



HAL
open science

Composition de polyèdres associés aux problèmes d'optimisation combinatoire

Ahmed Hadjar

► **To cite this version:**

Ahmed Hadjar. Composition de polyèdres associés aux problèmes d'optimisation combinatoire. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1996. Français. NNT : . tel-00345405

HAL Id: tel-00345405

<https://theses.hal.science/tel-00345405>

Submitted on 9 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée par

Ahmed HADJAR

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble

(arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité: Recherche Opérationnelle

**COMPOSITION DE POLYEDRES
ASSOCIES AUX PROBLEMES
D'OPTIMISATION COMBINATOIRE**

soutenue le 12 juillet 1996 devant le jury suivant :

Prof.	J.	FONLUPT	Directeur
Prof.	T.M.	LIEBLING	Rapporteur
Prof.	A.R.	MAHJOUR	Rapporteur
Prof.	J.F.	MAURRAS	Examineur
Prof.	D.	NADDEF	Examineur

Thèse préparée au sein du laboratoire LEIBNIZ-IMAG

Il m'est agréable de pouvoir remercier mon directeur de recherche, Monsieur le Professeur J. FONLUPT, qui m'a fait découvrir beaucoup de sujets intéressants et qui, par ses précieux conseils et ses permanents encouragements, m'a aidé à structurer mes idées et à donner forme à cette thèse. Je désire lui témoigner ici ma profonde gratitude et rendre hommage à sa compétence et son inaltérable gentillesse.

Pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail et pour le grand honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury, je tiens à exprimer chaleureusement ma reconnaissance à Messieurs les Professeurs T.M. LIEBLING, A.R. MAHJOUR, J.F. MAURRAS, et D. NADDEF.

J'adresse mes plus vifs remerciements à tous les membres de l'ex-laboratoire ARTEMIS et du laboratoire LEIBNIZ de Grenoble, dans lesquels j'étais si bien entouré, et tout spécialement à chacun des chercheurs des équipes Graphes, Optimisation Combinatoire et Recherche Opérationnelle, dont le contact m'a été très bénéfique.

Je voudrais remercier également Monsieur le Professeur M. LAS VERGNAS qui m'a permis de m'intégrer, durant ma dernière année de thèse, à son laboratoire. Que tous les membres de l'Equipe Combinatoire de l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6) trouvent ici l'expression de ma sincère sympathie.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires	3
1.1 Polyèdres	3
1.2 Projection de Polyèdres	5
1.3 Principes de base de la programmation dynamique	7
2 Composition de polyèdres et programmation dynamique	15
2.1 Introduction	15
2.2 Polyèdres parfaitement composables	16
2.3 Caractérisation des polyèdres parfaitement composables	21
2.4 Descriptions étendues parfaites	29
2.5 Adjonction de graphes artificiels	36
2.6 Formulations compactes	47
2.7 Conclusion et remarques	49
3 Composition de polyèdres du voyageur de commerce graphique	51
3.1 Introduction	51
3.2 Le polyèdre du voyageur de commerce graphique	51
3.3 Composition de polyèdres	55
3.4 Etude des facettes des descriptions étendues	58
3.5 Composition d'inéquations	66
3.6 Application aux graphes série-parallèles	76
4 Polytope des stables et composition par identification de sous-graphes	79
4.1 Introduction	79
4.2 Préliminaires	80

4.3	Identification d'une paire d'amis	83
4.4	Composition par identification de sous-graphes	88
4.4.1	Composition de graphes fortement compatibles	93
4.4.2	Composition de graphes faiblement compatibles	97
4.4.3	Collage d'une feuille non-critique	119
4.4.4	Collage d'une feuille presque bipartie	121
4.4.5	Collage d'une feuille série-parallèle	128
4.4.6	Identification de stables de faible cardinalité	131
4.4.7	Stables déconnectants	135
4.5	Conclusion et remarques	136
5	Polytope des stables et jonction de deux sommets	139
5.1	Introduction	139
5.2	Jonction d'une paire d'ennemis	140
5.3	Jonction d'une paire d'ennemis faible	140
5.4	Jonction d'une deux-paire	143
	Conclusion	153
	Bibliographie	155

Introduction

De nombreux problèmes d'optimisation combinatoire se formulent comme des problèmes de maximisation d'une fonction linéaire sur un polyèdre n'ayant que des sommets entiers, en l'occurrence l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des solutions réalisables.

Des efforts considérables ont été investis dans la description de ces polyèdres par des systèmes d'inéquations linéaires. La motivation principale de ces recherches est le développement, par le biais de la programmation linéaire, d'algorithmes pour résoudre les problèmes d'optimisation considérés.

Cependant, plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire sont difficiles (NP-durs [56]); la caractérisation des polyèdres qui leurs sont associés s'avère aussi difficile dans le cas général [70]. Une approche classique, consiste à décomposer le problème en sous-problèmes dont les polyèdres associés soient connus ou faciles à décrire; une composition de ces derniers polyèdres conduit à une description de celui associé au problème initial. Cette approche par composition est l'objet de ce travail.

Ayant comme principe la décomposition des problèmes, la programmation dynamique a permis de mettre en évidence des algorithmes de résolution de certains problèmes d'optimisation. Dans le chapitre 2, nous ferons le lien entre la programmation dynamique et la description des polyèdres associés à des problèmes pouvant être décomposés. Nous donnerons des résultats généraux unifiant des recherches existantes dans le domaine de la composition des polyèdres. Ces résultats permettent, dans certaines situations, d'obtenir des formulations compactes (ayant un nombre polynomial de contraintes et un nombre polynomial de variables) des problèmes d'optimisation considérés.

Comme exemple illustratif, nous considérerons, dans le chapitre 3, le polyèdre du voyageur de commerce graphique et nous étudierons les conséquences polyédrales de la

”deux-somme” de deux graphes donnés. Nous caractériserons également les inéquations, du nouveau système, obtenues par composition de celles des systèmes décrivant les polyèdres composés.

Le chapitre 4 fera l’objet de la composition des polytopes des stables. L’opération de composition considérée consiste à identifier deux sous-graphes isomorphes de deux graphes. Cette composition étant difficile dans son cas général, nous l’approcherons d’une manière itérative (i.e. l’identification d’une paire de sommets à la fois) et nous montrerons que, sous certaines conditions, le polytope des stables du nouveau graphe est entièrement décrit par l’union des systèmes définissant les polytopes associés aux graphes composés. Nous en déduisons que, dans ces cas particuliers, la perfection et la h-perfection se préservent.

Le chapitre 5 sera consacré à la description du polytope des stables d’un graphe obtenu par rajout d’une nouvelle arête à un graphe donné. Cette opération induit parfois des facettes moins évidentes. En faisant appel à des résultats du chapitre précédent, nous étudierons des cas où cette description peut être obtenue par adjonction, à l’ancien système, des inéquations associées aux nouvelles cliques maximales. Cela préserve la perfection et la h-perfection.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Polyèdres

Dans cette section, nous donnons brièvement quelques définitions et propriétés, relatives aux polyèdres, qui seront utilisées dans ce document. Une présentation détaillée de ces notions est donnée dans les chapitres 7 et 8 de [103].

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ si, pour un certain vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$.

Si, de plus, $\lambda \geq 0$ (resp. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$) (resp. $\lambda \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$), on dit que x est une *combinaison conique* ou *positive* (resp. *affine*) (resp. *convexe*) de ces vecteurs.

Etant donné un sous-ensemble non-vidé $S \subset \mathbb{R}^n$, l'enveloppe linéaire (resp. conique) (resp. affine) (resp. convexe), notée $\text{lin}(S)$ (resp. $\text{cone}(S)$) (resp. $\text{aff}(S)$) (resp. $\text{conv}(S)$), est l'ensemble des points qui sont des combinaisons linéaires (resp. coniques) (resp. affines) (resp. convexes) de points de S .

Des points de \mathbb{R}^n sont *linéairement indépendants* (rep. *affinement indépendants*) si aucun d'eux ne s'écrit comme combinaison linéaire (resp. combinaison affine) des autres points avec au moins deux scalaires $\lambda_i, \lambda_j > 0$. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont linéairement dépendants (rep. affinement dépendants).

Un ensemble P de points de \mathbb{R}^n est appelé *polyèdre* s'il est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de \mathbb{R}^n . Il est donc l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires, on note

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

et on dit que ce système *définit* ou *détermine*, ou encore *caractérise*, le polyèdre P . On peut aussi écrire

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : A^*x = b^*, A^+ \leq b^+\}$$

où $A^*x = b^*$ est le système des équations implicites de $Ax \leq b$. Un polyèdre borné est appelé *polytope*.

Chaque polyèdre P peut s'écrire

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$$

où V et E sont deux sous-ensembles finis de points de \mathbb{R}^n .

On appelle *intérieur* de P , et on note $\text{int}(P)$, l'ensemble de points défini par

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : A^*x = b^*, A^+x < b^+\}.$$

Il s'en suit que si P contient un seul point alors, P coïncide avec son intérieur.

La *dimension* d'un polyèdre P , notée $\text{dim}(P)$, est le nombre maximum de points affinement indépendant appartenant à P ; $\text{dim}(P) = n - \text{rg}(A^*)$, où $\text{rg}(A^*)$ est le rang de la matrice A^* . P est dit de *pleine dimension* si $\text{dim}(P) = n$, et dans ce cas, il existe un unique système définissant P (à une multiplication près par un scalaire positif).

Un sous-ensemble F de P est une *face* de P , si $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ pour un sous-système $A'x \leq b'$ de $Ax \leq b$. La face F est dite propre si $F \neq P$.

Une *facette* de P est une face, de ce polyèdre, telle que $\text{dim}(F) = \text{dim}(P) - 1$. Les faces de dimension nulle sont les *sommets* (ou les *points extrêmes*) de P . Si \bar{x} est un sommet de P alors, $\bar{x} = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$, avec $\{x^1, x^2\} \subseteq P$, implique que $\bar{x} = x^1 = x^2$. Une face est, elle-même, un polyèdre.

Pour toute face F de P , il existe $c \in \mathbb{R}^n$ (éventuellement nul) tel que

$$F = \max\{cx : x \in P\}$$

Une inéquation $ax \leq a_0$ est dite *valide* pour P si $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : ax \leq a_0\}$. On dit que $F = \{x \in P : ax = a_0\}$ est une face de P *induite* ou *définie* par l'inéquation $ax \leq a_0$.

L'inéquation $ax \leq a_0$ est *essentielle* pour P si elle induit une facette de ce polyèdre.

Une inéquation est *redondante* dans un système $Ax \leq b$ si le sous-système abotenu à

partir de $Ax \leq b$ en supprimant cette inéquation définit le même polyèdre que $Ax \leq b$. Si aucune inéquation n'est redondante, le système est dit *minimal* et toutes ses inéquations sont dites essentielles.

Un système $Ax \leq b$ est minimal si et seulement si pour toute paire d'inéquations $a^1x \leq a_0^1$ et $a^2x \leq a_0^2$ de $A^+x \leq b^+$, il existe un point \bar{x} tel que $A\bar{x} \leq b$, $a^1\bar{x} \leq a_0^1$ et $a^2\bar{x} < a_0^2$.

Etant donné un problème d'optimisation combinatoire (problème du voyageur de commerce, problème du stable de poids maximum, etc...). Le polyèdre associé à ce problème est l'enveloppe convexe de tous les vecteurs caractéristiques des objets combinatoires en question (tournées du voyageur de commerce, stables, etc...).

La connaissance d'un système d'inéquations linéaires définissant le polyèdre P associé à un problème d'optimisation combinatoire permet la résolution de celui-ci par les algorithmes de programmation linéaire [42, 69, 71], i.e. trouver l'optimum du programme linéaire suivant :

$$\max\{cx : x \in P\}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur coût. Rappelons que la résolution d'un programme linéaire est un problème polynomial en la taille de ce programme [69, 71].

Cependant, le caractère difficile de la majorité des problèmes d'optimisation combinatoire [56], fait en sorte que la caractérisation des polyèdres qui leurs sont associés soit aussi difficile [70] et n'est connue que pour des cas particuliers de ces problèmes (voir [60]). Notons que la plupart des polyèdres connus (associés à des problèmes d'optimisation faciles) sont définis par des systèmes ayant un nombre exponentiel d'inéquations (voir [60]).

1.2 Projection de Polyèdres

Etant donné un polyèdre non-vide P tel que

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : Ax + By \leq b, Dx \leq d, y \geq 0\}$$

on définit la projection de P sur l'espace engendré par les variables x_i , $i = 1, \dots, n$, notée $\mathbb{P}_x(P)$, comme étant l'ensemble de points suivant :

$$\mathbb{P}_x(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } (x, y) \in P\}.$$

Une première méthode, pour déterminer un système d'inéquations linéaires définissant le polyèdre $\mathbb{IP}_x(P)$, a été proposée par Fourier et Motzkin (voir [42]); elle procède par élimination des variables y_j ($j = 1, \dots, m$) une à la fois. Balas et Pulleyblank [4] proposent une autre méthode qui généralise la première et qui consiste à éliminer toutes les variables y_j d'un seul coup en utilisant un cône de projection. En gardant son principe, cette deuxième méthode a été généralisée par Padberg et Sung [100] pour les transformations affines des polyèdres.

Le résultat de Balas et Pulleyblank s'énonce comme suit :

Théorème 1.2.1 [4]

$$\mathbb{IP}_x(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Dx \leq d, vAx \leq vb, \forall v \in \text{extr}(C)\}$$

où $\text{extr}(C)$ est l'ensemble des rayons extrêmes du cône

$$C = \{v \in \mathbb{R}^q : vB \geq 0, v \geq 0\}.$$

D'après ce théorème, chaque inéquation du système définissant $\mathbb{IP}_x(P)$ s'obtient en composant des inéquations de P suivant un rayon extrême du cône de projection C .

La difficulté de cette méthode réside dans la détermination de tous les rayons extrêmes de C . L'énumération de ces rayons par une étude analytique du cône n'est pas toujours évidente (voir [100]), néanmoins, cela peut se faire à l'aide des moyens informatiques (par exemple, en utilisant le logiciel Mathematica [107] où la méthode de Avis et Fukuda [2] est implémentée).

En pratique, cette méthode de projection génère souvent un grand nombre d'inéquations redondantes. D'après Balas [3], la détermination des rayons extrêmes qui induisent des facettes de Q est une question qui n'a pas de réponse en termes de propriétés du cône de projection. Il propose alors, dans le cas où Q est de pleine dimension, une autre description du polyèdre à projeter (en transformant le système le décrivant) tel que : une inéquation $ax \leq a_0$ définit une facette de Q si et seulement si (a, a_0) est un rayon extrême du nouveau cône de projection. Toutefois, cette transformation n'est pas pratique en général, et le nouveau cône de projection s'obtient, lui-même, par projection d'un autre cône.

1.3 Principes de base de la programmation dynamique

La programmation dynamique, due à Richard Bellman, a été utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation complexes. Une présentation plus détaillée de cette approche de résolution est donnée dans [16] et [94].

La décomposition du problème en sous-problèmes étant un principe de base de la programmation dynamique, cette approche a permis de mettre en évidence des algorithmes de résolution pour un grand nombre de problèmes combinatoires définis sur des graphes obtenus par composition [1, 11, 15, 19, 23, 37, 38, 51, 52, 66, 84, 104]. Ces graphes se construisent, par des opérations de composition, à partir de graphes de primitifs (ou de base) qui sont des graphes pour lesquels le problème d'optimisation considéré est facile à résoudre.

En général, la complexité de ces algorithmes est polynomiale en la taille du graphe.

Nous illustrons les principes de base de la programmation dynamique à travers la résolution du problème du voyageur de commerce graphique et celui du stable de poids maximum sur les graphes série-parallèles.

Les *graphes série-parallèles* sont les graphes non-contractibles à K_4 [44], où K_4 est un graphe complet ayant 4 sommets. Ils peuvent être construits récursivement de différentes manières [44], nous en considérons la suivante :

- Le graphe non-orienté $(\{u, v\}, \{(u, v)\})$ est un graphe série-parallèle de sommets terminaux u et v .

- Si G_1 et G_2 sont deux graphes série-parallèles de sommets terminaux u_1, v_1 et u_2, v_2 respectivement, alors :

(a) Le graphe obtenu à partir de G_1 et G_2 par identification des sommets u_1 et u_2 est un graphe série-parallèle ayant pour sommets terminaux v_1 et v_2 .

Nous avons, dans ce cas, *une composition en série*.

(b) Le graphe obtenu à partir de G_1 et G_2 par identification des sommets u_1 et u_2 et aussi des sommets v_1 et v_2 est un graphe série-parallèle ayant pour sommets terminaux u et v , avec $u = u_1 = u_2$ et $v = v_1 = v_2$.

Nous avons, dans ce cas, *une composition en parallèle*.

On peut donc associer à un graphe série-parallèle G un arbre de composition (qui

schématise la composition) dont la racine correspond au graphe G et les feuilles aux graphes primitifs qui sont, dans ce cas, les arêtes du graphe.

Un tel arbre peut être déterminé en un temps polynomial par rapport au nombre d'arêtes [104].

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ muni d'une fonction coût définie sur E . Les deux problèmes du voyageur de commerce sont définis comme suit :

- Le problème *classique*, noté TSP , consiste à trouver un cycle hamiltonien de G de coût minimum. Un cycle hamiltonien passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe;
- le problème *graphique*, noté $GTSP$, consiste à trouver une tournée de G de coût minimum qui passe, au moins une fois, par chaque sommet du graphe. Une tournée est donc un sous-graphe de G qui est connexe et eulerien où chacune de ses arêtes peut être utilisée plusieurs fois.

Le TSP et le $GTSP$ sont connus pour être NP-durs. Notons que s'il existe des arêtes de G de coût négatif, alors l'optimum est non-borné pour le $GTSP$. Par contre, si tous les coûts sont positifs, alors une arête de G ne peut être utilisée que 0, 1 ou 2 fois dans une tournée optimale.

Plus de détails, concernant ces deux problèmes, seront donnés dans la section 3.2 du chapitre 3.

En se basant sur le principe de la programmation dynamique, les deux problèmes du voyageur de commerce ont été résolus polynomialement sur plusieurs classes de graphes définies par composition. Parmi ces classes, on trouve les graphes série-parallèles [37, 52], les graphes non-contractibles à $K_5 - \{e\}$ [11], les graphes 3-connexes maximaux non-contractibles à M_3 [51] (où M_3 est donné dans la figure 3.1) et les graphes de Halin [38, 51].

Nous utilisons maintenant la programmation dynamique pour résoudre le $GTSP$ sur les graphes série-parallèles. Bien que le principe soit le même, la méthode que nous allons donner diffère des algorithmes donnés dans [37] et [52]. Cette différence réside dans la manière de composer un graphe série-parallèle.

Supposons que G soit un graphe de sommets terminaux u et v obtenu par une com-

position en parallèle de deux graphes G_1 et G_2 , ayant chacun plus de deux sommets, tels que u_1, v_1 et u_2, v_2 soient les sommets terminaux de G_1 et G_2 respectivement. Le sous-ensemble de sommets $\{u, v\}$ est un déconnectant de G .

Soit T un sous-ensemble d'arêtes de G définissant une tournée du voyageur de commerce graphique. Désignons par T_1 (resp. par T_2) l'ensemble d'arêtes de T appartenant à G_1 (resp. à G_2). T_1 et T_2 sont appelés *tournées partielles* de G_1 et G_2 respectivement. Le support de $T_i, i = 1, 2$, noté $Sup(T_i)$, est le sous-graphe de G_i engendré par les arêtes de T_i .

L'ensemble des tournées partielles d'un graphe $G_i, i \in \{1, 2\}$, est partitionné en trois classes définies comme suit :

- C_0^i est la classe des tournées partielles T_j de G_i telles que $Sup(T_j)$ soit connexe et les degrés des sommets u_i et v_i dans $Sup(T_j)$ soient pairs (voir figure 1.1(a)).
- C_1^i est la classe des tournées partielles T_j de G_i telles que $Sup(T_j)$ soit connexe et les degrés des sommets u_i et v_i dans $Sup(T_j)$ soient impairs (voir figure 1.1(b)).
- C_2^i est la classe des tournées partielles T_j de G_i telles que $Sup(T_j)$ ne soit pas connexe et les degrés des sommets u_i et v_i dans $Sup(T_j)$ soient pairs (voir figure 1.1(c)).

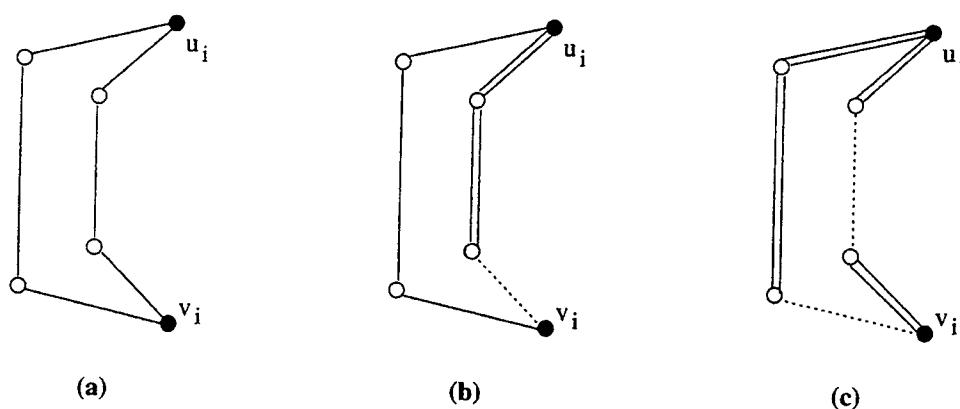


FIG. 1.1 - Exemples de tournées partielles de G_i .

Si nous considérons le graphe $\overline{G}_i, i \in \{1, 2\}$, obtenu à partir de G_i en reliant les sommets u et v par une arête e , alors les tournées partielles de G_i appartenant aux classes C_0^i, C_1^i et C_2^i correspondent à des tournées de \overline{G}_i en rajoutant l'arête e 0, 1 et 2 fois respectivement.

Chaque tournée T de G est un mariage (ou une composition) de deux tournées

partielles T_1 de G_1 et T_2 de G_2 qui satisfont un des quatre points suivants :

$$\begin{aligned} T_1 \in C_0^1 \text{ et } T_2 \in C_0^2 \\ T_1 \in C_1^1 \text{ et } T_2 \in C_1^2 \\ T_1 \in C_0^1 \text{ et } T_2 \in C_2^2 \\ T_1 \in C_2^1 \text{ et } T_2 \in C_0^2 \end{aligned}$$

Les quatre mariages énumérés ci-dessus sont dits *admissibles*.

Notons maintenant par C_0 , C_1 et C_2 les classes des tournées partielles du graphe G lui-même définies, de la même façon que les classes considérées ci-dessus, relativement aux sommets terminaux u et v . La classe C_0 constitue alors, l'ensemble de toutes les tournées de G .

Une tournée partielle T de G appartenant à la classe C_1 est également obtenue à partir de deux tournées partielles T_1 de G_1 et T_2 de G_2 par un des quatre mariages admissibles suivants :

$$\begin{aligned} T_1 \in C_0^1 \text{ et } T_2 \in C_1^2 \\ T_1 \in C_1^1 \text{ et } T_2 \in C_0^2 \\ T_1 \in C_1^1 \text{ et } T_2 \in C_2^2 \\ T_1 \in C_2^1 \text{ et } T_2 \in C_1^2 \end{aligned}$$

Par contre, $T \in C_2$ si et seulement si $T_1 \in C_2^1$ et $T_2 \in C_2^2$.

Supposons que le graphe G soit obtenu par une composition en série de G_1 et G_2 et ait comme sommets terminaux v_1 et v_2 . Dans ce cas, et contrairement à la composition en parallèle où les 9 mariages possibles sont admissibles, une tournée partielle T de G se compose de deux tournées partielles T_1 de G_1 et T_2 de G_2 selon, seulement, quatre mariages admissibles qui sont :

$$\begin{aligned} T_1 \in C_0^1 \text{ et } T_2 \in C_0^2 &\Rightarrow T \in C_0 \\ T_1 \in C_0^1 \text{ et } T_2 \in C_2^2 &\Rightarrow T \in C_2 \\ T_1 \in C_1^1 \text{ et } T_2 \in C_1^2 &\Rightarrow T \in C_1 \\ T_1 \in C_2^1 \text{ et } T_2 \in C_0^2 &\Rightarrow T \in C_2 \end{aligned}$$

Le coût d'une tournée partielle T de G est égal à la somme des coûts de toutes les arêtes de G en multipliant chacun d'eux par le nombre d'apparitions de l'arête correspondante dans le parcours relatif à T . Ce coût est aussi égal à la somme des coûts des tournées partielles de G_1 et G_2 composant T .

Admettons que nous ayons, pour chaque graphe G_1 et G_2 , une meilleure tournée partielle, i.e. une tournée partielle de coût minimum, de chacune des trois classes. Une meilleure tournée partielle de G appartenant à une classe C_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, est la tournée ayant le coût minimum parmi toutes celles appartenant à C_j obtenues par les mariages admissibles des meilleures tournées partielles de G_1 et G_2 conduisant à cette classe.

Dans le cas où le graphe consiste en une seule arête $e = (u, v)$, une meilleure tournée de C_0 (resp. de C_1) (resp. de C_2) est celle qui utilise l'arête e deux fois (resp. une seule fois) (resp. 0 fois).

Par conséquent, pour résoudre le *GTSP* sur un graphe série-parallèle G , il suffit tout simplement de parcourir l'arbre de décomposition associé, des feuilles vers la racine, en déterminant pour chaque noeud la meilleure tournée partielle, de chaque classe, du graphe correspondant. Une tournée optimale de G est une meilleure tournée partielle de la classe C_0 de G . Du fait que G soit décomposé en un temps polynomial en $|E|$, cet algorithme reste lui aussi polynomial en $|E|$.

Remarquons que, dans le cas où G est obtenu par une composition en série ou en parallèle de deux graphes quelconques G_1 et G_2 , la complexité de l'algorithme de résolution du *GTSP* sur G est de l'ordre $O(\psi(n_1) + \psi(n_2))$; où $\psi(n_i)$, $i = 1, 2$, est une borne supérieure de la complexité de la recherche d'une meilleure tournée partielle, de G_i , d'un certain type [52].

Un autre problème d'optimisation combinatoire, dont le polytope associé sera étudié dans les chapitres 4 et 5, est le problème du *stable de poids maximum*. Ce problème consiste à trouver un sous-ensemble S de sommets, deux à deux non-adjacents, d'un graphe $G = (V, E)$ muni d'une fonction coût définie, cette fois-ci, sur les sommets. Il s'agit d'un problème NP-dur [56], toutefois, il a été résolu polynomialement sur plusieurs classes de graphes [].

Si G est un graphe série-parallèle, Le problème du stable de poids maximum se résout, d'une manière polynomiale en la taille de G , en utilisant la programmation dynamique [23]. La méthode de résolution reste similaire à celle du *GTSP* sur cette catégorie de graphes, nous définissons seulement, les classes des solutions partielles et leurs mariages admissibles.

Soient u et v deux sommets terminaux de G . L'ensemble des solutions (stables) partielles de G se partitionne en quatre classes selon l'appartenance ou la non-appartenance, à ces stables, de chacun des sommets u et v :

$$C_{uv} = \{S \subseteq V : S \text{ stable}, u \in S \text{ et } v \in S\}$$

$$C_u = \{S \subseteq V : S \text{ stable}, u \in S \text{ et } v \notin S\}$$

$$C_v = \{S \subseteq V : S \text{ stable}, u \notin S \text{ et } v \in S\}$$

$$C_\emptyset = \{S \subseteq V : S \text{ stable}, u \notin S \text{ et } v \notin S\}$$

Contrairement au *GTSP*, les solutions partielles de G sont des stables de ce graphe et, par conséquent, une solution optimale du problème du stable défini sur le graphe G est un stable de poids maximum parmi ceux de $C_{uv} \cup C_u \cup C_v \cup C_\emptyset$.

Si G est un graphe de sommets terminaux u et v obtenu par une composition en parallèle (resp. en série) de deux graphes G_1 et G_2 ayant pour sommets terminaux u_1, v_1 et u_2, v_2 respectivement, alors un mariage de deux solutions partielles de G_1 et G_2 est admissible si et seulement si les sommets terminaux de G_1 et G_2 que nous identifions ont le même comportement (appartenance ou non-appartenance) vis à vis des deux solutions partielles. Le type de la solution partielle de G ainsi composée est facilement reconnu selon que les sommets u et v (resp. v_1 et v_2) y appartiennent ou pas.

Sachant que la recherche des quatre meilleures solutions partielles, d'un graphe ayant exactement deux sommets, est un problème facile, cet algorithme donne un stable de poids maximum d'un graphe série-parallèle $G = (V, E)$ au bout d'un temps polynomial en $|E|$.

Dans un cadre plus général, résoudre un problème d'optimisation combinatoire quelconque défini sur un graphe G obtenu par composition, en utilisant la programmation dynamique, exige que certaines propriétés primordiales soient satisfaites :

1— chaque solution réalisable du problème d'optimisation doit appartenir à une classe de solutions partielles de G ;

2— chaque solution partielle d'un graphe doit être obtenue par un mariage de solutions partielles des graphes composant celui-ci;

3— pouvoir déduire le coût d'une solution partielle à partir de ceux des solutions partielles qui la composent;

4— pouvoir déterminer, pour chaque graphe primitif, une meilleure solution de chaque classe de solutions partielles.

Si le temps nécessaire pour effectuer le troisième point ainsi que le nombre de classes des solutions partielles sont constants, si le quatrième point se fait en un temps polynomial en la taille des graphes primitifs, et si la taille de l'arbre de composition est polynomiale en celle de G , alors la programmation dynamique fournit une solution optimale en un temps polynomial en la taille de G .

Chapitre 2

Composition de polyèdres et programmation dynamique

2.1 Introduction

Un grand nombre de problèmes d'optimisation combinatoire sont connus pour être NP-durs [56]. La description complète, par des systèmes d'inéquations linéaires, des enveloppes convexes de leurs solutions réalisables est un problème difficile [70]. Une approche classique pour obtenir une telle description consiste à décomposer le problème en sous-problèmes dont la caractérisation des enveloppes convexes associées soit connue. Une recombinaison ultérieure de ces polyèdres permet de déduire la description recherchée.

Dans le cas où le problème d'optimisation est défini sur un graphe G , cette approche se traduit par une décomposition de G . Moyennant des opérations de décomposition (composition) appropriées, on associe au graphe G un arbre (binaire) de décomposition (composition), dont la racine correspond à G lui-même et les feuilles aux graphes indécomposables par ces opérations. Ces graphes indécomposables sont souvent appelés *graphes primitifs* ou *graphes de base* ou bien encore *briques*, et le graphe G est dit *obtenu par composition* à partir des graphes primitifs ou bien *graphe décomposable*. En ayant des descriptions complètes des enveloppes convexes des structures combinatoires (partielles) en question associées aux graphes primitifs, on remonte l'arbre de composition, des feuilles vers la racine, en composant successivement les polyèdres afin d'avoir une caractérisation de l'enveloppe convexe des structures combinatoires associées au graphe G .

Divers problèmes d'optimisation, différentes classes de graphes et dissemblables opérations de composition ont fait l'objet de plusieurs travaux sur (ou faisant appel à) la composition des polyèdres. En ne donnant que les noms des polyèdres composés, nous citons : Les polytopes des stables [13, 26, 31, 102, 112], des systèmes indépendants (qui englobent ceux des stables) [41, 46, 96], des sous-graphes bipartis [50, 49], des sous-graphes acycliques [10, 12], des sous-graphes équilibrés [12], des sous-graphes deux-connexes [15], des partitions [28], des coupes [7, 9], des absorbants [22], des arbres de Steiner [29], ceux du voyageur de commerce classique [38, 39], des sous-graphes fortement connexes [83], des arbres enracinés [81] et les polyèdres du voyageur de commerce graphique [87].

La décomposition d'un problème d'optimisation en sous-problèmes étant un principe de la programmation dynamique (voir section 1.3); nous ferons, dans ce chapitre, le lien entre cette approche et la description des polyèdres associés aux problèmes d'optimisation combinatoire pouvant être obtenus par composition. Ce lien sera établi par introduction de variables artificielles (qui seront, par la suite, éliminées par projection) dans les descriptions des enveloppes convexes des solutions partielles et par adjonction d'un certain nombre d'inéquations à l'union de ces descriptions. En étudiant les conditions d'intégralité du nouveau polyèdre, nous introduirons la notion de polyèdres parfaitement composables (relativement aux principes de la programmation dynamique) qui unifiera des résultats connus dans ce domaine. Nous verrons aussi que cela conduira, dans certaines situations, à des formulations compactes (ayant un nombre polynomial de contraintes et un nombre polynomial de variables) des problèmes considérés.

2.2 Polyèdres parfaitement composables

Martin, Raldin et Campbell [84] ont étudié les conséquences polyédrales de la méthode de programmation dynamique. En interprétant cette méthode comme étant la recherche d'un plus court chemin dans un hypergraphe orienté sans circuit, ils montrent qu'un algorithme de programmation dynamique polynomial peut conduire à une caractérisation linéaire du problème d'optimisation. La description qu'ils obtiennent est une description étendue (ou *lifting*), i.e. elle utilise des variables artificielles et par conséquent, l'enveloppe convexe des objets combinatoires s'obtient par une projection éliminant ces variables artificielles. Cependant, le nombre colossal des variables artificielles fait que cette projection, théoriquement possible, s'avère presque impossible en

pratique.

Fonlupt, Mahjoub et Uhry [50] montrent que si un graphe G est une s -somme, $s \leq 3$, de deux graphes quelconques G_1 et G_2 (i.e. G est obtenu par identification de deux cliques de taille s de G_1 et G_2) alors il est possible d'obtenir une caractérisation du polytope des sous-graphes bipartis de G à partir de descriptions linéaires étendues des polytopes associés à G_1 et G_2 . Les descriptions étendues considérées comportent un petit nombre de variables artificielles associées aux arêtes d'un petit graphe rajouté à chacun des deux graphes G_1 et G_2 . Un résultat similaire est donné par Nacheff [87] pour le polyèdre du voyageur de commerce graphique quand $s = 2$.

En supposant que le graphe G soit une composition en parallèle de deux graphes G_1 et G_2 , d'autres polytopes associés à G ont été considérés. La composition des polytopes des sous-graphes acycliques a été étudiée par Barahona, Fonlupt et Mahjoub [10]. Barahona et Mahjoub [12, 13] ont également étudié la composition des polytopes des stables, des polytopes des sous-graphes induits équilibrés et des polytopes des sous-graphes acycliques induits. Ces auteurs utilisent des descriptions étendues similaires à celles utilisées dans [50, 87], i.e. en rajoutant de petits graphes à G_1 et G_2 , ils composent les deux descriptions étendues tout en gardant les variables artificielles; puis, par de simples projections éliminant ces variables artificielles, ils obtiennent les polytopes associés à G .

L'idée que nous allons étudier, dans la suite de ce chapitre, consiste à utiliser un "petit" nombre de variables artificielles (non forcément associées à des sommets ou à des arêtes comme c'est le cas dans [10, 12, 13, 50, 87]) qui ont pour seul but de représenter les classes de solutions partielles (ou objets combinatoires partiels) et de traduire les mariages admissibles sous-forme d'inéquations linéaires. Indépendamment, cette idée a été aussi étudiée par Margot et Schaffers [81, 83].

Les variables artificielles seront considérées de telle façon que les descriptions étendues satisfassent un certain nombre de propriétés. Nous avons besoin de définir, tout d'abord, la notion de polyèdres parfaitement composables qui repose sur les principes de base de la programmation dynamique.

Considérons un graphe G obtenu par une composition en parallèle de deux graphes

G_1 et G_2 quelconques de sommets terminaux u_1, v_1 et u_2, v_2 respectivement. Notons par $GTSP(G)$ le polyèdre du voyageur de commerce de G , i.e. l'enveloppe convexe des tournées de G . Rappelons qu'une tournée de G peut utiliser une arête plusieurs fois. Les sommets de $GTSP(G)$ sont des $\{0, 1, 2\}$ -vecteurs [37].

D'un point de vue algorithmique, nous avons vu dans la section 1.3, que si nous arrivons à connaître, pour G_1 et pour G_2 , une meilleure tournée partielle de chaque classe de solutions partielles, alors nous pourrions déduire une tournée optimale de G en considérant les quatre mariages admissibles. Supposons, maintenant, que nous ayons des descriptions linéaires des enveloppes convexes des tournées partielles de G_1 et G_2 . Une question naturelle est de savoir si nous pourrions déduire de ces deux descriptions une description linéaire de $GTSP(G)$ par un mariage des tournées partielles.

Soit $\overline{G}_i, i = 1, 2$, le graphe obtenu à partir de G_i en reliant les sommets u_i et v_i par une arête e_i . $GTSP(\overline{G}_i), i = 1, 2$, est donc une description étendue de l'enveloppe convexe des tournées partielles de G_i qui utilise une variable artificielle associée à l'arête e_i , i.e. cette enveloppe convexe s'obtient par une projection de $GTSP(\overline{G}_i)$ éliminant la variable artificielle.

Admettons que $GTSP(\overline{G}_1)$ et $GTSP(\overline{G}_2)$ soient entièrement décrits par deux systèmes d'inéquations linéaires, i.e.

$$GTSP(\overline{G}_1) = \{ A^1 X^1 + b^1 y_{e_1} \geq a^1 \}$$

$$GTSP(\overline{G}_2) = \{ A^2 X^2 + b^2 y_{e_2} \geq a^2 \}.$$

Chaque tournée partielle de $G_i, i = 1, 2$ appartenant à la classe C_0 (resp. à la classe C_1) (resp. à la classe C_2), correspond à une tournée de \overline{G}_i pour laquelle $y_{e_i} = 0$ ou 2 (resp. $y_{e_i} = 1$) (resp. $y_{e_i} = 2$). Un mariage de deux tournées partielles de G_1 et G_2 est donc admissible si les tournées de \overline{G}_1 et \overline{G}_2 qui leurs correspondent vérifient :

$$(y_{e_1}, y_{e_2}) \in \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \}; \text{ où } \gamma_1 = (0, 2), \gamma_2 = (1, 1) \text{ et } \gamma_3 = (2, 0).$$

Les vecteurs γ_1, γ_2 et γ_3 sont appelés *vecteurs de mariages admissibles*.

Désignons par $P(G)$ le polyèdre obtenu, à partir de $GTSP(\overline{G}_1)$ et $GTSP(\overline{G}_2)$, par

mariage des tournées partielles, i.e.

$$P(G) = \begin{cases} A^1 X^1 + b^1 y_{e_1} \geq a^1 \\ A^2 X^2 + b^2 y_{e_2} \geq a^2 \\ y_{e_1} + y_{e_2} = 2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Malheureusement, ce polyèdre n'est pas toujours entier. En effet, soit G le graphe

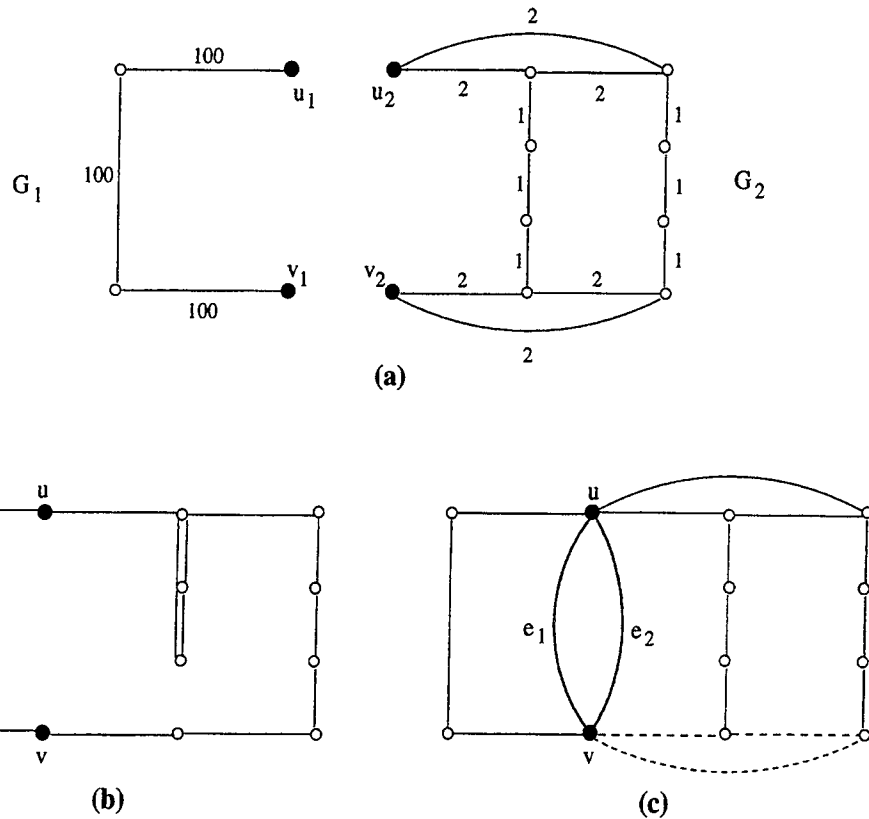


FIG. 2.1 -

obtenu par une composition en parallèle des graphes G_1 et G_2 de la figure 2.1 (a), avec des coûts associés à leurs arêtes. Une tournée optimale de G , de coût 315, est donnée dans la figure 2.1 (b). Cependant, le graphe de la figure 2.1 (c) (où les arêtes en pointillés valent $\frac{1}{2}$) est le support d'un $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ -sommet de $P(G)$ de coût 313.

Examinons, de la même manière, le cas du polytope des stables de G , noté $STB(G)$. Dans ce cas, les solutions partielles sont des stables de G_1 et G_2 et leurs types sont facilement repérables par l'état des sommets terminaux, i.e. vérifier s'ils appartiennent ou pas aux stables (voir section 1.3). Par conséquent, nous pouvons considérer, comme descriptions des enveloppes convexes des solutions partielles, les polytopes $STB(G_1)$

et $STB(G_2)$ sans avoir besoin d'utiliser des variables artificielles.

Un mariage de deux stables de G_1 et G_2 n'est admissible que si les sommets de chacune des paires u_1, u_2 et v_1, v_2 appartiennent tous les deux ou aucun d'eux n'appartienne à ces stables. Soit $P'(G)$ le polytope défini de la façon suivante :

$$P'(G) = \begin{cases} A^1 X^1 \leq a^1 \\ A^2 X^2 \leq a^2 \\ x^1(u_1) = x^2(u_2) \\ x^1(v_1) = x^2(v_2) \end{cases} \quad (2.2)$$

tel que $STB(G_1) = \{ A^1 X^1 \leq a^1 \}$ et $STB(G_2) = \{ A^2 X^2 \leq a^2 \}$.

Le polytope $P'(G)$ n'est pas toujours entier non plus. Pour voir cela, il suffit tout simplement de prendre pour G_1 (resp. pour G_2) une chaîne élémentaire sans corde ayant un nombre pair (resp. un nombre impair) d'arêtes d'extrémités u_1 et v_1 (resp. u_2 et v_2), i.e. G est un cycle impair sans corde que nous notons C . Du fait que la contrainte $\sum_{w \in C} x(w) \leq \frac{|C|-1}{2}$ définit une facette de $STB(G)$, $P'(G) \neq STB(G)$.

Nous dirons donc que les polyèdres $GTSP(\overline{G_1})$ et $GTSP(\overline{G_2})$ (resp. $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$) ne sont pas parfaitement composables relativement à la composition en parallèle.

D'une manière générale, étant donnés deux polyèdres combinatoires P_1 et P_2 décrits par des systèmes d'inéquations linéaires

$$P_1 = \{(x^1, y^1) \in \mathbb{R}^{n_1+m_1} : A^1 x^1 + B^1 y^1 \leq a^1\} \quad (2.3)$$

$$P_2 = \{(x^2, y^2) \in \mathbb{R}^{n_2+m_2} : A^2 x^2 + B^2 y^2 \leq a^2\}. \quad (2.4)$$

Considérons le polyèdre P défini par le système suivant :

$$P = \begin{cases} A^1 x^1 + B^1 y^1 \leq a^1 \\ A^2 x^2 + B^2 y^2 \leq a^2 \\ D(y^1, y^2) \leq d \end{cases} \quad (2.5)$$

avec $\{D(y^1, y^2) \leq d\} = \Gamma = \text{Conv}(\gamma)$ et $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}$ l'ensemble des vecteurs de mariages des sommets de P_1 et P_2 admissibles relativement à certaines règles de composition données.

Les polyèdres P_1 et P_2 sont dits *parfaitement composables relativement à γ* si chaque

sommet de P est un mariage de deux sommets, un de P_1 et l'autre de P_2 , selon un vecteur de γ .

2.3 Caractérisation des polyèdres parfaitement composables

Dans la présente section, nous donnons des conditions pour que deux polyèdres entiers soient parfaitement composables relativement à des règles données de composition de sommets.

Considérons les polyèdres entiers P_1 , P_2 et P définis dans la section précédente. Nous dirons que les polyèdres P_1 et P_2 sont *compatibles relativement à γ* si pour toute paire de faces F_1 et F_2 de P_1 et P_2 respectivement, le polytope

$$Q(F_1, F_2) = \{(y^1, y^2) \in \Gamma : y^1 \in \mathbb{IP}_{y^1}(F_1) \text{ et } y^2 \in \mathbb{IP}_{y^2}(F_2)\}$$

vérifie la propriété suivante :

pour tout sommet (\bar{y}^1, \bar{y}^2) de $Q(F_1, F_2)$, il existe \bar{x}^1 et \bar{x}^2 tels que

(\bar{x}^1, \bar{y}^1) et (\bar{x}^2, \bar{y}^2) soient des sommets de F_1 et F_2 respectivement.

(où $\mathbb{IP}_{y^i}(F_i)$ est la projection de F_i sur l'espace engendré par les variables de y^i ; voir section 1.2).

Remarquons que si chaque sommet de P_1 et de P_2 se projette sur un sommet de $\mathbb{IP}_{y^1}(P_1)$ et $\mathbb{IP}_{y^2}(P_2)$ respectivement, alors P_1 et P_2 sont compatibles si pour toute paire de faces F_1 de P_1 et F_2 de P_2 , le polytope $Q(F_1, F_2)$ est entier. C'est le cas des polytopes en $\{0, 1\}$.

Pour éclaircir cette propriété, nous considérons, comme exemple, la composition de polytopes des stables suivante. Soient G_1 , G_2 et G_3 les graphes de la figure 2.2. Les polytopes des stables qui leurs sont associés sont donnés par les trois systèmes suivants :

$$STB(G_1) = \begin{cases} x_1^1 + y_1^1 \leq 1 \\ x_1^1 + y_2^1 \leq 1 \\ (x_1^1, y_1^1, y_2^1) \geq 0 \end{cases} \quad STB(G_2) = \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 \leq 1 \\ x_1^2 + y_2^2 \leq 1 \\ (x_1^2, y_1^2, y_2^2) \geq 0 \end{cases}$$

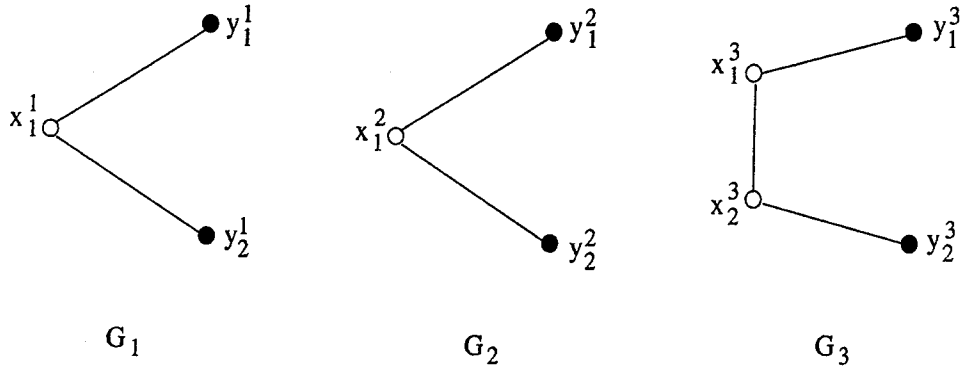


FIG. 2.2 -

$$STB(G_3) = \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 \leq 1 \\ x_1^3 + y_1^3 \leq 1 \\ x_2^3 + y_2^3 \leq 1 \\ (x_1^3, x_2^3, y_1^3, y_2^3) \geq 0 \end{cases}$$

Notons par P le polytope obtenu à partir de $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ en mariant leurs sommets selon $(y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2) \in \gamma = \{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$. Dans ce cas $\Gamma = \{(y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2) : y_1^1 = y_2^1, y_1^2 = y_2^2, 0 \leq y_1^1 \leq 1, 0 \leq y_2^1 \leq 1\}$. Les polytopes $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ sont représentés dans la figure 2.3. Pour toute paire de faces F_1 de P_1 et F_2 de P_2 , $Q(F_1, F_2)$ correspond à l'intersection de $\mathbb{IP}_{y^1}(F_1)$ et $\mathbb{IP}_{y^2}(F_2)$ si nous identifions les variables y_1^1, y_1^2 et y_2^1, y_2^2 . Dans cette situation, nous pouvons vérifier facilement que ces intersections sont entières et, par conséquent, $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ sont compatibles relativement à γ .

Le polytope des stables du graphe G , obtenu à partir de G_1 et G_2 en identifiant les sommets y_1^1, y_1^2 et y_2^1, y_2^2 en deux sommets y_1 et y_2 , est donné par le système décrivant P , en remplaçant les variables y_1^1, y_1^2 par y_1 et y_2^1, y_2^2 par y_2 .

Si, au lieu de G_2 , nous considérons le graphe G_3 , alors le polyèdre P n'est pas entier (le point $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ étant un sommet de P) et les deux polytopes $STB(G_1)$ et $STB(G_3)$ ne sont pas compatibles relativement au même ensemble de vecteurs de mariage γ . En effet, si F_1 et F_2 sont les faces de $STB(G_1)$ et $STB(G_3)$ respectivement, obtenues en serrant toutes les contraintes sauf celles de positivité, alors

$$\mathbb{IP}_{y^1}(F_1) = \begin{cases} y_1^1 = y_2^1 \\ y_1^1 \leq 1, y_2^1 \leq 1 \\ (y_1^1, y_2^1) \geq 0 \end{cases} \quad \mathbb{IP}_{y^2}(F_2) = \begin{cases} y_1^3 + y_2^3 = 1 \\ (y_1^3, y_2^3) \geq 0 \end{cases}$$

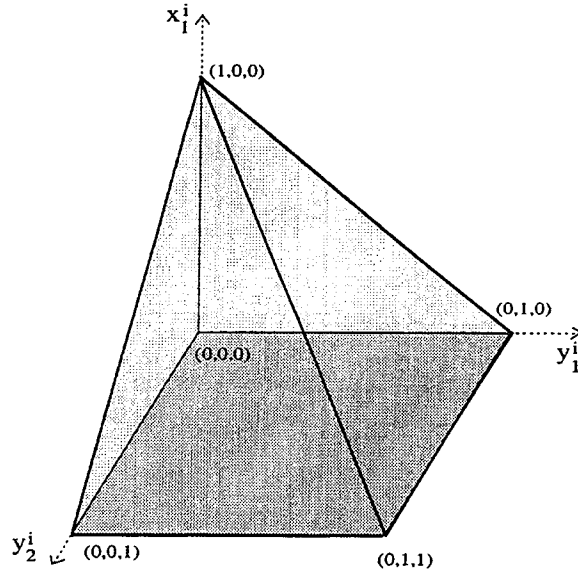


FIG. 2.3 - $STB(G_i)$, $i = 1, 2$ (les triplets correspondent à (x_1^i, y_1^i, y_2^i))

et par conséquent $Q(F_1, F_2) = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

Cette notion de compatibilité est liée à l'ensemble γ . Si $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ sont compatibles relativement à l'ensemble γ considéré ci-dessus, ils ne le sont pas relativement à $\gamma' = \{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}$.

Théorème 2.3.1 P_1 et P_2 sont parfaitement composables relativement à γ si et seulement si P_1 et P_2 sont compatibles relativement à γ .

Preuve :

Supposons que P_1 et P_2 soient compatibles et non-parfaitement composables. Considérons un sommet $(\bar{x}^1, \bar{y}^1, \bar{x}^2, \bar{y}^2)$ de P qui ne se compose pas de deux sommets de P_1 et de P_2 suivant un vecteur de mariage de γ . Soient

F_1 la plus petite face de P_1 contenant (\bar{x}^1, \bar{y}^1)

F_2 la plus petite face de P_2 contenant (\bar{x}^2, \bar{y}^2)

R la plus petite face de Γ contenant (\bar{y}^1, \bar{y}^2)

Nous avons $(\bar{x}^1, \bar{y}^1) \in \text{Int}(F_1)$, $(\bar{x}^2, \bar{y}^2) \in \text{Int}(F_2)$ et $(\bar{y}^1, \bar{y}^2) \in \text{Int}(R)$ (voir section 1.1).

