



**HAL**  
open science

# Etude qualitative et quantitative de problèmes de coques élastiques non linéaires

Elbar Ould Ely Telmoudy

► **To cite this version:**

Elbar Ould Ely Telmoudy. Etude qualitative et quantitative de problèmes de coques élastiques non linéaires. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1994. Français. NNT : . tel-00344971

**HAL Id: tel-00344971**

**<https://theses.hal.science/tel-00344971>**

Submitted on 8 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TU 20824

**THESE**

présentée par

**Elbar OULD ELY TELMOUDY**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

**DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I**

*(arrêté ministériel du 5 juillet 1984)*

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

**ETUDE QUALITATIVE ET QUANTITATIVE  
DE PROBLEMES DE COQUES ELASTIQUES NON LINEAIRES.**

Date de soutenance : 1 Juillet 1994

Composition du jury :

	M.	J. BLUM (Président)
Rapporteurs	Mme.	D. CHENAIS
	M.	B. RAO
Examineurs	MM.	D. CAILLERIE
		I. IONESCU
		J.C. PAUMIER
	Mme.	A. RAOULT

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG  
à l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.



**A la mémoire de notre ami et frère  
Ahmeda Ould Moulaye Elhassene**



**A ma famille**



# Remerciements

Nombreux sont ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à l'aboutissement de ce travail. Je voudrais remercier tous ceux qui m'ont accompagné un moment ou l'autre au cours du long cheminement que présente cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Jean-Claude Paumier, Professeur à l'U.J.F. et directeur de cette thèse, pour son accueil chaleureux et ses encouragements qui ont été déterminants dans la poursuite de cette aventure.

Je remercie Monsieur Jacques Blum, Professeur à l'U.J.F., de l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

Je remercie Madame Denise Chenais, Professeur à l'Université de Nice, et Monsieur Bopeng Rao, Professeur à l'Université de Nancy, d'avoir accepté d'être mes rapporteurs.

Je remercie Madame Annie Raoult Professeur à l'U.J.F., Monsieur Denis Caillerie Professeur à l'I.N.P.G. et Monsieur Ioan Ionescu Directeur de recherche à l'Université de Bucarest d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier les membres des équipes de Géométrie Algorithmique et d'Equations aux dérivées partielles du LMC pour l'environnement de travail agréable. Plus particulièrement, l'ensemble des thésards.

Un grand merci aussi aux camarades du bureau 58, mes coéquipiers pendant ce travail, pour leur compagnie et leur amitié.

Finalement, je remercie mes parents qui ont su m'inspirer le goût du savoir plus.





**Une approche du phénomène de  
verrouillage en élasticité non linéaire**



# Table des matières

<b>Introduction</b>	1
<b>1 Le problème modèle</b>	4
Mise en forme du problème	4
Géométrie de la surface	5
Vecteurs tangents	5
Première forme fondamentale	5
Seconde forme fondamentale	6
Symboles de Christoffel	6
Hypothèses de base	6
Expression des tenseurs de déformation et de changement de courbure	7
Tenseur de déformation	7
Tenseur de changement de courbure	8
Conditions aux limites	9
Energie de déformation	9
Expression du travail virtuel	10
<b>2 Problème linéaire continu</b>	11
Espaces et normes	11
Comportement lorsque $\varepsilon$ tend vers 0	14
Développement asymptotique formel de $u^\varepsilon$	16
<b>3 Problème linéaire approché</b>	21
Approximation interne des espaces	21
Augmentation du degré d'approximation	25
Formulation mixte	26

	Méthode d'éléments finis mixtes . . . . .	28
	Intégration numérique réduite . . . . .	30
	Tests numériques . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Résolution analytique du problème non linéaire (<math>P^\varepsilon</math>) . . . . .</b>	<b>39</b>
	Interprétation du problème résolu . . . . .	39
	Résolution du système différentiel . . . . .	40
	1 <sup>er</sup> cas : Solutions polynomiales ( $k = 0$ ) . . . . .	42
	2 <sup>ème</sup> cas : Solutions en cosinus et sinus ( $k < 0$ ) . . . . .	41
	2 <sup>ème</sup> cas : Solutions en cosinus et sinus us hyperbolique ( $k > 0$ ) . . . . .	44
	Mise en œuvre de la méthode . . . . .	45
	Points de bifurcation . . . . .	47
	Comportement des solutions lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Résolution numérique du problème non linéaire (<math>P^\varepsilon</math>) . . . . .</b>	<b>54</b>
	Choix d'un critère pour caractériser le verrouillage en non linéaire . . . . .	54
	Choix naïf (cas linéaire) . . . . .	54
	abscisse curviligne . . . . .	55
	Méthode de Moore-Penrose . . . . .	56
	Tests numériques . . . . .	58

## 1 Introduction :

Dans le traitement numérique de certains modèles d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre, il arrive que la méthode de discrétisation devienne complètement imprécise pour certaines variations du paramètre alors qu'en général la précision obtenue est satisfaisante.

Ce phénomène apparaît dans plusieurs domaines de la physique. En élasticité, ce phénomène peut survenir en calcul des structures quand l'épaisseur devient petite. En analyse des matériaux élastiques, il survient lorsque le coefficient de Poisson  $\nu$  devient proche de 0.5. En transferts thermiques, c'est le cas lorsque la conductivité  $\mu$  s'approche de 0.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, ce phénomène a été mis en évidence par différents auteurs.

Le verrouillage dans les plaques de Mindlin-Reissner a été traité en dimension un (barre de Timoshenko) par Arnold[1981] et en dimension deux par Arnold-Falks[1989] et par Brezzi-Fortin[1986] qui utilisent une formulation mixte pour le traiter.

Kikuchi[1982] traite un modèle d'arche où il met en évidence l'existence d'un phénomène de verrouillage et où plusieurs résultats numériques sont donnés.

Sanchez-Palencia[1989] donne dans le cadre de la théorie linéaire de Koiter deux exemples de coque dans lesquels on peut avoir du verrouillage (coque cylindrique encastrée le long d'une génératrice, et une coque hyperbolique).

Chenais-Paumier[1994] étudient le comportement numérique d'une classe de problèmes elliptiques dépendants d'un petit paramètre. Ils donnent des conditions garantissant une convergence uniforme par rapport à ce petit paramètre. Ils donnent pour un modèle d'arche un schéma numérique avec verrouillage et un autre qui n'en présente pas.

Paumier[1992] traite le cas des plaques en dimension trois. Il donne des conditions portant sur le choix des éléments finis pour que la méthode d'approximation converge uniformément lorsque l'épaisseur tend vers zéro.

On trouvera dans Babuška-Suri[1992], une liste d'autres problèmes physiques où on peut rencontrer ce genre de phénomène et surtout une étude très détaillée dans le cas du transfert de la chaleur.

Le comportement asymptotique de la coque se décrit au moyen de l'ensemble  $G$  formé des déplacements inextensionnels de la coque. Le phénomène de verrouillage se présente dès que la méthode de discrétisation, utilisée pour résoudre le problème n'est pas adaptée à  $G$ .

Ce phénomène commence à être bien connu *pour les problèmes linéaires*. Pour y remédier, des techniques ont été mises au point. On peut citer par exemple l'intégration numérique réduite (INR), la formulation mixte (FM) et une méthode consistant à augmenter le degré d'approximation (ADA).

Par contre *pour les problèmes non linéaires*, il est mal connu. En effet, d'autres difficultés vont apparaître : outre le paramètre  $\varepsilon$  entraînant le verrouillage, on a souvent en plus un paramètre  $\lambda$  de bifurcation. Les nouvelles difficultés sont alors dues à la très forte variation de l'ensemble des solutions (bifurcation, ...) par rapport à  $\varepsilon$  : à un  $\lambda$  donné peut correspondre un grand nombre  $N(\varepsilon)$  de solutions.

Le premier problème à résoudre est le choix du critère pour caractériser le phénomène; celui considéré habituellement dans le cas linéaire n'est pas suffisant.

Le deuxième est de voir si les remèdes proposés pour le cas linéaire vont permettre de déverrouiller le cas non linéaire.

Dans notre travail nous avons choisi un problème volontairement simple pour faciliter l'approche des phénomènes non linéaire en question.

Nous étudions les déplacements d'une coque cylindrique peu profonde de longueur infinie, en théorie non linéaire des coques minces élastiques. Sous des hypothèses raisonnables on peut supposer que le problème est modélisé par une arche circulaire soumise à une pression  $F$

Le problème peut s'exprimer sous la forme variationnelle suivante :

$$(P)^\varepsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u = (u_1, u_2) \in V \quad \text{tel que} \quad : \\ \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} [u_1' - cu_2 + u_2'^2] [v_1' - cv_2 + \frac{1}{2} v_2' u_2'] + u_2'' v_2'' \right\} ds = \langle F, v \rangle, \\ \forall v = (v_1, v_2) \in V, \end{array} \right.$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} c \quad : \quad \text{courbure de la coque,} \\ \varepsilon \quad : \quad \text{épaisseur de la coque,} \\ F \quad : \quad \text{la charge appliquée,} \\ u_1 \quad : \quad \text{déplacement tangentiel,} \\ u_2 \quad : \quad \text{déplacement normal,} \\ V \quad : \quad \text{ensemble des déplacements admissibles.} \end{array} \right.$$

Le problème linéaire  $(PL)^\varepsilon$  est obtenu en éliminant les termes non linéaires dans le problème  $(P)^\varepsilon$ .

Au chapitre 2, on montre que le problème  $(PL)^\varepsilon$  admet une unique solution  $u^\varepsilon$ , que la régularité de celle-ci n'est limitée que par celle de  $F$ . On montre ensuite que cette solution converge vers une limite  $u^0 \in G$ , lorsque  $\varepsilon$  va tendre vers 0.

Au chapitre 3, on donne une approximation du problème  $(PL)^\varepsilon$  par une méthode d'éléments finis conforme. On montre que les estimations d'erreur obtenues par cette méthode ne sont en général pas uniformes en  $\varepsilon$ . On donne un choix du degré de cette approximation où on n'a pas convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

On applique ensuite les différentes méthodes (ADA), (FM) et (INR).

Des résultats numériques sont donnés pour une charge  $F = (0, \lambda\delta_0)$  proportionnelle à une masse de Dirac au sommet de l'arche.

On commence par traiter le problème linéaire  $(PL)$  en montrant l'efficacité des méthodes (INR) et (ADA) et (FM).

Dans le chapitre 4, on montre comment calculer *toutes* les solutions analytiques de  $(P)^\varepsilon$  moyennant une paramétrisation des solutions. Ceci va nous permettre de mettre en évidence la richesse de ce problème en bifurcations, points de retournement et une explosion du nombre des solutions lorsque  $\varepsilon$  va tendre vers 0. Mais ces solutions analytiques vont surtout permettre d'établir le bien fondé des résultats numériques obtenus par approximation de  $(P)^\varepsilon$ .

Au chapitre 5, on montre que le critère utilisé en général pour mettre en évidence la présence d'un phénomène de verrouillage en élasticité linéaire n'est pas suffisant dans le cas non linéaire.

On donne ensuite deux autres critères; le premier est basé sur l'utilisation d'une abscisse curviligne sur les branches de solutions, et le second sur la résolution d'un problème de minimisation en utilisant l'inverse de Moore -Penrose.

Après avoir retenu le critère de Moore-Penrose, pour caractériser le verrouillage en non linéaire, nous avons approché le problème  $(P)^\varepsilon$  par une méthode d'éléments finis, de même type que celle utilisée pour  $(PL)^\varepsilon$ , combinée à la méthode de Moore-Penrose. Ceci nous a permis d'établir différents diagrammes de convergence montrant le phénomène de verrouillage et l'efficacité des méthodes (INR), (ADA) et (FM) à le traiter.

On présente pour finir des résultats numériques qui montrent l'efficacité de ces méthodes pour déverrouiller le problème



# Chapitre 1.

## Le problème modèle

### 1. 1. Mise en forme du problème :

On considère une coque circulaire de rayon  $R$ , et d'épaisseur  $e$ . On suppose que cette coque est soumise à une pression  $p$  et simplement supportée aux deux bords (génératrices du cylindre).

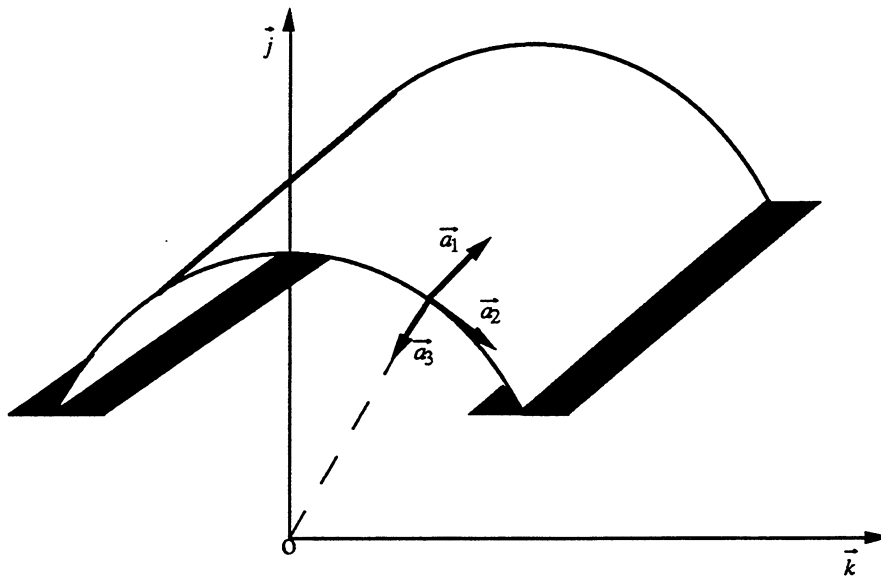


Figure .1. Coque cylindrique à base circulaire de rayon  $R$

#### Remarque 1.1.1

Nous supposons désormais que les indices grecs sont destinés à prendre les valeurs 1 et 2 et nous utiliserons la convention de sommation des indices répétés

deux fois. De plus, nous convenons de noter les dérivées partielles à l'aide d'une virgule, par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = f_{,\alpha}.$$

On notera  $c = \frac{1}{R}$ .

## 1. 2. Géométrie de la surface :

Nous désignons par  $\mathcal{E}^3$  l'espace affine euclidien et par  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé fixe de  $\mathcal{E}^3$ .

La carte permettant de décrire sa surface moyenne  $\omega$  est définie par :

$$\phi(\xi^1, \xi^2) = R[-\sin(\frac{\xi^2}{R})\vec{j} + \cos(\frac{\xi^2}{R})\vec{k}] + \xi^1\vec{i} \quad (1.2.1)$$

Un simple calcul conduit aux expressions suivantes des tenseurs caractéristiques de la surface.

### 1. 2. 1. Vecteurs tangents :

Ils sont tangents aux lignes de coordonnées et sont définis par :

$$\vec{a}_\alpha = \vec{\phi}_{,\alpha},$$

ce qui donne dans notre cas :

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{i}, \\ \vec{a}_2 &= -\sin(\frac{\xi^2}{R})\vec{k} - \cos(\frac{\xi^2}{R})\vec{j}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

On introduit ensuite le vecteur

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|} = -\cos(\frac{\xi^2}{R})\vec{k} + \sin(\frac{\xi^2}{R})\vec{j}.$$

$\vec{a}_3$  est la normale à la surface au point considéré.

### 1. 2. 2. Première forme fondamentale :

La première forme fondamentale de la surface  $(a_{\alpha\beta})$ , ou tenseur métrique de la surface, est définie par :

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta,$$

ce qui donne dans notre cas :

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Celle-ci permet d'exprimer notamment l'élément linéaire et l'élément d'aire de la surface. On pose :  $a = \det(a_{\alpha\beta}) = 1$ .

La base contravariante  $\vec{a}^i$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{a}^1 &= \vec{i}, \\ \vec{a}^2 &= (-\cos(\frac{\xi^2}{R})\vec{j} - \sin(\frac{\xi^2}{R})\vec{k}), \\ \vec{a}^3 &= \sin(\frac{\xi^2}{R})\vec{j} - \cos(\frac{\xi^2}{R})\vec{k}. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

### 1. 2. 3. Seconde forme fondamentale :

La seconde forme fondamentale est définie par :

$$b_{\alpha\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta},$$

ce qui donne :

$$b_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}. \quad (1.2.5)$$

Elle nous permet de calculer les coefficients suivants :

$$b_{\alpha}^{\lambda} = a^{\lambda\beta} b_{\alpha\beta},$$

soit donc :

$$\begin{aligned} b_1^1 &= -\frac{1}{R}, \\ b_1^2 &= b_2^1 = b_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

### 1. 2. 4. Symboles de Christoffel :

Ils sont donnés par la formule suivante :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \vec{a}^{\lambda} \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta}. \quad (1.2.7)$$

On trouve dans notre cas :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = 0 \quad \forall \quad \alpha, \beta, \lambda. \quad (1.2.8)$$

Nous obtenons les formules de dérivation covariante suivantes :

$$\begin{aligned} v_{\alpha|\beta} &= v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{\lambda} = v_{\alpha,\beta}, \\ v_{3|\alpha\beta} &= v_{3,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{3,\lambda} = v_{3,\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

### 1. 3. Hypothèses de base :

- ( $H_1$ ) L'épaisseur  $e$  de la coque est constante.
- ( $H_2$ ) La coque est mince. C'est à dire que l'épaisseur est "petite" (au plus de l'ordre de  $1/10$ ) devant le rayon  $R$ .
- ( $H_3$ ) La coque est élastique, homogène et isotrope.
- ( $H_4$ ) La coque est "peu-profonde" (shallow-shell), c'est à dire que l'angle au sommet est "petit" devant  $\pi$  radians. Ce qui signifie que la coque est "presque plate".
- ( $H_5$ ) La coque subit des petits déplacements (mais non infiniment petits).  
Cette hypothèse est utilisée en théorie linéaire.

( $H_6$ ) Les composantes tangentielles  $u_\alpha$  du déplacement sont petites devant la composante normale  $u_3$ .

( $H_7$ ) La coque subit de petites déformations.

Nous ajouterons une autre ( $H_8$ ) simplificatrice. Cette hypothèse peut paraître à priori restrictive puisqu'elle ne permet que l'étude de déplacements particuliers de la coque, mais elle a l'avantage de ramener notre problème où les inconnues sont fonction de deux variables  $\xi^1$  et  $\xi^2$  à un problème où elles ne sont plus fonction que de  $\xi^2$ .

Pour les justifications mécaniques de cette hypothèse voir Paumier[1977].

( $H_8$ ) Le déplacement de tout point de la surface moyenne de la coque est indépendant de  $\xi^1$  et orthogonal à  $\vec{a}_1$ .

Sur le plan mathématique ceci nous conduit à :

$$\begin{cases} v_1(\xi^1, \xi^2) = 0, \\ v_2(\xi^1, \xi^2) = u_1(\xi^2), \\ v_3(\xi^1, \xi^2) = u_2(\xi^2). \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Notation : dans toute la suite, on posera :

$$\vec{u} = u_1 \vec{a}_2 + u_2 \vec{a}_3.$$

La théorie de W.T. Koiter[1966] consiste à supposer que l'état des contraintes est approximativement plan et que la distribution des contraintes parallèles à la surface moyenne de la coque est approximativement linéaire. Ce qui permet, en intégrant sur l'épaisseur, de ramener un problème où l'inconnue aurait été le déplacement d'un point de la coque à un problème où l'inconnue est le déplacement d'un point de la surface moyenne de la coque.

## 1. 4. Expression des tenseurs de déformation et de changement de courbure :

### 1. 4. 1. Tenseur de déformation :

Dans un premier temps, nous allons utiliser la formule la plus générale donnant le tenseur de déformations, bien que l'on soit amené à négliger certains termes par la suite.

Etant donné un déplacement admissible  $\vec{u} = v_i \vec{a}^i$ , cette formule est donnée (cf. Koiter[1966]) par :

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(\vec{u}) = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} a^{\nu\lambda} (\theta_{\nu\alpha} - \omega_{\nu\alpha})(\theta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta}) + \frac{1}{2} \phi_\alpha \phi_\beta,$$

où  $\theta_{\alpha\beta}$ ,  $\omega_{\alpha\beta}$  et  $\phi_\alpha$  sont définies par :

$$\begin{aligned}
\theta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(v_{\beta|\alpha} + v_{\alpha|\beta}), \\
\omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(v_{\beta|\alpha} - v_{\alpha|\beta}), \\
\phi_{\alpha} &= v_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda}u_{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{1.4.1}$$

Ce qui donne dans notre cas et compte tenu des hypothèses ( $H_1$ ) à ( $H_8$ ):

$$\begin{cases}
\tilde{\gamma}_{11}(\vec{u}) = \tilde{\gamma}_{12}(\vec{u}) = \tilde{\gamma}_{21}(\vec{u}) = 0, \\
\tilde{\gamma}_{22}(\vec{u}) = u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}u_2'^2.
\end{cases}
\tag{1.4.2}$$

**Théorie linéaire :**

En théorie linéaire, cette expression se simplifie en :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(v_{\beta|\alpha} + v_{\alpha|\beta}) - b_{\alpha\beta}v_3.$$

Ce qui donne (Hypothèse  $H_8$ ) :

$$\begin{cases}
\gamma_{11}(\vec{u}) = \gamma_{12}(\vec{u}) = \gamma_{21}(\vec{u}) = 0, \\
\gamma_{22}(\vec{u}) = u_1' - cu_2.
\end{cases}
\tag{1.4.3}$$

#### 1. 4. 2. Tenseur de changement de courbure :

Dans la théorie de Rougée[1969], il s'agit du même tenseur que l'on soit en théorie linéaire ou non. En théorie linéaire pour que cette expression soit valide, il faut se placer sous les hypothèses  $H_4$ ,  $H_5$  et  $H_6$  et en théorie non linéaire sous les hypothèses  $H_4$  et  $H_6$ .

L'expression générale de ce tenseur est :

$$\rho_{\alpha\beta}(\vec{u}) = v_{3|\alpha\beta}.$$

Ce qui donne compte tenu des relations (1.2.9) et (1.3.1) :

$$\rho_{\alpha\beta}(\vec{u}) = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}},$$

soit dans notre cas :

$$\begin{cases}
\bar{\rho}_{11}(\vec{u}) = \bar{\rho}_{12}(\vec{u}) = \bar{\rho}_{21}(\vec{u}) = 0, \\
\bar{\rho}_{22}(\vec{u}) = u_2''.
\end{cases}
\tag{1.4.4}$$

### 1. 4. 3. Conditions aux limites :

La coque est simplement supportée aux deux bords, ce qui nous donne les conditions :

$$\begin{cases} u_1(-1) = u_1(1) = 0, \\ u_2(-1) = u_2(1) = 0, \end{cases} \quad (1.4.5)$$

$$u_2''(-1) = u_2''(1) = 0. \quad (1.4.6)$$

Dans toute la suite, la variable  $\xi^2$  sera notée  $s$ .

### 1. 5. Energie de déformation :

Pour que les fonctionnelles, qui seront définies par la suite, aient un sens, on vérifiera qu'il suffit de choisir  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  dans  $H^1(I) \times H^2(I)$ , que l'on soit dans le cas linéaire ou non; voir Rougée[1969]

L'espace de Sobolev  $H^m(I)$  étant défini par :

$$H^m(I) = \{v \in L^2(I) ; v^{(\alpha)} \in L^2(I), \alpha \leq m, \alpha \in \mathbb{N}\}$$

L'expression générale de l'énergie de déformation est donnée, pour un champ déplacement admissible  $u$ , par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\vec{u}) &= \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \int_0^L [\gamma_{11}^2(\vec{u}) + \gamma_{22}^2(\vec{u}) + 2\nu\gamma_{11}(\vec{u})\gamma_{22}(\vec{u}) + 2(1-\nu^2)\gamma_{12}^2(\vec{u})] ds \\ &+ \frac{Ee^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^L [\rho_{11}^2(\vec{u}) + \rho_{22}^2(\vec{u}) + 2\nu\rho_{11}(\vec{u})\rho_{22}(\vec{u}) + 2(1-\nu^2)\rho_{12}^2(\vec{u})] ds, \end{aligned}$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau formant la coque. Ce qui donne dans notre cas :

- En théorie linéaire :

$$\mathcal{E}(\vec{u}) = \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \int_{-1}^1 \{[u'_1 - cu_2]^2 + \frac{e^2}{12}(u''_2)^2\} ds. \quad (1.5.1)$$

- En théorie non linéaire :

$$\tilde{\mathcal{E}}(\vec{u}) = \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \int_{-1}^1 \{[u'_1 - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2')^2]^2 + \frac{e^2}{12}(u''_2)^2\} ds. \quad (1.5.2)$$

### 1. 5. 1. Expression du travail virtuel :

On étudiera les déplacements de la coque lorsqu'elle est soumise à une (différence de) pression constante s'exerçant en tout point de sa surface. Sous l'hypothèse des forces mortes, on peut mettre cette force sous la forme :

$$\vec{F} = \Lambda \vec{a}_3. \quad (1.5.3)$$

Dans un déplacement virtuel admissible  $\vec{u}$ , le travail virtuel de cette force est donné par :

$$T(\vec{u}) = \int_I \Lambda u_2 ds \quad (1.5.4)$$

et en posant  $\lambda = \frac{6(1-\nu^2)}{Ee^3} \Lambda$ , on trouve :

$$T(\vec{u}) = \frac{Ee^3}{6(1-\nu^2)} \int_I \lambda u_2 ds \quad (1.5.5)$$

En utilisant le principe des puissances virtuelles, on se ramène aux problèmes suivants :

- En théorie linéaire :

$$(PL)^\varepsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V \quad \text{tel que :} \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 [u_1' - cu_2][v_1' - cv_2] ds + \int_{-1}^1 u_2'' v_2'' ds = \lambda \int_{-1}^1 v_2 ds, \\ \forall (v_1, v_2) \in V. \end{array} \right.$$

- En théorie non linéaire :

$$(P^\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V \quad \text{tel que :} \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 [u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2')^2][v_1' - cv_2 + u_2'v_2'] ds \\ + \int_{-1}^1 u_2'' v_2'' ds = \lambda \int_{-1}^1 v_2 ds, \quad \forall (v_1, v_2) \in V, \end{array} \right.$$

$$\text{où } \varepsilon = \frac{e^2}{12}.$$

# Chapitre 2.

## Problème linéaire continu

### 2. 1. Espaces et normes

Soit  $I = ]-1, 1[$ ,  $V_1 = H_0^1(I)$ ,  $V_2 = H_0^1(I) \cap H^2(I)$ .

On pose  $V = V_1 \times V_2$  et on désigne par  $V'$  le dual de  $V$ .

Un élément  $u \in V$  sera noté  $u = (u_1, u_2)$ . On désigne par  $\mathcal{D}(I)$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $I$  et par  $\mathcal{D}'(I)$  l'ensemble des distributions.

Pour  $v \in \mathcal{D}'(I)$  tel que  $v^{(k)} \in L^2(I)$ , on note :

$$|v|_k = \left( \int_I (v^{(k)})^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $v \in H^m(I)$  on note :

$$\|v\|_m = \left( \sum_{k=0}^m |v|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On munit  $V$  du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_I u_1' v_1' ds + \int_I u_2'' v_2'' ds$$

et de la norme associée :

$$\|v\| = [ |v_1|_1^2 + |v_2|_2^2 ]^{\frac{1}{2}}.$$

$V$  muni de ce produit scalaire est un Hilbert et la norme  $\|\cdot\|$  est équivalente à la norme induite sur  $V$  par celle de l'espace produit  $H^1(I) \times H^2(I)$  définie par :

$$v \mapsto [ \|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2 ]^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire de  $L^2(I)$  sera noté :  $((,))$ .

**Définition 2.1.1** Soient  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a^\varepsilon$  les applications définies de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$a_0(u, v) = \int_{-1}^1 [u_1' - cu_2][v_1' - cv_2] ds,$$

$$a_1(u, v) = \int_{-1}^1 u_2'' v_2'' ds,$$

$$a^\varepsilon(u, v) = a_1(u, v) + \frac{1}{\varepsilon} a_0(u, v).$$



On se propose de résoudre le problème  $(PL)^\varepsilon$  suivant :

$$(PL)^\varepsilon \quad \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que :} \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

**Proposition 2.1.2**

- Les formes  $a_0$  et  $a_1$  sont bilinéaires, symétriques et continues sur  $V^2$ ,

- Pour  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , la forme  $a^\varepsilon$  est bilinéaire, symétrique, continue et  $V$ -elliptique. Plus précisément, il existe deux constantes  $C > 0$  et  $\alpha_0 > 0$ , indépendantes de  $\varepsilon$  telles que :

$$\begin{aligned} |a^\varepsilon(u, v)| &\leq \frac{C}{\varepsilon} \|u\| \|v\|, \quad \forall (u, v) \in V^2, \\ a^\varepsilon(u, u) &\geq \alpha_0 \|u\|^2, \quad \forall u \in V. \end{aligned}$$

**Démonstration :** La bilinéarité ainsi que la continuité des formes  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a^\varepsilon$  sont évidentes. Nous établirons uniquement la  $V$ -ellipticité de  $a^\varepsilon$  et l'indépendance de  $\alpha_0$  par rapport à  $\varepsilon$ .

Soit  $\delta > 0$ , il est facile de voir que :

$$(u'_1 - cu_2)^2 \geq (1 - \frac{1}{\delta})u_1'^2 + c^2(1 - \delta)u_2^2, \quad \forall (u_1, u_2) \in V.$$

Ce qui nous donne :

$$\int_I (u'_1 - cu_2)^2 ds \geq (1 - \frac{1}{\delta})|u_1|_1^2 + c^2(1 - \delta)|u_2|_0^2.$$

Nous savons d'autre part, qu'il existe une constante  $c^* > 0$  telle que :

$$\|u_2\|_2 \leq c^*|u_2|_2, \quad \forall u_2 \in V_2.$$

Ce qui nous donne :

$$\varepsilon a^\varepsilon(u, u) \geq (1 - \frac{1}{\delta})|u_1|_1^2 + c^2(1 - \delta + \frac{\varepsilon c^*}{c^2})|u_2|_0^2 + \varepsilon c^* [|u_2|_2^2 + |u_2|_1^2].$$

En prenant  $\delta = 1 + \frac{\varepsilon c^*}{c^2}$ , on a l'existence d'une constante  $\alpha(\varepsilon) > 0$  telle que :

$$a^\varepsilon(u, u) \geq \alpha(\varepsilon) \|u\|^2, \quad \forall u \in V.$$

D'autre part, on a  $a_0(u, u) \geq 0$ ,  $\forall u \in V$  et pour  $\varepsilon \in ]0, 1]$  on aura :

$$a^\varepsilon(u, u) = a_1(u, u) + \frac{1}{\varepsilon} a_0(u, u) \geq a_1(u, u) + a_0(u, u) = a^1(u, u) \geq \alpha(1) \|u\|^2.$$

On peut prendre  $\alpha_0 = \alpha(1)$ .

□

**Proposition 2.1.3** *Pour tout  $F \in V'$  et tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , le problème  $(PL)^\varepsilon$  admet une solution unique  $u^\varepsilon$  dans  $V$ . Cette solution vérifie de plus l'estimation suivante :*

$$\|u^\varepsilon\| \leq \frac{1}{\alpha_0} \|F\|_{V'}.$$

**Démonstration :** L'existence et l'unicité sont données par le théorème de Lax-Milgram.

En prenant  $v = u^\varepsilon$  dans (2.1.1), on trouve :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \langle F, u^\varepsilon \rangle,$$

la  $V$ -ellipticité de  $a^\varepsilon$  et la continuité de l'application  $v \rightarrow \langle F, v \rangle$  nous donnent l'estimation.

□

### Régularité de la solution :

On montre que la régularité de la solution  $u^\varepsilon$  n'est limitée que par celle de  $F$ .

**Proposition 2.1.4** *Supposons qu'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $F = (f_1, f_2)$  possède la régularité :  $f_1 \in H^{k-1}(I)$  et  $f_2 \in H^{k-2}(I)$ . Alors, l'unique solution  $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  du problème  $(PL)^\varepsilon$  a la régularité suivante :*

$$u_1^\varepsilon \in H^{k+1}(I) \cap H_0^1(I) \quad \text{et} \quad u_2^\varepsilon \in H^{k+2}(I) \cap V_2.$$

De plus, nous avons l'estimation suivante :

$$\|u_1^\varepsilon\|_{k+1} + \|u_2^\varepsilon\|_{k+2} \leq C(k)(\|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}).$$

Où  $C(k)$  est une constante positive indépendante de  $\varepsilon$ .

**Démonstration :** Nous allons montrer le résultat par récurrence sur  $k$ . Il est immédiat pour  $k = 0$ . Supposons donc qu'il est vrai jusqu'à  $k - 1$  ( $k \geq 1$ ).

En prenant  $v = (v_1, 0)$ , avec  $v_1 \in D(I)$  dans (2.1.1), nous obtenons l'équation suivante :

$$\int_{-1}^1 (u_1^{\varepsilon'} - cu_2^\varepsilon)v_1' ds = \int_{-1}^1 f_1 v_1 ds, \quad \forall v_1 \in D(I),$$

ce qui entraîne alors :

$$(u_1^{\varepsilon'} - cu_2^\varepsilon)(x) = \int_{-1}^x f_1(t) dt, \quad \forall x \in [-1, 1]. \quad (2.1.2)$$

Or,  $f_1 \in H^{k-1}(I)$  et  $u_2 \in H^{k+1}(I)$  ce qui donne  $u_1^{\varepsilon'} \in H^k(I)$  et donc  $u_1^\varepsilon \in H^{k+1}(I) \cap H_0^1(I)$ .

De la même façon en prenant  $v = (0, v_2)$  avec  $v_2 \in D(I)$ , on trouve au sens des distributions :

$$u_2^{\varepsilon(4)} - c(u_1^{\varepsilon'} - cu_2^\varepsilon) = f_2, \quad (2.1.3)$$

ce qui montre que  $u_2^{\varepsilon(4)} \in H^{k-2}(I)$  or, on sait par récurrence que  $u_2^\varepsilon \in H^{k+1}(I)$  donc  $u_2^\varepsilon \in H^{k+2}(I) \cap V_2$ .

Pour établir l'estimation, il faut remarquer que :

$$\|u_1^\varepsilon\|_{k+1}^2 = \|u_1^\varepsilon\|_k^2 + \|u_1^{\varepsilon(k+1)}\|_0^2.$$

Or, nous avons d'après la relation (2.1.2) :

$$\|u_1^{\varepsilon(k+1)}\|_0 \leq c\|u_2^\varepsilon\|_k + \|f_1\|_{k-1}$$

ce qui nous donne compte tenu de l'hypothèse de récurrence :

$$\|u_1^\varepsilon\|_{k+1} \leq C(k)(\|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}).$$

D'autre part, on a :

$$\|u_2^\varepsilon\|_{k+2}^2 = \|u_2^\varepsilon\|_{k+1}^2 + \|u_2^{\varepsilon(k+2)}\|_0^2,$$

la relation (2.1.3) nous donne alors :

$$\|u_2^\varepsilon\|_{k+2} \leq C(k)(\|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}).$$

□

Des résultats de régularité pour une arche encastrée sont donnés dans Habbal[90].

## 2. 2. Comportement lorsque $\varepsilon$ tend vers 0

Dans cette partie, on va s'intéresser au comportement de la solution  $u^\varepsilon$  du problème  $(PL)^\varepsilon$  lorsque l'épaisseur de l'arche va devenir petite ( $\varepsilon$  tendant vers 0).

On définit l'ensemble  $G$  (Sanchez-Palencia[1989]) suivant :

$$G = \{w \in V ; a_0(w, v) = 0, \forall v \in V\}.$$

La forme  $a_0$  est positive ( $a_0(v, v) \geq 0$ ,  $\forall v \in V$ ) et elle vérifie :

$$a_0(v, w)^2 \leq a_0(v, v)a_0(w, w), \quad \forall (v, w) \in V^2,$$

ce qui montre que  $G$  est aussi égal à :

$$G = \{w \in V ; a_0(w, w) = 0\}. \quad (2.2.1)$$

L'ensemble  $G$  muni de la norme induite par celle de  $V$  est un Hilbert.

Soit  $(PL)^0$  le problème suivant :

$$(PL)^0 \quad \begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in G \text{ tel que :} \\ a_1(u^0, w) = \langle F, w \rangle, \quad \forall w \in G. \end{cases}$$

**Proposition 2.2.1** *Le problème  $(PL)^0$  admet une solution unique  $u^0$  dans  $G$ . Cette solution a la régularité donnée par la proposition 2.1.4.*

**Démonstration :** Soit  $v \in G$ , on a :

$$a^\varepsilon(v, v) = a_1(v, v) + \frac{1}{\varepsilon} a_0(v, v) = a_1(v, v) \geq \alpha_0 \|v\|^2.$$

La forme  $a_1$  est donc  $G$ -elliptique ce qui donne l'existence et l'unicité de  $u^0$ .

Soit  $w \in G$ , il vérifie alors

$$a_0(w, v) = \int_{-1}^1 (w'_1 - cw_2)(v'_1 - cv_2) ds = 0, \quad \forall v \in V,$$

ce qui entraîne que

$$w'_1 = cw_2 \quad p.p.$$

Si on connaît la deuxième composante ( $w_2$ ) d'un élément de  $G$  alors la première est donnée par :

$$w_1(x) = \int_{-1}^x cw_2(s) ds$$

et la condition  $w_2(1) = 0$  entraîne que  $\int_{-1}^1 cw_2(s) ds = 0$ .

L'ensemble  $G$  est isomorphe à l'espace  $G_2$  suivant :

$$G_2 = \{w \in H_2^0(I) ; \int_{-1}^1 cw(s) ds = 0\}$$

Soit  $\psi_0 \in H_2^0(I)$  tel que  $\int_{-1}^1 \psi_0 ds = 1$ , l'ensemble  $G_2$  est aussi égal à :

$$\{\phi - (\int_{-1}^1 \phi ds) \psi_0 ; \phi \in H_2^0(I)\}$$

Si nous prenons dans  $(PL)^0$  une fonction test  $w = \phi - \left(\int_{-1}^1 \phi ds\right) \psi_0$  avec  $\phi \in \mathcal{D}(I)$ , on trouve :

$$\int_{-1}^1 u_2^{0''} \phi'' ds - \left(\int_{-1}^1 \phi ds\right) \int_{-1}^1 u_2^{0''} \psi_0'' ds = \int_{-1}^1 f_2 \phi ds - \left(\int_{-1}^1 \phi ds\right) \int_{-1}^1 f_2 \psi_0,$$

on aura donc :

$$\int_{-1}^1 [u_2^{0(4)} - \int \psi_0'' u_2^{0''} ds] \phi dt = \int_{-1}^1 [f_2 - \int \psi_0 f_2 ds] \phi dt,$$

ce qui donne, au sens des distribution :

$$u_2^{0(4)} = f_2 + \int \psi_0'' u_2^{0''} ds - \int \psi_0 f_2 ds,$$

et comme  $u^0 \in G$ , on a aussi :

$$u_1^{0'} = cu_2^0,$$

La régularité de  $u^0$  s'obtient alors de la même façon que dans la proposition 2.1.4.

□

**Proposition 2.2.2** *La solution  $u^\varepsilon$  du problème  $(PL)^\varepsilon$  converge fortement dans  $V$  vers  $u^0$  unique solution de  $(PL)^0$ .*

**Démonstration :** Cette démonstration est donnée dans Chenais-Paumier[1994].

### 2. 3. Développement asymptotique formel de $u^\varepsilon$

Soit  $H$  l'orthogonal à  $G$  dans  $V$  relativement au produit scalaire défini par  $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ . L'ensemble  $H$  est caractérisé par :

$$H = \{v \in V ; a_1(v, w) = 0, \quad \forall w \in G\}. \quad (2.3.1)$$

En effet, pour  $w \in G$ , on a :

$$a^\varepsilon(v, w) = a_1(v, w), \quad \forall v \in V.$$

**Proposition 2.3.1** *L'ensemble  $H$  est donné par :*

$$H = V_1 \times \mathbb{R} \cdot \Psi, \quad \text{où} \quad V_1 = H_0^1(I)$$

avec :

$$\Psi(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 5)}{4!}.$$

**Démonstration :**

On commence par caractériser les éléments de  $H$  autrement que par (2.3.1). L'ensemble  $G$  est défini (cf. (2.2.1)) par :

$$a_0(w, w) = \int_I (w_1' - cw_2)^2 ds = 0,$$

ce qui entraîne que :  $w_1' = cw_2$ . On peut donc obtenir tout élément de  $G$  de la façon suivante : on se donne  $w_2 \in V_2$  tel que :  $\int_I w_2 ds = 0$  et on lui associe  $w_1$  défini par :

$$w_1(x) = \int_{-1}^x cw_2(t) dt, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

$$G = \{(w_1, w_2) \in V ; \int_I w_2 ds = 0 ; w_1(x) = \int_{-1}^x cw_2(t) dt, \quad \forall x \in [-1, 1]\}.$$

Soit alors  $\theta \in V_2$  tel que  $\int_I \theta(x) dx = 1$ . Pour  $\phi_2 \in V_2$ , on pose :

$$w_2(x) = \phi_2(x) - \theta(x) \int_I \phi_2(t) dt,$$

on a alors :  $\int_I w_2(x) dx = 0$ .

Soit  $v = (v_1, v_2) \in H$ . On sait par définition de  $H$  que pour tout  $(w_1, w_2) \in G$ , on a :

$$\int_I v_2'' w_2'' dt = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$\int_I v_2'' \phi_2'' dt = \int_I v_2'' \theta_2'' dt \int_I \phi_2 dt \quad (2.3.2).$$

Un élément  $v = (v_1, v_2)$  est dans  $H$  si  $v_2$  est solution du problème suivant

$$\int_I v_2'' \phi_2'' dt = \lambda \int_I \phi_2 dt, \quad \forall \phi_2 \in V_2.$$

On voit donc que  $v_2 = \lambda \Psi$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Un élément de cette forme est bien solution de (2.3.2).

□

**Proposition 2.3.2** *La forme  $a_0$  est  $H$ -elliptique; il existe donc une constante  $\beta > 0$  telle que :*

$$a_0(v, v) \geq \beta \|v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

**Démonstration :**

Soit  $v = (v_1, \lambda\Psi) \in H$ , on a :

$$a_0(v, v) = \int_I (v_1' - c\lambda\Psi)^2 ds$$

On définit l'application  $T : H_0^1(I) \times \mathbb{R} \rightarrow L^2(I)$ , qui à  $(v_1, \lambda)$  fait correspondre :

$$T(v_1, \lambda) = v_1' - \lambda c\Psi.$$

L'application  $T$  est un isomorphisme. En effet, elle est continue et d'après le théorème de Banach, il reste à vérifier qu'elle est bijective. Soit  $f \in L^2(I)$ , on pose :

$$v_1' = f + \lambda c\Psi, \quad v_1 \in H_0^1(I),$$

ce qui est équivalent à :

$$v_1(x) = \int_{-1}^x (f + \lambda c\Psi)(t) dt.$$

La condition  $v_1(1) = 0$  et le fait que  $\int_I \Psi(t) dt \neq 0$ , nous donnent :

$$\lambda = - \frac{\int_I f(t) dt}{c \int_I \Psi(t) dt},$$

l'application  $T$  est donc bijective. La continuité de  $T^{-1}$  nous donne le résultat.

□

Nous avons déjà observé (cf. la proposition 2.2.2), que  $u^\varepsilon$  converge dans  $V$  fort lorsque  $\varepsilon$  va tendre vers 0. On va chercher un développement formel de  $u^\varepsilon$  sous la forme :

$$u^\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u^i. \quad (2.3.3)$$

Nous avons alors le lemme suivant :

**Lemme 2.3.3** *L'identification formelle des puissances de  $\varepsilon$  en portant (2.3.3) dans (2.1.1) conduit aux formules suivantes :*

$$\begin{cases} u^0 \in G, \\ a_1(u^0, w) = \langle F, w \rangle, \quad \forall w \in G, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{cases} u^1 \in H, \\ a_0(u^1, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in H, \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{cases} u^i \in H \text{ pour } i > 1, \\ a_0(u^i, v) = -a_1(u^{i-1}, v), \quad \forall v \in H. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Les formules (2.3.4) (2.3.5) (2.3.6) définissent  $u^0, u^1, \dots, u^j, \dots$  de manière unique.

**Démonstration :**

En portant (2.3.3) dans (2.1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} a_0(u^0, v) + [a_1(u^0, v) + a_0(u^1, v)] + \varepsilon [a_1(u^1, v) + a_0(u^2, v)] \\ + \dots + \varepsilon^i [a_1(u^i, v) + a_0(u^{i+1}, v)] + \dots = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

L'identification formelle des puissances de  $\varepsilon$  donne alors :

$$\begin{aligned} a_0(u^0, v) &= 0, \quad \forall v \in V, \\ a_1(u^0, v) + a_0(u^1, v) &= \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ a_1(u^i, v) + a_0(u^{i+1}, v) &= 0, \quad \forall v \in V, \quad i \geq 1. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

La première équation de (2.3.7) implique que  $u^0 \in G$ . Si de plus, on prend dans la deuxième équation de (2.3.7)  $v \in G$  on obtient (2.3.4).

Si dans la troisième équation de (2.3.7) on prend  $v \in G$ , on obtient :

$$a_1(u^i, v) = 0, \quad \forall v \in G, \quad \forall i \geq 1,$$

ce qui implique que  $u^i \in H$  pour  $i \geq 1$  et permet d'obtenir (2.3.5) et (2.3.6).

L'existence et l'unicité de  $u^0$  sont données par la proposition 2.2.1.

La forme  $a_0$  est H-elliptique (cf. la proposition 2.3.2), ce qui nous donne l'existence et l'unicité des  $u^i$  pour  $i \geq 1$ .

□

**Lemme 2.3.4** Soit  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et supposons que  $F = (f_1, f_2)$  possède la régularité suivante :

$$f_1 \in H^{k-1}(I) \quad \text{et} \quad f_2 \in H^{k-2}(I), \quad k \geq 0.$$

Soit  $u^\varepsilon$  l'unique solution de  $(PL)^\varepsilon$  et  $u^i$ , pour  $i \geq 0$  les solutions des problèmes (2.3.4), (2.3.5) et (2.3.6). Alors, nous avons :

$$u_1^i \in H^{k+1}(I) \cap H_0^1(I) \quad \text{et} \quad u_2^i \in H^{k+2}(I) \cap V_2.$$

De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|u_1^i\|_{k+1} + \|u_2^i\|_{k+2} \leq C(k)(\|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}).$$

Si on pose :  $u^{\varepsilon, i} = \sum_{j=0}^i \varepsilon^j u^j$  alors il existe une constante  $C^*(i, k) > 0$  telle que :



$$\|u_1^{\varepsilon,i} - u_1^\varepsilon\|_{k+1} + \|u_2^{\varepsilon,i} - u_2^i\|_{k+2} \leq C^*(i, k)\varepsilon^{i+1}(\|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}).$$

**Démonstration :**

La régularité des  $u^i$  s'obtient par récurrence en utilisant la relation (2.3.7), on a déjà démontré la régularité de  $u^0$ .

L'estimation s'obtient de la même façon que pour la solution du problème  $(PL)^\varepsilon$  (proposition 2.1.4) en utilisant la relation (2.3.7).

Posons  $w^{\varepsilon,i} = u^\varepsilon - u^{\varepsilon,i}$ . On remarque tout d'abord que  $w^{\varepsilon,i} \in H$ . Nous aurons, en appliquant la relation (2.3.7), pour tout  $v \in V$  :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(w^{\varepsilon,i}, v) &= a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) - a^\varepsilon(u^{\varepsilon,i}, v) \\ &= \langle F, v \rangle - \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon^j [a_1(u^j, v) + a_0(u^{j+1}, v)] - \varepsilon^i a_1(u^i, v) \quad (2.3.8) \\ &= -\varepsilon^i a_1(u^i, v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

En prenant  $v \in H$  dans (2.3.8), on trouve que  $w^{\varepsilon,i}$  est solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w^{\varepsilon,i} \in H \text{ tel que :} \\ \frac{1}{\varepsilon} a_0(w^{\varepsilon,i}, v) = -\varepsilon^i a_1(u^i, v), \quad \forall v \in H. \end{array} \right.$$

Ce problème est du même type que (2.3.6) ( $w^{\varepsilon,i}$  jouant le rôle de  $u^i$ ), et on obtient la régularité de  $w^{\varepsilon,i}$  et les estimations de la même façon que pour  $u^i$ .

