Contributions à l'étude de modèles biologiques, d'inégalités fonctionnelles, et de matrices aléatoires

Habilitation à Diriger des Recherches
Université de Toulouse – Institut de Mathématiques

Djalil CHAFAÏ
Soutenance – 14 octobre 2008

Plan de l'exposé

Thèse de Doctorat

- Inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmiques
- Inégalités de Bobkov (translation et isopérimétrie)
- Courbure des semigroupes markoviens de diffusion

Thèse de Doctorat

- Inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmiques
- Inégalités de Bobkov (translation et isopérimétrie)
- Courbure des semigroupes markoviens de diffusion

Thèse (17 mai 2002 – Université Paul Sabatier)

« Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques en théorie de l'information et pour des systèmes de spins conservatifs en mécanique statistique » sous la direction de M. Ledoux

Thèse de Doctorat

- Inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmiques
- Inégalités de Bobkov (translation et isopérimétrie)
- Courbure des semigroupes markoviens de diffusion

Thèse (17 mai 2002 – Université Paul Sabatier)

« Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques en théorie de l'information et pour des systèmes de spins conservatifs en mécanique statistique » sous la direction de M. Ledoux

- Principes de grandes deviations – diffusions en temps petit
- Entropie de Boltzmann-Shannon et principes d'incertitude
- Dynamiques de Glauber et Kawasaki (Ginzburg-Landau)

Science appliquée

Service national (Projet IASI – Météo-France 1999–2000)

- *N. Fourrié, F. Rabier, P. Prunet (CNES-CNRM-CNRS)*
- *Interféromètre infrarouge IASI des satellites* METOP

Science appliquée

Service national (Projet IASI – Météo-France 1999–2000)

- *N. Fourrié, F. Rabier, P. Prunet (CNES-CNRM-CNRS)*
- *Interféromètre infrarouge IASI des satellites* METOP

- Étude de méthodes de sélection de canaux
- Problème inverse du transfert radiatif
- Code Fortran 90 sur super–calculateur
- **`http://smsc.cnes.fr/IASI/`**
- Interface Informatique-Statistique-Physique

Science appliquée

Stage post–doctoral (Projet CoRoPa – Oxford 2002–2003)

- *T. Lyons, B. Hambly, N. Sidorova (EPSRC-LMS MathFIT)*
- *Description numérique des flux de données sériés*

Science appliquée

Stage post–doctoral (Projet CoRoPa – Oxford 2002–2003)

- *T. Lyons, B. Hambly, N. Sidorova (EPSRC-LMS MathFIT)*
- *Description numérique des flux de données sériés*

- Problème inverse de la signature (compression du son)
- Bibliothèques de classes templates C++ (STL)
- Algèbres de Lie libres, CBH, Schuffle, bases de Hall
- **`http://CoRoPa.SourceForge.net`**
- Interface Informatique-Algèbre-Analyse

Science appliquée

Chargé de Recherches (INRA Toulouse – depuis 2003)

- *Département Mathématiques et Informatique Appliquées*
- *UMR 181 INRA ÉNVT (A. Bousquet-Mélou)*
- *Biologie : Pharmacologie et Toxicologie*
- *Liens solides avec l'industrie pharmaceutique*

Science appliquée

Chargé de Recherches (INRA Toulouse – depuis 2003)

- *Département Mathématiques et Informatique Appliquées*
- *UMR 181 INRA ÉNVT (A. Bousquet-Mélou)*
- *Biologie : Pharmacologie et Toxicologie*
- *Liens solides avec l'industrie pharmaceutique*

- Modèles non-linéaires à effets mixtes
- Pharmacocinétique de population (problèmes inverses)
- Aspects probabilistes, statistiques, et algorithmiques

Plan de l'exposé

Modèles déterministes linéaires

- $Q_i(t)$ = quantité de matière (compartiment i, temps t)

Modèles déterministes linéaires

- $Q_i(t)$ = quantité de matière (compartiment i, temps t)

$$\partial_t Q_i(t) = \lambda_i(t) + \sum_{j \neq i} \rho_{j,i}(t) Q_j(t) - Q_i(t) \left\{ \kappa_i(t) + \sum_{j \neq i} \rho_{i,j}(t) \right\}$$

Modèles déterministes linéaires

- $Q_i(t)$ = quantité de matière (compartiment i, temps t)

$$\partial_t Q(t) = \mathbf{M}(t) Q(t) + \lambda(t)$$

Modèles déterministes linéaires

- $Q_i(t)$ = quantité de matière (compartiment i, temps t)

$$Q(t) = \mathbf{R}(t, t_0)Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{R}(t, u)\lambda(u)\, du$$

$$\mathbf{R}(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \partial_t \mathbf{R}(t, t_0) = \mathbf{M}(t)\mathbf{R}(t, t_0)$$

Modèles déterministes linéaires

- $Q_i(t)$ = quantité de matière (compartiment i, temps t)

$$Q(t) = \mathbf{R}(t,t_0)Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{R}(t,u)\lambda(u)\,du$$

$$\mathbf{R}(t_0,t_0) = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \partial_t \mathbf{R}(t,t_0) = \mathbf{M}(t)\mathbf{R}(t,t_0)$$

Si λ et la matrice de transfert **M** ne dépendent pas de t alors

$$\mathbf{R}(t,u) = \exp((t-u)\mathbf{M})$$

et $Q_i(t)$ = combinaison linéaire de fonctions exponentielles.

