



HAL
open science

Généralisations d'hypercubes et de $(0, 2)$ -graphes

Rafaï Mourad Madani

► **To cite this version:**

Rafaï Mourad Madani. Généralisations d'hypercubes et de $(0, 2)$ -graphes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1994. Français. NNT : . tel-00344544

HAL Id: tel-00344544

<https://theses.hal.science/tel-00344544>

Submitted on 5 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

711705.8

THESE

**Présentée par
Rafai Mourad MADANI**

**Pour obtenir le titre de Docteur
de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1
(Arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et
du 30 Mars 1992)**

**en Informatique
Spécialité : Recherche Opérationnelle**

**GENERALISATIONS D'HYPERCUBES
ET DE (0, 2)-GRAPHES**

Soutenue le **7 MARS 1994**

devant la commission d'examen :

Nguyen Huy XUONG

Président

Ivan HAVEL

Rapporteurs

Henry Martyn MULDER

Ahmed AINOUCHE

Examineurs

Jean Marie LABORDE

Charles PAYAN

Claude BENZAKEN

Invité

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de l'IMAG

REMERCIEMENTS

A Jean Marie Laborde, j'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance pour la patience et la générosité avec lesquelles il a su guider mes recherches.

Je remercie Ivan Havel et Henry Martyn Mulder qui ont bien voulu rapporter sur cette thèse et pour tout le soin qu'ils ont apporté à cette tâche.

Je remercie Nguyen Huy Xuong d'avoir accepté de présider ce jury.

Que Charles Payan trouve ici toute ma reconnaissance pour son aide constante et ses conseils précieux.

Merci à Ahmed Ainouche, un collègue et un ami, et à Claude Benzaken, notre professeur émérite, de bien vouloir participer à ce jury.

Merci à Pierre Duchet, directeur du LSDD, pour son aide et ses conseils. Enfin, merci à vous tous, amis du LSDD ou d'ailleurs, qui de loin ou de près m'avez supporté et soutenu.

*A la mémoire de ma Mère et de mon Père
qui m'ont appris avec beaucoup d'humilité ce qu'est le bonheur .*

*A mon autre moitié, ma Femme
qui, avec amour, a su partager mes moments de joie et de tristesse.*

*A Islam Nassim & Mounir Nabil,
mes deux coins de bonheur, pour leur complicité.*

*A ma Soeur, mes frères
et toute la famille.*

A mes Amis.

Chapitre 0

INTRODUCTION

"...Aux limites de toute science, Savoir nouveau jaillit..."

INTRODUCTION

Il arrive souvent, face à une situation pratique, qu'on soit amené à en dessiner une matérialisation symbolique sur un coin de feuille blanche afin d'en simplifier la compréhension et, peut être, entrevoir la solution. Dans ce cas, un geste naturel serait de représenter les objets en interaction dans cette situation par des points et des lignes les reliant traduisant les différentes relations existantes entre eux, autrement dit par un graphe. On peut associer à de nombreuses situations pratiques un graphe les traduisant, parmi l'un des exemples célèbres que l'on peut citer est celui donné par Euler (1707-1783) [Euler], à savoir le problème des ponts de Kœnigsberg (1736) : "la ville de Kœnigsberg est traversée par la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof, et qui possède sept ponts partageant la ville en quatre régions. Un piéton peut-il en se promenant traverser une fois et une seule chaque pont?(fig.1.). Grâce à la représentation par un graphe de cette situation, Euler prouva l'impossibilité de traverser les sept ponts de la ville sous les contraintes données (le graphe n'est pas eulérien, i.e. "on ne peut pas le dessiner d'un seul trait sans lever la main").

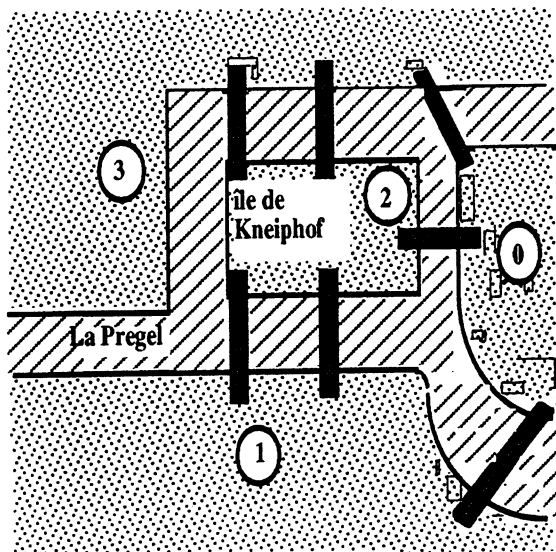
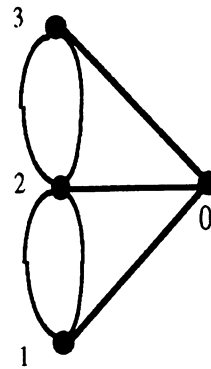


Fig.1. Le problème des ponts de Königsberg.



Graphe G représentant le problème d'Euler

L'hypercube a suscité de nombreuses études engendrant une littérature très dense aussi bien en mathématiques discrètes qu'en informatique. Cet intérêt sans cesse croissant est largement motivé par l'utilisation de sa structure dans de nombreux domaines (architectures parallèles, transfert de l'information, décision multicritère, théorie des codes...). Chacun peut s'étonner et se demander qu'est-ce qui fait que le cube soit le cube?. Une réponse partielle à une telle question peut être donnée par la simple définition de l'hypercube de dimension n , noté Q_n , en effet, il a pour ensemble de points (sommets) les mots binaires de longueur n et il existe une relation (arête) entre deux points si et seulement si les mots correspondants diffèrent en une seule composante. Si besoin est, cette seule définition peut représenter la position d'un problème donné dont la modélisation nécessiterait l'étude de certaines propriétés de ce graphe (hamiltonicité, stabilité, invariance ...). Plusieurs propriétés spécifiques à l'hypercube ont, soit, défini de nouvelles classes de graphes, soit, fait ressortir le rôle remarquable joué par l'hypercube dans plusieurs classes de graphes (graphes médians, graphes intervalle-réguliers, ...). En effet, il arrive très souvent qu'un chercheur en théorie des graphes remarquait

une propriété intéressante d'un graphe donné, essaye d'étudier la "classe" des graphes vérifiant cette propriété afin d'en généraliser la connaissance. C'est le cas de l'hypercube dont les propriétés sont fort intéressantes dans le sens où chaque propriété de l'hypercube a induit une classe de graphes (nouvelle ou non). Parmi celles-ci, celle d'être un $(0, 2)$ -graphe (i.e. toute paire de sommets possède 0 ou 2 voisins en commun) constitue le noyau central du travail qui va suivre. Plus précisément, nous nous intéressons à l'étude de différentes classes de cette famille de graphes réguliers où l'hypercube représente celui d'ordre maximum relativement au degré.

La propriété de $(0, 2)$ -graphe a été introduite par H.M. Mulder [Mul1] qui a contribué à la caractérisation de l'hypercube de dimension n .

Tandis qu'il existe plusieurs caractérisations de l'hypercube ([LabRao], [Foldes], [Mol1] ...) il en exploite systématiquement la propriété que deux sommets quelconques ont soit deux voisins en commun, soit aucun. La généralisation de cette propriété l'amena, en utilisant le concept d'intervalles dans un graphe, à construire la théorie des $(0, \lambda)$ -graphes. Ces graphes sont connexes et toute paire de sommets distincts y a 0 ou λ voisins communs. Ils sont réguliers pour $\lambda \geq 2$. L'hypercube de dimension n , les graphes de Laborde-Mulder (ou extensions de graphes impairs), le graphe de Clebsch, certains graphes de Hamming, les graphes complets $K_{\lambda+2}$, les graphes d'incidence des configurations symétriques, ... en sont des exemples.

Ce travail est développé le long de cinq chapitres. Au chapitre I, nous présentons les définitions et notations de la littérature nécessaires au lecteur non averti afin qu'il puisse se familiariser avec les concepts de la théorie des graphes.

Au chapitre II, nous nous intéressons à la notion de A -graphes définie par la propriété que deux sommets quelconques d'un A -graphe (A étant

un ensemble d'entiers non négatifs) ont un nombre de voisins communs appartenant à A . Cette notion englobe en fait tous les graphes puisque tout graphe est un certain A -graphe; nous nous limiterons au cas où $A = \{\mu, \lambda\}$. Après avoir donné quelques exemples et propriétés de tels graphes, nous définissons quelques propriétés de quasi-régularité. Nous présentons ensuite la classe des $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphes qui nous permet de caractériser le graphe de l'hyperoctaèdre comme un $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphe d'ordre $2n$.

Au chapitre III, on aborde l'étude de quelques classes de $(0, 2)$ -graphes. Après un rappel succinct des propriétés des $(0, \lambda)$ -graphes en général et du lien existant avec la théorie des configurations, une preuve rapide, basée sur la propriété de $(0, 2)$ -graphe, de la caractérisation de l'hypercube de dimension d comme graphe distance-régulier de vecteur d'intersection $\{d, d-1, \dots, 1; 1, 2, \dots, d\}$ est présentée. Nous présentons ensuite les graphes de Shrikhande généralisés et nous montrons que ce sont les seuls $(0, 2)$ -graphes pouvant être obtenus à partir de l'hypercube par rajout d'arêtes entre sommets à distance deux. Les graphes de Laborde-Mulder y sont ensuite caractérisés comme $(0, 2)$ -graphes de diamètre minimum $\lfloor d/2 \rfloor$ parmi ceux d'ordre 2^{d-1} et de degré d . En fait, on note que ces graphes sont obtenus par rajout de diagonales (arêtes entre sommets antipodaux) dans l'hypercube de dimension paire. Quand celle-ci est impaire, on obtient le graphe du demi-cube dont certaines propriétés sont données.

Au chapitre IV, nous caractérisons parmi les hypercubes généralisés ceux qui sont des $(0, 2)$ -graphes. Nous donnons ensuite une construction de $(0, 2)$ -graphes non sommet-transitifs qui constitue un contre exemple à la conjecture de H.M. Mulder sur les graphes intervalle-réguliers [Mul1]. Nous noterons que cette construction est un cas particulier de celle donnée par A. Berrachedi & M. Mollard dans leur article [BerMol] sur

l'infirmation de cette conjecture, mais, elle présente en fait un aspect géométrique intéressant. On montre aussi que les graphes de Laborde-Mulder et du demi-cube sont plongeables dans le carré de l'hypercube. Ce dernier graphe est obtenu à partir de l'hypercube en y reliant chaque paire de sommets dont la distance mutuelle vaut 1 ou 2.

En dernier chapitre, nous nous intéressons au problème d'existence de $(0, 2)$ -graphe d'un ordre donné. Nous posons alors le problème de l'existence de tels graphes d'ordre impair et nous en donnons une condition nécessaire d'existence. Nous montrons ensuite qu'il n'en existe pas pour un ordre 18, ce qui nous permet d'exhiber un algorithme de construction de $(0, 2)$ -graphes. Nous présentons enfin quelques résultats sur la structure locale des $(0, 2)$ -graphes.

Chapitre I

DEFINITIONS ET NOTATIONS

"...Tout mon savoir est de l'Omniscient..."

DEFINITIONS ET NOTATIONS

On donne dans ce chapitre les définitions et les résultats de la littérature dont on aura besoin le long de ce travail. Il est essentiellement constitué d'un panorama des glossaires de base utilisés, et est destiné au lecteur non familier avec la théorie des graphes.

Hormis quelques modifications, la terminologie adoptée ici sera celle des ouvrages de C. Berge[Berge], H.M. Mulder [Mul1] et A. Neumaier, A.E.Brouwer & A.M.Cohen[BroCohNeu]. Les ouvrages de P.J. Cameron & Biggs [CamBig] et Bondy & Murty [BonMur], constituent d'autres références générales des outils utilisés.

I.1. Notions de graphes

Les objets que l'on dénomme graphes sont très utiles en informatique et en mathématiques discrètes. Leur nom provient du fait qu'ils peuvent être vus comme une forme de notation graphique, et à ce seul point de vue ils ressemblent aux familiers graphes de fonctions. Mais nos graphes sont différents et correspondent de manière plus proche aux objets que l'on nomme (dans le langage commun) réseau.

Un graphe $G = (V, E)$ est le couple formé d'un ensemble fini de sommets $V(G)$ et d'un ensemble $E(G)$ de paires non ordonnées de sommets distincts appelées arêtes. $|V(G)|$ est l'ordre de G et $|E(G)|$ est sa taille. Nos graphes sont donc finis, simples et sans boucles.

Un exemple de graphe $G = (V, E)$ est donné par les ensembles:

$$V = \{0, 1\}^3 \text{ et } E = \{(A, B) \in V \times V / |A \Delta B| = 1\}$$

Cette définition n'est pas très "parlante" en soit, et ce n'est qu'en prenant une représentation imagée du graphe que la lumière fuse. La figure suivante représente le graphe G , le cube de dimension 3, les sommets y sont représentés par de petits ronds et sont étiquetés par les vecteurs binaires correspondants et toute arête uv est dessinée comme une ligne joignant les sommets (extrémités) u et v :

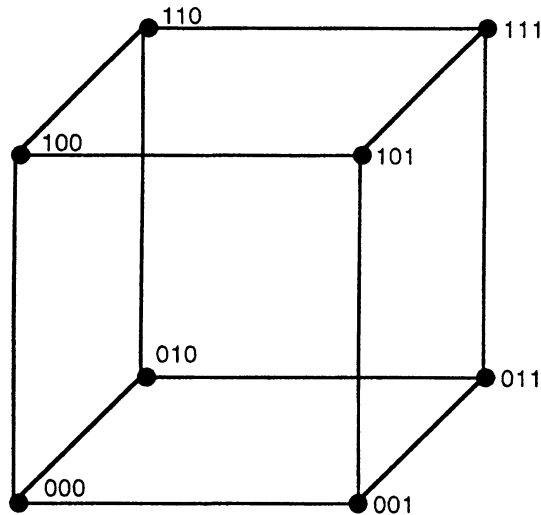


Fig. 2. Le cube de dimension 3

On dit que le sommet u est incident à l'arête uv si u est extrémité de uv , on dit alors que u et v sont adjacents ou sont voisins. L'ensemble des voisins d'un sommet u de G est noté $N_G(u)$. Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune. Le degré d'un sommet u dans G , noté $d_G(u)$, est le nombre d'arêtes ayant u comme extrémité, c'est aussi le nombre de ses voisins, $d_G(u) = |N_G(u)|$.

Un graphe sera dit régulier si tous ses sommets sont de même degré on dira alors que G est régulier de degré $d(G)$. Un graphe complet est un graphe dont tous les sommets sont adjacents, il est noté K_n où n désigne son ordre, il est régulier de degré $n-1$.

Le complémentaire d'un graphe G , noté \bar{G} , est le graphe dont l'ensemble des sommets est le même que celui de G , et où deux sommets y sont adjacents si et seulement si ils ne le sont pas dans G .

Un sous graphe de $G = (V, E)$ est le graphe G' dont l'ensemble des sommets V' est une partie de V ($V' \subseteq V$) et l'ensemble E' de ses arêtes est la partie de E telle que chaque arête de E' a ses extrémités contenues dans V' .

Si $V' = V$ et $E' \subset E$, G' est dit graphe partiel de G . Si toutes les arêtes de G joignant deux sommets de V' sont dans E' , alors G' est dit sous graphe induit par V' et est noté $G[V']$. Si G' est tel que tous ses sommets sont adjacents deux à deux on dit que G' est une clique d'ordre $|V'|$. Le complémentaire d'une clique d'ordre n est le stable d'ordre n .

On appelle "sur-graphe" d'un graphe G le graphe G'' dont l'ensemble des sommets est V et dont l'ensemble des arêtes E'' contient E , en d'autres termes, c'est le graphe G auquel on aura rajouté de nouvelles arêtes entre des sommets non reliés.

Une chaîne C de longueur p est une séquence $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ de p sommets distincts de G tels que deux sommets consécutifs quelconques y sont adjacents, on la note $C[u_1, u_p]$. Cette définition reste valable si on remplace sommets par arêtes et auquel cas, elle sera dite élémentaire si elle ne passe pas deux fois par un même sommet. Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités coïncident. Il est dit hamiltonien s'il passe par tous les sommets du graphe et dans ce cas le graphe est dit hamiltonien. Un graphe G est connexe si toute paire de sommets est reliée par une chaîne. Quand un graphe n'est pas connexe, ses différents sous graphes

connexes maximaux constituent ses composantes connexes. La distance $d_G(u, v)$ entre deux sommets u et v de G est la longueur d'une plus courte chaîne reliant u et v dans G . Le diamètre d'un graphe G , noté $D(G)$ ou $\text{diam}(G)$, est la plus grande des distances entre deux sommets dans G . On appelle décomposition en couches de G à partir d'un sommet u la partition de $V(G)$ en $N_0, N_1, N_2, \dots, N_D$ avec $N_0 = \{u\}$ et pour tout $i = 1, \dots, D$, $N_i = \{v \in V(G) / d(u, v) = i\}$.

Un arbre est un graphe connexe sans cycles. Un graphe biparti est un graphe ne contenant pas de cycles impairs, son ensemble de sommets peut être partitionné en deux stables V_1 et V_2 et donc chacune de ses arêtes possède une extrémité dans V_1 et une dans V_2 . Si tout sommet de V_1 est relié à tous les sommets de V_2 , le graphe est dit biparti complet et est noté $K_{p,q}$ où p et q désignent respectivement le nombre de sommets de V_1 et V_2 . Un couplage dans G est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Il est dit parfait si tout sommet de G est extrémité d'une arête du couplage.

Une coloration des sommets (respectivement des arêtes) de G en k couleurs est l'affectation de k couleurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ aux sommets (respectivement arêtes) de G de sorte que deux sommets (respectivement arêtes) adjacents (respectivement incidentes) ne soient pas de même couleur. Le nombre chromatique de G , noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs d'une coloration des sommets de G . L'équivalent pour les arêtes est appelé indice chromatique et est noté $\chi'(G)$. Ainsi, un graphe biparti est bicoloriable ($\chi(G) = 2$), tandis qu'un cycle impair a un indice chromatique égal à 3.

La matrice d'adjacence d'un graphe G d'ensemble de sommets $\{v_1, \dots, v_n\}$ est la matrice carrée $n \times n$, $A = (a_{ij})$ où pour $i, j = 1, 2, \dots, n$, on a:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La somme cartésienne (très souvent appelée, en littérature anglophone, produit cartésien) de deux graphes G et H est le graphe noté $G \square H$ dont l'ensemble de sommets est $V(G) \times V(H)$ et où (u, v) est adjacent à (u', v') si et seulement si $u = u'$ et $vv' \in E(H)$ ou bien $v = v'$ et $uu' \in E(G)$. L'hypercube de dimension d en est un exemple, en effet, il est la somme cartésienne de l'hypercube de dimension p et celui de dimension q tel que $p + q = d$, en particulier, on a $Q_d = Q_{d-1} \square K_2$, et donc le d -cube est la somme cartésienne de d copies de K_2 et c'est bien un graphe de Hamming. Rappelons qu'un graphe de Hamming est un graphe somme cartésienne de graphes complets.

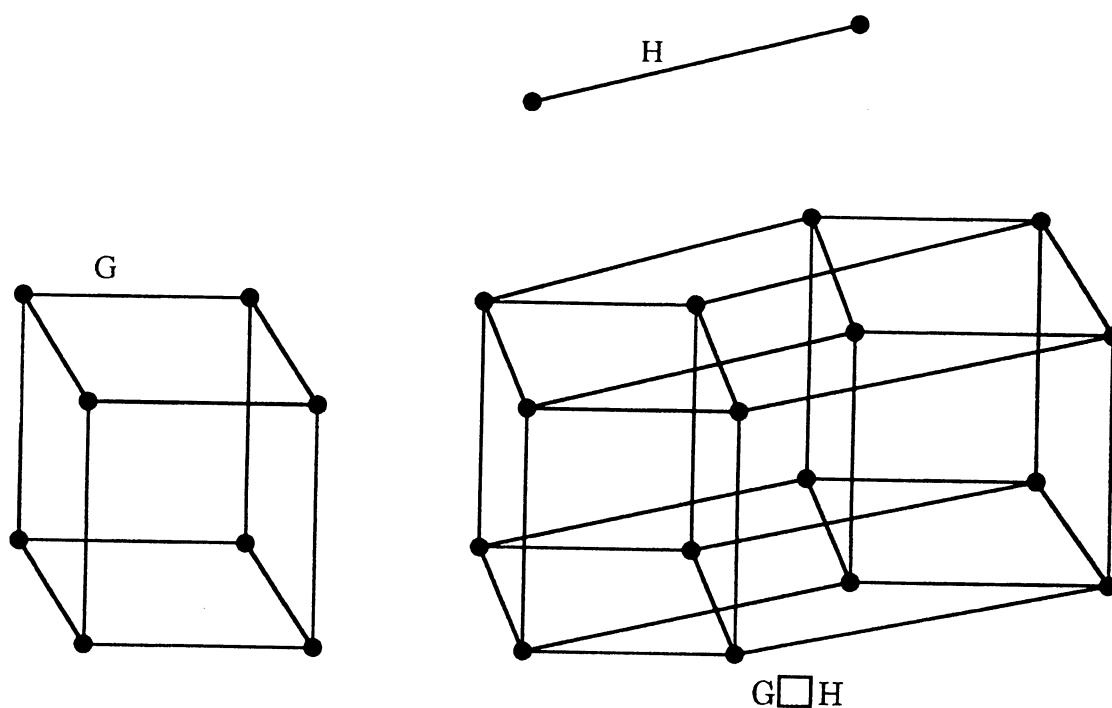


Fig.3. Q_4 en somme cartésienne de Q_3 et K_2

L'hypercube de dimension d (ou d -cube) est le graphe dont les sommets sont les d -uplets binaires et où deux sommets y sont adjacents si et seulement si ils diffèrent en une coordonnée. Il possède $d \cdot 2^{d-1}$ arêtes et 2^d sommets. Il est régulier de degré d et est biparti. Une autre définition est la suivante:

Soit V un ensemble à d éléments et soit $\mathfrak{P}(V)$ l'ensemble de toutes les parties de V . Le d -cube Q_d a pour ensemble de sommets $\mathfrak{P}(V)$, et deux sommets A et B y sont adjacents si et seulement si $|A \Delta B| = 1$, où $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est la différence symétrique de A et B .

I.2. Systèmes de parties et régularité.

Un système de parties est la donnée d'un ensemble S et d'une famille de parties de S : $\mathfrak{D} = \{E_i / i \in I\}$. On note un tel système (S, \mathfrak{D}) . Les éléments de S sont appelés sommets (ou points), les parties appartenant à \mathfrak{D} sont appelées arêtes (ou blocs ou droites, selon que l'on se place dans un contexte plus statistique ou plus géométrique). Parmi ces systèmes de parties, on considère ceux possédant certaines régularités du type:

R(i, k): "le cardinal de l'intersection de i arêtes quelconques de \mathfrak{D} est une constante $k_i > 0$ "

et sa duale

R*(i, λ): "tout ensemble de i sommets appartient à un nombre constant $\lambda_i > 0$ d'arêtes".

Une t -configuration (ou t -design) de paramètres (v, k, λ) est donc un système de parties d'un ensemble de v points qui possède les propriétés $R(1, k)$ et $R^*(t, \lambda)$, autrement dit c'est une collection \mathfrak{D} de parties

(appelées blocs) d'un ensemble S de v points, telle que tout élément de \mathfrak{D} contient k points ($k \leq v$), et tout ensemble de t points est contenu dans exactement $\lambda = \lambda_t$ éléments de \mathfrak{D} .

La connaissance de ces quatre paramètres v, k, λ et t suffit à caractériser une telle structure ou configuration d'où son appellation (v, k, λ, t) -configuration ou encore t - (v, k, λ) -configuration .

Dans le cas où $t = 2$, une $(v, k, \lambda, 2)$ -configuration est notée simplement (v, k, λ) -configuration et est appelée "bloc design" ou encore "plan en blocs incomplet équilibré" (Balanced Incomplete Block Design, en anglais) dans

le cas où parmi tous les sous ensembles de k points certains ne sont pas des blocs.

Un exemple d'une telle configuration est le plan projectif à 7 éléments qui constitue une $(7, 3, 1)$ -configuration:

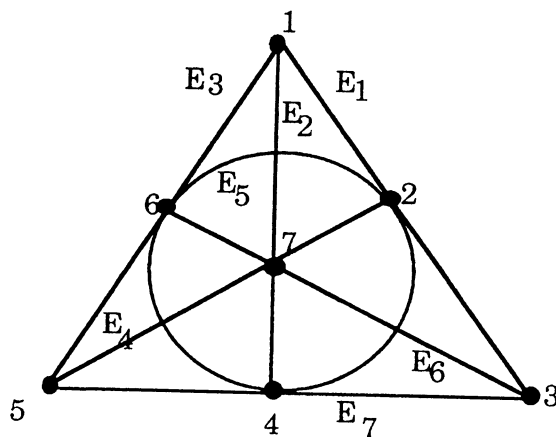


Fig.4. Le plan projectif d'ordre 7.

La matrice d'incidence d'une configuration est la matrice dont les lignes et colonnes sont indexées par respectivement les blocs et les points de la configuration. L'élément de la ligne B et de la colonne p est égal à 1 si p est un point du bloc B ou 0 sinon, ainsi celle du plan projectif ci-dessus est:

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0
3	1	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0	0	1
6	0	0	1	0	1	1	0
7	0	1	0	1	0	1	0

Si b désigne le nombre total de blocs et r le nombre de blocs contenant un point donné, on a pour une (v, k, λ) -configuration:

$$r(k-1) = (v-1)\lambda \quad \text{et} \quad bk = vr$$

Une configuration est dite symétrique si $b = v$, on a alors $r = k$ et deux blocs distincts ont alors exactement λ points communs. Le graphe

d'incidence $G(\mathcal{D})$ d'une configuration \mathcal{D} d'ensemble de points \mathcal{X} et de blocs \mathcal{B} , est le graphe biparti d'ensemble de sommets $\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$, tel qu'une arête existe entre $p \in \mathcal{X}$ et $B \in \mathcal{B}$ lorsque $p \in B$.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit distance-régulier s'il existe des entiers b_i, c_i ($i \geq 0$) tels que pour toute paire de sommets (u, v) de G à distance $i = d(u, v)$ on ait exactement:

$$c_0 = 0, \text{ et pour } i \geq 1 \ c_i = |N(v) \cap N_{i-1}(u)|$$

$$\text{et } b_i = |N(v) \cap N_{i+1}(u)|$$

De tels graphes sont réguliers de degré $d = b_0$. Le vecteur d'intersection de G est la séquence $\tau(G) = \{b_0, b_1, \dots, b_D; c_1, c_2, \dots, c_D\}$ et les nombres d'intersection de G sont définis par :

$$a_i = d - b_i - c_i \text{ pour } i = 0, \dots, D \text{ où } D = \text{diam}(G),$$

Les nombres d'intersection de G représentent en fait le nombre de voisins de v dans $N_i(u)$, pour u et $v \in V(G)$ tels que $d(u, v) = i$.

L'hypercube de dimension d est distance-régulier, ses nombres d'intersections sont tous nuls et son vecteur d'intersection est

$$\tau(G) = \{d, d-1, d-2, \dots, 1; 1, 2, 3, \dots, d-1, d\}.$$

Soient R_1, R_2 et R_3 les trois propriétés définies de la manière suivante:

R₁: Toute paire de sommets adjacents ont exactement λ voisins communs.

R₂: Toute paire de sommets à distance 2 ont exactement μ voisins communs.

R₃: Toute paire de sommets non adjacents ont exactement μ voisins communs.

R_2 est bien sûr une conséquence de R_3 , et ces deux propriétés sont équivalentes si le graphe est de diamètre au plus deux.

Un graphe régulier d'ordre $|V|$ et de degré d est alors dit:

- arête-régulier de paramètres $(|V|, d, \lambda)$ s'il vérifie R_1 ;

- amplement-régulier de paramètres $(|V|, d, \lambda, \mu)$ s'il vérifie R_1 et R_2 ;
- co-arête-régulier de paramètres $(|V|, d, \mu)$ s'il vérifie R_3 ;
- fortement régulier de paramètres $(|V|, d, \lambda, \mu)$ s'il vérifie R_1 et R_3 .

