



HAL
open science

Modèles réduits obtenus par la méthode de POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide structure

Erwan Liberge

► **To cite this version:**

Erwan Liberge. Modèles réduits obtenus par la méthode de POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide structure. Mécanique [physics.med-ph]. Université de La Rochelle, 2008. Français. NNT: . tel-00348432

HAL Id: tel-00348432

<https://theses.hal.science/tel-00348432>

Submitted on 18 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA ROCHELLE
UFR Sciences Fondamentales et Sciences pour l'ingénieur

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de La Rochelle

Discipline : mécanique

par

Erwan Liberge

Réduction de modèles par POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide-structure

Sous la direction de Aziz Hamdouni

soutenue le 01 Février 2008 devant le jury composé de

C. Farhat	Professeur, Université de Stanford	Président du jury
P. Laure	Professeur, Université de Nice	Rapporteur
R. Ohayon	Professeur titulaire de la Chaire de mécanique, CNAM	Rapporteur
F. Allard	Professeur, Université de La Rochelle	Examineur
F. Chinesta	Professeur, ENSAM Paris	Examineur
A. Combescure	Professeur, INSA Lyon	Examineur
A. Hamdouni	Professeur, Université de La Rochelle	Examineur
M. Souli	Professeur, Université de Lille	Examineur
C. Allery	Maître de conférences, Université de La Rochelle	Invité

Réduction de modèles par POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide-structure

Résumé Motivés par la construction de modèles réduits en interaction fluide structure, nous avons étudié l'application de la POD dans ce domaine. Cette méthode a été choisie suite à son utilisation en mécanique des fluides, domaine dans lequel elle a largement fait ses preuves.

Nous avons donc dans un premier temps présenté et rappelé les principaux résultats de la POD. Ces résultats ont été illustrés sur l'équation de Burgers monodimensionnelle et un écoulement à faible Reynolds autour d'un cylindre. La décomposition Bi-orthogonale (BOD) a également été testée pour ces deux cas, celle-ci n'améliorant pas les résultats obtenus par la POD. La POD pour l'étude de structures en vibration a également été testée.

Ensuite, nous avons étudié son application pour des problèmes d'interaction fluide structure. La complexité tient dans le caractère mobile des domaines alors que la base POD est spatiale et indépendante du temps. Pour remédier à cet inconvénient, on propose d'établir une base POD pour un champ de vitesse global défini sur un domaine fixe. On introduit pour cela un domaine de référence fixe contenant l'ensemble des configurations mobiles sur un intervalle de temps. On obtient ainsi une base POD pour un champ de vitesse fluide et solide. On a ensuite proposé l'écriture d'un modèle réduit pour des problèmes traitant d'interaction entre un fluide et un solide rigide. Pour cela, une formulation multiphasique du type domaine fictifs a été utilisée. Cette méthode est testée avec succès sur un cas monodimensionnel et trois cas bidimensionnels, traitant un fluide initialement au repos, ensuite un écoulement à nombre de Reynolds modéré, et un dernier exemple à fort nombre de Reynolds.

Reduced Order Modeling by POD-Galerkin method in Fluid Structure Interaction

Abstract This study presents a contribution of reduced order modelling (ROM) for fluid structure interaction (FSI) problems in the context of optimisation and active control by the Proper Orthogonal Decomposition (POD) method. The first remarkable results using the POD method have been achieved in the field of fluid mechanics. The present study illustrates these results on two practical examples on the Burgers equation and a fluid flow at low Reynolds number around a cylinder. For this cases, the Biorthogonal decomposition has also been tested and gave the same results as the POD. The main subject being ROM in FSI, the POD method has also been tested for structural dynamics. The results show that the POD can be used as a ROM tool in this field.

Then, the POD application for fluid structure interaction problem has been studied. The complexity of this subject area resides in the fact that the POD basis is spatial and the domains are moving. The proposed solution consists in using a fixed reference domain containing all the time variant domains in order to compute the POD basis for the global (fluid and solid) velocity field. The POSTDOCTORAL APPOINTMENT first solution has been computed by a classical method (ALE for example), and every snapshot has been interpolated from the time variant grid to the reference grid. This snapshots have been used for computing the POD basis. The last part of the study presents a low order dynamical system using the POD modes for fluid solid rigid interaction problems. A multiphasic formulation has been considered for the construction of a nonlinear low order dynamical system which has been established by the projection of the continuum formulation of the POD basis. This method has been tested on a one dimensional case and three bidimensional examples. The first bidimensional example considers a case where the solid velocity field is predominant, the second a fluid velocity field at a low Reynolds number and the last a high Reynolds number. The results validate the proposed method.

Remerciement

Et voila cette dernière page à écrire qui prendra sa place au début du manuscrit de thèse. En premier lieu vient les remerciements conventionnels. Conventionnels, certes, mais qui s'adressent aux organismes qui on permis à cette thèse d'être soutenue. C'est pourquoi j'adresse mes remerciements au conseil général de Charente Maritime pour le financement de ces 3 années, ainsi que l'EIGSI et le LEPTAB pour m'avoir accueilli dans leurs locaux. Je remercie Monsieur Ohayon et Monsieur Laure d'avoir accepté de rapporter ma thèse, ainsi que tout les membres du jury. Je remercie également Aziz Hamdouni, officiellement directeur de thèse, mais qui a été bien plus que cela. Je lui laisse le soin apprécier cette phrase (ou pas).

Ensuite je ne sais pas. Le meilleur moyen est peut être de le faire chronologiquement. Ainsi donc un matin du mois de février 2005, je débarquais dans un bureau de l'EIGSI et découvrais mes premiers compagnons de galère(?) : Fabien, Mustapha et Hichem. Ainsi commençais je à faire mes premiers pas, guidé d'une manière consciente ou non par ces premiers contacts de ce qui allait m'occuper 3 ans. J'ai également une pensée pour les stagiaires qui se sont succédés (bien que je serais étonné si ils lisent un jour ce texte). L'aspect chronologique pouvant s'avérer contraignant en terme de noms à énoncer, d'années à résumer, la suite des remerciements sera d'ordre géographique. Ainsi je n'oublie pas non plus les doctorants qui sont ensuite passés à l'EIGSI où qui y sont encore : Bon courage. (Ce sont des encouragements pas des remerciements, mais cela semble plus adapté).

Logiquement il convient ensuite de passer au LEPTAB. Et là, évidemment je ne peux éviter Dondon, LE DONDON, Nicolas Verdon de son prénom (et de son nom ensuite). Dondon, réellement connu à Roscoff lors d'une école de printemps (A Roscoff? ben oui, le printemps a lieu aussi à Roscoff). Ensuite, des goûts partagés pour le rhum, le vin, les apéros ainsi que des émissions débiles ont donné un pigment particulier à cette période de thèse. J'en oublierai presque que à l'origine on a le même directeur de thèse et un sujet portant sur la réduction de modèle. Par contre ce que je n'oublie pas, c'est la rencontre avec Agota. Et là, je ne pense pas que soit le lieu pour m'épancher sur mes sentiments. Merci Dondon pour tes lasagnes (comprenne qui pourra). Sinon, le LEPTAB, c'est aussi des doctorants, un directeurs

de labo, des maîtres de conf, des profs, des chercheurs invités. Qu'ils me pardonnent de ne pas les citer, mais il ne faut pas que les remerciements soient plus importants que le manuscrit qui suit. Qu'ils sachent juste que si j'ai adoré La Rochelle, c'est aussi grâce à eux, aux virés dans les bars, aux tours de vélo à l'île de Ré

Je ne peux finir les remerciements sans penser à l'équipage de TACTICTOC, Xof, Xavier, Joachim, Thomas, Yffic, Margo, et les multiples équipiers qui sont passés à bord de ce Surprise. Ce fameux un mât fin comme un oiseau, écumant la baie de La Rochelle (ben oui on a essayé ailleurs, on s'est ramassé), et qui m'a permis de prendre ce bol d'air parfois nécessaire et de retrouver le plaisir de la régata au contact. Dans le genre contact, je remercie aussi Mustapha (déjà cité précédemment) de m'avoir emmené au dojo d'ERAM 17 de Jaouad. J'y ai redécouvert le karaté ainsi qu'un état d'esprit et d'entre-aide que je n'y imaginai pas.

Et enfin, un grand merci à mes parents, à mes soeurs, qui m'ont supportés malgré le ton grognon que je pouvais avoir au téléphone. Encore merci.

Et surtout Agota, tu sais bien que cette thèse aurait été différente sans toi. Parfois le silence est bien plus significatif que des mots. Je souhaite qu'il en soit de même pour les lignes qui vont suivre

Et encore merci à tous.

Erwan Liberge

Table des matières

Liste des tableaux	xi
Liste des figures	xv
Introduction	1
1 Etat de l’art	5
1.1 Réduction de modèles	6
1.1.1 Utilisation des modes propres du fluide	7
1.1.2 Méthode de troncature équilibrée	7
1.1.3 Décomposition de Voronoï (Centroidal Voronoï tessellation)	9
1.1.4 Méthode à paramètres variables	10
1.1.4.1 Sous-espaces de Lagrange	11
1.1.4.2 Sous-espace de Taylor	11
1.1.4.3 Sous-espace de Hermite	12
1.2 Conclusion	12
2 La décomposition orthogonale aux valeurs propres	15
2.1 Présentation	15
2.1.1 Propriété des modes POD	19
2.1.2 La snapshot POD	20
2.2 BOD	21
2.3 Ecriture des systèmes dynamiques d’ordre bas	22
2.3.1 Système dynamique basé sur le champ de vitesse instantané	23
2.3.2 Système dynamique basé sur le champ de vitesse fluctuant	24
2.3.3 Traitement du terme de pression	26
2.3.4 Stabilisation correction du système dynamique	27
2.4 Cas des fluides compressibles	29
2.5 Système dynamique BOD	30
2.5.1 Système dynamique BOD	30
2.6 Quelques exemples	31
2.6.1 Test sur une configuration monodimensionnelle	31
2.6.1.1 Présentation du problème	31
2.6.1.2 Système dynamique réduit	34

2.6.1.3	Comparaison avec la décomposition bi-orthogonale . . .	34
2.6.2	Ecoulement autour d'un cylindre	37
2.6.2.1	Analyse POD sur le champ de vitesse instantané . . .	37
2.6.2.2	Analyse POD sur le champ de vitesse fluctuant . . .	41
2.6.2.3	Application de la BOD	43
2.7	Conclusion du chapitre	45
3	Réduction de modèle en vibration	47
3.1	Analyse modale	47
3.2	Sous-structuration	48
3.3	La POD pour l'étude de vibrations de structure	49
3.4	Exemple : Etude d'une poutre en appuis simples	49
3.4.1	Application de la POD	50
3.4.2	Système dynamique réduit	53
3.5	Etude d'un cas non linéaire	56
3.6	Conclusion du chapitre	58
4	Interaction fluide structure	59
4.1	Rappel du formalisme employé	59
4.2	Éléments finis pour l'interaction fluide structure	61
4.3	Formulation des domaines	64
4.3.1	Représentation mixte : Arbitraire Lagrangienne-Eulérienne Méthode (ALE)	65
4.3.2	Méthode à maillage fixe	69
4.4	Suivi des interfaces	70
4.4.1	Les méthodes de fraction de volume	70
4.4.2	La méthode Level-Set	71
4.5	Déplacement des domaines	73
4.6	Conclusion du chapitre	74
5	POD en Interaction fluide Structure	75
5.1	Etat de l'art de l'utilisation de la POD en interaction fluide structure	75
5.2	Application de la réduction de modèle à l'interaction fluide structure	77
5.2.1	Illustration de la problématique	78
5.2.2	Solution proposée	81
5.3	Système dynamique POD	84
5.3.1	Méthode des domaines fictifs	84
5.3.1.1	Etude de la POD pour un solide rigide	88
5.3.1.2	Conclusion	93
5.3.2	Système dynamique POD	94
5.3.3	Remarque sur les systèmes dynamiques	96
5.3.4	Résolution	97

5.4	Application	98
5.4.1	Cas monodimensionnel	98
5.4.2	Cavité annulaire	101
5.4.3	Cylindre en oscillation forcée dans un canal	105
5.4.4	Cylindre en oscillation libre	113
5.4.5	Système dynamique sur champ fluctuant	116
5.5	Conclusion du chapitre	117
conclusion		119
Annexe A		131
5.6	Etude POD des domaines mobiles	131
5.6.1	Comparaison numérique de la POD pour la fonction caractéristique et pour la fonction Level-Set	132
5.6.2	Réduction de la fonction Level-Set	134

Liste des tableaux

2.1	Contribution des premières valeurs propres	32
2.2	Erreur de reconstruction en fonction du nombre de modes utilisés . .	34
2.3	Contribution des premières valeurs propres	38
3.1	Contribution des premières valeurs propres	52
3.2	Contribution des premières valeurs propres	56
5.1	Contribution en énergie cinétique des 5 premiers modes POD	79
5.2	Contribution en énergie cinétique des 6 premiers modes POD	98
5.3	Valeurs propres et erreur de reconstruction pour la fonction Level-Set	133

Table des figures

1.1	Schématisation du principe de la réduction de modèles	6
2.1	Nombre d'articles parus par année référencer par Scopus sous le nom de Proper Orthogonal Décomposition	16
2.2	Analyse en composantes principales d'un amas de donnée $u(t)$	17
2.3	Les 4 premiers modes POD	33
2.4	Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes	34
2.5	Comparaison du champ de vitesse reconstit à différents instants t ob- tenus par : – Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 3 modes	35
2.6	Les 4 topos BODs	35
2.7	Les 2 premiers topos	36
2.8	description du domaine d'étude	37
2.9	Clichés des premières et deuxièmes composantes de la vitesse	38
2.10	isovaleurs des deux premiers modes POD	39
2.11	Residu en norme \mathbf{L}^2 en fonction du nombre de modes	40
2.12	Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes	40
2.13	isovaleurs des deux premiers modes POD obtenus sur le champ fluctuant	41
2.14	Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes	42
2.15	isovaleurs des 3 premiers topos	43
2.16	Les 4 premiers coefficients temporels obtenus – par la BOD directe + le système dynamique réduit à 7 modes	44
3.1	Description schématique du problème	50
3.2	Les 4 premiers modes de la poutre	51
3.3	Les 4 premiers modes POD	52
3.4	Comparaison des 2 coefficients temporels obtenus par POD directe – et par le système dynamique réduit à 2 modes –	54
3.5	Comparaison de a_2 obtenu par le système dynamique réduit à 3 modes	54
3.6	Comparaison du déplacement à différents instants : – solution initiale + solution système dynamique réduit à 3 modes	55

3.7	Comparaison du déplacement à différents instants : – solution analytique + solution système dynamique réduit à 3 modes	55
3.8	Description schématique du problème	56
3.9	Les 4 premiers modes POD de la poutre	57
3.10	Comparaison des 2 coefficients temporels obtenus par POD directe – et par le système dynamique réduit à 2 modes –	57
3.11	Comparaison du déplacement à différents instants : – solution initiale + solution système dynamique réduit à 3 modes	58
4.1	Elements de Taylor-Hood : • Noeuds pour le champ de vitesse, × pour le champ de pression	63
4.2	Elements de Crouzeix-Raviart : • Noeuds pour le champ de vitesse, × pour le champ de pression	64
4.3	64
4.4	Description sommaire des méthodes de reconstruction de maillage	72
5.1	Description du domaine d'étude	78
5.2	Les 4 premiers modes POD	80
5.3	Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes	80
5.4	Comparaison du champ de vitesse reconstit à différents instant t obtenus par : – Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 5 modes	81
5.5	Visualisation des isolignes du champ de vitesse sur le maillage mobile et le même champ de vitesse interpolé sur le maillage de référence	83
5.6	Coefficients a_n	91
5.7	Deuxième composante du premier mode	91
5.8	Erreur de reconstruction en norme L^2 en fonction du nombre de modes retenus	91
5.9	Erreur de reconstruction en norme \mathbf{L}^2 en fonction du nombre de modes retenus	92
5.10	Isovaleurs des 3 premiers modes POD	93
5.11	Les 4 premiers modes PODs	99
5.12	Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes	100
5.13	Comparaison du champ de vitesse reconstit à différents instant t obtenus par : – Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 5 modes	100
5.14	Description du domaine d'étude	101
5.15	Déplacement du cylindre pendant 5 périodes d'oscillations	102
5.16	Isovaleurs des deux premières composantes des deux premiers modes POD	103

5.17	Comparaison des deux premiers coefficients temporels obtenus par – POD directe , + système dynamique réduit à 2 modes	104
5.18	Isovaleurs de la première et deuxième composante du champ de vitesse pour la 15 ^{ième} snapshot	104
5.19	Isovaleurs de la première et deuxième composante du champ de vitesse obtenu par le système dynamique réduit pour un temps correspondant à la 15 ^{ième} snapshot	105
5.20	Comparaison du déplacement du solide	105
5.21	Description du domaine d'étude	106
5.22	Clichés du champ de vitesse à différents instants	107
5.23	Isovaleurs des 3 premiers modes POD	108
5.24	Erreur de reconstruction en norme L^2	109
5.25	Les 4 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes	110
5.26	Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 6 modes	111
5.27	Clichés du champ de vitesse obtenu par résolution du système dyna- mique réduit	112
5.28	description du domaine d'étude	113
5.29	Comparaisons des fréquences d'oscillations obtenus par STARCD avec les résultats de la littérature	114
5.30	Isovaleurs des 2 premiers modes POD obtenus sur le champ instantané	114
5.31	Résidu sur le champ instantané par reconstruction POD directe $a_i =$ $(v(t_i), \Phi_i)$	115
5.32	Comparaison de la deuxième composante de la vitesse au centre de gravité + initiale, et reconstruite en fonction du nombre de modes POD retenus dans la base	115
5.33	Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit sur le champ fluctuant à 6 modes	116
5.34	Cycle limite entre a_1 et a_2 : – solution initiale, + par système dyna- mique réduit à 6 modes	117
5.35	déplacement du solide : – solution initiale, + par système dynamique réduit à 6 modes	117
5.36	Fonction caractéristique et Level-Set à la 60 ^{ième} snapshot	132
5.37	Valeurs propres et résidu pour la fonction caractéristique	133
5.38	Premiers coefficients temporels	134
5.39	Les 3 premiers modes POD pour la fonction caractéristique et la Level-Set	134
5.40	description du domaine d'étude	135
5.41	Les 2 premiers coefficients temporels, obtenus par la POD et le sys- tème dynamique à 2 modes	135

Introduction

Le domaine de l'interaction fluide structure regroupe l'étude de tout les phénomènes présentant le couplage du mouvement d'une structure avec celui d'un fluide. La gamme des phénomènes étudiés est très étendue, allant de l'étude de cylindres vibrants dans des écoulements comme c'est le cas dans l'industrie nucléaire, à des structures vibrantes dans des écoulements turbulents, en passant par des phénomènes de surface libre dans des réservoirs (sloshing) ou encore de slamming dans l'industrie navale. Un exemple connu de l'interaction fluide structure et de la complexité des couplages mis en jeu reste celui de la rupture du pont de Tacoma en 1940, qui sous l'effet d'un vent violent entra en vibration jusqu'à sa fréquence de résonance, ce qui entraîna sa destruction totale. On comprend bien alors l'importance d'établir au préalable de toute réalisation des modèles fiables permettant de prédire de tels comportements. L'outil numérique, longtemps bridé par le manque de puissance des ordinateurs, est maintenant couramment utilisé et les modèles qui y sont implémentés sont de plus en plus performants. Ces modèles numériques permettent pour une configuration donnée de déterminer par exemple les déformations d'un solide et la physique de l'écoulement. L'intérêt dans un contexte industriel, est de pouvoir ainsi optimiser la forme et la structure des matériaux à utiliser à partir des résultats numérique, ou effectuer du contrôle actif.

Cependant, la complexité des phénomènes étudiés se répercute par des coûts de calculs prohibitifs, ce qui nous amène à rechercher des modèles réduits dont le temps de calcul serait plus réaliste. Par modèle réduit on entend l'écriture de systèmes de faibles dimensions obtenus à partir de l'analyse d'une formulation numérique classique. Cette réduction a donc un coût initial, mais ce coût peut être largement compensé par la suite si le modèle réduit est utilisable pour une gamme de paramètres différents de ceux de la formulation initiale. De plus l'obtention de systèmes de faibles dimensions, dont le temps de calcul est alors rapide, permet d'effectuer du contrôle actif, ce qui n'est pas le cas avec une modélisation numérique classique.

Les méthodes de réduction sont couramment utilisées en mécanique des fluides et en mécanique des structures. Pour la mécanique des fluides, la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) est employée avec succès depuis les années 90 et a

supplante les autres méthodes. Formulée comme la recherche des vecteurs propres d'une matrice de corrélation spatiale, construite à partir de clichés de l'écoulement, elle permet de construire une base optimale au sens de l'énergie pour un champ de vitesse. En mécanique des structures, la base POD est assimilable à une base modale pour des structures linéaires en vibration. Elle a par contre été très peu appliquée pour des problèmes d'interaction fluide structure, le caractère spatial de la base étant problématique pour l'étude des domaines mobiles.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une étude du potentiel de la POD à construire des modèles réduits en interaction fluide structure. L'objectif est donc ici d'évaluer la capacité de la POD à construire un système réduit reproduisant la physique dont elle est issue. On s'affranchit de la problématique du contrôle actif et de l'étude paramétrique du modèle réduit, en inscrivant ces aspects comme une perspective de développement du travail réalisé.

Pour décomposer les difficultés du problème en ordre croissant, on présente d'abord la problématique en mécanique des fluides. Ensuite on étudie le problème en dynamique des structures avant de passer à l'interaction fluide structure. Ainsi ce mémoire est divisé en cinq parties.

Dans le premier chapitre, on effectue un panorama des méthodes les plus connues en mécanique des fluides et susceptibles de concurrencer la POD. Une méthode, basée sur les diagrammes de Voronoï, nous semble prometteuse. Cette méthode récente n'apporte pas de meilleurs résultats que la POD mais serait intéressante pour l'avenir.

Le deuxième chapitre présente un état de l'art de la POD. On y rappelle les fondements théoriques de la méthode ainsi que la formulation générale du modèle réduit. Pour illustrer la méthode, on la met en oeuvre sur un cas monodimensionnel constitué de l'équation de Burgers puis sur un exemple bidimensionnel, qui est l'écoulement dans un canal autour d'un cylindre à Reynolds modéré. La POD suppose un comportement stationnaire de la moyenne de l'écoulement. Pour s'affranchir de l'hypothèse on utilise parfois la décomposition Bi-orthogonale. Nous présenterons cette décomposition et nous comparerons ces performances à celles de la POD classique.

Après s'être intéressé à la réduction de modèle en mécanique des fluides et plus précisément par la technique POD, l'application de cette approche au problème de la dynamique des structures est étudié. En mécanique des structures, la base naturelle sur laquelle les équations sont projetées est la base spectrale dans le cas de problèmes linéaires, ou la base linéaire sous-jacente dans le cas non linéaire. Cette base a une interprétation claire en dynamique des structures, ce qui n'est pas le cas d'une base

de type POD. Aussi nous présenterons des comparaisons entre les modes obtenus par une approche POD et ceux associés à une base spectrale.

Comme on l'a vu précédemment, l'application de la méthode POD nécessite un calcul préalable de la solution. Aussi avant d'étudier l'application de la POD en interaction fluide structure, on présente dans le quatrième chapitre les grande ligne du mode de calcul pour obtenir ces clichés du champ de vitesse.

Le cinquième chapitre est le coeur de la thèse. Il traite de la réduction de modèle en interaction fluide structure par la POD. Après un bref inventaire des travaux existant dans ce domaine, ceux-ci ne répondent pas à la problématique que l'on s'est posée, à savoir construire un modèle réduit pour un solide en mouvement dans un fluide. Les domaines étant mobiles, la base POD ne peut pas être calculée directement à partir des clichés du champ de vitesse du fluide ou du solide. En effet la base POD étant une base spatiale indépendante du temps, il y a une contradiction à vouloir l'établir sur des domaines qui eux dépendent du temps. La solution proposée est de rechercher une base POD, non plus pour le champ de vitesse du domaine fluide ou le champ de vitesse solide, mais pour le champ de vitesse globale du domaine fluide et solide, qui lui est fixe. Un système dynamique POD-Galerkin est ensuite établi pour des problèmes d'interaction entre un fluide et des solides rigides. On présente les tests de l'approche sur quatre applications. On reprend le cas monodimensionnel de l'équation de Burgers cette fois sur un domaine mobile, couplée avec un ressort. Ensuite la méthode est testé sur trois cas bidimensionnels. Le premier traite d'un disque oscillant dans un fluide initialement au repos. Le deuxième exemple teste la POD pour un disque en oscillation forcée dans un canal à Reynolds modéré et dans le dernier cas le solide oscille librement dans un écoulement à Reynolds élevé.

Chapitre 1

Etat de l'art

Ce chapitre présente un panorama des différentes méthodes de réduction de modèles. Pour commencer il convient de définir ce que l'on entend par réduction de modèles. En effet, on peut considérer comme modèle réduit toute formulation mathématique présentant un modèle simplifié d'un phénomène ou comme une méthode analogue à la compression de données et qui se traduira pour les problèmes de mécanique par l'obtention de modèles d'ordre bas. On gardera la seconde définition pour le travail qui va suivre.

Le principe de ces méthodes est de considérer que initialement tout problème a une formulation mathématique qui consiste à chercher un champ $v(t)$ dans un espace \mathcal{V} de dimension infinie :

$$A(v) = F \tag{1.1}$$

A étant un opérateur différentiel décrivant le phénomène étudié.

La résolution numérique de ce problème consiste à projeter le système (1.1) sur la base discrète d'un espace $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ de dimension finie $n = o\left(\frac{1}{h}\right)$, h étant le paramètre de discrétisation spatiale : Trouver $v^h \in \mathcal{V}^h$ tel que

$$A^h(v^h) = F^h \tag{1.2}$$

où A^h représente la discrétisation de l'opérateur A , de même pour F^h .

Cet espace \mathcal{V}^h est une discrétisation de l'espace \mathcal{V} , obtenue par exemple par la méthode des éléments finis ou des volumes finis. Le système numérique à résoudre

est certes de dimension finie, mais cette dimension peut être encore très importante, ce qui a pour conséquence un temps de résolution très coûteux.

Le principe de construction d'un modèle réduit consiste à projeter, soit la formulation continue (équation (1.1)), soit la formulation discrète (équation (1.2)), sur un espace $\tilde{\mathcal{V}}$ de dimension N beaucoup plus faible que \mathcal{V}^h ($N \ll n$) comme cela est schématisé par la figure (1.1), $\tilde{\mathcal{V}}$ devant conserver certaines propriétés, comme par exemple l'énergie de la solution à un ε près.

Tout le problème réside dans le choix de la base de cet espace. La suite de ce chapitre présente quelques méthodes utilisées dans le domaine de la mécanique des fluides.

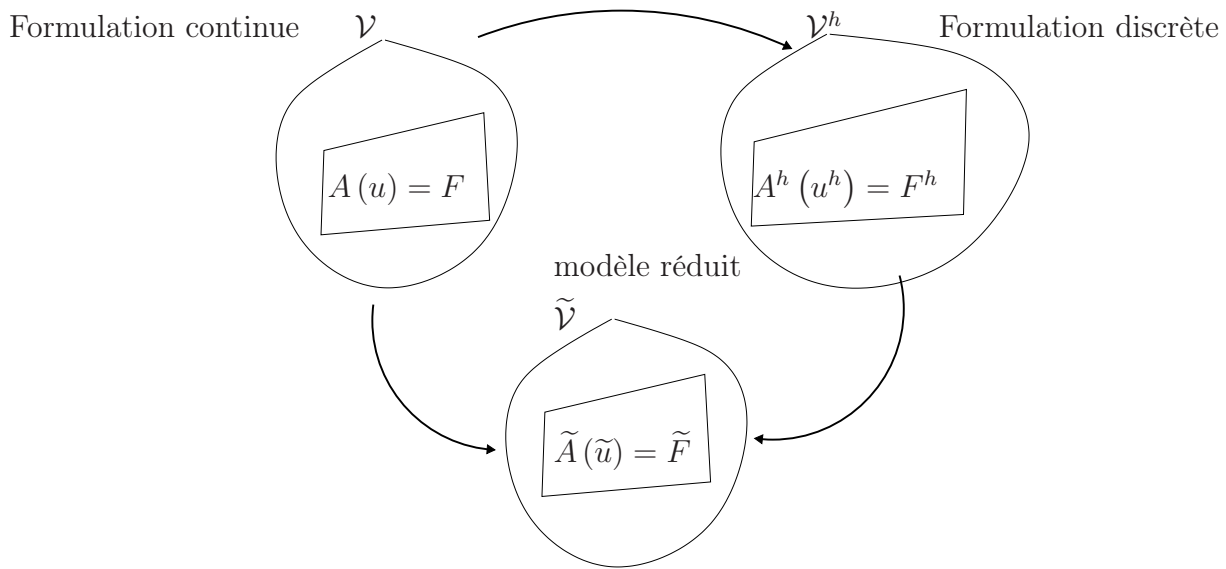


FIG. 1.1: Schématisation du principe de la réduction de modèles

1.1 Réduction de modèles

Une première recherche bibliographique fait clairement ressortir une méthode, la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Cette méthode consiste à rechercher les vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatiale du champ de vitesse. La base réduite est ensuite constituée des N premiers vecteurs propres associées aux valeurs propres les plus dominantes. L'efficacité de cette méthode est liée à la propriété d'optimalité énergétique de la base ainsi retenue. La suite de ce chapitre présente quelques méthodes de réduction de modèle utilisées en mécanique des fluides.

1.1.1 Utilisation des modes propres du fluide

La première méthode exposée concerne la recherche des vecteurs propres de l'opérateur de Navier-Stokes. Pour cela on considère une fluctuation de l'écoulement autour d'une solution stationnaire. Les équations sont alors linéarisées de manière à aboutir à un problème aux valeurs propres, les vecteurs propres servants de base de projection. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à Dowell et al. [36, 35].

Au delà du fait que cette méthode se limite aux problèmes d'oscillations autour d'une solution stationnaire, le problème aux valeurs propres peut être très coûteux à résoudre. Comme le souligne Dowell et al. [35, 36] et Hall et al. [53] au delà de 10^4 degrés de liberté le coût de cette approche devient prohibitif.

1.1.2 Méthode de troncature équilibrée

Cette méthode est initialement une méthode développée dans le domaine de l'automatique et du contrôle. Elle y a été introduite par Moore [87] dans le but de construire des modèles réduits qui gardent la stabilité asymptotique. Elle s'applique pour des systèmes dynamique linéaires pouvant être représentés de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Où $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de contrôle, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie et x_0 la condition initiale.

Pour ce système on définit les matrices grammiennes de commandabilité et d'observabilité :

$$\mathcal{P} = \int_0^\infty e^{tA} B B^T e^{tA^T} dt \quad \mathcal{Q} = \int_0^\infty e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt \quad (1.4)$$

solutions des équations de Lyapunov

$$A\mathcal{P} + \mathcal{P}A^T = -BB^T \quad \mathcal{Q}A + A^T\mathcal{Q} = -C^TC \quad (1.5)$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A .

Définition 1 Le système (1.3) est observable ssi la matrice

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{est de rang } n \quad (1.6)$$

Définition 2 Le système (1.3) est commandable ssi la matrice

$$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad \text{est de rang } n \quad (1.7)$$

Définition 3 On suppose le système (1.3) observable et commandable.

On dit que le système est équilibré si et seulement si les solutions des équations de Lyapounov (1.5) vérifient

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \Sigma \quad (1.8)$$

Où Σ est la matrice diagonale composée des σ_i (appelées valeurs singulières de Hankel) :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathcal{P}\mathcal{Q})} \quad (1.9)$$

λ_i désignant les valeurs propres de la matrice $(\mathcal{P}\mathcal{Q})$

Les valeurs propres de $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ sont invariantes par changement de base. De plus, si le système (1.3) est observable et contrôlable, il existe une transformation T , telle que le système (1.3), décrit par les matrices TAT^{-1}, TB, CT^{-1} soit équilibré (donc il existe une base telle que $T\mathcal{P}T^T = (T^{-1})^T \mathcal{Q}T^{-1} = \Sigma$). On peut alors construire une base réduite composée des N vecteurs propres associées aux N plus grandes valeurs de Σ , sur laquelle on projete le système (1.3) :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{T}A\tilde{T}^{-1}\tilde{x}(t) + \tilde{T}Bu(t) \\ y_N(t) = C\tilde{T}^{-1}\tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Où $\tilde{T} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^n)$ est la matrice de projection sur la base réduite et $\tilde{x} = \tilde{T}x$ est le vecteur d'état réduit, et y_N le vecteur de sortie. Le système réduit ainsi obtenu est stable. C'est ce résultat qui rend cette approche intéressante pour la réduction de modèle.

L'erreur due à la troncature de la base sur la sortie $y(t)$ peut être exprimée à l'aide des valeurs singulières de Hankel :

$$\|y(t) - y_N(t)\| \leq 2 \sum_{i=N+1}^n \sigma_i \|u(t)\| \quad (1.11)$$

Son utilisation en mécanique des fluides consiste à considérer que le système (1.3) est une formulation de la projection du problème (1.1) sur un espace discret pour des problèmes linéaires. Le vecteur d'état x est constitué des coordonnées nodales des

variables de l'écoulement, u contient les conditions aux limites, et y est une fonction des variables de l'écoulement.

La difficulté de la méthode pour les problèmes de grandes dimension réside dans la résolution des deux équations de Lyapounov (1.5) pour le calcul des matrices grammiennes. Des méthodes telles que des itérations de sous-espace [10], approximation aux moindres carrés [60] ou des méthodes de sous-espaces de Krylov [68, 57] ont été utilisées mais restent encore très coûteuses.

Des variantes de cette approche ont été proposées par Wilcox et Peraire [117], Rowley [104] et Ilak et Rowley [65]. Wilcox et Peraire [117] ont proposé une technique de réduction combinant la méthode de troncature équilibrée et la POD. Rowley [104], Ilak et Rowley [65] introduisent la décomposition orthogonale aux valeurs propres équilibrée. Ils font une étude comparative entre les résultats obtenus par leur méthode et une méthode POD classique appliquée sur des équations de la forme (1.3). La reconstruction de la solution en fonction du nombre de vecteurs composant les bases réduites est testée pour chaque méthode. Les résultats obtenus sont meilleurs avec les méthodes introduites par Wilcox et Peraire, Rowley, Ilak et Rowley. Cependant, dans aucun cas le temps de calcul n'est comparé. Ces méthodes incluant une POD doivent avoir un coût plus élevé qu'une POD classique. De plus les approches présentées se restreignent à des problèmes dont la forme discrétisée peut s'écrire comme la formulation (1.3).

1.1.3 Décomposition de Voronoï (Centroidal Voronoï tessellation)

La décomposition de Voronoï (ou décomposition en diagramme de Voronoï) du nom mathématicien Russe Georgi Fedoseevich Voronoï (1868 - 1908) est une méthode utilisée avec succès pour la compression de données.

On considère M clichés $v(t_m)$, $m = 1, \dots, M$ ($v(t_m) \in \mathbb{R}^n$) de l'écoulement étudié, et \mathcal{S} l'ensemble composé par ces snapshots :

$$\mathcal{S} = \{v(t_m)\}_{m=1, \dots, M} \quad (1.12)$$

On recherche une base $\Phi = \{\Phi_i\}_{i=1}^N$ de \tilde{V} qui minimise

$$E(\Phi) = \sum_{i=1}^N \sum_{v \in \mathcal{S}_i} |v - \Phi_i|^2 \quad (1.13)$$

Où

$$\mathcal{S}_i = \{v \in \mathcal{S} \text{ tel que } \|v - \Phi_i\| < \|v - \Phi_j\|, j = 1, \dots, N\} \quad i = 1, \dots, N \quad (1.14)$$

Par construction la famille \mathcal{S}_i , $i = 1, \dots, N$ est une partition de Voronoï de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j &= \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^d \mathcal{S}_i &= \mathcal{S} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pour un choix de base Φ , l'énergie du diagramme de Voronoï représenté par :

$$E(\Phi) = \sum_{i=1}^N \sum_{v \in \mathcal{S}_i} |v - \Phi_i|^2 \quad (1.16)$$

Les 2 algorithmes les plus répandus pour la recherche de Φ sont les méthodes de *k-means* et *h-mean*. Ce sont des algorithmes de descentes qui à partir d'un choix arbitraire des Φ_i , à N fixé, font converger ceci vers un choix qui minimise l'énergie du diagramme de Voronoï. Il n'y a pas de règle pour le choix de N . Burkardt et al.[21] font la remarque que plus on augmente le nombre de vecteurs de base, plus l'énergie du diagramme diminue. La décroissance en énergie diminuant elle aussi avec l'augmentation de la dimension de la base, N est choisi de telle sorte que l'ajout d'un vecteur supplémentaire ne donne pas une baisse significative de l'énergie du diagramme. Dans le même article [21], la réduction par base POD et CVT est comparée pour un écoulement dans un canal en T, la dimension de la base de CVT étant testée pour des dimensions allant de 1 à 6. Le résultat de la réduction est de qualité égale à une réduction par une base POD de même dimension. Dans un second article [20] la base CVT est testée sur une cavité ventilée avec de bons résultats également. L'avantage de la CVT est un calcul plus rapide de la base. Cependant cette technique n'a pas encore été testée pour de hauts nombres de Reynolds, et le choix de la dimension du sous-espace est encore à développer. Cette technique semble prometteuse pour l'avenir.

1.1.4 Méthode à paramètres variables

Ces méthodes consistent pour un problème à paramètre, à établir une base évoluant en fonction de celui-ci. On considère un domaine fluide Ω , dont on note v le champ de vitesses et λ un paramètre (ce paramètre peut par exemple être le nombre de Reynolds). On admet alors que le système non linéaire discrétisé peut s'écrire formellement sous la forme :

$$\mathcal{F}(v^h, \lambda) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mathcal{F} : \mathcal{V}^h \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathcal{V}^h \quad (1.17)$$

où $v^h \in \mathcal{V}^h$.

Dans le but d'alléger les notations, on notera v au lieu de v^h dans la suite du chapitre

1.1.4.1 Sous-espaces de Lagrange

Les éléments composant la base sont solutions de l'équation (1.17) à différentes valeurs λ_j du paramètre λ . Le sous-espace de Lagrange est alors \mathcal{V}_L :

$$\mathcal{V}_L = \text{span} \{ \phi_j | \phi_j = v(\lambda_j), j = 1, \dots, M \} \quad (1.18)$$

Où $v(\lambda_j)$ est la solution de (1.17) pour une valeur de paramètre λ égale à λ_j

Ito et al. [67] ont testé cette approche avec succès pour une cavité entraînée. Cette méthode présente l'avantage de réactualiser la base de l'écoulement en fonction des variations du paramètre λ . Cependant, elle nécessite d'une part, le calcul de l'écoulement pour différentes valeurs du paramètre (ce qui est coûteux) et d'autre part, la dépendance de v en fonction de λ n'est par forcément univoque (par exemple pour les problèmes de bifurcation).

1.1.4.2 Sous-espace de Taylor

La base est constituée par les fonctions de la suite de Taylor générée par la décomposition de Taylor de $v(\lambda)$. A partir d'un paramètre de référence λ_0 , on génère le sous-espace de Taylor \mathcal{V}_T :

$$\mathcal{V}_T = \text{span} \left\{ \psi_j \text{ tel que } \psi_j = \left. \frac{\partial^j v}{\partial \lambda^j} \right|_{\lambda=\lambda_0}, j = 1, \dots, M \right\} \quad (1.19)$$

Si on dérive (1.17) par rapport à λ on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}(v_0, \lambda_0) \left. \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}(v_0, \lambda_0) \quad (1.20)$$

Par récurrence on peut montrer que $\psi_j = \left. \frac{\partial^j v}{\partial \lambda^j} \right|_{\lambda=\lambda_0}$ est solution du problème :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}(v_0, \lambda_0) \psi_j = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \lambda^j}(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{j-1}, \lambda_0) \quad (1.21)$$

Peterson [100] a mis en oeuvre cette approche pour un écoulement incompressible dans une cavité entraînée pour des faibles nombres de Reynolds. Il obtient de bons résultats en utilisant seulement 5 modes de Taylor. L'avantage de l'utilisation des

sous-espaces de Taylor par rapport aux sous-espaces de Lagrange, réside dans le fait que les systèmes d'équation (1.20)-(1.21) ont les mêmes matrices $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}(v_0, \lambda_0)$. Aussi, elles peuvent être calculées d'une manière efficace en utilisant une méthode directe, par exemple une décomposition LU où L et U sont communes à l'ensemble des systèmes d'équations. Cependant deux inconvénients existent dans cette approche. Le premier réside dans le calcul des seconds membres des équations qui peut s'avérer coûteux. Le second concerne la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}(v_0, \lambda_0)$. En effet lorsque cette matrice est grande, la résolution des systèmes exige des méthodes itératives qui annulent les avantages de la méthode.

1.1.4.3 Sous-espace de Hermite

L'espace d'approximation est construit en combinant les deux méthodes précédentes. La base est constituée des solutions de l'équation (1.17) et des dérivées premières de l'équation 1.17 à différentes valeurs λ_j du paramètre λ . Le sous-espace d'Hermite est alors \mathcal{V}_H :

$$\mathcal{V}_H = \text{span} \left\{ \phi_j = v(\lambda_j) \quad \text{et} \quad \xi_j = \left. \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j}, j = 1, \dots, M \right\} \quad (1.22)$$

où ξ_j est solution de :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}(\phi_j, \lambda_j) \xi_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}(\phi_j, \lambda_j) \quad (1.23)$$

Ito et al. [67] emploient les méthodes de Lagrange et de Hermite pour l'étude d'une cavité entraînée, la base étant calculée pour des nombres de Reynolds valant 100, 300, 500, 700 et 900, et le système dynamique réduit calculé pour un nombre de Reynolds de 1200. La même opération est effectuée dans un canal. Les auteurs obtiennent des résultats numériques meilleurs que ceux donnés par un modèle réduit associé à un espace de Lagrange. Cependant, comme précédemment, le calcul du second membre de l'équation (1.23) peut s'avérer coûteux et les matrices des systèmes linéaires étant différentes, le temps de calcul de ξ_j augmente.