Interpretation particulaire

- $(N_t)_{t \geq t_0}$ Markov inhomogène en temps sur $E = \mathbb{N}^I$
- $(N_t)_i$ = nombre de particules en i au temps t
- Générateurs infinitésimaux $(L_t)_{t \geq t_0}$
- $Q(s,t,x) := \mathbb{E}(N_t \mid N_s = x)$
- Si $x \in E \mapsto A_t(x) = \sum_{y \in E} L_{t,x,y} y$ est affine, alors Q résoud

$$\partial_t Q(s,t,x) = A_t(Q(s,t,x)) \quad \text{avec} \quad Q(s,s,x) = x.$$

Cas des taux affines

Lorsque

$$L_{t,x,y} = \begin{cases} \lambda_i(t) & \text{si } y = x + e_i \text{ pour } i \in I \text{ (naissance)} \\ x_i \rho_{i,j}(t) & \text{si} y = x - e_i + e_j \text{ pour } i \neq j \text{ dans } I \text{ (transfert)} \\ x_i \kappa_i(t) & \text{si } y = x - e_i \text{ pour } i \in I \text{ (mort)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors

$$A_t(x)_i = \sum_{y \in E} L_{t,x,y} y_i = \lambda_i(t) + \sum_{j \in I, j \neq i} x_j \rho_{j,i}(t) - x_i \left\{ \kappa_i(t) + \sum_{j \in I, j \neq i} \rho_{i,j}(t) \right\}.$$

- vertical : files d'attente M/M/∞ en interaction
- horizontal : marche aléatoires indépendantes
- réseau de Jackson et processus «zero-range»

Modèles non-linéaires à effets mixtes
Pharmacocinétique de population

- Compartiment = organe ou tissu
- Matière = médicament par exemple
- Taux = variables biologiques individuelles
- Un seul compartiment d'intérêt, un autre est observé
- Taux constants $\Rightarrow$ exponentielles (cinétiques)

$$Y_{ij} = F(\theta, X_i) + G(\theta, X_i)\varepsilon_{ij} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i$$

- ~~F non–linéaire $\Rightarrow$ régression non–linéaire en n_i~~
- Estimer θ et loi des X_i (loi de population) quand $n \to \infty$
- Problème inverse ou modèle de mélange de lois

Travaux

Utilisation puis généralisation des résultats de Pfanzagl.

- En collaboration avec J.-M. Loubes. On nonparametric maximum likelihood for a class of stochastic inverse problems, Statistics & Probability Letters 76 (2006)
- En collaboration avec D. Concordet. On the strong consistency of asymptotic M-estimators, Journal of Statistical Planning and Inference 137 (2007)
- En collaboration avec J. Antic, C. Laffont, D. Concordet. Comparison of nonparametric methods in nonlinear mixed effects models, à paraître dans Computational Statistics and Data Analysis (2008) Computational and clinical trials

Plan de l'exposé

Pharmacodynamie des anti-cancéreux

- Maturation-survie de neutrophiles (Karlsson et al)
- Chaîne de compartiments (toxicité sur neutrophiles)
- Taux κ = cinétique anti-cancéreux (lourd système d'ÉDO)
- Cellule = particule

Pharmacodynamie des anti-cancéreux

- Maturation-survie de neutrophiles (Karlsson et al)
- Chaîne de compartiments (toxicité sur neutrophiles)
- Taux κ = cinétique anti-cancéreux (lourd système d'ÉDO)
- Cellule = particule
- Processus sur $\{0, \ldots, n\} \cup \{e\}$ généré par

$$L_t(f)(k) = \begin{cases} \rho D(f)(k) + \kappa(t,k)(f(e) - f(k)) & \text{si } k \neq e \\ 0 & \text{si } k = e \end{cases}$$

Pharmacodynamie des anti-cancéreux

- Maturation-survie de neutrophiles (Karlsson et al)
- Chaîne de compartiments (toxicité sur neutrophiles)
- Taux κ = cinétique anti-cancéreux (lourd système d'ÉDO)
- Cellule = particule
- Processus sur $\{0, \ldots, n\} \cup \{e\}$ généré par

$$L_t(f)(k) = \begin{cases} \rho D(f)(k) + \kappa(t,k)(f(e) - f(k)) & \text{si } k \neq e \\ 0 & \text{si } k = e \end{cases}$$