□

# Chapitre 3.

## Problème linéaire approché

### 3. 1. Approximation interne des espaces :

#### a) Subdivision de $I$ :

Pour un entier  $N \geq 2$ , on considère  $\Delta = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$  une subdivision de  $[-1, 1]$ , avec  $s_0 = -1$  et  $s_N = 1$ .

On pose :  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , pour  $0 \leq i \leq N - 1$  et  $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} h_i$ ,

$$I_i = [s_{i-1}; s_i], \text{ et } \bar{I} = \bigcup_1^N I_i.$$

#### b) Espace $V_h$ :

Soit

$$P_m^h = \{\text{fonctions définies sur } I \text{ dont la restriction à } I_i \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } m\}.$$

On pose  $P_{m,r}^h = P_m^h \cap C^r(\bar{I})$ .

$$V_{h1} = \{u_{h1} \in P_{p,0}^h ; u_{h1}(-1) = u_{h1}(1) = 0\},$$

$$V_{h2} = \{u_{h2} \in P_{q,1}^h ; u_{h2}(-1) = u_{h2}(1) = 0\},$$

$$V_h = V_{h1} \times V_{h2}.$$

On munit  $V_h$  du produit scalaire et de la norme induits par le produit scalaire et la norme de  $V$ .  $V_h$  est alors un espace de Hilbert.

On se propose d'approcher le problème  $(PL)^\varepsilon$  par la suite de problèmes  $(PL)_h^\varepsilon$  suivants :

$$(PL)_h^\varepsilon \begin{cases} \text{Trouver } u_h^\varepsilon \in V_h \text{ tel que :} \\ a^\varepsilon(u_h^\varepsilon, v_h) = \langle F, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

**Proposition 3.1.1** *Le problème  $(PL)_h^\varepsilon$  admet une solution unique  $u_h^\varepsilon$  dans  $V_h$ . Cette solution vérifie:*

$$\|u_h^\varepsilon\| \leq \frac{1}{\alpha_0} \|F\|_{V'}.$$

**Démonstration :** Elle est identique à celle de la proposition 2.1.3 .

□

De la même façon que dans le cas continu, on introduit l'ensemble  $G_h$  suivant

$$G_h = \{w_h \in V_h ; a_0(w_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h\}.$$

On peut facilement voir que  $G_h$  est aussi égal à :

$$G_h = \{w_h \in V_h ; a_0(w_h, w_h) = 0\}.$$

On approche le problème  $(PL)^0$  par la suite de problèmes  $(PL)_h^0$  suivants :

$$(PL)_h^0 \begin{cases} \text{Trouver } u_h^\varepsilon \in G_h \text{ tel que :} \\ a_1(u_h^0, w_h) = \langle F, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in G_h. \end{cases}$$

**Proposition 3.1.2** *Le problème  $(PL)_h^0$  admet une solution unique  $u_h^0$  dans  $G_h$ .*

**Démonstration :** Elle est identique à celle de la proposition 2.2.1 .

□

**Proposition 3.1.3** *Pour  $h > 0$  donné, la solution  $u_h^\varepsilon$  du problème  $(PL)_h^\varepsilon$  converge fortement dans  $V_h$  vers  $u_h^0$ , unique solution de  $(PL)_h^0$ .*

**Démonstration :** La démonstration est identique à celle de la proposition 2.2.2.

□

En suivant la méthode donnée par Kikuchi[1982], on obtient la proposition suivante :

**Proposition 3.1.4** *Soit  $u^\varepsilon$  solution de  $(PL)^\varepsilon$  et  $u_h^\varepsilon$  solution de  $(PL)_h^\varepsilon$ . Supposons qu'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que :*

$$f_1 \in H^{k-1}(I), f_2 \in H^{k-2}(I), \quad p \geq \max(k, 1) \text{ et } q \geq \max(k + 1, 3).$$

*Alors, il existe  $h_1 > 0$  et une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  et de  $h$  tels que pour tout  $h \leq h_1$ , nous ayons:*

$$a^\varepsilon(u_h^\varepsilon - u^\varepsilon, u_h^\varepsilon - u^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \leq C \min\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} h^k, 1\right) \mathcal{N}(F, k),$$

$$\|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| \leq C \min\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} h^k, 1\right) \mathcal{N}(F, k),$$

$$\|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\|_0 \leq C \min\left(\frac{1}{\varepsilon} h^k, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} h^k, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} h, 1\right) \mathcal{N}(F, k),$$

Où  $\mathcal{N}(F, k)$  est donné par :

$$\mathcal{N}(F, k) = \|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}.$$

**Démonstration :** La solution  $u^\varepsilon$  est aussi la projection orthogonale, au sens du produit scalaire défini par  $a^\varepsilon$ , de  $u^\varepsilon$  sur  $V_h$ , elle vérifie donc :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_h^\varepsilon, u^\varepsilon - u_h^\varepsilon) = \inf_{v_h \in V_h} a^\varepsilon(u^\varepsilon - v_h, u^\varepsilon - v_h). \quad (3.1.1)$$

D'autre part, la théorie des éléments finis nous donne pour  $\hat{u}_h^\varepsilon = \pi_h u^\varepsilon$  interpolé de  $u^\varepsilon$  :

$$\|\hat{u}_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| \leq Ch^k(\|u_1^\varepsilon\|_{k+1} + \|u_2^\varepsilon\|_{k+2}),$$

nous aurons, grâce à l'inégalité de la proposition 2.1.4 :

$$\|\hat{u}_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| \leq Ch^k(\|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}).$$

La continuité de la forme  $a^\varepsilon$  (proposition 2.1.2) , nous donne :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - \hat{u}_h^\varepsilon, u^\varepsilon - \hat{u}_h^\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon} h^{2k}(\|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}).$$

Si on prend successivement dans (3.1.1),  $v = 0$  et  $v = \hat{u}_h^\varepsilon$ , on obtient :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_h^\varepsilon, u^\varepsilon - u_h^\varepsilon) &\leq \min(a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon), a^\varepsilon(u^\varepsilon - \hat{u}_h^\varepsilon, u^\varepsilon - \hat{u}_h^\varepsilon)) \\ &\leq C \min\left(\frac{1}{\varepsilon} h^{2k}, 1\right) \mathcal{N}^2(F, k), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

ce qui nous donne la première inégalité. La deuxième s'en déduit en utilisant la  $V$ -ellipticité de la forme  $a^\varepsilon$ .

On peut déjà dire que :

$$\|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\|_0 \leq C \min\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} h^k, 1\right) \mathcal{N}(F, k). \quad (3.1.3)$$

Soit  $w^\varepsilon$  l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w^\varepsilon \in V \text{ tel que :} \\ a^\varepsilon(w^\varepsilon, v) = ((u^\varepsilon - u_h^\varepsilon), v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|_0^2 = ((u^\varepsilon - u_h^\varepsilon), u^\varepsilon - u_h^\varepsilon) = a^\varepsilon(w^\varepsilon, u^\varepsilon - u_h^\varepsilon),$$

or  $a^\varepsilon$  définit un produit scalaire sur  $V$ , et elle vérifie :

$$a^\varepsilon(w^\varepsilon, u^\varepsilon - u_h^\varepsilon) = a^\varepsilon(w^\varepsilon - v_h, u^\varepsilon - u_h^\varepsilon), \quad \forall v_h \in V_h,$$

ce qui entraîne :

$$\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|_0^2 \leq a^\varepsilon(w^\varepsilon - v_h, w^\varepsilon - v_h)^{\frac{1}{2}} a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_h^\varepsilon, u^\varepsilon - u_h^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.4)$$

La première inégalité de la proposition 3.1.4 nous donne ( $w^\varepsilon$  jouant le rôle de  $u^\varepsilon$  et  $u^\varepsilon - u_h^\varepsilon$  jouant celui de  $F$ ) :

$$\begin{aligned} \inf_{v_h \in V_h} a^\varepsilon(w^\varepsilon - v_h, w^\varepsilon - v_h)^{\frac{1}{2}} &\leq C \min\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}h, 1\right) \mathcal{N}(u^\varepsilon - u_h^\varepsilon, 1) \\ &\leq C' \min\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}h, 1\right) \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|_0, \end{aligned}$$

on obtient donc en utilisant (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.4):

$$\|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\|_0 \leq C \min\left(\frac{1}{\varepsilon}h^k, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}h^k, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}h, 1\right) \mathcal{N}(F, k).$$

□

**Remarque 3.1.5** *Les majorations d'erreur, données par la proposition 3.1.4, dépendent toutes de  $\varepsilon$ ; plus précisément, elles sont toutes en  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Plus  $\varepsilon$  est petit, plus il faut diminuer  $h$  (i.e. augmenter les points de la subdivision) pour avoir une précision fixée. Cette dégradation de l'estimation de la précision de la méthode d'approximation peut amener à des cas critiques où on n'a plus convergence du tout comme le montre la proposition suivante. Des résultats similaires sont donnés pour un problème d'arche encastrée dans Habbal-Chenais[1992].*

**Proposition 3.1.6** *Si dans la proposition 3.1.4 nous avons de plus :*

$$p \leq 2 \quad \text{et} \quad q \geq 3$$

alors, on aura :

$$\begin{aligned} \inf_{\varepsilon \in ]0,1]} \|u_h^\varepsilon\| &= 0, \\ \sup_{\varepsilon \in ]0,1]} \|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| &\geq \|u^0\|. \end{aligned}$$

**Démonstration :**

Nous avons montré (cf. la proposition 3.1.3) que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_h^\varepsilon = u_h^0,$$

cette limite  $u_h^0$  vérifiant :  $a_0(u_h^0, u_h^0) = 0$ , ce qui entraîne que :

$$u_{1h}^{0'} = cu_{2h}^0, \quad (3.1.5)$$

la fonction  $u_{1h}^{0'}$  est linéaire ou constante par morceau, et la fonction  $u_{2h}^0$  est de classe  $C^1$ . La relation (3.1.5) implique alors que  $u_{2h}^0$  est linéaire ou constante par morceau et les conditions aux limites entraînent que :

$$u_{2h}^0 \equiv 0.$$

La relation (3.1.5) donne dans ce cas :

$$u_{1h}^0 \equiv 0,$$

ce qui implique que :

$$\inf_{\varepsilon \in ]0,1]} \|u_h^\varepsilon\| = 0.$$

D'autre part, nous avons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u^0\| = 0,$$

ce qui entraîne que :

$$\sup_{\varepsilon \in ]0,1]} \|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| \geq \|u^0\|.$$

□

**Remarque 3.1.7** *La proposition 3.1.6 montre que si  $u^0 \neq 0$  (i.e.  $F \notin G^\perp$ ), la convergence ne sera pas uniforme en  $\varepsilon$ . Les performances de la méthode d'approximation vont se détériorer lorsque le paramètre  $\varepsilon$  va tendre vers 0. Ce phénomène est connu sous le nom de phénomène de verrouillage.*

### 3. 2. Augmentation du degré d'approximation

Cette méthode consiste à choisir les degrés  $p$  et  $q$  de façon à avoir une convergence uniforme en  $\varepsilon$ . Il suffit de choisir ces deux paramètres de façon à avoir  $G_h$  qui approche  $G$  (D. Chénais et J.C. Paumier[1994]).

En effet, d'après Kikuchi[1982] on a la proposition suivante :

**Proposition 3.2.1** *Si dans la proposition 3.1.4 nous avons de plus :*

$$p \geq \max(k + 2, 4) \quad \text{et} \quad q \geq \max(k + 1, 3)$$

alors, on aura :

$$a^\varepsilon(u_h^\varepsilon - u^\varepsilon, u_h^\varepsilon - u^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^k \mathcal{N}(F, k),$$

$$\|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| \leq Ch^k \mathcal{N}(F, k),$$

$$\|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\|_0 \leq Ch^{k+1} \mathcal{N}(F, k),$$

où  $C$  est indépendante de  $\varepsilon$ .

### 3. 3. Formulation mixte :

#### Définition 3.3.1

Soit  $b$  l'application de  $L^2(I) \times V$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(\mu, v)$  associe  $b(\mu, v)$  donné par

$$b(\mu, v) = \int_{-1}^{+1} (v_1' - cv_2)\mu ds.$$

On se propose de résoudre le problème  $(PLM)^\varepsilon$  suivant:

$$(PLM)^\varepsilon \quad \begin{cases} \text{Trouver } (u^\varepsilon, \xi^\varepsilon) \in V \times L^2(I) \text{ tel que :} \\ a_1(u^\varepsilon, v) + b(\xi^\varepsilon, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ b(\mu, u^\varepsilon) - \varepsilon((\xi^\varepsilon, \mu)) = 0, \quad \forall \mu \in L^2(I). \end{cases} \quad (3.3.1)$$

On commence par établir le résultat suivant sur l'application  $b(\cdot)$ , qui va nous garantir l'existence et l'unicité de solution pour le problème  $(PLM)^\varepsilon$  (Bercovier[1978]).

**Lemme 3.3.2** *Il existe une constante  $C^* > 0$  telle que :*

$$\sup_{v \in V^*} \frac{b(\mu, v)}{\|v\|} \geq C^* \|\mu\|_0, \quad \forall \mu \in L^2(I).$$

**Démonstration :** Soit  $\mu \in L^2(I)$ . Pour montrer le résultat, on exhibe un  $v \in V$  tel que :

$$\frac{b(\mu, v)}{\|v\|} \geq C^* \|\mu\|_0.$$

Soit  $v_2 \in V_2$  on pose :

$$v_1(x) = \int_{-1}^x (\mu + cv_2) ds, \quad (3.3.2)$$

on a donc :

$$b(\mu, v) = \|\mu\|_0^2.$$

Il nous suffit pour établir le résultat de montrer que l'on peut choisir  $v_2$  de façon à avoir :  $M\|v\| \leq \|\mu\|_0$ ,  $M > 0$ .

Soit  $\psi \in V_2$  vérifiant  $\|\psi\|_2 = 1$ . En prenant  $v_2 = \|\mu\|_0 \psi$ , on aura :  $\|v_2\|_2 = \|\mu\|_0$  et la relation (3.3.2) donne alors :

$$\|v_1\|_1 \leq \|\mu\|_0 + c\|v_2\|_2,$$

ce qui entraîne l'existence d'une constante  $C^* > 0$ , indépendante de  $\mu$ , telle que  $\|v\| \leq \frac{1}{C^*} \|\mu\|_0$  et donc :

$$\sup_{v \in V^*} \frac{b(\mu, v)}{\|v\|} \geq C^* \|\mu\|_0,$$

ce qui donne le résultat. □

**Proposition 3.3.3** *Pour tout  $F \in V'$  et  $\varepsilon \in [0, 1]$ , il existe un unique  $(u^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$  solution du problème  $(PLM)^\varepsilon$ . Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $u^\varepsilon$  est aussi l'unique solution du problème  $(PL)^\varepsilon$ .*

*Si de plus, il existe un entier  $k \geq 0$  tel que :*

*$f_1 \in H^{k-1}(I)$  et  $f_2 \in H^{k-2}(I)$  alors,  $u^\varepsilon$  a la régularité :*

$$u_1^\varepsilon \in H^{k+1}(I) \cap H_0^1(I), \quad u_2^\varepsilon \in H^{k+2}(I) \cap V_2 \quad \text{et } \xi^\varepsilon \in H^k(I)$$

*et on a l'estimation :*

$$\|u_1^\varepsilon\|_{k+1} + \|u_2^\varepsilon\|_{k+2} + \|\xi^\varepsilon\|_k \leq C(k)(\|f_1\|_{k-1} + \|f_2\|_{k-2}),$$

*où  $C(k)$  dépend de  $k$  mais pas de  $\varepsilon$ .*

**Démonstration :** Nous allons établir le résultat par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , le résultat est obtenu en appliquant le théorème 5.1. de Bercovier[1978]. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre  $k - 1$  ( $k > 1$ ).

En prenant dans la première équation de (3.3.1) une fonction test de la forme  $v = (v_1, 0)$ ,  $v_1 \in D(I)$ , on trouve au sens des distributions :

$$-\xi^{\varepsilon'} = f_1, \tag{3.3.3}$$

ce qui entraîne que  $\xi^\varepsilon \in H^k(I)$ .

En prenant à nouveau dans cette équation de (3.3.1) une fonction test de la forme  $v = (0, v_2)$ ,  $v_2 \in D(I)$ , on trouve au sens des distributions :

$$u_2^{\varepsilon(4)} - c\xi^\varepsilon = f_2, \tag{3.3.4}$$

ce qui entraîne que  $u_2^{\varepsilon(4)} \in H^{k-2}(I)$  et donc  $u_2^\varepsilon \in H^{k+2}(I) \cap V_2$ .

La deuxième équation de (3.3.1) nous donne au sens des distributions :

$$u_1^{\varepsilon'} = cu_2^\varepsilon + \varepsilon\xi^\varepsilon, \tag{3.3.5}$$

ce qui entraîne que  $u_1^\varepsilon \in H^{k+1}(I) \cap H_0^1(I)$ .

L'estimation se déduit des relations (3.3.3), (3.3.4) et (3.3.5). □



### 3. 3. 1. Méthode d'éléments finis mixtes :

Soit  $W_h = P_{p-1}^h = \{ \text{des fonctions définies sur } I \text{ dont la restriction à } I_i \text{ est un un polynôme de degré inférieur ou égal à } p-1 \}$ .

On se propose dans cette partie d'approcher le problème  $(PLM)^\varepsilon$  par la suite de problèmes  $(PLM)_h^\varepsilon$  suivants :

$$(PLM)_h^\varepsilon \begin{cases} \text{Trouver } (u_h^\varepsilon, \xi_h^\varepsilon) \in V_h \times W_h \text{ tel que :} \\ a_1(u_h^\varepsilon, v_h) + b(\xi_h^\varepsilon, v_h) = \langle F, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \\ b(\mu_h, u_h^\varepsilon) - \varepsilon((\xi_h^\varepsilon, \mu_h)) = 0, \quad \forall \mu_h \in W_h. \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Soit  $Q_h$  la projection de  $L^2(I)$  sur  $W_h$ .

**Lemme 3.3.4** *Il existe deux constantes  $h_0 > 0$  et  $C^* > 0$ , telles que pour tout  $h \leq h_0$ , nous avons :*

$$\sup_{v_h \in V_h^*} \frac{b(\mu_h, v_h)}{\|v_h\|} \geq C^* \|\mu_h\|_0, \quad \forall \mu_h \in W_h.$$

**Démonstration :** On peut se référer à la démonstration du lemme 5.1. de Kikuch[1982].

**Proposition 3.3.5** *Le problème  $(PLM)_h^\varepsilon$  admet une unique solution  $(u_h^\varepsilon, \xi_h^\varepsilon)$  dans  $V_h \times W_h$ . De plus, cette solution vérifie :*

$$\|u_h^\varepsilon\| + \|\xi_h^\varepsilon\| \leq C \|F\|_{V'}.$$

*Si de plus, nous supposons qu'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que :*

$$F \in H^{k-1}(I) \times H^{k-2}(I), \quad p \geq \max(k, 1) \quad \text{et} \quad q \geq \max(k+1, 2)$$

*alors, nous avons :*

$$\begin{aligned} \|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| + \|\xi_h^\varepsilon - \xi^\varepsilon\| &\leq Ch^k \mathcal{N}(F, k), \\ \|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\|_0 &\leq Ch^{k+1} \mathcal{N}(F, k), \end{aligned}$$

*où  $(u^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$  est l'unique solution du problème  $(PLM)^\varepsilon$  et  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$  et de  $h$ .*

**Démonstration :** L'existence et l'unicité de la solution  $(u_h^\varepsilon, \xi_h^\varepsilon)$  s'obtiennent de la même façon que dans le cas continu (cf. la proposition 3.3.3).

Pour l'estimation d'erreur, on peut voir la démonstration du théorème 5.3 de Kikuchi[1982].

□

**Proposition 3.3.6** *Le problème  $(PLM)^\varepsilon$  est équivalent au problème suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^\varepsilon \in V_h \text{ tel que :} \\ a_1^\varepsilon(u_h^\varepsilon, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}((u'_{h1} - Q_h(cu_{h2}), v'_{h1} - cv_{h2})) = \langle F, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

$\xi_h^\varepsilon$  étant alors donné par :

$$\xi_h^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u'_{h1} - Q_h(cu_{h2})).$$

**Démonstration :** La deuxième équation de (3.3.6) nous donne :

$$b(\mu_h, u_h^\varepsilon) - \varepsilon((\xi_h^\varepsilon, \mu_h)) = \int_I (u'_{h1} - cu_{h2} - \varepsilon\xi_h^\varepsilon)\mu_h ds = 0, \quad \forall \mu_h \in W_h,$$

ce qui entraîne que :

$$Q_h(u'_{h1} - cu_{h2} - \varepsilon\xi_h^\varepsilon) = u'_{h1} - Q_h(cu_{h2}) - \varepsilon\xi_h^\varepsilon = 0,$$

ce qui donne :

$$\xi_h^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u'_{h1} - Q_h(cu_{h2})).$$

En reportant cette valeur dans la première équation de (3.3.6), on trouve le résultat. □

**Remarque 3.3.7**

*Cette proposition est à la base du choix des formules d'intégration numérique qui vont suivre.*

### 3. 4. Intégration numérique réduite

La résolution du problème  $(PL)_h^\varepsilon$  se ramène à celle d'un système linéaire, mais ceci suppose le calcul exact des coefficients de la matrice et du second membre du système linéaire à résoudre. Généralement, ce calcul est coûteux et parfois même impossible. C'est pourquoi, nous sommes conduits à utiliser des schémas d'intégration numérique. Nous allons choisir ces schémas de façons à déverrouiller le modèle (i.e. à avoir une convergence uniforme en  $\varepsilon$ ).

Le principe de cette méthode repose sur le fait qu'il existe un schéma d'intégration numérique qui est équivalent au problème mixte approché.

Pour calculer le produit scalaire de  $L^2(I)$  :

$$((u_h, v_h)) = \int_{-1}^1 u_h v_h ds,$$

on utilise un schéma de Gauss à  $m$  points. On pose :

$$\begin{aligned} ((u_h, v_h))^* &= \sum_{i=1}^N ((u_h, v_h))_{I_i}^*, \\ ((u_h, v_h))_{I_i}^* &= h \sum_{j=1}^m w_j u_h(g_{ij}) v_h(g_{ij}), \end{aligned}$$

où  $g_{ij} = 1 - \frac{h}{2}s_i + \frac{h}{2}g_j$ , les  $g_j$  étant les points de Gauss sur l'intervalle  $[-1, 1]$  et les  $w_j$  sont les poids correspondant.

**Tous les résultats qui vont suivre, sont obtenus sous l'hypothèse que que les entiers  $p$  et  $q$  définissant  $V_{h1}$  et  $V_{h2}$  sont égaux. On note  $m$  cette valeur commune.**

**Remarque 3.4.1** *Si nous utilisons cette formule de Gauss pour approcher l'intégrale sur  $[a, b]$  d'une fonction  $f \in C^{2m}$ , on a (Crouzeix et Mignot[1983]) :*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h \sum_{j=1}^m w_j f(\bar{g}_j) + \frac{1}{(2m)!} \int_a^b \pi^2(x) f^{(2m)}(\xi(x)) dx, \\ \pi(x) &= \pi_{j=1}^m(x - \bar{g}_j) \\ \bar{g}_j &= \frac{b-a}{2} g_j + \frac{b+a}{2}. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

*Cette formule d'intégration numérique est donc exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $2m - 1$ .*

On définit par conséquent sur  $V_h$  :

$$\begin{aligned} \|u_h\|^* &= \sqrt{((u_h, u_h))^*}, \\ a_{0h}^*(u_h, v_h) &= ((u'_{h1} - cu_{h2}, u'_{h1} - cu_{h2}))^*, \\ a_h^{\varepsilon*} &= a_1 + \frac{1}{\varepsilon} a_{0h}^*, \end{aligned}$$

On se propose dans cette partie d'approcher le problème  $(PL)^\varepsilon$  par le problème  $(PL)_h^{\varepsilon^*}$  suivant :

$$(PL)_h^{\varepsilon^*} \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h^{\varepsilon^*} \in V_h \text{ tel que :} \\ a_h^{\varepsilon^*}(u_h^{\varepsilon^*}, v_h) = ((F, v_h)), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

**Proposition 3.4.2** *Pour tout  $(v_h, w_h) \in P_m^h$ , nous avons :*

$$((Q_h(v_h), w_h)) = ((v_h, w_h))^*.$$

**Démonstration :** Soit  $v_h \in P_m^h$  et  $w_h \in P_{m-1}^h$ , on note  $\pi_h v_h$  l'interpolé de  $v_h$  aux points de Gauss. Nous aurons :

$$((\pi_h v_h, w_h)) = ((\pi_h v_h, w_h))^* = ((v_h, w_h))^* = ((v_h, w_h)).$$

D'autre part, on sait que  $\pi_h v_h = Q_h(v_h)$  et donc on aura pour tout  $w_h \in P_m^h$  :

$$((Q_h(v_h), w_h)) = ((\pi_h v_h, w_h)) = ((\pi_h v_h, w_h))^* = ((v_h, w_h))^*.$$

**Proposition 3.4.3** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $h > 0$ , le problème  $(PL)_h^{\varepsilon^*}$  admet une solution unique.*

**Démonstration :**

Pour tout  $u_h \in V_h$ ,  $u_h \neq 0$  nous avons :

$$a_h^{\varepsilon^*}(u_h, u_h) \geq a_1(u_h, u_h) > 0$$

La forme  $a_h^{\varepsilon^*}$  est donc symétrique définie positive et nous sommes en dimension finie, ce qui donne le résultat.

□

**Proposition 3.4.4** *Soit  $u^\varepsilon$  solution de  $(PL)^\varepsilon$ ,  $u_h^{\varepsilon^*}$  solution de  $(PL)_h^{\varepsilon^*}$ . Supposons qu'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que :*

$$f_1 \in H^{k-1}(I), f_2 \in H^{k-2}(I) \text{ et } m \geq \max(k+1, 3)$$

alors, il existe deux constantes  $C > 0$  et  $h_1 > 0$  indépendantes de  $\varepsilon$  telles que pour tout  $h \leq h_1$ , nous ayons :

$$\|u_h^{\varepsilon^*} - u^\varepsilon\| \leq Ch^k \mathcal{N}(F, k),$$

**Démonstration :** On sait d'après la proposition 3.3.6 que l'unique solution  $u_h^\varepsilon$  du problème mixte approché  $(PLM)_h^\varepsilon$  vérifie l'équation suivante :

$$a_1^\varepsilon(u_h^\varepsilon, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}((u'_{h1} - Q_h(cu_{h2}), v'_{h1} - Q_h(cv_{h2}))) = \langle F, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h,$$

or d'après la proposition 3.4.2 nous avons :

$$((u'_{h1} - Q_h(cu_{h2}), v'_{h1} - Q_h(cv_{h2}))) = ((u'_{h1} - cu_{h2}, v'_{h1} - cv_{h2}))^* = a_{0h}^*(u_h, v_h),$$

$u_h^\varepsilon$  est donc aussi solution du problème  $(PL)_h^{\varepsilon*}$  et donc on a :

$$u_h^\varepsilon = u_h^{\varepsilon*}.$$

L'inégalité

$$\|u_h^{\varepsilon*} - u^\varepsilon\| \leq Ch^k \mathcal{N}(F, k),$$

découle alors de la proposition 3.3.5 .

□

### 3. 5. Tests numériques :

Nous avons programmé une méthode d'éléments finis, pour  $p = 1$  et  $q = 3$  . C'est cette méthode qui est très souvent utilisée.

On peut déterminer analytiquement les solution du problème  $(PL)^\varepsilon$ .

**Pour une charge de la forme  $F = (0, \lambda\delta_0)$  (où  $\delta_0$  est la masse de Dirac) :**

La force est exercée uniquement au sommet de l'arche ( $s = 0$ ). On obtient sans difficulté les formules suivantes :

$$u_2^\varepsilon(s) = \begin{cases} \frac{\alpha}{24}s^4 + \frac{\lambda}{12}s^3 - \frac{(\lambda + \alpha)}{24}s^2 + \frac{5\alpha}{24} + \frac{\lambda}{6}, & \text{pour } s \geq 0, \\ \frac{\alpha}{24}s^4 - \frac{\lambda}{12}s^3 - \frac{(\lambda + \alpha)}{24}s^2 + \frac{5\alpha}{24} + \frac{\lambda}{6}, & \text{pour } s \leq 0, \end{cases}$$

$$u_1^\varepsilon(s) = \begin{cases} \frac{\alpha c}{120}s^5 + \frac{\lambda c}{48}s^4 - \frac{(\lambda + \alpha)c}{48}s^3 + \left(\frac{5\alpha}{24} + \frac{\lambda}{6}\right)cs + \varepsilon s, & \text{pour } s \geq 0, \\ \frac{\alpha c}{120}s^5 - \frac{\lambda c}{48}s^4 - \frac{(\lambda + \alpha)c}{48}s^3 + \left(\frac{5\alpha}{24} + \frac{\lambda}{6}\right)cs + \varepsilon s, & \text{pour } s \leq 0, \end{cases}$$

où  $\alpha = \frac{-25\lambda c^2}{32c^2 + 240\varepsilon}$ .

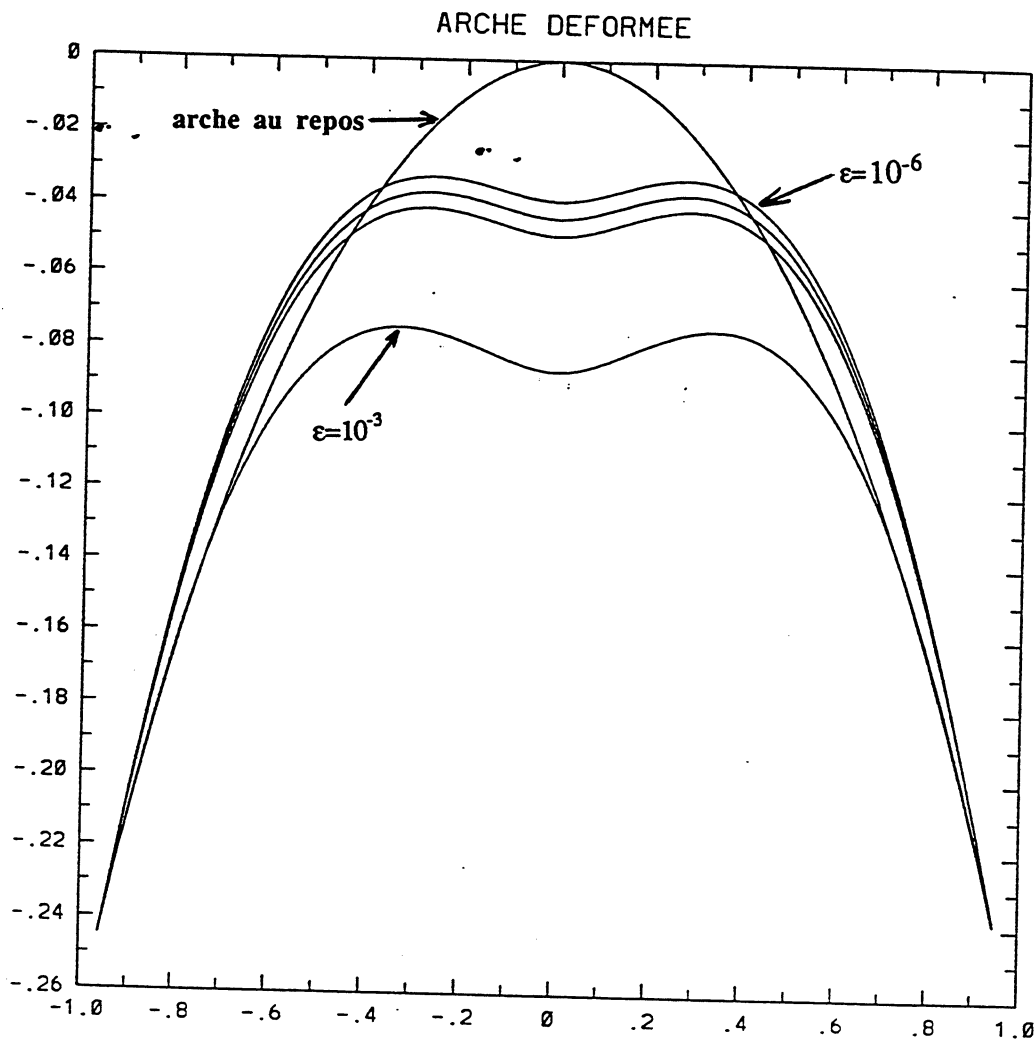


Figure .2. Position de l'arche pour  $\lambda = 1.0$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-6}$

On voit sur la figure .2 comment la solution exacte  $u^\epsilon$  converge vers  $u^0$ . Cette solution est (en ce qui concerne  $u_2^\epsilon$ ) de classe  $C^2$  mais non  $C^3$  et  $F \notin G^\perp$ , ce qui va nous garantir le verrouillage pour  $p = 1$  et  $q = 3$  (remarque 3.1.7).

Nous avons vu à la proposition 3.4.4 que l'on peut jouer sur le choix de  $p$  et  $q$  pour déverrouiller le problème. Le choix de  $p = 4$  et  $q = 4$  garantit une convergence uniforme en  $\epsilon$ .

Pour profiter du programme qui a déjà été écrit pour  $p = 1$  et  $q = 3$ , on introduit de nouvelles fonctions de base en passant successivement à  $p = 2$ ,  $3$ ,  $4$ .

On peut voir sur la figure .4 que le problème commence déjà à déverrouiller pour  $p = 2$  et il est complètement déverrouillé pour  $p = 4$  (cf. figure .5).

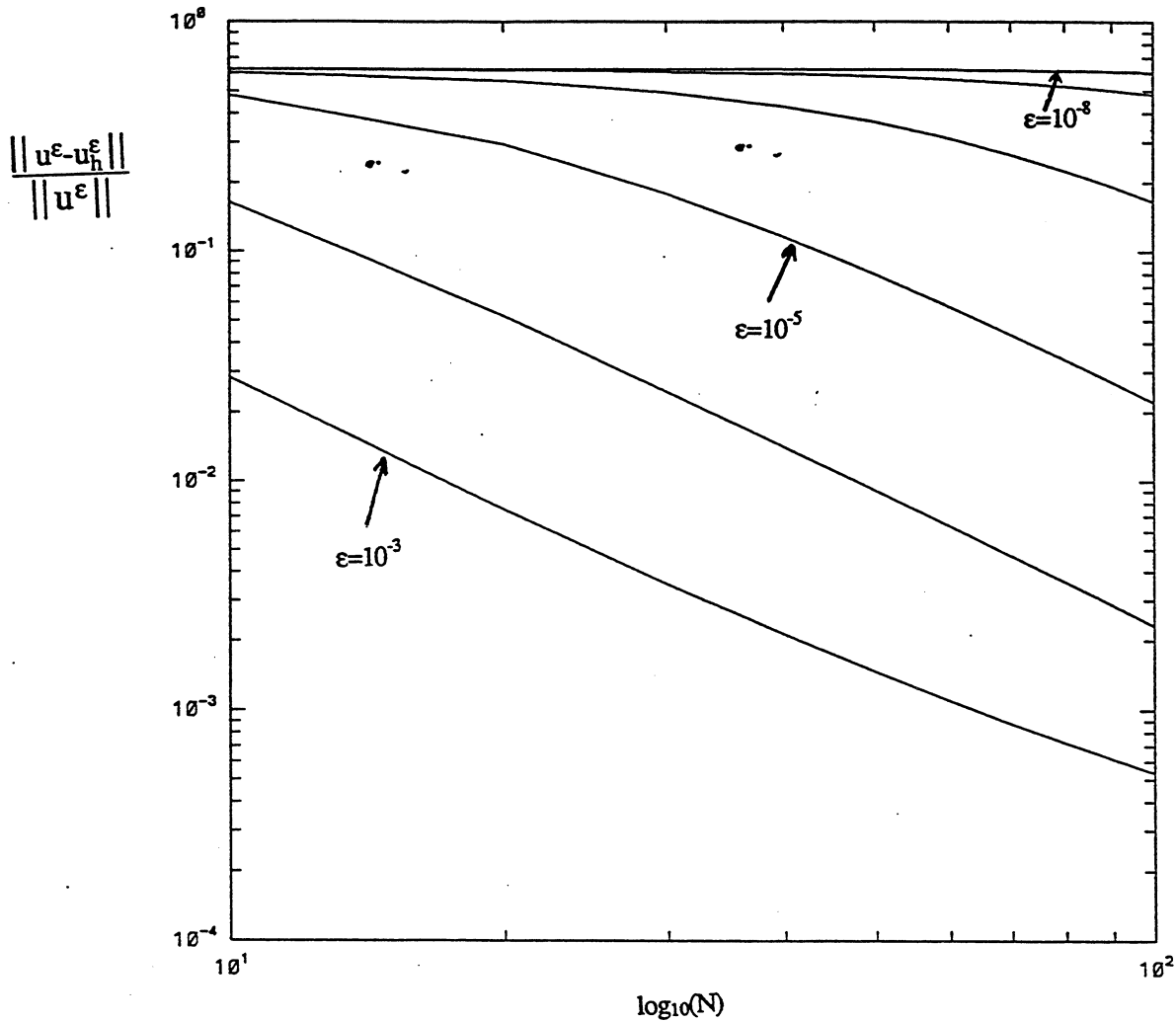


Figure .3. Diagramme de convergence avec verrouillage pour  $p = 1, q = 3$ .

Cette méthode est très efficace, mais difficile à mettre en œuvre. Les procédures deviennent rapidement ingérables. On lui préfère en général la formulation mixte ou l'intégration numérique réduite.

Nous avons testé la formulation mixte, sur notre problème, elle donne de bons résultats (cf. figure .6), mais au prix de la résolution d'un système de taille plus grande et surtout à matrice non symétrique.

Nous avons vu (proposition 3.4.4) que l'utilisation de l'intégration numérique réduite ( $p = q$ ) permet de déverrouiller. On pouvait donc la tester sans problème pour  $p = q = 2$ . Mais il existe d'autres schémas numériques basés sur le même

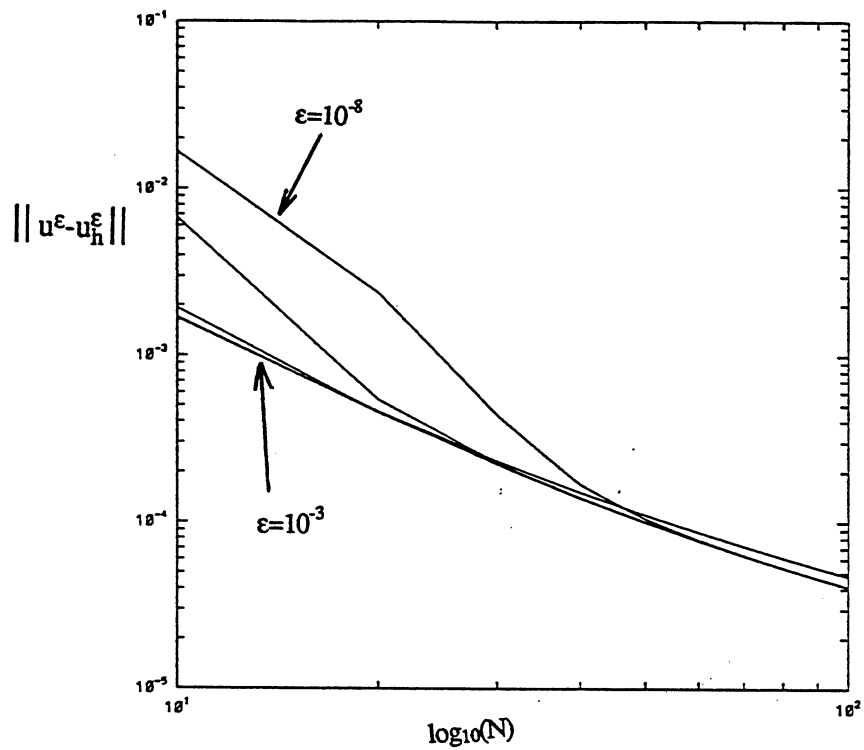


Figure .4. Début de déverrouillage par enrichissement de la base ,  $p = 2$ ,  $q = 3$

principe. Nous en avons testé un qui consiste à estimer l'intégrale  $\int_{I_i} v_h(s) ds$  par  $h v_h(\frac{s_i + s_{i-1}}{2})$  (Kikuchi[1982]). Il a donné de très bons résultats pour  $p = 1$ ,  $q = 3$ (cf. figure .7).



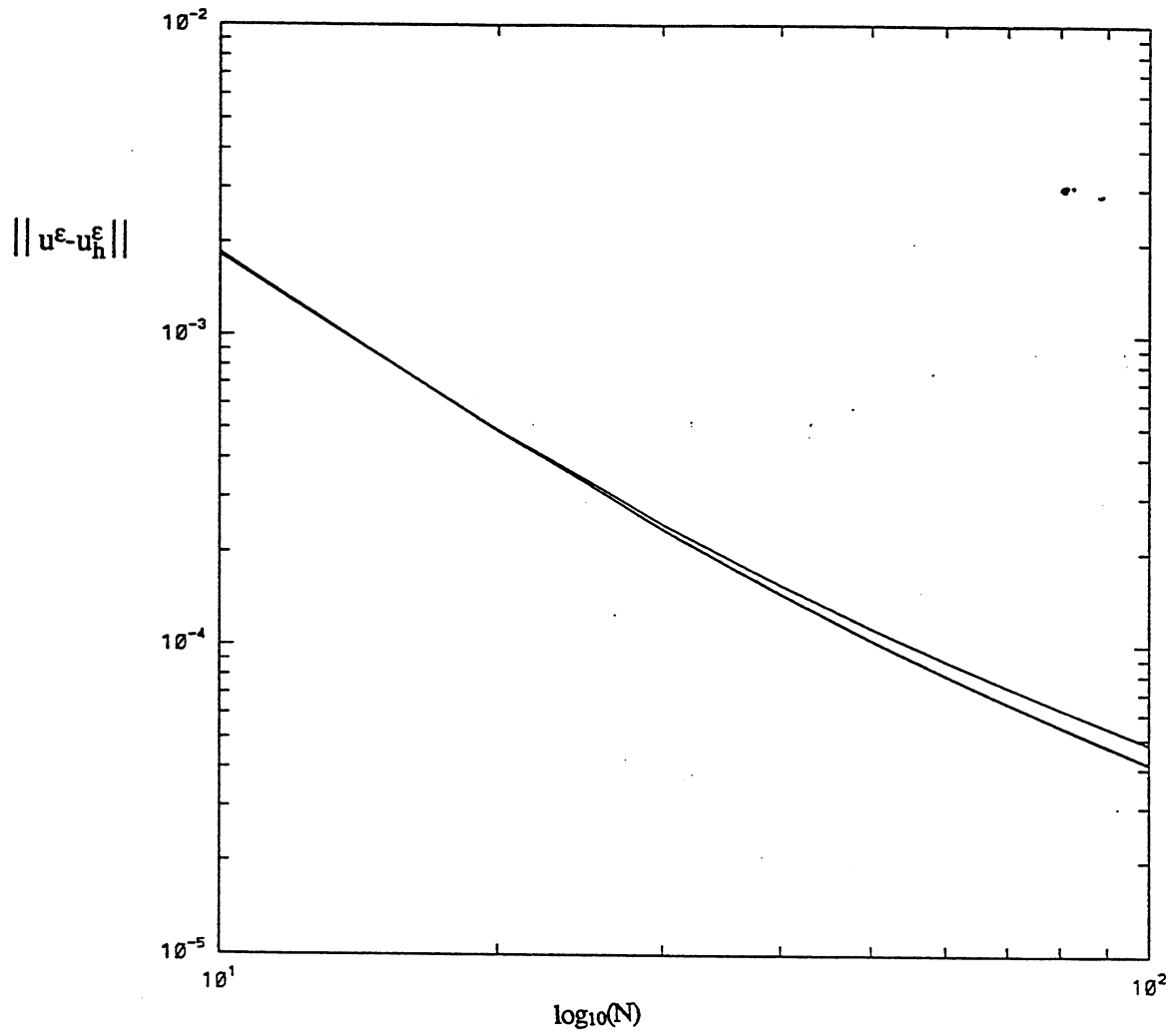


Figure .5. Le problème est complètement déverrouillé pour  $p = 4$ ,  $q = 3$

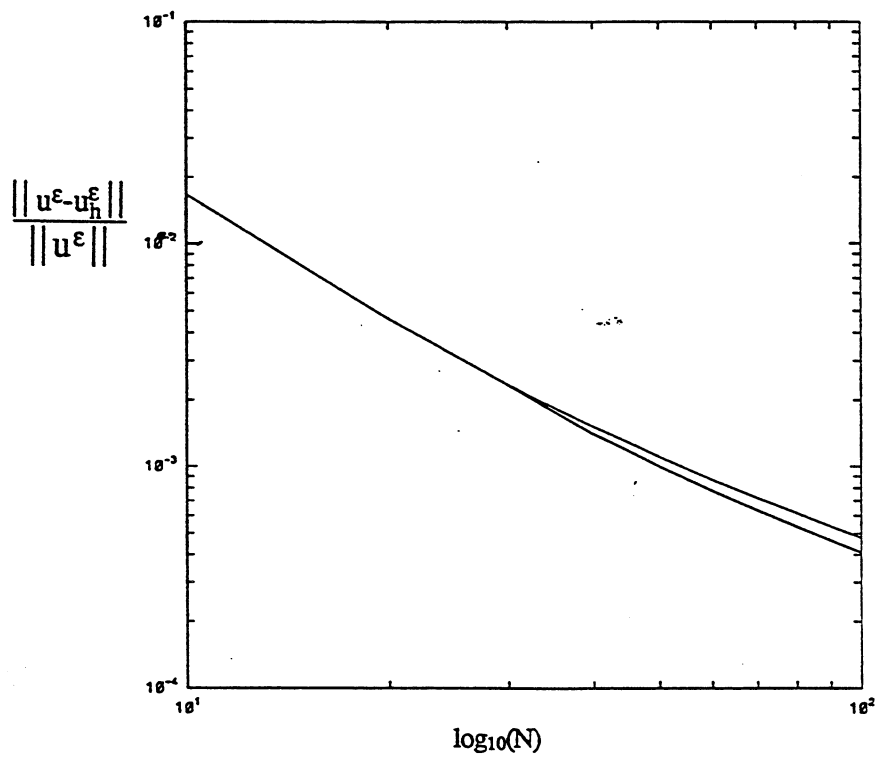


Figure .6. Déverrouillage par formulation mixte

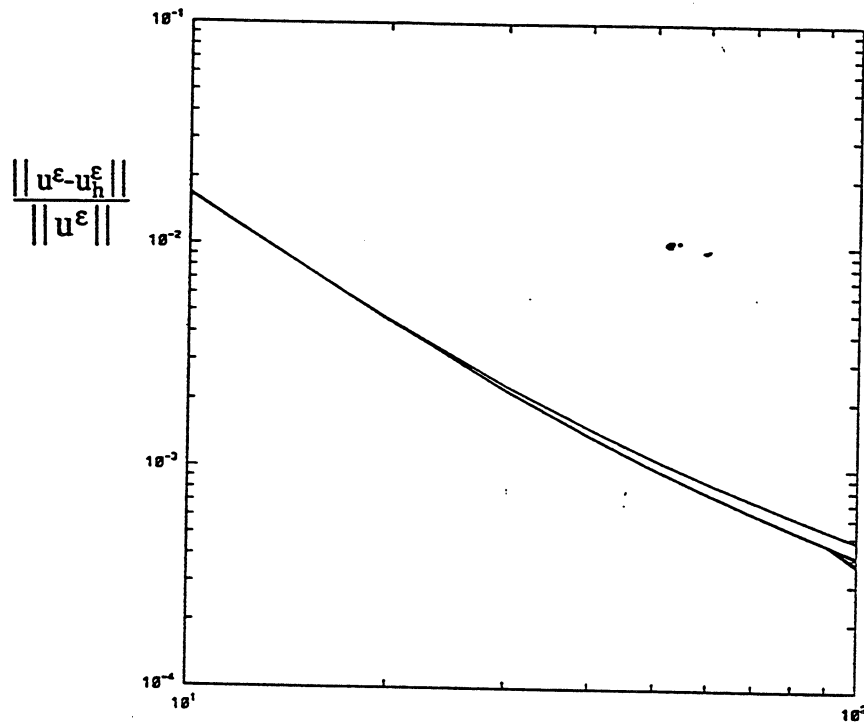


Figure .7. Déverrouillage par intégration numérique

# Chapitre 4.

## Résolution analytique du problème non linéaire $(P^\varepsilon)$

On se propose dans cette partie de déterminer analytiquement les solutions du problème  $(P^\varepsilon)$ . On commence par montrer que la résolution du problème variationnel  $(P^\varepsilon)$  est équivalente à celle d'un système différentiel.