Comme $(\overline{y^1}, \overline{y^2}) \in Q(F_1, F_2)$, il existe l sommets de $Q(F_1, F_2)$, (y_i^1, y_i^2) $i = 1, \dots, l$, et l scalaires positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ tels que $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$ et

$$(\overline{y^1}, \overline{y^2}) = \sum_{i=1}^l \lambda_i (y_i^1, y_i^2). \text{ L'entier } l \text{ peut être, éventuellement, égal à } 1.$$

Soit $(\widetilde{y^1}, \widetilde{y^2})$ l'un de ces l sommets. Nous avons $(\widetilde{y^1}, \widetilde{y^2}) \in R$.

Du fait que P_1 et P_2 soient compatibles, il existe $\widetilde{x^1}$ et $\widetilde{x^2}$ tels que $(\widetilde{x^1}, \widetilde{y^1})$ et $(\widetilde{x^2}, \widetilde{y^2})$ soient des sommets de F_1 et F_2 respectivement. Le point $(\widetilde{x^1}, \widetilde{y^1}, \widetilde{x^2}, \widetilde{y^2})$ est la composition de ces deux sommets selon un vecteur de mariage, par conséquent, c'est un point de P différent de $(\overline{x^1}, \overline{y^1}, \overline{x^2}, \overline{y^2})$.

Comme $(\overline{x^1}, \overline{y^1}) \in \text{Int}(F_1)$, $(\overline{x^2}, \overline{y^2}) \in \text{Int}(F_2)$ et $(\overline{y^1}, \overline{y^2}) \in \text{Int}(G)$, le point $(\widetilde{x^1}, \widetilde{y^1}, \widetilde{x^2}, \widetilde{y^2})$ sature toutes les contraintes de P saturées par $(\overline{x^1}, \overline{y^1}, \overline{x^2}, \overline{y^2})$. Ce qui contredit le fait que $(\overline{x^1}, \overline{y^1}, \overline{x^2}, \overline{y^2})$ soit un sommet de P .

Supposons, maintenant, que P_1 et P_2 soient parfaitement composables.

Soient F_1 et F_2 deux faces de P_1 et P_2 respectivement. Désignons par F la face de P obtenue en serrant les inéquations de P_1 et P_2 serrées dans F_1 et F_2 . Le polytope $Q(F_1, F_2)$ est la projection, sur l'espace engendré par les variables de y^1 et y^2 , de la face F . Chaque sommet de $Q(F_1, F_2)$ est donc, la projection d'un sommet de F .

Comme P_1 et P_2 sont parfaitement composables, chaque sommet de F est une composition de deux sommets, un de F_1 et l'autre de F_2 , suivant un vecteur de γ . Par conséquent, P_1 et P_2 sont compatibles relativement à γ . \square

Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.2, ce problème de composition a été, indépendamment, étudié par Margot et Schaffers [83]; ils montrent que si P_1 et P_2 sont des polytopes et si la projection de chaque face de P_i , $i = 1, 2$, est une face de $\mathbb{IP}_{y^i}(P_i)$, alors P_1 et P_2 sont parfaitement composables. Cette propriété peut être interprétée comme suit : soit $(\overline{x^i}, \overline{y^i})$ un point de P_i , $i = 1, 2$; pour toute décomposition $\overline{y^i} = \sum_{j=1}^l \lambda_j y_j^i$, où $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, l$, $\sum_{j=1}^l \lambda_j = 1$ et y_1^i, \dots, y_l^i sont des sommets de $\mathbb{IP}_{y^i}(P_i)$,

il existe l sommets de P_i , $(x_1^i, y_1^i), \dots, (x_l^i, y_l^i)$, tels que $(\overline{x^i}, \overline{y^i}) = \sum_{j=1}^l \lambda_j (x_j^i, y_j^i)$.

Cette propriété n'est pas nécessaire, comme nous pouvons le voir en reprenant les polytopes $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ de la figure 2.3; ils sont parfaitement composables, relativement à l'ensemble γ considéré dans l'exemple précédent, sans vérifier celle-ci.

Notons que la condition de compatibilité du théorème précédent a été aussi proposée et montrée différemment, dans le cas où P_1 et P_2 sont des polyèdres, par Margot [81].

Nous montrons maintenant le lien qui existe, quant à cette condition de compatibilité, entre un polyèdre et l'enveloppe convexe de ses sommets.

Proposition 2.3.1 *Soient Q_1 et Q_2 les enveloppes convexes respectives des sommets des polyèdres P_1 et P_2 , et soit γ un ensemble de vecteurs de mariage de leurs sommets. Si Q_1 et Q_2 sont compatibles relativement à γ , alors P_1 et P_2 sont compatibles relativement à γ*

Preuve :

Soient F_1 et F_2 deux faces de P_1 et P_2 respectivement. Considérons $F'_1 = F_1 \cap Q_1$ et $F'_2 = F_2 \cap Q_2$.

F'_1 et F'_2 sont des faces de Q_1 et Q_2 . En effet, comme F_k , $k = 1, 2$, est une face de P_k , il existe, par définition d'une face, un vecteur c^k tel que l'optimum du problème $\max\{c^k(x^k, y^k) : (x^k, y^k) \in P_k\}$ est atteint pour les points de F_k . Egalement, l'optimum du problème $\max\{c^k(x^k, y^k) : (x^k, y^k) \in Q_k\}$ est atteint pour les points de Q_k appartenant à F_k . Il en découle que F'_k est une face de Q_k .

Montrons que $Q(F_1, F_2) = Q(F'_1, F'_2)$:

Vu que F'_1 (resp. F'_2) soit l'enveloppe convexe des sommets de F_1 (resp. de F_2), nous déduisons de la définition de $Q(F_1, F_2)$ que $Q(F'_1, F'_2) \subseteq Q(F_1, F_2)$.

Soit (\bar{y}^1, \bar{y}^2) un point de $Q(F_1, F_2)$. Par définition de $Q(F_1, F_2)$, $(\bar{y}^1, \bar{y}^2) \in \Gamma$ et il existe \bar{x}^k , $k = 1, 2$, tel que $(\bar{x}^k, \bar{y}^k) \in F_k$. Nous avons donc,

$$(\bar{x}^k, \bar{y}^k) = \sum_{i=1}^{l^k} \lambda_i^k(x_i^k, y_i^k) + \sum_{j=1}^{t^k} \beta_j^k \psi_j^k$$

avec $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{l^k}^k$ et $\beta_1^k, \dots, \beta_{t^k}^k$ des scalaires positifs tels que $\sum_{i=1}^{l^k} \lambda_i^k = 1$; (x_i^k, y_i^k) , $i = 1, \dots, l^k$, des sommets de F_k et ψ_j^k , $j = 1, \dots, t^k$ des directions de P_k .

Du fait que $\Gamma = Q(Q_1, Q_2)$, alors $\mathbb{P}_{y^k}(\psi_j^k) = 0$, pour $j = 1, \dots, t^k$ et $k = 1, 2$, et le point

$(\bar{x}^k, \bar{y}^k) = \sum_{i=1}^{l^k} \lambda_i^k(x_i^k, y_i^k)$ appartient à F'_k . Par conséquent $Q(F_1, F_2) \subseteq Q(F'_1, F'_2)$.

Comme Q_1 et Q_2 sont compatibles relativement à γ et, pour toute paire de faces F_1 et F_2 de P_1 et de P_2 il existe deux faces F'_1 de Q_1 et F'_2 de Q_2 telles que $F'_1 \subseteq F_1$,

$F'_2 \subseteq F_2$ et $Q(F_1, F_2) = Q(F'_1, F'_2)$, nous concluons que P_1 et P_2 sont également compatibles relativement à γ . \square

L'inverse de cette proposition n'est pas toujours vrai. En effet, nous pouvons vérifier facilement que les polyèdres P_1 et P_2 , de la figure 2.4, sont compatibles relativement à $\gamma = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$, dont l'enveloppe convexe Γ est également donnée dans la figure 2.4. Or, si nous notons par Q_1 et Q_2 les enveloppes convexes des sommets de P_1 et de P_2 respectivement, par F_1 la face de Q_1 qui contient seulement le sommet $(1,1)$ et par F_2 la face de Q_2 qui est l'enveloppe convexe des sommets $(1,0)$ et $(1,2)$, alors $Q(F_1, F_2) = \{(1,1)\}$ et il n'existe aucun sommet de F_2 qui se projette sur le point $y_2 = 1$.

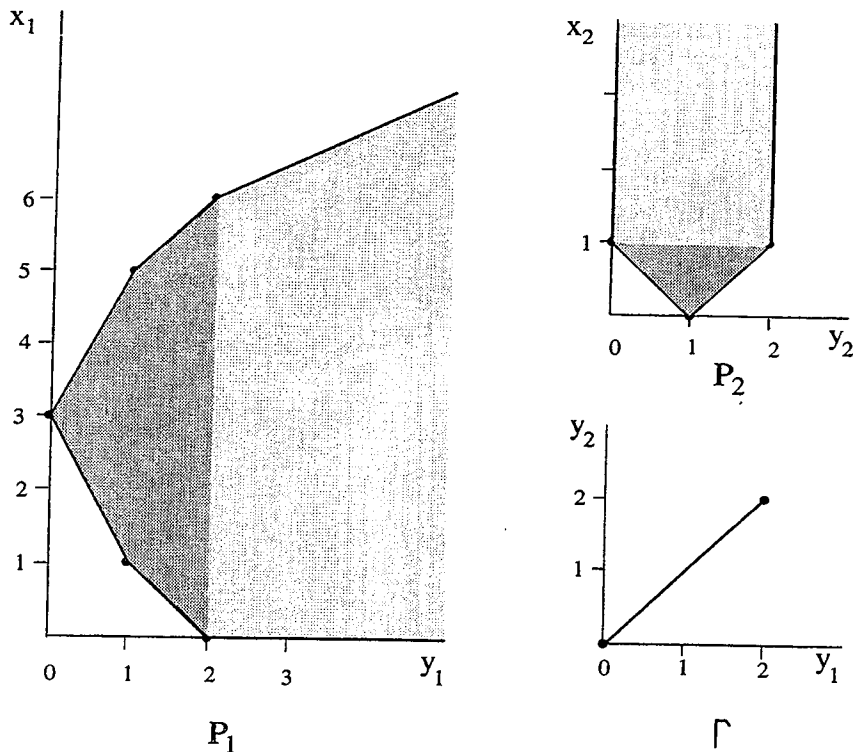


FIG. 2.4 -

Il est clair que la condition de compatibilité des polyèdres, que nous venons de voir, est loin d'être pratique dans le cas général car, pour chaque paire de faces F_1 et F_2 des deux polyèdres, elle exige l'examen de tous les sommets de $Q(F_1, F_2)$, ce qui nécessite un temps énorme. Cependant, nous allons voir que, dans certains cas, cela peut se faire plus facilement.

Un polytope Q est appelé *simplexe*, ou *d-simplexe*, s'il possède exactement $d + 1$ sommets affinement indépendants. Parmi les propriétés (ou définitions équivalentes) d'un tel polytope, nous citons :

- Pour tout point x de Q , il existe $d + 1$ scalaires positifs ou nuls uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$, tels que $x = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x^i$, et $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1$, où x^1, \dots, x^{d+1} sont les sommets de Q .
- l'enveloppe convexe de n'importe quel sous-ensemble de sommets de Q est un simplexe.

Proposition 2.3.2 *Si chaque sommet de P_1 et de P_2 se projette sur un sommet de $\mathbb{I}P_{y^1}(P_1)$ et de $\mathbb{I}P_{y^2}(P_2)$ respectivement, et si $\mathbb{I}P_{y^1}(P_1)$ et $\mathbb{I}P_{y^2}(P_2)$ sont des simplexes, alors P_1 et P_2 sont compatibles relativement à n'importe quel ensemble de vecteurs de mariage γ .*

Preuve :

Supposons que P_1 et P_2 vérifient les conditions de la proposition.

Considérons deux faces F_1 de P_1 et F_2 de P_2 et un ensemble γ quelconque de vecteurs de mariage. Comme chaque sommet de P_1 et de P_2 se projette sur un sommet de $\mathbb{I}P_{y^1}(P_1)$ et de $\mathbb{I}P_{y^2}(P_2)$, respectivement, les sommets de $\mathbb{I}P_{y^1}(F_1)$ et $\mathbb{I}P_{y^2}(F_2)$ sont aussi sommets de $\mathbb{I}P_{y^1}(P_1)$ et de $\mathbb{I}P_{y^2}(P_2)$.

Supposons que $Q(F_1, F_2)$ ait un sommet $(\overline{y^1}, \overline{y^2})$ tel que aucun sommet de F_1 ne se projette sur $\overline{y^1}$. Cela implique que $(\overline{y^1}, \overline{y^2})$ n'est pas sommet de Γ et qu'il existe alors l scalaires positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ tels que $(\overline{y^1}, \overline{y^2}) = \sum_{i=1}^l \lambda_i (y_i^1, y_i^2)$ et $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$, où (y_i^1, y_i^2) , $i = 1, \dots, l$, sont des sommets de Γ , tous différents de $(\overline{y^1}, \overline{y^2})$.

Du fait que y_1^1, \dots, y_l^1 soient des sommets de $\mathbb{I}P_{y^1}(P_1)$ et du fait que $\mathbb{I}P_{y^1}(P_1)$ soit un simplexe (chacun de ses éléments se décompose d'une manière unique comme combinaison convexe de ses sommets), y_1^1, \dots, y_l^1 doivent appartenir à $\mathbb{I}P_{y^1}(F_1)$. Pour les mêmes raisons, y_1^2, \dots, y_l^2 appartiennent aussi à $\mathbb{I}P_{y^2}(F_2)$. Nous déduisons que les points (y_i^1, y_i^2) , $i = 1, \dots, l$ (qui sont tous différents de $(\overline{y^1}, \overline{y^2})$) appartiennent à $Q(F_1, F_2)$. Ce qui contredit le fait que $(\overline{y^1}, \overline{y^2})$ soit un sommet de $Q(F_1, F_2)$. \square

Des propositions 2.3.1 et 2.3.2, nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.1 *Si P_1 et P_2 sont deux polyèdres tels que les points de chacune de leurs projections $\mathbb{I}P_{y^1}(P_1)$ et $\mathbb{I}P_{y^2}(P_2)$, qui sont projections de sommets, soient affinement*

indépendants, alors P_1 et P_2 sont compatibles relativement à tout ensemble de vecteurs de mariage γ .

Preuve :

Désignons par Q_1 et Q_2 les enveloppes convexes respectives des sommets de P_1 et de P_2 . Du fait que les points de $\mathbb{IP}_{y^1}(P_1)$ (resp. de $\mathbb{IP}_{y^2}(P_2)$), qui sont des projections de sommets de P_1 (resp. de P_2), soient affinement indépendants, chaque sommet de Q_1 (resp. de Q_2) se projette sur un sommet de $\mathbb{IP}_{y^1}(Q_1)$ (resp. de $\mathbb{IP}_{y^2}(Q_2)$) et $\mathbb{IP}_{y^1}(Q_1)$ (resp. $\mathbb{IP}_{y^2}(Q_2)$) est un simplexe. Selon la proposition 2.3.2, Q_1 et Q_2 sont compatibles relativement à tout ensemble de vecteurs de mariage γ . La proposition 2.3.1 nous assure que P_1 et P_2 sont compatibles relativement à tout ensemble de vecteurs de mariage γ . \square

Nous déduisons du corollaire 2.3.1,

Corollaire 2.3.2 Soient $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : Ax + By \leq a\}$ un polyèdre et T l'ensemble des points de $\mathbb{IP}_y(R)$ qui sont les projections de sommets de R . Soit $\bar{T} \subseteq T$ tel que $\text{Conv}\{\bar{T}\} = \{y \in \mathbb{R}^m : Dy \leq d\}$.

Si tous les points de T sont affinement indépendants, alors les sommets du polyèdre $\bar{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : Ax + By \leq a, Dy \leq d\}$ sont les sommets de R qui se projettent sur les points de \bar{T} .

Preuve:

Considérons $\bar{T}' = \{(x', y') \in \mathbb{R}^{1+m} : x' = 0 \text{ et } y' \in \bar{T}\}$.

Soit $\gamma = \{(y, y') : y \in \bar{T} \text{ et } y = y'\}$ un ensemble de vecteurs de mariage de sommets de R et de $\text{Conv}(\bar{T}')$.

Les points de \bar{T}' étant affinement indépendants. Selon le corollaire 2.3.1, le polyèdre R et le polytope $\text{Conv}(\bar{T}')$ sont compatibles relativement à γ . Le théorème 2.3.1 implique que R et $\text{Conv}(\bar{T}')$ sont parfaitement composables relativement à γ , i.e chaque sommet du polyèdre $P = \{(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^{n+m+1+m} : Ax + By \leq a, Dy \leq d, y = y', x' = 0\}$ est la composition d'un sommet de R , se projetant sur un point de \bar{T} , et d'un sommet de $\text{Conv}\{\bar{T}'\}$.

\bar{R} s'obtient à partir de P en remplaçant x' par 0 et y' par y . \square

Supposons maintenant que, au lieu de considérer un ensemble de vecteurs de mariage γ , nous prenons des vecteurs de mariage étendus, i.e. nous considérons l'ensemble

$$\tilde{\gamma} = \{(y^1, y^2, y) \in \mathbb{R}^{m_1+m_2+m} : (y^1, y^2) \in \gamma \text{ et } y \in \{0, 1\}^m\}.$$

Dans ce cas, les polyèdres P_1 et P_2 sont parfaitement composables relativement à $\tilde{\gamma}$ si chaque sommet de \tilde{P} se compose de deux sommets, un de P_1 et l'autre de P_2 , suivant un vecteur de mariage étendu de $\tilde{\gamma}$, où \tilde{P} est le polyèdre donné par le système 2.5 avec $\tilde{\Gamma} = \text{Conv}(\tilde{\gamma})$ au lieu de Γ .

La condition de compatibilité devient : P_1 et P_2 sont *compatibles relativement* à $\tilde{\gamma}$ si pour toute paire de faces F_1 et F_2 de P_1 et P_2 respectivement, le polytope

$$\tilde{Q}(F_1, F_2) = \{(y^1, y^2) : (y^1, y^2) \in \mathbb{IP}_{(y^1, y^2)}(\tilde{\Gamma}), y^1 \in \mathbb{IP}_{y^1}(F_1) \text{ et } y^2 \in \mathbb{IP}_{y^2}(F_2)\}$$

vérifie la propriété suivante :

pour tout sommet (\bar{y}^1, \bar{y}^2) de $\tilde{Q}(F_1, F_2)$, il existe \bar{x}^1, \bar{x}^2 et \bar{y} tels que

(\bar{x}^1, \bar{y}^1) et (\bar{x}^2, \bar{y}^2) soient sommets de F_1 et F_2 respectivement, et $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}) \in \tilde{\gamma}$.

Remarque 2.3.1 *Le théorème 2.3.1, les propositions 2.3.1 et 2.3.2, et le corollaire 2.3.1 restent vrais en remplaçant γ, Γ et $Q(F_1, F_2)$ par $\tilde{\gamma}, \tilde{\Gamma}$ et $\tilde{Q}(F_1, F_2)$. Leurs preuves respectives restent valables.*

Du fait que le polyèdre P s'obtienne à partir de \tilde{P} par une projection faisant disparaître les $\{0, 1\}$ -variables y , il est clair que si P_1 et P_2 sont parfaitement composables, relativement à un ensemble de vecteurs étendus $\tilde{\gamma}$, alors ils le sont relativement à γ . L'inverse n'est pas toujours vrai. En effet, les polytopes des stables des graphes G_1 et G_2 de la figure 2.2 sont parfaitement composables relativement à $\gamma = \{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ (voir section 2.3) mais pas relativement à $\tilde{\gamma} = \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)\}$ (car le point $(\bar{x}_1^1, \bar{y}_1^1, \bar{y}_2^1, \bar{x}_1^2, \bar{y}_1^2, \bar{y}_2^2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ est un sommet de \tilde{P}).

Il est, évidemment, vrai quand les hypothèses de la proposition 2.3.2 sont vérifiées.

2.4 Descriptions étendues parfaites

Dans les sections 2.2 et 2.3 nous avons vu une manière, se basant sur les principes de la programmation dynamique, qui permet de déduire un système d'inéquations linéaires décrivant l'enveloppe convexe des solutions réalisables d'un problème obtenu par composition. En ayant des systèmes relatifs aux sous-problèmes, elle consiste à adjoindre à l'union de ces systèmes un ensemble d'inéquations traduisant les mariages admissibles des solutions partielles. Ces dernières inéquations relient des variables, désignées par "y" et appelées *variables d'état*, qui ont pour rôle de distinguer les solutions

partielles. Dans certains cas, les variables "y" peuvent être artificielles (i.e. elles ne sont pas des variables du problème initial), d'où le nom de description étendue.

Ces compositions ne sont possibles que si les descriptions étendues considérées sont parfaitement composables. En d'autres termes, et d'après le théorème 2.3.1, nous devons considérer des descriptions compatibles relativement aux mariages admissibles. Malheureusement, la vérification d'une telle propriété n'est pas une chose facile en général, et sa complexité pourrait atteindre, ou même dépasser, celle de l'examination de tous les sommets du polyèdre obtenu par la composition. Cependant, la vérification des hypothèses du corollaire 2.3.1 est relativement simple, notamment quand le nombre des variables d'état est faible. Par conséquent, nous allons nous limiter aux descriptions étendues qui vérifient les hypothèses du corollaire 2.3.1 et qui seront dites parfaites. Cette notion de description étendue parfaite, qui est une conséquence directe du théorème 2.3.1 et du corollaire 2.3.1, généralise plusieurs résultats de la littérature sur la composition des polyèdres [7, 10, 15, 12, 13, 22, 26, 28, 29, 31, 38, 41, 50].

Soient $\tilde{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : Ax + By \leq a\}$ une description étendue de l'enveloppe convexe des solutions partielles d'un certain problème, et \tilde{Q} l'enveloppe convexe des sommets de \tilde{P} .

Définition 2.4.1 *La description \tilde{P} est dite parfaite si :*

- chaque sommet de \tilde{P} se projette sur un sommet de $IP_y(\tilde{Q})$;
- $IP_y(\tilde{Q})$ est un simplexe;
- chaque classe de solutions partielles est représentée par un sommet de $IP_y(\tilde{Q})$ (i.e chaque solution de cette classe se projette sur ce sommet) de sorte que les mariages admissibles puissent se traduire, sans ambiguïté, sous forme de vecteurs.

Nous déduisons de cette définition que, dans une description étendue parfaite, le nombre de variables d'état est au moins égal à $r - 1$, où r est le nombre de classes de solutions partielles.

Il découle du corollaire 2.3.1 et de la remarque 2.3.1 que si P_1 et P_2 sont deux descriptions parfaites, alors P_1 et P_2 sont compatibles relativement à tout ensemble de vecteurs γ et n'importe quel ensemble de vecteurs étendus $\tilde{\gamma}$.

Proposition 2.4.1 *Pour toute enveloppe convexe de solutions partielles, il existe une description étendue parfaite.*

Preuve :

Soient C_1, \dots, C_r les classes de solutions partielles.

Nous considérons les classes de solutions partielles étendues $\widetilde{C}_1, \dots, \widetilde{C}_r$ définies de la façon suivante :

$$\widetilde{C}_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+r} : x \in C_j \text{ et } y \text{ est le } j^{\text{ème}} \text{ vecteur unitaire}\}$$

On vérifie facilement que l'enveloppe convexe de toutes les solutions partielles étendues est une description étendue parfaite de l'enveloppe convexe des solutions partielles. \square

Dans certaines situations, l'enveloppe convexe des solutions partielles est elle-même une description parfaite, i.e. toutes les variables d'état sont naturelles. C'est le cas pour les compositions considérées dans [7, 28, 31, 41]. Comme exemple simple de celles-ci, nous prenons un graphe G obtenu par identification de deux cliques, K_1 de G_1 et K_2 de G_2 , de taille k . On compte, dans ce cas, $k + 1$ classes de stables partiels de G_i , $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} C_\emptyset^i &= \{x \in STB(G_i) : x(v_j^i) = 0, \forall v_j^i \in K_i\} \\ C_{v_j^i}^i &= \{x \in STB(G_i) : x(v_j^i) = 1\} \end{aligned}$$

avec $K^i = \{v_1^i, \dots, v_k^i\}$.

En prenant comme variables d'état celles associées au sommets de la clique, il est simple de voir que $STB(G_i)$ satisfait bien les conditions de la définitions 2.4.1.

Un mariage de deux solutions partielles, une de G_1 et l'autre de G_2 , n'est admissible que si ces dernières appartiennent respectivement à C_\emptyset^1 et C_\emptyset^2 ou à $C_{v_j^1}^1$ et $C_{v_j^2}^2$, $j = 1, \dots, k$. Selon le théorème 2.3.1 et le corollaire 2.3.1, une simple identification de variables dans l'union des deux systèmes définissant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ conduit à retrouver le résultat de Chvátal [31] donnant $STB(G)$.

Dans la suite de ce chapitre, nous dirons descriptions étendues parfaites même quand toutes les variables d'état sont naturelles.

La proposition 2.4.1 montre l'existence d'une description étendue parfaite d'un ensemble donné de solutions partielles. Selon la preuve, nous remarquons qu'il peut en exister une infinité. Dans la pratique, la détermination d'une description étendue parfaite est un problème difficile, sauf pour certains cas rares (voir opération de substitution [41]).

Toutefois, si les sous-problèmes primitifs sont de faible taille, de telles descriptions

peuvent être déterminées facilement; soit d'une manière directe, telle que pour les chaînes (s petit, voir [52]), soit en utilisant des vecteurs de mariage étendus, une idée proposée par Margot et Schaffers [83] pour composer des polytopes associés aux graphes série-parallèles et aux 2-arbres (les graphes série-parallèles maximaux).

En effet, dans la section 1.3, nous avons présenté une façon d'associer, à un graphe série-parallèle, un arbre de composition tel que les graphes primitifs soient les arêtes de ce graphe. D'autres classes de graphes comme les graphes de Halin, les arbres enracinés, les graphes outerplanaires et les "bandwidth k graphs" (k petit) possèdent cette propriété (voir Bern, Lawler et Wong [19]). Ces classes de graphes vérifient les trois points suivants :

- (i) il existe un petit nombre de graphes primitifs de faible taille (des sommets ou des arêtes);
- (ii) chaque graphe (primitif ou intermédiaire) possède un petit ensemble (éventuellement vide) de sommets spéciaux appelés *sommets terminaux*.
- (iii) il existe un petit nombre d'opérations de composition binaires qui agissent au niveau de l'ensemble des sommets terminaux, soit en identifiant deux sommets terminaux soit en les reliant par une arête.

Dans la suite, nous appellerons ces graphes *les graphes à sommets terminaux*.

Dans ce cas, on peut remonter l'arbre de décomposition, des feuilles vers la racine, en déterminant itérativement les descriptions étendues parfaites.

Soit G un graphe de sommets terminaux t_1, t_2, \dots, t_q obtenu par composition de deux graphes G_1 et G_2 ayant pour sommets terminaux $t_1^1, t_2^1, \dots, t_{q_1}^1$ et $t_1^2, t_2^2, \dots, t_{q_2}^2$ respectivement. Supposons que nous ayons

$$\widetilde{P}_1 = \{(x^1, y^1) \in \mathbb{R}^{n_1+m_1} : A^1 x^1 + B^1 y^1 \leq a^1\}$$

$$\widetilde{P}_2 = \{(x^2, y^2) \in \mathbb{R}^{n_2+m_2} : A^2 x^2 + B^2 y^2 \leq a^2\}.$$

deux descriptions étendues parfaites des solutions partielles de G_1 et de G_2 .

Notons C_0, \dots, C_r (resp. C_0^1, \dots, C_r^1) (resp. C_0^2, \dots, C_r^2) les classes de solutions partielles de G (resp. G_1) (resp. G_2). Comme la description \widetilde{P}_1 (resp. \widetilde{P}_2) est parfaite, chaque classe C_j^1 (resp. C_j^2) est représentée par un sommet de $\mathbb{IP}_{y_1}(\widetilde{Q}_1)$ (resp. de $\mathbb{IP}_{y_1}(\widetilde{Q}_2)$) que nous désignons par y_j^1 (resp. y_j^2). Nous supposons, sans perte de généralité, que les variables de y^1 et y^2 soient artificielles.

Associons à chaque classe C_j , $0 \leq j \leq r$, un vecteur entier y_j de sorte que ces $r + 1$

vecteurs soient affinement indépendants. Une manière simple consiste à prendre $y_j \in \{0, 1\}^r$ tel que

$$\begin{aligned} y_j &\text{ soit le vecteur nul, si } j = 0 \\ y_j &\text{ soit le } j^{\text{ème}} \text{ vecteur unitaire, si } j \neq 0 \end{aligned}$$

Soit $\tilde{\gamma}$, l'ensemble des vecteurs de tous les mariages admissibles étendus, défini de la manière suivante: $\tilde{\gamma} = (y_{j_1}^1, y_{j_2}^2, y_j) \in \tilde{\gamma}$ si et seulement si le mariage d'une solution partielle de $C_{j_1}^1$ avec une solution partielle de $C_{j_2}^2$ donne une solution partielle de G appartenant à la classe C_j .

D'après le corollaire 2.3.1 et la remarque 2.3.1, les deux polyèdres \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 sont compatibles relativement à $\tilde{\gamma}$. Le théorème 2.3.1 implique que \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 sont parfaitement composables. Par définition, chaque sommet du polyèdre suivant :

$$\tilde{P} = \begin{cases} A^1 x^1 + B^1 y^1 \leq a^1 \\ A^2 x^2 + B^2 y^2 \leq a^2 \\ \tilde{D}(y^1, y^2, y) \leq d \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{où } \tilde{\Gamma} = \text{Conv}(\tilde{\gamma}) = \{ \tilde{D}(y^1, y^2, y) \leq d \}$$

se compose de deux sommets, un de \tilde{P}_1 et l'autre de \tilde{P}_2 , suivant un vecteur de $\tilde{\gamma}$. Par conséquent, les sommets de \tilde{P} sont en bijection avec les solutions partielles de G .

Vu que les vecteurs y_1, y_2, \dots, y_r soient affinement indépendants, le polyèdre $\hat{P} = \mathbb{IP}_{(x^1, x^2, y)}(\tilde{P})$ est une description étendue parfaite de l'enveloppe convexe des solutions partielles de G . Notons que le nombre des classes des solutions partielles est en général petit et que la projection de \tilde{P} , faisant disparaître les variables (y^1, y^2) , peut donc se faire sans beaucoup de peine.

Comme exemple, nous montrons que cette méthode peut être utilisée pour déterminer le polyèdre du voyageur de commerce graphique ($GTSP(G)$) associé à un graphe série-parallèle G donné.

Les graphes primitifs, rentrant dans la composition de G , sont des arêtes.

Soit $e = (u, v)$ une arête définissant un graphe primitif de sommets terminaux u et v .

Les tournées partielles de ce graphe sont :

$$\begin{aligned} \text{Classe } C_0 &= \{x(e) : x(e) = 2 + 2k \text{ avec } k \in \mathbb{IN}\} \\ \text{Classe } C_1 &= \{x(e) : x(e) = 1 + 2k \text{ avec } k \in \mathbb{IN}\} \\ \text{Classe } C_2 &= \{x(e) : x(e) = 0\} \end{aligned}$$

Une description étendue parfaite de l'enveloppe convexe de ces solutions partielles est donnée par le système suivant :

$$\hat{P} = \begin{cases} x(e) + y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ (x(e), y_1, y_2) \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

où y_1 et y_2 sont deux variables artificielles.

Les sommets de \hat{P} se projettent sur les trois points affinement indépendants suivants :

$$(y_1, y_2) = (0, 0) \text{ qui représente la classe } C_0$$

$$(y_1, y_2) = (1, 0) \text{ qui représente la classe } C_1$$

$$(y_1, y_2) = (0, 1) \text{ qui représente la classe } C_2$$

Etant donné un nœud quelconque qui n'est pas un sommet pendant de l'arbre de décomposition de G . Si le graphe G^j qui correspond à ce nœud est obtenu par une composition parallèle de ses deux successeurs, G_1^j et G_2^j , alors les vecteurs de mariage étendus relatifs à cette composition (i.e. les éléments de $\tilde{\gamma}$) sont donnés par les colonnes de la matrice suivante, dont les lignes sont indexées, respectivement, par les variables $y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2, y_1$ et y_2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'enveloppe convexe de ces vecteurs est :

$$\tilde{\Gamma} = \begin{cases} y_1^1 + y_2^1 + y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_2^1 + y_2^2 + y_1 \leq 2 \\ y_1^1 + y_2 \leq 1 \\ y_1^2 + y_2 \leq 1 \\ y_1^2 + y_2^2 \leq 1 \\ y_1^1 + y_2^1 \leq 1 \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ (y_1^1, y_2^1, y_1) \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Par contre, si l'opération utilisée est une opération de composition en série, alors la matrice sera :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'enveloppe convexe des points de $\tilde{\gamma}$ sera :

$$\tilde{\Gamma} = \begin{cases} y_1^1 + y_2^1 + y_2^2 \leq 1 \\ y_2^1 + y_2^2 = y_2 \\ y_1^1 = y_1^2 = y_1 \\ (y^1, y^2, y) \geq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Une description étendue parfaite \hat{P}^j , des tournées partielles de G^j , est obtenue en prenant l'union des deux systèmes définissant \hat{P}_1^j et \hat{P}_2^j (les descriptions étendues des tournées partielles de G_1^j et G_2^j) et un des systèmes 2.8 ou 2.9, selon l'opération de composition utilisée (en série ou en parallèle), puis en projetant le système résultant pour éliminer les anciennes variables d'état (y_1^1, y_2^1, y_1^2 et y_2^2).

Arrivés à la racine de l'arborescence, i.e. au graphe G lui même, nous annulons dans la description des tournées partielles de G les variables y_1 et y_2 afin d'obtenir, d'après le corollaire 2.3.2, un système d'inéquations définissant $GTSP(G)$.

Dans [81] et [83], Margot et Schaffers présentent cette manière de déduire itérativement les descriptions parfaites étendues comme une méthode de démonstration polyédrique (dans le cas où les polyèdres sont bornés): supposons qu'on veuille montrer qu'un système d'inéquations linéaires donné caractérise un certain polytope associé à un graphe à sommets terminaux G ; on définit un autre système caractérisant le polytope des solutions partielles et on montre la validité des deux systèmes par récurrence (en remontant l'arbre de décomposition de G des feuilles vers la racine). Cette idée se trouve donc étendue pour la caractérisation de polyèdres non nécessairement bornés.

Remarquons que si une variable d'état y_j^i , $i \in \{1, 2\}$ et $1 \leq j \leq m_i$, est naturelle (non-artificielle) et non-bornée dans \tilde{P}_i , elle sera bornée dans \tilde{P} (car elle figure dans les

inéquations définissant $\tilde{\Gamma}$). Pour avoir cette variable non-bornée dans \tilde{P} , il suffit de la remplacer, si elle est positive, par une autre variable z en rajoutant à \tilde{P} la contrainte $y_j^i \leq z$ et en éliminant la variable y_j^i par projection.

La propriété d'avoir des graphes primitifs de faible taille n'est pas vérifiée pour tous les graphes obtenus par composition; la classe des graphes triangulés, qui sont les graphes qui n'admettent pas de cycles induits sans cordes de longueur supérieure à 3 et qui s'obtiennent par clique-identification à partir de cliques [43], en est un exemple parmi tant d'autres.

Nous verrons dans la section suivante une manière qui consiste à introduire les variables artificielles au fur et à mesure qu'on décompose le graphe.

2.5 Adjonction de graphes artificiels

Afin de composer les polytopes des sous-graphes bipartis quand G est la k -somme de G_1 et G_2 , $k \leq 3$, Fonlupt, Mahjoub et Uhry [49, 50] remplacent le graphe G_2 (resp. G_1) par un autre graphe *artificiel* H ayant un petit nombre de sommets et d'arêtes, i.e ils considèrent le graphe $\overline{G_1}$ (resp. $\overline{G_2}$) qui se compose de G_1 et de H (resp. de G_2 et de H). En démarrant des polytopes des sous-graphes bipartis associés à $\overline{G_1}$ et $\overline{G_2}$, qui constituent des formulations étendues des enveloppes convexes des solutions partielles de G_1 et G_2 , ils déduisent une description linéaire du polytope des sous-graphes bipartis de G . Cette idée a été également utilisée par Barahona, Fonlupt et Mahjoub [10], Barahona et Mahjoub [12, 13], Bouchakour et Mahjoub [22], Burlet et Fonlupt [26], Chopra et Rao [29] et par Nacheff [87].

Un point commun, reliant toutes ces études de composition, est que l'enveloppe convexe des objets combinatoires de $\overline{G_i}$, $i = 1, 2$, admet une face qui constitue une formulation étendue parfaite de l'enveloppe convexe des solutions partielles de G_i .

Dans un cadre plus général, une manière de déterminer des descriptions étendues parfaites consiste à considérer des graphes artificiels, H_1 et H_2 , tels qu'il existe une face de l'enveloppe convexe des objets combinatoires de $\overline{G_1}$ (resp. $\overline{G_2}$) qui soit une formulation étendue parfaite de l'enveloppe convexe des solutions partielles de G_1 (resp. G_2). Dans un tel cas, nous dirons que H_1 et H_2 sont des *graphes artificiels valides*. Les variables relatives seulement à un graphe artificiel sont des variables artificielles de

la formulation étendue. Cette approche offre, par ailleurs, l'avantage de composer de vrais objets combinatoires de \overline{G}_i , $i = 1, 2$, au lieu d'objets combinatoires partiels de G_i , notamment quand la définition de ces derniers est moins évidente. Les mariages admissibles sont ceux qui génèrent des objets combinatoires de G .

L'idée d'utiliser des graphes artificiels a permis d'associer, à certains graphes, des arbres de décomposition (binaires) tels que les polyèdres associés aux graphes primitifs soient faciles à caractériser. Burlet et Fonlupt [26, 25] décomposent itérativement les graphes de Meyniel, en rajoutant à chaque étape un sommet artificiel; ils obtiennent des graphes primitifs ayant une structure particulière simple. Dans [12, 13], Barahona et Mahjoub décomposent les graphes série-parallèles en collant, aux composantes, des graphes artificiels série-parallèles permettant de rester dans cette classe de graphe et pouvoir réitérer l'opération tant que le nombre de sommets des nouveaux graphes décroît strictement. Ils obtiennent ainsi un arbre de décomposition, différent de celui obtenu en considérant les sommets terminaux, tel que les graphes primitifs n'aient que quelques sommets (par exemple, moins de 15 sommets quand le graphe artificiel est un cycle sans corde de taille 5). Cornuéjols, Naddef et Pulleyblank [38, 39] décomposent un graphe de Halin, en considérant les 3-coups déconnectantes, de sorte que les graphes primitifs soient des roues de tailles variables et tous les noeuds de l'arbre correspondent à des graphes de Halin. Ils utilisent, comme graphe artificiel, une étoile à trois arêtes. Ces trois arbres de décomposition peuvent être déterminés en un temps polynomial en la taille du graphe décomposé [36, 38, 66].

En remontant un arbre de décomposition obtenu par adjonction de graphes artificiels, des feuilles à la racine, on n'a pas besoin d'introduire de nouvelles variables artificielles, comme nous venons de le voir pour le cas des graphes à sommets terminaux. Toutes les variables d'état, y compris les variables artificielles, interviennent dans la description de l'enveloppe convexe des objets combinatoires du graphe. Notons que, dans le cas des graphes de Halin [15, 38, 39], une simple identification de variables conduit à des variables d'état naturelles; ce qui permet de caractériser les enveloppes convexes des cycles hamiltoniens et des sous-graphes deux-arête-connexes de ces graphes sans avoir recours aux méthodes de projection.

Pour illustrer cette approche par adjonction de graphes artificiels, nous considérons la composition des polytopes des stables suivante.

Soit $G = (V_1 \cup V_2 \cup S, E_1 \cup E_2)$ un graphe tel que S soit un stable déconnectant G en deux composantes (V_1, E_1) et (V_2, E_2) . Le graphe G s'obtient alors par composition (en identifiant des sommets) de $G_1 = (V_1 \cup S, E_1)$ et $G_2 = (V_2 \cup S, E_2)$.

Supposons que $S = \{u_1, u_2\}$. Ce cas a été étudié par Barahona et Mahjoub [13]. L'ensemble des solutions partielles du graphe G_i , $i = 1, 2$, est partitionné en quatre classes (voir section 1.3). En utilisant les vecteurs représentatifs, elles se définissent de la façon suivante :

$$C_{u_1 u_2} = \{x \in STB(G_i) : x(u_1) = 1 \text{ et } x(u_2) = 1\}$$

$$C_{u_1} = \{x \in STB(G_i) : x(u_1) = 1 \text{ et } x(u_2) = 0\}$$

$$C_{u_2} = \{x \in STB(G_i) : x(u_1) = 0 \text{ et } x(u_2) = 1\}$$

$$C_\emptyset = \{x \in STB(G_i) : x(u_1) = 0 \text{ et } x(u_2) = 0\}$$

Nous avons également vu à travers un exemple de la section 2.2, qu'en considérant les variables $x(u_1)$ et $x(u_2)$ comme des variables d'états, les polytopes $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ ne sont pas toujours parfaitement composables.

Soit le graphe artificiel $H = (V_H, E_H)$ tel que

$$V_H = \{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$$

$$E_H = \{(u_1, w_1), (u_2, w_1), (u_1, w_2), (u_2, w_3), (w_2, w_3)\}.$$

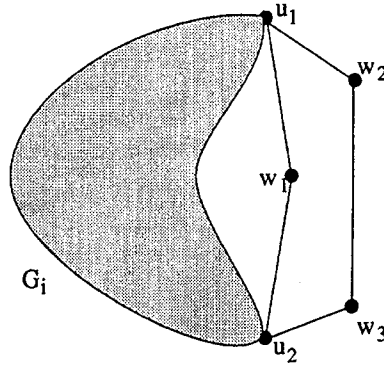
Le graphe \overline{G}_i , $i \in \{1, 2\}$, est donné dans la figure 2.5.

L'inéquation 2.10 définit une facette $F(\overline{G}_i)$ de $STB(\overline{G}_i)$, $i = 1, 2$.

$$y(u_1) + y(u_2) + \sum_{j=1}^3 y(w_j) \leq 2 \quad (2.10)$$

Le polytope $\mathbb{P}_y(F(\overline{G}_i))$ est l'enveloppe convexe des solutions partielles de H , i.e l'enveloppe convexe des stables $(y(u_1), y(u_2), y(w_1), y(w_2), y(w_3))$ de H appartenant à l'ensemble suivant :

$$S_H = \{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\}$$

FIG. 2.5 - $\overline{G}_i, i \in \{1, 2\}$

Chacune des classes des solutions partielles $C_{u_1 u_2}$, C_{u_1} et C_{u_2} est représentée par un seul point de S_H ; la classe C_\emptyset est représentée par deux éléments de S_H .

Les éléments de l'ensemble S_H sont affinement indépendants et chacun d'eux représente une seule classe de solutions partielles de G_i , de plus, chaque sommet de $F(\overline{G}_i)$ se projette sur un sommet de $\mathbb{IP}_y(F(\overline{G}_i))$ (car $STB(\overline{G}_i)$ est un $\{0, 1\}$ -polytope). Nous déduisons que $F(\overline{G}_i)$ est une description étendue parfaite de $STB(G_i)$ ayant pour variables d'états $y(u_1)$, $y(u_2)$, $y(w_1)$, $y(w_2)$, et $y(w_3)$; où $y(w_1)$, $y(w_2)$, et $y(w_3)$ sont des variables artificielles. Le graphe H est un graphe artificiel valide.

D'après le corollaire 2.3.1, les polytopes $STB(\overline{G}_1)$ et $STB(\overline{G}_2)$ sont parfaitement composables relativement à tout ensemble de vecteurs de mariages admissibles.

Soit P le polytope obtenu par composition des sommets de $STB(\overline{G}_1)$ et $STB(\overline{G}_2)$ (les mariages admissibles étant donnés dans la section 2.2). Ce polytope est décrit par l'union des deux systèmes d'inéquations linéaires définissant $STB(\overline{G}_1)$ et $STB(\overline{G}_2)$. P correspond alors à la face $F(\overline{G})$ de $STB(\overline{G})$; où \overline{G} est obtenu par composition en parallèle de G et H , et $F(\overline{G})$ est la face définie par l'inéquation 2.10.

Dans ce cas, $STB(G) = \mathbb{IP}_{(x, y(u_1), y(u_2))}(F(\overline{G}))$ (le résultat de la projection est donné dans [13]).

D'une manière générale, nous donnons la définition suivante qui n'est, en fait, qu'une conséquence de la définition 2.4.1.

Soit L_H l'ensemble des solutions partielles de H (i.e. l'ensemble de tous les points qui sont projections, sur l'espace engendré par les variables d'état, des sommets du polyèdre associé à \overline{G}_i , ($i \in \{1, 2\}$)).

Définition 2.5.1 *Un graphe artificiel H est valide si le polytope $\text{Conv}(L_H)$ admet une face F_H telle que :*

- *les éléments de $F_H \cap L_H$ soient affinement indépendants;*
- *chaque classe de solutions partielles de G_i soit représentée par un élément de $F_H \cap L_H$ de sorte que les mariages admissibles puissent se traduire, sans ambiguïté, sous forme de vecteurs.*

Dans le cas de $STB(\overline{G}_i)$, $\text{Conv}(L_H)$ est donné par le système

$$\begin{cases} y(u_1) + y(u_2) + \sum_{j=1}^3 y(w_j) \leq 2 \\ y(v') + y(v'') \leq 1, \quad \forall (v', v'') \in E_H \\ y(v) \geq 0, \quad \forall v \in V_H \end{cases} \quad (2.11)$$

et les points de l'ensemble $S_H = F_H \cap L_H$ sont les sommets de la facette F_H de $\text{Conv}(L_H)$ définie par l'inéquation 2.10.

De la description $STB(\overline{G}_i)$, ($i \in \{1, 2\}$), nous pouvons nous ramener à une autre description étendue parfaite \widetilde{P}_i utilisant des variables d'état quelconques (qui ne sont pas associées aux sommets ou aux arêtes d'un graphe artificiel). A titre d'exemple, nous transformons affinement le polytope $STB(\overline{G}_i)$ en un autre polytope \widetilde{P}_i en faisant correspondre à chaque point $(x, y(u_1), y(u_2), y(w_1), y(w_2), y(w_3))$ de $STB(\overline{G}_i)$ le point $(x, y(u_1), y(u_2), z)$, avec $z \in \mathbb{R}$, tel que :

$$z = 2y(w_1) + y(w_2) + y(w_3). \quad (2.12)$$

Le polytope \widetilde{P}_i s'obtient par une projection, faisant disparaître les variables $y(w_1)$, $y(w_2)$ et $y(w_3)$, du système d'inéquations définissant $STB(\overline{G}_i)$ auquel nous rajoutons l'équation 2.12.

Chaque sommet de \widetilde{P}_i se projette sur un sommet du simplexe

$$\mathbb{IP}_{(y(u_1), y(u_2), z)}(\widetilde{P}_i) = \text{Conv}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 3)\}.$$

La description \widetilde{P}_i utilise un nombre minimum de variables d'état, $y(u_1)$, $y(u_2)$ et z , car il y a 4 classes de solutions partielles.

Inversement, en ayant la description étendue parfaite \widetilde{P}_i nous pouvons retrouver la description de $STB(\overline{G}_i)$. En effet, comme le graphe artificiel H n'a que cinq sommets, nous rajoutons à chaque stable de H appartenant à F_H une sixième composante

contenant la valeur de z correspondante; l'enveloppe convexe des cinq vecteurs, ainsi obtenus, constitue une description étendue parfaite de F_H . Cette enveloppe convexe et le polytope \widetilde{P}_i sont parfaitement composables. Par une composition de ces deux polytopes, puis par une projection du système obtenu, nous aurons un système d'inéquations définissant $STB(\overline{G}_i)$.

Notons que, pour un problème d'optimisation donné, il peut exister à la fois plusieurs graphes artificiels valides. Ainsi, pour le problème du stable, il en existe d'autres différents du cycle considéré par Barahona et Mahjoub [13] (voir figure 2.6).

Remarque 2.5.1 *On peut déduire une formulation étendue parfaite qui utilise un certain graphe artificiel valide, à partir d'une formulation étendue parfaite utilisant un autre graphe artificiel valide.*

Preuve:

Etant donnés deux graphes artificiels valides H_1 et H_2 . Considérons le polyèdre $P(\overline{H})$ associé au graphe \overline{H} composé de H_1 et H_2 . D'après le corollaire 2.3.1, $P(\overline{H})$ est une description parfaite relativement à la fois à H_1 et à H_2 . La composition de $P(\overline{H})$ et $P(\overline{H}_1)$ conduit, après projection, à une description de $P(\overline{H}_2)$.

Cette déduction peut aussi se faire en passant par une description parfaite intermédiaire utilisant des variables quelconques (voir les deux paragraphes précédents). \square

Reprenons le problème du stable et supposons, cette fois-ci, que $S = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$. Nous allons montrer qu'il existe un graphe artificiel valide, quelle que soit la taille du stable S .

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les sous-ensembles de S . Les classes des solutions partielles des graphes G_1 et G_2 sont en bijection avec les éléments \mathcal{P} . A chaque élément D de \mathcal{P} correspond la classe C_D , définie comme suit :

$$C_D = \{x \in STB(G_i) : x(v) = 0 \text{ si } v \in D \text{ et } x(v) = 1 \text{ sinon}\}.$$

Dans ce cas, le nombre de classes des solutions partielles, égal à 2^s , croît exponentiellement en s .

Proposition 2.5.1 *Pour tout s , il existe un graphe artificiel valide.*

Preuve:

Considérons le graphe $H = (V_H, E_H)$ défini de la manière suivante:

o $V_H = S \cup \{w_1, \dots, w_{2^s-1}\}$, où chaque sommet w_j correspond à un élément $D \in \mathcal{P}$

tel que $D \neq S$;

o $(v', v'') \in E_H$ si et seulement si,

$$\{v', v''\} \subseteq \{w_1, \dots, w_{2^s-1}\}; \text{ ou bien,}$$

$$v' \in S, v'' \in \{w_1, \dots, w_{2^s-1}\} \text{ et } v' \text{ n'est pas élément du}$$

sous-ensemble de S correspondant à v'' .

Par définition, S est un stable de H et $\{w_1, \dots, w_{2^s-1}\}$ induit une clique K de H .

Montrons que H est valide.

Comme le polytope du stable est en $\{0, 1\}$, $\text{Conv}(L_H) = \text{STB}(H)$. Soit c une fonction coût définie sur V_H telle que:

$$c(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S \\ s - \text{card}(v) & \text{si } v \notin S \end{cases}$$

où $\text{card}(w_j)$, $j = 1, \dots, 2^s - 1$, est la cardinalité de l'élément de \mathcal{P} correspondant à w_j . L'optimum du problème d'optimisation $\max\{cx : x \in \text{STB}(H)\}$, qui est égal à s , est atteint en une face F_H de $\text{STB}(H)$.

Chaque stable de H appartenant à F_H est soit égal à S , et dans ce cas il représente la classe C_S , soit il intersecte K en un seul sommet et il représente une classe de solutions partielles différente de C_S .

Par définition du graphe H et de la fonction c , chaque sommet de $\{w_1, \dots, w_{2^s-1}\}$ peut constituer, avec les sommets de S qui ne lui sont pas adjacents, un stable de F_H et, par conséquent, chaque classe de solutions partielles est représentée par un stable de F_H . Du fait que les stables de F_H intersectent la clique K en au plus un sommet, les 2^s sommets de F_H sont affinement indépendants, i.e. F_H est un simplexe.

Nous déduisons que le graphe H considéré est un graphe artificiel valide. \square

Il est facile de voir que le graphe H considéré dans la preuve ci-dessus est parfait (voir 4.2), i.e. :

$$\text{STB}(H) = \begin{cases} \sum_{v \in K} x(v) \leq 1, & \forall K \text{ clique maximale de } H \\ x(v) \geq 0 & , \forall v \in V_H \end{cases} \quad (2.13)$$

Le graphe artificiel de la figure 2.6 est valide dans le cas où $s = 2$. La face simpliciale, F_H de $\text{STB}(H)$, qui couvre toutes les classes de solutions partielles est obtenue en

serrant, dans le système 2.13, les deux inéquations suivantes :

$$\begin{aligned}x(u_1) + x(w_1) + x(w_2) &\leq 1 \\x(u_2) + x(w_1) + x(w_3) &\leq 1.\end{aligned}$$

Remarquons que chaque classe est représentée par un seul sommet de F_H . Dans le cas considéré précédemment, où H est un cycle à cinq sommets, une des quatre classes est représentée par deux sommets de F_H .

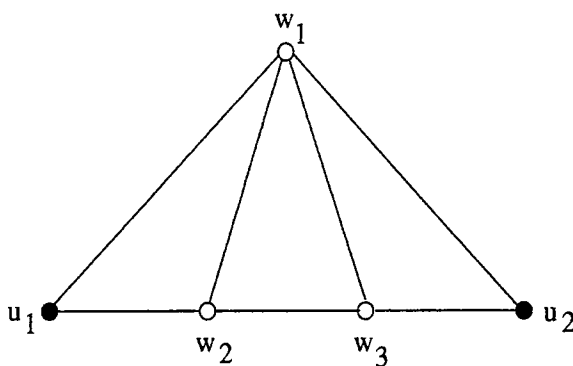


FIG. 2.6 - Un graphe artificiel valide dans le cas où $s = 2$.