Ainsi, il est facile de voir que tout graphe distance-régulier est amplement-régulier ($\lambda = a_1$ et $\mu = c_2$). Le cube de dimension d est alors amplement-régulier de paramètres $(2^d, d, 0, 2)$. De manière générale tout $(0, 2)$ -graphe de degré d et d'ordre $|V|$ est amplement-régulier de paramètres $(|V|, d, 0, 2)$ et il est fortement-régulier si son diamètre est au plus deux.

On appelle fonction intervalle I_G dans un graphe G , l'application $I_G : V \times V \rightarrow P(V)$ définie par:

$$I_G(u, v) = \{ w \in V / w \text{ appartient à une plus courte chaîne } [u, v] \}.$$

Soit G un graphe de fonction intervalle I ; un sous ensemble W de V est dit convexe si $I(u, v) \subseteq W$, pour tout u et v dans W . Le graphe est dit intervalle monotone si chaque intervalle de G est convexe. Un graphe G connexe est dit intervalle régulier si :

$$| I(u, v) \cap N_1(u) | = d(u, v) \quad \text{ou bien} \quad | I(u, v) \cap N_1(v) | = d(u, v)$$

pour tous sommets u et v de G .

Il est dit sphérique (hyper-sphérique) si pour tout intervalle I , et tout sommet u de I , il existe exactement (au moins) un sommet v tel que $d(u, v) = \text{diam}(I)$.

Il est dit distance transitif si et seulement si pour $u, v, x, y \in V(G)$ avec $d(u, v) = d(x, y)$, il existe un automorphisme f tel que $f(u) = x$ et $f(v) = y$.

Chapitre II

QUELQUES PROPRIETES DE A-GRAPHS

“... Ah, quelle Science!, il a l'Art de poser les bonnes questions...”

QUELQUES PROPRIETES DE A-GRAPHES

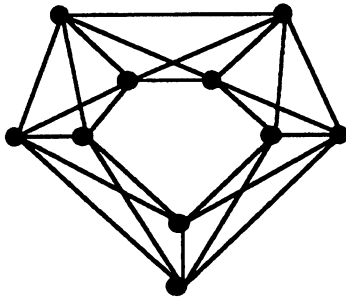
Dans ce chapitre nous présentons quelques exemples de A-graphes qui sont des graphes ayant la propriété que chaque paire de sommets distincts y ont un nombre de voisins communs appartenant à $A \subseteq \mathbb{N}$ [voir aussi Madani2]. Cette partie est largement inspirée des travaux de H.M. Mulder [Mul1, Mul2, Mul3] qui en généralisant la propriété de l'hypercube de dimension d , que toute paire de sommets distincts ont exactement deux voisins communs ou aucun il introduit la notion de $(0, \lambda)$ -graphes. Il montre alors que les $(0, \lambda)$ -graphes maximaux sont les hypercubes, le graphe de Clebsch [Seidel] et les graphes d'Hadamard (voir [Mul1] pour plus de détails).

Nous nous intéressons principalement aux A-graphes avec $A = \{\mu, \lambda\}$, $(0 \leq \mu \leq \lambda)$ et nous essayons d'en étendre le catalogue à d'autres valeurs de $\mu \neq 0$. Après l'introduction de quelques propriétés de quasi-régularité grâce à la notion de graphes distance-réguliers, nous étudierons le cas où $\mu = 2(n-2)$ et $\lambda = 2(n-1)$ et nous introduirons le graphe Q^*_d , graphe du polytope dual de celui du d -cube.

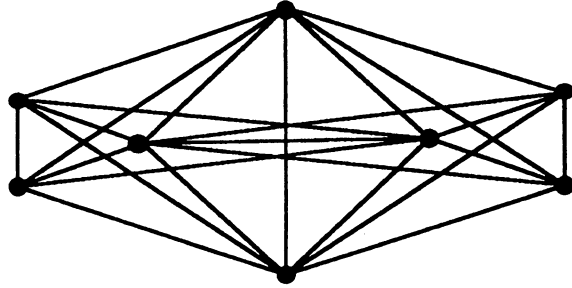
II.1. Quasi-régularité.

Un A -graphe $G=(V, E)$ est un graphe connexe où toute paire de sommets distincts u et v est telle que: $|N(u) \cap N(v)| \in A$.

Chaque graphe est en fait un certain A -graphe. Aussi, nous allons nous limiter à quelques ensembles A qui nous intéressent. En particulier, on étudiera le cas où $A = \{2(n-2), 2(n-1)\}$ ($n > 2$). Des exemples de tels graphes sont donnés en figure 5:



{2,4}-graphe régulier



{4,6}-graphe non régulier

Fig.5.Exemples de $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphes

D'autres exemples de A -graphes sont:

- les $(0, 2)$ -graphes et plus particulièrement l'hypercube de dimension d , avec $A = \{0, 2\}$,
- les graphes complets K_n , avec $A = \{n-2\}$,
- le graphe de Petersen et les graphes dits "de l'amitié précédente" qui consistent en p triangles arête-disjoints partageant un même sommet, avec $A = \{0, 1\}$, (voir Fig. 6)
- le graphe complet d'ordre impair, $2k+1$, diminué d'un couplage maximum, avec $A = \{2k-1, 2k-2, 2k-3\}$
- le graphe complet K_{p+2} diminué d'un cycle de longueur 4, avec $A = \{p-2, p\}$

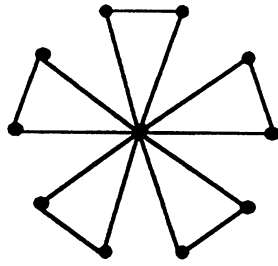


Fig.6. graphe dit "de l'amitié précédente (ici $p = 5$)

Les seuls $\{2, 4\}$ -graphes d'ordre 6 sont K_6 , K_6 diminué d'un cycle 4 ou bien K_6 diminué d'un couplage parfait. Ce dernier n'est autre que l'octaèdre ordinaire.

Pour $A = \{0, \lambda\}$ ($\lambda \geq 2$) on sait que les A -graphes sont réguliers [Mul1].

Ceci n'est pas le cas pour $A = \{0, 1\}$ en général, car sinon, tout graphe sans cycles de longueur 3 ou 4 le serait. Considérons maintenant deux entiers μ et λ tels que $0 < \mu \leq \lambda$, les (μ, λ) -graphes sont des graphes dont toute arête appartient à exactement λ ou μ triangles, en d'autres termes, chaque paire de sommets adjacents possèdent λ ou μ voisins communs. De même, il est facile de voir que chaque paire d'arêtes adjacentes appartient à exactement $(\lambda-1)$ ou $(\mu-1)$ cycles de longueur 4. Enfin, ils sont tous de diamètre au plus deux. Si $\mu = \lambda \geq 2$, Mulder a montré que de tels graphes sont réguliers et d'ordre minimum, soit $|V| = 1 + d(d-1)/\lambda$ où d est le degré du graphe. Cette propriété est fautive dans le cas où $\mu = \lambda = 1$, car les seuls $\{1\}$ -graphes sont K_3 ou les graphes dits de l'amitié précédente (qui ne sont pas réguliers).

Proposition II.1.1.

Soit $G=(V, E)$ un $\{\mu, \lambda\}$ -graphe ($0 < \mu \leq \lambda$), de degré minimum ∂ et de degré maximum Δ . Alors:

$$\mu + 2 \leq |V| \leq 1 + \partial(\Delta-1)/\lambda.$$

Preuve:

Soit x un sommet de G de degré minimum ∂ . Décomposons G en couches à partir du sommet x . Comme G est un $\{\mu, \lambda\}$ -graphe avec $0 < \mu \leq \lambda$, on a alors : $|V| \geq 1 + |N(x)| \geq 1 + (\mu + 1) = \mu + 2$.

Par ailleurs, tout sommet y de $N_2(x)$ a au moins μ voisins dans $N(x)$ et tout sommet de $N(x)$ a au plus $\Delta - \mu - 1$ voisins dans $N_2(x)$; par double comptage des arêtes entre $N(x)$ et $N_2(x)$ on obtient:

$$\mu |N_2(x)| \leq (\Delta - \mu - 1) |N(x)|$$

et donc on obtient bien $|V| = 1 + |N(x)| + |N_2(x)| \leq 1 + \partial(\Delta - 1)/\mu$. \square

Les seuls $\{\mu, \lambda\}$ -graphe ($0 < \mu \leq \lambda$) d'ordre minimum sont les graphes complets $K_{\mu+2}$. De plus, ce sont aussi les seuls $\{\mu, \lambda\}$ -graphe ($0 < \mu \leq \lambda$) de diamètre 1 et auquel cas $\lambda = \mu$.

Proposition II.1.2.

Soit $G=(V, E)$ un $\{\mu, \lambda\}$ -graphe avec $0 \leq \mu \leq \lambda$. Entre toute paire de sommets (u, v) à distance $p = d(u, v)$, il existe au moins Λ^{p-1} chaînes différentes de longueur p , où:

$$\Lambda = \begin{cases} \mu & \text{si } \mu \neq 0 \\ \lambda & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve: (par récurrence sur la distance p).

La proposition est évidemment vraie pour $p = 1, 2$. Supposons-la vraie pour $p \geq 2$ et montrons-la pour $p+1$. Soient alors u et v deux sommets de G tels que $d(u, v) = p+1$. Décomposons G en couches à partir de u ; v est donc dans $N_{p+1}(u)$. Soit $x \in N_p(u)$, par hypothèse de récurrence on sait qu'il existe entre u et x au moins Λ^{p-1} chaînes différentes de longueur p . Soit t un voisin de x dans $N_{p-1}(u)$, x est un voisin commun à t et v , donc t et v ont

au moins λ voisins communs qui sont tous dans $N_p(u)$ ce qui montre que la proposition est vraie pour tout p . \square

Proposition II.1.3.

Soient $G = (V, E)$ un A -graphe et $H = (V', E')$ un A' -graphe. Alors la somme cartésienne $G \square H$ est un A'' -graphe avec

$A'' \subseteq A \cup A' \cup \{0, 2\}$. En particulier, la somme cartésienne de deux $(0, 2)$ -graphes est un $(0, 2)$ -graphe.

Preuve:

Soient uv et $u'v'$ deux sommets distincts de $G \square H$. Si $u = u'$ (resp. $v = v'$) alors $|N(uv) \cap N(uv')| \in A'$ (resp. $|N(uv) \cap N(u'v)| \in A$). Si maintenant, $u \neq u'$ et $v \neq v'$, uv et $u'v'$ n'ont alors soit aucun voisin commun, ou bien ils ont exactement les sommets uv' et $u'v$; soit donc, $|N(uv) \cap N(u'v')| = 0$ ou 2 . Enfin, si $A = A' = \{0, 2\}$, $G \square H$ est bien un $(0, 2)$ -graphe. \square

Rappelons ici les propriétés R_i ($i = 1, 2, 3$) données au chapitre I:

R_1 : Toute paire de sommets adjacents ont exactement λ voisins communs.

R_2 : Toute paire de sommets à distance 2 ont exactement μ voisins communs.

R_3 : Toute paire de sommets non adjacents ont exactement μ voisins communs.

Définissons maintenant les propriétés R'_i ($i = 1, 2, 3$) comme suit:

R'_1 : Toute paire de sommets adjacents ont soit λ , soit μ voisins communs.

R'_2 : Toute paire de sommets à distance 2 ont soit λ , soit μ voisins communs.

R'_3 : Toute paire de sommets non adjacents ont soit λ , soit μ voisins communs.

On dira alors que G est quasi-arête-régulier s'il vérifie R'_1 , quasi-amplement-régulier s'il vérifie R'_1 et R'_2 , quasi-co-arête-régulier s'il vérifie R'_3 , et enfin, quasi-fortement-régulier s'il vérifie R'_1 et R'_3 .

Lemme II.1.1.

Soit G un (μ, λ) -graphe avec $0 < \mu \leq \lambda$, alors G est quasi-arête-régulier.

Lemme II.1.2.

Soit G un (μ, λ) -graphe avec $0 < \mu \leq \lambda$, alors G est quasi-amplement-régulier.

Lemme II.1.3.

Soit G un (μ, λ) -graphe avec $0 < \mu \leq \lambda$, alors G est quasi-co-arête-régulier.

Lemme II.1.4.

Soit G un (μ, λ) -graphe avec $0 < \mu \leq \lambda$, alors G est quasi-fortement-régulier.

Les notions de quasi-forte-régularité et de (μ, λ) -graphe sont donc des notions équivalentes. Un (μ, λ) -graphe n'est pas nécessairement régulier (voir Fig. 5). De plus, un (μ, λ) -graphe régulier ne vérifie pas nécessairement les propriétés R_1 et R_3 ci-dessus et donc n'est pas fortement régulier. On notera qu'un graphe fortement régulier est un certain (μ, λ) -graphe (car vérifiant les propriétés de régularité R_1 et R_3). Aussi, est-il naturel de poser la question suivante:

Question: Soit G un (μ, λ) -graphe, avec $1 < \mu \leq \lambda$. Est-il vrai que si G vérifie R_1 et R_3 alors G est fortement régulier?

en d'autres termes, lorsque $\mu > 1$, est-il vrai qu'un (μ, λ) -graphe vérifiant R_1 et R_3 est nécessairement régulier.

Remarque. Pour $\mu > 1$, la condition d'être régulier pour un graphe fortement régulier est-elle superflue? En effet, lorsque $\mu > 1$, nous n'avons pas pu trouver dans la littérature de graphes vérifiant les propriétés R_1 et R_3 qui ne soient pas fortement réguliers.

II.2. Les $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphes.

Pour $n = 2$, on obtient la classe remarquable des $(0, 2)$ -graphes. Maintenant, si $n > 2$, notons tout d'abord, que si un tel graphe G est de degré minimum ∂ et de degré maximum Δ , alors :

$$2(n-1) \leq |V| \leq 1 + \partial(\Delta-1)/2(n-2).$$

Les plus petits graphes de cette classe sont les graphes complets K_{2n-2} , et leur diamètre est 1. Sinon, ils sont de diamètre 2. Parmi ces graphes on distingue le graphe du polytope dual de celui du d -cube, noté Q^*_d . Ce graphe est le graphe complémentaire d'un couplage parfait dans K_{2d} , on le définit récursivement comme suit:

- Q^*_1 est le graphe composé de deux sommets isolés,
 - pour $d \geq 1$, Q^*_d est construit à partir de Q^*_{d-1} en lui rajoutant 2 sommets non adjacents, appelés pôles, reliés à tous les sommets de Q^*_{d-1} .
- exemple:

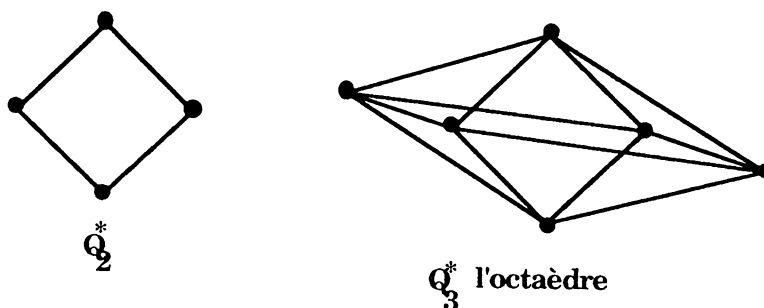


Fig.7.

Lemme II.2.1.

Q^*_n est un $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphe d'ordre $2n$, régulier de degré $2n-2$.

Preuve:

Il est clair que Q^*_n est d'ordre $2n$ et de degré $2n-2$, c'est un $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphe car soient u et v deux sommets de Q^*_n , si u et v ne sont pas adjacents, alors u et v sont des pôles et donc ils sont adjacents à tous les autres sommets de Q^*_n : $|N(u) \cap N(v)| = 2(n-1)$; si maintenant, u et v sont adjacents, alors il existe \bar{u} et \bar{v} deux sommets uniques de Q^*_n tels que (u, \bar{u}) et (v, \bar{v}) sont des pôles de Q^*_n et donc u et v sont respectivement adjacents à tous les sommets de Q^*_n sauf à \bar{u} et \bar{v} .

Donc, $|N(u) \cap N(v)| = 2(n-2)$ et, Q^*_n est bien un $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphe. \square

Théorème II.2.1.

Soit G un graphe connexe, alors:

G est un $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphe d'ordre $2n$ si et seulement si G est Q^*_n ou bien K_{2n} ou bien $K_{2n} \setminus C_4$.

Preuve:

La condition suffisante est triviale. Montrons la condition nécessaire. Soit alors G un $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphe d'ordre $2n$. Si tous les sommets de G sont adjacents, G est K_{2n} .

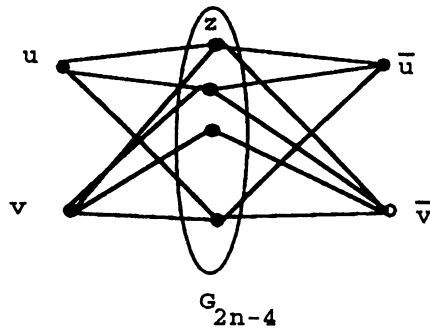


Fig. 8.

Maintenant, soient u et v deux sommets non adjacents de G , si :

a) $|N(u) \cap N(v)| = 2(n-1)$ alors tout sommet $z \neq u$ et v , a exactement $2(n-2)$ voisins communs avec u et avec v , et donc $\forall z \neq u$ et $v, \exists !z'$ tel que $zz' \in E(G)$. Donc $G \setminus \{u, v\}$ est $K_{2n-2} \setminus M_{2n-2}$ où M_{2n-2} est un couplage parfait, et G est alors Q_n^* .

b) $|N(u) \cap N(v)| = 2(n-2)$, comme G est d'ordre $2n$, il existe alors respectivement \bar{u} et \bar{v} deux sommets uniques de G qui ne soient pas respectivement adjacents à u et v (fig.7.) et, on a nécessairement :

$$N(u) \cap N(v) = N(\bar{u}) \cap N(\bar{v})$$

soit alors G_{2n-4} le sous-graphe induit par $G \setminus \{u, v, \bar{u}, \bar{v}\}$, on a :

$$\forall z \in G_{2n-4}, |N(u) \cap N(z)| = |N(z) \cap N(v)| = 2(n-2)$$

donc, G_{2n-4} est K_{2n-4} et $u\bar{v}$ et $\bar{u}v$ sont des arêtes de G ; de plus, $\bar{u}\bar{v} \notin G$ car sinon $|N(u) \cap N(\bar{u})| = 2n-3$ (puisque dans ce cas $\bar{v} \in N(u) \cap N(\bar{u})$) ce qui est absurde. □

Chapitre III

ETUDE DE QUELQUES CLASSES DE $(0, 2)$ -GRAPHERS

“...Graphe ou la matérialisation de l'idée en chantier...”

ETUDE DE QUELQUES CLASSES DE (0, 2)-GRAPHS

Dans ce chapitre, après un rappel succinct sur les $(0, \lambda)$ -graphes, nous nous intéressons à quelques opérations sur l'hypercube de dimension d qui préservent la propriété de $(0, 2)$ -graphe. Ces opérations consistent en l'identification de sommets, le rajout d'arêtes ou la considération des graphes de distance de l'hypercube. Nous présentons alors quelques classes de $(0, 2)$ -graphes ainsi obtenues et nous en donnons des caractérisations.

III.1. Rappels sur les $(0, \lambda)$ -graphes

En généralisant la propriété de l'hypercube que chaque paire de sommets ont exactement deux voisins en commun ou aucun, H.M. Mulder [Mul3] introduit les $(0, \lambda)$ -graphes définis comme des graphes connexes tels que toute paire de sommets y a 0 ou λ voisins communs. Ces graphes peuvent être considérés comme une généralisation des configurations symétriques. Il montre que ces graphes sont réguliers, et en introduisant la notion d'intervalle dans un graphe, il prouve plusieurs résultats,

parmi lesquels on peut citer les suivants, après avoir rappelé quelques définitions.

Définition III.1.1:

Deux sommets d'un graphe G sont dits antipodaux, si, dans G , la distance entre eux est égale au diamètre de G .

Définition III.1.2:

Un graphe G est dit antipodal (ou diamétrique) si chaque sommet de G possède un unique sommet antipodal.

L'hypercube, par exemple, est un graphe antipodal et est caractérisé [Mol2] comme graphe biparti, antipodal, ne contenant pas $K_{2,3}$ comme sous-graphe et vérifiant les propriétés (α) et (β) suivantes:

(α) : G contient deux sommets antipodaux x_0 et x_1 tels que si deux sommets distincts u et v dans $N_i(x_j)$ ont un voisin commun dans $N_{i-1}(x_j)$, alors u et v ont un unique voisin commun dans $N_{i+1}(x_j)$, pour $j = 0, 1$ et $i = 1, \dots, \text{diam}(G)-1$.

(β) : Si le graphe de la figure 9 est un sous-graphe de G , alors il existe un sommet u_8 dans G tel que le graphe de la figure 10 est un sous-graphe de G .

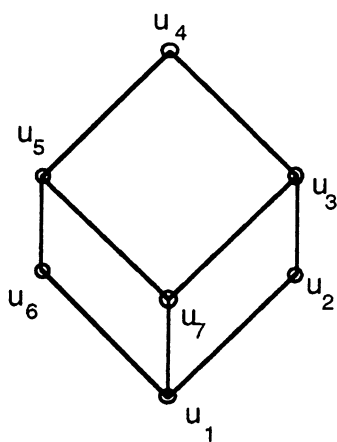


Fig.9.

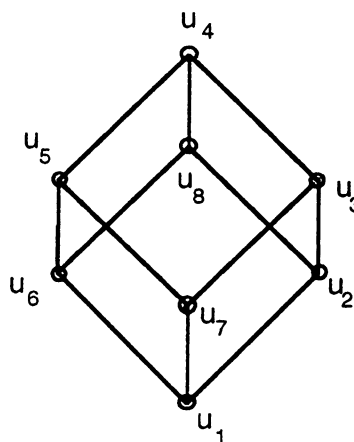


Fig.10.

Proposition III.1.1. [Mulder, Mul1]

Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de fonction intervalle I . Alors

$$|I(u, v) \cap N(u)| \geq d(u, v) + \lambda - 2$$

pour toute paire de sommets u et v de G tels que $d(u, v) \geq 2$.

La proposition suivante donne une borne inférieure pour le degré d'un $(0, \lambda)$ -graphe, lorsque son diamètre est au moins 4:

Proposition III.1.2.[Mulder, Mul1]

Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe. Si $\text{diam}(G) \geq 4$, alors

$$d(G) \geq \text{diam}(G) + 2\lambda - 4.$$

En posant $\lambda = 2$ dans cette proposition, nous obtenons $d(G) \geq \text{diam}(G)$ pour un $(0, 2)$ -graphe G de diamètre au moins 4. L'ordre d'un $(0, \lambda)$ -graphe est borné par:

Théorème III.1.1.[Mulder, Mul1]

Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de degré d . Alors

$$1 + \frac{d(d-1)}{\lambda} \leq |V| \leq 1 + \frac{(\lambda-1)!(d-\lambda)!}{(d-2)!} \sum_{i \geq 0} \binom{d}{\lambda+i}$$

Pour $\lambda = 2$, ce théorème donne pour un $(0, 2)$ -graphe de degré d :

$$1 + \binom{d}{2} \leq |V| \leq 2^d$$

Pour un $(0, 2)$ -graphe biparti, la borne inférieure peut être améliorée [Mul1], et on a: $|V| \geq 2 + d(d-1)$.

L'étude des $(0, 2)$ -graphes d'ordre minimum est en relation étroite avec la théorie des configurations [CamLin]. En effet, un graphe peut être défini comme un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes, avec une relation d'incidence entre les sommets et les arêtes, telle que chaque arête est incidente à deux sommets et que deux sommets quelconques sont incidents à au plus une arête. Cette définition est proche des concepts de

la théorie des configurations, en ce sens qu'un graphe n'est autre qu'une 0-configuration avec $k = 2$, et lorsque le graphe est régulier on obtient une 1-configuration, enfin, le seul graphe qui soit une 2-configuration est le graphe complet, appelé souvent en théorie des configurations la "configuration paire". A partir de la définition des configurations symétriques on peut voir que la matrice d'adjacence d'un graphe G où chaque paire de sommets distincts ont exactement λ voisins communs, i.e. un $\{\lambda\}$ -graphe, correspond à la matrice d'incidence d'une configuration symétrique de paramètres $(|V|, d(G), \lambda)$.

Inversement, une configuration symétrique peut être définie comme la donnée d'un ensemble de points et d'un ensemble de blocs, avec une relation d'incidence entre points et blocs satisfaisant les définitions appropriées. Ainsi, une configuration symétrique de paramètres (v, d, λ) ayant une matrice d'incidence symétrique avec une diagonale nulle peut être considéré comme un graphe dans lequel chaque paire de sommets distincts ont exactement λ voisins communs, dans le sens où la matrice d'incidence de cette configuration symétrique correspond à celle d'adjacence du dit graphe. Ceci est résumé dans la proposition suivante:

Proposition III.1.3: [Mulder, Mul1]

Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de degré d . Alors:

$$|V| = 1 + d(d-1)/\lambda$$

si et seulement si

G correspond à une configuration symétrique de paramètres $(|V|, d, \lambda)$ ayant une matrice d'incidence symétrique de diagonale nulle.

En fait, ces graphes sont fortement réguliers de paramètres $(|V|, d, \lambda, \lambda)$.

Des résultats de la théorie des configurations [CamBig], lorsque M désigne la matrice d'incidence d'une configuration symétrique, I la matrice identité et J la matrice unité (dont tous les éléments valent 1) de taille appropriée, on déduit les relations matricielles suivantes:

$$MJ = kJ, \quad JM = rJ \quad \text{et} \quad M^t M = (r-\lambda)I + \lambda J (*)$$

comme $b = v$ pour une configuration symétrique et donc $k = r$ on a:

$$MJ = JM,$$

et donc M commute avec $(r-\lambda)I + \lambda J$ et avec $((r-\lambda)I + \lambda J)M^{-1} = M^t$.

On aura ainsi $MM^t = (r-\lambda)I + \lambda J$, d'où l'on peut voir que chaque paire de blocs ont λ voisins communs.

Le théorème de Bruck-Ryser-Chowla [cf. CamLin] donne une condition nécessaire d'existence de configurations symétriques avec un ensemble de paramètres (v, d, λ) satisfaisant $(v-1)\lambda = d(d-1)$:

Théorème III.1.2: [Bruck-Ryser-Chowla]

Supposons qu'il existe une configuration symétrique de paramètres (v, d, λ) . Poser $n = d - \lambda$. Alors:

(i) si v est pair alors n est un carré;

(ii) si v est impair alors l'équation

$$z^2 = nx^2 + (-1)^{(v-1)/2} \lambda y^2$$

a une solution entière (x, y, z) non identiquement nulle.

Ainsi, grâce à des techniques algébriques [CamBig], on sait qu'il existe une matrice rationnelle M satisfaisant l'équation d'incidence $M^t M = nI + \lambda J$ lorsque les conditions du théorème III.1.2 sont vérifiées; mais, ceci n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une configuration symétrique.

Une caractérisation des $(0, \lambda)$ -graphes bipartis de diamètre au plus 3 est donnée par le résultat suivant:

Théorème III.1.3: [Mulder, Mul1]

Soit G un graphe régulier de degré d . Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) G est un $(0, \lambda)$ -graphe biparti de diamètre $\text{diam}(G) \leq 3$;
- (ii) G est un $(0, \lambda)$ -graphe biparti d'ordre $|V| = 2 + 2(d(d-1)/\lambda)$;
- (iii) G est le graphe d'incidence d'une configuration symétrique de paramètres $(1/2|V|, d, \lambda)$.

Quand $\lambda = 2$, une configuration symétrique est appelée biplan.

Un $(0, 2)$ -graphe d'ordre minimum est tel que le voisinage de chacun de ses sommets induit un graphe 2-régulier qui est une union de cycles dont aucun n'est de longueur 4 (car sinon on perdrait la propriété de $(0, 2)$ -graphe). Le théorème III.1.2 indique l'existence (quand v est pair) d'un entier m tel que $d = m^2 + \lambda$. En utilisant des techniques de valeurs propres, Ryser [Ryser] a prouvé que l'équation d'incidence (*) entraîne aussi que m divise λ . Ainsi, pour $\lambda = 2$, les seules valeurs possibles de d sont 3 et 6.

Il existe un nombre fini de biplans connus. On pourra trouver une description dans [Aschbacher],[AssMezSal] [Cameron]. Le problème d'existence de biplans pour un ensemble de paramètres donné demeure encore un problème ouvert, en effet, on pense que "ces structures finies (les biplans) n'existent qu'en nombre fini".

