



HAL
open science

Matrices aléatoires, processus entrelacés, et représentations de groupes

Manon Defosseux

► **To cite this version:**

Manon Defosseux. Matrices aléatoires, processus entrelacés, et représentations de groupes. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT: . tel-00347988

HAL Id: tel-00347988

<https://theses.hal.science/tel-00347988>

Submitted on 17 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE
CURIE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE
CURIE

par

Manon DEFOSSEUX

Discipline : **Mathématiques**

**Matrices aléatoires, processus entrelacés, et
représentations de groupes**

Sous la direction du Professeur Philippe Bougerol

Soutenue le 9 décembre 2008

COMPOSITION DU JURY :

M. Yuliy BARYSHNIKOV	Rapporteur	Bell Laboratories
M. Jean BERTOIN	Examineur	Université Pierre et Marie Curie
M. Philippe BIANE	Examineur	Université de Marne-la-Vallée
M. Philippe BOUGEROL	Directeur de thèse	Université Pierre et Marie Curie
M. Jacques FARAUT	Examineur	Université Pierre et Marie Curie
Mme. Alice GUIONNET	Rapporteur	Ecole Normale Supérieure de Lyon
M. Neil O'CONNELL	Examineur	Université de Warwick

Remerciements

Je remercie bien évidemment Philippe Bougerol. Ce travail lui doit beaucoup : son savoir, sa disponibilité et sa gentillesse l'ont rendu possible. Et parce que je suis sûre qu'il ne me reprochera jamais un mauvais jeu de mot, j'affirme qu'il fut durant ces quatre années de thèse un parfait phil... directeur, me guidant dans le dédale des chemins de Littellmann ou des processus entrelacés¹.

Je remercie Neil O'Connell de m'avoir invitée à passer six mois au sein de son laboratoire, à Cork. C'est grâce à lui que je me suis intéressée aux propriétés d'entrelacement, et c'est pour moi un grand plaisir qu'il ait accepté de faire partie de mon Jury. Je tiens par ailleurs à remercier les membres de son équipe – Artem, Helen, John, Niamh, Ton et Tony - pour leur accueil chaleureux, ainsi que Jon Warren, pour sa disponibilité et son enthousiasme lors de nos discussions.

Alice Guionnet et Yuliy Baryshnikov ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je les remercie de leur lecture attentive, en dépit du peu de temps dont ils disposaient.

A Jean Bertoin, Philippe Biane et Jacques Faraut, je tiens à témoigner ma reconnaissance pour avoir accepté de participer à ce Jury.

Puisque les variables aléatoires non commutatives ne peuvent s'observer conjointement, nous avons, François Chapon et moi-même, pensé que deux paires d'yeux pourraient peut-être venir à bout de ces drôles d'objets. Si les séances d'observation n'ont pour l'instant pas permis d'en percevoir tous les mystères, elles ont été l'occasion de nombreuses discussions, ce qui vaut tous les résultats.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien, Agathe, pour son amitié tranquille et bienveillante, Juliette, Laura, les deux François et bien sûr Bruno. Merci à Corentin Lacombe et à Ghislaine Hannot pour leur patience.

Et puis bien sûr, il y a Philippe... Il m'est difficile de te remercier seulement pour ton soutien, pourtant immense, pendant cette thèse quand je souhaiterais en dire davantage. Mais ce n'est pas le lieu des déclarations. Merci pour les heures de relecture, pour tes paroles réconfortantes qui ont su venir à bout de bien des découragements.

¹Extrait de « ma thèse et le Minotaure », à paraître.

A mes parents

AGNÈS : Le petit chat est mort.
SCHRÖDINGER : En êtes-vous sûre ?

Table des matières

Introduction	9
Chapitre 1. Cas complexe et fonctions de Schur	15
1. Tableaux de Young et fonctions de Schur	15
2. Matrices aléatoires hermitiennes complexes	18
3. Vers une généralisation	23
Chapitre 2. Approximation de mesures orbitales	27
1. Introduction	27
2. Groupes de Lie compacts connexes	28
3. Une version d'un théorème d'Heckman	30
Chapitre 3. Ensembles invariants	33
1. Les groupes compacts classiques	33
2. Les matrices de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ dans la littérature	36
3. Matrices aléatoires invariantes de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$	37
4. Matrices aléatoires invariantes de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$	40
5. Théorème d'Heckman	45
6. Considérations sur les cas quaternionique et réel impair	46
Chapitre 4. Mineurs et polytopes de Gelfand-Tsetlin	49
1. Définitions	49
2. Matrices invariantes et polytopes de Gelfand-Tsetlin	51
3. Aspects markoviens	56
Chapitre 5. Perturbations de rang 1 et matrices du LUE(\mathbb{F})	57
1. Perturbations de rang 1	57
2. Valeurs propres des matrices du LUE(\mathbb{F})	61
3. Nouveaux ensembles, nouvelles propriétés	67
Chapitre 6. Processus déterminantaux entrelacés	69
1. Quelques rappels	69
2. Processus entrelacés triangulaires	73
3. Processus entrelacés rectangulaires	79
Chapitre 7. Calcul des multiplicités	83
1. Cristal et graphe cristallin	83
2. Multiplicités tensorielles et graphes cristallins	86
3. Multiplicités des restrictions classiques	91

4. Multiplicités asymptotiques et mesures limites	92
Bibliographie	95
Chapitre 8. Annexe	99

Introduction

Au point de départ de ce travail, il y a la volonté de comprendre plus systématiquement les relations entre la théorie des matrices aléatoires et certains aspects de la théorie des représentations de groupes compacts. Nous avons établi pour une large classe de matrices aléatoires un lien direct entre ces deux théories. Nous l'utilisons pour étudier de nouveaux ensembles invariants.

Les matrices aléatoires sont considérées dès 1928 par le statisticien Wishart. Il donnera son nom aux matrices de Wishart [72], également appelées matrices du LOE. Il s'agit des matrices XX^* , où X est une matrice réelle de taille $n \times p$ dont les entrées sont des gaussiennes réelles standard indépendantes. Les matrices du LUE et du LSE, obtenues en considérant des matrices à entrées complexes ou quaternioniques, ont été étudiées par la suite.

Cependant, c'est aux physiciens que l'on doit l'apparition de ce qu'on appellera plus tard la théorie des matrices aléatoires (RMT). Cette théorie se développe au cours des années 50 et 60, sous l'impulsion des travaux de Wigner [70] et de Dyson [22]. En 1951, Wigner émet l'hypothèse que les niveaux d'énergie des noyaux lourds se comportent comme les valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne. En 1962, suivant cette intuition, et sous des hypothèses qu'il estime pertinentes du point de vue de la mécanique quantique, Dyson compte quant à lui trois classes d'ensembles de matrices pouvant intervenir dans la modélisation d'un hamiltonien associé à un système quantique. Munis de la mesure gaussienne, il s'agit des ensembles gaussiens unitaire, orthogonal et symplectique, appelés GUE, GOE et GSE, ou encore β -ensembles, pour $\beta = 2, 1, 4$. Dès lors, la question du spectre des matrices aléatoires devient une question essentielle en physique, puis en mathématiques. Elles sont désormais étudiées dans le cadre de problèmes très éloignés des motivations physiques initiales.

Les questions relatives aux spectres des matrices diffèrent sensiblement selon que la matrice est de taille fixe ou "de grande taille". Lorsque la matrice est de taille fixe et possède suffisamment d'invariances, le calcul de la loi de ses valeurs propres repose sur des formules de changements de variables. C'est le cas par exemple des matrices du GUE, du GOE, ou du GSE. Ces matrices appartiennent à l'ensemble des matrices hermitiennes à entrées complexes, réelles ou quaternioniques. Elles ont une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur ces ensembles proportionnelle à $\exp(-\frac{1}{2}\text{Tr}(HH^*))$. Leur loi

est invariante pour l'action par conjugaison du groupe unitaire, orthogonal et symplectique. Pour les matrices aléatoires de grande taille, c'est-à-dire pour celles dont la taille tend vers l'infini, les questions et outils utilisés sont radicalement différents. En la matière, le résultat le plus connu est sans doute le théorème de convergence vers la loi du demi-cercle de Wigner [71]. Considérons une suite de matrices hermitiennes complexes aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, telle que la densité de X_n est donnée par

$$C_n \exp\left(-\frac{n}{2} \text{Tr}(HH^*)\right).$$

Le théorème de Wigner affirme que la loi spectrale de X_n , c'est-à-dire la mesure aléatoire

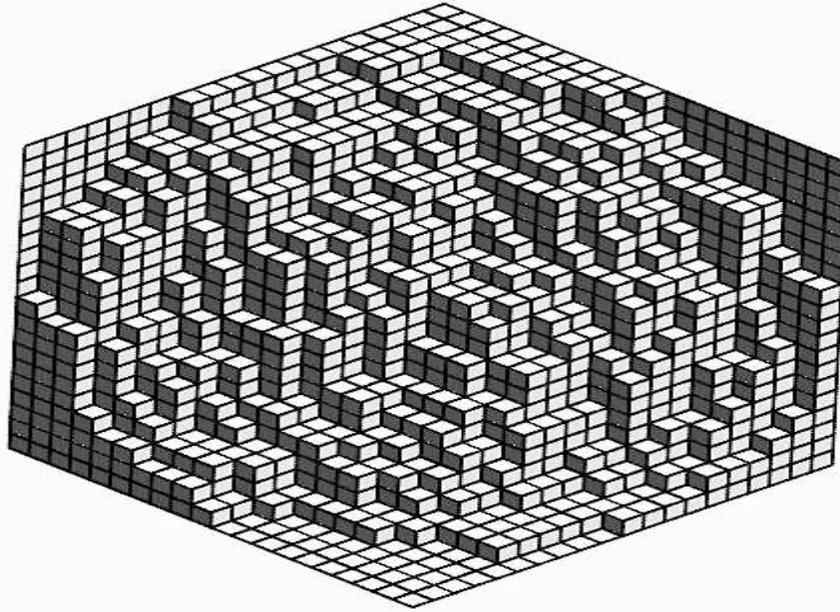
$$\mu_n = \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i^{(n)}},$$

où les $\lambda_i^{(n)}$ sont les valeurs propres de X_n , converge, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi du demi-cercle dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} 1_{[-2,2]}(x).$$

Depuis ce résultat, les questions se sont multipliées, autour notamment des interactions entre les valeurs propres, du comportement asymptotique ou des fluctuations de la plus grande valeur propre. Sur ces deux derniers points, les travaux de Tracy et de Widom constituent une avancée considérable. Les techniques mises en oeuvre pour appréhender les matrices aléatoires de grande taille n'ont cessé de se diversifier. Parmi elles, on trouve notamment la méthode des polynômes orthogonaux, la théorie du potentiel, les probabilités libres, la combinatoire et la méthode des moments. Par ailleurs, les matrices aléatoires sont aujourd'hui impliquées dans de nombreux problèmes. Citons par exemple les cas, très étudiés ces dernières années, des partitions aléatoires, des pavages aléatoires et des modèles de croissance.

Notre travail est relié par certains aspects à ces objets. Il est donc important de préciser dans quels types de résultats ils apparaissent. Les partitions aléatoires ont notamment été étudiées par Okounkov [57]. Celui-ci donna la première preuve de la conjecture de Baik-Deift-Johansson, selon laquelle les partitions aléatoires distribuées selon la mesure de Plancherel et les valeurs propres des grandes matrices hermitiennes partagent la même asymptotique. Pour les modèles de pavages aléatoires, on peut citer par exemple les travaux de Okounkov et Reshetikhin [56]. On peut également évoquer ceux de Johansson et Nordenstam [40] : considérons une partition plane, c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \{0, 1, 2, \dots\}$ de support fini, décroissant en chaque coordonnée. Au graphe d'une partition plane correspond un empilement de cubes tel que la hauteur des piles décroît en s'éloignant de l'origine (un coin d'un grand cube).



A un tel remplissage correspond, comme illustré sur le dessin, un pavage d'hexagone par des losanges. Considérons ainsi un grand cube de taille $N \times N \times N$. Le point essentiel est le suivant : parcourons du bord nord-ouest au bord sud-est les lignes successives. Si on observe ligne après ligne la répartition des losanges noirs, on remarque que leurs positions sont entrelacées et qu'une forme de Gelfand-Tsetlin apparaît. Dans un article important de 1998, Cohn, Larsen et Propp [15] ont pu étudier ces répartitions en les mettant en relations avec les représentations de $Gl(d, \mathbb{C})$. En 2001, Baryshnikov [2] montre que le processus ponctuel associé aux valeurs propres des mineurs d'une matrice aléatoire infinie du GUE est lui aussi décrit par les formes de Gelfand-Tsetlin. Utilisant ces résultats et les processus déterminantaux, Johansson et Nordenstam et, indépendamment, Reshetikhin et Okounkov, peuvent alors décrire le comportement asymptotique de partitions planaires aléatoires : il est décrit par le processus des mineurs du GUE.

En réalité, les liens entre la théorie des partitions, les modèles de pavage et les matrices aléatoires proviennent du fait, au moins dans les problèmes cités, que tous partagent avec la théorie des représentations de nombreux objets. Parfois, ils sont présents dans l'énoncé même du résultat. C'est le cas

pour les partitions aléatoires étudiées par Okounkov : la mesure de Plancherel est elle-même issue de la théorie des représentations des groupes finis. D'autres fois, ils apparaissent moins directement, dans les preuves. C'est le cas pour les résultats sur les partitions planaires que nous avons rappelés.

Nous avons vu que le domaine des matrices aléatoires était vaste. Indiquons brièvement dans quelle partie notre travail se situe. Les ensembles de matrices que nous considérons sont des sous-ensembles de l'ensemble des matrices hermitiennes complexes. Ils sont au nombre de trois. Le premier est l'ensemble des matrices hermitiennes complexes de taille $n \times n$ lui-même, que nous noterons $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Le deuxième est l'ensemble des matrices hermitiennes anti-symétriques $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Enfin, le dernier est l'ensemble des matrices hermitiennes hamiltoniennes $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$. Parmi ces ensembles, seul $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ apparaît dans la classification de Dyson donnée plus haut. Cependant, sous des hypothèses moins restrictives que celles de Dyson, Altland et Zirnbauer [1] ont récemment obtenu une classification plus vaste dans laquelle ils apparaissent. Notons $U_n(\mathbb{F})$ la composante neutre de l'ensemble des matrices unitaires à entrées dans \mathbb{F} , où $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . On s'intéresse aux ensembles $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ munis de probabilités invariantes pour l'action par conjugaison de $U_n(\mathbb{F})$. Ce sont pour ces ensembles que la théorie des représentations intervient. Nous les appellerons ensembles invariants.

Parmi eux, certains jouent un rôle prééminent. Précisons. Nous avons dit qu'en physique, le hamiltonien associé à un système quantique pouvait être modélisé par une matrice aléatoire, possédant des propriétés d'invariance imposées par le contexte. Pour simplifier, supposons que cette matrice soit à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ et de loi invariante μ_n pour l'action par conjugaison du groupe unitaire. La taille de la matrice est une approximation puisque le hamiltonien possède un spectre infini. Il est donc fondamental, du point de vue de la physique, d'étudier les mesures $\{\mu_n, n \geq 1\}$ formant un système projectif et la mesure associée sur l'ensemble des matrices infinies $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$. Vershik fut le premier à s'intéresser à ce type de question. Le cas des matrices hermitiennes a été décrit par Pickrell [62]. Ce dernier montre que les mesures invariantes, en un sens à préciser, sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$, sont entièrement décrites par des mesures de type GUE ou LUE. Nous construisons dans notre travail deux types d'ensembles invariants, qui jouent le même rôle dans l'analyse des mesures sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$ que dans le cas classique ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Le premier, que nous noterons GUE(\mathbb{F}), est classique. Il s'agit de l'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ muni de la mesure gaussienne. Le deuxième, que nous noterons LUE(\mathbb{F}), est une sorte de généralisation du LUE que l'on retrouve pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Nous ne savons pas si pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$, ces ensembles interviennent en physique mais ils possèdent néanmoins certaines propriétés requises pour que ce soit le cas.

Le but de cette thèse est donc d'établir un lien direct entre la théorie des matrices aléatoires et certains aspects de la théorie des représentations, afin d'étudier ces nouveaux ensembles invariants. Notre travail se décompose

comme suit. Dans un **premier chapitre**, nous présenterons quelques problèmes simples, issus de la littérature, qui font apparaître des similitudes entre ces deux théories sans pour autant que soit expliqué, dans les preuves initialement données, d'où elles proviennent. Nous proposerons de nouvelles preuves qui, si elles restent élémentaires, contiennent les arguments essentiels que nous utiliserons ensuite pour établir un lien entre ces théories. Ce chapitre est donc introductif puisqu'il ne contient pas de résultats nouveaux mais présente dans le cas le plus simple la méthode que nous développerons ensuite.

On appelle mesure orbitale l'image de la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$ sur une orbite $\{uxu^* : u \in U_n(\mathbb{F}), x \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})\}$. Dans le **chapitre 2**, nous présenterons une version d'un théorème d'Heckman [36] qui permet, dans l'esprit de la méthode des orbites de Kirillov [48], de décrire précisément les convolutions et certaines projections de mesures orbitales, pourvu que les règles appelées "règles de branchement" soient connues. En effet, on obtient ces mesures en considérant la limite de mesures discrètes sur les poids des représentations irréductibles de $U_n(\mathbb{F})$, construites à partir de ces règles. Le théorème sera énoncé pour tous les groupes de Lie connexes compacts. Les groupes $U_n(\mathbb{F})$ sont les groupes compacts classiques.

Au **chapitre 3** nous montrerons, en utilisant le résultat de Pickrell, que les probabilités sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ invariantes sous l'action par conjugaison des $U_n(\mathbb{F})$ sont entièrement décrites par les mesures des ensembles GUE(\mathbb{F}) et LUE(\mathbb{F}). Nous nous placerons pour cela dans le cadre de la théorie des paires sphériques d'Olshanski.

Aux **chapitres 4 et 5**, nous proposerons deux applications du théorème d'Heckman. Nous montrerons d'abord que les valeurs propres des mineurs principaux d'une matrice aléatoire invariante de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ (dont les valeurs propres sont fixées) sont distribuées selon la mesure uniforme, ou une projection de la mesure uniforme pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, sur des polytopes décrivant les conditions d'entrelacement vérifiées par les valeurs propres. Ces polytopes sont les polytopes de Gelfand-Tsetlin. Au chapitre suivant, nous utiliserons le théorème d'Heckman pour décrire les valeurs propres des matrices du LUE(\mathbb{F}). Ces ensembles sont construits de façon analogue au LUE classique obtenu pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Les matrices de ces ensembles s'écrivent $M\Omega M^*$, où M est une matrice gaussienne standard à entrées dans \mathbb{F} et Ω une matrice simple de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ bien choisie (Ω est l'identité quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Nous verrons que les ensembles LUE(\mathbb{F}) font apparaître des phénomènes radicalement nouveaux lorsque \mathbb{F} n'est pas égal à \mathbb{C} . En particulier, ils ne sont dans aucun ensemble de hamiltoniens gaussiens de la classification de Altland et Zirnbauer.

Au **chapitre 6**, nous étudierons deux types de processus entrelacés : les processus "triangulaires" et les processus "rectangulaires". Les premiers, introduits au chapitre 4, sont associés aux mineurs principaux de matrices aléatoires invariantes de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, les seconds, construits au chapitre 5, à des perturbations successives de rang 1 dans $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Nous déduirons des formules

explicitement précédemment obtenues qu’une large classe d’entre eux est déterminantal. La propriété d’entrelacement, qu’ils partagent avec de nombreux modèles (watermelon, pavage d’hexagone, modèle du collier de perles [9]...), est fondamentale pour cet aspect déterminantal.

Les résultats des chapitres 4 et 5 reposent sur des descriptions précises de convolutions ou de projections de mesures orbitales. D’après le théorème d’Heckman, ces descriptions se déduisent de règles de branchement. Dans un souci de clarté, c’est seulement au **septième et dernier chapitre** que nous démontrerons ou rappellerons les règles de branchement dont nous avons besoin. Nous utiliserons pour les déterminer la théorie de cristaux de Kashiwara, que l’on peut appréhender comme une généralisation récente et profonde des tableaux de Young. Nous obtiendrons ainsi une description de ces règles faisant intervenir, comme nous le souhaitons, des conditions d’entrelacement.

Nous avons évoqué plus haut un certain nombre de situations dans lesquelles interviennent les matrices aléatoires de loi invariante sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Citons de même quelques exemples dans lesquels celles de loi invariante sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{H})$, en particulier les ensembles $\text{GUE}(\mathbb{H})$ et $\text{GUE}(\mathbb{R})$, apparaissent :

1. La modélisation des structures mésoscopiques avec interface conduction normale–superconduction, avec une réflexion d’Andreev. Le formalisme de Bogoliubov–de Gennes met en évidence les matrices du $\text{GUE}(\mathbb{H})$ (cf. Atland et Zirnbauer [1], Brezin, Hikami et al [10, 11]) ;
2. L’asymptotique de la combinatoire des chemins sans intersection avec un mur (cf. Krattenthaler, Guttmann, et Viennot [51], Gillet [34], Katori et al. [44, 45, 46]) ;
3. Les modèles de réseaux avec localisation quantique (Cardy [13]) ;
4. Les modèles de losanges avec mur (Forrester et Nordenstam, [28]).

On trouvera de nombreux autres exemples dans Heinzner, Huckleberry, et Zirnbauer [37] et dans Caselle et Magnea [14]

Ce texte est accompagné en annexe de l’article soumis aux Annales de l’IHP. Il pourra intéresser un éventuel rapporteur anglophone.

CHAPITRE 1

Cas complexe et fonctions de Schur

De nombreux travaux soulignent l'existence de correspondances entre certains aspects de la théorie des représentations de groupes et la théorie des matrices aléatoires. En effet, des outils introduits pour répondre à des questions posées au sein de la première interviennent souvent dans la description des matrices aléatoires. Parmi eux, on trouve notamment : les tableaux de Young, la formule de Harish-Chandra, la formule de Plancherel, les chemins de Littelmann. Or, nous avons constaté que pour une large classe de matrices aléatoires, il existait une explication commune. Elle nous est donnée par une version d'un théorème d'Heckman, que nous montrerons dans le chapitre suivant.

Nous présentons dans ce chapitre deux résultats issus de la littérature. Le premier concerne la loi des valeurs propres des mineurs principaux d'une matrice du GUE. Il été démontré par Baryshnikov. Le deuxième concerne les perturbations de rang 1 des matrices aléatoires.

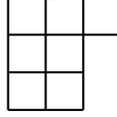
Tous deux peuvent être appréhendés dans le cadre du théorème d'Heckman. Au lieu d'indiquer comment ce théorème s'applique dans ce cas, nous proposons des démonstrations de ces résultats, qui contiennent les arguments essentiels de la preuve du théorème, mais qui présentent l'avantage de ne nécessiter aucune connaissance particulière en théorie des représentations de groupes. Nous espérons ainsi faciliter la compréhension du cas général, énoncé au chapitre suivant.

Nous rappelons rapidement dans la **première section** quelques éléments de combinatoire des tableaux de Young, et introduisons les fonctions de Schur qui constituent un des principaux outils de nos démonstrations. La **section 2** est consacrée à ces démonstrations. Enfin, dans une **troisième section**, nous reformulons, dans un cadre plus proche de celui du théorème d'Heckman, le principe des preuves proposées.

1. Tableaux de Young et fonctions de Schur

Partitions et tableaux. Une partition d'un entier k est un vecteur $\lambda \in \mathbb{N}^m$, $m \in \mathbb{N}$, vérifiant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$, et $|\lambda| := \sum_{i=1}^m \lambda_i = k$. Elle peut être représentée par un diagramme de Young. Un tel diagramme est une collection de k cellules disposées en lignes justifiées à gauche. Chaque ligne contient un nombre de cellules qui décroît de la ligne la plus haute à la plus basse. Si on liste la longueur de chaque ligne du haut vers le bas du

diagramme, on obtient une partition de k . Par exemple, le diagramme de Young associé à la partition $(3,2,2)$ est



Un tableau de Young à entrées dans $\{1, \dots, n\}$ est un diagramme de Young dont les cellules contiennent chacune un élément de $\{1, \dots, n\}$. Dans chaque ligne, la suite d'entiers est croissante de gauche à droite. Dans chaque colonne, elle est strictement croissante du haut vers le bas. Pour $n = 5$, on peut par exemple à partir du diagramme précédent obtenir le tableau

1	1	3
2	3	
4	4	

Si les entrées sont distinctes, le tableau est dit standard. Le diagramme correspondant au tableau P est appelé la forme de P . On la note $sh(P)$. On note \mathcal{T}_n l'ensemble des tableaux à entrées dans $\{1, \dots, n\}$, $\mathcal{T}_n(\lambda)$ le sous-ensemble des tableaux de forme λ et \mathcal{S}_n le sous-ensemble des tableaux standard. Un tableau est dit ligne si sa forme n'a qu'une composante non nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on écrit $x \succeq y$ si x et y vérifient les conditions d'entrelacement

$$(1) \quad x_1 \geq y_1 \geq \dots \geq y_{n-1} \geq x_n \geq y_n.$$

L'ensemble des tableaux \mathcal{T}_n est en bijection avec l'ensemble des suites de partitions $\lambda^{(i)} \in \mathbb{N}^n$, $i = 1, \dots, n$, vérifiant les conditions d'entrelacement $\lambda^{(n)} \succeq \dots \succeq \lambda^{(1)} \succeq 0_n$, où 0_n est le vecteur nul de \mathbb{R}^n . En effet, on associe de façon bijective à un tableau P une telle suite de formes construite de la façon suivante. Pour $i = 1, \dots, n$, les éléments de P dans $\{1, \dots, i\}$ forment un tableau. On prend pour $\lambda^{(i)}$ la forme de celui-ci. Par exemple, la suite de formes associée au tableau donné plus haut est $\lambda^{(5)} = (3, 2, 2, 0, 0)$, $\lambda^{(4)} = (3, 2, 2, 0, 0)$, $\lambda^{(3)} = (3, 2, 0, 0, 0)$, $\lambda^{(2)} = (2, 1, 0, 0, 0)$, $\lambda^{(1)} = (2, 0, 0, 0, 0)$.

Correspondance de Robinson-Schensted. L'algorithme d'insertion de Robinson-Schensted selon les lignes permet de construire, à partir d'un tableau P et d'un entier x , un nouveau tableau noté $P \leftarrow x$. La procédure de construction est la suivante. Si x est plus grand au sens large que toutes les entrées de la première ligne, on ajoute une nouvelle cellule au bout de la première ligne, on y place x et la procédure s'arrête. Sinon, parmi les entrées plus grandes, on choisit la plus à gauche. On place x dans la cellule correspondante. On réitère la procédure sur la deuxième ligne avec l'élément remplacé par x . On continue jusqu'à ce que l'élément remplacé puisse être placé à la fin de la ligne au-dessous de celle où il était initialement, ou jusqu'à ce qu'on remplace un élément dans la dernière ligne. Dans ce cas, on ajoute une ligne au tableau et on y place cet élément. L'algorithme d'insertion selon

les lignes établit une bijection entre $\{1, \dots, n\}^k$ (l'ensemble des "mots" de longueur k , dont les "lettres" sont dans $\{1, \dots, n\}$) et l'ensemble

$$\{(P, Q) \in \mathcal{T}_n \times \mathcal{S}_k : sh(P) = sh(Q)\}.$$

Cette correspondance est appelée la correspondance de Robinson-Schensted. Elle s'établit de la manière suivante. Pour un "mot" $\omega = x_1 \cdots x_k$ et $i \leq k$, on note $P_i(\omega) = ((\cdots((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \leftarrow \cdots) \leftarrow x_{i-1}) \leftarrow x_i$. Si on se donne $P_k(\omega)$, ainsi que la localisation des cellules ajoutées à chaque étape de construction de P_k , on peut retrouver le "mot" dont est issu P_k . Pour cela, il suffit en fait de se donner, en plus de P_k , le tableau standard Q_k associé à la suite des formes $sh(P_k) \succeq \cdots \succeq sh(P_1)$. Le tableau Q_k est appelé tableau d'insertion. On note $(P(\omega), Q(\omega))$ le couple de tableaux ainsi associés à ω .

Généralisation de Knuth. La correspondance de Robinson-Schensted-Knuth est une généralisation de celle de Robinson-Schensted. Elle établit une bijection entre l'ensemble des matrices $k \times n$ à entrées entières, et l'ensemble

$$\{(P, Q) \in \mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_k : sh(P) = sh(Q)\}.$$

On associe à une matrice $A = (A_{ij}) \in \mathbb{N}^{k \times n}$ le couple $(P, Q) \in \mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_k$ obtenu de la façon suivante. Considérons les mots ω_i composés de A_{i1} 1, A_{i2} 2 etc. On choisit $P = P(\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_k)$. On considère les tableaux $P^{(i)} = P(\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_i)$ associés aux mots $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_i$. Ils vérifient $sh P^{(k)} \succeq \cdots \succeq sh P^{(1)}$. On choisit pour Q le tableau associé à cette suite de partitions.

Fonctions de Schur. Pour un tableau P à entrées dans $\{1, \dots, n\}$, on note α_i le nombre de i dans le tableau. On dit que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est le poids de P . On note $\alpha = wt(P)$. Pour un tableau P de poids α et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $x^P = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. A chaque partition λ d'au plus n lignes, on associe une fonction appelée fonction de Schur, notée s_λ . Cette fonction est définie par

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \sum_{P: sh(P)=\lambda} x^P,$$

où la somme porte sur les tableaux dont les entrées sont dans $\{1, \dots, n\}$. Notons qu'il découle directement de la définition que $s_\lambda(1, \dots, 1)$ est le nombre de tableaux de forme λ . Pour $\mu \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $\lambda \in \mathbb{N}^n$, on écrit $\lambda \succeq \mu$ si λ et $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, 0)$ vérifient les conditions d'entrelacement (1). La bijection précédemment décrite entre \mathcal{T}_n et l'ensemble des suites de partitions $\lambda^{(n)} \succeq \cdots \succeq \lambda^{(1)} \succeq 0_n$ montre la proposition suivante.

PROPOSITION 1.1. Soit $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \in \mathbb{R}^n$.

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

où la somme porte sur l'ensemble des partitions $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ telles que $\lambda \succeq \mu$.

Pour un tableau P on note $\omega(P)$ le mot obtenu à partir des éléments de P pris de bas en haut et de gauche à droite. Ainsi le mot associé au tableau ci-dessus est 4214313. On vérifie que $P(\omega(P)) = P$. La correspondance de

Robinson-Schensted permet de construire à partir de deux tableaux P_1 et P_2 un nouveau tableau noté $P_1 \leftarrow P_2$ en appliquant l'algorithme d'insertion au mot $\omega(P_1)\omega(P_2)$. Le fait que le poids de $P_1 \leftarrow P_2$ soit égal à la somme des poids de P_1 et P_2 implique que

$$s_{\lambda_1}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda_2}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_1, P_2: Sh(P_i)=\lambda_i} x^{P_1 \leftarrow P_2}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note s_m la fonction de Schur associée à la partition dans \mathbb{N}^n dont l'unique composante non nulle est égale à m . La correspondance de Robinson-Schensted-Knuth montre la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2 (formule de Pieri).

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mu} s_{\mu}(x_1, \dots, x_n),$$

où la somme porte sur l'ensemble des partitions $\mu \in \mathbb{N}^n$ telles que $\mu \succeq \lambda$ et $|\mu| = |\lambda| + m$.

2. Matrices aléatoires hermitiennes complexes

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes de taille $n \times n$. Notons I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dans cette section nous noterons $\mathcal{H}_n := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : M = M^*\}$ l'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $U(n) := \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : UU^* = I\}$ l'ensemble des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On munit \mathcal{H}_n du produit scalaire $\langle A, B \rangle = Tr(AB^*)$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on note $\Omega_n(x)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la diagonale est x . Notons $\mathcal{C}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \dots \geq x_n\}$ et $\mathcal{C}_{n, \mathbb{N}}$ l'ensemble des éléments de \mathcal{C}_n à coordonnées entières. Remarquons que \mathcal{C}_n est un domaine fondamental pour l'action par conjugaison de $U(n)$ sur \mathcal{H}_n . En effet, pour $M \in \mathcal{H}_n$, on a

$$\{uMu^* : u \in U(n)\} \cap \{\Omega_n(\zeta) : \zeta \in \mathcal{C}_n\} = \{\Omega_n(\lambda)\},$$

où les coordonnées de $\lambda \in \mathcal{C}_n$ sont données par les valeurs propres ordonnées de M . Les valeurs propres d'une matrice de \mathcal{H}_n seront toujours supposées ordonnées. La sous-matrice $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ est appelée mineur principal d'ordre k de M .

Matrices aléatoires invariantes. Nous considérons dans cette section des matrices aléatoires à valeurs dans \mathcal{H}_n , de loi invariante pour l'action par conjugaison du groupe unitaire $U(n)$. De telles matrices sont dites invariantes. Les plus simples d'entre elles sont de la forme $U\Omega_n(\lambda)U^*$, où U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U(n)$ et $\lambda \in \mathcal{C}_n$ est fixé. Par ailleurs, une matrice aléatoire à valeurs dans \mathcal{H}_n est invariante si et seulement si elle peut s'écrire $U\Omega_n(\Lambda)U^*$, où U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U(n)$ et Λ un vecteur aléatoire de \mathcal{C}_n indépendant de U (voir le lemme 3.1).

Le premier problème que nous considérons dans cette section est celui du calcul de la loi jointe valeurs propres des mineurs principaux d'une matrice du GUE (Gaussian Unitary Ensemble). C'est une matrice aléatoire à valeurs dans \mathcal{H}_n dont la loi a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathcal{H}_n proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr}(HH^*)\right).$$

Une matrice du GUE est donc invariante. Il suffit alors, pour déterminer la loi jointe de ses mineurs principaux, de disposer d'une part de la loi de ses valeurs propres et d'autre part de la loi des mineurs principaux des matrices de la forme $U\Omega_n(\lambda)U^*$ où U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U(n)$. La loi des valeurs propres d'une matrice du GUE est bien connue. elle a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n proportionnelle à

$$\Delta_n(x)^2 e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2} 1_{x \in \mathcal{C}_n},$$

où $\Delta_n(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$. Il reste à déterminer la loi des valeurs propres des mineurs principaux de $U\Omega_n(\lambda)U^*$.

Mineurs et polytopes de Gelfand-Tsetlin. Nous montrons dans ce paragraphe que si U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U(n)$ et λ un élément de \mathcal{C}_n , alors les valeurs propres des mineurs principaux de la matrice aléatoire $U\Omega_n(\lambda)U^*$ sont distribuées selon la mesure uniforme sur $GT_n(\lambda)$, qui est le polytope de Gelfand-Tsetlin associé à λ . Par définition $GT_n(\lambda)$ est

$$\{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(n)} = \lambda, x^{(i)} \in \mathbb{R}^i, x^{(i)} \succeq x^{(i-1)}, i = 1, \dots, n\},$$

où on écrit $x^{(i)} \succeq x^{(i-1)}$ si $x^{(i)}$ et $x^{(i-1)}$ vérifient les conditions d'entrelacement (1) avec la convention $x_i^{(i-1)} = -\infty$. Ce résultat est dû à Baryshnikov (proposition 4.7 dans [2]). Usuellement, un élément x d'un polytope de Gelfand-Tsetlin est représenté par la matrice triangulaire :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & x_1^{(1)} \\ & & & & & & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ & & & & & & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \\ & & & & & & \dots & & \\ & & & & & & \dots & & \\ & & & & & & \dots & & \\ x_1^{(n)} & x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & \dots & \dots & x_{n-2}^{(n-1)} & x_{n-1}^{(n-1)} \\ & x_2^{(n)} & \dots & & & \dots & x_{n-1}^{(n)} & x_n^{(n)} \end{array}$$

Pour $M \in \mathcal{H}_n$ on note

$$X(M) = (X^{(1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)),$$

où $X^{(k)}(M) \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur des valeurs propres du mineur principal d'ordre k de M . Le théorème de Rayleigh affirme que si λ est le vecteur des

valeurs propres de $M \in \mathcal{H}_n$ et μ celui des valeurs propres du mineur principal d'ordre $n-1$ de M , alors λ et μ vérifient les conditions d'entrelacement $\lambda \succeq \mu$. Ainsi $X(M) \in GT_n(\lambda)$. On a la proposition suivante.

PROPOSITION 1.3. Soit U distribuée selon la mesure de Haar normalisée sur $U(n)$ et λ un élément de \mathcal{C}_n . Alors $X(U\Omega_n(\lambda)U^*)$ est distribuée selon la mesure uniforme sur $GT_n(\lambda)$.

Pour montrer ce résultat, nous utilisons les fonctions de Schur. Ces dernières s'expriment à l'aide de fonctions Φ_λ définies par :

$$\Phi_\lambda(\zeta) = \frac{\det(e^{i\lambda_k \zeta_i})}{\Delta_n(i\zeta)d_n(\lambda)}, \quad \zeta, \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

où $d_n(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{j - i}$. On a alors les identités suivantes [32].

PROPOSITION 1.4. Soit $\lambda \in \mathcal{C}_{n, \mathbb{N}}$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$. On a les identités suivantes.

$$\frac{s_\lambda(e^{i\zeta_1}, \dots, e^{i\zeta_n})}{s_\lambda(1, \dots, 1)} = \Phi_{\lambda + \rho_n}(\zeta) \frac{\Delta_n(\zeta)}{\Delta_n(e^{i\zeta})},$$

$$s_\lambda(1, \dots, 1) = d_n(\lambda + \rho_n),$$

où $\rho_n = (n-1, n-2, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ et $e^{i\zeta} = (e^{i\zeta_1}, \dots, e^{i\zeta_n})$.

On appelle mesure orbitale (normalisée) la loi de $U\Omega_n(\lambda)U^*$, où U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar normalisée sur $U(n)$, et λ un élément de \mathcal{C}_n . Les fonctions Φ sont les transformées de Fourier des mesures orbitales. Cette propriété est donnée par la formule de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber :

PROPOSITION 1.5. Soit $\lambda, \zeta \in \mathbb{R}^n$. On a alors

$$\int_{U(n)} e^{i\langle \Omega_n(\zeta), u\Omega_n(\lambda)u^* \rangle} m_n(du) = \Phi_\lambda(\zeta),$$

où m_n la mesure de Haar normalisée sur $U(n)$.

Les formules des propositions 1.4 et 1.5 sont les ingrédients essentiels de la preuve de la proposition 1.3. On sera amené à considérer des fonctions Φ définies pour $n-1$ au lieu de n . Afin d'éviter toute ambiguïté, nous y adjoindrons le cas échéant un exposant $n-1$ ou n . Nous ferons de même pour les fonctions de Schur.

Pour montrer la proposition 1.3, il suffit de déterminer la loi des valeurs propres du mineur principal d'ordre $n-1$ de la matrice $U\Omega_n(\lambda)U^*$. Le théorème s'obtient ensuite par itération (voir la démonstration du théorème 4.2). Cette loi est donnée dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1.6. Soit U une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar normalisée sur $U(n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$. Alors les

valeurs propres du mineur principal d'ordre $n - 1$ de la matrice $U\Omega_n(\lambda)U^*$ ont pour densité

$$\frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\lambda \succeq \beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

La preuve de cette proposition repose sur la formule de Harish-Chandra et sur le lemme suivant, qui est en quelque sorte une version asymptotique de la proposition 1.1.

LEMME 1.7. Soit $\zeta \in \mathbb{R}^n$ tel que $\zeta_n = 0$. Alors

$$(2) \quad \Phi_\lambda^{(n)}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_\beta^{(n-1)}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\lambda \succeq \beta} d\beta.$$

DÉMONSTRATION. Pour $\mathbf{a} = (a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$, on a $\Phi_{\lambda+\mathbf{a}}(\zeta) = e^{ia|\zeta|} \Phi_\lambda(\zeta)$, et $d_n(\lambda + \mathbf{a}) = d_n(\lambda)$. Il suffit donc de montrer le résultat pour $\lambda \in \mathcal{C}_n$ et $\lambda_n \geq 0$. Considérons une suite de réels $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ strictement positifs convergeant vers 0 et une suite de partitions $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ dans \mathbb{N}^n telle que $(\varepsilon_k \lambda_k)_{k \geq 0}$ converge vers λ . D'après la proposition 1.1, on a

$$\frac{s_{\lambda_k}^{(n)}(e^{i\varepsilon_k t})}{s_{\lambda_k}^{(n)}(1)} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{n-1}: \lambda_k \succeq \beta} \frac{s_\beta^{(n-1)}(e^{i\varepsilon_k \zeta_1}, \dots, e^{i\varepsilon_k \zeta_{n-1}}) s_\beta^{(n-1)}(1)}{s_\beta^{(n-1)}(1) s_{\lambda_k}^{(n)}(1)}.$$

En utilisant les formules de la proposition 1.4, on obtient

$$\Phi_{\varepsilon_k \lambda_k + \varepsilon_k \rho}^{(n)}(\zeta) = c_k(\zeta) \sum \Phi_{\beta + \varepsilon_k \rho_{n-1}}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \frac{d_{n-1}(\beta + \varepsilon_k \rho_{n-1})}{d_n(\varepsilon_k \lambda_k + \varepsilon_k \rho_n)} \varepsilon_k^{n-1}$$

où $c_k(\zeta)$ tend vers 1 quand k tend vers $+\infty$ et où la somme porte sur les β dans $\varepsilon_k \mathbb{N}^{n-1}$ tels que $\varepsilon_k \lambda_k \succeq \beta$. Les fonctions $\lambda \mapsto \Phi_\lambda(\zeta)$ étant uniformément continues sur les compacts (c'est une conséquence de la proposition 1.5), on obtient l'identité souhaitée en faisant tendre k vers $+\infty$. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.6. On note $\pi_{n-1}(M)$ le mineur principal d'ordre $n - 1$ d'une matrice $M \in \mathcal{H}_n$. Pour $\zeta \in \mathbb{R}^n$ tel que $\zeta_n = 0$ on a

$$\langle \Omega_n(\zeta), M \rangle = \langle \Omega_{n-1}(\zeta), \pi_{n-1}(M) \rangle,$$

où $\Omega_{n-1}(\zeta) = \Omega_{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$. En appliquant la formule de Harish-Chandra de part et d'autre de l'identité (2), on obtient donc

$$\mathbb{E}(e^{i\langle \Omega_{n-1}(\zeta), \pi_{n-1}(U\Omega_n(\lambda)U^*) \rangle}) = \int_{U(n-1) \times \mathcal{C}_{n-1}} e^{i\langle \Omega_{n-1}(\zeta), u\Omega_{n-1}(\beta)u^* \rangle} m_{n-1}(du) \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\lambda \succeq \beta} d\beta.$$

La matrice $\pi_{n-1}(U\Omega_n(\lambda)U^*)$ étant de loi invariante pour l'action par conjugaison de $U(n - 1)$, on en déduit que pour tout $N \in \mathcal{H}_{n-1}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(e^{i\langle N, \pi_{n-1}(U\Omega_n(\lambda)U^*) \rangle}) \\ &= \int_{U(n-1) \times \mathcal{C}_{n-1}} e^{i\langle N, u\Omega_{n-1}(\beta)u^* \rangle} \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\lambda \succeq \beta} m_{n-1}(du) d\beta, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. \square

Le théorème est donc montré pour des λ ayant des coordonnées deux à deux distinctes. La fonction $X : \mathcal{H}_n \rightarrow GT_n = \cup_{\lambda \in \mathcal{C}_n} GT_n(\lambda)$ étant continue, le cas général s'en déduit.

Formule de Pieri et perturbation de rang 1. Dans ce paragraphe nous montrons comment l'approche adoptée dans le paragraphe précédent permet de traiter un autre problème classique de la théorie des matrices aléatoires : le calcul de la loi des valeurs propres de la somme de deux matrices aléatoires hermitiennes de loi invariante de valeurs propres fixées. Nous nous concentrons ici sur le cas où une des deux matrices est de rang 1. Nous avons vu qu'une version asymptotique de la proposition 1.1 permettait de déterminer la loi des valeurs propres des mineurs. Nous montrons de façon analogue que la loi des valeurs propres d'une somme de matrices aléatoires invariantes, l'une étant de rang 1, s'obtient en considérant une version asymptotique de la proposition 1.2.

LEMME 1.8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$ et $\gamma = (\theta, 0, \dots, 0)$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $\zeta \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\Phi_\lambda(\zeta)\Phi_\gamma(\zeta) = \int_{\mathcal{C}_n} \Phi_\beta(\zeta) \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda) \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!}} 1_{\beta \succeq \lambda} l_{\lambda, \theta}(d\beta),$$

où $l_{\lambda, \theta}$ est la mesure de Lebesgue sur $\{\beta \in \mathbb{R}^{n-1} : |\beta| = |\lambda| + \theta\}$.

DÉMONSTRATION. La preuve est très proche de celle du lemme 1.7. Comme précédemment, il suffit de montrer le résultat pour $\lambda_n \geq 0$. Considérons une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ de réels strictement positifs convergeant vers 0 et deux suites de partitions $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ et $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ dans \mathbb{N}^n telles que $(\varepsilon_k \lambda_k)_{k \geq 0}$ et $(\varepsilon_k \gamma_k)_{k \geq 0}$ convergent respectivement vers λ et γ . On suppose que $\gamma_k = (\theta_k, 0, \dots, 0)$. La proposition 1.2 montre que pour $\zeta \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{s_{\lambda_k}^{(n)}(e^{i\varepsilon_k \zeta})}{s_{\lambda_k}^{(n)}(1)} \frac{s_{\gamma_k}^{(n)}(e^{i\varepsilon_k \zeta})}{s_{\gamma_k}^{(n)}(1)} = \sum_{\beta} \frac{s_{\beta}^{(n)}(e^{i\varepsilon_k \zeta_1}, \dots, e^{i\varepsilon_k \zeta_n})}{s_{\beta}^{(n)}(1)} \frac{s_{\beta}^{(n)}(1)}{s_{\lambda_k}^{(n)}(1) s_{\gamma_k}^{(n)}(1)},$$

où la somme porte sur les $\beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $\beta \succeq \lambda_k$ et $|\beta| = |\lambda_k| + \theta_k$. En utilisant les identités de la proposition 1.4, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon_k \lambda_k + \varepsilon_k \rho_n}^{(n)}(\zeta) \Phi_{\varepsilon_k \gamma_k + \varepsilon_k \rho_n}^{(n)}(\zeta) & \frac{\Delta_n(\varepsilon_k \zeta)}{\Delta_n(e^{i\varepsilon_k \zeta})} \\ & = \sum_{\beta} \Phi_{\beta + \varepsilon_k \rho_n}^{(n)}(\zeta) \frac{d_n(\beta + \varepsilon_k \rho_n) \varepsilon_k^{n-1}}{d_n(\varepsilon_k \lambda_k + \varepsilon_k \rho_n) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_k (\theta_k + i)}{(n-1)!}}, \end{aligned}$$

où la somme porte sur les $\beta \in \varepsilon_k \mathbb{N}^n$ tels que $\beta \succeq \varepsilon_k \lambda_k$ et $|\beta| = |\varepsilon_k \lambda_k| + \varepsilon_k \theta_k$. On conclut en faisant tendre k vers $+\infty$. \square

On déduit de cette identité et de la formule de Harish-Chandra le lemme suivant.

PROPOSITION 1.9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$ et $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. La distribution des valeurs propres de $\Omega_n(\lambda) + U\Omega_n(\theta, 0, \dots, 0)U^*$ est

$$(3) \quad \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda) \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!}} 1_{\beta \succeq \lambda} l_{\lambda, \theta}(d\beta).$$

DÉMONSTRATION. Soit V une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U(n)$ et indépendante de U . La loi des valeurs propres de $\Omega_n(\lambda) + U\Omega_n(\theta, 0, \dots, 0)U^*$ est la même que celle de $V\Omega_n(\lambda)V^* + U\Omega_n(\gamma)U^*$, dont la transformée de Fourier en $\Omega_n(\zeta)$ est $\Phi_\lambda(\zeta)\Phi_\gamma(\zeta)$. Le lemme 1.8 permet de conclure de la même façon que dans la proposition 1.6. \square

Remarquons que ce lemme permet de calculer la densité de la matrice $\Omega_n(\lambda) + XX^*$, où X est un vecteur gaussien standard de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En effet, les valeurs propres non nulles de XX^* étant les mêmes que celles de X^*X , la matrice XX^* a une unique valeur propre non nulle, distribuée selon une loi Gamma de paramètre $(n, 1/2)$. La matrice XX^* étant invariante, elle peut s'écrire $U\Omega_n(\Theta, 0, \dots, 0)U^*$, où U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U(n)$, indépendante de la variable aléatoire Θ distribuée selon une loi Gamma de paramètre $(n, 1/2)$. La proposition suivante se déduit donc de la proposition 1.9.

