



HAL
open science

Simulation du mouvement de parois et de lignes de Bloch dans les matériaux ferromagnétiques

El Housseine Khannous

► **To cite this version:**

El Housseine Khannous. Simulation du mouvement de parois et de lignes de Bloch dans les matériaux ferromagnétiques. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1996. Français. NNT: . tel-00346104

HAL Id: tel-00346104

<https://theses.hal.science/tel-00346104>

Submitted on 11 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée par

El Housseine KHANNOUS

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I.

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées.**

**Simulation du mouvement
de parois et de lignes de Bloch
dans les matériaux ferromagnétiques**

Date de soutenance : 25 octobre 1996.

Composition du jury :

M. J. BLUM	Président
M. J. MILTAT	Rapporteur
M. M. PIERRE	Rapporteur
M. P. BARAS	Examineur
M. A. THIAVILLE	Examineur

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG.

Projet IDOPT (CNRS/INPG/UJF/INRIA)

THÈSE

Présentée par
El Housseine KHANNOUS

Pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I.
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées.**

**Simulation du mouvement
de parois et de lignes de Bloch
dans les matériaux ferromagnétiques**

Date de soutenance : 25 octobre 1996.

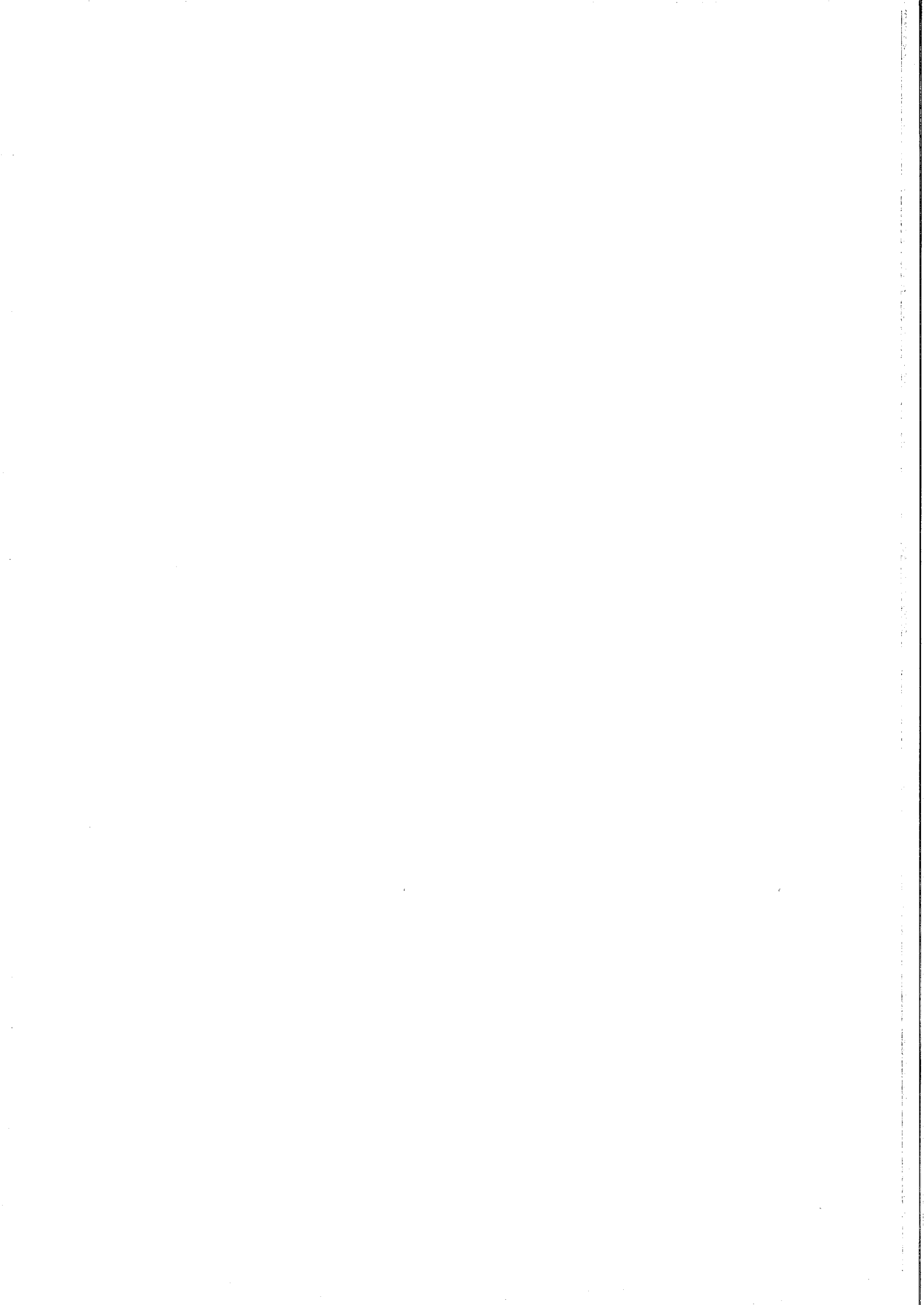
Composition du jury :

M. J. BLUM	Président
M. J. MILTAT	Rapporteur
M. M. PIERRE	Rapporteur
M. P. BARAS	Examineur
M. A. THIAVILLE	Examineur

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG.
Projet IDOPT (CNRS/INPG/UJF/INRIA)



A mon cher frère Abdelilah.
A mes parents.
A mes autres frères et soeurs.



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre Baras pour avoir dirigé ce travail et pour ses précieux conseils tout au long de cette thèse. Il a su me donner le goût de la recherche dans le domaine des mathématiques appliquées.

Je remercie M. Jacques Blum qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie M. Michel Pierre et M. Jacques Miltat qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie également André Thiaville pour ses conseils très précieux qui m'ont permis de mieux comprendre le côté physique du problème.

Je tiens tout particulièrement à remercier Anne Bagnérés, tout d'abord pour ses connaissances dont elle m'a fait profiter, et surtout pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Je n'oublierai pas de remercier tous les membres de ma famille qui ont fait tant de sacrifice pour me permettre de réaliser ce travail, je pense notamment à mes parents.

Merci enfin aux docteurs et les futurs docteurs du LMC: Aïcha, Hafsa, tous les Mohamed, Emmanuel, Stéphane et tous les autres... sans qui l'ambiance n'aurait pas été la même.



Table des matières

1	Généralités et équations physiques	11
1.1	Matériau ferromagnétique	11
1.2	Les différents termes de l'énergie libre	12
1.3	Propriétés statiques des matériaux ferromagnétiques	14
1.3.1	Domaine, Paroi, Ligne de Bloch	14
1.4	Mémoire à lignes de Bloch	19
1.5	Equations de la statique de l'aimantation	20
1.5.1	Description analytique d'une paroi plane infinie	20
1.5.2	Description analytique d'une ligne de Bloch	22
1.6	Les équations de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG)	24
1.6.1	Equation de (LLG) en coordonnées cartésiennes	24
1.6.2	Ecriture des équations de (LLG) en coordonnées polaires	25
1.7	Mouvement gyrotropique d'une ligne de Bloch	27
1.7.1	Paroi rectiligne	28
1.7.2	Translation d'une bulle dans un gradient de champ	29
1.8	Modèle simplifié des équations de (LLG) : modèle de Slonczewski	30
1.8.1	Cas d'une paroi presque plane avec lignes	31
1.8.2	Adaptation du modèle de Slonczewski au cas d'une paroi cylindrique	33
1.9	Conclusion	35
2	Un modèle simplifié des équations de (LLG)	37
2.1	Equations de (LLG)	37

2.2	Une formulation variationnelle des équations de (<i>LLG</i>)	38
2.2.1	Coordonnées locales	39
2.2.2	Formulation variationnelle en coordonnées locales	41
2.2.3	Expressions des dérivées des différents termes d'énergie	42
2.2.4	Dérivée de l'énergie totale	46
2.3	Le système d'équations	48
2.4	Conclusion	53
3	Calcul du champ démagnétisant dans un matériau ferromagnétique	55
3.1	Équations de Maxwell	55
3.1.1	Les équations	55
3.1.2	Expression de l'induction en fonction du rotationnel de l'aimantation	56
3.2	Expression du couple (H, B) dans le cas d'une paroi sans structure	59
3.2.1	Calcul du rotationnel de l'aimantation au sens des distributions	60
3.2.2	Expression de B sous la forme donnée par la loi de Biot-Savart	61
3.2.3	Expression ($2d$) du champ B en dehors de la paroi	62
3.2.4	Expression ($2d$) du champ magnétique H en dehors de la paroi	63
3.2.5	Expression ($2d$) du champ magnétique H en un point de la paroi	65
3.3	Expression du couple (H, B) dans le cas d'une paroi avec structure	71
3.3.1	Calcul du rotationnel de l'aimantation au sens des distributions	73
3.3.2	Expression de B sous la forme de la loi de Biot-Savart	77
3.3.3	Expression ($2d$) du champ B en un point de la paroi	78
3.3.4	Champ démagnétisant H^m en un point de la paroi	80
3.3.5	Forme approchée de H_z^m au centre de la paroi	81
4	Méthodes numériques pour simuler le mouvement d'une courbe régi par sa courbure	83
4.1	Un schéma semi-implicite	84
4.2	Méthode numérique pour approcher la courbure	90

4.2.1	Analyse numérique de la méthode : consistance et ordre	93
4.3	Méthode de réarrangement	95
4.3.1	Méthode d'interpolation dans le plan utilisant la courbure	95
4.4	Conclusion	98
5	Discrétisation complète du modèle de Slonczewski	99
5.1	Système à résoudre	99
5.1.1	Changement d'inconnues	100
5.2	Schémas numériques	101
5.3	Système discrétisé	107
5.4	Méthode numérique pour approcher le champ démagnétisant	109
6	Résultats et tests	111
6.1	Paroi sans structure	111
6.1.1	Champ d'équilibre	112
6.1.2	Paroi avec gravure et boîtier	113
6.1.3	Mouvement d'une ellipse sans gravure ni boîtier	120
6.1.4	Translation d'une bulle sans structure sous un gradient de champ .	121
6.2	Calcul du champ démagnétisant dans le cas d'une paroi avec structure . .	122
6.2.1	Cas de deux lignes enroulantes	122
6.2.2	Cas de deux lignes déroulantes	123
6.3	Comparaison des deux modèles	124
6.4	Modèle de Slonczewski	124
6.4.1	Annihilation de deux lignes déroulantes	124
6.4.2	Déplacement de deux lignes enroulantes	126
6.4.3	Cas de deux lignes enroulantes "proches"	126
6.4.4	Cas de deux lignes enroulantes "éloignées"	129
6.5	Modèle	131
6.5.1	Annihilation de deux lignes déroulantes	131

6.5.2	Déplacement de deux lignes enroulantes	133
6.5.3	Cas de deux lignes enroulantes "assez éloignées" l'une de l'autre . .	134
6.5.4	Lignes enroulantes "très éloignées"	136
6.6	Conclusion	138
Annexe		140
.1	Calcul du noyau $K(r)$	140
Annexe		142
.1	Changement de variables dans des intégrales sur la paroi	142
.1.1	Intégrale de la forme $\int_P f(\underline{X})d\underline{X}$	142
.1.2	Intégrale de la forme $\int_P \nabla f(\underline{X})d\underline{X}$	143
.2	Changement de variables dans les opérateurs de dérivées	144
.2.1	Dérivée par rapport λ	144
.2.2	Dérivée d'une intégrale sur Γ_λ par rapport à λ	145
.3	Permutation de dérivées partielles	147
Annexe		148
.1	Analyse numérique de la méthode de calcul de la courbure	148

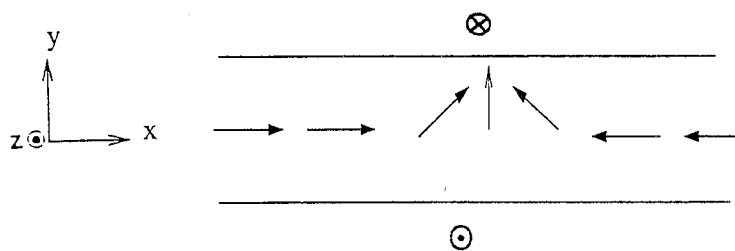
Introduction

Les matériaux ferromagnétiques ont la propriété de présenter une aimantation spontanée de direction et de sens variables mais de norme constante.

A l'état stationnaire, la répartition de l'aimantation résulte d'un équilibre entre plusieurs termes d'énergie: l'énergie d'anisotropie, d'échange, démagnétisante et de Zeeman. Le terme d'anisotropie a pour effet d'aligner l'aimantation suivant un axe appelé axe d'anisotropie. Nous nous intéressons aux matériaux dont l'axe d'anisotropie est vertical. Le terme d'échange s'oppose aux variations brutales de l'aimantation. Le terme démagnétisant exprime la tendance des matériaux à produire une distribution d'aimantations sans pôles, c'est à dire à divergence nulle, d'où son nom. Il fait intervenir un champ interne non local appelé champ démagnétisant.

Sous l'effet antagoniste de ces quatre termes d'énergie, on observe la formation de "domaines", zones où l'aimantation s'aligne avec l'axe d'anisotropie. Deux domaines sont séparés par une paroi dans laquelle l'aimantation change de sens. L'angle de l'orientation de l'aimantation à la traversée de la paroi peut varier, donnant naissance à des structures d'aimantation appelées lignes de Bloch.

La figure suivante illustre une paroi contenant une ligne de Bloch.



Ligne de Bloch.

Ces propriétés ont permis d'utiliser ces matériaux comme support d'enregistrement. Les mémoires à bulles en sont un exemple. L'élément d'information dans ces mémoires est un domaine cylindrique: la bulle. La présence d'un tel domaine traduira le bit "1" alors que son absence, le bit "0".

Cette manière de coder l'information n'a pas permis des densités de stockage suffisamment importantes. Un nouveau type de mémoires a été proposé en 1983 par le professeur S. Konishi: les mémoires à lignes de Bloch. L'idée originale est de coder le "1" non plus par la présence d'un domaine, mais par la présence d'une paire de lignes de Bloch.

Les faibles dimensions des parois et des lignes permettent d'accéder à une densité d'information beaucoup plus importante. Pour choisir les paramètres des matériaux et maîtriser le fonctionnement des mémoires, une simulation numérique est indispensable. C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse.

Ces phénomènes sont régis par les équations de Landau-lifshitz-Gilbert (LLG). Un modèle simplifié de ces équations a été proposé par Slonczewski. Il est donné sous forme d'un système évolutif tridimensionnel.

Notre objectif est de faire des simulations en dimension deux. La paroi est représentée par une courbe. L'orientation de l'aimantation dans la paroi est donnée par un angle porté par la courbe (angle azimutal de l'aimantation).

Dans le premier chapitre, nous présentons une version en dimension deux du modèle de Slonczewski. C'est un système d'équations dont les inconnus sont la vitesse normale de la courbe (paroi) et l'angle azimutal de l'aimantation. Le mouvement de la courbe est régi essentiellement par la courbure et le champ démagnétisant.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons une nouvelle démarche pour extraire des équations de (LLG) un modèle simplifié en dimension deux. Les interactions entre les structures internes à la paroi sont exprimées par un terme non local.

Le troisième chapitre est consacré au calcul du champ démagnétisant. Dans un premier temps, nous traitons le cas d'une paroi sans structure. Nous donnons une formule explicite du champ et nous étudions la singularité des fonctions à intégrer. Nous abordons ensuite le cas d'une paroi avec structures. Les interactions entre les lignes de Bloch sont ainsi prises en compte.

Dans le quatrième chapitre, nous développons les techniques numériques utilisées pour simuler le mouvement de la courbe sous l'influence de sa courbure. Nous construisons un schéma semi-implicite pour résoudre le problème d'une manière numériquement stable. Nous proposons également une méthode pour approcher la courbure et la normale d'une courbe donnée par un ensemble fini de points. La consistance et l'ordre de la méthode sont étudiés.

Dans le cinquième chapitre, nous proposons une façon de discrétiser le modèle de Slonczewski basée sur le principe de la méthode d'Euler implicite. Nous adoptons la démarche établie dans le quatrième chapitre pour traiter le mouvement de la courbe. La méthode des trapèzes est adaptée pour approcher le champ démagnétisant ; la singularité des fonctions à intégrer est prise en compte.

Dans le sixième chapitre, nous présentons un ensemble de résultats et tests validant les deux codes de calcul que nous avons réalisés. Le premier résout les équations de Slonczewski et le deuxième les équations de notre modèle. Nous obtenons les résultats qualitatifs classiques suivants : domaine en forme de labyrinthe autour de la gravure, translation

d'une bulle sous un gradient du champ appliqué, annihilation de deux lignes "déroulantes", ainsi que des résultats quantitatifs. Nous nous sommes intéressés notamment au calcul numérique de la distance entre deux lignes "enroulantes" à l'équilibre.



Paramètres du matériau

Nous présentons ici les principaux paramètres du matériau utilisé :

$4\pi M_s$: aimantation à saturation.

A_e : constante d'échange.

k_u : constante d'anisotropie.

h : épaisseur du matériau.

γ : rapport gyromagnétique.

α : coefficient d'amortissement de Gilbert.

$\sigma_0 = 4\sqrt{A_e k_u}$: énergie de paroi par unité de surface.

l : longueur caractéristique du matériau.

$$l = \frac{\sigma_0}{4\pi M_s^2}$$

$Q = \frac{k_u}{2\pi M_s^2}$: coefficient de qualité du matériau.

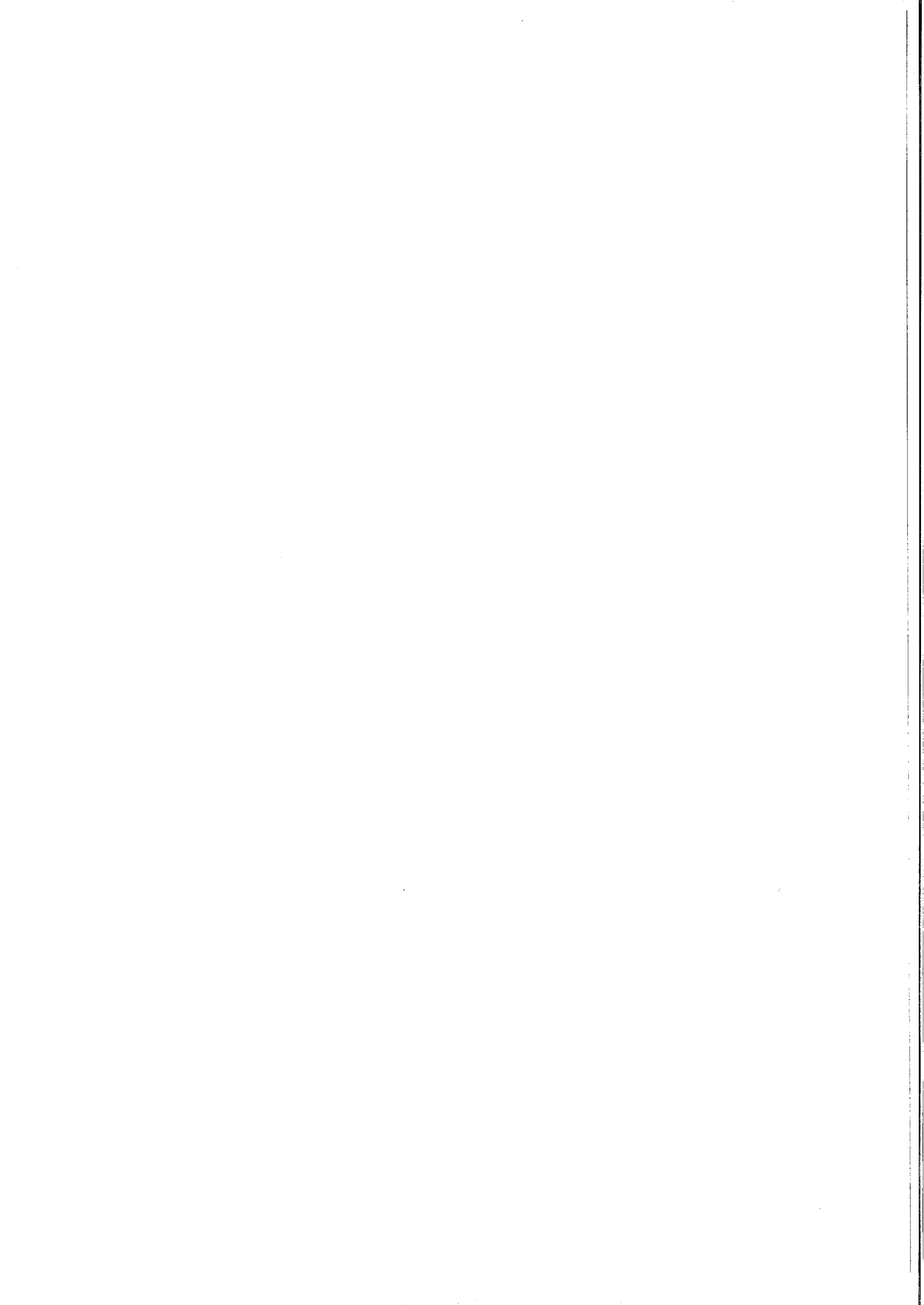
μ_w : mobilité d'une paroi plane.

$\delta = \pi\Delta$ largeur d'une paroi.

$$\Delta = \sqrt{\frac{A_e}{k_u}}$$

$\Pi = \pi\Lambda$ largeur d'une ligne de Bloch.

$$\Lambda = \sqrt{\frac{A_e}{2\pi M_s^2}}$$



Chapitre 1

Généralités et équations physiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous précisons le cadre mathématique du problème. Nous présentons très brièvement la démarche suivie par Slonczewski pour développer un modèle simplifié (2d) des équations de (LLG). C'est un système d'équations couplant le mouvement d'une courbe (paroi) et l'évolution d'un angle défini le long de cette dernière (angle azimutal de l'aimantation). Ce dernier permet de visualiser le déplacement des lignes de Bloch. Le mouvement de la courbe est régi essentiellement par la courbure et le champ démagnétisant.

Nous allons présenter quelques propriétés du matériau dont on veut étudier la structure d'aimantation.

1.1 Matériau ferromagnétique

Un matériau ferromagnétique est un milieu naturellement aimanté. Il possède deux caractéristiques :

- Le vecteur aimantation a une tendance naturelle à se diriger suivant un axe, dit axe d'anisotropie.
Nous nous intéressons seulement aux matériaux dont l'axe d'anisotropie est vertical.
- Le vecteur aimantation est de direction et de sens variables mais de module constant dans tout le matériau.

On considère un matériau de volume V et de hauteur h . On note par \underline{M} le vecteur aimantation à l'intérieur du matériau, et par \underline{M}^* son prolongement par le vecteur nul à

l'extérieur de celui-ci.

Nous posons :

$$\|\underline{M}\| = M_s$$

et

$$\underline{M} = M_s \underline{m}$$

\underline{m} est de norme unité. Il indique la direction et le sens de l'aimantation.

M_s est appelée aimantation spontanée, c'est une constante intrinsèque au matériau.

1.2 Les différents termes de l'énergie libre

Il y a quatre sortes d'énergies qui sont l'énergie d'échange, l'énergie d'anisotropie, l'énergie de Zeeman et l'énergie démagnétisante [19].

Energie d'échange

Cette énergie a une origine quantique. En effet, elle résulte de l'interaction à courte portée, généralement entre proches voisins, tendant à aligner les spins voisins les uns sur les autres. Son expression est donnée par :

$$E_{ech} = A_e \int_V \|\nabla \underline{m}\|^2 dv \quad (1.1)$$

où A_e est une constante physique appelée coefficient d'échange
et

$$\|\nabla \underline{m}\|^2 = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial m_{i,j}}{\partial x_j} \right)^2$$

Energie d'anisotropie

Cette énergie provient des interactions cristallines entre les électrons et la structure atomique du matériau. Elle est donnée par :

$$E_{anis} = k_u \int_V \|p(\underline{m})\|^2 dv \quad (1.2)$$

où $p(\underline{m})$ est la projection de \underline{m} dans le plan.

k_u est appelée constante d'anisotropie. Ce terme tend à aligner l'aimantation \underline{M} avec l'axe d'anisotropie, ce qui favorise la formation de domaines .

Energie démagnétisante

L'énergie démagnétisante, appelée aussi énergie interne ou magnétostatique, résulte des interactions à longue portée entre les dipôles (principalement les spins électroniques). Elle s'écrit sous la forme :

$$E_{dem} = -\frac{M_s}{2} \int_V \underline{m} \cdot H dv \quad (1.3)$$

avec H est solution des équations statiques de Maxwell suivantes :

Équations statiques de Maxwell, champ démagnétisant

$$\begin{cases} B & = H + 4\pi \underline{M}^* \\ \text{div}(B) & = 0 \\ \text{rot}(H) & = 0 \end{cases}$$

où B désigne l'induction magnétique.

Le terme démagnétisant exprime la tendance du matériau à produire une distribution d'aimantation sans pôles libres, c'est à dire à divergence nulle, d'où son nom.

Energie de Zeeman

Elle provient des champs extérieurs qu'on peut éventuellement appliquer au matériau. Son expression est donnée par :

$$E_{zeem} = -M_s \int_V \underline{m} \cdot H^a dv \quad (1.4)$$

où H^a désigne le champ extérieur. On l'appelle champ de Zeeman. Ce terme d'énergie tend à aligner l'aimantation \underline{m} sur le champ extérieur H^a .

Energie totale

Elle est la somme des quatre énergies précédentes :

$$E = E_{ech} + E_{anis} + E_{dem} + E_{zeem} \quad (1.5)$$

1.3 Propriétés statiques des matériaux ferromagnétiques

1.3.1 Domaine, Paroi, Ligne de Bloch

Domaine

A l'équilibre, l'aimantation forme des **domaines** régions où elle est dirigée suivant l'axe d'anisotropie, comme le montre le premier dessin de (fig. 1.1)

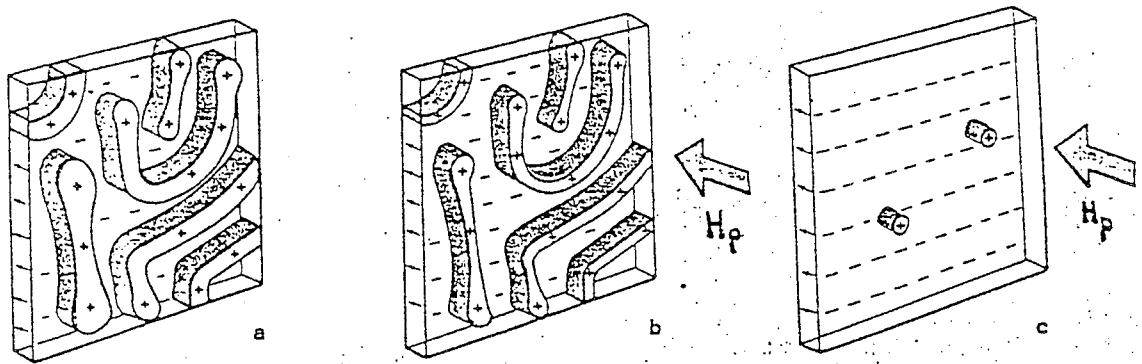


FIG. 1.1 - *Domaine*

Cette distribution aléatoire sous forme de domaines correspond à un minimum de l'énergie du matériau.

L'application d'un champ magnétique perpendiculaire au film, (sur le deuxième dessin) de la figure (Fig. 1.1), tend à favoriser les domaines dont le sens d'aimantation est le même que celui du champ. La taille de ces domaines s'accroît. Celui des domaines d'aimantation opposée décroît. A partir d'une certaine polarisation, les domaines dont l'aimantation est opposée au champ appliqué se réduisent à des domaines cylindriques perpendiculaires au plan du film, comme le montre le troisième dessin de la figure 1: ce sont des **bulles** magnétiques.

L'application d'un champ plus intense a pour effet de faire disparaître les bulles. Tout le volume du film est alors aimanté selon un seul sens.

Le rayon d'équilibre d'une bulle est celui pour lequel les interactions agissant sur ce type de domaine ont une résultante minimale. La valeur du champ extérieur orthogonal à la surface pour lequel le rayon de la bulle s'annule est appelée **champ de "collapse"** et noté H_{co} . En dessous d'une certaine valeur de ce même champ, appelée **champ de "run-out"**, noté H_{ro} , la bulle se transforme en bande [6]. Le domaine d'existence d'une bulle est donc défini par

$$H_{co} < H_p < H_{ro}$$

où H_p est le champ de polarisation normal au film.

Paroi

On appelle paroi la zone de transition située entre deux domaines d'aimantation opposée. Sa largeur résulte d'un compromis traduisant un équilibre entre les divers types d'interactions magnétiques agissant sur les moments magnétiques.

La figure (Fig. 1.2) montre comment l'aimantation effectue une rotation de 180° lorsque l'on traverse une paroi de Bloch perpendiculairement (ψ représente l'angle azimutal et θ l'angle polaire que font les moments avec les axes du repère).

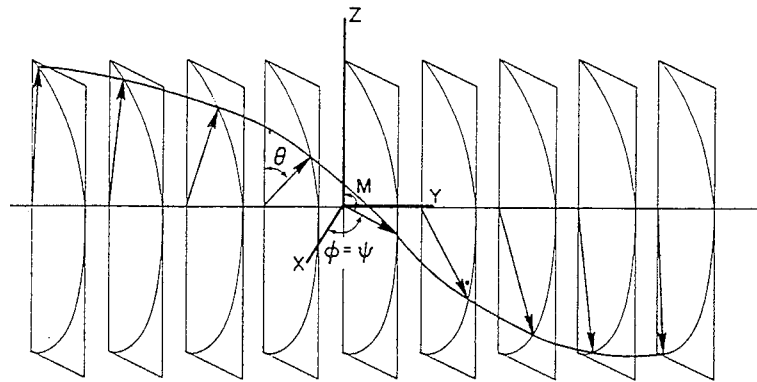


FIG. 1.2 - Paroi

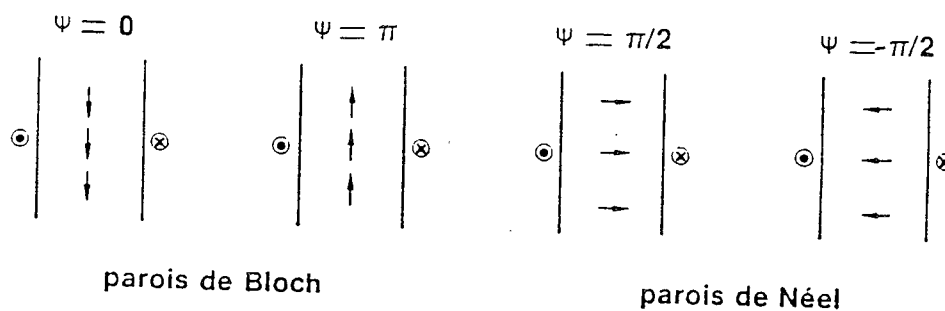


FIG. 1.3 - Type de parois

Ligne de Bloch

L'angle de l'orientation de l'aimantation, à la traversée de la paroi, peut varier en donnant naissance à des structures d'aimantation dans la paroi : les lignes de Bloch.
Sur la figure (Fig. 1.4) sont représentés les deux types de lignes de Bloch que l'on peut trouver : les lignes de Bloch verticales et horizontales.

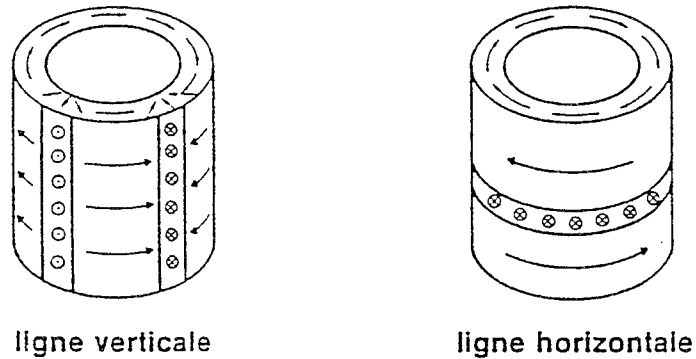


FIG. 1.4 - Lignes de Bloch

Largeur d'une ligne de Bloch

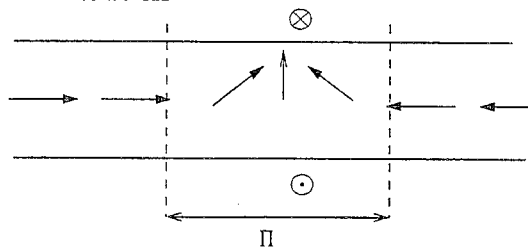


FIG. 1.5 - Largeur d'une ligne de Bloch.

La largeur d'une ligne de Bloch dépend du matériau utilisé, son expression est donnée par :

$$\Pi = \pi \sqrt{\frac{A_e}{2\pi M_s^2}}$$

Les lignes de Bloch verticales sont définies par leur polarités, c'est à dire le sens de rotation de l'aimantation par rapport au sens trigonométrique direct. Deux lignes de Bloch consécutives peuvent être de même polarités ou de polarités opposées.

La stabilité de ces deux structures résulte des interactions existant entre les lignes de Bloch verticales. Les interactions sont de deux types :

- l'interaction à longue distance due à l'énergie magnétostatique : chaque ligne constituant un monopôle magnétique, deux lignes de Bloch espacées d'une grande distance

devant leur largeur seront soumises à une force attractive.

- interaction à courte distance due à l'énergie d'échange ; deux lignes de même polarité sont soumises à une force répulsive alors que deux lignes de polarités opposées s'attirent et s'annulent afin de minimiser l'énergie d'échange.

Par conséquent, une structure de paroi à ligne de Bloch de même polarité sera stable et définie par une distance d'équilibre entre les deux lignes.

Deux lignes déroulantes

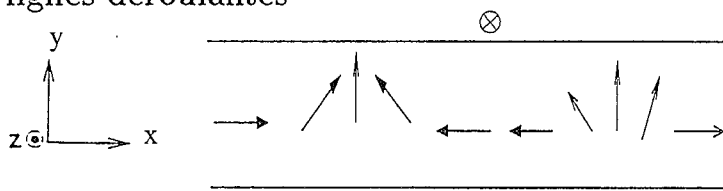


FIG. 1.6 - Lignes déroulantes.

On dit que deux lignes sont déroulantes si les vecteurs aimantation au coeur des deux lignes sont parallèles, voir la figure ci-dessus. Dans le cas contraire On dit que les deux lignes sont enroulantes.

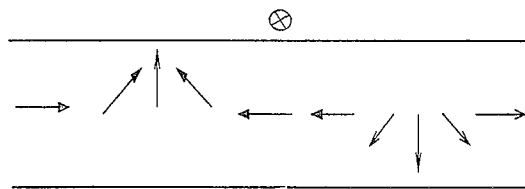


FIG. 1.7 - Lignes enroulantes.

Distance entre deux lignes de Bloch.

La distance entre deux lignes de Bloch est celle qui sépare leurs centres :

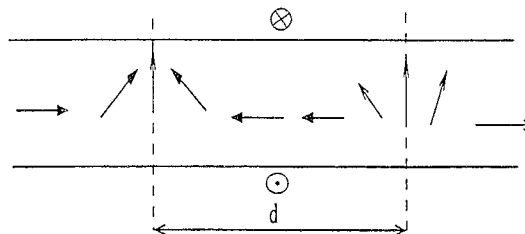


FIG. 1.8 - Distance entre deux lignes de Bloch

État de paroi

On définit la signature d'une ligne de Bloch verticale, n_i :

- $n_i = +1$ si la rotation de l'aimantation se fait dans le sens trigonométrique direct.
- $n_i = -1$ si la rotation de l'aimantation se fait dans le sens trigonométrique inverse.

L'état de paroi est donné par :

$$S = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} n_i \quad (1.6)$$

où N est le nombre de rotation de l'aimantation dans la paroi.

1.4 Mémoire à lignes de Bloch

C'est en 1983 que *S. Konishi* a donné les bases d'une mémoire solide dont l'élément mobile d'information ne serait plus un domaine cylindrique comme dans les mémoires à bulles, mais une paire de lignes de Bloch [18].

Principe :

L'information binaire est stockée dans la paroi. La présence d'une paire de lignes verticales de même polarité, à une position de référence, traduira le bit "1" alors que son absence le bit "0".

La figure (Fig. 1.9) illustre le principe de disposition des bits.

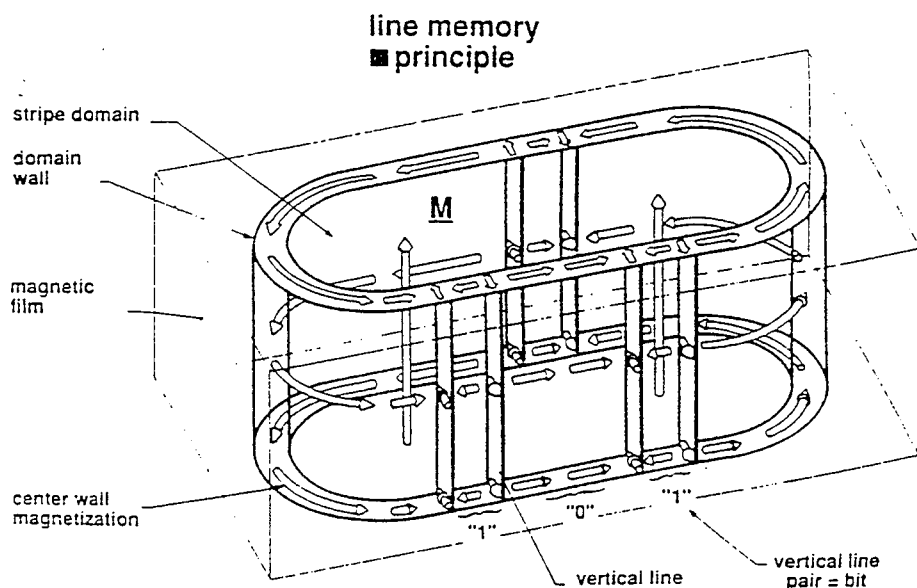


FIG. 1.9 - Mémoire à lignes de Bloch

Pour écrire un "1", il suffira donc d'être capable de générer une paire de lignes de Bloch de même polarité. Pour lire l'information, il faudra pouvoir détecter sa présence ou son absence. Après nucléation, les lignes de Bloch verticales circulent en "glissant" le long de la paroi.

Ce système de stockage présente l'avantage suivant : les lignes de Bloch sont beaucoup plus petites que des bulles magnétiques; ceci permet d'envisager une plus grande densité de stockage. Pour plus de détails sur les mémoires à lignes de Bloch, voir [27].

1.5 Equations de la statique de l'aimantation

L'état statique d'une paroi correspond à un minimum de l'énergie totale E donnée par (1.5). On doit minimiser cette énergie sous la contrainte que la norme de l'aimantation soit constante. Nous citons parmi les travaux effectués dans ce sens : [26], [4], [1]. Nous allons donner quelques exemples simples.

1.5.1 Description analytique d'une paroi plane infinie

Nous travaillons dans le repère défini dans la figure ci-dessous (extraite de [6])

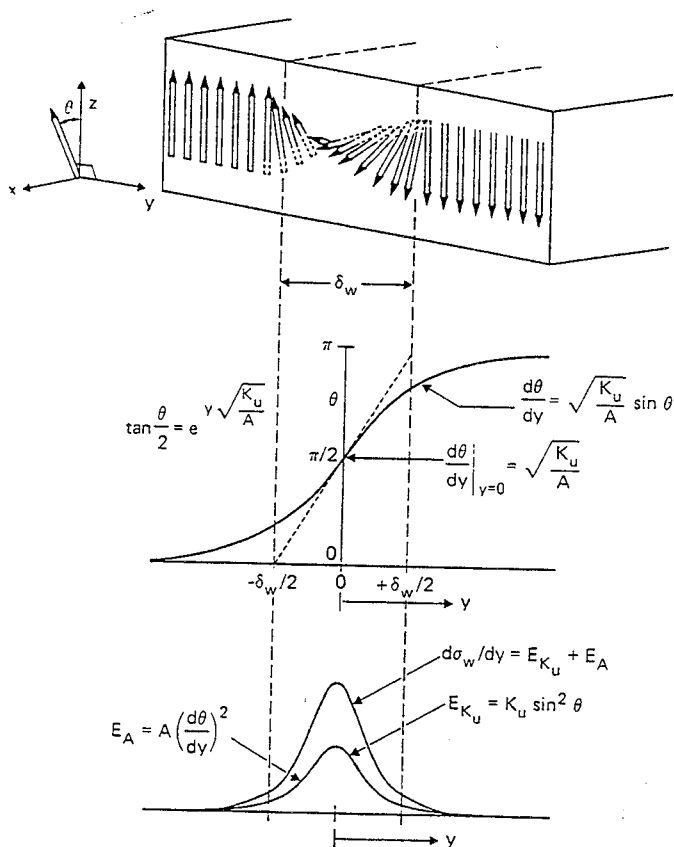


FIG. 1.10 - *Paroi de Bloch*

Nous nous donnons une paroi plane infinie dont le centre est le plan d'équation $y = 0$. Nous supposons que l'aimantation pointe vers le bas pour $y > 0$ et vers le haut pour $y < 0$.