Si d est premier. Un plan projectif d'ordre d est une configuration symétrique de paramètre $(d^2+d+1, d+1, 1)$. La configuration complémentaire a pour paramètres (d^2+d+1, d^2, d^2-d) , son graphe d'incidence est un $(0, \lambda)$ -graphe de diamètre 3, de degré d^2 et tel que $\lambda = d^2-d$.

Il existe exactement un biplan, lorsque $d = 3, 4$ ou 5 . Il en existe exactement trois lorsque $d = 6$, et quatre lorsque $d = 9$; on en connaît quatre lorsque $d = 11$ et deux lorsque $d = 13$; pour les autres valeurs de $d \leq 15$, il n'en existe pas.

Le biplan lorsque $d = 3$ (Fig.11.) a pour paramètres $(4, 3, 2)$, il correspond au $(0, 2)$ -graphe sur quatre sommets K_4 . Son graphe d'incidence est le cube Q_3 .

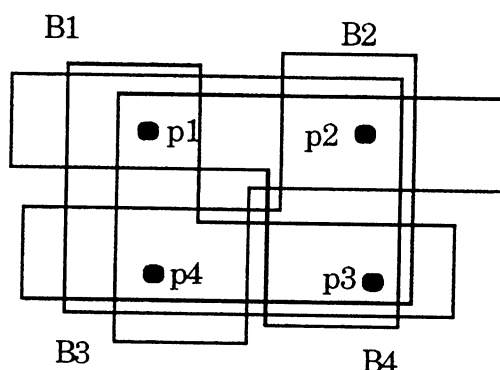


Fig.11. Le biplan de paramètres $(4, 3, 2)$

L'un des trois biplans avec $d = 6$ a $1/2Q_6$ comme graphe d'incidence, ce biplan donne naissance à exactement deux $(0, 2)$ -graphes d'ordre 16, $K_4 \square K_4$ et le graphe de Shrikhande (Fig.12. & 13) [Shrikhande].

Ce dernier graphe est tel que le voisinage de chacun de ses sommets induit un cycle de longueur 6. Les autres biplans n'ont pas de matrice d'incidence de diagonale nulle.

Donnons maintenant quelques exemples de $(0, \lambda)$ -graphes. Lorsque le diamètre vaut 1, les seuls $(0, \lambda)$ -graphes sont les graphes complets K_2 et $K_{\lambda+2}$. Lorsque le diamètre vaut 2, et, si ils sont bipartis ou bien leur degré vaut λ , les seuls $(0, \lambda)$ -graphes sont les graphes bipartis complets $K_{\lambda, \lambda}$. Si le diamètre vaut 2 et le degré est $\lambda < d \leq 2\lambda - 1$, alors le graphe est un $\{\lambda, \lambda\}$ -graphe, i.e. toute paire de sommets possède exactement λ voisins communs. Les $(0, \lambda)$ -graphes de diamètre 3 et de degré $d \leq 2\lambda - 1$ sont

bipartis. Pour d'autres exemples le lecteur est renvoyé à [Mul1, Mul2, Mul3, Mol3,..].

Parmi les $(0, 2)$ -graphes, l'hypercube de dimension d , Q_d , joue un rôle essentiel. Plusieurs caractérisations de ce graphes ont été obtenues par divers auteurs ([Alvarez], [Berrachedi], [DufRiv], [Foldes], [Lab1], [Mol2], [Mul1], [LabRao], ...). Sans doute la plus jolie de ces différentes caractérisations est celle due à J.M. Laborde et S.P. Rao Hebbare[LabRao] et, indépendamment, à H.M. Mulder[Mul1]:

Théorème III.1.4.[Laborde-Rao-Hebbare, Mulder]

Soit G un $(0, 2)$ -graphe. Alors G est régulier de degré d , et

$|V(G)| \leq 2^d$. De plus, G est un hypercube de dimension d si et seulement si $|V(G)| = 2^d$.

L'hypercube de dimension d a aussi été caractérisé en tant que graphe distance-régulier de vecteur d'intersection:

$$\tau(G) = \{d, d-1, d-2, \dots, 1; 1, 2, 3, \dots, d-1, d\}$$

(voir par exemple [BroCohNeu]). Nous en donnons une preuve simple basée sur le fait que l'hypercube de dimension d est d'ordre maximal parmi les $(0, 2)$ -graphes de degré d :

Théorème III.1.5.

Soit G un graphe distance-régulier. Alors G a pour vecteur d'intersection $\tau(G) = \{d, d-1, d-2, \dots, 1; 1, 2, 3, \dots, d-1, d\}$ si et seulement si G est l'hypercube de dimension d .

Preuve:

Lorsque G est le d -cube, il est clair que c'est un graphe distance-régulier de vecteur d'intersection est $\tau(G) = \{d, d-1, d-2, \dots, 1; 1, 2, 3, \dots, d-1, d\}$.

Supposons maintenant que G est un graphe distance-régulier de vecteur d'intersection $\tau(G) = \{d, d-1, d-2, \dots, 1; 1, 2, 3, \dots, d-1, d\}$, alors G est régulier de degré d , de plus, G est biparti car ses nombres d'intersections

$a_i = d - b_i - c_i = 0$ pour tout $i = 0, 1, \dots, d$. Par ailleurs, G est antipodal car il est régulier de degré d et $b_{d-1} = c_1 = 1$ et $b_0 = c_d = d$, donc pour tout sommet u de G , il existe un unique sommet v de G tel que $d(u, v) = d$. Enfin, G est un $(0, 2)$ -graphe car quelque soit les sommets u et v de G à distance $2 = d(u, v)$, il existe exactement $c_2 = 2$ voisins de v dans $N_1(u)$, comme pour tout $i = 0, 1, \dots, d$, $a_i = 0$, alors toute paire de sommets de G a soit deux voisins communs, soit aucun. Finalement, G est bien l'hypercube de dimension d , Q_d . □

Objet d'études intensives depuis le début des années 70, l'hypercube demeure encore le centre d'intérêt de plusieurs travaux récents focalisés sur la manière de caractériser les graphes pouvant être plongés de différentes façons comme sous graphes du n -cube. Le problème de plongement d'arbres en est une réelle illustration [Lab2].

Les problèmes liés à l'architecture des ordinateurs ont engendré un intérêt sans cesse croissant pour l'hypercube et ses différentes propriétés, et ce, quant à son utilisation comme modèle possible pour les réseaux à architecture en parallèle qui occupent une place de plus en plus importante dans le développement actuel de l'informatique et dont l'objectif est le gain en performance. L'hypercube constitue une topologie fixe pour la connexion des processeurs par des liens de communication dans une architecture à plusieurs processus faiblement couplés et communiquant uniquement par échange de messages. Par ailleurs, en algèbre de Boole, l'hypercube $(\mathbb{Z}/2)^n$, joue un rôle important où il permet notamment la visualisation géométrique de résultats (pour plus de détails à ce sujet le lecteur peut se référer à [Lab3]).

Ce rôle moteur de l'hypercube, en fait un graphe particulièrement remarquable, en ce sens qu'étant donnée une propriété (P) vérifiée par l'hypercube, chacun peut se demander quelle classe de graphes vérifie cette propriété (P) ? et dans une telle classe, quel rôle y joue l'hypercube?.

Une démarche naturelle serait d'effectuer certaines modifications sur le graphe de l'hypercube, moyennant certaines opérations sur les sommets et/ou les arêtes, afin de créer de nouvelles classes de $(0, 2)$ -graphes.

Dans cette optique là, nous essayons, dans ce qui suit, d'en décrire quelques classes. On notera bien le rôle de "traître" joué par l'hypercube tout au long de ce travail.

Plusieurs classes de $(0, \lambda)$ -graphes, et surtout de $(0, 2)$ -graphes, ont été décrites dans la littérature [Lab1, Mul1, Mol3, Berrachedi, Burosh in WagBod, ...]. Parmi ceux-là on peut citer, outre les hypercubes, les graphes de Laborde-Mulder et les demi-cubes, les graphes suivants:

- les graphes d'Hadamard [Mul1] qui sont des $(0, \lambda)$ -graphes bipartis de diamètre 4 et de degré 2λ . Ils sont construits à partir des matrices d'Hadamard d'ordre $4t$ normalisées (tous les éléments de la 1ère ligne sont égaux à 1) [Mul1]. On rappelle qu'une matrice d'Hadamard d'ordre n est une matrice H dont les éléments sont ± 1 vérifiant $HH^t = H^tH = nI$, où I est la matrice identité d'ordre n . Le plus petit graphe d'Hadamard est Q_4 . Un graphe d'Hadamard est antipodal.

- les graphes de Cayley $\Gamma(G, \Omega)$ [Mol3] qui sont des $(0, 2)$ -graphes définis à partir d'un groupe G engendré par une partie $\Omega \subseteq G \setminus \{1\}$ telle que tout élément $g \in \Omega$ a son symétrique g^{-1} dans Ω . L'ensemble des sommets du graphe Γ est celui des éléments de G et il existe une arête gh dans Γ si et seulement si $g^{-1}h \in \Omega$. Le graphe obtenu est de degré $|\Omega|$ et il est sommet transitif.

- ainsi que d'autres exemples singuliers : le graphe de Shrikhande (Fig.12 & 13) et le graphe de Greenwood-Gleason E_3 [GleGre] (Fig.19) qui sont des $(0, 2)$ -graphes, le graphe de Clebsch [Seidel], graphe complémentaire de $E_3 = LM(Q_4)$, qui est un $(0, 6)$ -graphe de degré 10 et de diamètre 2.

Proposons-nous maintenant d'étudier quelques classes de $(0, 2)$ -graphes, soit nouvelles, soit déjà existantes.

III.2. Une classe de (0, 2)-graphes minimaux: Les graphes de Shrikhande généralisés.

Dans ce paragraphe on introduit la construction d'une nouvelle classe de (0, 2)-graphes minimaux qu'on a baptisé graphes de Shrikhande généralisés [Madani1] par analogie au graphe qui a inspiré cette construction, à savoir le graphe de Shrikhande. En effet, nous considérons l'hypercube de dimension d auquel on rajoute des arêtes entre sommets à distance 2 moyennant certaines conditions sur les directions . Cette opération de rajout d'arêtes entre sommets à distance 2, une fois définie sur l'hypercube de dimension d , nous fournit une classe de (0, 2)-graphes se rangeant, contrairement à l'hypercube, plutôt du côté des (0, 2)-graphes minimaux. Les graphes ainsi obtenus sont des surgraphes de l'hypercube, c'est à dire que ce sont des graphes obtenus à partir de l'hypercube en rajoutant de nouvelles arêtes.

On peut observer que le graphe de Shrikhande (Fig.12 & 13) n'est en fait que l'hypercube de dimension 4 auquel on a rajouté certaines arêtes entre sommets à distance 2. En effet, soit A un sommet de Q_4 , A peut être considéré comme une partie de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$, si $|A|$ est pair rajouter une arête entre A et tout sommet $B \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ tel que $B = A \Delta \{1, 4\}$ ou $B = A \Delta \{2, 3\}$, et si $|A|$ est impair rajouter une arête entre A et tout sommet $B \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ tel que: $B = A \Delta \{1, 2\}$ ou $B = A \Delta \{3, 4\}$

On pourra remarquer que ce graphe peut aussi être dessiné sur un tore [Madani2].

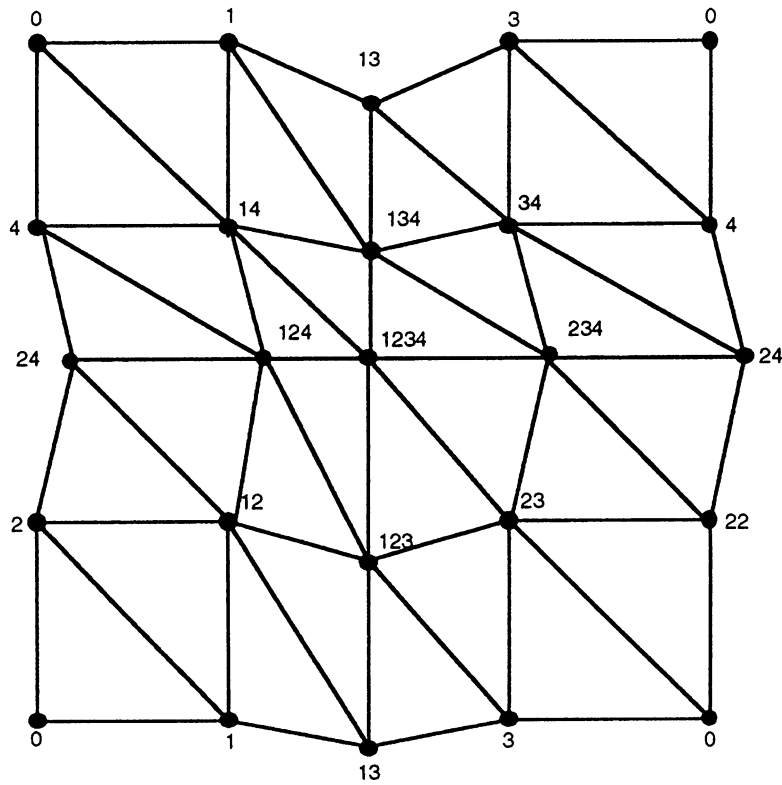


Fig.13. Le graphe de Shrikhande
 (Les sommets de même étiquette doivent être identifiés)

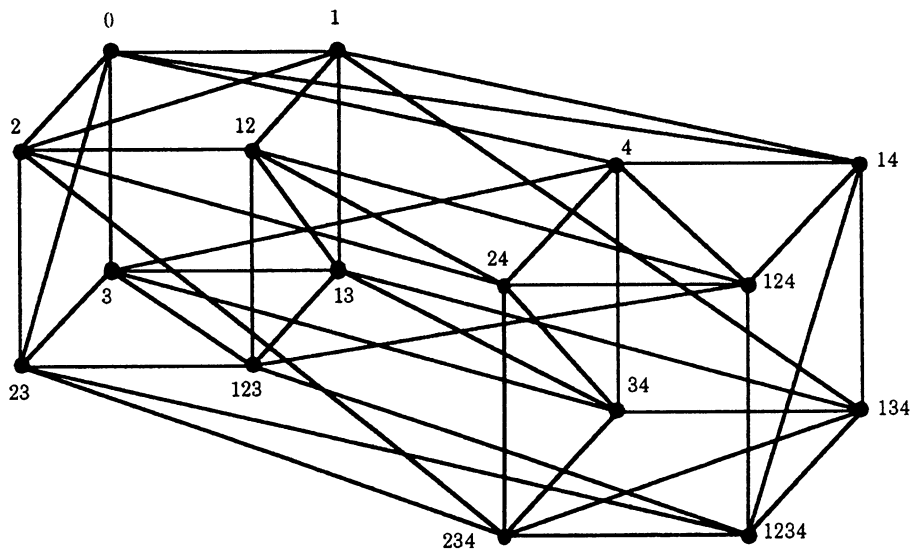


Fig.13bis. Le même graphe après identification des sommets de même étiquette.

Cette construction peut être généralisée sur un d-cube; en effet,

considérons Q_d l'hypercube de dimension d où chaque sommet est représenté par un vecteur binaire de longueur d et où deux sommets sont adjacents si et seulement si ils diffèrent en exactement une composante. Définissons le poids $\omega(x)$ d'un sommet x de Q_d comme l'application $\omega : V(Q_d) \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout sommet x de Q_d , $\omega(x) = d_{Q_d}(0, x)$ où 0 est le vecteur binaire dont toutes les composantes sont nulles, c'est la distance de Hamming entre x et le sommet 0 ; en d'autres termes, c'est le nombre de composantes non nulles du vecteur binaire x . Maintenant, construisons pour tout $k \geq 2$, le graphe G_k à partir de l'hypercube Q_{2k} , en rajoutant des arêtes entre sommets à distance 2 dans Q_{2k} , comme suit: Notons tout d'abord ab tout vecteur binaire de longueur n dont seules les composantes de rang a et b ne sont pas nulles;

- Si $\omega(x)$ est impair, relier x à tout sommet y tel que: $y = x + ab$, avec $ab \in \{12, 34, \dots, (2k-1)2k\}$;

- Si $\omega(x)$ est pair, relier x à tout sommet y tel que: $y = x + cd$, avec $cd \in \{1(2k), 2(2k-1), \dots, k(k+1)\}$.

(Les sommes étant modulo 2).

Le graphe G_k ainsi obtenu est régulier de degré $3k$.

Remarque: On a exclu le cas $k = 1$, car on ne peut rajouter que d'une seule façon des arêtes entre sommets à distance 2 dans Q_2 , à savoir du type $(x, x+12)$ où $x \in \{0, 1, 2, 12\}$, ce qui donne un K_4 qui est un $(0, 2)$ -graphe.

Par ailleurs, le graphe de Shrikhande $G_2 = Sh$ est bien un $(0, 2)$ -graphe, car il suffit de remarquer tout d'abords que les arêtes rajoutées dans Q_4 pour former le graphe Sh , relient des sommets de même parité, et engendrent 4 cycles de longueur 4 disjoints. Ensuite, deux arêtes adjacentes adjacentes uv et vw dans Sh sont de trois types:

- uv et $vw \in E(Q_4)$ et auquel cas il existe un unique sommet z tel que uz et $wz \in E(Q_4)$, car u et w sont de même parité et $d_{Q_4}(u, v) = 2$ et donc les arêtes rajoutées adjacentes à u et à w sont parallèles,

- $uv \in E(Q_4)$ et $vw \notin E(Q_4)$ donc u et w sont de parités différentes et il existe alors un unique z tel que $uz \notin E(Q_4)$ et $wz \in E(Q_4)$,

- uv et $vw \notin E(Q_4)$ alors u, v , et w sont de même parité et on a $u = v + ab$ et $w = v + cd$ avec $ab \neq cd \in \{12, 34\}$ ou bien $ab \neq cd \in \{14, 23\}$ donc $z = u + cd = w + ab$ est le second voisin commun à u et w (autre que v).

Proposition III.2.1.

Soit $k \geq 2$, G_k est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si $k = 2$, i.e. G_k est le graphe de Shrikhande.

Preuve:

Nous devons montrer que quelque soit $k \geq 3$, G_k n'est pas un $(0, 2)$ -graphe, car G_2 correspond au graphe de Shrikhande qui est un $(0, 2)$ -graphe. En effet, supposons que $k \geq 3$, dans ce cas, on peut facilement vérifier que G_k est de diamètre au moins 3 (il suffit de voir que le rajout d'arêtes entre sommets à distance deux dans Q_d réduit le diamètre de celui-ci à $\lfloor d/2 \rfloor$).

Montrons maintenant que G_k n'est pas un $(0, 2)$ -graphe. Soit alors xz une arête rajoutée, donc $d_{Q_{2k}}(x, z) = 2$, notons $x + a$ et $x + b$ les deux voisins communs à x et z dans Q_{2k} , z est alors de la forme $z = x + ab$, de plus, $\omega(x)$ et $\omega(z)$ sont de même parité. Supposons, sans perte de généralité, que la i ème composante de x ne soit pas nulle, et considérons le sommet $(x - i)$ voisin de x dans Q_{2k} . On a $d_{Q_{2k}}(x-i, z) = 3$ et, $x \in N_{G_k}(x-i) \cap N_{G_k}(z)$ (voir fig.14.), montrons que $|N_{G_k}(x-i) \cap N_{G_k}(z)| = 1$.

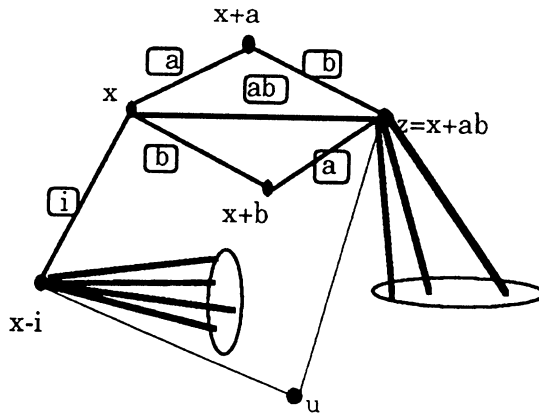


Fig.14. Les arêtes rajoutées sont en gras, les autres arêtes sont celles de Q_{2k} sauf celles adjacentes à u (les directions sont en encadré)

Supposons qu'il existe $u \in N_{G_k}(x-i) \cap N_{G_k}(z)$, $u \neq x$. On sait tout d'abord, que le sous-graphe induit dans Q_{2k} par l'intervalle $I_{Q_{2k}}(x-i, x+ab)$ est un cube de dimension 3 (la distance entre ces deux sommets dans Q_{2k} étant 3). Deux cas se présentent alors (voir fig.15.):

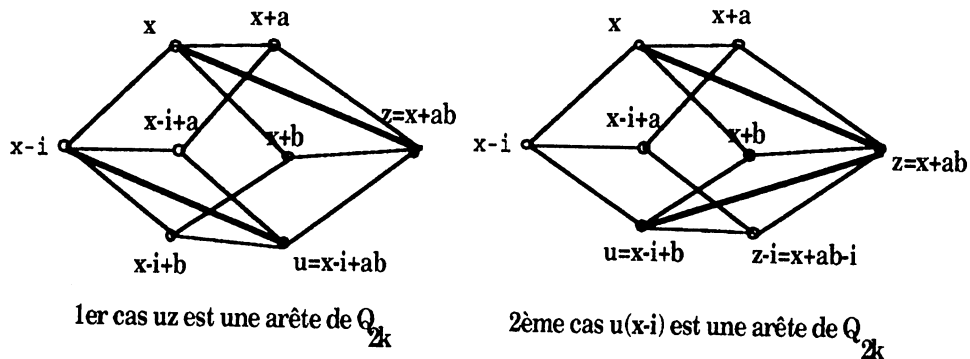


Fig.15.

- 1er cas: $uz \in E(Q_{2k})$ i.e. uz n'est pas une arête rajoutée, et donc l'arête $(x-i)u$ est une arête rajoutée. $x+a$ et $x+b$ ont x et respectivement $(x-i+a)$ et $(x-i+b)$ comme voisins communs avec $(x-i)$; par ailleurs, z a pour voisins à distance 2 de $x-i$ les sommets $(x+a)$, $(x+b)$ et u , et donc nécessairement $u = x-i+ab$ (car $d_{Q_{2k}}(x-i, z) = 3$) et $I_{Q_{2k}}(x-i, z) \cong Q_3$);

- 2ème cas: $uz \notin E(Q_{2k})$ i.e. uz est une arête rajoutée, et donc $(x-i)u$ est une arête de Q_{2k} . Le même raisonnement que dans le 1er cas nous permet de dire que $u = x-i+b$;

Dans le 2ème cas, les arêtes rajoutées xz et uz sont du type ab et bi ce qui n'est pas possible. Dans le 1er cas, les deux arêtes rajoutées $(x-i)u$ et xz sont du type ab , mais $\omega(x-i)$ et $\omega(z)$ sont de parités différentes et donc $ab = k(k+1)$ est le seul cas où cette situation est possible. Comme ab était quelconque dans notre choix, $|N_{G_k}(x-i) \cap N_{G_k}(z)| \leq 1$ en général.

En somme, G_k n'est pas un $(0, 2)$ -graphe pour $k \geq 3$. □

La raison pour laquelle seul le graphe de Shrikhande est un $(0, 2)$ -graphe parmi les graphes G_k ($k \geq 2$), est que tout d'abord, son diamètre est deux (conséquence du rajout d'arêtes entre sommets à distance 2 dans le 4-cube), et ensuite que l'ensemble des arêtes rajoutées forme deux cycles disjoints de longueur 4. En effet, les cycles $\{0, 23, 1234, 14, 0\}$ et $\{1, 2, 234, 134, 1\}$ sont engendrés par respectivement les arêtes rajoutées dans Q_4 du type $\{14, 23\}$ en tout sommet de poids pair de Q_4 , et celles du type $\{12, 34\}$ en tout sommet de poids impair de Q_4 . Ces cycles partitionnent l'ensemble des sommets de Q_4 en deux sous ensembles de même taille induisant chacun un cycle de longueur 4.

Nous présentons dans ce qui suit une méthode inspirée de celle utilisée pour construire le graphe de Shrikhande à partir du 4-cube, permettant de construire un $(0, 2)$ -graphe par rajout d'arêtes entre sommets à distance 2 dans un hypercube de dimension d . Mais, avant d'exhiber la méthode de construction de tels graphes, donnons d'abord quelques définitions utiles. Remarquons que dans un $(0, 2)$ -graphe toute paire d'arêtes adjacentes appartient à exactement un cycle de longueur 4 [Lab1], ceci nous permet alors de définir la notion de fermeture de deux arêtes adjacentes:

Définition III.2.2:

Dans un $(0, 2)$ -graphe, on appelle fermeture de deux arêtes adjacentes a et b , les deux autres arêtes a' et b' leur correspondant sur l'unique cycle de longueur 4 auquel elles appartiennent.

La définition suivante précise alors, pour un sommet x donné dans le d -cube, les sommets qui lui seront reliés par de nouvelles arêtes:

Définition III.2.3:

Soit x un sommet du d -cube. On appelle face de sommet x et de direction ab le cycle de longueur 4 formé par les arêtes a et b incidentes en x et leurs fermetures respectives a' et b' .

exemple: dans le cube

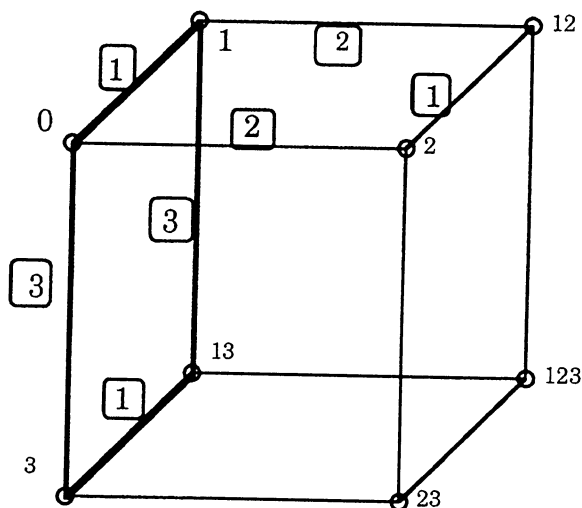


Fig.16. Les arêtes formant la face de sommet 0 et de direction 13 sont en gras (les directions sont encadrées).

Comme l'hypercube de dimension d , Q_d , est un graphe régulier de degré d , définissons alors ses directions comme une numérotation de ses arêtes par l'ensemble $\{1, 2, \dots, d\}$ de façon qu'une arête est numérotée i ($1 \leq i \leq d$) si et seulement si elle relie deux sommets de Q_d qui diffèrent par la i ème composante. Une fois ces directions fixées, toutes nos faces sont alors bien

définies. Nous pouvons maintenant énoncer la méthode de construction cherchée:

Définition III.2.4:

Soit Q_d l'hypercube de dimension d . Soient $\{1, 2, \dots, d\}$ l'ensemble de ses directions. Le graphe de Shrikhande généralisé $Shg(Q_d)$ est le graphe obtenu à partir de Q_d en rajoutant en tout sommet x de Q_d une arête vers tous les sommets y à distance deux de x sur les faces de centre x et de direction ab , avec:

a/ si d est pair, $y = x + ab$ et $ab \in \{12, 34, \dots, (d-1)d\}$;

b/ si d est impair, $y = x + ab$ et $ab \in \{12, 34, \dots, (d-2)(d-1)\}$.

exemple:

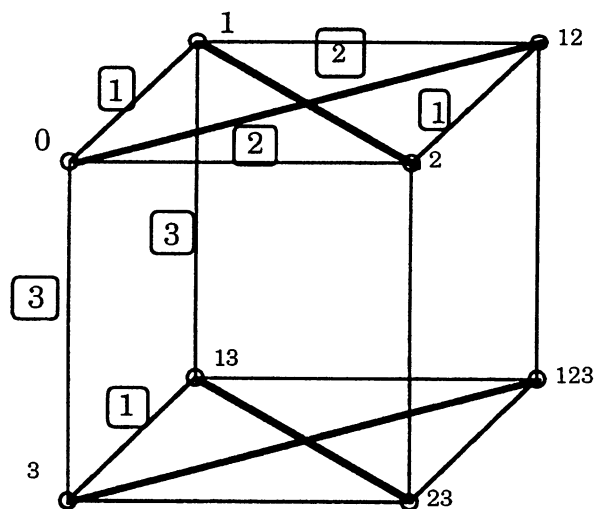


Fig.17. $Shg(Q_3)$: Les arêtes rajoutées sont en gras

On voit sur cet exemple que $Shg(Q_3)$ n'est autre que $K_4 \square K_2$, les arêtes rajoutées forment un couplage de $Shg(Q_3)$. En fait, de manière générale, les arêtes rajoutées forment des hypercubes de dimension inférieure à d disjoints, c'est ce qui est précisé par la proposition suivante:

Proposition III.2.2.

