



HAL
open science

Courbes à Hodographe Pythagorien en Géométrie de Minkowski et Modélisation Géométrique

Rachid Ait Haddou

► **To cite this version:**

Rachid Ait Haddou. Courbes à Hodographe Pythagorien en Géométrie de Minkowski et Modélisation Géométrique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1996. Français. NNT: . tel-00345362

HAL Id: tel-00345362

<https://theses.hal.science/tel-00345362>

Submitted on 10 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée par
Rachid AIT HADDOU

Pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Courbes à Hodographe Pythagorien en Géométrie de Minkowski et Modélisation Géométrique

Date de soutenance : 6 septembre 1996

Composition du jury

M. P. J. LAURENT	Président
M. J. C. FIOROT	Rapporteur
M. A. LE MEHAUTE	Rapporteur
M. P. CHENIN	Examineur
M. L. BIARD	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG

” L’esprit de la géométrie moderne est d’élever toujours les
vérités soit anciennes, soit nouvelles à la plus grande
universalité qu’il se puisse.”

B. Fontenelle

A ma petite soeur Raja
A ma grand-mère Yemma
A mes parents

Avec une pensée pour
You seun-kyong

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe de Géométrie Algorithmique du laboratoire de Modélisation et de calcul (LMC-IMAG).

Je remercie Monsieur Pierre-Jean Laurent, Professeur à l'U.J.F., de l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

Je remercie Messieurs Jean Charles Fiorot et Alain Le Méhauté d'avoir accepté d'être mes rapporteurs.

Je remercie vivement Monsieur Patrick Chenin d'avoir accepté de participer à mon jury.

Une mention particulière est destinée à Monsieur Luc Biard. Certes il m'a beaucoup aidé scientifiquement depuis l'année de mon DEA; certes je le remercie pour l'esprit de synthèse rédactionnelle qu'il a mis à ma disposition mais surtout, je le remercie pour avoir su me supporter.

Je remercie tous les membres de l'équipe de Géométrie Algorithmique pour avoir toujours été prêts à m'apporter leur aide, ainsi que pour la bonne ambiance qu'il ont su maintenir au cours de ces années de thèse. Merci particulièrement à Otman, Mireille, Emmanuelle et Yves pour leurs précieuses amitiés.

Une autre mention particulière à mes parents pour tant d'efforts et de sacrifices pour que je puisse poursuivre mes études. Je leur en suis profondément reconnaissant.

Merci à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

TABLE DES MATIERES

Introduction	1
Chapitre 1. Géométrie plane de Minkowski	5
1. Généralités	5
1.1 Courbes paramétrées	5
1.2 Enveloppe d'une famille de courbes	6
1.3 Enveloppe d'une famille de droites	8
1.4 Courbe polaire réciproque	9
2. Géométrie plane de Minkowski	11
2.1 Espace de Minkowski	11
2.2 Métrique plane de Minkowski	12
2.3 Notion d'isopérimétrique	14
2.4 Notion de normalité	15
3. Eléments de géométrie différentielle	17
3.1 \mathcal{U} -Repère de Frenet	17
3.2 \mathcal{U} -Développante et \mathcal{U} -développée	20
3.3 Propriétés géométriques	22
Chapitre 2. Courbes parallèles de Minkowski	27
1. Courbes \mathcal{U} -parallèles	28
1.1 Enveloppe d'une famille d'indicatrices	28
1.2 Propriétés intrinsèques de la \mathcal{U} -parallèle	29
2. Implicitisation de la courbe \mathcal{U} -parallèle	33
2.1 Courbe génératrice paramétrée	34
2.2 Courbe génératrice implicite	34
3. Caractérisation des courbes PH de Minkowski	35
3.1 Courbes PH de Minkowski	35
3.2 Caractérisation géométrique des courbes \mathcal{U} -PH	36
Chapitre 3. Représentation Bézier duale des courbes \mathcal{U}-PH	39
1. Représentation Bézier duale	39
1.1 Courbes Bézier duale	40
1.2 Formule de conversion	40
1.3 Courbure aux extrémités	42

2.	Caractérisation Bézier duale des courbes \mathcal{U} -PH	43
2.1	<i>Représentation duale d'une courbe \mathcal{U}-PH</i>	43
2.2	<i>Représentation Bézier duale d'une courbe \mathcal{U}-PH</i>	45
2.3	<i>Courbes \mathcal{U}-parallèles d'une courbe \mathcal{U}-PH</i>	46
Chapitre 4. Quartiques de Tschirnhausen		49
1.	Courbes PH de classe 3	50
2.	La stratégie d'approximation	51
2.1	<i>Segmentation admissible</i>	52
2.2	<i>Interpolation G^2 d'Hermite</i>	52
3.	Cubiques de Tschirnhausen	53
3.1	<i>Caractérisation géométrique</i>	53
3.2	<i>Longueur d'arc d'une T-cubique</i>	54
3.3	<i>T-cubique associée à un triangle</i>	55
4.	G^1 T-cubiques	56
4.1	<i>Construction</i>	56
4.2	<i>Contrainte de longueur</i>	57
4.3	<i>Unicité</i>	60
5.	Construction des développantes d'un segment d'une T-cubique	63
6.	Algorithme et exemples	64
Chapitre 5. Ovales à largeur constante		69
1.	Préliminaires	69
1.1	<i>Ovales et rosettes à largeur constante</i>	70
2.	Construction géométrique de rosettes à largeur constante	72
2.1	<i>Ovales PH de classe 3 à largeur constante</i>	72
2.2	<i>Rosettes PH de classe 3 à largeur constante</i>	74
3.	Constructions duales d'ovales à largeur constante	76
3.1	<i>Segmentation et structure de contrôle duale d'un cercle</i>	77
3.2	<i>Construction sous contraintes d'interpolation</i>	79
3.3	<i>Construction générale</i>	80

INTRODUCTION GENERALE

La notion de courbe parallèle joue un rôle important dans les problèmes d'étude des trajectoires d'outils pour les machines à commande numérique et dans les problèmes d'agrandissement et de rétrécissement d'objets. Ainsi, étant donnée une courbe plane, appelée *courbe génératrice*, on cherche à déterminer la *courbe parallèle* (ou *courbe offset*) à celle-ci à une distance d donnée ($d \in \mathbb{R}$). L'une des principales difficultés est que la courbe parallèle d'une courbe rationnelle n'est généralement pas rationnelle. Ainsi, dans le cas général, on est amené à déterminer une approximation de cet offset par une courbe spline. Plusieurs approches pour ce problème d'approximation ont été proposées au cours de ces dernières années (méthodes de Tiller et Hansen, Klass, Hoschek, ...). Ces méthodes s'appuient en particulier sur les notions de continuité géométrique. Une difficulté essentielle consiste alors à définir des critères rigoureux et surtout pratiques permettant de mesurer l'*erreur* entre l'offset exact et son approximation. Par ailleurs la courbe offset d'une courbe régulière peut ne pas être régulière et donc comporter des singularités. La localisation de ces points singuliers et leur élimination (untrimmed) sur les trajectoires constitue une difficulté supplémentaire. Une autre approche consiste à définir l'offset par une équation implicite. Cette approche fait appel à des techniques d'élimination et s'avère utile et plus performante lors de problèmes d'intersection avec l'offset.

Cependant, depuis quelques années, s'est développée une autre approche pour l'approximation faisant notamment appel aux outils de la géométrie traditionnelle. W. Tiller et E.G. Hansen ont fait remarquer que les seules courbes polynomiales à offset polynomial sont les droites. R. Farouki et T. Sakallis ont déterminé l'ensemble des courbes polynomiales à offset rationnel et récemment J. C. Fiorot et T. Gensane et indépendamment H. Pottmann ont donné la forme générale de toutes les courbes rationnelles à offset rationnel (courbes PH, c'est-à-dire, à hodographe pythagorien). Suite à ces travaux se sont développées d'autres méthodes, plus fructueuses, consistant à approcher directement la courbe génératrice par des courbes à hodographe pythagorien (Farouki, Pottmann, ...).

Dans cette thèse nous nous intéressons d'une part à montrer la pertinence de cette dernière approche dans des contextes d'approximation et de modélisation géométrique (par des courbes PH), d'autre part nous proposons une généralisation du formalisme des courbes parallèles et des courbes PH dans un plan de Minkowski, c'est-à-dire dans un plan dont la notion de mesure dépend d'une indicatrice \mathcal{U} appelée aussi jauge et enfin, en application, nous donnons des algorithmes de construction d'ovales et de rosettes rationnelles (PH et \mathcal{U} -PH par morceaux) à largeur constante. Nous donnons plusieurs caractérisations des courbes rationnelles à \mathcal{U} -parallèles rationnelles (courbes \mathcal{U} -PH), en particulier, nous montrons le pouvoir constructif (en CAGD) de la caractérisation Bézier duale de ces courbes \mathcal{U} -PH proposée dans le chapitre 2. Nous détaillons maintenant plus précisément ces trois résultats.

Dans un contexte d'approximation et de modélisation géométrique, nous présentons un schéma de G^2 approximation, préservant la monotonie de la courbure, par des développantes de G^1 cubiques de Tschirnhausen. Cet algorithme est basé sur une segmentation hiérarchique de la courbe initiale (courbe génératrice)

et sur une méthode de G^2 interpolation de Hermite. Par ailleurs, cet algorithme nécessite surtout le choix d'un point supplémentaire d'interpolation convenablement choisi. La caractérisation géométrique des quartiques de Tschirnhausen (courbes PH de classe algébrique 3) en tant que développantes des cubiques de Tschirnhausen (courbes PH polynomiales de degré 3) fournit un procédé simple et élégant permettant de localiser le point supplémentaire d'interpolation, tandis que la caractérisation duale (cf. travaux de Pottmann) des courbes PH permet de construire aisément la structure duale de chaque segment de T-quartique. La solution ainsi obtenue est une courbe spline PH, G^2 , préservant la monotonie de la courbure de la courbe initiale et dépendant d'un paramètre libre se comportant comme un paramètre de forme ou de tension.

D'autre part, le caractère judicieux de la représentation duale des courbes PH, et de leurs courbes parallèles, nous a permis de construire des ovales et des rosettes à largeur constante composés de segments PH. Une première construction s'appuie sur une idée de Hammer et Sobczyk (qui génèrent des courbes planes à largeur constante en tant que trajectoires orthogonales de certaines familles de droites) et génère des rosettes à largeur constante formées de quartiques de Tschirnhausen. Une seconde construction utilise la structure duale des courbes PH et génère des rosettes à largeur constante composées de segments de courbes PH de classe $m > 4$.

Enfin, suite aux travaux de H. Busemann and H. Guggenheimer sur la géométrie du plan de Minkowski, nous généralisons les résultats de Pottmann (concernant les courbes PH) au plan de Minkowski. Autrement dit, étant donnée l'indicatrice \mathcal{U} d'un plan de Minkowski (c-à-d, une courbe fermée, G^2 , strictement convexe, à symétrie centrale), et étant donnée l'enveloppe des indicatrices centrées le long d'une courbe génératrice, nous donnons une paramétrisation explicite de cette enveloppe (\mathcal{U} -offset généralisée). De plus, nous caractérisons l'ensemble des courbes rationnelles dont les \mathcal{U} -offsets généralisées restent rationnelles (lorsque l'indicatrice \mathcal{U} est rationnelle). Ces courbes seront dites \mathcal{U} -PH. Cette caractérisation fournit par ailleurs une méthode constructive de ces courbes \mathcal{U} -PH, ainsi que de leurs \mathcal{U} -offsets généralisées, basée sur la représentation Bézier duale de l'indicatrice \mathcal{U} .

Cette thèse est organisée de la manière suivante. Nous développons dans le chapitre 1 les notions fondamentales de géométrie différentielle des courbes dans un plan de Minkowski. Nous donnons, dans le chapitre 2, les caractéristiques analytiques et géométriques de la courbe \mathcal{U} -parallèle ainsi qu'une caractérisation géométrique de l'ensemble des courbes \mathcal{U} -PH. Dans le chapitre 3, nous montrons le caractère judicieux et constructif de la représentation Bézier duale des courbes \mathcal{U} -PH. Le chapitre 4 est consacré à la présentation d'un algorithme de G^2 approximation d'une courbe ainsi que ses parallèles par des courbes PH de classe algébrique 3 (T-quartiques). Enfin, dans le chapitre 5, nous proposons deux méthodes de construction d'ovales et de rosettes à largeur constante composés de segments de courbes PH.

Chapitre 1.

GEOMETRIE PLANE DE MINKOWSKI

Introduction

Une des idées introduites par Hermann Minkowski en géométrie est la notion de mesure avec un ovale comme jauge ou fonction poids. Cette notion a été développée dans différentes disciplines telles que la théorie des espaces de Finsler[4], la géométrie intégrale[9] ou encore la théorie des corps convexes à largeur constante[2,6]. Dans ce chapitre, on développera cette notion dans un contexte lié à la géométrie différentielle des courbes planes.

La première section sera consacrée à la notion d'enveloppe d'une famille de courbes ou de droites dans le plan. Plus particulièrement, on introduit la notion de polaire réciproque d'une courbe plane, exprimant en un certain sens, le principe de dualité entre un point dans le plan projectif et une droite dans le plan affine.

Dans la deuxième section, un espace de Minkowski est défini comme étant un espace de Banach de dimension finie, dont la boule unité est un compact, convexe et symétrique. Dans le cas où l'espace est \mathbb{R}^2 , l'expression de la norme associée est donnée explicitement à partir de la frontière de la boule unité. Ce qui nous permet de définir, d'une façon précise, la notion de normalité dans un plan de Minkowski.

La troisième section aura pour but d'introduire les notions fondamentales de la géométrie différentielle dans un plan de Minkowski. En particulier, le repère de Frenet, les formules de Serret-Frenet, les notions de développante et de développée seront introduites.

1. Généralités

Dans ce paragraphe nous rappelons quelques définitions et notations concernant les courbes du plan et de l'espace, ainsi que la notion d'enveloppe d'une famille de courbes dans le plan.

1. 1. Courbes paramétrées

Etant donné un intervalle non vide I de \mathbb{R} et une application X de classe C^p définie sur I , à valeurs dans un espace affine \mathcal{A} (ici $\mathcal{A} = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}^*$), le couple (I, X) est appelée C^p -paramétrisation (ou représentation paramétrique de classe C^p) de l'ensemble $\Gamma = X(I)$. Par la suite, on suppose que $p \geq 1$. Deux C^p -paramétrisations (I, X) et (J, Y) sont dites équivalentes s'il existe un C^p -changement de paramétrisation, c'est-à-dire, une bijection $\varphi : J \rightarrow I$ telle que φ

et φ^{-1} soient de classe C^p , vérifiant $Y = X \circ \varphi$ (de sorte que $X(I) = \Gamma = Y(J)$). Une *courbe paramétrée* de classe C^p est alors une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie ci-dessus et s'identifie donc naturellement avec l'ensemble $\Gamma = X(I)$ où (I, X) est une C^p -paramétrisation quelconque de la classe considérée.

Par ailleurs, une telle C^p -paramétrisation (I, X) avec X injective, définit naturellement une orientation de la courbe Γ , induite par l'ordre sur I . Ainsi, si l'on ne considère que des changements de paramétrisation φ préservant l'orientation, c'est-à-dire (avec les notations précédentes) tels que $\varphi'(u) > 0$, pour tout $u \in J$, alors, pour cette nouvelle relation, chaque classe d'équivalence définit une *courbe orientée* de classe C^p .

Par la suite, une courbe paramétrée Γ de classe C^p , c'est-à-dire une classe d'équivalence, sera le plus souvent désignée par l'une quelconque de ses C^p paramétrisations : $t \in I \mapsto X(t)$, ou même abusivement par $X(t)$ si I est explicite. Par ailleurs, on distinguera les *notions analytiques* qui dépendent de la paramétrisation choisie, des *notions géométriques* qui sont intrinsèques à la courbe Γ , chaque fois que l'occasion se présentera.

Un point $M_0 = X(t_0)$ de la courbe sera dit *singulier* si $X'(t_0) = 0$, sinon ce point est dit *régulier*. La courbe $\Gamma = X(I)$ est dite *régulière* si tout point de Γ est régulier. On notera que cette notion de régularité est indépendante de la paramétrisation choisie et est donc une *propriété géométrique* de la courbe Γ .

1. 2. Enveloppe d'une famille de courbes

Etant données deux courbes planes régulières Γ_1 et Γ_2 admettant respectivement les paramétrisations (I, f) et (J, g) . Ces deux courbes sont dites *tangentes* en un point commun P si elle ont la même tangente en ce point. Autrement dit, si $P = f(t_0) = g(t_1)$, $t_0 \in I$ et $t_1 \in J$, alors, $f'(t_0)$ est collinéaire à $g'(t_1)$.

Supposons donnée une application $\mathbb{R}^2 \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y, t) \mapsto F(x, y, t)$ de classe C^1 . Cette application définit une famille de courbes Γ_t indicée par t ; chacune de ces courbes étant définie par une équation implicite $F(x, y, t) = F_t(x, y) = 0$.

Définition 1. On appelle *enveloppe* de la famille de courbes Γ_t , toute courbe paramétrée (I, ϕ) telle que pour tout $t \in I$, $\phi(t) \in \Gamma_t$ et les deux courbes ϕ et Γ_t sont tangentes en leur point commun $\phi(t)$.

Proposition 1. Si l'enveloppe de la famille de courbes Γ_t existe, alors, chaque point $M(X, Y) = \phi(t)$ de cette enveloppe vérifie le système

$$\begin{cases} F(X, Y, t) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(X, Y, t) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Preuve: Soit (I, ϕ) une paramétrisation de cette enveloppe. D'après la définition de l'enveloppe, la courbe $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ vérifie la première équation du système (1.1)

$$F(\phi_1(t), \phi_2(t), t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I. \quad (1.2)$$

En dérivant (1.2) par rapport à t , et en exprimant le fait que les deux courbes ϕ et Γ_t sont tangentes au point $\phi(t)$, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\phi_1(t), \phi_2(t), t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I. \quad (1.3)$$

■

Exemple 1: Considérons la famille des cercles \mathcal{C}_t de rayon d et dont le centre parcourt une courbe régulière Γ de paramétrisation $F(t) = (x(t), y(t))$.

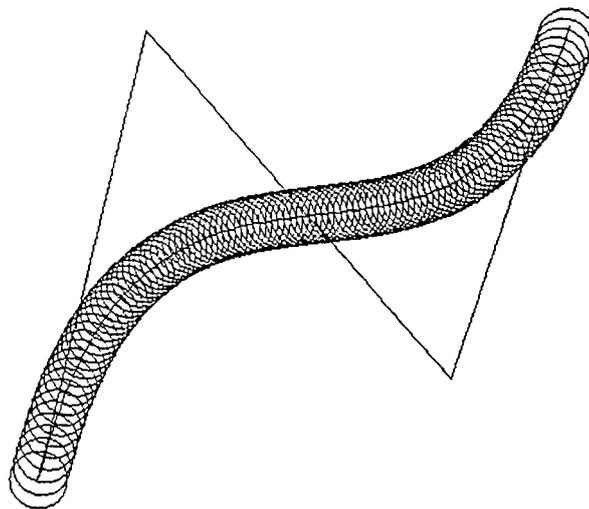


Figure 1. Enveloppe d'une famille de cercles

La famille \mathcal{C}_t a pour équation implicite

$$F(X, Y, t) = (X - x(t))^2 + (Y - y(t))^2 - d^2 = 0.$$

L'enveloppe de la famille \mathcal{C}_t se déduit par résolution du système

$$\begin{cases} F(X, Y, t) = (X - x(t))^2 + (Y - y(t))^2 - d^2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(X, Y, t) = 2(X - x(t))x'(t) + 2(Y - y(t))y'(t) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

La deuxième équation de (1.4) entraîne que si $\phi(t)$ est une paramétrisation de l'enveloppe alors

$$\phi(t) - F(t) = \lambda(t)N(t),$$

où $N(t)$ est la normale unitaire à la courbe Γ au point de paramètre t et où $\lambda(t)$ est une fonction scalaire dépendante du paramètre t . La première équation de (1.4) entraîne que la fonction scalaire $\lambda(t)$ est égale à $\pm d$. D'où, une équation paramétrique de l'enveloppe est

$$\phi(t) = F(t) \pm d N(t).$$

1. 3. Enveloppe d'une famille de droites

Une famille de droites est la donnée d'une application

$$D : \mathbb{R}^2 \times I \hookrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y, t) \mapsto D_t(X, Y) = a(t)X + b(t)Y + c(t),$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} et où $a(t), b(t), c(t)$ sont des fonctions numériques de classe C^2 sur I . Posons

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta_X(t) = \begin{vmatrix} -c(t) & b(t) \\ -c'(t) & b'(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta_Y(t) = \begin{vmatrix} a(t) & -c(t) \\ a'(t) & -c'(t) \end{vmatrix}.$$

Si l'enveloppe de cette famille de droites existe, elle admet une paramétrisation $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ telle que si $X = \phi_1(t)$ et $Y = \phi_2(t)$ alors

$$\begin{cases} a(t)X + b(t)Y = -c(t), \\ a'(t)X + b'(t)Y = -c'(t). \end{cases} \quad (1.5)$$

Ce système linéaire en X et Y admet, pour chaque $t \in I$ tel que $\Delta(t) \neq 0$, une unique solution donnée par

$$\begin{cases} X = \frac{\Delta_X(t)}{\Delta(t)} = \phi_1(t), \\ Y = \frac{\Delta_Y(t)}{\Delta(t)} = \phi_2(t). \end{cases} \quad (1.6)$$

Exemple 2: Soit $p(\theta)$ une fonction de classe C^2 définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Considérons la famille de droites D_t d'équation

$$X \cos \theta + Y \sin \theta = p(\theta). \quad (1.7)$$

Tout point de l'enveloppe de la famille D_t vérifie le système

$$\begin{cases} X \cos \theta + Y \sin \theta = p(\theta), \\ -X \sin \theta + Y \cos \theta = p'(\theta). \end{cases}$$

Ce qui fournit l'équation paramétrique de l'enveloppe Γ :

$$\begin{cases} X(\theta) = p(\theta) \cos \theta - p'(\theta) \sin \theta, \\ Y(\theta) = p(\theta) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta. \end{cases} \quad (1.8)$$

Par ailleurs, on peut montrer que le rayon de courbure de l'enveloppe Γ en un point de paramètre θ est $\rho(\theta) = p(\theta) + p''(\theta)$. L'écriture (1.7) est appelée *l'équation d'Euler* associée à la courbe Γ et la fonction p est appelée *fonction support*,

exprimant la distance signée de l'origine à la tangente à la courbe Γ au point de paramètre θ [10].

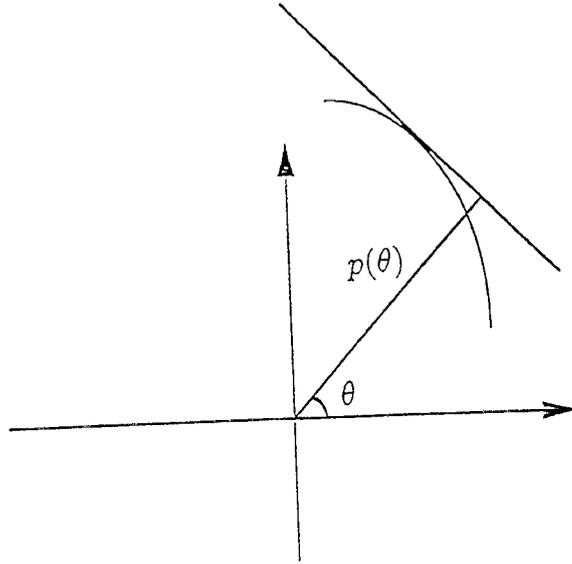


Figure 2. Fonction support

1. 4. Courbe polaire réciproque

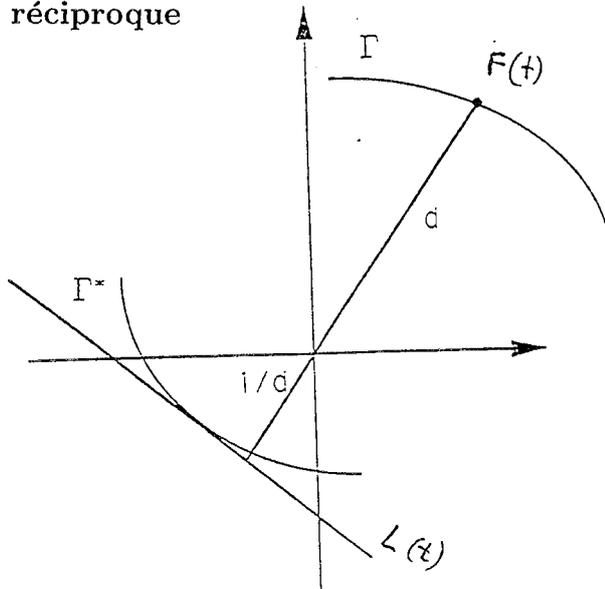


Figure 3. Courbe polaire réciproque

Considérons une courbe régulière Γ de représentation paramétrique $F(t) = (x(t), y(t))$, tel que $\det(F(t), F'(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$. A chaque point $F(t)$ de la courbe Γ on associe la droite $L(t)$ d'équation

$$x(t)X + y(t)Y = -1. \quad (1.9)$$

L'enveloppe de la famille de droites $L(t)$ est appelée *polaire réciproque* par rapport au cercle unité de la courbe Γ et est notée Γ^* . Une représentation paramétrique

de Γ^* peut être déduite de la résolution du système

$$\begin{cases} x(t)X + y(t)Y = -1, \\ x'(t)X + y'(t)Y = 0. \end{cases}$$

Autrement dit, une représentation paramétrique de Γ^* est

$$F^*(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\det(F(t), F'(t))}. \quad (1.10)$$

Cette polarité transforme toute courbe rationnelle de degré n et de classe algébrique m en une courbe rationnelle de degré m et de classe algébrique n [7]. Par ailleurs, cette polarité préserve les contacts géométriques[7].

Proposition 2. *Soit Γ une courbe paramétrée de classe C^2 . Alors*

$$(\Gamma^*)^* \equiv \Gamma.$$

Preuve: Soit $F^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$ une paramétrisation de la courbe Γ^* . La courbe $(\Gamma^*)^*$ est l'enveloppe de la famille de droites

$$x^*(t)X + y^*(t)Y = -1,$$

ou encore, l'enveloppe de la famille de droites

$$-y'(t)X + x'(t)Y = -\det(F(t), F'(t)),$$

ce qui représente la famille des droites tangentes à Γ au point $(x(t), y(t))$. Par suite, l'enveloppe de cette famille de droites est la courbe Γ . ■

Proposition 3. *Soit Γ une courbe régulière paramétrée de classe C^2 . Alors, les points d'inflexions de Γ correspondent aux points singuliers de Γ^* .*

Preuve: Soit $F(s) = (x(s), y(s))$ la paramétrisation en abscisse curviligne de la courbe Γ . Une paramétrisation de Γ^* est

$$F^*(s) = \frac{N(s)}{\det(F(s), T(s))},$$

d'où

$$(F^*)'(s) = \frac{N'(s) \det(F(s), T(s)) - N(s) \det(F(s), T'(s))}{\det^2(F(s), T(s))}.$$

D'après les formules de Serret-Frenet, on déduit que $(F^*)'(s) = 0$ si et seulement si $k(s) = 0$, où $k(s)$ est la courbure euclidienne de Γ au point de paramètre s . ■

2. Géométrie plane de Minkowski

En première partie de cette section nous introduisons la notion d'espace de Minkowski défini comme un espace de Banach dont la boule unité est un compact, convexe et symétrique. Nous introduisons ensuite les notions d'isopérimétrique et de normalité dans le cas d'un plan de Minkowski.

2. 1. Espace de Minkowski

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et X un sous ensemble de E .

Définition 2. L'ensemble X est dit *convexe* si et seulement si, pour tout $x_1, x_2 \in X$ et pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ on a

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X. \quad (1.11)$$

Définition 3. Une fonction f est dite *convexe* sur un ensemble convexe X si et seulement si

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \quad (1.12)$$

pour tout $x_1, x_2 \in X$ et $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Si l'inégalité (1.12) est stricte, la fonction f sera dite *strictement convexe*. Si la fonction $(-f)$ est convexe (resp. strictement convexe), la fonction f sera dite *concave* (resp. *strictement concave*). Avec les notations précédentes, on peut associer à toute fonction convexe f sur convexe X , un ensemble convexe $Epi(f)$, appelé *épigraphe* de la fonction f , de la manière suivante

$$Epi(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R}; x \in X, t \geq f(x)\}. \quad (1.13)$$

Réciproquement, on peut associer à tout ensemble convexe \mathcal{B} d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, une fonction convexe F , appelée *fonction distance* associée à \mathcal{B} , de la manière suivante[8]

Théorème 1. Soit \mathcal{B} un ensemble compact, convexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie, ayant l'origine (vecteur nul) comme point intérieur. Alors la fonction F de E dans \mathbb{R} définie par

$$F(x) = \inf\{t > 0; x/t \in \mathcal{B}\} \quad (1.14)$$

est une fonction convexe, positivement homogène, et positive pour toute valeur différente de l'origine, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} F(x) &> 0, \quad x \in E, (x \neq 0); \quad F(0) = 0; \\ F(\lambda x) &= \lambda F(x), \quad \lambda \geq 0, \quad x \in E; \\ F(x + y) &\leq F(x) + F(y), \quad x, y \in E \end{aligned} \quad (1.15)$$

et

$$\mathcal{B} = \{x \in E; F(x) \leq 1\}. \quad (1.16)$$

Réciproquement, si F est une fonction qui satisfait les relations (1.15) et \mathcal{B} est définie par (1.16), alors la fonction F est bien définie par (1.14).