Le problème est de décrire comment l'aimantation doit passer de $+z$ en $y = -\infty$ à $-z$ en $y = +\infty$.

On sait que l'énergie d'anisotropie favorise une variation brutale autour du plan $y = 0$. Par contre, l'énergie d'échange favorise un changement graduel; ce qui donne comme compromis une paroi avec une largeur qui dépend de ces deux facteurs.

Dans le cas de la paroi de la figure (Fig. 1.10), l'aimantation est à divergence nulle. Par conséquent, l'énergie démagnétisante est nulle. L'énergie totale s'écrit donc :

$$E = E_{anis} + E_{ech} \quad (1.7)$$

Dans ce cas, les expressions (1.1) et (1.2) de l'énergie d'échange et de celle d'anisotropie s'écrivent sous la forme suivante :

$$E_{ech} = A_e \int \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dy \quad (1.8)$$

$$E_{anis} = k_u \int \sin^2 \theta dy \quad (1.9)$$

Les conditions d'équilibre statique s'écrivent :

$$\frac{\delta E}{\delta \theta} = 0 \quad (1.10)$$

En utilisant les expressions (1.7), (1.8) et (1.9), cette condition s'écrit [19] :

$$2A_e \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - k_u \sin(2\theta) = 0 \quad (1.11)$$

Une solution de cette équation vérifiant les conditions aux limites : $\theta(-\infty) = 0$ et $\theta(+\infty) = \pi$, est donnée par :

$$\theta(y) = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \left(\exp\left(\frac{y}{\Delta}\right) \right) \quad (1.12)$$

avec :

$$\Delta = \sqrt{\frac{A_e}{k_u}} \quad (1.13)$$

Le graphique de la solution positive est donnée dans la figure (Fig. 1.10).

L'expression de Δ exprime bien le compromis entre l'énergie d'échange et celle d'anisotropie : on voit que l'échange tend à augmenter la largeur de la paroi alors que l'anisotropie tend à la diminuer.

1.5.2 Description analytique d'une ligne de Bloch

Nous considérons une ligne illustrée par la figure ci-joint :

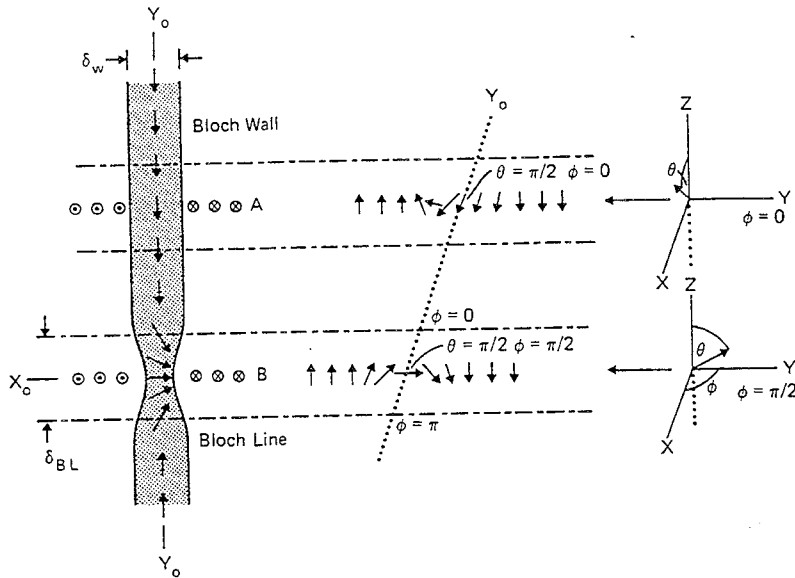


FIG. 1.11 - Ligne de Bloch

On écrit les différents termes d'énergie sous la forme suivante :

$$E_{ech} = A_e \int \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \sin^2(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \quad (1.14)$$

$$E_{dem} = 2\pi M_s^2 \int \int \sin^2 \psi \sin^2 \theta dx dy \quad (1.15)$$

E_{anis} garde la même expression (1.9).

En explicitant les conditions d'équilibre ($\frac{\delta E}{\delta \phi} = 0$), on établit[19] l'équation :

$$A_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \pi M_s^2 \sin(2\psi) = 0 \quad (1.16)$$

Une solution vérifiant les conditions aux limites $\psi(-\infty) = \pi$ et $\psi(+\infty) = 0$ est donnée par :

$$\psi(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \arctg \left(\exp \left(\frac{x}{\Lambda} \right) \right) \quad (1.17)$$

avec

$$\Lambda = \sqrt{\frac{A_e}{2\pi M_s^2}} \quad (1.18)$$

Λ est appelée paramètre de largeur de la ligne de Bloch.

Ces solutions sont valables dans le cas où les dimensions de la paroi sont négligeables par rapport à celles de la ligne.

On note que l'énergie d'échange tend à augmenter la largeur de la ligne.

1.6 Les équations de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG)

La dynamique de l'aimantation des matériaux ferromagnétiques est décrite par les équations de Landau-Lifshitz-Gilbert [19].

1.6.1 Equation de (LLG) en coordonnées cartésiennes

Les équations de Landau-Lifshitz-Gilbert sont données par [19] :

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial t} = \gamma H_{eff} \wedge \underline{m} + \alpha \underline{m} \wedge \frac{\partial \underline{m}}{\partial t} \quad (1.19)$$

avec :

$$H_{eff} = -\frac{1}{M_s} \frac{\delta E}{\delta \underline{m}} \quad (1.20)$$

\wedge désigne le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .

\underline{m} désigne le vecteur aimantation de norme unité, à l'intérieur du matériau.

γ : rapport gyromagnétique

α : coefficient d'amortissement.

H_{eff} : champ effectif.

$\frac{\delta E}{\delta \underline{m}}$ est tel que :

$$dE(\underline{m}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta E}{\delta \underline{m}} d\underline{m}$$

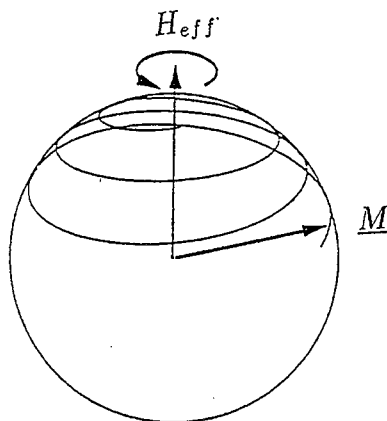


FIG. 1.12 – *Précession des spins autour du champ effectif en présence d'amortissement.*

En l'absence d'amortissement, les équations de (LLG) signifient que l'aimantation précesse autour du champ effectif H_{eff} .

Si $\alpha \neq 0$ le terme $\underline{m} \wedge \frac{\partial \underline{m}}{\partial t}$ tend à aligner le moment magnétique avec le champ effectif (Fig.1.12).

1.6.2 Ecriture des équations de (LLG) en coordonnées polaires

Nous travaillons pour toute la suite avec les coordonnées polaires définies la figure ci-dessous :

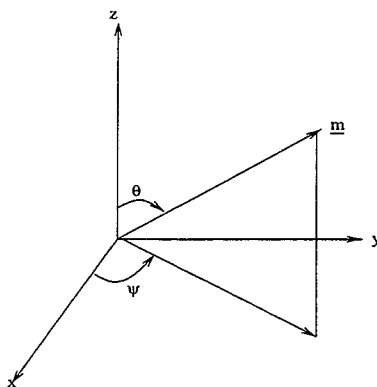


FIG. 1.13 – Coordonnées polaires

Proposition 1 En coordonnées polaires, les équations de (LLG) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \alpha \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{M_s} \begin{pmatrix} \frac{\delta E}{\delta \theta} \\ \frac{\delta E}{\delta \psi} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Démonstration

Nous avons :

$$\underline{m} = (\sin(\theta)\cos(\psi), \sin(\theta)\sin(\psi), \cos(\theta))^t \quad (1.22)$$

d'où

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} = (\cos(\theta)\cos(\psi), \cos(\theta)\sin(\psi), -\sin(\theta))^t \quad (1.23)$$

et

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi} = \sin(\theta) (-\sin(\psi), \cos(\psi), 0)^t \quad (1.24)$$

Lemme 1 Le triplet $\left(\underline{m}, \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi}, \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} \right)^t$ forme un trièdre orthonormé indirect.

Il est facile de vérifier ce lemme. ■

Nous allons faire apparaître, dans les équations de (LLG), les dérivées par rapport aux coordonnées θ et ψ . Pour cela, nous écrivons :

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi}$$

Nous reportons cette expression dans les équations (1.19), pour obtenir :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi} = \gamma H_{eff} \wedge \underline{m} + \alpha \underline{m} \wedge \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi} \right)$$

Le lemme 1 implique alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi} = \gamma H_{eff} \wedge \underline{m} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\alpha}{\sin(\theta)} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi} - \alpha \sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} \quad (1.25)$$

Si on multiplie cette équation par le vecteur $\frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta}$, on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha \sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \gamma H_{eff} \wedge \underline{m} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} \quad (1.26)$$

Or,

$$H_{eff} \wedge \underline{m} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} = \underline{m} \wedge \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} \cdot H_{eff}$$

Donc, d'après le lemme (1), il vient :

$$H_{eff} \wedge \underline{m} \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi} \cdot H_{eff}$$

Si on remplace H_{eff} par son expression (1.20) on obtient :

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi} \cdot H_{eff} = -\frac{1}{M_s \sin(\theta)} \frac{\delta E}{\delta \psi}$$

D'où

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha \sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\gamma}{M_s \sin(\theta)} \frac{\delta E}{\delta \psi} \quad (1.27)$$

Pour trouver une deuxième équation en θ et ψ , nous multiplions (1.25) par $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi}$.

Ce qui donne :

$$\alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\gamma H_{eff} \wedge \underline{m} \cdot \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi}$$

Avec la même démarche que ci-dessus, on écrit cette équation sous la forme suivante :

$$\alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\gamma}{M_s} \frac{\delta E}{\delta \theta} \quad (1.28)$$

En regroupant les deux équations (1.27) et (1.28), on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \alpha \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{M_s} \begin{pmatrix} \frac{\delta E}{\delta \theta} \\ \frac{\delta E}{\delta \psi} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

■

Cette forme des équations de (*LLG*) est pratique pour extraire un modèle simplifié décrivant le mouvement d'une paroi ainsi que le déplacement des lignes.

1.7 Mouvement gyrotropique d'une ligne de Bloch

Nous présentons ici l'analyse faite par Thiele [25],[27]. Nous considérons une structure $\underline{M}(\underline{X})$ que nous déplaçons d'une quantité ξ de telle sorte qu'en point donné l'aimantation passe de $\underline{M}(\underline{X})$ à $\underline{M}(\underline{X} - \xi)$. La force statique agissant sur la structure est donnée par :

$$F_s = -\nabla_\xi E \quad (1.30)$$

où E désigne l'énergie statique du système, définie par (1.5).

Nous avons :

$$F_s = -\int \left[\frac{\delta E}{\delta \theta} \nabla_\xi \theta + \frac{\delta E}{\delta \psi} \nabla_\xi \psi \right] d\underline{X} \quad (1.31)$$

Or,

$$\nabla_\xi = -\nabla$$

En utilisant la dernière relation et l'écriture des équations (*LLG*) en coordonnée polaires (2.3) l'expression (1.31) s'écrit :

$$F_s = \frac{M_s}{\gamma} \int \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \nabla \theta - \frac{\partial \theta}{\partial t} \nabla \psi \right) \sin(\theta) - \alpha \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \nabla \theta + \frac{\partial \psi}{\partial t} \nabla \theta \sin^2(\theta) \right) \right\} d\underline{X} \quad (1.32)$$

Nous supposons que le déplacement est stationnaire à la vitesse v , c'est à dire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \cdot \nabla \theta \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v \cdot \nabla \psi \quad (1.34)$$

L'équation (1.32) s'écrit alors :

$$F_s = -G \wedge v + D \cdot v \quad (1.35)$$

avec le vecteur :

$$G = \frac{M_s}{\gamma} \int (\nabla\psi) \wedge (\nabla\theta) \sin(\theta) d\underline{X} \quad (1.36)$$

et la matrice :

$$D = \alpha \frac{M}{\gamma} \int \left[(\nabla\theta) \cdot (\nabla\theta) + (\nabla\psi) \cdot (\nabla\psi) \sin^2(\theta) \right] d\underline{X} \quad (1.37)$$

G est appelé gyrovecteur, D est appelée matrice de dissipation.

1.7.1 Paroi rectiligne

Nous considérons une paroi rectiligne avec ligne.

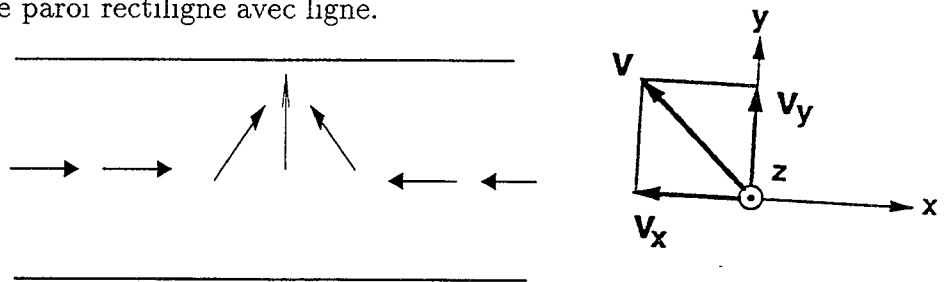


FIG. 1.14 - Paroi avec une ligne de Bloch.

Le gyrovecteur s'écrit :

$$G = \pm 2\pi \frac{M_s}{\gamma} h \vec{e}_z \quad (1.38)$$

le signe dépend de la polarité de la ligne. La matrice D a deux composantes non nulles.

$$\begin{aligned} D_{yy} &= \alpha \frac{M_s}{\gamma} \int \int \int \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 d\underline{X} \\ &= \alpha \frac{M_s}{\gamma} 2 \frac{hL}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.39)$$

et

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \frac{\alpha M_s h}{\gamma} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{d\psi}{dx} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\theta) dy \\ &= 4\alpha h \frac{M_s}{\gamma} \frac{\Delta}{\Lambda} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Par suite l'équation (1.35) s'écrit :

$$0 = \pm v_y + 2\alpha \frac{\Delta}{\pi \Lambda v_x} \quad (1.41)$$

$$L\gamma \frac{H_z^a}{\pi} = \pm v_x + \alpha \frac{L}{\pi \Delta v_y} \quad (1.42)$$

Où H_z^a désigne le champ extérieur et L la longueur de la portion de la paroi étudiée. L'avant dernière égalité décrit le mouvement gyrotropique d'une ligne induit par le déplacement de paroi.

1.7.2 Translation d'une bulle dans un gradient de champ

Une bulle magnétique est stable sous l'action d'un champ extérieur vertical proche du champ d'équilibre. Par contre, si on soumet cette dernière à un gradient du champ extérieur, elle se translate dans la direction du gradient du champ. En général, la direction de la propagation de la bulle est différente de la direction du gradient du champ. La bulle est défléchie en raison de la force gyrotropique due à la rotation de l'aimantation dans le pourtour de la paroi. On montre [27] que :

$$(-\pi r^2 h)(\nabla H^a) \sin(\chi) = \left(\frac{h}{\gamma}\right) 2\pi S v \quad (1.43)$$

$$(-\pi r^2 h)(\nabla H^a) \cos(\chi) = (4rh) \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \Delta^{-1} v \quad (1.44)$$

où χ désigne l'angle de deflection de la bulle. S est nombre d'enroulement défini par (1.6)

Pour faire des simulations (2d), un modèle simplifié des équations de (LLG) a été proposé par Slonczewski.

1.8 Modèle simplifié des équations de (LLG) : modèle de Slonczewski

Nous présentons très brièvement la démarche suivie par Slonczewski dans [23] pour établir un modèle simplifié des équations de (LLG).

La surface (S_p) de la figure (Fig. 1.15) désigne le centre de la paroi, c'est à dire l'ensemble des points de la paroi où $\theta = \frac{\pi}{2}$.

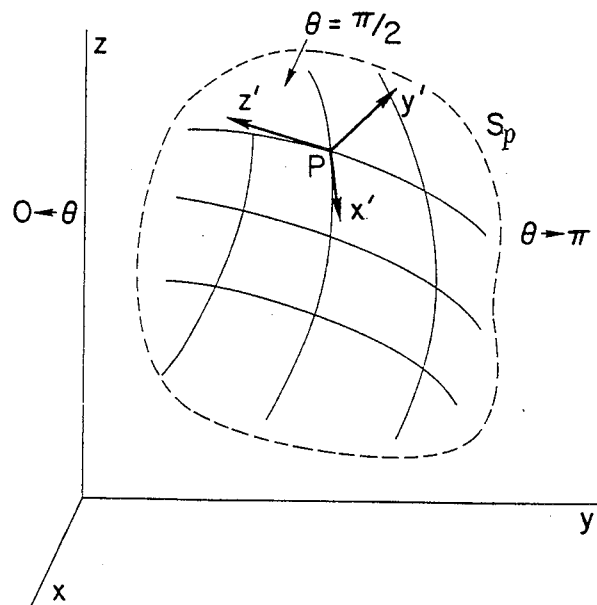


FIG. 1.15 - Paroi

On définit en chaque point (P) de (S_p) un repère local (P, x', y', z'). Par convention, l'axe (Py') est dirigé vers le domaine où l'aimantation est tournée vers le bas (suivant $-z$) (fig 14).

On note par $q(x', z', t)$ la position d'un point de (S_p) suivant l'axe (Py'), c'est à dire :

$$y' = q(x', z', t) \quad (1.45)$$

Slonczewski suppose ensuite que la paroi est décrite par :

$$\psi = \psi(x', z', t) \quad (1.46)$$

et

$$\theta = \theta_0[y' - q(x', z', t)] \quad (1.47)$$

où la fonction θ_0 est donnée par :

$$\tan \frac{\theta_0}{2}(y') = \exp \frac{y'}{\Delta} \quad (1.48)$$

Au lieu d'étudier la dynamique de la paroi toute entière, on étudie seulement celle de son centre (S_p) et de l'angle azimutal ψ .

On néglige le déplacement des points de (S_p) suivant la tangente. La dynamique de (S_p) est déterminée par l'évolution au cours du temps de $q(x', z', t)$. On cherche une équation décrivant la dynamique de q .

Pour cela, Slonczewski [23] intègre les équations (1.19) suivant l'épaisseur de la paroi en utilisant les équations (1.46), (1.47) et (1.48).

On obtient alors le système suivant :

$$\frac{\delta\sigma}{\delta\varphi} = \frac{2M_s}{\gamma} (\dot{q} - \alpha\Delta\dot{\psi}) \quad (1.49)$$

$$\frac{\delta\sigma}{\delta q} = -\frac{2M_s}{\gamma} (\dot{\psi} + \frac{\alpha}{\Delta}\dot{q}) \quad (1.50)$$

où σ est la densité surfacique de l'énergie de la paroi.

Pour donner une expression de σ , Slonczewski fait l'hypothèse d'une paroi presque plane.

1.8.1 Cas d'une paroi presque plane avec lignes

Lorsqu'on suppose que la paroi est presque plane, on peut remplacer les coordonnées locales ($x'y'z'$) par les coordonnées globales (xyz).

On décompose [23] aussi le champ démagnétisant la manière suivante :

$$H(x, y, z) = H_n(y) + H_t(x, z) \quad (1.51)$$

avec :

$$H_n(y) = -4\pi M_s \underline{m}_n(y) \quad (1.52)$$

Le terme \underline{m}_n désigne la projection de l'aimantation suivant la normale à la paroi.

Sous ces hypothèses, la densité surfacique de l'énergie de la paroi peut être approchée de la manière suivante [23] :

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_0 [1 + \frac{1}{2}(\nabla q)^2] + 2A_e \Delta(\nabla\psi)^2 + 4\pi \Delta M_s^2 \sin^2(\psi - \psi_t) \\ - \pi \Delta M_s \{ H'_x \cos(\psi) + H'_y \sin(\psi) \} - 2M_s H'_z q \end{aligned} \quad (1.53)$$

où : $\sigma_0 = 4\sqrt{A_e k_u}$

$$(\nabla q)^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2$$

ψ_t désigne l'angle que fait la tangente avec (ox) et

$$H' = H - H_n + H^a \quad (1.54)$$

où H^a désigne le champ appliqué.

En utilisant l'expression (1.53) de σ , Slonczewski montre que :

$$\frac{\delta\sigma}{\delta q}(x, z) = -2M_s H'_z - \frac{4A_e}{\Delta} \nabla^2 q + \Delta M_s \frac{\partial}{\partial s} F(\psi - \psi_t) \quad (1.55)$$

$$\frac{\delta\sigma}{\delta\psi}(x, z) = \Delta M_s F(\psi - \psi_t) - 4A_e \Delta \nabla^2 \psi + \Delta M_s G(\psi) \quad (1.56)$$

où

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Les fonctions F et G sont données par :

$$F(\psi) = 2\pi M_s \sin 2(\psi) \quad (1.57)$$

$$G(\psi) = \frac{\pi}{2} (H'_x \sin(\psi) - H'_y \cos(\psi)) \quad (1.58)$$

En utilisant (1.49), (1.55) et (1.56), on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x, z, t) = \frac{\gamma\Delta}{1+\alpha^2} \left\{ \alpha \frac{2A_e}{M_s \Delta} \nabla^2 q - \frac{2A_e}{M_s} \nabla^2 \psi + F(\psi - \psi_t) + G(\psi) - \alpha \Delta \frac{\partial}{\partial x} F(\psi - \psi_t) \right. \\ \left. \alpha H'_z \right\} \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, z, t) = \frac{\gamma}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{2A_e}{M_s \Delta} \nabla^2 q + \alpha \frac{2A_e}{M_s} \nabla^2 \psi - \alpha (F(\psi - \psi_t) + G(\psi)) - \Delta \frac{\partial}{\partial x} F(\psi - \psi_t) \right. \\ \left. + H'_z \right\} \quad (1.60)$$

Qu'est ce-que le cas (2d)?

On dit qu'on est dans le cas (2d) lorsqu'on suppose que l'aimantation ne dépend pas de z , ceci est suffisant si on veut étudier le mouvement de la paroi et le déplacement des lignes verticales. En d'autres termes, nous supposons que les fonctions q et ψ dépendent seulement de x et du temps. Dans le cadre de cette thèse, nous étudions le cas 2d.

1.8.2 Adaptation du modèle de Slonczewski au cas d'une paroi cylindrique

Paroi avec lignes verticales

Dans [2], Konishi a adapté le modèle de Slonczewski au cas d'une paroi non plane avec lignes verticales .

description géométrique de la surface S_p

Soit Γ_t une famille de courbes définie par :

$$(s, t) \rightarrow \underline{x}(s, t)$$

avec $\underline{x}(s, t) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que tout point X de S_p s'écrit sous la forme suivante :

$$X = \underline{x}(s, t) + z\underline{k} \quad (1.61)$$

Le mouvement de la surface S_p est donc parfaitement déterminé par celui de la courbe Γ . Pour revenir aux équations (1.59), (1.60), on considère un point p de Γ_t et on travaille dans le repère de Frenet :

$$(p, \underline{t}(p), \underline{n}(p), z)$$

Tout point $\underline{x}(s, t)$ de la courbe Γ_t s'écrit :

$$\underline{x}(s, t) = p + q(s, t)\underline{n}(p) + r(s, t)\underline{t}(p) \quad (1.62)$$

L'égalité (1.62) implique :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}(s, t) = \kappa(s, t)\underline{n}(s, t) \cdot \underline{n}(p) \quad (1.63)$$

et

$$\frac{\partial q}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) \cdot \underline{n}(p) \quad (1.64)$$

Pour donner un système d'équations reliant q et ψ , Konishi remplace dans le système (1.59), (1.60) les dérivées par rapport à x par les dérivées par rapport à s . En utilisant les formules (1.63) et (1.64), le système devient :

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left\{ \varepsilon_1 \kappa(s, t) + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}(s, t) + \xi_1 (F(\psi - \psi_t) + G(\psi)) + \xi_2 \frac{\partial}{\partial s} F(\psi - \psi_t) + \alpha \Delta H'_z \right\} \underline{n}(s, t) \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left\{ \varepsilon_3 \kappa(s, t) + \varepsilon_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}(s, t) + \xi_3 (F(\psi - \psi_t) + G(\psi)) + \xi_4 \frac{\partial}{\partial s} F(\psi - \psi_t) + H'_z(s, t) \right\} \quad (1.66)$$

Avec :

$$F(\psi) = 2\pi M_s \sin(2\psi) \quad (1.67)$$

$$G(\psi) = \frac{\pi}{2} (H'_s \sin(\psi) - H'_n \cos(\psi)) \quad (1.68)$$

ψ_t désigne l'angle que fait la tangente à la courbe $x(s, t)$ avec l'axe (Ox) . H'_s (resp. H'_n) est la projection du champ H' suivant la tangente (respectivement la normale).

Les coefficients du système sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha \frac{2A_e}{M_s}, \quad \varepsilon_2 = -\Delta \frac{2A_e}{M_s} \\ \varepsilon_3 &= \frac{2A_e}{M_s \Delta}, \quad \varepsilon_4 = \alpha \frac{2A_e}{M_s} \\ \xi_1 &= \Delta, \quad \xi_2 = -\alpha \Delta^2 \\ \xi_3 &= -\alpha, \quad \xi_4 = -\Delta \end{aligned} \quad (1.69)$$

Paroi sans structure

Nous dirons qu'on a une paroi sans structure quand on suppose que l'angle ψ est constant.

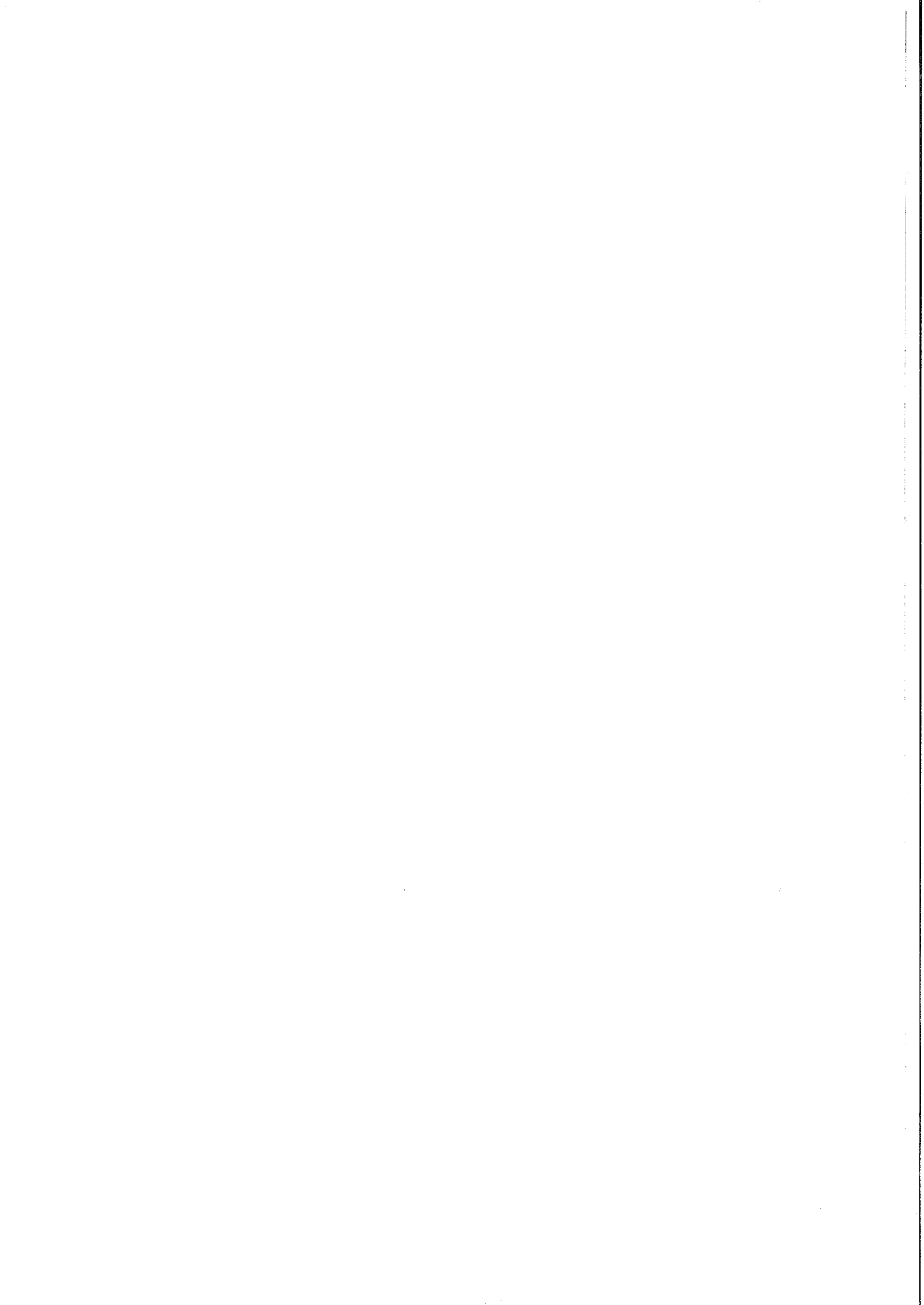
Si on néglige tous les termes en ψ dans l'équation (1.65), elle devient :

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \{ \varepsilon_1 \kappa(s, t) + \alpha \Delta H'_z \} \underline{n}(s, t) \quad (1.70)$$

1.9 Conclusion

Nous allons nous intéresser seulement au cas d'une paroi non plane, c'est à dire aux équations: (1.65), (1.66).

Nous retiendrons aussi le fait que dans le modèle de Slonczewski, seule une partie du champ démagnétisant a été prise en compte comme un champ d'origine interne et a été approchée par le terme $-4\pi \underline{M}_n$, où \underline{M}_n désigne la composante normale de l'aimantation. Nous verrons dans le chapitre suivant comment on peut obtenir un modèle simplifié des équations de (LLG) sans hypothèse sur le champ démagnétisant.



Chapitre 2

Un modèle simplifié des équations de (LLG)

Introduction

Dans ce chapitre, nous élaborons une nouvelle démarche pour simplifier et formuler les équations de (LLG) en (2d). Nous commençons par donner une formulation variationnelle des équations de (LLG) écrites précédemment en coordonnées polaires. Nous définissons ensuite de nouvelles coordonnées locales dans la paroi. Pour cela, nous décrivons la paroi par un ensemble de courbes parallèles construites par translation d'une courbe suivant sa normale.

La formulation variationnelle des équations de (LLG) est ensuite écrite dans le nouveau système de coordonnées.

Après identification et simplification, nous obtenons deux équations dont les inconnues sont la vitesse normale de la courbe et l'évolution de l'angle azimutal lui correspondant. Le mouvement de la courbe est régi essentiellement par la courbure et le champ démagnétisant.

Contrairement aux démarches de modélisation existantes [13], [22], nous traitons le champ démagnétisant dans sa totalité comme un champ interne.

2.1 Equations de (LLG)

La dynamique de l'aimantation d'un matériau ferromagnétique est régie par les équations de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) données par :

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial t} = \gamma H_{eff} \wedge \underline{m} + \alpha \underline{m} \wedge \frac{\partial \underline{m}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$H_{eff} = -\frac{1}{M_s} \frac{\delta E}{\delta \underline{m}} \quad (2.2)$$

\underline{m} désigne le vecteur aimantation.

E : l'énergie totale, donnée par (1.5).

$\frac{\delta E}{\delta \underline{m}}$ est défini par :

$$dE(\underline{m}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta E}{\delta \underline{m}} d\underline{m}$$

H_{eff} est appelé champ effectif

Ecriture des équations (LLG) en coordonnées polaires

Nous avons montré (cf chapitre 1) que les équations de (LLG) s'écrivent en coordonnées polaires de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \alpha \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{M_s} \begin{pmatrix} \frac{\delta E}{\delta \theta} \\ \frac{\delta E}{\delta \psi} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Notations

On pose, pour toute la suite :

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \alpha \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Le système (2.3) s'écrit donc :

$$G \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix}^t = -\frac{\gamma}{M_s} \begin{pmatrix} \frac{\delta E}{\delta \theta} \\ \frac{\delta E}{\delta \psi} \end{pmatrix}^t \quad (S)$$

2.2 Une formulation variationnelle des équations de (LLG)

Nous proposons de donner une formulation variationnelle des équations de (LLG) en utilisant des variations par rapport à un paramètre λ quelconque. Nous supposons que θ et ψ dépendent de ce dernier.

Nous écrivons :

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\delta E}{\delta \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{\delta E}{\delta \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) d\underline{X}$$

En remplaçant les dérivées $\frac{\delta E}{\delta \theta}$ et $\frac{\delta E}{\delta \psi}$ par les membres gauche du système (S), nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix}^t d\underline{X} = -\frac{\gamma}{M_s} \frac{\partial E}{\partial \lambda} \quad (2.5)$$

Notation

Posons :

$$(A, B) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) G^t$$

D'où :

$$A = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.6)$$

et

$$B = \sin(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha \sin^2(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.7)$$

L'égalité (2.5) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(A \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + B \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) dX = - \frac{\gamma}{M_s} \frac{\partial E}{\partial \lambda} \quad (2.8)$$

Nous allons extraire un système d'équations simplifiées de (2.8) qui décrit le mouvement du centre de la paroi et l'évolution de l'angle azimutal.

Nous travaillerons avec une paroi avec structures comme, par exemple, celle illustrée par la figure suivante :

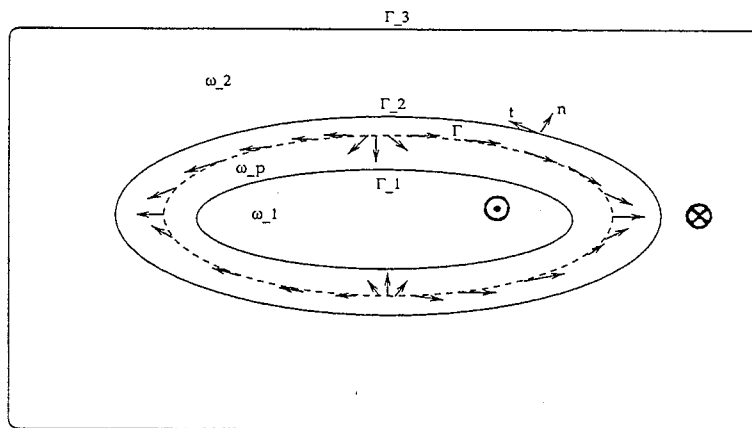


FIG. 2.1 - Paroi.

Nous allons écrire le système (2.8) en coordonnées locales définies sur la paroi.

2.2.1 Coordonnées locales

Soit Γ_λ une courbe définie par :

$$(s, t) \rightarrow \underline{x}_\lambda(s, t)$$

On suppose que tout point \underline{X} de la paroi peut être écrit sous la forme suivante :

$$\underline{X}(s, \tau, z, t) = \underline{x}_\lambda(s, t) + \tau \underline{n}_\lambda(s) + z \underline{k} \quad (2.9)$$

avec

$$\tau \in] -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[\text{ et } z \in] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$$

$\underline{n}(s)$ désigne la normale à Γ_λ .

δ et h désignent respectivement la largeur de la paroi et l'épaisseur du matériau.

Nous avons donc les nouvelles coordonnées (s, τ, z) .

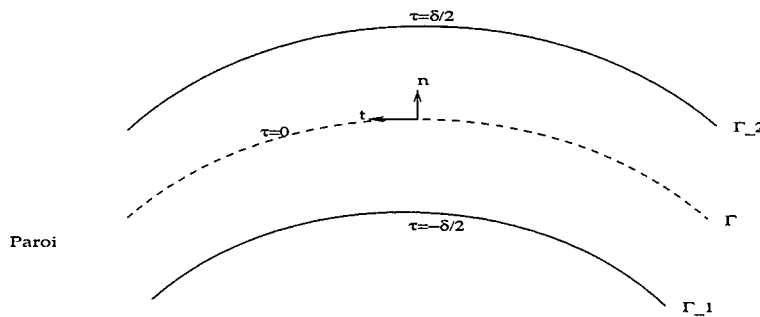


FIG. 2.2 - Coordonnées locales.

Hypothèse sur la géométrie de la paroi

Dans toute la suite, nous supposons que la largeur de la paroi et sa courbure vérifient la relation suivante :

$$\delta \kappa \ll 1 \quad (2.10)$$

Dérivée par rapport λ

Soit $f(\underline{X}, \lambda, t)$ une fonction quelconque définie sur la paroi, dépendant d'un paramètre λ .

On pose :

$$\tilde{f}(s, \tau, z, \lambda, t) = f(\underline{x}_\lambda(s, t) + \tau \underline{n}_\lambda(s, t) + z \underline{k}, \lambda, t) \quad (2.11)$$

En utilisant l'hypothèse (2.10) et en négligeant le terme d'ordre un en τ , l'expression (.16) de l'annexe B se simplifie de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} - v_t^* \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} - v_n^* \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \quad (2.12)$$

où $v_t^*(s)$ et $v_n^*(s)$ sont définis par :

$$v_t^*(s) = \frac{\partial \underline{x}(s)}{\partial \lambda} \cdot \underline{t}(s)$$

et

$$v_n^*(s) = \frac{\partial \underline{x}(s)}{\partial \lambda} \cdot \underline{n}(s)$$

De la même façon, la dérivée par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - v_t \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} - v_n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \quad (2.13)$$

Cette fois v_t et v_n sont respectivement la composante tangentielle et normale de la vitesse de la paroi.

2.2.2 Formulation variationnelle en coordonnées locales

Nous allons écrire le système (2.8) en coordonnées locales.

Hypothèses sur la structure de l'aimantation

Nous supposons que la rotation de l'aimantation à la traversée de la paroi est invariant le long de celle-ci. Cette rotation sera décrite par la fonction suivante :

$$\theta(\underline{x}_\lambda(s, t) + \tau \underline{n}_\lambda(s, t)) = \tilde{\theta}(\tau, t) \quad (2.14)$$

Nous supposons aussi l'angle de l'orientation de l'aimantation est invariant suivant la normale. Nous posons :

$$\psi(\underline{x}_\lambda(s) + \tau \underline{n}_\lambda(s), \lambda, t) = \tilde{\psi}(s, \lambda, t) \quad (2.15)$$

Par application de la formule de dérivation (2.12), on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = -v_n^* \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \quad (2.16)$$

De plus, nous avons :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} - v_t^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \quad (2.17)$$

Les dérivées par rapport au temps sont données par :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v_n \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - v_t \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \quad (2.19)$$

Dans les nouvelles coordonnées, l'expression (2.6) de A s'écrit :

$$\tilde{A} = -\alpha v_n \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} - \sin \tilde{\theta} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - v_t \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \quad (2.20)$$

De la même manière, l'expression (2.7) de B devient :

$$\tilde{B} = -\sin \tilde{\theta} v_n \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} + \alpha \sin^2 \tilde{\theta} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - v_t \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \quad (2.21)$$

En remplaçant dans le système (2.8) A et B par \tilde{A} et \tilde{B} et en appliquant la formule du changement de variables de l'annexe B, nous obtenons :

$$\int \tilde{B} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds d\tau - \int \tilde{B} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} v_i^* ds d\tau - \int \tilde{A} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* ds d\tau = -\frac{\gamma}{M_s h} \frac{\partial E}{\partial \lambda} \quad (2.22)$$

2.2.3 Expressions des dérivées des différents termes d'énergie

Nous avons vu (cf chapitre 1) que l'énergie totale du matériau se décompose en quatre termes de la manière suivante :

$$E = E_{ech} + E_{anis} + E_{dem} + E_{Zeem} \quad (2.23)$$

Rappelons que E_{ech} , E_{anis} , E_{dem} et E_{Zeem} désignent respectivement : l'énergie d'échange, l'énergie d'anisotropie, l'énergie démagnétisante et l'énergie de Zeeman.