Pour mieux cerner cette approche par adjonction de graphes artificiels et discuter d'autres remarques la concernant, nous considérons la composition des polytopes des absorbants. Un sous-ensemble de sommets A d'un graphe G est dit *absorbant* (ou *dominant*) si chaque sommet de G , n'appartenant pas à A , est adjacent à au moins un sommet de A (il est absorbé par A). Etant donnée une fonction coût définie sur l'ensemble des sommets de G , Le *problème de l'absorbant de poids minimum* consiste à trouver un sous-ensemble de sommets qui soit un absorbant de poids minimum de G . Il s'agit d'un des problèmes classiques d'optimisation combinatoire; Berge [17, 18] était parmi les premiers à l'avoir discuté. C'est un problème NP-dur dans le cas général, cependant, il a été résolu polynomialement dans certaines classes de graphes [1, 34, 67, 72].

Le polytope des absorbants de G , noté $ABS(G)$, est l'enveloppe convexe de tous les absorbants de ce graphe. Ce polytope a été étudié dans quelques cas particuliers de graphes [47, 79].

Etant donné un graphe $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{u\}, E_1 \cup E_2)$ obtenu à partir de $G_1 = (V_1 \cup \{u_1\}, E_1)$ et $G_2 = (V_2 \cup \{u_2\}, E_2)$ en identifiant les sommets u_1 et u_2 en

un sommet u .

Soit A un absorbant du graphe G . Posons

$$A' = \begin{cases} A \cup \{u_1, u_2\} & \text{si } u \in A \\ A & \text{si } u \notin A \end{cases}$$

Le sous-ensemble de sommets $A_i = A' \cap (V_i \cup \{u_i\})$, $i \in \{1, 2\}$, est un absorbant partiel de G_i . Nous dirons que :

$$A_i \in C_{-1} \text{ si } u_i \notin A_i \text{ et } N_i(u_i) \cap A = \emptyset$$

$$A_i \in C_0 \text{ si } u_i \notin A_i \text{ et } N_i(u_i) \cap A \neq \emptyset$$

$$A_i \in C_1 \text{ si } u_i \in A_i$$

où $N_i(u_i)$ est l'ensemble des voisins de u_i dans le graphe G_i .

Nous définissons ainsi, trois classes de solutions partielles relativement à l'opération de composition récemment considérée. Un mariage de deux absorbants partiels A_1 et A_2 , de G_1 et G_2 respectivement, est admissible si et seulement si un des 4 cas suivants est vérifié :

$$A_1 \in C_{-1} \quad \text{et} \quad A_2 \in C_0$$

$$A_1 \in C_0 \quad \text{et} \quad A_2 \in C_{-1}$$

$$A_1 \in C_0 \quad \text{et} \quad A_2 \in C_0$$

$$A_1 \in C_1 \quad \text{et} \quad A_2 \in C_1.$$

Dans le but de déduire une description du polytope $ABS(G)$ à partir de systèmes relatifs à $ABS(G_1)$ et $ABS(G_2)$, Bouchakour et Mahjoub [22] considèrent, comme graphe artificiel, un cycle à cinq sommets donné dans la figure 2.7(a) qui utilise 4 sommets artificiels, w_1^i , w_2^i , w_3^i et w_4^i .

Comme dans le cas des polytopes des stables, il existe plusieurs graphes artificiels valides pour cette opération de composition. Soit H le graphe artificiel de la figure 2.7(b) qui est une chaîne ayant 3 sommets artificiels w_1^i , w_2^i et w_3^i . Le polytope $Conv(L_H)$ admet une face F_H , obtenue en serrant les inéquations (qui définissent également des facettes de $ABS(\overline{G_i})$) suivantes :

$$y(u_i) + y(w_1^i) + y(w_2^i) \geq 1$$

$$y(w_3^i) + y(w_2^i) \geq 1$$

telle que F_H est un simplexe de sommets $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0, 1)$.

La classe C_0 étant représentée, à la fois, par les sommets $(0, 1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1, 0)$, les trois vecteurs de mariage de

$$\gamma = \{(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)\}$$

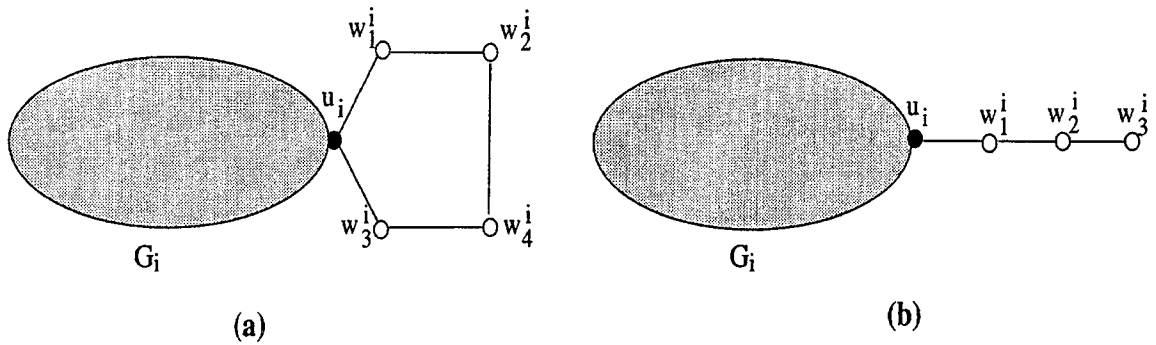


FIG. 2.7 - Deux graphes artificiels valides pour le cas de l'absorbant ($i = 1, 2$).

correspondant à $(u_1, w_1^1, w_2^1, w_3^1, u_2, w_1^2, w_2^2, w_3^2, u)$, suffisent pour générer tous les absorbants du graphe G sans ambiguïté (toutes les solutions générées sont des absorbants de G).

L'enveloppe convexe des éléments de γ est donnée par :

$$\Gamma = \begin{cases} y(u_1) + y(w_1^1) + y(w_2^1) = 1 \\ y(w_2^1) + y(w_3^1) = 1 \\ y(w_2^2) + y(w_3^2) = 1 \\ y(w_1^1) = y(w_2^2) \\ y(w_2^1) = y(w_1^2) \\ y(u_1) = y(u_2) = y(u) \\ y \in \mathbb{R}_+^9 \end{cases} \quad (2.14)$$

Ainsi le polytope P , décrit par l'union des systèmes définissant $ABS(\overline{G_1})$, $ABS(\overline{G_2})$ et Γ , est une description étendue de $ABS(G)$.

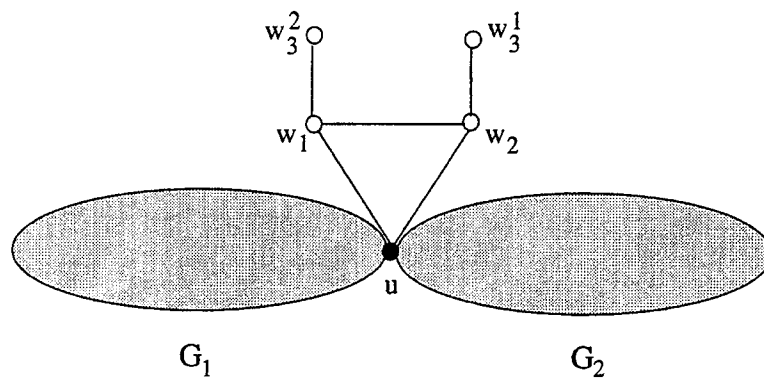


FIG. 2.8 - Le graphe \overline{G} .

Dans le cas de la composition des polytopes des stables que nous avons vu précé-

demment, ainsi que pour les compositions étudiées dans [10, 12, 13, 25, 50], un vecteur de mariage n'est valide que si les deux solutions partielles appartiennent à la même classe et, par conséquent, le polytope P correspond à une face de l'enveloppe convexe des objets combinatoires d'un graphe \overline{G} obtenu par composition du graphe G et du graphe artificiel considéré. Quant au cas de l'absorbant, on pourrait a priori penser que, d'après le système 2.14, le polytope P correspondrait à une face $F(\overline{G})$ de $ABS(\overline{G})$; où \overline{G} est le graphe de la figure 2.8, et

$$F(\overline{G}) = ABS(\overline{G}) \cap \left\{ \begin{array}{l} y(u) + y(w_1) + y(w_2) = 1 \\ y(w_1) + y(w_3^2) = 1 \\ y(w_2) + y(w_3^1) = 1 \end{array} \right\}$$

Cependant, la projection de $F(\overline{G})$ peut engendrer des points qui ne soient pas des absorbants de G . Par exemple, les points qui sont projections d'absorbants de $F(\overline{G})$, pour lesquels $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3^1 = 0$, $w_3^2 = 1$, $u = 0$ et u est absorbé seulement par le sommet w_2 , ne correspondent pas à des absorbants de G . Le polyèdre P ne correspond donc pas à $F(\overline{G})$.

Afin d'éclaircir plus ce point, nous considérons le problème du voyageur de commerce classique (défini dans la section 1.3). Nous supposons que le graphe G soit obtenu par identification de s sommets d'un graphe G_1 avec s sommets d'un autre graphe G_2 , tels que $TSP(G)$ soit non-vide.

Pour $s = 2$, un graphe artificiel valide consiste en une seule arête f . Pour $s = 3$, un graphe artificiel valide est donné dans la figure 2.9.

Dans les deux situations, $s = 2, 3$, l'enveloppe convexe des vecteurs de mariages corres-

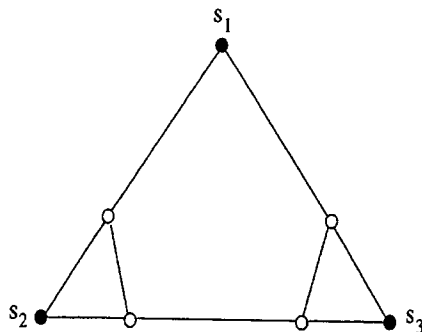


FIG. 2.9 -

pond à l'enveloppe convexe des cycles hamiltoniens d'un graphe \overline{H} , i.e. $\Gamma = TSP(\overline{H})$, où \overline{H} est obtenu à partir de deux graphes artificiels isomorphes, par la même opération

composant G_1 et G_2 . Par conséquent, le polytope P ne correspond, en aucun cas de graphe composé, à la description (non-étendue) d'une face de l'enveloppe convexe des cycles hamiltoniens ou celle des tournées.

La définition d'un graphe artificiel valide est étroitement liée au graphe \widetilde{G}_i , $i \in \{1, 2\}$, qui est la composition du graphe G_i et de ce graphe artificiel. En prenant en compte des opérations de composition de G_i et du graphe artificiel, différentes de celle liant G_1 et G_2 , nous pouvons donc élargir la classe des graphes artificiels valides. Ainsi, dans le cas de l'absorbant, le graphe artificiel utilisé dans la figure 2.10 est valide et la face

$$F(\widetilde{G}_i) = ABS(\widetilde{G}_i) \cap \left\{ \begin{array}{l} y(u_i) + y(w_2^i) + y(w_3^i) = 1 \\ y(w_1^i) = 0 \end{array} \right\}$$

est une formulation étendue parfaite de l'enveloppe convexe des absorbants partiels de G_i .

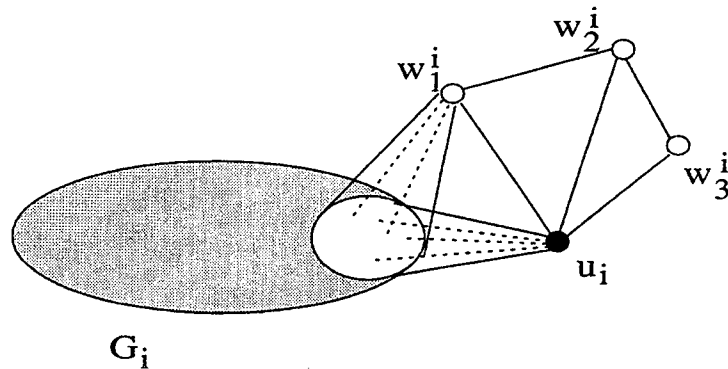


FIG. 2.10 - Le graphe \widetilde{G}_i (où w_1^i est adjacent à tous les voisins de u_i dans G_i).

2.6 Formulations compactes

Optimiser une fonction linéaire sur un polyèdre est un problème de programmation linéaire. Malheureusement, les polyèdres associés aux problèmes d'optimisation combinatoire ont, dans la majorité des cas, un nombre exponentiel de facettes. Ce qui ne permet pas l'application directe des algorithmes de programmation linéaires.

Une importante question (voir [110]), dans la théorie de la programmation en nombres entiers, est de savoir si on peut formuler ces problèmes, notamment ceux

qui appartiennent à la classe P , comme des programmes linéaires ayant un nombre polynomial de variables et un nombre polynomial de contraintes; en d'autres termes, représenter leurs polyèdres associés comme projection d'autres polyèdres ayant un nombre polynomial de facettes, tout en utilisant un nombre polynomial de variables artificielles. De telles formulations sont dites *compactes*.

Si une formulation compacte existe, le problème se résout polynomialement par l'application de l'algorithme de Karmarkar [69].

Des formulations compactes ont été données pour : Les sous-graphes parfaitement couplables par Balas et Pulleyblank [4, 5]; les r -arborescences optimales par Wong [109] et Maculan [77]; les arbres de Steiner à deux sommets terminaux par Ball, Liu et Pulleyblank [6]; les arbres de Steiner dans les graphes série-parallèles maximaux par Margot, Prodon et Liebling [82]; les stables, les sous-graphes induits acycliques et les sous-graphes induits bipartis dans les graphes série-parallèles par Barahona et Mahjoub [12, 13]; la coupe maximum dans les graphes non-contractibles à K_5 par Barahona [9]; le cycle moyen minimum par Barahona [8]; Les stables dans les graphes t -parfaits par Yannakakis [110] et Lovász et Schrijver [76]; les stables dans une classe de graphes sans étoile par Pulleyblank et Shepherd [101]. Notons que les systèmes compactes, donnés dans [8] et Maculan [77], définissent des polyèdres qui ne sont pas entiers.

Un seul résultat négatif a été donné par Yannakakis [110] montrant qu'il n'existe pas de formulation compacte symétrique pour le problème du voyageur de commerce et celui des couplages.

En interprétant la méthode de programmation dynamique comme étant la recherche d'un plus court chemin dans un hypergraphe orienté sans circuit, Martin, Raldin et Campbell [84] montrent qu'un algorithme de programmation dynamique polynomial peut conduire à une caractérisation linéaire compacte de l'enveloppe convexe des objets combinatoires. La description qu'ils obtiennent est une description étendue utilisant un grand nombre de variables artificielles associées aux arcs de l'hypergraphe.

Lors de l'application de l'approche de composition considérée dans ce chapitre, le polyèdre, obtenu par adjonction des contraintes exprimant les mariages admissibles à l'union des deux systèmes, constitue une description étendue de l'enveloppe convexe des solutions partielles du graphe courant. En remontant l'arbre de composition, d'un graphe donné G , et en gardant à chaque étape toutes les variables artificielles, on finit

donc avec une description étendue de l'enveloppe convexe des objets combinatoires (considérés) de G .

Il s'en suit, alors, qu'étant donnée une classe de graphes obtenus par composition telle que :

- le nombre d'opérations de composition soit fini;
- le nombre des graphes primitifs soit fini;
- la taille de l'arbre de composition soit polynomiale en celle du graphe;

alors, la description étendue est compacte pour cette classe de graphes.

Notons que, sous ces conditions, l'algorithme de programmation dynamique est polynomial en la taille du graphe.

D'après l'exemple de la section 2.4, si on remonte l'arbre de composition d'un graphe série-parallèle, on démarre avec des systèmes à trois variables et six contraintes, et on rajoute deux variables artificielles et, au maximum, neuf contraintes un nombre de fois polynomial en la taille du graphe (l'arbre étant de taille polynomiale). Cela donne une formulation compacte pour le problème du voyageur de commerce graphique défini sur les graphes série-parallèles.

Les formulations compactes, résultant de l'approche de composition en question, utilisent moins de variables artificielles que celles données dans [84].

2.7 Conclusion et remarques

Le principe de l'approche de composition que nous venons de discuter n'est autre que celui de la programmation dynamique. Cette analogie peut être traduite, sous forme d'inéquations linéaires, à l'aide des variables d'état. Ces dernières sont dans la plupart des cas artificielles, d'où la nécessité de l'intervention des méthodes de projection. Dans le chapitre 1, nous avons vu que ces méthodes font appel à la détermination de tous les rayons extrêmes du cône de projection, une tâche qui n'est pas toujours facile. Ce qui constitue un point faible de cette approche.

L'application de cette approche, pourrait alors se compliquer dès qu'on considère des opérations de compositions engendrant un nombre important de classes de solutions partielles (rappelons que le nombre des variables d'état est au moins égal à celui des

classes moins un), telle que l'identification de sous-graphes étudiée dans le chapitre 3.

Notons, tout de même, que l'énumération des rayons extrêmes peut se faire par l'intermédiaire des moyens informatiques; par exemple le logiciel Mathematica [107] contenant l'implémentation de la méthode de Avis et Fukuda [2]. Cette dernière méthode permet de déterminer l'enveloppe convexe des vecteurs de mariages admissibles.

L'usage des graphes artificiels valides permet de décomposer les graphes et d'avoir en même temps des descriptions parfaites. Parfois ces descriptions sont des faces propres d'autres polyèdres, et de nombreuses inéquations s'avèrent redondantes dans les systèmes considérés; comme c'est le cas pour la composition étudiée dans le chapitre suivant.

Cet usage conduit, dans certaines décompositions, à des graphes primitifs dont les polyèdres associés ne sont pas connus, mais qui sont quand même relativement faciles à étudier.

D'autre part, les graphes artificiels induisent, quelquefois, des classes de solutions partielles non-disjointes et ne permettent pas, par conséquent, une traduction non-ambiguë des mariages admissibles. On pourra constater cela si on considère l'opération k -somme, avec $k \geq 3$, et des polyèdres du voyageur de commerce graphique (l'algorithme de programmation dynamique correspondant est donné par Fonlupt et Nacheff [52]).

Chapitre 3

Composition de polyèdres du voyageur de commerce graphique

3.1 Introduction

En considérant le problème du voyageur de commerce graphique, le présent chapitre fera l'objet de l'étude des conséquences polyédrales de la deux-sommes de deux graphes par application de l'approche de composition présentée dans le chapitre précédent.

Nous détaillerons, dans ce cas de polyèdres, la deuxième phase de cette approche qui consiste à utiliser les méthodes de projection pour éliminer les variables artificielles (introduites par adjonction de graphes artificiels) et nous étudierons la composition des inéquations essentielles pour la description du nouveau polyèdre.

Le choix du problème du voyageur de commerce graphique nous permettra ainsi d'étudier un cas de composition de polyèdres non-bornés dont les sommets sont en $\{0, 1, 2\}$.

3.2 Le polyèdre du voyageur de commerce graphique

Le problème du voyageur de commerce symétrique est l'un des problèmes les plus connus de l'optimisation combinatoire. Noté *TSP*, ce problème se définit de la manière suivante :

Etant donné un graphe simple connexe $G = (V, E)$ muni d'une fonction coût, définie sur E , qui associe à chaque arête e de G un coût réel $c(e)$. Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver un cycle hamiltonien

de G de coût minimum. Un cycle hamiltonien de G passe une, et une seule fois, par tous les sommets de ce graphe.

Ce problème est *NP*-dur du fait que la solution du *TSP* pour la fonction coût $c(e) = 1, \forall e \in E$, qui montre si G est hamiltonien ou pas, soit un problème connu pour être *NP*-complet [56].

L'enveloppe convexe des cycles hamiltoniens de G est désignée par $TSP(G)$. Quand G est un graphe complet à n sommets, on note $TSP(n)$.

La description complète, par un système d'inéquations linéaires, de $TSP(G)$ est un problème difficile. Elle est connue simplement pour les graphes ayant au plus 8 sommets [24, 30], ou pour quelques classes particulières de graphes tels que les graphes de Halin [38, 39].

La difficulté principale de cette caractérisation est que le polytope étudié n'est pas de pleine dimension (voir [64]). Afin de plonger le $TSP(n)$ dans des polytopes de pleine dimension, certaines contraintes du *TSP* ont été relaxées. Les polytopes ainsi obtenus sont celui du voyageur de commerce monotone et le polytope des 2-couplages (voir [62, 64]). Ces relaxations ont permis de connaître certaines classes d'inéquations définissant des facettes de $TSP(n)$ qui ont été généralisées par la suite [62, 63, 64, 65, 85, 89, 90, 92].

Notons, tout de même, que la caractérisation partielle de $TSP(n)$ permet de résoudre des instances de grandes tailles [32, 98, 99].

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à une relaxation plus récente qui est le *Problème du Voyageur de Commerce Graphique*, noté *GTSP*, définie par Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [37] et Fleischman [48].

Le GTSP consiste à trouver un parcours de coût minimum qui passe, au moins une fois, par chaque sommet du graphe. Un tel parcours, appelé tournée, est donc un sous-graphe de G qui est connexe et eulerien (tous les degrés des sommets sont pairs), où chacune de ses arêtes peut être utilisée plusieurs fois.

Notons que si une des arêtes de G a un coût négatif alors, l'optimum est infini. Sinon, dans une tournée optimale, chacune des arêtes ne peut être utilisée que 0, 1 ou 2 fois.

En soi même, la $GTSP$ est un problème d'intérêt. La formulation classique du problème du voyageur de commerce présente parfois quelques inconvénients, car il se peut que G ne possède pas de cycles hamiltoniens et, même s'il en possède, il se peut que le parcours d'un tel cycle ne soit pas le moyen le plus court pour visiter chaque sommet au moins une fois.

Si le graphe est complet et si la fonction coût vérifie les inégalités triangulaires (i.e. pour chaque triangle du graphe, le coût d'une arête est inférieur ou égal à la somme des coûts des deux autres arêtes), alors le TSP et le $GTSP$ deviennent équivalents. Le $GTSP$ est lui aussi un problème NP -dur.

Du fait que chaque arête puisse être utilisée plusieurs fois, l'enveloppe convexe des tournées de G , notée $GTSP(G)$, est non-bornée. On l'appelle donc le *polyèdre du voyageur de commerce graphique*.

La structure polyédrale du $GTSP(G)$ a été étudiée pour la première fois par Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [37]. Plusieurs résultats concernant les facettes de ce polyèdre sont donnés par : Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [37], Elnacheff et Fonlupt [45], Nacheff [87], Naddef [88], Naddef et Rinaldi [91, 92].

Une inéquation $x(e) \geq 0$, $e \in E$, est appelée *inéquation triviale*. Une facette de $GTSP(G)$ définie par une inéquation triviale est dite *facette triviale*.

Une coupe $\delta(S)$ de G , où $S \subset V$, est l'ensemble de toutes les arêtes de G ayant une extrémité dans S et l'autre extrémité dans $V - S$. Les inéquations de la forme

$$\sum_{e \in \delta(S)} x(e) \geq 2, \quad S \subset V$$

sont appelées inéquations de coupe. Elles sont valides pour $GTSP(G)$.

Si $|S| = 1$ alors, la coupe $\delta(S)$ est dite triviale, et l'inéquation de coupe qui lui est associée est appelée inéquation de coupe triviale.

Un *isthme* de G est une arête $e \in E$ telle que $G - \{e\}$ ne soit pas connexe.

Nous regroupons, dans un seul théorème, quelques résultats de base, concernant le $GTSP(G)$, établis par Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [37].

Théorème 3.2.1 [37]

- Les sommets de $GTSP(G)$ sont en 0, 1 et 2.
- Si G est connexe alors, $GTSP(G)$ est de pleine dimension, i.e $\dim(GTSP(G)) = |E|$.

Si non $GTSP(G) = \emptyset$.

- Si G possède k isthmes alors, la dimension de l'enveloppe convexe des sommets de $GTSP(G)$ est égale à $|E| - k$.
- Une inéquation triviale $x(e) \geq 0$ définit une facette de $GTSP(G)$ si et seulement si l'arête e n'est pas un isthme de G .
- Une inéquation de coupe, associée à $\delta(S)$, définit une facette de $GTSP(G)$ si et seulement si les sous-graphes de G engendrés respectivement par S et $V - S$ sont connexes.

Du fait qu'il soit de pleine dimension, le polyèdre $GTSP(G)$ admet, à une multiplication près par un scalaire positif, une représentation unique par un système minimal d'inéquations linéaires. Autrement dit, chaque facette de $GTSP(G)$ a une représentation unique, à une multiplication près par un scalaire positif, par une inéquation linéaire.

Fonlupt et Naddef [53] définissent les graphes $GTSP$ -parfaits comme étant les graphes pour lesquels l'enveloppe convexe des tournées est entièrement décrite par les inéquations de coupe et les inéquations triviales. Ils donnent le théorème suivant caractérisant cette classe de graphes.

Théorème 3.2.2 [53] *Un graphe est $GTSP$ -parfait si et seulement s'il n'admet aucun des trois graphes (M_1 , M_2 et M_3) de la figure 3.1 comme mineur.*

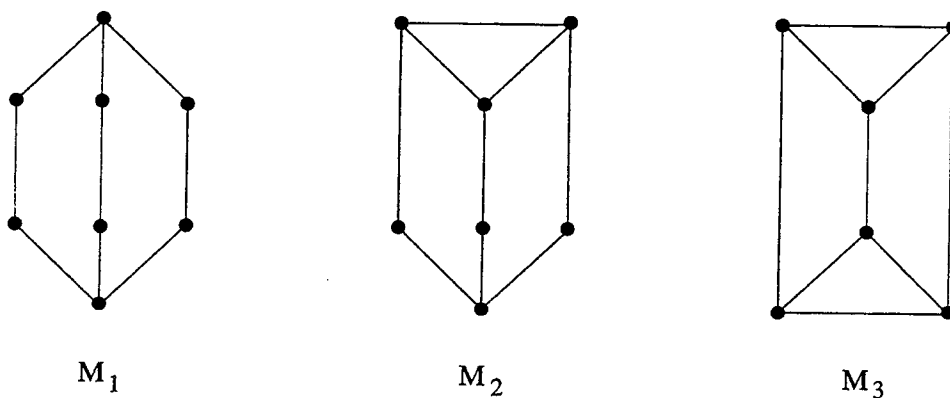


FIG. 3.1 - Les mineurs exclus pour les graphes $GTSP$ -parfaits.

Ils montrent aussi [53] que tout graphe $GTSP$ -parfait s'obtient par composition (1-somme et 2-somme) à partir d'une petite liste de graphes primitifs.

Notons que le polytope $TSP(G)$ est une face de $GTSP(G)$ qui s'obtient en serrant les inéquations de coupe triviales. Plusieurs résultats concernant la description des facettes de $TSP(G)$ ont été dérivés à partir de cette relaxation. Naddef et Rinaldi [93] montrent le lien étroit entre le $TSP(n)$ et le $GTSP(n)$.

3.3 Composition de polyèdres

Etant donné un graphe connexe $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ tel que chaque arête de E_1 (resp. E_2) ait ses deux extrémités dans V_1 (resp. V_2). $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ est donc un ensemble d'articulation de G . Considérons les sous-graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. On dit que le graphe G est la s -somme de G_1 et G_2 , où $s = |V_1 \cap V_2|$.

Dans le cas où $s = 1$, il est simple de voir que $GTSP(G) = GTSP(G_1) \cap GTSP(G_2)$, i.e. le polyèdre $GTSP(G)$ est entièrement décrit par l'union des deux systèmes d'inéquations linéaires définissant $GTSP(G_1)$ et $GTSP(G_2)$.

Nous supposons maintenant que $V_1 \cap V_2 = \{u, v\}$. Le graphe G est obtenu par une 2-somme ou bien une composition en parallèle de G_1 et G_2 . Nous allons déduire une description linéaire du polyèdre $GTSP(G)$ par application de l'approche du chapitre précédent, i.e. par adjonction de graphe artificiel à G_1 et G_2 (voir la sous-section 2.5).

Rappelons les classes de tournées partielles de G_k , $k \in \{1, 2\}$, définies dans la section 1.3 :

$$\begin{aligned} C_0^k &= \{T \subseteq E_k : (x_T^k, 0) \text{ tournée de } \widehat{G}_k \text{ et } \text{Supp}(T) \text{ connexe}\} \\ C_1^k &= \{T \subseteq E_k : (x_T^k, 1) \text{ tournée de } \widehat{G}_k \text{ et } \text{Supp}(T) \text{ connexe}\} \\ C_2^k &= \{T \subseteq E_k : (x_T^k, 2) \text{ tournée de } \widehat{G}_k \text{ et } \text{Supp}(T) \text{ non - connexe}\} \end{aligned}$$

où $\widehat{G}_k = (V_k, E_k \cup \{(u, v)\})$, et x_T^k est le vecteur caractéristique du sous-ensemble d'arêtes T de E_k .

$(x_{T_1}^1, x_{T_2}^2)$ est une tournée de G si une des quatre conditions est vérifiée :

$$\begin{aligned} x_{T_1}^1 &\in C_0^1 & \text{et} & & x_{T_2}^2 &\in C_0^2 \\ x_{T_1}^1 &\in C_1^1 & \text{et} & & x_{T_2}^2 &\in C_1^2 \\ x_{T_1}^1 &\in C_0^1 & \text{et} & & x_{T_2}^2 &\in C_2^2 \\ x_{T_1}^1 &\in C_2^1 & \text{et} & & x_{T_2}^2 &\in C_0^2 \end{aligned}$$

Dans la section 2.2, nous avons vu que le graphe $(\{u, v\}, \{(u, v)\})$ n'est pas un graphe artificiel valide pour cette opération de composition en parallèle.

Considérons le graphe artificiel $H_k = (V_{H_k}, E_{H_k})$, donné dans la figure 3.2, avec

$$E_{H_k} = \{e_1^k, e_2^k, e_3^k, e_4^k, e_5^k, e_6^k, e_7^k\}.$$

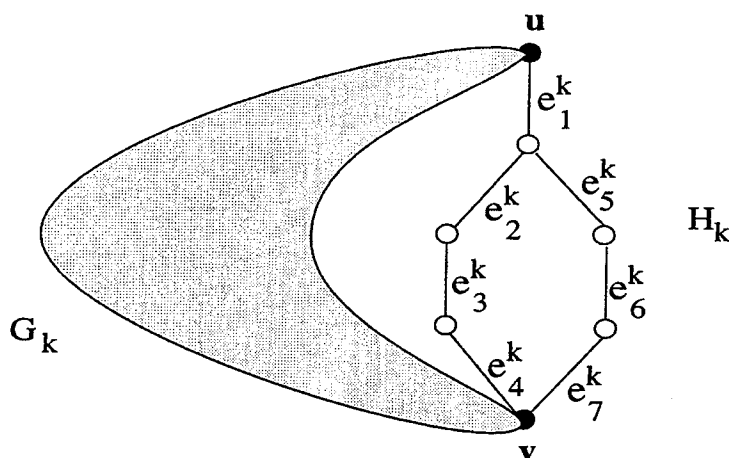


FIG. 3.2 - Le graphe \overline{G}_k , $k \in \{1, 2\}$.

Dans ce cas, le graphe \overline{G}_k , $k \in \{1, 2\}$, est tel que :

$$\overline{V}_k = V_k \cup V_{H_k} \quad \text{et} \quad \overline{E}_k = E_k \cup E_{H_k}.$$

Soit $F(\overline{G}_k)$ la face de $GTSP(\overline{G}_k)$ obtenue en serrant des inéquations de coupe :

$$F(\overline{G}_k) = GTSP(\overline{G}_k) \cap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{E_k \cup E_{H_k}} : \begin{array}{l} y(e_2^k) + y(e_3^k) = 2 \\ y(e_2^k) + y(e_4^k) = 2 \\ y(e_3^k) + y(e_4^k) = 2 \\ y(e_5^k) + y(e_7^k) = 2 \\ y(e_6^k) + y(e_7^k) = 2 \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

La variable artificielle $y(e_1^k)$ étant non-bornée dans $F(\overline{G}_k)$, $\mathbb{IP}_y(F(\overline{G}_k))$ est non-borné. En rappelant que les sommets de $GTSP(\overline{G}_k)$ sont en 0, 1 et 2, il est simple de vérifier que les sommets de $F(\overline{G}_k)$ se projettent sur les trois points affinement indépendants γ_1^k , γ_2^k et γ_3^k de la figure 3.3, i.e l'enveloppe convexe des sommets de $F(\overline{G}_k)$ se projette sur un simplexe et chacun de ses sommets se projette sur un sommet de ce simplexe. Les tournées de $F(\overline{G}_k)$ appartenant à la classe C_0^k (resp. C_1^k) (resp. C_2^k) se projettent sur les points γ_1^k et γ_3^k (resp. sur γ_2^k) (resp. sur γ_3^k).

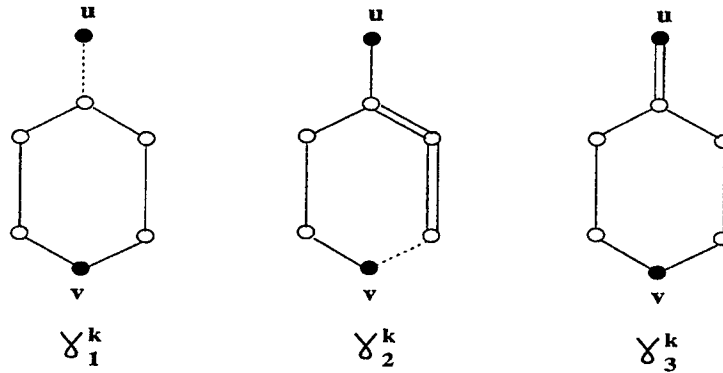


FIG. 3.3 -

Le graphe H_k est donc valide, et $F(\overline{G_k})$ est une description étendue parfaite des tournées partielles de $\overline{G_k}$. Nous déduisons les corollaires suivants :

Corollaire 3.3.1 *Les polyèdres $F(\overline{G_1})$ et $F(\overline{G_2})$ sont compatibles relativement à tout ensemble de vecteurs de mariage γ .*

Preuve : Conséquence directe du corollaire 2.3.1. \square

Corollaire 3.3.2 *Les polyèdres $F(\overline{G_1})$ et $F(\overline{G_2})$ sont parfaitement composables relativement à tout ensemble de vecteurs de mariage γ .*

Preuve : D'après le théorème 2.3.1 et le corollaire 3.3.1. \square

Notons qu'avec ce graphe H , qui pourrait être le plus petit graphe artificiel valide pour l'opération de composition considérée, le polyèdre $GTSP(\overline{G_k})$ admet d'autres faces qui sont des descriptions étendues parfaites de l'enveloppe convexe de tournées partielles de G_k . Ces faces s'obtiennent en ne serrant que des inéquations associées aux coupes incluses dans E_{H_k} .

Toutes les tournées de G peuvent être générées par les trois vecteurs de mariage suivants : (γ_1^1, γ_3^2) , (γ_3^1, γ_1^2) et (γ_2^1, γ_2^2) .

Désignons par P le polyèdre défini par l'union des deux systèmes d'inéquations décrivant $F(\overline{G_1})$ et $F(\overline{G_2})$ et celui donnant l'enveloppe convexe des vecteurs de mariage Γ . Dans cette union de systèmes, les seules contraintes de Γ qui ne sont pas redondantes sont :

$$y(e_1^1) + y(e_1^2) = 2 \quad (3.2)$$

$$y(e_7^1) - y(e_7^2) = 0 \quad (3.3)$$

D'après le corollaire 3.3.2, chaque sommet de P se compose de deux sommets, un de $F(\overline{G}_1)$ et l'autre de $F(\overline{G}_2)$, selon un vecteur de mariage admissible. Nous avons alors :

$$GTSP(G) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}^{E_1 \cup E_2}}(P).$$

3.4 Etude des facettes des descriptions étendues

Les descriptions étendues des enveloppes convexes des tournées partielles de G_1 et de G_2 , que nous considérons, sont des faces de $GTSP(\overline{G}_1)$ et $GTSP(\overline{G}_2)$. Par conséquent, certaines inéquations définissant des facettes de $GTSP(\overline{G}_1)$ et $GTSP(\overline{G}_2)$ deviennent non-essentiels pour la description de ces deux faces (rappelons que chacune de ces deux faces est contenue dans cinq hyperplans). Le but de cette section est donc d'éliminer ce type d'inéquations.

Considérons la face de $GTSP(\overline{G}_k)$, $k \in \{1, 2\}$, suivante :

$$F'(\overline{G}_k) = GTSP(\overline{G}_k) \cap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{E_k \cap E_{H_k}} : \begin{array}{l} y(e_2^k) + y(e_3^k) = 2 \\ y(e_2^k) + y(e_4^k) = 2 \\ y(e_3^k) + y(e_4^k) = 2 \end{array} \right\}. \quad (3.4)$$

Pour toute tournée T de $F'(\overline{G}_k)$, $T(e_2^k) = T(e_3^k) = T(e_4^k) = 1$.

A chaque arête e de \overline{G}_k nous associons le $\{0, 1\}$ -vecteur $z^{(e)}$ de $\mathbb{R}^{E_k \cup E_{H_k}}$ défini comme suit :

$$z^{(e)}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f = e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 3.4.1 $\dim(F(\overline{G}_k)) = |E_k| + 2$, $\dim(F'(\overline{G}_k)) = |E_k| + 4$.

Preuve :

Du fait que les cinq équations du système 3.1 soient linéairement indépendantes, $\dim(F(\overline{G}_k)) \leq |E_k| + 2$. Soient T_1 et T_2 deux tournées de $F(\overline{G}_k)$ telles que :

$$T_1(e_1^k) = 0, T_1(e_7^k) = 1, T_2(e_1^k) = 1 \text{ et } T_2(e_7^k) = 0.$$

Les $|E_k| + 3$ tournées de $F(\overline{G}_k)$, qui sont T_1 , T_2 et $T_1 + 2z^{(e)}$ avec $e \in E_k \cup \{e_1^k\}$, sont affinement indépendantes. On déduit que $\dim(F(\overline{G}_k)) = |E_k| + 2$.

De la même manière, on montre que $\dim(F'(\overline{G}_k)) = |E_k| + 4$. \square

Lemme 3.4.2 *Les inéquations suivantes*

$$y(e_5^k) + y(e_6^k) \geq 2 \quad (3.5)$$

$$y(e_5^k) + y(e_7^k) \geq 2 \quad (3.6)$$

$$y(e_6^k) + y(e_7^k) \geq 2 \quad (3.7)$$

définissent des facettes de $F'(\overline{G}_k)$.

Preuve:

Nous montrons ce lemme pour l'inéquation 3.5. Soient :

$T^{e_5^k}$ une tournée de $F'(\overline{G}_k)$ telle que $T^{e_5^k}(e_5^k) = 2$ et $T^{e_5^k}(e_6^k) = 0$;

$T^{e_6^k}$ une tournée de $F'(\overline{G}_k)$ telle que $T^{e_6^k}(e_5^k) = 0$ et $T^{e_6^k}(e_6^k) = 2$.

Considérons les tournées $T^{(e)} = T^{e_5^k} + 2z^{(e)}$ telles que $e \in E_k \cup \{e_1^k, e_7^k\}$.

Les $|E_k| + 4$ tournées, $T^{(f)}$ pour $f \in E_k \cup \{e_1^k, e_5^k, e_6^k, e_7^k\}$, appartiennent à $F'(\overline{G}_k)$, saturent l'inéquation 3.5, et elles sont affinement indépendantes. Ce qui implique que l'inéquation 3.5 définit une facette de $F'(\overline{G}_k)$.

De la même manière, on montre que les inéquations 3.6 et 3.7 induisent des facettes de $F'(\overline{G}_k)$. \square

Proposition 3.4.1 *Etant donnée une inéquation*

$$a(x, y) \geq a_0 \quad (3.8)$$

telle que $a \geq 0$.

Si l'inéquation 3.8 définit une facette de $F'(\overline{G}_k)$ différente de celles définies par les inéquations 3.5, 3.6 et 3.7 alors, une des deux assertions suivantes est vérifiée :

- $a(e_5^k) = a(e_6^k) = a(e_7^k)$
- $\exists i \in \{5, 6, 7\}$ tel que $a(e_i^k) > 0$ et $a(e_j^k) = 0$ pour $j \neq i$, $j \in \{5, 6, 7\}$.

Preuve:

Supposons, sans perte de généralité, que $a(e_5^k) = 0$ et $0 < a(e_6^k) \leq a(e_7^k)$.

Soit T une tournée de $F'(\overline{G}_k)$ qui sature l'inéquation 3.8. Du fait que $T \in F'(\overline{G}_k)$, $y(e_2^k) = y(e_3^k) = y(e_4^k) = 1$. Comme T sature l'inéquation 3.8 et $0 < a(e_6^k) \leq a(e_7^k)$, nous avons forcément $(T(e_6^k), T(e_7^k)) \in \{(1, 1), (2, 0), (0, 2)\}$, car sinon nous pouvons changer les valeurs $(T(e_6^k)$ et $T(e_7^k))$ pour obtenir une tournée de $F'(\overline{G}_k)$ qui viole l'inéquation 3.8.

Dans ce cas, $T \in \{(x, y) \in F'(\overline{G}_k) : y(e_6^k) + y(e_7^k) = 2\}$. Ce qui contredit le fait que l'inéquation 3.8 définit une facette de $F'(\overline{G}_k)$ différente de celle définie par l'inéquation 3.7.

Sans perte de généralité, nous supposons maintenant que $0 < a(e_5^k) \leq a(e_6^k) < a(e_7^k)$. Soit T une tournée de $F'(\overline{G}_k)$ qui sature l'inéquation 3.8. Pour les raisons évoquées ci-dessus, nous avons

$$y(e_2^k) = y(e_3^k) = y(e_4^k) = 1 \text{ et } (T(e_5^k), T(e_6^k), T(e_7^k)) \in \{(1, 1, 1), (2, 2, 0)\}.$$

Ce qui implique que T appartient à l'une des facettes de $F'(\overline{G}_k)$ induites par les inéquations 3.6 et 3.7. Contradiction. \square

Désignons par (st_k) le système d'équations-inéquations 3.1. Ce système (st_k) constitue une description complète de $F(\overline{G}_k)$. Cependant, un grand nombre de ses inéquations s'avèrent redondantes.

Corollaire 3.4.1 *Si une inéquation définissant une facette de $GTSP(\overline{G}_k)$ est non-redondante dans (st_k) alors elle satisfait une des deux assertions de la proposition 3.4.1.*

Preuve:

Du fait que $F(\overline{G}_k)$ soit une face de $F'(\overline{G}_k)$, le résultat découle de la proposition 3.4.1.

\square

Proposition 3.4.2 *Etant donnée une inéquation de la forme*

$$\sum_{e \in E_k} a(e)x(e) + \sum_{j=1}^4 a(e_j^k)y(e_j^k) + y(e_l^k) \geq a_0, \quad l \in \{5, 6, 7\}. \quad (3.9)$$

Si cette inéquation définit une facette de $GTSP(\overline{G}_k)$ alors, les deux inéquations

$$\sum_{e \in E_k} a(e)x(e) + \sum_{j=1}^4 a(e_j^k)y(e_j^k) + y(e_q^k) \geq a_0, \quad q \in \{5, 6, 7\}, \quad q \neq l. \quad (3.10)$$

définissent également des facettes distinctes de $GTSP(\overline{G}_k)$

Preuve:

Soit T une tournée de \overline{G}_k . Soient e_l^k et e_q^k deux arêtes distinctes de $\{e_5^k, e_6^k, e_7^k\}$.

Il est simple de vérifier qu'en interchangeant les deux composantes de T associées aux arêtes e_l^k et e_q^k , nous obtenons une tournée $T' \neq T$ de \overline{G}_k . Nous en déduisons que si l'inéquation 3.9 est valide pour $GTSP(\overline{G}_k)$ alors, les inéquations 3.10 le sont aussi.

Supposons que l'inéquation 3.9 définisse une facette de $GTSP(\overline{G}_k)$. Il existe donc $\dim(GTSP(\overline{G}_k))$ tournées de \overline{G}_k , $T_1, \dots, T_{|E_k|+7}$, qui sont affinement indépendantes et qui saturent cette inéquation.

Soient $T'_1, \dots, T'_{|E_k|+7}$ les tournées de $\overline{G_k}$ obtenues à partir des précédentes en interchangeant les deux composantes associées aux arêtes e_l^k et e_q^k . Ces nouvelles tournées sont également affinement indépendantes et saturent l'inéquation 3.10. Ce qui implique que cette dernière définit une facette de $GTSP(\overline{G_k})$.

Du fait que le polyèdre $GTSP(\overline{G_k})$ soit de pleine dimension, les inéquations 3.9 et 3.10 induisent des facettes distinctes. \square

Lemme 3.4.3 *Les trois inéquations*

$$\sum_{e \in E_k \cup \{e_1^k\}} a(e)x(e) + a(e_j^k)y(e_j^k) + y(e_7^k) \geq a_0, \quad a(e_j^k) \neq 0, \quad j = 2, 3, 4$$

définissent une même face de $F(\overline{G_k})$.

Preuve :

Le lemme découle du fait que nous ayons, pour toute tournée T de $F(\overline{G_k})$, $y(e_2^k) = y(e_3^k) = y(e_4^k) = 1$. \square

Proposition 3.4.3 *Toute inéquation de la forme $ay \geq a_0$ qui définit une facette non-triviale de $GTSP(\overline{G_k})$ est une inéquation de coupe.*

Preuve :

Soit $ay \geq a_0$ une inéquation qui définit une facette non-triviale de $GTSP(\overline{G_k})$ ($a_0 \neq 0$).

Considérons $|E_k| + 7$ tournées de $\overline{G_k}$ affinement (et linéairement) indépendantes qui saturent l'inéquation $ay \geq a_0$. On peut en extraire, dans ce cas, $|E_{H_k}| = 7$ tournées partielles de H_k qui soient affinement (et linéairement) indépendantes.

Définissons \widehat{H}_k comme étant le graphe obtenu à partir de H_k en rajoutant l'arête $f = (u, v)$. D'après le théorème 3.2.2, le graphe \widehat{H}_k est donc $GTSP$ -parfait, i.e. les inéquations de coupe et celles de positivité (triviales) suffisent pour décrire $GTSP(\widehat{H}_k)$. Notons que $\dim(GTSP(\widehat{H}_k)) = 8$.

L'inéquation $ay \geq a_0$ est valide pour $GTSP(\widehat{H}_k)$.

Les tournées partielles précédentes peuvent être complétées, en utilisant 0, 1 ou 2 fois l'arête f , pour obtenir 7 tournées T_1, \dots, T_7 de \widehat{H}_k affinement (et linéairement) indépendantes. En considérant la tournée $T_1 + 2z^{(f)}$, nous obtenons 8 tournées de \widehat{H}_k qui sont affinement indépendantes et saturent l'inéquation $ay \geq a_0$. Ce qui implique que cette inéquation définit une facette non-triviale de $GTSP(\widehat{H}_k)$ et, par conséquent, c'est une inéquation de coupe. \square

Lemme 3.4.4 *L'inéquation de coupe*

$$y(e_5^k) + y(e_6^k) \geq 2 \quad (3.11)$$

définit une facette de $F(\overline{G}_k)$.

Preuve :

Soit T une tournée de $F(\overline{G}_k)$ telle que $(T(e_1^k), T(e_5^k), T(e_6^k)) = (0, 1, 1)$. Considérons les tournées $T + 2z^{(e)}$, $e \in E_k \cup \{e_1^k\}$. Ces $|E_k| + 2$ tournées de $F(\overline{G}_k)$ saturent l'inéquation 3.11 et sont affinement indépendantes. \square

Lemme 3.4.5 *Les inéquations de la forme*

$$\sum_{e \in E_k} a(e)x(e) + \sum_{j=1}^4 a(e_j^k)y(e_j^k) + y(e_l^k) \geq a_0, \quad l = 5, 6 \quad (3.12)$$

sont redondantes dans le système (st_k)

Preuve :

D'après la proposition 3.4.2, l'inéquation

$$\sum_{e \in E_k} a(e)x(e) + \sum_{j=1}^4 a(e_j^k)y(e_j^k) + y(e_7^k) \geq a_0 \quad (3.13)$$

est valide pour $F(\overline{G}_k)$ et fait partie du système (st_k) .

En rajoutant, à l'inéquation 3.13, l'inéquation de coupe $y(e_5^k) + y(e_6^k) \geq 2$ puis en retranchant l'équation

$$y(e_t^k) + y(e_7^k) = 2, \quad t \in \{5, 6\}, \quad t \neq l \quad (3.14)$$

nous obtenons l'inéquation 3.12. Ce qui implique que cette dernière inéquation est redondante dans le système (st_k) . \square

Lemme 3.4.6 *Les inéquations de coupe*

$$y(e_1^k) + y(e_j^k) + y(e_7^k) \geq 2, \quad j = 2, 3, 4 \quad (3.15)$$

induisent une même facette de $F(\overline{G}_k)$.

Preuve :

Posons $j = 2$. Soient T^1 et T^2 deux tournées de $F(\overline{G}_k)$ telles que $T_{E_{H_k}}^1 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0)$ et $T_{E_{H_k}}^2 = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Considérons les tournées $T^1 + 2z^{(e)}$, $e \in E_k$.

Ces $|E_k| + 2$ tournées de $F(\overline{G_k})$ saturent l'inéquation 3.15 et sont affinement indépendantes.

D'après le lemme 3.4.3, les trois inéquations 3.15 définissent la même facette de $F(\overline{G_k})$.

□

Lemme 3.4.7 *L'inéquation $y(e_i^k) \geq 0$ ne définit une facette de $F(\overline{G_k})$ que si $i = 7$.*

Preuve :

Soit T une tournée de $F(\overline{G_k})$ telle que $T(e_7^k) = 0$ (i.e. $T_{E_{H_k}} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0)$). Considérons les tournées $T + z(e)$, $e \in E_k \cup \{e_1^k\}$. Ces $|E_k| + 2$ tournées de $F(\overline{G_k})$ saturent l'inéquation $x(e_7^k) \geq 0$ et sont affinement indépendantes.

Aucune tournée de $F(\overline{G_k})$ ne sature les inéquations $x(e_i^k) \geq 0$, $i = 2, \dots, 6$.

Soit $F = \{x \in F(\overline{G_k}) : x(e_1^k) = 0\}$. Du fait que $T(e_2^k) = \dots = T(e_6^k) = 1$ pour toute tournée T de F , le rang affine de F est inférieur ou égal à $|E_k| + 1$. Ce qui implique que $x(e_1^k) \geq 0$ ne définit pas de facette de $F(\overline{G_k})$. □

Lemme 3.4.8 *Les inéquations, différentes de 3.11 et de 3.15, qui définissent des facettes de $GTSP(\overline{G_k})$, qui sont associées à des coupes incluses dans E_{H_k} et qui ne sont pas saturées par toutes les tournées de $F(\overline{G_k})$ n'induisent aucune facette de $F(\overline{G_k})$.*

Preuve :

Elles induisent une même face incluse dans la face $\{x \in F(\overline{G_k}) : x(e_1^k) \geq 0\}$ qui, d'après le lemme 3.4.7, n'est pas une facette de $F(\overline{G_k})$. □

Corollaire 3.4.2 *Soit $a_{E_k}x + a_{E_{H_k}}y \geq a_0$ une inéquation, du système (st_k) , induisant une facette de $F(\overline{G_k})$ différente de celles définies par les inéquations 3.11, 3.15 et $x(e_7^k) \geq 0$ alors, $a_{E_k} \neq 0$.*

Preuve :

Conséquence de la proposition 3.4.3 et des lemmes 3.4.4, 3.4.5, 3.4.6, 3.4.7 et 3.4.8.

□

Proposition 3.4.4 *La face $F(\overline{G_k})$, $k \in \{1, 2\}$, est entièrement caractérisée par le sous-système 3.16 de (st_k) .*

Preuve :

D'après les corollaires 3.4.1 et 3.4.2 et les lemmes 3.4.3 et 3.4.4. \square

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) \geq \alpha_i^k & i \in I_1^k \quad (1) \\
 \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + y(e_1^k) \geq \alpha_i^k & i \in I_2^k \quad (2) \\
 \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + \sum_{j=2}^4 a_i^k(e_j^k)y(e_j^k) \geq \alpha_i^k & i \in I_3^k \quad (3) \\
 \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + \sum_{j=1}^4 a_i^k(e_j^k)y(e_j^k) \geq \alpha_i^k & i \in I_4^k \quad (4) \\
 \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + \sum_{j=1}^4 a_i^k(e_j^k)y(e_j^k) + y(e_5^k) \geq \alpha_i^k & i \in I_5^k \quad (5) \\
 \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + \sum_{j=1}^4 a_i^k(e_j^k)y(e_j^k) + y(e_5^k) + y(e_6^k) + y(e_7^k) \geq \alpha_i^k & i \in I_6^k \quad (6) \\
 y(e_1^k) + y(e_2^k) + y(e_7^k) \geq 2 & (7) \\
 y(e_5^k) + y(e_6^k) \geq 2 & (8) \\
 y(e_2^k) + y(e_3^k) = 2 & (9) \\
 y(e_2^k) + y(e_4^k) = 2 & (10) \\
 y(e_3^k) + y(e_4^k) = 2 & (11) \\
 y(e_5^k) + y(e_7^k) = 2 & (12) \\
 y(e_6^k) + y(e_7^k) = 2 & (13) \\
 y(e_7^k) \geq 0 & (14) \\
 x(e) \geq 0, \quad \forall e \in E_k & (15)
 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

L'ensemble des indices des inéquations, dont le support intersecte E_k , est partitionné en six classes $I_1^k, I_2^k, I_3^k, I_4^k, I_5^k$ et I_6^k (éventuellement vides) selon l'intersection de leurs supports avec l'ensemble des arêtes artificielles E_{H_k} .