Preuve: Il est évident que la définition de la fonction F induit les deux premières assertions de (1.15) et que (1.16) est vérifié. Puisque \mathcal{B} est convexe, alors pour tout $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ tels que $\mu_1 + \mu_2 = 1$ et pour tout $x_1, x_2 \in E$ tels que $F(x_1) \leq 1$ et $F(x_2) \leq 1$ on a $F(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) \leq 1$. Par homogénéité, on en déduit que

$$F(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) \leq (\mu_1 + \mu_2) \max(F(x_1), F(x_2)), \quad \text{si } \mu_1, \mu_2 > 0. \quad (1.17)$$

Puis pour $x_1, x_2 \neq 0$, en appliquant la relation (1.17) en remplaçant x_1, x_2 par $x_1/F(x_1), x_2/F(x_2)$ respectivement et μ_1, μ_2 par $F(x_1), F(x_2)$ respectivement, on en déduit la troisième assertion de (1.15).

Il est clair que (1.15) entraîne que la fonction F est convexe, et que (1.16) définit un ensemble convexe, ayant l'origine comme point intérieur. Par suite la fonction F est bien définie par (1.14). ■

Dans le cas où \mathcal{B} est symétrique, ce que l'on suppose désormais, on aura

$$F(tx) = |t|F(x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in E,$$

de ce fait, la fonction F définit une *norme* sur l'espace vectoriel E , appelée *norme de Minkowski* associée à \mathcal{B} . L'espace de Banach E muni de cette norme est appelé *espace de Minkowski*. La frontière \mathcal{U} du compact \mathcal{B} est appelée *indicatrice* de l'espace de Minkowski. On notera dorénavant, la norme F par $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$, l'espace \mathbb{R}^2 est appelé *plan de Minkowski* et est noté $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$.

2. 2. Métrique plane de Minkowski

Dans tout ce qui suit, on travaillera dans un plan de Minkowski \mathcal{M} , d'indicatrice \mathcal{U} , strictement convexe et on ne considèrera que les paramétrisations de \mathcal{U} suffisamment différentiables et positivement orientées, c'est à dire, si $(I, U(t))$ est une paramétrisation de \mathcal{U} alors $\det(U'(t), U(t)) > 0$ pour tout $t \in I$. Enfin, on notera $O = O_{\mathbb{R}^2}$ le vecteur nul du plan \mathbb{R}^2 .

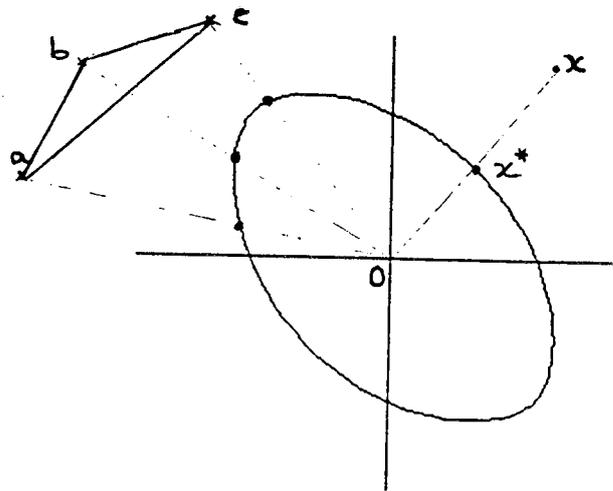


Figure 4. Métrique de Minkowski

Théorème 2. [4] Soit \mathcal{M} un plan de Minkowski d'indicatrice \mathcal{U} . Alors pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|x\|_{\mathcal{U}} = \frac{\|x\|_2}{\|x^*\|_2}, \quad (1.18)$$

où x^* est le point d'intersection de la demi-droite $[Ox)$ et de la courbe \mathcal{U} et où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne usuelle.

Preuve: Pour cela, il suffit de démontrer que la fonction définie en (1.18) vérifie les relations (1.15). Tout d'abord on a $\|x\|_{\mathcal{U}} > 0$ si $x \neq O$ et $\|O\|_{\mathcal{U}} = 0$. Ensuite, pour tout réel λ , on a

$$\|\lambda x\|_{\mathcal{U}} = \frac{\|\lambda x\|_2}{\|x^*\|_2} = |\lambda| \frac{\|x\|_2}{\|x^*\|_2} = |\lambda| \|x\|_{\mathcal{U}},$$

d'où l'homogénéité de la fonction $\|x\|_{\mathcal{U}}$. Enfin, il nous faut démontrer l'inégalité triangulaire de la fonction $\|x\|_{\mathcal{U}}$. Pour cela, soient a, b et c trois points du plan affine \mathbb{R}^2 . Si a, b, c appartiennent à une même droite passant par l'origine alors l'inégalité triangulaire devient évidente. Sinon, puisque \mathcal{U} est strictement convexe, on déduit que

$$\text{aire}(O, p, q) + \text{aire}(O, p, r) \geq \text{aire}(O, q, r), \quad (1.19)$$

où les points p, q et r sont définis par la figure 4. Un calcul élémentaire sur l'aire d'un triangle, montre que

$$\begin{aligned} \text{aire}(O, p, q) &= \frac{1}{2} \|p\|_2 \|q\|_2 \sin(\alpha) = \frac{\Delta}{\|a-b\|_{\mathcal{U}} \|a-c\|_{\mathcal{U}}}, \\ \text{aire}(O, p, r) &= \frac{1}{2} \|p\|_2 \|r\|_2 \sin(\beta) = \frac{\Delta}{\|a-c\|_{\mathcal{U}} \|b-c\|_{\mathcal{U}}}, \\ \text{aire}(O, q, r) &= \frac{1}{2} \|q\|_2 \|r\|_2 \sin(\alpha + \beta) = \frac{\Delta}{\|a-b\|_{\mathcal{U}} \|b-c\|_{\mathcal{U}}}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

où Δ est l'aire du triangle (abc) . Par substitution de l'inégalité (1.19) dans les équations (1.20), on en déduit l'inégalité triangulaire

$$\|a-b\|_{\mathcal{U}} + \|b-c\|_{\mathcal{U}} \geq \|a-c\|_{\mathcal{U}}.$$

■

Remarque 1. Dans le plan de Minkowski \mathcal{M} l'indicatrice \mathcal{U} s'écrit $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_{\mathcal{U}} = 1\}$, ce qui montre que \mathcal{U} peut être considérée comme le cercle unité de \mathcal{M} . Plus généralement, on définit un cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(y, r)$ (resp. un disque $\mathcal{D} = \mathcal{D}(y, r)$) de centre le point $y \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r , par

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x-y\|_{\mathcal{U}} = r\}, \quad (\text{ resp. } \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x-y\|_{\mathcal{U}} \leq r\}).$$

2. 3. Notion d'isopérimétrie

La notion d'isopérimétrie a été introduite pour la première fois par H. Busemann[5] afin de généraliser l'inégalité isopérimétrique dans un espace de Minkowski.

Définition 4. L'isopérimétrique \mathcal{U}^0 d'un plan de Minkowski \mathcal{M} d'indicatrice \mathcal{U} est la polaire réciproque de \mathcal{U} par rapport au cercle unité suivie d'une rotation de $-\frac{\pi}{2}$.

Soit $U(t) = (x(t), y(t))$ une représentation paramétrique de l'indicatrice \mathcal{U} . D'après (1.10), on déduit qu'une représentation paramétrique de l'isopérimétrique est

$$U^0(t) = \frac{U'(t)}{\det(U'(t), U(t))}. \quad (1.21)$$

On remarque que les représentations paramétriques de l'indicatrice \mathcal{U} et de son isopérimétrique \mathcal{U}^0 sont liées par la relation

$$\det(U^0(t), U(t)) = 1. \quad (1.22)$$

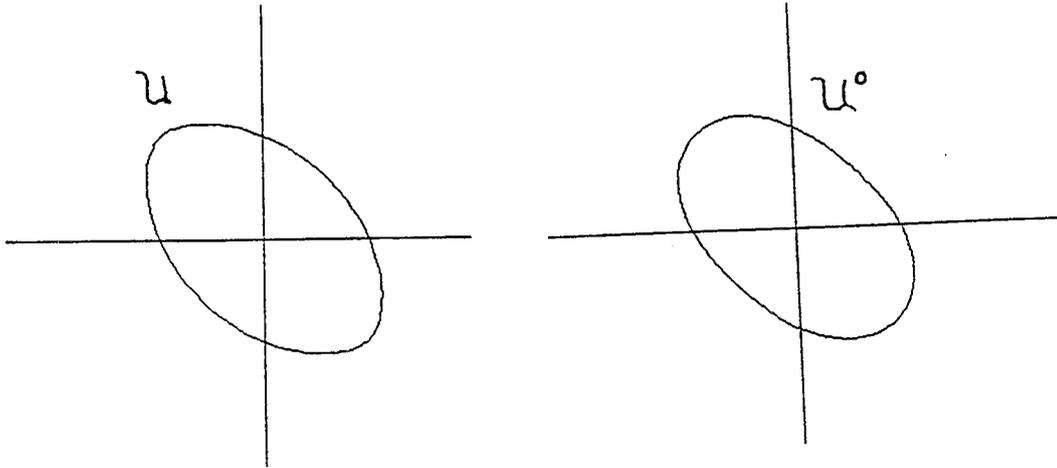


Figure 5. L'isopérimétrie de la géométrie

Remarque 2. D'après les propositions 2 et 3, l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 est une courbe fermée, convexe, à symétrie centrale par rapport à l'origine O . De ce fait, \mathcal{U}^0 peut être considérée comme l'indicatrice d'un plan de Minkowski \mathcal{M}^0 , qu'on appellera plan polaire de Minkowski associé au plan \mathcal{M} . De plus, on a $(\mathcal{M}^0)^0 \equiv \mathcal{M}$.

Théorème 3. Soit $h(t)$ la fonction support associée à la paramétrisation $U(t)$ de l'indicatrice \mathcal{U} , c'est à dire, la distance orientée de l'origine à la droite tangente à la courbe \mathcal{U} au point de paramètre t . Alors

$$h(t) = \frac{1}{\|U^0(t)\|_2}. \quad (1.23)$$

Preuve: $U(t)$ étant l'enveloppe de la famille de droites paramétriques

$$\frac{-y'(t)}{\|U'(t)\|_2} X + \frac{x'(t)}{\|U'(t)\|_2} Y = h(t),$$

on en déduit que

$$h(t) = \frac{\det(U'(t), U(t))}{\|U'(t)\|_2},$$

or d'après (1.21), la fonction $h(t)$ prend l'expression (1.23) puisque la paramétrisation $U(t)$ est positivement orientée. ■

2. 4. Notion de normalité

Soit \mathcal{M} un plan de Minkowski d'indicatrice \mathcal{U} , g une droite affine et P un point du plan n'appartenant pas à g .

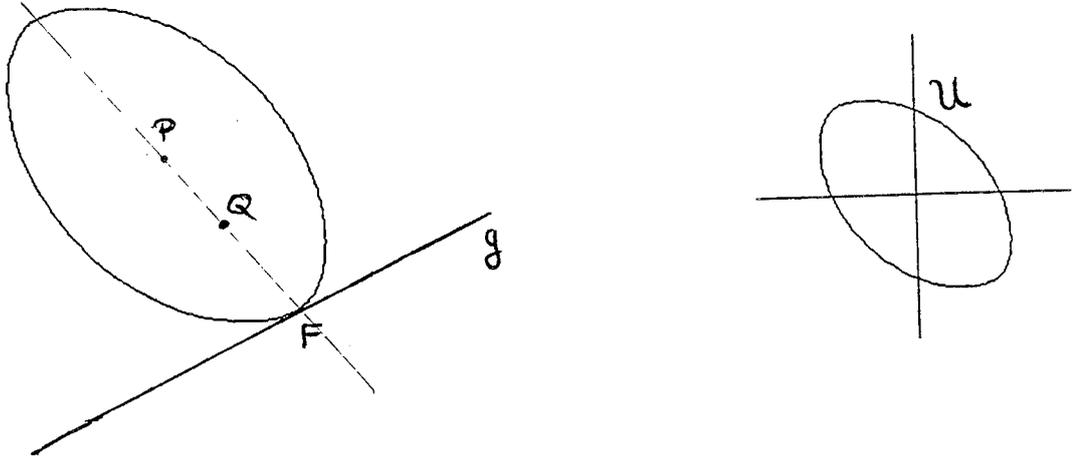


Figure 6. La notion de normalité

Théorème 4. Il existe un unique point F appartenant à la droite g , appelé projection du point P sur la droite g , tel que

$$\|P - F\|_{\mathcal{U}} = \text{Min}\{\|P - G\|_{\mathcal{U}}; G \in g\}. \quad (1.24)$$

De plus, tout point appartenant à la droite (PF) se projette en F sur la droite g .

Preuve: Considérons la fonction ψ définie sur la droite g par

$$\psi(X) = \|P - X\|_{\mathcal{U}}.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout X_1, X_2 appartenant à la droite g , on a

$$\begin{aligned} \psi((1-t)X_1 + tX_2) &= \|P - ((1-t)X_1 + tX_2)\|_{\mathcal{U}} \\ &= \|(1-t)(P - X_1) + t(P - X_2)\|_{\mathcal{U}} \\ &\leq (1-t)\|P - X_1\|_{\mathcal{U}} + t\|P - X_2\|_{\mathcal{U}} \\ &= (1-t)\psi(X_1) + t\psi(X_2). \end{aligned}$$

Par suite la fonction ψ est convexe, et donc atteint son minimum en au moins un point F . De plus, l'intérieur du disque $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(P, \|P - F\|_{\mathcal{U}})$ ne contient aucun point de la droite g , sinon le point F ne vérifierait pas la relation (1.24). On en déduit que la droite g est tangente au cercle $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(P, \|P - F\|_{\mathcal{U}})$ au point F , et comme \mathcal{U} est strictement convexe, on en déduit que $\mathcal{C}_1 \cap g = \{F\}$, ce qui montre l'unicité du point F .

Soit Q un point appartenant à la droite (PF) , ($Q \neq F$). Le cercle $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(Q, \|Q - F\|_{\mathcal{U}})$ admet la droite g comme tangente au point F , puisque les deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont homothétiques. De ce fait, tout point appartenant à la droite (PF) admet le point F comme projection sur la droite g . ■

Définition 5. Si F est le projeté sur la droite g d'un point P ($P \notin g$), la droite (PF) est dite \mathcal{U} -normale à la droite g .

Remarque 3.

- Une droite g' est \mathcal{U} -normale à une droite g si et seulement si il existe un translaté de \mathcal{U} centré en un point de g' et tangent au point d'intersection des deux droites.

- La droite g' est \mathcal{U} -normale à la droite g n'entraîne pas forcément que la droite g est \mathcal{U} -normale à la droite g' .

- Un vecteur v est dit \mathcal{U} -normal à un vecteur w si et seulement si une droite admettant v comme vecteur directeur est \mathcal{U} -normale à une droite admettant w comme vecteur directeur. Cela prend effectivement un sens d'après l'axiome du parallélisme dans un plan de Minkowski[4].

Suite à cette dernière remarque, concernant la conservation du parallélisme dans un plan de Minkowski, on pourra utiliser la "définition" suivante : *Une droite g' est \mathcal{U} -normale à une droite g si et seulement si il existe une droite g^* parallèle à g , tangente à l'indicatrice \mathcal{U} en un point F de sorte que la droite (OF) soit parallèle à g' .*

Soit $(I, U(t))$ une paramétrisation de l'indicatrice d'un plan de Minkowski \mathcal{M} et soit $U^0(t)$ la paramétrisation correspondante de l'isopérimétrique. Pour tout $t \in I$, le vecteur $U'(t)$ est collinéaire au vecteur $U^0(t)$, et par polarité, le vecteur $U(t)$ est collinéaire au vecteur $(U^0)'(t)$. D'où l'on déduit que pour tout $t \in I$, le vecteur $U(t)$ est \mathcal{U} -normal au vecteur $U'(t)$ et le vecteur $U^0(t)$ est \mathcal{U}^0 -normal au vecteur $(U^0)'(t)$. Ainsi, on en déduit le théorème suivant.

Théorème 5. Soient g et g' deux droites du plan affine, on a

$$g \text{ est } \mathcal{U}\text{-normale à } g' \Leftrightarrow g' \text{ est } \mathcal{U}^0\text{-normale à } g.$$

Définition 6. Une indicatrice \mathcal{U} est dite une *courbe de Radon* si et seulement si $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^0$.

Lorsque l'indicatrice \mathcal{U} est une courbe de Radon, la notion de normalité est réciproque, autrement dit $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^0$ et donc, g \mathcal{U} -normale à g' est équivalent à g' \mathcal{U} -normale à g . Une méthode de construction de ces courbes est donnée dans[6].

3. Éléments de géométrie différentielle

Dans la première partie de cette section, nous rapportons chaque courbe plane paramétrée régulière à un repère variable dépendant de la géométrie de l'indicatrice du plan de Minkowski. Ensuite, nous établissons les formules de Serret-Frenet associées à la géométrie en question. Enfin, nous définissons les notions de développante et de développée en géométrie de Minkowski et nous énumérons quelques unes de leurs propriétés géométriques et analytiques.

3. 1. \mathcal{U} -repère de Frenet

Soit \mathcal{U} l'indicatrice d'un plan de Minkowski \mathcal{M} et $F(t)$ une représentation paramétrique d'une courbe régulière Γ . La \mathcal{U} -tangente unitaire et la \mathcal{U} -normale unitaire à la courbe Γ au point de paramètre t sont respectivement les vecteurs $T_u(t)$ et $N_u(t)$ définis par :

$$T_u(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|_{\mathcal{U}}} \quad \text{et} \quad N_u(t) = \frac{T'_u(t)}{\det(T'_u(t), T_u(t))}. \quad (1.25)$$

Ces deux vecteurs définissent le repère $(T_u(t), N_u(t))$, appelé \mathcal{U} -repère (mobile) de Frenet.

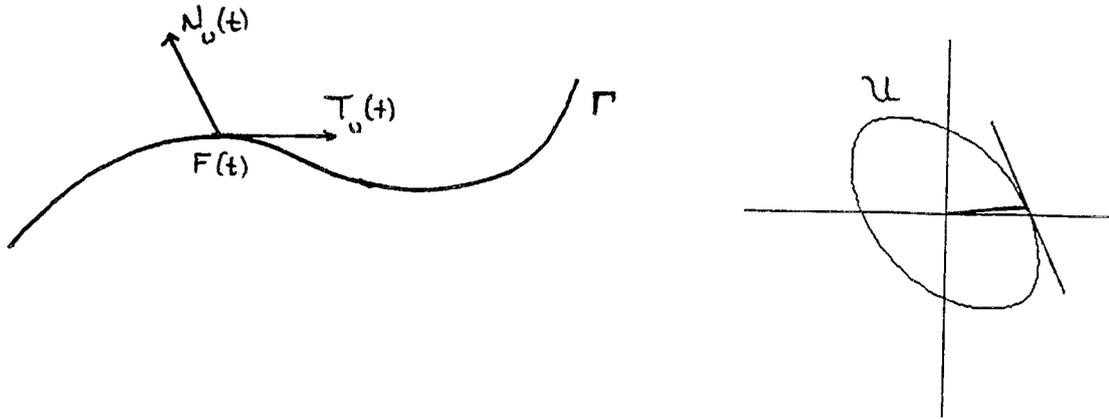


Figure 7. \mathcal{U} -repère de Frenet

Comme $T_u(t)$ est une représentation paramétrique d'un segment de l'indicatrice \mathcal{U} , on déduit de (1.21) que $N_u(t)$ est une représentation paramétrique d'un segment de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 .

Proposition 4. *Le vecteur $T_u(t)$ est \mathcal{U} -normal au vecteur $N_u(t)$ et le vecteur $N_u(t)$ est \mathcal{U}^0 -normal au vecteur $T_u(t)$.*

Preuve: Le point $T_u(t)$ appartient à la courbe \mathcal{U} , et comme

$$T'_u(t) = \det(T'_u(t), T_u(t)) N_u(t),$$

on en déduit que le vecteur $N_u(t)$ est colinéaire au vecteur tangent à l'indicatrice \mathcal{U} au point $T_u(t)$. Par suite $T_u(t)$ est \mathcal{U} -normal au vecteur $N_u(t)$. La deuxième assertion découle directement du théorème 5. ■

\mathcal{U} -abscisse curviligne. Etant donnée une courbe régulière $\Gamma = F(I)$, $I = [a, b]$, l'application l définie par

$$l(t) = \int_a^t \|F'(\mu)\|_{\mathcal{U}} d\mu,$$

est une bijection de I sur $[0, L]$, où L est la \mathcal{U} -longueur de la courbe Γ , c'est à dire, $L = l(b)$. La *paramétrisation en \mathcal{U} -abscisse curviligne* ou *paramétrisation \mathcal{U} -normale* de Γ , notée $(\bar{I} = [0, L], \bar{F})$, est alors définie par :

$$\bar{F} : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2 ; \quad s \longmapsto F(l^{-1}(s)).$$

On vérifie que $\|\bar{F}'(s)\|_{\mathcal{U}} = 1$ pour tout $s \in [0, L]$. Par la suite, la \mathcal{U} -abscisse curviligne sera notée s ou s_u s'il y a ambiguïté. La \mathcal{U} -tangente unitaire par rapport à la \mathcal{U} -abscisse curviligne s prend alors l'expression $T_u(s) = \bar{F}'(s)$. Par suite, l'expression de la \mathcal{U} -normale unitaire est

$$N_u(s) = \frac{\bar{F}''(s)}{\det(\bar{F}''(s), \bar{F}'(s))}. \quad (1.26)$$

Formules de Serret-Frenet. D'après la relation (1.26), on a

$$T_u'(s) = \det(\bar{F}''(s), \bar{F}'(s)) N_u(s). \quad (1.27)$$

Or, $\det(\bar{F}''(s), \bar{F}'(s)) = -k(s) \|\bar{F}'(s)\|_2^3$, où $k(s)$ est la courbure euclidienne de la courbe Γ au point de paramètre s et comme $\bar{F}'(s)$ est une paramétrisation d'un segment de l'indicatrice \mathcal{U} , on déduit du théorème 3 que

$$T_u'(s) = -\frac{k(s)}{h_{\mathcal{U}^0}^3(s)} N_u(s), \quad (1.28)$$

où $h_{\mathcal{U}^0}(s)$ est la fonction support de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 associée à la paramétrisation $U^0(s)$.

Définition 7. La valeur $k_u(s) = k(s)/h_{\mathcal{U}^0}^3(s)$ (resp. son inverse) est appelée la *\mathcal{U} -courbure de Minkowski* (resp. le *\mathcal{U} -rayon de courbure de Minkowski*) de la courbe Γ au point de paramètre s .

En dérivant (1.22), on obtient

$$\det(N_u'(s), T_u(s)) + \det(N_u(s), T_u'(s)) = 0.$$

Or d'après (1.28), il résulte que $\det \left(N'_u(s), T_u(s) \right) = 0$, par suite

$$N'_u(s) = \tau_u(s) T_u(s) \quad \text{avec} \quad \tau_u(s) = \det \left(N_u(s), N'_u(s) \right). \quad (1.29)$$

D'après les relations (1.26) et (1.28), la valeur $\tau_u(s)$ prend l'expression

$$\tau_u(s) = \frac{\det \left(T'_u(s), T_u''(s) \right)}{k_u^2(s)}.$$

En utilisant la relation (1.27) on trouve

$$\tau_u^2(s) = \frac{\det \left(N'_u(s), N_u''(s) \right) \|N'_u(s)\|_2^3}{\|N'_u(s)\|_2^3 k_u(s)}. \quad (1.30)$$

Puis $N'_u(s) = \tau_u(s) T_u(s)$, conduit à

$$\tau_u(s) = \frac{k(s) \|N'_u(s)\|_2^3}{\det \left(N'_u(s), N_u''(s) \right)},$$

de plus, $N_u(s)$ est une paramétrisation d'un segment de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 et donc

$$\tau_u(s) = \frac{k(s)}{k_{\mathcal{U}^0}(s)}, \quad (1.31)$$

où $k_{\mathcal{U}^0}(s)$ est la valeur de la courbure euclidienne de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 au point $N_u(s)$.

Définition 8. La valeur $\tau_u(s) = k(s)/k_{\mathcal{U}^0}(s)$ (resp. son inverse) est appelée la *U-courbure circulaire* (resp. le *U-rayon de courbure circulaire*) de la courbe Γ au point de paramètre s .

Finalement, on en déduit les formules de *Serret-Frenet* associées au \mathcal{U} -repère de Frenet $\left(T_u(s), N_u(s) \right)$:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T_u \\ N_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_u \\ \tau_u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_u \\ N_u \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

La valeur

$$\chi(s) = \frac{k_u(s)}{\tau_u(s)}, \quad (1.33)$$

ne dépend pas de la courbe Γ et dépend seulement de l'indicatrice \mathcal{U} , et est donc appelée la *U-courbure centro-affine* du plan de Minkowski \mathcal{M} [9].

3. 2. \mathcal{U} -Développante et \mathcal{U} -développée

Dans cette section, on généralise la notion de développante et de développée d'une courbe dans un plan de Minkowski \mathcal{M} . On donnera quelques unes de leurs propriétés, qui nous seront utiles par la suite.

3. 2. 1. \mathcal{U} -Développante de Minkowski

Etant donnée une courbe régulière Γ , de paramétrisation \mathcal{U} -normale $\overline{F}(s)$, nous cherchons, comme dans le cas euclidien, à définir la \mathcal{U} -développante de la courbe $\overline{F}(s)$ comme une trajectoire \mathcal{U} -normale à la famille des tangentes de la courbe Γ . Une telle trajectoire \mathcal{I} admet une paramétrisation

$$I(s) = \overline{F}(s) + \lambda(s)T_u(s),$$

où $\lambda(s)$ est une fonction scalaire supposé de classe C^1 . D'après les formules de Serret-Frenet (1.32), on a

$$I'(s) = (1 + \lambda'(s))T_u(s) - \lambda(s)k_u(s)N_u(s).$$

Comme $I'(s)$ doit être de la forme $I'(s) = \beta(s)N_u(s)$, où $\beta(s)$ est une fonction scalaire, on en déduit que $1 + \lambda'(s) = 0$ et par suite $\lambda(s) = s_0 - s$. Ainsi, une paramétrisation de la \mathcal{U} -développante de Minkowski \mathcal{I}_{u,s_0} de la courbe Γ à la distance signée s_0 est

$$I_u(s, s_0) = \overline{F}(s) + (s_0 - s)T_u(s). \quad (1.34)$$

On notera que s n'est pas la \mathcal{U} -abscisse curviligne de la \mathcal{U} -développante de Minkowski.

Singularités de la \mathcal{U} -développante. En dérivant (1.34) et en appliquant les formules de Serret-Frenet, on trouve

$$\begin{aligned} I_u'(s, s_0) &= \overline{F}'(s) + (s_0 - s)T_u'(s) - T_u(s) \\ &= (s_0 - s)T_u'(s) \\ &= -(s_0 - s)k_u(s)N_u(s). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Puisque $\|N_u(s)\|_{\mathcal{U}^0} = 1$, les points singuliers de la \mathcal{U} -développante de Minkowski à la distance signée s_0 sont le point de paramètre $s = s_0$ et les points dont le paramètre annule la \mathcal{U} -courbure de Minkowski de la courbe Γ .

