



**HAL**  
open science

# Étude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages

Denis Laxalde

► **To cite this version:**

Denis Laxalde. Étude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2007. Français. NNT: . tel-00344168

**HAL Id: tel-00344168**

**<https://theses.hal.science/tel-00344168>**

Submitted on 4 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**MÉMOIRE DE THÈSE**

PRÉSENTÉ POUR OBTENIR LE TITRE DE

**DOCTEUR**

DE

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL / INSA / ECL)

PAR

**Denis LAXALDE**

**ÉTUDE D'AMORTISSEURS NON-LINÉAIRES APPLIQUÉS  
AUX ROUES AUBAGÉES ET AUX SYSTÈMES MULTI-ÉTAGES**

Soutenu publiquement le 14 décembre 2007, devant le jury d'examen :

C. PIERRE, Professeur, Université McGill de Montréal	Président
A. BERLIOZ, Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse III	Rapporteur
J.-C. GOLINVAL, Professeur, Université de Liège	Rapporteur
J.-P. LOMBARD, Adjoint méthodes en mécanique, Snecma	Examineur
C. GIBERT, Ingénieur de Recherche, École Centrale de Lyon	Examineur
F. THOUVEREZ, Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse



## Résumé

Ce travail porte sur l'étude d'amortisseurs non-linéaires pour les roues aubagées de turbomachines. Les problèmes vibratoires sont de première importance pour les motoristes aéronautiques puisqu'ils sont à l'origine des phénomènes de fatigue et des risques de défaillance associés. L'usage de technologies d'amortissement est donc assez répandu et, parmi celles-ci, les dispositifs non-linéaires de type frottement tiennent une place importante. Ici, on s'intéresse à l'étude de frotteurs circulaires, appelés *joncs*, pour l'amortissement des structures monoblocs tournantes.

Des méthodologies numériques ont été développées dans cet objectif; il s'agit principalement de méthodes d'analyse non-linéaire dans le domaine fréquentiel adaptées aux structures à symétrie cyclique telles que celles qui nous intéressent. La modélisation des interfaces de contact et son influence sur ces méthodes sont aussi abordées. En outre, une approche modale, permettant l'étude des paramètres modaux (fréquence propre et taux d'amortissement) d'un système non-linéaire en fonction de son énergie (ou de son niveau vibratoire) est proposée. Cette méthode présente plusieurs avantages parmi lesquels la possibilité de quantifier, de façon directe, l'efficacité d'un dispositif d'amortissement non-linéaire ou encore la possibilité de traiter plusieurs types de problèmes (réponses libres ou forcées) de façon unifiée.

Ces méthodes sont ensuite appliquées à l'étude de deux types de dispositif d'amortissement. En premier lieu, l'amortissement par joncs de friction des structures monoblocs est étudié d'un point de vue numérique sur des structures industrielles. La phénoménologie du système non-linéaire est décrite en détails ce qui permet d'évaluer les performances de cette technologie ainsi que ses limites. Ensuite, l'étude d'une solution d'amortissement par *pompage énergétique* est proposée. Le principe du pompage énergétique consiste à utiliser un absorbeur de vibration de faible masse et de caractéristique fortement non-linéaire pour l'amortissement d'une structure principale (généralement linéaire). Ici, l'usage d'un absorbeur à caractéristique hystérétique est envisagé. Sur un système simple, les phénomènes de pompage énergétique – c'est à dire un transfert irréversible et unilatéral de l'énergie vibratoire du système principal vers l'absorbeur – sont étudiés à l'aide de méthodes numériques adaptées.

En parallèle des problématiques liées à l'amortissement, nous nous sommes intéressés à la modélisation et l'analyse dynamique des ensembles multi-étages de roues aubagées. Bien que récente, cette problématique est aujourd'hui majeure pour la conception des turbomachines et les méthodes existantes d'analyse en dynamique s'avèrent mal adaptées au problème. Une méthode innovante et efficace de modélisation en *symétrie cyclique multi-étage* est ici proposée; elle permet de modéliser un ensemble de structures cycliques par un secteur élémentaire de chaque étage et les analyses peuvent se faire par harmoniques spatiales. Une application non-linéaire de cette méthode est aussi proposée.

Enfin, les premiers résultats d'une étude expérimentale de caractérisation de l'amortissement par joncs de friction sont présentés. Le banc d'essais, sa conception et les choix technologiques sont présentés en détails. Suivent les premiers résultats expérimentaux obtenus lors de la phase de déverminage ainsi qu'une comparaison avec les prédictions de simulations numériques.

**Mots clés :** dynamique des structures, roues aubagées, turbomachines, analyse fréquentielle non-linéaire, frottement, multi-étage.



## Abstract

This study deals with non-linear damping solutions for turbomachinery bladed disks. Structural dynamics is a major issue in the aircraft engine industry since vibratory phenomena are responsible for fatigue and failure risks. The use of damping technologies is quite common and among these, the friction devices are probably the most popular. Here, we are interested in circular friction dampers, called *rings*, for single piece structures.

Numerical methods have been developed in this view; these are mainly non-linear frequency domain methods adapted to cyclic structures such as the ones we are interested in. The modelling of contact interfaces and its influence on these methods are also addressed. Furthermore, a modal approach to deal with non-linear system is proposed. It makes it possible to calculate the modal parameters (eigenfrequency and modal damping ratio) of a non-linear system as a function of its energy (or vibratory amplitude). This method has several advantages among which the capabilities to evaluate directly the performances of a damping device and to address several types of dynamical responses (forced or free) in a unified manner.

These methods are then applied to study two types of damping devices. First, the damping of friction rings for single piece structures is investigated numerically on industrial case studies. The phenomenological aspects are described in details which allows the performances and limits of this technology to be estimated. Second, a study of *energy pumping* is proposed. Energy pumping consists in using a small, strongly non-linear, vibration absorber for the damping of a main (generally linear) structure. Here, the use of an absorber with hysteretic behaviour is investigated. Illustrated on a simple phenomenological system, the energy pumping phenomena – that is to say, an irreversible one-way energy transfer from the main system to the absorber – are studied by means of dedicated numerical methods.

Apart from the damping issues, we were also interested in the modelling and analysis of multi-stage bladed disks systems. This issue is quite new but tends to become a major one for the design of turbomachinery. In particular, existing methods to analyse the dynamics of such systems are currently of limited use. An original and efficient modelling approach of *multi-stage cyclic symmetry* is here proposed; a multi-stage assembly of cyclic structures can be modelled using one elementary sector of each stage and analysis can be performed on separated spatial harmonics. A non-linear application of this method is also proposed.

Finally, the first results of an experimental study of damping using friction rings are presented. The test rig, its design and associated technological features are presented in details. Following some experimental results obtained during the preliminary studies, a comparison with predictions from numerical simulations is proposed.

**Key-words:** structural dynamics, bladed disks, turbomachinery, non-linear frequency domain analysis, friction, multi-stage.



# Préface

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre d'une convention CIFRE avec le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'École Centrale de Lyon et la société Snecma. Les recherches ont été menées, durant trois années, à parts sensiblement équivalentes au sein de l'équipe Dynamique des Structures et des Systèmes du LTDS et au sein du département Méthodologies et Outils de Développement de la Direction Technique de Snecma.

J'adresse en premier lieu mes profonds remerciements à M. Fabrice Thouverez, directeur scientifique de ces travaux, dont les conseils et les choix d'orientation ont toujours été d'une grande valeur. Je remercie aussi sincèrement M. Claude Gibert, ingénieur de recherche au LTDS ; notre collaboration sur les aspects expérimentaux de ces travaux, les échanges et les discussions que nous avons eues dans ce cadre ont été très formatrices pour moi.

Au sein de la société Snecma, je tiens tout d'abord à remercier M. Jean-Pierre Lombard, adjoint en Mécanique au département Méthodologies et Outils de Développement, pour son engagement dans mes travaux et son encadrement qui ont incontestablement alimenté ma motivation et stimulé ma créativité. Je remercie aussi M. François Garcin, adjoint en Mécanique aux Bureaux d'Études, pour les connaissances qu'il m'a transmises dans le domaine de la conception des compresseurs ; elles m'ont permis de toujours replacer mes recherches dans le contexte et les problématiques industriels.

Je remercie vivement M. Christophe Pierre, Professeur à l'Université McGill de Montréal, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury. Je remercie aussi sincèrement M. Alain Berlioz, Professeur à l'Université Paul Sabatier, Toulouse III et M. Jean-Claude Golinval, Professeur, Université de Liège pour avoir accepté de rapporter ce mémoire.

Je remercie le Centre National d'Études Spatiales et la société Volvo Aero pour m'avoir permis d'intégrer les travaux que j'ai réalisés sur le démonstrateur de turbine spatiale TPX dans ce mémoire.

Enfin, j'adresse mes profonds remerciements à ma famille, ma femme Marianne, mes parents et ma sœur dont les encouragements et l'affection ne sont pas étrangers à la réussite de ces travaux de recherche.





# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Contexte industriel et scientifique . . . . .	1
Cadre de l'étude . . . . .	2
<b>1 Dynamique des roues aubagées</b>	<b>5</b>
1.1 Généralités sur les turboréacteurs, les compresseurs et les roues aubagées . . . . .	5
1.2 Phénomènes vibratoires dans les roues aubagées . . . . .	7
1.2.1 Phénomènes aéroélastiques . . . . .	8
1.2.2 Excitations d'origine mécanique . . . . .	10
1.3 Modélisation des roues aubagées en symétrie cyclique . . . . .	11
1.3.1 Composantes cycliques . . . . .	11
1.3.2 Formulation d'un problème en base cyclique . . . . .	12
1.3.3 Conditions aux limites cycliques . . . . .	14
1.4 Formulation de problèmes structuraux en symétrie cyclique . . . . .	15
1.4.1 Analyse modale . . . . .	15
1.4.2 Réponse forcée . . . . .	16
1.5 Conception des roues aubagées . . . . .	19
1.5.1 Fatigue vibratoire . . . . .	19
1.5.2 Situation modale des roues aubagées et diagrammes de Campbell . . . . .	20
1.5.3 Modélisations et analyses aéromécaniques . . . . .	24
1.5.4 Désaccordage . . . . .	26
1.6 Aspects technologiques . . . . .	27
1.6.1 Technologies monoblocs . . . . .	27
1.6.2 Contrôle vibratoire . . . . .	28
1.7 Conclusions . . . . .	33
<b>2 Analyse non-linéaire fréquentielle</b>	<b>35</b>
2.1 Solutions périodiques d'un système non-linéaire non-autonome . . . . .	35
2.1.1 Rappel des principales approches pour le calcul des solutions périodiques . . . . .	36

2.1.2	Méthode de la balance harmonique . . . . .	37
2.1.3	Balance harmonique appliquée aux structures à symétrie cyclique . . . . .	38
2.1.4	Procédures de condensation dans le domaine fréquentiel . . . . .	40
2.2	Traitement des forces non-linéaires de contact et frottement . . . . .	41
2.2.1	Lois de contact et de frottement et régularisation . . . . .	42
2.2.2	Lagrangiens dynamiques . . . . .	46
2.2.3	Détermination optimale du nombre d'harmoniques . . . . .	50
2.3	Solutions périodiques d'un système non-linéaire autonome . . . . .	51
2.3.1	Notion de modes non-linéaires . . . . .	54
2.3.2	Méthodes d'analyse modale non-linéaire . . . . .	54
2.4	Modes complexes non-linéaires . . . . .	55
2.4.1	Notion de modes complexes non-linéaires . . . . .	56
2.4.2	Formulation fréquentielle du problème aux valeurs propres complexes . . . . .	57
2.4.3	Calcul pratique des modes complexes non-linéaires . . . . .	59
2.4.4	Application et validation de la méthode proposée . . . . .	61
2.4.5	Conclusions . . . . .	66
2.5	Approches fréquentielles généralisées, stabilité et régimes quasi-périodiques . . . . .	66
2.5.1	Approches multi-échelles dans les méthodes fréquentielles . . . . .	67
2.5.2	Stabilité des solutions périodiques . . . . .	68
2.5.3	Régimes quasi-périodiques . . . . .	69
2.6	Conclusions . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Amortissement par dispositifs non-linéaires</b>	<b>73</b>
3.1	Joncs de friction . . . . .	73
3.1.1	Modélisation . . . . .	73
3.1.2	Critères d'efficacité . . . . .	81
3.1.3	Comportement en réponse forcée . . . . .	83
3.1.4	Étude des caractéristiques modales non-linéaires . . . . .	90
3.1.5	Calculs aéroélastiques . . . . .	96
3.1.6	Conclusions et perspectives . . . . .	97
3.2	Pompage énergétique . . . . .	98
3.2.1	Modèle considéré et équations du mouvement . . . . .	98
3.2.2	Analyse modale et mise en évidence du pompage énergétique . . . . .	100
3.2.3	Comportement transitoire . . . . .	107
3.2.4	Réponse forcée . . . . .	107
3.2.5	Conclusions et perspectives . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Dynamique des ensembles multi-étages de roues aubagées</b>	<b>119</b>
4.1	Conception multi-étage . . . . .	119
4.1.1	Problématique et enjeux . . . . .	119
4.1.2	État de l'art des méthodes de simulation multi-étage . . . . .	120
4.2	Symétrie cyclique multi-étage . . . . .	120
4.2.1	Définition du couplage inter-étage . . . . .	121

4.2.2	Superposition . . . . .	124
4.2.3	Formulation d'un problème dynamique multi-étage . . . . .	124
4.3	Validation de la méthode proposée . . . . .	124
4.3.1	Corrélation modale . . . . .	125
4.3.2	Corrélation en réponses forcées . . . . .	127
4.4	Application industrielle . . . . .	129
4.4.1	Analyse modale . . . . .	129
4.4.2	Réponse forcée . . . . .	132
4.5	Analyse dynamique des ensembles multi-étage de roues aubagées munies de joncs de friction . . . . .	132
4.5.1	Problématique . . . . .	132
4.5.2	Réponse forcée multi-fréquentielle . . . . .	134
4.5.3	Applications . . . . .	138
4.6	Conclusions . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Étude expérimentale de l'amortissement par joncs de friction</b>	<b>145</b>
5.1	Objectifs de l'étude expérimentale . . . . .	145
5.1.1	Contexte et problématique . . . . .	145
5.1.2	Présentation de la structure d'étude et du champ d'investigation . . . . .	146
5.2	Méthodes expérimentales . . . . .	148
5.2.1	Description générale du banc d'essais . . . . .	148
5.2.2	Caractéristiques du dispositif d'excitation . . . . .	149
5.2.3	Instrumentation . . . . .	151
5.3	Résultats expérimentaux . . . . .	152
5.3.1	Calibration des données de mesure . . . . .	152
5.3.2	Essais préliminaires et validation des données mesurées . . . . .	154
5.3.3	Essais en rotation avec jonc . . . . .	156
5.3.4	Influence de la vitesse de rotation et du niveau d'excitation . . . . .	157
5.3.5	Efficacité des joncs de friction . . . . .	159
5.4	Comparaison avec la modélisation . . . . .	160
5.4.1	Modèle linéaire . . . . .	161
5.4.2	Identification expérimentale des paramètres modaux . . . . .	161
5.4.3	Estimation des paramètres de contact . . . . .	163
5.4.4	Corrélation des paramètres modaux . . . . .	164
5.5	Conclusions . . . . .	166
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>169</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>181</b>



# Introduction

## Contexte industriel et scientifique

Les roues aubagées de compresseurs ou de turbines comptent parmi les composants essentiels des turbomachines telles que les turboréacteurs, les turbines d'hélicoptères dans l'aéronautique ou encore les turbines terrestres dans le domaine de l'énergie. Leur dimensionnement constitue par conséquent une étape fondamentale de la conception de ce type de machines. Ce sont des structures géométriquement complexes et leur environnement de fonctionnement peut s'avérer hostile et d'une variabilité importante.

Dans le domaine très concurrentiel de l'aéronautique, les impératifs de réduction des coûts de développement et de fabrication mais aussi d'exploitation imposent les tendances des pratiques de conception. Ces tendances sont principalement l'augmentation des performances des machines et l'optimisation des structures mécaniques pour la réduction des masses. Au niveau des roues aubagées, ceci se traduit par une augmentation de leurs chargements, une diminution des marges de résistance mécanique et une complexification des phénomènes physiques. L'un des principaux aspects est l'introduction de plus en plus systématique de pièces monoblocs en particulier dans les parties tournantes ce qui permet une augmentation significative des rendements et une réduction importante des masses. Dans ce contexte, les problématiques vibratoires des turbomachines et en particulier des roues aubagées sont au cœur des préoccupations des motoristes.

La recherche scientifique et technologique dans ce domaine est très active et ne se restreint pas à la seule communauté des mécaniciens du fait de la grande pluridisciplinarité des phénomènes mis en jeu. À ce titre, nous pouvons citer trois axes principaux.

Le premier concerne la *compréhension des phénomènes*. Historiquement, les recherches sur ces aspects phénoménologiques étaient relativement cloisonnées (avec par exemple, l'aérodynamique d'un côté et la mécanique d'un autre), la tendance actuelle est d'avantage à la modélisation et à la conception multi-physique. Ainsi, par exemple les calculs aéroélastiques (couplage mécanique et aérodynamique) se démocratisent et les connaissances phénoménologiques s'enrichissent.

Le second aspect est plutôt *méthodologique* et dans le domaine de la mécanique, les efforts de recherche portent à la fois sur une meilleure représentativité des modélisations et sur la réduction des coûts de développement et en particulier des coûts de calcul. Les recherches et développements sont souvent initialement motivés par la quête d'une meilleure représentativité phénoménologique mais amènent souvent à des conceptions et des technologies innovantes. L'étude des phénomènes liés au désaccordage des aubages constitue un bon exemple à ce titre puisqu'elle a tout d'abord

suscité d'importants efforts de modélisation qui ont eux-mêmes, par la suite conduits à de nouvelles conceptions que l'on pourrait aujourd'hui qualifier de « robustes »...

Enfin, le dernier axe de recherche est *technologique* et une part importante concerne la maîtrise des niveaux vibratoires. Pour réduire ces niveaux, trois pistes principales sont généralement mentionnées. La première consiste à agir au niveau des excitations afin de réduire leurs effets sur la structure (brisure de symétrie des excitations). La seconde consiste à concevoir les structures afin d'optimiser les répartitions d'énergie vibratoire et de limiter les niveaux dans les zones critiques (optimisation structurale, introduction de désaccordage volontaire,...). Enfin, la troisième consiste à introduire des sources d'amortissement extérieures.

## Cadre de l'étude

La problématique générale de ce travail de thèse est la modélisation des roues aubagées de turbomachines et la maîtrise des niveaux vibratoires. Le chapitre 1 nous permet d'introduire cette problématique, d'en aborder les aspects scientifiques et technologiques et de la situer dans un contexte industriel. Nous nous sommes intéressés en particulier au cas des structures monoblocs et parmi les thématiques de recherche que nous venons d'évoquer nous pouvons distinguer principalement deux aspects : l'étude d'amortisseurs non-linéaires et la modélisation de systèmes multi-étages de roues aubagées.

Le premier aspect concerne donc l'introduction de sources d'amortissement non-linéaire pour les structures monoblocs tournantes. Outre les aspects technologiques, l'essentiel du travail de cette thématique a porté sur le développement de méthodologies de simulation et de calcul des régimes stationnaires pour le dimensionnement de ces amortisseurs. Pour cela nous avons fait le choix d'employer des méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel qui présentent l'avantage d'être adaptées à des systèmes de taille industrielle tout en présentant un bon compromis entre coûts de calcul et précision des résultats. Dans le chapitre 2, ces aspects méthodologiques sont détaillés. On pourra retenir en particulier l'introduction et le développement d'une méthode fréquentielle d'analyse modale non-linéaire pour les systèmes dissipatifs ; cette approche présente en particulier l'avantage de permettre de traiter plusieurs types de réponses (réponse forcée ou analyse de stabilité en réponse libre). En terme de modélisation, on retiendra le couplage entre les méthodes fréquentielles d'analyse non-linéaire et la réduction en symétrie cyclique ainsi qu'un état de l'art des formulations fréquentielles des problèmes de contact et de frottement. Une approche multi-échelle originale pour l'analyse de stabilité des régimes périodiques et la détermination des régimes quasi-périodiques y est aussi proposée.

Concernant les applications technologiques pour l'amortissement des roues aubagées, deux solutions ont été étudiées dans le chapitre 3. La première concerne l'utilisation d'un anneau de friction, appelé jonc, implanté sous les disques aubagés en dehors de la veine fluide et maintenu en contact par les effets centrifuges ; l'énergie vibratoire est dissipée lorsqu'un déplacement relatif apparaît entre les deux coeurs. Cette technologie était historiquement réservée à l'amortissement des labyrinthes d'étanchéité (entre les parties fixes et mobiles) mais semble par ailleurs bien adaptée aux structures monoblocs aubagés. Par ailleurs, dans d'autres domaines des dispositifs similaires

sont employés comme pour l'amortissement des engrenages ou encore afin de limiter les nuisances vibro-acoustiques comme dans les roues de trains ou dans les freins automobiles.

Ce chapitre 3 regroupe donc des applications numériques des méthodes développées au chapitre précédent. Sur différents cas industriels, nous analyserons les régimes forcé et libre d'un système composé d'un Disque Aubagé Monobloc muni d'un ou plusieurs joncs de friction et nous dégagerons quelques règles de conception.

Une seconde stratégie a été envisagée ; elle s'appuie sur des travaux récents sur le phénomène de pompage énergétique. L'idée est de réaliser un transfert d'énergie entre la structure principale à amortir et un *absorbeur de vibrations* (de faible masse) fortement non-linéaire couplé à la structure principale. Nous nous sommes en particulier intéressés à des non-linéarités hystérétiques et nous avons étudié, appliquées à un système de deux oscillateurs, des méthodes de modélisation et de résolution en réponse libre et forcée adaptées à ce problème.

Le chapitre 4 est dédié à la modélisation des ensembles multi-étages de roues aubagées. À l'heure actuelle, la conception des roues aubagées se fait à partir de modélisations étage par étage, voire d'un point de vue mécanique, roue par roue, de telle sorte que les effets des couplages avec les autres étages ne sont pas pris en compte. Or pour les machines récemment développées, les retours d'expérience ont mis en évidence des phénomènes dynamiques multi-étages impliquant des étages adjacents ou non qui n'étaient pas prévus lors de la conception. Ces phénomènes tendent à apparaître dans les zones de fonctionnement des moteurs du fait de l'évolution des technologies et de l'optimisation des conceptions. Ces aspects ne peuvent donc plus être occultés lors des processus de conception sous peine de risquer d'importantes et coûteuses re-conceptions à la suite de la découverte tardive de ces phénomènes dommageables. Pour répondre à cette problématique, nous avons proposé une extension de la méthode de modélisation en symétrie cyclique aux cas multi-étages. Cette approche inédite et originale s'avère particulièrement efficace et allie précision et faible coût numérique. En effet, la modélisation d'un secteur élémentaire de chaque étage et des analyses par nombre de diamètres nodaux permettent de représenter toute la dynamique du rotor. Les apports de cette nouvelle méthode en terme de modélisation et de compréhension des phénomènes sont notables.

Une application de cette méthode à un cas non-linéaire est ensuite proposée. Il s'agit d'étudier un phénomène de réponse forcée à des excitations multi-étages à des ordres et des fréquences différents. À l'aide d'une méthode fréquentielle multi-dimensionnelle, des régimes quasi-périodiques sont obtenus.

Le chapitre 5 de ce mémoire est dédié à une étude expérimentale visant à caractériser l'efficacité de l'amortissement par joncs de friction. Dans cet objectif un dispositif expérimental a été développé dans le cadre de cette thèse et au sein de la Plate-forme Machines Tournantes du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes. Il s'agit d'une évolution d'un banc d'essais existant et permettant des mesures en rotation et sous vide afin de s'affranchir des effets aérodynamiques. Un Disque Aubagé Monobloc industriel muni de joncs de friction a été intégré à ce banc et des moyens d'essais dédiés ont été développés et intégrés au dispositif existant. Les premiers résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre montrent un bon fonctionnement du banc d'essais et une validité des mesures en terme de reproductibilité en particulier. Une corrélation partielle avec les



modélisations théoriques développées dans ce travail de thèse est proposée et les résultats s'avèrent encourageants bien qu'ils méritent d'être consolidés.

## CHAPITRE 1

# Dynamique des roues aubagées

*Ce chapitre a pour objet d'introduire les problématiques de la modélisation et de la conception en dynamique des roues aubagées de turbomachines. Après une introduction générale sur les turboréacteurs, l'environnement de fonctionnement de ces organes sera décrit ; en particulier, les sources d'excitations et les phénomènes vibratoires dans les roues aubagées seront détaillés. Ensuite, les principaux aspects de la modélisation et de la conception des roues aubagées seront abordés. Quelques aspects technologiques seront enfin discutés ; tout d'abord concernant les roues aubagées et puis concernant les solutions de contrôle vibratoire.*

## 1.1 Généralités sur les turboréacteurs, les compresseurs et les roues aubagées

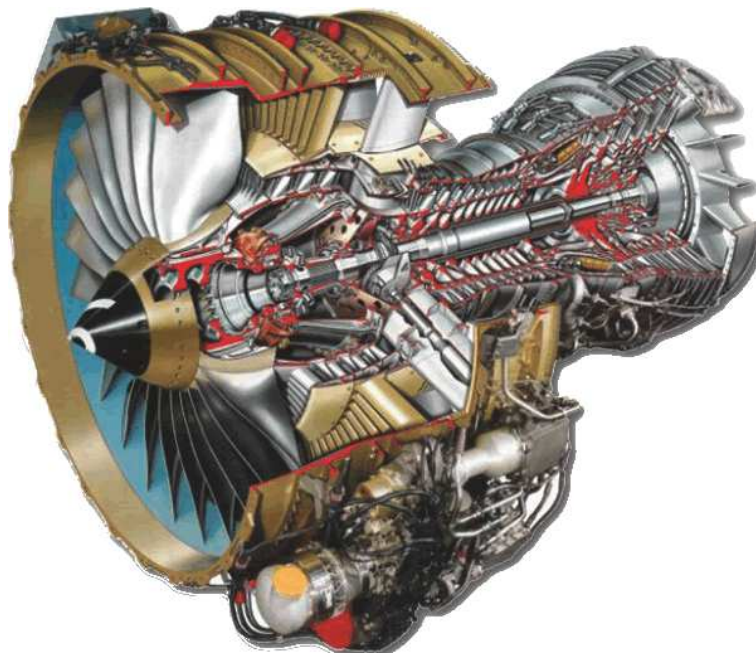
Les turboréacteurs ont pour fonction principale de fournir une force de poussée par réaction pour la propulsion des avions ; ils fournissent de façon plus générale toute l'énergie nécessaire au fonctionnement de ces avions. Si de nombreuses architectures existent, ces systèmes possèdent tous des composants communs comme les compresseurs, les turbines et la chambre de combustion. En pénétrant dans le moteur, le flux d'air passe dans le compresseur, où sa pression augmente (par augmentation de sa vitesse) avant d'arriver dans la chambre de combustion. L'ajout de carburant à l'air comprimé et la combustion du mélange augmente l'énergie et la température du fluide qui passe ensuite dans la turbine, où une partie de cette énergie est récupérée par détente pour l'entraînement du compresseur. L'air est finalement éjecté par la tuyère. On définit la poussée du réacteur comme la différence de débit massique (de vitesse, en pratique) entre les flux entrant et sortant.

On appelle *core* l'ensemble composé du compresseur, de la chambre de combustion et de la turbine ; on parle aussi de *générateur de gaz*. Il s'agit de la partie principale d'une turbomachine à laquelle peuvent s'ajouter d'autres composants comme une post-combustion (principalement pour les applications militaires), une soufflante, l'entrée d'air,...

Les performances d'un turboréacteur dépendent en grande partie de ses modules de compression et des taux de compression qu'ils peuvent assurer. Le rendement d'un compresseur est lui-même dépendant de sa vitesse de rotation qui reste technologiquement limitée (pour des raisons aérodynamiques en particulier). C'est pour cette raison que la majorité des turboréacteurs mo-

dernes intègrent maintenant plusieurs *cores* (généralement deux et parfois trois) entraînés à des vitesses différentes ; le *core* haute pression (HP) (ou générateur de gaz) est ainsi entouré d'un *core* basse pression (BP). On parle dans ce cas de moteurs *double core*.

Lorsqu'une soufflante est ajoutée, le flux d'air se divise en deux parties ; le flux primaire qui traverse les deux (ou trois) *cores* et le flux secondaire (externe) qui est directement expulsé. On parle de machines *double flux* et on définit le taux de dilution comme le rapport de volume entre les deux flux. Ce type de conception présente de nombreux avantages, en particulier dans l'aéronautique civile ; les principaux sont une réduction importante du bruit et de la consommation de carburant. Dans les moteurs modernes, le taux de dilution est de plus en plus important et la soufflante génère une grande part (de l'ordre de 75%) de la poussée. La figure 1.1 représente un moteur civil *double*

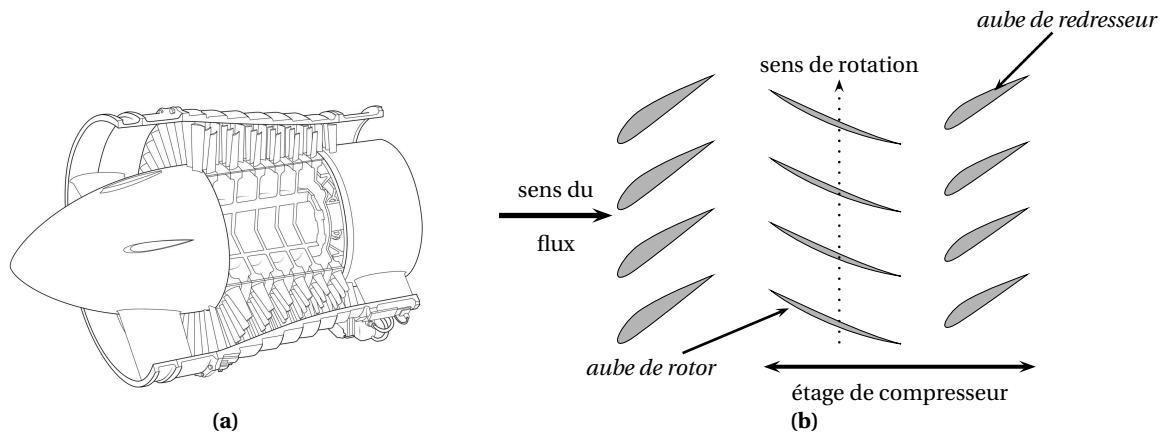


**FIG. 1.1** Le moteur CFM56-7 conçu par CFM International, entreprise commune entre les sociétés GE (USA) et Snecma (France)

*core – double flux*. Dans les turbopropulseurs, le flux secondaire n'est pas caréné et un réducteur permet à la soufflante de tourner à une vitesse plus faible.

Ces compresseurs (tout comme les turbines) présentent une architecture étagée ; c'est à dire qu'ils sont constitués d'une succession alternée d'aubages mobiles (dont l'ensemble forme le *rotor*) et d'aubages fixes (dont l'ensemble forme, avec les autres pièces fixes, le *stator*). On définit un étage comme l'ensemble consécutif d'un aubage mobile et d'un aubage fixe (appelé respectivement *redresseur* ou *distributeur* dans le cas d'un compresseur ou d'une turbine). Les parties tournantes, dans le cas des compresseurs axiaux, se présentent sous la forme d'un assemblage d'aubes montées sur un disque – on parle de *roues aubagées* ou de *disques aubagés*. Les compresseurs centrifuges (utilisés dans les turbines d'hélicoptère) ou les compresseurs axiaux-centrifuges (dans les

moteurs d'avion de poussée plus faible) possèdent aussi des rouets. Les figures 1.2 montrent d'une part un exemple de compresseur axial (figure 1.2a) et illustrent d'autre part son architecture étagée (figure 1.2b).



**FIG. 1.2** Architecture d'un compresseur axial; (a) exemple de compresseur axial (moteur Olympus BOI.1), (b) alternance d'aubages fixes et mobiles dans un compresseur.

Les roues aubagées sont donc des composants essentiels des compresseurs (et des turbines). Un exemple de Disque Aubagé Monobloc, dont la technologie sera discutée plus loin, est représenté en figure 1.3. Cette pièce constitue la première roue mobile d'un compresseur HP de moteur civil. Ces structures ont pour fonction principale de fournir le travail de compression, dans le cas des compresseurs, ou de récupérer l'énergie de la détente, dans le cas des turbines. Cependant, elles doivent aussi de façon plus générale résister mécaniquement à leur environnement de fonctionnement. La grande diversité des chargements qui sont appliqués sur ces pièces, qu'ils soient statiques (effets centrifuge, charge aérodynamique, thermomécanique...) ou dynamiques (forces aérodynamiques instationnaires, excitations mécaniques, ...), génèrent des phénomènes souvent complexes et, pour certains, encore difficilement explicables.

Dans la suite, les principales sources d'excitation et phénomènes vibratoires seront décrits.

## 1.2 Phénomènes vibratoires dans les roues aubagées

Les origines des phénomènes vibratoires dans les roues aubagées sont multiples et très souvent complexes. Les sources d'excitation à l'origine de ces phénomènes présentent de plus une variabilité importante et restent souvent difficiles à prédire. Dans cette section, les principaux phénomènes seront listés (selon leur importance) en commençant par les sources d'origine aérodynamique et en poursuivant par les sources de vibration d'origine plutôt mécanique.

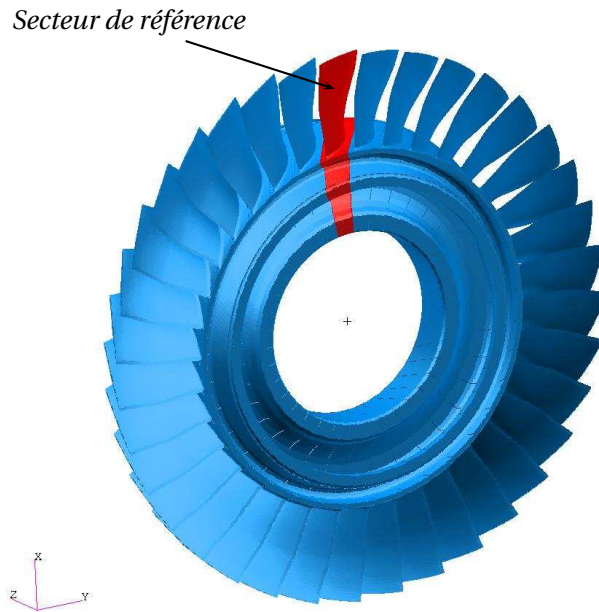


FIG. 1.3 *Disque Aubagé Monobloc de compresseur HP*

### 1.2.1 Phénomènes aéroélastiques

Dans le domaine de l'aéroélasticité des turbomachines, on distingue généralement deux enjeux principaux : les phénomènes de réponse forcée et les phénomènes auto-entretenus (Hall et al., 2006). Si les phénomènes de réponse forcée peuvent généralement être assez correctement prédits, il n'en est souvent pas de même pour les phénomènes auto-entretenus. Or ces derniers tendent à devenir de plus en plus importants du fait de l'évolution des conceptions et de l'augmentation des performances qui font que les marges de stabilité sont de plus en plus réduites. Dans cette section, nous présentons succinctement les principales problématiques de l'aéroélasticité appliquée aux turbomachines. On pourra par ailleurs se référer à la synthèse proposée par Marshall et Imregun (1996) ou encore aux manuels AGARD (AGA, 1987, 1988) pour plus de détails à la fois sur ces aspects phénoménologiques mais aussi sur les aspects méthodologiques qui seront abordés plus loin.

#### Réponse forcée

La réponse forcée des roues aubagées est générée par les excitations aérodynamiques dues aux variations des caractéristiques de l'écoulement fluide sur la circonférence ; ces variations étant elles-mêmes produites par les sillages des redresseurs en amont (figure 1.2b) et potentiellement par ceux des obstacles en aval ou toute autre dissymétrie dans la veine fluide. Du point de vue d'une aube mobile, ces excitations sont stationnaires dans le repère fixe et par conséquent, les fréquences d'excitation sont des multiples entiers de la fréquence de passage des aubes statoriques. On parle donc d'excitations synchrones de la vitesse de rotation du rotor. Dans ce cas, une aube mobile peut

entrer en résonance lorsque l'une de ses fréquences propres croise une harmonique de l'excitation. Ces phénomènes peuvent être prédits à l'aide d'un diagramme de Campbell.

Les excitations forcées sont de nos jours généralement bien prédites soit théoriquement soit expérimentalement et posent donc moins de problèmes que les phénomènes asynchrones et auto-entretenus.

### Phénomènes auto-entretenus et asynchrones

Les principaux autres phénomènes aéroélastiques sont décrits dans cette section. Ils diffèrent des précédents en plusieurs points. Tout d'abord, par opposition aux phénomènes de réponse forcée, les forces aérodynamiques sont ici liées aux vibrations des aubes ; on parle donc de phénomènes auto-entretenus. De plus, les fréquences vibrations ne sont généralement plus des multiples du régime de rotation : on parle ainsi de phénomènes *asynchrones*.

Ces phénomènes sont assez variés, souvent mal maîtrisés et difficiles à prendre en compte dans les processus de conception puisqu'ils n'apparaissent, dans le développement des moteurs, que lors des phases d'essais. Ils peuvent donc conduire à de coûteuses re-conceptions.

### Flottement

Le phénomène de flottement est une instabilité dynamique d'origine aérodynamique qui apparaît au voisinage d'une fréquence propre de la roue aubagée. La vibration des aubes mobiles et les forces aérodynamiques instationnaires s'auto-entretiennent.

Historiquement (avant les années 1960), on observe principalement des phénomènes de *flottement de décrochage* (AGA, 1988) ; c'est à dire un couplage (par le fluide) entre les modes de torsion et de flexion selon l'angle d'incidence de l'aube. Le problème était alors traité en augmentant les fréquences propres du mode de torsion soit par raidissement (et donc une augmentation de masse) soit par l'ajout de nageoire ou de couronne en tête d'aubes, en particulier pour les grandes aubes (soufflante ou compresseur BP). Cependant, l'évolution des performances aérodynamiques, l'optimisation des profils et la réduction des masses ont fait apparaître un autre type de flottement mettant en jeu la roue aubagée complète (et non plus les aubes indépendamment) et de façon asynchrone.

Lorsque les conditions *aéroélastiques* d'instabilité sont réunies, la moindre fluctuation dans l'environnement peut déclencher le flottement sans nécessairement de source extérieure d'excitation périodique.

D'un point de vue de la structure, le flottement se caractérise par un amortissement aérodynamique négatif supérieur (en valeur absolue) à l'amortissement structural de telle sorte que l'énergie apportée par le fluide est supérieure à celle dissipée dans la structure.

Ce phénomène est très dangereux pour les structures puisque les niveaux vibratoires sont incontrôlables à moins de sortir de la zone d'instabilité (généralement en modifiant le point de fonctionnement du moteur) et fait l'objet de nombreuses recherches, principalement du point de vue aérodynamique (Hall et al., 2006).

Dans ce mémoire, nous présentons (section 2.4) une stratégie d'analyse permettant de prédire la marge au flottement apportée par des dispositifs d'amortissement non-linéaire ainsi que les zones de stabilité et les cycles limites.

### **Instabilités d'écoulement tournant**

La principale source d'instabilité d'écoulement tournant est le phénomène de décollement tournant. Il se caractérise par la présence de poches de fluide décollé qui se déplacent à une vitesse inférieure à celle du rotor. Il en résulte généralement de fortes différences de pression entre les différentes aubes d'une roue mobile ce qui génère de forts niveaux de vibration. Ces instabilités aérodynamiques tournantes qui peuvent parfois être à l'origine d'instabilités plus importantes comme le pompage.

### **Résonances acoustiques**

Les phénomènes de résonances acoustiques engendrent des fluctuations de pression qui se propagent à la vitesse du son (dans le fluide) et peuvent générer des niveaux vibratoires importants dans les structures mécaniques. Il s'agit d'un phénomène aéroélastique assez méconnu bien qu'il soit communément admis que son origine est principalement aérodynamique. Dans les turbomachines, ces résonances acoustiques, aussi appelées *modes de fluide*, sont excitées par des décollements tourbillonnaires dans les aubages.

### **Vibrations asynchrones**

D'autres phénomènes asynchrones de vibration, qui ne rentrent pas dans les catégories précédentes, peuvent apparaître, en particulier sur les premiers étages de compresseurs haute pression et parfois sur les soufflantes. Ces phénomènes, regroupés sous l'appellation « vibrations asynchrones » (*Non-Synchronous Vibration* en anglais), possèdent quelques similitudes avec le flottement bien qu'aucune instabilité ne soit observée. On suppose généralement que la source de ces phénomènes n'est pas liée à la vibration des aubes. Ils sont encore mal compris et difficilement prévisibles mais font l'objet de nombreuses recherches (Baumgartner et al., 1995; Kielb et al., 2003).

## **1.2.2 Excitations d'origine mécanique**

Les principales sources de phénomènes vibratoires dans les turbomachines sont les interactions aéroélastiques. Il existe cependant des sources d'origine mécanique qui n'apparaissent généralement pas lors du fonctionnement normal du moteur mais plus en cas de fonctionnement accidentel.

Deux des principaux critères de certification des turbomachines aéronautiques sont l'ingestion de corps étrangers de taille plus ou moins importante (oiseaux, glace, ...) lors des phases de décollage ou atterrissage principalement et la perte d'une aube mobile. Ces deux cas génèrent des phénomènes transitoires (chocs) très violents et le second génère en plus des balourds mécaniques de grande ampleur.

D'autre part, les phénomènes de contact rotor-stator prennent une importance grandissante du fait de la réduction des jeux aubes-carter. Ils restent encore difficiles à prédire et sont à l'origine de divers phénomènes vibratoires dans les roues aubagées associés à des niveaux souvent importants. De nombreuses études portent sur les divers aspects de ce sujet comme l'interaction modale (Legend et al., 2006) ou les phénomènes d'instabilités (Lesaffre et al., 2007) mais aussi des caractérisations expérimentales (Padova et al., 2006)...



### 1.3 Modélisation des roues aubagées en symétrie cyclique

La modélisation des roues aubagées se base en grande partie sur les propriétés de *symétrie cyclique* de ces structures. Une structure répétitive circulaire (ou structure à symétrie cyclique) est constituée d'un ensemble de sous-structures identiques (appelés *secteurs*) qui se referme sur lui-même. La figure 1.3 montre par exemple une roue aubagée complète ainsi que son secteur de référence. Outre les roues aubagées, il existe de nombreux exemples de structures répétitives circulaires comme par exemple les engrenages.

L'étude de ce type de structures repose sur les théories de propagation des ondes dans les milieux périodiques ainsi que sur la théorie des groupes (Valid et Ohayon, 1985). Cette propriété de symétrie cyclique permet en particulier d'analyser ces structures à l'aide d'une représentation mixte physique et ondulatoire. En effet, la modélisation d'un secteur de référence muni de conditions aux limites représentatives du type d'onde à étudier permet de représenter exactement le comportement de la structure complète. Ce type de modélisation a été détaillée par plusieurs auteurs, on peut citer en particulier Thomas (1979) et Wildheim (1979, 1981) dont les travaux font référence ou encore Henry (1980). Enfin, les notices de codes éléments finis peuvent aussi se révéler intéressantes dans ce domaine.

#### 1.3.1 Composantes cycliques

Considérons une structure cyclique comprenant  $N$  secteurs de mesure angulaire  $\alpha = 2\pi/N$  et un vecteur  $\mathbf{u}$  représentant une grandeur physique (déplacement, vitesse, force, ...) sur cette structure. La restriction de cette grandeur sur le secteur  $n$  sera notée  $\mathbf{u}_n$  avec la condition de périodicité cyclique,

$$\mathbf{u}_{N+n} = \mathbf{u}_n, \forall n \in [0, 1, \dots, N-1] \quad (1.1)$$

Le vecteur  $\mathbf{u}$ , sous cette forme discrète, peut être représenté par une superposition de fonctions harmoniques :

$$\mathbf{u}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{\mathbf{u}}^k e^{ink\alpha} \quad (1.2)$$

L'amplitude,  $\underline{\mathbf{u}}^k$ , de chaque harmonique est appelée *composante cyclique* d'ordre  $k$  et est définie sur le secteur de référence (celui d'indice 0 généralement). Pour l'harmonique d'ordre  $k$ , le déphasage inter-secteur est fixe et égal à  $k\alpha$ .

Les composantes cycliques  $\underline{\mathbf{u}}^k$  sont définies en fonction du vecteur physique  $\mathbf{u}$  par la relation suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}^k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j e^{-ij k \alpha} \quad (1.3)$$

Les transformations (1.2) et (1.3) correspondent à des transformées de Fourier discrètes et les représentations physique,  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_n, n = [0, \dots, N-1]\}$ , et cyclique,  $\underline{\mathbf{u}} = \{\underline{\mathbf{u}}^k, k = [0, \dots, N-1]\}$  sont équivalentes.

Le passage de l'une à l'autre se fait à l'aide d'une matrice de transformée de Fourier discrète :

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \underline{\mathbf{u}} \quad (1.4a)$$



avec

$$\mathbf{E} = \{ \mathbf{e}^k, k = 0 \dots N-1 \} \text{ avec } \{ \mathbf{e}^k \}_j = e^{i j k \alpha} \quad (1.4b)$$

De plus, lorsque les grandeurs considérées sont réelles, la définition des composantes cycliques peut se faire à l'aide de séries trigonométriques réelles :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}^0 + \sum_{k=1}^K \mathbf{u}^{c,k} \cos(n-1)k\alpha + \mathbf{u}^{s,k} \sin(n-1)k\alpha + \mathbf{u}^{N/2} (-1)^{n-1} \quad (1.5)$$

avec,

$$K = \begin{cases} N/2 - 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ (N-1)/2 & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.6)$$

Réciproquement ces composantes réelles sont définies comme suit,

$$\tilde{\mathbf{u}}^0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \quad (1.7a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{c,k} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \cos k j \alpha \quad (1.7b)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{s,k} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \sin k j \alpha \quad (1.7c)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j (-1)^j \quad (1.7d)$$

sachant que le terme défini par l'équation (1.7d) et le dernier terme de l'équation (1.5) n'existent que si N est pair.

De même, on peut définir la matrice de transformée de Fourier discrète réelle :

$$\mathbf{u} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{u}} \quad (1.8a)$$

avec

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \cos \alpha & \sin \alpha & \cos 2\alpha & \dots & \sin K\alpha & -1 \\ 1 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 4\alpha & \dots & \sin 2K\alpha & 1 \\ \vdots & & & \dots & & & \vdots \\ 1 & \cos(N-1)\alpha & \sin(N-1)\alpha & \cos(N-1)2\alpha & \dots & \sin(N-1)K\alpha & -1 \end{pmatrix} \quad (1.8b)$$

Dans la suite, la formulation réelle sera préférée.

Ces développements montrent que toute grandeur physique associée à une structure cyclique peut être représentée de façon exacte à l'aide de composantes cycliques définies sur le secteur de référence et d'un indice harmonique.

### 1.3.2 Formulation d'un problème en base cyclique

Après ces définitions, nous allons voir comment passer d'une représentation mathématique en base physique, sur la structure cyclique complète, à une représentation en base cyclique, c'est à dire un ensemble de sous-problèmes définis en composantes cycliques et sur un secteur de référence.

Considérons pour cela, une forme énergétique (quadratique) définie à l'aide de la variable  $\mathbf{u}$  en base physique et par une matrice  $\mathbf{Z}$  :

$$\mathcal{E} = \mathbf{u}^T \mathbf{Z} \mathbf{u} \quad (1.9)$$

Dans un problème structural, cette forme énergétique pourra représenter l'énergie cinétique si  $\mathbf{u}$  représente le vecteur vitesse et  $\mathbf{Z}$  la matrice de masse ou encore l'énergie potentielle si  $\mathbf{u}$  représente le vecteur déplacement et  $\mathbf{Z}$  la matrice de raideur...

Dans un repère cylindrique  $(r, \theta, z)$  où l'axe  $z$  coïncide avec l'axe de symétrie de la structure, et puisque les secteurs sont identiques, la matrice  $\mathbf{Z}$  est composée de  $N$  blocs identiques  $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_0$  quelque soit  $n \in [0, \dots, N-1]$ . La forme énergétique (1.9) peut s'écrire, en composantes physiques :

$$\mathcal{E} = \mathbf{u}^T \mathbf{Z} \mathbf{u} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{u}_n^T \mathbf{Z}_0 \mathbf{u}_n \quad (1.10a)$$

Étant invariante aux transformations, cette forme énergétique peut être reformulée en base cyclique en utilisant la relation (1.8a) :

$$\mathcal{E} = \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}^T \mathbf{Z} \mathbf{F} \underline{\mathbf{u}} \quad (1.10b)$$

En tenant compte des relations d'orthogonalité des fonctions trigonométriques (selon les notations réelles) :

$$\sum_{n=1}^N \cos p\alpha \cos q\alpha = \frac{N}{2} \delta_{p,q} \text{ et } \sum_{n=1}^N \sin p\alpha \sin q\alpha = \frac{N}{2} \delta_{p,q} \quad (1.11a)$$

$$\sum_{n=1}^N \cos p\alpha \sin q\alpha = 0 \quad (1.11b)$$

la matrice  $\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}^T \mathbf{Z} \mathbf{F}$  est diagonale par blocs,

$$\underline{\mathbf{Z}} = \text{diag}(\underline{\mathbf{z}}^k, k \in [0, N/2]) \text{ avec } \begin{cases} \underline{\mathbf{z}}^k = N \mathbf{Z}_0 & \text{si } k = 0, N/2 \\ \underline{\mathbf{z}}^k = \frac{N}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} & \text{si } 1 < k < N/2 \end{cases} \quad (1.12)$$

soit,

$$\underline{\mathbf{Z}} = \text{diag}(N, N/2, \dots, N/2, N) \otimes \mathbf{Z}_0 \quad (1.13)$$

Il en résulte que la forme énergétique précédente se définit comme une somme de formes énergétiques définies l'aide du secteur de référence uniquement et en composantes cycliques pour tous les nombres de diamètres nodaux :

$$\mathcal{E} = \sum_{k=0}^K \mathcal{E}^k, \text{ avec } \mathcal{E}^k = \begin{cases} N \mathbf{u}^{kT} \mathbf{Z}_0 \mathbf{u}^k & \text{si } k = 0, N/2 \\ \frac{N}{2} \mathbf{u}^{kT} \mathbf{Z}_0 \mathbf{u}^k & \text{si } 1 < k < N/2 \end{cases} \quad (1.14)$$

Chacune de ces formes énergétiques en base cyclique forme un problème indépendant qu'il convient de compléter en définissant, pour le secteur de référence, les conditions aux limites avec les secteurs adjacents.

### 1.3.3 Conditions aux limites cycliques

La liaison entre les secteurs se fait selon les frontières inter-secteurs. Le vecteur déplacement  $\mathbf{u}_0$  du secteur référence en composantes physiques est dans un premier temps partitionné selon ses degrés de liberté de frontières de *droite* et de *gauche* et ses degrés de liberté *internes* :

$$\mathbf{u}_0 = \left[ g\mathbf{u}_0, d\mathbf{u}_0, i\mathbf{u}_0 \right]^T \quad (1.15)$$

Les frontières d'un secteur sont illustrées sur l'exemple de la figure 1.4. Les conditions aux limites

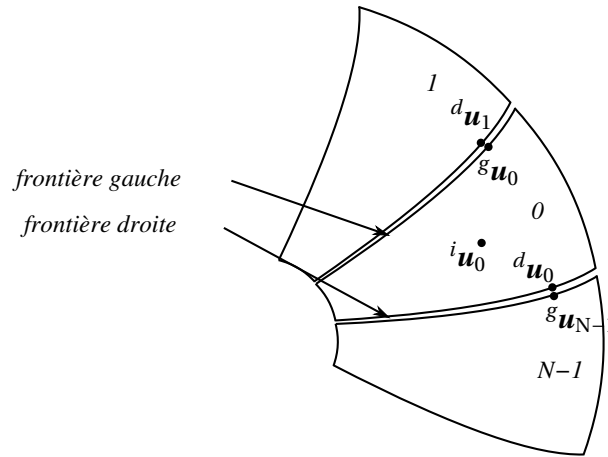


FIG. 1.4 Illustration des frontières d'un secteur sur une géométrie cyclique simple.

de ce secteur de référence consistent simplement en une compatibilité des déplacements aux interfaces avec les secteurs voisins,

$$g\mathbf{u}_1 = d\mathbf{u}_2 \quad (1.16a)$$

$$d\mathbf{u}_1 = g\mathbf{u}_N \quad (1.16b)$$

ce qui, en tenant compte de la relation (1.2), peut s'écrire en base cyclique à l'ordre  $k$ ,

$$\tilde{g}\mathbf{u}^k = \tilde{d}\mathbf{u}^k e^{-ik\alpha} \quad (1.17a)$$

$$\tilde{d}\mathbf{u}^k = \tilde{g}\mathbf{u}^k e^{-i(N-1)k\alpha} \quad (1.17b)$$

Il apparaît, de part ces relations de propagation, que les degrés de liberté de gauche sont dépendants de ceux de droite.

On choisit généralement d'utiliser la relation (1.17a) qui peut s'écrire en formalisme réel :

– pour  $k = 0$

$$g\mathbf{u}^0 = d\mathbf{u}^0 \quad (1.18a)$$

– pour  $1 < k < K$ ,

$$\begin{bmatrix} g\mathbf{u}^{k,c} \\ g\mathbf{u}^{k,s} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u}^{k,c} \\ d\mathbf{u}^{k,s} \end{bmatrix} \quad (1.18b)$$

– pour  $k = N/2$ ,

$$\underline{g}^0 = -\underline{d}^0 \quad (1.18c)$$

Ces relations de dépendance constituent les contraintes cycliques et leur prise en compte dans les formulations énergétiques du paragraphe précédent détermine parfaitement le problème défini en composantes cycliques.

## 1.4 Formulation de problèmes structuraux en symétrie cyclique

Considérons un problème dynamique discret sur une structure cyclique en base physique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (1.19)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices structurelles de masse, d'amortissement et de raideur;  $\mathbf{u}(t)$  est le vecteur déplacements et  $\mathbf{p}$  est un terme d'excitation extérieure.

D'après les résultats précédents, les grandeurs  $\mathbf{u}$  ou  $\mathbf{p}$  peuvent être définis en composantes cycliques à l'aide des relations (1.2) ou (1.5) et le problème (1.19) reformulé dans cette base cyclique en un ensemble de sous problèmes indépendants pour chaque nombre de diamètres nodaux  $k$  :

$$\underline{\mathbf{M}}^k \underline{\ddot{u}}^k(t) + \underline{\mathbf{C}}^k \underline{\dot{u}}^k(t) + \underline{\mathbf{K}}^k \underline{u}^k(t) = \underline{\mathbf{p}}^k(t) \quad (1.20)$$

Pour chaque harmonique, il faut ajouter à ces sous-problèmes la définition des conditions limites donnée en équations (1.18).