L'ensemble des arêtes rajoutées à Q_d pour former $\text{Shg}(Q_d)$

engendre :

- si d est pair, $2^{d/2}$ hypercubes de dimension $d/2$ disjoints;
- si d est impair, $2^{(d+1)/2}$ hypercubes de dimension $(d-1)/2$ disjoints.

Avant de montrer cette proposition énonçons d'abord le lemme suivant:

Lemme III.2.1.

Si en un sommet de Q_d on rajoute des arêtes vers tout sommet y tel que $y = x + ab$ où $ab \in R \subseteq \{12, 23, \dots\}$, alors le graphe obtenu est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si le rajout d'arêtes s'effectue en tout sommet de Q_d selon R .

Preuve du lemme III.2.1:

Supposons qu'on ait rajouté des arêtes xy sur une face de sommet x et de direction $ab \in R$. Soit alors $\{x, x+a, y, x+b, x\}$ cette face, considérons alors le voisin de x suivant une direction $p \neq a, b$, soit le sommet $x+p$. La face de sommet $x+p$ et de direction ab , $\{x+p, x+a+p, y+p, x+b+p, x+p\}$, est une face "homologue suivant p " à celle de sommet x et direction ab .

Afin de préserver la propriété de $(0, 2)$ -graphe, on doit rajouter les arêtes de type ab sur la face homologue suivant p , à savoir les arêtes $(x+p)(y+p)$ et $(x+a+p)(x+b+p)$. Ce rajout est nécessaire car comme après rajout de xy , on a $y \in N(x) \cap N(y+p)$, il faudrait donc un deuxième voisin commun à ces deux sommets, et la seule façon de le faire par rajout d'arêtes selon R est bien de relier $y+p$ à $x+p$ sur la face de centre $x+p$ et de direction $ab \in R$ car le seul sommet à distance deux de $y+p$ et voisin de x est bien $x+p$. Pour les mêmes raisons on doit rajouter aussi sur cette face l'arête $(x+a+p)(x+b+p)$. Comme p et x sont quelconques, le rajout d'arêtes selon R

doit s'effectuer en tout sommet de Q_d . Inversement, il est facile de vérifier que si dans Q_d on rajoute en tout sommet des arêtes selon R , le graphe obtenu est bien un $(0, 2)$ -graphe. \square

Preuve de la proposition III.2.2:

En chaque sommet de Q_d , on rajoute selon $\{12, 34, \dots, (2[d/2]-1)(2[d/2])\}$ (où $[d/2]$ désigne la partie entière de $d/2$) $[d/2]$ nouvelles arêtes. Le nombre total d'arêtes rajoutées dans Q_d serait alors: $[d/2].2^{d-1}$. Le graphe $Shg(Q_d)$ contient par construction Q_d . Supprimons toutes les arêtes de $Shg(Q_d)$ appartenant à Q_d , le graphe résultant n'est plus connexe. En effet, soient u et v deux sommets adjacents de $Shg(Q_d)$ et supposons que l'arête les reliant ne soit pas une arête rajoutée, i.e. c'est une arête de Q_d . Comme u et v sont adjacents dans Q_d , leurs poids dans Q_d sont de parités différentes, étant donné que les arêtes rajoutées relient uniquement des sommets de même parité de poids, alors u et v sont dans deux composantes connexes du graphe $Shg(Q_d) \setminus Q_d$, le graphe obtenu par suppression des arêtes de Q_d de $Shg(Q_d)$.

Considérons maintenant les deux cas de parité de d :

a/ si d est pair:

On aura rajouté au total $(d/2)2^{d-1}$ arêtes. Partant d'un sommet x quelconque, considérons l'extension connexe engendrée par les arêtes rajoutées. En d'autres termes, pour tout sommet quelconque x de $Shg(Q_d) \setminus Q_d$, considérons le graphe G_x induit par la composante connexe à laquelle x appartient. Il est clair que ce graphe induit est régulier de degré $[d/2]$. Montrons que c'est un $(0, 2)$ -graphe. En effet, soient uv et vx deux arêtes adjacentes en v , ces arêtes correspondent respectivement à deux directions disjointes, disons ab et cd . On a alors $v = u + ab = x + cd$, et $v \in N(u) \cap N(x)$. En vertu du lemme précédent, le sommet $v' = u + cd = x +$

ab est aussi un voisin commun à u et x . De plus ce sont les seuls voisins communs à u et x dans $\text{Shg}(Q_d)$, puisque $d_{Q_d}(u, x) = 4$, alors:

$$|N_{Q_d}(u) \cap I_{Q_d}(u, x)| = |N_{Q_d}(x) \cap I_{Q_d}(u, x)| = 4$$

et comme $a \neq b \neq c \neq d$, il existe exactement deux sommets qui soient à distance deux de u et de x de la forme $u + ab$ et $u + cd$, à savoir les sommets v et v' . Donc le graphe G_x est bien un $(0, 2)$ -graphe. Son diamètre est $d/2$, car comme Q_d est antipodal (i.e. tout sommet possède un unique sommet antipodal) alors G_x l'est aussi et l'unique antipodal de x est le sommet $x + 12 + 34 + \dots + (d-1)d$, qui est relié à x par la chaîne formée par les arêtes rajoutées du type $12, 34, \dots, (d-1)d$ dans cet ordre.

Donc G_x est bien un hypercube de dimension $d/2$. Comme le nombre total d'arêtes rajoutées est $(d/2)2^{d-1}$ et le nombre d'arêtes dans chaque G_x est $(d/2)2^{(d/2)-1}$, alors le nombre de sous graphes induits G_x est $2^{d/2}$. Tous ces sous graphes sont disjoints (ce sont les différentes composantes connexes de $\text{Shg}(Q_d) \setminus Q_d$). Finalement, on a bien que l'ensemble des arêtes rajoutées dans $\text{Shg}(Q_d)$ forme $2^{d/2}$ hypercubes de dimension $d/2$ disjoints.

b/ si d est impair:

Dans ce cas les arêtes rajoutées sont du type $\{12, 34, \dots, (d-2)(d-1)\}$, donc la direction d n'est pas utilisée pour le rajout d'arêtes. Considérons alors le couplage parfait de Q_d constitué par les arêtes de direction d . Ce couplage partage Q_d en deux copies Q_{d-1} dont les sommets homologues sont reliés par ce couplage (uniquement les arêtes de direction d). En vertu du cas a/, comme $d-1$ est pair, dans chaque Q_{d-1} les arêtes rajoutées forment $2^{(d-1)/2}$ hypercubes de dimension $(d-1)/2$ disjoints, soit au total, dans Q_d , $2^{(d+1)/2}$ hypercubes de dimension $(d-1)/2$ disjoints. □

Remarques:

1°/ Afin de préserver la propriété de $(0, 2)$ -graphe, le rajout d'arêtes entre sommets à distance 2 dans un hypercube de dimension d ne peut se faire

que sur des faces ne partageant pas de direction commune [Madani2]. En effet, si tel était le cas, soient a , b et c trois directions issues d'un même sommet x et soient ab et bc les arêtes rajoutées. Celles-ci relient x à respectivement $x+ab$ et $x+bc$ qui sont à distance 2 l'un de l'autre dans l'hypercube, ils ont donc déjà deux voisins communs, le fait de rajouter les arêtes ab et bc leur créerait un troisième voisin commun, en l'occurrence le sommet x .

2°/ Le rajout d'arêtes entre sommets à distance 3 dans l'hypercube ne préserve pas la propriété de $(0, 2)$ -graphe [Madani2]. Par contre, lorsque la distance est au moins 4, on sait en construire [Mol3].

Proposition III.2.3.

Les seuls $(0, 2)$ -graphes obtenus par rajout d'arêtes entre sommets à distance 2 dans l'hypercube de dimension d , sont le graphe de Shrikhande et les graphes de Shrikhande généralisés.

Preuve:

Immédiate, il suffit de vérifier que la seule façon de préserver la propriété de $(0, 2)$ -graphe lorsque l'on rajoute des arêtes entre sommets à distance deux de l'hypercube de dimension d , est la méthode décrite plus haut ou bien celle de construction du graphe de Shrikhande à partir de Q_4 . \square

III.3. Les graphes de Laborde-Mulder et du demi-cube.

L'hypercube de dimension d peut être considéré comme le graphe dont les sommets sont la collection de tous les sous ensembles de l'ensemble $\{1, 2, \dots, d\}$, et deux sommets y sont adjacents si et seulement si leur différence symétrique est de taille 1.

C'est un $(0, 2)$ -graphe extrémal en ce sens qu'il est d'ordre maximum pour un degré donné et il est minimal en ce sens qu'il est de degré minimum pour un diamètre donné.

Le "demi-cube" $1/2 Q_{2d}$ est défini comme le sous-graphe de l'hypercube de dimension paire Q_{2d} induit par $\{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2d\} / |A| \leq d\}$ et où chaque sommet de poids d est identifié à son antipodal (dans Q_{2d}) (de poids d aussi). Il est aisé de voir que $1/2$ n'est autre que l'hypercube de dimension impaire Q_{2d-1} auquel des arêtes reliant les sommets antipodaux (ou diagonales) ont été rajoutées.

exemple:

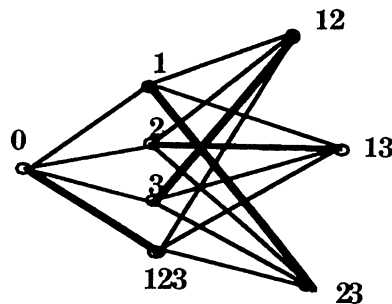


Fig. 18. $1/2Q_4 = Q_3$ auquel on a rajouté des diagonales (en gras sur la figure)

Le graphe "extension du graphe impair" $LM(Q_d)$ a été indépendamment introduit par J.M. Laborde [Lab1] et H.M. Mulder [Mul1]. Plusieurs travaux concernant ces graphes ont été réalisés, notamment par [LabRao, Mul2 & Mul3, Sokolova, Payan]. Gustav Burosch in [WagBod] les a rebaptisé graphes de Laborde-Mulder, on les notera par la suite $LM(Q_{2d})$. Le graphe de Laborde-Mulder $LM(Q_{2d})$ a pour ensemble de sommets $\{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2d\} / |A| \leq d\}$ et où A et B sont adjacents si et seulement si $|A \Delta B| \in \{1, 2d\}$. Ces graphes peuvent aussi être construits en rajoutant les arêtes diagonales dans l'hypercube Q_{2d} ou en identifiant les paires de sommets antipodaux.

Dans la littérature ce graphe était noté jusqu'à présent E_d . Il consiste en fait en les d premières couches de l'hypercube Q_{2d+1} et où le graphe

induit par les sommets de la couche N_d est le graphe impair O_{d+1} . Le graphe impair O_d étant défini comme le graphe d'ensemble de sommets $\{A \subseteq \{1,2,\dots,2d-1\} / |A| = d-1\}$ et où deux sommets A et B sont adjacents si et seulement si $|A \Delta B| = 2d - 2$ (i.e. si leur intersection est vide).

Par exemple le graphe O_3 est le fameux graphe de Petersen (en gras sur la figure 19). Le graphe de Laborde-Mulder peut aussi être défini comme l'hypercube de dimension paire Q_{2d} auquel des diagonales ont été rajoutées.

Les deux graphes définis ci-dessus, à savoir les graphes du demi-cube et de Laborde-Mulder, sont donc le produit du rajout de diagonales à l'hypercube de dimension d . Le lemme suivant attribué respectivement à [Sokolova] & [WagBod] est un résultat que l'on retrouve aussi dans les travaux de H.M. Mulder et J.M. Laborde.

Lemme III.3.1.

L'hypercube de dimension d dans lequel les sommets diamétraux sont reliés est isomorphe au graphe $LM(Q_{2k})$ si $d = 2k$, et, à $1/2 Q_{2k}$ si $d = 2k - 1$.

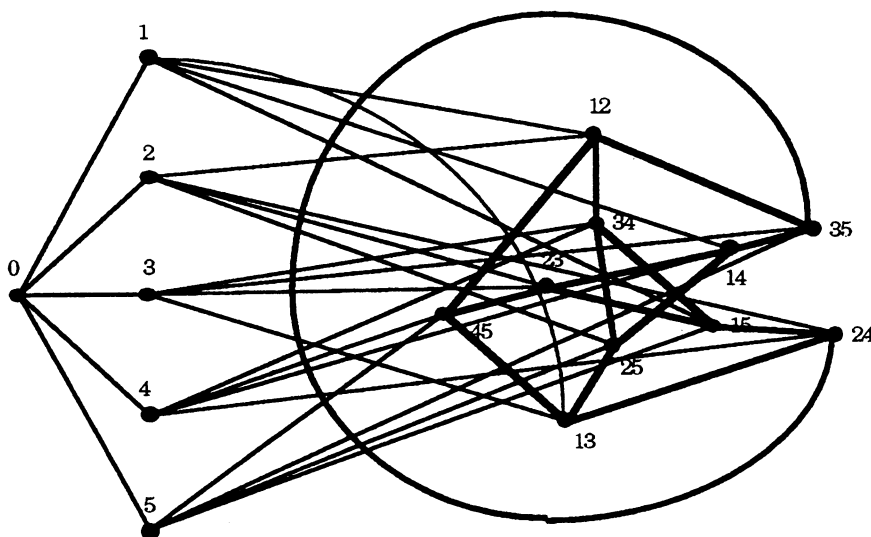


Fig. 19. $LM(Q_4)$ connu aussi comme graphe de Greenwood-Gleason (le graphe induit par $N_2(0)$ est le graphe de Petersen O_3 (en gras))

Le graphe de Laborde-Mulder $LM(Q_{2k})$ et celui du demi cube $1/2 Q_{2k}$ ont un diamètre égal à k . Hormis $1/2 Q_4$ qui est $K_{4,4}$ ces graphes sont des $(0,2)$ -graphes. A titre d'exemple, $LM(Q_2) = K_4$ et $LM(Q_4)$ est le graphe de Greenwood-Gleason (Fig.19.) qui consiste en les deux premières couches de Q_5 , les sommets de la deuxième couche induisant le graphe impair O_3 qui est le fameux graphe de Petersen.

Cette classe de $(0, 2)$ -graphes possède la particularité que le diamètre vaut la moitié du degré, et se situe de fait comme une classe médiane entre les $(0, 2)$ -graphes de diamètre maximum ($D = d$), à savoir les hypercubes de dimension D , et ceux de diamètre minimum, à savoir, outre le graphe complet K_2 , les graphes d'incidence de biplans.

Par ailleurs, ces graphes sont des $(0,2)$ -graphes de degré d et d'ordre 2^{d-1} , d'autres exemples de tels graphes existent, en effet, les graphes de Hamming (graphes produit de graphes complets) $H_{a_1, a_2, \dots, a_{d-2}}$ où $a_1 = 4, a_2 = \dots = a_{d-2} = 2$, c'est à dire le graphe $H_{a_1, a_2, \dots, a_{d-2}}$ somme cartésienne de K_4 par $(d-3)$ fois K_2 , $K_4 \square K_2 \square \dots \square K_2$, en sont des exemples, leur diamètre étant égal à $d-2$ (voir exemple fig.20).

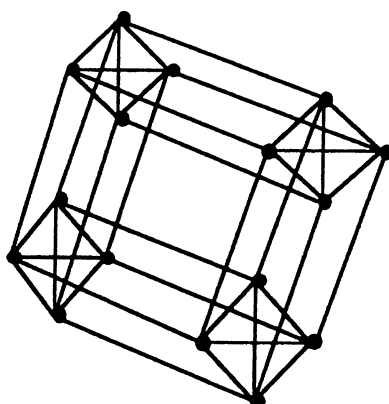


Fig.20. $K_4 \square K_2 \square K_2$

Parmi les $(0,2)$ -graphes, l'hypercube de dimension d caractérise ceux d'ordre maximum pour un degré donné (cf. Théorème III.1.4).

On sait d'autre part que le diamètre D d'un $(0, 2)$ -graphe de degré d vérifie $D \leq d$, et qu'il y a égalité si et seulement si le graphe est l'hypercube de dimension D [M. Mollard].

Dans ce qui suit, on donne une caractérisation des graphes de Laborde-Mulder comme $(0, 2)$ -graphes de diamètre minimum pour un ordre fixé [voir aussi Madani3].

Définissons tout d'abord deux opérations sur l'hypercube de dimension d qui laissent invariante la propriété de $(0, 2)$ -graphe. Elles sont définies par les applications F et H des lemmes suivants, et permettent de prouver que l'opération qui consiste à rajouter des arêtes entre les paires de sommets antipodaux dans l'hypercube de dimension d , et celle qui consiste à identifier les paires de sommets antipodaux dans l'hypercube de dimension $(d+1)$, sont équivalentes.:

Lemme III.3.2.

Soit F l'application qui consiste à relier par une arête toute paire de sommets antipodaux dans l'hypercube de dimension d . Alors:

$$\text{si } d = 2k, F(Q_{2k}) = LM(Q_{2k}), \text{ et}$$

$$\text{si } d = 2k-1, F(Q_{2k-1}) = 1/2Q_{2k}$$

Lemme III.3.3.

Soit H l'application qui consiste à identifier toute paire de sommets antipodaux dans l'hypercube de dimension d . Alors:

$$\text{si } d = 2k, H(Q_{2k}) = 1/2Q_{2k}, \text{ et}$$

$$\text{si } d = 2k+1, H(Q_{2k+1}) = LM(Q_{2k})$$

Notons que le degré du graphe de Laborde-Mulder, $LM(Q_{2k})$, est égal à $(2k+1)$ et que son diamètre est k , tandis que pour le demi-cube on a respectivement $2k$ et $(k+1)$. Par ailleurs, à partir des lemmes 1 et 2 ci-dessus, on remarque que pour tout entier d , $F(Q_d) = H(Q_{d+1})$: rajouter des diagonales dans un hypercube de dimension d revient à identifier les sommets antipodaux de l'hypercube de dimension $(d+1)$ et vice-versa.

Considérons maintenant les $(0, 2)$ -graphes de degré d et d'ordre 2^{d-1} . Le théorème suivant donne une borne inférieure à leur diamètre:

Théorème III.3.2.

Soit G un $(0,2)$ -graphe de degré d et d'ordre 2^{d-1} . Alors $\text{diam}(G) \geq \lfloor d/2 \rfloor$.

Preuve:

Soit G un $(0,2)$ -graphe de degré d et d'ordre 2^{d-1} , et supposons que $D = \text{diam}(G) < \lfloor d/2 \rfloor$. Fixons un sommet, disons 0 , de G et considérons une décomposition en couches de G à partir de ce sommet (Fig.21.).

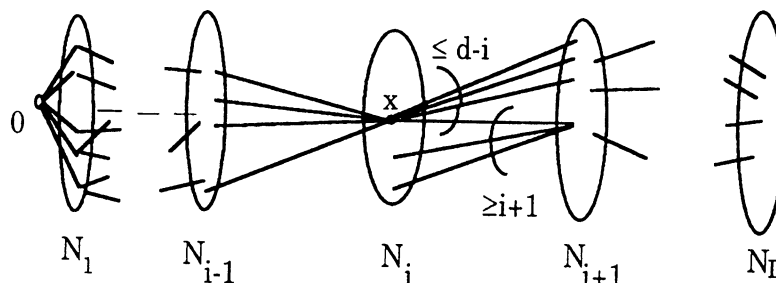


Fig. 21.

Soit $\partial(x, A) = |\{xy \in E(G), y \in A\}|$. Alors comme G est un $(0, 2)$ -graphe, on a: $\forall x \in N_i, \partial(x, N_{i+1}) \leq d-i$ et $\forall y \in N_{i+1}, \partial(y, N_i) \geq i+1$ le nombre d'arêtes, $\partial(N_i, N_{i+1})$, entre N_i et N_{i+1} vérifie donc:

$$(i+1) |N_{i+1}| \leq \partial(N_i, N_{i+1}) \leq (d-i) |N_i|$$

ce qui donne:

$$|N_i| \leq \binom{d}{i}, \quad \forall i \leq d$$

Comme on a supposé que $D = \text{diam}(G) < \lfloor d/2 \rfloor$, on a alors:

$$2^{2k-1} = |V(G)| = \sum_{i=0}^D |N_i| < \sum_{i=0}^k \binom{2k}{i} \leq 2^{2k-1} \quad \text{pour } d = 2k$$

(*) et

$$2^{2k} = |V(G)| = \sum_{i=0}^D |N_i| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k+1}{i} < 2^{2k} \text{ pour } d = 2k+1$$

qui est une contradiction et donc $D = \text{diam}(G) \geq [d/2]$.

□

Parmi la classe des $(0, 2)$ -graphes vérifiant les hypothèses du théorème III.3.2., nous nous proposons maintenant de déterminer ceux de diamètre minimum, à savoir ceux dont le diamètre vaut $[d/2]$. Pour cela raisonnons suivant la parité de d . En effet, lorsque d est impair, ces graphes minimaux sont précisément les graphes de Laborde-Mulder:

Théorème III.3.3.

Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré $(2k+1)$ et d'ordre 2^{2k} . Alors:

- (i) $\text{diam}(G) \geq k$,
- (ii) $\text{diam}(G) = k$ si et seulement si G est $\text{LM}(Q_{2k})$.

Preuve:

L'assertion (i) est vraie en vertu du théorème III.3.2. Comme la condition suffisante de (ii) est triviale, montrons la condition nécessaire. Soit alors G un $(0, 2)$ -graphe de degré $(2k+1)$ et d'ordre 2^{2k} et supposons que $D = \text{diam}(G) = k$. Considérons une décomposition en couches de G à partir d'un sommet fixé noté \emptyset . A partir de la relation (*) de la preuve du théorème III.3.2., on peut déduire que toutes les couches N_i ($0 \leq i \leq k$) de G sont de cardinalité maximale, ce qui signifie que chaque sommet x d'une couche N_i ($0 < i < k$) est tel que:

$$\begin{aligned} |N(x) \cap N_i| &= 0, \text{ pour } 0 < i < k \\ |N(x) \cap N_{i-1}| &= i, \text{ pour } 0 < i \leq k \\ |N(x) \cap N_{i+1}| &= 2k + 1 - i, \text{ pour } 0 \leq i < k \end{aligned}$$

et donc la seule couche qui ne soit pas un stable est bien la couche N_k , car chacun de ses sommets a k voisins dans N_{k-1} , et donc doit avoir $(k+1)$ autres voisins qui sont nécessairement dans N_k .

Reconstruisons maintenant de proche en proche le graphe G à partir du sommet \emptyset . Comme G est de degré $(2k+1)$, alors $\partial(\emptyset, N_1) = 2k+1$, il existe donc une bijection entre les sommets de N_1 et les parties à 1 élément de l'ensemble $S = \{1, 2, \dots, 2k+1\}$. \emptyset représentera alors l'ensemble vide. Les arêtes $\emptyset x$, où $x \in N_1$, sont telles que $|\emptyset \cap x| = 1$.

Comme N_1 est stable alors chacun de ses sommets a exactement $2k$ voisins dans N_2 : $\forall x \in N_1, \partial(x, N_2) = 2k$. Comme G est un $(0, 2)$ -graphe, on a aussi : $\forall y \in N_2, \partial(y, N_1) = 2$, et donc, il existe une bijection entre les sommets de N_2 et les parties à 2 éléments de l'ensemble S , telle que: si $x \in N_1, y \in N_2$ et $xy \in E(G)$ alors $y = x \cup \{j\}$ avec $j \in S \setminus \{x\}$. Notons que $|x \Delta y| = 1$ pour tout couple $(x, y) \in N_1 \times N_2$ tel que $xy \in E(G)$. Supposons maintenant que l'on a étiqueté tous les sommets de G jusqu'à une couche N_i ($i < k$) et essayons d'étiqueter ceux de la couche N_{i+1} . Les sommets de N_i sont les parties à i éléments dans S . Comme N_i et N_{i+1} sont de cardinalité maximum, on doit avoir (voir Fig.22.) pour tout $A \in N_i$, $\partial(A, N_{i-1}) = i$ et $\partial(A, N_{i+1}) = 2k+1-i$

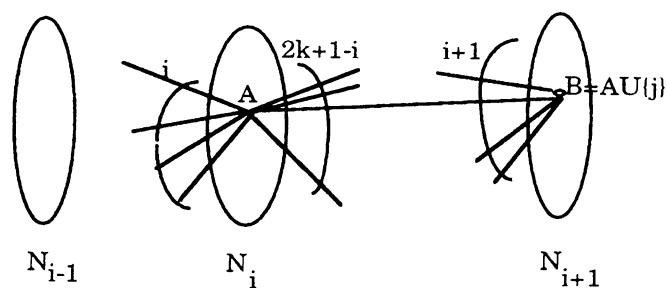


Fig.22.

Associons alors à tout voisin B de A dans N_{i+1} l'ensemble $A \cup \{j\}$ où $j \in S \setminus A$ on a bien si $AB \in E(G)$, $|A \Delta B| = 1$, et $\partial(A, N_{i+1}) =$ nombre de choix possibles de $j \in S \setminus A = |S| - |A| = 2k+1-i$. D'autre part, tout sommet B de N_{i+1} est tel qu'il existe $A \in N_i$, tel que $B = A \cup \{j\}$, $j \in S \setminus A$, et, $|B| = i+1$ et

$\partial(B, N_i) = |\{A \in N_i, |A \Delta B| = 1\}| = i+1$. Et donc on a bien une bijection entre les sommets de N_{i+1} et l'ensemble des parties à $(i+1)$ éléments de S . Notons aussi que pour tout $i < k$, et $A, A' \in N_i$, $AA' \notin E(G)$ et $|A \Delta A'| > 1$. Finalement, $V = \{A \subset \{1, 2, \dots, 2k+1\}, |A| \leq k\}$ est bien l'ensemble des sommets de G . Or les sommets de N_k sont de degré $2k + 1$ et ont k voisins dans N_{k-1} . Donc chaque sommet de N_k a exactement $k + 1$ voisins dans N_k . Le sous graphe induit par cette couche est d'ordre:

$$\binom{2k+1}{k}$$

et est régulier de degré $k + 1$. Si AB est une arête de N_k , $A \cap B = \emptyset$, car sinon, soit $j \in A \cap B$, considérons une décomposition en couches de G à partir du sommet d'étiquette $\{j\}$, les sommets A et B sont dans une même couche, soit N_p ($p \leq k-1$) car leur distance à $\{j\}$ est la même, et l'arête AB est une arête de G (complètement contenue dans N_p), donc N_{p+1} ne serait pas de cardinalité maximum. Contradiction. Finalement, le sous graphe induit N_k vérifie les propriétés d'ordre et de degré ci-dessus et est tel que deux sommets y sont adjacents si et seulement si l'intersection de leurs parties représentatives est vide. Donc N_k est bien le graphe impair O_{k+1} et donc G est $LM(Q_{2k})$ en vertu du fait que $\emptyset \cup N_1 \cup \dots \cup N_k$ sont bien les k premières couches de Q_{2k} . \square

Considérons maintenant le cas où $d = 2k$ ($k \geq 2$), et étudions les $(0, 2)$ -graphes de degré $2k$, d'ordre 2^{2k-1} et de diamètre minimum $D = k$.

Lorsque $k = 2$ on obtient deux graphes réguliers de degré 4, d'ordre 8 et de diamètre 2, à savoir le graphe $1/2Q_4$ qui est le graphe $K_{4,4}$ qui n'est pas un $(0, 2)$ -graphe et le graphe de Hamming $K_4 \square K_2$ qui est un $(0, 2)$ -graphe.

Pour $k = D = 3$, on obtient deux $(0, 2)$ -graphes de degré 6 et d'ordre 32, l'un est le graphe noté K (Fig.23.a) et l'autre est le demi-cube $1/2Q_6$ (Fig.23.b).

En fait, ces deux $(0, 2)$ -graphes de diamètre 3 correspondent aux graphes

d'incidence de deux biplans parmi les trois biplans de paramètres
(32, 6, 2) (cf. § III.1).