\mathcal{U}^0 -Repère de Frenet. Notons par $T_{I,u^0}(s, s_0)$ la \mathcal{U}^0 -tangente unitaire de la \mathcal{U} -développante de Minkowski à la distance signée s_0 au point de paramètre s . D'après (1.35), on a

$$T_{I,u^0}(s, s_0) = \frac{I_u'(s, s_0)}{\|I_u'(s, s_0)\|_{\mathcal{U}^0}} = \frac{-k_u(s)(s_0 - s)}{|k_u(s)(s_0 - s)|} N_u(s).$$

Par suite, si on note par $N_{I,u^0}(s, s_0)$ la \mathcal{U}^0 -normale unitaire de la \mathcal{U} -développante de Minkowski à la distance s_0 au point de paramètre s , alors

$$N_{I,u^0}(s, s_0) = \frac{T'_{I,u^0}(s, s_0)}{\det \left(T'_{I,u^0}(s, s_0), T_{I,u^0}(s, s_0) \right)}.$$

D'où

$$N_{I,u^0}(s, s_0) = \frac{k_u(s)(s_0 - s)}{|k_u(s)(s_0 - s)|} T_u(s).$$

Par suite, le \mathcal{U}^0 -repère de Frenet associé à la \mathcal{U} -développante de Minkowski de la courbe Γ s'écrit

$$\begin{cases} T_{I,u^0}(s, s_0) = \epsilon_1(s)N_u(s), \\ N_{I,u^0}(s, s_0) = -\epsilon_1(s)T_u(s), \\ \text{avec } \epsilon_1(s) = \frac{-k_u(s)(s_0 - s)}{|k_u(s)(s_0 - s)|}. \end{cases} \quad (1.36)$$

3. 2. 2. \mathcal{U} -Développée de Minkowski

Etant donnée une courbe Γ régulière, de paramétrisation \mathcal{U} -normale $\overline{F}(s)$, la \mathcal{U} -développée de Minkowski de la courbe $\overline{F}(s)$ est l'enveloppe des droites $L(s)$ \mathcal{U}^0 -normales à la courbe Γ . L'équation des droites $L(s)$ est

$$N_2(s)X - N_1(s)Y = \det(\overline{F}(s), N_u(s)),$$

où $N_u(s) = (N_1(s), N_2(s))$. L'équation de l'enveloppe se déduit par résolution du système

$$\begin{cases} N_2(s)X - N_1(s)Y = \det(\overline{F}(s), N_u(s)), \\ N'_2(s)X - N'_1(s)Y = \det(\overline{F}'(s), N_u(s)) + \det(\overline{F}(s), N'_u(s)). \end{cases}$$

D'après les formules de Serret-Frenet, on a

$$\Delta = \tau_u(s), \quad \Delta_X = -N_1(s) + \tau_u(s)\overline{F}_1(s), \quad \Delta_Y = -N_2(s) + \tau_u(s)\overline{F}_2(s).$$

Par suite, une paramétrisation de la \mathcal{U} -développée de Minkowski de la courbe Γ est

$$E_u(s) = \overline{F}(s) - \frac{1}{\tau_u(s)}N_u(s). \quad (1.37)$$

Singularités de la \mathcal{U} -développée. En dérivant (1.37) et en appliquant les formules de Serret-Frenet on trouve

$$\begin{aligned} E'_u(s) &= \overline{F}'(s) + \frac{\tau'_u(s)}{\tau_u^2(s)}N_u(s) - T_u(s) \\ &= \frac{\tau'_u(s)}{\tau_u^2(s)}N_u(s). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Puisque $\|N_u(s)\|_{\mathcal{U}^0} = 1$, les points singuliers de la \mathcal{U} -développée de Minkowski sont associées aux extréma locaux de la \mathcal{U} -courbure circulaire de la courbe Γ .

\mathcal{U}^0 -Repère de Frenet. Notons par $T_{E,u^0}(s)$ la \mathcal{U}^0 -tangente unitaire de la \mathcal{U} -développée de Minkowski au point de paramètre s .

$$T_{E,u^0}(s) = \frac{E'_u(s)}{\|E'_u(s)\|_{\mathcal{U}^0}} = \frac{\tau'_u(s)}{|\tau'_u(s)|} N_u(s).$$

Par suite, si on note par $N_{E,u^0}(s)$ la \mathcal{U}^0 -normale unitaire de la \mathcal{U} -développée de Minkowski au point de paramètre s , on a

$$N_{E,u^0}(s) = \frac{T'_{E,u^0}(s)}{\det(T'_{E,u^0}(s), T_{E,u^0}(s))}.$$

D'après les formules de Serret-Frenet, on en déduit que

$$N_{E,u^0}(s) = -\frac{\tau'_u(s)}{|\tau'_u(s)|} T_u(s).$$

Par suite, le \mathcal{U}^0 -repère de Frenet associé à la \mathcal{U} -développée de Minkowski est

$$\begin{cases} T_{E,u^0}(s) = \epsilon_2(s) N_u(s), \\ N_{E,u^0}(s) = -\epsilon_2(s) T_u(s), \\ \text{avec } \epsilon_2(s) = \frac{\tau'_u(s)}{|\tau'_u(s)|} \end{cases} \quad (1.39)$$

3. 3. Propriétés géométriques

Avec les définitions de la \mathcal{U} -développante et de la \mathcal{U} -développée données dans le paragraphe précédent, on montre dans cette section que de nombreuses propriétés classiques dans le cas euclidien au sujet de ces courbes, restent vérifiées dans le cas d'un plan de Minkowski.

Proposition 5. Soit $F(s)$ une paramétrisation régulière de classe C^3 d'une courbe Γ , dont la \mathcal{U} -courbure circulaire ne s'annule pas. Alors la différence des \mathcal{U} -rayons de courbure circulaire en deux points de la courbe Γ est égale à la \mathcal{U}^0 -longueur d'arc de la \mathcal{U} -développée entre les points correspondants.

Preuve: La \mathcal{U}^0 -longueur d'arc de la \mathcal{U} -développée de Minkowski entre les points de paramètres s_1 et s_2 ($s_1 < s_2$) est

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \|E'_u(s)\|_{\mathcal{U}^0} ds = \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{\tau'_u(s)}{\tau_u^2(s)} N_u(s) \right\|_{\mathcal{U}^0} ds.$$

Comme $N_u(s)$ est une paramétrisation de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 , on a $\|N_u(s)\|_{\mathcal{U}^0} = 1$, par suite

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \frac{|\tau'_u(s)|}{\tau_u^2(s)} ds = \left| \frac{1}{\tau_u(s_1)} - \frac{1}{\tau_u(s_2)} \right|. \quad \blacksquare$$

Proposition 6. Soit $\bar{F}(s)$ la paramétrisation \mathcal{U} -normale d'une courbe régulière Γ de classe C^3 . Alors, la \mathcal{U}^0 -développée d'une \mathcal{U} -développante de la courbe Γ est la courbe Γ (sur chaque segment où ces courbes sont définies). De plus, le \mathcal{U}^0 -rayon de courbure circulaire $R_{I,u}(s, s_0)$ de la \mathcal{U} -développante de la courbe Γ à la distance signée s_0 est

$$R_{I,u}(s) = \epsilon_1(s)(s - s_0). \quad (1.40)$$

où $\epsilon_1(s)$ est définie par la formule (1.36).

Preuve: D'après le \mathcal{U}^0 -repère de Frenet de la \mathcal{U} -développante \mathcal{I}_{u,s_0} , la courbe Γ est l'enveloppe des \mathcal{U} -normales de cette \mathcal{U} -développante, ce qui montre que Γ est la \mathcal{U}^0 -développée de la \mathcal{U} -développante \mathcal{I}_{u,s_0} , ce qui prouve la première assertion de la proposition. De cela, on déduit que

$$\bar{F}(s) = I_u(s, s_0) - R_{I,u}(s, s_0)N_{I,u^0}(s, s_0), \quad (1.41)$$

où $R_{I,u}(s, s_0)$ (resp. $N_{I,u^0}(s, s_0)$) est le \mathcal{U}^0 -rayon de courbure circulaire (resp. la \mathcal{U}^0 -normale unitaire) de la \mathcal{U} -développante \mathcal{I}_{u,s_0} . Ce qui prouve, d'après le \mathcal{U}^0 -repère de Frenet de \mathcal{I}_{u,s_0} , que

$$I_u(s, s_0) - \bar{F}(s) = -R_{I,u}(s, s_0)\epsilon_1(s)T_u(s), \quad (1.42)$$

où $\epsilon_1(s)$ est définie par la relation (1.36). Reprenant la définition de la \mathcal{U} -développante de Γ :

$$I_u(s, s_0) - \bar{F}(s) = (s_0 - s)T_u(s), \quad (1.43)$$

on obtient $-R_{I,u}(s, s_0)\epsilon_1(s)T_u(s) = (s_0 - s)T_u(s)$, c'est-à-dire $R_{I,u}(s, s_0) = \epsilon_1(s)(s - s_0)$. \blacksquare

Proposition 7. Avec les hypothèses de la proposition précédente, la \mathcal{U}^0 -développante de la \mathcal{U} -développée à une distance bien choisie de la courbe Γ est la courbe Γ elle-même, lorsque ces courbes sont bien définies.

Preuve: On considère la paramétrisation \mathcal{U} -normale $\bar{F}(s)$ de la courbe Γ et on se place sur un segment $[s_1, s_2]$ sur lequel $\tau_u(s) \neq 0$ et $\tau'_u(s) \neq 0$. On peut, sans perte de généralité, supposer que $\tau'_u(s) > 0$ pour tout $s \in [s_1, s_2]$. La \mathcal{U}^0 -développante $(\Gamma_E)_{I,s_0}$ de la \mathcal{U} -développée Γ_E à une distance signée s_0 est définie par

$$(\bar{F}_E)_{I,s_0}(s) = E_u(s) - (\sigma(s) - s_0)T_{E,u^0}(s),$$

où $\sigma(s)$ est la \mathcal{U}^0 -longueur d'arc de la \mathcal{U} -développée et $T_{E,u^0}(s)$ est la \mathcal{U}^0 -tangente unitaire de la \mathcal{U} -développée. D'après le \mathcal{U} -repère de Frenet (1.39) et la proposition 5, on en déduit que

$$(\bar{F}_E)_{I,s_0} = E_u(s) - \left(\epsilon_2(s)R_u(s) - \epsilon_2(s)R_u(s_1) - \epsilon_2(s)s_0 \right) N_u(s), \quad (1.44)$$

où $R_u(s)$ est le \mathcal{U} -rayon de courbure circulaire de la courbe Γ et $\epsilon_2(s)$ est donnée par la relation (1.39). En choisissant $s_0 = -\epsilon_2(s)R_u(s_1)$ dans l'équation (1.44), on trouve le résultat. ■

Proposition 8. *La \mathcal{U} -développante d'une courbe G^1 est une courbe G^2 ; plus précisément, on considère deux courbes régulières, convexes, de classe C^3 , Γ_1 et Γ_2 qui se raccordent G^1 en un point où leur \mathcal{U} -courbure de Minkowski sont de même signe. Alors la \mathcal{U} -développante de la réunion de ces deux courbes est une courbe G^2 .*

Preuve: On appelle s_1 et s_2 les \mathcal{U} -abscisses curvilignes des deux courbes Γ_1 et Γ_2 respectivement, et on considère leur paramétrisation \mathcal{U} -normale $\overline{F}_1(s_1)$ et $\overline{F}_2(s_2)$. On suppose que Γ_1 a pour \mathcal{U} -longueur L_1 et Γ_2 pour \mathcal{U} -longueur L_2 . On note par $k_u^1(s_1)$ (resp. $k_u^2(s_2)$) la \mathcal{U} -courbure de Minkowski de la courbe Γ_1 (resp. Γ_2) au point de paramètre s_1 (resp. s_2). Notons $A = \overline{F}_1(L_1) = \overline{F}_2(0)$ le point de raccord des deux courbes Γ_1 et Γ_2 .

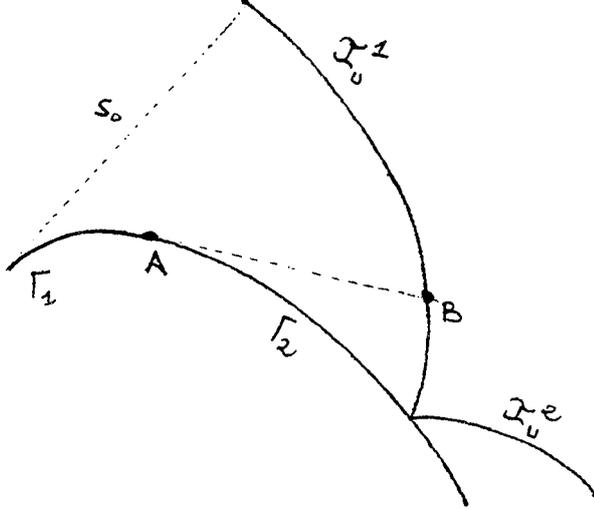


Figure 8. Raccordement G^2 des \mathcal{U} -développantes

On considère la \mathcal{U} -développante de Γ_1 à la distance s_0

$$I_u^1(s_1, s_0) = \overline{F}_1(s_1) - (s_1 - s_0)T_u^1(s_1). \quad (1.45)$$

On a, $B = I_u^1(L_1, s_0) = \overline{F}_1(L_1) - (L_1 - s_0)T_u^1(L_1)$ et donc $\|B - A\|_{\mathcal{U}} = L_1 - s_0$.

On considère ensuite la \mathcal{U} -développante de la courbe Γ_2 à la distance $s_0 - L_1$, de sorte à obtenir un raccordement C^0 en B . En effet

$$I_u^2(s_2, s_0 - L_1) = \overline{F}_2(s_2) - (s_2 - s_0 + L_1)T_u^2(s_2). \quad (1.46)$$

D'après l'hypothèse du raccordement G^1 des courbes Γ_1 et Γ_2 au point A on a

$$I_u^2(0, s_0 - L_1) = \overline{F}_2(0) - (L_1 - s_0)T_u^2(0) = A - (L_1 - s_0)T_u^1(L_1) = B,$$

ce qui montre que les deux \mathcal{U} -développantes se raccordent C^0 au point B .

• Montrons que les deux \mathcal{U} -développantes se raccordent G^1 au point B en vérifiant qu'elles ont la même tangente en ce point. La \mathcal{U}^0 -tangente unitaire à $\Gamma_{I,u}^1$ en B est

$$T_{I,u^0}^1(L_1, s_0) = \epsilon_1(L_1)N_u^1(L_1),$$

$$\text{avec } \epsilon_1(L_1) = \frac{-(s_0 - L_1)k_u^1(L_1)}{|(s_0 - L_1)k_u^1(L_1)|} = \pm 1.$$

La \mathcal{U}^0 -tangente unitaire à $\Gamma_{I,u}^2$ au point B est

$$T_{I,u^0}^2(0, s_0 - L_1) = \epsilon_2(0)N_u^2(0),$$

$$\text{avec } \epsilon_2(0) = \frac{-(-L_1 + s_0)k_u^2(0)}{|(-L_1 + s_0)k_u^2(0)|} = \pm 1.$$

Ainsi, puisque $N_u^1(L_1) = N_u^2(0)$ d'après le raccordement G^1 des deux courbes Γ_1 et Γ_2 au point A , et puisque $k_u^1(L_1)$ est de même signe que $k_u^2(0)$, on obtient $T_{I,u^0}^1(L_1) = T_{I,u^0}^2(0)$.

• Montrons enfin que les deux \mathcal{U} -développantes (1.45) et (1.46) se raccordent G^2 en B . D'après la proposition 6, les \mathcal{U} -rayons de courbure circulaire des deux \mathcal{U} -développantes sont respectivement

$$R_{I,u}^1(L_1, s_0) = \frac{k_u^1(L_1)}{|k_u^1(L_1)|} |s_0 - L_1| \text{ et } R_{I,u}^2(0, s_0 - L_1) = \frac{k_u^2(0)}{|k_u^2(0)|} |L_1 - s_0|,$$

donc ces courbures sont égales, puisque $k_u^1(L_1)$ et $k_u^2(0)$ ont même signe. Comme l'indicatrice \mathcal{U} est suffisamment différentiable, on en déduit que les courbures euclidiennes des \mathcal{U} -développantes (1.45) et (1.46) sont égales au point B . ■

Références

1. Ait Haddou, R., Minkowski PH curves, soumis à Jour. of Amer. Math. Soc, 1996.
2. Bonnesen, T., and W. Fenchel, Theorie der konvexen Korper, (Berlin 1934).
3. Busemann, H., The foundation of Minkowskian geometry, Comment. Math. Helv. **24**, 1950, 156–187.
4. Busemann, H., Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of the geometry, Annals of mathematics studies **8**, 1965.
5. Busemann, H., The isoperimetric problem in the Mikowski plane, Amer. J. Math **69**, 1947, 863–871.
6. Chakerian G. D., and H. Groemer, Convex bodies of constant width, Convexity and its Applications, eds, Peter M. Gruber and Jorg M. Wills, Birkhauser Verlag, 1983.
7. Coolidge, H., Plane Algebraic curves, 1950.

8. Hormander, L., Notion of Convexity, Progress in Mathematics, **127**, 1994.
9. Guggenheimer, H., Pseudo-Minkowski differential geometry, Annali di Mat, Pura ed Appl **69**, 1965 305–370
10. Guggenheimer, H., Differential Geometry, McGraw-Hill Book Company, 1963.
11. Petty, C. M., On the geometrie of the Minkowski plane, Revisita Mat. Univ. Parma **6**, 1955, 269–292.

Chapitre 2.

COURBES PARALLELES DE MINKOWSKI

Introduction

La notion de courbe parallèle a été mentionnée dans de nombreux textes de géométrie classique, sans pour autant susciter un intérêt considérable. Récemment, ces courbes ont refait surface dans le domaine de la CAGD, du fait de leur rôle important dans les problèmes d'étude des trajectoires d'outils pour les machines à commande numérique ou encore dans les problèmes d'agrandissement ou de rétrécissement d'objets. Ces courbes apparaissent comme l'enveloppe d'une famille C_t de cercles de même rayon et dont le centre parcourt une courbe régulière appelée courbe génératrice (voir exemple 1). Dans ce chapitre, nous allons généraliser cette notion de courbe parallèle, en remplaçant les cercles C_t par une même copie homothétique de l'indicatrice \mathcal{U} d'un plan de Minkowski \mathcal{M} .

Dans la première section, nous donnerons l'expression analytique d'une telle courbe parallèle généralisée, (courbe \mathcal{U} -parallèle) ainsi que ses propriétés intrinsèques, telles que les singularités, la courbure, la longueur, l'aire,....

La forme implicite de la courbe parallèle généralisée est parfois utile dans certains problèmes tels que le calcul de l'intersection d'une droite avec la courbe offset dans les techniques du lancer de rayon[14] ou encore pour situer un point par rapport à une courbe. La deuxième section aura pour but de donner une stratégie d'implicitisation de la courbe parallèle généralisée.

L'une des principales difficultés lors du traitement de ces courbes dans la pratique est que la courbe parallèle d'une courbe rationnelle n'est pas, en général, rationnelle. Ceci a donné naissance à plusieurs méthodes d'approximation de la courbe parallèle par des courbes splines rationnelles, afin qu'elles soient compatibles avec les systèmes de CAD existants [20,25]. Des méthodes plus judicieuses sont apparues ces dernières années, consistant à approcher directement la courbe génératrice par une classe spéciale de courbes appelées courbes à hodographe pythagorien (courbes PH)[12,13,16,22,23], et définie comme étant l'ensemble des courbes rationnelles à parallèles rationnelles. La caractérisation géométrique de ces courbes à été donnée simultanément et indépendamment par H. Pottmann[21] et J. C. Fiorot et T. Gensane[18,19] par des approches différentes. La première approche est basée sur la caractérisation des courbes gauches dont les plans tangents forment un angle constant avec un plan de référence[21]. La deuxième approche est basée sur les propriétés élémentaires de la développante et de la développée d'une courbe plane[18,19]. Dans la troisième section de ce chapitre, nous donnerons la caractérisation paramétrique de toutes les courbes rationnelles dont les parallèles généralisées sont rationnelles, ce qui nous permettra, par une approche similaire à celle de J. C. Fiorot et T. Gensane, de caractériser géométriquement cet ensemble.

1. Courbe \mathcal{U} -parallèle

Soit \mathcal{M} un plan de Minkowski d'indicatrice strictement convexe et suffisamment différentiable \mathcal{U} .

1. 1. Enveloppe d'une famille d'indicatrices

Dans cette section, nous donnons l'expression analytique de l'enveloppe des indicatrices centrées sur une courbe régulière Γ . Pour cela, nous commençons par établir la proposition suivante.

Proposition 9. *Soit Γ une courbe régulière de paramétrisation $(I, F(t))$, et soit X un point n'appartenant pas à Γ . Considérons la fonction*

$$\phi(t) = \|X - F(t)\|_{\mathcal{U}}, \quad t \in I.$$

Si pour un $t_0 \in I$, $\phi'(t_0) = 0$ alors $X - F(t_0)$ est \mathcal{U} -normale à $F'(t_0)$.

Preuve: Supposons que la courbe Γ est localement convexe au voisinage de $F(t_0)$. Dans ce cas la fonction $\phi(t)$ est localement convexe au voisinage de t_0 . Comme $\phi'(t_0) = 0$, on en déduit que $\phi(t_0)$ est un minimum local de la fonction ϕ , et donc la boule de centre X et passant par $F(t_0)$ est tangente à Γ au point $F(t_0)$, ce qui montre d'après la remarque 3 que $X - F(t_0)$ est \mathcal{U} -normale à $F'(t_0)$.

La même démonstration reste valable lorsque la courbe Γ est localement concave au voisinage de $F(t_0)$. Supposons maintenant que la courbe Γ représente un point d'inflexion au point $F(t_0)$. Dans ce cas, on peut définir une courbe paramétrée $G(t)$ tel que $G(t) = F(t)$ si $t \geq t_0$, $t \in I$, $G'(t_0) = F'(t_0)$, et telle que la courbe $G(t)$ est localement convexe ou concave au voisinage de $G(t_0)$, d'après ce qui précède, $X - G(t_0)$ est \mathcal{U} -normale à $G'(t_0)$, ce qui prouve le résultat. ■

Considérons maintenant l'homothétique \mathcal{U}_d de l'indicatrice \mathcal{U} , de rapport d , et la famille des translatés \mathcal{U}_t de \mathcal{U}_d , centrés sur la courbe $\Gamma = F(t)$. Une équation implicite de \mathcal{U}_t est

$$\|X - F(t)\|_{\mathcal{U}} = d, \quad (2.1)$$

L'équation de l'enveloppe de la famille \mathcal{U}_t se déduit par résolution du système

$$\begin{cases} \|X - F(t)\|_{\mathcal{U}} = d, \\ \frac{\partial}{\partial t} \|X - F(t)\|_{\mathcal{U}} = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

D'après la proposition 9, la deuxième équation du système (2.2) entraîne que $X - F(t)$ est \mathcal{U} -normale à la \mathcal{U} -tangente unitaire à la courbe Γ au point de paramètre t , par suite

$$X - F(t) = \lambda(t)N_{\mathcal{U}_0}(t), \quad (2.3)$$

où $\lambda(t)$ est une fonction scalaire dépendant du paramètre t . Appliquons la première équation de (2.2) à l'équation (2.3)

$$\|X - F(t)\|_{\mathcal{U}} = \|\lambda(t)N_{u^0}(t)\|_{\mathcal{U}} = |\lambda(t)| = d,$$

d'où $\lambda(t) = \pm d$. Finalement l'équation de l'enveloppe est

$$F_d(t) = F(t) \pm dN_{u^0}(t). \quad (2.4)$$

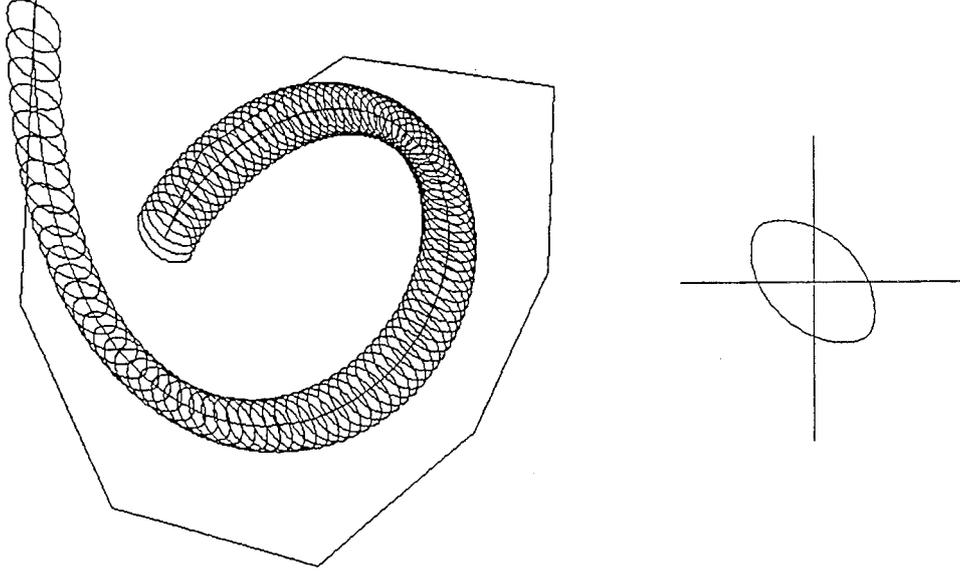


Figure 1. *Enveloppe d'indicatrices*

Définition 9. Considérons une courbe paramétrée régulière $F(t)$ et un plan de Minkowski \mathcal{M} d'indicatrice \mathcal{U} . On appelle courbe \mathcal{U} -parallèle de la courbe $F(t)$, à la distance signée d , la courbe ayant pour représentation paramétrique

$$F_d(t) = F(t) + d N_{u^0}(t), \quad (2.5)$$

où $N_{u^0}(t)$ est la \mathcal{U}^0 -normale unitaire à la courbe $F(t)$ au point de paramètre t .

Si d est positif, on parlera de courbe \mathcal{U} -parallèle *extérieure*, sinon on parlera de courbe \mathcal{U} -parallèle *intérieure*. En particulier $F_0(t) = F(t)$. On parlera parfois de d -parallèle pour préciser la distance d .

1. 2. Propriétés intrinsèques de la courbe \mathcal{U} -parallèle

Soit $F(s)$ la paramétrisation \mathcal{U}^0 -normale de la courbe Γ . D'après les formules de Serret-Frenet associées au plan polaire de Minkowski \mathcal{M}^0 , les dérivées premières et secondes de la courbe \mathcal{U} -parallèle s'expriment par :

$$\begin{aligned} F'_d(s) &= (1 + d \tau_{u^0}(s))F'(s), \\ F''_d(s) &= d \tau'_{u^0}(s)F'(s) + (1 + d \tau_{u^0}(s))F''(s). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Singularité de la courbe \mathcal{U} -parallèle. Les points singuliers de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s)$ sont caractérisés par la condition $F'_d(s) = 0$. La courbe $F(s)$ étant régulière, on a $F'(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$. Ainsi les points singuliers de multiplicité 1 (*points de rebroussement*) de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s)$ correspondent aux points dont le paramètre s_c vérifie :

$$\tau_{u^0}(s_c) = -\frac{1}{d} \quad \text{et} \quad \tau'_{u^0}(s_c) \neq 0. \quad (2.7)$$

Une courbe \mathcal{U} -parallèle n'admettant pas de points de rebroussement sera dite *non-dégénérée*.