Proposition 3.4.5 *Pour tout entier positif r , il existe un graphe $\widehat{G}_k = (\widehat{V}_k, \widehat{E}_k)$ tel que l'inéquation*

$$\sum_{e \in \widehat{E}_k} \frac{1}{r}x(e) + \frac{1}{r}y(e_1^k) + \sum_{j=2}^7 y(e_j^k) \geq \frac{r+2}{r} + 7 \quad (3.17)$$

définisse une facette de $GTSP(\widehat{G}_k)$ et une facette de $F(\widehat{G}_k)$.

Preuve :

Soit \widehat{G}_k la chaîne élémentaire $(u, v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, v_r, v)$ d'extrémités u et v . Le graphe \widehat{G}_k , composé de \widehat{G}_k et de H_k , est donné dans la figure 3.4.

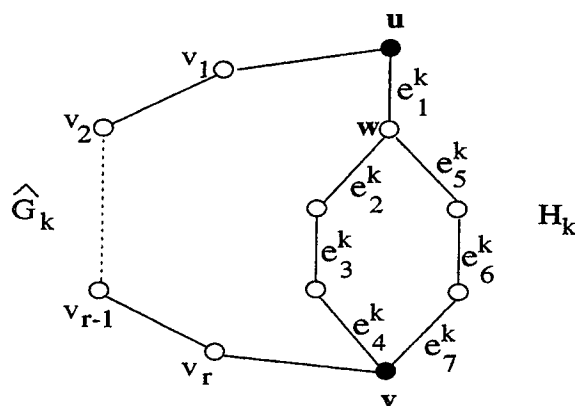


FIG. 3.4 -

Il est simple de vérifier que l'inéquation 3.17 est valide pour $GTSP(\overline{\widehat{G}_k})$.

Le graphe \widehat{G}_k peut être vu comme étant formé de trois chaînes arêtes disjointes A_1 , A_2 et A_3 d'extrémités w et v avec $u \in A_1$.

Pour chaque arête $e \in A_i$, $i = 1, 2, 3$, de $\overline{\widehat{G}_k}$, nous définissons la tournée $T^{(e)}$ de la manière suivante :

$$T^{(e)}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = e \\ 2 & \text{si } f \in A_i \\ 1 & \text{si } f \notin A_i \end{cases} \quad (3.18)$$

Ces tournées $T^{(e)}$, $e \in \widehat{E}_k \cup E_{H_k}$, saturent l'inéquation 3.17 et sont affinement indépendantes. Ce qui implique que l'inéquation 3.17 définit une facette de $GTSP(\overline{\widehat{G}_k})$.

Cette inéquation est un cas particulier des inéquations de chemin (path inequalities) introduites par Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [37].

Considérons les tournées partielles de $\overline{\widehat{G}_k}$ suivantes $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ et $\mathbf{2} - 2z^{(e)}$; avec $e \in \widehat{E}_k$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ et $\mathbf{2} = (2, \dots, 2)$. Chacune d'elles peut être complétée par une des trois tournées partielles de H_k , données dans la figure 3.3, pour obtenir une tournée de $\overline{\widehat{G}_k}$ qui appartient à la face $F(\overline{\widehat{G}_k})$ et sature l'inéquation 3.17. Du fait que les $|\widehat{E}_k| + 2$ tournées de $F(\overline{\widehat{G}_k})$ ainsi obtenues soient affinement indépendantes, l'inéquation 3.17 définit une facette de $F(\overline{\widehat{G}_k})$. \square

La proposition 3.4.5 montre qu'il n'existe pas, dans le cas général, une relation fixe entre les coefficients $a(e_1^k)$ et $a(e_7^k)$ comme celle du corollaire 3.4.1 liant $a(e_5^k)$, $a(e_6^k)$ et $a(e_7^k)$. Nous verrons, à travers la remarque suivante, que l'ensemble des inéquations définissant des facettes de $F(\overline{\widehat{G}_k})$ et dont le support contient les arêtes e_1^k et e_7^k pourrait être non-vide.

Remarque 3.4.1 Si G_k admet une chaîne d'extrémités u et v ayant r sommets intérieurs, $r > 0$, alors il existe une inéquation de la forme

$$\sum_{e \in E_k} a(e)x(e) + \frac{1}{r}y(e_1^k) + \sum_{j=2}^7 y(e_j^k) \geq \frac{r+2}{r} + 7 \quad (3.19)$$

qui définit une facette de $GTSP(\overline{G}_k)$.

Preuve:

Soit A_1 une chaîne de G_k d'extrémités u et v ayant r sommets intérieurs. Désignons par A_2 et A_3 les chaînes de H_k reliant w et v (voir figure 3.4). Comme le graphe G_k est connexe, il peut être partitionné en sous-graphes connexes B_i , où chacun d'eux contient un seul sommet de A_1 , tel que cela forme avec A_2 et A_3 une configuration de 3-chemin (3-path configuration) [37]. L'inéquation de chemin (path inequation) correspondante définit une facette de $GTSP(\overline{G}_k)$ [37] et a la forme de l'inéquation 3.19. \square

3.5 Composition d'inéquations

Dans cette section, nous procédons à la projection du polyèdre P et nous montrons comment se composent les inéquations essentielles à la description de $GTSP(G)$ à partir d'inéquations définissant des facettes de $F(\overline{G}_1)$ et de $F(\overline{G}_2)$. Pour cela, nous supposons que toutes les inéquations du système 3.16 induisent des facettes de $F(\overline{G}_k)$, $k = 1, 2$.

Notons que cette composition d'inéquations de $GTSP(\overline{G}_1)$ et de $GTSP(\overline{G}_2)$ a été étudiée par Nachef [87]. Il considère le graphe artificiel H_k (de la section 3.3) comme étant le plus petit graphe pour lequel la condition suivante est vérifiée: pour toute fonction coût c définie sur E , il existe des fonctions coût c_1 et c_2 définies sur E_{H_1} et E_{H_2} telles qu'une tournée optimale de G ainsi que son coût puissent être déterminés à partir de celle de \overline{G}_1 , celle de \overline{G}_2 et leurs coûts respectifs. Il compose, par la suite, les inéquations de $GTSP(\overline{G}_1)$ et de $GTSP(\overline{G}_2)$ en faisant appel, pour chacune d'elles, à la résolution du $GTSP$ sur le graphe \overline{G}_k correspondant tout en considérant comme coûts les coefficients de cette inéquation. Cela nécessite un temps énorme notamment si on ne connaît pas un algorithme polynomial pour résoudre le $GTSP$ sur \overline{G}_1 et \overline{G}_2 . Nous allons voir que cette composition d'inéquations se fait par une simple projection du polyèdre P (en ne considérant pas toutes les inéquations de $GTSP(\overline{G}_1)$ et de $GTSP(\overline{G}_2)$).

Les inéquations 9, 10 et 11 du système 3.16 impliquent que :

$$x(e_2^k) = x(e_3^k) = x(e_4^k) = 1, \quad k = 1, 2.$$

De même, d'après les inéquations 12 et 13, on a implicitement $x(e_5^k) = x(e_6^k)$, $k = 1, 2$. En tenant compte des équations 3.2 et 3.3, le polyèdre P est donc donné par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) \geq \alpha_i^k - \bar{\alpha}_i^k & i \in I_1^k \cup I_3^k \quad (16) \\ \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + y(e_1^k) \geq \alpha_i^k & i \in I_2^k \quad (17) \\ \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + a_i^k(e_1^k)y(e_1^k) \geq \alpha_i^k - \bar{\alpha}_i^k & i \in I_4^k \quad (18) \\ \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + a_i^k(e_1^k)y(e_1^k) + y(e_7^1) \geq \alpha_i^k - \bar{\alpha}_i^k & i \in I_5^k \quad (19) \\ \sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + a_i^k(e_1^k)y(e_1^k) - y(e_7^1) \geq \alpha_i^k - \bar{\alpha}_i^k - 4 & i \in I_6^k \quad (20) \\ y(e_1^k) + y(e_7^1) \geq 1 & (21) \\ & k = 1, 2 \\ -y(e_7^1) \geq -1 & (22) \\ y(e_1^1) + y(e_1^2) = 2 & (23) \\ y(e_7^1) \geq 0 & (24) \\ x(e) \geq 0, \quad \forall e \in E_1 \cup E_2 & (25) \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$\text{où } \bar{\alpha}_i^k = \sum_{j=2}^4 a_i^k(e_j^k).$$

Nous avons $GTSP(G) = \mathbb{IP}_{\mathbb{R}^{E_1 \cup E_2}}(P) = \mathbb{IP}_x(P)$. Pour effectuer cette projection, la connaissance des coefficients du cône de projection exige la donnée explicite de tous les coefficients des variables artificielles (voir section 1.2). La proposition 3.4.5 et la remarque 3.4.1 montrent l'impossibilité d'avoir implicitement les coefficients des variables $y(e_1^k)$ et $y(e_7^k)$ dans n'importe quel cas de graphes G_1 et G_2 . Il pourrait exister un graphe pour lequel l'entier r , de la proposition 3.4.5, prendrait plusieurs valeurs en même temps; ce qui impliquerait que la connaissance explicite de ces coefficients engendrerait un cône de projection ayant un grand nombre de variables.

Pour ces raisons, nous ferons cette projection en deux parties. Nous éliminerons, dans un premier temps, la variable $y(e_7^1)$; puis par une projection, faisant disparaître les variables $y(e_1^1)$ et $y(e_1^2)$, du système obtenu nous aurons la description du polyèdre $GTSP(G)$.

Posons $P' = \mathbb{P}_{\mathbb{R}^{E_1 \cup E_2 \cup \{e_1^1, e_2^1\}}}(P)$. Le cône de projection \mathcal{C} correspondant à cette projection est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} -\pi_2 + \pi_3 \geq 0 \\ \pi_1 \geq 0 \\ \pi_2 \geq 0 \\ \pi_3 \geq 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

où : π_1 correspond aux inéquations, du système 3.20, dont le coefficient de $y(e_7^1)$ est 0;

π_2 correspond aux inéquations, du système 3.20, dont le coefficient de $y(e_7^1)$ est 1;

π_3 correspond aux inéquations, du système 3.20, dont le coefficient de $y(e_7^1)$ est -1.

Le cône \mathcal{C} est pointé, ses rayons extrêmes sont donc :

$$\begin{aligned} \pi^{(1)} &= (1, 0, 0) \\ \pi^{(2)} &= (0, 0, 1) \\ \pi^{(3)} &= (0, 1, 1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Les inéquations, du système résultant de la projection, s'obtiennent par l'une des règles suivantes (qui sont en bijection avec les rayons extrêmes de \mathcal{C}) :

- (i) garder, telles qu'elles sont, les inéquations et les équations ne contenant pas la variable $y(e_7^1)$;
- (ii) éliminer la variable $y(e_7^1)$ des inéquations dont le coefficient de $y(e_7^1)$ est -1;
- (iii) sommer, membre à membre, deux inéquations dont les coefficients de $y(e_7^1)$ sont respectivement 1 et -1.

Désignons par (st') le système d'équations-inéquations obtenu par projection.

Remarquons que, d'après ces trois règles, les coefficients des inéquations de (st') sont positifs ou nuls. Il en découle qu'une inéquation, ayant son deuxième membre négatif, est redondante.

On appelle *inéquation mixte* une inéquation dont le support intersecte à la fois $E_1 \cup \{e_1^1\}$ et $E_2 \cup \{e_2^1\}$. Dans le cas contraire, on dit que l'inéquation est *non-mixte*.

Les inéquations mixtes sont de deux types :

- type I: celles dont le support intersecte, à la fois, E_1 et E_2 . Elles sont obtenues en sommant, membre à membre, une inéquation de I_5^k et une autre de I_6^l telles que $k \in \{1, 2\}$, $l \in \{1, 2\}$ et $k \neq l$;

• type II: celles dont le support intersecte seulement E_k , contient l'arête e_1^l et ne contient pas e_1^k , avec $k \in \{1, 2\}$, $l \in \{1, 2\}$ et $k \neq l$. Elles sont obtenues en rajoutant, membre à membre, l'inéquation $y(e_1^k) + y(e_1^l) \geq 1$ à une inéquation de I_6^k dont le support ne contient pas l'arête e_1^k .

Notons que le support de certaines inéquations peut intersecter seulement E_k et contenir à la fois e_1^k et e_1^l . Une telle inéquation s'obtient en rajoutant, membre à membre, l'inéquation $y(e_1^k) + y(e_1^l) \geq 1$ à une inéquation de I_6^k dont le support contient l'arête e_1^k . Dans ce cas, nous la réécrivons sous forme d'une inéquation non-mixte (ayant des coefficients positifs ou nuls) en lui retranchant, membre à membre, l'équation $x(e_1^1) + x(e_1^2) = 2$. Par conséquent, nous supposons dans la suite de ce chapitre que les inéquations du système (st') soient triviales, non-mixtes ou des inéquations mixtes (de type I et II).

Avant de passer à la deuxième phase de la projection du polyèdre P (i.e. celle de P'), examinons la minimalité du système (st') . Car, ce sont les inéquations qui le constituent qui rentreront dans la génération (par projection) de celles du système que nous obtiendrons pour décrire le polyèdre $GTSP(G)$.

Lemme 3.5.1 $\dim(P') = |E_1| + |E_2| + 1$.

Preuve :

Comme tous les points de P' satisfont l'équation 3.20(23), $\dim(P') \leq |E_1| + |E_2| + 1$. Soient T_1 et T_2 deux sommets quelconques de P obtenus par composition de tournées de $F(\overline{G_1})$ et $F(\overline{G_2})$ tels que :

$$T_1(e_1^1) = 0, T_1(e_1^2) = 2, T_2(e_1^1) = 1 \text{ et } T_2(e_1^2) = 1.$$

Considérons les points de P' suivants: $T^{(e)} = T_1 + z^{(e)}$, $e \in E_1 \cup E_2$, où $z^{(e)}$ est, cette fois-ci, un $\{0, 1\}$ -vecteur de $\mathbb{R}^{E_1 \cup E_{H_1} \cup E_2 \cup E_{H_2}}$.

Soient T_1' , T_2' et $T^{(e)}$, $e \in E_1 \cup E_2$, les points de P' qui sont projections de T_1 , T_2 et $T^{(e)}$, $e \in E_1 \cup E_2$, sur $\mathbb{R}^{E_1 \cup E_2 \cup \{e_1^1, e_1^2\}}$. On vérifie facilement que ces $|E_1| + |E_2| + 2$ points sont affinement indépendants. \square

Les inéquations triviales $y(e_1^1) \geq 0$ et $y(e_1^2) \geq 0$ s'obtiennent en sommant les inéquations 3.20(21) et 3.20(22). Il est simple de voir qu'elles induisent des facettes de P' .

Proposition 3.5.1 *Etant donnée une inéquation non-mixte*

$$\sum_{e \in E_k \cup \{e_1^k\}} a(e)x(e) \geq a_0, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (3.23)$$

- a) *Si l'inéquation 3.23 définit une facette de P' alors, elle définit une facette de $GTSP(\overline{G}_k)$.*
 b) *Si l'inéquation 3.23 définit une facette de $GTSP(\overline{G}_k)$ avec $a(e_1^k) > 0$ alors, elle définit une facette de P' .*

Preuve :

a) Supposons que l'inéquation 3.23 définisse une facette non-triviale de P' . Prenons $\dim(P')$ points de P' qui saturent 3.23 et qui sont affinement indépendants. On peut en extraire donc $|E_k| + 1$ tournées partielles, définies sur $E_k \cup \{e_1^k\}$, qui soient affinement indépendantes et saturent l'inéquation 3.23. Ces dernières peuvent être complétées par des arêtes de E_{H_k} pour obtenir des tournées $\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_{|E_k|+1}$ de \overline{G}_k . Les $|E_k| + 7$ tournées $\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_{|E_k|+1}, \overline{T}_1 + 2z^{(e_2^k)}, \dots, \overline{T}_1 + 2z^{(e_7^k)}$ de \overline{G}_k saturent l'inéquation 3.23 et sont affinement indépendantes. Ce qui implique que l'inéquation 3.23 définit une facette de $GTSP(\overline{G}_k)$.

b) Supposons maintenant que l'inéquation 3.23 définisse une facette (non-triviale) de $GTSP(\overline{G}_k)$ avec $a(e_1^k) > 0$.

Il existe donc $|E_k| + 7$ tournées $\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_{|E_k|+7}$ de \overline{G}_k qui saturent l'inéquation 3.23 et qui sont affinement indépendantes. De ces tournées on peut extraire $|E_k| + 1$ tournées partielles, définies sur $E_k \cup \{e_1^k\}$, affinement indépendantes saturant l'inéquation 3.23. Du fait que $a(e_1^k)$ soit positif, $\overline{T}_i(e_1^k) \in \{0, 1, 2\}$ $i = 1, \dots, |E_k| + 7$. Par conséquent, ces tournées partielles peuvent être complétées par d'autres définies sur $E_l \cup \{e_1^l\}$, $l \neq k$, pour obtenir des points $T_1, \dots, T_{|E_k|+1}$ tels que $y(e_1^k) + y(e_1^l) = 2$.

Considérons les $|E_l|$ points de P' suivants: $T_1 + 2z^{(e)}$, $e \in E_l$.

Les $|E_k| + |E_l| + 1$ points de P' obtenus sont affinement indépendants et saturent l'inéquation 3.23. Cette dernière définit alors une facette de P' . \square

Proposition 3.5.2 *Une inéquation non-mixte et non-triviale du système (st') est non-redondante si et seulement si elle fait partie (à une multiplication près par un scalaire positif) de l'un des systèmes définissant $GTSP(\overline{G}_1)$ et $GTSP(\overline{G}_2)$.*

Preuve :

Soit

$$\sum_{e \in E_k \cup \{e_1^k\}} a(e)x(e) \geq a_0, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (3.24)$$

une inéquation non-mixte et non-triviale du système (st') . Le vecteur a est donc positif ou nul.

Si cette inéquation 3.24 ne figure pas dans le système définissant $GTSP(\overline{G_k})$ (donc n'induit pas une facette de $GTSP(\overline{G_k})$ car ce dernier est de pleine dimension), alors selon la proposition 3.5.1(a), l'inéquation 3.24 ne définit pas une facette de P' ; elle est donc redondante.

Supposons que l'inéquation 3.24 définisse une facette de P' et qu'elle soit redondante dans le système (st') . Elle s'obtient alors par une combinaison cônica des autres inéquations de (st') , qui lui sont différentes (à une multiplication près par un scalaire positif), plus une combinaison linéaire des équations de ce système. Notons par $\beta_r, \dots, \beta_{r+t}$ les coefficients de la combinaison cônica associés aux inéquations de (st') dont le support intersecte $E_l \cup E_{H_l}$, $l \neq k$.

Du fait que l'inéquation 3.24 définisse une facette de $GTSP(\overline{G_k})$ (proposition 3.5.1(a)) et que son support soit un sous-graphe de $\overline{G_k}$, les coefficients $\beta_r, \dots, \beta_{r+t}$ ne sont pas tous nuls.

Vu que P' soit contenu dans un seul hyperplan induit par l'équation $y(e_1^k) + y(e_1^l) = 2$, certains des coefficients $\beta_r, \dots, \beta_{r+t}$ doivent être négatifs. Contradiction. \square

D'après la proposition 3.5.2, une simple vérification permet d'éliminer toutes les inéquations non-mixtes qui sont redondantes dans le système (st') . De plus, la proposition 3.5.1(b) implique que toutes les inéquations non-mixtes de la forme 3.20(17) qui définissent des facettes de $GTSP(\overline{G_k})$ doivent figurer dans ce système.

Quant aux inéquations mixtes, il n'est pas simple de reconnaître les redondantes parmi elles (s'il en existe). La remarque 3.5.4, qui sera donnée plus loin, montre que certaines inéquations mixtes de type II de (st') définissent des facettes de P' .

Nous passons maintenant à la deuxième étape de la projection du polyèdre P et qui consiste en la projection du polyèdre P' , i.e du système (st') , faisant disparaître les variables artificielles restantes, $y(e_1^1)$ et $y(e_1^2)$, et donnant en conséquence un système d'inéquations qui définit $GTSP(G)$.

Partitionnons l'ensemble des indices des inéquations du système (st') en cinq sous-ensembles :

J_1^k : ensemble des indices des inéquations non-mixtes et non-triviales dont le support est un sous-graphe de G_k ;

J_2^k : ensemble des indices des inéquations non-mixtes et non-triviales dont le support est un sous-graphe de $\overline{G_k}$ et contient l'arête e_1^k ;

J_3 : ensemble des indices des inéquations mixtes telles que $a_j(e_1^1) = a_j(e_1^2)$;

J_4 : ensemble des indices des inéquations mixtes telles que $a_j(e_1^1) > a_j(e_1^2)$;

J_5 : ensemble des indices des inéquations mixtes telles que $a_j(e_1^1) < a_j(e_1^2)$.

Les indices des inéquations mixtes de type I sont contenus dans $J_3 \cup J_4$.

En retranchant l'équation $y(e_1^1) + y(e_1^2) = 2$ des inéquations, afin d'éliminer la variable $y(e_1^2)$, nous obtenons le système définissant P' suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{e \in E_k} a_j^k(e)x(e) \geq \beta_j^k & j \in J_1^k \quad (26) \\ \sum_{e \in E_1} a_j^1(e)x(e) + y(e_1^1) \geq \beta_j^1 & j \in J_2^1 \quad (27) \\ \sum_{e \in E_2} a_j^2(e)x(e) - y(e_1^1) \geq \beta_j^2 - 2 & j \in J_2^2 \quad (28) \\ \sum_{e \in E_1 \cup E_2} a_j(e)x(e) \geq \beta_j - 2a_j(e_1^1) & j \in J_3 \quad (29) \\ \sum_{e \in E_1 \cup E_2} \frac{a_j(e)}{|a_j(e_1^1) - a_j(e_1^2)|} x(e) + x(e_1^1) \geq \frac{\beta_j - 2a_j(e_1^2)}{|a_j(e_1^1) - a_j(e_1^2)|} & j \in J_4 \quad (30) \\ \sum_{e \in E_1 \cup E_2} \frac{a_j(e)}{|a_j(e_1^1) - a_j(e_1^2)|} x(e) - x(e_1^1) \geq \frac{\beta_j - 2a_j(e_1^1)}{|a_j(e_1^1) - a_j(e_1^2)|} & j \in J_5 \quad (31) \\ x(e) \geq 0, \quad \forall e \in E_1 \cup E_2 & (32) \\ y(e_1^1) \geq 0 & (33) \end{array} \right. \quad (3.25)$$

où les coefficients β_j représentent les deuxièmes membres des inéquations du système (st') et les coefficients $a(e)$ restent inchangés depuis les systèmes définissant $GTSP(\overline{G_1})$ et $GTSP(\overline{G_2})$.

$GTSP(G) = \mathbb{P}_x(P')$. Le cône de projection \mathcal{C} correspondant à cette projection est le même que celui de la projection précédente, i.e le cône donné par le système 3.21, sauf que cette fois-ci les variables π sont définies relativement à la variable artificielle $y(e_1^1)$. Ses rayons extrêmes sont donnés par le système 3.22.

En remplaçant $y(e_7^1)$ par $y(e_1^1)$, les règles précédentes (i), (ii) et (iii) concernant l'obtention des inéquations résultant de la projection restent donc valables pour ce cas.

Désignons par (st) le système d'inéquations obtenu par la projection. (st) définit le polyèdre $GTSP(G)$. Les inéquations de (st) , dont le support intersecte à la fois E_1 et

E_2 , sont dites *mixtes*. Les autres sont appelées *non-mixtes*.

De ces deux projections successives, nous déduisons la remarque suivante :

Remarque 3.5.1 *Chaque inéquation induisant une facette de $GTSP(G)$ s'obtient par une composition de 1, 2, 3 ou 4 inéquations définissant des facettes de $GTSP(\overline{G_1})$ et de $GTSP(\overline{G_2})$.*

Proposition 3.5.3 *Une inéquation non-mixte définit une facette de $GTSP(G)$ si et seulement si elle définit une facette de $GTSP(\overline{G_1})$ ou de $GTSP(\overline{G_2})$.*

Preuve :

Ce résultat se démontre de la même manière que celui de la proposition 3.5.1. \square

Soit D une facette de $F(\overline{G_k})$, $k \in \{1, 2\}$. Si D contient une tournée T telle que $\mathbb{P}_{E_k}(T)$ soit une tournée partielle de G_k appartenant à la classe C_j^k , $j \in \{0, 1, 2\}$, nous dirons que D intersecte la classe C_j^k et nous noterons $D \cap C_j^k \neq \emptyset$.

Lemme 3.5.2 *Si $D = \{(x, y) \in F(\overline{G_k}) : a_{E_k}x + a_{E_{H_k}}y = a_0\}$ est une facette de $F(\overline{G_k})$, $k \in \{1, 2\}$, telle que $a_{E_k} \neq 0$ et $a(e_1^k) \neq 0$ alors, D intersecte les trois classes de solutions partielles.*

Preuve :

D étant une facette de $F(\overline{G_k})$, $\dim(D) = |E_k| + 1$.

Pour toute tournée T de D , nous avons :

$$(T(e_1^k), \dots, T(e_7^k)) = \begin{cases} (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) & \text{si } T_i \in C_0^k \\ (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0) & \text{si } T_i \in C_1^k \\ (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) & \text{si } T_i \in C_2^k \end{cases}$$

Si D intersecte une seule classe C_i^k , $i \in \{0, 1, 2\}$, ou si $D \cap C_1^k = \emptyset$, alors toutes les tournées de D vérifient les équations $y(e_j^k) = \mu_j$ où $j = 2, \dots, 6$ et $\mu_j \in \{0, 1, 2\}$.

Comme $a_{E_k} \neq 0$, les 7 équations $a_{E_k}x + a_{E_{H_k}}y = a_0$ et $y(e_j^k) = \mu_j$, $j = 2, \dots, 6$, sont linéairement indépendantes. Par conséquent, $\dim(D) \leq |E_k|$. Contradiction.

Si $D \cap C_0^k = \emptyset$ (resp. $D \cap C_2^k = \emptyset$) alors, tous les éléments de D satisfont les équations linéairement indépendantes suivantes :

$$\begin{aligned} a_{E_k} x + a_{E_{H_k}} y &= a_0 \\ y(e_2^k) &= y(e_3^k) = y(e_4^k) = 1 \\ y(e_5^k) + y(e_7^k) &= 2 \\ y(e_6^k) + y(e_7^k) &= 2 \\ y(e_7^k) &= y(e_1^k) - y(e_2^k) \quad (\text{resp. } y(e_7^k) = y(e_2^k) - y(e_1^k)) \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\dim(D) \leq |E_k|$. Contradiction. \square

Remarque 3.5.2 Nous déduisons de la preuve du lemme 3.5.2 que si $a(e_1^k) = 0$ alors, la facette D intersecte au moins deux classes de solutions partielles telles que C_1^k en soit une.

Remarque 3.5.3 Si $D = \{(x, y) \in F(\overline{G}_k) : y(e_1^k) + y(e_j^k) + y(e_7^k) = 2\}$, avec $j \in \{2, 3, 4\}$ et $k \in \{1, 2\}$, alors : $D \cap C_0^k \neq \emptyset$, $D \cap C_1^k \neq \emptyset$ et $D \cap C_2^k = \emptyset$.

Une inéquation mixte du système (st) est dite *r-mixte* si le nombre d'inéquations de $GTSP(\overline{G}_1)$ et $GTSP(\overline{G}_2)$ rentrant dans sa composition est égal à r .

Notons par \tilde{J} l'ensemble des indices des inéquations 2-mixtes de (st) telles que les coefficients des inéquations rentrant dans leur composition, associés aux variables $y(e_1^1)$ et $y(e_2^2)$, soient égaux et non-nuls. De telles inéquations s'obtiennent de la façon suivante :

o Sommer deux inéquations d'indices i et j telles que $i \in I_5^k$, $j \in I_6^l$ et $a_i^k(e_1^k) = a_j^l(e_1^l)$; où $l, k = 1, 2$ et $l \neq k$;

o Pour éliminer les variables artificielles, retrancher de l'inéquation obtenue une combinaison linéaire des équations (9), (10), (11), (12) et (13) du système 3.16 ($k = 1, 2$) et l'équation (23) du système 3.16.

Proposition 3.5.4 Les inéquations 2-mixtes de \tilde{J} définissent des facettes de $GTSP(G)$.

Preuve :

Etant données deux inéquations

$$\sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + \sum_{t=1}^4 a_i^k(e_t^k)y(e_t^k) + y(e_7^k) \geq \alpha_i^k, \quad i \in I_5^k \quad (3.26)$$

$$\sum_{e \in E_l} a_j^l(e)x(e) + \sum_{t=1}^4 a_j^l(e_t^l)y(e_t^l) + y(e_5^l) + y(e_6^l) + y(e_7^l) \geq \alpha_j^l, \quad j \in I_6^l \quad (3.27)$$

qui définissent des facettes D_k et D_l de $F(\overline{G_k})$ et $F(\overline{G_l})$ respectivement; $k \in \{1, 2\}$, $l \in \{1, 2\}$ et $k \neq l$.

Pour chaque facette de $F(\overline{G_k})$ différente de D_k , considérons une tournée de D_k qui ne la sature pas (de telles tournées existent du fait que D_k soit une facette).

Notons par $S_k = \{z_1^k, \dots, z_{s_k}^k\}$ l'ensemble des points ainsi considérés.

De même, soit $S_l = \{z_1^l, \dots, z_{s_l}^l\}$ l'ensemble des points de $F(\overline{G_l})$ considérés relativement à D_l .

D'après le lemme 3.5.2, les facettes D_k et D_l intersectent toutes les classes de solutions partielles respectives. Nous pouvons donc compléter les ensembles S_k et S_l par d'autres points de D_k et de D_l de telle façon que chacun d'eux intersecte les trois classes.

$\forall T \in D_r$, $r = k, l$, nous avons $T(e_1^r) \in \{0, 1, 2\}$ car les coefficients $a_i^k(e_1^k)$ et $a_i^l(e_1^l)$ sont positifs. Ce qui implique que pour chaque point z_q^r de S^r , $r = k, l$, il existe un point $z_{q'}^{r'}$ de $S^{r'}$, avec $r' = k, l$ et $r' \neq r$, tel que $\bar{z} = (z_q^r, z_{q'}^{r'})$ soit un point de P .

Désignons par $\bar{S} = \{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{s_k+s_l}\}$ l'ensemble de points obtenus par mariage de ceux de S_k avec des points de S_l et inversement.

Considérons l'inéquation mixte suivante :

$$\sum_{e \in E_k} a_i^k(e)x(e) + \sum_{e \in E_l} a_i^l(e)x(e) \geq \alpha_i^k + \alpha_j^l - \bar{\alpha}_i^k - \bar{\alpha}^l - 2a_i^k(e_1^k) - 4 \quad (3.28)$$

où $\bar{\alpha}_i^k = \sum_{t=2}^4 a_i^k(e_t^k)$ et $\bar{\alpha}^l = \sum_{t=2}^4 a_j^l(e_t^l)y(e_t^l)$.

Soit $S = \{z_1, \dots, z_{s_k+s_l}\}$ l'ensemble des points obtenus à partir de ceux de \bar{S} en éliminant les composantes relatives aux arêtes artificielles e_q^r , $r = 1, 2$, $q = 1, \dots, 7$. S est un sous-ensemble de $GTSP(G)$.

Posons $z = \frac{1}{s_k+s_l} \sum_{t=1}^{s_k+s_l} z_t$. Nous avons $z \in GTSP(G)$.

Comme l'inéquation 3.28 s'obtient en sommant les deux inéquations 3.26 et 3.27 et en rajoutant une combinaison linéaire des équations définissant les hyperplans contenant P , le point z satisfait l'inéquation 3.28 avec égalité. Du fait qu'au moins une des facettes, rentrant dans la composition de chacune des autres inéquations du système (st) , soit différente de D_k et de D_l , alors l'inéquation 3.28 est la seule inéquation du système (st) qui est saturée par le point z . Rappelons que le polyèdre $GTSP(G)$ admet une description minimale unique à une multiplication près par un scalaire positif car il est de pleine dimension.

Nous concluons que l'inéquation 3.28 induit une facette de $GTSP(G)$. \square

Remarque 3.5.4 *A travers la preuve de la proposition 3.5.4, nous pouvons voir facilement qu'une inéquation mixte de type II de (st') définit une facette de P' si les coefficients des inéquations rentrant dans sa composition, associés aux variables $y(e_1^1)$ et $y(e_1^2)$, sont non-nuls.*

Du fait que les variables artificielles $y(e_1^1)$ et $y(e_1^2)$ ne soient pas bornées, des tournées de $GTSP(\overline{G_1})$ et de $GTSP(\overline{G_2})$ se trouvent mises à l'écart dans cette composition; il s'agit des tournées pour lesquelles la variable $y(e_1^k)$, $k \in \{1, 2\}$, prend des valeurs supérieures à 2 (l'équation $y(e_1^1) + y(e_1^2) = 2$ étant une contrainte de P). Ce qui pourrait impliquer que certaines inéquations mixtes de (st) ne soient pas essentielles pour la description du polyèdre $GTSP(G)$.

La reconnaissance de toutes les inéquations mixtes qui induisent des facettes de $GTSP(G)$ paraît moins évidente, voire beaucoup moins quand il s'agit des inéquations 3 et 4-mixtes.

3.6 Application aux graphes série-parallèles

Le problème du voyageur de commerce se résout polynomialement sur les graphes série-parallèles [37, 52] (voir section 1.3). Cependant, la caractérisation du polyèdre $GTSP(G)$ reste inconnue pour cette classe de graphe. Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [37], montrent que le polyèdre défini par les inéquations de coupe et celles de positivité est entier, quand le graphe est série-parallèle, mais il contient strictement $GTSP(G)$.

Nous avons montré dans la section 2.4, qu'étant donné un graphe série-parallèle G , on peut obtenir, à partir de descriptions étendues des enveloppes convexes des solutions partielles définies sur chacune des arêtes de G , une description de $GTSP(G)$ par une succession de composition-projection de certains polyèdres; les variables artificielles utilisées étaient arbitrairement choisies.

Nous allons voir, dans les paragraphes suivants, que cela peut être également fait par adjonction de graphes artificiels.

Hassin et Tamir [66] montrent que si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle alors il admet un ensemble d'articulation $\{u, v\}$ tel que G soit la deux somme (relativement à $\{u, v\}$) de deux de ses sous-graphes G_1 et G_2 ayant chacun au plus $\frac{2}{3}|V| + 2$ sommets; de plus $G_i \cup \{(u, v)\}$ est série-parallèle, $i = 1, 2$.

En remplaçant à chaque étape les nouveaux graphes G_1 et G_2 par $GTSP(\overline{G_1})$ et $GTSP(\overline{G_2})$, on peut donc décomposer itérativement un graphe série-parallèle G par la 2-décomposition, et cela tant que le nombre de sommets des graphes décroît strictement. De cette manière, on associe à G un arbre de composition (décomposition) tel que les graphes primitifs aient au plus 21 sommets chacun. La détermination de cet arbre est aussi polynomiale en nombre de sommets de G [66].

D'après les résultats donnés dans les trois sections précédentes, la connaissance de systèmes d'inéquations linéaires définissant les polyèdres du voyageur de commerce, associés aux graphes primitifs, conduit à la caractérisation de $GTSP(G)$. En d'autres termes, la description de $GTSP(G)$ se réduit à celle des polyèdres associés aux graphes primitifs.

Notons tout de même que l'arbre de décomposition, y compris les graphes primitifs, varie d'un graphe série-parallèle à un autre. Par conséquent, cette manière de faire ne met pas, a priori, en évidence un système d'inéquations valable pour toute la classe des graphes série-parallèles. Cependant, la connaissance d'une description complète du $GTSP(G)$ est toujours possible pour n'importe quelle taille de G si ce dernier est série-parallèle.

Comparée à cette méthode d'adjonction de graphes artificiels, la méthode décrite dans la section 2.4 présente l'avantage d'avoir, pour tout graphe série-parallèle G donné, des graphes primitifs isomorphes simples qui sont les arêtes de G .

L'arbre de décomposition associé à un graphe série-parallèle $G = (V, E)$ a une taille polynomiale en nombre de sommets de G . Nous déduisons alors du corollaire 3.3.2 qu'en remontant l'arbre de décomposition, des feuilles vers la racine, et en gardant à chaque itération les variables artificielles, nous aboutissons à une description étendue compacte (tous les graphes primitifs ont moins de 21 sommets, le nombre d'inéquations décrivant les polyèdres associés peut être borné par une constante).

Cela montre, encore une fois, que le problème du voyageur de commerce graphique est polynomialement résolvable sur les graphes série-parallèles, par le biais de la programmation linéaire.

En considérant la composition d'autres polytopes, des déductions similaires sont données dans [12] et [13] pour cette classe de graphes.

Chapitre 4

Polytope des stables et composition par identification de sous-graphes

4.1 Introduction

Etant donnés deux graphes G_1 et G_2 ayant deux sous-graphes isomorphes H_1 et H_2 respectivement. Soit G le graphe composé de G_1 et G_2 par identification des sommets de H_1 avec ceux de H_2 (tout en respectant l'isomorphisme).

Nous nous proposons d'étudier l'obtention d'une description linéaire du polytope des stables de G à partir des systèmes d'inéquations linéaires définissant les polytopes associés à G_1 et G_2 .

Tout graphe pouvant être obtenu, par des applications successives de cette opération de composition, à partir de graphes complets, ce problème est difficile à étudier dans sa forme générale. Il a été résolu par Chvátal [31] dans le cas où H_1 et H_2 sont complets, par Barahona et Mahjoub [13] dans le cas où H_1 et H_2 sont des stables de taille deux, et aussi par Sbihi et Uhry [102] quand G_1 est h-parfait, G_2 est série-parallèle et les deux sous-graphes sont des stables de taille deux.

Nous montrerons dans ce chapitre (corollaire 4.4.2 et théorème 4.4.7) que, sous certaines hypothèses, le polytope des stables de G est décrit par l'union des deux systèmes définissant les polytopes associés à G_1 et G_2 . Vu que les sous-graphes H_1 et H_2 puissent être d'une taille importante, le schéma de composition discuté dans le chapitre 2 s'avère difficile à appliquer. L'approche de composition qui sera poursuivie consiste à identifier

les sous-graphes itérativement, c'est à dire une paire de sommets à la fois. Elle a été utilisée par Tucker [106] et par Corneil et Fonlupt [35] pour montrer que, dans des cas particuliers, l'identification de deux stables (de G_1 et de G_2) préserve la perfection et la k -coloration.

4.2 Préliminaires

Un *stable* S d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets deux à deux non-adjacents.

Le polytope des stables de G , noté $STB(G)$, est l'enveloppe convexe des (vecteurs caractéristiques des) stables de G . Le problème du stable de coût maximum, défini dans la section 1.3, s'écrit alors : $\text{Max}\{cx : x \in STB(G)\}$.

Le $\{0, 1\}$ -polytope des stables étant de pleine dimension, il existe un unique (à une multiplication par un scalaire près) système d'inéquations linéaires le décrivant. Ce système a fait l'objet d'études intensives, notamment dans [14, 31, 95, 97, 105, 108]. Les plus familières des inéquations qui définissent des facettes de $STB(G)$ sont les inéquations de positivité et celles associées aux cliques et aux trous impairs de G .

Les inéquations de positivité $x(v) \geq 0$, dite aussi triviales, définissent des facettes de $STB(G)$ pour tout sommet v de V .

Padberg [97] montre que l'inéquation

$$\sum_{v \in K} x(v) \leq 1 \quad (4.1)$$

associée à une clique K de G définit une facette de G si et seulement si K est une clique maximale.

On appelle *trou impair*, un cycle sans corde ayant un nombre impair, supérieur à trois, de sommets. Le complémentaire d'un trou impair est dit *anti-trou impair*.

Il est simple de voir que l'inéquation

$$\sum_{v \in C} x(v) \leq 2 \quad (4.2)$$

associée à un trou impair (resp. anti-trou impair) C de G est valide pour $STB(G)$. Toutefois, cette inéquation ne définit pas toujours une facette. Padberg [97] montre

que certaines facettes peuvent être obtenues à partir des trous impairs.

En outre, le polytope des stables est complètement décrit pour des classes particulières de graphes.

Le graphe G est dit k -colorable ou k -chromatique si on peut colorer ses sommets en utilisant k couleurs de manière que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Berge [18] définit un graphe *parfait* comme étant un graphe pour lequel tout sous-graphe induit H de G est $\omega(H)$ -colorable, où $\omega(H)$ est la taille d'une clique maximum de H . Il conjecture qu'un graphe est parfait s'il ne contient ni trou impair ni anti-trou impair comme sous-graphe induit. Cette conjecture non encore prouvée est connue sous le nom de la conjecture forte des graphes parfaits.

Un résultat dû à Fulkerson, Lovász et Chvátal (voir [31], chapitre 9) caractérise le polytope des stables d'un graphe parfait : G est parfait si et seulement si $STB(G)$ est complètement décrit par les contraintes de positivité et celles associées aux cliques maximales.

Grötschel, Lovász et Schrijver [60, 61] donnent un algorithme polynomial pour le problème du stable de poids maximum dans les graphes parfaits. Leur algorithme, qui se base sur la méthode des ellipsoïdes [71], est inefficace de point de vue pratique et ne donne malheureusement aucune idée sur la structure de ces graphes.

Plusieurs types de graphes parfaits ont été mis en évidence (voir [59, 61, 75, 78]). La classe des graphes connus pour être parfaits se trouve élargie par le résultat de Lovász [73, 74] qui démontre la conjecture faible des graphes parfaits (posée par Berge [18]) à savoir que G est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.

Des opérations de composition/décomposition de graphes qui préservent la perfection viennent enrichir cette classe; telles que l'union, l'identification de cliques [18], l'opération "join" [21, 73], l'amalgame [25], l'identification de stables [35, 106], le 2-amalgame [36], la connection de systèmes de cliques [55] et l'opération g -amalgame [111]. (voir aussi [33]).

La reconnaissance des graphes parfaits est un problème difficile dans le cas général; cependant, il a été résolu d'une manière polynomiale pour certains types de graphes

(voir [25, 59, 61, 68]).

Par analogie aux graphes parfaits, on définit les graphes *h-parfaits* comme étant les graphes pour lesquels le polyèdre des stables est caractérisé par le système linéaire formé des inéquations de positivité, des inéquations associées aux cliques et de celles associées aux trous impairs. La lettre *h* signifie trou en anglais (hole).

Chvátal [31] était le premier auteur qui s'est intéressé à ces graphes en conjecturant que les graphes série-parallèles sont *t-parfaits*; un graphe *t-parfait* est un graphe *h-parfait* n'ayant pas de clique de taille supérieure à 3 (la lettre *t* signifie trou).

D'après Grötschel, Lovász et Schrijver [60, 61], le problème du stable de poids maximum se résout polynomialement sur les graphes *h-parfaits*.

La classe des graphes parfaits est incluse dans celle des graphes *h-parfaits*. Les graphes *h-parfaits* (ou plus précisément *t-parfaits*) connus, qui ne sont pas parfaits, sont les graphes presque bipartis [54], les graphes série-parallèles [23, 80] et les graphes fortement *t-parfaits* [57, 58] (ne contenant pas de subdivision impaire de K_4) qui généralisent les deux types de graphes précédents.

Selon Gerards, Lovász, Seymour, Schrijver et Truemper (voir [61]), les graphes fortement *t-parfaits* s'obtiennent par composition à partir des graphes presque bipartis et des graphes planaires ayant au plus deux faces impaires.

Notons qu'on ne connaît pas de classes de graphes qui soient *h-parfaits* sans être *t-parfaits* (voir [61]).

Nous donnons, maintenant, quelques définitions et notations que nous utiliserons dans ce chapitre.

$G = (V, E)$ est un graphe simple non-orienté.

Soit A un sous-ensemble de sommets de G , nous noterons par $G(A)$ le sous-graphe de G engendré par les sommets de A . De même, $G(F_1 \cup F_2)$, avec F_1 et F_2 deux sous-graphes de G , représentera le sous-graphe de G induit par les sommets de F_1 et de F_2 .

Une chaîne L d'extrémités u et v de G sera dite *minimale* si le sous-graphe de $G(L)$ est une chaîne. La longueur de la chaîne L , notée $long(L)$, est le nombre d'arêtes de L . L sera dite *paire* (resp. *impaire*) si $long(L)$ est pair (resp. impair).

Nous dirons que deux sommets u et v forment une *paire d'amis* (resp. une *paire d'ennemis*) de G si toutes les chaînes minimales les reliant dans G sont paires (resp.

impaires). Deux sommets se trouvant dans deux composantes connexes différentes de G forment une paire d'amis.

Considérons trois sommets distincts deux à deux non-adjacents u , v et w de G et deux chaînes minimales L et L' d'extrémités respectives u , v et v , w telles que $w \notin L$ et $u \notin L'$.

La *concaténation* de ces deux chaînes est la chaîne engendrée par l'ensemble des sommets formant L et L' .

Nous dirons que le sommet w est *non-adjacent* à la chaîne L si le sous-graphe $G(L \cup \{w\})$ n'est pas connexe. Dans le cas contraire, w sera dit *faiblement adjacent* (resp. *fortement adjacent*) à L , si la sous-chaîne de L reliant le premier et le dernier sommets adjacents à w , en allant de u à v , est paire (resp. impaire).

4.3 Identification d'une paire d'amis

Soient u_1 et u_2 deux sommets qui forment une paire d'amis de G . Notons par G' le graphe obtenu à partir de G en identifiant les sommets u_1 et u_2 en un seul sommet u . Cette opération de transformation sera considérée, dans la suite du chapitre, comme une opération élémentaire de base.

L'identification d'une paire d'amis préserve certaines propriétés des graphes. Une première propriété, bien connue et facile à démontrer, est la k -colorabilité, i.e.

Lemme 4.3.1 *Si G est k -colorable alors G' est k -colorable.*

Preuve:

Etant donnée une coloration optimale de G en k couleurs. Si u_1 et u_2 sont colorés avec la même couleur alors, nous affectons cette couleur au sommet u et la coloration de G reste aussi optimale pour G' . Sinon, supposons que u_1 soit coloré en "blanc" et u_2 en "noir". Notons par BN le sous-graphe de G engendré par l'ensemble des sommets colorés en "blanc" ou en "noir". BN est un graphe biparti. Comme u_1 et u_2 forment une paire d'amis dans G , l'ensemble des sommets de BN peut être partitionné en $W_1 \cup W_2$ tel que W_1 et W_2 soient des stables et u_1 et u_2 appartiennent à W_1 . Nous affectons la couleur "blanc" aux sommets de W_1 et la couleur "noir" à ceux de W_2 , et nous obtenons une nouvelle coloration de G en k couleurs telle que u_1 et u_2 aient la

même couleur. \square

Une deuxième propriété préservée par cette opération est la perfection; Fonlupt et Uhry [54] donnent le théorème suivant :

Théorème 4.3.1 [54] *Si G est parfait alors G' est parfait.*

La démonstration de ce théorème, donnée par ses auteurs, utilise les polyèdres. Meyniel [86] donne une autre démonstration utilisant le lemme 4.3.1.

Nous étudions maintenant, les conséquences polyédrales de cette opération, i.e. comment déduire, à partir d'un système d'inéquations linéaires décrivant $STB(G)$, un autre système caractérisant $STB(G')$.

Du fait que les sommets u_1 et u_2 forment une paire d'amis, le théorème suivant montre que $STB(G')$ est la projection, faisant disparaître les variables $x(u_1)$ et $x(u_2)$, du polytope suivant :

$$STB(G) \cap \{x \in R^{V \cup \{u\}} : x(u) = x(u_1) = x(u_2)\}.$$

La démonstration que nous allons donner est une généralisation de celle proposée par Fonlupt et Uhry pour le théorème précédent.

Théorème 4.3.2 *$STB(G')$ est défini par le système d'inéquations linéaires décrivant $STB(G)$ en remplaçant les variables $x(u_1)$ et $x(u_2)$ par la variable $x(u)$.*

Preuve:

$$\text{Posons } P = STB(G) \cap \{x \in R^{|V|} : x(u_1) = x(u_2)\}.$$

Pour simplifier la démonstration, nous supposons que $STB(G')$ soit défini dans $R^{|V|}$ et nous montrons que $STB(G') = P$

$STB(G') \subseteq P$. En effet, chaque point extrême de P correspond à un stable de G qui contient u_1 et u_2 en même temps, ou ne contient aucun des deux.

Supposons qu'il existe un sommet \bar{x} de P n'appartenant pas à $STB(G')$.

\bar{x} est forcément non-entier, car sinon, \bar{x} sera un stable de G avec $\bar{x}(u_1) = \bar{x}(u_2)$ qui, après identification de u_1 et u_2 , deviendra un stable de G'

\bar{x} étant un point de $STB(G)$, il existe x^1, x^2, \dots, x^k , $k \geq 2$, k sommets de $STB(G)$ et k scalaires positifs ou nuls $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ et $\bar{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Chaque sommet x^i , $i = 1, \dots, k$, (tel que $\lambda_i > 0$) appartient à la plus petite face de $STB(G)$ contenant \bar{x} , et par conséquent, il sature les mêmes contraintes de $STB(G)$ que \bar{x} .

S'il existe deux indices i et j tels que $1 \leq i \neq j \leq k$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_j > 0$, $x^i \neq x^j$, $x^i(u_1) = x^j(u_1)$ et $x^i(u_2) = x^j(u_2)$ alors, le point $\tilde{x} = \bar{x} - \lambda_j x^j + \lambda_i x^i$ est différent de \bar{x} , il appartient à P et sature les mêmes contraintes de $STB(G)$ que \bar{x} , ce qui contredit le fait que \bar{x} soit un point extrême de P .

\bar{x} se décompose alors comme suit:

$$\bar{x} = \lambda_1 x^{00} + \lambda_2 x^{01} + \lambda_3 x^{10} + \lambda_4 x^{11}$$

où $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$, $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ et x^{00} , x^{01} , x^{10} et x^{11} sont des sommets de $P(G)$ tels que :

$$\begin{array}{cccc} x^{00}(u_1) = 0 & x^{01}(u_1) = 0 & x^{10}(u_1) = 1 & x^{11}(u_1) = 1 \\ x^{00}(u_2) = 0 & x^{01}(u_2) = 1 & x^{10}(u_2) = 0 & x^{11}(u_2) = 1. \end{array}$$

Le point \bar{x} vérifie alors, le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{x}(u_1) = \lambda_2 + \lambda_4 \\ \bar{x}(u_2) = \lambda_3 + \lambda_4 \end{cases} \quad (4.3)$$

Le système 4.3 et l'équation $x(u_1) = x(u_2)$ impliquent que $\lambda_2 = \lambda_3$.

Comme \bar{x} , x^{00} et x^{11} sont des sommets de P , λ_2 doit être non-nul. Par contre, λ_1 et λ_4 doivent être nuls, car sinon \bar{x} peut s'écrire $\bar{x} = \lambda_1 x^{00} + 2\lambda_2(\frac{1}{2}x^{01} + \frac{1}{2}x^{10}) + \lambda_4 x^{11}$ avec $(\frac{1}{2}x^{01} + \frac{1}{2}x^{10}) \in P$ et $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 1$, ce qui contredit le fait que \bar{x} soit un point extrême.

Nous avons donc, $\bar{x} = \frac{1}{2}x^{01} + \frac{1}{2}x^{10}$ (c'est un $\{0, 1, 2\}$ -vecteur).

Soient: $V^0 = \{w \in V : \bar{x}(w) = 0\}$;

$$V^{\frac{1}{2}} = \{w \in V : \bar{x}(w) = \frac{1}{2}\};$$

$$V^1 = \{w \in V : \bar{x}(w) = 1\}.$$

Les sommets u_1 et u_2 appartiennent à $V^{\frac{1}{2}}$.

Les contraintes 4.1 associées aux cliques étant valides pour $STB(G)$, $G(V^{\frac{1}{2}})$ ne contient pas de clique de cardinalité supérieure ou égale à 3.

De même, comme les contraintes 4.2 associées aux trous impairs sont valides pour $STB(G)$, $G(V^{\frac{1}{2}})$ ne contient pas de trou impair.

$G(V^{\frac{1}{2}})$ est sans cycle impair, et par conséquent, il est biparti.