- Processus sur $[0,1] \cup \{e\}$ généré par

$$L_t(f)(x) = \begin{cases} \rho f'(x) + \kappa(t,x)(f(e) - f(x)) & \text{si } x \neq e \\ 0 & \text{si } x = e \end{cases}$$

Pharmacodynamie des anti-cancéreux

- Maturation-survie de neutrophiles (Karlsson et al)
- Chaîne de compartiments (toxicité sur neutrophiles)
- Taux κ = cinétique anti-cancéreux (lourd système d'ÉDO)
- Cellule = particule
- Processus sur $\{0, \ldots, n\} \cup \{e\}$ généré par

$$L_t(f)(k) = \begin{cases} \rho D(f)(k) + \kappa(t,k)(f(e) - f(k)) & \text{si } k \neq e \\ 0 & \text{si } k = e \end{cases}$$

- Processus sur $[0, 1] \cup \{e\}$ généré par

$$L_t(f)(x) = \begin{cases} \rho f'(x) + \kappa(t,x)(f(e) - f(x)) & \text{si } x \neq e \\ 0 & \text{si } x = e \end{cases}$$

Schrödinger inhomogène en temps. Élémentaire $\Rightarrow$?

Loi explicite : deux compartiments

- Feynman-Kac + amincissement de processus ponctuel

$$\mathcal{L}(M_t \mid M_s = n) = \mathcal{B}(n, p(s,t,1)) * \mathcal{P}(r(s,t)).$$

Loi explicite : deux compartiments

- Feynman-Kac + amincissement de processus ponctuel

$$\mathcal{L}(M_t \mid M_s = n) = \mathcal{B}(n, p(s,t,1)) * \mathcal{P}(r(s,t)).$$

- probabilité de survie au temps t partant de x au temps s

$$p(s,t,x) = \exp\left(\int_s^t \kappa(w, x + \rho(w - x))\, dw\right)$$

Loi explicite : deux compartiments

- Feynman-Kac + amincissement de processus ponctuel

$$\mathcal{L}(M_t \mid M_s = n) = \mathcal{B}(n, p(s,t,1)) * \mathcal{P}(r(s,t)).$$

- probabilité de survie au temps t partant de x au temps s

$$p(s,t,x) = \exp\left(\int_s^t \kappa(w, x + \rho(w - x))\, dw\right)$$

- élimination après maturation sur $[s,t]$ (effet retard)

$$r(s,t) = \int_{\max(0,s-\tau)}^{\max(0,t-\tau)} \lambda(u) p(u,t,0)\, du.$$

Loi explicite : deux compartiments

- Feynman-Kac + amincissement de processus ponctuel

$$\mathcal{L}(M_t \mid M_s = n) = \mathcal{B}(n, p(s,t,1)) * \mathcal{P}(r(s,t)).$$

- probabilité de survie au temps t partant de x au temps s

$$p(s,t,x) = \exp\left(\int_s^t \kappa(w, x + \rho(w - x))\, dw\right)$$

- élimination après maturation sur $[s, t]$ (effet retard)

$$r(s,t) = \int_{\max(0,s-\tau)}^{\max(0,t-\tau)} \lambda(u) p(u,t,0)\, du.$$

- En collaboration avec D. Concordet. Explicit formulas for a continuous stochastic maturation model : Application to anticancer drug PK/PD. Stochastic Models 24 (2008)

Plan de l'exposé

Vieux problème algorithmique : zéros prescrits dans Σ

Modèles **non-linéaires** du type

$$Y_i = F(X_i) + G(X_i, \theta)\varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

- $Y_i \in \mathbb{R}^n$ est observé
- $X_i \sim_{\text{iid}} \mathcal{N}_q(m, \Sigma)$ n'est pas observé (loi de population)
- $\varepsilon_i \sim_{\text{iid}} \mathcal{N}(0, I)$ bruit
- les X_i et les ε_i sont indépendantes
- F et G fonctions connues
- $G(X_i, \theta)$ = Cholesky d'une matrice définie positive.

Objectif : estimer (m, Σ, θ) lorsque Σ a des **zéros prescrits.**

Algorithme pour EML couplant EM & ICF

- Maximum de vraisemblance (modèle non-linéaire)
- Algorithme EM : E par MCMC et M par factorisation
- Algorithme ICF : paramétrisation par complément de Schur
- Résultat : zéros prescrits et contraintes de cône satisfaites
- ...pour toute taille d'échantillon et tout motif de zéros !