Les points *extraordinaires* de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s)$ sont les points singuliers de multiplicité ≥ 2 . Ces points sont les points dont le paramètre s_e vérifie :

$$\tau_{u^0}(s_e) = -\frac{1}{d} \quad \text{et} \quad \tau'_{u^0}(s_e) = 0. \quad (2.8)$$

\mathcal{U}^0 -repère de Frenet de la courbe \mathcal{U} -parallèle. Notons par $T_{d,u^0}(s)$ et $N_{d,u^0}(s)$ respectivement la \mathcal{U}^0 -tangente unitaire et la \mathcal{U}^0 -normale unitaire de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s)$. D'après (1.25), on a

$$T_{d,u^0}(s) = \frac{F'_d(s)}{\|F'_d(s)\|_{\mathcal{U}^0}} = \frac{1 + d \tau_{u^0}(s)}{|1 + d \tau_{u^0}(s)|} T_{u^0}(t),$$

et d'après la relation (1.25), la \mathcal{U}^0 -normale unitaire de la courbe \mathcal{U} -parallèle a pour expression

$$N_{d,u^0}(s) = \frac{T'_d(s)}{\det(T'_d(s), T_d(s))}.$$

On en déduit le \mathcal{U}^0 -repère de Frenet de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s)$:

$$\begin{cases} T_{d,u^0}(s) = \epsilon(s) T_{u^0}(s), \\ N_{d,u^0}(s) = \epsilon(s) N_{u^0}(s), \\ \text{avec } \epsilon(s) = \frac{1 + d \tau_{u^0}(s)}{|1 + d \tau_{u^0}(s)|} = \pm 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Lieu des singularités de la courbe \mathcal{U} -parallèle. Soit $M = F_d(s_c)$ un point singulier de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s) = F(s) + dN_{u^0}(s)$. D'après (2.7), on a $\tau_{u^0}(s_c) = -1/d$, de sorte que $F_d(s_c) = F(s_c) - (1/\tau_{u^0}(s_c))N_{u^0}(s_c)$, par suite, d'après (1.37), le point M appartient à la \mathcal{U}^0 -développée de la courbe $F(s)$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 10. *La \mathcal{U}^0 -développée de la courbe $F(s)$ contient l'ensemble (éventuellement vide) des points singuliers de toutes les courbes \mathcal{U} -parallèles à distance d , de la courbe $F(s)$ lorsque d parcourt \mathbb{R} .*

Proposition 11. *Les \mathcal{U} -développantes d'une courbe sont \mathcal{U} -parallèles entre elles.*

Preuve: Soit $\overline{F}(s)$ la paramétrisation \mathcal{U} -normale de la courbe Γ . Considérons la \mathcal{U} -développante Γ_I à la distance signée $s_0 + d$ de la courbe Γ :

$$\begin{aligned} I_u(s, s_0 + d) &= \overline{F}(s) + (s_0 + d - s)T_u(s) \\ &= \overline{F}(s) + (s_0 - s)T_u(s) + d T_u(s) \\ &= I_u(s, s_0) + dT_u(s). \end{aligned}$$

D'après le \mathcal{U} -repère de Frenet de la \mathcal{U} -développante, on a

$$T_u(s) = -\left(\frac{1}{\epsilon_1(s)}\right)N_{I,u^0}(s, s_0), \quad (2.10)$$

où $\epsilon_1(s)$ est donnée par (1.36), par suite, l'expression de la \mathcal{U} -développante devient

$$I_u(s, s_0 + d) = I_u(s, s_0) - \frac{d}{\epsilon_1(s)}N_{I,u^0}(s, s_0). \quad (2.11)$$

Ce qui prouve le résultat. ■

Courbure de la courbe \mathcal{U} -parallèle. La courbure euclidienne de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s)$ en un point de paramètre s est donnée par l'expression

$$k_d(s) = \frac{\det(F'_d(s), F''_d(s))}{\|F'_d(s)\|_2^3}. \quad (2.12)$$

En appliquant les formules de Serret-Frenet, on trouve

$$k_d(s) = \frac{k_{u^0}(s)}{|1 + d\tau_{u^0}(s)|\|T_{u^0}(s)\|_2^3}.$$

où $k_{u^0}(s)$ est la \mathcal{U}^0 -courbure de Minkowski de la courbe $F(s)$ au point de paramètre s . Comme $T_{u^0}(s)$ est une paramétrisation de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 , on déduit de (1.31) que $k_{u^0}(s)/\|T_{u^0}(s)\|_2^3 = k(s)$ où $k(s)$ est la courbure euclidienne de $F(s)$ au point de paramètre s . Ainsi

$$k_d(s) = \frac{k(s)}{|1 + d\tau_{u^0}(s)|}. \quad (2.13)$$

D'après l'expression de $\tau_{u^0}(s)$ on peut remarquer que si $1 + d\tau_{u^0}(s) > 0$ alors

$$\frac{1}{k_d(s)} = \frac{1}{k(s)} + d\frac{1}{k_0(s)}, \quad (2.14)$$

où $k_0(s)$ est la courbure euclidienne de l'indicatrice \mathcal{U} au point $N_{u^0}(s)$. Ce qui permet de retrouver le résultat de Brechner[15] obtenu par des méthodes implicites.

\mathcal{U}^0 -longueur de la courbe \mathcal{U} -parallèle. La \mathcal{U}^0 -longueur totale de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s)$ est donnée par l'expression

$$L_d = \int_0^L \|F'_d(\sigma)\|_{\mathcal{U}^0} d\sigma, \quad (2.15)$$

où L est la \mathcal{U}^0 -longueur de la courbe génératrice $F(s)$. Nous supposons que la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(s)$ est régulière. Dans ce cas, la quantité $1 + d \tau_{u^0}(s)$ est de signe constant.

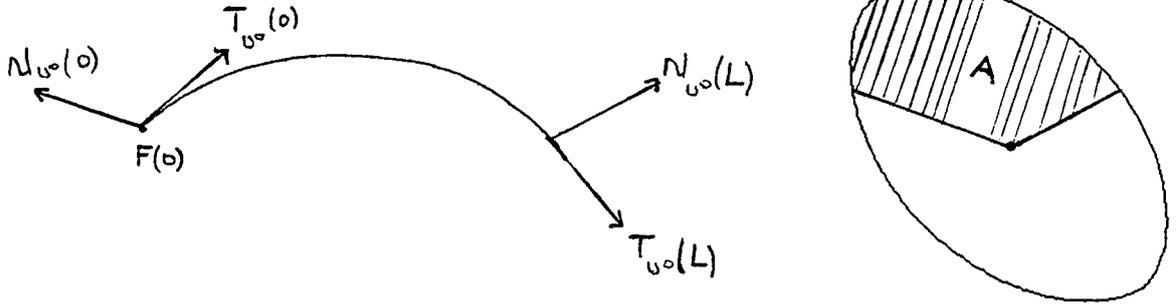


Figure 2. \mathcal{U}^0 -longueur de la \mathcal{U} -parallèle

Si $1 + d \tau_{u^0}(s) > 0$ pour tout $s \in [0, L]$, on a

$$L_d = \int_0^L d \sigma + d \int_0^L \tau_{u^0}(\sigma) d\sigma = L - 2dA > 0,$$

où d'après (1.29), A est l'aire euclidienne de la région hachurée dans la figure 2.

Si $1 + d \tau_{u^0}(s) < 0$ pour tout $s \in [0, L]$, on a

$$L_d = - \int_0^L d \sigma - d \int_0^L \tau_{u^0}(\sigma) d\sigma = -L + 2dA > 0.$$

On en déduit que la \mathcal{U}^0 -longueur totale de la courbe \mathcal{U} -parallèle à la distance d a pour expression

$$L_d = |L - 2dA|. \quad (2.16)$$

De ce résultat on déduit la proposition suivante qui caractérise la \mathcal{U}^0 -longueur d'un ovale à largeur constante dans un plan de Minkowski (voir chapitre 5).

Proposition 12. *Si la courbe \mathcal{U} -parallèle à une distance signée d d'une courbe Γ , C^2 , fermée, convexe est la courbe Γ elle même, alors la \mathcal{U}^0 -longueur totale de Γ est égale à $d \Pi$ où Π est l'aire euclidienne de l'indicatrice \mathcal{U} .*

Preuve: Si $\Gamma_d \equiv \Gamma$ alors $1 + d \tau_{u^0}(s) < 0$ pour tout $s \in [0, L]$, où L est la \mathcal{U}^0 -longueur de la courbe Γ . Comme la courbe Γ est fermée, convexe, on en déduit que $A = \Pi$ et $L_d = -L_d + 2dA$, de sorte que $2L_d = 2d\Pi$, d'où le résultat. ■

Aire de la courbe \mathcal{U} -parallèle. Pour certaines applications, telle que la description de l'érosion (bidimensionnelle) d'un volume lors d'une sédimentation de matériaux par des processus physiques divers[25], le calcul de l'aire entre la courbe et sa courbe \mathcal{U} -parallèle est très utile. Dans ce paragraphe, nous donnons une réponse à cette question dans le cas où la courbe génératrice est une courbe simple, fermée, suffisamment différentiable.

Théorème 6. *Si Γ est une courbe régulière C^2 fermée, simple, de \mathcal{U}^0 -longueur totale L , englobant une aire A alors la courbe \mathcal{U} -parallèle Γ_d à la distance d (supposée non-dégénérée) englobe une aire A_d telle que*

$$A_d = A + d L + d^2 \Pi,$$

où Π est l'aire de l'indicatrice \mathcal{U} .

Preuve: Soit $F(s)$ la paramétrisation \mathcal{U}^0 -normale de la courbe Γ .

$$2A_d = \int_0^L \det(F'_d(s), F_d(s)) ds \quad (2.17)$$

D'après les formules de Serret-Frenet et la relation (1.29), on a

$$\det(F'_d(s), F_d(s)) = \det(F'(s), F(s)) + d \det(F(s), N'_{u^0}(s)) + d + d^2 \tau_{u^0}(s).$$

Or, d'après (1.22), on a $\det(F(s), N'_{u^0}(s)) = \det(F(s), N_{u^0}(s))' + 1$, par suite, en insérant cette quantité dans (2.17) et en intégrant entre 0 et L on trouve le résultat. ■

2. Implicitisation de la courbe \mathcal{U} -parallèle

Dans cette section nous nous intéressons à la recherche de l'équation implicite de la courbe \mathcal{U} -parallèle d'une courbe algébrique donnée. Nous distinguons le cas où cette courbe génératrice est définie par une représentation paramétrique et le cas où cette courbe est définie par une équation implicite. On supposera dans cette section que l'indicatrice \mathcal{U} est définie par une équation algébrique.

2. 1. Courbe génératrice paramétrée

Soit $F(t) = (f(t), g(t))$ une courbe paramétrée polynomiale régulière et I l'espace des paramètres. Supposons que l'indicatrice \mathcal{U} a pour équation implicite $H(x, y) = 0$. La courbe \mathcal{U} -parallèle intérieure et extérieure à une distance d ($d > 0$) de la courbe $F(t)$ se déduit par résolution du système

$$\begin{cases} P_d(t, x, y) = H\left(\frac{x - f(t)}{d}, \frac{y - g(t)}{d}\right) = 0, \\ Q_d(t, x, y) = \frac{\partial P_d}{\partial t}(t, x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

L'équation implicite F_d de la \mathcal{U} -parallèle se déduit alors par élimination du paramètre t dans les deux équations ci-dessus, c'est-à-dire :

$$F_d(x, y) = \text{Res}_t(P_d(t, x, y), Q_d(t, x, y)) = 0,$$

où $\text{Res}_t(., .)$ est le résultant en t des expressions P_d et Q_d , considérées comme des polynômes en la variable t [14].

Exemple 3: Considérons la crunode standart paramétrée par $F(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$. Cette courbe est régulière. Supposons que l'indicatrice \mathcal{U} est le cercle unité, dans ce cas la géométrie de Minkowski est la géométrie euclidienne usuelle. On obtient :

$$\begin{aligned} F_d(x, y) = & 729d^{10} - 3645d^8x^2 - 5346d^8x - 1458d^8y^2 - 2457d^8 + 7290d^6x^4 + \\ & 19656d^6x^3 + 5832d^6x^2y^2 + 21924d^6x^2 + 13122d^6xy^2 + 11952d^6x + 729d^6y^4 + \\ & 6048d^6y^2 + 2752d^6 - 7290d^4x^6 - 26892d^4x^5 - 8748d^4x^4y^2 - 42966d^4x^4 - 29862d^4x^3y^2 - \\ & 38416d^4x^3 - 2187d^4x^2y^4 - 38880d^4x^2y^2 - 20768d^4x^2 - 12150d^4xy^4 - 24048d^4xy^2 - \\ & 6656d^4x - 7182d^4y^4 - 5664d^4y^2 - 1024d^4 + 3645d^2x^8 + 16200d^2x^7 + 5832d^2x^6y^2 + \\ & 31012d^2x^6 + 20358d^2x^5y^2 + 32784d^2x^5 + 2187d^2x^4y^4 + 32544d^2x^4y^2 + 20224d^2x^4 + \\ & 10692d^2x^3y^4 + 30720d^2x^3y^2 + 6912d^2x^3 + 19980d^2x^2y^4 + 18112d^2x^2y^2 + 1024d^2x^2 + \\ & 4374d^2xy^6 + 14256d^2xy^4 + 6400d^2xy^2 + 3888d^2y^6 + 3648d^2y^4 + 1024d^2y^2 - 729x^{10} - \\ & 3618x^9 - 1458x^8y^2 - 7513x^8 - 3618x^7y^2 - 8368x^7 - 729x^6y^4 - 736x^6y^2 - 5280x^6 + \\ & 1458x^5y^4 + 5616x^5y^2 - 1792x^5 + 5778x^4y^4 + 6752x^4y^2 - 256x^4 + 1458x^3y^6 + \\ & 3632x^3y^4 + 3072x^3y^2 - 992x^2y^4 + 512x^2y^2 - 2160xy^6 - 1280xy^4 - 729y^8 - 736y^6 - \\ & 256y^4 = 0. \end{aligned}$$

2. 2. Courbe génératrice implicite

Soit $f(u, v) = 0$ une courbe algébrique plane Γ . Pour chaque point régulier M de la courbe Γ de coordonnées (u, v) , les deux points associés de la courbe \mathcal{U} -parallèle sont les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation

$$P_d(u, v, x, y) = H\left(\frac{x - u}{d}, \frac{y - v}{d}\right) = 0,$$

ainsi que l'équation

$$Q_d(u, v, x, y) = \nabla f(x, y) \times \nabla H\left(\frac{x - u}{d}, \frac{y - v}{d}\right) = 0,$$

d'après le \mathcal{U}^0 -repère de Frenet de la courbe \mathcal{U} -parallèle. Ainsi, un point de coordonnées (x, y) appartient à la courbe \mathcal{U} -parallèle (intérieur ou extérieur), à la distance d , s'il vérifie le système

$$\begin{cases} f(u, v) = 0, \\ P_d(u, v, x, y) = 0, \\ Q_d(u, v, x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

L'équation implicite F_d de la \mathcal{U} -parallèle (intérieur et extérieur) se déduit alors par élimination des deux paramètres u et v dans le système ci-dessus[14].

Exemple 4: Considérons la courbe algébrique définie par $f(x, y) = x^3 - y^2 = 0$. Dans le cas où l'indicatrice \mathcal{U} est le cercle unité, on vérifie que

$$\begin{aligned} P_d(u, v, x, y) &= u^2 + v^2 - 2ux - 2vy + x^2 + y^2 - d^2 = 0, \\ Q_d(u, v, x, y) &= 2y(u - x) + 3x^2(v - y). \end{aligned}$$

L'élimination des paramètres u et v par la méthode présentée dans [14] donne l'équation implicite suivante :

$$\begin{aligned} F_d(x, y) &= -((x^2 + y^2) - d^2)^3(-729d^8 + 2916d^6x^2 + 1944d^6x + 729d^6y^2 + \\ &216d^6 - 4374d^4x^4 - 4104d^4x^3 - 2187d^4x^2y^2 - 1728d^4x^2 - 6318d^4xy^2 - 288d^4x - \\ &1188d^4y^2 - 16d^4 + 2916d^2x^6 + 2376d^2x^5 + 2187d^2x^4y^2 + 504d^2x^4 + 4860d^2x^3y^2 + \\ &32d^2y^2 + 2484d^2x^2y^2 + 4374d^2xy^4 + 504d^2xy^2 + 1701d^2y^4 + 32d^2y^2 - 729x^8 - \\ &216x^7 - 729x^6y^2 - 16x^6 + 1458x^5y^2 + 432x^4y^2 + 1458x^3y^4 + 32x^3y^2 - 729x^2y^4 - \\ &216xy^4 - 729y^6 - 16y^4) = 0. \end{aligned}$$

3. Caractérisation des courbes PH de Minkowski

Nous donnons dans cette section une caractérisation paramétrique et géométrique de l'ensemble des courbes rationnelles dont les courbes \mathcal{U} -parallèles sont rationnelles.

3. 1. Courbes PH de Minkowski

Soit \mathcal{M} un plan de Minkowski d'indicatrice \mathcal{U} . Soit $F(t)$ une paramétrisation rationnelle d'une courbe Γ . La courbe \mathcal{U} -parallèle à la distance d de la courbe Γ a pour paramétrisation

$$F_d(t) = F(t) + d N_{u^0}(t),$$

où

$$N_{u^0}(t) = \frac{T'_{u^0}(t)}{\det(T'_{u^0}(t), T_{u^0}(t))} \quad \text{et} \quad T_{u^0}(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}}. \quad (2.20)$$

Si $\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}$ est rationnelle alors $T_{u^0}(t)$ est rationnelle, et par suite $N_{u^0}(t)$ est rationnelle, et donc la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(t)$ est rationnelle. Inversement, si $F_d(t)$ est rationnelle alors $N_{u^0}(t)$ sera rationnelle, puis par polarité on a

$$T_{u^0}(t) = -\frac{N'_{u^0}(t)}{\det(N'_{u^0}(t), N_{u^0}(t))},$$

de sorte que $T_{u^0}(t)$ est rationnelle. Enfin, d'après (2.20) la fonction $\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}$ est rationnelle. D'où le théorème suivant.

Théorème 7. *La courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(t)$ d'une courbe rationnelle $F(t)$ est rationnelle si et seulement si la fonction $\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}$ est rationnelle.*

Définition 10. Par analogie avec le cas euclidien [21], une courbe rationnelle $F(t)$ dont les courbes \mathcal{U} -parallèles $F_d(t)$ sont rationnelles est dite *courbe de Minkowski à hodographe pythagorien* ou tout simplement *une courbe de Minkowski PH* ou encore \mathcal{U} -PH si le plan de Minkowski est implicite.

3. 2. Caractérisation géométrique des courbes \mathcal{U} -PH

Afin de donner une caractérisation géométrique de l'ensemble des courbes rationnelles \mathcal{U} -PH, nous adoptons ici les notations suivantes[18,19] :

\mathcal{D} désignera l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles ou rationnelles par morceaux à support sur une droite, \mathcal{C} l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles ou rationnelles par morceaux à support sur \mathcal{U} , $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles à \mathcal{U} -parallèles rationnelles ou rationnelles par morceaux et $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ l'ensemble des courbes paramétrées rationnelles dont la \mathcal{U} -abscisse curviligne est rationnelle ou rationnelle par morceaux.

Proposition 13. *L'ensemble \mathcal{C} est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$.*

Preuve: Soit $(I, H(t))$ une paramétrisation rationnelle d'un arc de l'indicatrice \mathcal{U} . La paramétrisation correspondante de l'arc associé de l'isopérimétrique est

$$H^0(t) = \frac{H'(t)}{\det(H'(t), H(t))}. \quad (2.21)$$

Comme $\|H^0(t)\|_{\mathcal{U}^0} = 1$, pour tout $t \in I$, on en déduit que $\|H'(t)\|_{\mathcal{U}^0} = |\det(H'(t), H(t))|$ et est donc rationnelle, ce qui prouve d'après le théorème 7 que $H(t)$ est une courbe \mathcal{U} -PH. ■

Proposition 14. *Les \mathcal{U} -développantes des courbes de $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ appartiennent à $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$.*

Preuve: Soit $F(t)$ une courbe paramétrée appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$. La \mathcal{U} -développante à la distance s_0 de $F(t)$ a pour équation paramétrique

$$I_u(t, s_0) = F(t) + (s_0 - s_u(t))T_u(t),$$

où $s_u(t) = \int_a^t \|F'(\sigma)\|_{\mathcal{U}} d\sigma$ est rationnelle, par suite, sa dérivée est aussi rationnelle, ce qui prouve que la \mathcal{U} -développante $I_u(t, s_0)$ est rationnelle. Comme, en faisant varier s_0 , les courbes obtenues sont d'une part \mathcal{U} -parallèles entre elles et d'autre part sont rationnelles, on en déduit qu'elles appartiennent à l'ensemble $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$. ■

Proposition 15. *L'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ est égal à l'ensemble des courbes rationnelles à \mathcal{U} -développantes rationnelles.*

Preuve: D'après la proposition précédente, on sait que les \mathcal{U} -développantes d'une courbe de $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ sont rationnelles. Réciproquement, si $F(t)$ est une courbe rationnelle dont les \mathcal{U} -développantes sont rationnelles, alors ces \mathcal{U} -développantes appartiennent à $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$. D'après la proposition 5, on sait que la \mathcal{U} -longueur d'arc entre deux points de la courbe $F(t)$ est égale en valeur absolue à la différence des \mathcal{U}^0 -rayons de courbure circulaire (des points correspondants de la \mathcal{U} -développante) qui sont d'après la relation (1.29) et le théorème 7, des fonctions rationnelles. D'où $F(t) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$. ■

Proposition 16. *La \mathcal{U}^0 -développée d'une courbe de $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}/\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$.*

Preuve: Soit $F(t)$ la représentation paramétrique d'une courbe Γ appartenant à $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}/\mathcal{D}$. Sa \mathcal{U}^0 -développée Γ_E est rationnelle puisque $N_{u^0}(t)$ est rationnelle et puisque Γ_E est l'enveloppe des \mathcal{U}^0 -normales à $F(t)$. D'après la proposition 7, la \mathcal{U} -développante de Γ_E est la courbe Γ . Donc Γ_E est une courbe rationnelle dont la \mathcal{U} -développante est rationnelle, par suite, d'après la proposition 15, elle appartient à l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$. ■

On peut résumer les propositions précédentes par le théorème de caractérisation géométrique des courbes \mathcal{U} -PH suivant.

Théorème 8. *L'ensemble des courbes rationnelles dont les courbes \mathcal{U} -parallèles sont rationnelles est la réunion des \mathcal{U} -développantes des courbes rationnelles dont la \mathcal{U} -abscisse curviligne est rationnelle et des deux ensembles \mathcal{D} et \mathcal{C} .*

Références

12. Ait Haddou, R., and L. Biard, Curve design with T-quartics, Rapport de recherche RR 946 M, Université Joseph Fourier, Mars 1995.
13. Ait Haddou, R., and L. Biard, G^2 approximation of an offset curve by Tschirnhausen quartics, in Mathematical Methods in CAGD III, M. Daehlen, T. Lyche, and L. L. Schumaker (eds.), 1995.
14. Biard, L., Méthode algorithmique d'implicitisation et d'inversion. Application au lancer de rayons, Thèse Univ Joseph Fourier, Grenoble, 1990
15. Brechner, H., General offset curves, in Geometry Processing for Design and Manufacturing, R. E. Barnhill (ed.), SIAM, Philadelphia, 1990.
16. Farouki, R. T., Pythagorean-hodograph curves in practical use, in Geometry Processing for Design and manufacturing, R. E. Barnhill (ed.), SIAM, Philadelphia, 1990, 3–33.
17. Farouki, R. T., and T. Sakkalis, Pythagorean hodographs, IBM J. Res. Develop. **34**, (1990), 736–752.
18. Fiorot, J. C., and T. Gensane, Characterization of the set of rational parametric curves with rational offsets, in Curves and Surfaces in Geometric Design, P. J. Laurent, A. Le Méhauté, and L. L. Schumaker (eds.), AK Peters, Wellesley, (1994), 147–156.

19. Gensane, T., Courbes rationnelles à parallèles rationnelles et approximation rationnelle des courbes parallèles, Thèse Univ des sciences et technologies de Lille, 1993.
20. Klass, R., An offset spline approximation for plane cubic splines, *Comp. Aided Design* **15** (1983), 297–299.
21. Pottmann, H., Rational curves and surfaces with rational offsets, *Comp. Aided Geom. Design* **12**, (1995), 175–192.
22. Pottmann, H., Curve design with rational Pythagorean - hodograph curves, *Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 9*, 1994.
23. Pottmann, H., Applications of the dual Bézier representation of rational curves and surfaces, *Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 7*, 1993.
24. Pottmann, H., Curve design with rational Pythagorean - hodograph curves, *Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 9*, 1994.
25. Tiller, W., and E. G. Hanson, Offset of two dimensional profiles, *IEEE Comput. Graphics. Appl.* **4** (1984), 36–46.

Chapitre 3.

Représentation Bézier Duale des Courbes U-PH

Introduction

La représentation duale d'une courbe consiste à définir celle-ci comme l'enveloppe de ses tangentes. Cette représentation s'est révélée très fructueuse dans l'étude des courbes rationnelles à parallèles rationnelles [31]. Plus précisément, H. Pottmann a donné une construction géométrique des courbes rationnelles à hodographe pythagorien à partir de la représentation duale d'un arc circulaire [31,32], et il a montré l'efficacité de cette représentation dans les problèmes d'interpolation et d'approximation[30,32,33].

Dans la première section de ce chapitre, nous présentons les techniques nécessaires à l'utilisation de la représentation duale et nous examinons ensuite les relations qui relient la représentation duale et la représentation standard d'une même courbe. Enfin, nous donnons une expression explicite de la courbure aux extrémités d'une courbe Bézier duale.

La deuxième section est consacrée à la caractérisation duale des courbes \mathcal{U} -PH, où \mathcal{U} est l'indicatrice d'un plan de Minkowski \mathcal{M} . A l'aide de cette caractérisation, nous montrons ensuite que toute courbe \mathcal{U} -PH se déduit de la représentation duale d'un arc de l'indicatrice \mathcal{U} . Finalement, nous donnons une méthode de construction de la représentation duale de la courbe \mathcal{U} -parallèle d'une courbe \mathcal{U} -PH donnée.

1. Représentation Bézier Duale

Dans ce chapitre, nous travaillons dans l'extension projective P^2 du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Nous utilisons les coordonnées cartésiennes homogènes (x_0, x_1, x_2) pour désigner un vecteur X de P^2 . Le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par X est un point de P^2 . Ce point sera aussi désigné par X si aucune ambiguïté n'en résulte. Pour un point non à l'infini, c'est-à-dire, tel que $x_0 \neq 0$, les coordonnées cartésiennes non homogènes (c'est-à-dire, affine) associées sont $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$. Les points X d'une droite dans P^2 satisfont une équation linéaire homogène $\langle U, X \rangle = 0$ et les coefficients du vecteur U sont appelés *les coordonnées homogènes de la droite L*. Le plus souvent, nous identifions la droite L avec le vecteur U .

Somme de deux droites. Etant données deux droites L_1 et L_2 de coordonnées homogènes respectives (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) , on définit la droite somme $L_1 + L_2$

comme étant la droite de coordonnées homogènes la somme composante à composante des coordonnées homogènes des deux droites L_1 et L_2 . Comme (a_1, b_1, c_1) et $\lambda(a_1, b_1, c_1)$ représentent la même droite, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'opération somme sur les droites n'est pas une opération géométrique, c'est-à-dire, qu'elle dépend des coordonnées homogènes choisies pour représenter les droites. On peut remédier à ce problème en normalisant le choix d'un représentant de la droite, par exemple en normalisant à 1 (si c'est possible) la première composante de chaque droite. Lorsque l'on a m droites L_1, L_2, \dots, L_m , une solution consiste à choisir des représentants de ces droites de la manière suivante : on se donne $m - 1$ droites F_1, F_2, \dots, F_{m-1} telles que L_i, F_i et L_{i+1} soient concourantes pour $i = 1, 2, \dots, m - 1$, puis on choisit les représentants des droites L_i de sorte que l'on ait $F_i = L_i + L_{i+1}$ pour tout i allant de 1 jusqu'à $m - 1$. On appellera ces représentants *les coordonnées homogènes normalisées* des droites $L_i, i = 1, \dots, m$ par rapport aux droites $F_i, i = 1, \dots, m - 1$.

Intersection de deux droites. Etant données deux droites L_1 et L_2 de coordonnées homogènes respectives (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) , le point d'intersection de ces deux droites a pour coordonnées homogènes le vecteur $(a_1, b_1, c_1) \wedge (a_2, b_2, c_2)$, où \wedge désigne le produit vectoriel de \mathbb{R}^3 .

1. 1. Courbes Bézier duales

Une courbe rationnelle $C(t)$, peut être décrite par l'enveloppe de ses droites tangentes $L(t)$. Les droites $L(t)$ peuvent s'exprimer sous la forme $\langle U(t), X \rangle = 0$, où $U(t)$ sont les coordonnées homogènes de la droite $L(t)$. La courbe $C(t)$ étant rationnelle, le vecteur $U(t)$ peut s'écrire sous la forme de Bézier[28]

$$U(t) = \sum_{i=0}^m B_i^* B_i^m(t), \quad (3.1)$$

où les $B_i^m(t)$ sont les polynômes de Bernstein de degré m . Une telle représentation est appelée *représentation Bézier duale* de la courbe Γ et la courbe Γ est dite de *classe m* . Les vecteurs B_i^* sont les coordonnées homogènes des *lignes de Bézier*. L'ensemble des lignes de Bézier forme la structure *de Bézier latérale* et les points $E_i = B_i^* \cap B_{i+1}^*$ sont *les sommets de Bézier*.

Les lignes de Bézier ne déterminent pas complètement la courbe Bézier rationnelle puisque le vecteur B_i^* et chacun de ses multiples λB_i^* avec $\lambda \neq 0$, représente la même droite.

Pour une description complète, il est possible de choisir m droites F_i^* pour $i = 0, \dots, m - 1$ de sorte que les coordonnées homogènes des droites $B_i^*, i = 0, \dots, m$ soient normalisées par rapport aux droites F_i^* . Les lignes F_i^* sont appelées *les lignes de Farin*. L'ensemble des lignes de Bézier et de Farin est appelé *la structure de contrôle duale* de la courbe C .

1. 2. Formule de conversion

Pour évaluer les points de la courbe C , nous appliquons l'algorithme de De Casteljaou au $m + 1$ vecteurs B_i^* jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux

vecteurs $U_0^{m-1}(t)$ et $U_1^{m-1}(t)$. Ainsi, on a $U(t) = (1-t)U_0^{m-1}(t) + tU_1^{m-1}(t)$ et $U'(t) = U_1^{m-1}(t) - U_0^{m-1}(t)$. Puisque $C(t) = U(t) \wedge U'(t)$, on en déduit que $C(t) = U_0^{m-1}(t) \wedge U_1^{m-1}(t)$. Par suite, l'intersection des deux droites de coordonnées homogènes $U_0^{m-1}(t)$ et $U_1^{m-1}(t)$ représente le point $C(t)$ de la courbe C .

