porte pas un tel écart). Les étudiants débutants suivent, pour la première fois dans leur vie scolaire, des cours dispensés par des mathématiciens. Les pratiques d'enseignement, et les attentes d'un enseignant-chercheur à l'université sont certainement différentes de celles d'un enseignant de lycée.

De Guzman *et al.* (1998) ont réalisé une enquête auprès d'étudiants en France et au Québec. Il ressort notamment des réponses des étudiants une sévère critique de leurs enseignants, désignés comme responsables des éventuels échecs. Ceux-ci n'auraient aucun souci de pédagogie, seraient distants, voire inaccessibles, sélectifs… De récentes études portant sur les enseignants de l'université (Weber 2004, Nardi *et al.* 2005) montrent pourtant que ceux-ci ont de réelles préoccupations pédagogiques. Quelles caractéristiques des pratiques, et des attentes des enseignants qui peuvent expliquer les perceptions négatives des étudiants ?

Une première explication est relative à la méconnaissance par les enseignants de l'université de ce que les étudiants débutants peuvent faire. Nous allons donner ici un exemple issu de notre travail de thèse (Gueudet-Chartier 2000), durant lequel nous avons soumis un questionnaire à des enseignants de l'université. L'une des questions portait sur les possibilités de recours à la géométrie du lycée pour enseigner l'algèbre linéaire. Parmi les 25 enseignants qui y ont répondu, 8 déclarent explicitement qu'ils n'utilisent pas la géométrie du lycée, n'étant pas suffisamment au courant des programmes du secondaire. 5 enseignants déclarent que les cultures du lycée et celle de l'université sont trop différentes, 3 enseignants considèrent que de toutes façons, les notions de lycée ne sont pas acquises. Nous notons que ces attitudes conduisent aussi à ne pas se pencher sur ce qui se fait réellement au secondaire. Pour un domaine comme l'analyse, où les enseignants peuvent plus difficilement écarter ce qui a été vu au secondaire, Bosch *et al.* (2004) montrent que les enseignants de l'université agissent comme si les étudiants débutants avaient rencontré dans le secondaire des organisations mathématiques complètes. C'est à dire qu'ils considèrent que les étudiants connaissent les aspects technologiques et théoriques impliqués dans les techniques qu'ils savent appliquer ; qu'ils peuvent interpréter leurs résultats, prendre un certain recul…Alors que les organisations mathématiques effectivement rencontrées ne permettent pas aux lycéens de développer une telle attitude. Dans le cas de la transition secondaire-supérieur, le problème de communication souligné par Artigue (2007) est peut-être spécifiquement aigu, à cause du peu de formation reçue par les enseignants de l'université. En France, seuls les enseignants-chercheurs ayant été moniteurs pendant leur thèse ont pu bénéficier d'une formation initiale, au sein des Centres d'Initiation à l'Enseignement Supérieur (CIES). Et rares sont les CIES qui prévoient une formation sur les difficultés liées à la transition secondaire-supérieur…

Un deuxième facteur susceptible d'engendrer des pratiques perçues négativement par les étudiants est l'absence d'un objectif clairement identifiable par les enseignants de l'université.

Rey *et al.* (2004) montrent en effet que les enseignants de l'université manquent d'une pratique-cible, c'est à dire qu'ils ne disposent pas d'un objectif à plus ou moins long terme qui guiderait leurs choix d'enseignement. Pour des enseignants au lycée, les objectifs sont comparativement beaucoup plus clairs, précisés par le programme des classes suivantes, par la préparation au baccalauréat... A l'université, et surtout bien entendu au début de l'université, les étudiants envisagent des parcours variés, et les textes des examens sont élaborés par les enseignants eux-mêmes. De quelles références disposent alors ces enseignants ?

Castela (2004) fait le constat que ces conditions conduisent les enseignants de l'université à enseigner les mathématiques pour elles-mêmes, c'est à dire avec la référence des pratiques des mathématiciens professionnels. Dans le questionnaire aux enseignants que nous avons mentionné ci-dessus, et toujours à propos de la même question sur les recours possibles à la géométrie du lycée, l'un des enseignants dont la réponse évoquait une différence de cultures a plus précisément déclaré ceci :

« Globalement, le point de vue du lycée est radicalement différent de celui donné en DEUG…C'est peut-être inhérent à deux types de mathématiques : les maths pour tous ; les maths à destination des futurs mathématiciens. »

On retrouve bien là les constatations de Castela (2004) : cet enseignant destine ses cours à *de futurs* *mathématiciens*… Or seulement une infime partie des étudiants de première année d'université deviendront des mathématiciens professionnels. Pour tous les autres, de tels cours sont probablement inadaptés, ce qui engendre des perceptions négatives, et des difficultés d'apprentissage.

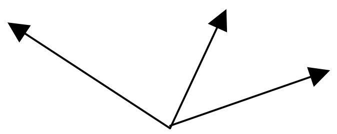
Enfin une troisième explication, corrélée à la précédente, est l'hétérogénéité des attentes et des pratiques des enseignants de l'université. Cette hétérogénéité est attestée par de nombreux travaux, en particulier ceux qui traitent de démonstration et de rigueur à l'université (Dreyfus 1999, Durand-Guerrier et Arsac 2003). En algèbre linéaire, les travaux de Behaj (1999) ont montré que les enseignants à l'université disposent d'une liberté importante par rapport au texte du savoir tel qu'il apparaît par exemple dans les manuels. Il en résulte une importante diversité dans les choix de structuration du savoir par ces enseignants. Nous avons pu de même observer dans nos propres travaux sur l'algèbre linéaire une grande variabilité des attentes, comme des choix, des enseignants de l'université. C'est en particulier le cas à propos de ce qui concerne l'emploi de dessins. Ces questions d'emploi de dessins ne sont d'ailleurs pas totalement déconnectées d'une réflexion sur la rigueur mathématique. La figure ci-dessous (figure 8) est un extrait du questionnaire déjà évoqué (Gueudet-Chartier 2000).

L'exercice suivant est fréquemment posé en première année d'université.

Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, peut-on affirmer que la famille {x, y, z} est libre ?

Cet exercice est posé dans un contrôle. Sur sa copie, l'étudiant a écrit :

"Non. Les vecteurs dessinés ci-dessous donnent un contre-exemple."



- Quelle note lui mettez-vous, sur cinq points ?

- Quelles remarques écrivez-vous sur la copie ?

-Expliquez ici la note choisie et les remarques mentionnées ci-dessus

Figure 8 *Extrait du questionnaire aux enseignants (Gueudet-Chartier 2000).*

Trente enseignants ont répondu à cette question. Les notes sur cinq attribuées par les enseignants sont très variées : elles s'étalent en effet de 0 à 5 (moyenne : 2,7, écart type : 1,4). Ce critère ne fournit cependant que peu d'information sur l'avis de l'enseignant : une réponse jugée médiocre pourra ainsi recevoir une note de 0 à 3 suivant le correcteur.

Il est plus significatif de remarquer que seulement 3 enseignants expriment explicitement un doute quant à la compréhension de l'exercice par l'étudiant. 12 enseignants écrivent même, soit dans les commentaires portés sur la copie, soit dans leurs explications à propos de la note, qu'ils sont sûrs que l'étudiant a compris. Le choix de note va donc s'expliquer essentiellement par l'écart entre la rédaction proposée par l'étudiant et celle qui est effectivement attendue.

Vingt réponses comportent une remarque répondant au critère " manque une démonstration " : les enseignants faisant une telle remarque considèrent que la réponse, donnée sous forme de dessin, est insuffisante, et qu'elle doit être accompagnée d'une preuve formelle. Les autres enseignants considèrent soit que la réponse est entièrement satisfaisante (5 enseignants), soit signalent simplement l'ambiguïté du dessin choisi (5 enseignants) ; ces derniers font des remarques du type : « précisez l'espace ».

Au-delà de ce qui est attendu des étudiants, les pratiques des enseignants de l'université semblent également très variables. Ceci a été mis en évidence par Chellougui (2004) à propos de l'emploi de quantificateurs. Nous avons également relevé dans notre thèse des tendances très différentes chez les enseignants à propos du recours à la géométrie et de l'emploi de dessins pour enseigner l'algèbre linéaire.
Ainsi les étudiants, qui lors de leurs deux premières années d'université rencontrent probablement entre quatre et dix enseignants différents en mathématiques, sont confrontés à une grande variété d'attentes et de pratiques. Cette variété peut certainement conduire à une hétérogénéité qui désoriente l'étudiant débutant, habitué à la référence constituée par un unique professeur.
Ceci amène naturellement à un questionnement tourné vers le contrat didactique. Dans l'enseignement secondaire, du point de vue des élèves les attentes de l'institution et celles de l'enseignant de mathématiques se superposent. Dans l'enseignement supérieur, la variété que nous avons soulignée conduit à questionner ce qui du point de vue de l'étudiant est perceptible en termes d'attentes institutionnelles.

3.3 Contrat didactique et évaluations à l'université

Souligner la diversité des attentes des enseignants n'amène pas à affirmer qu'on ne peut pas parler d'un contrat didactique en vigueur à l'université. Un tel contrat est visible à travers des choix qui dépassent les choix individuels des enseignants : horaires, programmes, textes d'exercices et de problèmes, et d'une manière particulièrement sensible, textes des évaluations. Ainsi la transition secondaire-supérieur peut être abordée sous l'angle du changement de contrat, comme le note Artigue (2007), lors de l'entrée à l'université, "the didactic contract is no longer the same". Différents auteurs adoptent un tel questionnement.
Pour étudier le contrat didactique à l'échelle de l'institution, Bloch (2005) introduit dix *variables macro-didactiques* : degré de formalisation, registre de validation, degré de généralisation, nombre de notions nouvelles, type de tâches, choix des techniques et routinisation, degré d'autonomie, mode d'intervention de la notion, type de conversions, statut des tâches. Les valeurs de ces variables déterminent ce que Bloch nomme *le contrat didactique effectif*, partage des responsabilités mathématiques entre professeurs et étudiants. Ces variables concernent l'organisation globale de l'enseignement ; et les modifications des valeurs des variables sont les indicateurs des ruptures qui se produisent lors de la transition entre les deux institutions ; or de nombreuses modifications apparaissent entre le secondaire et le supérieur.
Un autre type d'étude du contrat didactique habituellement en vigueur à l'université est proposé par Grønbæck *et al*. (à paraître). Selon ces auteurs, un format d'enseignement domine, dans lequel l'enseignant fait un cours magistral, puis propose aux étudiants des problèmes et exercices qui sont des applications stéréotypées des éléments théoriques exposés en cours. L'objectif est que les étudiants apprennent certaines techniques, et non la théorie complète. Grønbæck *et al*. (à paraître) soulignent de plus l'importance des évaluations dans la détermination des règles du contrat : l'étudiant accepte les règles du contrat parce qu'il est convaincu que ce que l'enseignant lui propose est susceptible de l'aider à réussir les examens. Or les examens sont souvent composés d'une collection de petits exercices, qui ne nécessitent pas une réflexion mathématique approfondie.
Ceci rejoint des observations de Lithner (2003), montrant que le travail personnel des étudiants est très tourné vers la préparation des évaluations et en conséquence centré sur des exercices corrigés proposés par les manuels. Or une grande partie des exercices figurant dans des manuels universitaires peuvent être traités en développant seulement des modes de raisonnement basés sur l'imitation, sur la reproduction de techniques précédemment rencontrées. Castela (2004) a montré que les étudiants de l'université en France travaillent sur des exercices plutôt en visant la reproduction de techniques utiles à l'examen, acquises par un entraînement intensif et répété. Les étudiants de classe préparatoire en revanche analysent des méthodes de résolution de manière à pouvoir transférer celles-ci à des problèmes nouveaux. Elle attribue ces différences notamment aux

modes d'évaluation en vigueur dans les deux institutions. En effet, les étudiants de l'université ont des examens fréquents (environ toutes les six semaines dans la situation actuelle en France). Ainsi ces examens portent sur un corpus limité ; de plus ils sont élaborés par les enseignants de cours et de travaux dirigés, qui proposent des exercices proches de ce qui a été vu en classe. Ces auteurs ne font pas explicitement référence à la notion de contrat didactique ; mais il est clair que leurs travaux peuvent être interprétés en ces termes, et soulignent la relation dialectique entre contrat didactique et évaluations à l'université.

La question des évaluations a été abordée par différentes recherches sur l'algèbre linéaire. Dorier (1990) soulignait déjà un écart entre un enseignement riche en concepts et des évaluations portant sur la mise en œuvre de techniques. Les travaux de Behaj que nous avons évoqués ci-dessus montrent que le fait que les enseignants soient eux-mêmes auteurs des sujets d'évaluation est un facteur important dans la liberté de leurs choix. Mais il identifie dans le même temps ces évaluations comme des contraintes : « la mise en texte du savoir est influencée par une nécessité d'évaluation » (Behaj 1999, p.59). Il montre que certains enseignants choisissent une organisation du savoir qui paraît plus propice à l'élaboration de sujets d'examens. Et à propos de l'expérience de Lille, Rogalski (1997) souligne qu'une telle ingénierie longue « doit s'accompagner de changements dans le contrat didactique, qui doivent faire leur preuve auprès des étudiants, en particulier à travers l'évaluation. » (p.164)

Nous n'avons pas dans notre propre travail sur l'algèbre linéaire approfondi les questions liées aux évaluations. Nous avons abordé celles-ci récemment, dans un questionnement portant plus généralement sur l'enseignement des mathématiques à l'université (Gueudet et Lebaud 2008) ; nous allons maintenant évoquer ce travail.

Nous avons examiné les choix effectués par les enseignants pour l'élaboration des textes d'évaluation dans un module d'enseignement de première année d'université (L1). Ce module (premier semestre de la première année) intitulé « outils mathématiques » (OM1) concerne des étudiants qui se destinent à des études de physique-chimie. Les étudiants sont répartis en 5 groupes ; il n'y a pas un unique cours magistral pour tous, mais un mélange de cours et travaux dirigés, encadrés par l'enseignant du groupe. L'évaluation dans ce module consiste en deux contrôles continus d'une heure, et un examen final de deux heures. Nous avons suivi durant l'année universitaire 2007-2008 l'élaboration des textes d'évaluation correspondants, et interviewé les enseignants pour les interroger sur leurs choix d'évaluation.

Nous analysons les interviews et les textes en termes d'objectifs assignés par les enseignants aux évaluations, et de conditions et de contraintes, à des niveaux de détermination didactique (Chevallard 2002) plus ou moins généraux pesant sur les choix des enseignants et sur les objectifs. Nous n'entrons pas ici dans le détail de ce travail, qui est encore en cours ; nous en signalons simplement quelques résultats qui nous semblent devoir être pris en compte pour une analyse en termes de contrat didactique.

L'observation des textes des contrôles continus donnés dans le module OM1 depuis septembre 2004 (soit durant 4 années universitaires) montre que ceux-ci sont très majoritairement composés d'exercices visant à l'application de méthodes apprises en travaux dirigés. En aucun cas l'évaluation ne porte sur un ou deux problèmes longs. Différents facteurs amènent à ce choix. Tout d'abord, la durée des contrôles (1h) et de l'examen (2h) est limitante (rappelons qu'au baccalauréat S dont sont issus la plupart des étudiants de ce module, l'épreuve de mathématiques dure 4 heures). Cette durée est une contrainte institutionnelle de niveau général ; en particulier, les examens de 3 heures ont été progressivement supprimés à l'Université Rennes 1 où se situe notre étude pour permettre de faire passer deux examens dans la même demi-journée, afin d'optimiser l'occupation de la salle d'examen et le temps de travail des appariteurs. Cette optimisation est aussi rendue cruciale par l'explosion du nombre d'évaluations accompagnant la mise en place de la réforme « LMD[6] ». Au-delà de cette contrainte de durée, un facteur important se dégage de nos interviews, facteur qui relève des

[6] Licence, Master, Doctorat. Cette réforme a accentué le découpage modulaire des enseignements, pour permettre l'attribution à chacun d'un certain nombre de « crédits » (ECTS) reconnus à l'échelle européenne.

objectifs que les enseignants assignent à l'évaluation : une évaluation doit balayer tout le programme auquel elle correspond. Pour un partiel, l’un des enseignants interviewés souligne que celui-ci doit permettre à l'étudiant de disposer d'un diagnostic de ses connaissances sur le contenu concerné. Ce diagnostic se doit donc d'être complet. Cet argument n'est plus valable pour l'examen ; cependant, un autre enseignant considère comme très important le fait que l'examen couvre tout le contenu, d'une part pour forcer les étudiants à tout réviser, et d'autre part « pour distinguer entre ceux qui ont suffisamment travaillé et ceux qui n'ont pas travaillé ». Or le contenu du module OM1 fait l'objet d'un découpage en 5 principaux chapitres. Ceci est également une contrainte institutionnelle, qui porte plus directement sur le contenu mathématique : contrainte d’organisation du savoir. Le sujet d'examen final comporte donc généralement 5 exercices (ou 4 exercices, avec un exercice en deux parties).

Un autre type de facteur intervient bien entendu dans la mise à l'écart des problèmes longs : c'est l'importance accordée au taux de réussite, et la crainte de l'effet « boule de neige » d’une erreur commise en début de problème lors d'enchaînements de questions. La prise en compte par les enseignants de cette contrainte du taux de réussite apparaît dans l’exemple présenté ci-dessous (figure 9) de l’analyse du choix d’un exercice de l’examen.

L'exercice suivant est issu de l'examen final du module OM1 (décembre 2007). On trouve pour les 4 dernières années un tel exercice dans chaque sujet de contrôle continu n°1 et d'examen du module.

1) Calculer les racines carrées de 3+4i.

2) Résoudre dans C l'équation $z^2 +3iz-3-i=0$.

Cet exercice vise l'application d'une méthode apprise en travaux dirigés, pour la résolution d'équations du second degré à coefficients complexes. Les étudiants savent qu’il s’agit dans un premier temps de calculer un discriminant, et les racines carrées de ce discriminant. Ce calcul est précisément celui qui fait l'objet de la première question. Ainsi l'étudiant dispose d'un moyen simple de contrôle de la mise en œuvre de la méthode à la question 2), puisqu'il doit retrouver la valeur donnée en 1).

Par ailleurs, toutes les valeurs numériques impliquées sont entières (on ne dépassera jamais deux chiffres dans le calcul), ce qui offre à l'étudiant un autre moyen de contrôle très sûr, voire une méthode par essais et erreurs relativement efficace en question 1. Ces valeurs numériques entières sont une conséquence d'une contrainte institutionnelle spécifique aux mathématiques en première année : la contrainte d’interdiction de la calculatrice. Cette contrainte est associée à des convictions des enseignants sur la nécessité pour les étudiants de comprendre les calculs qu’un logiciel peut effectuer automatiquement.

Mais la raison principale qui préside au choix d'un tel exercice est l'objectif d'un taux de réussite suffisant. Ceci apparaît clairement dans les échanges de mails lors de l’élaboration du sujet d’examen. Cet exercice est proposé, à la suite de remarques sur le fait que « il manque peut-être des complexes » (Georges) ; « on aurait pu mettre un petit exo, mais facile, sur les complexes » (Thierry). Marc propose alors l'exercice en disant : « ce sont des points sûrs. Qu'en pensez-vous ? ». Les autres enseignants approuvent, « cet exercice me paraît très bien » écrit Georges, « je suis d'accord avec Georges, comme ça on maximise les chances des étudiants », renchérit Thierry. Dans son interview, Marc reconnaît que la question 2 aurait pu être posée d'emblée, mais selon lui la question 1 assure que les étapes intermédiaires seront visibles dans les rédactions des étudiants, permettant ainsi au correcteur de « donner des points ».

Figure 9 *Le choix d’un exercice pour un examen (Gueudet et Lebaud 2008).*

La contrainte du taux de réussite est une contrainte fondamentale dans les choix d'évaluation à tous les niveaux scolaires, mais peut-être encore plus à l'université dans l'enseignement scientifique victime de désaffection. Ainsi la moyenne d’un module ne peut guère être inférieure à 10. Les 2 points assurés par un tel exercice à tout étudiant qui a assisté aux travaux dirigés sont donc précieux.

De plus, comme le soulignent Grøenbeck *et al*. (2005), il est nécessaire que les étudiants puissent raisonnablement penser que l’enseignement les prépare efficacement aux évaluations. Les choix d’évaluation pèsent donc sur le contenu même des enseignements. Cet extrait de l'interview du responsable du module OM1 nous semble extrêmement significatif à cet égard :

« Plus j'enseigne ce cours, plus je...par exemple l'année dernière [...] j'ai défini l'intégrale [...] Cette année j'ai dit : écoutez, ça a quelque chose à voir avec l'aire [...] donc si j'enseigne ça encore 2,3 ans je ne sais pas ce qui va rester. Donc faire vraiment de plus en plus de recettes en exigeant quand même plus de rigueur que dans le cours de physique [...] »

« Qu'est-ce qui selon toi te pousse à faire plus de recettes ? »

« Le niveau des élèves et l'attente des élèves, et je trouve leur mode de fonctionnement. »

On observe ici un processus inquiétant amenant à l'évolution du contenu des enseignements en fonction des attentes des étudiants, attentes qui dépendent pour une part importante des textes des évaluations.

3.4 Bilan des apports de l'approche institutionnelle

Nous revenons ici sur les résultats mis à jour par les recherches abordant la transition secondaire-supérieur avec une perspective institutionnelle.

Certains de ces résultats portent sur la manière dont les contenus mathématiques sont abordés dans les deux institutions, et pointent des *changements*, porteurs de *ruptures*. Ces résultats peuvent concerner un contenu spécifique ; c'est en particulier le cas lorsqu'une analyse est entreprise en termes d'organisations mathématiques présentes dans le secondaire et dans le supérieur, pour identifier des différences, des manques... Mais ils peuvent également prendre une forme plus générique. Ainsi le déficit de discours technologique, dans le secondaire, peut être observé quelque soit le contenu en jeu. De même les travaux qui cherchent à préciser le contrat didactique en vigueur à l'université à partir de l'analyse des manuels, polycopiés de cours et d'exercices identifient des ruptures d'ordre général, qui rejoignent les observations issues de l'analyse des organisations mathématiques.
Les actions didactiques associées à de tels travaux visent alors à *éviter une accumulation excessive de ruptures*. On peut envisager tout d'abord d'agir sur les praxéologies proposées dès l'enseignement secondaire. C'est le sens de la démarche du groupe Approche Heuristique de l'Analyse (Schneider 2001). Proposer dès le secondaire des organisations mathématiques complètes, des tâches de modélisation, d'interprétation permettrait certainement de faciliter l'entrée à l'université. En France, le travail actuel sur l'épreuve expérimentale au baccalauréat peut aller en ce sens. Mais un travail complémentaire restera certainement nécessaire à l'université, pour reprendre et compléter les organisations mathématiques du secondaire. C'était dans cette perspective que se situaient, par exemple, les ateliers de mathématiques organisés par Praslon (2000) pour des étudiants de première année d'université, en proposant de travailler sur des problèmes mettant en jeu des notions déjà rencontrées dans le secondaire, mais engagés dans des praxéologies caractéristiques de l'université, et demandant à l'étudiant des prises d'initiatives, des changements de cadres, de registres...

D'autres résultats amenés par les travaux adoptant une perspective institutionnelle ne concernent pas les changements, mais certaines caractéristiques de l'enseignement supérieur entraînant des difficultés spécifiques. La *variété des attentes* des enseignants risque de désorienter les étudiants. La *méconnaissance des apprentissages réalisés au secondaire* cause un décalage entre les attentes et les connaissances des étudiants. Mener une réflexion sur la diversité des attentes d'un enseignant à l'autre, ou sur la prise en compte de ce qui est effectivement pratiqué dans le secondaire, demande la mise en place de structures spécifiques permettant aux enseignants du supérieur un retour réflexif sur leurs propres pratiques. Les travaux de Nardi et Iannone (2005) montrent par exemple comment la constitution d'un groupe de réflexion associant des enseignants de mathématiques du supérieur et des chercheurs en didactique a permis d'une part la communication des résultats de la recherche, et d'autre part la prise de conscience par les enseignants des diversités de leurs attentes. Il s'agit bien ici de pointer l'intérêt d'une *formation initiale et continue des enseignants du supérieur*, action didactique dont la réalisation ne peut passer que par des choix politiques au sein des universités.

Par ailleurs, la variété des attentes des enseignants conduit vraisemblablement les étudiants à considérer les textes des *évaluations* comme la principale référence témoignant de manière fiable de ce qui est attendu. Or des contraintes institutionnelles spécifiques de l'université font que ces évaluations portent fréquemment sur la *reproduction de techniques*. Les étudiants dirigent alors leur travail personnel vers la reproduction de techniques. Ici la cause des difficultés est un travail personnel inadéquat, lui-même dû aux choix d'évaluation de l'institution. Les travaux qui présentent ce type de résultats concernent eux aussi des caractéristiques de l'université, porteuses de difficultés spécifiques. Le processus identifié : *choix d'évaluations* pour maintenir un taux de réussite minimum ; *adaptation par les étudiants de leur travail* à ces évaluations ; *modification du contenu des enseignements* pour correspondre à la fois aux évaluations, et à ce que l'on estime être à la portée des étudiants, fait peser sur les apprentissages à l'université un danger qui indique la nécessité d'actions.
De nombreux enseignements universitaires innovants proposent des modes d'évaluation qui diffèrent des examens traditionnels. On peut citer les enseignements mis en place à Roskilde (Niss 2001), à Warwick (Alcock et Simpson 2001), ou plus récemment à Copenhague (Grønbæk *et al.* 2005). La plupart de ces enseignements proposent aux étudiants de réaliser des projets, le plus souvent en groupe, ce qui donne lieu à du travail collaboratif, mais aussi conduit à développer des modes d'évaluation portant sur des dossiers élaborés par les étudiants, des présentations orales du travail réalisé... (notons que ces mêmes modes d'évaluation ont été mis en place dans l'enseignement secondaire avec les Travaux Personnels Encadrés).
Il nous semble qu'un effort spécifique de diffusion des résultats de recherche évoqués dans ce paragraphe, et en particulier des expérimentations réalisées doit être entrepris. L'enjeu n'est plus seulement de combattre les difficultés liées à la transition secondaire-supérieur, mais d'empêcher que l'enseignement universitaire des mathématiques ne se réduise progressivement à la reproduction de techniques.

4. Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment différentes perspectives de recherches, différents regards posés sur les difficultés des étudiants, amènent à s'intéresser à différents types de difficultés, à identifier différentes causes pour celles-ci, et à suggérer différents moyens d'action didactique à l'entrée dans le supérieur, pour le cas de l'algèbre linéaire en particulier. Nous revenons ici sur les principaux apports de chaque perspective, et sur leurs articulations possibles.
Les recherches basées sur des *analyses épistémologiques* considèrent que les difficultés des étudiants à l'entrée à l'université sont dues au fait que les savoirs rencontrés dans le supérieur sont spécifiquement *abstraits*. Pour l'algèbre linéaire, elles soulignent qu'il s'agit d'une théorie *axiomatique*, à visée *unificatrice*. Elles indiquent de plus un lien spécifique avec des *modèles géométriques*. Mais le sens attribué à l'adjectif abstrait peut varier, et chaque analyse épistémologique semble se centrer sur un aspect particulier du savoir. Les différents aspects étudiés doivent ensuite être considérés simultanément, en particulier dans un objectif d'action didactique.
Les travaux qui se centrent sur les nouvelles exigences de *flexibilité* à l'entrée dans le supérieur indiquent des formes de flexibilité spécifiques à l'algèbre linéaire : l'emploi de *dessins* associés à un modèle géométrique intermédiaire, les *raisonnements géométriques*, le *passage d'une dimension à l'autre* en particulier. Ils soulignent aussi des formes de flexibilité plus générales, liées à la construction d'une expérience mathématique. Ainsi l'action didactique associée consiste à proposer une variété de problèmes, mais nécessite aussi de disposer d'un temps suffisant à l'accumulation de cette expérience.
Contrairement aux analyses épistémologiques, dont les résultats divergent car chacune n'éclaire

qu'un aspect des concepts en jeu, des travaux sur la flexibilité se dégage un certain *consensus*. Ce consensus porte sur ce que sont les *pratiques des mathématiciens* professionnels, sur les interprétations des difficultés des étudiants en termes *d'écart à ces pratiques*, et sur la nécessité de développer *l'expérience mathématique* des étudiants. Les pratiques des mathématiciens ne sont pas un objet moins complexe que le savoir mathématique. Mais les recherches n'entrent pas dans le détail de ces pratiques : elles en esquissent les grandes lignes, qui dessinent un horizon à atteindre pour les étudiants, horizon si lointain qu'entrer dans le détail ne serait pas pertinent.