Dérivée de l'échange et de l'anisotropie

Nous cherchons à calculer $\frac{d}{d\lambda} (E_{ech} + E_{anis})$

Pour cela, nous écrivons l'expression (1.1) de l'énergie d'échange sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_{ech} &= A_e h \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right\} d\underline{X} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \sin^2(\theta) \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\underline{X} \end{aligned} \quad (2.24)$$

En utilisant la formule (annexe B) du changement de variables, nous obtenons :

$$E_{ech} = A_e h \int \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 ds d\tau + A_e h \int \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 ds d\tau \quad (2.25)$$

De même l'énergie d'anisotropie s'écrit aussi :

$$E_{anis} = k_u h \int \cos^2(\theta) ds d\tau \quad (2.26)$$

Notation

Pour faciliter la manipulation des expressions de l'énergie d'échange et d'anisotropie, nous introduisons les notations suivantes :

$$f_e(s) = A_e h \int \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 d\tau \quad (2.27)$$

et

$$g_e(s) = A_e h \int \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 d\tau + k_u h \int \sin^2 \tilde{\theta} d\tau \quad (2.28)$$

On a alors :

$$\frac{d}{d\lambda} (E_{ech} + E_{anis}) = \frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma} f(s) ds + \frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma} g(s) ds \quad (2.29)$$

Rappelons que la courbe Γ (paroi) dépend de λ . Nous avons donc à calculer la dérivée par rapport à un paramètre d'une intégrale sur une courbe qui, elle même, dépend de ce paramètre. Nous avons discuté de ce problème en annexe B.

Formule

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma} (f_e + g_e) ds &= -A_e h \int \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \left(-2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} + \frac{k_u}{A_e} \sin 2(\tilde{\theta}) \right) v_n^* ds d\tau \\ &\quad - A_e h \int 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds d\tau \\ &\quad - A_e h \int \frac{\partial}{\partial s} \left\{ -\sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 + \frac{k_u}{A_e} \sin^2(\tilde{\theta}) \right\} v_t^* ds d\tau \\ &\quad - A_e h \int \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{k_u}{A_e} \sin^2(\tilde{\theta}) - \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \right\} \kappa v_n^* ds d\tau \end{aligned} \quad (2.30)$$

où κ désigne la courbure de Γ .

Démonstration de la formule

Nous utilisons les formules de l'annexe B pour écrire :

Nous avons de même :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma} \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 ds &= -2 \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\theta) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \sin^2(\tilde{\theta}) ds \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 \right) v_t^* ds + \int_{\Gamma} \kappa \sin^2(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 v_n^* ds \end{aligned}$$

Où κ désigne la courbure en un point de Γ .

D'où, en utilisant la formule (2.16) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma} \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 ds &= -2 \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\theta) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \sin 2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* ds \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \right) v_t^* ds + \int_{\Gamma} \kappa \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 v_n^* ds \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma} f_e(s) ds &= -A_e h \int \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \sin(2\theta) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* ds d\tau - 2A_e h \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds d\tau \\ &+ A_e h \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 v_t^* ds d\tau + A_e h \int \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \kappa v_n^* ds d\tau \end{aligned} \quad (2.31)$$

Puis pour calculer $\frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma} g_e(s) ds$, on utilise également les formules établies dans l'annexe B :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\Gamma} g_e(s) ds &= A_e h \int \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 ds d\tau + k_u h \int \frac{\partial}{\partial \lambda} \sin^2(\tilde{\theta}) ds d\tau \\ &- A_e h \int \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 \kappa v_n^* ds d\tau - k_u h \int \sin^2(\tilde{\theta}) \kappa v_n^* ds d\tau \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\Gamma} g_e(s) ds &= -A_e h \int 2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* ds d\tau - k_u h \int \sin 2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* ds d\tau \\ &- A_e h \int \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 \kappa v_n^* ds d\tau - k_u h \int \sin^2(\tilde{\theta}) \kappa v_n^* ds d\tau \end{aligned}$$

Une intégration par partie et les conditions aux limites de périodicité (Γ est fermée) donnent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma} g_e(s) ds &= -A_e h \int \left(-2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} + \frac{k_u}{A_e} \sin 2(\tilde{\theta}) \right) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* ds d\tau \\ &\quad - A_e h \int \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 \kappa v_n^* ds d\tau - k_u h \int \sin^2(\tilde{\theta}) \kappa v_n^* ds d\tau \end{aligned} \quad (2.32)$$

En utilisant les deux dernières égalités, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\Gamma} (f_e + g_e) ds &= A_e h \int_P -2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds d\tau \\ &\quad - A_e h \int \frac{\partial}{\partial s} \left(-\sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 + \frac{k_u}{A_e} \sin^2(\tilde{\theta}) \right) v_i^* ds d\tau \\ &\quad - A_e h \int \left(-2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} + \frac{k_u}{A_e} \sin 2(\tilde{\theta}) \right) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* \\ &\quad - A_e h \int \left(\left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{k_u}{A_e} \sin^2(\tilde{\theta}) - \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \right) \kappa v_n^* ds d\tau \end{aligned}$$

■

Dérivée de l'énergie démagnétisante et de l'énergie de Zeeman

L'énergie démagnétisante est donnée par :

$$E_{dem} = -\frac{1}{2} M_s \int_{\mathbb{R}^3} H \cdot \underline{m} dX$$

où H désigne le champ démagnétisant.

L'énergie de Zeeman est donnée par :

$$E_{zeem} = -M_s \int_{\mathbb{R}^3} H^a \cdot \underline{m} dX$$

où H^a désigne un champ extérieur.

Que vaut $\frac{d}{d\lambda} (E_{dem} + E_{zeem})$?

Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (E_{dem} + E_{zeem}) = -M_s \frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} H + H^a \right) \cdot \underline{m} dX$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\mathbb{R}^3} H \cdot \underline{m} dX = 2 \int_{\mathbb{R}^3} H \frac{\partial \underline{m}}{\partial \lambda} dX$$

H^a ne dépendant pas de λ , ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (E_{dem} + E_{zeem}) = -M_s \int_{\mathbb{R}^3} (H + H^a) \left(\frac{\partial \underline{m}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{\partial \underline{m}}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) d\underline{X}$$

On pose :

$$H_t = H + H^a \quad (2.33)$$

Par passage aux coordonnées (s, τ, z) (voir formule de changement de variables : annexe B), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (E_{dem} + E_{zeem}) = -M_s \int \left\{ H_t \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial \tilde{\theta}} v_n^* \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} + H_t \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial \tilde{\psi}} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} - v_t^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \right\} ds d\tau dz \quad (2.34)$$

On pose :

$$H_t^{\tilde{\theta}} = H_t \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial \tilde{\theta}} \quad (2.35)$$

et

$$H_t^{\tilde{\psi}} = H_t \cdot \frac{\partial \underline{m}}{\partial \tilde{\psi}} \quad (2.36)$$

D'où la formule suivante :

Formule

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (E_{dem} + E_{zeem}) = -M_s \int \left\{ H_t^{\tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} - H_t^{\tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} v_t^* - H_t^{\tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* \right\} ds d\tau dz \quad (2.37)$$

2.2.4 Dérivée de l'énergie totale

En utilisant les formules (2.23), (2.25), (2.26), (2.30) et (2.37), nous obtenons la forme finale suivante de la dérivée totale de l'énergie écrite dans le nouveau système de coordonnées.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= -h A_e \int \left(-2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} + \frac{k_u}{A_e} \sin 2(\tilde{\theta}) \right) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* ds d\tau \\ &\quad \int \left(-M_s H_t^{\tilde{\psi}} - 2 A_e \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds d\tau dz \\ &\quad + \int M_s H_t^{\tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} v_t^* ds d\tau dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -A_e h \int \frac{\partial}{\partial s} \left[-\sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 + \frac{k_u}{A_e} \sin^2(\tilde{\theta}) \right] v_t^* ds d\tau \\
& + \int M_s H_t^{\tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n^* ds d\tau dz \\
& -A_e h \int \left[\left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 - \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \right] \kappa v_n^* ds d\tau
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Notations

Nous écrivons la dérivée totale de E sous la forme suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \int_{\Gamma} \frac{\delta E}{\delta \tau} v_n^* ds + \int_{\Gamma} \frac{\delta E}{\delta s} v_t^* ds + \int_{\Gamma} \frac{\delta E}{\delta \tilde{\psi}} \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds \tag{2.39}$$

avec (d'après l'expression (2.38) de la dérivée totale) :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta E}{\delta \tilde{\psi}}(s) &= - \int M_s H_t^{\tilde{\psi}} ds d\tau dz - 2hA_e \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin^2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right) d\tau \\
\frac{\delta E}{\delta s}(s) &= M_s \int H_t^{\tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} ds d\tau \\
&+ A_e h \int \frac{\partial}{\partial s} \left(-\sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 + \frac{k_u}{A_e} \sin^2(\tilde{\theta}) \right) d\tau \\
\frac{\delta E}{\delta \tau}(s) &= h \int_{\Gamma} \left(-2A_e \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} + k_u \sin 2(\tilde{\theta}) \right) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} ds d\tau \\
&+ hA_e \int \left(\left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{k_u}{A_e} \sin^2(\tilde{\theta}) - \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 \right) \kappa ds \\
&+ M_s \int H_t^{\tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} ds d\tau dz
\end{aligned}$$

où κ désigne la courbure de Γ (centre de la paroi).

2.3 Le système d'équations

Revenons maintenant à la forme variationnelle (2.22) des équations de (LLG), elle s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} ds \int \tilde{B} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} d\tau - \int_{\Gamma} v_t^* ds \int \tilde{B} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} d\tau - \int_{\Gamma} v_n^* ds \int \tilde{A} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau \\ & = -\frac{\gamma}{hM_s} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\delta E}{\delta \tau} v_n^* ds + \int_{\Gamma} \frac{\delta E}{\delta s} v_t^* ds + \int_{\Gamma} \frac{\delta E}{\delta \tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda} ds \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

D'où, par identification :

$$\int \tilde{B} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} d\tau = \frac{\gamma}{hM_s} \frac{\delta E}{\delta s}(s) \quad (2.41)$$

$$\int \tilde{A} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau = \frac{\gamma}{hM_s} \frac{\delta E}{\delta \tau}(s) \quad (2.42)$$

$$\int \tilde{B} d\tau = -\frac{\gamma}{hM_s} \frac{\delta E}{\delta \tilde{\psi}}(s) \quad (2.43)$$

avec \tilde{A} et \tilde{B} sont données respectivement par (2.20) et (2.21).

L'égalité (2.42) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \left(-\alpha \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} v_n - \sin(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right) d\tau = \frac{\gamma}{M_s} \left[\int \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \left(-2A_e \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} + k_u \sin 2(\tilde{\theta}) \right) d\tau \right. \\ \left. + \beta \kappa + \frac{M_s}{h} \int H_t^{\tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau dz \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

où :

$$\beta = A_e \int \sin^2(\tilde{\theta}) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} \right)^2 d\tau - k_u \int \sin^2(\tilde{\theta}) d\tau - A_e \int \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 d\tau \quad (2.45)$$

On a, par définition du champ total :

$$H_t^{\tilde{\theta}} = H^{\tilde{\theta}} + H_a^{\tilde{\theta}}$$

où $H^{\tilde{\theta}}$ désigne le terme du champ démagnétisant (champ interne au matériau), alors que $H_a^{\tilde{\theta}}$ désigne la contribution du champ extérieur.

En supposant que le champ externe est uniforme dans toutes les directions et en utilisant la définition de $H_t^{\tilde{\theta}}$ (2.35), nous obtenons la formule ci-après :

$$\int \int H_a^{\tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau dz = \int dz \left[H_a^x \cos(\tilde{\psi}) \int \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau + H_a^y \sin(\tilde{\psi}) \int \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau - H_a^z \int \sin(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau \right] - 2hH_{a,z}$$

($\tilde{\theta} \in]0, \pi[$).

De même, d'après la définition (2.35),

$$\int H^{\tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau dz = \int dz \left[\cos(\tilde{\psi}) \int H^x \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau + \sin(\tilde{\psi}) \int H^y \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau - \int H^z \sin^2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau \right]$$

Puisque le champ interne varie dans l'épaisseur et la largeur du matériau, on va garder les termes du champ sous l'intégrale.

Notation

On pose :

$$f^{dem} = \frac{1}{h} \left(\cos(\tilde{\psi}) \int H^x \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau dz + \sin(\tilde{\psi}) \int H^y \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau dz - \int H^z \sin^2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} d\tau dz \right)$$

On écrit l'expression précédente sous la forme suivante :

$$f^{dem} = \cos(\tilde{\psi}) \int \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} H_x^m d\tau + \sin(\tilde{\psi}) \int \cos(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} H_y^m d\tau + \int \sin^2(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} H_z^m d\tau \quad (2.46)$$

où H^m désigne la valeur moyenne de H suivant z , elle est définie par :

$$H^m = \frac{1}{h} \int H(s, \tau, z) dz \quad (2.47)$$

Nous écrivons ensuite l'équation (2.44) sous la forme suivante :

$$\alpha \left(\int \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \right)^2 d\tau \right) v_n + 2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_s} \left[\int \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \left(2A_e \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} - k_u \sin 2(\tilde{\theta}) \right) d\tau - \beta \kappa - M_s (f^{dem} - 2H_{a,z}) \right] \quad (2.48)$$

Nous écrivons de la même manière l'équation (2.43) sous la forme suivante :

$$-2v_n + \alpha \left(\int \sin^2(\tilde{\theta}) d\tau \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_s} \left\{ 2A_e \left(\int \sin^2(\tilde{\theta}) d\tau \right) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial s^2} + \frac{M_s}{h} \int H_t^{\tilde{\psi}} d\tau dz \right\} \quad (2.49)$$

avec (par définition de $H_t^{\tilde{\psi}}$ (2.36)) :

$$\int H_t^{\tilde{\psi}} d\tau dz = \int H^{\tilde{\psi}} d\tau dz + \int H_a^{\tilde{\psi}} d\tau dz$$

On pose :

$$g^{dem} = \frac{1}{h} \int \int H^{\tilde{\psi}} d\tau dz \quad (2.50)$$

et

$$g^{zeem} = \frac{1}{h} \int \int H_a^{\tilde{\psi}} d\tau dz \quad (2.51)$$

En supposant que le champ externe est uniforme dans toutes les directions et en utilisant la formule (2.35), l'expression de g^{zeem} se réduit à :

$$g^{zeem} = \left(-H_{a,x} \sin(\tilde{\psi}) + H_{a,y} \sin(\tilde{\psi}) \right) \int \sin(\tilde{\theta}) d\tau \quad (2.52)$$

Nous simplifions de même l'expression de g^{dem} en utilisant le fait que ψ ne dépend pas de z , nous gardons la dépendance en z des champs.

$$g^{dem} = \frac{1}{h} \left(\cos(\tilde{\psi}) \int H^y \sin(\tilde{\theta}) d\tau dz - \cos(\tilde{\psi}) \int H^x \sin(\tilde{\theta}) d\tau dz \right)$$

d'où :

$$g^{dem} = \cos(\tilde{\psi}) \int \sin(\tilde{\theta}) H_y^m d\tau - \sin(\tilde{\psi}) \int \sin(\tilde{\theta}) H_x^m d\tau \quad (2.53)$$

En utilisant les définitions précédentes, nous écrivons l'équation (2.49) sous la forme suivante :

$$-2v_n + \alpha \left(\int \sin^2(\tilde{\theta}) d\tau \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_s} \left(2A_e \left(\int \sin^2(\tilde{\theta}) d\tau \right) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial s^2} + M_s (g^{dem} + g^{zeem}) \right) \quad (2.54)$$

Structure de la paroi suivant son épaisseur :

On suppose que $\tilde{\theta}$ est solution de l'équation :

$$2A_e \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} - k_u \sin 2(\tilde{\theta}) = 0 \quad (2.55)$$

Celle-ci apparaît dans (2.48).

On a :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} = \frac{\sin(\tilde{\theta})}{\Delta} \quad (2.56)$$

Les coefficients des équations (2.48) et (2.54) dépendant de θ peuvent être calculés.

En effet, (2.56) implique :

$$\int \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = \frac{2}{\Delta}$$

$$\int \sin^2(\tilde{\theta}) d\tau = 2\Delta$$

et

$$\int \sin(\tilde{\theta}) d\tau = \pi \Delta$$

L'expression (2.45) s'écrit :

$$\begin{aligned} \beta &= 2A_e \Delta \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s}\right)^2 - 2k_u \Delta - 2\frac{A_e}{\Delta} \\ &= 2A_e \Delta \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s}\right)^2 - 4\sqrt{A_2 k_u} \end{aligned}$$

En effet

$$\Delta = \sqrt{\frac{A_e}{k_u}}$$

On pose :

$$\beta \approx -4\sqrt{k_u A_e}$$

Par conséquent, les équations (2.48) et (2.54) se réduisent au système suivant :

Système

$$v_n = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \Delta \left(\alpha \frac{2A_e}{M_s \Delta} \kappa - 2 \frac{A_e}{M_s} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial s^2} - \frac{\alpha}{2} f^{dem} - \frac{1}{2\Delta} g^{dem} - \frac{1}{2\Delta} g^{zeem} + \alpha H_{a,z} \right) \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left(2 \frac{A_e}{M_s \Delta} \kappa + 2\alpha \frac{A_e}{M_s} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial s^2} - \frac{1}{2} f^{dem} + \alpha \frac{1}{2\Delta} g^{dem} + \alpha \frac{1}{2\Delta} g^{zeem} + H_{a,z} \right) \quad (2.58)$$

avec :

$$f^{dem} = \frac{1}{2\Delta} \cos(\tilde{\psi}) \int \sin 2(\tilde{\theta}) H_x^m d\tau + \frac{1}{2\Delta} \sin(\tilde{\psi}) \int \sin(2\tilde{\theta}) H_y^m d\tau - \frac{1}{\Delta} \int \sin^2(\tilde{\theta}) H_z^m d\tau \quad (2.59)$$

$$g^{dem} = \cos(\tilde{\psi}) \int \sin(\tilde{\theta}) H_y^m d\tau - \sin(\tilde{\psi}) \int \sin(\tilde{\theta}) H_x^m d\tau \quad (2.60)$$

$$g^{zeem} = \pi \Delta \left(-H_{a,x} \sin(\tilde{\psi}) + H_{a,y} \cos(\tilde{\psi}) \right) \quad (2.61)$$

Où H^m désigne la valeur moyenne de H suivant z , définie par :

$$H^m = \frac{1}{h} \int H(s, \tau, z) dz \quad (2.62)$$

Remarque

La différence entre le modèle de Slonczewski (1.65, 1.66) et le système d'équations ci-dessus réside essentiellement dans les termes f^{dem} et g^{dem} . Ceci nous permet, contrairement à Slonczewski, de tenir compte des interactions entre les lignes de Bloch. Nous présentons dans le chapitre 6 des tests de comparaison pour mettre en évidence la différence entre les deux modèles.

2.4 Conclusion

Nous avons établi un modèle ($2d$) simplifié des équations de (LLG). Il est donné par les équations (2.57), (2.58), (2.59), (2.60) et (2.61).

Pour résoudre ce système, nous avons notamment besoin de calculer le champ démagnétisant et de prendre sa valeur moyenne en z . Ce calcul doit prendre en compte la structure interne de la paroi.

Dans la deuxième partie du chapitre suivant, nous montrerons comment on peut obtenir une expression de toutes les composantes du champ démagnétisant H^m . Nous donnerons une formule compatible avec notre modèle.



Chapitre 3

Calcul du champ démagnétisant dans un matériau ferromagnétique

Introduction

Ce chapitre est consacré au calcul du champ démagnétisant dans un matériau ferromagnétique.

Dans la première partie, nous traitons le cas d'une paroi sans structure d'aimantation. Une formule explicite du champ est donnée. Une attention particulière est accordée au calcul de la limite du champ à la traversée de la paroi. La singularité des fonctions à intégrer est étudiée.

Dans la seconde partie, nous abordons le cas d'une paroi avec structure. Les interactions entre les lignes de Bloch sont prises en compte.

3.1 Équations de Maxwell

3.1.1 Les équations

on note par \underline{M} le vecteur aimantation à l'intérieur du matériau.

On pose :

$$\begin{cases} \underline{M}^*(X) = \underline{M} & \text{si } X \in (\text{matériau}) \\ \underline{M}^*(X) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} B = H + 4\pi \underline{M}^* \\ \operatorname{div} B = 0 \\ \operatorname{rot} H = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Le système est posé au sens des distributions.

Pour toute la suite, on désigne par E_3 une solution élémentaire du Laplacien dans \mathbb{R}^3 . C'est à dire :

$$\Delta E_3(\underline{X}) = \delta_0$$

Nous allons exprimer l'induction B en fonction du rotationnel de l'aimantation et du gradient de E_3 . Nous commençons par définir l'opérateur de convolution suivant :

$$\begin{aligned} \nabla E_3 \wedge_* \text{rot}(\underline{M}^*) = & \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} * \text{rot}_z(\underline{M}^*) - \frac{\partial E_3}{\partial z} * \text{rot}_y(\underline{M}^*), -\frac{\partial E_3}{\partial z} * \text{rot}_x(\underline{M}^*) + \right. \\ & \left. \frac{\partial E_3}{\partial x} * \text{rot}_z(\underline{M}^*), \frac{\partial E_3}{\partial x} * \text{rot}_y(\underline{M}^*) - \frac{\partial E_3}{\partial y} * \text{rot}_x(\underline{M}^*) \right)^t \end{aligned} \quad (3.3)$$

où

$$\text{rot}(\underline{M}^*) = (\text{rot}_x(\underline{M}^*), \text{rot}_y(\underline{M}^*), \text{rot}_z(\underline{M}^*))^t$$

Tous les produits de convolution ci-dessus auront un sens dès que $\text{rot}(\underline{M}^*)$ est à support compact car ∇E_3 est intégrable sur \mathbb{R}^3 .

3.1.2 Expression de l'induction en fonction du rotationnel de l'aimantation

Théorème 1 *L'induction B solution des équations (3.2) peut s'écrire en fonction du rotationnel de \underline{M}^* de la manière suivante :*

$$\frac{1}{4\pi} B = -\nabla E_3 \wedge_* \text{rot}(\underline{M}^*) \quad (3.4)$$

avec $\text{rot}(\underline{M}^*)$ pris au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 .

Lemme 2 *L'induction B solution des équations 3.2 est donnée par :*

$$\frac{1}{4\pi} B = -\nabla E_3 * \text{div}(\underline{M}^*) + \underline{M}^* \quad (3.5)$$

Démonstration

On a $\text{rot}(H) = 0$. Il existe donc une distribution Φ tel que :

$$H = \nabla \Phi$$

Or, $B = H + 4\pi \underline{M}^*$ et $\text{div}(B) = 0$; ce qui donne :

$$\text{div}(\nabla \Phi + 4\pi \underline{M}^*) = 0$$

Ou encore :

$$\Delta \Phi + 4\pi \text{div}(\underline{M}^*) = 0$$

Φ est donc solution de l'équation de Poisson associée à la distribution $-4\pi \operatorname{div}(\underline{M}^*)$. On suppose que cette dernière est à support compact.

D'après [5], Φ s'écrit sous la forme suivante :

$$\Phi = -4\pi E_3 * \operatorname{div}(\underline{M}^*)$$

Puisque $\operatorname{div}(\underline{M}^*)$ est supposée à support compact, le produit de convolution ci-dessus a un sens.

Revenons au calcul de B . Nous avons $B = H + 4\pi \underline{M}^*$. Si on remplace H par $\nabla \Phi$, on obtient :

$$B = -4\pi(\nabla E_3) * \operatorname{div}(\underline{M}^*) + 4\pi \underline{M}^*$$

D'où le lemme. ■

Démonstration du théorème

On a, d'après le lemme 2 :

$$\frac{1}{4\pi} B = -\nabla(E_3 * \operatorname{div} \underline{M}^*) + \underline{M}^*$$

D'où :

$$\frac{1}{4\pi} B(\underline{X}) = -\nabla \left(\int_{\mathbb{R}^3} E_3(\underline{X} - \underline{Y}) \operatorname{div}(\underline{M}^*(\underline{Y})) d\underline{Y} \right) + \underline{M}^*(\underline{X})$$

La *i^{ème}* composante de B s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} B_i(\underline{X}) &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i} E_3(\underline{X} - \underline{Y}) \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} M_j^*(\underline{Y}) \right) d\underline{Y} + M_i^*(\underline{X}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i} E_3(\underline{X} - \underline{Y}) \frac{\partial}{\partial x_i} M_i^*(\underline{Y}) d\underline{Y} + M_i^*(\underline{X}) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} E_3(\underline{X} - \underline{Y}) \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} M_j^*(\underline{Y}) \right) d\underline{Y} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} E_3(\underline{X}) * \frac{\partial}{\partial x_i} M_i^*(\underline{X}) + M_i^*(\underline{X}) - \frac{\partial}{\partial x_i} E_3(\underline{X}) * \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} M_j^*(\underline{X}) \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} E_3(\underline{X}) * M_i^*(\underline{X}) + M_i^*(\underline{X}) - \frac{\partial}{\partial x_j} E_3(\underline{X}) * \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_i} M_j^*(\underline{X}) \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} E_3(\underline{X}) * M_i^*(\underline{X}) = M_i^*(\underline{X})$$

Donc :

$$\underline{M}_i^*(\underline{X}) - \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} E_3 * \underline{M}_i^*(\underline{X}) = - \sum_{j \neq i} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_j} E_3(\underline{X}) * \underline{M}_i(\underline{X})$$

Par suite

$$\frac{1}{4\pi} B_i(\underline{X}) = - \sum_{j \neq i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} E_3(\underline{X}) * \frac{\partial}{\partial x_i} M_j^*(\underline{X}) + \frac{\partial}{\partial x_j} E_3(\underline{X}) * \frac{\partial}{\partial x_j} M_i^*(\underline{X}) \right)$$

On écrit alors cette formule pour chaque i :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} B_1 &= - \frac{\partial E_3}{\partial x_2} * \left(\frac{\partial}{\partial x_1} M_2^* - \frac{\partial}{\partial x_2} M_1^* \right) + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} * \left(\frac{\partial}{\partial x_3} M_1^* - \frac{\partial}{\partial x_1} M_3^* \right) \\ \frac{1}{4\pi} B_2 &= - \frac{\partial E_3}{\partial x_3} * \left(\frac{\partial}{\partial x_2} M_3^* - \frac{\partial}{\partial x_3} M_2^* \right) + \frac{\partial E_3}{\partial x_1} * \left(\frac{\partial}{\partial x_1} M_2^* - \frac{\partial}{\partial x_2} M_1^* \right) \\ \frac{1}{4\pi} B_3 &= - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} * \left(\frac{\partial}{\partial x_3} M_1^* - \frac{\partial}{\partial x_1} M_3^* \right) + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} * \left(\frac{\partial}{\partial x_2} M_3^* - \frac{\partial}{\partial x_3} M_2^* \right) \end{aligned}$$

(Les termes en \underline{M}^* sont des composantes du rotationnel de \underline{M}^* .)

on peut alors écrire le vecteur obtenu ci-dessus comme suit :

$$\frac{1}{4\pi} \underline{B} = -\nabla E_3 \wedge_* \text{rot}(\underline{M}^*)$$

■

Choix d'une solution élémentaire du Laplacien dans \mathbb{R}^3

Nous allons travailler dans toute la suite avec la solution élémentaire du Laplacien dans \mathbb{R}^3 , donnée par :

$$E_3(\underline{X}) = -\frac{1}{4\pi \|\underline{X}\|} \quad (3.6)$$

où $\|\underline{X}\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^3 . Elle vérifie :

$$\nabla E_3(\underline{X}) = \frac{\underline{X}}{4\pi \|\underline{X}\|^3} \quad (3.7)$$

■

Pour achever le calcul du champ B et par suite de H , il faut calculer le rotationnel de l'aimantation au sens des distributions.

Nous traitons, tout d'abord, le cas d'une paroi sans structure. Nous verrons plus loin le cas d'une paroi avec structure.

3.2 Expression du couple (H, B) dans le cas d'une paroi sans structure

Nous supposons que l'aimantation est répartie en deux domaines séparés par une paroi surfacique, l'aimantation présente un saut au niveau de la paroi. La figure suivante illustre un tel cas :

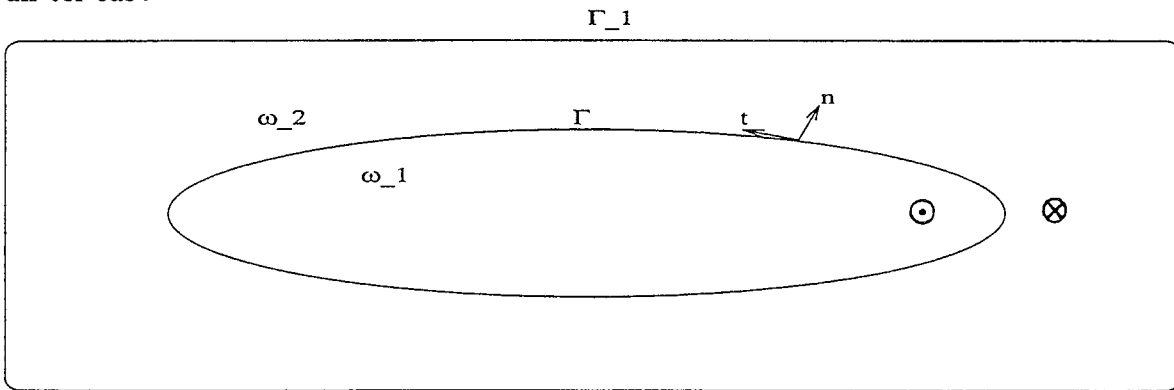


FIG. 3.1 - Paroi sans structure

On note par V l'espace occupé par le matériau. Dans ce paragraphe, on considère la répartition de V suivante :

$$V = \Omega_1 \cup (S_p) \cup \Omega_2 \cup (S_1) \quad (3.8)$$

où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de \mathbb{R}^3 tels que :

$$\Omega_i = \omega_i \times] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[\quad (3.9)$$

Où h désigne l'épaisseur du matériau.

La surface (S_p) est définie par :

$$(S_p) = (\Gamma) \times] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[\quad (3.10)$$

La surface S_1 est définie de la même façon que S_p où on remplace Γ par Γ_1 . On suppose que l'aimantation est donnée par :

$$\underline{M}^* = (0, 0, \underline{M}_z^*) \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{M}_z^*(\underline{X}) = M_s & \text{si } \underline{X} \in \Omega_1 \\ \underline{M}_z^*(\underline{X}) = -M_s & \text{si } \underline{X} \in \Omega_2 \\ \underline{M}_z^*(\underline{X}) = 0 & \text{si } \underline{X} \notin V \end{cases}$$

Où M_s est une constante physique.

L'aimantation présente donc un saut en traversant les frontières S_i . Par définition, Ω_1 et Ω_2 s'appellent domaines. S_p désigne ici la paroi puisqu'elle sépare deux domaines d'aimantation opposée.

3.2.1 Calcul du rotationnel de l'aimantation au sens des distributions

Puisque nous travaillons dans \mathbb{R}^3 , le rotationnel de \underline{M}^* est donné par :

$$\text{rot}(\underline{M}^*) = \left(\frac{\partial M_z^*}{\partial y}, -\frac{\partial M_z^*}{\partial x}, 0 \right)^t$$

Pour calculer les dérivées partielles ci-dessus, nous utilisons les distributions définies sur une variété de \mathbb{R}^3 . Nous allons préciser la définition de telles distributions.

Définition 1 *Distribution de Dirac $\delta_{(D)}$ dans \mathbb{R}^3 :*

Soit D une variété, assez régulière de \mathbb{R}^3 , on appelle distribution de Dirac associée à la variété D , l'élément de $D'(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\langle \delta_{(D)}, \varphi \rangle = \int_D \varphi d\underline{X} \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3).$$

où dx est une mesure définie sur D .

Nous allons utiliser en particulier des distributions définies sur un segment, sur une courbe ou sur une surface.

Théorème 2 *Le rotationnel de l'aimantation (3.11) est donné par :*

$$\text{rot}(\underline{M}^*) = M_s \begin{pmatrix} (+2\underline{t}\delta(\Gamma) - \underline{t}_1\delta(\Gamma_1)) \otimes \chi_{(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où \underline{t} (res. \underline{t}_1) est le vecteur tangent à Γ (res. à Γ_1).

Les tangentes sont orientées dans le sens trigonométrique.

Démonstration

On doit donc calculer au sens des distributions :

$$\frac{\partial M_z^*}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial M_z^*}{\partial y}$$

Sauf mention explicite du contraire, on prend par la suite, φ dans $D(\mathbb{R}^3)$.
On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} M_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\underline{X} &= \int_{\omega_1 \times \mathbb{R}} M_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\underline{X} + \int_{\omega_2 \times \mathbb{R}} M_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\underline{X} \\ &= M_s \int_{\omega_1 \times \mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\underline{X} - M_s \int_{\omega_2 \times \mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\underline{X} \end{aligned}$$

Par application de la formule de Green et en tenant compte de l'orientation des courbes, nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underline{M}_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dX = M_s \int_{\Gamma} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi \underline{n}_x d\Gamma dz + M_s \int_{\Gamma} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi \underline{n}_x d\Gamma dz - M_s \int_{\Gamma_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi \underline{n}_{1x} d\Gamma_1 dz$$

avec \underline{n}_x (resp. \underline{n}_{1x}) sont les composantes en x de la normale à Γ (resp. Γ_1).
D'où :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underline{M}_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} = +2M_s \int_{\Gamma} \underline{n}_x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi dz d\Gamma - M_s \int_{\Gamma_1} \underline{n}_{1x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi dz d\Gamma_1$$

Donc :

$$\frac{\partial \underline{M}_z^*}{\partial x} = M_s \left(-2\underline{n}_x \delta_{(\Gamma)} + \underline{n}_{1x} \delta_{(\Gamma_1)} \right) \otimes \chi \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

On obtient de même :

$$\frac{\partial \underline{M}_z^*}{\partial y} = M_s \left(-2\underline{n}_y \delta_{(\Gamma)} + \underline{n}_{1y} \delta_{(\Gamma_1)} \right) \otimes \chi \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

D'où :

$$\text{rot}(\underline{M}^*) = M_s \begin{pmatrix} (+2\underline{t} \delta_{(\Gamma)} - \underline{t}_1 \delta_{(\Gamma_1)}) \otimes \chi_{(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})} \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

3.2.2 Expression de B sous la forme donnée par la loi de Biot-Savart

On connaît à ce stade, l'expression du rotationnel de l'aimantation \underline{M}^* . On peut donc utiliser le théorème 1 pour donner le champ B sous la forme de la loi de Biot-Savart.

Théorème 3 *Le champ B peut être écrit en un point \underline{X} n'appartenant pas à $\Gamma \cup \Gamma_1$ sous la forme :*

$$B(\underline{X}) = -2M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma} \frac{\vec{R}}{R^3} \wedge \vec{dl}(\underline{Y}) dz' + M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_1} \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} \wedge \vec{dl}_1(\underline{Y}_1) dz' \quad (3.12)$$

avec

$$\vec{R}_i = \underline{X} - \underline{Y}_i, R_i = \|\vec{R}_i\| \text{ et } \vec{dl}_i = \underline{t}_i d\Gamma_i$$

Démonstration

On a, d'après le théorème 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} B &= -\nabla E_3 \wedge_* \text{rot}(\underline{M}^*) \\ &= \text{rot}(\underline{M}^*) \wedge_* \nabla E_3 \end{aligned}$$

Car \wedge_* est antisymétrique.

En utilisant l'expression du rotationnel de \underline{M}^* donné par le théorème (2), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} B(\underline{X}) &= 2M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma} \underline{t}(\underline{Y}) \wedge \nabla E_3(\underline{X} - \underline{Y}) d\Gamma(\underline{Y}) dz' \\ &\quad - M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_1} \underline{t}_1(\underline{Y}_1) \wedge \nabla E_3(\underline{X} - \underline{Y}_1) d\Gamma(\underline{Y}_1) dz' \end{aligned}$$

Puisque :

$$\nabla E_3(\underline{X}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{X}}{\|\underline{X}\|^3}$$

Alors :

$$\begin{aligned} B(\underline{X}) &= 2M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma} \underline{t}(\underline{Y}) \wedge \frac{\underline{X} - \underline{Y}}{\|\underline{X} - \underline{Y}\|^3} d\Gamma(\underline{Y}) dz' \\ &\quad - M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma} \underline{t}(\underline{Y}_1) \wedge \frac{\underline{X} - \underline{Y}_1}{\|\underline{X} - \underline{Y}_1\|^3} d\Gamma_1(\underline{Y}_1) dz' \end{aligned}$$

Si on pose $\underline{t}_i(\underline{Y}_i) d\Gamma_i = \vec{dl}_i$ et $\vec{R}_i = \underline{X} - \underline{Y}_i$ alors

$$B(\underline{X}) = -2M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma} \frac{\vec{R}}{R^3} \wedge \vec{dl}(\underline{Y}) dz' + M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_1} \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} \wedge \vec{dl}_1(\underline{Y}_1) dz'$$

■

Nous allons chercher une expression (2d) du champ B .

3.2.3 Expression (2d) du champ B en dehors de la paroi

Pour se ramener au cas (2d), nous calculons la valeur moyenne de B en z .

On pose :

$$B^m(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B(x, y, z) dz$$

Les intégrales définissant le champ B^m sont toutes du type :

$$I(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma} \frac{\vec{R}}{R^3} \wedge \vec{dl}(\underline{Y}') dz dz'$$

Nous allons simplifier cette intégrale puis appliquer les résultats obtenus à $B^m(x, y)$.

Les composantes dans le plan de I étant nulles on a :

$$B_x^m(x, y) = B_y^m(x, y) = 0 \quad (3.13)$$

Quant à la composante verticale I_z , elle s'écrit sous la forme suivante

$$I_z(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma} \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}^3} \wedge \vec{dl}(x', y') dz dz'$$

avec $\vec{r} = (x - x', y - y')^t$, $r = \|\vec{r}\|$.

$I_z(x, y)$ peut s'exprimer alors comme :

$$I_z(x, y) = \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl}(x', y')$$

Où le noyau $\mathcal{K}(r)$ est donné par :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}^3} dz dz'$$

Par ailleurs, nous montrons en annexe A que :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{2}{hr^2} (\sqrt{r^2 + h^2} - r) \quad (3.14)$$

Expression de $B_z^m(x, y)$

Proposition 2 Soit (x, y) un point en dehors de $\Gamma \cup \Gamma_1$. Le champ $B_z^m(x, y)$ s'écrit sous la forme :

$$B_z^m(x, y) = -2M_s \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl}(x', y') + M_s \int_{\Gamma_1} \mathcal{K}(r_1) \vec{r}_1 \wedge \vec{dl}_1(x'_1, y'_1) \quad (3.15)$$

avec :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{2}{hr^2} (\sqrt{r^2 + h^2} - r)$$

où $\vec{r} = (x - x', y - y')$ et $r = \|\vec{r}\|$ (idem pour \vec{r}_1).

Nous avons aussi :

$$B_x^m(x, y) = B_y^m(x, y) = 0 \quad (3.16)$$

3.2.4 Expression (2d) du champ magnétique H en dehors de la paroi

Nous prenons comme expression (2d) du champ démagnétisant, celle obtenue à partir de $B^m(x, y)$. Soit :

$$H^m(x, y) = B^m(x, y) - 4\pi \underline{M}^*(x, y)$$

On a vu que $B_x^m(x, y) = B_y^m(x, y) = 0$ Or par définition $\underline{M}_x^* = \underline{M}_y^* = 0$

Donc

$$H_x^m(x, y) = H_y^m(x, y) = 0$$

Par contre, la composante $H_z^m(x, y)$ n'est pas nulle. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$H_z^m(x, y) = B_z^m(x, y) - 4\pi \underline{M}_z^*(x, y) \quad (3.17)$$

La proposition 2 donne :

Proposition 3 Soit (x, y) un point n'appartenant pas à $\Gamma \cup \Gamma_1$. Le champ démagnétisant (2d), pris au point (x, y) est donné par :

$$\begin{aligned} H_z^m(x, y) = & -2M_s \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl}(x', y') + M_s \int_{\Gamma_1} \mathcal{K}(r_1) \vec{r}_1 \wedge \vec{dl}_1(x'_1, y'_1) \\ & - 4\pi \underline{M}_z^*(x, y) \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec $\vec{r} = (x, y) - (x', y')$ et $\vec{r}_1 = (x_1, y_1) - (x', y')$.