- Avec D. Concordet. A new method for the estimation of variance matrix with prescribed zeros in nonlinear mixed effects models. Statistics and Computing (2008)

Un modèle de déplacement

- En collaboration avec P. Cattiaux et S. Motsch. Asymptotic analysis and diffusion limit of the Persistent Turning Walker Model. Travail en cours (2008)

$$(x_t, \theta_t[2\pi], \kappa_t)_{t\geq 0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} dx_t = \tau(\theta_t)\,dt \\ d\theta_t = \kappa_t\,dt \\ d\kappa_t = -\kappa_t\,dt + \sqrt{2}\alpha\,dB_t \end{cases}$$

- Dyamique : irréversible, Fokker-Planck cinétique.
- Générateur : hypo-elliptique non-elliptique.
- Objectif : principe d'invariance.
- Outils : TCL martingales, équation de Poisson, Lyapunov.

Plan de l'exposé

Au delà de la variance et de l'entropie

Divergence de Jensen ou de Csiszár = Φ-entropie de f pour Q :

$$\mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) = \mathbf{E}_Q(\Phi(f)) - \Phi\left(\mathbf{E}_Q(f)\right)$$

Au delà de la variance et de l'entropie

Divergence de Jensen ou de Csiszár = Φ-entropie de f pour Q :

$$\mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) = \mathbf{E}_Q(\Phi(f)) - \Phi\left(\mathbf{E}_Q(f)\right)$$

Semigroupe markovien $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$ de loi invariante Q :

$$\partial_t \mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(P_t f) = \mathbf{E}_Q(\Phi'(P_t f) L P_t f) \leq 0.$$

Au delà de la variance et de l'entropie

Divergence de Jensen ou de Csiszár = Φ-entropie de f pour Q :

$$\mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) = \mathbf{E}_Q(\Phi(f)) - \Phi\left(\mathbf{E}_Q(f)\right)$$

Semigroupe markovien $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$ de loi invariante Q :

$$\partial_t \mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(P_t f) = \mathbf{E}_Q(\Phi'(P_t f) L P_t f) \leq 0.$$

Pour tout $\rho > 0$ il y a équivalence entre

$$\mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(P_t f) \leq e^{-\rho t} \mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) \quad \text{et} \quad \rho\, \mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) \leq -\mathbf{E}_Q(\Phi'(f) L f).$$

Au delà de la variance et de l'entropie

Divergence de Jensen ou de Csiszár = Φ-entropie de f pour Q :

$$\mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) = \mathbf{E}_Q(\Phi(f)) - \Phi\left(\mathbf{E}_Q(f)\right)$$

Semigroupe markovien $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$ de loi invariante Q :

$$\partial_t \mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(P_t f) = \mathbf{E}_Q(\Phi'(P_t f) L P_t f) \leq 0.$$

Pour tout $\rho > 0$ il y a équivalence entre

$$\mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(P_t f) \leq e^{-\rho t} \mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) \quad \text{et} \quad \rho\, \mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) \leq -\mathbf{E}_Q(\Phi'(f) L f).$$

Si Q est réversible et L de diffusion alors

$$-\mathbf{E}_Q(\Phi'(f) L f) = -\mathbf{E}_Q(\Phi''(f) \Gamma(f, f)).$$

Inégalités de Poincaré, Gross, et Beckner-Latała-Oleszkiewicz

Transformées A-B-C de Φ

$$
\begin{aligned}
A^{\Phi}(u,v) &= \Phi(u+v)-\Phi(u)-\Phi'(u)v \text{ (Bregman)}\\
B^{\Phi}(u,v) &= (\Phi'(u+v)-\Phi'(u))v\\
C^{\Phi}(u,v) &= \Phi''(u)v^2.
\end{aligned}
$$

Transformées A-B-C de Φ

$$
\begin{aligned}
A^{\Phi}(u,v) &= \Phi(u+v)-\Phi(u)-\Phi'(u)v \text{ (Bregman)}\\
B^{\Phi}(u,v) &= (\Phi'(u+v)-\Phi'(u))v\\
C^{\Phi}(u,v) &= \Phi''(u)v^2.
\end{aligned}
$$