Les recherches qui adoptent un regard *institutionnel* soulignent une structuration du savoir modifiée lors du changement d'institution. En comparant l'algèbre linéaire à la géométrie rencontrée dans le secondaire, on observe ainsi des praxéologies pour lesquelles, dans le secondaire, le discours technologique est rendu inutile par des évidences géométriques. D'une manière plus générale, un déficit de bloc technologico-théorique apparaît dans les praxéologies du secondaire. L'essentiel des travaux adoptant un regard institutionnel établit des résultats dont la portée dépasse l'algèbre linéaire, ou tout autre contenu spécifique. Ainsi la variété des pratiques des enseignants, et le fait que ces attentes soient relativement déconnectées de ce qui est effectivement enseigné dans le secondaire ne dépend pas du contenu mathématique en jeu. De même les règles du contrat didactique institutionnel à l'université peuvent être très générales. Ceci nous semble indiquer une nécessaire clarification théorique, mettant en rapport la notion de contrat didactique (Brousseau 1998), et les récents développements de l'approche anthropologique sur les systèmes de conditions et de contraintes à différents niveaux de détermination didactique (Chevallard 2002). Un tel travail de clarification est actuellement en cours dans le travail de thèse de Martine de Vleeschouwer que nous co-encadrons[7] , nous ne détaillerons pas ce point ici (De Vleeschouwer 2008).

L'approche institutionnelle propose un regard tout à fait différent de ceux que nous avons considérés auparavant, même si certains résultats peuvent paraître similaires. Ainsi lorsque Winsløw (2008) parle d'une transition dans laquelle le bloc *technologico-théorique* d'une organisation mathématique connue devient le bloc *practico-technique* d'une nouvelle praxéologie, on peut songer à l'encapsulation qui transforme un processus en objet, dans la théorie APOS. Mais l'encapsulation est un processus cognitif, un apprentissage réalisé par un étudiant, tandis que les observations de Winsløw portent sur la manière dont le savoir est abordé dans l'institution. Les analyses épistémologiques, et les travaux portant sur la flexibilité pointent les origines cognitives des difficultés des étudiants. L'approche institutionnelle amène à rechercher l'origine des difficultés dans les choix de l'institution.

Parmi ces choix susceptibles de poser problème, nous avons souligné ceux relatifs aux évaluations. Ceux-ci nous semblent en effet particulièrement sensibles dans le contexte actuel qui associe enseignement supérieur de masse et désaffection des études scientifiques. Réduire l'enseignement des mathématiques à l'université à une succession de techniques ne peut pas être une solution aux problèmes de transition.

Souligner ce point ne signifie pas que nous souhaitons indiquer l'approche institutionnelle comme préférable aux autres. Nous avons voulu montrer ici comment différentes approches théoriques éclairent différentes facettes de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, voire plus largement des mathématiques, au début de l'université, dans nos recherches comme dans d'autres. Ces différents regards sont complémentaires, et les articuler permet de parvenir à une vue plus complète, enrichie par la diversité des apports.

[7] Thèse en cours à l'Université de Namur, co-encadrement avec Suzanne Thiry.

Chapitre 2

Ressources en ligne en mathématiques : quelles conséquences pour l'apprentissage et l'enseignement ?

Le mouvement de recherche dont ce chapitre propose la synthèse a un déroulement tout à fait différent du précédent. A propos de l'entrée dans le supérieur, nous avons voulu montrer comment différentes approches théoriques initiales amenaient à différentes interprétations des difficultés rencontrées par les étudiants, puis différentes propositions d'action didactique. Ici le point de départ est à l'inverse plutôt relatif à l'action didactique. L'offre de ressources en ligne pour l'enseignement s'est considérablement accrue depuis quelques années. Ces ressources qui étaient marginales en France à la fin des années 90 sont devenues entre 2000 et nos jours un élément incontournable de l'environnement professionnel des professeurs de mathématiques, des professeurs des écoles, mais également des ressources pédagogiques disponibles pour les élèves et leurs familles. Cette évolution a été accompagnée par le développement de recherches relevant de divers champs : ingénierie documentaire, environnements informatiques pour l'apprentissage humain, sciences de l'éducation, didactique de différentes disciplines. Les enjeux de ces recherches ont progressivement évolué. La production de ressources de qualité constitue toujours un aspect important, comme c'était le cas dès le début de TICE, mais d'autres nécessités sont apparues. D'une part la facilité technique d'élaboration de ressources a conduit à la multiplication de ce qui est disponible, et de ce qui émane de non-spécialistes. Il s'agit donc pour les chercheurs de produire des critères d'analyse des ressources disponibles. D'autre part l'emploi de ressources en ligne est très répandu, à la fois grâce au meilleur équipement informatique de beaucoup d'établissements et d'enseignants, et grâce au peu de difficultés techniques associées à l'utilisation de nombre de ressources en ligne. Il est donc indispensable que le chercheur intervienne à propos des utilisations possibles de ces ressources.
Les travaux que nous avons effectués se situent bien entendu dans le champ de la didactique des mathématiques ; mais ils présentent des articulations naturelles avec d'autres champs, que nous tenterons de montrer dans ce qui suit.
Parmi les ressources en ligne disponibles en mathématiques, ce sont celles de type bases d'exercices qui ont occupé une place centrale dans les travaux que nous avons menés jusqu'à présent. Nous allons donc préciser dès maintenant les caractéristiques de ces ressources, telles que nous les avons définies dans Cazes *et al.* (2006). Une *base d'exercices en ligne* :

- est une ressource en ligne élaborée à des fins d'enseignement des mathématiques ;
- est constituée principalement d'exercices ou de problèmes organisés selon un certain classement ;
- comporte, pour chaque exercice ou problème un *environnement* associé qui peut inclure des aides de différents types, des outils (graphiques, calculatrices…), mais aussi la solution de l'exercice.

Les bases d'exercices en ligne peuvent être considérées comme des outils très élémentaires, si on les compare par exemple aux logiciels de géométrie dynamique ou de calcul formel. Cependant dès le début de nos travaux sur ce thème, il nous semblait clair que leur introduction en classe était susceptible de modifier les processus d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. Ruthven et Henessy (2002), dans leur étude très complète sur le recours aux TICE en mathématiques au second degré en Angleterre, soulignaient les possibilités offertes par ces outils, en termes de travail individualisé, de respect des rythmes personnels des élèves. Ils notaient déjà un véritable engouement des professeurs pour ce type de logiciel, engouement que l'on a pu largement constater en France par la suite. Ainsi nos recherches qui portaient au départ sur des enseignements plutôt expérimentaux, à l'université, se sont tournées en suivant les usages effectifs vers la prise en compte d'un mouvement massif d'emploi de bases d'exercices en ligne au second degré. Nous avons au final étudié des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage associés à l'utilisation de telles ressources pour des niveaux scolaires allant du cycle 3 de l'école primaire (élèves de 9 à 11 ans) jusqu'à la préparation au CAPES[8] de mathématiques. Bien entendu, les phénomènes comme leur analyse sont tout à fait différents dans une classe de sixième, ou dans une séance de travaux dirigés de première année d'université. Nous soulignerons par la suite certaines de ces différences.

La première partie de ce chapitre 2 est consacrée aux ressources elles-mêmes. Etudier des ressources en ligne avec un point de vue didactique peut prendre des formes très diverses, selon les questions posées au départ de l'étude, et le public auquel cette étude est destinée. Nous montrerons comment cette variété se manifeste dans les travaux que nous avons menés. Nous soulignerons la nécessité d'analyses didactiques des ressources comme élément d'analyse a priori dans toute recherche concernant un enseignement où une telle ressource est impliquée, mais également d'analyses dirigées vers des objectifs externes à la recherche, adressées à des concepteurs et des utilisateurs potentiels de ces ressources.

Bien entendu, les conséquences pour l'apprentissage et l'enseignement de l'emploi d'une ressource en ligne dépendent de multiples autres facteurs, qui dépassent largement les caractéristiques de la ressource elle-même. Plusieurs des recherches auxquelles nous avons participé portent sur les comportements des élèves, ou des étudiants travaillant sur une base d'exercices en ligne. L'analyse de ces comportements, l'établissement de liens entre les comportements et les apprentissages, et les approches théoriques qui permettent ces analyses font l'objet de la partie 2. Par ailleurs, les modalités d'utilisation d'une base d'exercices en ligne ont des conséquences directes sur les comportements des élèves, sur les apprentissages... C'est ce qui a motivé notre intérêt pour la notion de scénario, et nous a conduite à étudier les usages de bases d'exercices en ligne développés par les enseignants, et à recourir à l'approche instrumentale pour préciser et organiser l'étude des usages. Cette étude a ensuite mis en évidence la nécessité de considérer plus largement toutes les ressources auxquelles le professeur avait à faire. Et un tel constat nous a conduite à prendre part au développement d'une approche théorique spécifique. Les travaux correspondants sont présentés en partie 3.

1. Quelles analyses didactiques des ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques ?

Lorsque nous avons présenté au chapitre 1 (§2.4) les principes qui ont gouverné nos choix de conception du logiciel BRAISE, nous avons déjà abordé ce point de l'analyse didactique d'une ressource, du point de vue du concepteur. Des travaux de ce type se retrouvent dans de nombreux pays, à tous les niveaux scolaires, lorsque des chercheurs en didactique des mathématiques ont été associés à la conception de ressources. Ainsi Sangwin (2004), qui propose un dispositif technique recourant à un logiciel de calcul formel pour l'évaluation en mathématiques à l'université montre comment certains choix didactiques permettent une évaluation automatisée en ligne d'exercices de mathématiques qui ne se réduisent pas à l'application de techniques (en particulier, la production par les étudiants d'exemples d'objets mathématiques vérifiant certaines propriétés). On peut également citer les travaux de Lozano et Trigueros (2008) dans le projet Enciclomedia au Mexique. Ce vaste projet d'élaboration de ressources en ligne prolongeant les manuels scolaires, pour le premier degré et le second degré, associe des chercheurs en didactique aux équipes de concepteurs. C'est ainsi qu'une réflexion a été menée sur les possibilités de représentation (par exemple, pour l'apprentissage des fractions, abordé dans l'article cité ci-dessus), et les outils de simulation qui pouvaient être utiles aux élèves (pour le cas des probabilités en particulier).

Mais l'analyse didactique d'une ressource dépasse largement les questions que doit étudier le concepteur de cette ressource. L'examen des nombreux travaux qui ont été consacrés à ce thème

[8] Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement Secondaire, concours de recrutement d'enseignants.

depuis le début des années 2000 montre qu'un des enjeux de la recherche peut être de situer une ressource, au sein du foisonnement de ce qui est disponible. Un tel enjeu est central dans le domaine de l'ingénierie documentaire, dans lequel les questions d'*accessibilité* et d'*indexation* sont à l'étude (Crozat 2007). L'*accessibilité* conduit à un questionnement spécifique sur les caractéristiques des ressources en ligne, traité majoritairement jusqu'à présent par des spécialistes de l'ingénierie documentaire et des EIAH (Pédauque 2006, 2007 ; Pernin 2007). On parle, pour les utilisateurs, de nouvelles fonctions à assurer : classement, recherche, critique, identification des auteurs et des textes, qui nécessitent des savoirs très divers (Pédauque 2006). Désormais, dans le contenu numérique des ressources figurent des éléments d'indexation, plus ou moins accessibles à l'utilisateur (en particulier selon son degré de compétences informatiques). Ces éléments peuvent conditionner le parcours interne à la ressource, comme l'accès à celle-ci par l'extérieur. Cet enjeu peut être perçu du point de vue du concepteur, pour lequel il s'agit d'associer à la ressource une description de ses propres caractéristiques, à l'intention d'un utilisateur. Des choix importants sont à faire pour l'indexation : quel grain de ressource indexer, quels détails donner dans une description ? Des standards internationaux sont en cours d'élaboration, avec un objectif de création de banques mondiales de ressources interopérables. Ceci relève de l'approche, dans le domaine des EIAH, des ressources comme ensembles d'objets d'apprentissage, approche qui consiste à définir et indexer des briques intégrables dans des ENT (Environnements Numériques de Travail) en particulier. Cette approche a notamment conduit au développement du schéma LOM (Learning Object Metadata) et de sa version française LOM-FR (http-LOM-FR). Ainsi, à un objet d'apprentissage, on peut associer une fiche LOM-FR qui comporte un ensemble de *métadonnées* : langue, auteurs, requis techniques, mais aussi caractéristiques pédagogiques : « activité induite », « temps d'apprentissage » par exemple. Décrire les caractéristiques d'une ressource en ligne avec un objectif d'indexation, ou plus généralement pour situer celle-ci parmi les ressources disponibles à destination d'un utilisateur potentiel peut aussi être un objectif pour le chercheur en didactique des mathématiques. Il est clair que les caractéristiques qui seront retenues alors s'écartent de celles du schéma LOM, qui ne correspond pas à un regard didactique. Différents travaux de recherche ont élaboré des taxonomies des ressources en ligne disponibles en mathématiques : Crowe et Zand (2000) proposent une telle classification, distinguant les ressources qui traitent d'un thème mathématique précis, de ressources plus générales (journaux, bibliothèques) ; ils examinent déjà les possibilités de communication offertes par les sites Web qu'ils examinent. Engelbrecht et Harding (2005*a*) proposent un classement des cours en ligne de mathématiques à l'université selon six axes : fréquence d'accès nécessaire, mode d'évaluation, communication, contenu, richesse des outils proposés, indépendance (comprise comme la nécessité ou non de présentiel).
Mais les questions de taxonomie amènent naturellement aussi à envisager un autre accompagnement de l'utilisateur potentiel, allant dans le sens de l'évaluation des ressources. Ainsi dans un second article, Engelbrecht et Harding (2005*b*) développent des critères proches des axes mentionnés ci-dessus, mais destinés à évaluer les qualités pédagogiques potentielles des ressources. Différents travaux, en particulier à propos d'enseignement à distance, posent la question de la qualité de ressources (c'est le cas notamment du projet européen e-Quality, http-e-Quality) ; mais ces questions sont rarement abordées sur un plan didactique. Or ceci nous semble être un enjeu important pour la recherche, nous détaillerons ce point ci-dessous (§1.2).
Cependant les recherches en didactique portant sur les caractéristiques des ressources en ligne ne se limitent pas à l'évaluation de celles-ci. En particulier, l'étude des caractéristiques d'une ressource peut être pensée comme un préalable nécessaire à toute recherche considérant un enseignement dans lequel cette ressource est impliquée : c'est alors une part essentielle de l'analyse a priori effectuée par le chercheur. Et dans ce cas, les caractéristiques retenues comme pertinentes vont bien entendu dépendre de la question de recherche traitée. Nous allons donc tout d'abord (§1.1) présenter de telles analyses, issues de nos travaux.
Les exemples auxquels nous ferons référence concernent les bases d'exercices en ligne, en

particulier le logiciel BRAISE (http-BRAISE et annexe A), qui a été présenté au chapitre 1, et Mathenpoche (http-Mathenpoche), dont on trouvera une brève présentation en annexe B. Nous mentionnerons aussi plus ponctuellement le logiciel WIMS (http-WIMS), présenté en annexe C. La portée des questions soulevées et des éléments de réponse dégagés n'est cependant pas limitée aux cas étudiés, ni même aux ressources de type bases d'exercices en ligne.

1.1 Analyser une ressource à des fins de recherche didactique

Toute recherche didactique portant sur des phénomènes d'enseignement impliquant une ressource en ligne doit comporter une analyse des éléments de cette ressource qui sont utilisés. Celle-ci peut prendre de multiples formes, dépendant des questions de recherche traitées. Nous allons donner ici des exemples de telles analyses.

Emploi d'une base d'exercices en ligne et démarche de résolution de problèmes à l'université

Cet exemple est issu de Cazes *et al.* (2005). Dans ce travail, nous définissons une démarche de résolution de problèmes comme la recherche, par un étudiant, d'une solution personnelle pour un problème ou un exercice qui lui a été proposé. Cette recherche doit nécessiter une certaine autonomie mathématique de l'étudiant : il ne s'agit pas d'appliquer une technique, de suivre des indications précises fournies dans l'énoncé. L'étudiant doit lui-même mobiliser les connaissances nécessaires, faire un choix de méthode... Ces caractéristiques de la démarche de résolution de problèmes ont été retenues en cohérence avec les travaux de recherche sur ce thème, en particulier Schoenfeld (1985). L'organisation de l'enseignement au début de l'université semble laisser peu de place à l'activité de résolution de problèmes durant les séances de travaux dirigés, notamment parce que le temps disponible durant ces séances pour une recherche personnelle est très court, entre deux interventions de l'enseignant pour la classe entière (Gueudet 2004*b*). Or dès les premiers travaux portant sur l'emploi de ressources en ligne à l'université (Cazes et Vandebrouck 2003), les chercheurs ont constaté que lors du travail en salle informatique sur de tels supports, l'enseignant ne faisait que très peu d'interventions orales destinées à l'ensemble des étudiants. Ainsi les moments exempts de telles interventions étaient nettement plus longs qu'à l'ordinaire, ce qui pourrait permettre à l'étudiant de mobiliser son attention suffisamment longtemps sur la résolution d'un exercice donné. Ceci n'est bien entendu pas suffisant au développement d'une activité de résolution de problèmes, mais c'est au moins une condition prérequise. Il s'agit alors d'observer l'activité des étudiants durant ces séances. Mais cette activité sera fortement conditionnée par les caractéristiques de la ressource utilisée, d'où la nécessité d'une analyse préalable de cette ressource. Dans Cazes *et al.* (2005), nous étudions deux enseignements de première année d'université, l'un impliquant le logiciel BRAISE, à l'Université de Rennes 1 et l'autre le logiciel WIMS à l'Université d'Evry. Nous avons donc réalisé une analyse de ces deux bases d'exercices centrée sur les caractéristiques de ces logiciels susceptibles d'influencer l'activité de résolution de problèmes des étudiants, et permettant également de les comparer. Cette analyse repose sur une description prenant en compte les catégories mentionnées dans le tableau ci-dessous.

	BRAISE	**WIMS**
Choix didactiques	Travail sur des exercices complexes, variés.	Exercices à relancer, différentes versions du même énoncé. Des exercices techniques et des exercices complexes.
Organisation de l'apprentissage	Travail sur les exercices, l'accès à l'environnement se fait par l'exercice. Travail sur papier.	Travail en ligne, sur des feuilles d'exercices constituées par le professeur (sélection de contenus WIMS).
Classification des exercices	Mots-clés ; difficulté, thème, type de tâche.	Mots-clés pour l'accès direct (plutôt pour le professeur)
Eléments aléatoires	Non	Modification dans l'énoncé d'un exercice à chaque relance : valeurs numériques, type de question...

Environnement d'un exercice	Eléments de cours, méthodes, indications, aide graphique. Solutions, idées à retenir.	Calculatrice numérique, calculatrice formelle, logiciel graphique.
Type de réponses attendues	Résolution à écrire sur papier.	Réponse numérique ou algébrique, ou QCM, à remplir en ligne.
Feed-back	Non	« Juste » ou « Faux »
Notation	Non	Note de 0 à 10 sur chaque exercice, conservation de la meilleure note, possibilité d'élaboration d'un barème.

Tableau 1 *Caractéristiques d'une base d'exercices susceptibles d'influencer l'activité de résolution de problèmes des étudiants, le cas de BRAISE et WIMS.*

Ce tableau permet d'emblée de constater les différences importantes entre ces deux ressources. WIMS propose beaucoup plus d'interactivité, et met à disposition des étudiants des outils riches comme des logiciels de calcul formel, de représentation graphique. BRAISE oblige à l'utilisation du support papier-crayon, et son intérêt réside plutôt dans la richesse des énoncés proposés et des textes accompagnant ces énoncés. Il est ainsi tout à fait naturel que l'emploi de WIMS se développe dès l'enseignement secondaire, avec bien entendu une adaptation des contenus et des exercices proposés. Une telle adaptation est difficilement envisageable avec BRAISE. BRAISE suppose une plus grande autonomie des étudiants, une plus grande responsabilité exercée face à leur propre travail. Le travail avec BRAISE pourrait être comparé à celui effectué avec un livre d'exercices corrigés, en supposant qu'un tel livre offre pour chaque exercice la variété d'aides disponibles dans BRAISE, et permette la souplesse de choix d'un exercice selon le thème précis, le niveau de difficulté, et plus généralement toutes les possibilités de navigation. Au-delà des contraintes de réalisabilité technique qui pèsent évidemment sur les choix des concepteurs, ces caractéristiques reposent sur des choix didactiques, des hypothèses sur l'apprentissage faites par les concepteurs des deux logiciels. WIMS est principalement fondé sur l'idée que l'apprentissage aura lieu par une pratique répétée sur des exercices voisins. BRAISE fait le choix de l'apprentissage par résolution d'exercices plutôt complexes, et variés, et donne un rôle prépondérant à la lecture de textes mathématiques.

En considérant les choix didactiques des concepteurs, BRAISE paraît plus susceptible que WIMS de favoriser une activité de résolution de problèmes, d'une part à cause des énoncés proposés, et d'autre part parce que l'étudiant qui travaille sur BRAISE doit obligatoirement être muni d'un crayon et d'un papier, alors que le travail sur WIMS peut parfois être fait directement sur l'ordinateur. Cependant, la présence dans BRAISE de nombreuses aides et des solutions des exercices proposés pose question. Est-il possible que des étudiants qui savent qu'ils ont accès à la solution se lancent tout de même dans une recherche, et y persévèrent ? On voit ici un questionnement spécifique de ce niveau scolaire, et des capacités d'autonomie supposées à l'université. Proposer à des élèves de collège des exercices accompagnés de solutions n'aurait certainement pas le même effet. Pour WIMS, lorsque l'enseignant choisit un énoncé susceptible de donner lieu à une véritable recherche mathématique de l'étudiant, la caractéristique d'énoncé aléatoire peut favoriser une activité tournée vers la résolution de problèmes. En effet, l'étudiant peut faire des tentatives de résolution, proposer sa solution, avoir le feed-back du logiciel, et en cas d'erreur relancer l'exercice. Il obtiendra alors un énoncé voisin, pour lequel il pourra développer une stratégie modifiée en fonction du feed-back. Ces constatations guident le chercheur dans son observation des étudiants, et dans son analyse des fichiers de suivi de leur activité. Nous montrons de telles analyses dans la partie 2. Ici les caractéristiques retenues sont liées à l'activité de résolution de problèmes : complexité des énoncés, présence de solutions, d'aides de diverses natures, forme de la réponse attendue... Elle ne tiennent pas compte des contenus mathématiques spécifiques en jeu. Nous considérons maintenant un exemple dans lequel à l'opposé ces contenus mathématiques occupent une place prépondérante.

Analyser a priori la trigonométrie en 3^e^ dans Mathenpoche.

Cet exemple est issu d'un travail réalisé au sein du groupe de recherche Enseignement des Mathématiques et Usage en Ligne d'Exercices (Groupe EMULE, organisé à l'IUFM de Bretagne dans le cadre du projet GUPTEn[9], en partenariat avec l'INRP, http-EMULE). Dans ce groupe nous avons suivi l'emploi de bases d'exercices en ligne par des enseignants du primaire et du collège. Nous avons en particulier, dans ce cadre, observé deux séquences de trigonométrie en classe de 3e (Bueno-Ravel et Gueudet 2007). Les questions de recherche portaient sur les choix des enseignantes, les raisons et les conséquences de ces choix. Ici nous donnons simplement quelques exemples relevant de l'analyse a priori du contenu de trigonométrie de MEP ; dans la suite (parties 2 et 3) nous nous appuierons à différentes reprises sur des données issues des deux séquences qui ont été observées, afin d'accentuer la cohérence des différentes directions d'analyse articulées qui peuvent se déployer à partir d'un même enseignement.

Nous avons adopté dans cette recherche une perspective institutionnelle, afin de prendre en compte dans nos analyses le système de conditions et de contraintes pesant sur les choix des enseignantes à différents niveaux de détermination (Chevallard 2002). Ainsi le premier type d'analyse porte sur la structuration des organisations mathématiques proposées par MEP aux différents niveaux (pour la classe de 3e).

Les exercices MEP sont tout d'abord répartis en deux domaines : Numérique et Géométrie (le même pour les 4 niveaux de classe). C'est un choix différent de celui des programmes, qui distinguent « Travaux géométriques », « Travaux numériques » et « Organisation et gestion de données, fonctions ». Ce troisième domaine est intégré par MEP dans le numérique.

Le deuxième découpage est en chapitres. Pour le domaine géométrie du niveau 3e il y a 7 chapitres (voir la liste des chapitres sur l'écran MEP ci-dessous). Ces chapitres ne sont pas tout à fait ceux prévus par le programme (référence au programme 2007), qui découpe les contenus en : « Espace » ; « Triangle rectangle : relations trigonométriques, distance entre deux points » ; « Thalès » ; « Vecteurs et translations » ; « Rotation, angles, polygones réguliers ». En particulier la trigonométrie n'apparaît pas comme titre dans les programmes.

Le troisième découpage est celui qui fournit les séries d'exercices. Pour le chapitre « Trigonométrie », il y a 7 séries d'exercices. Les intitulés des séries (voir l'écran ci-contre) sont de deux natures. Il y a des intitulés qui correspondent à un contenu mathématique : « Sinus » ; et des intitulés qui présupposent une fonction didactique. Ainsi « Prendre un bon départ » est l'intitulé qui indique l'établissement des prérequis du chapitre, des révisions nécessaires ; « Synthèse » indique qu'on reprend l'ensemble des objectifs élémentaires du chapitre ; « Problèmes » indique qu'en restant dans le cadre du programme, on sort des exercices techniques ; « Pour aller plus loin » indique qu'on est face à des exercices qui dépassent les simples objectifs de la classe de 3e, et qui ici relèvent plus de ce qui sera fait en seconde.

Le quatrième découpage est celui qui fournit les exercices d'une série. Pour la série « Sinus », il y a ainsi 6 exercices (trois exercices de 10 questions et 3 exercices de 5 questions). L'ordre de ces exercices est important. Le premier exercice est une activité de découverte du sinus dans un triangle rectangle. Ensuite il y a deux exercices d'application immédiate, où il s'agit simplement d'appliquer la formule de sinus, puis inversement de retrouver l'angle concerné quand le rapport de côtés est donné. Ensuite on travaille les types de tâches prévus par le programme et limités au sinus : calculs avec la calculatrice, calcul de la longueur d'un côté, calcul d'un angle. En dehors des exercices de type « découverte », qui sont plutôt pensés comme des supports à un cours, chaque exercice de MEP correspond à un même type de tâche, donc une même praxéologie ponctuelle.

***Figure 10** Structuration des organisations mathématiques dans MEP 3e, géométrie, trigonométrie, série sinus.*

Cette structuration est semblable à ce qui peut être proposé par un manuel (voir en annexe D le

[9] Genèses d'Usages Professionnels des Technologies par les Enseignants.

tableau qui met en regard les contenus de certains manuels, ceux de MEP, et les choix d'une enseignante pour la trigonométrie). La différence essentielle porte sans doute sur le nombre d’exercices proposés, qui est très important : 335 questions en tout. Par ailleurs on constate que les manuels associent l’introduction du sinus et celle de la tangente, alors que MEP prévoit deux séries séparées : sinus et tangente, bâties exactement sur le même schéma, avant de passer à une série où on travaille avec *cos* (vu en quatrième, rappelé dans la série « pour prendre un bon départ »), *sin* et *tan*. Sur l'ensemble du contenu mathématique de MEP, on peut noter que les découpages successifs suivent en partie seulement l'ordre des niveaux de détermination : deux *domaines*, puis des chapitres correspondant aux *secteurs* ; des exercices correspondant aux *sujets* ; seul le niveau des *thèmes* ne correspond pas au découpage en séries. On retient aussi que les choix de MEP ne calquent pas exactement sur ceux du programme pour la trigonométrie ; en particulier MEP semble lui accorder plus d'importance que ce qui est prévu par le programme. Il nous semble que les organisations mathématiques proposées dans MEP en trigonométrie impliquent le recours à plusieurs technologies : en particulier ce qui relève du triangle rectangle d'une part, et du demi-cercle trigonométrique d'autre part. Le recours au demi-cercle trigonométrique est mentionné dans les programmes comme une simple possibilité pour l'introduction des rapports trigonométriques. Ainsi la trigonométrie de MEP serait un *secteur*, alors que celle prévue par les programmes se réduirait à un *thème*.