PROPOSITION 1.10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$. La densité des valeurs propres de $\Omega_n(\lambda) + XX^*$ est

$$(4) \quad \frac{1}{2^n} \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\beta \succeq \lambda} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\beta_i - \lambda_i)}, \quad \beta \in \mathcal{C}_n.$$

Une matrice du LUE (Laguerre Unitary Ensemble) est une matrice aléatoire à valeurs dans \mathcal{H}_n pouvant s'écrire XX^* , où X est une matrice de taille $n \times k$, $k \geq n$, dont les entrées sont des gaussiennes standard indépendantes. Une telle matrice a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'ensemble des matrices définies positives de \mathcal{H}_n proportionnelle à

$$\det(H)^{k-n} e^{-\text{Tr}(H)}.$$

La loi de ses valeurs propres est connue depuis longtemps [35]. Nous serons amenés dans la suite à considérer des généralisations du LUE. Indiquons donc comment la proposition précédente offre un moyen d'étudier ces matrices. Puisque $XX^* = \sum_{i=1}^k X_i X_i^*$, les X_i étant des vecteurs gaussiens indépendants, de même loi, elle permet de calculer par récurrence la loi de ses valeurs propres. On trouve, dans [29] par exemple, de tels calculs par induction de la loi des valeurs propres de matrices du LUE.

3. Vers une généralisation

Nous avons dit que les résultats présentés dans ce chapitre proviennent d'un théorème d'Heckman, démontré dans le cadre des représentations finies des groupes de Lie. Indiquons donc la place qu'occupent dans cette théorie les outils que nous avons utilisés pour prouver ces résultats. Nous pourrions ainsi

reformuler les étapes de nos démonstrations dans un cadre plus abstrait. Nous profitons en outre de cette section pour introduire, dans un cas particulier, les notions utilisées au chapitre suivant. Nous renvoyons au livre de Fulton [32] pour les détails concernant les représentations du groupe $GL_n(\mathbb{C})$ et leurs liens avec les tableaux de Young.

Rappelons quelques définitions et propriétés des représentations de dimensions finies de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie de $GL_n(\mathbb{C})$, qui est aussi l'algèbre de Lie complexifiée de l'algèbre de Lie de $U(n)$. Elle est munie du crochet $[M, N] = MN - NM$. Une **représentation de dimension finie** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une application linéaire $\pi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(V)$, telle que

$$\pi([M, N]) = [\pi(M), \pi(N)], \quad M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

V étant un espace vectoriel complexe de dimension finie. On appelle l'espace vectoriel V un $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ -module. Toutes les représentations que nous considérons sont de dimension finie. Un sous-espace V' de V est dit **stable** si $\pi(M)(V') \subset V'$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que la représentation est **irréductible** si les seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et V . On dit que deux représentations $\pi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(V_1)$ et $\pi_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(V_2)$ sont **isomorphes** si il existe une application linéaire bijective $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ telle que $\varphi(\pi_1(M)v) = \pi_2(\varphi(v))$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. C'est une propriété générale que tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ -module V s'écrit

$$V = \oplus_i V_i,$$

où les V_i sont irréductibles, et que cette décomposition est unique à un isomorphisme près. On l'appelle la **décomposition** de V en **composantes irréductibles**. Notons \mathcal{D}_n l'ensemble des matrices diagonales à coefficients réels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et \mathcal{D}_n^* l'ensemble des formes linéaires sur \mathcal{D}_n . Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on écrit x au lieu de la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les coordonnées de x . Un vecteur non nul v de V est appelé vecteur de **poinds** $\alpha \in \mathcal{D}_n^*$ si pour tout $x \in \mathcal{D}_n$,

$$\pi(x)v = \alpha(x)v.$$

C'est un fait général que

$$V = \oplus V^{(\alpha)}, \quad \text{où } V^{(\alpha)} = \{v \in V : v \text{ est de poinds } \alpha\}.$$

La **multiplicité** du poinds α dans V est la dimension de $V^{(\alpha)}$. Le **caractère** χ_π de la représentation π de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est défini par

$$\chi_\pi(x) = \text{tr}(e^{i\pi(x)}), \quad x \in \mathcal{D}_n.$$

On sait que deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère. On note $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures (au sens strict). Un vecteur non nul v de V est appelé **vecteur de plus haut poinds** λ s'il est de poinds λ et si $\pi(\mathcal{T}_n)v = 0$. C'est un fait général que la représentation V est irréductible si et seulement si elle admet un unique vecteur v , à une multiplication par un scalaire près, de plus haut poinds. On dit que V et π sont un **module** et **représentation de**

plus haut poids λ si v est de poids λ . Deux représentations de même plus haut poids sont isomorphes. On note $\epsilon_i : x \in \mathcal{D}_n \mapsto x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, et $P_n^+ = \{\lambda \in \mathcal{D}_n^* : \lambda = \sum_i \lambda_i \epsilon_i, \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N}\}$. C'est l'ensemble des poids dominants de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que pour tout $\lambda \in P_n^+$ il existe une représentation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ irréductible de plus haut poids λ , unique à un isomorphisme près. De plus, pour toute représentation irréductible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe $\lambda \in P_n^+$, tel que cette représentation soit de plus haut poids λ . Plus succinctement, on dit que les représentations irréductibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont indexées par les éléments de P_n^+ . On note V_λ le $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ -module irréductible de plus haut poids λ et χ_λ le caractère de la représentation de plus haut poids λ . On identifie dans la suite un élément $\lambda \in \mathcal{D}_n^*$ avec l'élément $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Indiquons brièvement le lien entre les tableaux et les représentations de dimension finie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dans Fulton, les représentations considérées sont celles du groupe $GL_n(\mathbb{C})$. Cependant, toutes les représentations irréductibles de $GL_n(\mathbb{C})$ sont des représentations irréductibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Toutes les propriétés des premières sont donc vérifiées par les secondes. Si $\lambda \in \mathbb{N}^n$ est une partition, les tableaux de Young de forme λ décrivent les représentations irréductibles V_λ : la multiplicité du poids α dans le module V_λ est le nombre de tableaux de $\mathcal{T}_n(\lambda)$ de poids α . La dimension de ce module est donc le cardinal de $\mathcal{T}_n(\lambda)$ et la fonction de Schur s_λ , le caractère de la représentation V_λ . Plus précisément on a $s_\lambda(e^{ix}) = \chi_\lambda(x)$, où x est considéré comme un élément de \mathbb{R}^n dans s_λ et comme un élément de \mathcal{D}_n dans χ_λ .

Nous pouvons désormais exprimer dans le cadre des représentations de l'algèbre de Lie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les différentes étapes du raisonnement que nous avons suivi. Les formules données dans la proposition 1.4 y sont les formules du caractère et de la dimension de Weyl.

Pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$, celle donnée à la proposition 1.1 fournit la décomposition en composantes irréductibles du $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ -module V_λ considéré comme un $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ -module. Les polytopes de Gelfand-Tsetlin ont été introduits pour décrire ce type de décomposition et obtenir des bases de vecteurs poids des représentations irréductibles. En effet, la formule de la proposition 1.1 indique que

$$V_\lambda \downarrow_{n-1}^n = \bigoplus V_\beta^{n-1},$$

où $V_\lambda \downarrow_{n-1}^n$ est le $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ -module de plus haut poids λ considéré comme un $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ -module, V_β^{n-1} est le $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ -module de plus haut poids β et la somme porte sur les $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$ tels que $\lambda \succeq \beta$. Puisque les $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ -modules irréductibles sont de dimension 1, on obtient en itérant cette décomposition pour $\mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$, \dots , $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, une base de vecteurs poids de V_λ indexées par les éléments à coordonnées entières de $GT_n(\lambda)$.

Enfin, la formule de Pieri rappelée à la proposition 1.2 décrit la décomposition en composantes irréductibles du produit tensoriel de représentations $V_\lambda \otimes V_\gamma$, où $\lambda \in \mathbb{N}^n$ et $\gamma = (m, 0, \dots, 0)$.

Dans la littérature, les formules des propositions 1.1 et 1.2 sont appelées "formules de branchement". Nous les avons utilisées pour répondre, lorsque U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U(n)$, aux deux questions suivantes :

- (1) Quelle est la loi des valeurs propres du mineur principal d'ordre $n - 1$ de la matrice $U\Omega_n(\lambda)U^*$?
- (2) Quelle est la loi des valeurs propres de $\Omega_n(\lambda) + U\Omega_n(\gamma)U^*$?

Pour répondre à la première question, nous avons :

- (1) considéré la décomposition en composantes irréductibles des représentations irréductibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ restreintes à $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$,
- (2) obtenu, en utilisant la formule des caractères de Weyl, des "versions asymptotiques" de ces décompositions,
- (3) déduit de la formule de Harish-Chandra la loi des valeurs propres cherchées.

Pour répondre à la deuxième question, nous avons :

- (1) considéré la décomposition en composantes irréductibles des produits tensoriels de représentations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
- (2) obtenu, en utilisant la formule des caractères de Weyl, des "versions asymptotiques" de ces décompositions,
- (3) déduit de la formule de Harish-Chandra la loi des valeurs propres cherchées.

Nous allons montrer dans le chapitre suivant que cette méthode s'applique dans un cadre bien plus général.

CHAPITRE 2

Approximation de mesures orbitales

Dans ce chapitre, nous établirons un lien direct entre les représentations des groupes de Lie connexes compacts et la théorie des matrices aléatoires en démontrant une version d'un théorème d'Heckman. Nous indiquerons brièvement le principe du théorème en **section 1**, puis nous fixerons son cadre théorique en **section 2**. Enfin, nous démontrerons ce théorème en **section 3**.

1. Introduction

Soit K un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{k} . On note $Ad(K)$, l'action coadjointe de K sur \mathfrak{k}^* . Par définition, l'orbite coadjointe de $\lambda \in \mathfrak{k}^*$ est l'ensemble

$$\mathcal{O}(\lambda) = \{Ad(k)\lambda, k \in K\}.$$

La mesure (normalisée) de l'orbite est la mesure image sur $\mathcal{O}(\lambda)$ de la mesure de Haar m_K sur K , c'est-à-dire la distribution de $Ad(U)\lambda$, où U est une variable aléatoire de loi m_K . Rappelons deux points fondamentaux de la méthode des orbites de Kirillov ([47], [48], p.xix). Dans son célèbre "User's guide" les troisième et cinquième règles sont les suivantes (on note V_λ le module irréductible associé à λ) :

Règle 3 : Si vous souhaitez décrire le spectre de $Res_H^K V_\lambda$, alors vous devez considérer la projection $p(\mathcal{O}(\lambda))$ et la décomposer en $Ad(H)$ -orbites.

Règle 5 : Si vous souhaitez décrire le spectre du produit tensoriel $V_\lambda \otimes V_\mu$, alors vous devez considérer la somme (arithmétique) $\mathcal{O}(\lambda) + \mathcal{O}(\mu)$ et la décomposer en $Ad(K)$ -orbites.

Si l'on échange dans ces règles "vous souhaitez" et "vous devez", on obtient un moyen de décrire la projection de mesures orbitales sur le dual de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe H de K ou la convolution de mesures orbitales sur $\mathcal{O}(\lambda)$ et $\mathcal{O}(\mu)$. Cette méthode doit bien sûr être précisée pour être effective. C'est dans cette perspective que nous démontrons une version d'un théorème d'Heckman. Ces mesures y apparaissent comme limite de mesures discrètes sur les poids des représentations irréductibles de dimension finie de \mathfrak{k} , construites à partir de règles dites "règles de branchement". Nous pourrions ensuite utiliser ces règles pour décrire les ensembles invariants qui nous intéressent.

2. Groupes de Lie compacts connexes

Nous renvoyons à l'ouvrage de Knapp pour plus de détails [50]. Soit K un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{k} et d'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. On choisit un tore maximal T de K et nous notons \mathfrak{t} son algèbre de Lie. La compacité de K nous permet de supposer sans perte de généralité que K est un sous-groupe du groupe unitaire, que l'action adjointe et coadjointe sont données par $Ad(k)x = kxk^*$, $k \in K, x \in \mathfrak{k}$ ou \mathfrak{k}^* , et que le produit scalaire est $\langle x, y \rangle = Tr(xy^*)$, pour $x, y \in \mathfrak{k}$. On considère le système de racines $R = \{\alpha \in \mathfrak{t}^* : \exists X \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \forall H \in \mathfrak{t}, [H, X] = i\alpha(H)X\}$, les coracines $h_{\alpha} = 2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle$, $\alpha \in R$. On choisit Σ l'ensemble des racines simples de R ainsi que l'ensemble associé R^+ des racines positives et la chambre de Weyl (fermée)

$$\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* : \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \text{ for all } \alpha \in \Sigma\}.$$

L'ensemble des poids et celui des poids dominants sont

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* : \langle h_{\alpha}, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}, \text{ for all } \alpha \in R\},$$

et $P^+ = P \cap \mathcal{C}$. On note W le groupe de Weyl.

Partie radiale. L'intersection de la chambre de Weyl \mathcal{C} avec l'orbite de $x \in \mathfrak{k}^*$ sous l'action de K contient un unique point appelé la partie radiale de x . Nous la notons $r(x)$.

Caractères. Pour $\lambda \in P^+$, on note V_{λ} le \mathfrak{k} -module irréductible de plus haut poids λ et $\dim(\lambda)$ la dimension de V_{λ} . Son caractère χ_{λ} est la fonction définie sur \mathfrak{t} par

$$\chi_{\lambda}(\zeta) = \sum_{\mu \in P} m(\mu, \lambda) e^{i\langle \mu, \zeta \rangle}, \quad \zeta \in \mathfrak{t},$$

où $m(\mu, \lambda)$ est la multiplicité du poids μ dans le \mathfrak{k} -module V_{λ} . On note $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$ la demi-somme des racines positives. La dimension du module V_{λ} est donnée par $\chi_{\lambda}(0)$. Rappelons la formule de la dimension due à Weyl (voir Knapp [50], Thm V.5.84) :

$$(5) \quad \chi_{\lambda}(0) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle}.$$

On rappelle la formule des caractères de Weyl pour l'algèbre de Lie du groupe compact connexe K (voir Knapp [50], Thm. V.5.77) :

PROPOSITION 2.1 (Formule des caractères de Weyl). Le caractère χ_{λ} est égal à

$$\chi_{\lambda}(\zeta) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{i\langle w(\lambda + \rho), \zeta \rangle}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{i\langle w(\rho), \zeta \rangle}}, \quad \zeta \in \mathfrak{t}.$$

Dans cette formule, le dénominateur est aussi égal au produit

$$\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\frac{i}{2}\langle \alpha, \zeta \rangle} - e^{-\frac{i}{2}\langle \alpha, \zeta \rangle}).$$

Mesures orbitales. Par définition, l'orbite coadjointe de $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ est l'ensemble $\mathcal{O}(\lambda) = \{k\lambda k^*, k \in K\}$. La mesure (normalisée) de l'orbite est la mesure image sur $\mathcal{O}(\lambda)$ de la mesure de Haar normalisée m_K sur K . Notons, pour $z \in \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$, $\lambda \in \mathfrak{t}^*$,

$$h(z) = \prod_{\alpha \in R^+} \langle \alpha, z \rangle, \quad d(\lambda) = \prod_{\alpha \in R^+} \langle \alpha, \lambda \rangle / \langle \alpha, \rho \rangle.$$

La quantité $d(\lambda)$ peut être interprétée comme la mesure de Liouville de l'orbite coadjointe $\mathcal{O}(\lambda)$ ou encore comme une dimension asymptotique. Pour $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, on introduit la fonction Φ_λ définie sur \mathfrak{k} par $\Phi_\lambda(\zeta) = \Phi_\lambda(k\zeta k^*)$ pour tout $\zeta \in \mathfrak{k}$, $k \in K$ et telle que pour $\zeta \in \mathfrak{t}$,

$$\Phi_\lambda(\zeta) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{i\langle w\lambda, \zeta \rangle}}{h(i\zeta)d(\lambda)}.$$

La formule de Harish-Chandra, que nous rappelons dans la proposition suivante, donne la transformée de Fourier des mesures orbitales. (voir Helgason [38], Thm II.5.35). Cette formule apparaît dans des contextes différents comme la formule Itzykson-Zuber ou comme une version de la formule de Kirillov pour les groupes de Lie compacts.

PROPOSITION 2.2. On a, pour $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, $\zeta \in \mathfrak{k}$,

$$(6) \quad \int_K e^{i\langle k\lambda k^*, \zeta \rangle} m_K(dk) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

Remarquons que cette identité montre la continuité de la fonction $(\lambda, \zeta) \mapsto \Phi_\lambda(\zeta)$ et l'égalité $\Phi_\lambda(0) = 1$. Par ailleurs, on déduit de la formule de Harish-Chandra que les fonctions $\lambda \mapsto \Phi_\lambda(\zeta)$, $\zeta \in \mathfrak{t}$, déterminent les probabilités sur \mathcal{C} . Plus précisément, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3. Soit ν_1 et ν_2 deux probabilités sur \mathcal{C} . Alors ν_1 et ν_2 sont égales si et seulement si pour tout $\zeta \in \mathfrak{t}$

$$\int_{\mathcal{C}} \Phi_\lambda(\zeta) \nu_1(d\lambda) = \int_{\mathcal{C}} \Phi_\lambda(\zeta) \nu_2(d\lambda).$$

DÉMONSTRATION. L'une des implications est évidemment immédiate. Pour la deuxième, considérons les mesures images des mesures produits $m_K \otimes \nu_1$ et $m_K \otimes \nu_2$ par l'application $(u, \lambda) \in K \times \mathcal{C} \mapsto u\lambda u^* \in \mathfrak{t}^*$. On les note γ_1 et γ_2 . Pour $\zeta \in \mathfrak{k}$, il existe $k_0 \in K$ tel que $k_0\zeta k_0^* \in \mathfrak{t}$. Or, $\Phi_\lambda(\zeta) = \Phi_\lambda(k_0\zeta k_0^*)$. On a donc pour tout $\zeta \in \mathfrak{k}$,

$$\int_{\mathcal{C}} \Phi_\lambda(\zeta) \nu_1(d\lambda) = \int_{\mathcal{C}} \Phi_\lambda(\zeta) \nu_2(d\lambda).$$

La formule de Harish-Chandra montre que

$$\int_{\mathfrak{t}^*} e^{i\langle \zeta, x \rangle} \gamma_1(dx) = \int_{\mathfrak{t}^*} e^{i\langle \zeta, x \rangle} \gamma_2(dx),$$

ce qui implique l'égalité des mesures γ_1 et γ_2 . La proposition est ainsi démontrée, les mesures ν_1 et ν_2 étant les mesures images par r des mesures γ_1 et γ_2 . \square

Cette propriété n'est pas spécifique à notre situation. Elle est propre aux fonctions sphériques.

3. Une version d'un théorème d'Heckman

Considérons H un sous-groupe compact connexe de K d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On peut toujours choisir un tore maximal S de H inclus dans T (voir par exemple [50] §IX.4). Nous notons \mathfrak{s} son algèbre de Lie. Les objets précédemment définis pour K peuvent être définis de la même façon pour H . Afin d'éviter toute ambiguïté, nous leur adjoindrons dans ce cas un exposant ou un indice H . Pour $\lambda \in P^+, \beta \in P_H^+$, nous notons $m_H^\lambda(\beta)$ la multiplicité du \mathfrak{h} -module irréductible de plus haut poids β dans la décomposition en composantes irréductibles du \mathfrak{k} -module V_λ considéré comme un \mathfrak{h} -module. Les règles donnant la valeur de ces multiplicités sont appelées règles de branchement. On a la décomposition suivante :

$$(7) \quad V_\lambda = \bigoplus_{\beta \in P_H^+} m_H^\lambda(\beta) V_\beta^H,$$

où V_λ est considéré comme un \mathfrak{h} -module et V_β^H est un \mathfrak{h} -module irréductible de plus haut poids β . En fait, m_H^λ est l'unique fonction de P_H^+ dans \mathbb{N} vérifiant l'identité suivante : pour tout $\zeta \in \mathfrak{s}$,

$$(8) \quad \chi_\lambda(\zeta) = \sum_{\beta \in P_H^+} m_H^\lambda(\beta) \chi_\beta^H(\zeta).$$

Pour $x \in \mathfrak{k}^*$, on note $\pi_H(x)$ la projection orthogonale de x sur \mathfrak{h}^* . Nous avons rappelé que l'intersection de la chambre de Weyl \mathcal{C} avec l'orbite de $x \in \mathfrak{k}^*$ sous l'action de K contient un unique point. La propriété analogue est évidemment vraie pour H . Nous notons $r_H(x)$ la partie radiale de $x \in \mathfrak{h}^*$ pour l'action coadjointe de H . C'est un élément de la chambre de Weyl \mathcal{C}_H . Le théorème suivant est une variante du théorème 6.4 de Heckman [36]. Nous en proposons une preuve rapide et précisons ainsi la règle 3 de Kirillov rappelée dans l'introduction. On trouve dans la littérature de nombreuses versions de ce théorème. Collins et Sniady [16] en ont récemment proposé une version dans le cadre des probabilités non commutatives. Leur approche consiste à considérer une matrice aléatoire comme une limite de matrices à entrées non commutatives. Choisissons $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0 quand n tend vers l'infini.

THÉORÈME 2.4. Soit λ un élément de la chambre de Weyl \mathcal{C} et $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de P^+ telle que $\varepsilon_n \lambda_n$ converge vers λ quand n tend vers l'infini. Alors

(i) la suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ de probabilités sur \mathcal{C}_H définies par

$$\mu_n = \sum_{\beta \in P_H^+} \frac{\dim_H(\beta)}{\dim(\lambda_n)} m_H^{\lambda_n}(\beta) \delta_{\varepsilon_n \beta}$$

converge vers une probabilité μ sur \mathcal{C}_H vérifiant pour tout $\zeta \in \mathfrak{h}$,

$$(9) \quad \int_{\mathcal{C}_H} \Phi_\beta^H(\zeta) \mu(d\beta) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

(ii) La probabilité μ est la loi de $r_H(\pi_H(U\lambda U^*))$, où U est distribuée selon m_K .

DÉMONSTRATION. Soit $\zeta \in \mathfrak{s}$. On a d'une part,

$$\frac{\chi_{\lambda_n}(\varepsilon_n \zeta)}{\chi_{\lambda_n}(0)} = \Phi_{\varepsilon_n \lambda_n + \varepsilon_n \rho}(\zeta) \prod_{\alpha \in R^+} \frac{i \langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle}{e^{\frac{i}{2} \langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle} - e^{-\frac{i}{2} \langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle}}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{\lambda_n}(\varepsilon_n \zeta)}{\chi_{\lambda_n}(0)} &= \sum_{\beta \in P_H^+} \frac{\chi_\beta^H(\varepsilon_n \zeta)}{\chi_\beta^H(0)} \frac{m_H^{\lambda_n}(\beta) \chi_\beta^H(0)}{\chi_{\lambda_n}(0)} \\ &= \left[\prod_{\alpha \in R_H^+} \frac{i \langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle}{e^{\frac{i}{2} \langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle} - e^{-\frac{i}{2} \langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle}} \right] \int_{\mathcal{C}_H} \Phi_{\beta + \varepsilon_n \rho_H}^H(\zeta) d\mu_n(\beta). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}_H} \Phi_{\beta + \varepsilon_n \rho_H}^H(\zeta) \mu_n(d\beta) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

Le support de μ_n est contenu dans l'ensemble $\{\varepsilon_n \beta : \beta \text{ est un poids de } V_{\lambda_n}\}$. Ce dernier ensemble est inclus dans l'enveloppe convexe de l'orbite de $\varepsilon_n \lambda_n$ sous l'action du groupe de Weyl (voir [50] Thm 5.5). Les supports des mesures μ_n sont donc tous inclus dans un même compact de \mathcal{C}_H . L'uniforme continuité sur les compacts de la fonction $(\beta, \zeta) \mapsto \Phi_\beta^H(\zeta)$ assure que

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}_H} \Phi_\beta^H(\zeta) \mu_n(d\beta) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

Considérons γ_n la mesure image de la mesure produit $m_H \otimes \mu_n$ par la fonction $(u, \beta) \in H \times \mathcal{C}_H \mapsto u\beta u^* \in \mathfrak{h}^*$. La convergence précédente et la formule de Harish-Chandra appliquée à H impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{h}^*} e^{i \langle x, \zeta \rangle} \gamma_n(dx) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

La mesure de Haar sur H étant invariante pour la multiplication, l'identité reste vraie pour tout $\zeta \in \mathfrak{h}$, ce qui prouve que la suite de mesures $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ converge, ainsi en conséquence que la suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$. On note μ la mesure

limite. La convergence (10) montre qu'elle vérifie l'identité suivante pour tout $\zeta \in \mathfrak{h}$,

$$\int_{\mathcal{C}_H} \Phi_\beta^H(\zeta) \mu(d\beta) = \Phi_\lambda(\zeta),$$

ce qui prouve le premier point du théorème. En appliquant la formule de Harish-Chandra à K et à H , on obtient

$$\begin{aligned} \int_H \int_{\mathcal{C}_H} e^{i\langle u\beta u^*, \zeta \rangle} \mu(d\beta) m_H(du) &= \int_K e^{i\langle u\lambda u^*, \zeta \rangle} m_K(du) \\ &= \int_K e^{i\langle \pi_H(u\lambda u^*), \zeta \rangle} m_K(du), \end{aligned}$$

ce qui donne le second point du théorème. \square

Lorsque $K = U(n)$, les caractères associés à $\lambda \in \mathbb{N}^n$ sont les fonctions de Schur. Le premier et le second points du théorème donnent dans ce cas le lemme 1.7 et la proposition 1.6. Dans la situation générale, lorsque $H = T$, la mesure limite μ est égale à $D_\lambda/d(\lambda)$ où D_λ est la mesure de Duistermaat-Heckman associée à λ .

Le produit tensoriel de représentations irréductibles s'obtenant par restriction de représentation, le théorème a le corollaire suivant. On retrouve ainsi un résultat de Dooley et al. [20]. Ce corollaire précise la règle 5 de Kirillov rappelée dans l'introduction. Quand $K = U(n)$, il donne par ailleurs, pour λ et γ bien choisis, la proposition 1.9.

COROLLAIRE 2.5. Soit λ et γ deux éléments de \mathcal{C} . Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ et $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ deux suites d'éléments de P^+ telles que $\varepsilon_n \lambda_n$ et $\varepsilon_n \gamma_n$ convergent respectivement vers λ et γ , quand n tend vers l'infini. On définit la suite de probabilités $(\nu_n)_{n \geq 0}$ sur \mathcal{C} par

$$\nu_n = \sum_{\beta \in P^+} \frac{\dim(\beta)}{\dim(\lambda_n) \dim(\gamma_n)} M_{\lambda_n, \gamma_n}(\beta) \delta_{\varepsilon_n \beta},$$

où $M_{\lambda_n, \gamma_n}(\beta)$ est la multiplicité du plus haut poids β dans la décomposition en composantes irréductibles de $V_{\lambda_n} \otimes V_{\gamma_n}$. Alors la suite $(\nu_n)_{n \geq 0}$ converge vers la loi de la partie radiale de $\lambda + U\gamma U^*$, où U est distribuée selon la mesure m_K .

DÉMONSTRATION. Soit V_{λ_n} et V_{γ_n} deux \mathfrak{k} -modules irréductibles de plus hauts poids respectifs λ_n et γ_n . On considère le groupe compact $K \times K$. Alors $V_{\lambda_n} \otimes V_{\gamma_n}$ est un $(\mathfrak{k} \times \mathfrak{k})$ -module irréductible de plus haut poids (λ_n, γ_n) . En appliquant le théorème 2.4 au groupe compact $K \times K$ et au sous-groupe $H = \{(k, k), k \in K\}$, on obtient que la suite $(\nu_n)_{n \geq 1}$ associée converge, quand n tend vers $+\infty$, vers la loi de $r_H(\pi_H(Ad(W)(\lambda, \gamma)))$, W étant distribuée selon la mesure de Haar normalisée sur $K \times K$, c'est à dire $W = (U, V)$, où U et V sont des variables aléatoires indépendantes distribuées selon m_K . Le fait que $\pi_H(Ad(W)(\lambda, \gamma)) = U\lambda U^* + V\gamma V^*$ et $r_H(U\lambda U^* + V\gamma V^*) = r_H(\lambda + U^*V\gamma V^*U)$ termine la preuve du corollaire. \square

CHAPITRE 3

Ensembles invariants

Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, ou \mathbb{R} , nous noterons $U_n(\mathbb{F})$ la composante neutre de l'ensemble des matrices unitaires de taille $n \times n$ à coordonnées dans \mathbb{F} . On notera $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ l'ensemble des matrices hermitiennes de taille $n \times n$ à entrées dans $i\mathbb{F}$. Les mesures sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ invariantes pour l'action par conjugaison de $U_n(\mathbb{F})$ sont liées, à travers le théorème d'Heckman, à la théorie des représentations. Ce sont ces mesures auxquelles nous nous intéressons. Parmi elles, on peut distinguer deux grandes classes. La première est celle des mesures invariantes sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, pour n fixé. Celles-ci sont décrites par les mesures orbitales qui sont les mesures ergodiques sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. La deuxième est celle des familles de mesures invariantes sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, $n \in \mathbb{N}$, formant un système projectif. Cette deuxième classe revêt une importance particulière en physique, les mesures invariantes sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ pour n fixé étant des approximations. Dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, Pickrell a montré qu'elles sont entièrement décrites par des mesures de type GUE et LUE.

Après avoir décrit les ensembles $U_n(\mathbb{F})$ et $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ et leurs propriétés dans les **sections 1** et **2**, nous introduisons en **section 3** des ensembles invariants que l'on appelle GUE(\mathbb{F}) et LUE(\mathbb{F}). Le premier est classique. C'est l'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ muni de la mesure gaussienne. Le deuxième est construit de façon analogue au LUE habituel (obtenu pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Nous montrons ensuite en **section 4** que les ensembles de type GUE(\mathbb{F}) et LUE(\mathbb{F}) jouent le même rôle dans l'analyse des mesures invariantes sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$ que dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ étudié par Pickrell. Nous nous plaçons pour cela dans le cadre décrit par Olshanski dans [59]. Enfin, dans les **sections 5** et **6**, nous reformulons le théorème d'Heckman pour les mesures invariantes sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$.

Nous utiliserons la notation suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tilde{n} = n$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, et $\tilde{n} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

1. Les groupes compacts classiques

Nous notons \mathbb{H} l'ensemble des quaternions, c'est-à-dire l'ensemble des matrices Z de taille 2×2 s'écrivant

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

où $a, b \in \mathbb{C}$. Le conjugué Z^* de Z est la matrice adjointe de Z . Considérons, pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}$, la composante neutre $U_n(\mathbb{F})$ du groupe des matrices unitaires de taille $n \times n$ à entrées dans \mathbb{F} . Les groupes compacts classiques sont le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$, le groupe symplectique $U_n(\mathbb{H})$ et le groupe spécial orthogonal $U_n(\mathbb{R})$. Ce sont des groupes de Lie compacts connexes - ce sont même les seuls formant une famille infinie. Ils entrent donc dans le cadre du chapitre précédent. Nous définissons, pour ceux-ci, les objets introduits pour des groupes quelconques dans ce dernier chapitre : algèbre de Lie, chambre de Weyl, tore maximal etc. L'algèbre de Lie de $U_n(\mathbb{F})$ est l'ensemble $\mathfrak{u}_n(\mathbb{F})$ des matrices X de taille $n \times n$ à entrées dans \mathbb{F} vérifiant $X + X^* = 0$. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}$, l'ensemble $i\mathfrak{u}_n(\mathbb{F})$ est celui des matrices hermitiennes de taille $n \times n$ à entrées dans $i\mathbb{F}$. On le note $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. On a ainsi la définition suivante :

DÉFINITION 1. $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ est l'ensemble des matrices hermitiennes de taille $n \times n$ à entrées dans $i\mathbb{F}$.

Système de racines et chambre de Weyl. Le groupe $U_n(\mathbb{F})$ possède un système de racines de type A_{n-1} quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, de type C_n quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, de type B_r quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, avec $n = 2r + 1$, et de type D_r quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, et $n = 2r$. Nous introduisons pour chaque corps (non nécessairement commutatifs) \mathbb{F} les matrices suivantes. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans \mathbb{R}^n , on note $\Omega_n(\lambda)$ la matrice diagonale de taille $n \times n$ définie par

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on pose $\omega(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ -i\alpha & 0 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, et pour $\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, on considère la matrice diagonale par blocs $\Omega_n(\lambda)$ de taille $n \times n$ définie, quand n est pair, par

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \omega(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \omega(\lambda_{\tilde{n}}) \end{pmatrix},$$

et quand n est impair, par

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \omega(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \omega(\lambda_{\tilde{n}}) & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{pmatrix} Z(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Z(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

où, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $Z(\alpha)$ est la matrice de taille 2×2 définie par $Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{t}_n = \{i\Omega_n(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}\}$. C'est l'algèbre de Lie d'un tore maximal de $U_n(\mathbb{F})$. On définit les formes linéaires $\epsilon_k : \mathfrak{t}_n \rightarrow \mathbb{R}$, par $\epsilon_k(i\Omega_n(\lambda)) = \lambda_k$, $\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, $k = 1, \dots, \tilde{n}$. Pour chaque groupe $U_n(\mathbb{F})$, on choisit les racines simples suivantes :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\Sigma = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, \dots, n-1\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\Sigma = \{2\epsilon_n, \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, \dots, n-1\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $n = 2r + 1$,

$$\Sigma = \{\epsilon_r, \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, \dots, r-1\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $n = 2r$,

$$\Sigma = \{\epsilon_{r-1} + \epsilon_r, \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, \dots, r-1\}.$$

On équipe $\mathfrak{u}_n(\mathbb{F})$ du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \text{tr}(xy^*)$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\text{tr}(xy^*)$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}, \mathbb{R}$. Remarquons que ce produit scalaire rend dans tous les cas la base de \mathfrak{t}_n^* constituée des ϵ_k , $k = 1, \dots, \tilde{n}$, orthonormale. En identifiant $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ et \mathfrak{t}_n par l'application $\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \mapsto i\Omega_n(\lambda) \in \mathfrak{t}_n$, ainsi que \mathfrak{t}_n et \mathfrak{t}_n^* par le produit scalaire on obtient la chaîne d'identification

$$\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \simeq i\Omega_n(\lambda) \in \mathfrak{t}_n \simeq \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i \epsilon_i \in \mathfrak{t}_n^*.$$

On a donné au chapitre 3, pour un groupe de Lie compact connexe quelconque, une définition de la chambre de Weyl. Aux identifications précédentes près, suivant cette définition, la chambre de Weyl correspondant aux racines simples choisies est l'ensemble \mathcal{C}_n défini par :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{C}_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, et n est impair,

$$\mathcal{C}_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\tilde{n}} \geq 0\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, et n est pair,

$$\mathcal{C}_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\tilde{n}-1} \geq |\lambda_{\tilde{n}}| \geq 0\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\mathcal{C}_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}.$$

Partie radiale et valeurs propres. Nous avons vu que la chambre de Weyl est un domaine fondamental pour l'action adjointe de $U_n(\mathbb{F})$ sur $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$. L'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ étant égal à $i\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$, il existe pour toute matrice M de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ un unique $\lambda \in \mathcal{C}_n$ et un élément $U \in U_n(\mathbb{F})$ tels que

$$(11) \quad M = U\Omega_n(\lambda)U^*.$$

Autrement dit, \mathcal{C}_n paramètre les classes d'équivalences pour l'action par conjugaison de $U_n(\mathbb{F})$ sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. La décomposition (11) est appelée la décomposition radiale de M . On a donc la définition suivante :

DÉFINITION 2. On appelle partie radiale de M l'élément λ de \mathcal{C}_n tel que

$$\{kMk^*, k \in U_n(\mathbb{F})\} \cap \{\Omega_n(\mu), \mu \in \mathcal{C}_n\} = \{\Omega_n(\lambda)\}.$$

On la note $\lambda = X^{(n)}(M)$.

En fait, la partie radiale est dans tous les cas, excepté le cas réel pair, donnée par les valeurs propres de M . En effet, considérons une matrice M de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Puisque M est une matrice complexe hermitienne, elle est diagonalisable dans \mathbb{R} . Elle possède n valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $2n$ valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2n}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, il n'y pas de restriction et toutes les valeurs propres sont possibles. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, alors $\lambda_{n-k+1} = -\lambda_k$, pour $k = 1, \dots, \tilde{n} + 1$, ce qui implique en particulier que $\lambda_{\tilde{n}+1} = 0$ quand n est impair (nous rappelons que $\tilde{n} = [n/2]$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ alors $\lambda_{2n-k+1} = -\lambda_k$, pour $k = 1, \dots, n$. La partie radiale de $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ est donnée par les valeurs propres ordonnées quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, les valeurs propres positives ordonnées quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et n impair. Dans le cas réel pair, deux matrices peuvent avoir les mêmes valeurs propres sans avoir la même partie radiale. C'est cette dernière qu'il faut considérer pour avoir la décomposition (11).

2. Les matrices de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ dans la littérature

L'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices hermitiennes complexes de taille $n \times n$. De nombreux ensembles classiquement considérés en physique sont des sous-ensembles de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. C'est le cas des ensembles que nous considérons qui sont les espaces plats associés aux groupes compacts classiques.

Le premier est $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ lui-même. Il a été largement étudié. Le deuxième est $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices complexes hermitiennes M pouvant s'écrire $M = iX$, où X est une matrice réelle. Dans ce cas X est anti-symétrique et l'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est évidemment en bijection avec l'ensemble des matrices réelles anti-symétriques étudiées notamment par Mehta [54]. Enfin, le troisième est $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$. La définition que nous avons choisie dans un souci d'unité pour cet ensemble n'est pas celle habituellement utilisée. Indiquons une paramétrisation plus classique. Pour cela, nous définissons la classe de symétrie de type C de Altland et Zirnbauer [1]. C'est l'ensemble des matrices

hermitiennes \mathcal{H} pouvant s'écrire

$$(12) \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & S \\ S^* & -\bar{H} \end{pmatrix}$$

où H et S sont deux $n \times n$ matrices complexes, H étant hermitienne et S symétrique. L'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ est en bijection avec cet ensemble. Considérons en effet W la matrice de permutation de \mathbb{C}^{2n} :

$$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_{n+1}, x_2, x_{n+2}, x_3, \dots).$$

Alors \mathcal{H} est une matrice de la forme (12) si et seulement si

$$(13) \quad \tilde{\mathcal{H}} = W\mathcal{H}W^{-1}$$

est dans $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$. Ainsi $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ est bien une paramétrisation de la classe C de Altland et Zirnbauer. Les noms des ensembles $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ pouvant prêter à confusion, il est important de signaler que $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ et $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ n'ont pas de lien avec le GSE ou le GOE.

3. Matrices aléatoires invariantes de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$

DÉFINITION 3. (i) On dit qu'une probabilité sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ est invariante si elle est invariante pour l'action par conjugaison (dite aussi adjointe) de $U_n(\mathbb{F})$.

(ii) On dit qu'une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ est une matrice aléatoire invariante de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ si sa loi est invariante.

(iii) Un ensemble invariant est un l'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ muni d'une probabilité invariante.

On peut construire de nombreuses matrices invariantes. On a en fait le lemme bien connu suivant, qui montre que les mesures invariantes ergodiques sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ sont les mesures orbitales.

LEMME 3.1. Une matrice aléatoire M à valeurs dans $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ est invariante si et seulement si elle peut s'écrire $U\Omega_n(\Lambda)U^*$, où $U \in U_n(\mathbb{F})$ et $\Lambda \in \mathcal{C}_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, U étant distribuée selon la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$.

DÉMONSTRATION. La décomposition (11) nous permet d'écrire $M = U\Omega_n(\Lambda)U^*$, avec $U \in U_n(\mathbb{F})$ et $\Lambda \in \mathcal{C}_n$. Soit $V \in U_n(\mathbb{F})$ une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar et indépendante de M . Alors M a la même distribution que $(VU)\Omega_n(\Lambda)(VU)^*$. Puisque la mesure de Haar est invariante pour la multiplication, M a la même loi que $V\Omega_n(\Lambda)V^*$. \square

Ensembles gaussiens : GUE(\mathbb{F}). La généralisation du GUE à tous les ensembles de matrices hermitiennes $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ est habituelle. Rappelons qu'une matrice gaussienne standard sur un espace euclidien réel de dimension finie d est une variable aléatoire dont la densité est

$$x \mapsto (2\pi)^{-d/2} e^{-\langle x, x \rangle / 2}.$$

Nous définissons une notion de variable aléatoire gaussienne standard sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ en munissant $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ de la structure euclidienne induite par le produit scalaire choisi à la première section, c'est-à-dire $\langle x, y \rangle = \text{tr}(xy^*)$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\text{tr}(xy^*)$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}, \mathbb{R}$.

DÉFINITION 4. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} , et $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $\text{GUE}_n(\mathbb{F})$ comme l'ensemble des matrices de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ muni de la mesure gaussienne standard.

Nous omettons l'indice n quand il s'agit de désigner des ensembles de ce type pour une dimension quelconque.

Ensembles de Laguerre : LUE(\mathbb{F}). Nous proposons ici une généralisation du LUE à tous les ensembles de matrices hermitiennes $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Nous verrons ultérieurement les propriétés que ces ensembles partagent avec le LUE classique. On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times m$ (resp. $n \times n$) à entrées dans \mathbb{F} . C'est un espace vectoriel réel. On le munit d'une structure euclidienne définie par le produit scalaire

$$\langle M, N \rangle = a \text{Re tr}(MN^*), \quad M, N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F}),$$

où $a = 1$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, et $a = 2$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$. On définit ainsi une notion de variable aléatoire gaussienne standard sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F})$. En prenant $m = n = 1$ on définit une notion de variable gaussienne sur \mathbb{F} lui même.

Nous avons défini plus haut, pour tout choix de \mathbb{F} , la matrice $\Omega_n(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{C}_n$. Pour $k \leq \tilde{n}$, on pose

$$(14) \quad \Omega_n^k = \Omega_n(1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

où 1 apparaît k fois. En particulier quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\Omega_n^1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$\Omega_n^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & & \\ -i & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\Omega_n^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Quand 1 apparaît \tilde{n} fois, nous notons

$$(15) \quad \Omega_n = \Omega_n^{\tilde{n}} = \Omega_n(1, \dots, 1).$$

DÉFINITION 5. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} , et $k, n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ comme l'ensemble des matrices $M\Omega_k M^*$ où M est une variable gaussienne standard de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$.

Nous omettons les indices n et k quand il s'agit de désigner des ensembles de ce type de dimension quelconque. Nous avons rappelé au chapitre 1 que le LUE classique s'obtenait en considérant des perturbations aléatoires successives de rang 1 bien choisies dans l'ensemble des matrices hermitiennes. Remarquons que cette propriété reste vraie pour la généralisation du LUE que nous proposons. En effet, toute matrice du $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ s'écrit $\sum_{i=1}^{\tilde{k}} M_i \Omega_n^1 M_i^*$, où les M_i sont des variables gaussiennes standard de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Notons enfin que si les matrices du $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ peuvent paraître étranges, leurs transformées de Fourier ne le sont pas. On rappelle qu'on pose $\tilde{k} = k$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $\tilde{k} = [k/2]$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. On pose par ailleurs $c = 1$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ et $c = 2$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

LEMME 3.2. Soit M une variable gaussienne standard de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$. Alors la transformée de Fourier de $M\Omega_k M^*$ est donnée par

$$\mathbb{E}(e^{-i\langle N, M\Omega_k M^* \rangle}) = \det(I + i\frac{N}{c})^{-\tilde{k}}, \quad N \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}).$$

DÉMONSTRATION. La matrice aléatoire $M\Omega_k M^*$ étant invariante, il suffit de montrer l'identité pour $N = \Omega_n(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathcal{C}_n$. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\langle N, M\Omega_k M^* \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda_i |M_{i,j}|^2,$$

où les $M_{i,j}$ sont des variables gaussiennes standard de \mathbb{C} indépendantes. On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{-i\alpha |M_{1,1}|^2}) = \frac{1}{1 + i\alpha},$$

ce qui donne le cas complexe. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\langle N, M\Omega_k M^* \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda_i (|a_{i,j}|^2 - |b_{i,j}|^2),$$

où les matrices $\begin{pmatrix} a_{i,j} & -\bar{b}_{i,j} \\ b_{i,j} & \bar{a}_{i,j} \end{pmatrix}$ sont des variables gaussiennes standard de \mathbb{H} indépendantes. On a

$$\mathbb{E}(e^{-i\alpha (|a_{1,1}|^2 - |b_{1,1}|^2)}) = \frac{1}{1 + (\frac{\alpha}{2})^2},$$

ce qui donne le cas quaternionique. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$\langle N, M\Omega_k M^* \rangle = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \sum_{j=1}^{\tilde{k}} \lambda_i (M_{2i,2j-1} M_{2i-1,2j} - M_{2i-1,2j-1} M_{2i,2j}),$$

où les $M_{i,j}$'s sont des variables gaussiennes standard réelles indépendantes. On a

$$\mathbb{E}(e^{-i\alpha(M_{2,1}M_{1,2} - M_{1,1}M_{2,2})}) = \frac{1}{1 + \alpha^2},$$

ce qui donne le cas réel. \square

Le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ correspond au LUE classique - l'ensemble unitaire de Laguerre ou l'ensemble de Wishart complexe - dont la mesure est portée par le cône des matrices hermitiennes définies positives. La situation est radicalement différente pour les corps \mathbb{R} et \mathbb{H} : la transformée de Fourier

$$\det(I + iN)^{-\tilde{k}} = \det\left(I + \frac{N^2}{c^2}\right)^{-\tilde{k}/2}$$

est réelle. La distribution d'une matrice aléatoire du LUE(\mathbb{F}) est donc symétrique. En fait, le support de $M\Omega_n M^*$ est l'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ entier. Observons par ailleurs que quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ avec n impair, ce phénomène n'est pas spécifique : toutes les mesures invariantes sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ sont symétriques.

4. Matrices aléatoires invariantes de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$

On définit $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ comme l'ensemble des matrices $\{M_{k,l}, 1 \leq k, l \leq \infty\}$ à entrées dans $i\mathbb{F}$ telle que $M_{l,k} = M_{k,l}^*$. Dans cette section, nous décrivons les probabilités invariantes ergodiques sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$. Pour cela nous déterminons leurs transformées de Fourier définies sur le dual $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ formé des matrices de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ dont le nombre de coordonnées non nulles est fini. Nous utilisons l'approche d'Olshanski décrite dans le paragraphe 23 de [59]. On pourra aussi se rapporter à Faraut [26].

Paire sphérique. (cf. Olshanski [59] par. 23.1) Soit K un sous-groupe fermé d'un groupe topologique G . On note \mathfrak{J} l'ensemble des fonctions continues sur G , de type positif, égales à 1 en l'élément neutre et biinvariantes par K . Pour une représentation T de G sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , un vecteur x de \mathcal{H} est dit K -invariant si $T_k x = x$ pour tout $k \in K$.

DÉFINITION 6. On dit que (G, K) est une paire sphérique (d'Olshanski) si, pour toute représentation unitaire irréductible T de G sur un Hilbert H , l'ensemble H^K des vecteurs K -invariants est de dimension 0 ou 1.

Remarquons que la notion de paires sphériques étend celle de couple de Gelfand aux groupes K non compacts (cf Olshanski [59] par. 23.1).

Lorsque H^K est de dimension 1, la représentation est dite sphérique. Si $x \in H^K$ est de norme 1, la fonction

$$\phi(g) = (T_g x, x)$$

est appelée fonction sphérique associée (elle ne dépend pas de x).

Une fonction $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est dite de type positif si elle vérifie

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} c_i \bar{c}_j \psi(g_i g_j^{-1}) \geq 0, \text{ pour tout } n \geq 1, c_i \in \mathbb{C}, g_i \in G.$$

PROPOSITION 3.3 (Olshanski [59] par. 23.3). Une fonction ϕ est sphérique si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

- (i) ϕ est de type positif et ϕ vaut 1 en l'élément neutre,
- (ii) ϕ est continue et biinvariante par K ,
- (iii) ϕ est extrémale parmi l'ensemble des fonctions sur G vérifiant (i) et (ii).

Considérons une suite $(K(n), G(n))$, $n \in \mathbb{N}$, où $K(n)$ est un sous-groupe compact du groupe localement compact $G(n)$. On suppose que $G(n)$ s'identifie à un sous-groupe fermé de $G(n+1)$ et que cette injection envoie $K(n)$ dans $K(n+1)$. On note $G(\infty) = \cup_{n \in \mathbb{N}} G(n)$ et $K(\infty) = \cup_{n \in \mathbb{N}} K(n)$ les limites inductives pour ces injections. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4 (Olshanski [59] par. 23.4). Si chaque paire $(G(n), K(n))$ est sphérique, alors $(G(\infty), K(\infty))$ est sphérique.