1.2 Conclusion

Dans cette section nous avons présenté différentes méthodes utilisées en réduction de modèles. Les trois dernières méthodes présentées ont eu peu d'application, le

coût que représente le calcul de la base de réduction étant handicapant. L'utilisation d'une base de modes propres de l'écoulement se restreint à des études pour des écoulements fluctuants autour d'une position stationnaire et est limitée par la dimension des problèmes étudiés. La méthode de troncature équilibrée est aussi limitée par la taille des problèmes étudiés, et par le fait qu'elle soit développée pour des systèmes linéaires. L'utilisation de maillage de Voronoï semble intéressante, mais pour l'instant sa validation n'a été effectuée que pour des écoulements à nombres de Reynolds modérés. Le choix de la technique de réduction à adapter en interaction fluide-structure s'est porté vers la méthode la plus utilisée en mécanique des fluides : la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Nous allons présenter cette méthode dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

La décomposition orthogonale aux valeurs propres pour les écoulements

2.1 Présentation

Dans ce chapitre on s'intéresse à la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Cette technique est actuellement la plus répandue en réduction de données. Elle est utilisée dans des domaines aussi divers que l'analyse de données, l'aéroacoustique, le traitement d'image, la chimie, ou encore la mécanique des fluides. Pour donner une idée de son importance il suffit à titre indicatif de regarder le nombre d'articles référencés par l'intitulé "méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres" sur le site de référencement bibliographique scopus (<http://www.scopus.com/>). Plus de 900 articles y sont référencés, la parution par année dépassant la centaine depuis l'année 2004 (figure 2.1).

La POD fut introduite en mécanique des fluides par Lumley en 1967 [82] dans le but d'identifier les structures cohérentes d'un écoulement turbulent. La POD y est appliquée par la méthode que l'on appellera classique qui consiste à rechercher les vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatial du champ de vitesse. Cependant il faut attendre une approche de la POD par la méthode Snapshot [108] (cf section 2.1.2) permettant de diminuer la taille du problème à résoudre pour que la POD commence à se développer en mécanique des fluides. Depuis les années 90, la POD a connu un grand nombre d'applications en mécanique des fluides sur des problèmes divers. On se contentera d'en mentionner juste quelques unes ici, pour une bibliographie plus complète on peut se référer à Berkooz et al. [17], Couplet [28], Holmes et al. [61], Solari et al. [109] ou encore Allery [1], Allery et al. [2, 3].

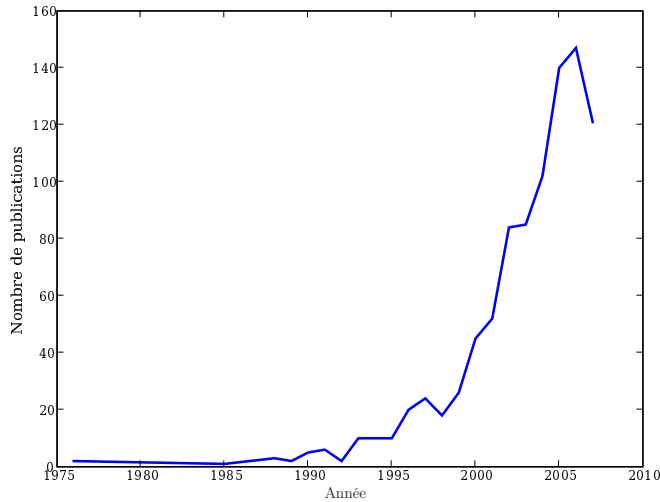


FIG. 2.1: Nombre d'articles parus par année référencer par Scopus sous le nom de Proper Orthogonal Décomposition

Aubry et al. [9] appliquèrent en premier un modèle réduit POD pour l'étude de la couche limite turbulente. Ensuite, différentes configurations ont été étudiées, par exemple l'étude du développement de la couche limite turbulente le long d'une plaque plane ([102], [103]), écoulement en canal [31], [94], ou encore cavité entraînée [24]. La méthode a connu aussi un développement très important en aérodynamique pour l'étude des ondes de chocs [77], [78].

On peut citer pour exemple de l'efficacité de la POD les articles de Allery et al. [3, 2] qui l'appliquent à l'étude de l'effet Coanda [3] et pour construire un système dynamique d'ordre bas modélisant la dispersion de particules dans une cavité ventilée [2]. Dans ces deux cas très peu de modes sont nécessaires, puisque dans le cas de l'étude de l'effet Coanda, 6 modes POD suffisent pour capturer complètement la structure de l'écoulement et construire un système dynamique d'ordre bas qui reproduit bien le champ de vitesses. De même dans le second article où seulement 4 modes sont utilisés.

D'autres applications utilisent la POD combinée avec d'autres méthodes [104] [117] qui combinent méthode de troncature équilibrée et la POD comme explicité dans le chapitre précédent pour le calcul des matrices grammiennes de commandabilité et d'observabilité.

Il y a en générale deux interprétations de la POD. La première interprétation consiste à considérer la POD comme une décomposition de Karhunen-Loeve (KLD) [89, 90], ou comme un ensemble de trois méthodes : la décomposition de Karhunen-Loeve (KLD), développée pour des processus stochastique, l'analyse en composantes

principales (ACP) en analyse de donnée et la décomposition en valeurs singulières pour le cas de matrices non carrées. Liang et al. [79] et Wu et al. [119] comparent ces trois méthodes et montrent qu'elles aboutissent à la même formulation, c'est à dire la recherche des vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatiale.

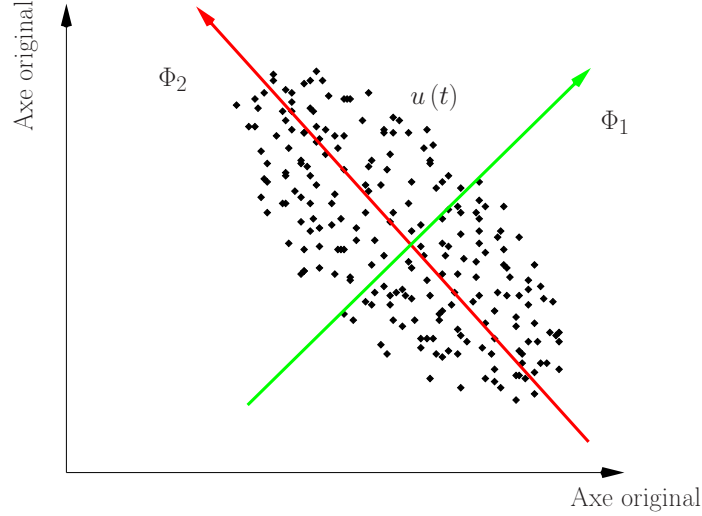


FIG. 2.2: Analyse en composantes principales d'un amas de donnée $u(t)$

On présente dans la suite sa formulation pour la mécanique des fluides. Cette méthode étant actuellement bien connue, on se contentera d'en rappeler seulement les points principaux.

On considère un domaine spatial $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, de dimension $d = 1, 2$ or 3 , $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ un repère orthonormé direct lié à Ω , un intervalle de temps $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$, une variable d'espace $x \in \Omega$, et une variable temporelle $t \in \mathbf{T}$. Soit $v(t) \in \mathcal{V}$, un champ de vitesse de l'écoulement, \mathcal{V} étant un espace de Hilbert.

La POD consiste à rechercher une base orthogonale qui approxime v au mieux en moyenne. On considère pour cela le problème de maximisation suivant, qui consiste à chercher $\Phi \in \mathcal{V}^*$ tel que :

$$\frac{\langle (v(t), \Phi)^2 \rangle}{(\Phi, \Phi)} = \max_{\phi \in \mathcal{V}^*} \frac{\langle (v(t), \phi)^2 \rangle}{(\phi, \phi)} \quad (2.1)$$

Où $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \setminus \{0\}$, (\bullet, \bullet) désigne le produit scalaire de \mathcal{V} et $\langle \bullet \rangle$ un opérateur de moyenne temporelle.

On présente ici la POD discrète pour M clichés $v(t_i)$, $i = 1, \dots, M$ du champ de vitesses (dont au moins un est non nul). Cette formulation est la plus proche de celle appliquée en calcul numérique. Pour établir les liens entre la formulation continue et la formulation discrète, le lecteur pourra se référer à [28], d'où est extrait la présentation ci-dessous.

La moyenne temporelle considérée est alors la moyenne arithmétique sur les M clichés, et $\mathcal{V} = \mathbf{L}^2(\Omega)$. Le problème de maximisation (2.1) se formule :
 Trouver $\Phi \in \mathcal{V}^*$ tel que :

$$\frac{\langle (v(t), \Phi)^2 \rangle}{(\Phi, \Phi)} = \max_{\phi \in \mathcal{V}^*} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{(v(t_i), \phi)^2}{(\phi, \phi)} \quad (2.2)$$

Soit R l'opérateur définit par :

$$\begin{aligned} R: \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ \Phi &\longmapsto R\phi = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (v(t_i), \phi) v(t_i) \end{aligned} \quad (2.3)$$

R est linéaire, continu, compact, auto-adjoint et positif. Son image

$$\text{Im}(R) = \text{Vect} \{v(t_i), t_i \in \mathbf{T}, i = 1, \dots, M\} = \mathbf{V} \quad (2.4)$$

est de dimension finie $n_R \geq 1$ car au moins un des clichés est non nul et son noyau est $\text{Ker}(R) = \mathbf{V}^\perp$. L'opérateur R admet donc $n_R \geq 1$ valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1, \dots, n_R}$ formant une suite positive et décroissante vers 0.

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n_R} > 0 \quad (2.5)$$

On a alors $(v(t_i), \phi)^2 = (R\phi, \phi)$.

On suppose Φ solution de (2.2), et $\phi \in \mathcal{V}^*$ quelconque. On définit la fonction $F_\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F_\phi(\epsilon) = \frac{\langle (R(\Phi + \epsilon\phi), (\Phi + \epsilon\phi)) \rangle}{((\Phi + \epsilon\phi), (\Phi + \epsilon\phi))} \quad (2.6)$$

Par définition de Φ , $F_\phi(\epsilon) \leq F_\phi(0)$, donc $F'_\phi(0) = 0$. On obtient alors la relation suivante :

$$(R\Phi, \phi) = \frac{(R\Phi, \Phi)}{(\Phi, \Phi)} (\Phi, \phi) \quad (2.7)$$

Ceci étant valable quelque soit $\phi \in \mathcal{V}$, le problème (2.2) s'écrit :

$$\text{Trouver } \Phi \in \mathcal{V}^* \text{ tel que } R\Phi = \lambda\Phi \quad (2.8)$$

Avec $\lambda = \frac{(R\Phi, \Phi)}{(\Phi, \Phi)}$.

Réciproquement, tout vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de R est solution du problème (2.2). On peut donc définir l'ensemble des solutions de (2.2) par un problème aux valeurs propres.

Théorème L'ensemble des solutions de (2.2) est constitué des vecteurs propres de R associés à la plus grande valeur propre.

A partir de ce résultat on considère l'ensemble des sous-espaces propres de R , et ses propriétés. Cela est équivalent à réitérer le processus à partir de v auquel on a préalablement soustrait sa projection sur l'espace propre que l'on vient d'obtenir. R étant compact et autoadjoint, il existe une base de vecteurs propres de \mathbf{V} dans laquelle on peut décomposer les clichés.

Définition de la POD discrète Soit $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n_R} > 0$ les valeurs propres strictement positives de R rangées dans un ordre décroissant. Pour tout $N \in [1, n_R]$, on appelle base POD (discrète) d'ordre N toute famille $(\Phi)_{i=1, \dots, N}$ de vecteurs propres orthonormaux associés. Ces vecteurs propres sont appelés modes POD.

On peut donc décomposer v sur cette base POD discrète de dimension N

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad (2.9)$$

Où a_i est appelé coefficient temporel.

Remarque En pratique pour le calcul numérique de la base POD on recherche les vecteurs propres d'une matrice de corrélation spatiale \mathbf{R} définie par :

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{M} \langle v(X_i, t) \otimes v(X_j, t) \rangle \quad i, j = 1, n \quad (2.10)$$

Où X_i est le noeud i du maillage.

2.1.1 Propriété des modes POD

La base obtenue possède les propriétés suivantes :

- Les modes Φ respectent les conditions aux limites homogènes. Dans le cas d'un fluide incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle, de même que la base POD :

$$\operatorname{div} \Phi_i = 0 \quad (2.11)$$

- Les coefficients temporels $a_i(t)$ peuvent être obtenus par projection du champ de vitesse v sur la base (Φ_i) :

$$a_i(t) = (v(t), \Phi_i) \quad (2.12)$$

- Les coefficients sont indépendants et les valeurs propres sont le résultat de leur moyenne temporelle :

$$\langle a_i(t) a_j(t) \rangle = \delta_{ij} \lambda_i \quad \text{sans sommation sur les indices répétés} \quad (2.13)$$

- Chaque valeur propre λ_i représente la part d'énergie capturée par chaque mode Φ_i . Ce qui veut dire que si on tronque la base à N modes, $N < n_R$ la décomposition

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad (2.14)$$

est optimale au sens énergétique. On ne peut pas obtenir une décomposition sur N modes qui contienne plus d'énergie que la décomposition (2.14).

- L'erreur induite par la base correspond à la somme des valeurs propres de modes négligés :

$$\langle \|v(t) - \sum_{k=1}^N a_k(t) \Phi_k\|^2 \rangle = \sum_{k=N+1}^{n_R} \lambda_k \quad (2.15)$$

2.1.2 La snapshot POD

Dans le cas de problèmes de grandes dimensions, la recherche des vecteurs propres de l'opérateur R peut s'avérer coûteuse. En effet, on peut avoir à résoudre un problème de dimension $4n_{x_1}n_{x_2}$ en 2D ou $9n_{x_1}n_{x_2}n_{x_3}$ en 3D où n_{x_1} , n_{x_2} , n_{x_3} représentent le nombre de noeuds du maillage selon les axes \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 . La puissance d'un simple ordinateur peut vite être dépassée. Pour remédier à cela, Sirovitch [108] a introduit la méthode des Snapshots.

La méthode consiste à considérer que si avec M clichés de l'écoulement, $M \ll nn_c$, où n représente le nombre de noeuds et n_c le nombre de composantes, l'écoulement est correctement représenté, alors on cherche à résoudre non plus un problème de dimension $nn_c \times nn_c$ mais un problème de dimension $M \times M$.

Le principe est de chercher non plus directement la base composée des (Φ_i) , $i = 1, \dots, n_R$, mais de rechercher en premier lieu les coefficients A_k ¹ $k = 1, \dots, M$ tels que :

$$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^M A_k^i v(x, t_i) \quad (2.16)$$

¹ $A_k = (A_k^1 \dots A_k^M) \in \mathbb{R}^M$

En introduisant la décomposition (2.16) dans (2.8) on montre que l'on se ramène alors au problème suivant :

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{M} (v(t_i), v(t_j)) A_k^j = \lambda_k A_k^i \text{ pour } i = 1 \dots M \quad (2.17)$$

Où λ_k est la valeur propre associée au mode POD Φ_k .

Ce problème est alors de dimension nettement inférieure au problème (2.8). Ensuite la base POD est obtenue en calculant (2.16) et les coefficients temporels a_i sont trouvés par l'équation (2.12). Il n'y a pas vraiment de règle sur le nombre de snapshots et l'espacement nécessaire entre chaque snapshot.

Le choix d'utiliser la méthode des snapshots ou la méthode que l'on qualifiera de classique dépend du type de données à traiter. Dans le cas de données expérimentales type PIV la méthode classique est utilisée (pour exemple [45, 38, 43, 37]). Par contre dans le cas de simulations numériques où le maillage spatial est important et la taille de l'échantillon temporelle limitée, la méthode des snapshots est préconisée.

Dans ce qui a été présenté ici on a considéré des processus aléatoires. Si le processus est stationnaire et ergodique ², alors la présentation précédente de la POD reste valable. Par contre, si le processus est instationnaire ³, l'approche par Snapshot qui utilise l'hypothèse d'ergodicité n'est plus valable. Aussi, Aubry et al. [8] ont proposé la décomposition Bi-orthogonale (BOD) dont le formalisme est présenté dans la section suivante.

2.2 Décomposition Bi-orthogonale

La décomposition Bi-orthogonale (BOD) à été introduite par Aubry et al. [8] dans le cadre de l'étude de signaux spatio-temporels. Pour une formulation mathématique rigoureuse on peut se référer à son article. Le principe est de déterminer une décomposition déterministe d'un signal avec pour seule contrainte que celui-ci soit de carré intégrable. De la même manière que pour la POD, on considère un signal $v \in \mathbf{L}^2(\Omega \times \mathbf{T})$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbf{T}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$. La décomposition bi-orthogonale de v s'écrit :

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) \varphi_k(x) \quad (2.18)$$

²Où l'on peut confondre sa moyenne temporelle et sa moyenne statistique

³sa moyenne statistique dépend du temps

Aubry et al. [8] prouvent que cette décomposition existe, converge en norme et que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_0 \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \alpha_M &= 0 \\ (\varphi_k, \varphi_l)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= (\psi_k \psi_l)_{\mathbf{L}^2(\mathbf{T})} = \delta_{kl} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Les modes spatiaux $\varphi_k(x)$ sont appelés *topos*, $\varphi_k \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et les modes temporels $\psi_k(t)$ *chronos*, avec $\psi_k \in \mathbf{L}^2(\mathbf{T})$. Les *topos* associés aux valeurs propres $\alpha_k^2 = \lambda_k$ sont les vecteurs propres de l'opérateur de corrélation spatial :

$$\mathbf{S}\mathbf{c}(x, x') = \int_{\mathbf{T}} v(x, t) v(x', t) dt \tag{2.20}$$

lequel est défini non négatif. De même les *chronos* associés aux mêmes valeurs propres λ_k sont les vecteurs propres de l'opérateur de corrélation temporel :

$$\mathbf{T}\mathbf{c}(t, t') = \int_{\Omega} v(x, t) v(x, t') dx \tag{2.21}$$

On remarque que les valeurs propres α_k^2 sont communes aux *topos* et aux *chronos*, donc qu'ils sont couplés. Cependant il est possible de séparer l'information, spatial et temporelle, en les multipliant par le facteur pondéré $\sqrt{\alpha_k}$.

De plus si on considère que l'énergie globale du signal est égale à la somme des valeurs propres

$$\int \int_{\Omega, \mathbf{T}} v(x, t) v(x, t) dx dt = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \tag{2.22}$$

on peut tronquer la décomposition (2.18) aux N structures spatio-temporelles les plus énergétiques. Aubry et al. [8] montrent alors que l'erreur de reconstruction sur le signal est inférieure à la valeur propre correspondant au premier terme négligé.

Dans la majorité des cas à traiter en mécanique des fluides, la POD est suffisante, ce qui explique la faible utilisation de la BOD. Hémon et Santi [56] appliquent la BOD à la distribution de pression et aux forces locales pour un écoulement autour d'un cylindre à Reynolds 150. Couplet [28] fait la remarque que la BOD est juste une écriture particulière de la POD.

2.3 Ecriture des systèmes dynamiques d'ordre bas

La POD permet d'obtenir une base qui est optimale au sens de l'énergie, c'est à dire que les premiers vecteurs contiennent l'essentiel de l'énergie (au sens statistique) du champ étudié. On peut espérer qu'une projection de Galerkin des équations de

Navier-Stokes sur les N premiers modes énergétiques permette d'obtenir un système dynamique d'ordre bas reproduisant correctement le phénomène étudié. La base étant spatiale et donc fixe dans le temps, le résultat de la projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes donne un système d'équation ordinaire en temps beaucoup plus rapide à résoudre.

2.3.1 Système dynamique basé sur le champ de vitesse instantané

On considère le champ de vitesse fluide v projeté sur la base POD tronquée à N modes :

$$v_N(x,t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \Phi_k(x) \quad (2.23)$$

Pour la suite de cette section, on prendra la même notation pour v et v_N . On rappelle les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible sous leur forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v &= -\nabla p + \frac{1}{R_e} \Delta v \end{aligned} \quad (2.24)$$

Où R_e représente le nombre adimensionnel de Reynolds, dont on rappelle ici l'expression :

$$R_e = \frac{\rho V_0 L}{\mu} \quad (2.25)$$

ρ étant la densité volumique du fluide, μ sa viscosité dynamique, V_0 une vitesse caractéristique de l'écoulement et L une longueur caractéristique.

Pour un écoulement incompressible, la base POD obtenue est à divergence nulle. Par conséquent on n'a pas à tenir compte de l'équation d'incompressibilité.

On considère la formulation faible de l'équation (2.24) sur la base POD :
 Trouver $v \in \tilde{\mathcal{V}}$ tel que $\nabla \cdot v = 0$
 $\forall \Phi_i, i = 1, \dots, N, \nabla \cdot \Phi = 0$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \Phi_i dx + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla v) \cdot \Phi_i dx = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \Phi_i dx + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \Delta v \cdot \Phi_i dx \quad (2.26)$$

En tenant compte de la décomposition (2.23) de v sur la base tronquée à N modes, et de l'orthogonalité des modes POD, on obtient le système suivant :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k a_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a_k B_{ki} + D_i \quad \text{avec } i = 1 \dots N \quad (2.27)$$

où

$$C_{kli} = -(\Phi_k \cdot \nabla \Phi_l, \Phi_i) = - \int_{\Omega} (\Phi_k \cdot \nabla \Phi_l) \cdot \Phi_i dx \quad (2.28)$$

$$B_{ki} = \frac{1}{R_e} (\Delta \Phi_k, \Phi_i) = \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \Delta \Phi_k \cdot \Phi_i dx \quad (2.29)$$

$$D_i = - \int_{\partial\Omega} p \Phi_i \cdot \mathbf{n} dx \quad (2.30)$$

$$(2.31)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au domaine fluide sur la frontière $\partial\Omega$.

Pour résoudre ce système il suffit de calculer au préalable les coefficients C_{kli}, B_{ki} et D_i . La base POD étant obtenue pour la vitesse, il reste un terme problématique à calculer D_i qui sera vu plus loin.

2.3.2 Système dynamique basé sur le champ de vitesse fluctuant

Comme en pratique la première fonction POD capture l'essentiel du signal, il est courant de décomposer le champ de vitesse en une partie stationnaire et une partie fluctuante. La POD est ensuite appliquée sur le champ fluctuant et le système dynamique est construit pour celui-ci :

$$v = \langle v \rangle + v' \quad p = \langle p \rangle + p' \quad (2.32)$$

Avec $\langle \bullet \rangle$ qui représente l'opérateur de moyenne temporelle explicité précédemment. Pour plus de commodité pour l'écriture des équations on remplacera dans la suite $\langle \bullet \rangle$ par $\bar{\bullet}$.

Cette équation est introduite dans l'équation (2.24), auquel on soustrait sa moyenne. On obtient alors l'équation de Navier-Stokes aux grandeurs fluctuantes :

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v' \cdot \nabla v' + \bar{v} \cdot \nabla v' + v' \cdot \nabla \bar{v} - \overline{v' \cdot \nabla v'} = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \Delta v' \quad (2.33)$$

En procédant de la même façon que pour le champ instantané, on décompose v' sur la base POD Φ' tronquée à N modes

$$v'(x, t) = \sum_{k=1}^N a'_k(t) \Phi'_k(x) \quad (2.34)$$

on obtient le système dynamique pour le champ fluctuant :

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (a'_k a'_l - \overline{a'_k a'_l}) C_{kli} + \sum_{k=1}^N a'_k B_{ki} + D_i \quad (2.35)$$

où

$$\begin{aligned} C_{kli} &= - \int_{\Omega} (\Phi'_k \cdot \nabla \Phi'_l) \cdot \Phi'_i dx \\ B_{ki} &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta \Phi'_k \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \bar{v} \cdot \Phi'_k) \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \Phi'_k \cdot \bar{v}) \cdot \Phi'_i dx \\ D_i &= - \int_{\partial\Omega} p' \Phi'_i \cdot \mathbf{n} dx \end{aligned} \quad (2.36)$$

Il existe plusieurs façon de calculer le terme $\overline{a'_k a'_l}$. La première méthode [101] consiste à estimer ce terme pendant le calcul sur les pas de temps précédents. La seconde méthode est de considérer que ce terme est constant par rapport au temps et de considérer l'égalité suivante :

$$\overline{a'_k a'_l} = \lambda_k \delta_{kl} \quad (2.37)$$

Une troisième possibilité est évoquée par Allery [1], qui en introduisant directement (2.32) dans (2.24), obtient le système dynamique suivant :

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a'_k a'_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a'_k B_{ki} + D_i + H_i \quad (2.38)$$

où

$$\begin{aligned}
C_{kli} &= - \int_{\Omega} (\Phi'_k \cdot \nabla \Phi'_l) \cdot \Phi'_i dx \\
B_{ki} &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta \Phi'_k \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \bar{v} \cdot \Phi'_k) \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \Phi'_k \cdot \bar{v}) \cdot \Phi'_i dx \\
D_i &= - \int_{\partial\Omega} p' \Phi'_i \cdot \mathbf{n} dx \\
H_i &= - \int_{\Omega} \left(\nabla \bar{p} - \frac{1}{Re} \Delta \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) \cdot \Phi'_i dx
\end{aligned} \tag{2.39}$$

2.3.3 Traitement du terme de pression

Les systèmes dynamiques réduits obtenus jusqu'à présent font apparaître un terme de pression que l'on ne peut pas projeter sur les modes POD. Pour des écoulements où les conditions aux limites sont homogènes, les modes POD s'annulant là où le champ de vitesse est nul, les coefficients D_n ne seront pas pris en compte. Dans les autres cas, il convient soit de le modéliser [9], soit d'essayer de le faire disparaître. Rempfer [102] propose soit d'utiliser une équation de poisson pour relier la pression à la vitesse ou d'appliquer la POD à l'équation de Navier-Stokes en vorticités afin d'éliminer la pression. Allery [1] propose quant à lui d'utiliser une formulation en contrainte. C'est cette dernière formulation que nous allons développer ci-dessous.

La méthode consiste à transformer les conditions aux limites en vitesse en conditions aux limites en contrainte de type $\sigma \cdot \mathbf{n} = F$. La frontière du domaine fluide Γ_f est décomposée en une sous-frontière où la vitesse est nulle Γ_v et une sous-frontière Γ_σ sur laquelle une condition aux limites en contrainte est imposée.

$$\Gamma_f = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma \tag{2.40}$$

En considérant alors v^{cl} la vitesse sur Γ_σ et $v|_{\Gamma_\sigma}$ la valeur de la vitesse calculée sur cette même frontière on introduit la relation suivante :

$$\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\sigma} = F = G (v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl}) \tag{2.41}$$

où G est une constante. On a donc

$$v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl} = \frac{F}{G} \tag{2.42}$$

$v|_{\Gamma_\sigma}$ tend vers v^{cl} quand G est relativement grand par rapport à $\|F\|$. Il s'agit donc d'une technique de pénalisation de la condition aux limites de Dirichlet. Cette technique a été introduite par Batoz [12] en éléments finis.

On formule les systèmes dynamiques en gardant au second membre $\nabla \cdot \sigma$ et on remplace $\sigma \cdot \mathbf{n}$ dans l'intégrale $\int_{\Gamma_f} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi dx$ par $G \left(v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl} \right)$

Ce qui donne pour le système dynamique sur le champ de vitesse instantané :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k a_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a_k (B_{ki} + E_{ki}) + D_i \quad \text{avec } i = 1 \dots N \quad (2.43)$$

où

$$\begin{aligned} C_{kli} &= -(\Phi_k \cdot \nabla \Phi_l, \Phi_i) \\ B_{ki} &= -\frac{1}{R_e} (\mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_k)), \nabla \Phi_i) \\ D_i &= -G \int_{\Gamma_\sigma} v^{cl} \Phi_i \cdot \mathbf{n} dx \\ E_{ki} &= G \int_{\Gamma_\sigma} \Phi_k \cdot \Phi_i dx \end{aligned} \quad (2.44)$$

Pour le champ de vitesse fluctuant :

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a'_k a'_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a'_k (B_{ki} + E_{ki}) + D_i + K_i \quad (2.45)$$

où

$$\begin{aligned} C_{kli} &= -(\Phi'_k \cdot \nabla \Phi'_l, \Phi'_i) \\ B_{ki} &= -\frac{1}{R_e} (\mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\Phi'_k)), \nabla \Phi'_i) - (\bar{v} \cdot \nabla \Phi'_k + \Phi'_k \cdot \nabla \bar{v}, \Phi'_i) \\ D_i &= -\frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\bar{v}) \cdot \nabla \Phi'_i) dx - (\bar{v} \cdot \nabla \bar{v}, \Phi'_i) \\ E_{ki} &= G \int_{\Gamma_\sigma} \Phi'_k \cdot \Phi'_i \\ K_i &= G \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{v} - v^{cl}) \Phi'_i dx \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.3.4 Stabilisation correction du système dynamique

On a jusqu'à présent construit des systèmes dynamiques d'ordre bas en conservant les N premiers modes POD correspondant aux N premières valeurs propres dominantes. En faisant cela on conserve donc les modes ayant la plus forte contribution en énergie cinétique, négligeant alors ceux représentant les plus petites échelles,

responsables de la dissipation énergétique. La conséquence de ce choix pouvant mener à l'instabilité du système réduit, on cherche à modéliser les transferts d'énergies négligés des grandes échelles vers les petites échelles.

L'hypothèse la plus utilisée est de considérer que l'influence des petites échelles peut-être modélisée par une viscosité tourbillonnaire que l'on peut rajouter. Cette méthode introduite par Rempfer consiste à multiplier la viscosité ν intervenant dans le système dynamique par un facteur constant et identique pour chaque mode $1 + \nu_{ad}$. Il constate que la viscosité adimensionnelle est pratiquement nulle pour le premier mode, approximativement égale à 1 pour le quarantième et est quasiment une fonction linéaire du numéro de mode. Ce modèle linéaire est repris par Cazemier [23], sous la forme suivante :

$$\nu_{ad} = ic \tag{2.47}$$

Où i est le numéro du mode et c une constante. La constante est déterminée après plusieurs essais, celle donnant le meilleur résultat est gardée. Cordier [25] utilise quant à lui une viscosité supplémentaire qu'il ajuste. Si la viscosité adimensionnelle est faible, le système risque de diverger, l'inverse aura pour conséquence de trop dissiper le système et donc de converger vers 0.

Une deuxième méthode consiste à introduire un coefficient d'amortissement linéaire par l'intermédiaire de considération énergétique. Le lecteur pourra se référer à Cazemier et al. [24] qui appliquent cette méthode à la cavité entraînée pour de plus amples informations.

Iollo et al. [66] discutent du choix de la norme employer dans la définition de la POD. Ils proposent de redéfinir cette norme, afin que les petites échelles, négligées par la troncature de la base POD aux grandes échelles, soient représentées. Ils choisissent alors une norme dans un espace de Sobolev \mathbf{H}^1 :

$$\text{Soit } u, v \in H^1(\Omega) \quad (u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \tag{2.48}$$

Où ε est choisi en fonction de la configuration étudiée. Par exemple, suivant des considérations dimensionnelles, le choix d'un ε proportionnel à $\frac{\tau}{Re}$, avec τ l'échelle de temps caractéristique des équations adimensionnalisées, est approprié.

Ensuite, le système d'équation décrivant le problème est projeté sur cette base réduite en utilisant le produit scalaire de \mathbf{H}^1 .

Iollo et al. [66] testent cette méthode sur un écoulement autour d'un cylindre carré pour des nombres de Reynolds de 4200 et 22000. Pour le premier test, l'utilisation de la norme \mathbf{L}^2 ou de la norme \mathbf{H}^1 donne des résultats équivalents pour

la reconstruction du coefficient de traînée. Par contre, pour un Reynolds de 22000, la norme \mathbf{H}^1 utilisé avec un $\varepsilon = 10$, donne des résultats légèrement meilleurs. Cependant la méthode utilisée pour stabiliser le système dynamique en norme \mathbf{L}^2 n'est pas décrite. Il semble que plus le nombre de Reynolds augmente, plus le choix de la norme \mathbf{H}^1 semble judicieux, à condition d'avoir un bon coefficient de stabilisation ε .

Couplet et al. [29] modifient le système dynamique par un problème de minimisation d'une fonctionnelle et obtiennent un système dynamique corrigé de manière à trouver les coefficients temporels a_n adéquates.

2.4 Cas des fluides compressibles

La POD a été expliquée pour des fluides incompressibles, son application aux fluides compressibles demeure cependant beaucoup moins étendue.

Lumley et Poje [83] s'intéresse aux modèles réduits dans le cas d'un écoulement à densité variable. Ils proposent de rechercher les modes POD pour la densité et les composantes de la vitesse du fluide. Le champ de vecteurs est celui du champ de vitesses auquel on rajoute la densité comme composante supplémentaire. Cette méthode nécessite d'adimensionaliser les variables pour que le produit scalaire ait un sens. Rowley et al. [105] soulignent que le choix de normalisation est le point critiquable de la méthode. En effet, comment qualifier la projection d'optimale, si celle-ci dépend de l'adimensionalisation. Ils proposent une autre méthode qui consiste à utiliser un produit scalaire basé sur la physique de l'écoulement, c'est à dire basé sur l'énergie. Il introduit un produit scalaire basé sur l'enthalpie qu'il généralise à l'énergie.

En considérant que l'énergie s'écrit :

$$e = E + \frac{1}{2}(v,v) \tag{2.49}$$

où E est l'énergie interne par unité de masse, il introduit la POD pour le champ de vecteur dans Ω :

$$q = \left\{ \sqrt{\rho E}, \sqrt{\rho/2}v_1, \sqrt{\rho/2}v_2, \sqrt{\rho/2}v_3 \right\}^T \tag{2.50}$$

tel que

$$\|q\|^2 = \int_{\Omega} \rho E + \frac{1}{2} \rho (v, v) \quad (2.51)$$

La méthode utilisant l'enthalpie est utilisée sur une cavité entraînée avec des résultats correctes.

2.5 Système dynamique BOD

2.5.1 Système dynamique BOD

Selon le même principe que pour la POD, on écrit le système dynamique sur le champ instantané en utilisant comme base spatiale de projection les N premiers topos correspondant aux N premières valeurs propres dominantes. On utilise directement la formulation variationnelle (2.26) que l'on rappelle ici :

Trouver $v \in \tilde{\mathcal{V}}$ tel que $\nabla \cdot v = 0$
 $\forall \varphi_i, i = 1, \dots, N, \nabla \cdot \varphi = 0$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \varphi_i dx + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla v) \cdot \varphi_i dx = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \varphi_i dx + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta v \cdot \varphi_i dx \quad (2.52)$$

En tenant compte de la décomposition de v sur la base tronquée à N modes (2.18), et de l'orthogonalité des topos, on obtient le système suivant :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \psi_k \psi_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N \psi_k B_{ki} + D_i \quad \text{avec } i = 1 \dots N \quad (2.53)$$

où

$$C_{kli} = - \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_i} (\varphi_k \cdot \nabla \varphi_l, \varphi_i) = - \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_i} \int_{\Omega_f} (\varphi_k \cdot \nabla \varphi_l) \cdot \Phi_i dx \quad (2.54)$$

$$B_{ki} = \frac{1}{Re} \frac{\alpha_k}{\alpha_i} (\Delta \varphi_k, \varphi_i) = \frac{1}{Re} \frac{\alpha_k}{\alpha_i} \int_{\Omega_f} \Delta \varphi_k \cdot \varphi_i dx \quad (2.55)$$

$$D_i = - \frac{1}{\alpha_i} \int_{\partial \Omega_f} p \varphi_i \cdot \mathbf{n} dx \quad (2.56)$$

$$(2.57)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au domaine fluide sur la frontière $\partial\Omega_f$.

Pour régler le problème de la pression on effectue la même chose que pour la POD (cf section (2.3.3)). Ce qui nous amène au système dynamique suivant :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \psi_k \psi_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N \psi_k (B_{ki} + E_{ki}) + D_i \quad \text{avec } i = 1 \cdots N \quad (2.58)$$

où

$$\begin{aligned} C_{kli} &= -\frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_i} (\varphi_k \cdot \nabla \varphi_l, \varphi_i) \\ B_{ki} &= -\frac{1}{Re} \frac{\alpha_k}{\alpha_i} (\text{Tr}(\mathbf{D}(\varphi_k)), \nabla \varphi_i) \\ D_i &= -G \int_{\Gamma_\sigma} v^{cl} \varphi_i \cdot \mathbf{n} dx \\ E_{ki} &= G \frac{\alpha_k}{\alpha_i} \int_{\Gamma_\sigma} \varphi_k \varphi_i dx \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.6 Quelques exemples

2.6.1 Test sur une configuration monodimensionnelle

2.6.1.1 Présentation du problème

La POD est d'abord testée sur un cas simple monodimensionnel. On considère un champ de vitesse $v(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $x \in \Omega =]0,1[$, $t \in \mathbb{R}^+$, la viscosité cinématique $\nu = 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Le mouvement du fluide est décrit par l'équation de Burgers monodimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \Omega \\ v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \quad (2.60)$$

Où à l'instant initial $v(x,0) = v_0(x) = \sin(\pi x)$.

Cette équation a été introduite par J. M. Burgers dans le but de modéliser la turbulence unidimensionnelle [19]. C'est un exemple simple d'équation non-linéaire et très intéressant donc pour effectuer un test. Une solution analytique pour ce genre de condition initiale et conditions aux limites est donnée par :

$$v(x,t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\nu t} n \sin(n\pi x)}{b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\nu t} \cos(n\pi x)} \quad (2.61)$$

où b_0 et b_n sont les coefficients de Fourier définis par :

$$\begin{aligned} b_0 &= \int_0^1 e^{-(2\pi\nu)^{-1}[1-\cos(\pi x)]} dx \\ b_n &= 2 \int_0^1 e^{-(2\pi\nu)^{-1}[1-\cos(\pi x)]} \cos(n\pi x) dx \end{aligned} \quad (2.62)$$

La POD est effectuée sur une solution de l'équation (2.60) résolue en différence finie par un schéma de Crank Nicholson sur un intervalle de temps de 1 seconde avec un pas de temps $\Delta t = 0.002$ s.

On retrouve les résultats attendus, c'est à dire une forte décroissance des valeurs propres (tableau 2.1), seulement 3 étant suffisantes pour obtenir plus de 99,999% de l'énergie cinétique totale. La figure (2.3) présente les 4 premiers modes POD.

i	λ_i	% d'énergie
λ_1	20.15	99.315
λ_2	0.13	99.995
λ_3	$8.38 \cdot 10^{-4}$	99.999

TAB. 2.1: Contribution des premières valeurs propres

Le premiers capture l'essentiel de la physique du phénomène étudié, et représente "énergétiquement " parlant 99,99% de l'écoulement.

La reconstruction du champ de vitesse à chaque snapshot sur la base POD tronquée à N modes

$$v_N(x,t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \Phi_n(x) \quad (2.63)$$

est évaluée par le calcul du résidu en norme \mathbf{L}^2 :

$$Res(N) = \frac{\|v - v_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}}{\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}} \quad (2.64)$$

où pour chaque cliché les coefficients temporels sont calculés par projection de la vitesse sur la base POD.

$$\forall n \in 1, \dots, N \quad a_n = (v, \Phi_n) \quad (2.65)$$

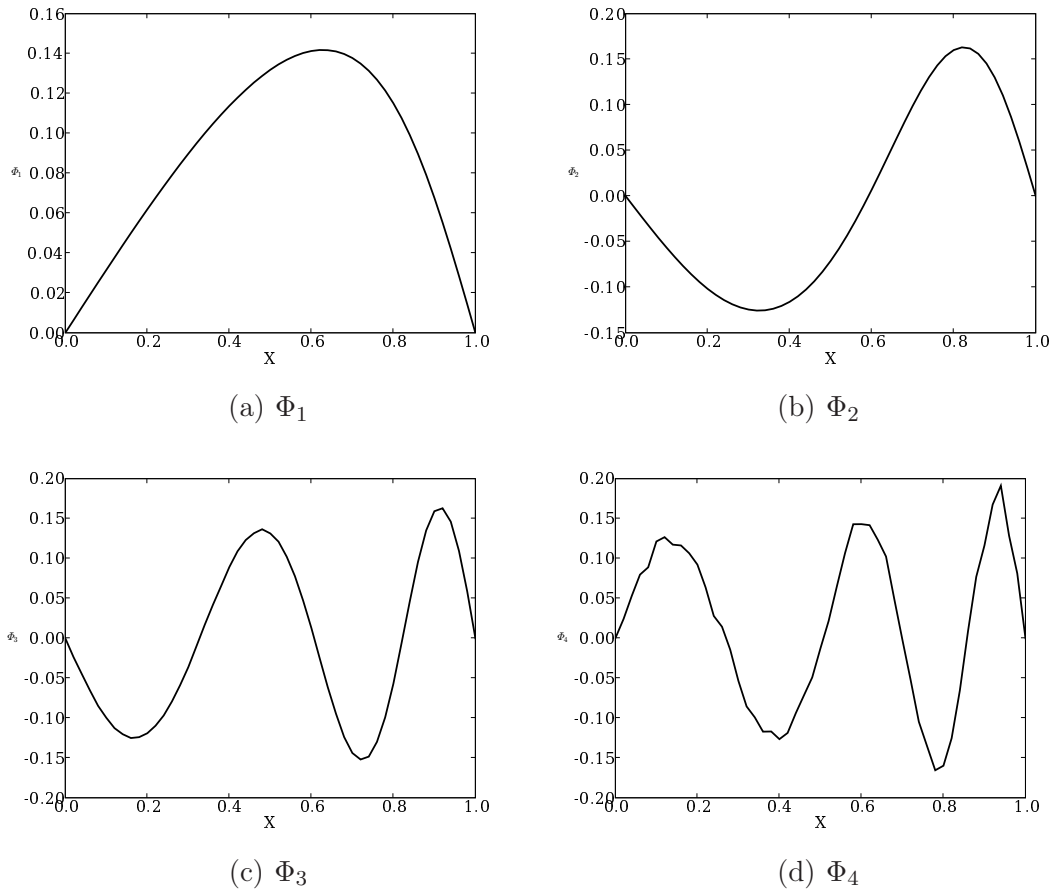


FIG. 2.3: Les 4 premiers modes POD

On remarque alors que l'utilisation d'un seul mode donne une erreur de 20% et que l'on descend à une erreur inférieure à 1% avec 3 modes (tableau 2.2). Si on décompose la vitesse en terme de champ moyen et champ fluctuant, le champ moyen représente environ 60% de l'écoulement. Les fluctuations sont trop importante pour étudier le champ de vitesse sous cet aspect. On restreint donc l'étude au champ de vitesse instantané.

i	% d'erreur de reconstruction
1	19.69
2	1.89
3	0.25

TAB. 2.2: Erreur de reconstruction en fonction du nombre de modes utilisés

2.6.1.2 Système dynamique réduit

Le système dynamique sur le champ de vitesse instantané (2.27) vue dans la section 2.3.1 est construit avec 6 modes. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, puisque l'on reconstruit la solution à 3 modes avec un résidu inférieur à 1% en norme \mathbf{L}^2 .