L'analyse d'une base d’exercices en ligne en termes de niveaux de détermination permet de prendre en compte la ressource à différentes échelles, qui vont de l'ensemble de son contenu à des organisations mathématiques ponctuelles qu'elle contient. La considération de ces organisations mathématiques ponctuelles permet ensuite des analyses plus précises du contenu mathématique en jeu. Nous donnons ici des exemples, relevant encore de la trigonométrie.

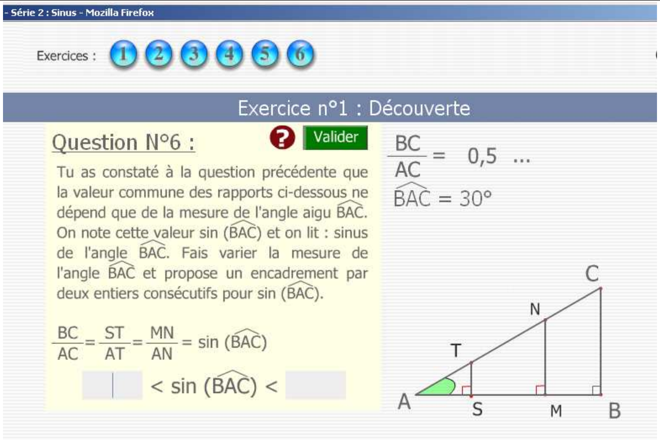
Celle-ci a fait l'objet d'études en didactique des mathématiques (par exemple Berté *et al.* 2004) qui ont montré sa complexité, et questionné les choix retenus dans les programmes. L'une des difficultés connues est que la trigonométrie est, au cours de la scolarité secondaire, rencontrée dans trois cadres : celui du triangle rectangle, celui du cercle trigonométrique, et celui des fonctions trigonométriques. En classe de 3^{e} les approches « triangle rectangle » et « quart de cercle trigonométrique » sont envisagées par le programme. Elles sont toutes deux présentes dans MEP, mais le quart de cercle trigonométrique est relégué à la fin : il fait partie de la série 7, « Pour aller plus loin ». Les fonctions trigonométriques ne font évidemment pas partie du programme de 3^{e}. Mais ceci pose le problème du statut de ces objets, notés : *sin, cos* ...

La rencontre entre la trigonométrie des fonctions trigonométriques et la trigonométrie du triangle rectangle pose divers problèmes dans l'enseignement en classe de 3^{e} et dans MEP. Nous présentons ci-dessous un cas ou la délicate articulation entre les deux cadres a amené dans MEP un choix qui nous semble poser problème, tant sur le plan mathématique que didactique.

Encadrer sinus en classe de 3^{e}

Dans le cadre du triangle rectangle, il est aisé de justifier l’encadrement du sinus entre 0 et 1 : il s’agit d’un quotient de longueurs, qui est donc positif ; et l’hypoténuse est le plus grand côté, donc le quotient est plus petit que 1.

MEP fait le choix de demander aux élèves de déduire l’encadrement du sinus en faisant varier l’angle, pour un triangle rectangle construit avec un logiciel de géométrie dynamique.



Ce choix soulève différentes difficultés :

- dans le cadre du triangle rectangle, il est délicat de donner un sens au sinus de 0° ; encore plus difficile pour 90° ;
- la manipulation ne permet qu'une conjecture de l'encadrement (d'où, dans MEP, le choix du concepteur de demander « deux entiers consécutifs », ce qui ne nécessite en fait aucune manipulation, sachant que la valeur 0,5 affichée doit figurer dans cet encadrement) ;
- la manipulation induit une idée de limite, difficile à appréhender même intuitivement par les élèves de troisième, alors même que l'encadrement comme nous l'avons vu est très aisément justifiable.

Figure 11 *Encadrement de sinus, choix de MEP*

Le cas présenté en figure 11 n'a nullement pour objectif une mise en garde à l'encontre de MEP. Il s'agit d'une mise en garde beaucoup plus générale, ou plutôt de la mise en évidence d'une nécessité de vigilance, et d'accompagnement des professeurs dans l'utilisation des ressources. Ici le mode d'introduction retenu pour l'encadrement est manifestement inadapté. En particulier, la difficulté des contenus mathématiques sous-jacents est sans commune mesure avec l'activité requise pour effectuer la tâche proposée (encadrer 0,5 entre deux entiers consécutifs !). Ce décalage qui peut exister entre les savoirs mathématiques en jeu, et ceux qui sont réellement nécessaires pour obtenir un feed-back « bonne réponse » dans une BE peut être observé dans de nombreux cas, nous y reviendrons dans la partie 2. Un autre point pour lequel une attention particulière nous semble nécessaire concerne les ostensifs retenus par une BE. Ceux-ci ne correspondent pas nécessairement aux ostensifs utilisés habituellement par le professeur. Pour le contenu de trigonométrie, ce type de conflit apparaît à propos des notations cos^{-1}, sin^{-1}, tan^{-1}, qui peuvent intervenir pour le calcul d'un angle, lorsque les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont données**.** La plupart des manuels semblent vouloir éviter ces écritures, qui correspondent clairement au cadre des fonctions trigonométriques et non à celui du triangle rectangle. MEP choisit d'utiliser, l'ostensif sin^{-1} , en l'accompagnant simplement d'une phrase qui souligne qu'on a recours à la calculatrice. Nous présentons dans les parties 2 et 3 de ce chapitre les conséquences que peut avoir ce choix de MEP sur le comportement des élèves comme sur les choix des enseignants.

En nous appuyant sur ces exemples issus de BRAISE, WIMS, et MEP, nous souhaitons souligner plusieurs points. Premièrement une nécessité méthodologique pour toute recherche en éducation impliquant des ressources en ligne de mathématiques : une telle recherche doit comporter une analyse de la ressource, qui devient dans ce cas un élément important d'analyse a priori. Les catégories à retenir pour cette analyse dépendent bien entendu du questionnement retenu ; nous voulons cependant souligner deux directions d'investigation qui nous semblent fondamentales.

Une analyse en termes d'organisations mathématiques et de niveaux de détermination permet de considérer des conditions et contraintes institutionnelles, et les choix des concepteurs de la BE relativement à ces conditions et contraintes pour différents grains d'analyse. Nous notons au passage que cette question du, ou des différents grains à prendre en compte est toujours présente lorsque l'on considère une ressource. Dans le cas d'une analyse effectuée en vue d'un travail de recherche, c'est la question posée qui détermine le ou les grain à étudier. Lorsque l'analyse est destinée à des

acteurs extérieurs à la recherche, le choix des grains doit prendre en compte ce que le chercheur veut donner à voir, mais également ce qui peut être véritablement utile au destinataire, nous le soulignons au paragraphe suivant (§1.2).
Par ailleurs un élément nous semble central : il s'agit de ce que nous appelons *le contrat didactique de la base d'exercices*. Le contrat didactique (Brousseau 1998) est un ensemble de règles, certaines explicites, la plupart implicites, qui déterminent les responsabilités respectives du professeur et des élèves vis-à-vis du savoir en jeu. Une BE peut jouer une partie du rôle habituellement dévolu à l'enseignant. Les caractéristiques de la BE vont déterminer un ensemble de règles explicites ou non, d'attentes portant sur les comportements des élèves. Ceci est particulièrement visible lorsque la BE comporte des messages interactifs adressés à l'élève : message « vrai » ou « faux » à propos de la réponse proposée par l'élève, score, voire conseil sur l'erreur commise et sur le prochain exercice à faire. Mais ce contrat existe aussi pour des BE moins interactives. Les analyses citées ci-dessus à propos de BRAISE et de démarche de résolution de problèmes montrent que le contrat didactique de BRAISE inclut une telle démarche. Et le contrat ne dépend pas simplement de l'environnement des exercices dans la base : les textes mathématiques proposés peuvent être considérés par les élèves comme constituant des références sur les techniques à mettre en œuvre, sur la formulation à adopter, sur les exigences de rigueur. Le contrat de la BE influence le comportement des élèves comme celui de l'enseignant, nous le montrons en détail dans la suite de ce chapitre. Ainsi quelle que soit la question étudiée, la prise en compte d'éléments du contrat embarqué par la BE est nécessaire.

1.2 Analyser une ressource à destination d'acteurs du système éducatif extérieurs à la recherche.

L'analyse d'une ressource en ligne peut être effectuée par des didacticiens à destination de divers types d'acteurs du système éducatif. Ainsi dans Artigue *et al.* (2006), on trouve une grille très détaillée pour réaliser l'évaluation de bases d'exercices en ligne. Cette grille pourra intervenir en particulier pour prendre des décisions relatives à l'achat d'un tel logiciel, dans le cas où celui-ci n'est pas gratuit. Une telle décision doit associer différents acteurs : enseignants, mais également chefs d'établissement, responsables politiques... Ceci influence bien entendu les critères d'analyse retenus. Il s'agit en effet de prendre en compte l'ensemble d'une base d'exercices ; et des critères généraux de type « qualité technique » ou « ergonomie » sont centraux. Mais à cette échelle d'analyse de l'ensemble d'une base d'exercices, il n'est pas concevable d'entrer dans le détail des contenus mathématiques en jeu.
Lorsque l'analyse est faite à destination d'un enseignant désireux de choisir une base d'exercices appropriée pour l'enseignement d'un contenu mathématique donné, les critères sont évidemment tout autres. Même si des critères généraux sur la structure du logiciel peuvent être utiles aux enseignants (ainsi le tableau 1 peut renseigner un enseignant dans son choix entre BRAISE et WIMS), ils doivent être complétés par des critères centrés sur ce contenu mathématique. A propos de la trigonométrie dans MEP, nous avons montré l'exemple d'une analyse portant sur un contenu précis. Mais le regard en termes de découpage du savoir est orienté vers une analyse de transposition : comparaison de la transposition officielle de l'institution, lue dans les programmes, et de la transposition faite dans MEP. Elle peut certes informer un enseignant, mais ne sera pas suffisante pour lui permettre de choisir entre MEP et une autre ressource, pour son enseignement de trigonométrie. Nous n'avons en effet pris en compte ni les procédures que les élèves étaient amenés à développer dans les exercices, ni le contenu des aides etc.
Nous ne pouvons donner un liste de rubriques a priori, indépendantes du savoir en jeu, mais nous allons montrer sur un exemple issu de notre travail le type de rubriques que l'on peut considérer.

De 2003 à 2005, le groupe « Hypermédia et Proportionnalité[10] » a étudié la dynamique des apprentissages réalisés sur une base d'exercices pour la proportionnalité, au niveau CM2-6^{e}. Nous revenons en détail sur ces apprentissages dans la partie 2 ci-dessous. Différentes ressources en ligne ou sur CD-Rom proposaient les contenus sur lesquels notre travail se centrait : Lilimath et MEP en accès libre (rappelons que MEP était peu connu en 2003), SMAO sous forme de CD-Rom (et donc payant). Pour comparer ces ressources nous avons utilisé en premier lieu la grille présentée pour BRAISE et WIMS (tableau 1 ci-dessus). Nous l'avons complétée par l'observation des types de tâches, de la progression proposée, et de critères issus de travaux de recherche en didactique sur l'enseignement et l'apprentissage de la proportionnalité : Tournaire et Pulos (1985), Vergnaud (1997), Boisnard *et al.* (1995). Ces différentes sources nous ont montré la nécessité de prendre en compte en particulier : le rôle des grandeurs dans les exercices ; les procédures possibles pour résoudre les exercices proposés, et celles qui sont explicitement données à voir ; les registres de représentation sémiotique (Duval 1996) ; et les classes de problèmes.

	MEP	**SMAO**	**Lillimath**
Types de tâches	Détermination d'une quatrième proportionnelle, identification d'une situation de proportionnalité, résolution d'un problème de proportionnalité multiple, recherche d'un pourcentage, d'une échelle.	Idem MEP + comparaison	Idem MEP, mais pas d'échelles.
Progression	Progression basée sur les valeurs numériques. Echelles en fin de chapitre Pourcentages dans un autre chapitre (fractions)	Pas de progression visible, mais des problèmes annoncés comme plus difficiles, et des « jeux ».	Problèmes simples, puis présentation du produit en croix, puis application de celui-ci. Pourcentages en fin.
Grandeurs	Grandeurs diverses : prix, longueur, vitesse, volume… Grandeurs discrètes et continues. Peu d'exercices sans grandeurs.	Grandeurs diverses : prix, longueur, vitesse, volume. Grandeurs discrètes et continues. Présence d'exercices purement numériques, sans grandeurs.	Grandeurs diverses : prix, longueur, vitesse, volume. Grandeurs discrètes et continues. Pas d'exercices sans grandeurs.
Procédures	Linéarité multiplicative, linéarité additive (peu), coefficient de proportionnalité mis en avant.	Linéarité multiplicative et coefficient de proportionnalité.	Mise en avant du produit en croix, dont l'application est systématisée.
Registres	Langue naturelle, numérique, tableaux, graphiques.	Langue naturelle, numérique, tableaux, graphiques.	Langue naturelle, numérique, tableaux.
Classes de problèmes	Problèmes de proportionnalité simple, de proportionnalité multiple. Le classement ne tient pas compte des classes de problèmes.	Problèmes de proportionnalité simple, de proportionnalité multiple. Le classement ne tient pas compte des classes de problèmes.	Problèmes de proportionnalité simple, de proportionnalité multiple. Le classement ne tient pas compte des classes de problèmes.

Tableau 2 *Critères d'analyse du contenu relatif à la proportionnalité, niveau CM2 et 6^{e} ; application aux logiciels MEP, Lilimath et SMAO (dans leurs versions 2003).*

Cette analyse a conduit les enseignants du groupe à retenir MEP pour leurs classes, tout en étant conscients de certains défauts repérés (rappelons qu'il s'agit du niveau 6^{e} de MEP, seul niveau qui existait en 2003 ; les niveaux suivants ont fait l'objet d'une toute autre réflexion didactique des concepteurs). Ce travail, même s'il était destiné à des enseignants désirant utiliser une base

[10] Groupe organisé à l'IUFM de Bretagne dans le cadre du projet KANT : «l'intervention et le devenir des connaissances antérieures des élèves dans la dynamique des apprentissages scolaires», avec le soutien de l'INRP.

d'exercices en classe, a été effectué au sein du groupe de recherche. Nous avons souhaité par la suite nous appuyer sur ces analyses pour entreprendre une action didactique s'étendant hors des limites de notre groupe.
Nous avons ainsi travaillé directement avec l'équipe des concepteurs de MEP, pour développer une série d'exercices de proportionnalité au niveau CM2/6^{e} tentant d'apporter des améliorations sur les points repérés comme délicats (cette série est intitulée « liaison CM2-sixième » dans le logiciel, chapitre « proportionnalité »). Cette série est, en partie, structurée selon des classes de problèmes : problèmes de calcul d'une quatrième proportionnelle, problèmes de comparaison, problèmes de proportionnalité simple composée, problèmes de proportionnalité double en particulier. Tous les énoncés correspondent à des contextes concrets et demandent donc une démarche de modélisation. La variété des procédures est encore renforcée, en particulier par la proposition systématique de deux solutions détaillées différentes correspondant à deux procédures.
Pour cette série d'exercices , nous avons réalisé une analyse précise à destination d'enseignants, qui est disponible en ligne sur le site de la CII-Mathenpoche (http-CII Mathenpoche). L'analyse proposée prend la forme d'une page Web qui permet d'avoir une vue d'ensemble de la série, mais également d'accéder via des liens hypertexte à des descriptions plus précises question par question. D'autres liens renvoient à des compléments issus de recherches en didactique, à propos des classes de problèmes de proportionnalité, et des procédures que peut développer un élève pour résoudre un problème de proportionnalité. L'objectif d'une telle page Web n'est plus de choisir une base d'exercices en ligne, mais de faire un choix d'exercices parmi ceux qui sont proposés par MEP, et plus généralement de disposer d'éléments utiles à la préparation d'une séquence utilisant cette série d'exercices. Cette analyse de la série « Liaison CM2-sixième » a par exemple été utilisée dans Gueudet et Le Méhauté (2006*b*) pour proposer des scénarios possibles pour une séquence de proportionnalité en CM2 utilisant MEP.

L'analyse de ressources en ligne réalisée par des chercheurs à destination d'autres acteurs du système éducatif nous semble un enjeu majeur, un produit nécessaire de la recherche. En se référant à la perspective introduite par Chevallard (2005), on peut dire qu'il s'agit pour les didacticiens d'élaborer un *média*, visant à favoriser la construction par les enseignants de *milieux* leur permettant d'adopter une distance critique vis-à-vis de la ressource concernée (qui constitue également un *média*). La contribution à la construction de *milieux*, par l'élaboration de tels *médias* nécessite un travail de grande ampleur, étant donnée la variété des ressources disponibles. Ceci doit cependant être entrepris, car il s'agit d'une responsabilité essentielle du chercheur.

2. Bases d'exercices en ligne et activité des élèves et des étudiants

Du point de vue des élèves et des étudiants, nous nous intéressons aux modifications de leur activité induites par l'introduction dans la classe de BE. Ces questions de modifications d'activité, et de conséquences pour les apprentissages de l'emploi de ressources en ligne ont fait l'objet de nombreux travaux récents. Certains d'entre eux examinent les conséquences de possibilités techniques spécifiques des ressources en ligne. C'est le cas du travail de Lozano et Trigueros (2008) cité ci-dessus : les auteurs ont réalisé des observations d'élèves utilisant les possibilités de représentation, de simulations offertes par le logiciel Enciclomédia. Elles analysent des processus spécifiques de conceptualisation liés à ce recours aux représentations possibles dans le logiciel. D'autres travaux concernent les spécificités de l'apprentissage à distance, qui repose sur d'autres caractéristiques techniques spécifiques des ressources en ligne ; on en trouve des exemples dans Mistfeld et Sanne (2008), qui étudient un enseignement à distance de mathématiques à l'université, ou dans Mistfeld (2008) où est de plus posée la question de l'écrit en mathématiques sur des supports numériques, et des conséquences du recours à des outils sémiotiques numériques. Une

autre possibilité technique qui donne actuellement lieu à des recherches actives concerne le travail collaboratif en réseau, qui peut avoir lieu en présentiel comme à distance (Hurme et Jarvela 2005, White 2008).
Il nous semble que sans même aborder ces potentialités techniques, il est nécessaire d'étudier les modifications de l'activité des élèves et des phénomènes d'apprentissages qu'induit le recours au numérique. Ceci apparaissait déjà dans le travail pionnier de Bookman et Malone (2003). Dans cette étude, les auteurs ont filmé et précisément analysé le travail de binômes d'étudiants travaillant sur un environnement numérique de travail (ENT). En plus de phénomènes liés aux nombreux outils qui étaient à la disposition de ces étudiants (en particulier le logiciel de calcul formel Maple), cette recherche a mis en évidence des questions plus générales sur les comportements des étudiants. Elle a souligné en particulier la nécessité de s'intéresser aux choix de navigation faits par les étudiants : choix d'activer des liens hypertextes, d'avoir recours ou non aux outils disponibles dans l'ENT. Il s'agit plus généralement de s'intéresser à la gestion du temps par les étudiants travaillant en relative autonomie dans un tel environnement. Et les auteurs montrent que ces choix de navigation, cette gestion du temps qui peuvent être très différents d'un étudiant à l'autre dépendent d'une attitude, d'un objectif de départ. Certains étudiants sont tournés vers la production d'un résultat, d'une réponse à la question posée. D'autres semblent avoir un objectif à plus long terme ; ils ne visent pas la simple recherche d'une technique donnant le résultat demandé, mais une construction plus conceptuelle, susceptible de fournir des outils mobilisables dans différentes situations. Prolonger, approfondir les observations formulées par Bookman et Malone (2003) était l'un des objectifs qui ont guidé les recherches que nous avons exposées dans Cazes *et al.* 2007, recherches qui se déroulent elles aussi à l'université. Ce travail était en particulier réalisé en commun avec Claire Cazes et Fabrice Vandebrouck, qui ont poursuivi leur étude des apprentissages réalisés sur une BE (Cazes et Vandebrouck à paraître), et retrouvent les deux tendances distinguées par Bookman et Malone : activité dirigée vers la production d'une solution, activité dirigée vers un apprentissage à plus long terme. Les observations qu'ils ont réalisées leur permettent de montrer que ces deux tendances, qu'ils désignent comme *logique d'action* et *logique d'apprentissage* sont parfois présentes chez un même élève à différents moments d'une séance, selon les situations mathématiques rencontrées. Cazes et Vandebrouck relient ces deux logiques à la dialectique activité productive/ activité constructive, introduite dans le cadre de l'ergonomie cognitive (Rabardel 2005). L'activité du sujet (ici un élève) est finalisée, elle a un objectif de production (réalisation d'une tâche donnée). Dans cette activité, le sujet se construit aussi lui-même et modifie donc les conditions de productions ultérieures.
Nous avons également fait appel dans nos travaux à des éléments théoriques issus de l'ergonomie cognitive, en effectuant toutefois des choix différents de ceux de Cazes et Vandebrouck, nous allons montrer en détail ci-dessous de quelle manière.
Nous distinguons deux niveaux dans l'activité d'un élève ou d'un étudiant au cours d'une séquence de classe qui incorpore une BE :
- le niveau de la résolution d'un exercice particulier : l'activité de l'élève est dirigée vers la résolution d'un exercice, qui peut être proposé sur feuille ou par la BE. Il peut avoir recours pour cette résolution aux différents éléments de l'environnement de cet exercice.
- le niveau du parcours général de l'élève : il s'agit du parcours effectué par l'élève sur la BE durant une séance, qui comporte le choix des exercices à traiter (dans le cas où l'élève est libre de choisir ces exercices dans une liste) et l'emploi des différentes possibilités offertes par l'environnement de l'exercice (consultation de l'aide, de la solution, du cours...). Ici l'objectif de l'activité de l'élève est fortement influencé par les objectifs assignés par l'enseignant à la séance.

Pour étudier les comportements des élèves à ces deux niveaux, et les apprentissages réalisés par ceux-ci lors d'un enseignement mobilisant une BE, nous avons recours à deux types d'approches théoriques.

Nous nous référons tout d'abord à l'approche instrumentale, telle qu'elle a été développée en didactique des mathématiques (Guin et Trouche 2002). S'appuyant sur les travaux de Rabardel (1995), cette approche permet de distinguer l'*artefact* (objet issu d'une production humaine, et destiné aussi à l'activité humaine), et l'*instrument*, qui est composé d'un artefact et de schèmes d'utilisation de cet artefact. Un *schème* (Vergnaud 1996) est défini comme une *organisation invariante* de l'activité, pour une classe donnée de situations (situations ayant des caractéristiques voisines en termes de tâches à accomplir et de conditions à prendre en compte). L'instrument est développé au cours d'une activité finalisée, répétée dans une variété de contextes. Le processus de développement de l'instrument est appelé *genèse instrumentale*. Il comporte deux composantes indissociables : *l'instrumentalisation* (l'usager adapte l'artefact à ses habitudes de travail), et *l'instrumentation* (les contraintes de l'artefact contribuent à structurer l'action de l'usager).
Les BE peuvent bien entendu être considérées comme des artefacts, ou comme des ensembles d'artefacts. Les fonctionnalités de la BE : feed-back, aide, font partie de cet ensemble d'artefacts, mais c'est également le cas des textes mathématiques proposés par la BE. Ce ne sont pas les caractéristiques technologiques de la BE qui nous conduisent à la considérer comme un ensemble d'artefacts ; nous considérerions de même un manuel scolaire comme un artefact ou un ensemble d'artefacts, nous revenons sur ce point en partie 3.
Nous faisons par ailleurs appel à la notion de contrat didactique (Brousseau 1998).
Le travail sur une BE induit pour des élèves comme pour des étudiants une situation didactique spécifique, différente de ce qui pourrait avoir lieu en papier-crayon. Le contrat didactique en particulier est modifié. D'une part, les élèves se trouvent confrontés à de nouvelles responsabilités : choix d'un exercice dans une liste ; consultation de l'aide ou non etc. D'autre part, une BE incorpore comme nous l'avons dit ci-dessus (§1.1) son propre contrat. Certains comportements d'élèves sont attendus par les concepteurs de la BE, d'autres représenteront des ruptures de contrat (Cazes *et al*. 2007).
Nous montrons dans cette partie, en nous appuyant sur des exemples issus de notre travail, que ces deux approches théoriques permettent de manière complémentaire d'éclairer l'activité des élèves travaillant avec une BE, au niveau de la résolution d'un exercice (partie 2.1) comme à celui du parcours sur la BE (partie 2.2). Même si certaines similarités peuvent exister entre des niveaux scolaires très différents, il est clair que les analyses portant sur les comportements et sur les apprentissages réalisés avec une base d'exercices ne seront pas identiques pour des élèves de primaire ou de collège et pour des étudiants de l'université, nous le montrons dans les exemples retenus pour illustrer cette variété.
Par ailleurs, nous nous interrogeons non seulement sur les conséquences des résultats de ces analyses, mais plus généralement sur l'articulation entre approche instrumentale et contrat didactique.

2.1 Résolution d'un exercice dans une séquence intégrant une base d'exercices en ligne.

Nous considérons ici un élève (ou un binôme d'élèves) qui doit accomplir une tâche mathématique au cours d'une séquence intégrant une BE. L'exercice correspondant peut être proposé par la BE, ou donné à faire sur papier suite à un travail avec la BE.
En adoptant la perspective de l'approche instrumentale, on considère que cet élève dispose pour accomplir cette tâche d'un ensemble d'artefacts : le texte de l'exercice ; éventuellement d'autres textes qui figurent dans l'environnement de l'exercice : indications, descriptions de méthodes ; les feed-backs possibles ; certains outils comme une calculatrice... L'élève développe à partir de ces artefacts un instrument pour accomplir la tâche mathématique donnée. Cette genèse instrumentale comporte un double mouvement d'instrumentation et d'instrumentalisation. Dans les comportements des élèves, certains aspects relèvent plutôt de l'instrumentation, et d'autres plutôt de

l’instrumentalisation : nous en donnons des exemples ci-dessous.

Nous avons souligné ci-dessus le point délicat constitué par le recours à la notation sin^{-1} dans le logiciel (§1.1). Nous avons observé deux séquences de trigonométrie avec MEP dans deux classes de 3e du même collège. Cette notation très spécifique n'était pas employée au cours de ces séquences par les deux professeurs (que nous nommerons Carmen et Fabienne), qui demandaient même explicitement aux élèves de ne pas l'utiliser, lorsqu'ils voyaient que ceux-ci l'écrivaient. Lors de l'évaluation finale, un exercice demandait le calcul d'un angle, connaissant les longueurs des côtés du triangle. Dans la classe de Carmen 6 élèves sur 26 ont employé cette notation (de manière juste pour 4 d’entre eux) ; dans la classe de Fabienne 8 élèves sur 28 l’ont employée (de manière juste pour 6 d’entre eux). Dans une copie, un élève a même repris mot pour mot une formulation que l’on peut trouver dans MEP : « On effectue à la calculette : $sin^{-1}(5 :8)$ ».

Figure 12 *Textes mathématiques dans une BE et instrumentation pour l'élève : l'exemple de MEP et* $\sin^{-1}$.