Supposons que $K(n)$ est égal à $U_n(\mathbb{F})$ et $G(n)$ égal à $U_n(\mathbb{F}) \times_\sigma \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, $U_n(\mathbb{F}) \times_\sigma \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ étant le produit semi direct du groupe compact $U_n(\mathbb{F})$ et du groupe abélien (pour l'addition) $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, avec $\sigma(k)M = kMk^*$, c'est-à-dire l'ensemble $U_n(\mathbb{F}) \times \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ muni du produit :

$$(k_1, M_1)(k_2, M_2) = (k_1 k_2, M_1 + \sigma(k_1)M_2) = (k_1 k_2, M_1 + k_1 M_2 k_1^*).$$

Le groupe $U_n(\mathbb{F}) \times_\sigma \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ est le groupe des déplacements associé au compact $U_n(\mathbb{F})$. Donc $(K(n), G(n))$ est un couple de Gelfand, c'est à dire, puisque $K(n)$ est compact, une paire sphérique. Il résulte donc de la proposition que $(G(\infty), K(\infty))$ est sphérique. Si on identifie une matrice k de $U_n(\mathbb{F})$ avec la matrice doublement infinie \bar{k} vérifiant

$$\bar{k}_{i,j} = k_{i,j}, \text{ si } 1 \leq i, j \leq n, \bar{k}_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ sinon.}$$

Alors $K(\infty)$ s'identifie avec la réunion des $U_n(\mathbb{F})$. De même si on identifie une matrice M de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ avec la matrice doublement infinie \bar{M} vérifiant

$$\bar{M}_{i,j} = M_{i,j}, \text{ si } 1 \leq i, j \leq n, \bar{M}_{i,j} = 0 \text{ sinon,}$$

alors $G(\infty)$ s'identifie à $K(\infty) \times_\sigma \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$, où $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ est l'ensemble des matrices ayant un nombre fini de coefficients non nuls.

Propriété de multiplicativité. On considère la suite $(G(n), K(n))$, $n \in \mathbb{N}$, telle que $K(n) = U_n(\mathbb{F})$, $G(n) = U_n(\mathbb{F}) \times_\sigma \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. On note

$$\Gamma = K(\infty) \backslash G(\infty) / K(\infty).$$

On munit Γ d'une structure de semigroupe commutatif de la façon suivante.

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Par définition, il existe $m, n \in \mathbb{N}$ et $g_1 \in G(n), g_2 \in G(m)$ tels que $\gamma_1 = K(\infty)g_1K(\infty)$, $\gamma_2 = K(\infty)g_2K(\infty)$. Posons

$$g_3 = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = K(\infty)g_3K(\infty).$$

On vérifie aisément que $\gamma_1 \star \gamma_2$ est bien définie, c'est à dire que $\gamma_1 \star \gamma_2$ ne dépend pas des représentants g_1 et g_2 . L'opération est bien commutative car $K(\infty)$ contient la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & I_m & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où I_n est l'élément neutre de $U_n(\mathbb{F})$. Le théorème important d'Olshanski est :

THÉORÈME 3.5 (Olshanski [59] par. 23.8). Une fonction ϕ sur $G(\infty)$ continue de type positif biinvariante par $K(\infty)$, valant 1 en l'élément neutre, est sphérique si et seulement elle vérifie

$$\phi(\gamma_1 \star \gamma_2) = \phi(\gamma_1)\phi(\gamma_2)$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

A vrai dire, le théorème est prouvé pour le cas $(U_n(\mathbb{F}), Gl(n, \mathbb{F}))$, mais la preuve se recopie mots pour mots car seules les propriétés des groupes $U_n(\mathbb{F})$ interviennent.

Précisons maintenant la structure de semigroupe commutatif que possède Γ dans notre cadre. Puisque $G(n)/K(n)$ s'identifie à $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$,

$$K(n) \backslash G(n) / K(n)$$

s'identifie à l'ensemble des orbites de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ sous l'action de conjugaison de $K(n)$. D'après la propriété (11) on a donc

$$K(n) \backslash G(n) / K(n) = \mathcal{C}_n$$

en identifiant $\lambda \in \mathcal{C}_n$ avec la double classe $K(n)\Omega_n(\lambda)K(n)$. Introduisons une paramétrisation de Γ . Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in \mathbb{R}^{(\infty)}$ une suite infinie de nombres réels, tous nuls à partir d'un certain rang et tous positifs ou nuls lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{H} . On définit alors $\Omega_\infty(\lambda)$ comme la matrice de $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ à laquelle la matrice $\Omega_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tilde{n}})$ s'identifie, \tilde{n} étant le rang à partir duquel les coordonnées de λ sont toutes nulles. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ peut s'écrire

$$\gamma_1 = K(\infty)\Omega_\infty(\lambda)K(\infty)$$

pour un tel λ . Il est important de remarquer que l'ordre des λ_i non nuls n'importe pas. En effet, pour tout i il existe une matrice $k \in K(\infty)$ telle que

$$k\Omega(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots)k^* = \Omega(\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \dots).$$

En effet, prenons $i = 1$ pour simplifier. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ on peut prendre $k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U_2(\mathbb{C})$, pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$ la matrice

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in U_4(\mathbb{R}), U_2(\mathbb{H}).$$

Considérons deux éléments γ et γ' de Γ . Si λ et λ' sont choisis tels que

$$\gamma = K(\infty)\Omega_\infty(\lambda)K(\infty), \gamma' = K(\infty)\Omega_\infty(\lambda')K(\infty),$$

on a alors

$$\gamma \star \gamma' = K(\infty)\Omega_\infty(\lambda^*)K(\infty),$$

où $\lambda^* = (\lambda, \lambda')$ est obtenu en écrivant les termes non nuls de λ suivis de ceux de λ' puis d'une infinité de 0.

Une fonction ψ sur $G(\infty) = U^{(\infty)}(\mathbb{F}) \times_\sigma \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ binvariante par K est donnée par une fonction ϕ sur $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ invariante par conjugaison par la formule

$$\psi(k, M) = \phi(M).$$

Si ψ est de type positif sur $G(\infty)$ alors ϕ est de type positif sur le groupe abélien $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$, c'est à dire que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} c_i \bar{c}_j \phi(M_i - M_j) \geq 0$$

pour tous $n \geq 1, c_i \in \mathbb{C}, M_i \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$. Réciproquement, si ϕ a cette propriété la fonction ψ sur $G(\infty)$ définie par $\psi(k, M) = \phi(M)$ est de type positif. En effet, si $g_i = (k_i, M_i)$, alors

$$g_i g_j^{-1} = (k_i, M_i)(k_j^{-1}, -k_j^{-1}M_j) = (k_i k_j, M_i - k_i k_j^{-1}M_j)$$

donc

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} c_i \bar{c}_j \psi(g_i g_j^{-1}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_i \bar{c}_j \phi(M_i - k_i k_j^{-1}M_j) \geq 0.$$

On déduit alors du théorème d'Olshanski 3.5 l'important corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.6 (Multiplicativité). Une fonction continue ψ biinvariante sur $G(\infty)$ valant 1 en l'élément neutre est sphérique si et seulement si la fonction $\phi(M) = \psi(k, M)$ sur $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ est invariante de type positif et vérifie la propriété de multiplicativité suivante : il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et telle que, pour tous $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

$$\phi(\Omega_\infty(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\dots$$

On définit l'ensemble $\text{LUE}_\infty^1(\mathbb{F})$ comme l'ensemble des matrices $M\Omega_\infty^1 M^*$, où M est une matrice de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{F})$ telle que les sous-matrices $\{M_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$ sont des variables gaussiennes standard de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, et l'ensemble $\text{GUE}_\infty(\mathbb{F})$ comme celui des matrices $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ telles que les sous-matrices $\{M_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$ sont des variables gaussiennes standard de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. On dit qu'une matrice aléatoire invariante de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ est ergodique si sa loi est ergodique. Le théorème suivant est en grande partie contenu dans Pickrell [62].

THÉORÈME 3.7. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, toute matrice aléatoire invariante ergodique M de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ est la somme d'éléments du $\text{GUE}_\infty(\mathbb{F})$ et du $\text{LUE}_\infty^1(\mathbb{F})$: elle peut s'écrire

$$M = aI + bG + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k L_k$$

où G appartient au $\text{GUE}_\infty(\mathbb{F})$, et L_k au $\text{LUE}_\infty^1(\mathbb{F})$. Les variables aléatoires $G, L_1, L_2 \dots$ sont indépendantes, a, b, d_k sont des constantes telles que $\sum d_k^2 < +\infty$ et I est la matrice identité de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$. De plus, $a = 0$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

DÉMONSTRATION. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ Pickrell a montré dans [62] (voir aussi Olshanski et Vershik [61]) que si ψ est une fonction sphérique sur $G(\infty)$, alors il existe des nombres réels uniques $a, b \geq 0$ et $d_k, k \geq 1$ tels que

$$\psi(\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = \phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2) \dots,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(16) \quad \phi(t) = e^{iat} e^{-bt^2} \prod_{k=1}^{\infty} [(1 + id_k t)e^{id_k t}]^{-1}.$$

Par un théorème de Bochner, les transformées de Fourier des mesures bornées sur \mathbb{R}^∞ sont les fonctions de type positif. Les fonctions sphériques étant les fonctions extrémales parmi les fonctions continues, de type positif, $K(\infty)$ -invariante, une probabilité $K(\infty)$ -invariante μ sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ est ergodique si et seulement si sa transformée de Fourier est sphérique. Le théorème est donc vrai pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Considérons le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. A toute matrice complexe $M \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{C})$, on associe une matrice $f(M) \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ en remplaçant les entrées $m = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ de M par la matrice de taille 2×2

$$\tilde{m} = \begin{pmatrix} iy & ix \\ -ix & iy \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, on a $f(\Omega(\lambda)) = \Omega(\lambda)$, où la matrice $\Omega(\lambda)$ est, à gauche de l'égalité, celle définie pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, et, à droite de l'égalité, celle définie pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Considérons une probabilité invariante ergodique sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R})$ et ψ sa transformée de Fourier définie sur $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Alors ψ est invariante, de type

positif et vérifie la propriété de multiplicativité

$$\psi(\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = \phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2) \cdots ,$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La fonction $\psi \circ f$ sur $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{C})$ est clairement de type positif et invariante. D'après un théorème de Bochner, il existe une probabilité invariante sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ dont cette fonction est la transformée de Fourier. De plus, puisque $f \circ \Omega = \Omega$, on a

$$(\psi \circ f)(\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = \phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2) \cdots .$$

La fonction $\psi \circ f$ vérifie ainsi la propriété de multiplicativité. Elle est donc sphérique. Ainsi ϕ est de la forme donnée en (16). De plus la fonction ψ est invariante pour l'action du groupe $U_n(\mathbb{R}) = SO(n)$. En introduisant la réflexion appropriée de $SO(3)$, on montre que

$$\psi(\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = \psi(\Omega(-\lambda_1, \lambda_2, \dots)).$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\phi(t) = \phi(-t)$, ce qui implique, par unicité des d_k ,

$$\phi(t) = e^{-bt^2} \prod_{k=1}^{\infty} [(1 + (d_k t)^2)]^{-1}.$$

En utilisant l'expression de la transformée de Fourier des matrices du LUE(\mathbb{F}) donnée au lemme 3.2, on obtient le théorème pour le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, la preuve est similaire : on utilise l'application $\tilde{f} : \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{H})$ définie de la façon suivante. Dans un premier temps, on définit $\tilde{f}_n : \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{H})$, par

$$\tilde{f}_n(M) = W \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -\bar{M} \end{pmatrix} W^* \in \mathcal{P}_n(\mathbb{H}), \quad M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}),$$

où W est donné par (13). Pour $M \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{H})$, on considère $\pi_n(M)$ son mineur principal d'ordre n . Le fait que $\pi_n(\tilde{f}_{n+1}(\pi_{n+1}(M))) = \tilde{f}_n(\pi_n(M))$ nous permet de définir $\tilde{f} : M \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{f}(M) \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{H})$ par $\pi_n(\tilde{f}(M)) = \tilde{f}_n(\pi_n(M))$. On a $\tilde{f} \circ \Omega = \Omega$. La réflexion $\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \mapsto \Omega(-\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ est une transformation de $U_n(\mathbb{H})$, ce qui nous permet de conclure comme pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. \square

5. Théorème d'Heckman

Dans cette section, nous reformulons le théorème 2.4 et son corollaire dans le cadre des matrices aléatoires invariantes de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. L'ensemble des poids dominants P_n^+ associé au choix des racines simples que nous avons indiqué précédemment est le sous-ensemble de \mathcal{C}_n défini par :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$P_n^+ = \{\lambda \in \mathcal{C}_n : \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n-1\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$P_n^+ = \{\lambda \in \mathcal{C}_n : \lambda_n, \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N} \ i = 1, \dots, n-1\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $n = 2r + 1$,

$$P_n^+ = \{\lambda \in \mathcal{C}_n : \lambda_r \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N}, \ i = 1, \dots, r-1\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $n = 2r$,

$$P_n^+ = \{\lambda \in \mathcal{C}_n : \lambda_{r-1} + \lambda_r, \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N}, \ i = 1, \dots, r-1\}.$$

On considère une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ de réels strictement positifs convergeant vers 0. Le corollaire 2.5 donne pour $K = U_n(\mathbb{F})$, et dans le contexte de ce chapitre, le théorème suivant :

THÉORÈME 3.8. Soit λ et β deux éléments de la chambre de Weyl \mathcal{C}_n , $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ deux suites d'éléments de P_n^+ telles que $(\varepsilon_k \lambda_k)_{k \geq 1}$ et $(\varepsilon_k \gamma_k)_{k \geq 1}$ convergent respectivement vers λ et γ . On considère la suite de probabilités associées $(\nu_k)_{k \geq 1}$ définies comme au corollaire 2.5. Alors $(\nu_k)_{k \geq 1}$ converge vers la loi de la partie radiale de $\Omega_n(\lambda) + U\Omega_n(\beta)U^*$, où U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$.

Pour une matrice $M = \{M_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, la sous-matrice $\{M_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n-1\}$, c'est-à-dire le mineur principal d'ordre $n-1$ de M , appartient à $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F})$. Nous pouvons donc considérer sa décomposition radiale. On considère le sous groupe $H = \{U \in U_n(\mathbb{F}) : U_{in} = U_{ni} = \delta_{in}, i = 1, \dots, n\}$ et son algèbre de Lie $\{M \in \mathfrak{U}_n(\mathbb{F}) : M_{in} = M_{ni} = 0, i = 1, \dots, n\}$. Ils sont trivialement identifiables au groupe $U_{n-1}(\mathbb{F})$ et à son algèbre de Lie $\mathfrak{U}_{n-1}(\mathbb{F}) = i\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F})$. De même, la projection orthogonale d'une matrice M de $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ sur ce dernier sous-espace s'identifie au mineur principal d'ordre $n-1$ de M . Ainsi, pour le groupe $U_n(\mathbb{F})$ et le sous groupe H , le théorème 2.4 donne dans notre contexte :

THÉORÈME 3.9. Soit λ un élément de la chambre de Weyl \mathcal{C}_n . Considérons $M = U\Omega_n(\lambda)U^*$, où U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$ et une suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de P_n^+ telles que $(\varepsilon_k \lambda_k)_{k \geq 1}$ converge vers λ . Considérons la suite de probabilités associées $(\mu_k)_{k \geq 1}$ sur \mathcal{C}_{n-1} définies comme au théorème 2.5. Alors $(\mu_k)_{k \geq 1}$ converge vers la loi de la partie radiale du mineur principal d'ordre $n-1$ de M .

6. Considérations sur les cas quaternionique et réel impair

Les mesures invariantes sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ présentent de grandes similitudes dans le cas quaternionique et le cas réel impair. Expliquons ce phénomène. Les groupes $U_r(\mathbb{H})$ et $U_{2r+1}(\mathbb{R})$ ont la même chambre de Weyl, puisqu'ils ont le même groupe de Weyl. Notons \mathcal{C} la chambre de Weyl associée aux groupes $U_r(\mathbb{H})$ et $U_{2r+1}(\mathbb{R})$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ celle associée aux groupes $U_{r-1}(\mathbb{H})$ et $U_{2r-1}(\mathbb{R})$. Soit $U_1 \in U_r(\mathbb{H})$ et $U_2 \in U_{2r+1}(\mathbb{R})$ deux variables aléatoires distribuées selon la mesure de Haar et λ, γ deux éléments de \mathcal{C} . On note ν_1 la loi de la partie

radiale de $\Omega_r(\lambda) + U_1\Omega_r(\gamma)U_1^*$, et μ_1 la loi de la partie radiale du mineur principal d'ordre $r - 1$ de $U_1\Omega_r(\lambda)U_1^*$, où Ω_r est définie pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. On note ν_2 la loi de la partie radiale de $\Omega_{2r+1}(\lambda) + U_2\Omega_{2r+1}(\gamma)U_2^*$, et μ_2 la loi de la partie radiale du mineur principal d'ordre $2r - 1$ de $U_2\Omega_r(\lambda)U_2^*$, où Ω_{2r+1} est définie pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. La fonction Φ définie au chapitre 2 est la même pour les groupes $U_r(\mathbb{H})$ et $U_{2r+1}(\mathbb{F})$. Notons Φ celle associée aux groupes $U_r(\mathbb{H})$ et $U_{2r+1}(\mathbb{F})$ et $\tilde{\Phi}$ celle associée aux groupes $U_{r-1}(\mathbb{H})$ et $U_{2r-1}(\mathbb{F})$. Le théorème 2.4 montre que pour tout $\zeta \in \tilde{\mathcal{C}}$,

$$\int_{\tilde{\mathcal{C}}} \tilde{\Phi}_\beta(\zeta) \mu_1(d\beta) = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \tilde{\Phi}_\beta(\zeta) \mu_2(d\beta),$$

ce qui implique $\mu_1 = \mu_2$ d'après la proposition 2.3. L'égalité des mesures ν_1 et ν_2 est plus classique. Elle provient d'un argument similaire. On a en effet

$$\Phi_\lambda(\zeta)\Phi_\gamma(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} \Phi_\beta(\zeta) \nu_1(d\beta) = \int_{\mathcal{C}} \Phi_\beta(\zeta)\nu_2(dz),$$

ce qui montre l'égalité des mesures ν_1 et ν_2 .

Néanmoins, au prix de quelques redondances, nous avons choisi, pour les applications, de toujours énoncer nos résultats pour les deux cas, afin d'en rendre la lecture plus agréable.

CHAPITRE 4

Mineurs et polytopes de Gelfand-Tsetlin

Nous donnons dans ce chapitre une première application du théorème d'Heckman dans le cadre de l'étude des mesures invariantes sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Nous déterminons la loi des parties radiales successives des mineurs principaux de matrices aléatoires invariantes de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pour une matrice gaussienne standard de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ - c'est-à-dire une matrice du GUE - c'est la mesure étudiée par Baryshnikov dans [2]. Le principal résultat de ce chapitre est établi au théorème 4.2 et affirme que si la partie radiale de la matrice aléatoire invariante considérée est fixée, alors cette mesure est la mesure uniforme - ou une projection de la mesure uniforme pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ - sur des polytopes appelés polytopes de Gelfand-Tsetlin. On rappelle la définition de ces derniers en **section 1**. Le théorème est démontré en **section 2**. Certains résultats que nous avançons s'obtiennent en considérant les règles appelées règles de branchement en théorie des représentations. Nous avons préféré ne pas faire référence à ces notions dans ce chapitre. De nombreuses preuves sont donc reportées au chapitre 7.

Nous utiliserons la notation suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit $\tilde{n} = n$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, et $\tilde{n} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. De plus, on pose $\epsilon = 1$ quand $n \notin 2\mathbb{N}$ et $\epsilon = 0$ sinon.

1. Définitions

Pour un entier k plus petit que n et une matrice $M = \{M_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, la sous-matrice $\{M_{i,j}, 1 \leq i, j \leq k\}$, c'est-à-dire le mineur principal d'ordre k de M , appartient à $\mathcal{P}_k(\mathbb{F})$ et admet donc une décomposition radiale. On peut alors donner la définition suivante :

DÉFINITION 7. On définit la fonction X sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ par

$$X(M) = (X^{(1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)), \quad M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}),$$

où $X^{(k)}(M)$ est la partie radiale du mineur principal d'ordre k de M .

Quand M est une matrice complexe hermitienne, le théorème de Rayleigh affirme que si $\lambda \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des valeurs propres ordonnées de M et si $\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$ est celui des valeurs propres ordonnées de son mineur principal d'ordre $n-1$, alors λ et β vérifient les conditions d'entrelacement $\lambda_i \geq \beta_i \geq \lambda_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Bien sûr, cela reste vrai quand M appartient à $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, cet ensemble étant un sous-ensemble de celui des matrices complexes hermitiennes. Ainsi pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, et M telle que $X^{(n)}(M) = \lambda$, on obtient

facilement que $X(M)$ appartient au polytope de Gelfand-Tsetlin $GT_n(\lambda)$ défini ci-dessous. Nous considérons le cas $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ après la définition de ces polytopes. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on écrit $x \succeq y$ si x et y sont entrelacés, c'est-à-dire

$$x_1 \geq y_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq y_n$$

et nous écrivons $x \succ y$ quand

$$x_1 > y_1 > x_2 > \cdots > x_n > y_n.$$

Quand $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on ajoute la relation $y_n \geq x_{n+1}$ (resp. $y_n > x_{n+1}$). On note $|x|$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues de celles de x .

DÉFINITION 8. Soit un élément λ de la chambre de Weyl \mathcal{C}_n . Le polytope de Gelfand-Tsetlin $GT_n(\lambda)$ est défini par :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$GT_n(\lambda) = \{(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(n)} = \lambda, x^{(k)} \in \mathbb{R}^k, \\ x^{(k)} \succeq x^{(k-1)}, 1 \leq k \leq n\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$GT_n(\lambda) = \{(x^{(\frac{1}{2})}, x^{(1)}, x^{(\frac{3}{2})}, \dots, x^{(n-\frac{1}{2})}, x^{(n)}) : x^{(n)} = \lambda, \\ x^{(k)}, x^{(k-\frac{1}{2})} \in \mathbb{R}_+^k, x^{(k)} \succeq x^{(k-\frac{1}{2})} \succeq x^{(k-1)}, 1 \leq k \leq n\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$GT_n(\lambda) = \{(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(n)} = \lambda, x^{(k)} \in \mathcal{C}_k, x^{(1)} = 0, \\ |x^{(k)}| \succeq |x^{(k-1)}|, 1 \leq k \leq n\}.$$

Quand M est une matrice de $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ telle que $X^{(n)}(M) = \lambda$, alors $X(M)$ appartient à l'image de $GT_n(\lambda)$ par l'application

$$(x^{(\frac{1}{2})}, x^{(1)}, x^{(\frac{3}{2})}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \in GT_n(\lambda) \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}).$$

Pour le prouver, on peut par exemple introduire, pour $r = 1, \dots, n$, le vecteur $X^{(r-\frac{1}{2})}(M) \in \mathbb{R}^r$ dont les composantes sont les valeurs absolues ordonnées des r plus grandes valeurs propres du mineur principal d'ordre $2r - 1$ de la matrice M considérée comme une matrice de $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{C})$. Le théorème de Rayleigh assure que

$$(X^{(\frac{1}{2})}(M), X^{(1)}(M), \dots, X^{(n-\frac{1}{2})}(M), X^{(n)}(M))$$

appartient au polytope de Gelfand-Tsetlin $GT_n(\lambda)$ de type \mathbb{H} .

Usuellement, un élément x d'un polytope de Gelfand-Tsetlin est représenté par une matrice triangulaire. Les conditions vérifiées par les entrées de ces matrices sont illustrées dans les figures 1 à 4.

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & & & & x_1^{(2)} \\
& & & & & & & x_1^{(3)} & -x_1^{(3)} \\
& & & & & & & x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & -x_1^{(4)} \\
& & & & & & & x_1^{(5)} & x_2^{(5)} & -x_2^{(5)} & -x_1^{(5)} \\
& & & & & & & \dots & \dots & & \\
& & & & & & & x_1^{(n-1)} & \dots & x_{n-1}^{(n-1)} & -x_{n-1}^{(n-1)} & \dots & -x_1^{(n-1)} \\
& & & & & & & x_1^{(n)} & \dots & x_{n-1}^{(n)} & x_n^{(n)} & -x_{n-1}^{(n)} & \dots & -x_1^{(n)}
\end{array}$$

FIG. 4. Elément d'un polytope de Gelfand-Tsetlin quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, n pair

DÉFINITION 9. Pour λ un élément de \mathcal{C}_n , on écrit μ_λ la mesure image de la probabilité uniforme sur $GT_n(\lambda)$ par l'application $p_{n-1} : x \in GT_n(\lambda) \mapsto x^{(n-1)} \in \mathcal{C}_{n-1}$.

On observe sur les figures 1 à 4 que les polytopes de Gelfand-Tsetlin peuvent être définis de façon récursive et que la mesure uniforme sur $GT_n(\lambda)$, qu'on note $m_{GT_n(\lambda)}$, vérifie l'identité suivante :

$$(17) \quad m_{GT_n(\lambda)} = \int m_{GT_{n-1}(\beta)} \mu_\lambda(d\beta).$$

C'est pourquoi, dans un premier temps, nous considérons les mesures μ_λ , $\lambda \in \mathcal{C}_n$. Le lemme suivant est démontré dans la section 4 du chapitre 7. La matrice $\Omega_n(\lambda)$ y est celle définie au chapitre 3.

LEMME 4.1. Soit λ un élément de la chambre de Weyl \mathcal{C}_n et $U \in U_n(\mathbb{F})$ une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar. Alors la loi de la partie radiale du mineur principal d'ordre $n-1$ de $U\Omega_n(\lambda)U^*$ est μ_λ .

Nous allons maintenant décrire la loi de $X(M)$ pour toute matrice aléatoire invariante M à valeurs dans $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. D'après le lemme 3.1, il suffit de la décrire lorsque $M = U\Omega_n(\lambda)U^*$, U étant une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$ et λ un élément de \mathcal{C}_n .

THÉORÈME 4.2. Soit $M = U\Omega_n(\lambda)U^*$, où U est une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$ et λ un élément de \mathcal{C}_n fixé. Alors $X(M)$ est uniformément distribuée sur $GT_n(\lambda)$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, et distribuée selon l'image de la mesure uniforme sur $GT_n(\lambda)$ par l'application $(x^{(\frac{1}{2})}, \dots, x^{(n-\frac{1}{2})}, x^{(n)}) \in GT_n(\lambda) \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

DÉMONSTRATION. D'après l'identité (17), il suffit de montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et toute fonction mesurable bornée $f : \mathcal{C}_k \rightarrow \mathbb{R}$, on a l'identité

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X^{(k)}(M)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)\}] \\
= \mathbb{E}[f(X^{(k)}(M)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M)\}].
\end{aligned}$$

Montrons cette identité. On désigne par $\pi_{k+1}(M)$ le mineur principal d'ordre $k+1$ de M . Pour $V \in U_{k+1}(\mathbb{F})$, on écrit VMV^* au lieu de

$$\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où I est la matrice identité dont la dimension est choisie de telle sorte que cette multiplication soit définie. On considère la décomposition radiale

$$\pi_{k+1}(M) = V\Omega_{k+1}(X^{(k+1)}(M))V^*,$$

où $V \in U_{k+1}(\mathbb{F})$. Soit W une variable aléatoire indépendante de M distribuée selon la mesure de Haar sur $U_{k+1}(\mathbb{F})$. On a

$$W\pi_{k+1}(M)W^* = \pi_{k+1}(WMW^*)$$

et pour $r = k+1, \dots, n$,

$$X^{(r)}(WMW^*) = X^{(r)}(M).$$

Donc

$$(\pi_{k+1}(M), X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M))$$

a la même loi que

$$(W\Omega_{k+1}(X^{(k+1)}(M))W^*, X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)).$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f(X^{(k)}(M)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)\}] \\ &= \mathbb{E}[f(X^{(k)}(\pi_{k+1}(M))) | \sigma\{X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)\}] \\ &= \mathbb{E}[f(X^{(k)}(W\Omega_{k+1}(X^{(k+1)}(M))W^*)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)\}] \\ &= \mathbb{E}[f(X^{(k)}(M)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M)\}]. \quad \square \end{aligned}$$

Nous avons donc montré le principal résultat de ce chapitre. Nous donnons maintenant des descriptions explicites des mesures μ_λ , $\lambda \in \mathcal{C}_n$. Elles seront utilisées dans les chapitres ultérieurs. Introduisons pour cela une fonction d_n que l'on appelle dimension asymptotique.

DÉFINITION 10. On définit la fonction d_n sur \mathcal{C}_n en posant

$$d_n(\lambda) = c_n(\lambda)^{-1}V_n(\lambda), \quad \lambda \in \mathcal{C}_n,$$

où les fonctions V_n et c_n sont définies par :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} V_n(\lambda) &= \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i \neq \lambda_j}} (\lambda_i - \lambda_j), \\ c_n(\lambda) &= \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i \neq \lambda_j}} (j - i), \end{aligned}$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$V_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2}} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i,$$

$$c_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2}} (j - i)(2n + 2 - j - i) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i \neq 0}} (n + 1 - i),$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$V_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq \tilde{n} \\ \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2}} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \prod_{\substack{1 \leq i \leq \tilde{n} \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i^\epsilon,$$

$$c_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq \tilde{n} \\ \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2}} (j - i)(n - j - i) \prod_{\substack{1 \leq i \leq \tilde{n} \\ \lambda_i \neq 0}} (\tilde{n} + \frac{1}{2} - i)^\epsilon.$$

Le lemme suivant se déduit du lemme 7.8.

LEMME 4.3. Pour tout λ dans la chambre de Weyl \mathcal{C}_n , le volume de $GT_n(\lambda)$ est $d_n(\lambda)$.

Quand λ est dans l'intérieur de la chambre de Weyl, alors $d_n(\lambda)$ est proportionnel au produit des racines positives de $U_n(\mathbb{F})$ et s'écrit comme un déterminant. En particulier, lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, d_n est proportionnelle au Vandermonde. On note $c_n(\lambda) = c_n$ lorsque λ est dans l'intérieur de la chambre de Weyl. On a immédiatement le lemme suivant.

LEMME 4.4. Soit λ dans l'intérieur \mathcal{C}_n . On a

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$d_n(\lambda) = c_n \det(\lambda_i^{j-1})_{n \times n},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$d_n(\lambda) = c_n \det(\lambda_i^{2j-1})_{n \times n},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$d_n(\lambda) = c_n \det(\lambda_i^{2j-2+\epsilon})_{\tilde{n} \times \tilde{n}}.$$

Pour λ un élément de la chambre de Weyl, on pose l_λ la mesure de Lebesgue sur le convexe $p_{n-1}(GT_n(\lambda))$, où p_{n-1} est la projection introduite à la définition 9. On a alors le lemme suivant :

LEMME 4.5. Soit λ un élément de la chambre de la chambre de Weyl. Alors,

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$,

$$\mu_\lambda(d\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} l_\lambda(d\beta),$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\mu_\lambda(d\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} \text{vol}(\{z \in \mathbb{R}^n : \lambda \succeq z \succeq \beta\}) l_\lambda(d\beta).$$

DÉMONSTRATION. Pour $x \in GT_n(\lambda)$, le vecteur $(x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ et le vecteur $(x^{(\frac{1}{2})}, x^{(1)}, x^{(\frac{3}{2})}, \dots, x^{(n-1)})$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, appartiennent au polytope de Gelfand-Tsetlin $GT_{n-1}(x^{(n-1)})$, dont le volume est égal à $d_{n-1}(x^{(n-1)})$ d'après le lemme 4.3, ce qui complète la preuve. \square

Dans la proposition suivante, on écrit explicitement la densité de μ_λ pour deux cas particuliers et en quelque sorte opposés : quand λ est dans l'intérieur de la chambre de Weyl et quand λ a une unique composante strictement positive.

PROPOSITION 4.6. Soit λ un élément de la chambre de Weyl \mathcal{C}_n . Si λ est dans l'intérieur de \mathcal{C}_n , alors la mesure μ_λ a une densité f_λ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathcal{C}_{n-1} définie par :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$f_\lambda(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\lambda \succeq \beta},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$f_\lambda(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{|\lambda| \succeq |\beta|},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$f_\lambda(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} \det((\lambda_i - \beta_j) 1_{\lambda_i \geq \beta_j})_{n \times n},$$

avec la convention $\beta_n = 0$.

Si $\lambda = (\theta, 0, \dots, 0)$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, alors la mesure μ_λ s'écrit

$$\mu_\lambda = \tilde{\mu}_\lambda \otimes \delta_0^{\tilde{n}-1}$$

où $\tilde{\mu}_\lambda$ a une densité g_θ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ définie par :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$g_\theta(\beta) = (n-1) \frac{\beta^{n-2}}{\theta^{n-1}} 1_{[0, \theta]}(\beta),$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$g_\theta(\beta) = (n-2) \frac{\beta^{n-3}}{\theta^{n-2}} 1_{[0, \theta]}(\beta),$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$g_\theta(\beta) = (2n-2)(2n-1) \frac{\beta^{2n-3}}{\theta^{2n-1}} (\theta - \beta) 1_{[0, \theta]}(\beta).$$

DÉMONSTRATION. On obtient immédiatement du lemme 4.5 les densités f_λ et g_θ pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ et λ dans l'intérieur de la chambre de Weyl, le même lemme implique que pour $\beta \in \mathbb{R}_+^n$,

$$f_\lambda(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\lambda \succeq z} 1_{z \succeq \beta} dz.$$

On obtient la formule de la proposition en utilisant l'identité (20) et la formule de Cauchy-Binet généralisée (19). Pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ et $\lambda = (\theta, 0, \dots, 0)$ on déduit du lemme 4.5 que, pour $\beta \in \mathbb{R}_+$,

$$g_\theta(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\theta \geq z \geq \beta} dz = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} (\theta - \beta) 1_{[0, \theta]}(\beta). \quad \square$$

3. Aspects markoviens

Nous avons considéré dans ce chapitre des matrices aléatoires invariantes M de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Le processus des mineurs $X(M)$ associé est une variable aléatoire à valeurs dans GT_n . Si $M = (M_t)_{t \leq 0}$ est un mouvement brownien standard de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ on obtient en considérant $X(M)$ un processus à valeurs dans GT_n . Il est notable que ce dernier n'est en général pas markovien. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ par exemple, $X(M)$ n'est markovien que pour $n = 1, 2$. En fait, une matrice brownienne de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ peut être obtenue comme la limite, en un certain sens, d'une marche aléatoire quantique (voir Biane [5] pour $n = 2$). Le caractère non markovien de $X(M)$ est ainsi à rapproché du fait que pour $n \geq 3$ le processus discret non commutatif convergeant vers $X(M)$ n'est pas markovien. Notons que d'autres processus ont été construits sur les polytopes de Gelfand-Testlin. Citons par exemple celui introduit par Jon Warren dans [69]. C'est un processus sur les polytopes de Gelfand-Tsetlin définis pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, construit en considérant des mouvements browniens réfléchis. Il est markovien. La première ligne de ce processus a même loi que la première ligne de $X(M)$, où M est un mouvement brownien standard de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$.

Perturbations de rang 1 et matrices du LUE(\mathbb{F})

Ce chapitre est consacré aux matrices du LUE(\mathbb{F}) et plus particulièrement à leurs valeurs propres. Ces matrices peuvent s'écrire comme une somme de matrices indépendantes de rang 1. La compréhension de ces perturbations additives constitue ainsi la première étape dans l'analyse de tous les ensembles LUE(\mathbb{F}). Nous les étudions en **section 1**. Dans la **section 2**, nous considérons des perturbations de rang 1 successives et obtenons ainsi la loi des valeurs propres des matrices du LUE(\mathbb{F}).

Pour ne pas encombrer cette partie de considérations trop techniques, les preuves qui s'appuient sur la théorie des cristaux de Kashiwara sont reportées au chapitre 7.

1. Perturbations de rang 1

Nous avons rappelé au chapitre 1 que le LUE classique s'obtenait en considérant des perturbations aléatoires successives de rang 1 bien choisies dans l'ensemble des matrices hermitiennes. Cette propriété reste vraie pour les matrices du LUE(\mathbb{F}), puisqu'elles peuvent s'écrire

$$\sum_{i=1}^{\tilde{k}} M_i \Omega_n^1 M_i^*,$$

où les M_i sont des variables gaussiennes standard de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Ainsi, on peut calculer la distribution de leurs valeurs propres par récurrence sur k pourvu qu'on sache décrire les perturbations de rang 1. Celles-ci sont décrites dans cette section. Le principal résultat est établi au théorème 5.3. Il concerne la distribution de $\Omega_n(\lambda) + M \Omega_n^1 M^*$, pour $\lambda \in \mathcal{C}_n$, où M est une variable gaussienne standard de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Pour λ un élément de \mathcal{C}_n n'ayant que k composantes non nulles, on écrira

$$\Omega_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

au lieu de $\Omega_n(\lambda)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+$ et U une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$. En premier lieu, nous décrivons la distribution de la partie radiale de $\Omega_n(\lambda) + U \Omega_n(\theta) U^*$. Pour cela nous introduisons les ensembles suivants :

DÉFINITION 11. Pour $\lambda \in \mathcal{C}_n$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit l'ensemble $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ par :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{E}(\lambda, \theta) = \{(\beta, x) \in \mathbb{R}^n \times GT_n : \beta \succeq \lambda, \sum_{i=1}^n (\beta_i - \lambda_i) = \theta, x \in GT_n(\beta)\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\mathcal{E}(\lambda, \theta) = \{(\beta, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times GT_n : \lambda, \beta \succeq z, \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) = \theta, x \in GT_n(\beta)\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r + 1$,

$$\mathcal{E}(\lambda, \theta) = \{(\beta, z, x, s) \in \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R}_+^r \times GT_n \times \{0, 1\} : \lambda, \beta \succeq z, \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) = \theta, x \in GT_n(\beta), s = 0 \text{ si } \lambda_r = 0\},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r$,

$$\mathcal{E}(\lambda, \theta) = \{(\beta, z, x) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}_+^{r-1} \times GT_n : \lambda, \beta \succeq z, x \in GT_n(\beta), \sum_{k=1}^{r-1} (\lambda_k + \beta_k - 2z_k) + |\lambda_r - \beta_r| = \theta, \max(|\lambda_r|, |\beta_r|) \leq z_{r-1}\}.$$

Chacun de ces ensembles est un convexe ou la réunion de deux convexes. Ainsi, on peut les munir de leur mesure de Lebesgue.

DÉFINITION 12. Pour $\lambda \in \mathcal{C}_n$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la mesure $\nu_{\lambda, \theta}$ comme l'image de la probabilité uniforme sur $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ par la projection sur la composante β , qu'on notera p .

La proposition suivante est démontrée à la section 4 du chapitre 7.

PROPOSITION 5.1. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in \mathcal{C}_n$ et U une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$. Alors la partie radiale de la matrice $\Omega_n(\lambda) + U\Omega_n(\theta)U^*$ est distribuée selon la probabilité $\nu_{\lambda, \theta}$.

Rappelons qu'une variable aléatoire a une loi Gamma de paramètre $(c, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ si sa densité est égale à

$$\frac{c}{(n-1)!} e^{-cx} (cx)^{n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

LEMME 5.2. Soit M une variable Gaussienne standard de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Alors la partie radiale de $M\Omega_n^1 M^*$ a une unique composante non nulle. Elle suit une loi Gamma de paramètres $(1, n)$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $(1, n-1)$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, et $(2, 2n)$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

DÉMONSTRATION. Pour le montrer, il suffit de remarquer que $M\Omega_n^1 M^*$ a les mêmes valeurs propres non nulles que $M^* M\Omega_n^1$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, la matrice $M^* M\Omega_n^1$ est égale à $|V|^2 \Omega_n^1$, où V est une variable gaussienne standard de \mathbb{F}^n . On en déduit que $M\Omega_n^1 M^*$ a une unique valeur propre strictement

positive et qu'elle est distribuée selon une loi Gamma de paramètre $(1, n)$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $(2, 2n)$ pour \mathbb{H} . Dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $M\Omega_n^1 M^*$ a une unique valeur propre strictement positive. Elle est distribuée selon une loi Gamma de paramètre $(1, n - 1)$. La preuve directe, même si elle reste relativement simple, n'est pas immédiate. Puisqu'on verra plus tard que ce lemme provient en fait d'un résultat plus général énoncé en proposition 5.12, nous renvoyons à cette proposition pour le cas réel. \square

Posons $c = 1$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ et $c = 2$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, la dimension asymptotique $d_n(\theta)$ est égale à

$$(18) \quad \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \text{ for } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \frac{2\theta^{n-2}}{(n-2)!} \text{ pour } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} \text{ pour } \mathbb{F} = \mathbb{H}.$$

On observe ainsi que pour tout \mathbb{F} , la densité de l'unique valeur propre strictement positive de $M\Omega_n^1 M^*$ est proportionnelle à $d_n(\theta)e^{-c\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}_+$. Cette propriété, qui s'avérera fort utile pour les calculs ultérieurs, n'est pas le fruit du hasard. En fait, elle est issue d'un résultat plus général donné dans la proposition 5.12, et dont la preuve permet de comprendre pourquoi la dimension asymptotique apparaît : cela provient en fait de la convergence d'une suite de mesures de Haar vers des matrices gaussiennes et du théorème sur la loi des mineurs montré au chapitre précédent.

THÉORÈME 5.3. Soit M une variable gaussienne standard de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ et λ un élément de la chambre de Weyl \mathcal{C}_n . Alors la distribution de la partie radiale de $\Omega_n(\lambda) + M\Omega_n^1 M^*$, que nous noterons ν_λ , est la probabilité proportionnelle à $\int_{\mathbb{R}_+} \nu_{\lambda, \theta} d_n(\theta) e^{-c\theta} d\theta$.

DÉMONSTRATION. La matrice $M\Omega_n^1 M^*$ est une matrice aléatoire invariante de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Les lemmes 3.1 et 5.2 garantissent que M peut s'écrire $U\Omega_n(\Theta)U^*$, où U et Θ sont des variables aléatoires indépendantes respectivement distribuées selon la mesure de Haar sur $U_n(\mathbb{F})$ et une loi Gamma. On note f_Θ la densité de Θ . On déduit alors de la proposition 5.1 que $\nu_\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \nu_{\lambda, \theta} f_\Theta(\theta) d\theta$, ce qui complète la preuve puisque la densité f_Θ est proportionnelle à $d_n(\theta)e^{-c\theta}$. \square

Pour calculer les valeurs propres de matrices du LUE(\mathbb{F}), nous devons disposer dans la section suivante d'une formule explicite de la densité de la mesure ν_λ . Etudions tout d'abord la mesure $\nu_{\lambda, \theta}$. Le lemme suivant se déduit immédiatement du lemme 7.10.

LEMME 5.4. Pour $\lambda \in \mathcal{C}_n$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, le volume de $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ est égal à $d_n(\lambda)d_n(\theta)$.

On note $l_{\lambda, \theta}$ la mesure de Lebesgue sur $p(\mathcal{E}(\lambda, \theta))$, où p est la projection introduite à la définition 12.

LEMME 5.5. Soit λ un élément de la chambre de Weyl et θ un réel positif. Alors

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\nu_{\lambda,\theta}(d\beta) = \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)d_n(\theta)} l_{\lambda,\theta}(d\beta),$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}, \mathbb{R}$,

$$\nu_{\lambda,\theta}(d\beta) = \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)d_n(\theta)} \text{vol}(\mathcal{M}_{\lambda,\theta}(\beta)) l_{\lambda,\theta}(d\beta),$$

où $\mathcal{M}_{\lambda,\theta}(\beta)$ est la projection pour β fixé de $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ sur la composante z quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ avec n pair, et sur la composante (z, s) quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ avec n impair.

DÉMONSTRATION. Par définition, $\nu_{\lambda,\theta}$ est l'image de la mesure uniforme $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ par la projection p . Ainsi, le facteur de normalisation se déduit du lemme 5.4 et le facteur $d_n(\beta)$ apparaît quand on intègre cette mesure uniforme par rapport à la composante $x \in GT_n(\beta)$. \square

Dans le lemme précédent, le facteur $\text{vol}(\mathcal{M}_{\lambda,\theta}(\beta))$ est en quelque sorte une multiplicité asymptotique (voir chapitre 7). Le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ est le seul pour lequel ce volume vaut 1 car c'est le seul pour lequel la décomposition irréductible décrite dans les propositions 7.3 à 7.6 est "sans multiplicité". Nous détaillons maintenant la mesure ν_λ dans les cas particuliers utiles aux calculs des valeurs propres des matrices du LUE(\mathbb{F}).

PROPOSITION 5.6. Soit k un entier plus petit que \tilde{n} et $\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ égal à

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0).$$

Quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, si n est pair et $k = \tilde{n}$, nous supposons que

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_{k-1} > |\lambda_k|.$$

Dans tous les autres cas on suppose que

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0.$$

Alors la mesure ν_λ est égale à $\tilde{\nu}_\lambda \otimes \delta_0^{\otimes(\tilde{n}-(k+1)\wedge\tilde{n})}$, où $\tilde{\nu}_\lambda$ a une densité L_λ par rapport à la mesure de Lebsgue sur $\mathbb{R}^{(k+1)\wedge\tilde{n}}$ définie par

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$L_\lambda(\beta) = \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\beta \succeq \lambda} e^{-\sum_{i=1}^{(k+1)\wedge n} (\beta_i - \lambda_i)},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$L_\lambda(\beta) = 2^n \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} \left[\int_{\mathbb{R}_+^k} 1_{\lambda, \beta \succeq z} e^{-2 \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) - \beta_{k+1} 1_{k < n}} dz \right] 1_{\beta_{(k+1)\wedge n} \geq 0}.$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r$, $k = r, r-1$,

$$L_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} \left[\int_{\mathbb{R}_+^{r-1}} 1_{\lambda, \beta \succeq z, |\lambda_r|, |\beta_r| \leq z_{r-1}} e^{-\sum_{i=1}^{r-1} (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) - |\lambda_r - \beta_r|} dz \right],$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r$, $k \leq r - 2$,

$$L_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} \left[\int_{\mathbb{R}_+^k} 1_{\lambda, \beta \succeq z} e^{-\sum_{i=1}^k (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) - \lambda_{k+1}} dz \right] 1_{\beta_{k+1} \geq 0}.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant les mêmes notations qu'à la preuve du théorème 5.3, on a $\nu_\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \nu_{\lambda, \theta} f_\Theta(\theta) d\theta$. Ainsi la proposition se déduit immédiatement du lemme 5.5 et des égalités $f_\Theta(\theta) = d_n(\theta) e^{-\theta}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $f_\Theta(\theta) = 2^n d_n(\theta) e^{-2\theta}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, et $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2} d_n(\theta) e^{-\theta}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. \square

REMARQUE 5.7. On observe au lemme 5.5 que les mesures $\nu_{\lambda, \theta}$ sont les mêmes, dans les cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r + 1$ et $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $n = r$. On a vu en section 6 pourquoi on avait une telle propriété. Par ailleurs, dans ces deux cas, les fonctions d_n sont les mêmes, à une constante près. Ainsi, les mesures ν_λ définies au théorème 5.3 sont également identiques, à la constante c près. C'est pourquoi nous n'avons pas écrit le cas réel impair dans la précédente proposition.

2. Valeurs propres des matrices du LUE(\mathbb{F})

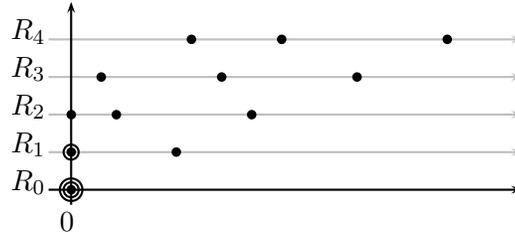
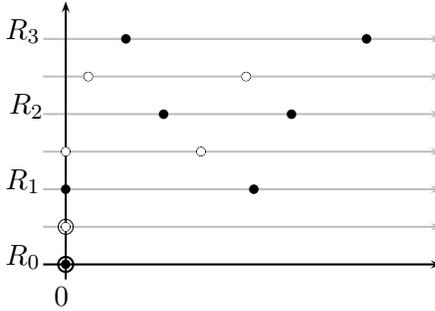
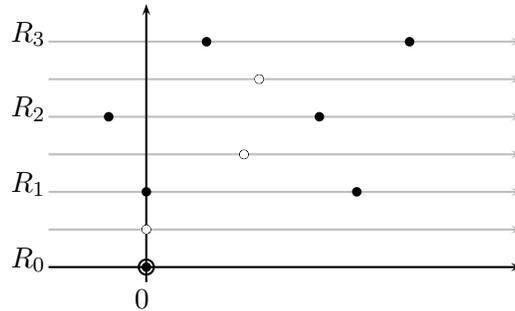
Dans cette section, nous calculons la loi des valeurs propres d'une matrice du $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ en considérant des perturbations de rang 1 successives, c'est-à-dire la marche aléatoire $(S_k)_{k \geq 0}$ sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ définie par $S_k = \sum_{i=1}^k M_i \Omega_n^1 M_i$, où les M_i sont des variables gaussiennes standard indépendantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Nous calculons la loi de la partie radiale R_k de S_k par induction. La proposition suivante concerne le processus $(R_k)_{k \geq 0}$. Ce processus fait apparaître des conditions d'entrelacement. Les disques noirs des figures 1, 2 et 3 représentent les états successifs de ce processus pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ and \mathbb{R} . Les points blancs sont des points intermédiaires illustrant les contraintes d'entrelacement.