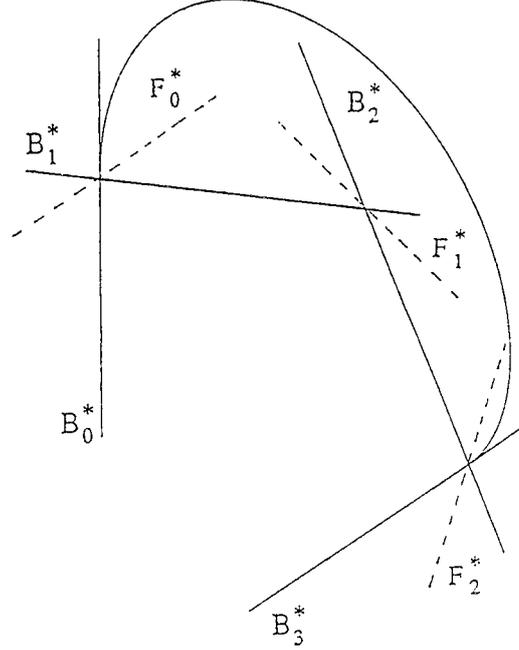


Figure 1. Courbe Bézier duale

On obtient donc

$$C(t) = U_0^{m-1}(t) \wedge U_1^{m-1}(t) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} B_i^* B_i^{m-1}(t) \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^m B_i^* B_i^m(t) \right),$$

ce qui conduit, en développant, à la formule suivante [29]

$$C(t) = \sum_{k=0}^{2m-2} P_k B_k^{2m-2}(t), \quad (3.2)$$

avec

$$P_k = \frac{1}{C_k^{2m-2}} \sum_{i+j=k} C_i^{m-1} C_i^{m-1} B_i \wedge B_{j+1}.$$

On remarque que le degré de la courbe est $2m - 2$, tandis que le coût de son évaluation est celui d'une courbe gauche de degré m en représentation standard. Notons par ailleurs que la représentation duale $U(t)$ d'une courbe se déduit de sa représentation standard $C(t)$ par

$$U(t) = C(t) \wedge C'(t).$$

Le passage d'une représentation à l'autre par l'opérateur \wedge ne fournit pas une représentation des courbes de degré ou de classe minimal.

1. 3. Courbures aux extrémités

Considérons une courbe de classe m définie par sa représentation duale $U(t)$ et notons $B_i^* = (a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, \dots, m$ ses lignes de Bézier. En utilisant la formule de conversion (3.2) on trouve que les points de contrôle P_k de la représentation standard sont des combinaisons linéaires des points d'intersections des droites de contrôle. Ainsi, en notons \bar{P}_k le point affine associé au point P_k de P^2 , les deux premiers points de contrôle et leurs poids respectifs sont

$$\bar{P}_0 = B_0^* \cap B_1^* = \begin{cases} \frac{b_0 c_1 - c_0 b_1}{\omega_0} \\ \frac{c_0 a_1 - a_0 c_1}{\omega_0} \end{cases} \text{ où } \omega_0 = a_0 b_1 - b_0 a_1,$$

$$\bar{P}_1 = B_0^* \cap B_2^* = \begin{cases} \frac{b_0 c_2 - c_0 b_2}{2\omega_1} \\ \frac{c_0 a_2 - a_0 c_2}{2\omega_1} \end{cases} \text{ où } \omega_1 = \frac{1}{2}(a_0 b_2 - b_0 a_2).$$

Pour le troisième point de contrôle, on pose

$$\alpha = \frac{(m-2)}{2(2m-3)}(a_0 b_3 - b_0 a_3), \quad \beta = \frac{m}{2(2m-3)}(a_1 b_2 - b_1 a_2), \quad \text{et } \omega_2 = \alpha + \beta.$$

Alors

$$\bar{P}_2 = \alpha(B_0^* \cap B_1^*) + \beta(B_1^* \cap B_2^*).$$

La courbure k_0 au point de contrôle \bar{P}_0 est [27]:

$$k_0 = \frac{2(n-1)}{n} \frac{\omega_0 \omega_1}{\omega_1^2} \frac{\text{Aire}(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2)}{\text{Dist}(\bar{P}_0, \bar{P}_1)^3}.$$

où n est le degré de la courbe Bézier rationnelle. Les formules précédentes montrent que la courbure k_0 ne dépend pas de c_3 . Plus précisément, k_0 dépend uniquement des trois premières lignes de Bézier et de la direction de la quatrième ligne de Bézier. Or on a [29]

$$\omega_2 \text{Dist}(\bar{P}_2, B_0^*) = \frac{m}{2(2m-3)} \omega \text{Dist}(B_1^* \cap B_2^*, \bar{P}_0),$$

où $\omega = a_1 b_2 - b_1 a_2$. Ainsi

$$\omega_2 \text{Aire}(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2) = \frac{m}{2(2m-3)} \omega \text{Aire}(\bar{P}_0, \bar{P}_1, B_1^* \cap B_2^*).$$

Finalement, l'expression de k_0 peut s'écrire sous la forme

$$k_0 = \frac{m}{2m-2} \frac{\omega_0 \omega}{\omega_1^2} \frac{\text{Aire}(\bar{P}_0, \bar{P}_1, B_1^* \cap B_2^*)}{\text{Dist}(\bar{P}_0, \bar{P}_1)^3}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 9. [29] Soit $U(t) = \sum_{i=0}^m B_i^* B_i^m(t)$ la représentation Bézier duale d'une courbe rationnelle avec $B_i^* = (a_i, b_i, c_i)$ pour $i = 0, \dots, m$. La courbure k_0 au point $\bar{P}_0 = B_0^* \cap B_1^*$ est donnée par

$$k_0 = \frac{m}{2m-2} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\text{Aire}(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2)}{\text{dist}(\bar{P}_0, \bar{P}_1)^3}$$

où :

$$w_0 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad w_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

et $\bar{P}_1 = B_0^* \cap B_2^*$, $\bar{P}_2 = B_1^* \cap B_2^*$.

2. Caractérisation Bézier duale des courbes \mathcal{U} -PH

Dans cette section, nous nous plaçons dans un plan de Minkowski \mathcal{M} d'indicatrice \mathcal{U} rationnelle. Nous donnons la représentation duale des courbes rationnelles \mathcal{U} -PH. Nous caractérisons ensuite la structure de contrôle duale de ces courbes et enfin nous présentons une méthode de construction de la structure de contrôle duale des courbes \mathcal{U} -parallèles d'une courbe \mathcal{U} -PH.

2. 1. Représentation duale d'une courbe \mathcal{U} -PH

Considérons une courbe rationnelle Γ de représentation paramétrique $F(t) = (x(t), y(t))$. La courbe Γ est l'enveloppe de l'ensemble de ses tangentes $L(t)$ dont l'équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{-y'(t)}{\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}} X + \frac{x'(t)}{\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}} Y = \frac{h(t)}{h_u(t)} = H(t), \quad (3.3)$$

où $h(t)$ est la fonction support de la courbe $F(t)$ et où $h_u(t)$ est la fonction support de l'indicatrice $\mathcal{U}(t)$.

Supposons que la courbe $F(t)$ soit une courbe rationnelle \mathcal{U} -PH. Ce qui signifie d'après le théorème 7 que $\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}$ est une fonction rationnelle. Par suite, la paramétrisation $(x'(t)/\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}, y'(t)/\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0})$ est une paramétrisation rationnelle de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 . On peut alors poser

$$\left(\frac{x'(t)}{\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}}, \frac{y'(t)}{\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}} \right) = \left(\frac{a(t)}{c(t)}, \frac{b(t)}{c(t)} \right), \quad (3.4)$$

où a, b, c sont des polynômes en la variable t .

La courbe Γ est donc l'enveloppe de la famille de droites d'équation

$$\frac{-b(t)}{c(t)} X + \frac{a(t)}{c(t)} Y = H(t). \quad (3.5)$$

La fonction $H(t)$ est rationnelle, puisque les composantes de $F(t)$ vérifient l'équation (3.5). Afin de déterminer l'équation paramétrique d'une courbe rationnelle à \mathcal{U} -parallèles rationnelles, nous résolvons le système linéaire en X, Y constitué de l'équation (3.5) et de sa dérivée par rapport à la variable t

$$\left(\frac{-b(t)}{c(t)}\right)' X + \left(\frac{a(t)}{c(t)}\right)' Y = H'(t). \quad (3.6)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} X = \frac{a'(t)c(t) - c'(t)a(t)}{a(t)b'(t) - b(t)a'(t)} H(t) - \frac{a(t)c(t)}{a(t)b'(t) - b(t)a'(t)} H'(t), \\ Y = \frac{b'(t)c(t) - c'(t)b(t)}{a(t)b'(t) - b(t)a'(t)} H(t) - \frac{b(t)c(t)}{a(t)b'(t) - b(t)a'(t)} H'(t). \end{cases} \quad (3.7)$$

Par suite, nous obtenons le théorème suivant

Théorème 10. *Pour toute courbe Γ rationnelle \mathcal{U} -PH, il existe une paramétrisation rationnelle $(a/c, b/c)$ de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 et une fonction rationnelle $H(t)$ telle que cette courbe Γ admette une paramétrisation de la forme (3.7).*

Réciproquement, soit $H(t)$ une fonction rationnelle et soit $(a(t)/c(t), b(t)/c(t))$ une paramétrisation rationnelle de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 . Considérons la courbe $F(t) = (x(t), y(t))$ définie comme l'enveloppe de la famille des droites d'équation

$$\frac{-b(t)}{c(t)} X + \frac{a(t)}{c(t)} Y = H(t). \quad (3.8)$$

En reportant les composantes de $F(t)$ dans (3.8) et en dérivant, on obtient

$$\frac{-b(t)}{c(t)} x'(t) + \frac{a(t)}{c(t)} y'(t) = 0.$$

Par suite, $(x'(t), y'(t)) = \lambda(t)(a(t)/c(t), b(t)/c(t))$, où $\lambda(t)$ est une fonction rationnelle. Ainsi, $\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0} = |\lambda(t)|$. Comme $\det(F'(t), F(t)) = \lambda(t)H(t)$, on en déduit que la fonction $\lambda(t)$ est de signe constant. Par suite, la fonction $\|F'(t)\|_{\mathcal{U}^0}$ est rationnelle, ce qui prouve, d'après le théorème 7, que la courbe $F(t)$ est une courbe \mathcal{U} -PH. D'où le théorème

Théorème 11. *Soit $H(t)$ une fonction rationnelle et $(a(t)/c(t), b(t)/c(t))$ une paramétrisation rationnelle de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 . L'enveloppe de la famille des droites d'équation*

$$\frac{-b(t)}{c(t)} X + \frac{a(t)}{c(t)} Y = H(t) \quad (3.9)$$

est une courbe rationnelle \mathcal{U} -PH.

2. 2. Représentation Bézier duale des courbes \mathcal{U} -PH

Soit $F(t)$ une courbe rationnelle \mathcal{U} -PH. Posons dans l'équation (3.9), $H(t) = e(t)/f(t)$, où $e(t)$ et $f(t)$ sont des polynômes en la variable t . D'après le théorème 11, la représentation duale de $F(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$(u_0, u_1, u_2) = (-e(t)c(t), -b(t)f(t), a(t)f(t)). \quad (3.10)$$

Cette représentation permet une construction remarquable de la structure de contrôle duale d'une courbe \mathcal{U} -PH. Pour cela, en identifiant $e \equiv f$ dans la représentation (3.10), nous obtenons

$$(u_0, u_1, u_2) = -e(t)(c(t), b(t), -a(t)), \quad (3.11)$$

qui représente l'enveloppe de la famille des droites d'équation

$$\frac{b(t)}{c(t)}X - \frac{a(t)}{c(t)}Y = -1.$$

Nous obtenons ainsi, d'après (1.9), une représentation de l'isopérimétrique de la courbe paramétrique $(a(t)/c(t), b(t)/c(t))$, c'est-à-dire, l'isopérimétrique d'un segment de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 , ce qui représente, par polarité, un segment de l'indicatrice \mathcal{U} .

En posant $e \equiv f$ dans (3.10), nous obtenons la représentation duale d'un segment u de l'indicatrice \mathcal{U} . La représentation duale (3.10) ne diffère de la représentation duale (3.11) que par la première composante. Les composantes inchangées sont celles qui fixent la direction de la tangente. Par suite, après conversion des deux représentations duales (3.10) et (3.11) dans la base de Bernstein en même degré, nous remarquons que les lignes de Bézier et de Farin du segment u de l'indicatrice sont parallèles aux lignes de Bézier et de Farin correspondantes de la courbe $F(t)$.

Réciproquement, soit

$$(u_0, u_1, u_2) = (-f(t)c(t), -b(t)f(t), a(t)f(t)) \quad (3.12)$$

la représentation Bézier duale en classe m d'un segment u de l'indicatrice \mathcal{U} . Effectuons des translations parallèles arbitraires des lignes de Bézier et de Farin. Nous obtenons ainsi, la structure de contrôle duale d'une courbe rationnelle $F(t)$ dont la paramétrisation duale doit être de la forme

$$(u_0, u_1, u_2) = (g(t), -b(t)f(t), a(t)f(t)), \quad (3.13)$$

où $g(t)$ est un polynôme en la variable t . En accord avec l'expression (3.12) et en incluant l'invariance par translation dans un plan de Minkowski, on peut poser dans (3.13) $f(t) = g(t)c(t)$. Par suite, la représentation duale (3.13) s'écrit

$$(u_0, u_1, u_2) = (-e(t), -b(t)g(t), a(t)g(t)). \quad (3.14)$$

Ce qui donne finalement une représentation duale similaire à celle de (3.10) ce qui montre, d'après le théorème 11, que $F(t)$ est une courbe \mathcal{U} -PH.

Théorème 12. *La structure de contrôle duale d'une courbe rationnelle \mathcal{U} -PH est caractérisée par la propriété que ses lignes de Bézier et de Farin sont parallèles aux lignes de Bézier et de Farin correspondantes de la structure de contrôle duale d'un segment u de l'indicatrice \mathcal{U} .*

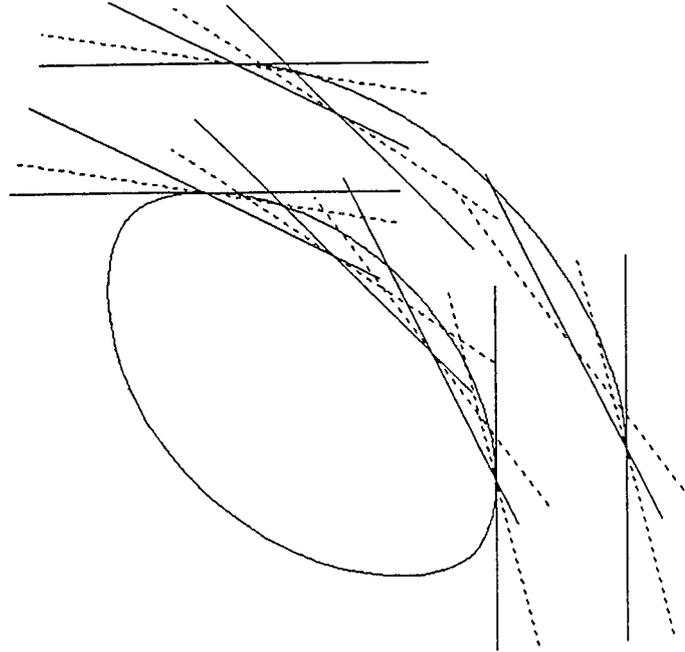


Figure 2. Représentation Bézier duale d'une courbe \mathcal{U} -PH

2. 3. Courbes \mathcal{U} -parallèles d'une courbe \mathcal{U} -PH

Soit $F(t)$ une courbe rationnelle \mathcal{U} -PH. La courbe $F(t)$ est l'enveloppe d'une famille de droites d'équation

$$\frac{-b(t)}{c(t)}X + \frac{a(t)}{c(t)}Y = H(t),$$

où $(a(t)/c(t), b(t)/c(t))$ est une paramétrisation rationnelle de l'isopérimétrique \mathcal{U}^0 et $H(t)$ une fonction rationnelle.

Considérons la courbe rationnelle $G(t)$ définie comme l'enveloppe de la famille de droites d'équation

$$\frac{-b(t)}{c(t)}X + \frac{a(t)}{c(t)}Y = H(t) + d, \quad (3.15)$$

où d un nombre réel. La représentation paramétrique de la courbe $G(t)$ est obtenue en résolvant le système linéaire en X, Y constitué de l'équation (3.15) et sa dérivée par rapport à t . Ce qui nous donne [26]

$$G(t) = F(t) + dN_{u^0}(t),$$

Par suite, $G \equiv F_d$. Ainsi, nous obtenons le théorème suivant

Théorème 13. *Considérons une courbe $F(t)$ rationnelle \mathcal{U} -PH dont la structure de contrôle duale provient d'un segment u de l'indicatrice \mathcal{U} comme précisé dans le théorème 12. Pour obtenir la structure de contrôle duale de la courbe \mathcal{U} -parallèle $F_d(t)$ à la distance d , il suffit de translater la $i^{\text{ème}}$ ligne de Bézier et la $i^{\text{ème}}$ ligne de Farin de $F(t)$ de la distance d multipliée par la distance orientée de la $i^{\text{ème}}$ ligne de Bézier ou de Farin correspondante du segment u au centre de l'indicatrice \mathcal{U} .*



Figure 3. *Construction de la courbe \mathcal{U} -parallèle d'une courbe \mathcal{U} -PH*

Références

26. Ait-Haddou, R., Minkowski PH curves, soumis à Jour of Amer. Math. Soc, 1996.
27. Fiorot, J. C., et P. Jeannin, Courbes splines rationnelles, Application à la CAO, Masson, RMA 24, Paris, 1992.
28. Hoschek, J., Dual Bézier curves and surfaces, i, : R.E. Barnhill and W. Boehm, eds., Surfaces in Computer Aided Geometric Design, North Holland, (1983), 147-156.
29. Labbé, C., Représentation duale et modélisation géométrique à l'aide de quartiques de Tschirnhausen, Rapport de DEA, Univ Joseph Fourier, Grenoble, 1995.
30. Pottmann, H., Developable rational Bézier and B-spline surfaces, Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 6, 1993.
31. Pottmann, H., Rational curves and surfaces with rational offsets, Comp. Aided Geom. Design **12**, (1995), 175-192.

32. Pottmann, H., Applications of the dual Bézier representation of rational curves and surfaces, Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 7, 1993.
33. Pottmann, H., Curve design with rational Pythagorean - hodograph curves, Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 9, 1994.

Chapitre 4.

QUARTIQUES DE TSCHIRNHAUSEN

Introduction

Récemment R.T. Farouki and T. Sakkalis ont montré que la classe des courbes polynomiales à parallèles rationnelles fournit des outils très performants pour l'interpolation et l'approximation des courbes dans le domaine du CAGD[35,36]. Cependant, le degré relativement élevé des courbes parallèles présente un inconvénient. Par exemple, la solution PH de plus petit degré d'un problème d'interpolation C^1 d'Hermite, requiert des courbes polynomiales à hodographe pythagorien de degré 5 et à parallèles de degré 9 [35]. Pour remédier à ce problème, H. Pottmann a proposé une classe de courbes rationnelles à parallèles rationnelles et dont les courbes parallèles sont de degré assez faible et il a montré leur flexibilité dans les problèmes de modélisation géométrique. Ainsi, un problème d'interpolation G^2 d'Hermite peut être résolu en considérant les courbes rationnelles PH de classe algébrique 4 [43]. Le fait que ces courbes se reproduisent par action du parallélisme, fournissent des courbes parallèles rationnelles de degré 5 ou 6[43].

Les courbes PH dont les parallèles sont de degré raisonnable sont d'un grand intérêt dans les applications pratiques où il est nécessaire d'évaluer la courbe parallèle. Parmi ces courbes, on retrouve les cubiques de Tschirnhausen, qui sont, avec les cercles, les seules courbes rationnelles cubiques à paramétrisation PH [37]. Le fait qu'il n'existe qu'une seule cubique de Tschirnhausen (à des transformations élémentaires près) les rendent d'une utilité relativement limitée.

En conséquence, les courbes PH de classe algébrique 3 (les quartiques de Tschirnhausen) sont particulièrement intéressantes au vu de leur degré (courbes rationnelles de degré 4) et de leur flexibilité pour les schémas pratiques d'interpolation et d'approximation.

En particulier, un schéma d'interpolation G^1 d'Hermite avec des quartiques de Tschirnhausen à été donnée dans [42]. Il nous a donc semblé naturel de chercher une extension à un schéma avec un contact géométrique d'ordre 2. Plus précisément, nous montrons comment résoudre le problème d'approximation G^2 avec les courbes PH de classe algébrique 3, de façon que leurs parallèles soient de degré 4. Notre approche est basée sur l'interpolation G^2 d'Hermite de deux éléments de courbure vérifiant certaines conditions par deux segments de quartiques de Tschirnhausen. Cette méthode nécessite le choix d'un autre point d'interpolation. Il s'est avéré que la caractérisation des quartiques de Tschirnhausen comme étant les développantes des cubiques de Tschirnhausen, fournit un procédé simple et élégant permettant de localiser le point d'interpolation supplémentaire.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : nous introduisons dans la section 1 les quartiques de Tschirnhausen en tant que courbes rationnelles PH de classe algébrique 3. La section 2 sera dédiée à la stratégie pour résoudre le problème d'interpolation G^2 d'Hermite. Dans la section 3, nous donnons une expression géométrique de la longueur d'arc d'un segment d'une cubique de Tschirnhausen. Nous verrons qu'un seul segment d'une T-cubique ne peut pas résoudre notre problème d'interpolation. Ce qui nous amène à introduire une famille de G^1 T-cubiques dans la section 4. Enfin, puisque nous modélisons avec les développantes des cubiques de Tschirnhausen, nous montrons dans la section 5, comment obtenir la structure de contrôle duale de ces développantes. Quelques exemples de notre algorithme sont donnés dans la section 6.

1. Courbes PH de classe 3

Étant donnée une courbe C de paramétrisation rationnelle $C(t)$, sa courbe parallèle à la distance signée d a pour paramétrisation

$$C_d(t) = C(t) + dN(t),$$

où $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$ est le vecteur normal unitaire le long de la courbe C . La paramétrisation $C(t)$ est une paramétrisation PH si et seulement si $N(t)$ est une paramétrisation rationnelle d'un segment du cercle unité, et par suite les composantes de $N(t)$ doivent être de la forme[41]

$$N_1(t) = \frac{2a(t)b(t)}{a^2(t) + b^2(t)}, \quad N_2(t) = \frac{a^2(t) - b^2(t)}{a^2(t) + b^2(t)},$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des polynômes. En plus, du théorème 11, on déduit que la représentation duale des paramétrisations PH rationnelles sont de la forme

$$U(t) = \left(-e(a^2 + b^2), 2abf, f(a^2 - b^2) \right), \quad (4.1)$$

où a, b, e, f sont des polynômes en la variable t . Réciproquement, étant donnée des polynômes a, b, e, f , la représentation duale (4.1) définit une courbe PH rationnelle.

Les courbes rationnelles PH de classe algébrique 3 sont alors obtenues en posant dans (4.1) :

$$a(t) = t, \quad b(t) = 1, \quad e(t) = \alpha t + \beta, \quad f(t) = \gamma t + \delta,$$

ce qui fournit la représentation duale

$$U(t) = \left(-(\alpha t^3 + \beta t^2 + \alpha t + \beta), 2\gamma t^2 + 2\delta t, \gamma t^3 + \delta t^2 - \gamma t - \delta \right), \quad (4.2)$$

et la paramétrisation rationnelle

$$C(t) = [w(t) : x(t) : y(t)]$$

avec

$$\begin{aligned} w(t) &= \gamma^2 t^4 + 2\gamma\delta t^3 + (\gamma^2 + \delta^2) t^2 + 2\gamma\delta t + \delta^2, \\ x(t) &= \frac{1}{2}(\beta\gamma - \alpha\delta) t^4 + 2\alpha\gamma t^3 + 2(\alpha\delta + \beta\gamma) t^2 + 2\beta\delta t + \frac{1}{2}(\alpha\delta - \beta\gamma), \\ y(t) &= \alpha\gamma t^4 + 2\alpha\delta t^3 + (\beta\delta - \alpha\gamma) t^2 - 2\beta\gamma t - \beta\delta. \end{aligned}$$

La paramétrisation de la courbe parallèle à la distance d est obtenue en substituant α par $\alpha + \gamma d$ et β par $\beta + \gamma d$ dans les représentations précédentes.

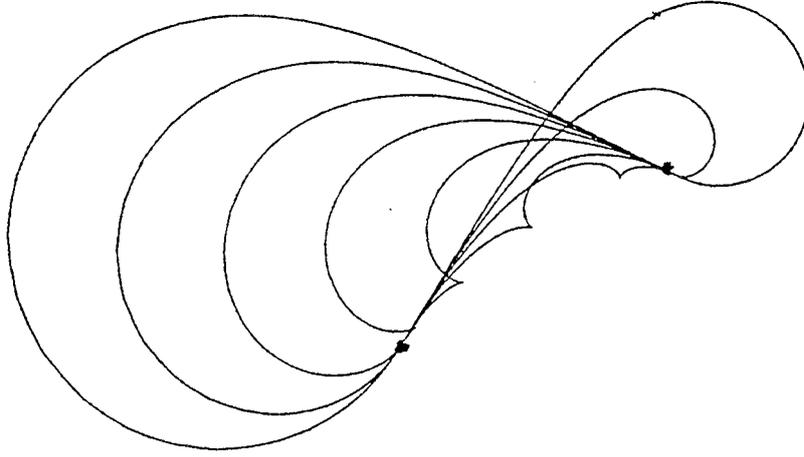


Figure 1. *Quartiques de Tschirnhausen*

Les courbes $U(t) \wedge U'(t)$ forment un ensemble de courbes rationnelles de degré 4 et de classe algébrique 3 appelées *quartiques de Tschirnhausen* ou simplement *T-quartiques*. Ces courbes se reproduisent par action du parallélisme, admettent 5 degrés de liberté si on inclut dans (4.2) l'invariance par translation et rotation (même flexibilité que les coniques)[41], n'admettent pas de points d'inflexions. De plus, elles sont caractérisées par le fait qu'elles sont exactement les développantes des courbes PH polynomiales de degré 3 (*cubiques de Tschirnhausen*)[41]. Finalement, notons que chaque segment régulier d'une T-quartique est de courbure euclidienne monotone.

2. Stratégie d'approximation

Dans tout ce qui suit, un *élément de courbure* sera la donnée d'un triplet (P, T, k) formé d'un point P , une direction T (vecteur unitaire) et d'un nombre

réel non nul k . Nous associons à chaque élément de courbure (P, T, k) son "centre de courbure" \tilde{P} définie par $\tilde{P} = P + k^{-1}\mathcal{R}_{-\frac{\pi}{2}}(T)$, où \mathcal{R}_θ désigne la rotation d'angle θ . Une courbe G^2 définit des éléments de courbure, chacun d'eux étant composé d'un point de la courbe, du vecteur tangent et de la courbure en ce point.

2. 1. Segmentation admissible

Deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) seront dits *admissibles* s'il existe un arc convexe à courbure continue, monotone et de courbure totale inférieur à π , d'extrémités P_0 et P_1 , de vecteur tangent T_0 en P_0 et T_1 en P_1 , et de courbure k_0 en P_0 et k_1 en P_1 .

Etant donnée une courbe suffisamment différentiable $s(t)$, notre objectif est de l'approcher par une courbe à courbure continue formée de segments rationnels PH de classe algébrique 3. L'absence de points d'inflexion dans les T-quartiques nous oblige de considérer une courbe $s(t)$ sans points d'inflexion. De plus, nous voulons produire une approximation qui préserve les variations de courbure de la courbe initiale. Pour cela notre stratégie consistera à effectuer une segmentation géométrique de la courbe $s(t)$ en détectant tous les sommets (points dont la dérivée de la courbure est nulle) de la courbe $s(t)$, puis à ajouter des points sur la courbe $s(t)$ de sorte que la courbure totale entre deux points consécutifs de la segmentation soit inférieur à π . Cette segmentation fournit une suite d'éléments de courbure admissibles de sorte que l'on peut reformuler notre problème de la manière suivante : *étant donnés deux éléments de courbure admissibles, existe-il une courbe G^2 à courbure monotone, formée de segments de T-quartiques et interpolant ces éléments de courbures ?*

2. 2. Interpolation G^2 d'Hermite

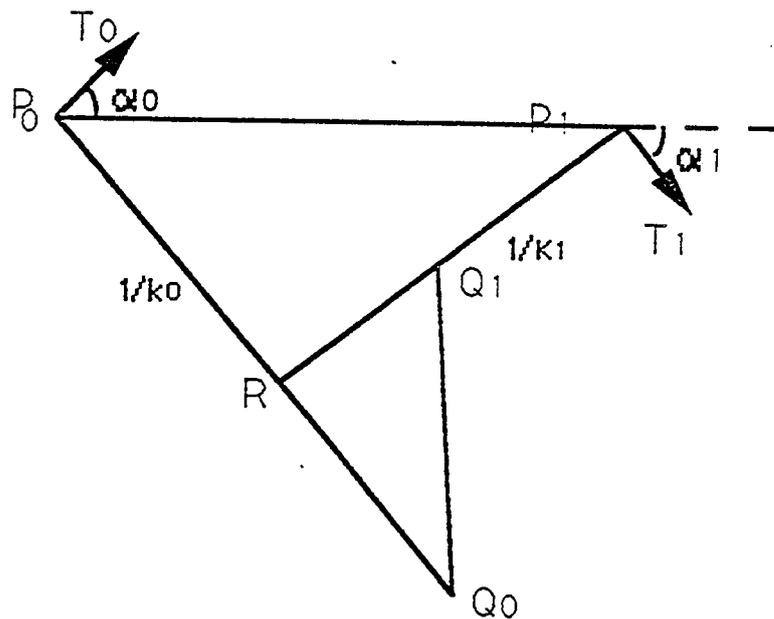


Figure 2. La géométrie d'éléments de courbure admissibles

Etant donnés deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) comme dans la figure 2, notons les centres de courbure correspondants par $Q_0 = \tilde{P}_0$ and $Q_1 = \tilde{P}_1$. Considérons également les angles non-orientés $\alpha_0 = (P_0P_1, T_0)$ et $\alpha_1 = (T_1, P_0P_1)$, ainsi que le point d'intersection R des droites (P_0Q_0) et (P_1Q_1) .