On peut interpréter cet exemple en termes d'instrumentation. Le type de tâche mathématique en jeu est « calculer un angle dans un triangle rectangle en connaissant les mesures des longueurs du côté opposé et de l'hypoténuse ». Les élèves ont rencontré ce type de tâche pour la première fois dans MEP, qui propose une technique précise de résolution, avec une formulation particulière : écriture de la formule donnant le sinus de l'angle, sans valeurs numériques dans un premier temps, puis en remplaçant les longueurs par leurs valeurs numériques. Ecriture de la phrase « On effectue à la calculette $sin^{-1}(...)$ » , réalisation effective du calcul (avec la calculette de MEP, ou la calculette personnelle de l'élève) puis écriture du résultat final (arrondi au dixième de degré). Ces élèves se sont approprié le texte mathématique proposé par MEP. Confrontés à une tâche mathématique du même type, y compris dans un environnement papier-crayon, ils reproduisent un texte semblable.
On peut également interpréter ce comportement en termes de contrat didactique. Ici l'effet de contrat est particulièrement visible, car le contrat MEP qui recommande d'écrire « On effectue à la calculette $sin^{-1}(...)$ » est opposé au contrat habituel que l'enseignante veut installer dans la classe, ce qui va la contraindre à des ajustements (détaillés en partie 3, §3.2). L'élève qui suit le contrat MEP est donc en rupture avec le contrat habituel de la classe.
Cette reproduction fidèle de formulation est un élément saillant de l'apprentissage avec des BE. En effet, les élèves vont rencontrer cette formulation à plusieurs reprises, voire de nombreuses reprises (un élève qui ne ferait qu'une seule fois l'exercice MEP mentionné la rencontre 10 fois). L’enseignant, de manière similaire, répète dans certains cas un discours précis, dans l’objectif que les élèves se l’approprient ; mais le nombre de répétitions est certainement nettement plus élevé dans une base d’exercices. Le travail sur le logiciel conduit ainsi en un court laps de temps au développement d’une nouvelle règle de contrat didactique. Ceci nous semble être un effet d’instrumentation, et de contrat didactique, très important à prendre en compte lorsqu’on s’interroge sur l’apprentissage réalisé sur une BE. Du point de vue de l’instrumentalisation, se produisent également des phénomènes spécifiques, nous en donnons des exemples ci-dessous.

Proportionnalité en 6e (extrait de Gueudet 2007) Alice est une élève de sixième, qui a travaillé sur MEP dans le cadre de l'enseignement de proportionnalité déjà évoqué ci-dessus (§1.2). Elle a passé quatre séances d'une heure sur MEP. Pour les exercices de calcul d'une quatrième proportionnelle, elle a développé une stratégie de résolution stable. Les exercices proposés ne contiennent que des valeurs numériques entières (car ils doivent pouvoir être abordés sans difficultés par des élèves de CM2). Alice sait que le résultat numérique à produire doit également être un entier. Elle sait par ailleurs que lorsque l'on résout des exercices de proportionnalité, on effectue des multiplications et des divisions pour parvenir au résultat. Elle fait donc diverses multiplications et divisions avec les données numériques de l'énoncé (ce qui est simplifié par la mise à disposition par MEP de la calculatrice). Lorsqu'elle trouve une réponse entière, elle la propose comme solution à MEP. Si la réponse est erronée, elle reçoit un feed-back « faux ». Elle peut alors recommencer d'autres opérations, pour trouver un second résultat entier à proposer. *Algèbre linéaire en préparation au CAPES (extrait de Gueudet 2006b)* Nous avons organisé un enseignement expérimental en préparation au CAPES de mathématiques. Dans une première phase de cet enseignement, les étudiants travaillaient sur le thème des suites sur BRAISE ; dans une seconde phase, il s'agissait de travailler sur l'algèbre linéaire sur WIMS. Parmi les exercices proposés par WIMS, certains portaient sur la

détermination de la dimension de sous-espaces caractérisés comme images ou noyaux d'applications linéaires. C'était par exemple le cas de l'exercice suivant :
« Soit *E* un espace vectoriel de dimension 35, et *f* un endomorphisme de *E*, tel que *dim (Imfof)*=13. Déterminer la valeur minimum de *dimKerf* ».
Les deux valeurs numériques de l'énoncé sont variables. WIMS n'offre pas pour cet exercice la possibilité de première réponse fausse. Mais l'étudiant peut soumettre une réponse, observer la valeur de la solution donnée avec le feed-back « faux », puis relancer l'exercice, et refaire une tentative avec de nouvelles valeurs numériques. Les étudiants que nous observions ont mis en œuvre une telle stratégie, pour cet exercice comme pour d'autres portant sur des questions semblables de dimension. A propos de l'exercice cité, aucun étudiant de CAPES ne l'a réussi à sa première tentative. En revanche, après quelques relances de l'exercice, tous étaient capables de donner la bonne réponse numérique, et donc d'obtenir un feed-back « juste ». Nous les avons ensuite interrogés, en leur demandant s'ils savaient faire cet exercice. La moitié d'entre eux a répondu positivement, et la moitié négativement, alors que tous savaient faire la même chose : obtenir un feed-back « juste » sur WIMS, sans être capables de faire la démonstration associée.

Figure 13 *Environnement d'un exercice, instrumentalisation et détournements d'usages.*

Ici, dans deux contextes institutionnels très différents, avec deux BE et deux contenus mathématiques différents, on observe des phénomènes qui présentent des similarités, et que nous interprétons comme des phénomènes d'instrumentalisation, témoignant ici de détournements d'usage de l'environnement des exercices proposés par la BE.
L'élève Alice, comme les étudiants de CAPES, savent qu'ils sont à la recherche d'un résultat numérique qui est un nombre entier. Ils ont élaboré une stratégie de recherche de ce résultat par essais et erreurs. Il s'agit de développer une combinatoire simple des données numériques de l'énoncé, pour obtenir une valeur entière, donc susceptible de constituer la bonne réponse. Dans le cas de Alice le critère d'arrêt (résultat entier) la mène au bon résultat en quelques coups, et le feed-back de la BE lui permet de tester une première réponse fausse. Dans le cas des étudiants de CAPES, le feed-back indique de même si la réponse est juste ou fausse, et il est possible en relançant l'exercice d'obtenir un même énoncé avec des valeurs numériques différentes pour refaire un essai. On observe donc dans les deux cas un détournement du feed-back.
Nous faisons cependant l'hypothèse que des connaissances mathématiques soutiennent cette stratégie, connaissances que nous interprétons en termes de théorèmes-en-actes.
Nous avons observé l'activité d'Alice durant 4 séances d'une heure de travail sur MEP. L'observation de comportements stables de cette élève dans plusieurs contextes relatifs au même type de tâches nous conduit à faire l'hypothèse qu'elle a développé un schème d'utilisation de MEP pour les exercices de calcul d'une quatrième proportionnelle. Ce schème inclut le recours au théorème-en-actes suivant : « on obtient la solution d'un problème de proportionnalité dont les données numériques sont entières en effectuant des multiplications et des divisions dont le résultat est entier». Cette hypothèse est fondée sur le fait qu'Alice ne tente pas simplement de combiner les données numériques de l'énoncé pour obtenir un résultat entier. En particulier elle n'effectue pas d'additions ou de soustractions ; ceci nous semble montrer qu'elle a recours à ce théorème-en-actes relatif à la proportionnalité. Celui-ci associe des connaissances mathématiques et des connaissances sur le contrat didactique. Il aurait pu être utilisé également avec un support papier, surtout au cas où l'élève a accès à une calculatrice pour tester les multiplications et divisions possibles. Le feed-back de MEP, et la possibilité de première réponse fausse, renforcent toutefois l'efficacité du recours à ce théorème-en-actes.
Dans le cas des étudiants de CAPES, nous ne disposons pas d'observations suffisamment longues et variées pour nous permettre de supposer le développement d'un schème. Le résultat numérique attendu repose sur l'inégalité suivante : $2\dim(Kerf) \geq \dim E - \dim Im(fof)$ (et le plus petit entier vérifiant cette inégalité constitue la réponse à la question posée). Il est aisé de conjecturer cette inégalité, après l'observation de quelques cas différents ; mais sa justification est délicate. Les étudiants nous ont déclaré au cours de la discussion qui a eu lieu lors de la correction de l'exercice qu'ils ont eu recours à un résultat du type « pour avoir la dimension d'un noyau, il faut faire la dimension de l'espace moins celle de l'image », résultat que nous considérons comme un théorème en actes. Les fonctionnalités de WIMS qui sont détournées sont le feed-back, avec la réponse juste, et la

possibilité de relance de l'exercice. On pourrait imaginer un dispositif recourant à WIMS, à propos du résultat en jeu, pour permettre aux étudiants de formuler une conjecture, en exploitant ainsi positivement le détournement, avant de s'engager dans une démonstration. Mais la résolution de cet exercice est trop délicate pour qu'une telle mise en oeuvre soit envisageable (et il s'agit de plus d'un résultat très marginal d'algèbre linéaire). Il n'est donc pas surprenant que les étudiants ne cherchent pas une preuve. Ce qui nous semble significatif en revanche est le fait que la moitié des étudiants aient déclaré qu'ils avaient « réussi » l'exercice. Notre hypothèse est que le contrat didactique de la BE joue un rôle très fort. Lorsque l'étudiant travaille sur la BE, il entre dans ce contrat, même si l'ensemble est immergé dans le contrat habituel de la classe. Les réponses contradictoires que les étudiants nous ont faites à la question : « savez-vous faire cet exercice ? » témoignent d'un conflit entre le contrat de la BE, qui leur a adressé un feed-back « Réponse juste » et celui de la classe, où on n'attend pas habituellement de réponse numérique que les étudiants seraient incapables de justifier. Dans certains cas cependant les élèves ou les étudiants sont en rupture avec le contrat de la BE ; nous en donnons un exemple ci-dessous , à propos du logiciel BRAISE.

Nous avons décrit au chapitre 1 (partie 4) l'environnement d'un exercice de BRAISE : différents types d'aides, la solution complète, des idées à retenir etc. Pour une séance de travaux dirigés durant laquelle les étudiants travaillent sur BRAISE, les comportements attendus, une fois affichée la liste des exercices correspondant aux mots-clés retenus pour la séance, sont les suivants :

- Résoudre un exercice sur papier, et passer au suivant sans avoir consulté d'autre écran que celui donnant l'énoncé de l'exercice (comportement désigné comme "résolution simple" par la suite) ;
- Résoudre un exercice sur papier puis consulter la solution pour vérifier la solution personnelle (comportement désigné comme "résolution avec vérification"par la suite) ;
- Faire une tentative de résolution, et en cas de difficulté consulter les aides jusqu'à parvenir à une solution personnelle, puis effectuer ou non une vérification de la solution (comportements désignés comme "résolution avec aides simple" ou "résolution avec aides et vérification" par la suite) ;

Nous examinons ici l'activité d'étudiants lors de leur travail sur l'exercice dont l'énoncé est donné ci-dessous :

Etudier la convergence de la suite définie par $u_{n+1}=1/u_n$, avec u_0 un réel non nul.

Sept binômes d'étudiants de première année (désignés par la suite comme B1,...,B7) ont travaillé au cours d'un enseignement sur les suites utilisant BRAISE sur cet exercice, auquel ils ont accédé en choisissant le thème "suites récurrentes", et le niveau "facile". L'analyse des fichiers de suivi des étudiants, qui donnent la liste de toutes leurs actions sur l'ordinateur, et l'observation directe en séance, conduisent aux constats suivants.

Les binômes B3 et B6 effectuent une "résolution simple" de l'exercice. Le seul texte de BRAISE qu'ils utilisent est l'énoncé de l'exercice.

Le binôme B7 effectue une "résolution avec vérification": les étudiants travaillent 16 minutes, puis vérifient leur solution dont ils sont déjà relativement sûrs.

Le binôme B1 effectue une "résolution simple avec aides". Ils consultent l'aide graphique après 7 minutes de recherche, puis travaillent encore 28 minutes sur l'exercice, et passent à un autre exercice sans contrôler les solutions.

Les trois binômes restants ont rapidement lancé les aides, sans avoir effectué auparavant une véritable recherche. Ils ont ensuite effectué des choix différents :

- Le binôme B2 ferme les aides, et ouvre la solution. Cette solution est lue attentivement puis refermée ; elle est en fait utilisée comme une aide supplémentaire. Les étudiants, après l'avoir lue, la referment, et ne tentent pas de la reproduire à l'identique ; ils cherchent tout de même une solution personnelle.
- Le binôme B4 regarde l'aide graphique, puis se contente de lire la solution sans faire aucune tentative personnelle.
- Le binôme B5 fait une lecture systématique de tous les textes disponibles, et travaille ensuite sans ces textes pendant 11 minutes.

Figure 14 *Comportement d'étudiants sur BRAISE : un exercice sur les suites récurrentes (Cazes et al. 2007).*

Ici on peut considérer que les comportements cités comme comportements attendus décrivent une part du contrat didactique de BRAISE. Ainsi les comportements des binômes B2, B4 et B5 peuvent être interprétés comme des ruptures de contrat. Est-ce que ces ruptures de contrat coïncident avec des détournements d'usage des différents artefacts disponibles (ici les éléments de l'environnement d'un exercice dans BRAISE) ? Il faut être prudent sur ce point, l'exemple présenté ne correspondant qu'à la résolution d'un exercice. Les comportements observés lors du travail sur cet exercice ne sont pas des comportements stables des binômes d'étudiants concernés. Selon l'exercice rencontré, et

même au cours de cette séance, chaque binôme a pu développer divers comportements.
On remarque cependant deux tendances qui sont présentes dans toutes les occasions de travail sur BRAISE :
- certains étudiants lancent les aides systématiquement avant toute tentative personnelle ;
- l'emploi de la solution comme une aide supplémentaire est fréquent. Il ne s'agit pas de la recopier, mais de la lire, de la refermer puis de “chercher” une solution. Ici ce détournement peut avoir des conséquences positives, puisque les étudiants s’engagent dans la lecture de textes mathématiques (rappelons que l’un des objectifs des concepteurs de BRAISE était précisément d’offrir à la lecture de tels textes).
Ces comportements réguliers peuvent être compris comme des ruptures de contrat didactique. On peut également les regarder comme des détournements d'usage de l'environnement d'un exercice. Plus précisément, l'approche instrumentale permet de les interpréter comme des règles d'action pour la tâche de production d'une solution écrite d'un exercice de BRAISE. Quels invariants opératoires sous-tendent ces règles d'action ? Consulter d'emblée la solution montre que les étudiants sont à la recherche de modèles à transférer. Cette direction serait à approfondir, mais on peut inférer ici l'existence d'un invariant opératoire du type : “Pour produire la solution d'un exercice, il faut s'inspirer de solutions voisines”. On retrouve ici un comportement fréquent d’étudiants travaillant avec des livres d’exercices corrigés, comportement que Lithner (2003) désigne comme « mimicking strategies ». Cet invariant opératoire peut précisément découler du contrat didactique en vigueur à l'université, nous avons vu au chapitre 1 que les attentes réelles de l'université étaient tournées vers la reproduction de méthodes pour des exercices semblables à ceux qui ont été vus en travaux dirigés (Lithner propose également des interprétations en termes de contrat didactique). Ceci nous amène à poser la question du lien entre invariants opératoires et contrat didactique. Les concepts-en-actes et théorèmes-en-actes relèvent du cognitif ; ils s'élaborent dans l'activité. Mais cette activité en situation, dans le cas d'un élève, est influencée par les règles du contrat didactique. Ainsi le contrat contribue à façonner ces invariants opératoires.

2.2 Choix de parcours dans une séance intégrant une base d’exercices en ligne.

Lors du travail sur une BE, selon les caractéristiques de celle-ci et les choix de l'enseignant, l'élève peut choisir quel(s) exercice(s) il décide de traiter. En début de séance, l'élève accède dans la plupart des cas à un écran proposant une liste d'exercices ; il peut la traiter dans l'ordre proposé ou non. Il peut également, dans des logiciels comme MEP ou WIMS, relancer un exercice si il n'est pas satisfait de sa note.
L'élève peut donc avoir à remplir de nouvelles responsabilités, comme le choix de travailler sur tel ou tel exercice, si l'enseignant a laissée accessible une liste d'exercices ; le choix de faire afficher l'aide ou la solution. Lorsque l'aide ou la solution sont affichées, l'élève a la responsabilité de les lire et de décider si il les a suffisamment comprises avant de refermer la fenêtre correspondante. Ce sont des responsabilités de choix de parcours, qui sont comparables aux responsabilités qu’exerce l’étudiant dans le contexte de son travail personnel, avec un livre d’exercices corrigés par exemple. Dans le même temps l'accès à la solution de l'exercice ou à des aides peut réduire la responsabilité exercée par l'élève vis-à-vis du contenu mathématique en jeu, une partie de cette responsabilité étant alors déléguée à la BE. Par ailleurs une BE incorpore comme nous l'avons souligné ci-dessus son propre contrat, qui ne coïncide pas nécessairement avec celui en vigueur dans la classe. Les comportements que l'on observe chez les élèves ou les étudiants peuvent être éclairés par l'explicitation de ces différents contrats didactiques, nous en donnons deux exemples ci-dessous.

Lors des séquences de proportionnalité en 6^{e} déjà évoquées (§1.2), les élèves travaillaient par binômes sur MEP durant quatre séances d'une heure, et devaient pour chaque exercice abordé écrire sur papier leur réponse, et leur solution personnelle. Une séance de synthèse en classe suivait, et une évaluation finale clôturait la séquence.

Les observations directes ont montré que les élèves avaient systématiquement recours à la calculatrice proposée sur MEP ; très peu recours aux aides ; et développaient par ailleurs des comportements très divers, pour leur choix d'exercices, leur décisions de relancer un exercice ou non etc. Il est toutefois possible de rassembler ces comportements en catégories cohérentes, nous retenons les catégories suivantes. ***Faire une fois chaque problème*** Ces élèves font chaque exercice qu'ils abordent une fois et une seule, quelle que soit leur note finale à l'exercice. Il les traitent le plus souvent dans l'ordre d'apparition à l'écran. ***Suivre les conseils de Mathenpoche*** Ces élèves recommencent systématiquement l'exercice si ils obtiennent une note de 3 sur 5 ou moins. Ils suivent les suggestions de MEP. En effet, à partir de 3 sur 5 et en dessous, un conseil est affiché qui suggère de recommencer l'exercice. ***Visiter les exercices*** Les élèves qui adoptent ce comportement ne font qu'une fois chaque question, dans un temps très court. ***Maximiser le score*** Ce comportement consiste à relancer un exercice complet dès la première erreur, pour obtenir un score de 5 sur 5.

Figure 15 *Comportements d'élèves sur MEP : l'exemple d'un enseignement de proportionnalité en 6^e^ (Gueudet 2007*a*).*

En termes de contrat didactique, et de conflit de contrats, on peut proposer les interprétations suivantes.
Les élèves qui *font une fois chaque problème* travaillent sur l'ordinateur comme lors des séances traditionnelles, face à une liste d'exercices. Les élèves qui adoptent ce comportement se réfèrent ainsi au contrat didactique habituellement en vigueur dans la classe.
Les élèves qui *suivent les conseils de MEP* semblent quant à eux donner la priorité au contrat didactique de MEP.
Les deux comportements suivants sont « hors contrat » ; c'est à dire qu'ils ne correspondent ni au contrat habituel de la classe, ni à celui de MEP. On peut penser qu'ils résultent des choix particuliers de scénario que nous avions faits pour cette séquence, qui différent nettement du contrat habituel. Il est également possible, de manière plus générale, qu'il s'agisse de conséquences d'un affaiblissement des règles usuelles dues au travail sur MEP, considéré comme non-scolaire.
Les élèves qui *visitent les exercices* peuvent ainsi avoir été perturbés par le grand nombre d'exercices accessibles. Habituellement l'enseignante de la classe indique exactement les exercices qui doivent être faits. Ici cette contrainte n'existait pas, il était nécessaire d'opérer un choix non exhaustif. Ces élèves sont restés influencés par le contrat habituel dans lequel tous les exercices doivent être traités.
Pour les élèves qui cherchent à *maximiser le score* l'indication du score et la possibilité de relancer l'exercice entrent en conflit. C'est un conflit de contrat interne à MEP, auquel certains élèves sont probablement particulièrement sensibles, selon l'importance qu'ils attribuent aux notes reçues.
En se plaçant du point de vue de l'approche instrumentale, on peut dire que ces élèves sont tous face à une même tâche, que l'on pourrait désigner comme « Choisir des exercices dans une liste et les traiter ». Toutefois ils associent à cette tâche différents buts, selon leur sensibilité aux contrats didactiques en présence, ce qui les conduits à construire des instruments différents.

L'attention portée à l'élève travaillant avec une BE nous a donc amenés à considérer que la BE peut donner lieu au développement par l'élève d'un instrument ; les deux niveaux que nous avons distingués mettent en évidence le fait qu'il peut s'agir d'un instrument pour faire des mathématiques, mais également d'un instrument pour apprendre des mathématiques. De plus les exemples d'analyses donnés ci-dessus montrent que l'emploi de BE induit des processus dynamiques qui relèvent simultanément de la genèse instrumentale et de la recherche de nouveaux équilibres de contrat didactique. Les deux approches sont bien entendu très différentes. L'approche instrumentale accorde une place privilégiée aux artefacts, à la manière dont un sujet les transforme en se les appropriant, et conduit le chercheur à tenter d'identifier des construits psychologiques, à inférer des invariants opératoires. Le contrat didactique centre l'attention sur les responsabilités respectives des élèves, de l'enseignant et de la BE vis-à-vis du savoir en jeu. Mais l'artefact est un élément de la situation didactique, et analyser la genèse instrumentale exige de prendre en compte cette situation, en considérant en particulier les différentes règles de contrat. Nous retenons deux directions privilégiées dans l'activité des élèves et des étudiants avec une BE qui sont susceptibles d'être éclairées par un recours conjoint aux notions de contrat didactique et de genèse instrumentale.

- Dans le cas d'un phénomène d'instrumentalisation qui relève d'un détournement d'usage, si on considère comme nous l'avons fait ici que l'artefact incorpore son propre contrat didactique, le détournement est une rupture de ce contrat. Ruptures de contrat et détournements d'usages sont toujours considérés attentivement par les chercheurs, car ils témoignent du processus de recherche d'un contrat dans le premier cas, et du processus de genèse instrumentale dans le second. Pour un artefact de type BE, ces deux processus sont fortement associés.
- Une analyse précise des schèmes conduit à formuler des hypothèses sur les invariants opératoires qui sous-tendent l'activité. Ces invariants sont progressivement forgés par le sujet en situation. Le développement de ces invariants est donc influencé par les règles du contrat en vigueur.

Naturellement, les règles de contrat dont il faut tenir compte pour une telle analyse ne proviennent pas toutes de l'artefact. Il faut en particulier être attentif au *scénario* choisi par l'enseignant. Comme l'écrit Trouche (2002), en utilisant la notion d'*orchestration instrumentale* : “la mise en place des orchestrations influe sur le contrat didactique” (p.273). C'est cette importance des scénarios, des orchestrations, qui nous a conduits à nous intéresser d'abord à la notion de scénarios, puis plus largement à l'activité de l'enseignant utilisant une base d'exercices. Ceci a donné lieu à différentes recherches que nous présentons dans la partie suivante.

3. Genèses instrumentales et genèses documentaires pour le professeur

Les travaux que nous exposons ici sont encore en cours, nous présentons donc l'état actuel de recherches susceptibles d'évolutions ultérieures importantes.

Comme nous l’avons rappelé ci-dessus, la nécessité de prise en compte de l'enseignant dans les travaux relevant de l'approche instrumentale est soulignée par Trouche (2002) qui introduit la notion *d'orchestration instrumentale*. Il s'agit d'examiner comment le professeur peut intervenir sur les genèses instrumentales des élèves. Mais on ne questionne pas, à travers la notion d'orchestration instrumentale, d'éventuelles genèses pour le professeur. Or l'idée qu'une telle genèse puisse avoir lieu s'impose naturellement lorsque l'on considère un artefact de type base d’exercices en ligne. En effet, une base d’exercices en ligne constitue de manière évidente un outil professionnel pour le professeur qui fait le choix de l'utiliser avec ses élèves. Ainsi la question d’un recours possible à l'approche instrumentale, telle qu'elle a été développée en didactique des mathématiques, pour étudier l’activité instrumentée d’un sujet non plus élève mais enseignant se pose.

Ceci demande un nouveau développement de cette approche : nous avons montré ci-dessus qu'elle permettait l'analyse de phénomènes d'apprentissage avec une base d'exercices en ligne ; il s'agit maintenant de l'étendre à un sujet enseignant. L'approche instrumentale étant enracinée dans l'ergonomie cognitive, on pourrait considérer son emploi pour étudier une activité professionnelle comme un retour aux sources, ne devant pas soulever de difficulté particulière. Toutefois la complexité des pratiques des enseignants demande au chercheur de nombreuses précautions dans le recours à l'ergonomie cognitive pour étudier celles-ci, comme le montrent bien tous les travaux effectués dans le cadre de la double approche développée par Robert et Rogalski (2002).

Dans notre travail, nous avons poursuivi simultanément un objectif de développement d’outils théoriques, et un objectif de description et d’analyse des *usages* de bases d’exercices en ligne par les enseignants. Dans les recherches qui considèrent les *usages* des TIC, ce terme est utilisé pour désigner un comportement régulier, témoignant d’une appropriation, et dépassant ainsi une

utilisation ponctuelle (Proulx 2005). C'est également en ce sens que le terme usage était employé au sein du projet Genèses d'Usages Professionnels des Technologies chez les Enseignants auquel nous avons participé (Lagrange *et al.* 2007). Il s'agit donc pour nous, dans un premier temps, d'observer si une telle appropriation des BE est observable dans l'activité des enseignants. Nous avons réalisé une étude en ce sens, en ayant recours à la notion de *scénario* ; nous présentons celle-ci en §3.1.
Nous avons pu ensuite, en adoptant une perspective de genèse instrumentale, interpréter les *usages* comme des observables de l'activité du sujet, que l'on peut retrouver dans différents contextes pour une même finalité, et qui conduisent le chercheur à inférer l'existence d'un *schème*, et donc de *règles d'actions*, et d'une structure cognitive induisant les usages observés : un, ou plusieurs *invariants opératoires.* Ceci nous permet en particulier de démêler la complexité des usages ; de discerner des phénomènes d'*instrumentalisation* et d'*instrumentation*, et de proposer une étude organisée des genèses distinguant des classes de situations plus ou moins générales, liées ou non à un contenu mathématique précis, associées à différents déterminants des genèses ; nous détaillons cette démarche en §3.2. Nous montrons également en §3.2 comment l'étude précise des genèses des professeurs nous a progressivement conduite à modifier notre regard, et à adopter une perspective élargie, prenant en compte tous les types de ressources susceptibles d'intervenir dans l'activité professionnelle des professeurs. Ce changement de perspective nous a amenée à prendre part au développement d'une nouvelle approche théorique, qui introduit la notion de genèse documentaire, et propose de considérer que le travail documentaire est au cœur de l'activité professionnelle des professeurs : nous exposons les premiers éléments de cette approche au §3.3.

3.1 Usages de bases d'exercices en ligne et scénarios

Le travail présenté ici a été effectué dans le cadre du groupe EMULE déjà mentionné dans les deux parties précédentes. Observer d'éventuelles évolutions dans les pratiques d'enseignants utilisant en classe une base d'exercices, traduisant une appropriation de la BE, dirigée vers le développement d'usages, nécessite de déterminer des dimensions de cette activité qui doivent être prises en compte. Afin de disposer de descriptions organisées des pratiques, permettant l'identification de ces dimensions pertinentes, nous avons retenu la notion de *scénario*. Nous avons dans un premier temps précisé cette notion, et les caractéristiques pertinentes à prendre en compte dans un scénario pour notre étude (Gueudet 2006*a*). L'objectif de ce travail était de disposer d'une grille descriptive permettant la description des usages développés par les enseignants du groupe. Cette description était principalement faite par les enseignants eux-mêmes, a priori ou a posteriori, et plus rarement par un observateur extérieur, dans le cas où une telle observation pouvait avoir lieu. Dans une seconde phase, les grilles remplies ont été analysées, pour observer l'évolution des pratiques des enseignants membres du groupe EMULE (Bueno-Ravel et Gueudet 2008).

Les scénarios : quelles caractéristiques retenir ?
Précisons donc tout d'abord la notion de *scénario* utilisée dans notre travail. De nombreux chercheurs parlent de *scénarios d'usage*, et nous avons fait de même à diverses reprises. Ici toutefois nous n'aurons pas recours à cette expression, étant donné le sens particulier que nous avons conféré au terme *usage* ; il serait nécessaire de parler plutôt de *scénario d'utilisation*, aucune régularité n'étant supposée a priori ; nous nous contenterons du terme *scénario*. La notion de scénario a été dans un premier temps introduite par Vivet (1991), dans le cadre de l'étude de tuteurs intelligents, pour permettre en particulier la prise en compte du rôle du maître. En didactique des mathématiques, elle a ensuite été utilisée par Laborde (1999) : il s'agissait alors de proposer à des enseignants des séquences intégrant un logiciel de géométrie dynamique. Plus récemment, Trouche et Guin (2006) ont eu recours à la notion de scénario d'usage dans les travaux du SFoDEM : ces scénarios sont des descriptions a priori de séquences de classe, exposant pour chaque étape les éléments concrets nécessaires à sa réalisation.