Après résolution de chacun de ces sous-problèmes, la réponse complète est obtenue par superposition des harmoniques cycliques à l'aide des relations (1.2) ou (1.5). Nous allons dans la suite détailler les cas de l'analyse modale puis de la réponse forcée.

### 1.4.1 Analyse modale

On cherche maintenant à résoudre le problème aux valeurs propres  $(\omega, \mathbf{X})$  suivant :

$$\left( \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1.21)$$

Ce problème peut être formulé en composantes cycliques et décomposé en  $N/2$  (ou  $(N-1)/2$  si  $N$  est impair) sous-problèmes aux valeurs propres définis sur le secteur de référence :

$$\left( \underline{\mathbf{K}}^k - \omega^2 \underline{\mathbf{M}}^k \right) \underline{\mathbf{X}}^k = \mathbf{0} \quad (1.22)$$

Suivant les ordres des harmoniques, on distingue deux types de solutions : les solutions dégénérées, dont les fréquences propres vont par paires, et les solutions non dégénérées. Les solutions non dégénérées correspondent à l'indice harmonique 0 (tous les secteurs vibrent en phase) et à l'indice harmonique  $N/2$  si  $N$  est pair (tous les secteurs vibrent en opposition de phase les uns par rapport aux autres). Les autres solutions sont dégénérées; c'est à dire que l'espace des solutions est double et qu'à chaque fréquence propre  $\omega_k$ , on associe deux vecteurs propres orthogonaux. Ces deux vecteurs forment une base pour ces modes de telle sorte que toute combinaison linéaire de ces vecteurs

est aussi un vecteur propre. Ensuite, la restitution des vecteurs propres sur la structure complète se fait à l'aide des relations (1.5).

Des exemples de déformées modales sur un Disque Aubagé Monobloc de 36 secteurs sont représentés en figures 1.5 (modes non dégénérés) et 1.6 (modes dégénérés). Les diamètres nodaux sont clairement identifiables, surtout pour les faibles nombres de diamètres. On remarquera d'autre part l'existence de cercles nodaux pour les modes à 0 diamètre.

On voit ainsi que les harmoniques à considérer dans une analyse modale sont celles comprises entre 0 et  $K$  (équation (1.6)). Pour chacune d'elle, les déformées propres présentent des lignes nodales appelées *diamètres nodaux* et il est d'usage de classer les modes par nombre de diamètres nodaux dans un diagramme fréquences / nombre de diamètres nodaux. Au delà de l'ordre  $K$ , on peut associer à tout nombre d'onde  $k$  le nombre de diamètres nodaux  $N - k$ ; ceci correspond au repliement de spectre de la série de Fourier discrète.

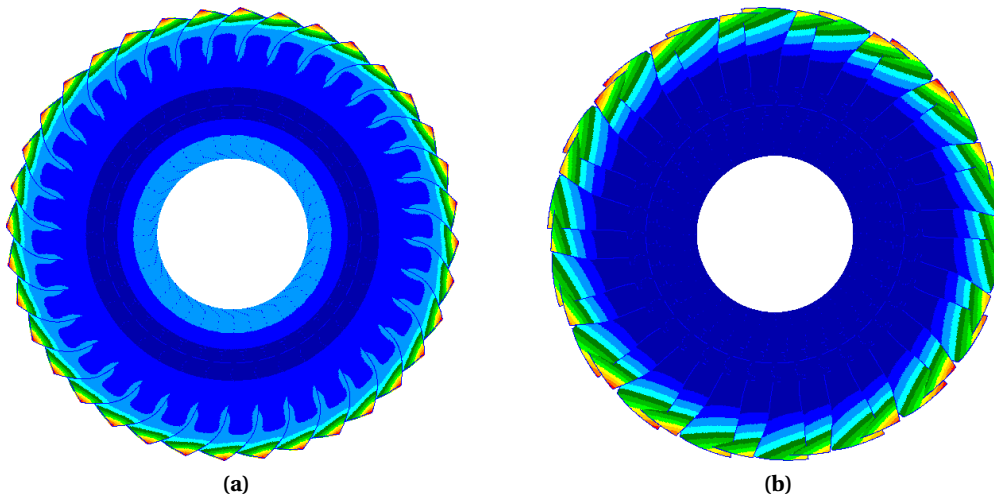


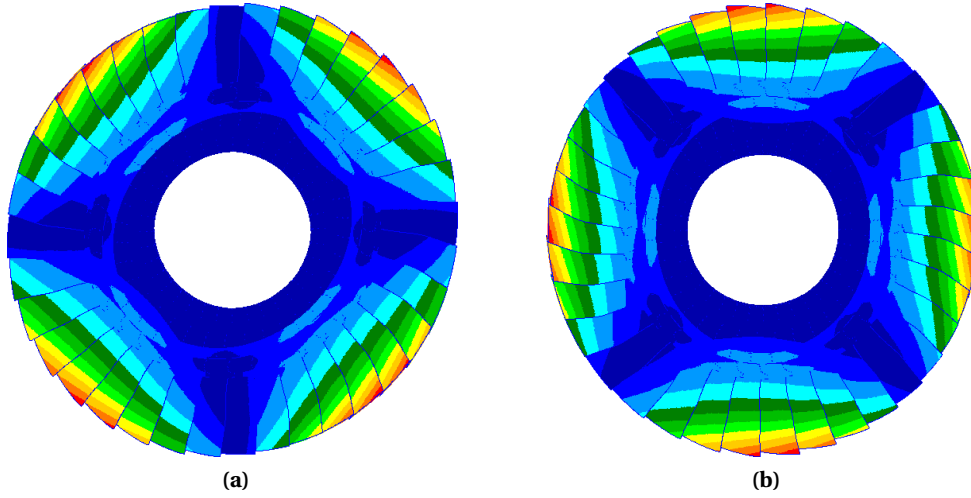
FIG. 1.5 Exemples de modes à diamètres nodaux non dégénérés; (a) 0 diamètre et (b) 18 diamètres.

### 1.4.2 Réponse forcée

Les problèmes de réponse forcée peuvent soit être traités à l'aide d'une superposition modale soit par une approche directe. Dans l'approche directe, l'excitation (fournie en base physique) est préalablement décomposée dans la base cyclique, l'analyse se fait ensuite pour chaque harmonique et la réponse globale peut ensuite être recomposée par superposition (à l'aide de la relation (1.5)). Deux types principaux d'excitation seront distingués : les excitations tournantes et les excitations fixes.

#### Cas des excitations tournantes

Sur une structure cyclique composée de  $N$  secteurs, une force est dite tournante s'il existe  $M$  groupes d'un nombre égal de secteurs tels que cette force se répète en *amplitude* tous les  $N/M$  secteurs. Considérons donc une distribution de force tournante d'ordre  $k$  (nombre d'onde selon



**FIG. 1.6** Exemples de modes à diamètres nodaux dégénérés; (a) et (b) deux modes à 2 diamètres orthogonaux.

la circonférence) et périodique de pulsation fondamentale  $\omega = k\Omega$  (si  $\Omega$  est la vitesse de rotation de l'onde). Thomas (1979) a montré qu'une telle distribution se décompose en  $N/M$  harmoniques cycliques tournantes définies par leur amplitude sur le secteur de référence et leur nombre d'onde  $k_p$  (lié au nombre d'onde fondamental  $k$ ). Ainsi, pour l'harmonique cyclique d'ordre  $p$  et de nombre d'onde  $k_p$ , la relation de propagation suivante permet d'exprimer les forces sur le secteur  $j$  (de position angulaire  $\theta_j = 2\pi j/N$ ) en fonction de celles sur le secteur de référence 0,

$$\mathbf{p}_j(t) = \mathbf{p}_0(\omega t - k_p \theta_j) \quad (1.23)$$

Cette harmonique cyclique étant périodique, elle peut être décomposée en une série de Fourier (tronquée à  $N_h$  harmoniques) dont les coefficients sont définis sur le secteur de référence :

$$\mathbf{p}_0(t) = \sum_{n=1}^{N_h} \mathbf{P}^{n,c} \cos(n\omega t) + \mathbf{P}^{n,s} \sin(n\omega t) \quad (1.24a)$$

et sur un secteur quelconque en tenant compte de la propagation :

$$\mathbf{p}_j(t) = \sum_{n=1}^{N_h} \mathbf{P}^{n,c} \cos(n(\omega t - k_p \theta_j)) + \mathbf{P}^{n,s} \sin(n(\omega t - k_p \theta_j)) \quad (1.24b)$$

Chaque harmonique temporelle de l'excitation (ou plus précisément de l'harmonique cyclique fondamentale de l'excitation ici) est définie par les composantes sur le secteur de référence,  $\mathbf{P}^{n,c}$  et  $\mathbf{P}^{n,s}$ .

Le système considéré étant linéaire, le principe de superposition s'applique et chaque composante de la force tournante,

$$\mathbf{p}_j^n(t) = \mathbf{P}^{n,c} \cos(n(\omega t - k_p \theta_j)) + \mathbf{P}^{n,s} \sin(n(\omega t - k_p \theta_j)) \quad (1.25)$$

peut être étudiée séparément.

Cette composante présente une périodicité spatiale de nombre d'onde  $n \times k_p$  et une pulsation de

$n\omega$ . La réponse à cette harmonique s'écrit naturellement pour tout secteur  $j$  :

$$\mathbf{u}_j^n(t) = \mathbf{U}_j^{n,c} \cos(n\omega t) + \mathbf{U}_j^{n,s} \sin(n\omega t) \quad (1.26a)$$

et en supposant que la réponse est aussi une onde tournante définie par une relation similaire à (1.24b), il vient :

$$\mathbf{u}_j^n(t) = \mathbf{U}_0^{n,c} \cos(n(\omega t - k_p \theta_j)) + \mathbf{U}_0^{n,s} \sin(n(\omega t - k_p \theta_j)) \quad (1.26b)$$

ce qui permet de relier les coefficients du secteur  $j$ ,  $\mathbf{U}_j^{n,c}$  et  $\mathbf{U}_j^{n,s}$  aux coefficients du secteur 0 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_j^{n,c} \\ \mathbf{U}_j^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nk_p \theta_j & -\sin nk_p \theta_j \\ \sin nk_p \theta_j & \cos nk_p \theta_j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0^{n,c} \\ \mathbf{U}_0^{n,s} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Finalement le problème dynamique (1.19) peut se réduire, pour chaque harmonique cyclique (ici la fondamentale) et chaque harmonique temporelle (ici la  $n$ -ème) à un problème dynamique fréquentiel exprimé sur le secteur de référence :

$$\mathbf{Z}(n\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n,c} \\ \mathbf{U}^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{n,c} \\ \mathbf{P}^{n,s} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

où  $\mathbf{Z}(n\omega)$  est la matrice de rigidité dynamique (du secteur de référence) pour l'harmonique  $n$  :

$$\mathbf{Z}(n\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_0 - (n\omega)^2 \mathbf{M}_0 & n\omega \mathbf{C}_0 \\ -n\omega \mathbf{C}_0 & \mathbf{K}_0 - (n\omega)^2 \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Les conditions aux limites cycliques se définissent, comme dans le paragraphe précédent, à partir de la relation (1.27) :

$$\begin{bmatrix} g\mathbf{U}^{n,c} \\ g\mathbf{U}^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nk_p \alpha & -\sin nk_p \alpha \\ \sin nk_p \alpha & \cos nk_p \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{U}^{n,c} \\ d\mathbf{U}^{n,s} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

et permettent d'exprimer les degrés de liberté de la partie gauche en fonction de ceux de la partie droite.

La réponse finale du secteur  $j$  est obtenue par superposition de toutes les harmoniques :

$$\mathbf{u}_j(t) = \sum_{p=1}^{N/M} \sum_{n=1}^{N_h} \mathbf{U}_p^{n,c} \cos(n(\omega t - k_p \theta_j)) + \mathbf{U}_p^{n,s} \sin(n(\omega t - k_p \theta_j)) \quad (1.31)$$

**Remarques :** (a) le cas d'une onde *avance* (par rapport à la numérotation des secteurs) est ici considéré mais une onde *rétrograde* peut être représentée en remplaçant le signe  $-$  par un  $+$  dans la relation (1.23) et dans les suivantes; (b) les coefficients de l'harmonique temporelle d'ordre  $n$  se confondent avec ceux de l'harmonique cyclique d'ordre  $nk_p$ .

### Cas des excitations fixes

Lorsque l'excitation est fixe, elle se définit comme le produit d'une fonction spatiale et d'une fonction temporelle.

$$\mathbf{p}(\theta, t) = \mathbf{p}_s(\theta) p_t(t) \quad (1.32)$$

Dans ce cas, si le vecteur  $p_s$  présente une périodicité spatiale, c'est à dire que la distribution spatiale de force se répète à l'identique tous les  $N/L$  secteurs, il peut être décomposé en  $N/L$  composantes cycliques. Chacune de ces composantes est définie par son amplitude sur le secteur de référence et un nombre d'onde. Dans le cas des excitations fixes, l'aspect temporel est indépendant de la décomposition spatiale, alors que dans le cas tournant il y a couplage entre les harmoniques temporelles et spatiales.

## 1.5 Conception des roues aubagées

En s'appuyant sur la méthode de réduction en symétrie cyclique qui vient d'être décrite, il devient possible de modéliser une roue aubagée avec des coûts numériques raisonnables et adaptés à un processus industriel de conception. Dès lors, nous pouvons aborder la problématique plus générale de la conception de ces organes. Cette dernière fait intervenir de nombreux domaines de la physique tels que la mécanique des fluides, les aspects thermiques, la mécanique, les matériaux, ... Cette pluridisciplinarité implique en particulier un compromis entre performances aérodynamiques et tenue thermomécanique lors du dimensionnement.

Ici, l'accent sera mis sur les aspects mécaniques et plus particulièrement sur la dynamique de ces structures. La tenue mécanique de ces structures est généralement caractérisée par des analyses et des critères en contraintes qui, eux-mêmes, sont liés aux caractéristiques en fatigue des matériaux. Ainsi, dans un premier temps, les critères en fatigue dynamique seront présentés ; ensuite les critères et outils d'analyse dynamique utilisés pour le dimensionnement vibratoire seront détaillés.

### 1.5.1 Fatigue vibratoire

Le phénomène de fatigue vibratoire (ou fatigue *polycyclique*) des aubages et ses conséquences directes que sont le développement et la propagation de fissures constituent la principale cause de défaillance des turbomachines aéronautiques. Dans des cas extrêmes, des pertes d'aubes peuvent survenir. En sollicitations alternées, la rupture se produit à des niveaux de contrainte bien inférieurs à la limite de résistance du matériau.

Les analyses en fatigue vibratoire sont principalement basées sur deux outils empiriques : les courbes de Wöhler et les diagrammes de Haigh (Lalanne, 1999).

#### Courbe de Wöhler

Les travaux de Wöhler ont permis de caractériser le phénomène de fatigue vibratoire expérimentalement à l'aide d'une courbe S-N (Stress-Number of cycles) où la contrainte alternée  $S$  est représentée en fonction du nombre de cycles  $N_R$  jusqu'à la rupture à cette contrainte (la durée de vie). Ces courbes, dont un exemple est représenté en figure 1.7, sont issues de campagnes d'essais et reflètent le comportement statistique du matériau, elles sont en général tracées à 95% de probabilité de résistance. Pour un matériau donné, on définit sa résistance en fatigue par la contrainte alternée pour une durée de vie de  $10^7$  cycles ; cette grandeur dépend de nombreux paramètres tels que l'état de surface, le type de charge, la température, les concentrations de contrainte... Certains matériaux



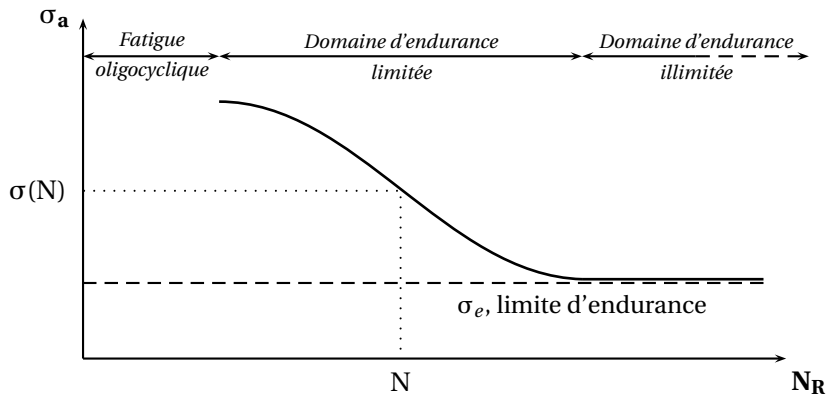


FIG. 1.7 Courbe de Wöhler

possèdent aussi une limite d'endurance (ou de fatigue), c'est à dire une valeur de contrainte alternée en dessous de laquelle il n'y aura pas de rupture.

### Diagramme de Haigh

Les composants sont généralement soumis à une contrainte moyenne  $\sigma_m$  (relativement importante dans le cas des aubages de turbomachines) en plus de cette contrainte alternée  $\sigma_a$ . Ce facteur n'étant pas pris en compte dans les travaux de Wöhler (ou la contrainte moyenne est nulle), plusieurs modèles ont été proposés (Goodman, Soderberg, Morrow, Gerber...) pour estimer l'effet de cette contrainte moyenne sur la durée de vie en fatigue vibratoire. On utilise généralement un diagramme de Haigh (figure 1.8), qui permet de relier les niveaux de contrainte alternée, pour un nombre de cycles, donné à la contrainte moyenne. Dans un tel diagramme, le modèle de Goodman simplifié et celui Soderberg sont des droites ; le modèle de Gerber est une parabole. Un point de fonctionnement est acceptable lorsqu'il se situe sous la courbe du modèle considéré. En pratique, on a souvent recours à un coefficient de sécurité en plus de ce critère.

### 1.5.2 Situation modale des roues aubagées et diagrammes de Campbell

Dans un processus de conception, le premier niveau d'étude de la dynamique des roues aubagées est l'étude de leur situation modale. Pour cela, il faut dans un premier temps calculer les solutions propres de ces structures. Ensuite, ces résultats peuvent être exploités en particulier pour l'analyse de coïncidences à l'aide des diagrammes de Campbell.

#### Situation modale des roues aubagées

Les caractéristiques de la situation modale des roues aubagées sont liées à leur symétrie cyclique. En effet, d'après les résultats de la section 1.3, les déformées modales des structures à symétrie cyclique sont harmoniques selon la direction circonférentielle ; on parle de modes à diamètres

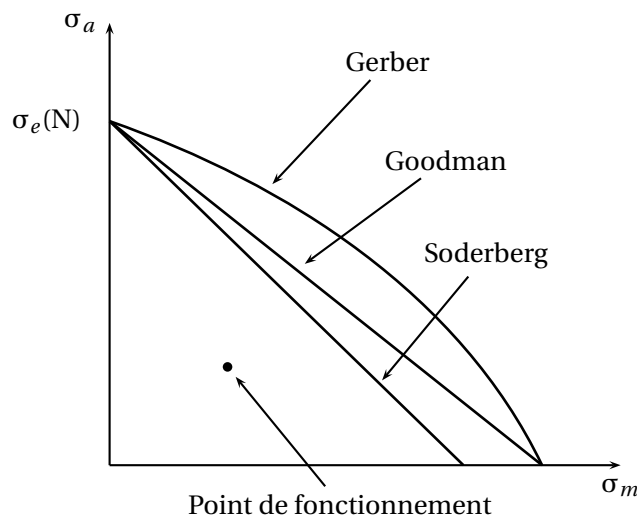


FIG. 1.8 Diagramme de Haigh

nodaux (voir les exemples en figures 1.5 et 1.6). La situation modale de ces structures est généralement représentée dans un diagramme où les fréquences propres de la roue aubagée sont classées par nombre de diamètres nodaux. Un exemple de diagramme *fréquences / nombre de diamètres nodaux* est présenté en figure 1.9 ; il correspond au Disque Aubagé Monobloc présenté en figure 1.3. On définit une famille de modes (par analogie avec les aubes seules) comme l'ensemble des modes à diamètres de la roue aubagée dont les déformées au niveau des pales sont similaires. Sur le diagramme fréquences / nombre de diamètres nodaux, il est possible (pour certains modes) de suivre l'évolution des fréquences propres en fonction du nombre de diamètres nodaux dans une même famille. Par exemple, la première ligne correspond à la famille des modes de première flexion de pale et la deuxième aux modes de première torsion. On observe généralement que les fréquences propres évoluent plus dans les faibles nombres de diamètres nodaux ; ceci est dû à une plus grande influence du couplage aubes / disque dans ces situations.

### Diagramme de Campbell et étude des coïncidences

Comme nous l'avons vu à la section 1.2, on distingue deux types de phénomènes vibratoires : les phénomènes synchrones et les phénomènes asynchrones. Le dimensionnement vibratoire des roues aubagées se fait principalement pour éviter les phénomènes synchrones. Les phénomènes asynchrones étant plus difficiles à prédire, leur prise en compte dans les processus de conception se fait plutôt par retour d'expériences.

Ces phénomènes synchrones se produisent en cas de coïncidences des fréquences propres de la roue aubagée avec les harmoniques principales du régime moteur. Pour repérer ces coïncidences, on utilise généralement un diagramme de Campbell, tel que celui représenté en figure 1.10, qui permet de représenter l'évolution des fréquences propres d'une aube ou d'une roue aubagée en

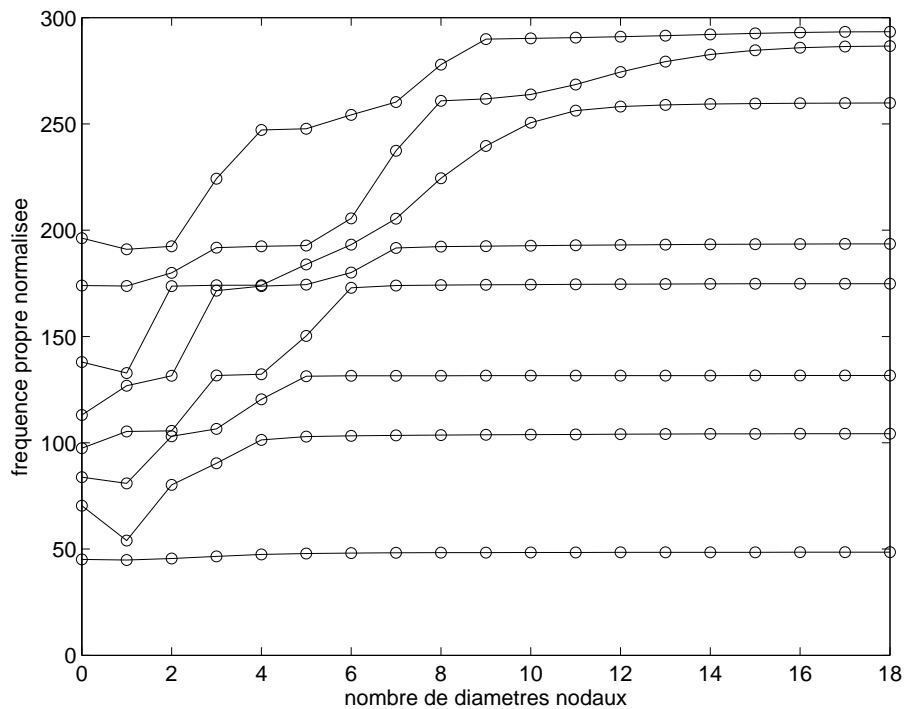


FIG. 1.9 Exemple de diagramme fréquences / nombre de diamètres nodaux

fonction du régime de rotation. Les coïncidences entre les fréquences propres et les ordres d'excitation moteur ou leurs harmoniques correspondent aux intersections des lignes « horizontales » d'évolution des fréquences propres en fonction du régime et les droites des harmoniques du régime moteur. Lorsque l'on considère la dynamique des aubes seules, en négligeant leur couplage par le disque en particulier, ce diagramme est exploitable directement.

À ce critère fréquentiel s'ajoute dans le cas des roues aubagées une condition supplémentaire de coïncidence entre l'ordre d'excitation (ou l'une de ses harmoniques) et le nombre de diamètres nodaux d'un mode. En pratique, on utilise un diagramme *zig-zag* (Wildheim, 1979), dont un exemple est représenté en figure 1.11, pour associer les ordres de l'excitation aux nombres de diamètres nodaux excités. La règle d'association correspond au repliement de spectre des harmoniques spatiales en nombre de diamètres équivalents. Ainsi, une excitation de nombre d'onde fondamental  $p$  excite les modes de nombre de diamètres nodaux  $d = |kN - p|$  avec  $k$  tel que  $0 < |kN - p| < N/2$ . Sur le diagramme 1.11, qui correspond à une roue aubagée de 36 secteurs, cette règle est illustrée pour une excitation d'ordre 40 qui excite 4 diamètres.

### Effets de la rotation et des chargements statiques

L'analyse dynamique des structures tournantes est indissociable de l'étude des effets statiques liés d'une part à la rotation et d'autre part aux efforts stationnaires du fluide. Si l'effet principal de la rotation sur les aubes reste le raidissement centrifuge, il existe un effet géométrique non négligeable. Les aubes ont tendance à se « dévriller » sous les effets combinés de la rotation et des

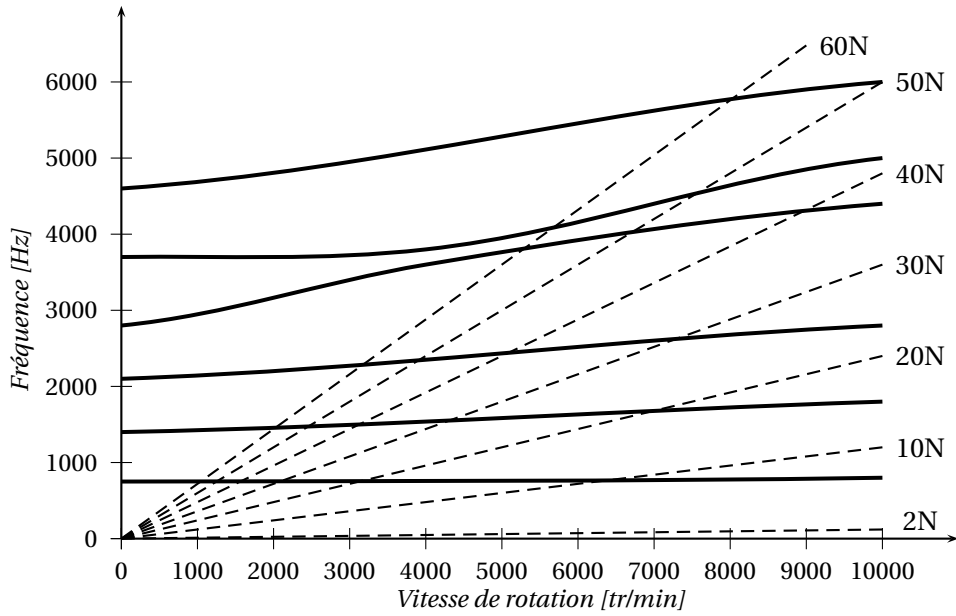


FIG. 1.10 Exemple de diagramme de Campbell

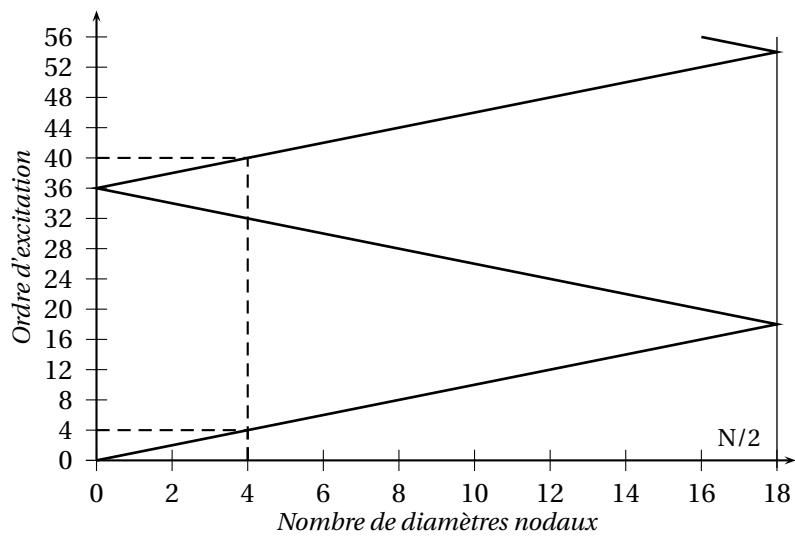


FIG. 1.11 Exemple de diagramme zig-zag

chargements fluides et les changements de forme sont d'autant plus importants que les géométries sont complexes (aubes à large corde, en particulier). D'un point de vue dynamique, les déformées modales évoluent aussi lorsque la vitesse de rotation varie et il peut donc s'avérer difficile de suivre les familles de modes dans un diagramme de Campbell. On assiste parfois à des phénomènes de croisement de modes (ou *veering*) comme sur l'exemple de la figure 1.10 où les familles de modes 4 et 5 se croisent. Ce type de phénomène est en général à éviter en conception.

### 1.5.3 Modélisations et analyses aéromécaniques

Comme nous l'avons vu précédemment, les origines des phénomènes vibratoires et les sources d'excitation principales des aubages résident dans l'interaction fluide-structure et les phénomènes aéroélastiques. Le développement des méthodes aéroélastiques est un des principaux enjeux dans le domaine de la conception des turbomachines. Les difficultés liées à la modélisation et à la mise en œuvre d'outils de simulation prédictifs n'ont d'égales que celles liées aux phénomènes traités (réponse forcée, flottement, phénomènes asynchrones, ...). De ce fait, encore aujourd'hui, il n'existe pas de méthode numérique établie qui permette de prédire, de façon robuste, les phénomènes d'instabilité de flottement des roues aubagées de géométrie complexe.

L'un des principaux enjeux de cette problématique concerne en particulier dans la modélisation du couplage fluide-structure et dans les mises en œuvre numériques qui en découlent.

#### Couplage aéromécanique

Les interactions aéroélastiques sont des phénomènes fortement non-linéaires aussi bien du point de vue aérodynamique (chocs, couches limites, turbulence, ...) que de celui de la structure (présence de frottement dans les liaisons, grandes déformations sous chargement centrifuge, ...). Dans leur article de synthèse, Marshall et Imregun (1996) ont catalogué les différentes approches existantes et utilisées pour la modélisation de ce couplage. Ils mentionnent donc deux classes principales de méthodes aéroélastiques, les approches classiques et les approches intégrées. On parlera aussi de modélisation d'un couplage fluide-structure faible ou fort (Seinturier et al., 2004).

#### Méthodes classiques

Dans ces approches, le problème non-linéaire couplé est divisé en deux analyses linéaires et découplées. L'effet de la dynamique de la structure sur le fluide correspond à un mouvement imposé et celui du fluide sur la structure génère deux types de contributions dans le problème aéroélastique global :

- un terme d'excitation du fluide sur la structure,
- un terme d'amortissement aérodynamique.

Le modèle aéromécanique est souvent exprimé en base modale et il permet de calculer les différents types de réponses dynamiques. Pour la réponse forcée, les deux composantes aérodynamiques sont prises en compte alors que pour l'analyse de stabilité en réponse libre, seul le terme d'amortissement aérodynamique est pris en compte. Dans ce dernier cas, l'étude du système autonome et de ses valeurs propres (complexes) permet de statuer sur la stabilité du système couplé aéromécanique

et de ses modes. Il n'est cependant pas possible d'obtenir les niveaux (cycles limites) dans les zones d'instabilité.

Ces approches, bien que populaires de par leur simplicité, s'avèrent limitées lorsque les effets non-linéaires du couplage fluide-structure sont importants ce qui est souvent le cas dans le domaine des turbomachines.

### Méthodes aéroélastiques intégrées

Dans ces méthodes, le fluide et la structure ne sont plus découplés et le problème aéroélastique est traité comme un problème continu. Ces approches ont vu le jour lorsque la prise en compte des effets non-linéaires du couplage fluide-structure, en particulier dans les domaines transsoniques de vitesse du fluide (où se situe le flottement), est devenue nécessaire. L'interaction fluide-structure est donc forte et les non-linéarités des deux milieux peuvent être modélisées.

L'un des avantages de ces approches par rapport aux précédentes est qu'elles offrent la possibilité de prédire les cycles limites d'instabilité alors que les méthodes classiques ne donnent que les limites de stabilité. Ceci constitue un apport important du point de vue de la conception puisque les domaines d'instabilités (dont la dangerosité peut ainsi être quantifiée) ne sont plus nécessairement écartés des zones de fonctionnement.

La mise en œuvre de ce type de modélisation passe généralement par une résolution dans le domaine temporel bien que des approches fréquentielles (de type balance harmonique) fassent leur apparition (Hall et al., 2002).

Dans ce travail de thèse, les effets de l'amortissement par frottement dans les roues aubagées sont étudiés sur des réponses forcées ou libres (flottement) et des méthodologies adaptées sont proposées. Marshall et Imregun (1996) ont souligné la difficulté de traiter les problèmes aéroélastiques en présence de non-linéarité au niveau de la structure, en particulier du fait que les approches modales ne semblent plus être utilisables directement. À ce titre, la méthode d'analyse modale non-linéaire que nous proposons au chapitre suivant fournit une réponse à cette difficulté.

### Prise en compte de l'amortissement et modélisation

La modélisation des sources d'amortissement est fondamentale dans toute analyse aéromécanique. On distingue principalement deux sources d'amortissement :

- l'amortissement structural qui est assez faible surtout dans le cas de structures monoblocs (les taux d'amortissement modal sont en général inférieurs à 1‰),
- l'amortissement du fluide qui est donc généralement prépondérant.

D'un point de vue de la modélisation, les différentes sources d'amortissement sont généralement représentées sous la forme d'un taux d'amortissement modal. Ensuite, on peut choisir des modèles d'amortissement hystérétique ou visqueux (ou mixte) pour l'amortissement structural et un modèle visqueux pour la contribution aérodynamique.

Enfin, comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, dans des situations d'instabilités aéroélastiques, le fluide peut générer un taux d'amortissement modal négatif.

### 1.5.4 Désaccordage

Le désaccordage mécanique désigne l'ensemble des différences structurales ou géométriques qui existent entre les aubes (et plus généralement les secteurs) d'une roue aubagée. En effet, les roues aubagées sont généralement conçues selon une symétrie cyclique (on parle de roues aubagées accordées) mais, du fait des tolérances de fabrication ou des inhomogénéités des matériaux, le désaccordage est en pratique inévitable (Srinivasan, 1984). Ces dissymétries peuvent, d'un point de vue dynamique, mener à une augmentation importante des niveaux vibratoires dans la structure ainsi que des phénomènes de localisation, ce qui augmente les risques de fatigue vibratoire (Wei et Pierre, 1988a,b). L'importance de ces effets sur la dynamique des roues aubagées dépend en particulier du taux de désaccordage que l'on définit comme l'écart-type des fréquences propres des aubes. La figure 1.12 représente l'évolution classique de l'amplification des réponses en fonction du taux de désaccordage aléatoire. Ce résultat est valable pour des désaccordages aléatoires raisonna-

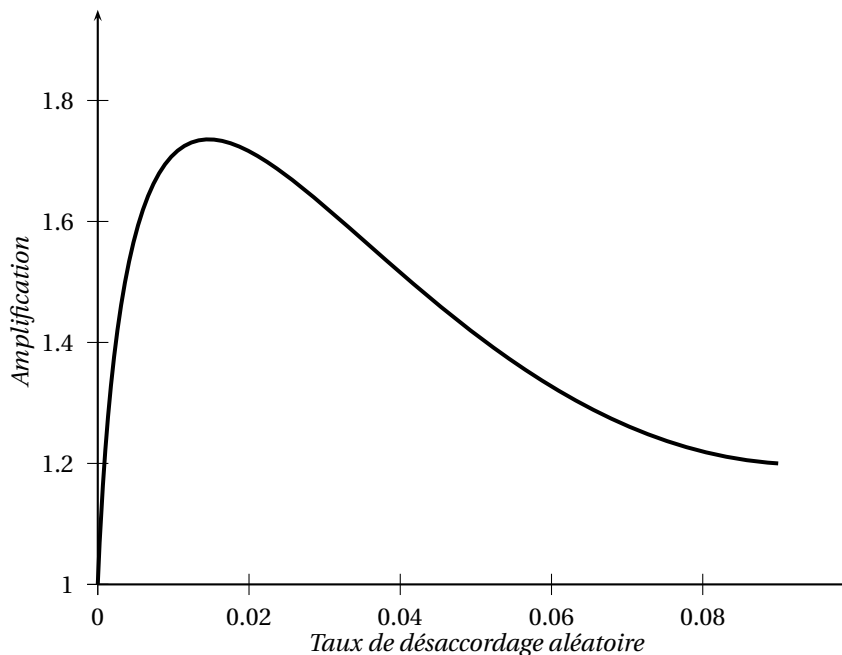


FIG. 1.12 Évolution du facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage

blement faibles (quelques pour-cents au maximum).

Du fait de son caractère aléatoire, le désaccordage des roues aubagées ne peut être caractérisé qu'expérimentalement soit par des analyses modales sur les aubes dans le cas de structures assemblées (Mignolet et al., 2001) soit, dans le cas de structures monoblocs, au moyen de méthodes de recalage (Feiner et Griffin, 2004a,b; Judge et al., 2002; Pichot et al., 2006).

Du point de vue de la modélisation, puisque l'hypothèse de symétrie cyclique ne s'applique plus, l'usage de techniques de synthèse modale en sous-structuration couplées à des méthodes de perturbation (Bladh et al., 2001; Yang et Griffin, 2001) est maintenant assez répandu.

Enfin, si les aspects précédents sont relativement maîtrisés à l'heure actuelle, de nouvelles pro-

blématiques font l'objet de recherches. On pourra citer en particulier :

- le désaccordage aérodynamique ;
- l'étude des grands désaccordages (consécutifs par exemple à un endommagement d'une des aubes) ;
- l'utilisation de désaccordage volontaire pour limiter les effets du désaccordage naturel en réponse forcée (Castanier et Pierre, 2002) ;
- l'introduction de motifs de désaccordage volontaire pour l'augmentation des marges au flottement (Lombard et al., 2006).

## 1.6 Aspects technologiques

Cette dernière section est dédiée à la présentation de quelques aspects technologiques qui ont leur importance dans la problématique industrielle et scientifique de ce travail. Ils concernent tout d'abord la technologie des roues aubagées elles-mêmes ainsi que celles liées à la problématique du contrôle vibratoire.

### 1.6.1 Technologies monoblocs

Historiquement, les structures aubagées de compresseurs ou de turbines étaient composées d'un assemblage d'aubes rapportées sur un disque (dans le cas des pièces tournantes) ou d'aubes logées dans les carters structuraux (dans le cas des pièces fixes). Ces technologies présentent l'avantage de permettre des remplacements ou réparations individuels d'aubes.

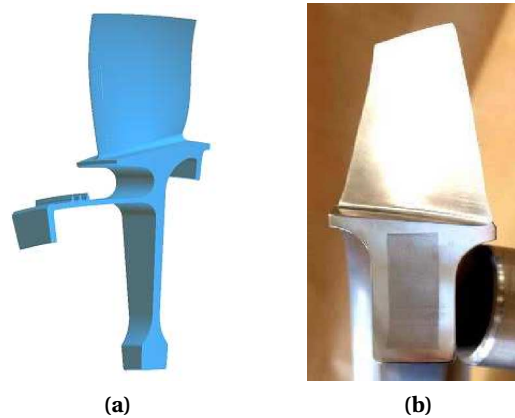
Dans les turbomachines modernes, l'évolution des procédés de fabrication et d'usinage induisent des gains importants sur la masse embarquée et sur les performances aérodynamiques vis-à-vis des technologies plus classiques. Les progrès les plus importants ont été réalisés grâce à l'introduction de technologies monoblocs. Dans le cas des parties tournantes, les assemblages aubes-disque sont remplacés par des Disques Aubagés Monoblocs (DAM), c'est à dire une structure monobloc dans laquelle sont usinés les pales et le disque (figure 1.13a). Ces nouvelles technologies présentent de nombreux avantages parmi lesquels :

- une réduction significative de masse,
- une augmentation des performances aérodynamiques,
- des durées de vie en service accrues,
- des coûts de maintenance réduits.

D'un point de vue plus global, ces technologies permettent aussi de réduire le nombre d'étages des compresseurs puisque chaque étage est plus chargé et plus performant. Notons aussi, l'introduction récente de matériaux composites à matrice métallique qui permettent d'éliminer la partie « poireau » (dédiée à la reprise des efforts centrifuges) du disque. On parle ainsi d'Anneaux Aubagés Monoblocs (ANAM) (figure 1.13b) dont la masse est encore significativement réduite par rapport à une géométrie classique.

Enfin, les assemblages boulonnés classiques entre les roues aubagées font place à des liaisons continues, obtenues par exemple par friction inertielle. Les structures fixes (les redresseurs de compresseurs en particulier) sont aussi de plus en plus monoblocs ou du moins monoblocs par morceaux.





**FIG. 1.13** Exemples de structures monoblocs; (a), Disque Aubagé Monobloc, (b), Anneau Aubagé Monobloc à matrice métallique.

Ces technologies monoblocs, si elles présentent des avantages évidents (performance, masse, coût), posent d'autre part un challenge important en terme de conception mécanique. En effet, dans ces structures, l'amortissement intrinsèque est très faible ce qui a pour effet de potentiellement augmenter les niveaux dynamiques et ainsi de générer des risques de fatigue vibratoire ou dans les cas extrêmes de rupture.

### 1.6.2 Contrôle vibratoire

La maîtrise des niveaux vibratoires constitue une problématique de premier ordre pour les motoristes aéronautiques. Son importance a tendance à augmenter du fait de l'évolution des technologies mécaniques, telles que celles décrites au paragraphe précédent, et de l'augmentation des performances aérodynamiques. Par conséquent, même si le concepteur essaie dans la mesure du possible d'éviter toute coïncidence ou résonance dans les plages de fonctionnement du moteur, les phénomènes vibratoires sont souvent inévitables. Enfin, si ces structures possèdent un certain niveau d'amortissement intrinsèque ou externe, celui-ci reste généralement difficile à quantifier et n'est souvent pas suffisant (et ce, d'autant plus dans les structures monoblocs) pour garantir une fiabilité de fonctionnement.

Dans ce contexte, les activités de recherche s'orientent vers des solutions passives, semi-actives ou actives d'amortissement ou plus généralement de contrôle vibratoire. Il est de plus nécessaire d'intégrer dans ces développements l'ensemble des contraintes qu'elles soient liées à l'environnement mécanique (température, effort centrifuge,...), aux performances (en termes de masse ajoutée en particulier) ou à la sûreté de fonctionnement (fiabilité et robustesse des dispositifs).

### Amortissement des roues aubagées

La stratégie la plus immédiate pour maîtriser les niveaux vibratoires d'une structure consiste à lui apporter de l'amortissement. Concernant les roues aubagées, de nombreuses solutions technologiques existent et nous allons voir d'une part celles qui sont classiquement utilisées par les mo-

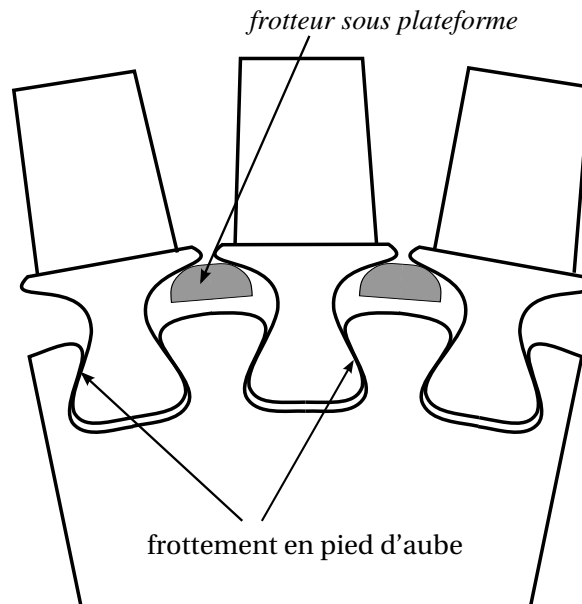
toristes mais aussi des solutions présentées dans la littérature qui ne sont en général pas (encore) employées industriellement.

Les dispositifs passifs d'amortissement sont les plus couramment employés de par leur plus grande simplicité de mise en œuvre. On distingue, parmi ceux-ci les dispositifs linéaires des dispositifs non-linéaires.

Même si les dispositifs linéaires d'amortissement sont assez nombreux dans le domaine de la dynamique des structures, les constructeurs de turbomachines privilégient les revêtements absorbants de type visco-élastiques, élastomère ou encore silicone (voir par exemple, UK Patent 2 430 985 A). L'utilisation de matériaux viscoélastiques fait l'objet d'une recherche active. De nombreux brevets proposent d'utiliser cette solution sous forme de couche externe directement sous les aubes (US Patent N° 3,357,850) ou encore au niveau des interfaces (aubes-disque, nageoires, ...) et même à l'intérieur des aubes (US Patent N° 6,669,447). Concernant les technologies monoblocs, seules les implantations externes sont envisageables. Ce type de solutions se trouve cependant limité par des températures de fonctionnement trop importantes.

Toujours concernant les technologies linéaires, notons l'emploi (encore expérimental) d'amortisseurs dynamiques qui souvent prennent la forme d'un fluide (parfois de l'air, US Patent N° 6, 514, 040 B2 et (Mathison et al., 2004)) logé dans les aubes (creuses). La chambre de l'aube est calibrée pour approcher au mieux la fréquence de résonance de l'aube et le fluide est généralement choisi avec une certaine viscosité permettant une absorption maximale de l'énergie vibratoire. De tels dispositifs apportent une masse importante et ne sont en général efficaces que sur une bande de fréquence relativement étroite.

En revanche les dispositifs non-linéaires sont employés depuis longtemps par les motoristes en particulier les systèmes d'amortissement par frottement. Les assemblages traditionnels aubes-disque possèdent une source naturelle d'amortissement par frottement dans la liaison aube-disque qui a fait l'objet d'études tant expérimentales (Nacivet, 2002; Tokar' et al., 2003) que numériques (Charleux et al., 2006). Cette source « naturelle » d'amortissement n'étant généralement pas suffisantes, les motoristes utilisent aussi de petits frotteurs disposés sous les plates-formes des aubes comme le montre la figure 1.14. Il existe de nombreuses géométries possibles pour ces frotteurs, par exemple, les frotteurs en coin, de type plaques ou encore les frotteurs creux. Les études concernant ce type de dispositifs sont nombreuses dans la littérature, aussi bien d'un point de vue modélisation depuis les premiers modèles phénoménologiques (Wang et Chen, 1993; Griffin, 1980; Berthillier et al., 1998; Sanliturk et al., 2001; Csaba, 1998) vers des modèles plus complexes (Poudou et Pierre, 2003; Guillen et Pierre, 1999; Petrov, 2003) que d'un point de vue expérimental (Yang et Menq, 1998b; Sanliturk et al., 2001). Mentionnons aussi de nombreux travaux portant sur l'étude des interfaces de contact et de frottement (Yang et Menq, 1998a; Chen et al., 2000; Menq et al., 1986a,b). Dans le même esprit, les aubes à nageoires ou à talons souvent utilisées pour les soufflantes ou les turbines BP et parfois dans les compresseurs possèdent une source d'amortissement par frottement dans cette seconde liaison (Yang et Menq, 1997). Cependant ces dispositifs tendent à disparaître du fait de l'apport de masse trop important. Notons aussi l'utilisation de câbles traversant les aubes au milieu de la veine et qui dissipe de l'énergie par frottement en fonction des effets centrifuges (Swikert et Johnson, 1968). Récemment, Szwedowicz et al. (2007b,a) ont proposé des études théoriques et expérimentales dans le domaine des turbines terrestres.

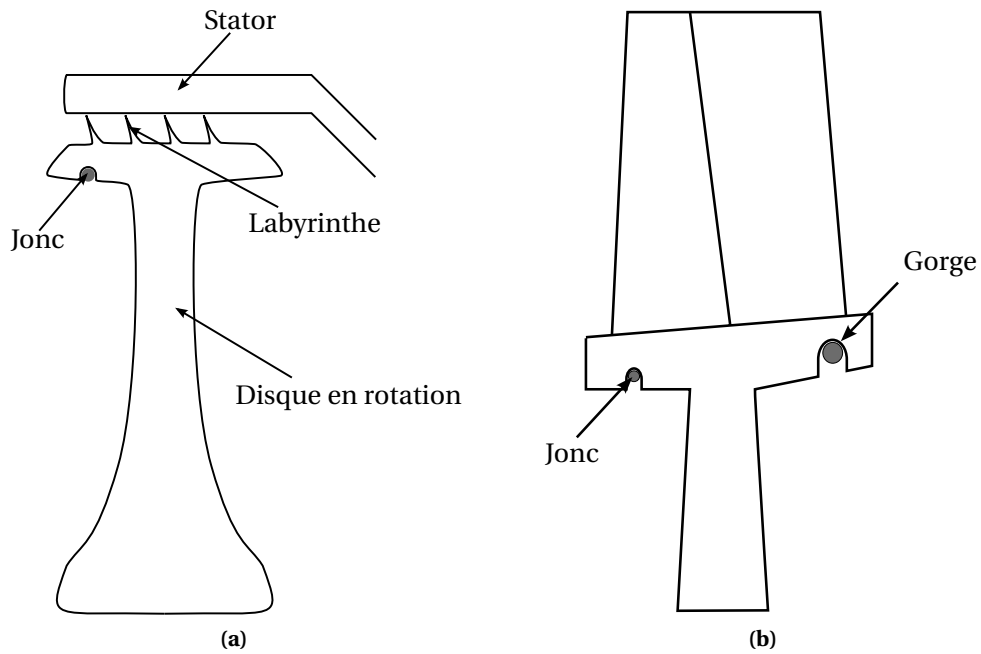


**FIG. 1.14** Assemblage aubes-disques muni de frotteurs sous plates-formes

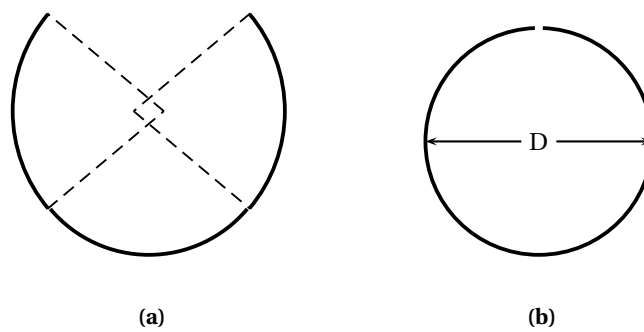
Les structures monoblocs (les Disques Aubagés Monoblocs, en particulier) ne présentent plus de jonction ni d'interface dans lesquelles l'énergie vibratoire pourrait être dissipée par frottement. L'une des solutions consiste à utiliser des frotteurs annulaires, appelés joncs. Cette dernière solution constitue un des principaux objets de ce mémoire. Il semble que peu d'études aient été menées jusqu'alors pour des applications aux roues aubagées. En revanche, cette solution est employée de longue date au niveau des labyrinthes d'étanchéité (figure 1.15a) par les motoristes même si le dimensionnement des joncs se fait alors principalement sur des critères empiriques ou des analyses simplifiées (Niemotka et Ziegert, 1993). Des technologies analogues sont aussi utilisées pour limiter les nuisances vibro-acoustiques dans les roues de trains (Färm, 2003) ou encore les freins automobiles (US Patent n° 5,855,257)... Pour les Disques Aubagés Monoblocs, les zones d'implantation possibles se situent hors veine généralement sous la jante, les viroles ou les labyrinthes d'étanchéité (figure 1.15b). Afin de permettre leur montage, les joncs présentent une coupure et ne sont pas circulaires dans leur état libre comme le montrent les figures 1.16a et 1.16b. Cette géométrie non-circulaire à l'état libre permet de générer une précontrainte lors du montage ce qui peut permettre une rétention en rotation lors des accélérations ou décélérations du moteur.

Toujours concernant les technologies monoblocs, d'autres solutions plus exotiques ont par ailleurs été proposées ; citons en particulier, Boeing qui propose (Brevet US 6,375,428 B1) l'utilisation de « doigts » frottants sous la jante du disque et maintenus en contact par une plaque circulaire fixée sur le disque. La figure 1.17 représente cette solution sur une turbine monobloc bi-étage.

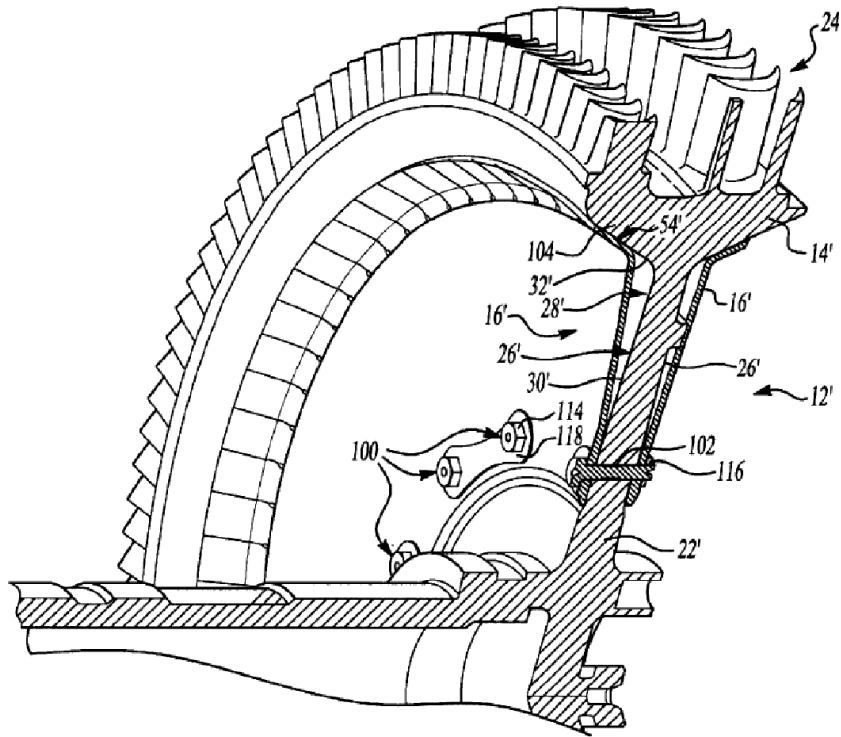
Pour finir sur les dispositifs non-linéaires, l'utilisation d'amortisseurs par chocs est envisagée même si la technologie (dans son état actuel) semble difficilement utilisable en situation réelle. Il s'agit de billes logées dans des aubes creuses et l'énergie est dissipée lorsque la vibration de l'aube génère des chocs (Duffy, 2004). Notons, sur le même principe l'utilisation de frotteurs implantés



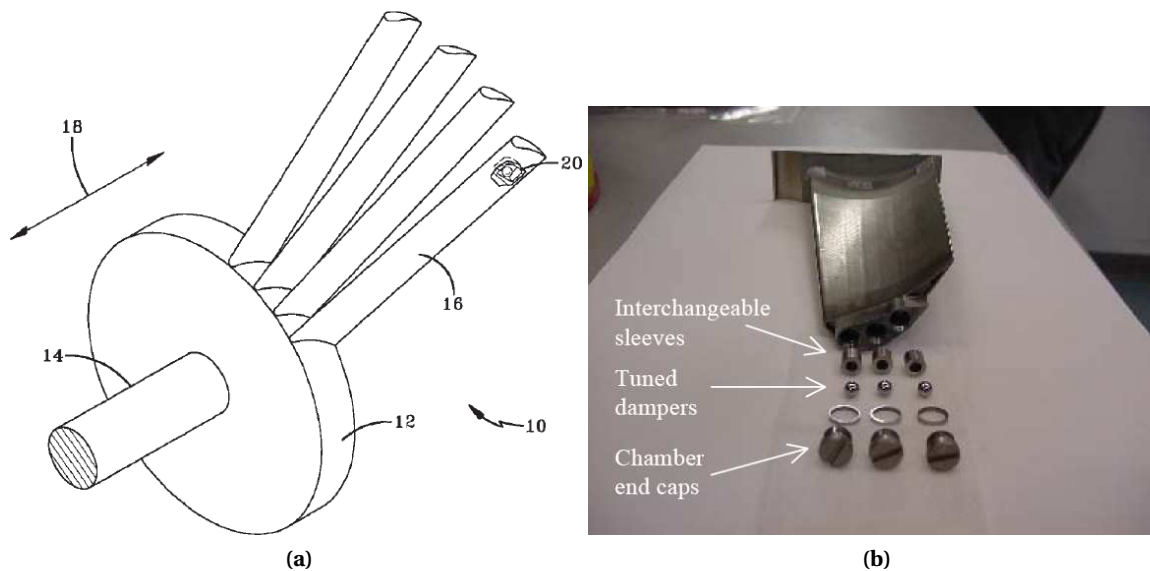
**FIG. 1.15** Implantations des joncs de friction (a) sur un labyrinthe d'étanchéité et (b) sur un Disque Aubagé Monobloc



**FIG. 1.16** Géométrie des joncs de friction : (a), jonc à l'état libre ; (b), jonc à l'état monté



**FIG. 1.17** Amortisseur par frottement de type « doigts » pour les disques de turbines monoblocs; Brevet Boeing US 6,375,428 B1



**FIG. 1.18** Amortisseurs par chocs; (a), schéma de principe (Brevet NASA US 6,827,551 B1); (b), exemple de mise en œuvre (Duffy, 2004).

dans les aubes (US Patent N° 6,607,359 B2)...