PROPOSITION 5.8. Le processus $(R_k)_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont la probabilité de transition $P(\lambda, \cdot)$ est égal à ν_λ , et R_k a $k \wedge \tilde{n}$ composantes non nulles.

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord la propriété de Markov. Par des arguments similaires à ceux du lemme 3.1, on montre que (S_k, R_k, \dots, R_1) a la même loi que $(U \Omega_n(R_k) U^*, R_k, \dots, R_1)$, quand $U \in U_n(\mathbb{F})$ est une variable aléatoire indépendante de (R_k, \dots, R_1) distribuée selon la mesure de Haar. Alors, pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S_{k+1}) | \sigma\{R_k, \dots, R_1\}) \\ &= \mathbb{E}(f(U \Omega_n(R_k) U^* + M_{k+1} \Omega_n^1 M_{k+1}^*) | \sigma\{R_k, \dots, R_1\}) \\ &= \mathbb{E}(f(U \Omega_n(R_k) U^* + M_{k+1} \Omega_n^1 M_{k+1}^*) | \sigma\{R_k\}). \end{aligned}$$

Ainsi $(R_k)_{k \geq 0}$ est markovien. Quant à la probabilité de transition, elle est donnée par le théorème 5.3. Enfin, il est clair, d'après le lemme 5.5 par exemple, que le dernier point est vrai. \square

FIG. 1. Perturbations de rang 1 sur $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$.FIG. 2. Perturbations de rang 1 sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$.FIG. 3. Perturbations de rang 1 sur $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Nous avons maintenant rassemblé la plupart des ingrédients nécessaires au calcul des valeurs propres des matrices du $LUE_{n,k}(\mathbb{F})$. Il reste néanmoins à rappeler l'identité de Cauchy-Binet généralisée que nous utiliserons dans la preuve du théorème suivant (voir par exemple [39]). Soit (E, \mathcal{B}, m) un espace mesuré. On considère ϕ_i et ψ_j , $1 \leq i, j \leq n$, des fonctions mesurables telles que les $\phi_i \psi_j$ soient intégrables. La formule de Cauchy-Binet généralisée est

$$(19) \quad \det \left(\int_E \phi_i(x) \psi_j(x) dm(x) \right) = \frac{1}{n!} \int_{E^n} \det(\phi_i(x_j)) \det(\psi_i(x_j)) \prod_{k=1}^n dm(x_k).$$

Nous utiliserons par ailleurs la formule suivante. Soit x et y deux vecteurs de \mathbb{R}^n tels que $x_1 > \dots > x_n$ et $y_1 > \dots > y_n$. Alors

$$(20) \quad \mathbf{1}_{x \succ y} = \det(\mathbf{1}_{x_i > y_j})_{n \times n}.$$

Rappelons que nous posons $\tilde{n} = n$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, $\tilde{n} = \lfloor n/2 \rfloor$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $c = 1$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $c = 2$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ et que Ω_k est définie par (15). Pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$ on écrit

$$\Delta_n(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

C'est le déterminant de Vandermonde.

THÉORÈME 5.9. Soit M une variable gaussienne standard de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$. Alors les valeurs propres positives (non ordonnées) de $M\Omega_k M^*$ ont une densité $f_{n,k}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}$,

$$(21) \quad f_{n,k}(\lambda) = C d_n(\lambda) \Delta_{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}(\lambda) \prod_{i=1}^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}} \lambda_i^{(\tilde{k} - \tilde{n}) \vee 0} e^{-c \lambda_i}.$$

DÉMONSTRATION. Nous montrons le résultat par récurrence sur k quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$. La matrice aléatoire $M\Omega_k M^*$ a la même loi que la variable aléatoire S_k introduite au début de la section. La propriété est vraie pour $k = 1$ d'après le lemme 5.2. Supposons qu'elle soit vraie pour $k \geq 1$. Soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k \wedge n}, 0, \dots, 0)$ un vecteur de \mathbb{R}^n tel que $\gamma_1 > \dots > \gamma_{k \wedge n} > 0$ et M une matrice gaussienne standard de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{F})$. La proposition 5.6 assure que les valeurs propres positives de $\Omega_n(\gamma) + M\Omega_n^1 M^*$ ont pour densité L_γ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n \wedge (k+1)}$, ce qui prouve le premier point, et implique que pour $\lambda \in \mathbb{R}^{n \wedge (k+1)}$,

$$(22) \quad f_{n,k+1}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+^{n \wedge k}} f_{n,k}(\gamma) L_\gamma(\lambda) d\gamma.$$

Nous devons pour la suite distinguer le cas complexe du cas quaternionique. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, on déduit de l'identité (22) et de l'hypothèse de récurrence l'existence d'une constante C_1 telle que

$$(23) \quad f_{n,k+1}(\lambda) = C_1 d_n(\lambda) e^{-\sum_{i=1}^{n \wedge (k+1)} \lambda_i} \int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \Delta_{k \wedge n}(\gamma) \prod_{i=1}^{n \wedge k} \gamma_i^{(k-n) \vee 0} \mathbf{1}_{\lambda \succeq \gamma} d\gamma.$$

Quand $k < n$, l'intégrale ci-dessus est un polynôme homogène de degré $\frac{1}{2}k(k+1)$, égal à zéro quand $\lambda_i = \lambda_j$, $i \neq j$. Elle est donc proportionnelle à $\Delta_{k+1}(\lambda)$. Cela montre la propriété pour $k+1 \leq n$. La matrices MM^* ayant les mêmes valeurs propres positives que la matrice M^*M , on obtient

la proposition pour $k \geq n$. Cela implique en particulier que pour un $c_k > 0$,

(24)

$$\int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \Delta_{k \wedge n}(\gamma) \prod_{i=1}^{n \wedge k} \gamma_i^{(k-n) \vee 0} \mathbf{1}_{\lambda \geq \gamma} d\gamma = c_k \Delta_{(k+1) \wedge n}(\lambda) \prod_{i=1}^{n \wedge (k+1)} \lambda_i^{(k+1-n) \vee 0}.$$

Quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $f_{n,k+1}(\lambda)$ est proportionnel à

$$d_n(\lambda) e^{-2 \sum_{i=1}^{n \wedge (k+1)} \lambda_i} \\ \times \int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \mathbf{1}_{\lambda \geq z} \left[\int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \mathbf{1}_{\gamma \geq z} e^{-4 \sum_{i=1}^{k \wedge n} (\gamma_i - z_i)} \Delta_{k \wedge n}(\gamma) \prod_{i=1}^{k \wedge n} \gamma_i^{(k-n) \vee 0} d\gamma \right] dz.$$

On déduit de l'identité de Cauchy-Binet généralisée que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \Delta_{k \wedge n}(\gamma) \mathbf{1}_{\gamma \geq z} e^{-4 \sum_{i=1}^{k \wedge n} (\gamma_i - z_i)} \prod_{i=1}^{k \wedge n} \gamma_i^{(k-n) \vee 0} d\gamma_i \\ = \frac{1}{(k \wedge n)!} \int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \det(\gamma_i^{j-1+(k-n) \vee 0}) \det(\mathbf{1}_{\gamma_i > z_j} e^{-4(\gamma_i - z_j)}) d\gamma \\ = \det \left(\int_{\mathbb{R}_+} \gamma^{j-1+(k-n) \vee 0} \mathbf{1}_{\gamma > z_i} e^{-4(\gamma - z_i)} d\gamma \right) \\ = C_2 \det(z_i^{j-1+(k-n) \vee 0}) = C_2 \Delta_{k \wedge n}(z) \prod_{i=1}^{k \wedge n} z_i^{(k-n) \vee 0},$$

où C_2 est une constante. En utilisant (24), on prouve la propriété pour $k+1$.

Montrons maintenant la proposition quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. D'après la remarque 5.7, le cas réel impair se déduit du cas quaternionique en remplaçant n , k et $c = 2$ par \tilde{n} , \tilde{k} et $c = 1$ dans l'identité (21). Ainsi, la propriété est vraie pour le cas réel impair. Si n est pair, il est plus simple d'utiliser ce que nous savons du cas impair que d'appliquer le même raisonnement inductif que pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. Considérons pour cela la matrice aléatoire

$$N = \begin{pmatrix} M \\ X \end{pmatrix},$$

X étant une variable gaussienne standard de $\mathcal{M}_{1,k}(\mathbb{R})$, indépendante de M . Alors la densité des valeurs propres strictement positives de $N \Omega_k N^*$ est $f_{n+1,k}$. Cette matrice aléatoire a une loi invariante pour l'action adjointe de $U_{n+1}(\mathbb{R})$ et son mineur principal d'ordre n est $M \Omega_k M^*$. Ainsi, en utilisant le lemme 4.5, on obtient que pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}$, $f_{n,k}(\lambda)$ est proportionnel à

$$\int_{\mathbb{R}_+^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}} \frac{d_n(\lambda)}{d_{n+1}(\gamma)} f_{n+1,k}(\gamma) \mathbf{1}_{\gamma \geq \lambda} d\gamma.$$

Puisque l'entier $n+1$ est impair et que nous avons montré la proposition pour le cas réel impair, on peut remplacer $f_{n+1,k}$ dans la formule précédente

par la formule (21). On termine la preuve en utilisant à nouveau l'identité de Cauchy-Binet généralisée. \square

Ce dernier théorème nous permet de calculer la loi d'une matrice du LUE(\mathbb{F}) elle-même. On pose toujours ϵ égal à 1 si $n \notin 2\mathbb{N}$ et 0 sinon.

THÉORÈME 5.10. Soit $k \geq n$. Alors la distribution d'une matrice du LUE $_{n,k}$ (\mathbb{F}) a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ proportionnelle à

$$H \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \mapsto \begin{cases} \prod_{i=1}^n \lambda_i^{k-n} e^{-\lambda_i} 1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i), & \text{pour } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i + \lambda_j)} \prod_{i=1}^n \lambda_i^{k-n-1} e^{-2\lambda_i} & \text{pour } \mathbb{F} = \mathbb{H}, \\ \frac{1}{\prod_{1 \leq i < j \leq \tilde{n}} (\lambda_i + \lambda_j)} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^{\tilde{k}-\tilde{n}-\epsilon} e^{-\lambda_i} & \text{pour } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \end{cases}$$

où λ est le vecteur des valeurs propres de H quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, et celui des valeurs propres positives de H quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$.

DÉMONSTRATION. La fonction d_n étant proportionnelle au produit des racines positives sur l'intérieur de la chambre de Weyl, la formule d'intégration de Weyl (voir Helgason [38], Thm. I.5.17) permet d'écrire pour toute fonction mesurable invariante $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathcal{P}_n(\mathbb{F})} f(H) dH = C \int_{\mathcal{C}_n} d_n(\lambda)^2 f(\lambda) d\lambda,$$

où C est une constante positive, et où dH et $d\lambda$ sont les mesures de Lebesgue sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ et \mathcal{C}_n . On déduit ainsi du théorème 5.9 que la densité d'une matrice aléatoire du LUE $_{n,k}$ (\mathbb{F}) est proportionnelle à

$$H \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \mapsto \frac{\Delta_{\tilde{n}}(\lambda)}{d_n(\lambda)} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^{\tilde{k}-\tilde{n}} e^{-c\lambda_i} 1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i).$$

On termine la preuve en remplaçant $d_n(\lambda)$ par sa valeur. \square

Pour λ dans \mathcal{C}_n , considérons une matrice aléatoire

$$\Omega_n(\lambda) + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} M_i \Omega_n(\alpha_i) M_i^*,$$

où les M_i sont des variables gaussiennes standard indépendantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ et les α_i des réels positifs, ou, de façon équivalente, la matrice aléatoire $\Omega_n(\lambda) + M\Omega_k(\alpha)M^*$, où M est une gaussienne standard de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$. Quand $\lambda = 0$ et $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, cette matrice a une distribution de Wishart généralisée. Une des façons simples de calculer la loi de ces valeurs propres est d'utiliser la formule de Harish-Chandra (voir par exemple Wang [68]). Mais cette méthode ne s'applique pas aux autres cas. En revanche, la démarche que nous avons présentée pour le calcul des valeurs propres d'une matrice du LUE(\mathbb{F}), qui consiste à calculer cette loi par récurrence, fournit un moyen de calculer la loi de la partie radiale de $\Omega_n(\lambda) + M\Omega_k(\alpha)M^*$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Cependant, les calculs ne sont pas toujours aisés. En fait, quand $\lambda = 0$ et

$k \leq n$, nous proposons une autre méthode, qui fournit très simplement le résultat. Elle s'appuie sur le lemme 4.1 et le résultat de convergence suivant, dont on trouve une première "preuve" dans Borel [6] (voir Olshanski [59], Pickrell [62]).

THÉORÈME 5.11. Soit $(U_N)_{N \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que U_N est distribuée selon la mesure de Haar sur $U_N(\mathbb{F})$. Alors le mineur principal d'ordre n de $\sqrt{N}U_N$ converge en distribution vers une variable gaussienne standard $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, quand N tend vers l'infini.

PROPOSITION 5.12. Soit k un entier plus petit que n , M une variable gaussienne standard de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{\tilde{k}}$ tel que $\alpha_1 > \dots > \alpha_{\tilde{k}} > 0$. Alors il existe une constante C telle que les valeurs propres positives de $M\Omega_k(\alpha)M^*$ ont une densité $g_{n,k}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^{\tilde{k}}$ définie par

$$g_{n,k}(\lambda) = C \frac{d_n(\lambda)}{d_n(\alpha) \prod_{i=1}^{\tilde{k}} \alpha_i} \det(e^{-c \frac{\lambda_i}{\alpha_j}})_{1 \leq i, j \leq \tilde{k}}.$$

En particulier, quand $\tilde{k} = 1$ et $\alpha_1 = 1$, cette densité est proportionnelle à la fonction $\theta \in \mathbb{R} \mapsto d_n(\theta)e^{-c\theta}1_{\mathbb{R}_+}(\theta)$.

DÉMONSTRATION. Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier plus grand que n . On considère U_N une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar sur $U_N(\mathbb{F})$, la matrice aléatoire $M_N = U_N\Omega_N(\alpha)U_N^*$ et son mineur principal d'ordre n qu'on note $\pi_n(M_N)$. En utilisant le lemme 4.5 on montre que la densité des \tilde{k} valeurs propres strictement positives de $\pi_{N-1}(M_N)$ est proportionnelle à

$$\frac{d_{N-1}(\lambda)}{d_N(\alpha)} \det\left(\frac{(\alpha_i - \lambda_j)^{c-1}}{(c-1)!} 1_{\alpha_i > \lambda_j}\right)_{1 \leq i, j \leq \tilde{k}}.$$

En itérant pour les mineurs d'ordre inférieur et en utilisant l'identité de Cauchy-Binet, on obtient la densité des valeurs propres strictement positives de $\pi_n(M_N)$. Elle est proportionnelle à

$$\frac{d_n(\lambda)}{d_N(\alpha)} \det\left(\frac{(\alpha_i - \lambda_j)^{c(N-n)-1}}{(c(N-n)-1)!} 1_{\alpha_i > \lambda_j}\right)_{1 \leq i, j \leq \tilde{k}}.$$

Ainsi la distribution des valeurs propres positives de $N\pi_n(M_N)$ converge vers la distribution dont la densité est proportionnelle à

$$\frac{d_n(\lambda)}{d_n(\alpha) \prod_{i=1}^{\tilde{k}} \alpha_i} \det(e^{-c \frac{\lambda_i}{\alpha_j}})_{1 \leq i, j \leq \tilde{k}}.$$

Le théorème 5.11 affirme que $N\pi_n(M_N)$ converge en loi vers $M\Omega_n(\alpha)M^*$, quand N tend vers l'infini, ce qui complète la preuve. \square

Cette proposition explique en particulier pourquoi la dimension asymptotique $d_n(\theta)$ apparaît dans la densité des valeurs propres des perturbations de rang 1 que nous avons précédemment considérées.

3. Nouveaux ensembles, nouvelles propriétés

Ensemble de Laguerre classique. L'ensemble unitaire de Laguerre - le LUE(\mathbb{C}) selon nos notations - a été largement considéré. Il a d'abord été introduit en statistiques et y garde un rôle essentiel du fait de ses applications à l'analyse multivariée.

C'est par son lien avec les fonctions gamma de plusieurs variables qu'il est utilisé en analyse, en particulier en analyse harmonique. En effet, comme nous l'avons rappelé, pour $k \geq n$ le LUE $_{n,k}(\mathbb{C})$ est porté par le cône Ω des matrices hermitiennes définies positives et y a la densité dite de Wishart

$$H \mapsto \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(k)} \det(H)^{k-n} \exp -tr(H)$$

où

$$\Gamma_{\Omega}(k) = \int_{\mathcal{P}_n(\mathbb{C})} \det(H)^{k-n} \exp -tr(H) dH = (2\pi)^{n(n-1)/2} \Gamma(k) \cdots \Gamma(k-n+1)$$

est la fonction Γ du cône Ω (cf. Faraut et Koranyi [25], Forrester [27]). Il est remarquable que cette importante fonction spéciale apparaisse naturellement ainsi.

Si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors le processus $X_t = M_t M_t^*$ est un processus de Markov à valeurs dans Ω . Ses valeurs propres forment elles même un processus de Markov à valeurs dans la chambre de Weyl de type C . Elles vérifient l'équation différentielle stochastique

$$d\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)} dB_i(t) + 2\left(k + \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_j(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)}\right) dt$$

où les B_i sont des browniens indépendants. On en déduit le générateur du processus $r_i(t) = \sqrt{\lambda_i(t)}$ des racines de ses valeurs propres :

$$dr_i(t) = d\beta_i(t) + \left(\frac{k-n-1/2}{r_i(t)} + \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_i(t) - r_j(t)} + \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_i(t) + r_j(t)}\right) dt$$

Ce dernier est la partie radiale d'un mouvement brownien sur l'espace symétrique plat associé à $U(n, k)/U(n) \times U(k)$. C'est aussi la partie radiale d'un processus de Dunkl (cf. Forrester [27], Roesler [66]).

Nouveaux ensembles de Laguerre. L'étude des ensembles invariants LUE(\mathbb{F}) pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ est nouvelle. Aucun d'eux n'apparaît dans les ensembles de hamiltoniens gaussiens des 10 classes de symétrie de Altland et Zirnbauer. Nous avons par ailleurs déjà relevé certaines de leurs spécificités. Ainsi, nous avons remarqué que le support des lois des matrices du LUE $_{n,k}(\mathbb{F})$ est, pour les corps autres que \mathbb{C} , l'ensemble des matrices de rang \tilde{k} de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, alors que dans le cas complexe, c'est celui des matrices

définies positives de rang k . Au cours de nos recherches, d'autres particularités nous sont apparues. Nous avons en effet rappelé que si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors le processus $M_t \overline{M_t}^*$ et celui des valeurs propres sont markoviens, ces derniers étant des parties radiales du mouvement brownien sur l'espace symétrique plat associé à $U(n, k)/U(n) \times U(k)$. Ce n'est pas le cas des ensembles LUE(\mathbb{F}) pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$: si M est par exemple un mouvement brownien standard sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors ni le processus $M_t \Omega_2 M_t^*$ ni le processus des valeurs propres (c'est le même ici) ne sont markoviens. Il serait donc intéressant de poursuivre l'étude de ces ensembles invariants qui présentent avec ceux étudiés habituellement de profondes différences.

Processus déterminantaux entrelacés

Nous avons fait apparaître dans les deux précédents chapitres des processus entrelacés. Les premiers, que nous appellerons "triangulaires", sont obtenus en considérant les mineurs principaux de matrices invariantes de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. On construit les seconds, appelés "rectangulaires", en considérant des perturbations aléatoires successives de rang 1. Nous montrons dans ce chapitre qu'une large classe d'entre eux sont déterminantaux. Après avoir effectué quelques rappels sur les processus déterminantaux dans la **section 1**, nous étudions en **section 2** les processus entrelacés triangulaires et en **section 3** les processus entrelacés rectangulaires.

1. Quelques rappels

Soit E un borélien de \mathbb{R}^p . Une mesure de comptage ξ sur E est une mesure telle que $\xi(B)$ est un entier pour tout borélien B borné de E . Considérons une suite de variables aléatoires $(T_k)_{k \geq 1}$ de E et $\Xi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_{T_k}$. Si Ξ est presque sûrement une mesure de comptage sur E , on dit que Ξ est un processus ponctuel sur E . Soit m une mesure de référence sur E . Une fonction ρ_k sur E^k telle que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \Xi(B_i)\right] = \int_{B_1 \times \dots \times B_k} \rho_k(x_1, \dots, x_k) m(dx_1) \cdots m(dx_k),$$

pour tous boréliens bornés disjoints B_1, \dots, B_k de E , est appelée la $k^{\text{ième}}$ fonction de corrélation de Ξ . S'il existe une fonction $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det(K(x_i, x_j))_{k \times k},$$

pour tous $x_1, \dots, x_k \in E$, alors le processus ponctuel est dit déterminantal et K est appelé noyau de corrélation du processus. Lorsque E est fini et muni de la mesure de comptage, la condition devient :

$$\mathbb{P}(\{T_i : i \geq 1\} \supset \{x_1, \dots, x_k\}) = \det(K(x_i, x_j))_{k \times k},$$

pour tous $x_1, \dots, x_k \in E$, tels que $x_i \neq x_j$, pour $i \neq j$.

Supposons que $E = \mathbb{R}$. Considérons une probabilité μ_n sur \mathbb{R}^n . On suppose que celle-ci possède une densité de probabilité u_n symétrique, c'est-à-dire invariante par permutation des coordonnées, sur \mathbb{R}^n . L'image de μ_n par l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$$

est un processus ponctuel fini sur \mathbb{R} . On peut montrer (voir par exemple [39]) que ses fonctions de corrélation sont données par

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} u_n(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \cdots dx_n.$$

Lorsqu'il existe des fonctions ϕ_i et ψ_i mesurables sur E telles que les fonctions $\phi_i \psi_j$ sont intégrables sur E pour tout i, j et que u_n est définie par

$$u_n(x_1, \dots, x_n) = C \det(\psi_i(x_j))_{n \times n} \det(\phi_i(x_j))_{n \times n},$$

où C est une constante de normalisation, alors la proposition suivante montre que le processus ponctuel associé est déterminantal et fournit son noyau de corrélation. On note $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice définie par

$$A_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \psi_i(x) \phi_j(x) m(dx).$$

PROPOSITION 6.1. La matrice A est inversible, la mesure image de μ_n par $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ est un processus ponctuel déterminantal sur \mathbb{R} dont le noyau de corrélation est donné par

$$K(x, y) = \sum_{i, j=1}^n \psi_i(x) (A^{-1})_{ij} \phi_j(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

On pourra se rapporter à [39] pour une preuve de cette proposition.

EXEMPLE 1. Classiquement, cette proposition est utilisée pour démontrer que le processus ponctuel associé aux valeurs propres d'une matrice du GUE est déterminantal sur \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue et pour calculer son noyau de corrélation. En effet, les valeurs propres d'une matrice gaussienne standard du GUE_n - le $\text{GUE}_n(\mathbb{C})$ selon nos notations - ont une densité (symétrisée) proportionnelle à

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2} \lambda_i^2},$$

c'est-à-dire

$$\det(\lambda_i^{j-1} e^{-\frac{1}{4} \lambda_i^2})_{n \times n}^2.$$

Donc, pour toute suite de polynômes $(p_j)_{j \geq 0}$ telle que p_j est de degré j , la densité des valeurs propres d'une matrice M du $\text{GUE}_n(\mathbb{C})$ est proportionnelle à

$$\det(p_{j-1}(\lambda_i) e^{-\frac{1}{4} \lambda_i^2})_{n \times n}^2.$$

Notons pour tout $i \in \mathbb{N}$, h_i le polynôme de Hermite de degré i tel que

$$\int_{\mathbb{R}} h_{i-1}(x)h_{j-1}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = \delta_{i,j}$$

La densité des valeurs propres de M est alors proportionnelle à

$$\det (h_{j-1}(\lambda_i)e^{-\frac{1}{4}\lambda_j})_{n \times n}^2.$$

D'après la proposition précédente, la mesure image par

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i},$$

de la loi des valeurs propres de M est un processus ponctuel déterminantal de noyau de corrélation

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^k p_{i-1}(x)p_{i-1}(y)e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Le théorème de Wigner affirme que les lois spectrales des matrices du $\text{GUE}_n(\mathbb{C})$ correctement renormalisées convergent, quand n tend vers l'infini, vers la loi du demi-cercle [71]. Les fluctuations ont été déterminées récemment dans le travail fondamental de Tracy et Widom. Parmi les méthodes employées pour démontrer ces convergences, celle dite "des polynômes orthogonaux" occupe une place importante. Les polynômes orthogonaux constituent en effet un outil particulièrement puissant pour étudier le comportement asymptotique, aussi bien global que local, des valeurs propres dont la densité est de la forme

$$(25) \quad \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{i=1}^n w(\lambda_i),$$

où w est une fonction intégrable sur \mathbb{R} . Les valeurs propres des matrices du $\text{GUE}_n(\mathbb{C})$ vérifient cette hypothèse. Les matrices du $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{C})$, $k \geq n$ aussi, avec $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha = k - n$. Le comportement asymptotique de leurs valeurs propres peut donc s'étudier par la méthode des polynômes orthogonaux. Pour les matrices du $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{C})$, ce sont les polynômes de Laguerre qui interviennent. La loi limite est la loi de Marchenko-Pastur [52] : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de matrices du $\text{LUE}_{n,k(n)}(\mathbb{C})$, avec $\frac{k(n)}{n} \sim 1$, alors la loi spectrale de $\frac{1}{n}X_n$ converge, quand n tend vers l'infini, vers la loi de Marchenko-Pastur :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{x}}\sqrt{4-x}1_{[0,4]}(x).$$

Considérons l'exemple moins classique des matrices gaussiennes standard du $\text{GUE}(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$. Donnons tout d'abord la loi des valeurs propres positives. Nous posons $\tilde{n} = n$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $\tilde{n} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. La formule d'intégration de Weyl ([38], Thm. I.5.17) garantit l'existence d'une constante

C telle que les valeurs propres positives d'une variable gaussienne standard M de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ a une densité f_{gue} définie sur $\mathbb{R}_+^{\tilde{n}}$ par

$$f_{gue}(\lambda) = C d_n(\lambda)^2 e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^2},$$

où C est une constante et d_n est définie à la définition 10.

EXEMPLE 2. La densité des valeurs propres positives d'une matrice M du $\text{GUE}_n(\mathbb{H})$ est proportionnelle à

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 \prod_{i=1}^n \lambda_i^2 e^{-\frac{1}{2} \lambda_i^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i),$$

c'est-à-dire à

$$\det \left(\lambda_i^{2j-1} e^{-\frac{1}{2} \lambda_i^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i) \right)_{n \times n}^2.$$

Par ailleurs, les polynômes de Hermite possèdent la propriété de n'avoir que des monômes de même parité. Donc la densité des valeurs propres positives de M est proportionnelle à

$$\det \left(h_{2j-1}(\lambda_i) e^{-\frac{1}{4} \lambda_i^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i) \right)_{n \times n}^2.$$

La proposition précédente assure que le processus ponctuel associé aux valeurs propres positives de M est déterminantal sur \mathbb{R}_+ de noyau de corrélation

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^k h_{2i-1}(x) h_{2i-1}(y) e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}, \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

EXEMPLE 3. La densité des valeurs propres positives d'une matrice M du $\text{GUE}_n(\mathbb{R})$ pour $n = 2r$, est proportionnelle à

$$\prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 \prod_{i=1}^r e^{-\frac{1}{2} \lambda_i^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i).$$

On en déduit comme précédemment que le processus ponctuel associé est déterminantal sur \mathbb{R}_+ de noyau de corrélation

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^r h_{2i-2}(x) h_{2i-2}(y) e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}, \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

En effectuant le changement de variable $y = x^2$ dans les deux derniers exemples, on remarque que les carrés des valeurs propres des matrices du $\text{GUE}_n(\mathbb{F})$, pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$, ont une densité de la forme (25), avec $\omega(x) = x^\alpha e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $\alpha \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Comme pour le LUE classique, la loi limite est la loi de Marchenko-Pastur [52]. Donc, si X_n est une matrice du $\text{GUE}_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$, la loi spectrale (en ne considérant que les valeurs propres positives) de $\frac{1}{n} X_n$ converge vers la loi du quart de cercle

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{[0,2]}(x).$$

Les densités des valeurs propres positives des matrices du $\text{LUE}(\mathbb{F})$, pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$, peuvent elle aussi s'écrire, comme dans le cas classique, comme un produit de deux déterminants. Donnons l'exemple de $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ et $n = k$. D'après le théorème 5.9 la densité des valeurs propres positives est proportionnelle à

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \prod_{i=1}^n \lambda_i e^{-2\lambda_i},$$

c'est-à-dire

$$\det(\lambda_i^{2j-1})_{n \times n} \det(\lambda_i^{j-1} e^{-2\lambda_i})_{n \times n}.$$

Le processus ponctuel associé est donc déterminantal et la proposition 6.1 permet de calculer son noyau. Nous le donnerons de façon explicite ultérieurement. En revanche, on ne peut se ramener à une densité de la forme (25).

Les valeurs propres des matrices du GUE interviennent, nous l'avons rappelé, dans de nombreux problèmes a priori fort éloignés de la sphère des matrices aléatoires. Récemment, suite aux travaux de Baryshnikov [2], l'intérêt s'est porté sur un autre processus ponctuel lié aux matrices du GUE : le processus des mineurs. Ce dernier paraît lui aussi revêtir un caractère universel. Johansson et Nordenstam [40], Okounkov et Reshetikhin [56] ont ainsi mis en évidence son implication dans différents modèles de pavages aléatoires. Le processus des mineurs partage avec ces modèles une structure d'entrelacement remarquable, d'où il tire sa structure déterminantale. Nous avons introduit dans les chapitres précédents différents processus entrelacés et calculé explicitement leur loi. Dans les sections suivantes, nous déduisons de ces formules explicites leur caractère déterminantal.

2. Processus entrelacés triangulaires

Dans cette partie, nous considérons les processus ponctuels sur $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ associés aux processus des mineurs de matrices aléatoires invariantes de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ étudiés aux chapitres 4.

DÉFINITION 13. On dit qu'une matrice aléatoire invariante M de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ appartient à la classe \mathcal{K} si les valeurs propres de M pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, et les valeurs propres positives de M pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, ont une densité jointe par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ proportionnelle à

$$d_n(\lambda) \det(\psi_j(\lambda_i))_{\tilde{n} \times \tilde{n}},$$

où les ψ_i sont des fonctions réelles continues sur \mathbb{R} , égales à zéro sur \mathbb{R}_- pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, et telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k \psi_i(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

De nombreuses matrices invariantes appartiennent à la classe \mathcal{K} , notamment les matrices aléatoires des ensembles gaussiens $\text{GUE}(\mathbb{F})$ et de Laguerre $\text{LUE}(\mathbb{F})$ précédemment introduits. Pour une matrice $M \in \mathcal{K}$, on considère dans le théorème suivant le processus des mineurs $X(M)$ défini au chapitre

4. Nous choisissons comme mesure de référence m le produit de la mesure de comptage sur $\{1, \dots, n\}$ avec la mesure de Lebesgue, sur \mathbb{R} quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, sur \mathbb{R}_+ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. On pose $c = 1$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $c = 2$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

THÉORÈME 6.2. Soit M une matrice aléatoire invariante de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ appartenant à la classe \mathcal{K} . On considère le vecteur aléatoire $X = X(M)$ et le processus ponctuel associé Ξ défini par

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{(k, X_i^{(k)})}, \text{ quand } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \\ \Xi &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \delta_{(k, |X_i^{(k)}|)}, \text{ quand } \mathbb{F} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors,

- (i) le processus ponctuel Ξ est déterminantal,
- (ii) le noyau de corrélation de Ξ est, pour $(r, x), (s, y) \in E$,

$$\begin{aligned} K((r, x), (s, y)) &= -\frac{(y-x)^{c(s-r)-1}}{(c(s-r)-1)!} \mathbf{1}_{s>r, y \geq x} \\ &+ \alpha \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \psi_{r-k}^r(x) \int \frac{\partial^{c(n-s)} d_n}{\partial z_k^{c(n-s)}}(z_1, \dots, z_{k-1}, y, z_{k+1}, \dots, z_{\tilde{n}}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\tilde{n}} \psi_i(z_i) dz_i, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_{r-k}^r(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{(c(n-r)-1)!} (z-x)^{c(n-r)-1} \psi_k(z) dz, \text{ si } r < n, \\ \psi_{n-k}^n(x) &= \psi_k(x) \text{ et } \alpha^{-1} = \int d_n(z) \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \psi_i(z_i) dz_i. \end{aligned}$$

On a vu que $(X^{(1)}(M), \dots, X^{(n)}(M))$ quand M est une matrice aléatoire invariante de $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$, a la même loi que $(X^{(3)}(N), X^{(5)}(N), \dots, X^{(2n+1)}(N))$ quand N est une matrice aléatoire invariante de $\mathcal{P}_{2n+1}(\mathbb{R})$, pourvu que $X^{(n)}(M)$ ait la même loi que $X^{(2n+1)}(N)$. Ainsi le cas quaternionique se déduit du cas réel impair (voir section 6).

COROLLAIRE 6.3. On suppose que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées et qu'on peut écrire $d_n(\lambda) = \det(\chi_i(\lambda_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}}$, où $(\chi_k)_{k \geq 1}$ est une suite de fonctions réelles sur \mathbb{R} telles que les $\chi_i \psi_j$ soient intégrables sur \mathbb{R} et que $\int_{\mathbb{R}} \chi_i(x) \psi_j(x) dx = \delta_{ij}$. Alors

$$K((r, x), (s, y)) = -\frac{(y-x)^{c(s-r)-1}}{(c(s-r)-1)!} \mathbf{1}_{s>r, y \geq x} + \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \psi_{r-k}^r(x) \frac{d^{c(n-s)} \chi_k}{dx^{c(n-s)}}(y).$$

Indiquons que si la partie radiale de M est déterministe et égale à un élément λ dans l'intérieur de la chambre de Weyl, le théorème et son corollaire restent vrais moyennant quelques changements qui consistent à remplacer dans le noyau la mesure $\psi_i(z) dz$ par la mesure de Dirac $\delta_{\lambda_i}(dz)$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et par $\delta_{|\lambda_i|}(dz)$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, et à remplacer dans la mesure de référence la mesure de comptage sur $\{1, \dots, n\}$ par la mesure de comptage sur $\{1, \dots, n-1\}$. Décrivons quelques applications de ce théorème avant d'en donner une preuve. Rappelons qu'on pose $\epsilon = 1$ si $n \notin 2\mathbb{N}$ et $\epsilon = 0$ sinon.

Le cas gaussien : $\text{GUE}(\mathbb{F})$. On a rappelé la loi des valeurs propres d'une matrice gaussienne standard de $\text{GUE}(\mathbb{F})$ dans la première section. Une telle matrice satisfait l'hypothèse du théorème avec $\psi_i(x) = x^{i-1}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\psi_i(x) = x^{2i-2+\epsilon}e^{-\frac{1}{2}x^2}1_{x>0}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $\psi_i(x) = x^{2i-1}e^{-\frac{1}{2}x^2}1_{x>0}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. De plus, les hypothèses du corollaire sont vérifiées si on pose $\chi_i = h_{i-1}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\chi_i = h_{2i-2+\epsilon}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $\chi_i = h_{2i-1}$ quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, où $(h_i)_{i \geq 0}$ est la suite des polynômes de Hermite normalisés pour le poids $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, h_i étant de degré i .

Le cas Laguerre : $\text{LUE}(\mathbb{F})$. On déduit du théorème 5.9 qu'une matrice du $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ vérifie les hypothèses du théorème 6.2 pour $k \geq n$ avec $\psi_i(x) = x^{i-1+k-\tilde{n}}e^{-cx}1_{x>0}$.

Ainsi, le corollaire 6.3 généralise le théorème 1.3 de Johansson et Nordenstam [40], qui considère le cas du $\text{GUE}(\mathbb{C})$ ainsi que Okounkov et Reshetikhin [56]. La proposition suivante, qui donne le noyau du processus des mineurs associé à une matrice du $\text{GUE}_\infty(\mathbb{R})$, a été annoncée dans [17]. Forrester et Nordenstam en ont déposée ensuite une preuve sur Arxiv [28] et montré son implication dans des modèles de pavages aléatoires construits en ajoutant des symétries aux modèles liés au GUE classique. Ils ont par ailleurs étudié le comportement asymptotique local du processus ponctuel associé. Dans la proposition suivante, les (h_n) sont les polynômes de Hermite.

PROPOSITION 6.4. Soit M une variable gaussienne standard de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R})$. On considère la partie radiale $X^{(k)} \in \mathbb{R}^{\tilde{k}}$ du mineur principal d'ordre k de M . Alors le processus ponctuel $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \delta_{(k, |X_i^{(k)}|)}$ est déterminantal sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ de noyau de corrélation

$$\begin{aligned} R((r, x), (s, y)) = & -\frac{1_{r \leq s}}{(s-r-1)!} (y-x)^{s-r-1} 1_{y \geq x} \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{r} \wedge \tilde{s}} \frac{((r-2i)!)^{1/2}}{((s-2i)!)^{1/2}} h_{s-2i}(y) h_{r-2i}(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ & + \sum_{i=\tilde{r}+1}^{\tilde{s}} \frac{h_{s-2i}(y)}{((s-2i)! \sqrt{\pi})^{1/2}} \int_x^{+\infty} \frac{(z-x)^{2i-r-1}}{(2i-r-1)!} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \end{aligned}$$

où $\tilde{r} = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$, $\tilde{s} = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$.

DÉMONSTRATION. Soit n un entier impair et M une variable gaussienne standard de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. La matrice M appartient à la classe \mathcal{K} avec $\psi_i = h_{2i-1}$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$. Les fonctions $\chi_i = h_{2i-1}$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$, vérifient les hypothèses

du corollaire 6.3. Le processus ponctuel $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{(k, |X_i^{(k)}|)}$ est déterminantal sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ et son noyau de corrélation K est égal à

$$K((r, x), (s, y)) = -\frac{1_{s < r}}{(r-s-1)!} (y-x)^{r-s-1} 1_{y \geq x} + \sum_{k=1}^{\tilde{n}} h_{2k-1}^{(n-s)}(y) \xi_k(r, x),$$

où $\xi_k(r, x) = \int_x^\infty \frac{(z-x)^{n-r-1}}{(n-r-1)!} h_{2k-1}(z) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$. Nous rappelons que $h'_n = \sqrt{n} h_{n-1}$. En posant $i = \tilde{n} - k + 1$, on obtient que

$$\sum_{k=1}^{\tilde{n}} h_{2k-1}^{(n-s)}(y) \xi_k(r, x) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \left[\frac{(n-2i)!}{(s-2i)!} \right]^{1/2} h_{s-2i}(y) \xi_k(r, x)$$

Considérons $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. On rappelle que

$$h_n(x) = \frac{1}{(n! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_n(x).$$

En intégrant par partie on obtient pour $i \geq \tilde{r} + 1$,

$$\xi_k(r, x) = \frac{1}{((n-2i)! \sqrt{\pi})^{1/2}} \int_x^\infty \frac{(z-x)^{2i-r-1}}{(2i-r-1)!} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz,$$

et pour $i \leq \tilde{r}$,

$$\xi_k(r, x) = \left(\frac{(r-2i)!}{(n-2i)!} \right)^{1/2} h_{r-2i}(x) e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

ce qui démontre la proposition. \square

Prouvons maintenant le théorème 6.2. Pour cela, nous introduisons la fonction D définie par :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, avec la convention $x_r^{(r-1)} = a$,

$$D(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \det(\psi_j(x_i^{(n)}))_{n \times n} \prod_{r=1}^n \det(1_{x_j^{(r)} > x_i^{(r-1)}})_{r \times r},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, avec la convention $x_r^{(2r-1)} = 0$,

$$D(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \det(\psi_j(x_i^{(n)}))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \prod_{r=1}^n \det(1_{x_j^{(r)} > x_i^{(r-1)}})_{\tilde{r} \times \tilde{r}}.$$

Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. Soit λ_N la mesure de comptage sur $\frac{1}{N}\mathbb{N}$. Pour $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on écrit,

$$\begin{aligned} (f *_{\lambda_N} g)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, z) g(z, y) \lambda_N(dz), \\ (f *_{\lambda_N} h)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, z) h(z) \lambda_N(dz), \\ f^{*\lambda_N(r)} &= 0, \text{ si } r \leq 0, \quad f^{*\lambda_N(1)} = f, \\ f^{(r)} &= f *_{\lambda_N} f^{(r-1)}, \text{ si } r \geq 1. \end{aligned}$$

Le cas complexe du lemme suivant est une application immédiate du lemme 3.4 de [8]. Le cas réel s'en déduit moyennant quelques modifications marginales.

LEMME 6.5. On considère une variable aléatoire $\tilde{\Lambda}$ à valeurs dans l'ensemble fini $\frac{1}{N}GT_{n,\mathbb{Z}}$. On suppose que les fonctions ψ_i sont à support dans un intervalle $]a, b[$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(\tilde{\Lambda} = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})) = C \cdot D(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}).$$

Alors le noyau de corrélation du processus ponctuel associé $\tilde{\Xi}$ est défini par
– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} K((r, x), (s, y)) &= -\phi^{*\lambda_N(s-r)}(x, y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \psi_{r-k}^{r,N}(x) \sum_{l=1}^s (A^{-1})_{kl} \phi^{*\lambda_N(s-l+1)}(a, y), \end{aligned}$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} K((r, x), (s, y)) &= -\phi^{*\lambda_N(s-r)}(x, y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \psi_{r-k}^{r,N}(x) \sum_{l=1}^{\tilde{s}} (B^{-1})_{kl} \phi^{*\lambda_N(s-2l+1)}(0, y), \end{aligned}$$

où $\phi(x, y) = 1_{]x, \infty[}(y)$, et A et B sont des matrices inversibles définies par $A_{ij} = \phi^{*\lambda_N(n-i+1)} *_{\lambda_N} \psi_j(a)$, $i, j = 1, \dots, n$, et $B_{ij} = \phi^{*\lambda_N(n-2i+1)} *_{\lambda_N} \psi_j(0)$, $i, j = 1, \dots, \tilde{n}$ et $\psi_{r-k}^{r,N}$ est égal à ψ_{r-k}^r en remplaçant la mesure de Lebesgue dans l'intégrale par la mesure de comptage λ_N .

Pour $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on écrit

$$(26) \quad (f * g)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z)g(z, y) dz, \quad (f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z)h(z) dz,$$

$$f^{(1)} = f, \quad f^{(r)} = f * f^{(r-1)} = f^{(r-1)} * f, \quad \text{si } r \geq 1, \quad f^{(r)} = 0, \quad \text{si } r \leq 0.$$

LEMME 6.6. Soit M une matrice aléatoire invariante choisie comme dans le théorème 6.2 et Ξ le processus ponctuel associé. Quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, on suppose que les valeurs propres de M sont dans un intervalle $]a, b[$. Alors le noyau de corrélation de Ξ est défini par

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} K((r, x), (s, y)) &= -\phi^{(s-r)}(x, y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \psi_{r-k}^r(x) \sum_{l=1}^s (A^{-1})_{kl} \phi^{(s-l+1)}(a, y), \end{aligned}$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$K((r, x), (s, y)) = -\phi^{(s-r)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \psi_{r-k}^r(x) \sum_{l=1}^{\tilde{s}} (B^{-1})_{kl} \phi^{(s-2l+1)}(0, y),$$

où $\phi(x, y) = 1_{[x, \infty[}(y)$, et A et B sont des matrices inversibles définies par $A_{ij} = \phi^{(n-i+1)} * \psi_j(a)$, $i, j = 1, \dots, n$, et $B_{ij} = \phi^{(n-2i+1)} * \psi_j(0)$, $i, j = 1, \dots, \tilde{n}$.

DÉMONSTRATION. On considère

$$\Lambda = (\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}),$$

où $\Lambda^{(r)} = \sigma_r(X^{(r)}(M))$, quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $\Lambda^{(r)} = \sigma_r(|X^{(r)}(M)|)$, quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, où les σ_r sont des permutations aléatoires des coordonnées, indépendantes, distribuées uniformément et indépendantes de M . Ces permutations aléatoires sont introduites pour rendre les densités considérées symétriques en leur coordonnées. La matrice aléatoire M étant invariante, le théorème 4.2, le lemme 4.3 et l'identité (20) impliquent que la densité de $(\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)})$ est proportionnelle à la fonction D . On considère une suite $(\tilde{\Lambda}_N)_N$ de variables aléatoires discrètes définies comme au lemme 6.5. D'après le lemme, le processus associé est déterminantal de noyau de corrélation noté K_N . On obtient le résultat en faisant tendre N vers l'infini dans K_N . \square

PREUVE DU THÉORÈME 6.2. Ecrivons la preuve pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Sous les hypothèses du lemme 6.6 et en utilisant ses notations, on a pour $r \geq 1$

$$\phi^{(r)}(0, y) = \frac{y^{r-1}}{(r-1)!} 1_{y \geq 0}.$$

Ainsi, $\phi^{(s-2l+1)}(0, y) = \frac{\partial^{n-s}}{\partial y^{n-s}} \phi^{(n-2l+1)}(0, y)$, $l = 1, \dots, \tilde{n}$, et

$$\sum_{l=1}^s (B^{-1})_{kl} \phi^{(s-2l+1)}(0, y) = \frac{\partial^{n-s}}{\partial y^{n-s}} \sum_{l=1}^n (B^{-1})_{kl} \phi^{(n-2l+1)}(0, y).$$

On note $s_{lk}(B)$ la matrice obtenue à partir de B en supprimant la $l^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne. On a

$$(B^{-1})_{kl} = \frac{(-1)^{k+l}}{\det(B)} \det(s_{lk}(B))_{\tilde{n}-1 \times \tilde{n}-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\tilde{n}} (B^{-1})_{kl} \phi^{(n-2l+1)}(0, y) &= \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^{k+l}}{\det(B)} \det(s_{lk}(B))_{\tilde{n}-1 \times \tilde{n}-1} \phi^{(n-2l+1)}(0, y) \\
&= \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^{k+l}}{\det(B)} \det(\phi^{(n-2i+1)} * \psi_j(0))_{\substack{i \neq l \\ j \neq k}} \phi^{(n-2l+1)}(0, y) \\
&= \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^{k+l}}{\det(B)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \det(\phi^{(n-2i+1)}(0, z_j))_{\substack{i \neq l \\ j \neq k}} \phi^{(n-2l+1)}(0, y) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\tilde{n}} \psi_j(z_j) dz_j \\
&= \frac{1}{\det(B)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \det(\phi^{(n-2i+1)}(0, z_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\tilde{n}} \psi_j(z_j) dz_j, \text{ en posant } z_k = y.
\end{aligned}$$

De plus, si V_n est la fonction introduite à la définition 10, on a

$$\det(\phi^{(n-2i+1)}(0, z_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} = \det\left(\frac{z_j^{n-2i}}{(n-2i)!} 1_{z_i \geq 0}\right)_{\tilde{n} \times \tilde{n}} = V_n(z) \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1_{z_i \geq 0}}{(n-2i)!}.$$

On obtient le résultat annoncé pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ en faisant tendre a et b vers $-\infty$ et $+\infty$. La preuve du cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ est presque identique. On déduit le cas quaternionique du cas réel impair. \square

PREUVE DU COROLLAIRE 6.3. Le corollaire se déduit des identités

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\tilde{n}}} \det(\chi_i(z_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \prod_{j=1}^{\tilde{n}} \psi_j(z_j) dz_j &= \det\left(\int \chi_i(z) \psi_j(z) dz\right)_{\tilde{n} \times \tilde{n}} = 1 \\
\int_{\mathbb{R}^{\tilde{n}-1}} \det(\chi_i(z_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\tilde{n}} \psi_j(z_j) dz_j &= \det(a_{ij})_{\tilde{n} \times \tilde{n}} = \chi_k(y),
\end{aligned}$$

où $a_{ij} = \delta_{ij}$, $j \neq k$ et $a_{ik} = \chi_i(y)$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$. \square

3. Processus entrelacés rectangulaires

En considérant des perturbations successives de rang 1, nous avons construit au chapitre 5 des processus de Markov dont les états successifs vérifient des conditions d'entrelacement. On leur associe alors un processus ponctuel sur $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ dont les points sont entrelacés. Plus précisément, considérons $(M_k)_{k \geq 1}$ une suite de variable gaussiennes standard indépendantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Pour λ dans l'intérieur de la chambre de Weyl, on considère le processus $(R^{(k)})_{k \geq 1}$, où $R^{(k)}$ est la partie radiale de $\Omega_n(\lambda) + \sum_{i=1}^k M_i \Omega_n^1 M_i^*$, ainsi que le processus ponctuel associé

$$\Xi_\lambda = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \delta_{k, R_i^{(k)}}.$$

Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ avec n impair, les hypothèses de la proposition 2.13 de [39] sont satisfaites. Le processus ponctuel Ξ_λ est alors déterminantal. Dans la proposition suivante $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ avec n impair. Dans le cas réel pair, la question reste ouverte.