Si $Q = p\delta_1 + q\delta_0$ alors

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Ent}_Q^{\Phi}(f) &= q\Phi(a)+p\Phi(b)-\Phi(qa+pb)\\
&= pA^{\Phi}(u,v)-A^{\Phi}(u,pv)
\end{aligned}
$$

avec

$$(a,b) = (f(0),f(1)) \quad \text{et} \quad (u,v) = (a,b-a).$$

Exemples fondamentaux

Fonction Φ	$\boldsymbol{A^\Phi}$	$\boldsymbol{A^\Phi(f, Df)}$
$u\log(u)$	$(u+v)\log((u+v)/u) - v$	$(f+Df)D(\log f) - Df$
u^2	v^2	$\lvert Df\rvert^2$
	$\boldsymbol{B^\Phi}$	$\boldsymbol{B^\Phi(f, Df)}$
$u\log(u)$	$v\log((u+v)/u)$	$D(f)D(\log f)$
u^2	$2v^2$	$2\lvert Df\rvert^2$
	$\boldsymbol{C^\Phi}$	$\boldsymbol{C^\Phi(f, Df)}$
$u\log(u)$	v^2u^{-1}	$\lvert Df\rvert^2 f^{-1}$
u^2	$2v^2$	$2\lvert Df\rvert^2$

Équivalences liées à la convexité

1. A^Φ est convexe
2. B^Φ est convexe
3. C^Φ est convexe
4. Φ est affine ou bien $\Phi'' > 0$ et $-1/\Phi''$ est convexe
5. **convexité fonctionnelle.** $f \mapsto \mathbf{Ent}_Q^\Phi(f)$ est convexe pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$
6. **formule variationnelle.** pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ et toute fonction f

$$\mathbf{Ent}_Q^\Phi(f) = \sup_g \left\{ \mathbf{E}_Q((\Phi'(g) - \Phi'(\mathbf{E}_Q g))(f-g)) + \mathbf{Ent}_Q^\Phi(g) \right\}$$

7. **inégalité de tensorisation.** pour tout espace de probabilité produit et toute fonction f

$$\mathbf{Ent}_Q^\Phi(f) \leq \mathbf{E}_Q(\mathbf{Ent}_{Q_1}^\Phi(f) + \cdots + \mathbf{Ent}_{Q_n}^\Phi(f)).$$

Résultats

Ingrédients : convexité, inégalité de Jensen, courbure ou invariance par translation, interpolation par semigroupe

Résultats

Ingrédients : convexité, inégalité de Jensen, courbure ou invariance par translation, interpolation par semigroupe

- Inégalités de Φ-Sobolev pour les diffusions sur les variétés
- Inégalités locales, à l'équilibre, et sur les chemins
- Inégalités sur espace de Poisson et processus de Lévy
- Inégalités pour processus de Poisson et file M/M/∞
- Constantes optimales pour modèles Gauss et Poisson

Résultats

Ingrédients : convexité, inégalité de Jensen, courbure ou invariance par translation, interpolation par semigroupe

- Inégalités de Φ-Sobolev pour les diffusions sur les variétés
- Inégalités locales, à l'équilibre, et sur les chemins
- Inégalités sur espace de Poisson et processus de Lévy
- Inégalités pour processus de Poisson et file $M/M/\infty$
- Constantes optimales pour modèles Gauss et Poisson

Publications :

- Entropies, Convexity, and Functional Inequalities – On Φ-entropies and Φ-Sobolev inequalities. Journal of Mathematics of Kyoto University 44 (2004)
- Binomial-Poisson entropic inequalities and the $M/M/\infty$ queue. ESAIM Probability and Statistics 10 (2006)

Plan de l'exposé

1. Parcours scientifique
2. Modèles biologiques
   - Modèles à compartiments
   - Modélisation en cancérologie
   - Covariances structurées
3. Inégalités fonctionnelles
   - Entropies et convexité
   - Groupe d'Heisenberg et hypo-ellipticité
4. Matrices aléatoires
   - Ensemble Dirichlet Markov
   - Graphes à poids et réversibilité

Brownien plan et son aire de Lévy

$(B_t, A_t)_{t\geq 0}$ est une diffusion sur $\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ de générateur

$$\begin{aligned} L &= X^2 + Y^2 \\ &= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{1}{4}(x^2+y^2)\partial_z^2 + x\partial_{yz}^2 - y\partial_{xz}^2 \end{aligned}$$

où X et Y sont les champs de vecteurs

$$X = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z \quad \text{et} \quad Y = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z$$

Brownien plan et son aire de Lévy

$(B_t, A_t)_{t\geq 0}$ est une diffusion sur $\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ de générateur

$$L = X^2 + Y^2$$
$$= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{1}{4}(x^2+y^2)\partial_z^2 + x\partial_{yz}^2 - y\partial_{xz}^2$$

où X et Y sont les champs de vecteurs

$$X = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z \quad \text{et} \quad Y = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z$$

L est une diffusion non-elliptique hypo-elliptique :

$$Z = [X,Y] = \partial_z \quad \text{et} \quad [X,Z] = [Y,Z] = 0.$$

Brownien plan et son aire de Lévy

$(B_t, A_t)_{t\geq 0}$ est une diffusion sur $\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ de générateur

$$\begin{aligned} L &= X^2 + Y^2 \\ &= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{1}{4}(x^2+y^2)\partial_z^2 + x\partial_{yz}^2 - y\partial_{xz}^2 \end{aligned}$$

où X et Y sont les champs de vecteurs

$$X = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z \quad \text{et} \quad Y = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z$$