Les dispositifs actifs ou semi-passifs sont encore peu développés bien que cette voie semble prometteuse. Par exemple, l'utilisation de matériaux piézoélectriques, sous forme semi-passive, est à l'étude mais les développements associés sont pour le moment restreints à des cas académiques. Concernant les solutions actives, un brevet (US Patent N° 5,490,759) propose un contrôle magnétique des vibrations d'aubes à l'aide d'électro-aimants localisées dans le carter...

### Autres solutions

Si l'apport d'amortissement extérieur est généralement une solution privilégiée, d'autres voies sont envisagées et utilisées par les motoristes lorsque cette solution ne permet pas de traiter les problèmes efficacement. Parmi ces autres techniques, l'introduction de dissymétries (aussi bien au niveau des rotors que des stators) est de plus en plus d'actualité.

Sur les parties tournantes, il s'agit d'introduire du désaccordage volontaire (Castanier et Pierre, 2002; Lombard et al., 2006) afin d'une part de limiter les effets de localisation en réponse forcée dus au désaccordage naturel et, d'autre part, d'éviter l'apparition (ou d'en limiter les effets) de phénomènes auto-entretenus. Concernant la réponse forcée, le désaccordage volontaire se superpose au désaccordage naturel et en réduit les effets de localisation lorsque son amplitude est supérieure. Dans le cas des phénomènes auto-entretenus (flottement en particulier), le désaccordage volontaire (introduit selon des motifs choisis) permet d'éviter la formation d'ondes tournantes et ainsi de limiter l'apparition d'instabilités.

Au niveau des stators, il s'agit plutôt de dissymétriser l'excitation (en réponse forcée) toujours en introduisant un désaccordage sur les aubages fixes. Ceci peut permettre de limiter les effets d'une coïncidence.

## 1.7 Conclusions

Ce chapitre introductif a permis de poser la problématique de la dynamique des roues aubagées de turbomachines qui constitue le cadre général de ce travail de thèse. Nous avons vu en particulier que ces structures complexes tant par leur géométrie que par les caractéristiques mécaniques étaient soumises à des sollicitations variées et elles-mêmes très complexes. Les phénomènes qui en résultent sont de natures multiples et restent parfois difficilement prévisibles ou explicables. En conséquence, le dimensionnement de ces pièces est généralement le résultat de nombreux compromis entre performances et tenue thermo-mécanique.

Les aspects théoriques qui ont été présentés posent le cadre des méthodes de simulations (dans le cas linéaire) et de conception (critères en fatigue vibratoire et de coïncidences modales) des roues aubagées. Parmi les problématiques évoquées dans ce chapitre, deux seront principalement traitées dans la suite de ce mémoire. La première concerne les aspects non-linéaires qui sont importants dans bon nombre de dispositifs de dissipation et la seconde la prise en compte des interactions entre les étages d'un rotor. Ils s'agit de deux enjeux majeurs en termes de simulation et de modélisation pour les constructeurs de turbomachines aéronautiques.



# Analyse non-linéaire fréquentielle

*Ce chapitre traite de l'utilisation de méthodes fréquentielles pour l'analyse des systèmes non-linéaires. Ces méthodes sont parmi les plus efficaces lorsque l'on s'intéresse aux solutions périodiques des systèmes dynamiques. Elles sont aussi bien adaptées aux problèmes de taille importante, et donc aux applications industrielles. Enfin, elles ne sont pas restreintes par rapport à la forme des non-linéarités.*

*Les bases théoriques de ces méthodes sont dans un premier temps exposées puis quelques points particuliers seront abordés comme le cas des structures à symétrie cyclique ainsi que le traitement fréquentiel des forces de contact. Ensuite, une approche originale de calcul des solutions périodiques d'un système non-linéaire autonome et non conservatif est proposée; il s'agit d'une méthode de calcul de modes complexes non-linéaires. Pour finir, nous aborderons plus succinctement les méthodes fréquentielles généralisées (multi-échelles) dans le but d'étudier la stabilité des solutions périodiques ainsi que des régimes quasi-périodiques.*

## 2.1 Solutions périodiques d'un système non-linéaire non-autonome

Considérons un système dynamique discret régi par l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{p}(t) \quad (2.1)$$

dans laquelle,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse, amortissement et raideur, le terme  $\mathbf{f}$  représente les forces non-linéaires internes au système. Dans ce chapitre, le cas non-autonome où l'excitation  $\mathbf{p}$  est périodique sera dans un premier temps considéré. Ensuite, en section 2.4, le cas autonome sera étudié avec en particulier l'analyse des modes de ce système. Dans les deux cas, nous nous intéressons à la détermination et à l'étude des solutions périodiques du système (2.1).

Une solution  $\mathbf{u}(t)$  d'un système dynamique est dite périodique s'il existe une constante  $T > 0$  telle que

$$\mathbf{u}(t + T) = \mathbf{u}(t) \quad (2.2)$$

quelque soit  $t$ . La période de cette solution correspond au minimum possible de  $T$  (on utilisera dans la suite la pulsation,  $\omega = 2\pi/T$ ). Lorsqu'un système dynamique possède une orbite périodique stable, on le qualifie d'oscillateur.



### 2.1.1 Rappel des principales approches pour le calcul des solutions périodiques

Si de nombreuses approches existent pour l'étude des solutions périodiques d'un système dynamique, elles ne sont pas toutes équivalentes et certaines sont mieux adaptées que d'autres selon le type de problème étudié. Parmi les plus représentatives, on distinguera en particulier :

- les méthodes plutôt analytiques, qui sont limitées à des systèmes de petite taille et souvent à certains types de non-linéarités ;
- les méthodes numériques qui elles-mêmes se divisent en deux catégories :
  - les méthodes basées sur l'utilisation d'intégrations temporelles directes ;
  - les méthodes basées sur une approximation de la solution et l'utilisation de procédures de projection.

#### Méthodes de perturbation

La première catégorie regroupe les méthodes de perturbation qui reposent sur l'hypothèse que les termes non-linéaires  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t)$  sont *petits* et proportionnels à un petit paramètre  $\epsilon$

$$\mathbf{f} = \epsilon \check{\mathbf{f}} \quad (2.3)$$

Parmi ces méthodes on peut citer par exemple la méthode de la moyenne (Guckenheimer et Holmes, 1983) ou la méthode des échelles multiples (Nayfeh et Mook, 1979). Elles ont en commun de postuler la forme de la solution périodique comme une perturbation de la solution du système linéaire (correspondant à  $\epsilon = 0$ ) :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a}(t) \cos \omega t + \mathbf{b}(t) \sin \omega t \quad (2.4)$$

Le système obtenu en remplaçant la variable  $\mathbf{u}(t)$  par son expression (2.4) dans le système initial (2.1) est ensuite résolu pour les nouvelles variables  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ . Dans le cas de la méthode des échelles multiples, ce système *approché* est obtenu par élimination des termes séculaires (Nayfeh et Mook, 1979) alors que dans le cas de la méthode de la moyenne il est obtenu par projection sur les fonctions harmoniques  $\{\cos \omega t; \sin \omega t\}$  (d'où l'appellation « moyenne »). La validité de ces approches dépend de la validité de l'hypothèse sur la *faiblesse* de la non-linéarité ( $\epsilon$  petit). Cependant les résultats de la méthode de la moyenne restent parfois valables (au moins d'un point de vue qualitatif) en dehors de ce cadre (Vakakis et al., 2003; Laxalde et al., 2006a).

#### Approches numériques

La deuxième classe de méthodes de calcul de solutions périodiques regroupe les méthodes numériques. Elles ont généralement en commun l'utilisation d'un solveur non-linéaire de type Newton-Raphson.

Parmi celles qui utilisent des intégrations temporelles directes, citons les méthodes de tir (*shooting*) qui sont basées sur une reformulation du problème initial temporel en termes de problèmes aux limites. Si ces méthodes sont assez utilisées, elles présentent des limitations importantes inhérentes à l'intégration temporelle (stabilité en particulier). De plus les temps de calcul s'avèrent prohibitifs lorsque des modèles de taille importante sont considérés.

La deuxième sous-catégorie, dans les méthodes numériques, regroupe les méthodes basées sur une approximation de la forme des solutions sous forme de séries paramétrées (Szemplinska-Stupnicka, 1990) :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=0}^N \alpha_n u_n(t) \quad (2.5)$$

Les coefficients  $\alpha_n$  de cette série sont à déterminer à l'aide d'une minimisation des résidus, dans le cas des méthodes de Ritz ou en respectant des conditions d'orthogonalité, dans le cas des méthodes de Galerkin. Ces méthodes (comme les précédentes) ne font aucune hypothèse sur la non-linéarité. Les méthodes de balance harmonique, qui font l'objet du paragraphe suivant, se classent dans cette catégorie et se prêtent généralement bien à des traitements numériques ainsi qu'à des problèmes de taille importante.

Pour finir, mentionnons le développement récent de méthodes hybrides entre les méthodes de perturbation (moyenne en particulier) et les méthodes de balance harmonique (Schilder et al., 2006). Nous reviendrons sur ces approches dans la section 2.5 de ce chapitre.

### 2.1.2 Méthode de la balance harmonique

Les méthodes de balance harmonique sont un cas particulier des méthodes de Galerkin dont la base de description temporelle est une série de Fourier (tronquée en pratique) :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}^0 + \sum_{n=1}^{N_h} \mathbf{U}^{n,c} \cos n\omega t + \mathbf{U}^{n,s} \sin n\omega t \quad (2.6)$$

Le problème dynamique est ensuite reformulé sous une forme fréquentielle ; les inconnues de ce nouveau problème étant les composantes fréquentielles (du déplacement) :

$$\mathbf{U} = \left[ \mathbf{U}^0, \mathbf{U}^{n,c}, \mathbf{U}^{n,s}, \dots, \mathbf{U}^{N_h,s} \right]^T \quad (2.7)$$

Si l'on note  $\mathbf{T}$  le vecteur ligne regroupant les fonctions temporelles trigonométriques,

$$\mathbf{T}(t) = \left[ 1 \quad \cos \omega t \quad \sin \omega t \quad \dots \quad \cos N_h \omega t \quad \sin N_h \omega t \right] \quad (2.8)$$

la série de Fourier (2.6) peut s'écrire sous forme plus compacte :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{U} \quad (2.9)$$

Nous définirons de plus l'opérateur de dérivation fréquentiel :

$$\nabla = \text{diag} \left( 0, \nabla_1, \dots, \nabla_{N_h} \right) \text{ avec } \nabla_n = n \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

afin d'exprimer les vitesses et accélérations en fonction du vecteur des composantes de Fourier :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}(t)\nabla\mathbf{U} \quad (2.11a)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}(t)\nabla^2\mathbf{U} \quad (2.11b)$$

L'expression fréquentielle des équations du mouvement est obtenue par une méthode de Galerkin en introduisant la solution (2.6) dans les équations temporelles (2.1) puis en projetant le résultat sur chaque fonction trigonométrique  $\cos n\omega t$  et  $\sin n\omega t$  selon le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (2.12)$$

On obtient ainsi, un système algébrique de taille  $2N_h + 1$  fois la taille du système d'équations temporelles

$$\mathbf{Z}\mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{P} \quad (2.13)$$

Les vecteurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  regroupent les composantes de Fourier de l'excitation et des forces non-linéaires de façon analogue à (2.7). La matrice de rigidité dynamique multi-harmonique, notée  $\mathbf{Z}$ , s'exprime en fonction des matrices structurelles

$$\mathbf{Z} = \mathbf{K} \otimes \mathcal{I}_{2N_h+1} + \mathbf{C} \otimes \nabla + \mathbf{M} \otimes \nabla^2 \quad (2.14)$$

soit en détails,

$$\mathbf{Z} = \text{diag} \left( \mathbf{K}, \begin{pmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & \omega \mathbf{C} \\ -\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{K} - (N_h \omega)^2 \mathbf{M} & N_h \omega \mathbf{C} \\ -N_h \omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - (N_h \omega)^2 \mathbf{M} \end{pmatrix} \right) \quad (2.15)$$

Un solveur non-linéaire de type Newton (Dennis et Schnabel, 1996) est généralement utilisé pour résoudre ce système

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{Z}\mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{P} \quad (2.16)$$

En outre, l'un des principaux enjeux de cette approche est la détermination de l'expression fréquentielle des termes non-linéaires  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  en fonction des inconnues  $\mathbf{U}$ . Pour certains types de non-linéarités régulières – décomposables en série polynomiale par exemple – cette expression fréquentielle peut être obtenue analytiquement. En revanche, lorsque ce n'est pas possible l'une des stratégies consiste à utiliser des méthodes d'alternance entre le domaine fréquentiel et le domaine temporel et parfois à régulariser les fonctions non-linéaires comme nous le verrons plus loin (section 2.2).

### 2.1.3 Balance harmonique appliquée aux structures à symétrie cyclique

Au chapitre 1 nous avons présenté la méthode de réduction en symétrie cyclique qui permet d'exprimer la réponse dynamique d'une structure cyclique à partir de la représentation d'un secteur de référence en composantes cycliques. Cette réduction est cependant basée sur une hypothèse de linéarité du système. Dans le cas des systèmes non-linéaires, il est néanmoins possible d'adapter les formulations fréquentielles précédemment présentées pour tenir compte de la propriété de symétrie cyclique. Pour cela, il faut cependant supposer que les non-linéarités du système considéré possèdent aussi une symétrie cyclique. Sous cette hypothèse, Poudou et Pierre (2003) et Petrov (2004) ont proposé deux approches relativement équivalentes pour résoudre cette problématique.

Il s'agit de tirer profit de la superposition des harmoniques issues de la formulation fréquentielle (2.6) et de reprendre les développements de la section 1.4.2 du chapitre précédent.

Comme précédemment, nous considérerons une structure cyclique composée de  $N$  secteurs et nous distinguerons le cas des ondes tournantes et des ondes fixes.

### Ondes tournantes

La décomposition en série de Fourier (2.6) s'écrit pour le secteur  $j$

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{U}_j^0 + \sum_{n=1}^{N_h} \mathbf{U}_j^{n,c} \cos n\omega t + \mathbf{U}_j^{n,s} \sin n\omega t \quad (2.17)$$

D'après les résultats du chapitre précédent, lorsque l'on considère une onde tournante harmonique de nombre d'onde  $k$ , la série précédente s'écrit en fonction des composantes du secteur de référence selon :

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{U}_0^0 + \sum_{n=1}^{N_h} \mathbf{U}_0^{n,c} \cos(n(\omega t - k\theta_j)) + \mathbf{U}_0^{n,s} \sin(n(\omega t - k\theta_j)) \quad (2.18)$$

On remarquera, par rapport à la section 1.4.2, la présence d'une composante non tournante  $\mathbf{U}^0$  (et potentiellement  $\mathbf{U}^{N/2}$ , dans le cas général).

L'hypothèse principale de la méthode, *a priori* justifiée si le système est à symétrie cyclique, consiste à écrire une relation équivalente pour les forces non-linéaires :

$$\mathbf{f}_j(t) = \mathbf{F}_0^0(\mathbf{U}_0) + \sum_{n=1}^{N_h} \mathbf{F}_0^{n,c}(\mathbf{U}_0) \cos(n(\omega t - k\theta_j)) + \mathbf{F}_0^{n,s}(\mathbf{U}_0) \sin(n(\omega t - k\theta_j)) \quad (2.19)$$

Il en résulte que toutes les variables, exprimées sous la forme d'une superposition d'ondes tournantes, sont parfaitement déterminées par leur composantes sur le secteur de référence.

Le problème dynamique fréquentiel (2.13) s'écrit sur le secteur de référence :

$$\mathbf{Z}_0 \mathbf{U}_0 + \mathbf{F}_0(\mathbf{U}_0) = \mathbf{P}_0 \quad (2.20)$$

où la matrice de rigidité dynamique du secteur de référence s'écrit de façon similaire à la relation (2.14) et les conditions de contraintes cycliques (aux frontières inter-secteurs) se définissent pour chaque harmonique temporelle en fonction du nombre d'onde de l'excitation :

- pour  $n = 0 \pmod{N}$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{U}_0^0} = \mathbf{d}_{\mathbf{U}_0^0} \quad (2.21a)$$

- pour  $n \neq 0 \pmod{N/2}$ , si  $N$  est pair ; et pour  $n \neq 0$  sinon,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\mathbf{U}_0^{n,c}} \\ \mathbf{g}_{\mathbf{U}_0^{n,s}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nk\alpha & -\sin nk\alpha \\ \sin nk\alpha & \cos nk\alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\mathbf{U}_0^{n,c}} \\ \mathbf{d}_{\mathbf{U}_0^{n,s}} \end{bmatrix} \quad (2.21b)$$

- pour  $n = N/2 \pmod{N/2}$ , si  $N$  est pair,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\mathbf{U}_0^{n,c}} \\ \mathbf{g}_{\mathbf{U}_0^{n,s}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\mathbf{U}_0^{n,c}} \\ \mathbf{d}_{\mathbf{U}_0^{n,s}} \end{bmatrix} \quad (2.21c)$$

### Ondes stationnaires

Le cas des ondes fixes est là encore analogue aux développements de la section 1.4.2 et repose aussi sur l'hypothèse de symétrie cyclique des forces non-linéaires. Cependant, puisque les aspects temporel et spatial sont décorrélés la symétrie cyclique peut être appliquée indépendamment de la décomposition en série de Fourier.

### 2.1.4 Procédures de condensation dans le domaine fréquentiel

Lorsque les systèmes étudiés présentent des non-linéarités localisées (dans le cas des liaisons ou des interfaces), il est possible de réaliser une condensation exacte des équations du mouvement fréquentielles. Le système condensé est alors de la taille du nombre de degrés de liberté non-linéaires (ou moitié moins, dans le cas non-linéarités définies en termes de variables relatives). Ceci peut s'avérer très utile lorsque les systèmes traités sont de taille importante.

#### Condensation sur les degrés de liberté non-linéaires

Supposons donc que les forces non-linéaires n'agissent que sur un nombre restreint de degrés de liberté  $\mathbf{U}_c$ , de telle sorte que si le vecteur des inconnues fréquentielles s'écrit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{B}_c \mathbf{U}_c + \mathbf{B}_a \mathbf{U}_a \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{B}_c$  et  $\mathbf{B}_a$  sont des matrices booléennes de restriction aux degrés de liberté non-linéaires,  $\mathbf{U}_c$  et linéaires,  $\mathbf{U}_a$  respectivement.

Nous avons alors :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{B}_c \mathbf{F}_c(\mathbf{U}_c) \quad (2.23)$$

et l'équation (2.13) s'écrit en deux sous-systèmes :

$$\mathbf{Z}_{cc} \mathbf{U}_c + \mathbf{Z}_{ca} \mathbf{U}_a + \mathbf{F}_c(\mathbf{U}_c) = \mathbf{P}_c \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{Z}_{ac} \mathbf{U}_c + \mathbf{Z}_{aa} \mathbf{U}_a = \mathbf{P}_a \quad (2.24b)$$

Les matrices  $\mathbf{Z}_{ac}$ ,  $\mathbf{Z}_{cc}$ ,  $\mathbf{Z}_{ca}$  et  $\mathbf{Z}_{aa}$  étant définies à l'aide des matrices booléennes  $\mathbf{B}_c$  et  $\mathbf{B}_a$ .

Le sous-système (2.24b) permet d'éliminer  $\mathbf{U}_a$  du sous-système (2.24a) et on obtient un système réduit sur les degrés de liberté non-linéaires :

$$\mathbf{Z}_{red} \mathbf{U}_c + \mathbf{F}_c(\mathbf{U}_c) = \mathbf{P}_{red} \quad (2.25)$$

avec :

$$\mathbf{Z}_{red} = \mathbf{Z}_{cc} - \mathbf{Z}_{ca} \mathbf{Z}_{aa}^{-1} \mathbf{Z}_{ac} \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{P}_{red} = \mathbf{P}_c - \mathbf{Z}_{ca} \mathbf{Z}_{aa}^{-1} \mathbf{P}_a \quad (2.26b)$$

#### Condensation sur les degrés de liberté relatifs

Considérons maintenant un système dynamique présentant une non-linéarité d'interface par exemple entre deux sous-systèmes. Ce type de situation est typique des systèmes en contact et les forces non-linéaires sont alors définies en fonction de variables relatives.

Si aucune autre source de non-linéarité n'affectent les degrés de liberté internes de ces deux sous-systèmes, la procédure de condensation sur les degrés de liberté non-linéaires (c'est à dire d'interface) décrite au paragraphe précédent peut être appliquée.

Nous avons alors :

$$\mathbf{Z}_{red}^1 \mathbf{U}_c^1 + \mathbf{F}_c^1(\mathbf{U}_c^1, \mathbf{U}_c^2) = \mathbf{P}_{red}^1 \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{Z}_{red}^2 \mathbf{U}_c^2 + \mathbf{F}_c^2(\mathbf{U}_c^1, \mathbf{U}_c^2) = \mathbf{P}_{red}^2 \quad (2.27b)$$

où les vecteurs  $\mathbf{U}_c^1$  et  $\mathbf{U}_c^2$  regroupent donc les déplacements des degrés de liberté de l'interface pour chaque sous-système. Les termes  $\mathbf{Z}_{red}^1$ ,  $\mathbf{Z}_{red}^2$ ,  $\mathbf{P}_{red}^1$  et  $\mathbf{P}_{red}^2$  sont définis pour chaque sous-système selon la procédure décrite au paragraphe précédent.

D'après le principe d'action-réaction, les forces non-linéaires d'interaction  $\mathbf{F}_c^1$  et  $\mathbf{F}_c^2$  vérifient :

$$\mathbf{F}_c^1 + \mathbf{F}_c^2 = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

Si l'on note de plus

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{U}_c^1 - \mathbf{U}_c^2 \quad (2.29)$$

et par convention

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_r) = \mathbf{F}_c^1 \quad (2.30)$$

alors, le système (2.27) se réduit sur les degrés de liberté relatifs :

$$\mathbf{Z}_r \mathbf{U}_r + \mathbf{F}(\mathbf{U}_r) = \mathbf{P}_r \quad (2.31)$$

avec :

$$\mathbf{Z}_r = \left( (\mathbf{Z}_{red}^1)^{-1} + (\mathbf{Z}_{red}^2)^{-1} \right)^{-1} \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{Z}_r \left[ (\mathbf{Z}_{red}^1)^{-1} \mathbf{P}_{red}^1 - (\mathbf{Z}_{red}^2)^{-1} \mathbf{P}_{red}^2 \right] \quad (2.32b)$$

Le solveur de Newton permet de résoudre le système réduit (2.31) puis les équations (2.27) et (2.24) permettent de remonter aux déplacements de tout le système.

## 2.2 Traitement des forces non-linéaires de contact et frottement

La résolution du problème algébrique fréquentiel (2.16) nécessite la détermination du vecteur des composantes de Fourier des forces non-linéaires  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ . Ceci présente une difficulté dans le cas de non-linéarités uniquement définies dans le domaine temporel telle que les forces de contact. Pour contourner cette difficulté, la méthode d'alternance fréquentielle / temporelle (AFT) initialement proposée par Cameron et Griffin (1989), généralement couplées à un solveur de type Newton, est couramment employée.

Ce type de procédure se décompose selon les étapes suivantes :

1. le vecteur des composantes fréquentielles du déplacement,  $\mathbf{U}$ , est exprimé, à l'aide d'une transformée de Fourier discrète inverse, dans le domaine temporel ;
2. à partir des déplacements  $\mathbf{u}(t)$  (et éventuellement des vitesses  $\mathbf{v}(t)$ ) ainsi obtenus, l'expression temporelle des forces non-linéaires  $\mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$  peut être calculée sur une période ;
3. cette dernière est ensuite transformée dans le domaine fréquentiel (à l'aide d'une transformée de Fourier discrète) et on obtient  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ , le vecteur des composantes fréquentielles des forces non-linéaires correspondant aux déplacements  $\mathbf{U}$ .

Le cas des non-linéarités de type contact ou frottement pose un problème supplémentaire puisque les lois force / déplacement ou force / vitesse sont généralement des fonctions discontinues (loi de contact unilatéral ou loi de Coulomb) et qu'il n'existe pas de fonction biunivoque permettant le calcul direct de ces forces en fonction des déplacements et vitesses. Pour contourner cette difficulté, il est possible (et très courant) de régulariser ces lois dans les méthodes AFT.

Dans la suite, quelques formulations régularisées de ces lois de contact et de frottement vont être présentées et nous verrons ensuite les conséquences dans les procédures AFT.

### 2.2.1 Lois de contact et de frottement et régularisation

#### Lois de contact

Nous noterons, dans ce paragraphe,  $h$  la pénétration et  $f_N$  la force de réaction dans la direction normale au contact (l'équivalent d'une pression de contact). Nous introduisons alors trois lois de contact illustrées en figures 2.1.

(a) La loi de contact « dur », qui assure la non-pénétration des solides en contact :

$$f_N = 0 \text{ si } h < 0 \quad (2.33a)$$

$$h = 0 \text{ si } f_N > 0 \quad (2.33b)$$

Cette loi, fortement non-régulière, ne peut être utilisée qu'à l'aide de multiplicateurs de Lagrange.

(b) Une loi de contact « adouci » linéaire par morceaux et biunivoque,

$$f_N = \begin{cases} 0 & \text{si } h < 0 \\ k_N h & \text{si } h \geq 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

où  $k_N$  représente une raideur de contact. Cette loi est la plus couramment utilisée, elle permet un calcul direct de la force en fonction du déplacement.

(c) Enfin, une autre loi de contact « adouci », la loi exponentielle

$$f_N = \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq -c \\ \frac{f_N^0}{\exp(1) - 1} \left[ \left( \frac{h}{c} + 1 \right) \left( \exp \left( \frac{h}{c} + 1 \right) - 1 \right) \right] & \text{si } h > -c \end{cases} \quad (2.35)$$

comporte plus de paramètres mais est aussi plus régulière que la loi précédente.

Parmi ces trois lois, seules les deux dernières peuvent être utilisées dans la formulation AFT précédemment présentée. À partir du déplacement normal dans le domaine temporel, la force de contact normale s'exprime simplement et peut être ensuite transformée dans le domaine fréquentiel. La première loi est fortement non régulière et pose problème dans bon nombre d'applications numériques. Dans le cadre de la méthode AFT, il n'est pas possible de l'utiliser directement puisque la valeur de la force de contact n'est pas définie pour toute valeur du déplacement (à l'origine en particulier) ; on peut en revanche avoir recours à des multiplicateurs de Lagrange...

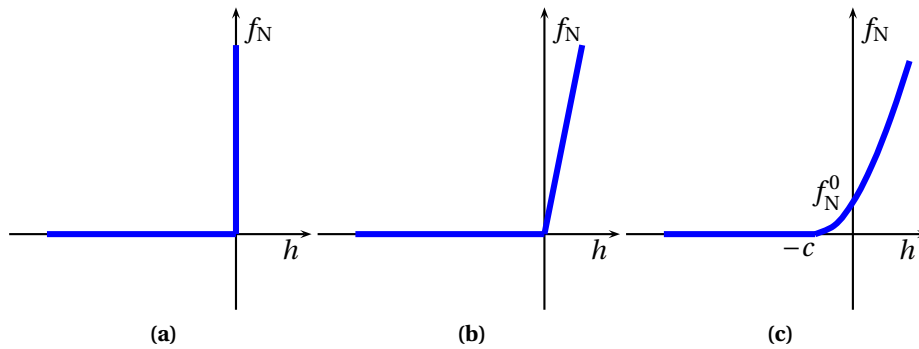


FIG. 2.1 Lois de contact

### Lois de frottement

Étant donné :

- $\delta = [\delta_1, \delta_2]$  le déplacement relatif tangentiel (bi-dimensionnel) et  $\dot{\delta}$ , la vitesse de glissement,
- $f_T = [f_{T,1}, f_{T,2}]$  la force de réaction dans la direction tangentielle (force de frottement),
- $\mu$ , le coefficient de frottement,

nous proposons aussi trois lois représentées en figures 2.2.

- (a) Le modèle standard de Coulomb dans lequel aucun mouvement relatif n'est possible si la force tangentielle équivalente,

$$f_{T,eq} = \sqrt{f_{T,1}^2 + f_{T,2}^2} \quad (2.36)$$

est inférieure à la force limite de Coulomb qui est proportionnelle à l'effort normal de contact  $f_N$ ,

$$f_{T,lim} = \mu |f_N| \quad (2.37)$$

La loi de Coulomb s'écrit donc :

$$\dot{\delta} = 0 \text{ si } \|f_T\| < \mu |f_N| \quad (2.38a)$$

$$f_T = -\mu |f_N| \frac{\dot{\delta}}{\|\dot{\delta}\|} \text{ si } \|\dot{\delta}\| > 0 \quad (2.38b)$$

L'équivalent en déplacements relatifs de cet loi conduit à un cycle d'hystérésis (figure 2.2a).

- (b) Le premier niveau de régularisation consiste à permettre un déplacement relatif ( $\delta \neq 0$ ) pour une force inférieure à la force limite de Coulomb par l'adjonction d'une raideur de pénalité pour une interface de contact discrète :

$$f_T = -k_t (\delta - z) \quad (2.39)$$

La variable  $z$  correspond au déplacement (relatif) tangentiel du point de contact sans masse (voir figure 2.3). Sa valeur est déterminée de manière à ce que la force de frottement ainsi exprimée n'excède pas la force de limite de Coulomb (2.37). Ce modèle permet en quelque sorte



un *glissement élastique* lorsque la force de réaction tangentielle à l'interface est inférieure à la limite de Coulomb.

Nous verrons plus loin que ce type de lois en déplacements nécessite un schéma itératif dans la méthode AFT.

- (c) Enfin, nous présentons le modèle différentiel de Bouc-Wen (Bouc, 1981; Wen, 1976) qui est particulièrement intéressant puisqu'il permet de représenter des comportements microscopiques (de type micro-glissement) à l'aide de modélisations macroscopiques. Ce modèle est régi par une loi différentielle implicite qui donne la dérivée de la force non-linéaire en fonction de la vitesse et de cette même force :

$$\dot{f}_T(t) = A\dot{\delta}(t) - \nu(\beta\|\dot{\delta}(t)\|\|f_T(t)\|^{n-1}f_T(t) - \gamma\dot{\delta}(t)\|f_T(t)\|^n) \quad (2.40)$$

Il est particulièrement polyvalent de par son grand nombre de paramètres et de multiples formes de cycles d'hystérésis sont représentables.

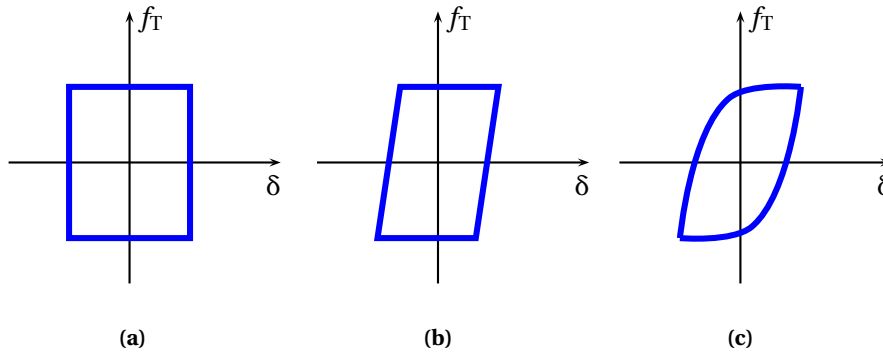


FIG. 2.2 Lois de frottement

Parmi ces trois modèles, les deux derniers sont des fonctions continues et donc utilisables directement dans une formulation AFT. Le premier, pour les mêmes raisons que dans le cas du modèle de contact unilatéral, ne peut être utilisé qu'avec des multiplicateurs de Lagrange (ou dans une formulation en Lagrangiens dynamiques, comme nous le verrons plus loin).

Il existe bien sûr d'autres méthodes de régularisation et on peut citer en particulier celles basées sur une formulation en vitesse (Berthillier et al., 1998; Petrov et Ewins, 2002) qui sont directes mais dont le sens physique est moins évident. Enfin, la littérature est riche en modèles de frottement permettant de représenter des effets de micro-glissement à partir de modèles macroscopiques (Olsson et al., 1998). Parmi ceux qui sont utilisés en dynamique, citons, par exemple, les modèles de Dahl ou de LuGre qui se présentent une forme différentielle plus simple que celle du modèle de Bouc-Wen mais qui sont par conséquent moins polyvalents.

Nous allons maintenant détailler le calcul des forces de frottement dans le cas des modèles (b) puis (c) dans le cadre d'une procédure AFT.

### Modèle de glissement élastique (b)

Dans le modèle de glissement élastique (b), nous avons introduit une raideur tangentielle  $k_t$  ainsi

qu'une variable interne  $z$ . Outre la pénalité, on donne généralement à cette raideur la signification du comportement élasto-plastique des aspérités de l'interface de contact (Petrov et Ewins, 2002). La variable interne  $z$  représente quand à elle, le déplacement relatif du point de contact sans masse au niveau du contact nœuds à nœuds comme le montre la figure 2.3. Nous allons maintenant détailler

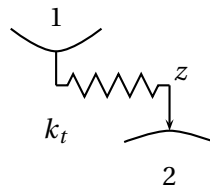


FIG. 2.3 Élément de contact frottant nœud à nœud

l'intégration de ce modèle dans une procédure AFT. Notons par ailleurs que le mode de calcul de la force normale  $f_N$  de contact n'intervient pas ici ; nous la supposons donc connue à tout instant.

Dans la méthode AFT, au début d'une itération du solveur de Newton, les déplacements relatifs sont connus dans le domaine fréquentiel et il est aisé de les transformer dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier inverse. Ainsi, pour un élément de contact nœuds à nœuds, le déplacement relatif  $\delta$  périodique peut être exprimé sur  $N$  pas de temps. Il s'agit alors de déterminer la force de frottement correspondante. L'état (*glissant* ou *collé*) du point de contact ainsi que la force de frottement sont déterminés à chaque pas de temps à l'aide d'une procédure de prédiction-correction pour respecter la loi de Coulomb. En supposant connus, à l'instant  $t_n$ , l'état du contact et les variables  $\delta^n$  et  $z^n$ , on peut prédire la force de frottement à l'état  $t_{n+1}$  en considérant que le point de contact reste collé par rapport à l'instant précédent,  $z^{pre} = z^n$  :

$$f_T^{pre} = -k_t (\delta^{n+1} - z^n), \quad (2.41)$$

on corrige ensuite la force de frottement pour respecter la loi de Coulomb :

$$f_T^{n+1} = \begin{cases} f_T^{pre} & \text{si } |f_T^{pre}| < \mu |f_N^{n+1}| \\ \mu |f_N^{n+1}| \cdot \frac{f_T^{pre}}{|f_T^{pre}|} & \text{si } |f_T^{pre}| \geq \mu |f_N^{n+1}| \end{cases} \quad (2.42)$$

enfin, le déplacement du point de contact est actualisé à l'aide de l'équation (2.39) :

$$z^{n+1} = \delta^{n+1} + \frac{f_T^{n+1}}{k_t}. \quad (2.43)$$

Ce schéma est assez couramment utilisé (Guillen et Pierre, 1999; Poudou et Pierre, 2003; Laxalde et al., 2006b) puisqu'il apporte à la fois une certaine stabilité dans les applications numériques tout en restant assez simple et physiquement réaliste.

### Modèle de Bouc-Wen (c)

L'un des avantages de l'utilisation du modèle différentiel de Bouc-Wen (outre sa plus grande polyvalence) est qu'il permet de s'affranchir de la procédure itérative précédente dans le cadre d'une méthode AFT.

En particulier, Wong et al. (1994a,b) ont proposé dans la méthode de Newton de ne plus résoudre l'équation du mouvement fréquentielle réduite (2.31) mais plutôt de résoudre les équations non-linéaires du modèle de Bouc-Wen préalablement transformées dans le domaine fréquentiel. Ainsi, lors d'une itération de Newton, le vecteur des déplacements non-linéaires relatifs  $\mathbf{U}_r$  étant connu, il est possible d'exprimer les forces non-linéaires à l'aide de l'équation du mouvement réduite (2.31) :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_r) = -\mathbf{Z}_r \mathbf{U}_r + \mathbf{P}_r \quad (2.44)$$

Ensuite, les vitesses relatives sont obtenues dans le domaine fréquentiel en appliquant l'opérateur de dérivation défini par la relation (2.10) et, de même que les forces non-linéaires, elles sont exprimées dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse. Ces variables temporelles peuvent ensuite être introduites dans le modèle différentiel de Bouc-Wen (2.40). L'équation ainsi obtenue est ensuite transformée dans le domaine fréquentielle et remplace ainsi le problème dynamique à résoudre.

### Influence du micro-glissement

Comme nous l'avons vu, l'un des intérêts du modèle différentiel de Bouc-Wen est la possibilité de représenter des phénomènes de micro-glissement. Afin d'illustrer l'importance de cet aspect dans les modélisations, nous considérons un exemple simple, constitué d'un système à deux degrés de liberté et d'un frotteur élémentaire. Ce modèle est détaillé plus loin, en section 2.4, mais nous pouvons d'ores et déjà présenter l'influence de la modélisation du frottement sur les paramètres modaux. La figure 2.4 regroupe donc l'évolution des paramètres modaux de ce système non-linéaire en fonction de l'amplitude modale pour les modèles de glissement élastique (pénalité) et de Bouc-Wen. La stratégie de calcul de ces grandeurs sera détaillée plus loin mais on peut déjà noter que l'influence de la modélisation du frottement est importante en particulier sur l'estimation de l'amortissement. En effet, le modèle de macro-glissement (pénalité) donne une valeur d'amortissement sous-estimée (d'environ 20% au maximum dans ce cas) par rapport au modèle de Bouc-Wen qui tient compte du micro-glissement. On notera aussi la pente à l'origine sur la courbe taux d'amortissement-amplitude qui est non-nulle dans le cas du modèle de Bouc-Wen ; ceci est un effet typique du micro-glissement puisqu'il n'existe pas de seuil d'amplitude comme dans le cas du macro-glissement. Dans nos applications, la prise en compte de cet aspect, en particulier dans des modèles discrets de type éléments-finis, semble donc nécessaire pour une estimation correcte de l'efficacité des dispositifs d'amortissement par frottement.

### 2.2.2 Lagrangiens dynamiques

La méthode des Lagrangiens dynamiques proposée par Nacivet et al. (2003) est inspirée des stratégies de résolution de problèmes contraints par multiplicateurs de Lagrange qui assurent l'exactitude de la solution convergée. Elle permet, comme les autres méthodes précédemment présentées, le calcul des composantes fréquentielles des forces non-linéaires de contact et de frottement à l'aide d'une alternance fréquentielle / temporelle. Son principal avantage (lié au formalisme de multiplicateurs de Lagrange) est qu'elle permet de s'affranchir de la régularisation de l'interface de contact par l'ajout de raideurs de pénalité qui sont généralement difficiles à quantifier (Szwedowicz et al.,

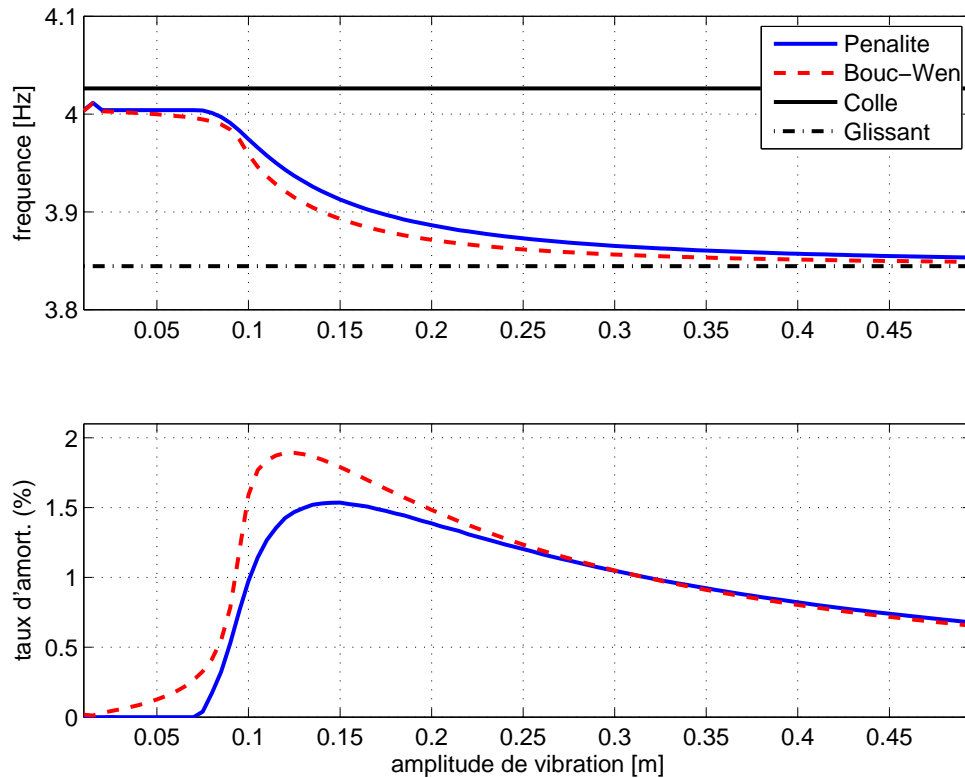


FIG. 2.4 Influence de la modélisation du frottement sur les paramètres modaux

2006). Cette approche a ensuite été appliquée par Charleux (2006) pour l'étude du frottement en pied d'aube.

Nacivet (2002) a proposé deux formalismes de sa méthode de Lagrangiens Dynamiques. Le premier, basé sur une formulation en déplacements relatifs, permet un calcul exact des positions relatives des objets en contact mais nécessite un schéma itératif. Le second, basé sur une formulation en vitesses relatives permet un calcul direct. Nous avons utilisé une formulation mixte en vitesses pour les directions de contact tangentielles et en déplacements pour la direction de contact normale. Nous allons maintenant détailler la procédure de calcul qui est d'autre part résumée en figure 2.5 dans le cadre globale de la procédure AFT.

On part de l'équation (2.16) préalablement réduite sur les degrés de liberté non-linéaires relatifs,

$$f(\mathbf{U}_r) = \mathbf{Z}_r(\omega)\mathbf{U}_r + \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{P}_r = 0 \quad (2.45)$$

et nous noterons  $\boldsymbol{\lambda}$ , le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (qui correspond à l'opposé des forces de contact).

### Formulation des Lagrangiens dynamiques.

Les multiplicateurs de Lagrange sont exprimés comme une pénalisation des équations du mouvement. Pour cela, l'équation (2.45) est séparée selon les deux directions, tangentielle (T) et normale

(N) :

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{P}_r^T - \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_r^{T,T} & \mathbf{Z}_r^{T,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r^T \\ \mathbf{U}_r^N \end{bmatrix} + \epsilon_T (\nabla \mathbf{U}_r^T - \mathbf{V}_r^T) \quad (2.46a)$$

et

$$\boldsymbol{\lambda}^N = \mathbf{P}_r^N - \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_r^{N,T} & \mathbf{Z}_r^{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r^T \\ \mathbf{U}_r^N \end{bmatrix} + \epsilon_N (\mathbf{U}_r^N - \mathbf{X}_r^N) \quad (2.46b)$$

Les vecteurs  $\mathbf{V}_r^T$  et  $\mathbf{X}_r^N$ , nouvellement introduits, représentent les vitesses et déplacements relatifs à l'interface dans les directions tangentielle et normale respectivement. Ils seront calculés dans le domaine temporel afin de respecter les lois de contact et de frottement. Les paramètres  $\epsilon_T$  et  $\epsilon_N$  sont des coefficients de pénalité choisis arbitrairement et  $\nabla$  est l'opérateur différentiel dans le domaine fréquentiel déjà évoqué précédemment.

Par la suite, les paires d'inconnues  $(\boldsymbol{\lambda}^T, \mathbf{V}_r^T)$  et  $(\boldsymbol{\lambda}^N, \mathbf{X}_r^N)$  sont déterminées à l'aide d'une alternance fréquentielle / temporelle de manière à respecter les lois de contact et de frottement dans le domaine temporel.

On remarquera d'autre part que lorsque les équations (2.46) sont vérifiées, la relation (2.45) se réduit à

$$f(\mathbf{U}_r^T) = \epsilon_T (\nabla \mathbf{U}_r^T - \mathbf{V}_r^T)$$

et

$$f(\mathbf{U}_r^N) = \epsilon_N (\mathbf{U}_r^N - \mathbf{X}_r^N)$$

ce qui assure qu'à la convergence, les déplacements relatifs d'interface issus des domaines fréquentiel et temporel coïncident et que les conditions de contact et de frottement sont vérifiées en même temps que les équations du mouvement.

### Prédiction et correction dans le domaine temporel.

En premier lieu, les équations (2.46) sont reformulées de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \boldsymbol{\lambda}_U^T (\mathbf{U}_r) - \boldsymbol{\lambda}_X^T (\mathbf{V}_r^T) \quad (2.47a)$$

et

$$\boldsymbol{\lambda}^N = \boldsymbol{\lambda}_U^N (\mathbf{U}_r) - \boldsymbol{\lambda}_X^N (\mathbf{X}_r^N) \quad (2.47b)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}_U$  et  $\boldsymbol{\lambda}_X$  regroupent respectivement les termes dépendants de  $\mathbf{U}_r$  et  $(\mathbf{X}_r^N, \mathbf{V}_r^T)$  dans les équations (2.46). Les premiers termes sont connus (à chaque itération du processus de résolution de Newton) à partir du domaine fréquentiel alors que les seconds doivent être calculés. Ceci se fait dans le domaine temporel, à l'aide des lois de contact et de frottement :

- contact ou séparation dans la direction normale,
- adhérence ou glissement dans la direction tangentielle.

Pour cela, les termes  $\boldsymbol{\lambda}_U$  des équations (2.47) sont exprimés dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète inverse avec un échantillonnage sur N points. Le calcul des multiplicateurs de Lagrange dans le domaine temporel se fait ensuite en considérant l'état d'un point de contact au pas de temps  $k$ ,

$${}^k \boldsymbol{\lambda} = {}^k \boldsymbol{\lambda}_U - {}^k \boldsymbol{\lambda}_X \quad (2.48)$$

L'objectif est, à l'aide d'une procédure de prédiction / correction, de calculer les forces de contact  ${}^k\boldsymbol{\lambda}$  pour chaque pas de temps en respect des lois de contact et de frottement. Pour chaque pas de temps  $k$ , la prédiction est réalisée, à partir des équations (2.47), en supposant que le point de contact est adhérent, ce qui signifie que  ${}^k\mathbf{V}_r^T = 0$  et  ${}^k\mathbf{X}_r^N = 0$ . Nous avons donc,

$${}^k\boldsymbol{\lambda}_{pre} = {}^k\boldsymbol{\lambda}_U \quad (2.49)$$

dans les directions normales et tangentielles. Ensuite, la valeur de  ${}^k\boldsymbol{\lambda}_X$  est déterminée afin de corriger  ${}^k\boldsymbol{\lambda}$  en respect des lois de contact et des transitions séparation / adhérence / glissement,

1. Séparation :  ${}^k\lambda_{pre}^N \geq N_0$  (où  $N_0$  est une pré-charge statique due, dans nos applications, à la rotation du moteur).

Le contact est interrompu de telle sorte que les forces dans les directions normale et tangentielles doivent être nulles :

$${}^k\boldsymbol{\lambda} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow {}^k\boldsymbol{\lambda}_X = {}^k\boldsymbol{\lambda}_U \quad (2.50)$$

2. Adhérence :  ${}^k\lambda_{pre}^N < N_0$  et  $\|{}^k\boldsymbol{\lambda}_{pre}^T\| < \mu |{}^k\lambda_{pre}^N|$ .

Dans ce cas, la prédiction est correcte puisque les déplacements relatifs dans la direction normale et les vitesses relatives dans les directions tangentielles sont nuls. Ainsi,

$${}^k\lambda_X^N = 0 \text{ et } {}^k\boldsymbol{\lambda}_X^T = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

3. Glissement :  ${}^k\lambda_{pre}^N < N_0$  et  $\|{}^k\boldsymbol{\lambda}_{pre}^T\| > \mu |{}^k\lambda_{pre}^N|$ .

Ici, les déplacements relatifs dans la direction normale sont encore nuls, ce qui donne

$${}^k\lambda_X^N = 0 \quad (2.52a)$$

alors que, dans les directions tangentielles, la loi de Coulomb peut s'écrire de la façon suivante,

$${}^k\boldsymbol{\lambda}^T = \mu |{}^k\lambda_{pre}^N| \frac{{}^k\mathbf{V}_r^T}{\|{}^k\mathbf{V}_r^T\|}$$

ou encore, en rappelant que, d'après (2.46),  $\boldsymbol{\lambda}_X^T = \epsilon_T \mathbf{V}_r^T$ ,

$${}^k\boldsymbol{\lambda}^T = \mu |{}^k\lambda_{pre}^N| \frac{{}^k\boldsymbol{\lambda}_X^T}{\|{}^k\boldsymbol{\lambda}_X^T\|}$$

En considérant cette dernière expression avec les équations (2.49) et (2.48), nous obtenons finalement,

$${}^k\boldsymbol{\lambda}_{pre}^T = \left( \mu \frac{|{}^k\lambda_{pre}^N|}{\|{}^k\boldsymbol{\lambda}_X^T\|} + 1 \right) {}^k\boldsymbol{\lambda}_X^T$$

dont on déduit que  ${}^k\boldsymbol{\lambda}_X^T$  et  ${}^k\boldsymbol{\lambda}_{pre}^T$  sont colinéaires. Finalement, il vient,

$${}^k\boldsymbol{\lambda}^T = \mu |{}^k\lambda_{pre}^N| \frac{{}^k\boldsymbol{\lambda}_{pre}^T}{\|{}^k\boldsymbol{\lambda}_{pre}^T\|}$$

puis,

$${}^k\lambda_X^T = {}^k\lambda_{pre}^T \left( 1 - \mu \frac{|{}^k\lambda_{pre}^N|}{\|{}^k\lambda_{pre}^T\|} \right) \quad (2.52b)$$

L'étape finale consiste simplement à transformer les Lagrangiens dynamiques ainsi actualisés dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète.

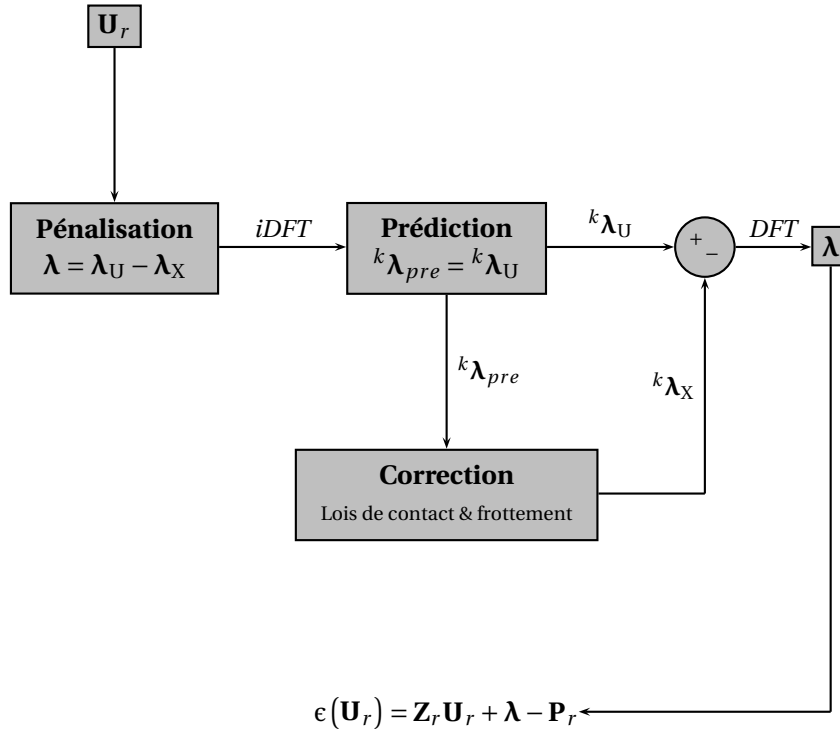


FIG. 2.5 Organigramme de la procédure de calcul des Lagrangiens dynamiques

### 2.2.3 Détermination optimale du nombre d'harmoniques

L'utilisation de méthodes fréquentielles basées sur les séries de Fourier amène souvent à poser la question du nombre d'harmoniques nécessaires à retenir dans la série pour assurer une prédiction correcte de la réponse. Il ne faut cependant pas oublier que plus le nombre d'harmoniques considérées est important plus le système à résoudre est de taille importante. Il semble donc nécessaire de faire un compromis entre précision de la solution (par rapport à une solution « exacte » ou de référence) et coûts de calcul.