Qualitativement on remarque que les coefficients temporels dominants (le premier et le deuxième) obtenus par le système dynamique réduit sont les mêmes que ceux obtenus par la POD directe (figure (2.4)).

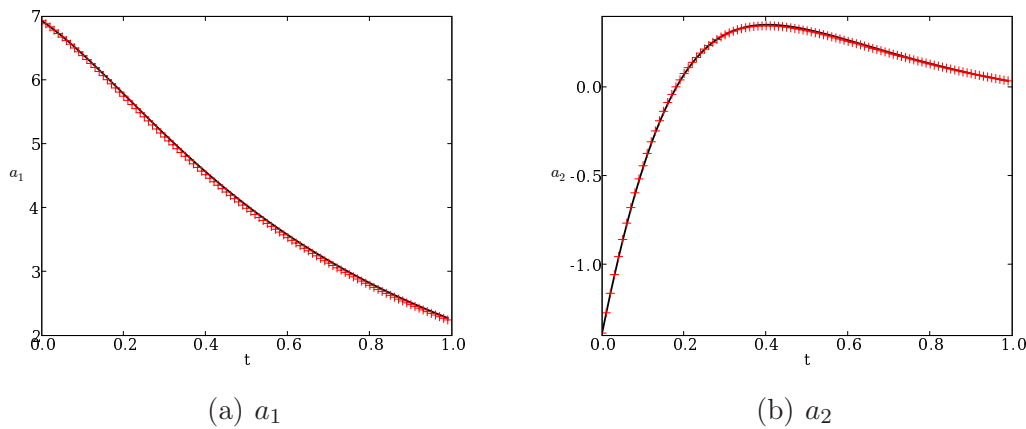


FIG. 2.4: Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes

Cela se traduit par un très faible écart entre la solution reconstruite et la solution numérique qui a servie à la snapshot (figure (2.5)).

2.6.1.3 Comparaison avec la décomposition bi-orthogonale

Dans ce cas très simple, on obtient la même allure entre les chronos et les coefficients temporels de la POD, de même entre les topos et les modes POD. En effet

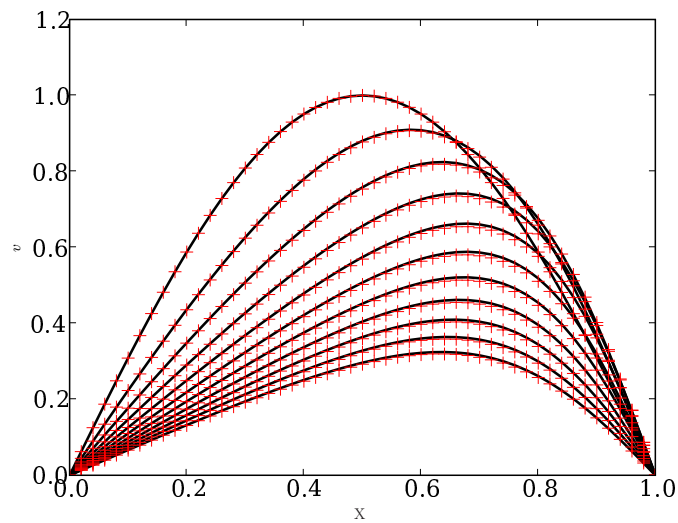


FIG. 2.5: Comparaison du champ de vitesse reconstruit à différents instants t obtenus par :
 – Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 3 modes

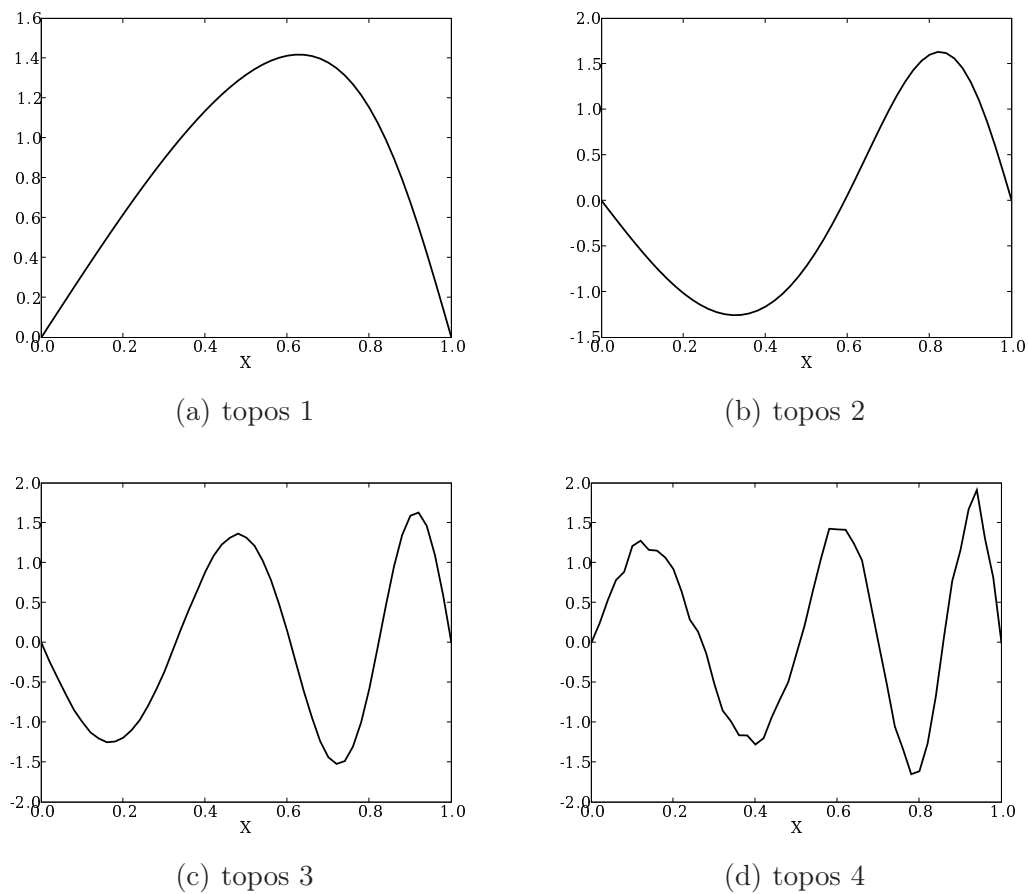


FIG. 2.6: Les 4 topos BODs

le produit scalaire est le même et la seule chose qui change est pour la POD l'utilisation d'une moyenne temporelle, et pour la BOD une intégration en temps sur le domaine. En discret, cela ne change pas grand chose.

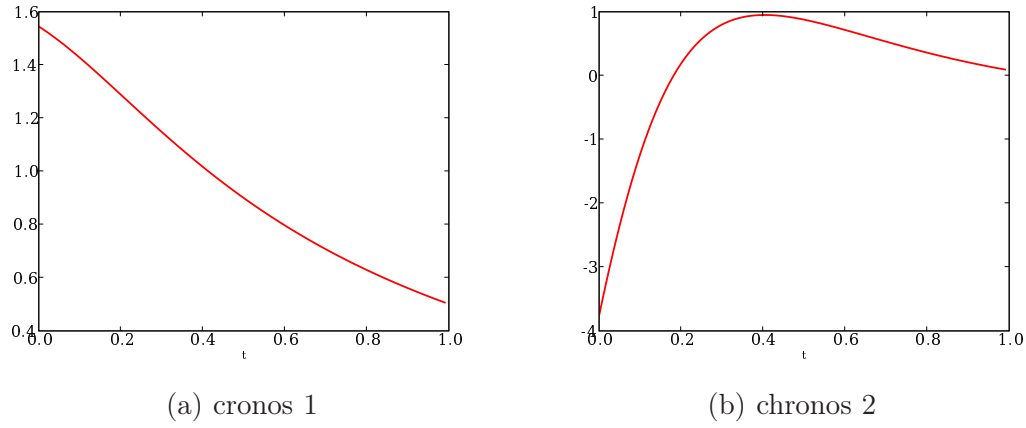


FIG. 2.7: Les 2 premiers topes

2.6.2 Écoulement autour d'un cylindre

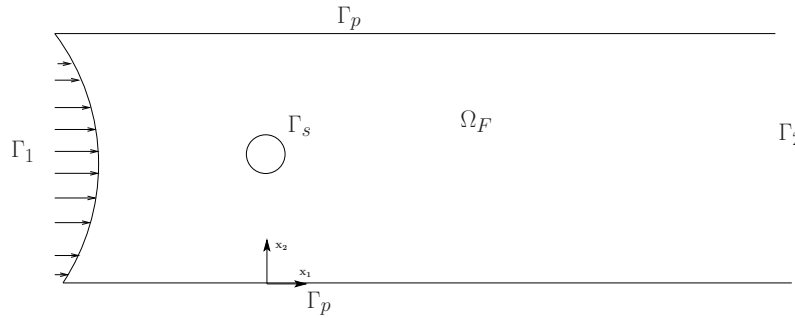


FIG. 2.8: description du domaine d'étude

On considère un écoulement à Reynolds 200 dans canal autour d'un cylindre. Le profil de vitesse à l'entrée du canal Γ_1 est parabolique de vitesse maximum $V_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ et est imposé nul sur les parois Γ_p . Le fluide à une masse volumique égale à $\rho = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$ et une viscosité dynamique $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1} \cdot \text{s}$.

Les équations de Navier-Stokes adimensionnelles sont résolues par la méthode des éléments finis avec le logiciel Castem sur un interval de temps $\mathbf{T} = [0, 11.88]$ avec un pas de temps de $\Delta t = 0.04$. On effectue 99 snapshots espacées chacune de $3\Delta t$.

Pour ce nombre de Reynolds, l'apparition d'un phénomène de détachement périodique de vortex va se produire. La fréquence de détachement f est liée au nombre adimensionnel de Strouhal :

$$S_t = f \frac{L}{V_0} \quad (2.66)$$

Où L est le diamètre du cylindre.

Pour un nombre de Reynolds inférieur à 10^5 le Strouhal reste globalement constant et égal à $S_t = 0.20$, donc une fréquence de détachement valant ici $f = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$.

2.6.2.1 Analyse POD sur le champ de vitesse instantané

On effectue un premier test de la base POD sur le champ instantané. Comme pour le cas monodimensionnel présenté précédemment, peu de modes suffisent pour capturer la quasi totalité de l'énergie cinétique (tableau 2.3).

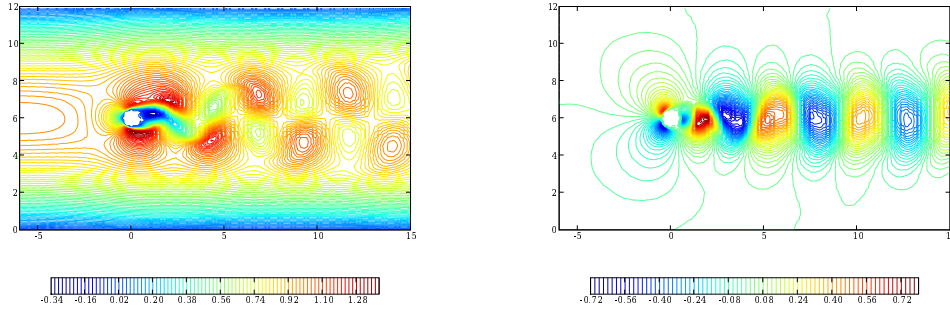
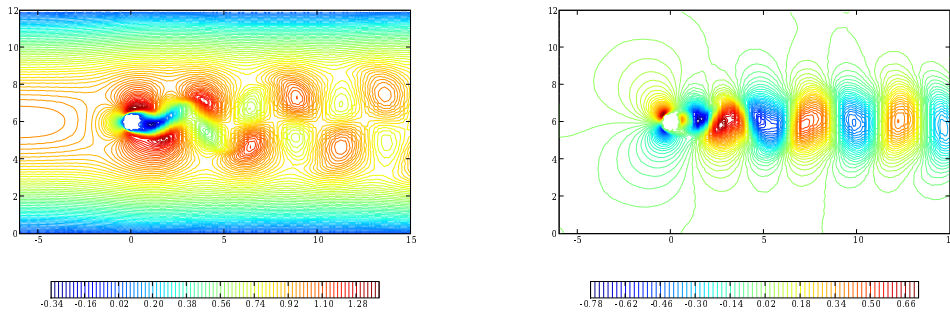
(a) première composante $t = 0.0$ secondes (b) deuxième composante $t = 0.0$ secondes(c) première composante $t = 2.4$ secondes (d) deuxième composante $t = 2.4$ secondes

FIG. 2.9: Clichés des premières et deuxièmes composantes de la vitesse

i	λ_i	% d'énergie	i	λ_i	% d'énergie
λ_1	132.11	96.314	λ_4	$4.72 \cdot 10^{-2}$	99.93
λ_2	2.53	98.163	λ_5	$4.61 \cdot 10^{-2}$	99.963
λ_3	2.37	99.89	λ_6	$2.38 \cdot 10^{-2}$	99.981

TAB. 2.3: Contribution des premières valeurs propres

On présente, figure (2.10) les isovaleurs des deux premiers modes POD. Ces modes sont ceux qui apportent la plus forte contribution en énergie cinétique, le premier mode s'apparentant à l'écoulement moyen. On retrouve sur l'entrée Γ_1 le profil parabolique de vitesse. Les modes suivants contiennent les fluctuations du fluide autour de cet écoulement moyen. Ce phénomène est visible sur le deuxième mode, où on retrouve des détachements tourbillonnaires dans le sillage du cylindre.

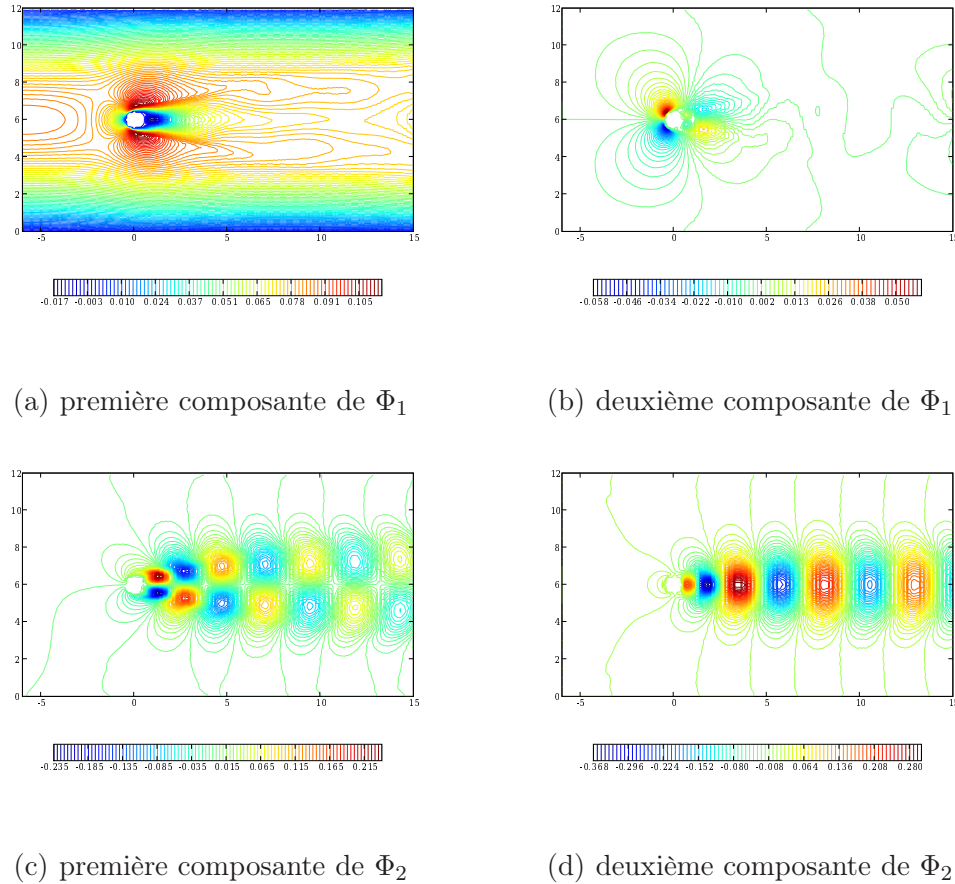


FIG. 2.10: isovaleurs des deux premiers modes POD

L'erreur de reconstruction est évaluée en norme \mathbf{L}^2 de la même manière que pour l'équation de Burgers (2.64). On constate, figure (2.11), que 7 modes suffisent à reconstruire la solution avec une erreur en norme \mathbf{L}^2 inférieure à 1%.

Le système dynamique est construit suivant la section (2.3.3) avec 7 modes. Un premier calcul sans stabilisation donne de gros écarts dès le deuxième mode. Afin de corriger cette erreur, on utilise la méthode de stabilisation développée par Rempfer (cf. section 2.3.4). Les résultats présentés ici (figure (2.12)) ont été obtenus avec une constante ν pour la viscosité additionnelle de 0.0005.

On obtient une erreur d'environ 3% sur le premier coefficient temporel, et une erreur beaucoup, plus faible sur les suivants.

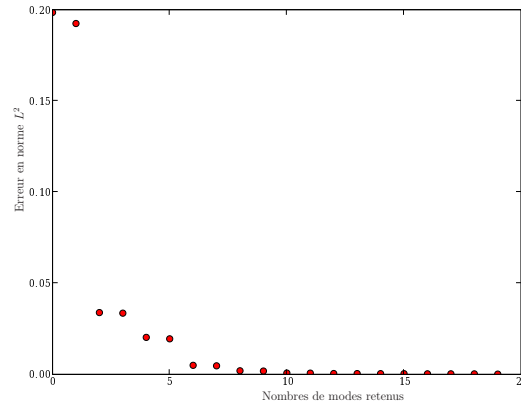


FIG. 2.11: Residu en norme L^2 en fonction du nombre de modes

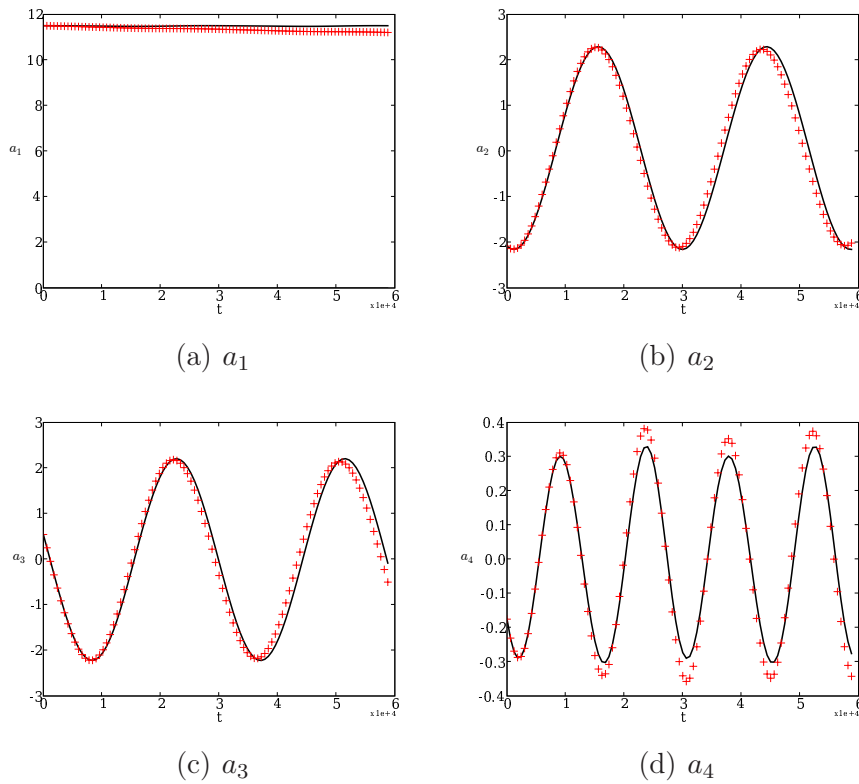


FIG. 2.12: Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes

Nous n'avons pas cherché à améliorer plus les résultats obtenus, le but ici étant juste de présenter quelques résultats pouvant être obtenus par la POD en mécanique des fluides.

2.6.2.2 Analyse POD sur le champ de vitesse fluctuant

On effectue ensuite la POD sur le champ de vitesse fluctuant comme cela est couramment utilisé en turbulence.

On présente les isovalues des 2 premiers modes POD obtenus sur le champ de vitesse fluctuant sur la figure (2.10). On observe que le premier mode POD obtenu pour le champ fluctuant est similaire au deuxième obtenu pour le champ instantané.

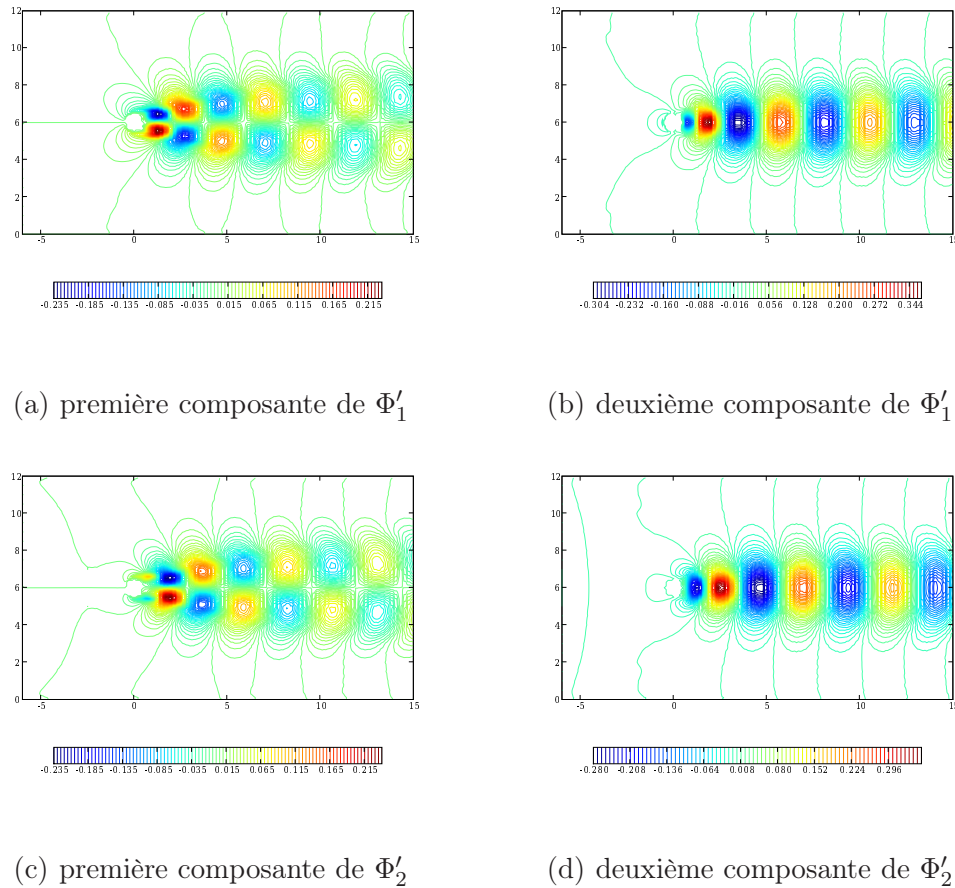


FIG. 2.13: isovalues des deux premiers modes POD obtenus sur le champ fluctuant

On retrouve ainsi le résultat bien connu pour la POD, c'est à dire qu'il y a un décalage de 1 entre les coefficients obtenus sur le champ instantané et le champ fluctuant ($a_n(t) = a'_{n-1}(t)$ $n = 2, \dots, N$), de même pour les modes POD. Ce décalage permet d'assimiler le premier mode POD obtenu sur le champ de vitesse instantané au champ moyen. Même si le premier coefficient temporel présenté figure (2.12(a)) n'est pas exactement constant, la différence d'ordre de grandeur entre celui-ci et les suivants permet de faire cette approximation. Pour un écoulement plus complexe, cette approximation ne sera bien sûr plus valable.

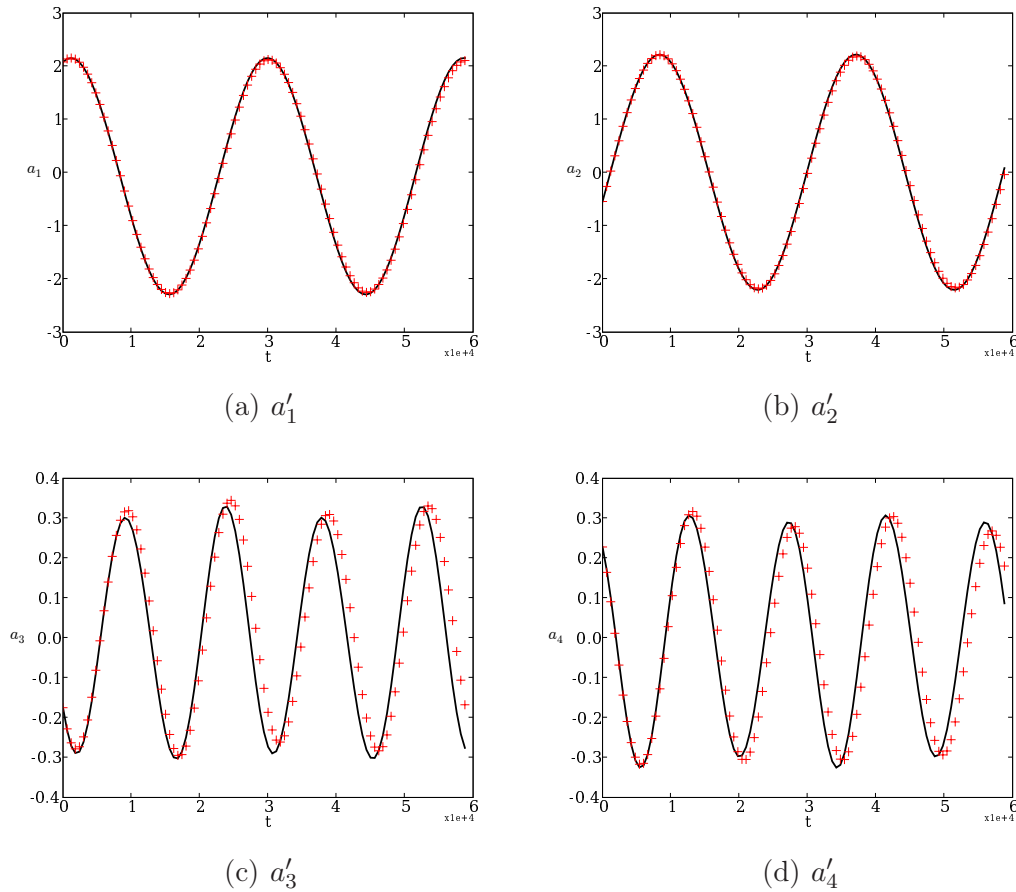


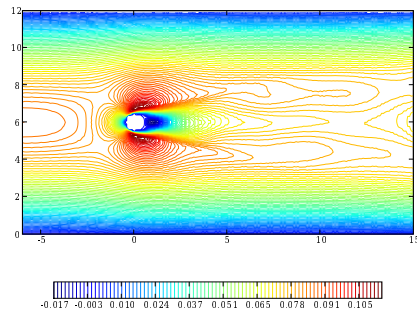
FIG. 2.14: Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes

Le système dynamique est alors construit suivant la section (2.3.3) avec 6 modes. La même méthode de résolution que pour le système dynamique sur le champ fluctuant est utilisé. Les résultats présentés figure (2.14) ont été obtenus avec une viscosité adimensionnelle égale à $\nu_{ad} = 0.0005i^4$. On observe alors de bien meilleurs résultats que précédemment. Le premier mode POD sur le champ de vitesse instantané étant alors assimilé à la moyenne, l'erreur que l'on avait disparaît.

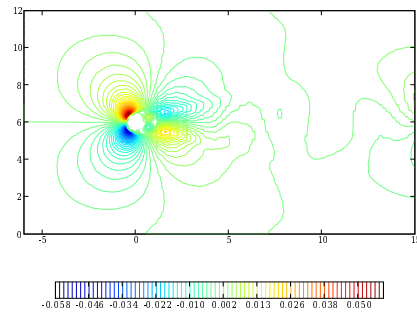
⁴ i représentant le numéro du mode POD

2.6.2.3 Application de la BOD

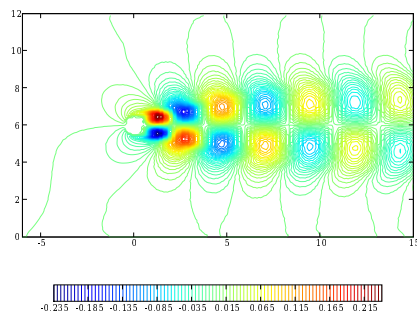
Dans cette section on fait le comparatif entre les modes obtenus par la POD et les résultats de la décomposition bi-orthogonale.



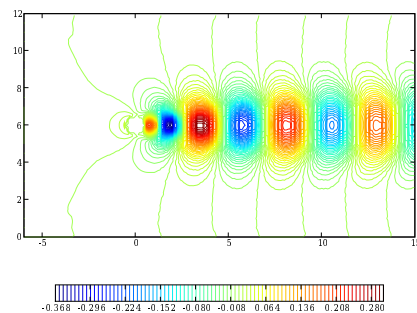
(a) première composante de φ_1



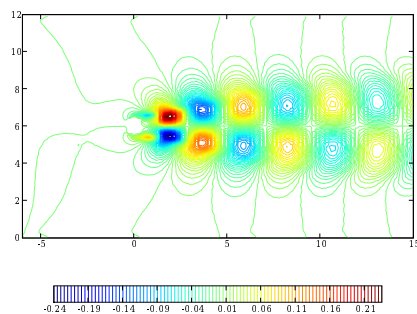
(b) deuxième composante de φ_1



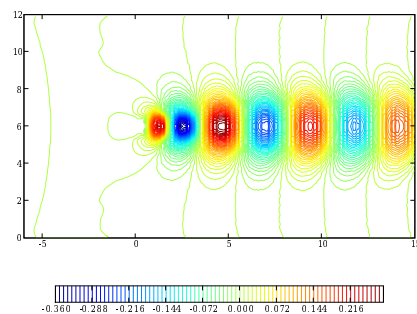
(c) première composante de φ_2



(d) deuxième composante de φ_2



(e) première composante de φ_3



(f) deuxième composante de φ_3

FIG. 2.15: isovaleurs des 3 premiers topes

On obtient les mêmes caractéristiques de reconstruction que pour la POD, c'est à

dire qu'il suffit de 7 éléments de la décomposition BOD pour reconstruire le champ de vitesse avec une erreur en norme \mathbf{L}^2 inférieure à 1%.

Le système dynamique BOD avec 7 topos a été testé avec le même schéma que pour la POD. On retrouve des résultats similaires au système dynamique sur le champ instantané. On peut remarquer, que par rapport aux coefficients temporels POD, les chronos sont tous à la même échelle (ce qui est dû au produit scalaire). La contribution du $k^{\text{ième}}$ élément de la décomposition BOD étant représenté par la valeur propre correspondante.

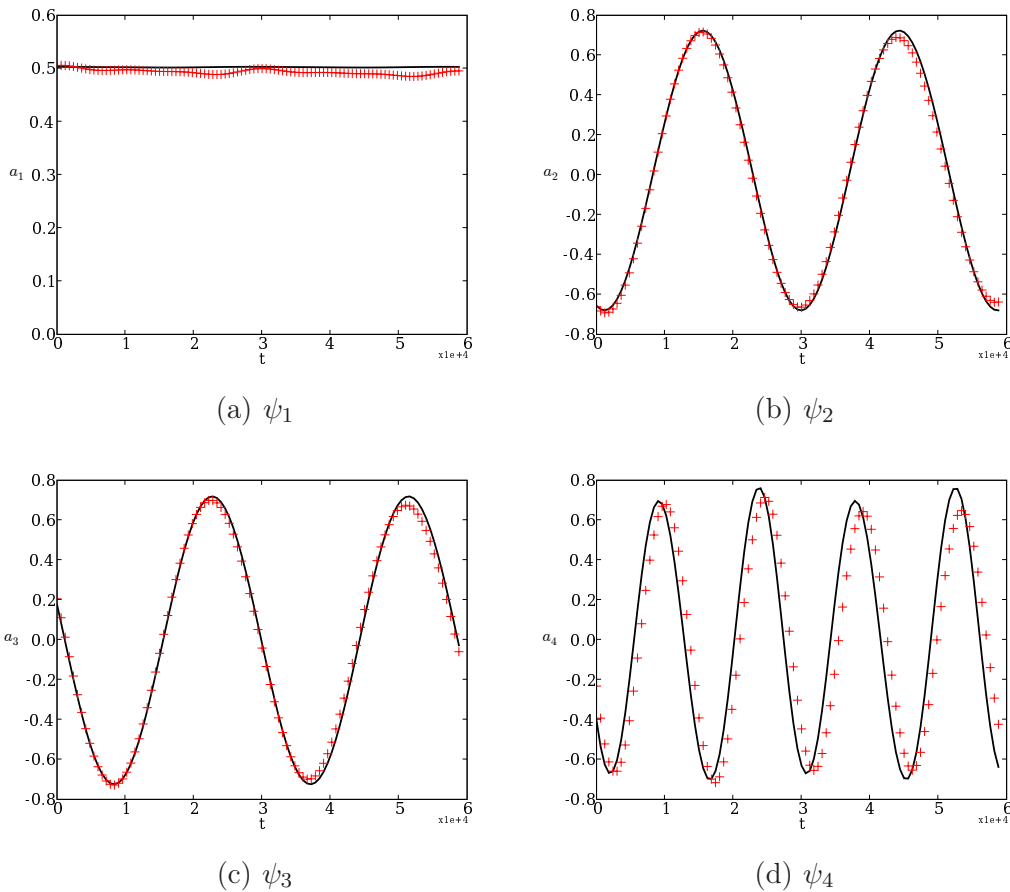


FIG. 2.16: Les 4 premiers coefficients temporels obtenus – par la BOD directe + le système dynamique réduit à 7 modes

La BOD dans ce cas là n'apporte pas de plus value à la décomposition orthogonale aux valeurs propres.

2.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre on a présenté la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Cette méthode, connue dans une dizaine de domaines comme outil de réduction de données, est couramment utilisée en mécanique des fluides depuis les années 90. Utilisée initialement pour identifier les différentes structures d'un écoulement turbulent, elle a ensuite servi à la construction de système dynamiques d'ordre bas. La POD permet d'obtenir une base de décomposition spatiale pour le champ de vitesse qui soit optimale au sens énergétique. La capacité de la POD à obtenir des systèmes d'ordre bas a été testée avec succès pour un modèle monodimensionnel et un écoulement autour d'un cylindre pour un écoulement à Reynolds 200. Pour ce dernier exemple, la décomposition Bi-orthogonale (BOD) a également été testée. Le résultat obtenu n'apportant pas d'amélioration significative a celui obtenu par la POD.

Dans le chapitre suivant on effectue un panorama des méthodes les plus utilisées pour la réduction de modèle pour la dynamique des structures.

Chapitre 3

Réduction de modèle en vibration

Ce travail ayant pour objectif d'étudier la réduction de modèle en interaction fluide structure, après la mécanique des fluides, quelques aspects de la réduction de modèle en mécanique des structures sont étudiés. On admet que le problème discrétisé est décrit par le système d'équation différentiel suivant :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + F(u, \dot{u}) + G(u, \dot{u}, t) = 0 \quad (3.1)$$

Avec $u(x, t)$ qui correspond aux déplacements de la structure, M la matrice de masse, C la matrice d'amortissement, K celle de rigidité et F et G les termes non linéaires et les excitations extérieures.

Classiquement, ces problèmes sont résolus par la méthode des éléments finis, et peuvent aboutir à des systèmes d'équations différentiels ou matriciels de tailles élevées. On présente dans cette partie deux aspects fortement liés de la réduction de modèle en mécanique des structure. On considère en premier lieu une réduction se basant sur une analyse modale de la structure à étudier. La deuxième méthode utilise la première en décomposant la structure en sous domaines comportant chacun une base modale différente et couplés par leurs interfaces communes. La POD a aussi été utilisée pour l'étude de structures en vibrations. On présente deux cas tests de son application dans ce domaine.

3.1 Analyse modale

On peut dénombrer quatre méthodes principales de réduction de modèle par analyse modale. La première méthode est dénommée méthode modale et regroupe les approches utilisant comme base réduite les modes du système dynamique (3.1)

en considérant que les termes F et G sont nuls. Les plus répandues sont l'analyse modale en déplacement qui consiste à prendre comme base spatiale les vecteurs propres du système dynamique sans amortissement, l'analyse en accélération dont la base contient au premier ordre la base modale en déplacement et la troisième méthode la plus répandue, utilise la base modale en accélération au premier ordre auquel est rajouté un terme à l'ordre 2.

Les deuxièmes classes de méthodes utilisent une base de Ritz [118], tandis que pour la troisième catégorie, la base réduite est calculée par la méthode de Lanczos [93]. La dernière méthode consiste à combiner les méthodes précédentes [26] par superposition modales. MacGowan et al. les comparent dans le cas d'une structure encadrée à ses extrémités [84] et dans le cas où elles sont entièrement libres [85]. Nour-Omid et Clough [93] ont montré que la base de Ritz et Lanczos sont identiques. Dans le cas de problèmes non linéaires plusieurs variantes ont été proposées. Un recensement de ces méthodes a été effectué par Kapania [69].

3.2 Sous-structuration

La réduction de modèle par sous-structuration ou par décomposition de domaines consiste à diviser le domaine en plusieurs sous-structures. Pour chaque sous-structure on garde une base réduite constituée par les vecteurs de Ritz incluant les modes propres de la structure. Les méthodes diffèrent par le choix de la base de Ritz utilisée et des techniques d'assemblage des sous-structures.

On peut distinguer en premier lieu la méthode de Hurty [64] et Craig-Bampton [30], ou méthode à interface bloquée. Elle consiste à utiliser comme base les vecteurs correspondant à une réponse statique de la sous-structure à un déplacement unité pour un des degrés de libertés de l'interface et les vecteurs propres de la structure lorsque l'interface est bloquée. Les méthodes à interface libre [86, 106] utilisent les modes propres des sous-structures sans contraintes à l'interface, et traitent les liaisons entre les sous-structures soit en introduisant des éléments déformables entre elles, soit une sous-structure de liaison est introduite. Les méthodes mixtes ou de substitution modales [46, 16, 32] consistent à diviser le domaine en une sous-structure principale pour laquelle on recherche les modes propres à interface libre, et plusieurs sous-structures secondaires pour lesquelles on applique la méthode de Craig-Bampton. La dernière méthode consiste à prendre les modes POD de l'opérateur de Poincaré-Steklov [33]. Cette méthode est une extension de la méthode de Craig et Bampton. Elle consiste à utiliser les modes propres de la sous-structure à interface fixée et les modes propres de l'opérateur de Poincaré-Steklov associé à l'interface.

3.3 La POD pour l'étude de vibrations de structure

La POD a été utilisée comme outils pour déterminer les modes de vibration d'une structure. Ainsi, Feeny dans plusieurs travaux compare les modes POD et les modes de vibrations d'une structure [54, 44]. Il remarque que pour des vibrations linéaires ceux-ci sont identiques. La POD est aussi appliquée comme réduction de modèle pour la vibration de structures non-linéaires. Amabili et al. [5, 4] utilisent les modes POD comme base réduite afin de modéliser les vibrations non linéaires d'une coque cylindrique. Ils construisent ainsi un modèle réduit à 3 degrés de liberté. Sarkar et Païdoussis [107] étudient la capacité du système dynamique POD à reproduire le cycle limite d'oscillation d'un tube convoyant un fluide, pour des vitesses d'écoulements différents de celui pour lequel la snapshot a été effectuée. Ils remarquent que la base utilisée ne permet pas de reproduire le diagramme de bifurcation, représentant le déplacement maximal de la structure en fonction de la vitesse du fluide, pour toute les vitesses du fluide. Le diagramme correspondant à la structure étudié comporte deux bifurcations. La base POD capture la branche de bifurcation qui existait quand la snapshot a été effectuée et ne capture pas les bifurcations suivantes ou précédentes. Amabili et al. proposent de pondérer les snapshots effectuées pour des vitesses correspondants à des branches de bifurcations différentes. La base POD obtenue ainsi permet de reproduire les différentes bifurcations avec une bonne précision. Trindade et al. [112], pour étudier les oscillations non-linéaires pour un trépan soumis à un impact, construisent un modèle réduit avec 15 modes modèle réduit au lieu de 87 degrés de libertés pour le modèle éléments finis et Epureanu et al. [39] construisent un modèle réduit pour un modèle de plaque de Von Karman soumi à un écoulement supersonique.

3.4 Exemple : Etude d'une poutre en appuis simples

Dans cet exemple simple, les modes PODs sont comparés aux modes propres de la poutre. Un système dynamique réduit est également construit. On s'intéresse au cas d'une poutre en appuis simples soumis à un chargement f (figure (3.1)).

On étudie une poutre en acier de longueur $L = 0.4 \text{ m}$, de module d'Young $E = 210 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, de masse volumique $\rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de coefficient d'inertie $I = 0.49 \times 10^{-12} \text{ m}^{-4}$, section $S = 0.012 \times 0.00079 \text{ m}^{-2}$.

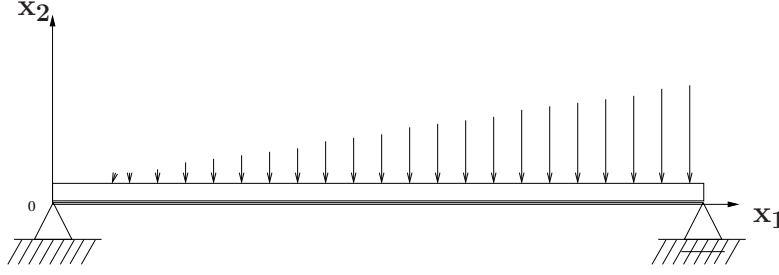


FIG. 3.1: Description schématique du problème

On considère le déplacement $w(x,t)$ selon \mathbf{x}_2 décrit par le système (3.2).

$$\begin{cases} -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + f(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 \\ w''(0,t) = w''(L,t) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$w(x,t)$ désigne la déformée de la poutre selon l'axe \mathbf{x}_2 .

