



HAL
open science

Etude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les Supraconducteurs à Haute Température

Kévin Berger

► **To cite this version:**

Kévin Berger. Etude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les Supraconducteurs à Haute Température. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2006. Français. NNT : 2006NAN10126 . tel-01754309v2

HAL Id: tel-01754309

<https://theses.hal.science/tel-01754309v2>

Submitted on 18 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

U.F.R. Sciences & Techniques Mathématiques, Informatique, Automatique
Ecole Doctorale IAEM Lorraine
Département de Formation Doctorale « Electronique et Electrotechnique »

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy I

en Génie Electrique

par **Kévin BERGER**

Etude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les supraconducteurs à haute température

Soutenance publique le 21 septembre 2006

Membres du jury :

Président :	M. Pascal TIXADOR	Directeur de recherche, CNRS, Grenoble
Rapporteurs :	M. Frédéric BOUILLAULT	Professeur, Université d'Orsay, Paris-Sud XI
	M. Daniel CIAZYNSKI	Ingénieur de recherche, CEA, Cadarache
Examineurs :	M. Philippe VANDERBEMDEN	Chargé de cours, Université de Liège, Belgique
	M. Jean LEVEQUE	Maître de conférences HDR, U.H.P., Nancy I
	M. Abderrezak REZZOUG	Professeur, U.H.P., Nancy I

A mon fils Dorian,

Avant Propos

Ce mémoire de thèse contient les résultats de trois années et demie de recherche, qui ont été effectuées au sein du Groupe de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nancy à l'Université Henri Poincaré.

Il y a trois personnes à qui je suis particulièrement reconnaissant, il s'agit du – **Pr. Abderrezak Rezzoug**, mon directeur de thèse – pour m'avoir accueilli comme doctorant dans son laboratoire et m'avoir permis de mener ces travaux de recherche dans les meilleures conditions possibles ; **Dr. Jean Lévêque**, mon codirecteur de thèse – pour ses conseils réguliers et son aide dans la mise en œuvre des mesures expérimentales que j'ai utilisées pour la modélisation et la validation de certains résultats de cette thèse ; **Dr. Denis Netter** – pour ses remarques pertinentes et son aide précieuse concernant la modélisation par la méthode des différences finies des supraconducteurs à haute température.

Je remercie **M. Pascal Tixador**, directeur de recherche CNRS pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie **M. Philippe Vanderbenden**, chargé de cours à l'université de Liège pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie **M. Frédéric Bouillault**, professeur à l'université d'Orsay et **M. Daniel Ciazynski**, ingénieur de recherche au CEA pour avoir accepté de rapporter sur mon travail.

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements à tous ceux qui ont eu la gentillesse d'assister à la soutenance de cette thèse.

Je remercie évidemment **toute ma famille**, merci pour votre soutien et les moments de joie que vous m'avez procurés.

Mon dernier remerciement, mais non des moindres, s'adresse à **ma femme adorée Sibel**, pour m'avoir donné le plus beau des fils, pour sa patience et l'amour qu'elle a su m'apporter tout au long de cette thèse.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE 1. LES SUPRACONDUCTEURS.....	5
1.1 Introduction.....	7
1.2 Effet Meissner	9
1.3 Les supraconducteurs de type-I et -II.....	10
1.4 L'état mixte des supraconducteurs de type-II	12
1.5 Ancrage des vortex et phénomènes dissipatifs	13
1.5.1 Diagramme de phase B – T	15
1.5.1.1 Phase amorphe	15
1.5.1.2 Phase liquide.....	16
1.5.1.3 Transition amorphe-liquide.....	17
1.5.2 Diagramme de phase J – B – T	17
1.5.3 « Thermally Activated Flux Flow » et « Thermally Activated Flux Creep »	20
1.6 Conclusion	23
CHAPITRE 2. MODELISATION EN DIFFERENCES FINIES DES SUPRACONDUCTEURS A HAUTE TEMPERATURE.....	25
2.1 Introduction.....	27
2.2 Modélisation du comportement des SHT.....	28
2.2.1 Comportement magnétique.....	28
2.2.2 Le modèle de l'état critique de Bean.....	28
2.2.3 Le modèle de la loi en puissance E – J.....	29
2.2.4 Dépendance en champ magnétique de J_c et n	30
2.2.5 Dépendance en température de J_c et n.....	33
2.3 La méthode des différences finies	34
2.3.1 Le domaine d'étude	35
2.3.2 Le modèle physique	35
2.3.2.1 Les formulations en électromagnétique.....	35
2.3.2.2 Les équations thermiques	39

2.3.3 Exemple d'équations à résoudre (problème 2D-cartésien)	40
2.3.4 Discrétisation des équations	43
2.4 Résolution du problème.....	43
2.4.1 Algorithme de Newton-Raphson	43
2.4.2 Système d'équations linéaires	45
2.4.3 Couplage magnétothermique.....	46
2.5 Validation du calcul magnétique à l'aide de FLUX3D®	48
2.6 Conclusion.....	53

CHAPITRE 3. ETUDE DES PERTES DANS UNE AMENEE DE

COURANT BI-2223.....	55
3.1 Introduction	57
3.2 Caractéristiques de l'échantillon.....	58
3.2.1 Détermination des paramètres J_c et n	58
3.2.2 Influence d'un champ magnétique extérieur	60
3.2.3 Influence de la température	60
3.3 Calcul des pertes (sans couplage thermique).....	63
3.4 Détermination expérimentale des pertes.....	64
3.4.1 Méthodes de mesures	65
3.4.1.1 <i>Par amplificateur différentiel</i>	65
3.4.1.2 <i>Par amplificateur à détection synchrone</i>	69
3.4.1.3 <i>Comparaison des méthodes de mesures</i>	70
3.4.2 Comparaison entre les pertes mesurées et calculées	71
3.5 Calcul des pertes (avec couplage thermique).....	72
3.6 Etude de la stabilité de l'amenée de courant.....	77
3.7 Conclusion.....	81

CHAPITRE 4. PHENOMENES MAGNETOTHERMIQUES DURANT

L'AIMANTATION DE PASTILLES YBCO.....	83
4.1 Introduction	85
4.2 Description du problème	87

4.3 Conséquence des lois de comportement E(J, B, T)	91
4.3.1 Profils de J, B, T.....	91
4.3.2 Energie magnétique stockée.....	97
4.4 Influence de la vitesse de variation du champ	100
4.4.1 Profils de J, B, T.....	100
4.4.2 Energie magnétique stockée.....	104
4.4.3 Energie dissipée	104
4.5 Influence de la forme de l'échantillon	106
4.5.1 Profils de J, B, T.....	106
4.5.2 Energie magnétique stockée.....	110
4.5.3 Energie dissipée	110
4.6 Conclusion	113
 CONCLUSION GENERALE.....	 115
 ANNEXE A. LES THEORIES DE LA SUPRACONDUCTIVITE.....	 119
A.1 La théorie de London.....	119
A.2 La théorie de Ginzburg et Landau.....	121
A.3 La théorie BCS	122
 ANNEXE B. LES SUPRACONDUCTEURS A HAUTE TEMPERATURE	
.....	125
B.1 BSCCO	125
B.2 YBCO.....	127
 ANNEXE C. PHOTOGRAPHIES	 129
 LISTE DES SYMBOLES ET ACRONYMES.....	 131
Principaux symboles utilisés.....	131
Acronymes utilisés.....	133

BIBLIOGRAPHIE.....135

Introduction générale

Un grand pas en avant dans le développement des supraconducteurs a été réalisé en 1986, quand Johannes Bednorz et Karl Müller du laboratoire de recherche IBM de Zurich ont découvert le premier matériau supraconducteur à une température de 35 K. Il s'agit d'une céramique supraconductrice composée d'un oxyde de cuivre, additionné de lanthane et de baryum. Sa température critique de 35 K mit fin à l'idée d'une limite théorique établie à 23 K à l'époque et l'ère des Supraconducteurs à Haute Température (SHT) commença.

Peu après, les atomes de lanthane de la céramique supraconductrice furent remplacés par de gros atomes d'yttrium pour former un nouveau composé qu'on appelle maintenant YBaCuO et qui possède une température critique de 94 K. En 1988, c'est la supraconductivité du composé BiSrCaCuO, en dessous de 105 K, qui est découverte par Hiroshi Maeda *et al.* Ces découvertes offraient de nouvelles possibilités aux applications de la supraconductivité à une plus grande échelle, puisque l'azote liquide, beaucoup moins onéreux à produire que l'hélium liquide, pouvait être utilisé pour refroidir les matériaux.

Les matériaux supraconducteurs à haute température sont à présent utilisés en électrotechnique et deux grandes familles peuvent être distinguées : « les câbles » d'une part et « les matériaux massifs » d'autre part. Les câbles SHT sont utilisés dans la fabrication de dispositifs tels les transformateurs, les moteurs ou les électroaimants et leur intérêt principal est de pouvoir transporter de forts courants électriques à moindre perte. Les matériaux massifs permettent d'écranter ou de piéger de forts champs magnétiques et ainsi former ce qu'on pourrait appeler des cryoaimants. Ils interviennent déjà dans la réalisation de paliers magnétiques et commencent à être introduits dans la fabrication de moteurs à structure originale.

Avant la réalisation d'un système à base de SHT, comme un limiteur de courant ou un transformateur, il est intéressant, voire indispensable, d'évaluer le niveau des pertes afin de vérifier la faisabilité de l'installation. Or, les capacités de transport de courant des SHT comme le BiSrCaCuO dépendent de beaucoup de paramètres : en particulier, ils sont extrêmement sensibles à la présence d'un champ magnétique. Les effets thermiques, liés à une utilisation au delà du courant critique ou aux imperfections du matériau, jouent également un rôle important puisqu'ils peuvent entraîner la destruction du dispositif.

Etant donnée la non linéarité importante de la caractéristique $E - J$ des matériaux SHT et du couplage entre les phénomènes électromagnétiques et thermiques, il est très difficile de calculer les grandeurs physiques nécessaires à la détermination des pertes sans avoir recours à

des techniques numériques avancées. Afin de rester maître du code de calcul produit et des différents couplages à réaliser entre les équations, j'ai développé un nouvel outil basé sur la méthode des différences finies.

L'armature centrale de cette thèse est la compréhension des phénomènes dissipatifs dans les SHT, leur modélisation et leurs conséquences néfastes sur le comportement des dispositifs supraconducteurs. Ce mémoire est donc divisé en quatre parties :

Le chapitre 1 constitue une brève introduction aux supraconducteurs d'un point de vue phénoménologique. Une attention particulière est portée sur l'explication des mécanismes de dissipation dans les supraconducteurs à haute température critique.

Le chapitre 2 traite de la modélisation des SHT et de la résolution des équations couplées par la méthode différences finies. La loi en puissance qui caractérise le comportement électrique des SHT, ainsi que la variation avec le champ magnétique et avec la température des paramètres J_c et n de cette loi y sont présentées. Pour clore ce chapitre, une comparaison est faite avec le logiciel de calcul par éléments finis FLUX3D[®] afin de valider la résolution des équations électromagnétiques (sans couplage thermique) par notre code de calcul.

Le chapitre 3 concerne l'étude d'une amenée de courant en BiSrCaCuO parcourue par un courant sinusoïdal sous champ magnétique appliqué. Les différentes caractéristiques du matériau sont d'abord déterminées pour permettre une modélisation réaliste. Les pertes calculées numériquement et analytiquement sont ensuite comparées à celles mesurées. Enfin, les outils développés nous permettent de montrer l'influence du couplage magnétothermique sur le comportement de l'amenée de courant et de déterminer sa limite de stabilité.

Le chapitre 4 apporte des explications concernant le comportement de pastilles YBaCuO durant un processus d'aimantation. Les effets couplés magnétothermiques sont pris en compte, ce qui entraîne clairement une diminution du champ magnétique piégé et de l'énergie stockée dans le matériau. L'influence de plusieurs paramètres, qui sont la géométrie, l'amplitude et la vitesse de montée du champ magnétique appliqué est étudiée, ce qui nous permet de définir certains critères optimisant le processus d'aimantation.

Finalement, les conclusions du travail effectué durant cette thèse sont exposées, en décrivant les contributions les plus importantes et en indiquant les futurs développements possibles concernant la modélisation des phénomènes couplés magnétothermiques dans les supraconducteurs.

Chapitre 1. Les supraconducteurs

Etant donné que cette thèse traite des matériaux supraconducteurs, il importe d'exposer les principes de base et le vocabulaire propres au phénomène de la supraconductivité. Ce chapitre ne reflète en aucun cas tous les aspects de la supraconductivité mais sert plutôt de support pour les chapitres suivants. D'autres détails sur les supraconducteurs peuvent être trouvés en consultant différents ouvrages de référence sur le sujet [Kit04, Ros77, Sch99, Tin04, Tix95].

1.1 Introduction

Le terme *supraconductivité* vient de la propriété que possèdent certains matériaux à présenter une résistivité non mesurable ($< 10^{-25} \Omega \cdot m$). Il a été proposé par Kamerlingh Onnes en 1911 quand il découvrit que pour certains matériaux la résistance non seulement diminuait avec la température, mais présentait également une baisse soudaine à une certaine *température critique* notée T_c , comme montré sur la **Figure 1.1**. Il appela cet état un *état supraconducteur* en opposition à un *état normal*, et les matériaux qui présentent un tel comportement sont appelés par conséquence des *supraconducteurs* [Kam11].

La recherche évoluant, il a été trouvé que la *conductivité parfaite* (résistance nulle, $R=0$) n'est pas l'unique caractéristique des supraconducteurs. Meissner et Ochsenfeld remarquèrent en 1933 que le flux magnétique est nul à l'intérieur du supraconducteur, ce qui ne peut pas être complètement expliqué par la *conductivité parfaite*. Ils vérifièrent alors que le diamagnétisme parfait (expulsion de l'induction magnétique, $B=0$) est une propriété fondamentale des supraconducteurs [Mei33]. Les théories et les expériences ultérieures ont confirmé qu'il existe une troisième caractéristique fondamentale pour les supraconducteurs :

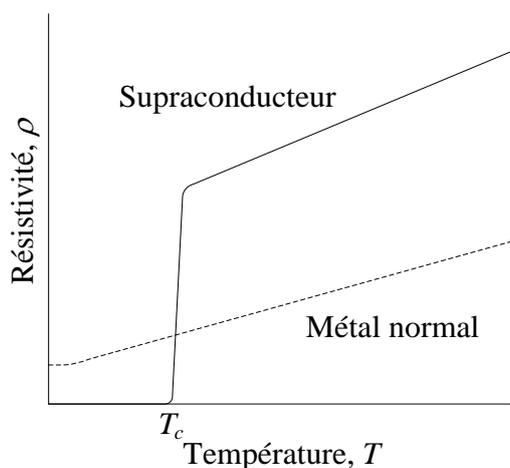


Figure 1.1 : Allure des résistivités d'un supraconducteur et d'un métal normal en fonction de la température.

le flux magnétique qui traverse une boucle de courant supraconductrice n'existe qu'en multiples entiers d'un *quantum de flux* $\Phi = n \cdot \Phi_0$. Toutes ces caractéristiques sont cependant détruites quand la température du supraconducteur dépasse T_c ou quand le champ magnétique dépasse un champ magnétique critique dépendant de la température $H_c(T)$. Il existe en pratique un autre paramètre important, la densité de courant critique J_c qui définit la transition vers un état normal et dissipatif. Ces grandeurs critiques sont toutes reliées et forment une surface critique dans le repère (T, B, J) , voir **Figure 1.2**.

Dans ce chapitre, les aspects physiques des caractéristiques des supraconducteurs seront d'abord traités. Puis, la classification des supraconducteurs en *type-I* et *type-II*, qui montrent des propriétés magnétiques bien différentes, sera considérée. Notre attention se portera sur le dernier type, qui possède un état mixte avec à la fois des régions microscopiques supraconductrices et normales. Tous les mécanismes associés à cet état seront traités dans § 1.5. Finalement, un aperçu de quelques matériaux *supraconducteurs à haute température*, principaux supraconducteurs de type-II, sera donné.

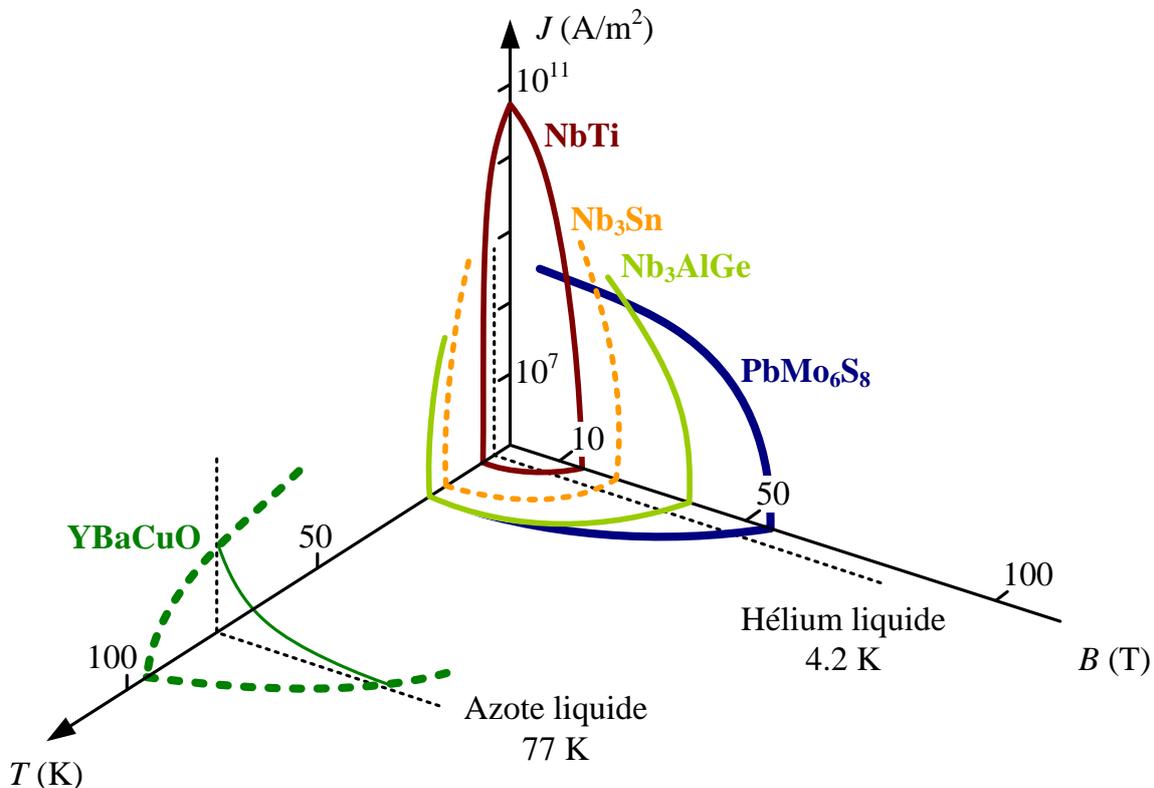


Figure 1.2 : Surface critique des matériaux supraconducteurs. [Bru89]

1.2 Effet Meissner

La *conductivité parfaite* ($R=0$) implique qu'un changement de l'induction magnétique dans le matériau n'est pas possible $dB/dt=0$. Ainsi, lorsqu'un conducteur parfait, sous champ nul à température ambiante, est refroidi en dessous de T_c puis soumis à un champ magnétique, alors des *courants d'écrantage* vont être induits pour conserver $B=0$ à l'intérieur du matériau, voir **Figure 1.3(a)**. Si au contraire, le conducteur parfait est soumis à un champ magnétique avant d'être refroidi, alors, lorsque le champ magnétique extérieur est ramené à zéro, dB/dt doit être conservé et des *courants de piégeage* seront induits pour piéger l'induction magnétique à l'intérieur, voir **Figure 1.3(b)**. Il en va tout à fait

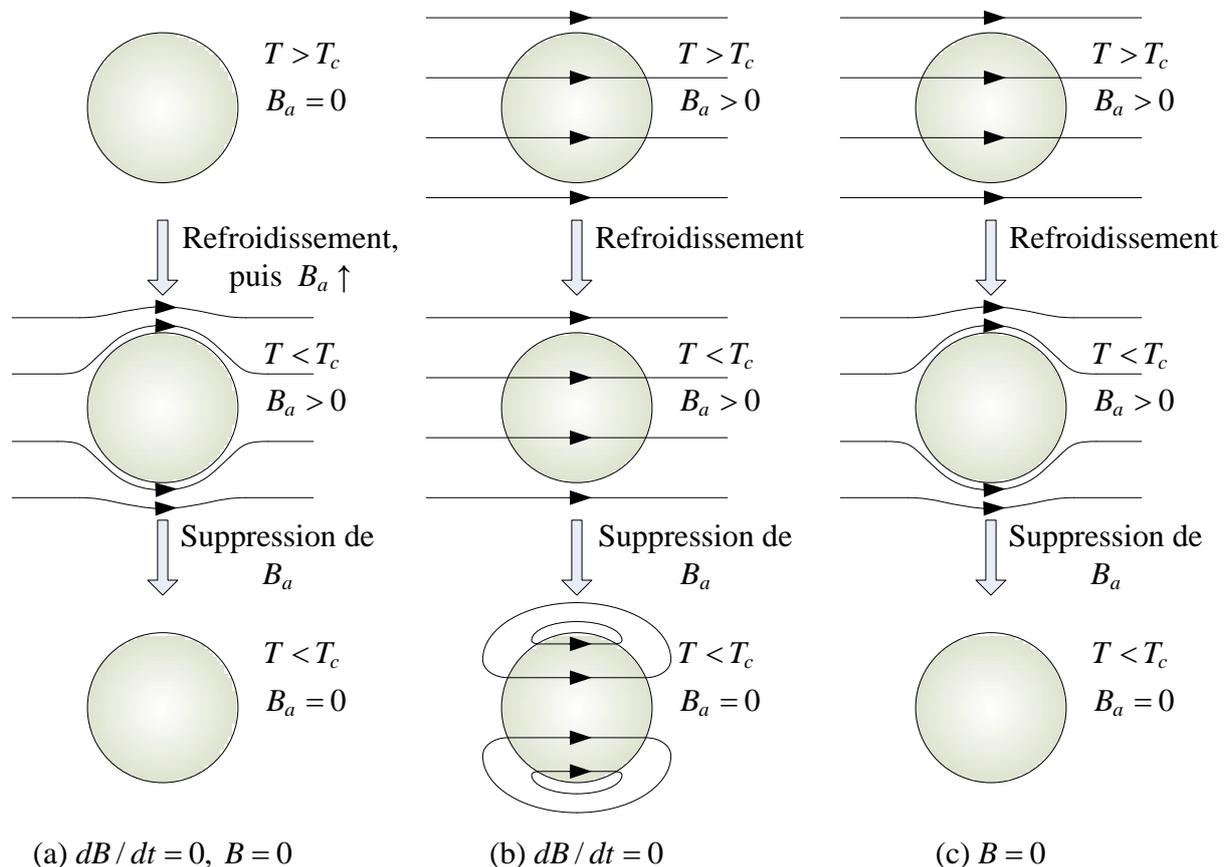


Figure 1.3 : Différence entre un conducteur parfait et un supraconducteur : l'effet Meissner. (a) S'il n'existe aucun champ magnétique extérieur $B_a = 0$ avant que le matériau soit refroidi, chaque matériau possède un flux magnétique interne nul en dessous de T_c . (b) Un conducteur parfait piège le flux magnétique appliquée avant refroidissement, $\dot{B} = dB/dt = 0$. (c) Le flux magnétique est toujours exclu par un supraconducteur en dessous de T_c , qu'un champ magnétique soit appliqué avant refroidissement ou non, $B = 0$.

différemment dans le cas d'un supraconducteur :

▫ Dans le premier cas, quand le champ magnétique est appliqué après refroidissement, le conducteur parfait et le supraconducteur se comportent de manière identique car l'induction magnétique est toujours nulle dans le matériau, voir [Figure 1.3\(a\)](#).

▫ Dans le second cas, l'induction magnétique est expulsée de l'intérieur du supraconducteur ($B = 0$) dès qu'il est refroidit en dessous de sa température critique, voir [Figure 1.3\(c\)](#).

Ce comportement est connu sous le nom d'effet Meissner : il s'agit de l'expulsion de toute induction magnétique de l'intérieur du supraconducteur, qu'elle soit là avant que le spécimen soit devenu supraconducteur ou pas. Le diamagnétisme parfait est une propriété intrinsèque d'un supraconducteur, qui n'est cependant valable que si la température et le champ magnétique sont en tout point inférieurs à leur valeur critique $T < T_c$, $H < H_c$.

1.3 Les supraconducteurs de type-I et -II

V. Ginzburg et L. Landau (voir [Annexe A](#)) ont introduit une constante κ qui est quasiment indépendante de la température pour un matériau donné et permet de distinguer deux types de supraconducteurs.

Pour les supraconducteurs purs classiques tels le Plomb (Pb) et le Mercure (Hg), la constante de Ginzburg-Landau prend de très petites valeurs ($\kappa \ll 1$). La création de régions normales à l'intérieur du supraconducteur sous l'influence d'un champ magnétique est alors énergétiquement défavorable et le matériau reste supraconducteur jusqu'à la valeur critique H_c du champ magnétique.

En 1957, A. Abrikosov publia un article qui décrit ce qui se passe lorsque κ est au contraire très grand [[Abr57](#)]. Il observa un comportement magnétique du matériau complètement différent et appela ainsi les supraconducteurs conventionnels *type-I* et ces nouveaux supraconducteurs *type-II*. Il montra de plus que la séparation entre ces deux types est obtenue pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Au lieu d'une disparition complète de la supraconductivité à H_c , comme pour les supraconducteurs de type-I, les supraconducteurs de type-II sont parfaitement

diamagnétiques jusqu'à un *premier champ critique* $H_{c1} \approx H_c / \kappa$ au-delà duquel une pénétration progressive du champ magnétique est observée. Le champ magnétique a complètement pénétré le matériau pour un *second champ critique* $H_{c2} \approx \sqrt{2}\kappa H_c$ où la supraconductivité disparaît, voir **Figure 1.4(a)**. Entre ces deux valeurs critiques, des régions normales coexistent avec des régions supraconductrices dans ce qu'on appelle *l'état mixte*, décrit dans § 1.4. Les diagrammes de phase en fonction de la température et du champ appliqué sont représentés sur la **Figure 1.4(b)** pour les supraconducteurs de type-I et sur la **Figure 1.4(c)** pour les type-II.

Les supraconducteurs à basse température de type-I sont principalement des métaux purs, comme le Plomb (Pb), le Mercure (Hg), l'Indium (In) et l'Étain (Sn). Les supraconducteurs à basse température de type-II sont typiquement des alliages intermétalliques, par exemple, le Niobium-Titane (Ti_2Nb) et le Niobium-Étain (Nb_3Sn). Les supraconducteurs de type-I étant souvent plus ductiles que les type-II, ils sont respectivement appelés *doux* et *durs*. Les supraconducteurs à haute température sont tous de type-II et

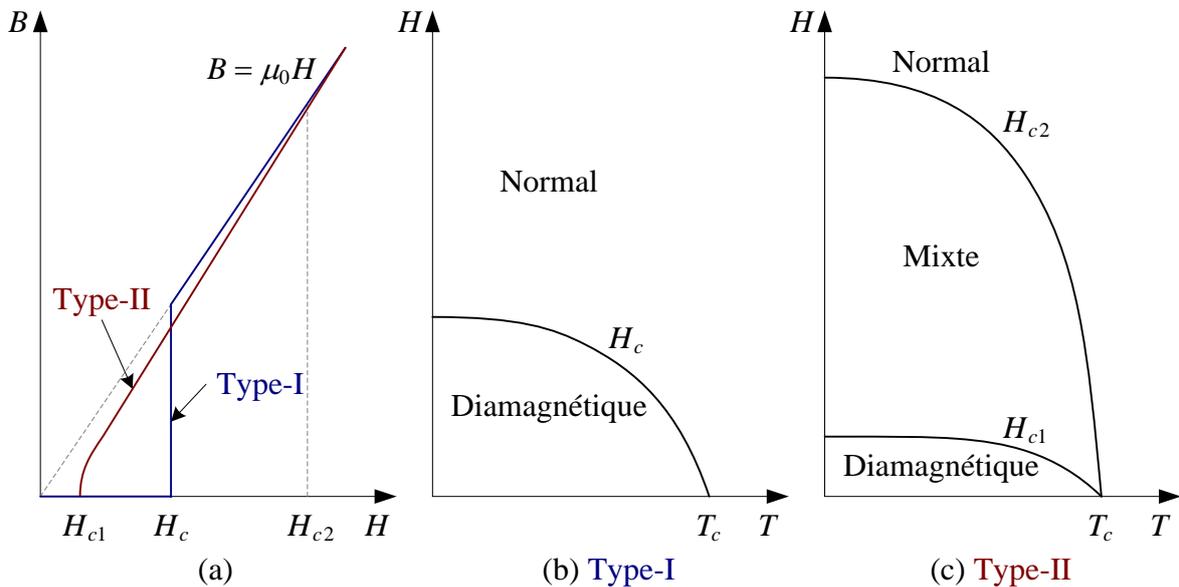


Figure 1.4 : (a) Les supraconducteurs de type-I perdent brutalement leur supraconductivité à un champ magnétique critique H_c , tandis que les supraconducteurs de type-II laissent pénétrer progressivement le champ magnétique en commençant de H_{c1} (qui diminue avec κ) jusqu'à ce que le champ de pénétration H atteigne H_{c2} (qui augmente avec κ) et la supraconductivité disparaît. (b) Diagramme de phase des supraconducteurs de type-I : seuls les états supraconducteur (diamagnétique) et normal sont présents. (c) Diagramme de phase des supraconducteurs de type-II : il existe également un état mixte où les états supraconducteur et normal coexistent.

possèdent des caractéristiques particulières. Les principaux SHT utilisés dans les applications de puissance sont brièvement décrits dans l'[Annexe B](#).

1.4 L'état mixte des supraconducteurs de type-II

L'état mixte, également appelé *phase de Shubnikov*, est une caractéristique intrinsèque des supraconducteurs de type-II qui existe lorsqu'un champ magnétique $H_{c1} < H < H_{c2}$ est appliqué. L'existence de cet état mixte s'explique par le fait que le matériau essaie toujours d'être dans un état d'enthalpie libre minimale. Or, quand l'enthalpie libre de surface d'une interface normal-supraconducteur est négative (pour $\kappa > 1/\sqrt{2}$), la création de régions normales réduit l'enthalpie libre totale et conduit à un état énergétiquement plus favorable. Il s'avère que la configuration pour laquelle le rapport de la surface par le volume de matière à l'état normal est maximum est obtenue avec des régions normales cylindriques, parallèles au champ magnétique appliqué et traversant le supraconducteur de part en part.

A. Abrikosov avait prévu que le flux magnétique pouvait pénétrer un supraconducteur sous forme de tubes de flux, appelés aussi *fluxons*, chacun d'entre eux possédant un quantum de flux Φ_0 . Les fluxons ne sont pas indépendants, ils se repoussent et forment un réseau triangulaire, portant le nom de *réseau d'Abrikosov*. Le pas de ce réseau, trouvé expérimentalement, est :

$$a = \left(\frac{2\Phi_0}{\sqrt{3}B} \right)^{1/2} \quad \text{pour } B_{c1} < B < B_{c2} \quad (0.1)$$

Une modification du champ magnétique appliqué entraîne systématiquement une modification de la densité du réseau. Pour chaque tube, il existe un *vortex* de supra courants qui maintient le flux à l'intérieur. Ces supra courants protègent les régions supraconductrices environnantes du flux et assurent ainsi le diamagnétisme dans les régions supraconductrices.

Sur la [Figure 1.5](#), le réseau de vortex (a), la densité d'électrons supraconducteurs n_s (b) et l'induction magnétique B à l'intérieur du supraconducteur (c) sont schématiquement représentés pour un supraconducteur dans l'état mixte.

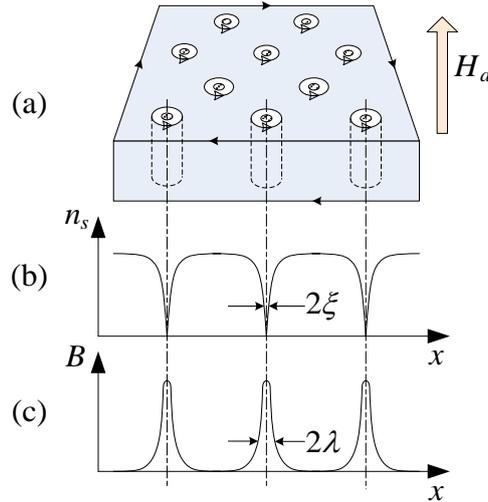


Figure 1.5 : Illustration du réseau de vortex, de la longueur de cohérence ξ et de l'épaisseur de pénétration de London λ pour un supraconducteur dans l'état mixte.

1.5 Ancrage des vortex et phénomènes dissipatifs

Les supraconducteurs de type-II sont caractérisés, comme indiqué précédemment, par une pénétration partielle du champ magnétique sous forme de *vortex de flux*. Le champ magnétique résultant à l'intérieur du matériau interagit avec le courant de transport et génère une force sur les vortex. La force de Laplace exercée sur un vortex est donnée par :

$$\mathbf{F}_L = \Phi \mathbf{J} \times \mathbf{e}_0 \quad (0.2)$$

En l'absence de défauts dans le matériau, cette force mettrait immédiatement les vortex en mouvement. Cependant, en pratique, il existe toujours un certain nombre de défauts dans le matériau. La force moyenne de réaction exercée par les défauts sur un vortex est appelée force d'ancrage et notée \mathbf{F}_p (pour **Pinning Force**). Comme il s'agit d'une force de réaction, \mathbf{F}_p est un vecteur égal mais opposé à \mathbf{F}_L , dont l'amplitude varie entre 0 et \mathbf{F}_{pmax} , la force d'ancrage maximale. Si $\mathbf{F}_L < \mathbf{F}_{pmax}$, les vortex ne peuvent pas se mettre en mouvement et on parle d'ancrage des vortex ou **Flux Pinning**. Par contre lorsque $\mathbf{F}_L > \mathbf{F}_{pmax}$, les défauts ne peuvent plus à eux seuls maintenir les vortex en place et ceux-ci se mettent en mouvement. La densité de courant requise pour atteindre l'équilibre $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_{pmax}$ est appelée densité de courant critique et notée \mathbf{J}_c .

Lorsque les vortex se mettent en mouvement, leur vitesse n'est limitée que par une force

de frottement visqueux $\mathbf{F}_v = -\eta\mathbf{v}$. L'existence de \mathbf{F}_v implique qu'il faut effectuer un travail pour maintenir une densité de courant \mathbf{J} dans le supraconducteur, c'est-à-dire qu'une énergie doit être fournie pour déplacer les vortex à vitesse constante. Ce travail doit bien sûr être fourni par la source de courant externe, par l'intermédiaire d'un champ électrique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (0.3)$$

Ce qui implique l'apparition d'une tension aux bornes du supraconducteur : il n'est désormais plus un conducteur parfait !

La caractéristique $E - J$ de la **Figure 1.6(a)** peut être observée à très basse température ($T \simeq 0$) pour un matériau supraconducteur homogène. Au-delà de J_c , le supraconducteur est dit en régime de **Flux Flow** et un champ électrique apparaît :

$$E = \rho_{FF}(J - J_c) \text{ pour } J > J_c \quad (0.4)$$

et par la même, des pertes. La pente est appelée résistivité de Flux Flow ρ_{FF} et augmente avec l'induction magnétique B contrairement à J_c qui diminue. Finalement, pour de fortes inductions magnétiques, le supraconducteur devient normal et J_c atteint zéro, la pente est alors égale à la résistivité normale ρ_n .

La température d'opération élevée des SHT rend plus importante la contribution de l'agitation thermique dans l'équilibre des vortex. En effet, cette agitation thermique rend probable le mouvement des vortex même lorsque $\mathbf{F}_L < \mathbf{F}_p$ et contribue à arrondir la caractéristique $E - J$, tel qu'illustré **Figure 1.6(b)**. Ce phénomène fait apparaître deux régimes

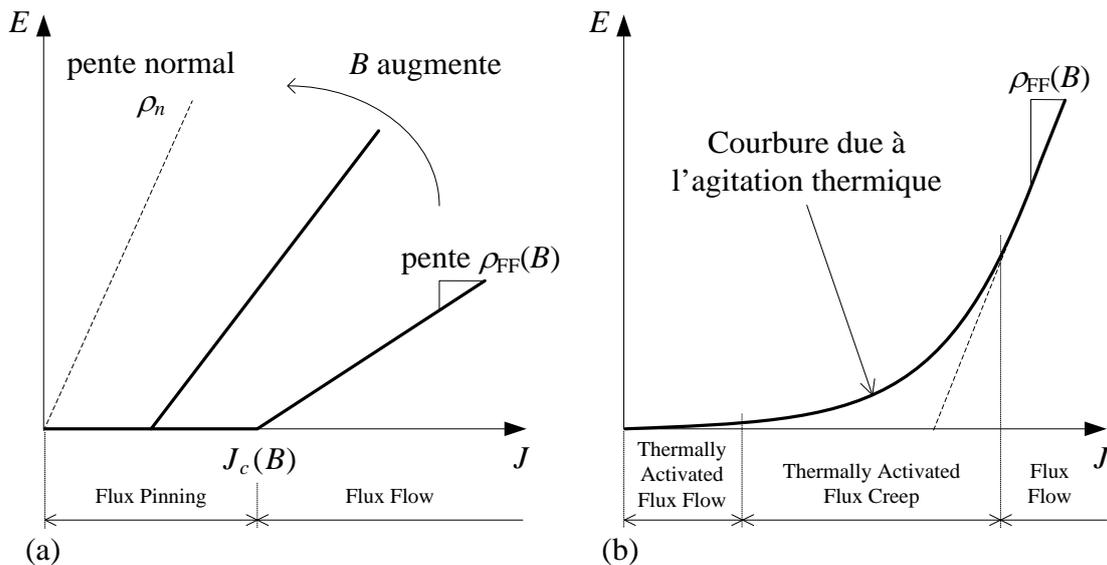


Figure 1.6 : Caractéristique $E - J$ d'un matériau supraconducteur à $T \simeq 0$ (a) et $T > 0$ (b).

distincts, "**Thermally Activated Flux Flow**" et "**Thermally Activated Flux Creep**", qui seront abordés dans § 1.5.3

1.5.1 Diagramme de phase B – T

La forme de la caractéristique $E - J$ des supraconducteurs de type-II, ce qui inclut tous les matériaux SHT, repose essentiellement sur les propriétés du **réseau de vortex**. En effet, en présence d'un courant externe, la dissipation ne survient que lorsque les vortex peuvent se mettre en mouvement. Ce qui nous conduit à étudier les différents états, ou phases, dans lesquelles les vortex peuvent se trouver. Dans un premier temps, nous nous limiterons au plan $B - T$. Puis nous verrons comment étendre la notion de diagramme de phase lorsqu'un courant de transport est présent.

1.5.1.1 Phase amorphe

La configuration régulière du réseau de vortex n'est observable que sur des échantillons homogènes et à peu près exempts de défauts. Les matériaux utilisés dans les applications requièrent des défauts afin d'ancrer les vortex, et ainsi supprimer la dissipation due à leur déplacement. Notons que les différents sites d'ancrage sont distribués de façon relativement aléatoire, et ils ne sont pas tous ni de même nature ni de même efficacité. Ce peut être des défauts du réseau, du plan de macule ou des joints de grains. Ils peuvent également être créés artificiellement par irradiation et sont responsables de l'irréversibilité des propriétés magnétiques des supraconducteurs de type-II. C'est l'action collective des sites d'ancrage sur un vortex donné qui permet de le retenir en place. De tout ceci résulte un certain désordre dans la disposition géométrique des vortex. De façon générale, cette disposition est tridimensionnelle, ce qui rend l'étude très complexe [Bla94].

L'analyse détaillée du réseau de vortex révèle tout de même un certain ordre à courte portée. L'ordre à courte portée est caractéristique de la matière à l'état amorphe, et donc par analogie avec l'étude des solides, on appelle *phase amorphe* cette disposition de vortex, voir **Figure 1.7**. La phase amorphe ou *verre de vortex* n'existe donc qu'en vertu des défauts d'ancrage présents dans le matériau. Sans ancrage, on aurait simplement un réseau régulier, analogue à un solide cristallin. Dans les deux cas, l'analogie avec l'état solide implique une

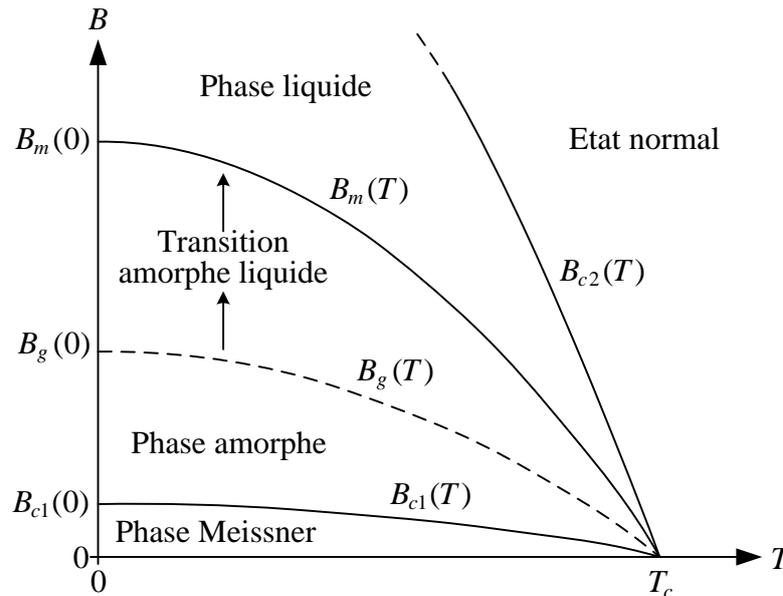


Figure 1.7 : Diagramme de phase $B-T$ d'un supraconducteur à haute température.

certain « rigidité » du réseau de vortex, c'est-à-dire qu'une force exercée sur l'un des vortex du réseau aura un impact sur tous les autres vortex situés dans un certain volume de cohérence autour du vortex en question, ce volume tendant vers la taille de l'échantillon dans le cas d'un réseau régulier. Compte tenu de la rigidité de la phase amorphe, les vortex peuvent difficilement bouger les uns par rapport aux autres, puisqu'une force exercée sur un vortex est transmise à ses voisins par l'intermédiaire de l'interaction répulsive qui existe entre vortex. Par conséquent, le déplacement d'un vortex dans ce régime implique en fait un déplacement de tout un groupe de vortex, ce qui réduit grandement les probabilités que ce déplacement se produise, car une petite proportion de vortex très fortement ancrés et distordus peut empêcher le mouvement du groupe. Dans ce cas, l'équilibre est dit métastable et les pertes dues à un courant de transport sont très faibles.

1.5.1.2 Phase liquide

Lorsque la température augmente, il arrive un point où l'action combinée de l'agitation thermique et du changement des propriétés d'ancrage rompent l'équilibre métastable qui assure la cohésion du groupe de vortex, rendant tout ancrage inefficace. Les vortex peuvent alors « glisser » beaucoup plus facilement les uns par rapport aux autres. La structure des vortex peut « fondre » en un *liquide de vortex*. La phase liquide est caractérisée par une grande mobilité des vortex, de façon analogue aux molécules dans un liquide. La rigidité qui

caractérisait le réseau de vortex amorphe n'existe plus, et les vortex peuvent facilement être mis en mouvement par application d'une force. La phase liquide est celle qui sera observée jusqu'à la disparition de la supraconductivité, par dépassement de T_c ou B_{c2} , voir [Figure 1.7](#).

1.5.1.3 Transition amorphe-liquide

Selon l'interprétation de T. Worthington *et al.* [Wor92], dans un cristal idéal, la transition du réseau de vortex de l'état solide à l'état liquide s'effectue à une température constante dite de fusion et notée T_m (*melting temperature*). Il s'agit alors d'une transition de phase du premier ordre, c'est-à-dire qu'il faut fournir une certaine quantité de chaleur pour réaliser complètement la fusion du réseau de vortex rigide. Cependant, dès que l'on s'écarte de la situation idéale, c'est-à-dire lorsque le matériau contient des défauts ou inhomogénéités, la transition s'effectue de façon continue entre deux températures, mais la température supérieure demeure T_m . L'apparition d'une largeur de transition découle du fait que, autour des régions non homogènes, qui ne sont que peu ou pas supraconductrices, la phase liquide a tendance à apparaître localement pour $T < T_m$.

Comme on sait qu'il existe toujours des défauts dans les matériaux réels, et que ceux-ci agissent en général comme des sites d'ancrages, il y aura, d'une part, toujours présence d'une phase amorphe, et d'autre part, la transition amorphe-liquide sera toujours étendue entre deux températures. Pour cette raison on notera T_g (*glass temperature*) la température inférieure de la transition. La présence des défauts procure donc à la fois l'effet positif de gêner le mouvement des vortex, ce qui réduit la dissipation, et l'effet négatif d'abaisser T_g . Ainsi, la largeur $T_m(B) - T_g(B)$ de la transition amorphe-liquide, pour B donné, dépend directement de la nature et de l'efficacité des défauts d'ancrage. Plus ces derniers sont efficaces, plus T_g se rapproche de T_m , et moins la transition est large. Dans la littérature, on rencontre aussi l'appellation **ligne d'irréversibilité**. Cette dernière est une autre façon de parler des frontières $T_m(B)$ et $T_g(B)$ dans le plan $B-T$.

1.5.2 Diagramme de phase J – B – T

Le diagramme de phase représenté dans le plan $B-T$ peut être généralisé en y ajoutant une autre dimension, qui est la densité de courant de transport J . Ces trois quantités

influencent à leur manière le comportement des vortex : T altère les propriétés d'ancrage et modifie la probabilité qu'un vortex ancré « saute » hors de son puits de potentiel (voir § 1.5.3), J génère une force de Laplace sur les vortex et B modifie la densité de vortex, ce qui influence la force par unité de volume pour J et T données.