En outre, nous avons vu que l'utilisation de méthodes d'alternance fréquentielle / temporelle couplées avec la méthode de la balance harmonique est assez commune, en particulier dans les problèmes de contact et de frottement. Dans ces procédures AFT, les forces non-linéaires sont calculées (de façon exacte au sens du modèle de la non-linéarité) dans le domaine temporel puis transformées dans le domaine fréquentiel. Puisque l'approximation vient, en partie, de cette dernière transformation, nous proposons une mise à jour dynamique du nombre d'harmoniques nécessaires

en fonction de la mesure de l'erreur de Fourier,

$$\epsilon(N_h) = \int_T \left( \mathbf{f}(t) - \sum_{n=0}^{N_h} \mathbf{F}^{n,c} \cos n \frac{2\pi}{T} t + \mathbf{F}^{n,s} \sin n \frac{2\pi}{T} t \right) dt \quad (2.53)$$

entre les forces non-linéaires « exactes » dans le domaine temporel  $\mathbf{f}(t)$  et leur expression temporelle issue de la synthèse de la série de Fourier pour le nombre d'harmoniques  $N_h$  retenues.

Ainsi, d'un point à l'autre (selon le type de continuation utilisé), le nombre d'harmoniques est adapté pour que l'erreur de Fourier n'excède pas une valeur fixée à l'avance. La précision de la réponse reste alors quasiment constante et le nombre d'harmoniques varie. Notons d'autre part, que cette erreur de Fourier nous informe sur le *taux de non-linéarité* du système dynamique. En effet, en pratique, pour une précision donnée et fixée, le nombre d'harmoniques nécessaires sera faible lorsque le système est faiblement non-linéaire et important s'il est plus fortement non-linéaire.

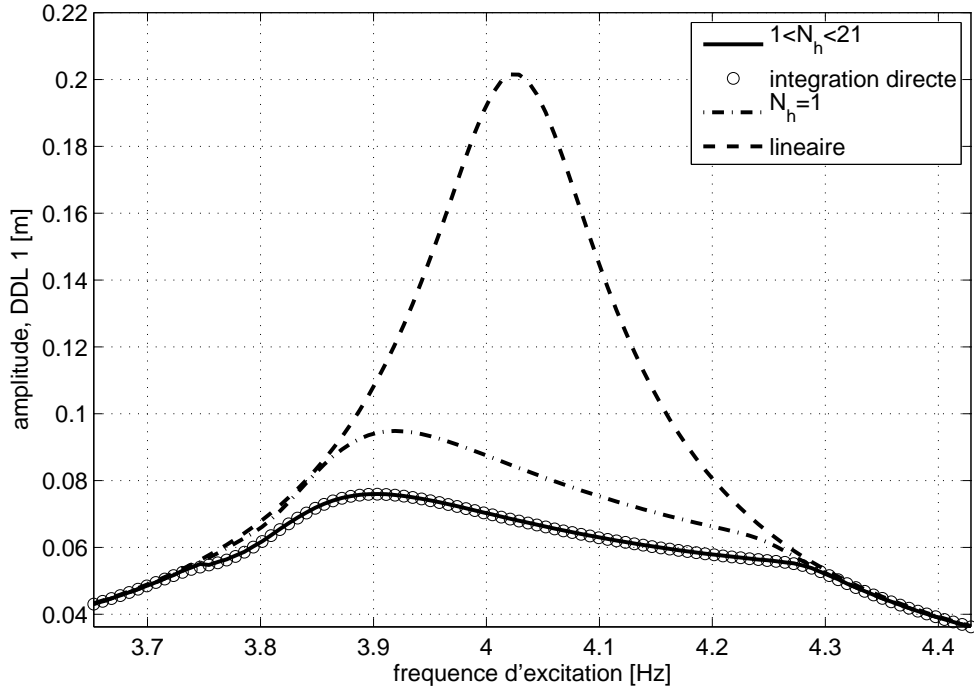
Nous illustrons maintenant la méthode proposée sur un système passant d'un état faiblement non-linéaire à un état plus fortement non-linéaire au cours d'une réponse en fréquence. Il s'agit en fait du système simple présenté plus loin (section 2.4, figure 2.8) présentant une non-linéarité de type frottement régularisée. Nous comparons l'évolution du nombre d'harmoniques retenues pour une précision fixée (à 0,15 ici). Le nombre d'harmoniques maximal autorisé est fixé à 21. Les figures 2.6 regroupent d'une part les courbes de résonance des deux degrés de liberté pour le système linéaire équivalent (frotteur bloqué), le système non-linéaire pour une harmonique retenue et la réponse obtenue en adaptant le nombre d'harmoniques. D'autre part, pour cette dernière réponse les deux derniers graphes représentent l'évolution du nombre d'harmoniques et celle du critère d'erreur de Fourier. La réponse obtenue par intégration directe est aussi représentée. On observe que le nombre d'harmoniques nécessaires pour respecter cette précision est de 1 en dehors de la résonance non-linéaire ; au voisinage du pic, il augmente jusqu'à 15 puis diminue pour revenir à 1. On remarquera aussi l'écart assez important des réponses en fréquence calculées avec une harmonique et avec un nombre d'harmoniques adaptatif ; cette dernière étant très proche de la réponse de référence obtenue par intégration directe.

Le critère proposé est particulièrement adapté aux systèmes dont la dynamique est principalement gouvernée par les premières harmoniques. Si ce cas est assez fréquent, certains systèmes peuvent cependant présenter une dynamique pilotée par des harmoniques d'ordre élevé, les premières harmoniques ayant une contribution plus faible. Dans ce cas, ce critère n'est plus adapté.

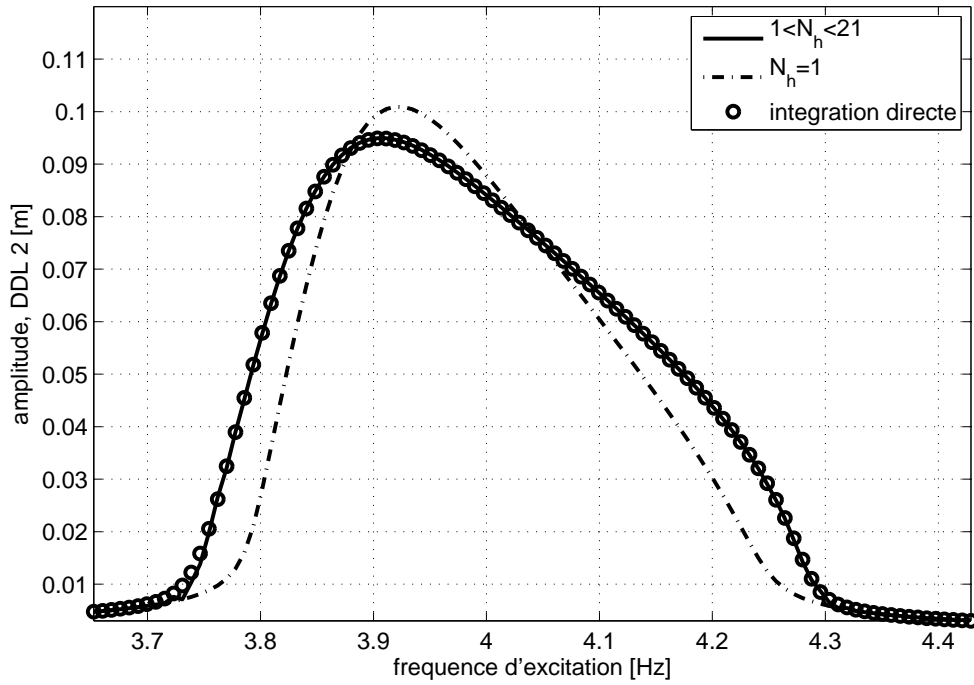
## 2.3 Solutions périodiques d'un système non-linéaire autonome

Nous avons jusqu'alors présenté le cas d'un système non-autonome, soumis à une excitation périodique. Dans le cas des systèmes autonomes sans excitation extérieure (c'est à dire libre), on peut toujours chercher à déterminer les solutions périodiques du système (conservatif ou non) mais la période des oscillations n'étant plus imposée par l'excitation elle devient une inconnue supplémentaire. D'autre part la notion de solutions périodiques d'un système dynamique autonome est souvent associée à celle de modes assez commune dans les systèmes linéaires et un peu moins dans les cas non-linéaires.





(a)



(b)

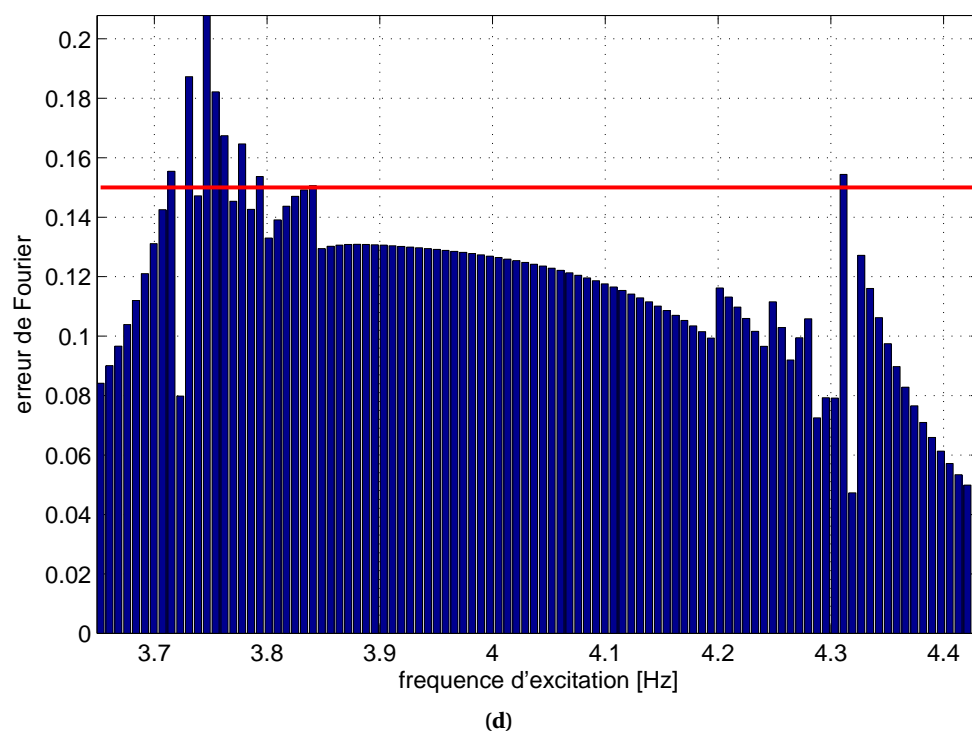
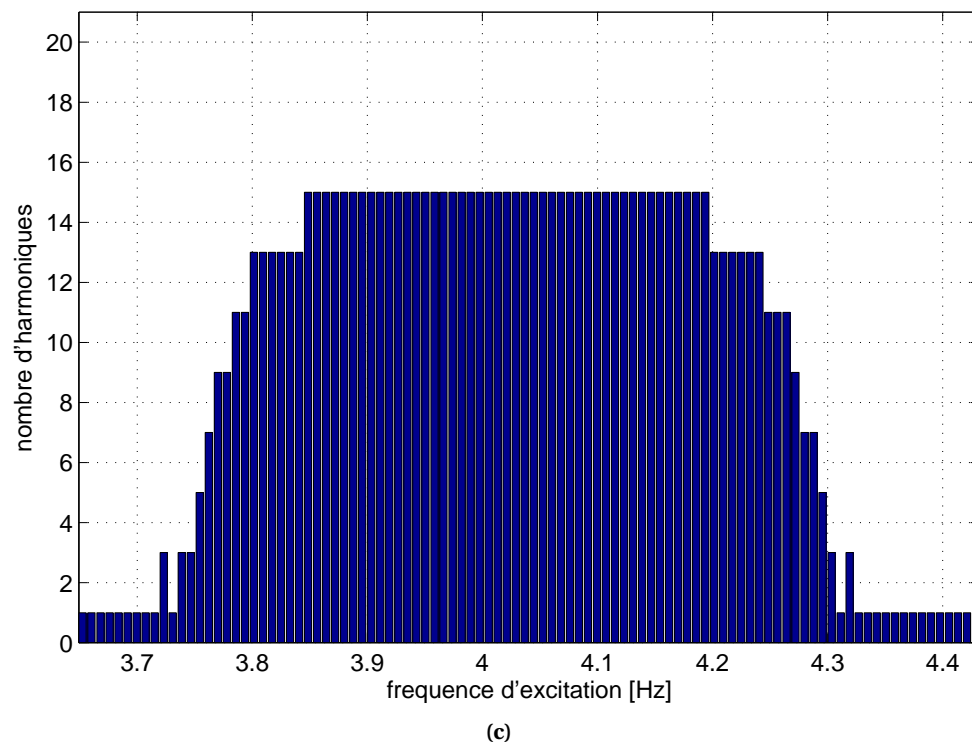


FIG. 2.6 Optimisation du nombre d'harmoniques à précision constante; (a) et (b) réponses en fréquence des DDL 1 et 2, (c) évolution du nombre d'harmoniques, (d) erreur de Fourier.

### 2.3.1 Notion de modes non-linéaires

Les concepts de modes propres et d'analyse modale sont traditionnellement associés à la théorie des vibrations linéaires. Dans ce cadre, de nombreux résultats en découlent, principalement liés au principe de superposition, tels que le découplage des équations du mouvement dans la base modale ou encore la possibilité de représenter tout type de réponse dynamique (libre ou forcée) par une superposition de participations modales.

Dans le cadre des vibrations non-linéaires, où le principe de superposition ne s'applique plus, la notion de mode normal non-linéaire peut néanmoins être étendue à partir de la définition de mode normal en vibrations linéaires. Ainsi, on définit, pour un système discret, un mode normal non-linéaire comme une oscillation synchrone à l'unisson de toutes ses coordonnées (tous les points atteignent leur maximum simultanément). Cette notion d'unisson induit que les trajectoires modales sont des lignes dans l'espace des configurations qui, dans le cas non-linéaire, peuvent être courbes (modes non similaires) comme illustré en figure 2.7.

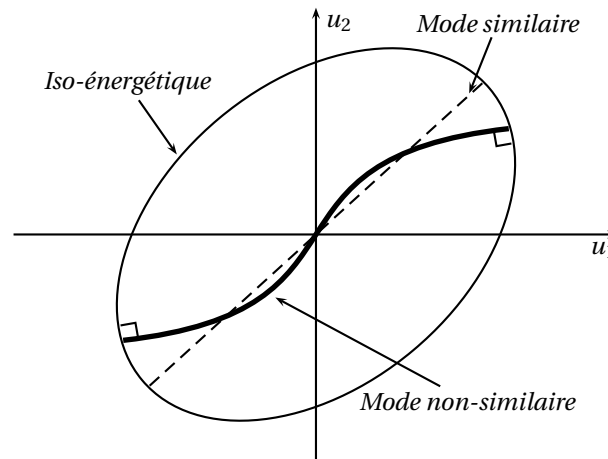


FIG. 2.7 Trajectoire d'un mode normal non-linéaire

Historiquement, les fondements de cette théorie remontent à la deuxième moitié du vingtième siècle où les travaux de Lyapunov (1947) ou de Rosenberg (1962) font référence et de nombreux travaux ont depuis été menés autour de celle-ci (Rand, 1974; Szemplinska-Stupnicka, 1983; Shaw et Pierre, 1994; Vakakis et al., 1996).

### 2.3.2 Méthodes d'analyse modale non-linéaire

#### Généralités

Comme dans le cas des systèmes non autonomes, que nous avons traité précédemment, la détermination des modes d'un système non-linéaire se base généralement sur une approximation de ces solutions. En ce sens, les méthodes existantes sont relativement proches de celles dédiées à l'étude des systèmes non-autonomes. Une formulation approchée du système dynamique ou/et

des solutions est tout d'abord proposée et les modes non-linéaires sont définis comme les solutions de ce système autonome.

Comme précédemment, on distingue plusieurs types de méthodes :

- les méthodes analytiques de perturbation basées sur l'introduction de « petits paramètres » ;
- les méthodes numériques basées sur une intégration temporelle (méthodes de tir) ;
- les méthodes d'approximation de la solution du type Ritz-Galerkin. . .

Rappelons enfin que l'une des principales difficultés (en particulier pour les méthodes numériques) réside dans la détermination de la fréquence des oscillations libres.

### Cas des systèmes non-conservatifs

Les définitions et méthodes présentées jusqu'ici pour le calcul des modes d'un système non-linéaire sont valables dans le cas où celui-ci est conservatif. Lorsque l'on s'intéresse à la dynamique d'un système dissipatif, deux approches sont possibles. La première consiste à étudier les modes du système conservatif associé au système initial et à introduire les effets dissipatifs *a posteriori*. Ceci est valable lorsque les termes dissipatifs sont faibles. La seconde consiste à prendre en compte ces effets dans l'analyse modale amenant ainsi la notion de modes complexes.

Dans le cas des systèmes non-linéaires, ces deux approches restent valables et on se contente généralement de la première car peu d'outils permettent d'envisager la seconde. Cependant, il existe certaines applications pour lesquelles la non-prise en compte des effets dissipatifs dans l'analyse modale mène à des résultats peu représentatifs du système réel (c.f. section 3.2 ou encore Laxalde et al., 2006a).

Dans ce cadre, Shaw et Pierre (1991) ont proposé une définition des modes non-linéaires étendue aux systèmes dynamiques dissipatifs et linéarisables (*i.e.* faiblement non-linéaires) :

*Un mode normal de vibration d'un système non-linéaire autonome est une oscillation contenue dans une variété invariante bidimensionnelle de l'espace des phases du système et paramétrée par deux variables de déplacement et de vitesse.*

En complément de cette définition, les auteurs proposent une technique d'analyse inspirée de la méthode de réduction de la variété centrale (Carr, 1981). Il s'agit de techniques de réduction qui sont assez performantes puisqu'elles permettent de représenter la dynamique du système non-linéaire par un nombre restreint de coordonnées généralisées (ou *variétés*). Néanmoins le caractère fortement analytique des développements associés restreint leur utilisation pour des systèmes de grande taille.

## 2.4 Modes complexes non-linéaires

Pour traiter le problème des vibrations libres d'un système dynamique autonome dissipatif, nous proposons une généralisation des méthodes de Ritz-Galerkin (Szemplinska-Stupnicka, 1990, 1983; Gibert, 2001). Comme nous l'avons vu, les méthodes de Ritz-Galerkin (ou Balance Harmonique) présentent le double avantage d'être applicables pour des systèmes fortement non-linéaires et de grande taille.

### 2.4.1 Notion de modes complexes non-linéaires

Par analogie avec la notion de mode complexe d'un système linéaire, nous définissons un mode complexe non-linéaire comme une oscillation du système autonome présentant (potentiellement) un déphasage entre ses coordonnées. Ce déphasage constitue la principale différence avec la notion de mode normal (non-linéaire) puisque la notion d'unisson n'apparaît plus. De plus, les trajectoires ne sont plus des lignes ou des courbes normales aux iso-énergétiques mais des courbes fermées. Enfin, toujours par analogie avec la notion de mode complexe linéaire, les valeurs propres de l'équation caractéristique sont *a priori* complexes et de la forme :

$$\lambda = -\beta + i\omega \quad (2.54)$$

en définissant,

- $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ , la pulsation propre amortie,
- $\omega_0$ , la pulsation propre,
- $\zeta = \beta/\omega_0$ , le taux d'amortissement modal.

Afin d'illustrer ceci, nous prendrons dans la suite l'exemple d'un système fortement non-linéaire et dissipatif composé de deux oscillateurs et d'un frotteur élémentaire régularisé (représenté en figure 2.8). Les valeurs numériques sont données par le tableau 2.1.

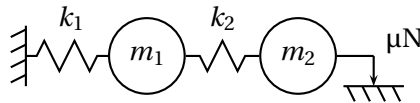


FIG. 2.8 Oscillateur à deux degrés de liberté avec frotteur

Ce frotteur est défini par deux paramètres  $\epsilon$  et  $\mu N$  qui représentent respectivement la tolérance en vitesse dans la phase collé du frottement et la force limite de glissement. La loi « force / vitesse » de ce modèle est représentée en figure 2.9.

Les équations du mouvement de ce système s'écrivent :

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (2.55a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + \mu N \tanh \frac{\dot{x}_2}{\epsilon} = 0 \quad (2.55b)$$

Pour cet exemple, la figure 2.10 montre les trajectoires du système. Ces réponses sont calculées à l'aide de la méthode décrite ci-après et correspondent au régime stabilisé (indépendamment des conditions initiales) du système précédent pour différents niveaux de vibration (ou d'énergie). Ce

$m_1$	$m_2$	$k_1$	$k_2$
1	0.02	600	40

TAB. 2.1 Valeurs numériques du modèle à 2 DDLs

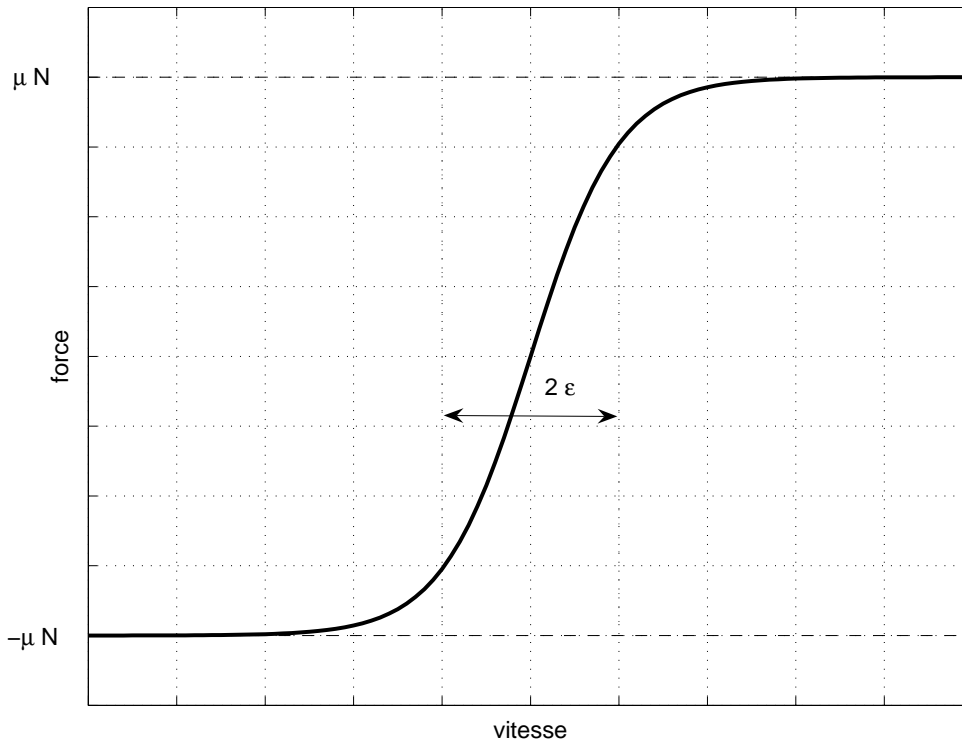


FIG. 2.9 Loi de frottement régularisée par tangente hyperbolique

résultat est à comparer avec la figure 2.7 qui représente une trajectoire d'un mode normal non-linéaire. À faible niveau la trajectoire est proche d'une droite (d'équation  $x_2 = 0$ ) et le système est quasiment linéaire. Lorsque le niveau (ou l'énergie du système) augmente, les effets non-linéaires apparaissent ce qui a pour effet d'une part de courber les trajectoires (du fait de la non-linéarité) et d'autre part de les « ouvrir » (du fait de la dissipation d'énergie dans la non-linéarité) et ainsi de déphaser les coordonnées. Ce deuxième effet ne peut pas être pris en compte par une analyse du système conservatif.

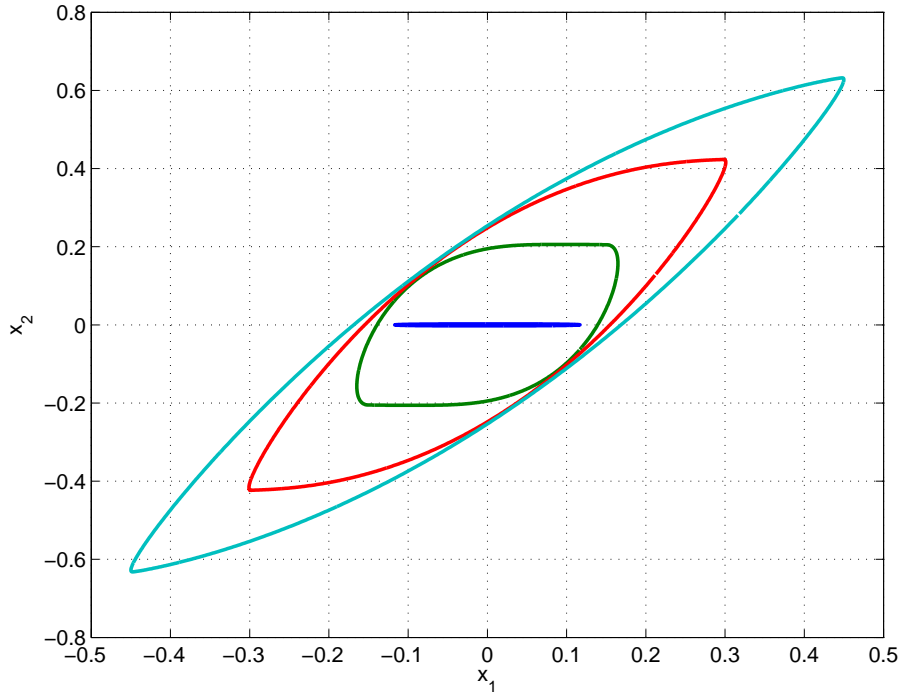
La définition de modes non-linéaires complexes que nous proposons est associée au formalisme fréquentiel de la méthode de la balance harmonique.

#### 2.4.2 Formulation fréquentielle du problème aux valeurs propres complexes

Nous nous intéressons à un système dynamique discret autonome décrit par l'équation différentielle de second ordre suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

Ce problème dynamique comporte en plus des termes conservatifs, des termes potentiellement dissipatifs représentés par l'amortissement linéaire ou/et contenus dans la force (interne) non-linéaire  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ . L'objectif étant de calculer les modes de ce système non-linéaire non conservatif, nous allons, dans l'esprit des méthodes de Ritz-Galerkin, postuler une forme des solutions de ce problème



**FIG. 2.10** Trajectoires des modes non-linéaires complexes pour différentes amplitudes de vibration

libre. Toujours par analogie avec la définition des modes complexes d'un système linéaire, la forme choisie est une série de Fourier,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}^0 + \sum_{n=1}^{N_h} e^{-n\beta t} (\mathbf{Q}^{n,c} \cos n\omega t + \mathbf{Q}^{n,s} \sin n\omega t), \quad (2.57)$$

dont la pulsation,  $\lambda = -\beta + i\omega$ , est complexe et représente la valeur propre du mode (c.f. Eq. (2.54)).

Le vecteur des composantes de Fourier,

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^0, \mathbf{Q}^{1,c}, \dots, \mathbf{Q}^{n,c}, \mathbf{Q}^{n,s}, \dots, \mathbf{Q}^{N_h,s}]^T \quad (2.58)$$

représente le vecteur propre du mode complexe dans le domaine fréquentiel.

L'étape suivante consiste à formuler le problème algébrique aux valeurs propres complexes associé à cette définition à partir de l'équation dynamique (2.56). Pour cela, les vitesses et accélérations s'expriment dans le domaine fréquentiel en dérivant (2.57) et en introduisant l'opérateur différentiel fréquentiel suivant :

$$\nabla = \text{diag} \left( 0, \nabla_1, \dots, \nabla_{N_h} \right) \text{ avec } \nabla_n = n \begin{bmatrix} -\beta & \omega \\ -\omega & -\beta \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

ce qui permet d'exprimer la raideur dynamique associée aux termes linéaires de l'équation (2.56) dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{Z}(\lambda) = \mathbf{K} \otimes \mathcal{I}_{2N_h+1} + \mathbf{C} \otimes \mathcal{I}_{2N_h+1} \nabla + \mathbf{M} \otimes \mathcal{I}_{2N_h+1} \nabla^2 \quad (2.60)$$

L'expression fréquentielle des termes non-linéaires  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , qui dépend du déplacement et de la vitesse, est déterminée à l'aide d'une méthode d'alternance fréquentielle / temporelle (toujours couplée à un solveur de type Newton) :

1. Étant donné le vecteur des composantes fréquentielles des déplacements  $\mathbf{Q}$  et la valeur propre  $\lambda$ , l'expression fréquentielle de la vitesse est  $\nabla(\lambda)\mathbf{Q}$  ;
2. Ces déplacements et vitesses sont transformés dans le domaine temporel au moyen d'un Transformée de Fourier inverse :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^0 + \sum_{n=1}^{N_h} (\mathbf{Q}^{n,c} \cos n\omega t + \mathbf{Q}^{n,s} \sin n\omega t); \quad (2.61)$$

3. L'expression temporelle  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  de la force non-linéaire est obtenue en utilisant l'une des méthodes présentées en section 2.2 dans le cas d'un système présentant des interfaces de contact ;
4. Le vecteur  $\mathbf{F}$  des composantes fréquentielles de la force non-linéaire est enfin obtenu par transformée de Fourier directe :

$$\mathbf{F}^0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{F}^{n,c} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cos n\omega t dt \quad (2.62b)$$

$$\mathbf{F}^{n,s} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \sin n\omega t dt \quad (2.62c)$$

On remarquera l'absence de la décroissance logarithmique  $e^{-n\beta t}$  introduite dans la solution (2.57) dans cette formulation AFT. Ceci implique que, dans la phase temporelle du calcul des composantes fréquentielles des forces non-linéaires, les déplacements  $\tilde{\mathbf{x}}$  et vitesses  $\tilde{\mathbf{v}}$  de même que les forces non-linéaires  $\tilde{\mathbf{f}}$  sont périodiques. On peut justifier cela en rappelant que cette étape se fait sur une période du mouvement et en notant qu'à cette échelle, la décroissance maximale des amplitudes en  $e^{-\beta T}$  reste généralement faible. On notera enfin que cette hypothèse implique que la décroissance des forces non-linéaires est la même que celle des autres variables (déplacements, vitesses, ...), ce qui apparaît aussi raisonnable.

L'équation aux valeurs propres finale s'écrit :

$$\mathbf{Z}(\lambda)\mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (2.63)$$

dont le couple vecteur propre-valeur propre,  $\{\mathbf{Q}, \lambda\}$ , constitue les inconnues.

### 2.4.3 Calcul pratique des modes complexes non-linéaires

Le système considéré régi par l'équation (2.63) étant autonome et non-conservatif, son mouvement peut être paramétré par deux variables et nous choisirons ici de fixer l'amplitude et la phase de  $k$ -ième harmonique d'une coordonnée de référence (choisie arbitrairement) :

$$\mathbf{Q}_d = \left[ Q_d^{k,c}, Q_d^{k,s} \right] \quad (2.64)$$



Ceci permet à l'aide du système algébrique aux valeurs propres complexes (2.63) de déterminer l'ensemble des inconnues :

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \beta \\ \omega \\ \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

en résolvant l'équation :

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{Z}(\lambda) \mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda) \quad (2.66)$$

Le calcul des solutions propres ainsi définies ne peut généralement pas se faire de façon directe comme dans un système linéaire et ces solutions doivent être calculées une par une à l'aide d'une procédure incrémentale sur les coordonnées de contrôle. Si le système possède un état linéaire ou linéarisé (par exemple pour des faibles niveaux, associés à des taux de non-linéarité faibles), cet état peut servir d'initialisation. La continuation de la solution propre se fait en incrémentant l'amplitude des coordonnées de contrôle.

En pratique, ce système peut s'avérer assez difficile à résoudre numériquement en particulier du fait des facteurs d'échelle importants qui peuvent apparaître entre les inconnues (fréquences, taux d'amortissement, déplacements,...). Pour pallier cette difficulté, nous proposons une reformulation du problème (2.66) en deux sous-problèmes et une résolution en déplacements imposés.

1. Le premier est composé des deux équations associées aux variables de contrôle  $\mathbf{Q}_d$  et sera utilisé pour déterminer la valeur propre complexe, c'est à dire la pulsation propre et le taux d'amortissement modal.
2. Le second se compose de toutes les autres équations associées aux variables  $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}_d$  dans laquelle les contributions des termes de contrôle  $\mathbf{Q}_d$  ont été transférées au second membre sous forme d'une force équivalente induite par les déplacements imposés.

Voyons maintenant la formulation détaillée de ces deux sous-problèmes. Pour cela, le vecteur des composantes de Fourier est décomposé selon plusieurs sous-vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{B}_c \mathbf{Q}_c + \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_a \\ &= \mathbf{B}_c \mathbf{Q}_c + \mathbf{B}_i \mathbf{Q}_i + \mathbf{B}_d \mathbf{Q}_d \end{aligned} \quad (2.67)$$

où, par analogie avec les méthodes de condensation fréquentielle présentées en section 2.1.4, les vecteurs  $\mathbf{Q}_c$  et  $\mathbf{Q}_a$  sont respectivement associés aux degrés de liberté non-linéaires, linéaires. La deuxième ligne de cette équation correspond à la partition du vecteur de degrés de liberté linéaires selon la coordonnée de contrôle  $\mathbf{Q}_d$  et les autres degrés de liberté linéaires  $\mathbf{Q}_i$ . Nous avons choisi ici la coordonnée de contrôle parmi les degrés de liberté linéaires. Ensuite, si l'équation (2.63) est décomposée de façon identique à (2.24) :

$$\mathbf{Z}_{cc} \mathbf{Q}_c + \mathbf{Z}_{ca} \mathbf{Q}_a + \mathbf{F}_c(\mathbf{Q}_c) = \mathbf{0} \quad (2.68a)$$

$$\mathbf{Z}_{ac} \mathbf{Q}_c + \mathbf{Z}_{aa} \mathbf{Q}_a = \mathbf{0} \quad (2.68b)$$

la deuxième équation peut être re-décomposée ainsi :

$$\mathbf{Z}_{dc} \mathbf{Q}_c + \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Q}_i + \mathbf{Z}_{dd} \mathbf{Q}_d = \mathbf{0} \quad (2.69a)$$

$$\mathbf{Z}_{ic} \mathbf{Q}_c + \mathbf{Z}_{ii} \mathbf{Q}_i + \mathbf{Z}_{id} \mathbf{Q}_d = \mathbf{0} \quad (2.69b)$$

L'équation (2.69b) permet d'éliminer  $\mathbf{Q}_i$  de (2.67) :

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{B}_c - \mathbf{B}_i \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{ic}) \mathbf{Q}_c + (\mathbf{B}_d - \mathbf{B}_i \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{id}) \mathbf{Q}_d \quad (2.70)$$

et des deux sous-problèmes restants (2.69a) et (2.68a) qui deviennent :

$$f(\lambda, \mathbf{Q}_c) = (\mathbf{Z}_{dc} - \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{ic}) \mathbf{Q}_c + (\mathbf{Z}_{dd} - \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{id}) \mathbf{Q}_d \quad (2.71a)$$

$$g(\lambda, \mathbf{Q}_c) = (\mathbf{Z}_{cc} - \mathbf{Z}_{ca} \mathbf{B}_i \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{Z}_{ac}) \mathbf{Q}_c + \mathbf{F}_c(\mathbf{Q}_c) - \mathbf{Z}_{ca} (\mathbf{B}_i \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{id} - \mathbf{B}_d) \mathbf{Q}_d \quad (2.71b)$$

Les équations (2.71a) et (2.71b) constituent les deux sous problèmes précédemment évoqués. Notons aussi qu'une condensation sur les degrés de liberté relatifs est aussi possible avec cette formulation.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le calcul des modes non-linéaires complexes se fait par continuation selon le paramètre de contrôle  $\mathbf{Q}_d$ . À l'incrément  $n$  de la continuation, supposons que la valeur propre  $\lambda^n$  et le vecteur  $\mathbf{Q}_c^n$  correspondant au paramètre de contrôle  $\mathbf{Q}_d^n$  soient connus. Au  $n + 1$ -ème incrément, le système (2.71) est résolu selon la procédure de prédiction / correction décrite ci-dessous :

#### Prédiction sur la valeur propre

Le système (2.71a) est résolu avec  $\mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_c^n$  (état précédent) afin de déterminer  $\lambda^{pre}$ ,

$$f(\lambda^{pre}, \mathbf{Q}_c^n) = \mathbf{0} \rightarrow \lambda^{pre} \quad (2.72)$$

#### Prédiction sur le vecteur propre

Le système (2.71b) est résolu avec  $\lambda = \lambda^{pre}$  pour obtenir  $\mathbf{Q}_c^{pre}$ ,

$$g(\lambda^{pre}, \mathbf{Q}_c^{pre}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{Q}_c^{pre} \quad (2.73)$$

#### Correction couplée

À l'aide des valeurs prédites aux deux étapes précédentes, les valeurs corrigées  $\lambda^{n+1}$  et  $\mathbf{Q}_c^{n+1}$  sont obtenues en résolvant simultanément les deux sous-problèmes (2.71) :

$$\left. \begin{array}{l} f(\lambda^{n+1}, \mathbf{Q}_c^{n+1}) = \mathbf{0} \\ g(\lambda^{n+1}, \mathbf{Q}_c^{n+1}) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \rightarrow \{\lambda, \mathbf{Q}_c\}^{n+1} \quad (2.74)$$

Cette procédure de prédiction / correction permet généralement de contourner les difficultés rencontrées par le solveur de Newton pour résoudre ce dernier problème directement.

### 2.4.4 Application et validation de la méthode proposée

Dans ce paragraphe, nous illustrons tout d'abord la méthode proposée sur l'exemple de l'oscillateur à deux degrés de liberté présenté au début de cette section (figure 2.8) et gouverné par les équations (2.55b). Dans un second temps, une validation de cette méthode par comparaison avec une intégration temporelle sera proposée. L'ensemble des analyses fréquentielles présentées

ci-après ont été réalisées avec un nombre suffisant d'harmoniques. Ce système simple étant assez fortement non-linéaire, le nombre d'harmoniques nécessaires est relativement important (de l'ordre de 10 à 20).

La figure 2.11 regroupe l'évolution de la fréquence propre et de l'amortissement modal en fonction du niveau de déplacement de la masse  $m_1$  pour le premier mode du système. Les états asymptotiques « frotteur bloqué » ( $x_2 = 0$ ) et sans frotteur ( $f_{NL} = 0$ ) sont représentés en traits pointillés et en traits points-tirets.

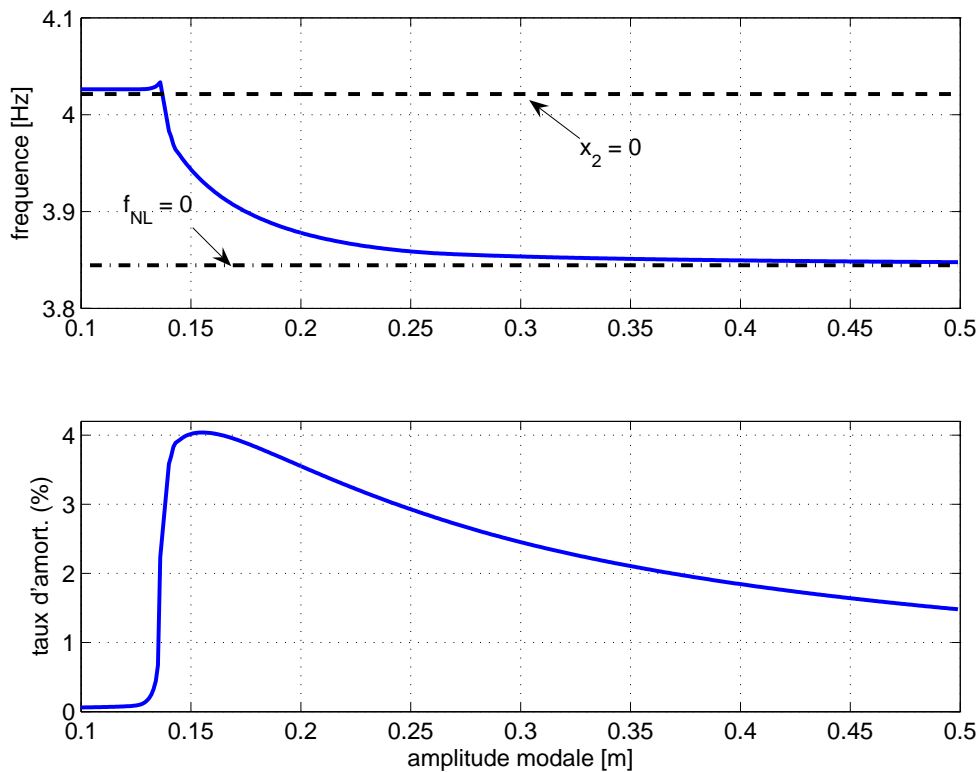


FIG. 2.11 Fréquence propre et amortissement modal en fonction de l'amplitude modale

totiques « frotteur bloqué » ( $x_2 = 0$ ) et sans frotteur ( $f_{NL} = 0$ ) sont représentés en traits pointillés et en traits points-tirets. Lorsque l'amplitude modale augmente, le passage de l'état collé à l'état glissant du frotteur induit une chute de la fréquence propre. Dans la zone intermédiaire de glissement (amplitude 0.15-0.2), l'amortissement modal atteint un maximum. Ce dernier résultat est typique des systèmes frottants dont l'efficacité maximale (en termes d'amortissement) est atteinte dans les zones de glissement partiel.

Les figures 2.12 regroupent les plans de phase de chaque degrés de liberté ainsi que les boucles d'hystérésis pour différents niveaux d'amplitude modale. On note que lorsque l'amplitude modale est faible le mouvement est principalement concentré dans le degré de liberté 1, ce qui correspond à une configuration du frotteur bloqué et que lorsque l'amplitude modale augmente, l'amplitude du degré de liberté 2 et l'air du cycle d'hystérésis croissent. Notons aussi, que la non-linéarité affecte de façon plus significative le degré de liberté 2.

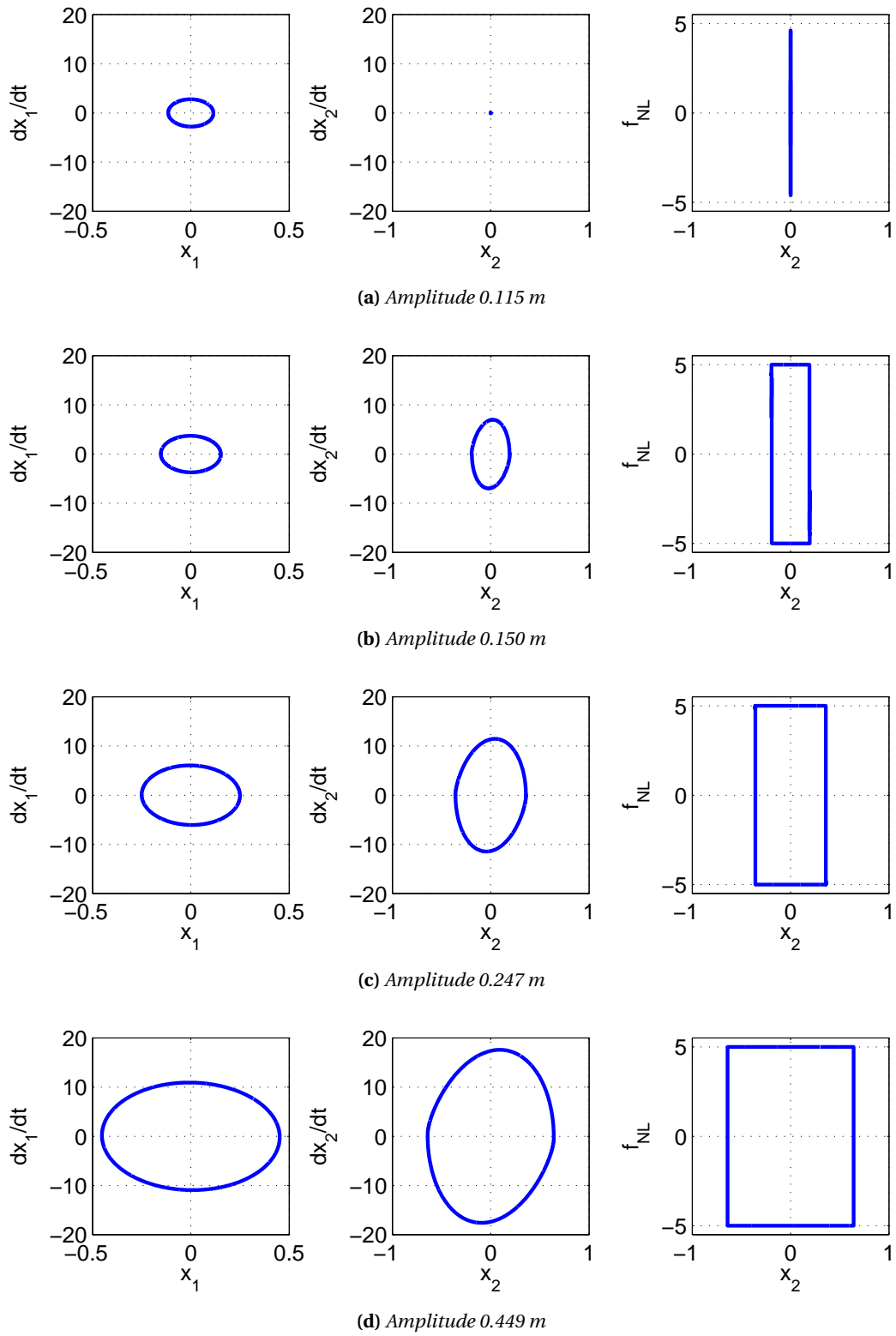
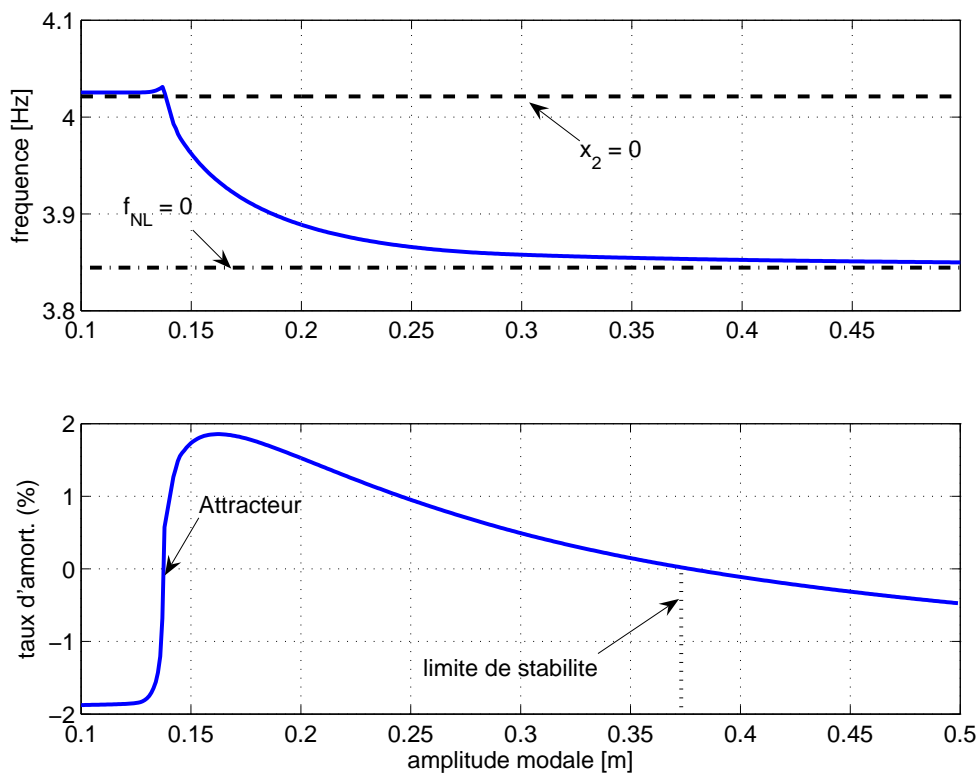


FIG. 2.12 Cycles limites pour différentes amplitudes modales

### Analyse de stabilité

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'influence de l'amortissement linéaire (de type visqueux ici) présent dans le système sur ces résultats d'analyse modale non-linéaire. En particulier, lorsque l'on introduit un amortissement négatif qui déstabilise le système, ces résultats d'analyse modale permettent de statuer sur la stabilité globale d'un mode. Par exemple, les figures 2.13 regroupent l'évolution de la fréquence propre et de l'amortissement modal en présence d'un amortissement négatif de 2%. On note que pour des amplitudes modales faibles ou élevées (correspon-



**FIG. 2.13** Cas d'un amortissement structural négatif (2%) : Fréquence propre et amortissement modal en fonction de l'amplitude modale

dant à des configurations asymptotiques de glissement, adhérence ou glissement total), le mode est instable (amortissement négatif). En revanche, dans la zone intermédiaire d'amplitude modale (et de glissement partiel), l'amortissement modal est positif ce qui signifie que le mode est stable.

Pour confirmer ces prédictions de stabilité, nous avons comparé les résultats d'intégration directe du système libre sous différentes conditions initiales en déplacement avec les cycles limites prédits par l'analyse modale non-linéaire. Cette comparaison constitue par ailleurs une première validation, en réponse libre, de la méthode que nous proposons.

Les figures 2.14 regroupent ces résultats :

- (a) Condition initiale de faible niveau : l'analyse modale non-linéaire prédit un comportement instable ce qui se vérifie par intégration directe. En effet, le niveau vibratoire augmente à partir de

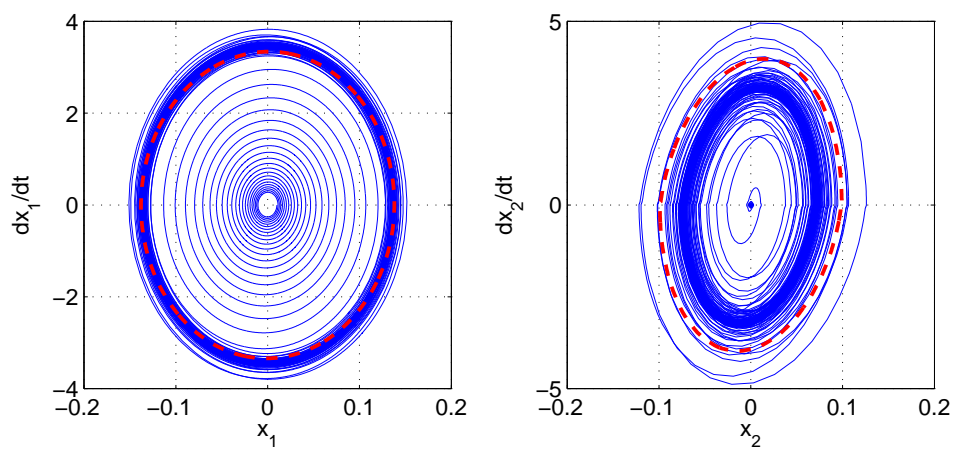
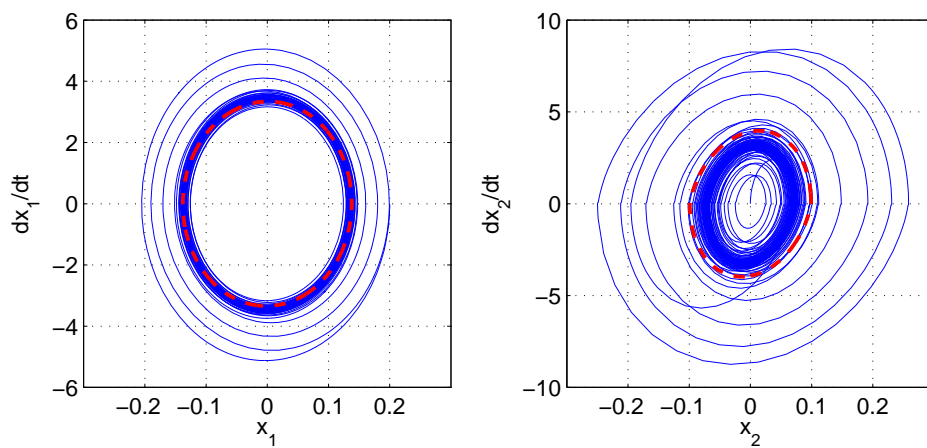
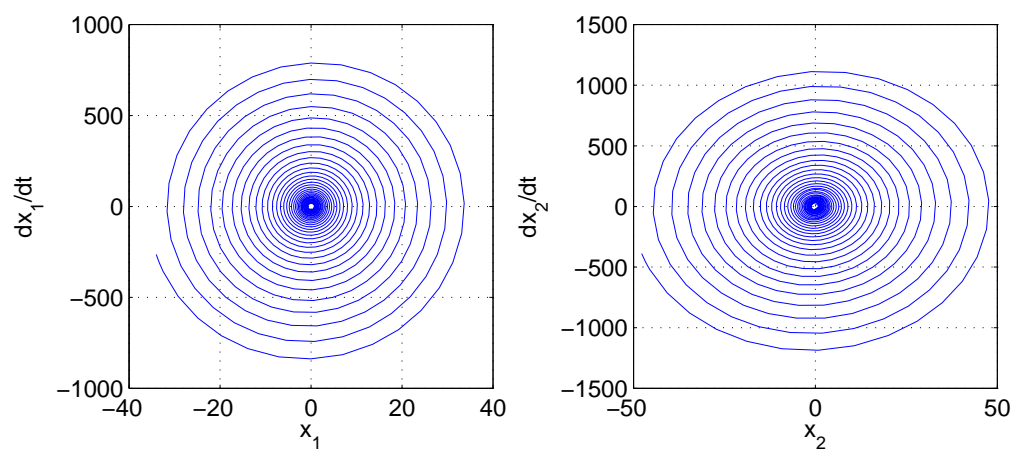
(a)  $x_1(t=0) = 0.01$ (b)  $x_1(t=0) = 0.2$ (c)  $x_1(t=0) = 0.7$ 

FIG. 2.14 Prédications de stabilité; (—) intégration directe, (- - -) modes non-linéaires.

la condition initiale et se stabilise sur un cycle limite proche de celui prédit par l'analyse modale non-linéaire pour un amortissement modal nul (point noté *attracteur* sur la figure 2.13).

- (b) Condition initiale de niveau intermédiaire : l'analyse modale prédit une solution stable. En effet, l'amortissement modal est positif dans cette gamme d'amplitude et l'intégration directe montre que le niveau diminue à partir de la condition initiale et se stabilise sur le cycle limite prédit par les modes non-linéaires.
- (c) Condition initiale de fort niveau : l'analyse modale non-linéaire ne prédit pas de solution stable. Ceci est confirmé par l'intégration temporelle puisque le système diverge.

**Remarque :** la prédiction de stabilité d'un système avec amortissement linéaire (positif ou négatif) peut, sur cet exemple, se faire avec une prise en compte *a posteriori* de ce dernier. En effet, l'évolution de l'amortissement modal est similaire avec ou sans amortissement négatif, il s'opère simplement un décalage des courbes d'amortissement modal de la valeur de l'amortissement linéaire.