Nous avons choisi de désigner par le terme « *scénario* » une description structurée d'une séance ou d'une séquence de classe, effectuée a priori ou a posteriori.
Quelles caractéristiques doivent être retenues pour une telle description? Dans les travaux de Laborde (1999) et Trouche et Guin (2006) les caractéristiques retenues pour la description de scénarios sont principalement tournées, nous semble-t-il, vers un objectif de transmission de ceux-ci. Dans notre travail, la description est faite uniquement à des fins de recherche. Elle doit nous permettre de prendre en compte les éléments retenus dans les travaux cités ci-dessus, mais également les modifications de contrat didactique, dont nous avons montré l'importance dans la partie 2 de ce chapitre. Elle doit aussi accorder une importance particulière au choix d'éléments de scénarios différenciés, car les possibilités de différenciation constituent une motivation importante pour le recours à des BE par les enseignants. Nous avons retenu des critères issus des travaux de Pernin et Lejeune (2005) à propos des *scénarios d'apprentissage*.
Ces travaux relèvent du champ des EIAH, et leur objectif est tout autre que ceux qui peuvent être poursuivis en didactique des mathématiques. Il s'agit pour les auteurs de disposer d'une notion de scénario susceptible d'éclairer la conception informatique des scénarios d'apprentissage. Ces scénarios, qui peuvent être implémentés en utilisant des langages de modélisation pédagogique, seront ensuite utilisés pour développer en particulier de l'enseignement à distance. Ceci nécessite de disposer de critères d'analyse des scénarios systématiques et précis ; ce sont certains de ces critères, présentés dans le tableau ci-dessous, auxquels nous avons recours dans nos descriptions.

	Critères à valeur permanente		
Degré de formalisation	**informel**	formalisé	automatisable
Degré de réification	abstrait	**concret ou contextualisé**	
	Critères variables au cours de la vie d'un scénario		
Finalité	prédictif	descriptif	
Granularité	activité	enchaînement d'activités	structuration pédagogique
Degré de personnalisation	générique	adaptatif	
Degré de contrainte	contraint	ouvert	adaptable

Tableau 3 *Critères d'analyse de scénarios, Pernin et Lejeune (2005)*

Précisons quelques points sur l'utilisation de nous faisons de ces critères.
Tout d'abord dans la description faite par Pernin et Lejeune, il y a des concepteurs de scénario qui sont plutôt des informaticiens ; et deux types d'utilisateurs : les enseignants, d'une part, et les élèves d'autre part. Parfois la notion d'utilisateur peut donc conduire à des ambiguïtés. Dans notre cas c'est l'enseignant qui conçoit le scénario (éventuellement en adaptant un scénario initialement conçu par d'autres, transmis par un collègue, ou récupéré sur le web). Et les « utilisateurs » sont les élèves, donc les critères seront plutôt lus dans cette perspective.
Pour ce qui est des critères à valeur permanente, les scénarios auxquels nous nous intéressons sont tous *informels* (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas vocation à être programmés en langage informatique) et *concrets, contextualisés***.**
Pour les critères désignés comme variables :
- *Finalité* : les enseignants nous ont décrit à la fois ce qui était prévu et ce qui a réellement eu lieu, donc les scénarios que nous manipulons peuvent être prédictifs ou descriptifs.
- *Granularité* : les enseignants décrivent spontanément des séances ou des séquences. Ensuite le chercheur peut reconstruire une analyse de ce qui a été pratiqué à l'échelle d'une année, ou à l'inverse s'intéresser à un épisode très court. Mais en ce qui concerne les descriptions produites par les enseignants, nous ne gardons que les deux premiers niveaux de granularité distingués par Pernin et Lejeune.
- *Personnalisation* : pour nous elle signifie que l'enseignant effectue des choix de différenciation pour les élèves a priori, comme la création de sous-groupes de niveaux ou de menus personnalisés pour certains élèves.
- *Contrainte* : il s'agit de contraindre ou au contraire laisser libre les parcours des élèves sur la

machine (progression imposée ou non ; possibilité d'accès hors temps scolaire). Ainsi nos scénarios peuvent être contraints ou ouverts ; ils ne sont en revanche jamais adaptables, c'est-à-dire que l'utilisateur élève n'a pas la possibilité de modifier le scénario.
Nous avons eu recours à ces différents critères pour l'élaboration d'une grille de description, mais également pour l'analyse des évolutions de scénarios. Nous avons associé aux critères de Pernin et Lejeune d'autres dimensions pertinentes pour la description d'une séance ou d'une séquence de classe, proches de ce qui a été retenu par exemple dans le travail du SFoDEM (Trouche et Guin 2006). Nous donnons ci-dessous une présentation simplifiée de cette grille, pour mettre en évidence ses principales entrées.

1. Canevas de séance ou séquence	Supports matériels : BE, autre(s) ressource(s) TICE, autres supports
	Contenu mathématique et objectifs
	Nature de la, ou des séance(s) : découverte, réinvestissement, évaluation (préciser la fonction de la base d'exercices).
	Pour une séquence : articulation des séances, et références à la BE en séances classiques.
2. Interventions de l'enseignant en séance machine	Supports matériels
	Contenu mathématique
	Contenu didactique
3. Activités des élèves	Supports matériels, en particulier : traces écrites attendues en séance machine
	Travail seul / en binôme / en groupe en séance machine
	Travail sur l'ordinateur hors classe
	Différenciation *(personnalisation)*
	Progression *(contrainte)*

Tableau 4 *Grille de description de scénario utilisée dans EMULE (séance ou séquence)*

Les enseignants du groupe ont employé une grille de ce type pour décrire leurs scénarios à chaque utilisation de bases d'exercices en ligne. Durant cette phase du travail de EMULE (année scolaire 2005-2006), le groupe comportait 5 enseignants : 2 professeurs de mathématiques de collège, et 3 professeurs des écoles. La BE la plus utilisée a été MEP. Parmi les cinq enseignants membres de EMULE, deux étaient des utilisateurs confirmés de MEP, deux connaissaient MEP suffisamment pour être tout à fait à l'aise avec les fonctionnalités techniques aux environs du mois de janvier 2006, et une enseignante était complètement novice dans l'utilisation de MEP. Les deux utilisateurs confirmés, ainsi que l'enseignante novice, ont également utilisé d'autres BE (en particulier WIMS), pour lesquelles ils étaient entièrement novices.
Nous avons pu observer au cours de l'année des évolutions de certaines caractéristiques des scénarios qui témoignent en particulier d'un processus d'appropriation par les enseignants plus novices de cet outil professionnel que constitue MEP.
- *Des séances isolées aux séquences*
Le niveau de la séance, et celui de la séquence, sont les deux granularités qui apparaissent dans les descriptions faites par les enseignants. Il semble que plus les enseignants sont familiers avec le logiciel, plus ils se tournent vers la planification de séquences. Les données numériques sont présentées dans le tableau ci-dessous, qui donne le nombre total de séances isolées ou de séquences décrites, en séparant enseignants novices et expérimentés.

	Séances	Séquences	Total
Enseignants novices avec la ressource	6 (50%)	6 (50%)	12
Ressource connue depuis un an et plus	3 (19%)	13 (81%)	16

Tableau 5 *Séances ou séquences ?*

Les discussions lors des réunions du groupe EMULE confirment ces observations numériques. Lorsque les enseignants sont novices avec une ressource, ils doivent découvrir ses fonctionnalités, mais aussi son contenu mathématique : quels sont les exercices intéressants à retenir pour ses élèves en particulier. Lorsque la ressource est familière, les enseignants l'intègrent naturellement lorsqu'ils construisent une séquence, comme ils peuvent le faire avec les exercices d'un manuel.

- Des scénarios de plus en plus variés

Les enseignants du groupe ont élaboré des scénarios de plus en plus variés. Nous rapportons ici deux directions d'évolution importantes :

- A propos de la fonction de la base d'exercices : les enseignants novices utilisaient plutôt la BE pour l'entraînement sur des compétences techniques (travail de type « exerciseur »). L'autre usage répandu chez les novices était la projection en classe entière au vidéo projecteur, avec résolution collective d'un exercice, ou appui sur des extraits de la BE (dans ce cas uniquement MEP) pour faire cours. Ceci nous semble témoigner en particulier d'une réticence de l'enseignant novice vis-à-vis de la discussion en classe sur des exercices que les élèves ont traité individuellement sur l'ordinateur. En effet les exercices sont nombreux, les jeux de valeurs possibles également ; ainsi l'échange risque de demander à l'enseignant une certaine capacité d'improvisation. C'est à la fois la familiarisation avec les fonctions de suivi des élèves, et avec le contenu mathématique des exercices, qui permettent au professeur d'organiser des séquences dans lesquelles la base d'exercices va remplir de nouvelles fonctions : découverte d'une notion, évaluation des élèves…
- A propos des traces écrites attendues en séance machine : il y a plus de traces écrites attendues lorsque la ressource est familière. Ceci est fortement corrélé avec le point précédent : pour un usage de type « exerciseur », il n'y a en général pas de traces écrites attendues. Là encore, c'est la familiarité de l'enseignant avec les exercices proposés par le logiciel qui va permettre de prévoir des traces écrites adaptées : par exemple, la rédaction d'un exercice parmi un ensemble de 5 exercices de même type.

- Plus de personnalisation, plus de contraintes

On observe dans les scénarios mis en place de plus en plus de personnalisation et de contraintes. Cette évolution se fait de deux manières.

Tout d'abord, pour les enseignants novices, par l'appropriation des fonctionnalités du logiciel : programmation de menus individualisés, emploi d'options contraignant les parcours des élèves (ces possibilités existent dans MEP et dans WIMS). Mais les enseignants ont eu de plus en plus recours à d'autres moyens. Pour l'individualisation, ils ont choisi de programmer de nombreux exercices, laissant les élèves libres de retenir ce qui était nécessaire pour eux, avec éventuellement quelques conseils. Pour les contraintes, les enseignants ont formulé des contraintes orales, non programmables sur le logiciel, voire contraires à celles du logiciel, la plus fréquente étant : « ne pas refaire plus de deux fois un exercice, même si on n'a pas réussi ». Nous interprétons une telle consigne comme provenant de la volonté des enseignants d'affirmer clairement aux élèves qu'ils doivent donner la priorité au contrat didactique explicité en classe, et non à celui de la BE, lorsque ceux-ci sont en conflit.

Ces observations d'évolutions témoignent de l'appropriation, par les enseignants novices, d'une ou plusieurs BE. Nous sommes restés ici à un niveau d'analyse très général : nous n'avons pas cherché à observer des usages différenciés, ni à repérer des causes spécifiques de chaque évolution relevée.

Ces processus d'appropriation observés nous semblent légitimer le recours à l'approche instrumentale . Et cette interprétation en termes de genèses instrumentales va nous permettre d’affiner l’analyse, comme nous allons le montrer ci-dessous.

3.2 Genèses instrumentales des professeurs de mathématiques : le cas des bases d’exercices en ligne.

Dans le cadre de l’approche instrumentale, les phénomènes d’appropriation d’une BE par un enseignant sont interprétés en termes de genèses. Le recours à ce cadre permet d’approfondir l’analyse, et d’organiser celle-ci. Une première direction susceptible de démêler la complexité des processus en jeu consiste à discerner dans l’activité des enseignants des phénomènes d’instrumentation et d’instrumentalisation, nous détaillons ce point ci-dessous. Par ailleurs, les genèses instrumentales amènent à prendre en compte les classes de situation d’activité. Ces classes peuvent être plus ou moins générales. Nous distinguerons pour l’analyse les classes de situations générales, et celles qui impliquent un contenu mathématique spécifique. En effet il nous semble que les analyses à mener, et que les déterminants des genèses, ne seront pas les mêmes à un niveau général d’analyse de l’activité enseignante, et lorsque l’on considère un contenu mathématique précis ; nous allons développer ce point de vue dans ce qui suit.

Des phénomènes d'instrumentalisation et d'instrumentation pour les professeurs

Les genèses instrumentales comportent un double mouvement d'instrumentalisation et d'instrumentation. Le professeur s'approprie la base d’exercices, exploite ses potentialités techniques, voire détourne certaines fonctionnalités : ceci relève de l’instrumentalisation. L'artefact base d’exercice et le processus d'appropriation influencent l'activité de l'enseignant, et plus largement son développement professionnel, dans un mouvement d'instrumentation. Nous donnons ici quelques exemples de phénomènes d'instrumentalisation et d'instrumentation pour des sujets enseignants, dans le cas d’un artefact de type base d’exercices (ici MEP, ces exemples sont extraits de Bueno-Ravel et Gueudet 2007).

Phénomènes d'instrumentation avec MEP

- *Instrumentation des choix didactiques : le cas de l’évaluation.* MEP propose un outil de suivi des élèves, mais cet outil ne permet pas d’engendrer une note en combinant par exemple les scores obtenus à un certain nombre d’exercices réalisés. L’enseignant a simplement accès au score de l’élève pour chacune de ses tentatives sur un exercice. Le logiciel WIMS (annexe C), d’une structure similaire, permet quant à lui la construction d’une note : l’enseignant attribue un « poids » à chaque exercice, seule la meilleure performance est conservée lorsqu’il y a eu plusieurs essais. Or on remarque que le logiciel MEP est jusqu’à présent peu utilisé pour l’évaluation des élèves, ce qui n’est pas le cas du logiciel WIMS, utilisé lors des examens dans certaines universités. On assiste donc à un phénomène d’instrumentation de l’évaluation avec WIMS, et de non-instrumentation dans le cas de MEP.
- *Instrumentation des choix mathématiques.* MEP instrumente également les choix mathématiques du professeur. Dans le cas de la séquence de trigonométrie que nous avons observée, les analyses a priori présentées au §1.1 (figures 10 et 11) permettent d’anticiper des phénomènes d’instrumentation ; nous avons effectivement relevé de tels phénomènes dans la séquence de Carmen. L’introduction du sinus, et le travail de la technique de calcul d’un angle inconnu dans un triangle rectangle ont été instrumentées par MEP. Et les phénomènes d’instrumentation sont particulièrement visibles lorsqu’ils conduisent le professeur à dévier de ses pratiques habituelles. Carmen a ainsi inclus contrairement à son habitude le recours à la figure dynamique pour l’encadrement du sinus (tout en l’accompagnant d’un discours qui s’écartait du texte MEP avec lequel elle était en désaccord). De même l'emploi dans MEP de l’ostensif sin^{-1} l’a conduite à indiquer individuellement aux élèves qu'il fallait éviter une telle notation, lorsqu'elle la voyait sur une copie ; les années précédentes, elle établissait clairement pour la classe entière l’interdiction du recours à cette notation.

Phénomènes d'instrumentalisation avec MEP

- *Emploi des aides comme élément de cours.* A chaque exercice MEP est associée une aide animée, reprenant des éléments de méthode. Dans la plupart des cas, cette aide apparaît lorsque l’élève a fait une première réponse fausse à l’exercice. Certaines de ces aides sont jugées par les enseignants très intéressantes, et ils souhaitent donc pouvoir les projeter au vidéo-projecteur pour leur classe entière. Lors de la conception initiale du logiciel, ceci nécessitait de lancer l’exercice correspondant et de commettre délibérément une erreur pour accéder à l’aide. De nombreux enseignants ont adopté ce procédé, et dans le même temps des demandes étaient envoyées aux concepteurs pour qu’ils prévoient une autre possibilité d’accès aux aides. C’est à la suite de ces demandes et de ces usages imprévus que les aides, détachées des exercices correspondants, ont été placées sur le site de Sésamath, qui héberge MEP, en téléchargement libre.
- *Création d'une grille pour évaluer les élèves avec MEP*. Carmen, qui travaille avec MEP depuis 4 ans et l'utilise

depuis environ 3 ans pour l'évaluation diagnostique de ses élèves a créé une grille dans laquelle elle reprend tous les suivis MEP, pour conserver au final le meilleur score obtenu pour chaque exercice abordé. Elle remplit cette grille après chaque séance MEP.

Figure 16 *Instrumentation et instrumentalisation avec MEP pour le professeur.*

Nous notons que les exemples de phénomènes d'instrumentalisation cités dans l'encadré ci-dessus aboutissent tous deux à la conception de nouveaux supports matériels, qui relève clairement de la *conception dans l'usage* (Folcher 2005). Dans le cas des aides MEP, le nouveau support des aides indépendantes est élaboré par une équipe de concepteurs, suite à des demandes d'utilisateurs. Les ressources en ligne, facilement modifiables avec les moyens techniques actuels permettent ces adaptations rapides à la demande. Dans le cas de la grille d'évaluation, la conception est réalisée par l'enseignante elle-même.

Il nous semble par ailleurs, dans le cas des professeurs comme dans celui des élèves, que lorsque la ressource considérée est une BE, l'instrumentation et l'instrumentalisation sont à articuler avec le contrat didactique : contrat de la BE, et contrat habituel de la classe. Dans le cas de l'instrumentalisation, les détournements d'usage traduisent un développement cognitif du professeur, mais ils peuvent aussi être interprétés comme des ruptures de contrat didactique. Ainsi l'emploi des aides MEP par le professeur pour faire son cours est en rupture avec le contrat MEP. Et ce phénomène d'instrumentalisation a conduit à un ajustement, une modification explicite du contrat MEP. De même, les phénomènes d'instrumentation peuvent être interprétés comme des conséquences du contrat didactique embarqué par la ressource ; ceci est particulièrement visible lorsque cette instrumentation conduit l'enseignant à modifier ses pratiques habituelles.

Classes de situations générales, systèmes de conditions et de contraintes institutionnelles

Etant donnée la complexité de l'activité professionnelle des professeurs, même dans le cas d'un unique type d'artefact, de multiples phénomènes imbriqués d'instrumentalisation et d'instrumentation sont observables. Il nous semble donc nécessaire d'organiser l'étude des genèses instrumentales ; ceci amène à poser la question des classes de situations à prendre en compte. Nous n'allons pas ici entreprendre une étude systématique des classes de situations professionnelles des enseignants. Nous proposons simplement dans une première tentative de clarification, de distinguer des classes de situations que nous qualifierons de générales, et à l'opposé des classes de situations dépendant d'un certain contenu mathématique. Il ne s'agit pas pour autant de considérer que ces deux types de classes de situations sont disjoints ; en particulier, une classe liée à un contenu peut être une sous-classe d'une classe générale. Ainsi « gérer l'hétérogénéité de la classe » est une classe de situations générale ; « gérer l'hétérogénéité de la classe lors de l'introduction des fractions en CM1 » est une classe spécifique, sous-classe de la précédente.

Nous proposons de mener des analyses différentes, selon qu'un contenu mathématique précis est ou non en jeu. En effet, il nous semble nécessaire de nous appuyer sur le contenu mathématique pour inférer des invariants opératoires. Dans le cas de classes de situations générales, nous ne tenterons pas d'élucider les invariants opératoires, mais plutôt de mettre à jour des déterminants des genèses, en termes de systèmes de conditions et de contraintes institutionnelles. Nous donnons ci-dessous l'exemple d'une telle analyse (figure 17).

Classe de situations : « choisir des organisations didactiques pour enseigner les mathématiques », à l'échelle de l'année scolaire. Usages de BE par les enseignants du groupe EMULE.

Dans le premier degré, les professeurs des écoles membres de EMULE ne disposent que de quelques postes (entre 4 et 7) disposés dans la bibliothèque de l'école, ou dans une salle adjacente à leur salle de classe. Les élèves vont travailler sur les postes en autonomie, le plus souvent en individuel, avec des roulements assez rapides. Dans les classes à double niveau, des systèmes de tutorat sont organisés, avec un élève de CM2 accompagnant un élève de CM1 pour le travail sur MEP par exemple.

Dans le collège des enseignantes associées à EMULE, il existe trois salles informatiques (entre 13 et 15 postes dans chaque) ; un vidéo-projecteur est disponible. Le collège est situé dans un environnement socio-économique défavorisé, de nombreux élèves ont des comportements qui rendent la gestion de classe difficile. Les enseignantes organisent du

travail plutôt en individuel sur MEP ; mais elles ont besoin d'une salle adjacente à la salle informatique, pour les élèves qui travaillent sur papier. Elles utilisent aussi MEP en classe entière au vidéo-projecteur. Les élèves de 3e disposent d'ordinateur portables (opération ORDI35). Les enseignantes ont installé sur ces postes une version téléchargée de MEP, qui permet un travail dans la salle de classe habituelle.
Nous avons décrit ci-dessus des *usages* de MEP, correspondant à une classe de situations très générale : « choisir des organisations didactiques pour enseigner les mathématiques ». Nous considérons cette classe de situations à l'échelle de l'année scolaire, c'est-à-dire que nous relevons des régularités dans les choix d'organisations didactiques qui se retrouvent à propos de plusieurs contenus mathématiques. Ces usages nous semblent découler d'un système de conditions et de contraintes institutionnelles correspondant à des *niveaux de détermination didactique* eux aussi généraux : niveau de la pédagogie, ou de l'école (Chevallard 2002). On peut également considérer que ces usages ont été façonnés par ce que Ruthven (2008) nomme *the working environment*, l'environnement de travail des professeurs. Dans les établissements des professeurs des écoles que nous avons observés, peu de postes sont disponibles, mais les horaires consacrés aux mathématiques sont souplement adaptables, ce qui permet les roulements de petits groupes. Le double niveau, une spécialité institutionnelle de l'école élémentaire, induit des formes spécifiques de tutorat d'un élève par un autre élève plus âgé. Au collège où ont eu lieu nos observations, le comportement des élèves est une contrainte importante. Les séances de cours avec MEP au vidéo-projecteur sont appréciées par les enseignantes, en particulier parce que les écrans MEP projetés retiennent l'attention des élèves. Le prêt d'ordinateurs portables a conduit au développement d'un usage de MEP au sein de séances « traditionnelles » pour traiter un ou deux exercices.

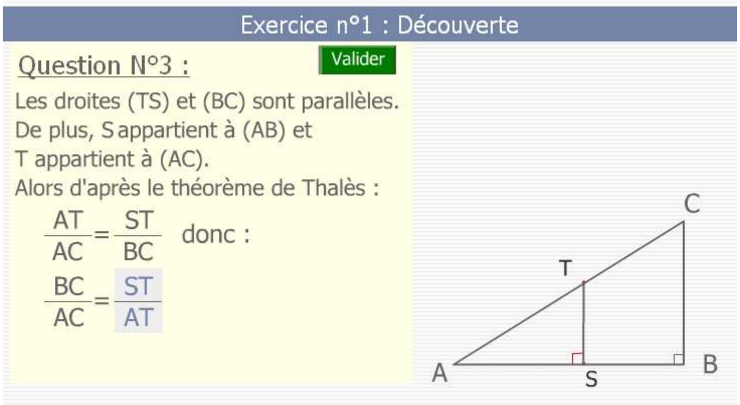
Figure 17 *Usages de BE pendant une année scolaire au collège et à l'école primaire.*

Ainsi, par rapport aux évolutions de scénarios que nous décrivions en §3.1 pour l'ensemble des professeurs novices observés, ici notre analyse s'affine, et conduit à observer des usages, témoins de genèses instrumentales pour une classe de situations générale, qui sont différenciés selon *l'environnement de travail* et l'*institution*. L'analyse peut être encore précisée en observant des usages dépendant du contenu mathématique en jeu. La prise compte de ce contenu mathématique nous semble permettre d'expliciter des schèmes développés par les professeurs.

Classes de situations spécifiques et schèmes professionnels

Chercher à analyser les schèmes professionnels des enseignants utilisant une base d'exercices en ligne nécessite de relever des régularités dans l'activité du professeur, dans des contextes différents, pour une même classe de situations. L'observation de ces régularités (que nous avons désignées ici par le terme usages) permet alors de décrire des règles d'action ; puis d'inférer les invariants opératoires sous-tendant ces règles d'actions. Nous n'avons pas développé une telle analyse ci-dessus, pour des classes de situations générales ; il nous semble en effet nécessaire de nous appuyer sur un contenu mathématique précis pour décrire des éléments d'invariants opératoires. Nous donnons ci-dessous l'exemple d'une telle analyse (figure 18).

Dans sa séquence de trigonométrie (annexe D), Carmen a utilisé (durant l'année scolaire 2006-2007) un exercice MEP intitulé « découverte de sinus ». Cet exercice a été projeté au vidéo projecteur, et résolu oralement en classe entière.



Au fil de la résolution de l'exercice, les élèves ont rempli une fiche papier reprenant les écrans MEP. L'année précédente, Carmen avait utilisé pour l'introduction de sinus un logiciel de géométrie dynamique (Géoplan ; en 2006 l'exercice MEP n'existait pas encore).
La classe de situations qui est en jeu ici est « Introduire sinus en classe de troisième ». Plus précisément, nous

considérons la démonstration de l'invariance du rapport de longueurs (côté opposé à l'angle)/(hypoténuse) pour un triangle rectangle dont les angles sont donnés. C'est la démonstration de ce résultat qui apparaît dans l'écran MEP présenté ci-dessus. Cependant nous nous attachons ici aux traces d'une activité effectuée dans la durée, traces que nous identifions en particulier en nous appuyant sur les traits communs à la séance MEP et à la séance Géoplan faite sur le même thème l'année précédente. Différentes règles d'action apparaissent ainsi. Certaines sont relatives à l'organisation didactique retenue : une activité (visant l'introduction de la nouvelle notion) est projetée pour la classe entière avec un vidéo projecteur. L'enseignante pilote l'ordinateur ; les élèves doivent répondre oralement à une suite de questions, et simultanément remplir les espaces laissés libres sur une fiche papier. D'autres sont liées au contenu mathématique en jeu : la démonstration fait appel au théorème de Thalès (vu lors du précédent chapitre de géométrie). De plus, une manipulation d'une figure animée (figure Géoplan, en 2006, figure MEP, en 2007) comportant les deux triangles rectangles et la valeur du rapport de longueurs montre que celui-ci ne varie pas, lorsque l'angle reste constant, et qu'il est modifié, lorsque l'angle varie. Cette manipulation intervient après la démonstration. Mathématiquement la démonstration avec le théorème de Thalès suffit à prouver que le rapport reste constant, lorsque l'angle est constant. Cependant l'enseignante juge important de compléter la démonstration par l'observation visuelle permise par la figure animée ; cette observation permet selon elle aux élèves d'une part de bien comprendre la situation, et d'autre part d'être convaincus de l'invariance du rapport. Ainsi différents invariants opératoires sous-tendent ce choix. « L'établissement d'un résultat en géométrie doit être si possible accompagné d'une figure représentant la situation » ; « l'outil déplacement, dans un logiciel de géométrie dynamique, permet aux élèves d'observer des propriétés qui restent vraies pour différents exemples de figures ayant certaines caractéristiques communes» ; « constater qu'un résultat est vrai pour plusieurs figures différentes apporte aux élèves un élément de conviction qui complète utilement une démonstration reposant sur un exemple générique ».

Figure 18 *Introduction de sinus en classe de troisième avec MEP et analyse d'invariants opératoires.*

Nous voulons souligner plusieurs éléments qui apparaissent dans cet exemple. Tout d'abord, il n'est pas concevable de restreindre l'analyse au seul artefact constitué par MEP. D'autres artefacts importants apparaissent : la fiche papier donnée aux élèves, le vidéo-projecteur ; le logiciel Géoplan employé l'année précédente. Ensuite, inférer des invariants opératoires amène à reconsidérer l'appropriation d'une base d'exercices dans un contexte beaucoup plus large de développement professionnel. Les invariants que nous citons ont été forgés par l'enseignante au fil des années, se sont développés à partir de son intégration de logiciels de géométrie dynamique, mais aussi de l'observation qu'elle a faite de ses élèves etc. Dans cette perspective, les genèses instrumentales sont à comprendre comme des processus qui se continuent ; un instrument constitue un nouvel artefact pour l'enseignant ; combiné avec d'autres, il va donner matière au développement d'un nouvel instrument.

Nous considérons que les processus continus de genèses évoqués ci-dessus sont au cœur de l'activité et du développement professionnel des professeurs. Adopter cette nouvelle perspective, effectuer ce changement de regard sur l'activité des enseignants, requiert le développement d'un cadre théorique spécifique, s'appuyant sur l'approche instrumentale.