L'aimantation \underline{M}^* présente, par hypothèse, un saut à travers la paroi Γ . Nous cherchons à calculer la limite de l'expression du champ, donné par la proposition précédente, en un point de Γ .

3.2.5 Expression (2d) du champ magnétique H en un point de la paroi

En un point de Γ (paroi), le deuxième terme de l'expression (3.18) ne pose pas de problème car on intègre sur Γ_1 . On s'intéresse donc à l'intégrale suivante :

$$J(x, y) = -2M_s \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl}(x', y') - 4\pi \underline{M}_z^*(x, y) \quad (3.19)$$

Et on cherche la limite :

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x^*, y^*) \\ (x, y) \notin \Gamma \\ (x^*, y^*) \in \Gamma}} J(x, y)$$

Étude de la limite de J en un point de Γ

On remplace $\mathcal{K}(r)$ par son expression (3.14). On aura donc :

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x^*, y^*) \\ (x, y) \notin \Gamma \\ (x^*, y^*) \in \Gamma}} J(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x^*, y^*) \\ (x, y) \notin \Gamma \\ (x^*, y^*) \in \Gamma}} -\frac{4M_s}{h} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{r^2 + h^2} - r}{r^2} \vec{r} \wedge \vec{dl}(x', y') - 4\pi \underline{M}_z^*(x, y) \quad (3.20)$$

On rappelle que $\vec{r} = (x, y) - (x', y')$ et on note r sa norme euclidienne. Pour étudier la convergence de l'intégrale, nous effectuons un développement limité au voisinage de (x^*, y^*) . On définit alors le repère local suivant $((x^*, y^*), \underline{t}^*, \underline{n}^*)$, où \underline{t}^* et \underline{n}^* désignent la tangente et la normale au point (x^*, y^*) respectivement. Un point (x', y') de Γ s'écrit :

$$(x'(s), y'(s)) = (x^*, y^*) + s\underline{t}^* + \varphi(s)\underline{n}^* \quad (3.21)$$

s désigne une abscisse curviligne.

On suppose que la fonction φ vérifie : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$ ce qui est équivalent à :

$$(x'(0), y'(0)) = (x^*, y^*) \text{ et } \underline{t}(0) = \underline{t}^*$$

Pour un point $(x, y) \notin \Gamma$ on pose :

$$(x, y) = (x^*, y^*) + u\underline{t}^* + v\underline{n}^* \quad (3.22)$$

On définit un voisinage de (x^*, y^*) sur Γ par :

$$V_\epsilon = \{(x'(s), y'(s)) \in \Gamma : |s| < \epsilon\} \quad (3.23)$$

Nous avons alors :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)} J(x,y) = -2M_s \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)} \int_{V_\epsilon} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} - 2M_s \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)} \int_{\Gamma/V_\epsilon} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} - 4\pi \underline{M}_z^*(x,y) \quad (3.24)$$

Sur Γ/V_ϵ , r ne s'annule pas, la limite de l'intégrale sur cette partie de Γ existe. Il nous faut donc examiner seulement la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)} -2M_s \int_{V_\epsilon} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} - 4\pi \underline{M}_z^*(x,y) \quad (3.25)$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3 *Si on suppose que la courbe Γ est assez régulière alors :*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)} -2M_s \int_{V_\epsilon} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} - 4\pi \underline{M}_z^*(x,y) = O(\epsilon) \quad (3.26)$$

Démonstration

Nous avons $\vec{r} = (x,y) - (x',y')$. On remplace (x,y) et (x',y') par leurs développements respectifs (3.21) et (3.22) pour écrire :

$$\vec{r} = (u-s)\underline{t}^* + (v-\varphi(s))\underline{n}^* \quad (3.27)$$

La tangente au point $(x'(s), y'(s))$ est donnée par :

$$\underline{t}(s) = \underline{t}^* + \varphi'(s)\underline{n}^* \quad (3.28)$$

Donc, en supposant que $(\underline{t}^*, \underline{n}^*, \vec{e}_3)$ est indirect, nous avons

$$\vec{r} \wedge \underline{t} = -\{(u-s)\varphi'(s) - (v-\varphi(s))\} \underline{k}$$

Or

$$\varphi(s) = \frac{\varphi''(0)}{2} s^2 + O(s^3)$$

Et

$$\varphi'(s) = \varphi''(0)s + O(s^2)$$

D'où

$$\vec{r} \wedge \underline{t} = -\left((u-s)(\varphi''(0)s + O(s^2)) - \left(v - \frac{\varphi''(0)}{2} s^2 + O(s^3) \right) \right) \underline{k}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\vec{r} \wedge \underline{t} = -\left\{ (u-s)s\varphi''(0) - v + \frac{\varphi''(0)}{2} s^2 \right\} \underline{k} + (u-s) O(s^2) \quad (3.29)$$

On pose :

$$(u,v) = \lambda(u',v') \text{ et } s = \lambda s'$$

avec λ un paramètre positif.

Par suite,

$$\vec{r} \wedge \underline{t} = -\lambda \left(\lambda(u' - s')s'\varphi''(0) - v' + \frac{\varphi''(0)}{2}\lambda s'^2 \right) \underline{k} + \lambda^3(u' - v')\underline{k} \quad (3.30)$$

On développe aussi le noyau $\mathcal{K}(r)$ en posant :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.31)$$

Or

$$\begin{aligned} r^2 &= \lambda^2(u' - s')^2 + \lambda^2\left(v' - \frac{\varphi(s')}{\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda^2 \left((u' - s')^2 + \left(v' - \frac{\varphi''(0)}{2}\lambda s'^2\right)^2 + O(s'^3) \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r)\vec{r} \wedge \underline{t} &= -\frac{2}{\lambda} \left(-\frac{v'}{(u' - s')^2 + \left(v' - \frac{\varphi''(0)}{2}\lambda s'^2 + O(\lambda s'^2)\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{\varphi''(0)}{2}\lambda s'^2 + \lambda(u' - s')s'\varphi''(0)}{(u' - s')^2 + \left(v' - \frac{\varphi''(0)}{2}\lambda s'^2 + O(\lambda s'^2)\right)^2} \right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{r}\right)\vec{r} \wedge \underline{t} + \mathcal{K}(r)(\lambda^3(u' - v')) \end{aligned} \quad (3.32)$$

On remarque que : $r = O(\lambda)$, $\vec{r} \wedge \underline{t} = O(\lambda)$ et que $\mathcal{K}(r) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. Ce qui donne :

$$\mathcal{K}(r)(\lambda^3(u' - v')) + O\left(\frac{1}{r}\right)\vec{r} \wedge \underline{t} = O(0) \quad (3.33)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2\lambda}}^{\frac{\epsilon}{2\lambda}} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{t} &= - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{2}{\lambda} \int_{-\frac{\epsilon}{2\lambda}}^{\frac{\epsilon}{2\lambda}} \left(- \frac{v'}{(u' - s')^2 + \left(v' - \frac{\varphi''(0)}{2} \lambda s' + O(\lambda s'^2)\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{\varphi''(0)}{2} \lambda s'^2 + \lambda(u' - s')s' \varphi''(0)}{(u' - s')^2 + \left(v' - \frac{\varphi''(0)}{2} \lambda s' + O(\lambda s'^2)\right)^2} \right) ds' + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \int_{-\frac{\epsilon}{2\lambda}}^{\frac{\epsilon}{2\lambda}} O(0) ds' \\
&= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v'}{(u' - s')^2 + v'^2} ds' + \varphi''(0) \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u' - s'}{(u' - s')^2 + v'^2} ds' + O(\epsilon) \\
&= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v'}{(u' - s')^2 + v'^2} ds' + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v'}{(u' - s')^2 + v'^2} ds' &= \text{signe}(v') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{1 + w^2} \\
&= \pi \text{signe}(v')
\end{aligned}$$

Où $\text{signe}(v')$ désigne le signe de v' .

D'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2\lambda}}^{\frac{\epsilon}{2\lambda}} \mathcal{K}(r') \vec{r}' \wedge \vec{dl} = -2\pi \text{signe}(v') + O(\epsilon)$$

La composante verticale de \underline{M}_z^* de l'aimantation peut être décrite au voisinage de Γ par :

$$\begin{aligned}
\underline{M}_z^*(x, y) &= \underline{M}^*(\lambda u', \lambda v') \\
&= -M_s \text{signe}(v')
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
-2M_s \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2\lambda}}^{\frac{\epsilon}{2\lambda}} \mathcal{K}(r') \vec{r}' \wedge \vec{dl} - 4\pi \underline{M}_z^* &= 4M_s \pi \text{signe}(v') - 4M_s \pi \text{signe}(v') + O(\epsilon) \\
&= O(\epsilon)
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme. ■

Le lemme ci-dessus nous permet d'écrire :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} J(x, y) = -2M_s \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \int_{\Gamma/V_\epsilon} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} + O(\epsilon) \quad (3.34)$$

On veut étudier la limite de J quand ϵ tend vers 0.

Pour cela, on pose

$$I_\epsilon = -2 \int_{\Gamma/V_\epsilon} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} + O(\epsilon)$$

Et on cherche la limite de I_ϵ quand ϵ tend 0.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon = -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma/V_\epsilon} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge d\vec{l} = ?$$

Quand ϵ tend vers 0, $(x, y) \in \Gamma$ tend vers (x^*, y^*) et donc r tend vers 0. Nous devons donc examiner la limite de la fonction intégrante quand r tend vers 0. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 4 Soient Γ une courbe assez régulière et (x^*, y^*) un point fixe de cette dernière. Pour (x, y) un point quelconque de Γ , on pose $\vec{r} = (x^* - x, y^* - y)$ et on note par \underline{t} la tangente en (x, y) . La fonction définie sur Γ par :

$$N(x, y) = \frac{\sqrt{r^2 + h^2} - r}{r^2} \vec{r} \wedge \underline{t} \quad (3.35)$$

est prolongeable par continuité au point (x^*, y^*) avec :

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(x, y) = -\frac{h}{2} \kappa \quad (3.36)$$

où κ désigne la courbure au point (x^*, y^*) .

Démonstration

Pour la démonstration de ce lemme, on utilise les formules établies dans la démonstration précédente. On remplace dans l'expression (3.29) u et v par 0, ce qui donne :

$$\vec{r} \wedge \underline{t} = \frac{\varphi''(0)}{2} s^2 \underline{k} + O(s^3) \underline{k} \quad (3.37)$$

En utilisant l'égalité (3.31), on a :

$$N(x, y) = h \frac{1}{r^2} \frac{\varphi''(0)}{2} s^2 \underline{k} + O\left(\frac{s^3}{r^2}\right) \underline{k}$$

Ce qui donne, par passage à la limite :

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(x, y) = \frac{h}{2} \frac{\varphi''(0)}{2}$$

Par définition de φ , on a la relation suivante :

$$\varphi''(0) = -\kappa$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Puisque la limite de la fonction N existe, on peut donc faire tendre ϵ vers 0 pour obtenir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)} I_\epsilon = \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} \quad (3.38)$$

D'où le lemme suivant :

Lemme 5 *Si la courbe Γ est assez régulière et pour une aimantation de la forme $\underline{M}^* = (0, 0, \underline{M}_z^*)$, avec $\underline{M}_z^* = M_s$ (res. $\underline{M}_z^* = -M_s$) à l'intérieur de Γ (res. à l'extérieur de celle-ci) alors :*

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*) \\ (x,y) \notin \Gamma}} -2M_s \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl}(x',y') - 4\pi \underline{M}_z^*(x,y) = -2M_s \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r^*) \vec{r}^* \wedge \vec{dl}(x',y') \quad (3.39)$$

avec

$$\vec{r} = (x, y) - (x', y') \text{ et } \vec{r}^* = (x^*, y^*) - (x', y')$$

r et r^* désignent les normes respectives de \vec{r} et \vec{r}^* .

et

$$\mathcal{K}(r) = \frac{\sqrt{r^2 + h^2} - r}{r^2}$$

$\mathcal{K}(r^*)$ a la même forme que $\mathcal{K}(r)$ où il faut remplacer r par r^* .

En utilisant les résultats de ce paragraphe, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 4 *Soit Γ une courbe assez régulière. Pour une aimantation $\underline{M}^* = (0, 0, \underline{M}_z^*)$ où $\underline{M}_z^* = M_s$ (respectivement $\underline{M}_z^* = -M_s$) à l'intérieur de Γ (respectivement à l'extérieur de celle-ci), le champ démagnétisant H_z^m est défini sur Γ par*

$$H^m(x, y) = -2M_s \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{t}(x', y') ds \quad (3.40)$$

avec :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{2}{hr^2} (\sqrt{r^2 + h^2} - r)$$

où $\vec{r} = (x - x', y - y')^t$, $r = \|\vec{r}\|$ et \underline{t} désigne la tangente au point (x', y') de Γ .

3.3 Expression du couple (H, B) dans le cas d'une paroi avec structure

Nous étudions le cas d'une paroi avec structure. La figure suivante en illustre un exemple :

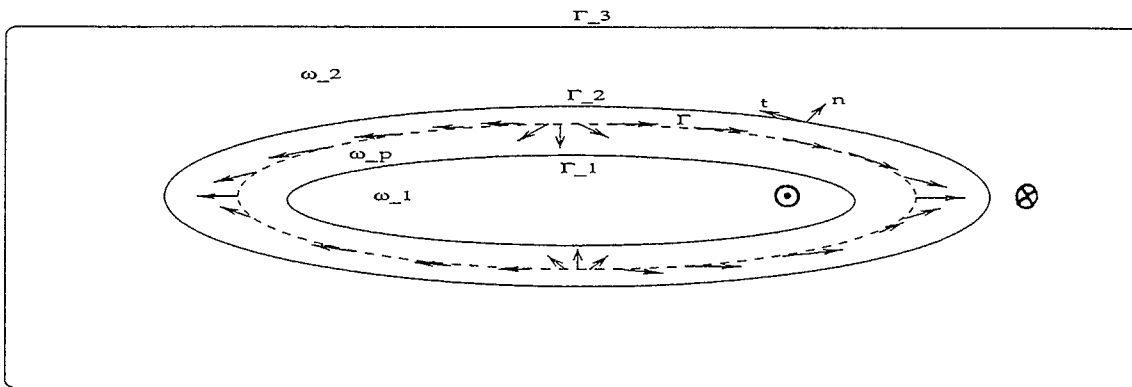


FIG. 3.2 - Paroi avec structure

Dans ce paragraphe nous supposons que V est subdivisé de la manière suivante :

$$V = \Omega_1 \cup (S_1) \cup \Omega_p \cup (S_2) \cup \Omega_2 \cup (S_3) \quad (3.41)$$

Où les (Ω_i) sont définis par :

$$(\Omega_i) = \omega_i \times] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[\quad (3.42)$$

Alors que les surfaces S_i séparant les ouverts Ω_i sont définies par :

$$(S_i) = \Gamma_i \times] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[\quad (3.43)$$

où Γ_i est une courbe régulière donnée. S_3 désigne ici le boîtier.

On suppose que tout point \underline{X} de la paroi Ω_p s'écrit sous la forme :

$$\underline{X} = \underline{x}(s) + \tau \underline{n}(s) + z \underline{k}$$

où $\underline{x}(s)$ est une courbe donnée (centre de la paroi) paramétrisée par s . $\underline{n}(s)$ désigne sa normale.

Et

$$\tau \in] -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[$$

Où δ désigne la largeur de la paroi.

On suppose aussi :

$$z \in] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} [$$

h est l'épaisseur du matériau.

Répartition de l'aimantation

Nous étudions ici le cas d'une aimantation définie par :

$$\text{pour } \underline{X} \in \Omega_p \begin{cases} \underline{M}_x^*(\underline{X}) = M_s \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \underline{M}_y^*(\underline{X}) = M_s \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \underline{M}_z^*(\underline{X}) = M_s \cos(\theta) \end{cases} \quad (3.44)$$

où θ et ψ sont les coordonnées sphériques illustrées par la figure ci-contre :

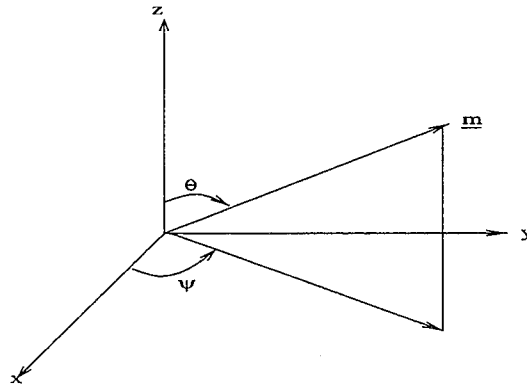


FIG. 3.3 - Coordonnées polaires

Pour que Ω_1 et Ω_2 soient deux domaines d'aimantation opposée séparés par la paroi Ω_p , nous supposons que $\theta = 0$ sur Ω_1 et que $\theta = \pi$ sur Ω_2 .

Nous supposons aussi que l'angle θ varie d'une façon continue de 0 à π en traversant la paroi Ω_p .

Nous avons vu au théorème 3 que l'induction B peut être exprimée en fonction de l'aimantation \underline{M}^* par la distribution suivante :

$$B = -4\pi \nabla E_3 \wedge_* \text{rot}(\underline{M}^*)$$

Nous allons donc calculer le rotationnel de \underline{M}^* donné par (3.44).

3.3.1 Calcul du rotationnel de l'aimantation au sens des distributions

Nous avons, par définition du rotationnel sur \mathbb{R}^3 :

$$\text{rot}(\underline{M}^*) = \left(\frac{\partial M_z^*}{\partial y} - \frac{\partial M_y^*}{\partial z}, \frac{\partial M_x^*}{\partial z} - \frac{\partial M_z^*}{\partial x}, \frac{\partial M_y^*}{\partial x} - \frac{\partial M_x^*}{\partial y} \right)^t$$

En calculant chacun de ses termes au sens des distributions, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 5 *Le rotationnel de l'aimantation \underline{M}^* décrite par (3.44) s'écrit :*

$$\begin{aligned} \text{rot}(\underline{M}^*) = & -\underline{t}_3 \delta(\Gamma_3) \otimes \chi_{(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})} + \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left[\frac{\partial}{\partial s} \cos(\theta) \underline{n} \delta(\Gamma) \otimes \chi_{(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})} \otimes \chi_{(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})} \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \tau} \cos(\theta) \underline{t} \delta(\Gamma) \otimes \chi_{(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})} \otimes \chi_{(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})} + \vec{G} \delta(\Gamma) \otimes \chi_{(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})} \otimes (\delta(z + \frac{h}{2}) - \delta(z - \frac{h}{2})) \\ & \left. + \vec{F} \delta(\Gamma) \otimes \chi_{(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})} \otimes \chi_{(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})} \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

avec :

κ désigne la courbure d'un point de Γ .

\underline{t} et \underline{t}_3 sont les tangentes respectives à Γ et à Γ_3 , \underline{n} est la normale à Γ tel que $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{k})$ soit indirect.

La fonction \vec{F} est donnée par :

$$\vec{F} = F \underline{k} \quad (3.46)$$

où :

$$\begin{aligned} F = & \sin \theta \cos(\psi - \psi_t) \frac{\partial \psi}{\partial s} + \cos(\psi - \psi_t) \frac{\partial}{\partial \tau} \sin \theta \\ & - \sin(\psi - \psi_t) \frac{\partial}{\partial s} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.47)$$

avec ψ_t désignant l'angle entre la tangente au centre de la paroi et l'axe (ox) .

Le vecteur \vec{G} est donné par :

$$\vec{G} = \sin \theta (\sin \psi, -\cos \psi, 0) \quad (3.48)$$

Démonstration

Nous calculons les dérivées partielles de \underline{M}^* .

Dans la suite de cette démonstration, φ désignera une fonction de $D(\mathbb{R}^3)$.

Calcul de $\frac{\partial M_z^*}{\partial y}$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} M_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial y} dX &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_1 \cup \omega_p \cup \omega_2} M_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \\ &= M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_1 \cup \omega_p \cup \omega_2} \cos(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

Une intégration par partie entraîne :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_2 \cup \omega_p \cup \omega_3} M_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial y} dX &= -M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_1 \cup \omega_p \cup \omega_2} \frac{\partial}{\partial y} \cos(\theta) \varphi dx dy \\ &\quad + M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_3} \cos(\theta) \varphi n_{3y} ds dz \end{aligned}$$

avec (n_{ix}, n_{iy}) désignant les normales aux courbes Γ_i .

Or, par hypothèse, $\theta = 0$ sur ω_1 et égale à π sur ω_2 , d'où :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_1 \cup \omega_p \cup \omega_2} M_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial y} dX &= -M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_1 \cup \omega_p \cup \omega_2} \frac{\partial}{\partial y} \cos(\theta) \varphi dv \\ &\quad - M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_3} \varphi n_{3y} ds dz \end{aligned} \quad (3.49)$$

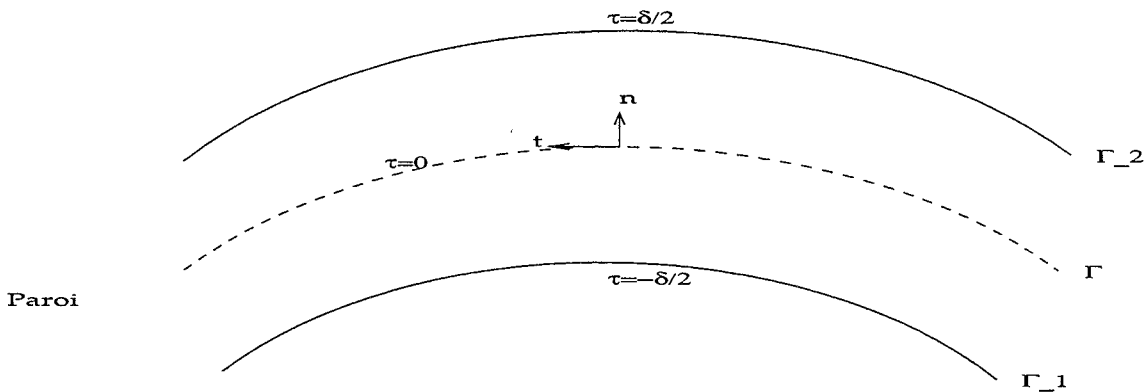


FIG. 3.4 - Coordonnées locales

On effectue le changement de variables $\underline{X} = (x, y, z) \longrightarrow (s, \tau, z)$ dans les intégrales ci-dessous.

Pour cela, nous utilisons la formule de changement de variables de l'annexe B pour obtenir :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_1 \cup \omega_p \cup \omega_2} \frac{\partial}{\partial y} \cos(\theta) \varphi dX = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau \kappa} \frac{\partial}{\partial s} \cos(\theta) t^y \varphi ds d\tau dz + \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau \kappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \cos(\theta) n^y \varphi ds d\tau dz$$

Où κ désigne la courbure d'un point de Γ .

Par suite,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underline{M}_z^* \frac{\partial \varphi}{\partial y} dX = -M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left(\frac{\partial}{\partial s} \cos(\theta) n^x \varphi + \frac{\partial}{\partial \tau} \cos(\theta) n^y \varphi \right) ds d\tau dz \\ - M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_3} \varphi n_{3y} ds dz$$

Donc

$$\left\langle \frac{\partial \underline{M}_z^*}{\partial y}, \varphi \right\rangle = M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left(\frac{\partial}{\partial s} \cos(\theta) n^x \varphi + \frac{\partial}{\partial \tau} \cos(\theta) n^y \varphi \right) ds d\tau dz \\ + M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_3} \varphi n_{3y} ds dz$$

La même démarche nous donne :

$$\left\langle \frac{\partial \underline{M}_z^*}{\partial x}, \varphi \right\rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \cos(\theta) n^y \varphi + \frac{\partial}{\partial \tau} \cos(\theta) n^x \varphi \right) ds d\tau dz \\ + M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_3} \varphi n_{3x} ds dz$$

Calcul de $\frac{\partial \underline{M}_y^*}{\partial x}$

Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underline{M}_y^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dX = M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_p} \sin(\theta) \sin(\psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy$$

Si on intègre par partie, on obtient :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_p} \sin(\theta) \sin(\psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_p} \frac{\partial}{\partial x} (\sin(\theta) \sin(\psi)) \varphi dv \\ - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_1} \sin(\theta) \sin(\psi) \varphi n_{1x} d\Gamma_1 dz + M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_2} \sin(\theta) \sin(\psi) \varphi n_{2y} d\Gamma_2 dz$$

Nous avons, par définition, $\theta = 0$ sur Γ_1 et $\theta = \pi$ sur Γ_2 , d'où :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underline{M}_y^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dX = -M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_p} \frac{\partial}{\partial x} (\sin(\theta) \sin(\psi)) \varphi dX$$

Par passage aux variables (s, τ, z) et en utilisant la formule du changement de variables de l'annexe B, il résulte :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underline{M}_y^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dX = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} (\sin(\theta) \sin(\psi)) t^x + \frac{\partial}{\partial \tau} (\sin(\theta) \sin(\psi)) n^x \right\} \varphi ds d\tau dz$$

Donc

$$\left\langle \frac{\partial \underline{M}_y^*}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\omega_p} \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} (\sin(\theta) \sin(\psi)) n^y - \frac{\partial}{\partial \tau} (\sin(\theta) \sin(\psi)) n^x \right\} \varphi ds d\tau dz$$

Et un même raisonnement pour \underline{M}_x^* entraîne :

$$\left\langle \frac{\partial \underline{M}_x^*}{\partial y}, \varphi \right\rangle = M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left\{ -\frac{\partial}{\partial s} (\sin(\theta) \cos(\psi)) n^x - \frac{\partial}{\partial \tau} (\sin(\theta) \cos(\psi)) n^y \right\} \varphi ds d\tau dz$$

Calcul de $\frac{\partial \underline{M}_x}{\partial z}$

On a de même :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \underline{M}_x^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} dX &= M_s \int_{\mathbb{R}^3} \sin(\theta) \cos(\psi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dv \\ &= M_s \int_{\omega_p} \sin(\theta) \cos(\psi) dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \\ &= M_s \int_{\omega_p} \sin(\theta) \cos(\psi) [\varphi]_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} dx \end{aligned}$$

Par passage aux variables (s, τ, z) , nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underline{M}_x^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} dX = M_s \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \sin(\theta) \cos(\psi) \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left(\varphi(s, \tau, \frac{h}{2}) - \varphi(s, \tau, -\frac{h}{2}) \right) ds d\tau$$

Donc,

$$\left\langle \frac{\partial \underline{M}_x^*}{\partial z}, \varphi \right\rangle = -M_s \int \int \sin(\theta) \cos(\psi) \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left(\varphi(s, \tau, \frac{h}{2}) - \varphi(s, \tau, -\frac{h}{2}) \right) ds d\tau$$

Par un même calcul sur \underline{M}_y^* , on a :

$$\left\langle \frac{\partial \underline{M}_y^*}{\partial z}, \varphi \right\rangle = -M_s \int \int \sin(\theta) \sin \psi \frac{1}{1 - \tau \kappa} \left(\varphi(s, \tau, \frac{h}{2}) - \varphi(s, \tau, -\frac{h}{2}) \right) ds d\tau$$

Si nous utilisons toutes les dérivées partielles ci-dessus, nous obtiendrons la formule donnée par le théorème. ■

3.3.2 Expression de B sous la forme de la loi de Biot-Savart

En utilisant les théorèmes 1 et 5, nous avons :

Théorème 6 *Le champ B , en un point \underline{X} n'appartenant pas à $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$, est donné par :*

$$B(\underline{X}) = B_1(\underline{X}) + B_2(\underline{X}) + B_3(\underline{X}) + B_4(\underline{X})$$

avec :

$$B_1(\underline{X}) = M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Gamma_3} \frac{\underline{X} - \underline{X}(s, z)}{\|\underline{X} - \underline{X}(s, z)\|^3} \wedge \underline{t}_3 ds dz$$

$$\begin{aligned} B_2(\underline{X}) = & -M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \cos(\theta) \frac{\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, z)}{\|\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, z)\|^3} \wedge \underline{n} ds d\tau dz \\ & + M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau\kappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \cos(\theta) \frac{\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, z)}{\|\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, z)\|^3} \wedge \underline{t} ds d\tau dz \end{aligned}$$

$$B_3(\underline{X}) = -M_s \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau\kappa} \left(\frac{\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, \frac{h}{2})}{\|\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, \frac{h}{2})\|^3} - \frac{\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, -\frac{h}{2})}{\|\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, -\frac{h}{2})\|^3} \right) \wedge \vec{G} ds d\tau$$

$$B_4(\underline{X}) = -M_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau\kappa} \frac{\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, z')}{\|\underline{X} - \underline{X}(s, \tau, z)\|^3} \wedge \vec{F} ds d\tau dz$$

Où les vecteurs \vec{F} et \vec{G} sont donnés dans le théorème 5. ■

- Le terme B_1 est le champ créé par les charges des surfaces latérales.
- B_2 exprime le champ vertical créé par la variation de l'aimantation dans l'épaisseur de la paroi.
- Le terme B_3 est le champ créé par les charges des surfaces du haut et du bas.
- B_4 est le champ créé par les charges autour des lignes de Bloch.

Notation

Pour un point $\underline{X}(s, \tau, z)$ de la paroi ω_p , on pose :

$$B(s, \tau, z) = B(\underline{X}(s, \tau, z)) \quad (3.50)$$

Pour obtenir donc l'expression de $B(s, \tau, z)$, il suffit de remplacer dans le théorème précédent \underline{X} par $X(s, \tau, z)$.

Nous allons nous intéresser au cas (2d) qui consiste à enlever la dépendance de l'induction en z . Pour cela, nous calculons la valeur moyenne de B suivant z .

Pour un point (s, τ) de ω_p , nous prenons comme champ en (2d) l'expression suivante :

$$B^m(s, \tau) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B(s, \tau, z) dz \quad (3.51)$$

Nous allons simplifier cette intégrale par la suite.

3.3.3 Expression (2d) du champ B en un point de la paroi

Nous développons dans ce paragraphe l'expression de $B^m(s, \tau)$. On décompose $B^m(s, \tau)$ en une composante verticale $B_z^m(s, \tau)$ et une autre dans le plan $B_p^m(s, \tau)$ en posant :

$$B^m(s, \tau) = B_z^m(s, \tau) + B_p^m(s, \tau) \quad (3.52)$$

Expression de B_z^m

D'après le théorème 6, on peut écrire :

$$B_z^m(s, \tau) = B_{1,z}^m(s, \tau) + B_{2,z}^m(s, \tau) + B_{3,z}^m(s, \tau) + B_{4,z}^m(s, \tau)$$

$B_{1,z}^m(s, \tau)$ n'est rien d'autre que le champ créé par le boîtier. Ce champ a été déjà traité dans le cas d'une paroi sans structure. Nous appliquons ensuite une méthode numérique pour intégrer en τ la fonction obtenue. Ces intégrales ne posent aucun problème quand on calcule le champ en un point de la paroi Γ .

Nous avons aussi, par définition, $B_{4,z}^m = 0$. Il nous reste donc à développer $B_{2,z}^m$ et $B_{3,z}^m$.

Théorème 7 *Le champ $B_z^m(s, \tau)$ en un point (s, τ) de la paroi s'écrit sous la forme :*

$$B_z^m(s, \tau) = B_{1,z}^m(s, \tau) - M_s \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau' \kappa} \frac{\partial}{\partial s'} \cos \theta(\tau') \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{n} ds' d\tau' \\ + M_s \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau' \kappa} \frac{\partial}{\partial \tau'} \cos \theta(\tau') \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{t} ds' d\tau' \quad (3.53)$$

avec

$$\vec{r} = \underline{x}(s, \tau) - \underline{x}(s', \tau')$$

Le noyau $\mathcal{K}(r)$ est défini par :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{2 \sqrt{r^2 + h^2} - r}{h r^2}$$

et $r = \|\vec{r}\|$

Pour la démonstration, il suffit d'utiliser les expressions de B_2 et B_3 données dans le théorème 6 et celle du noyau $\mathcal{K}(r)$ donnée dans l'annexe B. ■

Expression de B_p^m

La partie plane du champ joue un rôle important dans le déplacement des lignes et de la paroi.

On pose :

$$B_p^m(s, \tau) = B_{1,p}^m(s, \tau) + B_{2,p}^m(s, \tau) + B_{3,p}^m(s, \tau) + B_{4,p}^m(s, \tau)$$

Par un calcul simple, on vérifie que :

$$B_{1,p}^m(s, \tau) = B_{2,p}^m(s, \tau) = 0$$

Par suite,

$$B_p^m(s, \tau) = B_{3,p}^m(s, \tau) + B_{4,p}^m(s, \tau)$$

Notation

Soit $V = (V^x, V^y)^t$ un vecteur de \mathbb{R}^2 . On note son orthogonal : $V^\perp = (V^y, -V^x)$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 8 *Le champ $B_p^m(s, \tau)$ en un point (s, τ) de la paroi est donné par :*

$$(B_p^m)^\perp(s, \tau) = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_\Gamma \frac{1}{1 - \tau' \kappa} \mathcal{K}^*(r) \vec{G} ds' d\tau' + \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_\Gamma \frac{1}{1 - \tau' \kappa} \vec{\mathcal{K}}_p(r) F ds' d\tau'$$

où :

$$\vec{r} = \underline{x}(s, \tau) - \underline{x}(s', \tau'), \quad r = \|\vec{r}\|$$

$\vec{\mathcal{K}}_p(r)$ et \mathcal{K}^* définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{K}}_p(r) &= \frac{2}{h} \frac{1}{r^2} (\sqrt{r^2 + h^2} - r) \vec{r} \\ \mathcal{K}^*(r) &= \frac{2}{h} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) \end{aligned}$$

Le vecteur \vec{G} et la fonction F sont donnés dans le théorème (5).

Démonstration

Il suffit d'utiliser l'expression de B donnée par le théorème 6 et la définition (3.51) de B_p^m et de poser :

$$\mathcal{K}^*(r) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{r^2 + (z + \frac{h}{2})^2}^3} - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{r^2 + (z - \frac{h}{2})^2}^3} \right) dz$$

qui s'écrit aussi :

$$\mathcal{K}^*(r) = \frac{2}{h} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) \quad (3.54)$$

Le reste de la démonstration c'est du calcul élémentaire. ■

Nous allons utiliser l'étude faite sur le champ B pour en déduire des résultats sur le champ H .

3.3.4 Champ démagnétisant H^m en un point de la paroi

Nous notons par $H^m(s, \tau)$ le champ démagnétisant en un point de la paroi ω_p de coordonnées (s, τ) . D'après les équations de Maxwell,

$$H^m(s, \tau) = B^m(s, \tau) - 4\pi \underline{M}^*(s, \tau)$$

Composante verticale

La composante verticale de H^m s'écrit :

$$H_z^m(s, \tau) = B_z^m(s, \tau) - 4\pi M_s \underline{M}_z^*(s, \tau)$$

En effet, l'aimantation \underline{M}^* est supposée constante presque partout suivant z .

Or, par hypothèse,

$$u_z^{*m}(s, \tau) = 4\pi M_s \cos\theta(\tau)$$

Donc :

$$H_z^m(s, \tau) = B_z^m(s, \tau) - 4\pi M_s \cos\theta(\tau) \quad (3.55)$$

Où $B_z^m(s, \tau)$ est donné par le théorème (7).

Composantes horizontales

Nous avons :

$$H_p^m(s, \tau) = H^m(s, \tau) - H_z^m(s, \tau)$$

D'après les équations de Maxwell, il vient :

$$H_p^m(s, \tau) = B_p^m(s, \tau) - 4\pi M_s (\underline{M}_x^*(s, \tau), \underline{M}_y^*(s, \tau))$$

D'où

$$H_p^m(s, \tau) = B_p^m(s, \tau) - 4\pi M_s (\sin\theta \cos\psi, \sin\theta \sin\psi) \quad (3.56)$$

avec $B_p^m(s, \tau)$ donné par le théorème 8.

3.3.5 Forme approchée de H_z^m au centre de la paroi

D'après (3.55), il suffit d'approcher le champ $B_z^m(s, \tau)$ donné par la proposition 7. Le premier terme $B_{1,z}^m(s, \tau)$ ne pose pas de problème car on n'intègre pas sur la paroi. La méthode des trapèzes s'applique sans difficultés.

Par contre, les autres termes sont moins évidents car les fonctions intégrantes présentent des points de singularité.

Pour simplifier la manipulation des intégrales, nous introduisons la notation suivante :

$$I_z(s, \tau) = B_p^m(s, \tau) - B_{1,z}^m(s, \tau)$$

Ce qui donne d'après l'expression de $B_p^m(s, \tau)$:

$$\begin{aligned} I_z(s, \tau) = & -M_s \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau' \kappa} \frac{\partial}{\partial s'} \cos \theta(\tau') \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{n} ds' d\tau' \\ & + M_s \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - \tau' \kappa} \frac{\partial}{\partial \tau'} \cos \theta(\tau') \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{t} ds' d\tau' \end{aligned} \quad (3.57)$$

Nous supposons que :

$$\delta \kappa \ll 1$$

Et :

$$\frac{\partial}{\partial s'} \theta = 0$$

D'où :

$$I_z(s, \tau) = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau'} \cos \theta(s, \tau) \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{t} ds' d\tau'$$

Posons :

$$J(\tau, \tau') = \int_{\Gamma} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{t} ds'$$

Ce qui donne :

$$I_z(s, \tau) = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\partial}{\partial \tau'} \cos(\theta) J(\tau, \tau') d\tau'$$

Nous remarquons que pour τ donné, $J(\tau, \tau')$ est de la même forme que celle donnée dans le cas d'une paroi sans structure (3.40).

Pour approcher l'intégrale en τ' de $\frac{\partial}{\partial \tau'} \cos(\theta) J_{app}(\tau, \tau')$, nous avons besoin de connaître $\frac{\partial}{\partial \tau'} \cos(\theta)$. Pour cela, nous supposons que :

$$\frac{\partial}{\partial \tau'} \theta = \frac{\sin(\theta)}{\Delta}$$

avec $\delta = \pi \Delta$. Sous cette hypothèse, l'intégrale $I_z(s, \tau)$ s'écrit

$$I_z(s, \tau) = -\frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sin^2 \theta(\tau, \tau') J_{app}(\tau, \tau') d\tau'$$

Chapitre 4

Méthodes numériques pour simuler le mouvement d'une courbe régi par sa courbure

Nous présentons dans ce chapitre quelques techniques numériques pour simuler le mouvement d'une courbe suivant sa normale sous l'influence de sa courbure. Ces techniques seront utilisées pour résoudre le modèle de Slonczewski et le système d'équations qu'on a données dans le deuxième chapitre.

Nous établissons un schéma semi-implicite pour résoudre numériquement le problème d'une manière stable.

La courbe étant représentée par un ensemble fini de points, nous développons une méthode numérique pour approcher la courbure en un de ces points en fonction de ses voisins. Nous étudions la consistance et l'ordre de la méthode.

Une fois les points sont déplacés suivant les normales, il n'y a aucune chance pour qu'ils restent équidistants même s'ils le sont au départ. Ceci provoque de l'instabilité numérique pour les schémas qui exigent l'équidistance. Pour remédier à ce problème, nous ajoutons de nouveaux points à partir des anciens par une méthode d'interpolation qu'on va définir et nous réarrangeons l'ensemble des points afin de ne garder que des points équidistants.

Soit Γ_t une famille de courbes définies par :

$$\begin{aligned} [0, L_t] \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\rightarrow \underline{x}(s, t) \end{aligned}$$

telles que :

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) = \kappa(s, t) \underline{n}(s, t) \quad (4.1)$$

Où

- s désigne une abscisse curviligne de Γ_t .
- L_t désigne la longueur de Γ_t .
- $\kappa(s, t)$ désigne la courbure de Γ_t .
- $\underline{n}(s, t)$ désigne la normale à Γ_t .