L est une diffusion non-elliptique hypo-elliptique :

$$Z = [X, Y] = \partial_z \quad \text{et} \quad [X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

L est réversible pour Lebesgue sur $\mathbb{H}$. Carré du champ :

$$\Gamma(f,f) = \frac{1}{2}L(f^2) - fLf = (Xf)^2 + (Yf)^2 = |\nabla f|^2.$$

Semigroupe de la chaleur : $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$ de densité

$$p_1(0,(r,z)) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\lambda z - \frac{r^2}{4}\lambda\coth(\lambda)\right)\frac{\lambda}{\sinh(\lambda)}\,d\lambda$$

Semigroupe de la chaleur : $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$ de densité

$$p_1(0,(r,z)) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\lambda z - \frac{r^2}{4}\lambda\coth(\lambda)\right)\frac{\lambda}{\sinh(\lambda)}\,d\lambda$$

- En collaboration avec D. Bakry, F. Baudoin, M. Bonnefont. <u>On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group</u>. À paraître, Journal of Functional Analysis (2008)

Semigroupe de la chaleur : $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$ de densité

$$p_1(0,(r,z)) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\lambda z - \frac{r^2}{4}\lambda\coth(\lambda)\right)\frac{\lambda}{\sinh(\lambda)}\,d\lambda$$

- En collaboration avec D. Bakry, F. Baudoin, M. Bonnefont. <u>On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group</u>. À paraître, Journal of Functional Analysis (2008)
- Preuve élémentaire de l'inégalité de Driver-Melcher

$$\Gamma(P_t f, P_t f) \leq C_2 P_t(\Gamma(f,f))$$

Semigroupe de la chaleur : $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$ de densité

$$p_1(0,(r,z)) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\lambda z - \frac{r^2}{4}\lambda \coth(\lambda)\right)\frac{\lambda}{\sinh(\lambda)}\, d\lambda$$

- En collaboration avec D. Bakry, F. Baudoin, M. Bonnefont. <u>On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group</u>. À paraître, Journal of Functional Analysis (2008)
- Preuve élémentaire de l'inégalité de Driver-Melcher

$$\Gamma(P_t f, P_t f) \leq C_2 P_t(\Gamma(f,f))$$

- Preuves nouvelles de l'inégalité de H.-Q. Li

$$\sqrt{\Gamma(P_t f, P_t f)} \leq C_1 P_t(\sqrt{\Gamma(f,f)})$$

Semigroupe de la chaleur : $(P_t)_{t\geq 0} = (e^{tL})_{t\geq 0}$ de densité

$$p_1(0,(r,z)) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\lambda z - \frac{r^2}{4}\lambda\coth(\lambda)\right)\frac{\lambda}{\sinh(\lambda)}\,d\lambda$$

- En collaboration avec D. Bakry, F. Baudoin, M. Bonnefont. On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group. À paraître, Journal of Functional Analysis (2008)
- Preuve élémentaire de l'inégalité de Driver-Melcher

$$\Gamma(P_t f, P_t f) \leq C_2 P_t(\Gamma(f,f))$$

- Preuves nouvelles de l'inégalité de H.-Q. Li

$$\sqrt{\Gamma(P_t f, P_t f)} \leq C_1 P_t(\sqrt{\Gamma(f,f)})$$

- Conséquences : inégalités locales de type Φ-Sobolev
- Inégalités locales isopérimétriques de Cheeger et Bobkov

Autres travaux soumis ou en cours de finalisation

- En collaboration avec F. Malrieu. On fine properties of mixtures with respect to concentration of measure and Sobolev type inequalities. Révision mineure, AIHP (2008)

$$p_1\mu_1 + \cdots + p_n\mu_n$$

- Avec F. Malrieu et K. Paroux. On the long time behavior of the TCP window size process. Travail en cours (2008)

$$(Lf)(x) = f'(x) + x\int_0^1 (f(y) - f(x))\, H(dy)$$

Plan de l'exposé

Ensemble Dirichlet Markov

- $\mathcal{M}_n = \Lambda_n \times \cdots \times \Lambda_n$ = matrices markoviennes $n \times n$
- si $M \in \mathcal{M}_n$ alors $1 \in \sigma(M) \subset D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$
- lois sur $\mathcal{M}_n$ et comportement du spectre ?

Ensemble Dirichlet Markov

- $\mathcal{M}_n = \Lambda_n \times \cdots \times \Lambda_n$ = matrices markoviennes $n \times n$
- si $M \in \mathcal{M}_n$ alors $1 \in \sigma(M) \subset D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$
- lois sur $\mathcal{M}_n$ et comportement du spectre ?