3.3 Genèses documentaires et développement professionnel

Nous introduisons dans cette partie les concepts élémentaires d'un cadre théorique en cours d'élaboration, qui a été exposé pour la première fois lors d'un cours à l'école d'été 2007 (Gueudet et Trouche, à paraître), et fait l'objet de recherches menées conjointement avec Luc Trouche. L'objectif premier de ce travail était la compréhension des mutations engendrées par l'irruption du numérique dans l'activité des enseignants, et dans leur développement professionnel. Cette compréhension nécessite une prise en compte globale de l'activité des enseignants ; ainsi nous nous sommes intéressés à l'activité en classe, mais également à l'activité hors classe des professeurs. De plus nous avons considéré tous les types de ressources auxquels le professeur avait à faire. Ruthven (2008) montre que l'étude de l'intégration des technologies demande de tenir compte de ce qu'il appelle *the structuring context of classroom practice* (le contexte structurant de la pratique de classe) qui comporte selon lui cinq éléments : l'environnement de travail (working environment), le système de ressources (ressource system), le format d'activité (activity format), la planification curriculaire (curriculum script), l'économie temporelle (time economy). En particulier, il considère un système de ressources qui comporte des TICE, mais s'étend au-delà des TICE ; Ruthven indique

que le coeur de ce système reste dans la plupart des classes le manuel scolaire. Il fait référence aux travaux qui, dans les pays anglo-saxons, proposent l'étude du *curriculum material* (voir Remillard 2005 pour une synthèse) : manuels scolaires, programmes et textes officiels, logiciels, calculatrice... Certains de ces travaux adoptent un point de vue très proche de l'approche instrumentale, en se centrant sur les interactions entre les professeurs et le curriculum material. Nous considérons dans notre approche des ressources qui vont au-delà du curriculum material, en retenant pour le terme ressources le sens très large proposé par Adler (2000) : tout ce qui est susceptible de *re-sourcer* l'activité du professeur. Ainsi les éléments de type curriculum material sont des ressources, mais des copies d'élèves, un conseil reçu en formation, une discussion avec des collègues peuvent également être des ressources pour le professeur. Notre intérêt initialement centré sur le numérique nous a conduits à nous intéresser plus largement au travail documentaire des professeurs : collecter des ressources, les sélectionner, les transformer, les recomposer, planifier leur mise en œuvre, réaliser celle-ci puis entreprendre de nouvelles modifications… Nous considérons que ce travail est au cœur de l'activité professionnelle des professeurs.

Dialectique ressources/documents, genèse documentaire

Nous avons introduit dans Gueudet et Trouche (à paraître) une distinction essentielle entre *ressources* et *documents*. Un ensemble de *ressources* est ce qui peut donner matière, pour le professeur, à un *document*. De même qu'un ensemble d'artefacts conduit au développement d'un instrument par un processus de genèse instrumentale, au cours duquel s'élabore un schème d'utilisation des artefacts, un ensemble de ressources mobilisé dans une certaine *classe de situations d'activité* (situations ayant des caractéristiques voisines en termes de tâches à accomplir et de conditions à prendre en compte) à travers une variété de contextes, conduit au développement d'un document.

On peut résumer ce processus par l'équation : *document = ressources + schème,* qui traduit ce que nous appelons une genèse documentaire.

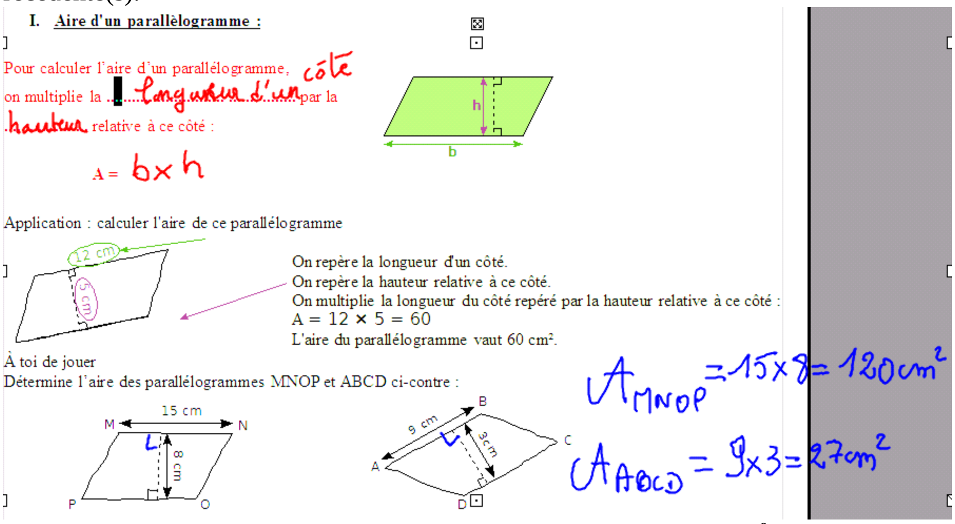
Nous avons introduit ce vocabulaire en nous inspirant du domaine de l'ingénierie documentaire, qui étudie en particulier les mutations liées au numérique (Pédauque 2006, Crozat 2007). Les termes ressource et document nous semblent mieux à même d'indiquer la variété des ressources qui peuvent être impliquées dans un tel processus.

Soulignons que nous parlons d'ensemble de ressources, et non de système de ressources comme le fait Ruthven (2008). En effet nous adoptons une perspective différente, que traduit la distinction entre ressources et documents. Il peut exister des ensembles structurés de ressources : par exemple le site Educnet (http-educnet) du ministère de l'éducation nationale comporte de nombreux types de ressources, qui sont organisés selon des rubriques définies. Mais les ressources auxquelles un professeur a recours dans une certaine classe de situations d'activité ne sont pas a priori structurées. Nous faisons l'hypothèse qu'en revanche, l'ensemble des documents développé par un professeur au cours de son activité forme un système structuré, que nous appelons le *système documentaire* du professeur, en nous appuyant sur la notion de *système d'instruments* introduite par Rabardel (1999). Nous ne développons pas cet aspect ici, nous l'abordons dans la partie « conclusion et perspectives » de cette note de synthèse.

Genèses documentaires et schèmes

Pour le cours de l'école d'été 2007 (Gueudet et Trouche à paraître), nous avons réalisé une série d'entretiens avec 9 professeurs de collège et de lycée, en nous inspirant d'une méthodologie introduite par Margolinas *et al.* (2007). Nous avons interrogé ceux-ci sur leur travail documentaire, et recueilli des ressources impliquées dans leur activité. De même que nous avons présenté ci-dessus l'analyse de schèmes d'utilisation d'une BE (§3.2), nous allons montrer ici un exemple d'analyse de schème d'utilisation d'un ensemble de ressources, dans le cas d'une genèse documentaire, exploitant les données recueillies lors de ces entretiens (figure 19).

Marie-Pierre a 40 ans. Elle a enseigné 6 ans en lycée, et exerce depuis 8 ans en collège. Son collège est un petit établissement (150 élèves, milieu rural) qui participe à une expérimentation de cartable numérique. Les élèves et les professeurs sont munis d'ordinateurs portables et de clefs USB depuis 2003. Marie-Pierre dispose dans sa salle d'un Tableau Blanc Interactif (noté TBI par la suite) depuis 2004. Elle utilise couramment des logiciels de géométrie dynamique, des tableurs, MEP et d'autres ressources proposées par le site Sésamath (http – Sésamath), ou encore d'autres sites web. Elle a obtenu de l'éditeur Hachette une version électronique des manuels de ses classes pour elle-même et ses élèves. Elle emploie le TBI à tous ses cours. Elle prépare une trame de cours sur traitement de texte, et sélectionne des extraits de sites web ou du manuel électronique qui seront intégrés dans la trame sur le TBI au fil de son cours. En classe, elle note aussi sur le TBI des remarques formulées par les élèves, ou les envoie résoudre un exercice : le tout est conservé sous forme de « paperboard » (fichier formé d'une succession d'images reprenant les affichages du tableau que le professeur a enregistrés). Elle peut ainsi revenir au début d'une séance sur ce qui a été noté lors de la, ou des, séance(s) précédente(s).



Pour la classe de situations : « préparer un cours sur l'aire du parallélogramme en 5e », Marie-Pierre utilise plusieurs types de ressources : un logiciel de traitement de texte, une sélection d'extraits de sites et de manuels, le TBI et son logiciel, mais aussi des contenus mathématiques, des figures géométriques… Sur l'écran TBI ci-dessus, on observe un extrait de sa trame de cours, qui comporte notamment, une figure codée, et un texte à compléter :

« Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on multiplie la .... par la ....relative à ce côté. A= .... ».

Ce texte est complété en classe, au cours d'un échange avec les élèves, par les expressions « *longueur d'un côté* », « *hauteur* », et par la formule « $b \times h$ ».

Marie-Pierre utilise une telle trame depuis trois ans, dans différentes classes de cinquième. On peut donc parler d'un usage d'un ensemble de ressources. Marie-Pierre a développé des règles d'action, pour la classe de situations « préparer un cours sur l'aire du parallélogramme en 5e ». « Proposer une figure dans laquelle les longueurs intervenant dans la formule sont codées par des lettres » ; « proposer un texte à trous, chaque trou correspondant un mot, une expression ou une formule illustrée sur la figure ». Ces règles sont fondées sur des invariants opératoires. On peut supposer, par exemple, qu'interviennent des invariants du type : « les élèves doivent participer activement à l'introduction d'une nouvelle formule » ; « leur participation doit être fortement guidée » ; « l'écriture officielle de la formule finale est sous la responsabilité de l'enseignant ».

Figure 19 *Eléments descriptifs du travail de Marie-Pierre, et analyse d'invariants opératoires.*

Nous n'avons pas entrepris une étude systématique des invariants opératoires développés au cours des genèses documentaires. Un travail dans cette direction reste à entreprendre ; nous voulons simplement ici souligner que les analyses que nous avons proposées dans le cas de Marie-Pierre (figure 19) indiquent une fois de plus que l'étude des genèses et celle du contrat didactique doivent être articulées. Les invariants opératoires que nous avons cités relèvent simultanément de *l'ostension* (Salin 1999) et de *l'effet Topaze* (Brousseau 1998). Il ne s'agit pas uniquement de la présence d'un « texte à trous », mais aussi des choix faits dans ce texte même, entre ce qui est donné, et ce qui est à compléter. L'expression « La ... relative à ce côté» ne laisse guère place à l'incertitude. Cet invariant est lié aux connaissances professionnelles de Marie-Pierre, aux conceptions qu'elle a des mathématiques et de leur enseignement. L'invariant dépend des connaissances, et en engendre. C'est ainsi que la généralisation de l'accès à des TBI, ou simplement à des vidéo-projecteurs peut faire supposer un renforcement de pratiques tournées vers l'ostension.

Dialectique productif-constructif, genèses et développement professionnel
Toute genèse documentaire est porteuse de développement professionnel. Dans le champ de l'ergonomie cognitive, la dialectique du *productif et du constructif* (Rabardel 2005) rend compte de ce fait : une activité est finalisée, elle a un objectif de production (réalisation d'une tâche donnée). Dans cette activité, le sujet se construit aussi lui-même et modifie donc les conditions de productions ultérieures.
Revenons à des observations que nous avons réalisées à propos de BE et du logiciel MEP en particulier. Les enseignants observés, à partir d'ensembles de ressources incluant MEP, ont développé des documents pour mettre en place des séquences incluant une différenciation. Progressivement, ils ont pratiqué plus de différenciation dans leurs classes, et varié les modes de différenciation : avec un diagnostic initial ou non, en programmant des menus MEP différenciés, en donnant des fiches papier différenciées, des évaluations différentes… Au-delà des séquences différenciées avec MEP, c'est ainsi leur rapport même à la différenciation qui a évolué.
C'est l'aspect constructif des genèses que nous soulignons ici : le développement d'un document implique un développement professionnel. Nous proposons donc d'aborder les questions de développement professionnel des enseignants en centrant le regard sur les genèses documentaires, qui constituent dans notre perspective le moteur de ce développement.

4. Conclusion

Les travaux présentés ci-dessus concernent essentiellement des phénomènes d'apprentissage, d'enseignement et de développement professionnel liés au recours à des ressources en ligne ; nous avons principalement étudié le cas des bases d'exercices en ligne, même si notre travail s'est récemment tourné vers la prise en compte de tous les types de ressources qui peuvent intervenir dans le travail des professeurs.
Avant de considérer, dans la partie consacrée à nos perspectives de travail, ces questionnements élargis, nous voulons revenir en conclusion de ce chapitre aux ressources en ligne, et plus précisément aux actions didactiques que l'ont peut envisager à l'issue des travaux présentés ici. Les résultats obtenus indiquent plusieurs lignes d'action possibles :

- production de ressources en ligne, amélioration de ressources existantes ;
- élaboration d'analyses de ces ressources pour des enseignants ou d'autres acteurs du système éducatif ;
- pour des ressources de type « bases d'exercices en ligne », ou plus généralement pour des ressources destinées aux élèves, production de scénarios d'utilisation possibles, en fonction des objectifs d'enseignement et des contraintes matérielles et institutionnelles.

Les deux dernier points ci-dessus relèvent de ce que l'on peut désigner comme *l'assistance méthodologique* aux professeurs (Guin et Trouche 2008). Le foisonnement actuel des ressources indique cette direction d'action comme une nécessité. La recherche en didactique peut contribuer à accompagner le professeur dans son travail documentaire : recherche, tri et sélection de ressources ; adaptation ; mise en œuvre appropriée en classe. Une première forme d'assistance méthodologique est la production de ressources destinées à cet accompagnement.
Une seconde forme, fondamentale, d'assistance méthodologique concerne tout ce qui relève de la formation des enseignants. A propos de l'emploi d'une base d'exercices en ligne (comme pour d'autres ressources numériques), les compétences techniques requises ne sont guère complexes, il ne faut cependant pas sous-estimer l'obstacle qu'elles peuvent représenter pour certains enseignants. Pour les enseignants qui ont franchi ce premier obstacle, il est nécessaire de concevoir des formations permettant de les accompagner dans le développement d'usages efficaces des ressources. Les observations réalisées à propos des élèves, dans le cas des bases d'exercices, montrent des détournements possibles, dont le professeur doit avoir conscience. Il doit de même percevoir les

possibles conflits de contrat didactique. En termes de scénarios, la formation doit pouvoir viser l'élaboration de scénarios variés, permettant une véritable activité mathématique des élèves.
Cet aspect de formation des enseignants occupe une place centrale au sein des actions didactiques possibles. La production de ressources proposant des analyses didactiques, des scénarios pour la mise en œuvre en classe est une action didactique nécessaire. Toutefois, nous avons souligné la complexité des phénomènes d'appropriation de ressources. Il nous semble essentiel que la production de ressources soit accompagnée d'actions de formation continue centrées sur l'usage de ces ressources, et ces formations doivent pouvoir se déployer dans la durée, pour accompagner les genèses.

Chapitre 3

Conclusion et perspectives

L'étude des genèses documentaires, qu'il s'agisse d'analyses à mener dans des cas spécifiques, ou du travail de développement du cadre théorique associé, constitue un axe majeur de notre travail en cours, autour duquel s'articulent de nombreux projets déjà débutés ou à venir que nous allons évoquer ci-dessous. Nous présentons les grandes lignes de cet axe en partie 1. Dans nos recherches actuelles, et dans les actions didactiques auxquelles nous participons, nous accordons une attention particulière aux collectifs impliquant des professeurs ; collectifs formés du professeur et de ses élèves, mais également collectifs de professeurs. Les genèses documentaires qui se développent dans de tels collectifs ont des aspects spécifiques, que nous exposons en partie 2. En partie 3, nous montrons comment les deux thématiques exposées dans cette note de synthèse ont convergé en un travail utilisant la notion de genèse documentaire dans le cadre d'une étude institutionnelle à l'université.

1. Ressources, documents, et genèses documentaires des professeurs.

Nous allons poursuivre l'étude des genèses documentaires des professeurs, dans deux dimensions de travail fortement articulées. Il s'agit d'une part d'approfondir le travail mené, en mettant à l'épreuve les concepts exposés ci-dessus (chapitre 2, §3), en les précisant et en les clarifiant. D'autre part nous allons élargir cette étude, qui a porté jusqu'à présent sur les professeurs de mathématiques du second degré. Nous allons étudier le cas des mathématiques au premier degré, et celui de l'enseignement des sciences au second degré. Dans ces deux cas nous analyserons des genèses ; mais nous nous pencherons également sur des questions de conception de ressources, et d'assistance méthodologique pour le professeur en particulier.

1.1 Approfondir l'étude

Des questions méthodologiques

L'étude des genèses documentaires conduit à un questionnement sur les schèmes professionnels des professeurs, et sur les invariants opératoires en particulier. Ceci nous semble nécessiter une méthodologie spécifique. Observer dans la durée le travail documentaire des professeurs, dans la multitude de lieux où celui-ci prend place, soulève des questions méthodologiques délicates. Nous avons évoqué ci-dessus (§3.3) les entretiens que nous avons réalisés pour le cours de l'école d'été 2007 (Gueudet et Trouche à paraître). Ceux-ci nous ont permis de recueillir de nombreuses données ; mais nous n'avons pas pour ce cours réalisé d'observation directe, et les analyses que nous avons faites de leur travail documentaire reposent sur les déclarations des professeurs, et sur les ressources recueillies, dont nous inférons en particulier des régularités, des évolutions... Dans le travail du groupe EMULE (Bueno-Ravel et Gueudet 2007, 2008), nous avons observé des professeurs durant trois années consécutives ; mais ces observations étaient d'une part uniquement centrées sur les usages de bases d'exercices en ligne ; et d'autre part, les données dont nous disposions (observations directes ou compte rendus faits par les enseignants) concernaient principalement le travail en classe. Il faudrait pouvoir mettre en place, sur la durée, une collaboration avec des professeurs qui tiendraient un journal de bord de leur travail documentaire (ressources utilisées, collecte, tri, temps passé etc.), professeurs dont certains temps de travail hors classe et en classe pourraient être filmés, et donner lieu ensuite à une auto-confrontation. Un tel dispositif reste à mettre en œuvre, nous chercherons à réaliser cet objectif dans certains des projets que nous allons mentionner ci-dessous.

Les systèmes documentaires et leurs évolutions

Au-delà de ces aspects méthodologiques, un important travail théorique reste à entreprendre. Nous avons montré l'exemple d'une étude portant sur les invariants opératoires des enseignants. Systématiser l'étude, proposer des catégories pour la description des invariants opératoires est un développement de notre approche qui nous semble nécessaire. Il demande une réflexion sur ce qui contribue à forger ces invariants : conditions et contraintes institutionnelles, contrat didactique... De nombreuses articulations théoriques restent à élucider. Par ailleurs, nous avons évoqué ci-dessus (chapitre 2, §3.2) les *systèmes documentaires* des enseignants. Rabardel (1999) ne considère pas des instruments isolés, mais des systèmes d'instruments, qu'il définit ainsi, pour un sujet donné : « l'ensemble organisé des moyens disponibles pour l'activité du sujet en fonction des tâches et des contextes » (p. 212).De même, les observations que nous avons réalisées nous montrent qu'un document ne vit pas isolé, et nous conduisent à proposer de parler de *système documentaire*. Les documents des professeurs que nous avons rencontrés sont organisés, et articulés entre eux. Des articulations apparaissent au niveau matériel : les fichiers informatiques du professeur sont regroupés en dossiers, par niveau de classe, puis par thème mathématique. Un fichier « progression » peut fixer le déroulement des autres, un fichier « devoir » est lié à des fichiers « cours » et « exercices » sur le même thème.... Ces organisations visibles au niveau matériel sont certainement liées à la structure des activités professionnelles du professeur. Rabardel et Bourmaud (2005), qui ont approfondi l'étude de la structure des systèmes d'instruments, mettent en relation celle-ci avec la structure de l'activité professionnelle des sujets. Les situations d'activité professionnelles sont d'abord regroupées en *classes de situations*, qui vont donner lieu au développement d'un même schème. Rabardel et Bourmaud regroupent ensuite ces classes de situations en *familles d'activités*, qui correspondent à un même type de finalité générale de l'action. Nous avons proposé des pistes pour une description des familles d'activité des enseignants dans Gueudet et Trouche (à paraître). Il nous semble toutefois plus éclairant, pour comprendre la structure du système documentaire, de considérer en priorité les classes de situations. En effet, l'étude des schèmes développés pour ces classes de situations conduit à expliciter des invariants opératoires dont certains ont une portée qui dépasse la classe de situations concernée. Dans l'exemple de Carmen étudié ci-dessus (§3.2, figure 18), l'invariant opératoire qui exprime l'utilité de compléter une démonstration de géométrie par la vérification de la validité du résultat sur plusieurs figures différentes dépasse la classe de situations « introduction du sinus en troisième ». Cet invariant est certainement un constituant de plusieurs documents de Carmen, pour l'enseignement de la géométrie dans plusieurs classes.
A propos des systèmes documentaires, et de leur structure, nous voulons souligner un dernier point fondamental. Ces systèmes ne sont pas figés ; ils évoluent en permanence dans le temps, dans une dynamique dont les genèses documentaires constituent le moteur. Ces genèses sont toujours à comprendre comme des processus en cours : un document est développé à partir d'un ensemble de ressources, à travers une variété de contextes d'usage, pour une même classe de situations. Ce document va à son tour donner matière à de nouvelles ressources : par exemple, une séance MEP programmée engendre des suivis informatiques des élèves. Et ces ressources pourront ensuite être impliquées dans le développement d'un nouveau document. Ces évolutions permanentes invitent à accorder une attention spécifique à la dimension temporelle, et donc à étudier conjointement les évolutions du système documentaire et le développement professionnel du professeur. Plus précisément, avec le point de vue que nous adoptons, l'analyse des évolutions du système documentaire fonde l'analyse du développement professionnel du professeur.

Types de tâches didactiques, techniques didactiques instrumentées
Dans l'approche instrumentale telle qu'elle a été utilisée jusqu'à présent pour étudier les apprentissages réalisés par les élèves, deux directions interprétatives apparaissent. Certains auteurs restent proches de l'ergonomie cognitive. Ils étudient les genèses instrumentales en se centrant sur les schèmes élaborés par les élèves ; les phénomènes d'apprentissage sont alors éclairés par les

invariants opératoires que l'on peut inférer de l'observation des élèves (Trouche 2000). Adoptant une perspective plus institutionnelle, proche de l'approche anthropologique, d'autres chercheurs proposent des interprétations de l'activité des élèves en termes de praxéologies. Ils montrent en particulier l'intérêt des techniques instrumentées, tant pour l'accomplissement de la tâche que pour la construction du savoir (Lagrange 2000, Artigue 2002). Comme le soulignent Drijvers et *al.* (à paraître), articuler et contraster les apports respectifs de l'ergonomie cognitive et de l'approche anthropologique est un enjeu majeur pour l'avenir de l'approche instrumentale.

Développer le recours à une approche documentaire pour l'analyse de l'activité et du développement professionnel des enseignants nécessite bien entendu aussi de considérer la question de cette délicate articulation entre ergonomie cognitive et approche anthropologique. Mais les réponses à apporter, les articulations à trouver, ne seront pas les mêmes selon que l'on considère un sujet élève ou un sujet enseignant. En effet, même si l'approche anthropologique introduit la notion de praxéologie didactique, donc de type de tâches, technique, technologie et théorie didactiques, les attentes institutionnelles qui déterminent ces praxéologies sont difficilement lisibles. L'analyse des praxéologies mathématiques, dans une institution donnée, est renseignée par des textes officiels, par le savoir savant reconnu par cette institution. Une telle référence n'existe pas dans le cas des praxéologies didactiques, pour lesquelles on aura donc plutôt tendance à analyser les systèmes de conditions et de contraintes pesant sur les choix de l'enseignant. Nous avons effectué ci-dessus des analyses mettant en jeu des systèmes de conditions et de contraintes correspondant à des *niveaux de détermination didactiques* généraux (Chevallard 2002). Nous allons évoquer ici le type d'analyses que nous effectuons, avec un regard institutionnel, pour des niveaux plus spécifiquement liés à un contenu mathématique.

Nous avons évoqué ci-dessus les classes de situations ; avec un point de vue institutionnel, on parlera plutôt de type de tâches didactique. Dans le cas d'un professeur, on se trouve confronté à une activité très complexe et variée. En nous référant aux niveaux de détermination déjà cités, on peut considérer au niveau de la discipline le type de tâches : « enseigner les mathématiques à une classe de 3^{e} »; au niveau du domaine « enseigner la géométrie», jusqu'à « enseigner une technique de calcul de la longueur d'un côté dans un triangle rectangle dont on connaît un angle et la longueur de l'hypoténuse », au niveau ponctuel. Selon Chevallard (2002), la tâche principale qui incombe au professeur de mathématiques est du type $T\pi$: « mettre en place une organisation de savoir mathématique (OM) ». Ce type de tâche $T\pi$ se retrouve à différents niveaux de détermination didactique, du niveau de la discipline au niveau du sujet d'étude (OM ponctuelle). Plus précisément encore, $T\pi$ se déploie en plusieurs sous-types de tâches à chaque niveau.

Il est alors possible d'avoir recours à la notion de technique didactique, et de parler de technique didactique instrumentée, en particulier pour l'analyse du travail du professeur en classe. Nous avons utilisé une telle approche dans (Bueno-Ravel et Gueudet 2007), en nous référant de plus aux travaux de Sensevy *et al.* (2000). Ces auteurs proposent de distinguer les finalités topogénétiques (produire les lieux du professeur et de l'élève), chronogénétiques (produire les temps de l'enseignement et de l'apprentissage) et mésogénétiques (produire les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets) de ces techniques. Ces distinctions nous paraissent susceptibles d'éclairer les phénomènes d'enseignement dans la classe, tant à l'échelle d'une séance qu'à celle d'une séquence complète. Elles permettent en effet de tenir compte des échanges avec les élèves ; de plus, la finalité topogénétique conduit à une analyse du contrat didactique, analyse dont nous avons souligné l'importance pour l'étude des phénomènes d'apprentissage dans un environnement comportant une base d'exercices en ligne. Clarifier les articulations possibles entre approche documentaire et théorie anthropologique fait partie de notre travail en cours.

1.2 Elargir le champ de l'étude

L'élaboration des concepts de l'approche documentaire que nous proposons s'est notamment appuyée sur des observations réalisées dans le cas de l'enseignement des mathématiques au second degré. Interroger la pertinence, et les éventuelles limites, de cette approche en dehors de ce contexte nous semble donc un enjeu important.

Enseignement des mathématiques au premier degré et genèses documentaires
Il s'agit tout d'abord de s'intéresser au premier degré. Dans un autre cours du thème « documents » de l'école d'été 2007, Margolinas et Wozniak (à paraître) étudient les professeurs des écoles. Elles considèrent que le professeur élabore une *œuvre*, comme réponse à un problème professionnel (« comment faire mon cours ? »). Cette œuvre se construit comme un *cristal* autour d'un *document générateur* : un document qui est à l'origine de la cristallisation de l'œuvre, et porte donc en germe la forme de celle-ci. Dans les entretiens que nous avons menés avec des professeurs du secondaire, nous n'avons pas identifié une telle ressource centrale, susceptible d'influencer toutes les genèses ultérieures. S'agit-il d'une différence entre les pratiques documentaires du premier et du second degré, ou d'une conséquence de la différence de points de vue théoriques ? Il est certain en tout cas qu'il doit exister des différences entre premier et second degré ; par exemple, les programmations très précises proposées par les manuels du premier degré n'ont pas de correspondant dans le secondaire, ce qui a sans doute des conséquences sur les genèses documentaires. Au sein du groupe EMULE, nous avons travaillé avec des professeurs des écoles ; certaines spécificités apparaissent, en particulier sur la gestion d'un travail différencié, plus courant au premier degré (et même incontournable dans les classes multi-niveaux). Nous n'avons pas systématiquement interrogé ces spécificités, ni étudié le travail documentaire des professeurs des écoles au-delà du cas des bases d'exercices. Nous allons entreprendre une telle étude dans le groupe « TICE et Ressources à l'Ecole en Mathématiques au premier degré » (TREMA-1). Ce groupe s'intéressera aux phénomènes d'appropriation de ressources en mathématiques par des professeurs des écoles, ressources TICE, mais aussi ressources de type « machines mathématiques » (Maschietto et Ferri, F., à paraître, Poisard 2005), comprises comme faisant partie d'ensembles plus vastes de ressources qui vont intervenir dans le travail documentaire des professeurs. En plus de l'étude des genèses documentaires, nous nous intéresserons dans ce groupe à *l'assistance méthodologique* des professeurs (Guin et Trouche 2008). Il s'agit, dans une perspective d'action didactique, de concevoir des ressources susceptibles d'accompagner les genèses documentaires des enseignants. Eléments d'analyse des ressources ; proposition de scénarios de classe ; mode d'emploi pour les machines mathématiques ; supports pour la mutualisation des expériences... Ainsi notre travail dans le groupe TREMA-1 nous permettra une étude des genèses documentaires, et des questions d'assistance méthodologique pour les professeurs des écoles en mathématiques.