### Corrélation en réponses forcées

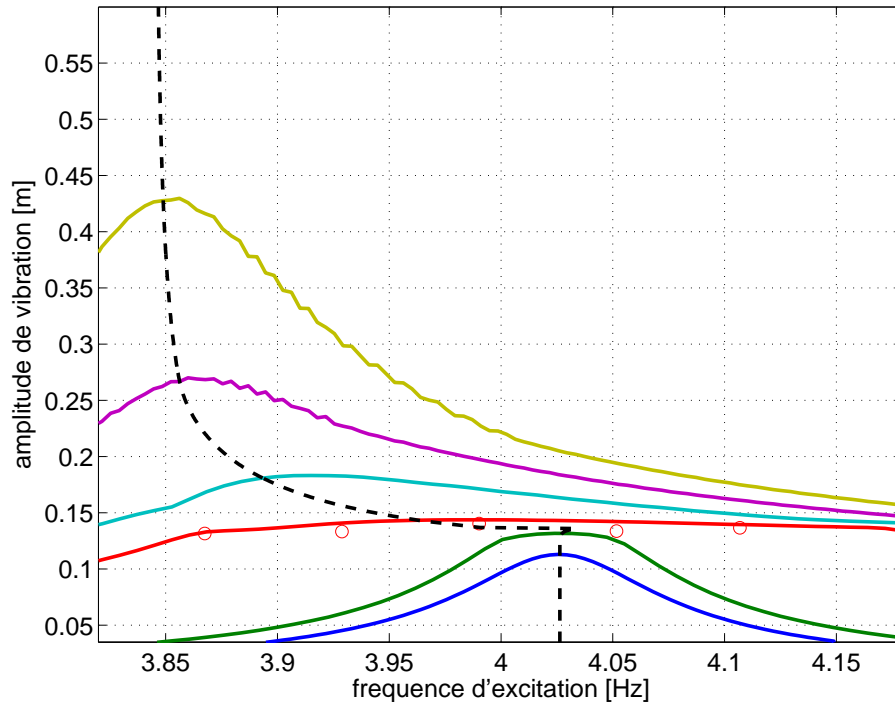
Enfin, nous avons comparé les résultats d'analyse modale non-linéaire avec des réponses en fréquence pour une excitation harmonique sur la masse  $m_1$ . Les réponses fréquentielles sont calculées par balance multi-harmonique et les résultats obtenus sont validés par intégration temporelle. La figure 2.15 synthétise les résultats de réponses en fréquence pour différents niveaux d'excitation. Le principal résultat est que la courbe fréquence / amplitude issue de l'analyse modale non-linéaire (*backbone curve*) passe par tous les pics de résonance. Ceci confirme la validité de la méthode proposée dans le cadre du régime forcé.

### 2.4.5 Conclusions

Parmi la variété de méthodes d'analyse modale non-linéaire, les méthodes de type balance harmonique apparaissent particulièrement adaptées aux problèmes de grande taille. En ce sens, la méthode des modes complexes non-linéaires basée sur une formulation fréquentielle d'un problème dynamique autonome non-conservatif permet de traiter des problèmes industriels. Les solutions propres sont exprimées sous la forme d'une série de fonctions multi-harmoniques dont la fréquence fondamentale est complexe. Ainsi, en plus des fréquences et des modes propres, cette méthode fournit un taux d'amortissement modal qui, comme les autres grandeurs modales, dépend de l'énergie (ou de l'amplitude modale) du système. Dans le cadre de la problématique de l'amortissement non-linéaire, cette notion d'amortissement modal non-linéaire apparaît comme fondamentale de par son caractère dimensionnant.

## 2.5 Approches fréquentielles généralisées, stabilité et régimes quasi-périodiques

Nous présentons, dans cette section, une méthode numérique qui peut être vue comme une généralisation des méthodes de balance harmonique et de la méthode de la moyenne. Il s'agit en



**FIG. 2.15** Corrélation Réponses en fréquence / Modes Non-linéaires : traits pleins en couleur, FRF pour différents niveaux d'excitation ; pointillés noirs, backbone curve prédites par modes non-linéaires ;  $\circ$ , points stabilisés en intégration temporelle pour un niveau d'excitation.

fait d'introduire des aspects multi-échelles dans les formulations fréquentielles précédentes à l'aide d'une décomposition de la solution selon deux échelles de temps, d'où le terme *multi-échelle*. Notons que ce type d'approches a été utilisé (par Schilder et al., 2006, entre autres) pour le calcul de régimes quasi-périodiques. Ces problématiques de régimes quasi-périodiques seront abordées dans un second temps mais notre premier objectif est l'analyse de stabilité des solutions périodiques. Ainsi la motivation de ces nouveaux développements est double.

Nous allons dans un premier temps détailler ce formalisme multi-échelle puis nous verrons les applications à ces deux problématiques.

### 2.5.1 Approches multi-échelles dans les méthodes fréquentielles

L'expression multi-harmonique du déplacement (équations (2.6) ou (2.57)) est adaptée pour inclure une perturbation des composantes de la série de Fourier. Cette perturbation représente la variation temporelle de ces composantes selon une échelle de temps *lente* (notée  $\eta = t$ ) par rapport à l'échelle de temps *rapide*  $\xi = \omega t$  du mouvement périodique :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\eta, \xi) = \mathbf{U}^0(\eta) + \sum_{n=1}^{N_h} (\mathbf{U}^{n,c}(\eta) \cos n\xi + \mathbf{U}^{n,s}(\eta) \sin n\xi) \quad (2.75)$$

Nous avons considéré ici le cas des oscillations forcées et non le formalisme des modes complexes non-linéaires présenté précédemment. En conséquence, la décroissance exponentielle de la sé-



rie de Fourier introduite dans l'équation (2.57) n'apparaît pas dans la relation (2.75). Cependant, pour rester dans un cadre général, nous pouvons utiliser les notations compactes définies au paragraphe 2.1.2 (équations (2.8) et (2.9)),

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}(\xi)\mathbf{U}(\eta) \quad (2.76)$$

qui peuvent être adaptées selon que l'on considère plutôt des modes complexes ou plutôt des oscillations forcées.

Lorsque des systèmes du second ordre (2.1) sont considérés, une condition supplémentaire peut être introduite pour permettre la mise en forme standard du problème perturbé ; on choisit généralement de poser la forme de la vitesse par analogie avec la solution non perturbée,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{T}(\xi)\nabla\mathbf{U}(\eta) \quad (2.77)$$

Rappelons de plus que l'opérateur différentiel  $\nabla$  est à définir en fonction du type de solutions recherchées (oscillations forcées ou modes non-linéaires complexes) selon l'une des relations (2.10) ou (2.59). L'accélération se définit alors en dérivant (2.77)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t) &= \frac{\partial\mathbf{T}(\xi)}{\partial t}\nabla\mathbf{U} + \mathbf{T}(\xi)\nabla\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} \\ &= \mathbf{T}(\xi)(\nabla^2\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}') \end{aligned} \quad (2.78)$$

en notant,  $\mathbf{U}'$ , la dérivée du vecteur  $\mathbf{U}$  par rapport à l'échelle de temps lente  $\eta$ .

Les relations (2.76), (2.77) et (2.78) peuvent ensuite être introduites dans l'équation du mouvement générale (2.1). En éliminant ensuite les termes temporels de l'échelle de temps rapide  $\xi$ , selon une procédure de Galerkin, on obtient une équation gouvernant l'évolution lente des composantes de Fourier :

$$\mathbf{U}' = (\mathbf{M}\nabla)^{-1}[\mathbf{P} - \mathbf{Z}\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{U})] \quad (2.79)$$

où la matrice  $\mathbf{Z}$  est définie par les relations (2.14) ou (2.60) toujours selon le type d'analyse choisie.

Le système (2.79) est sous forme standard ; il permet d'étudier les variations lentes (ou perturbations) des composantes de la série de Fourier indépendamment de l'échelle de temps principale (liée à la période  $T = 2\pi/\omega$ ). À partir de ce système, nous allons maintenant voir d'une part comment étudier la stabilité locale des solutions périodiques obtenues par balance harmonique et, d'autre part comment obtenir d'éventuelles solutions quasi-périodiques issues, par exemple, d'une bifurcation.

### 2.5.2 Stabilité des solutions périodiques

L'étude des solutions des systèmes dynamiques non-linéaires est généralement intimement couplée à celle de leur stabilité. On distingue la stabilité des points d'équilibre de celle des orbites (ou solutions périodiques) ; si les définitions sont différentes, l'analyse de stabilité locale se fait généralement par perturbation et linéarisation de la solution dans les deux cas. Dans le cas de solutions périodiques obtenues par balance harmonique, l'approche couramment employée consiste à perturber temporellement la solution multi-harmonique et à utiliser la théorie de Floquet ou de Hill (Nayfeh et Balachandran, 1995; von Groll et Ewins, 2001; Charleux, 2006).

Ici nous envisageons l'analyse de la stabilité locale des solutions périodiques obtenues par balance harmonique en nous ramenant à une analyse de stabilité de points d'équilibre.

Les points fixes du système (2.79) sont les solutions périodiques (au sens de la balance harmonique) du système (2.1). En outre, le système (2.79) nous renseigne sur les variations (ou *perturbations*) de cette solution et par conséquent sur sa stabilité locale. En effet, si  $\mathbf{U}^e$  est un point d'équilibre (c'est à dire une solution périodique) du système (2.79) sa stabilité dépend des valeurs propres de la matrice Jacobienne :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^e) = -(\mathbf{M}\nabla)^{-1} \left[ \mathbf{Z} + \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{U}^e)}{d\mathbf{U}} \right] \quad (2.80)$$

Si toutes les valeurs propres ont leur partie réelle strictement négative, le point d'équilibre est stable. Si au moins l'une de ces valeurs propres a une partie réelle positive ou nulle, le point d'équilibre est instable et il en résulte généralement une bifurcation.

Cette approche de la stabilité des solutions périodiques ramenée à une étude de stabilité de points fixes apparaît plus simple de mise en œuvre que les approches classiques de Floquet ou Hill précédemment citées. Le chapitre 3, illustre l'utilisation de cette approche dans le cadre de l'étude d'une solution d'amortissement par pompage énergétique.

Nous allons voir dans la suite, que ce formalisme est aussi particulièrement intéressant puisqu'il permet d'étudier directement certains types de bifurcation.

### 2.5.3 Régimes quasi-périodiques

#### Principes théoriques

La décomposition multi-échelle vient d'être exposée permet aussi l'étude d'éventuels régimes quasi-périodiques à la suite, par exemple, d'une bifurcation. En effet, supposons que le système dynamique décrit par l'équation (2.79) possède un point d'équilibre instable et que la matrice Jacobienne (2.80) possède deux valeurs propres purement imaginaires,  $\pm i\Omega_e$  ( $\Omega_e > 0$ ) et aucune autre valeur propre à partie réelle nulle. Il s'agit donc d'une bifurcation de Hopf et le système possède à partir de ce point des solutions périodiques stables alors que le point fixe est instable.

Si l'on note  $\Omega$ , la pulsation fondamentale de cette orbite, une expression possible des variations lentes des composantes de Fourier  $\mathbf{U}(\eta)$  est :

$$\mathbf{U}(\eta) = \mathbf{Y}^0 + \sum_{v=1}^{N_h} \mathbf{Y}^{v,c} \cos v\Omega t + \mathbf{Y}^{v,s} \sin v\Omega t \quad (2.81)$$

On remarquera que le terme d'ordre 0,  $\mathbf{Y}^0$ , de cette série correspond au point fixe actualisé.

De plus, en introduisant l'opérateur différentiel  $\nabla(\Omega)$  associé à la pulsation  $\Omega$ , le système (2.79) peut être mis sous une forme fréquentielle :

$$\nabla(\Omega) \mathbf{Y} = -(\mathbf{M}\nabla(\omega))^{-1} [\mathbf{Z}\mathbf{Y} + \mathbf{\Gamma}] \quad (2.82)$$

où les vecteurs  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{\Gamma}$  regroupent les composantes de Fourier – selon l'échelle de temps  $\eta$  – des déplacements et des forces non-linéaires respectivement.

Ce formalisme permet *a priori* de déterminer les solutions quasi-périodiques issues d'une bifurcation de Hopf du système fréquentiel généralisé (2.79). Cependant, les traitements numériques

associés sont loin d'être évidents en particulier du fait de deux difficultés principales. La première est qu'il faut, à partir de l'équation (2.82), à la fois déterminer  $\Upsilon$  ainsi que la fréquence  $\Omega$ . Cette problématique sera traitée plus amplement au paragraphe suivant.

La seconde difficulté concerne la détermination de  $\Gamma$  qui, dans les cas où aucune forme analytique n'est disponible, peut s'avérer délicate. Une solution pourrait alors consister à repasser totalement dans le domaine temporel. Par exemple, dans le cadre d'une approche AFT et de l'utilisation de transformée de Fourier rapide, si chaque échelle de temps  $\xi = \omega t$  et  $\eta = \Omega t$  fait l'objet d'une discrétisation, il faudra pour chaque pas de temps de l'échelle lente  $\eta$ , déterminer la forme périodique temporelle selon l'échelle de temps rapide. On construit alors, pour chaque inconnue, une matrice bi-dimensionnelle en temps.

### Calcul des solutions stables et suivi de bifurcation

Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode numérique permettant, à partir des formulations fréquentielles généralisées, de suivre les bifurcations (en particulier les bifurcations de Hopf) et les solutions stables (périodiques ou quasi-périodiques). L'approche proposée est basée sur une méthode d'optimisation sous contraintes (à défaut d'une résolution d'équations non-linéaires sous contraintes). L'objectif est de résoudre le système (2.82) pour une solution de la forme (2.81); c'est la fonction objectif de l'algorithme d'optimisation. La contrainte porte sur la stabilité de la solution qui conditionne la forme de la solution (2.81). En effet, on cherchera d'abord une solution périodique – c'est à dire, uniquement l'ordre 0 de la série (2.81),  $\Upsilon^0$ . Le critère de stabilité porte sur les parties réelles des valeurs propres de la matrice Jacobienne (2.80) au point fixe  $\Upsilon^0$ . Lorsque toutes les parties réelles sont strictement négatives, la solution  $\Upsilon^0$  est stable. Si l'une des valeurs propres est imaginaire pure, on augmente la solution d'une harmonique. La fréquence de cette nouvelle harmonique reste à déterminer mais peut être initialisée à partir de la partie imaginaire de la valeur propre dont la partie réelle est nulle. Normalement, l'orbite ainsi définie est stable.

Cette méthode unifie le calcul des points fixes et des orbites périodiques en un seul problème d'optimisation sous contraintes.

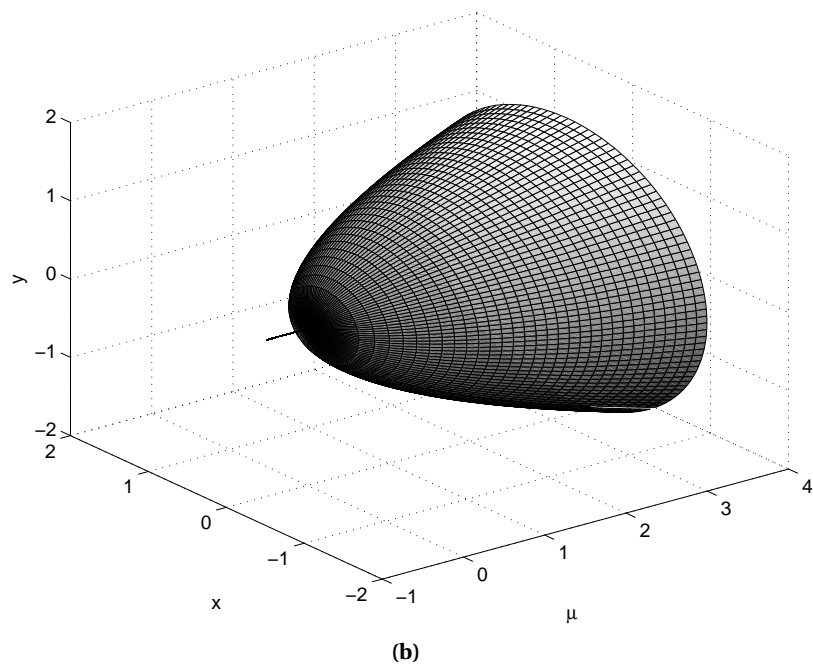
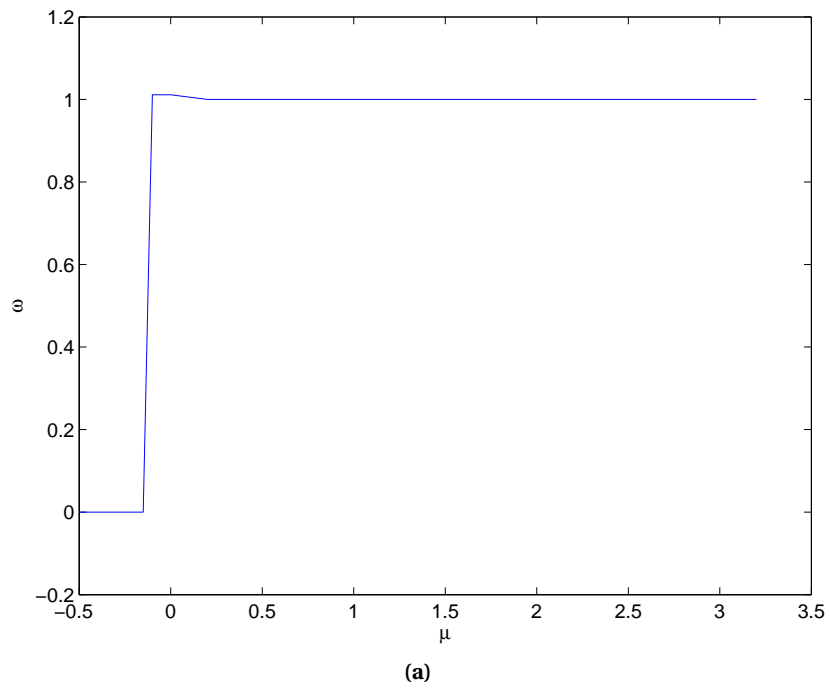
### Application

En application, nous considérons la forme la plus simple de bifurcation de Hopf décrite par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} = x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{cases} \quad (2.83)$$

Nous appliquons l'algorithme précédent en réalisant une continuation sur le paramètre  $\mu$ . Les figures 2.16 regroupent les résultats avec l'évolution de la fréquence de l'orbite et des coordonnées  $x$  et  $y$  en fonction de  $\mu$ .

Lorsque  $\mu < 0$  le système admet l'origine  $(x, y = 0)$  comme point fixe stable et lorsque  $\mu > 0$ , ce point fixe est instable et une orbite périodique apparaît à la pulsation  $\omega = 1$ . On retrouve le comportement décrit par la forme normale de cette bifurcation (Nayfeh et Balachandran, 1995).



**FIG. 2.16** Bifurcation de Hopf; évolution de la fréquence de l'orbite (a) et des coordonnées (b) en fonction de  $\mu$

## 2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, les principaux points théoriques utilisés et développés dans le cadre de cette thèse ont été présentés. Il s'agit principalement de méthodes d'analyse fréquentielle des systèmes dynamiques et en particulier des méthodes de balance harmonique.

En premier lieu, nous avons rappelé l'état de l'art de ce type d'approches en insistant en particulier sur le cas des structures cycliques et sur le traitement fréquentiel des forces non-linéaires de contact et de frottement. Ensuite, une approche originale – les *modes non-linéaires complexes* – a été proposée pour traiter les problèmes autonomes et non-conservatifs dans le domaine fréquentiel. Les bases théoriques ont été clairement posées et validées par des applications numériques.

À plusieurs titres, cette nouvelle méthode semble plus adaptée aux problématiques industrielles qui nous intéressent. Tout d'abord, aucun postulat sur la forme de l'excitation n'est nécessaire ce qui est avantageux lorsque les excitations sont méconnues. Ensuite, ce concept de modes non-linéaires complexes permet de traiter l'ensemble des problématiques aéroélastiques (réponse forcée et instabilités de flottement) que nous avons évoqués au chapitre 1. Enfin, les grandeurs modales qui sont étudiées dans cette approche apparaissent mieux adaptées à un processus de conception.

Pour finir, une généralisation des méthodes fréquentielles a été proposée. Il s'agit d'y introduire des aspects multi-échelles dans un double objectif : l'étude de la stabilité des solutions périodiques obtenues par une approche fréquentielle et la représentation de régimes quasi-périodiques. Les concepts de base ont été présentés mais demandent à être approfondis.

# Amortissement par dispositifs non-linéaires

*Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à deux types de solutions d'amortissement non-linéaire. La première, appliquée aux Disques Aubagés Monoblocs de turbomachines, concerne les joncs de friction dont la technologie a été présentée au chapitre 1. Nous présenterons tout d'abord quelques points de modélisation puis nous nous intéresserons à l'efficacité de ces dispositifs en condition de réponse forcée ou de vibrations libres.*

*La deuxième solution envisagée est l'amortissement par « pompage énergétique ». Nous en expliquerons les principes phénoménologiques et nous étudierons en particulier une classe d'amortisseurs non-linéaires à caractéristiques hystérétiques.*

## 3.1 Joncs de friction

L'utilisation de dispositifs de friction pour l'amortissement des Disques Aubagés Monoblocs est récente dans le domaine des turbomachines aéronautiques. Les aspects technologiques concernant les joncs de friction ont été présentés au chapitre 1 en figures 1.15 et 1.16.

Nous allons présenter dans la suite des résultats de simulations non-linéaires sur des structures industrielles et discuter de l'efficacité de l'amortissement par joncs de friction. Cependant, il peut être utile de préciser auparavant quelques points de modélisation.

### 3.1.1 Modélisation

Nous étudions la dynamique d'un système composé d'un disque aubagé en contact avec un ou plusieurs joncs de friction. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'étude de systèmes frottants n'est pas nouvelle dans le domaine des turbomachines et il existe par conséquent de nombreux travaux portant en particulier sur les aspects modélisation.

Historiquement, les modèles phénoménologiques étaient privilégiés et leur étude a permis de comprendre les phénomènes grâce à des études paramétriques (Griffin, 1990; Berthillier et al., 1998; Csaba, 1998). Les modèles considérés sont généralement des assemblages de masse-ressort et d'éléments de contact ponctuels. Actuellement, la tendance est plutôt à l'utilisation de modélisations éléments-finis (Petrov, 2003; Poudou et Pierre, 2003; Charleux et al., 2006) qui permettent une meilleure représentation de l'interface de contact. L'étude des joncs de friction n'a en revanche pas fait l'objet de beaucoup de travaux de recherche. À notre connaissance, seuls Niemojka et Ziegert (1993) ont proposé une modélisation pour ce type d'amortisseurs dans le domaine des turbomachines. Leurs

applications concernent des labyrinthes d'étanchéité et leur approche est basée sur une modélisation de type *poutres* et une analyse quasi-statique en Résistance des Matériaux.

### Approche quasi-statique

La méthode proposée par Niemotka et Ziegert (1993), initialement appliquée au labyrinthes d'étanchéité, a été reprise par Snecma (Laxalde, 2003) pour les disques aubagés monoblocs. Les principes de cette méthode seront ici brièvement rappelés et nous l'appliquerons ensuite sur un exemple industriel qui va nous intéresser plus loin.

Le disque et le jonc sont représentés par deux poutres courbes en contact sous l'effet des forces centrifuges. On suppose que le disque est soumis à un mouvement d'ovalisation selon un mode à  $N$  diamètres nodaux. En considérant un secteur angulaire de  $2\pi/N$  des deux poutres, la répartition des contraintes à l'interface se fait comme le décrit la figure 3.1. Le disque est donc soumis à

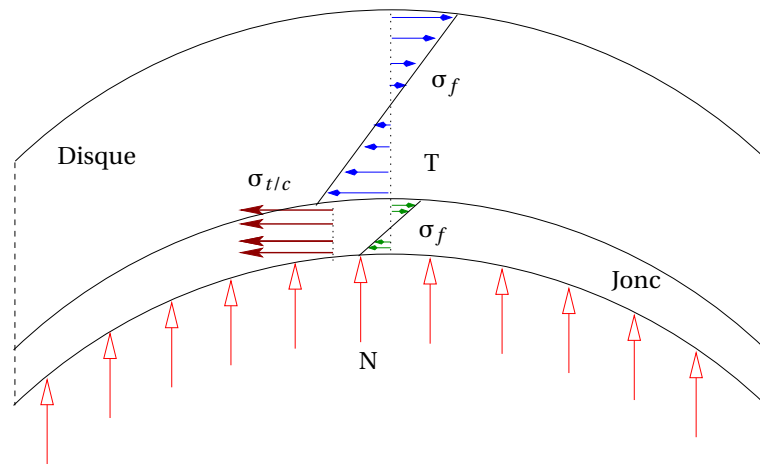


FIG. 3.1 Répartition des contraintes à l'interface disque - jonc

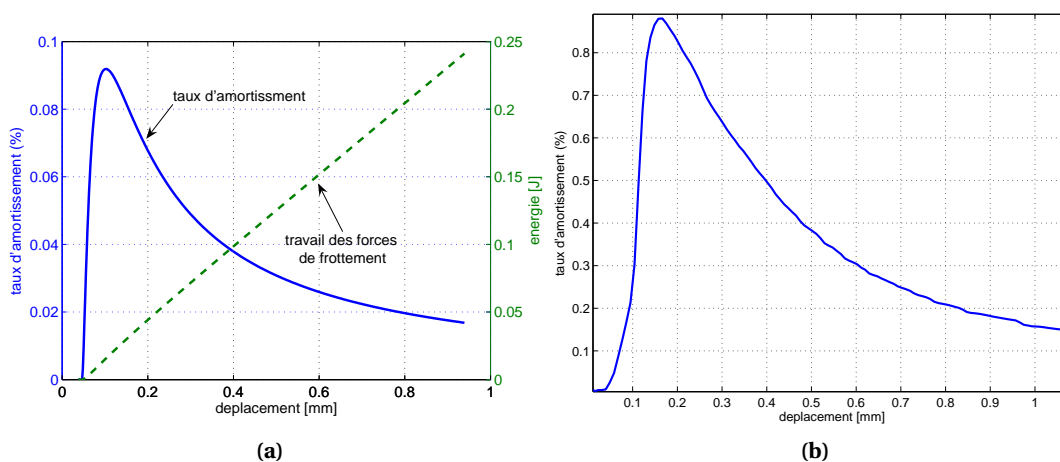
une déformation de flexion ( $\sigma_f$ ) de même que le jonc qui suit le mouvement de ce dernier. Afin d'équilibrer les déformations à l'interface et sous l'effet de l'effort frottement ( $T$ ), une composante de traction / compression ( $\sigma_{t/c}$ ) apparaît nécessairement. On fait l'hypothèse que cette composante, *a priori* présente dans les deux milieux, est prédominante dans le jonc comme le montre la figure 3.1.

En écrivant l'équilibre des déformations l'interface, on peut déterminer une amplitude limite du déplacement flexion qui permet de provoquer du glissement ( $\|T\| = \mu N$ ). Au delà de cette limite, toute ou partie de l'interface est en glissement et il est possible de calculer d'une part le déplacement relatif dans cette zone de glissement et d'autre part l'énergie dissipée par frottement. Enfin, un taux d'amortissement équivalent peut être déterminé à partir de cette énergie dissipée en se plaçant à la résonance du système.

Dans cette approche, les principaux paramètres sont des paramètres géométriques. Pour certains, comme l'épaisseur de la poutre représentant le disque, il s'agit de paramètres équivalents qui peuvent être difficiles à évaluer sur des géométries complexes telles que celles des disques auba-

gés. Ces paramètres ont malheureusement une influence relativement importante sur les résultats obtenus par cette méthode et en particulier sur l'évaluation de l'énergie dissipée.

Prenons maintenant l'exemple du disque aubagé monobloc qui sera étudié plus en détails dans la suite et dont le maillage est représenté en figure 3.8a. On s'intéresse à un mode à quatre diamètres nodaux et les résultats obtenus par cette méthode sont comparés à ceux d'une analyse en balance harmonique et d'une modélisation éléments-finis. La mise en œuvre de cette dernière approche sera détaillée plus loin mais les résultats comparés en figure 3.2 peuvent néanmoins être exploités.



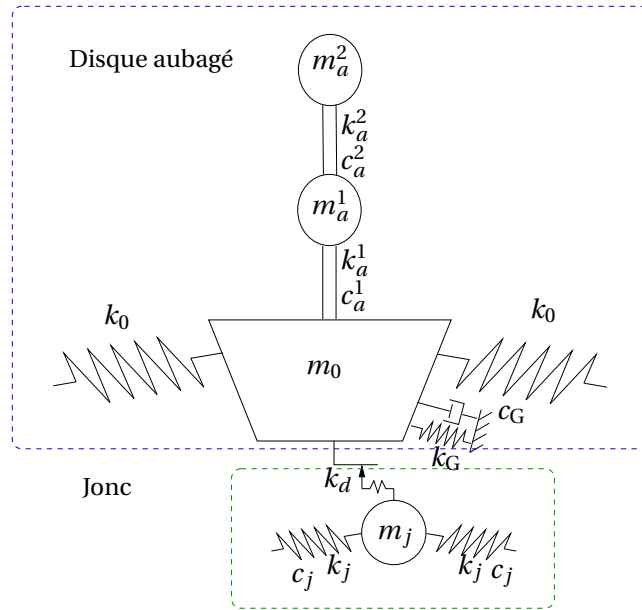
**FIG. 3.2** Comparaison de l'approche quasi-statique (a) avec une approche éléments-finis en balance harmonique (b).

On remarque que les taux d'amortissement par frottement prédits par les deux méthodes sont assez différents avec un rapport 10 entre les deux. En revanche, l'amplitude limite de glissement (environ 0,05 mm) prédite est du même ordre dans les deux méthodes. Ce dernier point est particulièrement intéressant puisqu'il signifie que la phénoménologie de l'interface, décrite en figure 3.1, est conforme à celle obtenue par une modélisation discrète (éléments-finis) de cette interface. L'écart entre les valeurs de l'amortissement est probablement dû aux hypothèses de l'approche décrite ici et en particulier à la modélisation du disque et à la non-prise en compte des effets dynamiques. Ce défaut de modélisation est *a priori* moins pénalisant dans le cas des structures axi-symétriques (telles que les labyrinthes) que pour les structures géométriquement plus complexes comme les roues aubagées.

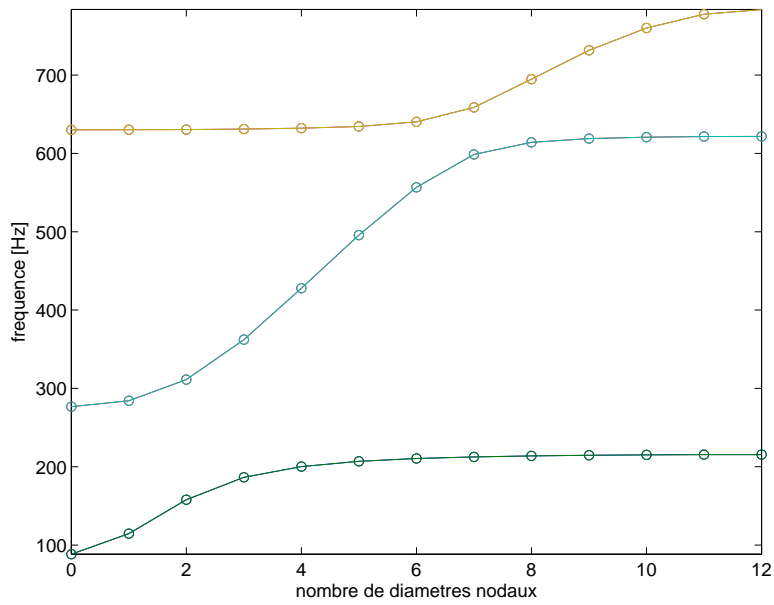
### Modélisation phénoménologique

Dans le cadre d'une étude préliminaire sur les joncs de friction (Laxalde et al., 2007), un modèle phénoménologique simple (figure 3.3) mais néanmoins représentatif du comportement dynamique d'une structure réelle a été proposé. Les valeurs numériques de ce modèle sont rappelées dans le tableau 3.1. Cette étude ne sera pas détaillée ici mais nous en rappellerons néanmoins les principaux résultats. Tout d'abord, la phénoménologie de l'amortissement par frottement dans le cas des joncs de friction a pu être appréhendée de façon qualitative. Ainsi, par exemple pour des





(a) Modèle phénoménologique (secteur)



(b) Diagramme Fréquences/Diamètres

FIG. 3.3 Modèle phénoménologique et situation modale

$m_0$	$k_0$	$k_G$	$m_a^1$	$k_a^1$	$m_a^2$	$k_a^2$	$\xi$
1,2 kg	$6,7 \cdot 10^6$ N/m	$5,9 \cdot 10^5$ N/m	350 g	$1,3 \cdot 10^6$ N/m	250g	$2,10^6$ N/m	1‰

TAB. 3.1 Valeurs numériques du modèle phénoménologique

faibles niveaux d'excitation (ou plus précisément d'amplitude de vibration) l'amortissement par frottement est faible ; lorsque l'on augmente ces niveaux, l'amortissement augmente puis diminue (voir figures 3.4). On met ainsi en évidence les phases « collé » et « glissante » typiques des systèmes frottants. De plus, comme le montrent les figures 3.4, l'effet du jonc de friction en terme d'amortissement est fortement conditionné par le taux de couplage aube-disque. Plus ce couplage est fort plus l'amortissement par frottement est significatif lorsque l'amplitude de vibration est suffisante pour générer du glissement.

À travers des études paramétriques, nous avons aussi mis en évidence les conditions d'efficacité de ce type de dispositif ainsi que les paramètres (d'excitation ou de contact) influents. Nous avons aussi étudié l'influence d'autres paramètres comme le désaccordage ou encore la segmentation du jonc...

Cette approche, bien que pertinente d'un point de vue qualitatif, reste cependant limitée et il est nécessaire d'envisager une modélisation plus fine tant au niveau de l'interface de contact que des structures elles-mêmes.

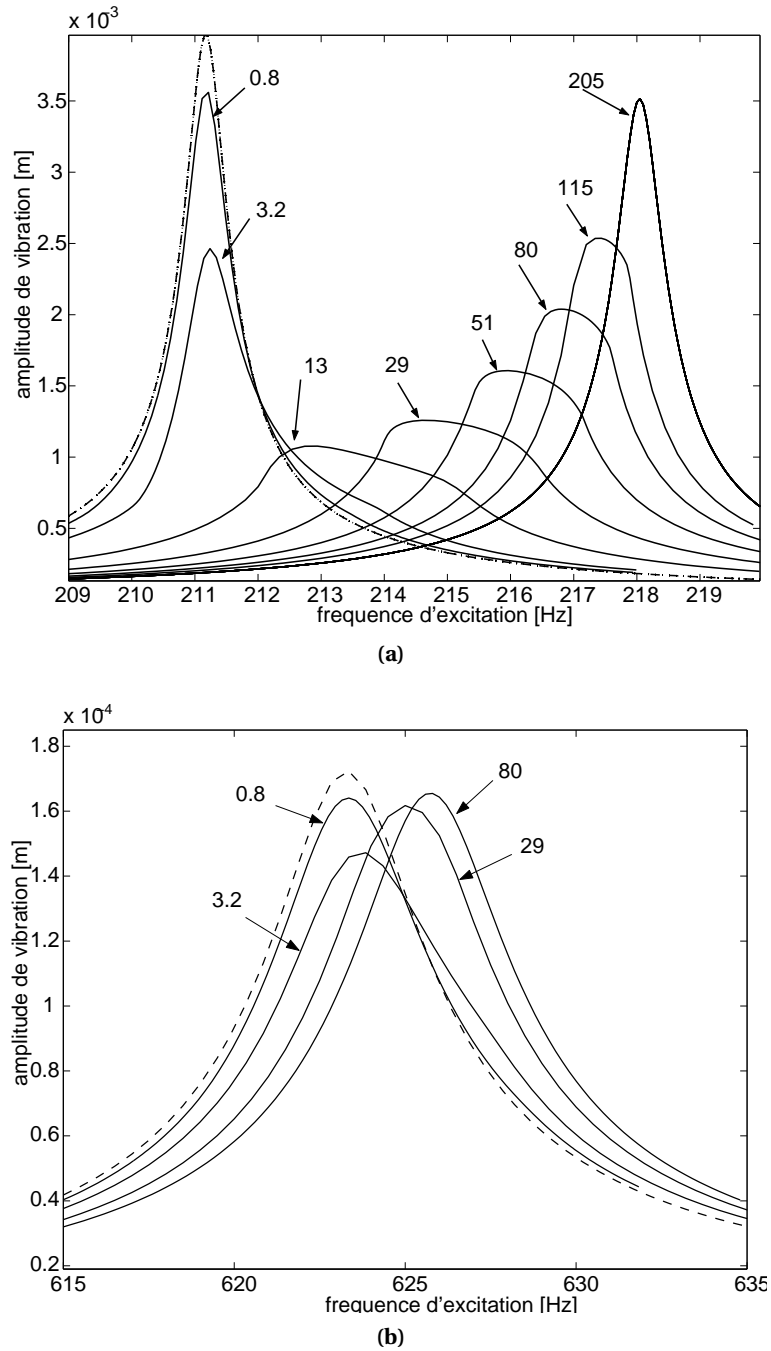
### Modélisation du disque aubagé

Le disque aubagé est représenté par un modèle réduit en synthèse modale issu lui-même d'une description éléments-finis. L'hypothèse de symétrie cyclique est retenue de telle sorte que seul le secteur de référence est modélisé ; un exemple de maillage est représenté en figure 3.8a. La méthode de réduction utilisée est une condensation dynamique de Craig et Bampton adaptée à cette modélisation en symétrie cyclique. Le nombre de modes propres de vibration retenus est fonction de la gamme de fréquence d'étude. Sont retenus, comme degrés de liberté de frontière, les trois directions d'une ligne de nœuds au niveau de chaque zone d'implantation d'un jonc (c.f. figure 3.5) ainsi que d'un groupe de nœuds d'observation / excitation généralement choisis au niveau de la pale.

### Modélisation des joncs

Chaque jonc est représenté par un secteur de poutre circulaire modélisé par éléments-finis. Nous avons choisi des éléments de poutre tri-dimensionnelles (figure 3.6b) à 6 degrés de liberté par nœuds :

$$\mathbf{q}_e = [u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1}, \psi_{z_1}, u_2, v_2, w_2, \psi_{x_2}, \psi_{y_2}, \psi_{z_2}] \quad (3.1)$$



**FIG. 3.4** *Modèle phénoménologie : réponses en fréquences pour différents niveaux d'excitation en situations de couplage aube-disque fort (a) ou faible (b); (---) réponse linéaire sans jonc.*

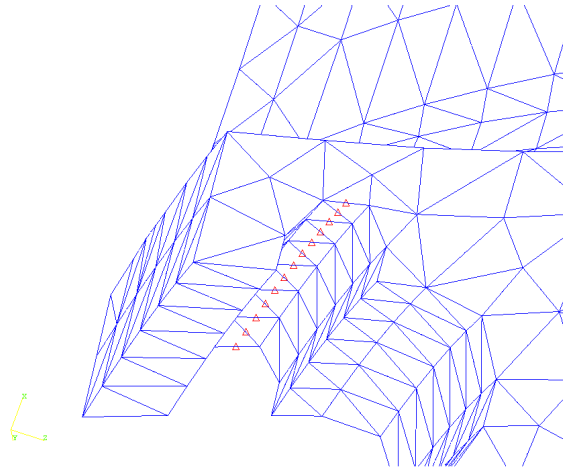


FIG. 3.5 Ligne de nœuds retenus d'un maillage éléments-finis au niveau d'une gorge de jonc

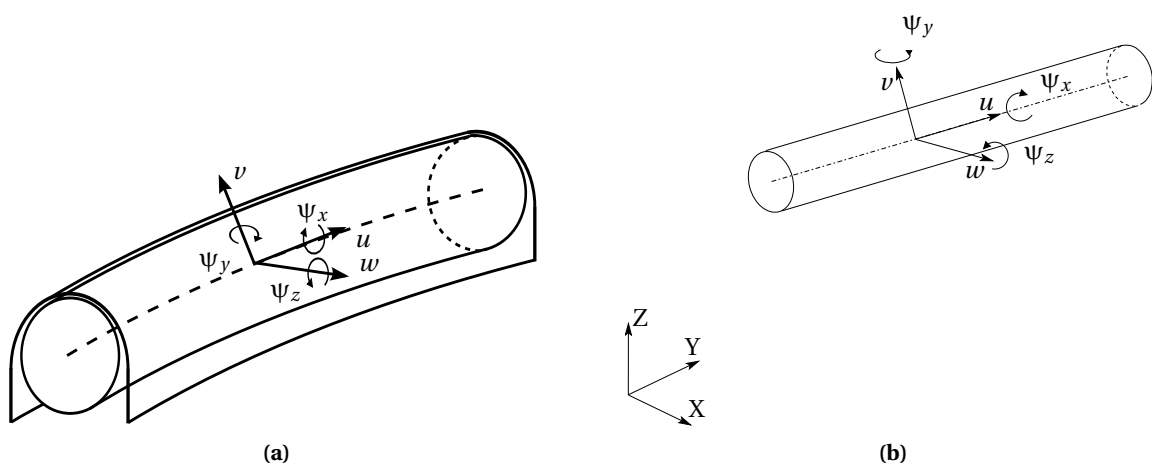


FIG. 3.6 Modélisation des joncs; (a) secteur de jonc dans sa gorge, (b) Élément de poutre tri-dimensionnel.



Les gorges sont de section circulaire et d'un diamètre généralement supérieur d'environ 10 à 20% à celui du jonc qu'elles doivent recevoir. Dans cette configuration, l'interface de contact peut s'étendre sur environ  $45^\circ$  comme le montre la figure 3.7b; en revanche la répartition de pression de contact est relativement uniforme. Dans la direction normale, la modélisation ponctuelle du

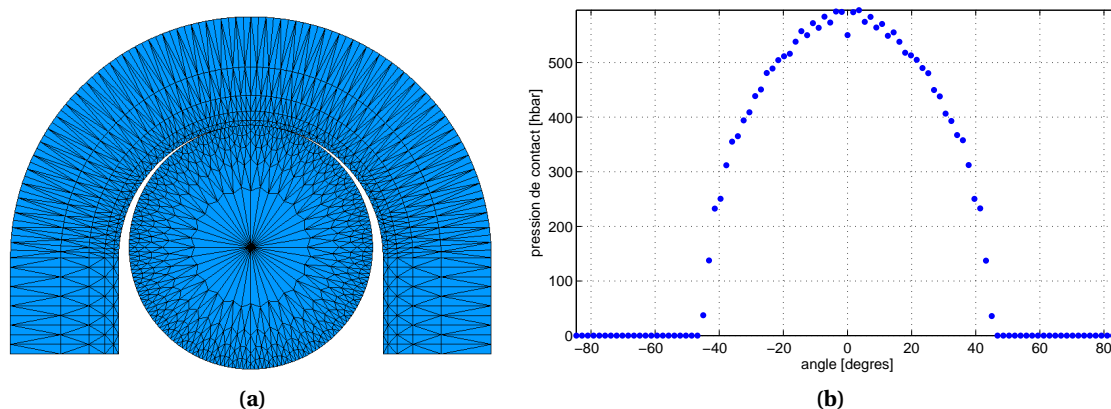


FIG. 3.7 Contact cylindre-gorge; (a) modèle éléments-finis, (b) répartition de pression de contact.

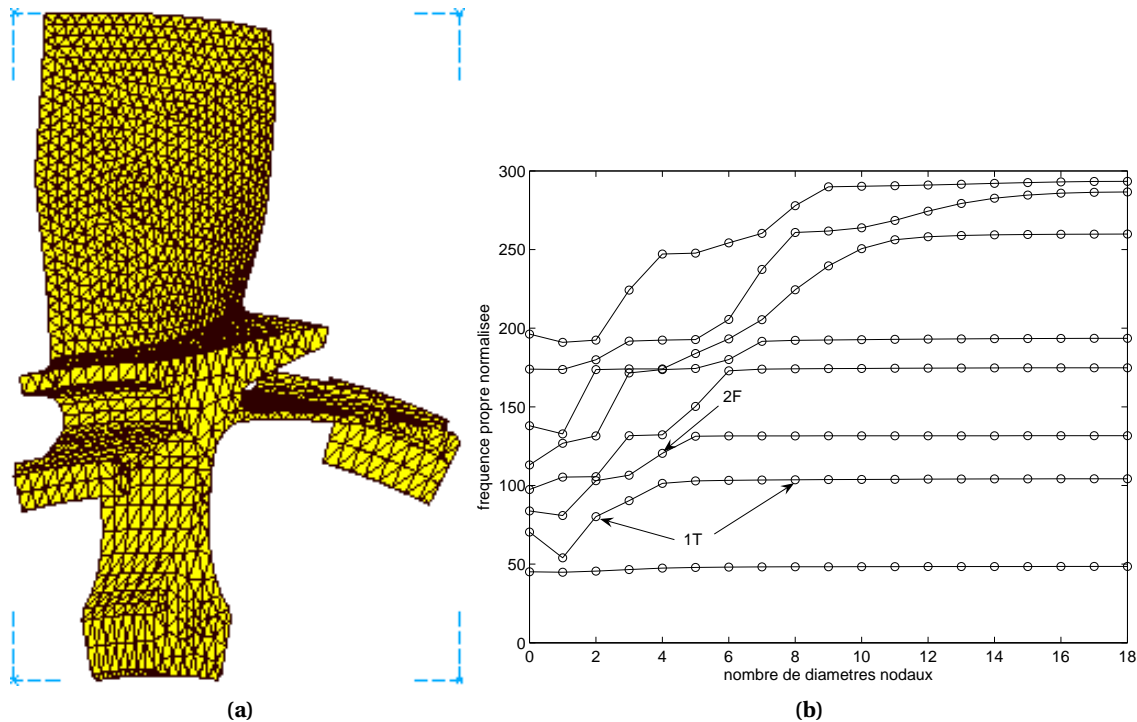
contact semble donc réaliste.

Dans les directions tangentielles, le nombre de nœuds de contact doit être choisi en fonction du compromis entre précision de la description du contact et coût de calcul. En effet, plus le nombre de nœuds est important plus les temps de calcul seront importants mais plus le calcul sera précis. La figure 3.5 montre un maillage d'une gorge typiquement utilisé dans un calcul dynamique. Nous pouvons voir que la discrétisation dans les directions tangentielles est assez faible (les distances entre nœuds sont de l'ordre du millimètre). Cependant, compte tenu de la modélisation en symétrie cyclique, le nombre de nœuds retenus à l'interface selon la circonférence est suffisant pour appréhender correctement la dynamique. Ce choix de discrétisation semble donc un bon compromis entre précision et coût de calcul. Il justifie en particulier la modélisation du contact nœuds à nœuds puisque les déplacements relatifs resteront *a priori* inférieurs à la distance inter-nœud.

La *grossièreté* de la discrétisation conduit à une surestimation de la raideur de l'interface contact par rapport à une modélisation plus fine et généralement par rapport à la réalité (expérimentale). Pour atténuer cet effet, l'introduction de raideurs dans le contact nœuds à nœuds peut s'avérer utile et permet de rendre compte des phénomènes de micro-glissement.

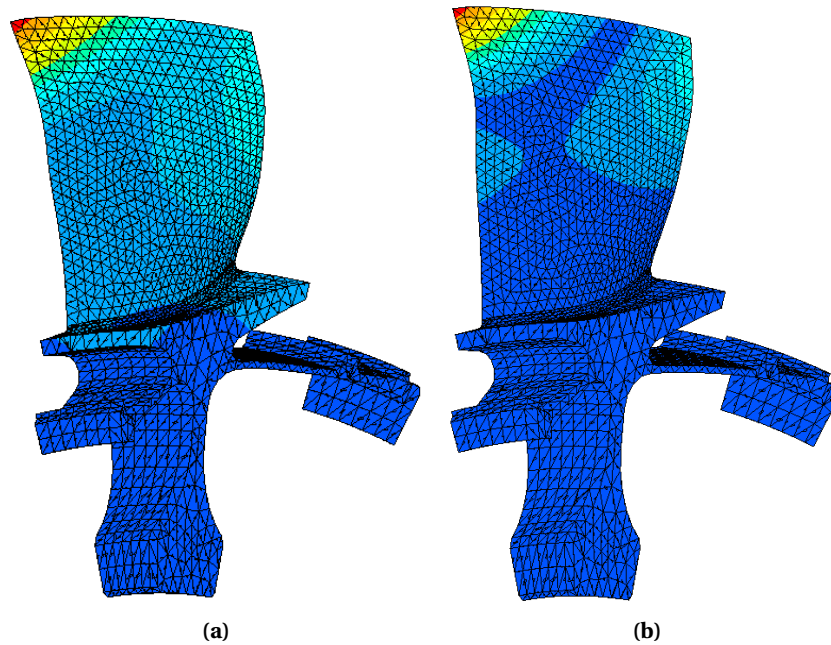
### 3.1.2 Critères d'efficacité

Les deux sections qui suivent regroupent des applications en réponse forcée. L'exemple industriel considéré est un Disque Aubagé Monobloc de compresseur HP dont le modèle éléments-finis d'un secteur est représenté en figure 3.8a. Ce disque est composé de 36 secteurs et sa situation modale est décrite en figure 3.8b par un diagramme où les fréquences propres (normalisées) sont classées par nombre de diamètres nodaux.



**FIG. 3.8** *Disque Aubagé Monobloc de compresseur HP; (a), modèle éléments-finis d'un secteur, (b), diagramme fréquences propres / nombre de diamètres nodaux.*

En premier lieu, nous avons étudié les conditions d'efficacité de l'amortissement par jonc de friction. Comme nous l'avons vu précédemment (Laxalde et al., 2007), cet aspect est fortement conditionné par le niveau de couplage dynamique entre les aubes et le disque puisque les joncs sont implantés au niveau du disque et que les phénomènes vibratoires sont généralement initiés et parfois localisés au niveau des aubes. Dans le but de vérifier ce point sur des modèles plus réalistes, nous avons comparé l'efficacité des joncs de friction en réponse forcée pour deux configurations d'excitation. Nous nous intéressons au premier mode de torsion (1T) des aubes pour les nombres de diamètres 2 et 8 (repérés en figure 3.8b) dont les déformées modales sont représentées en figures 3.9. Notons que la fréquence du mode à deux diamètres nodaux est plus basse (approximativement 79.5) que celle du mode à huit diamètres nodaux (approximativement 95.8). Ceci est principalement dû à la participation plus importante du disque dans le mouvement global comme c'est généralement le cas pour les faibles nombres de diamètres nodaux. Nous considérons ici l'efficacité d'un jonc (de dimension fixée) implanté en amont et nous étudions l'influence de l'effort normal pour ces deux modes. Les réponses en fréquences sont représentés en figures 3.10. La figure 3.10a, qui correspond à un couplage aube-disque important, présente les caractéristiques typiques des résonances de systèmes amortis par frottement. Lorsque l'effort normal diminue, l'interface de frottement passe d'un état collé à un état glissant ; le comportement optimal en terme de dissipation correspond à un état intermédiaire collé/glissant de micro-glissement. En revanche, la figure 3.10b, qui correspond à un couplage aube-disque plus faible, montre une efficacité bien moindre de l'amortissement par joncs.



**FIG. 3.9** Déformées propres du premier modes de torsion, (a) à 2 diamètres nodaux et, (b) 8 diamètres nodaux.

Ceci confirme notre hypothèse de départ à savoir que l'efficacité des joncs de friction dépend significativement des niveaux dynamiques dans la zone de frottement et donc du couplage aube-disque.

### 3.1.3 Comportement en réponse forcée

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement en régime périodique forcé de notre Disque Aubagé Monobloc muni de joncs et à l'efficacité de ces dispositifs en fonction de divers paramètres (d'excitation, de contact, ...). Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la prédiction et le contrôle du comportement en réponse forcée sont primordiaux car ce type de régimes peut engendrer des problèmes de fatigue vibratoire.

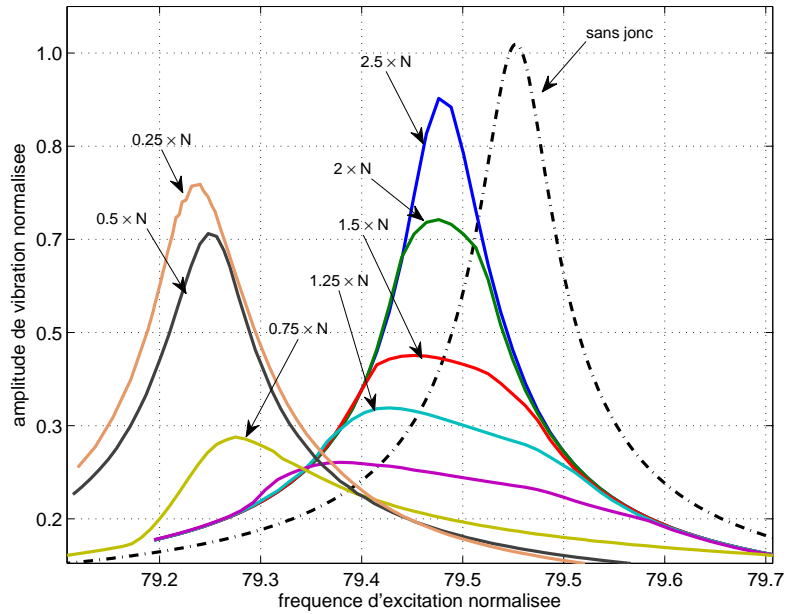
Cette étude est basée sur les résultats de plusieurs études d'influence qui vont nous permettre de mieux appréhender les phénomènes mis en jeu.

#### Influence de l'épaisseur du jonc

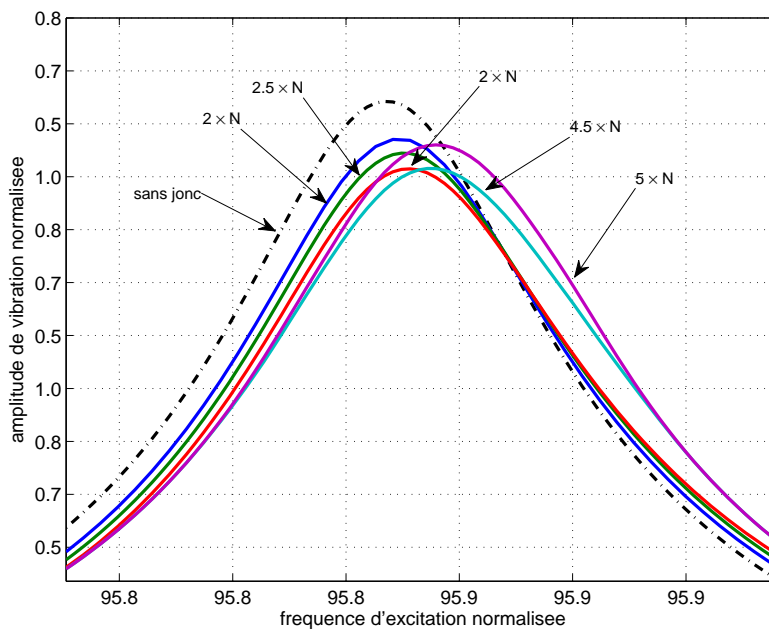
Cette première étude porte sur l'influence de l'épaisseur du jonc. Nous nous appuyons sur l'exemple du troisième mode à quatre diamètres nodaux du Disque Aubagé Monobloc dont la déformée modale est représenté en figure 3.11. Il s'agit d'un deuxième mode de flexion (2F) de pale et on peut noter une participation importante du disque au mouvement global.