Théorème 14. [38] *Les deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) sont admissibles (avec une courbure croissante) si et seulement si*

- i) $\alpha_0 \leq \alpha_1 < \alpha_0 + \pi$,
- ii) $|P_0Q_0| \geq |P_1Q_1|$,
- iii) $|Q_0Q_1| \leq |P_0Q_0| - |P_1Q_1| \leq |Q_0R| + |RQ_1|$.

L'observation cruciale pour la solution de notre problème d'approximation est que, la courbe solution du théorème 14 est la développante d'une courbe G^1 convexe $r(t)$ de longueur $k_0^{-1} - k_1^{-1}$, d'extrémités Q_0 et Q_1 , de vecteur tangent Q_0R en Q_0 et RQ_1 en Q_1 , et inscrite dans le triangle (Q_0RQ_1) . Comme les quartiques de Tschirnhausen sont exactement les développantes des cubiques de Tschirnhausen, notre intérêt se focalisera alors sur la construction de la courbe $r(t)$ comme étant une courbe G^1 formée de segments polynomiaux à hodographe pythagorien de degré 3 et satisfaisant à la contrainte de longueur.

3. Cubiques de Tschirnhausen (T-Cubiques)

Soit $r(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane polynomiale de degré n . Les courbes parallèles de $r(t)$ sont rationnelles si et seulement si les composantes de la dérivée de $r(t)$ vérifient la relation de Pythagore $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$ où $\sigma(t)$ est un polynôme de degré $n - 1$, ce qui est équivalent (Kubotta [40]) à l'expression suivante pour les composantes de la dérivée de $r(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= w(t) [u^2(t) - v^2(t)], \\ y'(t) &= 2w(t)u(t)v(t), \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $u(t), v(t), w(t)$ sont des polynômes en la variable t .

3. 1. Caractérisation géométrique

Avec les relations précédentes, les cubiques de Tschirnhausen, exprimées sous la forme de Bernstein-Bézier

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t) = BP[P_0, P_1, P_2, P_3](t),$$

sont obtenues en considérant des polynômes affine $u(t) = (1-t)u_0 + tu_1$ et $v(t) = (1-t)v_0 + tv_1$ et des polynômes constants $w(t) = w_0$, pour des réels u_0, u_1, v_0, v_1

et w_0 . Par substitution et intégration, on obtient les expressions de Farouki des points de contrôle (le point P_0 étant choisi arbitrairement)

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \frac{w_0}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ P_2 &= P_1 + \frac{w_0}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ P_3 &= P_2 + \frac{w_0}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Les T-cubiques admettent des propriétés remarquables : elles possèdent des parallèles rationnelles de degré 5; elles sont, avec les cercles, les seules courbes rationnelles cubiques à paramétrisation PH [37]; elles n'ont pas de point d'inflexion, et sont les caustiques de la parabole dont les rayons lumineux sont parallèles (non parallèles à l'axe de la parabole)[36]. Notons finalement, qu'il n'existe qu'une seule cubique de Tschirnhausen (à un ensemble de transformations près)[36].

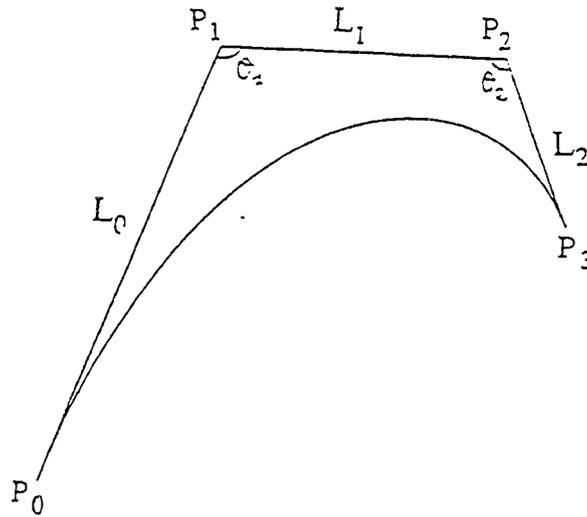


Figure 3. Cubique de Tschirnhausen

Les expressions (4.4) fournissent une caractérisation géométrique simple et élégante des cubiques de Tschirnhausen.

Théorème 15. [35] *La courbe Bézier $BP[P_0, P_1, P_2, P_3]$ est une cubique de Tschirnhausen si et seulement si*

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{et} \quad L_1^2 = L_0L_2,$$

avec $L_0 = |P_0P_1|$, $L_1 = |P_1P_2|$, $L_2 = |P_2P_3|$, et où θ_1, θ_2 sont les angles intérieurs du polygone de contrôle aux point P_1 et P_2 respectivement.

3. 2. Longueur d'arc d'une T-cubique

Notre algorithme nécessitera de nombreuses évaluations de la longueur d'arc d'une T-cubique, de ce fait, la proposition suivante nous sera très utile.

Proposition 17. *La longueur d'arc de la T-cubique $BP[P_0, P_1, P_2, P_3](t) = P(t)$ est donnée par*

$$L(P) = \int_0^1 |P'(t)| dt = L_0 + L_2 - L_1 \cos \theta_1,$$

avec les notations du théorème 15.

Preuve: D'après les relations (4.3), la longueur d'arc de la T-cubique $P(t)$ est

$$L(P) = \int_0^1 |w(t)|(u^2(t) + v^2(t)) dt.$$

En substituant $u(t), v(t)$ et $w(t)$ par leurs expressions et en intégrant, on obtient

$$L(P) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2}{3},$$

où $\sigma_0 = |w_0|(u_0^2 + v_0^2)$, $\sigma_1 = |w_0|(u_0u_1 + v_0v_1)$ et $\sigma_2 = |w_0|(u_1^2 + v_1^2)$. Dans le but de donner un sens géométrique à la longueur d'arc de la T-cubique, on peut remarquer que

$$\sigma_0 = 3L_0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = 3L_2.$$

De plus, on a $\langle P_0P_1, P_1P_2 \rangle = \frac{1}{9} w_0^2(u_0^2 + v_0^2)(u_0u_1 + v_0v_1) = \frac{1}{3} |P_0P_1| \sigma_1$, et puisque $\langle P_0P_1, P_1P_2 \rangle = -|P_0P_1| |P_1P_2| \cos \theta_1$, on obtient

$$\sigma_1 = -3L_1 \cos \theta_1.$$

■

3. 3. T-cubique associée à un triangle

Pour une utilisation ultérieure, nous montrons dans ce paragraphe, que tout triangle non-dégénéré peut être associé avec une unique T-cubique inscrite dans ce triangle. Plus précisément

Proposition 18. *Etant donnée un triangle non-dégénéré (ABC) , il existe un unique point E appartenant au segment $[AB]$ et un unique point F appartenant au segment $[BC]$ tels que la courbe Bézier $BP[A, E, F, C]$ soit une T-cubique. Dorénavant, nous noterons cette T-cubique par $T[ABC]$.*

Preuve: Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|AB| \leq |BC|$. Soit M le point appartenant au segment $[BC]$ tel que $|AB| = |BM|$ (figure 4). Pour une courbe Bézier T-cubique $BP[A, E, F, C]$, $E \in [AB]$, $F \in [BC]$, la droite (EF) doit être parallèle à la droite (AM) . Par suite, la fonction

$$f(t) = |A - X(t)| |Y(t) - C| - |X(t) - Y(t)|^2, \quad t \in [0, 1],$$

où $X(t) = (1 - t)A + tB$ et $Y(t) = (1 - t)M + tB$, est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$ et vérifie

$$f(0) = -|AM|^2 < 0 \quad \text{and} \quad f(1) = |AB||BC| > 0.$$

Ainsi, il existe un unique point $t_0 \in]0, 1[$, tel que $f(t_0) = 0$. Donc, en posant $E = X(t_0)$ et $F = Y(t_0)$, on trouve d'après le théorème 15 que la courbe Bézier $BP[A, E, F, C]$ est une T-cubique. ■

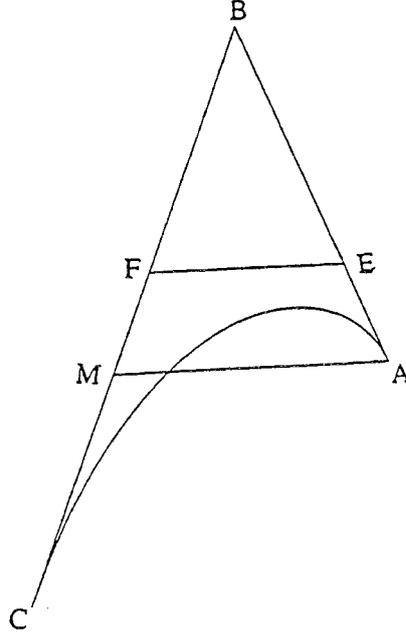


Figure 4. Cubique de Tschirnhausen associée à un triangle

4. G^1 T-Cubique

Rappelons que notre but est de construire une courbe G^1 avec les contraintes précisées dans la section 2. En appliquant la proposition 18, on obtient une T-cubique inscrite dans le triangle (Q_0RQ_1) , de vecteur tangent Q_0R en Q_0 et RQ_1 en Q_1 . Cependant, la contrainte de longueur n'est pas nécessairement satisfaite.

4. 1. Construction.

Nous proposons la construction suivante, qui fait appel à deux segments de T-cubique ayant un contact d'ordre 1 au point de raccordement, et inscrit dans le triangle (Q_0RQ_1) . Plus précisément, étant donnés deux réels α, β , nous associons au triangle (ABC) les deux triangles (AA_1B_1) et (B_1C_1C) définis comme suit (figure 5)

$$A_1 = (1 - \alpha)A + \alpha B, \quad C_1 = (1 - \alpha)C + \alpha B, \quad B_1 = (1 - \beta)A_1 + \beta C_1.$$

En utilisant la proposition précédente, on peut associer à chaque triangle une T-cubique. Avec cette construction, les deux T-cubiques ont un contact d'ordre

1 au point B_1 . Par suite, elles définissent une G^1 spline cubique qu'on appellera la G^1 T-cubique associée au triangle (ABC) et aux deux réels α et β . On la notera par $T_{\alpha,\beta}[ABC]$. Notre expérimentation nous a montré que le réel β se comporte comme un paramètre de forme, de ce fait nous l'appelons *paramètre de tension*[34]. De plus, on note que la G^1 T-cubique $T_{\alpha,\beta}[ABC]$ est convexe et satisfait les conditions d'interpolation G^1 aux extrémités. Il nous reste donc à étudier la contrainte de longueur.

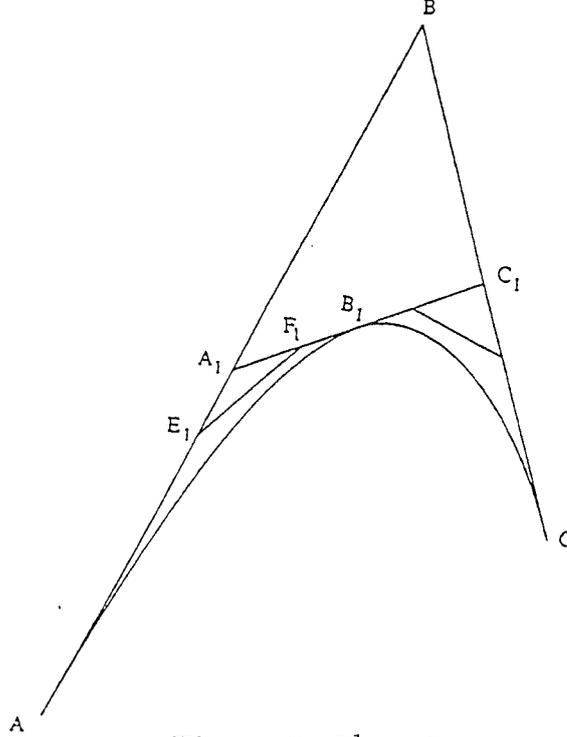


Figure 5. G^1 T-Cubiques

4. 2. Contrainte de longueur.

Pour résoudre notre problème d'interpolation G^2 d'Hermite, on montre que pour chaque réel l tel que $|AC| < l < |AB| + |BC|$, il existe une G^1 T-cubique $T_{\alpha,\beta}[ABC]$, de longueur l , associée au triangle (ABC) . De plus, on montrera l'unicité d'une telle G^1 T-cubique.

Comme dans la section 3, nous notons par $L(T_{\alpha,\beta}[ABC])$ la longueur de la G^1 T-cubique $T_{\alpha,\beta}[ABC]$. Puisque pour tout $\beta \in]0, 1[$, $L(T_{\alpha,\beta}[ABC]) \rightarrow |AC|$ quand $\alpha \rightarrow 0$ et $L(T_{\alpha,\beta}[ABC]) \rightarrow |AB| + |BC|$ quand $\alpha \rightarrow 1$, l'existence (pour tout β) de $\bar{\alpha}$ tel que $L(T_{\bar{\alpha},\beta}[ABC]) = l$ est obtenue par continuité de la fonction $L_0 : \alpha \mapsto L(T_{\alpha,\beta}[ABC])$, pour toute valeur de β .

Considérons les lemmes suivants en vue de la démonstration de la continuité de L_0 .

Lemme 1. Dans la proposition 18 et en accord avec la figure 4, $|EF|$ est l'unique solution dans l'intervalle $]0, |AM|$ de l'équation

$$\left(1 - \frac{1}{4 \cos^2 \theta}\right) x^2 - \frac{|AB| + |BC|}{2 \cos \theta} x - |AB||BC| = 0.$$

Preuve: BP[A,E,F,C] est une T-cubique, de sorte que, d'après le théorème 15

$$|EF|^2 = |AE||FC|.$$

Puisque

$$|AE| = |AB| - |EB|, \quad |FC| = |BC| - |EB| \quad \text{et} \quad |EB| = \frac{|EF|}{2 \cos \theta},$$

il s'ensuit que

$$\left(1 - \frac{1}{4 \cos^2 \theta}\right) |EF|^2 - \frac{|AB| + |BC|}{2 \cos \theta} |EF| - |AB||BC| = 0. \quad (4.5)$$

Comme les points E et F appartiennent respectivement aux segments $]AB[$ et $]BM[$, et puisque la droite (EF) est parallèle à la droite (AM) , on en déduit que $|EF| < |AM|$. L'unicité est une conséquence de la proposition 18. ■

Lemme 2. Soient $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ des fonctions continues sur $]0, 1[$ telles que

- i) $\alpha(t) < \beta(t)$, pour tout $t \in]0, 1[$,
- ii) la fonction $a(t)$ est non nulle sur $]0, 1[$,
- iii) pour toute valeur $t \in]0, 1[$, l'équation

$$a(t)x^2 + b(t)x + c(t) = 0$$

admet une unique solution $u(t) \in]\alpha(t), \beta(t)[$.

Alors la fonction $u(t)$ est continue sur $]0, 1[$.

Preuve: D'après nos hypothèses, on a $b^2(t) - 4a(t)c(t) \geq 0$ sur $]0, 1[$, de sorte que les deux fonctions

$$z_1(t) = \frac{-b(t) - \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}}{2a(t)} \quad \text{et} \quad z_2(t) = \frac{-b(t) + \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}}{2a(t)}$$

sont définies et continues sur $]0, 1[$. Pour chaque t appartenant à $]0, 1[$ on a, ou bien $u(t) = z_1(t)$ ou bien $u(t) = z_2(t)$. Si $z_1 \equiv z_2$ sur $]0, 1[$, le lemme est prouvé. Supposons maintenant que les deux solutions z_1 et z_2 ne sont pas identiques sur $]0, 1[$ mais s'intersectent au point de paramètre $t_0 \in]0, 1[$. Plus généralement, supposons que $z_1(t_0) = z_2(t_0)$ et qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $z_1(t) \neq z_2(t)$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \epsilon[$, par exemple. Donc, par hypothèses, on a $\alpha(t_0) < z_1(t_0) = u(t_0) = z_2(t_0) < \beta(t_0)$. D'où, par argument de continuité, on déduit que $\alpha(t) < z_1(t), z_2(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \epsilon[$, ce qui contredit l'hypothèse iii). Par suite, on conclut que si les deux solutions z_1 et z_2 sont non identiques sur l'intervalle $]0, 1[$, elles sont distinctes pour tout $t \in]0, 1[$, et

donc, par continuité, ou bien $z_1(t) < z_2(t)$ ou bien $z_1(t) > z_2(t)$ sur $]0, 1[$. Par conséquence, on a $u \equiv z_1$ ou $u \equiv z_2$. ■

On peut maintenant démontrer le théorème suivant

Théorème 16. *Pour toute valeur de β dans $]0, 1[$, l'application*

$$L_0 :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto L(T_{\alpha, \beta}[ABC])$$

est continue, et donc, pour toute valeur de β dans $]0, 1[$ et pour tout réel l tel que $|AC| < l < |AB| + |BC|$, il existe un réel $\bar{\alpha} \in]0, 1[$ tel que

$$L(T_{\bar{\alpha}, \beta}[ABC]) = l.$$

Preuve: Considérons une valeur fixée de β dans $]0, 1[$ et les notations de la figure 5. Puisque la G^1 T-cubique $T_{\alpha, \beta}[ABC]$ est composée de deux segments de T-cubiques, il suffit, pour montrer la continuité de L_0 , de prouver la continuité de l'application définie sur $]0, 1[$ par

$$L_1 : \alpha \mapsto L(T[A A_1(\alpha) B_1(\alpha)]) \quad \text{et} \quad L_2 : \alpha \mapsto L(T[B_1(\alpha) C_1(\alpha) C]).$$

On a

$$L_1(\alpha) = |A E_1(\alpha)| + |F_1(\alpha) B_1(\alpha)| - |E_1(\alpha) F_1(\alpha)| \cos \theta_1,$$

et des expressions similaires pour $L_2(\alpha)$. Notons que θ_1 et θ_2 ont une valeur fixe pour tout triangle non-dégénéré (ABC) et donc ne dépendent pas de α et β . Si le triangle (ABC) est tel que $\cos \theta_1 = \pm 1/2$, on peut déduire de (4.5) que $|E_1(\alpha) F_1(\alpha)|$ est la solution d'une équation affine à coefficients continus par rapport à la variable α . En conséquence, $|E_1(\alpha) F_1(\alpha)|$ est une fonction continue de la variable α dans $]0, 1[$. Considérons maintenant un triangle (ABC) tel que $\cos \theta_1 \neq \pm 1/2$. On peut remarquer que $|A M_1(\alpha)|$ est une fonction continue par rapport à la variable α . Par suite, d'après les lemmes 1 et 2, on déduit que $|E_1(\alpha) F_1(\alpha)|$ est une fonction continue de la variable α dans $]0, 1[$. Enfin, puisque $\cos \theta_1 \neq 0$ pour tout triangle non-dégénéré (ABC) , on a

$$\begin{aligned} |A E_1(\alpha)| &= |A A_1(\alpha)| + \frac{|E_1(\alpha) F_1(\alpha)|}{2 \cos \theta_1}, \\ |F_1(\alpha) B_1(\alpha)| &= |A_1(\alpha) B_1(\alpha)| + \frac{|E_1(\alpha) F_1(\alpha)|}{2 \cos \theta_1}. \end{aligned}$$

Par suite, $L_1(\alpha)$ est une fonction continue de la variable α dans $]0, 1[$. Avec une démonstration similaire, on montre que $L_2(\alpha)$ est une fonction continue sur $]0, 1[$. ■

4. 3. Unicité

Pour l'unicité du réel $\bar{\alpha}$ dans le théorème 16, on montre que la fonction L_0 est strictement croissante. La preuve fait appel à des techniques similaires à celles utilisées par J. Roulier pour comparer la longueur d'arc des courbes Bézier[44].

Théorème 17. [44] *Soient f et g deux arcs paramétrés différentiables ayant mêmes extrémités P_1 et P_2 . Supposons que l'arc g n'intersecte pas le segment $[P_1P_2]$. Supposons aussi que l'arc f est convexe et que $f(t)$ est situé dans la région limitée par l'arc g et le segment $]P_1P_2[$ pour tout t appartenant au domaine des paramètres de f . Alors, la longueur d'arc de f est inférieure à la longueur d'arc de g .*

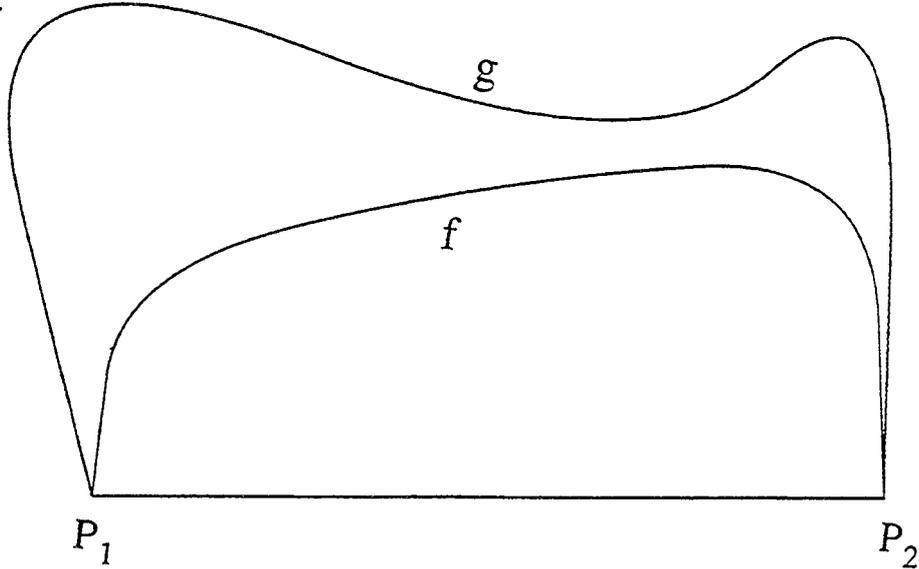


Figure 6. La longueur d'arc de f est inférieure à celle de g

On peut observer que pour toute valeur de β et pour tout α_1, α_2 dans $]0, 1[$, les courbes $T_{\alpha_1, \beta}[ABC]$ et $T_{\alpha_2, \beta}[ABC]$ ont mêmes points extrémités A et C . De plus, pour tout β et α dans $]0, 1[$, les courbes $T_{\alpha, \beta}[ABC]$ sont convexes et n'intersectent pas le segment $]A, C[$. Par suite, pour montrer que l'application L_0 est strictement croissante en la variable α , il suffit de montrer que *pour tout $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ dans $]0, 1[$, avec $\alpha_1 < \alpha_2$, tout point de la courbe $T_{\alpha_1, \beta}[ABC]$ est situé à l'intérieur de la région limitée par la courbe $T_{\alpha_2, \beta}[ABC]$ et le segment $[A, C]$.*

Supposons que toutes les courbes $T_{\alpha, \beta}[ABC]$ sont orientées positivement de A vers C . Il nous faut donc prouver [44] que, si $\alpha_1 < \alpha_2$, alors pour tout point Q du graphe de la courbe $T_{\alpha_2, \beta}[ABC]$, il existe un point \bar{Q} du graphe de la courbe $T_{\alpha_1, \beta}[ABC]$ tel que $\overrightarrow{Q\bar{Q}} \times \overrightarrow{T_{\bar{Q}}}$ < 0, où $\overrightarrow{T_{\bar{Q}}}$ est le vecteur tangent à la courbe $T_{\alpha_1, \beta}[ABC]$ au point \bar{Q} , et où \times est le produit vectoriel bidimensionnelle, c'est-à-dire, pour deux vecteurs donnés $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$, $u \times v = u_1v_2 - u_2v_1$. Pour cela on montre la proposition suivante

Proposition 19. *Soit (ABH) un triangle et t_1, t_2 deux réels appartenant à $]0, 1[$*

tels que $t_1 < t_2$. Considérons les points A_1, A_2, B_1, B_2 définis par

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 - t_1)A + t_1B, & A_2 &= (1 - t_2)A + t_2B, \\ B_1 &= (1 - t_1)H + t_1B, & B_2 &= (1 - t_2)H + t_2B. \end{aligned}$$

On a

$$\left(T[AA_2B_2](t) - T[AA_1B_1](t) \right) \times \frac{\partial T}{\partial t}[AA_1B_1](t) < 0 \quad \text{pour tout } t \in]0, 1[.$$

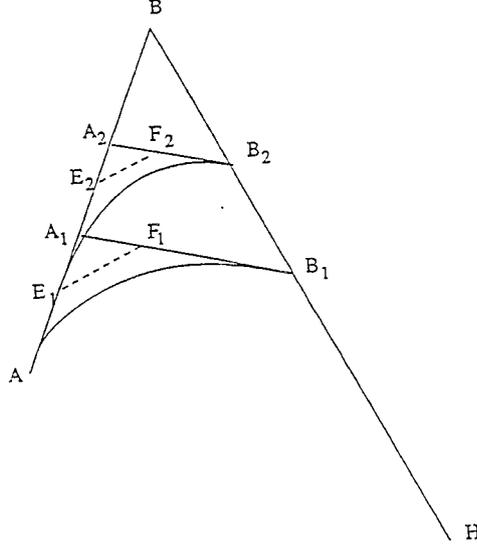


Figure 7. Configuration de la proposition 19

Preuve: Considérons les deux T-cubiques associées aux triangles (AA_1B_1) et (AA_2B_2) :

$$T[AA_1B_1](t) = AB_0^3(t) + E_1B_1^3(t) + F_1B_2^3(t) + B_1B_3^3(t),$$

$$T[AA_2B_2](t) = AB_0^3(t) + E_2B_1^3(t) + F_2B_2^3(t) + B_2B_3^3(t).$$

Nous distinguons deux cas. Supposons que $|E_1F_1| \geq |E_2F_2|$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} E_1E_2 \times AE_1 &= 0, & E_1E_2 \times E_1F_1 &< 0, & E_1E_2 \times F_1B_1 &< 0, \\ F_1F_2 \times AE_1 &< 0, & F_1F_2 \times E_1F_1 &< 0, & F_1F_2 \times F_1B_1 &< 0, \\ B_1B_2 \times AE_1 &< 0, & B_1B_2 \times E_1F_1 &< 0, & B_1B_2 \times F_1B_1 &< 0. \end{aligned}$$

Par suite

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \left(T[AA_2B_2](t) - T[AA_1B_1](t) \right) \times \frac{\partial T}{\partial t}[AA_1B_1](t) < 0.$$

Supposons maintenant que $|E_1F_1| < |E_2F_2|$ et considérons les notations suivantes

$$\alpha_1 = |AE_1|, \quad \beta_1 = |E_1F_1|, \quad \gamma_1 = |F_1B_1|,$$

$$\alpha_2 = |AE_2|, \quad \beta_2 = |E_2F_2|, \quad \gamma_2 = |F_2B_2|,$$

et

$$\vec{u} = \frac{AE_1}{|AE_1|}, \quad \vec{v} = \frac{E_1F_1}{|E_1F_1|}.$$

Après calcul, on trouve

$$\left(T[AA_2B_2](t) - T[AA_1B_1](t) \right) \times \frac{\partial T}{\partial t}[AA_1B_1](t) = 3t^2 \sum_{i=0}^3 Q_i B_i^3(t) (\vec{u} \times \vec{v}),$$

avec

$$\begin{aligned} Q_0 &= 6\beta_1\alpha_2 - 3\alpha_1\beta_2 - 3\alpha_1\beta_1, \\ 3Q_1 &= 6\beta_1\alpha_2 - 5\alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + 3\lambda\gamma_1\alpha_2 - 2\lambda\gamma_1\alpha_1 - \lambda\gamma_2\alpha_1, \\ 3Q_2 &= 2\beta_1\alpha_2 - 2\beta_1\alpha_1 + 3\lambda\gamma_1\alpha_2 - 3\lambda\gamma_1\alpha_1 + 3\gamma_1\beta_2 - 2\beta_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1, \\ Q_3 &= \lambda\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \gamma_1(\beta_2 - \beta_1). \end{aligned}$$

et

$$\lambda = \frac{|E_1F_1|}{|A_1F_1|}.$$

Finalement, en utilisant le fait que

$$\alpha_1 < \alpha_2, \quad \beta_1 < \beta_2, \quad \gamma_2 < \gamma_1,$$

et que

$$\alpha_1\gamma_1 = \beta_1^2, \quad \alpha_2\gamma_2 = \beta_2^2,$$

on peut facilement montrer que $Q_0 > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ et $Q_3 > 0$. ■

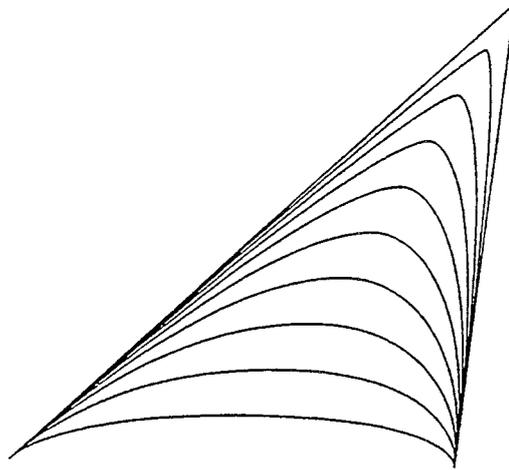


Figure 8. Famille de G^1 T-cubiques

Les théorèmes 16 et 17 et la proposition 19, permettent détablir le théorème suivant

Théorème 18. Soit l un nombre réel tel que $|AC| < l < |AB| + |BC|$. Alors, pour toute valeur de β dans $]0, 1[$, il existe un unique réel $\bar{\alpha}$ dans $]0, 1[$ tel que la longueur d'arc de la G^1 T-cubique associée au triangle (ABC) et aux deux réels $\bar{\alpha}$ et β soit égale à l . c'est-à-dire,

$$L(T_{\bar{\alpha},\beta}[ABC]) = l.$$

5. Construction des développantes d'un segment d'une T-cubique

Une méthode simple et élégante pour la construction de la structure de contrôle duale des développantes $I_{\bar{\alpha},\beta}$ de la courbe $T_{\bar{\alpha},\beta}[Q_0RQ_1]$ est basée sur la représentation duale des cercles osculateurs de $I_{\bar{\alpha},\beta}$ aux points extrémités [34,43].