Précisons que le signe de la courbure κ et le sens de l'orientation de la normale sont choisis de telle sorte que :

$$\frac{\partial \underline{t}}{\partial s}(s, t) = \kappa(s, t) \underline{n}(s, t) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \underline{n}}{\partial s}(s, t) = -\kappa(s, t) \underline{t}(s, t) \quad (4.3)$$

où $\underline{t}(s, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial s}(s, t)$ désigne la tangente à Γ_t .

4.1 Un schéma semi-implicite

On considère ensuite une subdivision $(s_1, s_2, \dots, s_{I_t})$ de l'intervalle $[0, L_t]$ en I_t points.

On pose $\delta s = \frac{L_t}{I_t}$.

On désigne par δt le pas du temps et on note : $t^{n+1} = t^n + \delta t^n$

Nous proposons de discrétiser l'équation (4.1) de la manière suivante :

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s_i, t^n) \cdot \underline{n}(s_i, t^n) = \kappa(s_i, t^{n+1}) \quad (4.4)$$

Nous cherchons une écriture matricielle du système discret (4.4). Pour cela, on va travailler en coordonnées locales définies dans le repère : $(\underline{x}(s_i, t^n), \underline{t}(s_i, t^n), \underline{n}(s_i, t^n))$.

On pose :

$$\underline{x}(s, t) = \underline{x}(s_i, t^n) + q_i(s, t) \underline{n}(s_i, t^n) + r_i(s, t) \underline{t}(s_i, t^n) \quad (4.5)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s, t) = \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial s^2}(s, t) \cdot \underline{n}(s_i, t^n)$$

La formule (4.2) implique :

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s, t) = \kappa(s, t) \underline{n}(s, t) \cdot \underline{n}(s_i, t^n) \quad (4.6)$$

Le développement limité à l'ordre deux de la normale au voisinage de $\underline{x}(s_i, t^n)$ s'écrit :

$$\underline{n}(s, t) = \underline{n}(s_i, t^n) - (\delta s) \kappa(s_i, t^n) \underline{t}(s_i, t^n) + O(\delta s^2) \underline{n}(s_i, t^n) + O(\delta s^2) \underline{t}(s_i, t^n) \quad (4.7)$$

On porte cette expression dans (4.6). Il vient :

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s, t) = \kappa(s, t) + O(\delta s_i^2) \quad (4.8)$$

D'autre part, on a pour $s = s_i$:

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s_i, t^n) = \kappa(s_i, t^n) \quad (4.9)$$

L'équation (4.5) entraîne :

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) \cdot \underline{n}(s_i, t^n) \quad (4.10)$$

En utilisant (4.8) et (4.10), nous écrivons le problème discret (4.4) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t}(s_i, t^n) &= \frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) \\ \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s_i, t^n) &= \frac{\partial q_i}{\partial t}(s_i, t^n) \underline{n}(s_i, t^n) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Notations

On pose :

$$q_{i,i+1}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_i, t^n) \quad (4.12)$$

$$q_{i,i}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_i, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_i, t^n) \quad (4.13)$$

$$q_{i,i-1}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_{i-1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_i, t^n) \quad (4.14)$$

On pose aussi :

$$q_{i+1,i+1}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_{i+1}, t^n) \quad (4.15)$$

et

$$q_{i-1,i-1}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_{i-1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i-1}, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_{i-1}, t^n) \quad (4.16)$$

Nous approchons les dérivées dans le système (4.11) par :

$$\frac{q_{i,i}^{n+1} - q_{i,i}^n}{\delta t} = \frac{q_{i,i+1}^{n+1} - 2q_{i,i}^{n+1} + q_{i,i-1}^{n+1}}{\delta s} \quad (4.17)$$

$$\underline{x}(s_i, t^{n+1}) = \underline{x}(s_i, t^n) + q_{i,i}^{n+1} \underline{n}(s_i, t^n) \quad (4.18)$$

Les équations ci-dessus sont vérifiées pour tout i . Il suffit donc de calculer les quantités $q_{i,i}^{n+1}$ pour en déduire les $\underline{x}(s_i, t^{n+1})$. Pour cela, on va exprimer les termes $q_{i,i+1}^{n+1}$ et $q_{i,i-1}^{n+1}$ en fonction de $q_{i,i}^{n+1}$, $q_{i+1,i+1}^{n+1}$ et $q_{i-1,i-1}^{n+1}$. On a, d'après (4.5) :

$$\underline{t}(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} q_i(s, t) \underline{n}(\underline{x}^n) + \frac{\partial}{\partial s} r_i(s, t) \underline{t}(s_i, t^n) \quad (4.19)$$

Donc

$$\begin{aligned} q_{i+1,i+1}^{n+1} &= \left(\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n) + \underline{x}(s_i, t^n) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n) \right) \\ &\wedge \left(\frac{\partial}{\partial s} q_i(s_{i+1}, t^n) \underline{n}(s_{i+1}, t^n) + \frac{\partial}{\partial s} r_i(s_{i+1}, t^n) \underline{t}(s_{i+1}, t^n) \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} q_{i+1,i+1}^{n+1} &= \frac{\partial}{\partial s} r_i(s_{i+1}, t^n) \left(\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \wedge \underline{t}(s_i, t^n) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial s} r_i(s_{i+1}, t^n) \left(\underline{x}(s_{i+1}, t^n) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \wedge \underline{t}(s_i, t^n) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial s} q_i(s_{i+1}, t^n) \left(\underline{x}(s_{i+1}, t^n) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \wedge \underline{n}(s_i, t^n) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Or :

$$r_i(s, t) = s + O(s^3) \text{ et } q_i(s, t) = O(s^2) \quad (4.22)$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial s} r_i = 1 + O(s^2) \text{ et } \frac{\partial}{\partial s} q_i = O(s) \quad (4.23)$$

Par conséquent, l'équation (4.21) s'écrit :

$$\begin{aligned} q_{i+1, i+1}^{n+1} &= (\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n)) \wedge \underline{t}(s_i, t^n) - (\underline{x}(s_{i+1}, t^n) - \underline{x}(s_i, t^n)) \wedge \underline{t}(s_i, t^n) \\ &+ O(\delta s^2) (\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n)) \wedge \underline{t}(s_i, t^n) \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} q_i(s_{i+1}, t^n) (\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n)) \wedge \underline{n}(s_i, t^n) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ce qui est équivalent, d'après l'égalité (4.5) à :

$$\begin{aligned} q_{i+1, i+1}^{n+1} &= q_{i, i+1}^{n+1} - q_{i, i+1}^n + O(s^2) (\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n)) \wedge \underline{t}(s_i, t^n) \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} q(s_{i+1}, t^n) (\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n)) \wedge \underline{n}(s_i, t^n) \end{aligned} \quad (4.25)$$

En utilisant l'expression (4.19) de la tangente, l'égalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} (\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n)) \wedge \underline{n}(s_i, t^n) &= q_{i+1, i+1}^{n+1} \underline{n}(s_{i+1}, t^n) \wedge \underline{n}(s_i, t^n) \\ &= -q_{i+1, i+1}^{n+1} \underline{t}(s_{i+1}, t^n) \cdot \underline{n}(s_{i+1}, t^n) \\ &= -q_{i+1, i+1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial s} q(s_{i+1}, t^n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n)) \wedge \underline{t}(s_i, t^n) &= q_{i+1, i+1}^{n+1} \underline{n}(s_{i+1}, t^n) \wedge \underline{t}(s_i, t^n) \\ &= q_{i+1, i+1}^{n+1} \underline{t}(s_{i+1}, t^n) \cdot \underline{t}(s_i, t^n) \\ &= q_{i+1, i+1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial s} r_i(s_{i+1}, t^n) \end{aligned}$$

Si on porte ces expressions dans (4.25), on obtient :

$$\begin{aligned} q_{i+1, i+1}^{n+1} &= q_{i, i+1}^{n+1} - q_{i, i+1}^n + O(\delta s^2) q_{i+1, i+1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial s} r_i(s_{i+1}, t^n) \\ &\quad - q_{i+1, i+1}^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial s} q(s_{i+1}, t^n) \right)^2 \end{aligned}$$

Les égalités (4.22) et (4.23) impliquent :

$$q_{i+1,i+1}^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial s} q(s_{i+1}, t^n) \right)^2 = O(\delta s^4) \quad (4.26)$$

et

$$q_{i+1,i+1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial s} r(s_{i+1}, t^n) = O(\delta s^2) \quad (4.27)$$

D'où les formules suivantes :

Formules

$$q_{i+1,i+1}^{n+1} = q_{i,i+1}^{n+1} - q_{i,i+1}^n + O(\delta s^4) \quad (4.28)$$

Nous démontrons de même :

$$q_{i-1,i-1}^{n+1} = q_{i,i-1}^{n+1} - q_{i,i-1}^n + O(\delta s^4) \quad (4.29)$$

En remplaçant dans (4.17) les quantités $q_{i,i+1}^{n+1}$, $q_{i,i-1}^{n+1}$ par leurs expressions obtenues à partir de (4.28 et (4.29), on obtient :

$$\frac{q_{i,i}^{n+1} - q_{i,i}^n}{\delta t} = \frac{q_{i+1,i+1}^{n+1} - 2q_{i,i}^{n+1} + q_{i-1,i-1}^{n+1}}{\delta s^2} + \frac{q_{i,i+1}^n - 2q_{i,i}^n + q_{i,i-1}^n}{\delta s^2} + O(\delta s^2) \quad (4.30)$$

Or :

$$\frac{q_{i,i+1}^n - 2q_{i,i}^n + q_{i,i-1}^n}{\delta s^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial s^2}(s_i, t^n) + O(\delta s^2) \quad (4.31)$$

Nous avons vu (4.8) que :

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2} = \kappa + O(\delta s^2)$$

(4.30) devient alors :

$$\frac{q_{i,i}^{n+1}}{\delta t} = \frac{q_{i+1,i+1}^{n+1} - 2q_{i,i}^{n+1} + q_{i-1,i-1}^{n+1}}{\delta s^2} + \kappa(s_i, t^n) + O(\delta s^2) \quad (4.32)$$

En effet, $q_{i,i}^n = 0$

Nous écrivons (4.32) sous la forme matricielle suivante :

$$AQ^{n+1} = B^n \quad (4.33)$$

avec A la matrice du Laplacien discret.

$$Q^{n+1} = (q_{1,1}^{n+1}, \dots, q_{i,i}^{n+1}, \dots, q_{I^r,I^r}^{n+1})$$

et

$$B^n = (\kappa(s_1, t^n), \dots, \kappa(s_i, t^n), \dots, \kappa(s_{I_r}, t^n))$$

On pose aussi :

$$\underline{X}^{n+1} = (\underline{x}(s_1, t^{n+1}), \dots, \underline{x}(s_i, t^{n+1}), \dots, \underline{x}(s_{I_r}, t^{n+1}))$$

L'équation (4.18) s'écrit :

$$\underline{X}^{n+1} = Q^{n+1} \underline{n}(s_i, t^n) \tag{4.34}$$

Pour calculer le second membre B^n , il faut une méthode pour approcher les courbures $\kappa(s_i, t^n)$ à partir des points $\underline{x}(s_i, t_i)$. Nous allons traiter ce problème dans le paragraphe suivant.

4.2 Méthode numérique pour approcher la courbure

Dans ce paragraphe, on suppose que les points ne sont pas nécessairement équidistants. Nous considérons trois points de la courbe $\Gamma : (m_{-1}, m_0, m_1)$. Nous cherchons une formule pour approcher la courbure au point \underline{x}_i .

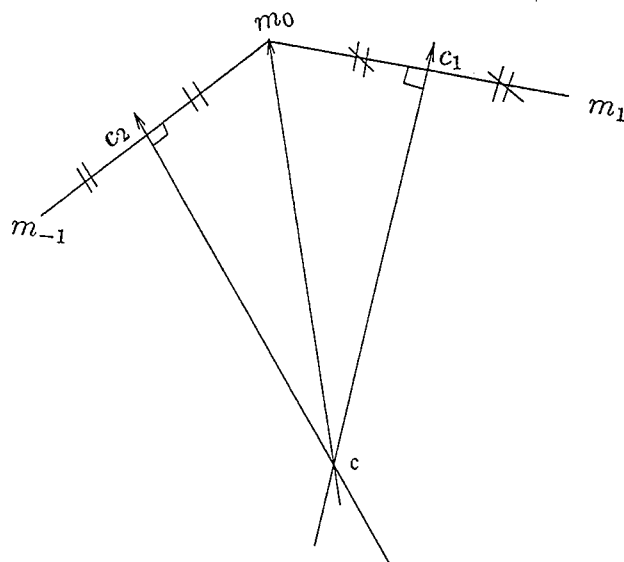


FIG. 4.1 - Courbure

Nous nous proposons d'approcher le rayon de courbure au point m_0 par $\|cm_0\|$. Nous allons calculer géométriquement $\|cm_0\|$.

Centre de courbure

On désigne par \underline{k} le troisième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Proposition 4 *Le vecteur cm_0 peut être écrit sous la forme :*

$$cm_0 = \frac{-1}{2m_{-1}m_0 \wedge m_0m_1} \left(\|m_1m_0\|^2 m_{-1}m_0 + \|m_{-1}m_0\|^2 m_0m_1 \right) \wedge \underline{k} \quad (4.35)$$

Démonstration

On pose :

$$\begin{aligned} cm_0 &= cc_1 + c_1m_0 \\ &= \lambda \underline{k} \wedge m_0m_1 - \frac{1}{2} m_0m_1 \quad (1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} cm_0 &= cc_2 + c_2m_0 \\ &= \gamma \underline{k} \wedge m_{-1}m_0 + \frac{1}{2}m_{-1}m_0 \quad (2) \end{aligned}$$

(1) et (2) donnent :

$$cm_0.m_0m_1 = -\frac{1}{2}\|m_1m_0\|^2 \quad (3)$$

$$cm_0.m_{-1}m_0 = \frac{1}{2}\|m_{-1}m_0\|^2 \quad (4)$$

Puisque les trois points sont supposés non alignés, $\underline{k} \wedge m_{-1}m_0$ et $\underline{k} \wedge m_0m_1$ forment une base du plan. Il existe donc un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$cm_0 = \alpha \underline{k} \wedge m_{-1}m_0 + \beta \underline{k} \wedge m_0m_1 \quad (5)$$

D'où :

$$\begin{aligned} cm_0.m_0m_1 &= \alpha \underline{k} \wedge m_{-1}m_0.m_0m_1 \\ &= \alpha m_{-1}m_0 \wedge m_0m_1.\underline{k} \\ &= \alpha \det \quad (6) \end{aligned}$$

où

$$\det = m_{-1}m_0 \wedge m_0m_1.\underline{k} \quad (7)$$

(5) donne aussi :

$$cm_0.m_{-1}m_0 = -\beta \det \quad (8)$$

Enfin, on compare (3) à (6) d'une part et (4) à (8) d'autre part, pour obtenir : les égalités (3) – (7) pour obtenir :

$$\alpha = -\frac{1}{2\det}\|m_0m_1\|^2, \quad \beta = -\frac{1}{2\det}\|m_0m_{-1}\|^2$$

En remplaçant dans (5) α et β par leurs valeurs, on obtient la formule de la proposition. ■

Rayon de courbure approché

On note par R_{app}^i le rayon de courbure approché au point \underline{m}_0 . On pose :

$$R_{app}^i = \|cm_0\|$$

On calcule cette norme en utilisant la proposition ci-dessus pour obtenir :

$$R_{app}^i = \frac{\| \|m_0m_1\|^2 m_{-1}m_0 + \|m_0m_{-1}\|^2 m_0m_1 \|}{2 | m_0m_1 \wedge m_0m_{-1} |} \quad (4.36)$$

Courbure approchée

On approche la courbure au point x_i par :

$$k_{app}^i = \frac{1}{R_{app}^i}$$

Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 5 Soient m_{-1}, m_0, m_1 trois points donnés dans le plan. La courbure au point m_0 peut être approchée par l'expression suivante :

$$\kappa_{app} = 2 \frac{m_0m_1 \wedge m_0m_{-1} \cdot \underline{k}}{\| \|m_0m_1\|^2 m_{-1}m_0 + \|m_{-1}m_0\|^2 m_0m_1 \|} \quad (4.37)$$

Où : $\underline{k} = (0, 0, 0)$.

Remarque

Le signe de $m_0m_1 \wedge m_0m_{-1} \cdot \underline{k}$ détermine la concavité ou la convexité de la courbe. ■

Nous proposons d'étudier la consistance et l'ordre de cette méthode.

4.2.1 Analyse numérique de la méthode : consistance et ordre

Pour l'analyse numérique de la forme approchée de la courbure donnée par la proposition 5, nous supposons que les trois points appartiennent à une courbe paramétrée par une fonction $\underline{x}(u)$ donnée avec $u \in [0, 1]$.

Soit une subdivision $(u_0, \dots, u_i, \dots, u_n)$ de l'intervalle $[0, 1]$ telle que :

$$u_{i+1} = u_i + \delta u_i$$

On pose :

$$r_i = \frac{\delta u_i}{\delta u_{i-1}}$$

et

$$\underline{x}(u_i) = \underline{x}_i$$

On remplace, dans la proposition (5), les points (m_{-1}, m_0, m_1) par $(\underline{x}_{i-1}, \underline{x}_i, \underline{x}_{i+1})$ pour approcher la courbure en (\underline{x}_i) . La formule devient :

$$\kappa_i = 2 \frac{\underline{x}_i \underline{x}_{i+1} \wedge \underline{x}_i \underline{x}_{i-1} \cdot \underline{k}}{\| \|\underline{x}_i \underline{x}_{i+1}\|^2 \underline{x}_{i-1} \underline{x}_i + \|\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i\|^2 \underline{x}_i \underline{x}_{i+1}\|^2 \|} \quad (4.38)$$

Nous avons le théorème suivant sur l'ordre et la consistance de la formule ci-dessus :

Théorème 9 *La courbure approchée κ_i au point \underline{x}_i donnée par (4.38) vérifie la relation suivante :*

$$\kappa(\underline{x}_i) = \kappa_i + F(\delta u_{i-1}, \delta u_i) + O(\delta u_{i-1}^2, \delta u_i^2) \quad (4.39)$$

La fonction F est donnée par :

$$F(\delta u_{i-1}, \delta u_i) = \delta u_{i-1} (1 - r_i) \frac{\underline{x}'_i \wedge \underline{x}''_i}{\|\underline{x}'_i\|^5} \underline{x}'_i \cdot \underline{x}''_i \quad (4.40)$$

La démonstration du théorème est assez technique; nous l'avons mise en annexe C. Nous avons :

Corollaire 1 *consistance*

La méthode géométrique ci-dessus est consistante.

En effet, si δu_i et δu_{i-1} tendent vers 0 alors la courbure approchée tend vers la courbure exacte. ■

Corollaire 2 *ordre de la méthode*

Si les points sont équidistants, alors $r_i = 1$ et donc la méthode est d'ordre deux .

Si les points ne sont pas équidistants, alors la méthode est au moins d'ordre un.

Si les points sont équidistants, alors $r_i = 1$ et par suite $F(\delta u_{i-1}, \delta u_i) = 0$. ■

Nous avons aussi le corollaire suivant sur le choix éventuel de la paramétrisation.

Corollaire 3 *Si la paramétrisation vérifie, pour tout u , la relation suivante :*

$$\underline{x}_i''(u) \cdot \underline{x}_i'(u) = 0 \quad (4.41)$$

alors la méthode est d'ordre deux même si les points ne sont pas équidistants .

4.3 Méthode de réarrangement

Nous traitons ici deux problèmes qu'on rencontre quand on simule le mouvement d'une courbe discrétisée suivant sa longueur.

Le premier problème vient du fait que, si la longueur de la courbe augmente ou diminue au cours des itérations, le nombre de points pris au départ peut s'avérer trop grand ou trop insuffisant pour la décrire. Si le nombre de points est trop petit, on perd de la précision dans les schémas utilisés. Par contre, s'il est trop grand, on aimerait bien le diminuer pour avoir un coût de calcul moins élevé. Dans le premier cas, il faut introduire de nouveaux points et pour le deuxième il faut, au contraire, en éliminer. Pour cela, nous développons une méthode d'interpolation dans le plan qui suppose connues les courbures des points.

L'autre problème se pose quand on discrétise les dérivées d'une fonction définie sur la courbe par des schémas exigeant l'équidistance. En effet, les points ne restent pas équidistants au cours de leur déplacement, ce qui provoque de l'instabilité numérique. Pour y remédier, nous utilisons la méthode d'interpolation plusieurs fois pour ajouter beaucoup de points jusqu'à ce que la distance entre deux points devienne négligeable par rapport au pas de discrétisation δs . Pour obtenir des points équidistants, on fixe un point puis on cherche un autre situé à une distance à peu près égale au pas de discrétisation désiré. On part, ensuite, de ce deuxième point et on cherche le suivant parmi les restants selon le même critère de distance. On continue le processus jusqu'à ce que tous les points soient parcourus.

On suppose qu'on connaît les courbures des points à réarranger. Nous allons développer la méthode d'interpolation.

4.3.1 Méthode d'interpolation dans le plan utilisant la courbure

On se donne deux points m_1, m_2 et leurs courbures respectives κ^i, κ^{i+1} . On cherche un nouveau point m_n dont on suppose que la courbure κ^n est donnée par un procédé d'interpolation quelconque en fonction des κ^i et κ^{i+1} .

On définit le nouveau point de la manière suivante :

$$m_n = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) + l(\underline{k} \wedge m_1 m_2)$$

avec l est un paramètre à calculer :

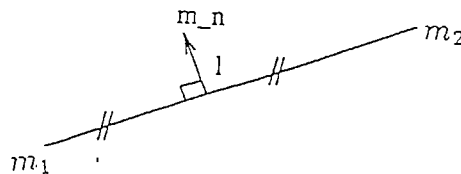


FIG. 4.2 - Interpolation

Calcul de l

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 6 Soient m_1, m_2 deux points du plan et κ^i, κ^{i+1} leurs courbures respectives. On se donne une courbure κ^n fonction de κ^i et κ^{i+1} . Le point du plan de courbure κ^n peut être approché par :

$$m_n = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) + l\underline{k} \wedge m_1 m_2$$

avec

$$l = \|m_1 m_2\| \frac{\kappa^n}{8}$$

Le vecteur \underline{k} désigne le troisième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Démonstration

On note par R^n le rayon de courbure au point \underline{x}_n , c'est à dire que $R^n = \frac{1}{|\kappa^n|}$

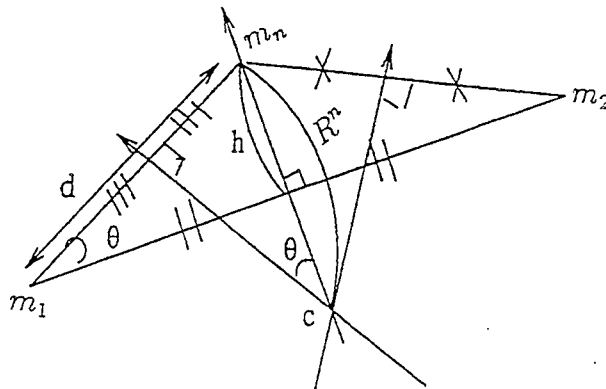


FIG. 4.3 -

On peut établir, à partir de la figure ci-dessus, les relations suivantes :

$$h = d \sin \theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} h &= \|l\underline{k} \wedge m_1 m_2\| \\ &= |l| \|m_1 m_2\| \quad (2) \end{aligned}$$

$$d^2 = h^2 + \frac{\|m_1 m_2\|^2}{4} \quad (3)$$

$$\sin \theta = \frac{d}{2R^n} \quad (4)$$

(1) et (2) impliquent :

$$|l| \|m_1 m_2\| = d \sin \theta \quad (5)$$

(5)+(4) donne

$$l \|m_1 m_2\| = \frac{d^2}{2R^n} \quad (6)$$

De (2) et (3), il résulte :

$$d^2 = \|m_1 m_2\|^2 \left(l^2 + \frac{1}{4} \right) \quad (7)$$

Enfin, (6) et (7) entraînent :

$$2R^n l \|m_1 m_2\| = \|m_1 m_2\|^2 \left(l^2 + \frac{1}{4} \right)$$

Par suite :

$$l^2 - \frac{2R^n}{\|m_1 m_2\|} l + \frac{1}{4} = 0$$

Il y a donc deux solutions pour cette équation :

$$l_1 = \frac{R^n}{\|m_1 m_2\|} + \left(\frac{(R^n)^2}{\|m_1 m_2\|^2} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$l_2 = \frac{R^n}{\|m_1 m_2\|} - \left(\frac{(R^n)^2}{\|m_1 m_2\|^2} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

On prend $l = l_2$ car $l_2 \leq l_1$

Forme approchée de l

$$l = l_2$$

$$l = \frac{R^n}{\|m_1 m_2\|} \left(1 - \left(1 - \frac{\|m_1 m_2\|^2}{4R^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

On peut l'approcher de la manière suivante :

$$l \approx \frac{1}{8} \frac{\|m_1 m_2\|}{R^n}$$

$$\approx \frac{1}{8} \|m_1 m_2\| \kappa^n$$

D'où la proposition. ■

4.4 Conclusion

Nous avons proposé un schéma semi-implicite pour résoudre numériquement le problème non linéaire (4.1). On a donné une écriture matricielle du problème facile à implémenter. Elle nous sera très utile pour résoudre les modèles simplifiés des équations de (LLG).

Pour plus de détails sur l'aspect théorique du problème de mouvement d'une courbe, voir [8], [10], [22].

Chapitre 5

Discrétisation complète du modèle de Slonczewski

Dans ce chapitre, nous proposons une façon de discrétiser le modèle de Slonczewski (1.65), (1.66), de manière à réduire la taille des calculs pour la résolution numérique. Pour cela, nous traitons la non linéarité des équations par la méthode d'Euler implicite. Nous utilisons le schéma établi dans le chapitre 4 pour impliciter le terme de courbure. La méthode des trapèzes est adaptée pour approcher le champ démagnétisant. Elle tient compte de la singularité des fonctions à intégrer.

5.1 Système à résoudre

Rappelons que le modèle de Slonczewski dans le cas d'une paroi non plane (1.65), (1.66) est donné par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) &= \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left\{ \varepsilon_1 \kappa(s, t) + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \xi_1 (F(\psi - \psi_t) + G(\psi)) + \xi_2 \frac{\partial}{\partial s} F(\psi - \psi_t) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \Delta H'_z(s, t) \right\} \underline{n}(s, t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) &= \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left\{ \varepsilon_3 \kappa(s, t) + \varepsilon_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \xi_3 (F(\psi - \psi_t) + G(\psi)) + \xi_4 \frac{\partial}{\partial s} F(\psi - \psi_t) + H'_z(s, t) \right\} \\ \underline{x}(s, 0) &= \underline{x}_0(s) \\ \psi(s, 0) &= \psi_0(s) \\ \underline{x}(s, t) &\quad \text{est une courbe fermée} \end{aligned}$$

Les expressions des coefficients $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ et ξ_4 sont données par (1.69).

- $\underline{x}(s, t)$ est paramétrée par son abscisse curviligne s .
- κ désigne la courbure

- $\underline{n}(s, t)$ est la normale unitaire à $\underline{x}(s, t)$.
- ψ désigne l'angle azimutal de l'aimantation.
- ψ_t est l'angle que fait la tangente avec l'axe (ox) .

H'_z est la composante verticale du champ total (champ démagnétisant plus champ appliqué).

Les fonctions f et g sont données par :

$$F(\psi) = 2\pi M_s \sin 2(\psi) \text{ et } G(\psi) = \frac{\pi}{2} (H'_s \sin(\psi) - H'_n \cos(\psi))$$

avec H'_s, H'_n sont respectivement la composante tangentielle et normale à la paroi du champ appliqué.

5.1.1 Changement d'inconnues

Au lieu de calculer l'angle ψ que fait l'aimantation avec (ox) , nous proposons de calculer l'angle Ψ qu'elle fait avec la tangente. Pour cela, nous posons :

$$\Psi = \psi - \psi_t$$

L'angle ψ_t est facile à calculer une fois qu'on connaît $\underline{x}(s, t)$, ce qui nous amène à remplacer dans le système ci-dessus ψ par $\Psi + \psi_t$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) = & \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_1 \kappa(s, t) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2} \right) + \xi_1 (F(\Psi) + G(\Psi + \psi_t)) + \xi_2 \frac{\partial}{\partial s} F(\Psi) \right. \\ & \left. + \alpha \Delta H'_z(s, t) \right] \underline{n}(s, t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, t) = & -\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(s, t) + \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_3 \kappa(s, t) + \varepsilon_4 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2} \right) + \xi_3 (F(\Psi) + G(\Psi + \psi_t)) \right. \\ & \left. + \xi_4 \frac{\partial}{\partial s} F(\Psi) + H'_z(s, t) \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{x}(s, 0) &= \underline{x}_0(s) \\ \Psi(s, 0) &= \Psi_0(s) \\ \underline{x}(s, t) &\text{ est fermée.} \end{aligned}$$

Notations

On note par L_t la longueur de la courbe Γ_t définie par $\underline{x}(s, t)$ et on considère une subdivision $(s_1, s_2, \dots, s_{I_t})$ de l'intervalle $[0, L_t]$ en I_t points. On pose $\delta s = \frac{L_t}{I_t}$. On désigne par δt le pas du temps et on note : $t^{n+1} = t^n + \delta t$.

5.2 Schémas numériques

Nous proposons de discrétiser les équations (5.1), (5.2) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s_i, t^n) = & \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_1 \kappa(s_i, t^{n+1}) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) + \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) \right) \right. \\ & \left. + \xi_1 (F(s_i, t^{n+1}) + G(s_i, t^n)) + \xi_2 \frac{\partial}{\partial s} F(s_i, t^{n+1}) + \alpha \Delta H'_z(s_i, t^n) \right] \underline{n}(s_i, t^n) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s_i, t^n) = & -\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(s_i, t^n) + \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_3 \kappa(s_i, t^{n+1}) + \varepsilon_4 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) + \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) \right) \right. \\ & \left. + \xi_3 (F(s_i, t^{n+1}) + G(s_i, t^n)) + \xi_4 \frac{\partial}{\partial s} F(s_i, t^{n+1}) + H'_z(s_i, t^n) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

où :

$$F(s_i, t^{n+1}) = F(\Psi(s_i, t^{n+1}))$$

et

$$G(s_i, t^{n+1}) = G(\Psi(s_i, t^n) + \Psi_t(s_i, t^n))$$

On pose :

$$\begin{aligned} D_1(s_i, t^{n+1}) &= \varepsilon_2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) + \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) \right) \\ &\quad + \xi_1 F(s_i, t^{n+1}) + \xi_2 \frac{\partial}{\partial s} F(s_i, t^{n+1}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

et

$$\begin{aligned} D_2(s_i, t^{n+1}) &= \varepsilon_4 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) + \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) \right) \\ &\quad + \xi_3 F(s_i, t^{n+1}) + \xi_4 \frac{\partial}{\partial s} F(s_i, t^{n+1}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Par suite les équations (5.3), (5.4) s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{x}(s_i, t^n) = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_1 \kappa(s_i, t^{n+1}) + D_1(s_i, t^{n+1}) + \xi_1 G(s_i, t^n) + \alpha \Delta H'(s_i, t^n) \right] \underline{n}(s_i, t^n) \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(s_i, t^n) = -\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(s_i, t^n) + \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_3 \kappa(s_i, t^{n+1}) + D_2(s_i, t^{n+1}) + \xi_2 G(s_i, t^n) + \alpha H'_z(s_i, t^n) \right] \quad (5.8)$$

Pour traiter le problème de la courbure, nous allons suivre la démarche établie dans le chapitre 4. Pour cela, nous rappelons quelques définitions et notations introduites dans ce dernier.

On pose :

$$\underline{x}(s, t) = \underline{x}(s_i, t^n) + q_i(s, t) \underline{n}(s_i, t^n) + r_i(s, t) \underline{t}(s_i, t^n) \quad (5.9)$$

On a établi que :

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s, t) = \kappa(s, t) + O(\delta s_i^2) \quad (5.10)$$

et

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) \cdot \underline{n}(s_i, t^n) \quad (5.11)$$

Par conséquent, le système (5.7), (5.8) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}(s_i, t^n) = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_1 \frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) + D_2(s_i, t^{n+1}) + \alpha \Delta H'_z(s_i, t^n) \right] \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s_i, t^n) = \frac{\partial q_i}{\partial t}(s_i, t^n) \underline{n}(s_i, t^n) \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(s_i, t^n) = -\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(s_i, t^n) + \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_3 \frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) + D_2(s_i, t^{n+1}) + \alpha H'_z(s_i, t^n) \right] \quad (5.14)$$

On rappelle que :

$$q_{i,i+1}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_i, t^n)$$

$$q_{i,i}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_i, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_i, t^n)$$

$$q_{i,i-1}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_{i-1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_i, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_i, t^n)$$

On a posé aussi :

$$q_{i+1,i+1}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_{i+1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i+1}, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_{i+1}, t^n)$$

$$q_{i-1,i-1}^{n+1} = \left(\underline{x}(s_{i-1}, t^{n+1}) - \underline{x}(s_{i-1}, t^n) \right) \cdot \underline{n}(s_{i-1}, t^n)$$

Nous approchons les dérivées dans les équations (5.12), (5.13) et (5.14) par :

$$\frac{q_{i,i}^{n+1} - q_{i,i}^n}{\delta t} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_1 \frac{q_{i,i+1}^{n+1} - 2q_{i,i}^{n+1} + q_{i,i-1}^{n+1}}{\delta s^2} + D_1(s_i, t^{n+1}) + \xi_1 G(s_i, t^n) + \alpha \Delta H(s_i, t^n) \right] \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s_i, t^n) = & -\frac{\partial}{\partial t} \psi_t(s_i, t^n) + \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[\varepsilon_3 \frac{q_{i,i+1}^{n+1} - 2q_{i,i}^{n+1} + q_{i,i-1}^{n+1}}{\delta s^2} + D_2(s_i, t^{n+1}) \right. \\ & \left. + \xi_2 G(s_i, t^n) + \alpha H'_z(s_i, t^n) \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\underline{x}(s_i, t^{n+1}) = \underline{x}(s_i, t^n) + q_{i,i}^{n+1} \underline{n}(s_i, t^n) \quad (5.17)$$

Les équations ci-dessus sont vérifiées pour tout i . La dernière équation est explicite et pour la résoudre, il faut calculer les $q_{i,i}^{n+1}$. Pour cela, on va exprimer les termes $q_{i,i+1}^{n+1}$ et $q_{i,i-1}^{n+1}$ en fonction de $q_{i,i}^{n+1}$, $q_{i+1,i+1}^{n+1}$ et $q_{i-1,i-1}^{n+1}$.

Ce problème a été traité dans le chapitre 4. Rappelons les résultats obtenus :

$$q_{i+1,i+1}^{n+1} = q_{i,i+1}^{n+1} - q_{i,i+1}^n + O(\delta s^4) \quad (5.18)$$

$$q_{i-1,i-1}^{n+1} = q_{i,i-1}^{n+1} - q_{i,i-1}^n + O(\delta s^4) \quad (5.19)$$

D'où (cf chapitre 4):

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) = \frac{q_{i+1,i+1}^{n+1} - 2q_{i,i}^{n+1} + q_{i-1,i-1}^{n+1}}{\delta s^2} + \kappa(s_i, t^n) + O(\delta s^2) \quad (5.20)$$

Il nous reste à approcher les autres termes pris à l'instant t^{n+1} .

Calcul du terme $\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(s_i, t^n)$

Nous savons que :

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial s}(s, t) = \kappa(s, t)$$

Or :

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s, t) = \kappa(s, t) + O(\delta s^2)$$

D'où :

$$\psi_t(s, t) = \frac{\partial q_i}{\partial s}(s, t) + C + O(\delta s^3) \quad (5.21)$$

avec C une constante quelconque.

Par suite :

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(s_i, t^n) = \frac{\frac{\partial q_i}{\partial s}(s_i, t^{n+1}) - \frac{\partial q_i}{\partial s}(s_i, t^n)}{\delta t} + O(\delta t) + O(\delta s^3) \quad (5.22)$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial s} q_i(s_i, t^{n+1}) = \frac{q_{i,i+1}^{n+1} - q_{i,i}^{n+1}}{\delta s} + O(\delta s)$$

Et

$$\frac{\partial q}{\partial s}(s_i, t^n) = \frac{q_{i,i+1}^n - q_i^n}{\delta s} + O(\delta s)$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(s_i, t^n) = \frac{q_{i,i+1}^{n+1} - q_{i,i-1}^{n+1}}{2\delta s \delta t} - \frac{q_{i,i+1}^n - q_{i,i-1}^n}{2\delta s \delta t} + O(\delta t) + O(\delta s) + O\left(\frac{\delta s^3}{\delta t}\right)$$

Nous utilisons aussi les relations (5.18) et (5.19) pour exprimer $q_{i,i+1}^{n+1}$ et $q_{i,i-1}^{n+1}$ par les $q_{i+1,i+1}^{n+1}$ et $q_{i-1,i-1}^{n+1}$.

On obtient :

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(s_i, t^n) = \frac{q_{i+1,i+1}^{n+1} - q_{i-1,i-1}^{n+1}}{2\delta s \delta t} + O(\delta t) + O(\delta s) + O\left(\frac{\delta s^3}{\delta t}\right) \quad (5.23)$$

Calcul du terme $\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1})$:

Nous avons d'après la relation ci-dessus (5.21):

$$\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2}(s, t^{n+1}) = \frac{\partial^3 q}{\partial s^3}(s, t^{n+1}) + O(\delta s)$$

D'où:

$$\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) = \frac{\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s_{i+1}^{n+1}) - \frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}(s_{i-1}, t^{n+1})}{2\delta s} + O(\delta s)$$

Donc, d'après (5.20)

$$\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) = \frac{q_{i+2,i+2}^{n+1} - 2q_{i+1,i+1}^{n+1} + 2q_{i-1,i-1}^{n+1} - q_{i-2,i-2}^{n+1}}{2\delta s^3} + \frac{\kappa_{i+1}^n - \kappa_{i-1}^n}{2\delta s} + O(\delta s) \quad (5.24)$$

Calcul de $F(s_i, t^{n+1})$:

On a par définition:

$$F(s_i, t^{n+1}) = 2\sin(2\Psi(s_i, t^{n+1}))$$

On pose:

$$F(s_i, t^{n+1}) = F(s_i, t^n) + \delta t \frac{\partial}{\partial t} F(s_i, t^n) + O(\delta t)$$

Par suite:

$$F(s_i, t^{n+1}) = F(s_i, t^n) + 2\delta t \cos(2\Psi(s_i, t^n)) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s_i, t^n) + O(\delta t)$$

On pose aussi:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(s_i, t^n) = \frac{\Psi(s_i, t^{n+1}) - \Psi(s_i, t^n)}{\delta t} + O(\delta t)$$

D'où:

$$F(s_i, t^{n+1}) = F(s_i, t^n) + 2\cos(2\Psi(s_i, t^n))[\Psi(s_i, t^{n+1}) - \Psi(s_i, t^n)] + O(\delta t) \quad (5.25)$$

Calcul de $\frac{\partial F}{\partial s}(s_i, t^{n+1})$:

On pose :

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s_i, t^{n+1}) = \frac{F(s_i, t^{n+1}) - F(s_{i-1}, t^{n+1})}{2\delta s} + O(\delta s^2)$$

En utilisant la formule (5.25) ci-dessus donnant l'expression de f à l'instant t^{n+1} , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(s_i, t^{n+1}) = & \frac{1}{2\delta s} \left[F(s_i, t^n) - F(s_{i-1}, t^n) + 2\cos(2\Psi(s_{i+1}, t^n))[\Psi(s_{i+1}, t^{n+1}) - \Psi(s_{i+1}, t^n)] \right. \\ & \left. - 2\cos(2\Psi(s_{i-1}, t^n))[\Psi(s_{i-1}, t^{n+1}) - \Psi(s_{i-1}, t^n)] \right] + O(\delta s^2) + O(\delta t) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Expression de $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1})$

On pose :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2}(s_i, t^{n+1}) = \frac{\Psi(s_{i+1}, t^{n+1}) - 2\Psi(s_i, t^{n+1}) + \Psi(s_{i-1}, t^{n+1})}{\delta s^2} + O(\delta s^2) \quad (5.27)$$

Discrétisation des conditions initiales

Pour traduire le fait que la courbe est fermée, nous écrivons les conditions de périodicité suivantes :

$$\Psi(s_0, t^n) = \Psi(s_I^n, t^n), \quad \Psi(s_{I^r+1}, t^n) = \Psi(s_1, t^n) \quad (5.28)$$

et

$$q_{0,0}^{n+1} = q_{I^r, I^r}^{n+1}, \quad q_{I^r+1, I^r+1}^{n+1} = q_{1,1}^{n+1} \quad (5.29)$$

On porte toutes ces expressions dans (5.15), (5.16), (5.17) pour obtenir un système dont les inconnues sont $\Psi(s_i, t^n)$, $q_{i,i}^{n+1}$ et les $\underline{x}(s_i, t^{n+1})$.