PROPOSITION 6.7. Soit $(M_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables gaussiennes standard indépendantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n}}$. On considère le processus ponctuel

$$\Xi_\lambda = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \delta_{k, R_i^{(k)}},$$

où $R^{(k)}$ est le vecteur des valeurs propres positives non ordonnées de

$$\Omega_n(\lambda) + \sum_{i=1}^k M_i \Omega_n^1 M_i^*.$$

Alors,

- (i) le processus ponctuel Ξ_λ est déterminantal sur $\{1, \dots, m\} \times \mathbb{R}_+$.
- (ii) Le noyau de corrélation de Ξ_λ est

$$K_\lambda((r, x), (s, y)) = -\phi^{(s-r)} + \sum_{i,j=1}^{\tilde{n}} \phi^{(m-r)} * \psi(x, i) (M^{-1})_{ij} \phi^{(s)}(\lambda_j, y),$$

où

$$\phi(x, y) = 1_{y \geq x} e^{-(y-x)}, \psi(x, i) = x^{i-1} \text{ quand } \mathbb{F} = \mathbb{C}$$

et

$$\phi(x, y) = e^{-c(x+y)} (e^{2c(x \wedge y)} - 1), \psi(x, i) = x^{2i-1} \text{ quand } \mathbb{F} = \mathbb{H} \text{ ou } \mathbb{F} = \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 5.6, la densité de $(R^{(1)}, \dots, R^{(m)})$ est proportionnelle à la fonction f définie par

$$f(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \left[\prod_{k=1}^m \det(\phi(x_i^{(k-1)}, x_j^{(k)})) \right] \det(\psi_j(x_i^{(m)})),$$

en posant $x^{(0)} = \lambda$. La proposition 2.13 de [39] donne immédiatement le résultat. \square

On trouve dans la littérature de nombreux processus présentant cette structure d'entrelacement rectangulaire. Citons parmi eux ceux obtenus en considérant des perturbation de rang 1 sur d'autres espaces de matrices que $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Diaconis et Shahshahani [18], [19], puis Porod [63], [64] et Rosenthal [65], ont étudié des marches aléatoires sur $U_n(\mathbb{F})$ dont les accroissements sont des rotations aléatoires invariantes sous l'action par conjugaison de $U_n(\mathbb{F})$. Il est remarquable que pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, le processus des valeurs propres associé, qui est markovien, présente sur le cercle des conditions d'entrelacement identiques à celles vérifiées par le processus des valeurs propres associé aux perturbations de rang 1 sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ que nous avons considérées (voir par

exemple [41]). En fait, le "wrapping map" introduit par Dooley et Wildberger [21] montre que ces deux processus sont liés de façon profonde. Il en va de même du processus obtenu dans [30] en considérant le spectre singulier associé à des perturbations de rang 1 sur $GL_n(\mathbb{C})$ invariantes par multiplication à gauche et à droite par $U_n(\mathbb{C})$. Il existe en effet une version hyperbolique du "wrapping map" [49], qui montre en particulier que la convolution de mesures invariantes par multiplication à gauche et à droite par $U_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$ est équivalente à la convolution de mesures invariantes par conjugaison de $U_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$.

Calcul des multiplicités

Nous avons considéré dans le chapitre 5 des perturbations par des matrices invariantes de rang 1 de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. D'après le théorème d'Heckman, l'analyse de ces perturbations repose sur la description de produits tensoriels de représentations bien choisies. Dans ce cas précis, les produits tensoriels à considérer sont $V_\lambda \otimes V_\gamma$, où λ est un poids dominant quelconque et γ un poids dominant colinéaire à celui de la représentation standard. Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, leur décomposition en composantes irréductibles est décrite par la formule de Pieri. Dans les autres cas, nous utilisons, pour obtenir les multiplicités souhaitées, la théorie des cristaux de Kashiwara, et plus particulièrement sa description des graphes cristallins associés aux représentations irréductibles des algèbres de Lie classiques [43]. Les résultats que nous montrons sont certainement contenus dans des descriptions plus générales (voir par exemple [3], [55]). Néanmoins, les preuves que nous proposons présentent l'avantage d'être assez simples, de fournir des descriptions explicites et de faire apparaître de façon naturelle des conditions d'entrelacement. De plus les conditions s'expriment en termes de chemins qui ne se croisent pas, dans l'esprit de l'approche de Gessel et Viennot, comme par exemple dans Fulmek et Krattenthaler [31]. Dans la **section 1**, nous effectuons quelques rappels sur la théorie des cristaux de Kashiwara. La décomposition des produits tensoriels est décrite dans la **section 2**. Nous avons étudié au chapitre 4 les mineurs principaux des matrices invariantes de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Le calcul de leur loi jointe repose sur l'analyse des branchements de $U_n(\mathbb{F})$ à $U_{n-1}(\mathbb{F})$. Ces règles de branchement sont classiques. Nous les rappelons dans la **section 3**. Enfin, nous démontrons en **section 4** le lemme 4.1 et la proposition 5.1 admis aux chapitres 4 et 5.

1. Cristal et graphe cristallin

Nous rappelons dans un premier temps la définition d'un cristal et les propriétés des graphes cristallins dont nous aurons besoin. Pour un rappel plus complet, le lecteur pourra se reporter à Kashiwara [42]. Nous considérons comme au chapitre 2 un groupe compact connexe K d'algèbre de Lie \mathfrak{k} et d'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. Nous reprenons les notations introduites dans ce chapitre. On indexe les racines simples par $I \subset \mathbb{N}$ et on note $h_i = h_{\alpha_i}$,

$i \in I$. Un cristal sur $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ est un ensemble B muni des applications, pour $i \in I$

$$\begin{aligned} wt &: B \rightarrow P, \\ \varepsilon_i &: B \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \\ \varphi_i &: B \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \\ \tilde{e}_i &: B \sqcup \{\dagger\} \rightarrow B \sqcup \{\dagger\}, \\ \tilde{f}_i &: B \sqcup \{\dagger\} \rightarrow B \sqcup \{\dagger\}, \end{aligned}$$

où \dagger est un élément cimetière, satisfaisant pour $i \in I$, $b, b_1, b_2 \in B$, les propriétés suivantes :

- (1) $\tilde{e}_i \dagger = \tilde{f}_i \dagger = \dagger$.
- (2) $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, wt(b) \rangle$.
- (3) Si $\tilde{e}_i b \neq \dagger$, alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\tilde{e}_i b) &= \varepsilon_i(b) - 1, \\ \varphi_i(\tilde{e}_i b) &= \varphi_i(b) + 1, \\ wt(\tilde{e}_i b) &= wt(b) + \alpha_i. \end{aligned}$$

- (4) Si $\tilde{f}_i b \neq \dagger$, alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\tilde{f}_i b) &= \varepsilon_i(b) + 1, \\ \varphi_i(\tilde{f}_i b) &= \varphi_i(b) - 1, \\ wt(\tilde{f}_i b) &= wt(b) - \alpha_i. \end{aligned}$$

- (5) Si $\varphi_i(b) = -\infty$, alors $\tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = \dagger$.

- (6) $b_2 = \tilde{f}_i b_1$ si et seulement si $\tilde{e}_i b_2 = b_1$.

Soit B_1 et B_2 deux cristaux. On munit leur produit tensoriel $B_1 \otimes B_2 = \{b_1 \otimes b_2 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$ d'une structure de cristal par :

$$\begin{aligned} wt(b_1 \otimes b_2) &= wt(b_1) + wt(b_2), \\ \varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) &= \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - wt(b_1)), \\ \varphi_i(b_1 \otimes b_2) &= \max(\varphi_i(b_1) + wt(b_2), \varphi_i(b_2)), \\ \tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} (\tilde{e}_i b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{e}_i b_2) & \text{si } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2), \end{cases} \\ \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{f}_i b_2) & \text{si } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2), \end{cases} \\ \dagger \otimes b_2 &= b_1 \otimes \dagger = \dagger. \end{aligned}$$

Le graphe cristallin B d'un \mathfrak{k} -module de dimension finie est un exemple classique de cristal. C'est un graphe orienté coloré. Les sommets sont les points de B , les couleurs sont les points de I . Enfin, une flèche $b_1 \xrightarrow{i} b_2$

indique que $\tilde{f}_i(b_1) = b_2$ et $\tilde{e}_i(b_2) = b_1$. Le graphe cristallin d'un \mathfrak{k} -module de dimension finie est un cristal semi-normal, c'est-à-dire :

$$\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0 : \tilde{e}_i^n b \neq \dagger\} \text{ et } \varphi_i(b) = \max\{n \geq 0 : \tilde{f}_i^n b \neq \dagger\}.$$

Soit B un cristal. Le sous-ensemble de B engendré par un élément $b \in B$ est l'ensemble

$$\{\tilde{f}_{i_1}^{n_1} \cdots \tilde{f}_{i_k}^{n_k} b, k, n_1, \dots, n_r, i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}\} \cap B.$$

DÉFINITION 14. Soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. Un cristal est dit de plus haut poids λ si il possède un élément b_λ qui l'engendre, tel que $\tilde{e}_i b_\lambda = \dagger$, pour tout $i \in I$, et $wt(b_\lambda) = \lambda$. On le note $B(\lambda)$.

Pour $\lambda \in P_+$, le graphe cristallin d'un \mathfrak{k} -module de plus haut poids λ est un cristal de plus haut poids λ . On a la proposition suivante :

PROPOSITION 7.1. Soit B le graphe cristallin d'un \mathfrak{k} -module de dimension finie V . Alors

$$V = \bigoplus_{b \in B^h} V_{wt(b)}, \text{ avec } B^h = \{b \in B : \tilde{e}_i b = \dagger, \forall i \in I\}.$$

DÉFINITION 15. Soit B_1 et B_2 deux cristaux. Un morphisme de cristaux est une application $\psi : B_1 \sqcup \{\dagger\} \rightarrow B_2 \sqcup \{\dagger\}$ telle que $\psi(\dagger) = \dagger$ et vérifiant pour tout $b \in B_1$, $i \in I$,

$$wt(\psi(b)) = wt(b), \varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b), \varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b),$$

et pour b et i tel que $\tilde{e}_i b \neq \dagger$,

$$\tilde{e}_i \psi(b) = \psi(\tilde{e}_i b).$$

Deux cristaux de plus haut poids $B(\lambda)$ et $B(\gamma)$ sont isomorphes si et seulement si $\lambda = \gamma$. Soit B_1 et B_2 les graphes cristallins des \mathfrak{k} -modules de dimension finie V_1 et V_2 . Alors $B_1 \otimes B_2$ muni de la structure de cristal définie plus haut est le graphe cristallin du \mathfrak{k} -module $V_1 \otimes V_2$. On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 7.2. Soit V_λ et V_γ deux \mathfrak{k} -modules de plus haut poids $\lambda \in P^+$ et $\gamma \in P^+$. Alors

$$V_\lambda \otimes V_\gamma = \bigoplus V_{\lambda+wt(b)},$$

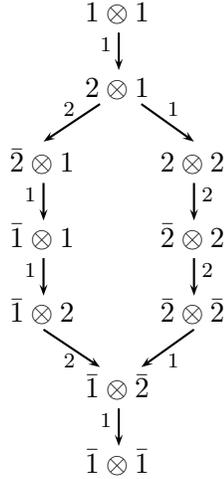
où la somme porte sur les sommets $b \in B(\gamma)$ tels que $\varepsilon_i(b_\lambda \otimes b) = 0$ (ou de manière équivalente $\varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle$) pour tout $i \in I$.

Exemple. Donnons un exemple pour $K = U_2(\mathbb{H})$. Il y a dans ce cas deux coracines simples $h_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$ et $h_2 = \epsilon_2$. Le graphe cristallin de la représentation standard V_{ϵ_1} est

$$B(\epsilon_1) : 1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} \bar{2} \xrightarrow{1} \bar{1},$$

avec $wt(1) = -wt(\bar{1}) = \epsilon_1$ et $wt(2) = -wt(\bar{2}) = \epsilon_2$. On montre facilement, en utilisant la structure de cristal de $B(\epsilon_1) \otimes B(\epsilon_1)$ définie plus haut, que

$1 \otimes 1$ est un sommet de plus haut poids $2\epsilon_1$. Ainsi $B(2\epsilon_1)$ est isomorphe au sous-cristal de $B(\epsilon_1) \otimes B(\epsilon_1)$ engendré par $1 \otimes 1$, c'est-à-dire :



Pour $\lambda = 2\epsilon_1 + \epsilon_2$, $\langle h_1, \lambda \rangle = \langle h_2, \lambda \rangle = 1$. On a donc la décomposition :

$$\begin{aligned}
 V_\lambda \otimes V_{2\epsilon_1} &= V_{\lambda+wt(1\otimes 1)} \oplus V_{\lambda+wt(2\otimes 1)} \oplus V_{\lambda+wt(\bar{2}\otimes 1)} \oplus V_{\lambda+wt(\bar{1}\otimes 1)} \oplus V_{\lambda+wt(\bar{1}\otimes \bar{2})} \\
 &= V_{4\epsilon_1+\epsilon_2} \oplus V_{3\epsilon_1+2\epsilon_2} \oplus V_{3\epsilon_1} \oplus V_{2\epsilon_1+\epsilon_2} \oplus V_{\epsilon_1}.
 \end{aligned}$$

2. Multiplicités tensorielles et graphes cristallins

Dans cette partie, nous décrivons les décompositions en composantes irréductibles des produits tensoriels $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$, $m \in \mathbb{N}$. Nous utilisons la description des graphes cristallins pour les algèbres de Lie classiques développée par Kashiwara et Nakashima dans [43].

Notons que les théorèmes 3.9 et 3.8 sont établis pour des suites de poids dominants de \mathcal{C}_n . Cependant, nous ne considérons ici que des poids dominants intégraux, qui sont les poids des représentations irréductibles du groupe $U_n(\mathbb{F})$ lui même. Ce sont les poids dominants à coordonnées dans \mathbb{Z} . Puisque ce sont les mesures limites qui nous intéressent, nous ne perdons évidemment rien à restreindre notre étude à ces poids dominants. Notons $\mathcal{C}_{n,\mathbb{Z}} = \{\lambda \in \mathcal{C}_n : \lambda \in \mathbb{Z}^n\}$. Nous écrirons dans ce qui suit " x " indifféremment pour $(x_1, \dots, x_{\tilde{n}}) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ et $\sum_{i=1}^{\tilde{n}} x_i \epsilon_i$.

2.1. Produits tensoriels de représentations pour le type A_{n-1} .

La décomposition du produit tensoriel $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$ pour le type A_{n-1} est classique. Elle est connue sous le nom de formule de Pieri (voir Fulton [32]). Nous présentons tout de même la démonstration de cette formule dans le cadre des graphes cristallins de Kashiwara. Cet exemple simple nous permettra de familiariser le lecteur avec les objets introduits. Pour le type A_{n-1} ,

les coracines simples sont $h_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$. Le graphe cristallin de V_{ϵ_1} est (voir [42]),

$$B(\epsilon_1) : 1 \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{n-1} n.$$

Ici le poids de i est ϵ_i , $i = 1, \dots, n$. Nous utilisons l'ordre usuel \leq sur $\{1, \dots, n\}$. Le théorème 3.4.2 de [43] affirme en particulier que

$$B(m\epsilon_1) = \{b_m \otimes \cdots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m} : b_{k+1} \geq b_k\}.$$

Soit λ un poids dominant de $\mathcal{C}_{n,\mathbb{Z}}$. Décrivons la décomposition du produit $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$. Dans la proposition 7.2, la somme porte sur les éléments $b_m \otimes \cdots \otimes b_1 \in B(m\epsilon_1)$ tels que pour tout $i = 1, \dots, n$, $\varepsilon_i(b_\lambda \otimes b_m \otimes \cdots \otimes b_1) = 0$, ce qui revient à dire que $\varepsilon_i(b_k) \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_{k+1}) + \cdots + wt(b_m) \rangle$ pour $1 \leq k \leq m$. Lorsque $b \in B(\epsilon_1)$, soit $b = i+1$ et $\varepsilon_i(b) = 1 = -\langle h_i, wt(b) \rangle$, soit $\varepsilon_i(b) = 0 \leq \langle h_i, wt(b) \rangle$. Nous avons ainsi

$$(27) \quad \varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle \Leftrightarrow 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b) \rangle.$$

Finalement, la somme porte, dans la décomposition considérée, sur les éléments $b_m \otimes \cdots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m}$ vérifiant, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, les conditions suivantes :

$$(28) \quad \begin{cases} b_{k+1} \geq b_k, \\ 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_m) + \cdots + wt(b_k) \rangle. \end{cases}$$

Nous traçons en figure 1 les fonctions

$$k \mapsto \mu_i(k) = \langle \epsilon_i, \lambda + wt(b_m) + \cdots + wt(b_{m-k+1}) \rangle.$$

En tout point k , une et une seule de ces fonctions μ_1, \dots, μ_n augmente de 1. De plus la $i^{\text{ème}}$ courbe ne peut décroître avant la $(i+1)^{\text{ème}}$ puisque $b_m \otimes \cdots \otimes b_1$ est un élément de $B(m\epsilon_1)$. Enfin, les courbes ne peuvent se croiser puisque $0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_m) + \cdots + wt(b_k) \rangle$. Ainsi l'application

$$b_a \otimes \cdots \otimes b_1 \mapsto \beta \in \mathbb{Z}^n,$$

avec $\beta_i = \langle \epsilon_i, \lambda + wt(b_m) + \cdots + wt(b_1) \rangle$, $i = 1, \dots, n$, est une bijection de

$$\{b \in B(m\epsilon_1) : b \text{ vérifie les conditions (28)}\}$$

dans

$$\{\beta \in \mathbb{Z}^n : \beta \succeq \lambda, \sum_i (\beta_i - \lambda_i) = m\}.$$

Nous obtenons donc la formule de Pieri :

PROPOSITION 7.3. Soit $\lambda, \gamma \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ et $\gamma = (m, 0, \dots, 0)$, $m \in \mathbb{N}$. Alors

$$V_\lambda \otimes V_\gamma = \bigoplus_\beta V_\beta$$

où la somme porte sur les poids dominants entiers tels que $\beta \succeq \lambda$, et $m = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \lambda_i)$.

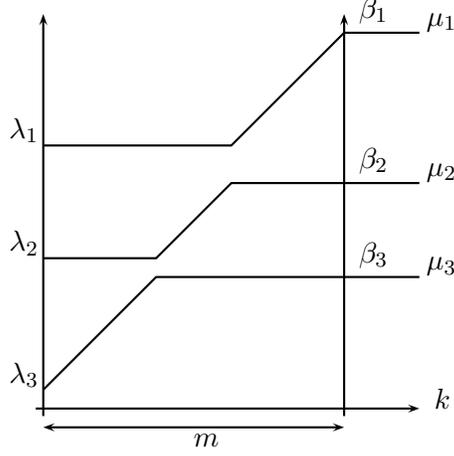


FIG. 1. Décomposition irréductible de $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$ pour le type A_2

2.2. Produits tensoriels de représentations pour le type C_n . Les coracines simples sont dans ce cas $h_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, $h_n = \epsilon_n$, et le graphe cristallin de V_{ϵ_1} est

$$B(\epsilon_1) : 1 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{n-1} n \xrightarrow{n} \bar{n} \xrightarrow{n-1} \dots \xrightarrow{1} \bar{1}.$$

Ici i et \bar{i} ont pour poids respectifs ϵ_i et $-\epsilon_i$. On définit l'ordre \leq sur $B(\epsilon_1)$ par $1 \leq \dots \leq n \leq \bar{n} \leq \dots \leq \bar{1}$. Par le théorème 4.5.1 de [43], on obtient

$$B(m\epsilon_1) = \{b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m} : b_{k+1} \geq b_k\}.$$

Soit λ un poids dominant de $\mathcal{C}_{n,\mathbb{Z}}$. Comme précédemment il est facile de montrer que l'équivalence (27) est vraie. La proposition 7.2 montre alors que la somme porte sur les éléments $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m}$ vérifiant les conditions suivantes pour $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq i \leq n$

$$(29) \quad \begin{cases} b_{k+1} \geq b_k, \\ 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_k) \rangle. \end{cases}$$

La fonction $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \mapsto (\beta, c) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, où $\beta_i = \langle \epsilon_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_1) \rangle$, et $c_i = \min_k (\langle \epsilon_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_k) \rangle)$, $i = 1, \dots, n$, est une bijection de $\{b \in B(m\Lambda_1) : b \text{ vérifie les conditions (29)}\}$ dans $\{(\beta, c) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n : \lambda \succeq c, \beta \succeq c, \sum_i (\lambda_i - c_i + \beta_i - c_i) = m\}$. La figure 2 illustre cette bijection. Des conditions d'entrelacement apparaissent : la $i^{\text{ième}}$ courbe ne peut décroître (respectivement croître) avant la $(i-1)^{\text{ième}}$ (resp. $(i+1)^{\text{ième}}$) puisque $b_m \otimes \dots \otimes b_1$ est un élément de $B(m\epsilon_1)$. De plus, les courbes restent positives et ne peuvent se croiser puisque $0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_k) + \dots + wt(b_m) \rangle$. On obtient ainsi la proposition suivante :

PROPOSITION 7.4. Soit $\lambda, \gamma \in \mathbb{N}^n$ tel que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, et $\gamma = (m, 0, \dots, 0)$, $m \in \mathbb{N}$. Alors

$$V_\lambda \otimes V_\gamma = \bigoplus_{\beta} M_{\lambda, \gamma}(\beta) V_\beta,$$

où la somme porte sur les $\beta \in \mathbb{N}^n$ tels qu'il existe $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $\lambda \succeq c$, $\beta \succeq c$ et $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - c_i + \beta_i - c_i) = m$. De plus, la multiplicité $M_{\lambda, \gamma}(\beta)$ du module irréductible de plus haut poids β est le nombre de $c \in \mathbb{N}^n$ vérifiant ces relations.

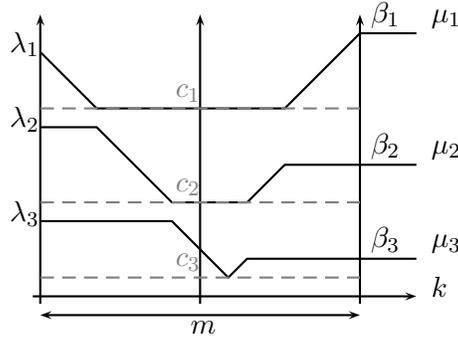


FIG. 2. Décomposition irréductible de $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$ pour le type C_3

Nous invitons le lecteur à comparer cette figure avec la figure 2 du chapitre 5. Les vecteurs R_i et R_{i+1} (disques noirs) vérifient les mêmes conditions d'entrelacement que les plus hauts poids λ et β . Les disques blancs vérifient les mêmes que c .

2.3. Produits tensoriels de représentations pour le type B_r . Les coracines des racines simples sont $h_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$, $h_r = 2\epsilon_r$, et le graphe cristallin de V_{ϵ_1} est

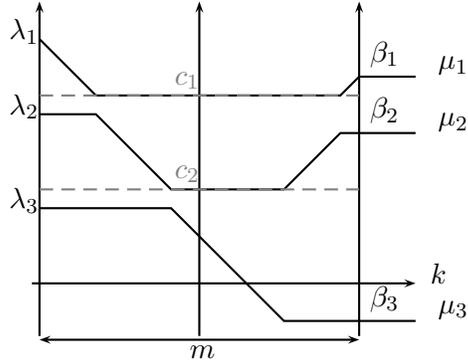
$$B(\epsilon_1) : 1 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{r-1} r \xrightarrow{r} 0 \xrightarrow{r} \bar{r} \xrightarrow{r-1} \dots \xrightarrow{1} \bar{1},$$

où i , \bar{i} et 0 ont pour poids respectifs ϵ_i , $-\epsilon_i$ et 0 pour $i = 1, \dots, r$. Nous choisissons un ordre sur $B(\epsilon_1)$ donné par $1 \leq \dots \leq r \leq 0 \leq \bar{r} \leq \dots \leq \bar{1}$. Par le théorème 5.7.1 de [43],

$$B(m\epsilon_1) = \{b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m} : b_{k+1} \geq b_k, b_{k+1} \otimes b_k \neq 0 \otimes 0\}.$$

Soit λ un poids dominant entier. Dans la décomposition du produit tensoriel $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$, la somme porte, comme pour le type C_n , sur les éléments $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(m\epsilon_1)$ tels que $\varepsilon_i(b_k) \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_{k+1}) + \dots + wt(b_m) \rangle$ pour $1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq r$. Quand $b \in B(\epsilon_1)$, $\langle h_i, wt(b) \rangle = -1$ si $b = i+1$ ou $b = \bar{i}$, pour $i \leq r-1$, $\langle h_r, wt(b) \rangle = -2$ si $b = \bar{r}$, et $\langle h_i, wt(b) \rangle$ est positif dans les autres cas. Ainsi, on montre facilement que

$$\varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} (b \neq 0 \text{ et } 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b) \rangle) \\ \text{ou } (b = 0 \text{ et } \langle h_r, \lambda \rangle \geq 1). \end{cases}$$

FIG. 3. Décomposition irréductible de $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$ pour le type D_3

3. Multiplicités des restrictions classiques

Nous notons $GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$ le sous-ensemble du polytope de Gelfand-Tsetlin $GT_n(\lambda)$ constitué des éléments à coordonnées dans \mathbb{Z} . Pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, les règles de branchement sont bien connues quand $K = U_n(\mathbb{F})$ et $H = U_{n-1}(\mathbb{F})$ (voir par exemple [50]). Rappelons-les.

PROPOSITION 7.7. Soit λ un point de $\mathcal{C}_{n,\mathbb{Z}}$ et V_λ un module irréductible de plus haut poids λ . La décomposition irréductible (7) quand $K = U_n(\mathbb{F})$ et $H = U_{n-1}(\mathbb{F})$ est la suivante :

$$V_\lambda = \bigoplus_{\beta} m_{U_{n-1}}^\lambda(\beta) V_\beta^{U_{n-1}},$$

où la somme porte sur les $\beta \in \mathcal{C}_{n-1,\mathbb{Z}}$ vérifiant

- quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\lambda_1 \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_{n-1} \geq \lambda_n$
- quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r + 1$, $\lambda_1 \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_{n-1} \geq \lambda_n \geq |\beta_n|$
- quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r$, $\lambda_1 \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_{n-1} \geq |\lambda_n|$
- quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $\exists c \in \mathbb{N}^n : \begin{cases} \lambda_1 \geq c_1 \geq \dots \geq c_{n-1} \geq \lambda_n \geq c_n \\ c_1 \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_{n-1} \geq c_n \end{cases}$

De plus, lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, $m_{U_{n-1}}^\lambda(\beta) = 1$ et pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $m_{U_{n-1}}^\lambda(\beta)$ est le nombre de $c \in \mathbb{N}^n$ vérifiant les inégalités ci-dessus.

On peut formuler cette proposition de façon plus condensée : dans la décomposition du produit tensoriel, la somme porte sur l'ensemble des β tels qu'il existe $x \in GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$ vérifiant $x^{(n-1)} = \beta$. De plus, lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, $m_{U_{n-1}}^\lambda(\beta) = 1$ et lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $m_{U_{n-1}}^\lambda(\beta)$ est le nombre de $c \in \mathbb{N}^n$ tels qu'il existe $x \in GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$ avec $x^{(n-1)} = \beta$ et $x^{(n-\frac{1}{2})} = c$.

4. Multiplicités asymptotiques et mesures limites

Dans cette section, nous calculons les mesures limites du théorème 2.4 et de son corollaire pour les cas qui nous intéressent et prouvons ainsi le lemme 4.1 et la proposition 5.1.

4.1. Preuve du lemme 4.1. Nous avons rappelé dans la proposition 7.7 les règles de branchement quand $K = U_n(\mathbb{F})$ et $H = U_{n-1}(\mathbb{F})$. Considérons la suite de sous-groupes $U_n(\mathbb{F}) \supset \cdots \supset U_1(\mathbb{F})$ et les restrictions correspondantes. Si on compare les règles de branchement successives avec la définition des polytopes de Gelfand-Tsetlin $GT_n(\lambda)$ pour λ un élément de $\mathcal{C}_{n,\mathbb{Z}}$, on obtient le résultat bien connu selon lequel le nombre de points de $GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$ est la dimension du $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ -module irréductible de plus haut poids λ . En fait, ces polytopes ont été introduits pour construire des bases de vecteurs poids des représentations irréductibles [33]. La formule de la dimension de Weyl (5) implique alors le lemme suivant. On pose $\epsilon = 1$ si $n \notin 2\mathbb{N}$, et $\epsilon = 0$ sinon.

LEMME 7.8. Soit λ un élément de $\mathcal{C}_{n,\mathbb{Z}}$. Le nombre de points de $GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$, qu'on note $\text{Card } GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$, est égal à :

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + 2n + 2 - j - i)}{(j - i)(2n + 2 - j - i)} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i + n + 1 - i}{n + 1 - i},$$

– quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq \tilde{n}} \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + 2\tilde{n} + \epsilon - j - i)}{(j - i)(2\tilde{n} + \epsilon - j - i)} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left[\frac{\lambda_i + \tilde{n} + \frac{1}{2} - i}{\tilde{n} + \frac{1}{2} - i} \right]^\epsilon.$$

Rappelons que μ_λ est la mesure image de la probabilité uniforme sur $GT_n(\lambda)$ par l'application $x \in GT_n(\lambda) \mapsto x^{(n-1)}$. Choisissons $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0.

LEMME 7.9. Soit λ un élément de la chambre de Weyl \mathcal{C}_n . On considère une suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de points de $\mathcal{C}_{n,\mathbb{Z}}$ telle que $\varepsilon_k \lambda_k$ converge vers λ quand k tend vers l'infini, et la suite de probabilités associées $(\mu_k)_{k \geq 0}$ définie au théorème 2.4 pour $K = U_n(\mathbb{F})$ et $H = U_{n-1}(\mathbb{F})$. Alors $(\mu_k)_{k \geq 1}$ converge vers la probabilité μ_λ .

DÉMONSTRATION. Puisque la dimension du $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ -module irréductible de plus haut poids γ est le nombre de points de $GT_{n,\mathbb{Z}}(\gamma)$, la mesure μ_k est

égale à

$$(31) \quad \sum_{\beta} \frac{\text{Card } GT_{n-1, \mathbb{Z}}(\beta)}{\text{Card } GT_{n, \mathbb{Z}}(\lambda_k)} m_{U_{n-1}}^{\lambda_k}(\beta) \delta_{\varepsilon_k \beta}.$$

En comparant la définition des polytopes de Gelfand-Tsetlin avec les règles de branchement données dans la proposition 7.7, nous obtenons que la mesure μ_k est l'image par l'application $x \in GT_n(\varepsilon_k \lambda_k) \mapsto x^{(n-1)}$ de la mesure $\frac{1}{\dim(\lambda_k)} \sum_{x \in GT_{n, \mathbb{Z}}(\lambda_k)} \delta_{\varepsilon_k x}$. Cette dernière mesure converge vers la mesure uniforme sur $GT_n(\lambda)$. Ainsi μ_k converge vers μ_λ . \square

PREUVE DU LEMME 4.1 : Soit $\lambda \in \mathcal{C}_n$ et $U \in U_n(\mathbb{F})$ une variable aléatoire distribuée selon la mesure de Haar. On considère la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ choisie au lemme 7.9. Le théorème 3.9 affirme que $(\mu_k)_{k \geq 1}$ converge en loi vers la partie radiale du mineur principal d'ordre $n-1$ de $U\Omega_n(\lambda)U^*$. Le lemme 7.9 affirme quant à lui que cette loi est μ_λ . \square

4.2. Preuve de la proposition 5.1. Considérons les ensembles $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ définis au chapitre 5. Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et n pair, on note $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \theta)$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ constitué des éléments dont les composantes sont dans \mathbb{Z} . Pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $n = 2r + 1$, on pose

$$\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \theta) = \{(\beta, z, x, s) \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^r \times GT_{n, \mathbb{Z}} \times \{0, 1\} : \lambda, \beta \succeq z, \\ \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) + s = \theta, x \in GT_n(\beta), s = 0 \text{ if } z_r = 0\}.$$

LEMME 7.10. Soit λ et $\gamma = (m, 0, \dots, 0)$ des éléments de $\mathcal{C}_{n, \mathbb{Z}}$. Alors le nombre de points de $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, m)$ est égal à $\dim(\lambda) \dim(\gamma)$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de comparer les conditions vérifiées par les composantes β des éléments de $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, m)$ avec celles satisfaites par les poids apparaissant dans la description de la décomposition du produit tensoriel $V_\lambda \otimes V_\gamma$ donnée dans les propositions 7.3 à 7.6. Puisque, par ailleurs, $\text{Card } GT_{n, \mathbb{Z}}(\beta)$ est égal à $\dim(V_\beta)$, on obtient que $\text{Card } \mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, a) = \sum_{\beta} \dim(V_\beta)$, où la somme porte sur les poids dominants β (comptés avec leur multiplicité) apparaissant dans la décomposition irréductible de $V_\lambda \otimes V_\gamma$. Ainsi $\text{Card } \mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, a) = \dim(V_\gamma \otimes V_\lambda) = \dim(\lambda) \dim(\gamma)$. \square

Considérons la mesure $\nu_{\lambda, \theta}$ introduite dans la définition 12.

LEMME 7.11. Soit λ un élément de la chambre de Weyl \mathcal{C}_n et $\theta > 0$. On considère deux suites $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ de points de $\mathcal{C}_{n, \mathbb{Z}}$ telles que γ_k s'écrive $(a_k, 0, \dots, 0)$. On suppose que $\varepsilon_k \lambda_k$ converge vers λ et que $\varepsilon_k a_k$ converge vers θ , quand k tend vers l'infini. Alors la suite de probabilités associées $(\nu_k)_{k \geq 1}$ définie au corollaire 2.5 pour $K = U_n(\mathbb{F})$ converge vers la mesure $\nu_{\lambda, \theta}$.

DÉMONSTRATION. La mesure ν_k est la mesure

$$\sum_{\beta} \frac{\dim(\beta)}{\dim(\lambda_k) \dim(\gamma_k)} M_{\lambda_k, \gamma_k}(\beta) \delta_{\varepsilon_k \beta},$$

où $M_{\lambda_k, \gamma_k}(\beta)$ est la multiplicité du plus haut poids β dans la décomposition en composantes irréductibles de $V_{\lambda_k} \otimes V_{\gamma_k}$. La description de cette décomposition donnée dans les propositions 7.3 à 7.6, et le fait que $\dim(\beta) = \text{Card } GT_{n, \mathbb{Z}}(\beta)$, montrent que ν_k est l'image par la projection sur la composante β de la probabilité

$$\frac{1}{\dim(\lambda_k) \dim(\gamma_k)} \sum_{x \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda_k, a_k)} \delta_{\varepsilon_k x},$$

ce qui démontre le lemme. □

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.1 : On considère la suite $(\nu_k)_{k \geq 1}$ de mesures sur \mathcal{C}_n définies dans le lemme 7.11. Le théorème 3.8 montre que $(\nu_k)_{k \geq 1}$ converge vers la loi de la partie radiale de $\Omega_n(\lambda) + U\Omega_n(\theta)U^*$. Le lemme 7.11 affirme que cette loi est $\nu_{\lambda, \theta}$. □

Bibliographie

- [1] A. Altland and M. Zirnbauer, Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal/superconducting hybrid structures, *Phys. Rev. B* 55 (1997), 1142–1161.
- [2] Y. Baryshnikov, GUEs and queues, *Probab. Theory Relat. Fields* 119 (2001) 256–274.
- [3] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition space, *J. Geom. Phys.* 5 (1989) 453–472.
- [4] Ph. Biane, Le théorème de Pitman, le groupe quantique $SU_q(2)$ et une question de P.A. Meyer, *Lecture Notes in Math.*, 1894, Springer, Berlin, 2006.
- [5] Biane, Philippe; Marches de Bernoulli quantiques. *Seminaire de Probabilites*, XXIV, 1988/89, 329–344, *Lecture Notes in Math.*, 1426, Springer, Berlin, 1990
- [6] E. Borel, Sur les Principes de la Theorie Cinetique des Gaz, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 23 (1906) 9–32.
- [7] A. Borodin and G. Olshanski, Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes, *Ann. of Math.* 161 (2005) 1319–1422.
- [8] A. Borodin and P. L. Ferrari, M. Praehofer, T. Sasamoto, Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration, *J. Stat. Phys.* 129 (2007) 1055–1080.
- [9] C. Boutillier, The bead model and limit behaviors of dimer models, *arXiv :math/0607162v1*.
- [10] E. Brezin, S. Hikami and A. I. Larkin, Level statistics inside the vortex of a superconductor and symplectic random-matrix theory in an external source, *Phys. Rev. B* 60 (1999) 3589–3602.
- [11] E. Brezin, S. Hikami, Intersection numbers from the antisymmetric Gaussian matrix model, *arXiv :0804.4531v1*.
- [12] M. F. Bru, Wishart Process, *J. Theor. Prob.*, 4 (1991) 725–751.
- [13] J. Cardy, Network models in class C on arbitrary graphs, *Comm. Math. Phys.* 258 :11 (2005) 87–102.
- [14] M. Caselle and U. Magnea, Random matrix theory and symmetric spaces, *Phys. Rep.* 394 (2004) 41–156.
- [15] Henry Cohn, Michael Larsen, and James Propp, The shape of a typical boxed plane partition, *New York J. Math.* 4 (1998), 137–165 (electronic).
- [16] B. Collins and P. Sniady, Representation of Lie groups and random matrices, *arXiv : math/0610285*, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [17] M. Defosseux, Orbit measures and interlaced determinantal point processes, *arXiv :0802.4183*, to appear in *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 346 (2008).
- [18] P. Diaconis, Products of random matrices as they arise in the study of random walks on groups. *Contemp. Math.*, 50 (1986) 183–195.
- [19] P. Diaconis and M. Shahshahani, The subgroup algorithm for generating uniform random variables. *Prob. Eng. and Info. Sci.*, 1 (1987) 15–32.

- [20] A. H. Dooley, J. Repka and N. J. Wildberger, Sums of adjoint orbits, *Linear and Multilinear Algebra* 36 (1993), 79–101.
- [21] A. H. Dooley and N. J. Wildberger, Harmonic analysis and the global exponential map for compact Lie groups, *Funct. Anal. and Appl.* 27 (1993), 25–32.
- [22] F. J. Dyson, The threefold way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics, *J. Math. Phys.* 3 (1962), 1199–1215.
- [23] P. Eichelsbacher and M. Stolz, Large deviations for random matrix ensembles in mesoscopic physics, arXiv :math/0610811v2.
- [24] J. Faraut, Infinite dimensional spherical analysis. COE Lecture Note, 10. Kyushu University, The 21st Century COE Program “DMHF”, Fukuoka, 2008.
- [25] J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford, 1994.
- [26] J. Faraut, Infinite dimensional harmonic analysis and probability, in *Probability measures on groups : recent directions and trends*, (S.G. Dani, P. Graczyk, ed.). Tata Institute of Fundamental Research, Narosa (2006), 179-254.
- [27] P.J. Forrester, *Log-gases and Random matrices*, in preparation.
- [28] P.J. Forrester and E. Nordenstam, The anti-symmetric GUE minor process, arXiv :math-pr/0804.3293v1.
- [29] P.J. Forrester and T. Nagao, Determinantal Correlations for Classical Projection Processes, arXiv :math-ph/0801.0100v1.
- [30] P.J. Forrester, E.M. Rains, Jacobians and rank 1 perturbations relating to unitary Hessenberg matrices, *Int. Math. Res. Not.* (2006) 1-36.
- [31] M. Fulmek and C. Krattenthaler, Lattice Paths Proofs for Determinantal Formulas for Symplectic and orthogonal Characters, *J. Combin. Theory Ser. A* 77 (1997), 3–50.
- [32] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society, Student Text 35, (1997).
- [33] I. M. Gelfand and M. L. Tsetlin, Finite dimensional representations of the group of unimodular matrices, *Dokl. Akad. Nauk. USSR* 71, 275–290 (1981).
- [34] F. Gillet, Asymptotic behaviour of watermelons. Preprint, arXiv :math.PR/0307204, 2003.
- [35] N. R. Goodman, Statistical analysis based on a certain multivariate complex gaussian distribution (An Introduction), *Ann. Math. Stat.*, 34 (1963), 152–177.
- [36] G. J. Heckman, Projections of orbits and asymptotic behaviour of multiplicities for compact connected Lie groups, *Invent. Math.* 67 (1982) 333–356.
- [37] P. Heinzner, A. Huckleberry, and M. R. Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, *Commun. Math. Phys.* 257 (2005), 725–771.
- [38] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, New York and Orlando, 1984.
- [39] K. Johansson, Random matrices and determinantal processes, arXiv :math-ph/0510038v1.
- [40] K. Johansson and E. Nordenstam, Eigenvalues of GUE minors, *Elect. J. Probability* 11 (2006) 1342–1371.
- [41] A. P. Metcalfe, N. O’Connell, J. Warren, Interlaced processes on the circle, arXiv :math-pr/0804.3142v1.
- [42] M. Kashiwara, On crystal bases, *Representations of Groups*, CMS Conference proceedings, 16 (1995) 155–197, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [43] M. Kashiwara and T. Nakashima, Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras, *J. Algebra*, 165 (1994), 295–345.

- [44] M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao and N. Komatsuda, Vicious walk with a wall, noncolliding meanders, chiral and Bogoliubov-de Gennes random matrices, *Phys. Rev. E* 68 :021112 (2003) 1–16.
- [45] M. Katori and H. Tanemura, Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.* 45 (2004) 3058–3085.
- [46] M. Katori and H. Tanemura, Nonintersecting paths, Noncolliding diffusion processes and representation theory, *RIMS Kokyuroku* 1438 (2005) 83–102.
- [47] A. A. Kirillov, Merits and demerits of the orbit method. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 36 (1999), no. 4, 433–488
- [48] A. A. Kirillov, Lectures on the orbit method. Graduate Studies in Mathematics, 64. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [49] A. Klyachko, Random walks on symmetric spaces and inequalities for matrix spectra, *Linear Algebra Appl.*, 319 (2000), p. 37–59.
- [50] A. W. Knap, Lie groups, beyond an introduction, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [51] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot, Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux. II. With a wall. *J. Phys. A*, 33-48 (2000) 8835–8866.
- [52] Marchenko and Pastur, Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices, *Math. USSR-Sbornik*, 1 (1967) 457–486.
- [53] M. L. Mehta and N. Rosenzweig, Distribution laws for the roots of a random anti-symmetric hermitian matrix, *Nuclear Physics A*, Volume 109 (1968). 449–456.
- [54] M.L. Mehta, *Random Matrices*, Third edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 142. Elsevier–Academic Press, Amsterdam, 2004.
- [55] T. Nakashima, Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras, *Comm. Math. Phys.* 154, 215–243 (1993).
- [56] A. Okounkov and N. Reshetikhin, The birth of random matrix, *Moscow Mathematical Journal*, 6 (2006) 553–566.
- [57] A. Okounkov, Random matrices and random permutations, *Internat. Math. Res. Notices* no. 20 (2000), 1043–1095
- [58] G. Olshanski, Unitary representations of (G,K) -pairs that are connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$, *Leningrad Math. J.* 1 (1990) 983–1014.
- [59] G. Olshanski, Unitary representation of infinite dimensional pairs (G,K) and the formalism of R.Howe. Representation of Lie groups and related topics. (Eds. A.M. Vershik, D.P. Zhelobenko), *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*. Vol 7. Gordon and Breach, 1990.
- [60] G. Olshanski, The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group, *J. Funct. Anal.* 205 (2003), no. 2, 464–524.
- [61] G. Olshanski, A. Vershik. Ergodic unitary invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices. *Amer. Math. soc. Translations* 2. 175 (1996), 137–175.
- [62] D. Pickrell, Mackey analysis of infinite classical motion groups. *Pacific J. Math.* 150 (1991) 139–166
- [63] U. Porod, The cut-off phenomenon for random reflections. *Ann. Probab.* 24 (1996) 74–96
- [64] U. Porod, The cut-off phenomenon for random reflections. II. Complex and quaternionic cases. *Probab. Theory Related Fields* 104 (1996) 181–209
- [65] Rosenthal, Random rotations : characters and random walks on $SO(N)$. *Ann. Probab.* 22 (1994) 398–423.
- [66] M. Roesler, Bessel convolution on matrix cones, *Compos. Math.* 143 (2007), no. 3, 749–779.

- [67] J. J. M. Verbaarschot, The spectrum of the QCD Dirac operator and chiral random matrix theory : the threefold way Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 2531–2533
- [68] D. Wang, Spiked models in Wishart Ensemble, PhD thesis, arXiv :math-pr/0804.0889v1.
- [69] J. Warren, Dyson’s Brownian motions, intertwining and interlacing, Dyson’s Brownian motions, intertwining and interlacing. Electronic Journal of Probability, 12 (2007) 573-590
- [70] E. P. Wigner, On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels, Proc. Cambridge Philos. Soc. 47 (1951), 790–798.
- [71] E. P. Wigner, On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. Ann. Math. 67 (1958), 325-327.
- [72] J. Wishart, The Generalised Product Moment Distribution in Samples from a Normal Multivariate Population, Biometrika, 20A (1928) 32–52
- [73] D. P. Zhelobenko, Compact Lie groups and their representations, Transl. of Math. Monographs 40 AMS, Providence RI, 1973.

CHAPITRE 8

Annexe

Orbit measures, random matrix theory and interlaced determinantal processes

Manon Defosseux

ABSTRACT. A connection between representation of compact groups and some invariant ensembles of Hermitian matrices is described. We focus on two types of invariant ensembles which extend the Gaussian and the Laguerre Unitary ensembles. We study them using projections and convolutions of invariant probability measures on adjoint orbits of a compact Lie group. These measures are described by semiclassical approximation involving tensor and restriction multiplicities. We show that a large class of them are determinantal.

1. Introduction

One of the first aims of random matrix theory (RMT) is computation of eigenvalues. Its first appearance is in statistics in 1928, when Wishart [61] has determined the maximum likelihood estimator of the covariance matrix of a Gaussian vector. In 1951, Wigner [60] introduced random Hermitian matrices in physics, with the idea that their eigenvalues behave as the high energy levels of hard nucleus. Up to now, in this very active field of research, the detailed analysis of these eigenvalues most often rests on the explicit determinantal expression of their distribution, see, e.g. Mehta [46]. Although these distributions are usually obtained by more or less easy applications of the change of variable formula, it has been noticed that they contain expressions familiar to the theory of group representations. Actually, many tools from this theory occur in RMT: for instance Young tableaux, Harish-Chandra-Itzkinson-Zuber formula, symmetric spaces, and so on.

The purpose of this paper is to establish a direct link between classical compact groups and RMT and to use it to compute the distributions of some new ensembles. On the one hand it gives expressions which are maybe not so easy to obtain directly. On the other hand, and more importantly, it explains the frequent occurrence of concepts from representation theory in some aspects of random matrix theory.

The main idea is simple. Roughly speaking, the ensembles we will consider are invariant under the action of a unitary group by conjugacy. Computations will use ultimately a detailed description of the images of the Haar measure on orbits under the adjoint action. They are called orbit measures. In the spirit of Kirillov's orbit method, these measures are obtained by semi-classical approximation as limit of the empirical distribution of the weights of irreducible representations of high dimension. For RMT, the quantities of interest will be expressed either

by sums or by projections of orbit measures. We will compute them using tensor products or restrictions of representations. This latter computation will be made in a combinatorial-geometric manner, by using Kashiwara crystal theory, which can be viewed as a recent and deep generalization of Young tableaux.

The paper is divided into two parts. We will describe the theoretical approach only in the second part, because it uses algebraic machinery which can scare some readers.

The first part is devoted to its application to concrete problems in RMT. To illustrate our approach, we study some non classical ensembles of Hermitian complex matrices. They will be either the set of all $n \times n$ Hermitian matrices denoted below $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, or the set of skew-symmetric Hermitian matrices denoted $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, or the set of Hamiltonian Hermitian matrices denoted $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$. The reason of these maybe strange notations is the following. Let $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or \mathbb{H} be either the field of reals or complex or quaternions numbers. The so called classical compact groups are the neutral components $U_n(\mathbb{F})$ of the unitary groups. If $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ is the Lie algebra of $U_n(\mathbb{F})$, then $\mathcal{P}_n(\mathbb{F}) = i\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ is a subset of the set of Hermitian matrices with complex entries. They correspond to the so-called classical flat symmetric spaces associated to the complex semisimple groups. In RMT they occur in the Atland-Zirnbauer classification [1], but among them only $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ occurs in the Dyson threefold way [20]. As usual in physics, we are interested in ensembles invariant under an appropriate group of symmetry. So we will look at random Hermitian matrices in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ whose laws are invariant under conjugation by the elements of the compact group $U_n(\mathbb{F})$. Recall that in RMT an ensemble is a random matrix.