Le sous-graphe, $G(V^1)$, de G induit par les sommets de V^1 forme un stable de G . Du fait que toutes les chaînes minimales reliant u_1 et u_2 dans G soient paires, $V^{\frac{1}{2}}$ peut être partitionné en $W^1 \cup W^2$ tel que W^1 et W^2 soient des stables de G et que les sommets u_1 et u_2 appartiennent à W^1 .

$\forall w_1 \in V^{\frac{1}{2}}$ et $\forall w_2 \in V^1$, $(w_1, w_2) \notin E$ (sinon, $\bar{x}(w_1) + \bar{x}(w_2) = \frac{3}{2} > 1$).

Soient $S^1 = V^1 \cup W^1$ et $S^2 = V^1 \cup W^2$. S^1 et S^2 sont des stables de G dont les vecteurs caractéristiques x^{s^1} et x^{s^2} appartiennent à P .

\bar{x} s'écrit comme la demi-somme de x^{s^1} et x^{s^2} . Ce qui contredit le fait qu'il soit sommet de P . Nous concluons que $P \subseteq STB(G')$. \square

Corollaire 4.3.1 *Si G est h -parfait (resp. parfait) alors G' est h -parfait (resp. parfait).*

Preuve :

Nous montrons que si $STB(G)$ est décrit seulement par les contraintes de positivité, les contraintes de clique et celles associées aux trous impairs (resp. par les contraintes de positivité et les contraintes de clique) alors, il en est de même pour $STB(G')$.

Selon le théorème 4.3.2, il suffit de montrer que toute clique (resp. tout trou impair) de G' est une clique (resp. est un trou impair) de G .

Soit K une clique de G' . Si $u \notin K$ alors K est une clique de G .

Supposons que $u \in K$ et que $(K - \{u\}) \cup \{u_1\}$ et $(K - \{u\}) \cup \{u_2\}$ ne soient pas des cliques de G . Il existe, dans ce cas, deux sommets adjacents v_1 et v_2 de K tels que $(u_1, v_1) \in E$, $(u_2, v_2) \in E$, $(u_1, v_2) \notin E$ et $(u_2, v_1) \notin E$. La chaîne minimale de G engendrée par les sommets u_1, v_1, v_2, u_2 est impaire et contredit le fait que u_1 et u_2 forment une paire d'amis de G .

De même, comme u_1 et u_2 forment une paire d'amis de G , tous les trous impairs de G' (s'il en existe) sont aussi des trous impairs de G . \square

Notons que, dans la preuve du théorème 4.3.2, nous n'avons pas utilisé le fait que u_1 et u_2 formaient une paire d'amis dans G pour montrer que \bar{x} est un $\{0, 1, 2\}$ -vecteur. Nous énonçons la remarque suivante qui sera utile dans le chapitre suivant.

Remarque 4.3.1 *Soient u_1 et u_2 deux sommets non-adjacents de G . Le polytope $P(G) \cap \{x \in R^{|V|} : x(u_1) = x(u_2)\}$ est demi-entier (ie. un $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ -polytope), et pour tout sommet fractionnaire \bar{x} de ce polytope (s'il en existe), nous avons*

$$\bar{x}(u_1) = \bar{x}(u_2) = \frac{1}{2} . \square$$

Bien que l'opération d'identification d'une paire d'amis préserve la k -colorabilité, la perfection et la h -perfection, elle ne préserve pas pour autant la minimalité des systèmes; c'est à dire que certaines inéquations qui induisent des facettes de $STB(G)$ peuvent devenir redondantes si on remplace, dans le système décrivant $STB(G)$, les variables $x(u_1)$ et $x(u_2)$ par $x(u)$.

Ainsi, les contraintes

$$x(u_1) + x(u_2) + x(u_3) + x(u_4) + x(u_5) + x(u_6) \leq 2$$

$$x(u_2) + x(u_3) \leq 1$$

$$x(u_2) + x(u_6) \leq 1$$

définissent des facettes du polytope des stables du graphe G de la figure 4.1, mais en remplaçant $x(u_1)$ et $x(u_2)$ par $x(u)$, elles deviennent redondantes pour la description de $STB(G')$; où G' est le graphe parfait de la figure 4.1 obtenu à partir de G en identifiant la paire d'amis (u_1, u_2) .

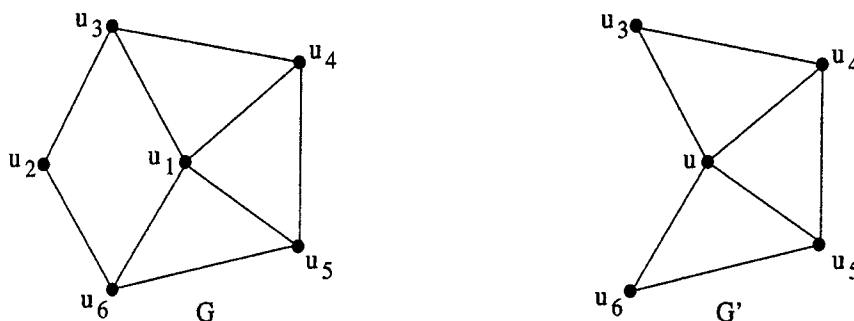


FIG. 4.1 -

Remarquons que si les sommets u_1 et u_2 formaient une paire d'ennemis alors, le théorème 4.3.2 et le corollaire 4.3.1 ne seraient plus valables. En effet, dans la figure 4.2, le graphe G' est obtenu à partir de G_1 ou de G_2 en identifiant la paire d'ennemis, formée par u'_1 et u''_1 , en un seul sommet u_1 . Le graphe G_1 est h -parfait, ou plus précisément parfait (il s'agit d'un graphe triangulé), or le remplacement des variables $x(u'_1)$ et $x(u''_1)$ par $x(u_1)$ dans le système d'inéquations décrivant $STB(G_1)$, ne permet pas de mettre en évidence la contrainte de roue suivante

$$x(u_1) + x(u_2) + x(u_3) + x(u_4) + x(u_5) + 2x(u_6) \leq 2$$

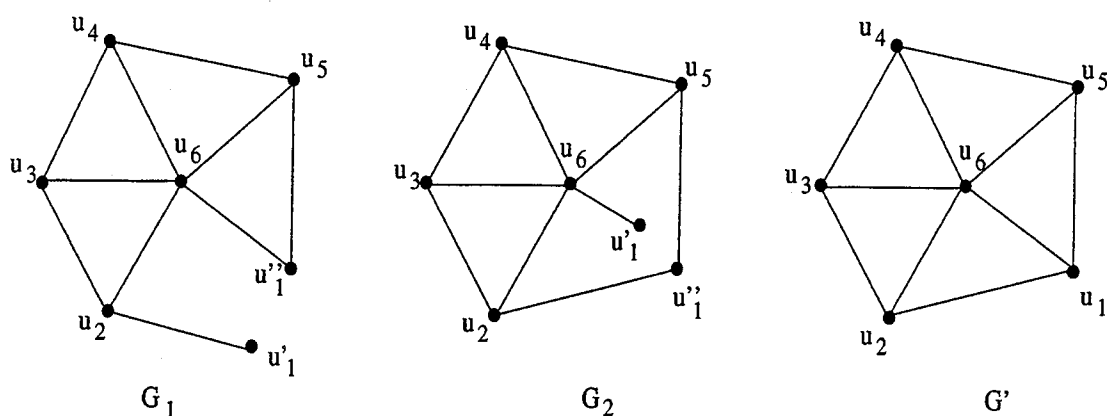


FIG. 4.2 -

qui définit une facette de $STB(G')$. Cette remarque reste valable même si toutes les chaînes minimales reliant la paire d'ennemis sont de longueur trois (c'est le cas du graphe G_2 , non-h-parfait, de la figure 4.2).

4.4 Composition par identification de sous-graphes

Etant donnés deux graphes $G_1 = (V_1 \cup V_H, E_1 \cup V_H)$ et $G_2 = (V_2 \cup V_H, E_2 \cup V_H)$ tel que le sous-graphe $H = (V_H, E_H)$ soit induit.

Nous considérons le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = V_1 \cup V_2 \cup V_H$ et $E = E_1 \cup E_2 \cup E_H$.

Le graphe G sera appelé le graphe composé de G_1 et G_2 par identification de sous-graphes, et sera noté $G = G_1 \Phi_H G_2$.

Supposons que nous ayons deux systèmes d'inéquations linéaires décrivant les polytopes des stables, $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$, de G_1 et G_2 respectivement.

Dans le cas général, le problème qui consiste à déduire de ces deux systèmes une description complète de $STB(G)$ est un problème difficile; et le fait que le sous-graphe H soit quelconque peut induire des facettes complexes du polytope des stables de G .

Dans la section 2.5, nous avons montré que si H est un stable alors il existe un graphe artificiel valide ayant un nombre exponentiel en nombre de sommets de H (proposition 2.5.1). En utilisant l'approche de composition exposée dans le chapitre 2, nous serons alors confrontés à la projection d'un certain polyèdre comportant un grand nombre de variables artificielles qui, a priori, n'est pas une chose aisée.

En prenant pour H un stable à deux sommets, Barahona et Mahjoub [13] montrent

que certaines inéquations non-triviales, dont le nombre pourrait être énorme, sont nécessaires pour la description de $STB(G)$ et s'obtiennent par un mixage d'inéquations définissant des facettes de $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$.

Toutefois, dans certains cas particuliers, le polytope $STB(G)$ est moins complexe. Ainsi, Chvátal [31] montre que si H est une clique alors, l'union des deux systèmes décrivant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ est suffisante pour décrire le polytope des stables du graphe composé G .

Nous montrerons dans cette section que, sous certaines hypothèses, les polytopes $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ sont parfaitement composables (voir section 2.2) relativement à l'identifications des sous-graphes, i.e.

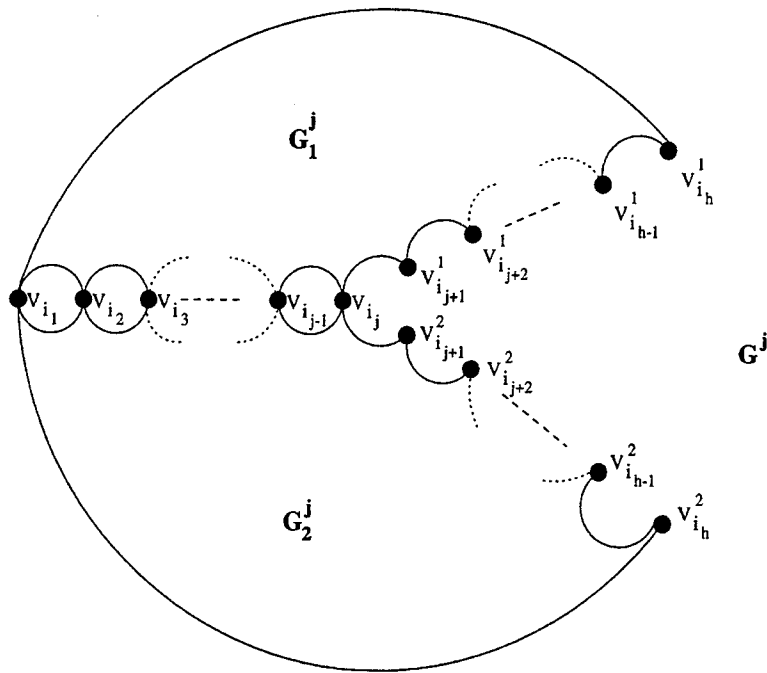
$$STB(G) = STB(G_1) \cap STB(G_2).$$

Notons que dans ces cas particuliers, la préservation de la perfection et de la h-perfection découlera automatiquement.

L'idée principale de notre manière d'approcher ce problème de composition des polytopes est l'identification itérative des sous-graphes de G_1 et de G_2 , i.e. l'identification d'une paire de sommets à la fois.

Il est clair que si, à chaque itération, la paire de sommets à identifier est une paire d'amis du graphe courant (rappelons que deux sommets dans deux composantes connexes différentes forment une paire d'amis) alors, le théorème 4.3.2 nous garantira que, pour caractériser le polytope des stables du nouveau graphe, il suffira de procéder seulement à une substitution de certaines variables du système d'inéquations courant. A la fin de la dernière itération, nous retrouverons le graphe composé G dont l'enveloppe convexe de ses stables sera entièrement caractérisée par l'union des deux systèmes définissant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$. Cela nous amène à définir ce que c'est un bon ordre des sommets de H .

Soit $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_h}$ un ordre des sommets de H . Nous définissons une série de graphes G^1, G^2, \dots, G^h , avec $G^h = G$, de la façon suivante: pour tout j , $0 \leq j \leq h$, $G^j = G_1^j \Phi_{H^j} G_2^j$ où H^j est le sous-graphe de H engendré par $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_j}\}$ et G_k^j , $k = 1, 2$, est obtenu à partir de G_k en remplaçant les sommets $\{v_{i_{j+1}}, \dots, v_{i_h}\}$ par $\{v_{i_{j+1}}^k, \dots, v_{i_h}^k\}$ (voir figure 4.3).

FIG. 4.3 - $G^j = G_1^j \Phi_H G_2^j$

Un ordre des sommets de H est dit *bon* si pour tout j , $0 \leq j \leq h-1$, les sommets $v_{i_{j+1}}^1$ et $v_{i_{j+1}}^2$ forment une paire d'amis dans G^j .

Dans le cas contraire, l'ordre est *mauvais*.

Pour les classes de graphes que nous allons considérer, nous montrerons que les sommets du sous-graphe H peuvent être ordonnés suivant un bon ordre. Nous donnons tout d'abord, quelques définitions qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

Soit $G = (V \cup V_H, E \cup E_H)$ tel que $H = (V_H, E_H)$ soit un sous graphe induit et $|V_H| \geq 2$.

Une chaîne L reliant deux sommets non-adjacents u et v de V_H sera dite *directe* si $L \cap V_H = \{u, v\}$.

Nous dirons que G est *H-connexé* s'il est connexe et si pour toute paire de sommets non-adjacents de V_H il existe une chaîne directe les reliant.

Le graphe G satisfera la *condition forte* (resp. la *condition faible*) des chaînes relativement au sous-graphe H si :

- 1- G est H -connexe;
- 2- Pour toute paire de sommets non-adjacents u et v de V_H , toutes les chaînes minimales (resp. chaînes minimales directes) reliant u et v ont la même

parité.

Dans l'exemple de la figure 4.4(a), les graphes G_1 et G_2 vérifient la condition forte des chaînes relativement au stable H . Quant à ceux de la figure 4.4(b), G_1 satisfait la condition forte des chaînes, par contre, G_2 vérifie seulement la condition faible.

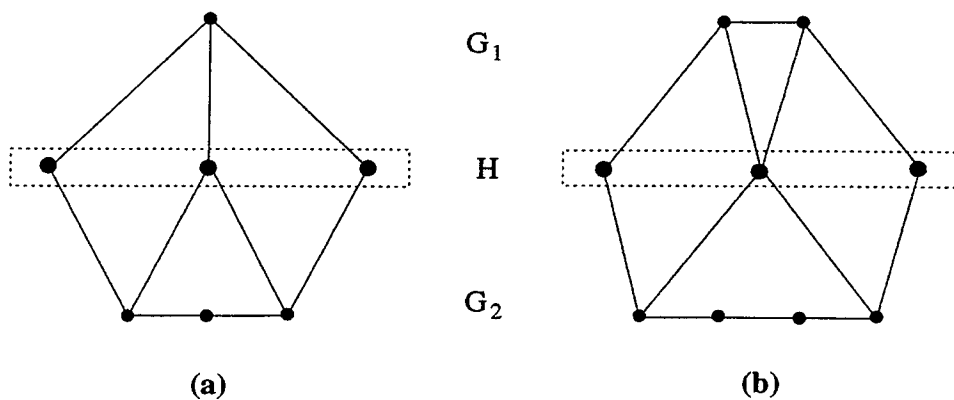


FIG. 4.4 -

Si G vérifie la condition faible des chaînes relativement à H , nous associons à chaque paire de sommets non-adjacents u et v de V_H une signature définie par :

$$\text{sign}(u, v; G) \equiv \text{long}(L) \pmod{2}$$

où L est une chaîne directe minimale de G d'extrémités u et v .

Dans la suite, nous écrirons simplement $\text{sign}(u, v)$; en cas de nécessité, on précisera $\text{sign}(u, v; G)$.

Dans le cas où G vérifie la condition faible des chaînes relativement à H et u, v et w sont trois sommets de V_H deux à deux non-adjacents tels que w soit faiblement adjacent (resp. fortement adjacent) à une chaîne directe minimale reliant u et v dans G , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{sign}(u, v) + \text{sign}(u, w) + \text{sign}(w, v) &\equiv 0 \pmod{2} \\ (\text{resp. } \text{sign}(u, v) + \text{sign}(u, w) + \text{sign}(w, v) &\equiv 1 \pmod{2}). \end{aligned}$$

Il est clair que, dans ce cas, le sommet w ne peut pas être à la fois faiblement adjacent à une chaîne directe minimale reliant u et v et fortement adjacent à une autre.

Nous appellerons *deux-trou*, tout trou de G passant par deux ou plusieurs sommets non-adjacents de H .

Soient G_1 et G_2 les graphes définis au début de cette section.

G_1 et G_2 seront *fortement compatibles* (resp. *faiblement compatibles*) relativement à H si :

- 1- G_1 et G_2 satisfont la condition forte des chaînes (resp. faible des chaînes) relativement à H ;
- 2- Pour toute paire de sommets non-adjacents u et v de V_H ,
 $sign(u, v; G_1) = sign(u, v; G_2)$.

Les graphes G_1 et G_2 de la figure 4.4(a) sont fortement compatibles relativement au stable H . Ceux de la figure 4.4(b) sont faiblement sans être fortement compatibles relativement à H .

Notons que la forte compatibilité n'est pas liée uniquement aux graphes parfaits; ainsi le graphe de la figure 4.5 est composé de deux graphes fortement compatibles relativement à H dont un n'est pas parfait (G_1 admet un trou impair comme sous-graphe induit).

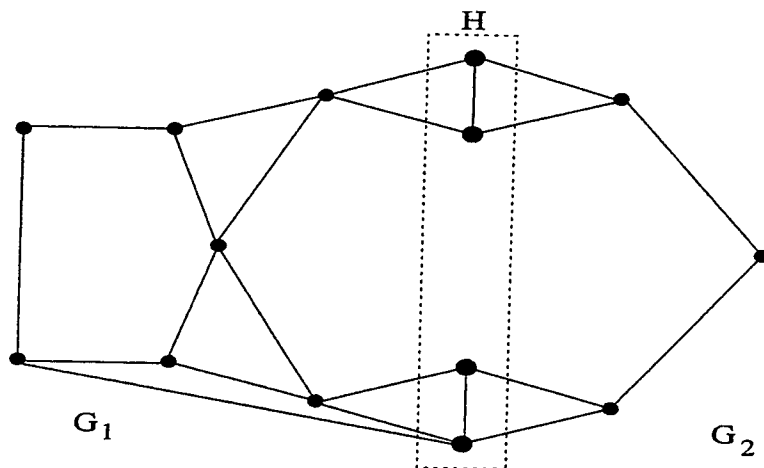


FIG. 4.5 -

Les définitions que nous venons de donner sont des généralisations des notions introduites par Corneil et Fonlupt [35].

Le premier cas particulier, de notre problème de composition, que nous allons considérer est celui où G_1 et G_2 sont fortement compatibles. Dans ce cas, nous montrerons que l'union des deux systèmes d'inéquations linéaires définissant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ suffira pour caractériser le polytope $STB(G)$ (corollaire 4.4.2).

Nous étudierons, ensuite, le problème lorsque les deux graphes à composer sont fai-

blement compatibles. Pour cette deuxième catégorie de graphes, nous ramènerons, tout d'abord, le problème de la recherche d'un bon ordre des sommets du sous-graphe H , quand ce dernier est un stable, à un autre problème équivalent et plus précis. Puis, nous montrerons que si l'un des deux graphes à composer est non-critique, série-parallèle ou presque biparti, ou bien si le sous-graphe H a moins de cinq sommets alors, $STB(G) = STB(G_1) \cap STB(G_2)$ (théorème 4.4.7).

4.4.1 Composition de graphes fortement compatibles

Dans cette sous-section, nous supposons que les graphes G_1 et G_2 soient fortement compatibles relativement au sous-graphe H .

Dans le cas où G_1 et G_2 sont des graphes parfaits et H est un stable, Corneil et Fonlupt [35] montrent que G est sans deux-trou impair. C'est ce résultat qui leur permet de conclure que, sous ces hypothèses, les sommets du stable peuvent être ordonnés suivant un bon ordre.

En remarquant qu'un graphe fortement compatible, relativement à H , "ressemble localement" à un graphe parfait, i.e. il ne contient pas de deux-trou impair passant par deux sommets non-adjacents de H , leur résultat, ainsi que sa démonstration, restent valables même si G_1 et G_2 ne sont pas parfaits, et nous énonçons ce résultat comme suit :

Théorème 4.4.1 [35] *Si le sous-graphe H est un stable, alors G ne contient pas de deux-trou impair. \square*

Nous utilisons ce résultat pour l'étendre à n'importe quel sous-graphe H , c'est à dire :

Proposition 4.4.1 *Pour tout sous-graphe H , G ne contient pas de deux-trou impair.*

Preuve:

Supposons que G contienne un deux-trou impair C .

Comme G_1 et G_2 sont fortement compatibles relativement à H , le trou C n'est inclus entièrement dans aucun des deux graphes.

$G(C \cap H)$ est non-connexe et chacune de ses composantes connexes est une chaîne élémentaire minimale (les sommets isolés sont considérés comme des chaînes ayant leurs extrémités confondues).

Ces chaînes sont de deux types:

- Type 1: les chaînes ayant une extrémité incidente à une arête de $C \cap E_1$ et l'autre à une arête de $C \cap E_2$;
- Type 2: les chaînes dont les deux extrémités ne sont incidentes, toutes les deux, qu'à des arêtes de $C \cap E_1$ ou des arêtes de $C \cap E_2$.

$G(C \cap H)$ a un nombre pair, strictement positif, de chaînes de type 1 car le deux-trou C intersecte à la fois E_1 et E_2 .

Soit $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ un sous-ensemble de V_H contenant, exactement, une extrémité de chaque chaîne de type 1 de $G(C \cap H)$. S est un stable de G ayant au moins deux sommets.

Du fait que G_1 et G_2 soient H -connexes et fortement compatibles relativement à H , et que S soit un sous-ensemble de V_H , alors G_1 et G_2 sont S -connexes et fortement compatibles relativement à S . Posons $C' = C - H$.

Considérons le graphe $\tilde{G} = G_1 \Phi_S G_2$. \tilde{G} est obtenu à partir de G en éclatant chaque sommet de $V_H - S$ en deux sommets). Comme G_1 et G_2 sont S -connexes et fortement compatibles relativement à S , le théorème 4.4.1 implique que le graphe \tilde{G} est sans deux-trou impair relativement à S .

Soient A_1 (resp. A_2) l'ensemble des chaînes de G_1 (resp. de G_2) correspondant aux chaînes de type 2 de $C \cap H$ dont les extrémités sont incidentes à des arêtes de E_1 (resp. E_2).

Le sous-graphe $\tilde{G}(C' \cup S \cup A_1 \cup A_2)$ est un deux-trou impair de \tilde{G} . Contradiction. \square

Cette proposition nous permet de conclure qu'il existe un bon ordre des sommets de H .

Corollaire 4.4.1 *Tous les ordres des sommets de H sont bons.*

Preuve:

Considérons un ordre quelconque $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_h}$ des sommets de H , et un indice j compris entre 0 et $h-1$. Si les sommets $v_{i_{j+1}}^1$ et $v_{i_{j+1}}^2$ ne forment pas une paire d'amis dans G^j alors le graphe G^{j+1} , obtenu à partir du précédent en identifiant $v_{i_{j+1}}^1$ et $v_{i_{j+1}}^2$ en un seul sommet $v_{i_{j+1}}$, contient un deux-trou impair. D'après la proposition 4.4.1, appliqué à $G^{j+1} = G_1^{j+1} \Phi_{H^{j+1}} G_2^{j+1}$, les deux graphes G_1^{j+1} et G_2^{j+1} ne sont pas fortement compatibles relativement à H^{j+1} . Cela implique que G_1 et G_2 ne sont pas fortement

compatibles relativement à H . \square

Des résultats de la section 4.3 et du corollaire 4.4.1, nous déduisons le résultat suivant:

Corollaire 4.4.2 *Si G_1 et G_2 sont fortement compatibles relativement à H alors :*

- $STB(G) = STB(G_1) \cap STB(G_2)$ (ie. $STB(G)$ est donné par l'union des deux systèmes d'inéquations décrivant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$)
- Si G_1 et G_2 sont parfaits (resp. h -parfaits) (resp. k -colorables) alors G est parfait (resp. h -parfait) (resp. k -colorable).

Preuve

Choisissons un ordre quelconque $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_h}$ des sommets de H , et procédons à l'identification itérative, i.e. une paire de sommets à la fois, des sous-graphes H de G_1 et de G_2 .

D'après le corollaire 4.4.1, l'ordre choisi est bon. Donc à chaque itération j , $0 \leq j \leq h-1$, les sommets $v_{i_{j+1}}^1$ et $v_{i_{j+1}}^2$ forment, par définition, une paire d'amis dans G^j . Selon le théorème 4.3.2, pour caractériser $STB(G^{j+1})$, il suffit de remplacer les variables $x(v_{i_{j+1}}^1)$, $x(v_{i_{j+1}}^2)$ par $x(v_{i_{j+1}})$ dans le système d'inéquations courant sans avoir besoin de rajouter de nouvelles inéquations.

A la fin de l'étape $h-1$, nous avons le graphe $G^h = G$ dont le polytope des stables est décrit par l'union des deux systèmes d'inéquations relatifs à $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$.

De même, le lemme 4.3.1 et le corollaire 4.3.1 impliquent que les graphes G^1, G^2, \dots, G^{h-1} et G sont parfaits (resp. h -parfaits) (resp. k -colorables) si G_1 et G_2 le sont aussi. \square

Le corollaire 4.4.2 généralise le théorème de Chvátal [31] qui traite le cas où le sous-graphe H est une clique (si H est une clique, les deux graphes G_1 et G_2 sont fortement compatibles relativement à H).

En se basant sur le théorème 4.4.1 (composition par identification de stables), Cornil et Fonlupt [35] définissent une opération de composition de graphes qui préserve la perfection. Dans le corollaire 4.4.3 suivant, nous étendrons cette opération de composition.

Un graphe $G^* = (V \cup V_H, E \cup E_H)$ sera dit *localement biparti* relativement à H si :

- G^* est H -connexe;
- aucun sommet de V_H n'est contenu dans un triangle de $(V \cup V_H, E)$;
- aucun sommet v de V n'est contenu dans un triangle du sous-graphe $G^*(V_H \cup \{v\})$;

Lemme 4.4.1 *Etant donné un graphe $\overline{G} = G\Phi_H G^*$. Si*

- \overline{G} est parfait, et
- G^* est localement biparti relativement à H ,

alors G satisfait la condition forte des chaînes relativement à H .

Preuve :

Supposons que G ne satisfasse pas la condition forte des chaînes relativement à H . Cela implique qu'il existe deux sommets non-adjacents u et v de H tels que G admette deux chaînes minimales distinctes C_1 et C_2 d'extrémités u et v n'ayant pas la même parité. G^* étant H -connexe, considérons une chaîne directe minimale C_3 de G^* d'extrémités u et v . Supposons que C_1 et C_2 soient de parités différentes. Le sous-graphe $\overline{G}(C_1 \cup C_3)$ est un cycle impair qui doit avoir des cordes joignant des sommets de $C_1 \cap H$ est d'autres de C_3 (\overline{G} est parfait). Du fait que G^* soit localement biparti relativement à H , $\overline{G}(C_1 \cup C_3)$ ne contient pas de triangles. Etant donné que \overline{G} soit parfait, $\overline{G}(C_1 \cup C_3)$ doit être biparti. Ce qui contredit le fait qu'il soit un cycle impair. \square

Corollaire 4.4.3 *Etant donnés deux graphes $\overline{G}_1 = G_1\Phi_H G^*$ et $\overline{G}_2 = G_2\Phi_H G^*$. Si*

- \overline{G}_1 et \overline{G}_2 sont parfaits, et
- G^* est localement biparti relativement à H ,

alors $G = G_1\Phi_H G_2$ est parfait.

Preuve :

D'après le lemme 4.4.1, G_1 et G_2 sont fortement compatibles relativement à H . On déduit alors du corollaire 4.4.2 que G est parfait. \square

Les *graphes de parité* sont les graphes pour lesquels chaque paire de sommets forme soit une paire d'amis soit une paire d'ennemis. Ils sont bien connus pour être parfaits (voir [27]). Leur perfection peut être aussi déduite du corollaire 4.4.2. En effet, si un graphe de parité est différent d'une clique alors il admet un déconnectant minimal H et est, par la suite, un graphe composé de deux graphes de parité fortement compatibles relativement à H .

Notons que si G_1 et G_2 sont des graphes de parité fortement compatibles relativement à H , le graphe composé $G = G_1\Phi_H G_2$ n'est pas nécessairement de parité.

4.4.2 Composition de graphes faiblement compatibles

Nous venons de voir, dans la sous-section précédente, que si G_1 et G_2 sont fortement compatibles relativement à H , alors le graphe G possède une propriété forte qui fait que tous les ordres des sommets de H sont bons. Cette précieuse propriété est fortement liée aux conditions imposées sur les chaînes. Ainsi, si G_1 et G_2 sont faiblement compatibles relativement à H , l'opération Φ peut créer des trous impairs ou des anti-trous impairs, et par conséquent, tous les ordres sont mauvais.

En effet, les graphes G_1 et G_2 de la figure 4.6 sont faiblement compatibles relativement à $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, alors que le graphe composé G contient un trou impair (représenté en gras dans la figure) passant par les trois sommets de S . Dans ce cas, la contrainte relative à ce trou impair est essentielle pour la caractérisation de $STB(G)$, et par conséquent, l'union des deux systèmes d'inéquations définissant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ ne suffit pas pour décrire ce polytope.

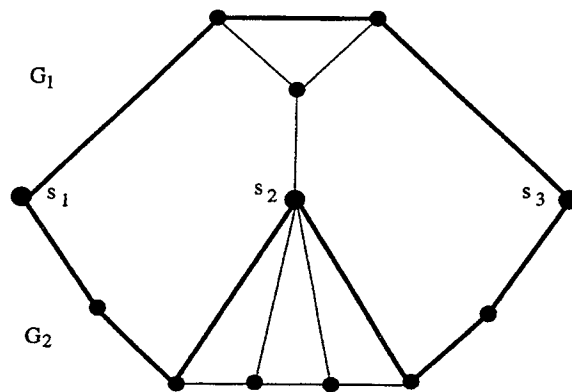
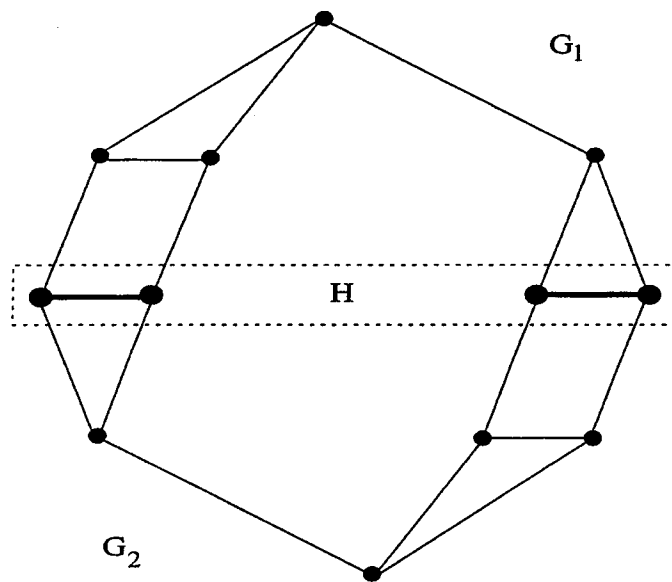


FIG. 4.6 - $G = G_1 \Phi_{\{s_1, s_2, s_3\}} G_2$

Notons aussi, que même si l'opération Φ ne crée ni trou impair ni anti-trou impair, il suffit, des fois, que E_H soit non-vide pour que tous les ordres soient mauvais. C'est le cas pour le graphe de la figure 4.7, où G_1 et G_2 sont faiblement compatibles relativement à H , le graphe composé G est parfait, cependant, tous les ordres des sommets de H sont mauvais.

Nous allons donc supposer que le sous-graphe H soit un stable, qui sera noté S , et que l'opération Φ ne crée pas de trou impair, i.e. le graphe composé ne contienne pas de deux-trou impair relativement à S .

FIG. 4.7 - $G = G_1 \Phi_H G_2$

Pour faciliter la présentation des résultats de cette section, nous avons besoin de supposer que l'un des deux graphes à composer reste connexe après suppression des sommets de S . Pour cela, nous présentons les hypothèses d'une manière plus détaillée.

Etant donné un graphe $G = (V \cup S, E)$ tel que S soit un stable déconnectant de G et que G soit sans deux-trou impair relativement à S .

Une *feuille* de G est une composante connexe de $G - S$ à laquelle nous rajoutons les sommets de S qui lui sont adjacents.

Soient F_1, F_2, \dots, F_f les feuilles de G relativement à S . Notons par S_j , $j = 1, \dots, f$, l'ensemble des sommets de S appartenant à la feuille F_j .

Nous nous proposons de reconstruire itérativement le graphe G en collant ses feuilles une par une. A chaque itération, nous identifions les sommets des feuilles appartenant à S .

Un ordre i_1, i_2, \dots, i_f des feuilles de G est dit bon si à la fin de chaque itération k , $k = 1, \dots, f-1$, i.e. après avoir collé la feuille $F_{i_{k+1}}$, le graphe courant est $(S_{i_{k+2}})$ -connexe (nous posons $S_{f+1} = S$).

Lemme 4.4.2 Soit $G = (V \cup S, E)$ un graphe tel que S soit un stable déconnectant de G . Il existe un bon ordre des feuilles de G relativement à S .

preuve:

Soit $\bar{S} \subseteq S$ un déconnectant minimal de G . Si $\bar{S} = S$ alors tous les ordres sont bons. Sinon, du fait que \bar{S} soit minimal, une et une seule feuille de G relativement à \bar{S} , disons F , intersecte $S - \bar{S}$ (notons que F est \bar{S} -connexe); les autres sont aussi des feuilles de G , relativement à S , que nous détachons du graphe G .

Notons par S' l'ensemble des sommets de S qui appartiennent à au moins deux feuilles de G , relativement à S , incluses dans F .

Remplaçons G et S par F et S' , respectivement, et réitérons ce processus jusqu'à ce que \bar{S} soit égal à S .

L'ordre suivant lequel les feuilles du graphe G (relativement au stable S de départ) ont été détachées est un bon ordre inversé. \square

En conséquence du lemme 4.4.2, nous supposons, dans la suite de ce chapitre, que $G = G_1 \Phi_S G_2$ soit le graphe composé de $G_1 = (V_1 \cup S, E_1)$ et $G_2 = (V_2 \cup S, E_2)$ tels que:

- L'opération Φ ne crée pas de trou-impair
- G_2 soit S -connexe (G_2 soit le résultat des collages antérieurs)
- $G_1 - S$ soit connexe (G_1 soit une feuille de G).

Du fait que S soit un stable, il est facile de voir que l'opération Φ ne crée aucun anti-trou impair. De plus, G_1 et G_2 sont, nécessairement, faiblement compatibles, ce qui fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.4.3 *Si l'opération Φ ne crée pas de trou impair alors G_1 et G_2 sont faiblement compatibles relativement à S .*

Preuve:

Supposons que G_1 et G_2 ne soient pas faiblement compatibles relativement à S . Il existe alors deux sommets u et v de S reliés par une chaîne directe minimale L_1 de G_1 et une autre chaîne directe minimale L_2 de G_2 telles que L_1 et L_2 n'aient pas la même parité. Dans ce cas, le sous-graphe de G engendré par les deux chaînes L_1 et L_2 est un trou impair créé par l'opération Φ . \square

Dans le but de montrer que $STB(G)$ est entièrement décrit par l'union des systèmes décrivant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$, nous allons essayer de montrer, comme dans la section précédente, l'assertion suivante :

(π_1) *Si Φ ne crée pas de trou impair alors, il existe un bon ordre des*

sommets de S .

Tucker [106] montre cette assertion quand les graphes G_1 et G_2 ne contiennent pas de trou impair intersectant le stable S . Il en déduit que G est k -colorable si G_1 et G_2 sont k -colorables (en utilisant le lemme 4.3.1) et, par conséquent, un graphe imparfait minimal n'admet pas de stable déconnectant. En utilisant cette dernière conséquence, Cornuéjols et Reed [40] montrent qu'un graphe imparfait minimal n'admet pas un sous-graphe déconnectant qui soit multipartite complet.

Contrairement aux graphes fortement compatibles, certains ordres des sommets de S peuvent s'avérer mauvais. Par exemple, si on considère le graphe G de la figure 4.8(a) (ne contenant pas de deux-trou impair relativement à S), s_1, s_2, s_3 est un bon ordre; tandis que, l'ordre s_1, s_3, s_2 ne l'est pas car, dans le graphe G^1 de la figure 4.8(b), les sommets s_3^1 et s_2^2 ne forment pas une paire d'amis (la chaîne en gras qui les relie est impaire).

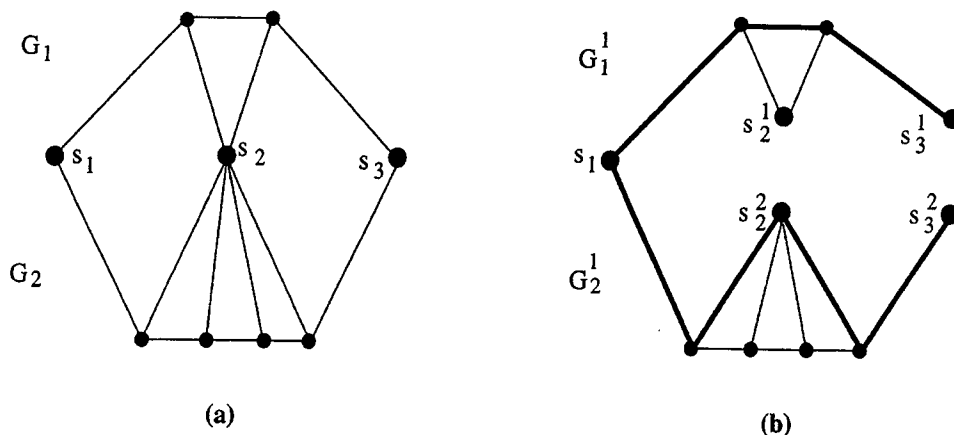


FIG. 4.8 - (a) $G = G_1 \Phi_{\{s_1, s_2, s_3\}} G_2$ (b) $G^1 = G_1^1 \Phi_{\{s_1\}} G_2^1$

Si $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{|S|}}$ est un bon ordre alors, chaque graphe $G^j = G_1^j \Phi_{S^j} G_2^j$, de la série $G^0, G^1, \dots, G^{|S|} = G$, a la propriété de ne pas contenir de deux-trou impair (relativement à S^j). Une manière de déterminer un tel ordre, s'il en existe, consiste à démarrer de G et choisir, à chaque étape j , $1 \leq j \leq |S|$, un sommet s_{i_j} de S^j tel qu'en l'éclatant en deux sommets $s_{i_j}^1$ et $s_{i_j}^2$ le nouveau graphe G^{j-1} garde toujours la propriété de ne pas contenir de deux-trou impair.

Néanmoins, si on choisit, dans l'exemple précédent (figure 4.8), comme premier sommet à éclater le sommet s_2 , alors G^2 contiendra un trou impair. L'objectif premier

poursuivi est de caractériser le sommet de S à éclater à chaque étape.

Si S est de taille 2, alors les deux ordres sont bons. Nous supposons donc que toutes les feuilles de G (relativement à S) intersectent S en au moins 3 sommets.

Deux remarques simples seront utiles par la suite, et pour que nous puissions nous y référer facilement, nous les mettons sous forme de lemmes.

Lemme 4.4.4 *Etant donné un trou C . Soient u et v deux sommets de C divisant ce dernier en deux chaînes L_1 et L_2 . Considérons une chaîne minimale L d'extrémités w et z (w et z peuvent être confondues) tel que w (resp. z) soit le seul sommet de L adjacent à L_1 (resp. L_2) et que u et v ne soient pas adjacents à L . Notons par T_1 (resp. T_2) le trou passant par u, z et w (resp. par v, z et w). Voir figure 4.9(a).*

Si C est impair (resp. pair) et si w et z sont tous les deux fortement adjacents ou faiblement adjacents (resp. un fortement adjacent et l'autre faiblement adjacent) à L_1 et L_2 , alors l'un des deux trous, T_1 et T_2 , sera impair. \square

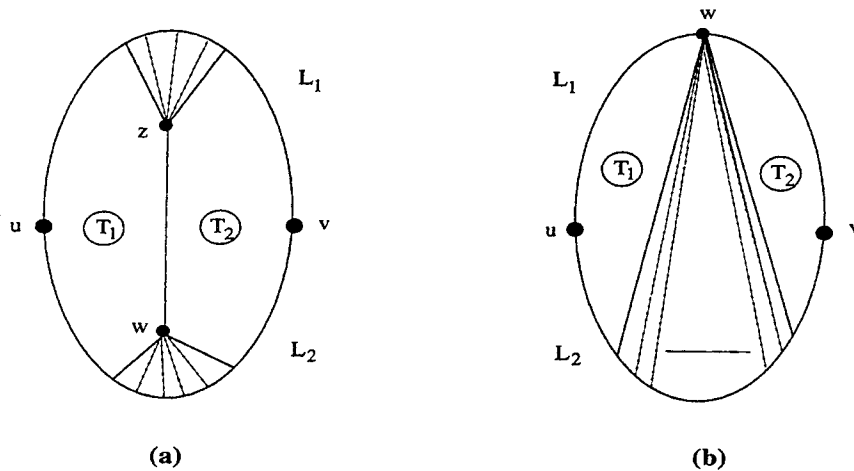


FIG. 4.9 -

Lemme 4.4.5 *Etant donné un cycle Cayant des cordes. Soient u et v deux sommets de C divisant ce dernier en deux chaînes L_1 et L_2 . Supposons que toutes les cordes de C relient un sommet w de $L_1 - \{u, v\}$ à des sommets de $L_2 - \{u, v\}$. Notons par T_1 (resp. T_2) le trou passant par u et w (resp. par v et w). Voir figure 4.9(b).*

Si C est impair (resp. pair) et si w est faiblement adjacent (resp. fortement adjacent) à L_2 alors l'un des deux trous, T_1 et T_2 , sera impair. \square

Considérons un sommet quelconque de S , disons s_1 . Soit \widehat{G} le graphe obtenu à partir de G en éclatant le sommet s_1 en deux sommets s_1^1 et s_1^2 tel que chaque nouveau sommet s_i^j , $i = 1, 2$, soit relié seulement aux voisins de s qui appartiennent à G_i . $\widehat{G} = \widehat{G}_1 \Phi_{S - \{s_1\}} \widehat{G}_2$, où \widehat{G}_i , $i = 1, 2$, est le graphe G_i lui-même avec s_1^i au lieu de s_1 . Pour alléger la preuve du lemme suivant, nous confondrons parfois les graphes \widehat{G}_i et G_i , $i = 1, 2$.

Lemme 4.4.6 *Si \widehat{G} contient un deux-trou impair alors il en contiendra un passant par seulement deux sommets de $S - \{s_1\}$.*

Preuve:

Soit C un deux-trou impair de \widehat{G} tel que $|C \cap (S - \{s_1\})|$ soit minimum. Supposons que $|C \cap (S - \{s_1\})| \geq 3$.

Si le graphe \widehat{G} (resp. G) admet un sous-graphe induit W tel que $(W \cap S) \subseteq (C \cap S)$, que W vérifie les hypothèses de l'un des deux lemmes 4.4.4 et 4.4.5, et que les trous T_1 et T_2 correspondant à W dans le lemme soient des deux-trous, alors d'après le lemme en question, l'un de ces deux deux-trous sera impair et contredira le choix de C (resp. le fait que G ne contienne pas de deux-trou impair). Dans la suite de la démonstration, nous dirons simplement, que le sous-graphe W est un sous-graphe interdit.

Du fait que G soit sans deux-trou impair (l'opération Φ ne crée pas de trou impair), le trou C doit passer par l'un des deux sommets s_1^1 ou s_1^2 et doit avoir des sommets adjacents à l'autre, car sinon, en identifiant s_1^1 et s_1^2 en un seul sommet s_1 , C sera un trou impair de G avec $|C \cap S| \geq 2$.

Nous supposons, sans perte de généralité, que le trou C contienne s_1^1 (car, dans la suite de la démonstration, nous utiliserons simplement le fait que G_1 et G_2 soient S -connexes), et que $C \cap (S - \{s_1\}) = \{s_2, s_3, \dots, s_h\}$ avec $h \leq |S|$.

Le trou C est donc, la concaténation d'une série de chaînes directes minimales de G_1 et G_2 (Voir figure 4.10). Notons par D_0, D_1, \dots, D_k les chaînes directes minimales de $C \cap G_1$, en considérant comme telles, les sommets isolés de $C \cap G_1$ i.e. $1 \leq |D_i \cap S| \leq 2$, $i = 1, \dots, k$. De la même manière, $D'_1, D'_2, \dots, D'_{k'}$ représentent celles de $C \cap G_2 - \{s_1\}$. La chaîne D_0 a pour extrémités s_1^1 et s_h . Les sommets s_1^1 et s_h sont aussi, extrémités de D_1 et $D'_{k'}$ respectivement (on peut avoir $D'_{k'} = \{s_h\}$).

Comme $|C \cap (S - \{s_1\})| \geq 3$, k et k' sont forcément supérieurs ou égaux à deux.

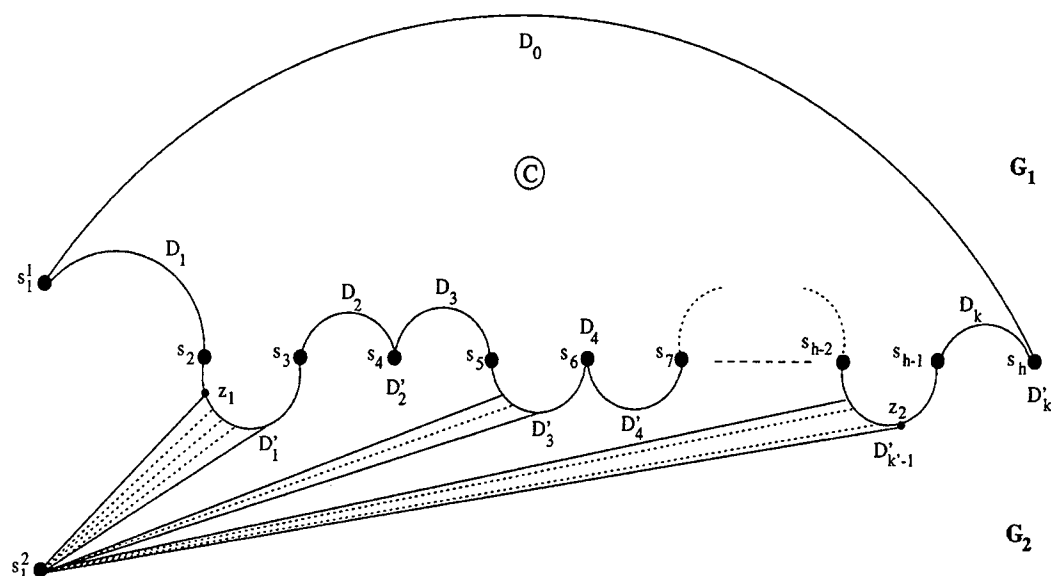


FIG. 4.10 -

Le trou C ne peut pas être contenu entièrement dans G_1 , car sinon, en considérant une chaîne directe minimale L' de G_2 ayant un nombre minimum de sommets et reliant des sommets de S , le sous-graphe $\hat{G}(C \cup L')$ contiendra un deux-trou impair intersectant S en moins de sommets que C (G_1 et G_2 sont faiblement compatibles relativement à S), ce qui contredira le choix du trou C .

Par conséquent, il existe j , $1 \leq j \leq k'$, tel que $|D'_j \cap S| = 2$.

Soient z_1 et z_2 les premier et dernier sommets de C adjacents à s_1^2 en parcourant C de s_1^1 à s_h et ne passant pas par D_0 .

Si on passe au graphe G , en identifiant s_1^1 et s_1^2 en un seul sommet s_1 , le trou qui passe par D_1 et z_1 et celui qui passe par D_0 et z_2 intersectent tous les deux S en au moins deux sommets. Il sont donc pairs. Le lemme 4.4.5 implique que le sommet s_1^2 est fortement adjacent à $C - D_0$.

Soit F la feuille de G contenant D_0 . Du fait qu'on ait supposé que toutes les feuilles de G intersectent S en au moins trois sommets, il existe une chaîne directe de G_1 reliant des sommets de $D_0 - \{s_1^1, s_h\}$ et un sommet s_l de $S - \{s_1, s_h\}$. Si \tilde{G} est obtenu à partir d'un graphe intermédiaire $G^j \neq G$ et si $|F \cap S^j| = 2$, alors dans ce cas $s_l \notin S^j$ et, comme G_1 est S -connexe, il existe une autre chaîne directe reliant s_l et un autre sommet de $S^j - \{s_1, s_h\}$; la concaténation de cette chaîne avec la précédente nous donne la chaîne recherchée. Rappelons que chaque graphe intermédiaire G^j , $1 \leq j \leq |S|$, est le graphe

composé de deux graphes S^j -connexes et faiblement compatibles.

Considérons une chaîne directe minimale L reliant des sommets de $D_0 - \{s_1^1, s_h\}$ et d'autres de $C - (D_0 \cup \{s_1^1\})$ (resp. $C - (D_0 \cup D_k) \cup \{s_{h-1}\}$ si $s_h \in D_k$).

Notons par u et v les sommets de $L - C$ adjacents à $C - D_0$ et D_0 respectivement. u et v peuvent être confondus. Du fait que \tilde{L} et L soient des chaînes directes, s_1^1 et s_h peuvent être adjacents à plusieurs sommets de $(L - C)$.

La chaîne L crée alors, avec C , un ou plusieurs deux-trous, car nous venons de voir qu'il existe j , $1 \leq j \leq k'$, tel que $|D'_j \cap S| = 2$. Nous allons étudier ces situations sous forme de cas, et arriver à chaque fois à une contradiction en exhibant des sous-graphes interdits.

1^{er} cas: u est adjacent à $D_1 - S$ et à aucun sommet de $(D_2 \cup \dots \cup D_k) - \{s_2, s_h\}$ (voir figure 4.11).

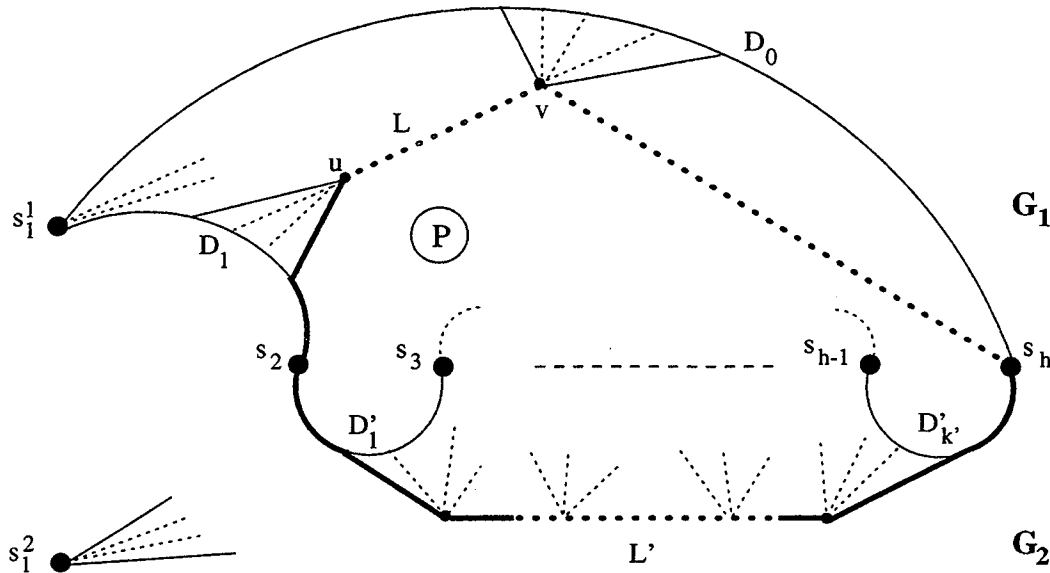


FIG. 4.11 -

La chaîne L crée avec C un deux-trou P qui ne passe pas par le sommet s_1^1 . Il doit être pair parce que $|P \cap S| \geq 3$.

Soit L' une chaîne directe minimale de G_2 reliant s_2 et s_h .

Notons par A la sous-chaîne de $C - D_0$ reliant s_2 et s_h . Le deux-trou P' engendré par $(P - A) \cup L'$ passe par moins de sommets de S que C , il est donc pair.