5.3 Système discrétisé

On pose

$$\begin{aligned} r &= \frac{\delta t}{\delta s^2} \\ \rho &= \frac{r}{2\delta s} \\ \eta &= \frac{\delta t}{2\delta s} \end{aligned}$$

Première équation

L'équation (5.15) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & \rho r \varepsilon_2 q_{i-2, i-2}^{n+1} - (r \varepsilon_1 + 2\rho r \varepsilon_2) q_{i-1, i-1}^{n+1} \\ & + \left(\frac{1 + \alpha^2}{\gamma} + 2r \varepsilon_1 \right) q_{i, i}^{n+1} - (r \varepsilon_1 - 2\rho r \varepsilon_2) q_{i+1, i+1}^{n+1} - \rho r \varepsilon_2 q_{i+2, i+2}^{n+1} \\ & - [r \varepsilon_2 - 2\eta \xi_2 \cos(2\Psi(s_{i-1}, t^n))] \Psi(s_{i-1}, t^{n+1}) + [2r \varepsilon_2 - 2\xi_1(\delta t) \cos(2\Psi_i^n)] \Psi(s_i, t^{n+1}) \\ & - [r \varepsilon_2 + 2\eta \xi_2 \cos(2\Psi(s_{i+1}, t^n))] \Psi(s_{i+1}, t^{n+1}) = b_i \end{aligned} \quad (5.30)$$

avec :

$$\begin{aligned} b_i &= \delta t \varepsilon_1 \kappa(s_i, t^n) + \varepsilon_2 \eta [\kappa(s_{i+1}, t^n) - \kappa(s_{i-1}, t^n)] \\ & + \delta t \xi_1 F(s_i, t^n) - 2\delta t \xi_1 \cos(2\Psi(s_i, t^n)) \Psi(s_i, t^n) + \xi_2 \eta [F(s_{i+1}, t^n) - F(s_{i-1}, t^n)] \\ & - 2\xi_2 \eta \cos(2\Psi(s_{i+1}, t^n)) \Psi(s_{i+1}, t^n) + 2\xi_2 \rho \cos(2\Psi(s_{i-1}, t^n)) \Psi(s_{i-1}, t^n) + G(s_i, t^n) + \alpha \Delta H'_z(s_i, t^n) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Deuxième équation

L'équation (5.16) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& +\rho r \varepsilon_4 q_{i-2,i-2}^{n+1} - \left(r \varepsilon_3 + 2\rho r \varepsilon_4 + \frac{1 + \alpha^2 \delta s}{\gamma} \frac{\delta s}{2} \right) q_{i-1,i-1}^{n+1} \\
& + 2r \varepsilon_3 q_{i,i}^{n+1} - \left(r \varepsilon_3 - 2\rho r \varepsilon_4 - \frac{1 + \alpha^2 \delta s}{\gamma} \frac{\delta s}{2} \right) q_{i+1,i+1}^{n+1} - \rho r \varepsilon_4 \delta q_{i+2,i+2}^{n+1} \\
& - [r \varepsilon_4 - 2\eta \xi_4 \cos(2\Psi(s_{i-1}, t^n))] \Psi(s_{i-1}, t^{n+1}) + \left[\frac{1 + \alpha^2}{\gamma} + 2r \varepsilon_4 - 2\xi_3 \delta t \cos(2\Psi(s_i, t^n)) \right] \Psi(s_i, t^{n+1}) \\
& - [r \varepsilon_4 + 2\eta \xi_4 \cos(\Psi(s_{i+1}, t^n))] \Psi(s_{i+1}, t^{n+1}) = b'_i
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
b'_i & = \Psi(s_i, t^n) + \delta t \varepsilon_3 \kappa(s_i, t^n) + \varepsilon_4 \eta [\kappa(s_{i+1}, t^n) - \kappa(s_{i-1}, t^n)] \\
& + \delta t \xi_3 F(s_i, t^n) - 2\delta t \xi_3 \cos(2\Psi(s_i, t^n)) \Psi(s_i, t^n) \\
& + \xi_4 \eta [F(s_{i+1}, t^n) - F(s_{i-1}, t^n)] - 2\xi_4 \eta \cos(\Psi(s_{i+1}, t^n)) \Psi(s_{i+1}, t^n) \\
& + 2\xi_4 \eta \cos(\Psi(s_{i-1}, t^n)) \Psi(s_{i-1}, t^n) + G(s_i, t^n) + H'_z(s_i, t^n)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Troisième équation

L'équation (5.17) devient :

$$\underline{x}(s_i, t^{n+1}) = \underline{x}(s_i, t^n) + q_{i,i}^{n+1} n(s_i, t^n) \tag{5.33}$$

On pose :

$$U^{n+1} = \left(q_{1,1}^{n+1}, q_{2,2}^{n+1}, \dots, q_{I,I}^{n+1}, \Psi(s_1, t^{n+1}), \Psi(s_2, t^{n+1}), \dots, \Psi(s_{I_r}, t^{n+1}) \right)^t \tag{5.34}$$

$$B^n = (b_1, b_2, \dots, \dots, b_{I_r}, b'_1, b'_2, \dots, b'_{I_r})^t \tag{5.35}$$

où les b_j et b'_j sont donnés respectivement par (5.31) et (5.32).

Avec ces notations, le système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$AU^{n+1} = B^n \tag{5.36}$$

Une fois les $q_{i,i}^{n+1}$ calculés, on pose :

$$X^{n+1} = X^n + Q^{n+1} \underline{n}(s_i, t^n) \quad (5.37)$$

où

$$X^n = (\underline{x}_1^n, \dots, \underline{x}_i^n, \dots, \underline{x}_{I_r}^n)$$

et

$$Q^{n+1} = (q_{1,1}^{n+1}, \dots, q_{i,i}^{n+1}, \dots, q_{I_r, I_r}^{n+1})$$

Pour calculer B^n , on remplace $H'(s_i, t^n)$ par la formule (3.40).
Nous proposons de donner une formulation discrète du champ.

5.4 Méthode numérique pour approcher le champ démagnétisant

Nous rappelons que la formule (3.40) du champ démagnétisant en (2d) créé par la paroi sur elle-même est donnée par :

$$H'_z(s_i, t^n) = -2M_s \int_{\Gamma_i} \mathcal{K}(r_i(s, t^n)) \vec{r}_i(s, t^n) \wedge \underline{t}(s, t^n) ds$$

où :

$$\vec{r}_i(s, t^n) = \underline{x}(s_i, t^n) - \underline{x}(s, t^n)$$

$r_i(s, t^n)$ est la norme de \vec{r}_i .

et

$$\mathcal{K}(r_i(s, t^n)) = \frac{2}{h} \frac{\sqrt{r_i^2(s, t^n) + h^2} - r_i(s, t^n)}{r_i^2}$$

Nous avons la formule suivante :

Formule

$$H'(s_i, t^n) \approx -\frac{2M_s}{h} \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{K}(r_i(s_j, t^n)) r_j \wedge \frac{(\underline{x}(s_{j+1}, t^n) - \underline{x}(s_{j-1}, t^n))}{2} \right. \\ \left. - \frac{\kappa(s_i, t^n)}{2} \frac{\|\underline{x}(s_{i+1}, t^n) - \underline{x}(s_{i-1}, t^n)\|}{2} \right) \quad (5.38)$$

où $\kappa(s^i, t^n)$ désigne la courbure au point $\underline{x}(s_i, t^n)$.

Démonstration

La démonstration est basée sur le principe de la méthode des trapèzes.
On pose :

$$I = 2M_s \int_C g_i(s, t^n) ds$$

avec

$$g_i(s, t^n) = \mathcal{K}(r_i(s, t^n)) \vec{r}_i(s, t^n) \wedge \underline{t}(s, t^n)$$

Par application de la formule des trapèzes, on a :

$$I \approx -2M_s \sum_j \frac{1}{2} [g_i(s_{j+1}, t^n) + g_i(s_j, t^n)] (s_{j+1} - s_j)$$

avec :

$$g_i(s_j, t^n) = \mathcal{K}(r_i(s_j, t^n)) \vec{r}(s_j, t^n) \wedge \underline{t}(s_j, t^n)$$

En utilisant le fait que la courbe est fermée et après simplification, on obtient :

$$I \approx -2M_s \sum_j g_i(s_j, t^n) \frac{s_{j+1} - s_{j-1}}{2}$$

Comment approcher $g_i(s_j, t^n)$?

On pose :

$$\underline{t}(s_j, t^n) \approx \frac{\underline{x}(s_{j+1}, t^n) - \underline{x}(s_{j-1}, t^n)}{s_{j+1} - s_{j-1}}$$

Pour $j \neq i$, on pose :

$$g_i(s_j, t^n) = \mathcal{K}(r(s_j)) r_i(s_j, t^n) \wedge \frac{\underline{x}(s_{j+1}, t^n) - \underline{x}(s_{j-1}, t^n)}{s_{j+1} - s_{j-1}}$$

Par contre, pour approcher $g_i(s_i, t^n)$, on se heurte au problème que $\mathcal{K}(r_i(s_i, t^n))$ est infini.
On a vu dans le chapitre 4 (lemme 4) que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \underline{t} = -\frac{\kappa}{2}$$

On pose donc :

$$g_i(s_i, t^n) = -\frac{\kappa(s_i, t^n)}{2}$$

Et :

$$s_{i+1} - s_{i-1} \approx \|\underline{x}(s_{i+1}) - \underline{x}(s_{i-1})\|$$

En utilisant les développements ci-dessus, nous obtenons la formule (5.38).

Pour inverser le système (5.36), nous avons utilisé la méthode Gauss par pivot (Lapack)

Chapitre 6

Résultats et tests

Paramètres du matériau

Nous utilisons un matériau de paramètres :

- Coefficient d'échange: $A_e = 2.63 \cdot 10^{-7} \text{ erg cm}^{-1}$
- Constante d'anisotropie: $K_u = 8230 \text{ erg cm}^{-3}$
- Rapport gyrotropique: $\gamma = 1.83 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \text{ Oe}^{-1}$
- Aimantation spontanée: $4\pi M_s = 195 \text{ G}$
- Coefficient d'amortissement: $\alpha = 0.11$
- Epaisseur du matériau: $h = 4.27 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$
- Largeur d'une ligne: $\Pi = 41.4 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$

6.1 Paroi sans structure

Nous avons vu (cf chapitre 1) que le mouvement d'une paroi sans structure peut être régi par l'équation suivante:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(s, t) = \gamma \Delta \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \left\{ \frac{2A_e}{M_s \Delta} \kappa(s, t) + H'_z \right\} \underline{n}(s, t) \quad (6.1)$$

où $\underline{x}(s, t)$ désigne la paroi, κ désigne la courbure et $\underline{n}(s, t)$ la normale à la paroi.
 H'_z est la composante verticale du champ total :

$$H'_z = H_z + H_z^a$$

où H_z , H_z^a sont, respectivement, les composantes verticales du champ démagnétisant et du champ appliqué.

6.1.1 Champ d'équilibre

Le champ d'équilibre H^e d'une paroi est la valeur du champ nécessaire pour mettre la paroi à l'équilibre. On peut le calculer en remplaçant, dans l'équation (6.1), la dérivée par rapport au temps par 0. On pose :

$$H^e = - \left(\frac{2A_e}{M_s \Delta} \kappa(s, t) + H_z \right) \quad (6.2)$$

Il suffit donc de calculer le champ démagnétisant H_z pour évaluer le champ d'équilibre H^e . Pour cela, nous utilisons la formule approchée (5.38) du champ démagnétisant.

Test

On considère une bulle dont la hauteur et le diamètre sont donnés par :

$$h = 4l \text{ et } d = 8l$$

avec $l = 0.62 \times 10^{-4}$ cm.

Dans [6], on donne comme champ d'équilibre, pour cet exemple, la valeur suivante :

$$\tilde{H}^e = -0.281 \times 4\pi M_s$$

Pour recalculer le champ d'équilibre à partir de l'équation (6.2), nous avons calculé le champ démagnétisant de la bulle, en utilisant la formule (5.38).

On trouve : $H^d = 78.98$ oe.

Ce qui donne :

$$H^e = -0.279 \times 4\pi M_s$$

Les deux valeurs H^e et \tilde{H}^e du champ d'équilibre sont pratiquement égales. Ceci constitue un bon test du calcul du champ démagnétisant.

6.1.2 Paroi avec gravure et boîtier

Définitions

La gravure est une zone du matériau où l'aimantation est nulle. Le boîtier désigne la frontière séparant le matériau et l'extérieur.

Nous considérons ici une paroi en "os" avec gravure et boîtier du même type que celui illustré par la figure ci-dessous. Les dimensions de la paroi sont définies par la largeur w_p et la longueur l_p . Celles de la gravure et le boîtier sont déterminées par w_g et l_g (resp. w_b et l_b).

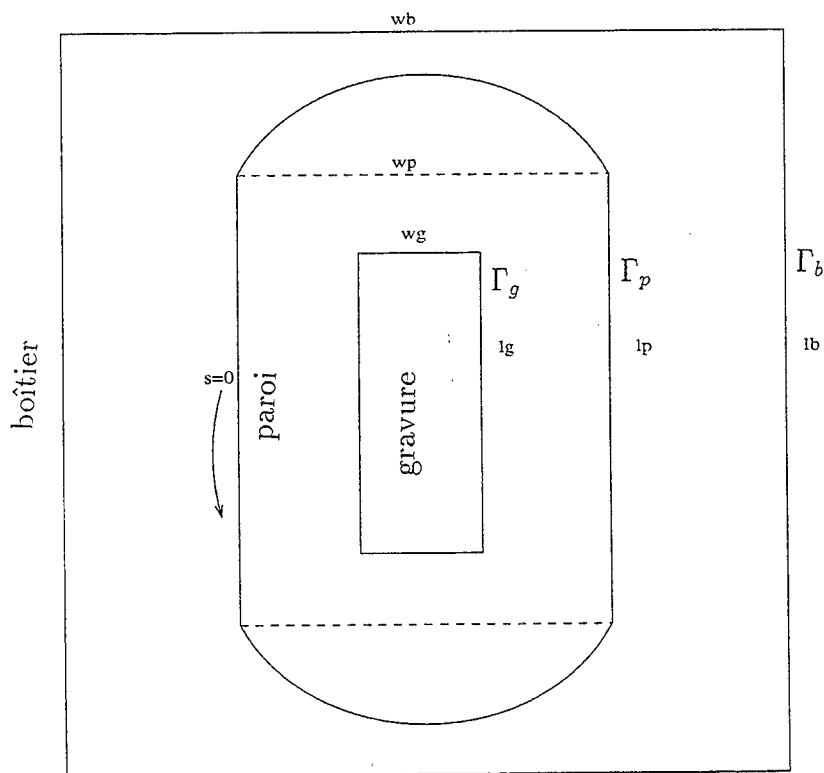


FIG. 6.1 – Paroi avec gravure et boîtier

Pour trouver une position d'équilibre, la paroi va se déplacer entre la gravure et boîtier. En effet le mouvement de la paroi signifie que la surface de l'un des deux domaines est entrain de se réduire alors que celle du deuxième augmente. Quand les surfaces des deux domaines deviennent égales la paroi s'arrête.

Nous proposons de simuler ce phénomène. Pour cela nous supposons que le mouvement de la paroi est régi par l'équation (6.1). Pour résoudre cette équation nous avons besoin de calculer, entre autres, le champ démagnétisant H_z . Nous utilisons les résultats de la première partie du chapitre 4, notamment la formule (3.40) pour écrire :

$$H_z(s) = H_{gz}(s) + H_{pz}(s) + H_{bz}(s) \quad (6.3)$$

avec :

$$H_{gz}(s) = M_s \int_{\Gamma_g} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} \quad (6.4)$$

$$H_{pz}(s) = -2M_s \int_{\Gamma_p} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} \quad (6.5)$$

et

$$H_{bz}(s) = M_s \int_{\Gamma_b} \mathcal{K}(r) \vec{r} \wedge \vec{dl} \quad (6.6)$$

Où s désigne une abscisse curviligne définie sur la paroi (Γ_p), $\mathcal{K}(r)$ est donné par (.7), Γ_g et Γ_b désignent respectivement la frontière de la gravure et le boîtier.

H_{gz} est le champ créé par la gravure en chaque point de la paroi, H_{bz} est celui créé par le boîtier. Alors que H_{pz} désigne le champ créé la paroi sur elle même.

Pour l'intégration numérique des intégrales ci-dessus, nous utilisons la formule (5.38).

Pour comprendre le mécanisme du mouvement de la paroi, nous allons présenter quelques étapes de ce dernier.

Paramètres de la simulation

En plus des paramètres intrinsèques au matériau définis au début de ce chapitre, nous utilisons les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}wp &= 4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}, & wg &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}, & wb &= 40 \cdot 10^{-4} \\lp &= 20 \cdot 10^{-4} \text{ cm}, & lg &= 20 \cdot 10^{-4} \text{ cm}, & lb &= 20 \cdot 10^{-4} \text{ cm}\end{aligned}$$

Nous allons utiliser une gravure et un boîtier " en os" (de la même forme que la paroi initiale).

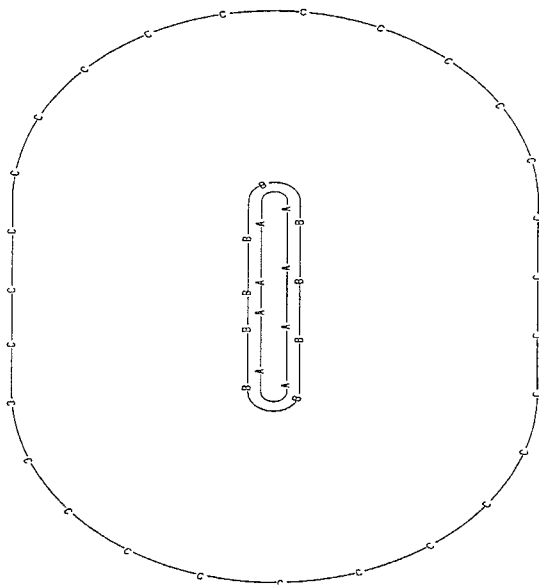


FIG. 6.2 – *Etat initial.*

Nous laissons la paroi évoluer entre la gravure (courbe A) et le boîtier en absence de tout champ extérieur.

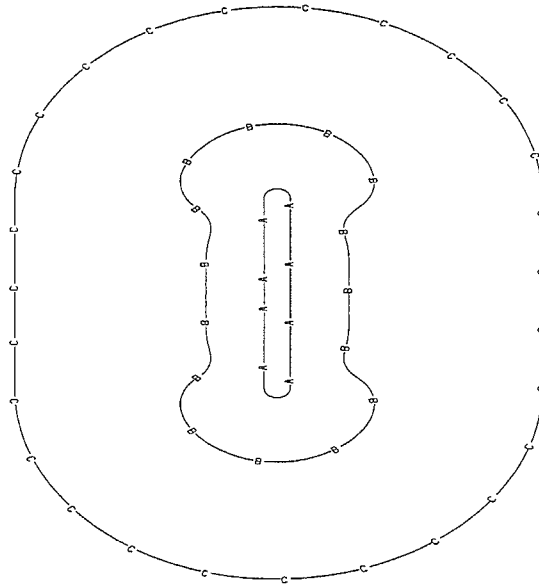


FIG. 6.3 - *Etat intermédiaire.*

La surface du domaine intérieur à la paroi commence à s'élargir. Le mouvement se fait grâce au champ démagnétisant et un terme d'échange exprimé par la courbure dans l'équation (6.1). Nous présentons plus loin les différents champs mis en jeu.

Nous avons laissé la paroi poursuivre son mouvement jusqu'à l'équilibre. La figure ci-dessous illustre cet état :

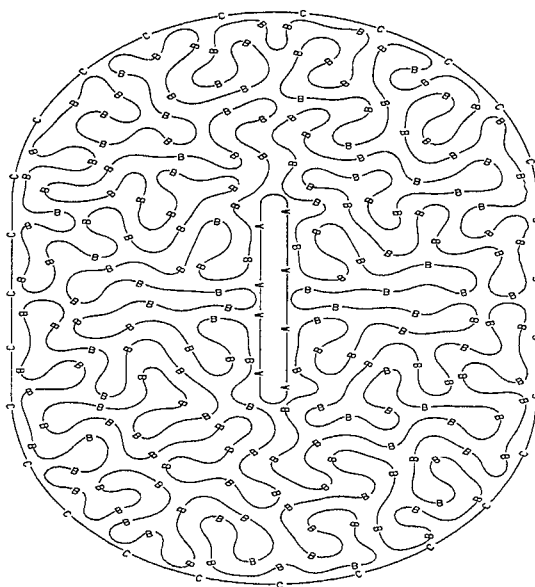
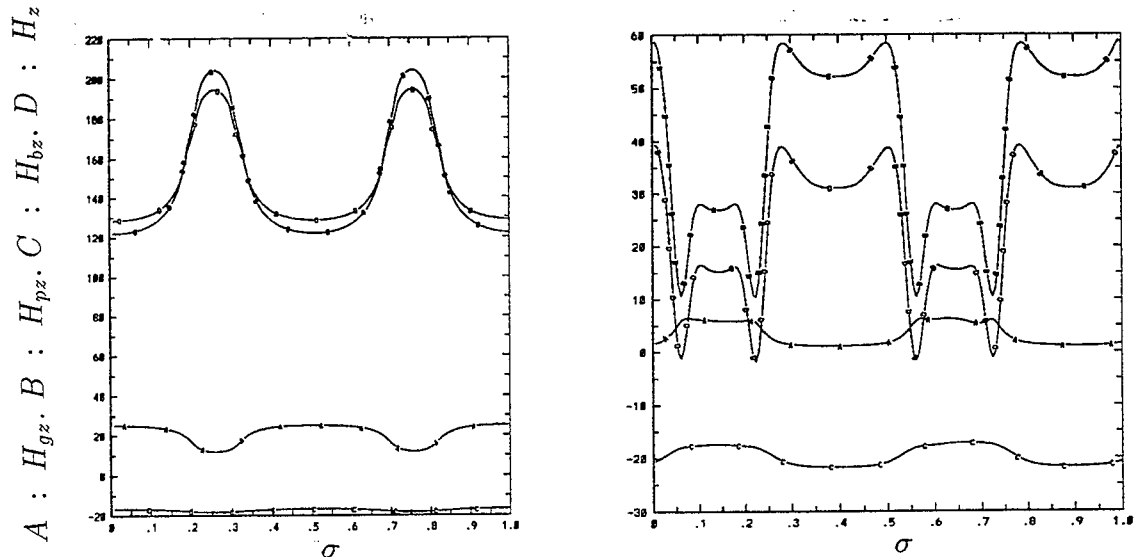


FIG. 6.4 - *Etat final.*

On observe la formation des domaines en bandes qui sont de même largeur (en moyenne). Cette largeur est une constante physique intrinsèque au matériau. Dans [3], on donne une valeur approchée de cette largeur. Pour le matériau utilisé dans cette simulation, la largeur d'une bande est : $w \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$. Pour calculer la largeur d'une bande de la paroi à l'état final, nous avons divisé la surface comprise entre la gravure et le boîtier par la longueur de la paroi, on trouve : $w_p = 4.82 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$.

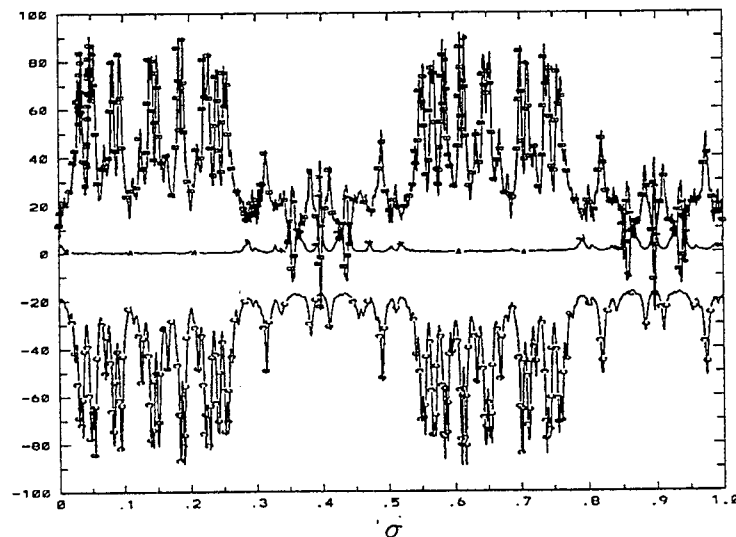
Nous présentons dans chacun des dessins de la figure 6.5, ci-dessus, les trois termes H_{gz} , H_{pz} , H_{bz} et leur somme H_z . Les trois dessins correspondent aux trois états de la paroi donnés par les figures: 6.2, 6.3 et 6.4.

On pose $\sigma = \frac{s}{L}$, avec s désignant l'abscisse curviligne et L la longueur de la paroi.



Etat initial.

Etat intermédiaire.



Etat final.

FIG. 6.5 - Champs.

Le terme H_{gz} (courbe A) exprime l'effet de la gravure sur la paroi. Elle l'empêche d'entrer dans la zone d'aimantation nulle. Le terme H_{pz} (courbe C) traduit le même effet causé par le boîtier. Le terme H_{bz} (courbe B) exprime l'effet de la paroi sur elle même. Ce champ pousse la paroi vers l'extérieur afin d'élargir le domaine de l'intérieur.

Remarque

Pour la lisibilité du dernier dessin, on n'a pas représenté la courbe D, donnant la somme des trois termes: H_{gz} , H_{pz} et H_{bz} . On voit facilement que ce total est presque égal à 0. Ceci explique l'état d'équilibre donné par la figure (Etat final).

6.1.3 Mouvement d'une ellipse sans gravure ni boîtier

Nous considérons, dans ce paragraphe, une paroi en forme d'une ellipse sans gravure ni boîtier (premier dessin à gauche de la figure ci-dessous).

Les autres dessins montrent quelques étapes dans le mouvement de la paroi régi par l'équation (6.1), en absence d'un champ extérieur. Seul le champ démagnétisant créé par la paroi sur elle même entre en jeu.

On observe aussi des domaines en forme de bandes de même largeur (en moyenne).

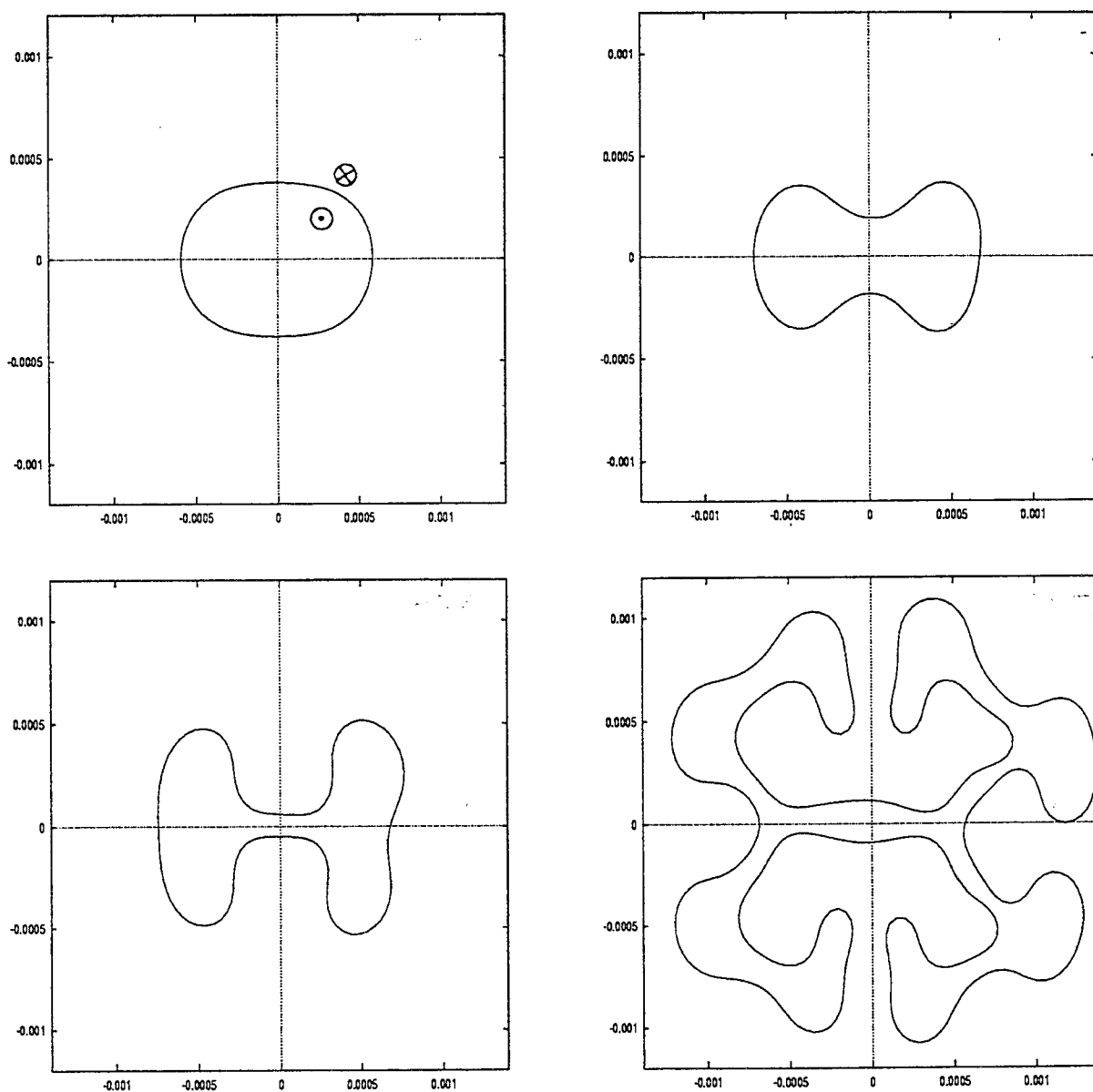


FIG. 6.6 - Paroi en forme d'une ellipse et sans structure, en mouvement.

6.1.4 Translation d'une bulle sans structure sous un gradient de champ

Dans ce paragraphe, nous considérons une paroi en forme de cercle sans gravure ni boîtier. Nous allons travailler avec un cercle de diamètre: $D = 32 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$.

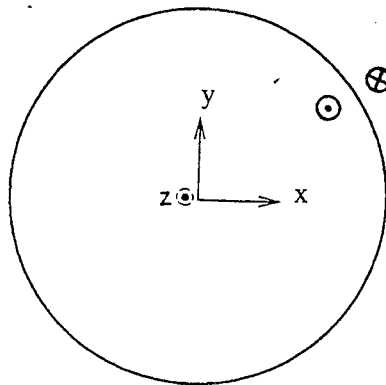


FIG. 6.7 - *Paroi initiale*

Nous voulons simuler le phénomène de translation d'une bulle sous l'action d'un gradient du champ (voir chapitre 1). Pour cela on applique un champ extérieur vertical tel que: $H^a(x) = H^e - 5000x$. Le champ d'équilibre H^e est calculé de la manière discutée dans le premier paragraphe de ce chapitre, on trouve $H^e = -89.5$.

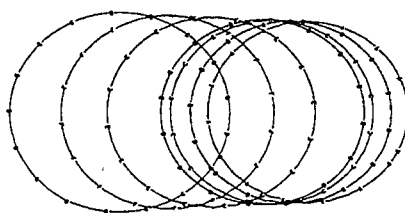


FIG. 6.8 - *Translation d'une bulle sous un gradient de champ.*

La paroi se translate de droite à gauche suivant l'axe (Ox).

6.2 Calcul du champ démagnétisant dans le cas d'une paroi avec structure

Nous donnons quelques applications des formules (3.55), (3.56) donnant respectivement la composante verticale et la partie plane du champ démagnétisant établie dans le cas d'une paroi avec structure (chapitre 3). Nous présentons la valeur moyenne du champ suivant l'épaisseur de la paroi. Pour cela, nous considérons une paroi en forme de cercle de mêmes dimensions que celui donné d'avant.

6.2.1 Cas de deux lignes enroulantes

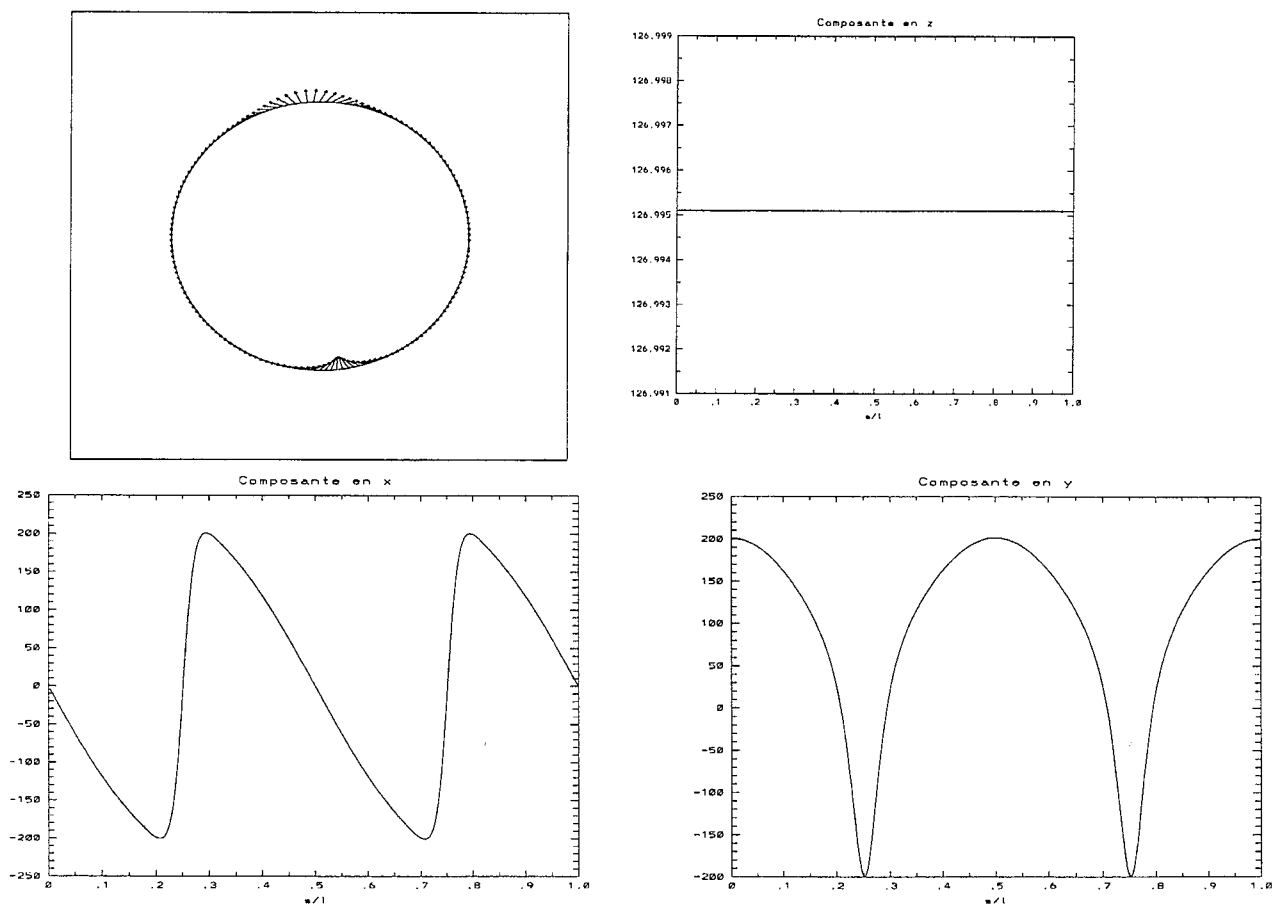


FIG. 6.9 – Les trois composantes du champ démagnétisant le long de la paroi

La figure ci-dessus présente les trois composantes du champ démagnétisant le long d'une paroi avec deux lignes enroulantes.

6.2.2 Cas de deux lignes déroulantes

La figure ci-dessous présente les trois composantes du champ démagnétisant le long d'une paroi avec deux lignes déroulantes.

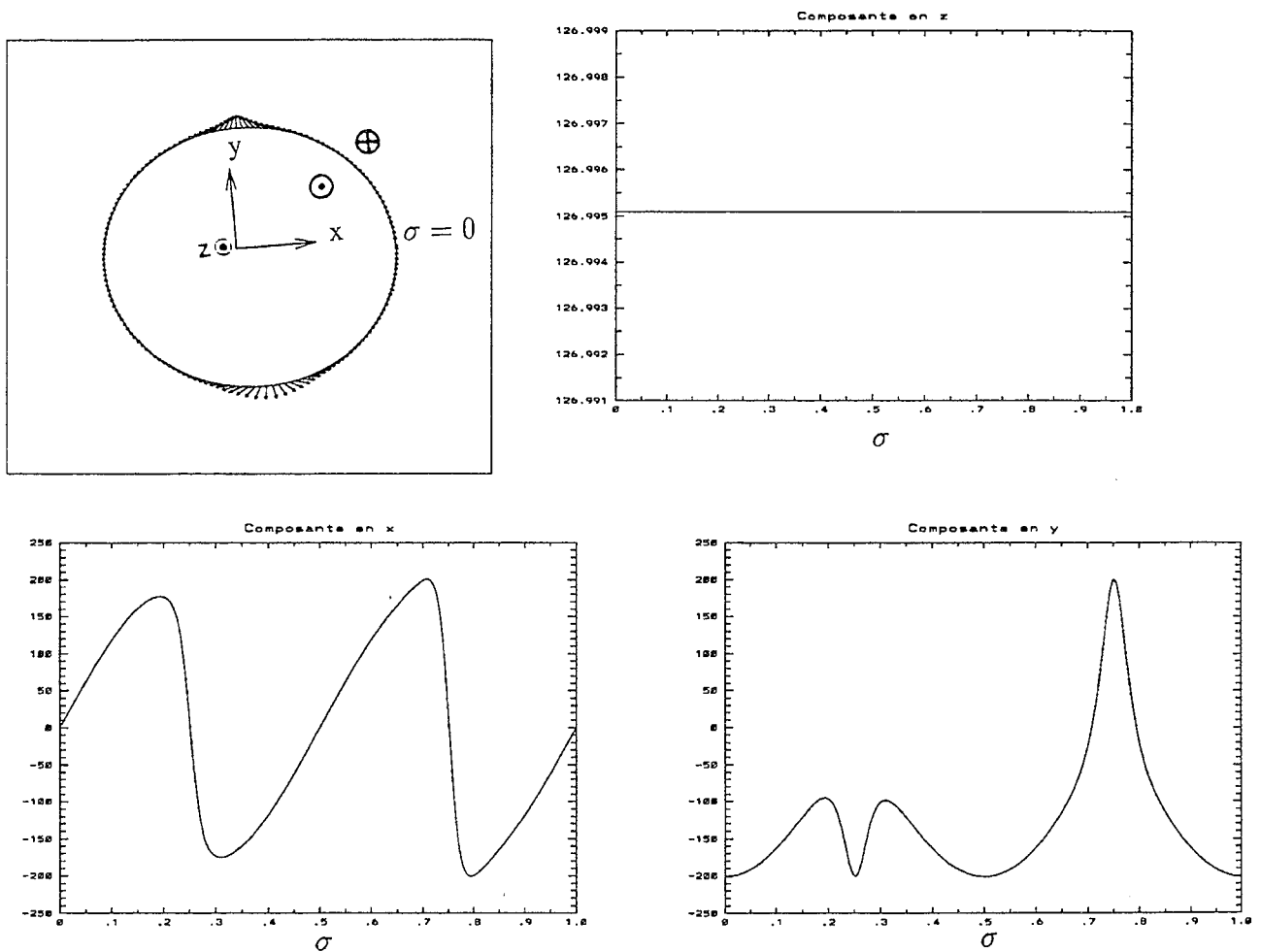


FIG. 6.10 – Les trois composantes du champ démagnétisant le long de la paroi.