### 4. 1. Interprétation du problème résolu :

#### Proposition 4.1.1

$(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V$  est solution du problème  $(P^\varepsilon)$  si et seulement si, il existe une constante  $k \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{cases} u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2')^2 = k\varepsilon, \\ u_2^{(4)} - ku_2'' = \lambda + kc, \\ u_1(-1) = u_1(1) = 0, u_2(-1) = u_2(1) = 0, u_2''(-1) = u_2''(1) = 0. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

#### Démonstration.

En prenant dans  $(P^\varepsilon)$  une fonction test  $v$  de la forme  $v = (v_1, 0)$  avec  $v_1 \in \mathcal{D}(I)$ , on trouve :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 [u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2')^2] v_1' ds = 0, \quad \forall v_1 \in \mathcal{D}(I),$$

ce qui entraîne donc qu'il existe une constante  $k \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\frac{1}{\varepsilon} [u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2')^2] = k.$$

De la même façon, on prend  $v = (0, v_2)$  avec  $v_2 \in \mathcal{D}(I)$ , et en utilisant l'égalité qu'on vient d'établir, on trouve après des intégrations par parties :

$$\int_{-1}^1 [-kc - ku_2'' + u_2^{(4)}] v_2(s) ds = \lambda \int_{-1}^1 v_2(s) ds, \quad \forall v_2 \in \mathcal{D}(I),$$

ce qui nous donne :

$$u_2^{(4)} - ku_2'' = \lambda + kc.$$

**Remarque 4.1.2**

Il est facile de voir que si  $u_2$  est une solution de la deuxième équation du système (4.1.1) qui vérifie :

$$\int_{-1}^1 [cu_2(t) - \frac{1}{2}u_2'(t)^2 + k\varepsilon]dt = 0,$$

$u_1$  est alors donnée par :

$$u_1(s) = \int_{-1}^s [cu_2(t) - \frac{1}{2}u_2'(t)^2 + k\varepsilon]dt, \quad \forall s \in [-1, 1]. \quad (4.1.2)$$

**Remarque 4.1.3**

On peut remarquer qu'on ne change rien au problème si on fixe dans toute l'étude  $c = 1$ . En effet si on fait le changement d'inconnues suivant :

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \frac{1}{c^2}u_1, \\ \bar{u}_2 = \frac{1}{c}u_2, \\ \bar{\lambda} = \frac{1}{c}\lambda. \end{cases}$$

On obtient que  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_2$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} \bar{u}_1' - \bar{u}_2 + \frac{1}{2}(\bar{u}_2')^2 = k \frac{\varepsilon}{c^2}, \\ \bar{u}_2^{(4)} - k\bar{u}_2'' = \bar{\lambda} + k, \\ \bar{u}_1(-1) = \bar{u}_1(1) = 0, \bar{u}_2(-1) = \bar{u}_2(1) = 0, \bar{u}_2''(-1) = \bar{u}_2''(1) = 0. \end{cases}$$

Plus précisément, c'est le rapport  $\rho = \frac{\varepsilon}{c^2}$  qui caractérise l'arche cette étude.

**4. 2. Résolution du système différentiel (4.1.1) :**

La nature des solutions de la deuxième équation du système (4.1.1) va dépendre du signe du paramètre  $k$ ; nous aurons des solutions en cos et sin si  $k < 0$ , en cosh et sinh si  $k > 0$  et polynomiales si  $k = 0$ .

Nous allons, dans la suite, distinguer ces trois cas.

#### 4. 2. 1. 1<sup>er</sup> cas : Solutions polynomiales ( $k = 0$ )

La deuxième équation du système (4.1.1) nous donne :

$$u_2(s) = \frac{\lambda}{24}(s^2 - 1)(s^2 - 5),$$

ce qui donne :

$$u_1(s) = \frac{\lambda s}{2520}[-5s^6 + 42s^4 + 21cs^4 - 105\lambda s^2 - 210cs^2 + 525c].$$

et la condition  $u_1(1) = 0$ , entraîne que nous n'aurons de solution de ce type que si  $\lambda = \frac{84c}{17}$ .

#### 4. 2. 2. 2<sup>ème</sup> cas : Solutions en cosinus et sinus ( $k < 0$ )

On pose  $k = -\omega^2$  avec  $\omega > 0$  et  $\alpha = c - \frac{\lambda}{\omega^2}$ .

Dans ce cas, les solutions de (4.1.1) seront en  $\cos()$  et  $\sin()$ .

La deuxième équation du système (4.1.1) nous donne :

$$u_2''(s) = A \cos(\omega s) + B \sin(\omega s) - \alpha.$$

Les conditions  $u_2''(-1) = u_2''(1) = 0$  entraînent que  $A$ ,  $B$  et  $\omega$  doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} A \cos(\omega) = \alpha, \\ B \sin(\omega) = 0. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Il faut pour résoudre ce système distinguer les différents cas :

- a)  $\omega \neq \frac{\pi}{2} + i\pi$  et  $\omega \neq i\pi$   $i \in \mathbb{N}$ ,
- b)  $\omega = i\pi$   $i \in \mathbb{N}$ ,
- c)  $\omega = \frac{\pi}{2} + i\pi$   $i \in \mathbb{N}$ .

**Etude du cas (a) :**

Dans ce cas, le système (4.2.1) donne :  $A = \frac{\alpha}{\cos(\omega)}$ ,  $B = 0$  et

$$u_2''(s) = \alpha \left( \frac{\cos(\omega s)}{\cos(\omega)} - 1 \right).$$

En intégrant et en utilisant les conditions  $u_2(-1) = u_2(1) = 0$ , on trouve

$$u_2(s) = \alpha \left[ -\frac{\cos(\omega s)}{\omega^2 \cos(\omega)} - \frac{s^2}{2} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{2} \right], \quad \forall s \in [-1, 1]. \quad (4.2.2)$$

Pour simplifier les expressions, on pose  $\beta = \alpha\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{2}\right)$ . Nous obtenons :

$$u_1(s) = \left[\beta c - \varepsilon\omega^2 - \frac{\alpha^2}{4\omega^2 \cos^2(\omega)}\right]s + \frac{\alpha}{6}(c - \alpha)s^3 - \frac{\alpha^2}{\omega \cos(\omega)}s \cos(\omega s) \\ + \frac{\alpha(c - \alpha)}{\omega^3 \cos(\omega)} \sin(\omega s) + \frac{\alpha^2}{8\omega^3 \cos^2(\omega)} \sin(2\omega s). \quad (4.2.3)$$

En exprimant la condition  $u_1(1) = 0$ , nous obtenons une équation ( $E_{a1}$ ) que doit vérifier  $\omega$ .

$$(E_{a1}) \quad a(\omega)\lambda^2 + b(c, \varepsilon, \omega)\lambda + d(c, \varepsilon, \omega) = 0. \quad \bullet \bullet$$

Où les fonctions  $a()$ ,  $b()$ , et  $d(, ,)$  sont données par :

$$\begin{cases} a(\omega) = -(1 + \frac{\omega^2}{6}) \cos^2(\omega) - \frac{1}{4} + \frac{5 \sin(2\omega)}{8\omega}, \\ b(c, \omega) = c\omega^2 \left[ \cos^2(\omega) + \frac{1}{2} - \frac{3 \sin(2\omega)}{4\omega} \right], \\ d(c, \varepsilon, \omega) = c^2\omega^4 \left[ \left( \frac{\omega^2}{6} - \frac{\varepsilon}{c^2}\omega^4 \right) \cos^2(\omega) - \frac{1}{4} + \frac{\sin(2\omega)}{8\omega} \right]. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Les solutions de cette forme seront dites de **type (a)**.

On peut considérer ( $E_{a1}$ ) comme une équation du second degré en  $\lambda$  dont le discriminant est donné par :

$$\Delta_1(c, \varepsilon, \omega) = c^2\omega^2 \cos^2(\omega) \left[ d_0(\omega) + \frac{\varepsilon}{c^2} d_1(\omega) \right] \quad (4.2.5).$$

Avec

$$\begin{cases} d_0(\omega) = \frac{c^2}{9} (3 \sin(\omega) - \cos(\omega)(\omega^3 + 3\omega))^2, \\ d_1(\omega) = \frac{\omega^5}{3} [15 \sin(\omega) \cos(\omega) - \cos^2(\omega)(2\omega^3 + 12\omega) - 3\omega]. \end{cases}$$

Pour tout  $\omega \geq 0$ , on a :  $d_0(\omega) \geq 0$  et  $d_1(\omega) \leq 0$ . Plus  $\varepsilon$  est petit, plus l'ensemble des  $\omega$  pour lesquels  $\Delta_1(c, \varepsilon, \omega)$  est grand.

**Etude du cas (b) :  $\omega = i\pi$**

Dans ce cas, le système (4.1.1) nous donne  $A = (-1)^i \alpha$  et  $B$  quelconque (pour l'instant) :

$$u_2(s) = \alpha \left[ -\frac{s^2}{2} - \frac{\cos(\omega s)}{\omega^2 \cos(\omega)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\omega^2} \right] - B \frac{\sin(\omega s)}{\omega^2}. \quad (4.2.6)$$

Et la première équation du système (4.1.1) donne l'expression suivante pour  $u_1$  :

$$\begin{aligned}
u_1(s) = & [\beta c - \varepsilon \omega^2 - \frac{\alpha^2 + B^2}{4\omega^2}]s - \frac{\alpha(c + \alpha)}{6}s^3 - \frac{\alpha(c - \alpha)}{\omega^3 \cos(\omega)} \sin(\omega s) \\
& + \frac{\alpha^2 - B^2}{8\omega^3} \sin(2\omega s) - \alpha^2 \frac{s \cos(\omega s)}{\omega^2 \cos(\omega)} + B(c - \alpha) \frac{\cos(\omega s)}{\omega^3} \\
& + \alpha B \frac{\cos(2\omega s)}{4\omega^3 \cos(\omega)} - \alpha B \frac{s \sin(\omega s)}{\omega^2} + B \frac{3\alpha - 4c \cos(\omega)}{4} \frac{1}{\omega^3}.
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

La condition  $u_1(1) = 0$  entraîne que  $B$  doit vérifier l'équation suivante :

$$-3\omega^5 B^2 + 12\lambda \omega^2 B + \omega \gamma(c, \varepsilon, \omega) = 0, \tag{4.2.8}$$

avec

$$\gamma(c, \varepsilon, \omega) = -(2\omega^2 + 15)\lambda^2 + 18c\omega^2\lambda + (2c^2\omega^2 - 3c^2 - 12\varepsilon\omega^4)\omega^4.$$

Les solutions de cette forme seront dites de **type (b)**.

L'équation (4.2.8) est du second degré en  $B$ , son discriminant est donné par :

$$\Delta_2 = 3\omega^4 [a(\omega)\lambda^2 + b(c, \varepsilon, \omega)\lambda + d(c, \varepsilon, \omega)], \tag{4.2.9}$$

où les fonctions  $a()$ ,  $b()$  et  $d()$  étant données par :

$$\begin{cases} a(\omega) = 12 - (2\omega^2 + 15)\omega^2, \\ b(\omega) = 18c\omega^4, \\ d(\omega) = \omega^6 [2c^2\omega^2 - 3c^2 - 12\varepsilon\omega^4]. \end{cases} \tag{4.2.10}$$

#### Remarque 4.2.1

- Pour  $\omega = i\pi (i \in \mathbb{N}^*)$ ,  $a(\omega) < 0$ .
- Pour avoir  $\Delta_2 \geq 0$ ,  $\lambda$  doit être à l'intérieur des racines de l'équation :

$$a(\omega)\lambda^2 + b(c, \varepsilon, \omega)\lambda + d(c, \varepsilon, \omega) = 0. \tag{4.2.11}$$

Il faut donc commencer par résoudre cette équation en  $\lambda$  comme dans le (a). Ceci va nous donner une relation entre  $c$ ,  $\varepsilon$  et  $\omega$ . Dans le cas où cette équation admet deux racines  $\lambda_1(c, \varepsilon, \omega)$  et  $\lambda_2(c, \varepsilon, \omega)$ , on aura pour toute valeur de  $\lambda$  comprise entre  $\lambda_1(c, \varepsilon, \omega)$  et  $\lambda_2(c, \varepsilon, \omega)$  deux solutions de cette forme dont l'une est obtenue pour  $B_1(c, \varepsilon, \omega, \lambda) = \frac{6\omega^2\lambda - \sqrt{\Delta_2}}{3\omega^5}$  et l'autre pour  $B_2(c, \varepsilon, \omega, \lambda) = \frac{6\omega^2\lambda + \sqrt{\Delta_2}}{3\omega^5}$ .

**Etude du cas (c) :**  $\omega = \frac{\pi}{2} + i\pi$

Le système (4.2.1) ne peut avoir de solution que si  $\alpha = 0$ , c'est à dire si  $\lambda$  est de la forme :

$$\lambda = \lambda_i = c\omega^2 = c\left(\frac{1}{2} + i\right)^2 \pi^2, \quad i \in \mathbb{N}.$$



Dans ce cas, on doit avoir  $B = 0$ , ce qui donne pour  $u_2$  :

$$u_2(s) = -A \frac{\cos(\omega s)}{\omega^2}. \quad (4.2.12)$$

Et la relation (4.1.2) donne l'expression suivante pour  $u_1$  :

$$u_1(s) = \frac{1}{4\omega^3} [-A^2\omega s + \frac{A^2}{2} \sin(2\omega s) - 4Ac \sin(\omega s) - 4\omega^5 \varepsilon s]. \quad (4.2.13)$$

La condition  $u_1(1) = 0$  entraîne que  $A$  doit vérifier l'équation suivante :

$$-\omega A^2 - 4(-1)^i cA - 4\varepsilon\omega^5 = 0. \quad (4.2.14)$$

Dont le discriminant est égal à :

$$\Delta_3 = 4c^2(1 - \frac{\varepsilon}{c^2}\omega^6). \quad (4.2.15)$$

Pour avoir  $\Delta_3 \geq 0$ , il faut donc que  $(\frac{\varepsilon}{c^2}) \leq \omega^6$  soit

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \leq (\frac{\pi}{2} + i\pi)^{\frac{1}{6}}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.2.16)$$

Cette condition va nous permettre de déterminer les  $i$  possibles et la relation (4.2.14) nous donne les deux valeurs de  $A$  ( $A_1(c, \varepsilon, i)$  et  $A_2(c, \varepsilon, i)$ ) qui déterminent deux solutions du problèmes ( $P^\varepsilon$ ). Les solutions ainsi obtenues sont dites de **type (c)**

#### 4. 2. 3. 2<sup>ème</sup> cas : Solutions en cosinus et sinus hyperbolique ( $k > 0$ )

On pose  $k = \omega^2$  avec  $\omega < 0$  (ici on prend  $\omega < 0$  pour pouvoir représenter toutes les solutions sur le même graphique) et  $\alpha = -c - \frac{\lambda}{\omega^2}$ .

La deuxième équation du système (4.1.1) nous donne :

$$u_2''(s) = A \cosh(\omega s) + B \sinh(\omega s) + \alpha,$$

et les conditions  $u_2''(-1) = u_2''(1) = 0$  entraînent que  $A$  et  $B$  sont solution du système suivant :

$$\begin{cases} A \cosh(\omega) = \alpha, \\ B \sinh(\omega) = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne  $B = 0$ ,  $A = \frac{\alpha}{\cosh(\omega)}$  et on aura donc :

$$u_2''(s) = \alpha \left( \frac{\cosh(\omega s)}{\cosh(\omega)} - 1 \right).$$

En intégrant et en utilisant la condition  $u_1(-1) = u_1(1) = 0$ , on trouve :

$$u_2(s) = \alpha \left[ -\frac{\cosh(\omega s)}{\omega^2 \cosh(\omega)} + \frac{s^2}{2} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2} \right]. \quad (4.2.17)$$

Pour simplifier, on pose  $\beta' = \alpha \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2} \right)$ . Nous obtenons en utilisant la relation (4.1.2) la nouvelle formule pour  $u_1$  :

$$\begin{aligned} u_1(s) = & \left[ \beta' c + \varepsilon \omega^2 + \frac{\alpha^2}{4\omega^2 \cosh^2(\omega)} \right] s + \frac{\alpha(c - \alpha)}{6} s^3 \\ & + \frac{\alpha(c - \alpha)}{\omega^3 \cosh(\omega)} \sinh(\omega s) - \frac{\alpha^2}{8\omega^3 \cosh^2(\omega)} \sinh(2\omega s) \\ & + \frac{\alpha^2}{\omega \cosh(\omega)} s \cosh(\omega s). \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

En exprimant la condition  $u_1(1) = 0$ , nous obtenons une équation ( $E_{a2}$ ) que doit vérifier  $\omega$ .

$$(E_{a2}) \quad a(\omega)\lambda^2 + b(c, \varepsilon, \omega)\lambda + d(c, \varepsilon, \omega) = 0.$$

Où les fonctions  $a, b$  et  $d$  sont données par :

$$\begin{cases} a(\omega) = -\left(1 - \frac{\omega^2}{6}\right) \cosh^2(\omega) - \frac{1}{4} + \frac{5}{2} \frac{\sin(2\omega)}{\omega}, \\ b(c, \omega) = -c\omega^2 \left[ \cosh^2(\omega) + \frac{1}{2} - 3 \frac{\sinh(2\omega)}{\omega} \right], \\ d(c, \varepsilon, \omega) = c^2 \omega^4 \left[ \left( -\frac{\omega^2}{6} - \frac{\varepsilon}{c^2} \omega^4 \right) \cosh^2(\omega) - \frac{1}{4} + \frac{\sinh(2\omega)}{2\omega} \right]. \end{cases} \quad (4.2.19)$$

Les solutions de cette forme seront dites de type (cosh - sinh). On peut considérer ( $E_{a2}$ ) comme une équation du second degré en  $\lambda$  dont le discriminant est donné par :

$$\Delta_4(c, \varepsilon, \omega) = c^2 \omega^2 \cosh^2(\omega) \left[ d_0(\omega) + \frac{\varepsilon}{c^2} d_1(\omega) \right]. \quad (4.2.20)$$

Avec :

$$\begin{cases} d_0(\omega) = \frac{c^2}{9} [3 \sinh(\omega) + \omega(\omega^2 - 3) \cosh(\omega)]^2, \\ d_1(\omega) = \frac{\omega^5}{3} [15 \sinh(\omega) \cosh(\omega) + \cosh^2(\omega)(2\omega^3 - 12\omega) - 3\omega]. \end{cases} \quad (4.2.21)$$

Pour tout  $\omega \leq 0$ , on a  $d_0(\omega) \geq 0$ ,  $d_1(\omega) \geq 0$  et donc  $\Delta_4(c, \varepsilon, \omega) \geq 0$ . L'équation ( $E_{a2}$ ) admet donc toujours deux solutions distinctes  $\lambda_1(c, \varepsilon, \omega) \leq 0$  et  $\lambda_2(c, \varepsilon, \omega) \geq \frac{84}{17}c$

### 4. 3. Mise en œuvre de la méthode :

L'introduction du paramètre  $\omega$  peut sembler artificielle car habituellement on se donne une arche, c'est à dire  $c, \varepsilon$  et un champ de forces  $\lambda$ . Les questions qui se posent sont généralement les suivantes : le problème  $(P^\varepsilon)$  correspondant admet-il une solution ? est-elle unique ? et comment le(s) obtenir ?

Pour répondre à ces questions, nous avons développé un logiciel qui procède de la façon suivante : Après la saisie des caractéristiques de l'arche, il permet de fournir les informations suivantes :

- Le nombre de solutions pour toute charge  $\lambda$  (diagramme de bifurcation  $u(\lambda)$ ).
- Pour une charge particulière  $\lambda_0$ , il donne le nombre de solutions et les paramètres  $\omega$  qui les décrivent.

Etant donné  $c$  et  $\varepsilon$ , la condition  $\Delta_1(c, \varepsilon, \omega) \geq 0$  où  $\Delta_1(c, \varepsilon, \omega)$  est donné par la relation (4.2.5) va permettre de calculer des  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N(c, \varepsilon)$  tels que

Pour

$$\begin{aligned} \omega \in [0, \omega_1] \cup [\omega_2, \omega_3] \dots \cup [\omega_{N(c, \varepsilon)-1}, \omega_{N(c, \varepsilon)}], & \quad \text{on aura } \Delta_1(c, \varepsilon, \omega) \geq 0 \\ \omega \in ]\omega_1, \omega_2[ \cup ]\omega_3, \omega_4[ \dots \cup ]\omega_{N(c, \varepsilon)}, +\infty[, & \quad \text{on aura } \Delta_1(c, \varepsilon, \omega) < 0 \end{aligned}$$

on pose  $I_k = [\omega_{2k}, \omega_{2k+1}]$  pour  $k = 0, \frac{N(c, \varepsilon) - 1}{2}$ . Et soit  $\lambda_1^k(c, \varepsilon, \omega)$  la plus grande valeur sur  $I_k$  de  $\lambda_1(c, \varepsilon, \omega)$  solution de  $(E_{a1})$ , et  $\lambda_2^k(c, \varepsilon, \omega)$  la plus petite valeur sur  $I_k$  de  $\lambda_2(c, \varepsilon, \omega)$  solution de  $(E_{a1})$ .

La condition (4.2.16) permet de déterminer les  $i$  pour lesquels, nous aurons des solutions de type (c).

La condition  $\Delta_2 > 0$ , nous donne les solutions de type (b).

Le nombre de solutions pour une charge donnée  $\lambda_0$  est déterminé par l'algorithme suivant :

**Début**

*Nombre-de-solution* := 0;

**Si**  $\lambda_0 < 0$  **ou**  $\lambda_0 > \frac{84}{17}c$  **alors**

*Nombre-de-solution* := *Nombre-de-solution* + 1;

c'est une solution en cosh et sinh.

**Pour**  $k = 0$  **à**  $\frac{N(c, \varepsilon) - 1}{2}$  **faire**

**Début-faire**

**Si**  $\lambda_0 < \lambda_1^k(c, \varepsilon, \omega)$  **et**  $\lambda_0 > \lambda_2^k(c, \varepsilon, \omega)$  **alors**

*Nombre-de-solution* := *Nombre-de-solution* + 2;

ce sont deux solutions du type (a).

**Si-non Si**  $\lambda_0 = \lambda_1^k(c, \varepsilon, \omega)$  **ou**  $\lambda_0 = \lambda_2^k(c, \varepsilon, \omega)$  **alors**

*Nombre-de-solution* := *Nombre-de-solution* + 1;

**Si**  $\Delta_2(c, \varepsilon, \omega) \geq 0$  **alors**

*Nombre-de-solution* := *Nombre-de-solution* + 2;

ce sont deux solutions du type (b) obtenues pour  $\omega = k\pi$ .

**Si**  $\Delta_3(c, \varepsilon, \omega) \geq 0$  **alors**

*Nombre-de-solution* := *Nombre-de-solution* + 2;

ce sont deux solutions du type (c) obtenues pour  $\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**Fin-faire****Fin.****4. 4. Points de bifurcation :**

Ils sont de deux sortes :

a) Les points de bifurcation ayant lieu en  $\omega = i\pi$ .

Ils apparaissent lorsque les formules (4.2.2) et (4.2.6) coïncident, c'est à dire pour  $B = 0$ . La relation (4.2.8) entraîne que :

$$\gamma(c, \varepsilon, \omega) = -(2\omega^2 + 15)\lambda^2 + 18c\omega^2\lambda + (2c^2\omega^2 - 3c^2 - 12\varepsilon\omega^4)\omega^4 = 0$$

Cette relation permet de calculer les  $\lambda$  pour lesquels nous aurons ces points de bifurcation.

b) Les points de bifurcation ayant lieu en  $\omega = \frac{\pi}{2} + i\pi$ .

Nous avons vu que les solutions données par les relations (4.2.3) et (4.2.2) ne sont définies que pour des  $\omega \neq \frac{\pi}{2} + i\pi$  et  $\omega \neq i\pi$ . Dans ce paragraphe, nous allons regarder comment vont se comporter ces solutions lorsque  $\omega$  va tendre vers  $\omega_i = \frac{\pi}{2} + i\pi$ .

**Remarque 4.4.1** *Pour que  $\omega$  puisse tendre vers  $\omega_i$ , il faut que la quantité  $1 - \frac{\varepsilon}{c^2}\omega_i^6$  soit positive.*

Posons  $\omega = \omega_i + \phi$ . La relation (4.2.4) nous donne les nouvelles formules pour  $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  et  $d(\cdot)$  :

$$\begin{cases} a(\omega) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{\omega_i} \phi + o(\phi) \\ b(\omega) = c \frac{\omega_i^2}{2} - 5c\omega_i \phi + o(\phi) \\ d(\omega) = -c^2 \frac{\omega_i^4}{4} + o(\phi) \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Soit donc pour  $\Delta(c, \varepsilon, \omega)$

$$\Delta(c, \varepsilon, \omega) = c^2 \omega_i^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^6\right) \phi^2 + o(\phi^2) \quad \cdot \cdot$$

Les solutions de l'équation ( $E_{a1}$ ) sont données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1 = c\omega_i^2 - 2c \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^6} \phi + o(\phi) \\ \lambda_2 = c\omega_i^2 + 2c \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^6} \phi + o(\phi) \end{cases} \quad (4.4.2)$$

Et les  $\alpha$  correspondants sont donnés par :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \frac{c}{\omega_i} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^6}\right) \phi + o(\phi), \\ \alpha_2 = 2 \frac{c}{\omega_i} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^6}\right) \phi + o(\phi). \end{cases} \quad (4.4.3)$$

On pose dans toute la suite :

$$\alpha_{01} = 2 \frac{c}{\omega_i} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^6}\right) \quad \text{et} \quad \alpha_{02} = 2 \frac{c}{\omega_i} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^6}\right)$$

Les solutions  $u_1$  et  $u_2$  pour le couple  $(\lambda_1, \alpha_1)$  déviennent :

$$\begin{cases} u_1(s, \omega) = \bar{u}_1(s, \omega_i) + o(\phi) \\ u_2(s, \omega) = \bar{u}_2(s, \omega_i) + o(\phi) \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Avec

$$\begin{cases} \bar{u}_1(s, \omega_i) = \left[-\varepsilon \omega_i^2 - \frac{\alpha_{01}^2}{4\omega_i^2}\right] s + (-1)^{i+1} \frac{\alpha_{01} c}{\omega_i^3} \sin(\omega_i s) + \frac{\alpha_{01}^2}{8\omega_i^3} \sin(2\omega_i s) \\ \bar{u}_2(s, \omega_i) = (-1)^{i+1} \frac{\alpha_{01}}{\omega_i^2} \cos(\omega_i s) \end{cases} \quad (4.4.5)$$

On voit que  $\bar{u}_1(s, \omega_i)$  et  $\bar{u}_2(s, \omega_i)$  données par la relation (4.4.5) sont identiques à ceux obtenus dans le cas (c) et qui sont donnés par les relations (4.2.13) et (4.2.12).

#### 4. 5. Comportement des solutions lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 :

Dans ce paragraphe, nous allons regarder comment vont se comporter les solutions données par les relations (4.2.2), (4.2.3), (4.2.6), (4.2.7), (4.2.12), (4.2.13), (4.2.17), (4.2.18), lorsque  $\varepsilon$  va tendre vers 0 ( $c$  étant fixé à 1 grâce à la remarque 4.1.3).

Remarquons tout d'abord que lorsque  $\varepsilon$  va tendre vers 0, les déterminants  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$ , vont avoir tendance à devenir positifs pour des  $\omega$  de plus en plus grands. Pour  $\varepsilon = 0$ , ils sont positifs sur tout  $\mathbb{R}^+$ .

Pour illustrer ce phénomène, nous donnons les diagrammes  $(\lambda, \omega)$  et  $(\lambda, u_2)$  pour  $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-4}$ .

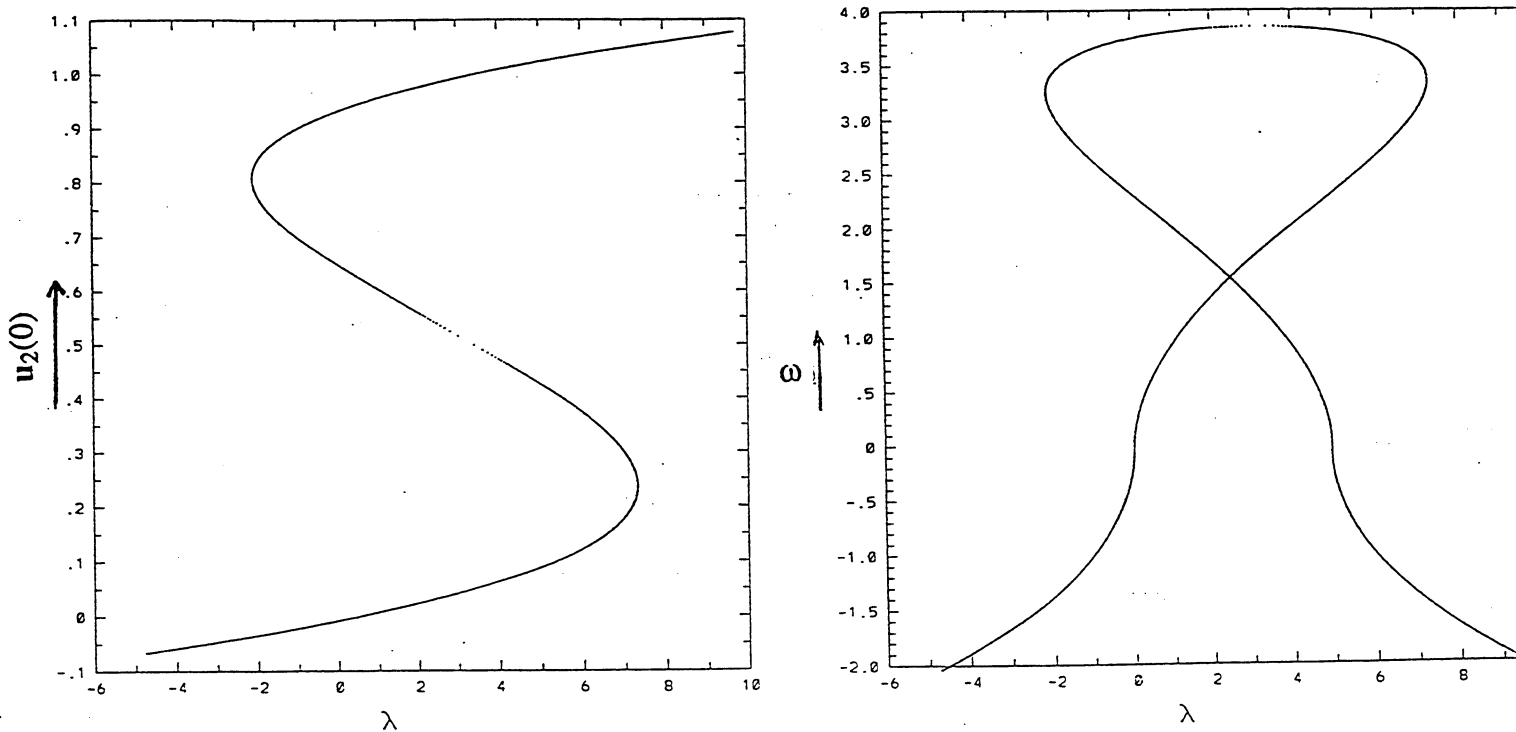


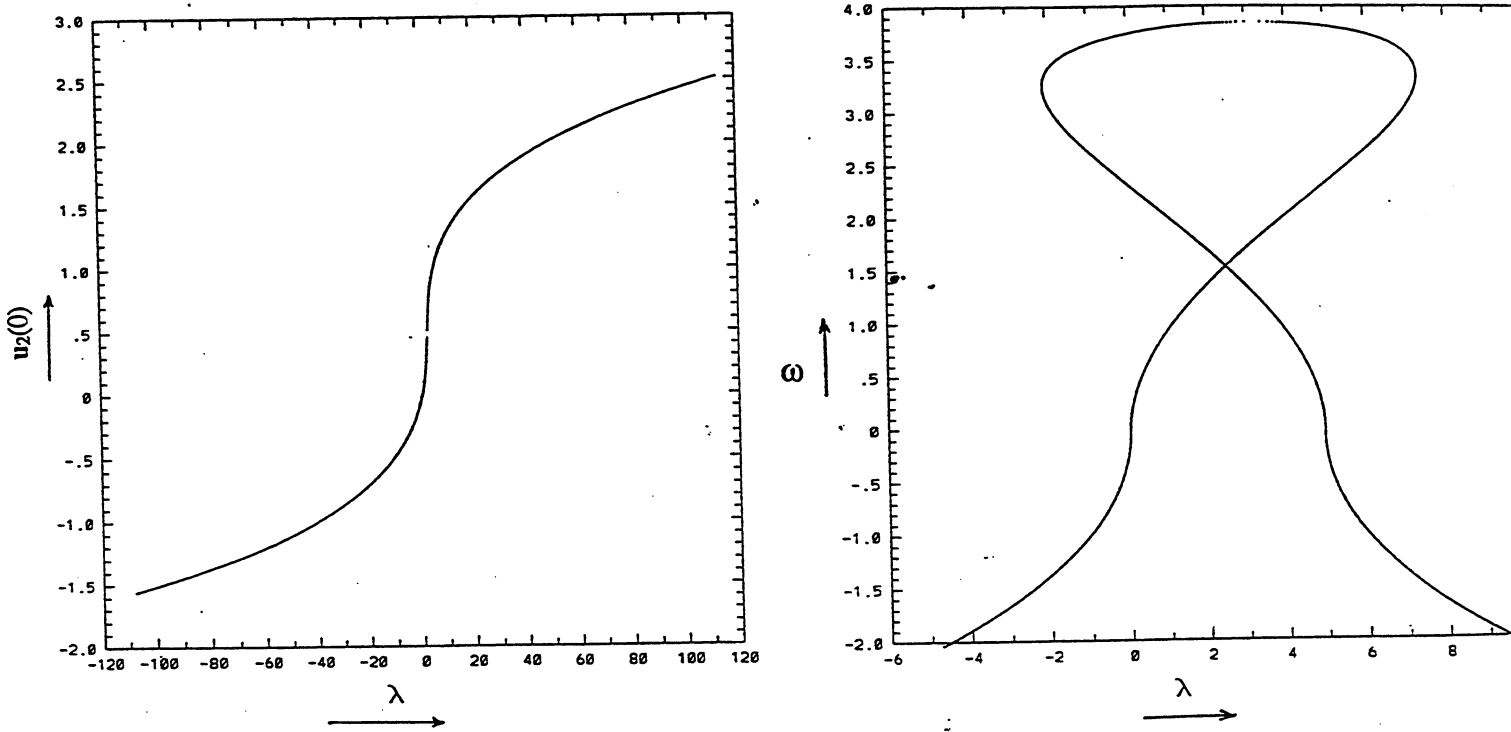
Figure .8. diagramme de bifurcation pour  $c = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-1}$

Pour  $\varepsilon = 10^{-1}$ , nous avons une seule branche de solutions, obtenue pour  $\omega \leq 1.5$  (cf. figure fig .8).

Pour  $\varepsilon = 10^{-1}$ , nous avons une seule branche de solutions, obtenue pour  $\omega \leq 4$  (cf. figure fig .9).

Pour  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ , nous avons deux branches de solutions, dont une est obtenue pour  $\omega \leq 4.5$  et l'autre pour  $5.1 \leq \omega \leq 5.8$  (cf. figure fig .10).

Pour  $\varepsilon = 10^{-4}$ , on obtient 13 branches de solutions (cf. figure .12).

Figure .9.  $c = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ 

Nous avons représenté sur la figure fig .11, les trois solutions correspondant à une charge  $\lambda = 4.8$  et obtenues pour  $\omega_1 = 0.363$ ,  $\omega_2 = 2.303$  et  $\omega_3 = 3.858$ .

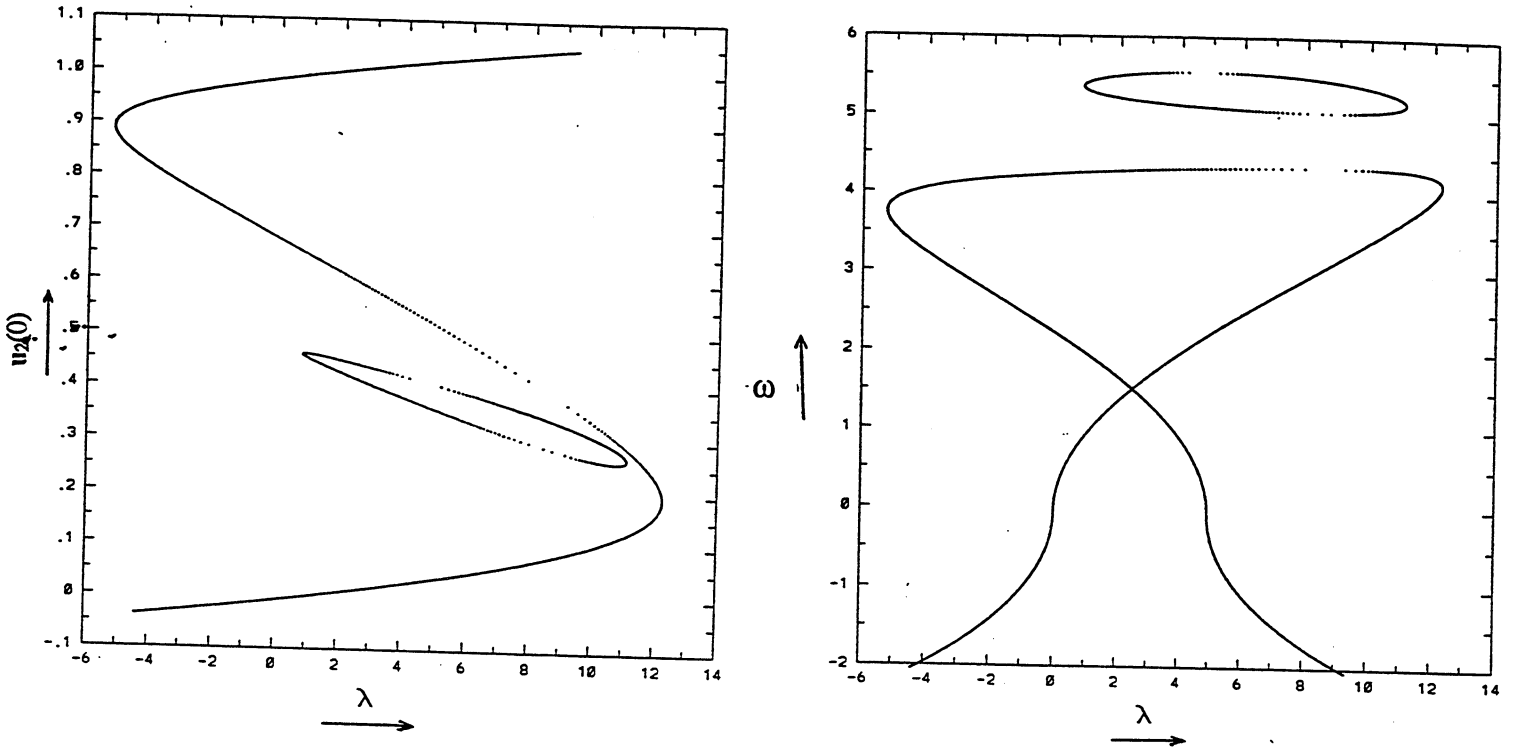


Figure .10.  $c = 1, \varepsilon = 5.10^{-3}$



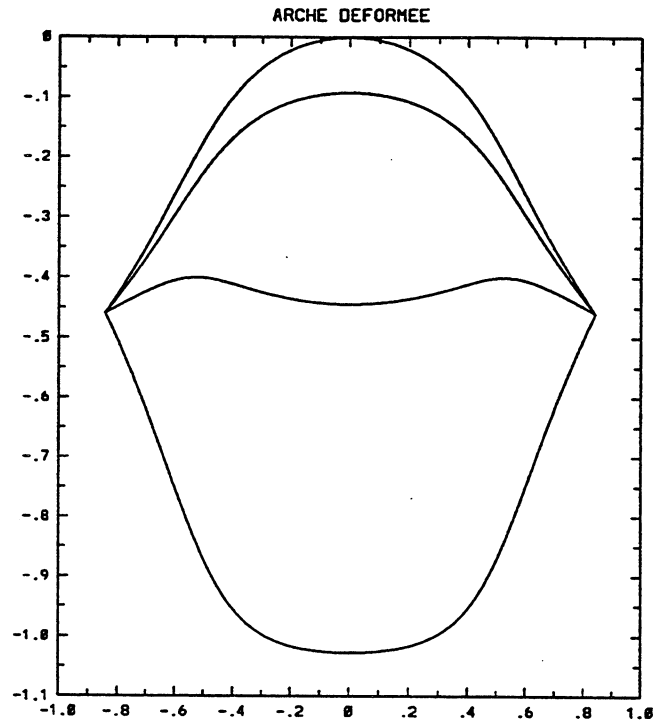


Figure .11. Les trois solutions pour  $c = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\lambda = 4.8$

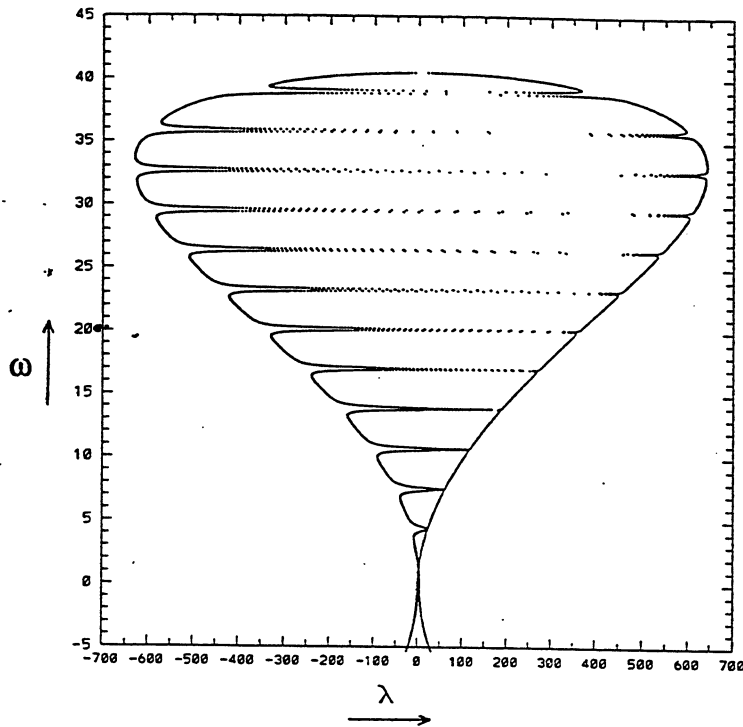
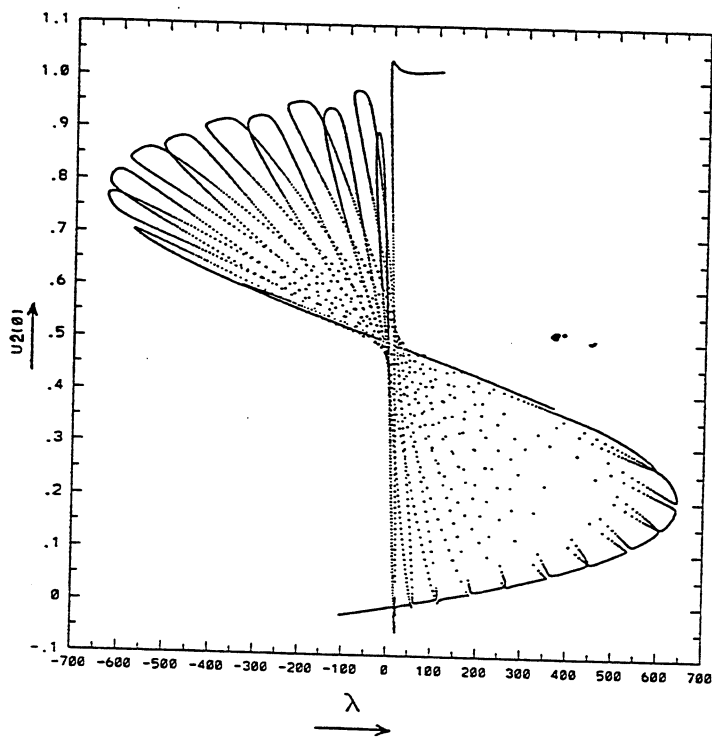


Figure .12.  $c = 1$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$

# Chapitre 5.

## Résolution numérique du problème non linéaire

Nous avons vu au chapitre précédent que le nombre de solutions du problème  $(P)^\varepsilon$  va exploser lorsque  $\varepsilon$  va tendre vers 0. De plus, nous aurons la présence de points de retournement et de bifurcation.

On commence par montrer que le critère utilisé en général pour mettre en évidence la présence d'un phénomène de verrouillage en élasticité linéaire n'est pas suffisant dans le cas non linéaire.

On donne ensuite deux autres critères ; le premier est basé sur l'utilisation d'une abscisse curviligne sur les branches de solutions et le second sur la résolution d'un problème de minimisation en utilisant l'inverse de Moore-Penrose.

### 5. 1. Choix d'un critère pour caractériser le verrouillage en non linéaire :

Nous avons vu que dans le cas linéaire, le verrouillage ne dépend pas de la charge  $\lambda$ . Il n'en est pas de même dans le cas non linéaire. En effet, le nombre de solutions, dépend beaucoup de  $\lambda$  (par exemple pour  $\varepsilon = 10^{-2}$ , nous avons une solution unique pour  $\lambda \leq -2$  et  $\lambda \geq 7.5$ , deux solutions pour  $\lambda \in ]2, 0[$  et  $\lambda \in [5, 7.5[$ , trois solutions pour  $\lambda \in [0, 5[$ ). Le comportement d'une méthode d'approximation va dépendre dans ce cas de la nature de la solution que l'on veut calculer (point régulier, de retournement ou de bifurcation). En particulier, si on utilise une méthode de type Newton le problème de l'initialisation va être crucial.

#### 5. 1. 1. Choix naïf (cas linéaire) :

Dans le cas linéaire, on regarde la norme  $\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|$ , en fonction de  $h$  et ceci pour des  $\varepsilon$  de plus en plus petits.

Ce choix qui est satisfaisant dans le cas linéaire, ne le sera plus en non linéaire. En effet, si nous cherchons à calculer une solution qui est voisine d'un point de retournement, ce critère n'a plus des sens, en effet, (cf. figure fig .13) pour  $h = h_1$  la solution approchée est unique (1) alors que pour  $h = h_2 < h_1$ , on aura trois solutions possibles (2), (3) et (4) et suivant l'initialisation, on peut tomber sur n'importe laquelle des trois. Le phénomène se compliquerait davantage si on était au voisinage d'un point de bifurcation.

On peut rajouter à ces difficultés, le fait que la nature des branches de solutions dépend elle beaucoup de  $\varepsilon$  (cf. figure fig .14). On passe d'une branche régulière pour  $\varepsilon = 0.1$  (cf. figure fig .8) à une branche comportant deux points de retournement pour  $\varepsilon = 0.01$  (cf. figure fig .9).