La figure 3.12 regroupe les courbes de réponse au voisinage de la résonance de ce mode pour différentes valeurs de l'épaisseur du jonc (notée  $\phi$ ) ainsi que la courbe de référence sans jonc. Dans un souci de réalisme, nous avons restreint l'étude à des valeurs raisonnables de la masse du jonc par





(a)



(b) Couplage faible : mode 1T, 8 diamètres nodaux

**FIG. 3.10** Réponses en fréquence au voisinage du mode 1T pour différents niveaux d'effort normal ( $N$ ) et influence du couplage aubedisque : (a) couplage fort, 2 diamètres nodaux ; (b) Couplage faible, 8 diamètres nodaux.

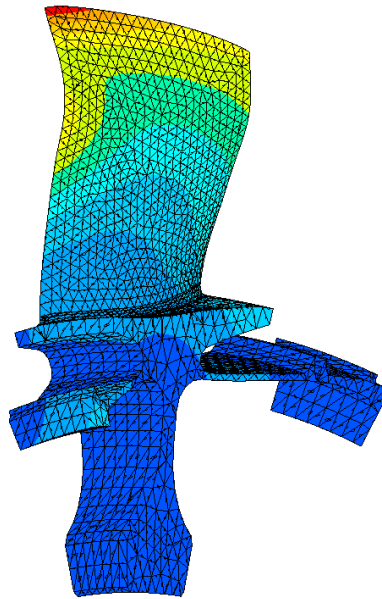


FIG. 3.11 Troisième mode à quatre diamètres nodaux; deuxième mode de flexion (2F).

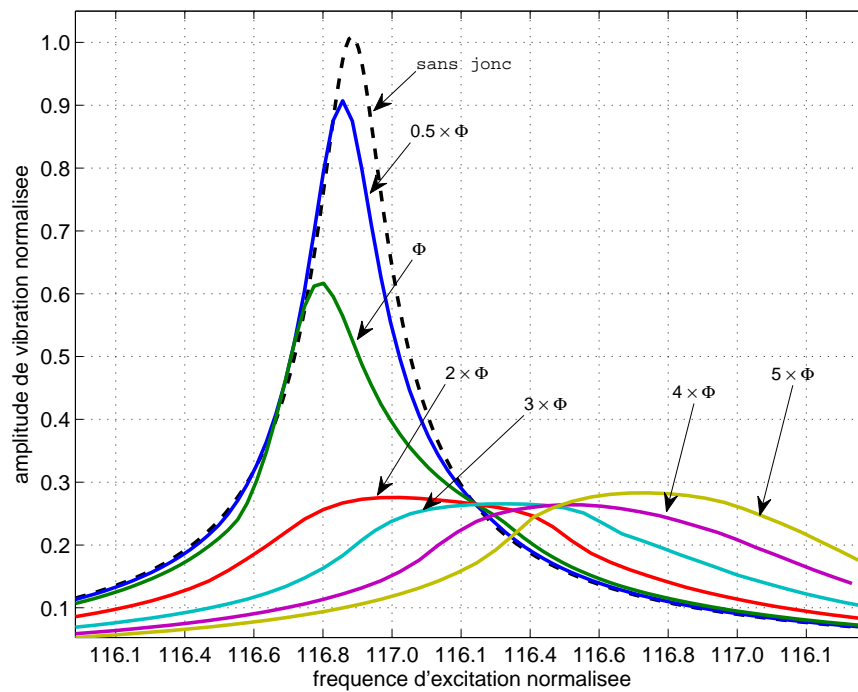


FIG. 3.12 Réponses en fréquence pour différentes valeurs (normalisées) de l'épaisseur du jonc; 3-ème mode (2F) à 4 diamètres nodaux.

rapport à celle du disque, de l'ordre de 0.5% au maximum de la masse de ce dernier. Lorsque l'on augmente l'épaisseur du jonc, l'amortissement par frottement augmente (le niveau vibratoire diminue) et atteint un niveau asymptotique pour des valeurs importantes (mais restant raisonnables) de la masse du jonc. Pour des valeurs extrêmes de l'épaisseur du jonc (non représentées en figure 3.12), l'effort normal résultant (qui est proportionnel à la masse) induit un « collage » permanent de l'interface jonc / disque ce qui limite l'amortissement par frottement. Cet exemple montre, pour cette configuration d'excitation, que l'épaisseur de jonc optimale (d'un point de vue conception) reste raisonnable (de l'ordre de  $2 \times \phi$ ) pour atteindre un amortissement proche de l'optimum.

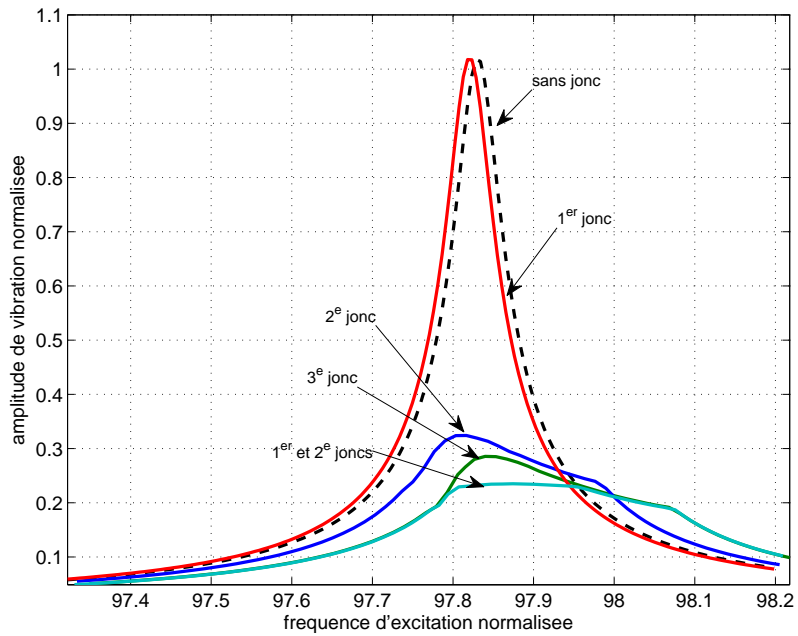
### Utilisation de plusieurs joncs et optimisation

Toujours en réponse forcée, nous étudions maintenant l'utilisation de plusieurs joncs sur un même Disque Aubagé Monobloc. L'utilisation de plusieurs joncs permet en particulier de traiter différents modes en dimensionnant chaque jonc pour un (ou plusieurs) mode(s) cible(s). Un autre aspect concerne, pour un mode donné, l'optimisation en fonction d'un paramètre d'excitation (par exemple). Dans cet exemple, nous considérons trois joncs ; deux situés sous la jante du disque en amont et aval et un sous le labyrinthe d'étanchéité.

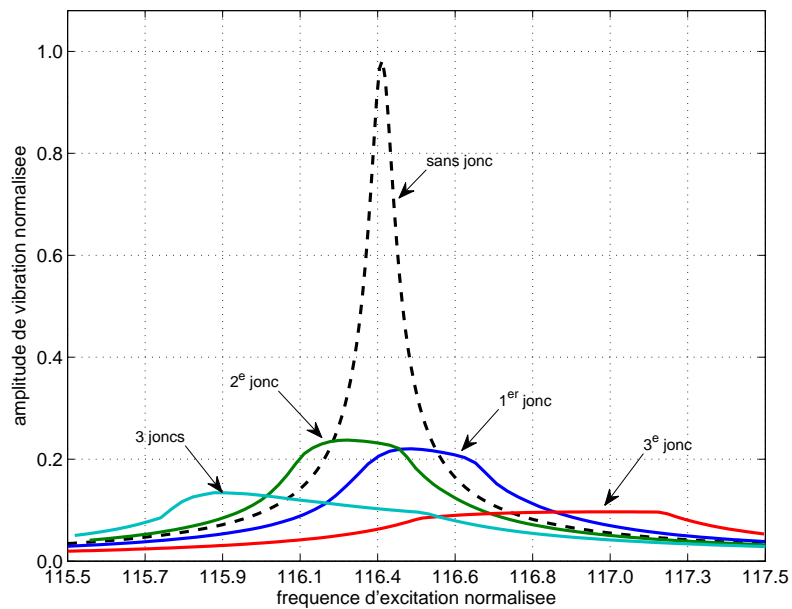
Pour illustrer le premier point, nous nous intéressons à deux modes distincts ; le quatrième mode à un diamètre nodal qui correspond à un premier mode de torsion de pale et dont la déformée modale est similaire à celle représentée en figure 3.9a et le troisième mode à quatre diamètres nodaux (figure 3.11) qui correspond à un deuxième mode de flexion de pale. La figure 3.13a regroupe les réponses en fréquence au voisinage de la résonance du premier mode cible (1T) pour chacun des joncs et pour les trois joncs simultanément. Il apparaît clairement que les joncs 1 et 2 (situés sous la jante) sont efficaces pour ce mode mais que le troisième (situé sous le labyrinthe d'étanchéité) n'est pas efficace. D'autre part, les réponses en fréquences du deuxième mode cible (2F), regroupées en figure 3.13b, montrent que les trois joncs sont efficaces et apportent un amortissement par frottement important. De plus, le troisième jonc est plus efficace sur ce mode que les deux autres et on peut noter que l'amortissement optimal est atteint avec ce seul jonc et qu'il reste proche de la configuration à trois joncs. Le concepteur cherchera donc, sur ce type d'exemple, à dimensionner les joncs 1 et 2 pour une efficacité maximale sur le premier mode cible (1T) et le troisième pour le second mode cible (2F).

En second lieu, nous considérons uniquement le troisième mode (2F) à quatre diamètres nodaux (figure 3.11) et nous étudions l'optimisation des trois joncs en fonction d'un paramètre d'excitation. Comme nous l'avons vu, les résultats présentés en figure 3.13b ne correspondent pas à la configuration optimale puisqu'un seul jonc suffit pour atteindre le maximum d'amortissement par frottement. Nous considérons donc la possibilité d'étendre l'efficacité des joncs pour une gamme plus large de niveaux d'excitation (les autres paramètres étant fixés). Les figures 3.14 regroupent les réponses en fréquence au voisinage de la résonance pour chacun des trois joncs et pour les trois joncs simultanément pour différents niveaux d'excitation normalisés ( $F$ ). Les conceptions optimales de chaque jonc sont :

- jonc n°1 :  $0.56 \times m_0$
- jonc n°2 :  $2.32 \times m_0$
- jonc n°3 :  $0.12 \times m_0$

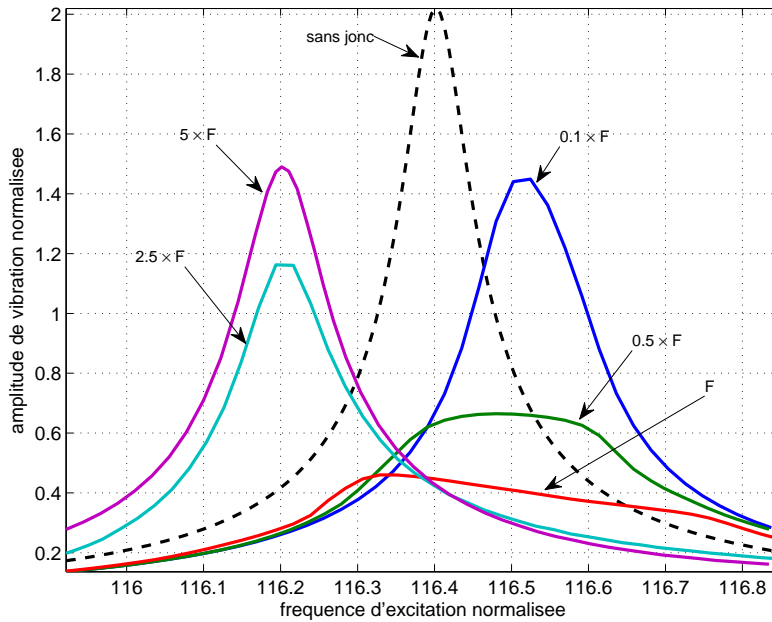


(a)

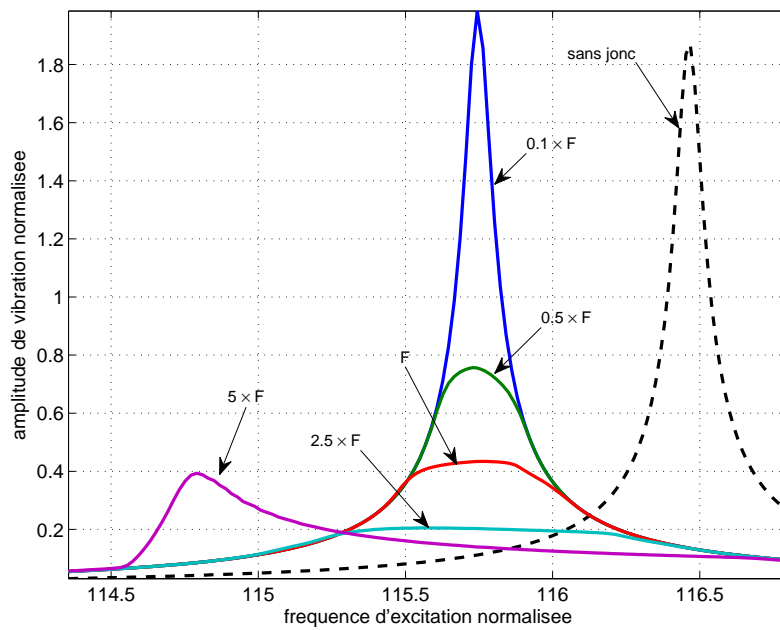


(b)

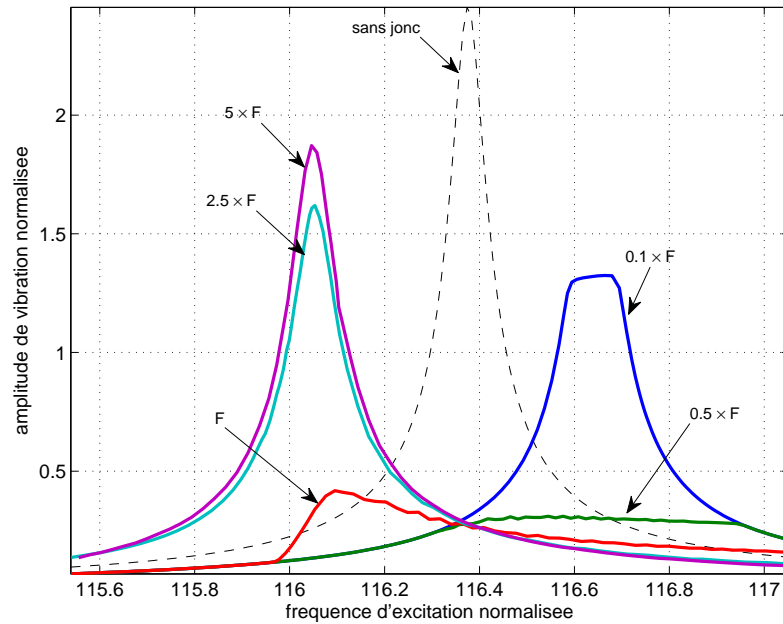
**FIG. 3.13** Optimisation multi-modes; réponses en fréquence pour trois joncs; (a) 4-ème mode (1T) à 1 diamètre nodal, (b) 3-ème mode (2F) à 4 diamètres nodaux



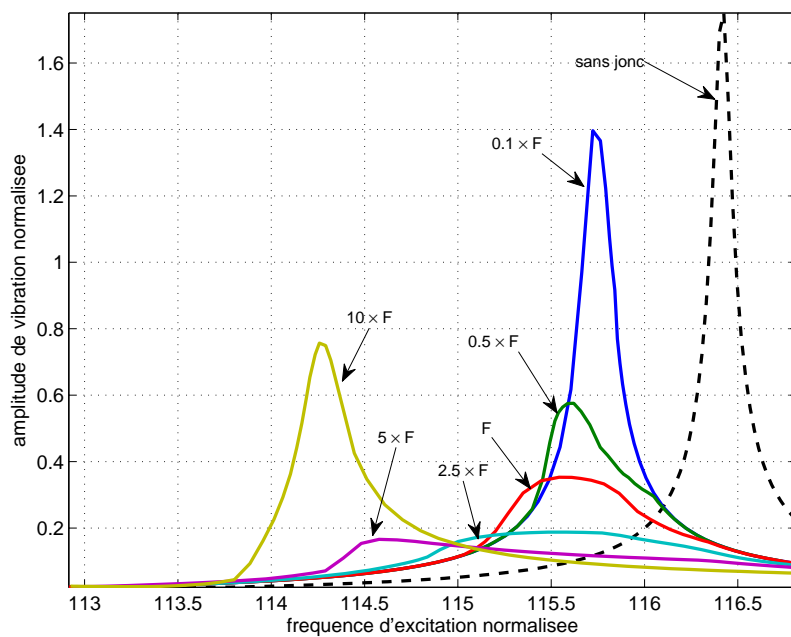
(a)



(b)



(c)



(d)

**FIG. 3.14** Optimisation en fonction du niveau d'excitation ( $F$ ) : Réponses en fréquence sur le 3-ème mode ( $2F$ ) à 4 diamètres nodaux pour (a) le premier, (b) le deuxième et (c) le troisième jonc seuls et (d) les trois joncs.

$m_0$  étant une masse normalisée.

Le premier jonc (figure 3.14a) est conçu pour être efficace pour un niveau d'excitation de l'ordre de  $F$ , le second (figure 3.14b) pour un niveau compris entre  $2 \times F$  et  $5 \times F$  et le troisième (figure 3.14c) entre  $0.5 \times F$  et  $F$ . Par conséquent, en présence des trois joncs ainsi dimensionnés, la zone d'efficacité du jonc couvre des niveaux allant de  $0.5 \times F$  à  $5 \times F$  ce qui est bien supérieur à la zone que peut couvrir un seul jonc (figure 3.14d).

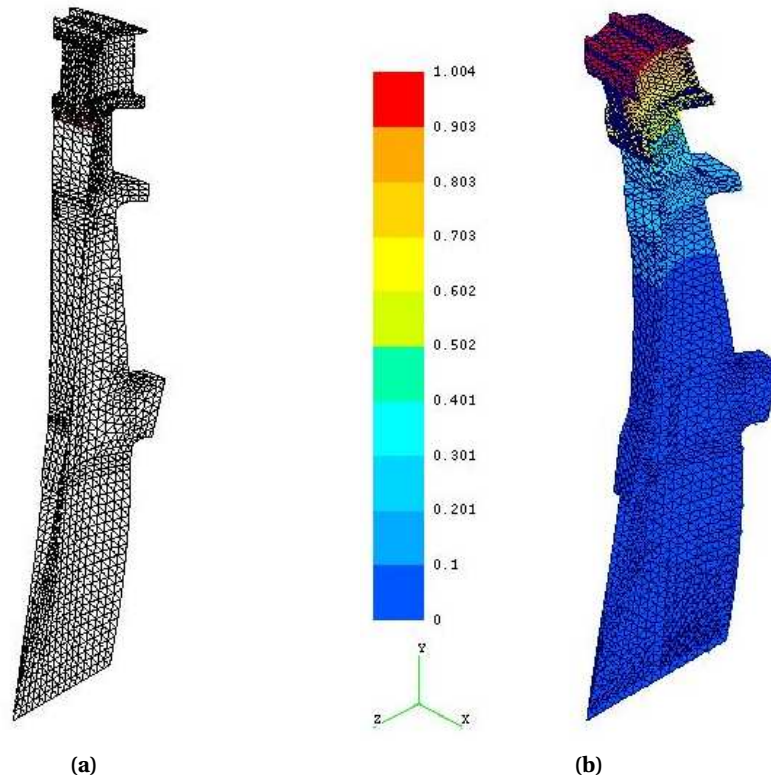
### 3.1.4 Étude des caractéristiques modales non-linéaires

Pour compléter les résultats précédents en réponse forcée, nous avons ensuite étudié l'évolution des caractéristiques modales d'un disque aubagé muni d'un jonc de friction. En effet, s'ils permettent de bien appréhender la phénoménologie de l'amortissement par frottement, ces résultats en réponse forcée peuvent s'avérer difficile à utiliser en conception du fait des incertitudes ou méconnaissances de l'excitation en particulier. Ainsi, les résultats d'une analyse modale non-linéaire et l'étude de l'évolution des caractéristiques modales (fréquence propre et amortissement en particulier) semblent plus adaptés car plus général.

La méthode d'analyse modale non-linéaire présentée au chapitre 2 a été utilisée dans cette partie et l'exemple d'application est un disque monobloc issu d'un démonstrateur de turbo-pompe à hydrogène de classe Vulcain conçu par Volvo Aero. Ce disque comporte 84 secteurs et le modèle éléments-finis d'un secteur est représenté en figure 3.15a. La géométrie de ce type de structures étant assez différente de celles typiquement rencontrées dans les Disques Aubagés Monoblocs de moteurs d'avion, les phénomènes vibratoires observés diffèrent aussi sensiblement. En effet, on s'intéresse ici principalement à des modes d'ensemble du disque (flexion) tel que celui dont la déformée modale est représentée en figure 3.15b et qui nous servira d'exemple dans la suite.

Nous avons considéré l'implantation d'un jonc de friction de section rectangulaire sous la plateforme amont du disque. Les résultats de l'analyse modale non-linéaire sur le mode cible précédemment mentionné sont présentés en figures 3.16. Comme dans les exemples présentés au chapitre 2, nous étudions l'évolution de la fréquence propre (figure 3.16a) et du taux d'amortissement modal (figure 3.16b) en fonction du niveau d'amplitude modale (qui sert par ailleurs de paramètre de contrôle).

On observe un comportement similaire aux exemples du chapitre 2. Pour des amplitudes de vibration faibles, il y a très peu de glissement et la fréquence propre est constante tandis que le taux d'amortissement modal est quasiment nul ; ce qui correspond à l'état asymptotique collé. Dans une gamme intermédiaire d'amplitudes et à partir d'un seuil (amplitude 0.15), la fréquence propre diminue brutalement tandis que le taux d'amortissement augmente jusqu'à atteindre son maximum (amplitude 0.25) ; c'est dans cette zone de glissement intermédiaire où l'amortissement par frottement est le plus efficace. Enfin, lorsque l'amplitude vibratoire augmente le taux d'amortissement diminue progressivement tandis que la fréquence propre augmente de nouveau et tend vers l'état asymptotique glissant.



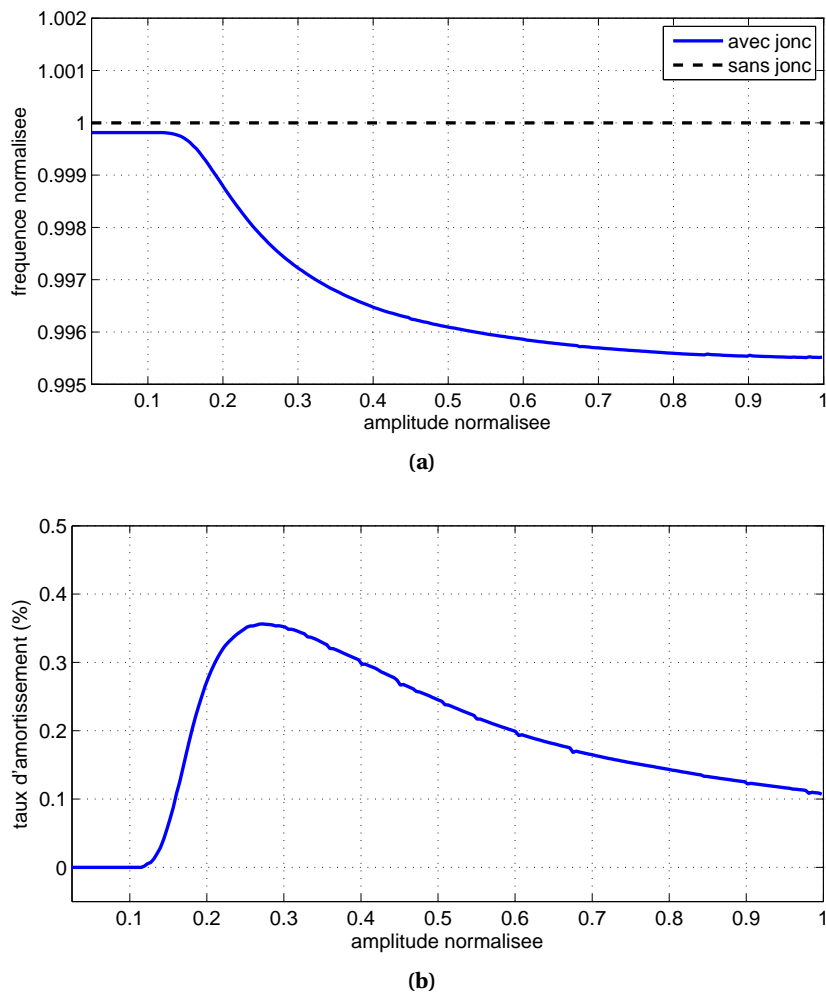
**FIG. 3.15** *Disque de turbine de turbo-pompe à hydrogène; (a) maillage éléments-finis d'un secteur, (b) déformée modale du mode cible à 4 diamètres nodaux.*

### Étude de l'influence du coefficient de frottement

Nous nous intéressons maintenant à la sensibilité de l'amortissement par joncs de friction au coefficient de frottement. Toujours sur l'exemple du disque de turbo-pompe, nous présentons, en figures 3.17, l'évolution des données modales (fréquence propre et amortissement modal) pour plusieurs valeurs de coefficient de frottement. On observe d'une part que plus le coefficient de frottement est faible, plus le seuil de glissement est bas. D'autre part, l'écart entre les valeurs extrêmes de ce seuil est assez important (amplitude de 0.01 à 0.25), ce qui montre la grande sensibilité de ce type de dispositifs d'amortissement par frottement aux paramètres de contact. En revanche, on remarque que le taux d'amortissement maximal est quasiment constant.

Ces résultats montrent (ou confirment) que le coefficient de frottement est l'un des paramètres les plus importants pour le dimensionnement de ce type de dispositifs d'amortissement par frottement. Il s'agit d'autre part d'une donnée difficile à évaluer et à contrôler. On ne dispose en général que d'études expérimentales sur des pièces de géométrie simple et dans des conditions pas toujours représentatives de l'environnement de fonctionnement réel. D'autre part de nombreux paramètres comme les conditions de température, de pression de contact ou encore l'état de surface et la présence de lubrifiant influencent le coefficient de frottement. Ces paramètres, souvent méconnus et généralement assez variables en fonctionnement induisent une variabilité importante de ce coeffi-





**FIG. 3.16** Résultats d'analyse modale non-linéaire ; évolution de la fréquence propre (a) et de l'amortissement modal (b) en fonction du niveau de vibration.

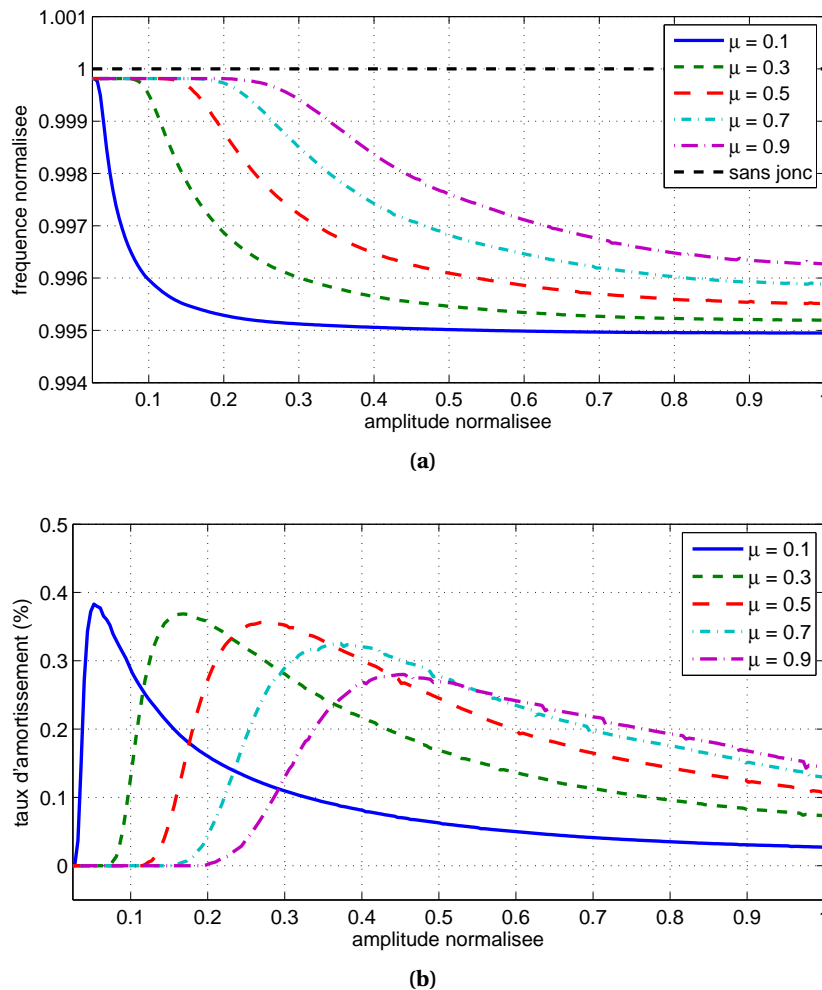
cient de frottement.

Dans le cas de joncs de friction, les conditions de contact (répartition de pression, température,...) sont assez facilement quantifiables en revanche les états de surface et du revêtement lubrifiant sont plus difficiles à évaluer d'autant plus qu'ils sont susceptibles d'évoluer en fonctionnement ou au cours de la vie du moteur.

D'après l'exemple proposé et d'une façon générale, il semble donc recommander de dimensionner les joncs de friction avec une marge sur le coefficient de frottement.

### Optimisation des joncs de friction

Le dimensionnement et l'optimisation des dispositifs d'amortissement par frottement se font traditionnellement à l'aide des réponses forcées. Cependant, la méthode d'analyse modale non-linéaire adaptée aux systèmes dissipatifs peut remplacer avantageusement ces méthodes puisqu'il



**FIG. 3.17** Analyse modale non-linéaire : influence du coefficient de frottement ; évolution de la fréquence propre (a) et de l'amortissement modal (b) en fonction du niveau de vibration.

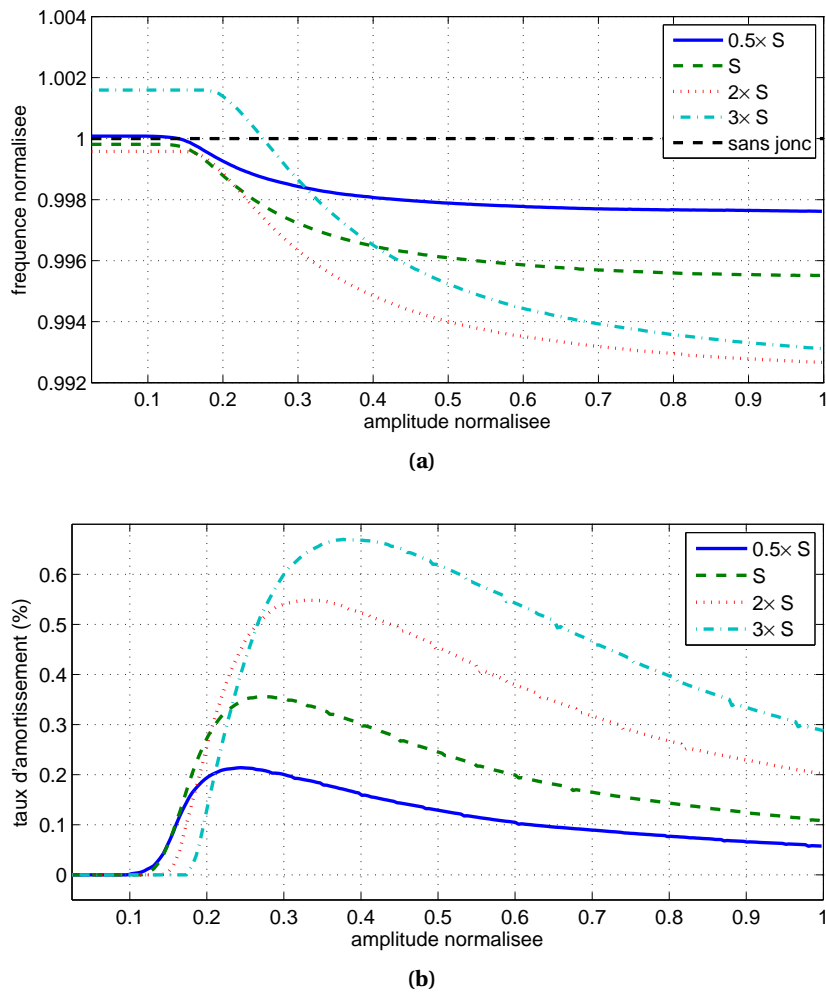
n'est plus nécessaire de faire des hypothèses sur l'excitation.

En effet, nous avons vu au chapitre 1 que les sources d'excitation des roues sont diverses et souvent difficiles à prédire (sources synchrones, asynchrones,...).

Nous allons, à partir d'études paramétriques, tenter de dégager quelques règles de conception. Notons d'autre part que la géométrie envisagée pour cette application (section rectangulaire) donne plus de liberté que la géométrie traditionnelle (section circulaire).

Le premier point étudié, figures 3.18, est l'aire de la section du jonc. Les résultats montrent que ce paramètre influence peu le seuil de déclenchement (il reste aux alentours de 0.15) ; en revanche, le niveau d'amortissement optimal obtenu est d'autant plus important que cette aire (ou plus généralement, la masse) est grande.

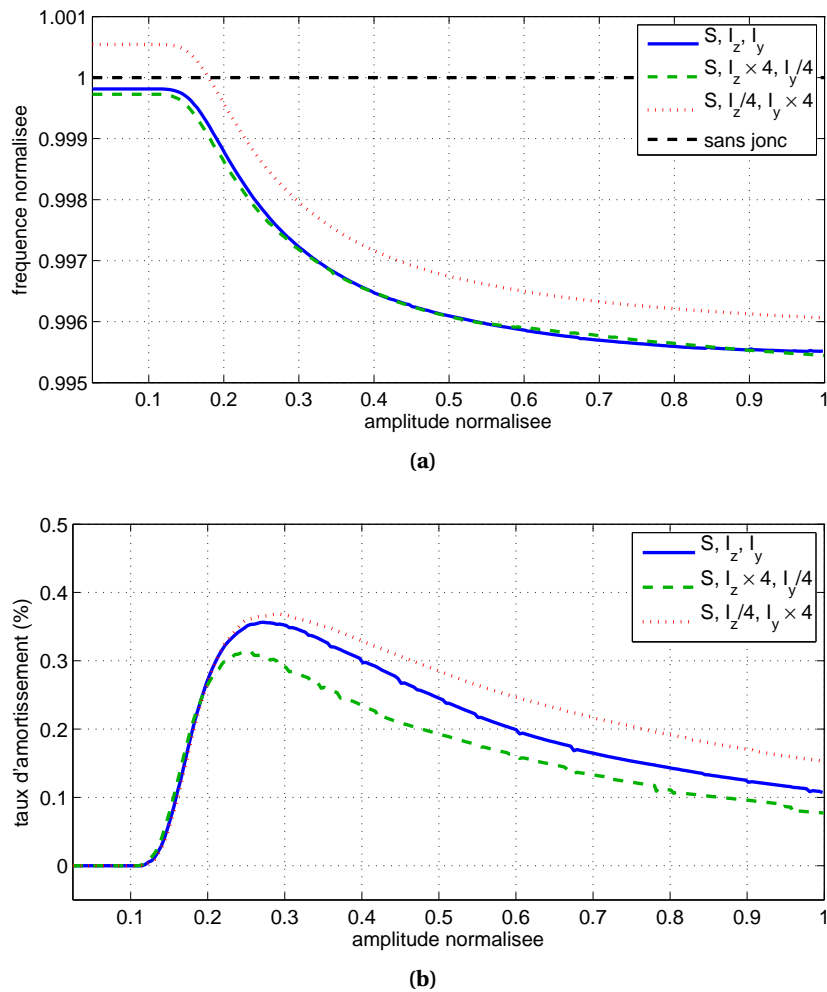
En second lieu, nous avons étudié l'influence des inerties de flexion (dans les directions radiale et axiale) ; les résultats sont présentés en figures 3.19. Notons que la section (et donc la masse)



**FIG. 3.18** Analyse modale non-linéaire : influence de l'épaisseur du jonc ; évolution de la fréquence propre (a) et de l'amortissement modal (b) en fonction du niveau de vibration.

reste constante et que l'on fait varier indépendamment les inerties de flexion axiale ( $I_z$ ) et radiale ( $I_y$ ). On note que ces paramètres ont une influence relativement faible sur le seuil de déclenchement ; concernant le niveau d'amortissement il semble que l'inertie de flexion radiale ( $I_y$ ) ait une influence non négligeable et les résultats montrent que plus elle est importante plus l'amortissement est élevé. Ce résultat n'est cependant pas général.

La dernière étude d'influence concerne les caractéristiques matériaux et le module d'Young en particulier. Dans un souci de réalisme nous avons considéré des matériaux métalliques et donc conservé le rapport  $E/\rho$  constant. Les résultats, figures 3.20 montrent que plus le module d'Young est élevé (dans la plage de valeurs considérée) plus le seuil de déclenchement est bas et plus le niveau d'amortissement optimal est important.



**FIG. 3.19** Analyse modale non-linéaire : influence des inerties de flexion du jonc ; évolution de la fréquence propre (a) et de l'amortissement modal (b) en fonction du niveau de vibration.

### Résumé

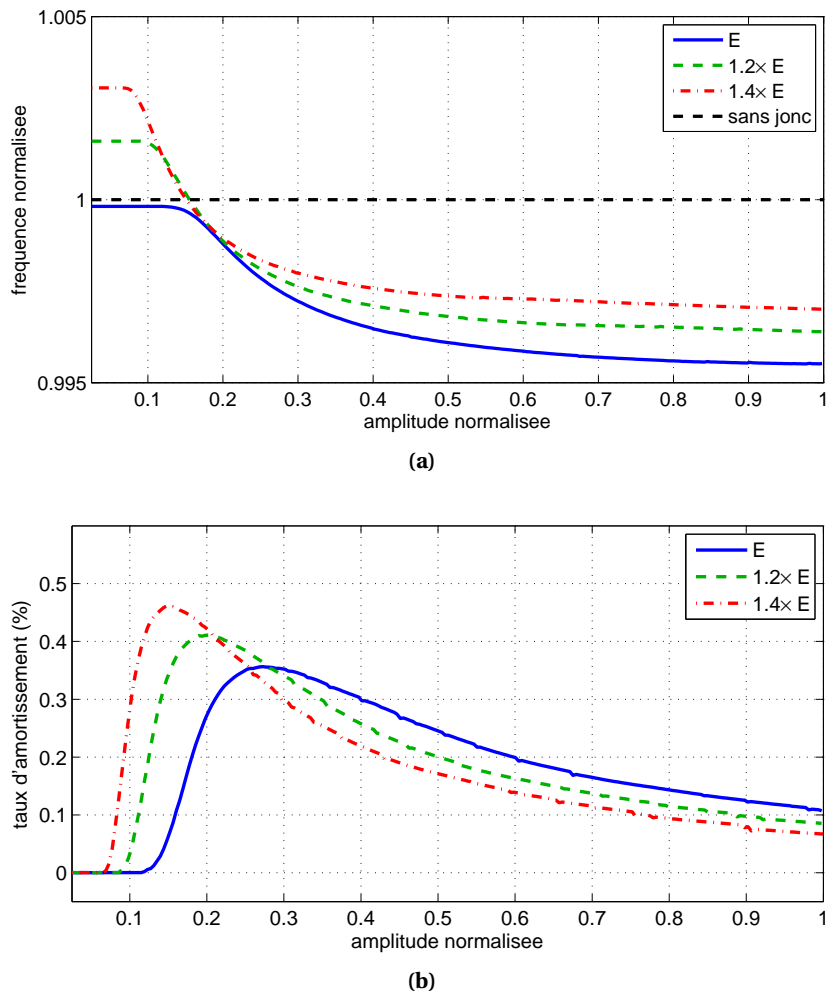
Les résultats des études paramétriques présentées peuvent être résumés ainsi :

- Augmenter la rigidité longitudinale (traction / compression) permet d'augmenter l'amortissement modal non-linéaire maximal mais ne modifie pas l'amplitude seuil ;
- Les rigidités de flexion axiale et radiale ont une influence moindre bien que la rigidité axiale puisse jouer selon les cas ;
- Augmenter le module d'Young permet d'une part de diminuer l'amplitude seuil de glissement et d'autre part d'augmenter l'amortissement modale non-linéaire maximal.

D'un point de vue phénoménologique, il semble que :

1. L'amplitude seuil de glissement soit proportionnelle à :

$$\frac{\mu N}{ES} \quad (3.3)$$



**FIG. 3.20** Analyse modale non-linéaire : influence du module d'Young du jonc (matériau métallique) ; évolution de la fréquence propre (a) et de l'amortissement modal (b) en fonction du niveau de vibration.

2. Le taux d'amortissement optimal est fonction de l'écart fréquentiel entre les configurations asymptotiques « jonc collé » et « jonc glissant ».

### 3.1.5 Calculs aéroélastiques

Outre la possibilité de s'affranchir des hypothèses sur l'excitation, la méthode d'analyse modale non-linéaire que nous venons d'appliquer permet, comme nous l'avons souligné au chapitre 2, de traiter des problèmes de type flottement aéroélastique. L'étude des phénomènes de flottement peut se faire, sous l'hypothèse d'un mouvement fluide linéarisé, en résolvant un problème aux valeurs propres complexes sur le système aéromécanique couplé. Ainsi, en base modale, le problème de flottement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \mathbf{A})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

où les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices (diagonales) de masse, amortissement et raideur généralisées et la matrice  $\mathbf{A}$  (non symétrique) regroupe les termes d'amortissement aérodynamique généralisé (issus d'un calcul couplé instationnaire). Si l'on exprime les solutions de l'équation (3.4) sous la forme :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{\lambda t} \quad (3.5)$$

la stabilité d'un mode peut être déterminée en étudiant le signe de la partie réelle de sa valeur propre  $\lambda$  ; s'il est strictement négatif, le mode est stable, sinon il est instable.

Pour prendre en compte cet aspect dans les analyses non-linéaires précédentes, deux approches sont possibles. La plus simple et la plus immédiate consiste à calculer l'amortissement par frottement à l'aide d'une analyse modale non-linéaire telle que celles présentées précédemment puis à sommer cet amortissement modal avec l'amortissement total (de la structure et du fluide) issu de l'analyse aux valeurs propres linéaires. Si cette somme est strictement positive, le mode est stable sinon il est instable. Cette notion de stabilité est bien entendu dépendante du niveau de vibration et il convient plutôt de définir des zones d'amplitudes stables (si elles existent) ainsi que des points attracteurs comme sur la figure 2.13 du chapitre 2. Cette approche sera généralement suffisante puisqu'elle est cohérente avec l'hypothèse de couplage qui est ici envisagée. En outre, rappelons que la méthode d'analyse modale non-linéaire que nous proposons prend en compte toute la dynamique même si les modes sont étudiés un par un.

La deuxième approche consiste à introduire directement la matrice  $\mathbf{A}$  (préalablement transformée en coordonnées physiques) dans la formulation de calcul des modes non-linéaires complexes. Les couplages entre les modes sont ainsi correctement pris en compte aussi bien d'un point de vue structure (couplage par la non-linéarité), ce qui était déjà le cas que d'un point de vue aérodynamique.

Enfin, il pourrait être intéressant, lorsque cela est nécessaire, d'intégrer ce type de calcul dans une approche intégrée d'analyse aéroélastique afin de prendre en compte simultanément les effets non-linéaires du fluide et de la structure. Dans cet objectif, l'usage d'une technique de balance harmonique fluide-structure (Hall et al., 2002) couplée avec la méthode d'analyse modale non-linéaire que nous proposons apparaît pertinente et envisageable.

### 3.1.6 Conclusions et perspectives

Dans la première partie de ce chapitre nous avons étudié, d'un point de vue numérique, la phénoménologie et les performances de la solution d'amortissement par joncs de friction des Disques Aubagés Monoblocs de turbomachines. Nous avons mis en évidence des phénomènes typiques des systèmes amortis par frottement ainsi que d'autres, moins classiques. Deux approches de calcul (réponse forcée et analyse modale non-linéaire) ont été illustrées. La méthode d'analyse modale non-linéaire peut remplacer le calcul traditionnel en réponse forcée et présente de nombreux avantages dont les plus importants sont la possibilité de s'affranchir des hypothèses sur l'excitation (en terme de niveau en particulier) et la possibilité de traiter des problèmes couplés aéromécaniques.

Enfin, comme souvent dans les problématiques de frottement, se pose la question de l'usure des pièces en contact, de la dégradation des interfaces de contact et de l'influence de tels phénomènes sur les performances amortissantes de ce type de dispositifs. Cet aspect constitue une perspective intéressante qui pourra d'ailleurs être traitée à l'aide de la méthode d'analyse modale non-linéaire.

On peut ainsi imaginer, coupler à cette analyse, une détermination de l'usure *modale* ainsi qu'une étude de ses effets sur les grandeurs modales (amortissement en particulier). D'autre part, l'étude de la robustesse des conceptions issues de ce type d'analyse pourrait être envisagée.

### 3.2 Pompage énergétique

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons à une stratégie de dissipation par pompage énergétique. Le principe du pompage énergétique est d'absorber puis de dissiper l'énergie vibratoire d'une structure principale à l'aide d'un petit dispositif passif fortement non-linéaire. L'idée est de réaliser un transfert passif, irréversible et unilatéral de l'énergie vibratoire de la structure principale vers l'absorbeur. Plusieurs auteurs ont récemment travaillé sur ce phénomène. La majorité d'entre eux se focalise sur l'étude de systèmes discrets (deux degrés de liberté, ou des chaînes d'oscillateurs) et certains étendent ces résultats au cas de systèmes continus. On peut citer en particulier les travaux de Vakakis et al. (2003) et Gendelman et al. (2005). D'autre part, la plupart des études existantes concernent des non-linéarités académiques (de type raideur cubique le plus souvent). On notera aussi des études expérimentales dans lesquelles la non-linéarité se présente sous la forme d'un système de poutres ou de câbles en grands déplacements (voir par exemple, Pernot et al., 2005; Kerschen et al., 2007).

Concernant les aspects modélisation et calculs dynamiques, plusieurs méthodologies ont été utilisées dans l'étude du pompage énergétique. Généralement, l'utilisation de méthodes asymptotiques pour la détermination des solutions approchées des équations du mouvement non-linéaires est privilégiée. Par exemple, Vakakis et al. (2003) ont utilisé la méthode de la moyenne (*averaging method*), Gendelman et al. (2005) ont utilisé la méthode des échelles multiples, Mikhlin et Reshetnikova (2005) ont utilisé une méthode asymptotique basée sur l'utilisation de petit paramètre  $\epsilon$  et pour se ramener à des équations de Mathieu. D'autre part, Vakakis et Rand (2004) ont utilisé une méthode exacte basée sur les fonctions elliptiques particulièrement adaptée dans le cas de non-linéarités cubiques.

Ces méthodes permettent de calculer des réponses dynamiques libres ou forcées. Le concept de modes non-linéaires est, d'autre part, souvent utilisé et permet d'analyser le comportement dynamique de façon qualitative et quantitative.

Dans cette étude, nous considérons un système de deux oscillateurs dont l'un est fortement non-linéaire et possède une caractéristique hystérétique. Les régimes libre et forcé sont étudiés à l'aide des méthodes fréquentielles présentées au chapitre 2.

#### 3.2.1 Modèle considéré et équations du mouvement

L'oscillateur principal, de masse  $M$ , peut représenter une approximation d'un système élastique plus complexe. Le second, de masse  $m$  plus faible, représente l'amortisseur fortement non-linéaire. Le rapport de masse entre les deux oscillateurs est de l'ordre de 2% dans les applications numériques. Le mouvement du système est régi par le système d'équations suivant :

$$\ddot{x}(t) + \lambda_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \epsilon_0 (x(t) - v(t)) = f(t) \quad (3.6a)$$

$$\ddot{v}(t) + \lambda_1 \dot{v}(t) + r(\dot{v}(t), t) + \epsilon_1 (v(t) - x(t)) = 0 \quad (3.6b)$$

où  $x$  et  $v$  sont respectivement les déplacements de l'oscillateur principal et de l'oscillateur secondaire,  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  sont des facteurs d'amortissement,  $\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur principal seul et,  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_1$  sont des facteurs de couplage définis par la relation :

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} = \frac{m}{M} \quad (3.7)$$

Le terme  $r(\dot{v}(t), r(t))$  est une force hystérétique définie par le modèle différentiel de Bouc-Wen, qui a été introduit au chapitre 2, section 2.2 :

$$\dot{r}(t) = A\dot{v}(t) - v(\beta|\dot{v}(t)||r(t)|^{n-1}r(t) - \gamma\dot{v}(t)|r(t)|^n) \quad (3.8)$$

dont les paramètres  $A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $v$  et  $n$  définissent la forme du cycle d'hystérésis. On choisit de fixer la valeur maximale de  $r$  ainsi que la pente pour  $v = 0$  et on joue sur la seconde courbure  $\beta$  du cycle ( $r > 0$  et  $dv < 0$  ou  $r < 0$  et  $dv > 0$ ), qui permet de contrôler la largeur du cycle et donc l'énergie dissipée comme le montrent les exemples des figures 3.21. La pente à l'origine est contrôlée par le

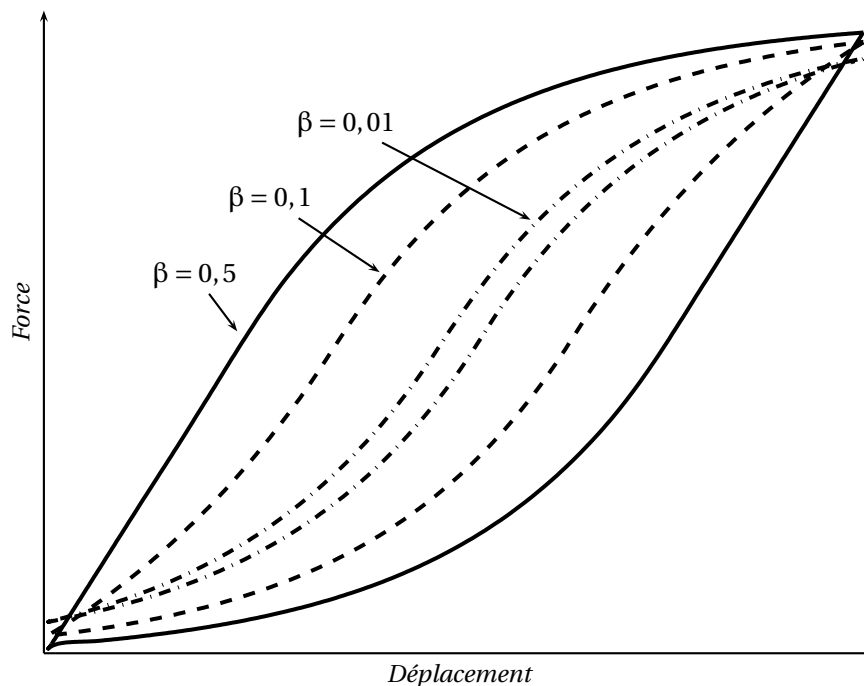


FIG. 3.21 Cycles d'hystérésis, modèle de Bouc-Wen avec :  $A = 1$ ,  $\gamma = -0,5$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 1$

paramètre  $A$  ( $dr/dv(r=0) = A$ ) et le maximum de la force est défini par :

$$dr = 0 \text{ pour } dv > 0 \text{ ou } dr = 0 \text{ pour } dv < 0,$$

ce qui donne :

$$\max r = \frac{A}{v(\beta - \gamma)}.$$

On fixe le paramètre de la première courbure  $\gamma$  à  $-0,5$ .



### 3.2.2 Analyse modale et mise en évidence du pompage énergétique

Considérons le système homogène et non amorti ( $\lambda_{0,1} = 0$ ) issu de (3.6). Une fois reformulé selon la décomposition multi-échelles présentée dans la partie 2.5.2, ses points fixes sont une approximation des solutions périodiques du problème homogène, c'est à dire des modes non-linéaires.

Ici, le calcul des modes d'un système non-linéaire est complété d'une normalisation des vecteurs propres à l'aide d'un critère en énergie totale :

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U} - \mathcal{W}_d, \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{U}$  sont respectivement l'énergie cinétique et potentielle du système ;  $\mathcal{W}_d$  est l'énergie dissipée sur un cycle par la non-linéarité hystérétique.

La stabilité des modes non-linéaires est déterminée en étudiant les valeurs propres de la matrice Jacobienne (2.80). Si au moins une des valeurs propres de cette Jacobienne a une partie réelle positive, alors le point fixe est instable.

Le modèle différentiel de Bouc-Wen est très polyvalent et permet de représenter une variété importante de non-linéarités hystérétiques. Dans cette étude, nous nous intéresserons en particulier à la classe des non-linéarités assouplissantes en prenant par exemple  $\gamma = -0.5 (\leq 0)$  et nous étudierons en particulier l'influence du potentiel de dissipation non-linéaire. Ainsi, les deux cycles décrits dans les figures 3.22 et 3.23 présentent tous deux un comportement non-linéaire important mais des taux de dissipation distincts comme le montrent aussi les raideurs et amortissements équivalents.

Les données modales de l'exemple n°1 (figure 3.22), qui concerne une non-linéarité faiblement dissipative, sont regroupées dans les figures 3.24. Les amplitudes modales des deux oscillateurs ainsi que les fréquences propres et taux d'amortissement modaux sont tracés en fonction de l'énergie totale du système.

L'étude des deux branches modales (branche n°1, traits continus et branche n°2, pointillés), dont une présente une région instable représentée par les croix, permet de distinguer principalement trois types de comportements dynamiques.

**Faibles niveaux d'énergie :** la branche n°1 décrit un comportement principalement localisé dans l'oscillateur principal dont la courbe d'amplitude modale est une droite ; le système est linéarisable de fréquence propre constante. En revanche, la branche n°2 décrit un comportement dynamique proéminent dans l'absorbeur avec une fréquence propre qui décroît sensiblement du fait de la caractéristique assouplissante de la non-linéarité.

**Forts niveaux d'énergie :** la situation est ici inversée puisque la branche 1 montre une forte localisation dans l'oscillateur non-linéaire avec une décroissance de la fréquence propre et que la branche 2 montre un mouvement principalement localisé dans l'oscillateur linéaire.