Ressources et documents pour l'enseignement des sciences ?
Dans le projet «Mind the Gap », nous allons également travailler ces questions, cette fois au second degré, pour l'enseignement des sciences (mathématiques mais également sciences physiques et sciences de la vie et de la terre). La thématique générale de ce projet européen est décrite comme « Inquiry-Based Science Teaching » (que nous traduisons par *démarche heuristique dans l'enseignement des sciences*). Nous allons travailler au sein de ce projet sur le lien entre TIC et démarche heuristique, et plus précisément sur les ressources en ligne qui peuvent soutenir un enseignement incorporant une telle démarche. Nous considérerons des ressources existantes[11] ; certaines destinées aux élèves, d'autres aux professeurs, voire aux formateurs. Nous ferons l'analyse de ces ressources, pour éclairer leur potentiel *a priori* pour la démarche heuristique. Nous interrogerons les usages faits par les enseignants de ces ressources, et poserons la question de *l'assistance méthodologique* nécessaire pour permettre un usage qui soutienne véritablement une démarche heuristique, dépassant l'observation par des élèves des animations et simulations permises sur le support informatique. L'emploi de ressources en ligne par les professeurs de science

[11] En particulier , le site VITEN développé par l'université d'Oslo, et qui porte sur la biologie et la physique ; le site Pégase, développé par l'équipe ICAR à Lyon, et qui concerne la physique.

au second degré a déjà fait l'objet de recherches (Ruthven, Henessy, Deaney 2003) dont les résultats mettent en évidence certaines caractéristiques de cet emploi que nous n'avons pas relevées dans le cas des mathématiques (on peut citer, par exemple, le lien avec l'actualité de la recherche, lien qu'il est sans doute pertinent de prendre en compte dans une démarche de type IBST). Le travail dans le projet « Mind the Gap » nous permettra de comparer le cas des mathématiques avec celui des sciences physiques et de la biologie, qu'il s'agisse de l'analyse des ressources, de celle des genèses documentaires, ou de la conception d'assistants méthodologiques.
Ces deux éclairages supplémentaires, amenés par l'étude de l'enseignement des mathématiques au premier degré, et de celui des sciences au second degré, devraient permettre un enrichissement significatif de l'approche documentaire.

2. Genèses documentaires, collectifs, communautés

Les genèses documentaires ne sont pas simplement des processus où un professeur isolé interagit avec un ensemble de ressources. Elles sont susceptibles d'impliquer les élèves ; elles peuvent se dérouler dans des collectifs de professeurs. Considérer des genèses associant le professeur et ses élèves amène à poser la question des genèses documentaires des élèves. Interroger ce qui se passe dans les collectifs de professeurs amène à préciser la nature de ces collectifs, en faisant appel en particulier à la notion de communautés de pratique (Wenger 2005). Nous allons examiner ces deux directions de recherche ci-dessous.

2.1 Genèses des professeurs, genèses des élèves

Les phénomènes d'apprentissage sont généralement éclairés par une perspective d'*action conjointe* du professeur et des élèves (Sensevy et Mercier 2007). Celle-ci nous paraît également susceptible d'enrichir l'analyse des genèses. Nous avons noté que l'observation des élèves, la prise d'informations en classe interviennent dans les genèses documentaires pour les professeurs. En nous intéressant cette fois au point de vue des élèves, il nous semble également pertinent d'étudier les genèses documentaires des élèves : ceux-ci ont à faire avec des ensembles de ressources variés, et le prolongement que nous proposons de l'approche instrumentale en une approche documentaire peut probablement, en partie au moins, s'appliquer aux élèves.
La notion d'orchestration instrumentale (Trouche 2002) souligne que le professeur agit sur les genèses instrumentales des élèves. La considération d'ensembles de ressources de diverses natures invite à étudier des orchestrations documentaires, c'est à dire l'action du professeur sur les genèses documentaires des élèves. Ceci conduit à une étude associant les genèses documentaires des élèves et celles des enseignants. Il nous semble nécessaire d'approfondir, dans des travaux ultérieurs, les apports d'une telle prise en compte conjointe des genèses documentaires pour les élèves et pour le professeur ; nous adopterons en particulier une telle perspective dans le groupe de recherche TREMA-1 évoqué ci-dessus.

2.2 Communautés de pratique et genèses

Le travail des professeurs comporte une dimension collective qui n'est pas limitée aux interactions avec les élèves ; hors classe, le professeur interagit en particulier avec ses collègues. Ces activités collectives peuvent être réduites à ce qui résulte d'injonctions institutionnelles, comme l'élaboration d'épreuves communes : brevet blanc en collège, baccalauréat blanc en lycée. Mais elle peut également aller bien au-delà. Dans certains établissements, l'équipe des professeurs de mathématiques établit en début d'année une progression commune, échange régulièrement des activités, collabore pour du soutien aux élèves en difficulté... Parfois une salle est réservée à ces professeurs, avec un ordinateur permettant de partager des dossiers, des fichiers. Souvent, ils utilisent le courrier électronique pour leurs échanges. La généralisation de l'équipement des professeurs en ordinateurs connectés au réseau, en clefs USB ; la facilité technique de mise à disposition de ressources sur un site web ; l'emploi de listes de diffusions, de forum... semblent des éléments susceptibles de favoriser le développement d'activités collectives. C'est donc une direction de questionnement qui apparaît naturellement dans la perspective des genèses documentaires pour les enseignants : certaines de ces genèses sont-elles collectives ? Et si oui, quelle est la nature du collectif impliqué dans ces genèses ? Quelles sont les spécificités de ces phénomènes collectifs, par rapport à ce qui ressort des analyses au niveau individuel ? Nous menons actuellement plusieurs études relevant de telles questions, pour lesquelles nous avons recours à la notion de *communauté de pratique* (Wenger 2005). Une communauté de pratique est un groupe social réuni par une pratique commune ; mais Wenger donne à cette notion de pratique un sens très précis. Celle-ci a trois composantes :

- *l'entreprise commune*
- *l'engagement mutuel*
- *le répertoire partagé.*

Ce qui permet l'engagement mutuel, c'est d'avoir des activités communes, des moyens de communication. Ainsi on ne peut pas considérer que l'ensemble de tous les professeurs de mathématiques de France est une communauté de pratique. L'équipe de mathématiques d'un collège n'est pas nécessairement une communauté de pratique. Dans certains collèges, les enseignants développent un fort engagement mutuel ; mais parfois un collègue reste à l'écart d'un groupe ; et dans certains cas les contacts sont réduits au minimum... En revanche le groupe des développeurs de MEP constitue une communauté de pratique. L'élaboration de MEP est une entreprise commune dans laquelle ils se sont fortement engagés. Même s'ils ne sont pas proches géographiquement, ils communiquent par le courrier électronique, par une plate-forme numérique. Ils ont ce que Wenger appelle un répertoire partagé : des références communes, étant tous des enseignants de mathématiques de collège, mais ils disposent en plus d'un jargon commun relatif à MEP, de connaissances informatiques... Chaque communauté de pratique développe un *répertoire partagé* : un ensemble de ressources communes aux membres de la communauté. Ce répertoire partagé évolue au cours du temps : de nouvelles ressources sont créées, des modifications sont apportées... Selon Wenger (2005) l'engagement partagé dans une communauté de pratique, la participation active à une entreprise collective s'accompagne de la production d'objets qui réifient des éléments de pratique. Ces objets enrichissent le répertoire de la communauté qui intègre les résultats de ce processus de *réification*. Et ces objets sont essentiels pour permettre la *participation* à la communauté. La dualité *participation/réification* introduite par Wenger, et nos propres observations du fonctionnement de communautés de pratique nous a conduits à proposer dans Gueudet et Trouche (à paraître) une nouvelle extension de l'approche instrumentale qui consiste à considérer la *genèse d'un système documentaire communautaire*, au sein d'une communauté de pratique, à partir du répertoire de cette communauté. Une telle genèse nécessite, comme pour les genèses individuelles, un temps long permettant une stabilisation. Elle demande aussi que soient réunies les conditions nécessaires à l'émergence et au fonctionnement d'une communauté de pratique : un projet commun, une entreprise partagée, et un engagement mutuel.
Nous poursuivons dans nos travaux actuellement l'étude de phénomènes collectifs dans le travail documentaire des professeurs, en étant spécifiquement attentifs à l'émergence de communautés de pratique de professeurs. Mais ces travaux constituent également des actions didactiques, principalement tournées vers la formation continue des enseignants.

Emergence de communautés d'utilisateurs de MEP, échanges sur une liste de diffusion.
Nous étudions au sein du groupe Emergence de Communautés d'Utilisateurs de Mathenpoche (en partenariat avec l'INRP, http- ECUM, Dubois *et al.* 2008) la possibilité de mutualisation autour des usages du logiciel MEP. Nous avons mis en place une liste de diffusion, la liste ECUM, destinée aux échanges autour des usages du logiciel MEP, et permettant le dépôt de documents. Une soixantaine d'enseignants, tous utilisateurs de la version réseau de MEP, sont inscrits à cette liste.

Nous nous interrogeons sur les échanges permis par cette liste, sur la constitution, via la liste, d'un répertoire partagé, et sur l'émergence éventuelle d'une communauté de pratique issue des abonnés de la liste. L'analyse des messages échangés lors de la première année de fonctionnement de la liste montre des réticences à communiquer sur l'usage de MEP. Les descriptions faites dans les messages restent sommaires, peu structurées, et ne relatent pas le déroulement réel en classe. Les fichiers mis à disposition par les membres du groupe de recherche sont consultés et utilisés ; mais les co-listiers non membres du groupe ne déposent que peu de fichiers, et ceux-ci correspondent généralement au support fourni à l'élève et non à un canevas qui décrirait l'utilisation en classe. Nous avons par ailleurs utilisé la liste et son espace de dépôt de documents pour mettre en place un stage de formation continue, basé sur un projet de co-élaboration de séquences de classe. Ce projet a donné lieu à l'engagement commun d'équipes de stagiaires, dont nous étudions actuellement les productions.

Conception collaborative de séquences, conception de parcours de formation continue : le projet Pairform@nce.
La conception collaborative de séquences est également centrale dans le projet Pairform@nce. Pairform@nce est un dispositif de formation continue hybride, articulant travail présentiel et travail à distance. Il vise le développement des compétences TICE des enseignants, en adoptant deux principes. Le premier est que les compétences TICE peuvent être développés par la conception collaborative de situations pédagogiques. Le deuxième principe est qu'il est possible de concevoir des parcours et de les mettre à disposition, sur une plate-forme nationale, de formateurs (ou même d'enseignants isolés) qui vont se les approprier et les adapter à leur propre usage. Ce projet donne lieu à une recherche dans laquelle sont impliqués l'équipe EducTice (INRP), le CREAD (IUFM de Bretagne) et les IREM de Montpellier et de Rennes (Gueudet, Soury-Lavergne et Trouche 2008). Le dispositif méthodologique spécifique qui a été retenu nous a aussi conduite à participer à la conception d'un parcours de formation, et à l'expérimentation en tant que formatrice d'une formation bâtie sur ce parcours. Dans le projet INRP-Pairfom@nce auquel nous participons, trois types au moins de collectifs sont à considérer : les collectifs constitués par les équipes de stagiaires, les collectifs de formateurs, et les collectifs de concepteurs de parcours. Notre objet de recherche principal est l'appropriation de parcours de formation par des formateurs qui n'en sont pas les concepteurs. Toutefois pour des raisons de temps évidentes, nous n'avons pas encore recueilli de données sur cet aspect, les parcours que nous avons produits étant simplement en cours d'achèvement. Donc notre travail a jusqu'alors concerné seulement les collectifs de stagiaires et de concepteurs de parcours. Nous avons observé dans ces collectifs à la fois l'appropriation de ressources, et l'émergence d'objets communs. Les données issues de la formation que nous avons réalisée à Rennes sont en cours d'analyse. Dans tous les cas, les équipes de stagiaires ont déclaré que la formation avait modifié leurs pratiques de travail collectif. Certaines équipes, au terme de la formation, présentaient toutes les caractéristiques décrites par Wenger des communautés de pratique. L'étude est à poursuivre, mais elle semble indiquer l'intérêt de ce type de formation pour soutenir l'intégration des TICE.

3. Institutions, genèses et contrat didactique.

Au-delà de l'étude de l'activité de documentation des professeurs et de ses évolutions récentes, l'attention portée à la dialectique ressources/documents et l'intérêt pour les phénomènes collectifs de genèses nous conduisent à une modification globale de notre manière d'aborder les questions de recherche portant sur l'enseignement des mathématiques. Il s'agit bien d'un point de vue général, qui n'est pas limité spécifiquement à l'étude de questions portant sur l'activité documentaire. Nous adoptons ce point de vue dans l'ensemble de nos travaux en cours.
Nous avons en particulier retenu cette approche dans l'étude que nous menée de l'évaluation en première année d'université (Gueudet et Lebaud 2008), évoquée au chapitre 1 de cette note de

synthèse. L’élaboration d’évaluations est un travail documentaire collectif, la conception d’un sujet d’examen implique des échanges entre professeurs, le recours à un ensemble de ressources : exercices traités en travaux dirigés, exercices des sujets d’examens précédents... (voir l’exemple donné au chapitre 1, §3, figure 9). Ainsi un collectif de professeurs est en jeu ; et celui-ci évolue dans un collectif plus vaste, formé par l’institution universitaire. Cette institution est porteuse d’un système de conditions et de contraintes qui influence l’élaboration du sujet d’examen, nous l’avons évoqué en partie 1. Le point de vue documentaire nous permet d’aller au-delà d’une simple interprétation en termes de contraintes institutionnelles. D’une part, il nous conduit à observer le rôle joué par les ressources partagées par un collectif, comme facteur d’inertie dans les élaborations de textes d’évaluation. L’importance accordée aux sujets des années précédentes est une raison majeure de la stabilité qu’on peut observer dans les choix d’évaluation faits année après année. D’autre part, la notion de genèse documentaire rappelle que si l’institution influence bien entendu les genèses, inversement, les genèses peuvent contribuer à forger la *pensée de l’institution* (Douglas 1999). Dans le cas des évaluations, il est clair que les choix faits par les enseignants de textes d’évaluation contribuent à forger les attentes de l’institution, et ce qu’elle donne à voir comme attentes aux étudiants. Ainsi les genèses documentaires des enseignants de l’université sont susceptibles d’éclairer le *contrat didactique institutionnel*.

Les travaux présentés dans les deux chapitres de cette synthèse se sont trouvés articulés par l'attention porté aux bases d'exercices comme ingrédient potentiel d'enseignements innovants à l'université. La nouvelle perspective adoptée, le choix fait de questionner les ressources et leurs évolutions, quelque soit le thème de l'étude entreprise, tisse un nouveau lien entre les différentes parties de notre travail. En termes de démarche de recherche, ce travail que nous poursuivons sur l’évaluation à l’université témoigne d’une convergence des deux champs d’intérêt autour desquels nous avons structuré cette note de synthèse, aussi bien au niveau thématique (enseignement supérieur, ressources et documents) que théorique (contrat didactique institutionnel, genèses documentaires).

Bibliographie

Adler, J. (2000) Conceptualising resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 205–224.

Alcock, L., Simpson, A. (2001) The Warwick Analysis Project: Practice and Theory, In Holton, D. (ed.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, (pp. 99-112). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Alves Dias, M. (1998) *Les problèmes d'articulation entre les points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat de l'Université Paris VII.

Artigue, M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7, 245–274.

Artigue, M. (2004) Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques ? *Actes du premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques*, Toulouse.

Artigue, M., Bardini, C., Behaj, D., Cazes, C., Eckert, M., Gelis, J.-M., Haspekian, M., Lucas, D., Missenard, D., Souchard, L. (2006) *Analyse de ressources en ligne pour l'accompagnement scolaire en mathématiques*. http://iremp7.math.jussieu.fr/projetregion.html (consulté le 15 mai 2008).

Artigue, M. (2007) Teaching and learning mathematics at university level, presentation at the conference *The future of mathematics education in Europe*, Lisbonne.

Artigue, M. (2008) La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques. In Gueudet, G. & Matheron, Y. (dir.) *Actes du séminaire national de didactique 2007*, (pp. 14-45), IREM de Paris 7.

Behaj, A. (1999) *Elements de structuration à propos de l'enseignement à long terme de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat Université Sidi Mohamed Ben Abdellah – Fès.

Bloch, I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris VII.

Boisnard D., Houdebine J., Julo J., Kerboeuf M.-P., Merri M. (1994) *La proportionnalité et ses problèmes*, Hachette éducation, Paris.

Bookman, J., Malone D. (2003) The nature of learning in Interactive technological environments. A proposal for a research agenda based on grounded theory, *Research in Collegiate Mathematics Education V*, 182-206.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des mathématiques* 19 (1), 77-123.

Bosch, M., Fonseca, C., Gascon, J. (2004) Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2-3), 205-250.

BRAISE *Base Raisonnée d'Exercices de Mathématiques,* site de la base, http://braise.univ-rennes1.fr, (consulté le 15 mai 2008).

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Thomas, K. (1997), Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups, *Journal of Mathematical Behavior* 16 (3) 187-239.

Bueno-Ravel, L., Gueudet, G. (2007) Genèse instrumentale pour l'enseignant : description et analyse en termes d'organisations didactiques instrumentées, *intervention au deuxième congrès sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, Uzès.

Bueno-Ravel, L., Gueudet, G. (2008) Online resources in mathematics: teachers' genesis of use, in Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre.

Cartwright, N. (1999) *The dappled world: a study of the boundaries of sciences.* Cambridge: Cambridge University Press.

Castela, C. (2004) Institutions influencing mathematics students' private work: a factor of academic achievement, *Educational Studies in Mathematics* 57, 33-63.

Cazes, C., Vandebrouck, F. (2003) Analyse d'un exemple d'intégration de TICE dans une formation d'enseignement supérieur, *Actes du colloque ITEM juin 2003,* IUFM de Reims http://www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom/ (consulté le 15 mai 2008).

Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., Vandebrouck, F. (2005) Problem solving and web resources at tertiary level, in Bosch, M. (ed.) *Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 4, Sant Feliu de Guíxols, Espagne.

Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., Vandebrouck, F. (2006) Utilisation de bases d'exercices en ligne. Quelles conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? In Houdement, C. & Castela, C. (dir.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2005*, (pp. 177-212) IREM Paris 7 et ARDM.

Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., Vandebrouck, F. (2007) Using E-Exercise Bases in mathematics: case studies

at university, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11.(3) 327-350.
Cazes, C., Vandebrouck, F. (à paraître) Usage de bases d'exercices en ligne au lycée. In Bloch, I. et Conne, F. (dir.) Actes de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques, Saint-Livrade 2007.
Chellougui, F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.
Chevallard Y. (1989) Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, (pp. 211–235). LSD-IMAG Grenoble.
Chevallard, Y. (1992*a*) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 (1), 77-111.
Chevallard, Y. (1992*b*) Intégration et viabilité des objets informatiques, le problème de l'ingénierie didactique, in B. Cornu (dir.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (pp. 183-203). Paris : PUF.
Chevallard, Y. (2002) Ecologie et régulation, in J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (dir.) *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques, Corps*, (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Chevallard, Y. (2005) Steps towards a new epistemology in mathematics education, in Bosch, M. (ed.) *Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 4, Sant Feliu de Guíxols, Espagne.
CII-Mathenpoche, site internet de la commission Inter-IREM Mathenpoche, pages de l'IREM de Rennes http://cii.sesamath.net/rennes/ (consulté le 15 mai 2008).
Crowe, W.D., Zand, H. (2000) Computers and undergraduate mathematics 3: Internet resources, *Computers & Education*, 35 (2), 123-147.
Crozat, S. (2007) Bonnes pratiques pour l'exploitation multi-usages de contenus pédagogiques : la raison du calcul est toujours la meilleure, in M. Baron, D. Guin, L. Trouche (dir.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage : conception et usages, regards croisés* (pp. 255-286). Paris : Hermès.
De Guzman, M., Hodgson, B.R., Robert, A., Villani, V. (1998) Difficulties in the passage from secondary to tertiary education, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berlin, Documenta mathematica, extra volume ICM 1998, 747-762.
De Vleeschouwer, M. (2008) Aider les étudiants à entrer dans un nouveau contrat didactique institutionnel en mathématiques? L'exemple de l'opération tremplin à l'université de Namur. Communication au *colloque Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur*, Brest.
Dorier, J.-L. (1990) *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approche historique et didactique.* Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
Dorier, J.-L (dir.) (1997*a*) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.* Grenoble : La Pensée Sauvage.
Dorier, J.-L. (1997*b*) Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels, In Dorier, J.-L (dir.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, (pp. 21-102). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (1997*a*) L'algèbre linéaire : l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. In Dorier, J.-L (dir.). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, (pp.105-147). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (1997*b*) A propos du levier méta, In Dorier, J.-L (dir.). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, (pp. 185-213). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Dorier, J.-L. (1998) *Mathématiques pour l'économie et la gestion*, Fac Université : mementos, Gualino.
Dorier, J.-L. (ed.) (2000) *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 5-31.
Douglas, M. (1999) *Comment pensent les institutions*. Editions la Découverte, M.A.U.S.S.
Dreyfus, T. (1999) Why Johnny can't prove, *Educational Studies in Mathematics* 38, 85-109.
Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.-A. (à paraître) Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In Hoyles, C., Lagrange, J.-B. (eds.) *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain*, Springer.
Dubinsky, E. (1995) ISETL: a programming language to learn mathematics, *Communications in pure and applied mathematics* 48, 1-25.
Dubinsky, E., McDonald, M.A. (2001) APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, In Holton, D. (ed.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, (pp. 273-280). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Dubois, C., Gueudet, G., Hili, H., Julo, J., Le Bihan, C., Loric, F. (2008) Quels échanges pour quels usages de Mathenpoche ? EducMath, dossier mutualisation, http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/ (consulté le 15 mai 2008), et revue Mathematice, http://revue.sesamath.net/.
Durand-Guerrier, V., Arsac, G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295-342.
Duval, R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16 (3), 348-382.
ECUM, site EducMath de l'INRP, http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees/ecum/ (consulté

le 15 mai 2008).
Educnet, site du Ministère de l'Education National pour les technologies de l'information et de la communication, http://www.educnet.education.fr/ (consulté le 15 mai 2008).
Edwards B.E., Dubinsky E., Mc Donald M. A. (2005) Advanced Mathematical Thinking, *Mathematical Thinking and Learning* 7 (1), 15-25.
EMULE, site EducMath de l'INRP, http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees/emule/ (consulté le 15 mai 2008).
Engelbrecht, J., Harding, A. (2005*a*) Teaching undergraduate mathematics on the internet. Part 1: Technologies and taxonomy, *Educational studies in mathematics* 58, 235-252.
Engelbrecht, J., Harding, A. (2005*b*) Teaching undergraduate mathematics on the internet. Part 2: Attributes and possibilities, *Educational studies in mathematics* 58, 253-276.
E-Quality, site Internet du projet européen sur l'enseignement à distance, http://www.e-quality-eu.org/home.html (consulté le 15 avril 2008).
Fischbein, E. (1987) *Intuition in science and mathematics, an educational approach*,D.Reidel publishing company, Dordrecht.
Fleck, L. (1934, 2005) *Genèse et développement d'un fait scientifique* (N. Jas, trad.). Paris : Les Belles Lettres.
Folcher, V. (2005) De la conception pour l'usage au développement de ressources pour l'activité, in P. Rabardel, P. Pastré (eds.) *Modèles du sujet pour la conception* (pp. 189-210). Toulouse : Octarès.
Grassmann, H. (1844) *Die lineale Ausdehnunglehre*, Leipzig : Otto Wigand.
Grifone, J. (1990) *Algèbre linéaire*, Cepaduès éditions, Toulouse.
Grønbæk, N., Winsløw, C. (2006) Developing and assessing specific competencies in a first course on real analysis, *Research in Collegiate Mathematics Education* VI, 99-138.
Grønbæk, N., Misfeldt, M., Winsløw, C. (à paraître) Assessment and contract-like relationships in undergraduate mathematics education, In O. Skovsmose et al. (eds), *University science and Mathematics Education. Challenges and possibilities.*
Gueudet-Chartier, G. (2000) *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
Gueudet, G. (2003) Geometric thinking in a n-space, in Mariotti, M.-A., (ed.), .*Proceedings of the third congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 3, Bellaria, Italie.
Gueudet, G., Houdebine J., (2003) Une base d'exercices en ligne à l'université, *Actes du colloque ITEM*, IUFM de Reims. http://www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom/
Gueudet-Chartier (2004) Should we use geometry to teach linear algebra? *Linear Algebra and its Applications* 379, 491-501.
Gueudet, G. (2004*a*) Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24 (1), 81-114.
Gueudet, G. (2004*b*) Renforcer la place de la résolution de problèmes en mathématiques à l'université : développement et emploi d'un support en ligne, *L'Ouvert* 110, 1-16.
Gueudet, G. (2006*a*) Scénarios d'usage de base d'exercices en ligne, in H. Godinet, J.-P. Pernin (dir.), *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage : une nouvelle compétence pour le praticien ?* (pp. 39-44). Lyon : INRP. En ligne : http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/ (consulté le 15 mai 2008).
Gueudet, G. (2006*b*) *Learning mathematics in class with online resources*, 17e étude ICMI « repenser les technologies », Hanoï, Vietnam.
Gueudet-Chartier, G. (2006) Using geometry to teach and learn linear algebra, *Research in Collegiate Mathematics Education* VI, 71-195.
Gueudet, G., Le Méhauté, T. (2006*a*) Conséquences sur les activités des élèves et les apprentissages de l'utilisation d'une base d'exercices en ligne : étude d'un exemple. *Actes du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, Québec.
Gueudet, G., Le Méhauté, T. (2006*b*) Comment utiliser Mathenpoche en CM2 ? *Actes du colloque XXXIIème COPIRELEM*, Strasbourg.
Gueudet, G. (2007) *Emploi de Mathenpoche et apprentissage*, Repères IREM 66, 5-25.
Gueudet, G. (2008*a*) La transition secondaire-supérieur : résultats de recherches didactiques et perspectives, in Rouchier A. et Bloch, I. (dir.) *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, (pp.159-176). La Pensée Sauvage, Grenoble.
Gueudet, G. (2008*b*) Investigating the secondary-tertiary transition, *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 237-254.
Gueudet, G. (2008*c*) Learning mathematics with e-exercises: a case study about proportional reasoning, *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 14 (4), 169-182.
Gueudet, G., Lebaud, M.-P. (2008) Quelle évaluation à l'université en mathématiques ? Communication au colloque *Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur*, Brest.
Gueudet, G., Soury-Lavergne, S., Trouche, L. (2008) Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs ? Exemples du

SFoDEM et du dispositif Pairform@nce. *Communication pour le colloque DIDIREM*, Paris, septembre 2008.

Gueudet, G., Trouche, L. (à paraître) Vers de nouveaux systèmes documentaires pour les professeurs de mathématiques ? In Bloch, I. et Conne, F. Actes de la XIV^e école d'été de didactique des mathématiques, Saint-Livrade 2007.

Gueudet, G., Trouche, L. (2008) Collective documentary activity as a mode of teachers' training : which methodological assistants?, *Colloque ECER*, Göteborg.

Guin, D., Trouche, L. (dir.) (2002) *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Guin, D., Trouche, L. (2007) Une approche multidimensionnelle pour la conception collaborative de ressources pédagogiques, in M. Baron, D. Guin, L. Trouche (dir.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage : conception et usages, regards croisés* (pp. 197-228). Paris : Hermès.