Commentaire

Comme prévu, la composante en z du champ démagnétisant est constante le long de la paroi.

La composante en x est nulle aux points de la paroi d'abscisses 0, 0.5, 0.75. En effet l'aimantation en ces points est parallèle à l'axe (oy). Par opposée, la composante en y est maximale en ces derniers. Les deux composantes effectuent des changements rapides aux niveaux des lignes de Bloch.

6.3 Comparaison des deux modèles

6.4 Modèle de Slonczewski

Nous présentons, dans ce paragraphe, des résultats obtenus par la résolution numérique des équations du modèle de Slonczewski.

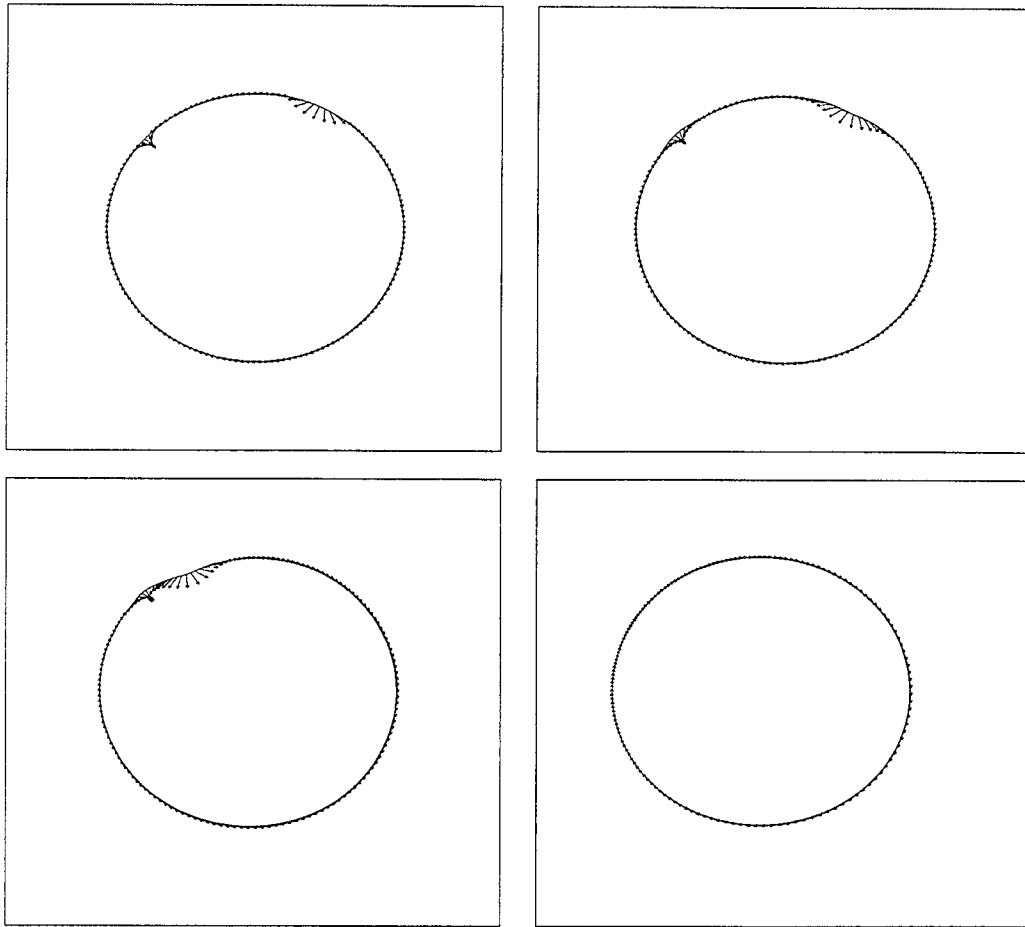
Nous travaillons, dans toute la suite, avec une paroi en forme de cercle sans boîtier ni gravure. Le cercle a le même diamètre que celui utilisé avant, c'est à dire : $D = 32 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$. Nous rappelons que le champ d'équilibre correspondant est : $H^e = -89.5 \text{ oe}$

6.4.1 Annihilation de deux lignes déroulantes

Deux lignes déroulantes s'attirent et s'annihilent afin de minimiser l'énergie d'échange. Nous présentons quelques résultats de la simulation de ce phénomène.

Etat initial

On part d'une paroi en forme de cercle avec deux lignes déroulantes. On applique un champ extérieur vertical H^a tel que : $H^a = H^e$. Après quelques itérations, la paroi s'est mise en équilibre. cet état est représenté dans le premier dessin de la figure (6.11).

FIG. 6.11 – *Annihilation de deux lignes déroulantes*

Pour déplacer les lignes, on a perturbé l'équilibre de la paroi en effectuant une variation du champ appliqué H^a de l'ordre de $3.5 \sigma_e$. La paroi se met ensuite en mouvement et les lignes commencent à se déplacer par conséquent. Les autres dessins de la figure 6.11 illustrent quelques étapes du mouvement de la paroi jusqu'à un nouveau équilibre. Comme prévu, les deux lignes se sont attirées puis annihilées.

6.4.2 Déplacement de deux lignes enroulantes

Contrairement aux lignes déroulantes, deux lignes enroulantes peuvent être à l'équilibre, l'une à côté de l'autre sans qu'elles s'annihilent. En effet, elles sont soumises à une force répulsive due à l'énergie d'échange équilibrée par une autre force d'origine magnétostatique (champ démagnétisant).

Nous présentons les résultats de la simulation de ce phénomène dans deux cas. On considère tout d'abord le cas de deux lignes très proches. On traite ensuite le cas de deux lignes éloignées.

6.4.3 Cas de deux lignes enroulantes "proches"

Etat initial

Le dessin en bas, à gauche de la figure 6.12 représente l'état initial utilisé pour la simulation. C'est une paroi avec deux lignes enroulantes distantes de $d_i = 1.5\Pi$, avec Π est la largeur d'une ligne de Bloch.

On a appliqué ensuite un champ extérieur vertical égal à H^e . La paroi s'est arrêtée mais les deux lignes ont continué à s'éloigner jusqu'à une certaine distance. Ceci est dû au fait que les lignes sont très proches. L'éloignement des deux lignes est causé par la force répulsive créé par l'échange.

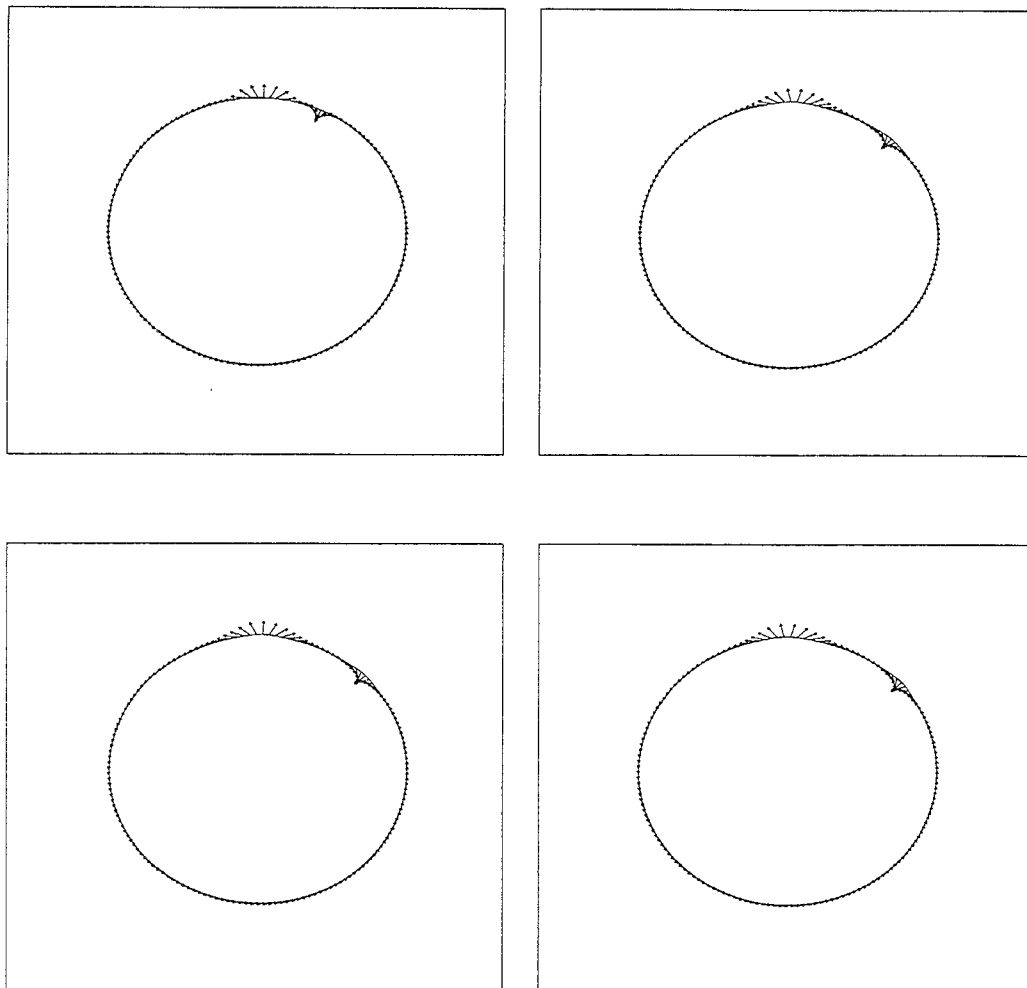


FIG. 6.12 – *Déplacement de deux lignes enroulantes jusqu'à l'équilibre.*

Le dernier dessin montre les deux lignes à l'équilibre.

Distance entre lignes en fonction du temps

On a calculé la distance entre les deux lignes au cours du temps. On présente le résultat dans la figure ci-dessous:

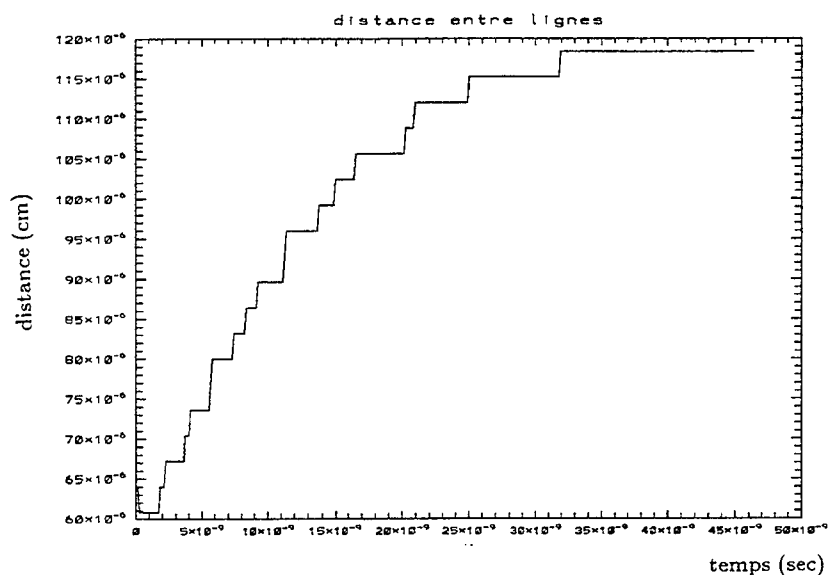


FIG. 6.13 – Evolution de la distance entre les lignes.

On voit que la distance entre les deux lignes augmente jusqu'à une valeur d'équilibre $d_e = 2.85\Pi$ où Π désigne la largeur d'une ligne de Bloch. L'aspect de la courbe vient du fait qu'on mesure la distance entre les deux lignes à chaque itération par le nombre de pas de discrétisation. En effet, au cours d'une itération, le déplacement peut être inférieur au pas.

6.4.4 Cas de deux lignes enroulantes "éloignées".

Etat initial

Nous considérons cette fois le cas de deux lignes éloignées d'une distance plus grande que celle à l'équilibre ($d_e = 2.85\Pi$), trouvée dans le cas précédent. Le dessin à gauche de la figure (6.14) illustre cet état.

On applique ensuite un champ extérieur vertical égale à H^e . La paroi s'est mise en équilibre après et les lignes aussi. En effet le mécanisme d'interaction entre les deux lignes est très faibles compte tenu de la distance qui les sépare.

Pour rapprocher les lignes, nous avons appliqué un gradient de champ de la forme :

$$H^a(x) = H^e - 5000x$$

Sous l'effet de ce champ, la paroi s'est mise en mouvement et les lignes se sont déplacées l'une vers l'autre (voir figure 6.14). la distance entre les deux lignes s'est réduite au cours du temps. Puis, elle est devenue à peu près constante. Ceci est illustré par la figure (6.15). Contrairement au cas précédent (lignes proches), les deux lignes sont restées l'une à côté de l'autre en formant une paire de lignes, ceci grâce au champ appliqué.

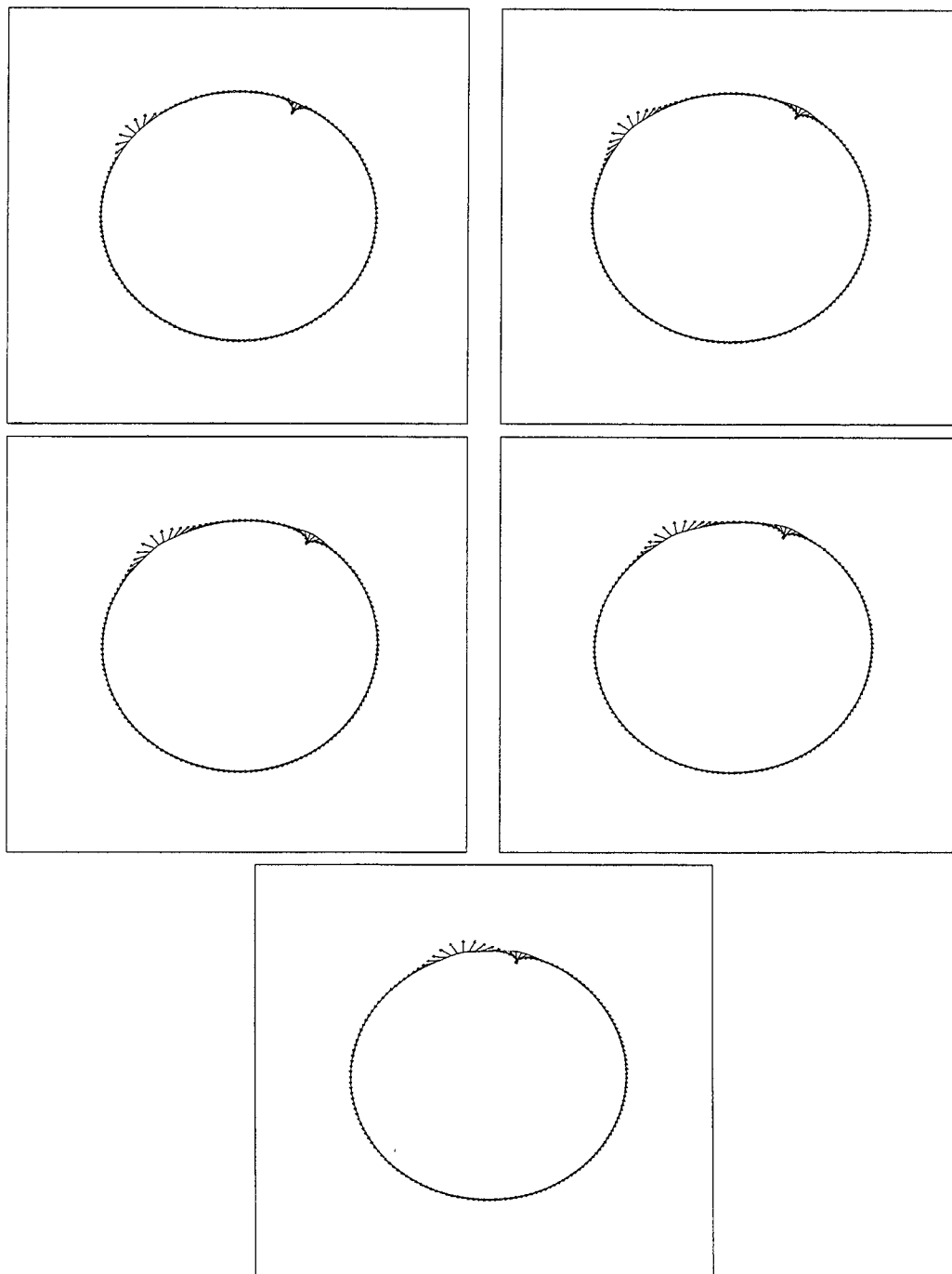


FIG. 6.14 – Déplacement des deux lignes par translation de la paroi sous un champ gradient.

Distance entre lignes en fonction du temps

Nous présentons ici l'évolution de la distance entre les deux lignes au cours de leur déplacement vers l'équilibre (voir figure 6.14).

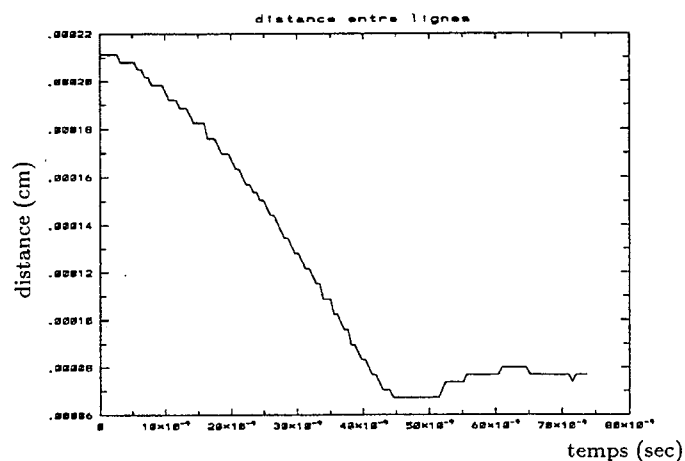


FIG. 6.15 - Evolution de la distance entre les lignes.

6.5 Modèle

Nous allons reprendre les mêmes expériences que ci-dessus en utilisant cette fois le code de calcul résolvant notre modèle (voir chapitre 2).

6.5.1 Annihilation de deux lignes déroulantes

Pour tester l'efficacité de notre modèle et son implémentation numérique, nous allons l'appliquer pour simuler l'annihilation de deux lignes déroulantes.

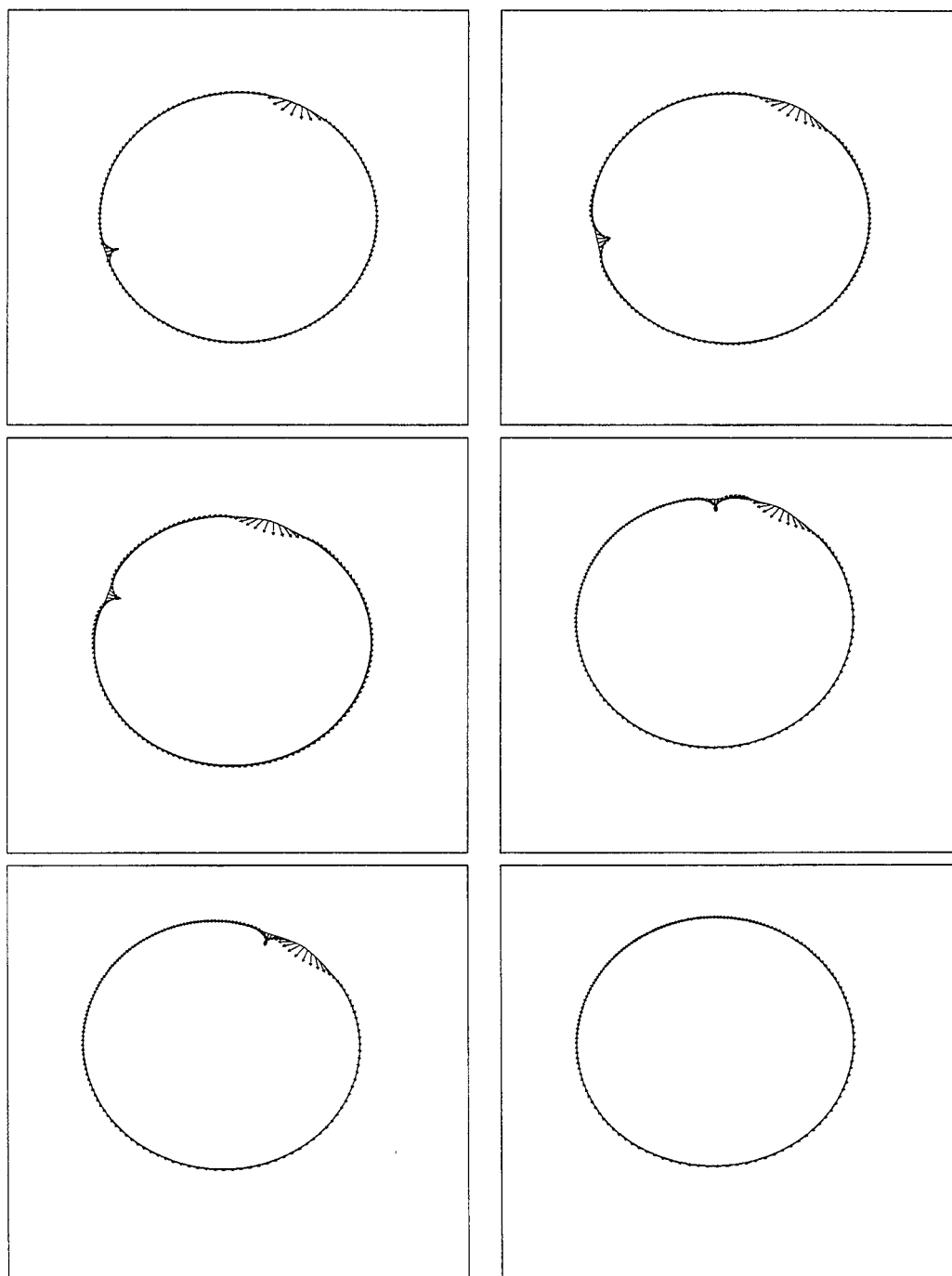


FIG. 6.16 – *Annihilation de deux lignes déroulantes*

La figure 6.16 illustre quelques étapes dans le déplacement de deux lignes déroulantes avant qu'elles s'annihilent.

6.5.2 Déplacement de deux lignes enroulantes

Cas de deux lignes enroulantes "proches"

On prend comme état initial celui décrit dans le paragraphe (6.4.3). On considère une paroi avec deux lignes enroulantes distantes de $d_i = 1.5\Pi$. On applique ensuite un champ extérieur égal à H^e .

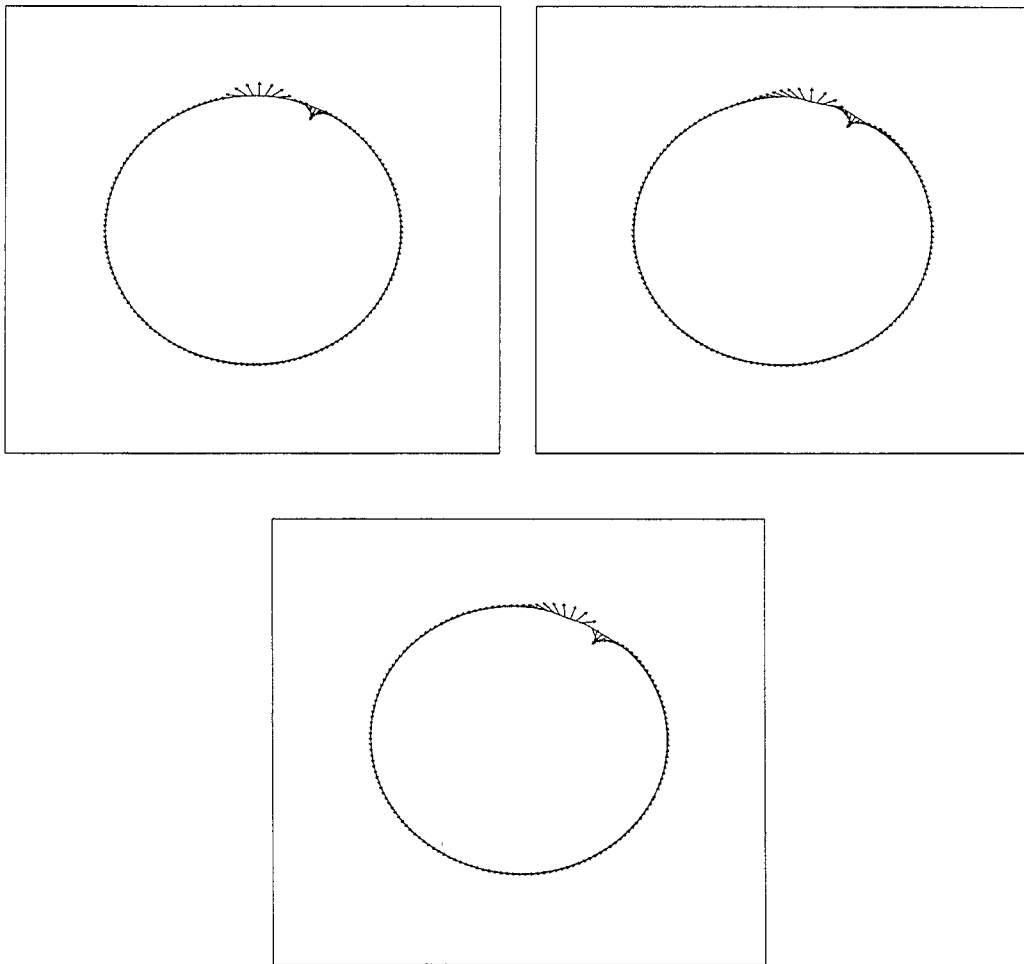


FIG. 6.17 - Déplacement de deux lignes enroulantes.

La figure ci-dessus illustre le déplacement de deux lignes jusqu'à l'équilibre. Contrairement au cas Slonczewski, la distance entre les deux lignes diminue au cours du temps. A l'équilibre, elle est égale à $d'_e = 0.85\Pi$. Nous pensons que ceci est dû au fait que le terme démagnétisant est mieux approché.

Distance entre lignes en fonction du temps

Dans la figure ci-dessous, on représente la distance entre les deux lignes en fonction du temps.

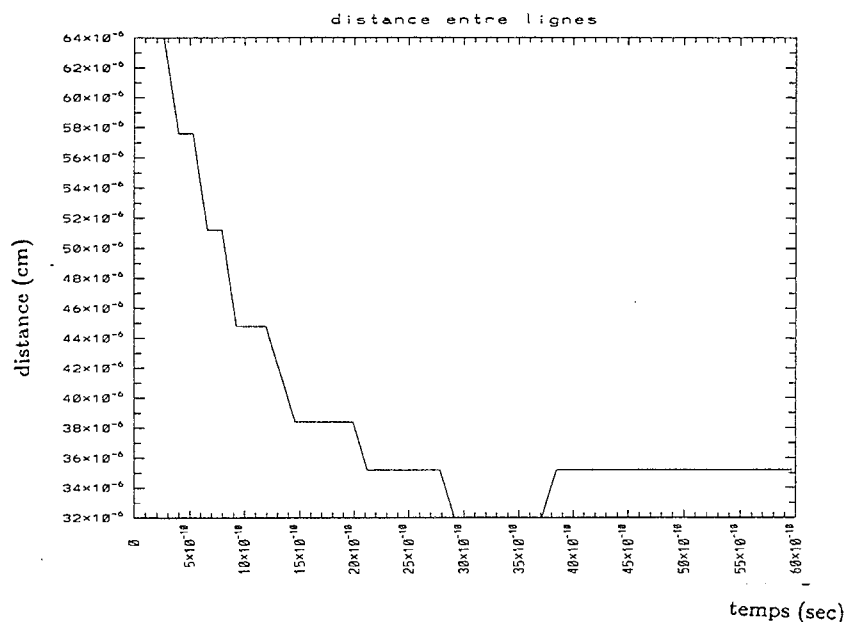


FIG. 6.18 – Evolution de la distance entre les lignes.

La distance d'équilibre $d'_e = 0.85\Pi$ est égale à de celle donnée par Nakatani [14].

6.5.3 Cas de deux lignes enroulantes "assez éloignées" l'une de l'autre

Nous prenons ici le même état initial que celui pour le cas Slonczewski (paragraphe (6.4.4). On part d'une paroi avec deux lignes à la distance $d_i = 5\Pi$. Ceci est illustré par le premier dessin à droite de la figure 6.19.

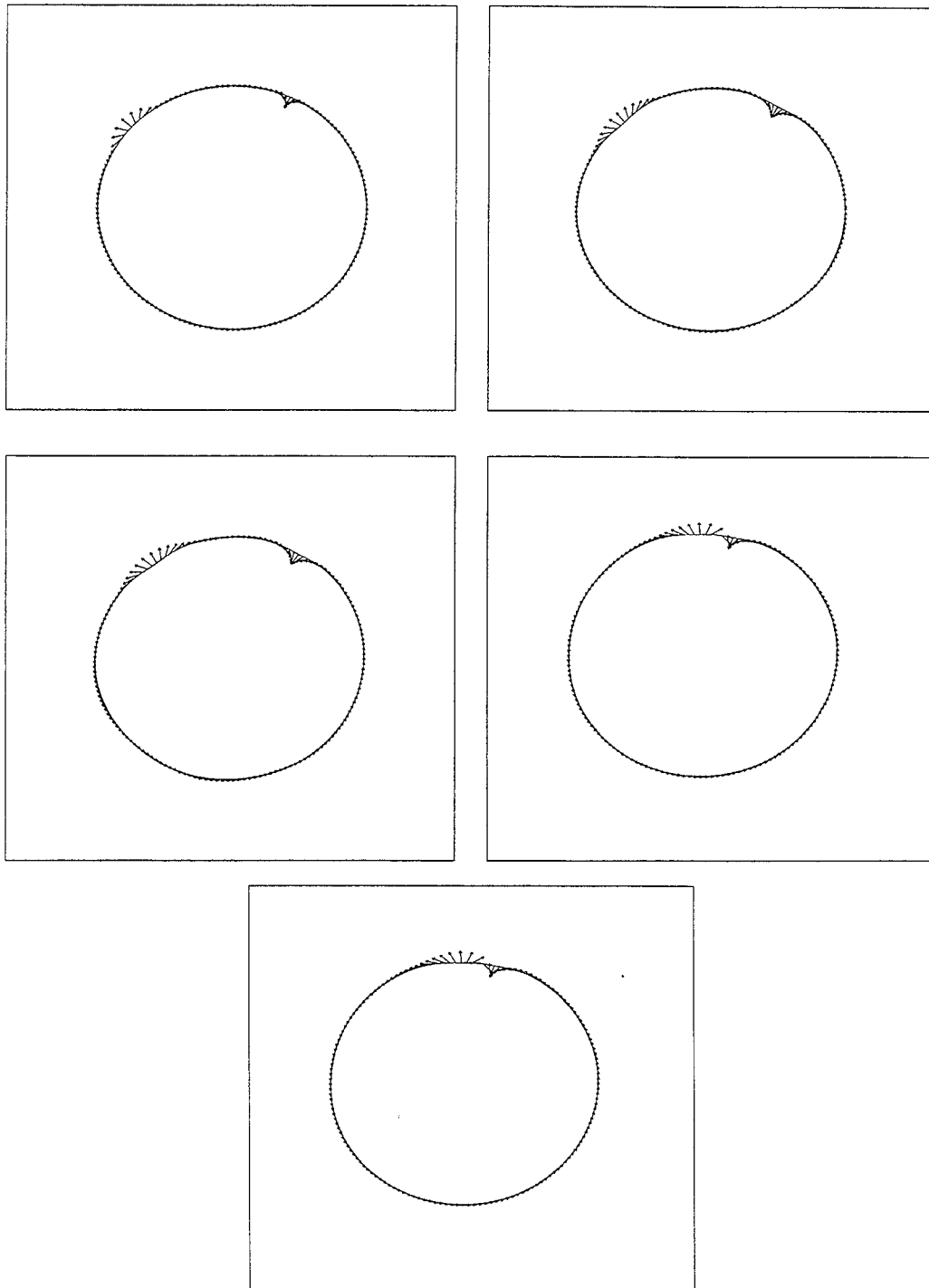


FIG. 6.19 – *Déplacement de deux lignes enroulantes le long de la paroi.*

Contrairement au cas de Slonczewski, on n'a pas eu besoin d'un champ extérieur pour ramener les lignes l'une à côté de l'autre.
Dans la figure suivante, nous traçons la distance entre les deux lignes au cours du temps.

Distance entre lignes en fonction du temps

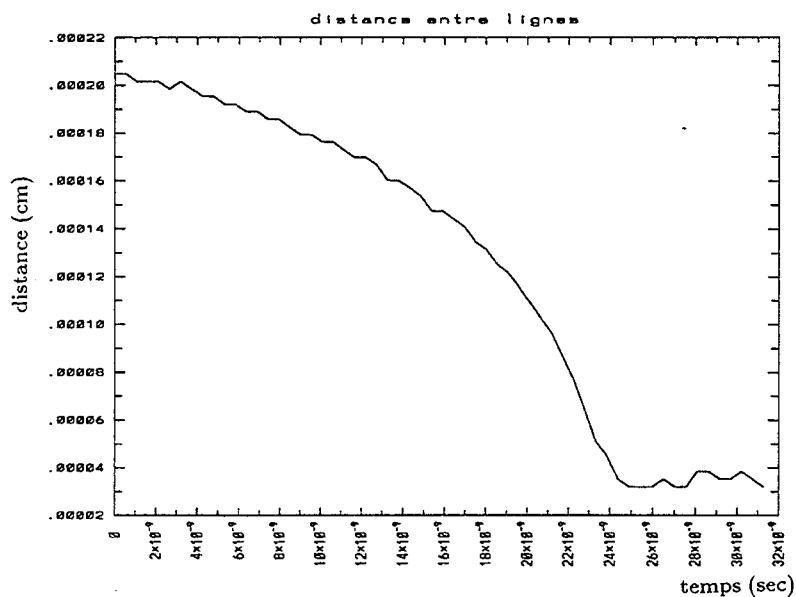


FIG. 6.20 – Evolution au cours du temps de la distance entre les deux lignes.

On retrouve la distance d'équilibre d'_e entre les deux lignes à l'équilibre.

6.5.4 Lignes enroulantes "très éloignées"

Nous traitons le cas de deux lignes "très éloignées". La distance initiale entre les deux lignes est égale à $d_i = 9.5\Pi$. On a appliqué, dans ce cas, un gradient de champ pour déplacer la paroi et les lignes.

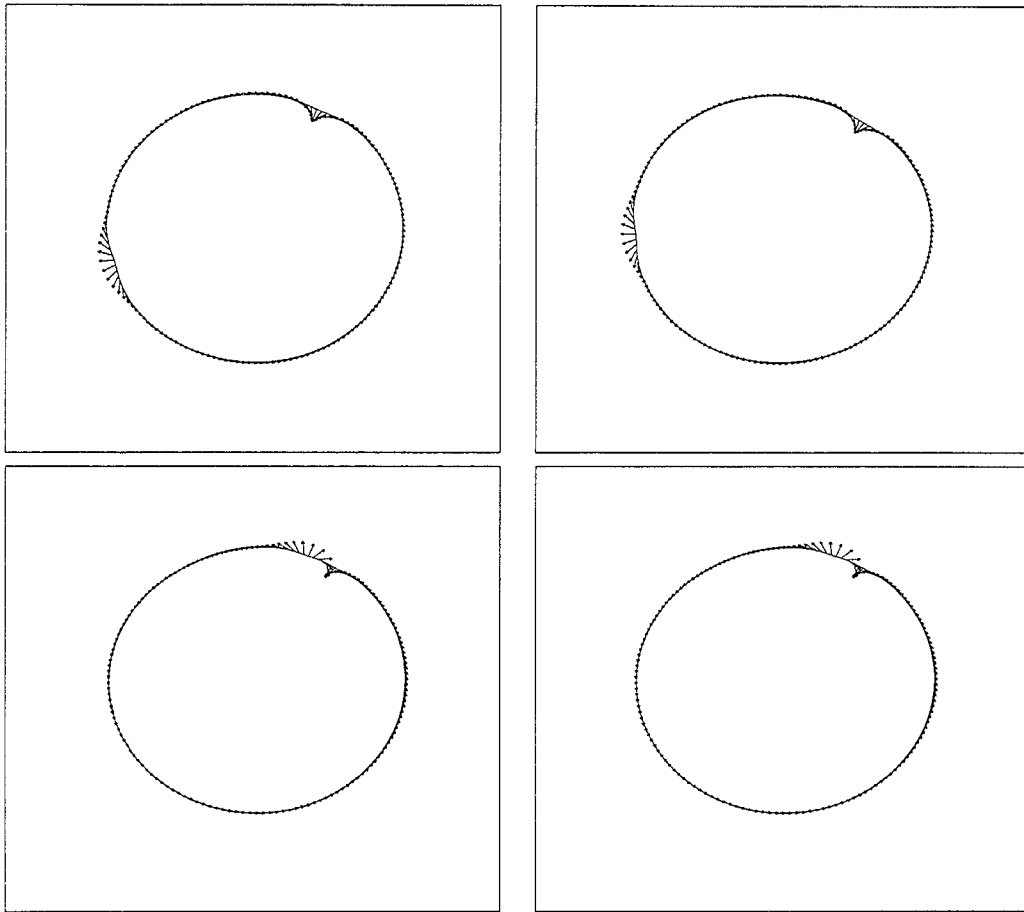


FIG. 6.21 - *Déplacement de deux lignes enroulantes le long de la paroi.*

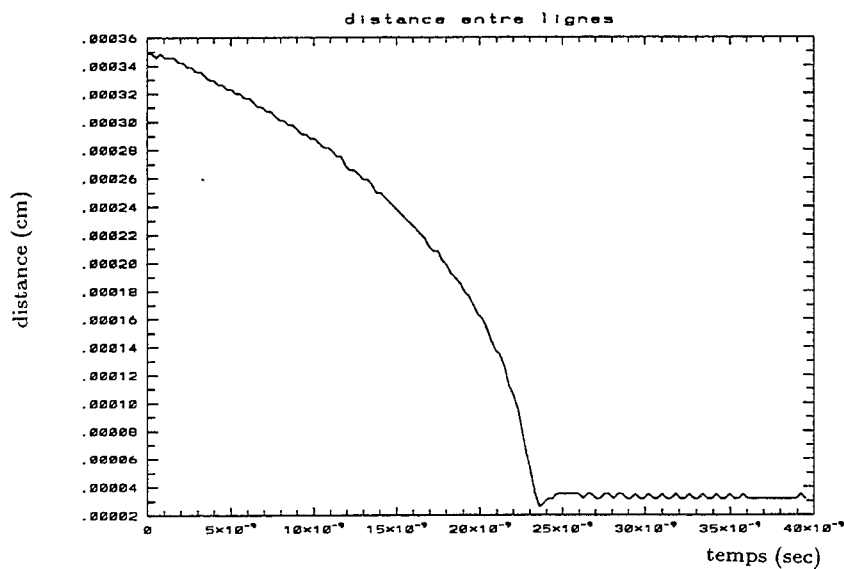


FIG. 6.22 – Evolution de la distance entre lignes

La distance entre les deux lignes à l'équilibre est égale à celle obtenue dans le cas de deux lignes "proches".

6.6 Conclusion

Nous avons validé les deux codes de calcul résolvant le modèle de Slonczewski et le notre. Des résultats de la littérature ont été retrouvés: domaines en labyrinthes autour d'une gravure, translation d'une bulle, annihilation de deux lignes déroulantes.

Une comparaison entre les deux modèles est faite en se basant sur les résultats obtenus par la simulation du déplacement des lignes enroulantes. Nous avons surtout remarqué qu'on ne trouve pas la même distance, à l'équilibre, entre deux lignes enroulantes. La distance obtenue en utilisant notre modèle est très proche de celle donnée par Nakatani [12], alors que celle obtenue par le modèle de Slonczewski est le double de cette dernière. Nous pensons que ceci est dû à notre façon de modéliser le champ démagnétisant dans le cas d'une paroi avec structure.