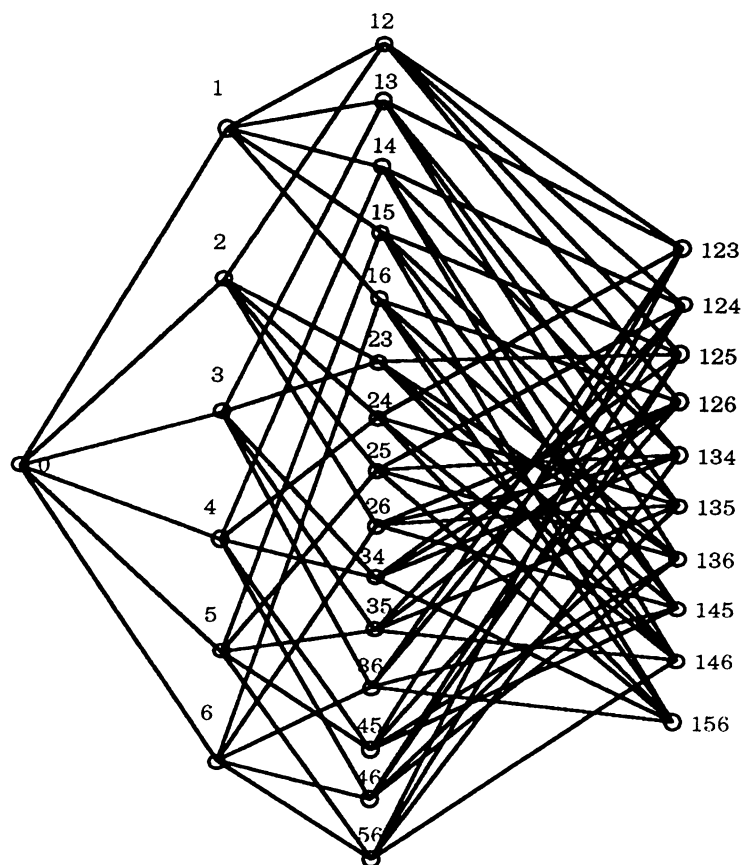


Fig.23.a. Le graphe K ($|V|=32$, $d=6$, $D=3$)

On aurait pu espérer caractériser le graphe du demi-cube comme $(0, 2)$ -graphe de degré $2k$, d'ordre 2^{2k-1} et de diamètre minimum -comme pour les graphes de Laborde-Mulder dans le cas de degré impair $2k+1$ et d'ordre 2^{2k} - mais ce n'est malheureusement pas le cas, en effet, le graphe K en est un contre-exemple.

Les graphes de Laborde-Mulder et du demi-cube possèdent plusieurs propriétés. Nous en énonçons certaines dans ce qui suit:

Propriété III.3.1.

Les graphes de Laborde-Mulder vérifient les assertions suivantes:

- (i) ils ne sont pas bipartis, (ii) leur nombre chromatique est 4 ,
- (iii) ils sont distance transitifs, (iv) ils sont sphériques,
- (v) ils sont intervalle monotones et intervalle réguliers.

Propriété III.3.2.

Les graphes du demi-cube vérifient les assertions suivantes:

- (i) ils sont bipartis, (ii) ils sont distance transitifs,
- (iii) ils sont hyper-sphériques,
- (iv) ils ne sont ni intervalle monotones, ni intervalle réguliers,
- (v) pour toute paire de sommets diamétraux u et v , $I(u, v)$ induit un hypercube de dimension $d(u, v)$.

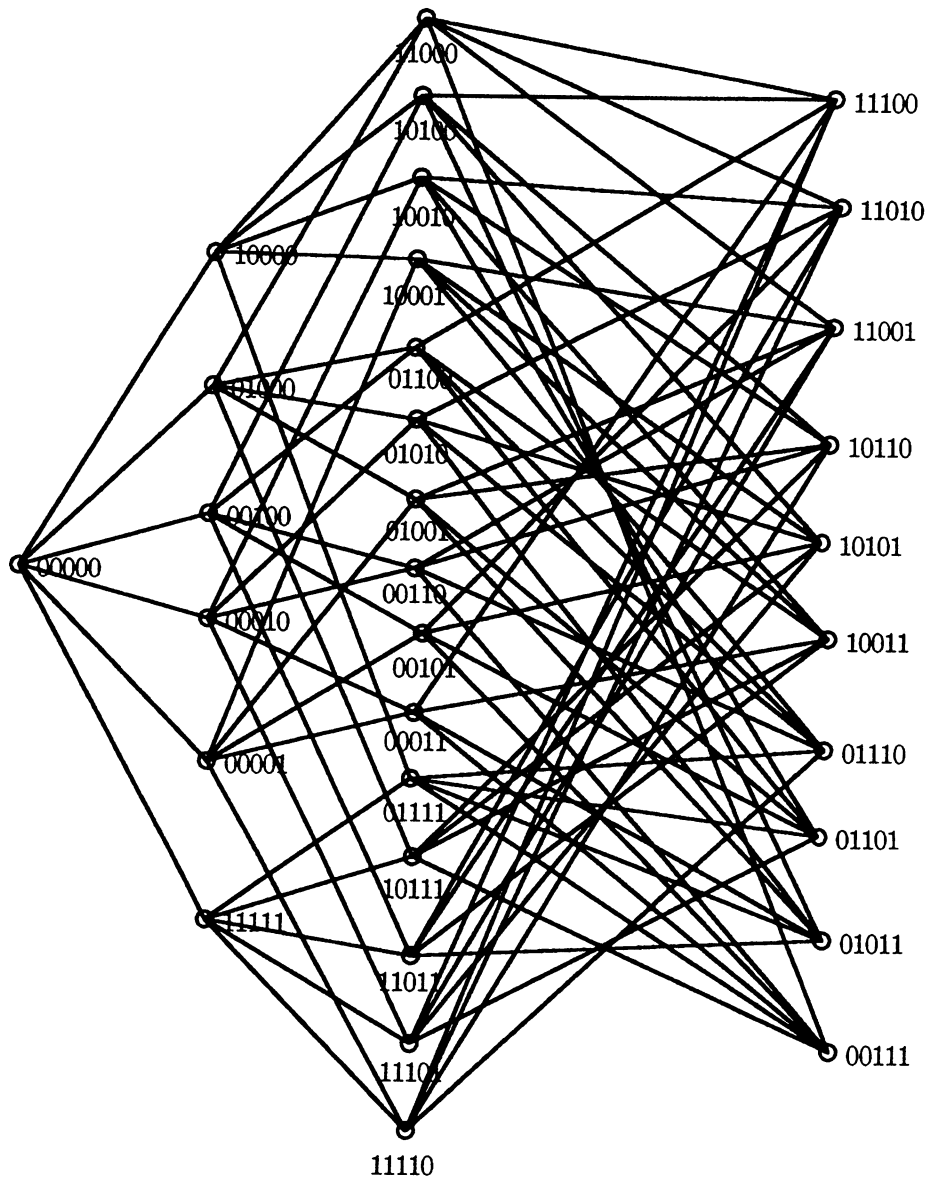


Fig. 23.b. $1/2Q_6$

Chapitre IV

LES HYPERCUBES GENERALISES

“...Et le voile de l'ignorance se brisa par sa soif du savoir...”

LES HYPERCUBES GENERALISES

Ce chapitre est consacré à l'étude des graphes de distance de l'hypercube, ou hypercubes généralisés. Cette notion a été introduite dans [DvoHavLieLab] au sujet du plongement de graphes et dans le cas particulier où le graphe hôte est l'hypercube. Il s'agit des graphes notés $Q_d(S)$ ($S \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$) obtenus en reliant dans l'hypercube de dimension d les paires de sommets dont la distance appartient à S . On s'intéressera principalement à ceux d'entre eux qui sont des $(0, 2)$ -graphes.

IV.I. Hypercubes généralisés

La résolution de certains problèmes pratiques en système de communication nécessite souvent la comparaison d'une structure donnée à une structure de référence. Une telle démarche fait appel à la notion de plongement de graphes. En effet, on peut représenter la structure de référence et la structure à comparer par des graphes, appelés respectivement graphe "hôte" et graphe "invité". Le problème posé par le choix de structures de données et d'algorithmes pour des architectures de système de communication composées d'un nombre élevé de processeurs est souvent résolu par des techniques de plongement de graphes. La qualité d'un système de communication est alors mesurée par l'utilisation des processeurs et le temps de communication entre eux. Aussi, lors de l'étude de l'efficacité d'un système de communication, les besoins en calculs sont modélisés par un graphe "invité" qui traduit les

interactions entre les différentes données nécessaires au calcul, et , la topologie de l'architecture est représentée par un graphe "hôte" dont chaque sommet représente un processeur et chaque arête une connexion entre deux processeurs assurant une voie de communication. L'exécution se déroule alors lorsque le graphe "invité" est plongé dans le graphe "hôte". La structure du graphe "hôte" utilisée est souvent celle du graphe de l'hypercube ayant une dimension assez grande permettant ainsi une interconnexion de milliers de sommets pour un diamètre relativement borné et une communication avec une bande passante très grande. Cependant, vu le degré élevé d'un sommet dans un hypercube de grande dimension, il est difficile d'utiliser la largeur de bande de manière efficace (i.e. utiliser simultanément toutes les liaisons (les arêtes) qui lui sont incidentes). Aussi, est-il naturel d'utiliser d'autres structures régulières pouvant être plongées dans l'hypercube en préservant dans une certaine mesure les distances entre les différents processeurs les composants. Des exemples de telles structures sont les arbres binaires, les hexagones, les pyramides... . C'est ces structures là que l'on représente par un graphe "invité". Par ailleurs, la qualité d'un plongement est mesurée à l'aide de plusieurs métriques telles que: l'expansion, qui est le rapport entre l'ordre du graphe hôte et celui du graphe "invité"; la dilatation, qui est la distance maximum séparant les images, dans le graphe "hôte", des extrémités d'une liaison (arêtes) du graphe "invité" . Alors que l'expansion mesure l'utilisation des processeurs, la dilatation mesure les délais de communication.

Définition IV.I.1.

Un plongement f d'un graphe "invité" G dans un graphe "hôte" H est une bijection de $V(G)$ dans $V(H)$. Son expansion est mesurée par le rapport $|V(G)|/|V(H)|$. La dilatation de f est définie par:

$$\text{dil}(f) = \max_{uv \in E(G)} d_H(f(u), f(v)).$$

Ainsi, un plongement f de dilatation $\text{dil}(f) = 1$ n'est autre que le plongement isométrique des graphes, i.e., les images de deux sommets adjacents dans G sont deux sommets adjacents dans H , on dira que f préserve l'adjacence. Si c'est le cas, on écrira alors $G \subseteq H$.

Si le plongement est effectué avec une dilatation au plus n ($n \geq 0$), on écrira $G \overset{n}{\subseteq} H$. On a alors $G \overset{n}{\subseteq} H$ si et seulement si $G \subseteq H^n[\text{DvoHavLieLab}]$, où H^n est le graphe puissance n de H d'ensemble de sommets $V(H)$ et $uv \in E(H^n)$ ($u \neq v$) si et seulement si $d_H(u, v) \leq n$.

L'expansion et la dilatation sont deux caractéristiques quantitatives des plongements de graphes.

Définition IV.1.2.

Soit d un entier positif, et soit $S \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$. On appelle hypercube généralisé le graphe noté $Q_d(S)$ d'ensemble de sommets $V(Q_d)$ et d'ensemble d'arêtes $E(Q_d(S)) = \{uv \in E(Q_d) / d_{Q_d}(u, v) \in S\}$.

Ces graphes sont réguliers de degré $\sum_{i \in S} \binom{d}{i}$.

exemples:

1°/ Lorsque $S = \{1\}$ on obtient l'hypercube Q_d ,

2°/ Lorsque $S = \{1, d\}$ on obtient, selon que d soit pair ou impair, le graphe de Laborde-Mulder $LM(Q_d)$ ou bien le graphe du demi-cube $1/2Q_{d+1}$,

3°/

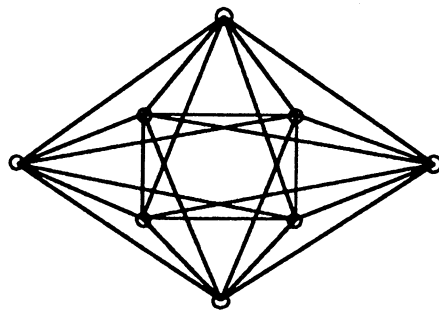


Fig.24. $Q_3^{\{1,2\}}$ qui n'est autre que l'octaèdre

$Q_d(S)$ est toujours un graphe connexe sauf lorsque $S = \{d\}$ ou bien S ne contient pas de nombre impair. Il est clair que lorsque $S = \{1, 2, \dots, d\}$ $Q_d(S)$ est le graphe complet K_{2^d} .

Suivant les valeurs que peut prendre S , donnons quelques résultats sur la structure du graphe de l'hypercube généralisé.

Lemme IV.I.1.

Lorsque $S = \{1, 2, \dots, d-1\}$, $Q_d(S)$ est l'hyperoctaèdre Q_d^* .

Preuve:

En effet, soit Q_d l'hypercube de dimension d . On sait que si $Q_d(\{1, \dots, d\})$ est le graphe complet sur 2^d sommets et comme Q_d est antipodal (chaque sommet y possède un unique sommet antipodal) alors le graphe $Q_d(S)$ lorsque $S = \{1, \dots, d-1\}$ est le graphe complémentaire du couplage parfait $Q_d(\{d\})$ et donc c'est l'hyperoctaèdre Q_d^* . \square

Lemme IV.I.2. [Dvorak, Havel, Liebl & Laborde]

Supposons que $M \subseteq \{1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor\}$ et posant $S_1 = \{2p / p \in M\}$, $S_2 = \{2p / p \in M, 2p \leq d-1\} \cup \{2p-1 / p \in M\}$, supposons aussi que $S_1 \neq \{d\}$. Alors $Q_d(S_1)$ consiste en deux composantes dont chacune d'elles est isomorphe à $Q_{d-1}(S_2)$.

Lemme IV.I.3. [Dvorak, Havel, Liebl & Laborde]

Soit d un nombre impair, et supposons que M, S_1 et S_2 soient définies comme dans le lemme IV.2. Posons $S_3 = S_1 \cup \{d\}$. Alors $Q_d(S_3)$ est isomorphe à la somme cartésienne $K_2 \hat{\otimes} Q_{d-1}(S_2)$.

Lemme IV.I.4. [Dvorak, Havel, Liebl & Laborde]

Soient d un nombre pair, $S_1 \subseteq \{1, \dots, d\}$ et $S_2 = \{p / p \in S_1, p \text{ pair}\} \cup \{d-p / p \in S_1, p \text{ impair}\}$. Alors $Q_d(S_1)$ et $Q_d(S_2)$ sont isomorphes.

Proposition IV.I.1.

Soient $S_1 = \{1, 3, \dots, 2k-1\}$ et $S_2 = \{2, 4, \dots, 2k\}$. Alors:

- (i) $Q_{2k}(S_1)$ et $Q_{2k-1}(S_1)$ sont isomorphes au graphe biparti complet $K_{p,p}$ où $p = |V|/2$.
- (ii) $Q_{2k}(S_2)$ et $Q_{2k+1}(S_2)$ consistent chacun en deux composantes ayant le même ordre et dont chacune est isomorphe au graphe complet K_p où $p = |V|/2$.

Preuve:

(i) Comme S_1 est formé de nombres impairs alors $Q_d(S_1)$ est connexe.

Supposons que $d = 2k$, alors $Q_{2k}(S_1)$ est de degré 2^{2k-1} . De plus, $Q_{2k}(S_1)$ est biparti et si u est un sommet de Q_{2k} , u sera relié dans $Q_{2k}(S_1)$ à tous les sommets de parité inverse. La bipartition de l'ensemble des sommets de $Q_{2k}(S_1)$ est donc constituée des deux sous ensembles de sommets de même parité de Q_{2k} à savoir les sommets de parité paire d'une part et ceux de parité impaire d'autre part. Chacun de ces sous ensembles contient 2^{2k-1} sommets, donc $Q_{2k}(S_1)$ est bien le graphe biparti complet $K_{p,p}$ où $p = 2^{2k-1}$. Le même raisonnement lorsque $d = 2k-1$, nous conduit à un graphe biparti complet $K_{p,p}$ où $p = 2^{2k-2}$.

(ii) Comme S_2 ne contient pas de nombre impair alors $Q_d(S_2)$ n'est pas connexe. Il est de degré 2^{2k-1} lorsque $d = 2k$, chaque sommet est relié à tous les sommets de même parité. Auquel cas, l'ensemble des sommets de parité paire et l'ensemble des sommets de parité impaire induisent chacun dans $Q_{2k}(S_2)$ une clique d'ordre 2^{2k-1} , et donc $Q_{2k}(S_2)$ consiste bien en deux composantes dont chacune est isomorphe au graphe complet K_p où $p = 2^{2k-1}$. Lorsque $d = 2k+1$, le même raisonnement conduit au résultat énoncé. □

Rappelons maintenant que le poids $\omega(x)$ d'un sommet x de Q_d est égal au nombre de composantes non nulles du vecteur représentatif de x , c'est à

dire que $\omega(x)$ est la distance de Hamming, ou bien la distance dans Q_d de x au sommet de vecteur représentatif le vecteur nul $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

On sait que pour un sommet x de Q_d tel que $\omega(x) \geq 4$, le graphe $Q_d^{[0,x]}$, dont l'ensemble des sommets est celui de Q_d et tel que $yz \in E(Q_d^{[0,x]})$ si et seulement si $\omega(y+z) = 1$ ou $y + z = x$, est un $(0, 2)$ -graphe de degré $(d+1)$ [Mol3].

Proposition IV.1.2.

Soit x un sommet de l'hypercube Q_d tel que $\omega(x) \geq 4$. Alors:

$$Q_d^{[0,x]} = Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\}) \square (K_2)^{d-\omega(x)}$$

Preuve:

Le graphe $Q_d^{[0,x]}$ est construit sur les sommets de Q_d et deux sommets y sont adjacents si et seulement si la somme de leur vecteurs représentatifs est égale au vecteur représentatif de x ou bien leur somme a un poids 1.

Le graphe $Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\})$ est un $(0, 2)$ -graphe de degré $(\omega(x) + 1)$ et donc le graphe produit $G = Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\}) \square K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2$ ($(d-\omega(x))$ fois) est aussi un $(0, 2)$ -graphe, son degré est $(d-\omega(x)) + (\omega(x) + 1) = (d + 1)$.

Le graphe G est en fait l'hypercube de dimension $(d-\omega(x))$ où chaque sommet est remplacé par le graphe $Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\})$, les sommets homologues étant reliés. Les arêtes de G sont donc de deux types:

a: yz relie deux sommets contenus dans deux $Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\})$ différents, ou bien

b: yz relie deux sommets contenus dans une même copie de $Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\})$.

Supposons que yz soit du type a, alors yz est une arête "propre" du cube de dimension $(d-\omega(x))$ et donc $\omega(y+z) = 1$.

Supposons maintenant que yz soit du type b, alors yz est soit une arête de $Q_{\omega(x)}$ et auquel cas y et z ne diffèrent que d'une coordonnée dans $Q_{\omega(x)}$ et cela n'est pas altéré dans le graphe G et donc $\omega(y+z) = 1$; soit c'est une

diagonale de $Q_{\omega(x)}$, elle relie donc deux sommets antipodaux de $Q_{\omega(x)}$, et donc $\omega(y+z) = \omega(x)$ dans $Q_{\omega(x)}$ et donc dans G on a bien $y + z = x$, en effet, identifions les sommets dans chaque copie $Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\})$ du graphe G , ce qui donne l'hypercube $Q_{d-\omega(x)} = K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2$ ($(d-\omega(x))$ fois).

Associons alors à chaque sommet u de $Q_{d-\omega(x)}$ son vecteur représentatif binaire de longueur $(d-\omega(x))$, qu'on notera $u_{d-\omega(x)}$. Dans $Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\})$ chaque sommet v est étiqueté par son vecteur représentatif binaire de longueur $\omega(x)$, noté $v_{\omega(x)}$. Remplacer ensuite chaque sommet u de l'hypercube $Q_{d-\omega(x)}$ par un graphe $Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\})$ où chaque sommet noté $v(u)$ est étiqueté par le vecteur binaire $u_{d-\omega(x)}v_{\omega(x)}$ de longueur d dont les $(d-\omega(x))$ premières composantes sont formées par $u_{d-\omega(x)}$ et les $\omega(x)$ dernières composantes sont formées par $v_{\omega(x)}$. Les arêtes de G entre les copies $Q_{\omega(x)}(\{1, \omega(x)\})$ relient des sommets homologues $v(u)$ et $v(u')$ (Fig. 25.). Donc finalement, G est bien le graphe $Q_d^{[0, x]}$. \square

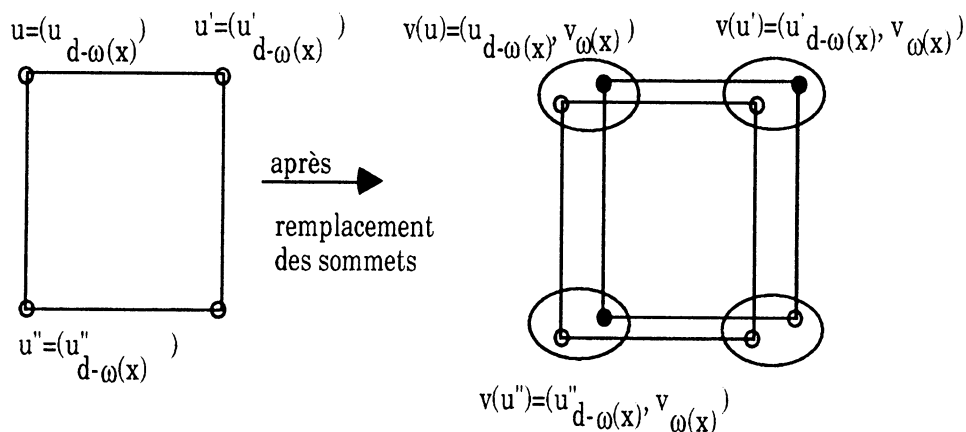


Fig.25.

Proposition IV.I.3.

- (i) $Q_{2k}(\{2k-1\})$ est isomorphe à Q_{2k} ,
- (ii) $Q_{2k+1}(\{2k\})$ consiste en deux composantes connexes dont chacune est isomorphe au graphe de Laborde-Mulder $LM(Q_{2k})$ engendré par les sommets de même parité dans Q_{2k+1} .

Preuve:

(i) Par application du lemme IV.I.4.

(ii) Le graphe $Q_{2k+1}(\{2k\})$ n'est pas connexe, chaque sommet y est relié aux voisins de son antipode dans Q_{2k+1} , et son degré est $(2k+1)$. Comme dans Q_{2k+1} deux sommets antipodaux sont de parités opposées, alors tout sommet dans $Q_{2k+1}(\{2k\})$ a pour voisins des sommets de même parité. Or en vertu du lemme IV.2. si on pose $M = \{k\}$, $S_1 = \{2k\}$ et $S_2 = \{2k-1, 2k\}$, on a que $Q_{2k+1}(\{2k\})$ consiste en deux composantes dont chacune est isomorphe à $Q_{2k}(\{2k-1, 2k\})$, mais en vertu du (i) $Q_{2k}(\{2k-1\})$ est isomorphe à Q_{2k} et si on y relie ensuite les sommets antipodaux on obtient bien $LM(Q_{2k})$. □

Proposition IV.I.4.

Le graphe $Q_d(\{1, d\})$ est plongeable dans $Q_d(\{1, 2\})$.

Preuve:

Considérons l'hypercube Q_d sous sa représentation vectorielle, i.e. chaque sommet est un vecteur binaire de longueur d et deux sommets y sont adjacents si et seulement si ils diffèrent en exactement une composante. Une (arête de) direction i ($1 \leq i \leq d$) est définie comme l'arête de Q_d reliant deux sommets qui diffèrent par l'unique composante "i". Ainsi l'ensemble $\{1, 2, \dots, d\}$ des directions de Q_d est complètement déterminé et est fixe. Par ailleurs, rappelons que pour construire $Q_d(\{1, d\})$, on relie dans Q_d les sommets antipodaux, et pour construire $Q_d(\{1, 2\})$ on relie les sommets à distance 2 dans Q_d .

Soit alors u un sommet donné de $Q_d(\{1, d\})$. Ses voisins sont ceux qui lui sont à distance 1 et d dans Q_d , c'est-à-dire les sommets qui lui sont adjacents suivant les directions $1, 2, \dots, d$ ainsi que celui qui lui est relié par la chaîne de directions $123\dots(d-1)d$, son antipodal dans Q_d .

Définissons alors l'application f de $V(Q_d(\{1, d\}))$ dans $V(Q_d(\{1, 2\}))$ définie par:

$$\begin{aligned}
 & - f(0) = 0 \text{ et,} \\
 & - \forall uv \in E(Q_d(\{1, d\})), f(v) = \begin{cases} f(u) + e_{p(p+1)} & \text{si } uv = p \neq d \\ f(u) + e_p & \text{si } uv = p = d \\ f(u) + e_1 & \text{si } v = \bar{u} \end{cases}
 \end{aligned}$$

où $e_{p(p+1)}$ est le vecteur binaire dont seules les p ème et $(p+1)$ ème composantes valent 1; et, e_j est celui dont seule la j ème n'est pas nulle.

Il est clair que l'application f définit bien un plongement de $Q_d(\{1, d\})$ dans $Q_d(\{1, 2\})$. Ce plongement n'est pas isométrique car $Q_d(\{1, d\})$ n'est pas un sous graphe induit de $Q_d(\{1, 2\})$. En effet, si $u \in V(Q_d(\{1, d\}))$ et v et v' sont deux voisins de u à distance 2 l'un de l'autre dans $Q_d(\{1, d\})$ tels que $v \neq v' \neq \bar{u}$ alors v et v' sont aussi à distance 2 dans Q_d (fig.26). $f(v)$ et $f(v')$ doivent alors être à distance 2 dans $Q_d(\{1, 2\})$.

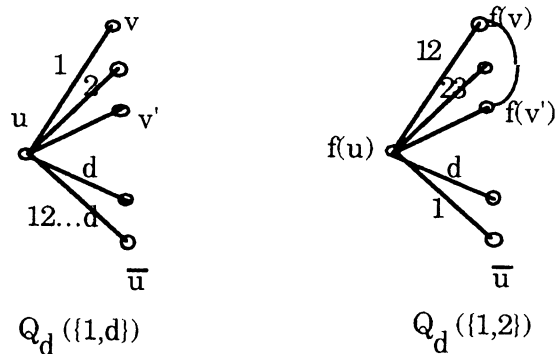


fig.26.

Mais, comme $d(Q_d(\{1, d\})) = (d+1)$ et $d(Q_d(\{1, 2\})) = d + \binom{d}{2} = d + d(d-1)/2$, et au voisinage de u dans $Q_d(\{1, d\})$, il y a exactement d sommets dont la distance mutuelle est 2, à savoir tous les sommets voisins de u suivant les directions $1, 2, \dots, d$, alors le plongement isométrique de $Q_d(\{1, d\})$ dans $Q_d(\{1, 2\})$ est impossible car $f(u)$ a au plus $(1 + [d/2])$ voisins à distance 2 l'un de l'autre dans son voisinage. \square

IV.2. (0, 2)-graphes et hypercubes généralisés.

Parmi les hypercubes généralisés $Q_d(S)$, certains sont des (0, 2)-graphes.

C'est le cas lorsque S est l'un des ensembles $\{1\}$, $\{d\}$, $\{1, d\}$, $\{d-1, d\}$, $\{d-1\}$.

En effet:

- lorsque $S = \{1\}$, $Q_d(S)$ est isomorphe à Q_d ,

- lorsque $S = \{d\}$, $Q_d(S)$ est l'ensemble d'arêtes d'un couplage parfait de Q_d qui vérifie la définition de (0, 2)-graphe si on omet la connexité du graphe,

- lorsque $S = \{1, d\}$, $Q_d(S)$ est, selon que d soit pair ou impair, le graphe de Laborde-Mulder ou le demi-cube,

- lorsque $S = \{d-1\}$, $Q_d(S)$ est un (0, 2)-graphe en vertu de la proposition IV.I.3.,

- enfin, lorsque $S = \{d-1, d\}$, $Q_d(S)$ est aussi un (0, 2)-graphe, en effet, si $d = 2k$, $Q_{2k}(\{2k-1\})$ est isomorphe à Q_{2k} et donc $Q_{2k}(\{2k-1, 2k\})$ est isomorphe au graphe de Laborde-Mulder qui est un (0, 2)-graphe, si $d = 2k+1$, $Q_{2k+1}(\{2k\})$ consiste en deux copies dont chacune est $LM(Q_{2k})$ et donc $Q_{2k+1}(\{2k, 2k+1\})$ est isomorphe à $LM(Q_{2k}) \square K_2$ car les sommets antipodaux dans Q_{2k+1} sont de parités différentes, et les deux copies de $LM(Q_{2k})$ dans $Q_{2k+1}(\{2k\})$ sont engendrées par les deux ensembles de sommets de même parité dans Q_{2k+1} .