DEFINITION 1.1. *A random matrix, or an ensemble, M with values in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ is called invariant if its distribution is invariant under conjugation by $U_n(\mathbb{F})$.*

It is for these ensembles that representation theory plays a role. Among them, a pre-eminent role is played by the family of ensembles which form a projective series as n increases. Indeed, in physical applications the finite dimension n is only an approximation. It is interesting to notice that these series admit a complete description, in the spirit of De Finetti's theorem. We will give it in section 2, by applying a remarkable result of Pickrell [53]. They are obtained as a "double mixture" of two simple types of ensembles that we call GUE(\mathbb{F}) and LUE(\mathbb{F}). The classical GUE and LUE (Gaussian and Laguerre Unitary ensemble) are obtained for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Notice that when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ they are not linked with the GOE and the GSE nor the LOE and LSE. Actually GUE(\mathbb{R}) is in the class D of Altland and Zirnbauer [1], and GUE(\mathbb{H}) is in their class C. In the spirit of random matrix theory one can say that they are all in the $\beta = 2$ family. Some of their applications will be recalled in 2.4.

As a first application of the introduced method we compute in section 3 the distribution of the main minors of an invariant random matrix. We show that the eigenvalues of the successive main minors of an invariant random matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ with given eigenvalues have the uniform distribution, or a projection of it, on a conveniently defined Gelfand–Tsetlin polytope, which describes their interlacing. This was first proved for $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ by Baryshnikov [2], by a different method, motivated by queuing theory. We use the approximation of projections of orbits detailed in 7.3. Notice that the role of Gelfand Tsetlin patterns in the study of shape process already appeared in Cohn, Larsen and Propp [13].

As a second application, we study the $\text{LUE}(\mathbb{F})$. These ensembles can be written as $M\Omega M^*$ where M is a standard Gaussian matrix with entries in \mathbb{F} and Ω is a simple fixed appropriate matrix. For instance $\Omega = I$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. The result of Pickrell mentioned above show that they are a building block in the harmonic analysis of infinite Hermitian matrices in the spirit of Olshanski and Vershik [52], Olshanski [51], Borodin and Olshanski [6] for instance. Moreover, we will see that radically new phenomenon occur when \mathbb{F} is not equal to \mathbb{C} , so that this study is interesting in itself. In sections 4 and 5, we determine the distribution of the eigenvalues. In section 4, one considers the case where Ω is of rank one and analyse the perturbation of any matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ by such a random matrix. This rests on the theoretical results of the second part on tensor products of representations. The general case is considered in section 5.

In section 6, considering the minor process associated to some invariant ensembles and successive rank one perturbations, we obtain two types of interlaced point processes, called “triangular” and “rectangular”. We deduce from the description given in sections 3, 4 and 5 that a large class of them are determinantal. This shows that these interlacings exhibit repulsion. In the GUE case, this was also proved recently by Johansson and Nordenstam [34], and Okounkov and Reshetikhin [48].

After a first part devoted to applications we develop in the second part of this paper the tools coming from representation theory used to establish them. In section 7, we present a variant of a theorem of Heckman which allows us to describe in a precise way convolutions and projections of adjoint orbit measures, once we know the so called tensor or branching rules. For our applications these rules are described in section 9. They are classical and simple in the case when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, but more involved in the other ones. Actually we only need a geometrical description of these rules and not their combinatorics as usual. This is quite remarkable. These geometric descriptions are easily and directly obtained using Kashiwara crystal theory. As explained in section 9, crystal theory gives us a description in terms of non-intersecting paths, or interlaced points, which is exactly what we need. Finally in section 10, we apply the results obtained in this second part to the context of RMT described in the first part.

One can find in the litterature different versions of the theorem of Heckman. For instance, Collins and Sniady gave one recently in [14], in the framework of noncommutative probabilities. Their approach consists in considering a random matrix as a limit of random matrices with non-commutative entries. While finishing to write this paper announced in [15], Forrester and Nordenstam [24] posted an article in arxiv dealing with the $\text{GUE}(\mathbb{R})$ case.

NOTATION 1.2. *In this paper, for an integer n we will write*

$$\tilde{n} = \begin{cases} n & \text{when } \mathbb{F} = \mathbb{C} \text{ and } \mathbb{H} \\ \lfloor n/2 \rfloor & \text{when } \mathbb{F} = \mathbb{R}. \end{cases}$$

We let $c = 1$ if $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, $c = 2$ if $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ and $\epsilon = 1$ if n is odd and 0 otherwise.

Acknowledgments: This research has partly been carried out during a visit at the Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork. The author would like to thank Ton Dieker, Anthony Metcalfe, Neil O’Connell, Jon Warren and her advisor Philippe Bougerol for many helpful and illuminating discussions.

Part 1. RANDOM MATRICES

2. Ensembles of Hermitian matrices

2.1. Some invariant set of Hermitian matrices. The set $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ of $n \times n$ Hermitian matrices is the real vector space of complex matrices M such that $M^* = M$, where M^* is the adjoint of M . Many classical ensembles considered in physics occur on subsets of $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Let us distinguish three important classes which occur as flat symmetric spaces associated with compact groups, or equivalently complex semi-simple groups, and are thus of the so called $\beta = 2$ type. They have been introduced in the literature under various names. Our choice is due to the fact that we want to have a common setting for all of them.

The first set we consider is $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ itself. The second set is the set $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ of Hermitian complex matrices M which can be written as $M = iX$ where X is a real matrix. In this case X is skewsymmetric (i.e. $X + X^t = 0$). Thus $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ is just a convenient parametrization of the set of skewsymmetric real matrices, studied for instance by Mehta [46].

In order to introduce the third one, we first define the C -symmetry class of Altland and Zirnbauer [1]. It is the set of complex Hermitian matrices \mathcal{H} which can be written as

$$(1) \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & S \\ S^* & -\bar{H} \end{pmatrix}$$

where H and S are two $n \times n$ complex matrices, with H Hermitian and S symmetric. In other words it is the set of Hermitian matrices of the Lie algebra of the complex symplectic group. One recognizes the form of the Bogoliubov–de Gennes Hamiltonian in condensed matter physics (see below). Actually we will use a more convenient representation by using quaternions. For us, the set \mathbb{H} of quaternion is just the set of 2×2 matrix Z with complex entries which can be written as

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

where $a, b \in \mathbb{C}$. Its conjugate Z^* is the usual adjoint of the complex matrix Z . We define $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ as the set of $2n \times 2n$ complex Hermitian matrices M which can be written as $M = iX$ where X is a $n \times n$ matrix with quaternionic entries. Let W be the matrix of the permutation of \mathbb{C}^{2n} :

$$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_{n+1}, x_2, x_{n+2}, x_3, \dots).$$

Then \mathcal{H} is an Hamiltonian given by (1) if and only if

$$(2) \quad \tilde{\mathcal{H}} = W\mathcal{H}W^{-1}$$

is in $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$. Therefore $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ is just a parametrization of the class C of Altland and Zirnbauer. Notice that the matrices of the GSE are not of this type since they are self dual matrices with entries in \mathbb{H} . We can thus define:

DEFINITION 2.1. For $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ is the set of $n \times n$ Hermitian matrices with entries in $i\mathbb{F}$.

One recognizes in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ the three infinite families of Cartan motion groups associated with compact (or complex) groups. Indeed, let $U_n(\mathbb{F})$ be the neutral component of the group of unitary matrices with entries in \mathbb{F} . Its Lie algebra

$\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ is the set of matrices M with entries in \mathbb{F} such that $M + M^* = 0$. Then $\mathcal{P}_n(\mathbb{F}) = i\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$, and the Cartan motion group associated with $U_n(\mathbb{F})$ is

$$G = U_n(\mathbb{F}) \times_{\sigma} \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$$

where $U_n(\mathbb{F})$ acts on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ through σ by conjugation (i.e. by adjoint action). In the classification of symmetric spaces, $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ is said to be of type A and $U_n(\mathbb{C})$ is the unitary group. When $n = 2r$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ is of type D and when $n = 2r + 1$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ is of type B, and $U_n(\mathbb{R})$ is the special orthogonal group $SO(n)$ in both cases. At last, $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ is of type C and $U_n(\mathbb{H})$ is the symplectic unitary group $Sp(n)$.

2.2. Eigenvalues and radial part. Consider a matrix M in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Since M is an Hermitian complex matrix, it has real eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and \mathbb{C} , and $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2n}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. When $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ there is no further restriction, but when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, then $\lambda_{n-k+1} = -\lambda_k$, for $k = 1, \dots, \tilde{n} + 1$, which implies $\lambda_{\tilde{n}+1} = 0$ when n is odd (Recall that $\tilde{n} = [n/2]$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). When $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ then $\lambda_{2n-k+1} = -\lambda_k$, for $k = 1, \dots, n$. We define the Weyl chambers \mathcal{C}_n in the different cases by : when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{C}_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n\},$$

when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, and n is odd,

$$\mathcal{C}_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\tilde{n}} \geq 0\},$$

when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, and n is even (see Remark 2.3),

$$\mathcal{C}_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\tilde{n}-1} \geq |\lambda_{\tilde{n}}| \geq 0\},$$

when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\mathcal{C}_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}.$$

The Weyl chamber is a fundamental domain for the adjoint action of $U_n(\mathbb{F})$ on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. More precisely, let us introduce the following matrices. For $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, and $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ in \mathbb{R}^n , we denote by $\Omega_n(\lambda)$ the $n \times n$ diagonal matrix

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

When $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, we let $\omega(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ -i\alpha & 0 \end{pmatrix}$ where $\alpha \in \mathbb{R}$, and for $\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, we write $\Omega_n(\lambda)$ for the $n \times n$ block-diagonal matrix given by, when n is even,

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \omega(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \omega(\lambda_{\tilde{n}}) \end{pmatrix},$$

and when n is odd,

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \omega(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \omega(\lambda_{\tilde{n}}) \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

When $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ and $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ in \mathbb{R}^n , we let

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{pmatrix} Z(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Z(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

where, for $\alpha \in \mathbb{R}$, $Z(\alpha)$ is the 2×2 matrix $Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. Then it is well known and not difficult to prove that:

LEMMA 2.2. *Let M be a matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Then there exists a unique $\lambda \in \mathcal{C}_n$ and a matrix $U \in U_n(\mathbb{F})$ such that*

$$M = U\Omega_n(\lambda)U^*.$$

We call λ the radial part of M and will denote it by $\lambda = X^{(n)}(M)$.

This is the so called radial decomposition of M in the flat symmetric space $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. We see that in each case

$$\{kMk^*, k \in U_n(\mathbb{F})\} \cap \{\Omega_n(\mu), \mu \in \mathcal{C}_n\} = \{\Omega_n(\lambda)\}.$$

REMARK 2.3. The definition of \mathcal{C}_n when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and n is even may look strange. Actually, in this case both $\lambda_{\bar{n}}$ and $-\lambda_{\bar{n}}$ are eigenvalues, so $\lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{n}-1}, |\lambda_{\bar{n}}|$ is the set of positive eigenvalues. But one has to take this \mathcal{C}_n to have the lemma above.

2.3. Infinite invariant ensembles. We have defined an invariant random matrix (or invariant ensemble) in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ as a random matrix with values in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, whose distribution is invariant under conjugation by $U_n(\mathbb{F})$. There are of course many such matrices. Actually it is well known that one has the following lemma.

LEMMA 2.4. *A random matrix M with value in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ is invariant if and only if it can be written as $M = U\Omega_n(\Lambda)U^*$, where $U \in U_n(\mathbb{F})$ and $\Lambda \in \mathcal{C}_n$ are independent random variables, U having the Haar distribution.*

PROOF. The lemma 2.2 allows us to write $M = U\Omega_n(\Lambda)U^*$, with $U \in U_n(\mathbb{F})$ and $\Lambda \in \mathcal{C}_n$. Let $V \in U_n(\mathbb{F})$ be a Haar distributed random variable independent of M . Then M has the same distribution as $(VU)\Omega_n(\Lambda)(VU)^*$. The Haar measure being invariant by multiplication, this has the same law as $V\Omega_n(\Lambda)V^*$. \square

Two important classes of invariant random matrices in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ are to be distinguished. The first one is the class of ergodic measures. An invariant probability is called ergodic if it cannot be written as a barycenter of other invariant probabilities. On $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ the ergodic invariant measures are the orbit measures, that is the law of $U\Omega_n(\lambda)U^*$ when U has the Haar distribution and λ is fixed in \mathcal{C}_n . The second class is linked with Random Matrix Theory. Actually, in that case one is interested in a family ν_n of probability measures on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ which forms a projective system as n goes, and thus defines a probability measure ν on the set $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ of infinite Hermitian matrices. More precisely, for $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or \mathbb{H} , let $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ be the set of matrices $\{M_{k,l}, 1 \leq k, l < +\infty\}$, with entries in $i\mathbb{F}$ such that $M_{l,k} = M_{k,l}^*$. For each $n \in \mathbb{N}$, $U_n(\mathbb{F})$ acts on $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$. A probability measure on $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ is called invariant if it is invariant under the action of each $U_n(\mathbb{F})$.

It is remarkable that, following Pickrell [53] and Olshanski and Vershik [52], one can describe explicitly the set of invariant measures. As in De Finetti's description, each of this measure is obtained as a mixture of ergodic ones, and each ergodic one

has a product structure : the diagonal elements form an i.i.d. sequence (see below). In order to describe them let us introduce the two basic ensembles on $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$.

Let us denote $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F})$ the set of $n \times m$ matrices with entries in \mathbb{F} . It is a real vector space. We put on it the Euclidean structure defined by the scalar product,

$$\langle M, N \rangle = a \operatorname{Re} \operatorname{tr}(MN^*), \quad M, N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F}),$$

where $a = 1$ for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, and $a = 2$ for $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Recall that a standard Gaussian variable on a real Euclidean space with finite dimension d is a random variable with density

$$x \mapsto (2\pi)^{-d/2} e^{-\langle x, x \rangle / 2}.$$

Our choice of the Euclidean structure above defines a notion of standard Gaussian variable on $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F})$. Taking $m = n = 1$ this defines standard Gaussian variables in \mathbb{F} itself. We equip the real vector space $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ with the scalar product

$$\langle M, N \rangle = b \operatorname{tr}(MN), \quad M, N \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}),$$

where $b = 1$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and $b = 1/2$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$, and thus define a standard Gaussian variable on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$.

We have defined above, for each choice of \mathbb{F} , the matrix $\Omega_n(\lambda)$ for $\lambda \in \mathcal{C}_n$. For $k \leq \tilde{n}$, we let

$$(3) \quad \Omega_n^k = \Omega_n(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

where 1 appears k times, and, when 1 appears \tilde{n} times, we let

$$(4) \quad \Omega_n = \Omega_n^{\tilde{n}} = \Omega_n(1, \dots, 1).$$

DEFINITION 2.5. For $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or \mathbb{H} , and $k, n \in \mathbb{N}$, we define

1. The ensemble $GUE_n(\mathbb{F})$ as the set of matrices in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ with the standard Gaussian distribution.

2. The ensemble $LUE_{n,k}(\mathbb{F})$ as the set of matrices $M\Omega_k M^*$ when M is a standard Gaussian random variable in $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$.

Notice that if the matrices of the $LUE_{n,k}(\mathbb{F})$ may look strange, their Fourier transform does not (recall that $\tilde{k} = k$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ and $\tilde{k} = [k/2]$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, and that $c = 1$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ and $c = 2$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$):

LEMMA 2.6. Let M be a standard Gaussian random variable in $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$. Then the Fourier transform of $M\Omega_k M^*$ is given by

$$\mathbb{E}(e^{-i\langle N, M\Omega_k M^* \rangle}) = \det(I + \frac{i}{c}N)^{-\tilde{k}}, \quad N \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}).$$

PROOF. As $M\Omega_k M^*$ is invariant, it is enough to prove the identity for $N = \Omega_n(\lambda)$, with $\lambda \in \mathcal{C}_n$. When $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\langle N, M\Omega_k M^* \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda_i |M_{i,j}|^2,$$

where $M_{i,j}$ are independent standard Gaussian complex r.v.. We have, for all $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{-i\alpha |M_{1,1}|^2}) = \frac{1}{1 + i\alpha},$$

which gives the complex case. When $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\langle N, M\Omega_k M^* \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^j \lambda_i (|a_{i,j}|^2 - |b_{i,j}|^2),$$

where the matrices $\begin{pmatrix} a_{i,j} & -\bar{b}_{i,j} \\ b_{i,j} & \bar{a}_{i,j} \end{pmatrix}$ are independent standard Gaussian variables in \mathbb{H} . We have,

$$\mathbb{E}(e^{-i\alpha(|a_{1,1}|^2 - |b_{1,1}|^2)}) = \frac{1}{1 + (\frac{\alpha}{2})^2},$$

which gives the quaternionic case. When $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$\langle N, M\Omega_k M^* \rangle = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \sum_{j=1}^{\tilde{k}} \lambda_i (M_{2i,2j-1}M_{2i-1,2j} - M_{2i-1,2j-1}M_{2i,2j}),$$

where the $M_{i,j}$'s are independent standard real Gaussian variables. We have

$$\mathbb{E}(e^{-i\alpha(M_{2,1}M_{1,2} - M_{1,1}M_{2,2})}) = \frac{1}{1 + \alpha^2},$$

which gives the real case. □

When $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ we obtain the classical LUE, called the Laguerre Unitary or Complex Wishart ensemble, which is carried by the cone of positive definite matrices. The situation is completely different for the fields \mathbb{R} and \mathbb{H} : in these cases the Fourier transform

$$\det(I + \frac{i}{c}N)^{-\tilde{k}} = \det(I + \frac{N^2}{c^2})^{-\tilde{k}/2}$$

is real, and therefore the distribution of a random matrix of the LUE(\mathbb{F}) is symmetric. Actually the support of $M\Omega_n M^*$ is the whole of $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Observe that in the cases when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ and $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ with n odd, all the invariant measures on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ are symmetric.

Let us give a justification for the introduction of these invariant ensembles. We define the set $LUE_\infty^1(\mathbb{F})$ as the set of matrices $M\Omega_\infty^1 M^*$ with $M \in \mathcal{M}_\infty(\mathbb{F})$ such that the submatrices $\{M_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$ are standard Gaussian variables in $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ and the set $GUE_\infty(\mathbb{F})$ as the set of matrices $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ such that the submatrices $\{M_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$ are standard Gaussian variables in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. A random matrix in $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ is called invariant if its law is invariant under the action of each $U_n(\mathbb{F})$. As will be clear from the proof, the following theorem is essentially contained in Pickrell [53]. It can be useful to notice that the intuition behind this result is the fact that limit of orbit measures are of this type, by Borel's theorem 5.4 recalled below.

THEOREM 2.7. *Each ergodic invariant random matrix M in $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ is sum of elements of $GUE_\infty(\mathbb{F})$ and $LUE_\infty^1(\mathbb{F})$: it can be written as*

$$M = aI + bG + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k L_k$$

where G belongs to $GUE_\infty(\mathbb{F})$, L_k belongs to $LUE_\infty^1(\mathbb{F})$, the random variables $G, L_1, L_2 \dots$ are independent, and a, b, d_k are constants such that $\sum d_k^2 < +\infty$, I is the identity matrix. Moreover $a = 0$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

PROOF. The proof will use Olshanski spherical pairs, see Olshanski [49, 50] or Faraut [22]. Given a topological group G and a closed subgroup K , one says that (G, K) is an Olshanski spherical pair if for each irreducible unitary representation π of G in an Hilbert space H , the space $\{u \in H; \pi(k)u = u, \text{ for all } k \in K\}$ is zero or one dimensional. For instance, an inductive limit of Gelfand pairs is an Olshanski pair.

The dual of the vector space $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ is the inductive limit of the $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$'s, which is the set $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ of matrices M in $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ such that $M_{i,j} = 0$ for $i+j$ large enough. Each $U_n(\mathbb{F})$ acts on $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ as on $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$. Let $U^{(\infty)}(\mathbb{F})$ be the group inductive limit of the $U_n(\mathbb{F})$'s. Recall the radial decomposition $\mathcal{P}_n(\mathbb{F}) = \{U\Omega_n(\lambda)U^*, U \in U_n(\mathbb{F}), \lambda \in \mathcal{C}_n\}$. Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ be an infinite sequence of real numbers, with $\lambda_k = 0$ for k large enough. In this case, we write $\Omega(\lambda)$ instead of $\Omega_\infty(\lambda)$. Notice that each matrix of $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ can be written as $U\Omega(\lambda)U^*$ for an $U \in U^{(\infty)}(\mathbb{F})$ and such a λ .

As inductive limit of Gelfand pairs $(U^{(\infty)}(\mathbb{F}) \times_\sigma \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F}), U^{(\infty)}(\mathbb{F}))$ is an Olshanski pair. Therefore, by the so-called multiplicative property of Voiculescu and Olshanski (see Olshanski [50], Pickrell [53]) an invariant probability measure ν on $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{F})$ is ergodic if and only if its Fourier transform ψ on $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{F})$ is a positive definite invariant function such that, for some function $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\psi(\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = \phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)\dots$$

for all λ as above. When $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ it is proved in Pickrell [53] (see also Olshanski and Vershik [52]) that there exist unique real numbers $a, b \geq 0$ and $d_k, k \geq 1$, such that for all $t \in \mathbb{R}$,

$$(5) \quad \phi(t) = e^{iat} e^{-bt^2} \prod_{k=1}^{\infty} [(1 + id_k t)e^{id_k t}]^{-1}.$$

Therefore the theorem holds when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. We now consider the case where $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, following an idea in Pickrell [53]. To any complex matrix $M \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{C})$ we associate a matrix $f(M) \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ by replacing each entry $m = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ of M by the 2×2 matrix

$$\tilde{m} = \begin{pmatrix} iy & ix \\ -ix & iy \end{pmatrix}.$$

For all $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $f(\Omega(\lambda)) = \Omega(\lambda)$ where Ω is, on the left hand side, the one defined for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and on the right hand side the one defined for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Consider an ergodic invariant probability measure on $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R})$ and let ψ be its Fourier transform defined on $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Then ψ is invariant and positive definite and by the multiplicativity theorem there exists, as above, a function $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$\psi(\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = \phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)\dots$$

The function $\psi \circ f$ on $\mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{C})$ is obviously positive definite and invariant. Moreover, since $f \circ \Omega = \Omega$ one has

$$(\psi \circ f)(\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = \phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)\dots$$

Therefore by the sufficient condition of the multiplicativity theorem, $\psi \circ f$ is the Fourier transform of an ergodic invariant probability measure on $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$. Thus ϕ

can be written as (5) above. Moreover, the function ψ is invariant under the groups $U_n(\mathbb{R}) = SO(n)$. Using the adequate reflection in $SO(3)$, we see that

$$\psi(\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = \psi(\Omega(-\lambda_1, \lambda_2, \dots)).$$

Therefore, for all $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \phi(-t)$ which implies by uniqueness that,

$$\phi(t) = e^{-bt^2} \prod_{k=1}^{\infty} [(1 + (d_k t)^2)]^{-1}.$$

Using the expression of the Fourier transform given in Lemma 2.6, we obtain the theorem in the case $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. When $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ the proof is similar: one uses the map $\tilde{f} : \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{H})$ defined in the following way. First, we define $\tilde{f}_n : \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{H})$, by when $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ and W is given by (2),

$$\tilde{f}_n(M) = W \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -\bar{M} \end{pmatrix} W^* \in \mathcal{P}_n(\mathbb{H}).$$

For $M \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{H})$, let $\pi_n(M)$ be its main minor of order n . The fact that $\pi_n(\tilde{f}_{n+1}(\pi_{n+1}(M))) = \tilde{f}_n(\pi_n(M))$ allows us to define $\tilde{f} : M \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{f}(M) \in \mathcal{P}^{(\infty)}(\mathbb{H})$ by $\pi_n(\tilde{f}(M)) = \tilde{f}_n(\pi_n(M))$. We also have $\tilde{f} \circ \Omega = \Omega$. The symmetry $\lambda \mapsto -\lambda$ given by the action of $U_n(\mathbb{H})$ allows us to conclude as when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

2.4. Symmetry classes and some applications. Let us recall the three main historical steps in the description of the ten symmetry classes, i.e. series of classical symmetric spaces, in physical applications of RMT, see Atland and Zirnbauer [1], Caselle and Magnea [12], Forrester [23], Heinzner, Huckleberry, and Zirnbauer [31]. We refer to the symmetry classes by Cartan’s symbol for the symmetric space corresponding to their Hamiltonians. The first step is the introduction of the ”threefold way” by Dyson [20] in 1962 where are defined the GUE (class A), the GOE (class AI) and the GSE (class AII), often called the Wigner–Dyson classes. They describe for instance single particle excitations in the presence of a random potential. In the 90’s, Altland and Zirnbauer [1] have defined the classes BD, C, DIII and CI to describe mesoscopic normal-superconducting hybrid structures: for instance a normalconducting quantum dots in contact with two superconducting regions. They are sometimes called the Altland–Zirnbauer, or Bogoliubov–de Gennes, or Superconductor classes. At least chiral classes AIII (LUE), BDI (LOE) and CII (LSE) were introduced by Verbaarschot [58] to describe Dirac fermions or systems with purely off-diagonal disorder, as in random flux models. The explicit description of the distribution of the eigenvalues in all these classes is given for instance in Forrester [23] or in Eichelsbacher and Stolz [21].

In our ensembles $\beta = 2$, and thus only the classes A,B,C,D,AIII occur. Let us for instance recall rapidly how the new classes C and D appear in quantum mechanics. Dynamics of the systems of the Wigner Dyson class is given in term of second quantization. For the superconductor classes, one convert this set up into first quantization by using the Bogoliubov–de Gennes Hamiltonian. As explained in Atland and Zirnbauer [1], this Hamiltonian acts on a $2n$ -dimensional Hilbert space by a complex Hermitian matrix \mathcal{H} which can be written as

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & \Delta \\ -\bar{\Delta} & -H^t \end{pmatrix}$$

where H and Δ are $n \times n$ matrices. Let U_0 be the $2n \times 2n$ unitary matrix, block diagonal with each diagonal block equal to

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$

in other words $U_0 = u_0 \otimes I_n$. Then $X = U_0 \mathcal{H} U_0^{-1}$ is in $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ and each matrix in $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ is of this form. This shows that $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ is a parametrization of the class D of Altland and Zirnbauer.

If we add spin rotation invariance the BdG Hamiltonian can be written (see [1]) as two commuting subblocks of the form

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & -\bar{H}_1 \end{pmatrix}.$$

This is the class C of Altland Zirnbauer. As seen above, $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ describes this set. Notice also that the $\text{GUE}(\mathbb{R})$, or equivalently the antisymmetric case, was already studied as soon as 1968 by Rozenbaum and Mehta in [45]. Recently it also occurs for instance in Cardy [11] and Brezin et al. [8, 9] for instance.

When $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and \mathbb{H} , the eigenvalues of the matrices in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ come in pairs symmetric with respect to the origin (this is sometimes linked with Kramers degeneracy). So in a sense there is a presence of a wall at 0. This often explains their occurrences in applications, see for instance Krattenthaler et al. [44], Katori et al. [37, 38], Gillet [28], Forrester and Nordenstam [24]. The $\text{LUE}(\mathbb{C})$ is in a chiral class, but not the $\text{LUE}(\mathbb{R})$ nor the $\text{LUE}(\mathbb{H})$ which appear to be new and for which, we are not aware of any physical application.

3. Minors and Gelfand–Tsetlin polytopes

In this section, we compute the joint distribution of the main minors of invariant random matrices in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. For $M = \{M_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$ in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ and $k \leq n$, the main minor of order k of M , is the submatrix

$$\pi_k(M) = \{M_{i,j}, 1 \leq i, j \leq k\}.$$

It belongs to $\mathcal{P}_k(\mathbb{F})$, so we can consider its radial part denoted $X^{(k)}(M)$. Considering the radial part of all the main minors of an invariant random matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, we get a random variable,

$$X(M) = (X^{(1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)),$$

which is, when \mathbb{F} is equal to \mathbb{C} , and $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ is a matrix from the GUE, the one introduced by Baryshnikov in relation with queuing theory in [2], and called the minor process by Johansson and Nordenstam in [34]. The main result of this section is stated at theorem 3.4. It claims that for any \mathbb{F} , the minor process associated to an invariant random matrix with a fixed radial part, is distributed according to the uniform law, or a projection of it when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, on a so called Gelfand–Tsetlin polytope.

Our proofs rest on results given from sections 7 to 10, which involve elements of representation theory of compact Lie groups. In this section, our statements are made without any reference to this theory and most of the proofs are postponed up to the section 10.

When M is a complex Hermitian matrix, Rayleigh’s theorem claims that if $\lambda \in \mathbb{R}^n$ is the vector of the ordered eigenvalues of M and if $\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$ is the one of

its main minor $\pi_{n-1}(M)$ of order $n - 1$, then λ and β satisfy interlacing conditions $\lambda_i \geq \beta_i \geq \lambda_{i+1}$, $i = 1, \dots, n - 1$. Obviously this result also holds when M belongs to $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ and $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$, these sets being subsets of complex Hermitian matrices. Thus for $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, one obtain easily that $X(M)$ belongs to the so called Gelfand–Tsetlin polytopes, that we define below. We will see after these definitions what happens for $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. For $x, y \in \mathbb{R}^n$ we write $x \succeq y$ if x and y are interlaced, i.e.

$$x_1 \geq y_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq y_n$$

and we write $x \succ y$ when

$$x_1 > y_1 > x_2 > \dots > x_n > y_n.$$

When $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ and $y \in \mathbb{R}^n$ we add the relation $y_n \geq x_{n+1}$ (resp. $y_n > x_{n+1}$). We denote $|x|$ the vector whose components are the absolute values of those of x .

DEFINITION 3.1. *Let λ be in the Weyl chamber \mathcal{C}_n . The Gelfand–Tsetlin polytope $GT_n(\lambda)$ is defined by :*

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$GT_n(\lambda) = \{(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(n)} = \lambda, x^{(k)} \in \mathbb{R}^k, x^{(k)} \succeq x^{(k-1)}, 1 \leq k \leq n\},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$GT_n(\lambda) = \{(x^{(\frac{1}{2})}, x^{(1)}, x^{(\frac{3}{2})}, \dots, x^{(n-\frac{1}{2})}, x^{(n)}) : x^{(n)} = \lambda, \\ x^{(k)}, x^{(k-\frac{1}{2})} \in \mathbb{R}_+^k, x^{(k)} \succeq x^{(k-\frac{1}{2})} \succeq x^{(k-1)}, 1 \leq k \leq n\},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$GT_n(\lambda) = \{(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(n)} = \lambda, x^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{i-1} \times \mathbb{R} \text{ when } k = 2i, \\ x^{(1)} = 0, x^{(k)} \in \mathbb{R}_+^i \text{ when } k = 2i + 1, |x^{(k)}| \succeq |x^{(k-1)}|, 1 \leq k \leq n\}.$$

If M is a matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$ such that $X^{(n)}(M) = \lambda$, then $X(M)$ belongs to the image of $GT_n(\lambda)$ by the map $(x^{(\frac{1}{2})}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in GT_n(\lambda) \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$. To prove it, we can consider for instance, for $r = 1, \dots, n$, the vector $X^{(r-\frac{1}{2})}(M) \in \mathbb{R}^r$ whose components are the ordered absolute values of the r largest eigenvalues of the main minor of order $2r - 1$ of M considered as a matrix from $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{C})$. Then Rayleigh’s theorem implies that

$$(X^{(\frac{1}{2})}(M), X^{(1)}(M), \dots, X^{(n-\frac{1}{2})}(M), X^{(n)}(M))$$

belongs to the Gelfand–Tsetlin polytope $GT_n(\lambda)$ of type \mathbb{H} , which gives the announced property.

Usually, an element x of a Gelfand–Tsetlin polytope, is represented by a triangular array, called Gelfand–Tsetlin array, as indicated from figures 1 to 4.

Let us say what is meant by the uniform measure on a Gelfand–Tsetlin polytope. It is a bounded convex set of a real vector space. As usual, we define the volume of a bounded convex set C as its measure according to the Lebesgue measure on the real affine subspace that it spans. We denote it $\text{vol}(C)$. We define the Lebesgue measure on C as this Lebesgue measure restricted to C and the uniform probability measure on C as the normalized Lebesgue measure on C .

Let $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ be an invariant random matrix. The vector $X(M)$ is a random variable with values in $GT_n = \cup_{\lambda \in \mathcal{C}_n} GT_n(\lambda)$. We will show that the law of $X(M)$ involves uniform probability measures on Gelfand–Tsetlin polytopes.

DEFINITION 3.2. For λ in the Weyl chamber \mathcal{C}_n , we let μ_λ be the image of the uniform probability measure on $GT_n(\lambda)$ by the map $p_{n-1} : x \in GT_n(\lambda) \mapsto x^{(n-1)} \in \mathcal{C}_{n-1}$.

We observe from figures 1 to 4 that Gelfand–Tsetlin polytopes can be defined recursively. Thus the uniform measure on $GT_n(\lambda)$, denoted $m_{GT_n(\lambda)}$, satisfies the remarkable identity

$$(6) \quad m_{GT_n(\lambda)} = \int m_{GT_{n-1}(\beta)} \mu_\lambda(d\beta),$$

which explains why we first focus on the measures μ_λ , $\lambda \in \mathcal{C}_n$. The following lemma is proved at paragraph 10.1. The matrix $\Omega_n(\lambda)$ considered in this lemma is defined in 2.2.

LEMMA 3.3. Let λ be in the Weyl chamber \mathcal{C}_n and $U \in U_n(\mathbb{F})$ be a Haar distributed random variable. Then the distribution of the radial part of the main minor of order $n - 1$ of $U\Omega_n(\lambda)U^*$ is μ_λ .

We will now describe the law of $X(M)$ for every invariant random matrix M in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. It follows from lemma 2.4 that it is enough to describe it for $M = U\Omega_n(\lambda)U^*$, with U a Haar distributed random variable in $U_n(\mathbb{F})$ and λ fixed in \mathcal{C}_n .

THEOREM 3.4. Let $M = U\Omega_n(\lambda)U^*$, with U Haar distributed in $U_n(\mathbb{F})$ and $\lambda \in \mathcal{C}_n$. Then $X(M)$ is uniformly distributed on $GT_n(\lambda)$ for $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ and is distributed according to the image of the uniform measure on $GT_n(\lambda)$ by the map $(x^{(\frac{1}{2})}, \dots, x^{(n-\frac{1}{2})}, x^{(n)}) \in GT_n(\lambda) \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ for $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

PROOF. Identity (6) implies that it is enough to prove that for every integer $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ and every bounded measurable function $f : \mathcal{C}_k \rightarrow \mathbb{R}$, the conditional expectations satisfy

$$\mathbb{E}[f(X^{(k)}(M)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)\}] = \mathbb{E}[f(X^{(k)}(M)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M)\}].$$

For $V \in U_{k+1}(\mathbb{F})$ we write VMV^* instead of

$$\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

where I is the identity matrix with appropriate dimension. Let us write the radial decomposition $\pi_{k+1}(M) = V\Omega_{k+1}(X^{(k+1)}(M))V^*$, with $V \in U_{k+1}(\mathbb{F})$. Let W be a random variable independent of M , Haar distributed in $U_{k+1}(\mathbb{F})$. We have $W\pi_{k+1}(M)W^* = \pi_{k+1}(WMW^*)$ and $X^{(r)}(WMW^*) = X^{(r)}(M)$, $r = k + 1, \dots, n$, so

$$(\pi_{k+1}(M), X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M))$$

has the same distribution as

$$(W\Omega_{k+1}(X^{(k+1)}(M))W^*, X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)).$$

Then we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f(X^{(k)}(M)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)\}] \\ &= \mathbb{E}[f(X^{(k)}(\pi_{k+1}(M))) | \sigma\{X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)\}] \\ &= \mathbb{E}[f(X^{(k)}(W\Omega_{k+1}(X^{(k+1)}(M))W^*)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M), \dots, X^{(n)}(M)\}] \\ &= \mathbb{E}[f(X^{(k)}(M)) | \sigma\{X^{(k+1)}(M)\}]. \end{aligned} \quad \square$$

Let us now give an explicit description of the measures μ_λ , $\lambda \in \mathcal{C}_n$. We first introduce a function d_n , that we call asymptotic dimension. Recall that ϵ is equal to 1 if $n \notin 2\mathbb{N}$ and 0 otherwise.

DEFINITION 3.5. *We define the function d_n on \mathcal{C}_n by*

$$d_n(\lambda) = c_n(\lambda)^{-1} V_n(\lambda), \quad \lambda \in \mathcal{C}_n,$$

where the functions V_n and c_n are given by :

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$V_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i \neq \lambda_j}} (\lambda_i - \lambda_j),$$

$$c_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i \neq \lambda_j}} (j - i),$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$V_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2}} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i,$$

$$c_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2}} (j - i)(2n + 2 - j - i) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i \neq 0}} (n + 1 - i),$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$V_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq \tilde{n} \\ \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2}} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \prod_{\substack{1 \leq i \leq \tilde{n} \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i^\epsilon,$$

$$c_n(\lambda) = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq \tilde{n} \\ \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2}} (j - i)(n - j - i) \prod_{\substack{1 \leq i \leq \tilde{n} \\ \lambda_i \neq 0}} (\tilde{n} + \frac{1}{2} - i)^\epsilon.$$

When λ is in the interior of the Weyl chamber, then $d_n(\lambda)$ is just, up to a constant, the product of the positive roots of $U_n(\mathbb{F})$. We let $c_n = c_n(\lambda)$ in this case. We have the following lemma.

LEMMA 3.6. *Let λ be in the interior of \mathcal{C}_n . Then*

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$d_n(\lambda) = c_n \det(\lambda_i^{j-1})_{n \times n},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$d_n(\lambda) = c_n \det(\lambda_i^{2j-1})_{n \times n},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$d_n(\lambda) = c_n \det(\lambda_i^{2j-2+\epsilon})_{\tilde{n} \times \tilde{n}}.$$

In particular, when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and λ is in the interior of the Weyl chamber, $d_n(\lambda)$ is just the Vandermonde polynomial. The following lemma shows the importance of these functions for us.

LEMMA 3.7. *For any λ in the Weyl chamber \mathcal{C}_n , the volume of $GT_n(\lambda)$ is $d_n(\lambda)$.*

PROOF. It is an immediate consequence of lemma 10.1. \square

For λ in the Weyl chamber, we let l_λ be the Lebesgue measure on the convex set $p_{n-1}(GT_n(\lambda))$, where p_{n-1} is the projection introduced at definition 3.2.

LEMMA 3.8. *Let λ be in the Weyl chamber. Then,*

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$,

$$\mu_\lambda(d\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} l_\lambda(d\beta),$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\mu_\lambda(d\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} \text{vol}(\{z \in \mathbb{R}^n : \lambda \succeq z \succeq \beta\}) l_\lambda(d\beta).$$

PROOF. For $x \in GT_n(\lambda)$, the vector $(x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ and the vector $(x^{(\frac{1}{2})}, x^{(1)}, x^{(\frac{3}{2})}, \dots, x^{(n-1)})$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, belong the Gelfand–Tsetlin polytope $GT_{n-1}(x^{(n-1)})$, whose volume is equal to $d_{n-1}(x^{(n-1)})$ by lemma 3.7. This implies easily the lemma. \square

We now give the density of μ_λ for two particular cases: when λ is in the interior of the Weyl chamber and when λ has only one strictly positive component.

PROPOSITION 3.9. *Let λ be in the Weyl chamber \mathcal{C}_n . If λ is in the interior of \mathcal{C}_n , then the measure μ_λ has a density f_λ with respect to the Lebesgue measure on \mathcal{C}_{n-1} defined by :*

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $f_\lambda(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\{\lambda \succeq \beta\}}$,
- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $f_\lambda(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} 1_{\{|\lambda| \succeq |\beta|\}}$,
- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $f_\lambda(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} \det((\lambda_i - \beta_j) 1_{\{\lambda_i \geq \beta_j\}})_{n \times n}$, with the convention $\beta_n = 0$.

If $\lambda = (\theta, 0, \dots, 0)$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, then the measure μ_λ is equal to $\tilde{\mu}_\lambda \otimes \delta_0^{\tilde{n}-1}$, $\tilde{\mu}_\lambda$ having a density g_θ with respect to the Lebesgue measure on \mathbb{R}_+ defined by :

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $g_\theta(\beta) = (n-1) \frac{\beta^{n-2}}{\theta^{n-1}} 1_{[0, \theta]}(\beta)$,
- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $g_\theta(\beta) = (n-2) \frac{\beta^{n-3}}{\theta^{n-2}} 1_{[0, \theta]}(\beta)$,
- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $g_\theta(\beta) = (2n-2)(2n-1) \frac{\beta^{2n-3}}{\theta^{2n-1}} (\theta - \beta) 1_{[0, \theta]}(\beta)$.

PROOF. Lemma 3.8 gives immediately the densities f_λ and g_θ for $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. For $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ and λ in the interior of the Weyl chamber, this lemma implies that, for $\beta \in \mathbb{R}_+^n$,

$$f_\lambda(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{\lambda \succeq z\}} 1_{\{z \succeq \beta\}} dz.$$

We get the announced formula using the identity (9) and the generalised Cauchy–Binet identity (8). For $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ and $\lambda = (\theta, 0, \dots, 0)$ we get from lemma 3.8 that, for $\beta \in \mathbb{R}_+$,

$$g_\theta(\beta) = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} \int_{\mathbb{R}} 1_{\{\theta \geq z \geq \beta\}} dz = \frac{d_{n-1}(\beta)}{d_n(\lambda)} (\theta - \beta) 1_{[0, \theta]}(\beta). \quad \square$$

4. Rank one perturbation on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$

The next two sections are devoted to the LUE introduced in Definition 2.5. We will focus on the distribution of the eigenvalues. A random matrix of the $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ can be written as $\sum_{i=1, \dots, k} M_i \Omega_n^1 M_i$, where the M_i 's are independent standard Gaussian variables in $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. We will compute the distribution of its eigenvalues recursively on k . Thus, the study of an additive perturbation by the simplest Laguerre ensemble, i.e. the $\text{LUE}_n^1(\mathbb{F})$, is the first step, and we give in Theorem 4.5 the distribution of $\Omega_n(\lambda) + M \Omega_n^1 M^*$, for $\lambda \in \mathcal{C}_n$.

For λ an element of \mathcal{C}_n having only k nonzero components, the others being equal to zero, we will write $\Omega_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ instead of $\Omega_n(\lambda)$. Let $\theta \in \mathbb{R}_+$ and U be a Haar distributed random variable in $U_n(\mathbb{F})$. We first describe the distribution of the radial part of $\Omega_n(\lambda) + U \Omega_n(\theta) U^*$. We introduce the following sets.

DEFINITION 4.1. *For $\lambda \in \mathcal{C}_n$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, we define the set $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ by :*

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{E}(\lambda, \theta) = \{(\beta, x) \in \mathbb{R}^n \times GT_n : \beta \succeq \lambda, \sum_{i=1}^n (\beta_i - \lambda_i) = \theta, x \in GT_n(\beta)\},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\mathcal{E}(\lambda, \theta) = \{(\beta, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times GT_n : \lambda, \beta \succeq z, \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) = \theta, x \in GT_n(\beta)\},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r + 1$,

$$\mathcal{E}(\lambda, \theta) = \{(\beta, z, x, s) \in \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R}_+^r \times GT_n \times \{0, 1\} : \lambda, \beta \succeq z, \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) = \theta, x \in GT_n(\beta), s = 0 \text{ if } \lambda_r = 0\},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r$,

$$\mathcal{E}(\lambda, \theta) = \{(\beta, z, x) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}_+^{r-1} \times GT_n : \lambda, \beta \succeq z, \max(|\lambda_r|, |\beta_r|) \leq z_{r-1}, \sum_{k=1}^{r-1} (\lambda_k + \beta_k - 2z_k) + |\lambda_r - \beta_r| = \theta, x \in GT_n(\beta)\}.$$

Each set $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ is either a convex set or an union of two convex sets. Thus we can define the Lebesgue measure on it.

DEFINITION 4.2. *For $\lambda \in \mathcal{C}_n$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, we define $\nu_{\lambda, \theta}$ as the image of the uniform probability measure on $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ by the projection on the component β , denoted by p .*

The following proposition is proved at paragraph 10.2.

PROPOSITION 4.3. *Let $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in \mathcal{C}_n$ and U be a Haar distributed random variable in $U_n(\mathbb{F})$. Then the radial part of the random matrix $\Omega_n(\lambda) + U \Omega_n(\theta) U^*$ is distributed according to the measure $\nu_{\lambda, \theta}$.*

Recall that a real random variable has a Gamma distribution with parameters $(\alpha, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$, if its density is equal to

$$\frac{\alpha}{(n-1)!} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Recall also that we use the notation $c = 1$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ and $c = 2$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

LEMMA 4.4. *Let M be a standard Gaussian variable in $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Then the radial part of $M\Omega_n^1 M^*$ has only one nonzero component Θ . It has a Gamma distribution with parameters $(1, n)$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $(1, n-1)$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, and $(2, 2n)$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. Its density f_Θ can be written, for some $k > 0$ as*

$$f_\Theta(\theta) = k d_n(\theta) e^{-c\theta}$$

PROOF. We make the simple remark that $M\Omega_n^1 M^*$ has the same eigenvalues as $M^* M\Omega_n^1$. If $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ or \mathbb{H} , the matrix $M^* M\Omega_n^1$ is equal to $|V|^2 \Omega_n^1$, where V is a standard Gaussian variable of \mathbb{F}^n . This shows that $M\Omega_n^1 M^*$ has only one strictly positive eigenvalue, which has a Gamma distribution with parameters $(1, n)$ for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and $(2, 2n)$ for \mathbb{H} . In the case when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $M\Omega_n^1 M^*$ has only one strictly positive eigenvalue. The proof that it has a Gamma distribution with parameters $(1, n-1)$ along the same line is not so immediate but remains quite elementary. Anyway, it will also follow from proposition 5.5 below. The last statement follows from the fact that $d_n(\theta)$ is equal to

$$(7) \quad \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \text{ for } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \quad \frac{2\theta^{n-2}}{(n-2)!} \text{ for } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \quad \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} \text{ for } \mathbb{F} = \mathbb{H}. \quad \square$$

This fact, which will be useful for computations, is not a coincidence. Actually it is a particular case of a more general result, proposition 5.5, the proof of which provides an interesting way to understand why the asymptotic dimension d_n appears.

THEOREM 4.5. *Let M be a standard Gaussian variable in $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ and λ be an element of the Weyl chamber \mathcal{C}_n . Then the distribution of the radial part of $\Omega_n(\lambda) + M\Omega_n^1 M^*$, that we denote ν_λ , is the probability measure proportional to $\int_{\mathbb{R}_+} \nu_{\lambda, \theta} d_n(\theta) e^{-c\theta} d\theta$.*

PROOF. The matrix $M\Omega_n^1 M^*$ is an invariant random matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Thus lemmas 2.4 and 4.4 ensure that M can be written $U\Omega_n(\Theta)U^*$, where U and Θ are independent random variables with a Haar distribution on $U_n(\mathbb{F})$ and the density f_Θ . It suffices to apply proposition 4.3 to see that $\nu_\lambda = \int_{\mathbb{R}} \nu_{\lambda, \theta} f_\Theta(\theta) d\theta$. \square

In the following section we will need an explicit formula for the density of the measure ν_λ . We first deal with the measure $\nu_{\lambda, \theta}$.

LEMMA 4.6. *For $\lambda \in \mathcal{C}_n$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, the volume of $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ is equal to $d_n(\lambda)d_n(\theta)$.*

PROOF. The lemma is immediately deduced from lemma 10.3. \square

We denote by $l_{\lambda, \theta}$ the Lebesgue measure on $p(\mathcal{E}(\lambda, \theta))$, where p is the projection introduced at definition 4.2.

LEMMA 4.7. *Let λ be in the Weyl chamber and θ in \mathbb{R}_+ . Then*

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\nu_{\lambda, \theta}(d\beta) = \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)d_n(\theta)} l_{\lambda, \theta}(d\beta),$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}, \mathbb{R}$,

$$\nu_{\lambda, \theta}(d\beta) = \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)d_n(\theta)} \text{vol}(\mathcal{M}_{\lambda, \theta}(\beta)) l_{\lambda, \theta}(d\beta),$$

where $\mathcal{M}_{\lambda,\theta}(\beta)$ is the projection, for β fixed, of $\mathcal{E}(\lambda,\theta)$ on the component z when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ with n even, and on the component (z, s) when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ with n odd.

PROOF. By definition $\nu_{\lambda,\theta}$ is the image of the uniform measure on $\mathcal{E}(\lambda,\theta)$ by the projection p . Thus, the normalisation follows from the lemma 4.6 and the factor $d_n(\beta)$ appears when one integrates this uniform measure with respect to the component $x \in GT_n(\beta)$. \square

We will see that $\text{vol}(\mathcal{M}_{\lambda,\theta}(\beta))$ plays the role of an asymptotic multiplicity. It is replaced by one when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ because this is the only field for which the irreducible decompositions described from propositions 9.2 to 9.5 are multiplicity free. Let us now describe the measure ν_λ in some particular cases.