Conclusion

Cette étude portait sur la simulation numérique des structures magnétiques dans un matériau ferromagnétique. Nous nous sommes intéressés au mouvement de parois et de lignes de Bloch en utilisant une approche bidimensionnelle. Le problème initial (équations de (LLG)) est tridimensionnel. Il fallait donc simplifier et formuler le problème en dimension deux. Pour cela, un travail de modélisation complété par une résolution numérique a été indispensable.

Dans un premier temps, nous avons résolu numériquement le modèle simplifié donné par Slonczewski. On a été amené à traiter le calcul du champ démagnétisant dans le cas d'une paroi sans structure d'aimantation. Nous avons donné une formule explicite et étudié la singularité des fonctions à intégrer.

Nous avons simulé le mouvement d'une paroi sans structure. Ceci a consisté à étudier le mouvement d'une courbe sous l'influence de sa courbure et du champ démagnétisant. Pour cela, nous avons développé un schéma numérique semi-implicite.

Pour simuler le déplacement des lignes, nous avons développé à partir du modèle de Slonczewski un code de calcul permettant de résoudre une équation aux dérivées partielles posées sur une courbe en mouvement.

Dans un second temps, nous avons développé un modèle simplifié des équations de (LLG). Pour cela, nous avons donné une formulation variationnelle de ces dernières. Nous avons écrit ensuite cette formulation dans un système de coordonnées locales attachées à la paroi. Nous avons obtenu deux équations couplant la vitesse normale d'une courbe (paroi) et l'angle azimutal. Nous avons donné une formule explicite du champ démagnétisant tenant compte des structures internes à la paroi. Les interactions entre les structures sont exprimées par des termes non locaux.

Un deuxième code de calcul résolvant les équations de notre modèle a été développé.

Les deux codes ont été testés et validés. Nous avons obtenu dans les deux cas des résultats de la physique. Pour comparer les deux codes, nous avons simulé le mouvement de deux lignes enroulantes. Comme prévu, à l'équilibre, les deux lignes restent proches l'une de l'autre. Nous avons constaté que la distance interligne est inférieure dans l'état obtenu avec notre modèle. Nous pensons que ceci est dû à la manière de modéliser les interactions entre les lignes de Bloch.

Une généralisation de notre démarche de modélisation en dimension trois est envisageable.

ANNEXE A

.1 Calcul du noyau $\mathcal{K}(r)$

Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux points de \mathbb{R}^3 . On pose :

$$r = \left((x' - x)^2 + (y' - y)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous proposons de calculer l'intégrale suivante :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{(r^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz dz'$$

Ce genre de noyau nous a permis de calculer le champ démagnétisant (3.40).

Proposition 7 *Le noyau $\mathcal{K}(r)$ peut être écrit sous la forme suivante :*

$$\mathcal{K}(r) = \frac{2}{hr^2} (\sqrt{r^2 + h^2} - r) \quad (.7)$$

Démonstration

On commence par effectuer le changement de variables $u = z' - z$ pour obtenir :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_{-z-\frac{h}{2}}^{-z+\frac{h}{2}} \frac{1}{(r^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} du$$

On pose ensuite $u = r \times sh\varphi$; ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r) &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \left(\int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{rch\varphi}{r^3 ch^3\varphi} d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \frac{1}{r^2} \left(\frac{sh\varphi_+}{ch\varphi_+} - \frac{sh\varphi_-}{ch\varphi_-} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$r \times sh\varphi_{\pm}^+ = -z \pm \frac{h}{2}$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned} ch\varphi_{\pm}^+ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-z \pm \frac{h}{2}}{r} \right)^2} \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + \left(-z \pm \frac{h}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{1}{hr^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \left(\frac{-z + \frac{h}{2}}{\sqrt{r^2 + (z - \frac{h}{2})^2}} + \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{r^2 + (z + \frac{h}{2})^2}} \right)$$

Posons pour la première intégrale

$$z = \frac{h}{2} - x$$

et pour la deuxième

$$z = -\frac{h}{2} - x$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r) &= \frac{1}{hr^2} \left[\int_0^h \frac{xdx}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \int_{-h}^0 \frac{xdx}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right] \\ &= \frac{2}{hr^2} \int_0^h \frac{xdx}{\sqrt{r^2 + x^2}} \\ &= \frac{2}{hr^2} (\sqrt{r^2 + h^2} - r) \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{K}(r) = \frac{2}{hr^2} (\sqrt{r^2 + h^2} - r)$$

■

ANNEXE B

.1 Changement de variables dans des intégrales sur la paroi

On se donne une courbe Γ paramétrée par la fonction $\underline{x}(\sigma)$
 On suppose que tout point \underline{X} de la paroi P s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{X} = \underline{x}_\lambda(\sigma) + \tau \underline{n}(\sigma) + z \underline{k}$$

avec $\sigma \in]0, 1[$, $\tau \in]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[$, $z \in]-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$. δ et h désignent respectivement la largeur et la hauteur de la paroi.

On pose :

$$\tilde{X}(\sigma, \tau, z) = \underline{x}(\sigma) + \tau \underline{n}(\sigma) + z \underline{k} \quad (.8)$$

Soit $f(\underline{X})$ une fonction quelconque définie sur P . On pose :

$$f(\underline{X}) = \tilde{f}(\sigma, \tau, z)$$

.1.1 Intégrale de la forme $\int_P f(\underline{X}) d\underline{X}$

Soit I une intégrale de la forme :

$$I = \int_P f(\underline{X}) d\underline{X}$$

On effectue le changement de variables dans I de la manière suivante :

$$I = \int \int \int \tilde{f}(\sigma, \tau, z) |\nabla \tilde{X}| d\sigma d\tau dz$$

avec :

$$\nabla \tilde{X} = J = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \sigma}\right)^t \\ \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tau}\right)^t \\ \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial z}\right)^t \end{pmatrix}$$

D'après (.8):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \sigma} &= v(\sigma)(1 - \tau\kappa)\underline{t}(\sigma) \\ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tau} &= \underline{n}(\sigma) \\ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial z} &= \underline{k}\end{aligned}$$

Où

$$v(\sigma) = \left\| \frac{d\underline{x}_\lambda}{d\sigma}(\sigma) \right\|$$

et donc le jacobien J s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} v(\sigma)(1 - \tau\kappa)\underline{t}^x(\sigma) & v(\sigma)(1 - \tau\kappa)\underline{t}^y(\sigma) & 0 \\ \underline{t}^y & -\underline{t}^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$|J| = v(\sigma)(1 - \tau\kappa) \quad (.9)$$

Donc

$$I = \int \int \int \tilde{f}(\sigma, \tau, z) v(\sigma)(1 - \tau\kappa) d\sigma d\tau dz \quad (.10)$$

.1.2 Intégrale de la forme $\int_P \nabla f(\underline{X}) d\underline{X}$

On pose :

$$I = \int_P \nabla f(\underline{X}) d\underline{X}$$

Pour effectuer le changement de variables , nous utilisons l'expression (.10) et celle du gradient (.15). Ce qui donne :

$$\begin{aligned}I &= \int \int \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}(\sigma, \tau, z) \underline{t}(\sigma) \frac{|J|}{v(\sigma)(1 - \tau\kappa)} d\sigma d\tau dz \\ &+ \int \int \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau}(\sigma, \tau, z) \underline{n}(\sigma) |J| d\sigma d\tau dz + \int \int \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(\sigma, \tau, z) \underline{k} |J| d\sigma d\tau dz\end{aligned} \quad (.11)$$

D'après l'expression (.9) de $|J|$, il vient :

$$\begin{aligned}I &= \int \int \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}(\sigma, \tau, z) \underline{t}(\sigma) d\sigma d\tau dz + \int \int \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau}(\sigma, \tau, z) \underline{n}(\sigma) d\sigma d\tau dz \\ &+ \int \int \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(\sigma, \tau, z) \underline{k} d\sigma d\tau dz\end{aligned} \quad (.12)$$

.2 Changement de variables dans les opérateurs de dérivées

Dans ce paragraphe, on considère une courbe Γ_λ dépend d'un paramètre λ et que tout point de P s'écrit :

$$X = \underline{x}_\lambda(\sigma) + \tau \underline{n}_\lambda + z \underline{k}$$

Où $\underline{x}_\lambda(\sigma)$ est une paramétrisation de Γ_λ .

.2.1 Dérivée par rapport λ

Soit $f(\underline{X}, \lambda)$ une fonction quelconque définie sur P . On pose :

$$\tilde{f}(\sigma, \tau, z, \lambda) = f(\underline{x}_\lambda(\sigma) + \tau \underline{n}_\lambda(\sigma), z, \lambda) \quad (.13)$$

D'où :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = \nabla f \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \lambda} + \tau \frac{\partial \underline{n}_\lambda}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \quad (.14)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} &= \nabla f \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \sigma} + \tau \frac{\partial \underline{n}_\lambda}{\partial \sigma} \right) \\ &= \nabla f \cdot (v \underline{t}(\sigma) - \tau \kappa v \underline{t}_\lambda(\sigma)) \\ &= \nabla f \cdot (v - \tau \kappa v) \underline{t}_\lambda(\sigma) \end{aligned}$$

D'où :

$$\nabla f \cdot \underline{t}_\lambda(\sigma) = \frac{1}{v(1 - \tau \kappa)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}$$

On a aussi d'après (.13):

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} = \nabla f \cdot \underline{n}_\lambda(\sigma)$$

Donc :

$$\nabla f(\underline{X}) = \frac{1}{v(1 - \tau \kappa)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} \underline{t}_\lambda(\sigma) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \underline{n}_\lambda(\sigma) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \underline{k} \quad (.15)$$

Où $\underline{k} = (0, 0, 1)$. Par suite (.14) implique :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} - \frac{1}{v(1 - \tau \kappa)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} \left(v \underline{t}^*(\sigma) + \tau \frac{\partial \underline{n}_\lambda(\sigma)}{\partial \lambda} \cdot \underline{t}_\lambda(\sigma) \right) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \left(v \underline{n}^*(\sigma) + \tau \frac{\partial \underline{n}_\lambda}{\partial \lambda} \cdot \underline{n}_\lambda(\sigma) \right) \quad (.16)$$

avec

$$v = \left\| \frac{\partial \underline{x}_\lambda}{\partial \sigma} \right\|$$

$$v_t^* = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \lambda} \cdot \underline{t}_\lambda(\sigma)$$

et

$$v_n^* = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \lambda} \cdot \underline{n}_\lambda(\sigma)$$

Remarque

Si $\lambda = t =$ temps, alors la formule ci-dessus s'écrit:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - \frac{1}{v(1-\tau\kappa)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} \left(v_t(\sigma) + \tau \frac{\partial n(\sigma)}{\partial t} \underline{t}(\sigma) \right) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \left(v_n + \tau \frac{\partial n}{\partial t} \cdot \underline{n} \right) \quad (.17)$$

avec

$$v_t = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \cdot \underline{t}(\sigma)$$

et

$$v_n = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \cdot \underline{n}(\sigma)$$

v_t et v_n sont respectivement les composantes tangentielle et normale de la vitesse de Γ .

.2.2 Dérivée d'une intégrale sur Γ_λ par rapport à λ

Première formule

Nous proposons de développer la dérivée suivante:

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma_\lambda} f(s, \lambda) ds$$

où s désigne une abscisse curviligne définie sur Γ .

On effectue le changement de variables suivant:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma_\lambda} f(s, \lambda) ds &= \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 f(\sigma, \lambda) \frac{ds}{d\sigma} d\sigma \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\sigma, \lambda) \frac{ds}{d\sigma} d\sigma + \int_0^1 f(\sigma, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) d\sigma \end{aligned}$$

Nous devons calculer $\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)$.

On a:

$$\frac{ds}{d\sigma} = \left\| \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \right\|$$

Ce qui donne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 &= 2 \left\| \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \right\| \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\| \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \right\| \\ &= 2 \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial \sigma \partial \lambda}\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\| \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \right\| = \frac{1}{\left\| \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \right\|} \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial \sigma \partial \lambda}$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) = \frac{1}{\left\| \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \right\|} \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial \sigma \partial \lambda} \quad (.18)$$

nous revenons à notre intégrale en utilisant cette égalité pour écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma_\lambda} f(s, \lambda) ds &= \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial f(s, \lambda)}{\partial \lambda} ds + \int_0^1 f(\sigma, \lambda) \frac{1}{\left\| \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \right\|} \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial \sigma \partial \lambda} d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda} ds - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(f(\sigma, \lambda) \frac{1}{\left\| \frac{d\underline{x}}{d\sigma} \right\|} \right) \frac{\partial \underline{x}}{\partial \lambda} d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda} ds - \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial}{\partial s} (f(s, \lambda) \underline{t}(s)) \frac{\partial \underline{x}}{\partial \lambda} ds\end{aligned}$$

Par suite :

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma_\lambda} f(s, \lambda) ds = \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda} ds - \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial f}{\partial s} v_i^* ds - \int_{\Gamma_\lambda} f \kappa v_n^* ds \quad (.19)$$

Deuxième formule

Nous proposons de développer la dérivée d'une intégrale de la forme $\int_{\Gamma_\lambda} \left[\frac{\partial f}{\partial s} \right]^2 ds$.

En suivant la même démarche que ci-dessus, nous pouvons montrer que :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} \int_{\Gamma_\lambda} \left[\frac{\partial f(s, \lambda)}{\partial s} \right]^2 g(s, \lambda) ds &= -2 \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f(s, \lambda)}{\partial s} g(s, \lambda) \right) \frac{\partial f}{\partial \lambda} ds \\ &+ \int_{\Gamma_\lambda} \left[\frac{\partial f(s, \lambda)}{\partial s} \right]^2 \frac{\partial g(s, \lambda)}{\partial \lambda} ds + \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left[\frac{\partial f(s, \lambda)}{\partial s} \right]^2 g(s, \lambda) \right) v_i^* ds \\ &+ \int_{\Gamma_\lambda} \left[\frac{\partial f(s, \lambda)}{\partial s} \right]^2 g(s, \lambda) \kappa v_n^* ds\end{aligned} \quad (.20)$$

.3 Permutation de dérivées partielles

Nous montrons comment permuter la dérivée par rapport à λ et la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne s .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(- \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^3 \left(\frac{d\underline{x}}{d\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial \sigma \partial \lambda} \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{d\underline{x}}{ds} \cdot \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial s \partial \lambda} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial f}{\partial s} \left(\underline{t}(s) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \lambda} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \cdot}{\partial s} \right) = \frac{\partial \cdot}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) - \left(\frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial s \partial \lambda} \cdot \underline{t}(s) \right) \frac{\partial \cdot}{\partial s} \quad (.21)$$

ANNEXE C

Soit une courbe Γ , donnée par:

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\rightarrow \underline{x}(u) \end{aligned}$$

On se donne une subdivision de $u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_n$ de l'intervalle $[0, 1]$ telle que :

$$u_{i+1} = u_i + \delta u_i$$

On pose :

$$r_i = \frac{\delta u_i}{\delta u_{i-1}}$$

et

$$\underline{x}_i = \underline{x}(u_i)$$

En appliquant la proposition 5 du chapitre 4, on écrit la courbure approchée au point \underline{u}_i sous la forme suivante:

$$\kappa_i = 2 \frac{\underline{x}_i \underline{x}_{i+1} \wedge \underline{x}_i \underline{x}_{i-1} \cdot \underline{k}}{\| \|\underline{x}_i \underline{x}_{i+1}\|^2 \underline{x}_{i-1} \underline{x}_i + \|\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i\|^2 \underline{x}_i \underline{x}_{i+1} \|} \quad (.22)$$

Où $k = (0, 0, 1)$.

.1 Analyse numérique de la méthode de calcul de la courbure

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 10 La courbure approchée κ_i au point \underline{x}_i donnée par la formule (.22) vérifie la relation suivante:

$$\kappa(\underline{x}_i) = \kappa_i + F(\delta u_{i-1}, \delta u_i) + G(\delta u_{i-1}^2, \delta u_i^2) \quad (.23)$$

La fonction F est donnée par:

$$F(\delta u_{i-1}, \delta u_i) = \delta u_{i-1} (1 - r_i) \frac{\underline{x}'_i \wedge \underline{x}''_i}{\|\underline{x}'_i\|^5} \underline{x}'_i \cdot \underline{x}''_i \quad (.24)$$

et $G(\delta u_{i-1}^2, \delta u_i^2)$ ne contient que des termes d'ordre supérieur ou égale à deux.

Lemme 6 *La courbure en un point de paramètre u s'écrit sous la forme suivante:*

$$\kappa(u) = \frac{\underline{x}''(u) \wedge \underline{x}'(u)}{\|\underline{x}'(u)\|^3} \quad (.25)$$

Démonstration du théorème

Nous procédons par développement limité au voisinage de \underline{x}_i .
Nous commençons par écrire la formule (.22) :

$$\kappa_i = 2 \frac{NM}{DN} \quad (.26)$$

avec

$$NM = 2\underline{x}_i\underline{x}_{i+1} \wedge \underline{x}_i\underline{x}_{i-1} \cdot \underline{k} \quad (.27)$$

et

$$DN = \|\|\underline{x}_i\underline{x}_{i+1}\|^2 \underline{x}_{i-1}\underline{x}_i + \|\underline{x}_{i-1}\underline{x}_i\|^2 \underline{x}_i\underline{x}_{i+1}\| \quad (.28)$$

Développement limité de NM à l'ordre 3

On pose :

$$\begin{aligned} \underline{x}_i\underline{x}_{i-1} &= -\delta u_{i-1} \underline{x}'(u_i) + \frac{\delta u_{i-1}^2}{2} \underline{x}''(u_i) - \frac{\delta u_i^3}{6} \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \\ \underline{x}_i\underline{x}_{i+1} &= \delta u_i \underline{x}'(u_i) + \frac{\delta u_i^2}{2} \underline{x}''(u_i) + \frac{\delta u_i^3}{6} \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

En portant ces expressions dans (.27), on obtient:

$$\begin{aligned} NM &= - \left(\delta u_{i-1} \frac{\delta u_i^2}{2} + \frac{\delta u_{i-1}^2}{2} \delta u_i \right) \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}''(u_i) \wedge \underline{k} \\ &\quad + \varepsilon(u_{i-1}, u_{-\frac{1}{2}}, u_{\frac{1}{2}}, u_i) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_{i-1}, u_{-\frac{1}{2}}, u_{\frac{1}{2}}, u_i) &= -\delta u_{i-1} \frac{\delta u_i^3}{6} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k} \\ &\quad - \frac{\delta u_{i-1}^2}{2} \frac{\delta u_i^3}{6} \underline{x}''(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k} - \frac{\delta u_{i-1}^3}{6} \delta u_i \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \cdot \underline{x}'(u_0) \wedge \underline{k} \end{aligned}$$

$$-\frac{\delta_{i-1}^3}{6} \frac{\delta u_i^2}{2} (u_{-\frac{1}{2}}) \cdot \underline{x}''(u_0) \wedge \underline{k} - \frac{\delta u_{i-1}^3}{6} \frac{\delta u_i^3}{6} \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \cdot (\underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k})$$

On pose alors :

$$NM = NM_1 + NM_2 + \varepsilon$$

avec

$$NM_1 = \frac{\delta u_{i-1} \delta u_i^2}{2} \underline{x}'(u_i) \wedge \underline{x}''(u_i) \quad (.29)$$

$$NM_2 = \frac{\delta u_i \delta u_{i-1}^2}{2} \underline{x}'(u_i) \wedge \underline{x}''(u_i) \quad (.30)$$

le terme $\underline{x}'(u_i) \wedge \underline{x}''(u_i)$ n'est rien d'autre que le numérateur de la courbure exacte (cf lemme 6

Nous allons faire apparaître le terme $\|\underline{x}'(u_i)\|^3$ du dénominateur de la courbure exacte dans l'expression (.28) de DN et faire disparaître δu_i . Pour cela on va effectuer un développement limité jusqu'à un certain ordre de DN .

Développement limité de DN

On commence par écrire l'expression (.28) de DN sous deux formes différentes:

$$DN = DN_1 = DN_2$$

où DN_1 et DN_2 sont solutions des équations suivantes:

$$(DN_1)^2 = \|\underline{x}_i \underline{x}_{i+1}\|^4 \|\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i\|^2 \left(1 + \frac{\|\underline{x}_{i+1} \underline{x}_i\|^2}{\|\underline{x}_i \underline{x}_{i+1}\|^2} + 2 \frac{\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i \underline{x}_{i-1}}{\|\underline{x}_i \underline{x}_{i-1}\|^2} \right)$$

et

$$(DN_2)^2 = \|\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i\|^4 \|\underline{x}_i \underline{x}_{i-1}\|^2 \left(1 + \frac{\|\underline{x}_i \underline{x}_{i-1}\|^2}{\|\underline{x}_i \underline{x}_{i-1}\|^2} + 2 \frac{\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i \underline{x}_{i-1}}{\|\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i\|^2} \right)$$

Nous écrivons ensuite

$$k_{app} = 2 \left\{ \frac{NM_1}{DN_1} + \frac{NM_2}{DN_2} + \frac{\varepsilon}{DN} \right\} \quad (.31)$$

Nous allons développer DN_1 et DN_2 jusqu'au l'ordre 3.

on pose :

$$\|\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i\|^2 = \delta u_{i-1}^2 \|\underline{x}'(u_i)\|^2 (1 + \varepsilon_1)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = & \frac{1}{\|\underline{x}'(u_i)\|^2} \left(-\delta u_{i-1} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}''(u_i) + \frac{\delta u_{i-1}^2}{6} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) + \right. \\ & + \frac{\delta u_{i-1}^2}{4} \|\underline{x}''(u_i)\|^2 - \frac{\delta u_{i-1}^3}{12} \underline{x}''(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) + \frac{\delta u_{i-1}^2}{6} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \\ & \left. - \frac{\delta u_{i-1}^2}{2} \underline{x}''(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) + \frac{\delta u_{i-1}^3}{36} \|\underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}})\|^2 \right) \end{aligned}$$

On a de même:

$$\|\underline{x}_i \underline{x}_{i+1}\|^2 = \delta u_i^2 \|\underline{x}'(u_i)\|^2 (1 + \varepsilon_2)$$

Avec:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & \frac{1}{\|\underline{x}'(u_i)\|^2} \left\{ -\delta u_i \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}''(u_i) + \frac{\delta u_i^2}{6} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) + \right. \\ & + \frac{\delta u_i^2}{4} \|\underline{x}''(u_i)\|^2 - \frac{\delta u_i^3}{12} \underline{x}''(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) + \frac{\delta u_i^2}{6} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \\ & \left. - \frac{\delta u_i^2}{2} \underline{x}''(u_0) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) + \frac{-\delta u_i^3}{36} \|\underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}})\|^2 \right\} \end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$\underline{x}_{i-1} \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i \underline{x}_{i+1} = \delta u_i \delta u_{i-1} \|\underline{x}'(u_i)\|^2 (1 + \varepsilon_3)$$

Où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = & \frac{1}{\|\underline{x}'(u_i)\|^2} \left(\frac{\delta u_i}{2} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}''(u_i) + \frac{\delta u_i^2}{6} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \right. \\ & - \frac{\delta u_{i-1}}{2} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}''(u_i) - \frac{\delta u_{i-1} \delta u_i}{4} \|\underline{x}''(u_i)\|^2 - \frac{\delta u_{i-1} \delta u_i^2}{12} \underline{x}''(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \\ & \left. + \frac{\delta u_{i-1}^2}{6} \underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) + \frac{\delta u_{i-1}^2 \delta u_i}{12} \underline{x}''(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\delta u_{i-1}^2 \delta u_i^2}{36} \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \cdot \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}))$$

En utilisant les formules ci-dessus, on obtient:

$$DN_1 = \delta u_{i-1} \delta u_i^2 \|\underline{x}'(u_i)\|^3 (1 + \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{r_i^2} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} + \frac{2}{r_i} \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (.32)$$

où

$$r_i = \frac{\delta u_i}{\delta u_{i-1}}$$

avec :

$$\lim_{u_{i-1}, u_{i+1} \rightarrow u_i} \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i = 1, 3$$

Par une démarche semblable à celle ci-dessus, on obtient :

$$DN_2 = \delta u_i \delta u_{i-1}^2 \|\underline{x}'(u_i)\|^3 (1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + r_i^2 \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} + 2r_i \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (.33)$$

On remplace NM_1 , NM_2 , DN_1 et DN_2 par leurs développements dans la formule (.31) il résulte :

$$\kappa_i = \frac{\underline{x}'(u_i) \wedge \underline{x}''(u_i)}{\|\underline{x}'(u_i)\|^3 (1 + \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{r_i^2} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} + \frac{2}{r_i} \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (.34)$$

$$+ \frac{\underline{x}'(u_i) \wedge \underline{x}''(u_i)}{\|\underline{x}'(u_i)\|^3 (1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + r_i^2 \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} + 2r_i \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{2}}} + 2 \frac{\varepsilon}{DN} \quad (.35)$$

Afin de développer le terme $\frac{\varepsilon}{DN}$, on pose :

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon^{**} \quad (.36)$$

avec :

$$\varepsilon^* = -\frac{\delta u_{i-1} \delta u_i^3}{6} \left(\underline{x}'(u_i) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k} - \frac{h_2}{2} \underline{x}''(u_i) \wedge \underline{k} \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \right)$$

$$\varepsilon^{**} = -\frac{\delta u_i \delta u_{i-1}^3}{6} \left(\underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \cdot \underline{x}'(u_i) \wedge \underline{k} + \frac{\delta u_i}{2} \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k} \cdot \underline{x}''(u_i) \right) \\ + \frac{\delta u_i^2}{36} \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k}$$

On écrit ensuite :

$$\frac{\varepsilon}{DN} = \frac{\varepsilon^*}{DN_1} + \frac{\varepsilon^{**}}{DN_2}$$

En remplaçant DN_1 et DN_2 par leurs développements respectifs (.32) et (.33), on obtient :

$$\frac{\varepsilon^*}{DN_1} = -\delta u_i \frac{\underline{x}'(u_i) \wedge \underline{k} \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) - \frac{\delta u_{i-1}}{2} \underline{x}''(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k}}{6 \|\underline{x}'(u_i)\|^3 (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{r_i^2} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} + \frac{2}{r_i} \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\varepsilon^{**}}{DN_2} = -\delta u_{i-1} \frac{\underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k} \cdot \underline{x}'(u_i) + \frac{\delta u_i}{2} \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k} \cdot \underline{x}''(u_i) + \frac{\delta u_i^2}{36} \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k} \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}})}{6 \|\underline{x}'(u_i)\|^3 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + r_i^2 \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} + 2r_i \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_3}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Posons :

$$R_1 = \frac{1}{(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{r_i^2} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} + \frac{2}{r_i} \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$R_2 = \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + r_i^2 \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} + 2r_i \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_3}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

la formule (.34) devient :

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \frac{\underline{x}'(u_i) \wedge \underline{x}''(u_i)}{\|\underline{x}'(u_i)\|^3} R_1 + \frac{\underline{x}'(u_i) \wedge \underline{x}''(u_i)}{\|\underline{x}''(u_i)\|^3} R_2 \\ &+ 2\delta u_i \underline{x}'(u_i) \cdot \frac{\underline{x}''(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k} - \frac{\delta u_{i-1}}{2} \underline{x}(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k}}{6 \|\underline{x}'(u_i)\|^3} R_1 \\ &+ 2\delta u_{i-1} \frac{\underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \cdot \underline{x}'(u_i) \wedge \underline{k} + \frac{\delta u_i}{2} \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \cdot \underline{x}''(u_i) \wedge \underline{k} \frac{\delta u_i}{6} \underline{x}'''(u_{-\frac{1}{2}}) \cdot \underline{x}'''(u_{\frac{1}{2}}) \wedge \underline{k}}{6 \|\underline{x}'(u_i)\|^3} R_2 \end{aligned}$$

On va effectuer un développement limité de R_1 et R_2 .

Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} &= (1 + \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2 A(\varepsilon_2)) \\ \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_2} &= (1 + \varepsilon_3)(1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2 A(\varepsilon_2)) \end{aligned}$$

avec $A(\varepsilon)$ tend vers 0 quand $(\delta u_i, \delta u_{i-1})$ tend vers 0.

Développement limité de R_1 et R_2

On utilise les développements ci-dessus pour écrire :

$$R_1 = \frac{r_i}{r_i + 1} - \frac{r_i}{2(1 + r_i)^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{r_i^2}{(1 + r_i)^3} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) - \frac{r}{2(1 + r_i)} \varepsilon_1 - \frac{r_i}{1 + r_i} \varepsilon_2 + E_1$$

(resp.

$$R_2 = \frac{1}{r_i + 1} - \frac{1}{2r_i(1 + \frac{1}{r_i})^2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{r_i^2(1 + r_i)^3}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) - \frac{r_i}{2(1 + r_i)}\varepsilon_2 - \frac{r}{1 + r_i}\varepsilon_1 + E_2 \quad)$$

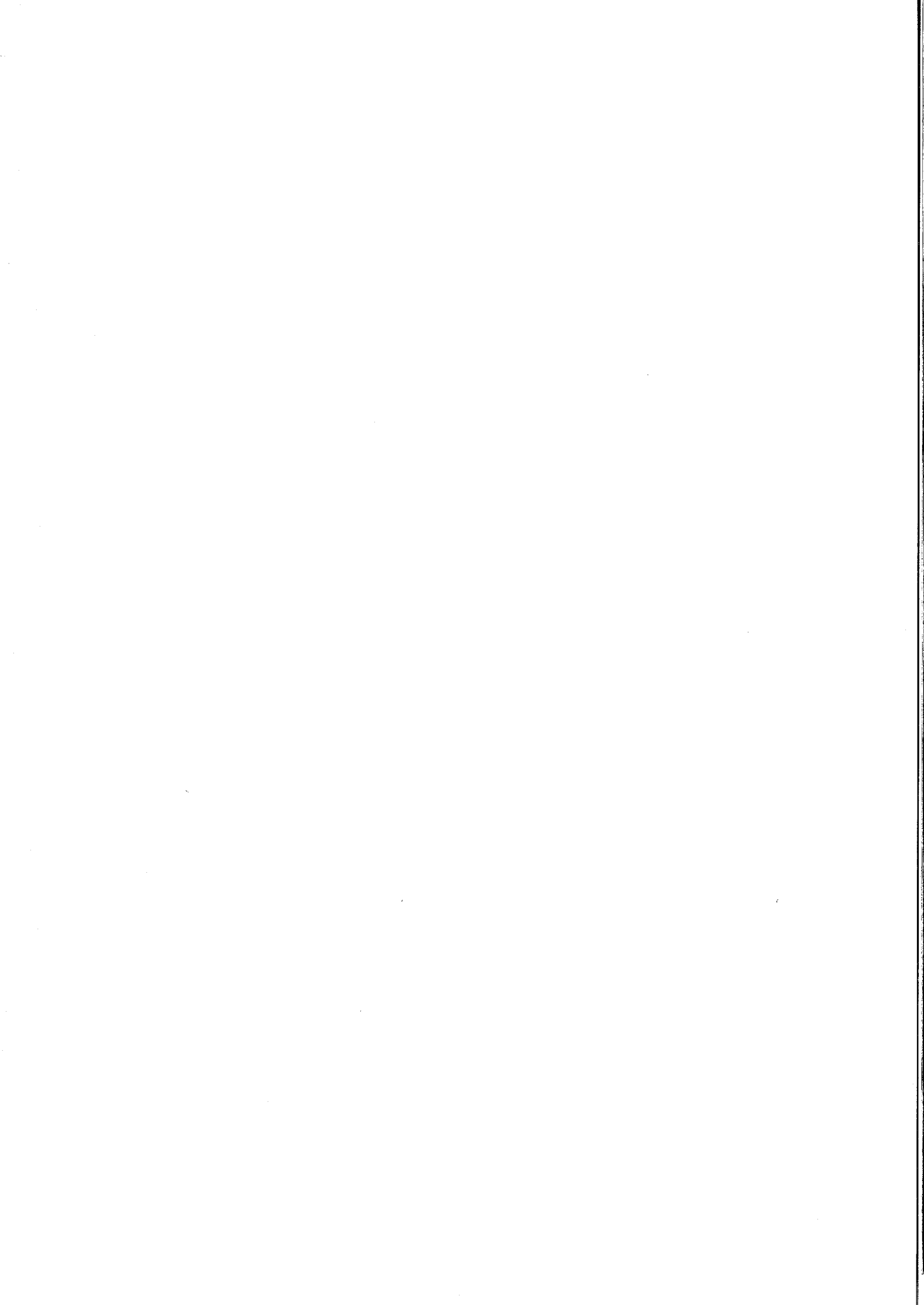
Où E_1 (resp. E_2) est une combinaison de produits en ε d'une part et des termes d'ordre deux en δu_i et δu_{i-1} .

Après simplification des expressions de R_1 et R_2 et en ne gardant que les termes d'ordre un en $\delta u_i, \delta u_{i-1}$, on obtient le théorème. ■

Bibliographie

- [1] M. AID. *Simulation de la répartition en domaines des pièces polaires des têtes d'enregistrement magnétique couches minces*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [2] ASADA, H. MATSUYAMA, and S. KONISHI. Computer simulation of vertical Bloch line propagation around a stripe domain head. *IEEE Trans. Magn.*, 21:1770–1785, 3 1985.
- [3] T. G. W. BLAKE, Y. Tu., and E. D. TORRE. Effects of finite anisotropy parameter q in the determination of magnetic bubble material parameters. *IEEE Trans. Magn.*, 18(5):985–988, september 1982.
- [4] C. BONJOUR. *Inversion de systèmes linéaires pour la simulation des matériaux ferromagnétiques. Singularités d'une configuration d'aimantation*. Thèse, Université Joseph Fourier de Grenoble, 1996.
- [5] R. DAUTRAY and J. L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome 1 et 2*. Masson, 1984.
- [6] A. H. ESCHENFELDER. *Magnetic Bubble Technology*. Springer-Verlag, 1991.
- [7] E. H. KHANNOUS et P. BARAS. Calcul du champ démagnétisant dans un matériau ferromagnétique. *28ème Congrès d'Analyse Numérique, La Londe-Les Maures, 1996*.
- [8] M. GAGE and R.S. HAMILTON. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Diff. Geom.*, 23(6):69–96, 6 1986.
- [9] G. MATSUYAMA, k. RONAN, and S. KONISHI. A three dimensional computer model of domain wall motion in magnetic bubble materials. *IEEE Trans. Magn.*, 21(6):2680–2687, November 1985.
- [10] M. A. GRAYSON. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. Diff. Geom.*, 26(6):285–314, 1987.
- [11] N. HAYASHI and K. ABE. Computer simulation of magnetic domain bubble wall motion. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 15(9):1683–1694, september 1976.
- [12] N. HAYASHI and H. MIKAMI. Computer simulation of magnetic bubble Bloch lines motion bubble. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 19(2):295–306, February 1980.

- [13] N. HAYASHI, H. MIKAMI, and K. ABE. Computer simulation of bubble motion. *IEEE Trans. Magn.*, 13(5):1345–1347, september 1977.
- [14] N. HAYASHI and Y. NAKATANI. Computer simulation of magnetic domain wall motion to derive effective interaction forces between vertical Bloch lines. *IEEE Trans. Magn.*, 22(5):796–798, september 1986.
- [15] N. HAYASHI and Y. NAKATANI. Numerical calculation of magnetic bubble domain motion based on a lumped-constant model of vertical Bloch lines. *Jpn J. App. Phys.*, 23(3):406–418, 3 1986.
- [16] Y. HIDAKA and H. MATSUTERA. Bloch line stabilization in stripe domain wall for Bloch line memory. *IEEE Trans. Magn.*, 20(5):1135–1140, september 1984.
- [17] E. H. KHANNOUS. Simulation numérique pour les matériaux ferromagnétiques. *26ème Congrès d'Analyse Numérique, Les Karellis, 1994.*
- [18] S. KONISHI. A new ultra-high-density solid state memory Bloch line memory. *IEEE Trans. Magn.*, 19(5):1838–1840, september 1983.
- [19] A. P. MALOZEMOFF and J. C. SLONCZEWSKI. *Magnetic domain walls in bubble materials.* Academic Press, 1979.
- [20] V. P. MASLOV and V. M. CHETVERIKOV. Asymptotic solutions in a uniaxial cylindrical magnetic domain film. *Teor. Mat. Fiz.*, 60(3):447–467, september 1984.
- [21] J. A. SETEHIAN. Curvature and the evolution of fronts. *Comm. Math. Phys.*, 101:487–499, 1985.
- [22] J. A. SETEHIAN. Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-jacobi equations and conservation laws. *J. Diff. geom.*, 31(6):131–161, 6 1990.
- [23] J. C. SLONCZEWSKI. *Intern. J. Magnetism*, 2(5):85–97, 1972.
- [24] A. THIELE. The theory of cylindrical magnetic domains. *Bell sys. Tech. J.*, pages 3287–3335, 48 1969.
- [25] N. THIELE. Applications of gyrocoupling vector and dissipation dyadic in the dynamics of magnetic domains. *J. Appl. Phys.*, 45(1):377–393, january 1974.
- [26] A. VIALIX. *Simulation de la structure de parois dans un matériau magnétique.* Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.
- [27] L. ZIMMERMANN. *Nucléation et stabilité des lignes de Bloch dans les grenats ferromagnétiques à anisotropie uniaxiale: Application aux mémoires à lignes de Bloch.* Thèse, Université de Paris-Sud, 1991.



Résumé :

Ce travail porte sur la simulation numérique des structures magnétiques dans les matériaux ferromagnétiques. Nous nous sommes intéressés au mouvement de parois et de lignes de Bloch en utilisant une approche bidimensionnelle. Le problème initial, équations de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG), est tridimensionnel. Il fallait donc simplifier le problème et le formuler en dimension deux avant de faire la simulation.

Dans un premier temps, nous avons résolu numériquement le modèle simplifié des équations de (LLG) donné par Slonczewski. Nous avons calculé le champ démagnétisant dans le cas d'une paroi sans structure. Des études locales des singularités du champ au niveau de la paroi ont été menées. Une formule de quadrature pour approcher le champ est aussi proposée. L'étude est ensuite généralisée au cas d'une paroi avec structure. La discrétisation du modèle de Slonczewski nous a conduit à étudier entre autres l'évolution d'une courbe sous l'influence de sa courbure. Un schéma semi-implicite est proposé et une méthode d'approximation de la courbure pour une courbe définie par un nombre fini de points est détaillée et analysée. Nous avons également développé un algorithme pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles posée sur une courbe en mouvement.

Dans un second temps, nous avons proposé un nouveau modèle simplifié des équations de (LLG). Il est donné par deux équations couplant la vitesse normale d'une courbe (centre de la paroi) et l'angle azimutal. Contrairement à Slonczewski, nous avons tenu compte des interactions entre lignes de Bloch.

Nous avons terminé l'exposé par la validation des différentes discrétisations et approximations, des résultats de la physique sont obtenus: domaines en labyrinthes, translation d'une bulle, annihilation de deux lignes déroulantes, déplacement de deux lignes enroulantes. La différence entre les deux modèles est aussi dégagée.

Abstract :

This work deals with numerical simulation of ferromagnetic material structures. It concerns the magnetic domain wall motion and the Bloch line displacement by a two dimensional approach. The initial problem, Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) equations, is tridimensional. It was necessary to formulate the problem into two dimension before simulation.

First, we solved numerically the simplified model of Slonczewski. A rigorous calculation of the demagnetizing field in the domain wall, with arbitrary internal structure, is proposed. Numerical algorithms for propagating a curve along its normal vector with the speed dependent on curvature is proposed. We also developed a numerical method to solve a partial differential equation on a curve moving along its normal vector.

Secondly, we derived a new model from the LLG equations. The system of equations obtained couples the normal velocity of a curve (wall center) and the demagnetizing azimuthal angle in the wall. Interactions between Bloch lines are taken into account.

Numerical experiments agree with the physical theory: annihilation of unwinding Bloch lines, displacement of winding Bloch lines, bubble transport.

Mots clés : simulation numérique, matériau ferromagnétique, équations de Landau-Lifshitz-Gilbert, modèle de Slonczewski, mouvement de parois, déplacement de lignes de Bloch, champ démagnétisant, évolution de courbes.