**Niveaux d'énergie intermédiaires :** entre les états asymptotiques précédents, le système présente une zone de bifurcation entre les modes. Lorsque le niveau d'énergie global augmente, l'oscillateur principale passe d'une dynamique forte à une dynamique faible et l'absorbeur présente le comportement opposé. Enfin, un phénomène de résonance interne (Nayfeh et Mook, 1979) apparaît lorsque les deux fréquences propres se rapprochent.

Le deuxième exemple (figures 3.23) présente un taux de dissipation plus important en témoigne l'évolution de l'amortissement équivalent.

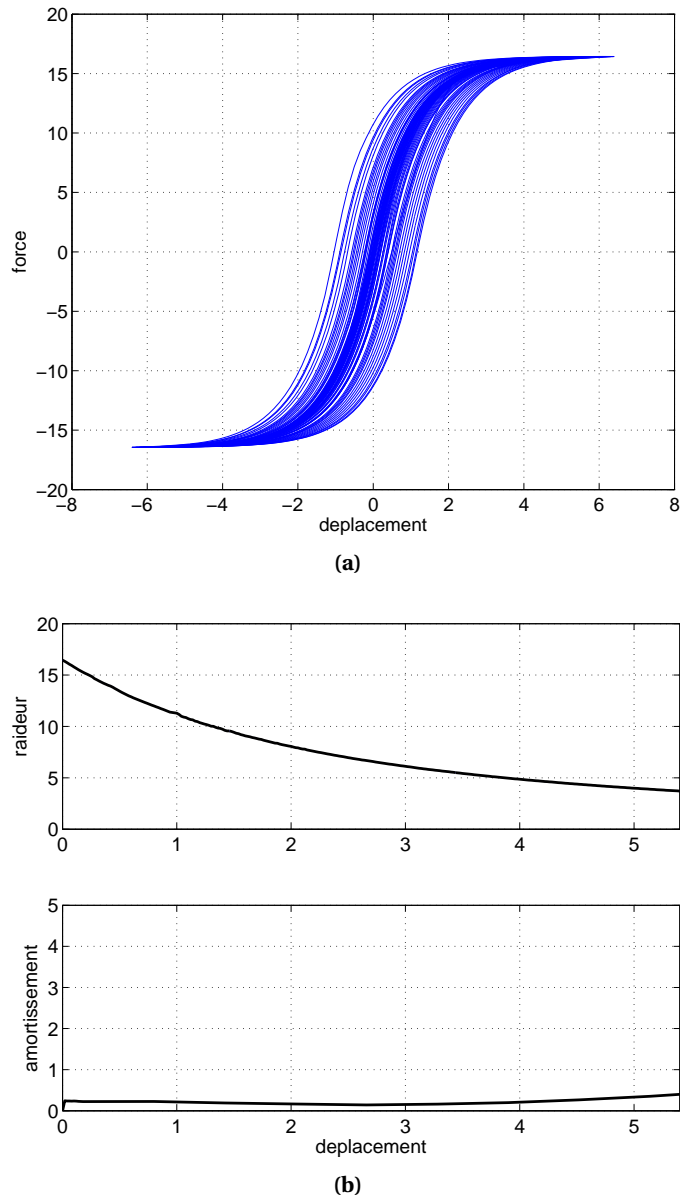


FIG. 3.22 Exemple n°1 -  $\gamma = 10^{-3}$  ; (a) cycle d'hystérésis, (b) raideur et amortissement équivalent.

Les données modales correspondantes sont représentées en figures 3.25. Cet exemple présente un comportement sensiblement différent du précédent. En premier lieu, la zone d'instabilité et de résonance interne a disparue. On peut aussi noter que l'évolution des taux d'amortissements modaux est différente et que la branche 2 atteint maintenant un pic dans la zone de potentielle interaction entre les deux courbes de fréquences propres. Cet exemple montre qu'un niveau trop élevé d'amortissement non-linéaire inhibe la capture en résonance nécessaire au phénomène de pompage énergétique. En particulier, des dispositifs de type frottement sec, caractérisés par un cycle ouvert lorsque la non-linéarité est importante, ne permettent pas d'assurer la fonction de pompage

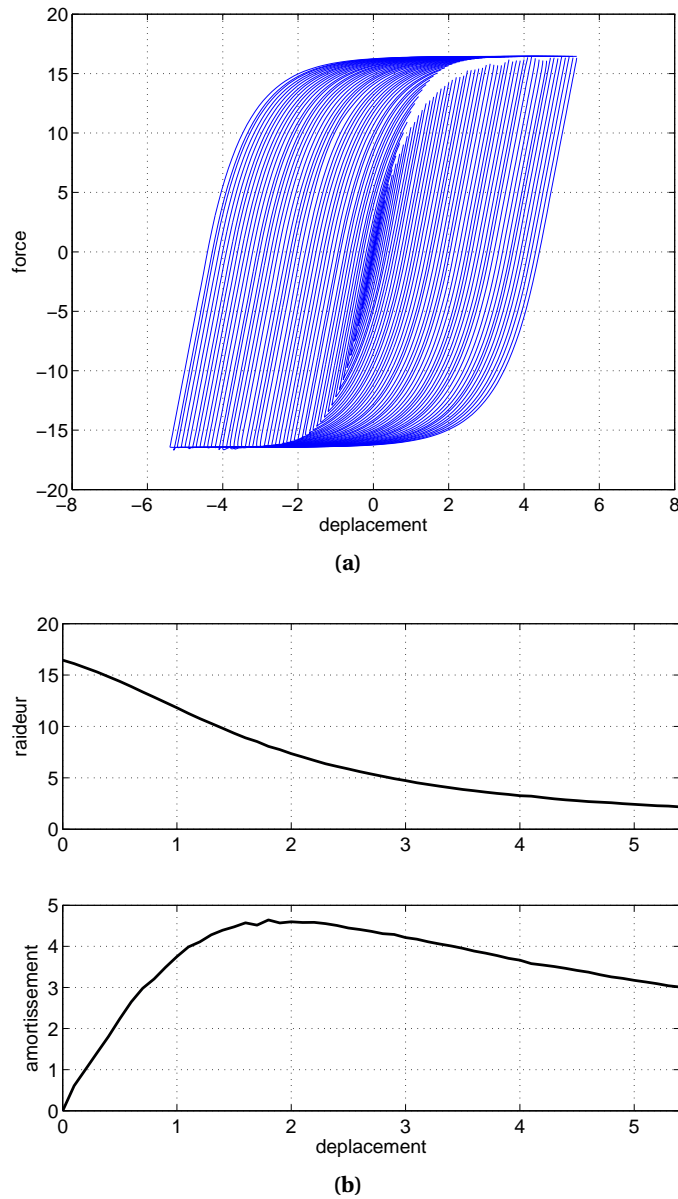
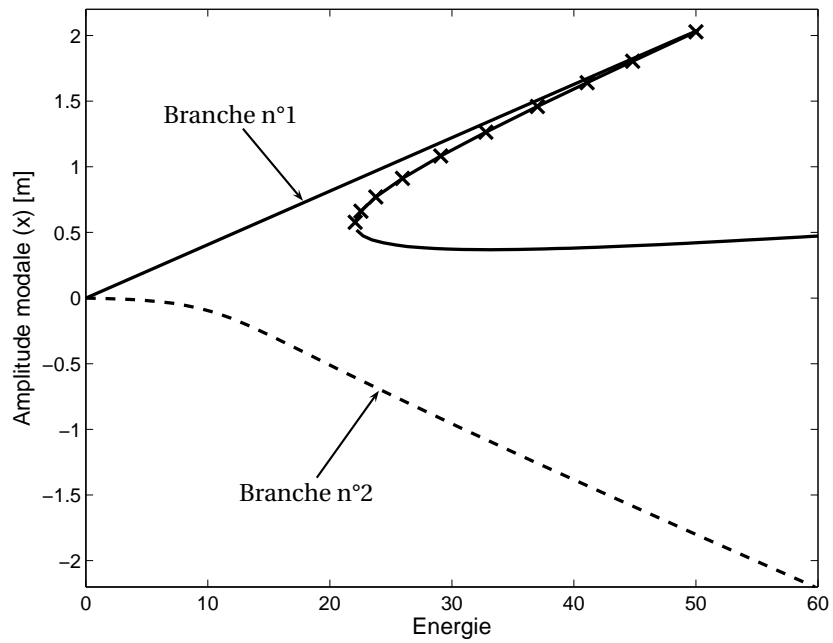


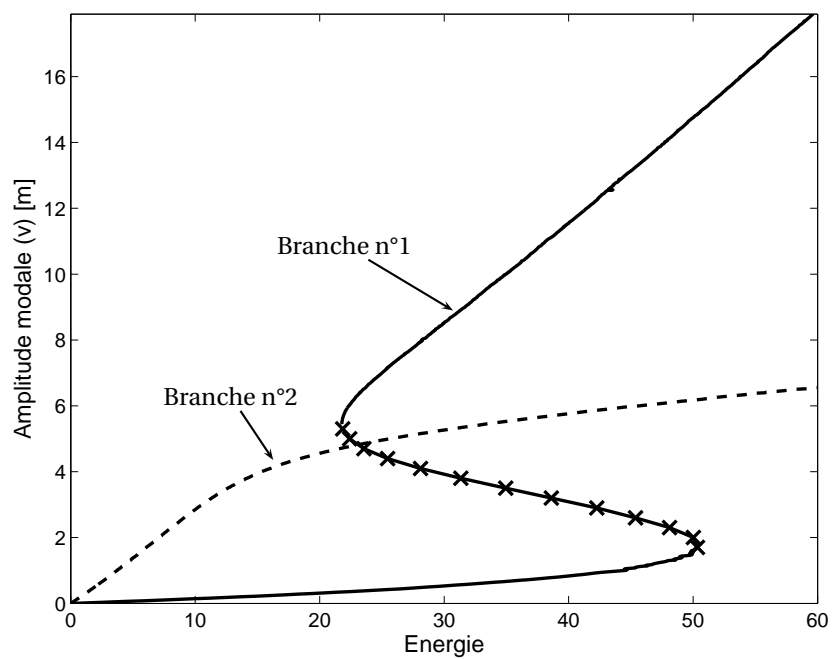
FIG. 3.23 Exemple n°2 -  $\gamma = 0.5$ ; (a) cycle d'hystérésis, (b) raideur et amortissement équivalent.

énergétique.

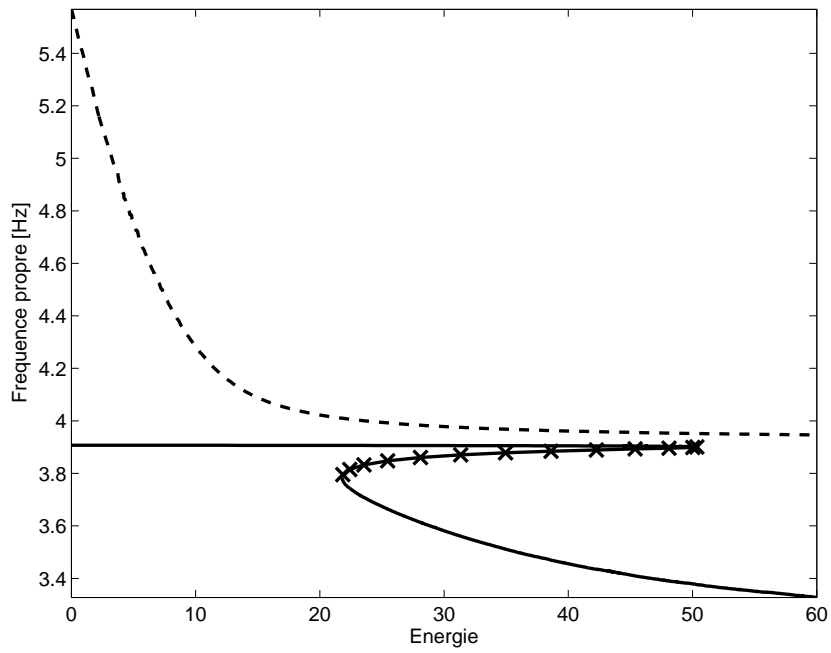
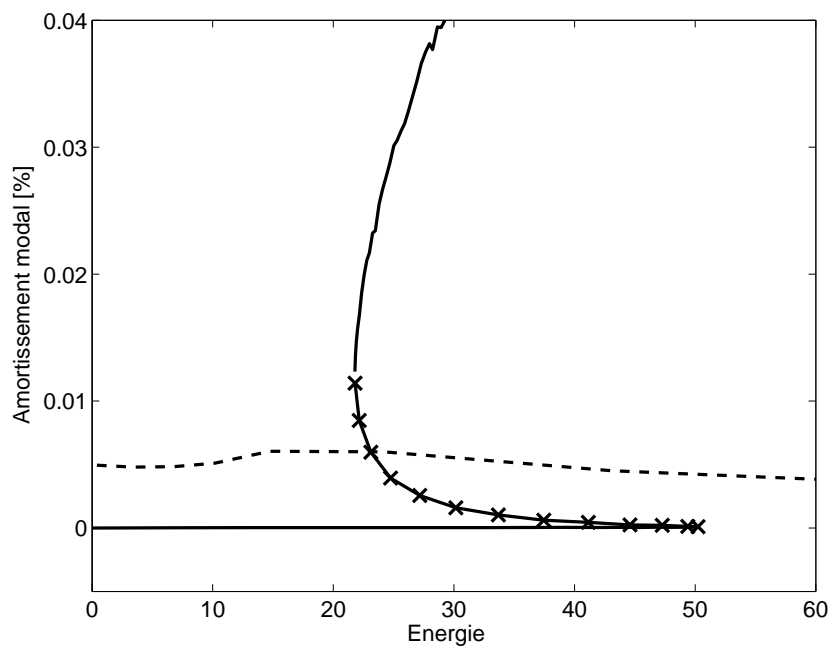
Cette comparaison montre clairement l'importance du potentiel dissipatif de la non-linéarité dans le phénomène de pompage énergétique. Cependant, rappelons que lorsqu'un dispositif de pompage énergétique est actif, l'énergie transférée doit être dissipée quelque part et, plutôt dans l'absorbeur dans le cas de structures très faiblement amortie naturellement. Par conséquent, un compromis est nécessaire entre dissipation et pompage énergétique et ce qui revient à choisir le taux de dissipation maximal permettant la capture en résonance (comme dans l'exemple 1).



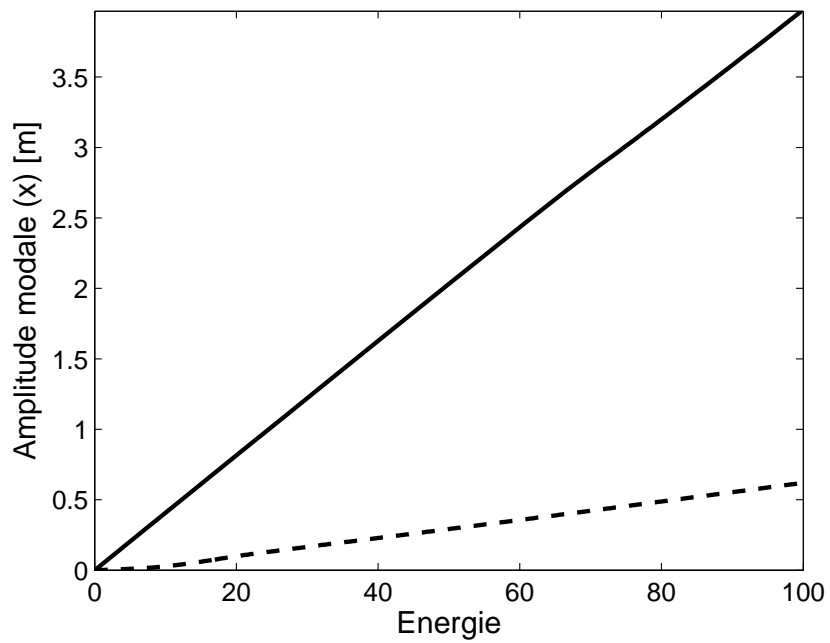
(a) Amplitudes : oscillateur principal



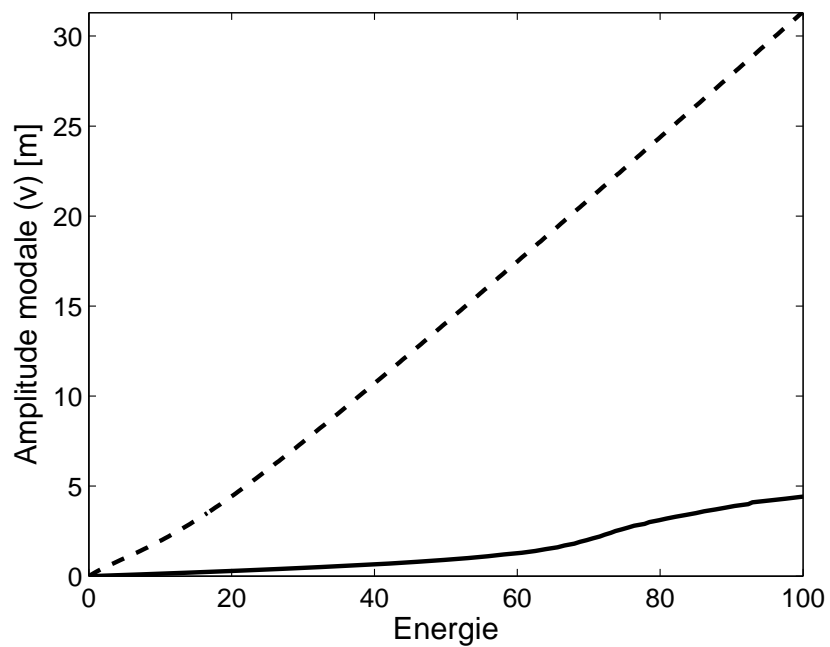
(b) Amplitudes : absorbeur

(c) *Fréquences propres*(d) *Amortissements modaux*

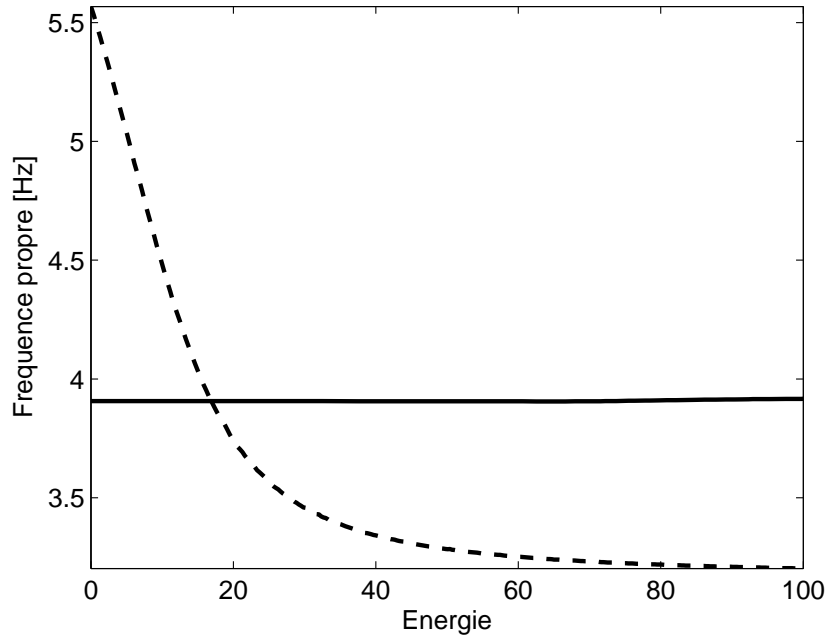
**FIG. 3.24** Exemple 1 : évolution des caractéristiques modales non-linéaires en fonction de l'énergie ;  
 (—) stable, (-x-x-) instable.



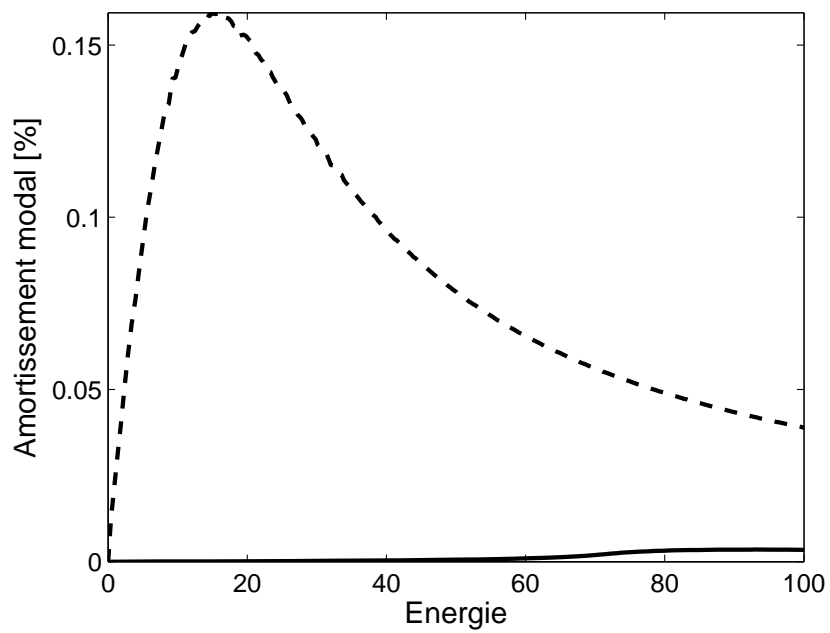
(a) Amplitudes : oscillateur principal



(b) Amplitudes : absorbeur



(c) Fréquences propres



(d) Amortissements modaux

**FIG. 3.25** Exemple 2 : évolution des modes non-linéaires en fonction de l'énergie; (—) stable, (-x-x-) instable.

### 3.2.3 Comportement transitoire

Nous intéressons maintenant au comportement transitoire pour lequel le phénomène de pompage énergétique est facilement identifiable. Nous ne considérerons ici que l'exemple 1 décrit dans la section précédente. Le système d'équations exactes (3.6) (avec  $f(t) = 0$ ) complété par le modèle différentiel de Bouc-Wen décrit par l'équation (3.8) ont été directement intégrés avec comme condition initiale :

$$\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}_0}{M}}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(0) = 0 \quad (3.10)$$

où  $\mathcal{H}_0$  quantifie l'énergie initiale introduite dans le système. Les résultats de ces simulations pour deux niveaux d'énergie initiaux sont regroupés en figures 3.26, 3.27, 3.28 et 3.29. En plus des historiques de déplacements des deux degrés de liberté, la fréquence instantanée des signaux a été calculée à l'aide d'une transformée de Hilbert (Worden et Tomlinson, 2001).

En figures 3.26 et 3.27, deux réponses impulsionnelles sont représentées. Elles correspondent respectivement à des niveaux d'énergie initiaux situés avant et après la bifurcation de la branche n°1, d'après la prédiction des modes non-linéaires (figures 3.24). Lorsque l'énergie introduite dans le système est inférieure au seuil de bifurcation ( $\mathcal{H} = 15$ , ici), figures 3.26 et 3.26, le mouvement du système est régi par la branche modale n°1 conformément aux prédictions issues de l'analyse modale non-linéaire (c.f. figure 3.24). Cette branche est en effet la seule réalisable pour ces conditions initiales. L'énergie vibratoire reste alors confinée dans l'oscillateur principal et aucun pompage énergétique n'a lieu.

Lorsque l'énergie initiale est suffisamment grande, la branche modale n°2 devient non réalisable (pour ce type de conditions initiales) et le système répond alors principalement selon le mode non-linéaire n°2 qui tend à localiser le mouvement dans l'organe non-linéaire lorsque le niveau d'énergie décroît. En effet, la fréquence instantanée augmente lorsque l'énergie décroît conformément à ce que l'on observe sur la branche n°2 (figure 3.24c). D'autre part, on observe des modulations d'amplitudes sur l'oscillateur principal qui peuvent s'expliquer par la coexistence de deux fréquences proches correspondant aux branches 1 et 2 pour des niveaux d'énergie faibles. De plus, on observe que la fréquence de la porteuse des modulations augmente signe que l'écart entre les deux composantes augmente. Là encore, les prédictions des modes non-linéaires sont vérifiées. Ici le phénomène de pompage énergétique est flagrant puisque l'énergie vibratoire est rapidement transférée de l'oscillateur principal vers l'absorbeur et de façon irréversible.

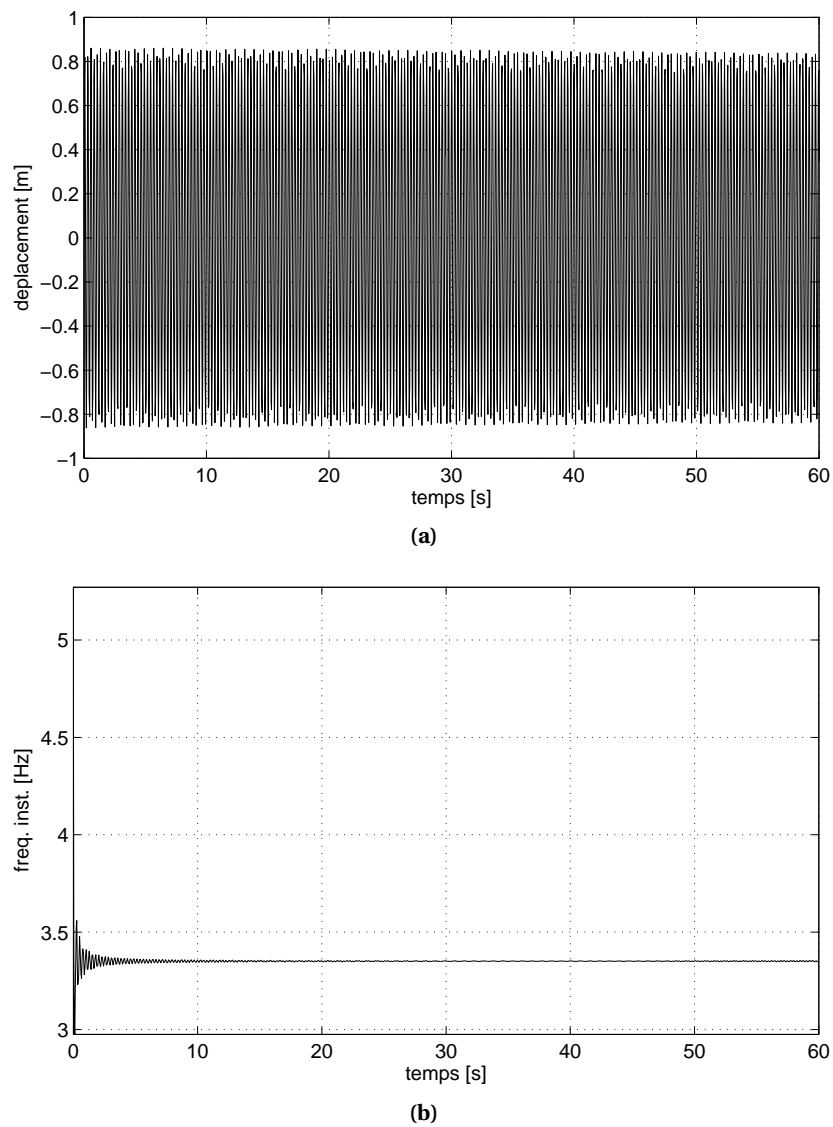
### 3.2.4 Réponse forcée

Pour clore cette étude sur le pompage énergétique, nous abordons le comportement en réponse forcée de notre exemple et les phénomènes de résonance associés. Nous considérons une excitation harmonique  $p(t) = P \cos \omega t$  dans l'équation (3.6) ainsi que la présence d'amortissement.

#### Analyse fréquentielle

Nous avons vu, dans le cas des vibrations libres, que le phénomène de pompage énergétique était fortement conditionné par le niveau d'énergie du système. Dans le cas d'un régime forcé, ce





**FIG. 3.26** Réponse transitoire,  $\mathcal{H}_0 = 15$  – Oscillateur principal; (a) réponse temporelle, (b) fréquence instantanée.

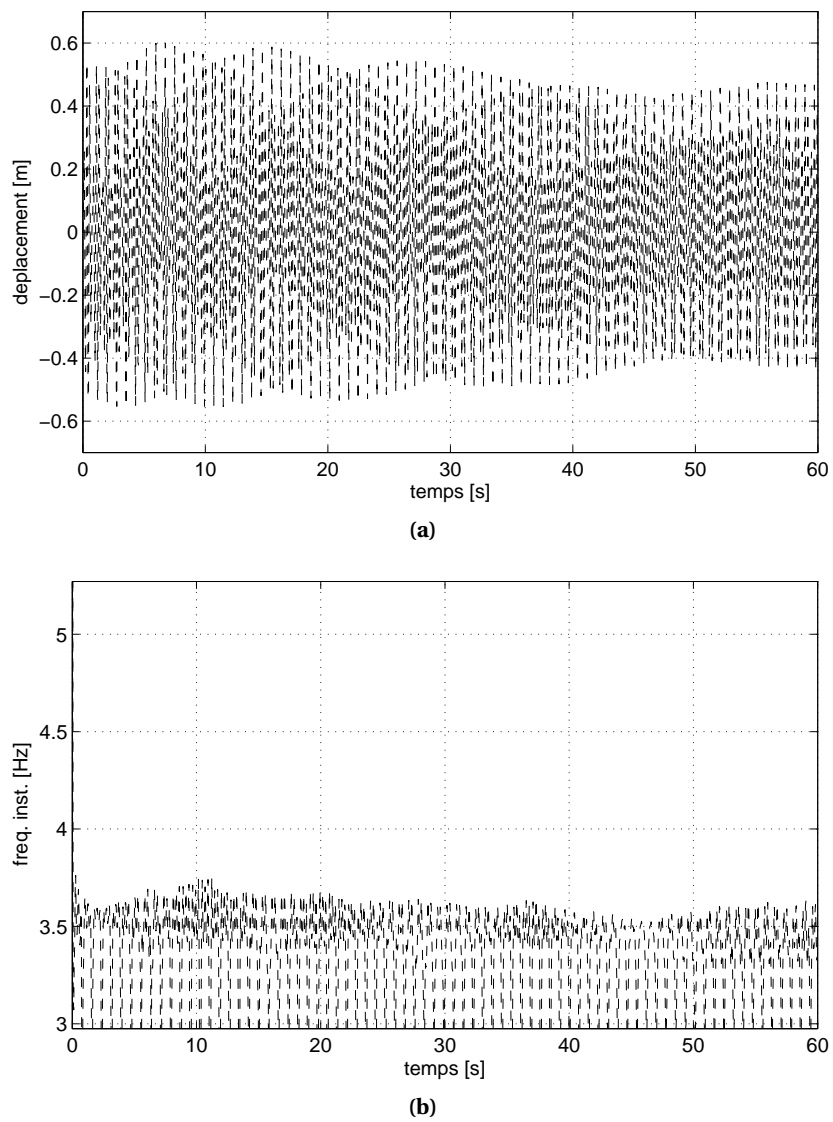


FIG. 3.27 Réponse transitoire,  $\mathcal{H}_0 = 15$  – Absorbeur ; (a) réponse temporelle, (b) fréquence instantanée.

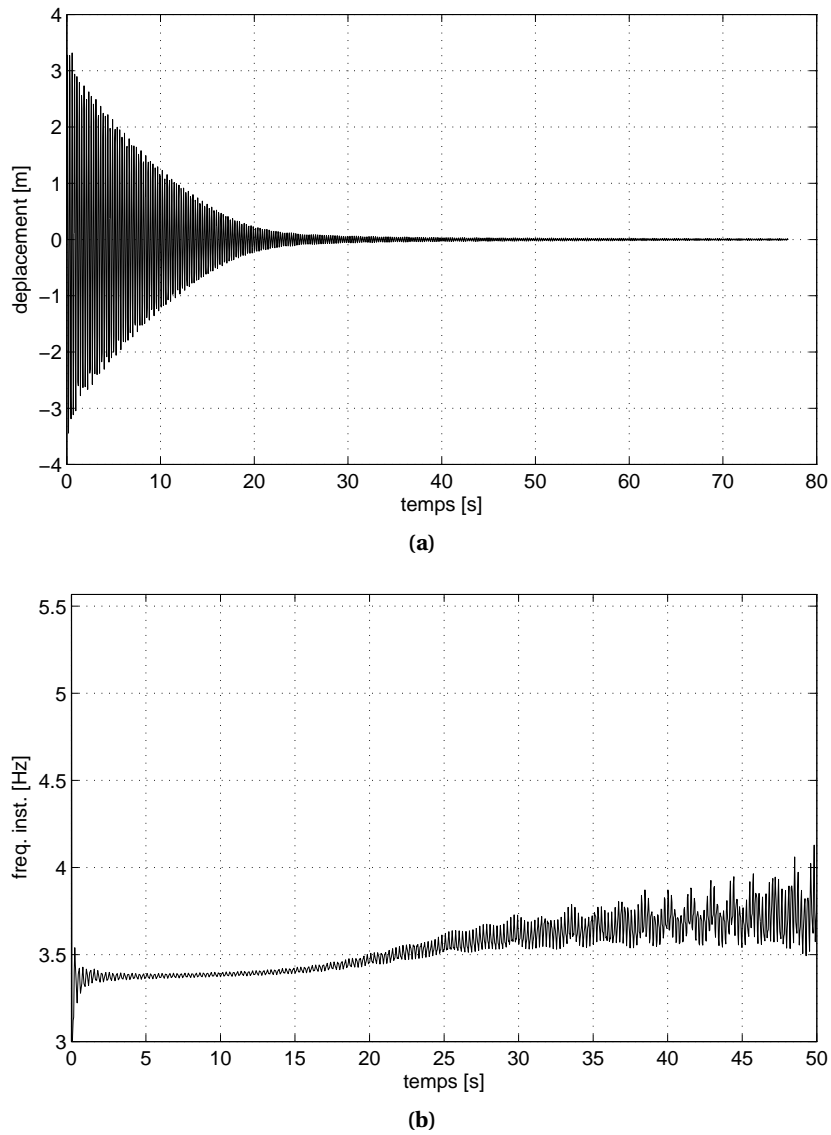
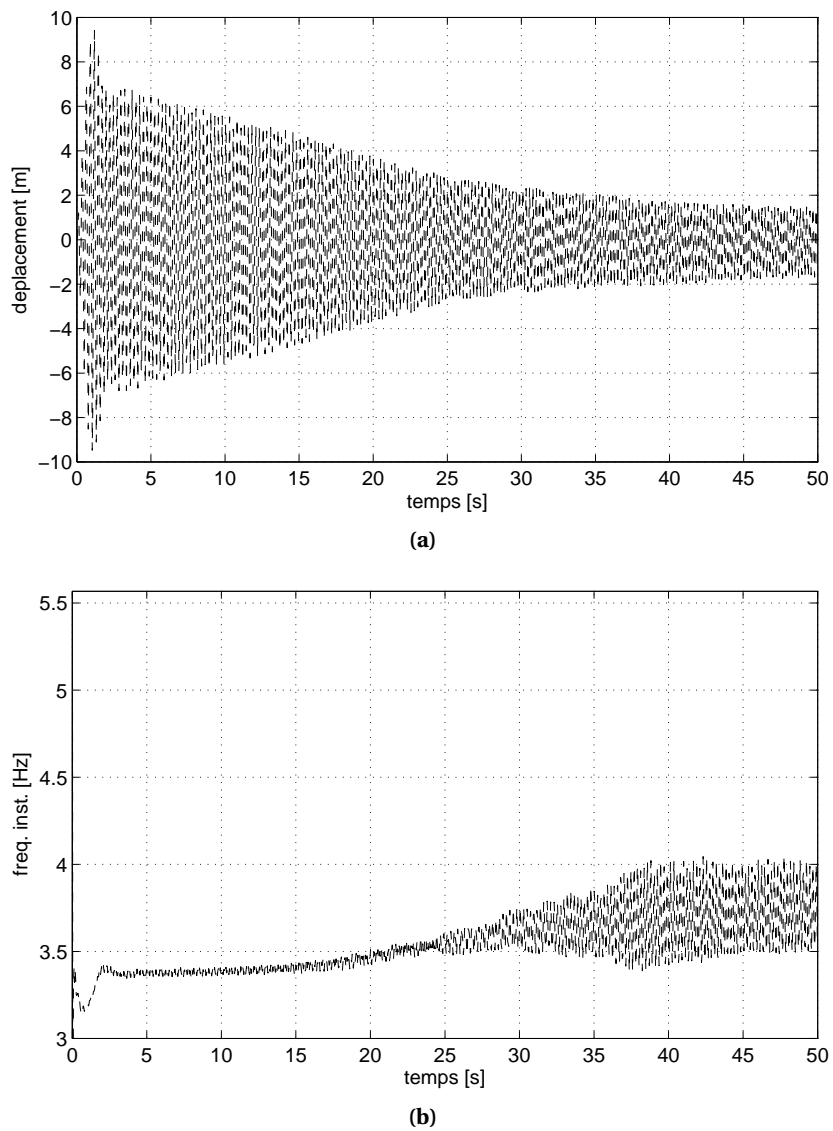


FIG. 3.28 Réponse transitoire,  $\mathcal{H}_0 = 60$  – Oscillateur principal; (a) réponse temporelle, (b) fréquence instantanée.



**FIG. 3.29** Réponse transitoire,  $\mathcal{H}_0 = 60$  – Absorbeur ; (a) réponse temporelle, (b) fréquence instantanée.

niveau d'énergie est relié au niveau de l'excitation. Par conséquent, nous avons étudié l'influence de ce niveau d'excitation sur la réponse forcée.

Pour un niveau d'excitation relativement faible (figure 3.30), le comportement du système est proche de celui du système linéaire, sans amortisseur, excepté l'effet de raideur apportée par l'oscillateur non-linéaire. Si l'on augmente le niveau d'excitation, le comportement du système non-linéaire diffère de celui du système linéaire. En figure 3.31, on peut voir qu'au voisinage de la résonance, l'énergie vibratoire est fortement localisée dans l'oscillateur non-linéaire ce qui signifie que l'amortisseur est efficace. On peut aussi noter, dans les deux configurations d'excitation, que les réponses sont proches des « backbone curves » ce qui montre que la prédiction des modes non-linéaires est pertinente.

### Analyse temporelle

Dans un second temps, nous avons étudié le régime forcé sous excitation harmonique à partir d'analyses temporelles. En figures 3.32, nous comparons les réponses en fréquence obtenues par intégration directe (régime stabilisé) avec une analyse fréquentielle ; la configuration choisie correspond à un niveau d'excitation relativement élevé. On constate que le niveau global est bien approché par le calcul fréquentiel sauf dans la zone de bifurcation (au voisinage du pic de résonance) pour l'oscillateur non-linéaire. Dans cette zone le niveau est sous estimé par le calcul fréquentiel. L'étude des réponses temporelles va nous permettre d'expliquer cette différence.

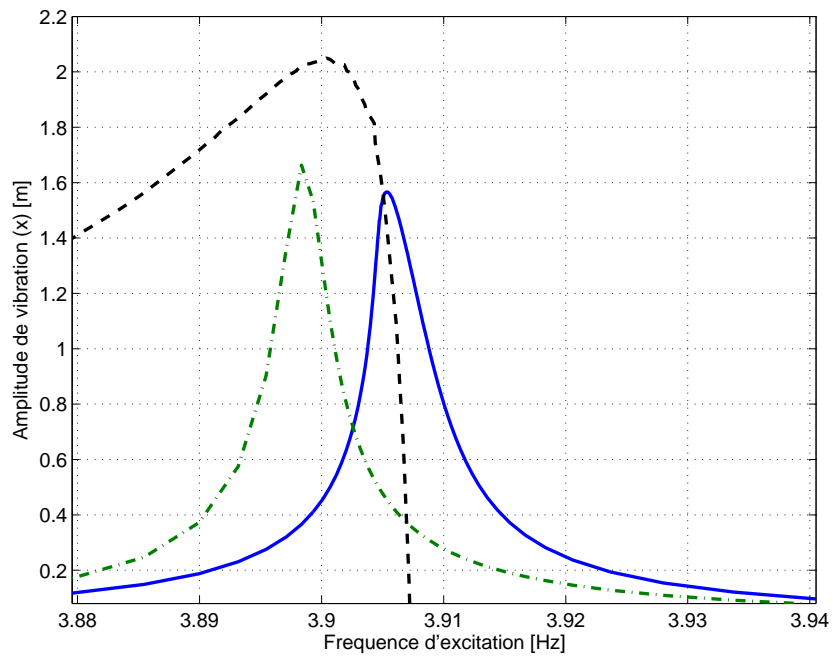
Les figures 3.33, 3.34 et 3.35 regroupent les historiques des déplacements des deux degrés de liberté pour trois domaines fréquentiels ; avant le pic, au niveau du pic (zone de bifurcation) et après le pic. D'autre part, les sections de Poincaré (échantillonnées selon la fréquence d'excitation) sont aussi représentées. Avant la résonance principale (figure 3.33), les mouvements de l'oscillateur principal et de l'oscillateur non-linéaire sont périodiques après un régime transitoire. L'approche fréquentielle permet de représenter correctement cette phase.

Après la résonance prévue dans le cas linéaire et le second saut (figure 3.34), le mouvement redevient périodique et la réponse obtenue par analyse fréquentielle est correcte.

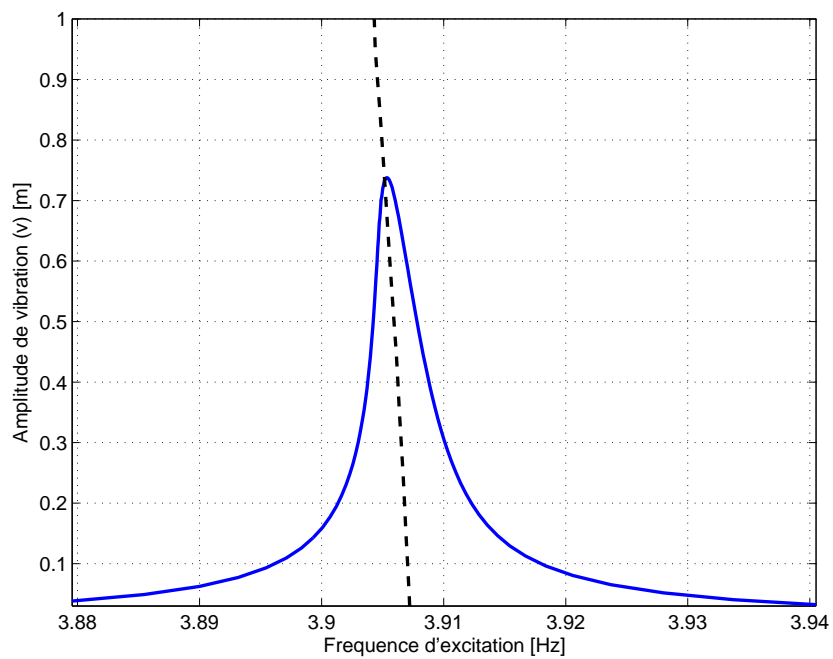
Nous sommes maintenant dans la zone de bifurcation (figure 3.35,  $f = 3,90\text{Hz}$ ) juste après le saut et le mouvement n'est plus périodique dans les deux oscillateurs et l'analyse fréquentielle est par conséquent mise en défaut. Les sections de Poincaré convergent vers des courbes fermées ce qui signifie que le mouvement est quasi-périodique. D'autre part, la complexité de ces courbes est révélatrice de la complexité du régime et des phénomènes observés. Récemment, Gendelman et al. (2006) ont aussi mis en évidence le phénomène numériquement et expérimentalement sur un système comportant un absorbeur à caractéristique cubique. Par la suite, Gendelman et Starosvetsky (2007) ont expliqué théoriquement le phénomène (toujours sur le même système) et en ont proposé une modélisation.

Il semble qu'une instabilité du régime périodique apparaissent à la suite d'une interaction entre ce régime dynamique et la variété invariante du mode non-linéaire amorti. La coexistence de ces deux dynamiques engendrent un régime quasi-périodique assez fort.

Pour modéliser ces phénomènes, nous avons envisagé d'utiliser l'approche multi-échelles proposée au chapitre 2 (section 2.5). Une première moyenne est réalisée selon l'échelle de temps rapide (à la fréquence d'excitation) et les variations lentes des nouvelles variables devraient nous rensei-

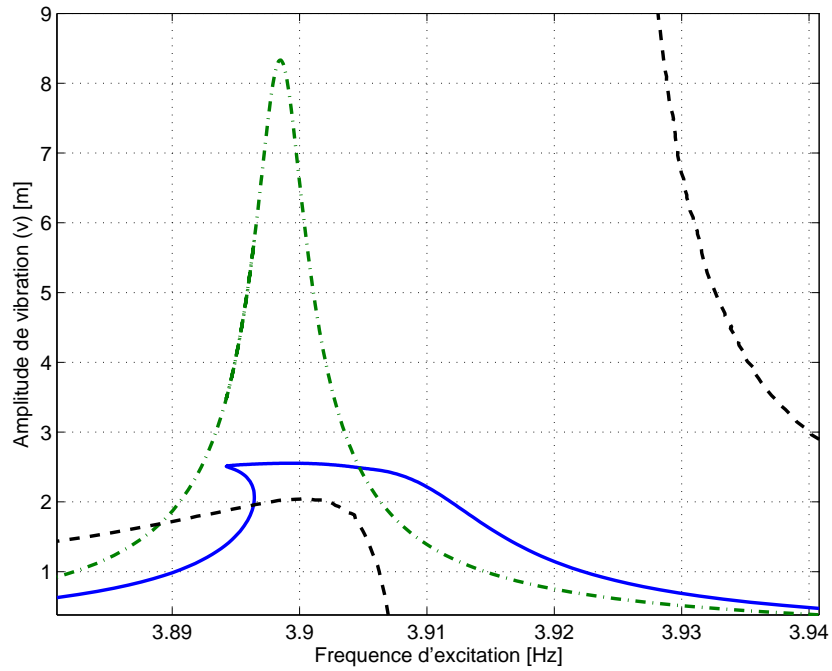


(a) DDL linéaire

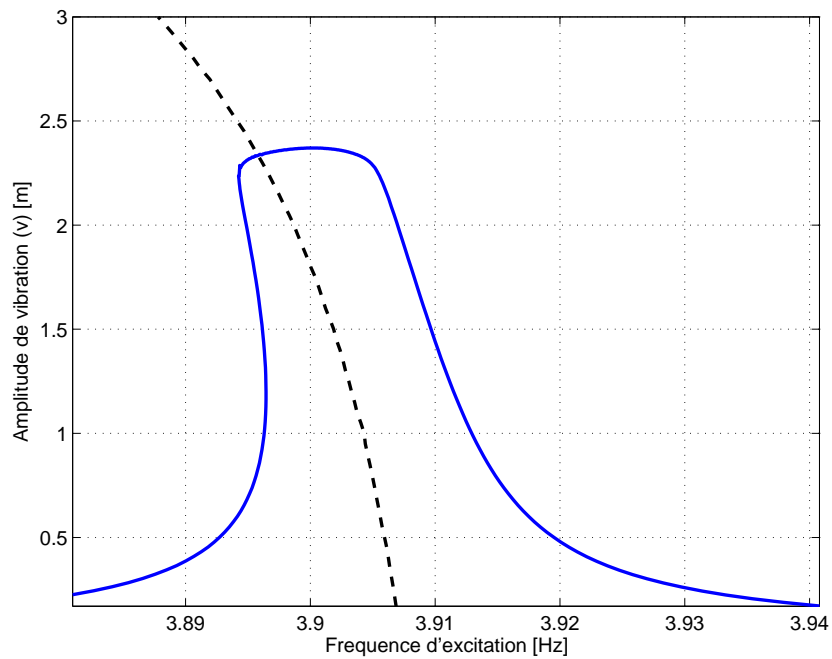


(b) DDL non-linéaire

**FIG. 3.30** Réponse forcée – Excitation faible; (—) réponse non-linéaire, (- · - ·) réponse linéaire, (---) « backbone curve »

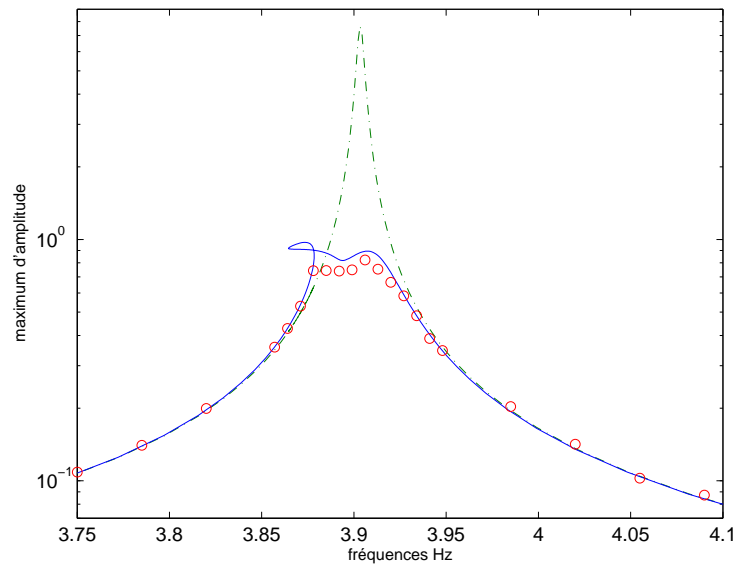


(a) DDL linéaire

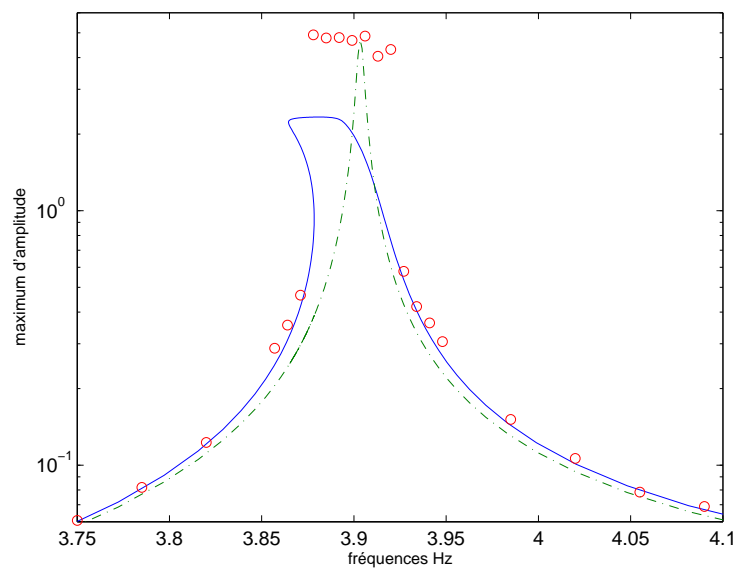


(b) DDL non-linéaire

FIG. 3.31 Réponse forcée – Excitation forte : (—) réponse non-linéaire, (-·-·-) réponse linéaire, (- - -) "backbone curve"



(a)



(b)

**FIG. 3.32** Comparaison des réponses en fréquences obtenues par intégration et balance harmonique ; (a) Oscillateur principal, (b) Absorbeur ; (—) balance harmonique, (o o o) intégration temporelle directe, (- - - -) Calcul linéaire



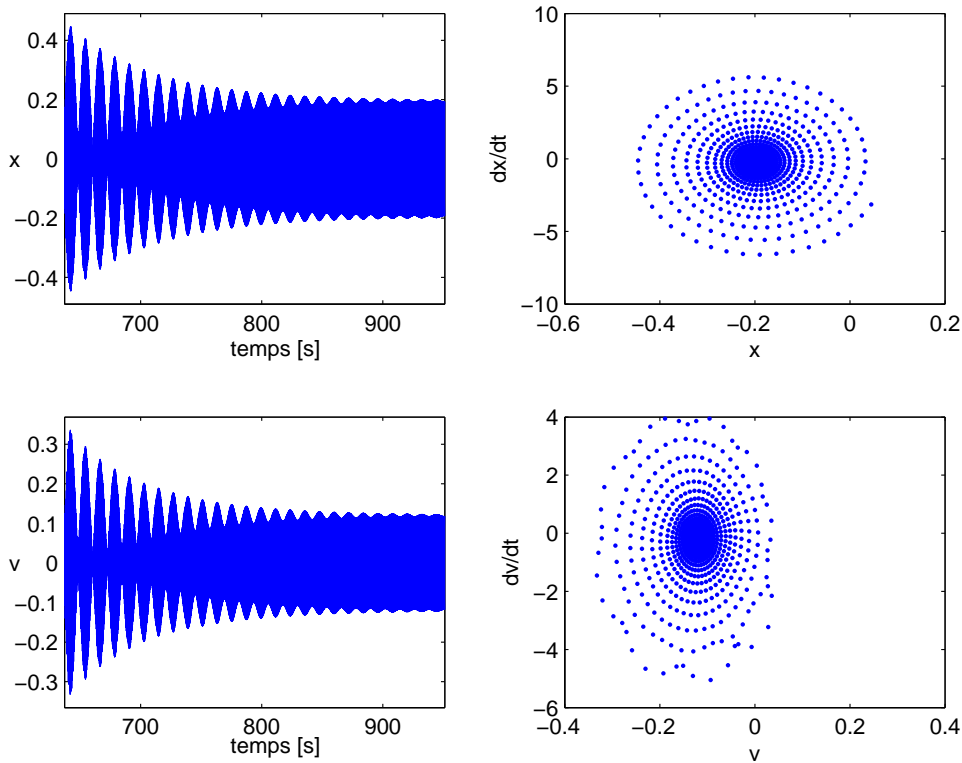
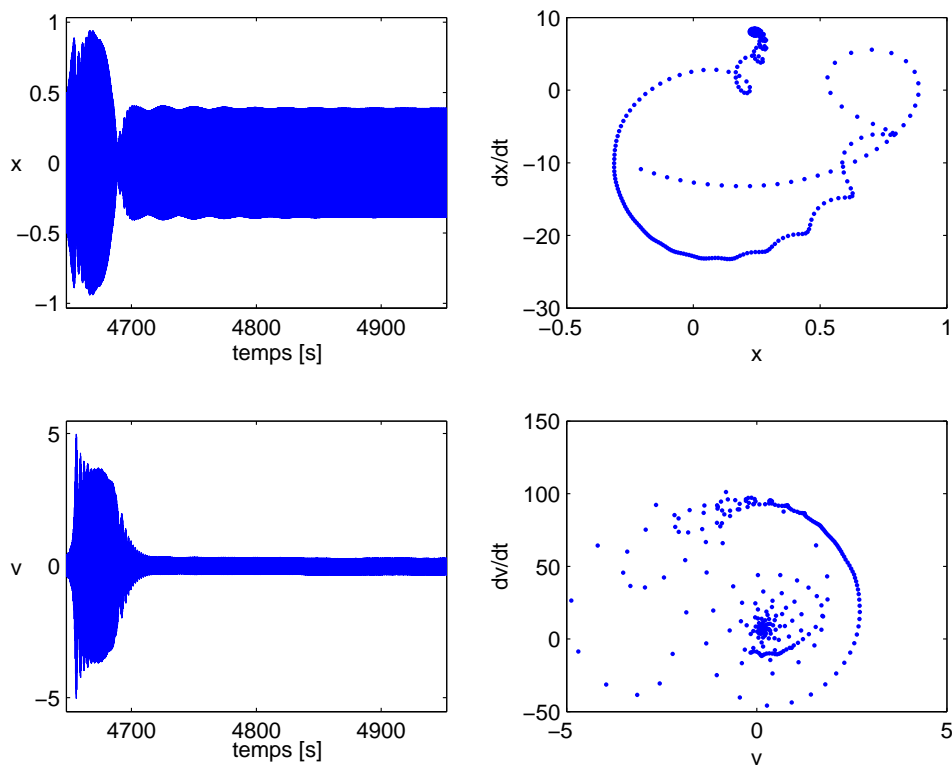


FIG. 3.33 Réponses temporelles et sections de Poincaré,  $f = 3,82\text{Hz}$

gner sur ce régime quasi-périodique. Il semblerait en effet naturel, en étudiant l'évolution temporelle de ces variables *lentes*, d'obtenir un régime périodique qui une fois combiné avec les variations *rapides* donnerait le régime quasi-périodique attendu. Malheureusement, si cette approche (multi-échelles) semblait prometteuse elle fut mise en défaut par la complexité du régime périodique des variations lentes à représenter (voir les sections de Poincaré, figure 3.35). En effet, ce régime est harmoniquement très riche et il semble de plus que les harmoniques élevées aient une importance considérable. Il reste donc, sur ce dernier point, une voie de progrès pour la compréhension des phénomènes dynamiques et leur modélisation.