La sous-chaîne B de $P' - L$ reliant s_2 et s_h a donc la même parité que A . Ainsi, $(C - A) \cup B$ est un deux-trou impair (représenté en gras dans la figure 4.11) ayant moins de sommets de S que C . Contradiction.

Remarquons que si u était aussi adjacent (resp. relié par des chaînes dont les sommets intérieurs sont de degré deux dans $\widehat{G}(C \cup L)$) à des sommets de $\{s_3, \dots, s_{h-1}\}$, le cycle (avec des cordes) de $\widehat{G}(C \cup L)$ passant par $v, u, s_2, \dots, s_{h-1}$ resterait pair, et par la suite, nous pourrions nous ramener à la situation précédente en négligeant les cordes de ce cycle. [fin du 1^{er} cas]

2^{ème} cas: Le sommet u est adjacent à des sommets de $(D_1 - \{s_1^1\})$, à d'autres sommets de $(D_t - \{s_t\})$, $1 < t \leq k$, et à aucun de $(D_{t+1} \cup \dots \cup D_k) - \{s_h\}$, et le sous-graphe $G_1(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_t)$ est connexe (voir figure 4.12).

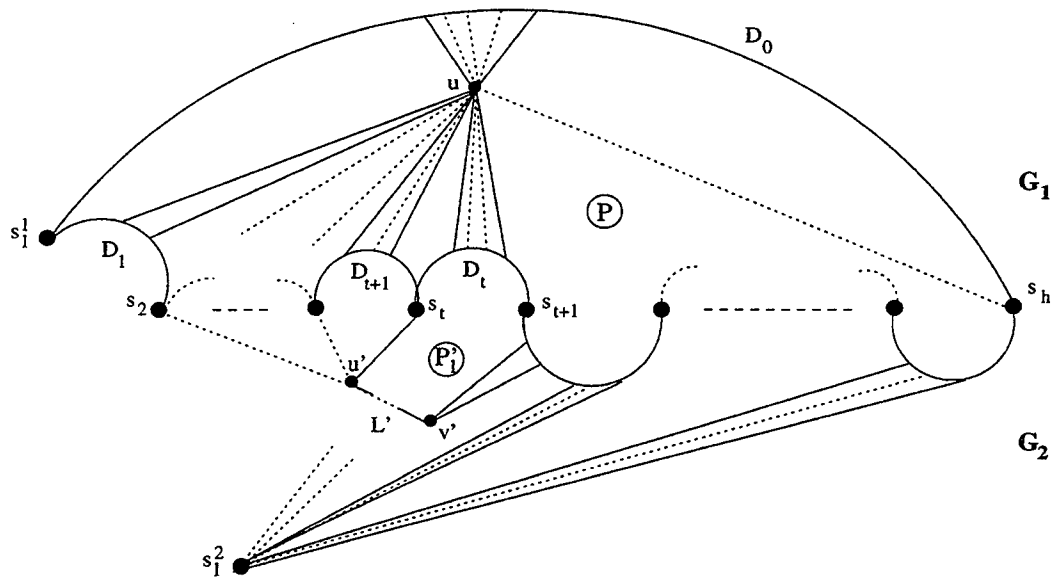


FIG. 4.12 -

Dans ce cas, les sommets u et v de L doivent être confondus, appelons ce sommet u . En effet, supposons qu'ils soient distincts. Le sous-graphe $\widehat{G}((C - \{s_2, \dots, s_t\}) \cup \{u\})$ contient un deux-trou pair T_1 (resp. T_2 si u est adjacent à s_h) passant par u, s_{t+1} et D_0 (resp. u, s_{t+1} et s_h). Le sommet s_1^2 reste fortement adjacent à $T_1 - \{u\}$ (resp. à $T_2 - \{u\}$). Si u n'est pas adjacent à s_h , alors selon le lemme 4.4.5, $\widehat{G}(T_1 \cup \{s_1^2\})$ correspond à un sous-graphe interdit de G .

Sinon, soit A une chaîne minimale de $G_1(D_1 \cup \{u\})$ reliant u et s_1^1 . D'après le lemme 4.4.4, $\widehat{G}(T_2 \cup A)$ correspond à son tour, à un sous-graphe interdit de G . Contradiction

Soit P le deux-trou pair de $\widehat{G}(C \cup L)$ qui passe par s_{t+1} et s_h . Rappelons que u est adjacent à $(D_1 - \{s_1^1\})$.

Considérons une chaîne directe minimale L' de G_2 reliant un sommet de $\{s_2, \dots, s_t\}$ et des sommets de $P - \{s_{t+1}\}$ (G_2 est S-connexe). Notons par u' (resp. v') le sommet de L' adjacent à des sommets de $\{s_2, \dots, s_t\}$ (resp. P). u' et v' peuvent être confondus. u' est faiblement adjacent à $G_1(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_t)$. Suivant le lemme 4.4.4 appliqué au sous-graphe $\widehat{G}(C \cup L')$, v' est fortement adjacent à $P - \{u\}$, ou plus précisément, il est adjacent à deux sommets voisins de $P - \{u\}$, car sinon, le deux-trou de $\widehat{G}(P \cup \{v'\})$ passant par u , s_{t+1} , v' et s_h sera impair.

Constatons que u est adjacent à exactement deux sommets voisins de D_t , y compris s_t , et que s_t est le seul sommet de $\{s_2, \dots, s_t\}$ adjacent à u' . Pour montrer cette assertion, nous supposons que le contraire soit vrai. Notons par P' le deux-trou pair de $\widehat{G}((C - \{s_1^1, s_{t+1}\}) \cup L' \cup L)$ passant par u' , v' , s_h , u le sommet de $\{s_2, \dots, s_t\}$ de plus petit indice qui est adjacent à u' . Appelons B la chaîne minimale de $\widehat{G}(P \cup \{v'\})$ reliant u et v' et passant par s_{t+1} .

Comme v' forme un triangle avec deux sommets de $P - \{u\}$, le lemme 4.4.4 implique que le sous-graphe $\widehat{G}(P' \cup B)$ est interdit. Contradiction.

Soit P'_1 (resp. P'_2) le deux-trou de $\widehat{G}(C \cup L')$ passant par D_t , u' et v' (resp. D_0 , u' et v'). P'_1 et P'_2 sont pairs.

Soit L'' la chaîne minimale de $\widehat{G}((C - D_0) \cup L')$ qui passe par D_1 et relie s_1^1 et s_t . De même, L''' est la chaîne minimale de $\widehat{G}(D_0 \cup \{u\})$ d'extrémités s_1^1 et u .

Le sommet s_1^2 n'est pas adjacent au deux-trou P'_1 . En effet, si c'était le cas l'un des deux sous-graphes $\widehat{G}(P'_1 \cup L'' \cup \{s_1^2\})$ et $\widehat{G}(P'_1 \cup L''' \cup \{s_1^2\})$ correspondrait à un sous-graphe de G interdit selon le lemme 4.4.4 (rappelons que u est adjacent à deux sommets voisins de D_t et que s_t et s_1^2 ne sont pas adjacents).

Ainsi, s_1^2 est fortement adjacent à P'_2 et le sous-graphe de G correspondant à $\widehat{G}(P'_2 \cup \{s_1^2\})$ est interdit suivant le lemme 4.4.5. Contradiction. [fin du 2^{ème} cas]

Si on est dans la situation où le sommet u est adjacent à $D_{t_1} - \{s_1^1\}$, D_k et $D_{t_2} - \{s_h\}$, $1 \leq t_1 < t_2 \leq k$, et à aucun sommet de $D_{t_1+1} \cup \dots \cup D_{t_2-1}$, et les sous-graphes $\widehat{G}(D_1 \cup \dots \cup D_{t_1})$ et $\widehat{G}((D_{t_2} \cup \dots \cup D_k) \cup \{s_h\})$ sont connexes, alors ce cas se traite de la même façon que le 2^{ème} cas avec, cette fois-ci, une chaîne directe minimale L' de G_2

reliant des sommets de P et d'autres de $\{s_{h-t_2}, \dots, s_h\}$.

Dans les cas considérés ci-dessus, la chaîne L peut créer un seul deux-trou pair avec C . Nous examinons maintenant les cas où ce nombre est toujours supérieur ou égal à deux.

3^{ème} cas : u est adjacent à plusieurs chaînes de G_1 ($C - D_0$) ou bien il est adjacent à une seule chaîne D_i ($2 \leq i \leq k$) intersectant S en deux sommets, et n'est adjacent à aucun sommet de $C - (D_0 \cup D_1 \cup D_i)$. (voir figure 4.13).

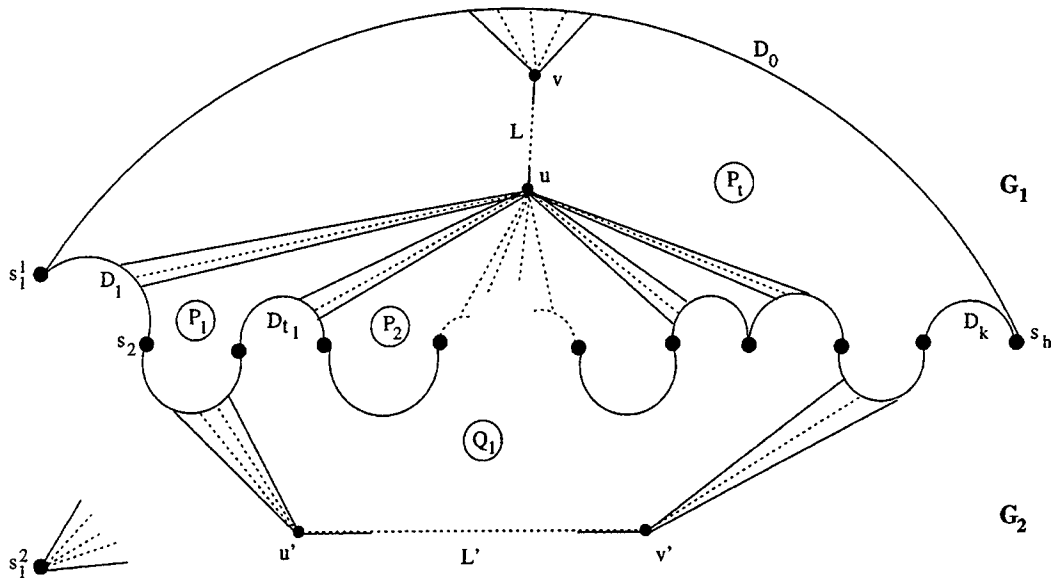


FIG. 4.13 -

Appelons par P_1, P_2, \dots, P_t , $t \geq 2$, les deux-trous de $\widehat{G}(C \cup L)$ différents de C tels que $\widehat{G}(P_i - L)$, $i = 1, \dots, t$, soient connexes (ils sont numérotés en allant de s_1^1 à s_h). Ces deux-trous sont pairs car $|P_i \cap S| < h$, $i = 1, \dots, t$. Remarquons que pour toute chaîne directe D'_j , $1 \leq j \leq k'$, vérifiant $|D'_j \cap S| = 2$, il existe i , $1 \leq i \leq t$, tel que $D'_j \subset P_i$.

Soient m , $1 \leq m \leq k$, un indice tel que u soit adjacent à D_m (nous supposons que $D_m \cap S = \{s_l, s_{l+1}\}$), et $\overline{L'}$ une chaîne directe minimale de G_2 reliant s_{l-1} et s_{l+2} . Considérons une sous-chaîne minimale (au sens des sommets) L' de $\overline{L'}$ reliant des sommets de $((P_1 \cup \dots \cup P_t) - L)$ n'appartenant pas tous à un même deux-trou P_i . Si L' relie des sommets de plusieurs deux-trous parmi P_1, P_2, \dots, P_t , alors elle consistera

en un seul sommet u' , de $G_2 - S$, adjacent à $C - D_0$; sinon, notons par u' et v' les sommets de $L' - C$ adjacent à $C - D_0$ (u' et v' peuvent être confondus).

Si u' et v' sont distincts, et si des sommets de $L' - C$ sont adjacents à d'autres sommets de $S - (P_1 \cup \dots \cup P_t)$, nous considérerons ces derniers sommets (de $S - (P_1 \cup \dots \cup P_t)$) comme des deux-trous.

Montrons que si un sommet de $L' - C$ est adjacent à un trou P_i , $1 \leq i \leq t$, alors il est faiblement adjacent à $P_i - L$. Supposons, sans perte de généralité, que u soit adjacent à plusieurs chaînes de $G_1 \cap (C - D_0)$, que L' relie seulement deux trous P_i et P_j ($i < j$), et que u' ($u' \neq v'$) soit fortement adjacent à $P_i - L$.

Dans ce cas, il existe une chaîne minimale A reliant u' et un seul sommet de $P_i \cap G_1$. En effet :

- Si P_i et P_j intersectent, tous les deux, D_m ($j = i + 1$) alors, A est la chaîne minimale de $\widehat{G}((P_j - D_m) \cup \overline{L'})$ reliant u et u' et passant par s_{i+2} .

- Si $j > i + 1$ alors, A est une des chaînes minimales de $G(P_j \cup L')$ reliant u et u' et passant par v' .

- Sinon P_i et P_j intersectent, tous les deux, une chaîne D_e avec $e \neq m$ et cela implique que $L' \neq \overline{L'}$ et qu'il existe une autre sous-chaîne minimale de $\overline{L'}$ reliant u' et des sommets d'un deux-trou P_r , $r \neq i, j$ tel que $|r - i| > 1$ ou bien P_r et P_i intersectent tous les deux D_m .

Du fait qu'aucun sommet de $A - \{u'\}$ ne soit adjacent à $P_i - \{u\}$, le lemme 1.3 implique que $\widehat{G}(P_i \cup A)$ est un sous-graphe interdit. Contradiction. u' doit, donc, être faiblement adjacent à $P_i - L$.

Constatons que dans le cas où u est adjacent à une seule chaîne de $G_1 \cap (C - D_0)$, le lemme 1.2 implique que l'un des deux sommets u et v doit être faiblement adjacent, et par conséquence, la chaîne A existe toujours.

La chaîne L' crée à son tour des trous $Q_1, \dots, Q_{t'}$ qui ne sont pas, forcément, tous des deux-trous.

Soit Q_j , $1 \leq j \leq t'$, l'un de ces trous, passant par un seul sommet s_f de S (i.e. le sommet u est adjacent à $D_a = \{s_f\}$, $1 \leq a \leq k$). L'arête (u, s_f) appartient donc à deux deux-trous pairs P_{i_1} et P_{i_2} , $1 \leq i_1 < i_2 \leq t$.

Du fait que le deux-trou de $\widehat{G}(P_{i_1} \cup P_{i_2} \cup L')$ qui passe par u soit pair, et que les sommets de L' adjacents à P_{i_1} et P_{i_2} soient faiblement adjacents aux chaînes $(P_{i_1} - L)$ et $(P_{i_2} - L)$, le trou Q_j ne peut être que pair. Nous concluons que les trous $Q_1, \dots, Q_{t'}$ sont tous pairs.

Si L' relie seulement deux sommets de S qui sont extrémités d'une chaîne directe D_d de $C \cap G_1^1$, alors nous considérerons $(C - D_d) \cup L'$ au lieu de C .

Soient z_3 et z_4 les premier et dernier sommets de $C - D_0$ adjacents à L' en parcourant $C - D_0$ de s_1^1 à s_h . Notons par B_1 la sous-chaîne de $C - D_0$ reliant les sommets z_3 et z_4 , et par B_2 la sous-chaîne de $((C - (D_0 \cup B_1)) \cup L')$ d'extrémités z_3 et z_4 .

Ces deux sous-chaînes ont la même parité, car tous les trous $Q_1, \dots, Q_{t'}$ sont pairs et les sommets de L' sont soit non-adjacents soit faiblement adjacents aux chaînes $P_1 - L, \dots, P_t - L$, (dans le cas où $D_m \cap S = \{s_l\}$ et tous les sommets reliés par L' appartiennent à $D'_x \cup D'_y$, $1 \leq x, y \leq k'$, tel que $D'_x \cap D'_y = \{s_l\}$, alors avec le même raisonnement que pour le deux-trou Q_j , on montrera que B_1 et B_2 ont la même parité). Le deux-trou $(C - B_1) \cup B_2$ est donc, impair et passe par moins de sommets de S que C , $((B_1 - \{z_3, z_4\}) \cap S \neq \emptyset)$. Cela contredit notre choix de départ pour le trou C .
[fin du 3^{ème} cas]

La seule situation qui nous reste à examiner est que le sommet u soit adjacent seulement à $D_i = \{s_l\}$, avec $3 \leq l \leq h - 1$, $2 \leq i \leq k$, et à aucun sommet de $C - (D_0 \cup D_i)$. Dans ce cas nous considérons une autre chaîne directe minimale \bar{L} de G_1 reliant des sommets de D_1 et d'autres de $C - D_0$.

Soient \bar{u} et \bar{v} les sommets de \bar{L}_C qui sont adjacents à $C - D_1$ et D_1 respectivement. Ces deux sommets peuvent être confondus.

Le sommet \bar{u} est adjacent seulement à $D_{\bar{i}} = \{s_{\bar{l}}\}$, avec $3 \leq \bar{l} \leq h - 1$, $2 \leq \bar{i} \leq k$, et à aucun sommet de $C - (D_1 \cup D_0 \cup D_{\bar{i}})$. Car, dans le cas contraire, on retombe sur des situations identiques aux cas étudiés précédemment en remplaçant L par \bar{L} . Pour les mêmes raisons, il n'existe ni sommets en commun ni arêtes entre $L - C$ et $\bar{L} - C$.

4^{ème} cas : Le sommet u (resp. \bar{u}) est adjacent à $D_i = \{s_l\}$ (resp. $D_{\bar{i}} = \{s_{\bar{l}}\}$), $3 \leq l$, $\bar{l} \leq h - 1$, $2 \leq i$, $\bar{i} \leq k$, et à aucun sommet de $C - (D_0 \cup D_i)$ (resp. $C - (D_1 \cup D_{\bar{i}})$). (voir figure 4.14).

Sous ces hypothèses, le sommet s_1^1 n'est pas adjacent à des sommets de $L - (C \cup \{v\})$ (resp. $\bar{L} - (C \cup \{\bar{v}\})$), parce que sinon, on pourra extraire une sous-chaîne de L (resp. \bar{L}), reliant seulement s_1^1 et s_l (resp. s_1^1 et $s_{\bar{l}}$), qui engendrera avec C un sous-graphe interdit par le lemme 4.4.4

D'après le lemme 4.4.4, le sommet v (resp. \bar{v}) est fortement adjacent à D_0 (resp. D_1).

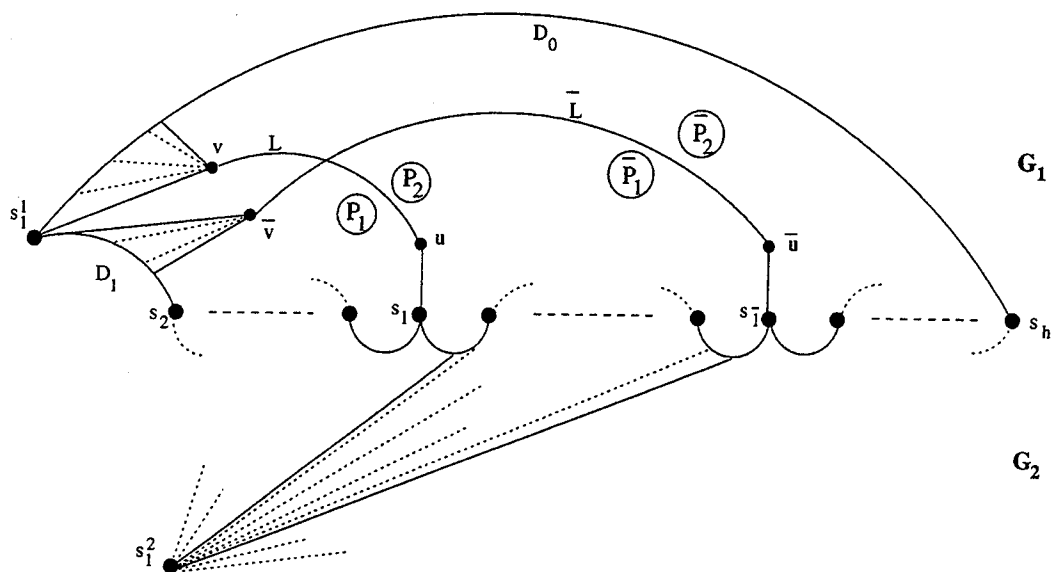


FIG. 4.14 -

Soient P_1 (resp. P_2) le deux-trou de $\widehat{G}(C \cup L)$ passant par u, v, s_1^1, s_2 et s_l et pas par s_h (resp. passant par u, v, s_h et s_l et pas par s_2). P_1 et P_2 sont pairs.

Si le sommet s_1^2 est adjacent à $P_1 - L$ alors, il devra être, en premier lieu, faiblement adjacent à $P_1 - L$ car sinon, $\widehat{G}(P_1 \cup \{s_1^2\})$ correspondra à un sous-graphe de G interdit par le lemme 4.4.5; et du fait que le deux-trou de $\widehat{G}((C - (D_0 \cup D_1)) \cup \{s_1^2\})$, passant par s_l et s_1^2 , soit pair (G est sans deux-trou impair), et que s_1^2 soit fortement adjacent à $C - D_0$, nous déduisons que s_1^2 est fortement adjacent à $P_2 - L$. Or, si A est la chaîne minimale de $\widehat{G}((P_1 - (L \cup D_1)) \cup \{s_1^2\})$ reliant s_l et s_1^2 , le sous-graphe $\widehat{G}(P_2 \cup A)$ correspondra alors à un sous-graphe de G interdit par le lemme 4.4.4. Contradiction.

Le sommet v est adjacent à exactement deux sommets voisins D_0 dont s_1^1 est l'un d'eux. Parce que si cela était faux alors, le sous-graphe $\widehat{G}(P_2 \cup B)$ correspondrait à un sous-graphe de G interdit par le lemme 4.4.4, où $B = P_1 - L$ si v n'était pas adjacent à s_1^1 , ou bien $B = (v, s_1^1)$ sinon.

Nous considérons maintenant la chaîne \bar{L} . Soient \bar{P}_1 (resp. \bar{P}_2) le deux-trou de $\widehat{G}(C \cup \bar{L})$ passant par $\bar{u}, \bar{v}, s_2, s_l$ et pas par s_h (resp. passant par $\bar{u}, \bar{v}, D_0, s_l$ et pas par s_2). \bar{P}_1 et \bar{P}_2 sont pairs.

Avec un raisonnement semblable au précédent, nous montrons que s_1^2 n'est pas adjacent à $\bar{P}_2 - D_0$, et que \bar{v} est adjacent à exactement deux sommets voisins D_1 dont s_1^1 est l'un d'eux.

Comme s_1^2 n'est pas adjacent à P_1 et à $\overline{P_2}$, nous concluons que $\bar{l} > l$ et que s_1^2 est fortement adjacent à la sous-chaîne \overline{B} de $C - D_0$ reliant s_l et $s_{\bar{l}}$. Cependant, le deux-trou \overline{P} de $\widehat{G}(C \cup L \cup \overline{L})$ passant par \overline{B} , u , v , \bar{u} , \bar{v} et s_1^2 est pair, ce qui implique que $\widehat{G}(\overline{P} \cup \overline{B})$ correspond à un sous-graphe de G interdit par le lemme 4.4.5. Contradiction. [fin du 4^{ème} cas]

Tous les cas possibles, concernant la chaîne L , étant contredits, le lemme 4.4.6 est vrai. [fin de la démonstration] \square

Le lemme 4.4.6 nous permettra de caractériser l'ensemble des sommets de S tels que l'éclatement de chacun d'eux conduit à un nouveau graphe sans deux-trou. Ces sommets vérifieront des conditions portant sur les chaînes directes des graphes G_1 et G_2 .

Etant donnés trois sommets distincts s , s' et s'' de S , et $i \in \{1, 2\}$. Nous dirons que:

- s est *fortement adjacent* pour s' et s'' dans G_i si s est fortement adjacent à toutes les chaînes directes minimales de G_i reliant s' et s'' ;
- s est *faiblement adjacent* (resp. non-adjacent) pour s' et s'' dans G_i s'il existe une chaîne directe minimale de G_i reliant s' et s'' à laquelle s est faiblement adjacent (resp. non-adjacent);
- s est *critique* pour s' et s'' dans G_i si il existe deux chaînes minimales L_1 et L_2 de G_i telles que:
 - 1- L_1 soit une chaîne directe d'extrémités s' et s'' ;
 - 2- L_2 soit la concaténation de deux chaînes directes d'extrémités s , s' et s , s'' respectivement;
 - 3- L_1 et L_2 soient de parités différentes.

Remarquons que, d'après la définition ci-dessus, un sommet s peut être soit critique et non-adjacent pour s' et s'' dans G_i (voir par exemple figure 4.15(a)), ou bien critique et adjacent, et dans ce deuxième cas il est fortement adjacent pour s' et s'' (voir par exemple figure 4.15(b)). Dans les deux cas, le triplet (s, s', s'') satisfait l'équation suivante:

$$\text{sign}(s, s') + \text{sign}(s, s'') + \text{sign}(s', s'') \equiv 1 \pmod{2} \quad (4.4)$$

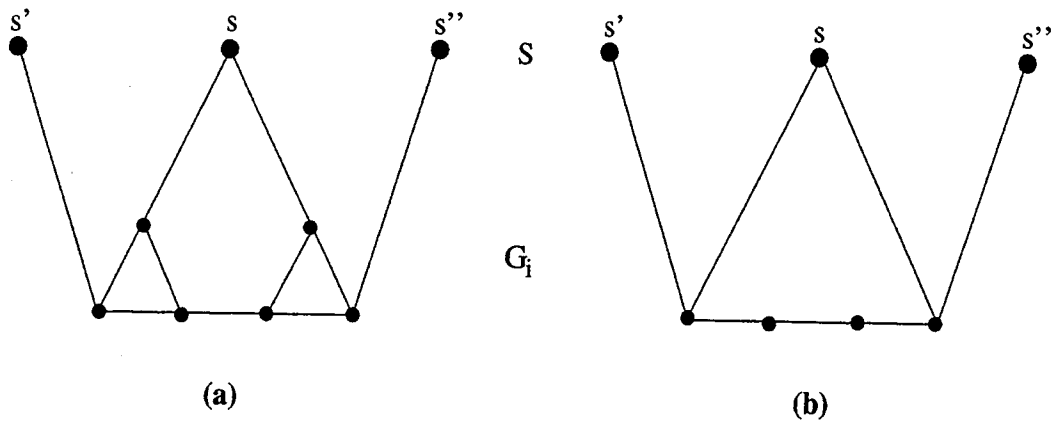


FIG. 4.15 - (a) s est critique et non-adjacent pour s' et s'' dans G_i . (b) s est critique et adjacent pour s' et s'' dans G_i .

• s sera également dit critique (resp. fortement adjacent) dans G_i , s'il existe deux sommets distincts s' et s'' de $S - \{s\}$ tel que s soit critique (resp. fortement adjacent) pour s' et s'' dans G_i .

Il sera dit *non-fortement adjacent* dans G_i s'il est faiblement adjacent ou non-adjacent pour toute paire de sommets de $S - \{s\}$.

Théorème 4.4.2 \widehat{G} admet un deux-trou impair relativement à $S - \{s_1\}$ si et seulement si s_1 est critique dans G_1 ou dans G_2 .

preuve:

Condition nécessaire: Supposons qu'il existe deux sommets distincts s_i et s_j de $S - \{s_1\}$ tels que s_1 soit critique pour s_i et s_j dans G_1 . Il existe, alors, deux chaînes minimales L_1 et L_2 de G_1 vérifiant les conditions citées dans la définition.

Considérons une chaîne directe minimale L_3 de G_2 reliant s_i et s_j . L_1 et L_3 ont la même parité car, d'après le lemme 4.4.3, G_1 et G_2 sont faiblement compatibles.

Comme les chaînes L_2 et L_3 sont de parités différentes, $\widehat{G}(L_2 \cup L_3)$ est un deux-trou impair.

Condition suffisante: Supposons que \widehat{G} admette un deux-trou impair. D'après le lemme 4.4.6, \widehat{G} admet un trou impair C tel que $C \cap (S - \{s_1\}) = \{s_i, s_j\}$.

Ce deux-trou C doit passer par exactement un des deux sommets s_1^1 et s_1^2 car sinon, C sera, ou contiendra, après identification de s_1^1 et s_1^2 , un deux-trou de G qui contredira le fait que G soit sans deux-trou. Nous supposons, sans perte de généralité, que $s_1^1 \in C$. Du fait que G soit sans deux-trou, C n'est pas contenu entièrement dans G_1 .

Notons par D (resp. D') la chaîne de C reliant s_i et s_j dans G_1^1 (resp. dans G_2^1). La chaîne D est la concaténation de deux chaînes directes de G_1^1 d'extrémités s et s_i , et s et s_j respectivement, par contre, D' est une chaîne directe minimale de G_2 .

Soit D'' une chaîne directe minimale reliant s_i et s_j dans G_1 . D' et D'' ont la même parité (G_1 et G_2 sont faiblement compatibles).

Comme le trou C est impair, les chaînes D et D'' ont des parités différentes. Ce qui implique que s_1 est critique pour s_i et s_j dans G_1 , et par conséquent, il est critique dans G_1 . \square

En utilisant le théorème 4.4.2, nous pouvons, maintenant ramener le problème de l'existence d'un bon ordre des sommets de S à la recherche d'un sommet de S qui ne soit critique ni dans G_1 ni dans G_2 , i.e de montrer l'assertion suivante :

(π_2) *Si Φ ne crée pas de trou impair, alors il existe un sommet de S qui ne soit critique ni dans G_1 ni dans G_2 .*

Corollaire 4.4.4 *Les deux assertions (π_1) et (π_2) sont équivalentes.*

Preuve:

(π_1) \implies (π_2): Supposons que l'opération Φ ne crée pas de trou impair et que l'assertion (π_1) soit vraie.

Considérons un bon ordre $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_h}$ des sommets de S . Nous désignons par G^{h-1} le graphe obtenu à partir de G en éclatons le sommet s_{i_h} en deux sommets $s_{i_h}^1$ et $s_{i_h}^2$ tels que chaque sommet $s_{i_h}^j$, $j = 1, 2$, soit adjacent seulement aux voisins de s_{i_h} appartenant à G_i .

D'après la définition d'un bon ordre, $s_{i_h}^1$ et $s_{i_h}^2$ forment une paire d'amis dans G^{h-1} . Comme G est sans deux-trou impair relativement à S , \widehat{G} est aussi sans deux-trou impair relativement à $S - \{s_{i_h}\}$. Le théorème 4.4.2 implique que s_{i_h} n'est critique ni dans G_1 ni dans G_2 .

(π_2) \implies (π_1): Nous supposons maintenant, que l'assertion (π_2) soit vraie.

Nous démarrons avec le graphe G et nous éclatons itérativement les sommets de S un sommet à la fois. A chaque itération, l'assertion (π_2) nous garantit l'existence d'un sommet de S qui ne soit critique ni dans G_1 ni dans G_2 et le théorème 4.4.2 nous assure que le nouveau graphe obtenu soit sans deux-trou impair relativement aux sommets de S non encore éclatés.

L'ordre suivant lequel les sommets de S ont été éclatés est un bon ordre inversé. \square

Bien que la deuxième assertion paraisse plus précise que la première, l'existence d'un bon ordre des sommets de S semble difficile à montrer dans le cas général, i.e pour n'importe quels graphes G_1 et G_2 . Tucker [106] montre l'existence du bon ordre dans le cas où le graphe G ne contient pas de trou impair ayant plus de trois sommets et intersectant S .

Nous étudierons le problème pour quelques classes de graphes, i.e. quand le graphe G_1 a une certaine structure particulière (non-critique, presque biparti et série-parallèle), ou pour de petites cardinalités du stable S .

Tout d'abord nous montrons une série de lemmes qui vont nous aider à mieux cerner le problème dans le cas général, et particulièrement dans les cas que nous allons considérer.

Lemme 4.4.7 *Etant donnés trois sommets distincts s_1 , s_2 et s de S , tels que s soit critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 (resp. G_2), alors:*

a) *s est adjacent à exactement deux sommets voisins de chaque chaîne directe minimale de G_2 (resp. G_1) reliant s_1 et s_2 ;*

b) *pour toute paire de chaînes directes minimales D_1 et D_2 de G_2 (resp. G_1), reliant respectivement s et s_1 , et s et s_2 , il existe une seule arête joignant un sommet de $D_1 - S$ et un autre de $D_2 - S$ et formant un triangle avec s .*

preuve:

a) Comme s est non adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 , il existe une chaîne directe minimale L_1 de G_1 , d'extrémités s_1 et s_2 , telle que s soit non-adjacent à L_1 .

Du fait que s soit critique pour s_1 et s_2 dans G_1 , il existe, par définition, une autre chaîne minimale L_2 de G_1 , d'extrémités s_1 et s_2 , telle que L_2 soit la concaténation de deux chaînes directes minimales reliant s et s_1 , et s et s_2 , et que L_1 et L_2 aient des parités différentes. On a alors

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_2) + \text{sign}(s_1, s_2) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4.5)$$

Soit L_3 une chaîne directe minimale de G_2 reliant s_1 et s_2 .

Si s est non-adjacent à L_3 alors, l'un des deux sous-graphes $G(L_1 \cup L_3)$ et $G(L_2 \cup L_3)$ sera un deux-trou impair de G . Contradiction avec le fait que G soit sans deux-trou impair.

Si s est faiblement adjacent à L_3 alors,

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_2) + \text{sign}(s_1, s_2) \equiv 0 \pmod{2}$$

ce qui contredira l'équation 4.5. Le sommet s est donc fortement adjacent à L_3 .

Supposons que s soit adjacent à deux sommets non-adjacents de L_3 . Désignons par L' la chaîne minimale de $G_2(L_3 \cup \{s\})$ d'extrémités s_1 et s_2 et passant par s . L' a la même parité que la chaîne L_2 . D'après l'équation 4.5, le deux-trou engendré par L_1 et L' est impair. Ce qui implique que l'opération Φ crée un deux-trou impair. Contradiction.

b) Si $G((D_1 \cup D_2) - \{s\})$ est non connexe, alors l'équation 4.5 impliquera que le deux-trou engendré par D_1 , D_2 et L_1 sera impair.

Supposons que $D_1 \cap D_2 \neq \{s\}$, ou qu'il existe une arête entre D_1 et D_2 qui ne forme pas un triangle avec s . Dans ce cas, il existe une chaîne minimale de $G((D_1 \cup D_2) - \{s\})$ reliant s_1 et s_2 qui, d'après l'assertion (a), doit former un triangle avec s . Ce qui veut dire que D_1 et D_2 n'étaient pas minimales. Contradiction. \square

L'importance du lemme 4.4.7 réside dans le fait qu'il lie les deux graphes G_1 et G_2 à la fois. Il reste vrai même quand s est critique et fortement adjacent pour s_1 et s_2 .

Comme notre but est de prouver l'existence d'un sommet de S qui ne soit critique dans aucun des deux graphes G_1 et G_2 , il est naturel de savoir, tout d'abord, s'il en existe un qui ne soit pas fortement adjacent dans l'un des deux graphes. Ceci fait l'objet d'un lemme simple et important de Tucker [106]. Avant d'énoncer ce lemme, nous définissons la notion d'arbre S -couvrant qui sera utilisée dans la démonstration de cette remarque et dans la suite du chapitre.

Etant donné un graphe $F = (V_F \cup S, E_F)$ tel que S soit un stable de F et $F - S$ soit connexe.

Un arbre A de $F - S$ est dit S -couvrant si chaque sommet de S est adjacent à au moins un sommet de A et A est minimal pour cette propriété, i.e pour tout sommet v de A , $A - \{v\}$ ne couvre pas tous les sommets de S ou bien n'est pas un arbre.

Lemme 4.4.8 (Tucker [106]) *Si $G_i - S$, $i \in \{1, 2\}$, est connexe alors il existe au moins deux sommets de S , disons s_1 et s_2 , tels que pour toute paire de sommets distincts s_j et $s_{j'}$ de $S - \{s_1\}$ (resp. de $S - \{s_2\}$), il existe une chaîne directe, de G_i , d'extrémités s_j et $s_{j'}$ ayant au plus un sommet adjacent à s_1 (resp. à s_2).*

Preuve:

$G_i - S$ étant connexe, considérons un arbre S -couvrant A de $G_i - S$.

Soit u un sommet pendant de A . Il existe alors, un sommet s_1 de S tel que u soit le seul voisin de s_1 appartenant à A , car sinon $A - \{u\}$ sera un arbre S -couvrant de $G_i - S$ contredisant ainsi la définition d'un arbre S -couvrant.

$G_i(A \cup S)$ est donc un sous-graphe S -connexe. Soient s_j et $s_{j'}$ deux sommets de $S - \{s_1\}$ et L une chaîne directe minimale les reliant dans $G_i(A \cup S)$. Comme s_1 a un seul voisin dans A , il est adjacent à au plus un sommet de L .

s_2 est un sommet de $S - \{s_1\}$ adjacent à un autre sommet pendant de A (A a au moins deux sommets pendants). \square

Il nous est donc, facile de trouver des sommets de S qui sont non-fortement adjacents dans au moins un des deux graphes, notamment dans G_1 ($G_1 - S$ connexe). C'est ce genre de sommets que nous allons examiner.

Lemme 4.4.9 *Si $s \in S$ est non-fortement adjacent dans G_1 (resp. dans G_2), alors une et une seule assertion est vérifiée:*

- s n'est critique ni dans G_1 ni dans G_2 ;
- s est critique et non-adjacent pour une paire de sommets de $S - \{s\}$ dans G_1 (resp. dans G_2).

Preuve:

Soit $s \in S$ un sommet non-fortement adjacent dans G_1 . Supposons que s soit critique dans G_1 ou dans G_2 . Il existe donc, par définition, deux sommets s_1 et s_2 de $S - \{s\}$ tels que s soit critique pour s_1 et s_2 dans G_1 ou dans G_2 . Cela implique que

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s_1, s_2) + \text{sign}(s, s_2) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4.6)$$

Le sommet s est non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 (resp. dans G_2), car s'il était faiblement adjacent pour s_1 et s_2 , on aurait

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s_1, s_2) + \text{sign}(s, s_2) \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.7)$$

ce qui contredirait l'équation 4.6.

Si s est critique pour s_1 et s_2 dans G_2 (resp. dans G_1), alors d'après le lemme 4.4.7(a), s devra être adjacent à exactement deux sommets voisins de chaque chaîne directe minimale reliant s_1 et s_2 dans G_1 (resp. dans G_2), et sera par conséquent, fortement adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 (resp. dans G_2).

Nous concluons que le sommet s est critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 (resp. dans G_2). \square

Un sous-graphe induit de G_1 (resp. de G_2) intersectant S en trois sommets s_1 , s_2 et s sera appelé *sous-graphe (s_1, s, s_2) – critique* s'il est isomorphe au graphe de la figure 4.16, où les arêtes en pointillés représentent des chaînes minimales de longueur quelconque, éventuellement nulle (les extrémités peuvent être confondues), et chacun des sommets a et b appartient à un triangle.

Comme G_1 (resp. G_2) vérifie la condition faible des chaînes, le trou T passant par les sommets s , a et b est impair (voir la preuve du lemme 4.4.10).

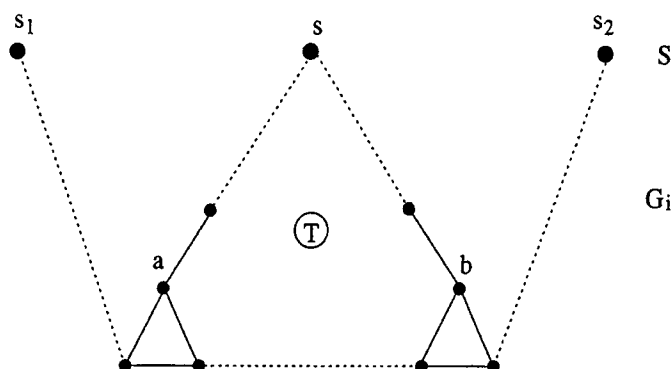


FIG. 4.16 - Un sous-graphe (s_1, s, s_2) – critique de G_i

Lemme 4.4.10 *Etant donnés trois sommets s_1 , s_2 et s de S .*

Le sommet s est critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 (resp. dans G_2) si et seulement si G_1 (resp. G_2) admet un sous-graphe (s_1, s, s_2) – critique.

preuve:

Condition nécessaire : le sommet s étant critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 , nous considérons deux chaînes minimales L_1 et L_2 de G_1 telles que :

- L_1 soit une chaîne directe d'extrémités s_1 et s_2 n'ayant aucun sommet adjacent à s ;
- L_2 soit la concaténation de deux chaînes directes L'_2 et L''_2 d'extrémités respectives s et s_1 , et s et s_2 ;
- $\text{long}(L_1) + \text{long}(L_2) \equiv 1 \pmod{2}$;
- le nombre total de sommets de L_1 et L_2 soit minimum.

Soit D une chaîne directe minimale de G_2 reliant s_1 et s_2 . Selon le lemme 4.4.7(a), s est fortement adjacent à D . Notons par D' (resp. D'') la chaîne directe minimale de $G_2(D \cup \{s\})$ reliant s et s_1 (resp. s et s_2). Le sommet s_1 (resp. s_2) est donc non-adjacent à D'' (resp. à D').

Les chaînes D et L_1 (resp. D_1 et L'_2) (resp. D_2 et L''_2) ont la même parité, car G_1 et G_2 sont faiblement compatibles relativement à S .

Soit a un sommet de $L'_2 - L_1$ adjacent à des sommets de $L_1 - L'_2$.

Si un tel sommet n'existe pas, alors le sous-graphe $G(L_1 \cup L'_2 \cup D_2)$ contiendra un deux-trou impair passant par s et s_2 , et éventuellement par s_1 , parce que

$$\text{long}(L_1) + \text{long}(L'_2) + \text{long}(D_2) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4.8)$$

Les sommets a et s sont distincts puisque s est non-adjacent à L_1 .

Vu que L_1 et L_2 soient choisies de façon à minimiser le nombre total de leurs sommets, a est l'unique sommet de $L'_2 - L_1$ adjacent à des sommets de $L_1 - L'_2$.

Si a est faiblement adjacent à L_1 , alors, en considérant le sous-graphe $G_1(L_1 \cup L'_2)$, on aura

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_2) + \text{sign}(s_1, s_2) \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.9)$$

et cette équation contredira le fait que s soit critique pour s_1 et s_2 dans G_1 .

Comme toutes les chaînes directes reliant s_1 et s_2 dans G_1 doivent avoir la même parité, s forme un seul triangle avec L_1 contenant éventuellement s_1 .

De la même manière, on montre qu'il existe un sommet unique $b \in (L''_2 - (L_1 \cup \{s\}))$ qui forme un seul triangle avec L_1 contenant éventuellement s_2 .

Du fait que la chaîne L_2 soit minimale, aucun sommet de $L'_2 - \{s\}$ n'est adjacent à $L''_2 - \{s\}$. Ainsi, $G_1(L_1 \cup L_2)$ est un sous-graphe (s_1, s, s_2) -critique.

Condition suffisante: supposons que G_1 contienne un sous-graphe induit B qui soit (s_1, s, s_2) -critique (voir figure 4.16). Soit T le trou de B passant par a , b et s .

Le trou T est impair, car sinon les deux chaînes directes minimales de B reliant s et s_1 , dont l'une passe par a et l'autre par b , auront des parités différentes et contrediront ainsi, la faible compatibilité de G_1 et G_2 .

Par conséquent, B possède deux chaînes minimales d'extrémités s_1 et s_2 et de parités différentes dont l'une passant par s , et l'autre directe n'ayant aucun sommet adjacent à

s. Ce qui implique que le sommet s est critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 . \square

En utilisant les résultats de cette sous-section, nous étudierons notre problème de composition dans certains cas particuliers. Les particularités que nous considérerons résident soit dans la structure du graphe G_1 , qui respresente la feuille à coller, soit dans la cardinalité du stable S lui même.

Notons que, dans les sous-sections qui vont suivre, nous resterons toujours en présence de deux graphes G_1 et G_2 faiblement compatibles relativement à S tels que G_2 soit S -connexe, que G_1 soit une feuille du graphe composé G (i.e. $G_1 - S$ soit connexe) et que l'opération Φ ne crée pas de deux-trou impair relativement à S .

4.4.3 Collage d'une feuille non-critique

Soient G un graphe et S un stable de G . Nous dirons que G est *non-critique relativement à S* si pour tout triplet de sommets s_1, s_2 et s_3 de S , G ne contient pas de sous-graphe induit (s_1, s_2, s_3) -critique. Dans le cas contraire, il sera dit *critique* relativement à S .

Ce théorème montre, qu'à chaque fois où nous avons à coller une feuille non-critique, il est possible d'ordonner les sommets de S suivant un bon ordre.

Théorème 4.4.3 *Si G_1 est non-critique relativement à S alors, il existe un bon ordre des sommets de S .*

Preuve:

Raisonnons par récurrence sur la taille de S .

Si S contient seulement deux sommets s_1 et s_2 , alors les ordres s_1, s_2 et s_2, s_1 sont tous les deux bons.

Supposons que $G^k = G_1^k \Phi_{S^k} G_2^k$ tel que :

- $G = G^{|S|} = G_1^{|S|} \Phi_{S^{|S|}} G_2^{|S|}$, avec $S^{|S|} = S$;
- $3 \leq k \leq |S|$;
- $S^k = S - \{s_{i_{k+1}}, \dots, s_{i_{|S|}}\}$;
- G_1^k soit non-critique relativement à S^k ;
- $G_1^k - S$ soit connexe;

- G^k soit sans deux-trou impair.

D'après le lemme 4.4.3, G_1^k et G_2^k sont faiblement compatibles relativement à S^k .

Comme $G_1^k - S$ est connexe, le lemme 4.4.8 implique qu'il existe un sommet s_{i_k} qui est non-fortement adjacent dans G_1^k .

s_{i_k} n'est critique ni dans G_1 ni dans G_2 . En effet, s'il était critique dans G_1 ou dans G_2 , le lemme 4.4.9 impliquerait que s_{i_k} serait critique et non-adjacent pour deux sommets, disons s_l et s_t , de $S^k - \{s_{i_k}\}$, et d'après le lemme 4.4.10, G_1^k admettrait un sous-graphe (s_l, s_{i_k}, s_t) -critique, c'est à dire que G_1^k est critique relativement à S^k .

Soit $G^{k-1} = G_1^{k-1} \Phi_{S^{k-1}} G_2^{k-1}$ où $S^{k-1} = S^k - \{s_{i_k}\}$. G^{k-1} est obtenu à partir de G^k , en éclatant le sommet s_{i_k} en deux sommets $s_{i_k}^1$ et $s_{i_k}^2$ tels que $s_{i_k}^j$, $j = 1, 2$, soit adjacent au voisins de s_{i_k} dans G_j^k .

D'après le théorème 4.4.2, G^{k-1} est sans deux-trou impair relativement à S^{k-1} .

Supposons que G_1^{k-1} contienne un sous-graphe induit B qui soit (s_1, s, s_2) -critique, avec $s_1, s, s_2 \in S^{k-1} \subset S^k$.

s_{i_k} doit appartenir à B , car sinon B sera aussi un sous-graphe (s_1, s, s_2) -critique dans G_1^k .

Comme G^k est sans deux-trou impair, le sommet $s_{i_k}^1 \in (B - T)$, où T est le trou de B passant par les sommets s, a et b (voir figure 4.16).

Ce qui implique que B contient un sous-graphe qui est $(s_1, s, s_{i_k}^1)$ -critique ou bien $(s_{i_k}^1, s, s_2)$ -critique dans G_1^k . Contradiction.

Nous revenons donc à l'hypothèse de récurrence, i.e. G_1^{k-1} est non-critique relativement à S^{k-1} , $G_1^{k-1} - S^{k-1}$ est connexe et G^{k-1} est sans deux-trou impair.

Soit $s_{i_1}, \dots, s_{i_{k-1}}$ un bon ordre des sommets de S^{k-1} . Vu que $s_{i_k}^1$ et $s_{i_k}^2$ forment une paire d'amis dans G^{k-1} , $s_{i_1}, \dots, s_{i_{k-1}}, s_{i_k}$ est un bon ordre des sommets de S^k . \square

Du fait que tout sous-graphe (s_1, s_2, s_3) -critique contienne un trou impair intersectant S , les graphes qui ne contiennent pas de trou impair intersectant S sont non-critiques relativement à S . Cela implique que le théorème 4.4.3 généralise celui de Tucker [106].

L'inverse n'est pas vrai. En effet, dans le graphe de la figure 4.17, G_1 est non-critique relativement à $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ et il contient, en même temps, un trou impair T passant

par s_2 . Pour ce graphe s_1, s_2, s_3 est un bon ordre.

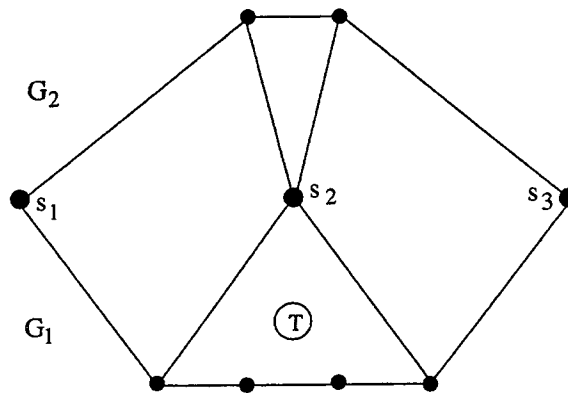


FIG. 4.17 - G_1 et G_2 sont non-critiques relativement à $S = \{s_1, s_2, s_3\}$.

Notons aussi, que les graphes de Berge (qui sont les graphes ne contenant ni trou ni anti-trou impairs) sont non-critiques relativement à n'importe quel stable.

4.4.4 Collage d'une feuille presque bipartie

Un graphe $G = (V, E)$ est dit presque biparti s'il existe $v \in V$ tel que $G - \{v\}$ est biparti, i.e. tous les cycles impairs de G passent par le sommet v .

Cette classe de graphes a été définie par Fonlupt et Uhry [54] comme étant la classe des graphes obtenus à partir des graphes bipartis en identifiant deux sommets quelconques. Ils montrent que ces graphes sont h-parfaits (plus précisément t-parfaits).

Nous supposons, pour la suite de cette section, que la feuille à coller soit presque bipartie, c'est à dire qu'il existe un sommet v de G_1 tel que $G_1 - \{v\}$ soit biparti, et nous montrerons qu'on peut mettre en évidence un bon ordre des sommets de S .

Lemme 4.4.11 *Etant donnés trois sommets s, s_1 et s_2 de S . Si s est critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 alors toutes les chaînes directes minimales reliant s_1 et s_2 dans G_1 passent par le sommet v .*

Preuve:

Vu que le sommet s étant critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 , le lemme 4.4.10 implique que le graphe G_1 admet un sous-graphe induit H qui est (s_1, s, s_2) -critique (Voir figure 4.18). Ce qui implique que $v \in H - S$ et que l'équation

suiivante est vérifiée

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_2) + \text{sign}(s_1, s_2) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4.10)$$

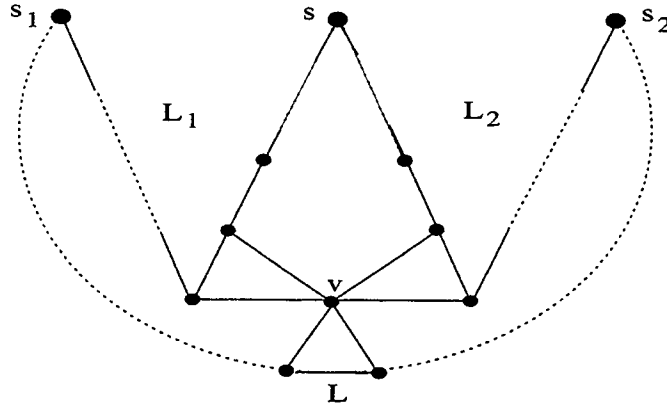


FIG. 4.18 -

Supposons qu'il existe une chaîne directe minimale L reliant s_1 et s_2 dans G_1 et ne passant pas par v .

Désignons par L_1 (resp. L_2) la chaîne minimale de H reliant s et s_1 (resp. s et s_2) et ne passant pas par v .

Le sous-graphe induit $G_1((H \cup L) - \{s_1, s_2, v\})$ n'est pas connexe, car sinon nous aurons un sous-graphe induit biparti A de $G_1 - \{v\}$, tel que $\{s, s_1, s_2\} \subset A$ et $(A - S)$ soit connexe, qui impliquera que l'équation suivante

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_2) + \text{sign}(s_1, s_2) \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.11)$$

sera vérifiée et contredira l'équation 4.10.

Du fait que $G_1 - S$ soit connexe, il existe une chaîne reliant le sommet v et des sommets de la chaîne L dans $G_1 - S$, et du fait que tous les cycles impairs de G_1 passent par v et que s soit critique pour s_1 et s_2 , le sommet v est fortement adjacent à L , ou plus précisément, v engendre un seul triangle avec L parce que G_1 est faiblement compatible relativement à S .