Une nuance s'impose cependant. Comme la présence d'un courant représente un phénomène de transport, il ne s'agit plus formellement d'un diagramme de phase thermodynamique, qui sous-entend par définition un système à l'équilibre. Au mieux, on pourra considérer qu'il s'agit d'un équilibre stationnaire, et donc d'un « diagramme de phase stationnaire ».

Ceci étant dit, revenons à la transition amorphe-liquide présentée précédemment et illustrée **Figure 1.7**. Entre les températures définies par les courbes $T_m(B)$ et $T_g(B)$ (réciproques de $B_m(T)$ et $B_g(T)$), le réseau de vortex amorphe fond progressivement pour se retrouver entièrement en phase liquide à $T_m(B)$. Lorsqu'on ajoute J dans le diagramme de phase, ce sont maintenant des surfaces ($T_m(B, J)$ et $T_g(B, J)$) qui définissent les frontières entre les différentes phases.

Un échantillon supraconducteur comporte en réalité différentes valeurs de J_c sur différents intervalles. La densité de courant critique J_c de l'ensemble peut être définie par une distribution statistique $P(J_c)$ dont les bornes sont $J_{c_{\min}}$ et $J_{c_{\max}}$. Le choix des bornes de cette distribution semble alors tout indiqué pour représenter des frontières physiquement significatives en terme de J dans le diagramme de phase $J-B-T$. Ainsi, $J < J_{c_{\min}}$ correspond à un régime parfaitement supraconducteur, alors que $J > J_{c_{\max}}$ correspond à un régime de Flux Flow. Lorsqu'on considère l'évolution de $P(J_c)$ en fonction de (B, T) , cela nous conduit à définir les surfaces $J_{c_{\min}}(B, T)$ et $J_{c_{\max}}(B, T)$ qui représentent les frontières respectives entre ces deux régimes. La **Figure 1.8** illustre schématiquement ce diagramme de phase tridimensionnel.

Etablissons maintenant le lien avec les phases en tant que telles, en particulier avec le diagramme de phases schématique de la **Figure 1.7**. Si on se restreint d'abord au cas $J = 0$, on constate que la **Figure 1.8** se réduit au plan $B-T$, et on se retrouve avec le diagramme de phase $B-T$ de la **Figure 1.7**. Dans ce cas, on sait que pour $B < B_g(T)|_{J=0}$, le réseau de vortex est entièrement dans la phase amorphe. On sait aussi que pour $B > B_m(T)|_{J=0}$, le réseau de vortex est entièrement dans la phase liquide, et qu'entre les deux, nous sommes dans la zone

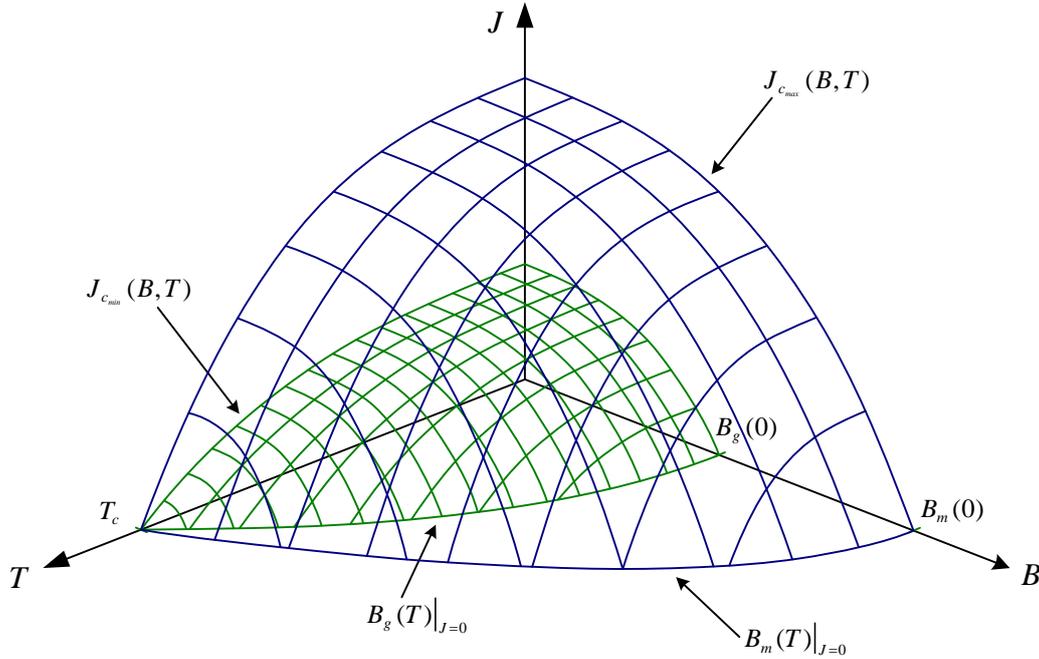


Figure 1.8 : Diagramme de phase $J - B - T$ d'un SHT. On y distingue clairement les deux surfaces $J_{c_{min}}(B, T)$ et $J_{c_{max}}(B, T)$, qui bornent la distribution statistique de la densité de courant. Dans le plan $J = 0$, on retrouve le diagramme de phases $B - T$ de la [Figure 1.7](#).

de transition amorphe-liquide, dont la largeur dépend de la nature et de l'efficacité des sites d'ancrages. A partir de ce constat, la généralisation pour $J \neq 0$ est directe et l'interprétation présentée ci-après suit les travaux de K. Yamafuji et T. Kiss [[Yam96](#)].

Ces derniers proposent que les points des surfaces $J_{c_{min}}(B, T)$ et $J_{c_{max}}(B, T)$ correspondent à $(J_{c_{min}}, B_g, T_g)$ et $(J_{c_{max}}, B_m, T_m)$. Lorsque le point d'opération (J, B, T) se situe sous la surface $J_{c_{min}}(B, T)$, correspondant à $J < J_{c_{min}}$, les vortex se comportent selon les propriétés de la phase amorphe. A l'opposé, lorsque (J, B, T) se situe au-delà de la surface $J_{c_{max}}(B, T)$, correspondant à $J > J_{c_{max}}$, les vortex se comportent selon les propriétés de la phase liquide. Cela implique que le régime parfaitement supraconducteur ($J < J_{c_{min}}$) doit correspondre à la phase amorphe, et que le régime de Flux Flow ($J > J_{c_{max}}$) doit correspondre à la phase liquide. La région entre les deux surfaces correspond à la transition de phase, ce qui se traduit par une courbure de la caractéristique $E - J$.

La [Figure 1.9](#) décrit l'aspect microscopique de la transition entre les phases amorphe et liquide. Elle permet de constater qu'à l'échelle microscopique, il existe des régions en phase liquide même lorsque $J < J_c$, tel qu'illustré [Figure 1.9\(a\)](#). Cependant les propriétés parfaitement supraconductrices disparaissent uniquement lorsqu'il apparaît au moins une région liquide qui s'étend sur toute la largeur de l'échantillon. Le cas $J = J_{c_{min}}$ correspond à

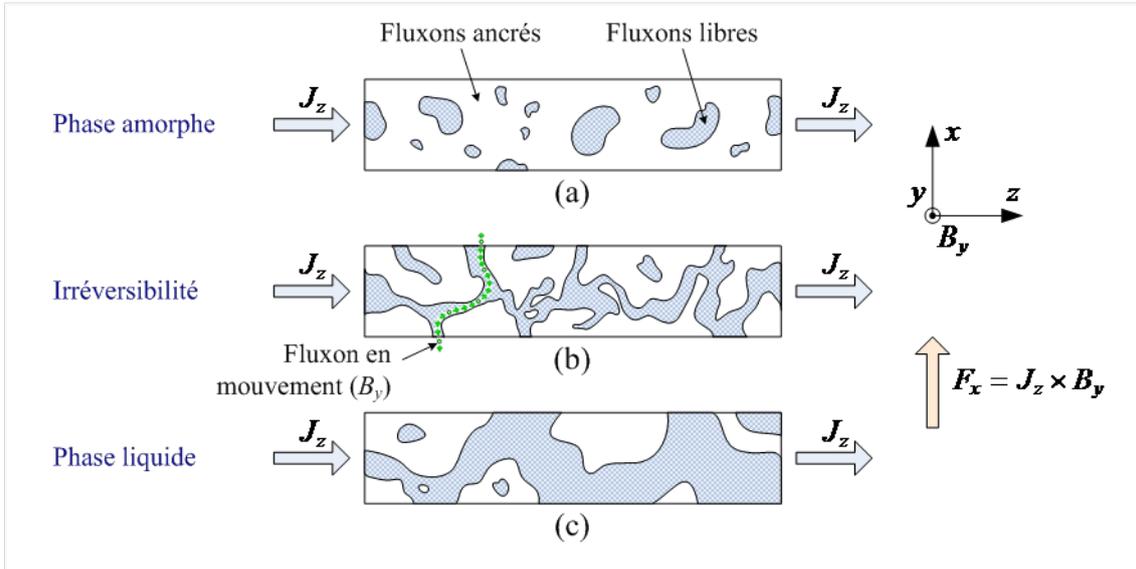


Figure 1.9 : Illustration des différentes étapes de l'aspect microscopique de la transition amorphe-liquide d'un supraconducteur. Les zones grisées représentent des amas de vortex en phase liquide et les zones blanches des régions en phase amorphe. (a) Tous les amas liquides sont emprisonnés entre des régions amorphes, ce qui empêche tout mouvement net de flux. Le courant peut circuler sans pertes. Ce cas correspond à $J < J_{c_{min}}$. (b) La continuité de la phase amorphe est tout juste rompue par de minces canaux en phase liquide. Le courant doit absolument traverser ces zones liquides, ce qui permet aux vortex situés dans ces canaux de se mettre en mouvement et de générer des pertes. Ce cas correspond à $J \approx J_{c_{min}}$. (c) Cas de transition avancée en phase liquide avec $J_{c_{min}} < J < J_{c_{max}}$. [Yam96]

l'ouverture du premier « canal » transverse en phase liquide, aussi appelé canal de percolation de flux. On en déduit donc que la transition de phase étendue entre $J_{c_{min}}$ et $J_{c_{max}}$ correspond physiquement à une ouverture progressive de canaux liquide transverse à J [Eve99].

1.5.3 « Thermally Activated Flux Flow » et « Thermally Activated Flux Creep »

Pour déplacer une ligne de flux ancrée, il est nécessaire d'effectuer un certain travail. Il faut donc fournir une quantité d'énergie U égale à ce travail. Cette énergie U correspond en fait à l'énergie potentielle d'ancrage des vortex, ou potentiel d'ancrage. De façon générale, $U = U(J, B, T)$. Notons que la force d'ancrage F_P est reliée à U par $F_P = -\nabla U|_{J=0}$. De même, $J_c = |F_{Pmax}| / \Phi_0 = \max|\nabla U|_{J=0} / \Phi_0$ lorsque $\mathbf{B} \perp \mathbf{J}$, dans le cas isotrope.

Pour donner une description plus quantitative de ce mécanisme pour B , J et T

donnés, supposons que le quantum de flux soit ancré au fond d'un puits de potentiel de profondeur U_0 . A cause de l'agitation thermique, les vortex oscillent à une fréquence caractéristique ω_0 au fond de leur puits de potentiel. Un vortex peut alors sortir hors du puits de potentiel par agitation thermique avec la probabilité :

$$P = \exp(-U_0 / k_B T) \quad (0.5)$$

où k_B est la constante de Boltzmann. La probabilité totale de saut est obtenue par sommation vectorielle des probabilités de toutes les directions.

Pour un problème unidimensionnel – illustré **Figure 1.10** – avec des puits de potentiel triangulaires, il existe deux directions de saut possibles dont les probabilités sont :

$$P_G = \exp(-U_G / k_B T) \quad (0.6)$$

$$P_D = \exp(-U_D / k_B T) \quad (0.7)$$

La **Figure 1.10(a)** représente la situation lorsqu'il n'existe aucune force extérieure ($J = 0$). Dans ce cas, la barrière de potentiel est la même de part et d'autre du puits, et les probabilités que le vortex saute à gauche ou à droite sont égales ($P_G = P_D$). Au contraire, en présence d'une force d'entraînement extérieure, il existe une direction privilégiée, voir **Figure 10(b)**.

En effet, si ΔW est l'énergie nécessaire pour déplacer le vortex du fond du puits de

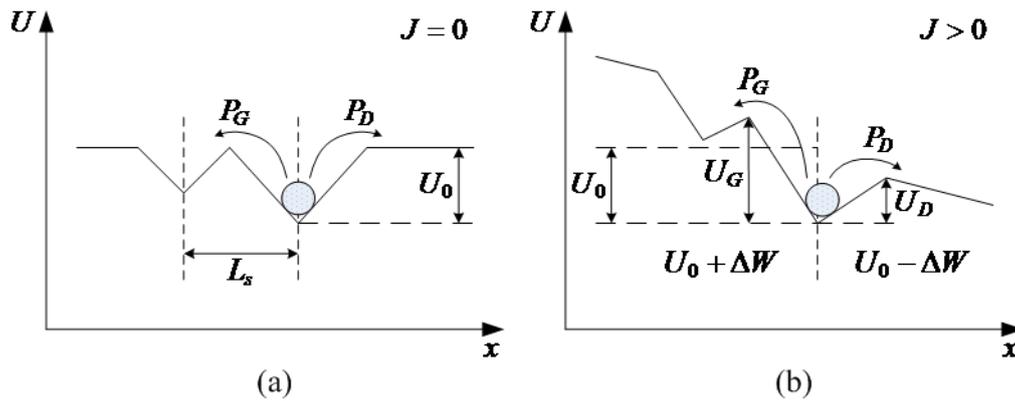


Figure 1.10 : Potentiel en 1D d'une ligne de flux ancrée, représentée ici à l'aide d'une analogie avec une particule au fond d'un puits de profondeur U_0 . (a) $J = 0$ et le profil du potentiel en dehors du puits est plat. (b) $J > 0$ et la force de Laplace F_L incline la pente globale du potentiel. Les probabilités de saut à gauche P_G et à droite P_D du puits dépendent de la hauteur du puits de part et d'autre.

potentiel à la position d'équilibre la plus proche, les barrières de potentiel peuvent s'écrire $U_G = U_0 + \Delta W$ et $U_D = U_0 - \Delta W$, d'où $P_D - P_G \neq 0$. De façon explicite, la fréquence de saut f_s par vortex s'écrit $\omega_0(P_D - P_G)$ d'où :

$$\begin{aligned} f_s &= \omega_0 \left(e^{-(U_0 - \Delta W)/k_B T} - e^{-(U_0 + \Delta W)/k_B T} \right) \\ &= 2\omega_0 e^{-U_0/k_B T} \sinh(\Delta W / k_B T) \end{aligned} \quad (0.8)$$

Si à chaque saut le vortex se déplace d'une distance L_s , alors sa vitesse moyenne est donnée par $\langle v \rangle = f_s L_s$. Le champ électrique associé est donné par $E = \langle v \rangle B$ soit :

$$E = 2L_s \omega_0 B e^{-U_0/k_B T} \sinh(\Delta W / k_B T) \quad (0.9)$$

Ce champ électrique est responsable de la dissipation d'énergie. Selon les valeurs relatives de ΔW et $k_B T$, on distingue deux régimes différents :

① Le premier régime intervient lorsque $\Delta W \ll k_B T$. Après un développement en séries au premier ordre de $\sinh(\Delta W / k_B T)$, l'équation (0.8) se réduit à :

$$f_s \approx \frac{2\omega_0 \Delta W}{k_B T} e^{-U_0/k_B T} \quad (0.10)$$

On appelle ce régime **TAFF**, acronyme pour « Thermally Assisted Flux Flow », tel que proposé par P. Kes *et al.* [Kes89]. Lorsque $\Delta W \propto J$ et que U_0 est indépendant de J , le régime TAFF conduit à une caractéristique $E - J$ ohmique, c'est-à-dire $E \propto J$, avec une dépendance en température de la forme $\rho_{TAF} = E / J \propto \exp(-U_0 / k_B T) / k_B T$, voir **Figure 1.6(b)**. Comme $\Delta W \ll k_B T$ et $\Delta W \propto J$, ce cas particulier correspond à J très petit, lorsque la force de Laplace exercée sur les fluxons est faible.

② Le second correspond au régime **TAFC**, acronyme pour « Thermally Assisted Flux Creep », caractérisé par une force d'entraînement importante et/ou une température basse, soit $\Delta W \gg k_B T$. Dans ce cas, on retrouve l'expression $f_s \approx \omega_0 \exp(-(U_0 - \Delta W) / k_B T)$ qui avait été proposée par P. Anderson dès 1962 [And62].

Dans le régime TAFC, le champ électrique généré par le déplacement des vortex peut s'écrire $E = E_c \exp(-U / k_B T)$, où U est l'énergie effective des barrières. En supposant que cette quantité décroît avec le logarithme de la densité de courant transporté [Vin91], on a

$U = U_0 \ln(J_c / J)$, où J_c est la densité de courant pour laquelle $U = 0$ et dépend, en général, du champ magnétique et de la température. En combinant ces deux expressions, le champ électrique s'écrit alors :

$$E(J, B, T) = E_c \left(\frac{J}{J_c(B, T)} \right)^{n(B, T)} \quad (0.11)$$

soit précisément une loi en puissance avec $n(B, T) = U_0(B, T) / k_B T$. Cette loi est également vérifiée dans de nombreuses expériences, et c'est pourquoi le modèle $E - J$ dit de « loi en puissance » est très répandu dans la littérature. L'avantage de ce modèle est sa simplicité analytique. Cependant, comme le montre l'expression (0.11) les paramètres J_c et n varient avec B et T , parfois, de façon complexe. De plus, ce modèle n'est applicable que sur quelques décades de champ électrique dans la région de transition amorphe-liquide.

Puisqu'il s'agit d'une référence bien connue, ce modèle de loi en puissance sera fréquemment utilisé dans cette thèse pour décrire la caractéristique $E - J$ des supraconducteurs à haute température. Nous nous efforcerons également à prendre en compte à la fois les effets du champ magnétique et de la température dans la loi $E - J$, ceci afin de modéliser de manière plus réaliste le comportement des SHT.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que les pertes dans les SHT résultent du déplacement des vortex et que la possibilité qu'un vortex se mette en mouvement dépend fortement des propriétés d'ancrage du matériau. A travers l'étude des différentes phases dans lesquelles le supraconducteur peut se trouver, nous en avons conclu que :

- Les pertes dans la phase amorphe sont faibles car elle est caractérisée par un ancrage important des vortex. Cette phase est souvent très faible voire inexistante.
- Les pertes dans la phase liquide sont importantes car tous les vortex sont en mouvement. C'est la dernière phase observée avant que le supraconducteur ne passe à l'état normal.
- Il existe une région de transition amorphe-liquide dans laquelle se situe habituellement

le point de fonctionnement d'un SHT en électrotechnique. La largeur de cette transition dépend de la nature et de l'efficacité des sites d'ancrage.

Une analyse quantitative du régime TAFC permet donc, sous certaines hypothèses, d'aboutir à une expression du champ électrique. L'expression obtenue est une loi en puissance qui dépend des trois grandeurs J , B et T . Cette expression très complète sera utilisée dans les chapitres suivants pour modéliser le comportement magnétothermique des SHT. Bien que souvent négligées, les influences de B et de T seront prise en compte dans notre modèle car elles modifient le comportement du supraconducteur et correspondent mieux à la réalité.

Chapitre 2. Modélisation en différences finies des supraconducteurs à haute température

La modélisation à l'échelle macroscopique des supraconducteurs à haute température est abordée dans ce chapitre. Les lois de comportement requises pour la modélisation des SHT sont d'abord présentées ainsi que la dépendance en champ magnétique \mathbf{B} et en température T des paramètres du supraconducteur. Puis la méthode des différences finies est décrite à travers son principe, ses avantages et ses inconvénients. Les équations magnétiques et thermiques, ainsi que les conditions aux frontières sont également détaillées. Finalement, le modèle électromagnétique est validé à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis FLUX3D[®] en comparant les résultats sur un problème donné.

2.1 Introduction

Le niveau des pertes en courant alternatif (pertes AC) dans les applications de transport de courant et/ou en présence d'un champ magnétique reste un obstacle au développement des applications de puissance à grande échelle des matériaux SHT. Pour estimer le rendement d'un dispositif SHT et concevoir son système de refroidissement, le niveau des pertes engendrées doit être calculé ou évalué préalablement. De plus, la dissipation d'une puissance non négligeable entraînant inévitablement un échauffement au sein du supraconducteur, voire parfois sa destruction, la considération des phénomènes thermiques est nécessaire à l'obtention d'une précision accrue lors du calcul de ces pertes.

Des expressions analytiques, basées généralement sur l'hypothèse du modèle de Bean, peuvent être trouvées pour résoudre les équations électromagnétiques pour des géométries simples. Cependant, lorsque les lois de comportements qui lient les différentes grandeurs \mathbf{E} , \mathbf{J} , \mathbf{H} , \mathbf{B} et T se compliquent, la modélisation des matériaux SHT par des outils plus avancés est nécessaire. C'est pourquoi, les méthodes numériques sont au premier rang de la modélisation et de l'analyse des pertes AC dans le domaine des supraconducteurs à haute température.

Dans cette thèse, nous avons choisi d'utiliser la méthode des différences finies pour l'analyse magnétothermique et le calcul des pertes dans les SHT. D'une part, car cette méthode est bien adaptée à la modélisation des matériaux ayant des propriétés non linéaires. D'autre part, car nous souhaitons rester maîtres du code de calcul produit et des couplages à réaliser entre les équations électromagnétiques et thermiques au sein du SHT.

J'ai ainsi développé un nouvel outil en C++, qui utilise la méthode des différences finies, et permet de calculer toutes les grandeurs physiques d'un problème couplé

magnétothermique dans un supraconducteur à haute température massif.

Développer un tel outil n'est pas évident, car la très forte non-linéarité de la loi $E - J$ pose généralement des problèmes de convergence. De plus, la prise en compte des dépendances en champ magnétique et en température rend complexe la programmation et augmente le temps de calcul. A ma connaissance, aucun logiciel commercial ne permet, à l'heure actuelle, de réaliser une telle modélisation. Le développement de cet outil numérique fut donc indispensable à l'étude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les supraconducteurs à haute température.

2.2 Modélisation du comportement des SHT

2.2.1 Comportement magnétique

L'induction magnétique peut être s'écrire sous le forme $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, où \mathbf{M} est l'aimantation. Dans la phase Meissner des supraconducteurs de type-II, en dessous du premier champ critique H_{c1} , l'expulsion de l'induction magnétique ($\mathbf{B} = 0$) se traduit facilement par $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$. Au-delà de H_{c1} , l'aimantation \mathbf{M} est quasi nulle et la relation $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ suivante semble être une bonne approximation :

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \text{ pour } H \gg H_{c1} \quad (1.1)$$

Sachant que le premier champ critique H_{c1} est souvent très petit pour les SHT ($\mu_0 H_{c1} \approx$ quelques mT), l'équation (1.1) est utilisée dans la plupart des applications pratiques.

2.2.2 Le modèle de l'état critique de Bean

Plusieurs modèles existent pour calculer les distributions de courant, de champ et évaluer les pertes AC des supraconducteurs sous différentes conditions. Le plus connu est certainement le *modèle de l'état critique de Bean* [Bea62, Bea64], également appelé *modèle de Bean*. C'est au début des années 60 que C. Bean introduit ce nouveau modèle basé sur l'existence d'une densité de courant macroscopique limite, notée J_c et indépendante du champ magnétique, que le supraconducteur peut transporter.

Dans le modèle de Bean, il existe seulement deux états possibles du supraconducteur : une densité de courant nulle pour les régions où le champ magnétique ne varie pas, et une densité de courant $\pm J_c$ dans les régions qui s'opposent aux variations du champ magnétique.

Le modèle de Bean connaît un grand succès auprès des supraconducteurs à basse température et l'on y fait souvent référence dans la littérature. Il sera utilisé dans la section § 4.1 afin d'expliquer le phénomène de piégeage du flux dans une plaque supraconductrice.

2.2.3 Le modèle de la loi en puissance $E - J$

La relation qui lie la densité de courant et le champ électrique est souvent écrite sous la forme de la loi d'Ohm, c'est-à-dire $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$, où ρ est la résistivité du matériau. Le principal problème dans la modélisation des SHT est la définition de la résistivité, qui n'est pas constante et engendre une loi d'Ohm non linéaire.

Le modèle de Bean et toutes ses variantes ne correspondent pas parfaitement aux caractéristiques expérimentales $\mathbf{E} - \mathbf{J}$ des matériaux SHT, qui sont mieux décrites par des relations du type loi en puissance, comme sur la Figure 2.1.

Le modèle de la loi en puissance était initialement considéré comme une description phénoménologique de la large transition de l'état supraconducteur à l'état normal des SHT. Plus tard, il fut corroboré par des arguments théoriques sur le régime TAFC, comme nous l'avons vu dans § 1.5.3.

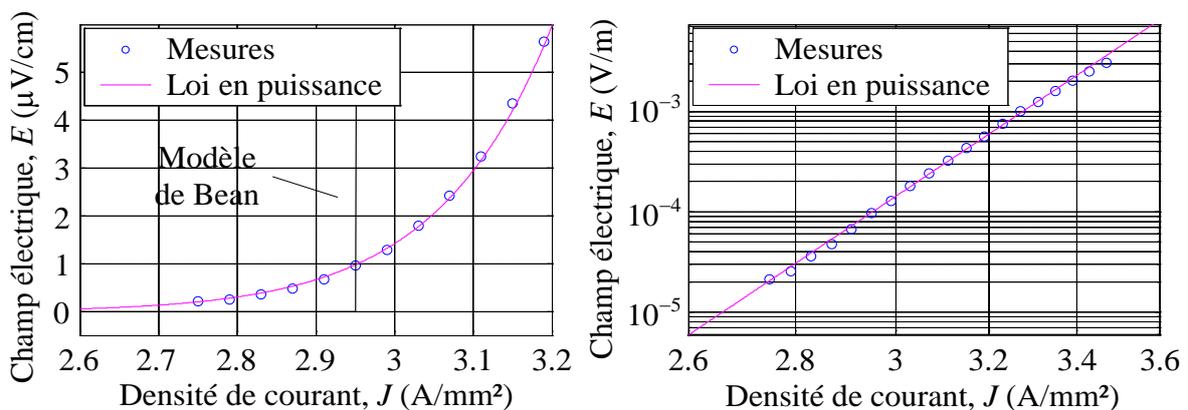


Figure 2.1 : Caractéristique $E - J$ d'une amenée de courant Bi-2223, que nous avons obtenue par des mesures en transport de courant continu à 77 K. $J_c = 2.95 \text{ A/mm}^2$ et $n = 22$.

Dans ce modèle de loi en puissance, le champ électrique \mathbf{E} est proportionnel à la densité de courant \mathbf{J} élevée à la puissance n de la façon suivante :

$$\mathbf{E} = E_c \left(\frac{\|\mathbf{J}\|}{J_c} \right)^n \frac{\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|} \quad (1.2)$$

où E_c est le champ électrique critique usuellement choisi à $1 \mu\text{V}/\text{cm}$, J_c est la densité de courant critique correspondante, et $n = \partial(\log E)/\partial(\log J)$ définit la raideur de la transition.

Les cas limites $n=1$ et $n \rightarrow \infty$ correspondent respectivement, à une loi d'Ohm linéaire et au modèle de Bean. En plus de bien correspondre aux caractéristiques expérimentales $\mathbf{E}-\mathbf{J}$ des SHT et contrairement au modèle de Bean qui est une loi à seuil, la loi en puissance est plus commode à utiliser dans les formulations numériques car elle est continue et à dérivée continue.

2.2.4 Dépendance en champ magnétique de J_c et n

L'hypothèse d'une densité de courant critique J_c constante a été longuement utilisée pour le calcul des pertes AC dans les supraconducteurs de type-II et dans plusieurs modèles numériques. Pour les SHT, la diminution de J_c avec B est significative même pour des valeurs modérées de champ magnétique, et c'est une propriété importante des matériaux tels le BSCCO. D'ailleurs, les SHT possèdent une anisotropie intrinsèque (accentuée par la texturation), qui résulte d'une dégradation différente de J_c selon que le champ appliqué est parallèle ou perpendiculaire. Il semble donc nécessaire d'introduire des modèles qui décrivent la dépendance expérimentale de J_c avec le champ magnétique sous différentes directions.

Le premier modèle décrivant la dépendance en champ de J_c fut proposé par Y. Kim [Kim62] :

$$J_c(B) = \frac{J_{c0}}{1 + |B|/B_0} \quad (1.3)$$

où $|B|$ est l'amplitude de l'induction magnétique, B_0 est une constante et J_{c0} est la densité de courant critique sous champ nul. Ce modèle, basé sur des données expérimentales de Supraconducteurs à Basse Température (SBT), fut interprété par P. Anderson en termes de régime TAFC [And62], de sorte qu'on le connaisse comme le modèle de Kim-Anderson.

Le modèle de Kim-Anderson est utilisé pour représenter la dépendance de $J_c(B)$ et $n(B)$ des SHT en champs parallèle ou perpendiculaire. Cependant, il ne correspond pas toujours aux données expérimentales et ne prend pas en compte l'orientation du champ.

B. Dutoit et *al.* [Dut99] ont présenté un modèle qui décrit la dépendance angulaire de J_c en fonction du champ magnétique :

$$\frac{J_c(B, \varphi)}{J_{c0}} = \frac{1 + (B/B_1)^{p_1} \cdot [1 - f(\varphi, \xi)] + (B/B_3)^{p_3} \cdot f(\varphi, \xi)}{1 + (B/B_2)^{p_2} \cdot [1 - f(\varphi, \xi)] + [(B/B_4)^{p_4} + (B/B_5)^{p_5}] \cdot f(\varphi, \xi)} \quad (1.4)$$

Ce modèle est construit de telle sorte que les paramètres $\theta_0 = \{B_1, B_2, p_1, p_2\}$ sont liés à la direction parallèle du champ ($\varphi = 0$), et les autres $\theta_{\pi/2} = \{B_3, B_4, B_5, p_3, p_4, p_5\}$ à la direction perpendiculaire ($\varphi = \pi/2$), voir **Figure 2.2**. Les deux directions sont d'abord traitées séparément et les paramètres θ_0 et $\theta_{\pi/2}$ sont obtenus en minimisant l'erreur quadratique entre les données estimées et les mesures. Les deux directions sont ensuite reliées par une fonction de lissage $f(\varphi, \xi)$ dont la transition varie avec le paramètre ξ de la manière suivante :

$$f(\varphi, \xi) = \frac{1 - \cos(\alpha(\varphi, \xi))}{2} \quad (1.5)$$

$$\alpha(\varphi, \xi) = \arg\left(\frac{e^{j2\varphi} - \xi}{e^{j2\varphi} - 1/\xi} \cdot \frac{1 - 1/\xi}{1 - \xi}\right) = \arg\left(\frac{e^{j2\varphi} - \xi}{1 - \xi e^{j2\varphi}}\right) \quad (1.6)$$

Cette fonction déplace la transition vers des valeurs d'angles plus grandes ou plus faibles quand le paramètre ξ varie entre -1 et 1 , voir **Figure 2.3(a)**. La dépendance en champ magnétique de la densité de courant critique, pour différents angles d'application entre 0 et $\pi/2$, obtenue avec un tel modèle est représentée sur la **Figure 2.3(b)**.

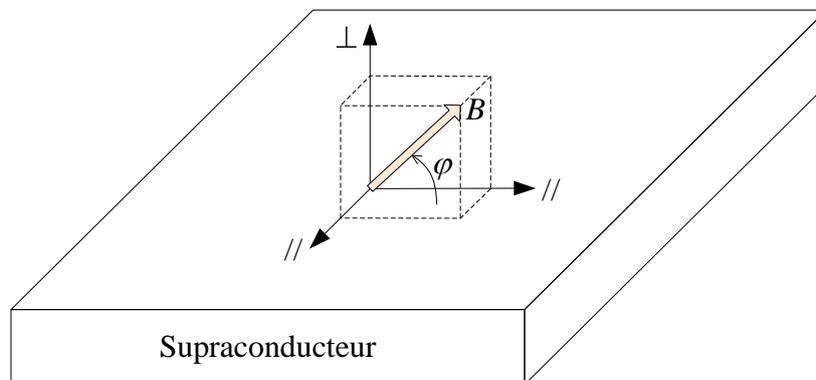


Figure 2.2 : Orientation du champ magnétique appliqué à un supraconducteur.

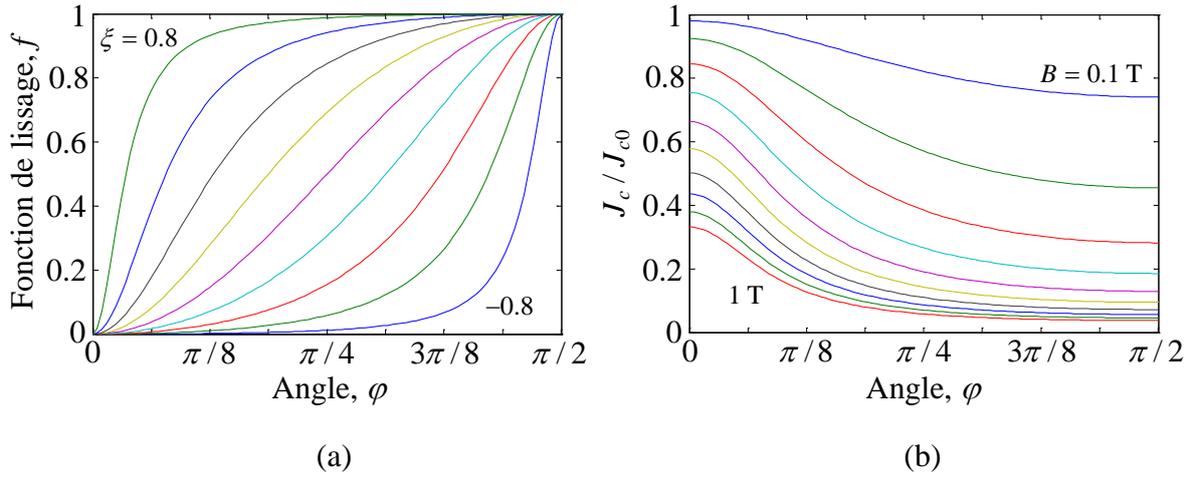


Figure 2.3 : (a) La fonction $f(\varphi, \xi)$ permet de déplacer la transition vers des angles plus ou moins grands à l'aide du paramètre $\xi \in (-1, 1)$. De gauche à droite : $\xi = 0.8, \dots, -0.8$. (b) Densité de courant critique normalisée J_c / J_{c0} en fonction de l'angle du champ magnétique appliqué d'amplitude comprise entre 0.1 et 1 T.

Ce modèle de $J_c(B, \varphi)$ concorde bien avec les mesures expérimentales [Dut99] mais il est assez compliqué et nécessite l'identification de 10 paramètres $\{B_1, \dots, B_5, p_1, \dots, p_5\}$ en plus de la fonction $f(\varphi, \xi)$. Récemment, un nouveau modèle plus simple décrivant la dépendance anisotropique de $J_c(\mathbf{B})$ et $n(\mathbf{B})$ fut proposé [Sta02a, Sta03] :

$$J_c(\mathbf{B}) = \frac{J_{c0}}{1 + \alpha_{//} + \alpha_{\perp} - \alpha_{//} e^{-B_{//}/B_0} - \alpha_{\perp} e^{-B_{\perp}/B_0}} \quad (1.7)$$

$$n(\mathbf{B}) = \frac{n_0}{1 + \beta_{//} + \beta_{\perp} - \beta_{//} e^{-B_{//}/B_0} - \beta_{\perp} e^{-B_{\perp}/B_0}} \quad (1.8)$$

où $B_{//}$ et B_{\perp} sont les valeurs absolues des composantes du champ magnétique, respectivement parallèle et perpendiculaire au plan a, b - du matériau SHT, voir Figure 2.2, $B_0 = 1$ T est une constante de normalisation et $\{\alpha, \beta\}$ sont des paramètres du modèle. Les paramètres J_{c0} et n_0 sont la densité de courant critique et l'exposant de la loi en puissance sous champ nul.

Même lorsqu'aucun champ magnétique extérieur n'est appliqué, lorsqu'on utilise la technique de caractérisation par transport de courant, les mesures de $J_c(\mathbf{B})$ et $n(\mathbf{B})$ incluent les effets du champ propre, qui ne peut être annulé. Cependant, la valeur maximale du champ propre observée sur un conducteur est généralement de quelques mT sur les bords et encore plus faible à l'intérieur, nous ferons donc l'hypothèse de négliger l'influence du champ propre dans $J_c(\mathbf{B})$ et $n(\mathbf{B})$.

2.2.5 Dépendance en température de J_c et n

Un fonctionnement du supraconducteur proche de ces caractéristiques critiques peut engendrer des dissipations thermiques non négligeables et une dégradation de ses performances. Par conséquent, il est important d'introduire un modèle décrivant la dépendance expérimentale de J_c et n avec la température.

Deux modèles sont couramment utilisés pour décrire la dépendance en température de la densité de courant critique [Sav98, Ohm01, Wen01, Bræ02, Dur04]. Le premier, issu de la théorie de Ginsburg-Landau, décrit la densité de courant critique comme étant proportionnelle à $(1-T/T_c)^{3/2}$. Le second, appelé dépendance en température d'Ambegaokar-Baratoff, est observé essentiellement dans les supraconducteurs granulaires [Amb63]. Dans ce modèle, la densité de courant critique est proportionnelle $(1-T/T_c)$.

J. Clem *et al.* [Cle87] ont montré que certains supraconducteurs granulaires possédaient une dépendance en température du type Ambegaokar-Baratoff à basse température puis montraient une intersection avec la dépendance de Ginsburg-Landau pour une température proche de T_c .

Finalement, nous avons choisi d'utiliser l'expression générale suivante pour modéliser la dépendance en température de la densité de courant critique J_c :

$$J_c(T) = J_c(T_0) \times \left(\frac{1-T/T_c}{1-T_0/T_c} \right)^\alpha \quad \text{pour } T_0 \leq T \leq T_c \quad (1.9)$$

où α est un paramètre permettant d'adapter la fonction aux données expérimentales, T_0 est une constante (généralement la température de l'enceinte cryogénique) et $J_c(T_0)$ est la valeur de la densité de courant critique obtenue pour $T = T_0$.

Comme nous l'avons vu dans § 1.5.3, la dépendance en température du paramètre n s'écrit :

$$n(T) = U_0 / k_B T \quad (1.10)$$

où U_0 est l'énergie d'ancrage des vortex. Pour faciliter l'identification des paramètres, on réécrit cette expression sous la forme :

$$n(T) = n(T_0) \times T_0 / T \quad (1.11)$$

Finalement, en faisant l'hypothèse que la dépendance en champ magnétique des paramètres J_c et n du supraconducteur ne dépendent pas de la température et réciproquement, on obtient les expressions de $J_c(B, T)$ et $n(B, T)$ en multipliant les deux dépendances, soit :

$$J_c(B, T) = J_c(0, T_0) \times \frac{J_c(B)}{J_{c0}} \times \frac{J_c(T)}{J_c(T_0)} \text{ pour } T_0 \leq T \leq T_c \quad (1.12)$$

$$n(B, T) = n(0, T_0) \times \frac{n(B)}{n_0} \times \frac{n(T)}{n(T_0)} \quad (1.13)$$

2.3 La méthode des différences finies

La Méthode des Différences Finies (MDF) est un outil d'analyse numérique qui permet la résolution d'EDP (Equations aux Dérivées Partielles). On peut, par exemple, résoudre une EDP qui implique une fonction $u(x)$, définie pour tout x d'un domaine, en respectant des conditions aux limites données. Le but de cette méthode est de déterminer une approximation de la fonction $u(x)$.

Dans la méthode des différences finies, l'opérateur différentiel $u'(x)$ est discrétisé ainsi :

$$u'(x) \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.14)$$

avec Δx très petit.

De la même manière, l'opérateur associé aux dérivées secondes s'écrit :

$$u''(x) \approx \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (1.15)$$

Cette méthode requiert la discrétisation du problème, c'est-à-dire que le domaine est remplacé par un maillage. Substituer les opérateurs différentiels dans les EDP en chaque point du maillage donne un système d'équations qui peut être résolu algébriquement. Ainsi, les quantités physiques peuvent être calculées localement. Pour les supraconducteurs, l'ensemble des équations différentielles est donné par les équations de Maxwell, écrites de manière à prendre en compte la relation non linéaire $\mathbf{E} - \mathbf{J}$ des matériaux SHT.

La MDF est simple à formuler et peut aisément être étendue à des problèmes à deux ou trois dimensions. En outre, la MDF est relativement facile à comprendre et à implanter pour résoudre les EDP rencontrées dans des problèmes à géométries simples. L'inconvénient principal de cette méthode semble être son incapacité à manipuler efficacement la solution de problèmes à géométries complexes, arbitrairement formés. En effet, les difficultés d'interpolation entre les frontières et les points intérieurs nuisent au développement d'expressions en différences finies des nœuds proches des frontières.

Au cours de cette thèse, j'ai développé des programmes en C++ basés sur la MDF. Les équations couplées magnétothermiques, qui régissent le comportement des SHT, ont ainsi pu être résolues pour des problèmes 1D et 2D.

2.3.1 Le domaine d'étude

La première étape consiste à définir le domaine d'étude. Contrairement aux autres domaines de la physique (par exemple, en mécanique), les quantités physiques de l'électromagnétisme ne sont pas nulles dans l'air ou le vide, par conséquent il est nécessaire de « modéliser l'infini ». La MDF repose sur le maillage complet du domaine étudié, ce qui rend impossible la modélisation de tout l'espace. La solution consiste à simuler l'infini par une « boîte » suffisamment grande, de telle sorte que l'approximation de l'infini par une frontière fermée et distante rende négligeable l'erreur commise sur la valeur de la fonction calculée. Il faut cependant trouver un compromis entre la taille du maillage (qui va déterminer le temps de calcul) et l'erreur désirée. L'éventuelle présence de symétries et/ou de périodicités doit être prise en considération lors de la définition des propriétés du domaine.

2.3.2 Le modèle physique

2.3.2.1 Les formulations en électromagnétique

Différentes formulations peuvent être utilisées pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine simulé, voir [Figure 2.4](#), et calculer les variables électromagnétiques souhaitées. Trois formulations couramment utilisées vont être à présent développées.

□ La formulation $\mathbf{T}^* - \Phi$ est basée sur le potentiel vecteur courant \mathbf{T}^* et le potentiel scalaire magnétique Φ . La densité de courant \mathbf{J} dans les régions supraconductrices est alors définie comme suit :

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}^* \text{ dans } \Omega_s \quad (1.16)$$

Le champ magnétique s'exprime alors sous la forme :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}^* - \nabla \Phi \text{ dans } \Omega_s \quad (1.17)$$

En utilisant l'équation constitutive $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, les lois de Faraday et de Gauss doivent être satisfaites, ainsi :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 (\mathbf{T}^* - \nabla \Phi)) = 0 \text{ dans } \Omega_s \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\mu_0 (\mathbf{T}^* - \nabla \Phi)) = 0 \text{ dans } \Omega_s \quad (1.19)$$

avec
$$\mathbf{E} = E_c \left(\frac{\|\mathbf{J}\|}{J_c} \right)^n \frac{\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|} \text{ dans } \Omega_s \quad (1.20)$$

Pour assurer l'unicité de la solution des équations (1.18)-(1.19) et ainsi améliorer la convergence, une condition de jauge $\nabla \cdot \mathbf{T}^* = 0$ doit également être ajoutée [Bir93, Meu98].

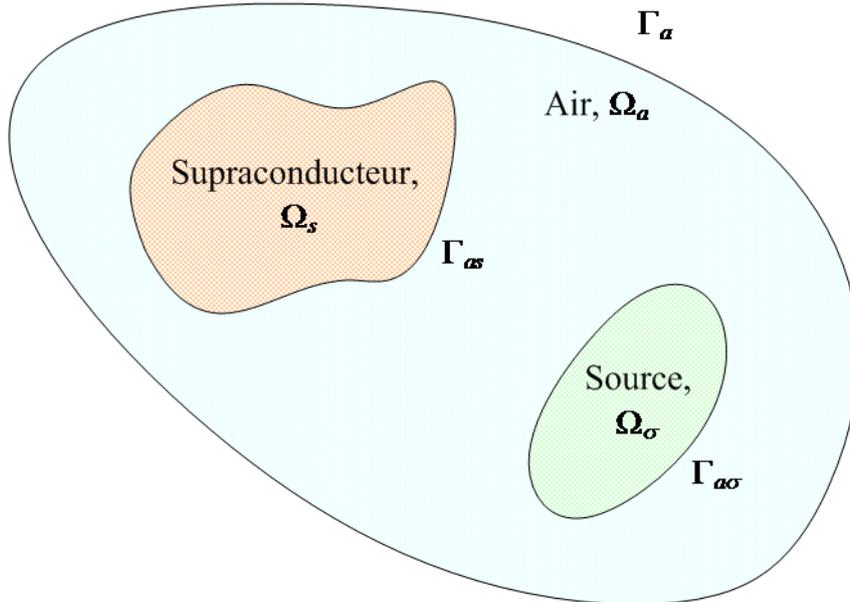


Figure 2.4 : Représentation schématique du domaine d'étude.