Théorème (Ensemble Dirichlet Markov)

- $\mathcal{U}(\mathcal{M}_n) = \mathcal{U}(\Lambda_n)^{\otimes n} = \mathcal{D}_n(1,\ldots,1)^{\otimes n}$
- *$\mathcal{U}(\mathcal{M}_n)$ invariante par $M \mapsto TM$ ($M \mapsto MT$) ssi $T \in \Sigma_n$*
- *Pas de loi $\mathcal{P} \ll \mathcal{U}(\mathcal{M}_n)$ portée par tout $\mathcal{M}_n$ et invariante.*

Ensemble Dirichlet Markov

- $\mathcal{M}_n = \Lambda_n \times \cdots \times \Lambda_n =$ matrices markoviennes $n \times n$
- si $M \in \mathcal{M}_n$ alors $1 \in \sigma(M) \subset D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$
- lois sur $\mathcal{M}_n$ et comportement du spectre ?

Théorème (Ensemble Dirichlet Markov)

- $\mathcal{U}(\mathcal{M}_n) = \mathcal{U}(\Lambda_n)^{\otimes n} = \mathcal{D}_n(1,\ldots,1)^{\otimes n}$
- *$\mathcal{U}(\mathcal{M}_n)$ invariante par $M \mapsto TM$ ($M \mapsto MT$) ssi $T \in \Sigma_n$*
- *Pas de loi $\mathcal{P} \ll \mathcal{U}(\mathcal{M}_n)$ portée par tout $\mathcal{M}_n$ et invariante.*

$(X_{ij})_{ij\geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}_+$ et $X = (X_{ij})_{1\leq ij\leq n}$.

$$M_{ij} = \frac{X_{ij}}{\rho_i} \quad \text{avec} \quad \rho_i = X_{i1} + \cdots + X_{in}.$$

Dirichlet Markov lorsque $\mathcal{L}$ est exponentielle.

Une conjecture toute simple et probablement vraie

$$|\lambda_n(M)| \leq \cdots \leq |\lambda_1(M)| = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{\sqrt{n}M} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k(\sqrt{n}M)}.$$

Une conjecture toute simple et probablement vraie

$$|\lambda_n(M)| \leq \cdots \leq |\lambda_1(M)| = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{\sqrt{n}M} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k(\sqrt{n}M)}.$$

Conjecture (Loi du cercle à la Girko)

Si $\mathcal{L}$ de variance $0 < \sigma^2 < \infty$ alors, avec $\kappa = \sigma/m$,

$$\mathbb{P}\left(\mu_{\sqrt{n}M} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{étr.}} \mathcal{U}(D(0,\kappa))\right) = 1.$$

Si de plus $\mathcal{L}$ a un moment d'ordre 4 fini alors

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}|\lambda_2(M)| = \kappa\right) = 1.$$

Valeurs singulières et localisation du spectre

$$s_k(M) = \lambda_k(\sqrt{MM^*}) \quad \text{renumérotées} \quad 0 \leq s_n(M) \leq \cdots \leq s_1(M).$$

Valeurs singulières et localisation du spectre

$$s_k(M) = \lambda_k(\sqrt{MM^*}) \quad \text{renumérotées} \quad 0 \leq s_n(M) \leq \cdots \leq s_1(M).$$

Théorème (Valeurs singulières)

Si $\mathcal{L}$ de variance $0 < \sigma^2 < \infty$ et de moment d'ordre 4 fini alors

$$\mathbb{P}\left(\mu_{\sqrt{nMM^\top}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{étr.}} \mathcal{Q}_{2\kappa}\right) = 1$$

où $\mathcal{Q}_{2\kappa}$ est la loi du quart de cercle sur $[0, 2\kappa]$. De plus

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} s_2(\sqrt{n}M) = 2\kappa \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} s_1(M) = 1\right) = 1.$$

Valeurs singulières et localisation du spectre

$$s_k(M) = \lambda_k(\sqrt{MM^*}) \quad \text{renumérotées} \quad 0 \leq s_n(M) \leq \cdots \leq s_1(M).$$

Théorème (Tension-localisation)

Si $\mathcal{L}$ de variance $0 < \sigma^2 < \infty$ et de moment d'ordre 4 fini alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} |\lambda_2(\sqrt{n}M)| \leq 2\kappa\right) = 1 \quad \textit{tandis que} \quad \lambda_1(M) = 1.$$

En particulier, tension-localisation presque sûre pour $\mu_{\sqrt{n}M}$.