Lemme IV.2.1.

Soit $d \geq 3$. $Q_d(S)$ n'est pas un (0, 2)-graphe lorsque $S = \{1, d-1\}$.

Preuve:

Soit $d \geq 3$. Deux sommets antipodaux u et v de Q_d , ont dans $Q_d(\{1, d-1\})$ comme voisins communs les sommets de la 1ère et $(d-1)$ ième couche de Q_d , donc $Q_d(\{1, d-1\})$ n'est pas un (0, 2)-graphe pour $d \geq 3$. \square

Théorème IV.2.1.

Soit $d \geq 4$. Alors:

$Q_d(S)$ est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si $S \cap \{2, 3, \dots, d-2\} = \emptyset$ et $S \not\supseteq \{1, d-1\}$.

Preuve:

Montrons la condition nécessaire. Supposons alors que $Q_d(S)$ un $(0, 2)$ -graphe et supposons que $S \cap \{2, 3, \dots, d-2\} \neq \emptyset$ (en vertu du lemme IV.2.1. $S \not\supseteq \{1, d-1\}$). Soit $p \in S$, notons que $Q_d(\{p\})$ est un graphe partiel de $Q_d(S)$ et donc si $Q_d(\{p\})$ n'est pas un $(0, 2)$ -graphe alors nécessairement $Q_d(S)$ ne l'est pas. Supposons que S contient 2, comme $d \geq 4$, on sait que $Q_d(\{2\})$ n'est pas un $(0, 2)$ -graphe, donc contradiction. Soit maintenant $p \in S$ ($p \neq 2$) et considérons le graphe partiel $Q_d(\{p\})$ de $Q_d(S)$. Soient u et v deux sommets appartenant à $N_p(0)$ dans Q_d . Alors u et v ont le sommet 0 comme voisin commun dans $Q_d(\{p\})$. Supposons alors, sans perte de généralités, que $u = 123\dots(p-1)p$ et $v = 123\dots(p-1)(p+1)$, i.e. u et v ont tous deux p composantes non nulles, à savoir: leurs $(p-1)$ premières composantes, ainsi que la composante p pour u et la composante $(p+1)$ pour v . Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, (p-1)\}$, considérons le sommet correspondant i , à savoir le sommet dont le vecteur représentatif est le vecteur de base $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (seule la i ème composante vaut 1). Tout voisin de i dans Q_d de la forme $z = ij$ tel que $j \notin \{1, 2, \dots, (p-1), p\}$ vérifie $d_{Q_d}(u, z) = p$, de même, tout voisin de i dans Q_d de la forme $z' = iq$ tel que $q \notin \{1, 2, \dots, (p-1), p+1\}$ vérifie $d_{Q_d}(v, z') = p$; en particulier, les $2(p-1)$ sommets ir tels que $i \in \{1, 2, \dots, (p-1)\}$ et $r \in \{d-1, d\}$ sont à distance p de u et de v dans Q_d , et donc sont des voisins communs à ces deux sommets dans $Q_d(\{p\})$. Comme $p \geq 2$, le nombre de ces sommets est au moins 2, si l'on rajoute le sommet

0 on aura ainsi dénombrer au moins 3 voisins communs à u et v dans $Q_d(\{p\})$, ce qui contredit l'hypothèse que $Q_d(S)$ est un $(0, 2)$ -graphe. Montrons la condition suffisante. Comme $S \cap \{2, 3, \dots, d-2\} = \emptyset$ et $S \not\ni \{1, d-1\}$, alors S est l'un des ensembles suivants: $\{1\}$, $\{d\}$, $\{d-1\}$, $\{1, d\}$ ou $\{d-1, d\}$ et $Q_d(S)$ est bien un $(0, 2)$ -graphe (cf. § IV.2.). \square

Remarque:

La condition $d \geq 4$ est nécessaire dans le théorème précédent, car $Q_3(S)$ est un $(0, 2)$ -graphe sauf pour $S = \{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$ ou $\{1, 3\}$.

IV.3. Une classe de $(0, 2)$ -graphes non sommet-transitifs

Quoi de plus naturel que d'effectuer certaines opérations sur les sommets et/ou arêtes d'un hypercube donné pour dessiner un exemple de $(0, 2)$ -graphe?. Ceci pourrait expliquer le fait que presque tous les exemples de $(0, 2)$ -graphes connus dans la littérature soient sommet-transitifs (i.e. tous les sommets "jouent" le même rôle). Nous donnons dans ce qui suit une construction, à partir de l'hypercube, d'une classe de $(0, 2)$ -graphes non sommet-transitifs.

Définition IV.3.1.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. G est dit sommet-transitif si et seulement si pour toute paire de sommets u et v de G , il existe un automorphisme f de G tel que $f(u) = v$.

Par exemple, l'hypercube est sommet-transitif car tous ses sommets ont la même excentricité. La comparaison des décompositions en couches à partir de deux sommets d'un graphe G est un autre moyen de vérifier la transitivité de ce graphe. En effet, si pour tout sommet u la décomposition

en couches de G donne toujours un même graphe, alors G est sommet-transitif.

Considérons l'hypercube de dimension d . On sait que $Q_d = Q_{d-2} \square K_2 \square K_2$. Notons alors Q_{d-2}^{00} , Q_{d-2}^{10} , Q_{d-2}^{01} et Q_{d-2}^{11} les 4 copies de Q_{d-2}

engendrées par les sommets de la forme $x00$, $y10$, $z01$ et $t11$ (les sommets de Q_d dont les deux dernières composantes valent 00 , 10 , 01 et 11) respectivement. Relions dans Q_{d-2}^{ii} pour $i = 0, 1$, les sommets antipodaux.

Par ailleurs, comme dans Q_d , le sommet antipodal de tout sommet de Q_{d-2}^{10} appartient à Q_{d-2}^{01} , relions alors tout sommet de Q_{d-2}^{10} à son antipodal dans Q_d . Soit $G(Q_d)$ le graphe obtenu. Notons que le rayon (la plus petite excentricité) de $G(Q_d)$ est $r = \lceil d/2 \rceil$ et que son diamètre est $D = r + 1$, de plus, tout sommet u de Q_{d-2}^{ii} pour $i = 0$ et 1 a une excentricité $\text{exc}(u) = D$ (ceux sont les sommets périphériques de $G(Q_d)$) et tout sommet v de Q_{d-2}^{ij} ($i \neq j$) a une excentricité $\text{exc}(v) = r$. Un exemple en est $G(Q_4)$ (voir fig. 27.).

Proposition IV.3.1.

$G(Q_d)$ est un $(0, 2)$ -graphe non sommet-transitif pour $d \neq 5$.

Preuve:

Comme $Q_3(\{1, 3\})$ est $K_{4,4}$ qui n'est pas un $(0, 2)$ -graphe, alors $G(Q_5)$ n'est pas un $(0, 2)$ -graphe. Supposons que $d \neq 5$, et montrons que $G(Q_d)$ est un $(0, 2)$ -graphe. En effet, soient u et v deux sommets de $G(Q_d)$. Si u et v appartiennent à une même copie Q_{d-2}^{ij} (i et $j \in \{0, 1\}$) alors $|N(u) \cap N(v)| = 2$ car le sous-graphe Q_{d-2}^{ij} est un $(0, 2)$ -graphe. Supposons maintenant que u et v soient dans deux copies différentes Q_{d-2}^{ij} et Q_{d-2}^{rs} ($\{i, j\} \neq \{r, s\}$), et soit $w \in N(u) \cap N(v)$. Les arêtes uw et wv appartiennent à deux types d'arêtes, soit qu'elles sont dans Q_d , soit qu'elles sont des arêtes rajoutées. Considérons alors les différents cas possibles:

1er cas:

si uw et wv soient des arêtes de Q_d , alors clairement $|N(u) \cap N(v)| = 2$.

2ème cas:

si uw est une arête reliant deux sommets antipodaux dans Q_{d-2}^{ii} ($i = 0, 1$) alors nécessairement wv est une arête de Q_d (une arête non rajoutée).

Posons, sans perte de généralités, $u = x00$, $w = y00$ et $v = z10$.

Le sommet antipodal de v dans Q_d est $\bar{v} = \bar{z}01$ qui est un sommet de Q_{d-2}^{01} . Comme uw est une diagonale dans Q_{d-2}^{00} et wv est une arête de Q_d ,

alors $y = z = \bar{x}$ et on a $w = \bar{x}00$, $v = \bar{x}10$ et $\bar{v} = x01$, donc $N(u) \cap N(v)$

contient w et \bar{v} et ceux sont les seuls voisins communs à u et v car tous les voisins de u autres que w et \bar{v} sont dans Q_{d-2}^{00} sauf $x10$ qui est à distance

$(d-2)$ de v . Le cas où $u = x11$, se traite de la même façon. Donc finalement, on a bien $|N(u) \cap N(v)| = 2$.

3ème cas:

si uw est une arête de $G(Q_d)$ reliant deux sommets antipodaux de Q_d , alors u et w sont respectivement dans Q_{d-2}^{10} et Q_{d-2}^{01} et si $u = x10$ alors

$w = \bar{x}01$. Si v est un sommet de Q_{d-2}^{ii} ($i = 0, 1$) on est dans le cas

équivalent au 2ème cas. Si v est un sommet de Q_{d-2}^{10} ou Q_{d-2}^{01} , alors

nécessairement wv est une arête de Q_d et auquel cas $v = y01$ avec

$\omega(y+\bar{x}) = 1$. Mais le sommet $\bar{v} = \bar{y}10$ est un voisin de v dans $G(Q_d)$, de

plus, il vérifie $\omega(\bar{y}+x) = 1$, et donc est aussi voisin de u . Il est clair que les

seuls voisins communs à u et v sont bien w et \bar{v} . On a donc bien

$$|N(u) \cap N(v)| = 2.$$

En vertu des cas 1, 2 et 3, $G(Q_d)$ est donc bien un $(0, 2)$ -graphe. Montrons

qu'il n'est pas sommet-transitif. Pour cela il suffit de comparer les

excentricités des sommets $u = x00$ et $v = x10$ où x désigne les $(d-2)$

premières composantes communes à u et v . Il est facile de voir que:

$$\text{exc}(u) = \max_{w \in V(G(Q_d))} d(u, w) = 1 + \lceil d/2 \rceil$$

et,

$$\text{exc}(v) = \max_{w \in V(G(Q_d))} d(v, w) = \lceil d/2 \rceil$$

(où $\lceil a \rceil$ désigne la partie entière supérieure de a).

Les sommets de Q_{d-2}^{ii} pour $i = 0$ et 1 constituent l'ensemble des sommets périphériques de $G(Q_d)$, i.e. ceux d'excentricité maximum; tandis que ceux de Q_{d-2}^{ij} pour $i \neq j \in \{0, 1\}$ constituent le centre de $G(Q_d)$, i.e.

l'ensemble des sommets d'excentricité minimum. Comme $\text{exc}(u) \neq \text{exc}(v)$ alors $G(Q_d)$ n'est pas sommet-transitif. \square

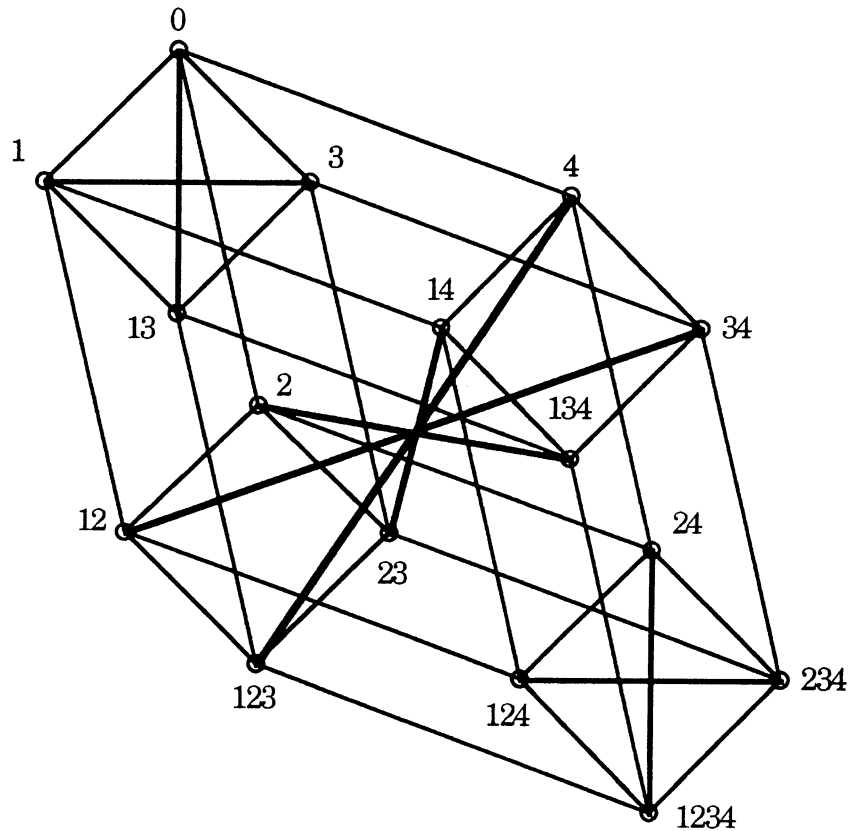


Fig.27. $G(Q_4)$: les arêtes rajoutées sont en gras

$G(Q_4)$ n'est pas sommet-transitif car les sommets 0, 1, 3, 13, 24, 124, 234 et 1234 forment l'ensemble des sommets périphériques du graphe, et, les sommets 2, 12, 23, 123, 4, 14, 34 et 134 forment le centre du graphe, on a par exemple: $\text{exc}(0) = 3$, et $\text{exc}(4) = 2$. Rappelons que le centre d'un graphe est l'ensemble de ses sommets dont l'excentricité est égale au rayon, alors que l'ensemble des sommets périphériques (ou périphérie) du graphe est l'ensemble des sommets dont l'excentricité est égale au diamètre.

Le graphe $G(Q_d)$ admet comme sous graphes induits Q_{d-2}^{ij} pour $i = 0$ et 1 qui ne sont en fait que le graphe du demi-cube si d est impair et le graphe de Laborde-Mulder si d est pair. On sait par ailleurs (propriétés III.3.1 & 2) que le graphe du demi-cube n'est ni intervalle régulier, ni intervalle monotone; alors que celui de Laborde-Mulder est intervalle régulier et intervalle monotone. Ceci étant, nous allons montrer que lorsque d est impair, $G(Q_d)$ n'est ni intervalle régulier, ni intervalle monotone. Par contre, lorsque d est pair, bien que toutes les composantes Q_{d-2}^{ij} pour $i, j \in \{0, 1\}$ soient des graphes intervalles réguliers et intervalles monotones, $G(Q_d)$ est intervalle régulier mais n'est pas intervalle monotone. C'est ce qui est donné par les deux propositions suivantes, répondant ainsi par la négative à la conjecture de Mulder sur la convexité [Mul1]:

Proposition IV.3.2.

Pour $k \geq 2$, $G(Q_{2k+1})$ vérifie les assertions suivantes:

- (i) il n'est pas intervalle régulier
- (ii) il n'est pas intervalle monotone.

La preuve de cette proposition nécessite que l'on prouve les deux lemmes suivants:

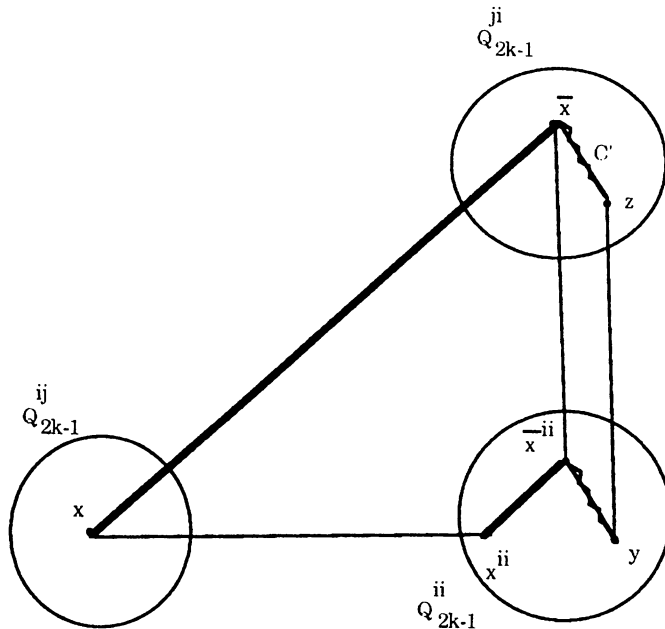
Lemme IV.3.1.

Soient x et y deux sommets de $G(Q_{2k+1})$ tels que x appartient à Q_{2k-1}^{ij} ($i \neq j \in \{0, 1\}$) et y appartient à Q_{2k-1}^{ii} ($i \in \{0, 1\}$). Alors entre x et y il existe toujours une géodésique n'utilisant aucune arête antipodale entre Q_{2k-1}^{ij} et Q_{2k-1}^{ji} dans $G(Q_{2k+1})$.

Preuve du lemme IV.3.1.

Supposons qu'il existe un sommet x de Q_{2k-1}^{ij} , et un sommet y de Q_{2k-1}^{ii} tels que toute géodésique les reliant utilise une arête antipodale entre

Q_{2k-1}^{ij} et Q_{2k-1}^{ji} dans $G(Q_{2k+1})$. On peut supposer sans perte de généralités que l'arête antipodale est $x\bar{x}$. Soit $C = [x, \bar{x}, C', z, y]$ la géodésique reliant x et y . Considérons alors x^{ii} le sommet homologue de x dans Q_{2k-1}^{ii} (i.e. le sommet qui lui est associé par l'arête du couplage entre Q_{2k-1}^{ii} et Q_{2k-1}^{ij}), et \bar{x}^{ii} celui de \bar{x} dans Q_{2k-1}^{ii} . Comme x et \bar{x} sont à distance $2k+1$ dans Q_{2k+1} car ils sont reliés par une arête antipodale dans $G(Q_{2k+1})$, alors leurs homologues x^{ii} et \bar{x}^{ii} dans Q_{2k-1}^{ii} sont à distance $(2k-1)$ dans Q_{2k+1} . Donc x^{ii} et \bar{x}^{ii} sont reliés dans $G(Q_{2k+1})$ par une arête antipodale de Q_{2k-1}^{ii} . Finalement, si z est l'homologue de y dans Q_{2k-1}^{ji} , alors les chaînes $[\bar{x}, C', z]$ et $[\bar{x}^{ii}, C'', y]$ sont de même longueur. Et donc, la chaîne $F = [x, x^{ii}, \bar{x}^{ii}, C'', y]$ est de même longueur que la chaîne initiale C . Contradiction, car F n'utilise pas d'arête antipodale entre Q_{2k-1}^{ij} et Q_{2k-1}^{ji} .



□

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe donné, et soit $X \subseteq V$ un sous ensemble de sommets de G . On dit que le sous graphe induit par X , $G[X]$ est isométrique si pour tout sommet a et tout sommet b de X , on a :

$$d_G(a, b) = d_{G[X]}(a, b)$$

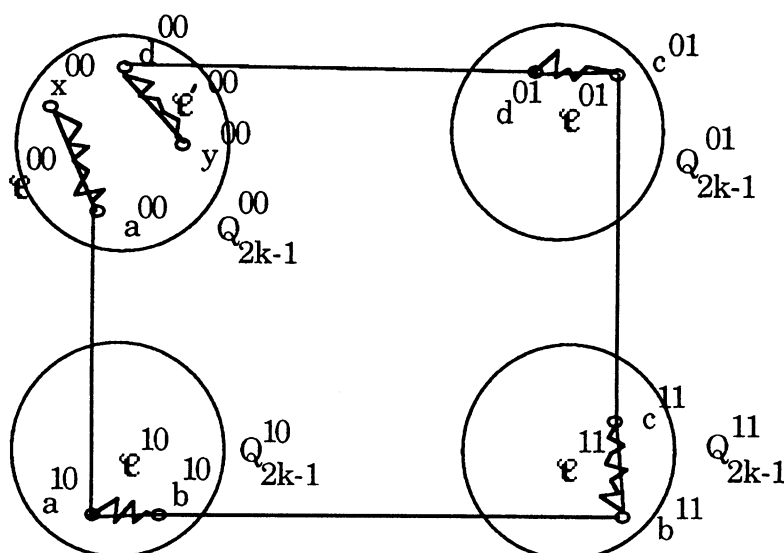
Lemme IV.3.2.

Q_{2k-1}^{00} est isométrique dans $G(Q_{2k+1})$.

Preuve du lemme IV.3.2.

Soient x^{00} et y^{00} deux sommets de Q_{2k-1}^{00} . Supposons qu'il existe une plus courte chaîne \mathcal{C} reliant x^{00} et y^{00} non complètement contenue dans Q_{2k-1}^{00} . D'après le lemme IV.3.1. \mathcal{C} n'utilise pas une arête antipodale entre Q_{2k-1}^{ij} et Q_{2k-1}^{ji} dans $G(Q_{2k+1})$. Supposons que cette chaîne soit: $\mathcal{C} = [x^{00}, \mathcal{C}^{00}, a^{00}, a^{10}, \mathcal{C}^{10}, b^{10}, b^{11}, \mathcal{C}^{11}, c^{11}, c^{01}, \mathcal{C}^{01}, d^{01}, d^{00}, \mathcal{C}^{00}, y^{00}]$

Soient b^{00} , c^{00} et d^{00} les sommets homologues de b^{10} , c^{01} et d^{01} respectivement.



La sous chaîne \mathcal{C}^{10} est de même longueur qu'une plus courte chaîne reliant les sommets a^{00} et b^{00} dans Q_{2k-1}^{00} (car les arêtes $a^{00}a^{10}$ et $b^{00}b^{10}$ relient des sommets homologues de Q_{2k+1}).

De même, la sous chaîne \mathcal{C}^{01} entre les sommets c^{01} et d^{01} est de même longueur qu'une plus courte chaîne reliant les sommets c^{00} et d^{00} dans Q_{2k-1}^{00} .

Enfin, la sous chaîne $[b^{11}, \mathcal{C}^{11}, c^{11}]$ est de même longueur qu'une plus courte chaîne reliant les sommets b^{00} et c^{00} dans Q_{2k-1}^{00} .

Ainsi, la chaîne:

$$\mathcal{C}_{00} = [x^{00}, \mathcal{C}^{00}, a^{00}, \dots, b^{00}, c^{00}, \dots, d^{00}, \mathcal{C}'^{00}, y^{00}]$$

est de longueur plus petite que la plus courte chaîne \mathcal{C} , contradiction et donc Q_{2k-1}^{00} est bien isométrique dans $G(Q_{2k+1})$. \square

Preuve de la proposition IV.3.2.:

(i) Montrons que $G(Q_{2k+1})$ n'est pas intervalle régulier.

Soient 0 et 123...k deux sommets de Q_{2k-1}^{00} . Ces deux sommets sont à distance k dans Q_{2k-1}^{00} et donc (d'après le lemme IV.3.2.) ils sont à

distance k dans $G(Q_{2k+1})$. Considérons alors l'intervalle $I(0, 123...k)$. Les géodésiques entre 0 et 123...k sont soit composées uniquement d'arêtes de l'hypercube ou bien utilisent exactement une arête diagonale de Q_{2k-1}^{00} .

On a donc $|N(0) \cap I(0, 123...k)| > k$. En effet, les sommets 1, 2, ..., k, voisins du sommet 0, sont bien des sommets de $I(0, 123...k)$ car on a bien $d(p, 123...k) = k-1$, pour tout $p \in \{1, 2, \dots, k\}$. De plus, le sommet 123...(2k-1) antipodal de 0 dans Q_{2k-1}^{00} est adjacent à 0 et est à distance (k-1) de 123...k (car (2k-1) est impair et donc Q_{2k-1}^{00} est biparti) .

Donc, $|N(0) \cap I(0, 123...k)| \geq |\{1, 2, \dots, k, 123...(2k-1)\}| > k$ et $G(Q_{2k+1})$ n'est pas intervalle régulier.

(ii) Montrons que $G(Q_{2k+1})$ n'est pas intervalle monotone. Pour cela il suffit de considérer l'intervalle entre les sommets 1 et 123...(2k-1)

appartenant à $I(0, 123...k)$. Ces deux sommets sont tous deux voisins du sommet 0, comme $G(Q_{2k+1})$ est un (0, 2)-graphe, alors ils ont un deuxième voisin commun, à savoir le sommet 23...(2k-1) antipodal de 1 dans Q_{2k-1}^{00} . Mais, $23...(2k-1) \notin I(0, 123...k)$, car on a $d(1, 123...k) = k-1$ et comme 23...(2k-1) sont antipodaux dans Q_{2k-1} , alors $d(23...(2k-1), 123...k) = k > k-1$. Donc $I(1, 23...(2k-1)) \not\subset I(0, 123...k)$, et donc G n'est pas intervalle monotone. \square

Proposition IV.3.3.

Pour $k \geq 2$, $G(Q_{2k})$ vérifie les assertions suivantes:

- (i) il est intervalle régulier
- (ii) il n'est pas intervalle monotone.

La preuve de cette proposition est semblable à celle donnée par Berrachedi et Mollard dans [BerMol]. En fait, cette construction est un cas particulier de leur construction; mais celle-ci présente un aspect géométrique clair. En effet, le partage de Q_d en quatre composantes égales (Q_{d-2}) et ensuite le rajout des différentes diagonales est décrit de manière géométrique dans notre construction.

Pour l'exemple donné en tête de paragraphe, on peut facilement vérifier que $G(Q_4)$ est intervalle régulier mais n'est pas intervalle monotone comme l'indiquent les exemples d'intervalles de la figure 28.

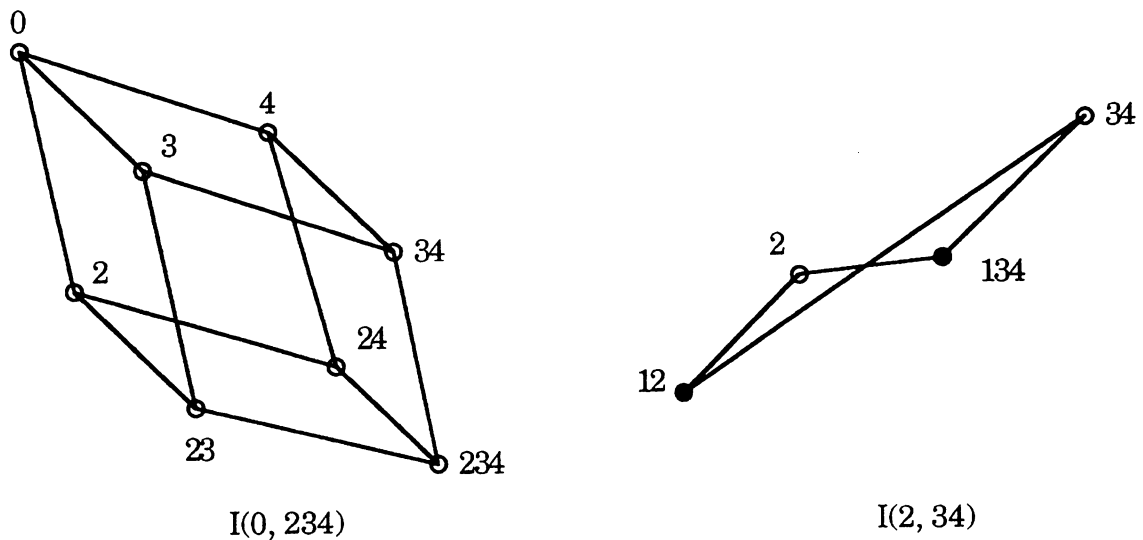


Fig. 28. Les sommets de $I(2, 34)$ n'appartenant pas à $I(0, 234)$ sont en gras sur la figure.

Chapitre V

EXISTENCE ET STRUCTURE LOCALE DES (0, 2)-GRAPHERS

“...It's easy to look it, so hard to do it fine...”

EXISTENCE ET STRUCTURE LOCALE DES (0, 2)-GRAPHERS

Dans ce chapitre nous nous intéressons au problème d'existence de (0, 2)-graphe d'un ordre donné. Après quelques résultats sur la structure locale des (0, 2)-graphes, nous donnons une condition nécessaire d'existence de tels graphes ayant un nombre impair de sommets. Nous exhibons ensuite une classification des (0, 2)-graphes avec au plus 32 sommets, et nous montrons qu'il n'existe pas de (0, 2)-graphe d'ordre 18. Enfin, nous présentons une méthode de construction de (0, 2)-graphes.