Dans l'air, il suffit de résoudre une équation à une inconnue :

$$\nabla \cdot (\mu_0 \nabla \Phi) = 0 \text{ dans } \Omega_a \tag{1.21}$$

Pour un problème 2D, la formulation $\mathbf{T}^* - \Phi$ entraîne le calcul de 3 inconnues (T_x^*, T_y^*, Φ) dans le supraconducteur et d'une inconnue dans l'air (Φ). Grâce à cette formulation, le passage en 3D est facilité par l'ajout d'une seule inconnue supplémentaire dans le supraconducteur (T_z^*). De plus, cette formulation utilise une loi $\mathbf{E}(\mathbf{J})$, ce qui améliore la convergence.

Afin d'expliquer la meilleure convergence de la loi $\mathbf{E}(\mathbf{J})$, un exemple unidimensionnel de recherche de zéro d'une fonction de la forme $E(J) - cste$ et $J(E) - cste'$ est représenté sur la Figure 2.5. En partant d'une condition initiale quelconque, et sachant que la dérivée de la fonction est utilisée pour le calcul de l'incrément de solution, on constate qu'une loi $\mathbf{E}(\mathbf{J})$ convergera beaucoup plus facilement qu'une loi $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ [Vin00].

▫ La formulation $\mathbf{A} - V$ utilise le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (définie par $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) et le potentiel scalaire électrique V . En introduisant \mathbf{A} dans la loi de Faraday, le champ électrique est alors exprimé ainsi :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \tag{1.22}$$

où ∇V est un gradient de tension connu permettant de représenter une source de tension.

Dans ce cas, l'équation générale à résoudre découle du théorème d'Ampère :

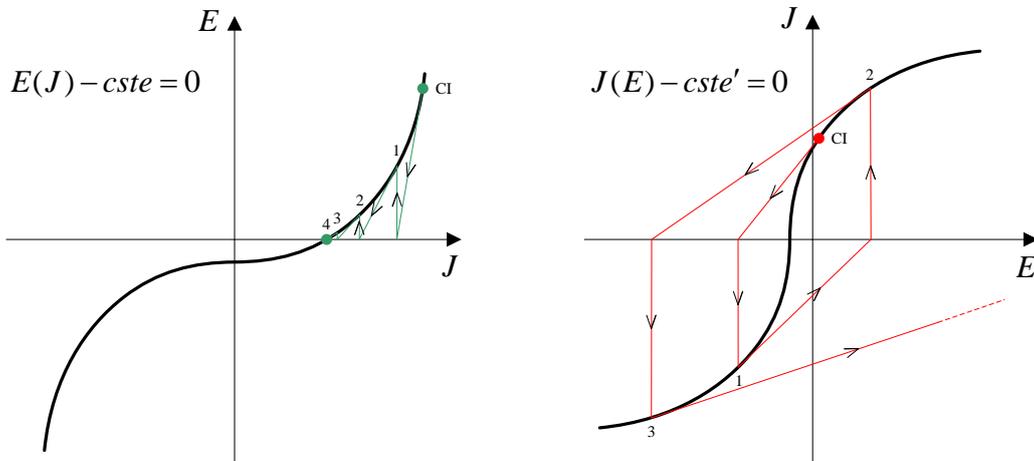


Figure 2.5 : Convergence des lois $E(J)$ et $J(E)$.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \quad (1.23)$$

Dans les régions supraconductrices, σ est une conductivité non linéaire décrivant la transition de l'état supraconducteur à l'état normal :

$$\sigma = \frac{\|\mathbf{J}(\mathbf{E})\|}{\|\mathbf{E}\|} = J_c \frac{\|\mathbf{E}\|^{1/n-1}}{E_c^{1/n}} \text{ dans } \Omega_s \quad (1.24)$$

Dans l'air, la conductivité σ est nulle et l'équation (1.23) se simplifie :

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \text{ dans } \Omega_a \quad (1.25)$$

Le principal avantage de la formulation $\mathbf{A} - V$ est de n'utiliser, pour un problème 2D, qu'une seule inconnue (A_z) dans l'air comme dans le supraconducteur. Par contre, elle ne présente aucun intérêt en 3D car 3 inconnues (A_x, A_y, A_z) doivent être calculées dans l'air au lieu d'une seule (Φ) pour la formulation $\mathbf{T}^* - \Phi$. De plus, sa convergence est moins bonne que la formulation $\mathbf{T}^* - \Phi$ car elle utilise une loi $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ et non $\mathbf{E}(\mathbf{J})$. Plus de détails sur ces deux formulations et leurs variantes peuvent être trouvés dans [Gri05, Luo97, Sta02b, Vin00].

▫ Pour l'instant, nous souhaitons restreindre notre étude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les SHT à des problèmes bidimensionnels. C'est pourquoi nous avons choisi la formulation $\mathbf{E} - \mathbf{J}$ pour notre modélisation. En effet, elle possède en 2D les avantages combinés des deux formulations précédentes. En d'autres termes, une seule inconnue est nécessaire dans l'air comme dans le supraconducteur et la convergence est

Tableau 2.1 : Comparaison des différentes formulations.

Formulation	$\mathbf{T}^* - \Phi$	$\mathbf{A} - V$	$\mathbf{E} - \mathbf{J}$
Convergence	Bonne	Mauvaise	Bonne
Inconnues dans l'air en 2D	$\Phi \rightarrow 1$	$A_z \rightarrow 1$	$E_z \rightarrow 1$
Dans le supraconducteur	$T_x^*, T_y^*, \Phi \rightarrow 3$		
Inconnues dans l'air en 3D	$\Phi \rightarrow 1$	$A_x, A_y, A_z \rightarrow 3$	$E_x, E_y, E_z \rightarrow 3$
Dans le supraconducteur	$T_x^*, T_y^*, T_z^*, \Phi \rightarrow 4$		

accrue grâce à l'utilisation d'une loi $\mathbf{E}(\mathbf{J})$.

La formulation $\mathbf{E}-\mathbf{J}$ découle directement des équations de Maxwell et des équations constitutives du matériau SHT, qui sont :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{E} = E_c \left(\frac{\|\mathbf{J}\|}{J_c} \right)^n \frac{\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|} \text{ dans } \Omega_s \quad (1.27)$$

En combinant les lois de Faraday et d'Ampère à la relation $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, l'équation générale à résoudre dans le supraconducteur est obtenue :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \text{ dans } \Omega_s \quad (1.28)$$

Dans l'air, $\mathbf{J} = 0$ et il suffit de résoudre :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega_a \quad (1.29)$$

2.3.2.2 Les équations thermiques

Les paramètres J_c et n des SHT varient de façon notable en fonction de la température (voir [Figure 3.5](#) dans § 3.2.3). Connaître la distribution exacte de la température au sein du matériau permet d'estimer précisément les grandeurs magnétiques locales. Les phénomènes thermiques, qui existent lorsqu'un courant et/ou un champ magnétique sont appliqués au SHT, sont régis par l'équation de diffusion de la chaleur :

$$\nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) - \gamma C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} + p_v = 0 \quad (1.30)$$

où $\lambda(T)$, γ , $C_p(T)$ sont respectivement la conductivité thermique (en $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$), la masse volumique (en kg/m^3) et la chaleur spécifique du matériau (en $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$), p_v est une puissance volumique (en W/m^3).

L'expression de l'ensemble des pertes dissipées dans le supraconducteur est donnée par :

$$p_v = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (1.31)$$

La résolution de l'équation (1.30) permet ainsi de connaître la température en tout point du supraconducteur.

2.3.3 Exemple d'équations à résoudre (problème 2D-cartésien)

Pour faciliter la représentation, nous avons choisi d'étudier un problème de type 2D-cartésien, voir [Figure 2.6](#). Il s'agit d'un supraconducteur de section rectangulaire, infiniment long dans la direction z , et soumis à un champ magnétique extérieur variable d'orientation quelconque dans le plan (x, y) .

Pour s'opposer à la variation du champ magnétique, des courants vont être induits dans le supraconducteur. Ces courants ne peuvent circuler que suivant la direction z . Par conséquent, les vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{J} , \mathbf{B} s'expriment de la manière suivante dans la base orthonormée (x, y, z) :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z(x, y) \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_z(x, y) \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x(x, y) \\ B_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Pour ne pas surcharger inutilement l'écriture des équations, les notations $E = E_z(x, y)$, $J = J_z(x, y)$, $B_x = B_x(x, y)$ et $B_y = B_y(x, y)$ sont adoptées.

Ainsi, dans le supraconducteur, régi par la loi de comportement $\mathbf{E}(\mathbf{J})$ non linéaire (1.27), il faut résoudre :

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> <p>dans Ω_s,</p> </div> <div style="flex: 2; text-align: center;"> $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} = 0$ </div> <div style="flex: 0.5; text-align: right;"> <p>(1.33)</p> </div> </div>

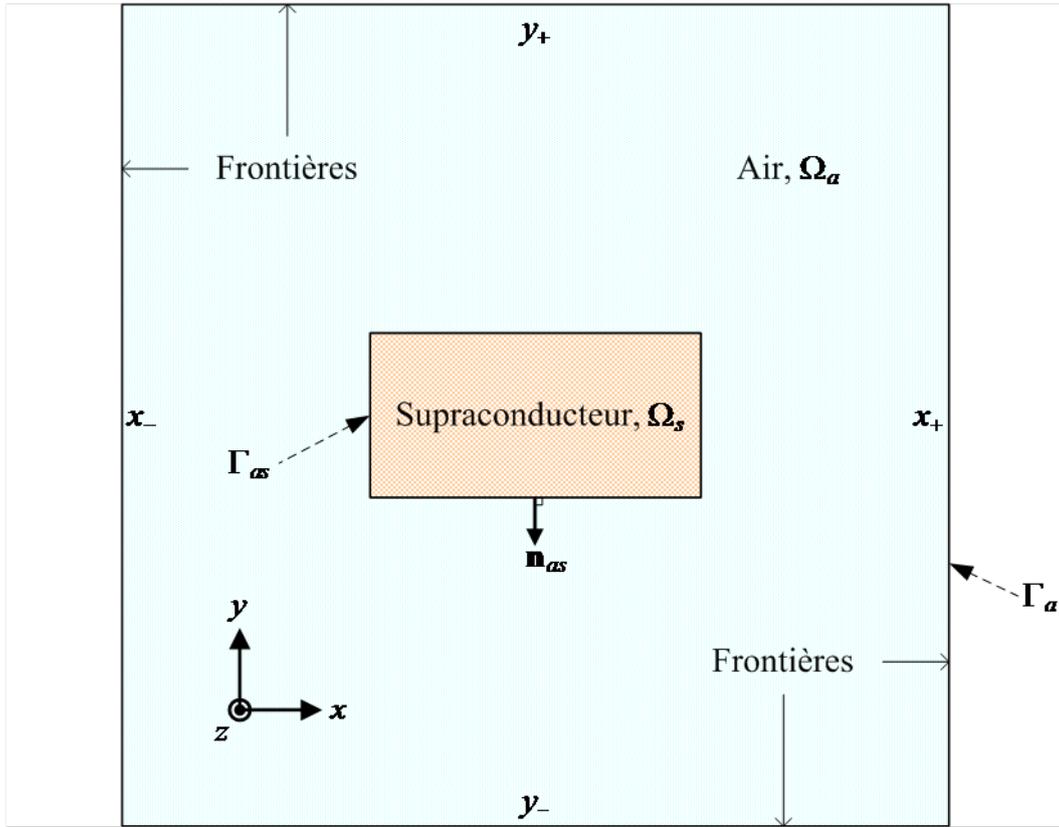


Figure 2.6 : Illustration du problème 2D-cartésien traité en exemple.

Dans l'air, $\mathbf{J} = 0$ et l'équation à résoudre est linéaire :

$$\text{dans } \Omega_a, \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0 \quad (1.34)$$

Les équations (1.33) et (1.34) ne peuvent pas être utilisées sur la frontière Γ_{as} qui sépare l'air Ω_a du supraconducteur Ω_s . Une condition de passage est nécessaire. Etant donné que le courant surfacique qui circule sur la frontière du supraconducteur Γ_{as} est négligeable, la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique au passage de cette frontière est assurée. Si \mathbf{n}_{as} est la normale orientée vers l'extérieur de la surface Γ_{as} telle que représentée Figure 2.6, alors :

$$\text{sur } \Gamma_{as}, \quad (\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_s) \times \mathbf{n}_{as} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_s = 0 \text{ pour } x = Cste \\ \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_a - \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_s = 0 \text{ pour } y = Cste \end{cases} \quad (1.35)$$

Le champ magnétique extérieur est imposé en appliquant des valeurs appropriées de champ électrique \mathbf{E} sur la frontière Γ_a du domaine, soit :

$$\text{sur } \Gamma_a, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \text{ pour } x = Cste \\ \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \text{ pour } y = Cste \end{cases} \quad (1.36)$$

Pour le problème présenté **Figure 2.6**, l'équation à résoudre pour obtenir la température T au sein du supraconducteur s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{dans } \Omega_s, \quad & \nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) - \gamma C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\partial \lambda(T)}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(T)}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda(T) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \gamma C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} + EJ = 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

Les échanges de chaleur entre le supraconducteur et le fluide cryogénique sont considérés comme étant dus essentiellement à la convection. Ainsi, sur la frontière du supraconducteur :

$$\text{sur } \Gamma_{as}, \quad -\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}_{as} = h(T - T_\infty) \quad (1.38)$$

où h est le coefficient de convection du fluide cryogénique exprimé en $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ et T_∞ est la température de ce même fluide. L'équation (1.38) permet également d'imposer la température T_∞ sur le bord du supraconducteur et la prise en compte de conditions adiabatiques en faisant respectivement tendre h vers ∞ et 0 .

Partout en dehors du supraconducteur la température est constante et égale à la température du fluide cryogénique T_∞ :

$$\text{dans } \Omega_a \text{ et sur } \Gamma_a, \quad T = T_\infty \quad (1.39)$$

Ainsi, le système à résoudre comporte autant d'équations que d'inconnues. Il faut toutefois lui adjoindre les conditions initiales qui, lorsque le matériau est initialement vierge et complètement refroidi, s'écrivent :

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{J} = 0, \quad T = T_\infty \quad (1.40)$$

2.3.4 Discrétisation des équations

Une fois les EDP obtenues dans chaque région du domaine, il reste encore à les discrétiser pour pouvoir les résoudre. C'est ici qu'intervient la MDF présentée dans § 2.3. Le **Tableau 2.2** récapitule toutes les équations de la section précédente (1.33) à (1.40) et la discrétisation correspondante. Les indices i, j, k d'une variable indiquent qu'il s'agit de la valeur de cette variable à un point du maillage d'abscisse x_i , d'ordonnée y_j , à l'instant t_k . Les indices $i \pm 1, j \pm 1, k - 1$ se réfèrent respectivement à un point d'abscisse $x_i \pm \Delta x$, d'ordonnée $y_j \pm \Delta y$ à l'instant $t_k - \Delta t$.

2.4 Résolution du problème

2.4.1 Algorithme de Newton-Raphson

Pour un problème non linéaire, ce qui est le cas des matériaux SHT, un système d'équations algébriques non linéaires doit être résolu et un certain nombre d'itérations est nécessaire afin d'obtenir la solution. Il existe différents algorithmes itératifs, parmi lesquels l'algorithme de *Newton-Raphson* est le plus usité [Bin92, Ozi94].

Bien souvent, il faut trouver les zéros de N fonctions F_i à N variables u_i :

$$F_i(u_1, u_2, \dots, u_N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.41)$$

Si \mathbf{u} est le vecteur de l'ensemble des variables u_i et \mathbf{F} le vecteur de l'ensemble des fonctions F_i . Alors, au voisinage de \mathbf{u} , chaque fonction F_i peut être développée en série de Taylor :

$$F_i(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) = F_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \delta u_j + O(\delta\mathbf{u}^2) \quad (1.42)$$

La matrice des dérivées partielles qui apparaît dans l'équation (1.42) est la matrice *Jacobienne* \mathcal{DF} :

$$\mathcal{DF}_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \quad (1.43)$$

Tableau 2.2 : Discrétisation des équations (2.33) à (2.40).

$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} = 0$	$\frac{E_{i+1,j,k} - 2E_{i,j,k} + E_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{E_{i,j+1,k} - 2E_{i,j,k} + E_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} - \mu_0 \frac{J_{i,j,k} - J_{i,j,k-1}}{\Delta t} = 0$
$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$	$\frac{E_{i+1,j,k} - 2E_{i,j,k} + E_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{E_{i,j+1,k} - 2E_{i,j,k} + E_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} = 0$
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial x} \Big _{x_a} - \frac{\partial E}{\partial x} \Big _{x_s} = 0 \text{ pour } x = \text{Cste} \\ \frac{\partial E}{\partial y} \Big _{y_a} - \frac{\partial E}{\partial y} \Big _{y_s} = 0 \text{ pour } y = \text{Cste} \end{array} \right.$ <p>Conditions de passage</p>	$\text{en } x_-, \frac{E_{i,j,k} - E_{i-1,j,k}}{\Delta x} - \frac{E_{i+1,j,k} - E_{i,j,k}}{\Delta x} = 0$ $\text{en } x_+, \frac{E_{i+1,j,k} - E_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{E_{i,j,k} - E_{i-1,j,k}}{\Delta x} = 0$ $\text{en } y_-, \frac{E_{i,j,k} - E_{i,j-1,k}}{\Delta y} - \frac{E_{i,j+1,k} - E_{i,j,k}}{\Delta y} = 0$ $\text{en } y_+, \frac{E_{i,j+1,k} - E_{i,j,k}}{\Delta y} - \frac{E_{i,j,k} - E_{i,j-1,k}}{\Delta y} = 0$
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \text{ pour } x = \text{Cste} \\ \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \text{ pour } y = \text{Cste} \end{array} \right.$ <p>Conditions aux limites</p>	$\text{en } x_-, \frac{E_{i+1,j,k} - E_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{dB_y}{dt} = 0$ $\text{en } x_+, \frac{E_{i,j,k} - E_{i-1,j,k}}{\Delta x} - \frac{dB_y}{dt} = 0$ $\text{en } y_-, \frac{E_{i,j+1,k} - E_{i,j,k}}{\Delta y} + \frac{dB_x}{dt} = 0$ $\text{en } y_+, \frac{E_{i,j,k} - E_{i,j-1,k}}{\Delta y} + \frac{dB_x}{dt} = 0$
$\frac{\partial \lambda(T)}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(T)}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda(T) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \gamma C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} + EJ = 0$	$\left(\frac{\lambda_{i+1,j,k} - \lambda_{i,j,k}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{\lambda_{i,j+1,k} - \lambda_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \right) \left(\frac{T_{i,j,k} - T_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \right) + \lambda_{i,j,k} \left(\frac{T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} \right) - \gamma C_{p,i,j,k} \frac{T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1}}{\Delta t} + E_{i,j,k} J_{i,j,k} = 0$
$-\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}_{\text{as}} = h(T - T_\infty)$	$\text{en } x_-, \lambda_{i,j,k} \left(\frac{T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k}}{\Delta x} \right) = h(T_{i,j,k} - T_\infty)$ $\text{en } x_+, -\lambda_{i,j,k} \left(\frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{\Delta x} \right) = h(T_{i,j,k} - T_\infty)$ $\text{en } y_-, \lambda_{i,j,k} \left(\frac{T_{i,j,k} - T_{i,j-1,k}}{\Delta y} \right) = h(T_{i,j,k} - T_\infty)$ $\text{en } y_+, -\lambda_{i,j,k} \left(\frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{\Delta y} \right) = h(T_{i,j,k} - T_\infty)$

En notation matricielle, l'équation (1.42) s'écrit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathcal{DF} \cdot \delta\mathbf{u} + O(\delta\mathbf{u}^2) \quad (1.44)$$

En négligeant les termes d'ordre $\delta\mathbf{u}^2$ et supérieur et en utilisant l'équation $\mathbf{F}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) = 0$, on obtient un système d'équations linéaires pour les incréments $\delta\mathbf{u}$ qui rapprochent simultanément chaque fonction de zéro, à savoir :

$$\mathcal{DF}_{\text{avant}} \cdot \delta\mathbf{u} = -\mathbf{F}(\mathbf{u}_{\text{avant}}) \quad (1.45)$$

L'équation matricielle (1.45) peut, par exemple, être résolue par décomposition LU ou une méthode de type *Gradient Conjugué*. Les incréments sont ensuite ajoutés au vecteur solution de telle sorte que :

$$\mathbf{u}_{\text{après}} = \mathbf{u}_{\text{avant}} + \delta\mathbf{u} \quad (1.46)$$

et le processus est réitéré jusqu'à la convergence.

2.4.2 Système d'équations linéaires

L'algorithme de Newton-Raphson entraîne le calcul d'incrément $\delta\mathbf{u} = -\mathcal{DF}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u})$ plusieurs fois au cours d'un pas de temps. La matrice Jacobienne \mathcal{DF} obtenue par la méthode des différences finies est souvent creuse. Le calcul de \mathcal{DF}^{-1} par des méthodes classiques, comme la méthode du pivot de Gauss ou des cofacteurs, engendre un temps de calcul très important. Or, il existe des méthodes spécifiques bien adaptées à la résolution de systèmes linéaires creux [Pre92]. De plus, la mémoire utile peut être réduite au minimum en ne travaillant qu'avec les diagonales non nulles de la matrice.

Pour les problèmes 1D, \mathcal{DF} est une matrice tridiagonale et nous avons choisi de calculer directement \mathcal{DF}^{-1} par la méthode de *Crout*, variante de la méthode de décomposition LU . Pour les problèmes 2D, la matrice \mathcal{DF} est diagonale par bandes et une résolution indirecte utilisant une méthode de minimisation est plus intéressante. En effet, résoudre (1.45) équivaut à minimiser la fonction :

$$f(\delta\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \delta\mathbf{u} \cdot \mathcal{DF} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} \quad (1.47)$$

La méthode du *Bi-Gradient Conjugué* a été retenue pour minimiser cette fonction car

elle convient bien lorsque la matrice Jacobienne \mathcal{DF} n'est ni symétrique ni définie positive, contrairement à la méthode du Gradient Conjugué. Pour plus d'informations sur la méthode du *Bi-Gradient Conjugué*, un algorithme et le code de calcul en C correspondant sont donnés dans [Pre92].

2.4.3 Couplage magnétothermique

Dans cette partie, l'objectif est de montrer comment résoudre le système couplé magnétothermique régissant le comportement d'un supraconducteur :

$$\text{dans } \Omega_s, \begin{cases} \nabla \times \nabla \times \left(E_c \left(\frac{\|\mathbf{J}\|}{J_c(T, \mathbf{B})} \right)^{n(T, \mathbf{B})} \frac{\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|} \right) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) - \gamma C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

Lorsqu'on souhaite réaliser le couplage thermique, la température T est introduite dans l'équation magnétique à travers les paramètres $J_c(T, \mathbf{B})$ et $n(T, \mathbf{B})$ du supraconducteur. La distribution de température est quant à elle calculée en tenant compte des pertes $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ dissipée dans le matériau.

Il existe deux types de couplage :

- Le couplage fort correspond à une résolution simultanée des équations. Les variables magnétiques et thermiques sont échangées plusieurs fois entre les codes de calcul lors d'un même pas de temps jusqu'à obtenir la solution du système. Si d_m et d_t sont respectivement le nombre d'inconnues magnétiques et thermiques, alors le couplage fort nécessitera une matrice de taille $(d_m + d_t)^2$ soit $d_m^2 + 2d_m d_t + d_t^2$.

- Le couplage faible est plus simple à mettre en œuvre puisque l'échange des informations est unilatéral au cours d'un pas de temps. Il s'applique bien au couplage thermique car les constantes de temps sont généralement grandes comparées aux constantes de temps électriques. Par exemple, en utilisant les valeurs données dans le **Tableau 3.1**, on obtient une diffusivité thermique de $1.36 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$ contre $3.13 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ pour la diffusivité électrique avec $\sigma = J_c / E_c$. Le couplage faible permet également un gain de mémoire par rapport au couplage fort car la matrice à résoudre, de taille $d_m^2 + d_t^2$, est plus petite.

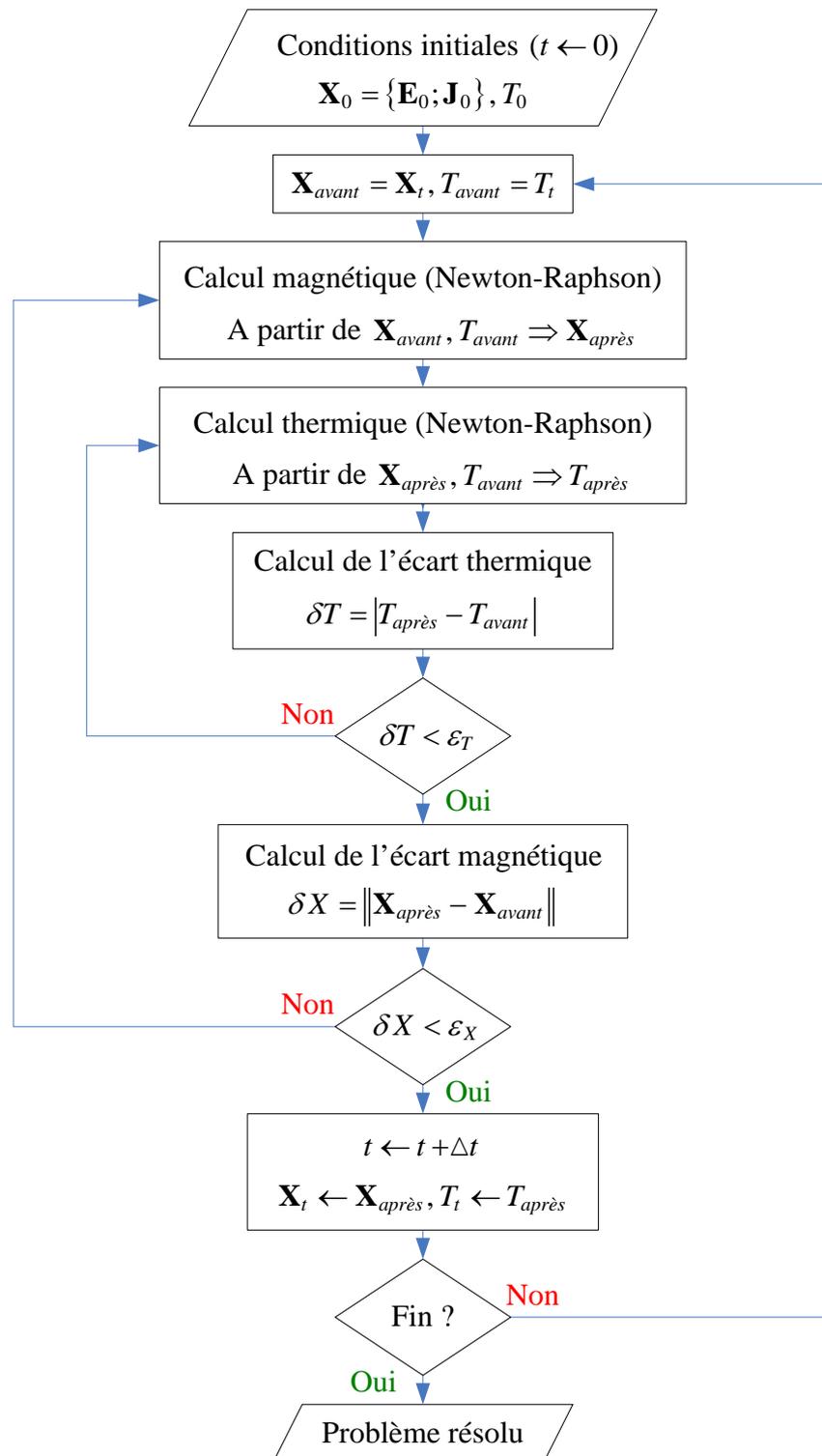


Figure 2.7 : Organigramme utilisé pour calculer la solution du système couplé magnétothermique au sein d'un supraconducteur.

Le couplage faible a donc été retenu et l'organigramme utilisé pour trouver la solution du système (1.48) est représenté sur la [Figure 2.7](#). Afin d'améliorer la précision des résultats de simulation obtenus, la résolution thermique s'effectue après chaque itération du « Newton-Raphson magnétique ». Le temps de calcul n'est alors que très légèrement augmenté par cette modification, car la résolution thermique converge plus rapidement, environ 50 fois plus vite que la résolution magnétique.

2.5 Validation du calcul magnétique à l'aide de FLUX3D®

Une fois le développement de notre outil de calcul terminé, nous l'avons validé sur des problèmes unidimensionnels où une solution analytique pouvait être obtenue à partir du modèle de Bean. Pour étendre la validité de notre outil à des problèmes bidimensionnels, nous avons souhaité comparer nos résultats à ceux obtenus avec un logiciel de calcul de champ.

Ne possédant pas de logiciel adéquat dans notre laboratoire, nous avons saisi l'opportunité d'un stage d'une semaine au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (LEG), pour découvrir et utiliser le logiciel de calcul par éléments finis FLUX3D®. Il s'agit d'un logiciel de calcul en électromagnétisme commercialisé par la société CEDRAT et développé en collaboration avec le LEG. Plusieurs auteurs l'utilisent déjà pour la modélisation des supraconducteurs à haute température [[Sta02b](#), [Dur04](#), [Gri05](#)].

Une fois la prise en main du logiciel effectuée, un problème 2D-axisymétrique a été abordé. Il s'agissait de calculer la répartition du courant dans un tube supraconducteur soumis à un champ magnétique axial variable $B_z(t) = B_{\max} \sin(100\pi \times t)$ avec $B_{\max} = 1.26$ mT. Pour modéliser le supraconducteur, nous avons choisi des paramètres issus de précédentes mesures sur une amenée de courant Bi-2223 soit $J_c = 5 \times 10^6$ A/m² et $n = 13$. Grâce aux symétries, il reste seulement un quart du domaine à simuler, comme le montre la [Figure 2.8](#).

La discrétisation en différences finies est effectuée avec un pas d'espace $\Delta r = \Delta z = 5 \times 10^{-5}$ m. Le maillage du matériau supraconducteur est donc formé de 20 points suivant l'axe r et de 50 points suivant l'axe z . Pour FLUX3D®, nous avons utilisé un maillage par des rectangles. La [Figure 2.9](#) montre un agrandissement du maillage de la région supraconductrice. Un pas de temps Δt de 10^{-5} s, identique pour les deux méthodes, a été

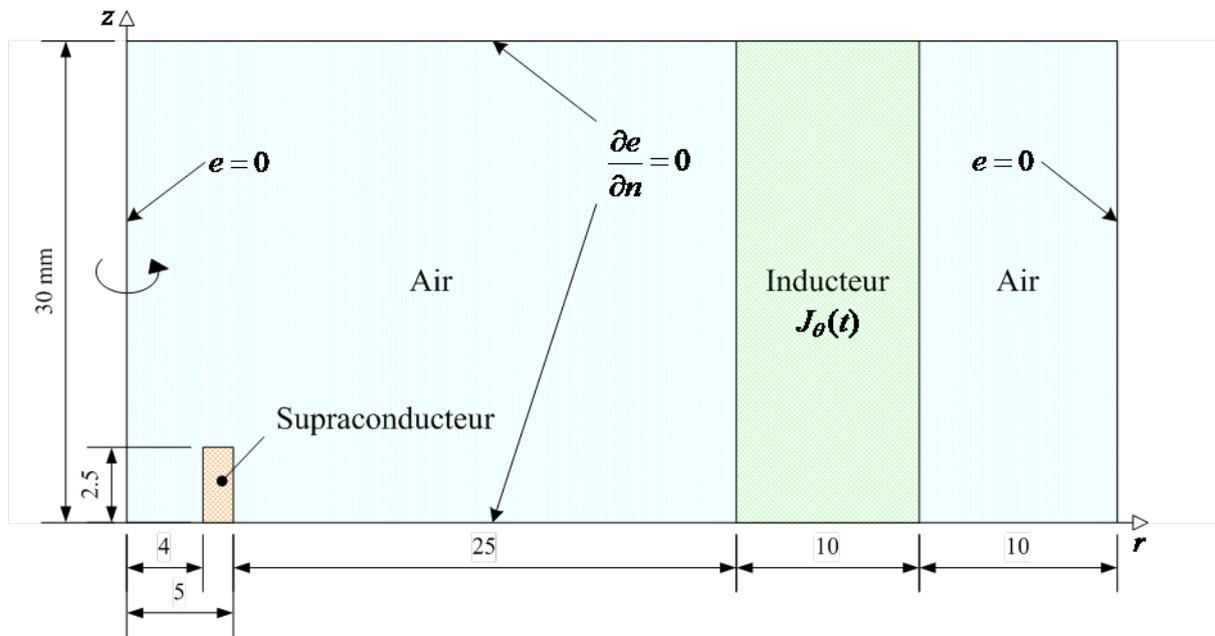


Figure 2.8 : Problème 2D-axisymétrique : un tube supraconducteur est soumis à un champ magnétique axial (suivant z) variable. Compte-tenu des symétries, seul un quart du domaine est nécessaire à la modélisation.

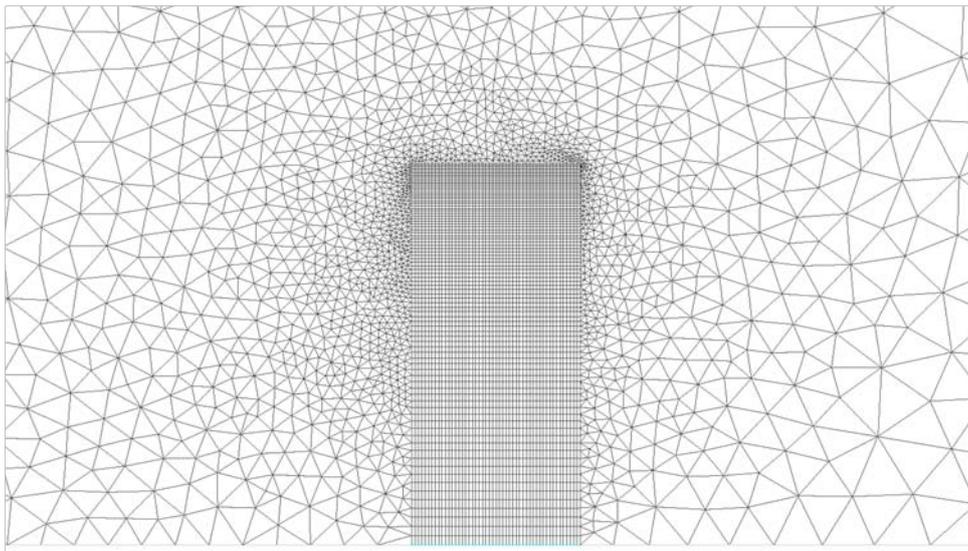


Figure 2.9 : Maillage du supraconducteur sous FLUX3D®.

choisi pour assurer une bonne convergence.

Afin d'éviter certains problèmes de stabilité et de convergence du solveur de FLUX3D®, qui apparaissent notamment pour un matériau non-linéaire lorsque la résistivité tend vers 0, l'utilisateur doit définir arbitrairement un paramètre supplémentaire ρ_0 , appelé résistivité résiduelle, qui est introduit comme suit :

$$\rho(E) = \rho_0 + E \left(J_c \left(\frac{|E|}{E_c} \right)^{1/n} \right)^{-1} \quad (1.49)$$

Une valeur trop grande de résistivité résiduelle aboutit à une surestimation des pertes, tandis qu'une valeur trop faible crée des oscillations numériques dans le calcul de la densité de courant. Ces oscillations peuvent être atténuées en affinant le maillage au dépend du temps de calcul de l'ordinateur. Nous avons choisi une valeur faible de $\rho_0 = 10^{-14} \Omega \cdot m$ pour ne pas aboutir à des résultats erronés au risque d'obtenir quelques oscillations numériques.

La [Figure 2.10](#) montre la distribution et des profils de densité de courant dans le supraconducteur à 20 ms, soit au bout d'une période, lorsque le champ magnétique appliqué est nul. Une pénétration partielle de la densité de courant est observée. L'évolution des pertes instantanées dans le supraconducteur au cours de la première période est également représentée [Figure 2.11](#). Pour finir, la [Figure 2.12](#) présente différents profils d'induction magnétique à 15 ms lorsque le champ magnétique appliqué est minimal. L'amplitude du champ appliqué étant inférieure à la valeur du champ de pénétration, le champ magnétique est quasi nul à l'intérieur du tube supraconducteur, voir [Figure 2.12\(b\)](#). En effet, les courants induits dans le supraconducteur empêchent la pénétration du champ : il y a blindage magnétique.

Les grandeurs physiques telles que l'induction magnétique, la densité de courant et les pertes, ont été comparées sur un problème de courants induits dans un tube supraconducteur (avec J_c et n constants). En une semaine de stage, les différentes comparaisons effectuées montrent bien la validité de notre code de calcul en différences finies sur le problème traité.

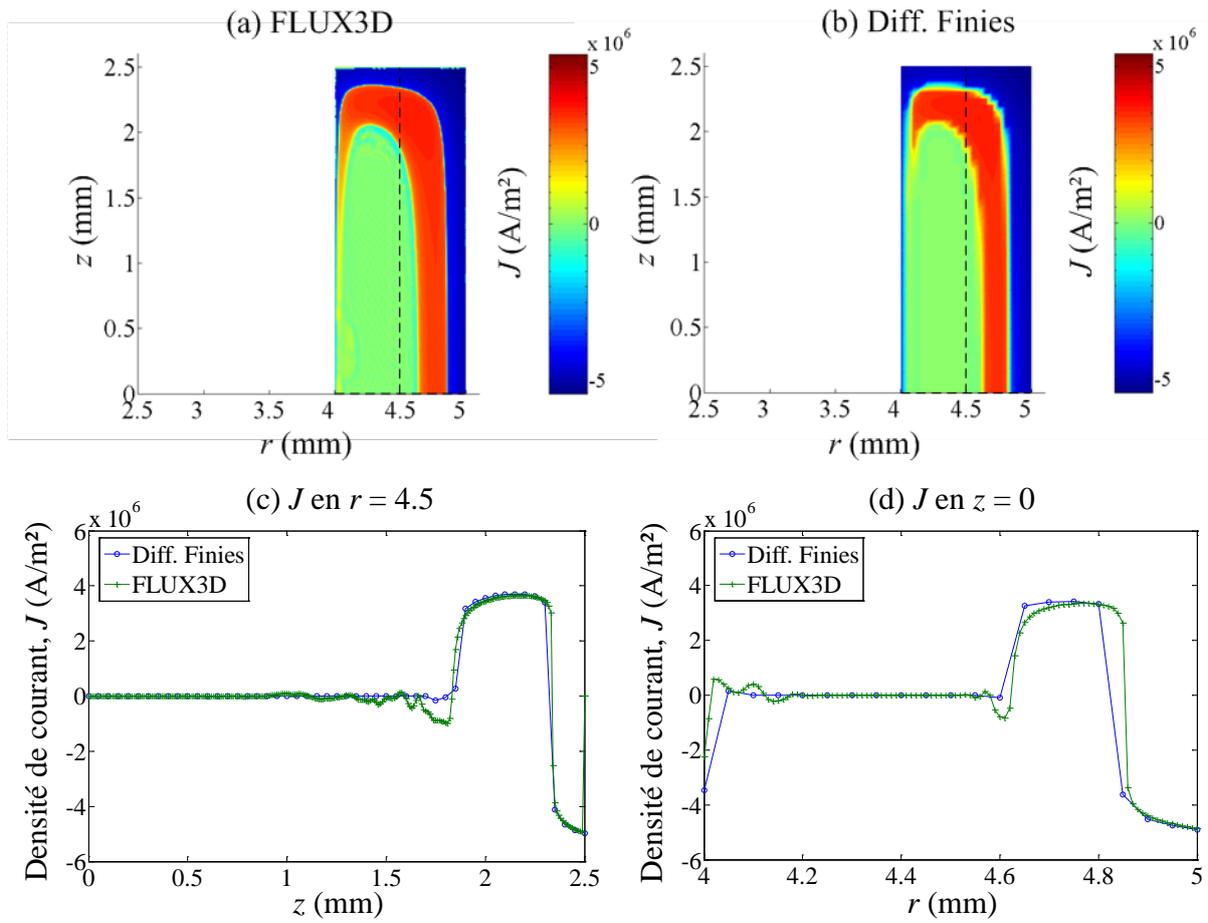


Figure 2.10 : Distribution et profils de densité de courant à $t = 20$ ms. Résultats obtenus par FLUX3D® (a) et notre code de calcul en différences finies (b). Comparaison des résultats en $r = 4.5$ mm (c) et $z = 0$ mm (d).

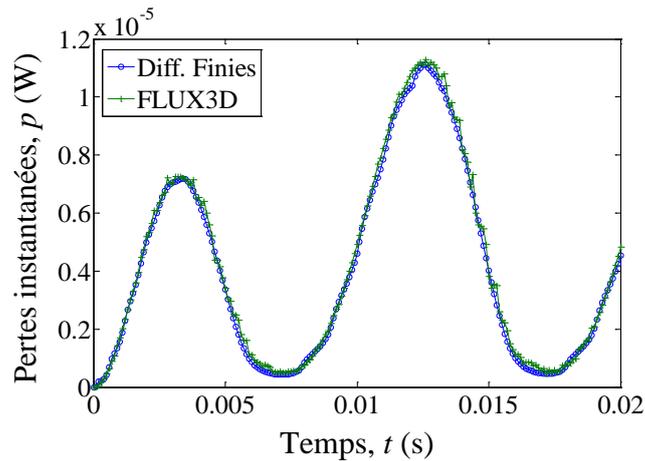


Figure 2.11 : Pertes instantanées dans le tube supraconducteur calculées avec FLUX3D® et notre code de calcul en différences finies.

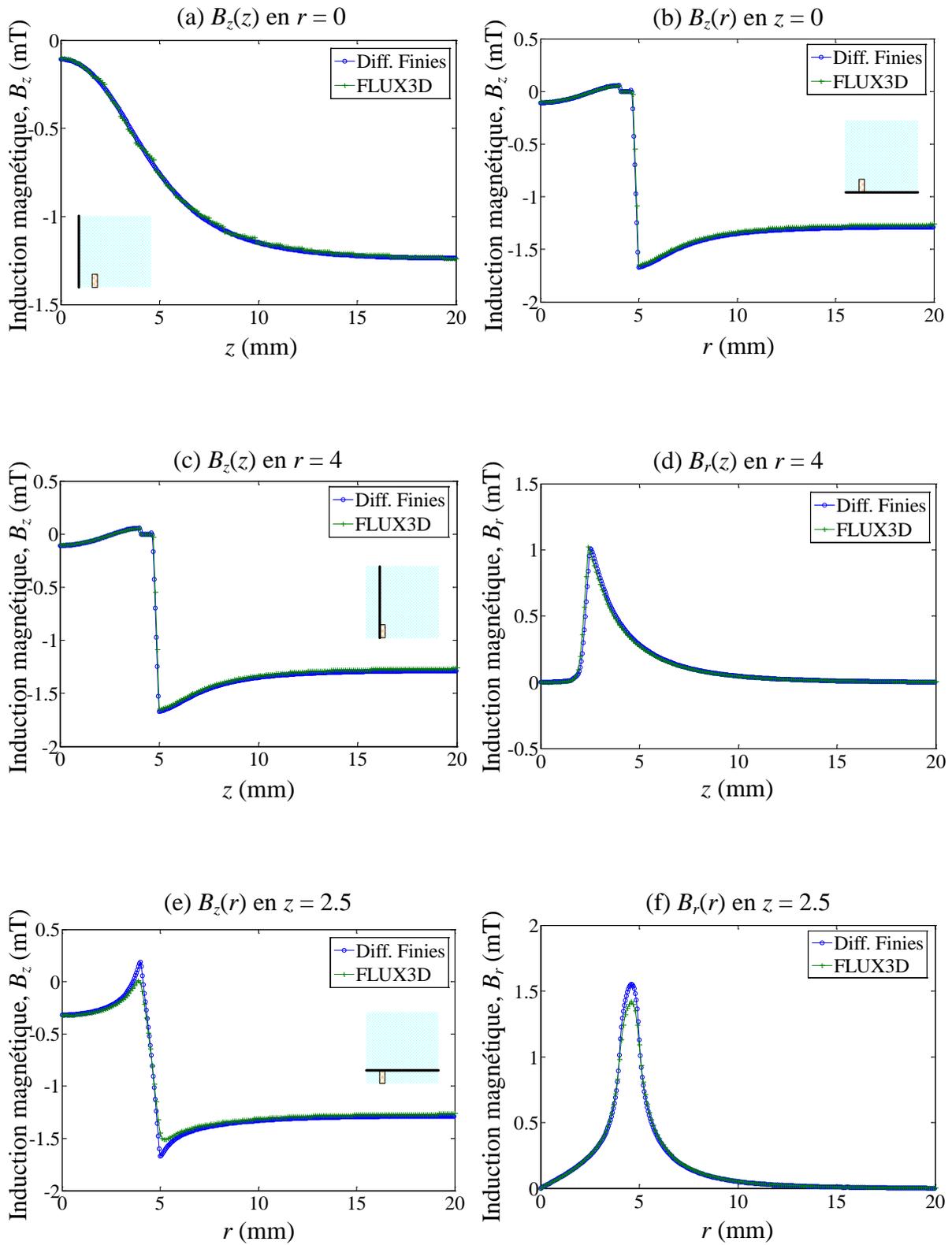


Figure 2.12 : Profils d'induction magnétique à $t = 15$ ms calculés avec FLUX3D® et notre code de calcul en différences finies.

2.6 Conclusion

Les méthodes de calcul utilisées pour la modélisation en différences finies des supraconducteurs à haute température ont été présentées dans ce chapitre.

Notre modèle est complet puisqu'il permet de prendre compte l'influence du champ magnétique et de la température sur les paramètres J_c et n du supraconducteur. Pour des problèmes essentiellement 2D, les équations couplées magnétiques et thermiques peuvent être résolues simultanément par notre outil de calcul, ce qui nous permet d'étudier le comportement magnétothermique des SHT.