La force appliquée est indépendante du temps et de la déformée :

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ f_0 \frac{x}{L} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La solution obtenue par analyse modale est

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{(k+1)} f_0 \sin(\lambda_k x) (1 - \cos(\omega_k t))}{\rho S k \pi \omega_k^2} \quad (3.4)$$

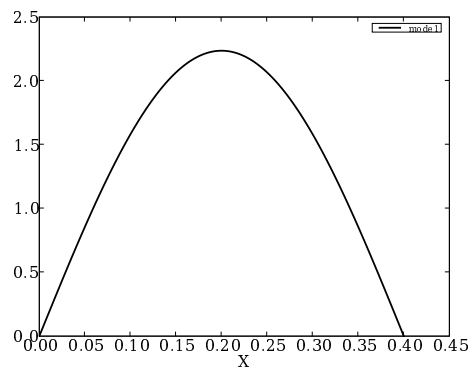
les modes propres étant de la forme (figure (3.2)) :

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (3.5)$$

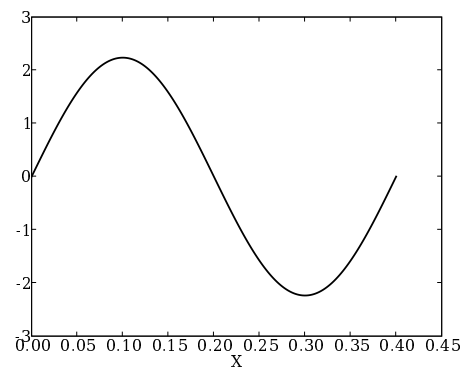
$$\text{Avec } \lambda_k = \frac{k\pi}{L} \text{ et } \omega_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}.$$

3.4.1 Application de la POD

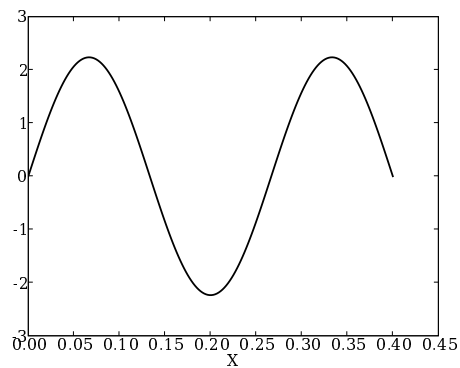
Les modes POD sont calculés à partir de 50 clichés de la solution analytique sur un intervalle de temps $T = 0.12$ s, ce qui correspond à un peu plus d'une période d'oscillation de la solution en déplacement. Ayant dans ce cas un mouvement



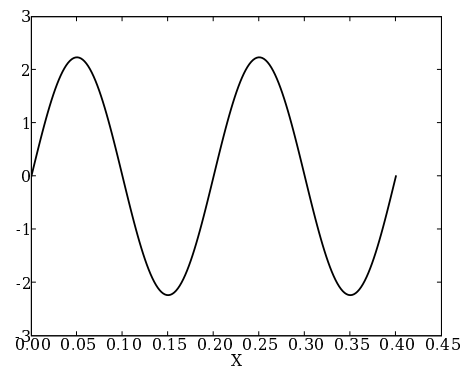
(a) mode 1



(b) mode 2



(c) mode 3



(d) mode 4

FIG. 3.2: Les 4 premiers modes de la poutre

i	λ_i	% d'énergie
λ_1	$4.58 \cdot 10^{-9}$	0.999366
λ_2	$2.86 \cdot 10^{-12}$	0.999990
λ_3	$4.20 \cdot 10^{-14}$	0.999999

TAB. 3.1: Contribution des premières valeurs propres

purement périodique sans amortissement une période d'échantillonnage plus grande est inutile. La recherche des modes POD a été effectuée pour le champ de déplacement instantané $w(x,t)$.

On observe que seulement 2 valeurs propres représentent à elles seules 99.999% de la somme de l'ensemble des valeurs propres (Tableau 3.1) et que l'on obtient avec seulement 2 modes une erreur en norme \mathbf{L}^2 inférieure à 1%. Les modes POD obtenus (figure (3.3)) ressemblent aux modes propres de la poutre, à un déphasage de π près sur les modes impaires (figure (3.2)). L'information supplémentaire que nous

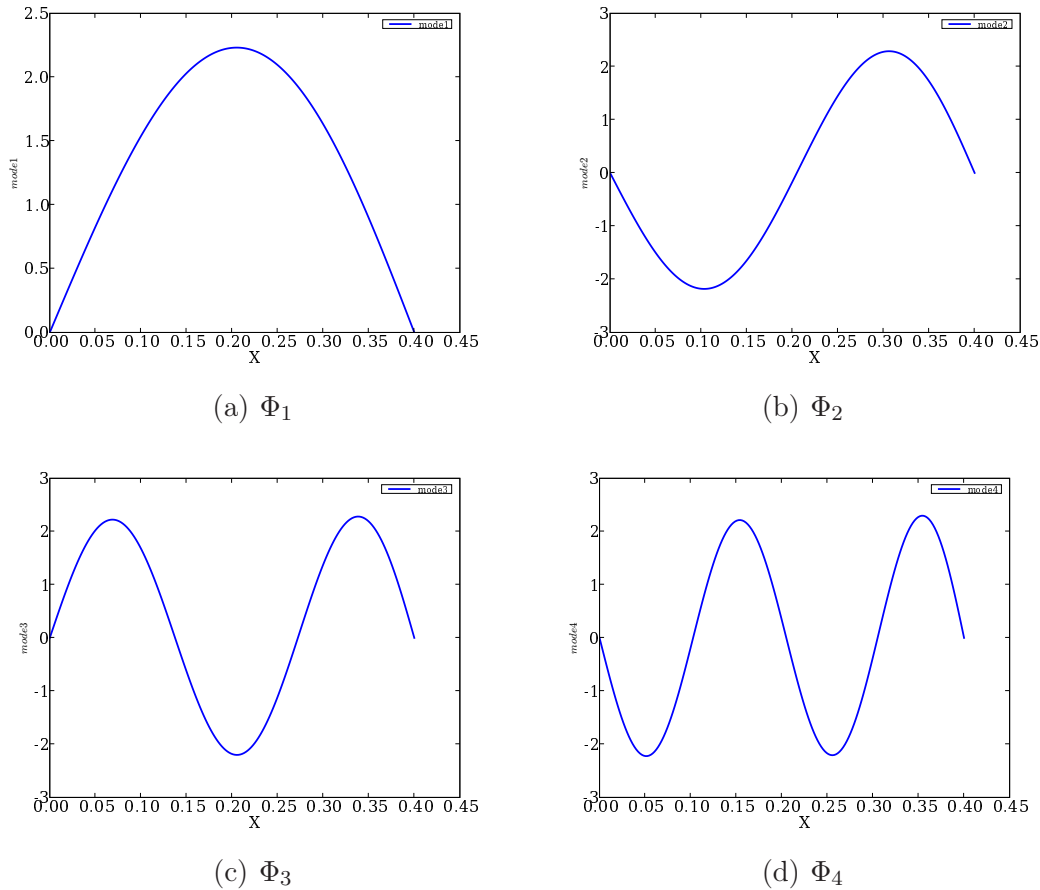


FIG. 3.3: Les 4 premiers modes POD

donne la décomposition orthogonale aux valeurs propres par rapport à l'utilisation des modes de vibration de la poutre est le nombre de modes suffisants pour obtenir

une bonne description du phénomène étudié.

3.4.2 Système dynamique réduit

On construit un système dynamique d'ordre bas en projetant l'équation (3.2) sur la base POD Φ tronquée à 2 modes.

Formulation variationnelle

$$\int_0^L \rho S \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Phi dx = - \int_0^L EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \Phi dx + \int_0^L f(x,t) \Phi dx \quad (3.6)$$

en introduisant la décomposition du champ de déplacement sur la base POD tronquée à N modes et en tenant compte de l'orthogonalité des modes POD, on obtient le système dynamique réduit suivant :

Pour $n = 1 \dots N$

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = - \frac{EI}{\rho S} \sum_{i=1}^N a_i B_{in} + \frac{F_n}{\rho S} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{aligned} B_{in} &= \int_0^L \frac{d^2 \Phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} dx \\ F_n &= \int_0^L f(x,t) \Phi_n dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

Avec deux modes on obtient une erreur en norme \mathbf{L}^2 inférieure à 1%, ce qui concorde avec les résultats obtenus précédemment. Sur la figure (3.4) on compare les coefficients temporels obtenus par le système dynamique réduit et ceux obtenus lors du calcul des modes POD. On observe qu'il y a une légère différence pour le deuxième coefficient a_2 . Cette différence est due au fait que seulement deux modes sont conservés dans le système dynamique réduit. En effet si on rajoute un troisième mode, on remarque que l'erreur est beaucoup plus faible sur le deuxième coefficient.

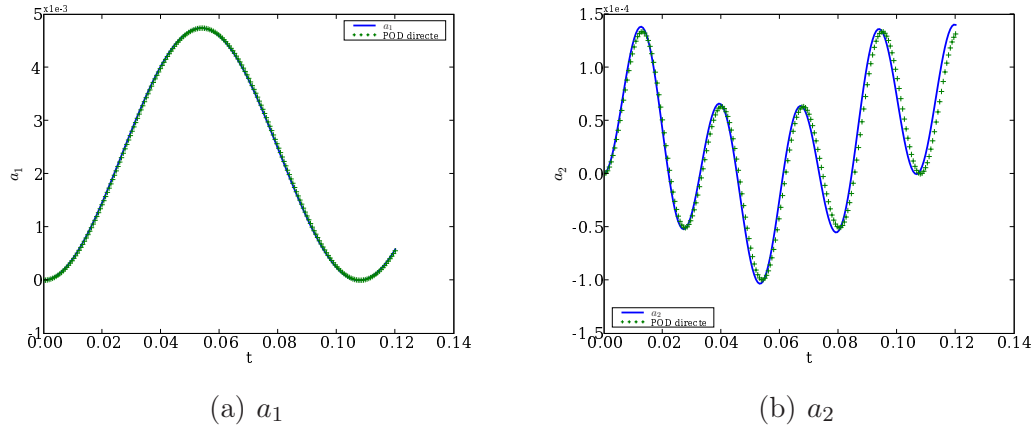


FIG. 3.4: Comparaison des 2 coefficients temporels obtenus par POD directe — et par le système dynamique réduit à 2 modes —

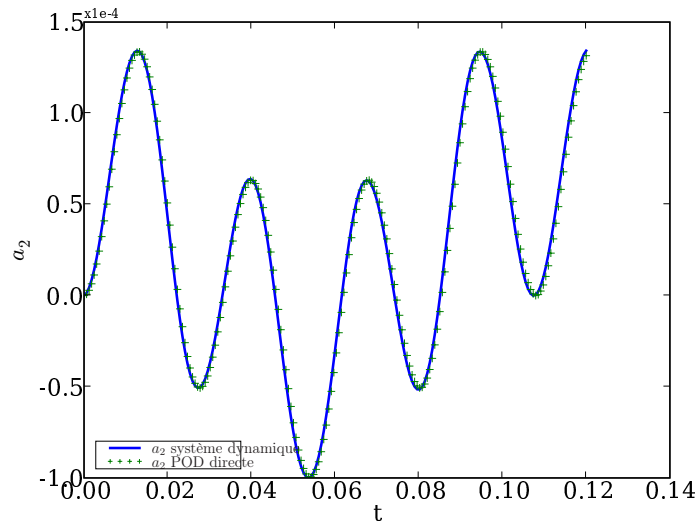


FIG. 3.5: Comparaison de a_2 obtenu par le système dynamique réduit à 3 modes

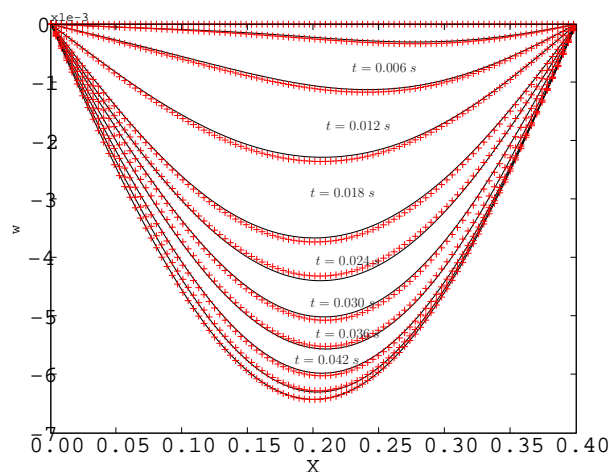


FIG. 3.6: Comparaison du déplacement à différents instants : — solution initiale + solution système dynamique réduit à 3 modes

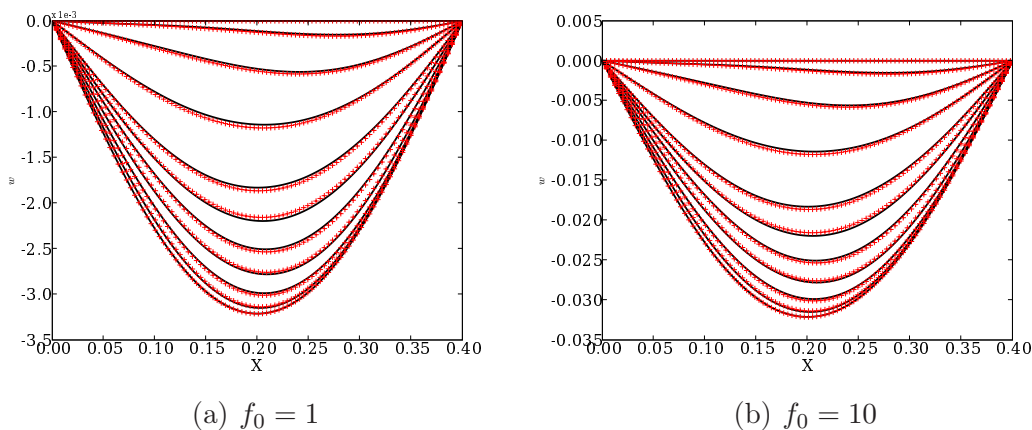


FIG. 3.7: Comparaison du déplacement à différents instants : — solution analytique + solution système dynamique réduit à 3 modes

La base POD est pour le cas traité encore valable si pour des excitations d'intensité f_0 différentes de l'intensité pour laquelle on a calculé la base POD. On présente figure (3.7) les résultats obtenus par le système dynamique réduit pour des intensités f_0 valants 1 et 10, la base POD utilisée étant obtenue pour $f_0 = 2$. Ce résultat était attendu, les mode POD étant semblables aux modes de vibration, lesquels ne dépendent pas de l'excitation.

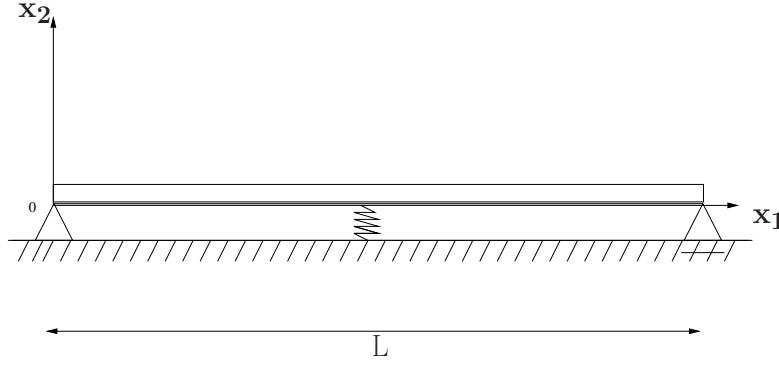


FIG. 3.8: Description schématique du problème

3.5 Etude d'un cas non linéaire

On reprend le modèle de la poutre en appuis simple auquel on rajoute un ressort non linéaire au milieu de manière à obtenir un comportement non linéaire. L'équation du système est alors :

$$\begin{cases} -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + k_r w^3(x,t) \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 \\ w''(0,t) = w''(L,t) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$w(x,t)$ désigne la déformée de la poutre selon l'axe \mathbf{x}_2 , et k_r la raideur du ressort dont la valeur est ici choisie égale à $k_r = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

La poutre est lâchée à partir d'une déformée initiale et sous l'effet du ressort va osciller. On recherche la solution en projetant w sur les modes linéaires (3.5) que l'on tronque à N termes.

i	λ_i	%
λ_1	$7.580 \cdot 10^{-9}$	96.158
λ_2	$2.958 \cdot 10^{-10}$	99.910
λ_3	$5.859 \cdot 10^{-12}$	99.985

TAB. 3.2: Contribution des premières valeurs propres

Les modes obtenus sont différents des modes obtenus figure (3.2).

On observe une dégénérescence des modes linéaires. Si on augmente la raideur du ressort, la différence entre ces modes et les modes de vibrations de la poutre s'accroît. Le premier mode POD capture bien à lui seul l'essentiel des déplacements de la poutre, la valeur propre lui étant associée représentant plus de 95% de la somme des valeurs propres..

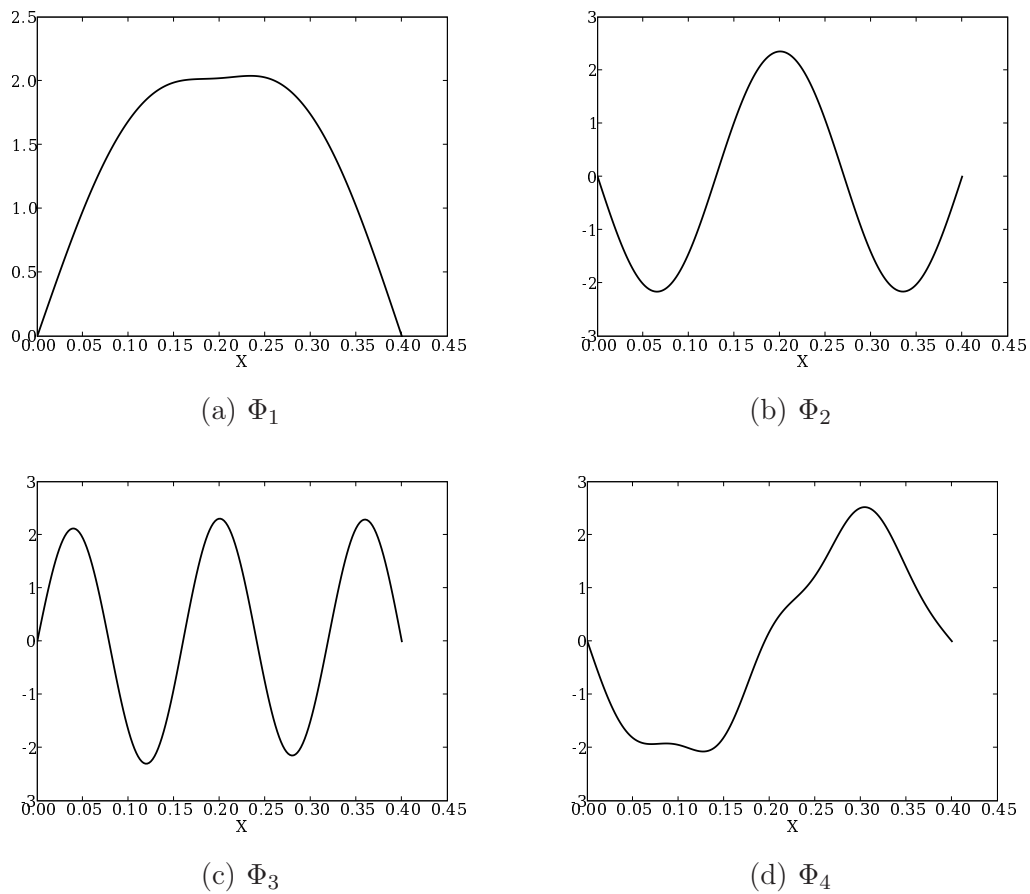


FIG. 3.9: Les 4 premiers modes POD de la poutre

Le système dynamique POD construit avec 4 modes donne une bonne reconstruction de la solution initiale.

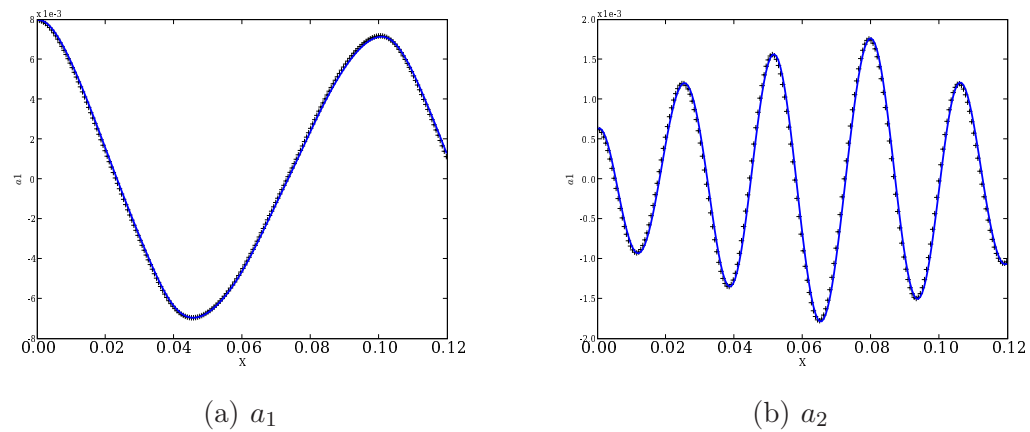


FIG. 3.10: Comparaison des 2 coefficients temporels obtenus par POD directe — et par le système dynamique réduit à 2 modes —

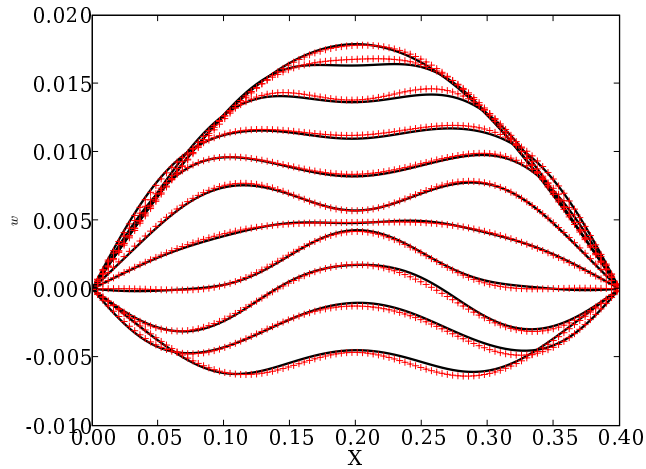


FIG. 3.11: Comparaison du déplacement à différents instants : $-$ solution initiale $+$ solution système dynamique réduit à 3 modes

3.6 Conclusion du chapitre

On a présenté dans ce chapitre le principe de la réduction de modèle en dynamique des structures. On remarque que dans le cas de vibrations linéaires, les modes POD sont similaires aux modes de vibrations. Dans les autres cas, la signification physique de ces modes reste une question ouverte. Les travaux utilisant la POD comme outil de réduction de modèle ont donné de bons résultats et permis de réduire la taille du problème de manière drastique.

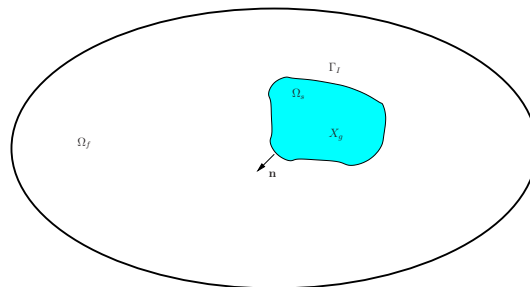
La décomposition orthogonale aux valeurs propres semblent une technique adaptée pour construire des modèles réduits en interaction fluide structure. Même si la base POD n'a pas la même signification en mécanique des fluides et en mécanique des structures, son efficacité dans ces deux domaines explique l'intérêt qu'il y aurait à l'appliquer aux modèles d'interaction fluide structure.

Chapitre 4

Interaction fluide structure

Nous avons vu dans le chapitre 2 que la décomposition orthogonale aux valeurs propres s'applique à des clichés de l'écoulement obtenus soit de manière expérimentale, soit de manière numérique. On présente ici un panorama des méthodes employées pour modéliser différentes classes de problèmes en interaction fluide structure. Le formalisme employé pour chaque domaine est d'abord rappelé. Un exemple de formulation du problème sur le domaine fluide par la méthode des éléments finis est ensuite présenté. Une des problématiques résidant dans la mobilité des domaines, le choix de discrétiser chaque domaine séparément ou non est ensuite discuté. La méthode la plus répandue consiste à utiliser un maillage différent pour chaque domaine, mais des méthodes utilisant un maillage globale sont aussi employées. Dans ce dernier cas la capture de l'interface numérique engendre un choix de modélisation supplémentaire.

4.1 Rappel du formalisme employé



On considère un domaine solide Ω_s constitué d'un matériau élastique linéaire homogène, immergé dans un domaine fluide Ω_f constitué d'un fluide incompressible

newtonien.

On note $\Gamma_I(t)$ l'interface à un instant $t \in \mathbf{T} \subset \mathbb{R}^+$ entre le domaine $\Omega_s(t)$ et $\Omega_f(t)$. On définit le domaine Ω supposé fixe au cours du temps, tel que

$$\overline{\Omega_f(t)} \cup \overline{\Omega_s(t)} = \overline{\Omega} \quad \text{et} \quad \Omega_f(t) \cap \Omega_s(t) = \emptyset. \quad (4.1)$$

On suppose que les domaines fluides et solides sont disjoints, qu'il n'y a pas d'échange de matière entre les deux milieux et que la température est uniforme et ne varie pas dans le temps.

Caractéristique du problème fluide

On fait l'hypothèse d'un fluide homogène, newtonien et incompressible. Pour étudier son comportement on distingue : les champs de vitesse v , de pression p et la masse volumique ρ_f . On considère la viscosité dynamique μ_f , et les grandeurs caractéristiques : la vitesse de référence \mathbf{V}_0 , la pression de référence p_0 , et la masse volumique de référence ρ_{0f} .

Le mouvement du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes suivantes

$$\begin{cases} \rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \nabla \cdot \sigma_f \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Où est le tenseur des contraintes de Cauchy dans le fluide, défini par

$$\sigma_f = -p\mathbb{I}_d + 2\mu_f \mathbf{D}(v) \quad (4.3)$$

Avec \mathbb{I}_d la matrice identité, $\mathbf{D}(v)$ le tenseur des déformation tel que

$$\mathbf{D}(v) = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla^T v) \quad (4.4)$$

A ces équations s'ajoutent les conditions initiales et les conditions aux limites.

caractéristique du problème solide

On considère le cas général d'un solide en petites déformations, constitué d'un matériau élastique linéaire et isotrope, et pour lequel les seules forces volumiques sont réduites à la pesanteur. Son comportement est décrit en terme de déplacement u , de déformations ε et de contraintes σ_s . On considère les paramètres matériaux : la masse volumique ρ_s , le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν_p . Le mouvement du domaine solide est décrit par l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho_s g \vec{z} + \nabla \cdot \sigma_s \quad (4.5)$$

et la loi de comportement élastique décrivant les déformations de la structure en fonction des contraintes

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu_p}{E} \sigma - \frac{\nu_p}{E} \mathbf{Tr}(\sigma_s) \mathbb{I}_d \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla^T u) \quad (4.6)$$

Où $\mathbf{Tr}(\sigma_s)$ désigne la trace de σ_s . On rajoute à ces équations les conditions aux limites et les conditions initiales.

Condition à l'interface

Le couplage du fluide et de la structure intervient au niveau de l'interface Γ_I . On y impose une condition de Dirichlet qui consiste à garantir la continuité des vitesses à l'interface :

$$v_f|_{\Gamma_I} = v_s|_{\Gamma_I} \quad (4.7)$$

où on note v_s le champ de vitesse dans le domaine solide et v_f dans le domaine fluide.

La deuxième condition porte sur les efforts. Elle exprime la continuité des efforts à l'interface (principe d'action et de réaction).

$$\sigma_f \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_I} = \sigma_s \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_I} \quad (4.8)$$

Où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure au domaine solide à l'interface Γ_I .

4.2 Éléments finis pour l'interaction fluide structure

Le problème fluide est dans la majorité des cas ¹résolu par la méthode des éléments finis ou des volumes finis. On choisi de présenter ici la formulation éléments finis. La frontière fluide est décomposée en une partie où la vitesse est imposée Γ_v et une partie contrainte Γ_σ :

$$\partial\Omega_f = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma \quad (4.9)$$

On note dans cette section v au lieu de v_f afin de clarifier les notations. On recherche les solutions v de l'équation (4.2) dans l'espace fonctionnel

$$\mathbf{H}_{\Gamma_v}^1(\Omega_f)^d = \left\{ v^* \in \mathbf{H}^1(\Omega_f)^d / v^* = 0 \text{ sur } \Gamma_v \right\}, \quad d = 2 \text{ ou } 3 \quad (4.10)$$

¹les autres cas sont des méthodes sans maillage

et la pression p dans l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega_f)$. On remarque que si l'on rajoute à la pression p une constante c , alors $p + c$ est encore une solution. Pour éviter cet inconvénient on choisit de chercher une pression de moyenne nulle, c'est à dire dans l'espace fonctionnel :

$$\mathbf{L}_0^2(\Omega_f) = \left\{ q \in \mathbf{L}^2(\Omega_f) / \int_{\Omega_f} q(x) dx = 0 \right\}$$

Soit $v^* \in \mathbf{H}_{\Gamma_v}^1(\Omega_f)^d$ et $q \in \mathbf{L}_0^2(\Omega_f)$ deux fonctions tests. La formulation faible de l'équation (4.2) s'écrit ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \int_{\Omega_f} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot v^* dx + \rho \int_{\Omega_f} (v \cdot \nabla) v \cdot v^* dx = \int_{\Omega_f} p \nabla \cdot v dx - \int_{\Omega_f} \mathbf{tr}(\sigma(v) \mathbf{D}(v^*)) \\ \int_{\Omega_f} q \nabla \cdot v^* dx = 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Les intégrales sur les bords étant annulées suite à la condition aux limites imposée à v^* .

On considère un maillage de Ω_f ,

$$\tau_h = \{K_m\}_{1 \leq m \leq N_{ma}}$$

où

$$h = \max_{1 \leq m \leq N_{ma}} h_{K_m} \quad h_{K_m} = \max_{X_1, X_2 \in K_m} \|X_1 - X_2\|_{\mathbb{R}^d}$$

On désigne par K_m une cellule du maillage, N_{ma} le nombre de mailles dans le maillage et $\|\bullet\|_{\mathbb{R}^d}$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d .

Soit $\Omega_f^h \subseteq \Omega_f$ une approximation du domaine Ω_f telle que

$$\overline{\Omega_f^h} = \bigcup_{m=1}^{N_{ma}} K_m$$

Soient \mathbf{X}_h et \mathbf{M}_h deux sous-espaces de dimensions finies de $\mathbf{H}_{\Gamma_v}^1(\Omega_f)^d$ et de $\mathbf{L}_0^2(\Omega_f)$ respectivement. On dit que \mathbf{X}_h et \mathbf{M}_h sont les espaces d'approximation de la vitesse v et de la pression p . On note par N_v la dimension de \mathbf{X}_h et N_p celle de \mathbf{M}_h .

La formulation typique par éléments finis s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } v^h(t) \in \mathbf{X}_h, p^h \in \mathbf{M}_h \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \rho \int_{\Omega_f} \frac{\partial v^h}{\partial t} \cdot v^* dx + \rho \int_{\Omega_f} (v^h \cdot \nabla) v^h \cdot v^* dx = \int_{\Omega_f} p^h \nabla \cdot v^* dx - \int_{\Omega_f} \mathbf{tr}(\sigma(v^h) \mathbf{D}(v^*)) dx \\
 & \int_{\Omega_f} q \nabla \cdot v^h dx = 0 \quad \forall q \in \mathbf{M}_h
 \end{aligned} \right. \quad \forall v^* \in \mathbf{X}_h
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Pour résoudre ce problème mixte avec les éléments finis, les espaces d'approximations \mathbf{X}_h et \mathbf{M}_h doivent satisfaire une condition de compatibilité souvent appelée condition **Inf-Sup** ou condition **LBB** (Ladysenskaya-Babuska-Brezzi) [40]. C'est pour cette raison que l'on ne peut utiliser n'importe quels éléments.

Il existe deux principales classes d'éléments finis pour le calcul de la dynamique des fluides. les éléments permettant une approximation continue de la pression et des éléments permettant une approximation discontinue de la pression.

Dans la première classe, les éléments les plus populaires sont ceux de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ et ses variantes $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Q}_1, \mathbb{P}_k/\mathbb{P}_{k_1}$ et $\mathbb{Q}_k/\mathbb{Q}_{k_1}$, $k \geq 2$ (figure 4.1). Cet élément est quadratique pour la vitesse et linéaire pour la pression. Il fournit un ordre de convergence en espace en $O(h^3)$ pour la vitesse et $O(h^2)$ pour la pression.

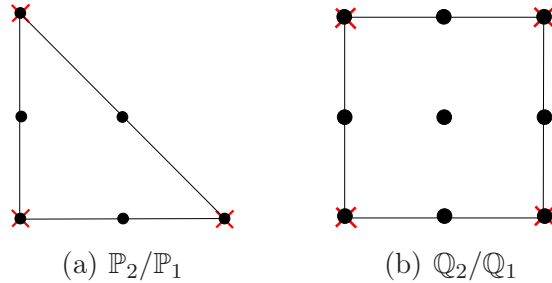


FIG. 4.1: Elements de Taylor-Hood : • Noeuds pour le champ de vitesse, × pour le champ de pression

Dans la deuxième classe, les éléments les plus utilisés sont les éléments de Crouzeix-Raviart \mathbb{P}_2 -bulle/ \mathbb{P}_1 - discontinu et ses variantes $\mathbb{Q}_2/\mathbb{P}_1$ - discontinues et sa généralisation aux hexaèdres. Cet élément est équivalent à l'élément de Taylor-Hood en terme d'ordre de convergence ([40]). Il est même parfois préféré à celui-ci car l'estimation de la vitesse est enrichie par une fonction bulle associée au centre de l'élément (figure 4.2). Les algorithmes utilisés en Interaction Fluide-Structure exigent la sta-

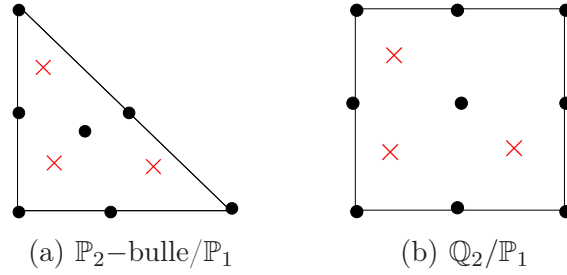


FIG. 4.2: Elements de Crouzeix-Raviart : \bullet Noeuds pour le champ de vitesse, \times pour le champ de pression

bilité des schémas de couplage, mais aussi des méthodes utilisées pour le fluide et pour la structure.

4.3 Formulation des domaines

Les équations et notations respectives de chaque milieu et les grandeurs remarquables sont maintenant établies. Dans la suite un tour d'horizon des différentes méthodes et applications numériques va être présenté.

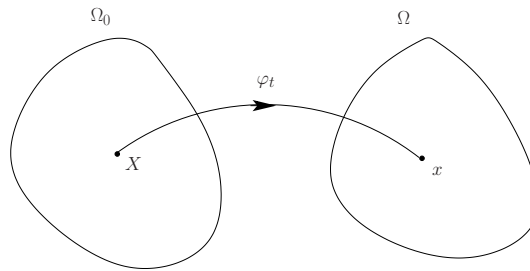


FIG. 4.3:

En mécanique des fluides, le fluide est considéré selon des grandeurs eulériennes et discrétisé sur un maillage fixe. On s'intéresse aux quantités physiques associées aux particules fluides à différents instants. Les équations de conservation sont formulées suivant les coordonnées x initiales et le temps t . La vitesse à un noeud correspond à la vitesse du point matériel considéré à l'instant t à ce noeud.

$$v = v(x, t) \tag{4.13}$$

Le comportement du solide est représenté par des grandeurs lagrangiennes, c'est à dire que l'on suit l'évolution d'un ensemble de points matériels. En d'autres termes, si considère une configuration initiale Ω_0 , un point M dans cette configuration, repéré par ses coordonnées X , à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$ le domaine est dans la configuration

$\Omega(t) = \varphi_t(\Omega_0)$, φ_t étant un difféomorphisme de C^1 , et le point M repéré par ses coordonnées matérielles x .

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega_0 \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, t) &\longmapsto x = \varphi(X, t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

La vitesse lagrangienne se formule ainsi :

$$V(X, t) = \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial t} \quad (4.15)$$

En gardant les mêmes notations, la vitesse eulérienne s'écrit :

$$v(x, t) = V(\varphi_t^{-1}(x), t) \quad (4.16)$$

L'interaction fluide structure nécessite l'utilisation de ces deux formalismes. Une première méthode consiste à coupler les solveurs fluides et les solveurs structures. On ne peut pas dans ce cas là garder un formalisme uniquement eulérien sur le domaine fluide, les frontières étant mobiles on utilisera un formalisme ALE (cf section 4.3.1). Une autre solution est de considérer un maillage fixe contenant le domaine fluide et les domaines solides. Ce sont les méthodes type méthode des frontières immergées ou domaine fictif que l'on exposera section 4.3.2.

4.3.1 Représentation mixte : Arbitraire Lagrangienne-Eulérienne Méthode (ALE)

La majorité des méthodes numériques actuelles concernant la résolution du domaine fluide sont basées sur une méthode réunissant les représentations eulériennes et lagrangiennes : la méthode ALE. Cette méthode est maintenant bien connue on se contentera d'un petit rappel. Elle a été introduite en différence finie par Noh et al [91] et Hirt et al. [58]. Elle a été ensuite utilisée pour une formulation éléments finis par [63] Huerta et al. [62] et [13]. Une très bonne revue des applications et des différentes méthodes a été faite par Donea et al. [34]

La description ALE combine les techniques eulériennes et lagrangiennes. Les noeuds du maillage peuvent bouger de manière eulérienne ou peuvent être fixés selon la description eulérienne, ou peuvent être bouger selon un critère arbitraire.

Description ALE

En pratique, les frontières du domaine fluide n'étant pas fixes, on ne peut garder

une formulation eulérienne. Garder une formulation lagrangienne pour le domaine fluide, c'est à dire que les noeuds du maillage suivent les particules fluides, créera des distortions importantes, voir des chevauchements des mailles. La méthode ALE consiste à introduire un domaine arbitraire Ω_a correspondant à une discrétisation arbitraire du domaine $\Omega(t)$, dont les noeuds sur les frontières du domaine fluide coïncident avec les noeuds du maillage eulérien. Dans ce domaine Ω_a , le point M est repéré par ses coordonnées ξ telles que :

$$x = \psi(\xi, t) \quad \psi \text{ régulière et injective} \quad (4.17)$$

De la même manière que pour la description lagrangienne on exprime la vitesse au point M :

$$w(\xi, t) = \frac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial t} \quad (4.18)$$

Si on considère une fonction f exprimée dans le repère eulérien, on a :

$$f(x, t) = f(\phi(X, t), t) \quad (4.19)$$

et sa dérivée matérielle s'écrit :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \quad (4.20)$$

Avec $v = v(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ On pose $f(x, t) = f(\psi(\xi, t), t) = \widehat{f}(\xi, t)$.

Alors on peut écrire :

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + w \cdot \nabla_x f \quad (4.21)$$

Finalement, ces relations permettent d'écrire la dérivée matérielle sur le domaine arbitraire Ω_a :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} + (v - w) \cdot \nabla_x f \quad (4.22)$$

En appliquant cette relation à la vitesse, les équation de Navier-Stokes incompressibles se formulent :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial t} + (v - w) \cdot \nabla v \right) &= -\nabla \cdot \sigma \\ \nabla \cdot v &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Déplacement du maillage

La problématique de la méthode ALE réside donc dans le choix du domaine arbitraire Ω_a . Donea et al. [34] recensent les différentes méthodes et leurs différentes applications dans un cadre plus général que l'interaction fluide structure et la mécanique des fluides. Ils divisent les méthodes en deux catégories. La première sous le nom de régularisation de maillage consiste à obtenir un maillage le plus régulier possible au sens géométrique. A chaque pas de temps il faut mettre à jour les coordonnées du maillage soit en recalculant les coordonnées, soit par déduction à partir de sa vitesse w . Là encore la catégorie de régularisation de maillage comporte plusieurs sous-catégories. Une première méthode consiste à utiliser un maillage régulier, les frontières étant discrétisées en un nombre fini de points. L'inconvénient de cette méthode est que, par exemple, pour une courbe, la frontière opposée doit comporter le même nombre de noeuds. Une autre vision est de considérer le maillage fluide comme une pseudo-structure avec une masse, un amortissement et une raideur fictive. Son mouvement est donc classiquement décrit par l'équation suivante :

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = 0 \quad (4.24)$$

Où M, D et K sont les matrices fictives de masses, d'amortissement et de raideurs du système, q étant le vecteur déplacement pour les noeuds du maillage. Ce qui veut dire que en discret à chaque noeud on a une masse fictive, un amortisseur et un ressort fictif.

Si on considère un système continu l'équation (4.24) peut être vue comme une discrétisation de l'équation :

$$\rho \frac{dq}{dt} - \text{div}(E : \varepsilon(q)) = 0 \quad (4.25)$$

Avec q le champ de déplacement de la structure fictive, $\varepsilon(q) = \frac{1}{2}(\nabla q + \nabla^T q)$, ρ sa densité et E un tenseur de contrainte modélisant la répartition des noeuds et les contraintes sur leurs déplacements. Si on considère l'état statique, en supposant que le maillage subit une déformation maximale sur les frontières mobiles qui s'atténue loin des frontières, Souli et Zolesio [110] se ramènent à l'équation suivante :

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla w) = 0 \quad (4.26)$$

Où w est la vitesse du maillage, et λ un coefficient de diffusion du maillage. Dans le cas de grands déplacements, renforcer λ autour de l'interface mobile et le diminuer dans le reste du domaine assure la régularité du maillage là où il est plus sensible

aux déplacement et propage la déformation plus loin dans le domaine. Bendjeddou [15] valide les effets de la formulation (4.26) en utilisant un maillage non uniforme pour un écoulement de Poiseuille plan et pour des faisceaux de tubes.