V.1. Structure locale et existence de (0, 2)-graphe.

Rappelons tout d'abord que la décomposition en couches d'un graphe G à partir d'un sommet u est la partition de son ensemble de sommets $V(G)$ en sous ensembles $N_0, N_1, N_2, \dots, N_D$ avec $N_0 = \{u\}$ et pour tout $i = 1, \dots, D$, $N_i = \{v \in V(G) / d(u, v) = i\} = N_i(u)$.

L'existence de (0, 2)-graphes pour un ordre donné est un problème ouvert, et plus particulièrement dans le cas impair. En effet, tous les exemples de (0, 2)-graphes connus dans la littérature sont d'ordre pair.

Ceci nous conduit à poser les deux questions suivantes:

Question 1: Existe-t-il un (0, 2)-graphe pour tout ordre pair?

Question 2: Existe-t-il des (0, 2)-graphes d'ordre impair?

Une réponse à ces questions nécessite la connaissance préalable de la structure des $(0, 2)$ -graphes, et plus particulièrement de leur structure locale.

Certains résultats sur l'ordre des $(0, 2)$ -graphes sont connus, particulièrement, celui énoncé par le théorème III.1.1. du chapitre III, à savoir que si G est un $(0, 2)$ -graphe de degré d , alors son ordre est borné par:

$$1 + d(d-1)/2 \leq |V(G)| \leq 2^d \quad (*).$$

La borne supérieure dans la relation (*) est toujours atteinte par les hypercubes de dimension d [Lab1, Mul1]. Ce qui les caractérise comme les seuls $(0, 2)$ -graphes extrémaux. Par ailleurs, pour un nombre de sommets égal à une puissance de 2, il existe toujours un $(0, 2)$ -graphe, en effet, pour un degré d on a les hypercubes de dimension d qui sont d'ordre 2^d ; et, pour un degré $d+1$, les graphes de Laborde-Mulder qui sont aussi d'ordre 2^d .

Il s'agit maintenant de savoir pour quelles valeurs paires de l'ordre $|V(G)|$, autres qu'une puissance de 2, un $(0, 2)$ -graphe G existe?

Le tableau 1 suivant dresse la liste des $(0, 2)$ -graphes connus ayant au plus 32 sommets.

On ne sait pas si de tels graphes existent pour un ordre 26 ou 30, le cas 18 sera traité ultérieurement. Pour un ordre égal à 12, on obtient un unique $(0, 2)$ -graphe, à savoir le graphe de l'icosaèdre, qu'on notera Ico (Fig.36). Les graphes H_{14} [Lab1] (Fig.29) et G_{22} [Mol3] (Fig.30) sont respectivement les seuls $(0, 2)$ -graphes d'ordre 14 et 22. Ils sont bipartis, de diamètre 3 et de degrés respectifs 4 et 5. Ces graphes sont de la même famille que le graphe K donné en fin de chapitre III.

Tableau 1. Existence de (0, 2)-graphes d'ordre au plus 32

Ordre	Existence de (0, 2)-graphes
2	uniquement K_2
4	uniquement 2-cube & K_4
6	aucun
8	uniquement Q_3 et $K_4 \square K_2$
10	aucun
12	un unique: l'icosaèdre (Fig.36)
14	un unique: H_{14} (Fig.29.)
16	exactement 6 dont Q_4 , $G(Q_4)$, $K_4 \square K_2 \square K_2$, et $K_4 \square K_4$.
18	voir Proposition IV.I.3.
20	on en connaît 2 (fig. 31 & 32)
22	un unique : G_{22} (Fig.30.)
24	plusieurs dont $Ico \square K_2$
26	?
28	plusieurs dont $H_{14} \square K_2$
30	?
32	plusieurs dont Q_5 , K , $1/2Q_6$...

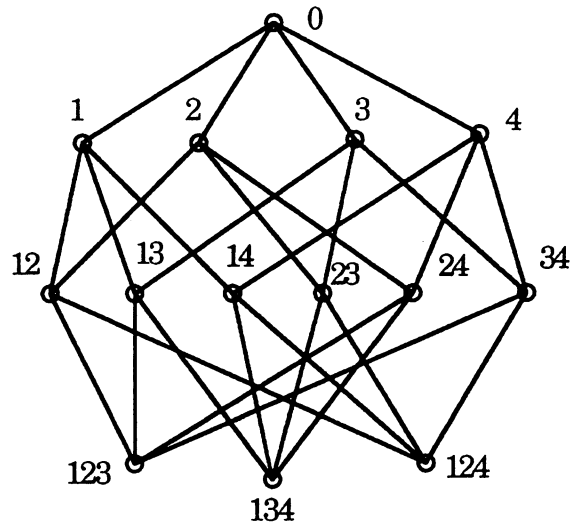


Fig.29. H_{14} : l'unique $(0, 2)$ -graphe d'ordre 14

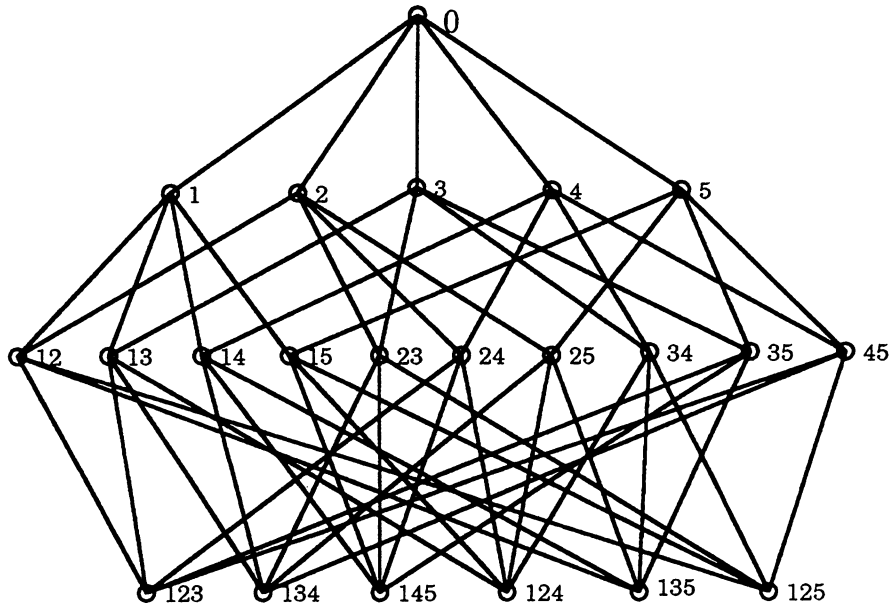


Fig. 30. G_{22} : l'unique $(0, 2)$ -graphe sur 22 sommets.

Pour $|V(G)| \leq 32$, il n'existe pas de $(0, 2)$ -graphe ayant 6 ou 10 sommets ou ayant un ordre impair.

Pour $|V(G)| = 6$, on a nécessairement $d = 3$ et il est aisé de vérifier qu'il n'existe pas de tel $(0, 2)$ -graphe.

Maintenant, si $|V(G)| = 10$, on a alors $d = 4$, et pour toute décomposition en couches de G à partir de l'un de ses sommets u , $N(u)$ consiste en un triangle et un sommet isolé. Donc $|N_2(u)| \leq 3$, et on obtient $K_4 \square K_2$ qui est d'ordre 8, et donc il n'existe pas de $(0, 2)$ -graphe d'ordre 10.

On ne sait pas s'il en existe pour les valeurs 26 et 30. Aussi, la question 1 peut être transformée en la question suivante:

Question 1bis:

"Est-il vrai qu'à partir d'un certain ordre pair, il existe toujours un $(0, 2)$ -graphe ayant cet ordre?".

Pour un ordre 20, Michel Mollard a donné [Mol4] deux exemples (Fig.31 & 32) dont l'un n'est pas sommet-transitif.

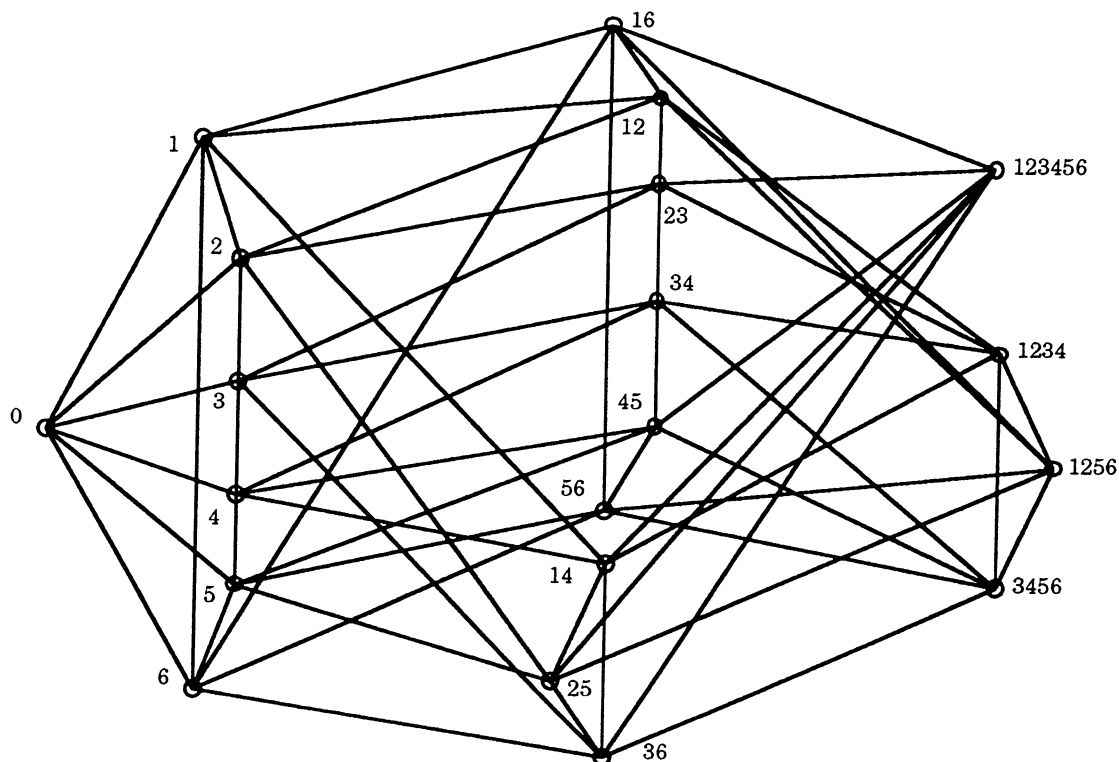


Fig. 31: $(0, 2)$ -graphe sur 20 sommets non sommet-transitif

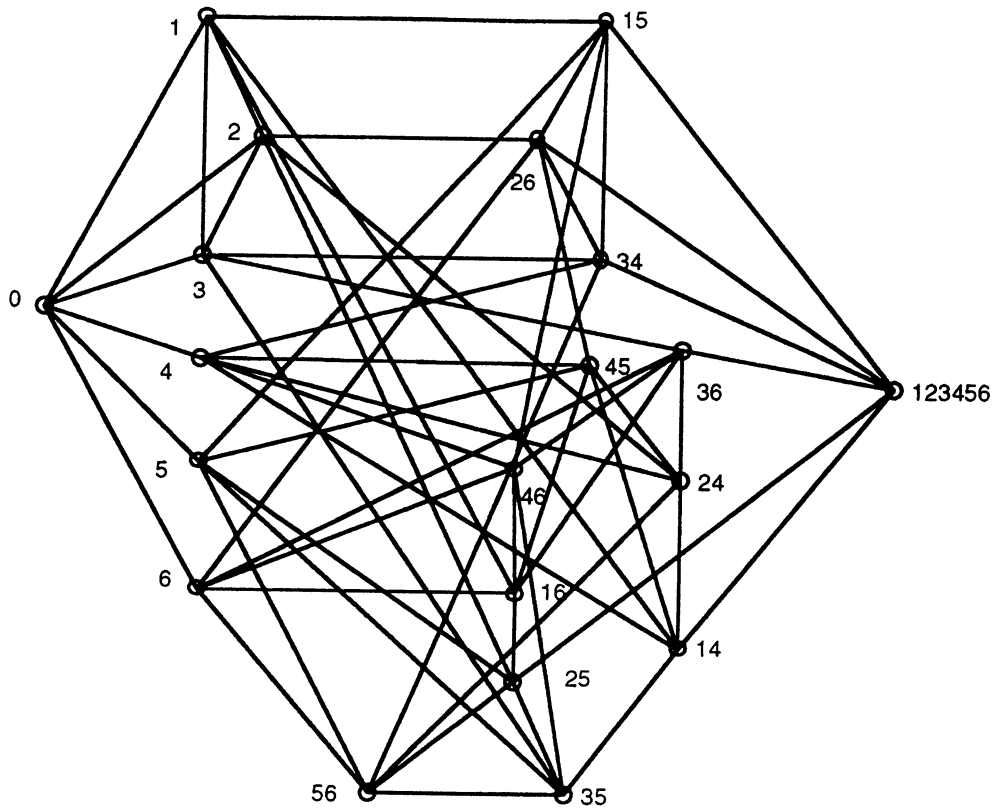


Fig.32: un autre (0, 2)-graphe sur 20

Nous présentons dans ce qui suit quelques résultats sur la structure locale des (0, 2)-graphes. Ces résultats vont nous permettre d'une part, de montrer que pour un ordre 18, il n'existe pas de (0, 2)-graphe, et d'autre part, de donner une condition nécessaire d'existence de (0, 2)-graphes d'ordre impair.

Notons que dans un (0, 2)-graphe, les sommets du sous graphe induit par le voisinage d'un sommet quelconque sont tous de degré 0 ou 2, car deux sommets adjacents dans un (0, 2)-graphe ont 0 ou 2 voisins en communs. Si la borne supérieure de la relation (*) ci-dessus est toujours atteinte, ceci n'est pas toujours le cas pour la borne inférieure. En effet, la borne inférieure est atteinte seulement pour $d = 3$ et 6 , avec respectivement K_4 et le graphe de Shrikhande comme (0, 2)-graphes minimaux.

Ainsi, par exemple, si $d = 4$, on a $1 + d(d-1)/2 = 7$ et il n'existe pas de (0, 2)-graphe d'ordre 7, et dans ce cas, le plus petit (0, 2)-graphe que l'on puisse

obtenir est d'ordre 8 et c'est le graphe $K_4 \square K_2$. De même, pour $d = 5$, au lieu d'un ordre 11 (pour lequel il n'existe pas de $(0, 2)$ -graphe), le plus petit $(0, 2)$ -graphe ici est l'icosaèdre qui est d'ordre 12 (voir Proposition V.1.6.).

Définition V.1.1.

Soient G un graphe connexe et H un sous graphe de G . Soit $u \in V(G) \setminus V(H)$. On dit que u domine H si quelque soit $v \in V(H)$, il existe dans G une arête reliant u à v .

Lemme V.1.1.

Dans un $(0, 2)$ -graphe, il n'existe pas de sommet dominant un sous graphe contenant un cycle de longueur 4.

Preuve:

Sinon deux sommets non adjacents de ce cycle auraient trois voisins en commun (Fig.33.)

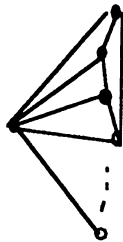


Fig.33

□

Proposition V.1.1.

Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré d . S'il existe un sommet v de G dont le voisinage, $N(v)$, induit un sous graphe contenant k ($k \geq 3$) sommets de degré 2, alors:

$$|N_2(v)| = d(d-1)/2 - k \quad \text{et} \quad |V(G)| \geq 1 + d(d-1)/2 + (d - k) .$$

Preuve:

Soit v un sommet de G . Considérons une décomposition de G à partir de v . Alors une paire de sommets de $N_1(v)$ ne peut être dominée dans $N_2(v)$ que par un sommet. Un sommet de $N_2(v)$ domine une et une seule paire de

sommets de $N_1(v)$. Par ailleurs, dans un cycle de longueur p , seules les $p/2$ paires de sommets à distance 2 sont dominées dans ce cycle. On a alors: $|N_2(v)| = d(d-1)/2 - k$; ce qui nous donne $|V(G)| \geq 1 + d + d(d-1)/2 - k$, soit: $|V(G)| \geq 1 + d(d-1)/2 + (d-k)$. \square

Corollaire V.1.1.

Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré d . Si G contient un sommet v dont le voisinage est stable, et en particulier, si G est sans triangle, alors:

$$|V(G)| \geq 1 + d(d+1)/2.$$

Et donc:

Corollaire V.1.2.

Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré d . Si $|V(G)| = 1 + d(d-1)/2$ alors G est localement 2-régulier.

En utilisant la propriété d'un $(0, 2)$ -graphe que toute paire d'arêtes adjacentes appartient à un unique cycle de longueur 4, on montre la proposition suivante:

Proposition V.1.2.

Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré d . Alors le nombre de cycles de longueur 4 dans G est:

$$|C| = |V(G)| \cdot d(d-1)/8.$$

Preuve:

Comme dans un $(0, 2)$ -graphe, chaque paire d'arêtes adjacentes appartient à un cycle de longueur 4 unique. Comptons de deux manières différentes le nombre de paires d'arêtes adjacentes dans G :

En un sommet x quelconque de G , il y a exactement $d(d-1)/2$ paires d'arêtes adjacentes en x (différentes). Donc dans G , il y en a exactement:

$$|V(G)| \cdot (d(d-1)/2)$$

Par ailleurs, dans un cycle de longueur 4, il y a exactement 4 paires d'arêtes adjacentes différentes. Donc dans G , il y en a exactement $4 \cdot |C|$ où $|C|$ est égal au nombre de cycles de longueur 4 dans G . On a alors: $|V(G)| \cdot (d(d-1)/2) = 4 \cdot |C|$, soit $|C| = |V(G)| (d(d-1)/8)$. \square

Corollaire V.1.3.

Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré d .

a/ Si $|V(G)|$ est impair, alors $d \equiv 0 \pmod{8}$.

b/ Si $|V(G)| \equiv 2 \pmod{4}$, alors $d \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

Preuve:

Comme $|C|$ est un entier et par ailleurs, si $|V(G)|$ est impair, d est pair, le résultat est immédiat. \square

Cette proposition donne une réponse partielle à la question de l'existence de $(0, 2)$ -graphes d'ordre impair. L'existence de tels graphes est encore un problème ouvert. En effet, on pose la conjecture suivante:

Conjecture 1.

Il n'existe pas de $(0, 2)$ -graphe d'ordre impair.

Revenons maintenant au cas 18. Montrons qu'il n'existe pas de $(0, 2)$ -graphe dans ce cas.

Proposition V.1.3.

Il n'existe pas de $(0, 2)$ -graphe d'ordre 18.

Preuve:

Si un tel graphe existait, alors d'après le théorème III.1.1. on a:

$$1 + d(d-1)/2 \leq 18 \leq 2^d, \quad \text{et donc, } 5 \leq d \leq 6.$$

Mais, comme $|V(G)| = 18 \equiv 2 \pmod{4}$, alors, en vertu de la proposition V.1.3., $d = 5$. Considérons alors une décomposition en couches de G à partir d'un sommet 0 . Le sous graphe induit par $N_1(0)$ est soit un stable ou bien

contient un triangle et deux sommets isolés ou enfin, un cycle de longueur 5:

a/ $N_1(0)$ est un stable sur 5 sommets (fig. 34.).

On a alors $|N_2(0)| = 10$ et donc $|N_3(0)| = 2$. Soient x et y les deux sommets de $N_3(0)$ et u un sommet de $N_2(0)$ adjacent à x et non adjacent à y . Un tel sommet existe car x et y ont au plus deux voisins communs dans $N_2(0)$.

Le sommet u doit donc avoir deux voisins dans $N_2(0)$ (car $d = 5$). Soient z et t ces deux voisins. Comme z et t ont au plus un voisin commun dans $N_1(0)$ et y ont chacun deux voisins, notons alors a le voisin de z dans $N_1(0)$ non adjacent à t et b celui de t non adjacent à z . a et b sont distincts et on a $N(a) \cap N(u) \supset \{z\}$ et $N(b) \cap N(u) \supset \{t\}$ et $d(u) = 5$, impossible, car G est un $(0, 2)$ -graphe et u ne peut plus être relié.

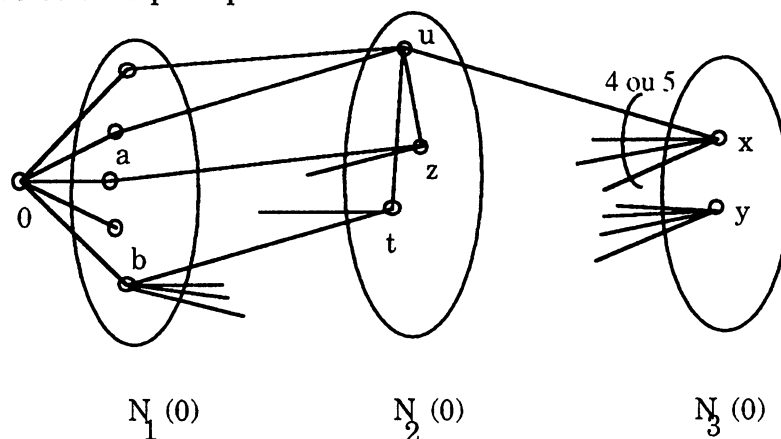


Fig. 34.

b/ $N_1(0)$ n'est pas un stable, alors deux cas sont possibles:

- b1. $N_1(0)$ contient 3 sommets de degré 2 (Fig.35.).

On a alors $|N_2(0)| = 7$ et $|N_3(0)| = 5$. Soient $[1, 2, 3]$ le triangle et, 4 et 5 les deux sommets isolés dans $N_1(0)$.

$N_2(0)$ consiste alors en le sommet 45 (deuxième voisin commun à 4 et 5) et l'ensemble $S = \{14, 15, 24, 25, 34, 35\}$ des six autres sommets (où ab désigne le deuxième voisin commun à a et b). Comme chaque sommet de S est relié à exactement un sommet du triangle $[1, 2, 3]$, il lui faudrait alors un

deuxième voisin commun avec chacun des deux autres sommets du triangle. Donc chaque sommet de S doit avoir deux voisins dans $N_2(0)$, et ne peut donc être relié qu'à un seul sommet de $N_3(0)$.

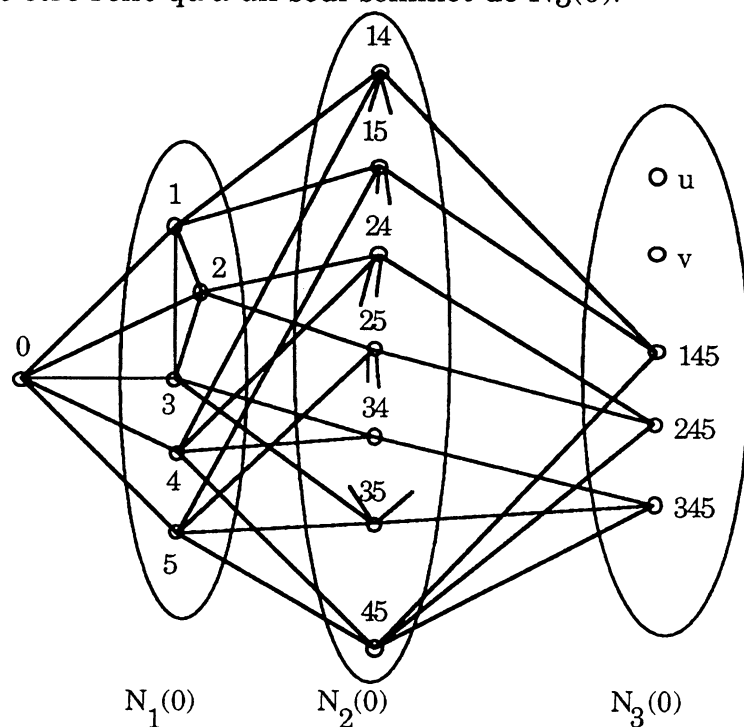


Fig. 35.

Par ailleurs, le sommet 45 n'est relié à aucun sommet de S . En effet, comme tout sommet ab de S est tel que $a \in \{1, 2, 3\}$ et $b = 4$ (ou 5), si 45 était relié à ab , alors ab serait un voisin commun à 45 et b d'une part, et 45 et a d'autre part.

Donc 45 devrait avoir un second voisin en commun avec a et un autre avec b , soit respectivement ab' (avec $b' \neq b \in \{4, 5\}$) et $a'b$ (avec $a' \neq a \in \{1, 2, 3\}$).

Mais alors a' aurait un unique voisin en commun avec 45, en l'occurrence le sommet $a'b$, et 45 est déjà saturé car $d(45) = 5$, absurde. Donc 45 est relié à trois sommets de $N_3(0)$. Chacun de ces sommets a 45 comme voisin commun avec les sommets 4 et 5, donc chacun est relié à deux sommets de S , de plus, ils n'ont aucun voisin commun dans S car tout sommet de S a un seul voisin dans $N_3(0)$. Donc chacun doit avoir avec un sommet a du triangle deux voisins en commun, à savoir $a4$ et $a5$.

Soient 145, 245 et 345 ces trois sommets. Soient u et v les deux sommets

restants. Comme tous les sommets de $N_2(0)$ sont déjà saturés ($d = 5$) alors u et v ne peuvent pas être de degré 5 car il ne reste en tout que 5 sommets non saturés à savoir les sommets $u, v, 145, 245$ et 345 ; absurde.

- b2. $N_1(0)$ contient 5 sommets de degré 2 (fig. 36.)

On a alors $|N_2(0)| = 5$ et il reste encore 7 autres sommets dans le graphe ($|N_3(0)| \leq 7$). $N_1(0)$ est ici un cycle de longueur 5, soit $[1, 2, 3, 4, 5]$ ce cycle. Chaque sommet de $N_2(0)$ a deux voisins consécutifs sur le cycle $[1, 2, 3, 4, 5]$, et donc $N_2(0) = \{12, 23, 34, 45, 15\}$. De plus, chaque sommet de $N_2(0)$ doit avoir deux voisins dans $N_2(0)$. En effet, si ab est un sommet de $N_2(0)$ et, c et d respectivement les voisins de a et b dans $N_1(0)$, alors ab a comme voisin commun avec c le sommet a et, avec d le sommet b et donc doit avoir un deuxième voisin commun avec chacun de ces deux sommets. Donc $N_2(0)$ est bien un cycle de longueur 5 (car 2-régulier) et chacun de ses sommets a un seul voisin dans $N_3(0)$. Mais, tout sommet de $N_3(0)$ a au moins deux voisins dans $N_2(0)$ et donc, les 5 sommets de $N_2(0)$ sont adjacents à un même sommet de $N_3(0)$, et le graphe est l'icosaèdre qui est bien sûr un $(0, 2)$ -graphe mais son ordre est égal à 12, contradiction.

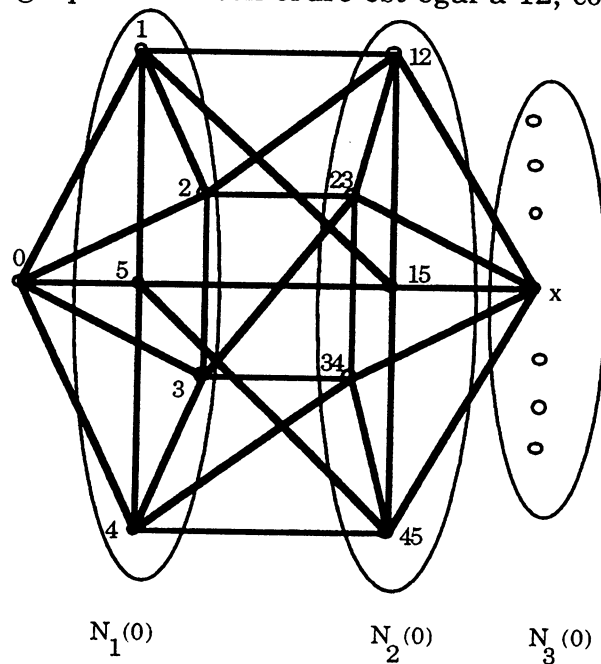


Fig. 36. (en gras le graphe de l'icosaèdre Ico)

il n'existe donc pas de $(0, 2)$ -graphe d'ordre 18. \square

Définition V.1.2.

On dit que G est localement \mathcal{X} , où \mathcal{X} est un graphe ou une classe de graphes, lorsque le voisinage de chacun de ses sommets est isomorphe à (respectivement un élément de) \mathcal{X} .