La résolution des équations magnétiques a été validée grâce au logiciel FLUX3D[®] qui ne permettait pas, au début de ma thèse, de résoudre les phénomènes couplés magnétothermiques dans les SHT. C'est pourquoi le développement d'un tel outil s'avérait indispensable.

A plus long terme, nous pourrions introduire les phénomènes mécaniques pour compléter la panoplie de ceux déjà pris en compte ici.

Chapitre 3. Etude des pertes dans une amenée de courant Bi-2223

Les outils permettant la modélisation des phénomènes couplés au sein d'un supraconducteur ont été présentés dans le chapitre précédent. Nous allons à présent étudier le comportement d'une amenée de courant BSCCO parcourue par un courant alternatif sous champ magnétique appliqué. Les pertes et l'élévation de la température qui en résultent seront déterminées. Finalement, nous montrerons que le couplage entre les grandeurs magnétiques et thermiques est à l'origine d'instabilités pouvant engendrer une détérioration l'échantillon.

3.1 Introduction

Il est connu que la stabilité thermique des oxydes supraconducteurs est plus grande que celle des supraconducteurs conventionnels. Le courant de *quench* – qui fait transiter le supraconducteur – est supérieur au courant critique car la pente de la caractéristique $V - I$ est douce et la transition de l'état supraconducteur à l'état normal n'est pas clairement définie. Les faibles valeurs de l'exposant n des SHT et les grandes marges de température de fonctionnement affectent également cette stabilité.

Dans la littérature, plusieurs articles ont été publiés sur la stabilité thermique des bobines et des fils supraconducteurs [Ish01, Kis01, Kum98, Vys01]. Dans ces articles, il a été montré que l'équilibre entre les pertes par effet Joule et le refroidissement affecte la stabilité thermique des supraconducteurs.

Les amenées de courant sont généralement employées pour relier des dispositifs SBT fonctionnant aux températures cryogéniques, à une source de courant électrique fonctionnant à température ambiante. L'utilisation d'un matériau SHT permet alors de réduire au minimum le transfert de chaleur à partir de l'environnement à température ambiante vers l'environnement cryogénique. Dans notre étude, un tube en BSCCO (principal élément d'une amenée de courant) est plongé dans un bain d'azote liquide et alimenté par un courant sinusoïdal $i(t) = I_{max} \sin(2\pi ft)$ de fréquence $f = 50$ Hz. Ce tube supraconducteur, que nous appellerons amenée de courant par abus de langage, peut également être soumis à un champ magnétique continu axial. L'amplitude du courant de transport qui traverse l'échantillon peut être supérieure à son courant critique I_c . Dans ce cas, les pertes deviennent importantes et échauffent l'amenée de courant. Nous avons constaté que ce phénomène peut alors devenir instable et conduire à la transition et/ou la destruction de l'amenée de courant.

Afin de modéliser et d'étudier la stabilité de l'amenée de courant, il est nécessaire de

connaître toutes les caractéristiques de celle-ci. Il s'agit notamment de la chaleur spécifique, de la conductivité thermique, mais aussi de la dépendance en champ et en température des paramètres J_c et n du supraconducteur. Cette étude va mettre en avant l'existence d'un courant limite séparant les zones stable et instable de l'amenée de courant. Suivant l'amplitude I_{max} du courant de transport, plusieurs grandeurs intéressantes peuvent être calculées : l'élévation de température et les pertes pour un fonctionnement stable et le temps nécessaire à l'amenée de courant avant de transiter pour un fonctionnement instable.

3.2 Caractéristiques de l'échantillon

L'amenée de courant étudiée est issue d'une fabrication sur mesure de *Can Superconductors*. Il s'agit d'un composé $\text{Bi}_{1.8}\text{Pb}_{0.26}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+x}$ sur lequel 6 contacts en argent (Ag), de 10 mm de largeur, permettent le raccordement avec l'alimentation électrique et la mesure de tensions entre différentes prises de potentiel, voir [Figure 3.1](#).

Les dimensions ainsi que les caractéristiques thermiques et électriques de l'échantillon sont résumées dans le [Tableau 3.1](#). Les paramètres thermiques n'ont pas été mesurés ; les valeurs utilisées sont extraites de la littérature [[Fuj94](#), [Ple97](#), [Cas00](#), [Lig01](#)].

3.2.1 Détermination des paramètres J_c et n

Estimer le champ électrique E et la densité de courant J à partir de la tension V et du courant I exige que E et J soient uniformes dans le matériau. Ceci ne peut être obtenu que si V et I sont dans un état stationnaire, par exemple, en effectuant des mesures en courant continu. Malheureusement, les mesures en courant continu sont gênées par des effets



Figure 3.1 : Photo de l'amenée de courant $\text{Bi}_{1.8}\text{Pb}_{0.26}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+x}$ étudiée.

Tableau 3.1 : Caractéristiques de l'amenée de courant $\text{Bi}_{1.8}\text{Pb}_{0.26}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+x}$ étudiée.

Symbole	Quantité	Valeur
l	longueur	16 cm
R_i	rayon intérieur	3.75 mm
R_e	rayon extérieur	5 mm
s	section	34.4 mm ²
\mathcal{G}	volume	5.5 cm ³
γ	masse volumique	5 g/cm ³
C_p	chaleur spécifique	170 J/(kg · K)
λ	conductivité thermique	4 W/(m · K)
T_c	température critique	107 K
E_c	champ électrique critique	1 $\mu\text{V}/\text{cm}$
J_{c0}	densité de courant critique à 77 K en champ propre	2.54 A/mm ²
I_{c0}	courant critique à 77 K en champ propre	87 A
n_0	exposant n à 77 K en champ propre	23

thermiques, dus aux courants élevés et aux résistances de contact relativement grandes, qui rendent les mesures isothermes difficiles. Actuellement, la majorité des mesures $V-I$ sont faites dans des conditions quasi statiques, ce qui signifie que les relations $E = V/l$ et $J = I/s$ peuvent être utilisées, l et s étant respectivement la longueur entre les prises de potentiel et la section du supraconducteur. La vitesse de montée du courant dans l'échantillon doit également être suffisamment rapide pour limiter l'influence des effets thermiques lors de la caractérisation. Il faut donc essayer de trouver un compromis.

La caractéristique $E-J$ à 77 K en champ propre de l'amenée courant est présentée sur la [Figure 3.2](#). Elle permet de déterminer une des grandeurs fondamentales du supraconducteur : la densité de courant critique J_c , ainsi que l'exposant n utilisé dans la loi en puissance. J_c est défini comme étant la densité de courant produisant un champ électrique $E_c = 1 \mu\text{V}/\text{cm}$. Pour l'échantillon présenté, J_c vaut 2.54 A/mm² ($I_c = 87$ A) et n approximativement 23.

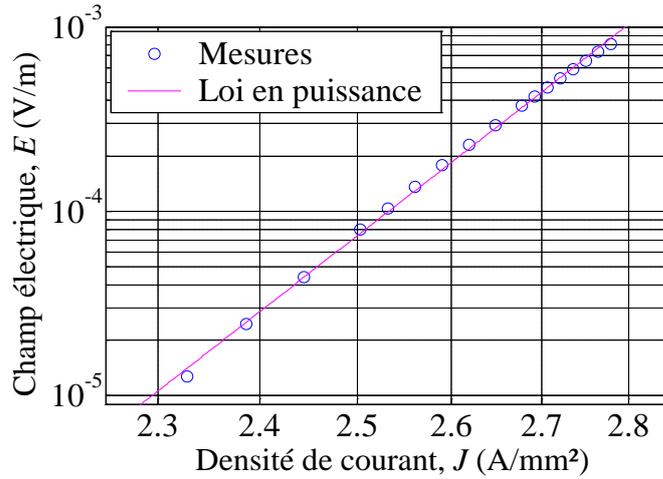


Figure 3.2 : Caractéristique $E - J$ à 77 K en champ propre de l'amenée courant. $J_c = 2.54 \text{ A/mm}^2$ et $n = 23$.

3.2.2 Influence d'un champ magnétique extérieur

Nous avons étudié l'influence d'un champ magnétique axial (parallèle à l'axe de l'amenée de courant) à 77 K. Pour cela, une bobine résistive permettant de faire varier l'induction magnétique entre 0 et 100 mT a été utilisée. Les caractéristiques $E - J$ de l'échantillon pour plusieurs valeurs de champ appliqué sont tracées [Figure 3.3](#). Ainsi, la dépendance des paramètres J_c et n en fonction du champ magnétique peut être déterminée, voir [Figure 3.4](#). Les expressions de $J_c(B)$ et $n(B)$ qui en découlent sont :

$$J_c(B) = 2.54 \times 10^6 \times \frac{1+(B/0.059)^{1.83}}{1+(B/0.0078)^{1.61}} \text{ et } I_c(B) = s \times J_c(B) \quad (2.1)$$

$$n(B) = 4.2 + (23.3 - 4.2) \times \frac{1+(B/0.021)^{1.22}}{1+(B/0.0048)^{1.38}} \quad (2.2)$$

3.2.3 Influence de la température

Il ne nous a pas été possible de mesurer les caractéristiques $E - J$ de l'amenée de courant pour des températures autres que 77 K. Pour déterminer la dépendance en température de la densité de courant critique J_c , nous avons donc réalisé des mesures d'aimantation sur un cylindre Bi-2223 de rayon R_c similaire à l'amenée de courant (même fabricant, mêmes caractéristiques).

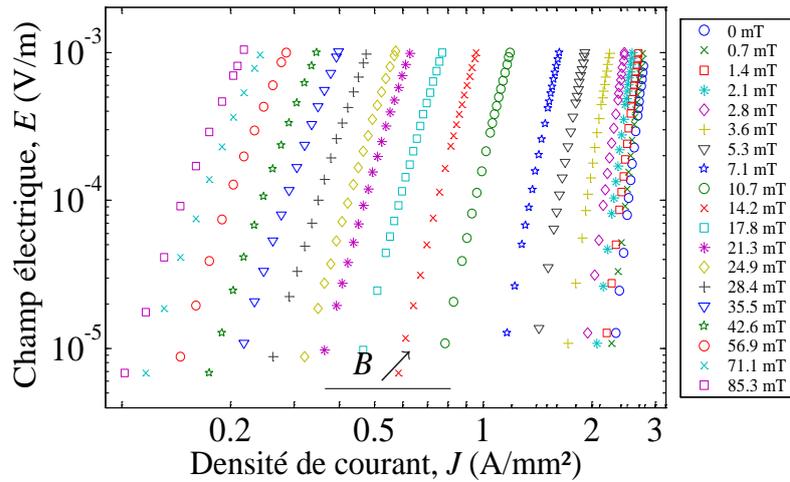


Figure 3.3 : Caractéristiques $E - J$ à 77 K de l'amenée de courant pour différentes valeurs de champ magnétique.

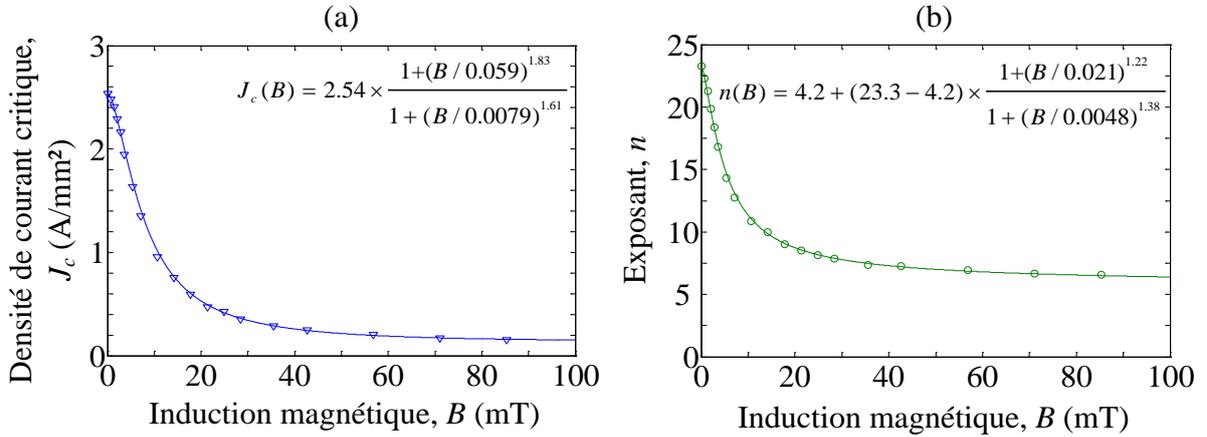


Figure 3.4 : (a) Evolution de la densité de courant critique J_c et (b) de l'exposant n de l'amenée de courant en fonction de l'induction magnétique ; estimation faite à partir de caractéristiques $E - J$.

Lors de ces mesures, les courants induits permettant de déterminer la densité de courant critique sont orientés suivant la direction θ . Ils sont donc perpendiculaires à la direction du courant transporté dans l'amenée de courant. Cependant, comme il s'agit d'un matériau fritté, la direction des courants ne change pas (ou peu) les propriétés de J_c .

Les mesures ont été réalisées au service commun de cryogénie de l'Université Henri Poincaré à l'aide d'un magnétomètre SQUID MPMS[®] de Quantum Design.

L'échantillon cylindrique, initialement vierge de champ magnétique, est refroidi à 77 K. Un fort champ magnétique axial (de 7 T dans notre cas) permet ensuite de saturer l'échantillon en courant, soit $J_c(7 \text{ T}, 77 \text{ K})$ partout. Dans ce cas, l'aimantation est proportionnelle à la densité de courant critique [Che89] :

$$M = -J_c R_e / 3 \quad (2.3)$$

L'aimantation est alors mesurée pour différentes températures jusqu'à la température critique T_c . On en déduit la dépendance en température de la densité de courant critique $J_c(7\text{ T}, T)$, voir **Figure 3.5(a)**.

L'expression suivante représente correctement cette dépendance en température :

$$J_c(7\text{ T}, T) = J_c(7\text{ T}, 77\text{ K}) \times \frac{1 - T/106.9}{1 - 77/106.9} \quad (2.4)$$

D'après cette expression, la température critique est de 106.9 K à 7 T. La valeur de T_c donnée par le constructeur sous champ nul est de 108 K. Par conséquent, la température critique varie très peu en fonction du champ magnétique et nous considérerons par la suite qu'elle est constante et égale à 106.9 K quel que soit B . La dépendance en champ magnétique et en température de la densité de courant s'écrit alors :

$$J_c(B, T) = 2.54 \times 10^6 \times \frac{1 + (B/0.059)^{1.83}}{1 + (B/0.0078)^{1.61}} \times \frac{1 - T/106.9}{1 - 77/106.9} \text{ et } I_c(B, T) = s \times J_c(B, T) \quad (2.5)$$

La dépendance en température de l'exposant n n'a pas été mesurée. En utilisant (1.11) et (2.2), on aboutit à :

$$n(B, T) = \left(4.2 + (23.3 - 4.2) \times \frac{1 + (B/0.021)^{1.22}}{1 + (B/0.0048)^{1.38}} \right) \times 77/T \quad (2.6)$$

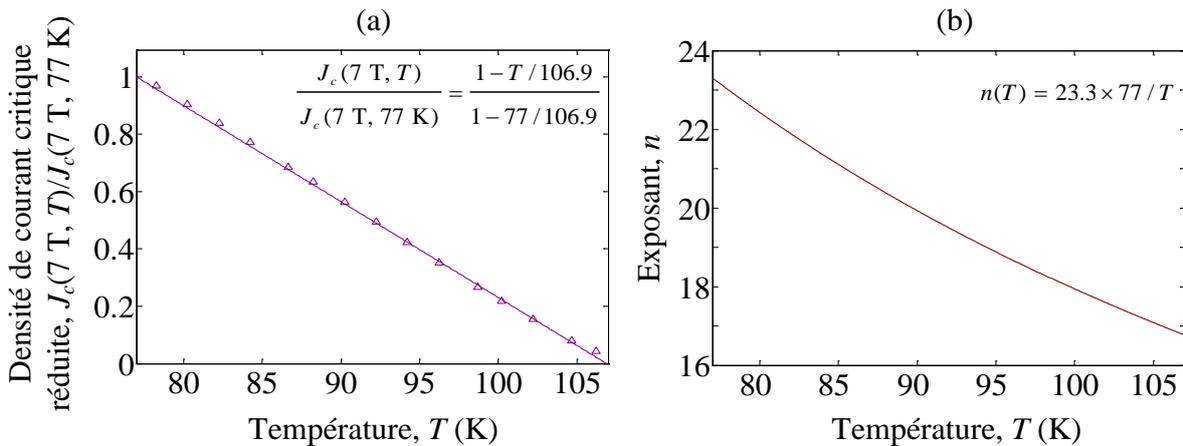


Figure 3.5 : (a) Evolution en fonction de la température de la densité de courant critique à 7 T d'un échantillon Bi-2223 similaire à l'amenée de courant ; estimation faite à partir de mesures d'aimantation. (b) Dépendance en température théorique de l'exposant n de l'amenée de courant.

3.3 Calcul des pertes (sans couplage thermique)

Les pertes AC dans l'amenée de courant ont été calculées de deux manières différentes. La première manière consiste à simuler le comportement de l'amenée de courant grâce à notre code de calcul en différences finies. La valeur moyenne des pertes est ensuite calculée à partir des pertes instantanées :

$$P = \frac{1}{T} \int_T p(t) \cdot dt \quad \text{avec} \quad p(t) = \iiint_{\Omega_s} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \cdot dv \quad (2.7)$$

La longueur de l'amenée de courant est considérée comme infinie, ce qui revient à traiter un problème unidimensionnel. 20 points de discrétisation forment l'épaisseur du tube et un pas de temps de 10^{-5} s a été choisi.

La seconde manière est l'utilisation d'une formule analytique, récemment découverte par B. Douine *et al.* [Dou01, Dou03], qui permet de calculer les pertes AC dans une amenée de courant SHT. Cette formule analytique, déduite de l'analyse dimensionnelle, utilise une loi $E-J$ en puissance pour décrire le comportement électrique du supraconducteur. Contrairement aux formules de pertes utilisant le modèle de Bean, sa validité est conservée même lorsque l'amplitude du courant, qui traverse le supraconducteur, est supérieure au courant critique.

Lorsqu'un champ magnétique continu est appliqué dans la même direction que le courant traversant l'amenée de courant, son influence est prise en compte à travers les paramètres I_c et n du supraconducteur. Ainsi, les effets du champ magnétique extérieur sur les pertes sont intégrés dans la formule donnée par B. Douine en utilisant les expressions (2.1) et (2.2) de $I_c(B)$ et $n(B)$. Pour $I_{max} \leq I_c(B)$, l'expression des pertes AC devient :

$$P(I_{max}, B) = l \alpha_R \left(\frac{1}{6\pi} + \frac{0.3}{n(B)} \right) \left[E_c \left(\frac{\mu_0 f}{I_c(B)} \right)^{n(B)} I_{max}^{3n(B)+1} \right]^{\frac{1}{n(B)+1}} \quad (2.8)$$

et pour $I_{max} > I_c(B)$:

$$P(I_{max}, B) = l \times \left(\alpha_R \left(\frac{1}{6\pi} + \frac{0.3}{n(B)} \right) \left[E_c (\mu_0 f)^{n(B)} I_c(B)^{2n(B)+1} \right]^{\frac{1}{n(B)+1}} + 2f \frac{E_c}{I_c(B)^{n(B)}} \int_{t_1}^{t_2} i(t)^{n(B)+1} dt \right) \quad (2.9)$$

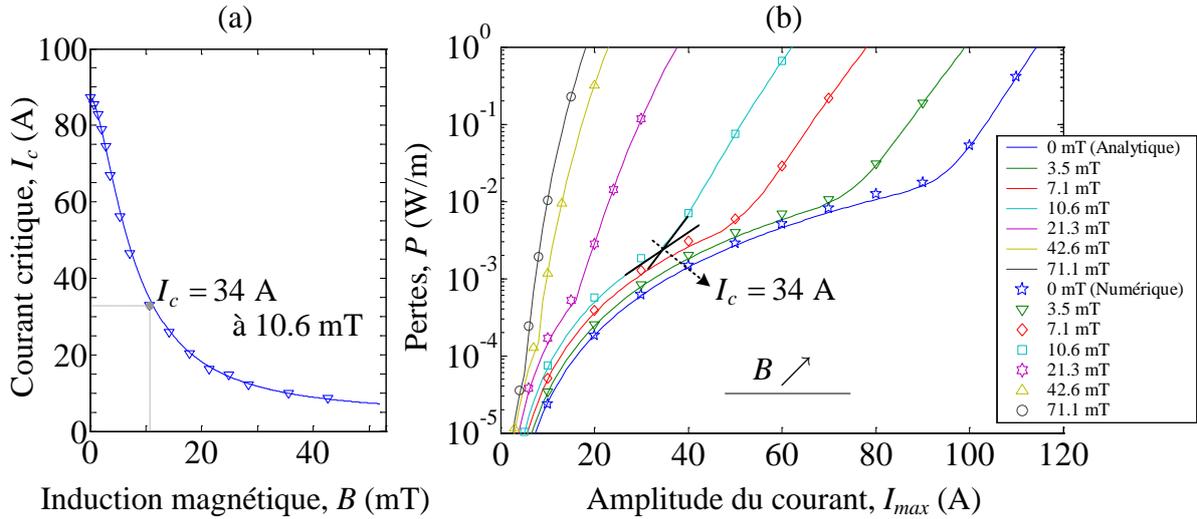


Figure 3.6 : (a) Evolution du courant critique en fonction de l'induction magnétique. (b) Comparaison entre les résultats numériques et analytiques (sans couplage thermique). Evolution des pertes en fonction de l'amplitude du courant de transport pour différentes valeurs d'induction magnétique.

avec l la longueur de l'amenée de courant, t_1 et t_2 les instants entre lesquels $i(t) > I_c(B)$, et $\alpha_R = 1 - R_i^2 / R_e^2$ un paramètre adimensionnel.

La **Figure 3.6(b)** montre l'évolution des pertes AC en fonction de l'amplitude I_{max} du courant de transport pour différentes valeurs d'induction magnétique. Une comparaison est faite entre les résultats obtenus numériquement et analytiquement. La valeur des pertes AC est volontairement limitée à 1 W/m pour que l'élévation de température créée par celles-ci soit négligeable. En effet, comme nous le verrons dans § 3.5, pour 1 W/m l'élévation de température dans l'amenée de courant est de l'ordre de quelques dizaines de mK. Quelle que soit l'amplitude du courant et la valeur du champ magnétique appliqué, les méthodes numérique et analytique aboutissent aux mêmes valeurs de pertes.

3.4 Détermination expérimentale des pertes

Les pertes calculées vont être à présent comparées aux résultats expérimentaux. L'amenée de courant, plongée dans un bain d'azote liquide, est alimentée par un courant sinusoïdal $i(t) = I_{max} \sin(2\pi ft)$ de fréquence $f = 50$ Hz. Un autotransformateur triphasé raccordé au réseau et un transformateur débitant sur une charge résistive fixe permettent d'atteindre jusqu'à 200 A efficace dans l'amenée de courant, voir **Figure 3.7**. Des photographies du banc de mesure sont également disponibles en **Annexe C**.

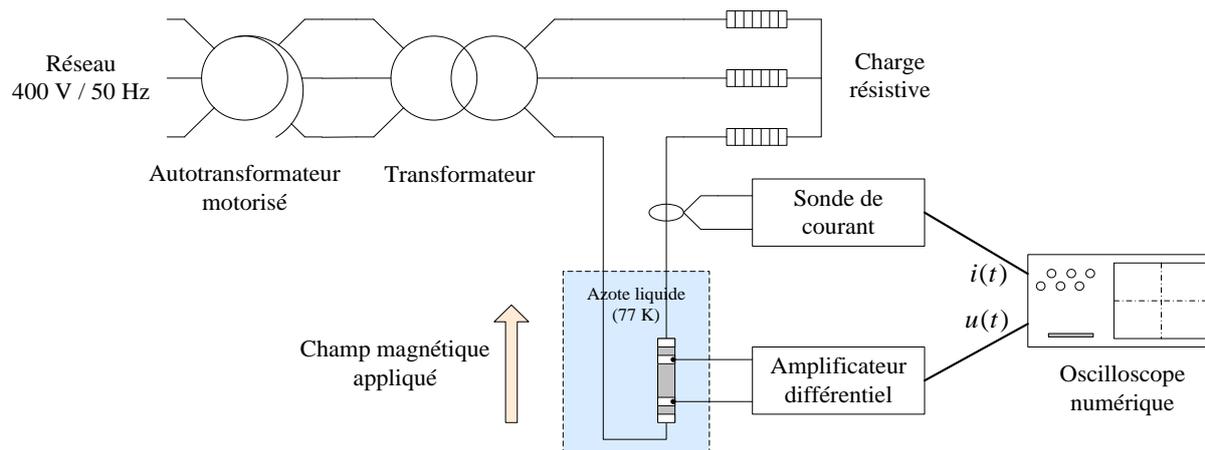


Figure 3.7 : Schéma du banc expérimental de mesure de pertes en courant alternatif.

3.4.1 Méthodes de mesures

Différentes techniques expérimentales ont été développées pour mesurer les pertes AC dans les SHT. Les méthodes par aimantation détectent les changements du moment magnétique de l'échantillon en utilisant un système de bobines de détection [Wan03, Yan04]. Elles sont utilisées principalement lorsqu'un champ magnétique externe est appliqué. Les méthodes calorimétriques, utilisées pour des applications d'aimantation ou en champ propre, mettent en œuvre la mesure de l'élévation de température de l'échantillon ou de la quantité de gaz libérée par le cryogène [Mag02, Lue99].

Cependant, la mesure des pertes dues au passage d'un courant de transport est le plus souvent effectuée au moyen de la technique de caractérisation électrique [Bal98, Daf97, Kok93]. Les mesures électriques sur de petits échantillons (de quelques centimètres) nécessitent un système expérimental adapté, sachant que les quantités à mesurer diffèrent souvent de plusieurs décades d'amplitude. Par exemple, pour notre amenée de courant, l'amplitude de la tension mesurée varie entre 1 et 10 $\mu\text{V}/\text{cm}$ lorsque l'amplitude du courant qui circule est comprise entre 10 et 100 Ampères.

Deux techniques de caractérisation électrique différentes ont été testées pour déterminer la valeur moyenne des pertes.

3.4.1.1 Par amplificateur différentiel

La puissance transportée par une onde électromagnétique à travers une surface est

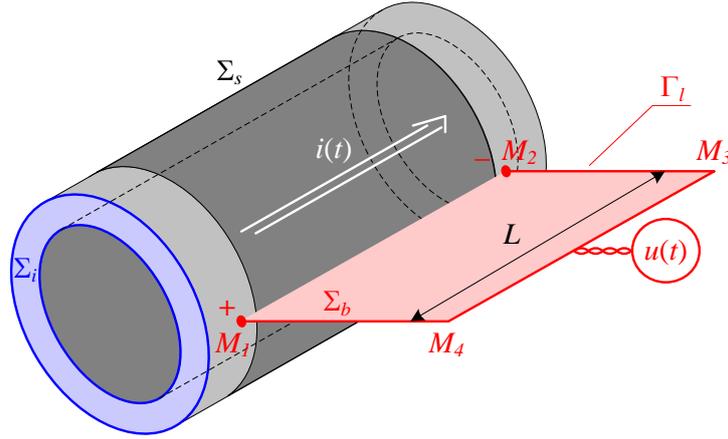


Figure 3.8 : Mesure de tension sur un tube, avec Γ_l le contour de la boucle de mesure.

déterminée par le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface. Le vecteur de Poynting instantané est donné par le produit vectoriel $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Ainsi la puissance instantanée dissipée dans le dipôle de la Figure 3.8 est :

$$p_p(t) = \iint_{\Sigma_s} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.10)$$

D'où :

$$\begin{aligned} p_p(t) &= 2\pi \times R_e \times L \times E(R_e, t) \times H(R_e, t) \\ &= L \times E(R_e, t) \times i(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour ce même dipôle, la puissance instantanée mesurée s'exprime comme le produit de la tension mesurée et du courant :

$$p(t) = u(t) \times i(t) \quad (2.12)$$

Or :

$$i(t) = \iint_{\Sigma_i} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.13)$$

Et :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{M_1 M_4 M_3 M_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{M_1 M_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{\Gamma_l} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{M_1 M_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{\Gamma_l} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{M_1 M_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma_b} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = E(R_e, t) \times L + \frac{d\phi_e(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec $\phi_e(t)$ le flux magnétique extérieur au tube embrassé par la boucle de mesure.

Afin d'éviter la mesure d'un flux magnétique ne provenant pas du tube supraconducteur

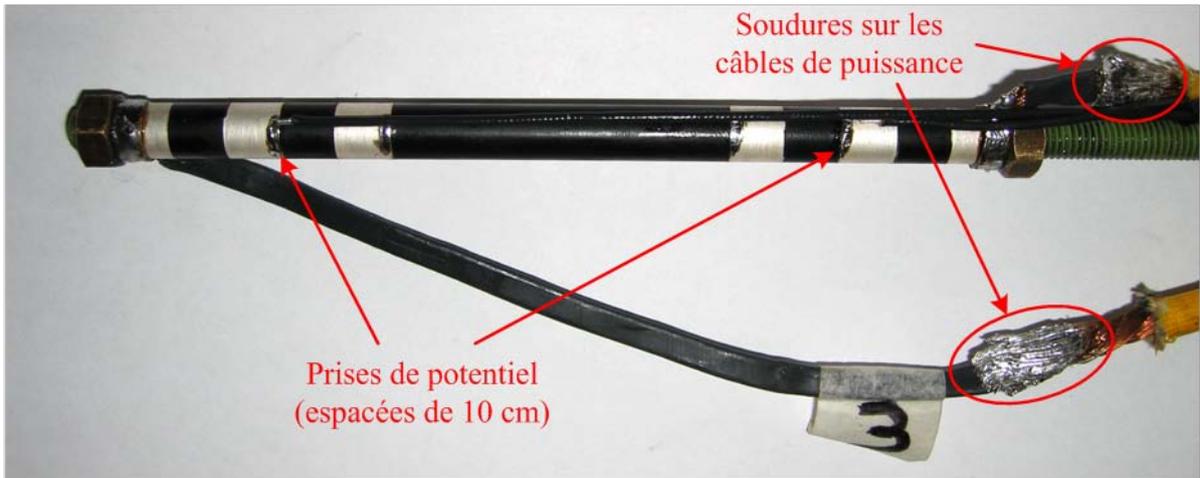


Figure 3.9 : Photo de l'amenée de courant $\text{Bi}_{1.8}\text{Pb}_{0.26}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+x}$ avec ses prises de potentiel.

lui-même, celle-ci doit être la plus petite possible. C'est pourquoi nous avons apporté le plus grand soin à la mise en place des prises de potentiel. Les soudures sur les câbles traversés par de forts courants ont également été réalisées avec soin pour minimiser les résistances et les échauffements, voir [Figure 3.9](#).

Comme la dérivée du flux $d\phi_e(t)/dt$ est en quadrature avec le courant $i(t)$, la valeur des pertes mesurées ne dépend que du courant et de la valeur du champ électrique à la surface du tube :

$$P = \frac{1}{T} \int_T \left(E(R_e, t) \times L + \frac{d\phi_e(t)}{dt} \right) \times i(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_T E(R_e, t) \times L \times i(t) \cdot dt \quad (2.15)$$

et on aboutit bien à la même expression des pertes que par le vecteur de Poynting.

La faible tension $u(t)$ aux bornes du supraconducteur est mesurée à l'aide d'un amplificateur différentiel AD624, voir [Figure 3.10](#). Les gains 1, 100, 200, 500, 1000 sont préprogrammés et la connexion de certaines pattes de l'amplificateur entre elles suffit pour les obtenir. L'alimentation du circuit de mesure s'effectue à l'aide de piles, de manière à le rendre indépendant du réseau et d'éventuelles perturbations, voir [Figure 3.11](#). Le courant $i(t)$ est mesuré quant à lui à l'aide d'un shunt.

La [Figure 3.12](#) présente la puissance instantanée $p(t)$ mesurée à l'aide de cette méthode.

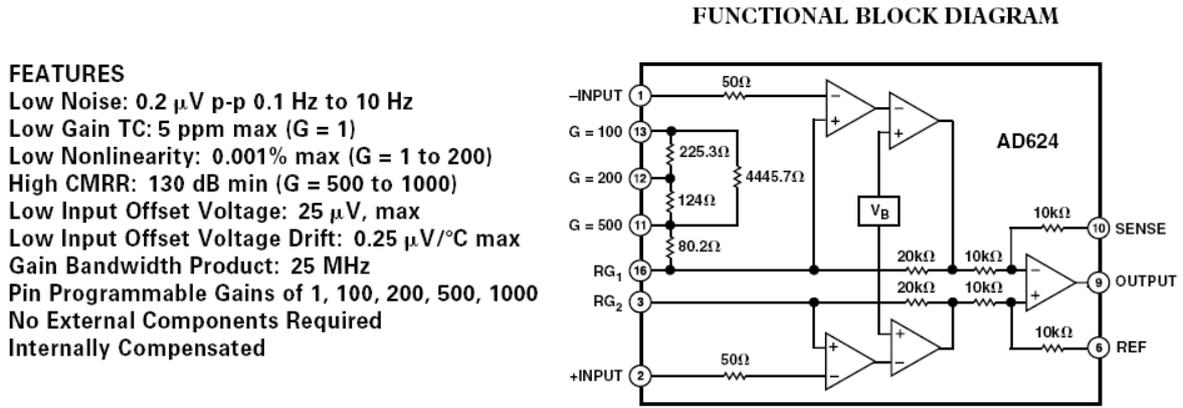


Figure 3.10 : Schéma de principe de l'amplificateur différentiel AD624.

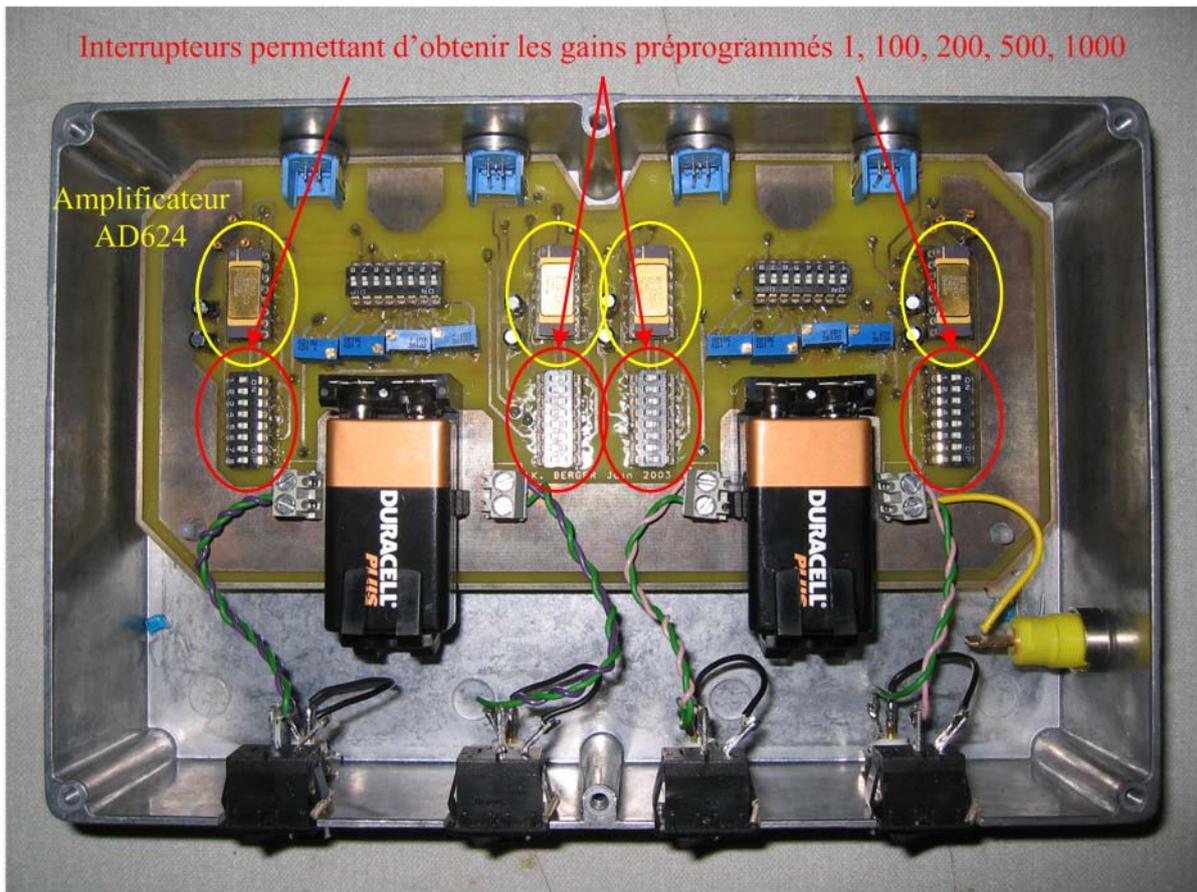


Figure 3.11 : Caisson isolé des perturbations extérieures contenant quatre amplificateurs AD624 alimentés par deux piles 9V. Les gains préprogrammés 1, 100, 200, 500, 1000 de chaque amplificateur s'obtiennent grâce aux interrupteurs.

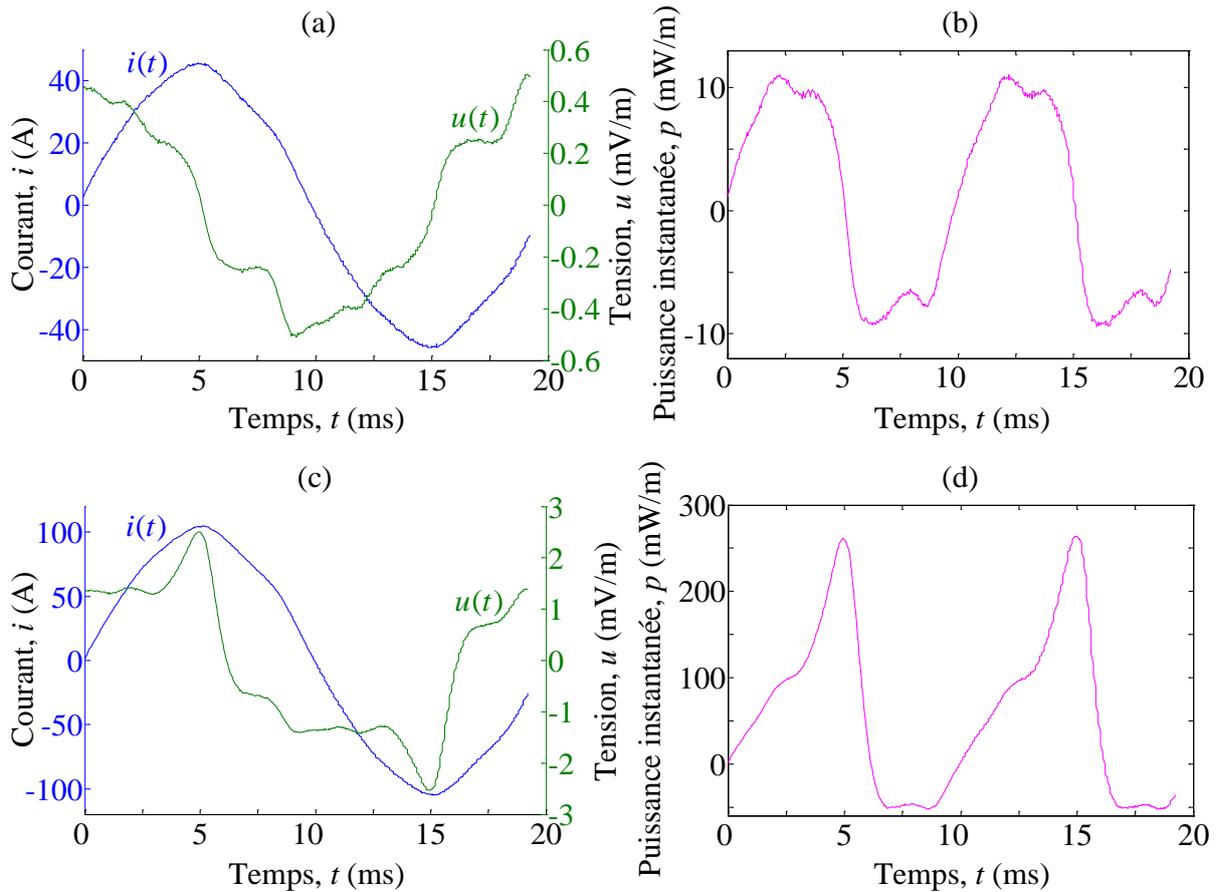


Figure 3.12 : Evolution temporelle du courant $i(t)$ qui traverse l'amenée de courant et de la tension $u(t)$ à ses bornes, en champ propre pour $I_{max} \approx 58$ A (a) et $I_{max} \approx 110$ A (c). En (b) et (d), puissance dissipée $p(t)$ correspondante en fonction de temps.

3.4.1.2 Par amplificateur à détection synchrone

La difficulté majeure dans l'estimation des pertes d'un supraconducteur est la mesure de la tension à ses bornes. En effet, le signal utile d'amplitude très faible et parfois noyé dans le bruit environnant. C'est notamment le cas lorsque le courant transporté est inférieur au courant critique. Avec la méthode précédente, le bruit est amplifié en même temps que le signal utile. L'utilisation d'un voltmètre à détection synchrone, dont le principe de fonctionnement est donné Figure 3.13, permet d'améliorer considérablement le rapport signal sur bruit.

Soit $u(t)$ la tension mesurée et $u_m(t)$ le signal utile, alors :

$$u(t) = u_m(t) + b(t) = U_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) + b(t) \quad (2.16)$$

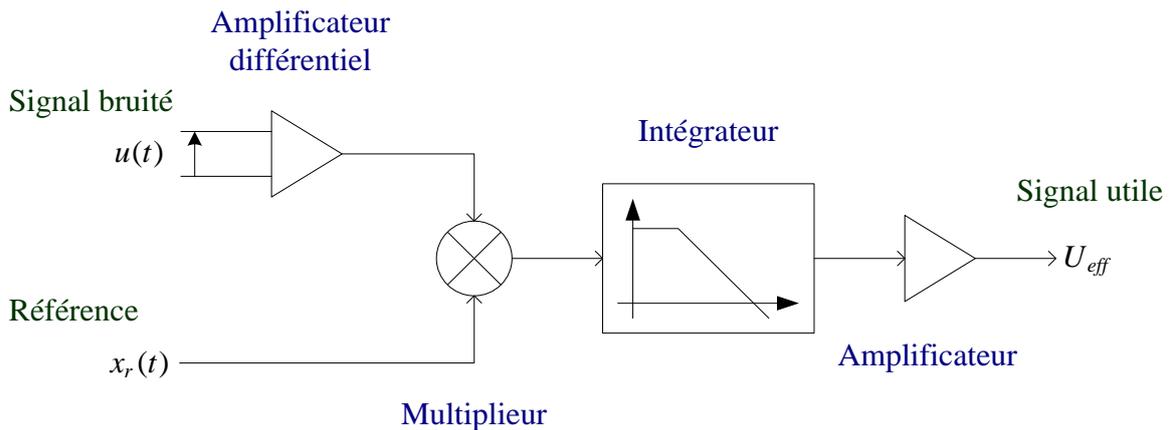


Figure 3.13 : Schéma de principe d'un amplificateur à détection synchrone.

avec $b(t)$ représentant le bruit, U_{eff} la valeur efficace du signal utile, ω sa pulsation et φ sa phase.

La tension mesurée est amplifiée d'un gain A puis multipliée avec un signal de référence $x_r(t) = X_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t)$ de même fréquence (d'où le mot synchrone) :

$$A \times u(t) \times x_r(t) = A \times \left[U_{eff} X_{eff} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)) + b(t) \times X_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t) \right] \quad (2.17)$$

Si le courant qui traverse l'échantillon est pris comme signal de référence, alors l'intégrateur placé en sortie du montage permet de récupérer une image (au coefficient d'amplification près) de la puissance active dissipée dans le supraconducteur :

$$P = U_{eff} \times I_{eff} \cos(\varphi) \quad (2.18)$$

L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle ne tient pas compte des harmoniques qui composent en réalité la tension $u_m(t)$. Cependant, lorsque le courant est sinusoïdal, seul le fondamental de la tension intervient dans le calcul des pertes.

3.4.1.3 Comparaison des méthodes de mesures

Les pertes moyennes en champ propre de l'amenée de courant ont été mesurées simultanément en utilisant chacune des méthodes. Les résultats présentés [Figure 3.14](#) concordent de manière satisfaisante quelle que soit l'amplitude du courant de transport. Les mesures de pertes utilisant un amplificateur différentiel AD624 permettent d'acquérir les grandeurs instantanées en plus de la valeur moyennes des pertes. Plus d'informations sont conservées et c'est pourquoi nous avons principalement utilisé cette méthode.

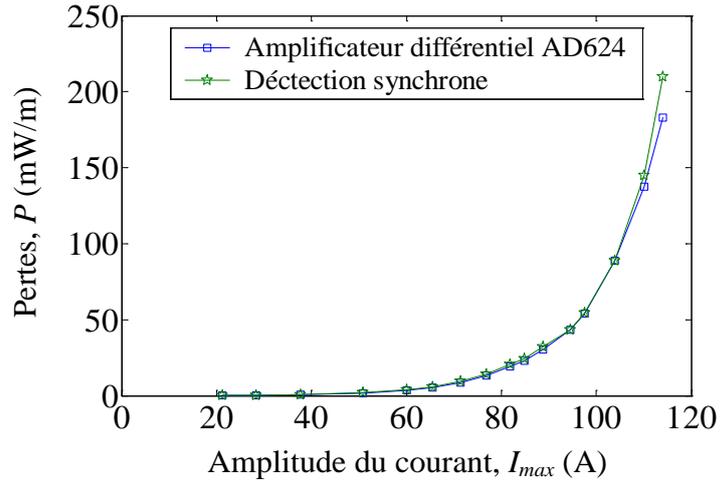


Figure 3.14 : Comparaison de méthodes de mesures. Evolution des pertes moyennes en champ propre dans l'amenée de courant en fonction de l'amplitude du courant de transport.