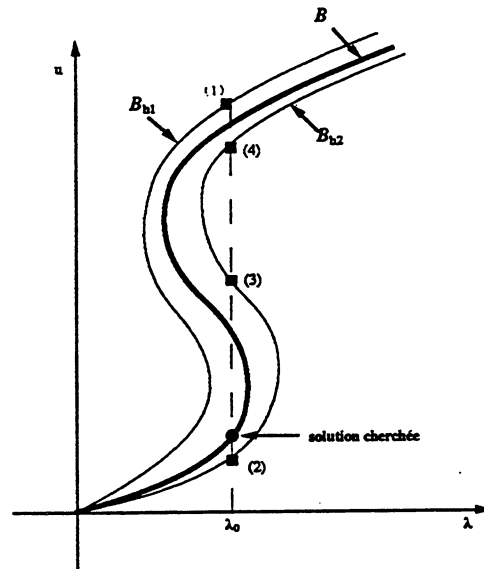


Figure .13. Le nombre de solutions varie avec  $h$

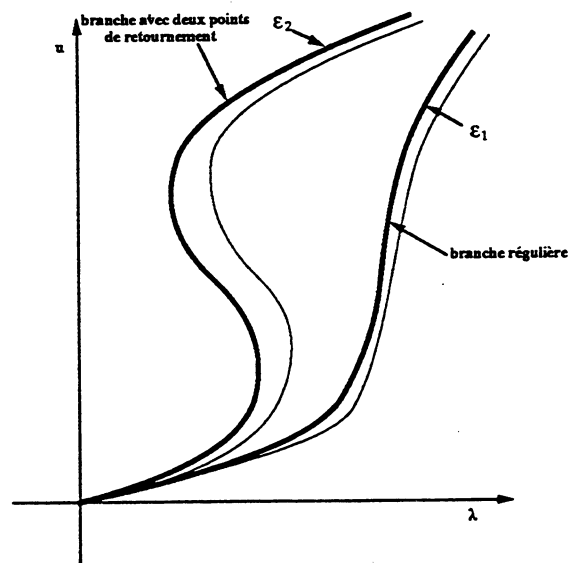


Figure .14. Une branche régulière pour  $\varepsilon_1$ , et avec deux points de retournement pour  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$

### 5. 1. 2. abscisse curviligne :

Pour contourner la dépendance de ce phénomène avec  $\lambda$ , on peut regarder ce

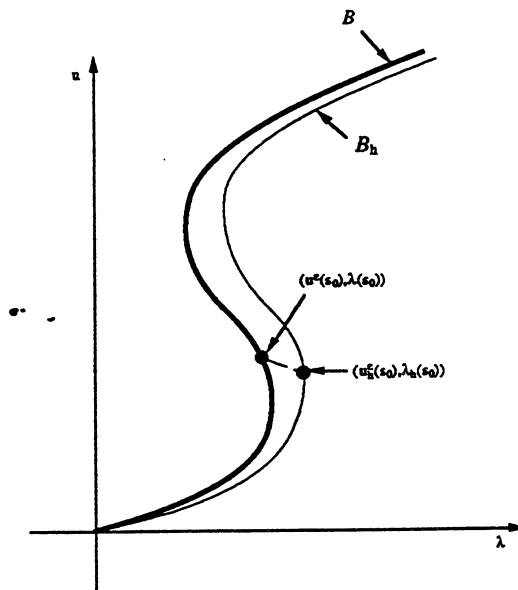


Figure .15. Abscisse curviligne sur la branche de solutions

qui se passe sur toute la branche  $= \{(u(s), \lambda(s)) ; s \in J\}$  ou du moins une partie de celle-ci. On se donne alors une abscisse curviligne  $s_0$  (cf. figure fig .15) et on regarde la norme suivante :

$$\|u^\varepsilon(s_0) - u_h^\varepsilon(s_0)\|^2 + |\lambda(s_0) - \lambda_h(s_0)|^2.$$

On peut l'améliorer encore en considérant :

$$\sup_{0 \leq s \leq s_0} \|u^\varepsilon(s) - u_h^\varepsilon(s)\|^2 + |\lambda(s) - \lambda_h(s)|^2.$$

En pratique, on ne connaît pas la solution exacte  $u^\varepsilon$  et on chemine sur la branche approchée jusqu'à l'abscisse  $s_0$  et on regarde l'évolution de  $u_h^\varepsilon(s_0)$  en fonction de  $h$  et de  $\varepsilon$ .

Ce critère semble de prime abord très significatif mais très difficile à utiliser compte tenu de l'augmentation de la complexité des branches lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

### 5. 1. 3. Méthode de Moore-Penrose :

Pour ne pas avoir à calculer l'abscisse curviligne sur la branche de solutions à déterminer, on peut chercher le point  $(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{\lambda}_h)$  de la branche  $\mathcal{B}_h$  le plus proche de la solution exacte  $(\bar{u}^\varepsilon, \bar{\lambda})$  que l'on veut calculer (cf. figure fig .16). On est donc amené à résoudre le problème suivant :

$$\text{Min}_{(u_h, \lambda_h) \in \mathcal{B}_h} \{ \|\bar{u}^\varepsilon - u_h\|^2 + |\bar{\lambda} - \lambda_h|^2 \}, \quad (5.1.1)$$

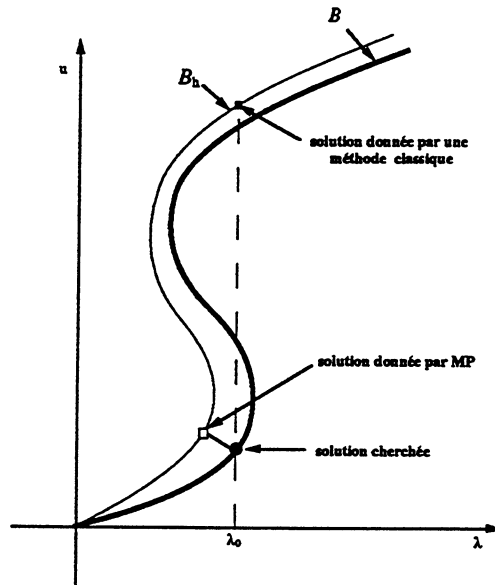


Figure .16. Méthode de Moore-Penrose

ce qui nécessite, a priori, la connaissance de la solution exacte  $(\bar{u}^\varepsilon, \bar{\lambda})$ , ce qui n'est jamais le cas dans la réalité.

Cependant, pour résoudre le problème (5.1.1), on utilise une méthode de Moore-Penrose dont le principe est illustré ci-dessous.

**Définition 5.1.1** Soit  $A \in \mathcal{M}_{N,N+1}(\mathbb{R})$  de rang  $N$ . L'inverse de Moore-Penrose de  $A$  est défini par :

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}.$$

On pose  $t(A)$  l'unique élément de  $\mathbb{R}^{N+1}$  vérifiant:

- (i)  $At = 0$ ,
- (ii)  $\|t\| = 1$ ,
- (iii)  $\det \begin{pmatrix} A \\ t^* \end{pmatrix} > 0$ .

Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 5.1.2** Allgower-Gerorg[1990] Soit  $A \in \mathcal{M}_{N,N+1}(\mathbb{R})$  de rang  $N$  alors,

- (1)  $A^+A$  est la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^{N+1}$  sur  $\text{Im}(A^*)$ ,  
i.e  $A^+A = Id - t(A)t(A)^*$ ,
- (2)  $AA^+ = Id$ ,
- (3)  $\text{Im}(A^*) = \{t(A)\}^\perp$ .

Soit  $F$  une application définie de  $\mathbb{R}^{N+1}$  dans  $\mathbb{R}^N$  et  $v$  donné dans  $\mathbb{R}^{N+1}$ , on se propose de résoudre le problème suivant :

$$\text{Min}_{\{w \in \mathbb{R}^{N+1} ; F(w)=0\}} \|v - w\|. \quad (5.1.2)$$

Une condition nécessaire pour que le problème (5.1.2) admette une solution est l'existence d'un multiplicateur de Lagrange  $\mu \in \mathbb{R}^N$  tel que :

$$\begin{cases} F(w) = 0, \\ w - v = F'(w)^* \mu. \end{cases}$$

La deuxième condition est équivalente à dire que :

$$w - v \in \text{Im}(F'(w)^*) = \{t(F'(w))\}^\perp.$$

Une condition nécessaire pour que  $w$  soit solution du problème (5.1.2) est qu'il soit solution de

$$\begin{cases} F(w) = 0, \\ t(F'(w))^*(w - v) = 0. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

En appliquant une méthode de Newton classique pour résoudre le problème non linéaire (5.1.3), on obtient l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} w_0 = v, \\ w_i = \mathcal{N}^i(v), \end{cases}$$

où  $\mathcal{N}$  est l'application de  $\mathbb{R}^{N+1}$  dans  $\mathbb{R}^{N+1}$  qui à  $u$ , point régulier de  $F$ , fait correspondre :

$$\mathcal{N}(u) = u - [F'(u)]^+ F(u),$$

#### Application au problème (5.1.1) :

Soit  $\hat{u}_h^\varepsilon$  l'interpolé de  $\bar{u}^\varepsilon$  dans  $V_h$ , on prend  $v = (\hat{u}_h^\varepsilon, \bar{\lambda})$ ,  $w = (v_h, \lambda_h)$ . L'ensemble  $\{w = (v_h, \lambda_h) ; F(w) = 0\}$ , va jouer le rôle de la branche  $\mathcal{B}_h$ .

Si  $\mathcal{S}(v)$  est la solution du problème (5.1.2) alors, on aura le résultat suivant (théorème 3.4.1 de Allgower-Georg[1990]) :

$$\|\mathcal{N}^\infty(v) - \mathcal{S}(v)\| = O(\|v - \mathcal{S}(v)\|^2)$$

ce qui nous garantit une résolution approchée correcte du problème (5.1.2) compte tenu du fait  $\|v - \mathcal{S}(v)\|$  est petit (théorie des éléments finis).

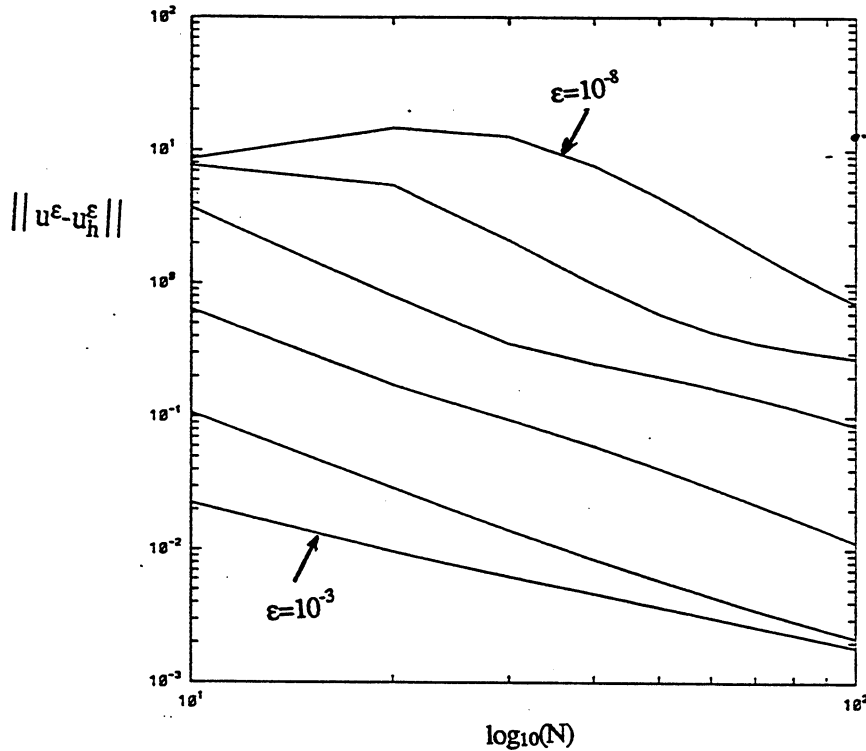


Figure .17. Diagramme de convergence pour  $p = 1$  et  $q = 3$

#### 5. 1. 4. Tests numériques :

Pour approcher le problème  $(P)^\epsilon$ , on s'est mis dans le même cadre que celui que nous avons utilisé pour le problème linéaire  $(PL)^\epsilon$  (chapitre 3).

Pour  $p = 1$  et  $q = 3$  nous avons eu le même type de verrouillage que celui rencontré dans le cas linéaires (cf. figure .17) (il faut remarquer qu'avec une charge uniforme, le problème linéaire ne verrouille pas alors que le non linéaire a verrouillé).

Nous avons commencé par appliquer à ce problème le premier remède utilisé pour  $(PL)^\epsilon$ ; l'enrichissement de la base qui a permis de le déverrouiller mais au prix d'une programmation très lourde et le temps de calcul nécessaire à l'assemblage des matrices devient aussi important que la résolution même du système non linéaire algébrique obtenu. Le verrouillage commence à s'atténuer pour  $p = 2$  et  $q = 3$  (cf. figure .18) et il disparaît complètement pour  $p = 4$  et  $q = 3$  (cf. figure .20).

L'intégration numérique réduite a quant à elle été très facile à mettre en œuvre et surtout a donné de bons résultats (cf figure .21).

Le troisième remède (formulation mixte) est en général réservé aux problèmes linéaires. Nous avons tout de même cherché une formulation en s'inspirant du cas



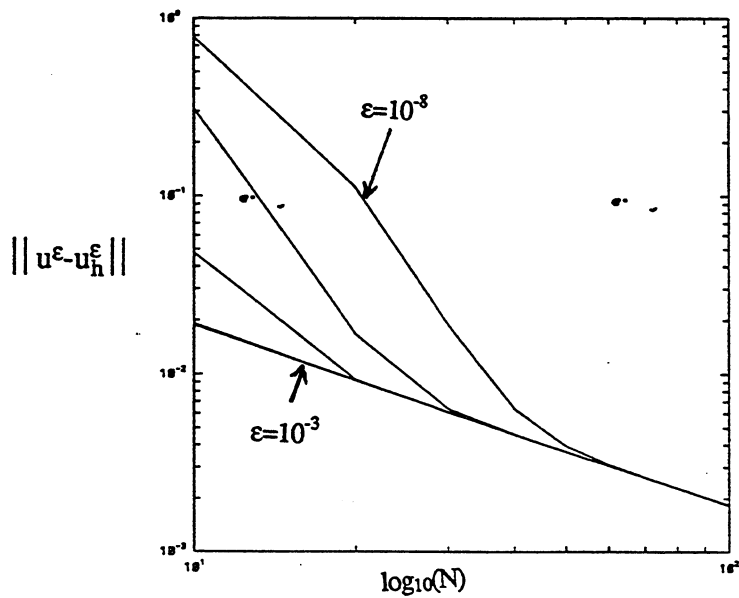


Figure .18. déverrouillage par enrichissement de la base :  $p = 2, q = 3$

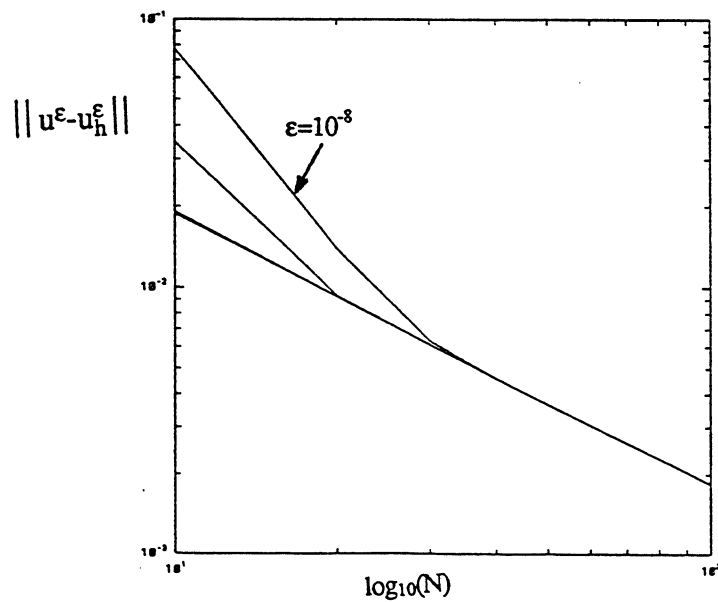


Figure .19. déverrouillage par enrichissement de la base :  $p = 3, q = 3$

linéaire, où le terme qui posait problème est :  $u'_1 - cu_2$ , au quel nous avons fait correspondre un multiplicateur de Lagrange  $\xi^\epsilon$ .

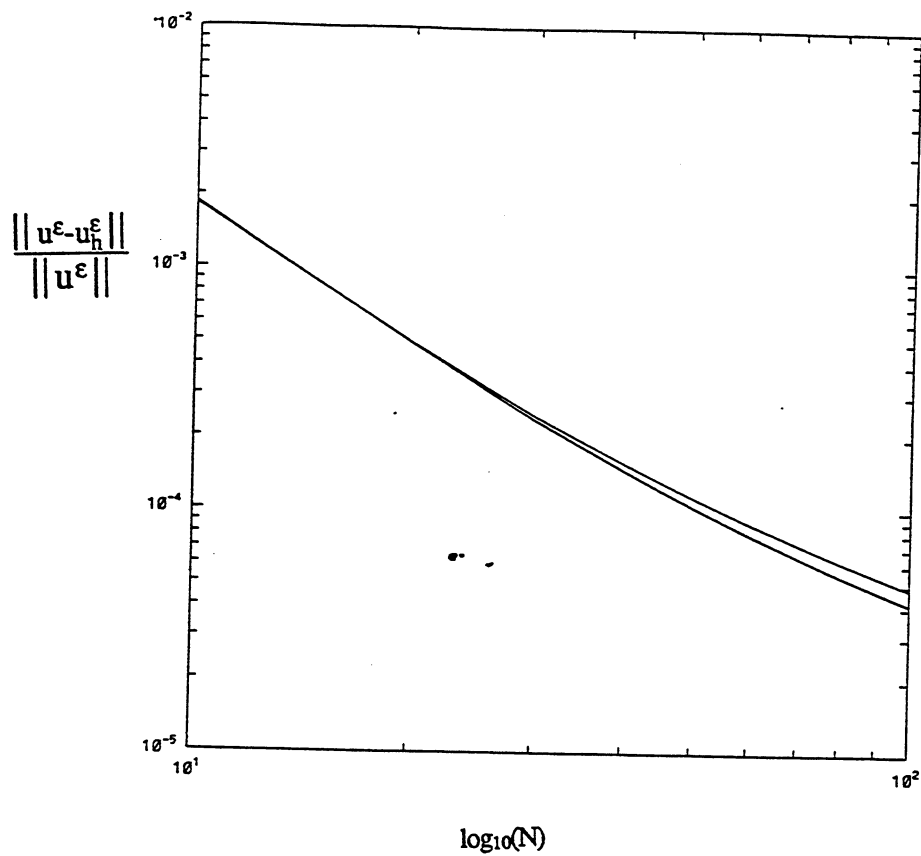


Figure .20. déverrouillage par enrichissement de la base :  $p = 4, q = 3$

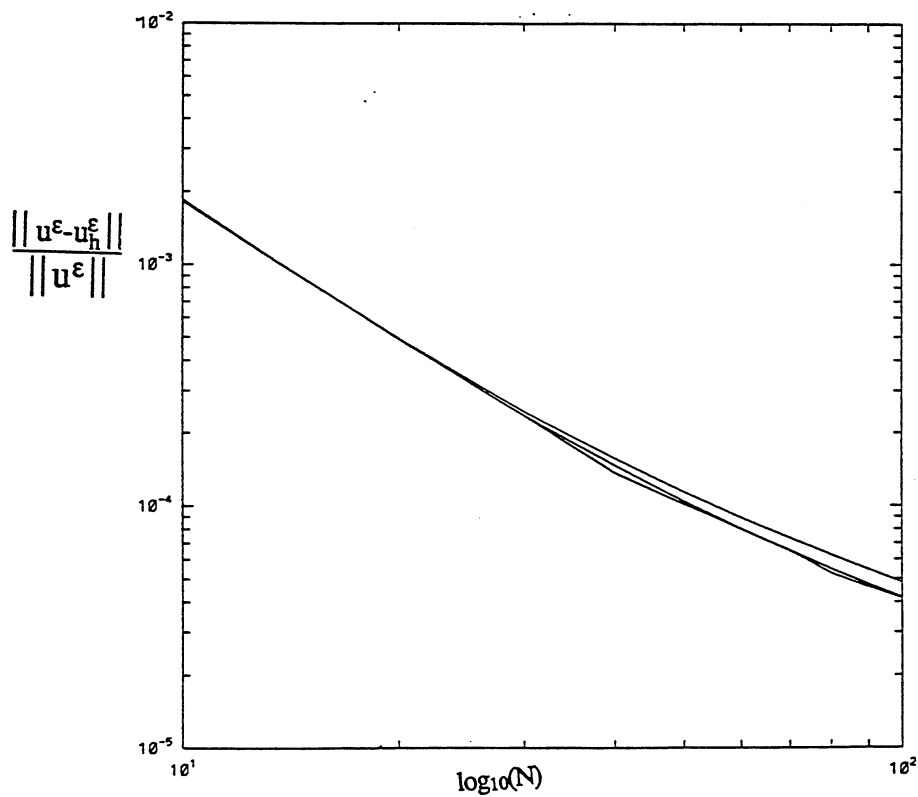


Figure .21. déverrouillage par intégration numérique réduite

Dans le cas non linéaire, le terme correspondant est :

$$\xi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u_1' - cu_2 + \frac{1}{2}(u_2')^2).$$

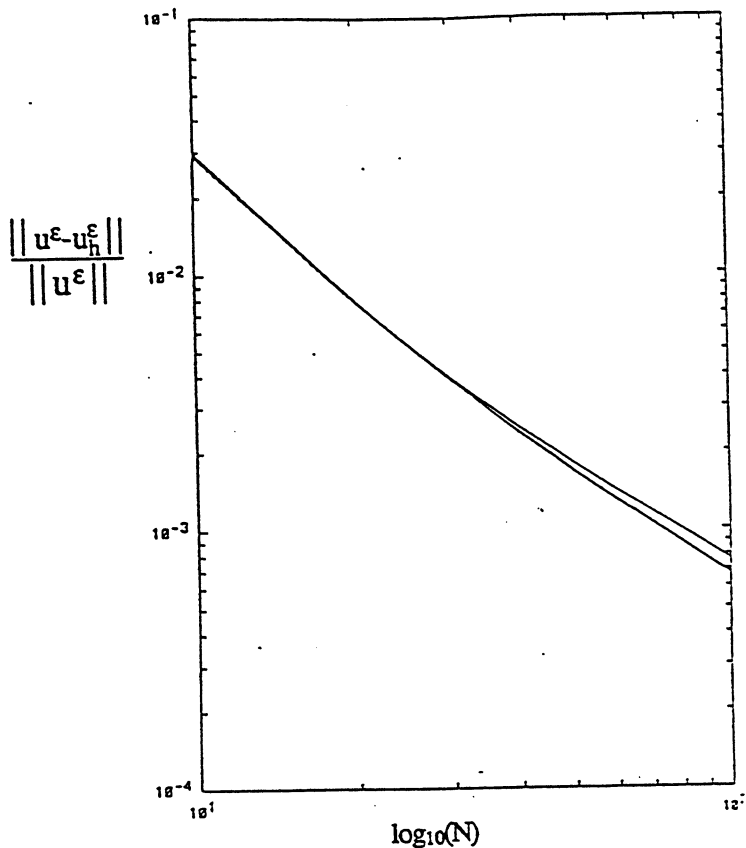


Figure .22. Déverrouillage en utilisant une formulation mixte

On définit alors l'application  $b$  sur  $L^2(I) \times V^2$  par :

$$b(\xi, u, v) = \int_I \xi(v'_1 - cv_2 + u'_2 v'_2) ds,$$

et le problème à résoudre est donc le suivant :

$$(PM)^\epsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u^\epsilon, \xi^\epsilon) \in V \times L^2(I) \text{ tel que :} \\ a_1(u^\epsilon, v) + b(\xi^\epsilon, u^\epsilon, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ b(\mu, \frac{1}{2}u^\epsilon, u^\epsilon) - \varepsilon((\xi^\epsilon, \mu)) = 0, \quad \forall \mu \in L^2(I). \end{array} \right. \quad (5.1.4)$$

Pour approcher le problème  $(PM)^\epsilon$  nous avons utilisé le même cadre fonctionnel que pour  $(PLM)^\epsilon$ . Les tests numériques effectués sur  $(PM)^\epsilon$  ont permis de déverrouiller le problème  $(P)^\epsilon$  (cf. figure .22).

En conclusion, Il faut retenir que les méthodes utilisées pour déverrouiller le problème linéaire  $(PL)^\epsilon$ , ont eu le même effet sur le problème  $(P)^\epsilon$ , au prix parfois d'une très lourde programmation pour l'enrichissement de la base et la formulation mixte que nous avons proposé.

**Flambage de coques cylindriques**  
**élastiques minces**



# Table des matières

<b>Introduction</b>	67
<b>1 Le problème de base</b>	69
Géométrie de la surface	69
Vecteurs tangents	69
Première forme fondamentale	70
Seconde forme fondamentale	71
Symboles de Christoffel	71
Tenseur de déformations	72
Tenseur de changement de courbure	73
Hypothèses de base	73
Conditions aux limites	74
Calcul de l'énergie totale	74
Notations et rappels sur les espaces de Sobolev	75
Existence et régularité des solutions	80
Unicité de la solution	83
Etude du cas $\mu = \delta = 0$	89
<b>2 Etude de la bifurcation perturbée</b>	95
Introduction	95
Réduction du problème	96
Etude des solutions $\varepsilon$ -singulières de $(E)$ et de $(E_{\mu,\delta})$	102
Etude des fonctions $\tilde{\lambda}(\cdot)$ et $\tilde{\delta}(\cdot)$	103
Recherche des points solutions de $\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) = 0$ (resp $\partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0$ )	104
Etude des fonctions $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$ et $\tilde{\lambda}(\cdot, \mu)$	106
Convexité	107

Détermination de l'ensemble des solutions de l'équation $(E_{\mu,\delta})$ dans $W_i$	124
Retour au problème initial . . . . .	134
Résultats numériques . . . . .	135

## Introduction :

Les ingénieurs sont de nos jours confrontés au problème très délicat de réduire le poids des constructions, tout en leur garantissant une résistance maximale. Pour ce faire, Ils font souvent un large usage des structures en coques minces et ceci dans presque tous les domaines (construction civile, navale ...).

Les coques minces sont rigides dans leur plan, cependant, leur résistance latérale en flexion est faible; de ce fait elles perdent leur stabilité par flambage. Ce phénomène d'instabilité apparaît dans les structures minces soumises à des contraintes de compression agissant sur leur surface moyenne, dès que ces contraintes atteignent une valeur critique.

Depuis la première étude mathématique du flambage des coques minces (Von Kármán et Tsien[1939] et [1941]), des travaux de toutes sortes se sont développés autour de ce thème, tant sur le plan théorique que pratique.

L'analyse mathématique a souvent considéré les modèles de coques minces (en particulier les modèles de plaques) pour y appliquer des méthodes classique mais aussi pour y développer de nouveaux outils d'analyse fonctionnelle.

Durant les deux dernières décennies, le calcul des structures a connu un essor considérable grâce à la méthode des éléments finis. En élasticité non linéaire (grandes déformations), on cherche à calculer les positions de la coque à l'aide de codes de calcul parfois complexes. De cette façon on peut étudier le flambage de la structure et en déduire le calcul des charges critiques.

Cependant, une question importante reste souvent ouverte; il s'agit de savoir si l'existence mathématique du phénomène de flambage peut être démontrée à partir des équations aux dérivées partielles non linéaires des coques minces. cette question est d'un intérêt capital lorsqu'on veut justifier le bien fondé des résultats numériques obtenus par un code de calcul. Mais la complexité de ces équations rend cette tâche difficile, voir impossible, dans la plupart des cas réels. Dans ces conditions, le retour à des équations de coques plus simples permet de mettre en évidence les méthodes qui semblent les plus adaptées à apporter une réponse à cette question délicate concernant des problèmes plus compliqués.

Dans le cas des coques peu profondes (équations de Marguerre Von Kármán), chargés latéralement et verticalement, il a été montré que le phénomène du flambage peut se détecter par la présence de deux points de retournement dans le diagramme : "déplacement de la coque / paramètres de bifurcation".

L'analyse mathématique mettant en évidence ces deux points de retournement (Rao[1989]), utilise la théorie de la perturbation des bifurcations des plaques de Von Kármán suivant les travaux de Golubitsky et Shaffer[1978]. La construction d'un code de calcul (Paumier-Rao[1989]) permet de tracer les courbes solutions et de faire apparaître numériquement les deux points de retournement.



Le but de ce travail est de réaliser le même genre d'étude pour *une coque cylindrique verticale*, soumise à un champ de forces volumiques de densité  $f$  et en sa partie supérieure, soumise à une densité de forces surfaciques  $\lambda$ .

Dans un premier temps (chapitre 1), nous choisissons un modèle de coques minces élastiques, en théorie non linéaire, en se référant aux travaux de Koiter(1966). On s'intéresse uniquement aux solutions *axisymétriques* de ce modèle. On montre l'existence de solution pour tout  $f$  et  $\lambda$  et on donne un résultat d'unicité pour tout  $\lambda \leq \lambda_c(f)$ .

Dans le chapitre 2, on écrit le problème sous une forme abstraite bien adaptée à l'étude de la bifurcation (Rao[1989]). On fait une étude de la bifurcation de ce problème.

Cette étude qualitative est complétée par une étude quantitative : on discrétise le problème par différences finies et le système algébrique obtenu est résolu par une méthode de cheminement suivant les paramètres de charge. On retrouve ainsi les diagrammes de bifurcation prévus par la théorie.

# Chapitre 1.

## Le problème de base

Considérons une coque cylindrique de rayon  $R$ , de hauteur  $L$  et d'épaisseur  $e$ .

Nous utiliserons pour l'étude des déformations de cette coque un modèle de la famille de modélisation des coques minces qui se rattache à la théorie de Kirchoff-Love, plus particulièrement à l'un de ceux qui ont été développés par W.T.Koiter[1966].

Cette théorie consiste à supposer que l'état des contraintes est approximativement plan et que la distribution des contraintes parallèles à la surface moyenne de la coque est approximativement linéaire. Ce qui permet, en intégrant sur l'épaisseur, de ramener un problème où l'inconnue aurait été le déplacement d'un point de la coque, à un problème où l'inconnue est le déplacement d'un point de la surface moyenne de celle-ci.

### 1. 1. Géométrie de la surface

La carte permettant de décrire la surface moyenne  $\omega$  est définie par :

$$\phi(\xi^1, \xi^2) = R[\cos(\xi^1)\vec{i} + \sin(\xi^1)\vec{j}] + \xi^2\vec{k}$$

Nous supposons désormais que les indices grecs sont destinés à prendre les valeurs 1 et 2 et nous utiliserons la convention de sommation des indices répétés. La virgule symbolisera la dérivation partielle usuelle :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = f_{,\alpha}$$

#### 1. 1. 1. Vecteurs tangents

Les vecteurs tangents sont donnés en chaque point de la surface moyenne par

$$\vec{a}_i = \phi_{,i},$$

ce qui donne :

$$\vec{a}_1 = R(-\sin(\xi^1)\vec{i} + \cos(\xi^1)\vec{j}),$$

$$\vec{a}_2 = \vec{k},$$

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|} = \cos(\xi^1)\vec{i} + \sin(\xi^1)\vec{j}.$$

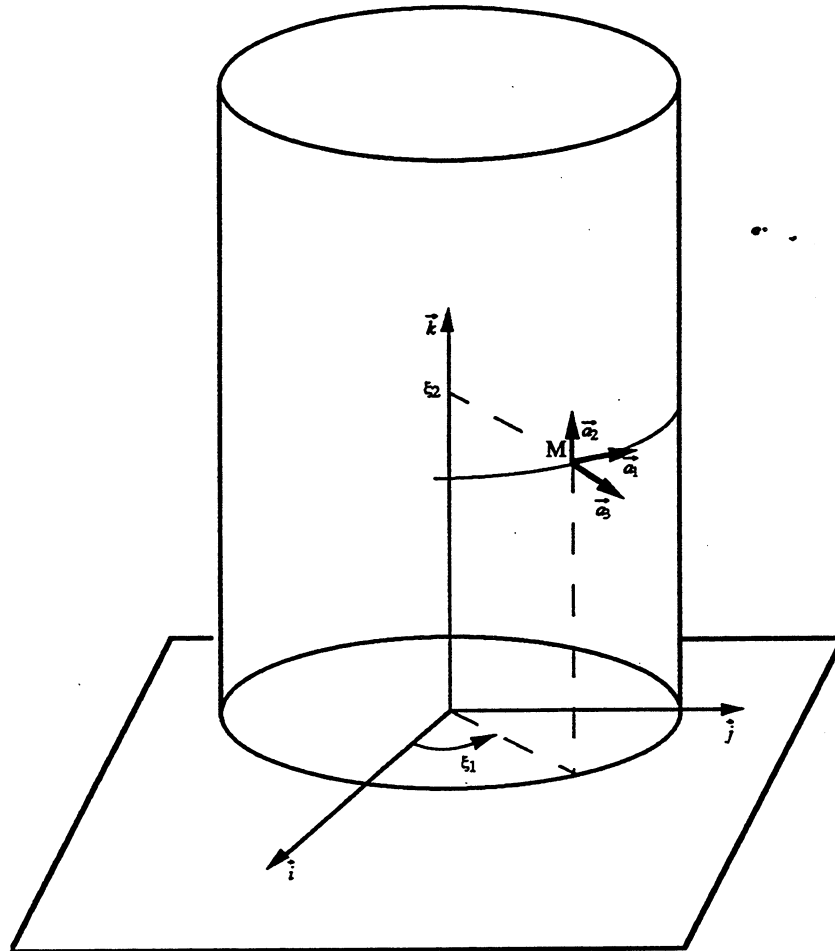


Figure 1 cylindre

### 1. 1. 2. Première forme fondamentale

La première forme fondamentale est définie par :

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta,$$

ce qui donne :

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose  $a = \det(a_{\alpha\beta}) = R^2$ .

Son inverse est donné par :

$$a^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base contravariante  $\vec{a}^i$  est définie par :  $\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha$ , où  $\delta_\beta^\alpha$  est le symbole de Kronecker.

$$\begin{aligned}\vec{a}^1 &= \frac{1}{R}(-\sin(\xi^1)\vec{i} + \cos(\xi^1)\vec{j}), \\ \vec{a}^2 &= \vec{k}, \\ \vec{a}^3 &= \vec{a}_3.\end{aligned}$$

### 1. 1. 3. Seconde forme fondamentale

La seconde forme fondamentale est définie par :

$$b_{\alpha\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta},$$

ce qui donne dans notre cas :

$$b_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle permet de calculer les coefficients suivants :

$$b_\alpha^\lambda = a^{\lambda\beta} b_{\alpha\beta},$$

soit dans notre cas :

$$\begin{aligned}b_1^1 &= -\frac{1}{R}, \\ b_1^2 &= b_2^1 = b_2^2 = 0.\end{aligned}$$

### 1. 1. 4. Symboles de Christoffel

Ils sont donnés par la formule suivante :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \vec{a}^\lambda \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta},$$

On montre que  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = 0$ ,  $\forall \alpha, \beta, \lambda$ .

Nous obtenons les formules de dérivation covariante suivantes :

$$\begin{aligned}v_{\alpha|\beta} &= v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda = v_{\alpha,\beta}, \\ v_{3|\alpha\beta} &= v_{3,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_{3,\lambda} = v_{3,\alpha\beta},\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

## 1. 2. Expression des tenseurs de déformation et de changement de courbur

### 1. 2. 1. Tenseur de déformations

Dans un premier temps, nous allons utiliser la formule la plus générale donnant le tenseur de déformations, quitte à négliger des termes dans la suite.

Etant donné un déplacement admissible  $\vec{u} = u_i \vec{a}^i$ , cette formule est donnée par :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \theta_{\alpha\beta}(u) + \frac{1}{2} a^{\nu\lambda} (\theta_{\nu\alpha}(u) - \omega_{\nu\alpha}(u)) (\theta_{\lambda\beta}(u) - \omega_{\lambda\beta}(u)) + \frac{1}{2} \phi_{\alpha}(u) \phi_{\beta}(u),$$

où :

$$\theta_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_{\beta|\alpha} + u_{\alpha|\beta}),$$

$$\omega_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}),$$

$$\phi_{\alpha}(u) = u_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}.$$

Cette formule est celle donnée par Koiter[1966].

Nous obtenons dans notre cas grâce à la relation (1.1.1) les formules suivantes pour  $\theta_{\alpha\beta}$  :

$$\theta_{11}(u) = u_{1,1} + Ru_3,$$

$$\theta_{12}(u) = \theta_{21}(u) = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}),$$

$$\theta_{22}(u) = u_{2,2}.$$

Les  $\omega_{\alpha\beta}$  sont donnés par :

$$\omega_{11}(u) = \omega_{22}(u) = 0,$$

$$\omega_{12}(u) = \frac{1}{2} (u_{2,1} - u_{1,2}),$$

$$\omega_{21}(u) = \frac{1}{2} (u_{1,2} - u_{2,1}).$$

Pour  $\phi_{\alpha}$  nous aurons :

$$\phi_1(u) = u_{3,1} - \frac{1}{R} u_1,$$

$$\phi_2(u) = u_{3,2}.$$

Le tenseur de déformations est alors donné par :

$$\gamma_{11}(u) = u_{1,1} + Ru_3 + \frac{1}{2} (u_{2,1})^2 + \frac{1}{2} (u_{3,1} - \frac{u_1}{R})^2 + \frac{1}{2R^2} (u_{1,1} + Ru_3)^2,$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(u) = \gamma_{21}(u) = & \frac{1}{2} [u_{1,2} + u_{2,1} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,2}(u_{3,1} - \frac{u_1}{R}) \\ & + \frac{u_{1,2}}{R^2} (u_{1,1} + Ru_3)], \end{aligned}$$

$$\gamma_{22}(u) = u_{2,2} + \frac{1}{2} (u_{2,2})^2 + \frac{1}{2} (u_{3,2})^2 + \frac{1}{2R^2} (u_{1,2})^2.$$

### 1. 2. 2. Tenseur de changement de courbure

L'expression générale de ce tenseur est donnée (Koiter[1966,p.51]) par :

$$\rho_{\alpha\beta}(u) = \bar{\rho}_{\alpha\beta}(u) - \frac{1}{2}(b_{\alpha}^{\nu}\gamma_{\nu\beta}(u) + b_{\beta}^{\nu}\gamma_{\nu\alpha}(u)),$$

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta}(u) = u_{3|\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\lambda}b_{\lambda\beta}u_3 + b_{\alpha}^{\nu}u_{\nu|\beta} + b_{\beta}^{\nu}u_{\nu|\alpha} + b_{\alpha|\beta}^{\nu}u_{\nu}.$$

Nous obtenons les formules suivantes pour  $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$  :

$$\bar{\rho}_{11}(u) = -u_3 + u_{3,11} - \frac{2}{R}u_{1,1},$$

$$\bar{\rho}_{12}(u) = \bar{\rho}_{21}(u) = u_{3,12} - \frac{u_{1,2}}{R}, \quad \cdot \cdot$$

$$\bar{\rho}_{22}(u) = u_{3,22}.$$

Ce qui donne pour  $\rho_{\alpha\beta}(u)$  :

$$\rho_{11}(u) = \frac{u_{1,1}}{R} + u_{3,11} + \frac{1}{R}[(u_{2,1})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,1} - \frac{u_1}{R})^2 + \frac{1}{2R^2}(u_{1,1} + Ru_3)^2],$$

$$\rho_{12}(u) = \rho_{21}(u) = u_{3,12} + \frac{1}{4R}[u_{2,1} - 3u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,2}(u_{3,1} - \frac{u_1}{R})$$

$$+ \frac{u_{1,2}}{R^2}(u_{1,1} + Ru_3)],$$

$$\rho_{22}(u) = u_{3,22}.$$

### 1. 3. Hypothèses de base

- (H<sub>1</sub>) L'épaisseur  $e$  de la coque est constante.
- (H<sub>2</sub>) La coque est mince. C'est à dire que l'épaisseur  $e$  est "petite" (au plus de l'ordre de 1/10) devant le rayon de la coque.
- (H<sub>3</sub>) La coque est élastique, homogène et isotrope.
- (H<sub>4</sub>) On s'intéresse aux déplacements axisymétriques de cette coque. Dans toute la suite, on aura donc :
- Le déplacement  $u_1$  est identiquement nul ( $u_1 \equiv 0$ ).
  - Les déplacements  $u_2$  et  $u_3$  ne sont plus fonction que d'une seule variable  $\xi^2$ , cette variable sera notée par la suite :  $s$ .

On utilisera la notation usuelle pour la dérivation :  $f', f'', \dots, f^{(n)}$ .

On aura les expressions suivantes pour les tenseurs de déformations et de changement de courbure :

Tenseur des déformations :

$$\begin{cases} \gamma_{11}(u) &= Ru_3 + \frac{1}{2}u_3^2, \\ \gamma_{12}(u) &= \gamma_{21}(u) = 0, \\ \gamma_{22}(u) &= u_2' + \frac{1}{2}u_3'^2 + \frac{1}{2}u_2'^2. \end{cases}$$

Tenseur de changement de courbure :

$$\begin{cases} \rho_{11}(u) = \rho_{12}(u) = \rho_{21}(u) = 0, \\ \rho_{22}(u) = u_3'' \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Nous négligeons dans l'expression de  $\gamma_{22}(u)$  le terme  $\frac{1}{2}u_2'^2$  pour d'une part découpler les équations qui vont apparaître plus tard et d'autre part, retrouver un modèle donné par T.Von Kármán et H.Shen Tsien dans l'article : the buckling of thin cylindrical shells (1941).

### 1. 3. 1. Conditions aux limites

La coque est encastree en sa partie inférieure (  $s = 0$  ), on aura donc sur cette partie les conditions aux limites suivantes :

- Pour le déplacement axial  $u_2$  :  $u_2(0) = 0$ .
- Pour le déplacement normal  $u_3$  :  $u_3(0) = u_3'(0) = 0$ .

Sa partie supérieure (  $s = L$  ) est libre mais renforcée par une couronne. Sur cette partie, on n'aura qu'une condition sur le déplacement normal :

$$u_3(L) = u_3'(L) = 0. \quad (1.3.2)$$

### 1. 3. 2. Forces appliquées

On étudiera les déplacements de cette coque lorsqu'elle est soumise à deux types de chargement : une pression normale  $f(s)$  exercée sur sa surface latérale et une force axiale  $-\lambda \vec{k}$  exercée sur sa partie haute.

### 1. 4. Calcul de l'énergie totale

L'expression générale de l'énergie de déformation du cylindre est donnée pour un déplacement admissible  $u$ , par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) = & \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \int_0^L [\gamma_{11}^2(u) + \gamma_{22}^2(u) + 2\nu\gamma_{11}(u)\gamma_{11}(u) + 2(1-\nu^2)\gamma_{12}^2(u)] ds \\ & + \frac{Ee^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^L [\rho_{11}^2(u) + \rho_{22}^2(u) + 2\nu\rho_{11}(u)\rho_{11}(u) + 2(1-\nu^2)\rho_{12}^2(u)] ds. \end{aligned}$$

Où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau composant la coque.

On pose pour simplifier :

$$E_1 = \frac{Ee}{2(1-\nu^2)}, \quad E_2 = \frac{Ee^3}{24(1-\nu^2)}.$$

Ce qui donne dans notre cas :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) = E_1 \int_0^L \left\{ \left[ \left( \frac{u_3}{R} + \frac{u_3^2}{2R} \right)^2 + \left( u_2' + \frac{u_3'^2}{2} \right)^2 \right] + 2\nu \left( \frac{u_3}{R} + \frac{u_3^2}{2R} \right) \left( u_2' + \frac{u_3'^2}{2} \right) \right\} ds, \\ + E_2 \int_0^L u_3''^2 ds, \end{aligned}$$

Le travail des forces appliquées pour un déplacement admissible  $u$  est donné par

$$\ell(u) = \int_0^L f u_3 ds - \lambda u_2(L).$$

L'énergie totale du cylindre est donnée par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(u) - \ell(u), \quad u \in V. \quad (1.4.1)$$

Les positions d'équilibre du cylindre correspondent à des extrémums de cette fonctionnelle.

Dans toute la suite, on suppose que  $f \in V_2'$ , dual de  $V_2$  et que  $R \neq 0$ . On posera :  $\mu = \frac{1}{R}$ .

### 1. 5. Notations et rappels sur les espaces de Sobolev

Soit  $I = ]0, L[$ , et  $1 \leq p < +\infty$ . On pose

$$W^{m,p}(I) = \{v \in L^p(I) \ ; \ v^{(k)} \in L^p(I) \ \forall k \leq m, k \in \mathbb{N}\},$$

où les dérivées sont à prendre au sens des distributions, et on note :

$$W^{m,2}(I) = H^m(I).$$

Posons :

$$|v|_{0,p} = \|v\|_{L^p(I)},$$

on munit  $W^{m,p}(I)$  de la norme suivante :

$$\|v\|_{m,p} = \left( \sum_{k=0}^m |v^{(k)}|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et de la semi-norme :

$$|v|_{m,p} = |v^{(m)}|_{0,p}.$$



Pour que la fonctionnelle énergie totale  $J(u)$  définie par (1.4.1) ait un sens, on vérifiera qu'il faut choisir  $\vec{u} = (u_2, u_3)$  dans  $V_1 \times V_2$ , où les espaces  $V_1$  et  $V_2$  sont éfinis par :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}, \\ V_2 &= H_0^2(I). \end{aligned}$$

On pose alors :  $V = V_1 \times V_2$ , et on définit sur  $V_2$  la norme et semi-norme suivantes

$$\begin{aligned} |v|_1 &= |v|_{1,2}, & \forall v \in V_2, \\ \|v\| &= |v|_{2,2}, & \forall v \in V_2. \end{aligned}$$

L'application  $\|\cdot\|$  définit bien une norme sur  $V_2$  et elle est associée au produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_I u'' v'' ds, \quad \forall u, v \in V_2$$

**Remarque 1.5.1** Nous rappelons ici que l'injection de  $H^1(I)$  dans  $C^0(\bar{I})$  est continue, ce qui nous assure que  $J(u) < +\infty$ , pour tout  $u \in V$ .

**Proposition 1.5.2** Un déplacement  $u = (u_2, u_3) \in V$  est un point critique de la fonctionnelle  $J$  si et seulement si, il est solution du système différentiel suivant

$$\begin{cases} 2u_2' + 2\nu \frac{u_3}{R} + \nu \frac{u_3^2}{R^2} + u_3'^2 = -\frac{\lambda}{E_1}, \\ u_3^{(4)} + \lambda u_3'' + \mu^2(2\alpha - \lambda\nu)u_3 + 3\alpha\mu^3 u_3^2 + \alpha\mu^4 u_3^3 = f + \nu\mu\lambda, \\ u_2(0) = u_3(0) = u_3(L) = 0, \\ u_2'(0) = u_3'(L) = 0, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

$$\text{où } \alpha = 6 \frac{(1 - \nu^2)}{e^2}.$$

**Démonstration :** La dérivée au sens de Fréchet de la fonctionnelle  $J$  en un point  $u$  est donnée par :

$$\begin{aligned} (J'(u), v) &= E_1 \int_0^L [u_3'^2 + 2u_2' + 2\nu \frac{u_3}{R} + \nu \frac{u_3^2}{R^2}] v_2' ds + \lambda v_2(L) \\ &+ 2E_2 \int_0^L u_3'' v_3'' ds + E_1 \int_0^L [u_3'^2 + 2u_2' + 2\nu \frac{u_3}{R} + \nu \frac{u_3^2}{R^2}] u_3' v_3' ds \\ &+ E_1 \int_0^L [2 \frac{u_3}{R^2} + 2\nu \frac{u_2'}{R} + \nu \frac{u_3'^2}{R} + 3 \frac{u_3^2}{R^3} + \frac{u_3^3}{R^4} + 2\nu \frac{u_3 u_2'}{R^2} \\ &+ \nu \frac{u_3 u_3'^2}{R^2} - \frac{f}{E_1}] v_3 ds. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Les points critiques sont caractérisés par la condition d'Euler :

$$(J'(u), v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

En prenant dans cette relation un point  $v$  de la forme  $v = (v_2, 0)$ ,  $v_2 \in V_2$ , nous obtenons l'équation suivante :

$$E_1 \int_0^L [u_3'^2 + 2u_2' + 2\nu \frac{u_3}{R} + \nu \frac{u_3^2}{R^2}] v_2' ds + \lambda v_2(L) = 0, \quad \forall v_2 \in V_2.$$

En intégrant par parties et en utilisant la condition  $v_2(0) = 0$ , on trouve que  $u$  doit vérifier l'équation différentielle suivante :

$$2u_2' + 2\nu \frac{u_3}{R} + \nu \frac{u_3^2}{R^2} + u_3'^2 = -\frac{\lambda}{E_1}.$$

Et en prenant, à nouveau dans cette relation  $v = (0, v_3)$ ,  $v_3 \in V_2$ , nous obtenons, après des intégrations par parties, l'équation suivante :

$$\int_0^L [u_3^{(4)} + \lambda u_3'' + \mu^2(2\alpha - \lambda\nu)u_3 + 3\alpha\mu^3 u_3^2 + \alpha\mu^4 u_3^3 - f - \nu\lambda\mu] v_3 ds = 0, \quad \forall v_3 \in V_2.$$

Ce qui nous donne la deuxième équation du système (1.5.1).