En aérodynamique pour l'étude de faibles vibrations des frontières du domaine fluide, les méthodes se sont concentrées sur l'état quasi-statique de l'équation (4.24) c'est à dire :

$$Kq = 0 \tag{4.27}$$

Batina [11] considère dans ce cas là que les noeuds sont reliés par des ressorts de raideur inversement proportionnelle à la distance les séparants. Pour des configurations simples telles une aile ou un aileron cette méthode fonctionne correctement. Pour des configurations plus complexes comportant des déformations de maillage importantes, cette méthode empêche certes les noeuds d'entrer en collision, mais ne contrôle pas le chevauchement des faces des éléments. Pour remédier à cela Farhat et al [41] introduisent un ressort de torsion supplémentaire à chaque noeud, ce qui permet d'éviter les difficultés rencontrées précédemment.

L'autre catégorie nommée adaptation de maillage consiste à remailler, tout en gardant le même nombre de noeuds. Cette méthode modifie la densité de noeuds en fonction du gradient du champ de vitesse. Le maillage s'adapte automatiquement en affinant les mailles aux points clés de la simulation, plus précisément là où le Hessien du champ étudié est fort. Les méthodes d'adaptation de maillage diffèrent en fonction de la méthode d'estimation a posteriori d'erreur utilisée. La structure du maillage n'étant plus conservée, les champs de vitesses et de pressions sont recalculés sur le nouveau maillage.

Il convient dans les modèles utilisant un maillage mobile et/ou déformable de rajouter une équation supplémentaire aux équations de conservation de la masse et du mouvement. Cette équation permet de vérifier la Loi de Conservation géométrique (GCL) dans le but de garder un écoulement uniforme. Cette loi permet d'éviter les erreurs induites par la déformation des volumes de contrôles. La GCL stipule que le taux de changement d'un volume de contrôle Ω_k de frontière Γ_k est égal à la somme des flux de volumes traversant les faces de ce même volume :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_k} dx = \int_{\Gamma_k} w \cdot \mathbf{n} dx \tag{4.28}$$

Si cette relation n'est pas vérifiée dans le cas d'un écoulement incompressible, on peut ne pas obtenir un champ de vitesse à divergence nulle ce qui peut entraîner des problèmes de convergences.

En effet, si on considère l'équation de conservation de la masse en ALE pour un

fluide incompressible, intégrée sur un volume Ω_k :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_k} \rho dx + \int_{\Gamma_k} \rho (v - w) \cdot \mathbf{n} dx = 0 \quad (4.29)$$

Pour un fluide de densité homogène on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_k} dx + \int_{\Gamma_k} (v - w) \cdot \mathbf{n} dx = 0 \quad (4.30)$$

L'incompressibilité du fluide, c'est à dire $\int_{\Gamma_k} v \cdot \mathbf{n} dx = \int_{\Omega_k} \nabla \cdot v dx = 0$ permet de vérifier l'équation (4.28).

Le concept de loi de conservation géométrique a été introduite par Thomas et Lombard [111] pour construire des schémas différences finies sur un maillage mobile. De nombreux travaux concernant l'utilisation de la GCL ont été effectués. Pour une utilisation avancée, le lecteur pourra se référer à [51] et [42].

4.3.2 Méthode à maillage fixe

Dans la section précédente on a présenté différentes méthodes d'adaptation de maillage dans le cadre de domaines mobiles. Ces méthodes ont cependant un coût en temps, d'où l'idée d'utiliser un maillage eulérien fixe contenant toutes les configurations spatiales possibles pour un phénomène étudié. La problématique introduite par ces méthodes réside alors dans la modélisation des frontières, des conditions aux limites du domaine fluide et le couplage d'un solveur fluide et d'un solveur structure. Une première approche développée par Peskin [99] sous le nom de méthode des frontières immergées a été introduite pour modéliser l'écoulement dans des artères. Elle a été ensuite étendue pour modéliser des problèmes de corps viscoélastiques incompressibles ou de frontières élastiques immergées dans un fluide incompressible et visqueux. La méthode consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes sur un domaine cartésien et à rajouter un terme de forçage correspondant à la présence de la frontière immergée sous forme d'un Dirac. Une bibliographie complète de la méthode et de ses applications peut être trouvée dans Peskin [98] et [114]. Des variantes ont été introduites pour le traitement de l'interface immergée. La première classe de variantes regroupe des choix d'approximation de la fonction Dirac, de modélisation du forçage [74],[124],[72],[71], [120],[88]. Différents modèles éléments finis sont également employés [123], [18]. Wang [116] fait un tour d'horizon des différentes méthodes utilisant le principe d'un solide "immergé" dans un fluide : la méthode de la frontière immergée, méthode de la frontière immergée étendue, éléments finis immergés, domaine fictif et introduit la méthode des continus immergés. Il montre les liens entre ces méthodes et leurs points de ressemblance. A noter que la variante des

domaines fictifs introduites par Patankar et al. [96] n'est pas citée, ni la formulation développée pour les solides rigides par Carlson et al [22]. La méthode des domaines fictifs sera expliquée plus en détails dans la suite.

L'inconvénient des méthodes dites de frontières immergées (à l'exception des méthodes de domaines fictifs) est d'une part l'obligation d'interpoler les forces fluides sur l'interface et l'utilisation d'un terme de forçage pour représenter celle-ci dans les équations du fluide. De plus, comme l'indique Peskin [98], la formulation utilisée n'est pas adaptée pour des écoulements à viscosité variable, et actuellement il n'y a pas de preuve de convergence pour la méthode des frontières immergées.

Remarque L'utilisation des méthodes utilisant un maillage eulérien n'implique pas obligatoirement un maillage fixe. On peut en effet faire bouger le maillage pour avoir une meilleure précision au niveau de l'interface. C'est le cas des travaux de Laure et al. [75, 76] qui utilisent une méthode de Level-set pour suivre les domaines et une méthode de remaillage à proximité de l'interface.

4.4 Suivi des interfaces

Dans le cadre d'un maillage eulérien du domaine, l'interface n'est pas définie sur les noeuds du maillage et traverse donc les éléments. On utilise donc des techniques de capture d'interface. On travaillera dans le cadre d'un espace Ω discrétisé Ω^h

4.4.1 Les méthodes de fraction de volume

Les méthodes de fraction de volumes procèdent en reconstruisant l'interface, élément par élément, en se basant sur la valeur de la fraction de volume occupée par un domaine dans l'élément considéré. La fraction de volume peut être considérée comme une fonction caractéristique définie par élément. Différents algorithmes ont été construits :

La méthode MAC (marker and cell)

Introduite par Harlow et Welch [55] cette méthode utilise le principe de particules numériques associées à chaque domaine et transportées par le champ de vitesses de chaque sous espace. L'interface est ensuite reconstruite en considérant les éléments qui contiennent deux types de particules. L'interface est donc l'union de ces éléments,

la frontière réelle se trouvant dans cette interface numérique. Il convient de rajouter que comme toutes les méthodes particulières, celle-ci est très coûteuse.

La méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation)

Cette méthode [92] utilise le concept de fraction de volumes et reconstruit l'interface à l'aide de droites parallèles aux cotés des éléments et normales à la direction de transport des domaines. Certes rudimentaire, cette méthode a abouti à une des méthodes les plus connues, la méthode VOF (Volume Of Fluid) [59]. Le principe est de définir une variable sur tout le domaine de calcul qui représente le fluide présent dans chaque élément. On utilise toujours des segment parallèles aux axes de référence mais avec des changements de direction dans un élément.

La méthode PLIC (Piecewise linear interface calculation)

Introduite par Youngs [121], c'est la méthode la plus précise. On reconstruit sur chaque élément l'interface par des segments linéaires. La position de chaque droite est déterminée par la géométrie de l'élément, le gradient de la fraction de volume et sur des principes de conservation de la matière. C'est une méthode très précise, mais plus difficile à implémenter dans un code de calcul. Plus récemment on peut citer aussi la méthode utilisant des voxels en 3D (ou des pixels en 3D) qui consiste à compter le nombre de voxels par élément se trouvant dans un domaine par rapport au nombre de voxels total [76].

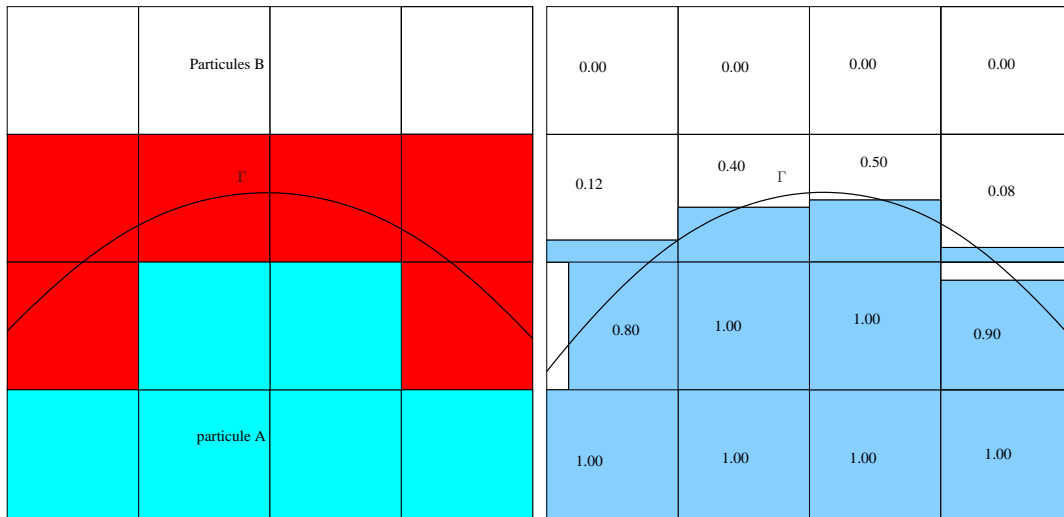
4.4.2 La méthode Level-Set

La traduction littérale donnerait méthode des ensembles de niveaux. Le principe est de définir une fonction ϕ telle que, si par exemple on a deux domaines Ω_1 et Ω_2 telle que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\Gamma(t)$ l'interface entre les deux domaines à un instant t .

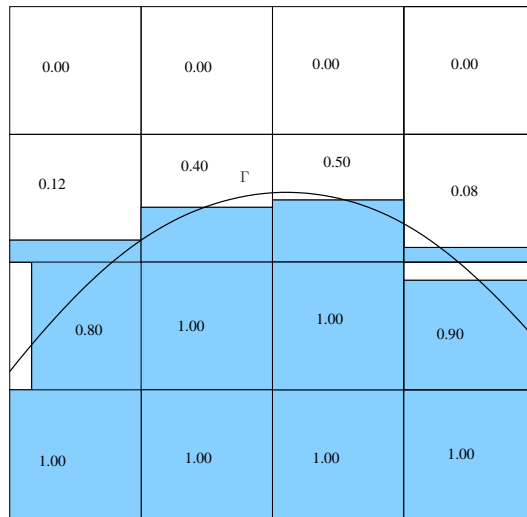
$$\phi(x,t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si } x \in \Gamma(t) \\ < 0 & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (4.31)$$

La fonction caractéristique se définit ensuite en fonction du signe de la fonction Level-Set, c'est à dire :

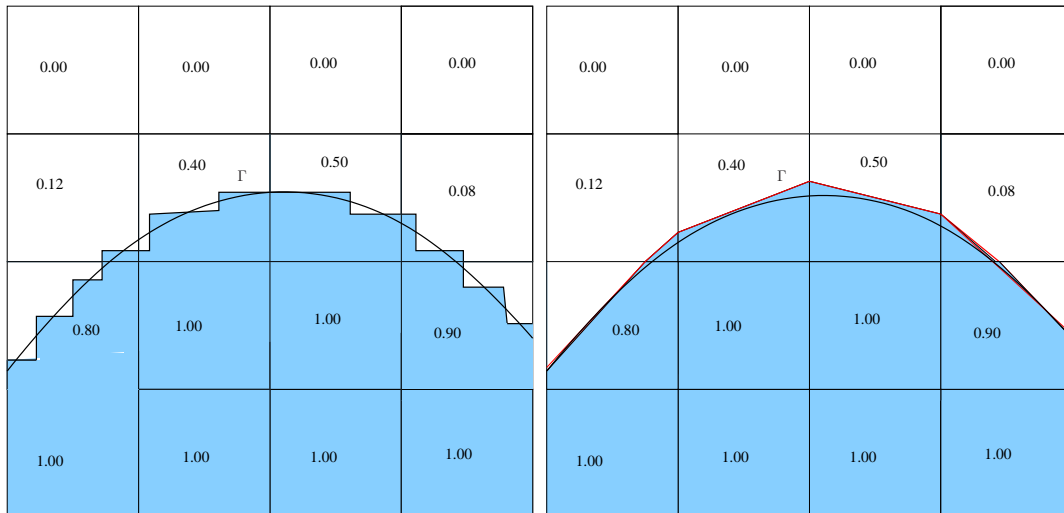
$$\mathbb{I}_{\Omega_1}(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(x,t) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.32)$$



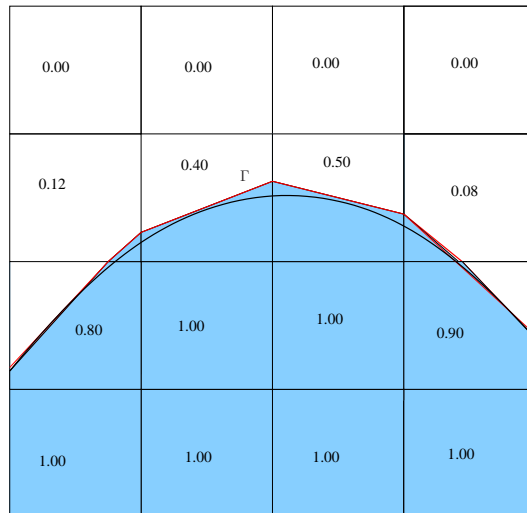
(a) MAC



(b) SLIC



(c) VOF



(d) PLIC

FIG. 4.4: Description sommaire des méthodes de reconstruction de maillage

A partir du gradient de la Level-Set on définit la normale \mathbf{n} à l'interface :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (4.33)$$

La courbure moyenne étant définie par :

$$K(\phi) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right) \quad (4.34)$$

Et dans le cas d'une structure élastique , l'étirement est mesuré par :

$$e = |\nabla\phi| \quad (4.35)$$

4.5 Déplacement des domaines

L'évolution de la fonction caractéristique du domaine fluide Ω_f est décrit par l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_f}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_f} = 0 \quad (4.36)$$

v étant le champ vitesse défini sur Ω .

De part son caractère discontinue cette fonction n'est pas aisée à résoudre numériquement. On peut choisir un lissage de la discontinuité au voisinage de l'interface, ce qui est souvent utilisé pour les problèmes de surface libre ou préférer résoudre l'équation équivalente pour la fonction Level-Set :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t} + v \cdot \nabla\phi = 0 \\ \phi(x, t = 0) = \phi_0(x) \end{cases} \quad (4.37)$$

Un exemple classique de Level-Set est la fonction distance par rapport à l'interface. Cependant ce choix peut s'avérer hasardeux, puisque la résolution de (4.37), bien qu'elle garantisse le suivi de l'interface, ne garantit pas la conservation de la distance par rapport à celle-ci. Il est donc nécessaire de la réactualiser. La méthode de réactualisation la plus utilisée consiste à résoudre une équation de type Hamilton Jacobi [97]. Coupez ([27]) propose de s'affranchir de cette étape de réinitialisation en modifiant l'équation (4.37) de manière à préserver la distance en introduisant un terme convectif prenant en compte le mouvement du domaine. Dans le cas de déplacement d'un domaine rigide indéformable, il est plus judicieux de considérer le déplacement lagrangien de ce domaine et mettre à jour les fonctions caractéristiques de domaines. Par déplacement lagrangien on entend qu'en calculant le déplacement de deux points du domaine en 2D par exemple ², on peut décrire complètement le déplacement de ce domaine si celui-ci est indéformable.

²3 en 3D

4.6 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a exposé quelques aspects de la représentation numérique des problèmes d'interaction fluide structure. La méthode la plus répandue, consistant à utiliser une formulation ALE pour le domaine fluide et le couplage d'un solveur fluide et d'un solveur structure semble la plus naturelle. Cependant, la nécessité d'adapter (ou de remailler) le domaine fluide, ainsi que le couplage des deux solveurs, engendrent des coûts de calculs conséquents. Les méthodes de type frontières immergées sont attractives par la possibilité d'utiliser un unique solveur et de ne pas avoir à remailler. Cependant le choix de représentation de l'interface fluide-solide, ainsi que la transmission des informations d'un domaine à l'autre est discutable. De plus, autant lors de l'utilisation de deux solveurs, l'interface est représentée de manière précise, autant pour les méthodes utilisant un maillage eulérien du domaine, celle-ci est approximée. Parmi les différentes méthodes existantes, la plus précise semble être la méthode Level-Set. Celle-ci au lieu d'exprimer directement l'interface permet d'exprimer la fonction Level-Set en chaque noeud du maillage en fonction de sa position par rapport à la frontière fluide-solide. De plus la fonction Level-set a l'avantage de contenir des informations sur la courbure et la normale de l'interface.

Chapitre 5

Application de la POD à l'interaction fluide structure

Un panorama des principales méthodes de réduction de modèle utilisées en mécanique des fluides et mécanique des structures a fait ressortir une méthode commune, le POD. L'objectif est maintenant de l'appliquer à des problèmes d'interaction fluide structure. La POD n'est pas une méthode inconnue dans ce domaine, bien que les travaux la concernant soient rares. Il peut cependant paraître paradoxale de vouloir utiliser une base spatiale pour des domaines mobiles. On propose pour remédier à ce paradoxe une formulation applicable à des solides rigides immergés dans un écoulement.

5.1 Etat de l'art de l'utilisation de la POD en interaction fluide structure

Comme on l'a évoqué précédemment, la POD a rarement été appliquée dans le domaine de l'interaction fluide structure. La suite de cette section présente les principaux travaux traitant de la POD dans ce domaine

Nous avons vu dans la section 3.3 du chapitre 3 que Amabili et al. [4] ont utilisé la POD sur l'équation de mouvement d'un tube convoyant un fluide. Dans le cas présenté, le mouvement du tube ne modifiait pas l'écoulement, et les modes POD servaient de base de réduction pour les déplacements du solide. L'utilisation de la POD dans ce contexte là ne répond à la problématique d'une interaction forte entre l'écoulement et le mouvement de la structure, l'écoulement du fluide étant supposé

constant et correspond plutôt à une utilisation en mécanique des structures.

Deux auteurs ont étudié la POD pour des problèmes de type interaction fluide structure. Anttonen [6] a testé la capacité des modes POD à reconstruire un champ capturé sur un maillage mobile. Dans cet article [6], Anttonen utilise une approche de la POD différente de celle présentée au chapitre 2, puisque il considère le produit scalaire discret dans \mathbf{L}^2 . En considérant que les noeuds du maillage gardent la même numérotation il recherche les vecteurs propres de la matrice :

$$V^T V \tag{5.1}$$

V étant une matrice de taille $n \times M^1$ dont chaque colonne est constituée d'une snapshot du champ de vitesses exprimé sur les n noeuds du maillage. C'est l'équivalent de la recherche des vecteurs propres par la méthode snapshot, avec un produit scalaire discret. Il effectue un premier test pour une fonction de courant autour d'un cylindre en translation. Ce cas montre alors que le fait de ne pas tenir compte de la déformation du maillage donne une mauvaise reconstruction.

Un deuxième test est effectué pour un écoulement dérivant d'une fonction potentielle sur une paroi oscillante. Les bases POD pour trois amplitudes différentes, et dix fréquences d'oscillations, calculées à partir de 20 snapshots, sont testées pour la réduction de l'équation. Les résultats obtenus donnent une bonne reconstruction du coefficient de force normal pour des oscillations et des fréquences faibles, la précision se détériorant avec l'augmentation de ceux-ci. Concluant que les modes sont mal localisés, puisqu'il n'y a pas d'information sur le maillage dans les modes obtenus, il propose de mélanger les bases POD obtenues pour différents maillages (MultiPOD) (Anttonen [6], Anttonen et al. [7]). En effet, comme une ligne de la matrice snapshot V est constituée de la valeur de la fonction dont on recherche la base POD, sur le même noeud à différents instants, si le maillage est mobile, le noeud n'est pas localisé au même endroit. On a donc une perte d'information sur la disposition des noeuds sur lesquels sont exprimés les vecteurs POD. Anttonen propose de rechercher une base POD sur le maillage, c'est à dire d'effectuer des snapshots de la déformation du maillage par rapport à une configuration de référence. Il obtient ainsi un maillage exprimé sur une base POD de la même manière que pour le champ de vitesses. Ce maillage est utilisé pour ensuite représenter la solution. La précision apportée par cette méthode est meilleure que précédemment. Cependant on n'a pas d'équation permettant de calculer les déformations de ce maillage. Il faut donc considérer la POD sur le maillage mobile comme un outil de compression de données. De plus, les cas testés ici concernent des écoulements dont le champ de vitesses dérive d'un potentiel, que l'on peut représenter par une équation linéaire.

Utturkar et al. [113] étudient également les modes POD pour des écoulements

¹ M désigne le nombre de snapshots

dans des domaines où les frontières sont mobiles : cavitation, écoulement à changement de phase et interaction entre un fluide et une membrane d'épaisseur nulle. Dans ce dernier cas ils proposent d'appliquer la POD sur un maillage mobile en interpolant chaque snapshot obtenu sur un maillage mobile vers un maillage de référence fixe. Nous verrons cela plus en détail dans la section 5.2.

Le dernier exemple à classer dans la catégorie interaction fluide structure Lieu et Fahrat [81] étudient un modèle réduit pour écoulement autour d'un F-16. La snapshot est effectuée pour une solution des équations aeroélastiques linéarisées à différentes fréquences. La nouveauté de cet article est l'introduction de la notion d'angles de sous-espaces entre deux sous espaces engendrés par deux bases POD obtenues pour deux nombres de Mach différents. Si on considère deux sous-espaces \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 engendrés chacun par une base de dimension r , Φ_1 et Φ_2 , on note θ_i , $i = 1, \dots, r$ l'angle de sous-espace telle que le $i^{\text{ième}}$ vecteur de la base de \mathcal{M}_1 soit un vecteur de base de \mathcal{M}_2 . Ainsi, considérant deux bases POD obtenus pour deux nombres de Mach M_1 et M_2 , en interpolant les angles de sous-espaces, la base POD pour un nombre de Mach $M_1 < M < M_2$ peut être construite. La méthode est testée pour des nombres de Mach compris entre 0.6 et 0.8 avec de bons résultats. Cependant, d'après les auteurs eux-mêmes, les résultats ne sont valables que pour de faibles écarts entre les nombres de Mach. La méthode suppose que entre deux sous-espaces, la "rotation" soit linéaire.

5.2 Application de la réduction de modèle à l'interaction fluide structure

Un des points critique de l'application de la décomposition orthogonale aux valeurs propres dans le cas où le domaine est mobile est comme l'a évoqué Anttonen [6, 7] le caractère mobile du maillage sur lequel on effectue les snapshots. Dans le cas où l'on cherche juste à diminuer le stockage des données, à condition de connaître les maillages, et que pour chaque snapshot la numérotation des noeuds n'a pas changé, cela ne posera pas de problème. On sera plutôt dans un registre de compression de données et on déterminera les axes principaux des données du champ de vitesse étudié. Dans le contexte de recherche d'une base réduite sur laquelle on projette le système couplé, l'application aux domaines mobiles n'est pas évidente.

5.2.1 Illustration de la problématique

On commence cette section par un exemple de la mise en pratique des travaux de Antonen [6],[7] On prend le cas de l'équation de Burgers utilisée section 2.6.1 couplée avec un ressort.

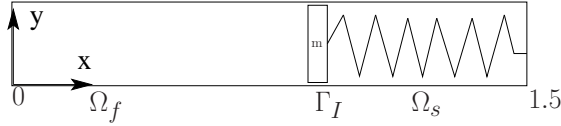


FIG. 5.1: Description du domaine d'étude

On considère un champ de vitesse $v(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega_f)$, $x \in \Omega_f(t) = [0, \Gamma_I(t)]$, $t \in [0, 1]$, la viscosité cinématique $\nu = 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On note Γ_I la paroi mobile.

Le mouvement du fluide est décrit par l'équation de Burgers monodimensionnelle dans sa formulation ALE :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v - w) \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \Omega_F(t) \\ v(0, t) = 0 \\ v(\Gamma_I, t) = v|_{\Gamma_I} \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{sur } \Omega_F(0) \end{cases} \quad (5.2)$$

$v_0(x) = \sin(\pi x)$ est la solution à l'instant initiale et w est la vitesse du maillage.

La paroi $\Gamma_i(t)$ bouge selon l'équation de masse ressort suivante :

$$m\ddot{\Gamma}_i + K(\Gamma_i - \Gamma_i(0)) + b\dot{\Gamma}_i = F_F \quad (5.3)$$

Où $\Gamma_i(0)$ est la longueur à vide du ressort, b l'amortissement, K la raideur du ressort, m la masse et F_F les efforts fluides. On choisit $x_0 = 0.95 \text{ m}$, $b = 0.10 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$, $K = 39.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 0.5 \text{ kg}$. Le système est résolu par un algorithme de newton-Raphson.

On considère que l'ensemble des clichés constitue une matrice $[V]$ de taille $n \times M$ où n représente le nombre de noeuds discrétisant le domaine fluide et M le nombre de clichés. En utilisant le produit scalaire de \mathbb{R}^n les modes POD sont solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$[V][V]^T[\Phi] = [\Lambda][\Phi] \quad (5.4)$$

Avec $[\Phi]$ une matrice constitué des modes POD et $[\Lambda]$ la matrice diagonale composée des valeurs propres. On appelle $[\tilde{\Phi}]$ la matrice de taille $n \times N$ constitué de N vecteurs propres correspondant aux N premières valeurs propres dominantes.

A l'instant t_i , $i = 1, \dots, M$ on note v_i les vecteurs représentant le champ de vitesse sur l'espace discret, et v_i^N le champ de vitesse sur la base POD tronquée à N modes :

$$v_i^N = [\tilde{\Phi}]A_i \quad (5.5)$$

A_i étant un vecteur de dimension N telle que

$$A_i = [\tilde{\Phi}]^T V_i \quad (5.6)$$

Comme pour le cas traité dans la section 2.6.1 on observe que peu de modes suffisent pour capturer la quasi totalité de l'énergie (tableau 5.2.1). Il en faut cependant 5 ici pour obtenir 99.999% de l'énergie alors que 3 suffisaient précédemment.

mode i	λ_i	% d'énergie
1	118.793	98.035
2	0.271	99.454
3	$9.99 \cdot 10^{-2}$	99.975
4	$4.349 \cdot 10^{-3}$	99.998
5	$3.287 \cdot 10^{-4}$	99.999

TAB. 5.1: Contribution en énergie cinétique des 5 premiers modes POD

Les modes POD obtenus sont aussi différents. On les représente figure (5.2) sur les noeuds discrétisant le domaine. On observe que les premiers vecteurs POD sont semblables et que les suivant sont totalement différents.

Modèle réduit Considérons la formulation différence finie du problème :

$$\begin{cases} \dot{v}_t + [B(v_t, w_t)]v_t - [C]v_t = 0 \\ m\ddot{\Gamma}_i + K(\Gamma_i - \Gamma_i(0)) + b\dot{\Gamma}_i = F_F \\ v_t[n] = \dot{x} \end{cases} \quad (5.7)$$

L'équation (5.7) est la formulation ALE de l'équation de Burgers, avec w_t représentant la vitesse du maillage à l'instant t . En tenant compte de la décomposition de la vitesse sur la base POD tronquée à N modes et en projetant (5.7) sur le sous-espace engendré par ces N vecteurs on obtient :

$$[\tilde{\Phi}]^T [\tilde{\Phi}] \dot{A}_t + [\tilde{\Phi}]^T [B(v_t, w_t)] [\tilde{\Phi}] A_t - [\tilde{\Phi}]^T [C] [\tilde{\Phi}] A_t = 0 \quad (5.8)$$

Dans le cas présent la remaillage ne coûtant pratiquement rien, on calcule le déplacement du maillage à chaque instant t .

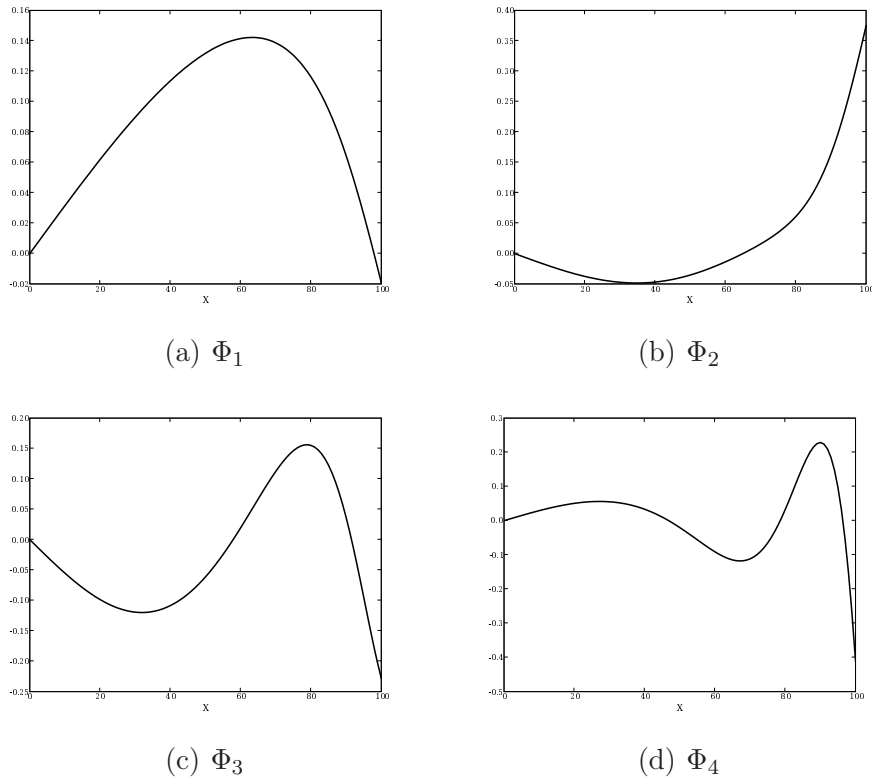


FIG. 5.2: Les 4 premiers modes POD

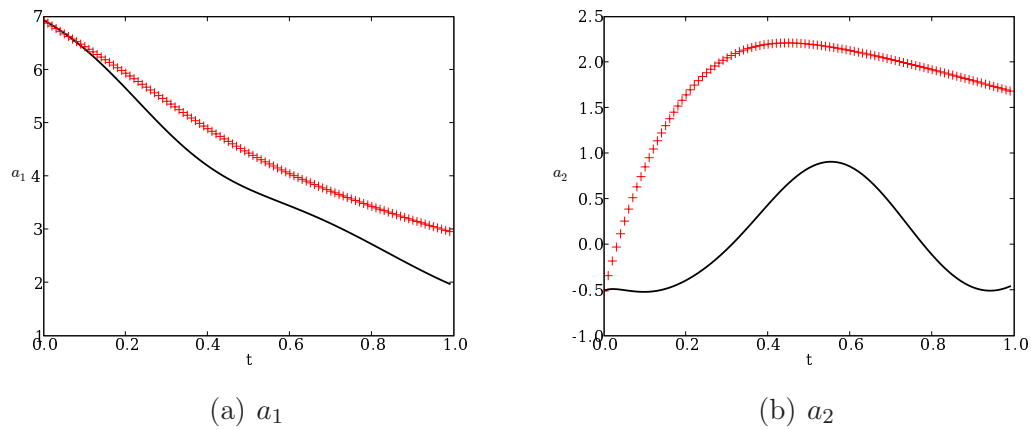


FIG. 5.3: Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes

Le système dynamique ainsi construit donne de mauvais résultats. On observe figure (5.3) des coefficients temporels totalement différents. La visualisation de la solution reconstruite est quand à elle désastreuse (figure (5.4)). La vitesse du fluide n'est pas reconstruite auprès de l'interface mobile.

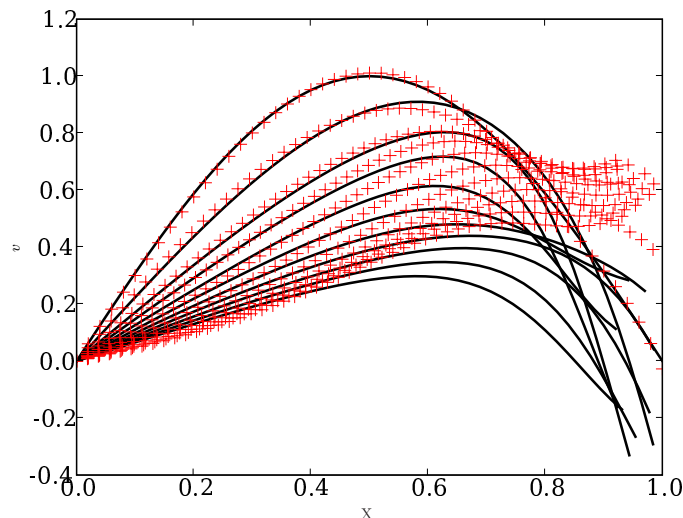


FIG. 5.4: Comparaison du champ de vitesse reconstruit à différents instant t obtenus par :
– Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 5 modes

Il existe plusieurs explications quand à la mauvaise qualité des résultats. En premier lieu, en choisissant un domaine mobile on ne connaît pas le domaine de définition des modes POD puisque ceux ci sont exprimés sur les noeuds sans aucune information sur leur emplacement. On a choisit ici de calculer les dérivées spatiales au début du système dynamique et non à chaque itération de celui-ci. C'est une autre source d'erreur, mais il semble difficilement envisageable de calculer les gradients des fonctions caractéristiques à chaque itération pour des problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels. Cela serait trop coûteux et donc ne serait pas intéressant pour l'application de la POD.

5.2.2 Solution proposée

A ces résultats numériques, on peut rajouter une remarque sur la signification de la POD effectuée dans ces conditions. Que signifie alors l'opérateur (2.8) défini dans la section 2.1 du chapitre 2 ? On va créer des corrélations entre des points qui ne sont pas dans le même domaine. De même pour le calcul de la matrice snapshot, l'exemple est plus flagrant. On rappelle que la méthode des snapshots revient à

résoudre le problème aux valeurs propres :

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M C(t_i, t_k) A_k = \lambda A_i \quad (5.9)$$

Où M désigne le nombre de clichés et

$$C(t_i, t_k) = (v(t_i), v(t_k)) = \int_{\Omega} v(x, t_i) \cdot v(x, t_k) dx \quad (5.10)$$

Si on considère $\Omega(t) = \Omega_f(t)$ comme étant le domaine fluide à l'instant t , l'expression (5.10) n'a aucun sens si les domaines fluide sont différents aux instants t_i et t_k . Une des solutions est donc comme le propose Utturkar et al. [113] d'utiliser un domaine fixe de référence Ω auquel on associe un maillage fixe tel que :

$$\forall t \in [0, T] \quad \Omega_f(t) \subset \Omega \quad (5.11)$$

Où dans le cas plus précis de l'interaction fluide structure :

$$\forall t \in [0, T] \quad \Omega_f(t) \cup \Omega_s(t) = \Omega \quad \text{et} \quad \Omega_f(t) \cap \Omega_s(t) = \emptyset \quad (5.12)$$

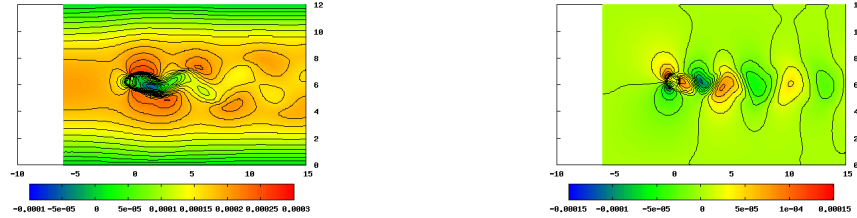
On effectue des clichés de la solution, obtenue par une méthode classique (ALE par exemple) à l'aide d'un code de calcul permettant de faire de l'interaction fluide structure. A chaque snapshot le champ de vitesse est interpolé des maillages mobiles vers le maillage du domaine de référence. Ainsi, on obtient un champ de vitesse globale sur le maillage fixe sur lequel on peut effectuer la décomposition orthogonale aux valeurs propres. L'introduction des fonctions caractéristiques permet de suivre les domaines. Dans la suite on ne s'est pas focalisé sur le procédé d'interpolation à utiliser, ni à minimiser le temps de calcul que cette étape peut représenter. Le but de ce travail étant le test et l'utilisation d'une base POD pour les problèmes d'interaction fluide structure. On s'est contenté d'utiliser une méthode de Shépard aussi appelée méthode d'interpolation inversement proportionnelle à la distance. Pour chaque noeud du maillage de référence noté X_i on recherche à chaque snapshot t les K noeuds les plus proches du maillage mobile X_k^t $k = 1, \dots, K$. Si on considère une fonction $\phi(x, t)$ obtenue sur le maillage mobile, en chaque noeud du maillage de référence, à chaque cliché, sa valeur est calculée par :

$$\phi(X_i, t) = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{\phi(X_k^t, t)}{r_k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{r_k}} \quad (5.13)$$

Où r_k est la distance entre le noeud X_k^t et le noeud X_i .

On notera que la méthode d'interpolation utilisée est linéaire, mais celle-ci n'intervenant pas sur le calcul initial de la solution, mais servant juste pour le stockage

des clichés on ne propage pas l'erreur d'interpolation. La visualisation des isolignes semble conforter cette idée (figure 5.5) que l'erreur d'interpolation peut être considérée comme négligeable.



(a) isolignes de la première composante de la vitesse sur maillage mobile (b) isolignes de la deuxième composante de la vitesse sur maillage mobile



(c) isolignes de la première composante de la vitesse sur le maillage de référence (d) isolignes de la deuxième composante de la vitesse sur le maillage de référence

FIG. 5.5: Visualisation des isolignes du champ de vitesse sur le maillage mobile et le même champ de vitesse interpolé sur le maillage de référence

Pour l'interpolation de la vitesse, sur le domaine solide la vitesse en chaque noeud est déterminée en fonction de la vitesse du centre de gravité et du vecteur rotation du solide.

Cette méthode nous permet d'obtenir un champ de vitesse globale sur tout le domaine Ω tel que

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbf{T} \quad v(x,t) = v_f(x,t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t) + v_s(x,t) (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t)) \quad (5.14)$$

Où la fonction caractéristique du fluide \mathbb{I}_{Ω_f} à la même définition que l'équation (5.17).

La recherche des modes POD est alors effectuée pour ce champ de vitesses [80].

5.3 Construction d'un système dynamique d'ordre bas par la POD

Comme on l'a vu précédemment le choix d'utiliser la POD comme outil de réduction de modèle impose l'utilisation d'un maillage fixe. Nous allons nous limiter dans la suite du travail aux problèmes d'interaction entre un fluide et un solide rigide. Par souci de garder une formulation qui respecte la physique on décide de formuler le problème suivant la formulation type domaine fictif.

5.3.1 Méthode des domaines fictifs

La méthode des domaines fictifs a été introduite en mécanique des fluides par Glowinski et al. [49] et ensuite testée pour la simulation de particules rigides dans un fluide newtonien [50, 48] et pour un écoulement à faible vitesse autour d'une aile de NACA0012 [47]. La méthode des domaines fictifs consiste à étendre les équations du domaine fluide au domaine rigide en forçant la contrainte de rigidité sur ce domaine par un coefficient de pénalisation et un multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte dans la formulation variationnelle. On présente ici la formulation de Patankar et al. [96].

On considère un domaine spatiale $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, de dimension $d = 1, 2$ or 3 , un intervalle de temps $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$, une variable d'espace $x \in \Omega$, et une variable temporelle $t \in \mathbf{T}$.

Soit $\Omega_f(t)$ (respectivement $\Omega_s(t)$) le domaine fluide de densité ρ_f et de viscosité μ_f . à l'instant t (respectivement solide), $\Gamma_I(t)$ l'interface entre les domaines, tel que $\Omega_f(t) \cap \Omega_s(t) = \emptyset$

$$\forall t \in \mathbf{T} \quad \Omega_f(t) \cup \Omega_s(t) = \Omega \quad (5.15)$$

Soit $v \in \mathbf{H}(\Omega, \mathbf{T})$ le champ de vitesse défini pour tout le domaine, \mathbf{H} étant un espace de Hilbert. :

$$\forall x \in \Omega \quad v(x, t) = v_f(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) + v_s(x, t) (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t)) \quad (5.16)$$

Où v_f représente le champ de vitesses sur le domaine fluide et v_s sur le domaine solide et \mathbb{I}_{Ω_f} représente la fonction caractéristique du fluide définie comme suit

$$\mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_f(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.17)$$

On considère le domaine solide constitué d'un solide rigide de masse m , et de centre de gravité X_G . Le problème se formule :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} + (v_f \cdot \nabla) v_f \right) = \nabla \cdot \sigma_f & \text{dans } \Omega_f(t) \\ \nabla \cdot v_f = 0 & \text{dans } \Omega_f(t) \\ m \frac{dV_G}{dt} = \mathcal{F} & \\ J \frac{d\omega}{dt} + J\omega \times \omega = \mathcal{T} & \\ v_s(x,t) = V_G(t) + \omega(t) \times (x - X_g) & \text{dans } \Omega_s(t) \end{array} \right. \quad (5.18)$$

J étant la matrice d'inertie du solide, \mathcal{F} et \mathcal{T} la force et le moment dû à l'action du fluide :

$$\mathcal{F} = \int_{\Gamma_I} \sigma_f \cdot \mathbf{n} dx \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \int_{\Gamma_I} (x - X_g) \times (\sigma_f \cdot \mathbf{n}) dx \quad (5.19)$$

La condition de solide rigide est modélisée par l'équation (5.18) suivante :

$$v_s(x,t) = V_G(t) + \omega(t) \times (x - X_g) \quad \forall x \in \Omega_s(t) \quad (5.20)$$

où $V(t) = v_s(X_g, t)$ et $\omega(t)$ est le vecteur instantané de rotation. On sait d'après le lemme du mouvement rigide que (5.20) est équivalent à

$$\mathbf{D}(v_s) = \frac{1}{2} (\nabla v_s + \nabla^T v_s) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s(t) \quad (5.21)$$

La formulation variationnelle sur le domaine fluide s'écrit de manière classique

$\forall v_f^* \in \{v | v \in \mathbf{H}(\Omega_f), v = 0(t) \text{ sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_I \text{ et } v = v_{\Gamma_I}(t) \text{ sur } \Gamma_I\}$

$$\rho_f \int_{\Omega_f} \frac{\partial v_f}{\partial t} \cdot v_f^* dx + \rho_f \int_{\Omega_f} (v_f \cdot \nabla) v_f \cdot v_f^* dx = \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \sigma_f) \cdot v_f^* dx \quad (5.22)$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \sigma_f) \cdot v_f^* dx &= \int_{\Gamma_I} (p\mathbb{I}_d - 2\mu_f \mathbf{D}(v_f)) \mathbf{n} v_f^* dx - 2\mu_f \int_{\Omega_f} \mathbf{Tr}(\mathbf{D}(v_f) \mathbf{D}(v_f^*)) dx \\ &+ \int_{\Omega_f} p \nabla \cdot v_f^* dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

Avec \mathbf{n} la normale sortante du domaine solide.