3.4.2 Comparaison entre les pertes mesurées et calculées

A cause d'instabilités magnétothermiques, deux amenées de courant ont été détruites. Pour ne plus rencontrer ce problème lors de la mesure des pertes, nous nous sommes restreints 0.1 W/m dissipés dans l'amenée de courant. Les instabilités magnétothermiques n'ont pas pu être abordées expérimentalement. Elles seront étudiées théoriquement dans § 3.5 grâce à notre modèle.

La **Figure 3.15** présente une comparaison entre les pertes calculées et mesurées pour

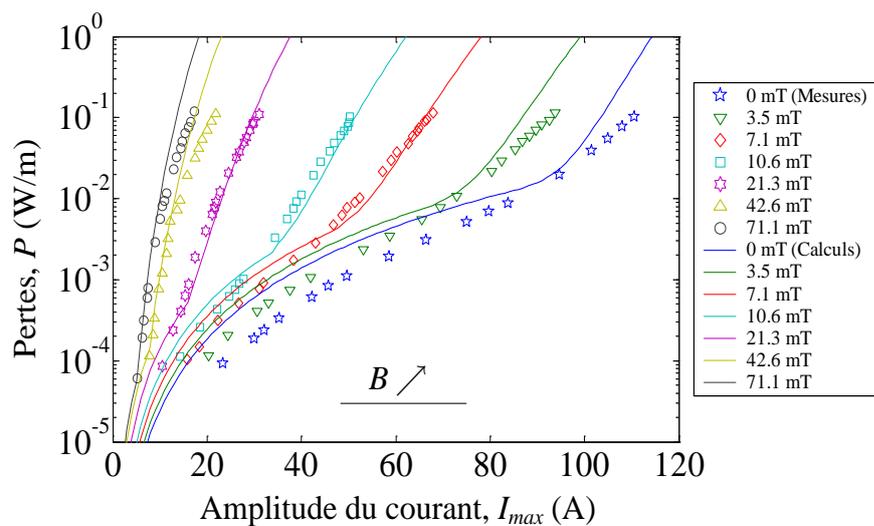


Figure 3.15 : Comparaison entre les résultats calculés et mesurés. Evolution des pertes en fonction de l'amplitude du courant de transport pour différentes valeurs d'induction magnétique.

différentes valeurs d'induction magnétique. On observe des différences notables entre les valeurs calculées et mesurées, notamment lorsque le champ magnétique appliqué est faible. Quelle que soit l'amplitude du courant de transport, les pertes calculées en champ propre et pour une induction magnétique de 3.5 mT ne correspondent pas aux mesures (excepté au niveau du courant critique). Lorsque le champ appliqué augmente, la concordance entre les résultats s'améliore.

Plusieurs hypothèses sont avancées pour tenter d'expliquer ces différences :

- Les effets du champ propre n'ont pas été pris en compte dans la détermination de la dépendance en champ magnétique des paramètres J_c et n du supraconducteur. Cette dépendance est d'autant plus difficile à déterminer car le champ propre est ici alternatif. Ainsi, lorsque le champ magnétique appliqué est faible, les effets liés au champ propre sont prédominants et l'erreur commise par notre modèle importante.
- Que ce soit lors de la caractérisation ou lors des mesures de pertes, nous ne connaissons pas avec certitude l'orientation du champ magnétique appliqué. Les erreurs liées à cette incertitude et à l'interpolation des courbes $J_c(B)$ et $n(B)$ peuvent également expliquer certaines différences entre les pertes calculées et mesurées.

3.5 Calcul des pertes (avec couplage thermique)

Lorsque les pertes dans l'amenée de courant deviennent importantes (supérieures à 1 W/m), l'élévation de température n'est plus négligeable et peut conduire à des instabilités magnétothermiques. Le comportement de l'amenée de courant a été modélisé à l'aide de notre de calcul en différences finies en utilisant cette fois-ci les expressions (2.5) et (2.6) de $J_c(B, T)$ et $n(B, T)$.

La répartition de température dans l'amenée de courant à différents instants est présentée **Figure 3.16** pour $I_{max} = 126$ A et un champ magnétique extérieur nul. Deux millions de pas de temps auront été nécessaires pour ces 20 s de simulation, soit environ 24 heures de temps calcul. Etant donnée la faible épaisseur du tube, et malgré la mauvaise conductivité thermique (4 W/(m·K)), on observe une distribution quasiment uniforme de la

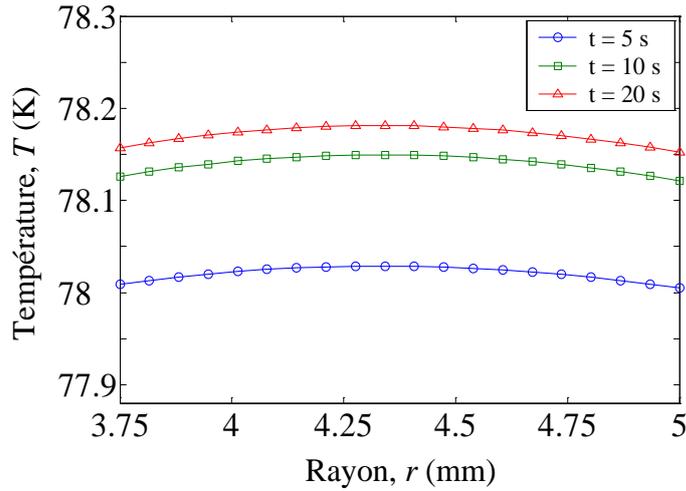


Figure 3.16 : Répartition de la température dans l'amenée de courant pour une amplitude de courant $I_{max} = 126$ A et un champ magnétique extérieur nul.

température dans le matériau.

Le comportement thermique de l'amenée de courant peut donc être représenté de manière globale à travers l'équation suivante:

$$\mathcal{G}\gamma C_p \frac{dT}{dt} + hA(T - T_{bain}) - P = 0, \quad T_{t=0} = T_{bain} \quad (2.19)$$

où h est le coefficient d'échange de chaleur par convection et $A = 2\pi l \times (R_i + R_e)$ est la surface d'échange totale entre l'échantillon et l'azote liquide, \mathcal{G} étant le volume de supraconducteur. Dans ce liquide, h vaut approximativement $400 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ selon [Pol04, Rei97].

A partir des conditions initiales et en discrétisant l'équation (2.19), il est alors possible de calculer l'élévation de la température due aux pertes P :

$$T_t = \left(T_{bain} + \frac{\tau}{\Delta t} T_{t-1} + \frac{P_t}{hA} \right) / \left(1 + \frac{\tau}{\Delta t} \right), \quad \Delta t \ll \tau = \frac{\mathcal{G}\gamma C_p}{hA} \quad (2.20)$$

avec τ la constante de temps thermique du système et Δt le pas de temps de discrétisation. Nous avons choisi un pas de temps égal à une période du courant transporté $i(t)$, soit 20 ms, car c'est sur cette durée que les pertes sont calculées.

Les effets de la température sur les pertes ont été intégrés dans la formule analytique (2.9) en remplaçant les paramètres $I_c(B)$ et $n(B)$, respectivement par les expressions (2.5) et (2.6) de $I_c(B, T)$ et $n(B, T)$. Ainsi pour $I_{max} > I_c(B)$, il faut résoudre le système couplé

suivant pour obtenir la valeur des pertes et de la température, les inconnues étant P_t et T_t :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_t(I_{max}, B, T_t) = l \times \left(\alpha_R \left(\frac{1}{6\pi} + \frac{0.3}{n(B, T_t)} \right) \left[E_c (\mu_0 f)^{n(B, T_t)} I_c(B, T_t)^{2n(B, T_t)+1} \right]^{\frac{1}{n(B, T_t)+1}} \right. \\ \left. + 2f \frac{E_c}{I_c(B, T_t)^{n(B, T_t)}} \int_{t_1}^{t_2} i(t)^{n(B, T_t)+1} dt \right) \\ T_t(I_{max}, B, P_t) = \left(T_{bain} + \frac{\tau}{\Delta t} T_{t-1} + \frac{P_t}{hA} \right) / \left(1 + \frac{\tau}{\Delta t} \right) \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Une comparaison entre les résultats numériques et analytiques est faite [Figure 3.17](#). L'évolution de la température moyenne de l'amenée de courant en fonction du temps y est tracée pour chacune des deux méthodes. Les résultats obtenus sont identiques, ce qui signifie que les hypothèses permettant la résolution analytique sont valides. La formulation analytique donne les résultats instantanément, c'est pourquoi dorénavant, la résolution numérique ne sera plus utilisée.

L'évolution des pertes et de la température moyenne en régime permanent en fonction de l'amplitude du courant de transport pour différentes valeurs d'induction magnétique sont tracées [Figure 3.18](#). Les valeurs de pertes affichées sur cette figure viennent compléter celles de la [Figure 3.6\(b\)](#) qui étaient limitées à 1 W/m, lorsque l'élévation de température était négligeable. Ce n'est plus le cas à présent, puisque l'élévation de température dans l'amenée de courant peut atteindre plusieurs Kelvin.

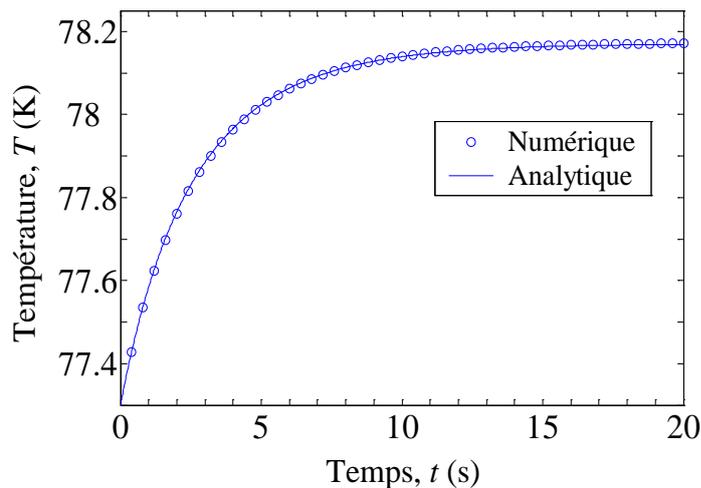


Figure 3.17 : Comparaison entre les résultats numériques et analytiques (avec couplage thermique). Evolution de la température moyenne dans l'amenée de courant pour une amplitude de courant $I_{max} = 126$ A et un champ magnétique extérieur nul.

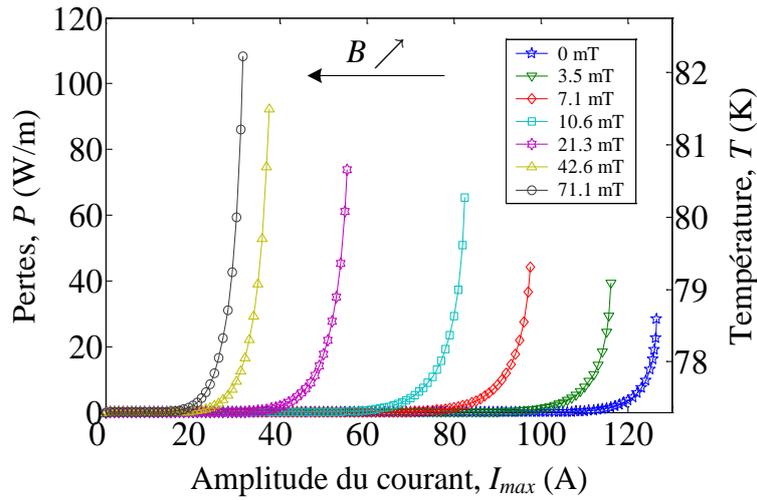


Figure 3.18 : Evolution des pertes et de la température moyenne en régime permanent en fonction de l'amplitude du courant de transport pour différentes valeurs d'induction magnétique.

Le couplage thermique est le fait d'intégrer la valeur de la température dans le calcul des pertes, à travers les paramètres I_c et n du supraconducteur, comme dans (2.21). Au contraire, les pertes sont indépendantes de la température s'il n'y a pas de couplage thermique. La Figure 3.19 montre l'influence du couplage thermique sur les pertes et la température. Lorsque l'amplitude du courant de transport I_{max} est supérieure au courant critique I_{c0} , les pertes dissipées dans le supraconducteur deviennent importantes Figure 3.19(a), ce qui augmente la température du matériau. L'évolution de la température pour $I_{max} = 126$ A en fonction du temps est tracée Figure 3.19(b).

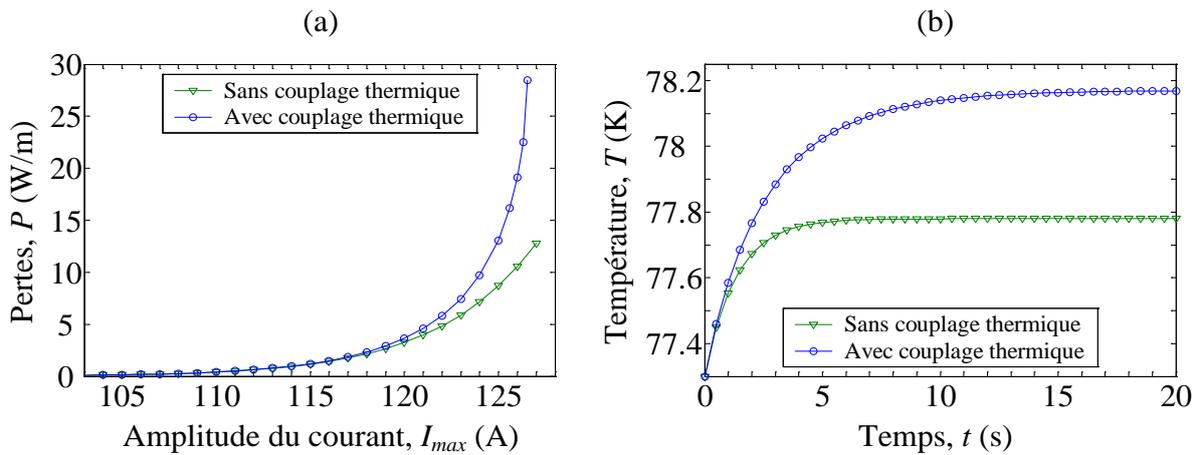


Figure 3.19 : Influence du couplage thermique. (a) Evolution des pertes en fonction de l'amplitude du courant de transport pour un champ magnétique extérieur nul. (b) Evolution de la température moyenne dans l'amenée de courant pour une amplitude de courant $I_{max} = 126$ A et un champ magnétique extérieur nul.

Sans couplage thermique, les pertes pour $I_{max} = 126$ A sont approximativement de 10.5 W/m comparées à 19.1 W/m avec couplage, ce qui correspond une augmentation de 82 %. En régime permanent, l'écart de température avec et sans couplage thermique est d'environ 0.4 K pour $I_{max} = 126$ A.

Le couplage thermique a donc pour effet d'augmenter les pertes et la température pour une même valeur d'amplitude de courant. Il est également à l'origine des instabilités magnétothermiques qui peuvent détruire l'amenée de courant. Par un effet boule de neige, les pertes dissipées dans le matériau augmentent la température, qui augmente à son tour la valeur des pertes, etc.

La **Figure 3.20** montre l'évolution de la température pour $I_{max} = 125$ A, 126 A et 127 A et un champ magnétique extérieur nul. Les deux premières valeurs conduisent à un fonctionnement stable de l'amenée de courant, alors que pour $I_{max} = 127$ A l'amenée de courant transite au bout de 16.5 s. Il existe donc une valeur limite d'amplitude du courant I_{max} et du champ magnétique extérieur B au-delà desquelles le supraconducteur transite. C'est ce que nous allons étudier dans la section suivante.

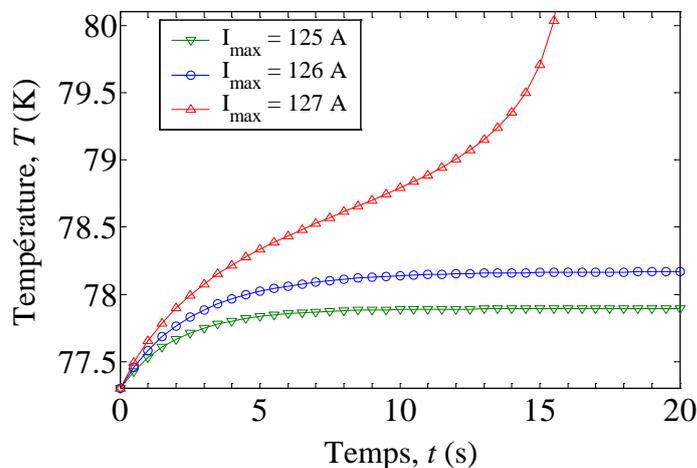


Figure 3.20 : Evolution de la température moyenne dans l'amenée de courant pour différentes amplitudes du courant et un champ magnétique extérieur nul.

3.6 Etude de la stabilité de l'amenée de courant

Le comportement de l'amenée de courant est considéré comme stable lorsqu'un couple de valeur (I_{max}, B) conduit à une valeur stable de température. En régime permanent, la température est directement proportionnelle aux pertes :

$$T = T_{bain} + \frac{P(T)}{hA} \quad (2.22)$$

Par conséquent, le comportement de l'amenée de courant sera stable si l'équation (2.22) admet au moins une solution, c'est-à-dire si la fonction $\varepsilon(T) = T_{bain} + P(T)/hA - T$ passe au moins une fois par zéro.

La Figure 3.21 montre l'évolution de la fonction $\varepsilon(T)$ pour différentes amplitudes du courant et un champ magnétique extérieur nul. Pour $I_{max} = 125$ A et 126 A, la fonction $\varepsilon(T)$ passe deux fois par zéro, l'équation (2.22) admet donc deux solutions. Ce n'est pas le cas pour $I_{max} = 127$ A puisque la fonction $\varepsilon(T)$ ne passe pas par zéro. Cette valeur d'amplitude du courant entraînera donc un comportement instable de l'amenée de courant. La limite de stabilité est atteinte lorsque $I_{max} \approx 126.58$ A puisque cette valeur d'amplitude du courant conduit à une solution unique de l'équation (2.22). La température limite associée à cette valeur de I_{max} est de 78.74 K.

Lorsque l'équation (2.22) admet deux solutions, celles-ci correspondent à des

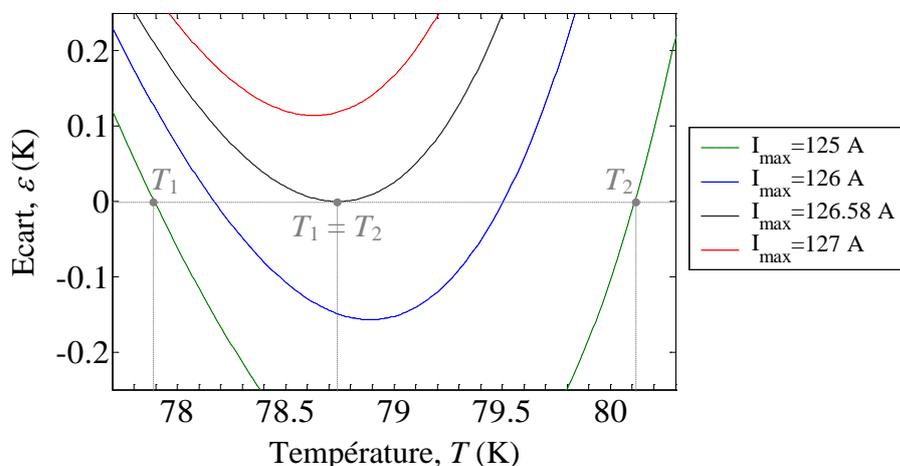


Figure 3.21 : Evolution de la fonction $\varepsilon(T) = T_{bain} + P(T)/hA - T$ en fonction de la température pour différentes amplitudes du courant et un champ magnétique extérieur nul.

températures particulières. Lorsque des pertes apparaissent, la température augmente à partir de la température initiale, soit $T_{bain} = 77.3$ K. La première solution, notée T_1 , coïncide donc avec la température finale en régime permanent. Ainsi pour $I_{max} = 125$ A et 126 A, la température en régime permanent sera respectivement de 77.89 K et 78.17 K. C'est effectivement ce qu'on observe sur la **Figure 3.21**.

La deuxième solution T_2 est plus délicate à interpréter. A partir de l'équation (2.19), on peut écrire :

$$\frac{dT}{dt} \propto \varepsilon(T) \quad (2.23)$$

La région négative de $\varepsilon(T)$, lorsque $T_1 < T < T_2$, correspond donc à une diminution de la température. Par conséquent, on ne pourra abaisser la température de l'amenée de courant, que si cette température est inférieure à $T_2(I_{max}, B)$ au moment du changement d'amplitude du courant et/ou de champ magnétique extérieur.

Prenons par exemple un fonctionnement instable de l'amenée de courant avec $I_{max} = 128$ A. Pour rétablir une température stable avec une amplitude de courant de 125 A, il faut diminuer I_{max} avant que l'amenée de courant ait atteint la température $T_2(I_{max} = 125 \text{ A}, B = 0) \approx 80.11$ K. Si le changement d'amplitude du courant est effectué après 80.11 K, alors la température continue d'augmenter. Dans le cas contraire, la

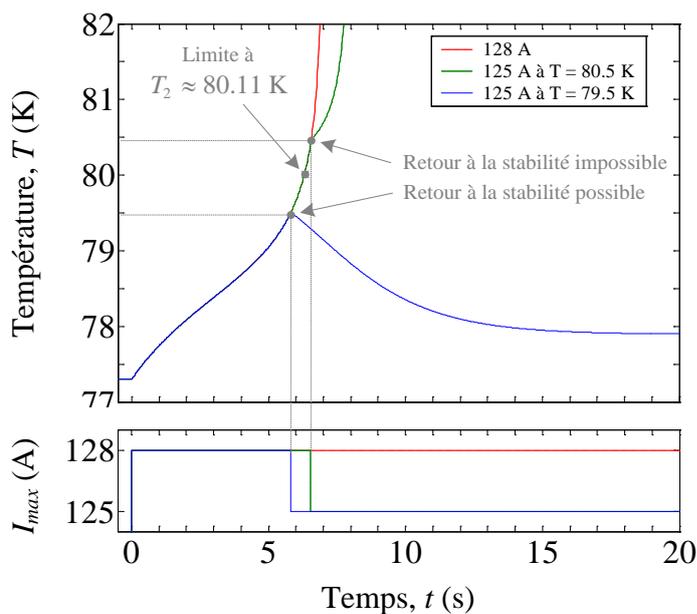


Figure 3.22 : Evolution de la température moyenne dans l'amenée de courant lors d'un passage de $I_{max} = 128$ A à $I_{max} = 125$ A sous champ magnétique extérieur nul.

température diminue et se stabilise à $T_1(I_{max} = 125 \text{ A}, B = 0) \approx 77.89 \text{ K}$, voir **Figure 3.22**.

Nous venons d'étudier la stabilité de l'amenée de courant pour un champ magnétique extérieur nul. Une augmentation du champ magnétique extérieur a pour effet de diminuer la valeur de I_{max} pour laquelle la limite de stabilité est atteinte. Ainsi, lorsque le point de fonctionnement (I_{max}, B) de l'amenée de courant se trouve sous la courbe tracée **Figure 3.23**, le comportement de l'amenée de courant sera stable, sinon il sera instable.

Dans le cas instable, la température continue d'augmenter jusqu'à dépasser T_c . Le matériau n'est alors plus supraconducteur et le temps t_q qu'il a mis avant de transiter peut être déterminé, voir **Figure 3.24**. Par exemple, pour $B = 21.3 \text{ mT}$ et $I_{max} = 60 \text{ A}$, le

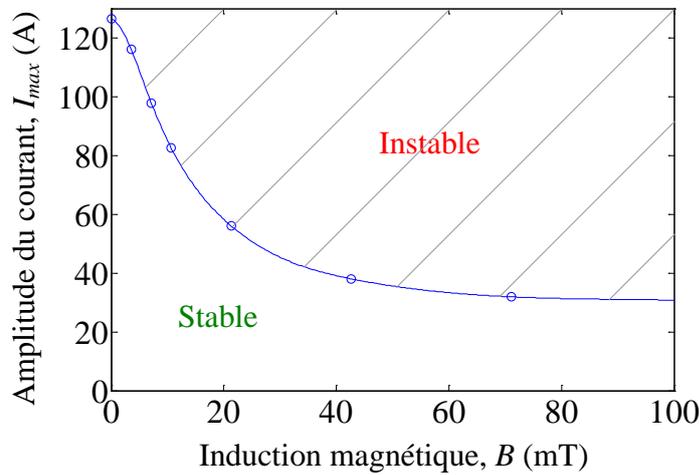


Figure 3.23 : Limite de stabilité de l'amenée de courant. Zone stable sous la courbe, instable au-dessus.

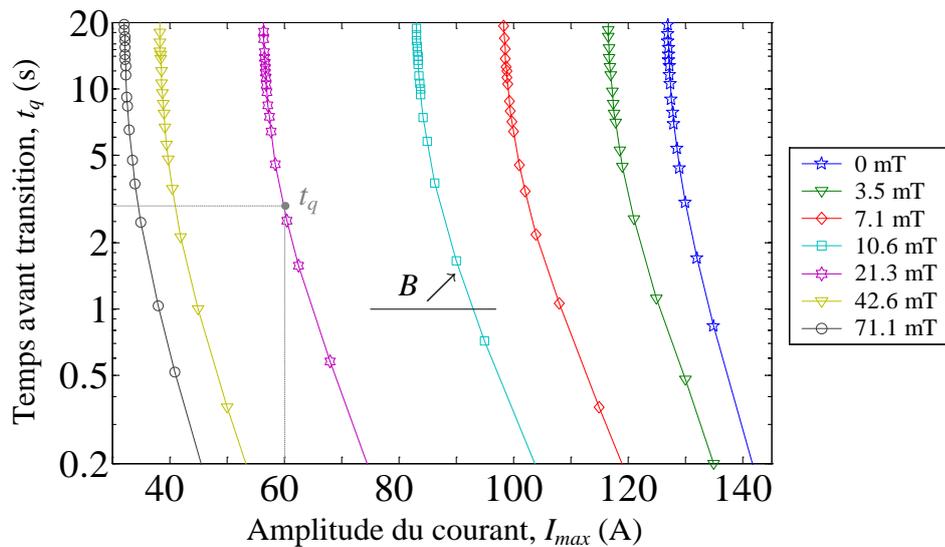


Figure 3.24 : Evolution du temps t_q nécessaire à l'amenée de courant avant de transiter en fonction de l'amplitude du courant de transport pour différentes valeurs d'induction magnétique.

supraconducteur transitera au bout de 3 s.

Les températures T_1 et T_2 , solutions de l'équation (2.22), dépendent également du couple (I_{max}, B) et sont reportées sur la [Figure 3.25](#). On peut remarquer que le réseau de courbes représentant la température T_1 est le même que celui observé sur la [Figure 3.18](#). Plusieurs informations peuvent être lues sur cet abaque. Par exemple, pour $B = 21.3$ mT et $I_{max} = 60$ A, on peut tout d'abord dire que le fonctionnement de l'amenée de courant sera instable puisque qu'il n'y a pas d'intersection avec la courbe $B = 21.3$ mT. On peut dire également que pour revenir à un fonctionnement stable avec la même valeur de B et $I_{max} = 50$ A, il faudra que cette valeur de I_{max} soit appliquée avant que la température ne dépasse 90 K. Dans ces conditions, la température se stabilisera à la valeur T_1 d'environ 78 K.

3.7 Conclusion

Les pertes AC d'une aménée de courant Bi-2223 ont été étudiées dans ce chapitre tant d'un point de vue théorique qu'expérimental.

Nous avons d'abord mesuré les caractéristiques électriques de l'aménée de courant pour permettre une modélisation réaliste de celle-ci. Son comportement magnétothermique a ensuite été simulé à l'aide de notre code de calcul. Les effets thermiques ont d'abord été limités car il ne nous était pas possible de dissiper beaucoup de pertes dans l'aménée de courant sous peine de la détruire définitivement. Sans dépasser 1 W/m , les pertes de l'aménée de courant ont été mesurées en fonction de l'amplitude du courant de transport et du

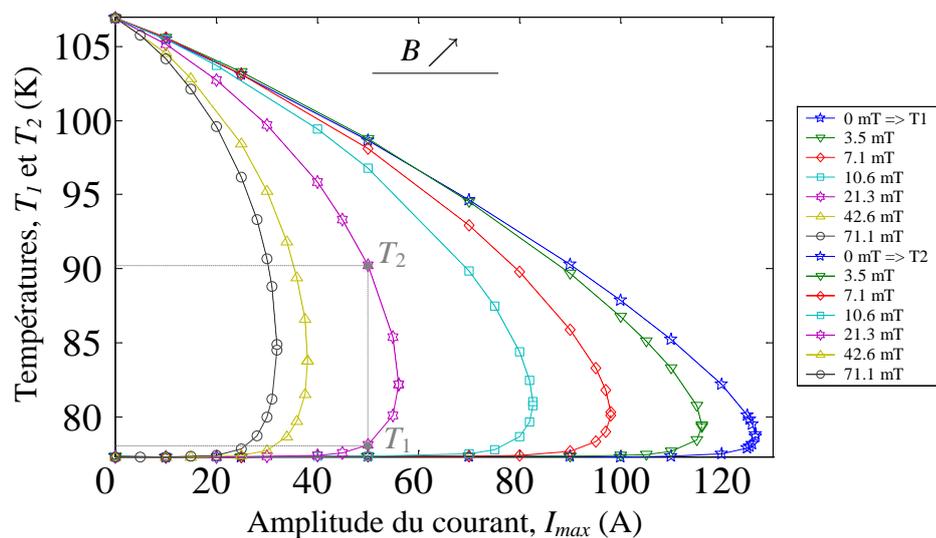


Figure 3.25 : Températures T_1 et T_2 solutions de l'équation (2.22) en fonction de l'amplitude du courant de transport pour différentes valeurs d'induction magnétique. La température T_1 correspond à la température d'équilibre de l'aménée de courant en régime permanent (trait plein). Pour un couple de valeur (I_{max}, B) , T_2 (trait en pointillés) correspond à la température à ne pas dépasser pour rétablir un fonctionnement stable de l'aménée de courant en diminuant I_{max} ou B .

champ magnétique appliqué, puis comparées à celles obtenues en simulation. Les résultats sont cohérents puisqu'ils montrent une bonne concordance lorsque le champ magnétique appliqué est supérieur au champ propre de l'amenée de courant que nous avons choisi de négliger.

L'étude théorique a ensuite été poursuivie lorsque les pertes sont supérieures à 1 W/m . Les effets thermiques ne sont alors plus négligeable et la prise en compte ou non du couplage thermique (diminution de J_c et n avec la température) montre des différences significatives (82% de pertes en plus pour $I_{max} = 126 \text{ A}$). Le comportement de l'amenée de courant peut alors devenir instable.

Ces instabilités ont donc été étudiées à l'aide d'une expression analytique des pertes. Nous avons montré la limite de stabilité de l'amenée de courant en fonction de l'amplitude du courant et du champ magnétique appliqué. A l'aide des formules établies, nous pouvons déterminer les pertes et la température finale dans le cas d'un fonctionnement stable. Pour un fonctionnement instable, nous avons tracé des abaques pour plusieurs valeurs de I_{max} et B qui donnent le temps mis par l'amenée de courant avant de transiter. Pour finir, des abaques de T_1 (température en régime permanent) et T_2 (température à ne pas dépasser pour permettre un retour à un fonctionnement stable) ont également été tracés pour plusieurs valeurs de I_{max} et B . Grâce à ces abaques, établis théoriquement, il est alors possible de connaître les marges de fonctionnement de l'amenée de courant pour ne pas risquer la destruction de cette dernière. Il faut cependant se souvenir des hypothèses qui ont été faites et veiller à l'apparition de phénomènes qui n'auraient pas été considérés théoriquement.

Chapitre 4. Phénomènes magnétothermiques durant l'aimantation de pastilles YBCO

Dans ce chapitre, la réponse dynamique de pastilles YBCO à des variations de champ magnétique, en considérant les effets thermiques, est abordée de manière détaillée. L'énergie magnétique stockée dans le supraconducteur ainsi que des profils de densité de courant, d'induction magnétique et de température y sont rapportées. Finalement, nous déterminons plusieurs critères permettant d'optimiser le processus d'aimantation des pastilles supraconductrices.

4.1 Introduction

Le modèle de Bean (§ 2.2.2) permet de facilement comprendre le principe du piégeage de flux dans un supraconducteur. Considérons une plaque supraconductrice d'épaisseur $2a$ et infiniment longue suivant les directions y et z . Cette plaque est soumise à un champ magnétique extérieur appliqué suivant y , voir Figure 4.1.

Supposons que le champ extérieur d'amplitude H_a augmente. Suivant la loi de Lenz, des courants d'écrantage sont induit sur les bords de la plaque. Ces courants sont orientés de sorte à s'opposer aux variations du champ. Comme le champ magnétique n'a qu'une composante suivant y , les courants ne peuvent circuler que dans la direction z , et le rotationnel de \mathbf{H} dans la loi d'Ampère se réduit à un terme scalaire.

Le profil de pénétration du champ dans le matériau est une ligne droite dont la pente est

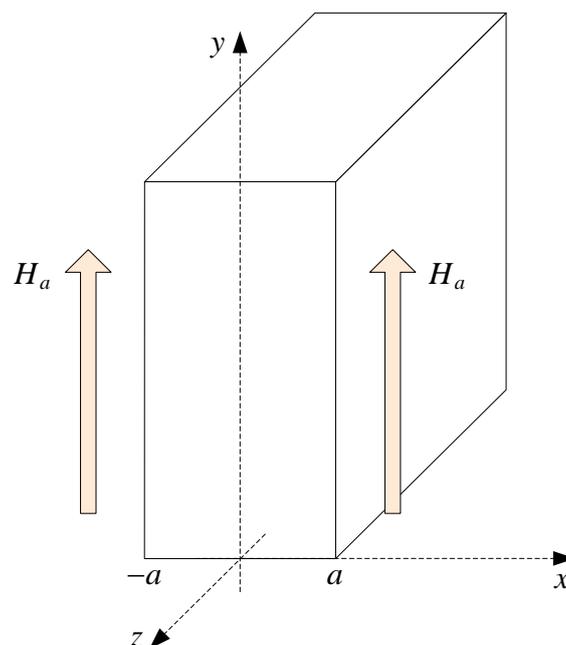


Figure 4.1 : Plaque supraconductrice d'épaisseur $2a$ et infiniment longue suivant les directions y et z .

liée à J_c :

$$\partial H_y / \partial x = \pm J_c \quad (3.1)$$

Le champ pénètre partiellement la plaque et la densité de courant vaut $\pm J_c$ dans les régions pénétrées, voir **Figure 4.2(a)**. Jusqu'à une certaine valeur du champ H_p , le flux continue de pénétrer la plaque en atteignant son centre, et la totalité de l'épaisseur est traversée par $\pm J_c$ comme indiqué sur la **Figure 4.2(b)**. La valeur H_p du champ magnétique externe est appelée *champ de pénétration complète*. Quand l'amplitude du champ extérieur est supérieure à H_p , les courants d'écrantage ne pouvant dépasser J_c , ils ne s'opposent plus à la pénétration du champ à l'intérieur de la plaque. Le profil du champ subit alors un décalage vers le haut, et la différence entre la valeur du champ sur les bords et au centre reste constante égale à H_p , voir **Figure 4.2(c)**.

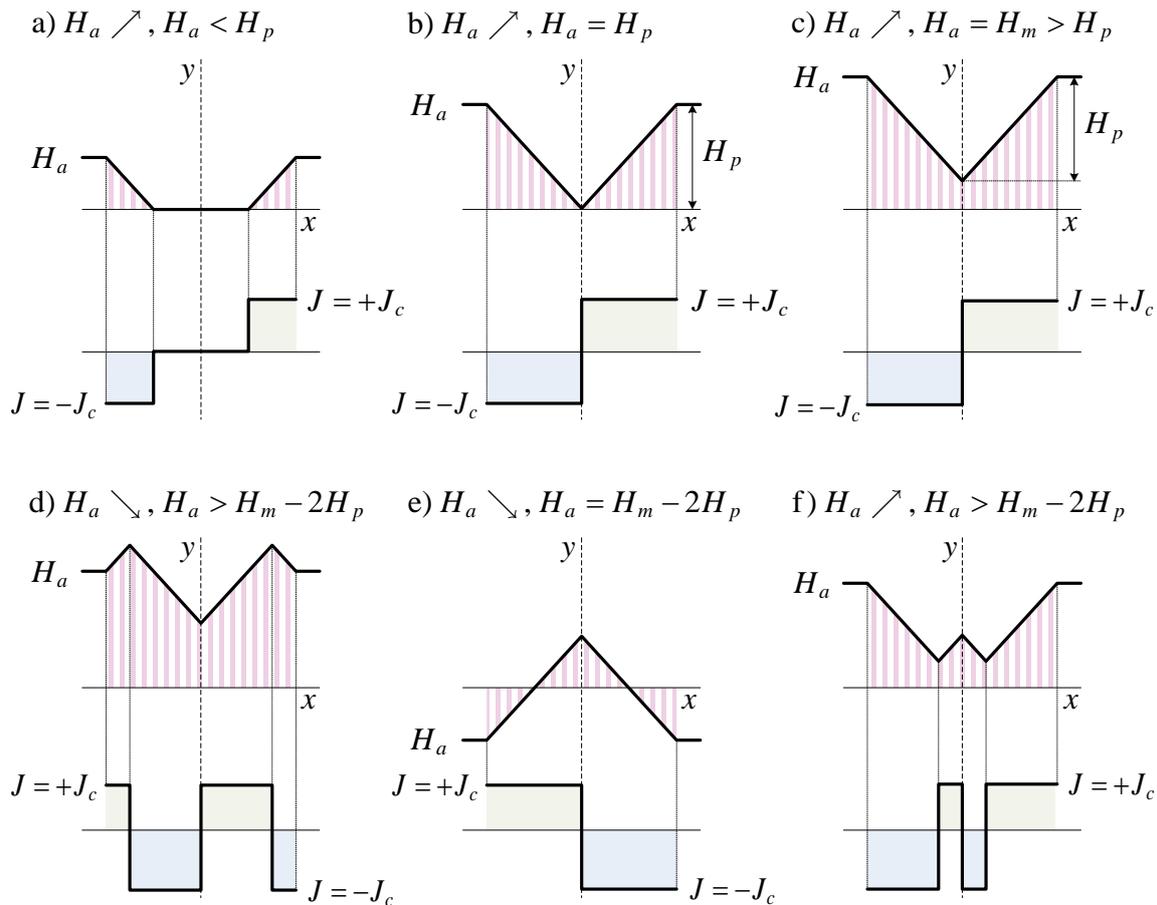


Figure 4.2 : Distribution de la densité de courant et du champ magnétique dans une plaque supraconductrice en accord avec le modèle de Bean.

Laissons maintenant décroître le champ extérieur. Les courants d'écrantage doivent s'opposer à cette diminution et sur les bords de la plaque des courants de sens opposés apparaissent, la densité de courant et le champ restant inchangés ailleurs, comme indiqué sur la [Figure 4.2\(d\)](#). Quand le champ extérieur est diminué de $2H_p$ par rapport à sa valeur maximale, les profils de champ et de courant sont complètement renversés, comparer [Figure 4.2\(b\)](#) et [Figure 4.2\(e\)](#). Quand le champ magnétique extérieur recommence à augmenter, des régions avec des courants opposés apparaissent de nouveau sur les bords, voir [Figure 4.2\(f\)](#).

Ainsi, dès que le champ magnétique a pénétré la plaque (partiellement ou complètement), il existe toujours des courants d'écrantage dans le supraconducteur, même quand le champ extérieur passe par zéro durant ses oscillations. Le champ magnétique peut donc se retrouver piégé à l'intérieur du supraconducteur, c'est ce qui traduit son *comportement hystérétique*. Le comportement du supraconducteur ressemble alors à celui d'un aimant permanent, c'est pourquoi l'on parle également de cryoaimant pour un supraconducteur capable de générer un champ magnétique.

Les niveaux de champ magnétique qui peuvent être atteints par les cryoaimants sont largement supérieurs à ceux des aimants. Comme le couple est directement proportionnel à l'amplitude de la répartition spatiale du champ magnétique, l'utilisation de ces cryoaimants dans les machines électriques permettrait d'atteindre un couple électromagnétique beaucoup plus important qu'une machine classique. Des études récentes viennent d'ailleurs d'être publiées sur ce sujet [[Mas03](#), [Mas05](#), [Net05](#)].

4.2 Description du problème

Comme nous l'avons vu, le modèle de Bean ne représente pas de manière optimale le comportement des SHT. Dans ce chapitre, nous modélisons une pastille YBCO cylindrique en utilisant une loi en puissance $E-J$ qui dépend à la fois du champ magnétique et de la température. Le comportement magnétothermique de cette pastille durant un processus d'aimantation est ainsi étudié.

Le problème traité est 2D-axisymétrique. Dans la base orthonormée (r, θ, z) les vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{J} , \mathbf{B} s'expriment de la manière suivante :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_\theta(r, z) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_\theta(r, z) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_r(r, z) \\ 0 \\ B_z(r, z) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Pour ne pas surcharger inutilement l'écriture des équations, les notations $E = E_\theta(r, z)$, $J = J_\theta(r, z)$, $B_r = B_r(r, z)$ et $B_z = B_z(r, z)$ seront utilisées. Compte-tenu des symétries, seul un quart du problème est modélisé, voir **Figure 4.3**.

Dans le supraconducteur, l'équation à résoudre est :

$$\Delta \left(E_c \left(\frac{J}{J_c(\mathbf{B}, T)} \right)^{n(\mathbf{B}, T)} \right) - \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

Dans l'air, $J = 0$ et il faut résoudre :

$$\Delta E = 0 \quad (3.4)$$

Afin d'obtenir l'élévation de température de la pastille issue des pertes, l'équation thermique suivante est également résolue dans le supraconducteur :

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \gamma C_p \frac{\partial T}{\partial t} + E \cdot J = 0 \quad (3.5)$$

Les échanges de chaleur entre le supraconducteur et le fluide cryogénique se font par convection et la valeur du coefficient de convection h est rappelée dans le **Tableau 4.1**. Tous

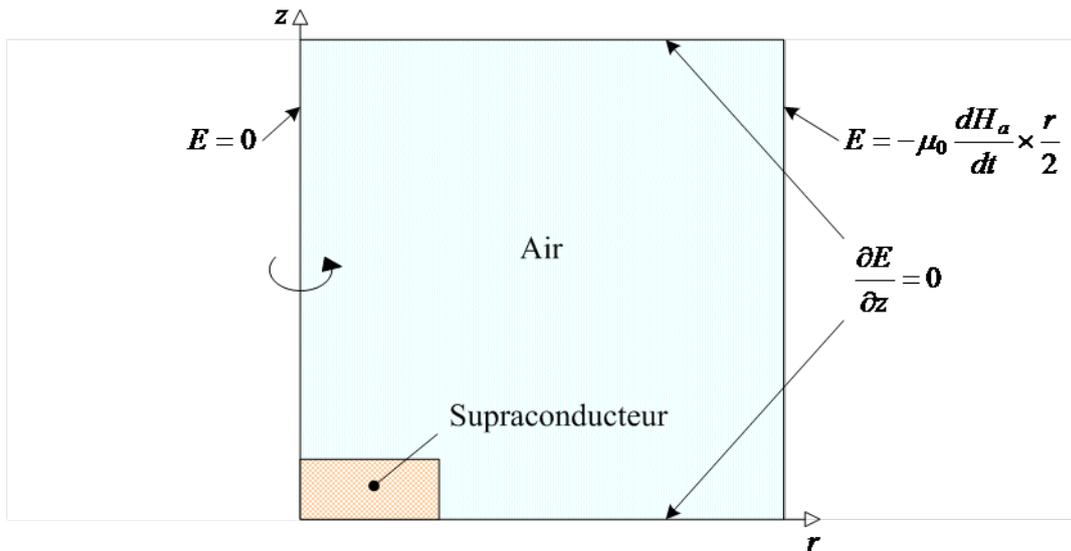


Figure 4.3 : Problème 2D-axisymétrique : une pastille YBCO est soumise à un champ magnétique axial (suivant z) variable. Compte-tenu des symétries, seul un quart du domaine est nécessaire à la modélisation.

Tableau 4.1 : Paramètres de la simulation pour les pastilles $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7+x}$.

Symbole	Quantité	Valeur
γ	masse volumique	5.4 g/cm ³
C_p	chaleur spécifique	150 J/(kg · K)
λ	conductivité thermique	5 W/(m · K)
h	coefficient de convection du fluide cryogénique (azote)	400 W/(m ² · K)
T_c	température critique	92 K
E_c	champ électrique critique	1 μV/cm
J_{c0}	densité de courant critique à 77 K sous champ nul	500 A/mm ²
n_0	exposant n à 77 K sous champ nul	20
n_1	exposant n à 77 K lorsque $\ \mathbf{B}\ \gg B_0$	5
B_0	paramètre utilisé dans la dépendance en champ magnétique	0.5 T

les autres paramètres utilisés pour la modélisation des pastilles YBCO sont également inscrits dans le [Tableau 4.1](#).