Proposition V.1.4. [Brouwer, Cohen & Neumaier, [NeuBroCoh]]

Soit G un graphe connexe localement un pentagone. Alors G est isomorphe à l'icosaèdre.

Proposition V.1.5.

Le plus petit $(0, 2)$ -graphe:

- de degré 4 est $K_4 \square K_2$
- de degré 5 est l'icosaèdre.

Preuve:

Lorsque le degré vaut 4, pour une décomposition en couches d'un $(0, 2)$ -graphe d'ordre minimum G , le voisinage de chaque sommet est un triangle et un sommet isolé (car sinon $|V(G)| > 8$) et auquel cas $K_4 \square K_2$ est bien le plus petit $(0, 2)$ -graphe de degré 4.

Lorsque le degré est 5, comme le graphe est minimal alors chacun de ses sommets a comme sous graphe induit un graphe 2-régulier, soit un pentagone. Il est donc localement un pentagone et, en vertu de la proposition V.1.4., c'est l'icosaèdre. \square

Proposition V.1.6.

Les plus petits $(0, 2)$ -graphes de degré 6 sont $K_4 \square K_4$ et le graphe de Shrikhande.

Preuve:

Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré 6 minimal. Alors G est localement 2-régulier. Si G est localement un cycle de longueur 6, alors en vertu de [Mul1], G est le graphe de Shrikhande.

Si maintenant, il existe 0 un sommet de G tel que $N(0)$ est formé de 2 triangles disjoints, soient $[1, 2, 3]$ et $[4, 5, 6]$ (Fig.37). Considérons alors une décomposition en couches de G à partir de 0. Comme le voisinage de tout sommet de G est 2-régulier, soit x un sommet de $N(0)$. Le sommet x est relié à 0 et à deux sommets de $N(0)$ avec lesquels il forme une clique K_4 , et donc ses trois autres voisins (qui sont dans $N_2(0)$) forment nécessairement un triangle.

Donc le voisinage de tout sommet parmi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est formé de deux triangles disjoints. Finalement, par connexité le voisinage de tout sommet de G est formé de deux triangles disjoints, c'est à dire que G est localement deux triangles disjoints. Et G est alors $K_4 \square K_4$.

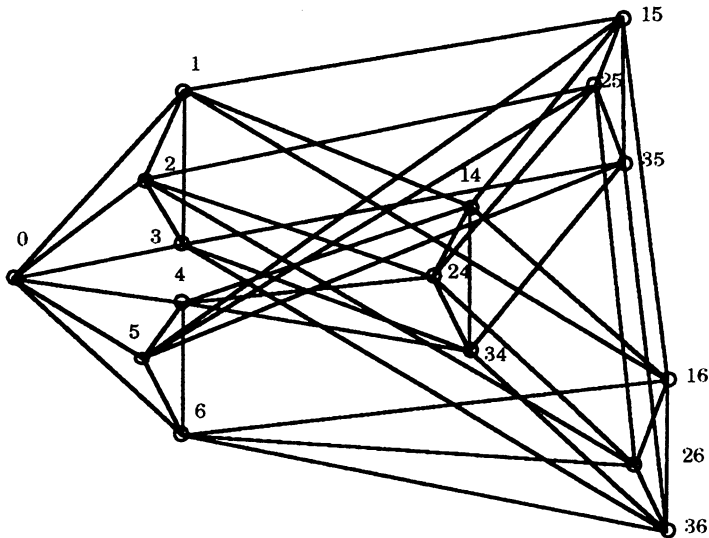


Fig. 37. $K_4 \square K_4$

□

Conjecture [H.M. Mulder & R.M. Madani, 1992]

Soit G un $(0, 2)$ -graphe tel qu'il existe v un sommet de G dont le voisinage consiste en p triangles disjoints alors G est localement p triangles disjoints et c'est $K_4 \square K_4 \square \dots \square K_4$ (p fois).

Considérons maintenant les $(0, 2)$ -graphes non bipartis sans triangles.

Proposition V.1.7.

Il n'existe pas de $(0, 2)$ -graphes non bipartis sans triangles de degré 3 ou 4.

Preuve:

Supposons le contraire. Si d est égal à 3. Soit 0 un sommet de G et notons $1, 2$ et 3 ses voisins dans une décomposition en couches de G à partir de 0 . Comme G est sans triangle, alors les sommets $1, 2$ et 3 forment un stable et comme G est un $(0, 2)$ -graphe alors la deuxième couche $N_2(0)$ est formée des sommets $12, 13$ et 23 respectivement deuxièmes voisins communs aux couples de sommets $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$. $N_2(0)$ est aussi un stable car G est sans triangles, mais comme $d = 3, |V(G)| \leq 8 = 2^3$, et on a déjà 7 sommets alors l'assertion est vraie.

Si $d = 4$, notons $1, 2, 3$ et 4 les voisins d'un sommet 0 de G . comme G est sans triangle alors $N(0)$ est stable et $|N_2(0)| = 6$.

Or, un sommet $ab \in N_2(0)$, voisin de a et $b \in N(0)$, ne peut être relié qu'à un sommet $cd \in N_2(0)$, voisin de c et $d \in N(0) \setminus \{a, b\}$ car G est sans triangle. Le sommet ab aurait alors cd comme voisin commun avec c et d . Mais comme G est de degré 4, ab ne peut pas avoir un deuxième voisin commun avec c et un deuxième voisin commun avec d , car il a déjà trois voisins (a, b et cd). Donc $N_2(0)$ est aussi un stable.

Comme d'une part, $|N_2(0)| = 6$ et de tout sommet de $N_2(0)$ il part deux arêtes vers $N_3(0)$, et que d'autre part, de chaque sommet de $N_3(0)$ il part au moins trois arêtes vers $N_2(0)$, on a alors $|N_3(0)| = 3$ ou 4 .

Si $|N_3(0)| = 3$, alors de tout sommet de $N_3(0)$, il part 4 arêtes vers $N_2(0)$ et $|V(G)| = 14$. Donc G est H_{14} qui est biparti.

Si $|N_3(0)| = 4$, il part 3 arêtes de tout sommet de $N_3(0)$ vers $N_2(0)$. On a alors $N_3(0) = \{123, 124, 134, 234\}$ (fig. 38). $N_3(0)$ est aussi un stable, car G est sans triangle, et G est alors Q_4 qui est biparti.

Donc il n'existe pas de $(0, 2)$ -graphe non biparti sans triangle de degré 3 ou 4.

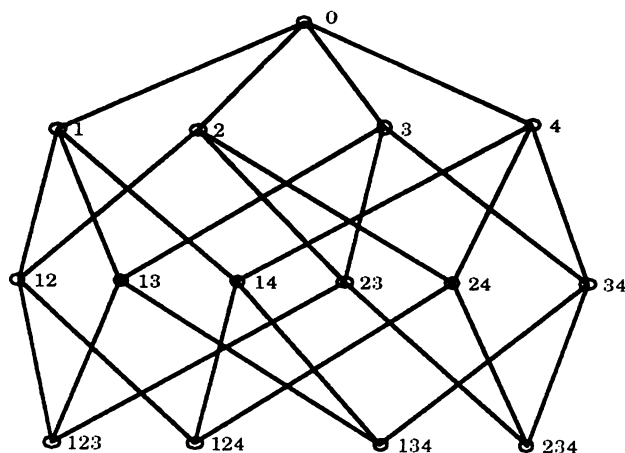


Fig. 38

□

Proposition V.1.8.

Le plus petit $(0, 2)$ -graphe non biparti sans triangle est le graphe de Laborde-Mulder $LM(Q_4)$ (ou graphe de Greenwood-Gleason).

Preuve:

Soit G un $(0, 2)$ -graphe non biparti et sans triangle. Alors en vertu de la proposition V.1.8. son degré est au moins 5. Comme $LM(Q_4)$ est non biparti et est sans triangle, alors, supposons qu'il existe un $(0, 2)$ -graphe non biparti et sans triangle autre que $LM(Q_4)$. Décomposons G en couches à partir d'un sommet quelconque noté 0. Soit alors $N_1(0) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ l'ensemble des sommets de la première couche de G . Comme $N_1(0)$ doit être un stable (G étant sans triangle) et G étant un $(0, 2)$ -graphe, alors $|N_2(0)| = 10$ et $N_2(0) = \{ab / a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, a < b\}$. Autrement dit, le sommet 35 de $N_2(0)$, par exemple, est adjacent à 3 et 5 de $N_1(0)$.

$N_2(0)$ ne peut pas être un stable, car sinon $|V(G)| > |V(LM(Q_4))|$.

Il existe donc une arête reliant deux sommets ab et cd de $N_2(0)$. Comme G est sans triangle, on a alors nécessairement $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$.

De plus, comme G est un $(0, 2)$ -graphe de degré $d = 5$, ab est relié à tout sommet ij de $N_2(0)$ tel que $\{a,b\} \cap \{i,j\} = \emptyset$. On obtient ainsi le graphe de Petersen O_3 comme sous graphe induit par $N_2(0)$ et les couches $\{0\}$ et $N(0)$ constituent bien la moitié inférieure de l'hypercube de dimension 5. On a bien en définitive $G = LM(Q_4)$. □

V.2. Une méthode de construction des $(0, 2)$ -graphes

Décrivons maintenant une méthode de construction d'un $(0, 2)$ -graphe G pour un ordre $n = |V(G)|$ donné. Cet algorithme détermine les bornes du degré $d = d(G)$ du graphe à construire. Ensuite, une fois déterminée la structure de la couche $N_1(0)$, les sommets et la structure de la couche $N_2(0)$ sont déterminés. En effet, la structure de $N_1(0)$ détermine le nombre de sommets de $N_2(0)$. Une structure de $N_2(0)$ est alors déterminée par chaque choix possible de réalisation de la propriété de $(0, 2)$ -graphe sur les sommets de $N_1(0)$ et leur saturation au sens du degré (i.e. à la fin de cette étape tous les sommets de $N_1(0)$ doivent être de degré d). En effet, une fois fixée la structure de la 1ère couche du graphe $N_1(0)$, tous les sommets de $N_2(0)$ induit par cette structure sont créés. Les voisinages de tout sommet de $N_2(0)$ avec tout sommet de $N_1(0)$ sont ensuite comparés. Si deux sommets comparés ont un voisin commun alors un second voisin leur est rajouté : c'est l'opération de réalisation de la propriété de $(0, 2)$ -graphe. La comparaison des voisinages se fait grâce aux tableaux associés à chaque sommet et qui ont la structure suivante: en première colonne on met le sommet en considération u , en deuxième colonne on met la liste de tous les sommets v d'une couche précédente ($N_i(0)$, $N_{i-1}(0)$ ou $N_{i-2}(0)$ si u est un sommet de $N_i(0)$). En troisième colonne, on met en face de chaque sommet v la liste de ses voisins

communs avec u . Enfin, en dernière colonne on met la liste des voisins de v susceptibles d'être voisins de u sans violer la propriété de $(0, 2)$ -graphe.

u	v	$N(u) \cap N(v)$	autres voisins communs possibles

Le choix des second voisins communs entre u et v , quand c'est nécessaire, détermine les différents choix de structure de la couche $N_i(0)$.

Ainsi, pour construire une couche $N_i(0)$, on doit tout d'abord déterminer son nombre de sommets à partir de la structure de la couche $N_{i-1}(0)$; puis, déterminer sa structure en faisant intervenir le nombre de sommets possible de la couche suivante $N_{i+1}(0)$ et la comparaison des voisinages de ces sommets avec ceux de la couche précédente N_{i-1} . Les couches du graphe sont alors construites successivement grâce à la procédure **CONSTRUIRE** qui permet de traiter les différents choix de structure résultant de la comparaison des voisinages. Un booléen "construit" permet de contrôler si la construction a réussi ou non.

Algorithme_Zéro_Deux_Graphe (Entrée: entier n ;
Sortie: booléen construit);
 construit := FAUX; (\backslash *construit permet de savoir si la
 construction d'un $(0, 2)$ -graphe a réussi ou non*/)
 trouver les bornes inf D_0 et sup D_1 de la valeur D du degré du
 graphe à construire grâce à: $1 + D(D-1)/2 \leq n \leq 2^D$;
 $D := D_0$;
Tant que ($D \leq D_1$) et (construit = FAUX)
Faire
 créer un sommet initial 0 ;
 créer les sommets de $N_1(0)$; (\backslash *les D voisins de 0*/)
Pour tout choix de structure de $N_1(0)$
 (\backslash * $N_1(0)$ peut être soit un stable, soit contenir k sommets de
 degré 2 avec $k \neq 4$ et $3 \leq k \leq D$ */)
Faire
 créer les sommets de $N_2(0)$;
 (\backslash * $|N_2(0)| = D(D-1)/2$ si $N_1(0)$ est stable, et $|N_2(0)| = (D-k)(D-k-1)/2 +$
 $k(k-3)/2 + k(D-k)$ si $N_1(0)$ contient k sommets de degré 2*/)
 Si l'ordre courant du graphe est plus petit que n
alors Construire ;

```

        (\*construire successivement les niveaux du graphe
        grâce à la procédure CONSTRUIRE*/)
    FinSi;
    Fait ;
    Si (construit = FAUX) alors D := D + 1 ;
FinTantque ;
Fin Algorithme.

```

L' algorithme décrit ci-dessus, une fois les couches $N_1(0)$ et $N_2(0)$ construites, fait appel à une procédure globale, la procédure Construire, qui est :

PROCEDURE CONSTRUIRE

$i := 2$ (* i désigne le numéro du niveau courant du graphe*/)

Pour tout x sommet non saturé de $N_i(0)$ (* x non saturé veut dire $d(x) < D$ */)

Faire

comparer le voisinage de x avec celui de tout sommet de $N_{i-1}(0)$ et $N_{i-2}(0)$, et réaliser la propriété de $(0, 2)$ -graphe (* i.e. deux sommets quelconques doivent avoir 0 ou 2 voisins en commun*/)

Si il ne persiste plus de sommet non saturé dans $N_i(0)$

Alors **Si** l'ordre courant du graphe est égal à n

alors construit := VRAI

FinSi ;

Sinon

Si $(D - d(x))$ n'est pas supérieur au nombre de sommets disponibles ($n -$ ordre courant du graphe)

Alors

créer les $D - d(x)$ voisins de x dans $N_{i+1}(0)$;

Pour chaque sommet y voisin de x dans $N_{i+1}(0)$

Faire

comparer le voisinage de y avec celui de tout z voisin de x dans $N_{i-1}(0)$ et réaliser la propriété de $(0, 2)$ -graphe ;

Si une telle réalisation est possible

alors $i := i + 1$

FinSi ;

Fait ;

FinSi ;

FinSi ;

Fait ;
Fin Construire .

La programmation à objets a été utilisée pour l'implémentation de cet algorithme dans le logiciel "*Cabri graphes*" sur MacIntosh LC. Ce travail a été effectué dans le cadre d'un mémoire de DEA de Recherche Opérationnelle [Selladji]. Le graphe apparaissant comme une liste de couches (ou niveaux) dont chacune est un graphe particulier pouvant être représenté par la liste de ses sommets.

PROBLEMES

Dans cette partie, nous listons un certain nombre de problèmes et de questions liés à l'étude des $(0, 2)$ -graphes, que nous avons jugé intéressants. L'ordre des questions est conforme à l'ordre des différents chapitres de la thèse.

Question 1:

Soit G un (μ, λ) -graphe, avec $0 < \mu \leq \lambda$. Est-il vrai que si G vérifie R_1 et R_3 alors G est fortement régulier?

On notera qu'un graphe fortement régulier est un certain (μ, λ) -graphe (car vérifiant les propriétés de régularité R_1 et R_3).

Question 2:

Le degré, d , d'un $(0, 2)$ -graphe G est borné inférieurement par le diamètre de G ($\text{diam}(G)$). Existe-t-il une fonction du diamètre $f(\text{diam}(G))$ bornant d supérieurement?

Autrement dit, on sait que si G est un $(0, 2)$ -graphe de degré d , alors $d \geq \text{diam}(G)$. On sait par ailleurs, que pour les petites valeurs de D (et pour les valeurs plus grandes peut être?) le degré d'un $(0, 2)$ -graphe ne

peut pas être augmenté indéfiniment. Aussi, il semble qu'il pourrait exister une fonction $f(\text{diam}(G))$ telle que: $d \leq f(\text{diam}(G))$.

Question 3:

Tout les $(0, 2)$ -graphes connus jusqu'à présent sont hamiltoniens. Est-il vrai qu'un $(0, 2)$ -graphe est hamiltonien? Si oui, qu'en est-il des $(0, \lambda)$ -graphes?

Comme la façon la plus naturelle de construire un $(0, 2)$ -graphe est celle qui consiste à appliquer à l'hypercube un certain nombre d'opérations qui laissent invariante sa propriété d'être un $(0, 2)$ -graphe. Alors, la plupart des exemples connus possèdent un hypercube comme graphe partiel, ce qui assure leur hamiltonicité (l'hypercube étant hamiltonien). Mais, certains exemples (bien que ponctuels) sont aussi hamiltoniens et ne sont pas obtenus à partir de l'hypercube moyennant certaines opérations. Le problème de l'hamiltonicité des $(0, 2)$ -graphes semble être un problème difficile.

Question 4:

Caractériser les $(0, 2)$ -graphes de degré d localement un cycle de longueur d , C_d .

La caractérisation de tels graphes permettrait d'affiner la borne inférieure dans la relation (*) vue au chapitre V. Pour les petites valeurs de d , on sait construire de tels graphes; en effet, lorsque $d = 3$, K_4 est localement C_3 ; lorsque $d = 5$, l'icosaèdre est localement C_5 ; lorsque $d = 6$, le graphe de Shrikhande est localement C_6 ; et enfin, lorsque $d = 7$, il existe un $(0, 2)$ -graphe d'ordre 24 localement C_7 . Pour $d \geq 8$, on en connaît pas.

Enfin, nous proposons les conjectures suivantes:

Conjecture 1.

$\chi(G) = 4$, si G est un $(0, 2)$ -graphe non biparti.

Conjecture 2.

Soit G un $(0, 2)$ -graphe localement K_3 et $(d-3) K_1$.

Si $|V(G)| = 2^{d-2}$, alors $G = K_4 \square K_2 \square \dots \square K_2$ ($d-3$ fois)

Conjecture 3 [H.M. Mulder & R.M. Madani, 1992]

Soit G un $(0, 2)$ -graphe tel qu'il existe v un sommet de G dont

le voisinage consiste en p triangles disjoints alors G est

localement p triangles disjoints et

$G = K_4 \square K_4 \square \dots \square K_4$ (p fois).

BIBLIOGRAPHIE

- [**Alvarez**] L. Alvarez, *Undirected graphs realizable as graphs of modular lattices*, *Canad. J. Math.* 17 (1965), 923-932.
- [**Aschbacher**] M. Aschbacher, *On collineation groups of symmetric block design*, *J.C.T. Ser. B* 11 (1971), 272-281.
- [**AssMezSal**] Jr. E. F. Assmus, J. A. Mezzaroba & J. Salwach, *Planes and biplanes*, in: "Higher Combinatorics" (M. Aigner ed.), Reidel, Dordrecht (1977), 205-212.
- [**Berge**] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1974.
- [**Berrachedi**] A. Berrachedi, *Une nouvelle caractérisation de l'hypercube*, 2ème rencontre algéro-française de recherche opérationnelle, Alger, Mai 1990.
- [**BerMadMol**] A. Berrachedi, R.M. Madani, M. Mollard, *communication privée*.
- [**BerMol**] A. Berrachedi & M. Mollard, *On two problems about $(0, 2)$ -graphs and interval-regular graphs*, soumis à *Discrete Math.*

- [**Biggs**] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press, London, 1974.
- [**BonMur**] J. A. Bondy & U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, Macmillan, London, 1976.
- [**BroCohNeu**] A. E. Brouwer, A. M. Cohen & A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer Verlag 18, 1989.
- [**Cameron**] P. J. Cameron, *Biplanes*, Math. Z., 131 (1973), 85-101.
- [**CamLin**] P. J. Cameron & J. H. van Lint, *Graph theory, Coding theory and Block Designs*, London Math. Soc. Lecture Notes 19, Cambridge Univ. Pr., London, 1975.
- [**DufRiv**] D. Duffus & I. Rival, *Path length in the covering graph of a lattice*, Discrete Math. 19, (1977) 139-158.
- [**DvoHavLieLab**] T.Dvorak, I.Havel, J.M.Laborde & P.Liebl, *Generalized hypercubes and graph embedding with dilation*, Rostocker Mathematisches Kolloquium 31 (1988),101-107.
- [**Euler**] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (The solution of a problem relating to the geometry of position)*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), 128-140.

- [Foldes]** S. Foldes, *A characterization of hypercubes*, Discrete Math. 17, (1977) 155-159.
- [GreGle]** R. E. Greenwood & A. M. Gleason, *Combinatorial relation and chromatic graphs*, Canad. J. Math. 7, (1965) 1-7.
- [Lab1]** J.M.Laborde, *Une caractérisation locale du graphe du n-cube*, Journées de combinatoire, C.Benzaken éditeur, Grenoble 78, 198-200.
- [Lab2]** J.M.Laborde, *Le plongement dans l'hypercube des arbres d'au plus 16 sommets*, Rapport de Recherche de l'IMAG RR 755-I-, Juin 1989.
- [Lab3]** J.M.Laborde, *Un développement algébrique de l'algorithme d'exclusion et quelques problèmes géométriques en algèbre de Boole*, Thèse de Doctorat es sciences, U.S.T.M.G. - Grenoble , 1977.
- [LabRao]** J.M. Laborde & Rao-Hebbare, *Another characterization of hypercubes*, Discrete Math. 39 (1982), 161-166.
- [Madani1]** R.M. Madani, *A class of minimal (0, 2)-graphs: Generalized Shrikhande graphs*, Ars Combinatoria 29 C (1990), 21-26.
- [Madani2]** R.M. Madani, *A-graphes et S-chaînes dans le n-cube*, Thèse de Magister de l'USTHB, Fev. 1985.

- [**Madani3**] R.M. Madani, *Characterization of Laborde-Mulder graphs (extended odd graphs)*, Int. Conf. on Combinatorics, Keszthely, Jul. 19-24, 1993.
- [**Mol1**] M. Mollard, *Two characterizations of generalized hypercube*, Discrete Math. 93 (1991), 63-74.
- [**Mol2**] M. Mollard, *Quelques problèmes combinatoires sur l'hypercube et les graphes de Hamming*, Thèse de Doctorat es sciences, Univ. J. Fourier - Grenoble 1, Mai 1989.
- [**Mol3**] M. Mollard, *Les invariants du n-cube*, Thèse de 3ème cycle, USTMG, Grenoble, 1981.
- [**Mol4**] M. Mollard, *communication privée*.
- [**Mul1**] H.M. Mulder, *The interval function of a graph*, Mat. Cent. Amsterdam 1980.
- [**Mul2**] H.M. Mulder, *Interval regular graphs*, Discrete Math. 41 (1982), 253-269.
- [**Mul3**] H.M. Mulder, *$(0, \lambda)$ -graphs and n-cubes*, Discrete Math. 28 (1979), 179-188.
- [**Payan**] Ch. Payan, *On chromatic number of cube-like graphs*, Discrete Math. 103 (1992), 271-277.

[**Ryser**] H. J. Ryser, *Intersection properties of finite sets*, J. C. T. ser A,14 (1973), 79-92.

[**Seidel**] J. J. Seidel, *Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3*, Linear Algebra and Appl., 1 (1968), 281-298.

[**Seladji**] S. Seladji, *Algorithmes de graphes et programmation à objets*, D.E.A de Recherche Opérationnelle de l'U.J.F., Septembre 1993.

[**Shrikhande**] S. S. Shrikhande, *The uniqueness of the L_2 association scheme*, Ann. Math. Statist., 30 (1959), 781-798.

[**Sokolova**] M.Sokolova, *The chromatic number of extended odd graphs is four*, Cas. Pest. Mat. 112 (1987), 308-311.

[**WagBod**] K.Wagner & R.Bodendiek, *Graphentheorie I. Anwendungen auf Topologie, Gruppentheorie und Verbandstheorie*, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannh./Wien/Zurich 1989, 167-180.

TABLE DES MATIERES

<u>Chapitre 0:</u>	INTRODUCTION.....	5
<u>Chapitre I:</u>	DEFINITIONS ET NOTATIONS	13
	I.1. Notions de graphes	15
	I.2. Systèmes de parties et régularité.	20
<u>Chapitre II:</u>	QUELQUES PROPRIETES DE A-GRAPHERS	25
	II.1. Quasi-régularité.	28
	II.2. Les $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphes.	33
<u>Chapitre III:</u>		
	ETUDE DE QUELQUES CLASSES DE (0, 2)-GRAPHERS.....	37
	III.1. Rappels sur les $(0, \lambda)$ -graphes	39
	III.2. Une classe de $(0, 2)$ -graphes minimaux: Les graphes de Shrikhande généralisés	49
	III.3. Les graphes de Laborde-Mulder et du demi-cube.	60
<u>Chapitre IV:</u>	LES HYPERCUBES GENERALISES	71
	IV.1. Hypercubes généralisés	73
	IV.2. $(0, 2)$ -graphes et hypercubes généralisés.	82
	IV.3. Une classe de $(0, 2)$ -graphes non sommet-transitifs.....	84
<u>Chapitre V:</u>	EXISTENCE ET STRUCTURE LOCALE	93
	V.1. Structure locale et existence de $(0, 2)$ -graphe.....	95
	V.2. Une méthode de construction de $(0,2)$ -graphes.....	111
Problèmes	115
BIBLIOGRAPHIE	119

Résumé:

L'hypercube a suscité de nombreuses études engendrant une littérature très dense aussi bien en mathématiques discrètes qu'en informatique. Cet intérêt sans cesse croissant est largement motivé par l'utilisation de sa structure dans de nombreux domaines (architectures parallèles, transfert de l'information, décision multicritère, ...). Chacun peut s'étonner des raisons qui font que le cube soit le cube?. Sa simple définition peut déjà apporter une réponse quoique partielle à une telle question. Plusieurs propriétés spécifiques à l'hypercube ont, soit, défini de nouvelles classes de graphes, soit, fait ressortir le rôle remarquable joué par celui-ci dans plusieurs classes déjà existantes. Les $(0, 2)$ -graphes sont une généralisation naturelle de l'hypercube qui a la propriété d'être maximal dans cette classe. Ce travail a concerné quelques propriétés de ces graphes. Après un rappel au chapitre I des définitions et notations utilisées, la notion de A -graphes ($A \subset \mathbb{N}$) est définie au chapitre II. La classe des $\{2(n-2), 2(n-1)\}$ -graphes est ensuite abordée permettant la caractérisation de l'hyperoctaèdre comme celui d'ordre $2n$. L'objet du chapitre III, est l'étude de quelques classes de $(0, 2)$ -graphes. Nous donnons une preuve simple de la caractérisation de l'hypercube de dimension d comme graphe distance-régulier de vecteur d'intersection $\{d, d-1, \dots, 1; 1, 2, \dots, d\}$. Nous exhibons ensuite une classe minimale de $(0, 2)$ -graphes: les graphes de Shrikhande généralisés. Nous montrons que ce sont les seuls $(0, 2)$ -graphes pouvant être obtenus à partir de l'hypercube par rajout d'arêtes entre sommets à distance deux. Les graphes de Laborde-Mulder y sont ensuite caractérisés comme $(0, 2)$ -graphes de diamètre minimum $\lceil d/2 \rceil$ parmi ceux d'ordre 2^{d-1} et de degré d impair. Au chapitre IV, nous caractérisons parmi les hypercubes généralisés ceux qui sont des $(0, 2)$ -graphes. Nous présentons une classe de $(0, 2)$ -graphes non sommet-transitifs qui constituent un contre exemple à la conjecture de H.M. Mulder sur les graphes intervalle-réguliers. Dans un dernier chapitre, nous nous intéressons au problème d'existence de $(0, 2)$ -graphe d'un ordre donné. Nous présentons quelques résultats sur la structure locale des $(0, 2)$ -graphes. Nous donnons ensuite une condition nécessaire d'existence de tels graphes pour un ordre impair. Nous montrons enfin qu'il n'en existe pas pour un ordre 18, tout en présentant une méthode de construction de $(0, 2)$ -graphes.

MOTS CLES:

$(0, \lambda)$ -Graphes, Hypercubes, Extended Odd Graphs, Halfcubes, Diamètre, Sommets Antipodaux, Identification de sommets, Biplans, Configurations symétriques.