Soit L'_1 (resp. L'_2) la chaîne de H reliant s et v et intersectant L_1 (resp. L_2) et L' la sous-chaîne de L reliant s_2 et un seul voisin de v . Le sous-graphe $G_1((L_2 - L'_2) \cup L'_1 \cup L')$ est biparti et l'équation 4.11 est donc vérifiée et contredit l'équation 4.10. \square

Lemme 4.4.12 *Etant donné un sommet $s \in S$ critique et non-adjacent pour deux sommets de S dans G_1 . Alors, aucun sommet de $S - \{s\}$ ne peut être critique et non-adjacent pour s et un autre sommet de S dans G_1 .*

Preuve:

Le sommet s étant critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 , le lemme 4.4.10 implique que le graphe G_1 admet un sous-graphe induit H_1 qui est (s_1, s, s_2) -critique avec $v \in H_1 - S$ (Voir figure 4.18).

Le sous-graphe H_1 admet une chaîne directe minimale d'extrémités s et s_1 (resp. s et s_2) qui ne passe pas par le sommet v . Selon le lemme 4.4.11, aucun sommet de S ne peut être critique pour s et s_1 (resp. s et s_2) dans G_1 .

Supposons que s_2 soit critique et non-adjacent pour s et un autre sommet $s_3 \in S$ dans G_1 . Le lemme 4.4.10 implique que le graphe G_1 admet un sous-graphe H_2 qui est (s, s_2, s_3) -critique. Appelons L_1 la chaîne de H_1 d'extrémités s_1 et v , et L_2 celle de H_2 reliant s et s_2 et passant par v .

Suivant le lemme 4.4.11 appliqué au triplet (s_1, s, s_2) , il n'existe ni sommet en commun ni arête entre $L_1 - \{v\}$ et $H_2 - \{v\}$ (rappelons que s n'est pas adjacent à L_1 car H_1 est un sous-graphe induit). Le sous-graphe $G_1(L_1 \cup L_2)$ est donc biparti et conduit à l'égalité suivante

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_2) + \text{sign}(s_1, s_2) \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.12)$$

Ce qui contredit le fait que s soit critique pour s_1 et s_2 dans G_1 .

Supposons maintenant qu'il existe deux sommets s_3 et s_4 de $S - \{s_1, s_2\}$ tels que s_3 soit critique et non-adjacent pour s et s_4 . Soit \overline{H} un sous-graphe (s, s_3, s_4) -critique de G_1 (d'après le lemme 4.4.10) (voir figure 4.19).

Soient :

- L (resp. L') la chaîne de H_1 reliant s et s_1 (resp. s et s_2) et ne passant pas par v ;
- \overline{L} la chaîne de \overline{H} reliant s_3 et s_4 et ne passant pas par v ;
- \overline{L}' la chaîne de \overline{H} reliant s_3 et s_4 et passant par v ;
- γ (resp. $\overline{\gamma}$) le trou impair de H_1 (resp. \overline{H}) différent du triangle.

Le sommet s n'est adjacent ni à \overline{L} ni à \overline{L}' puisque H_1 et \overline{H} sont des sous-graphes induits.

D'après le lemme 4.4.11 appliqué au triplet (s, s_3, s_4) , il n'existe ni sommet en commun ni arête entre $\gamma - \{v\}$ et \overline{L} . Selon le même lemme appliqué au triplet (s_1, s, s_2) , les sommets de $(L \cap \gamma) - \{s\}$ et ceux de $(L' \cap \gamma) - \{s\}$ appartiennent à deux composantes connexes différentes de $G_1((\gamma \cup (\overline{L}' \cap \overline{\gamma})) - \{s, v\})$.

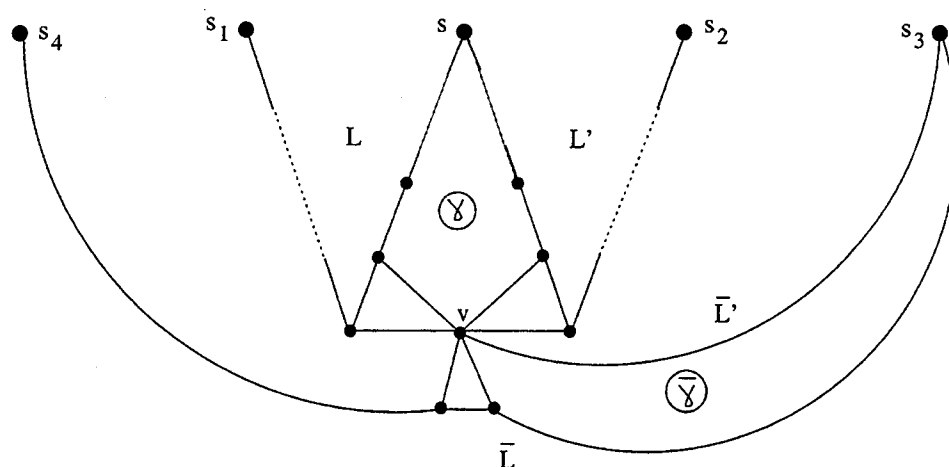


FIG. 4.19 -

Il en découle qu'au moins l'un des deux sous-graphes $G_1((L \cap \gamma) \cup \bar{L}')$ et $G_1((L' \cap \gamma) \cup \bar{L})$ est biparti et connexe et entraîne que le triplet (s, s_3, s_4) vérifie l'équation

$$\text{sign}(s, s_3) + \text{sign}(s, s_4) + \text{sign}(s_3, s_4) \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.13)$$

qui contredit le fait que s_3 soit critique pour s et s_4 dans G_1 . \square

Théorème 4.4.4 *Si G_1 est presque biparti alors il existe un bon ordre des sommets de S .*

Preuve:

Nous montrons seulement qu'il existe un sommet de S qui n'est critique ni dans G_1 ni dans G_2 . Le reste de la démonstration est similaire à la preuve du théorème 4.4.3.

Supposons que chaque sommet de S soit critique dans l'un des deux graphes G_1 et G_2 .

D'après le lemme 4.4.8, il existe un sommet s de S tel que pour toute paire de sommets s' et s'' de S , le graphe G_1 admette une chaîne directe minimale, d'extrémités s' et s'' , ayant au plus un seul voisin de s . Ce dernier est donc non-fortement adjacent dans G_1 . Le sommet s étant critique, le lemme 4.4.9 implique qu'il existe deux autres sommets s_1 et s_2 de S pour lesquels s est critique et non-adjacent dans G_1 .

Soit H un sous-graphe (s_1, s, s_2) -critique de G_1 (voir lemme 4.4.10). Le sommet v appartient forcément à $H - S$. Appelons L_1 (resp. L_2) la chaîne de H reliant s et s_1 (resp. s et s_2) et ne passant pas par v (voir figure 4.20).

Les sommets s_1 et s_2 sont fortement adjacents dans G_1 . En effet, supposons qu'ils ne le soient pas. Comme tous les sommets de S sont supposés critiques dans G_1 ou dans G_2 , le lemme 4.4.9 implique que chacun des sommets s_1 et s_2 est critique et non-adjacent pour une paire de sommets de S dans G_1 . Or, vu que s soit critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 , cela contredit le lemme 4.4.12.

Il existe, dans ce cas, deux sommets s_3 et s_4 de $S - \{s_1\}$ tels que s_1 soit fortement adjacent à toutes les chaînes directes minimales d'extrémités s_3 et s_4 . Ces chaînes doivent toutes contenir le sommet v .

L'un des deux sommets s_3 et s_4 , disons s_3 , est différent de s et s_2 , car il existe une chaîne minimale de H reliant s et s_2 et n'ayant aucun sommet adjacent à s_1 . Du fait que H soit un sous-graphe induit, qu'il admette deux chaînes minimales reliant s et v et que toutes les chaînes directes minimales d'extrémités s_3 et s_4 passent par v , nous déduisons que $s_4 \neq s$.

De la même manière, il existe deux sommets s_5 et s_6 , avec $s_5 \in S - \{s, s_1, s_2, s_3\}$ et $s_6 \in S - \{s, s_2\}$, tels que s_2 soit fortement adjacent à toutes les chaînes directes minimales reliant s_5 et s_6 .

Montrons que s_1 et s_2 sont adjacents à v .

Considérons seulement le sommet s_1 et supposons qu'il ne soit pas adjacent à v . Choisissons une chaîne directe minimale L reliant s_3 et s_4 dans G_1 , et notons par L' (resp. L'') sa sous-chaîne d'extrémités v et s_3 (resp. v et s_4).

Le fait que s_1 soit non-adjacent à v d'une part et fortement adjacent à L d'une autre part implique que $v \in L$ et que s_1 est faiblement adjacent à L' et L'' (voir figure 4.20). Selon le lemme 4.4.11 appliqué au triplet (s_1, s, s_2) , il n'existe ni sommet en commun

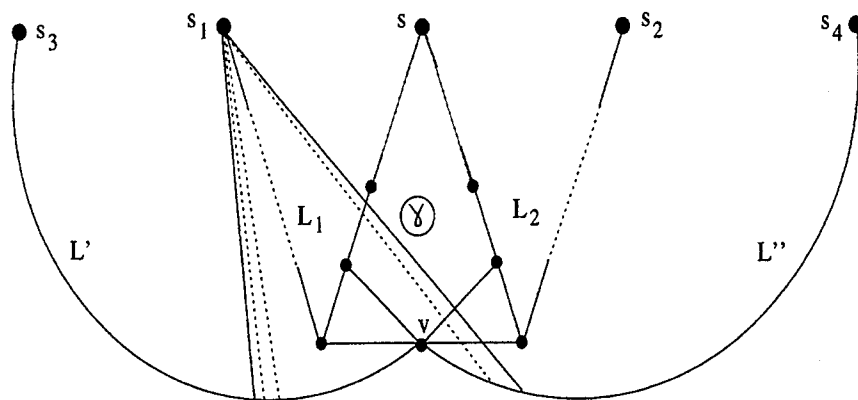


FIG. 4.20 -

ni arête entre $L_2 - \{s\}$ et $L - \{v\}$ (il est possible que $L_1 \cap L \neq \emptyset$). Le sommet s_4 est donc différent de s_2 .

Comme toutes les chaînes directes minimales de G_1 d'extrémités s_3 et s_4 passent par v , au moins une des deux chaînes, $L' - \{v\}$ et $L'' - \{v\}$, engendre avec $L_1 - \{s, s_1\}$ un sous-graphe induit non-connexe de G_1 . Supposons, sans perte de généralité, que $L' - \{v\}$ vérifie cette propriété.

Désignons par \overline{L}_1 la chaîne directe de H d'extrémités s_2 et v , par \overline{L}_2 celle reliant s_2 et s et passant par v , et par \overline{L}' la chaîne minimale de $G_1(L' \cup \{s_1\})$ ayant pour extrémités s_1 et v .

Le sous-graphe $G_1(\overline{L}' \cup \overline{L}_2)$ (resp. $G_1(\overline{L}' \cup \overline{L}_1 \cup \{s\})$) si s est adjacent à \overline{L}' est biparti et connexe. Ce qui implique que l'équation

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_2) + \text{sign}(s_1, s_2) \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.14)$$

est vérifiée et contredit le fait que s soit critique pour s_1 et s_2 .

Le sommet s_1 est donc adjacent à v .

Par un raisonnement similaire, nous montrons que s_2 est aussi adjacent à v .

Soit D une chaîne directe minimale d'extrémités s_3 et s_4 (s_1 est fortement adjacent à D). Appelons D_1 (resp. D_2) la sous-chaîne de D d'extrémités s_3 et v (resp. s_4 et v), (si $s_4 = s_2$ alors D_2 aura une seule arête (v, s_2)).

Comme tous les cycles impairs de G_1 doivent passer par v , s_1 est fortement adjacent à une seule des chaînes L' et L'' et faiblement adjacent à l'autre (peut être adjacent seulement au sommet v). Supposons qu'il soit fortement adjacent à L' . A ce moment, il est fortement adjacent à toutes les chaînes minimales, d'extrémités s_3 et v , qui n'intersectent S qu'en s_3 , car si s_1 n'est pas fortement adjacent à l'une d'entre elles, alors la concaténation de cette dernière et L'' contiendra une chaîne directe minimale d'extrémités s_3 et s_4 à laquelle s_1 ne sera pas fortement adjacent, alors qu'il est fortement adjacent pour s_3 et s_4 dans G_1 .

De la même manière, s_2 est fortement adjacent à toutes les chaînes minimales reliant s_5 et v , et n'intersectant S qu'en s_5 .

Si $s_3 = s_5$, nous aurons une chaîne directe minimale d'extrémités s_1 et s_2 qui ne passera pas par v et qui contredira le lemme 4.4.11 appliqué au triplet (s_1, s, s_2) .

Nous montrons, maintenant, que chaque chaîne minimale reliant s_3 et v (resp. reliant s_5 et v) et n'intersectant S qu'en s_3 (resp. qu'en s_5) a au moins un sommet adjacent à s :

Prenons une chaîne minimale A reliant s_3 et v et n'intersectant S qu'en s_3 et supposons qu'elle n'ait aucun sommet adjacent à s .

Le sommet s_1 est fortement adjacent à A et, d'après le lemme 4.4.11, il n'y a ni sommet en commun ni arête entre $A - \{v\}$ et L_2 .

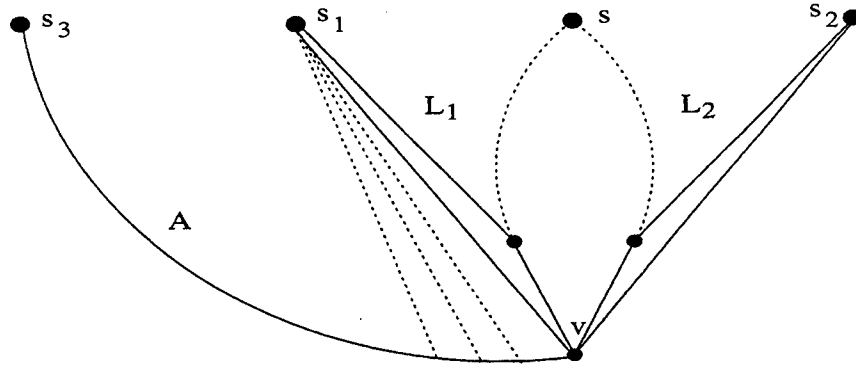


FIG. 4.21 -

La chaîne A doit intersecter L_1 . En effet, si $A \cap L_1 = \phi$ (c'est le cas de la figure 4.21), alors le sous-graphe $G_1(A \cup L_1)$ conduit à l'équation suivante

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_3) + \text{sign}(s_1, s_3) \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.15)$$

(notons que même s'il existe des arêtes entre L_1 et $A - \{v\}$, $G_1(L_1 \cup A - \{v\})$ est connexe et biparti et l'équation 4.15 reste vérifiée). Or, en considérant le sous-graphe $G_1(A \cup L_2 - \{s_2\})$, nous avons

$$\text{sign}(s, s_1) + \text{sign}(s, s_3) + \text{sign}(s_1, s_3) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4.16)$$

Les inéquations 4.15 et 4.16 se contredisent.

Le sous-graphe $G_1(A \cup L_1 - \{v\})$ est donc biparti (voir figure 4.22).

et l'équation

$$\text{sign}(s, s_3) + \text{sign}(s_1, s_3) + \text{sign}(s, s_1) \equiv 0 \pmod{2} \quad (4.17)$$

est vérifiée, alors que la concaténation des deux chaînes A et $L_2 - \{s_2\}$ donne une chaîne directe minimale d'extrémités s et s_3 et à laquelle s_1 est fortement adjacent, i.e

$$\text{sign}(s, s_3) + \text{sign}(s_1, s_3) + \text{sign}(s, s_1) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4.18)$$

Les inéquations 4.17 et 4.18 se contredisent. Le sommet s est donc adjacent à A .

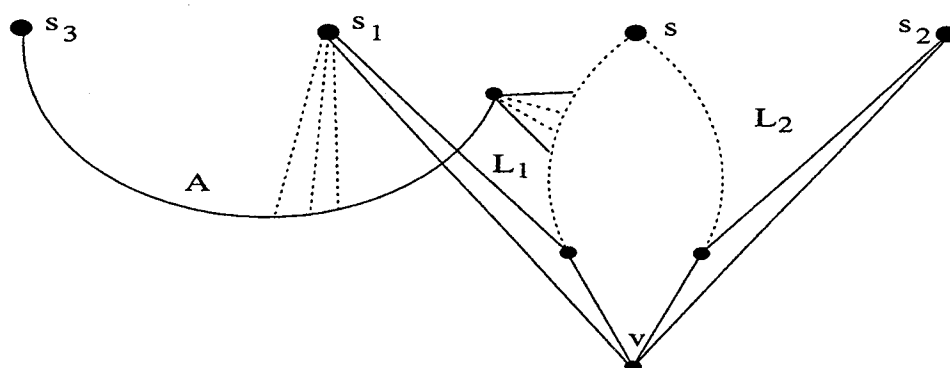


FIG. 4.22 -

Supposons qu'il existe une chaîne minimale B d'extrémités s_3 et s_5 qui ne passe pas par v . Soit \bar{B} une chaîne minimale reliant v et des sommets de B dans $G_1 - S$ ($G_1 - S$ est connexe). Notons par B' (resp. B'') la chaîne minimale de $G_1(\bar{B} \cup B)$ d'extrémités s_3 et v (resp. s_5 et v).

Comme s_1 et s_2 sont fortement adjacents à B' et B'' respectivement, $G_1((B \cup \bar{B} \cup \{s_1, s_2\}) - \{v\})$ est connexe, i.e. il existe une chaîne directe minimale reliant s_1 et s_2 et ne passant pas par v . Ce qui contredit ainsi, le lemme 4.4.11. Par conséquent toutes les chaînes directes reliant s_3 et s_5 passent par v .

Nous concluons que toute chaîne directe minimale reliant s_3 et s_5 a au moins deux sommets adjacents à s . Ceci contredit le choix du sommet s fait au début de la preuve.

Il existe alors un sommet de S qui n'est critique ni dans G_1 ni dans G_2 . \square

4.4.5 Collage d'une feuille série-parallèle

Un graphe est dit série-parallèle s'il n'admet pas de mineur isomorphe à K_4 [44], où K_4 est le graphe complet à quatre sommets (voir aussi section 1.3).

Chvátal [31] a conjecturé que les graphes série-parallèles sont h-parfaits (t-parfaits). Cette conjecture a été prouvée par Boulala et Uhry [23] et Mahjoub [80].

Comme pour les graphes non-critiques et les graphes presque bipartis, nous montrons l'existence d'un bon ordre des sommets de S quand on colle une feuille série-parallèle

Théorème 4.4.5 *Si G_1 est série-parallèle alors il existe un bon ordre des sommets de S .*

Preuve:

Comme pour le théorème précédent, nous montrons seulement qu'il existe un sommet de S qui n'est critique ni dans G_1 ni dans G_2 .

Supposons que chaque sommet de S soit critique dans G_1 ou dans G_2 ($|S| \geq 3$). D'après le lemme 4.4.8, il existe un sommet s de S qui n'est pas fortement adjacent dans G_1 ($G_1 - S$ est connexe). Le lemme 4.4.9 implique qu'il existe deux sommets s_1 et s_2 de S pour lesquels s est critique et non-adjacent dans G_1 .

Du lemme 4.4.10, nous déduisons que G_1 admet un sous-graphe (s_1, s, s_2) -critique H (voir figure 4.23), ayant deux triangles engendrés par $\{a_1, b_1, c_1\}$ et $\{a_2, b_2, c_2\}$. Rappelons que les sommets s_1 et c_1 (resp. s_2 et c_2) (resp. b_1 et b_2) peuvent être confondus.

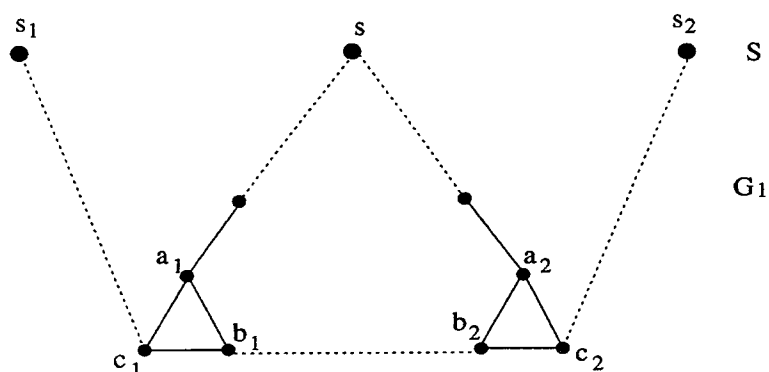


FIG. 4.23 -

Soit L la chaîne de H reliant s_1 et c_1 . S'il existe une chaîne de G_1 reliant un sommet de $H - (L \cup \{a_1, b_1\})$ et un autre de L et ne passant pas par a_1 et b_1 , alors G_1 admet un mineur isomorphe à K_4 , c'est à dire que G_1 n'est pas série-parallèle.

$\{a_1, b_1\}$ (resp. $\{a_2, b_2\}$) est donc un sous-ensemble déconnectant de G_1 tel que s et s_1 (resp. s et s_2) appartiennent à des composantes connexes différentes de $G_1 - \{a_1, b_1\}$ (resp. de $G_1 - \{a_2, b_2\}$).

Les composantes connexes q_1, q_2, \dots, q_r de $G_1 - \{a_1, b_1\}$ ne sont pas forcément $(S \cap q_i)$ -connexes. Soient $Q_1, Q_2, \dots, Q_{t'}$ les composantes connexes de $G_1 - (S \cup \{a_1, b_1\})$ et F_1, F_2, \dots, F_t , $t \geq 2$, les feuilles de $G_1 - \{a_1, b_1\}$ (les sommets isolés de $G_1 - \{a_1, b_1\}$ appartenant à S sont considérés comme des feuilles).

Supposons que $\{s, a_2, c_2, s_2\} \subseteq F_1$. Comme $\{a_2, b_2\}$ déconnecte G_1 , F_1 est la seule feuille contenant à la fois s et s_2 (si $b_1 \neq b_2$, F_1 est la seule feuille contenant s_2).

Du fait que les sommets de S n'appartiennent pas tous à une même composante connexe de $G_1 - \{a_1, b_1\}$, tout arbre S -couvrant intersecte $\{a_1, b_1\}$ (voir la définition

donnée just avant le lemme 4.4.8).

On peut, par conséquent, choisir un arbre S -couvrant T ayant un sommet pendant adjacent à un sommet \bar{s} de $S - \{s\}$ qui appartienne à une feuille F_k différente de F_1 . En effet, si a_1 n'est pas un point d'articulation de $G_1 - S$, alors T peut être pris dans $(G_1 - (S \cup \{a_1\}))$ et \bar{s} peut être un sommet d'une feuille contenant s_1 (éventuellement s_1 lui même).

Sinon, il existe j , $1 \leq j \leq t'$, tel que Q_j soit une composante connexe de $G_1 - (S \cup \{a_1\})$ (ou bien il existe un sommet de S adjacent seulement à a_1 dans G_1). Dans le cas, où tous les sommets de S appartenant à la feuille F_j , correspondante à Q_j , sont dans d'autres feuilles alors, $G_1 - Q_j$ reste connexe et T est choisi dans $G_1 - (S \cup Q_j)$. Dans le cas contraire, \bar{s} peut être un sommet de F_j , i.e. $k = j$.

D'après le lemme 4.4.8 (voir sa preuve), le sommet \bar{s} n'est pas fortement adjacent dans G_1 .

Nous supposons que les sommets s , a_1 , b_1 soient choisis de manière que $|F_k \cap S|$ soit minimum.

Le lemme 4.4.9 implique que \bar{s} est critique et non-adjacent pour deux sommets \bar{s}_1 et \bar{s}_2 , de $S - \{\bar{s}\}$, dans G_1 . Soit \bar{H} un sous-graphe $(\bar{s}_1, \bar{s}, \bar{s}_2)$ -critique de G_1 (lemme 4.4.10) avec deux triangles engendrés par $\{\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1\}$ et $\{\bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2\}$.

Les sommets \bar{s}_1 et \bar{s}_2 ne peuvent pas appartenir tous les deux à $S - F_k$. En effet, si $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\} \subset (S - F_k)$ alors, toutes les chaînes de G_1 d'extrémités \bar{s}_1 et \bar{s}_2 qui intersectent S en $\{\bar{s}_1, \bar{s}, \bar{s}_2\}$ passeront par a_1 et b_1 , car $\bar{s} \in F_k$, et par la suite, ne seront pas minimales, parce que a_1 et b_1 sont adjacents. Ce qui contredira le fait que \bar{s} soit critique pour \bar{s}_1 et \bar{s}_2 dans G_1 .

Nous supposons que \bar{s}_1 appartienne à F_k . Les sommets a_1 et \bar{a}_1 sont donc distincts; de plus nous avons soit $\{\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1\} \subset F_k$, ou bien $\{\bar{a}_1, \bar{c}_1\} \subset F_k$ et $\bar{b}_1 = b_1$.

De la même manière que pour le sous-graphe H , nous montrons que $\{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$ est un déconnectant de G_1 , tel que \bar{s}_1 et \bar{s} appartiennent à des composantes connexes différentes, et en même temps un déconnectant de F_k puisque \bar{s}_1 et \bar{s} appartiennent à F_k .

Appelons $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_{\bar{t}'}$ les composantes connexes de $G_1 - (S \cup \{\bar{a}_1, \bar{b}_1\})$, et $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_{\bar{t}'}$ les feuilles de $G_1 - \{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$ telles que les sommets \bar{s}, \bar{s}_2 (et éventuellement s) appartiennent à \bar{F}_1 , et que \bar{F}_2 soit la feuille qui contienne \bar{s}_1 et \bar{c}_1 . $\bar{F}_2 \subset F_k$. Notons par $\bar{Q}_3, \bar{Q}_4, \dots, \bar{Q}_{\bar{t}'}, \bar{t}' \leq \bar{t}'$, les composantes connexes, s'il en existe, de

$G_1 - (S \cup \{\bar{a}_1, \bar{b}_1\})$ qui sont aussi composantes connexes de $G_1 - (S \cup \{\bar{a}_1\})$. Les feuilles qui leurs sont associées sont incluses dans F_k , car $\bar{a}_1 \in F_k$.

Similairement au cas du sous-graphe H , nous montrons aussi qu'il existe \bar{k} , $2 \leq \bar{k} \leq \bar{l}$, tel que la feuille $\bar{F}_{\bar{k}}$ contienne un sommet de $S - \{\bar{s}\}$ qui ne soit pas fortement adjacent dans G_1 .

Du fait que $\{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$ soit déconnectant de G_1 , $|\bar{F}_{\bar{k}} \cap \{\bar{s}, \bar{s}_1\}| \leq 1$. Cela implique que $|\bar{F}_{\bar{k}} \cap S| < |F_k \cap S|$. Cette inéquation contredit le choix des sommets s , a_1 et b_1 .

Nous en déduisons alors qu'il existe un sommet de s qui n'est adjacent ni dans G_1 ni dans G_2 . \square

4.4.6 Identification de stables de faible cardinalité

La particularité du problème, dans le cas que nous considérons maintenant, ne réside pas dans la structure des graphes à coller mais plutôt, dans la cardinalité du stable S . Nous montrons que, dans le cas où le stable S a moins de cinq sommets, il existe un bon ordre des sommets de ce stable.

Remarque 4.4.1 Soient s , s' et s'' trois sommets de S et $i \in \{1, 2\}$.

Si s est critique pour s' et s'' dans G_i alors, par définition, il existe une chaîne directe minimale d'extrémités s et s' (resp. s et s'') de G_i n'ayant aucun sommet adjacent à s'' (resp. s'). \square

Théorème 4.4.6 Si $|S| \leq 4$ alors il existe un bon ordre des sommets de S .

Preuve:

Dans le cas où S a seulement deux sommets s_1 et s_2 , les deux ordres s_1, s_2 et s_2, s_1 sont bons.

Supposons que $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ et que chaque sommet de S soit critique dans G_1 ou dans G_2 . Comme $G_1 - S$ est connexe, nous déduisons du lemme 4.4.8 qu'un sommet de S , disons s_2 , n'est pas fortement adjacent dans G_1 . Le lemme 4.4.9 implique que s_2 est critique et non-adjacent pour s_1 et s_3 dans G_1 . Soit H un sous-graphe (s_1, s_2, s_3) -critique de G_1 (voir le lemme 4.4.10). D'après H , les sommets s_1 et s_3 sont non-adjacents dans G_1 , ils ne sont pas donc critiques dans G_2 .

Soit D une chaîne directe minimale reliant s_2 et s_3 dans G_2 . Selon le lemme 4.4.7(a)

s_1 est adjacent à exactement deux sommets voisins de D , et par conséquent, s_1 et s_3 ne peuvent pas être critiques et non-adjacents dans G_1 . Contradiction.

Un des trois sommets de S , disons s_1 , n'est alors critique ni dans G_1 ni dans G_2 . D'après le théorème 4.4.2, le graphe $G_1 \Phi_{\{s_2, s_3\}} G_2$ est sans deux-trou (relativement à $\{s_2, s_3\}$). En conséquence, s_1, s_2, s_3 et s_1, s_3, s_2 sont de bons ordres.

Considérons maintenant le cas où $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et montrons qu'il existe un sommet de S qui n'est critique ni dans G_1 ni dans G_2 . En éclatant un tel sommet en deux, nous nous ramenons au cas précédent (voir théorème 4.4.2), et nous aurons par la suite un bon ordre des sommets de S .

Pour cela, supposons que le contraire soit vrai. Selon le lemme 4.4.8, il existe deux sommets de S qui ne sont pas fortement adjacents dans G_1 . Chacun d'eux est, d'après le lemme 4.4.9, critique et non-adjacent pour une paire de sommets de S dans G_1 .

Supposons que le sommet s_2 soit critique et non-adjacent pour s_1 et s_3 dans G_1 . Le lemme 4.4.7(a) implique que s_2 est adjacent à exactement deux sommets voisins de chaque chaîne directe minimale reliant s_1 et s_2 dans G_2 .

Suivant l'assertion (b) du lemme 4.4.7, pour toute paire de chaînes directes minimales de G_2 , d'extrémités respectives s_1 et s_2 , et s_2 et s_3 , il existe une arête unique les reliant et formant un triangle avec s_2 . Nous en déduisons que $G_2 - S$ est connexe, rappelons que G_1 et G_2 sont supposés être S -connexes. Deux sommets de S sont alors, non-fortement adjacents dans G_2 (lemme 4.4.8), et chacun d'eux est critique et non-adjacent pour une paire de sommets de S dans G_2 (lemme 4.4.9).

Selon le lemme 4.4.7(a), si un sommet de S est critique et non-adjacent pour deux sommets de S dans un graphe, il est fortement adjacent dans l'autre. Nous concluons que chaque sommet de S est critique et non-adjacent pour une paire de sommets de S dans un graphe seulement, G_1 ou G_2 .

Examinons maintenant, le deuxième sommet de S non-fortement adjacent dans G_1 qui, à priori, pourrait être s_1, s_3 ou bien s_4 . Quatre cas peuvent alors, se présenter.

1^{er} cas : s_4 critique et non-adjacent pour s_2 et s_3 dans G_1 .

Les sommets s_1 et s_3 doivent donc être critiques dans G_2 .

D'après le lemme 4.4.7(a), s_4 est fortement adjacent pour s_2 et s_3 dans G_2 . Il en découle qu'il a aussi le même comportement vis à vis des sommets s_1 et s_3 , car s_2 est fortement adjacent pour s_1 et s_3 dans G_2 (voir figure 4.24).

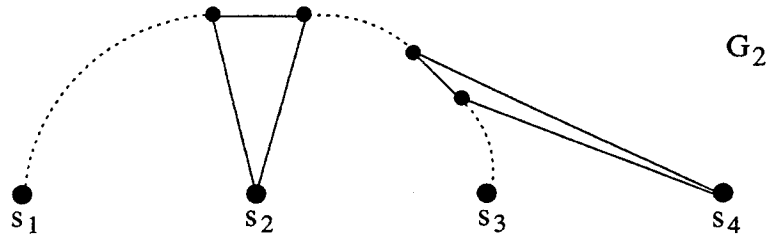


FIG. 4.24 -

Il n'existe pas alors, une chaîne directe minimale de G_2 reliant s_1 et s_3 (resp. s_1 et s_3) (resp. s_2 et s_3) et n'ayant aucun sommet adjacent à s_2 (resp. à s_4) (resp. à s_4). Suivant la remarque 4.4.1, le sommet s_3 ne peut pas être critique pour s_1 et s_2 (resp. pour s_1 et s_4) (resp. pour s_2 et s_4) dans G_2 . Contradiction.

Pour des raisons similaires, le sommet s_4 ne peut pas être critique et non-adjacent pour s_1 et s_2 dans G_1 .

2^{ème} cas : s_4 critique et non-adjacent pour s_1 et s_3 dans G_1 .

Les sommets s_1 et s_3 doivent être critiques dans G_2 .

Du lemme 4.4.7(a) appliqué au triplet (s_1, s_3, s_4) , nous déduisons que toute chaîne directe minimale d'extrémités s_1 et s_3 de G_2 a exactement deux sommets voisins qui sont adjacents à s_4 .

Soient L_1 et L_2 deux chaînes directes minimales et distinctes reliant s_1 et s_3 dans G_2 . Notons par L'_i (resp. L''_i), $i = 1, 2$, la chaîne minimale de $G_2(L \cup \{s_2\})$ qui a pour extrémités s_1 et s_2 (resp. s_2 et s_3).

Si les deux sommets de L_1 qui sont adjacents à s_4 appartiennent à L'_1 et au moins un de ceux de L_2 appartient à L''_2 alors, selon l'assertion (b) du lemme 4.4.7 appliqué au triplet (s_1, s_2, s_3) , il existe une chaîne directe minimale de G_2 qui relie s_1 et s_3 et qui a plus que deux sommets adjacents à s_4 . Contradiction.

De même, si pour toute chaîne directe minimale L reliant s_1 et s_3 dans G_2 , le sommet s_4 est adjacent seulement à la chaîne minimale de $G_2(L \cup \{s_2\})$ d'extrémités s_1 et s_2 (resp. s_2 et s_3), cela nous ramène alors au 1^{er} cas.

Les sommets s_2 et s_4 ont donc de mêmes voisins dans chaque chaîne directe minimale reliant s_1 et s_3 dans G_2 .

Soient D' (resp. D'') une chaîne directe minimale de G_2 ayant pour extrémités s_1 et s_2 (resp. s_2 et s_3). Suivant le lemme 4.4.7(b), il existe une arête qui a une extrémité appartenant à D' et une autre à D'' et qui forme un triangle avec le sommet s_2 . Dans

ce cas, s_4 est adjacent aux extrémités de cette arête, et par la suite, il est adjacent à D' .

Il en découle que le sommet s_1 ne peut être critique et non adjacent, dans G_2 , ni pour s_2 et s_3 , ni pour s_2 et s_4 , ni pour s_3 et s_4 (voir remarque 4.4.1). Contradiction.

3^{ème} cas : s_3 critique et non-adjacent pour s_2 et s_4 dans G_1 .

Les sommets s_1 et s_4 sont critiques dans G_2 .

Le sommet s_1 n'est pas critique et non-adjacent pour s_2 et s_3 dans G_2 , car il n'existe pas de chaîne directe minimale reliant s_1 et s_3 dans G_2 et n'ayant aucun sommet adjacent à s_2 .

Supposons que s_1 soit critique et non-adjacent pour s_2 et s_4 dans G_2 . Le lemme 4.4.10 implique que G_2 admet un sous-graphe (s_2, s_1, s_4) -critique H . D'après le lemme 4.4.7(a) appliqué au triplet (s_2, s_3, s_4) , le sommet s_3 est adjacent à deux sommets voisins de la chaîne directe de H d'extrémités s_2 et s_4 . Du fait que H soit induit, le sous-graphe $G(H \cup \{s_3\})$ possède une chaîne directe minimale qui n'a aucun sommet adjacent à s_2 et qui contredit, ainsi, le lemme 4.4.7(a) appliqué au triplet (s_1, s_2, s_3) .

En suivant le même raisonnement, nous aboutirons à la même contradiction si nous supposons que le sommet s_1 soit critique et non-adjacent pour s_3 et s_4 dans G_2 .

4^{ème} cas : s_3 critique et non-adjacent pour s_1 et s_4 dans G_1 .

Le sommet s_1 doit être critique et non-adjacent pour une paire de sommets de S dans G_2 .

Soit \bar{L} une chaîne directe minimale reliant s_1 et s_4 dans G_2 . Selon le lemme 4.4.7(a), s_3 est fortement adjacent à \bar{L} , et par conséquent, s_2 l'est aussi.

Nous déduisons de la remarque 4.4.1 que le sommet s_1 ne peut pas être, pour n'importe quelle paire de sommets de S , critique et non-adjacent dans G_2 . Contradiction.

Au moins un des sommets de $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ est forcément non-critique dans G_1 et dans G_2 . \square

4.4.7 Stables déconnectants

Nous venons de voir, dans les cas particuliers considérés dans les quatre sous-sections précédentes, que les sommets de S peuvent être ordonnés suivant un bon ordre. Celui-ci nous permet alors, de déduire une description de l'enveloppe convexe des stables de G à partir de celles associées aux graphes G_1 et G_2 , et de montrer, en même temps, que l'opération Φ préserve la perfection, la h -perfection et la k -colorabilité si elle ne crée pas de trou impair. Nous regroupons tous ces résultats dans un seul théorème.

Soit Ψ la classe des graphes série-parallèles, presque bipartis et les graphes non-critiques relativement à S .

Théorème 4.4.7 *Etant donné un graphe G ayant un stable déconnectant S tel que G soit sans deux-trou impair relativement à S . Soient F_1, F_2, \dots, F_f ses feuilles, relativement à S , rangées suivant un bon ordre.*

Si chaque feuille F_i , telle que $i \geq 2$ et $|F_i \cap S| \geq 5$, appartient à la classe Ψ alors:

- $STB(G) = STB(F_1) \cap STB(F_2) \cap \dots \cap STB(F_f)$
- si F_1, F_2, \dots, F_f sont des graphes parfaits (resp. h -parfaits) (resp. k -colorables) alors G est parfait (resp. h -parfait) (resp. k -colorable).

Preuve:

D'après la définition d'un bon ordre des feuilles, le graphe G peut être obtenu en collant ses feuilles une par une, dans l'ordre croissant de leurs indices, de telle sorte qu'à chaque étape t , $t = 1, \dots, f - 1$, le graphe obtenu est $(S \cap F_{t+1})$ -connexe.

Soit k , $1 \leq k \leq f - 1$, une étape quelconque. Notons par G_2 le graphe obtenu à la fin de l'étape $k - 1$, et posons $G_1 = F_k$ et $S^k = S \cap F_k$.

Selon les théorèmes 4.4.3, 4.4.4, 4.4.5 et 4.4.6 il existe un bon ordre des sommets de S^k . Suivant cet ordre, nous identifions itérativement les sommets de $G_1 \cap S^k$ et $G_2 \cap S^k$ une paire de sommets à la fois. Comme à chaque itération, la paire de sommets à identifier forme une paire d'amis, le théorème 4.3.2 nous garantit que pour caractériser le polytope des stables du graphe courant, il suffit d'identifier seulement les variables associées aux sommets identifiés sans rajouter de nouvelles inéquations. A la fin de la dernière itération, nous aurons alors, $STB(G_1 \Phi_{S^k} G_2) = STB(G_1) \cap STB(G_2)$.

Le lemme 4.3.1 et le corollaire 4.3.1 nous garantissent, à leur tour, que le graphe obtenu à la fin de chaque itération reste parfait (resp. h -parfait) (resp. k -colorable) si G_1 et G_2 sont parfaits (resp. h -parfaits) (resp. k -colorables). \square

4.5 Conclusion et remarques

Le polytope des stables du graphe $G = G_1 \Phi_H G_2$ est donc entièrement décrit par l'union des systèmes définissant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$, à chaque fois où les sous-graphes peuvent être identifiés itérativement suivant un bon ordre. Dans un tel cas, l'opération Φ préserve la perfection et la h-perfection.

Quand G_1 et G_2 sont fortement compatibles relativement à H , tous les ordres sont bons. Parfois, ce comportement s'inverse dès qu'on supprime la condition de la forte compatibilité, même si l'opération Φ ne crée ni trou impair ni son complémentaire et $STB(G)$ est défini par l'union des systèmes.

Dans le cas où le sous-graphe H est un stable et l'opération Φ ne crée pas de trou impair (ce qui implique que G_1 et G_2 sont faiblement compatibles relativement à H), le problème de l'existence d'un bon ordre est équivalent à celui de l'existence d'un sommet, de ce stable, qui ne soit critique dans aucun des graphes G_1 et G_2 . Ce problème est alors résolu lorsque le stable H a moins de cinq sommets ou bien l'un des deux graphes est non-critique (relativement à H), presque biparti ou série-parallèle. Il reste ouvert pour n'importe quels graphes G_1 et G_2 (sous les mêmes hypothèses).

Notons, tout de même, que la vérification des hypothèses de ces résultats n'est pas toujours facile. En effet, considérons le problème suivant :

Etant donné un graphe G et un sommet x de ce graphe, existe-t-il un trou impair de G contenant x ?

Bienstock [20] montre que ce problème est NP-complet. Si pour un voisin x' de x , on désigne par G_1 le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête (x, x') et les sommets qui sont adjacents à la fois à x et x' , et par G_2 une chaîne d'extrémités x et x' ayant trois arêtes, alors le graphe G contient un trou impair passant par x et x' si et seulement si l'opération Φ (i.e. $\Phi_{\{x, x'\}}$) crée un trou impair. Ce qui implique que vérifier si Φ ne crée pas de trous impairs est un problème NP-dur.

De même, on considère une chaîne minimale, d'extrémités x et x' , dans G_1 ; si cette chaîne est impaire alors G contient un trou impair passant par x ; sinon, G ne contient pas de trou impair passant par x et x' si seulement si G_1 satisfait la condition forte (resp. faible) des chaînes relativement à $\{x, x'\}$. La vérification de la condition des chaînes est alors un problème NP-dur.

Corneil et Fonlupt [35] montrent qu'un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes parfaits implique un algorithme polynomial de vérification de la condition forte des chaînes pour les graphes parfaits.

Chapitre 5

Polytope des stables et jonction de deux sommets

5.1 Introduction

Etant donné un graphe simple non-orienté $G = (V, E)$. Soient u_1 et u_2 deux sommets non-adjacents de G .

Considérons l'opération qui transforme le graphe G en un autre graphe \tilde{G} en reliant les sommets u_1 et u_2 par une arête e , i.e. $\tilde{G} = (V, E \cup \{(u_1, u_2)\})$.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème qui consiste à déduire, à partir d'un système d'inéquations linéaires décrivant le polytope $STB(G)$ des stables de G , un autre système qui caractérise $STB(\tilde{G})$.

Etant donné que chaque graphe puisse être obtenu par applications successives de cette opération à partir d'un stable, ce problème est difficile dans sa forme générale. Nous l'étudierons dans certains cas particuliers, en l'occurrence, quand les sommets u_1 et u_2 forment une paire d'ennemis, une paire d'ennemis faible ou une deux-paire de G .

En faisant appel aux résultats des sections 4.3 et 4.4.1, nous montrerons que, dans ces cas, le polytope $STB(\tilde{G})$ est caractérisé par le système d'inéquations décrivant $STB(G)$ en lui rajoutant les contraintes associées aux nouvelles cliques maximales créées par la transformation.

5.2 Jonction d'une paire d'ennemis

Deux sommets non-adjacents forment une paire d'ennemis de G si toutes les chaînes minimales reliant ces deux sommets dans G sont impaires (i.e. elles ont un nombre impair d'arêtes).

Fonlupt et Uhry [54] montrent que la jonction d'une paire d'ennemis d'un graphe préserve la perfection.

Quant aux conséquences polyédrales de cette opération, il découle du théorème 4.3.2 :

Corollaire 5.2.1 *Si u_1 et u_2 forment une paire d'ennemis alors*

$$STB(\tilde{G}) = STB(G) \cap \{x \in R^{|V|} : x(u_1) + x(u_2) \leq 1\}$$

Preuve:

Nous considérons le graphe intermédiaire $G' = (V \cup \{u'_2\}, E \cup \{(u_1, u'_2)\})$.

Du fait que G' admette un point d'articulation u_1 , nous avons

$$STB(G') = STB(G) \cap \{x \in R^{|V \cup \{u'_2\}|} : x(u_1) + x(u'_2) \leq 1\}.$$

Les sommets u_2 et u'_2 forment une paire d'amis dans G' et le graphe \tilde{G} est obtenu, à partir de G' , par identification de u_2 et u'_2 .

Le théorème 4.3.2 implique donc, que $STB(\tilde{G})$ est entièrement décrit par le système d'inéquations linéaires, associé au polytope $STB(G)$, en remplaçant la variable $x(u'_2)$ par $x(u_2)$. \square

Ce corollaire nous permet de déduire que la jonction d'une paire d'ennemis d'un graphe préserve également la h-perfection.

Corollaire 5.2.2 *Si G est h-parfait (resp. parfait) et les sommets u_1 et u_2 forment une paire d'ennemis de G alors, \tilde{G} est h-parfait (resp. parfait).*

Preuve :

Similaire à la preuve du corollaire 4.3.1. \square

5.3 Jonction d'une paire d'ennemis faible

Deux sommets non-adjacents forment une paire d'ennemis faible de G si toutes les chaînes minimales paires (i.e. celles ayant un nombre pair d'arêtes) reliant ces deux

sommets dans G sont de longueur 2.

Soit v un sommet de G , nous noterons par $N(v)$ l'ensemble des sommets de G qui sont adjacents à v .

Théorème 5.3.1 *Si u_1 et u_2 sont deux sommets non-adjacents de G tels que :*

- u_1 et u_2 forment une paire d'ennemis faible de G
- $N(u_1) \cap N(u_2) = K$, avec K une clique de G

alors

$$STB(\tilde{G}) = STB(G) \cap \{x \in R^{|V|} : \sum_{w \in K} x(w) + x(u_1) + x(u_2) \leq 1\}$$

Preuve:

$$\text{Posons } P = STB(G) \cap \{x \in R^{|V|} : \sum_{w \in K} x(w) + x(u) + x(v) \leq 1 \quad (i)\}.$$

Nous avons $STB(\tilde{G}) \subseteq P$, car tout sommet de $P(\tilde{G})$ vérifie les contraintes de P .

Supposons qu'il existe un point extrême \bar{x} de P tel que $\bar{x} \notin STB(\tilde{G})$. Comme tous les point entiers de P correspondent à des stables de \tilde{G} , \bar{x} est fractionnaire.

Le sommet \bar{x} sature la contrainte (i), parce que sinon, il serait un sommet de $STB(G)$. \bar{x} étant un point de $STB(G)$. Avec des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du théorème 4.3.2, nous montrons que \bar{x} se décompose de la manière suivante:

$$\bar{x} = \lambda_1 x^{000} + \lambda_2 x^{001} + \lambda_3 x^{010} + \lambda_4 x^{011} + \sum_{j=1}^{|K|} \beta_j x^{w_j}$$

$$\text{où } \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, 4, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, |K|, \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \sum_{j=1}^{|K|} \beta_j = 1,$$

$K = \{w_1, w_2, \dots, w_{|K|}\}$ et $x^{000}, x^{001}, x^{010}, x^{011}$ et $x^{w_j}, j = 1, \dots, |K|$, sont des sommets de $P(G)$ tels que:

$$\begin{aligned} x^{000}(K) &= 0, & x^{000}(u_1) &= 0, & x^{000}(u_2) &= 0, \\ x^{001}(K) &= 0, & x^{001}(u_1) &= 0, & x^{001}(u_2) &= 1, \\ x^{010}(K) &= 0, & x^{010}(u_1) &= 1, & x^{010}(u_2) &= 0, \\ x^{011}(K) &= 0, & x^{011}(u_1) &= 1, & x^{011}(u_2) &= 1, \\ x^{w_j}(w_j) &= 1, & x^{w_j}(K - \{w^j\}) &= 0, & x^{w_j}(u_1) &= 0, & x^{w_j}(u_2) &= 0, & j &= 1, \dots, |K| \end{aligned}$$

avec $x(K) = \sum_{j=1}^{|K|} x(w_j)$.

Le point \bar{x} vérifie alors, le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{x}(w_j) = \beta_j, & j = 1, \dots, |K| \\ \bar{x}(u_1) = \lambda_3 + \lambda_4 \\ \bar{x}(u_2) = \lambda_2 + \lambda_4 \\ \sum_{j=1}^{|K|} \bar{x}(w_j) + \bar{x}(u) + \bar{x}(v) = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \sum_{j=1}^{|K|} \beta_j = 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Nous en déduisons que $\lambda_1 = \lambda_4$.

Comme $\{x^{000}, x^{001}, x^{010}, x^{w_1}, \dots, x^{w_{|K|}}\} \subset P$ et \bar{x} est sommet de P , le scalaire λ_4 doit être non-nul.

Du fait que \bar{x} puisse s'écrire de la façon suivante :

$$\bar{x} = 2\lambda_1(\frac{1}{2}x^{000} + \frac{1}{2}x^{011}) + \lambda_2x^{001} + \lambda_3x^{010} + \sum_{j=1}^{|K|} \beta_j x^{w_j}$$

avec $(\frac{1}{2}x^{000} + \frac{1}{2}x^{011}) \in P$ et $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \sum_{j=1}^{|K|} \beta_j = 1$, les scalaires $\beta_1, \dots, \beta_{|K|}, \lambda_2$ et λ_3 doivent être tous nuls.

Par conséquent, $\bar{x} = \frac{1}{2}x^{000} + \frac{1}{2}x^{011}$.

\bar{x} est donc, un $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ -vecteur tel que $\bar{x}(K) = 0$ et $\bar{x}(u_1) = \bar{x}(u_2) = \frac{1}{2}$.

Soient: $V^0 = \{w \in V : \bar{x}(w) = 0\}$;

$V^{\frac{1}{2}} = \{w \in V : \bar{x}(w) = \frac{1}{2}\}$;

$V^1 = \{w \in V : \bar{x}(w) = 1\}$.

Notons que $G(V^{\frac{1}{2}})$ est un sous-graphe induit de $(G - K)$.

D'une manière identique à celle utilisée dans la démonstration du théorème 4.3.2, nous montrons que $G(V^{\frac{1}{2}})$ est biparti et peut être partitionné en $W^1 \cup W^2$ tel que $u_1 \in W^1$, $u_2 \in W^2$ et W^1 et W^2 soient des stables de G .

Soient $S^1 = V^1 \cup W^1$ et $S^2 = V^1 \cup W^2$. S^1 et S^2 sont des stables de G dont les vecteurs caractéristiques x^{s^1} et x^{s^2} appartiennent à P .

Le sommet \bar{x} peut donc, être écrit comme demi-somme de x^{s^1} et x^{s^2} . Ce qui contredit le fait qu'il soit un point extrême de P . \square

Corollaire 5.3.1 *Si G est h -parfait (resp. parfait) et les sommets u_1 et u_2 vérifient les hypothèses du théorème 5.3.1 alors, \tilde{G} est h -parfait (resp. parfait).*

Preuve :

Similaire à la preuve du corollaire 4.3.1. \square

Si $N(u_1) \cap N(u_2)$ n'induit pas une clique de G , l'ajout des inéquations associées aux nouvelles cliques maximales de \tilde{G} ne suffit pas toujours pour décrire $STB(\tilde{G})$. En effet, considérons le graphe G de la figure 5.1(a) où les sommets v_1 et v_2 forment une paire d'ennemis faible et $N(v_1) \cap N(v_2) = \{v_3, v_6\}$. La contrainte de roue $2x(v_1) + \sum_{i=2}^6 x(v_i) \leq 2$ définit une facette de $STB(\tilde{G})$, où \tilde{G} est donné dans la figure 5.1(b), qui n'est même pas valide pour $STB(G)$ (elle est violée par le stable $\{v_1, v_2\}$ de G).

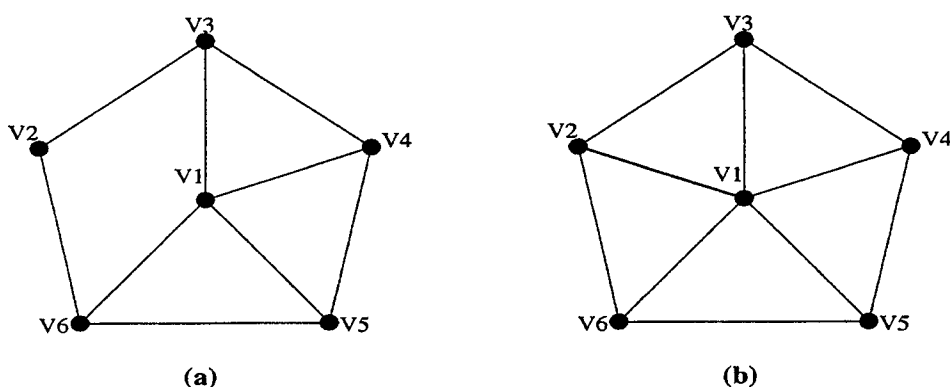


FIG. 5.1 - (a) le graphe G (b) le graphe transformé \tilde{G}

5.4 Jonction d'une deux-paire

Deux sommets non-adjacents forment une deux-paire de G si toutes les chaînes minimales reliant ces deux sommets dans G sont de longueur 2.