Il existe de nombreux procédés d'aimantation parmi lesquels le « Pulsed Field Magnetization » (PFM) est souvent utilisé pour l'aimantation de cryoaimants puisqu'il permet d'atteindre de fort champ magnétique. Il s'agit d'obtenir une impulsion de courant importante dans une bobine servant à aimanter l'échantillon. Pour cela, une décharge de type R, L, C peut être utilisée. L'expression du champ magnétique appliqué est alors donnée par la solution de l'équation de décharge du circuit. Afin de réduire de nombre de paramètres, nous choisissons le cas critique, c'est-à-dire lorsque $R = 2\sqrt{L/C}$, soit :

$$H_a(t) = H_m \frac{t}{\tau} \exp\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \quad (3.6)$$

où $\tau = \sqrt{LC}$ est la constante de temps de la décharge et $H_m = q_0 / (\tau \exp(1))$ est le champ maximal obtenu à $t = \tau$, q_0 étant la charge initiale du condensateur C du circuit de décharge.

La [Figure 4.4](#) présente l'évolution temporelle du champ magnétique appliqué pour l'aimantation. Différentes valeurs de constantes de temps τ comprises entre 0.001 s et 10 s sont utilisées dans § 4.4. A cause du couplage thermique, le régime permanent est relativement lent à atteindre. Ainsi, quelle que soit la constante de temps utilisée, les résultats en régime permanent sont présentés à $t = 200$ s.

Le [Tableau 4.2](#) récapitule les caractéristiques géométriques des différentes pastilles étudiées dans § 4.5. La pastille pleine nommée « 8-0-24 » sert de référence, elle mesure 8 mm

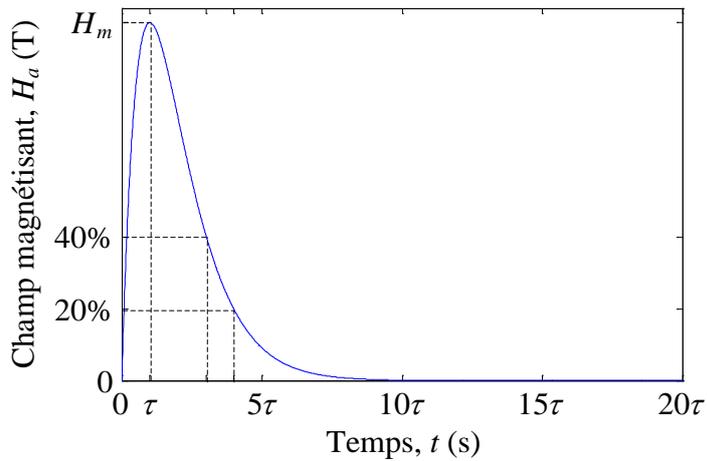


Figure 4.4 : Evolution temporelle du champ magnétisant issu d'une décharge R, L, C.

de haut pour un diamètre extérieur de 24 mm. A titre indicatif, la pastille « 8-0-24 » est composée de 9×25 points car la discrétisation est effectuée avec un pas d'espace $\Delta r = \Delta z = 5 \times 10^{-4}$ m. Le domaine représente quant à lui 100×100 points.

L'équation (3.3) utilise la loi $E(J, T, \mathbf{B})$ du matériau avec $J_c(T, \mathbf{B})$ et $n(T, \mathbf{B})$ les paramètres du supraconducteur. Le **Tableau 4.3** résume les différentes lois de comportement utilisées dans § 4.3. Le cas le plus simple nommé « $E-J$ » consiste à négliger les effets de la

Tableau 4.2 : Caractéristiques géométriques des différentes pastilles étudiées.

Nom	Représentation	Hauteur	Diamètre intérieur	Diamètre extérieur	Nombre de points
16-0-24		16 mm	0 mm	24 mm	17×25
12-0-24		12 mm	0 mm	24 mm	13×25
8-0-24		8 mm	0 mm	24 mm	9×25
8-8-24		8 mm	8 mm	24 mm	9×17
8-16-24		8 mm	16 mm	24 mm	9×9

Tableau 4.3 : Lois de comportement utilisées pour modéliser le supraconducteur.

Nom	Modèle pour la loi $E(J, \mathbf{B}, T)$
$E-J$	$E_c \left(\frac{J}{J_{c0}} \right)^{n_0}$
$E-J-T$	$E_c \left(\frac{J}{J_c(T)} \right)^{n(T)}$ avec $J_c(T) = J_{c0} \times \left(\frac{1-T/T_c}{1-T_{bain}/T_c} \right)$ et $n(T) = n_0 \times \frac{T_{bain}}{T}$
$E-J-\mathbf{B}$	$E_c \left(\frac{J}{J_c(\mathbf{B})} \right)^{n(\mathbf{B})}$ avec $J_c(\mathbf{B}) = \frac{J_{c0}}{1+\ \mathbf{B}\ /B_0}$ et $n(\mathbf{B}) = n_1 + \frac{n_0 - n_1}{1+\ \mathbf{B}\ /B_0}$
$E-J-\mathbf{B}-T$	$E_c \left(\frac{J}{J_c(\mathbf{B}, T)} \right)^{n(\mathbf{B}, T)}$ avec $J_c(\mathbf{B}, T) = \frac{J_{c0}}{1+\ \mathbf{B}\ /B_0} \times \left(\frac{1-T/T_c}{1-T_{bain}/T_c} \right)$ et $n(\mathbf{B}, T) = \left(n_1 + \frac{n_0 - n_1}{1+\ \mathbf{B}\ /B_0} \right) \times \frac{T_{bain}}{T}$

température et du champ magnétique soit $J_c(T, \mathbf{B}) = J_{c0}$ et $n(T, \mathbf{B}) = n_0$. L'influence séparée du champ magnétique et de la température est ensuite abordée. Enfin le modèle le plus complet consiste à prendre en compte l'influence simultanée des deux grandeurs, c'est le cas du modèle « $E-J-\mathbf{B}-T$ ».

4.3 Conséquence des lois de comportement $E(J, \mathbf{B}, T)$

4.3.1 Profils de J, \mathbf{B}, T

Afin de mieux comprendre l'influence des lois de comportement, les profils de densité de courant J , d'induction magnétique B et de température T dans la pastille 8-0-24 sont reportés respectivement sur la [Figure 4.5](#), la [Figure 4.6](#) et la [Figure 4.7](#) lors d'une aimantation d'amplitude $B_m = 5$ T avec $\tau = 0.001$ s.

❖ A $t = \tau$, la valeur du champ magnétique appliqué est maximale ($B_m = 5$ T). Durant

la montée du champ, des courants ont été induits dans la pastille pour s'opposer à cette variation.

Seule la loi « $E-J$ » montre clairement une région où aucun courant n'a été créé. En effet, il y a pénétration incomplète du champ magnétique car le champ appliqué est inférieur au champ de pénétration $B_p \approx 7.5$ T. La densité de courant est importante dans les régions où le champ magnétique a pénétré, ce qui amène l'échantillon à s'échauffer notamment sur les bords. La température n'étant pas prise en compte dans la loi « $E-J$ », cet échauffement n'a aucune conséquence sur le comportement électromagnétique de la pastille.

La loi « $E-J-T$ » tient compte de cette élévation de température, c'est pourquoi la densité de courant est plus faible sur les bords qu'au centre. Cette détérioration de J_c est également la cause de la pénétration complète du champ magnétique dans la pastille.

Pour la loi « $E-J-B$ », le champ magnétique atteint jusqu'à 2.8 T au centre de la pastille. Cela a pour conséquence de diminuer J_c et c'est pourquoi la densité de courant ne dépasse pas 250 A/mm² dans la pastille (soit la moitié de J_{c0}).

A cause des effets thermiques qui diminuent J_c sur les bords, la densité de courant dans la pastille pour la loi « $E-J-B-T$ » est encore plus faible que pour la loi « $E-J-B$ ».

❖ A $t = 20\tau = 0.02$ s, le champ magnétique appliqué est quasi nul. Durant la descente du champ, des courants – de sens opposés aux précédents – ont été induits dans la pastille pour s'opposer à cette variation.

Rien de particulier pour la loi « $E-J$ » qui montre des régions où $J = \pm J_{c0}$ et des régions où $J = 0$. C'est ce qu'on aurait obtenu avec le modèle de Bean car étant donné les variations rapides du champ magnétique appliqué et la valeur de n_0 qui vaut 20, la loi « $E-J$ » et le modèle de Bean aboutissent à des comportements similaires.

Pour la loi « $E-J-T$ », la température a continué d'augmenter, produisant sur les bords une région où la densité de courant est presque nulle. Ce phénomène est irréversible.

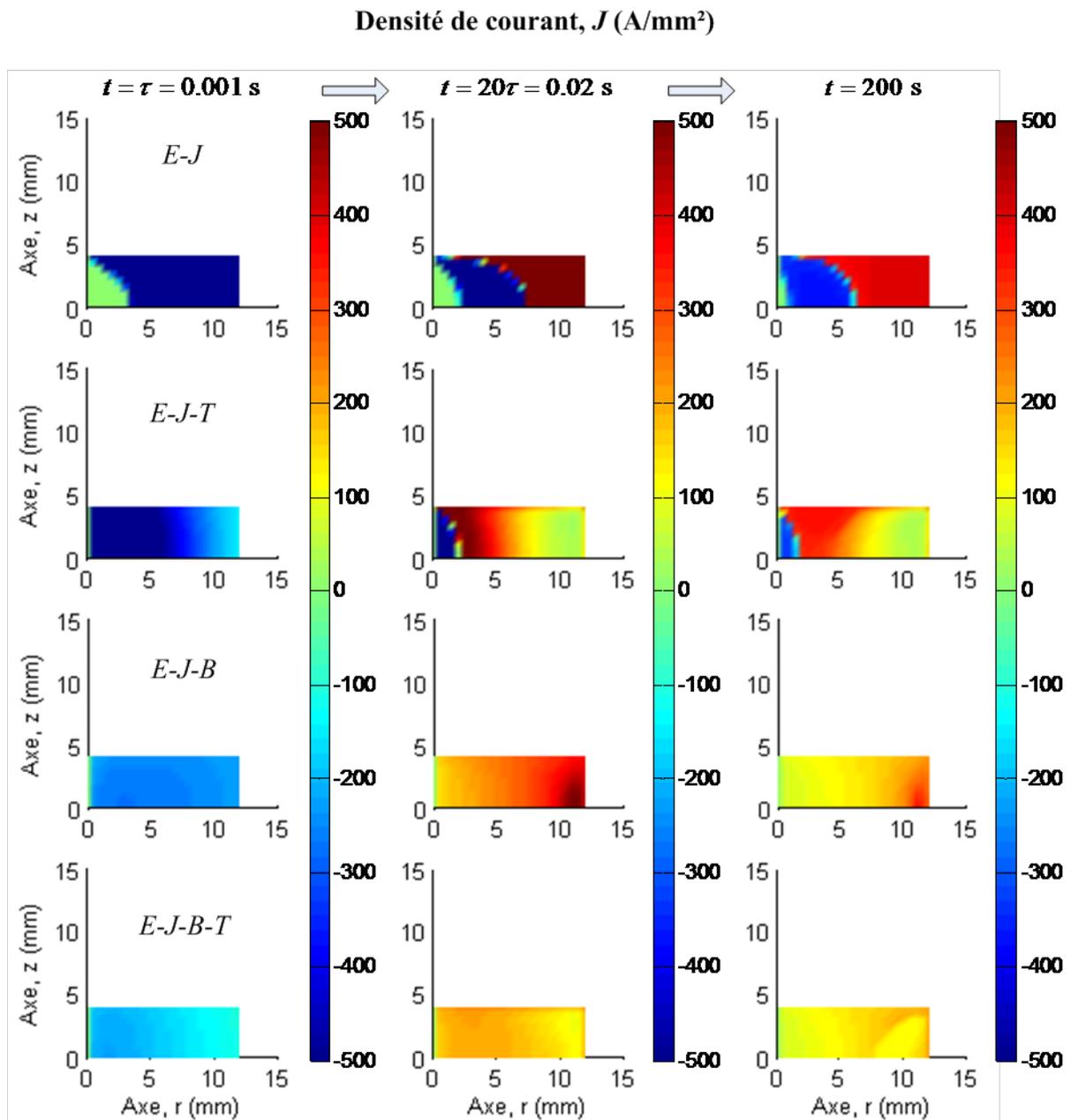


Figure 4.5 : Comparaison des différentes lois de comportement $E(J, B, T)$. Profils de densité de courant dans la pastille « 8-0-24 » à différents instants pour $\tau = 0.001$ s et $B_m = 5$ T.

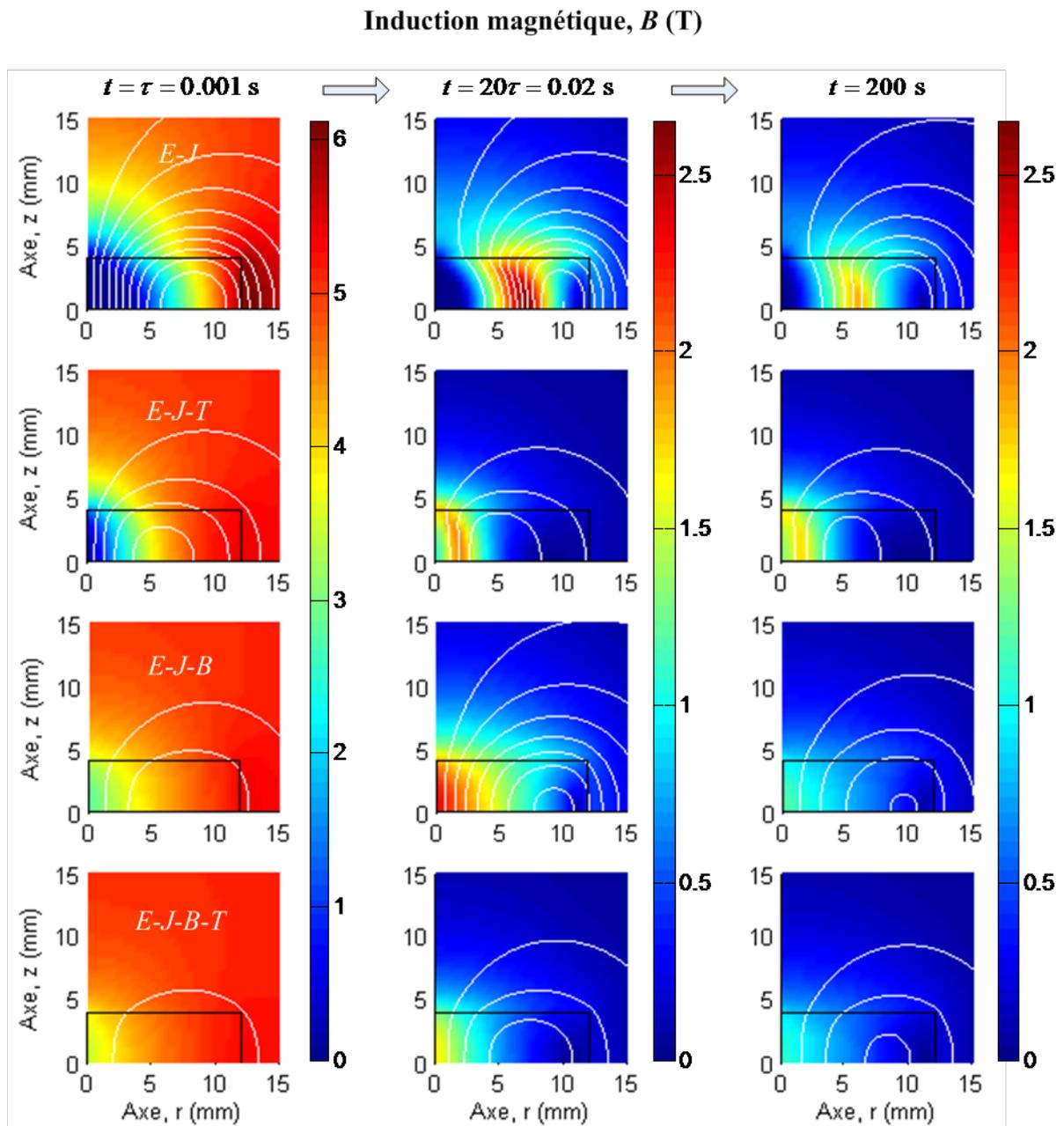


Figure 4.6 : Comparaison des différentes lois de comportement $E(J, \mathbf{B}, T)$. Profils d'induction magnétique et lignes de champs dans la pastille « 8-0-24 » à différents instants pour $\tau = 0.001$ s et $B_m = 5$ T.

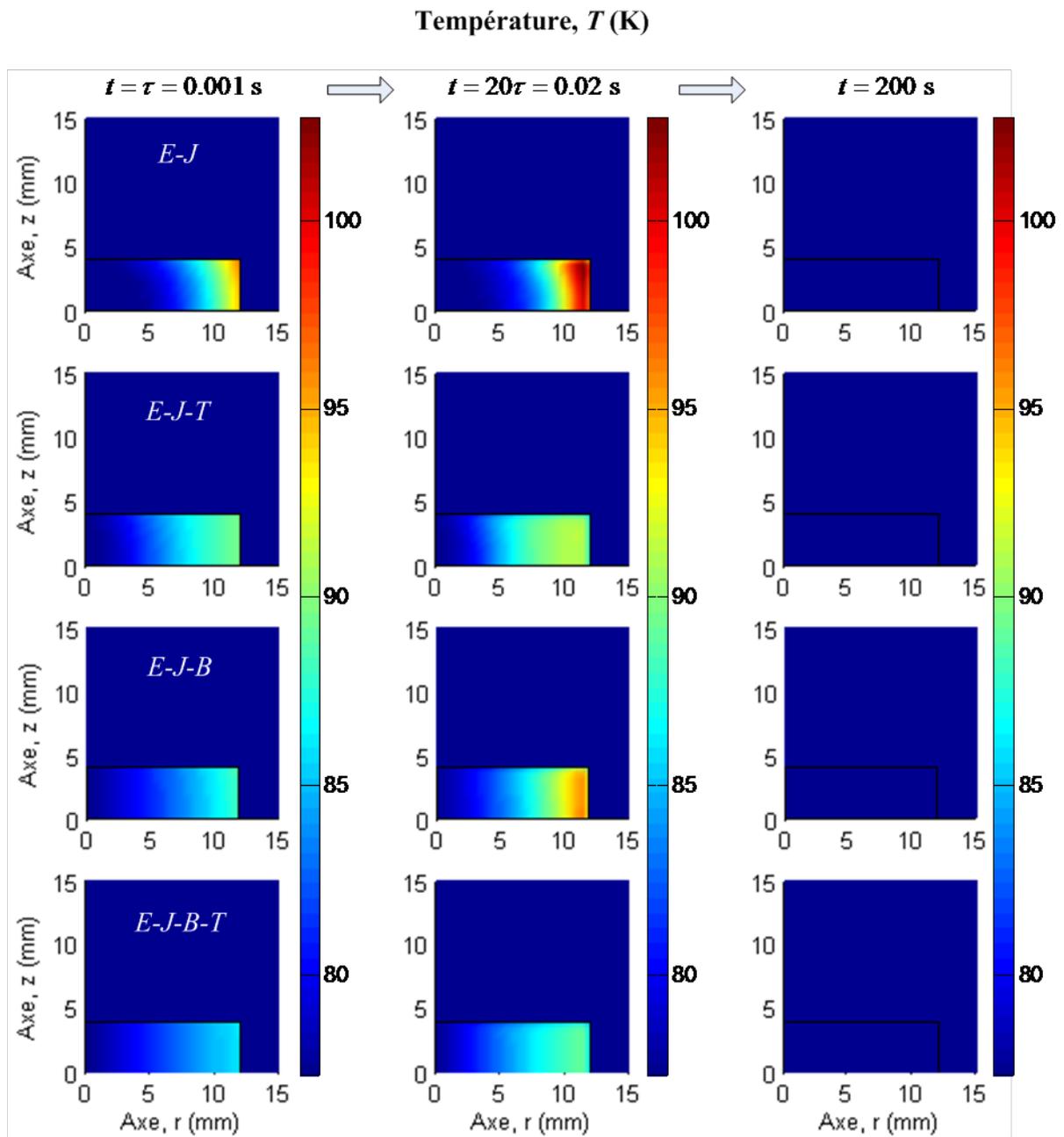


Figure 4.7 : Comparaison des différentes lois de comportement $E(J, \mathbf{B}, T)$. Profils de température dans la pastille « 8-0-24 » à différents instants pour $\tau = 0.001 \text{ s}$ et $B_m = 5 \text{ T}$.

Pour la loi « $E-J-B$ », et contrairement à la loi « $E-J-T$ », la densité de courant est plus faible au centre de la pastille que sur les bords. En effet, le champ magnétique piégé dans la pastille est maximum en $r=0$. Cela affecte la densité de courant critique à travers la loi $J_c(\mathbf{B})$ et limite donc la densité de courant à des valeurs plus faibles au centre de la pastille.

Comme à $t=\tau$, les effets thermiques diminuent J_c sur les bords ; la densité de courant dans la pastille pour la loi « $E-J-B-T$ » est encore plus faible que pour la loi « $E-J-B$ ».

❖ A $t=200$ s, le régime thermique permanent est atteint, comme le montre la [Figure 4.7](#). Quelle que soit la loi de comportement, la lente diminution du champ magnétique extérieur a entraîné une diminution de la densité de courant à l'intérieur de la pastille, ce qui se traduit également par une diminution du champ magnétique piégé.

Entre $t=0.02$ s et $t=20$ s, le point chaud s'est déplacé des bords de la pastille vers le centre de celle-ci, voir [Figure 4.8](#). Pour les lois « $E-J-T$ » et « $E-J-B-T$ », ce déplacement a eu pour conséquence d'augmenter la température dans certaines régions, produisant ainsi une diminution de la densité de courant.

L'influence de la température sur l'aimantation est donc incontournable et le refroidissement (et donc la forme de la pastille) joue également un rôle primordial. C'est pourquoi nous étudierons différentes formes de pastille dans § 4.5.

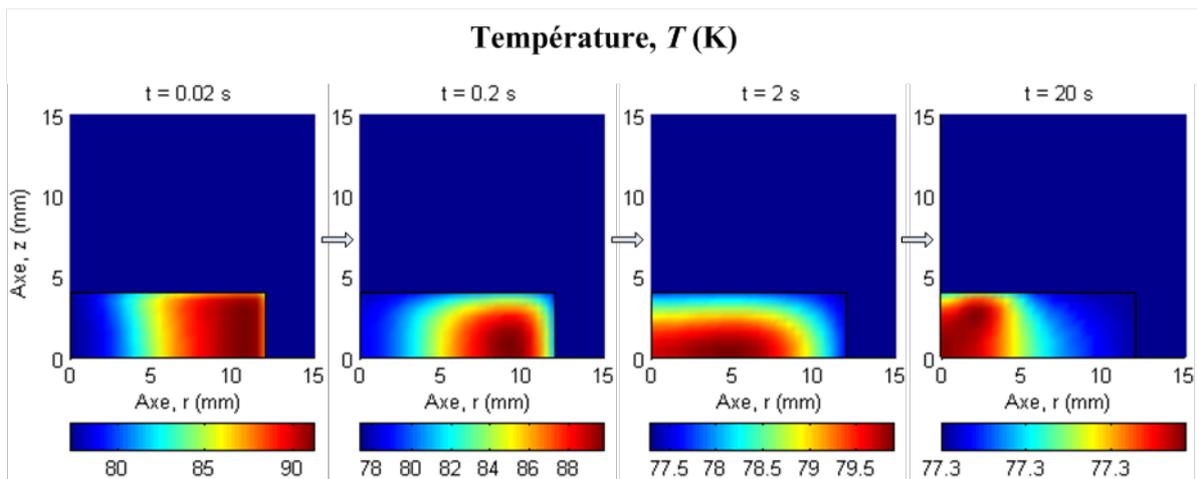


Figure 4.8 : Evolution de la température dans la pastille « 8-0-24 » avec la loi de comportement $E-J-T$ pour $\tau = 0.001$ s et $B_m = 5$ T.

4.3.2 Energie magnétique stockée

Pour un aimant permanent, il est important de regarder son énergie spécifique, qui s'exprime en J/m^3 , car elle correspond à l'énergie maximale utilisable (pour exercer une force d'attraction, par exemple). Ainsi, et afin d'évaluer de manière globale le champ magnétique piégé dans le supraconducteur, nous nous sommes intéressés à la valeur de l'énergie magnétique stockée. Cette énergie stockée est définie comme suit :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \cdot dv = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_s} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \cdot dv \quad (3.7)$$

Pour chaque lois de comportement « $E-J$ », « $E-J-T$ », « $E-J-B$ » et « $E-J-B-T$ », l'évolution de l'énergie stockée dans la pastille « 8-0-24 » en fonction de l'amplitude du champ magnétisant est représentée sur la **Figure 4.9(a)** pour $\tau = 0.1$ s et sur la **Figure 4.9(b)** pour $\tau = 0.001$ s. L'échelle utilisée sur la **Figure 4.9** ne permet pas de visualiser le maximum d'énergie stockée pour la loi de comportement « $E-J$ ». Les courbes correspondantes sont donc retracées sur la **Figure 4.10**. On constate que le maximum est atteint pour un champ magnétique proche de 11 T soit 1.5 fois le champ de pénétration $B_p = \mu_0 J_{c0} (R_e - R_i) \approx 7.5$ T. De plus, l'énergie maximale stockée est quasiment identique pour $\tau = 0.001$ s et $\tau = 0.1$ s. Ce modèle correspond au cas le cas plus optimiste.

Un second de champ de pénétration B_p^* est défini pour tenir compte de la loi $J_c(B)$. Ce champ de pénétration B_p^* correspond à la valeur du champ magnétique sur le rayon extérieur de la pastille $B(R_e)$ qui annule le champ magnétique sur le rayon intérieur $B(R_i)$. Ce champ est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial r} &= \mu_0 \frac{J_{c0}}{1 + B/B_0} \Rightarrow \frac{B}{B_0} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial r} = \mu_0 J_{c0} \\ \Rightarrow \int_{R_i}^{R_e} \frac{B}{B_0} \frac{\partial B}{\partial r} \cdot dr + \int_{R_i}^{R_e} \frac{\partial B}{\partial r} \cdot dr &= \int_{R_i}^{R_e} \mu_0 J_{c0} \cdot dr \\ \Rightarrow \frac{B_p^{*2}}{2B_0} + B_p^* - B_p &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Soit :

$$B_p^* = B_0 \times \left(-1 + \sqrt{1 + 2 \frac{B_p}{B_0}} \right) \quad (3.9)$$

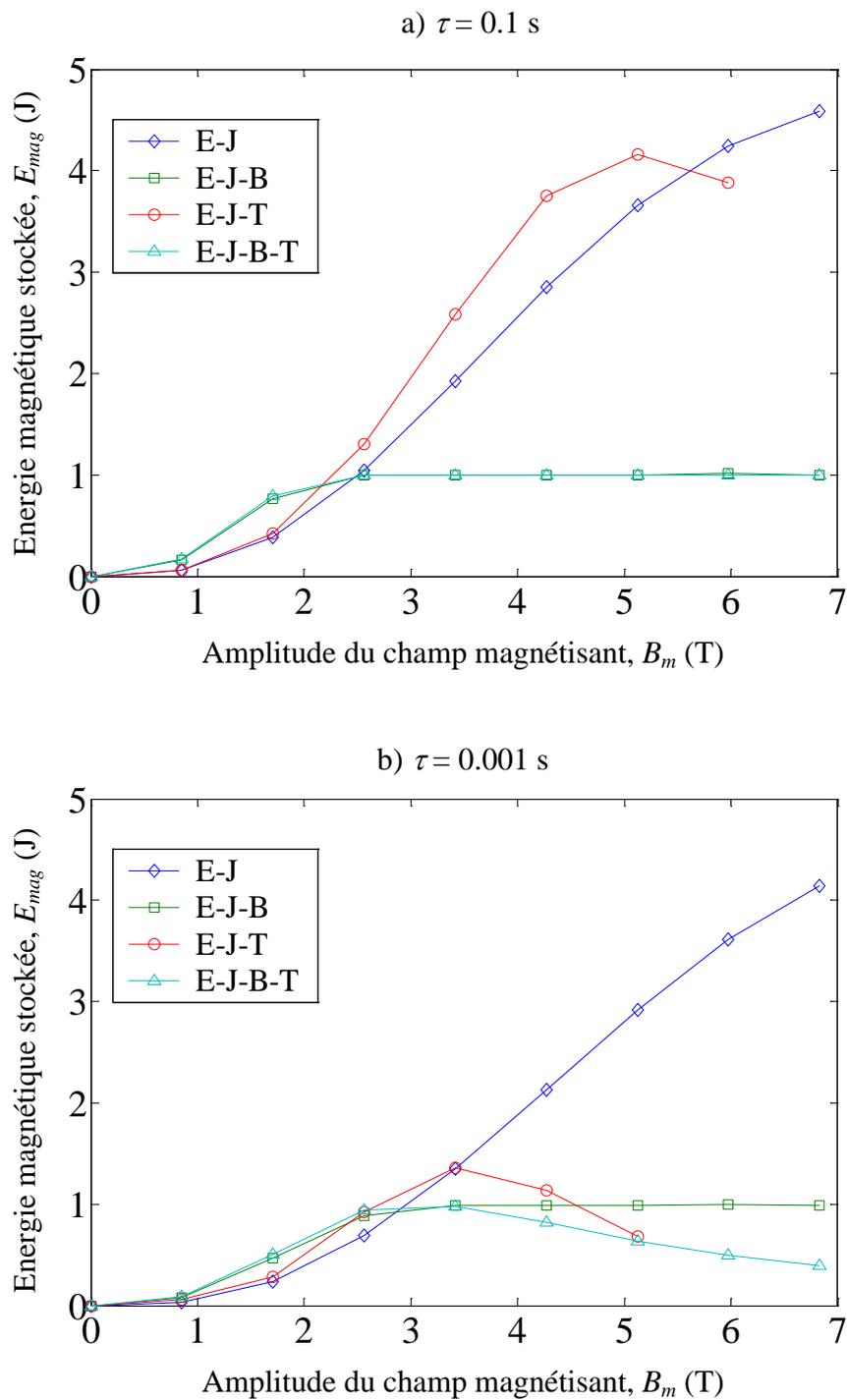


Figure 4.9 : Energie magnétique stockée dans la pastille « 8-0-24 » en fonction de l'amplitude du champ magnétisant pour $\tau = 0.1$ s (a) et $\tau = 0.001$ s (b) et différentes lois de comportement « $E(J, \mathbf{B}, T)$ ». ¹

¹ A titre indicatif, un point d'une courbe représente en moyenne 24 heures de temps de calcul.

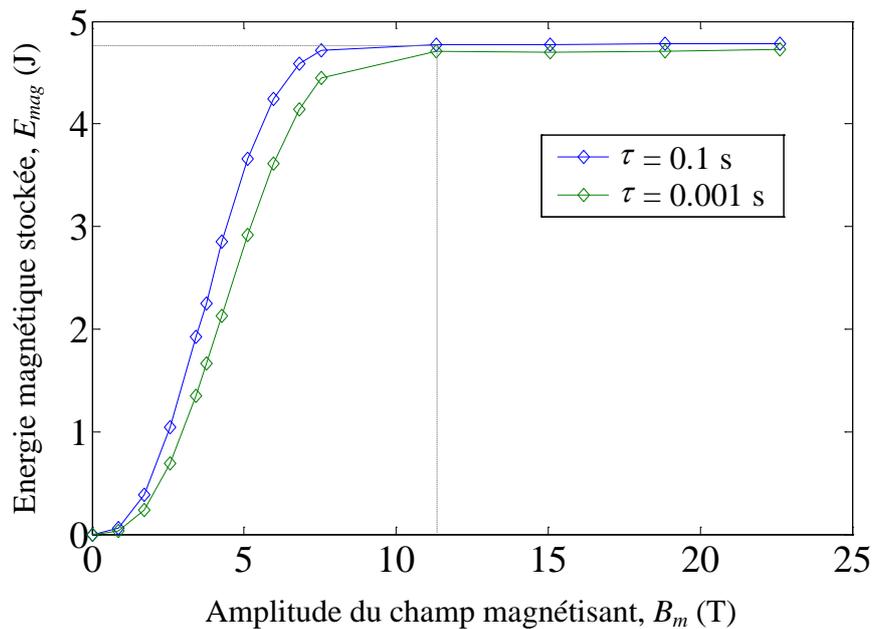


Figure 4.10 : Énergie magnétique stockée dans la pastille « 8-0-24 » en fonction de l'amplitude du champ magnétisant pour $\tau = 0.1$ s et $\tau = 0.001$ s avec la loi de comportement $E-J$.

Comme $B_p^* \approx 2.3$ T est plus petit que B_p , la dépendance en champ magnétique de la densité de courant critique J_c (modélisation avec la loi « $E-J-\mathbf{B}$ ») a pour conséquence une diminution de l'énergie maximale stockée mais aussi une diminution de la valeur du champ magnétique pour laquelle ce maximum est atteint. En effet, le maximum est observé aux alentours de 3.5 T soit 1.5 fois B_p^* (défini par analogie avec B_p de la loi « $E-J$ »).

Le comportement de la loi « $E-J-T$ » est différent de celui des lois « $E-J$ » et « $E-J-\mathbf{B}$ » dans le sens où l'énergie stockée n'est plus constante pour de fortes amplitudes du champ magnétisant B_m . En effet, il existe une valeur précise pour laquelle le maximum est atteint. Au-delà de cette valeur, les effets thermiques diminuent l'énergie stockée et peuvent même amener la transition du supraconducteur. La rapidité de la décharge a également une influence importante sur les effets thermiques et l'énergie stockée : 4.2 J peuvent être stockés au maximum lorsque $\tau = 0.1$ s contre 1.4 J pour $\tau = 0.001$ s, soit le tiers.

Le modèle le plus complet est celui qui utilise la loi de comportement « $E-J-\mathbf{B}-T$ » qui prend en compte à la fois l'influence du champ magnétique et de la température. D'une part, la dépendance en champ magnétique engendre un champ de pénétration plus faible et donc une énergie stockée plus petite. D'autre part, la dépendance en température entraîne une dégradation de l'énergie stockée au-delà d'une certaine de B_m . Pour $\tau = 0.1$ s, la courbe

obtenue avec la loi « $E-J-B-T$ » semble être liée à la dépendance en champ magnétique, tandis que pour $\tau = 0.001$ s, elle se rapproche plus de la courbe « $E-J-T$ ». Ainsi, en fonction de la rapidité de la décharge et de l'amplitude de celle-ci, l'influence du champ magnétique ou de la température devient prédominante.

Pour finir, on peut dire que le modèle « $E-J-B-T$ », qui tient compte à la fois de l'influence du champ magnétique et de la température, conduit à un comportement différent des autres modèles. Il est nécessaire d'utiliser ce modèle s'il l'on souhaite étudier qualitativement l'influence de plusieurs paramètres sur l'aimantation d'une pastille YBCO. C'est donc ce modèle que nous utiliserons à présent.

4.4 Influence de la vitesse de variation du champ

4.4.1 Profils de J , B , T

Pour étudier l'influence de la vitesse de variation du champ magnétisant, les profils de densité de courant J , d'induction magnétique B et de température T dans la pastille 8-0-24 sont reportés respectivement sur la [Figure 4.11](#), la [Figure 4.12](#) et la [Figure 4.13](#) lors d'une aimantation d'amplitude $B_m = 5$ T avec différentes valeurs de τ comprise entre 0.001 s (décharge rapide) et 10 s (décharge lente). Comme τ varie considérablement, les profils observés à une valeur donnée de champ magnétique appliqué ($t = \tau$ et $t = 20\tau$) ne sont pas équivalents thermiquement. Une autre possibilité aurait été de présenter les résultats à des instants identiques, mais les valeurs du champ magnétique appliqué auraient été différentes. En tout état de cause, nous avons choisi la possibilité mettant en évidence les différences thermiques.

❖ Pour $t = \tau$, la pastille est parcourue par une densité de courant négative dont l'amplitude augmente avec τ . Ainsi, l'énergie dissipée augmente avec τ ([Figure 4.15](#)) et la température également.

❖ Pour $t = 20\tau$, on peut distinguer 3 cas. La premier cas, pour $\tau = 0.001$ s, montre un échauffement important situé sur les bords de la pastille. La densité de courant est alors plus faible sur les bords qu'au centre de la pastille.

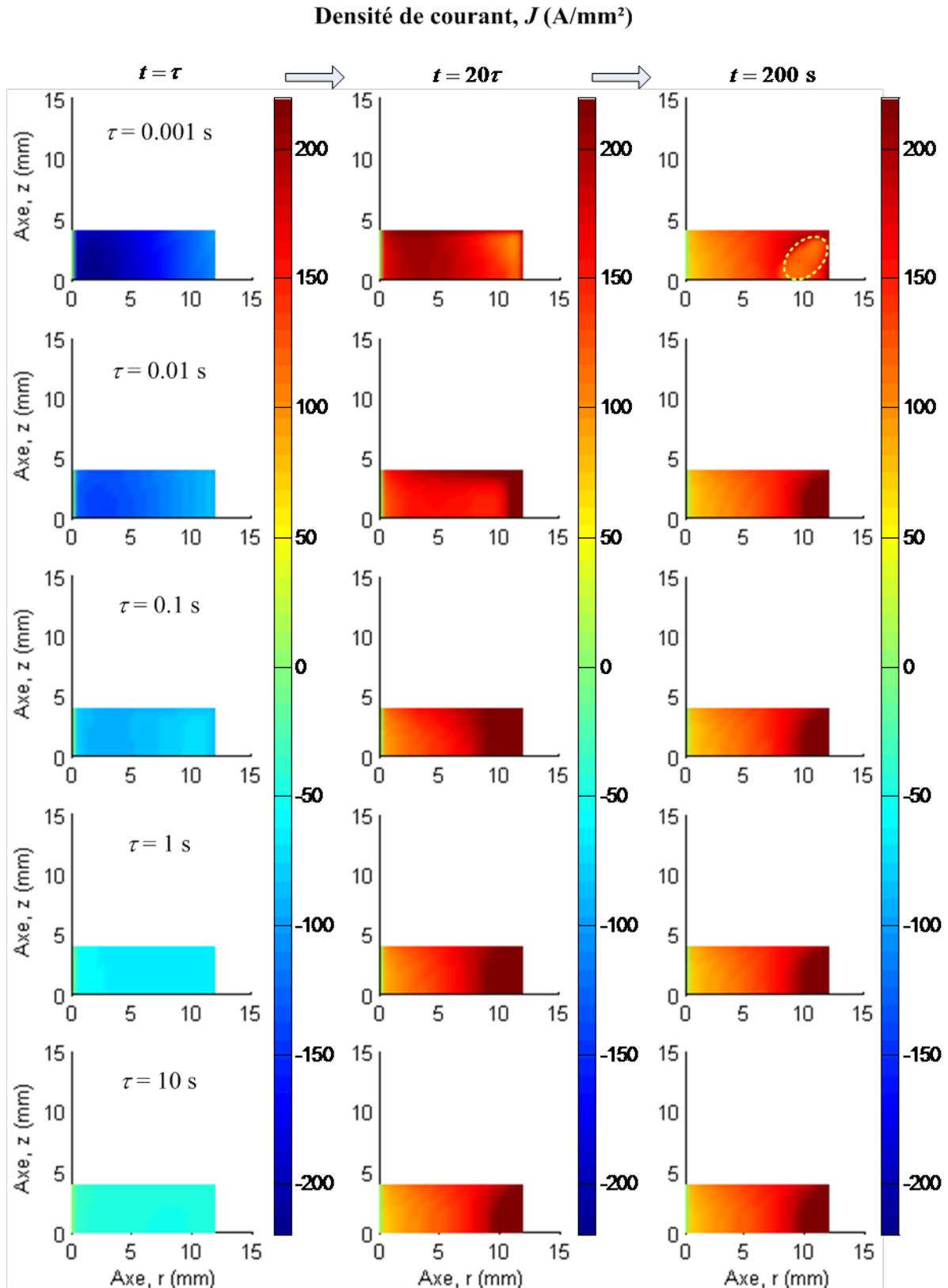


Figure 4.11 : Profils de densité de courant dans la pastille « 8-0-24 » à différents instants pour $B_m = 5$ T et des valeurs de τ comprises entre 0.001 et 10 s avec la loi de comportement « E - J - B - T ».

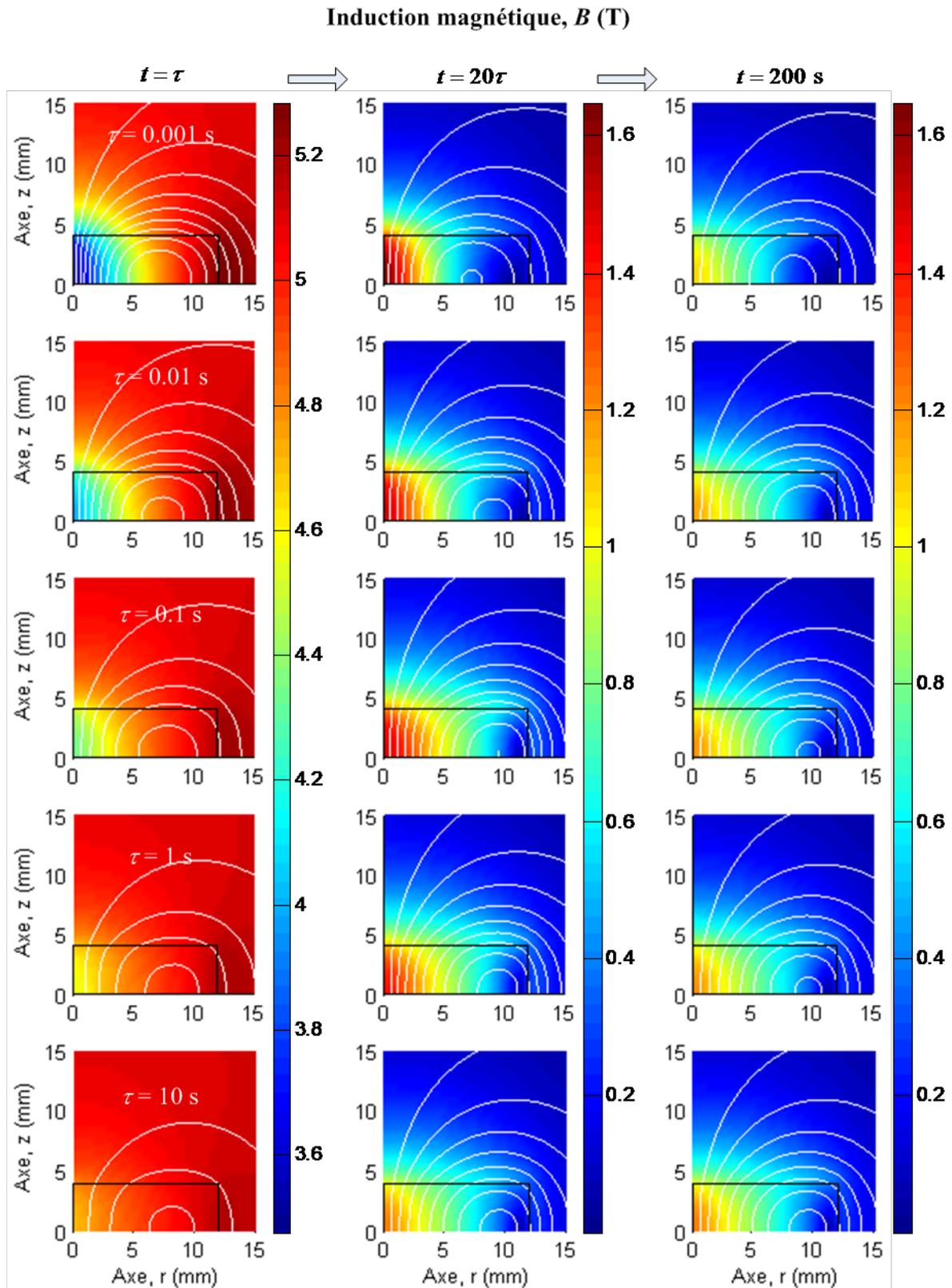


Figure 4.12 : Profils d'induction magnétique et lignes de champs dans la pastille « 8-0-24 » à différents instants pour $B_m = 5 \text{ T}$ et des valeurs de τ comprises entre 0.001 et 10 s avec la loi de comportement « E - J - B - T ».