PROPOSITION 4.8. *Let k be an integer smaller than \tilde{n} and $\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ be equal to $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$. When $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, if n is even and $k = \tilde{n}$, we suppose that $\lambda_1 > \dots > \lambda_{k-1} > |\lambda_k|$. For every other case we suppose that $\lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0$.*

Then the measure ν_λ is equal to $\tilde{\nu}_\lambda \otimes \delta_0^{\otimes (n-(k+1)\wedge n)}$, where $\tilde{\nu}_\lambda$ has a density L_λ with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{(k+1)\wedge \tilde{n}}$ defined by

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$L_\lambda(\beta) = \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} \mathbf{1}_{\{\beta \succeq \lambda\}} e^{-\sum_{i=1}^{(k+1)\wedge n} (\beta_i - \lambda_i)},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$L_\lambda(\beta) = 2^n \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} \left[\int_{\mathbb{R}_+^k} \mathbf{1}_{\{\lambda, \beta \succeq z\}} e^{-2 \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) - \beta_{k+1} \mathbf{1}_{\{k < n\}}} dz \right] \mathbf{1}_{\{\beta_{(k+1)\wedge n} \geq 0\}}.$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r$, $k = r, r-1$,

$$L_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} \left[\int_{\mathbb{R}_+^{r-1}} \mathbf{1}_{\{\lambda, \beta \succeq z, |\lambda_r|, |\beta_r| \leq z_{r-1}\}} e^{-\sum_{i=1}^{r-1} (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) - |\lambda_r - \beta_r|} dz \right],$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r$, $k \leq r-2$,

$$L_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \frac{d_n(\beta)}{d_n(\lambda)} \left[\int_{\mathbb{R}_+^k} \mathbf{1}_{\{\lambda, \beta \succeq z\}} e^{-\sum_{i=1}^k (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) - \lambda_{k+1}} dz \right] \mathbf{1}_{\{\beta_{k+1} \geq 0\}}.$$

PROOF. Using the same notations as in the proof of theorem 4.5 we have that $\nu_\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \nu_{\lambda,\theta} f_\Theta(\theta) d\theta$. Thus the proposition follows immediately from lemma 4.7 and the fact that $f_\Theta(\theta) = d_n(\theta) e^{-\theta}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $f_\Theta(\theta) = 2^n d_n(\theta) e^{-2\theta}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, and $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2} d_n(\theta) e^{-\theta}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. \square

REMARK 4.9. We observe in lemma 4.7 that the measures $\nu_{\lambda,\theta}$ are the same, in the cases $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n = 2r+1$ and $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $n = r$ (see 8.2 for explanations). Moreover, for that two cases, the functions d_n are the same, up to a constant. Thus the measures ν_λ defined at theorem 4.5 are the same, up to the constant c . That's why we didn't write both cases in the previous proposition.

5. Generalised Laguerre ensembles

In this section we compute the law of the radial part of a matrix in $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ by considering successive rank one perturbations, i.e. the random walk $(S_k)_{k \geq 0}$ on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ defined by $S_k = \sum_{i=1}^k M_i \Omega_n^1 M_i$, where the M_i 's are independent standard Gaussian variables in $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. We compute the law of the radial part R_k of S_k by induction. The following proposition concerns the chain $(R_k)_{k \geq 0}$. In Figures 5, 6

and 7 the black discs represent successive states of this chain for $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ and \mathbb{R} . The white discs are intermediate points which indicate the interlacing conditions satisfied by the chain.

PROPOSITION 5.1. *The process $(R_k)_{k \geq 0}$ is a Markov chain whose transition probability $P(\lambda, \cdot)$ is equal to ν_λ . When $R_0 = 0$, R_k has $k \wedge \tilde{n}$ nonzero components.*

PROOF. As in lemma 2.4, we see that (S_k, R_k, \dots, R_1) has the same law as $(U\Omega_n(R_k)U^*, R_k, \dots, R_1)$, when $U \in U_n(\mathbb{F})$ is a Haar distributed random variable independent of (R_k, \dots, R_1) . Then for every bounded measurable function $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S_{k+1})|\sigma\{R_k, \dots, R_1\}) &= \mathbb{E}(f(U\Omega_n(R_k)U^* + M_{k+1}\Omega_n^1 M_{k+1}^*)|\sigma\{R_k, \dots, R_1\}) \\ &= \mathbb{E}(f(U\Omega_n(R_k)U^* + M_{k+1}\Omega_n^1 M_{k+1}^*)|\sigma\{R_k\}). \end{aligned}$$

Thus $(R_k)_{k \geq 0}$ is Markovian. The transition probability is given by theorem 4.5 and it is clear, for instance from lemma 4.7, that the last point is true. \square

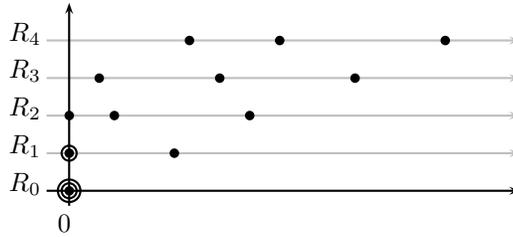


FIGURE 5. Rank one perturbations on $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$.

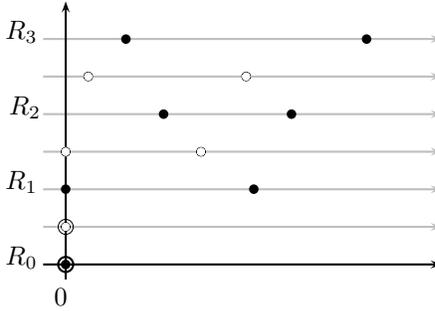
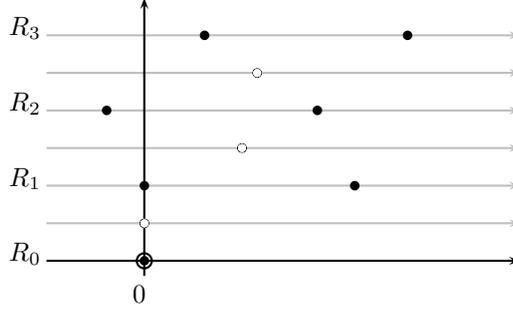


FIGURE 6. Rank one perturbations on $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$.

We have now gathered most of the ingredients needed to get the law of the eigenvalues of the matrices from the $LUE_{n,k}(\mathbb{F})$. For the computations, we recall a generalised Cauchy-Binet identity (see for instance [33]). Let (E, \mathcal{B}, m) be a measure space, and let ϕ_i and ψ_j , $1 \leq i, j \leq n$, be measurable functions such that the $\phi_i \psi_j$'s are integrable. The generalised Cauchy Binet identity is

$$(8) \quad \det \left(\int_E \phi_i(x) \psi_j(x) dm(x) \right) = \frac{1}{n!} \int_{E^n} \det(\phi_i(x_j)) \det(\psi_i(x_j)) \prod_{k=1}^n dm(x_k).$$

FIGURE 7. Rank one perturbations on $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Let us also recall the identity which gives interlacing conditions with the help of a determinant. Let x and y be two vectors in \mathbb{R}^n such that $x_1 > \dots > x_n$ and $y_1 > \dots > y_n$. Then

$$(9) \quad 1_{\{x \succ y\}} = \det(1_{\{x_i > y_j\}})_{n \times n}.$$

For $\lambda \in \mathbb{R}^n$, the Vandermonde determinant is

$$\Delta_n(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Recall that $\tilde{n} = n$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, $\tilde{n} = \lfloor n/2 \rfloor$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $c = 1$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $c = 2$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ and Ω_k is given by (4).

THEOREM 5.2. *Let M be a standard Gaussian variable in $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$. Then the positive eigenvalues of $M\Omega_k M^*$ have a density $f_{n,k}$ with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}$ and it exists a constant $C > 0$ such that for $\lambda \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}$,*

$$(10) \quad f_{n,k}(\lambda) = C d_n(\lambda) \Delta_{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}(\lambda) \prod_{i=1}^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}} \lambda_i^{(\tilde{k} - \tilde{n}) \vee 0} e^{-c \lambda_i}.$$

PROOF. Let us first prove it by induction on k when $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$. The random matrix $M\Omega_k M^*$ has the same law as the random variable S_k introduced at the beginning of the section. The property is true for $k = 1$ by lemma 4.4. Suppose that it is true for $k \geq 1$. Let $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k \wedge n}, 0, \dots, 0)$ be a vector of \mathbb{R}^n such that $\gamma_1 > \dots > \gamma_{k \wedge n} > 0$ and M be a standard Gaussian variable in $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{F})$. Proposition 4.8 ensures that the strictly positive eigenvalues of $\Omega_n(\gamma) + M\Omega_n^1 M^*$ have a density L_γ with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{n \wedge (k+1)}$, which proves the first point and implies that, for $\lambda \in \mathbb{R}^{n \wedge (k+1)}$,

$$(11) \quad f_{n,k+1}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+^{n \wedge k}} f_{n,k}(\gamma) L_\gamma(\lambda) d\gamma.$$

Let us now distinguish the complex and quaternionic cases. When $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, identity (11) and the induction hypothesis imply that it exists a constant C_1 such that

$$(12) \quad f_{n,k+1}(\lambda) = C_1 d_n(\lambda) e^{-\sum_i \lambda_i} \int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \Delta_{k \wedge n}(\gamma) \prod_{i=1}^{n \wedge k} \gamma_i^{(k-n) \vee 0} 1_{\{\lambda \succeq \gamma\}} d\gamma.$$

When $k < n$, the integral above is an homogeneous polynomial of degree $\frac{1}{2}k(k+1)$, equal to zero when $\lambda_i = \lambda_j$, $i \neq j$, so it is proportional to $\Delta_{k+1}(\lambda)$. This proves the

property for $k + 1 \leq n$. The positive eigenvalues of MM^* being the same as those of M^*M , we get the proposition for $k \geq n$ as well. It implies that for some $c_k > 0$,

$$(13) \quad \int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \Delta_{k \wedge n}(\gamma) \prod_{i=1}^{n \wedge k} \gamma_i^{(k-n) \vee 0} 1_{\{\lambda \geq \gamma\}} d\gamma = c_k \Delta_{(k+1) \wedge n}(\lambda) \prod_{i=1}^{n \wedge (k+1)} \lambda_i^{(k+1-n) \vee 0}.$$

When $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, we get that $f_{n,k+1}(\lambda)$ is proportional to

$$d_n(\lambda) e^{-2 \sum_i \lambda_i} \int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} 1_{\{\lambda \geq z\}} \left[\int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} 1_{\{\gamma \geq z\}} e^{-4 \sum_i (\gamma_i - z_i)} \Delta_{k \wedge n}(\gamma) \prod_{i=1}^{k \wedge n} \gamma_i^{(k-n) \vee 0} d\gamma \right] dz.$$

The generalised Cauchy Binet identity implies that

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \Delta_{k \wedge n}(\gamma) 1_{\gamma \geq z} e^{-4 \sum_{i=1}^{k \wedge n} (\gamma_i - z_i)} \prod_{i=1}^{k \wedge n} \gamma_i^{(k-n) \vee 0} d\gamma_i \\ &= \frac{1}{(k \wedge n)!} \int_{\mathbb{R}_+^{k \wedge n}} \det(\gamma_i^{j-1+(k-n) \vee 0}) \det(1_{\{\gamma_i > z_j\}} e^{-4(\gamma_i - z_j)}) d\gamma \\ &= \det \left(\int_{\mathbb{R}_+} \gamma^{j-1+(k-n) \vee 0} 1_{\{\gamma > z_i\}} e^{-4(\gamma - z_i)} d\gamma \right) \\ &= C_2 \det(z_i^{j-1+(k-n) \vee 0}) = C_2 \Delta_{k \wedge n}(z) \prod_{i=1}^{k \wedge n} z_i^{(k-n) \vee 0}, \end{aligned}$$

where C_2 is a constant. Using (13), this proves the property for $k + 1$.

Let us now prove the proposition when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. By Remark 4.9 the odd real case is the same as the quaternionic case replacing n , k and $c = 2$ by \tilde{n} , \tilde{k} and $c = 1$. Thus, the property is true for the real odd case. If n is even, it is easier to use what we know about the odd case rather than proposition 4.8 to get the result. Let us consider the random matrix

$$N = \begin{pmatrix} M \\ X \end{pmatrix},$$

X being a standard Gaussian variable in $\mathcal{M}_{1,k}(\mathbb{R})$, independent of M . Then, the density of the strictly positive eigenvalues of $N\Omega_k N^*$ is $f_{n+1,k}$. This random matrix has a law invariant for the adjoint action of $U_{n+1}(\mathbb{R})$ and its main minor of order n is $M\Omega_k M^*$. Thus, using lemma 3.8, we get that for $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}$, $f_{n,k}(\lambda)$ is proportional to

$$\int_{\mathbb{R}_+^{\tilde{n} \wedge \tilde{k}}} \frac{d_n(\lambda)}{d_{n+1}(\gamma)} f_{n+1,k}(\gamma) 1_{\{\gamma \geq \lambda\}} d\gamma.$$

The integer $n + 1$ is odd, so we can replace $f_{n+1,k}$ in the previous identity by the formula (10). An easy computation achieves the proof. \square

This last theorem allows us to compute the density of the random matrix itself. Let ϵ be equal to 1 if $n \notin 2\mathbb{N}$ and 0 otherwise.

THEOREM 5.3. *When $k \geq n$ the distribution of a matrix of the $LUE_{n,k}(\mathbb{F})$ has a density $l(H)$ with respect to the Lebesgue measure dH on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ proportional to*

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i^{k-n} e^{-\lambda_i} 1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i), \quad \text{for } \mathbb{F} = \mathbb{C},$$

$$\frac{1}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i + \lambda_j)} \prod_{i=1}^n \lambda_i^{k-n-1} e^{-2\lambda_i}, \quad \text{for } \mathbb{F} = \mathbb{H},$$

$$\frac{1}{\prod_{1 \leq i < j \leq \tilde{n}} (\lambda_i + \lambda_j)} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^{\tilde{k}-\tilde{n}-\epsilon} e^{-\lambda_i}, \quad \text{for } \mathbb{F} = \mathbb{R},$$

where λ is the vector of eigenvalues of H when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, of positive eigenvalues of H when $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$.

PROOF. The function d_n being proportional to the product of roots on the interior of the Weyl chamber, Weyl integral's formula (see Helgason [32], Thm. I.5.17) says that it exists a constant $C > 0$ such that for every invariant measurable function $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, we have

$$\int_{\mathcal{P}_n(\mathbb{F})} f(H) dH = C \int_{\mathcal{C}_n} d_n(\lambda)^2 f(\lambda) d\lambda,$$

where dH and $d\lambda$ are the Lebesgue measure on $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ and \mathcal{C}_n . Thus theorem 5.2 implies that the density of a random matrix of the LUE $_{n,k}(\mathbb{F})$ is proportional to

$$H \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \mapsto \frac{\Delta_{\tilde{n}}(\lambda)}{d_n(\lambda)} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^{\tilde{k}-\tilde{n}} e^{-c\lambda_i} 1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i).$$

We achieve the proof by replacing $d_n(\lambda)$ by its value. \square

For λ in \mathcal{C}_n , let us consider a random matrix $\Omega_n(\lambda) + \sum_{i=1, \dots, \tilde{k}} M_i \Omega_n(\alpha_i) M_i^*$, where the M_i 's are independent standard Gaussian variables in $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ and the α_i 's are some real numbers, or equivalently a random matrix $\Omega_n(\lambda) + M \Omega_k(\alpha) M^*$, where M is a standard Gaussian variable in $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$. When $\lambda = 0$ and $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, it has a generalised Wishart distribution. One easy way to compute the law of its eigenvalues is to use the Harish Chandra formula (see for instance Wang [59]). But this method doesn't work for the other fields. Our method, which consists in computing the law of the eigenvalues by induction, provide a way to compute the law of the radial part of $\Omega_n(\lambda) + M \Omega_k(\alpha) M^*$ for any field \mathbb{F} . Nevertheless, computations are not always easy for such a general matrix. Actually, in the case when $\lambda = 0$ and $k \leq n$, computations are much simpler using lemma 3.3 rather than this approach. To do this, we need the following theorem which goes back to Borel [5] (see Olshanski [50], Pickrell [53]).

THEOREM 5.4. *Let $(U_N)_{N \geq 1}$ be a sequence of random variable such that U_N is Haar distributed in $U_N(\mathbb{F})$. Then the main minor of order n of $\sqrt{N} U_N$ converges in distribution to a standard Gaussian variable in $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, when N goes to $+\infty$.*

PROPOSITION 5.5. *Let k be an integer smaller than n , M be a standard Gaussian variable in $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{F})$ and $\alpha \in \mathbb{R}^{\tilde{k}}$ such that $\alpha_1 > \dots > \alpha_{\tilde{k}} > 0$. Then there is a constant C such that the positive eigenvalues of $M \Omega_k(\alpha) M^*$ have a density $g_{n,k}$ with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+^{\tilde{k}}$ defined by*

$$g_{n,k}(\lambda) = C \frac{d_n(\lambda)}{d_n(\alpha) \prod_{i=1}^{\tilde{k}} \alpha_i} \det(e^{-c \frac{\lambda_i}{\alpha_j}})_{1 \leq i, j \leq \tilde{k}}.$$

In particular, when $\tilde{k} = 1$ and $\alpha_1 = 1$, this density is proportional to the function $\theta \in \mathbb{R} \mapsto d_n(\theta) e^{-c\theta} 1_{\mathbb{R}_+}(\theta)$.

PROOF. Let $N \in \mathbb{N}$ be an integer greater than n . We consider a Haar distributed random variable $U_N \in U_N(\mathbb{F})$, the random matrix $M_N = U_N \Omega_N(\alpha) U_N^*$ and its main minor of order n denoted by $\pi_n(M_N)$. Using lemma 3.8 we obtain that the density of the \tilde{k} strictly positive eigenvalues of $\pi_{N-1}(M_N)$ is proportional to

$$\frac{d_{N-1}(\lambda)}{d_N(\alpha)} \det \left(\frac{(\alpha_i - \lambda_j)^{c-1}}{(c-1)!} 1_{\{\alpha_i > \lambda_j\}} \right)_{1 \leq i, j \leq \tilde{k}}.$$

Iterating for the smaller minors and using the Cauchy Binet identity we obtain that the density of the strictly positive eigenvalues of $\pi_n(M_N)$ is proportional to

$$\frac{d_n(\lambda)}{d_N(\alpha)} \det \left(\frac{(\alpha_i - \lambda_j)^{c(N-n)-1}}{(c(N-n)-1)!} 1_{\alpha_i > \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq \tilde{k}}.$$

So the distribution of the strictly positive eigenvalues of $N\pi_n(M_N)$ converges to a distribution with a density proportional to

$$\frac{d_n(\lambda)}{d_n(\alpha) \prod_{i=1}^{\tilde{k}} \alpha_i} \det(e^{-c \frac{\lambda_i}{\alpha_j}})_{1 \leq i, j \leq \tilde{k}}.$$

Theorem 5.4 states that $N\pi_n(M_N)$ converges in distribution to $M\Omega_n(\alpha)M^*$, as N goes to infinity, which completes the proof. \square

The joint eigenvalues density of the Laguerre unitary ensemble $\text{LUE}(\mathbb{C})$ has been known for a long time [29]. For the invariant ensembles $\text{LUE}(\mathbb{F})$ with $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, it seems to be new: none of them is associated to the Gaussian ensembles for the symmetry classes recalled in 2.4. We have already seen some specificities of these ensembles: for instance the support of a random matrix of the $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ for the other fields than \mathbb{C} is all the set of rank \tilde{k} matrices of $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ whereas in the complex case, this is the set of positive rank k Hermitian matrices. For instance, we know that if $M = (M_t)_{t \geq 0}$ is a standard Brownian motion in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, then $M_t M_t^*$ and the process of its eigenvalues are Markovian. This follows from stochastic matrix calculus (see Bru [10]), or more conceptually from the fact that they are radial parts of the Brownian motion in the flat symmetric space associated to $U(n, k)/U(n) \times U(k)$ (see Forrester [23], Roesler [57]). This is not the case in general: if (M_t) is for instance a standard Brownian motion in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, then neither $M_t \Omega_2 M_t^*$ nor the process of its eigenvalues (this is the same here !) is Markovian. It will be interesting to investigate these invariant ensembles which seem to be deeply different from the usual ones.

6. Interlaced determinantal processes

Let E be a Borel subset of \mathbb{R}^r . A counting measure ξ on E is a measure such that $\xi(B)$ is an integer for all bounded Borel set B of E . Let us consider a sequence $(T_k)_{k \geq 1}$ of random variables with values in E and $\Xi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_{T_k}$. If Ξ is almost surely a counting measure on E , we say that Ξ is a point process on E . Let m be a measure on E . A function ρ_n on E^n such that

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \Xi(B_i) \right] = \int_{B_1 \times \dots \times B_n} \rho_n(x_1, \dots, x_n) m(dx_1) \dots m(dx_n),$$

for every disjoint bounded Borel sets B_1, \dots, B_n in E , is called a n^{th} correlation function. The measure m is called the reference measure.

DEFINITION 6.1. *If it exists a function $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ such that for all $n \geq 1$,*

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{n \times n},$$

for $x_1, \dots, x_n \in E$, then one says that the point process is determinantal and K is called the correlation kernel of the process.

Let us give two classical examples of determinantal processes. For this we recall a classical way to show that a point process is determinantal and to obtain its correlation kernel (see for instance the lectures given by Johansson [33]). Suppose that μ_n is a probability measure on E^n having a density u_n with respect to the measure $m^{\otimes n}$ on E^n defined by

$$(14) \quad u_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C \det(\psi_i(\lambda_j))_{n \times n} \det(\phi_i(\lambda_j))_{n \times n},$$

where C is a positive constant and the functions ψ_i 's and ϕ_i 's are measurable functions such that $\psi_i \phi_j$ is integrable for any i, j . We denote $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ the matrix defined by

$$A_{ij} = \int_E \psi_i(x) \phi_j(x) m(dx).$$

Then proposition 2.11 of [33] claims that A is invertible and that the image measure of the probability measure μ_n by the map $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}$ is a determinantal point process with correlation kernel defined by

$$(15) \quad K(x, y) = \sum_{i, j=1}^n \psi_i(x) (A^{-1})_{ij} \phi_j(y), \quad x, y \in E.$$

Suppose for example that $E = \mathbb{R}$, m is the Lebesgue measure and

$$(16) \quad u_n(\lambda) = \Delta_n(\lambda)^2 \prod_{i=1}^n w(\lambda_i),$$

where w is a positive integrable function on \mathbb{R} such that $\int x^k w(x) dx < +\infty$ for any k . If $(p_i)_{i \geq 0}$ is a sequence of polynomials such that the p_i 's have degree i and satisfy

$$\int_E p_i(x) p_j(x) w(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

then $\Delta_n(\lambda)$ is proportional to $\det(p_{i-1}(\lambda_j))$ and the correlation kernel is

$$(17) \quad K(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(x) w(x)^{\frac{1}{2}} p_i(y) w(y)^{\frac{1}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

This is an usual way to show that the point processes associated to the eigenvalues of the random matrices from the GUE or the LUE are determinantal. For these cases, the orthogonal polynomials which have to be considered to get a kernel of the form (17) are respectively the Hermite and the Laguerre ones. Let us now briefly describe the cases of the GUE(\mathbb{F}) and the LUE(\mathbb{F}) when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

We let $\epsilon = 1$ if $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ with n odd, and $\epsilon = 0$ otherwise. Weyl integral's formula ([32], Thm. I.5.17) implies that it exists a constant C such that the vector of the positive eigenvalues of a random matrix M from the GUE(\mathbb{F}), $\mathbb{F} = \mathbb{H}, \mathbb{R}$, has a density f_{gue} defined on $\mathbb{R}_+^{\tilde{n}}$ by

$$(18) \quad f_{gue}(\lambda) = C d_n(\lambda)^2 \prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\frac{1}{2} \lambda_i^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i).$$

Lemma 3.6 shows that the density f_{gue} has the form (14) with \tilde{n} instead of n and for instance $\psi_i(x) = \phi_i(x) = x^{2i-2+\epsilon}e^{-\frac{1}{4}x^2}$. Thus the associated point process is determinantal. Since the Hermite polynomials have only monomials of same parity, it shows that the correlation Kernel is

$$\sum_{i=1}^{\tilde{n}} h_{2i-2+\epsilon}(x)h_{2i-2+\epsilon}(y)e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)} \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Actually this situation corresponds to a classical one. It suffices to make the change of variable $\lambda'_i = \lambda_i^2$ in (18) to get the classical form (16) with $w(x) = x^\alpha e^{-\frac{1}{2}x}$, where $\alpha = \frac{1}{2}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, n is odd and $\alpha = -\frac{1}{2}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, n is even. The orthogonal polynomials to consider are thus the Laguerre ones.

For $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ or \mathbb{R} , theorem 5.2 shows that the density of the positive eigenvalues of a random matrix from the $LUE_{n,k}(\mathbb{F})$, for $k \geq n$, has the form (14) with \tilde{n} instead of n and for instance $\psi_i(x) = x^{2i-2+\epsilon+k-\tilde{n}}$, $\phi_i(x) = x^{i-1}e^{-cx}$. Thus, the associated point processes are determinantal and their correlation kernels are given by (15). Nevertheless, it is important to notice that the orthogonal polynomials method can't be applied here.

In the following, we will study more generally the determinantal aspect of the interlaced processes considered in the previous sections. Using the explicit formula that we got, we write their measures as a product of determinant and use the method Johansson [33] and Borodin et al. [7] to show that a large class of them are determinantal and to compute their correlation Kernels.

6.1. "Triangular" interlaced processes. The first type of interlaced point process that we consider is the one associated to the eigenvalues of the main minors of an invariant random matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. In this case $E = \{1, \dots, n\} \times \mathbb{R}$ and the reference measure m is the product of the counting measure on $\{1, \dots, n\}$ with the Lebesgue measure on \mathbb{R} when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, on \mathbb{R}_+ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ and $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

DEFINITION 6.2. *We say that an invariant random matrix M in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ belongs to the class \mathcal{K} if the eigenvalues of M for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, and the positive eigenvalues of M for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, have a joint density with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ proportional to*

$$d_n(\lambda) \det(\psi_j(\lambda_i))_{\tilde{n} \times \tilde{n}},$$

where the ψ_i 's are real continuous functions on \mathbb{R} , equal to zero on \mathbb{R}_- for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, and such that for all $k \in \mathbb{N}$, the function $x \mapsto x^k \psi_i(x)$ is integrable on \mathbb{R} .

Many invariant ensembles belong to the class \mathcal{K} , especially the random matrices from the $GUE(\mathbb{F})$ and the $LUE(\mathbb{F})$.

THEOREM 6.3. *Let M be an invariant random matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, which belongs to the class \mathcal{K} . Let us consider the random vector $X = X(M)$ and the associated point process Ξ on E defined by*

$$\Xi = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{(k, X_i^{(k)})} \text{ when } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \text{ and } \Xi = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \delta_{(k, |X_i^{(k)}|)} \text{ when } \mathbb{F} = \mathbb{R}.$$

Then

- (i) The point process Ξ is determinantal.

(ii) The correlation kernel of Ξ is, for $(r, x), (s, y) \in E$,

$$K((r, x), (s, y)) = -\frac{(y-x)^{c(s-r)-1}}{(c(s-r)-1)!} 1_{\{s>r, y \geq x\}} + \alpha \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \psi_{r-k}^r(x) \int \frac{\partial^{c(n-s)} d_n}{\partial z_k^{c(n-s)}}(z_1, \dots, z_{k-1}, y, z_{k+1}, \dots, z_{\tilde{n}}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\tilde{n}} \psi_i(z_i) dz_i$$

where $\psi_{r-k}^r(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{(c(n-r)-1)!} (z-x)^{c(n-r)-1} \psi_k(z) dz$, if $r < n$, $\psi_{n-k}^n(x) = \psi_k(x)$ and $\alpha^{-1} = \int d_n(z) \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \psi_i(z_i) dz_i$

We observe that $(X^{(1)}(M), \dots, X^{(n)}(M))$ when M is an invariant random matrix in $\mathcal{P}_n(\mathbb{H})$, has the same law as $(X^{(3)}(N), X^{(5)}(N), \dots, X^{(2n+1)}(N))$ when N is an invariant random matrix in $\mathcal{P}_{2n+1}(\mathbb{R})$, provided that $X^{(n)}(M)$ has the same law as $X^{(2n+1)}(N)$. So the quaternionic case is deduced from the real odd one in the previous theorem (see 8.2).

COROLLARY 6.4. *Under the hypothesis of the previous theorem, suppose that we can write $d_n(\lambda) = \det(\chi_i(\lambda_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}}$, where $(\chi_k)_{k \geq 1}$ is a sequence of real functions on \mathbb{R} such that the $\chi_i \psi_j$'s are integrable on \mathbb{R} and $\int_{\mathbb{R}} \chi_i(x) \psi_j(x) dx = \delta_{ij}$. Then*

$$K((r, x), (s, y)) = -\frac{(y-x)^{c(s-r)-1}}{(c(s-r)-1)!} 1_{\{s>r, y \geq x\}} + \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \psi_{r-k}^r(x) \frac{d^{c(n-s)} \chi_k}{dx^{c(n-s)}}(y).$$

If the radial part of M is deterministic and equal to λ in the interior of the Weyl chamber, the theorem and its corollary remain true up to slight modifications, replacing $\psi_i(z) dz$ by the Dirac measure $\delta_{\lambda_i}(dz)$ for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and by $\delta_{|\lambda_i|}(dz)$ for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, in the kernel and the counting measure on $\{1, \dots, n\}$ in the reference measure by the counting measure on $\{1, \dots, n-1\}$. Let us describe some applications before making the proofs of the theorem and its corollary. Recall that we let ϵ be equal to 1 if $n \notin 2\mathbb{N}$ and 0 otherwise.

The Gaussian case: GUE(\mathbb{F}). As we have seen a standard Gaussian variable M in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ satisfies the hypothesis of the theorem with $\psi_i(x) = x^{i-1} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and $\psi_i(x) = x^{2i-2+\epsilon} e^{-\frac{1}{2}x^2} 1_{\{x>0\}}$ otherwise. Besides, the hypothesis of the corollary are satisfied if we let $\chi_i = h_{i-1}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\chi_i = h_{2i-2+\epsilon}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $\chi_i = h_{2i-1}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, where $(h_i)_{i \geq 0}$ is the sequence of normalized Hermite polynomials for the weight $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, such that h_i has degree i .

In the case of the GUE(\mathbb{C}), the corollary was obtained by Johansson and Nordenstam [34], and Okounkov and Reshetikhin [48]. The following proposition, which provides the correlation kernel for the minor process associated to a matrix from the GUE $_{\infty}$ (\mathbb{R}), has been announced in [15]. Forrester and Nordenstam posted a proof on arxiv a few weeks later in [24].

PROPOSITION 6.5. *Let M be a standard Gaussian variable in $\mathcal{P}_{\infty}(\mathbb{R})$. We consider the radial part $X^{(k)} \in \mathbb{R}^{\tilde{k}}$ of the main minor of order k of M . Then the point process $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \delta_{(k, |X_i^{(k)}|)}$ is determinantal on $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ with correlation*

kernel

$$\begin{aligned} R((r, x), (s, y)) = & -\frac{1_{\{r < s\}}}{(s-r-1)!} (y-x)^{s-r-1} 1_{\{y \geq x\}} \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{r} \wedge \tilde{s}} \frac{((r-2i)!)^{1/2}}{((s-2i)!)^{1/2}} h_{s-2i}(y) h_{r-2i}(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ & + \sum_{i=\tilde{r}+1}^{\tilde{s}} \frac{h_{s-2i}(y)}{((s-2i)!\sqrt{\pi})^{1/2}} \int_x^{+\infty} \frac{(z-x)^{2i-r-1}}{(2i-r-1)!} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \end{aligned}$$

PROOF. Let n be an odd integer and M be a standard Gaussian variable in $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. The matrix M belongs to the class \mathcal{K} with $\psi_i = h_{2i-1}$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$. The functions $\chi_i = h_{2i-1}$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$, satisfy the hypothesis of corollary 6.4. So the point process $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \delta_{(k, |X_i^{(k)}|)}$ is determinantal on $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ and its correlation kernel K is equal to

$$K((r, x), (s, y)) = -\frac{1_{\{s < r\}}}{(r-s-1)!} (y-x)^{r-s-1} 1_{\{y \geq x\}} + \sum_{k=1}^{\tilde{n}} h_{2k-1}^{(n-s)}(y) \xi_k(r, x)$$

where $\xi_k(r, x) = \int_x^{\infty} \frac{(z-x)^{n-r-1}}{(n-r-1)!} h_{2k-1}(z) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$. Let us consider

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

We recall that $h_n = \frac{1}{(n!\sqrt{\pi})^{1/2}} H_n$ and $h'_n = \sqrt{n} h_{n-1}$. Letting $i = \tilde{n} - k + 1$, we get that

$$\sum_{k=1}^{\tilde{n}} h_{2k-1}^{(n-s)}(y) \xi_k(r, x) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \left[\frac{(n-2i)!}{(s-2i)!} \right]^{1/2} h_{s-2i}(y) \xi_k(r, x).$$

Integrating by part we get that when $i \geq \tilde{r} + 1$,

$$\xi_k(r, x) = \frac{1}{((n-2i)!\sqrt{\pi})^{1/2}} \int_x^{\infty} \frac{(z-x)^{2i-r-1}}{(2i-r-1)!} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz,$$

and when $i \leq \tilde{r}$,

$$\xi_k(r, x) = \left[\frac{(r-2i)!}{(n-2i)!} \right]^{1/2} h_{r-2i}(x) e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

which proves the proposition. \square

The Laguerre case: $\text{LUE}(\mathbb{F})$. A random matrix from the $\text{LUE}_{n,k}(\mathbb{F})$ satisfies for $k \geq n$ the hypothesis of theorem 6.3 with $\psi_i(x) = x^{i-1+\tilde{k}-\tilde{n}} e^{-cx} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$. Those of the corollary 6.4 are satisfied only when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ with $\psi_i = \chi_i = L_i$, where $(L_i)_{i \geq 0}$ is the sequence of normalized Laguerre polynomials for the weight $x^{k-n} e^{-x}$, such that L_i has degree i .

Let us now prove theorem 6.3. The main point of its proof is the following lemma which is an application of [7]. For $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ and $x, y \in \mathbb{R}$, we write, when it's meaningful,

$$(19) \quad \begin{aligned} (f * g)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, z) g(z, y) dz, & (f * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, z) h(z) dz, \\ f^{(1)} &= f, & f^{(r)} &= f * f^{(r-1)}, \quad \text{if } r \geq 1, & f^{(r)} &= 0, \quad \text{if } r \leq 0. \end{aligned}$$

LEMMA 6.6. *Let M be an invariant random matrix as in theorem 6.3 and Ξ the associated point process. We suppose that the support of the functions ψ_i 's and ϕ_i 's are included in an interval $]a, b[$. Then the correlation kernel of Ξ is defined by*

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$K((r, x), (s, y)) = -\phi^{(s-r)}(x, y) + \sum_{k=1}^n \psi_{r-k}^r(x) \sum_{l=1}^s (A^{-1})_{kl} \phi^{(s-l+1)}(a, y),$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$K((r, x), (s, y)) = -\phi^{(s-r)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \psi_{r-k}^r(x) \sum_{l=1}^{\tilde{s}} (B^{-1})_{kl} \phi^{(s-2l+1)}(0, y),$$

where $\phi(x, y) = 1_{[x, \infty)}(y)$, and A and B are invertible matrices defined by $A_{ij} = \phi^{(n-i+1)} * \psi_j(a)$, $i, j = 1, \dots, n$, and $B_{ij} = \phi^{(n-2i+1)} * \psi_j(0)$, $i, j = 1, \dots, \tilde{n}$.

PROOF. Let us consider $\Lambda = (\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)})$, where $\Lambda^{(r)} = \sigma_r(X^{(r)}(M))$, when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and $\Lambda^{(r)} = \sigma_r(|X^{(r)}(M)|)$, when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, where the σ_r 's are independent random permutations of the coordinates, uniformly distributed and independent from M . The reason why we introduce these permutations is that we have to work with symmetric densities. Since the random matrix M is invariant, theorem 3.4, lemma 3.7 and identity (9) imply that the density of $(\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)})$ is proportional to the function f defined by :

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, with the convention that $x_r^{(r-1)} = a$,

$$f(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \det(\psi_j(x_i^{(n)}))_{n \times n} \prod_{r=1}^n \det(1_{\{x_j^{(r)} > x_i^{(r-1)}\}})_{r \times r},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, with the convention that $x_r^{(2r-1)} = 0$,

$$f(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \det(\psi_j(x_i^{(n)}))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \prod_{r=1}^n \det(1_{\{x_j^{(r)} > x_i^{(r-1)}\}})_{\tilde{r} \times \tilde{r}}.$$

We consider a sequence $(\tilde{\Lambda}_N)_N$ of discrete random variables such that $\tilde{\Lambda}_N$ belongs to $\frac{1}{N}GT_{n, \mathbb{Z}}$ and $\mathbb{P}(\tilde{\Lambda}_N = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}))$ is proportional to $f(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$. Then lemma 3.4 in [7], slightly modified for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (see [24] for details), implies that the associated point process is determinantal with a correlation kernel K_N obtained from K replacing the Lebesgue measure on \mathbb{R} in identities (19) by the counting measure on $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$. We get the lemma letting N goes to infinity. \square

PROOF OF THEOREM 6.3. We write the proof for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. We use the lemma 6.6 and its notations. We have, for $r \geq 1$,

$$\phi^{(r)}(0, y) = \frac{y^{r-1}}{(r-1)!} 1_{\{y \geq 0\}}.$$

Thus, $\phi^{(s-2l+1)}(0, y) = \frac{\partial^{n-s}}{\partial y^{n-s}} \phi^{(n-2l+1)}(0, y)$, $l = 1, \dots, \tilde{n}$, and

$$\sum_{l=1}^s (B^{-1})_{kl} \phi^{(s-2l+1)}(0, y) = \frac{\partial^{n-s}}{\partial y^{n-s}} \sum_{l=1}^n (B^{-1})_{kl} \phi^{(n-2l+1)}(0, y).$$

Let us denote $s_{lk}(B)$ the matrix obtained from B by suppressing the l^{th} line and the k^{th} column. We have

$$(B^{-1})_{kl} = \frac{(-1)^{k+l}}{\det(B)} \det(s_{lk}(B))_{\tilde{n}-1 \times \tilde{n}-1}.$$

Thus

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{\tilde{n}} (B^{-1})_{kl} \phi^{(n-2l+1)}(0, y) &= \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^{k+l}}{\det(B)} \det(s_{lk}(B))_{\tilde{n}-1 \times \tilde{n}-1} \phi^{(n-2l+1)}(0, y) \\
 &= \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^{k+l}}{\det(B)} \det(\phi^{(n-2i+1)} * \psi_j(0))_{\substack{i \neq l \\ j \neq k}} \phi^{(n-2l+1)}(0, y) \\
 &= \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^{k+l}}{\det(B)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \det(\phi^{(n-2i+1)}(0, z_j))_{\substack{i \neq l \\ j \neq k}} \phi^{(n-2l+1)}(0, y) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\tilde{n}} \psi_j(z_j) dz_j \\
 &= \frac{1}{\det(B)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \det(\phi^{(n-2i+1)}(0, z_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\tilde{n}} \psi_j(z_j) dz_j, \text{ letting } z_k = y.
 \end{aligned}$$

Moreover, if V_n is the function introduced at definition 3.5, we have

$$\det(\phi^{(n-2i+1)}(0, z_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} = \det\left(\frac{z_j^{n-2i}}{(n-2i)!} 1_{\{z_i \geq 0\}}\right)_{\tilde{n} \times \tilde{n}} = V_n(z) \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1_{\{z_i \geq 0\}}}{(n-2i)!},$$

which achieves the proof for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. We get the theorem letting a and b go to $-\infty$ and $+\infty$. The case $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ is quite similar. We deduce the quaternionic case from the real odd one. \square

PROOF OF COROLLARY 6.4. The corollary is deduced from the theorem using the identities

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^{\tilde{n}}} \det(\chi_i(z_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \prod_{j=1}^{\tilde{n}} \psi_j(z_j) dz_j &= \det\left(\int \chi_i(z) \psi_j(z) dz\right)_{\tilde{n} \times \tilde{n}} = 1 \\
 \int_{\mathbb{R}^{\tilde{n}-1}} \det(\chi_i(z_j))_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\tilde{n}} \psi_j(z_j) dz_j &= \det(a_{ij})_{\tilde{n} \times \tilde{n}} = \chi_k(y),
 \end{aligned}$$

where $a_{ij} = \delta_{ij}$, $j \neq k$ and $a_{ik} = \chi_i(y)$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$. \square

6.2. "Rectangular" interlaced processes. In section 5, considering successive rank one perturbations, we have constructed Markov processes which have a remarkable property: two successive states satisfy some interlacing conditions. Thus we got interlaced random configurations on $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$. More precisely, let $(M_k)_{k \geq 1}$ be a sequence of independent standard Gaussian variables in $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. For λ in the interior of the Weyl chamber, we consider the process $(R^{(k)})_{k \geq 1}$, where $R^{(k)}$ is the radial part of $\Omega_n(\lambda) + \sum_{i=1}^k M_i \Omega_n^1 M_i^*$, and the associated point process $\Xi_\lambda = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^k \delta_{k, R_i^{(k)}}$. Since interlacing conditions and function d_n can be written as a determinant for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ with n odd, our proposition 5.1 shows that the hypothesis of proposition 2.13 in [33] are satisfied in these cases and that the point process Ξ_λ is determinantal. In the even real case, we don't know if this remains true. Thus we have the following proposition.

PROPOSITION 6.7. *Let $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ or $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ with n odd. Let $(M_i)_{i \geq 1}$ be a sequence of independent standard Gaussian variable in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n}}$ such*

that $\lambda_1 > \dots > \lambda_{\tilde{n}}$. Let us consider the point process $\Xi_\lambda = \sum_{k=1}^m \delta_{k, R_i^{(k)}}$, where $R_i^{(k)}$ is the i^{th} positive eigenvalue of $\Omega_n(\lambda) + \sum_{i=1}^k M_i \Omega_n^1 M_i^*$.

Then,

- (i) the point process Ξ_λ is determinantal on $\{1, \dots, m\} \times \mathbb{R}_+$.
- (ii) The correlation kernel of Ξ_λ is

$$K_\lambda((r, x), (s, y)) = -\phi^{(s-r)} + \sum_{i,j=1}^{\tilde{n}} \phi^{(m-r)} * \psi(x, i) (A^{-1})_{ij} \phi^{(s)}(\lambda_j, y),$$

where $\phi(x, y) = 1_{y \geq x} e^{-(y-x)}$, $\psi(x, i) = x^{i-1}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\phi(x, y) = e^{-c(x+y)} (e^{2c(x \wedge y)} - 1)$, $\psi(x, i) = x^{2i-1}$ when $\mathbb{F} = \mathbb{H}, \mathbb{R}$ and A is an invertible matrix defined by $A_{ij} = \phi^{(m)} * \psi(\lambda_i, j)$.

Part 2. ORBIT MEASURES

7. Approximation of orbit measures

7.1. Introduction. Let K be a compact connected Lie group with Lie algebra \mathfrak{k} . We equip \mathfrak{k} with an $\text{Ad}(K)$ -invariant inner product. This allows us to identify \mathfrak{k} and its dual \mathfrak{k}^* . The group K acts on \mathfrak{k} by the adjoint action Ad and on \mathfrak{k}^* by duality by the coadjoint action. By definition, the coadjoint orbit through $\lambda \in \mathfrak{k}^*$ is the set

$$\mathcal{O}(\lambda) = \{Ad(k)\lambda, k \in K\}.$$

The (normalized) orbit measure is the image on $\mathcal{O}(\lambda)$ of the normalized Haar measure m_K on K , i.e. the distribution of $Ad(U)\lambda$ where U is a random variable with law m_K . Computations for invariant ensembles of random matrix theory rest on a detailed analysis of either the sum (convolution) of orbit measures on $\mathcal{O}(\lambda)$ and $\mathcal{O}(\mu)$, where $\lambda, \mu \in \mathfrak{k}^*$, or their projection p on the dual Lie algebra of a subgroup H . Let us recall two basic facts of Kirillov's orbit method ([40], [41], p.xix). In his famous "User's guide" the third and fifth rules are the following (we denote by V_λ the irreducible module associated to λ):

Rule 3: If what you want is to describe the spectrum of $\text{Res}_H^K V_\lambda$ then what you have to do is to take the projection $p(\mathcal{O}(\lambda))$ and split into $Ad(H)$ orbits.

Rule 5: If what you want is to describe the spectrum of the tensor product of $V_\lambda \otimes V_\mu$ then what you have to do is to take the arithmetic sum $\mathcal{O}(\lambda) + \mathcal{O}(\mu)$ and split into $Ad(K)$ orbits.

Our method is to use these two rules, but in the reverse order: we interchange "what you want" and "what you have to do". First we prove a version of a theorem of Heckman which will allow us to give an effective way to compute the measures on dominant weights defined with the help of the so called *branching rules*. Then we obtain the convolution or the projection of orbit measures using these rules.

7.2. Characters. Let K be a connected compact Lie group with Lie algebra \mathfrak{k} and complexified Lie algebra $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. By compactness, without loss of generality, we can suppose that K is contained in a unitary group, and then the adjoint and the coadjoint actions are given by $Ad(k)x = kxk^*$, $k \in K, x \in \mathfrak{k}$ or \mathfrak{k}^* . We choose a maximal torus T of K and we denote by \mathfrak{t} its Lie algebra. We consider the roots system $R = \{\alpha \in \mathfrak{k}^* : \exists X \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \forall H \in \mathfrak{t}, [H, X] = i\alpha(H)X\}$, the

coroots $h_\alpha = 2\alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle$, $\alpha \in R$. We choose the set Σ of simple roots of R . We introduce the corresponding set R^+ of positive roots and the (closed) Weyl chamber $\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* : \langle\lambda, \alpha\rangle \geq 0 \text{ for all } \alpha \in \Sigma\}$. The set of weight is $P = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* : \langle h_\alpha, \lambda\rangle \in \mathbb{Z}, \text{ for all } \alpha \in R\}$ and the set of dominant weights is $P^+ = P \cap \mathcal{C}$. We denote by W the Weyl group.

For $\lambda \in P^+$, we denote by V_λ the irreducible \mathfrak{k} -module with highest weight λ and $\dim(\lambda)$ the dimension of V_λ . Its character χ_λ is the function on \mathfrak{t} defined by,

$$\chi_\lambda(\zeta) = \sum_{\mu \in P} m(\mu, \lambda) e^{i\langle\mu, \zeta\rangle}, \quad \zeta \in \mathfrak{t},$$

where $m(\mu, \lambda)$ is the multiplicity of the weight μ in the \mathfrak{k} -module V_λ . Notice that we use representations of the Lie algebra rather than representations of the compact group. We denote $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$, the half sum of positive roots. The dimension of the module V_λ is given by $\chi_\lambda(0)$. Recall the Weyl dimension formula (see Knapp [43], Thm V.5.84):

$$(20) \quad \chi_\lambda(0) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\langle\lambda + \rho, \alpha\rangle}{\langle\rho, \alpha\rangle}$$

and the Weyl character formula for the Lie algebra of a compact Lie group (see Knapp [43], Thm. V.5.77):

PROPOSITION 7.1 (Weyl character formula). *The character χ_λ is equal to*

$$\chi_\lambda(\zeta) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{i\langle w(\lambda + \rho), \zeta\rangle}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{i\langle w(\rho), \zeta\rangle}}.$$

In this formula, the denominator is also equal to the product $\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\frac{i}{2}\langle\alpha, \zeta\rangle} - e^{-\frac{i}{2}\langle\alpha, \zeta\rangle})$. When $K = U_n(\mathbb{C})$ and λ have integer coordinates, the characters are the classical Schur functions (see for instance [26]).

Let us recall some properties of invariant probability measures on the adjoint orbits of the group K . Let, for $z \in \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$, $\lambda \in \mathfrak{t}^*$,

$$h(z) = \prod_{\alpha \in R^+} \langle\alpha, z\rangle, \quad d(\lambda) = \prod_{\alpha \in R^+} \langle\alpha, \lambda\rangle / \langle\alpha, \rho\rangle.$$

The quantity $d(\lambda)$ can be interpreted as the Liouville measure of the adjoint orbit $\mathcal{O}(\lambda)$ or as an asymptotic dimension. For $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, we introduce the function Φ_λ on \mathfrak{k} such that $\Phi_\lambda(\zeta) = \Phi_\lambda(k\zeta k^*)$ for all $\zeta \in \mathfrak{k}$, $k \in K$, and such that when $\zeta \in \mathfrak{t}$,

$$\Phi_\lambda(\zeta) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{i\langle w\lambda, \zeta\rangle}}{h(i\zeta)d(\lambda)}.$$

We recall the Harish Chandra formula (see Helgason [32], Thm II.5.35). In different contexts it is also known as the Kirillov formula for compact groups or the Iztkinson-Zuber formula. Recall that m_K is the normalized Haar measure on K .