□

**Remarque 1.5.3** On peut déjà dire qu'étant donnée une fonction  $u_3$  solution de la deuxième équation du système (1.5.1), on lui associe l'unique fonction  $u_2$  (avec la condition  $u_2(0) = 0$ ) définie par :

$$u_2(s) = \frac{1}{2} \int_0^s [-2\nu \frac{u_3}{R} - \nu \frac{u_3^2}{R^2} - u_3'^2 - \frac{\lambda}{E_1}] dt. \quad (1.5.3).$$

Dans toute la suite, on ne traitera que l'équation donnant  $u_3$ , soit :

$$\begin{aligned} u_3^{(4)} + \lambda u_3'' + \mu^2(2\alpha - \lambda\nu)u_3 + 3\alpha\mu^3 u_3^2 + \alpha\mu^4 u_3^3 &= f + \nu\mu\lambda, \\ u_3(0) = u_3(L) = u_3'(0) = u_3'(L) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

## 1. 6. Définitions et propriétés préliminaires

**Définition 1.6.1** Soit  $B$  l'application de  $H^2(I) \times H^2(I)$  dans  $H_0^2(I)$ , qui à  $(u, v)$  associe  $B(u, v)$ , unique solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4}{ds^4} B(u, v) = uv \quad \text{sur } I.$$

On définit alors l'application  $Q$  de  $H^2(I)$  dans  $H_0^2(I)$  par :

$$Q(u) = B(u, u), \quad \forall u \in H_0^2(I).$$

**Proposition 1.6.2** *L'application  $B$  est bilinéaire, symétrique et compacte. L'application  $Q$  est complètement continue. De plus, on a :*

$$\int_I B(u, v)'' w'' ds = \int_I uvw ds, \quad \forall (u, v) \in [H^2(I)]^2, \quad \forall w \in H_0^2(I),$$

$$Q(\alpha u) = \alpha^2 Q(u), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in H^2(I).$$

**Démonstration :** La bilinéarité et la symétrie de  $B$  ainsi que la première égalité sont immédiates.

Soit  $(u, v) \in (H^2(I))^2$ , nous avons pour tout  $w \in H_0^2(I)$  :

$$\langle B(u, v), w \rangle = \int_I uvw ds,$$

ce qui entraîne que :

$$|\langle B(u, v), w \rangle| \leq C \|w\| \|u\|_{L^4(I)} \|v\|_{L^4(I)},$$

D'autre part, on peut écrire, car  $B$  est à valeurs dans  $H_0^2(I)$ , que :

$$\|B(u, v)\| = \sup_{w \in H_0^2(I) \setminus \{0\}} \frac{\langle B(u, v), w \rangle}{\|w\|} \leq C \|w\| \|u\|_{L^4(I)} \|v\|_{L^4(I)}.$$

L'application  $B$  est donc continue de  $L^4(I)$  dans  $H_0^2(I)$ . Puisque l'injection de  $H^2(I)$  dans  $L^4(I)$  est compacte,  $B$  est compacte de  $H^2(I)$  dans  $H_0^2(I)$ .

Le fait que  $Q$  soit complètement continue se déduit immédiatement de la compacité de  $B$ .

□

### Définition 1.6.3

- Soit  $L_0$  l'application de  $H^2(I)$  dans  $H_0^2(I)$  qui à  $u$  fait correspondre  $L_0(u)$ , unique solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4}{ds^4} L_0(u) = u \quad \text{sur } I.$$

- Soit  $T$  l'application de  $H^2(I)$  dans  $H_0^2(I)$  qui à  $u$  fait correspondre  $T(u)$ , unique solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4}{ds^4} T(u) = -u'' \quad \text{sur } I.$$

$L_0$  et  $T$  sont bien définies car  $u$  (resp.  $u''$ ) sont dans  $L^2(I)$  pour un  $u$  dans  $H^2(I)$ .

**Proposition 1.6.4** *Les opérateurs  $L_0$  et  $T$  sont linéaires, continus, compacts, autoadjoints et positifs. De plus, nous avons :*

$$\int_I L_0(u)''v'' ds = \int_I uv ds, \quad \forall (u, v) \in [H^2(I)]^2,$$

$$\int_I T(u)''v'' ds = \int_I u'v' ds, \quad \forall (u, v) \in [H_0^2(I)]^2.$$

**Proposition 1.6.5** *Toutes les valeurs propres de l'opérateur  $T$  sont simples et strictement positives.*

**Démonstration :** Soit  $\beta$  une valeur propre de  $T$  et  $\phi$  un vecteur propre associé; ils vérifient :

$$\begin{cases} \beta\phi^{(4)} + \phi'' = 0, \\ \phi \in H_0^2(I). \end{cases} \quad (1.6.1)$$

Il est facile de voir que  $\beta = 0$  n'est pas valeur propre de  $T$ .

On pose  $\lambda = \frac{1}{\beta}$ , les solutions du système (1.6.1) ont alors l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{(2i\pi)^2}{L^2}, & i \in \mathbb{N}^*, \\ \phi_i(s) = 1 - \cos\left(\frac{2i\pi s}{L}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{4\omega_i^2}{L^2}, & \omega_i < 0 \text{ solution de } \tan(\omega_i) = \omega_i, \quad i \in \mathbb{N}^*, \\ \phi_i(s) = \frac{s}{L} - \frac{1}{2\omega_i} \sin\left(\frac{2\omega_i s}{L}\right) + \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\omega_i s}{L}\right) - 1 \right]. \end{cases}$$

□

**Définition 1.6.6** *Soit  $G$  l'application de  $[H^2(I)]^3$  dans  $H_0^2(I)$  qui à  $(u, v, w)$  fait correspondre  $G(u, v, w)$  unique solution de l'équation différentielle :*

$$\frac{d^4}{ds^4} G(u, v, w) = uvw \text{ sur } I.$$

On définit l'application  $C$  de  $H^2(I)$  dans  $H_0^2(I)$  par :

$$C(u) = G(u, u, u), \quad \forall u \in H_0^2(I).$$

On voit que  $G$  est trilinéaire, compacte, qu'elle ne dépend pas de l'ordre des variables  $u, v$  et  $w$  et que  $C$  est complètement continue.

Nous avons de plus :

$$\int_I G(u, v, w)'' \phi'' ds = \int_I uvw \phi ds, \quad \forall (u, v, w) \in [H^2(I)]^3, \forall \phi \in H_0^2(I),$$

$$C(\alpha u) = \alpha^3 C(u), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \forall u \in H^2(I).$$

### 1. 7. Existence et régularité des solutions

Dans ce paragraphe, on montre que les solutions de l'équation (1.5.4) sont des points critiques d'une fonctionnelle  $\mathcal{J}$  qui est faiblement séquentiellement s.c.i et coercive sur  $H_0^2(I)$ , ce qui nous garantit l'existence d'une solution de cette équation pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $f \in (V_2)'$ . On montre ensuite que la régularité de cette solution n'est limitée que par celle de  $f$ .

Nous établissons des estimations a priori sur ces solutions afin de donner une condition suffisante sur  $\lambda$  et  $f$  qui garantit l'unicité de la solution.

**Proposition 1.7.1** *Toute solution de l'équation (1.5.4) est un point critique de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  définie sur  $V_2$  par :*

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L \{v''^2 - \lambda v'^2 + \mu^2[(2\alpha - \nu\lambda)v^2 + 2\alpha\mu v^3 + \frac{\alpha}{2}\mu^2 v^4] - 2(\nu\mu\lambda + f)v\} ds.$$

**Démonstration :** La dérivée de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  est donnée par :

$$(\mathcal{J}'(u), v) = \int_0^L \{u''v'' - \lambda u'v' + \mu^2[(2\alpha - \nu\lambda)uv + 3\alpha\mu u^2v + \alpha\mu^2 u^3v] - (\nu\mu\lambda + f)v\} ds, \quad \forall v \in V_2.$$

Ce qui donne, après deux intégrations par parties :

$$(\mathcal{J}'(u), v) = \int_0^L \{u^{(4)} + \lambda u'' + \mu^2[(2\alpha - \nu\lambda)u + 3\alpha\mu u^2 + \alpha\mu^2 u^3] - (\nu\mu\lambda + f)v\} v ds, \quad \forall v \in V_2.$$

La condition d'Euler caractérisant les points critiques de  $\mathcal{J}$  est bien équivalente à l'équation (1.5.4). □

**Remarque 1.7.2** *On peut mettre  $\mathcal{J}$  sous la forme  $\mathcal{J} = J_1 + J_2$  avec :*

$$\begin{cases} J_1(v) = \frac{1}{2} \int_0^L [v''^2 - \lambda v'^2 - \nu\mu^2 \lambda v^2] ds - \int_0^L (\nu\mu\lambda + f)v ds, \\ J_2(v) = \frac{\alpha\mu^4}{4} \int_0^L v^2 \left(v + \frac{2}{\mu}\right)^2 ds. \end{cases}$$

**Lemme 1.7.3** La fonctionnelle  $J_2$ , vérifie les trois propriétés :

- (i)  $\forall v \in H_0^2(I) \setminus \{0\} \quad J_2(v) > 0; \quad J_2(0) = 0,$
- (ii)  $J_2$  est indéfiniment dérivable sur  $H_0^2(I),$
- (iii)  $J_2$  est faiblement continue sur  $H_0^2(I).$

**Démonstration :**

Les points (i) et (ii) sont immédiats à partir de la définition de  $J_2.$

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $H_0^2(I)$  qui converge faiblement vers  $v \in H_0^2(I).$

On sait que l'injection  $H_0^2(I) \subset L^p(I)$  est compacte pour tout  $p \geq 1$  (Adams[1976]), ce qui entraîne que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement dans  $L^p(I).$

On a :

$$J_2(v_n) = \frac{\alpha\mu^4}{4} \left( \int_0^L v_n^4 ds + \frac{4}{\mu} \int_0^L v_n^3 ds \right) + \alpha\mu^2.$$

On regarde le comportement de chacun de ses termes quand  $n$  tend vers  $+\infty.$

$$- \int_0^L v_n^4 ds \longrightarrow \int_0^L v^4 ds,$$

$$- \int_0^L v_n^3 ds \longrightarrow \int_0^L v^3 ds.$$

Ce qui nous donne pour  $J_2(v_n) :$

$$J_2(v_n) \longrightarrow \frac{\alpha\mu^4}{4} \left( \int_0^L v^4 ds + \frac{4}{\mu} \int_0^L v^3 ds \right) + \alpha\mu^2 = J_2(v).$$

La fonctionnelle  $J_2$  est donc faiblement continue. □

**Théorème 1.7.4** Il existe au moins un élément  $u \in H_0^2(I)$  tel que :

$$\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v), \quad \forall v \in H_0^2(I).$$

**Démonstration :**

Il suffit de montrer que la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  est faiblement séquentiellement s.c.i et coercive sur  $H_0^2(I).$

- La fonctionnelle  $J_2$  est faiblement continue (lemme 1.7.3) .
- Le terme  $\frac{1}{2} \int_I (v'')^2 ds = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$  est fortement continu et convexe sur  $H_0^2(I)$  donc il est faiblement semi-continu inférieurement.
- Le terme  $\frac{\lambda}{2} \int_I (v')^2 ds = \frac{\lambda}{2} \langle Tv, v \rangle$  est faiblement continu car  $T$  est compact.
- Le terme  $\langle f + \nu\mu\lambda, v \rangle$  est linéaire continu sur  $H_0^2(I),$  donc il est faiblement continu.

Nous obtenons ainsi la faible semi-continuité inférieure séquentielle de la fonctionnelle  $\mathcal{J}.$

Coercivité : Supposons que  $\mathcal{J}$  n'est pas coercive, alors il existe une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H_0^2(I)$  et une constante  $M > 0$  telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\| = +\infty \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(v_n) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.7.1)$$

On peut supposer que  $v_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . On pose alors :

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

On a :

$$J_1(v_n) = \frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|v_n\|^2 \int_0^L (w_n'^2 + \nu \mu^2 w_n^2) ds - \|v_n\| \langle \lambda \mu + f, w_n \rangle,$$

$$J_2(v_n) = \frac{\alpha \mu^4}{4} \|v_n\|^4 \int_0^L w_n^2 \left( w_n + \frac{2}{\mu \|v_n\|} \right)^2 ds.$$

Si nous divisons les deux membres de l'inégalité (1.7.1) par  $\|v_n\|^2$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda \int_0^L (w_n'^2 + \nu \mu^2 w_n^2) ds + \frac{\alpha \mu^4}{4} \|v_n\|^2 \int_0^L w_n^2 \left( w_n + \frac{2}{\mu \|v_n\|} \right)^2 ds \\ \leq \frac{M}{\|v_n\|^2} + \frac{\langle \lambda \mu + f, w_n \rangle}{\|v_n\|}. \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée ( $\|w_n\| = 1$ ) donc, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers une limite  $w \in H_0^2(I)$ . Nous avons vu que l'injection de  $H_0^2(I)$  dans  $L^2(I)$  est compacte ce qui entraîne que la suite  $w_n$  converge dans  $L^2(I)$ -fort. De plus, l'injection de  $H_0^2(I)$  dans  $H^1(I)$  est compacte donc, la suite  $(w_n')_{n \in \mathbb{N}}$  va converger elle aussi vers  $w'$  dans  $L^2(I)$ -fort.

Regardons ce qui se passe dans l'inégalité (1.7.2) quand  $n$  va tendre vers  $+\infty$ .

- Le membre de droite de l'inégalité (1.7.2) va tendre vers 0,
- $\int_0^L w_n^2 \left( w_n + \frac{2}{\mu \|v_n\|} \right)^2 ds = \int_0^L w_n^4 ds + \frac{4}{\mu \|v_n\|} \int_0^L \left( w_n^2 + \frac{1}{\mu \|v_n\|} \right) ds \rightarrow \int_0^L w^4 ds$
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda \int_0^L w_n'^2 ds \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda \int_0^L (w'^2 + \nu \mu^2 w^2) ds.$

Si  $w \neq 0$  on aura :  $\int_0^L w^4 ds \neq 0$  et dans ce cas, le terme :

$$\|v_n\|^2 \int_0^L w_n^2 \left( w_n + \frac{2}{\mu \|v_n\|} \right)^2 ds \quad \text{va tendre vers } +\infty \text{ ce qui est impossible donc } w = 0.$$

La relation (1.7.2) entraîne alors que :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda \int_0^L w_n'^2 ds \rightarrow 1 \leq \text{ver} 2 - \frac{1}{2} \lambda \int_0^L (w'^2 + \nu \mu^2 w^2) ds \leq \frac{M}{\|v_n\|^2} + \frac{\langle \lambda \mu + f, w_n \rangle}{\|v_n\|},$$

ce qui implique à nouveau une contradiction car le membre de droite de cette inégalité tend vers 0, tandis que celui de gauche tend vers  $\frac{1}{2}$ .

On a montré que la relation (1.7.1) n'est jamais réalisée. Cela revient à dire que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(v) = +\infty.$$

La fonctionnelle  $\mathcal{J}$  est donc coercive et l'existence d'un minimum est alors une conclusion immédiate (J. CEA[1971]).  $\square$

**Proposition 1.7.5** *Si  $f \in H^m(I)$ ,  $m \geq 0$ , alors, toute solution  $(u_2, u_3)$  du système (1.5.1) possède la régularité suivante :*

$$\begin{aligned} u_2 &\in V_1 \cap H^{m+4}(I), \\ u_3 &\in H_0^2(I) \cap H^{m+4}(I). \end{aligned}$$

*En particulier, si  $f \in L^2(I)$  alors, elle aura la régularité :*

$$\begin{aligned} u_2 &\in V_1(I) \cap H^4(I), \\ u_3 &\in H_0^2(I) \cap H^4(I). \end{aligned}$$

**Démonstration :** Pour  $m = 0$ , la deuxième équation du système (1.5.1) implique que  $u_3^{(4)} \in L^2(I)$  et comme  $u_3$  est dans  $H_0^2(I)$  alors,  $u_3 \in H^4(I)$ . La première équation de ce même système donne alors  $u_2 \in H^4(I)$ . La démonstration se fait par récurrence sur  $m$ .

## 1. 8. Unicité de la solution

Dans ce paragraphe, on prendra  $L=1$ .

On sait que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $V_2$  équivalente à la norme usuelle de  $H^2(I)$ , ce qui entraîne qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\|v\|_{L^2(I)} \leq C\|v\|, \forall v \in V_2,$$

on prendra cette constante égale à 1.

$\lambda_1$  désigne la plus petite des valeurs caractéristiques de l'opérateur  $T$ ,  $\lambda_1 = \frac{4\pi^2}{L^2}$  (proposition 1.6.5).

**Proposition 1.8.1** *Supposons que  $1 - \frac{\alpha\mu^2}{4} > 0$  et que la charge  $\lambda$  vérifie la condition :*

$$1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_1} - \mu^2(\nu|\lambda| + \frac{\alpha}{4}) > 0. \quad (1.8.1)$$



Alors, toute solution  $u_\lambda$  de l'équation (1.5.4) vérifie l'estimation à priori suivante

$$\|u_\lambda\| \leq \frac{\|f\|_0 + \nu\mu|\lambda|}{1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_1} - \mu^2(\nu|\lambda| + \frac{\alpha}{4})}. \quad (1.8.2)$$

**Démonstration :**

En multipliant l'équation (1.5.4) par  $u$  et en intégrant l'identité ainsi obtenue, entre 0 et 1, on trouve :

$$\int_0^1 \{u^{(4)}u + \lambda u''u + \mu^2(2\alpha - \lambda\nu)u^2 + 3\alpha\mu^3u^3 + \alpha\mu^4u^4\} ds = \int_0^1 (f + \nu\mu\lambda)uds,$$

ce qui après des intégrations par parties nous donne :

$$\int_0^1 \{u''^2 - \lambda u^2 + \mu^2[(2\alpha - \lambda\nu)u^2 + 3\alpha\mu u^3 + \alpha\mu^2u^4]\} ds = \int_0^1 (f + \nu\mu\lambda)uds, \quad (1.8.3)$$

on montre que :

$$\int_0^1 [(2\alpha - \lambda\nu)u^2 + 3\alpha\mu u^3 + \alpha\mu^2u^4] ds = \int_0^1 u^2 \left[ \alpha\mu^2 \left( u + \frac{3}{2\mu} \right)^2 - \nu\lambda - \frac{\alpha}{4} \right] ds.$$

La relation (1.8.3) entraîne donc :

$$\int_0^1 [u''^2 - \lambda u'^2 - \mu^2(\nu\lambda + \frac{\alpha}{4})u^2] ds \leq \int_0^1 (f + \nu\mu\lambda)uds.$$

Ce que l'on peut mettre sous la forme :

$$\langle u - \lambda T(u), u \rangle - \mu^2(\nu\lambda + \frac{\alpha}{4}) \int_0^1 u^2 ds \leq \int_0^1 (f + \nu\mu\lambda)uds.$$

D'autre part, on sait que l'opérateur  $T$  vérifie pour tout  $|\lambda| \leq \lambda_1$  :

$$\langle v - \lambda T(v), v \rangle \geq (1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_1}) \|v\|^2, \quad \forall v \in H_0^2(I).$$

Nous avons de plus  $\int_0^1 v^2 ds \leq \|v\|^2$ ,  $\forall v \in H_0^2(I)$ , ce qui nous donne le resultat.  $\square$

**Remarque 1.8.2** La condition (1.8.1) est équivalente à dire que :

$$|\lambda| < \lambda^+(\mu) = \frac{1 - \frac{\alpha\mu^2}{4}}{\nu\mu^2 + \frac{1}{\lambda_1}},$$

avec  $\lambda^+(\mu)$  tendant vers  $\lambda_1$  quand  $\mu$  va tendre vers 0.

**Proposition 1.8.3** *Supposons que  $1 - \frac{\alpha\mu^2}{4} > 0$  et que la pression  $f$  vérifie la condition :*

$$\left(1 - \frac{\alpha\mu^2}{4}\right)^3 - \alpha\mu^4 \|f\|_0^2 > 0. \quad (1.8.4)$$

Alors, il existe une constante  $\lambda^*$ , vérifiant  $0 < \lambda^* < \lambda_1$  et telle que pour tout  $|\lambda| < \lambda^*$ , l'équation (1.5.4) admet une solution unique.

**Démonstration :** Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions de (1.5.4), en soustrayant l'équation vérifiée par  $u_2$  de celle vérifiée par  $u_1$  et en intégrant entre 0 et 1, on trouve :

$$\int_0^1 [(u_1 - u_2)''^2 - \lambda(u_1 - u_2)'^2] ds + \mu^2 I = 0, \quad (1.8.5)$$

où  $I$  est donné par :

$$I = \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 [(2\alpha - \lambda\nu) + 3\alpha\mu(u_1 + u_2) + \alpha\mu^2(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)] ds,$$

il est facile de voir qu'on peut mettre  $I$  sous la forme :

$$I = \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 \left[ \alpha\mu^2 \left(u_1 + u_2 + \frac{3}{2\mu}\right)^2 - \left(\nu\lambda + \frac{\alpha}{4}\right) - \alpha\mu^2 u_1 u_2 \right] ds,$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} |I| &\leq \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 \left| \left[ -\left(\nu\lambda + \frac{\alpha}{4}\right) - \alpha\mu^2 u_1 u_2 \right] \right| ds \\ &\leq \|u_1 - u_2\|^2 \left[ \left(\nu|\lambda| + \frac{\alpha}{4}\right) + \alpha\mu^2 \|u_1\| \|u_2\| \right]. \end{aligned}$$

Nous avons aussi pour  $|\lambda| < \lambda_1$  :

$$\langle u_1 - u_2 - \lambda T(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq \left(1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\right) \|u_1 - u_2\|^2.$$

La relation (1.8.5) nous donne alors l'inégalité suivante :

$$\left(1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_1} - \mu^2 \left(\nu|\lambda| + \frac{\alpha}{4}\right)\right) \|u_1 - u_2\|^2 \leq \alpha\mu^4 \|u_1\| \|u_2\| \|u_1 - u_2\|^2,$$

Or d'après la proposition 1.8.1, on a :

$$\max(\|u_1\|, \|u_2\|) \leq \frac{\|f\|_0 + \nu\mu|\lambda|}{1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_1} - \mu^2 \left(\nu|\lambda| + \frac{\alpha}{4}\right)},$$

ce qui nous donne :

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq A(\lambda) \|u_1 - u_2\|^2$$

avec :

$$A(\lambda) = \alpha\mu^4 \frac{(\|f\|_0 + \nu\mu|\lambda|)^2}{(1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_1} - \mu^2(\nu|\lambda| + \frac{\alpha}{4}))^3}$$

Il faut donc chercher une condition sur  $\lambda$  qui garantisse que  $A < 1$  afin d'assurer  $u_1 = u_2$ .

Comme nous avons supposé que :  $1 - \frac{\alpha\mu^2}{4} > 0$ , la remarque 1.8.2 entraîne alors que la fonction  $A(\cdot)$  est continue sur  $] -\lambda^+(\mu), \lambda^+(\mu)[$  et on aura :

$$A(0) = \frac{\alpha\mu^4 \|f\|_0^2}{(1 - \alpha\frac{\mu^2}{4})^3}$$

Si on suppose que  $A(0) < 1$ , c'est à dire si

$$(1 - \frac{\alpha\mu^2}{4})^3 - \alpha\mu^4 \|f\|_0^2 > 0$$

alors, il existe une constante  $\lambda^*$ , vérifiant  $0 < \lambda^* < \lambda_1$  et telle que pour tout  $|\lambda| < \lambda^*$  on ait  $A(\lambda) < 1$ .

□

**Remarque 1.8.4** La condition (1.8.4) est équivalente à dire que :

$$\|f\|_0^2 < \phi(\mu) = \frac{(1 - \frac{\alpha\mu^2}{4})^3}{\alpha\mu^4}$$

avec  $\phi(\mu) \rightarrow +\infty$  quand  $\mu$  va tendre vers 0.

**Proposition 1.8.5** Supposons que  $1 - \frac{\alpha\mu^2}{4} > 0$  et que la charge  $\lambda < 0$ . Alors, toute solution  $u_\lambda$  de l'équation (1.5.4) vérifie les estimations à priori suivantes :

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_0 &\leq \frac{\|f\|_0 - \nu\mu\lambda}{-\nu\mu^2\lambda}, \\ |u_\lambda|_1 &\leq \frac{\|f\|_0 - \nu\mu\lambda}{-\sqrt{\nu\mu\lambda}}, \\ \|u_\lambda\| &\leq \frac{\|f\|_0 - \nu\mu\lambda}{\sqrt{-\nu\mu^2(1 - \mu^2\frac{\alpha}{4})\lambda}}. \end{aligned} \tag{1.8.6}$$

**Démonstration :**

En multipliant l'équation (1.5.4) par  $u$  et en intégrant entre 0 et 1, on trouve (voir la démonstration de la proposition 1.8.1) :

$$\|u\|^2 - \lambda|u|_1^2 - \nu\mu^2\lambda\|u\|_0^2 \leq \int_0^1 (f + \nu\mu\lambda)uds + \mu^2\frac{\alpha}{4}\|u\|^2,$$

ce qui entraîne que :

$$(1 - \mu^2 \frac{\alpha}{4}) \|u\|^2 - \lambda |u|_1^2 - \nu \mu^2 \lambda \|u\|_0^2 \leq (\|f\|_0 - \nu \mu \lambda) \|u\|_0.$$

Or nous avons supposé que  $\lambda < 0$  et que  $(1 - \mu^2 \frac{\alpha}{4}) > 0$ . On a donc la somme de trois termes positifs qui est inférieure à une certaine quantité donc chacun d'eux est inférieur à cette même quantité. Ce qui donne le résultat.  $\square$

**Proposition 1.8.6** *Si  $1 - \mu^2 \frac{\alpha}{4} > 0$  alors, il existe une charge  $\lambda^{**} < 0$  telle que pour tout  $\lambda < \lambda^{**}$ , l'équation (1.5.4) admet une solution unique.*

**Démonstration :** Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions de l'équation (1.5.4), on a (voir la démonstration de la proposition 1.8.3) :

$$\|u_1 - u_2\|^2 - \lambda |u_1 - u_2|_1^2 - \nu \mu^2 \lambda \|u_1 - u_2\|_0^2 + \alpha \mu^2 I = 0,$$

avec :

$$I = \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 [2 + 3\mu(u_1 + u_2) + \mu^2(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)] ds,$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$I = \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 [\mu^2(u_1 + u_2 + \frac{3}{2\mu})^2 - \frac{1}{4} - \mu^2 u_1 u_2] ds,$$

nous avons alors :

$$(1 - \mu^2 \frac{\alpha}{4}) \|u_1 - u_2\|^2 - \lambda |u_1 - u_2|_1^2 - \nu \mu^2 \lambda \|u_1 - u_2\|_0^2 \leq \alpha \mu^4 \|u_1 - u_2\|_0^2 \|u_1\|_0 \|u_2\|_0. \quad (1.8.7)$$

Si on suppose  $1 - \mu^2 \frac{\alpha}{4} > 0$  alors, on a d'après la proposition 1.8.5, pour tout  $\lambda < 0$  et pour tout  $u$  solution de l'équation (1.5.4) l'estimation suivante :

$$\|u\|_0 \leq \frac{\|f\|_0 - \nu \mu \lambda}{-\nu \mu^2 \lambda}.$$

D'un autre côté, chacun des termes du membre gauche de l'inégalité (1.8.7) est inférieur au membre de droite (car ils sont tous positifs), on a :

$$\|u_1 - u_2\|_0^2 \leq A(\lambda) \|u_1 - u_2\|_0^2,$$

avec

$$A(\lambda) = \frac{(\|f\|_0 - \nu \mu \lambda)^2}{-\nu^3 \lambda^3}$$

La fonction  $A$  vérifie :

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 0,$$

ce qui entraîne qu'il existe un  $\lambda^{**} < 0$  tel que pour tout  $\lambda < \lambda^{**}$ ,  $A(\lambda) < 1$ . On obtient  $\|u_1 - u_2\|_0 = 0$  et l'inégalité (1.8.7) nous donne alors  $\|u_1 - u_2\| = 0$  et donc  $u_1 = u_2$ .

□

Dans la partie suivante de notre étude, on transforme l'équation différentielle (1.5.4) en une équation fonctionnelle, on introduit alors  $\mathbb{F}_0 \in H_0^2(I)$ , unique solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4}{ds^4} \mathbb{F}_0 = f \quad \text{sur } I,$$

la fonction  $\theta \in H_0^2(I)$ , unique solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4}{ds^4} \theta = 1 \quad \text{sur } I.$$

Moyennant les définitions 1.6.1, 1.6.3 et 1.6.6, on montre que l'équation (1.5.4) peut se mettre sous la forme suivante :

$$u_3 - \lambda T(u_3) + \mu^2(2\alpha - \nu\lambda)L_0(u_3) + 3\alpha\mu^3Q(u_3) + \alpha\mu^4C(u_3) + \nu\mu\lambda T(\theta) = \mathbb{F}_0.$$

On fait le changement d'inconnue  $u = \mu^2 u_3$  et on fait sur le chargement volumique  $f$  l'hypothèse suivante : la quantité  $\mu f$  est indépendante de  $\mu$ . On pose alors  $\mathbb{F} = \mu^2 \mathbb{F}_0$ . On montrera la fin (cf. remarque 2.8.1) comment se débarrasser de cette hypothèse. Cette équation devient alors :

$$u - \lambda T(u) + \mu^2(2\alpha - \nu\lambda)L_0(u) + 3\alpha\mu Q(u) + \alpha C(u) + \nu\mu^3 \lambda T(\theta) = \mathbb{F}.$$

Nous allons étudier cette équation sous une forme restreinte en fixant la direction de  $\mathbb{F}$  dans  $H_0^2(I)$  (c'est-à-dire qu'on va remplacer le terme  $\mathbb{F}$  par  $\delta\mathbb{F}$ ). On note  $(\mathcal{E})$  l'équation suivante :

$$u - \lambda T(u) + \mu^2(2\alpha - \nu\lambda)L_0(u) + 3\alpha\mu Q(u) + \alpha C(u) + \nu\mu^3 \lambda T(\theta) = \delta\mathbb{F}. \quad (\mathcal{E})$$

Pour un couple  $(\mu, \delta)$ , on note  $(\mathcal{E}_{\mu, \delta})$ , l'équation correspondant à la recherche des couples  $(\lambda, u)$  tels que quadruplet  $(\lambda, u, \mu, \delta)$  soit solution de l'équation  $(\mathcal{E})$ .

### 1. 9. Etude du cas $\mu = \delta = 0$

On s'intéresse ici à l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  correspondant à  $\mu = \delta = 0$  dans l'équation  $(\mathcal{E})$  :

$$u - \lambda T(u) + 3\alpha C(u) = 0 \quad (\mathcal{E}_{0,0})$$

Nous étudions la bifurcation des solutions de cette équation à partir de la branche triviale  $\{(\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$ . On montre que cette bifurcation a lieu pour  $\lambda = \lambda_i$ , où  $\lambda_i$  est une valeur caractéristique de l'opérateur  $T$  et que le point  $(\lambda_i, 0)$  est un point de bifurcation supercritique ayant lieu à droite.

#### Proposition 1.9.1

- Pour  $\lambda \leq \lambda_1$ , la seule solution de l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  est  $u \equiv 0$ .
- Pour  $\lambda > \lambda_1$ , il existe toujours au moins trois solutions  $(0, u, -u)$ .

**Démonstration :** On remarque que  $u = 0$  est solution de l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  pour tout  $\lambda$  et que si  $u$  est une solution non nulle de cette équation alors,  $-u$  en est une autre. D'autre part, les solutions de cette équation sont des points critiques de la fonctionnelle  $j$  définie sur  $V_2$  par :

$$j(v) = \frac{1}{2} \int_0^L \{v''^2 - \lambda v'^2 + \frac{\alpha}{2} v^4\} ds.$$

L'unicité de la solution de  $(\mathcal{E}_{0,0})$  pour  $\lambda \leq \lambda_1$  se déduit alors des propositions 1.8.3 et 1.8.6.

De la même façon que dans le cas de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$ , on montre que la fonctionnelle  $j$  admet un minimum absolu sur  $V_2$ . Pour  $\lambda > \lambda_1$ , on va montrer que ce minimum absolu n'est pas atteint pour  $u \equiv 0$  en exhibant un  $v$  qui vérifie

$$j(v) < j(0) = 0.$$

Soit  $v = t\phi_1$  ( $\phi_1$  étant un vecteur propre normé associé à  $\lambda_1$ ),  $j(v)$  est alors donnée par :

$$j(v) = \frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + \frac{\alpha}{4} t^4 \int_0^L \phi_1^4(s) ds.$$

Pour  $t$  assez petit,  $j(v)$  aura le signe de  $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$  qui est strictement négatif pour  $\lambda > \lambda_1$ . La fonctionnelle  $j$  prend donc des valeurs strictement négatives ce qui entraîne qu'il existe un  $u \neq 0$  solution de l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  et comme  $-u$  est aussi solution on aura au moins trois solutions.

□

**Lemme 1.9.2** Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $(\lambda_0, 0)$  soit un point de bifurcation de la branche triviale  $\{(\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$  est que  $\lambda_0$  soit une valeur caractéristique de l'opérateur  $T$ . De plus, ces points de bifurcation sont simples.

**Démonstration :**

Soit l'application  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{R} \times V_2$  dans  $\mathbb{R}$  qui à un couple  $(\lambda, u)$  fait correspondre

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = u - \lambda T(u) + \alpha C(u),$$

la dérivée au sens de Fréchet de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $u$  est donnée par :

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, u).v = v - \lambda T(v) + \alpha C'(u).v .$$

Si  $(\lambda_0, 0)$  est un point de bifurcation de la branche triviale  $\{(\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$  alors,  $D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \notin \text{Isom}(H_0^2(I))$  c'est à dire qu'il existe  $v \in H_0^2(I)$  non nul tel que :

$$D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0).v = v - \lambda_0 T(v) = 0,$$

ce qui entraîne que  $\lambda_0$  est une valeur caractéristique de  $T$ .

Soit  $\phi_0$  un vecteur propre associé à  $\lambda_0$  , nous avons :

$$D_{\lambda u}^2 \mathcal{F}(\lambda, u).v = -T(v),$$

ce qui donne :

$$D_{\lambda u}^2 \mathcal{F}(\lambda_0, 0).\phi_0 = -\frac{\phi_0}{\lambda_0} \notin \text{Im}(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)).$$

Le point  $(\lambda_0, 0)$  est bien un point de bifurcation simple (Rappaz[1989]).

□

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la bifurcation de l'ensemble des solutions de l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  par rapport à la branche triviale  $\{(\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$ . On sait grâce au lemme 1.9.2 que celle-ci a lieu en des points de la forme  $(\lambda_i, 0)$ , où  $\lambda_i$  est une valeur caractéristique de l'opérateur  $T$ .

Soit  $\lambda_i$  une valeur caractéristique de l'opérateur  $T$  et  $\phi_i$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$ , on prendra  $\phi_i$  normé et on note :

$$\mathcal{N}_i = \text{Ker}(Id - \lambda_i T).$$

**Théorème 1.9.3** *Si  $\lambda_i$  est une valeur caractéristique de l'opérateur  $T$  alors, le point  $(\lambda_i, 0)$  est un point de bifurcation supercritique ayant lieu à droite de l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$ .*

**Démonstration :** Soit  $(\lambda, u)$  une solution de l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  au voisinage de  $(\lambda_i, 0)$ . Il existe  $\epsilon \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathcal{N}_i^\perp$  tels que :  $u = \epsilon \phi_i + v$ .

En projetant l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  sur  $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_i^\perp$  , nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} (1 - \frac{\lambda}{\lambda_i})\epsilon + \alpha \langle C(\epsilon \phi_i + v), \phi_i \rangle = 0, \\ v - \lambda T(v) + \alpha P_i C(\epsilon \phi_i + v) = 0, \end{cases} \quad (1.9.1)$$

où  $P_i$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{N}_i^\perp$ .

Nous avons besoin du lemme suivant dont la démonstration sera donnée plus loin (voir lemme 2.2.4).

**Lemme 1.9.4** *Il existe  $I_i$  contenant  $\lambda_i$ ,  $I$  contenant 0,  $V_i$  un voisinage de 0 dans  $\mathcal{N}_i^\perp$  et une application de classe  $C^\infty$*

$$v_i : I_i \times I \longrightarrow V_i \quad (v_i(\lambda_i, 0) = 0),$$

tels que les conditions suivantes soient équivalentes :

- (i)  $(\lambda, \epsilon) \in I_i \times I$  et solution de (1.9.1),
- (ii)  $(\lambda, \epsilon) \in I_i \times I$  et solution de
 
$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i})\epsilon + \alpha \langle C[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)], \phi_i \rangle = 0.$$

Soit  $\mathcal{T}_i$  l'application de  $I_i \times I$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\mathcal{T}_i(\lambda, \epsilon) = (1 - \frac{\lambda}{\lambda_i})\epsilon + \alpha \langle C[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)], \phi_i \rangle.$$

Les premières dérivées de  $\mathcal{T}_i$  sont données par :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \mathcal{T}_i(\lambda, \epsilon) &= -\frac{\epsilon}{\lambda_i} + \alpha \langle C'[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].\partial_\lambda v_i(\lambda, \epsilon), \phi_i \rangle, \\ \partial_\epsilon \mathcal{T}_i(\lambda, \epsilon) &= (1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}) + \alpha \langle C'[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].(\phi_i + \partial_\epsilon v_i(\lambda, \epsilon)), \phi_i \rangle, \\ \partial_{\lambda, \epsilon}^2 \mathcal{T}_i(\lambda, \epsilon) &= -\frac{1}{\lambda_i} + \alpha \langle C'[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].\partial_{\lambda, \epsilon}^2 v_i(\lambda, \epsilon), \phi_i \rangle \\ &\quad + \alpha \langle C''[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].(\phi_i + \partial_\epsilon v_i(\lambda, \epsilon), \partial_\lambda v_i(\lambda, \epsilon)), \phi_i \rangle, \\ \partial_{\epsilon, \epsilon}^2 \mathcal{T}_i(\lambda, \epsilon) &= \alpha \langle C'[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].\partial_{\epsilon, \epsilon}^2 v_i(\lambda, \epsilon), \phi_i \rangle \\ &\quad + \alpha \langle C''[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].(\phi_i + \partial_\epsilon v_i(\lambda, \epsilon))^2, \phi_i \rangle, \\ \partial_{\epsilon \epsilon \epsilon}^3 \mathcal{T}_i(\lambda, \epsilon) &= \alpha \langle C'[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].\partial_{\epsilon \epsilon \epsilon}^3 v_i(\lambda, \epsilon), \phi_i \rangle \\ &\quad + \alpha \langle C'''[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].(\phi_i + \partial_\epsilon v_i(\lambda, \epsilon))^3, \phi_i \rangle \\ &\quad + 3\alpha \langle C''[\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)].(\phi_i + \partial_\epsilon v_i(\lambda, \epsilon), \partial_{\epsilon \epsilon}^2 v_i(\lambda, \epsilon)), \phi_i \rangle. \end{aligned}$$

On sait aussi que  $v_i$  vérifie l'équation :

$$v_i(\lambda, \epsilon) - \lambda T(v_i(\lambda, \epsilon)) + \alpha P_i C(\epsilon\phi_i + v_i(\lambda, \epsilon)) = 0,$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \partial_\epsilon v_i(\lambda_i, 0) &= 0, \\ \partial_{\epsilon \epsilon}^2 v_i(\lambda_i, 0) &= 0. \end{aligned}$$



On aura donc :

$$\begin{aligned}
 \partial_\lambda \mathcal{T}_i(\lambda_i, 0) &= 0, \\
 \partial_\epsilon \mathcal{T}_i(\lambda_i, 0) &= 0, \\
 \partial_{\lambda\epsilon}^2 \mathcal{T}_i(\lambda_i, 0) &= -\frac{1}{\lambda_i} < 0, \\
 \partial_{\epsilon\epsilon}^2 \mathcal{T}_i(\lambda_i, 0) &= 0, \\
 \partial_{\epsilon\epsilon\epsilon}^3 \mathcal{T}_i(\lambda_i, 0) &= \alpha \langle C'''(0), \phi_i, \phi_i, \phi_i, \phi_i \rangle = 6\alpha \langle G(\phi_i, \phi_i, \phi_i), \phi_i \rangle \\
 &= 6\alpha \int_0^L \phi_i^4 ds > 0.
 \end{aligned}$$

Ceci nous garantit que le point  $(\lambda_i, 0)$  est bien un point de bifurcation supercritique de l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  (Rabier[1982]).

□

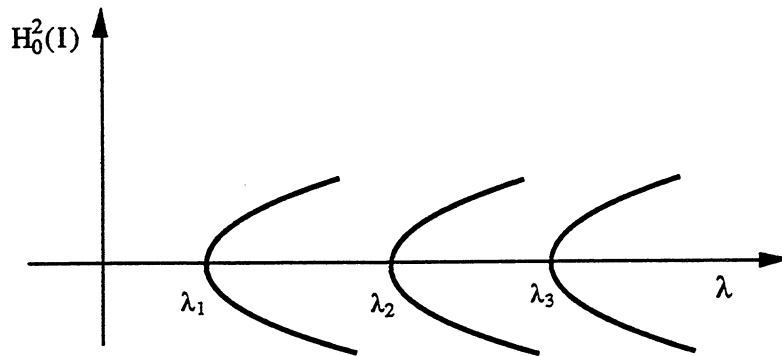


Figure 2

Nous obtenons le diagramme de bifurcation de la figure (fig 2) pour l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$ . Il nous reste donc à voir comment va se déformer ce diagramme si on perturbe l'équation  $(\mathcal{E}_{0,0})$  (i.e.  $\mu$  et  $\delta$  petits mais non nuls).

Golubitsky et Schaffer[1979] ont établi que d'une façon générale, la perturbation d'un point de bifurcation associé à une valeur propre simple conduit à un nombre fini de diagrammes possibles pour l'ensemble des solutions de l'équation perturbée.

Dans notre cas, nous allons montrer dans la suite que les seuls diagrammes pouvant décrire l'ensemble des solutions de l'équation  $(\mathcal{E}_{\mu,\delta})$  perturbée ( $\mu$  et  $\delta$

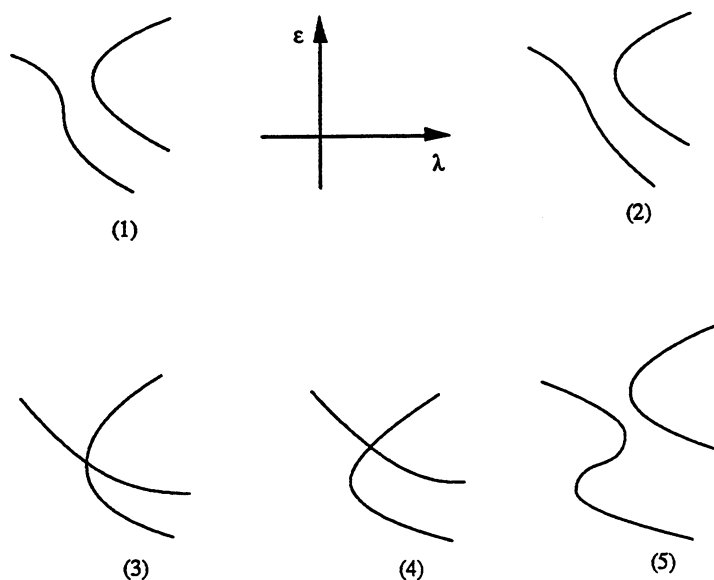


Figure 3

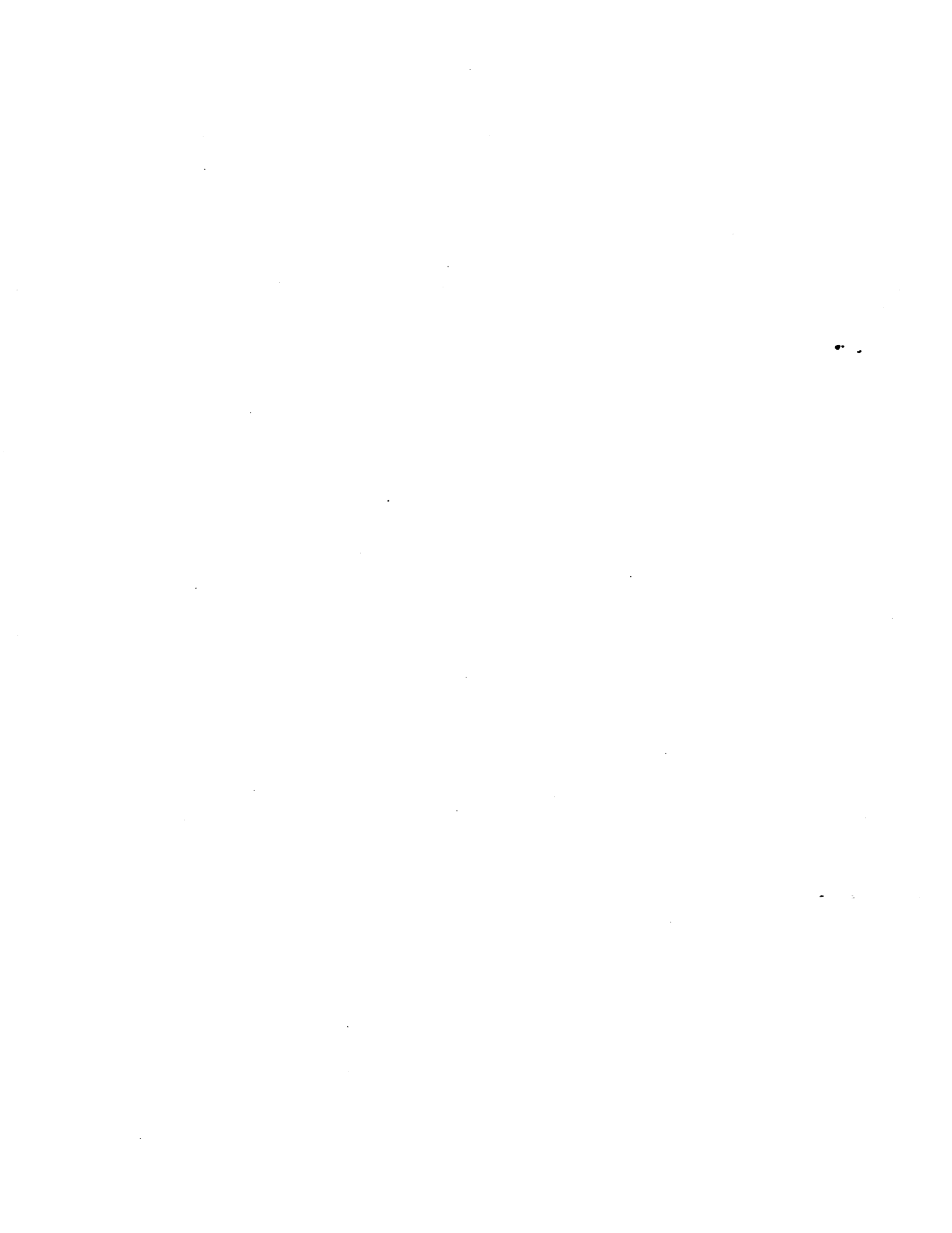
fixés et petits) sont les cinq de la figure (fig 3). Ces diagrammes sont exacts en ce qui concerne le nombre de solutions  $\epsilon$  à  $\lambda$  fixé.