Pour le solide, on considère l'équation d'équilibre locale :

$$\rho_s \frac{Dv_s}{Dt} = \nabla \cdot \sigma_s + f \quad (5.24)$$

Où f désigne les forces volumiques que l'on néglige pour la suite.

Sa formulation variationnelle s'écrit :

Soit v_s^* un champ virtuel

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{Dv_s}{Dt} \cdot v^* dx = \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \sigma_s \cdot v^* dx \quad (5.25)$$

Si on choisit un champ virtuel vérifiant l'hypothèse de solide rigide, c'est à dire qu'il existe $V^* \in \mathbb{R}^2$ et $K^* \in \mathbb{R}^2$ telle que $\forall x \in \Omega_s \quad v_s^*(x) = V^* + K^* \times (X_G - x)$, la formulation (5.25) contient aussi le théorème des moments.

$$\int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \sigma_s) \cdot v_s^* dx = \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot v_s^* dx - \int_{\Omega_s} \mathbf{Tr}(\sigma_s \mathbf{D}(v_s^*)) dx \quad (5.26)$$

En tenant compte que v_s^* est un champ virtuel rigidifiant, le premier terme du second membre de (5.26) se décompose selon \mathcal{F} et \mathcal{T} et que sur l'interface on $\sigma_s \cdot \mathbf{n} = \sigma_f \cdot \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot v_s^* dx &= \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot V^* dx + \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot K^* \times (X_G - x) dx \\ &= \mathcal{F} \cdot V^* + \mathcal{T} \cdot K^* \end{aligned} \quad (5.27)$$

Et le deuxième terme du second membre de (5.26) est nul car pour un solide rigide $\mathbf{D}(v_s^*) = 0$.

On a choisit que sur Γ_I , $v_f^* = v_s^*$, on obtient la formulation variationnelle sur Ω $\forall v^* \in \{v | v \in \mathbf{H}(\Omega), v = 0(t) \text{ sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_I \text{ et } \mathbf{D}(v) = 0 \text{ dans } \Omega_s\}$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot v^* dx + \int_{\Omega} \rho (v \cdot \nabla) v \cdot v^* dx = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma) \cdot v^* dx \quad (5.28)$$

Où

$$\forall x \in \Omega \quad v(x,t) = v_f(x,t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t) + v_s(x,t) (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t)) \quad (5.29)$$

$$\forall x \in \Omega \quad \rho(x,t) = \rho_f \mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t) + \rho_s (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t)) \quad (5.30)$$

et

$$\forall x \in \Omega \quad \sigma(x,t) = \sigma_f(x,t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t) + \sigma_s(x,t) (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t)) \quad (5.31)$$

\mathbb{I}_{Ω_f} représente la fonction caractéristique du fluide définie comme suit

$$\mathbb{I}_{\Omega_f}(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_f(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.32)$$

Cette formulation est équivalente à considérer le domaine solide comme un fluide dont la formulation forte s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_s \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) & = \nabla \cdot \sigma_s \quad \text{dans } \Omega_S(t) \\ \nabla \cdot v = 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ \mathbf{D}(v) = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla^T v) = 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ v = v_i & \text{sur } \partial\Omega_S(t) \\ \sigma_s \cdot \mathbf{n} = \sigma_f \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\Omega_S(t) \\ v(x,t=0) = V_0(x) & \text{dans } \Omega_S(t) \end{array} \right. \quad (5.33)$$

Où ρ_s correspond à la densité du domaine solide, σ_s correspondant au tenseur des contraintes du domaine tel que $\mathbf{D}(v) = 0$.

En pratique, dans la formulation variationnelle, on pénalise la contrainte de solide rigide par un coefficient μ_s . L'étape suivante consiste à relaxer le comportement de solide rigide par un multiplicateur de Lagrange L .

On peut alors écrire le tenseur des contraintes dans le domaine rigide sous la forme :

$$\sigma_s = -p\mathbb{I}d + L + 2\mu_s\mathbf{D}(v) \quad (5.34)$$

L'équation (5.21) nous donne dans un cas 3D 6 variables scalaires pour L . En considérant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{D}(v)) &= 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ \mathbf{D}(v) \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{Sur } \partial\Omega_S(t) \end{aligned} \quad (5.35)$$

on réduit à 3 variables. Finalement L n'est pas vraiment le multiplicateur de Lagrange lui-même, mais il représente le champ de contrainte induit par la rigidité. Il peut être donc représenté par :

$$L = \mathbf{D}(\lambda) \quad (5.36)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange à considérer, associé à la contrainte de rigidité. La formulation variationnelle s'écrit alors ainsi :

En considérant les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{v_\Gamma} &= \{v | v \in \mathbf{H}(\Omega), v = v_\Gamma(t) \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_I\} \\ \mathbf{H}_0 &= \{v | v \in \mathbf{H}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_I\} \\ \mathbf{L}_0^2(\Omega) &= \left\{ q \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \int_\Omega q dx = 0 \right\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$\forall v^* \in \mathbf{H}_0, \varsigma \in \mathbf{H}(\Omega_s(t))$ et $q \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ trouver $v \in \mathbf{H}_{v_\Gamma}, p \in \mathbf{L}_0^2(\Omega), \lambda \in \mathbf{H}(\Omega_s(t))$ tel que :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) \cdot v^* dx - \int_\Omega p \nabla \cdot v^* dx + \int_\Omega q \nabla \cdot v dx + \int_\Omega 2\mu \mathbf{D}(v) : \mathbf{D}(v^*) dx \\ &+ \int_\Omega \rho g \cdot v^* dx + \int_{\Omega_s(t)} \mathbf{D}(\lambda) : \mathbf{D}(v^*) dx = 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Où

$$\mu = \mathbb{I}_{\Omega_F} \mu_f + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_F}) \mu_s \quad (5.39)$$

La condition sur l'interface entre le fluide et le solide est ainsi incluse dans les système. Ainsi, il n'y a pas d'expression explicite de forces agissant sur l'interface, ni de la vitesse sur celle-ci. Cette méthode est entre autre appliquée par Laure et al. [75, 76] dans le cas de fluides chargés. Carlson et al. [22] prolonge la méthode décrite par Patankar et al. pour une forme quelconque de solide rigide, et pour une méthode résolution en différence finie et l'ajout de Level-set pour traiter les cas de surface libre. Yu [122] étend la formulation de Glowinski [48] obtenu pour des solides rigides au solides flexibles.

Remarque Une preuve de convergence de la méthode des domaines fictifs a été établie pour l'équation d'Helmutz résolue dans un domaine arbitraire [115].

On veut établir un système dynamique POD pour traiter des problèmes d'interaction entre un fluide et des structures rigides. On a vu dans la première partie de la thèse la signification des modes POD pour la mécanique des fluides et ensuite pour des structures vibrantes. Pour le cas d'une structure rigide, il est légitime de se demander quel est le sens d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres, et quel est l'incidence de l'utilisation d'un champ globale contenant le champ de vitesse du domaine fluide et du solide rigide. Entre autre, la base POD obtenu est elle sur le domaine Ω_s une base pour un comportement rigide ?

On propose ici l'étude de quelques cas numériques appréhendant cette problématique. On considère un domaine fixe de dimension $21\text{m} \times 12\text{m}$ disposant d'un maillage constitué de $n_{x_1} \times n_{x_2} = 211 \times 121$ noeuds dans lequel le solide, un disque de rayon $R = 0.5$ m bouge.

5.3.1.1 Etude de la POD pour un solide rigide

Le premier cas étudié est celui d'un disque rigide cylindrique en translation uniforme. Le champ de vitesse v du domaine solide Ω_s est défini dans le domaine global Ω par :

$$v(x,t) = (v_1 \mathbf{x}_1 + v_2 \mathbf{x}_2) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x,t) \quad (5.40)$$

Où $\mathbb{I}_{\Omega_s}(x,t)$ est la fonction caractéristique du domaine solide, v_1 et v_2 étant les composantes de la vitesse selon les axes \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2

Rechercher une base POD de ce champ de vitesse à partir de M consiste à trouver

les vecteurs Φ solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} v(y, t) \cdot \Phi(y) dy v(x, t) = \lambda \Phi(x) \quad (5.41)$$

Ce qui est équivalent, en notant Φ^1 et Φ^2 les composantes de Φ selon les axes \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , à

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (v_1^2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \alpha_1^k + v_1 v_2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \alpha_2^k) = \lambda \Phi^1(x) \\ \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (v_1 v_2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \alpha_1^k + v_2^2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \alpha_2^k) = \lambda \Phi^2(x) \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\text{avec } \alpha_1^k = \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s}(y, t_k) \Phi^1(y) dy \quad \alpha_2^k = \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s}(y, t_k) \Phi^2(y) dy$$

On peut considérer aussi sa formulation par la méthode des snapshots, qui consiste les vecteurs POD Φ , mais les coefficients A^k tels que :

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^M A^k v(x, t_k) \quad (5.43)$$

Les A^k formant un vecteur propres du problème suivant :

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (v(\bullet, t_i), v(\bullet, t_k)) A^k = \lambda A^i \quad (5.44)$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(x, t_i) v(x, t_k) dx &= \int_{\Omega} v_1^2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_i) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) + v_y^2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_i) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) dx \\ &= (v_1^2 + v_2^2) \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_i) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) dx \end{aligned} \quad (5.45)$$

La recherche des coefficients A revient donc à rechercher $A = (A^1, \dots, A^M)$ tel que Pour $i = 1, \dots, M$

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{M} \sum_{k=1}^M C(t_i, t_k) A^k = \lambda A^i$$

C étant une matrice diagonale supérieure ou inférieure selon le sens de la translation composée de N diagonales telles que $N < \frac{2R}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Delta t}$

Premier cas : grand déplacement du solide On considère un premier cas où les clichés sont pris de telle sorte qu'il n'y ait aucun chevauchement du domaine

occupé à chaque snapshot. Pour cela on impose au solide une vitesse $v_1 = \frac{2R}{\Delta t}$ et $v_2 = 0$, les clichés étant pris tout les Δt . Seul la diagonale de la matrice C aura des termes non nuls.

La base POD obtenue est alors de dimension M égale aux nombres de snapshots telle que

$$\Phi_k(x) = \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \mathbf{x}_1 \quad (5.46)$$

et les valeurs propres sont toutes égales et valent $\lambda_k = \frac{v_x^2}{M} |\Omega_s| = \lambda$.

Donc pour un corps rigide en déplacement, pour reconstruire fidèlement le champ de vitesse du solide il faut tout les modes POD. Ceci est paradoxale puisque si on considère un repère lié au solide, pour un solide rigide sa base est de dimension 2 en $2D$ et 3 en $3D$. Cet exemple limite déjà l'étude à des solides oscillants autour d'une position.

Disque en oscillation Nous allons considérer ici deux cas. Dans le premier cas on considère un solide seul oscillant dans un milieu quelconque. Dans le deuxième cas le cylindre oscillera de la même façon, mais dans un milieu comportant une vitesse. Le but est sur cet exemple d'essayer d'évaluer si l'erreur que l'on fait en effectuant la POD sur le champ de vitesse global.

Disque dans un fluide au repos On impose au cylindre une vitesse de forme sinusoïdale dans le domaine solide de telle sorte que sur Ω le champ de vitesse s'écrive sous cette forme :

$$v(x, t) = \alpha \sin(\omega t) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) \mathbf{x}_2 \quad (5.47)$$

Où on choisit arbitrairement $\alpha = \frac{8\pi}{120}$ et $\omega = \frac{2\pi}{120}$.

La POD ne donne pas de modes dominants comme en mécanique des fluides. On obtient pas à proprement parlé de valeur propre dominante, mais des valeurs propres du même ordre de grandeur. On remarque figure (5.3.1.1) que les coefficients temporels ont globalement la même amplitude. Le premier mode POD est représenté figure (5.3.1.1). Il correspond à une sommation de toutes les fonctions caractéristiques. Les autres modes correspondent à des sommations partielles. Il faut énormément de modes pour reconstruire la solution avec une erreur acceptable figure (5.8), au minimum 90.

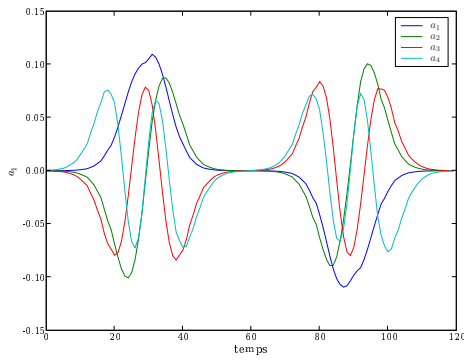
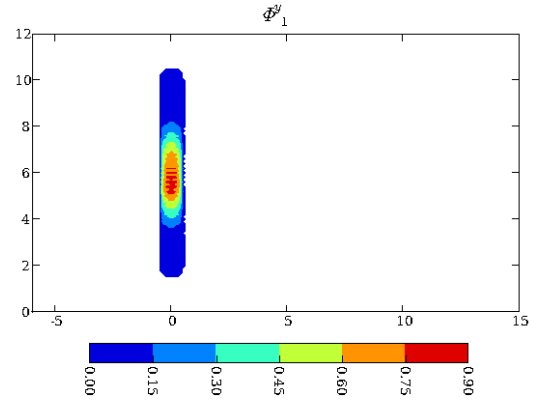
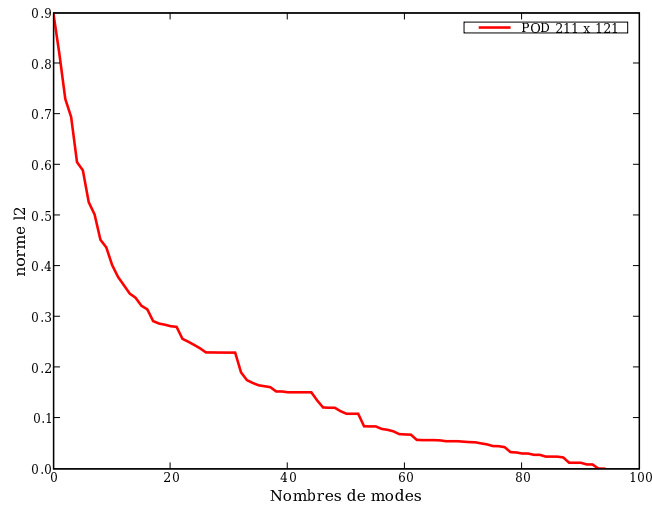
FIG. 5.6: Coefficients a_n 

FIG. 5.7: Deuxième composante du premier mode

Dans le cas d'oscillations plus faibles, il faudrait moins de modes. Cela nous contraint donc aux cas où l'on aura de faibles oscillations d'un solide autour de sa position d'équilibre.

FIG. 5.8: Erreur de reconstruction en norme L^2 en fonction du nombre de modes retenus

Disque en oscillation dans un écoulement sans interaction On test dans cet exemple la POD pour un champ de vitesse globale, où la vitesse dans le solide est faible par rapport à la vitesse dans le domaine l'entourant. Il n'y a pas d'interaction entre les domaine, le but étant juste d'avoir une idée qualitative de la POD. Le champ de vitesse sur Ω est imposé comme suit :

$$v(x_1, x_2, t) = \alpha_1 \cos(\omega t) \sin(\beta_1 x_1) \sin(\beta_2 x_2) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cos(\omega t) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) \mathbf{x}_2$$

(5.48)

$$\alpha_1 = 100, \omega = 2 \cdot 10^{-4}, \beta_1 = \frac{2\pi}{L}, \beta_2 = \frac{2\pi}{L}, \alpha_2 = 1 \cdot 10^{-4}.$$

Le champ de vitesse dans le fluide est choisi de telle sorte qu'il soit dominant par rapport au domaine solide et on choisit pour le solide une amplitude d'oscillation plus faible que dans le cas précédent. On observe que dans ce cas là, on a une erreur de reconstruction du champ de vitesse globale en norme \mathbf{L}^2 très faible puisqu'elle est en 10^{-3} (figure (5.9)).

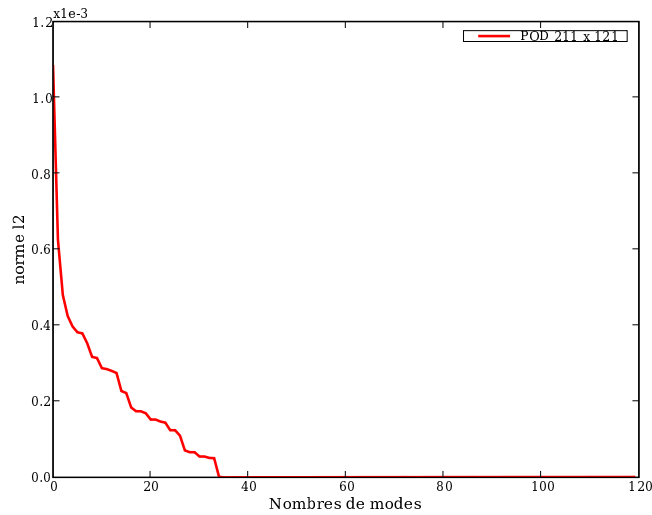
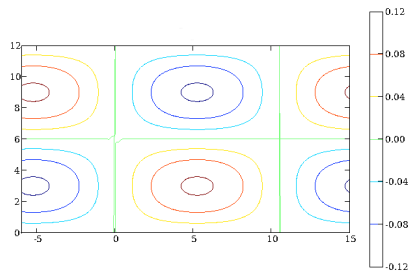


FIG. 5.9: Erreur de reconstruction en norme \mathbf{L}^2 en fonction du nombre de modes retenus

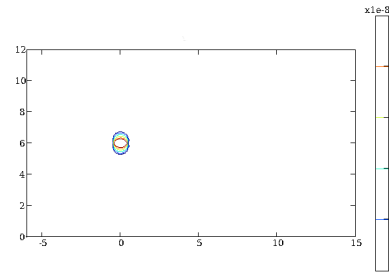
Le premier mode capturant essentiellement les structure du fluide, alors que les seconds sont plutôt axés sur les zones d'oscillation de la structure rigide

On obtient une bonne reconstruction de la vitesse globale lorsque l'on évalue l'erreur en norme \mathbf{L}^2 . Si on zoom sur le domaine solide, cela devient plus compliqué. En pratique lorsque l'on évalue l'erreur de reconstruction sur le solide, on constate que même avec 50 modes on ne reconstruit pas entièrement la vitesse sur le domaine solide

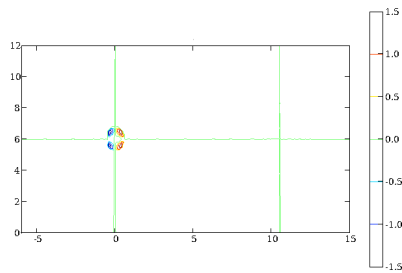
Par contre la vitesse au centre de gravité est reconstruite dès le premier mode. Connaissant celle-ci il est aisé de reconstruire la vitesse dans tout le domaine solide, donc le manque de précision des modes POD pour la vitesse du corps rigide n'est pas un problème en soit puisque l'on peut le contourner.



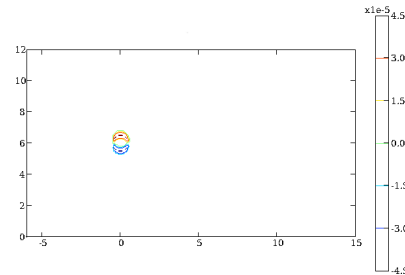
(a) première composante mode 1



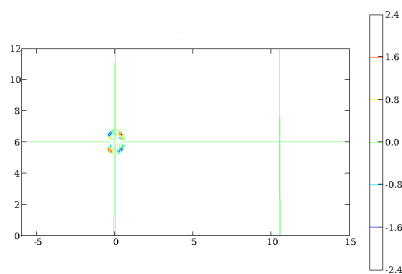
(b) Deuxième composante mode 1



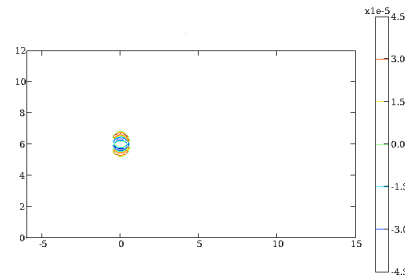
(c) première composante mode 2



(d) Deuxième composante mode 2



(e) première composante mode 3



(f) Deuxième composante mode 3

FIG. 5.10: Isovaleurs des 3 premiers modes POD

5.3.1.2 Conclusion

Comme on l'a vu dans certains exemples numériques, la POD de même qu'elle n'est pas adaptée pour l'étude de fonctions caractéristiques, peut donner des résultats catastrophiques si l'on considère le solide rigide seul. Cependant dans le cas de faibles déplacements, l'approche peut encore être valable, de même si on considère

un problème d'interaction fluide solide rigide avec de faibles déplacements de la structure. En effet, la quasi totalité de l'énergie cinétique est apportée par le fluide, les modes PODs contiendront donc principalement l'information sur celui-ci. On aura une détérioration de l'information sur le domaine solide, cependant dans le cas de faibles oscillations, c'est à dire que si moins 2 points maillage étant dans le domaine solide initiale restent au cours du temps dans le domaine solide, on pourra reconstruire avec peu de modes la vitesse en ces points, donc le solide rigide.

Dans la suite on considère que v^* est une fonction issue de la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Une des propriétés de cette fonction est que pour un champ de vitesse incompressible, cette fonction est à divergence nulle. Par conséquent le terme de pression n'est plus à prendre en compte dans (5.38).

5.3.2 Système dynamique POD

On cherche v à divergence nul tel que :

quelque soit Φ un mode POD à divergence nulle, on ait

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) \Phi dx + \int_{\Omega} 2\mu \mathbf{tr}(\mathbf{D}(v) \mathbf{D}(\Phi)) dx + \int_{\Omega_s} \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi)) dx \\ - \int_{\Gamma_I} (\mathbf{D}(\lambda) \Phi) \mathbf{n} dx + \int_{\partial\Omega_f \setminus \Gamma_I} p \Phi \mathbf{n} dx + \int_{\partial\Omega_f \setminus \Gamma_I} 2\mu_f (\mathbf{D}(v) \Phi) \mathbf{n} dx = 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

ρ et μ sont définis sur tout le domaine :

$$\rho = \mathbb{I}_{\Omega_f} \rho_f + (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}) \rho_s ; \mu = \mathbb{I}_{\Omega_f} \mu_f + (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}) \mu_s \quad (5.50)$$

On traite la pression par la méthode de pénalisation citée dans la section 2.3.3. En introduisant la décomposition de v sur la base POD tronquée à N modes. Les systèmes dynamiques sont obtenus de la même manière que dans le chapitre 2. On présente ci-dessous leur formulation sur le champ de vitesse instantané et sur le champ de vitesse fluctuant.

Formulation du système dynamique sur champ le champ de vitesse instantané

On garde la même formulation que dans le chapitre 2, c'est à dire que Φ_i , $i = 1, \dots, N$ désigne un élément de la base POD.

$\forall t \in \mathbf{T}$ pour $i = 1 \dots N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N \frac{da_k}{dt} A_{ki}^t + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k(t) a_l(t) B_{kli}^t + 2 \sum_{k=1}^N a_k(t) C_{ki}^t + D_i^t + E_i^t = 0 \\ \mathbf{D}(v) = 0 \quad \text{sur } \Omega_s(t) \\ \frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_f}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_f} = 0 \end{array} \right. \quad (5.51)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_{ki}^t &= \int_{\Omega} \rho(x,t) \Phi_k(x) \cdot \Phi_i(x) dx \\ B_{kli}^t &= \int_{\Omega} \rho(x,t) (\nabla \Phi_k \cdot \Phi_l) \cdot \Phi_i dx \\ C_{ki}^t &= \int_{\Omega} \mu(x,t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\Phi_k) \cdot \mathbf{D}(\Phi_i)) dx - G \int_{\Gamma_e} \Phi_k \Phi_i dx \\ D_i^t &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_S}(x,t) f \cdot \Phi_i dx \\ E_i^t &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_S}(x,t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi_i)) dx - \int_{\Gamma_I} (\mathbf{D}(\lambda) \Phi_i) \cdot \mathbf{n} dx + G \int_{\Gamma_e} v^{cl} \Phi_i dx \end{aligned} \quad (5.52)$$

Formulation du système dynamique sur le champ de vitesse fluctuant

Comme dans la section 2.3.2 du chapitre 2, on décompose le champ de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante.

$$v = \langle v \rangle + v' \quad p = \langle p \rangle + p' \quad (5.53)$$

Avec $\langle \bullet \rangle$ qui représente l'opérateur de moyenne temporelle explicité précédemment. Pour plus de commodité pour l'écriture des équations on remplacera dans la suite $\langle \bullet \rangle$ par $\bar{\bullet}$. Un vecteur de la base POD pour le champ fluctuant est noté Φ'_i , $i = 1, \dots, N$.

$\forall t \in \mathbf{T}$ pour $i = 1 \dots N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N \frac{da'_k}{dt} A_{ki}^t + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a'_k(t) a'_l(t) B_{kli}^t + \sum_{k=1}^N a'_k(t) C_{ki}^t + D_i^t + E_i^t = 0 \\ \mathbf{D}(v) = 0 \quad \text{sur } \Omega_s(t) \\ \frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_f}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_f} = 0 \end{array} \right. \quad (5.54)$$

Avec

$$\begin{aligned}
A_{ki}^t &= \int_{\Omega} \rho(x,t) \Phi'_k(x) \cdot \Phi'_i(x) dx \\
B_{kli}^t &= \int_{\Omega} \rho(x,t) (\nabla \Phi'_k \cdot \Phi'_l) \cdot \Phi'_i dx \\
C_{ki}^t &= \int_{\Omega} 2\mu(x,t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\Phi'_k) \cdot \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx + \int_{\Omega} \rho(\Phi'_k \cdot \nabla \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \Phi'_k) \cdot \Phi'_i dx \\
&\quad - G \int_{\Gamma_e} \Phi_k \Phi_i dx \\
D_i^t &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_S}(x,t) f \cdot \Phi'_i dx - G \int_{\Gamma_e} (\bar{v} - v^{cl}) \Phi_i dx + \int_{\Omega} 2\mu(x,t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\bar{v}) \cdot \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \rho(x,t) (\nabla \bar{v} \cdot \bar{v}) \cdot \Phi'_i dx \\
E_i^t &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_S}(x,t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx - \int_{\Gamma_I} (\mathbf{D}(\lambda) \Phi'_i) \cdot \mathbf{n} dx
\end{aligned} \tag{5.55}$$

5.3.3 Remarque sur les systèmes dynamiques

Il y a une différence notable par rapport aux systèmes dynamiques POD/BOD obtenus de manière classique pour un milieu homogène. Premièrement, on obtient des coefficients du système dynamique qui dépendent du temps par l'intermédiaire de la fonction caractéristique introduite dans la densité et la viscosité.

Deuxièmement on obtient un système plus complexe avec un coefficient A en plus dû à la variation de la densité dans Ω et un terme supplémentaire contenant le multiplicateur de Lagrange λ . On a aussi une équation supplémentaire qui correspond à la contrainte de rigidité sur Ω_s . Cette contrainte de rigidité correspondant à $\mathbf{D}(v) = 0$ n'est pas exprimée sur la base POD tronquée à N modes.

En effet, le fait de tronquer la base POD, consiste à retenir les modes ayant la plus forte contribution énergétique dans le domaine total Ω . Dans le cas d'un solide immergé dans un écoulement fluide, le fluide aura la plus forte contribution énergétique, en tronquant la base POD on risque de se privé d'information sur le domaine solide. Dans le cas opposé d'un fluide initialement au repos dont l'écoulement est crée par le mouvement d'un solide, on aura l'effet inverse, c'est à dire le champ de vitesse dominant étant dans le domaine solide, la base POD sera plus représentative de celui-ci. Ces exemples seront traités dans la suite.

Il reste la dernière équation qui sert à déterminer la position de l'interface au cours du temps. La fonction caractéristique pouvant être problématique à résoudre, il est plus judicieux de considérer la fonction Level-Set, celle-ci étant réductible par

base POD (section 5.6.2) ou encore dans le cas d'un solide rigide le déplacement lagrangien du domaine. Il suffit en effet dans ce cas là de connaître le déplacement de seulement 2 points du domaine rigide pour pouvoir réinitialiser les fonctions caractéristiques à chaque pas de temps.

5.3.4 Résolution

Le système est résolu par une méthode de Newton couplé à un algorithme d'Uzawa

Au pas de temps t on connaît pour $i = 1, \dots, N$, $a_i(t)$ et les coefficients A^t, B^t, C^t, D^t . On considère $a_i^0 = a_i(t)$, $\lambda^0 = 0.0$, $A_{in}^0 = A_{in}^t$, $B_{ijn}^0 = B_{ijn}^t$, $C_{in}^0 = C_{in}^t$, $D_n^0 = D_n^t$ et $E_n^0 = 0.0$.

On calcule a^{k+1} solution du système suivant :

$$\sum_{i=1}^N \left(A_{in}^k + \sum_{j=1}^N a_j^k B_{ijn}^k + 2C_{in}^k \right) a_i^{k+1} = \sum_{i=1}^N a_i(t) A_{in}^t - E_n^k - D_n^k \quad (5.56)$$

On calcule ensuite la vitesse reconstruite

$$u^{k+1} = \sum_{i=1}^N a_i^{k+1} \Phi_i \quad (5.57)$$

ce qui permet d'estimer la nouvelle configuration du solide

$$X_g^{k+1} = X_g(t) + \Delta t (u_g^{k+1} + u_g(t)) \quad (5.58)$$

Et donc de réinitialiser les fonctions caractéristiques, et les coefficients A, B, C, D, E

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \mu u^{k+1} \quad (5.59)$$

La convergence est de la solution est ensuite évaluée

Si

$$\|u^{k+1} - u^k\| < \epsilon_1 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{D}(u^{k+1}) \mathbb{I}_{\Omega_s}\| < \epsilon_2 \quad (5.60)$$

on passe au pas de temps suivant

sinon on fait $k = k + 1$

5.4 Application

La méthode présentée a été testée sur le cas de l'équation de Burgers monodimensionnelle couplée avec un ressort afin d'établir une comparaison avec les résultats obtenus au début du chapitre. Ensuite différents cas bidimensionnels ont été traité. Le premier cas est une étude pour un écoulement faible engendré par le mouvement d'un solide. Ensuite, on passe à un cas où l'écoulement a une contribution plus importante, mais le mouvement du solide est imposé. Dans le dernier cas le solide est lâché dans l'écoulement.

5.4.1 Cas monodimensionnel

On reprend le cas étudié au début de ce chapitre, mais en utilisant cette fois la méthode proposée dans la section 5.2.2. On choisit sur le domaine solide une vitesse égale à la vitesse de déplacement de la paroi, et la vitesse sur les noeuds se trouvant dans le domaine fluide est interpolé à partir des résultats obtenus de la résolution du problème (5.2).

mode i	λ_i	% d'énergie	mode i	λ_i	% d'énergie
1	18.255	91.648	4	$6.079 \cdot 10^{-2}$	99.982
2	1.515	99.256	5	$2.347 \cdot 10^{-3}$	99.994
3	$8.393 \cdot 10^{-2}$	99.677	6	$7.804 \cdot 10^{-4}$	99.999

TAB. 5.2: Contribution en énergie cinétique des 6 premiers modes POD

On observe dans le tableau 5.4.1 que l'énergie est distribuée différemment que dans le cas de l'étude effectué dans la section (2.6.1). Cela est dû au fait que le domaine fluide n'est pas fixe dans le temps. On remarque que les modes POD obtenus sont aussi différents. Bien que le premier ressemble beaucoup beaucoup, il semble que le deuxième mode dans le cas où le domaine fluide est fixe ce soit décalé d'un rang dans l'étude actuelle, un nouveau mode traduisant la mobilité de l'interface étant apparu. On observe sur le quatrième mode une forte oscillation sur la zone parcourue par l'interface. Ces oscillations s'amplifient pour les modes suivants.

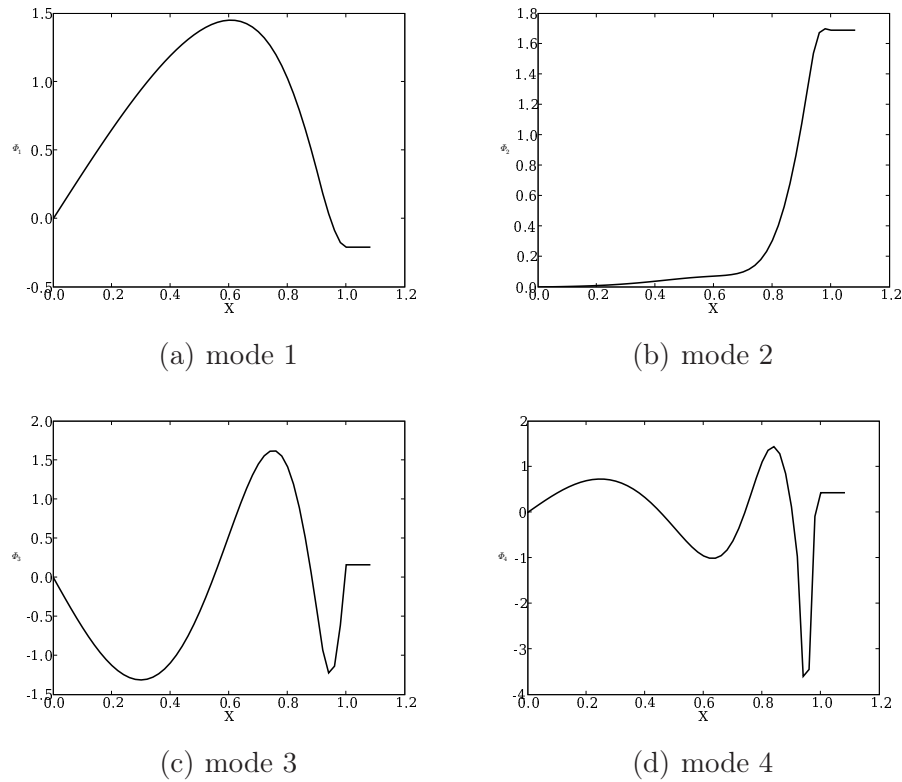


FIG. 5.11: Les 4 premiers modes PODs

Le système dynamique exprimé section 5.3.2 est calculé en ne retenant que 5 modes dans la reconstruction du champ de vitesse. Les coefficients temporels obtenus par le système dynamique réduit sont comparés avec ceux obtenus par POD directe (figure (5.12)). On observe une reconstruction qui semble de moins bonne qualité que dans la section 2.6.1. Cela est dû en partie aux oscillations des modes sur la zone occupée par l'interface.

On remarque cependant que l'erreur de reconstruction est très faible lorsque l'on superpose la solution qui a servie aux snapshots et la solution reconstruite par le système dynamique réduit. (figure (5.13))

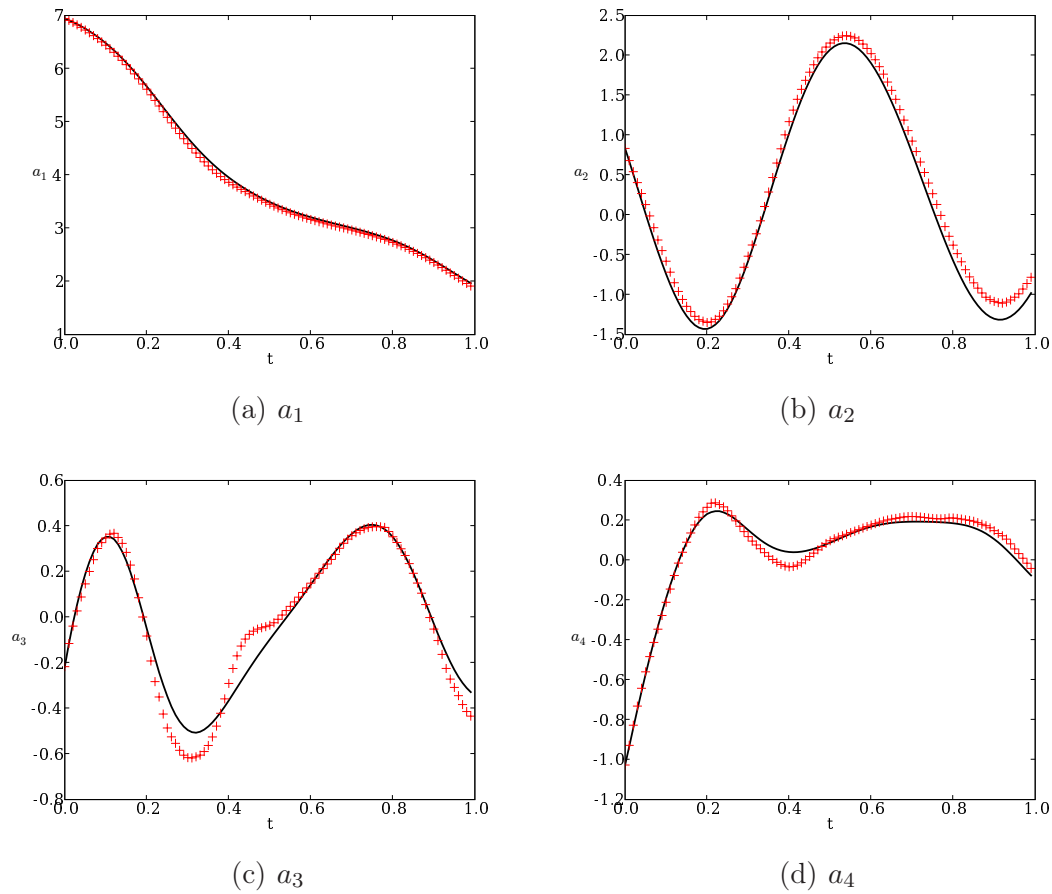


FIG. 5.12: Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes

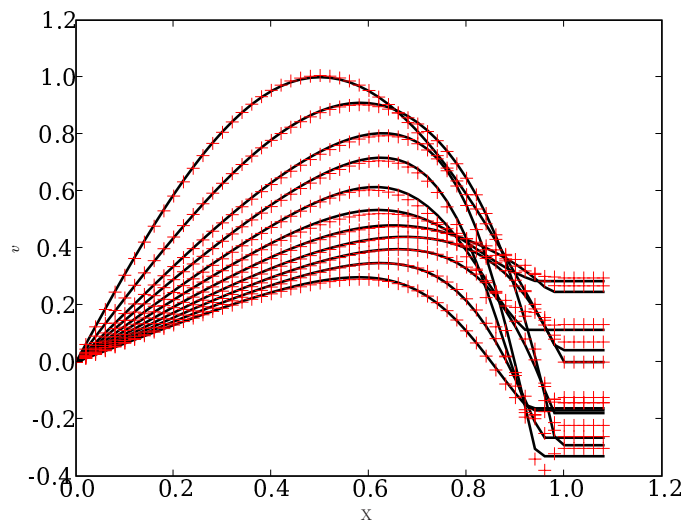


FIG. 5.13: Comparaison du champ de vitesse reconstruit à différents instant t obtenus par :
– Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 5 modes

Comparé aux résultats de la figure (5.4), la méthode que l'on propose donne des résultats de bien meilleures qualités.

5.4.2 Cavité annulaire

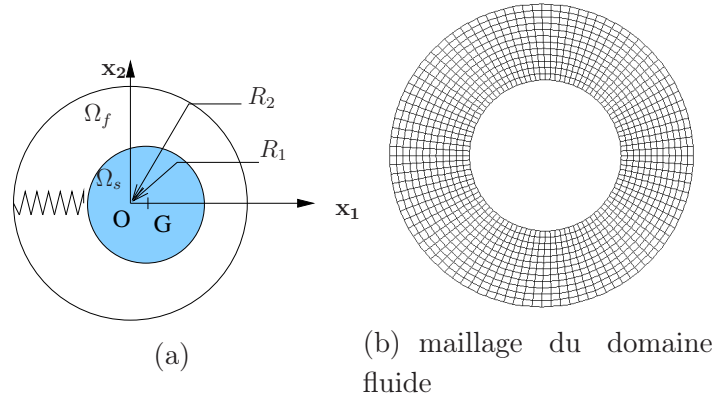


FIG. 5.14: Description du domaine d'étude

On étudie ici les oscillation d'un cylindre rigide de rayon $R_1 = 0.1$ m dans un domaine fluide annulaire délimité par un cylindre concentrique de rayon $R_2 = 0.2$ m. On suppose que le solide rigide à une masse $m = 1$ kg et est relié au cylindre extérieur par un ressort de raideur $k = 1 \cdot 10^{-4}$ N · m⁻¹. le domaine fluide est constitué d'un liquide de densité $\rho_f = 1000$ kg · m⁻³ et de viscosité $\mu_f = 0.001$ kg/m · s

Le cylindre est initialement écarté de sa position d'équilibre et relâché avec une vitesse initiale nulle. Sous l'effet du déplacement du solide, celui-ci va créer un écoulement dans le fluide. La viscosité va induire un amortissement de l'amplitude du mouvement du solide. Le déplacement pouvant être calculé de manière analytique, on aura ainsi un élément de validation. La solution analytique s'écrit, $X_G(t)$ désignant la position du centre de gravité à l'instant t :

$$X_G(t) \cdot \mathbf{x}_1 = X_0 \cos(\omega(\xi)t) e^{(-\xi\omega t)} \cdot \mathbf{x}_1 \quad (5.61)$$

où $X_0 = (5 \cdot 10^{-3}, 0.0)$ est la position du centre de gravité à l'instant initial, $\omega = 0.01$ rad · s⁻¹ = 20π rad · s⁻¹, $\omega(\xi) = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$, et ξ le degré d'amortissement. Celui-ci peut être calculé à partir du décrement logarithmique δ de la courbe d'oscillation du centre de gravité du solide sur les premières périodes :

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (5.62)$$

où $\delta = \ln \frac{x_G(t + T_a)}{x_G(t)} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}$, T_a étant une pseudo-période d'oscillation.