Soient u_1 et u_2 deux sommets formant une deux-paire de G .

Nous pouvons définir le graphe G de la manière suivante :

$G = (V_1 \cup V_2 \cup N \cup \{u_1, u_2\}, E_1 \cup E_2 \cup E_N)$ tel que $N = N(u_1) \cap N(u_2)$ soit un déconnectant de G . Nous supposons ici que V_1 et V_2 soient non-vides.

Nous avons vu, à travers l'exemple de la section précédente, que l'ajout des contraintes associées aux nouvelles cliques maximales de \tilde{G} ne suffit pas toujours pour caractériser $STB(\tilde{G})$. Dans le graphe G de la figure 5.1, les sommets v_1 et v_2 forment une deux-paire, alors que leurs voisins communs v_3 et v_4 ne forment pas une paire d'amis de G .

Le théorème suivant traite une situation où chaque paire de sommets non-adjacents de N est une paire d'amis dans G .

Théorème 5.4.1 *Si G est un graphe tel que :*

- $G(N)$ soit un système de cliques K_1, K_2, \dots, K_s (i.e. chaque composante connexe de $G(N)$ est une clique)
- chaque paire de sommets non-adjacents de N soit une paire d'amis dans $G(V_1 \cup N)$ et dans $G(V_2 \cup N)$

alors

$$STB(\tilde{G}) = STB(G) \cap \{x(u_1) + x(u_2) + x(K_i) \leq 1, i = 1, \dots, s\}.$$

Preuve:

Pour montrer ce résultat, nous supposons que le graphe \tilde{G} soit obtenu, par l'opération identification-jointure, à partir des deux graphes $G_1 = (V_1 \cup N_1 \cup \{u_1\}, E_1 \cup E_{N_1})$ et $G_2 = (V_2 \cup N_2 \cup \{u_2\}, E_2 \cup E_{N_2})$.

Ces deux graphes ne sont autres que des sous-graphes de G induits, respectivement, par les sous-ensembles de sommets $V_1 \cup N \cup \{u_1\}$ et $V_2 \cup N \cup \{u_2\}$, pour lesquels nous avons remplacé le sous-ensemble de sommets $N = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ par $N_1 = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1\}$ et $N_2 = \{v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2\}$. Les sous-graphes $G_1(N_1)$ et $G_2(N_2)$ sont donc isomorphes, et chaque paire de sommets non-adjacents de N_i , $i = 1, 2$, est une paire d'amis dans G_i .

L'opération identification-jointure consiste à identifier les sous-graphes $G_1(N_1)$ et $G_2(N_2)$ et à relier les deux sommets u_1 et u_2 par une arête e (voir figure 5.2).

Du fait que G_1 et G_2 soient fortement compatibles relativement à (N, E_N) , le théorème 4.4.2 implique que $STB(G) = STB(G_1) \cap STB(G_2)$.

Nous allons donc montrer l'égalité suivante:

$$STB(\tilde{G}) = STB(G_1) \cap STB(G_2) \cap$$

$$\left. \begin{array}{l} x(u_1) + x(u_2) + x(K_i) \leq 1, i = 1, \dots, s \\ x(v_i^1) = x(v_i^2), v_i^1 \in N_1 \text{ et } v_i^2 \in N_2 \text{ pour } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

(plus précisément, $STB(\tilde{G})$ est entièrement décrit en prenant l'union des systèmes définissant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$, en rajoutant les contraintes associées aux nouvelles cliques maximales, et en remplaçant chaque variable $x(v_i^2)$ par la variable $x(v_i^1)$,

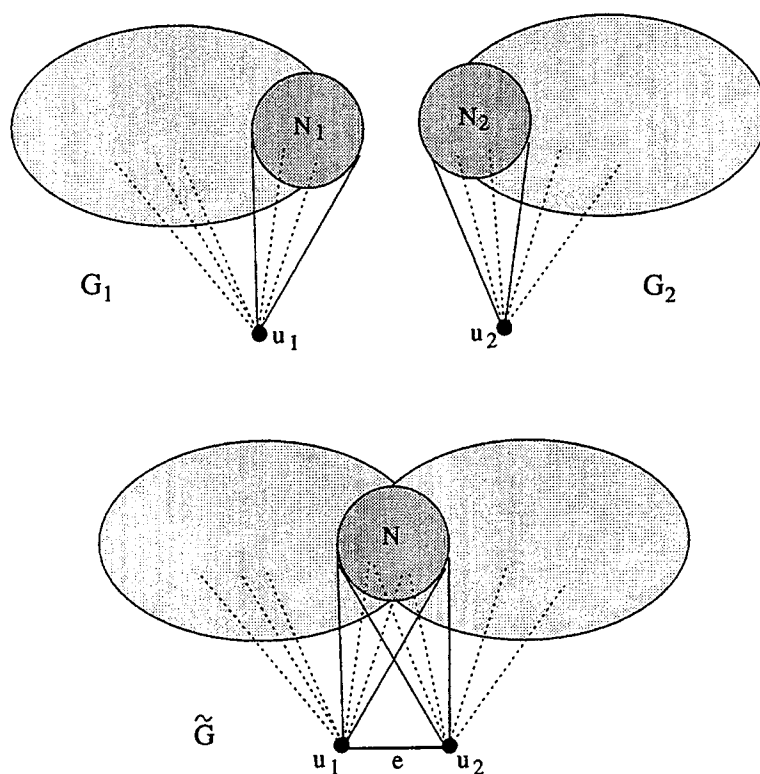


FIG. 5.2 -

$i = 1, \dots, n$).

Soit $G^{(0)}$ le graphe obtenu à partir de G_1 et G_2 en identifiant les deux cliques K_1^1 et K_1^2 de G_1 et G_2 . Du théorème 4.4.2, nous déduisons l'égalité suivante :

$$STB(G^{(0)}) = STB(G_1) \cap STB(G_2) \cap \{x(v_i^1) = x(v_i^2) : v_i^1 \in K_1^1, v_i^2 \in K_1^2, \\ i = 1, \dots, |K_1^1|\}$$

$G^{(1)}$ est le graphe obtenu à partir de $G^{(0)}$ en rajoutant l'arête $e = (u_1, u_2)$. Selon le théorème 5.3.1, $STB(G^{(1)}) = STB(G^{(0)}) \cap \{x(u_1) + x(u_2) + x(K_1^1) \leq 1\}$, car les sommets u_1 et u_2 forment une paire d'ennemis dans $G^{(0)}$ et l'intersection de leurs voisinages induit une clique.

Pour avoir le graphe \tilde{G} , i.e. $\tilde{G} = G^{(n)}$, nous identifions les sommets de N_1 et N_2 , sommet par sommet et clique par clique.

Notons par $M^{(j)}$ les sommets identifiés durant les itérations $0, 1, \dots, j$ (chaque sommet de $M^{(j)}$ est le résultat de l'identification d'un sommet de N_1 et d'un autre de N_2).

Remarquons que, d'après la proposition 4.4.1, tous les trous impairs du graphe $G^{(j)}$

sont contenus entièrement soit dans G_1 soit dans G_2 .

Soit $G^{(l)}$, $2 \leq l \leq n$, le graphe obtenu à partir de $G^{(l-1)}$ en identifiant les sommets $v_l^1 \in N_1$ et $v_l^2 \in N_2$ en un seul sommet $v_l \in N$ ($v_l \in M^{(l)}$).

Les sommets v_l^1 et v_l^2 ont le même ensemble de voisins $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{|Q|}\}$ dans $M^{(l-1)}$.

Comme N est un système de cliques, Q est une clique (la clique Q est vide si v_l est le premier sommet identifié d'une clique de $G(N)$).

Montrons l'égalité suivante:

$$STB(G^{(l)}) = STB(G^{(l-1)}) \cap \left\{ \begin{array}{l} x(u_1) + x(u_2) + x(v_l^1) + x(Q) \leq 1 \quad (i) \\ x(v_l^1) = x(v_l^2) \quad (ii) \end{array} \right\}. \quad (5.2)$$

Pour simplifier les notations, désignons par \bar{P} le polytope du second membre de l'égalité 5.2.

$STB(G^{(l)}) \subseteq \bar{P}$. En effet, tout sommet x de $STB(G^{(l)})$ est un stable de $G^{(l)}$ et, en même temps, un stable de $G^{(l-1)}$. Comme x vérifie les contraintes (i) et (ii), $x \in \bar{P}$.

Supposons que \bar{P} ne soit pas inclus dans $STB(G^{(l)})$, i.e. il existe un point extrême \bar{x} de \bar{P} qui n'appartienne pas à $P(G^{(l)})$.

\bar{x} est forcément fractionnaire, car sinon, \bar{x} sera un stable de $G^{(l-1)}$ vérifiant l'équation (i) et, après identification des sommets v_l^1 et v_l^2 , il sera également un stable de $G^{(l)}$.

Du fait que $STB(G^{(l-1)})$ soit entier, il existe t sommets de $STB(G^{(l-1)})$, x^1, x^2, \dots, x^t , ($t \geq 2$), et t scalaires positifs, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$, tels que $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$ et $\bar{x} = \sum_{i=1}^t \lambda_i x_i$.

Les sommets x^1, x^2, \dots, x^t appartiennent tous à la plus petite face de $P(G^{(l-1)})$ contenant \bar{x} , ils saturent donc les mêmes contraintes de $STB(G^{(l-1)})$ que \bar{x} .

Il n'existe pas deux indices i et j tels que $1 \leq i \neq j \leq t$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_j > 0$, $x^i \neq x^j$ et $x^i(u) = x^j(u) \forall u \in \{v_l^1, v_l^2, u_1, u_2\} \cup Q$, parce que sinon le point $\tilde{x} = \bar{x} - \lambda_j x^j + \lambda_i x^i$ sera différent de \bar{x} , appartiendra à \bar{P} ((i) et (ii) restent vérifiées) et saturera les mêmes contraintes de \bar{P} que \bar{x} . Ce qui contredit le fait que \bar{x} soit un point extrême de \bar{P} .

Le point \bar{x} peut alors s'écrire $\bar{x} = \sum_{i=1}^{|\mathcal{Q}|+8} \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \geq 0$ $i = 1, \dots, 8 + |\mathcal{Q}|$, $\sum_{i=1}^{|\mathcal{Q}|+8} \lambda_i = 1$ et $x^1, x^2, \dots, x^{|\mathcal{Q}|+8}$ sont des sommets de $STB(G^{(l-1)})$ tels que :

$$\begin{pmatrix} i \\ x^i(q_1) \\ \vdots \\ x^i(q_{|Q|+8}) \\ x^i(u_1) \\ x^i(u_2) \\ x^i(v_1^1) \\ x^i(v_1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots & |Q|+8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{x}(q_j) = \lambda_i \quad , \quad q_j \in Q \\ \bar{x}(u_1) = \lambda_3 + \lambda_5 \\ \bar{x}(u_2) = \lambda_2 + \lambda_7 \\ \bar{x}(v_1^1) = \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 \\ \bar{x}(v_1^2) = \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_8 \\ \sum_{i=1}^{|Q|+8} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, |Q| + 8 \end{cases} \quad (5.3)$$

1^{er} cas : \bar{x} ne sature pas la contrainte (i), i.e. $\bar{x}(u_1) + \bar{x}(u_2) + \bar{x}(v_1^1) + \bar{x}(Q) < 1$.
Dans ce cas \bar{x} est aussi un sommet fractionnaire du polytope

$$STB(G^{(l-1)}) \cap \{x(v_1^1) = x(v_1^2)\}.$$

D'après la remarque 4.3.1, \bar{x} est la demi-somme de deux sommets \bar{x}^1 et \bar{x}^2 de $P(G^{(l-1)})$ tels que

$$\bar{x}^1(v_1^1) = 1 \quad , \quad \bar{x}^2(v_1^1) = 0$$

$$\bar{x}^1(v_1^2) = 0 \quad , \quad \bar{x}^2(v_1^2) = 1$$

\bar{x} est donc un $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ -vecteur pour lequel $\bar{x}(v_1^1) = \bar{x}(v_1^2) = \frac{1}{2}$. Nous déduisons du système 5.3 que $\bar{x} = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6$.

Les sommets v_1^1 et v_1^2 forment une paire d'amis dans le support de \bar{x} . En effet, ce support ne contient ni le sommet u_1 ni le sommet u_2 ($x(u_1) = x(u_2) = 0$), et rappelons que n'importe quel ordre des sommets de N (suivant lequel nous obtenons ces sommets

par identification) est bon, car G_1 et G_2 sont fortement compatibles relativement à N (voir proposition 4.4.1).

Par un raisonnement pareil à celui suivi dans la preuve du théorème 4.3.2, nous arrivons à une contradiction.

2^{ème} cas : $\bar{x}(u_1) + \bar{x}(u_2) + \bar{x}(v_l^1) + \bar{x}(Q) = 1$.

De cette équation et du système 5.3 découle le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \lambda_4 + \lambda_5 = \lambda_6 + \lambda_7 \\ \lambda_7 = \lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_5 = \lambda_1 + \lambda_6 \end{cases} \quad (5.4)$$

Nous pouvons, dans ce cas, décomposer \bar{x} de la façon suivante :

$$\bar{x} = 3\lambda_1\left(\frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{3}x^7\right) + \lambda_2x^2 + \lambda_3x^3 + 2\lambda_4\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^7\right) + 2\lambda_6\left(\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^6\right) + \sum_{i=8}^{|\mathcal{Q}|+8} \lambda_i x^i$$

où $(\frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{3}x^7)$, x^2 , x^3 , $(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^7)$, $(\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^6)$ et x^i , $8 \leq i \leq |\mathcal{Q}| + 8$, sont des points de \bar{P} (ils vérifient (i) et (ii)); et $3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_6 + \sum_{i=8}^{|\mathcal{Q}|+8} \lambda_i = 1$.

1^{er} sous-cas : $\lambda_7 = 0$

Cette égalité implique que $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ et $\lambda_5 = \lambda_6$.

Les scalaires $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_8, \dots, \lambda_{|\mathcal{Q}|+8}$ doivent être tous nuls, car sinon \bar{x} sera écrit comme combinaison convexe de différents points de \bar{P} et cela contredira le fait qu'il soit un point extrême de \bar{P} .

\bar{x} est alors la demi-somme de deux sommets de $STB(G(l-1))$, un de type x^5 et l'autre de type x^6 .

les sommets v_l^1 et v_l^2 forment alors une paire d'amis dans le support de \bar{x} ($\bar{x}(u_2) = 0$) et ça nous ramène au 1^{er} cas.

2^{ème} sous-cas : $\lambda_7 > 0$ ($\lambda_1 + \lambda_4 > 0$)

Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_4 > 0$ alors, \bar{x} sera une combinaison convexe de différents points de \bar{P} .

Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_4 > 0$ alors, ce cas sera pareil au 1^{er} sous-cas.

Examinons le cas où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_4 = 0$. Les scalaires λ_1, λ_5 et λ_7 sont donc tous positifs.

Comme \bar{x} est un points extrême de \bar{P} , $\bar{x} = \frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{3}x^7$ (rappelons que x^1, x^5 et x^7 sont des stables de $G^{(l-1)}$).

Soit y le stable de $G^{(l-1)}$ défini comme suit :

$$y(v) = \begin{cases} x^7(v) & \text{si } v \in V_1 \cup N_1 \cup \{u_1\} \\ x^5(v) & \text{si } v \in V_2 \cup N_2 \cup \{u_2\} \end{cases}$$

Posons $z = \frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3}y$, et

$$V^0 = \{v \in V(G^{(l-1)}) : z(v) = 0\}$$

$$V^{\frac{1}{3}} = \{v \in V(G^{(l-1)}) : z(v) = \frac{1}{3}\}$$

$$V^{\frac{2}{3}} = \{v \in V(G^{(l-1)}) : z(v) = \frac{2}{3}\}$$

$u_1, u_2 \in V^0$, $Q \subset V^0$, $v_i^1, v_i^2 \in V^{\frac{1}{3}}$ et $M^{(l-1)} \subset (V^0 \cup V^{\frac{1}{3}})$.

Du fait que les composantes de y associées au sommets de $M^{(l-1)}$ soient nulles ($x^5(u_1) = x^7(u_2) = 1$), l'ensemble $(M^{(l-1)} \cap V^{\frac{1}{3}}) \cup \{v_i^1, v_i^2\}$ est un stable de $G^{(l-1)}$. $V^{\frac{2}{3}}$ l'est aussi.

Le sous-graphe $G^{(l-1)}(V^{\frac{1}{3}})$ ne contient pas de triangle, car s'il en contient un, alors deux sommets de ce triangle appartiendront soit au stable x^1 soit au stable y .

De la même manière, nous montrons que $G^{(l-1)}(V^{\frac{1}{3}})$ ne contient pas de trou impair, et par la suite, il ne contient pas de cycle impair. $G^{(l-1)}(V^{\frac{1}{3}})$ est donc biparti.

Comme tous les sommets de $(M^{(l-1)} \cap V^{\frac{1}{3}}) \cup \{v_i^1\}$ (resp. $(M^{(l-1)} \cap V^{\frac{1}{3}}) \cup \{v_i^2\}$) forment, deux à deux, des paires d'amis dans G_1 (resp. G_2), les sommets de $G((M^{(l-1)} \cap V^{\frac{1}{3}}) \cup \{v_i^1, v_i^2\})$ forment, deux à deux, des paires d'amis dans $G^{(l-1)}(V^{\frac{1}{3}})$. $V^{\frac{1}{3}}$ peut être, alors, partitionné en $W_1 \cup W_2$ tel que W_1 et W_2 soient des stables de $G^{(l-1)}$ et $((M^{(l-1)} \cap V^{\frac{1}{3}}) \cup \{v_i^1, v_i^2\}) \subseteq W_1$.

Remarquons que $\forall v \in V^{\frac{1}{3}}$ et $\forall v' \in V^{\frac{2}{3}}$, $(v, v') \notin E(G^{(l-1)})$ (z est une combinaison de deux stables de $G^{(l-1)}$).

Désignons par z^1 le vecteur caractéristique du stable $V^{\frac{2}{3}} \cup W_1$ et par z^2 le vecteur caractéristique du stable $V^{\frac{2}{3}} \cup W_2$. Nous décomposons alors, le point z comme suit, $z = \frac{1}{3}z^1 + \frac{1}{3}z^2$. Notons que :

$$z^1(v_i^1) = z^1(v_i^2) = 1 \text{ et } z^1(u_1) = z^1(u_2) = 0$$

$$z^2(v_i^1) = z^2(v_i^2) = z^2(u_1) = z^2(u_2) = 0 \text{ et } z^2(v) = 0, \forall v \in M^{(l-1)}$$

Soient z^3 et z^4 les deux stables de $G^{(l-1)}$ définis de la manière suivante :

$$z^3(v) = \begin{cases} z^2(v) & \text{si } v \in V_1 \cup N_1 \cup \{u_1\} \\ x^7(v) & \text{si } v \in V_2 \cup N_2 \cup \{u_2\} \end{cases}$$

$$z^4(v) = \begin{cases} x^5(v) & \text{si } v \in V_1 \cup N_1 \cup \{u_1\} \\ z^2(v) & \text{si } v \in V_2 \cup N_2 \cup \{u_2\} \end{cases}$$

Les points z^1 , z^3 et z^4 appartiennent tous au polytope \bar{P} (car ce sont des stables de $G^{(l-1)}$ qui vérifient les contraintes (i) et (ii)).

Finalement, le sommet \bar{x} de \bar{P} s'écrit $\bar{x} = \frac{1}{3}z^1 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{3}z^4$. Contradiction.

A la fin de chaque itération, lors de l'identification de N_1 et N_2 sommet par sommet, nous éliminons les contraintes associées aux cliques non-maximales (ces contraintes étant dominées par celles associées aux cliques maximales). \square

Dans la preuve du théorème 5.4.1, nous avons supposé que le graphe \tilde{G} s'obtient par composition de deux graphes G_1 et G_2 , en identifiant les sous-graphes engendrés par N_1 et N_2 (où N_i , $i = 1, 2$, est inclu dans le voisinage de u_i) et en reliant les sommets u_1 et u_2 par une arête. (voir figure 5.2).

Quand N_1 et N_2 induisent des cliques de G_1 et G_2 respectivement, cette opération ressemble à l'opération amalgame définie par Burlet et Fonlupt [25] et dont les conséquences polyédrales ont été étudiées par les mêmes auteurs [25].

Si on note par G^A le graphe obtenu par l'opération amalgame à partir de G_1 et G_2 , alors $STB(G^A)$ s'obtiendra par une simple projection, faisant disparaître les variables associées aux sommets u_1 et u_2 , de la face de $STB(\tilde{G})$ obtenue en serrant l'inéquation de la nouvelle clique maximale.

En se plaçant dans les conditions du théorème 5.4.1, nous pouvons évidemment en déduire que la jonction d'une deux paire préserve la h-perfection. Le théorème suivant montre que cette opération préserve la perfection de n'importe quel graphe parfait G .

Théorème 5.4.2 *Si G est parfait alors \tilde{G} est parfait.*

Preuve:

Notons par ω (resp. $\tilde{\omega}$) la taille d'une clique maximum de G (resp. \tilde{G}).

Il suffit de montrer, quitte à remplacer \tilde{G} par un sous-graphe, que \tilde{G} est colorable en $\tilde{\omega}$ couleurs.

Si $\tilde{\omega} = \omega + 1$ (la taille d'une clique maximum de $G(N)$ est $\omega - 1$) alors, nous colorons $G - \{u_1\}$ en ω couleurs et nous affectons, ensuite, une nouvelle couleur au sommet u_1 .

Supposons que $\tilde{\omega} = \omega$. Cela implique que la taille, $\hat{\omega}$, d'une clique maximum de $G(N)$ est égale à au plus $\omega - 2$.

Soient $G_1 = (V_1 \cup N \cup \{u_1, u_2\}, E_1 \cup E_N)$ et $G_2 = (V_2 \cup N \cup \{u_1, u_2\}, E_2 \cup E_N)$ deux sous-graphes de G (G_1 et G_2 sont parfaits).

Considérons le graphe \tilde{G}_1 (resp. \tilde{G}_2) obtenu à partir de G_1 en remplaçant le sommet u_2 (resp. u_1) par une clique K_2 (resp. K_1) de taille $\omega - \hat{\omega}$; chaque sommet de K_i , $i = 1, 2$, est adjacent à tous les sommets de N (voir figure 5.3).

La substitution d'un sommet par un graphe parfait est connue pour être une opération préservant la perfection [73]. Les graphes \tilde{G}_1 et \tilde{G}_2 sont donc parfaits.

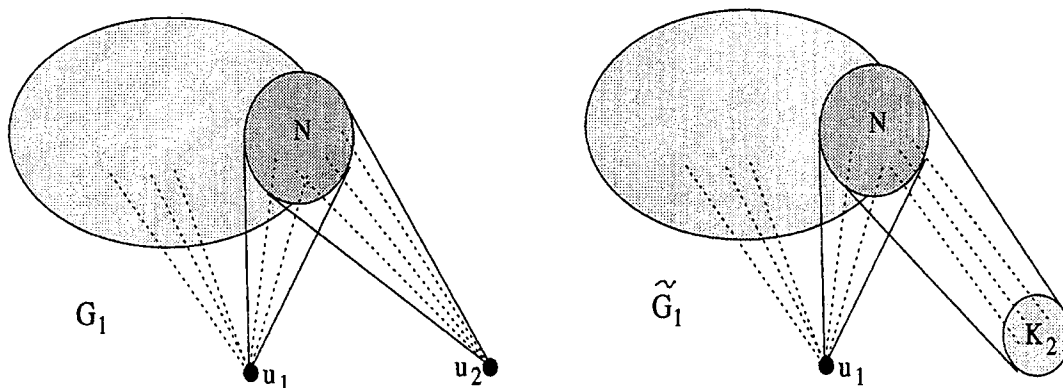


FIG. 5.3 -

La taille d'une clique maximum de \tilde{G}_1 est égale à ω . Colorons, en ω couleurs, le graphe \tilde{G}_1 . Tous les sommets de N sont colorés en $\hat{\omega}$ couleurs.

Il existe donc, deux couleurs "blanc" et "noir" telles que u_1 soit coloré en "blanc", et que ces deux couleurs n'apparaissent pas dans N .

Notons par S_1^1 le stable de $G(V_1 \cup N \cup \{u_1\})$ associé à la couleur "blanc", et par S_2^1 celui associé à la couleur "noir". $S_1^1 \cap N = \phi$, $S_2^1 \cap N = \phi$ et $u_1 \in S_1^1$.

De la même manière, nous montrons qu'il existe deux stables S_1^2 et S_2^2 de $G(V_2 \cup N \cup \{u_2\})$ tels que $S_1^2 \cap N = \phi$, $S_2^2 \cap N = \phi$ et $u_2 \in S_1^2$.

$S_1 = S_1^1 \cup S_2^2$ et $S_2 = S_2^1 \cup S_1^2$ sont deux stables de G ($S_1 \cap \{u_1, u_2\} = \{u_1\}$ et $S_2 \cap \{u_1, u_2\} = \{u_2\}$) qui intersectent toutes les cliques de cardinalité ω .

$G - (S_1 \cup S_2)$ est parfait et toutes ses cliques maximum sont de taille $\omega - 2$.

Nous déduisons qu'il existe une coloration de G en ω couleurs telle que les sommets u_1 et u_2 n'aient pas la même couleur. Cette coloration est également une coloration optimale de \tilde{G} . \square

Conclusion

Le travail que nous venons de présenter traite de la composition des polyèdres. Il élimine quelques questions et en propose d'autres.

Les chapitres 2 et 3 ont fait l'objet de l'étude d'une approche de composition de polyèdres basée sur la programmation dynamique. Partant d'une décomposition d'un problème d'optimisation combinatoire, cette approche conduit à une description du polyèdre associé à celui-ci, à chaque fois que des descriptions parfaitement composables (relatives aux sous-problèmes) puissent être mises en évidence. Cette dernière condition en constitue le point primordial généralement difficile. La notion de descriptions parfaites offre une possibilité d'introduire des variables artificielles et de définir des descriptions parfaitement composables qui sont aisément reconnaissables; ce qui unifie des résultats existant dans ce domaine. Une étude de la détermination (ou la reconnaissance) des descriptions parfaitement composables et du choix de celles-ci serait donc profitable pour cette approche.

L'obtention de la description du polytope des stables $STB(G)$ associé à un graphe G , tel que $G = G_1 \Phi_H G_2$, à partir des descriptions de $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ est un problème difficile dans le cas général. Nous l'avons étudié, au chapitre 4, dans certaines situations où l'union des systèmes définissant $STB(G_1)$ et $STB(G_2)$ suffit pour décrire $STB(G)$ (l'opération Φ ne crée ni trou impair ni anti-trou impair). La démarche poursuivie consiste à déterminer un bon ordre des sommets de H , et d'identifier les deux sous-graphes itérativement (i.e. une paire de sommets à la fois) selon cet ordre. Dans le cas où G_1 et G_2 sont fortement compatibles relativement à H , tous les ordres des sommets de H sont bons. Dans le cas contraire, il s'avère parfois que tous les ordres soient mauvais même si l'union des deux systèmes suffit pour décrire $STB(G)$. Quand

H est un stable et l'opération Φ ne crée pas de trou impair (ce qui implique que G_1 et G_2 sont faiblement compatibles relativement à H), l'existence d'un bon ordre paraît légitime et se ramène à celle d'un sommet de H qui ne soit critique ni dans G_1 ni dans G_2 . L'existence d'un tel sommet a été prouvée lorsque l'un des deux graphes appartient à certaines classes particulières; cependant, elle reste une question ouverte pour deux graphes arbitraires G_1 et G_2 tel que $|H| \geq 5$.

La jonction de deux sommets d'un graphe G peut engendrer l'ajout d'un certain nombre d'inéquations non triviales au système définissant $STB(G)$ afin de décrire le polytope des stables du nouveau graphe \tilde{G} . Sous quelques conditions portant sur l'intersection des voisinages des sommets joints, les résultats proposés dans le chapitre 5 montrent que, pour la jonction d'une paire d'ennemis, une paire d'ennemis faible ou une deux-paire, l'adjonction des contraintes associées aux cliques maximales nouvellement créées suffit pour décrire $STB(G)$.

Bibliographie

- [1] ARNBORG (S.), LAGERGREN (J.) et SEESE (D.). – Easy Problems for Tree-Decomposable Graphs. *J. Algorithms*, vol. 12, n° 2, 1991, pp. 308–340.
- [2] AVIS (D.) et FUKUDA (K.). – A Pivoting Algorithm for Convex Hulls and Vertex Enumeration of Arrangements and Polyhedra. *Discrete et Computational Geometry*, vol. 8, 1992, pp. 295–313.
- [3] BALAS (E.). – *Projection with a Minimal System of Inequalities*. – Rapport technique n° MSRR-585, Carnegie Mellon University, Graduate School of Industrial Administration, juillet 1992.
- [4] BALAS (E.) et PULLEYBLANK (W.R.). – The Perfect Matchable Subgraph Polytope of a Bipartite Graph. *Networks*, vol. 13, 1983, pp. 495–516.
- [5] BALAS (E.) et PULLEYBLANK (W.R.). – *The Perfect Matchable Subgraph Polytope of an arbitrary Graph*. – Rapport technique n° MSRR-538, Carnegie Mellon University, Graduate School of Industrial Administration, 1987.
- [6] BALL (M.O.), LIU (W.G.) et PULLEYBLANK (W.R.). – *Two Terminal Steiner Tree Polyhedra*. – Rapport technique n° CORR 87-33, University of Waterloo, 1987.
- [7] BARAHONA (F.). – The Max Cut Problem in Graphs not Contractible to K_5 . *Operations Research Letters*, vol. 2, n° 3, août 1983, pp. 107–111.
- [8] BARAHONA (F.). – *Reducing Matching to Polynomial Size Linear Programming*. – Rapport technique n° CORR 88-51, Faculty of Mathematics, University of Waterloo, december 1988.
- [9] BARAHONA (F.). – On Cuts and Matchings in Planar Graphs. *Mathematical Programming, Series A*, vol. 60, n° 1, 1993, pp. 53–68.

- [10] BARAHONA (F.), FONLUPT (J.) et MAHJOUR (A.R.). – Composition of Graphs and Polyhedra IV: Acyclic Spanning Subgraphs. *SIAM J. Discrete Math*, vol. 3, 1994, pp. 390–402.
- [11] BARAHONA (F.) et GRÖTSCHEL (M.). – *The Traveling Salesman Problem for Graphs not Contractible to $K_5 - \{e\}$* . – Rapport technique n° 77, Mathematisches Institut - Universität Augsburg, June 1985.
- [12] BARAHONA (F.) et MAHJOUR (A.R.). – Composition of Graphs and Polyhedra I: Balanced Induced Subgraphs and Acyclic Subgraphs. *SIAM J. Discrete Math*, vol. 7, n° 3, 1994, pp. 344–358.
- [13] BARAHONA (F.) et MAHJOUR (A.R.). – Composition of Graphs and Polyhedra II: Stable Sets. *SIAM J. Discrete Math*, vol. 7, n° 3, 1994, pp. 359–371.
- [14] BARAHONA (F.) et MAHJOUR (A.R.). – Composition of Graphs and Polyhedra III: Graphs with no W_4 Minor. *SIAM J. Discrete Math*, vol. 7, n° 3, 1994, pp. 372–389.
- [15] BARAHONA (F.) et MAHJOUR (A.R.). – On Two-Connected Subgraph Poltopes. *Discrete Mathematics*, vol. 147, 1995, pp. 19–34.
- [16] BELLMAN (R.). – *Dynamic Programming*. – Princeton University Press, 1957.
- [17] BERGE (C.). – *Theory of Graphs and its Applications*. – Methuen, London, 1962.
- [18] BERGE (C.). – *Graphs and Hypergraphs*. – North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [19] BERN (M. W.), LAWLER (E. L.) et WONG (A.L.). – Linear-Time Computation of Optimal Subgraphs of Decomposable Graphs. *J. Algorithms*, vol. 8, n° 2, 1987, pp. 216–235.
- [20] BIENSTOCK (D.). – On the Complexity of Testing for Odd Holes and Induced Odd Paths. *Discrete Math.*, vol. 90, 1991, pp. 85–92.
- [21] BIXBY (R.E.). – A Composition for Perfect Graphs. *Ann. Discrete Math.*, vol. 21, 1984, pp. 221–224.
- [22] BOUCHAKOUR (M.) et MAHJOUR (A.R.). – *One-node Cutsets and the Dominating Set Polytope*. – Rapport technique, U.B.O., Brest, 1995.

- [23] BOULALA (M.) et UHRY (J.P.). – Polytope des Indépendants d'un Graphe Série-Parallèle. *Discrete Math.*, vol. 27, 1979, pp. 225–243.
- [24] BOYD (S.C.) et CUNINGHAM (W.H.). – *Small Traveling Salesman Polytopes*. – Rapport technique n° 88540-OR, Carleton University-Otawa, octobre 1988.
- [25] BURLET (M.) et FONLUPT (J.). – Polynomial Algorithm to recognize a Meyniel Graph. In: *Topics on Perfect Graphs*, éd. par BERGE (C.) et CHVÁTAL (V.), pp. 225–252. – Ann. Discrete Math. (North-Holland, Amsterdam), 1984.
- [26] BURLET (M.) et FONLUPT (J.). – Polyhedral Consequences of the Amalgam Operation. *Discrete Mathematics*, vol. 130, 1994, pp. 39–55.
- [27] BURLET (M.) et UHRY (J.P.). – Parity Graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 16, 1982, pp. 1–26.
- [28] CHOPRA (S.). – The Graph Partitioning Polytope on Series-Parallel and 4-Wheel Free Graphs. *SIAM J. Discrete Mathematics*, vol. 7, n° 1, février 1994, pp. 16–31.
- [29] CHOPRA (S.) et RAO (M.R.). – The Steiner Tree Problem I: Formulations, Compositions and Extension of Facets. *Mathematical Programming*, vol. 64, n° 2, 1994, pp. 209–230.
- [30] CHRISTOF (T.), JÜNGER (M.) et REINELT (G.). – A Complete Description of the Traveling Salesman Polytope on 8 nodes. *Operations Research Letters*, vol. 10, 1991, pp. 497–500.
- [31] CHVÁTAL (V.). – On certain polytopes associated with graphs. *J. of Comb. Theory B*, vol. 18, 1975, pp. 138–154.
- [32] CLOCHARD (J.-M.) et NADDEF (D.). – Using Path Inequalities in a Branch and Cut Code for the Symmetric Traveling Salesman Problem. In: *Third Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO)*, éd. par RINALDI (G.) et WOLSEY (L.A.), pp. 291–311.
- [33] CORNEIL (D.G.) et KIRKPATRICK (D.G.). – Families of Recursively Defined Perfect Graphs. In: *Graph Theory and Computing*, pp. 237–246. – 14th Southeastern Conference on Combinatorics, 1983.
- [34] CORNEIL (D.G.) et STEWART (L.K.). – Dominating Set in Perfect Graphs. *Discrete Mathematics*, vol. 86, 1990, pp. 145–164.

- [35] CORNEIL (G.) et FONLUPT (J.). – Stable Set Bonding in Perfect Graphs and Parity Graphs. *J. Comb. Theory (B)*, vol. 59, 1993, pp. 1–14.
- [36] CORNUÉJOLS (G.) et CUNNINGHAM (W.H.). – Compositions for Perfect Graphs. *Discrete Math.*, vol. 55, 1985, pp. 245–254.
- [37] CORNUEJOLS (G.), FONLUPT (J.) et NADDEF (D.). – The Traveling Salesman Problem on a Graph and Some Related Integer Polyhedra. *Mathematical Programming*, vol. 33, 1985, pp. 1–27.
- [38] CORNUEJOLS (G.), NADDEF (D.) et PULLEYBLANK (W.R.). – Halin graphs and the Traveling Salesman Problem. *Mathematical Programming*, vol. 26, 1983, pp. 287–294.
- [39] CORNUÉJOLS (G.), NADDEF (D.) et PULLEYBLANK (W.R.). – The Traveling Salesman Problem in Graphs with 3-Edge Cutsets. *J. Assoc. Comp. Machinery*, vol. 32, n° 2, avril 1985, pp. 383–410.
- [40] CORNUEJOLS (G.) et REED (B.). – Complete Multi-partite Cutsets in Minimal Imperfect Graphs. *J. Comb. Theory (B)*, vol. 59, 1993, pp. 191–198.
- [41] CUNNINGHAM (W.H.). – Polyhedra for Composed Independence Systems. *Bonn Workshop on Combinatorial Optimization, Ann. Discrete Math.*, vol. 16, 1982, pp. 57–67.
- [42] DANTZIG (G.B.). – *Linear Programming and Extensions*. – Princeton University Press, 1963.
- [43] DIRAC (G.). – On Rigid Circuit Graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 25, 1961, pp. 71–76.
- [44] DUFFIN (R.J.). – Topology of Series-Parallel Networks. *J. Mathematical Analysis and Applications*, vol. 10, 1965, pp. 303–318.
- [45] ELNACHEFF (A.) et FONLUPT (J.). – *Problème du Voyageur de Commerce Graphique : Composition des Facettes et des Polyèdres*. – Rapport technique n° RT.7, ARTEMIS-IMAG Grenoble, 1986.
- [46] EULER (R.) et MAHJOUB (A.R.). – On a Composition of Independence Systems by Circuit Identification. *J. Combinatorial Theory, Series B*, vol. 53, n° 2, 1991, pp. 235–259.

- [47] FARBER (M.). – Domination, Independent Domination, and Duality in Strongly Chordal Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 7, 1984, pp. 115–130.
- [48] FLEISCHMAN (B.). – A New Class of Cutting Planes for the Symmetric Traveling Salesman Problem. *Mathematical Programming*, vol. 40, 1988, pp. 225–246.
- [49] FONLUPT (J.), MAHJOUB (A.R.) et UHRY (J.P.). – *Composition of Graphs and the Bipartite Subgraph Polytope*. – Rapport technique n° 459, IMA Grenoble-ARTEMIS, octobre 1984.
- [50] FONLUPT (J.), MAHJOUB (A.R.) et UHRY (J.P.). – Compositions in the Bipartite Subgraph Polytope. *Discrete Mathematics*, vol. 105, 1992, pp. 73–91.
- [51] FONLUPT (J.) et NACHEF (A.). – *Le Problème du Voyageur de Commerce Relaxé sur Quelques Classes de Graphes*. – Rapport technique n° 23, Institut de Mathématiques appliquées de Grenoble - ARTEMIS, Mai 1987.
- [52] FONLUPT (J.) et NACHEF (A.). – *Dynamic Programming and the Graphical Traveling Salesman Problem*. – Rapport technique n° 851-I, Institut de Mathématiques appliquées de Grenoble - ARTEMIS, Avril 1991.
- [53] FONLUPT (J.) et NADDEF (D.). – The Traveling Salesman Problem in Graphs with some Excluded Minors. *Mathematical Programming*, vol. 53, 1992, pp. 147–172.
- [54] FONLUPT (J.) et UHRY (J.P.). – Transformations which Preserve Perfectness and h -perfectness of graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 16, 1982, pp. 83–95.
- [55] FONLUPT (J.) et ZEMIRLINE (A.). – *A Polynomial Recognition Algorithm for Perfect $K_4 - \{e\}$ -free Graphs*. – Rapport technique n° RT.16, ARTEMIS-IMAG Grenoble, 1987.
- [56] GAREY (M.R.) et JOHNSON (D.S.). – *Computers and Intractability, a Guide to the Theory of NP-Completeness*. – Freeman, New York, 1979.
- [57] GERARDS (A.M.H.). – A Min-Max Relation for Stable Sets in Graphs with no Odd- K_4 . *J. Comb. Theory (B)*, vol. 47, 1989, pp. 330–348.
- [58] GERARDS (A.M.H.) et SCHRIJVER (A.). – Matrices with the Edmonds-Johnson Property. *Combinatorica*, vol. 6, 1986, pp. 403–417.

- [59] GOLUMBIC (M.C.). – *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. – Academic Press, New York, 1980.
- [60] GRÖTSCHEL (M.), LOVÁSZ (L.) et SCHRIJVER (A.). – Polynomial Algorithms for Perfect Graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 21, 1984, pp. 325–356.
- [61] GRÖTSCHEL (M.), LOVÁSZ (L.) et SCHRIJVER (A.). – *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. – Springer, 1988.
- [62] GRÖTSCHEL (M.) et PADBERG (M.). – On the Symmetric Traveling Salesman Problem I: Inequalities. *Mathematical Programming*, vol. 16, 1979, pp. 265–280.
- [63] GRÖTSCHEL (M.) et PADBERG (M.). – On the Symmetric Traveling Salesman Problem II: Lifting Theorems and Facets. *Mathematical Programming*, vol. 16, 1979, pp. 281–302.
- [64] GRÖTSCHEL (M.) et PADBERG (M.). – Polyhedral Theory. In: *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, éd. par LAWLER (E.), LENSTRA (J.), RINNOOY KAN (A.) et SHMOYS (D.). – Wiley, New York, 1986.
- [65] GRÖTSCHEL (M.) et PULLEYBLANK (W.). – Clique Tree Inequalities and the Symmetric Traveling Salesman Problem. *Operations Research*, vol. 11, 1986, pp. 537–569.
- [66] HASSIN (R.) et TAMIR (A.). – Efficient Algorithms for Optimization and Selection on Series-Parallel Graphs. *SIAM J. Alg. Disc. Methods*, vol. 7, n° 3, 1986.
- [67] HEDETNIEMI (S.T.), LASKAR (R.) et PFAFF (J.). – A Linear Algorithm for finding a Minimum Dominating Set in a Cactus. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 13, 1986, pp. 287–292.
- [68] HSU (W.L.). – Recognizing Planar Perfect Graphs. *J. Assoc. Computing Machinery*, vol. 34, 1987, pp. 255–288.
- [69] KARMARKAR (N.). – A New Polynomial-time Algorithm for linear Programming. *Combinatorica*, vol. 4, 1984, pp. 373–395.
- [70] KARP (R.M.) et PAPADIMITRIOU (C.H.). – On Linear Characterization of Combinatorial Optimization Problems. *SIAM J. Computing*, vol. 11, 1982, pp. 620–632.

- [71] KHACHIYAN (L.G.). – A Polynomial Algorithm in Linear Programming. *Soviet Math. Dokl.*, vol. 20, 1979, pp. 191–194.
- [72] KIKUNO (T.), YOSHIDA (N.) et KAKUDA (Y.). – A Linear Algorithm for the Domination number of a Series-Parallel Graph. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 5, n° 3, 1983, pp. 299–312.
- [73] LOVÁSZ (L.). – Normal Hypergraphs and the Perfect Graph Conjecture. *Discrete Math.*, vol. 2, 1972, pp. 253–267.
- [74] LOVÁSZ (L.). – A Characterization of Perfect Graphs. *J. Comb. Theory (B)*, vol. 13, 1972, pp. 95–98.
- [75] LOVÁSZ (L.). – Perfect Graphs. In: *Selected Topics in Graph Theory 2*, éd. par BEINEKE (L.W.) et WILSON (R.J.), pp. 55–87. – Academic Press, 1983.
- [76] LOVÁSZ (L.) et SCHRIJVER (A.). – *Cones of Matrices and Setfunctions, and 0-1 Optimization*. – Rapport technique n° BS-R8925, Department of Operations Research, Statistics, and System Theory, Amsterdam, 1989.
- [77] MACULAN (N.). – A New Linear Programming Formulation for the Shortest s-Directed Spanning Tree Problem. *J. Combinatorics, Information et System Sciences*, vol. 11, 1986, pp. 53–56.
- [78] MAFFRAY (F.). – *Une Etude Structurale des Graphes Parfaits*. – Thèse de PhD, LSD2 IMAG, 1992.
- [79] MAHJOUR (A.R.). – Le Polytope des Absorbants dans une Classe de Graphes à Seuil. *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 17, 1983, pp. 443–452.
- [80] MAHJOUR (A.R.). – On the Stable Set Polytope of a Series-Parallel Graph. *Mathematical Programming*, vol. 40, 1988, pp. 53–57.
- [81] MARGOT (F.). – *Composition de Polytopes Combinatoires: une Approche par Projection*. – Thèse de PhD, E.P.F. Lausanne, 1994.
- [82] MARGOT (F.), PRODON (A.) et LIEBLING (T.M.). – *Tree Polytope on 2-Trees*. – Rapport technique n° RO910524, EPF Lausanne, 1991.
- [83] MARGOT (F.) et SCHAFFERS (M.). – *Integrality Proof with a Silicon Flavor for Polytopes on Graphs Definable by Composition*. – Rapport technique n° RO911217, EPF Lausanne, 1991.

- [84] MARTIN (R.K.), RARDIN (R.L.) et CAMPBELL (B.A.). – Polyhedral Characterization of Discrete Dynamic Programming. *Operations Research*, vol. 38, n° 1, 1990, pp. 127–138.
- [85] MAURRAS (J.F.). – Some Results on the Convex Hull of Symmetric Complete Graphs. In: *Combinatorial Programming: Methods and Applications*, éd. par ROY (B.), pp. 179–190.
- [86] MEYNIEL (H.). – A New Property of Critical Imperfect Graphs and some Consequences. *European J. Comb.*, vol. 8, 1987, pp. 313–316.
- [87] NACHEF (A.). – *Le Problème du Voyageur de Commerce Relaxé: Etudes Algorithmiques et Polyédrales*. – Thèse de PhD, Université de Grenoble, janvier 1988.
- [88] NADDEF (D.). – *The Symmetric Traveling Salesman Polytope I: Valide Inequalities derived from the Graphical Relaxation*. – Rapport technique n° 660-M, ARTEMIS-IMAG Grenoble, 1987.
- [89] NADDEF (D.). – Handles and Teeth in the Symmetric Traveling Salesman Polytope. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 1, 1990, pp. 61–74.
- [90] NADDEF (D.). – The Binested Inequalities for the Symmetric Traveling Salesman Polytope. *Mathematics of Operations Research*, vol. 17, n° 4, novembre 1992, pp. 882–900.
- [91] NADDEF (D.) et RINALDI (G.). – The Symmetric Traveling Salesman Polytope and its Graphical Relaxation: Composition of Valid Inequalities. *Mathematical Programming*, vol. 51, 1991, pp. 359–400.
- [92] NADDEF (D.) et RINALDI (G.). – The Crown Inequalities for the Symmetric Traveling Salesman Polytope. *Mathematics of Operations Research*, vol. 17, n° 2, 1992, pp. 308–326.
- [93] NADDEF (D.) et RINALDI (G.). – The Graphical Relaxation: a New Framework for the Symmetric Traveling Salesman Polytope. *Mathematical Programming*, vol. 58, 1993, pp. 53–88.
- [94] NEMHAUSER (G.L.). – *Dynamic Programming*. – John Wiley and Sons Inc., 1966.

- [95] NEMHAUSER (G.L.) et TROTTER (L.E.). – Properties of Vertex Packing and Independence System Polyhedra. *Mathematical Programming*, vol. 8, 1975, pp. 232–248.
- [96] NOBILI (P.) et SASSANO (A.). – Polyhedral Properties of Clutter Amalgam. *SIAM J. Discrete Mathematics*, vol. 6, n° 1, 1993, pp. 139–151.
- [97] PADBERG (M.). – On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra. *Mathematical Programming*, vol. 5, 1973, pp. 199–215.
- [98] PADBERG (M.) et RINALDI (G.). – Optimization of 532-City Symmetric Traveling Salesman Problem by Branch-and-Cut. *Operations Research Letters*, vol. 6, 1987, pp. 1–7.
- [99] PADBERG (M.) et RINALDI (G.). – A Branch and Cut Algorithm for the Resolution of Large-scale Traveling Salesman Problems. *SIAM Review*, vol. 33, 1991, pp. 60–100.
- [100] PADBERG (M.) et SUNG (T.-Y.). – An Analytical Comparison of Different Formulations of the Travelling Salesman Problem. *Mathematical Programming*, vol. 52, 1991, pp. 315–357.
- [101] PULLEYBLANK (W.R.) et SHEPHERD (F.B.). – Formulations for the Stable Set Polytope of a Claw-free Graph. In : *Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO III)*, éd. par RINALDI (G.) et WOLSEY (L.A.), pp. 267–279. – Centro Majorana, Erice, mai 1993.
- [102] SBIHI (N.) et UHRY (J.P.). – A Class of h -Perfect Graphs. *Discrete Mathematics*, vol. 51, 1984, pp. 191–205.
- [103] SCHRIJVER (A.). – *Theory of Linear and Integer Programming*. – Wiley Interscience, Chichester, 1986.
- [104] TAKAMIZAWA (K.), NISHIZEKI (T.) et SAITO (N.). – Linear-Time Computability of Combinatorial Problems on Series-Parallel Graphs. *J. Assoc. Computing Machinery*, vol. 29, 1982, p. 3.
- [105] TROTTER (L.E.). – A Class of Facet Producing Graphs for Vertex Packing Polytopes. *Discrete Mathematics*, vol. 12, 1975, pp. 373–388.

-
- [106] TUCKER (A.). – Coloring Graphs with Stable Cutsets. *J. Comb. Theory (B)*, vol. 34, 1983, pp. 258–267.
- [107] WOLFRAM (S.). – *MATHEMATICA : A System for Doing Mathematics by Computer*. – Addison-Wesley Publishing Company, 1988.
- [108] WOLSEY (L.). – Further Facet Generating Procedures for Vertex Packing Polytopes. *Mathematical Programming*, vol. 11, 1979, pp. 158–163.
- [109] WONG (R.T.). – A Dual Ascent Approach to Steiner Tree Problems in Graphs. *Mathematical Programming*, vol. 28, 1984, pp. 271–287.
- [110] YANNAKAKIS (M.). – Expressing Combinatorial Optimization Problems by Linear Programs. In: *The 20th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 223–228. – Chicago, 1988.
- [111] ZEMIRLINE (A.). – *A Perfection-Preserving Operation*. – Rapport technique n° RR 911 -I, ARTEMIS-IMAG Grenoble, 1993.
- [112] ZEMIRLINE (A.). – Conséquences Polyédrales d'une Opération Préservant la Perfection. In: *Troisièmes Journées du Groupe MODE*, éd. par BARTHÉLEMY (J.P.) et MAHJOUR (A.R.). – Brest, mars 1995.

Résumé : Le polyèdre associé à un problème d'optimisation combinatoire est l'enveloppe convexe des (vecteurs d'incidence des) solutions réalisables de ce problème. De nombreux problèmes d'optimisation combinatoire se formulent comme une maximisation de fonctions linéaires sur les polyèdres qui leurs sont associés. La description du polyèdre par un système d'inéquations linéaires est intimement liée à la résolution du problème correspondant, par le biais de la programmation linéaire.

Afin de déterminer un tel système, une approche classique consiste à décomposer le problème en sous-problèmes tels que les polyèdres associés soient connus; une composition ultérieure de ces derniers conduit à une description du polyèdre associé au problème considéré.

L'objet principal de la thèse est l'étude de la composition des polyèdres. Dans un premier temps, une approche de composition, basée sur la programmation dynamique et les méthodes de projection polyédrale, est étudiée et des résultats généraux sont proposés, permettant ainsi d'unifier des recherches existantes dans ce domaine. Cette approche est, en suite, appliquée à la composition de polyèdres associés au problème du voyageur de commerce.

En seconde partie, considérant le problème du stable, des opérations sur les graphes (composition par identification de sous-graphes de deux graphes donnés, adjonction d'une nouvelle arête) sont traitées. Des résultats polyédraux sont donc donnés, et des conséquences concernant la perfection et la h-perfection des graphes sont montrées.

Mots-clé : Optimisation combinatoire, Polyèdres, Graphes, Programmation linéaire, Programmation dynamique, Polyèdre du voyageur de commerce, Polytope des stables, graphes parfaits.

Abstract : The polyhedron associated to a combinatorial optimization problem is the convex hull of the (incidence vectors of the) realizable solutions of such a problem. Many combinatorial optimization problems can be formulated as the maximisation of linear functions over the corresponding polyhedra. The description of a polyhedron by a system of linear inequalities is closely related to the solution of the corresponding problem via linear programming.

In order to determine such a system, there is a classical approach consisting in the decomposition of the problem into subproblems so that their corresponding polyhedra are known; a composition of the later leads to a description of the polyhedron associated to the given problem.

The main purpose of this thesis is to study the composition of polyhedra. In the first part, an approach of composition, based on dynamic programming and polyhedral projection methods, is studied and general results, which unify some already known results in this area, are given. This approach is then applied to the composition of polyhedra associated to the travelling salesman problem.

In the second part, operations on graphs (composition by identification of subgraphs of two given graphs, adding a new edge) are studied in the relation with the stable set problem. Polyhedral results are given, and consequences concerning perfect and h-perfect graphs are proved.

Key words : Combinatorial optimization, Polyhedra, Graphs, Linear programming, Dynamic programming, Travelling salesman polyhedron, stable set polytope, perfect graphs.