Définition 11. Deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) seront dits *connectés* s'il existe un segment d'une T-quartique qui interpole ces éléments de courbure.

Puisque une T-quartique ne possède que 5 degrés de liberté, deux éléments de courbure ne sont pas en général connectés.

Considérons maintenant, deux éléments de courbure connectés (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) . Soit $B_0^*, B_1^*, B_2^*, B_3^*$; F_0^*, F_1^*, F_2^* la structure de contrôle duale du segment C de la T-quartique interpolant ces éléments de courbure et soient c_0 et c_1 les cercles osculateurs de la courbe C aux points extrémité P_0 et P_1 . Le centre S de similitude σ qui transforme le cercle c_0 en le cercle c_1 est définie par

$$S = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0} Q_0 + \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_1} Q_1,$$

où $\rho_i = k_i^{-1}$, $i = 0, 1$ et où $Q_0 = \tilde{P}_0$, $Q_1 = \tilde{P}_1$ sont respectivement les centres de courbure des éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) .

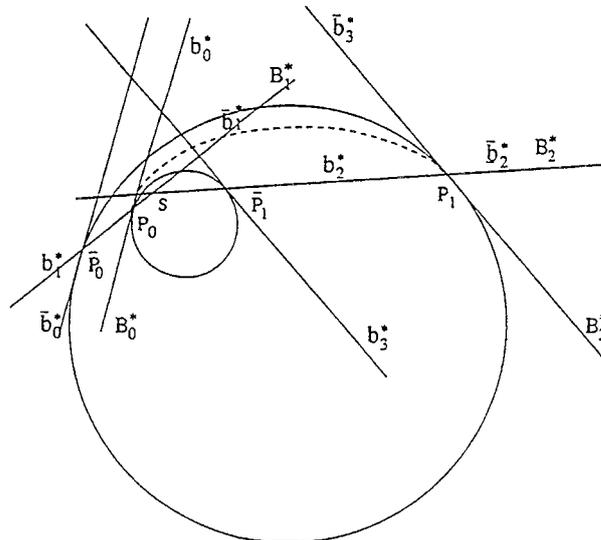


Figure 9. Cercles osculateurs aux extrémités d'une T-quartique

Notons $\bar{P}_1 = \sigma^{-1}(P_1)$ et $\bar{P}_0 = \sigma(P_0)$. De plus, notons \bar{c}_0 l'arc circulaire orienté positivement de P_0 à \bar{P}_1 , et \bar{c}_1 l'arc circulaire orienté positivement de \bar{P}_0 à P_1 . On effectue une élévation du degré (c'est-à-dire, multiplication par un polynôme affine en le paramètre α) de la représentation quadratique duale de l'arc circulaire \bar{c}_0 , ce qui nous fournit la structure de contrôle duale (en classe 3) $b_0^*, b_1^*(\alpha), b_2^*(\alpha), b_3^*$; $f_0^*(\alpha), f_1^*(\alpha), f_2^*(\alpha)$ de l'arc circulaire \bar{c}_0 . La similitude σ transforme ces droites sur celles de la structure de contrôle duale (en classe 3) de l'arc circulaire \bar{c}_1 , que nous notons par $\bar{b}_0^*, \bar{b}_1^*(\alpha), \bar{b}_2^*(\alpha), \bar{b}_3^*$; $\bar{f}_0^*(\alpha), \bar{f}_1^*(\alpha), \bar{f}_2^*(\alpha)$.

Comme précisé dans ([43], Théorème 4), les 3 premières (resp. les 3 dernières) lignes de Bézier et les 2 premières (resp. les 2 dernières) lignes de Farin du segment de la T-quartique interpolante sont identiques aux 3 premières (resp. les 3 dernières) lignes de Bézier et les 2 premières (resp. les 2 dernières) lignes de Farin de l'arc circulaire \bar{c}_0 (resp. \bar{c}_1) pour une valeur de α , afin de satisfaire aux contraintes d'interpolation. Par suite, il existe une valeur $\bar{\alpha}$ du paramètre α tel que

$$B_1^* \equiv b_1^*(\bar{\alpha}) \equiv \bar{b}_1^*(\bar{\alpha}), \quad B_2^* \equiv b_2^*(\bar{\alpha}) \equiv \bar{b}_2^*(\bar{\alpha}),$$

et

$$F_0^* \equiv f_0^*(\bar{\alpha}), \quad F_1^* \equiv f_1^*(\bar{\alpha}) \equiv \bar{f}_1^*(\bar{\alpha}), \quad F_2^* \equiv \bar{f}_2^*(\bar{\alpha}).$$

Par suite, on déduit que $B_1^* \equiv (P_0\bar{P}_0)$ et $B_2^* \equiv (\bar{P}_1P_1)$, ce qui prouve que ces lignes de contrôle s'intersectent au point S . Réciproquement, *s'il existe une élévation de degré de l'arc circulaire \bar{c}_0 en classe 3, telle que la deuxième et la troisième ligne de Bézier passe par le point S , alors les deux éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) sont connectés.*

Théorème 19. *Soient (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) deux éléments de courbure connectés. Les lignes de Bézier B_1^* et B_2^* de la représentation duale du segment C de la T-quartique interpolante passe par le point S défini par*

$$S = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0} Q_0 + \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_1} Q_1,$$

où $\rho_i = k_i^{-1}$, $i = 0, 1$ et où Q_0, Q_1 sont respectivement les centres de courbure des éléments de courbure (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) .

Etant donné un segment d'une T-cubique, chacune de ses développantes (T-quartiques) définissent des éléments de courbure connectés. Par suite, on peut appliquer la construction précédente pour trouver la structure de contrôle duale de ces développantes.

6. Algorithme et exemples

Pour deux éléments de courbure admissibles (P_0, T_0, k_0) et (P_1, T_1, k_1) , à courbure croissante, on a (Théorème 14, figure 10),

$$|Q_0Q_1| < \frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_1} < |Q_0R| + |RQ_1|. \quad (4.6)$$

Donc, pour toute valeur de β dans $]0, 1[$, une solution de notre problème d'interpolation G^2 d'Hermite est obtenue comme une développante de la G^1 T-cubique $T_{\bar{\alpha}, \beta}(Q_0 R Q_1)$, de longueur $k_0^{-1} - k_1^{-1}$, comme précisée dans le théorème 18.

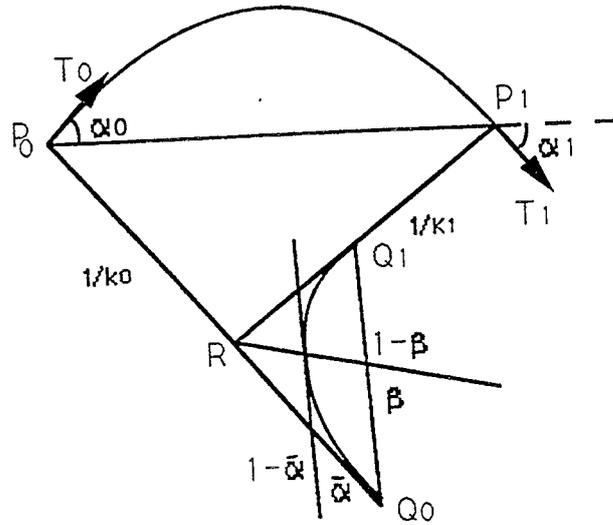


Figure 10. Interpolation G^2 d'Hermite

Puisque la G^1 T-cubique $T_{\bar{\alpha}, \beta}[Q_0 R Q_1]$ est régulière, sa développante est à courbure monotone[38].

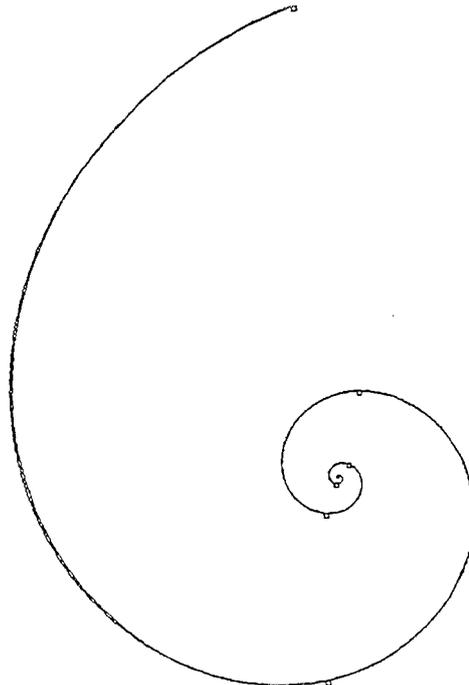


Figure 11. Approximation PH d'un segment d'une spirale logarithmique

La G^2 -approximation PH d'un segment d'une spirale logarithmique est montrée dans la figure 11. Du fait de la monotonie de la courbure de la spirale logarithmique, il suffit de vérifier que la courbure totale entre deux points consécutifs de la segmentation hiérarchique est inférieure à π . De plus, on peut voir dans la figure 12, l'influence du paramètre de tension β sur l'approximation d'un segment de la spirale logarithmique.

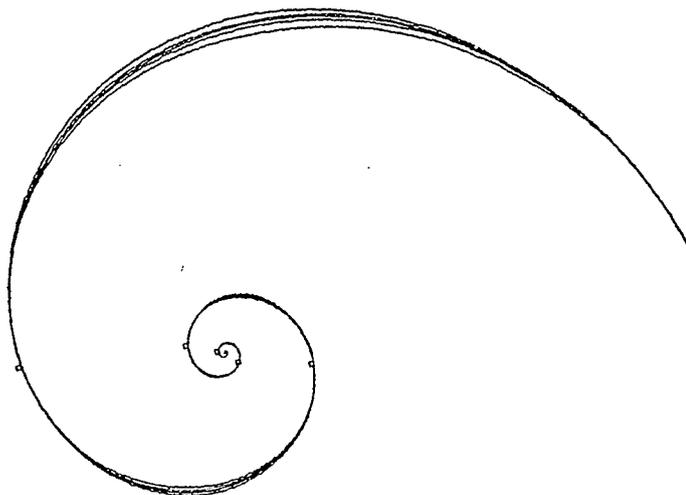


Figure 12. *Influence du paramètre de tension*

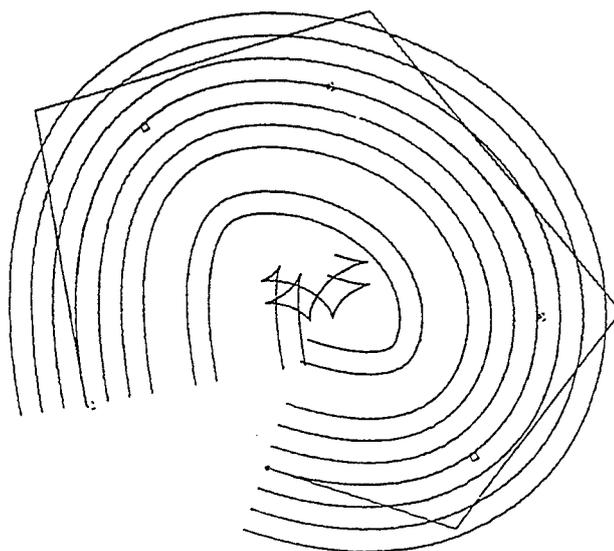


Figure 13. *Approximation PH d'une spline cubique et de ses courbes parallèles*

Dans la figure 13, quelques approximations PH d'une B-spline cubique et de leurs parallèles sont montrées.

Puisque les quartiques de Tschirnhausen se reproduisent par action du parallélisme, l'approximation PH de chaque parallèle de la B-spline cubique se fait directement par des translations appropriées de la structure de contrôle duale de la G^2 approximation PH de la courbe initiale[41].

Notons finalement, que pour les courbes admettant plusieurs sommets, l'approximation de la courbe par notre algorithme nécessite un grand nombre de segments de T-quartiques. Pour remédier à cet inconvénient, il est possible de combiner cet algorithme avec les méthodes de "fairing" permettant de réduire le nombre de sommets de la courbe à approcher.

Références

34. Ait Haddou, R., and L. Biard, G^2 approximation of an offset curve by Tschirnhausen quartics, in *Mathematical Methods in CAGD III*, M. Dahlen, T. Lyche, and L. L. Schumaker (eds.), 1995.
35. Farouki, R. T., Pythagorean-hodograph curves in practical use, in *Geometry Processing for Design and manufacturing*, R. E. Barnhill (ed.), SIAM, Philadelphia, 1990, 3–33.
36. Farouki, R. T., and T. Sakkalis, Pythagorean hodographs, *IBM J. Res. Develop.* **34**, (1990), 736–752.
37. Farouki, R. T., and H. Pottmann, Polynomial and rational Pythagorean-hodograph curves reconciled, *IBM Research Report RC 19571*, 1994.
38. Guggenheimer H. W., *Differential Geometry*, McGraw-Hill Book Company, Inc, 1963.
39. Hoschek, J., Dual Bézier curves and surfaces, i, : R.E. Barnhill and W. Boehm, eds., *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, North Holland, (1983), 147–156.
40. Kubotta, K. K., Pythagorean triples in unique factorization domains, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 503–505.
41. Pottmann, H., Rational curves and surfaces with rational offsets, *Comp. Aided Geom. Design* **12**, (1995), 175–192.
42. Pottmann, H., Applications of the dual Bézier representation of rational curves and surfaces, *Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 7*, 1993.
43. Pottmann, H., Curve design with rational Pythagorean - hodograph curves, *Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 9*, 1994.
44. Roulier, J. A., Specifying the arc length of Bézier curves, *Comp. Aided Geom. Design* **10** (1993), 25–56.

Chapitre 5.

OVALES A LARGEUR CONSTANTE

Introduction

Durant les quarantes dernières années, la notion de courbe à largeur constante s'est développée dans des contextes liés à la géométrie différentielle[46,47] et aux problèmes isopérimétriques[47]. Cependant, la nature des paramétrisations de ces courbes n'a pas suscité un intérêt considérable. Pourtant, pour certaines applications en CAO ou CAGD telle que la mécanique des cames, les paramétrisations rationnelles (ou rationnelles par morceaux) de ces courbes, si elles existent, sont nécessaires pour être incorporées dans les systèmes de CAD existants.

De ce fait, nous donnons dans ce chapitre des constructions géométriques d'ovales et de rosettes rationnelles à largeur constante. La première construction est basée sur une idée de Hammer et Sobczyk [50,51], qui génèrent des courbes à largeur constante comme trajectoires orthogonales de certaines familles de droites ayant la propriété que tout point du plan suffisamment éloigné de l'origine appartient à un nombre impair de droites de cette famille. La deuxième construction est basée sur les propriétés de la représentation Bézier duale des courbes PH qui fournit un outil très performant pour générer des courbes à largeur constante[45].

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. La première section présente les notions fondamentales des ovales et des rosettes à largeur constante. La formulation et les notations adoptées dans cette section sont similaires à celles données dans [48,49]. La deuxième section est consacrée à la construction d'ovales et rosettes à largeur constante constitués de segments de T-quartiques. Dans la section 3, nous donnons deux algorithmes de construction d'ovales à largeur constante réalisés à l'aide de courbes rationnelles PH de classe algébrique > 4 .

1. Préliminaires

Dans cette section, nous considérons la famille des rosettes positivement orientées, c'est-à-dire, la famille des courbes fermées, G^2 , à courbure positive. Notons par s, L, k respectivement la longueur d'arc, le périmètre et la courbure euclidienne d'une rosette fixée Γ . Nous regardons ici toute courbe paramétrée $C(s) = (x(s), y(s))$ comme une fonction d'une variable complexe à coefficients réels $C(s) = x(s) + i y(s)$.

1. 1. Ovals et rosettes à largeur constante

Considérons une rosette C , $s \mapsto C(s) = x(s) + iy(s)$ pour $0 \leq s \leq L$. Le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire à C au point de paramètre s sont respectivement notés par $T(s)$ et $N(s)$.

Nous supposons que les fonctions C, T, N et k sont périodiques de période L . Pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, soit a la plus petite valeur réelle appartenant à $[0, L]$ telle que $T(a) = e^{i\alpha}T(0)$. La solution de l'équation différentielle

$$\varphi' = \frac{k}{k \circ \varphi} \quad (5.1)$$

avec la condition initiale $\varphi(0) = a$ vérifie la relation

$$T(\varphi(s)) = e^{i\alpha}T(s) \quad \text{pour } s \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, si φ est une solution de (5.1), alors $\varphi^r = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$ (r fois) satisfait l'équation différentielle (5.1), avec des conditions initiales différentes[48].

1. 1. 1. Ovals à largeur constante

Considérons un ovale C , c'est-à-dire, une courbe plane fermée, G^2 , simple à courbure positive et on note ψ la solution de (5.1) telle que $T \circ \psi = -T$, c'est-à-dire, obtenue pour $\alpha = \pi$.

Considérons alors le vecteur et les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} p &= C - C \circ \psi, & \delta &= - \langle p, N \rangle, \\ \Delta &= \langle p, T \rangle, & 2\lambda &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k \circ \psi}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

où \langle, \rangle est le produit scalaire usuel du plan.

La fonction λ est appelée *fonction rayon de courbure moyenne* et la fonction δ est appelée *fonction largeur* de la courbe C . On peut montrer que[48]

$$p' = 2\lambda k T \quad \text{et} \quad \delta' = k \Delta. \quad (5.3)$$

Définition 12. Notons $D(s)$ la droite normale à l'ovale C au point $C(s)$. Une paire de deux points distincts $C(s_1)$ et $C(s_2)$ telle que $D(s_1) \equiv D(s_2)$ est appelée *une paire orthodiamètre* de l'ovale C .

Théorème 20. *Tout ovale possède au moins deux paires orthodiamètres.*

Preuve: Soit $|p|^2 = \langle p, p \rangle$. Alors $|p|' = 2|p|^{-1}k\lambda\Delta$. Puisque la fonction $s \mapsto |p|^2(s)$ est définie et continue sur un compact, elle atteint son maximum et son minimum. Soit s_0 (resp. s_1) la plus petite valeur sur $[0, L]$ telle que $|p|^2(s_0)$ (resp. $|p|^2(s_1)$) soit maximum (resp. minimum). Donc, du fait de la définition et de la périodicité de p , nécessairement $\psi(s_0)$ et $\psi(s_1)$ appartiennent à $[0, L]$ et sont respectivement associés à un minimum et à un maximum de la

fonction $|p|^2(s)$. Finalement, $(C(s_0), C(\psi(s_0)))$ et $(C(s_1), C(\psi(s_1)))$ sont deux paires orthodiamètres. ■

Définition 13. Un ovale C est dit à largeur constante si δ est une fonction constante. Le théorème suivant montre qu'un ovale à largeur constante vérifie la propriété naturelle $\|p\|_2 \equiv \text{constante}$.

Théorème 21. *Un ovale C est à largeur constante si et seulement si tout point de C appartient à une paire orthodiamètre.*

Preuve: Supposons que C soit à largeur constante. Donc $\langle p, N \rangle = \text{constant}$, ce qui est vrai si et seulement si $\delta' = 0$. Puisque $\delta' = k\Delta$, il en découle que C est à largeur constante si et seulement si $\Delta = 0$. ■

Par ailleurs, pour tout ovale à largeur constante C , la fonction rayon de courbure moyenne λ est une fonction constante telle que $2\lambda = \delta = \|p\|_2$ [49].

1. 1. 2. Rosettes à largeur constante

Nous considérons maintenant une rosette C positivement orientée et notons ψ la solution de (5.1) telle que $T\circ\psi = -T$.

Considérons le vecteur et les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} p_* &= C - C\circ\psi^j, & \delta_* &= -\langle p_*, N \rangle, \\ \Delta_* &= \langle p_*, T \rangle, & 2\lambda_* &= \frac{1}{k} + (-1)^{j+1} \frac{1}{k\circ\psi^j}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

où j est l'indice de la courbe C . La fonction δ_* est appelée la *fonction largeur* de C . On a [49]

$$p'_* = 2\lambda_* kT, \quad \delta'_* = k\Delta_*, \quad \Delta'_* = -k\delta_* + 2k\lambda_*. \quad (5.5)$$

On note que si C est un ovale, i.e., si $j = 1$, alors $p_* = p$, $\delta_* = \delta$, $\Delta_* = \Delta$ et $\lambda_* = \lambda$.

Définition 14. Une rosette C est dite à largeur constante si $\delta_* = \text{constant}$. Le théorème suivant montre qu'une rosette à largeur constante vérifie la propriété $\|p_*\|_2 \equiv \text{constant}$.

Théorème 22. *L'indice d'une rosette C à largeur constante est un entier impair et on a $\delta_* = 2\lambda_* = \|p_*\|_2$.*

Preuve: Soit C une rosette à largeur constante. Supposons que j est un entier pair. Des relations (5.4) on a $\lambda_*\circ\psi^j = -\lambda_*$. Par suite, il existe un paramètre $u \in [0, L]$ tel que $\lambda_*(u) = 0$. Le système (5.5) induit l'identité $2\lambda_* \equiv \delta_* > 0$, ce qui mène à une contradiction. ■

2. Construction géométrique de rosettes PH à largeur constante

Dans cette section, nous présentons une construction géométrique d'ovales et de rosettes à largeur constante formés de segments de courbes PH de classe algébrique 3 (T-quartiques).

Cette construction est basée sur le fait que les T-quartiques sont exactement les développantes des T-cubiques et sur l'existence de rosettes à largeur constante en tant que trajectoires orthogonales à certaines familles continues de droites.

2. 1. Ovales PH de classe 3 à largeur constante

Nous présentons ici un algorithme pour la construction d'ovales rationnels à largeur constante comme trajectoires orthogonales de familles spéciales de droites dans le plan.

Définition 15. Une famille continue $U(t)$ de droites du plan est dite *simple* s'il existe un cercle \mathcal{C} tel que tout point extérieur à \mathcal{C} est atteint par exactement une droite de la famille $U(t)$.

Les trajectoires orthogonales régulières d'une famille simple de droites existent et sont des ovales à largeur constante[50,51]. Chaque trajectoire orthogonale de la famille $U(t)$ est une développante de l'enveloppe de cette famille de droites. En conséquence, pour obtenir des ovales à largeur constante formés de T-quartiques, il suffit de déterminer des courbes splines T-cubiques G^1 dont l'ensemble des tangentes forme une famille simple de droites.

Proposition 20. *Considérons un triangle non dégénéré (ABC) dont les angles intérieurs sont inférieurs à $\pi/2$. Il existe 3 points P_0, P_1, P_2 uniques, extérieurs au triangle (ABC) , de sorte que les courbes Bézier $BP[P_0, A, C, P_1]$, $BP[P_1, C, B, P_2]$ et $BP[P_2, B, A, P_0]$ soient des T-cubiques.*

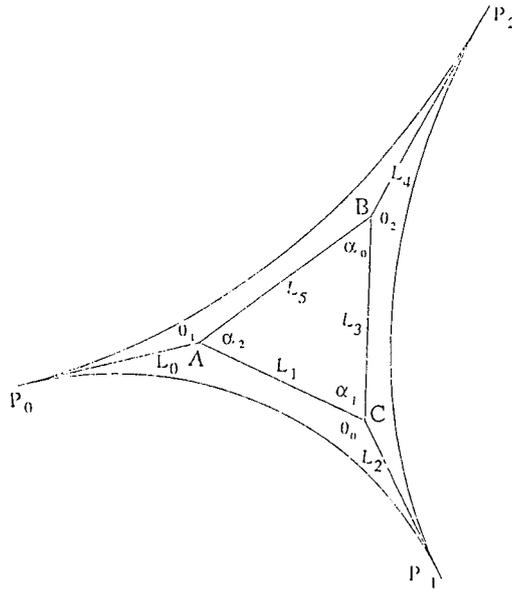


Figure 1. Construction de la courbe $T[ABC]$

Preuve: Avec les notations de la figure 1, on a

$$\begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 + \alpha_0 &= 2\pi, & \theta_1 + \theta_0 + \alpha_2 &= 2\pi, & \theta_0 + \theta_2 + \alpha_1 &= 2\pi, \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= \pi.\end{aligned}$$

D'où $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 5\pi/2$ et par suite $\theta_0 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$. Par symétrie on a $\theta_1 = \alpha_1 + \pi/2$ et $\theta_2 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}$. Donc, on doit nécessairement avoir $\theta_i < \pi$, $i = 0, 1, 2$, c'est-à-dire, $\alpha_i < \pi/2$, $i = 0, 1, 2$. La deuxième étape consiste à trouver les longueurs L_0, L_2 et L_4 (figure 1) vérifiant

$$L_1^2 = L_0L_2, \quad L_3^2 = L_2L_4, \quad \text{et} \quad L_5^2 = L_0L_4.$$

Ainsi nécessairement :

$$L_0 = \frac{L_1L_5}{L_3}, \quad L_2 = \frac{L_1L_3}{L_5} \quad \text{et} \quad L_4 = \frac{L_5L_3}{L_1}.$$

■

Cette construction génère une courbe formée de 3 segments de T-cubiques, ayant même tangente aux extrémités, que nous notons $T[ABC]$.