Guin, D., Trouche, L. (2008) Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2007. Co-édition Repères IREM (72, à paraître) et EducMath, dossier mutualisation http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/.(consulté le 15 mai 2008)

Harel, G. (1997) Sur trois principes d'apprentissage et d'enseignement : le cas de l'algèbre linéaire, In Dorier, J.-L. (dir.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 215-230). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Hillel, J. (1997) Des niveaux de description et du problème de la représentation en algèbre linéaire, In Dorier, J.-L. (dir.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* (pp.191-208) Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherches en didactique des mathématiques* 20 (1), 89-116.

Hurme, T.-R., Jarvela, S. (2005) Students' activity in computer-supported collaborative problem solving in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 10, 49-73.

Laborde, C. (1999) Vers un usage banalisé de Cabri-Géomètre avec le TI-92 en classe de seconde : analyse des facteurs de l'intégration, in D. Guin (ed.) *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. Actes du colloque francophone européen* (pp.79-94). Montpellier : IREM, Université de Montpellier 2.

Lagrange, J.-B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational studies in mathematics* 43 (1), 1-30.

Lagrange, J.-B., Bessières, D., Blanchard, M., Loisy, C., Vandebrouck, F. (dir.) (2007) Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants, rapport intermédiaire de l'ACI GUPTEn.

Lithner, J. (2000) Mathematical reasoning in task solving, *Educational Studies in Mathematics* 41, 165-190.

Lithner, J. (2003) Students' mathematical reasoning in university textbook exercises, *Educational Studies in Mathematics* 52, 29-55.

LOMFR, présentation du schéma LOM sur le site Educnet, http://www.educnet.education.fr/dossier/metadata/lom2.htm (consulté le 15 mai 2008).

Lozano, M.-D., Trigueros, M. (2008) Mathematics learning with the use of the balance, a computer program from Enciclomedia, in Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre.

Maschietto, M., Ferri, F. (à paraître). Artefacts, schèmes d'utilisation et significations arithmétiques, in J. Szendrei (ed.), *Mathematical Activity in classroom practice and as research object in didactics: two complementary perspectives, Proceeding of the CIEAEM 59*, Hungary.

Margolinas, C., Canivenc B., de Redon, M.-C., Rivière, O., Wozniak, F. (2007). Que nous apprend le travail mathématiques hors classe des professeurs pour la formation des maîtres ? *31^e colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, pp. 1-19.

Margolinas, C., Wozniak, C. (à paraître). Place des documents dans l'élaboration d'un enseignement de mathématiques à l'école primaire, in I. Bloch, F. Conne (dir.), *Actes de la XIV^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mathenpoche, site de la base d'exercices, http://mathenpoche.sesamath.net/ (consulté le 15 mai 2008).

Matheron, Y. (2000) *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples*. Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille 1.

Mistfeldt, M. (2008) Semiotic instruments in mathematical activity, Intervention à la conférence *ICME 11*, Mexique.

Misfeldt, M., Sanne, A. (2008) Flexibility and cooperation : virtual learning environments in undergraduate mathematics, in Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre.

Nardi, E., Iannone, P. (2005) To appear and to be: acquiring the « genre speech » of university mathematics, in Bosch, M., *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* CERME 4, San Feliu de Guixols, Espagne.

Nardi, E. Jaworski, B., Hegedus, S. (2005) A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: from "tricks" to "techniques". *Journal for research in mathematics education* 36 (4), 284-316.

Niss, M. (2001) University Mathematics based on Problem-Oriented Student Projects: 25 Years of Experience with

the Roskilde Model. In Holton, D. (Ed.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp.153-164), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Pavlopoulou, K. (1994) *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.
Peano, G. (1888) *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnuglehre di H.Grassmann e precedunto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino : Fratelli Bocca Editori.
Pédauque, R. T. (coll.) (2006) *Le document à la lumière du numérique*. Caen : C & F éditions.
Pédauque, R. T. (coll.) (2007) *La redocumentarisation du monde*. Toulouse : Cépaduès éditions.
Pernin, J.-P., Lejeune, A. (2005) Dispositifs d'apprentissage Instrumentés par les Technologies : vers une ingénierie centrée sur les scénarios. *Actes du colloque TICE 2004,* (pp. 407-414), Compiègne.
Pernin, J-P. (2007) Mieux articuler activités pour l'apprentissage, artefacts logiciels et connaissances : vers un modèle d'ingénierie centré sur les scénarios. In M. Baron, D. Guin, L. Trouche (dir.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage : conception et usages, regards croisés* (pp. 161-193). Paris : Hermès.
Piaget, J. (1970) *Genetic Epistemology*, Columbia University Press, New York and London.
Poisard, C. (2005) *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques. Le cas des instruments à calculer.* Thèse de l'Université de Provence, Aix-Marseille 1.
Praslon, F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement* Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.
Proulx, S. (2005) Penser les usages des technologies de l'information et de la communication aujourd'hui : enjeux – modèles – tendances. In Viera, L. et Pinède, N. (dir.*) Enjeux et usages des TIC : aspects sociaux et culturels*, Tome 1, (pp. 7-20), Presses Universitaires de Bordeaux.
Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, in M. Bailleul (ed.), *X*[e] *école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 202-213). Caen : IUFM.
Rabardel, P. (2005) Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir, in P. Rabardel, P. Pastré (dir.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 11-29). Toulouse : Octarès.
Rabardel, P., Bourmaud, G. (2005) Instruments et systèmes d'instruments, in P. Rabardel, P. Pastré (dir.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 211-229). Toulouse : Octarès.
Remillard, J.T. (2005) Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula, *Review of Educational Research* 75 (2), 211-246.
Restrepo, A. (à paraître) A propos du projet MAGI, In Bloch, I. et Conne, F. (dir.) Actes de la XIV[e] école d'été de didactique des mathématiques, Saint-Livrade 2007.
Rey, B., Caffieaux, C., Compere, D., Lamme, A., Persenaire, E., Philippe, J., Walleborn, G. (2003) Les caractéristiques des savoirs enseignés dans les universités et les hautes écoles, Université Libre de Bruxelles - Service des Sciences de l'Education.
Riesz, F. (1907) : Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables, *Comptes rendus de l'académie des sciences* 144, 1409-1411.
Robert, A. (1997) Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire, In Dorier, J.-L (dir.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.*(pp. 149-158). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Robert, A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 139-190.
Robert, A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2 (4), 505-528.
Rogalski, M. (1997) L'enseignement d'algèbre linéaire expérimenté à Lille. In Dorier, J.-L (dir.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* (pp.159-184). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Ruthven, K. (2008) Teachers, technologies and the structures of schooling, in Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre.
Ruthven, K., Henessy, S., Deaney, R. (2005) Incorporating Internet resources into classroom practice: pedagogical perspectives and strategies of secondary-school subject teachers, *Computers & Education* 44, 1-34.
Ruthven, K., Henessy, S. (2002) A practitionner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational studies in mathematics* 49 (2/3), 47-86.
Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P., Paquelier Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25 (1), 57-90.
Sangwin, C. (2004) Assessing mathematics automatically using computer algebra and the Internet, *Teaching Mathematics and its Applications,* 23 (1), 1-14.
Schmidt E. (1907) : Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 1, *Mathematische Annalen.* 63 , 433-467.

Schneider, M. (2001) Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21 (1-2), 7-56.

Schoenfeld, A.H. (1985) *Mathematical problem solving*. Orlando, Academic Press.

Selden A., Selden J. (2005) Perspectives on advanced mathematical thinking, *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (1), 1-13.

Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.L. (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20, *Recherches en didactique des mathématiques* 20, 263-304.

Sensevy, G., Santini, J. (2006) Modélisation et simulation, *Aster* 43, INRP.

Sensevy, G., Mercier, A.(dir.) (2007) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Sierpinska, A., Defence, A., Khatcherian, T. et Saldanha, L. (1997) : A propos de trois modes de raisonnement en algèbre linéaire, In Dorier, J.-L (dir.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.*(pp. 249-268). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Sierpinska, A. (2000) On some aspects of students' thinking in linear algebra. In Dorier J.-L. (ed.) *On the teaching of linear algebra*, (pp. 209-246).Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Soury-Lavergne, S. (2008) Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures. In Gueudet, G. & Matheron, Y. (dir.) *Actes du séminaire national de didactique 2007* (pp.325-343), IREM de Paris 7.

Tall, D. (1991) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Tournaire, F., Pulos, S. (1985) Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics* 16 (2), 181-204.

Trigueros, M., Oktac, A. (2005) La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire, Annales de didactique et de sciences cognitives 10, 157-176.

Trouche, L. (2000) La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques, *Educational Studies in Mathematics* 41**,** 239–264.

Trouche, L. (2002) Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs, In Guin, D., Trouche, L. (dir.) *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique* (pp. 243-276) Grenoble : La Pensée Sauvage.

Trouche, L., Guin, D. (2006) Des scénarios pour et par les usages, in H. Godinet, J.-P. Pernin (dir.), *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage : une nouvelle compétence pour le praticien ?* (pp. 77-82). Lyon : INRP. En ligne : http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/ (consulté le 15 mai 2008).

Vandebrouck, F. (2008) Recherches sur l'utilisation et l'intégration des bases d'exercices en ligne dans les classes de mathématiques, In Gueudet, G., Matheron, Y. (dir.) *Actes du séminaire national de didactique 2007*, (pp. 185-216) IREM de Paris 7.

Vergnaud, G. (1996) Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, in Noirfalise, R., Perrin M.-J.(dir.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 174-185). Clermont-Ferrand : IREM, Université Clermont-Ferrand 2.

Vergnaud, G. (dir.) (1997) *Le Moniteur de Mathématiques : résolution de problèmes Niveau 2-3 (CM1 - CM2) Cycle 3*, Nathan, Paris.

Vivet, M. (1991) Usage des tuteurs intelligents : prise en compte du contexte, rôle du maître. In Baron, M., Gras , R. et Nicaud, J.-F (dir.) *Actes des deuxièmes journées EIAO*, (pp. 239-246). Cachan : ENS.

Weber, K. (2004) Traditional instruction in advanced mathematics courses : a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior* 23, 115-133.

Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M., Merkovsky, R. (2003) Students performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle, *Research in Collegiate Mathematics Education V*, 97-131.

Wenger, E. (2005) *La théorie des communauté de pratique, apprentissage, sens et identité*. Traduit de *Communities of Practice* (1998) par Fernand Gervais. Les presses de l'Université Laval.

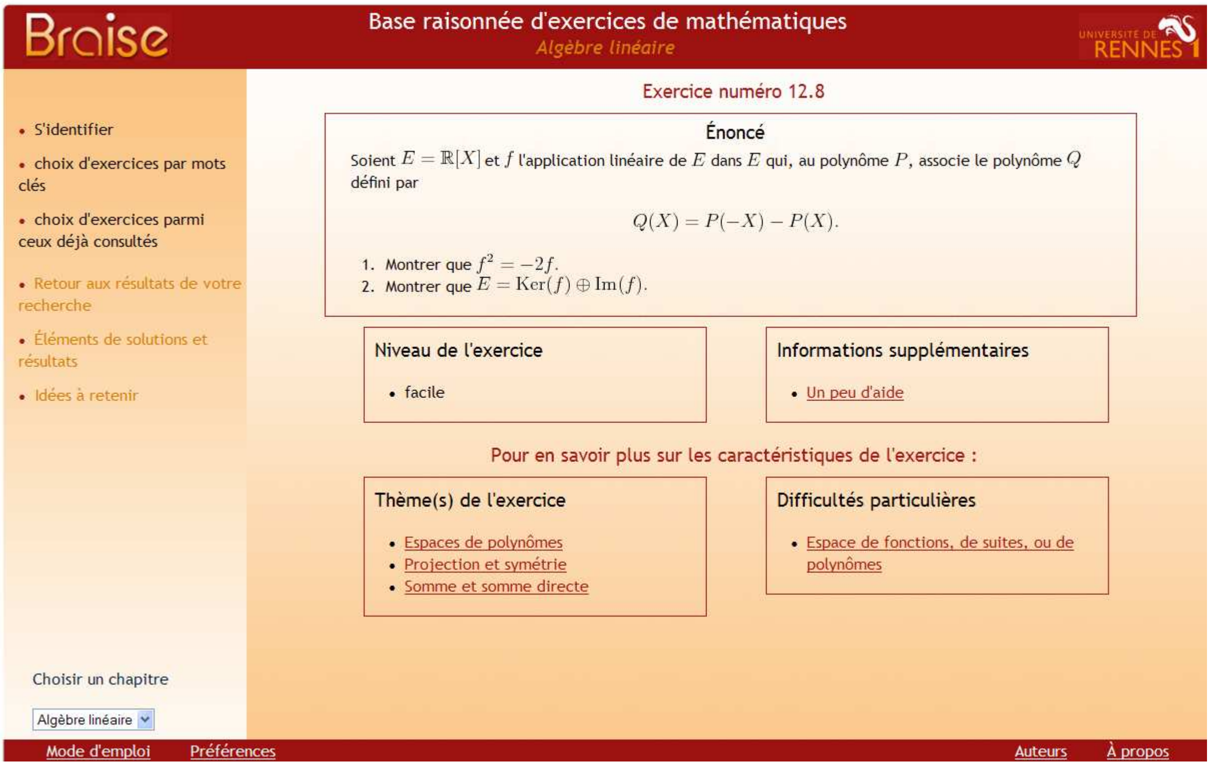
White, T. (2008) Debugging an Artifact, Instrumenting a Bug: Dialectics of Instrumentation and Design in Technology-Rich Learning Environments, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(1) 1-26.

Wims, WWW Interactive Multipurpose Server, site de la base d'exercices, http://wims.unice.fr (consulté le 15 mai 2008).

Winsløw, C. (2008) Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle, in Rouchier A. et Bloch, I. (dir.) *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIII*[e] *école d'été de didactique des mathématiques*, CD-Rom. La Pensée Sauvage, Grenoble.

ANNEXE A : le logiciel BRAISE

Ecran de choix des exercices par mots-clés



Ecran de l'exercice 12.8 du chapitre d'algèbre linéaire

ANNEXE B : le logiciel Mathenpoche

Interface élève :
Un « exercice » MEP comporte 5 ou 10 questions ou problèmes de structure voisine, qui doivent être faits d'un seul tenant. Plusieurs jeux de valeurs numériques sont associés à chaque problème ; les valeurs numériques changent si l'élève relance l'exercice.
La réponse que l'élève doit fournir est numérique, ou plus rarement sous forme de QCM.
L'élève peut faire deux essais de réponse ; à la première réponse fausse il reçoit un feed-back « faux, encore un essai », et à la deuxième réponse fausse l'ordinateur affiche la bonne réponse. L'élève est crédité de 1 point par problème bien résolu ; son score sur l'ensemble de l'exercice (score sur 5 ou 10 points) est toujours apparent. Si à la fin de l'exercice le score de l'élève est inférieur ou égal à 3 sur 5 ou 7 sur 10, un message s'affiche qui lui conseille de recommencer.
Durant la résolution d'un problème, l'élève peut accéder à une aide, en permanence pour certains exercices, ou après une première erreur pour d'autres. Cette aide est la même pour tous les problèmes d'un exercice, elle est basée sur la résolution d'un problème du même type. Dans certains des exercices l'élève dispose d'une calculatrice élémentaire.

Interface enseignant :
Un professeur inscrit comme « testeur » peut utiliser la version « réseau » de MEP. Il doit rentrer les noms de ses élèves et attribuer à chacun un login et un mot de passe. Il peut alors programmer pour ses élèves des séances, en choisissant le contenu mathématique de celles-ci parmi les exercices de MEP. L'enseignant a également accès à un outil de suivi des élèves. Il peut les suivre pendant les séances en classe : à partir du poste enseignant, il visualise le déroulement du travail de chaque poste élève. Il peut aussi imprimer un bilan de la séance ; il y a une partie du bilan qui donne des informations sur le travail de l'ensemble de la classe, et une partie pour chaque élève, ou binôme d'élèves (en fait pour chaque poste). On sait quels exercices ont été abordés, combien de questions ont été faites, si elles ont été réussies à la première tentative, à la deuxième tentative, ou pas ; combien de temps a été passé sur l'exercice.

Bilan groupe : 4 élèves, moyenne : 2 exercices par élève, **Description des exercices**, **Imprimer**

6N1s1ex2	Quel est le chiffre des ... ?	scores : ~ 2/2 | – 2 | + 2	réussite : ~ 100 %
6G0s2ex1	Comment valider une réponse ?	scores : ~ 2/2 | – 2 | + 2	réussite : ~ 100 %
6G0s2ex2	Les aides animées	scores : ~ 3/3 | – 3 | + 3	réussite : ~ 100 %
6G0s2ex4	La calculatrice	scores : ~ 3/3 | – 3 | + 3	réussite : ~ 100 %
6G0s2ex5	Les caractères spéciaux	scores : ~ 2/5 | – 0 | + 4	réussite : ~ 40 %

LOBATO Rafael, 5 exos, moyenne :5.80/10, réussite : 88 %, temps moyen :00:01:32, Imprimer

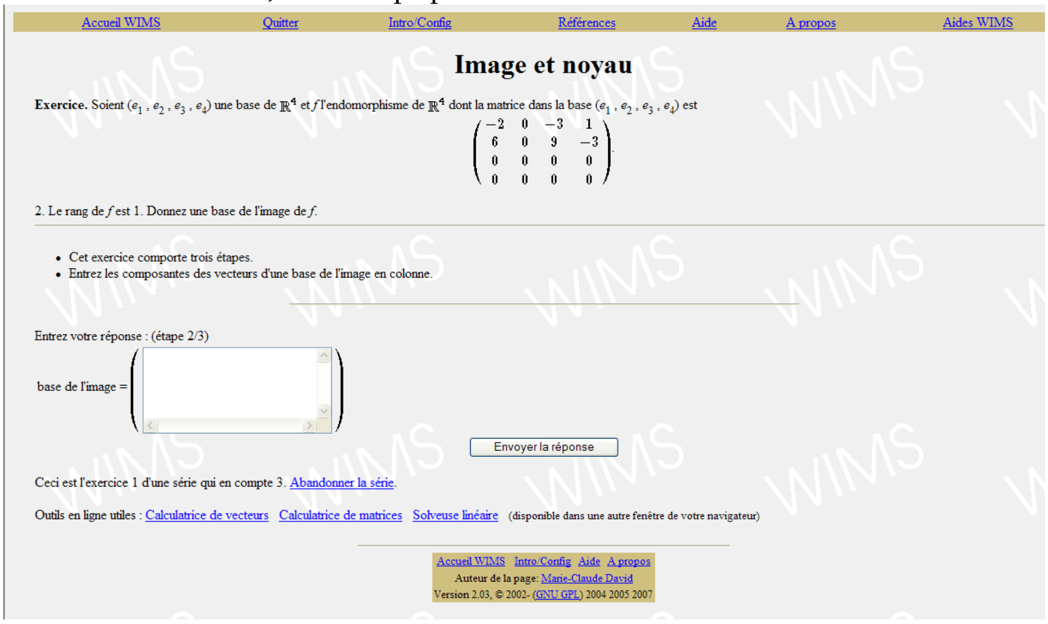
6N6s1ex3	Proportionnalité ou pas ?	4/5	80 %	00:00:23	
6N7s2ex1	Construction de diagrammes à barres.	10/10	100 %	00:05:20	
6N1s1ex1	Entiers et espaces.	3/10	75 %	00:00:28	
6N1s1ex1	Entiers et espaces.	5/10	83.33 %	00:01:10	
6N1s1ex2	Quel est le chiffre des ... ?	3/10	100 %	00:00:17	

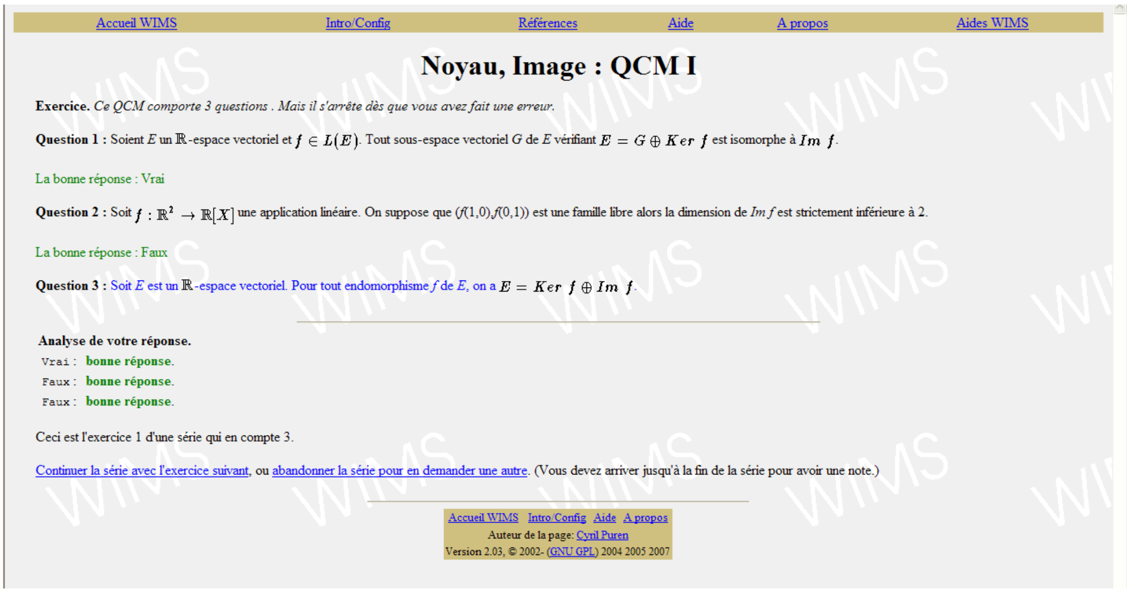
: réussi dès le premier essai

: réussi après un essai : échec : non abordé

ANNEXE C : Le logiciel WIMS

WIMS comporte des exercices interactifs pour tous les niveaux scolaires du secondaire et du supérieur. Tout enseignant disposant d'un accès Internet peut créer ses propres classes virtuelles dans WIMS. Il peut alors programmer ses propres feuilles d'exercices, composées à partir des exercices de WIMS. Les élèves ou étudiants disposent d'un login et d'un mot de passe. Une fois identifiés dans le logiciel, ils ont accès aux feuilles d'exercices programmées par le professeur. Ils doivent fournir une réponse, numérique, sous forme de QCM, parfois sous forme de points à placer sur un graphique... Le logiciel envoie un feed-back « juste » ou « faux » avec la bonne réponse, parfois un commentaire, et le score obtenu. L'élève peut relancer l'exercice, il obtient alors un énoncé voisin avec d'autres valeurs numériques, parfois d'autres questions. L'enseignant a accès à un outil de suivi détaillé, qui lui donne les scores obtenus par les étudiants, mais également le nombre de relances effectuées, et le temps passé sur l'exercice.





ANNEXE D : Trigonométrie : programmes et manuels, choix de MEP, choix de Carmen.

Programmes/manuels	**MEP**	**Séquence Carmen**
Propriétés des triangles rectangles et vocabulaire associé. Cosinus. *(Prérequis)*	Chapitre cos en 4ième ; en 3ième série « Prendre un bon départ »	**S1**, travail en binôme sur MEP, exercices de 3ième : « cosinus » « configurations ». Trace écrite : 8 questions MEP à rédiger.
Définition de sinus et tangente.	Deux exercices “découverte” : un pour sinus un pour tangente.	**S2**, classe entière vidéoprojecteur. Appui sur l'exercice MEP « découverte » de la série sinus. Adaptation de l'exercice pour introduire aussi tangente. Fiche de cours issue de MEP à compléter.
Calcul de cos, sin, tan pour un angle, et de l'angle connaissant cos, sin, tan à la calculatrice.	Trois exercices sur l'emploi de la calculatrice : sin, tan, synhèse.	**S3**, classe entière séance papier/crayon et calculatrice. Evalué en **S9**.
Utilisations simples, calculs directs de cos, sin, tan ; écriture des bons quotients de côtés. Choisir la bonne formule : sin, cos, tan.	Calculs simples sur sin, tan ou synthèse. « Sin, cos ou tan ? » en série synthèse.	Fiche papier pour travail maison en fin de **S2**. **S4/S5**, deux demi-classes par ordre alphabétique. Exercices simples sur MEP (synthèse) et sur papier. Fiche papier pour travail maison en fin de **S5**. Evalué en **S9** pour groupe « <u>Faible</u> ».
Utilisation de cos, sin, tan pour déterminer un côté manquant, pour évaluer un angle manquant.	7 exercices, sin, tan, et synthèse.	Accessible sur MEP et papier en **S4/S5**. Soutien pour « <u>Faibles</u> » en **S6** et **S8** sur papier. Evalué pour tous en **S9**.
Problèmes concrets.	Un exercice.	Accessible sur MEP en **S4/S5**. « <u>Forts</u> » :sur papier en **S6** et MEP en **S8**. « Faibles » sur papier en **S8**. Dans l'évaluation **S9**, sans détail pour les « <u>Forts</u> », avec questions intermédiaires pour les « Faibles ».
Valeurs particulières de sin et cos. Relations : $\cos^2+\sin^2=1$; tan=sin/cos.	Un exercice sur valeurs exactes. 3 exercices sur les relations.	**S7**, cours papier crayon classe entière. « <u>Forts</u> » sur MEP en **S8**. Valeurs exactes évaluées pour « <u>Forts</u> » en **S9**.
Calculs dans des configurations complexes.	Un exercice.	« <u>Forts</u> » sur MEP en **S8**, évalué en **S9**.
Angles complémentaires. Angles dans l'espace. Découverte quart de cercle trigo, autres prolongements.	Un exercice. Deux exercices. Série 7, 4 exercices.	« <u>Forts</u> » sur MEP en **S8**, 3 exercices. Non évalué en **S9**.

Résumé

Je présente ici la synthèse de recherches en didactique des mathématiques au cours desquelles j'ai étudié deux champs très différents :

- l'entrée à l'université, et en particulier les difficultés que pose l'enseignement de l'algèbre linéaire au début de l'université ;
- l'emploi de ressources en ligne pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux scolaires, et en particulier de ressources du type « bases d'exercices en ligne ».

Dans le premier chapitre, je montre comment différentes perspectives de recherche amènent à s'intéresser à différents types de difficultés des étudiants novices, à identifier diverses causes pour celles-ci, et à suggérer différents moyens d'action didactique à l'entrée dans le supérieur, pour le cas de l'algèbre linéaire en particulier.

Le deuxième chapitre porte sur le thème des ressources en ligne. Mes recherches ont concerné plusieurs facettes de ce thème : l'analyse didactique des ressources ; la question des comportements et des apprentissages des élèves ou étudiants travaillant avec de telles ressources ; enfin les conséquences de l'emploi de ces ressources sur les pratiques des enseignants. J'expose en particulier les apports complémentaires d'analyses en termes de contrat didactique et d'approche instrumentale. Pour le professeur, la nécessité d'une prise en compte globale des ressources susceptibles d'intervenir dans son activité professionnelle m'a conduite à prendre part au développement d'une approche théorique spécifique, introduisant la notion de genèse documentaire.

Je présente enfin dans un troisième chapitre mes perspectives de recherche, dans lesquelles l'étude des genèses documentaires constitue un axe majeur.

Mots-clés

Algèbre linéaire, didactique des mathématiques, documentation des professeurs, contrat didactique, transition secondaire-supérieur, ressources en ligne.

English title

Beginning University / Online Resources.

Theoretical perspectives and didactical actions in two mathematics didactics research fields.

Abstract

This text presents a synthesis of research works I carried out, about two very different fields:

- the beginning of university, in particular the difficulties raised by the teaching of linear algebra at the beginning of university;
- the use of online resources for the teaching and learning of mathematics at all levels, from primary school to university, e-exercises bases in particular.

The first chapter displays how different theoretical perspectives offer different points of view on novice university students' difficulties, identify different possible origins for these difficulties, and suggest different means of didactical action; I mainly focus on research about linear algebra.

The second chapter concerns online resources. I investigated several types of issues related with such resources: didactical analysis of the resources; analysis of the consequences of the use of resources on teaching and learning processes. Two complementary theoretical frames intervene in these studies: the didactical contract, and the instrumental approach. The focus on the teacher's activity led me to enlarge my investigation, in order to encompass all kinds of resources likely to intervene in this activity, and eventually to contribute to the development of a new theoretical approach, introducing in particular the notion of documentary geneses.

I finally present in the third chapter research perspectives, entailing prominent issues linked with documentary geneses.

Key words

Mathematics didactics, didactical contract, linear algebra, secondary-tertiary transition, online resources, teachers' documentation.