La résolution numérique nécessaire à l'obtention des snapshots à été effectuée par le logiciel Castem en utilisant l'algorithme décrit par Benaouicha [14]. Le type d'éléments finis utilisés sont décrits dans le chapitre 4.2. On retrouve une bonne concordance entre la solution analytique et la solution numérique du déplacement du centre de gravité (figure 5.15)

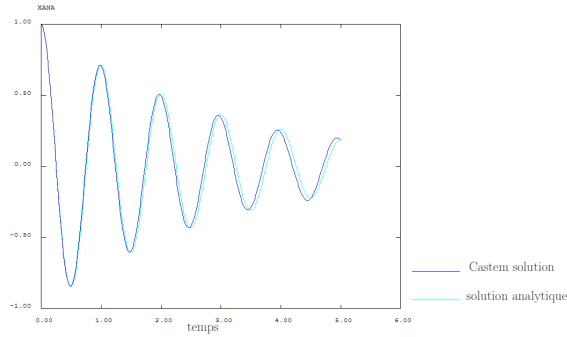
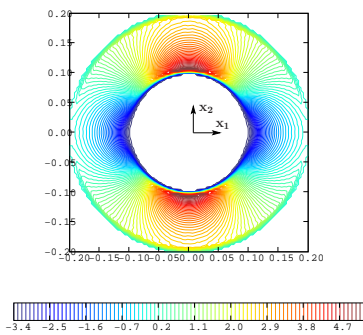
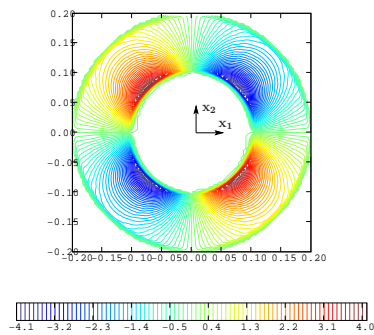
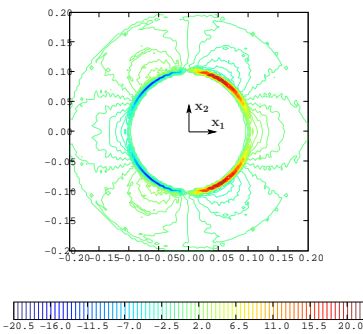
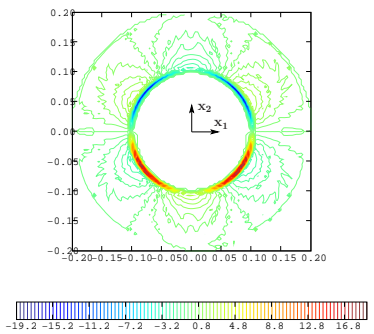


FIG. 5.15: Déplacement du cylindre pendant 5 périodes d'oscillations

On choisit de prendre les snapshots sur une pseudo-période d'oscillation du cylindre, soit un intervalle de temps $\mathbf{T} = [0,6.28]$. On prend 100 clichés espacés de $\Delta t_s = 0.0628$ s. Le domaine de référence sur lequel les snapshots sont interpolés est discrétisé selon un pas spatial $\Delta x_1 = 0.004$ m et $\Delta x_2 = 0.004$ m.

La figure (5.16) représente les isovaleurs des composantes des deux premiers modes POD. On remarque que dans le cas étudié ici, l'écoulement est contrôlé par le mouvement du solide. C'est la raison pour laquelle très peu de modes POD suffisent. Le premier mode contribue à lui seul à 99.9% de l'énergie totale. Le second représente des fluctuations au niveau de l'interface fluide solide.

On se trouve dans la situation où même si le caractère dominant est celui du solide. Ayant de faibles oscillations du solide, le déplacement de celui-ci ne dépasse pas deux éléments du maillage fixe de référence. On reconstruit alors très bien le champ de vitesse avec seulement 2 modes POD.

(a) Première composante de Φ_1 (b) Deuxième composante de Φ_1 (c) Première composante de Φ_2 (d) Deuxième composante de Φ_2 FIG. 5.16: Isovaleurs des deux premières composantes des deux premiers modes *POD*

On obtient également des résultats correctes avec le système dynamique réduit utilisant seulement 2 modes *POD*. On observe figure (5.17) que le premier coefficient temporel est très bien reconstruit de même que le deuxième.

Rajouter d'autres modes dans la base augmente dans ce cas présent l'erreur. Le troisième coefficient temporel a un caractère très désordonné. Cependant, le premier mode est tellement dominant que la reconstruction avec 2 modes donne une erreur très faible lorsque l'on compare le champ de vitesse initial et celui reconstruit par le système dynamique réduit. Les figures 5.18 et 5.19 montrent les isovaleurs du champ du cliché du champ de vitesse et la solution du système dynamique pour un écart maximal entre les deux.

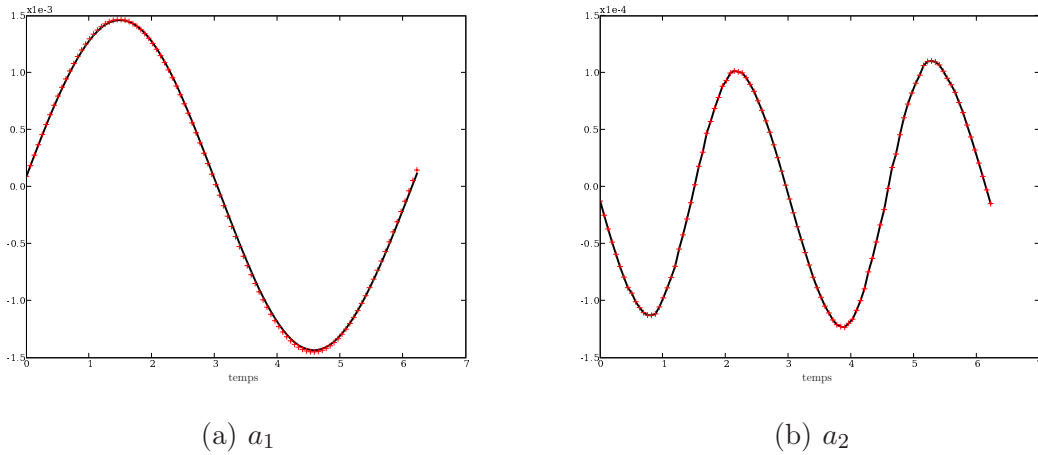


FIG. 5.17: Comparaison des deux premiers coefficients temporels obtenus par – POD directe , + système dynamique réduit à 2 modes

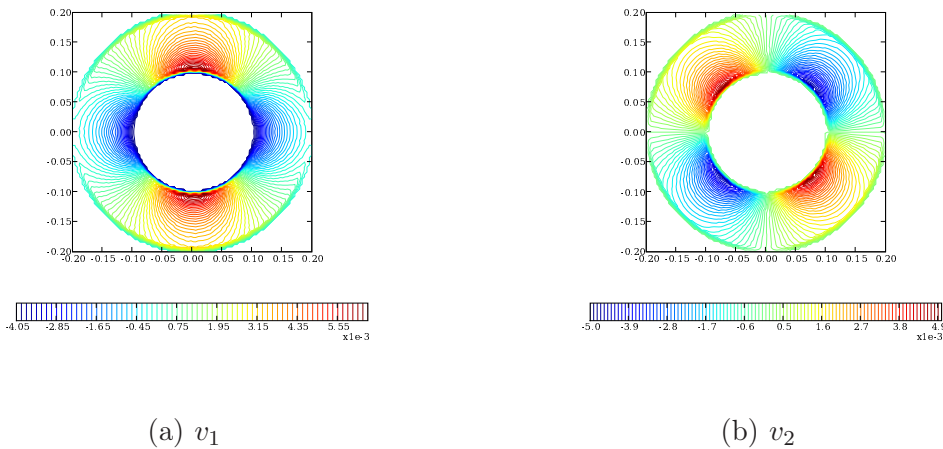


FIG. 5.18: Isovaleurs de la première et deuxième composante du champ de vitesse pour la 15^{ième} snapshot

Le système dynamique a été testé sur un intervalle de temps supérieur à l'intervalle de temps pendant lequel on a pris les clichés de l'écoulement. On a comparé le déplacement obtenu par le système dynamique réduit et la solution analytique (figure (5.20)). On observe une très bonne prédiction de celui-ci sur l'intervalle de temps étudié, c'est à dire 10 fois l'intervalle de temps de la snapshot.

Dans le cas présent on n'applique pas la POD sur le champ fluctuant. Il ne serait pas judicieux ici de décomposer le champ de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante. La moyenne temporelle du champ de vitesse sur le domaine solide est pratiquement nulle sur la période étudiée, donc on ne peut pas assimiler la moyenne temporelle au premier mode.

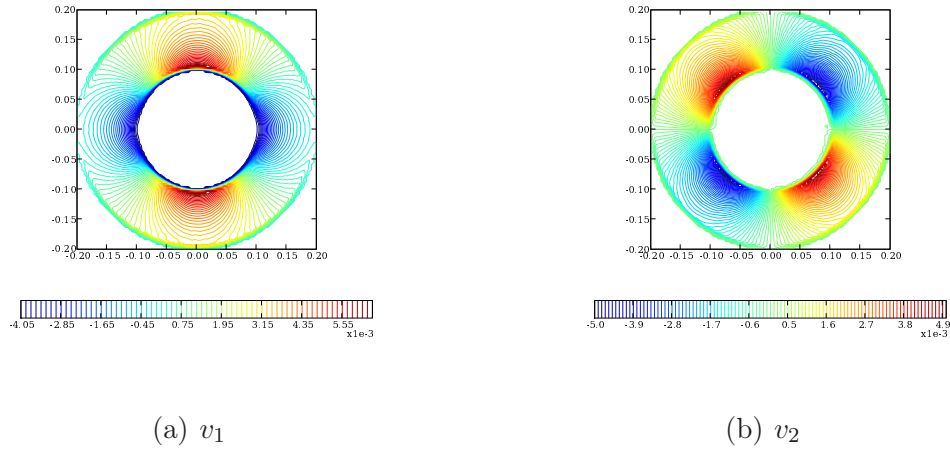


FIG. 5.19: Isovaleurs de la première et deuxième composante du champ de vitesse obtenu par le système dynamique réduit pour un temps correspondant à la 15^{ième} snapshot

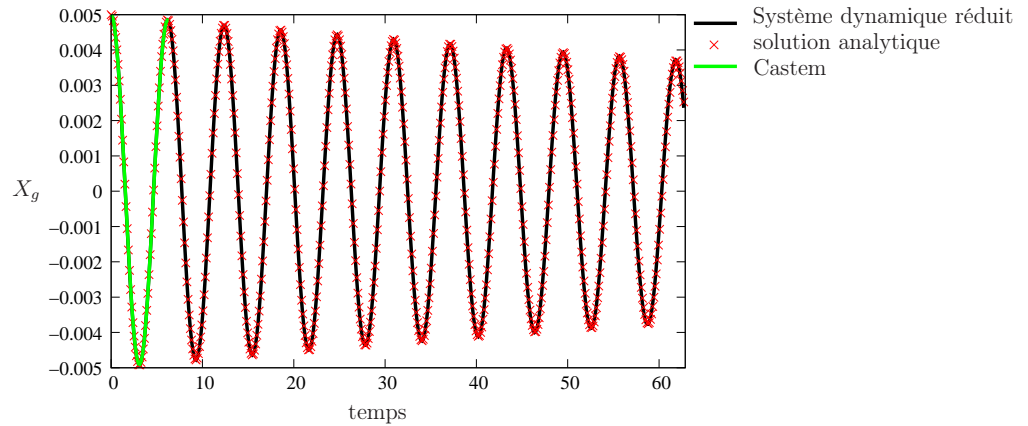


FIG. 5.20: Comparaison du déplacement du solide

Concernant la BOD, on obtient les mêmes résultats que pour la POD.

5.4.3 Cylindre en oscillation forcée dans un canal

Présentation du problème

On étudie ici l'écoulement autour d'un cylindre en oscillation forcée. On se place dans les mêmes conditions d'écoulement que dans la section 2.6.2, c'est à dire à Reynolds 200 et des vitesses nulles sur les parois inférieures et supérieures du canal. On considère cette fois un cylindre de rayon $R = 0.5$ m et de masse $m = 1$ kg rattaché à la paroi inférieure par un ressort immergé dans l'écoulement. Les déplacements du cylindre sont imposés par l'équation :

$$X_{g_2}(t) = X_{g_0} + A \sin(2\pi f_0 t) \quad (5.63)$$

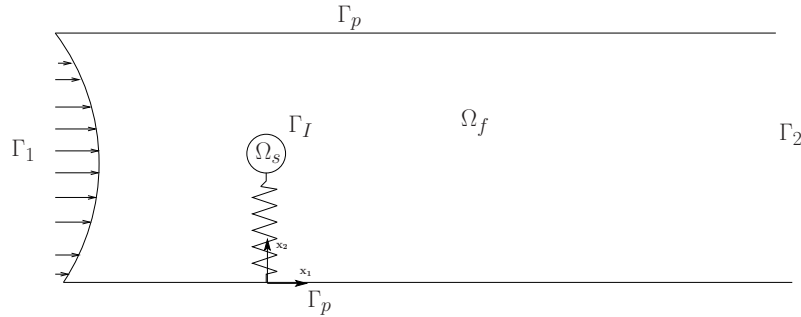


FIG. 5.21: Description du domaine d'étude

Où $Xg_2(t)$ désigne la coordonnée selon l'axe \mathbf{x}_2 du centre de gravité $Xg(t) = (Xg_1(t), Xg_2(t))$, A l'amplitude et f_0 la fréquence d'oscillation.

On décide de faire osciller le cylindre à la même fréquence que la fréquence liée au Strouhal lorsque le cylindre est fixe, c'est à dire $f_0 = 4.10^{-5} Hz$ et on prend $A = 0.25$. On observe alors un phénomène d'accrochage fréquentiel, c'est à dire que la fréquence liée au nombre de Strouhal et celle d'oscillation du cylindre sont identiques. Pour plus de renseignements sur ce phénomène le lecteur pourra se référer à [73] et [14].

Les clichés de l'écoulement sont effectués sur une solution obtenue à l'aide du logiciel Castem, sur une période d'oscillation du cylindre. Le couplage fluide structure est décrit par Liberge et al. [80]. On effectue 120 clichés de l'écoulement présentés figure (5.22).

Analyse POD

On effectue la POD sur un maillage du domaine de référence constitué de 211×121 noeuds, soit $\Delta x_1 = 0.1$ m et $\Delta x_2 = 0.1$ m. On présente sur la figure (5.23) les 3 premiers modes POD. Ils ressemblent à ceux obtenus pour le cylindre fixe (cf section 2.6.2) sauf dans la zone d'oscillation du cylindre. On remarque que le premier mode ressemble à une moyenne de l'écoulement et ne contient pas les fluctuations du fluides.

Du point de vue considérations énergétiques, avec 7 modes on obtient 99.99% de l'énergie cinétique totale, le premier contribuant à lui seul à 98.37% de l'énergie totale. La répartition énergétique est différente du cas du cylindre fixe, le premier mode captant ici plus d'énergie. Cependant les études n'ont pas été réalisées avec le même nombre de snapshot et pas sur le même intervalle de temps.

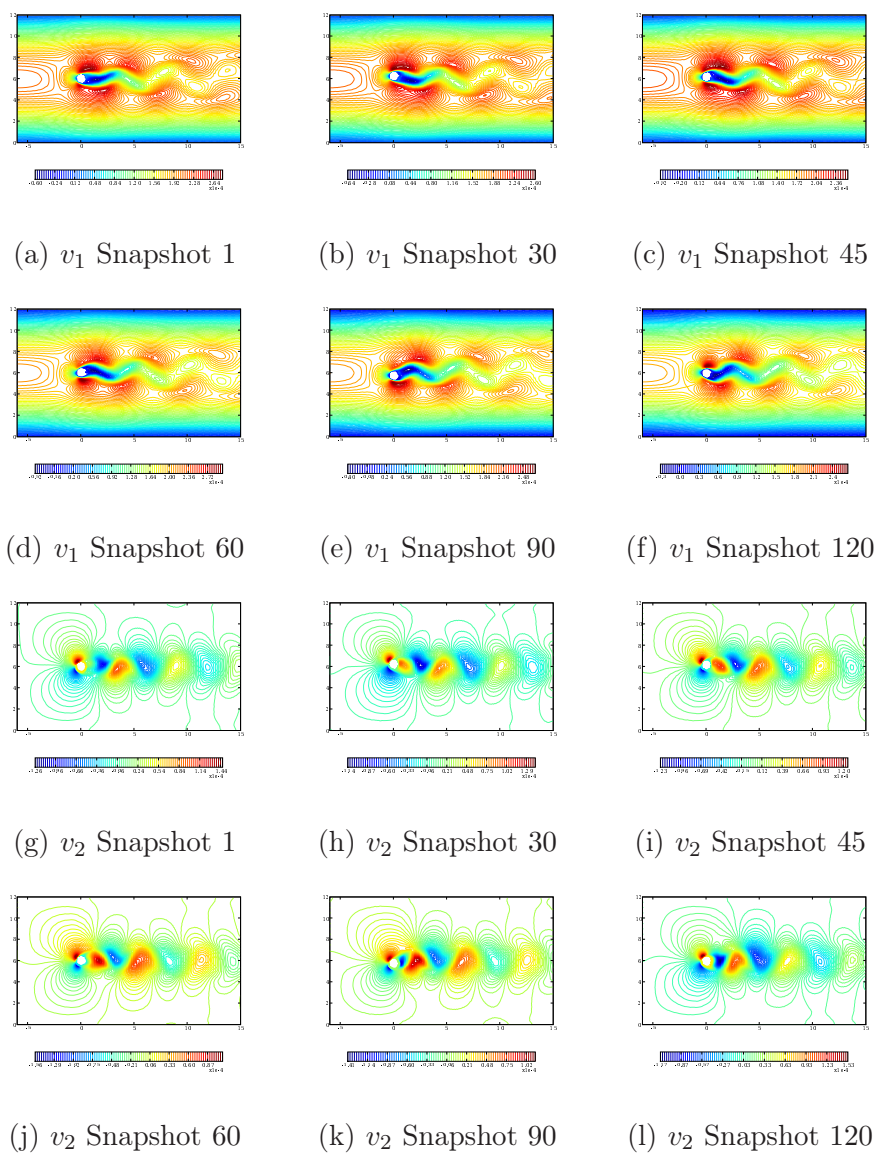


FIG. 5.22: Clichés du champ de vitesse à différents instants

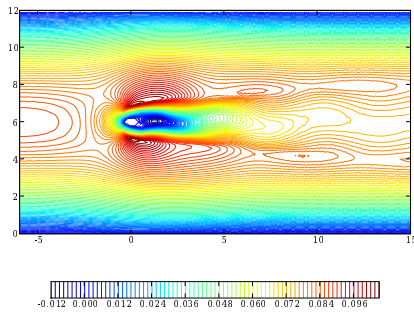
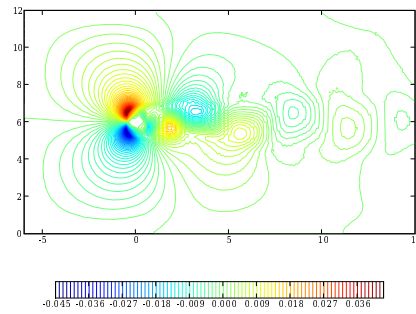
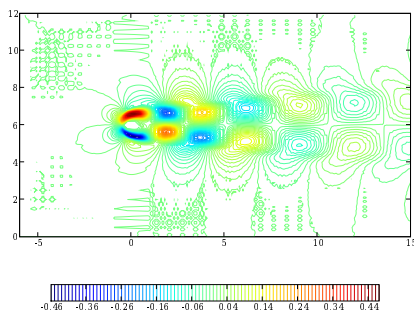
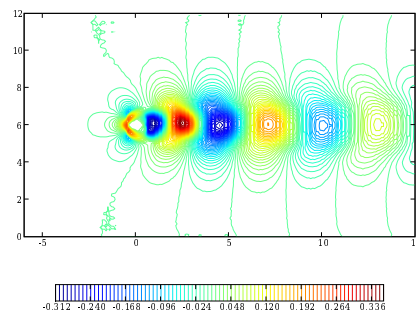
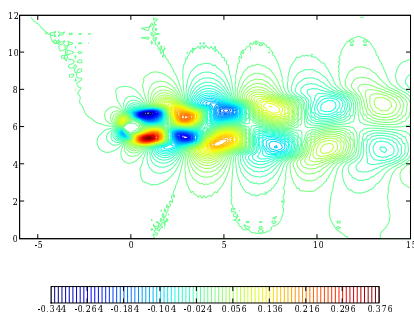
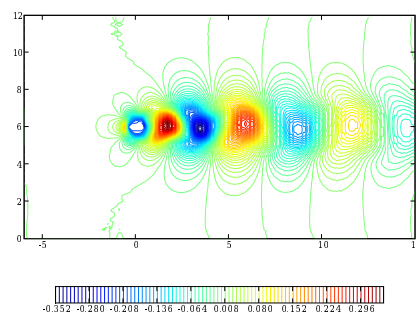
(a) Première composante de Φ_1 (b) Deuxième composante de Φ_1 (c) Première composante de Φ_2 (d) Deuxième composante de Φ_2 (e) Première composante de Φ_3 (f) Deuxième composante de Φ_3

FIG. 5.23: Isovaleurs des 3 premiers modes POD

Sur la figure (5.4.3) on remarque qu'avec 7 modes l'erreur de reconstruction en norme \mathbf{L}^2 sur les snapshots est inférieure à 2% et qu'il faut par contre 12 modes pour obtenir une précision inférieure à 1%. Les valeurs propres correspondants aux modes 8 à 12 ont une décroissance et concernent surtout les zones recouvertes par le cylindre pendant les snapshots.

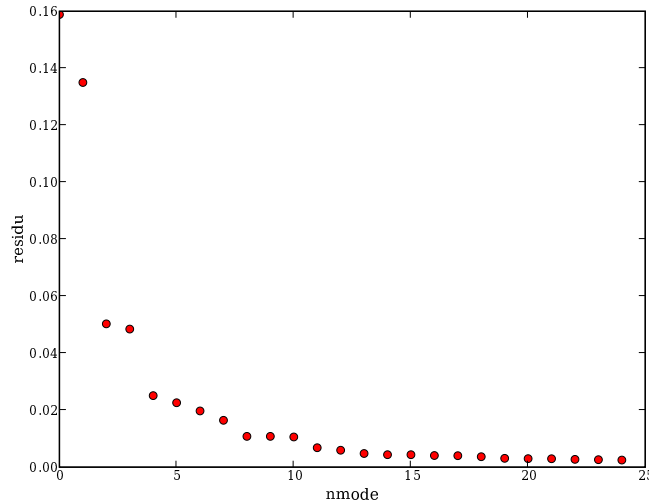


FIG. 5.24: Erreur de reconstruction en norme L^2

Système dynamique réduit sur le champ instantané

On a construit le système dynamique pour le champ instantané avec 7 modes, les résultats obtenus pour les 4 premiers coefficients temporels sont présentés figure (5.25). Les résultats obtenus avec plus de modes ne sont pas meilleurs et ont tendance à détériorer la solution. Cela est dû au fait que ces modes là capturent des fluctuations près de l'interface, c'est à dire qu'ils possèdent de forte oscillation dans cette zone et sont sources d'instabilité.

Il y a une difficulté supplémentaire dans le cas de l'oscillation forcée. En effet l'oscillation forcée consiste physiquement à considérer une force qui annule les efforts du fluides sur le solide. L'expression de cette force n'est pas connue, la formulation utilisée les contenant implicitement. Comme le solide est en oscillation forcée, son mouvement est imposé. On va donc imposer une condition plus forte que celle de solide rigide dans le domaine Ω_s . On va en effet considérer au lieu de $\mathbf{D}(v) = 0$, $v = v_g$, c'est à dire la vitesse du centre de gravité du solide. La qualité des résultats va dépendre de l'erreur que l'on autorise sur cette vitesse tout en gardant une solution qualitativement proche de la solution réelle du champ de vitesse dans le domaine Ω .

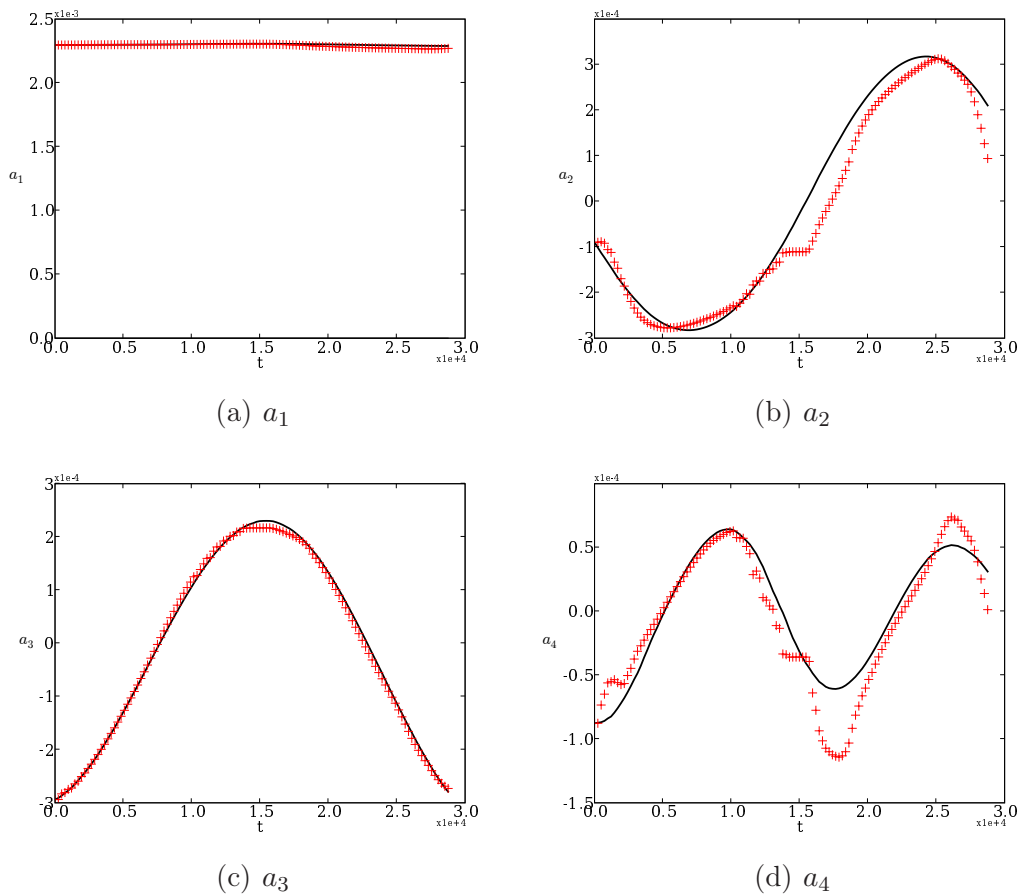


FIG. 5.25: Les 4 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes

Dans le but d'obtenir de meilleurs résultats on a étudié le système dynamique sur le champ fluctuant.

Système dynamique réduit sur le champ fluctuant

Les résultats obtenus sur le champ fluctuant (figure (5.26)) permettent de reconstruire la solution qui a servie aux snapshots avec une erreur inférieure à 2% en norme \mathbf{L}^2 .

On présente sur la figure (5.27) le champ de vitesse reconstruit avec les coefficients temporels obtenus par le système dynamique réduit à 6 modes.

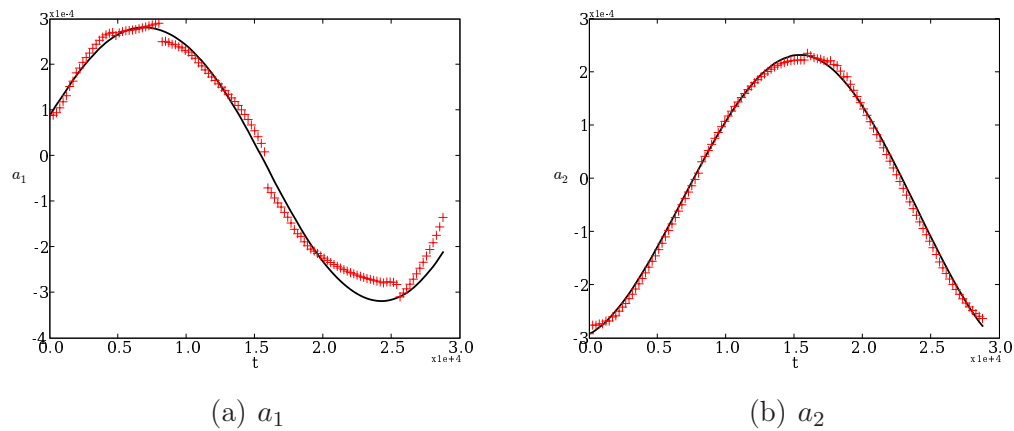


FIG. 5.26: Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 6 modes

On observe que les isovaleurs du champ de vitesse sont les mêmes que celles des figures (5.22). On arrive à reconstruire le même écoulement avec le même nombre de Strouhal avec seulement 6 modes pour le champ de vitesse fluctuant.

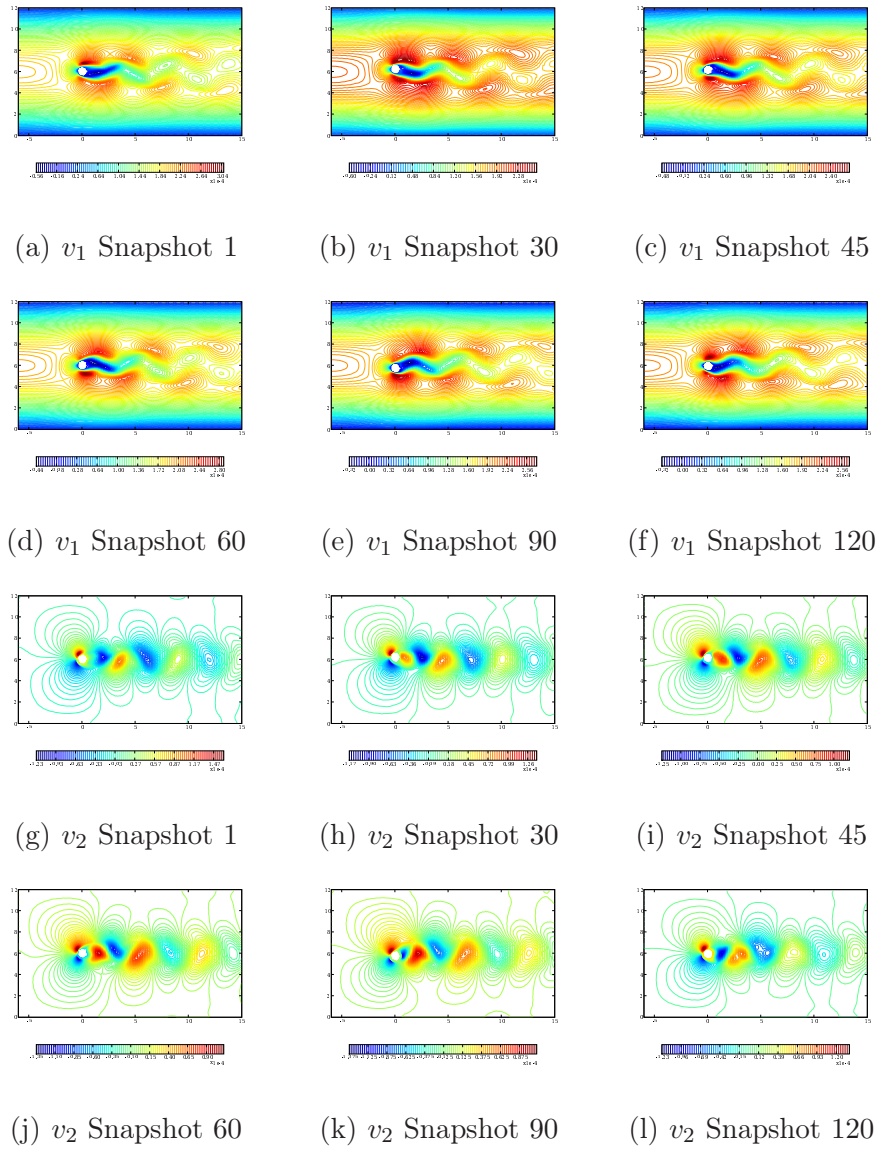


FIG. 5.27: Clichés du champ de vitesse obtenu par résolution du système dynamique réduit

5.4.4 Cylindre en oscillation libre

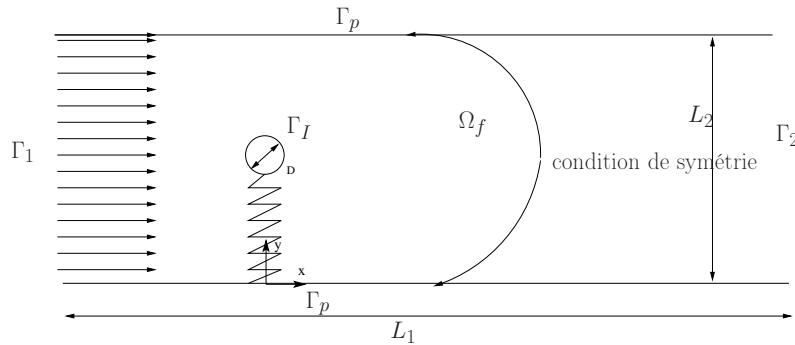


FIG. 5.28: description du domaine d'étude

On présente dans cette section les résultats obtenus pour un cylindre en oscillation libre selon l'axe \mathbf{x}_2 dans un écoulement à Reynolds 1690. On a ici des conditions de symétrie sur les parois inférieures et supérieures du canal. On considère un cylindre de rayon $R = 0.025$ m relié à un ressort de raideur $k = 0.559935$ et d'amortissement $2.7825 \cdot 10^{-3}$. On considère que le cylindre vibre seulement selon une direction transversale à l'écoulement.

L'écoulement fluide est obtenu à l'aide de STARCD par un modèle de turbulence de type RANS instationnaire (modèle $k - \epsilon$). L'équation de mouvement du cylindre est résolue par un sous programme intégré dans le code de calcul. Les clichés ont été pris sur un peu plus d'une période d'oscillation du cylindre, soit 150 snapshots sur un intervalle de temps de 1,5 secondes.

Ce travail a été effectué en collaboration avec C. Allery C. Beghein. Le but de cette étude était l'évaluation des possibilités offertes par le codes industriels STARCD pour prédire les vibrations d'une structure soumise à un écoulement axial avec détachement tourbillonnaire. Plusieurs simulations à différents nombres de Reynolds ont été effectuée et les résultats ont été comparés aux travaux expérimentaux de Khalack et Wiliamson [70] et aux travaux numériques de Guilmineau et Queutey [52] et Pan et al. [95].

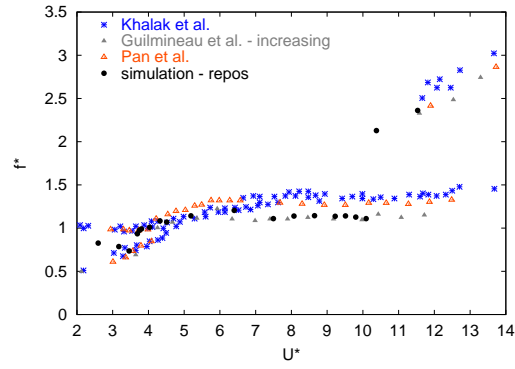


FIG. 5.29: Comparaisons des fréquences d'oscillations obtenus par STARCD avec les résultats de la littérature

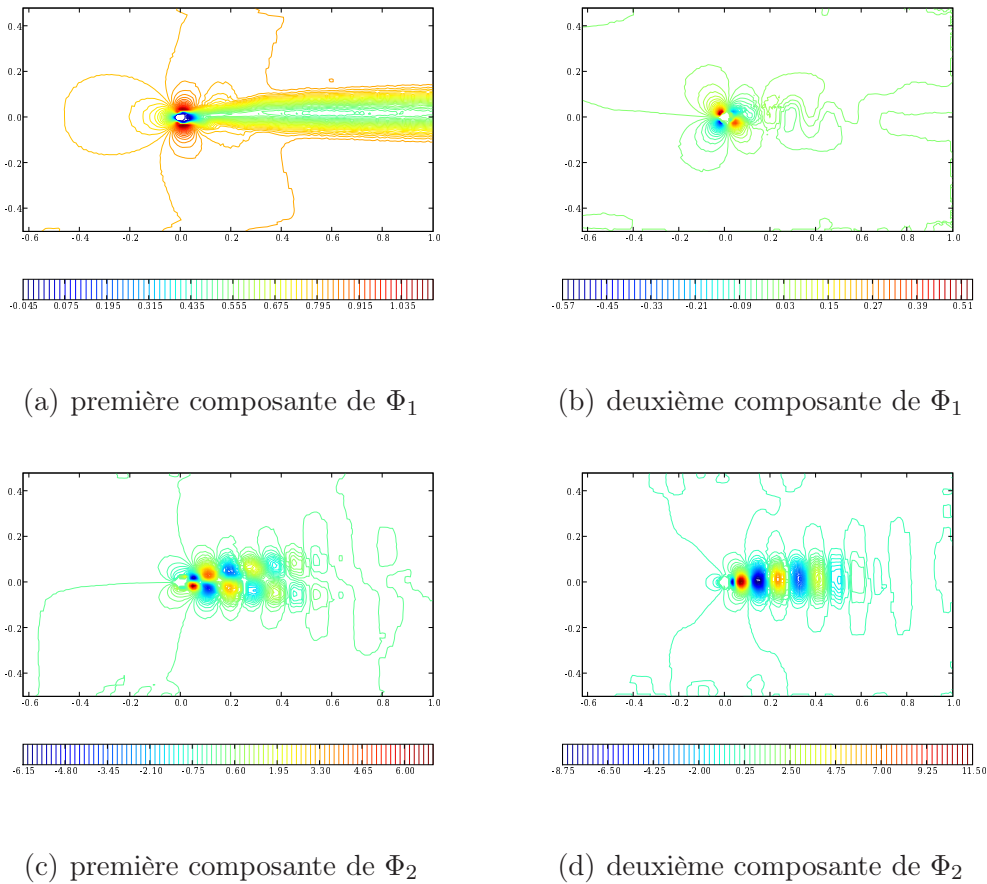


FIG. 5.30: Isovaleurs des 2 premiers modes POD obtenus sur le champ instantané

Pour les modes POD (figure 5.30), on retrouve les mêmes caractéristiques que précédemment, c'est à dire un premier mode dominant s'assimilant à l'écoulement moyen, et des seconds représentant les fluctuations du fluide. On observe que 3 modes suffisent à reproduire le champ instantané (2 pour le champ fluctuant) avec moins de 2% d'erreur en norme \mathbf{L}^2 (figure 5.31).

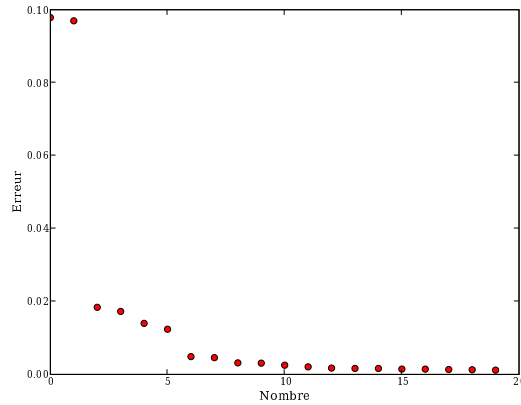


FIG. 5.31: Résidu sur le champ instantané par reconstruction POD directe $a_i = (v(t_i), \Phi_i)$

Dans le reste de l'étude on travaillera uniquement sur le champ fluctuant. On observe que bien que 2 modes suffisent pour avoir une erreur acceptable sur le champ de vitesse globale, il en faut au moins 6 si on veut reproduire la vitesse au centre de gravité de manière correcte (figure 5.32)

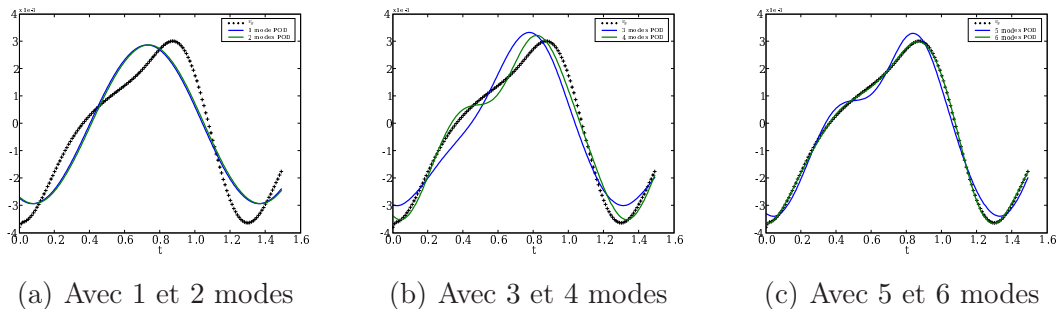


FIG. 5.32: Comparaison de la deuxième composante de la vitesse au centre de gravité + initiale, et reconstruite en fonction du nombre de modes POD retenus dans la base

La vitesse moyenne dans le domaine fluide étant, en ordre de grandeur, 10 fois plus grande que la vitesse du domaine solide, les premiers modes POD capturent essentiellement le domaine fluide, là où l'énergie est la plus grande. Autant dans le cas du cylindre en oscillation libre dans une cavité annulaire (section 5.4.2), la vitesse du domaine solide était dominante, autant ici on se trouve dans le cas opposé.

L'oscillation du solide a ici peut de conséquences sur l'écoulement du fluide, ce qui explique pourquoi 2 modes POD, dans le cas d'une décomposition du champ de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante, suffisent. Néanmoins, l'intérêt de l'étude étant les oscillations du cylindre, on retient une base composée de 6 modes POD pour la construction du système dynamique POD.

5.4.5 Système dynamique sur champ fluctuant

On présente uniquement les résultats obtenus sur le champ fluctuant, le premier mode POD obtenu étant comme pour l'exemple précédent assimilable à la moyenne.

On utilise 6 modes POD pour construire le système dynamique afin de pouvoir reconstruire le déplacement du cylindre. On observe sur la figure (5.33) un très bonne reconstruction des deux premiers coefficients temporels.