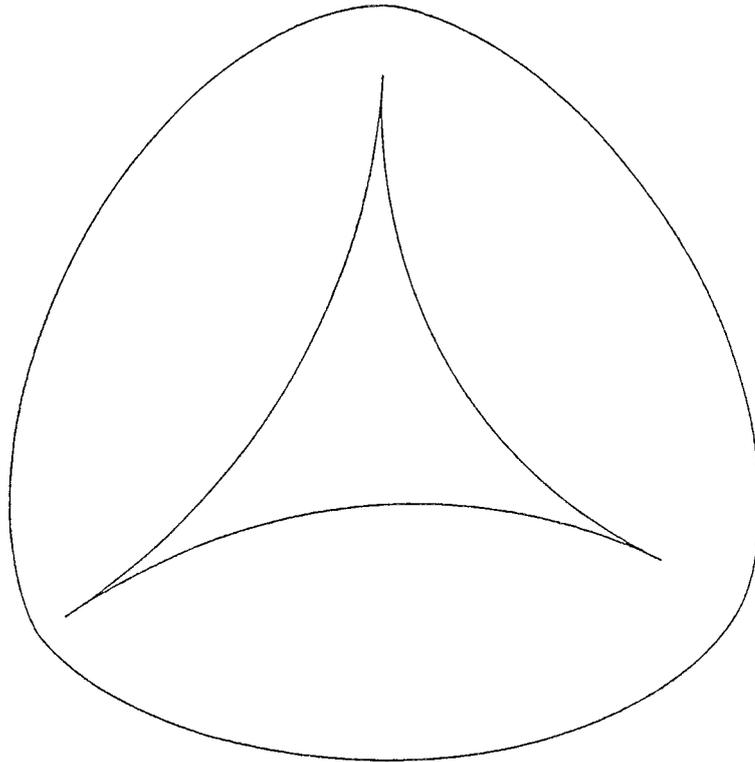


Figure 2. *Ovale G^2 T-quartique à largeur constante*

Proposition 21. *La famille des droites tangentes à la courbe $T[ABC]$ est simple.*

Preuve: Soit \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle (P_0, P_1, P_2) . Les droites (P_0A) et (P_1C) intersectent le cercle \mathcal{C} respectivement aux points P_0, Q_0 et P_1, Q_1 . D'après la proposition 20, on déduit que pour $i = 0, 1, 2$, $\theta_i > \pi/2$; par suite, chacune des T-cubiques de la courbe $T[ABC]$ est π -convexe, c'est-à-dire, convexe dont la courbure totale est inférieure à π . Ainsi, un point H extérieur au cercle \mathcal{C} est atteint par une tangente de la courbe $BP[P_0ACP_1]$ si et seulement si le point H est situé dans la région délimitée par les arcs circulaires (Q_0P_1) et (P_0Q_1) orientés dans le sens des aiguilles d'une montre, et par les droites (P_0Q_0) et (P_1Q_1) . La même remarque reste valable pour les courbes T-cubiques $BP[P_1CBP_2]$ et $BP[P_2BAP_0]$ (figure 1). Par conséquent, pour tout point extérieur au cercle \mathcal{C} , il existe une unique tangente à la courbe $T[ABC]$ passant par ce point. ■

Les développantes régulières de $T[ABC]$ sont donc des ovals à largeur constante formés de 6 segments de T-quartiques (figure 2).

2. 2. Rosettes PH de classe 3 à largeur constante

Nous présentons maintenant une généralisation de l'algorithme précédent pour la construction de rosettes à largeur constante comme trajectoires orthogonales de familles plus générales de droites du plan.

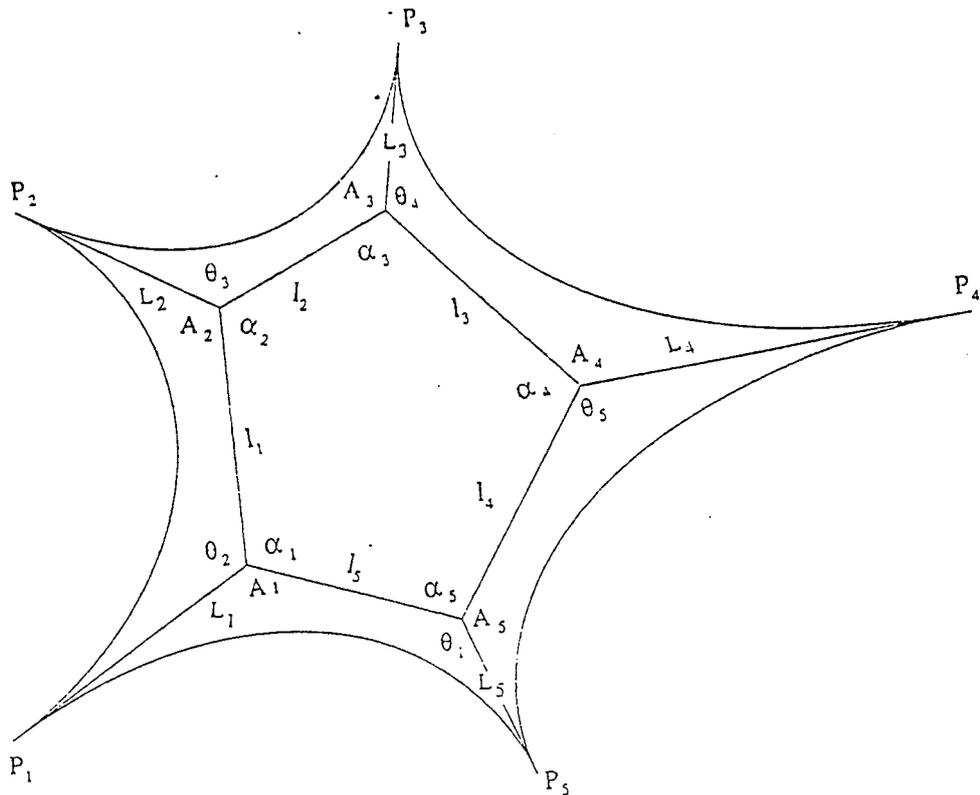


Figure 3. Construction de la courbe $T[A1A2...A5]$

Définition 16. Une famille continue de droites $U(t)$ du plan est dite k -simple si et seulement si il existe un cercle \mathcal{C} tel que tout point extérieur au cercle \mathcal{C} est atteint par exactement k droites de la famille $U(t)$.

Si k est un nombre impair, les trajectoires orthogonales régulières d'une famille k -simple de droites existent et sont des rosettes à largeur constante[53]. Chacune des trajectoires orthogonales de la famille $U(t)$ est une développante de l'enveloppe de cette famille de droites. Par suite, pour obtenir des rosettes à largeur constante formées de segments de T-quartiques, il suffit de construire des courbes formées de segments de T-cubiques dont la famille des tangentes forme une famille k -simple, où k est un entier impair.

Proposition 22. *Considérons un polygone fermé simple $(A_1A_2\dots A_{2n+1})$, ($n \in \mathbb{N}^*$), d'angles intérieurs non orientés $\alpha_i = (A_{i-1}A_i, A_iA_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ avec $0 \equiv 2n+1$ et $2n+2 \equiv 1$. Ces notations seront étendues à α_j avec $j \in \mathbb{Z}$ par la relation $\alpha_j = \alpha_i$ où $i \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ et $j \equiv i$ modulo $2n+1$. Si les angles intérieurs vérifient les relations*

$$\sum_{j=k}^{k+2n} (-1)^{j-k} \alpha_j > 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad (5.6)$$

alors, il existe des points $P_0, P_1, \dots, P_{2n+1}$ uniques, extérieurs au polygone $(A_1A_2\dots A_{2n+1})$ tels que $BP[P_iA_iA_{i+1}P_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, 2n+1$, avec $2n+2 \equiv 1$, soient des T-cubiques.

Preuve: Tout d'abord, déterminons les angles θ_k , comme dans la figure 3, tels que

$$\theta_k + \theta_{k+1} + \alpha_k = 2\pi, \quad k = 1, \dots, 2n+1, \quad \text{avec } 2n+2 \equiv 1.$$

Ces relations donnent

$$\theta_k = \pi - \frac{1}{2} \sum_{j=k}^{k+2n} (-1)^{j-k} \alpha_j, \quad k = 1, 2, \dots, 2n+1,$$

où les angles θ_k sont inférieurs à π d'après l'hypothèse (5.6). Ensuite, montrons l'existence et l'unicité des longueurs L_i telles que

$$L_i L_{i+1} = l_i^2 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad \text{avec } 2n+2 \equiv 1.$$

Pour cela, remarquons que ces relations peuvent s'écrire sous la forme

$$\text{Log } L_i + \text{Log } L_{i+1} = \text{Log } l_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1,$$

Ce qui fournit un système linéaire dont la matrice est inversible. ■

Cette construction génère une courbe formée de $2n+1$ segments de T-cubiques, que nous notons $T[A_1A_2\dots A_{2n+1}]$ (figure 3).

Proposition 23. *Pour tout polygone fermé, simple et régulier $(A_1A_2\dots A_{2n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe $T[A_1A_2\dots A_{2n+1}]$ existe et l'ensemble de ses tangentes forme une famille $(2n - 1)$ -simple.*

Preuve: Comme chaque angle intérieur α_i du polygone $(A_1A_2\dots A_{2n+1})$ est égal à $(2n - 1)\pi/(2n + 1)$ l'existence de la courbe $T[A_1A_2\dots A_{2n+1}]$ provient du fait que

$$\sum_{j=k}^{k+2n} (-1)^{j-k} \alpha_j = \frac{2n-1}{2n+1} \pi > 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, 2n+1.$$

Par des arguments similaires à ceux de la preuve de la proposition 21, on peut montrer que si \mathcal{C} est le plus petit cercle contenant les points $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$, alors tout point extérieur à \mathcal{C} est atteint par exactement $2n - 1$ tangentes de la courbe $T[A_1A_2\dots A_{2n+1}]$. ■

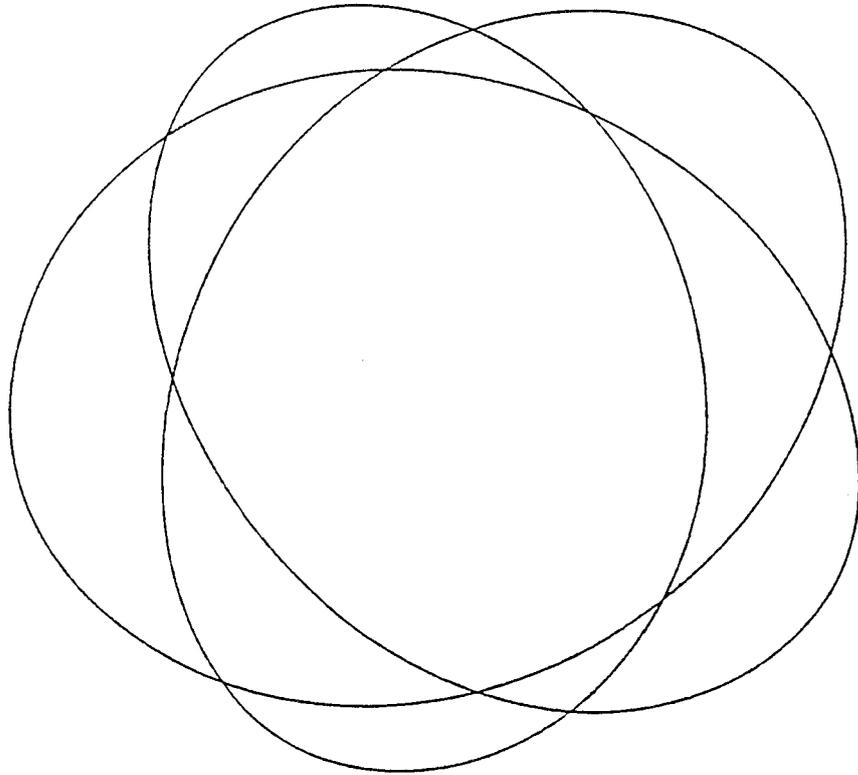


Figure 4. *Rosette T-quartique à largeur constante*

Les développantes régulières de $T[A_1A_2\dots A_{2n+1}]$ sont des rosettes à largeur constante formées de $2(2n + 1)$ segments de T-quartiques (figure 4).

3. Construction duale d'ovales à largeur constante

La représentation Bézier duale des courbes PH fournit un procédé simple et remarquable pour la construction d'ovales à largeur constante. L'observation

essentielle pour cette construction est le fait que la structure de contrôle duale de la courbe parallèle d'une courbe PH est obtenue par des translations appropriées de la structure de contrôle duale de la courbe initiale (voir chapitre 3).

3. 1. Segmentation et structure de contrôle duale d'un cercle

Plus précisément, pour la construction d'ovales à largeur constante, nous définissons la représentation duale par morceaux d'un cercle \mathcal{C} de diamètre D .

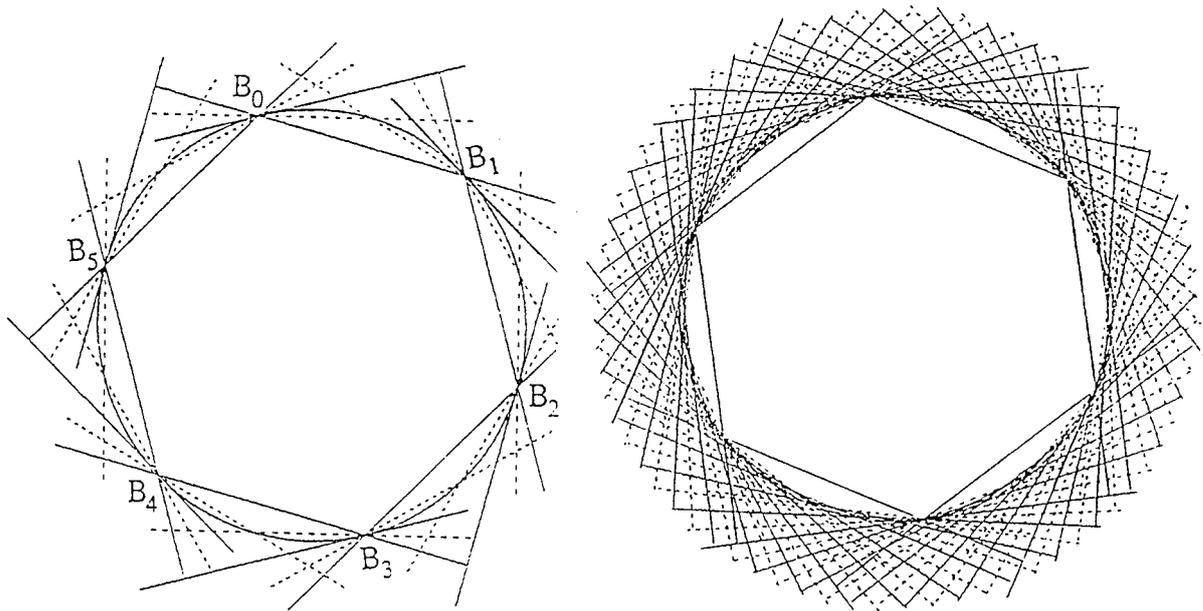


Figure 5. Les structures de contrôle duale d'un cercle en classe 2 et 6

- **Etape 1** - Choisir n points distincts $A_i, i = 1, \dots, n$ sur le cercle \mathcal{C} tels que chaque paire $(A_i, A_j), i \neq j$, ne soit pas une paire orthodiamètre. Pour $i = 1, \dots, n$, désignons par \bar{A}_i le point du cercle \mathcal{C} tel que (A_i, \bar{A}_i) forme une paire orthodiamètre. Nous ordonnons et renommons ensuite les points A_i et \bar{A}_i dans un ordre positif de façon à obtenir une famille de points $B_k, k = 1, \dots, 2n$, de sorte qu'il n'existe aucun point B_l sur chaque arc circulaire positivement orienté $C_j = B_j B_{j+1}$ avec $B_{2n+1} \equiv B_1$ (voir Figure 5).

- **Etape 2** - Déterminer la structure de contrôle duale en classe 2 de chaque arc circulaire $C_k, k = 1, \dots, 2n$. Comme le segment C_{n+j} est la courbe parallèle intérieure du segment C_j à la distance D , les lignes de Bézier et de Farin de C_j sont parallèles aux lignes de Bézier et de Farin correspondantes du segment C_{n+j} .

- **Etape 3** - Effectuer une élévation de degré (multiplication par un polynôme) de chaque segment C_j et C_{n+j} en classe $m_j \geq 2$, pour $j = 1, \dots, n$. Ainsi, les $m_j + 1$ lignes de Bézier et les m_j lignes de Farin du segment C_j sont parallèles aux lignes de Bézier et de Farin correspondantes du segment C_{n+j} .

Nous obtenons ainsi une représentation duale par morceaux du cercle C composée de segments C_k , $k = 1, \dots, 2n$. Les segments C_j et C_{n+j} sont de classe m_j ($m_j \geq 2$), pour $j = 1, \dots, n$. La construction d'ovales à largeur constante consiste ensuite à effectuer des translations appropriées des lignes de Bézier et de Farin des segments C_j et C_{n+j} . Plus précisément, nous présentons deux constructions basées sur la proposition suivante.

Proposition 24. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ovale C soit à largeur constante 2λ est que la courbe parallèle intérieure à la distance $d = 2\lambda$ de C soit l'ovale C lui même.*

Preuve: Supposons que C est un ovale à largeur constante 2λ . Avec les notations de la section 1, la courbe parallèle intérieure à la distance 2λ de la courbe C admet pour paramétrisation $C_d(s) = C(s) + 2\lambda N(s)$. Puisque $\frac{\partial}{\partial s} \langle p(s), N(s) \rangle = 0$, il s'ensuit que $p(s) = L(s)N(s)$ avec $L(s) = \langle p(s), N(s) \rangle = -2\lambda$. Par suite, $C(\psi(s)) = C(s) + 2\lambda N(s) = C_d(s)$. Comme chaque point de l'ovale C appartient à une paire orthodiamètre, on en déduit que $C_d \equiv C$. Réciproquement, si $C_d \equiv C$, alors pour tout $s \in [0, L]$ il existe un paramètre \bar{s} tel que $C_d(s) = C(\bar{s})$. Comme l'ovale C est une courbe régulière, on a $N(s) = -N(\bar{s})$. Ainsi, puisque $C(\bar{s}) - C(s) = dN(s)$, tout point de l'ovale C appartient à une paire orthodiamètre. Ce qui montre, d'après le théorème 21, que C est un ovale à largeur constante $|C(s) - C(\bar{s})| = d$. ■

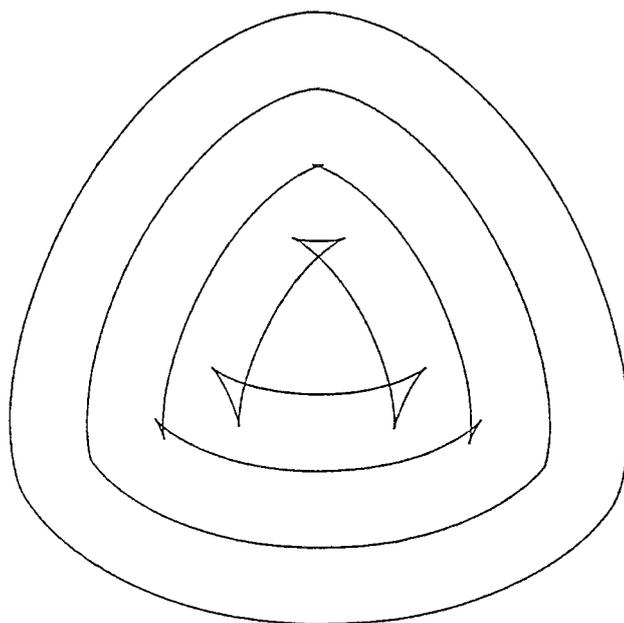


Figure 6. *Ovale à largeur constante et ses courbes parallèles*

Notons qu'il sera commode d'utiliser les identifications suivantes pour les

indices : $2n + 1 \equiv 1$ et $2n \equiv 0$, autrement dit, nous travaillons avec les points et les arcs circulaires suivants : $B_{2n+1} := B_1$, $B_0 := B_{2n}$, $C_0 := C_{2n}$, $C_{2n+1} := C_1$.

3. 2. Construction sous contraintes d'interpolation

Nous proposons ici une construction géométrique d'ovales à largeur constante interpolant des éléments de courbure d'un cercle \mathcal{C} de rayon D , par des segments de courbes PH de classe algébrique m , $m \geq 6$.

Pour cela, nous considérons la structure de contrôle duale par morceaux du cercle \mathcal{C} , comme dans la section 3.1, telle que $m_j \geq 6$ pour $j = 1, \dots, n$.

- Nous laissons fixe les 3 premières et les 3 dernières lignes de Bézier et les 2 premières et les 2 dernières lignes de Farin de chaque segment C_j pour $j = 1, \dots, n$, et nous effectuons des translations parallèles arbitraires des autres lignes de Bézier et de Farin, de sorte que les courbes PH rationnelles H_j ainsi obtenues restent régulières.

- Finalement, nous effectuons des translations des lignes de Bézier et de Farin de chaque segment C_{n+j} , $j = 1, \dots, n$, de sorte que chaque courbe PH rationnelle H_{n+j} ainsi obtenue soit la courbe parallèle à la distance D de la courbe H_j . Plus précisément, chaque ligne de Bézier et de Farin de la structure de contrôle duale en classe m_j du segment C_{n+j} doit subir la même translation parallèle que la ligne correspondante de la structure de contrôle duale en classe m_j du segment C_j .

D'après [52, théorème 4] et la proposition 24, nous obtenons des ovales G^2 rationnels par morceaux, PH, à largeur constante, interpolant les éléments de courbure du cercle \mathcal{C} aux points B_k , $k = 1, \dots, 2n$.

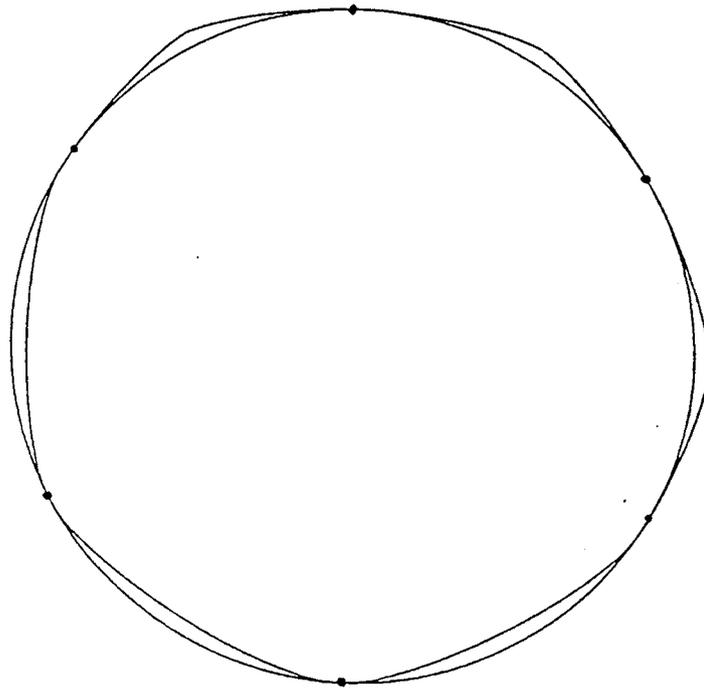


Figure 7. *Ovale à largeur constante sous contraintes d'interpolation*

3. 3. Construction générale

Nous présentons maintenant une construction plus générale, basée sur le raccordement G^2 de deux courbes Bézier duales (Théorème 9). Considérons à nouveau la structure de contrôle duale par morceaux du cercle \mathcal{C} définie dans la section 3.1, telle que $m_j \geq 5$ pour $j = 1, \dots, n$.

- Nous effectuons des translations parallèles arbitraires des 3 dernières lignes de Bézier du segment C_{j-1} et des 3 premières lignes de Bézier du segment C_j de sorte que les deux courbes PH H_{j-1} et H_j ainsi obtenues se raccordent à l'ordre 2. Plus précisément, en notant $U_j(t) = \sum_{i=0}^{m_j} B_{i,j}^* B_i^{m_j}(t)$ la représentation Bézier duale de l'arc circulaire C_j , $j = 1, \dots, n$, nous effectuons des translations parallèles arbitraires des lignes de Bézier $B_{m_{j-1},j-1}^*$, $B_{m_{j-1}-1,j-1}^*$, $B_{m_{j-1}-2,j-1}^*$ et $B_{0,j}^*$, $B_{1,j}^*$, $B_{2,j}^*$ de sorte que les courbures des courbes PH H_{j-1} et H_j soient égales au point $B_{m_{j-1},j-1}^* \cap B_{m_{j-1}-1,j-1}^* = B_{0,j}^* \cap B_{1,j}^*$, en utilisant le théorème 9 et en assurant le contact G^1 par $B_{m_{j-1},j-1}^* = B_{0,j}^*$.

- Ensuite, nous procédons comme dans la construction précédente, c'est-à-dire, nous translatons les lignes de Bézier et de Farin correspondantes de chaque segment C_{n+j} , $j = 1, \dots, n$, de sorte que chaque courbe PH H_{n+j} soit (par ce procédé) la courbe parallèle intérieure à la distance D du segment H_j .

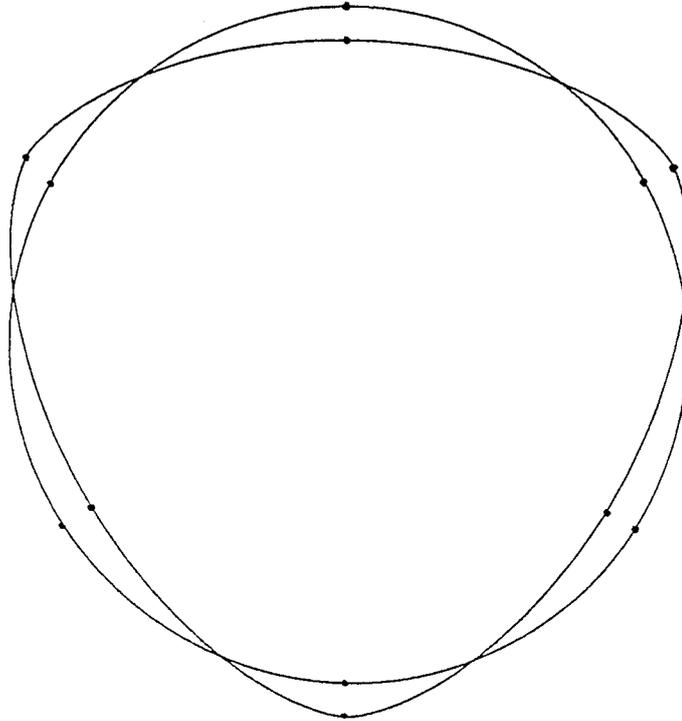


Figure 8. *Ovale à largeur constante de classe 6*

Références

45. Ait Haddou, R., and L. Biard Pythagorien-hodograph ovals of constant width, à paraitre dans *Comp. Aided Geom. Design*, 1996.
46. Bonnesen, T., and W. Fenchel, *Theorie der konvexen Korper* (Berlin 1934).
47. Chakerian G. D., and H. Groemer, Convex bodies of constant width, *Convexity and its Applications*, eds, Peter M. Gruber and Jorg M. Wills, Birkhauser Verlag, 1983.
48. Cieślak, W., and W. Mosgawa, On rosettes and almost rosettes, *Geom. Dedicata* **24** (1987), 221–228.
49. Cieślak, W., and J. Zajac, The rosettes, *Math. Scand.* **58** (1986), 114–118.
50. Hammer, P. C., Constant breadth curves in the plane, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955).
51. Hammer, P. C., and A. Sobczyk, Planar line families, II, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953).
52. Pottmann, H., Curve design with rational Pythagorean - hodograph curves, *Inst. f. Geometrie, TU Vienna, Techn. Report 9*, 1994.
53. Wegner, B., Some global properties and constructions for closed curves in the plane, *Geom. Dedicata* **29** (1989), 317–326.

Résumé

La construction des courbes parallèles est fondamentale pour différentes applications en modélisation géométrique, telles que l'étude des trajectoires d'outils pour les machines à commande numérique ou pour la définition des zones de tolérance.

En général, la courbe parallèle d'une courbe rationnelle n'est pas rationnelle. Récemment, J. C. Fiorot et T. Gensane et indépendamment H. Pottmann ont donné la forme générale de toutes les courbes rationnelles à parallèles rationnelles (courbes à hodographe pythagorien).

Dans cette dernière famille figurent les quartiques de Tschirnhausen et sont exactement les développantes des cubiques de Tschirnhausen. En se basant sur cette caractérisation, nous présentons un algorithme d'approximation, avec un contact d'ordre deux, d'une courbe par des quartiques de Tschirnhausen préservant la variation de la courbure.

Par ailleurs, le caractère judicieux de la représentation Bézier duale des courbes à hodographe pythagorien, nous a permis de construire des rosettes rationnelles à largeur constante qui jouent un rôle important en mécanique des cames.

Enfin, suite aux travaux de H. Busemann et H. Guggenheimer sur la géométrie plane de Minkowski, nous généralisons la notion de courbes parallèles ainsi que les résultats de H. Pottmann (concernant la caractérisation Bézier duale des courbes à hodographe pythagorien) au plan de Minkowski.

Mots clefs : Courbes parallèles, géométrie de Minkowski, quartiques de Tschirnhausen, ovales à largeur constante.

Abstract

Construction of offset curves is fundamental to a variety of applications in geometric modeling, such as generation of tool path for numerical control machines, or definition of tolerance zone.

Generally, offset curves of a rational curve are not rationals. The set of all rational curves with rational offsets has recently been given by J. C. Fiorot and T. Gensane and independently by H. Pottmann (Pythagorean hodograph curves).

In this set there are the Tschirnhausen quartics, and they are exactly the involutes of Tschirnhausen cubics. Based on this characterization, we present a geometric algorithm of approximating a given curve by curvature continuous Tschirnhausen quartic segments and preserving the curvature variation of the initial curve.

Moreover, based on the judicious characterization of the dual Bézier representation of rational Pythagorean hodograph curves, we give geometric constructions of rational rosettes of constant width which are useful in cam mechanism.

Finally, following the works of H. Busemann and H. Guggenheimer on the plane Minkowski geometry, we generalize the notion of offset curves and the results of H. Pottmann (concerning the dual Bézier characterization of Pythagorean hodograph curves) in the Minkowski plane.

Keywords : Offset curves, Minkowski geometry, Tschirnhausen quartics, ovals of constant width.