Cependant, leur résultat ne permet pas pour une valeur donnée des paramètres de perturbation ( $\mu$  et  $\delta$ ) de déterminer sans ambiguïté le diagramme des solutions (parmi ces cinq) de l'équation perturbée correspondante.

**Remarque 1.9.5** *Ces cinq diagrammes ne se distinguent pas par leur seul nombre de points singuliers. En effet, les diagrammes (3) et (2) ont chacun un point singulier, les diagrammes (4) et (1) ont chacun deux points singuliers. Le seul diagramme reconnaissable par son nombre de points singuliers est le diagramme (5).*

*Pour pouvoir distinguer ces diagrammes, il faut en plus du nombre, déterminer la nature (bifurcation, hystérésis, retournement) de ces points.*

Nous montrons dans la suite, à partir des résultats obtenus par ces auteurs et en suivant une démarche constructive introduite par P.Rabier[1982] et B.Rao[1989], comment déterminer sans ambiguïté ces diagrammes. Cette méthode est basée sur la notion de solutions  $\epsilon$ -singulières.



# Chapitre 2.

## Etude de la bifurcation perturbée

### 2. 1. Introduction :

Nous allons effectuer dans ce chapitre un étude locale des bifurcations de l'équation  $(\mathcal{E})$ . On cherche à déterminer l'ensemble des quadruplets  $(\lambda, u, \mu, \delta)$  qui sont solutions de l'équation  $(\mathcal{E})$ , au voisinage de  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  dans  $\mathbb{R} \times V_2 \times \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda_i$  étant la  $i$ ème valeur caractéristique de l'opérateur  $T$ .

On imposera à ces solutions de vérifier en plus de l'équation  $(\mathcal{E})$  une nouvelle condition :

$$Id - \lambda T + \mu^2(2\alpha - \nu\lambda)L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u) \notin \text{Isom}(\mathcal{N}_i^\perp) \quad (2.1.1)$$

On parle alors d'une solution  $u$ -singulière de l'équation  $(\mathcal{E})$ .

On commence par faire une réduction du problème par la méthode de Lyapounov-Schmidt; on décompose  $u$  sous la forme :

$$u = \varepsilon\phi_i + v, \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad v \in \mathcal{N}_i^\perp$$

L'équation  $(\mathcal{E})$  est remplacée par une nouvelle équation :

$$\tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \quad (E).$$

La condition supplémentaire se transforme alors en :

$$\partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0.$$

On parle, pour un quadruplet  $(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)$  vérifiant cette condition, de solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E)$ .

On montre que dans notre cas, ces solutions  $\varepsilon$ -singulières sont soit des points de bifurcation simples, des points de retournement non dégénérés ou des points d'hystérésis.

On commence par déterminer l'ensemble des solutions de l'équation  $(\hat{E})$  au voisinage des solutions  $\varepsilon$ -singulières, puis en introduisant la notion de voisinage adapté, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  dans ce voisinage (adapté).

On aboutit à une partition du plan des paramètres de perturbation  $(\mu, \delta)$  en cinq régions. A chacune de ces régions va correspondre un diagramme parmi les cinq prévus par la théorie de Golubitsky et Schaffer[1979]

Dans cette étude, on s'est beaucoup inspiré du travail de Ciarlet et Rabier[1980] sur les équations de von Kármán et surtout celui de Rao[1989] pour les équations de Marguerre von Kármán.

## 2. 2. Réduction du problème :

On étudie ici les solutions, pour  $\delta$  et  $\mu$  petits de l'équation  $(\mathcal{E})$  au voisinage de  $(\lambda_i, 0) \in \mathbb{R} \times H_0^2(I)$ .

Pour déterminer les points de bifurcation de  $(\mathcal{E})$ , on ajoute une condition supplémentaire :

$$Id - \lambda T + \mu^2(2\alpha - \nu\lambda)L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u) \notin \text{Isom}(\mathcal{N}_i^\perp) \quad (2.2.1)$$

en effet, si cette condition n'est pas vérifiée, le théorème des fonctions implicites nous donne que l'ensemble des solutions de l'équation  $(\mathcal{E})$  est constitué par une courbe de classe  $C^\infty$ .

**Remarque 2.2.1** *L'application  $Id - \lambda T + \mu^2(2\alpha - \nu\lambda)L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u)$  est compacte. En effet, les applications  $Q$  et  $C$  sont complètement continues (cf. 1.6.4 et 1.6.6) et donc  $Q'$  et  $C'$  sont compacts (Krasnosel'ski[1964]). La condition (2.2.1) est vérifiée si la perturbation compacte de l'identité :*

$$Id - \lambda T + \mu^2(2\alpha - \nu\lambda)L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u)$$

*n'est pas injective.*

**Définition 2.2.2** *Nous appelons solution  $u$ -singulière de l'équation  $(\mathcal{E})$  (resp.  $(\mathcal{E}_{\mu\delta})$ ), tout quadruplet  $(\lambda, u, \mu, \delta)$  (resp. couple  $(\lambda, u)$ ) solution de cette équation et tel que la condition (2.2.1) soit réalisée.*

On commence par faire un réduction du problème par la méthode de Lyapounov-Schmidt.

**Lemme 2.2.3** *Il existe  $\hat{W}_i$  un voisinage de  $(\lambda_i, 0)$  dans  $\mathbb{R} \times H_0^2(I)$ ,  $\hat{I}_3$  un intervalle contenant 0 dans  $\mathbb{R}$  et  $\theta_i$  une fonction de classe  $C^\infty$  de  $\hat{W}_i \times \hat{I}_3$  dans  $H_0^2(I)$ , tels que les conditions suivantes soient équivalentes :*

$$(i) \quad (\lambda, u, \mu) \in \hat{W}_i \times \hat{I}_3, \text{ vérifiant la condition (2.2.1)}$$

$$(ii) \quad \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 \langle L_0[\phi_i + \theta_i(\lambda, u, \mu)], \phi_i \rangle,$$

$$+ 3\alpha\mu \langle Q'[\phi_i + \theta_i(\lambda, u, \mu)], \phi_i \rangle + \alpha \langle C'[\phi_i + \theta_i(\lambda, u, \mu)], \phi_i \rangle = 0.$$

*De plus,  $\text{Ker}(Id - \lambda T + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u))$  est de dimension 1 et est engendré par :  $\phi_i + \theta_i(\lambda, u, \mu)$ .*

**Démonstration :**

Soit  $h \in H_0^2(I)$ ,  $h \neq 0$  tel que :

$$h - \lambda T(h) + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0(h) + 3\alpha\mu Q'(u).h + \alpha C'(u).h = 0, \quad (2.2.2)$$

utilisons la décomposition de  $H_0^2(I)$  en somme direct de  $\mathcal{N}_i$  et de son orthogonal ce qui donne  $h = \xi\phi_i + \eta$ , avec  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $\eta \in \mathcal{N}_i^\perp$ .

En projetant la relation (2.2.2) sur  $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_i^\perp$  et en notant  $P_i$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{N}_i^\perp$ , nous obtenons les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1 - \frac{\lambda}{\lambda_i})\xi + \mu^2(2\alpha - \nu\lambda)\xi\langle L_0(\phi_i), \phi_i \rangle + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2\langle L_0(\eta), \phi_i \rangle \\ + 3\alpha\mu\xi\langle Q'(u), \phi_i, \phi_i \rangle + 3\alpha\mu\langle Q'(u), \eta, \phi_i \rangle \\ + \alpha\xi\langle C'(u), \phi_i, \phi_i \rangle + \alpha\langle C'(u), \eta, \phi_i \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} [Id - \lambda T + P_i[(2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u)]]\eta \\ + \xi P_i[3\alpha\mu^2 Q'(u) + \alpha C'(u)] + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0 \phi_i = 0. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Or, la restriction de  $Id - \lambda_i T$  à l'espace  $\mathcal{N}_i^\perp$  est un isomorphisme de  $\mathcal{N}_i^\perp$  sur lui-même et  $Isom(\mathcal{N}_i^\perp)$  est un ouvert, on en déduit par continuité qu'il existe un ouvert  $\hat{I}_3$  contenant 0 dans  $\mathbb{R}$  et un voisinage  $\hat{W}_i$  de  $(\lambda_i, 0)$  dans  $\mathbb{R} \times H_0^2(I)$ , tels que pour tout  $(\lambda, u, \mu) \in \hat{W}_i \times \hat{I}_3$ , on ait :

$$Id - \lambda T + P_i[(2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u)] \in Isom(\mathcal{N}_i^\perp).$$

La relation (2.2.4) est équivalente, pour  $(\lambda, u, \mu) \in \hat{W}_i \times \hat{I}_3$ , à :

$$\eta = \xi \theta_i(\lambda, u, \mu), \quad (2.2.5)$$

où  $\theta_i$  est une application de  $\hat{W}_i \times \hat{I}_3$  dans  $\mathcal{N}_i^\perp$  définie par :

$$\begin{aligned} \theta_i(\lambda, u, \mu) = -\xi [Id - \lambda T + P_i[(2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u)]]^{-1} \\ P_i[3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u) + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0] \phi_i. \end{aligned}$$

$\theta_i$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\hat{W}_i \times \hat{I}_3$  et elle vérifie :  $\theta_i(\lambda_i, 0, 0) = 0$ .

En reportant (2.2.5) dans la relation (2.2.3), on obtient l'équivalence entre les points (i) et (ii).

Le vecteur  $h$  est donné d'après la relation (2.2.5) par :

$$h = \xi[\phi_i + \theta_i(\lambda, u, \mu)],$$

ceci montre que  $Ker(Id - \lambda T + [(2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0 + 3\alpha\mu Q'(u) + \alpha C'(u)])$  est de dimension 1 et engendré par le vecteur  $\phi_i + \theta_i(\lambda, u, \mu)$ .

□

**Lemme 2.2.4** *Il existe  $I_{1,i}$  contenant  $\lambda_i$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$  contenant 0,  $V_i$  un voisinage de 0 dans  $\mathcal{N}_i^\perp$  et une application  $v_i$  de classe  $C^\infty$*

$$v_i : I_{1,i} \times I_2 \times I_3 \times I_4 \longrightarrow V_i,$$

tels que les conditions suivantes soient équivalentes :

(i)  $(\lambda, u, \mu, \delta) \in I_{1,i} \times (I_2 \times V_i) \times I_3 \times I_4$  et solution de  $(\mathcal{E})$ ,

(ii)  $(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) \in I_{1,i} \times I_2 \times I_3 \times I_4$  et solution de

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\varepsilon + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 \langle L_0[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\ & + 3\alpha\mu \langle Q[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle + \alpha \langle C[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\ & + \frac{\lambda}{\lambda_i} \nu\mu^3 \langle \theta, \phi_i \rangle - \delta \langle \mathbf{F}, \phi_i \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

### Démonstration :

Soit  $(\lambda, u, \mu, \delta)$  solution de l'équation  $(\mathcal{E})$ . En utilisant la décomposition de  $H_0^2(I)$  en somme directe des espaces  $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_i^\perp$ , on met  $u$  sous la forme :  $u = \varepsilon\phi_i + v$ , avec  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathcal{N}_i^\perp$ . L'équation  $(\mathcal{E})$  projetée sur  $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_i^\perp$ , donne les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\varepsilon + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 \langle L_0(\varepsilon\phi_i + v), \phi_i \rangle + 3\alpha\mu \langle Q(\varepsilon\phi_i + v), \phi_i \rangle \\ & + \alpha \langle C(\varepsilon\phi_i + v), \phi_i \rangle + \frac{\lambda}{\lambda_i} \nu\mu^3 \langle \theta_i, \phi_i \rangle - \delta \langle \mathbf{F}, \phi_i \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} & v - \lambda T(v) + P_i[(2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0(\varepsilon\phi_i + v) + 3\alpha\mu^2 Q(\varepsilon\phi_i + v) \\ & + \alpha C(\varepsilon\phi_i + v) + \lambda\nu\mu^3 T(\theta) - \delta\mathbf{F}] = 0. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Soit  $G$  l'application de  $\mathcal{N}_i^\perp \times \mathbb{R}^4$  dans  $\mathcal{N}_i^\perp$  définie par :

$$\begin{aligned} G(v, \lambda, \varepsilon, \mu, \delta) &= v - \lambda T(v) + P_i[(2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 L_0(\varepsilon\phi_i + v) \\ & + 3\alpha\mu Q(\varepsilon\phi_i + v) + \alpha C(\varepsilon\phi_i + v) + \lambda\nu\mu^3 T(\theta) - \delta\mathbf{F}]. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

On vérifie que  $G$  est de classe  $C^\infty$  et que nous avons les deux relations suivantes

$$\begin{aligned} G(0, \lambda_i, 0, 0, 0) &= 0, \\ \partial_v G(0, \lambda_i, 0, 0, 0) &= (Id - \lambda_i T) \in \text{Isom}(\mathcal{N}_i^\perp). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Il existe donc d'après le théorème des fonctions implicites un voisinage ouvert  $V_i$  de 0 dans  $\mathcal{N}_i^\perp$ , un intervalle ouvert  $I_{i,1}$  contenant  $\lambda_i$ , trois intervalles  $I_2, I_3$  et  $I_4$  contenant 0 et une application  $v_i$  de classe  $C^\infty$  :

$$v_i : (\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) \in I_{i,1} \times I_2 \times I_3 \times I_4 \rightarrow V_i$$

tels que l'équation (2.2.8) dans  $I_{i,1} \times (I_2 \times V_i) \times I_3 \times I_4$  soit équivalente à :

$$(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) \in I_{i,1} \times I_2 \times I_3 \times I_4 \quad \text{et} \quad v = v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) \quad (2.2.11)$$

En reportant cette valeur de  $v$  dans la relation (2.2.7), on obtient l'équivalence entre les points (i) et (ii).

□

**Remarque 2.2.5** *On supposera dans toute la suite de cette étude que :  $\hat{W}_i = I_{1,i} \times (I_2 \times V_i)$ ,  $\hat{I}_3 = I_3$  et  $W_i = I_{1,i} \times I_2$ . Ceci est possible, car on peut supposer, grâce au caractère local du théorème des fonctions implicites, que  $I_{1,i} \times (I_2 \times V_i)$  est inclu dans  $\hat{W}_i$  et le lemme 2.2.3 reste vrai si on restreint l'ouvert  $\hat{W}_i$ .*

**Proposition 2.2.6** *Les dérivées de la fonction  $v_i$  au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  sont données par :*

$$\begin{aligned} \partial_\lambda v_i(\lambda_i, 0, 0, 0) &= 0, \\ \partial_\delta v_i(\lambda_i, 0, 0, 0) &= (Id - \lambda_i T)^{-1} P_i(\mathcal{IF}), \\ \partial_\mu v_i(\lambda_i, 0, 0, 0) &= 0, \\ \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) &= \theta_i(\lambda, \varepsilon \phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta), \mu), \\ \partial_\varepsilon v_i(\lambda_i, 0, 0, 0) &= 0, \\ \partial_{\varepsilon, \varepsilon}^2 v_i(\lambda_i, 0, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

### Démonstration.

En remplaçant  $v$  dans la relation (2.2.8) par  $v_i$  donné par la relation (2.2.11) et en dérivant l'identité ainsi obtenue par rapport à  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\delta$ , on obtient le résultat.

□

**Proposition 2.2.7** *L'application  $C^\infty$  suivante :*

$$\mathcal{I}_i : I_{1,i} \times I_2 \times I_3 \times I_4 \longrightarrow I_{1,i} \times (I_2 \times V_i) \times I_3 \times I_4$$

$$(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) \longmapsto (\lambda, \varepsilon \phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta), \mu, \delta)$$

*est une immersion en  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$ , injective dans  $I_{1,i} \times I_2 \times I_3 \times I_4$  et réalise une bijection entre  $(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)$  vérifiant (2.2.6) et  $(\lambda, u, \mu, \delta) \in I_{1,i} \times (I_2 \times V_i) \times I_3 \times I_4$  solution de l'équation ( $\mathcal{E}$ ).*



**Démonstration :**

Soit deux quadruplets  $(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)$  et  $(\lambda', \varepsilon', \mu', \delta')$  tels que :

$$\mathcal{I}_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = \mathcal{I}_i(\lambda', \varepsilon', \mu', \delta'),$$

alors  $\lambda = \lambda', \mu = \mu', \delta = \delta'$  et

$$\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = \varepsilon'\phi_i + v_i(\lambda', \varepsilon', \mu', \delta'),$$

or  $v_i \in \mathcal{N}_i^\perp$  donc cette relation projetée sur  $\mathcal{N}_i$  nous donne  $\varepsilon = \varepsilon'$  ce qui entraîne que  $\mathcal{I}_i$  est injective.

La surjectivité de  $\mathcal{I}_i$  est garantie par l'équivalence des points (i) et (ii) du lemme 2.2.4.

La dérivée de  $\mathcal{I}_i$  au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  est donnée par :

$$D\mathcal{I}_i(\lambda_i, 0, 0, 0)(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = (\lambda, \varepsilon\phi_i + \delta(Id - \lambda_i T)^{-1} P_i(\mathbb{F}), \mu, \delta),$$

cette dérivée est bien injective, ce qui entraîne que  $\mathcal{I}_i$  est une immersion en  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$ .

Pour un couple  $(\mu, \delta)$  fixé dans  $I_2 \times I_3$  on note  $\mathcal{I}_{i, \mu\delta}$  l'application :

$$\mathcal{I}_{i, \mu\delta} : (\lambda, \varepsilon) \longmapsto (\lambda, \varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)).$$

Cette application réalise une bijection entre les solutions de l'équation  $(E_{\mu\delta})$  et celles de  $(\mathcal{E}_{\mu\delta})$ .

□

**Définition 2.2.8** - Nous appellerons dans toute la suite  $\tau_i$  l'application de classe  $C^\infty$  suivante :

$$\tau_i : I_{1,i} \times I_2 \times I_3 \times I_4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) \longmapsto & \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\varepsilon + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 \langle L_0[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\ & + 3\alpha\mu \langle Q[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle + \alpha \langle C[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\ & + \frac{\lambda}{\lambda_i} \nu \mu^3 \langle \theta, \phi_i \rangle - \delta \langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Les premières dérivées de cette application sont données par :

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = & \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) + (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 \langle L_0[\phi_i + \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\ & + 3\alpha\mu \langle Q'[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].(\phi_i + \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)), \phi_i \rangle \\ & + \alpha \langle C'[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].(\phi_i + \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)), \phi_i \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) &= (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 \langle L_0[\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\
&+ 3\alpha\mu \langle Q'[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta), \phi_i \rangle \\
&+ 3\alpha\mu \langle Q''[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].(\phi_i + \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta))^2, \phi_i \rangle \\
&+ \alpha \langle C'[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta), \phi_i \rangle \\
&+ \alpha \langle C''[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].(\phi_i + \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta))^2, \phi_i \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) &= (2\alpha - \nu\lambda)\mu^2 \langle L_0[\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\
&+ 3\alpha\mu \langle Q'[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta), \phi_i \rangle \\
&+ 9\alpha\mu \langle Q''[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].(\phi_i + \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta), \partial_{\varepsilon\varepsilon} v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)), \phi_i \rangle \\
&+ \alpha \langle C'[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta), \phi_i \rangle \quad \cdot \cdot \\
&+ 3\alpha \langle C''[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].(\phi_i + \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta), \partial_{\varepsilon\varepsilon} v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)), \phi_i \rangle, \phi_i \rangle \\
&+ \alpha \langle C'''[\varepsilon\phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)].(\phi_i + \partial_\varepsilon v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta))^3, \phi_i \rangle
\end{aligned}$$

En particulier au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$ , nous avons :

$$\begin{cases}
\partial_\lambda \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) = 0, \\
\partial_\varepsilon \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) = 0, \\
\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) = -\frac{1}{\lambda_i}, \\
\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) = 0, \\
\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) = \alpha \langle C'''[0].(\phi_i)^3, \phi_i \rangle = 6\alpha \langle C(\phi_i), \phi_i \rangle.
\end{cases} \quad (2.2.13)$$

- On note  $(E)$  l'équation suivante :

$$(E) \quad \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0.$$

Et pour un couple  $(\mu, \delta)$  fixé dans  $I_3 \times I_4$ , on note  $(E_{\mu, \delta})$  l'équation :

$$(E_{\mu, \delta}) \quad \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0,$$

correspondant à la recherche des couples  $(\lambda, \varepsilon) \in \hat{W}_i$ .

**Définition 2.2.9** On dira que  $(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) \in \mathbb{R}^4$  (resp  $(\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ ) est une solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E)$  (resp.  $(E_{\mu, \delta})$ ) si, d'une part  $(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)$  est une solution de l'équation  $(E)$  (resp.  $(E_{\mu, \delta})$ ) et d'autre part la condition  $\partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0$  est réalisée.

**Remarque 2.2.10** L'application  $\mathcal{I}_i$  (resp.  $\mathcal{I}_{i, \mu\delta}$ ) réalise une bijection entre les solutions  $\varepsilon$ -singulières de  $(E)$  (resp. de  $(E_{\mu\delta})$ ), dans l'ouvert  $W_i \times I_3 \times I_4$  et celles  $u$ -singulières de  $(\mathcal{E})$  (resp. de  $(\mathcal{E}_{\mu\delta})$ ) dans l'ouvert  $\hat{W}_i \times I_3 \times I_4$ .

### 2. 3. Etude des solutions $\varepsilon$ -singulières de $(E)$ et de $(E_{\mu,\delta})$ :

Dans cette partie, nous allons caractériser les quadruplets  $(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)$  solution dans  $W_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$ , du système :

$$(E^{\varepsilon,s}) \quad \begin{cases} \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0. \end{cases}$$

**Lemme 2.3.1** *Si  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \neq 0$  alors, l'ensemble des solutions du système  $(E^{\varepsilon,s})$  dans l'ouvert  $W_i \times I_3 \times I_4$  (quitte à le restreindre éventuellement) est donné par une courbe de classe  $C^\infty$  paramétrée par  $\varepsilon$  et  $\mu$ .*

**Démonstration :**

La jacobienne du système  $(E^{\varepsilon,s})$  au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  est donnée par :

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \\ \frac{1}{\lambda_i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on peut donc déduire le lemme grâce au théorème des fonctions implicites. Plus précisément, il existe deux fonctions de classe  $C^\infty$  définies au voisinage de  $(0, 0)$  dans  $I_2 \times I_3$  dans  $I_{i,1} \times I_4$  :  $\tilde{\lambda}(\cdot)$  et  $\tilde{\delta}(\cdot)$ , telles que  $(E^{\varepsilon,s})$  soit équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda = \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), & \tilde{\lambda}(0, 0) = \lambda_i, \\ \delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu), & \tilde{\delta}(0, 0) = 0. \end{cases}$$

□

**Proposition 2.3.2** *Si  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \neq 0$  alors, les dérivées des fonctions  $\tilde{\lambda}(\cdot)$  et  $\tilde{\delta}(\cdot)$  au point  $(0, 0)$  sont données par :*

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(0, 0) &= 0, \\ \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(0, 0) &= 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\lambda}(0, 0) &= 6\alpha\lambda_i \langle C(\phi_i), \phi_i \rangle, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\delta}(0, 0) &= 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tilde{\delta}(0, 0) &= -12\alpha \frac{\langle C(\phi_i), \phi_i \rangle}{\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle}. \end{aligned}$$

**Démonstration :** On sait que les fonctions  $\tilde{\lambda}(\cdot)$  et  $\tilde{\delta}(\cdot)$  vérifient :

$$\begin{cases} \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

En dérivant la première équation de ce système par rapport à  $\varepsilon$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_{\varepsilon} \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) + \partial_{\varepsilon} \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \\ + \partial_{\delta} \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Si dans la relation (2.3.2), on prend  $\varepsilon = \mu = 0$ , on obtient :

$$\partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(0, 0) = 0.$$

En dérivant la deuxième équation du système (2.3.1), par rapport à  $\varepsilon$ , on trouve

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda \varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_{\varepsilon} \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) + \partial_{\varepsilon \varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \\ + \partial_{\varepsilon \delta}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

En prenant  $\varepsilon = \mu = 0$  dans la relation (2.3.3), on trouve :

$$\partial_{\varepsilon} \tilde{\lambda}(0, 0) = 0.$$

En dérivant à nouveau les relations (2.3.2) et (2.3.3) par rapport à  $\varepsilon$  et en prenant dans les équations ainsi obtenues  $\varepsilon = \mu = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon \varepsilon}^2 \tilde{\lambda}(0, 0) &= 6\alpha \lambda_i \langle C(\phi_i), \phi_i \rangle, \\ \partial_{\varepsilon \varepsilon}^2 \tilde{\delta}(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

La valeur de  $\partial_{\varepsilon \varepsilon \varepsilon}^3 \tilde{\delta}(0, 0)$  est obtenue en dérivant une troisième fois.

□

## 2. 4. Etude des fonctions $\tilde{\lambda}(\cdot)$ et $\tilde{\delta}(\cdot)$ :

**Lemme 2.4.1** *Si  $\langle IF, \phi_i \rangle \neq 0$  alors, nous aurons :*

1) *Au voisinage de  $(0, 0)$  dans  $I_2 \times I_3$ , on a l'équivalence entre (i) et (ii) :*

- (i)  $(\varepsilon, \mu)$  solution de  $\partial_{\varepsilon} \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) = 0$ ,
- (ii)  $(\varepsilon, \mu)$  solution de  $\partial_{\varepsilon, \varepsilon}^2 \tau(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0$ .

2) *De la même façon, nous avons l'équivalence entre (iii) et (iv) :*

- (iii)  $(\varepsilon, \mu)$  solution de  $\partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0$
- (iv)  $(\varepsilon, \mu)$  solution de :  
 $\partial_{\lambda} \tau(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0$  ou  $\partial_{\varepsilon \varepsilon}^2 \tau(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0$ .

**Démonstration :**

Supposons qu'on ait  $\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) = 0$ . On sait d'autre part, que:

$$\partial_\delta \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) = -\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \neq 0,$$

on peut supposer que par continuité, on aura pour tout couple  $(\varepsilon, \mu) \in I_2 \times I_3$  :

$$\partial_\delta \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \neq 0,$$

et la relation (2.3.2) nous donne alors  $\partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0$ , ce qui, dans la relation (2.3.3) donne :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0.$$

Réciproquement, si on suppose que  $\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0$  alors, les relations (2.3.2) et (2.3.3) constituent un système linéaire homogène en  $\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu)$  et  $\partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)$ , dont le déterminant est donné par :

$$\text{dét}(\varepsilon, \mu) = [\partial_\lambda \tau_i \partial_{\varepsilon\delta}^2 \tau_i - \partial_\delta \tau_i \partial_{\varepsilon\lambda}^2 \tau_i](\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)).$$

Au point  $(0, 0)$ , ce déterminant vaut :

$$\text{dét}(0, 0) = -\frac{\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle}{\lambda_i} \neq 0.$$

On peut supposer que par continuité ce déterminant va être non nul sur tout  $I_2 \times I_3$ . On aura donc :

$$\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) = \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration de la partie 1) du lemme. Pour la partie 2), on procède de la même façon.

□

**2. 4. 1. Recherche des points solutions de  $\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) = 0$  (resp  $\partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0$ )**

Dans l'étude des fonctions  $\tilde{\lambda}(\cdot)$  et  $\tilde{\delta}(\cdot)$ , la détermination des couples pour lesquels leurs dérivées s'annulent est d'une très grande importance. Nous allons, dans la partie qui va suivre, caractériser l'ensemble de ces points dans l'ouvert  $I_2 \times I_3$ .

**Lemme 2.4.2** *Si  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \neq 0$  alors, dans l'ouvert  $I_2 \times I_3$ , la condition  $\partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0$  est équivalente à l'un des systèmes suivants :*

$$(E_1^{\varepsilon, s}) \quad \begin{cases} \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_\lambda \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0. \end{cases}$$

$$(E_2^{\varepsilon, s}) \quad \begin{cases} \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0. \end{cases}$$

**Remarque 2.4.3** L'équation  $(E_1^{\varepsilon, s})$  correspond à l'ensemble  $B$  défini par M. Golubitsky et D. Schaffer [1978] page 35 et  $(E_2^{\varepsilon, s})$  correspond à l'ensemble  $H$  page 36 du même article.

Ce lemme est une conséquence directe du lemme 2.4.1.

**Lemme 2.4.4** Si  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \neq 0$  alors, les solutions du système  $(E_1^{\varepsilon, s})$  dans l'ouvert  $W_i \times I_3 \times I_4$  sont données par une unique fonction de classe  $C^\infty$  :

$$\mu \longmapsto (\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \delta_b(\mu)).$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} \lambda_b(\mu) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu), \\ \delta_b(\mu) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu). \end{cases}$$

**Démonstration :**

La jacobienne du système  $(E_1^{\varepsilon, s})$  au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  est égale à :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \\ -\frac{1}{\lambda_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda_i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et grâce au théorème des fonctions implicites, on conclut que l'ensemble des solutions du système  $(E_1^{\varepsilon, s})$  est donné par une fonction de classe  $C^\infty$  :

$$\mu \longmapsto (\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \delta_b(\mu)).$$

vérifiant  $\lambda_b(0) = \lambda_i$  et  $\varepsilon_b(0) = \delta_b(0) = 0$ ,

□

**Lemme 2.4.5** Si  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \neq 0$  alors, dans l'ouvert  $I_2 \times I_3$ , la condition  $\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) = 0$  est équivalente au système suivant :

$$(E_2^{\varepsilon, s}) \quad \begin{cases} \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0. \end{cases}$$

Ce lemme est une conséquence directe du lemme 2.4.1.

**Lemme 2.4.6** *Si  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \neq 0$  alors, les solutions du système  $(E_2^{\varepsilon, s})$  dans l'ouvert  $W_i \times I_3 \times I_4$  sont données par une unique fonction de classe  $C^\infty$  :*

$$\mu \longmapsto (\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \delta_h(\mu)).$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} \lambda_h(\mu) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_h(\mu), \mu), \\ \delta_h(\mu) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_h(\mu), \mu). \end{cases}$$

**Démonstration :**

Nous avons calculé les dérivées partielles de l'application  $\tau_i$  au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$ . La jacobienne du système  $(E_2^{\varepsilon, s})$  en ce point est donc donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \\ -\frac{1}{\lambda_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\alpha \langle C(\phi_i), \phi_i \rangle & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le théorème des fonctions implicites permet de conclure que l'ensemble des solutions du système  $(E_2^{\varepsilon, s})$  est donné par une fonction de classe  $C^\infty$  :

$$\mu \longmapsto (\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \delta_h(\mu)),$$

vérifiant  $\lambda_h(0) = \lambda_i$  et  $\varepsilon_h(0) = \delta_h(0) = 0$ .

□

**Lemme 2.4.7** *Dans l'ouvert  $I_2 \times I_3$ , la condition  $\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) = 0$  est équivalente au système suivant :*

$$(E_2^{\varepsilon, s}) \quad \begin{cases} \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0. \end{cases}$$

Ce lemme est une conséquence directe du lemme 2.4.1.

## 2. 5. Etude des fonctions $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$ et $\tilde{\lambda}(\cdot, \mu)$ :

Afin de déterminer l'allure des graphes des deux fonctions  $\varepsilon \mapsto \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)$  et  $\varepsilon \mapsto \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu)$ , nous allons examiner la convexité de ces deux fonctions au voisinage des points  $(\varepsilon_b(\mu), \mu)$  et  $(\varepsilon_h(\mu), \mu)$ . Dans cette étude, la distinction des deux cas  $\varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu)$  et  $\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$ , s'introduit naturellement.

### 2. 5. 1. Convexité :

Cas I :  $\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$

Etude au voisinage du point  $(\varepsilon_b(\mu), \mu)$  :

On sait que le quadruplet  $(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu))$  est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \tau_i(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) = 0, \\ \partial_\lambda \tau_i(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu) = 0. \end{cases} \quad (2.5.1).$$

La condition  $\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$  nous donne :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) \neq 0. \quad (2.5.2)$$

De plus nous avons :

$$\tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0, \quad (2.5.3)$$

$$\partial_\varepsilon \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) = 0, \quad (2.5.4)$$

En dérivant l'équation (2.5.3) par rapport à  $\varepsilon$  et en tenant compte de la relation (2.5.4), on obtient :

$$\partial_\lambda \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) + \partial_\delta \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0.$$

De la même façon, en dérivant l'équation (2.5.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) + \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \\ + \partial_{\delta\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0. \end{aligned}$$

En prenant  $\varepsilon = \varepsilon_b(\mu)$  dans cette relation, on trouve :

$$\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu) = - \frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu))}{\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu))}. \quad (2.5.5)$$

le dénominateur est non nul (cf. remarque 2.5.1 qui suit). En dérivant à nouveau par rapport à  $\varepsilon$ , on trouve :

$$\begin{aligned} [\partial_{\lambda\lambda}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) + \partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \\ + \partial_{\lambda\delta}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)] \partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) \\ + \partial_\lambda \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) + \partial_\delta \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) \\ + [\partial_{\lambda\delta}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu) + \partial_{\delta\varepsilon}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \\ + \partial_{\delta\delta}^2 \tau_i(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)] \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = 0 \end{aligned}$$

Si à nouveau, on prend  $\varepsilon = \varepsilon_b(\mu)$  dans cette équation, on aura la relation :

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) \partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu) \\ + \partial_{\lambda\lambda}^2 \tau_i(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) (\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu))^2 \\ + \partial_\delta \tau_i(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu) = 0. \end{aligned}$$



En utilisant la relation (2.5.5), nous obtenons la formule suivante :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu) = \left[ \frac{(\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i)^2 - \partial_{\lambda\lambda}^2 \tau_i \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i}{\partial_{\delta} \tau_i \cdot (\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i)^2} \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i \right] (\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)). \quad (2.5.6)$$

**Remarque 2.5.1** Nous avons au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  les relations :

$$\begin{aligned} \partial_{\delta} \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) &= -\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle, \\ \partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) &= -\frac{1}{\lambda_i}, \end{aligned}$$

et par continuité, on peut dire que le dénominateur de (2.5.6) va être différent de 0 au voisinage de  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  dans  $W_i \times I_3 \times I_4$ .

D'autre part,  $\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) \neq 0$  d'après la relation (2.5.2), ce qui implique que :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu) \neq 0, \quad \forall \mu \in I_3.$$

**Etude au voisinage du point  $(\varepsilon_h(\mu), \mu)$  :**

On sait que le quadruplet  $(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu))$  est solution du système suivant

$$\begin{cases} \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) = 0, \\ \partial_{\varepsilon} \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) = 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) = 0, \\ \partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu) = 0. \end{cases} \quad (2.5.7)$$

La condition  $\varepsilon_h(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$  nous donne :

$$\partial_{\lambda} \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) \neq 0. \quad (2.5.8)$$

En suivant la même démarche que dans le cas précédent, on trouve :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\lambda}(\varepsilon_h(\mu), \mu) = \left[ \frac{\partial_{\delta} \tau_i \cdot \partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i}{\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\delta}^2 \tau_i - \partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i \partial_{\delta} \tau_i} \right] (\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)). \quad (2.5.9)$$

**Remarque 2.5.2** Nous avons déjà calculé les dérivées de l'application  $\tau_i$  au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  ce qui nous donne :

$$\left[ \frac{\partial_{\delta} \tau_i \cdot \partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i}{\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\delta}^2 \tau_i - \partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i \partial_{\delta} \tau_i} \right] (\lambda_i, 0, 0, 0) = 6\lambda_i \alpha \langle C(\phi_i), \phi_i \rangle > 0.$$

Nous pouvons supposer par continuité que cette quantité va rester positive dans tout  $I_3$  ce qui donne :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\lambda}(\varepsilon_h(\mu), \mu) > 0, \quad \forall \mu \in I_3.$$

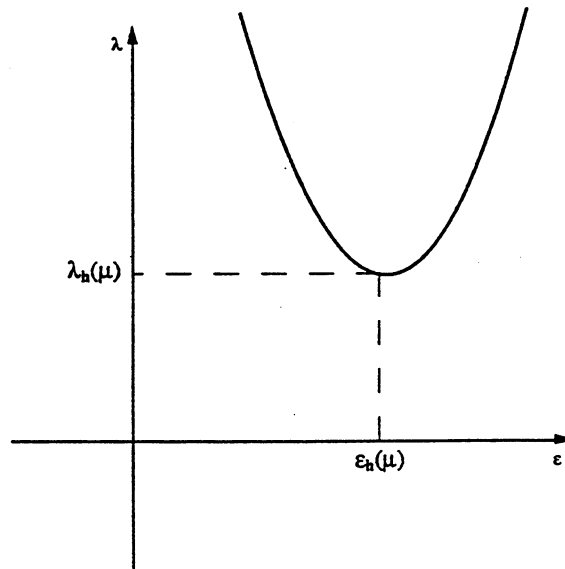


Figure 4 Graphe de la fonction  $\tilde{\lambda}(\cdot, \mu)$  au voisinage de  $(\varepsilon_h(\mu), \lambda_h(\mu))$

La fonction  $\tilde{\lambda}(\cdot, \mu)$  est strictement convexe au voisinage de  $\varepsilon_h(\mu)$  et elle atteint son minimum au point  $\tilde{\lambda}(\varepsilon_h(\mu), \mu) = \lambda_h(\mu)$  (cf. fig 4). Un calcul identique, donne :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\delta}(\varepsilon_h(\mu), \mu) = \left[ \frac{\partial_{\lambda} \tau_i \cdot \partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i}{\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i \partial_{\delta} \tau_i - \partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\delta}^2 \tau_i} \right] (\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)). \quad (2.5.10)$$

Or, d'après la relation (2.5.8), nous avons  $\partial_{\lambda} \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) \neq 0$  et d'autre part, on a au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  :

$$\left[ \frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i}{\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i \partial_{\delta} \tau_i - \partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\delta}^2 \tau_i} \right] (\lambda_i, 0, 0, 0) = -6\alpha\lambda_i \frac{\langle C(\phi_i), \phi_i \rangle}{\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle} \neq 0,$$

nous pouvons supposer par continuité que cette quantité va rester non nulle dans  $I_3$  ce qui nous donne :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\delta}(\varepsilon_h(\mu), \mu) \neq 0, \quad \forall \mu \in I_3.$$

D'autre part, nous savons que :  $\partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon_h(\mu), \mu) = \partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu) = 0$ , ce qui implique que la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$  aura l'une des allures de la fig 5

### Remarque 2.5.3

Si nous supposons connu le signe de la quantité  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle$  alors, on peut éliminer l'un de ces deux graphes. En effet, supposons que  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle > 0$  et que la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$  atteigne son minimum pour  $\varepsilon = \varepsilon_b(\mu)$ . Son maximum est alors atteint pour  $\varepsilon = \varepsilon_h(\mu)$ . Nous montrerons dans ce cas que  $\varepsilon_b(\mu) < \varepsilon_h(\mu)$ .

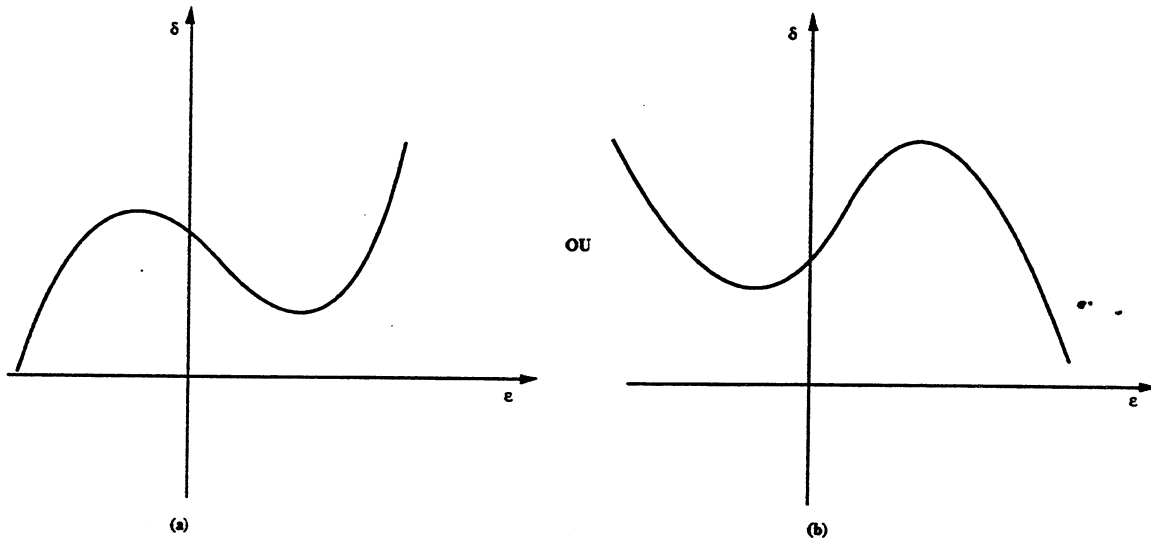


Figure 5 Deux graphes possibles pour la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$

Supposons que  $\varepsilon_b(\mu) \geq \varepsilon_h(\mu)$ , le théorème de Rolle implique qu'il existe un  $\varepsilon_0(\mu) \in ]\varepsilon_h(\mu), \varepsilon_b(\mu)[$ , tel que :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}\tilde{\delta}(\varepsilon_0(\mu), \mu) = 0,$$

or, on sait que :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\tilde{\delta}(0, 0) = -12\alpha \frac{\langle C(\phi_i), \phi_i \rangle}{\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle} < 0,$$

on peut supposer que, par continuité, on aura :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) < 0, \quad (\varepsilon, \mu) \in I_2 \times I_3,$$

la fonction  $\partial_{\varepsilon\varepsilon}\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$  est strictement décroissante, ce qui donne alors :

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon\varepsilon}\tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) &< 0, & \varepsilon > \varepsilon_0(\mu), \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}\tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) &> 0, & \varepsilon < \varepsilon_0(\mu). \end{aligned}$$

Or, la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$  atteint son minimum pour  $\varepsilon = \varepsilon_b(\mu)$ , ce qui entraîne que :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}\tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu) > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_b(\mu) > \varepsilon_0(\mu),$$

on a alors une contradiction et donc :  $\varepsilon_b(\mu) < \varepsilon_h(\mu)$ .

On peut dire donc que si  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle > 0$ , la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$  aura l'allure (b) de la fig 5. Dans le cas contraire, elle aura l'allure (a) de la même figure.

Sur les deux graphes de la fig 5, nous avons volontairement omis d'indiquer les points  $(\varepsilon_h(\mu), \delta_h(\mu))$  et  $(\varepsilon_b(\mu), \delta_b(\mu))$  pour ne pas avoir à décider lequel est minimum ou maximum de la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$ .

**Cas II :**  $\varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu)$

Si  $\varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu)$  alors,  $\lambda_h(\mu) = \lambda_b(\mu)$  et  $\delta_h(\mu) = \delta_b(\mu)$ . On pose alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_0(\mu) = \varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu), \\ \lambda_0(\mu) = \lambda_h(\mu) = \lambda_b(\mu), \\ \delta_0(\mu) = \delta_h(\mu) = \delta_b(\mu). \end{cases} \quad (2.5.11)$$

Le quadruplet  $(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu))$  est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu)) = 0, \\ \partial_\lambda \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu)) = 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu)) = 0. \end{cases}$$

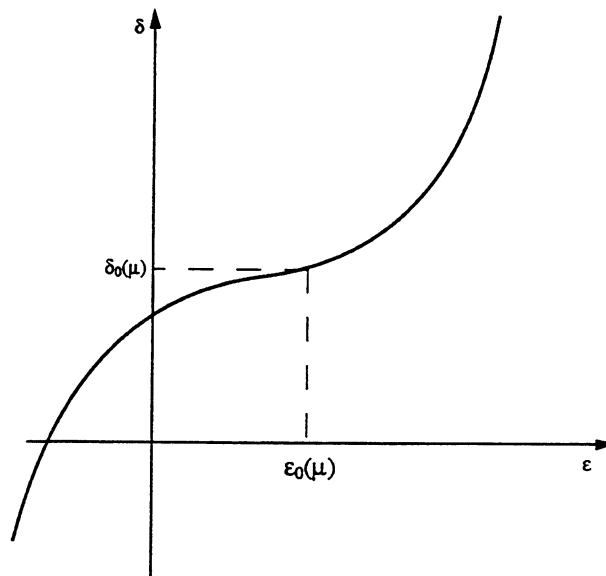


Figure 6 Graphe de la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$

La relation (2.5.6) nous donne :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tilde{\delta}(\varepsilon_0(\mu), \mu) = 0,$$

On sait d'autre part que :

$$\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon_0(\mu), \mu) = \partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\varepsilon_0(\mu), \mu) = 0.$$

En dérivant trois fois par rapport à  $\varepsilon$ , on trouve :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tilde{\delta}(\varepsilon_0(\mu), \mu) = -2 \frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu))}{\partial_{\delta} \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu))}. \quad (2.5.12)$$

Or, nous avons :

$$\frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i}{\partial_{\delta} \tau_i}(\lambda_i, 0, 0, 0) \neq 0,$$

ce qui nous permet de dire que le point  $(\varepsilon_0(\mu), \mu)$  est un point d'inflexion de la courbe  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$ , de plus, nous pouvons supposer que par continuité on aura :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) \neq 0, \quad \forall \varepsilon \in I_2,$$

la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$  aura donc l'allure du graphe de la fig 6

**Lemme 2.5.4** *Supposons que  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle < 0$  et que  $\varepsilon_h(\mu) \geq \varepsilon_b(\mu)$ . Alors, on a :*  
cas (i)  $\varepsilon_h(\mu) > \varepsilon_b(\mu)$

$$(\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\varepsilon} \tau_i)(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) > 0 \quad \text{si } \varepsilon \in ]\varepsilon_b(\mu), \varepsilon_h(\mu)[,$$

$$(\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\varepsilon} \tau_i)(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) < 0 \quad \text{si } \varepsilon \notin ]\varepsilon_b(\mu), \varepsilon_h(\mu)[,$$

cas (ii)  $\varepsilon_h(\mu) = \varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_0(\mu)$

$$(\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\varepsilon} \tau_i)(\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)) < 0 \quad \forall \varepsilon \in I_2, \varepsilon \neq \varepsilon_0(\mu).$$

**Démonstration :**

On tire des relations (2.3.2) et (2.3.3) que :

$$\partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = - \left[ \frac{\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\varepsilon} \tau_i}{\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\delta\varepsilon} \tau_i - \partial_{\lambda\varepsilon} \tau_i \partial_{\delta} \tau_i} \right] (\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)).$$

Or, nous avons au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  :

$$\left[ \frac{1}{\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\delta\varepsilon} \tau_i - \partial_{\lambda\varepsilon} \tau_i \partial_{\delta} \tau_i} \right] (\lambda_i, 0, 0, 0) = - \frac{\lambda_i}{\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle} > 0.$$

On peut donc supposer que cette quantité va rester positive sur  $I_2 \times I_3$ , ce qui entraîne alors que  $\partial_{\varepsilon} \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)$  aura le signe de la quantité

$$- [\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\varepsilon} \tau_i](\tilde{\lambda}(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)),$$

la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$  est strictement décroissante (remarque 2.5.3) sur l'intervalle  $] \varepsilon_b(\mu), \varepsilon_h(\mu) [$  et strictement croissante ailleurs.

□

**Remarque 2.5.5** *On obtiendrait un résultat semblable si on avait supposé  $\varepsilon_h(\mu) \leq \varepsilon_b(\mu)$ .*

Dans toute la suite, nous supposons que  $\varepsilon_h(\mu) \geq \varepsilon_b(\mu)$  et que  $\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle < 0$ .

## 2. 6. Etude de l'équation $(E_{\mu,\delta})$ au voisinage des solutions $\varepsilon$ -singulières

Cas 1  $\varepsilon_h(\mu) > \varepsilon_b(\mu)$  :

On aura pour  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$  l'un des quatre cas suivants :

- (i)  $\delta > \delta_b(\mu)$  ou  $\delta < \delta_h(\mu)$ ,
- (ii)  $\delta_h(\mu) < \delta < \delta_b(\mu)$ ,
- (iii)  $\delta = \delta_b(\mu)$ ,
- (iv)  $\delta = \delta_h(\mu)$ .

Par la suite, on donnera l'allure de la courbe (ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$ ) dans chacun de ces cas.