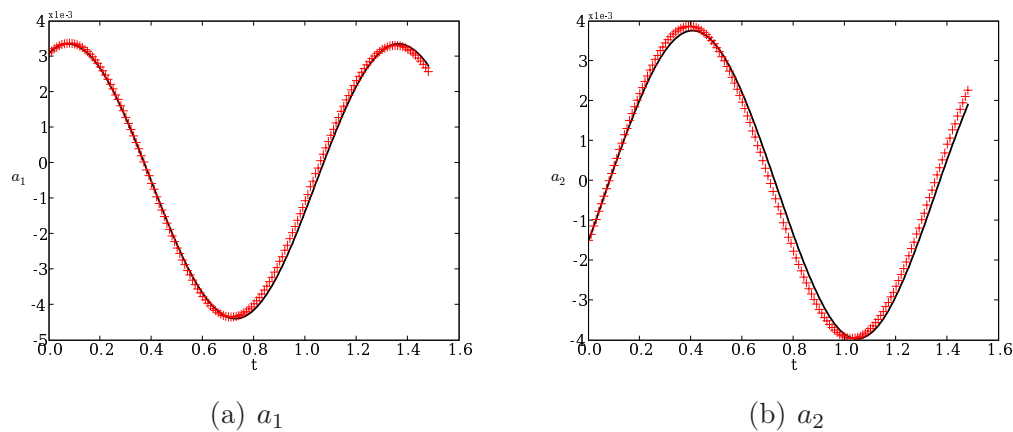


FIG. 5.33: Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit sur le champ fluctuant à 6 modes

On trouve pour ces deux premiers coefficients temporels un cycle limite qui est également conservé par le système dynamique (figure (5.34)).

La conservation de ce cycle limite est encourageant dans le but d'une étude sur un intervalle de temps plus long que la période de snapshot. De plus le fait de rester proche du cercle limite nous garantit une certaine validité de la solution puisque cela signifie que l'on reconstruit correctement les structures les plus énergétiques de l'écoulement.

Le système dynamique permet de plus de reconstruire correctement le déplacement du cylindre. On retrouve figure(5.35) une estimation correcte de la position du cylindre.

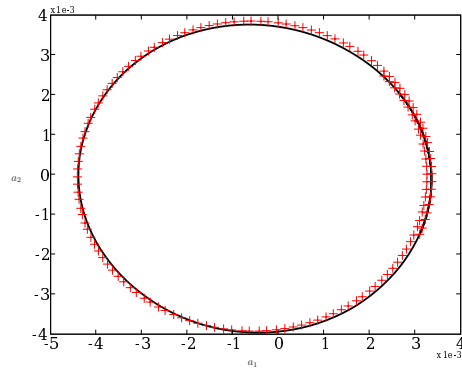


FIG. 5.34: Cycle limite entre a_1 et a_2 : — solution initiale, + par système dynamique réduit à 6 modes

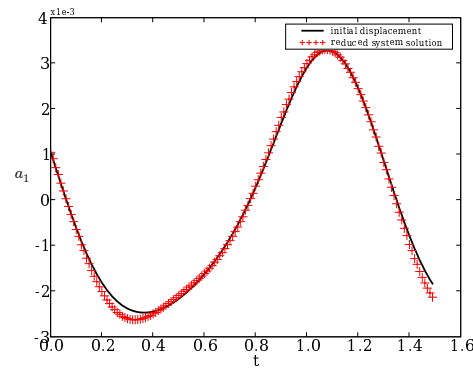


FIG. 5.35: déplacement du solide : — solution initiale, + par système dynamique réduit à 6 modes

5.5 Conclusion du chapitre

On a montré dans ce chapitre que la base POD pour des fonctions définies sur des domaines mobiles n'était pas valable. On propose donc d'étendre la fonction dont on recherche la base POD sur un domaine de référence fixe suffisamment grand pour contenir toutes les configurations du domaine mobile. Dans le contexte de l'interaction fluide structure, la méthode est appliquée pour la recherche d'une base POD d'un champ de vitesse globale (fluide et solide) sur un domaine de référence contenant le domaine fluide et le domaine solide.

Un système réduit basé sur une approche de type domaine fictif est ensuite introduit pour des problèmes où le domaine solide est constitué d'une structure rigide. La méthode consiste à étendre les équations de Navier-Stokes au domaine solide en rajoutant sur ce domaine une contrainte de solide rigide. Cela se traduit par l'ajout dans la formulation variationnelle d'un multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte. La formulation variationnelle étant établie sur le domaine global

pour le champ de vitesse global, l'introduction de la base POD permet d'obtenir un système dynamique réduit de faible dimension.

Le système d'ordre réduit est testé sur un cas monodimensionnel et trois exemples en deux dimensions. On a ainsi testé différentes configurations, à différents Reynolds. Les résultats valident la méthode proposée.

conclusion

Motivés par la construction de modèles réduits en interaction fluide structure, nous avons étudié les aspects de la réduction de modèles en mécanique des fluides et mécanique des structures afin de déterminer comment opérer en interaction fluide structure. De cette analyse, une méthode, la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), est apparue comme intéressante à appliquer pour des problèmes couplant la mécanique des solides et des fluides. Cette méthode permet en mécanique des fluides d'établir une base réduite selon des critères énergétiques. En mécanique des structures, on retrouve les modes de vibrations pour des structures linéaires.

Nous avons testé cette méthode en mécanique des fluides sur l'équation de Burgers monodimensionnelle et un écoulement à Reynolds 200 autour d'un cylindre. Nous avons retrouvé les résultats attendus, c'est à dire que avec peu de modes on reconstruit fidèlement le champ de vitesse. De plus pour des écoulements turbulents, le premier mode peut être assimilé à la moyenne temporelle de l'écoulement. Il est alors plus intéressant de décomposer le champ de vitesse en un champ moyen et un champ fluctuant, et d'opérer ensuite sur le champ fluctuant. On a aussi testé la décomposition Bi-orthogonale (BOD) pour ces deux cas sans que celle-ci apporte une amélioration aux résultats. Nous avons également testé la POD pour la vibration des structures. Le premier exemple concernait un modèle de poutre monodimensionnelle en appuis simple et soumise à un chargement transverse. Dans ce cas là les modes POD ont la même forme que les modes de vibrations de la poutre. On a ensuite testé la POD sur la même poutre à laquelle on a rajouté un ressort non linéaire en son milieu. Il semble que dans ce cas là les modes POD n'aient pas de signification physique.

La complexité de son application en interaction fluide structure tient dans le caractère mobile des domaines alors que la base POD est spatiale et indépendante du temps. Pour remédier à cet inconvénient, on propose d'établir une base POD pour un champ de vitesse global défini sur un domaine fixe. On introduit pour cela un domaine de référence fixe contenant l'ensemble des configurations mobiles sur un intervalle de temps. On obtient ainsi une base POD pour un champ de vitesse fluide et solide. On a ensuite proposé l'écriture d'un modèle réduit pour des

problèmes traitant d'interaction entre un fluide et un solide rigide. Pour cela, une formulation multiphasique du type domaine fictifs a été utilisée. On a testé cette méthode sur plusieurs configurations. La première est le cas de l'équation de Burgers adimensionalisée couplée avec une équation de masse ressort. On observe qu'il faut alors plus de modes que lors de l'étude avec paroi fixe, mais on obtient quand même un système dynamique de dimension très faible. Pour l'exemple suivant on a choisi un cas où l'écoulement dans le fluide est créé par le mouvement d'un solide en oscillation. Le déplacement du centre de gravité est correctement reproduit sur une période 10 fois plus grande que la période sur laquelle la base POD a été calculée. On a ensuite étudié l'écoulement à Reynolds 200 autour d'un disque en oscillation forcée, le système dynamique réduit permettant de retrouver le Strouhal. Enfin, le dernier cas traité est constitué d'un écoulement à Reynolds 1690 et d'un disque auquel est rattaché un ressort. On obtient aussi dans ce cas une bonne reproduction du déplacement du centre de gravité.

Bibliographie

- [1] ALLERY, C. *Contribution à l'identification des bifurcations et à l'étude des écoulements fluides par des systèmes d'ordre faible (POD)*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2002.
- [2] ALLERY, C., BEGHEIN, C., AND HAMDOUNI, A. Applying proper orthogonal decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity. *Commun Nonlin Sci Numer Simul* 10, 8 (December 2005), 907–920.
- [3] ALLERY, C., GUERIN, S., HAMDOUNI, A., AND SAKOUT, A. Experimental and numerical pod study of the coanda effect used to reduce self-sustained tones. *Mechanics Research Communications* 31, 1 (January-February 2004), 105–120.
- [4] AMABILI, M., SARKAR, A., AND PAIDOUSSIS, M. P. Reduced-order models for nonlinear vibrations of cylindrical shells via the proper orthogonal decomposition method. *Journal of Fluids and Structures* 18, 2 (2003), 227–250.
- [5] AMABILI, M., SARKAR, A., AND PAIDOUSSIS, M. P. Reduced-order p.o.d. models for nonlinear vibrations of cylindrical shells. vol. 254, pp. 197–206.
- [6] ANTONEN, J. S. R., KING, P. I., AND BERAN, P. S. Pod-based reduced-order models with deforming grids. *Mathematical and Computer Modelling* 38, 1-2 (2003), 41–62.
- [7] ANTONEN, J. S. R., KING, P. I., AND BERAN, P. S. Applications of multi-pod to a pitching and plunging airfoil. *Mathematical and Computer Modelling* 42, 3-4 (2005), 245–259.
- [8] AUBRY, N., GUYONNET, R., AND LIMA, R. Spatiotemporal analysis of complex signals : Theory and applications. *Journal of Statistical Physics* 64, 3/4 (1991), 683–739.
- [9] AUBRY, N., HOLMES, P., LUMLEY, J., AND STONE, E. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* 192 (1988), 115–173.

- [10] BAKER, M., MINGORI, D., AND GOGGIN, P. Approximate subspace iteration for constructing internally balanced reduced order model of unsteady aerodynamic systems. *AIAA Paper 96* (1996).
- [11] BATINA, J. T. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA journal* 28, 8 (1990), 1381–1388.
- [12] BATOZ, J. L., AND DHATT, G. *Modélisation des structures par éléments finis*, vol. 1 Solides élastiques. 1990.
- [13] BELYTSCHKO, T., FLANAGEN, D. P., AND KENNEDY, J. M. Finite element methods with user-controlled meshes for fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 33, 1-3 (1981), 669–688.
- [14] BENAOUICHA, M. *Contribution au développement d’algorithmes de couplage en Interaction Fluide-Structure*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2007.
- [15] BENDJEDDOU, Z. *Méthodologie pour la simulation numérique des vibrations induites par écoulement dans les faisceaux de tubes*. PhD thesis, Université de Lille, 2005.
- [16] BENFIELD, W. A., AND HRUDA., R. Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal* 7 (1971), 1255–61.
- [17] BERKOOZ, G., HOLMES, P., AND LUMLEY, J. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual review of fluid Mechanics* 25 (1993), 539–575.
- [18] BOFFI, D., AND GASTALDI, L. A finite element approach for the immersed boundary method. *Computers and Structures* 81, 8-11 (2003), 491–501.
- [19] BURGERS, J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics* 1 (1948), 1 :171–199.
- [20] BURKARDT, J., GUNZBURGER, M., AND LEE, H. . Centroidal voronoi tessellation-based reduced-order modeling of complex systems. *SIAM Journal of Scientific Computing* 28, 2 (2006), 459–484.
- [21] BURKARDT, J., GUNZBURGER, M., AND LEE, H. . Pod and cvt-based reduced-order modeling of navier-stokes flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196, 1-3 (2006), 337–355.
- [22] CARLSON, M., MUCHA, P. J., AND TURK, G. Rigid fluid : animating the interplay between rigid bodies and fluid. *ACM Trans. Graph.* 23, 3 (2004), 377–384.
- [23] CAZEMIER, W. *Proper Orthogonal Decomposition and low dimensional models for turbulent flows*. PhD thesis, Université de Groningen, Hollande, 1997.
- [24] CAZEMIER, W., VERSTAPPEN, R., AND VELDMAN, A. Proper orthogonal decomposition and low-dimensional models for driven cavity. *Physics of fluids* 10.7 (1998), 1685–1699.

- [25] CORDIER, L. *Etude de systèmes dynamiques basés sur la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Application à la couche de mélange turbulente et à l'écoulement entre deux disques contra-rotatifs*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1996.
- [26] CORNWELL, R. E., CRAIG JR., R. R., AND JOHNSON, C. P. On the application of the mode-acceleration method to structural engineering problems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 11, 5 (1983), 679–688.
- [27] COUPEZ, T. Réinitialisation convective et locale des fonctions level set pour le mouvement de surface et d'interfaces. In *Journées Activités Universitaire de Mécanique, La Rochelle* (31 Aout- 1 Septembre 2006).
- [28] COUPLET, M. *Modélisation POD-Galerkine réduite pour le contrôle des écoulements instationnaires*. PhD thesis, Université Paris 13, 2005.
- [29] COUPLET, M., BASDEVANT, C., AND SAGAUT, P. Calibrated reduced-order pod-galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics* 207, 1 (2005), 192–220.
- [30] CRAIG, R., AND BAMPTON, M. Coupling of substructures of dynamic analyses. *AIAA Journal* 6 (1968), 1313–1319.
- [31] DEANE, A., KEVREKIDIS, I., KARNIADAKIS, G., AND ORSZAG, S. Low-dimensional models for complex geometry flows - application to grooved channels and circular cylinders. *Physics of Fluids* 3 (Oct. 1991), 2337–2354.
- [32] DESTUYENDER, P. Remarks on dynamic substructuring. *Eur. J. Mech., A/Solids* 8(3) (1989), 201–218.
- [33] D'HENNEZEL, F. *Méthodes de décomposition de domaines dans les structures et les multi structures élastiques*. PhD thesis, Université Paris VI, 1992.
- [34] DONEA, J., HUERTA, A., PONTHOT, J.-P., RODRIGUEZ-FERRAN, A., STEIN, E., DE BORST, R., AND HUGHES, T. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*, vol. 1. 2004, ch. 14, p. 413–437.
- [35] DOWELL, E. H., HALL, K. C., AND ROMANOWSKI, M. C. Eigenmode analysis in unsteady aerodynamics : Reduced order models. *Applied Mechanics Reviews* 50, 6 (1997), 371–385.
- [36] DOWELL, E. H., HALL, K. C., THOMAS, J. P., FLOREA, R., EPUREANU, B., AND HEEG, J. Reduced order models in unsteady aerodynamics. *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 1* (1999), 622–637.
- [37] DRUAULT, P., AND CHAILLOU, C. Use of proper orthogonal decomposition for reconstructing the 3d in-cylinder mean-flow field from piv data. *Comptes Rendus - Mécanique* 335, 1 (2007), 42–47.
- [38] DRUAULT, P., DELVILLE, J., AND BONNET, J. . Proper orthogonal decomposition of the mixing layer flow into coherent structures and turbulent gaussian fluctuations. *Comptes Rendus - Mécanique* 333, 11 (2005), 824–829.

- [39] EPUREANU, B. I., TANG, L. S., AND PAIDOUSSIS, M. P. Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 17, 6 (2004), 977–991.
- [40] ERN, A., AND GUERMOND, J. *Elements finis : Théorie, application, mise en oeuvre*. Springer, 2002.
- [41] FARHAT, C., DEGAND, C., KOOBUS, B., AND LESOINNE, M. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 163, 1-4 (1998), 231–245.
- [42] FARHAT, C., GEUZAINÉ, P., AND GRANDMONT, C. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ale schemes for the solution of flow problems on moving grids. *Journal of Computational Physics* 174, 2 (2001), 669–694.
- [43] FAVIER, J., AND KOURTA, A. Study of separation control on a wing profile using piv measurements and pod analysis. *Comptes Rendus - Mécanique* 334, 4 (2006), 272–278.
- [44] FEENY, B. F. On proper orthogonal co-ordinates as indicators of modal activity. *Journal of Sound Vibration* 255 (Aug. 2002), 805–817.
- [45] FOGLEMAN, M., REMPFER, D., LUMLEY, J. L., AND HAWORTH, D. Pod analysis of in-cylinder flows : Fedsm2002-31413. vol. 257, pp. 1173–1178.
- [46] GLADWELL, G. Branch mode analysis of vibrating systems. *J. of Sound and Vibration* 1 (1964), 41–59.
- [47] GLOWINSKI, R., PAN, T. ., HESLA, T. I., JOSEPH, D. D., AND PERIAUX, J. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 184, 2-4 (2000), 241–267.
- [48] GLOWINSKI, R., PAN, T.-W., HESLA, T., AND JOSEPH, D. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *International Journal of Multiphase Flows* 25 (1999), 755–794.
- [49] GLOWINSKI, R., PAN, T.-W., AND PERIAUX, J. Fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 112, 1-4 (1994), 133–148.
- [50] GLOWINSKI, R., PAN, T. W., AND PERIAUX, J. Distributed lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 151, 1-2 (1998), 181–194.
- [51] GUILLARD, H., AND FARHAT, C. On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 11-12 (2000), 1467–1482.

- [52] GUILMINEAU, E., AND QUEUTEY, P. Numerical simulation of vortex-induced vibration of a circular cylinder with low mass-damping in a turbulent flow. *Journal of Fluids and Structures* 19 (2004), 449–466.
- [53] HALL, K. C., FLOREA, R., AND LANZKRON, P. J. A reduced order model of unsteady flows in turbomachinery. *Transactions - ASME : Journal of Turbomachinery* 117, 3 (1995), 375–383.
- [54] HAN, S., AND FEENY, B. Application of proper orthogonal decomposition to structural vibration analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* 17 (Sept. 2003), 989–1001.
- [55] HARLOW, F., AND WELCH, J. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids* 8 (1965), 21–82.
- [56] HEMON, P., AND SANTI, F. Applications of biorthogonal decompositions in fluid-structure interactions. *Journal of fluids and Structures* 17 (2003), 1123–1143.
- [57] HEYOUNI, M., AND JBILOU, K. Matrix krylov subspace methods for large scale model reduction problems. *Applied Mathematics and Computation (New York)* 181, 2 (2006), 1215–1228.
- [58] HIRT, C., AMSDEN, A., AND COOK, H. An arbitrary lagrangian–eulerian method for all flow speeds. *J. Comput. Phys* 14 (1974), 227–253.
- [59] HIRT, C., AND NICHOLS, B. Volume of fluid methods for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.* 30 (1981), 201–255.
- [60] HODEL, A. S. Least squares approximate solution of the lyapunov equation. vol. 2, pp. 1619–1624.
- [61] HOLMES, P. J., LUMLEY, J., BERKOOZ, J., MATTINGLY, J., AND WITTENBERG, R. Low dimensional models of coherent structures in turbulence. *Phys. Rev. Section Phys. Lett.* 4 (1997), 338–384.
- [62] HUERTA, A., AND LIU, W. K. Viscous flow with large free surface motion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 69, 3 (1988), 277–324.
- [63] HUGUES, T., LIU, W., AND ZIMMERMAN, T. Lagrangien eulerian finite element formulation for viscous flows. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.* 29 (1981), 329–349.
- [64] HURTY, W. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA J.* 3 (4) (1965), 678–685.
- [65] ILAK, M., AND ROWLEY, C. W. Reduced-order modeling of channel flow using traveling pod and balanced pod. In *Collection of Technical Papers - 3rd AIAA Flow Control Conference* (2006), vol. 2, pp. 864–874.

- [66] IOLLO, A., LANTERI, S., AND DESIDERI, J. A. Stability properties of pod-galerkin approximations for the compressible navier-stokes equations. Tech. rep., INRIA, 1998.
- [67] ITO, K., AND RAVINDRAN, S. S. A reduced-order method for simulation and control of fluid flows. *J. Comput. Phys.* 143, 2 (1998), 403–425.
- [68] JAIMOUKHA, I. M., AND KASENALLY, E. M. Krylov subspace methods for solving large lyapunov equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 31, 1 (1994), 227–251.
- [69] KAPANIA, R. K., AND BYUN, C. Reduction methods based on eigenvectors and ritz vectors for nonlinear transient analysis. *Computational Mechanics* 11, 1 (1993), 65–82.
- [70] KHALACK, A., AND WILLIAMSON, C. Motions, forces and mode transitions in vortex induced vibrations at low mass damping. *Journal of fluids Structures* 13 (1999), 813–851.
- [71] KIM, J., KIM, D., AND CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics* 171, 1 (2001), 132–150.
- [72] KIM, Y., AND PESKIN, C. S. Penalty immersed boundary method for an elastic boundary with mass. *Physics of Fluids* 19, 5 (2007).
- [73] KOOPMANN, G. H. The vortex wakes of vibrating cylinders at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 28 (1967), 501–512.
- [74] LAI, M. ., AND PESKIN, C. S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics* 160, 2 (2000), 705–719.
- [75] LAURE, P., BEAUME, G., BASSET, O., SILVA, L., AND COUPEZ, T. Les méthodes numériques pour les écoulements de fluides chargés. In *1^{er} colloque du GDR interactions fluide-structure* (Sophia Antipolis, Septembre 2005), p. 1.
- [76] LAURE, P., BEAUME, G., BASSET, O., SILVA, L., AND COUPEZ, T. Numerical methods for solid particles in particulate flow simulations. *E. J. of Comp. Mech.* 16/3-4 (2007), 365–383.
- [77] LEGRESLEY, P. A., AND ALONSO, J. J. Investigation of non-linear projection for pod based reduced order models for aerodynamics, 2001.
- [78] LIAN, Y., SHYY, W., VIHERU, D., AND ZHANG, B. Membrane wing aerodynamics for micro air vehicles. *Progress in Aerospace Sciences* 39, 6-7 (2003), 425–465.
- [79] LIANG, Y. C., LEE, H. P., LIM, S. P., LIN, W. Z., LEE, K. H., AND WU, C. G. Proper orthogonal decomposition and its applications - part i : Theory. *Journal of Sound and Vibration* 252, 3 (2002), 527–544.

- [80] LIBERGE, E., BENAOUICHA, M., AND HAMDOUNI, A. Proper orthogonal decomposition investigation in fluid structure interaction. *European Journal of Computational Mechanics* 16/3-4 (2007), 401–418.
- [81] LIEU, T., FARHAT, C., AND LESOINNE, M. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 41-43 (2006), 5730–5742.
- [82] LUMLEY, J. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation vol. In A.M. Yaglom and Tararsky* (1967), 166–178.
- [83] LUMLEY, J. L., AND POJE, A. Low-dimensional models for flows with density fluctuations. *Physics of Fluids* 9 (July 1997), 2023–2031.
- [84] MCGOWAN, D. M., AND BOSTIC, S. W. Comparison of advanced reduced-basis methods for transients structural analysis. *AIAA journal* 31, 9 (1993), 1712–1719.
- [85] MCGOWAN, D. M., BOSTIC, S. W., AND CAMARDA, C. J. Development and comparison of advanced reduced-basis methods for the transient structural analysis of unconstrained structures. *NASA STI/Recon Technical Report N 94* (Nov. 1993).
- [86] MCNEAL, R. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures* 1(43) (1971), 581–601.
- [87] MOORE, B. C. Principal component analysis in linear systems - controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control AC-26*, 1 (1981), 17–32.
- [88] MORI, Y., AND PESKIN, C. S. Implicit second order immersed boundary methods with boundary mass. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (2007).
- [89] NEWMAN, A. Model reduction via the karhunen-loeve expansion part i : An exposition, 1996.
- [90] NEWMAN, A. Model reduction via the karhunen-loeve expansion part i : An exposition, 1996.
- [91] NOH, W. A time dependent two space dimensional coupled eulerian lagrangian code. *Meth. Comput. Phys* 3 (1964), 117–179.
- [92] NOH, W. F., AND WOODWARD, P. Slic /simple line interface calculation. In *Some Methods of Resolution of Free Surface Problems* (1976), A. I. van de Vooren and P. J. Zandbergen, Eds., vol. 59 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pp. 330–340.
- [93] NOUR-OMID, B., AND CLOUGH, R. W. Dynamic analysis of structures using lanczos co-ordinates. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 12, 4 (1984), 565–577.

- [94] OMURTAG, A., AND SIROVICH, L. On low-dimensional modeling of channel turbulence. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics 13* (1999), 115–127.
- [95] PAN, Z., CUI, W., AND MIAO, Q. Numerical simulation of vortex-induced vibration of a circular cylinder at low mass-damping using rans code. *Journal of Fluids and Structures 23* (2007), 23–37.
- [96] PATANKAR, N., SINGH, P., JOSEPH, D., GLOWINSKI, R., AND PAN, T.-W. A new formulation of the distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *International Journal of Multiphase Flows 26* (2000), 1509–1524.
- [97] PENG, D., MERRINAN, B., OSHER, S., ZHAO, H., AND KANG, M. A pde-based fast local level set method. *Journal of Computational Physics 155* (1999), 410–438.
- [98] PESKIN, C. The immersed boundary method. *Acta Numer 11* (2002), pp. 1–39.
- [99] PESKIN, C. S. *Flow patterns around heart valves : A digital computer method for solving the equation of motion*. PhD thesis, Albert Einstein College of Medicine, 1972.
- [100] PETERSON, J. S. The reduced basis method for incompressible viscous flow calculations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 10*, 4 (1989), 777–786.
- [101] RAJAEI, M., KARLSSON, S. K. F., AND SIROVICH, L. Low-dimensional description of free-shear-flow coherent structures and their dynamical behaviour. *Journal of Fluid Mechanics 258* (1994), 1–29.
- [102] REMPFER, D. Investigations of boundary layer transition via galerkin projections on empirical eigenfunctions. *Physics of Fluids 8* (Jan. 1996), 175–188.
- [103] REMPFER, D., AND FASEL, H. F. Evolution of three-dimensional coherent structures in a transitional flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech. 275* (1994), 257–283.
- [104] ROWLEY, C. W. Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering 15*, 3 (2005), 997–1013.
- [105] ROWLEY, C. W., COLONIUS, T., AND MURRAY, R. M. Model reduction for compressible flows using pod and galerkin projection. *Physica D : Nonlinear Phenomena 189*, 1-2 (2004), 115–129.
- [106] RUBIN, S. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal 13*, 8 (1975), 995–1006.
- [107] SARKAR, A., AND PAIDOUSSIS, M. P. A compact limit-cycle oscillation model of a cantilever conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures 17*, 4 (2003), 525–539.

- [108] SIROVITCH, L. Turbulence and the dynamics of coherent structures, part i : Coherent structures, part ii : Symmetries and transformations, part iii : Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mathematics* 45(3) (1987), 561–590.
- [109] SOLARI, G., CARASSALE, L., AND TUBINO, F. Proper orthogonal decomposition in wind engineering. part 1 : A state-of-the-art and some prospects. *Wind and Structures, An International Journal* 10, 2 (2007), 153–176.
- [110] SOULI, M., AND ZOLESIO, J. Arbitrary lagrangian-eulerian and free surface methods in fluid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191, 3-5 (2001), 451–466.
- [111] THOMAS, P., AND LOMBARD., C. K. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA journal* 17, 10 (1979), 1030–1037.
- [112] TRINDADE, M. A., WOLTER, C., AND SAMPAIO, R. Karhunen-loève decomposition of coupled axial/bending vibrations of beams subject to impacts. *Journal of Sound and Vibration* 279, issues 3-5 (2005), 1015–1036.
- [113] UTTURKAR, Y., ZHANG, B., AND SHYY, W. Reduced-order description of fluid flow with moving boundaries by proper orthogonal decomposition. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 26, 2 (2005), 276–288.
- [114] VANDER MEULEN, R. The immersed boundary method for the (2d) incompressible navier-stokes equations. Master’s thesis, Department of Aerospace Engineering Delft University of Technology., 2006.
- [115] VOITSEKHOVSKII, S. A. The fictitious domain method. *Journal of Soviet Mathematics* 60, 3 (1992), 1437–1441.
- [116] WANG, X. S. From immersed boundary method to immersed continuum methods. *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 4, 1 (2006), 127–145.
- [117] WILLCOX, K., AND PERAIRE, J. Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition. *AIAA Journal* 40, 11 (2002), 2323–2330.
- [118] WILSON, E. L., YUAN, M. W., AND DICKENS, J. M. Dynamic analysis by direct superposition of ritz vectors. *EARTHQUAKE ENG STRUCT DYN V* 10, N 6 (1982), 813–821.
- [119] WU, G. G., LIANG, Y. C., LIN, W. Z., LEE, H. P., AND LIM, S. P. A note on equivalence of proper orthogonal decomposition methods. *Journal of Sound and Vibration* 265, 5 (2003), 1103–1110.
- [120] XU, S. AND WANG, Z. An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries. *Journal of Computational Physics* 216 (2006), 454–493.

-
- [121] YOUNGS, D. *Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion*. New York Academic Press, 1982.
- [122] YU, Z. A dlm/fd method for fluid/flexible-body interactions. *Journal of Computational Physics* 207, 1 (2005), 1–27.
- [123] ZHANG, L. T., AND GAY, M. Immersed finite element method for fluid-structure interactions. *Journal of Fluids and Structures* 23, 6 (2007), 839–857.
- [124] ZHU, L., AND PESKIN, C. S. Simulation of a flapping flexible filament in a flowing soap film by the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics* 179, 2 (2002), 452–468.

Annexe A

5.6 Etude POD des domaines mobiles

On se propose ici d'étudier la capacité de la POD à reproduire des domaines mobiles définis, soit par des fonctions caractéristiques, soit par une fonction Level-Set.

On s'interroge sur l'utilisation de la POD pour le suivi des domaines. On considère un domaine Ω_s mobile dans un domaine Ω , et un champ de vitesse v sur Ω . On décrit l'évolution du domaine

- soit par l'évolution de sa fonction caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_s}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_s} = 0 \\ \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t = 0) = \mathbb{I}_{\Omega_s}(0) \end{cases} \quad (5.64)$$

Où

$$\mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_s(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.65)$$

- soit par la fonction Level Set

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \cdot \nabla \psi = 0 \\ \psi(x, t = 0) = \psi_0 \end{cases} \quad (5.66)$$

Où

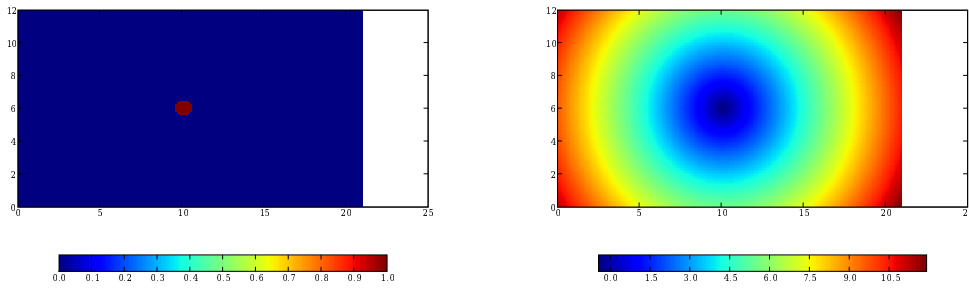
$$\psi(x, t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in \Omega_s(t) \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_s(t) \\ < 0 & \text{si } x \notin \Omega_s(t) \end{cases} \quad (5.67)$$

Ces fonctions sont elles réductibles par la POD ?

Pour la fonction caractéristique, l'étude d'une base POD semble similaire à l'étude du déplacement d'un solide rigide effectué dans la section 5.3.1.1, c'est à dire que la base POD obtenue n'est pas efficace.

5.6.1 Comparaison numérique de la POD pour la fonction caractéristique et pour la fonction Level-Set

On compare ici les résultats numériques de la POD sur un échantillon de 120 clichés de la fonction caractéristique et de la fonction Level-Set appliquée au suivi d'un disque de rayon $R = 0.5$ oscillant autour de la position $(10,6.0)$ dans un domaine Ω . Le déplacement du centre gravité est imposé selon \mathbf{x}_1 ($x_G(t) = 10 + \sin t$) sur une période $T = 2\pi$ et les clichés sont pris tout les $T/120$ dans un domaine rectangulaire représenté par une distribution homogène de noeuds espacés selon l'axe x_1 de $\Delta x_1 = 0.1cm$ et sur l'autre axe $\Delta x_2 = 0.1cm$. On note $\Omega_s(t)$ le domaine occupé par le disque à l'instant t .



(a) Fonction caractéristique

(b) Fonction Level-Set

FIG. 5.36: Fonction caractéristique et Level-Set à la 60^{ième} snapshot

Sur la figure (5.37) on représente la répartition des valeurs propres obtenues par la recherche de ces modes POD pour la fonction caractéristique et l'erreur de reconstruction en norme \mathbf{L}^2 .

On présente les mêmes résultats pour la fonction Level Set dans le tableau 5.6.1.

L'erreur de reconstruction est calculée de la manière suivante

$$\text{Erreur}(N) = \frac{\left\| \sum_{k=1}^N a_k \psi_k - f \right\|_{L^\infty(O,T,L^2(\Omega))}}{\|f\|_{L^\infty(O,T,L^2(\Omega))}} \quad (5.68)$$

Où $f(x,t)$ étant $\mathbb{I}_{\Omega_s}(x,t)$ ou $\psi(x,t)$.

On remarque la décroissance des valeurs propres est faible dans le cas de la fonction caractéristique alors que pour la Level-Set elle est très rapide, celle-ci pouvant être considérée négligeable dès la quatrième.

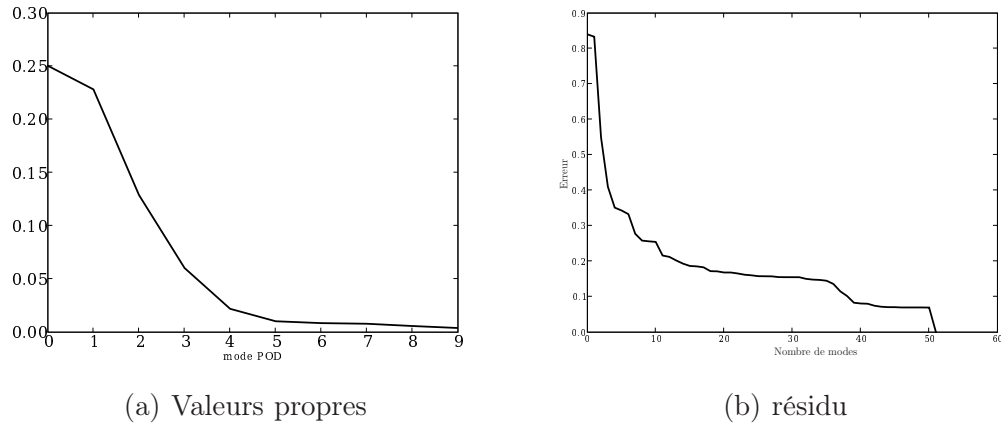


FIG. 5.37: Valeurs propres et résidu pour la fonction caractéristique

La conséquence est qu’il faut plus de modes pour reconstruire la fonction caractéristique que la fonction Level-Set.

mode i	λ_i	Erreur(i)
1	10821.23	0.120
2	80.03	$6 \cdot 10^{-3}$
3	0.2189	$1.2 \cdot 10^{-3}$

TAB. 5.3: Valeurs propres et erreur de reconstruction pour la fonction Level-Set

On remarque que pour la fonction caractéristique il faut 52 modes pour avoir une erreur descendant sous les 1%. Au contraire, la Level-Set il suffit de 3 modes pour avoir la même erreur de reconstruction en norme \mathbf{L}^2

Une comparaison des coefficients temporels montre que dans le cas de la fonction caractéristique ils sont tous du même ordre de grandeur (figure 5.38(a)), alors que pour la fonction Level-Set les 2 premiers sont largement dominants dans le cas traité ici (figure 5.38(b)).

Le constat que l’on peut effectuer pour les modes POD concernant la fonction caractéristique, est que ceux-ci représentent des fluctuations sur l’ensemble du domaine parcouru par le disque pendant la période de snapshots (figures 5.39(a), 5.39(b) et 5.39(c)), alors que pour la fonction Level-Set on a des modes PODs ayant un caractère plus continu (figures 5.39(d), 5.39(e) et 5.39(f)).

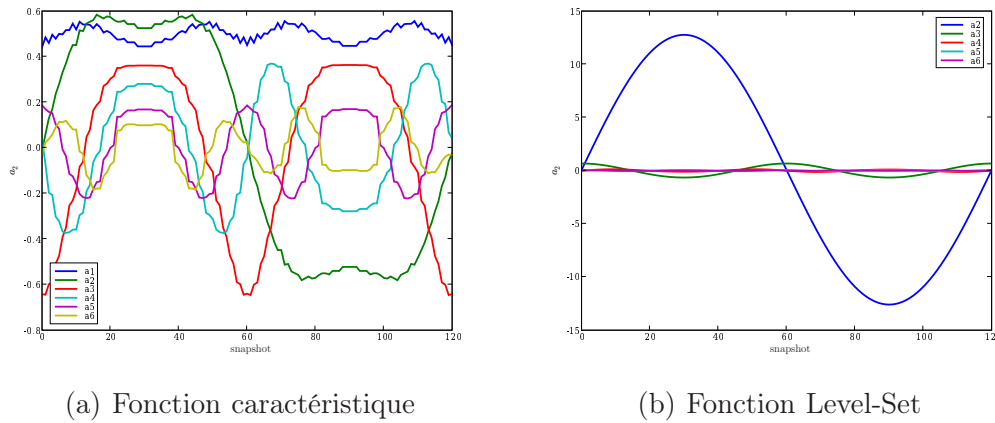


FIG. 5.38: Premiers coefficients temporels

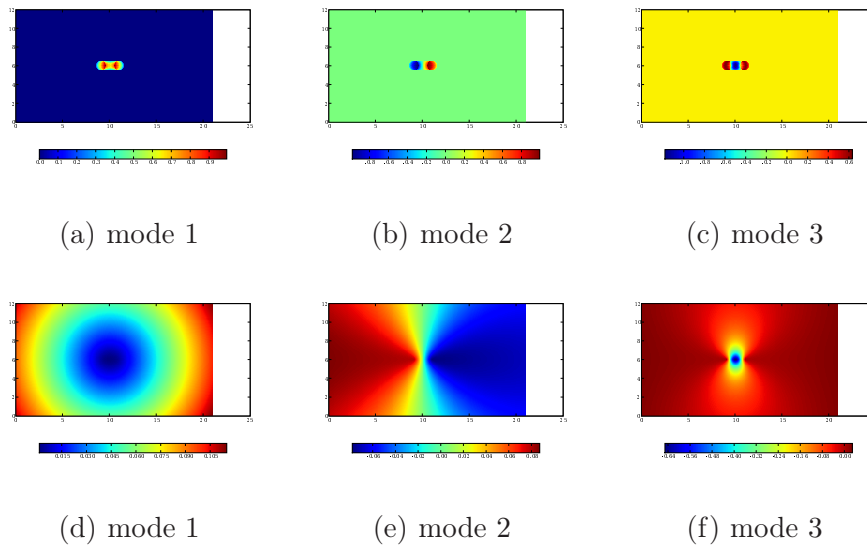


FIG. 5.39: Les 3 premiers modes POD pour la fonction caractéristique et la Level-Set

5.6.2 Réduction de la fonction Level-Set

La fonction Level-Set semblant avoir de bonnes propriétés de reproduction par la POD, on a donc cherché à réduire l'équation (5.66)

Le test est effectué pour l'étude d'une paroi bougeant à une vitesse v constante sur un maillage $\Delta x_1 = 0.1cm$ et $\Delta x_2 = 0.1cm$, le temps discret est $\Delta t = 1.0s$ et $v = 0.041cm.s^{-1}$

Seulement 2 modes sont nécessaires pour reproduire la fonction Level Set sur l'intervalle de temps sur lequel la snapshot a été effectuée. L'équation (5.66) est donc projetée sur cette base réduite à 2 vecteurs POD. Le système réduit à 2 modes

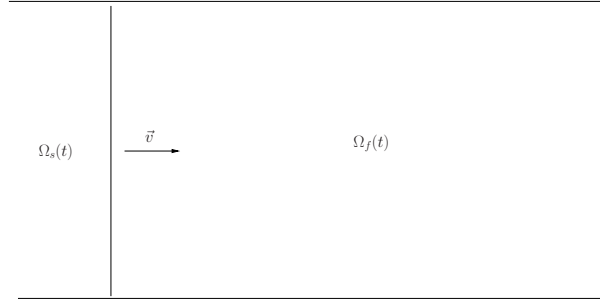


FIG. 5.40: description du domaine d'étude

s'écrit alors :

Pour $i = 1, \dots, 2$

$$\frac{da_i}{dt} + v \sum_{j=1}^N B_{ij} a_j = 0 \quad (5.69)$$

$$B_{ij} = (\nabla \psi_j, \psi_i) \quad (5.70)$$

avec $(u(\bullet), v(\bullet)) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$ le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Le système dynamique réduit à ces 2 modes donne une bonne reconstruction de la fonction Level Set. On présente figure (5.6.2) les coefficients temporels obtenus par le système dynamique réduit et ceux obtenus par la POD.

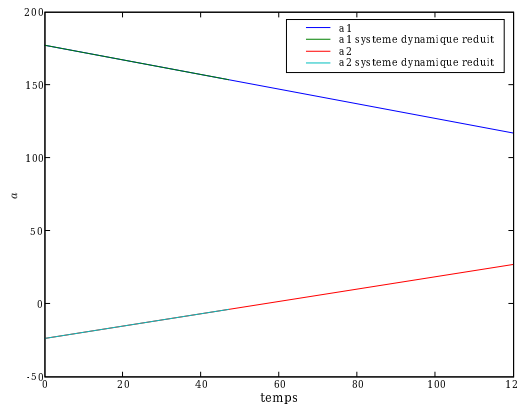


FIG. 5.41: Les 2 premiers coefficients temporels, obtenus par la POD et le système dynamique à 2 modes

Conclusion On a dans cet exemple illustré l'application de la POD pour le suivi de domaines. L'évolution de ces domaines est décrit par une équation convectant soit la fonction caractéristique, soit la fonction Level Set. La reconstruction POD

de la fonction caractéristique ne donne pas de bons résultats, le nombre de modes nécessaires étant beaucoup trop grand si on veut obtenir une bonne reconstruction de la fonction initiale. Au contraire, pour l'exemple traité, on obtient une base de réduction très faible pour la fonction Level Set. De plus le résultat sur le système dynamique est également convaincant.

Ce résultat est intéressant, puisque comme on l'a vu dans la section 4.4.2 du chapitre sur l'interaction fluide structure, la fonction Level Set possède des informations sur la normale et la courbure de l'interface. On peut à partir de là dans le cadre d'une formulation semblable à celle formulée pour les solides rigides et étendue aux solides élastiques concevoir un modèle réduit pour l'interaction fluide structure.