PROPOSITION 7.2. *For $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, $\zeta \in \mathfrak{k}$*

$$(21) \quad \int_K e^{i\langle k\lambda k^*, \zeta\rangle} m_K(dk) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

This shows that $\Phi_\lambda(\zeta)$ is a continuous function of (λ, ζ) and $\Phi_\lambda(0) = 1$.

7.3. A version of Heckman's Theorem. We consider a connected compact subgroup H of K with Lie algebra \mathfrak{h} . After maybe a conjugation, we can choose a maximal torus S of H included in T (see for instance Knapp [43]). We denote its Lie algebra by \mathfrak{s} . The objects previously associated to K are defined in the same way for H . In that case, we add an exponent or a subscript H to them. For $\lambda \in P^+$, $\beta \in P_H^+$ we denote by $m_H^\lambda(\beta)$ the multiplicity of the irreducible \mathfrak{h} -module with highest weight β in the decomposition into irreducible components of the \mathfrak{k} -module V_λ considered as an \mathfrak{h} -module. Rules giving the value of the multiplicities m_H^λ are called branching rules. We have the following decomposition

$$(22) \quad V_\lambda = \bigoplus_{\beta \in P_H^+} m_H^\lambda(\beta) V_\beta^H,$$

where V_λ is considered as an \mathfrak{h} -module and V_β^H is an irreducible \mathfrak{h} -module with highest weight β . This is equivalent to say that m_H^λ is the unique function from P_H^+ to \mathbb{N} satisfying the following identity: for all $\zeta \in \mathfrak{s}$,

$$(23) \quad \chi_\lambda(\zeta) = \sum_{\beta \in P_H^+} m_H^\lambda(\beta) \chi_\beta^H(\zeta).$$

For $x \in \mathfrak{k}^*$, let $\pi_H(x)$ be the orthogonal projection of x on \mathfrak{h}^* . The intersection between the orbit of an element $x \in \mathfrak{k}^*$ under the coadjoint action of K and the Weyl chamber \mathcal{C} contains a single point that we call the radial part of x and denote by $r(x)$. The same holds for H and we denote by $r_H(x)$ the radial part of $x \in \mathfrak{h}^*$ in the Weyl chamber \mathcal{C}_H for the coadjoint action of H . We choose a sequence $\varepsilon_n > 0$ which converges to 0 as $n \rightarrow \infty$. The following theorem is a variant of theorem 6.4 in Heckman [30]. We give a direct proof.

THEOREM 7.3. *Let λ be in the Weyl chamber \mathcal{C} and $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of elements in P^+ such that $\varepsilon_n \lambda_n$ converges to λ as n tends to $+\infty$. Then*

(i) *the sequence $(\mu_n)_{n \geq 0}$ of probability measures on \mathcal{C}_H defined by*

$$\mu_n = \sum_{\beta \in P_H^+} \frac{\dim_H(\beta)}{\dim(\lambda_n)} m_H^{\lambda_n}(\beta) \delta_{\varepsilon_n \beta}$$

converges to a probability measure μ which satisfies, for $\zeta \in \mathfrak{h}$,

$$(24) \quad \int_{\mathcal{C}_H} \Phi_\beta^H(\zeta) \mu(d\beta) = \Phi_\lambda(\zeta),$$

(ii) *μ is the law of $r_H(\pi_H(U\lambda U^*))$, where U is distributed according to m_K .*

PROOF. Let $\zeta \in \mathfrak{s}$. We have

$$\frac{\chi_{\lambda_n}(\varepsilon_n \zeta)}{\chi_{\lambda_n}(0)} = \Phi_{\varepsilon_n \lambda_n + \varepsilon_n \rho}(\zeta) \prod_{\alpha \in R^+} \frac{i\langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle}{e^{\frac{i}{2}\langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle} - e^{-\frac{i}{2}\langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle}}.$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{\lambda_n}(\varepsilon_n \zeta)}{\chi_{\lambda_n}(0)} &= \sum_{\beta \in P_H^+} \frac{\chi_\beta^H(\varepsilon_n \zeta)}{\chi_\beta^H(0)} \frac{m_H^{\lambda_n}(\beta) \chi_\beta^H(0)}{\chi_{\lambda_n}(0)} \\ &= \left[\prod_{\alpha \in R_H^+} \frac{i\langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle}{e^{\frac{i}{2}\langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle} - e^{-\frac{i}{2}\langle \alpha, \varepsilon_n \zeta \rangle}} \right] \int_{\mathcal{C}_H} \Phi_{\beta + \varepsilon_n \rho_H}^H(\zeta) d\mu_n(\beta) \end{aligned}$$

Therefore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}_H} \Phi_{\beta + \varepsilon_n \rho_H}^H(\zeta) \mu_n(d\beta) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

The support of μ_n is contained in the convex hull of the orbit of $\varepsilon_n \lambda_n$ by the Weyl group. This implies that all the measures μ_n are contained in a same compact set. Uniform continuity on compact sets of the function Φ ensures that

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}_H} \Phi_\beta^H(\zeta) \mu_n(d\beta) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

Let us consider the image γ_n of the product measure $m_H \otimes \mu_n$ by the function $(u, \beta) \in H \times \mathcal{C}_H \mapsto u\beta u^* \in \mathfrak{h}^*$. The previous convergence and Harish-Chandra's formula applied to H give that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{h}^*} e^{i\langle x, \zeta \rangle} \gamma_n(dx) = \Phi_\lambda(\zeta).$$

By invariance of the Haar measure on H by multiplication, this remains true for every $\zeta \in \mathfrak{h}$, which proves that the sequence of measures $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ converges and consequently so does the sequence $(\mu_n)_{n \geq 0}$. We denote by μ the limit measure. The convergence (25) shows that it satisfies the following identity, for $\zeta \in \mathfrak{h}$,

$$\int_{\mathcal{C}_H} \Phi_\beta^H(\zeta) \mu(d\beta) = \Phi_\lambda(\zeta),$$

which proves the first point of the theorem. Applying the Harish-Chandra formula to K and H we get

$$\begin{aligned} \int_K e^{i\langle u\lambda u^*, \zeta \rangle} m_K(du) &= \int_K e^{i\langle \pi_H(u\lambda u^*), \zeta \rangle} m_K(du) \\ &= \int_H \int_{\mathcal{C}_H} e^{i\langle u\beta u^*, \zeta \rangle} \mu(d\beta) m_H(du). \end{aligned}$$

which gives the second point of the theorem. □

In the case when $H = T$, the limit measure μ is equal to $d(\lambda)^{-1} D_\lambda$ where D_λ is the Duistermaat-Heckman measure associated to λ . The tensor product of irreducible representations being a particular restriction of representation, the theorem has the following corollary, which is due to Dooley et al. [18].

COROLLARY 7.4. *Let λ and γ be in \mathcal{C} . Let $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ and $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ be two sequences of elements in P^+ such that $\varepsilon_n \lambda_n$ and $\varepsilon_n \gamma_n$ respectively converge to λ and γ , as n tends to $+\infty$. Let us define the sequence $(\nu_n)_{n \geq 0}$ of probability measures on \mathcal{C} by*

$$\nu_n = \sum_{\beta \in P^+} \frac{\dim(\beta)}{\dim(\lambda_n) \dim(\gamma_n)} M_{\lambda_n, \gamma_n}(\beta) \delta_{\varepsilon_n \beta},$$

where $M_{\lambda_n, \gamma_n}(\beta)$ is the multiplicity of the highest weight β in the decomposition into irreducible components of $V_{\lambda_n} \otimes V_{\gamma_n}$. Then the sequence $(\nu_n)_{n \geq 0}$ converges to the law of the radial part of $\lambda + U\gamma U^*$, where U is distributed according to m_K .

PROOF. Let V_{λ_n} and V_{γ_n} be irreducible \mathfrak{k} -modules with respective highest weight λ_n and γ_n . Let us consider the compact group $K \times K$. Then $V_{\lambda_n} \otimes V_{\gamma_n}$ is an irreducible $(\mathfrak{k} \times \mathfrak{k})$ -module with highest weight (λ_n, γ_n) . Applying theorem 7.3 to the compact group $K \times K$ and the subgroup $H = \{(k, k), k \in K\}$, we get that the associated sequence $(\nu_n)_{n \geq 1}$ converges, when n goes to $+\infty$, to the law

of $r_H(\pi_H(Ad(W)(\lambda, \gamma)))$, W being distributed according to the normalized Haar measure on $K \times K$, i.e. $W = (U, V)$, where U and V are independent random variables with distribution m_K . The facts that $\pi_H(Ad(W)(\lambda, \gamma)) = U\lambda U^* + V\gamma V^*$ and $r_H(U\lambda U^* + V\gamma V^*) = r_H(\lambda + U^*V\gamma V^*U)$ complete the proof of the corollary. \square

8. Orbit measures and invariant random matrices

8.1. In this section, we apply theorem 7.3 and its corollary to invariant random matrices in $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. For $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}$ the group $U_n(\mathbb{F})$ defined in section 2 is one of the classical compact groups, namely, the unitary, the symplectic and the special orthogonal group. Its root system is of type A_{n-1} when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, C_n when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, B_r when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ with $n = 2r + 1$, and D_r when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ with $n = 2r$. The Lie algebra $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ of $U_n(\mathbb{F})$ is equal to $i\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$.

Let us consider the set $\mathfrak{t}_n = \{i\Omega_n(x) : x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}\}$. It is the Lie algebra of a maximal torus of $U_n(\mathbb{F})$. We define the linear forms $\epsilon_k : \mathfrak{t}_n \rightarrow \mathbb{R}$, by $\epsilon_k(i\Omega_n(x)) = x_k$, $x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, $k = 1, \dots, \tilde{n}$. We equip $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ with the scalar product $\langle x, y \rangle = Tr(xy^*)$ for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}Tr(xy^*)$ for $\mathbb{F} = \mathbb{H}, \mathbb{R}$. For each group $U_n(\mathbb{F})$, we choose the following set Σ of simple roots :

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\Sigma = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}$,
- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $\Sigma = \{2\epsilon_n, \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}$,
- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $n = 2r + 1$, $\Sigma = \{\epsilon_r, \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, \dots, r - 1\}$,
- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $n = 2r$, $\{\epsilon_{r-1} + \epsilon_r, \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 1, \dots, r - 1\}$.

If we identify $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ and \mathfrak{t}_n by the map $x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \mapsto i\Omega_n(x) \in \mathfrak{t}_n$, and \mathfrak{t}_n with \mathfrak{t}_n^* by the scalar product, we get that $x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ is identifiable with $i\Omega_n(x) \in \mathfrak{t}_n$ or $\sum_{i=1}^{\tilde{n}} x_i \epsilon_i \in \mathfrak{t}_n^*$. Up to these identifications, the Weyl chamber corresponding to the chosen simple roots is the set \mathcal{C}_n defined in section 2, and the radial part of the matrix $U\Omega_n(x)U^*$ is x , considering either the definition of section 2 or the one of section 7. An integral point in \mathcal{C}_n is an element with entries in \mathbb{Z} . Although we will not use this fact, one may notice that only integral dominant weights occur in the representation of the group $U_n(\mathbb{F})$. When $K = U_n(\mathbb{F})$, the corollary 7.4 is equivalent to the following theorem.

THEOREM 8.1. *Let λ and β be two elements in the Weyl chamber \mathcal{C}_n and an associated sequence of measures $(\nu_k)_{k \geq 1}$ chosen as in corollary 7.4. Then $(\nu_k)_{k \geq 1}$ converges to the law of the radial part of $\Omega_n(\lambda) + U\Omega_n(\beta)U^*$ where U is a Haar distributed random variable in $U_n(\mathbb{F})$.*

We consider the subgroup $H = \{U \in U_n(\mathbb{F}) : U_{in} = U_{ni} = \delta_{in}, i = 1, \dots, n\}$ and its Lie algebra $\{M \in \mathfrak{U}_n(\mathbb{F}) : M_{in} = M_{ni} = 0, i = 1, \dots, n\}$. They are trivially identifiable with $U_{n-1}(\mathbb{F})$ and $\mathfrak{U}_{n-1}(\mathbb{F})$. The orthogonal projection of a matrix M of $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ on this last subspace is equal, up to some zeros, to the main minor of order $n - 1$ of M . Thus, for the group $U_n(\mathbb{F})$ and the subgroup H , theorem 7.3 gives:

THEOREM 8.2. *Let λ be in the Weyl chamber \mathcal{C}_n . Let us consider $M = U\Omega_n(\lambda)U^*$, where U is a Haar distributed random variable in $U_n(\mathbb{F})$ and an associated sequence of measures $(\mu_k)_{k \geq 1}$ on \mathcal{C}_{n-1} as in Theorem 7.4. Then $(\mu_k)_{k \geq 1}$ converges to the law of the radial part of the main minor of order $n - 1$ of M .*

8.2. Relation between quaternionic and real odd case. We have observed in the previous sections that on the one hand the rank one perturbations are the same for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $n = 2r + 1$ as for $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ and $n = r$, and on the other hand

that the law of the radial part of the main minor of order $n - 1$ of $U\Omega_n(\lambda)U^*$, with U Haar distributed in $U_n(\mathbb{H})$, is the same as the law of the radial part of the main minor of order $2n - 1$ of $V\Omega_{2n+1}(\lambda)V^*$, with V Haar distributed in $U_{2n+1}(\mathbb{R})$. It is not a coincidence: identity (24) shows that the convolution of invariant orbit measures or the projection of invariant measure depend only on the Weyl group of the groups and subgroups considered. At the price of some redundancy, we have chosen to state explicitly our results in both cases for the convenience of the reading.

9. Tensor product and restriction multiplicities

We want to compute the law of the sum or of the minors of invariant random matrices. By theorems 8.1 and 8.2, it suffices to have a precise description of some appropriate tensor product and restriction multiplicities. In group representation, these computations are a fundamental issue which have been studied for a long time. Recently the discovery of quantum group provided a new understanding of them.

The rank one perturbations that we introduce in section 3 are related to the tensor products $V_\lambda \otimes V_\gamma$, where λ and γ are dominant weights, γ being proportional to ϵ_1 . Using the theory of crystal graphs of Kashiwara, we obtain in section 9.1, explicit description of these decompositions. Our results are surely not new and they are contained, or maybe hidden, in more general ones (see for instance Berenstein and Zelevinski[3], Nakashima [47]) but our descriptions present some advantages: they are quite simple and make interlacing conditions arise, which can be described, in the spirit of Fulmek and Krattenthaler [25] for instance, in term of non intersecting paths.

In section 9.2, we recall the classical restriction multiplicities that we need for the computation of the law of the main minors.

9.1. Tensor product multiplicities and crystal graphs. Let us recall some standard notations for crystal graphs (see, e.g, Kashiwara [35]). As in the previous section we consider a compact connected Lie group K and its Lie algebra \mathfrak{k} . Recall that the crystal graphs of the \mathfrak{k} -modules are oriented coloured graphs with colours $i \in I$. An arrow $a \xrightarrow{i} b$ means that $\tilde{f}_i(a) = b$ and $\tilde{e}_i(b) = a$ where \tilde{e}_i and \tilde{f}_i are the crystal graph operators. We denote $\Lambda_i, i = 1, \dots, n$, the dual basis of the coroots. For a \mathfrak{k} -module V and its crystal graph B , the weight of a vertex $b \in B$ is defined by $wt(b) = \sum_I (\varphi_i(b) - \varepsilon_i(b))\Lambda_i$, where $\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0 : \tilde{f}_i^n(b) \in B\}$ and $\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0 : \tilde{e}_i^n(b) \in B\}, i \in I$. For each dominant weight λ we denote by $B(\lambda)$ the crystal graph of the irreducible \mathfrak{k} -module V_λ with highest weight λ and by u_λ the highest weight vertex. We recall the proposition 4.2 of [35].

PROPOSITION 9.1. *Let λ and μ be two dominant weights and $B(\mu)$ the crystal graph of V_μ . Then*

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \oplus V_{\lambda+wt(b)},$$

where the sum ranges over $b \in B(\mu)$ such that $\varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle$ (or equivalently $\varepsilon_i(u_\lambda \otimes b) = 0$) for every $i \in I$.

We now consider $K = U_n(\mathbb{F})$ and we describe the tensor products $V_\lambda \otimes V_{a\epsilon_1}$ that we are interested in. For this we use the description of the crystal graphs for classical Lie algebras given by Kashiwara and Nakashima in [36]. In the following,

we write x indifferently for $(x_1, \dots, x_{\bar{n}}) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ and $\sum_{i=1}^{\bar{n}} x_i \epsilon_i$. Notice that ϵ_1 is the highest weight of the standard representation.

9.1.1. *Tensor product of representations for the type A_{n-1} .* This case is classical and known as Pieri's formula (see Fulton [26]). But it will help the reader to first see the method we use in this simple example. In the type A_{n-1} , the simple coroots are $h_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$. The crystal graph of V_{ϵ_1} is, see [35],

$$B(\epsilon_1) : 1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{n-1} n.$$

Here the weight of i is ϵ_i , $i = 1, \dots, n$. We use the usual order on $\{1, \dots, n\}$. Let m be an integer. Theorem 3.4.2 of [36] claims in particular that

$$B(m\epsilon_1) = \{b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m} : b_{k+1} \geq b_k\}.$$

Let λ be a dominant weight. Let us describe the decomposition of the tensor product $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$. In proposition 9.1, the sum ranges over all elements $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(m\epsilon_1)$ such that, for $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_i(u_\lambda \otimes b_m \otimes \dots \otimes b_1) = 0$, which is equivalent to say that $\varepsilon_i(b_k) \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_{k+1}) + \dots + wt(b_m) \rangle$ for $1 \leq k \leq m$. When $b \in B(\epsilon_1)$, either $b = i+1$ and $\varepsilon_i(b) = 1 = -\langle h_i, wt(b) \rangle$, or $\varepsilon_i(b) = 0 \leq \langle h_i, wt(b) \rangle$. Thus we have

$$(26) \quad \varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle \Leftrightarrow 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b) \rangle.$$

So, in the considered decomposition, the sum ranges over all elements $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m}$ satisfying the following conditions for every $k \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$(27) \quad \begin{cases} b_{k+1} \geq b_k, \\ 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_k) \rangle. \end{cases}$$

We draw on figure 8 the functions

$$k \mapsto \mu_i(k) = \langle \epsilon_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_{m-k+1}) \rangle.$$

At each k , one and only one of the functions μ_1, \dots, μ_n increases by one unit. Moreover the i^{th} curve cannot increase if the $(i+1)^{\text{th}}$ has not because $b_m \otimes \dots \otimes b_1$ is an element of $B(m\epsilon_1)$. The curves cannot cross each other since $0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_k) \rangle$. Therefore we see that the map $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \mapsto \beta \in \mathbb{Z}^n$, with $\beta_i = \langle \epsilon_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_1) \rangle$, $i = 1, \dots, n$, is a bijection from $\{b \in B(m\epsilon_1) : b \text{ satisfies conditions (27)}\}$ to $\{\beta \in \mathbb{Z}^n : \beta \succeq \lambda, \sum_i (\beta_i - \lambda_i) = m\}$. So we get the Pieri's formula (notice that the multiplicities are equal to one):

PROPOSITION 9.2. *Let $\lambda, \gamma \in \mathbb{Z}^n$ such that $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ and $\gamma = (m, 0, \dots, 0)$, $m \in \mathbb{N}$. Then*

$$V_\lambda \otimes V_\gamma = \bigoplus_{\beta} V_\beta$$

where the sum is over the integral dominant weights such that $\beta \succeq \lambda$, and $m = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \lambda_i)$.

9.1.2. *Tensor product of representations for the type C_n .* The simple coroots are now $h_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, $h_n = \epsilon_n$, and the crystal graph of V_{ϵ_1} is

$$B(\epsilon_1) : 1 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{n-1} n \xrightarrow{n} \bar{n} \xrightarrow{n-1} \dots \xrightarrow{1} \bar{1}.$$

Here i and \bar{i} have respective weight ϵ_i and $-\epsilon_i$. We define the order \leq on $B(\epsilon_1)$ by $1 \leq \dots \leq n \leq \bar{n} \leq \dots \leq \bar{1}$. By theorem 4.5.1 of [36], if $m \in \mathbb{N}$,

$$B(m\epsilon_1) = \{b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m} : b_{k+1} \geq b_k\}.$$

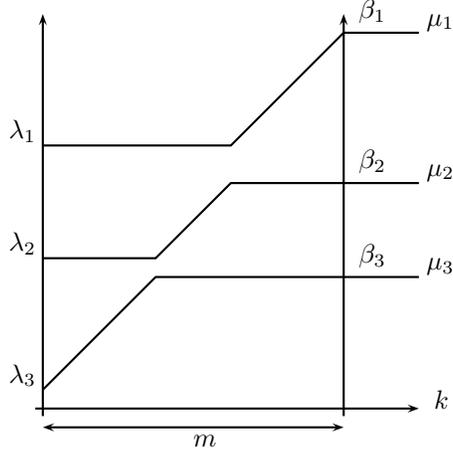


FIGURE 8. Irreducible decomposition of $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$ for the type A_2

Let λ be a dominant weight. As above is it easy to see that equivalence (26) holds. Therefore, by proposition 9.1, the sum ranges over all elements $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m}$ satisfying the following conditions for $1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n$,

$$(28) \quad \begin{cases} b_{k+1} \geq b_k, \\ 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_k) \rangle. \end{cases}$$

The function $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \mapsto (\beta, c) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, where for $i = 1, \dots, n$

$$\beta_i = \langle \epsilon_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_1) \rangle$$

and

$$c_i = \min\{\langle \epsilon_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_k) \rangle, 1 \leq k \leq m\},$$

is a bijection from $\{b \in B(m\Lambda_1) : b \text{ satisfies conditions (28)}\}$ to $\{(\beta, c) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n : \lambda \succeq c, \beta \succeq c, \sum_i(\lambda_i - c_i + \beta_i - c_i) = m\}$. Look at Figure 9 to be convinced of the bijection. The i^{th} curve cannot decrease (resp. increase) if the $(i - 1)^{th}$ (resp. $(i + 1)^{th}$) has not since $b_m \otimes \dots \otimes b_1$ is an element of $B(a\epsilon_1)$. Moreover the curves remain nonnegative and cannot cross each other since $0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_k) + \dots + wt(b_m) \rangle$. So we get the following proposition.

PROPOSITION 9.3. *Let $\lambda, \gamma \in \mathbb{N}^n$ be such that $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, and $\gamma = (m, 0, \dots, 0)$, $m \in \mathbb{N}$. Then*

$$V_\lambda \otimes V_\gamma = \oplus_\beta M_{\lambda, \gamma}(\beta) V_\beta$$

where the sum is over all $\beta \in \mathbb{N}^n$ satisfying $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ such that it exists $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ which verifies $\lambda \succeq c, \beta \succeq c$ and $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - c_i + \beta_i - c_i) = m$. In addition, the multiplicity $M_{\lambda, \gamma}(\beta)$ of the irreducible module with highest weight β is the number of $c \in \mathbb{N}^n$ satisfying these relations.

We invite the reader to compare this figure with figure 6: vectors R_i and R_{i+1} (black discs) satisfy the same interlacing conditions as the highest weights λ and μ , and the white discs verify the same interlacing conditions as c .

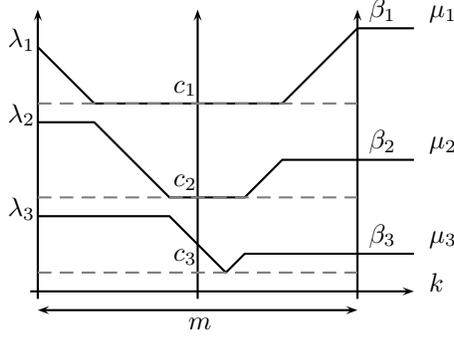


FIGURE 9. Irreducible decomposition of $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$ for the type C_3

9.1.3. *Tensor product of representations for type B_r .* The coroots of the simple roots are $h_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, r - 1$, $h_r = 2\epsilon_r$, the crystal graph of V_{ϵ_1} is

$$B(\epsilon_1) : 1 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{r-1} r \xrightarrow{r} 0 \xrightarrow{r} \bar{r} \xrightarrow{r-1} \dots \xrightarrow{1} \bar{1},$$

where i, \bar{i} and 0 have respective weight $\epsilon_i, -\epsilon_i$ and 0 for $i = 1, \dots, r$. We define an order on $B(\epsilon_1)$ by $1 \leq \dots \leq r \leq 0 \leq \bar{r} \leq \dots \leq \bar{1}$. By theorem 5.7.1 of [36],

$$B(m\epsilon_1) = \{b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m} : b_{k+1} \geq b_k, b_{k+1} \otimes b_k \neq 0 \otimes 0\}.$$

Let λ be an integral dominant weight. As for the type C_n , in the decomposition of $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$ the sum ranges over the $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(m\epsilon_1)$ such that $\varepsilon_i(b_k) \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_{k+1}) + \dots + wt(b_m) \rangle$ for $1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq r$. Let $b \in B(\epsilon_1)$. For $i \leq r - 1$, $\langle h_i, wt(b) \rangle = -1$ if $b = i + 1$ or $b = \bar{i}$. Moreover $\langle h_r, wt(b) \rangle = -2$ if $b = \bar{r}$. In every other cases $\langle h_i, wt(b) \rangle$ is positive. Thus one easily shows that

$$\varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} (b \neq 0 \text{ and } 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b) \rangle) \\ \text{or } (b = 0 \text{ and } \langle h_r, \lambda \rangle \geq 1). \end{cases}$$

So, in the decomposition considered, the sum ranges over all elements $b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m}$ satisfying for every $(k, i) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, r\}$

$$(29) \quad \begin{cases} b_{k+1} \geq b_k, & b_{k+1} \otimes b_k \neq 0 \otimes 0 \\ 0 \leq \langle h_i, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_k) \rangle \\ 1 \leq \langle h_r, \lambda + wt(b_m) + \dots + wt(b_k) \rangle \text{ if } b_k = 0. \end{cases}$$

Thus we get the following proposition.

PROPOSITION 9.4. *Let $\lambda, \gamma \in \mathbb{N}^r$ be such that $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ and $\gamma = (m, 0, \dots, 0)$, $a \in \mathbb{N}$. Then*

$$V_\lambda \otimes V_\gamma = \bigoplus_{\beta} M_{\lambda, \gamma}(\beta) V_\beta$$

where the sum is over all $\beta \in \mathbb{N}^r$ such that $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_r$ such that it exists an integer $s \in \{0, 1\}$ and $c \in \mathbb{N}^r$ which verifies $\lambda \geq c, \beta \geq c$ and $\sum_{i=1}^r (\lambda_i - c_i + \beta_i - c_i) + s = m$, s being equal to 0 if $c_r = 0$. In addition, the multiplicity $M_{\lambda, \gamma}(\beta)$ of the irreducible module with highest weight β is the the number of $(c, s) \in \mathbb{N}^r \times \{0, 1\}$ satisfying these relations.

9.1.4. *Tensor product of representations for type D_r .* The simple coroots are $h_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, r - 1$, and $h_r = \epsilon_r + \epsilon_{r-1}$, the crystal graph of V_{ϵ_1} is

$$B(\epsilon_1) : 1 \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{r-3} r-2 \xrightarrow{r-2} r-1 \begin{array}{l} \nearrow \bar{r} \\ \searrow r-1 \end{array} \xrightarrow{\overline{r-1}} \xrightarrow{r-2} \overline{r-2} \xrightarrow{r-3} \dots \xrightarrow{1} \bar{1} .$$

$$\begin{array}{c} r-1 \searrow \\ r \nearrow \end{array}$$

Here i and \bar{i} have respective weight ϵ_i and $-\epsilon_i$, $i = 1, \dots, r$. We define a partial order \leq on $B(\epsilon_1)$ by $1 \leq \dots \leq r-1 \leq \frac{\bar{r}}{r} \leq \overline{r-1} \leq \dots \leq \bar{1}$. For $m \in \mathbb{N}$ theorem 6.7.1 of [36] states that,

$$B(m\epsilon_1) = \{b_m \otimes \dots \otimes b_1 \in B(\epsilon_1)^{\otimes m} : b_{k+1} \leq b_k\}.$$

Let λ be a dominant weight such that $\langle \epsilon_r, \lambda \rangle \in \mathbb{N}$. For $b \in B(\epsilon_1)$, the same considerations as for the types A_{n-1} and C_n imply equivalence (26). So that we get proposition 9.5, which is illustrated by figure 10. We invite the reader to compare with figure 7.

PROPOSITION 9.5. *Let $\lambda, \gamma \in \mathbb{N}^r$ be such that $\lambda_1 \geq \dots \geq |\lambda_r|$, and $\gamma = (m, 0, \dots, 0)$, $m \in \mathbb{N}$. Then*

$$V_\lambda \otimes V_\gamma = \bigoplus_{\beta} M_{\lambda, \gamma}(\beta) V_\beta$$

where the sum is over all $\beta \in \mathbb{N}^r$ satisfying $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_r$ such that it exists $c \in \mathbb{N}^{r-1}$ which verify $\lambda \succeq c$, $\beta \succeq c$, $\max(|\lambda_r|, |\beta_r|) \leq c_{r-1}$ and $\sum_{k=1}^{r-1} (\lambda_k - c_k + \beta_k - c_k) + |\lambda_r - \mu_r| = m$. In addition, the multiplicity $M_{\lambda, \gamma}(\beta)$ of the irreducible module with highest weight β is the the number of $c \in \mathbb{N}^{r-1}$ satisfying these relations.

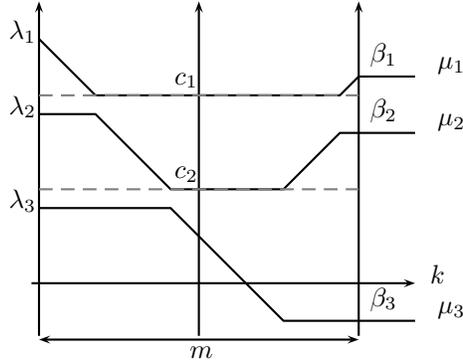


FIGURE 10. Irreducible decomposition of $V_\lambda \otimes V_{m\epsilon_1}$ for the type D_3

9.2. Classical restriction multiplicities. For $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, the branching rules when $K = U_n(\mathbb{F})$ and $H = U_{n-1}(\mathbb{F})$, are well known (see for instance Knapp [43]). Let us recall them. We add a subscript \mathbb{Z} to the Gelfand Tetlin polytopes $GT_n(\lambda)$ to designate the subset of elements with integer entries.

PROPOSITION 9.6. *Let λ be an integral point of \mathcal{C}_n . Let V_λ be an irreducible module with highest weight λ . The irreducible decomposition (22) when $K = U_n(\mathbb{F})$ and $H = U_{n-1}(\mathbb{F})$ is the following one:*

$$V_\lambda = \bigoplus_{\beta} m_{U_{n-1}}^\lambda(\beta) V_\beta^{U_{n-1}},$$

where the sum is over all β such that it exists $x \in GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$ such that $x^{(n-1)} = \beta$. Moreover for $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, $m_{U_{n-1}}^\lambda(\beta) = 1$ and for $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $m_{U_{n-1}}^\lambda(\beta)$ is the number of $c \in \mathbb{N}^n$ for which it exists $x \in GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$ with $x^{(n-1)} = \beta$ and $x^{(n-\frac{1}{2})} = c$.

10. Asymptotic multiplicities and limit measures

In this section, we prove lemma 3.3 and proposition 4.3.

10.1. Proof of lemma 3.3. We have recalled in proposition 9.6 the branching rules in the case when $K = U_n(\mathbb{F})$ and $H = U_{n-1}(\mathbb{F})$. Let us consider the chain of subgroups $U_n(\mathbb{F}) \supset \dots \supset U_1(\mathbb{F})$ and the corresponding successive restrictions. If we compare the successive branching rules with the definition of the Gelfand–Tsetlin polytopes $GT_n(\lambda)$ for λ an integer point in \mathcal{C}_n , we get the famous result that the number of integer points in $GT_n(\lambda)$ is the dimension of the irreducible $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ -module with highest weight λ . Actually this is the reason why Gelfand–Tsetlin polytopes have been introduced [27]. The dimension formula (20) implies the following lemma. Let ϵ be equal to 1 if $n \notin 2\mathbb{N}$ and 0 otherwise.

LEMMA 10.1. *Let λ be an integer point in \mathcal{C}_n . The number of points in $GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$, denoted $\text{Card } GT_{n,\mathbb{Z}}(\lambda)$, is equal to:*

- when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + 2n + 2 - j - i)}{(j - i)(2n + 2 - j - i)} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i + n + 1 - i}{n + 1 - i},$$

- when $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq \tilde{n}} \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + 2\tilde{n} + \epsilon - j - i)}{(j - i)(2\tilde{n} + \epsilon - j - i)} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left[\frac{\lambda_i + \tilde{n} + \frac{1}{2} - i}{\tilde{n} + \frac{1}{2} - i} \right]^\epsilon.$$

Before writing the proof of the lemma 3.3 let us state the following lemma. Recall that μ_λ is the image of the uniform measure on $GT_n(\lambda)$ by the map $x \in GT_n(\lambda) \mapsto x^{(n-1)}$, and $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ converges to 0.

LEMMA 10.2. *Let λ be in the Weyl chamber \mathcal{C}_n . Let us consider a sequence $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ of integer points in \mathcal{C}_n such that $\varepsilon_k \lambda_k$ converges to λ , as k goes to infinity, and the associated sequence of measures $(\mu_k)_{k \geq 0}$ defined as in Theorem 7.3 for $K = U_n(\mathbb{F})$ and $H = U_{n-1}(\mathbb{F})$. Then $(\mu_k)_{k \geq 1}$ converges to the measure μ_λ .*

PROOF. We use the multiplicity $m_{U_{n-1}}^{\lambda_k}(\beta)$ defined in proposition 9.6. Since the dimension of the irreducible $\mathfrak{U}_n(\mathbb{F})$ -module with highest weight γ is given by the number of integer points in $GT_n(\gamma)$, we obtain that μ_k is equal to

$$(30) \quad \sum_{\beta} \frac{\text{Card } GT_{n-1, \mathbb{Z}}(\beta)}{\text{Card } GT_{n, \mathbb{Z}}(\lambda_k)} m_{U_{n-1}}^{\lambda_k}(\beta) \delta_{\varepsilon_k \beta}.$$

Comparing the definition of Gelfand–Tsetlin polytopes with the branching rules given in proposition 9.6, we get that the measure μ_k is the image by the map $x \in GT_n(\varepsilon_k \lambda_k) \mapsto x^{(n-1)}$ of the measure $\frac{1}{\text{dim}(\lambda_k)} \sum_{x \in GT_{n, \mathbb{Z}}(\lambda_k)} \delta_{\varepsilon_k x}$. This last measure converges to the uniform measure on $GT_n(\lambda)$. Thus μ_k converges to μ_{λ} . \square

PROOF OF LEMMA 3.3 : Let $\lambda \in \mathcal{C}_n$ and $U \in U_n(\mathbb{F})$ a Haar distributed random variable. We choose a sequence of measures $(\mu_k)_{k \geq 1}$ on \mathcal{C}_n as in lemma 10.2 which claims that $(\mu_k)_{k \geq 1}$ converges to the law of the radial part of the main minor of order $n - 1$ of $U\Omega_n(\lambda)U^*$. Lemma 10.2 implies that this law is μ_{λ} . \square

10.2. Proof of proposition 4.3. The following lemma states the connection between the set $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ defined in section 4 and irreducible decomposition of tensor products of representations studied in section 9. In every case but the real odd one, we denote $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \theta)$ the subset of $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ whose elements have components in \mathbb{Z} . In the case where $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and $n = 2r + 1$, we let

$$\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \theta) = \{(\beta, z, x, s) \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^r \times GT_{n, \mathbb{Z}} \times \{0, 1\} : \lambda, \beta \succeq z, \\ \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \beta_i - 2z_i) + s = \theta, x \in GT_n(\beta), s = 0 \text{ if } z_r = 0\}.$$

LEMMA 10.3. *Let λ and $\gamma = (a, 0, \dots, 0)$ be integer points of \mathcal{C}_n . Then the number of points in $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, a)$ is equal to $\text{dim}(\lambda) \text{dim}(\gamma)$.*

PROOF. We compare the conditions satisfied by the component β of the elements of $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, a)$ with those satisfied by the weights appearing in the description of the irreducible decomposition of the tensor product $V_{\lambda} \otimes V_{\gamma}$ given in propositions 9.2 to 9.5. Recalling that $\text{Card } GT_{n, \mathbb{Z}}(\beta)$ is equal to $\text{dim}(V_{\beta})$ we get that $\text{Card } \mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, a) = \sum_{\beta} \text{dim}(V_{\beta})$, where the sum ranges over the dominant weights β (with their multiplicity) appearing in the irreducible decomposition of $V_{\lambda} \otimes V_{\gamma}$. Thus $\text{Card } \mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda, a) = \text{dim}(V_{\gamma} \otimes V_{\lambda}) = \text{dim}(\lambda) \text{dim}(\gamma)$. \square

LEMMA 10.4. *Let λ be in the Weyl chamber \mathcal{C}_n and $\theta > 0$. Let us consider two sequences $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ and $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ of integer points in \mathcal{C}_n such that γ_k can be written as $(a_k, 0, \dots, 0)$. We suppose that $\varepsilon_k \lambda_k$ converges to λ and $\varepsilon_k a_k$ converges to θ , as k goes to infinity. Then the associated sequence of measures $(\nu_k)_{k \geq 1}$ given in corollary 7.4 for $K = U_n(\mathbb{F})$ converges to the measure $\nu_{\lambda, \theta}$.*

PROOF. The measure ν_k is the measure

$$\sum_{\beta} \frac{\text{dim}(\beta)}{\text{dim}(\lambda_k) \text{dim}(\gamma_k)} M_{\lambda_k, \gamma_k}(\beta) \delta_{\varepsilon_k \beta},$$

where $M_{\lambda_k, \gamma_k}(\beta)$ is the multiplicity of the highest weight β in the irreducible decomposition of $V_{\lambda_k} \otimes V_{\gamma_k}$. The description of this irreducible decomposition given

in section 9, from proposition 9.2 to 9.5, and the fact that $\dim(\beta) = \text{Card } GT_{n,\mathbb{Z}}(\beta)$ show that ν_k is the image by the projection on the component β of the probability

$$\frac{1}{\dim(\lambda_k) \dim(\gamma_k)} \sum_{x \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(\lambda_k, a_k)} \delta_{\varepsilon_k x},$$

which proves the proposition. \square

PROOF OF PROPOSITION 4.3 : Let $\lambda \in \mathcal{C}_n$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ and choose a sequence of measures $(\nu_k)_{k \geq 1}$ on \mathcal{C}_n as in lemma 10.4. Then $(\nu_k)_{k \geq 1}$ converges to the law of the radial part of $\Omega_n(\lambda) + U\Omega_n(\theta)U^*$ where U has a Haar distribution. Lemma 10.4 implies that this law is $\nu_{\lambda, \theta}$. \square

11. Concluding remarks

11.1. Random processes with values in GT_n . Let $M = (M_t)_{t \geq 0}$ be a standard Brownian motion in $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Then the minor process $X(M) = (X(M_t))_{t \geq 0}$ is generally not a Markov process. For instance for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, the only cases when $X(M)$ is a Markov process are for $n = 1$ and $n = 2$. Actually a Brownian motion in $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ can be obtained as a limit, in a certain sense, of a quantum random walk (see Biane [4] for $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$). The fact that the minor process $X(M)$ is not Markovian has to be related to the fact that for $n \geq 3$, the "complete system of observables" in the space of any representation defined by Zhelobenko in chap. X.67 of [62], is not stable by the Markovian operator of the quantum random walk.

11.2. Rank one perturbation on classical complex Lie groups. Klyachko showed in [42] that the convolution of biinvariant measures on the complexification G of the compact group K , is deduced from the convolution of invariant measures on K . His result is an hyperbolic version of the so called wrapping map introduced by Dooley and Wildberger [19]. Using this we can show that the radial part of a Brownian motion in G can be approached by an interlaced process.

11.3. Rank one perturbation on $U_n(\mathbb{F})$. Let us say a word about some other interesting rank one perturbations having invariance properties that we can find in literature. For instance, Diaconis and Shahshahani [16], [17], followed by Porod [54], [55] and Rosenthal [56], studied specific random walks on $U_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, whose increments are some random rotations, in order to approximate the Haar measure on $U_n(\mathbb{F})$. The wrapping map introduced in [19] makes a link between these rank one perturbations and those that we studied in this paper.

References

- [1] A. Altland and M. Zirnbauer, Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal/superconducting hybrid structures, Phys. Rev. B 55 (1997), 1142–1161.
- [2] Y. Baryshnikov, GUEs and queues, Probab. Theory Relat. Fields 119 (2001) 256–274.
- [3] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition space, J. Geom. Phys. 5 (1989) 453–472.
- [4] Ph. Biane, Le théorème de Pitman, le groupe quantique $SU_q(2)$ et une question de P.A. Meyer, Lecture Notes in Math., 1894, Springer, Berlin, 2006.
- [5] E. Borel, Sur les principes de la théorie cinétique des gaz, Ann. Sci. École Norm. Sup. 23 (1906) 9–32.
- [6] A. Borodin and G. Olshanski, Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes, Ann. of Math. 161 (2005) 1319–1422.
- [7] A. Borodin and P. L. Ferrari, M. Praehofer, T. Sasamoto, Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration, J. Stat. Phys. 129 (2007) 1055–1080.

- [8] E. Brezin, S. Hikami and A. I. Larkin, Level statistics inside the vortex of a superconductor and symplectic random-matrix theory in an external source, *Phys. Rev. B* 60 (1999) 3589–3602.
- [9] E. Brezin, S. Hikami, Intersection numbers from the antisymmetric Gaussian matrix model, arXiv:0804.4531v1.
- [10] M. F. Bru, Wishart Process, *J. Theor. Prob.*, 4 (1991) 725–751.
- [11] J. Cardy, Network models in class C on arbitrary graphs, *Comm. Math. Phys.* 258:11 (2005) 87–102.
- [12] M. Caselle and U. Magnea, Random matrix theory and symmetric spaces, *Phys. Rep.* 394 (2004) 41–156.
- [13] H. Cohn, M. Larsen and J. Propp, The shape of a typical boxed plane partition, *New York J. Math.* 4 (1998), 137165 (electronic).
- [14] B. Collins and P. Sniady, Representation of Lie groups and random matrices, arXiv: math/0610285, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [15] M. Defosseux, Orbit measures and interlaced determinantal point processes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 346 (2008) 783–788, arXiv:0802.4183.
- [16] P. Diaconis, Products of random matrices as they arise in the study of random walks on groups, *Contemp. Math.*, 50 (1986) 183–195.
- [17] P. Diaconis and M. Shahshahani, The subgroup algorithm for generating uniform random variables. *Prob. Eng. and Info. Sci.*, 1 (1987) 15–32.
- [18] A. H. Dooley, J. Repka and N. J. Wildberger, Sums of adjoint orbits, *Linear and Multilinear Algebra* 36 (1993), 79–101.
- [19] A. H. Dooley and N. J. Wildberger, Harmonic analysis and the global exponential map for compact Lie groups, *Funct. Anal. and Appl.* 27 (1993), 25–32.
- [20] F. J. Dyson, The threefold way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics, *J. Math. Phys.* 3 (1962), 1199–1215.
- [21] P. Eichelsbacher and M. Stolz, Large deviations for random matrix ensembles in mesoscopic physics, arXiv:math/0610811v2.
- [22] J. Faraut, Infinite dimensional spherical analysis. COE Lecture Note, 10. Kyushu University, The 21st Century COE Program “DMHF”, Fukuoka, 2008.
- [23] P.J. Forrester, Log-gases and Random matrices, in preparation.
- [24] P.J. Forrester and E. Nordenstam, The anti-symmetric GUE minor process, arXiv:math-pr/0804.3293v1.
- [25] M. Fulmek and C. Krattenthaler, Lattice Paths Proofs for Determinantal Formulas for Symplectic and orthogonal Characters, *J. Combin. Theory Ser. A* 77 (1997), 3–50.
- [26] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society, Student Text 35, (1997).
- [27] I. M. Gelfand and M. L. Tsetlin, Finite dimensional representations of the group of unimodular matrices, *Dokl. Akad. Nauk. USSR* 71, 275–290 (1981).
- [28] F. Gillet, Asymptotic behaviour of watermelons. Preprint, arXiv:math.PR/0307204, 2003.
- [29] N. R. Goodman, Statistical analysis based on a certain multivariate complex gaussian distribution (An Introduction), *Ann. Math. Stat.*, 34 (1963), 152–177.
- [30] G. J. Heckman, Projections of orbits and asymptotic behaviour of multiplicities for compact connected Lie groups, *Invent. Math.* 67 (1982) 333–356.
- [31] P. Heinzner, A. Huckleberry, and M. R. Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, *Commun. Math. Phys.* 257 (2005), 725–771.
- [32] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, New York and Orlando, 1984.
- [33] K. Johansson, Random matrices and determinantal processes, arXiv:math-ph/0510038v1.
- [34] K. Johansson and E. Nordenstam, Eigenvalues of GUE minors, *Elect. J. Probability* 11 (2006) 1342–1371.
- [35] M. Kashiwara, On crystal bases, Representations of Groups, CMS Conference proceedings, 16 (1995) 155–197, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [36] M. Kashiwara and T. Nakashima, Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras, *J. Algebra*, 165 (1994), 295–345.
- [37] M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao and N. Komatsuda, Vicious walk with a wall, noncolliding meanders, chiral and Bogoliubov-de Gennes random matrices, *Phys. Rev. E* 68:021112 (2003) 1–16.
- [38] M. Katori and H. Tanemura, Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.* 45 (2004) 3058–3085.

- [39] M. Katori and H. Tanemura, Nonintersecting paths, noncolliding diffusion processes and representation theory, RIMS Kokyuroku 1438 (2005) 83–102.
- [40] A. A. Kirillov, Merits and demerits of the orbit method. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 36 (1999), no. 4, 433–488
- [41] A. A. Kirillov, Lectures on the orbit method. Graduate Studies in Mathematics, 64. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [42] A. Klyachko, Random walks on symmetric spaces and inequalities for matrix spectra, Linear Algebra Appl., 319 (2000), p. 37–59.
- [43] A. W. Knap, Lie groups, beyond an introduction, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [44] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot, Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux. II. With a wall. J. Phys. A, 33-48 (2000) 8835–8866.
- [45] M. L. Mehta and N. Rosenzweig, Distribution laws for the roots of a random antisymmetric hermitian matrix, Nuclear Physics A, Volume 109 (1968). 449–456.
- [46] M.L. Mehta, Random Matrices, Third edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 142. Elsevier–Academic Press, Amsterdam, 2004.
- [47] T. Nakashima, Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras, Comm. Math. Phys. 154, 215–243 (1993).
- [48] A. Okounkov and N. Reshetikhin, The birth of random matrix, Moscow Mathematical Journal, 6 (2006) 553–566.
- [49] G. Olshanski, Unitary representations of (G,K) -pairs that are connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$, Leningrad Math. J. 1 (1990) 983–1014.
- [50] G. Olshanski, Unitary representation of infinite dimensional pairs (G,K) and the formalism of R.Howe. Representation of Lie groups and related topics. (Eds. A.M. Vershik, D.P. Zhelobenko), Advanced Studies in Contemporary Mathematics. Vol 7. Gordon and Breach, 1990.
- [51] G. Olshanski, The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group, J. Funct. Anal. 205 (2003), no. 2, 464–524.
- [52] G. Olshanski, A. Vershik. Ergodic unitary invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices. Amer. Math. soc. Translations 2. 175 (1996), 137–175.
- [53] D. Pickrell, Mackey analysis of infinite classical motion groups. Pacific J. Math. 150 (1991) 139–166
- [54] U. Porod, The cut-off phenomenon for random reflections. Ann. Probab. 24 (1996) 74–96
- [55] U. Porod, The cut-off phenomenon for random reflections. II. Complex and quaternionic cases. Probab. Theory Related Fields 104 (1996) 181–209
- [56] J.S. Rosenthal, Random rotations : characters and random walks on $SO(N)$. Ann. Probab. 22 (1994) 398–423.
- [57] M. Roesler, Bessel convolution on matrix cones, Compos. Math. 143 (2007), no. 3, 749–779.
- [58] J. J. M. Verbaarschot, The spectrum of the QCD Dirac operator and chiral random matrix theory: the threefold way Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 2531–2533
- [59] D. Wang, Spiked models in Wishart Ensemble, PhD thesis, arXiv:math-pr/0804.0889v1.
- [60] E. P. Wigner, On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels, Proc. Cambridge Philos. Soc. 47 (1951), 790–798.
- [61] J. Wishart, The Generalised Product Moment Distribution in Samples from a Normal Multivariate Population, Biometrika, 20A (1928) 32–52
- [62] D. P. Zhelobenko, Compact Lie groups and their representations, Transl. of Math. Monographs 40 AMS, Providence RI, 1973.

LABORATOIRE DE PROBABILITÉS ET MODÈLES ALÉATOIRES, UNIVERSITÉ PARIS 6, 175 RUE DU CHEVALERET, PARIS 75013

E-mail address: manon.defosseux@upmc.fr