Cas (i)  $\delta > \delta_b(\mu)$  ou  $\delta < \delta_h(\mu)$  :

L'équation  $\delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)$  admet, dans ce cas, une seule solution que l'on notera  $\varepsilon^*(\mu, \delta) \notin [\varepsilon_b(\mu), \varepsilon_h(\mu)]$ .

On pose :  $\lambda^*(\mu, \delta) = \lambda(\varepsilon^*(\mu, \delta), \mu)$  et on aura :

- 1-  $(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta), \mu, \delta)$  solution  $\varepsilon$ -singulière.
- 2-  $\varepsilon^*(\mu, \delta) > \varepsilon_h(\mu)$  ou  $\varepsilon^*(\mu, \delta) < \varepsilon_b(\mu)$ .

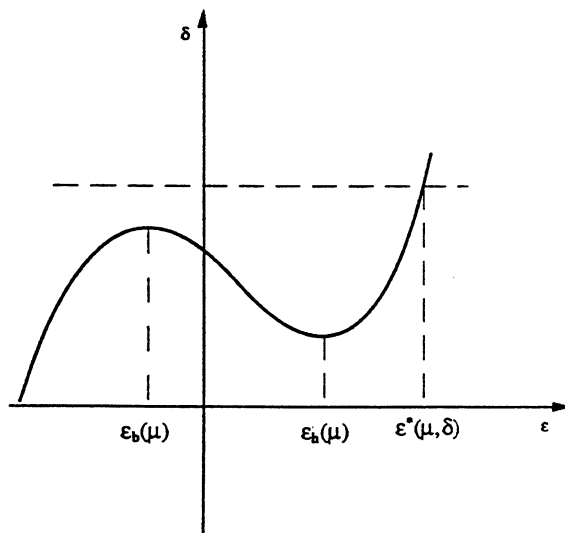


Figure 7  $\delta$  non compris entre  $\delta_b(\mu)$  et  $\delta_h(\mu)$

Or, le quadruplet  $(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu))$  est l'unique solution du système  $(E_2^{\varepsilon, \delta})$  dans  $W_i \times I_3 \times I_4$ , ce qui entraîne que :

$$\partial_{\lambda} \tau_i(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta), \mu, \delta) \neq 0,$$

et grâce au théorème des fonctions implicites, on montre que l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  est donné au voisinage du point  $(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta))$  par une fonction de classe  $C^\infty$   $\varepsilon \mapsto \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon)$ , qui vérifie :

$$\lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon^*(\mu, \delta)) = \lambda^*(\mu, \delta).$$

**Calcul des dérivées de  $\lambda_{\mu,\delta}(\cdot)$  par rapport à  $\varepsilon$  :**

On va faire des dérivations successives par rapport à  $\varepsilon$  de l'identité suivante :

$$\tau_i(\lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta) = 0.$$

En la dérivant une fois, nous obtenons :

$$\partial_\lambda \tau_i(\lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta) \partial_\varepsilon \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon) + \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta) = 0.$$

Ce qui nous donne, en prenant  $\varepsilon = \varepsilon^*(\mu, \delta)$  :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon^*(\mu, \delta)) = 0.$$

En dérivant à nouveau par rapport à  $\varepsilon$ , on trouve :

$$\begin{aligned} & \partial_{\lambda\lambda}^2 \tau_i(\lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta) (\partial_\varepsilon \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon))^2 + 2\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta) \partial_\varepsilon \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon) \\ & + \partial_{\lambda\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta) \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon) + \partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne en prenant  $\varepsilon = \varepsilon^*(\mu, \delta)$  :

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon^*(\mu, \delta)) = - \frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta), \mu, \delta)}{\partial_{\lambda\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta), \mu, \delta)}. \quad (2.6.1)$$

Cette quantité est positive d'après le lemme 2.5.4 et on aura par continuité  $\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon) > 0$  au voisinage de  $\varepsilon^*(\mu, \delta)$ . La fonction  $\lambda_{\mu,\delta}(\cdot)$  est donc strictement convexe dans ce voisinage.

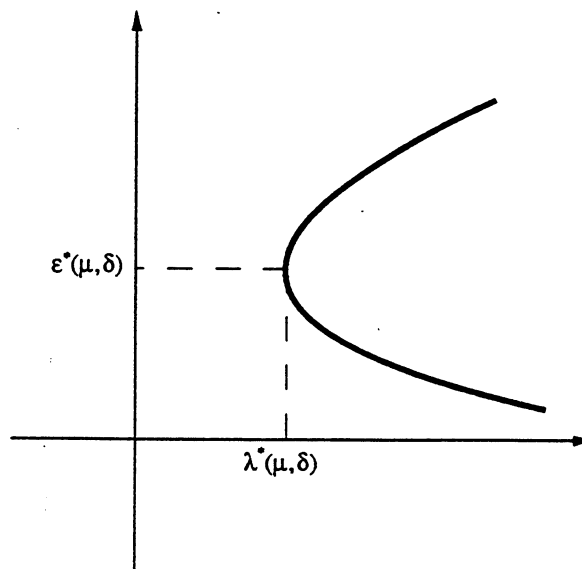


Figure 8 Graphe de la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \mu)$  au voisinage du point  $(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta))$

L'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  est donné par la courbe de la fig 8. Le point  $(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta))$  est un point de retournement ayant lieu à droite.

**Cas (ii)**  $\delta_h(\mu) < \delta < \delta_b(\mu)$  :

L'équation  $\delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)$  admet dans ce cas trois solutions que l'on notera :

$$\varepsilon_1^*(\mu, \delta) < \varepsilon_b(\mu) < \varepsilon_2^*(\mu, \delta) < \varepsilon_h(\mu) < \varepsilon_3^*(\mu, \delta).$$

On pose :

$$\lambda_j^*(\mu, \delta) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_j^*(\mu, \delta), \mu), \quad \text{pour } j = 1, 2, 3.$$

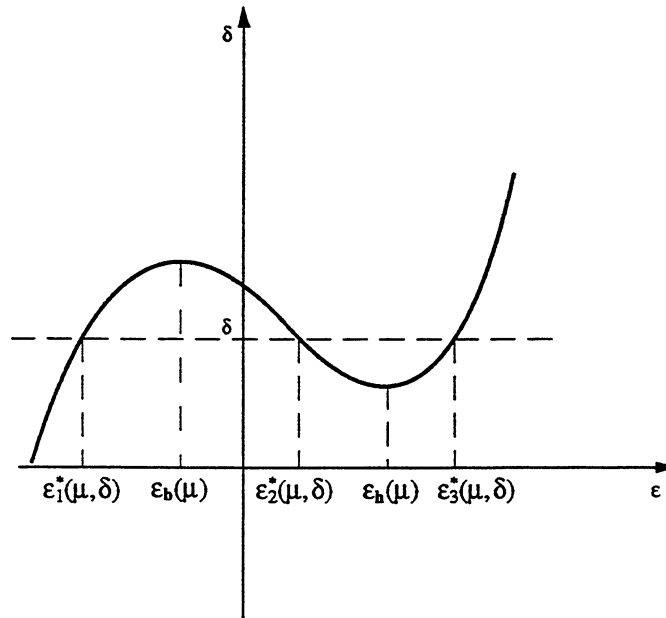


Figure 9  $\delta_h(\mu) < \delta < \delta_b(\mu)$

On montre alors facilement que l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  est donné au voisinage de chaque point  $(\lambda_j^*(\mu, \delta), \varepsilon_j^*(\mu, \delta))$  par une fonction  $\varepsilon \mapsto \lambda_{\mu,\delta}^j(\varepsilon)$  de classe  $C^\infty$  qui vérifie :

$$\lambda_{\mu,\delta}^j(\varepsilon_j^*(\mu, \delta)) = \lambda_j^*(\mu, \delta), \quad \text{pour } j = 1, 2, 3.$$

Cette fonction vérifie l'identité suivante :

$$\tau_i(\lambda_{\mu,\delta}^j(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta) = 0,$$



En dérivant cette identité par rapport à  $\varepsilon$ , on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \lambda_{\mu,\delta}^j(\varepsilon_j^*(\mu, \delta)) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}^j(\varepsilon_j^*(\mu, \delta)) &= -\frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i}{\partial \lambda \tau_i} [\tilde{\lambda}(\varepsilon_j^*(\mu, \delta), \varepsilon_j^*(\mu, \delta), \mu, \delta)]. \end{aligned}$$

On déduit du lemme 2.5.4 les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}^1(\varepsilon_1^*(\mu, \delta)) &> 0, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}^2(\varepsilon_2^*(\mu, \delta)) &< 0, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}^3(\varepsilon_3^*(\mu, \delta)) &> 0, \end{aligned}$$

et par continuité au voisinage des points  $\varepsilon_j^*(\mu, \delta)$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}^1(\varepsilon) &> 0, & \text{au voisinage de } & \varepsilon_1^*(\mu, \delta), \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}^2(\varepsilon) &< 0, & \text{au voisinage de } & \varepsilon_2^*(\mu, \delta), \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}^3(\varepsilon) &> 0, & \text{au voisinage de } & \varepsilon_3^*(\mu, \delta). \end{aligned}$$

Les fonctions  $\lambda_{\mu,\delta}^1(\cdot)$  et  $\lambda_{\mu,\delta}^3(\cdot)$  sont strictement convexes .

La fonction  $\lambda_{\mu,\delta}^2(\cdot)$  est strictement concave.

- Les points  $(\lambda_1^*(\mu, \delta), \varepsilon_1^*(\mu, \delta))$  et  $(\lambda_3^*(\mu, \delta), \varepsilon_3^*(\mu, \delta))$  sont des points de retournement ayant lieu à droite.

- Le point  $(\lambda_2^*(\mu, \delta), \varepsilon_2^*(\mu, \delta))$  est un point de retournement ayant lieu à gauche.

L'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  dans l'ouvert  $W_i$  aura donc l'allure de la fig 10.

**Cas (iii)**  $\delta = \delta_b(\mu)$

Dans ce cas, l'équation  $\delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu)$  admet deux solutions :  $\varepsilon_b(\mu)$  et une autre que l'on notera :  $\varepsilon_b^*(\mu)$ . Ces deux solutions vérifient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(\mu) &< \varepsilon_h(\mu) < \varepsilon_b^*(\mu), \\ \delta_b(\mu) &= \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu), \\ \delta_b(\mu) &= \tilde{\delta}(\varepsilon_b^*(\mu), \mu), \\ \lambda_b(\mu) &= \tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu). \end{aligned}$$

On pose :  $\lambda_b^*(\mu) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_b^*, \mu)$ .

**Etude au voisinage du point  $(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu))$  :**

Le quadruplet  $(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu))$  est une solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E_{\mu,\delta_b(\mu)})$ . De plus, il vérifie :

$$\partial_{\lambda \tau_i}(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) = 0$$

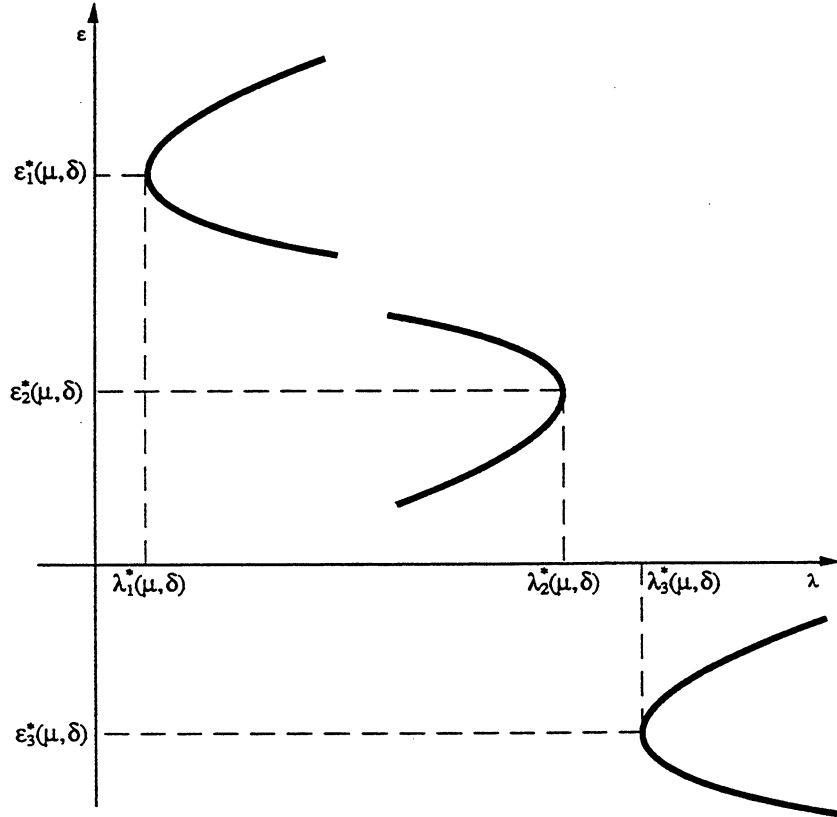


Figure 10 Ensemble de solutions au voisinage des points  $(\lambda_j^*(\mu, \delta), \epsilon_j^*(\mu, \delta))$

Le Hessien  $Hess(\tau_i)$  de  $\tau_i$  au point  $(\lambda_i, 0, 0, 0)$  est donné par :

$$Hess(\tau_i)(\lambda_i, 0, 0, 0) = [\partial_{\lambda\lambda}^2 \tau_i \partial_{\epsilon\epsilon}^2 \tau_i - (\partial_{\lambda\epsilon}^2 \tau_i)^2](\lambda_i, 0, 0, 0) = -\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2 < 0,$$

et par continuité au voisinage de ce point, on aura :

$$Hess(\tau_i)(\lambda_b(\mu), \epsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu)) < 0.$$

Le point  $(\lambda_b(\mu), \epsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu))$  est donc un point de bifurcation (Rabier[1982]) et l'ensemble des solutions de  $(E_{\mu, \delta})$  au voisinage de ce point est formé de deux courbes de classe  $C^\infty$  transverses en  $(\lambda_b(\mu), \epsilon_b(\mu))$ .

**Etude au voisinage du point  $(\lambda_b^*(\mu), \epsilon_b^*(\mu), \mu, \delta_b(\mu))$  :**

C'est un point singulier. Par le même procédé que dans le cas (i), on montre que l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta_b(\mu)})$  au voisinage du point

$(\lambda_b^*(\mu), \varepsilon_b^*(\mu))$  dans  $W_i$  est donné par une fonction  $\varepsilon \mapsto \lambda_{\mu, \delta_b(\mu)}^*(\varepsilon)$  de classe  $C^\infty$  qui vérifie :

$$\lambda_{\mu, \delta_b(\mu)}^*(\varepsilon_b^*(\mu)) = \lambda_b^*(\mu).$$

De plus, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \lambda_{\mu, \delta_b(\mu)}^*(\varepsilon_b^*(\mu)) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu, \delta_b(\mu)}^*(\varepsilon_b^*(\mu)) &= - \left[ \frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i}{\partial \lambda \tau_i} \right] (\tilde{\lambda}(\varepsilon_b^*(\mu), \mu), \varepsilon_b^*(\mu), \mu, \tilde{\delta}(\varepsilon_b^*(\mu), \mu)). \end{aligned}$$

Or  $\varepsilon_b^*(\mu) > \varepsilon_b(\mu)$  ce qui implique (lemme 2.5.4) que :

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu, \delta_b(\mu)}^*(\varepsilon_b^*(\mu)) > 0,$$

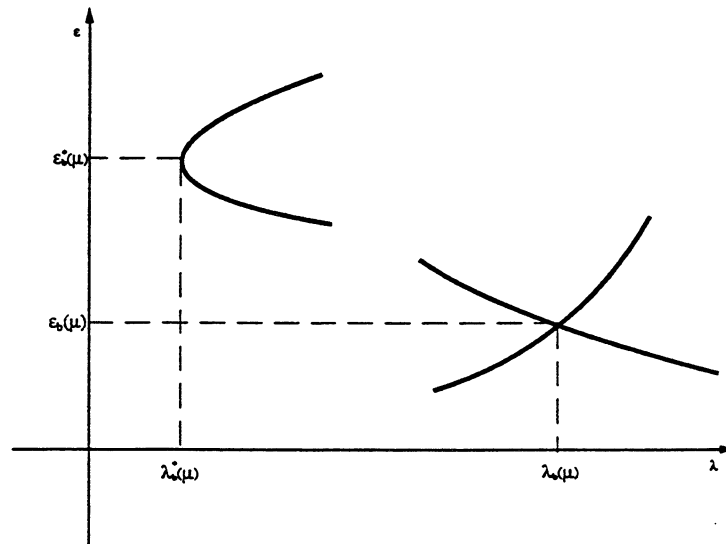


Figure 11  $\delta = \delta_b(\mu)$

et on aura l'allure représentée par la 11 pour l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta_b(\mu)})$ .

**Cas (iv)  $\delta = \delta_h(\mu)$  :**

Dans ce cas, l'équation  $\tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = \delta_h$  admet deux solutions :  $\varepsilon_h(\mu)$  et une deuxième que l'on note  $\varepsilon_h^*(\mu)$ . De même que dans le cas (iii), on pose :

$$\lambda_h^*(\mu) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_h(\mu), \mu).$$

Le quadruplet  $(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu))$ , vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) = 0, \\ \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) = 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) = 0. \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Et comme nous sommes dans le cas où  $\varepsilon_h(\mu) \neq \varepsilon_b(\mu)$ , il vérifie en plus :

$$\partial_\lambda \tau_i(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) \neq 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, on montre que l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta_h(\mu)})$  au voisinage du point  $(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu))$  dans l'ouvert  $W_i$  est défini par une courbe de classe  $C^\infty$   $\varepsilon \mapsto \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon)$  vérifiant :

$$\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon_h(\mu)) = \lambda_h(\mu).$$

**Etude de la fonction  $\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}$  :**

Nous avons l'identité suivante :

$$\tau_i(\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta_h(\mu)) = 0.$$

En la dérivant par rapport à  $\varepsilon$ , on trouve :

$$\partial_\lambda \tau_i(\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta_h(\mu)) \cdot \partial_\varepsilon \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon) + \partial_\varepsilon \tau_i(\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta_h(\mu)) = 0.$$

En prenant dans cette équation,  $\varepsilon = \varepsilon_h(\mu)$ , on obtient :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon_h(\mu)) = 0.$$

En dérivant à nouveau par rapport à  $\varepsilon$ , on trouve :

$$\begin{aligned} & \partial_{\lambda\lambda}^2 \tau_i(\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta_h(\mu)) \cdot (\partial_\varepsilon \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon))^2 + \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta_h(\mu)) \\ & + 2\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta_h(\mu)) \cdot \partial_\varepsilon \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon) \\ & + \partial_\lambda \tau_i(\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon), \varepsilon, \mu, \delta_h(\mu)) \cdot \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

En choisissant dans cette équation,  $\varepsilon = \varepsilon_h(\mu)$ , on obtient :

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon_h(\mu)) = 0.$$

On voit qu'il nous faut donc calculer  $\frac{d^3}{d\varepsilon^3} \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon_h(\mu))$  que l'on obtient en dérivant la relation (2.6.3) par rapport à  $\varepsilon$  et en prenant  $\varepsilon = \varepsilon_h(\mu)$  ce qui donne

$$\frac{d^3}{d\varepsilon^3} \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon_h(\mu)) = -\frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i}{\partial_\lambda \tau_i}(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu)).$$

On a déjà vu que  $\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) \neq 0$  et par continuité, on aura :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}(\varepsilon) \neq 0,$$

au voisinage de  $\varepsilon_h(\mu)$ . La fonction  $\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}$  est strictement monotone dans ce voisinage et le point  $(\varepsilon_h(\mu), \lambda_h(\mu))$  est un point d'inflexion.

**Etude au voisinage du point  $(\lambda_h^*(\mu), \varepsilon_h^*(\mu))$  :**

On sait que le quadruplet  $(\lambda_h^*(\mu), \varepsilon_h^*(\mu), \mu, \delta_h(\mu))$  est une solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E_{\mu, \delta_h(\mu)})$ . En suivant la même démarche que dans le cas précédent, on montre que :

L'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta_h(\mu)})$  au voisinage du point  $(\lambda_h^*(\mu), \varepsilon_h^*(\mu))$  dans  $W_i$  est formé par une courbe de classe  $C^\infty$   $\varepsilon \mapsto \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}^*(\varepsilon)$  telle que :

$$\lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}^*(\varepsilon_h^*(\mu)) = \lambda_h(\mu).$$

Ses dérivées sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}^*(\varepsilon_h^*(\mu)) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu, \delta_h(\mu)}^*(\varepsilon_h^*(\mu)) &= -\frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i}{\partial_{\lambda} \tau_i}(\lambda_h^*(\mu), \varepsilon_h^*(\mu), \mu, \delta_h(\mu)) > 0. \quad (\text{lemme 2.5.4}) \end{aligned}$$

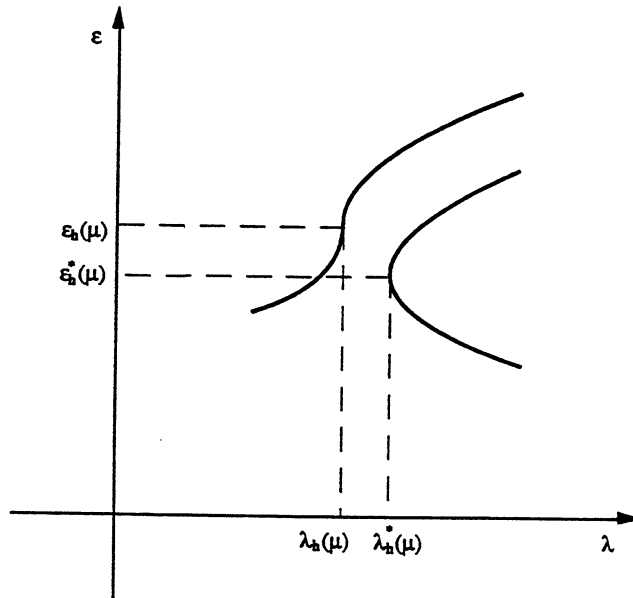


Figure 12 Ensemble des solutions Pour  $\delta = \delta_h(\mu)$

l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta_h(\mu)})$  dans l'ouvert  $W_i$  est donné par la fig 12.

**Cas (2)**  $\varepsilon_h(\mu) = \varepsilon_b(\mu)$  :

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_b(\mu) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_b(\mu), \mu), \\ \delta_b(\mu) = \tilde{\delta}(\varepsilon_b(\mu), \mu), \\ \lambda_h(\mu) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_h(\mu), \mu), \\ \delta_h(\mu) = \tilde{\delta}(\varepsilon_h(\mu), \mu). \end{cases}$$

Les points  $(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu), \mu, \delta_b(\mu))$  et  $(\lambda_h(\mu), \varepsilon_h(\mu), \mu, \delta_h(\mu))$  coïncident donc. Soit  $(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu))$  cette valeur commune.

On est amené à distinguer deux cas :

$$(i) \quad \delta \neq \delta_0(\mu), \quad (ii) \quad \delta = \delta_0(\mu).$$

**Cas (i)**  $\delta \neq \delta_0(\mu)$  :

L'équation  $\tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = \delta$ , aura une unique solution que l'on note :  $\varepsilon^*(\mu, \delta)$ . On pose  $\lambda^*(\mu, \delta) = \tilde{\lambda}(\varepsilon^*(\mu, \delta), \mu)$ . Suivant que  $\delta > \delta_0(\mu)$  ou  $\delta < \delta_0(\mu)$ , on aura l'une des Le point deux figures suivantes :

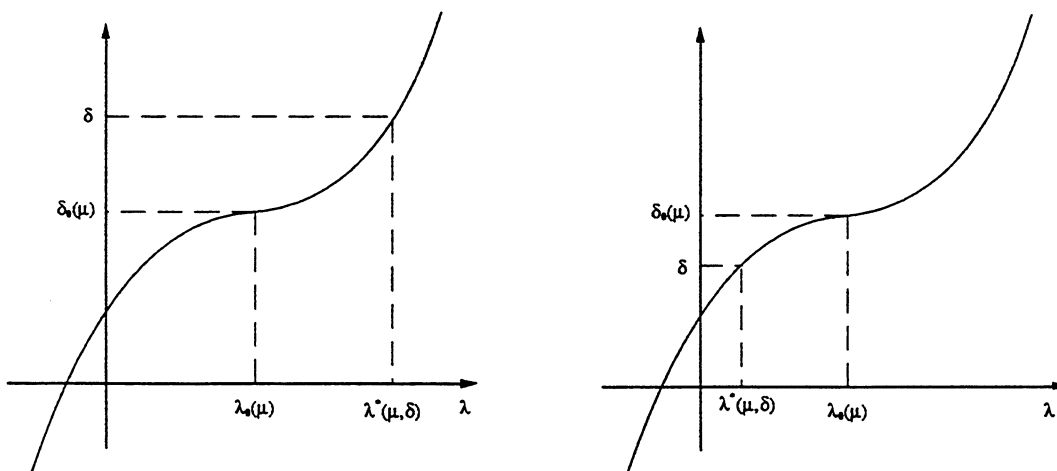


Figure 13  $\delta \neq \delta_0(\mu)$

$(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta), \mu, \delta)$  est une solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$ . De la même façon que dans le point (ii) du Cas (I), on montre que l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  au voisinage du point  $(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta))$  dans l'ouvert  $W_i$  est formé par une courbe de classe  $C^\infty$   $\varepsilon \mapsto \lambda_{\mu, \delta}(\varepsilon)$ , qui vérifie :

$$\lambda_{\mu, \delta}(\varepsilon^*(\mu, \delta)) = \lambda^*(\mu, \delta).$$

Les dérivées de la fonction  $\lambda_{\mu,\delta}(\cdot)$  au point  $(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta))$  sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon^*(\mu, \delta)) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \lambda_{\mu,\delta}(\varepsilon^*(\mu, \delta)) &= -\frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i}{\partial_{\lambda} \tau_i}(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta), \mu, \delta). \end{aligned}$$

On sait (lemme 2.5.4) que ce point vérifie :

$$(\partial_{\lambda} \tau_i \partial_{\varepsilon\varepsilon} \tau_i)(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta), \mu, \delta) < 0.$$

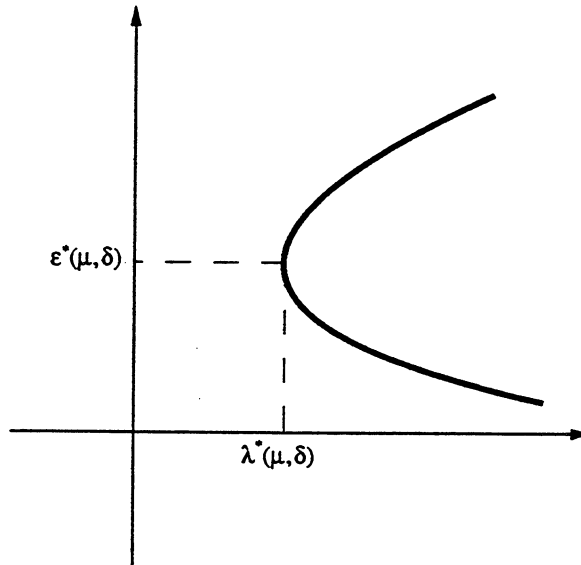


Figure 14  $\delta \neq \delta_0(\mu)$

L'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  aura l'allure de la fig 14 au voisinage du point  $(\lambda^*(\mu, \delta), \varepsilon^*(\mu, \delta))$ .

**Cas (ii)**  $\delta = \delta_0(\mu)$  :

Dans ce cas, la seule solution de l'équation  $\tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = \delta$  est  $\varepsilon_0(\mu)$ , et le quadruplet  $(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu))$  qui est une solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E_{\mu,\delta_0(\mu)})$  vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu)) = 0, \\ \partial_{\varepsilon} \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu)) = 0, \\ \partial_{\lambda} \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu)) = 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu)) = 0. \end{cases}$$

Le Hessien de l'application  $\tau_i(\cdot, \cdot, \mu, \delta_0(\mu))$  au point  $(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu))$  est donné par

$$\text{Hess}\tau_i(\cdot, \cdot, \mu, \delta_0(\mu))(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu)) = -(\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i)^2(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu))$$

Or, on sait que :

$$\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) = -\frac{1}{\lambda_i} < 0,$$

et par continuité, on en déduit que :

$$-(\partial_{\lambda\varepsilon}^2 \tau_i)^2(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu), \mu, \delta_0(\mu)) > 0, \quad \forall \mu \in I_3.$$

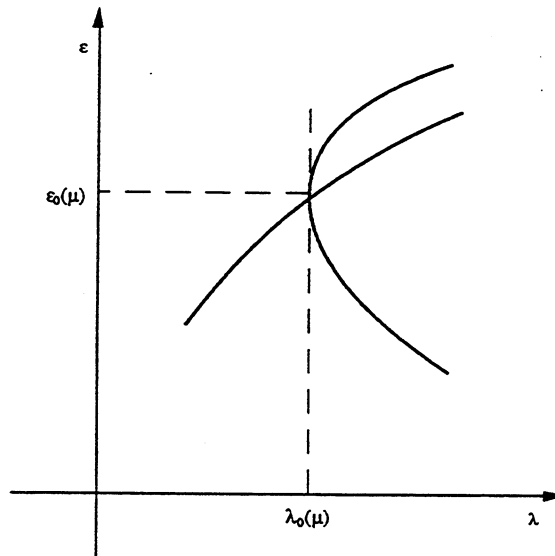


Figure 15  $\delta = \delta_0(\mu)$

On peut donc dire (Rabier[1982]) que le point  $(\lambda_0(\mu), \varepsilon_0(\mu))$  est un point de bifurcation de l'équation  $(E_{\mu, \delta_0(\mu)})$  et que l'ensemble des solutions de cette équation au voisinage de ce point est formé par deux courbes de classe  $C^\infty$  transverses en ce point. On peut préciser un peu plus en disant que l'une d'elles est tangente en ce point à la droite  $\lambda = \lambda_0(\mu)$  (cf. fig 15).

**Remarque 2.6.1** *La distinction entre les deux cas :  $\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$  et  $\varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu)$ , qui a permis d'obtenir les résultats précédents, peut aussi se comprendre comme la classification des deux cas :  $\delta_b(\mu) \neq \delta_h(\mu)$  et  $\delta_b(\mu) = \delta_h(\mu)$ . En effet, si  $\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$ , cela entraîne que  $\delta_b(\mu) \neq \delta_h(\mu)$ . Dans le cas contraire, on aurait une valeur  $\bar{\varepsilon}$  de  $\varepsilon$  comprise entre  $\varepsilon_b(\mu)$  et  $\varepsilon_h(\mu)$  pour laquelle,  $\partial_\varepsilon \tilde{\delta}(\bar{\varepsilon}, \mu) = 0$ , ce qui est en contradiction avec le fait que les points  $\varepsilon_b(\mu)$  et  $\varepsilon_h(\mu)$  sont les seuls dans  $I_2$ ,*



pour lesquels nous ayons cette condition. Réciproquement, lorsque  $\varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu)$ , on en déduit que  $\delta_b(\mu) = \delta_h(\mu)$  (cf. cas (II) ).

D'autre part, on sait que suivant les différentes valeurs du couple  $(\mu, \delta)$ , les solutions  $\varepsilon$ -singulières de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$  sont soit un point de bifurcation, soit un point d'hystérisis, soit un point de retournement non-dégénéré.

Il faut remarquer que les résultats précédents ne donnent que la partie des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  qui est voisine des solutions  $\varepsilon$ -singulières dans l'ouvert  $W_i$ . Dans la partie suivante, nous allons déterminer l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$ .

## 2. 7. Détermination de l'ensemble des solutions de l'équation

$(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$

Pour commencer ce paragraphe, on rappelle ici la notion de voisinage adapté (Ciarlet-Rabier[1980], Rao[1989]).

Dans toute la suite, on supposera que l'intervalle  $I_2$  est borné et on pose :

$$\partial I_2 = \bar{I}_2 / I_2.$$

**Définition 2.7.1** On dira que le voisinage  $W_i \times I_3 \times I_4 = I_{i,1} \times I_3 \times I_4$  est adapté, si pour tout couple  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$ , l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  ne possède aucune solution dans l'ensemble  $I_{i,1} \times \partial I_2$ .

Il faut remarquer que cette propriété persiste si on restreint de façon arbitraire les intervalles  $I_{i,1}$ ,  $I_3$  et  $I_4$ .

Soit  $(\mu, \delta)$  un couple donné dans  $I_3 \times I_4$ , on sait d'après l'étude précédente que l'équation  $\tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = \delta$  admet exactement une, deux ou trois solutions dans  $I_2$ . On note  $\varepsilon_j^*(\mu, \delta)$  pour  $(j = 1, 2, 3)$  ces solutions et on leur fait correspondre les  $\lambda_j^*(\mu, \delta)$  pour  $(j = 1, 2, 3)$  définis par :

$$\lambda_j^*(\mu, \delta) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_j^*(\mu, \delta), \mu), \quad j = 1, 2, 3.$$

Les couples  $(\lambda_j^*(\mu, \delta), \varepsilon_j^*(\mu, \delta))$  sont des solutions  $\varepsilon$ -singulières de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$ .

Etant donné un couple  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$ , nous allons dans les paragraphes qui vont suivre déterminer pour chaque  $\lambda \in I_{1,i}$ , le nombre de solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans  $I_2$ . Pour ce faire, on ordonne les  $\lambda_j^*(\mu, \delta)$  de la façon suivante :

$$\lambda_{\sigma(1)}^*(\mu, \delta) \leq \lambda_{\sigma(2)}^*(\mu, \delta) \leq \lambda_{\sigma(3)}^*(\mu, \delta),$$

où  $\sigma$  est une permutation sur l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .

Pour  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$  et  $\lambda \in I_{1,i}$ , tel que  $\lambda \neq \lambda_j^*(\mu, \delta)$ , on pose :

$$\mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta) = \{\varepsilon \in I_2 ; \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0\}.$$

On peut remarquer que si le voisinage  $W_i \times I_3 \times I_4$  est adapté, alors l'ensemble  $\mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta)$  vérifie la propriété suivante : *pour tout  $\lambda \in I_{1,i}$  et pour tout couple  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$ , l'ensemble  $\mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta)$  est fini.* En effet, il est aussi égal à l'ensemble  $\{\varepsilon \in \bar{I}_2 ; \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) = 0\}$ , ce qui entraîne qu'il est compact car  $I_2$  est borné. D'autre part, si  $\lambda \neq \lambda_j^*(\mu, \delta)$  pour  $(j = 1, 2, 3)$ , on aura :  $\partial_\varepsilon \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) \neq 0$  et dans ce cas, grâce au théorème de l'inversion locale, on peut dire que l'ensemble  $\mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta)$  est discret.

On peut donc parler du cardinal de cet ensemble que l'on notera :  $\text{Card}\mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta)$ .

Pour un couple  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$ , on on pose :

$$\begin{aligned} I_{1,i}^-(\mu, \delta) &= \{\lambda \in I_{1,i} ; \lambda < \lambda_{\sigma(1)}^*(\mu, \delta)\}, \\ I_{1,i}^+(\mu, \delta) &= \{\lambda \in I_{1,i} ; \lambda > \lambda_{\sigma(3)}^*(\mu, \delta)\}. \end{aligned}$$

**Lemme 2.7.2** *Les fonctions  $\lambda_j^*(\cdot, \cdot)$  et  $\varepsilon_j^*(\cdot, \cdot)$  (pour  $j = 1, 2, 3$ ) sont continues en  $(0, 0)$ .*

**Démonstration :** En effet, si on prend une suite  $(\mu_n, \delta_n) \in I_3 \times I_4$ , telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0.$$

On a par définition de la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot, \cdot)$  :

$$\tilde{\delta}(\varepsilon_j^*(\mu_n, \delta_n), \mu_n) = \delta_n.$$

L'intervalle  $I_3$  étant borné et  $\varepsilon_j^*(\mu_n, \delta_n) \in I_3$  on peut donc en extraire une sous-suite  $\bar{\varepsilon}_j^*(\mu_n, \delta_n)$  qui converge vers  $\varepsilon_j^*$ . Cette sous-suite vérifie aussi :

$$\tilde{\delta}(\bar{\varepsilon}_j^*(\mu_n, \delta_n), \mu_n) = \delta_n.$$

En passant à la limite dans cette égalité, la fonction  $\tilde{\delta}(\cdot)$  étant continue, on obtient

$$\tilde{\delta}(\varepsilon_j^*, 0) = 0.$$

Or, la fonction  $\varepsilon \mapsto \tilde{\delta}(\varepsilon, 0)$  est strictement monotone sur  $I_2$  et  $\tilde{\delta}(0, 0) = 0$ . Ceci qui entraîne que :

$$\varepsilon_j^* = 0, \quad \text{pour } j = 1, 2, 3.$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_j^*(\mu_n, \delta_n) = 0,$$

ce qui prouve que la fonction  $\varepsilon_j^*(\cdot, \cdot)$  est continue en  $(0, 0)$  (pour  $j = 1, 2, 3$ ).

D'autre part, on sait que les  $\lambda_j^*(\mu, \delta)$  sont définis par :

$$\lambda_j^*(\mu, \delta) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_j^*(\mu, \delta), \mu), \quad j = 1, 2, 3.$$

Leur continuité se déduit de celle des fonctions  $\varepsilon_j^*(\cdot, \cdot)$  et  $\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot)$ .

□

**Lemme 2.7.3** *Si le voisinage  $W_i \times I_3 \times I_4$  est adapté alors, quitte à restreindre l'ouvert  $I_3 \times I_4$ , on aura : le Card  $\mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta)$  est indépendant de  $(\lambda, \mu, \delta) \in I_3 \times I_4$  tel que  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$  et  $\lambda \in I_{1,i}^-(\mu, \delta)$  (resp.  $\lambda \in I_{1,i}^+(\mu, \delta)$ ).*

**Démonstration :**

Soit  $(\mu, \delta)$  un couple fixé dans  $I_3 \times I_4$ . Nous allons montrer que  $\text{Card } \mathcal{S}(\cdot, \mu, \delta)$  est localement constant pour  $\lambda_0 \in I_{1,i}^-(\mu, \delta)$ . On pose :  $k = \text{Card } \mathcal{S}(\lambda_0, \mu, \delta)$ .

On sait par construction de  $I_{1,i}^-(\mu, \delta)$  que  $\lambda_0 \neq \lambda_j^*(\mu, \delta)$  ce qui entraîne que :  $\partial_\varepsilon \tau_i(\lambda_0, \varepsilon, \mu, \delta) \neq 0$  et le théorème des fonctions implicites, nous permet d'affirmer que :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda', \mu, \delta) \geq \text{Card } \mathcal{S}(\lambda_0, \mu, \delta),$$

pour tout  $\lambda'$  voisin de  $\lambda_0$ .

Supposons que cette inégalité est stricte ce qui veut dire qu'il existe une suite  $(\lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\lambda_0$  et telle que :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda'_n, \mu, \delta) \geq \text{Card } \mathcal{S}(\lambda_0, \mu, \delta) + 1.$$

On a donc  $(k + 1)$  suites de  $I_2$ , notées  $\varepsilon_n^j$ ,  $1 \leq j \leq k + 1$ , qui vérifient :

$$\begin{aligned} \tau_i(\lambda'_n, \varepsilon_n^j, \mu, \delta) &= 0, & 1 \leq j \leq k + 1, \\ \varepsilon_n^j &\neq \varepsilon_n^l, & \text{pour } j \neq l. \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Quitte à en extraire des sous-suites, on peut supposer que les suites  $\varepsilon_n^j$  convergent vers des limites que l'on note :  $\varepsilon^j \in \bar{I}_2$  et par continuité de l'application  $\tau_i$ , ces limites vérifient :

$$\tau_i(\lambda_0, \varepsilon^j, \mu, \delta) = 0$$

Or, nous avons supposé que l'ouvert  $W_i \times I_3 \times I_4$  est adapté, ce qui entraîne que  $\varepsilon^j \in I_2$  et donc  $\varepsilon^j \in \mathcal{S}(\lambda_0, \mu, \delta)$ .

Supposons qu'il existe deux indices  $j$  et  $l$ , tels que :  $\varepsilon^j = \varepsilon^l = \varepsilon_0$ , on a :

$$\tau_i(\lambda_0, \varepsilon_0, \mu, \delta) = 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, on conclut que les solutions de cette équation sont données par une fonction  $\tilde{\varepsilon}(\cdot)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} : I_{1,i} &\rightarrow I_2 \\ \lambda &\mapsto \tilde{\varepsilon}(\lambda) \quad (\tilde{\varepsilon}(\lambda_0) = \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Alors, pour un  $n$  assez grand, on aura :

$$\varepsilon_n^j = \tilde{\varepsilon}(\lambda_n) = \varepsilon_n^l,$$

ce qui contredit alors (2.7.1)

Nous avons donc  $\varepsilon^j \neq \varepsilon^l$ , pour  $j \neq l$ , ce qui entraîne que :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda_0, \mu, \delta) \geq k + 1,$$

ce qui est contradiction avec  $\text{Card } \mathcal{S}(\lambda_0, \mu, \delta) = k$ . Ainsi  $\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta)$  est indépendant de  $\lambda \in I_{1,i}^-(\mu, \delta)$ .

Un raisonnement identique prouve le même résultat pour  $\lambda$  dans  $I_{1,i}^+(\mu, \delta)$ .

□

**Lemme 2.7.4** *Si  $\mu = 0$  et si le voisinage  $W_i \times I_4$  est adapté alors, on aura :*

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, 0, \delta) = 3, \text{ pour } \lambda \in I_{1,i}^+(0, \delta) \text{ (i.e. } \lambda > \lambda_i),$$

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, 0, \delta) = 1, \text{ pour } \lambda \in I_{1,i}^-(0, \delta) \text{ (i.e. } \lambda < \lambda_i).$$

**Démonstration :**

Soit  $\delta \in I_4$  et  $\lambda \in I_{1,i}^-(0, \delta)$ , on a d'après le lemme 2.7.3 :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, 0, \delta) = \text{Card } \mathcal{S}(\lambda', 0, 0), \quad (2.7.2)$$

pour tout  $\lambda' \in I_{1,i}^-(0, \delta)$  (dans ce cas, c'est équivalent à dire que  $\lambda < \lambda_i$ ).

Or, on sait d'après le théorème 1.9.3 que les couples  $(\lambda', 0)$  sont les seules solutions de l'équation  $(E_{0,0})$  dans l'ouvert  $W_i$ , lorsqu'on se restreint aux valeurs  $\lambda' < \lambda_i$  et voisine de  $\lambda_i$ . Ce qui entraîne que :  $\mathcal{S}(\lambda', 0, 0) = \{0\}$  pour tout  $\lambda' < \lambda_i$  dans  $I_{1,i}$  et donc :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda', 0, 0) = 1.$$

La relation (2.7.2) entraîne :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, 0, \delta) = 1, \quad \forall \delta \in I_4, \quad \forall \lambda \in I_{1,i}^-(0, \delta)$$

De la même façon, on montre que :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, 0, \delta) = \text{Card } \mathcal{S}(\lambda', 0, 0), \quad (2.7.3)$$

pour tout  $\lambda \in I_{1,i}^+(0, \delta)$  (dans ce cas c'est équivalent à dire que  $\lambda > \lambda_i$ ). On se contente ici des  $\lambda'$  qui sont voisins de  $\lambda$ .

D'après le théorème 1.9.3 l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{0,0})$  est formé au voisinage du point  $(\lambda_i, 0)$  par deux courbes de classe  $C^\infty$  transverses et que l'équation :  $\tau_i(\lambda', \varepsilon, 0, 0) = 0$ , admet pour  $\lambda' > \lambda_i$  en plus de la solution  $\varepsilon = 0$  deux autres solutions. On a donc :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda', 0, 0) = 3.$$

La relation (2.7.3) donne :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda', 0, \delta) = 3, \quad \forall \delta \in I_4, \quad \forall \lambda \in I_{1,i}^+(0, \delta).$$

**Lemme 2.7.5** *Si le voisinage  $W_i \times I_3 \times I_4$  est adapté alors, pour tout couple  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$ , on aura :*

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta) = 3, \quad \text{pour } \lambda \in I_{1,i}^+(\mu, \delta),$$

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta) = 1, \quad \text{pour } \lambda \in I_{1,i}^-(\mu, \delta).$$

**Démonstration :**

Nous savons grâce au lemme 2.7.3 que :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta) = \text{Card } \mathcal{S}(\lambda', 0, \delta),$$

pour tout  $\lambda \leq \lambda_{\sigma(1)}^*(\mu, \delta)$  et tout  $\lambda' \leq \lambda_{\sigma(1)}^*(0, \delta)$ .

Or, d'après le lemme 2.7.4, nous avons :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda', 0, \delta) = 1, \quad \text{pour tout } \lambda' \leq \lambda_{\sigma(1)}^*(0, \delta),$$

ce qui entraîne alors, que :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta) = 1, \quad \text{pour tout } \lambda \leq \lambda_{\sigma(1)}^*(\mu, \delta).$$

Nous obtenons de la même façon :

$$\text{Card } \mathcal{S}(\lambda, \mu, \delta) = 3, \quad \text{pour } \lambda \in I_{1,i}^-(\mu, \delta).$$

□

**Lemme 2.7.6** *Si le voisinage  $W_i \times I_3 \times I_4$  est adapté alors, pour tout  $(\lambda, \mu, \delta) \in W_i \times I_3 \times I_4$ , l'équation*

$$\tau_i(\lambda, \mu, \delta) = 0, \tag{2.7.4}$$

*possède au plus trois solutions .*

**Démonstration :**

Soit  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$ . Si  $\lambda \neq \lambda_j^*(\mu, \delta)$  alors, le lemme 2.7.5 donne le résultat. S'il existe  $j \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $\lambda = \lambda_j^*(\mu, \delta)$  alors si  $\varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu)$ , l'équation (2.7.4) aura une solution unique (cf. cas (2)) et si  $\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$ , on aura au plus trois solutions (cf. Cas(1)).

On pouvait obtenir ce résultat en remarquant que :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i(\lambda_i, 0, 0, 0) = -6\alpha \langle C(\phi_i), \phi_i \rangle < 0$$

et en supposant que par continuité, cette inégalité va rester vraie sur  $W_i \times I_3 \times I_4$ . Or si on suppose que l'équation (2.7.4) a au moins 4 solutions, le théorème de Rolle appliqué trois fois nous donne l'existence d'un  $\varepsilon_0 \in I_2$  telle que :

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}^3 \tau_i(\lambda, \varepsilon_0, \mu, \delta) = 0,$$

ce qui entraîne une contradiction. □

Nous pouvons désormais, grâce aux résultats précédents, déterminer pour un couple  $(\mu, \delta) \in I_3 \times I_4$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$ .

On aura, ce qui était prévu par la théorie de Golubitsky et Schaffer[1978] cinq cas à distinguer.