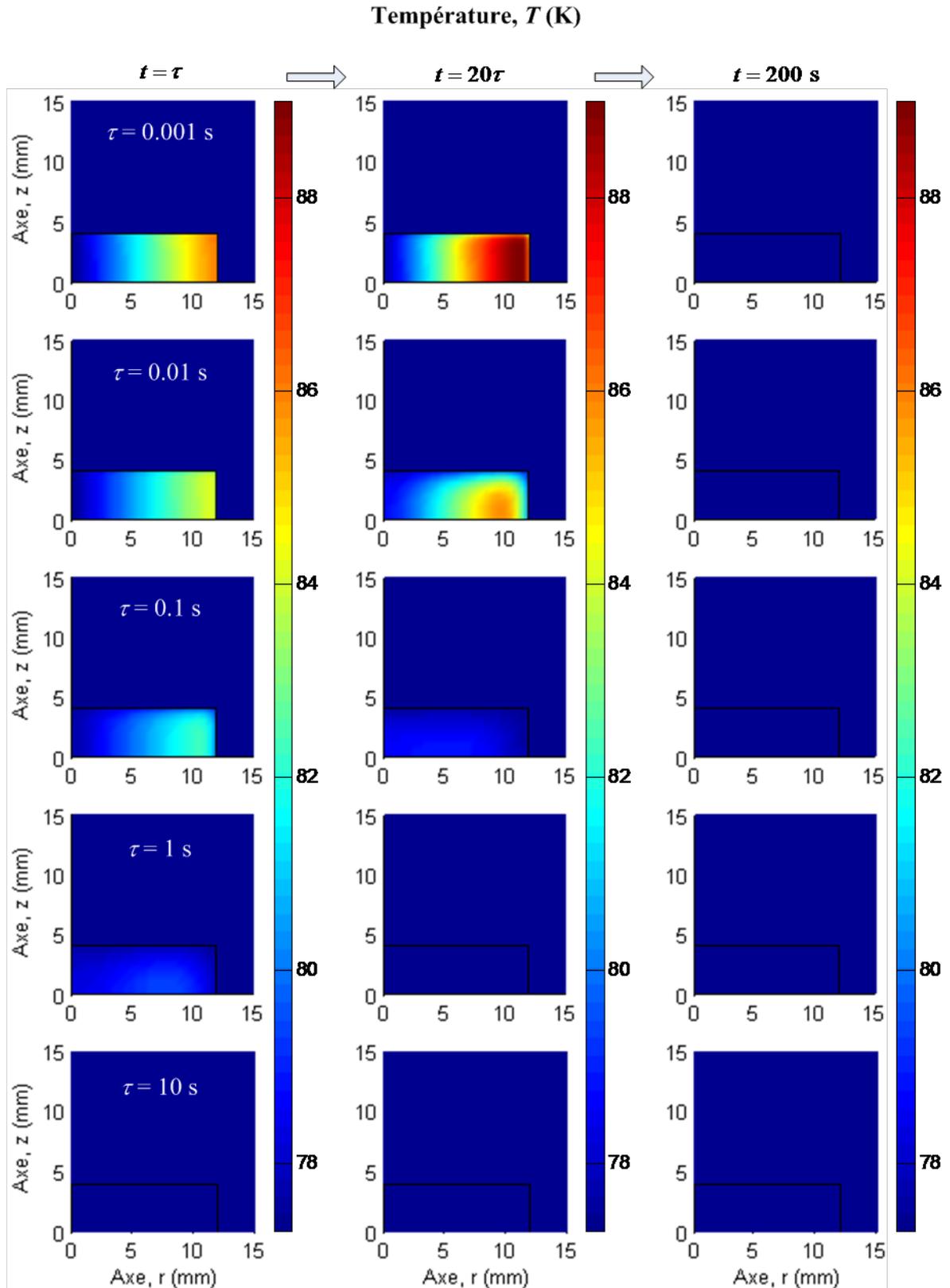


Figure 4.13 : Profils de température dans la pastille « 8-0-24 » à différents instants pour $B_m = 5 \text{ T}$ et des valeurs de τ comprises entre 0.001 et 10 s avec la loi de comportement « $E\text{-}J\text{-}B\text{-}T$ ».

Pour $\tau = 0.01$ s, les effets thermiques sont moins importants et la pastille commence à se refroidir. En effet, le point chaud qui se situait initialement sur les bords est en train de se déplacer. Pour $\tau = \{0.1 \text{ s}; 1 \text{ s}; 10 \text{ s}\}$, l'élévation de température est très faible et la densité de courant décroît progressivement à l'intérieur de la pastille à cause des effets du champ magnétique.

❖ Pour $t = 200$ s et quelle que soit la valeur de τ , le régime thermique permanent est atteint. Pour $\tau = 0.001$ s, le déplacement du point chaud a entraîné une diminution de J_c dans la région entourée en pointillés, **Figure 4.11**. Pour les autres valeurs de τ $\{0.01 \text{ s}; 0.1 \text{ s}; 1 \text{ s}; 10 \text{ s}\}$, les grandeurs électromagnétiques semblent être identiques.

Pour effectuer une comparaison plus qualitative, nous allons à présent regarder la valeur de l'énergie stockée dans la pastille.

4.4.2 Energie magnétique stockée

L'évolution de l'énergie stockée dans la pastille « 8-0-24 » en fonction de l'amplitude du champ magnétisant est représentée sur la **Figure 4.14** pour différentes valeurs de τ comprises entre 0.001 et 10 s.

Pour $\tau = 0.001$ s et $\tau = 0.01$ s, il apparaît clairement un maximum de l'énergie stockée aux alentours de 3.5 T soit 1.5 fois B_p^* . Pour des amplitudes de champ magnétisant plus importantes, l'énergie stockée diminue à cause des effets thermiques.

Pour les autres valeurs de τ , le maximum d'énergie stockée, d'environ 1 J, reste constant au-delà de 3.5 T. Dans la pastille « 8-0-24 », l'énergie maximale est obtenue avec la décharge la plus lente, qui diminue l'influence des effets thermiques.

4.4.3 Energie dissipée

Il nous a paru intéressant de calculer l'énergie dissipée dans la pastille pour les différents processus d'aimantation. Cette énergie est définie comme suit :

$$E_{diss} = \int_0^t p_{diss} \cdot dt' \text{ avec } p_{diss} = \iiint_{\Omega_s} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \cdot dv \quad (3.10)$$

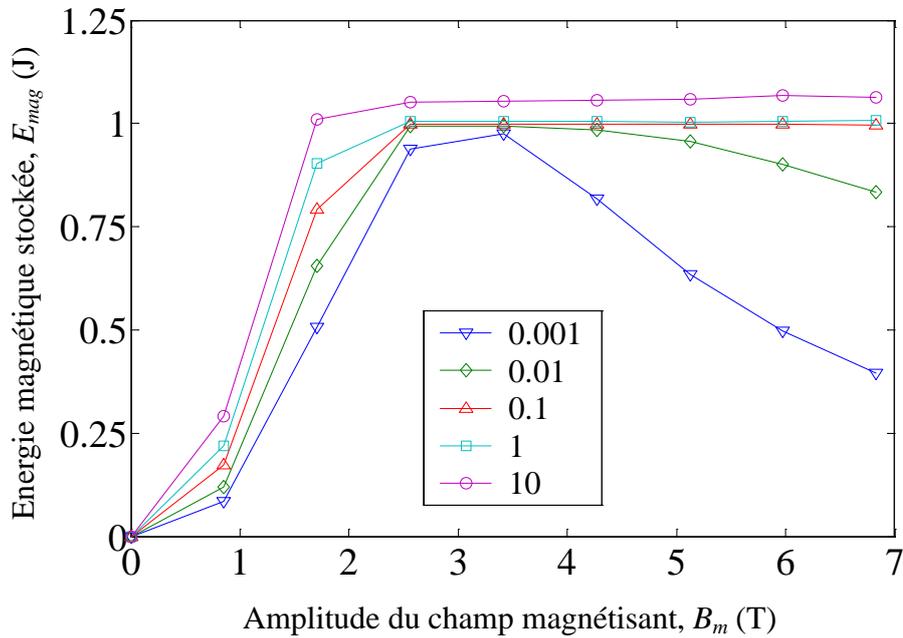


Figure 4.14 : Energie magnétique stockée dans la pastille « 8-0-24 » en fonction de l'amplitude du champ magnétisant pour différentes valeurs de τ comprises entre 0.001 et 10 s avec la loi de comportement « E - J - \mathbf{B} - T ».

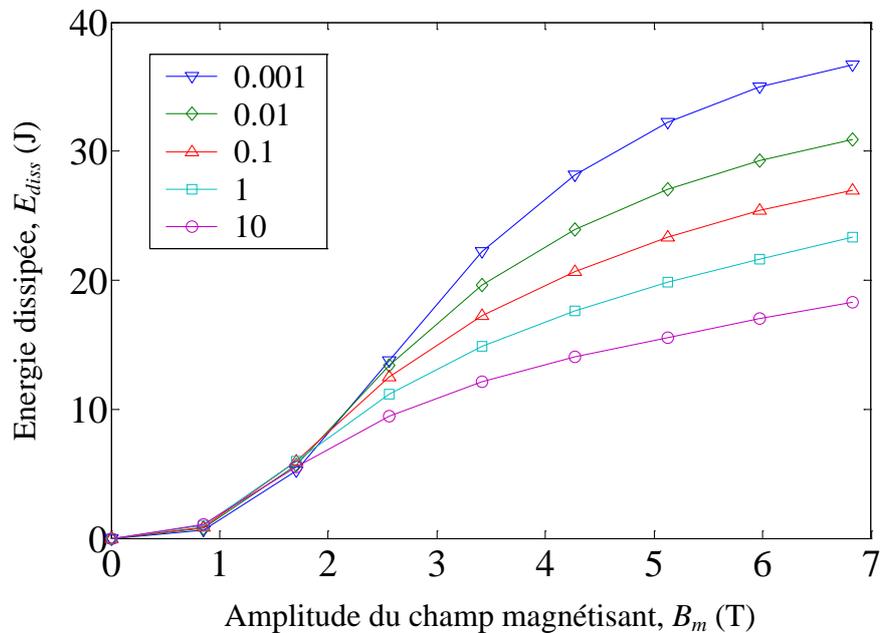


Figure 4.15 : Energie dissipée dans la pastille « 8-0-24 » en fonction de l'amplitude du champ magnétisant pour différentes valeurs de τ comprises entre 0.001 et 10 s avec la loi de comportement « E - J - \mathbf{B} - T ».

L'évolution de l'énergie dissipée dans la pastille « 8-0-24 » en fonction de l'amplitude du champ magnétisant est représentée sur la [Figure 4.15](#) pour différentes valeurs de τ comprises entre 0.001 et 10 s. L'énergie dissipée augmente avec l'amplitude du champ magnétisant et diminue avec τ . Ainsi, il est plus intéressant d'aimanter lentement ($\tau = 10$ s) la pastille « 8-0-24 » avec une amplitude ne dépassant pas 3.5 T. L'énergie stockée est alors maximisée tout en minimisant l'énergie dissipée.

4.5 Influence de la forme de l'échantillon

4.5.1 Profils de J , B , T

L'influence de la forme de l'échantillon est maintenant étudiée, lors d'une décharge rapide (qui accentue l'influence des phénomènes thermiques). Les profils de J , B et T dans différentes pastilles (voir [Tableau 4.2](#)) sont reportés respectivement sur la [Figure 4.16](#), la [Figure 4.17](#) et la [Figure 4.18](#) pour $B_m = 5$ T et $\tau = 0.001$ s.

La pastille « 8-0-24 », qui a donné lieu à tous développements faits jusqu'à présent, va servir de référence. Les pastilles « 12-0-24 » et « 16-0-24 » présentent une hauteur augmentée respectivement de 4 et 8 mm par rapport à la pastille « 8-0-24 ». Tandis que les pastilles « 8-8-24 » et « 8-16-24 » présentent un trou respectivement de 8 et 16 mm de diamètre au centre de la pastille.

Sur les différents profils représentés, on constate que l'augmentation de la hauteur de l'échantillon agit un peu comme une homothétie. En d'autres termes, l'amplitude des différentes grandeurs électromagnétiques et thermique est conservée, seule leur localisation est affectée par l'augmentation de la hauteur.

Pour les pastilles creuses, le phénomène est radicalement différent. En effet, comme les courants induits pénètrent du bord vers le centre de la pastille, les grandeurs physiques sont pratiquement conservées dans la région comprise entre le rayon intérieur et extérieur. Pratiquement car la diminution de l'épaisseur $R_e - R_i$ de la pastille a eu pour conséquence de diminuer le champ de pénétration B_p^* (3.9) et d'augmenter les effets thermiques pour une même valeur d'amplitude de champ magnétisant B_m . Pour les pastilles « 8-8-24 » et « 8-16-24 », le champ de pénétration B_p^* vaut respectivement 1.8 et 1.16 T.

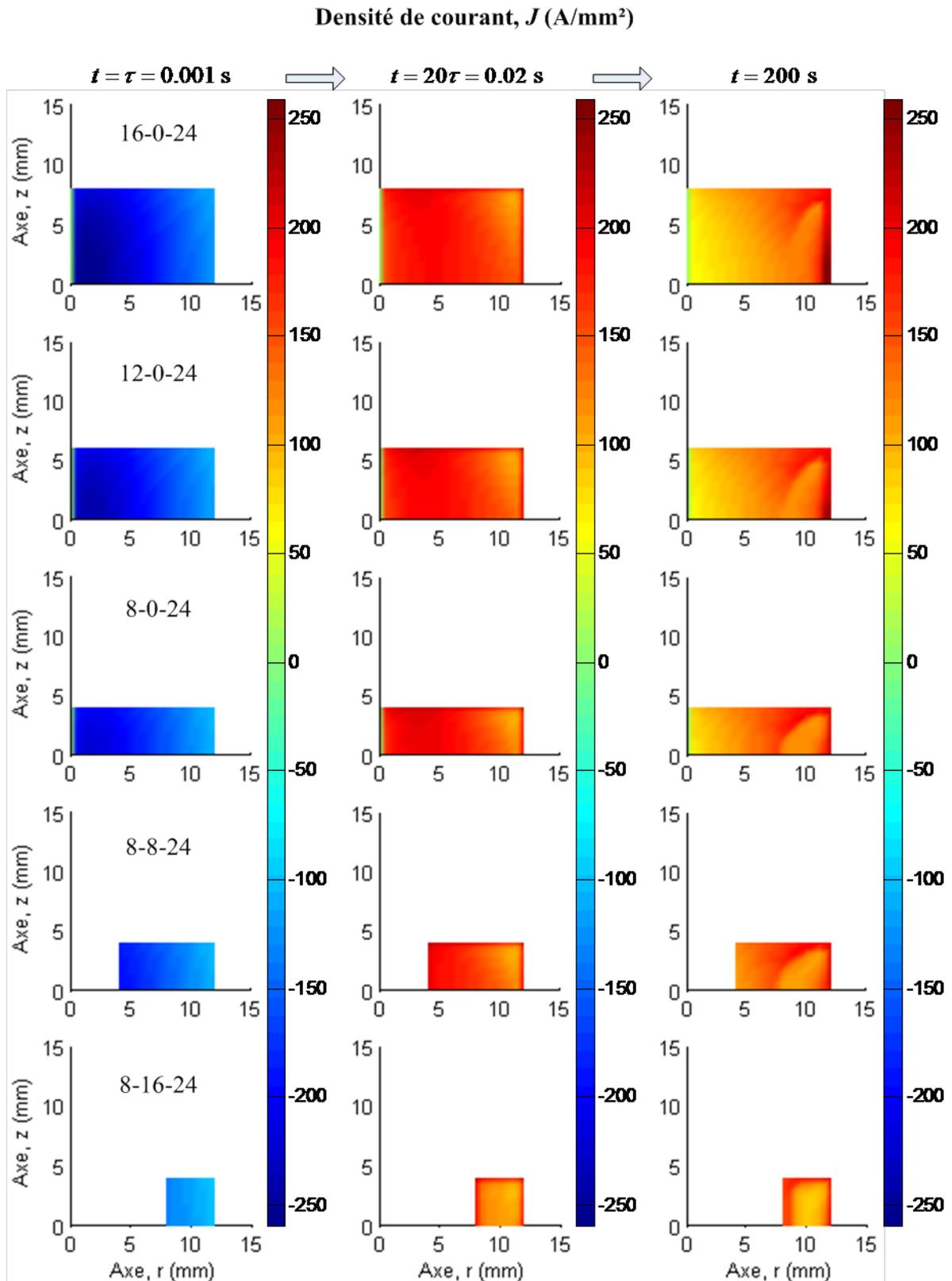


Figure 4.16 : Profils de densité de courant à différents instants pour $B_m = 5 \text{ T}$, $\tau = 0.001 \text{ s}$ et différentes formes de pastilles avec la loi de comportement « E - J - B - T ».

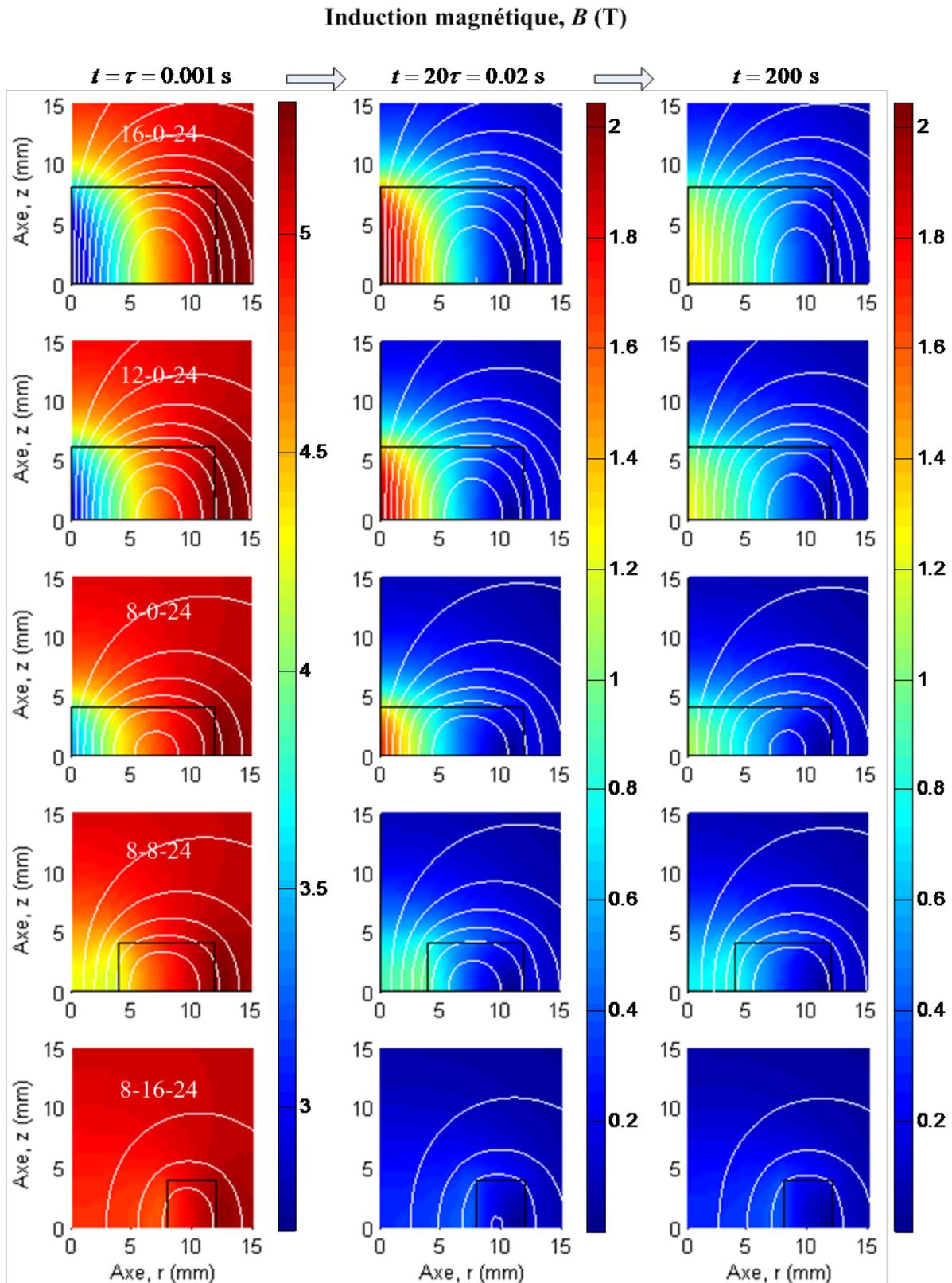


Figure 4.17 : Profils d'induction magnétique et lignes de champs à différents instants pour $B_m = 5 \text{ T}$, $\tau = 0.001 \text{ s}$ et différentes formes de pastilles avec la loi de comportement « E - J - B - T ».

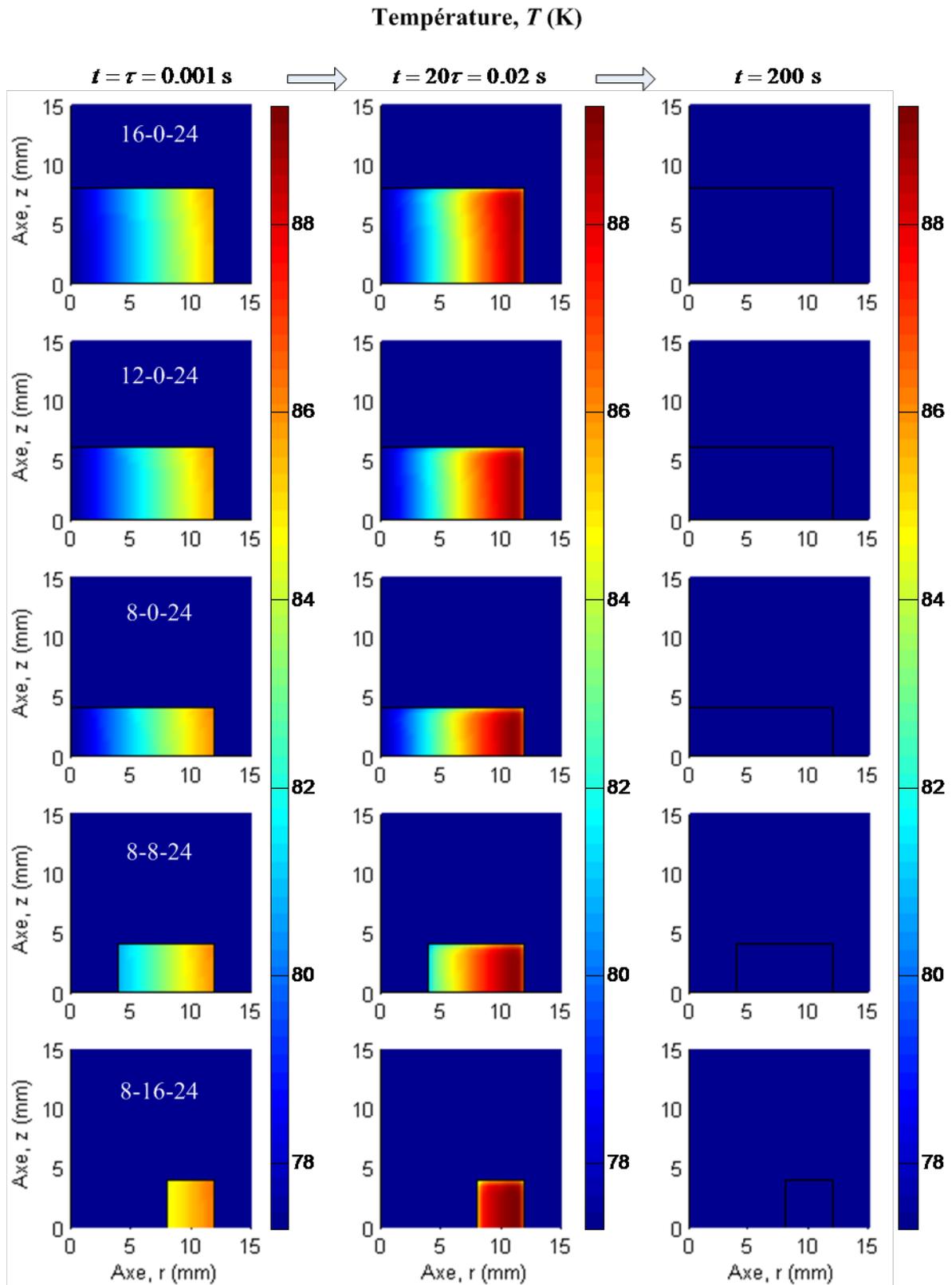


Figure 4.18 : Profils de température à différents instants pour $B_m = 5$ T, $\tau = 0.001$ s et différentes formes de pastilles avec la loi de comportement « E - J - B - T ».

4.5.2 Energie magnétique stockée

L'évolution de l'énergie magnétique stockée et de l'énergie spécifique (rapport entre l'énergie stockée et le volume de supraconducteur) dans les différentes pastilles en fonction de l'amplitude du champ magnétisant est représentée sur la [Figure 4.19](#) pour $\tau = 0.001$ s.

Comme nous l'avons vu dans § 4.3.2, le maximum d'énergie stockée apparaît à 1.5 fois B_p^* , soit à 3.5 T pour les pastilles pleines, à 2.8 T pour la pastille « 8-8-24 » et à 1.8 T pour la pastille « 8-16-24 ». Au-delà de $1.5B_p^*$, l'énergie stockée diminue à cause des phénomènes thermiques. Le maximum d'énergie stockée diminue lorsque qu'on augmente le rayon intérieur et augmente avec la hauteur de la pastille. En effet, le maximum d'énergie stockée est fonction du volume de la pastille.

Cependant, lorsqu'on regarde l'énergie spécifique des différentes pastilles, on constate que le maximum est identique pour les pastilles « 8-16-24 » et « 16-0-24 », de l'ordre de 300 kJ/m³. Ainsi, à volume de matière identique, une pastille creuse offrira une plus grande énergie spécifique qu'une pastille pleine.

4.5.3 Energie dissipée

L'évolution de l'énergie dissipée (au bout de 200 s) pour les différentes pastilles en fonction de l'amplitude du champ magnétisant est représentée sur la [Figure 4.20\(a\)](#) pour $\tau = 0.001$ s. L'énergie dissipée augmente avec l'amplitude du champ magnétisant et avec le volume la pastille.

L'énergie dissipée par unité de volume est représentée [Figure 4.20\(b\)](#). On observe globalement une diminution de l'énergie volumique dissipée lorsque le volume augmente. Cependant, pour une amplitude de champ magnétisant de $1.5B_p^*$ (correspondant au maximum d'énergie stockée), l'avantage revient encore à la pastille creuse qui présente la plus faible énergie volumique dissipée, voir [Tableau 4.4](#).

Tableau 4.4 : Energie dissipée par unité de volume pour les différentes pastilles à $B_m = 1.5B_p^*$.

	« 8-16-24 »	« 8-8-24 »	« 16-0-24 »	« 12-0-24 »	« 8-0-24 »
E_{diss} / V (MJ/m ³)	3.2	4.4	4.9	5.4	6.1

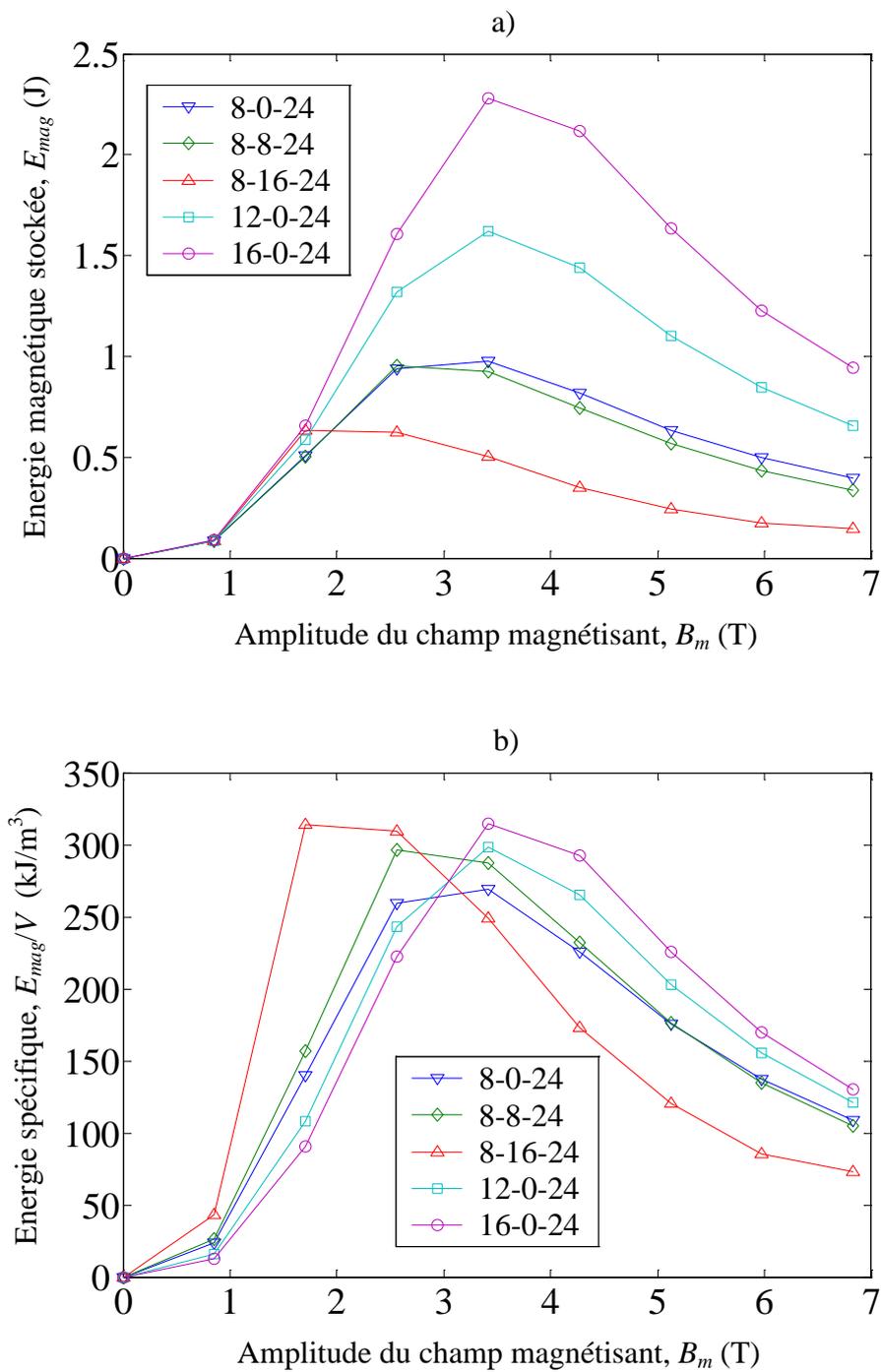


Figure 4.19 : Energie magnétique stockée (a) et énergie spécifique (b) en fonction de l'amplitude du champ magnétisant pour $\tau = 0.001$ s et différentes formes de pastilles avec la loi de comportement « E - J - B - T ».

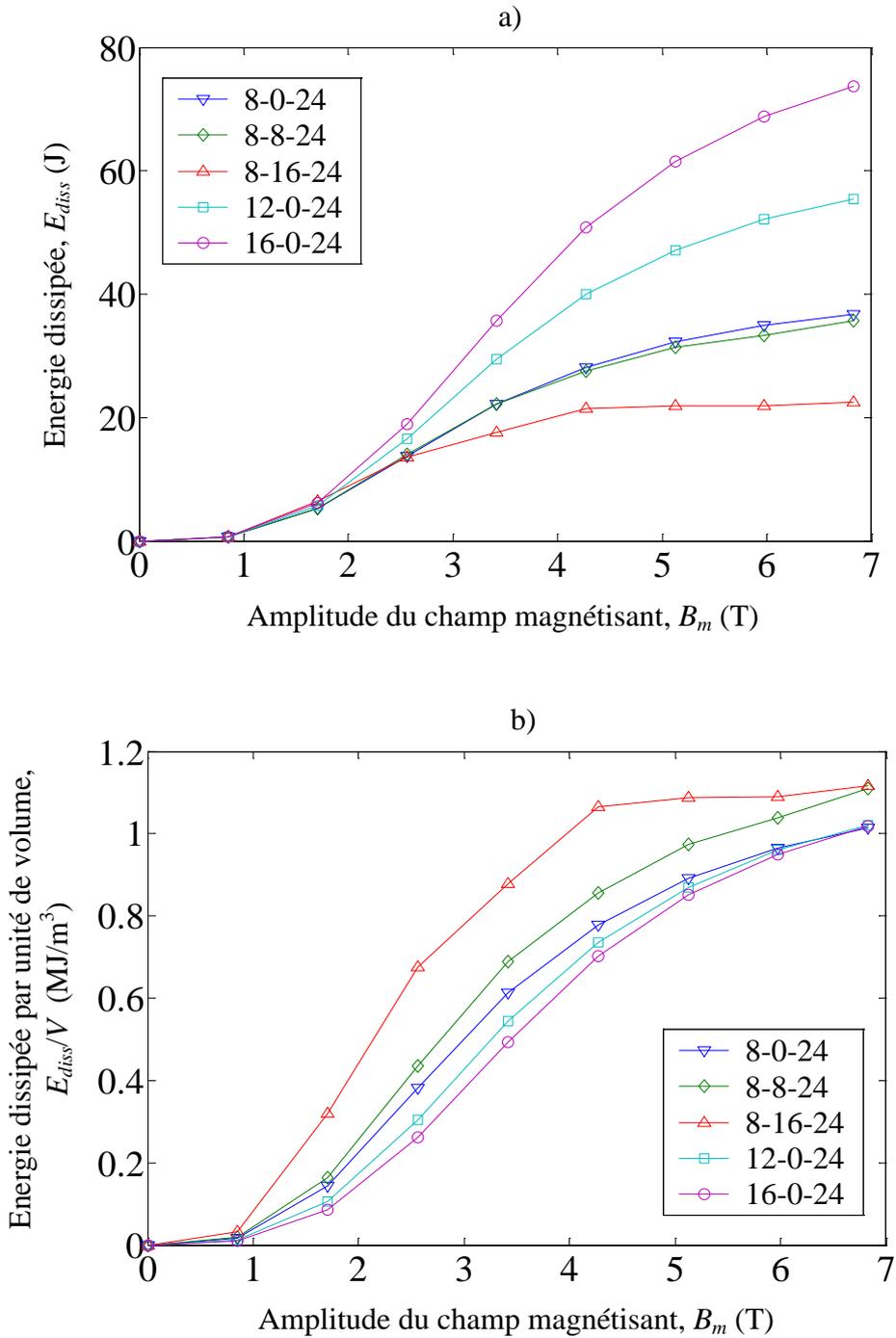


Figure 4.20 : Energie dissipée (a) et énergie dissipée par unité de volume (b) en fonction de l'amplitude du champ magnétisant pour $\tau = 0.001$ s et différentes formes de pastilles avec la loi de comportement « E - J - B - T ».

4.6 Conclusion

Grâce aux résultats de simulations donnés par notre code de calcul, nous avons étudié les phénomènes magnétothermiques durant l'aimantation de pastilles YBCO cylindriques.

En comparant les différentes lois de comportement $E(J, \mathbf{B}, T)$, nous avons montré qu'il n'était pas possible de modéliser l'aimantation de la pastille YBCO de manière réaliste sans tenir compte à la fois des dépendances en champ magnétique et en température des paramètres du supraconducteur.

Les effets magnétothermiques ont ensuite été étudiés pour différentes vitesses de montée de champ allant de 0.001 s à 10 s. Nous avons vu qu'une aimantation rapide, de type impulsionnelle, connue également sous le nom de « Pulsed Field Magnetization », entraîne un échauffement important et une diminution du champ magnétique piégé et de l'énergie stockée dans le supraconducteur. Dans ce cas, c'est la dépendance en température des paramètres du supraconducteur qui est prédominante, contrairement à une aimantation lente où seule la dépendance en champ magnétique est importante. Cette diminution de l'énergie magnétique stockée se traduit également par une augmentation de l'énergie dissipée lorsque l'aimantation devient plus rapide.

Pour finir, nous avons simulé la réponse de pastilles cylindriques, de géométries différentes (creuses ou pleines), à une montée rapide du champ magnétisant ($\tau = 0.001$ s). Nous avons constaté que le maximum d'énergie stockée était toujours atteint lorsque l'amplitude du champ magnétique valait 1.5 fois le champ de pénétration B_p^* . Ce critère est une information importante puisqu'il permet de dimensionner la bobine de champ magnétique et le système de décharge impulsionnelle.

L'étude de différentes formes de pastilles a également permis de montrer que même si une pastille creuse stockait globalement moins d'énergie qu'une pastille pleine avec les mêmes dimensions externes, l'énergie spécifique stockée était au contraire plus importante. En effet, la densité de courant au centre d'une pastille pleine est plus faible qu'ailleurs, ce qui diminue ces performances en termes d'énergie spécifique.

Conclusion générale

Ces travaux ont permis de mettre en évidence l'importance des phénomènes couplés magnétothermiques dans les supraconducteurs à haute température.

Il est tout d'abord apparu que pour modéliser de manière réaliste le comportement des SHT, il fallait utiliser une loi $E - J$ en puissance qui tienne compte à la fois de la température et du champ magnétique.

D'un point de vue numérique, un outil de calcul complètement nouveau a été élaboré pour résoudre les équations couplées magnétothermiques qui régissent le comportement des SHT. La résolution des équations électromagnétiques par notre outil de calcul a pu être validée avec succès sur un problème 2D-axisymétrique (sans thermique) en comparant les résultats obtenus à ceux du logiciel FLUX3D®.

L'étude des pertes AC dans une amenée de courant Bi-2223 soumise à un champ magnétique a ensuite été menée grâce à notre outil de calcul et à une formule analytique que nous avons établie. Les deux méthodes aboutissent à des résultats parfaitement identiques. L'étude s'est alors poursuivie avec la formule analytique qui offrait une plus grande rapidité d'exécution.

Au niveau expérimental, un banc de mesure de pertes a été réalisé. Les mesures effectuées ont montré une bonne concordance avec les résultats de simulations mis à part lorsque l'amenée de courant était uniquement soumise à son champ propre. Malheureusement, il ne nous a pas été possible de mesurer des niveaux de pertes élevés car des instabilités magnétothermiques sont survenues détruisant deux amenées de courant. En effet, la prise en compte de la température dans la modélisation (couplage thermique) engendre une augmentation significative de la valeur des pertes. Nous avons montré que le système pouvait alors devenir instable et conduire à la destruction de l'échantillon. La limite de stabilité de l'amenée de courant ainsi que l'évolution de plusieurs grandeurs caractéristiques en fonction de l'amplitude du courant de transport et du champ magnétique appliqué ont été déterminées théoriquement. Il est alors possible de connaître les marges de fonctionnement de l'amenée de courant afin de ne pas risquer la destruction de cette dernière.

Finalement, nous nous sommes intéressés au comportement de pastilles YBCO durant un processus d'aimantation. En comparant différentes lois de comportement, nous avons d'abord montré l'importance des phénomènes magnétothermiques couplés qui engendrent une diminution de l'énergie magnétique stockée dans la pastille. Puis en étudiant l'influence de la vitesse de variation du champ magnétisant, nous avons vu que cette diminution est d'autant plus importante que l'aimantation est rapide. Enfin, pour différentes formes de pastilles, nous avons observés que le maximum de l'énergie magnétique stockée est atteint pour un champ magnétisant d'amplitude B_m égal à 1.5 fois le champ de pénétration B_p^* qui tient compte de la loi $J_c(B)$.

Comme le refroidissement joue également un rôle important dans le processus d'aimantation, il pourrait être intéressant de comparer le comportement d'une pastille massive et d'un empilement de plusieurs pastilles espacées entre elles, à volume de supraconducteur identique.

En apportant quelques modifications à notre outil de calcul, nous pourrions également étudier le comportement magnétothermique d'objets pour les applications :

- d'un limiteur de courant,
- d'un palier magnétique supraconducteur (association d'un aimant permanent et d'un supraconducteur), ...

Pour cela, il faudrait être capable d'imposer une source de tension aux bornes du supraconducteur et non une source de courant ou de champ magnétique. La prise en compte des équations du mouvement serait également nécessaire afin de simuler la lévitation d'un aimant.

Bien sûr, beaucoup d'autres études numériques peuvent être menées, mais nous ne devons pas perdre de vue la partie expérimentale qui permet de valider ces études. Il s'agit d'une étape importante dans l'étude des phénomènes magnétothermiques. C'est pourquoi nous sommes en train de préparer un banc de mesures de température.

Annexe A. Les théories de la supraconductivité

A.1 La théorie de London

La première théorie phénoménologique de la supraconductivité a été formulé par les frères F. et H. London en 1935 [Lon35]. L'une des conséquences de la résistivité nulle est que la variation spatiale de l'induction magnétique décroît exponentiellement à l'intérieur des supraconducteurs, comme cela peut être démontré à partir des équations de Maxwell. En fait, si n_s est le nombre de « supra électrons » par unité de volume se déplaçant avec une vitesse \mathbf{v}_s alors :

$$\mathbf{J}_s = n_s q \mathbf{v}_s \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_s = \frac{n_s q^2}{m} \mathbf{E} \quad (\text{C.12})$$

où m et q sont respectivement la masse et la charge électrique des électrons. Les équations de Maxwell permettent de trouver une relation entre le courant et l'induction magnétique dans les supraconducteurs. En partant de :

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (\text{C.13})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}} \quad (\text{C.14})$$

et en supposant $\mu_r = 1$ (matériau non magnétique) et $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ (courant de déplacement négligeable), on peut obtenir après quelques manipulations :

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 n_s q^2}{m} \dot{\mathbf{B}} \quad (\text{C.15})$$

où μ_0 est la perméabilité du vide.

Cette condition, pour une géométrie unidimensionnelle avec un champ magnétique appliqué uniforme B_a , devient :

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{B}}}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 n_s q^2}{m} \dot{\mathbf{B}} = \frac{1}{\lambda_L^2} \dot{\mathbf{B}} \quad (\text{C.16})$$

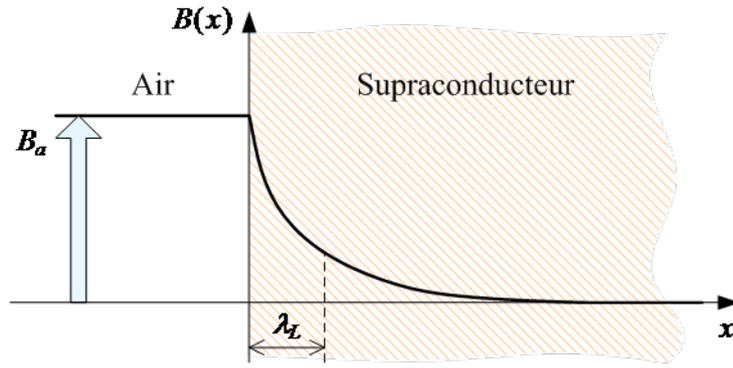


Figure A.1 : Pénétration de l'induction magnétique B dans un supraconducteur d'après la théorie de London.

dont la solution est :

$$\dot{B}(x) = \dot{B}_a e^{-x/\lambda_L} \quad (\text{C.17})$$

L'hypothèse faite par F. et H. London était que, pour les supraconducteurs, la relation (C.15) était valable non seulement pour $\partial \mathbf{B} / \partial t$ mais également pour \mathbf{B} lui-même, en accord avec l'effet Meissner observé :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\mu_0 n_s q^2}{m} \mathbf{B} \quad (\text{C.18})$$

Ainsi, la densité de flux décroît exponentiellement à l'intérieur du supraconducteur et la distance caractéristique est appelée *l'épaisseur de pénétration de London* (λ_L), voir [Figure A.1](#). Cette épaisseur de pénétration de London λ_L est donnée par la relation $\sqrt{m/(\mu_0 n_s q^2)}$.

Après quelques manipulations supplémentaires sur les équations de Maxwell, on aboutit aux équations générales de London :

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s \\ \mathbf{J}_n = \sigma_n \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{B} \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_s = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{E} \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

La première équation décrit le courant total \mathbf{J} comme la somme du courant « normal » \mathbf{J}_n et du courant « supraconducteur » \mathbf{J}_s . Cette approche est généralement connue sous le nom de *modèle à deux fluides*. La seconde est la loi d'Ohm appliquée au courant normal, où σ_n est la conductivité associée aux électrons normaux. Les deux dernières

Tableau A.1 : Valeurs expérimentales de profondeurs de pénétration. [Gen99, Tin04]

<i>élément</i>	Al	Sn	Pb	Cd	Nb
λ_L théorique (Å)	100	340	370	1100	390
λ mesurée (Å) extrapolée à 0 K	500	510	390	1300	440

équations décrivent la relation entre les « supra courants » et les champs magnétique et électrique. En principe, le système d'équations (C.19) permet de calculer les distributions de courant \mathbf{J} et de champ \mathbf{B} dans les supraconducteurs pour différentes conditions. En réalité, ces équations sont issues de l'hypothèse que la relation (C.18) est vraie, qui est seulement une conjecture décrivant l'évidence expérimentale que les supraconducteurs tendent à repousser le champ magnétique de leur intérieur. Par conséquent, les équations de London sont simplement des approximations, qui dans plusieurs cas s'avèrent suffisamment précises, notamment pour une description qualitative. En réalité, une petite épaisseur de pénétration est effectivement observée, mais les valeurs quantitatives sont différentes de celles prédites par cette théorie, voir [Tableau A.1](#).

A.2 La théorie de Ginzburg et Landau

En 1950, Ginzburg et Landau propose une alternative à la théorie de London, basée sur la mécanique quantique au lieu de l'électromagnétisme classique [Gin50]. Néanmoins, cette théorie de la supraconductivité est phénoménologique dans le sens où : elle est fondée sur l'intuition et n'a pas de justification microscopique *a priori* (BCS est venu la justifier *a posteriori*).

Dans cette théorie, le comportement des électrons supraconducteurs est décrit par un paramètre d'ordre complexe Ψ , dont le carré du module est égal à la densité de « supra électrons ». Une autre hypothèse est que l'énergie libre (fonction de Helmholtz) de l'état supraconducteur diffère de celle de l'état normal d'une quantité qui peut être écrite comme une série entière de $|\Psi|^2$. Autour de T_c , il suffit de retenir les deux premiers termes de ce développement en série. Pour prendre en compte les effets d'un gradient spatial de Ψ , un terme additionnel, proportionnel au carré du gradient, est ajouté à l'expression de l'énergie libre. Finalement, les effets d'un champ magnétique \mathbf{B} sont pris en considération en

remplaçant l'impulsion \mathbf{p} par $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ (\mathbf{A} étant le potentiel vecteur magnétique et q la charge des électrons supraconducteurs) dans toutes les expressions faisant appel à l'énergie cinétique et en ajoutant une contribution d'énergie magnétique qui s'écrit classiquement $\mathbf{B}^2 / 2\mu_0$. Et puisque que c'est à \mathbf{p} que correspond en mécanique quantique l'opérateur $\hbar/i \nabla$, la densité d'énergie libre du matériau dans l'état supraconducteur sous champ f_{sH} se développe sous la forme :

$$f_{sH} = f_{n0} + \alpha(T)|\Psi|^2 + \beta(T)|\Psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi - q\mathbf{A}\Psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \quad (\text{C.20})$$

où f_{n0} est la densité d'énergie libre dans l'état normal en champ nul, \mathbf{B} est l'intensité locale du champ magnétique, et m la masse des électrons supraconducteurs.