Loi du cercle pour matrices i.i.d. décentrées

Décomposition

$$M = DX \quad \text{avec} \quad D = \mathrm{Diag}(\rho_1^{-1}, \ldots, \rho_n^{-1})$$

Écriture en objets stabilisés

$$\sqrt{n}M = nD\frac{1}{\sqrt{n}}X$$

Loi forte des grands nombres uniforme de Bai-Yin :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \|mnD - I\|_{2\to 2} = 0\right) = 1.$$

Formules variationnelles de Courant-Fischer :

$$s_n(D)s_k(X) \leq s_k(DX) \leq s_1(D)s_k(X)$$

Traitement des valeurs singulières. Spectre complexe ?

Loi du cercle pour matrices i.i.d. décentrées

Théorème (Loi du cercle – Cas décentré)

Si $\mathcal{L}$ *de variance* $0 < \sigma^2 < \infty$ *et de moment d'ordre* 4 *fini alors*

$$\mathbb{P}\left(\mu_{n^{-1/2}X} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{\it étr.}} \mathcal{U}(D(0,\sigma))\right) = 1.$$

De plus,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} |\lambda_1(n^{-1/2}X)| = \infty \quad \text{\it et} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_2(n^{-1/2}X)| \leq 2\sigma\right) = 1.$$

Loi du cercle pour matrices i.i.d. décentrées

Théorème (Loi du cercle – Cas décentré)

Si $\mathcal{L}$ de variance $0 < \sigma^2 < \infty$ et de moment d'ordre 4 fini alors

$$\mathbb{P}\left(\mu_{n^{-1/2}X} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{étr.}} \mathcal{U}(D(0,\sigma))\right) = 1.$$

De plus,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} |\lambda_1(n^{-1/2}X)| = \infty \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_2(n^{-1/2}X)| \leq 2\sigma\right) = 1.$$

- Preuve : se ramener au cas $m = 0$ (Pan-Zhou) via potentiel logarithmique, intégration par parties, entrelacements de Bai-Thompson, et borne polynomiale de Tao-Vu sur s_n
- Tao-Vu juillet 2008 : condition de variance seule

Plan de l'exposé

Conductances aléatoires sur graphes

- G=(E,V) graphe à $n = |V|$ sommets **non orienté**
- $(X_{ij})_{i \geq i \geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $X_{ji} = X_{ij}$
- $X = (X_{ij})_{1 \leq ij \leq n}$ matrice aléatoire **symétrique** i.i.d.
- Matrice markovienne $K_{ij} = 0$ si $\{i, j\} \notin E$ et sinon

$$K_{ij} = \frac{X_{ij}}{\rho_i} \quad \text{avec} \quad \rho_i = X_{i1} + \cdots + X_{in}.$$

- K est **réversible** : $\rho_i K_{ij} = \rho_j K_{ji}$
- K **non symétrique** mais spectre $\sigma(K)$ **réel** et

$$-1 \leq \lambda_n(K) \leq \cdots \leq \lambda_1(K) = 1.$$

Quelques résultats sur le graphe complet

Théorème (Comportement Wigner sur graphe complet)

Si $\mathcal{L}$ de variance $0 < \sigma^2 < \infty$ alors

$$\mathbb{P}\left(\mu_{\sqrt{n}K} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{étr.}} \mathcal{W}_{2\kappa}\right) = 1$$

où $\mathcal{W}_{2\kappa}$ = loi du demi-cercle de Wigner sur $[0, 2\kappa]$.

MAMA = MAMA

$$\int_{-1}^{+1} x^\ell \, d\mu_K(x) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(K^\ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_\ell^X(k).$$

Quelques résultats sur le graphe complet

Théorème (Trou spectral sur le graphe complet)

Si de plus $\mathcal{L}$ a un moment d'orde 4 fini alors pour tout $k \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \lambda_{n-k+1}(\sqrt{n}K) = -2\kappa\right) = 1$$

et

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \lambda_{k+2}(\sqrt{n}K) = +2\kappa\right) = 1$$

Quelques résultats sur le graphe complet

Théorème (Loi invariante sur le graphe complet)

Si $\mathcal{L}$ de variance $0 < \sigma^2 < \infty$ alors

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \|\widehat{\rho} - \mathcal{U}\|_{\mathrm{VT}} = 0\right) = 1$$

où

$$\widehat{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_1 + \cdots + \rho_n} \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = \frac{1}{n}(\delta_1 + \cdots + \delta_n).$$

Prépublications et travaux en cours

Soumis :

- The Dirichlet Markov Ensemble
- Circular law for non-central random matrices

Travaux en cours :

- Circular law theorem for random Markov matrices
- En collaboration avec Ch. Bordenave et P. Caputo :
  - Spectrum of large random reversible Markov chains.
  - Heavy–tailed weights on the complete graph.

Merci de votre attention. Place aux questions !