(1)  $\delta$  compris entre  $\delta_b(\mu)$  et  $\delta_h(\mu)$  :

L'équation  $\delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \delta)$  admet, dans ce cas, trois solutions :

$$\varepsilon_1^*(\mu, \delta) < \varepsilon_b(\mu) < \varepsilon_2^*(\mu, \delta) < \varepsilon_h(\mu) < \varepsilon_3^*(\mu, \delta),$$

on leur associe :

$$\lambda_j^*(\mu, \delta) = \tilde{\lambda}(\varepsilon_j^*(\mu, \delta), \mu), \quad j = 1, 2, 3,$$

La fonction  $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}(\lambda, \mu)$  est strictement croissante pour  $\varepsilon < \varepsilon_h(\mu)$  ce qui entraîne que

$$\lambda_1^*(\mu, \delta) < \lambda_2^*(\mu, \delta).$$

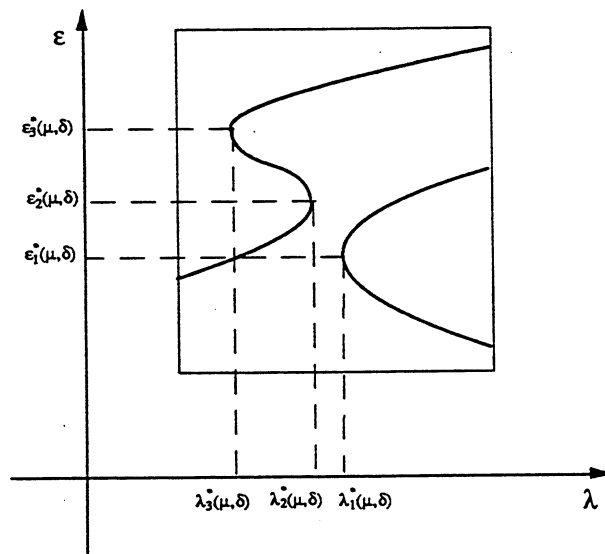


Figure 16  $\delta$  compris entre  $\delta_b(\mu)$  et  $\delta_h(\mu)$

Comme les seules solutions  $\varepsilon$ -singulières de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  dans l'ouvert  $W_i$  sont les points  $(\lambda_j^*(\mu, \delta), \varepsilon_j^*(\mu, \delta))$ , on montre en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  dans l'ouvert  $W_i$  est constitué de deux courbes disjointes de classe  $C^\infty$  (cf. fig 16)

$$(2) \delta = \delta_b(\mu) \quad (\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)) :$$

L'équation  $\delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \delta)$  admet deux solutions. L'un des points correspondants à ces solutions;  $(\lambda_b^*(\mu), \varepsilon_b^*(\mu))$  est un point de retournement ayant lieu à droite et l'autre  $(\lambda_b(\mu), \varepsilon_b(\mu))$  est un point de bifurcation subcritique. Elles sont les seules solutions  $\varepsilon$ -singulières de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  dans l'ouvert  $W_i$ .

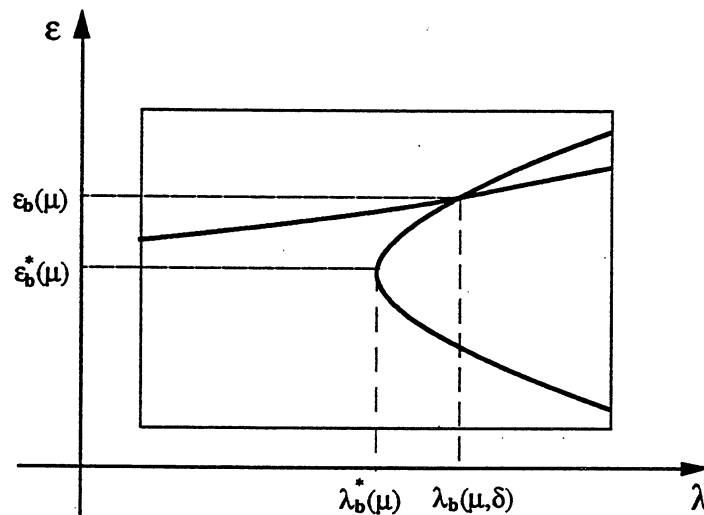


Figure 17  $\delta = \delta_b(\mu) \quad (\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu))$

Comme  $\varepsilon_b^*(\mu) \neq \varepsilon_b(\mu)$ , et on aura (voir le point (iii) du Cas 1 de la section 2.6) :  $\lambda_b^*(\mu) < \lambda_b(\mu)$ .

L'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  dans l'ouvert  $W_i$  aura l'allure de la figure fig 17

$$(3) \delta = \delta_b(\mu) \quad (\varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu)) :$$

L'équation  $\delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \delta)$  admet une seule solution correspondant à un point de bifurcation. De plus, elle est la seule solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  dans l'ouvert  $W_i$ .

L'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu,\delta})$  dans l'ouvert  $W_i$  est formé de deux courbes de classe  $C^\infty$ , il aura l'allure de la figure fig 18

$$(4) \delta \text{ à l'extérieur de } \delta_b(\mu) \text{ et } \delta_h(\mu) :$$

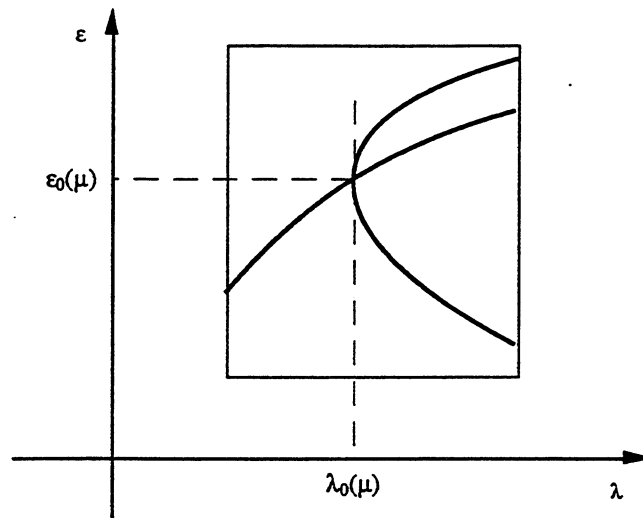


Figure 18  $\delta = \delta_b(\mu)$  ( $\varepsilon_b(\mu) = \varepsilon_h(\mu)$ )

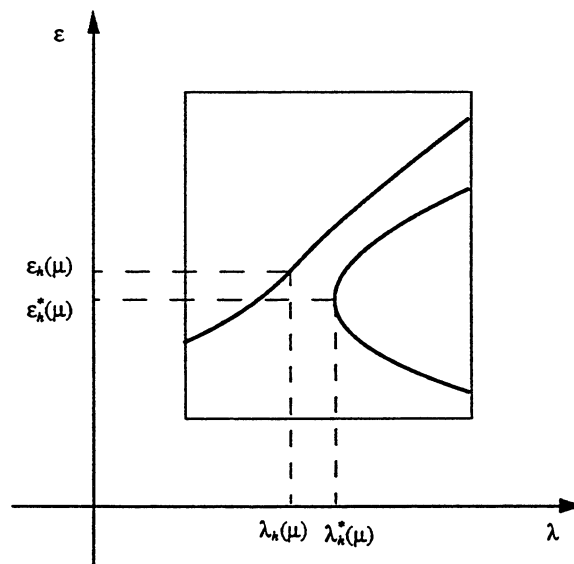


Figure 19  $\delta$  à l'extérieur de  $\delta_b(\mu)$  et  $\delta_h(\mu)$

L'équation  $\delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \delta)$  admet une seule solution correspondant à un point de retournement ayant lieu à droite. De plus, elle est la seule solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$ . L'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$  aura l'allure de la fig 19



(5)  $\delta = \delta_h(\mu)$  ( $\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$ ) :

L'équation  $\delta = \tilde{\delta}(\varepsilon, \delta)$  admet deux solutions. L'un des points correspondants  $(\lambda_h^*(\mu, \delta), \varepsilon_h^*(\mu, \delta))$  est un point de retournement ayant lieu à droite et l'autre  $(\lambda_h(\mu, \delta), \varepsilon_h(\mu, \delta))$  est un point d'hystérésis. Ce sont les seules solutions  $\varepsilon$ -singulières de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$ .

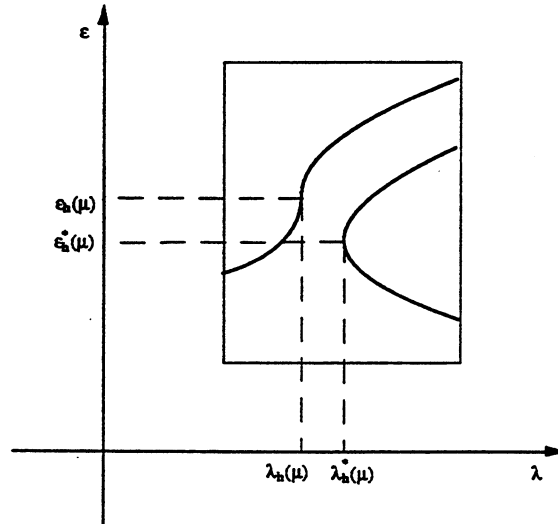


Figure 20  $\delta = \delta_h(\mu)$  ( $\varepsilon_b(\mu) \neq \varepsilon_h(\mu)$ )

Nous savons que la première composante d'un couple  $(\lambda(\mu, \delta), \varepsilon(\mu, \delta))$  qui est solution  $\varepsilon$ -singulière de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  vérifie :

$$\lambda(\mu, \delta) = \tilde{\lambda}(\varepsilon(\mu, \delta), \mu).$$

Or la fonction  $\tilde{\lambda}(\cdot, \mu)$  est strictement convexe et atteint son minimum  $\lambda = \lambda_h(\mu)$  au point  $\varepsilon_h(\mu)$ . On a donc :  $\lambda_h^*(\mu, \delta) \leq \lambda_h(\mu, \delta)$  et cette inégalité est stricte car  $\varepsilon_h(\mu) \neq \varepsilon_h^*(\mu)$ .

Le théorème des fonctions implicites nous permet de dire que l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$  est constitué de deux courbes disjointes de classe  $C^\infty$  (cf. fig 20)

### 2. 7. 1. f Mise en œuvre de cette classification :

La connaissance des deux fonctions  $\delta_b(\cdot)$  et  $\delta_h(\cdot)$ , nous permet de partitionner le plan  $(\mu, \delta)$  (au voisinage de  $(0, 0)$ ) en cinq régions (cf. figure fig 21). Etant donné un couple  $(\mu_0, \delta_0) \in I_3 \times I_4$ , on commence par déterminer dans quelle région il se situe et le numéro de celle-ci nous donne l'ensemble des solutions (parmi les cinq cités précédemment) qui lui correspond.

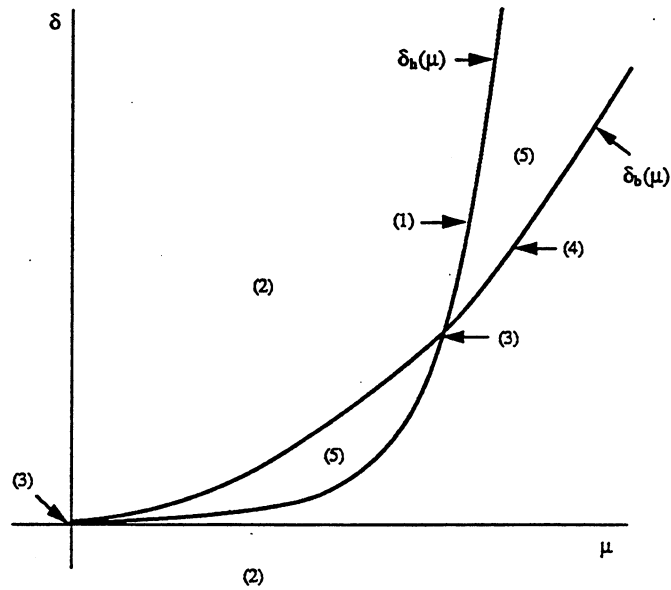


Figure 21 partition du plan  $(\mu, \delta)$

**Remarque 2.7.7** Les deux courbes  $\delta_b(\cdot)$  et  $\delta_h(\cdot)$  s'intersectent pour  $\mu = 0$  et on vérifie aisément qu'elles ont toutes les deux une tangente horizontale en ce point. Elles peuvent se couper pour d'autres valeurs de  $\mu$ . Après de très longs calculs, on montre que :

$$\delta_b'''(0) \neq \delta_h'''(0).$$

## 2. 8. Retour au problème initial :

Nous avons montré que l'application  $\mathcal{I}_i$  est une immersion en  $(0, 0, 0, 0)$  et qu'elle réalise une bijection entre les solutions (resp.  $\varepsilon$ -singulières) de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  et les solutions (resp.  $u$ -singulières) de  $(\mathcal{E}_{\mu, \delta})$ .

Les résultats des paragraphes précédents concernant l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  vont se transposer à l'équation  $(\mathcal{E}_{\mu, \delta} E_f)$ . Plus précisément, l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_f)$  dans  $\hat{W}_i$  est l'image par l'application  $\mathcal{I}_{i, \mu \delta}$  de celui de l'équation  $(E_{\mu, \delta})$  dans l'ouvert  $W_i$ .

**Remarque 2.8.1** *Dans cette étude, nous avons supposé que  $\mathbb{F} = \mu^2 \mathbb{F}_0$  ce qui nous a permis d'avoir la condition :*

$$\partial_\delta \tau_i(0, 0, 0, 0) \neq 0,$$

*On peut se passer de cette hypothèse en introduisant un nouveau paramètre  $\Delta$ , qui va jouer le rôle de  $\delta$  dans notre étude, et en résolvant le problème suivant :*

$$\tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) + \Delta = 0.$$

*On est ainsi ramené à chercher une partition de l'espace  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  des paramètres de perturbation  $((\mu, \delta), \Delta)$  au voisinage de  $((0, 0), 0)$ . La partition de l'espace  $(\mu, \delta)$  correspond alors à l'intersection de cette dernière avec le plan  $\Delta = 0$ .*

**Remarque 2.8.2** *Tous les résultats ont été obtenus sous la condition :*

$$\langle \mathbb{F}, \phi_i \rangle \neq 0,$$

*on peut l'éviter de la manière suivante : au lieu de fixer la direction de  $\mathbb{F}$  et de considérer  $\delta$  comme un facteur de charge dans cette direction, on décompose  $\mathbb{F}$  sur  $\mathcal{N}_i$  et  $\mathcal{N}_i^\perp$*

$$\mathbb{F} = \delta \phi_i + v, \quad v \in \mathcal{N}_i^\perp.$$

*L'application  $\tau_i$  est alors définie par :*

$$\begin{aligned} \tau_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta) &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) \varepsilon + (2\alpha - \nu \lambda) \mu^2 \langle L_0[\varepsilon \phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\ &\quad + 3\alpha \mu \langle Q[\varepsilon \phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle + \alpha \langle C[\varepsilon \phi_i + v_i(\lambda, \varepsilon, \mu, \delta)], \phi_i \rangle \\ &\quad + \frac{\lambda}{\lambda_i} \nu \mu^3 \langle \theta, \phi_i \rangle - \delta. \end{aligned}$$

## 2. 9. Résultats numériques :

Nous avons montré aux sections précédentes, comment on pouvait, étant donné un couple  $(\mu, \delta)$  de paramètres de perturbation, déterminer sans ambiguïté, le diagramme correspondant parmi les cinq prévus par la théorie de Golubitsky et Shaffer[1979].

Nous allons mettre numériquement en évidence ces différents diagrammes. Un phénomène similaire a été observé Paumier-Rao[1989] pour les équations de Marguere Von Kármán. Ils utilisent la théorie de la perturbation des bifurcations des plaques de Von Kármán. Ce travail a été suivi par la construction d'un code de calcul qui permet de tracer les courbes solutions.

On peut citer ici les travaux de Bauer et Reiss[1965] sur l'étude numérique du flambage des plaques rectangulaires par différences finies et de S.Kesavan[1979] qui, en appliquant la méthode de Kikuchi aux équations de Von Kármán, a proposé une méthode itérative d'éléments finis qui donne des approximations des solutions de norme "petite" qui bifurquent à partir de la branche triviale, au voisinage d'une valeur propre simple.

Nous avons choisi de résoudre l'équation différences finies.

Néanmoins, la résolution de ce problème par une méthode d'éléments finis et surtout le calcul des estimations d'erreur en suivant la même démarche que dans Paumier-Rao[1989] ou Kesavan[1979], ne semble pas poser de problèmes particuliers.

### 2. 9. 1. Problème approché :

On subdivise l'intervalle  $[0, L]$  en  $N + 1$  points équidistants  $s_i$ . On pose  $h = \frac{L}{N}$ ,  $s_i = i.h$ ,  $u_i = u(s_i)$  et soit  $U^h$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{N-1}$  de composantes  $u_i$ , pour  $1 \leq i \leq N - 1$ .

Pour approcher la dérivée quatrième au point  $s_i$ , on utilise un schéma de différences finies centré à cinq points et pour la dérivée seconde, un schéma centré à trois points ce qui donne :

$$u^{(4)}(s_i) = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4} + O(h^2),$$

$$u''(s_i) = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h^2)$$

Pour traiter les conditions aux limites, nous avons introduit deux points fictifs  $s_{-1}$  et  $s_{N+1}$  avec les conditions  $u(s_{-1}) = u(s_1)$  et  $u(s_{N+1}) = u(s_{N-1})$ .

Nous sommes donc amenés à résoudre un système algébrique non linéaire de  $N - 1$  équations à  $N - 1$  inconnues, dépendant d'un paramètre  $\lambda$  que l'on peut mettre sous la forme :

$$F(\lambda, U^h) = 0, \quad (E)$$

Pour calculer les branches de solutions de l'équation (E), on utilise une méthode de cheminement. Celle que nous avons retenue est celle d'Allgower-Georg[1990]. Partant d'un point régulier de la branche de solutions, que l'on veut déterminer, on calcule un voisin en deux étapes; une prédiction d'Euler et une correction de type Newton pour se remettre sur la courbe. Elle est basée sur le calcul de l'inverse de Moore-Penrose de la jacobienne de  $F$ .

Pour le calcul de l'inverse de Moore-Penrose de la jacobienne, nous utilisons une décomposition  $QR$  de celle-ci. Cette décomposition, coûteuse en général mais qui se simplifie dans le cas de matrices creuses, a l'avantage de permettre de détecter très facilement les points de bifurcation simples, comme c'est le cas dans notre problème.

En présence d'un point de bifurcation, on peut soit continuer sur la même branche, soit passer sur une nouvelle en perturbant l'équation.

### 2. 9. 2. Tests numériques :

Dans tous les tests, la longueur du cylindre est fixée à  $L=1$  et son épaisseur à  $e = \frac{R}{20}$ . L'étude est faite au voisinage de la plus petite des valeurs caractéristiques de l'opérateur  $T$  qui est donnée par :

$$\lambda_1 = \frac{4\pi^2}{L^2} \approx 39.49$$

Le nombre de subdivisions est fixé à  $N=30$ .

Les diagramme de bifurcation sont tracés dans le plan  $(u(L/2), \lambda)$ .

On commence par le cas particulier  $\mu = \delta = 0$  (le cas  $\mu = 0$  n'est pas physique car il correspond à un cylindre de rayon  $R = +\infty$  mais il permet d'initialiser l'étude). On sait alors que  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$  est une branche de solution. On part du point  $\lambda = 0, u = 0$  et on chemine dans le sens des  $\lambda > 0$ . Un point de bifurcation est détecté entre  $\lambda = 38.1$  et  $\lambda = 38.4$  pour un pas de cheminement égal à : 0.2.

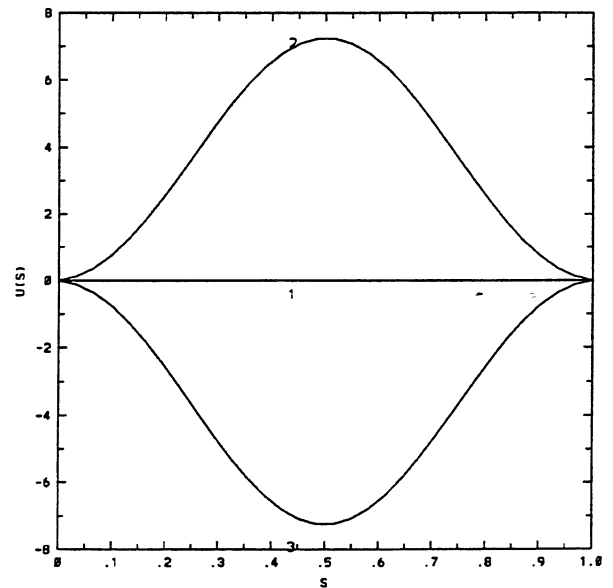
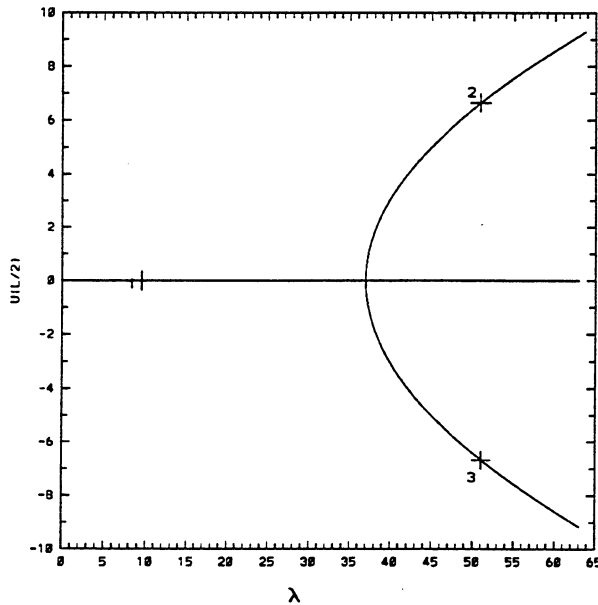


Figure 22 Diagramme de bifurcation pour  $\mu = \delta = 0$       Figure 23 Déplacements  $U$  et  $U_1$  pour  $\mu = \delta = 0$

On obtient le diagramme de bifurcation de la fig 23

Dans la série de tests numériques qui suivent, on a fixé  $\mu = 0.25$  (i.e.  $R = 4$ ). Dans chaque cas, on donne le diagramme de bifurcation au voisinage de  $\lambda_1$ , le déplacement normal  $U$  et axial  $U1$  ainsi que la position du cylindre pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

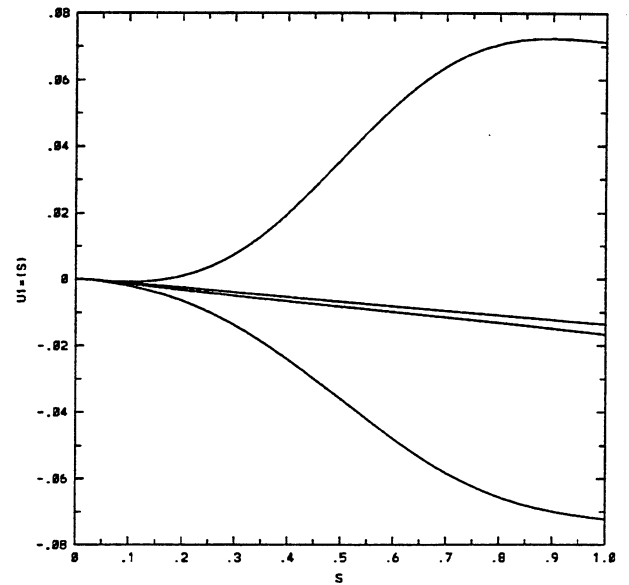
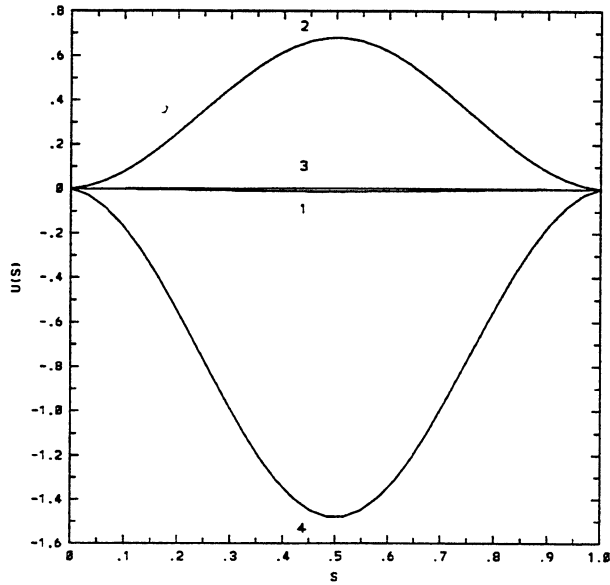


Figure 24 Déplacements  $U$  et  $U1$  pour  $\mu = 0.25$ ,  $\delta = 0$

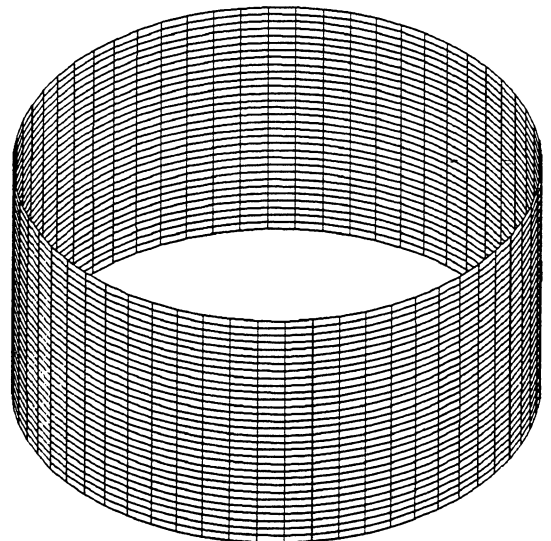
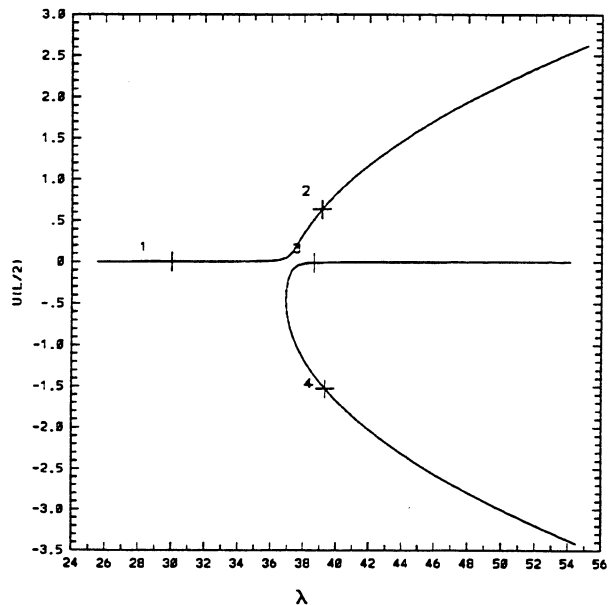


Figure 25 Diagramme de bifurcation pour  $\mu = 0.25$ ,  $\delta = 0$

Figure 26 Cylindre déformé (1) ou (3)

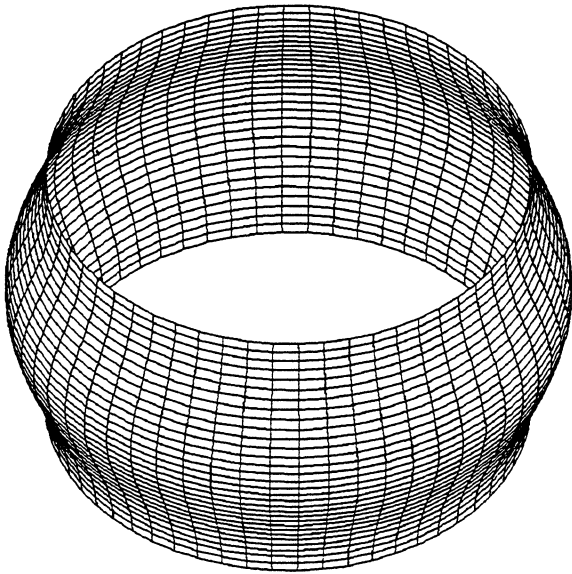


Figure 27 Cylindre déformé (2)

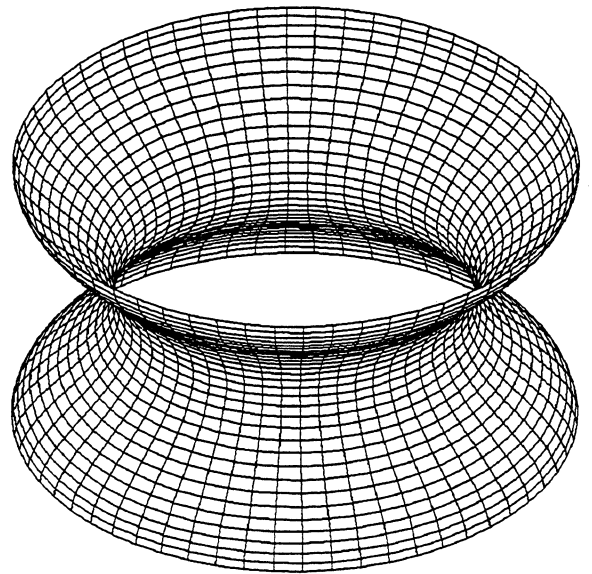
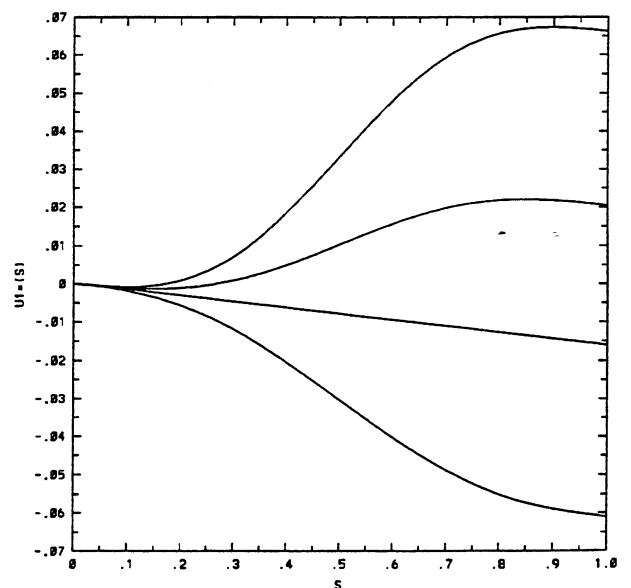
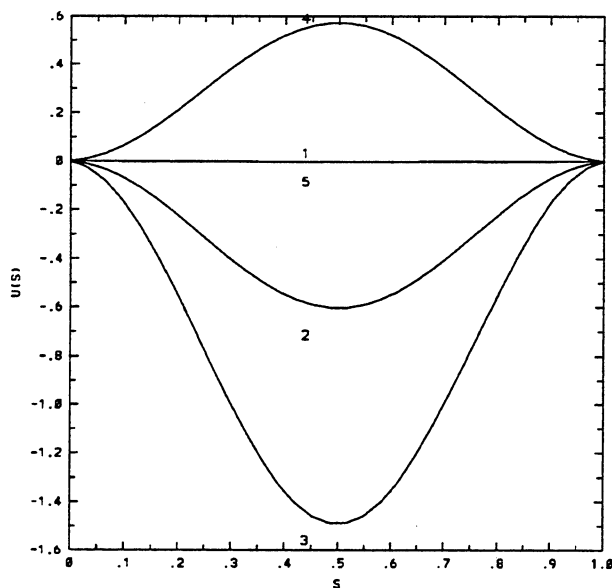


Figure 28 Cylindre déformé (4)

Pour  $\delta = 0$ , nous avons obtenu le diagramme du type (2) de la fig 26

Figure 29 Déplacements  $U$  et  $U_1$  pour  $\mu = 0.25$ ,  $\delta = -0.19$

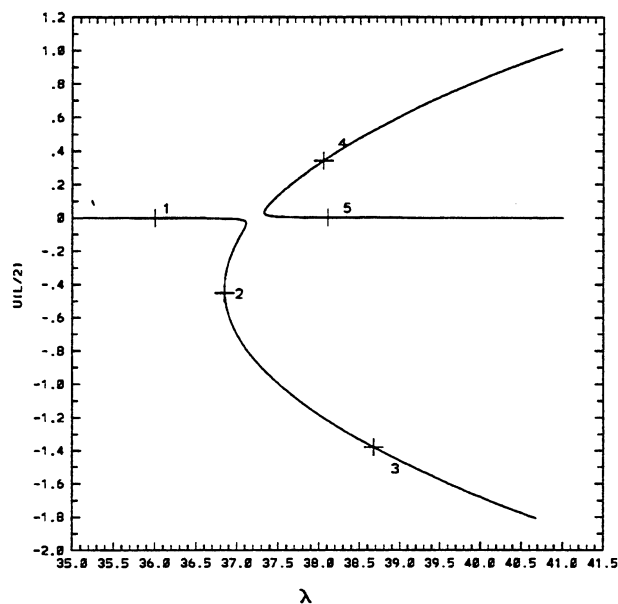


Figure 30 Diagramme de bifurcation pour  $\mu = 0.25$ ,  $\delta = -0.19$

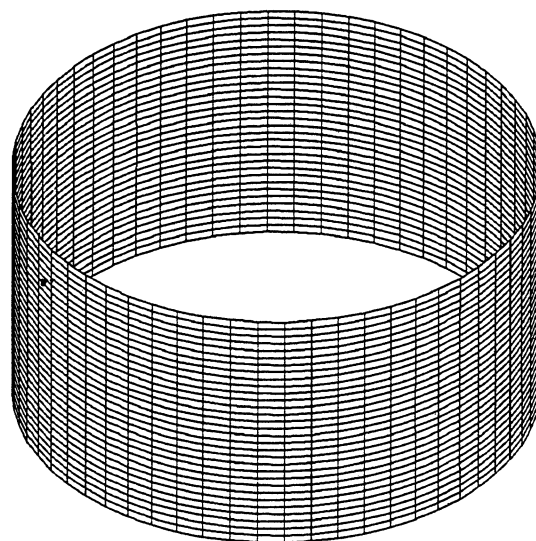


Figure 31 Cylindre déformé (1) ou (5)

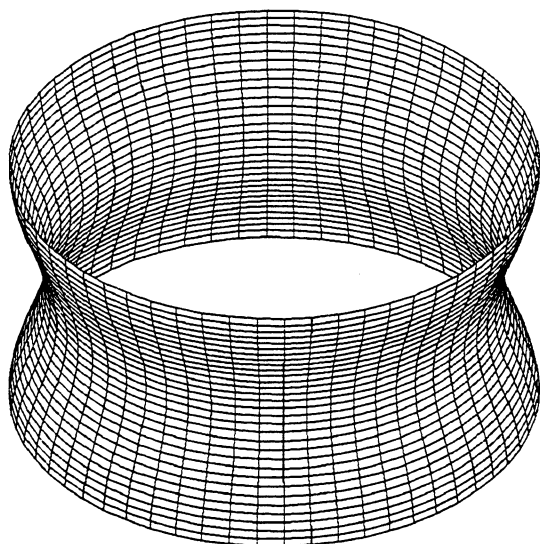


Figure 32 Cylindre déformé (2)

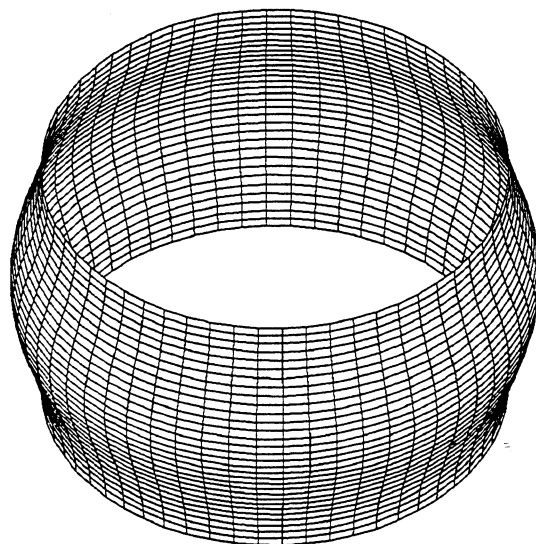


Figure 33 Cylindre déformé (4)

Pour  $\delta = -0.19$ , nous avons obtenu le diagramme du type (5) de la fig 31



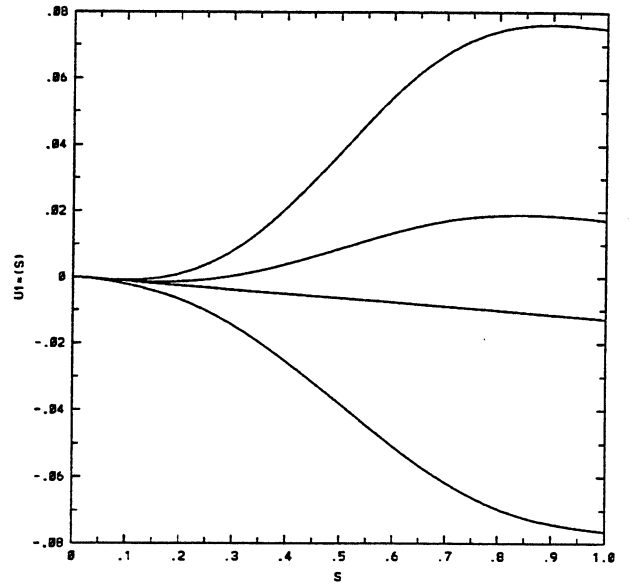
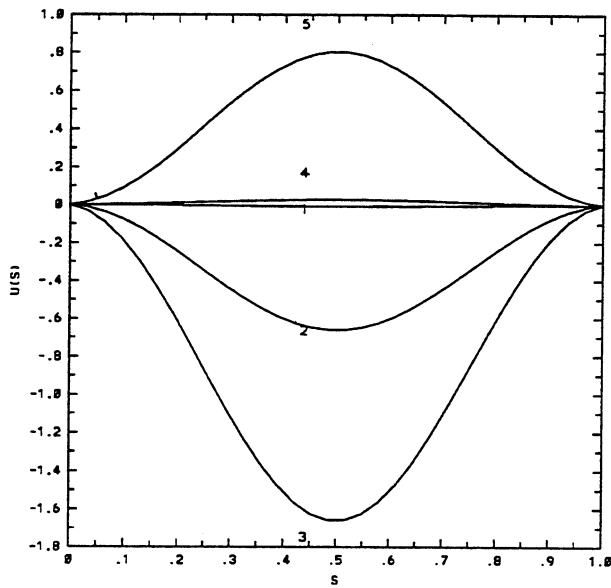


Figure 34 Déplacements  $U$  et  $U1$  pour  $\mu = 0.25$ ,  $\delta = -0.8$

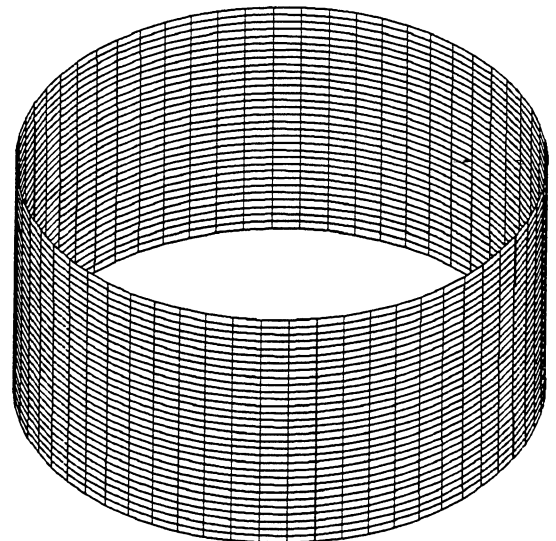
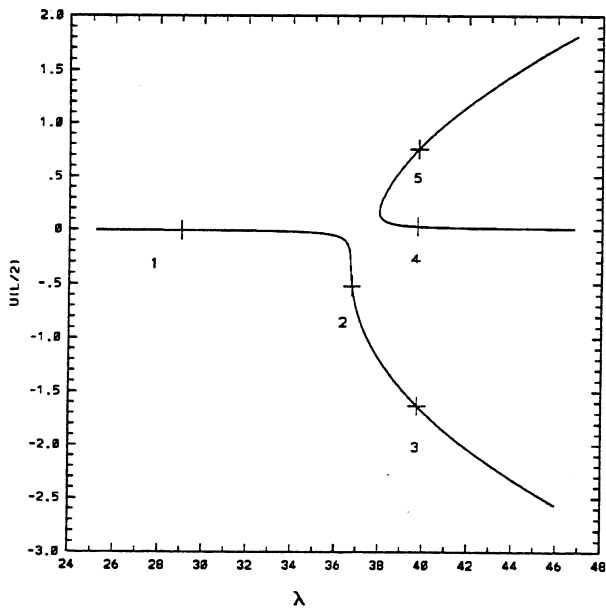


Figure 35 Diagramme de bifurcation pour  $\mu = 0.25$ ,  $\delta = -0.8$

Figure 36 Cylindre déformé (1) ou (4)

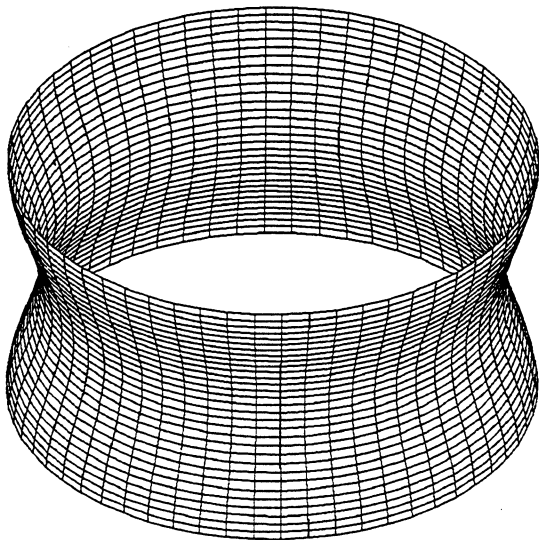


Figure 37 Cylindre déformé (3)

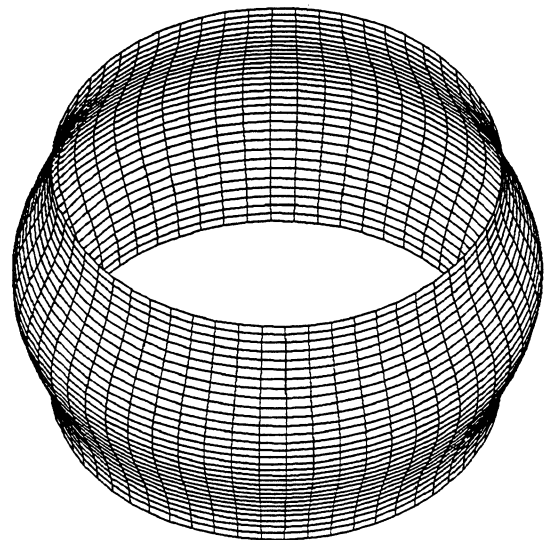
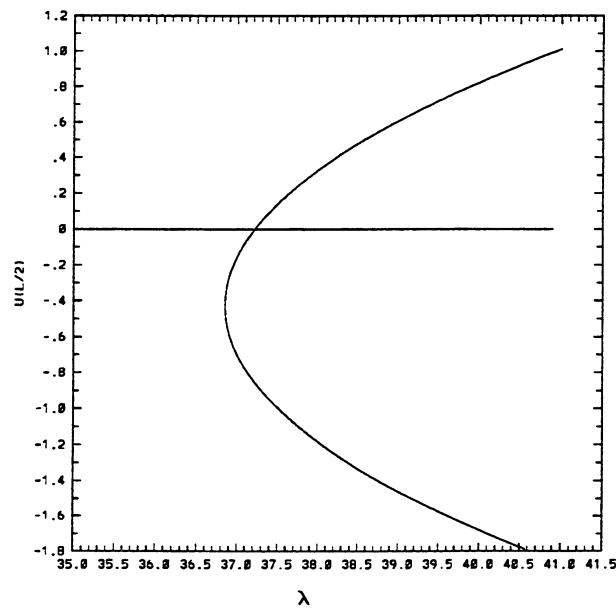


Figure 38 Cylindre déformé (5)

Pour  $\delta = -0.8$ , nous avons obtenu le diagramme du type (1) de la fig 36, on est sur la courbe  $\delta_h(\cdot)$  ou du moins très près de celle-ci.

Figure 39 Diagramme de bifurcation pour  $\mu = 0.25$ ,  $\delta = -0.1745$ 

Pour  $\delta = -0.1745$ , nous avons obtenu le diagramme du type (4) de la fig 39, on est très près de a courbe  $\delta_b(\cdot)$ .

**Remarque 2.9.1** Les valeurs de  $\delta$  pour lesquelles nous avons  $\delta_b(\mu) = \delta$  (ici

$\delta = -0.1745$ ) et  $\delta_h(\mu) = \delta$  (ici  $\delta = -0.8$ ) ont été obtenues par une méthode de dichotomie "visuelle". Un problème très intéressant à résoudre serait de calculer les deux courbes  $\delta_b(\cdot)$  et  $\delta_h(\cdot)$  en appliquant une méthode de cheminement aux deux systèmes  $(E_1^{\epsilon, s})$  et  $(E_1^{\epsilon, s})$  les définissant.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADAMS, R.-A.[1976] : *Sobolev Spaces, Academic Press, New York.*
- [2] ALLGOWER, E.L; GEORG.K[1990] : *Numerical Continuation Methods An Introduction,*
- [3] BAUER, L. ; REISS, E.[1967] : *Nonlinear buckling of rectangular plates. SIAM 13, 603-626.*
- [4] CEA, J. [1971] : *Optimisation, théorie et algorithmes, Dunod, Paris.*
- [5] CIARLET, P.-G.[1985] : *Elasticité tridimensionnelle, Mason, Paris.*
- [6] CIARLET, P.-G. ; RABIER, P.[1980] : *Les Equations de Von Kármán, Lecture Notes in mathematics, vol. 825, Springer-Verlag, Berlin.*
- [7] DAUTRA, R. ; LIONS, J.-L : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les Sciences et les Techniques.*
- [8] GOLUBITSKY, M. ; CHAFFER, D.[1979] : *A theory for imperfect bifurcation via singularity theory, Comm. Pure Appl. Math. 32, 21-98.*
- [9] KÁRMÁN, T; TSIEN, H,-S[1941] : *The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, J. of the aeronautical sciences, vol. n° 8.*
- [10] KESAVAN, S.[1979] : *La méthode de Kikuchi appliquée aux équations de Von Kármán, Numer. Math. 32, 2, 1979.*
- [11] KOITER, W.-T.[1966] : *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetench ., B. 69, 1966, p. 1-59*
- [12] KRASNOSEL'SKII, M.-A.[1964] : *Topological methods in theory of nonlinear integral equations, Pergamon Press, New York.*
- [13] PAUMIER, J.-C. ; RAO, B.[1989] : *Qualitative and quantitative analysis of buckling of shallow shells, Eur. J. Mech, A/Solids, 8, n° 6, 461-489, 1989.*
- [14] RABIER, P.[1982] : *Etude locales des problèmes non-linéaires perturbés, J. Math. Pur Appl. 4, 311-343*
- [15] RABIER, P.[1982] : *Une méthode directe dans l'étude des bifurcations perturbées par un nombre quelconque de paramètres, REND. SEM. MAT. UNIVES. POLITECO. TORINO, Vol. 40, n° 3.*
- [16] RAO, B.[1989] : *Sur quelques questions d'élasticité non linéaire relatives aux coques minces, Thèse, Université Pierre et Marie Curie.*



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLGOWER, E.L; GEORG.K[1990] : *Numerical Continuation Methods An Introduction.*
- [2] ARNOLD, D.N[1981] : *Discretization by finite elements of a model dependent problem, Numer. Math., 37, 405-421.*
- [3] BABUŠKA I.; SURI, M.[1992] : *On locking and robustness in the finite element method.*
- [4] BREZZI, F.; FORTIN, M[1991] : *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.*
- [5] BERCOVIER, M[1978] : *Perturbation of mixed variational problem, application to mixed finite element methods, R.A.I.R.O. Anal. Numer., 12, 211-235.*
- [6] CHENAIS, D., HABBAL, A.[1992] : *Deterioration of a finite element method for arch structures when thickness goes to zero, Numer. Math. 62, pp. 321-341.*
- [7] CHENAIS, D., PAUMIER, J.-C.[1994] : *On the locking phenomenon for a class of elliptic problems, Numer. Math. ....*
- [8] CROUZEIX, M.; MIGNOT, A.L.[1983] : *Analyse numérique des équations différentielles, Masson 1983.*
- [9] HABBAL, A.[1990] : *Optimisation non différentiable de forme d'arche, Thèse de l'Université de Nice.*
- [10] KIKUCHI, F.[1982] : *Accuracy of some finite element models for arch problems, Computer Methods in Applied Mathematics and Engineering, 35, pp.315-345, 1982.*
- [11] KOITER, W.T[1966] : *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetench., B. 69, 1966, p. 1-59.*
- [12] PAUMIER, J.-C.[1978] : *Solutions stables d'un problème simplifié de coque élastique, R.A.I.R.O Analyse numérique, Vol 12, n° 3, 1978, p.283-293.*
- [13] REDDY, B.D.[1988] : *Convergence of mixed element approximations for the shallow arch problem, Numer. Math., 1988.*
- [14] SANCHEZ-PALENCIA, E.[1989] : *C. R. Acad. Sci. Paris, 309, série I, 1989, p. 411-418.*