Le problème essentiel de cette théorie réside dans la difficulté à trouver les fonctions $\Psi(x, y, z)$ et $\mathbf{A}(x, y, z)$ minimisant l'énergie libre pour des conditions aux limites données. En général, le problème peut être résolu pour des plaques épaisses ou des films fins et de faibles champs magnétiques. Mais dans la plupart des cas, la résolution de ces équations requiert des moyens numériques.

La théorie Ginzburg-Landau introduit un autre paramètre important, la *longueur de cohérence* ξ , qui est la longueur caractéristique nécessaire pour faire passer la densité de « supra électrons » $|\Psi|^2$ de sa valeur maximale (état supraconducteur) à zéro (état normal). L'épaisseur de pénétration λ décrit la distance caractéristique effective sur laquelle le champ magnétique varie dans un supraconducteur, comme dans les équations de London, mais la valeur numérique de λ est légèrement différente de λ_L , voir [Tableau A.1](#). Elle varie en fonction de la température d'une manière qui correspond approximativement à la dépendance en température de la longueur de cohérence ξ . Ainsi, pour un matériau donné, le ratio $\kappa = \lambda / \xi$ appelé constante de Ginzburg-Landau est quasiment indépendant de la température et permet de distinguer deux types de supraconducteurs.

A.3 La théorie BCS

En 1957, J. Bardeen, L. Cooper et J. R. Schrieffer proposèrent une théorie microscopique. Aujourd'hui connue sous le nom de théorie BCS, c'est la seule théorie un tant

soit peu prédictive et qui s'applique bien à la plupart des supraconducteurs conventionnels. Selon cette théorie, les électrons d'un métal se regroupent en paires : les *paires de Cooper*. Elles forment un état unique, cohérent, d'énergie inférieure à la somme des énergies de deux électrons non appariés. On retrouve expérimentalement le couplage par paires en mesurant un quantum de flux qui est toujours un multiple de deux électrons $\Phi_0 = h/(2e) = 2.667810 \times 10^{-15}$ Wb (h = constante de Planck, e = la charge de l'électron).

La différence d'énergie entre l'état supraconducteur et l'état normal est appelé gap d'énergie et notée Δ . C'est l'énergie nécessaire pour passer de l'état supraconducteur à l'état normal en brisant les paires de Cooper. Cette énergie tend vers zéro lorsque T tend vers T_c .

Le problème est d'expliquer cet appariement compte tenu de la répulsion coulombienne. Dans un métal, les électrons interagissent avec le réseau cristallin formé d'ions positifs. Ceux-ci attirent les électrons et se déplacent légèrement (grande inertie). Les physiciens ont donné le nom de phonons à ces vibrations atomiques naturelles. Cette interaction entre les électrons et les phonons est à l'origine de la résistivité et de la supraconductivité : attirés par le passage très rapide d'un électron, les ions se déplacent et créent une zone locale électriquement positive. Compte tenu de l'inertie, cette zone persiste alors que l'électron est passé, et peut attirer un autre électron qui se trouve ainsi, par l'intermédiaire d'un phonon, apparié au précédent, et ce malgré la répulsion coulombienne. L'agitation thermique finit par détruire ce fragile équilibre d'où l'effet néfaste de la température.

L'interaction électron-phonon joue un rôle essentiel pour l'appariement des électrons donc pour la supraconductivité. Plusieurs faits le confirment, comme par exemple l'effet isotopique. Cet effet, comme son nom l'indique, est relié à la masse des atomes constituant le réseau cristallin. On peut montrer que la vibration des atomes possède une fréquence ω reliée à la masse des atomes du réseau suivant la relation :

$$\omega^2 = \frac{k}{\mu} \quad (\text{C.21})$$

où k est la constante de raideur du cristal, μ est la masse réduite des atomes du cristal et que T_c est proportionnelle à la racine carrée de μ .

Une particularité des paires de Cooper est que leur quantité de mouvement est nulle. En effet, les deux électrons appariés ont la même quantité de mouvement, mais de signe opposé. C'est la condition pour que l'énergie de la paire soit inférieure à la somme des énergies des

deux électrons. Les paires de Cooper se comportent comme des bosons, de spin égal à 0, et sont « condensées » dans un seul état quantique. Leurs déplacements s'effectuent sans rencontrer la moindre résistance, d'où la supraconductivité. Il faut bien sûr que ces paires se déplacent avec une énergie cinétique plus petite que le gap, sinon la paire est cassée.

La description de l'état supraconducteur par la théorie BCS est excellente : plusieurs grandeurs (gap, T_c ...) en découlent et sont vérifiées expérimentalement. Elle permet de retrouver une épaisseur de pénétration qui est très similaire à l'épaisseur de pénétration de London pour plusieurs matériaux supraconducteurs. L'association d'électrons en paires détermine aussi une longueur de cohérence qui correspond à la distance entre les électrons dans une paire de Cooper. Cette longueur de cohérence est la même que celle introduite dans la théorie de Ginzburg et Landau développée précédemment.

Annexe B. Les supraconducteurs à haute température

La majorité des SHT sont des céramiques formées d'un empilement de plans d'oxyde de cuivre (CuO_2) où apparaît la supraconductivité. Cette structure en couches est également responsable de la forte anisotropie du champ magnétique critique et du courant critique de ces matériaux.

Encore aujourd'hui, les mécanismes entraînant la supraconductivité dans les SHT ne sont pas correctement connus, mais des expériences ont montré que les supra courants se composent d'électrons appariés comme pour les composés métalliques SBT.

L' $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7+x}$, connu également comme YBCO ou Y-123, est le premier supraconducteur dont la température critique est supérieure à 77 K – température de l'azote liquide. Il représente avec le $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ (Bi-2212) et le $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+x}$ (Bi-2223) les matériaux SHT les plus répandus à l'heure actuelle. Le [Tableau B.1](#) présente leurs caractéristiques critiques.

	Bi-2212	Bi-2223	YBCO
T_c (K)	87	110	93
B_{irr} à 4.2 K (T)	>30	>30	>30
B_{irr} à 77 K (T)	0.005	0.5	>5
J_c à 4.2 K (A/mm^2)	5 000	3 000	>100 000
J_c à 77 K (A/mm^2)	100	500	>10 000

Tableau B.1 : Paramètres critiques des principaux SHT utilisés dans les applications de puissance.

B.1 BSCCO

La majeure partie des applications à grande échelle des SHT utilise des conducteurs BSCCO. Le procédé de fabrication est bien établi et des conducteurs de quelques kilomètres de long sont concevables. Un schéma simplifié du procédé de fabrication **OPIT**, pour Oxide-Power-In-Tube, est donné [Figure B.1](#).

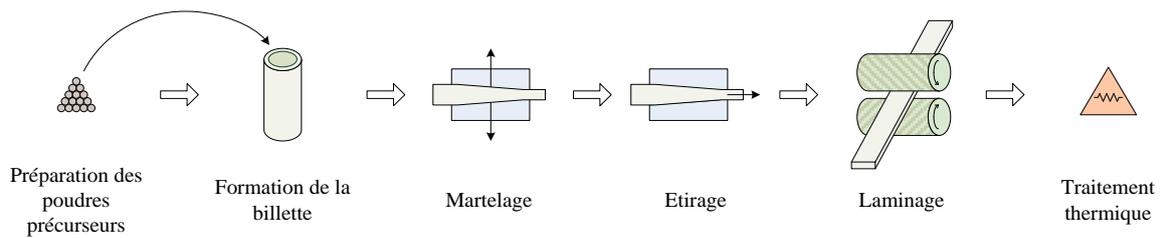


Figure B.1 : Présentation schématique du procédé de fabrication OPIT.

Le courant transporté traverse les joints de grains, ce qui diminue les caractéristiques du conducteur. Un laminage durant la fabrication permet de texturer le matériau, améliorant l'alignement des grains et ainsi la densité de courant critique. Les conducteurs BSCCO produits sont donc essentiellement de fins rubans d'environ 2-4 mm de largeur pour 0.2-0.4 mm d'épaisseur. Les caractéristiques mécaniques des rubans sont améliorées en plaçant la partie supraconductrice dans un tube d'argent (Ag), choisi pour ces bonnes propriétés mécaniques et de diffusion de l'oxygène.

Le BSCCO possède une anisotropie intrinsèque : ses propriétés ne sont pas les mêmes dans toutes les directions. Deux directions principales se dégagent, l'une constituée d'empilements de plans CuO_2 (appelés plans a, b -), l'autre lui étant perpendiculaire (notée c -). Une caractéristique importante des matériaux BSCCO est la forte anisotropie de la densité de courant critique. En effet, J_c décroît rapidement pour un champ magnétique perpendiculaire au côté large du ruban ($B_{//c}$) tandis que cette décroissance est plus lente pour un champ magnétique parallèle ($B_{//a,b}$).

Le champ d'irréversibilité B_{irr} sépare les comportements réversible et irréversible, ainsi la densité de courant critique est nulle au-dessus de B_{irr} puisque l'aimantation est parfaitement réversible. La valeur la plus intéressante n'est donc pas B_{c2} mais B_{irr} qui est très inférieure. Le champ d'irréversibilité B_{irr} à 4.2 K est très grand pour le Bi-2212 comme pour le Bi-2223, mais la densité de courant critique du Bi-2223 décroît plus rapidement que le Bi-2212 en présence d'un champ magnétique. Le Bi-2212 peut transporter jusqu'à 1 000 A/mm² sous 26 T à 4.2 K, alors que la densité de courant correspondante du Bi-2223 est plus faible. C'est pourquoi le Bi-2212 est préféré pour la réalisation d'aimants SHT à 4.2 K. Au-dessus de 20 K, les propriétés du Bi-2212 sont fortement dégradées à cause de l'importance du régime TAFC, et à 77 K son champ magnétique d'irréversibilité est seulement de 0.005 T. De l'autre côté, le Bi-2223 possède un champ magnétique d'irréversibilité d'environ 0.5 T, ce

qui est largement suffisant pour des applications de transport de courant. C'est pourquoi, le Bi-2223 est actuellement le matériau le plus répandu pour les câbles et amenées de courant fonctionnant à 77 K.

B.2 YBCO

L'une des principales différences entre le BSCCO et l'YBCO est que le « réservoir » de charges du dernier est métallique et non isolant, entraînant de meilleures propriétés du plan c - et donc une anisotropie plus faible, voir [Figure B.2](#).

Un autre avantage des YBCO est leur très grande densité de courant, atteignant plus de 10 kA/mm² à 77 K pour certains conducteurs YBCO. Malheureusement, ces conducteurs sont produits en laboratoire sur des longueurs de quelques centaines de mètres au plus.

La difficulté d'obtenir des conducteurs YBCO de grande taille est liée à la technologie de fabrication. Les YBCO sont des conducteurs déposés, une couche mince de quelques μm de matériau supraconducteur est déposée sur un substrat flexible. Une variante de ce

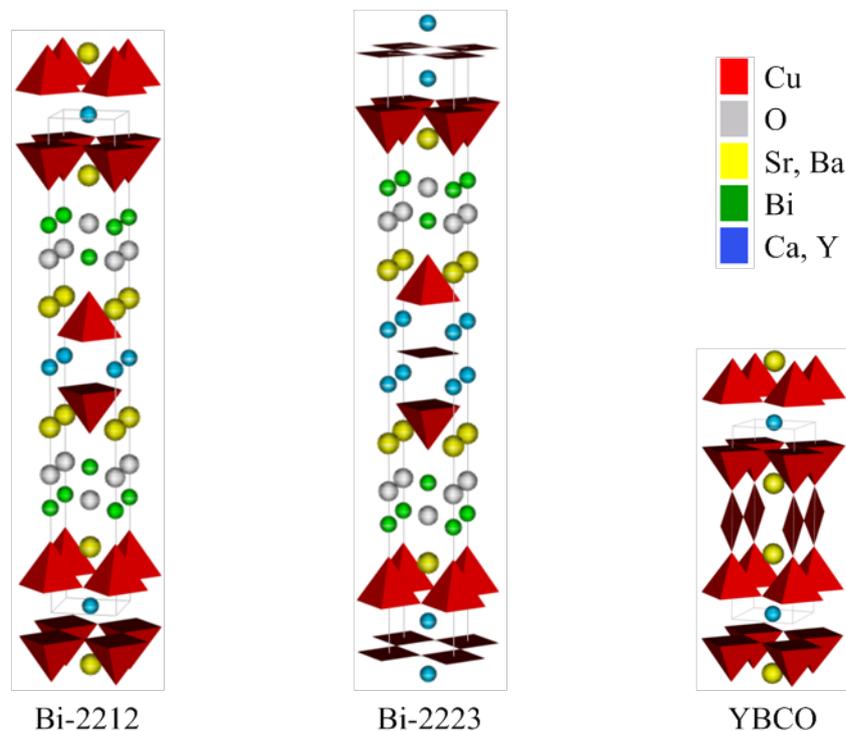


Figure B.2 : Structure cristalline du Bi-2212, du Bi-2223 et de l'YBCO.

processus est le dépôt assisté par faisceau d'ions, appelé **IBAD** pour Ion Beam Assisted Deposition. Dans ce processus, des particules de matériau SHT sont déposés sur une couche tampon texturée, elle-même placée sur un substrat flexible. Ce procédé permet d'améliorer l'alignement du supraconducteur et par conséquent ses performances électriques. Ils existent deux autres procédés concurrents – **RABiTS** pour Rolling Assisted Textured Substrate et **ISD** pour Inclined Substrate Deposition.

L'YBCO est considéré comme le matériau le plus prometteur pour la réalisation de conducteurs SHT. Cependant, l'obtention de grandes longueurs est pour le moment inconcevable et beaucoup de chercheurs s'efforcent à résoudre ce problème.

Annexe C. Photographies

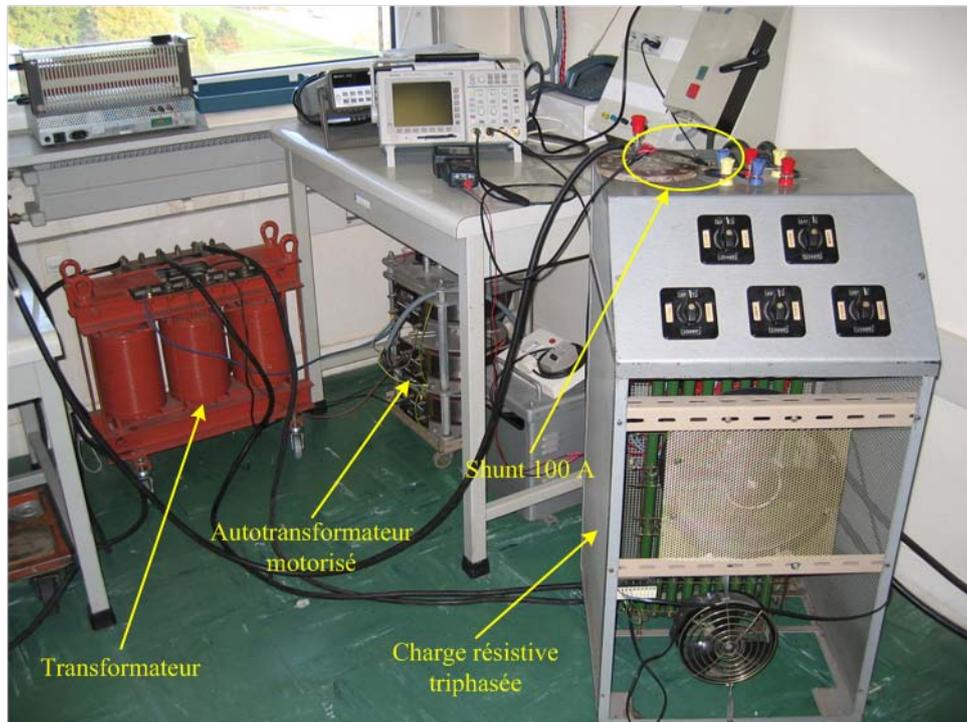


Figure C.1 : Matériel nécessaire à l'alimentation des amenées de courant Bi-2223.

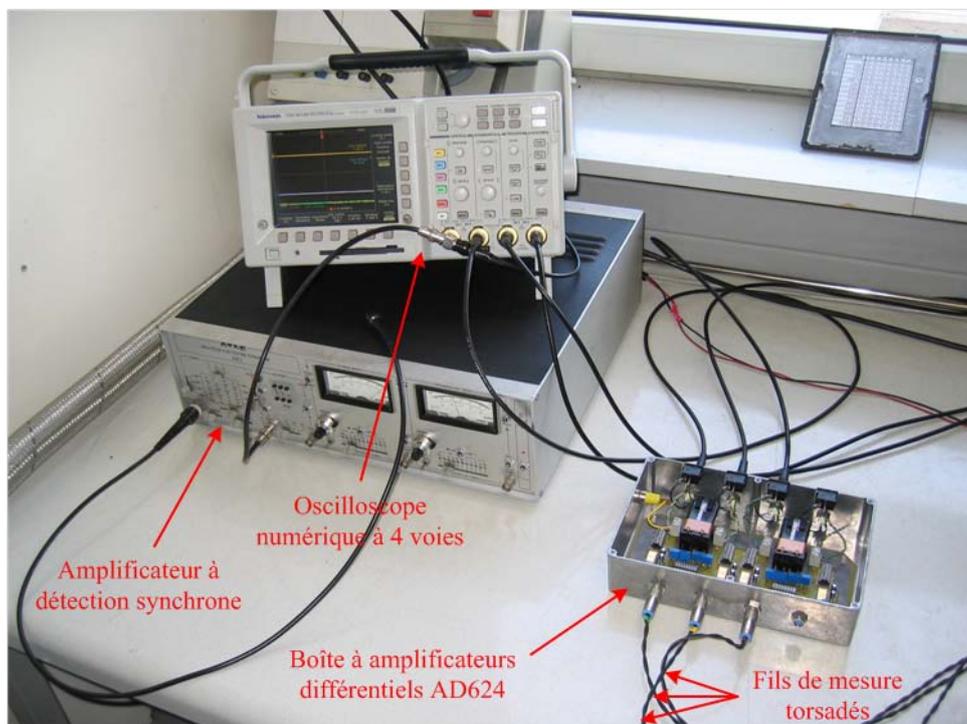


Figure C.2 : Appareils de mesure permettant l'acquisition des différentes grandeurs.

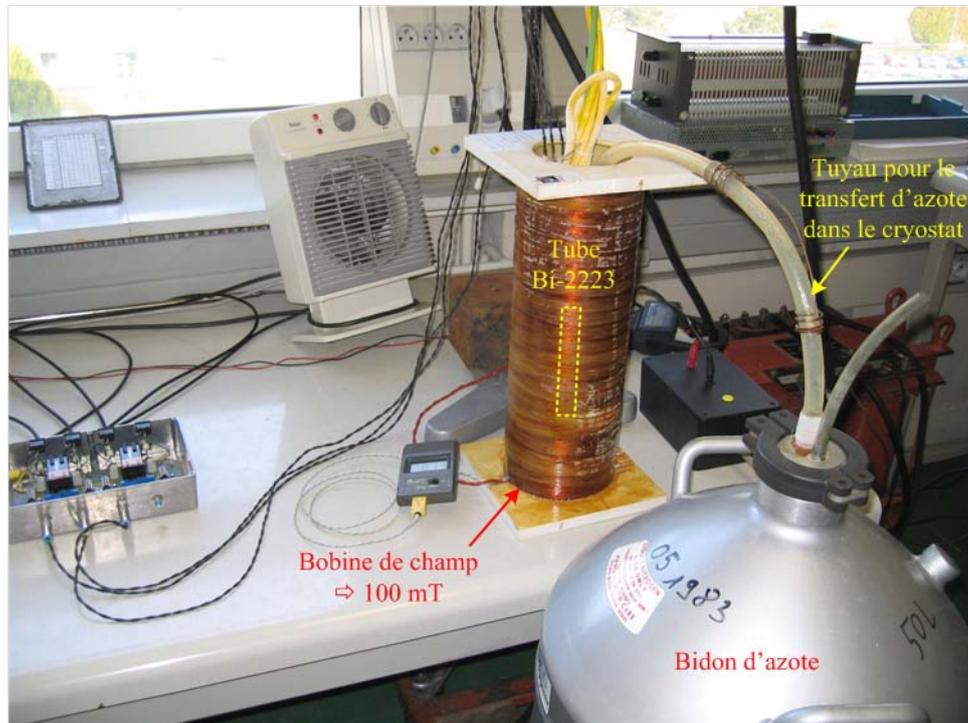


Figure C.3 : Vue d'ensemble de la bobine de champ permettant d'atteindre jusqu'à 100 mT.

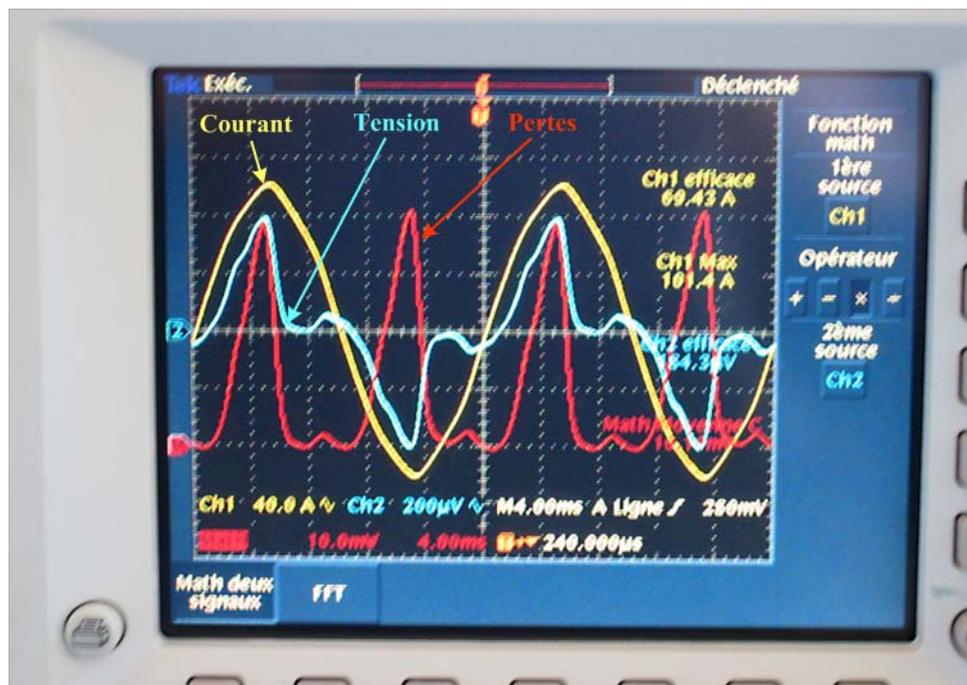


Figure C.4 : Visualisation à l'oscilloscope des grandeurs instantanées $i(t)$, $u(t)$ et $p(t)$.

Liste des symboles et acronymes

Principaux symboles utilisés

Tout au long du texte, la notation vectorielle d'une grandeur physique est donnée par un caractère en style gras, alors que sa norme est donnée en style normal.

A, \mathbf{A}	[A · H / m]	Vecteur potentiel magnétique
B, \mathbf{B}	[T], [mT]	Induction magnétique
$B_{//}$	[T], [mT]	Induction magnétique parallèle au plan a, b du SHT
B_{\perp}	[T], [mT]	Induction magnétique perpendiculaire au plan a, b du SHT
B_0	[T], [mT]	Constante utilisée dans les modèles $J_c(B)$ et $n(B)$
B_a	[T], [mT]	Induction magnétique appliquée
B_p	[T], [mT]	Induction de pénétration complète
B_p^*	[T], [mT]	Induction de pénétration complète avec la loi $J_c(B)$
B_m	[T], [mT]	Amplitude maximale de l'induction magnétique appliquée
C_p	[J / (Kg · K)]	Chaleur spécifique
D	[-]	Facteur démagnétisant
E, \mathbf{E}	[V / m]	Champ électrique
E_c	[V / m]	Champ électrique pour lequel le courant critique est défini
E_{mag}	[J]	Energie magnétique
E_{diss}	[J]	Energie dissipée
f	[Hz]	Fréquence du courant de transport sinusoïdal
\mathbf{F}_L	[N]	Force de Laplace
\mathbf{F}_p	[N]	Force d'ancrage
\mathbf{F}_v	[N]	Force de frottement visqueux
h	[W / (m ² · K)]	Coefficient d'échange avec le fluide cryogénique
H_a	[A / m]	Champ magnétique appliqué
H_m	[A / m]	Amplitude maximale du champ magnétique appliqué
$i(t)$	[A]	Courant de transport sinusoïdal

I	[A]	Courant de transport continu
I_c	[A]	Courant critique
J_c	[A / m ²]	Densité de courant critique
k_B	[J / K]	Constante de Boltzmann ($1.3806505 \times 10^{-23}$ J/K)
\mathbf{M}	[A / m]	Aimantation
n	[-]	Valeur de la puissance de la loi $E - J$
p_v	[W / m ³]	Pertes volumiques
p	[W]	Pertes instantanées
P	[W]	Pertes moyennes
r	[m], [mm]	Coordonnée suivant r (en indice, signifie composante suivant r)
R	[Ω]	Résistance électrique
t	[s]	Temps
t_q	[s]	Temps avant la transition du SHT
T	[K]	Température
T_{bain}	[K]	Température du fluide cryogénique
T_c	[K]	Température critique
V	[V]	Tension continue
x	[m], [mm]	Coordonnée suivant x (en indice, signifie composante suivant x)
y	[m], [mm]	Coordonnée suivant y (en indice, signifie composante suivant y)
z	[m], [mm]	Coordonnée suivant z (en indice, signifie composante suivant z)
$\alpha_{//}, \alpha_{\perp}$	[-]	Constantes utilisées dans le modèle $J_c(B)$
$\beta_{//}, \beta_{\perp}$	[-]	Constantes utilisées dans le modèle $n(B)$
Δr	[m], [mm]	Pas d'espace suivant r utilisé dans la MDF
Δt	[s]	Pas de temps
Δx	[m], [mm]	Pas d'espace suivant x utilisé dans la MDF
Δy	[m], [mm]	Pas d'espace suivant y utilisé dans la MDF
Δz	[m], [mm]	Pas d'espace suivant z utilisé dans la MDF
Φ	[Wb]	Flux magnétique
Φ_0	[Wb]	Quantum de flux (2.667810×10^{-15} Wb)
γ	[g / cm ³]	Masse volumique

η	[N·s/m]	Coefficient de frottement visqueux
κ	[-]	Constante de Ginzburg-Landau
λ	[W/(m·K)]	Conductivité thermique
μ_0	[H/m]	Perméabilité magnétique du vide ($4\pi \times 10^{-7}$ H/m)
θ	[rad]	Coordonnée suivant θ (en indice, signifie composante suivant θ)
ρ	[$\Omega \cdot m$]	Résistivité électrique
ρ_{FF}	[$\Omega \cdot m$]	Résistivité électrique de Flux Flow
ρ_n	[$\Omega \cdot m$]	Résistivité électrique à l'état normal
ρ_{TAF}	[$\Omega \cdot m$]	Résistivité électrique dans le régime TAF
σ	[S/m]	Conductivité électrique
τ	[s]	Constante de temps de la décharge RLC
τ_{th}	[s]	Conductivité de temps thermique
ω	[rad/s]	Pulsation du courant de transport

Acronymes utilisés

Pour plus de clarté et de brièveté, les acronymes suivants ont été utilisés :

8-16-24	Pastille de 8 mm de hauteur, 24 mm de diamètre ext. et un trou de 16 mm de diamètre
1D	Unidimensionnel (à une dimension)
2D	Bidimensionnel (à deux dimensions)
3D	Tridimensionnel (à trois dimensions)
AC	Courant alternatif (Alternating Current)
Bi-2223	Composé $\text{Bi}_{1.8}\text{Pb}_{0.26}\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+x}$
BCS	Théorie de Bardeen, Cooper et Schrieffer
BSCCO	Supraconducteur à base de bismuth, de strontium, de calcium et d'oxydes de cuivre
EDP	Equations aux dérivées partielles
GL	Théorie de Ginzburg-Landau

MDF	Méthode des différences finies
PFM	Pulsed Field Magnetization
SBT	Supraconducteur à basse température
SHT	Supraconducteur à basse température
TAFF	Thermally Activated Flux Flow
TAFC	Thermally Activated Flux Creep
YBCO	Supraconducteur à base d'yttrium, de baryum et d'oxydes de cuivre

Bibliographie

- [Abr57] A.A. Abrikosov. On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group. Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics, vol. 5, pp. 1174-1182, 1957. Translated from: Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki, vol. 32, pp. 1442-1452, 1957.
- [Amb63] V. Ambegaokar and A. Baratoff. Tunneling Between Superconductors. Physical Review Letter, vol. 10 (11), pp. 486-489, 1963, erratum, vol. 11 (2), p. 104, 1963.
- [And62] P.W. Anderson. Theory of flux creep in hard superconductors. Physical Review Letter, vol. 9 (7), pp. 309-311, 1962.
- [Bal98] E.P. Balsamo, D. Ciazynski, O. Cicchelli, P. Gislou, G. Pasotti, M.V. Ricci and M. Spadoni. Direct measurement of the AC loss of an ITER relevant coil. Physica C, vol. 310, pp. 258-261, 1998.
- [Bea62] C. P. Bean. Magnetization of Hard Superconductors. Physical Review Letters, vol. 8 (6), pp. 250-253, 1962.
- [Bea64] C. P. Bean. Magnetization of high-field superconductors. Reviews of Modern Physics, vol. 36 (1), pp. 31-39, 1964.
- [Ber05] K. Berger, J. L ev eque, D. Netter, B. Douine, A. Rezzoug. AC Transport Losses Calculation in a Bi-2223 Current Lead Using Thermal Coupling With an Analytical Formula. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 15 (2), pp. 1508-1511, 2005.
- [Bin92] K.J. Binns, P.J. Lawrenson, C.W. Trowbridge. The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1992, 486 p. ISBN 0471924601.
- [Bir93] O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk, and K. R. Richter. Computation of 3-D current driven skin effect problems using a current vector potential. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 29 (2), pp. 1325-1328, 1993.
- [Bla94] G. Blatter, M.V. Feigel'Man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, V.M. Vinokur.

- Vortices in high-temperature superconductors. *Reviews of Modern Physics*, vol. 66 (4), pp.1125-1388, 1994.
- [Bræ02] S. Bræck, D. V. Shantsev, T. H. Johansen, and Y. M. Galperin. Superconducting trapped-field magnets: Temperature and field distributions during pulsed-field activation. *Journal of Applied Physics*, vol. 92 (10), pp. 6235-6239, 2002.
- [Bru89] Y. Brunet. Les supraconducteurs. *Techniques de l'ingénieur, traité Génie électrique*, D2700, 1989.
- [Cas00] H. Castro, A. Gerber, A. Milner. Calorimetric study of ac-field losses in superconducting BSCCO tubes. *Physica C*, vol. 331, pp. 141-149, 2000.
- [Che89] D.-X. Chen and R. B. Goldfarb. Kim model for magnetization of type-II superconductors. *Journal of Applied Physics*, vol. 66 (6), pp. 2489-2500, 1989.
- [Cle87] J. R. Clem, B. Bumble, S. I. Raider, W. J. Gallagher and Y. C. Shih. Ambegaokar-Baratoff–Ginzburg-Landau crossover effects on the critical current density of granular superconductors. *Physical Review B*, vol. 35 (13), pp. 6637-6642, 1987.
- [Daf97] H. Daffix, P. Tixador. Electrical AC loss measurements in superconducting coils. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 7 (2), pp. 286-289, 1997.
- [Dou00] B. Douine, J. Lévêque, A. Rezzoug. AC loss measurements of a high critical temperature superconductortransporting sinusoidal or non-sinusoidal current. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 10 (1), pp. 1489-1492, 2000.
- [Dou01] B. Douine. Etudes des pertes dans les supraconducteurs à haute température critique. Thèse de l'Université Henri Poincaré, Nancy, France, 2001.
- [Dou03] B. Douine, J. Lévêque, D. Netter, A. Rezzoug. Calculation of losses in a HTS current lead with the help of the dimensional analysis. *Physica C*, vol. 399, pp. 138-142, 2003.
- [Dur04] J. Duron, F. Grilli, B. Dutoit, S. Stavrev. Modelling the E-J relation of high-T_c superconductors in an arbitrary current range. *Physica C*, vol. 401, pp. 231-235, 2004.
- [Dut99] B. Dutoit, M. Sjöström, and S. Stavrev. Bi(2223) Ag sheathed tape I_c and exponent

- n characterization and modelling under DC magnetic field. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 9 (2), pp. 809-812, 1999.
- [Eve99] J. E. Evetts, M. J. Hogg, B. A. Glowacki, N. A. Rutter and V. N. Tsaneva. Current percolation and the V-I transition in YBa₂Cu₃O₇ bicrystals and granular coated conductors. Superconductor Science Technology, vol. 12, pp. 1050-1053, 1999.
- [Fuj94] H. Fujishiro, M. Ikebe, K. Noto, M. Matsukawa T. Sasaoka, K. Nomura, J. Sato and S. Kuma. Low thermal conductive Bi-2223 tapes sheathed with Ag-Au alloys. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 30 (4), pp. 1645-1650, 1994.
- [Gen99] P.G. de Gennes. Superconductivity of Metals and Alloys. Perseus Books Group, 1999, 292 p. ISBN 0738201014.
- [Gin50] V.L. Ginzburg and L.D. Landau. On the theory of superconductivity. Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki, vol. 20, pp. 1064-1082, 1950.
- [Gri05] F. Grilli *et al.* Finite-element method modeling of superconductors: from 2-D to 3-D. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 15 (1), pp. 17-25, 2005.
- [Ho01] S. Ho Tam Fou, F. Bouillault. Interaction magnet superconductor modelling: coupled magnetodynamic mechanic problem. The European Physical Journal - Applied Physics, vol. 13, pp. 131-135, 2001.
- [Ish01] A. Ishiyama and H. Asai. A stability criterion for cryocooler-cooled HTS coils. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 11 (1), pp. 1832-1835, 2001.
- [Kam11] H. Kamerlingh Onnes. The Superconductivity of Mercury. Communication from the Physical Laboratory of the University of Leiden, vol. 120b, 122b, 124c, 1911.
- [Kes89] P. H. Kes, J. Aarts, J. van den Berg, C. J. van der Beek and J. A. Mydosh. Thermally assisted flux flow at small driving forces. Superconductor Science Technology, vol. 1, pp. 242-248, 1989.
- [Kim62] Y.B. Kim, C.F. Hempstead and A.R. Strnad. Critical persistent currents in hard superconductors. Phys. Rev. Lett. 9 (7), pp. 306-309, 1962.
- [Kis01] T. Kiss, S. Noda, S. Nishimura, K. Ohya, D. Utsunomiya, Yu.A. Ilyn, and H.

- Okamoto. Analysis of quench development in a cryocooler cooled Bi-2223 pancake coil based on the anisotropic transport E–J characteristics in a short tape sample. *Physica C*, vol. 357-360, pp. 1165-1168, 2001.
- [Kit04] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. 8th edition. John Wiley & Sons, 2004, 704 p. ISBN 047141526X.
- [Kok93] J. Kokavec, I. Hlasnik, S. Fukui. Very sensitive electric method for AC measurement in SC coils. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 3 (1), pp. 153-155, 1993.
- [Kum98] H. Kumakura, H. Kitaguchi, K. Togano, T. Hasegawa, and Y. Hikichi. Performance tests of Bi-2212 pancake coils fabricated by a lamination method. *Cryogenics*, vol. 38, pp. 163-167, 1998.
- [Lig01] B. des Ligneris, M. Aubin, J. Cave. Calorimetric study of the thermal conductivity of superconducting tapes experimental method and simulations. *Physica C*, vol. 354, pp. 270-274, 2001.
- [Lon35] F. London and H. London. The Electromagnetic Equations of the superconductor. *Proceeding of the Royal Society of London, series A*, vol. 149, pp. 71-88, 1935.
- [Lue99] J.W. Lue, J.A. Demko, L. Dresner, R.L. Hughey, U. Sinha, J.C. Tolbert, and S.K. Olsen. AC Losses of Prototype HTS Transmission Cables. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 9 (2), pp. 416-419, 1999.
- [Luo97] H.T. Luong, Y. Marechal, G. Meunier. Computation of 3D current driven eddy current problems using cutting surfaces. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33 (5), pp. 1314-1317, 1997.
- [Mag01] N. Magnusson. Semi-empirical model of the losses in HTS tapes carrying AC currents in AC magnetic fields applied parallel to the tape face. *Physica C*, vol. 349, pp. 225-234, 2001.
- [Mag02] N. Magnusson, S. Borsos, S. Hörnfeldt. Set-up for calorimetric measurements of the AC losses in HTS tapes due to longitudinal magnetic fields and transport currents. *Physica C*, vol. 372-376, pp. 1762-1765, 2002.
- [Mas97] M. Maslouh, F. Bouillault, A. Bossavit, J.C. Verite. From Bean's Model to the–

- Characteristic of a Superconductor: Some Numerical Experiments. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 7 (3), pp. 3797-3801, 1997.
- [Mas03] P. J. Masson, J. L  v  que, D. Netter, and A. Rezzoug. Experimental Study of a New Kind of Superconducting Inductor. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 13 (2), pp. 2239-2242, 2003.
- [Mas05] P. J. Masson and C. A. Luongo. High Power Density Superconducting Motor for All-Electric Aircraft Propulsion. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 15 (2), pp. 2226-2229, 2005.
- [Mei33] W. Meissner and R. Oschenfeld. Ein neuer Effect bei Eintritt der Supraleitf  higkeit. *Die Naturwissenschaften*, vol. 21 (44), pp. 787-788, 1933.
- [Meu98] G. Meunier, L. H. Tuan, Y. Marechal. Computation of Coupled Problem of 3D Eddy Current and Electrical Circuit by Using T0-T-Phy Formulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34 (5), pp. 3074-3077, 1998.
- [Net05] D. Netter, J. Leveque, E. Ailam, B. Douine, A. Rezzoug, and P. J. Masson. Theoretical Study of a New Kind HTS Motor. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 15 (2), pp. 2186-2189, 2005.
- [Ohm01] M. Ohmukai, T. Fujita, and T. Ohno. The Temperature Dependence of Critical Current in YBa₂Cu₃O_{7-d} Thin Films Deposited on MgO by an Eclipse PLD. *Brazilian Journal of Physics*, vol. 31 (3), pp. 511-513, 2001.
- [Ozi94] M. Necati Ozisik. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*. CRC Press, 1994, 432 p. ISBN 0849324912.
- [Ple97] V. Plechacek and J. Hejtmanek. Properties of superconducting Bi-2223 tubular current leads. *Physica C*, vol. 282-287, pp. 2577-2578, 1997.
- [Pol04] M. Pol  k, J. Kvitkovi  , E. Demen  k, L. Jan  k, P. Mozola. Temperature of Bi-2223/Ag samples in the resistive section of I-V curves. *Physica C*, vol. 401, pp. 160-164, 2004.
- [Pre92] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 2nd edition. Cambridge University Press, 1992, 1020 p. ISBN 0521431085.

- [Rei97] H. Reiss. Simulation of thermal conduction and boiling heat transfer and their impact on the stability of high-temperature superconductors. *High Temperatures - High Pressures*, vol. 29, no. 4, pp. 453-460, 1997.
- [Ros77] A.C. Rose-Innes and E.H. Rhoderick. *Introduction to Superconductivity*. 2nd edition. Pergamon, 1977, 237 p. (International Series in Solid State Physics, vol. 6). ISBN 0080216528.
- [Sav98] N. Savvides, A. Katsaros, A. Thorley, J. Herrmann, G. McCaughey, R. Zhao, F. Darmann and M. Apperley. Critical Current and Magnetic Field Performance of Bi-2223/Ag Composite Superconducting Tapes. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 9 (2), pp. 2609-2612, 1999.
- [Sch99] J.R. Schrieffer. *Theory of Superconductivity*. Reprint edition. Perseus Books Group, 1999, 352 p. ISBN 0738201200.
- [Sta02a] S. Stavrev, B. Dutoit, and N. Nibbio. Geometry considerations for use of Bi-2223/Ag tapes and wires with different models of $J_c(B)$. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 12 (3), pp. 1857-1865, 2002.
- [Sta02b] S. Stavrev *et al.* Comparison of Numerical Methods for Modeling of Superconductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38 (2), pp. 849-852, 2002.
- [Sta03] S. Stavrev, B. Dutoit, and P. Lombard. Numerical modelling and AC losses in multifilamentary Bi-2223/Ag conductors with various geometry and filament arrangement. *Physica C*, vol. 384 (1-2), pp. 19-31, 2003.
- [Tin04] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. 2nd edition. Dover Publications, 2004, 480 p. (Dover Books on Physics). ISBN 0486435032.
- [Tix95] P. Tixador. *Les supraconducteurs*, Editions Hermès, Collection matériaux, 1995.
- [Van99] Ph. Vanderbemden. *Determination of Critical Current in Bulk High-Temperature Superconductors by Magnetic Flux profiles Measuring Methods*. Thèse de doctorat, 1999.
- [Vin00] E. Vinot, G. Meunier, and P. Tixador. Different Formulations to Model Superconductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36 (4), pp. 1226-1229, 2000.

- [Vin91] V. M. Vinokur, M. V. Feigel'man and V. B. Geshkenbein. Exact solution for flux creep with logarithmic $U(j)$ dependence: Self-organized critical state in high- T_c superconductors. *Physical Review Letter*, vol. 67 (7), pp. 915-918, 1991.
- [Vys01] V.S. Vysotsky, Yu.A. Ilyin, A.L. Rakhmanov, and M. Takeo. Quench development analysis in HTSC coils by use of the universal scaling theory. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 11 (1), pp. 1824-1827, 2001.
- [Wan03] Y.N. Wang , J.X. Wang, J.H. Li, X.H. Zong, J. Sun. AC loss of Bi-2212 superconducting ring for limiter. *Physica C*, vol. 386, pp. 93-96, 2003.
- [Wen01] Ch.Wenger, A.Gladun, G. Krabbes, and G. Fuchs. Magnetothermal instabilities in cylindrical melt-textured YBCO. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 11 (1), pp. 3533-3536, 2001.
- [Wor92] T. K. Worthington, M. P. A. Fisher, D. A. Huse, John Toner, A. D. Marwick, T. Zabel, C. A. Feild, and F. Holtzberg. Observation of separate vortex-melting and vortex-glass transitions in defect-enhanced $YBa_2Cu_3O_7$ single crystals. *Physical Review B*, vol. 46 (18), pp.11854-11861, 1992.
- [Yam96] K. Yamafuji and T. Kiss. A new interpretation of the glass-liquid transition of pinned fluxoids in high- T_c superconductors. *Physica C*, vol. 258 (3-4), pp. 197-212, 1996.
- [Yan04] Y. Yang, E. Martínez, W.T. Norris. Configuration and calibration of pickup coils for measurement of ac loss in long superconductors. *Journal of Applied Physics*, vol. 96 (4), pp. 2141-2149, 2004.

Etude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les Supraconducteurs à Haute Température

L'étude théorique du fonctionnement d'un dispositif SHT nécessite la résolution d'équations couplées magnétothermiques. Etant donné le couplage fort qui existe pour ces matériaux, l'utilisation d'outils numériques est quasiment indispensable. Un code de calcul basé sur la Méthode des Différences Finies, permettant de résoudre des problèmes 1D et 2D, a été développé dans ce sens. Il est alors possible de simuler numériquement le comportement des SHT.

L'étude des pertes dans une amenée de courant en Bi-2223, parcourue par du courant alternatif 50 Hz, soumise un champ magnétique continu et plongée dans un bain azote liquide, est ensuite réalisée de manière théorique et expérimentale. Des instabilités thermiques ont été observées expérimentalement. Ce phénomène a été étudié à partir de la recherche des solutions d'équilibre stable et instable. On a pu ainsi définir, pour un courant et un champ magnétique donné, une température maximale au-dessus de laquelle la récupération n'est plus possible.

Les pastilles YBCO peuvent piéger de forts champs magnétiques et ainsi réaliser des cryoaimants très performants. La réponse dynamique de ses pastilles, soumises à des variations de champ magnétique, est abordée de manière détaillée (distributions de la densité de courant, du champ magnétique et de la température). Les résultats de simulations montrent des différences significatives lorsque les influences du champ magnétique et de la température sont prises en compte dans la loi de comportement $E(J)$. Un optimum du champ magnétique maximal à appliquer a pu être déterminé. Cette information est intéressante car elle permet un dimensionnement efficace du dispositif d'aimantation pulsé.

Mots clés : Supraconducteur, modélisation, couplage thermique, pertes AC, aimantation, cryoaimant, Bi-2223, YBCO.

Study of magneto-thermal coupled phenomena in High Temperature Superconductors

Theoretical study of HTS devices requires to solve magneto-thermal coupled equations. As coupling effects are very important in these materials, the development of numerical tools is almost unavoidable. A computer code based on the Finite Difference Method was developed in this direction, making it possible to solve 1D and 2D problems. It is then possible to numerically simulate the behavior of HTS.

Study of the losses in a Bi-2223 current lead, fed by an alternating current at 50 Hz, subjected to a DC magnetic field and immersed in a liquid nitrogen bath, is then carried out in a theoretical and experimental way. Thermal instabilities were observed experimentally. This phenomenon was studied starting from the search for the stable and unstable steady state solutions. For a given current and magnetic field, a maximum temperature above which recovery of the superconducting state is not possible could be defined.

YBCO pellets can trap strong magnetic fields and be used as very powerful cryomagnets. The dynamic response of these pellets, subjected to variations of a magnetic field, is studied in a detailed way (current density, magnetic field and temperature distributions). Results of the simulations show significant differences when the influences of the magnetic field and temperature are taken into account in the electrical law $E(J)$. An optimum of the maximum magnetic field to apply leading to a maximum of trapped flux could be given. This information is of great interest as it enables the design of the most effective pulse magnetization device.

Keywords: Superconductor, modeling, thermal coupling, AC losses, magnetization, cryomagnet, Bi-2223, YBCO.