### 3.2.5 Conclusions et perspectives

Les premiers résultats de cette étude sont intéressants et méritent d'être approfondis. Nous avons appliqué les méthodes fréquentielles présentées au chapitre 2 à un problème présentant des comportements fortement non-linéaires et les résultats obtenus sont globalement satisfaisants. Du fait de l'importance des effets dissipatifs de nos applications, l'utilisation des modes non-linéaires complexes s'avère encore une fois intéressante pour prédire les réponses libre ou forcée. Le régime forcé a été étudié par des approches fréquentielles et temporelles. Si les prédictions des analyses



**FIG. 3.34** Réponses temporelles et sections de Poincaré,  $f = 3,94\text{Hz}$

fréquentielles sont globalement satisfaisantes, il est néanmoins apparu, lors des simulations temporelles, que l'hypothèse d'un régime périodique (stable) n'est pas toujours vérifiée. Des développements supplémentaires seront donc nécessaires pour précisément décrire le régime forcé.

Enfin, le type et la forme de la non-linéarité que nous avons étudiée a ouvert des perspectives intéressantes en dehors des traditionnelles études sur les non-linéarités académiques. Il reste désormais à étudier une mise en œuvre technologique pour ce type de non-linéarité. Ceci semble envisageable compte tenu du caractère physique des modèles de Bouc-Wen et laisse donc espérer des applications technologiques dans un futur proche. Des deux voies de progrès, cette dernière semble à privilégier.

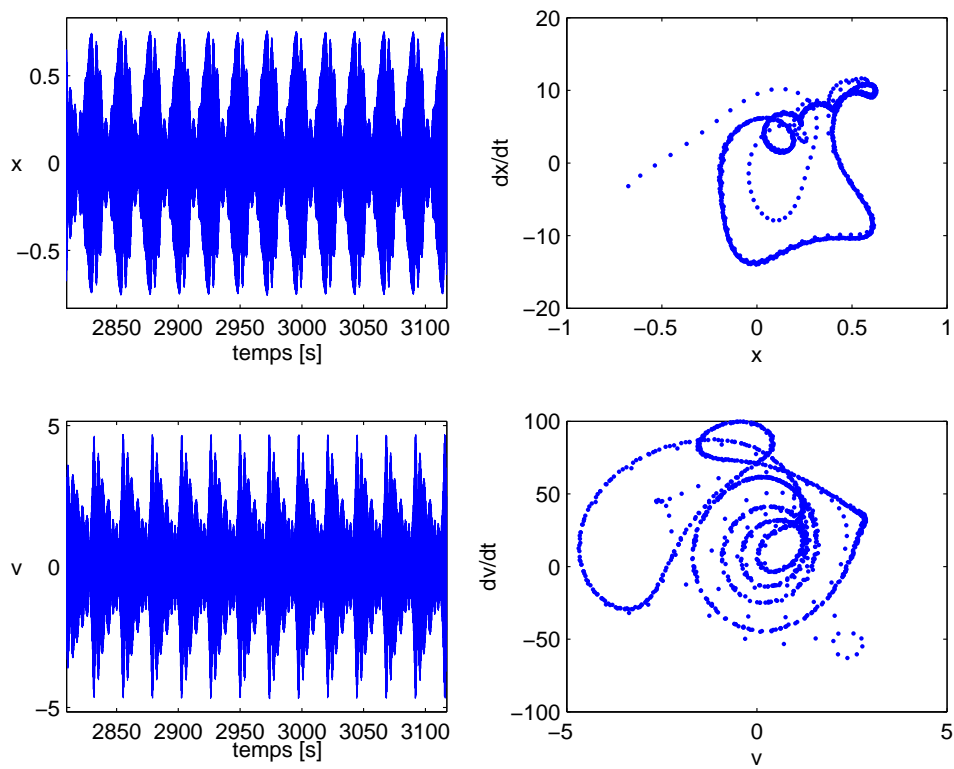


FIG. 3.35 Réponses temporelles et sections de Poincaré,  $f = 3,90\text{Hz}$

# Dynamique des ensembles multi-étages de roues aubagées

*Dans ce chapitre, nous abordons une problématique aujourd'hui majeure dans la conception et la modélisation des rotors de turbomachines : les phénomènes vibratoires multi-étages. Cette problématique et ses enjeux seront dans un premier temps définis. Après un bref état de l'art des méthodes d'analyse dynamique multi-étage, nous aborderons le cœur de ce chapitre, à savoir une méthode de réduction en symétrie cyclique multi-étage. Cette approche innovante et performante devrait ouvrir de nouvelles perspectives dans la conception des roues aubagées. Par exemple, nous étudions l'implantation de joncs de friction dans un ensemble multi-étage de roues aubagées. Sous certaines conditions d'excitation, un tel système présente une dynamique complexe que nous proposons de traiter par une approche multi-fréquentielle, couplée à la méthode de symétrie cyclique multi-étage.*

## 4.1 Conception multi-étage

### 4.1.1 Problématique et enjeux

Au chapitre 1, nous avons introduit les tendances actuelles de la modélisation et de la conception des rotors de turbomachines. L'optimisation des structures, les technologies monoblocs et la réduction du nombre de liaison mécanique d'une part, l'augmentation des performances et la complexification des phénomènes d'autre part caractérisent ces tendances.

Du point de vue de la dynamique des structures, une des problématiques majeures issues de ces évolutions est l'apparition *récente* de phénomènes vibratoires multi-étages. Ils peuvent concerner plusieurs roues aubagées adjacentes ou non et sont parfois liés à des phénomènes aérodynamiques multi-étages (Hall et al., 2006). En conséquence, le concepteur doit pouvoir accéder aisément et pour un coût modéré à la simulation dynamique multi-étage lors des itérations de dimensionnement. Dans une situation multi-étage, la méthode de réduction en symétrie cyclique présentée au chapitre 1 ne peut *a priori* pas être utilisée puisque la structure multi-étage ne présente pas de répétitivité cyclique. Ceci constitue le principal obstacle pour les modélisations et conceptions multi-étages et les solutions actuellement à disposition présentent toutes des limitations importantes.

### 4.1.2 État de l'art des méthodes de simulation multi-étage

L'approche la plus directe consiste à modéliser complètement le rotor. Pour cette première solution, la taille des modèles s'avère rédhibitoire (plusieurs millions de degrés de liberté) et ces derniers sont généralement très difficiles à construire ainsi qu'à calibrer. Cette approche est donc inenvisageable dans un processus raisonnable de conception. Par conséquent, l'approche tridimensionnelle la plus plausible consiste, dans un modèle multi-étage, à ne modéliser que les aubes d'un étage afin de conserver la répétitivité cyclique (Bladh et al., 2003). Les couplages inter-étages sont alors assez bien pris en compte mais il manque la dynamique des aubes non modélisées.

Les solutions mettant en jeu des modèles simplifiés ou des analyses bi-dimensionnelles sont plus économiques mais les résultats obtenus manquent de fiabilité.

Enfin, l'utilisation de méthodes de synthèse modale en sous-structuration a été proposée (Song et al., 2005; Sternchuss et Balmès, 2007). En pratique, ces méthodes nécessitent tout d'abord un ensemble de réductions de modèles (étage par étage) et proposent ensuite un assemblage de super-éléments (réductions multi-niveaux) éventuellement complété d'une ultime étape de réduction. Ces solutions restent les plus efficaces même si leur mise en œuvre apparaît relativement difficile dans un processus de conception.

Pour traiter ce problème, nous proposons dans la suite une approche en rupture par rapport aux méthodes précédemment évoquées. Il s'agit d'une extension de la méthode de réduction en symétrie cyclique dans le cadre de structures multi-étages. La modélisation d'un secteur de référence par étage suffit et les analyses par harmonique spatiale (ou nombre de diamètres nodaux) peuvent être utilisées. En conséquence, cette méthode sera ainsi appelée *symétrie cyclique multi-étage*.

## 4.2 Symétrie cyclique multi-étage

La méthode de réduction en *symétrie cyclique multi-étage*, que nous proposons, est basée sur une modélisation en symétrie cyclique (secteur de référence + nombre d'onde) de chaque étage dans sa base cyclique propre. La clé de voûte de cette approche réside dans la définition du couplage inter-étage ; ce dernier est exprimé en base cyclique à partir d'une équation de compatibilité à l'interface définie dans une base physique commune aux deux étages adjacents. La figure 4.1 montre un exemple d'architecture multi-étage. La méthode de symétrie cyclique multi-étage permet de modéliser cet ensemble par un « super-secteur » défini comme l'ensemble des secteurs élémentaires de chaque étage. L'enjeu principal est de représenter correctement le couplage à l'interface inter-étage des deux modèles de secteurs qui sont de mesures angulaires différentes.

Nous considérons, sans perte de généralité, deux étages respectivement composés de  $N_1$  et  $N_2$  secteurs ( $N_1 < N_2$ ). Pour chaque étage  $s$  ( $s = 1$  ou  $2$ ), on notera, en accord avec les notations définies au chapitre 1 (section 1.3),  $\mathbf{u}_s$  le vecteur des déplacements de tous les degrés de liberté en base physique et  $\underline{\mathbf{u}}_s^k$  le vecteur des déplacements des degrés de liberté du secteur de référence en base cyclique pour le nombre d'onde  $k$ . De plus, en référence aux formulations de la section 1.3, nous travaillerons en notations complexes pour simplifier les écritures ; la formulation réelle est bien entendue possible et équivalente.

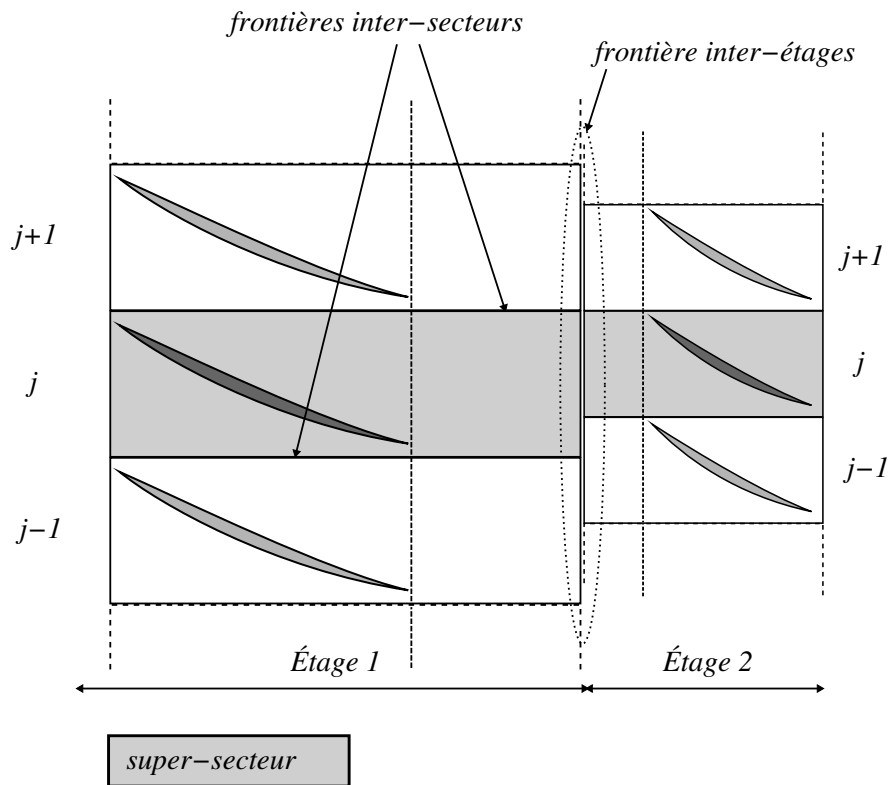


FIG. 4.1 Exemple d'architecture multi-étage.

#### 4.2.1 Définition du couplage inter-étage

Le couplage entre les étages 1 et 2 est réalisé par continuité des déplacements à l'interface inter-étage dans la base physique commune,

$$\Delta^b \mathbf{u} = \mathbf{A}^b \mathbf{u}_1 - {}^b \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

où l'exposant à gauche  $^b$  réfère à la restriction des degrés de liberté de chaque étage à l'interface inter-étage. La matrice  $\mathbf{A}$  représente les contraintes assurant la compatibilité de représentations (ou maillages) à l'interface.

L'équation (4.1) peut être réécrite en composantes cycliques,

$$\mathbf{A} \sum_{n=0}^{N_1-1} \mathbf{e}_1^n \otimes {}^b \underline{\mathbf{u}}_1^n + \sum_{p=0}^{N_2-1} \mathbf{e}_2^p \otimes {}^b \underline{\mathbf{u}}_2^p = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

puis projetée sur un vecteur de base cyclique d'un des étages. On choisira sans perte de généralité un vecteur de l'étage 2. Ainsi, pour  $p \in [0 \dots N_2 - 1]$ , nous avons

$$\left( \mathbf{e}_2^{p*} \otimes \mathcal{I}_{b_2} \right) \mathbf{A} \sum_{n=0}^{N_1-1} \mathbf{e}_1^n \otimes \mathbf{u}_1^n + \mathbf{u}_2^p = 0 \quad (4.3)$$

où la matrice identité  $\mathcal{I}_{b_s}$  ( $s = 1$  ou  $2$ ) permet la compatibilité à l'interface inter-étage.

### Facteur de couplage entre nombres d'onde

Dans l'équation (4.3), le facteur de couplage entre les ordres  $n$  et  $p$  de chaque base cyclique apparaît

$$\mathcal{C}(p, n) = \left( \mathbf{e}_2^{p*} \otimes \mathcal{I}_{b_2} \right) \mathbf{A} \left( \mathbf{e}_1^n \otimes \mathcal{I}_{b_1} \right) \quad (4.4)$$

Les figures 4.2 montrent un exemple de représentation matricielle de ce facteur de couplage dans les cas où les nombres de secteurs de chaque étage possèdent un diviseur commun ( $N_1 = 12$  et  $N_2 = 20$ , figure 4.2a) et dans le cas où ils sont premiers entre eux ( $N_1 = 13$  et  $N_2 = 20$ , figure 4.2b). Dans le

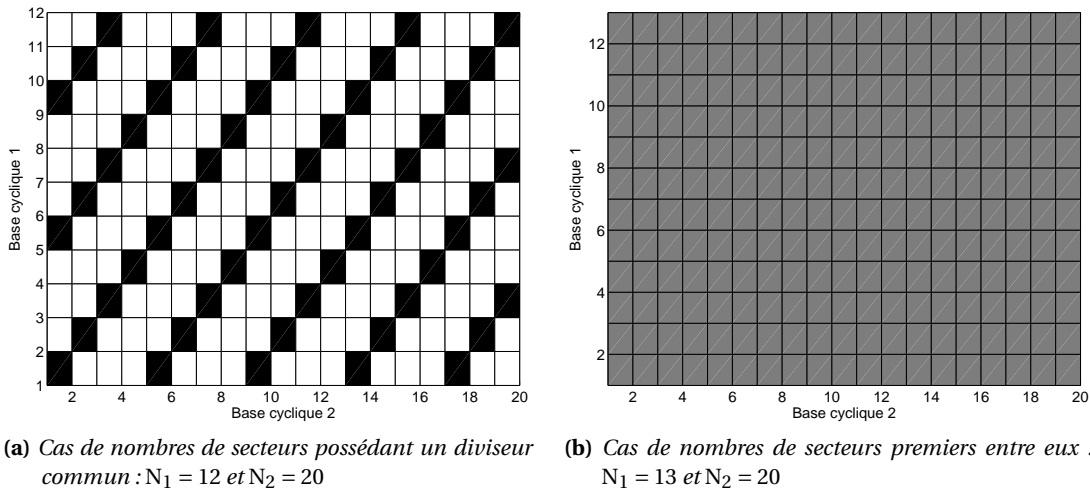


FIG. 4.2 Représentation matricielle du facteur de couplage entre nombres d'onde

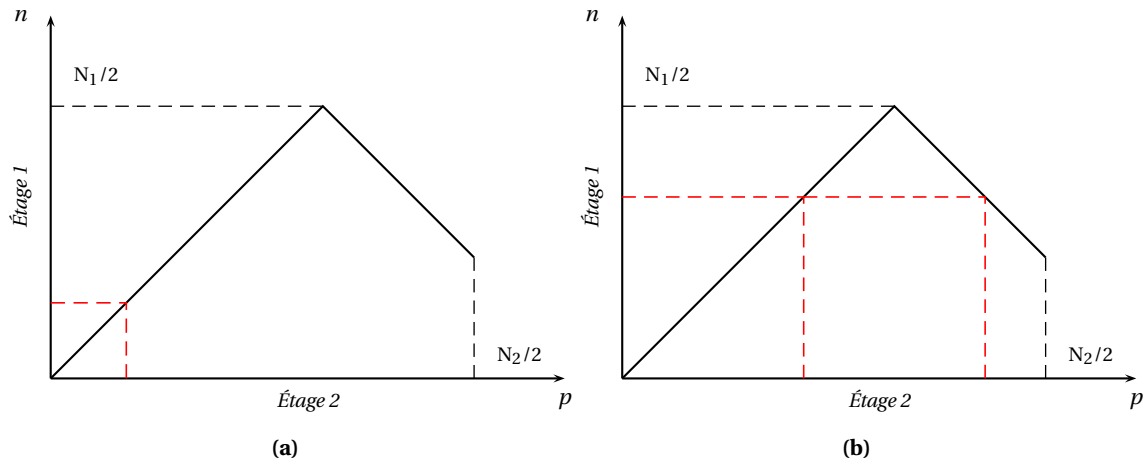
cas où un diviseur commun existe entre les nombres de secteurs des deux étages (figure 4.2a) la matrice de couplage entre nombre d'ondes présente une structure bande et il apparaît que seuls les termes  $\mathcal{C}(p, n)$  tels que  $p = n \pmod{\text{PGCD}(n, p)}$  sont non nuls. Dans le cas où le PGCD (plus grand commun diviseur) vaut 1 (figure 4.2b) la matrice est pleine.

### Hypothèse de couplage entre nombres d'onde équivalents

L'hypothèse fondamentale de la méthode de symétrie cyclique multi-étage consiste à sélectionner et à coupler les nombres d'onde de chaque base cyclique selon une règle de congruence. Cette hypothèse s'interprète sur les figures 4.2 en ne retenant que la diagonale principale de la matrice de couplage. Pour définir l'« équivalence » des nombres d'onde, il faut sélectionner le ou les nombre(s)

d'onde  $p$  à coupler avec chaque nombre d'onde  $n$ . Ceci se fait grâce la règle suivante qui est illustrée par les figures 4.3 :

- (a) si  $0 < n < N_1 - N_2/2$  alors  $p = n$  (figure 4.3a),  
 (b) si  $N_1 - N_2/2 \leq n \leq N_1/2$  alors  $p = [n, N_1 - n, N_1 + n, 2N_1 - n, \dots]$  (figure 4.3b).



**FIG. 4.3** Illustration de l'équivalence des nombres d'onde; (a) faible nombre d'onde et (b) cas de repliement

Le premier cas (a) correspond aux faibles nombres d'onde tandis que le second correspond au repliement de spectre dû à l'échantillonnage de la série de Fourier discrète. Finalement, la projection restreinte à un nombre d'onde équivalent s'écrit :

$$\left( \mathbf{e}_2^{p(n)*} \otimes \mathcal{I}_{b_2} \right) \mathbf{A} \left( \mathbf{e}_1^n \otimes \mathcal{I}_{b_1} \right) {}^b \underline{\mathbf{u}}_1^n - {}^b \underline{\mathbf{u}}_2^{p(n)} = 0 \quad (4.5)$$

Cette relation constitue l'équation de contraintes dans laquelle les composantes cycliques en déplacements (et autres variables) de l'interface inter-étage de l'étage 2 sont dépendants de celles de l'étage 1. Nous noterons dans la suite,

$$\mathcal{B}_n = \left( \mathbf{e}_2^{p(n)*} \otimes \mathcal{I}_{b_2} \right) \mathbf{A} \left( \mathbf{e}_1^n \otimes \mathcal{I}_{b_1} \right) \quad (4.6)$$

la matrice de passage et de réduction permettant d'exprimer les variables de la frontière inter-étage d'une base cyclique à l'autre.

Ce formalisme permet un assemblage direct des structures cycliques multi-étages dans leur base cyclique respective et préserve le découplage des équations en nombre d'onde.

#### Remarques :

- (1) cette règle de sélection des nombres d'onde équivalents assure que l'espace des solutions reste admissible ;
- (2) le nombre d'analyses (nombre de diamètres nodaux) à réaliser est de  $N_1/2$ , ce qui correspond à l'étage ayant le plus petit nombre de secteurs ;



(3) quelque soit le nombre d'étages, l'équivalence des nombres d'onde sera toujours de 1 à 2 au plus.

#### 4.2.2 Superposition

Le formalisme de symétrie cyclique multi-étage permet d'isoler les contributions de chaque harmonique cyclique dans la réponse. Cependant, dans certains cas, en particulier en réponse forcée, la dynamique d'un système multi-étage peut contenir plusieurs harmoniques cycliques.

Pour répondre à cette problématique dans le cas multi-étage, deux stratégies peuvent être envisagées. La première consiste à employer le principe de superposition directement, comme dans le cas mono-étage, et à calculer les contributions de chaque ordre cyclique séparément ; la réponse globale étant obtenue en sommant ces contributions. La seconde consiste à considérer tous les ordres *a priori* présents dans la réponse dans l'étape de projection définie par l'équation (4.3). Par exemple, si deux ordres cycliques  $n_1$  et  $n_2$  sont présents, l'équation de contraintes (4.5) devient,

$$\left( \left[ \mathbf{e}_2^{p(n_1)}, \mathbf{e}_2^{p(n_2)} \right]^* \otimes \mathcal{I}_{b_2} \right) \mathbf{A} \left( \left[ \mathbf{e}_1^{n_1}, \mathbf{e}_1^{n_2} \right] \otimes \mathcal{I}_{b_1} \right) \begin{bmatrix} b \mathbf{u}_1^{n_1} \\ b \mathbf{u}_1^{n_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \mathbf{u}_2^{p(n_1)} \\ b \mathbf{u}_2^{p(n_2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

#### 4.2.3 Formulation d'un problème dynamique multi-étage

Considérons pour l'étage  $s$  le problème dynamique discret ainsi défini :

– en base physique

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{u}_s = \mathbf{f}_s \quad (4.8)$$

– en base cyclique pour chaque nombre d'onde,

$$\underline{\mathbf{M}}_s^k \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_s^k + \underline{\mathbf{C}}_s^k \dot{\underline{\mathbf{u}}}_s^k + \underline{\mathbf{K}}_s^k \underline{\mathbf{u}}_s^k = \underline{\mathbf{f}}_s^k, \text{ pour } k \in [0, N_s - 1] \quad (4.9)$$

La méthode de symétrie cyclique multi-étage permet de coupler les équations de chaque étage en base cyclique pour chaque nombre d'onde.

Le problème dynamique en symétrie cyclique multi-étage se définit alors sur un secteur de référence de chaque étage et s'écrit pour chaque nombre d'onde  $k \in [0, N_2 - 1]$ ,

$$\underline{\mathbf{M}}_1^k \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_1^k + \underline{\mathbf{C}}_1^k \dot{\underline{\mathbf{u}}}_1^k + \underline{\mathbf{K}}_1^k \underline{\mathbf{u}}_1^k = \underline{\mathbf{f}}_1^k \quad (4.10a)$$

$$\underline{\mathbf{M}}_2^k \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_2^k + \underline{\mathbf{C}}_2^k \dot{\underline{\mathbf{u}}}_2^k + \underline{\mathbf{K}}_2^k \underline{\mathbf{u}}_2^k = \underline{\mathbf{f}}_2^k \quad (4.10b)$$

avec l'équation de contraintes à l'interface,

$$\left( \mathbf{e}_2^{k(n)*} \otimes \mathcal{I}_{b_2} \right) \mathbf{A} \left( \mathbf{e}_1^n \otimes \mathcal{I}_{b_1} \right) b \underline{\mathbf{u}}_1^n + b \underline{\mathbf{u}}_2^{k(n)} = 0 \quad (4.10c)$$

### 4.3 Validation de la méthode proposée

Dans cette section, la méthode de symétrie cyclique multi-étage est appliquée sur un cas académique. Le modèle considéré est constitué de deux structures cycliques de géométrie simple ; la

première est composée de 24 secteurs élémentaires et la seconde de 45 secteurs. Cette étude et les résultats d'applications numériques sur ce modèle vont permettre de valider la méthode. Une représentation éléments-finis est utilisée. Les maillages sont représentés en figures 4.4 pour le modèle complet (360°) et pour le modèle super-secteur qui sera utilisé en symétrie cyclique multi-étage. Il s'agit d'éléments hexahédriques linéaires. Les résultats d'analyse en symétrie cyclique multi-étage

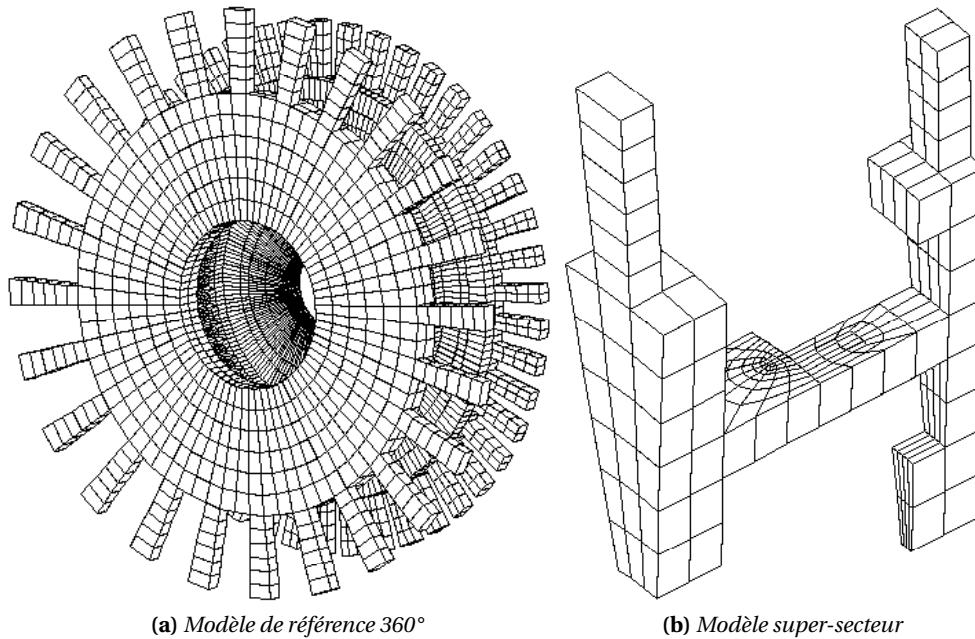


FIG. 4.4 Maillage de deux structures cycliques simples –  $N_1 = 24$ ,  $N_2 = 45$

sont comparés avec ceux d'une analyse de référence où chaque étage est complètement modélisé (figure 4.4a).

#### 4.3.1 Corrélation modale

Nous nous intéressons dans un premier temps à une corrélation modale pour estimer la précision et la validité de la méthode proposée. La figure 4.5 regroupe les fréquences propres calculées par les deux méthodes dans un diagramme fréquences / nombre de diamètres nodaux. La comparaison des fréquences propres issues des deux analyses montrent l'excellente précision de la méthode de symétrie cyclique multi-étage puisque l'erreur relative maximale n'excède pas  $10^{-6}$ . Nous montrons par conséquent que l'hypothèse de projection selon les nombres d'onde équivalents présentée plus haut comme fondamentale dans la méthode n'est pas limitative.

Nous comparons ensuite, d'une façon qualitative, les déformées modales issues des deux analyses. Les figures 4.6 et 4.7 regroupent les résultats

- (a) de l'analyse de référence 360°,
- (b) de l'analyse en symétrie cyclique multi-étage,

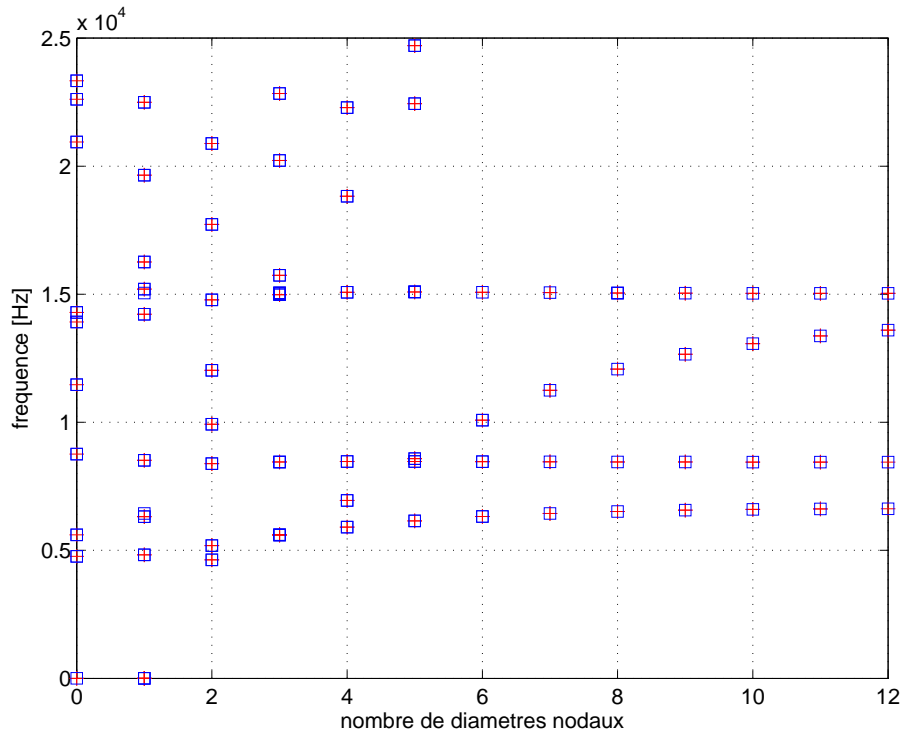


FIG. 4.5 Corrélation en fréquences propres, référence  $\square$  / Symétrie cyclique multi-étage  $+$ .

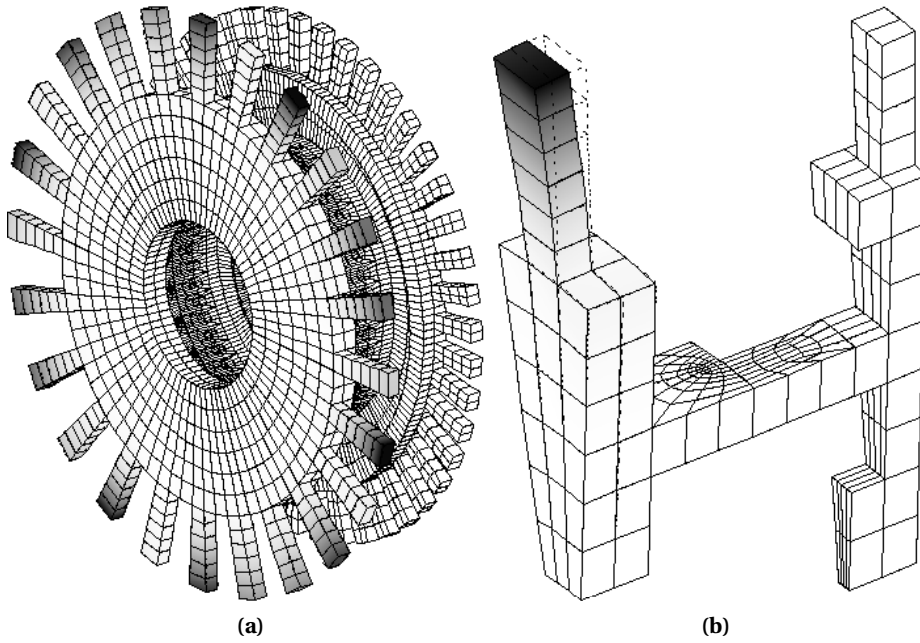


FIG. 4.6 Mode à cinq diamètres nodaux à 6147Hz

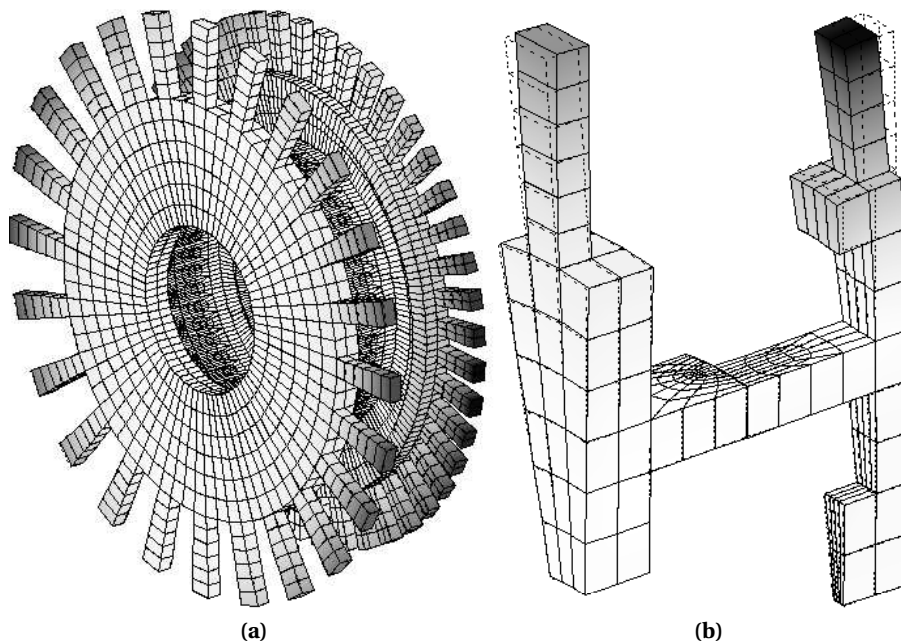


FIG. 4.7 Mode à un diamètre nodal à 4824Hz

pour différents nombres de diamètres nodaux. Nous pouvons distinguer, dans ces exemples, des modes plutôt localisés sur un étage (figure 4.6) et d'autres clairement multi-étages (figure 4.7). Là encore, la corrélation est correcte.

#### 4.3.2 Corrélation en réponses forcées

En complément des analyses précédentes, nous étudions maintenant la réponse forcée de l'ensemble multi-étage dont le modèle est représenté en figure 4.4. Nous considérons deux distributions de forces appliquées sur toutes les aubes de chaque étage avec une périodicité spatiale (ou *ordre*)  $n$  si bien que la force sur la  $j$ -ème aube de l'étage  $s$  :

$$f_j^{(s)} = F_0 \cos \frac{2n\pi}{N_s} (j-1) \cos \omega t, \quad s = 1 \text{ or } 2 \quad (4.11)$$

Nous présentons en figure 4.8 les réponses fréquentielles de la première aube de chaque étage pour une excitation d'ordre 2 (nombre de diamètres nodaux égal à 2). Comme pour l'analyse modale précédemment présentée, la corrélation entre le calcul en symétrie cyclique multi-étage et la référence 360° est correcte. Les résonances sont bien représentées en termes de fréquences et de niveaux. Il apparaît cependant de légers écarts au niveau des anti-résonances entre les deux calculs. Nous ne sommes pas en mesure d'expliquer pleinement ces différences et si elles sont dues ou non à l'hypothèse de projection par nombres d'onde équivalents présentée en section 4.2. Le phénomène semble cependant similaire à un effet de troncature en analyse modale ou à une mauvaise représentation des contributions statiques. Il n'en reste pas moins que la corrélation en réponses forcées est très satisfaisante.

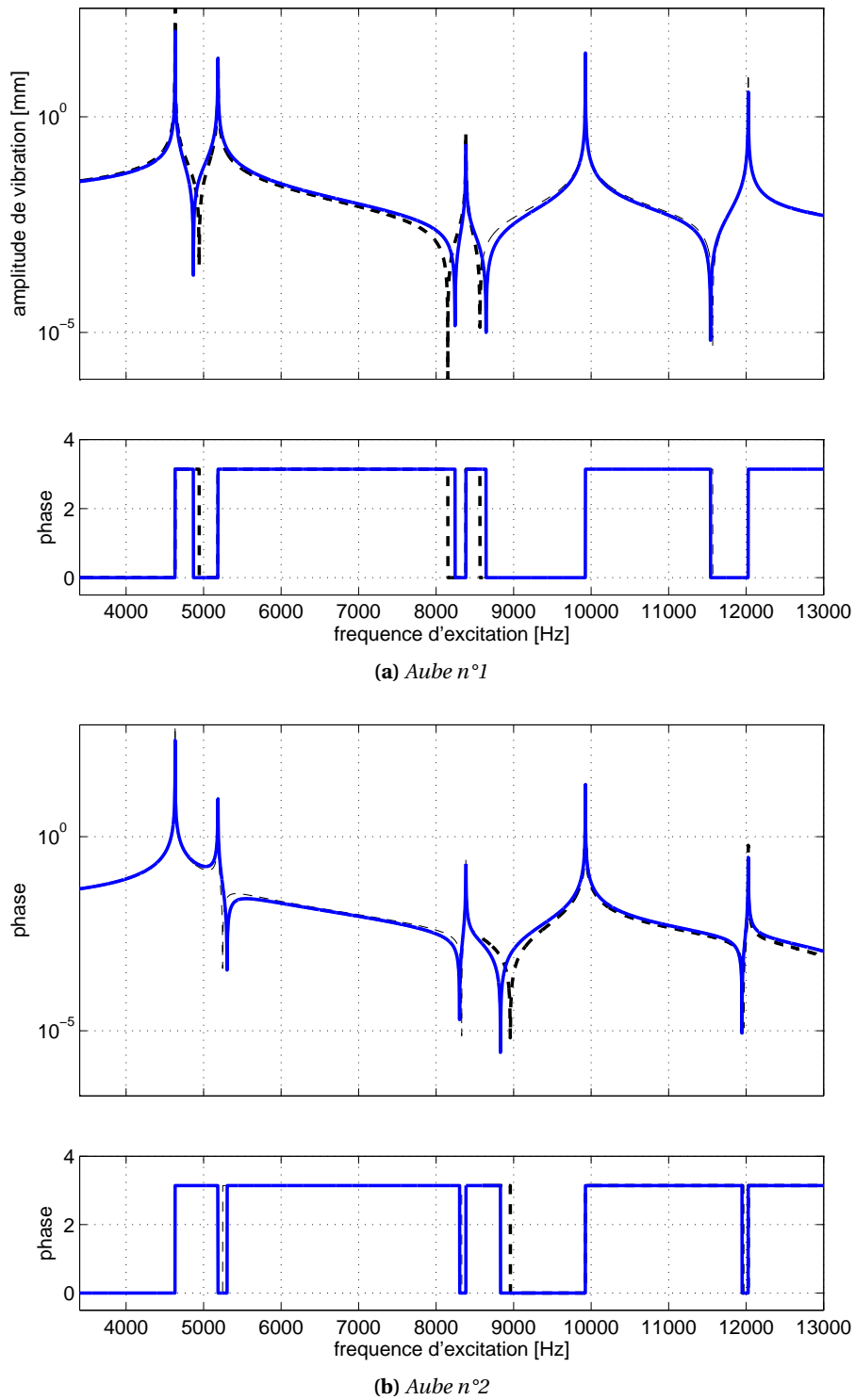
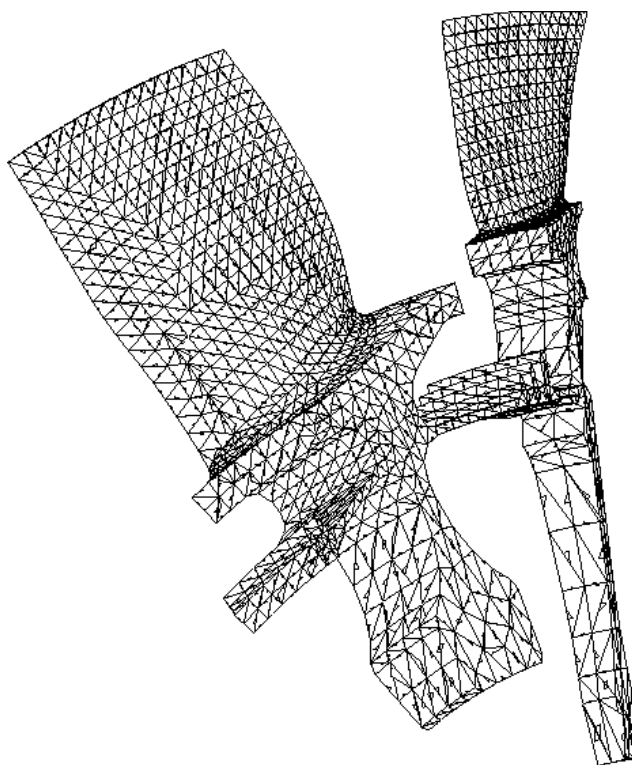


FIG. 4.8 Corrélation en réponses forcées; (- - -) référence, (—) symétrie cyclique multi-étage

## 4.4 Application industrielle

Dans la suite, nous présentons une application de la méthode de symétrie cyclique multi-étage à un ensemble multi-étage de disques aubagés monoblocs de compresseur HP industriel. Les figures 4.9 montrent les maillages éléments-finis d'un secteur de chaque étage. Le premier étage comporte 36 secteurs et le second 60. Pour ce type de modèle, une analyse complète multi-étage



**FIG. 4.9** Modèles éléments-finis de 2 secteurs de compresseurs HP ; étage 1, 36 secteurs, étage 2 60 secteurs

(360°) engendre des coûts de calcul clairement prohibitifs et apparaît inutilisable dans un processus de conception. En ce sens, les avantages de la méthode de symétrie cyclique multi-étage proposée en section 4.2 et validée en section 4.3 sont évidents.

Nous nous intéressons de plus à l'impact du couplage inter-étage sur la dynamique d'un étage ou sur celle de l'ensemble. Nous étudierons comme précédemment les cas de l'analyse modale puis de la réponse forcée.

### 4.4.1 Analyse modale

Dans un premier temps, nous avons jugé intéressant de comparer les résultats d'analyse modale mono-étage classique (telles que celles couramment utilisées dans la conception des roues aubagées de turbomachines) avec une analyse multi-étage. Pour les analyses mono-étage, l'interface inter-étage est bloquée. La figure 4.10 regroupe les fréquences propres (normalisées) des deux

analyses mono-étage et de l'analyse multi-étage. L'influence du couplage inter-étage est clairement

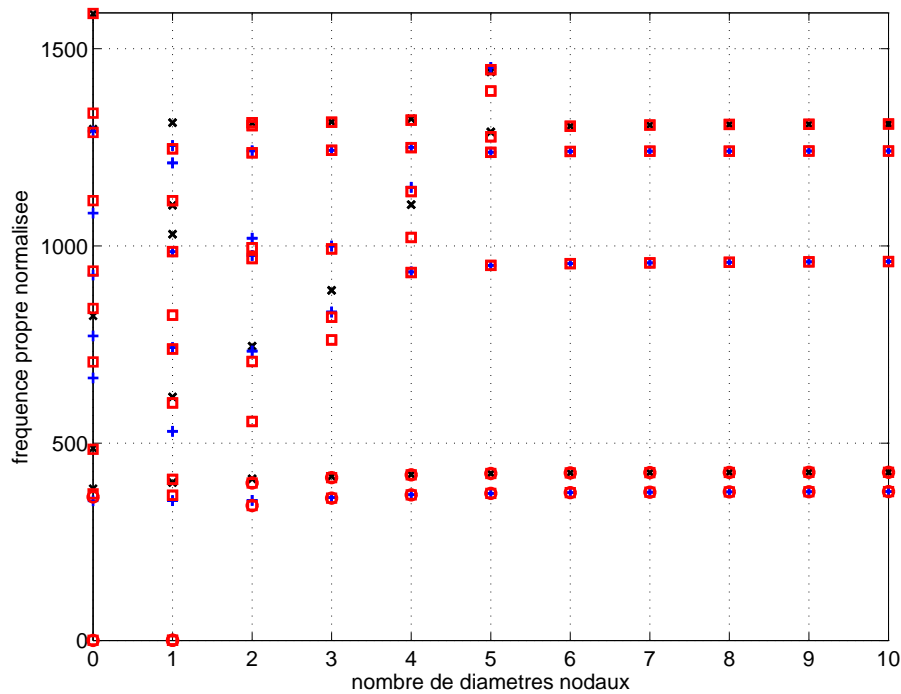


FIG. 4.10 Influence du couplage inter-étage : diagramme fréquences propres normalisées / nombre de diamètres (de 0 à 10) ; étage 1 seul  $\times$ , étage 2 seul  $+$ , deux étages couplés  $\square$ .

visible sur ce graphique ; de nouveaux modes apparaissent qui ne sont évidemment pas prévisibles par les analyses mono-étage. Ceci est particulièrement clair pour les bas nombres de diamètres nodaux. En effet, dans ces régions, le couplage aube-disque est traditionnellement plus important de même que la participation du disque au mouvement global de la roue aubagée. Nous proposons de plus quelques exemples de déformées modales issues de l'analyse multi-étage en figures 4.11. Certains modes présentent un couplage inter-étage relativement faible et un comportement proche du cas mono-étage (figures 4.11a et 4.11b). En revanche, la déformée modale représentée en figure 4.11c présente un comportement fortement multi-étage. Cette comparaison montre clairement l'importance de la prise en compte du couplage inter-étage dans la conception des roues aubagées de turbomachines et la pertinence de la méthode proposée.

Le dernier exemple en figure 4.11d illustre le cas du repliement de spectre qui implique un couplage du nombre de diamètres 7 pour l'étage 1 avec les nombres de diamètres 7 et 29 pour l'étage 2. Malgré des nombres de diamètres nodaux différents sur chaque étage, la compatibilité des déplacements à l'interface inter-étage est bien respectée.

**Remarque :** l'ordre de grandeur des calculs multi-étages en symétrie cyclique pour obtenir une centaine de modes à tous les nombres de diamètres possibles est l'heure pour ce type de structures. Pour un calcul complet  $360^\circ$ , il faudrait compter en semaines pour obtenir le même résultat avec



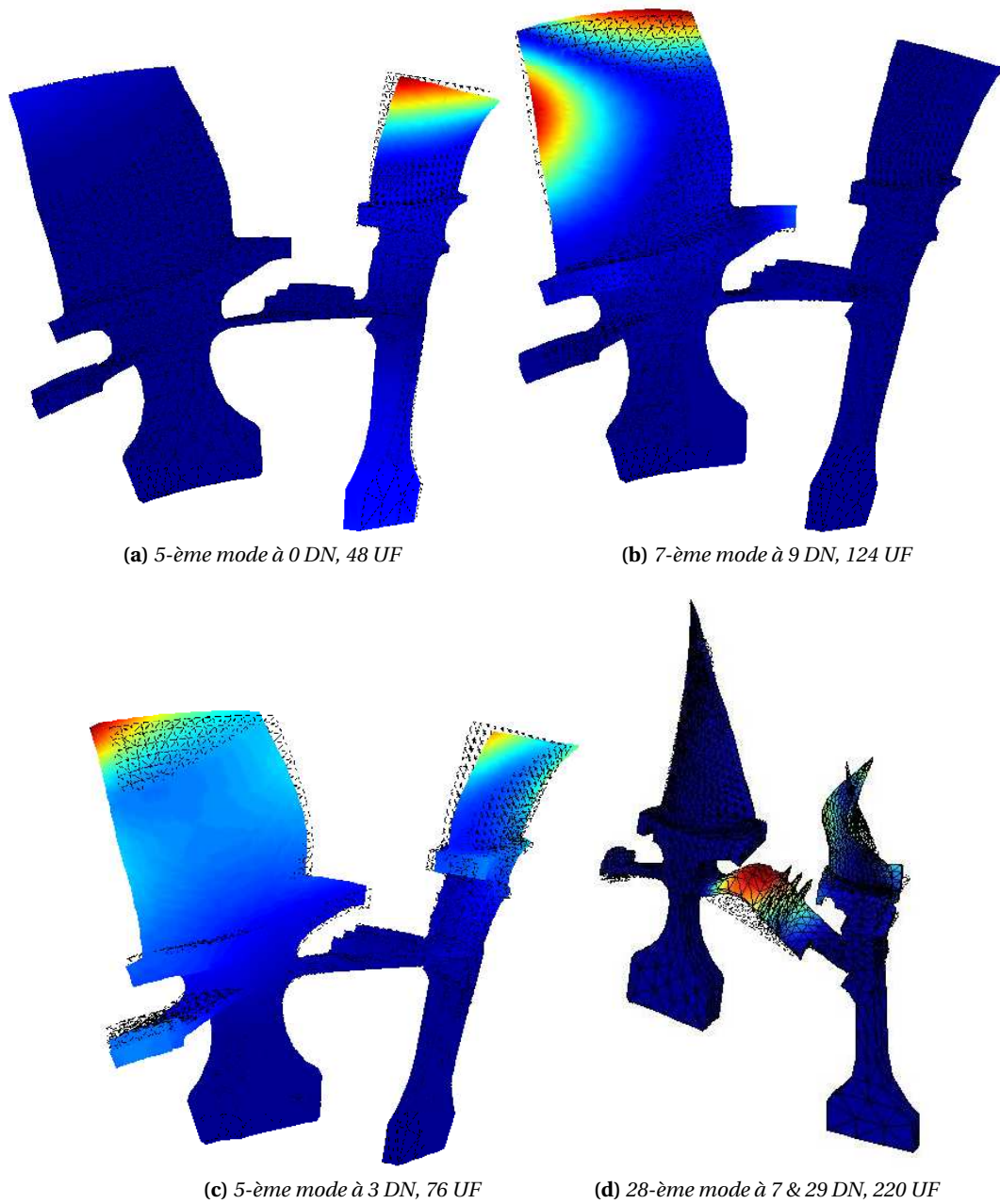


FIG. 4.11 Exemples de déformées modales multi-étages



des coûts numériques (mémoire en particulier) nettement plus importants et un post-traitement important pour le tri des modes.

#### 4.4.2 Réponse forcée

Nous considérons maintenant le cas de la réponse stationnaire du système multi-étage précédent composé de deux étages de compresseur HP. Chacun des deux étages est soumis à une excitation synchrone du régime moteur et ces deux excitations sont à des ordres différents. L'excitation sur l'étage 1 (36 secteurs) est d'ordre 7 et l'excitation sur l'étage 2 (60 secteurs) est d'ordre 3. Ces distributions de forces sont harmoniques et tournantes et de fréquences multiples de leur ordre et de la vitesse de rotation. En figures (4.12), les réponses en fréquence des deux étages (figure 4.12a pour l'étage 1 et figure 4.12b pour l'étage 2) sont tracées en fonction du régime de rotation. Comme pour l'analyse modale, nous comparons les réponses de chaque étage seul (avec interface inter-étage bloquée) avec un calcul en symétrie cyclique multi-étage. Ce dernier calcul est par ailleurs réalisé en superposition modale et selon le principe de superposition décrit dans la section 4.2.

Le contenu fréquentiel est bien entendu plus riche dans le cas où le couplage inter-étage est pris en compte et de nombreux pics supplémentaires apparaissent. Avec la prédiction multi-étage, le concepteur pourra ainsi prédire correctement les coïncidences des modes du rotor avec les ordres moteur ainsi que les transferts énergétiques et vibratoires entre des étages (adjacents ou non). Un autre point important que soulève ce résultat concerne les niveaux vibratoires aux résonances et les différences entre les deux calculs. En effet, même dans les cas où les résonances (positions de pics) semblent bien prédites par les analyses mono-étages, les niveaux diffèrent lorsque le couplage inter-étage est pris en compte et semblent généralement plus faibles. Ceci s'explique probablement par le fait que lors d'une résonance localisée sur un étage, le couplage inter-étage assouplit la structure par rapport à l'encastrement d'un modèle mono-étage. Par conséquent l'énergie vibratoire se répartit sur l'ensemble des étages ce qui réduit les niveaux de l'étage principalement résonant.

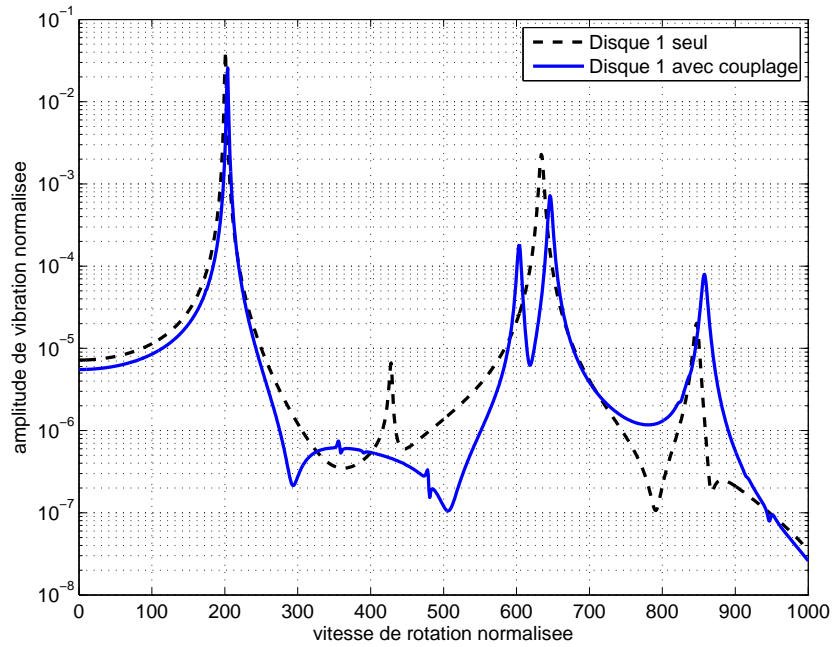
### 4.5 Analyse dynamique des ensembles multi-étage de roues aubagées munies de joncs de friction

#### 4.5.1 Problématique

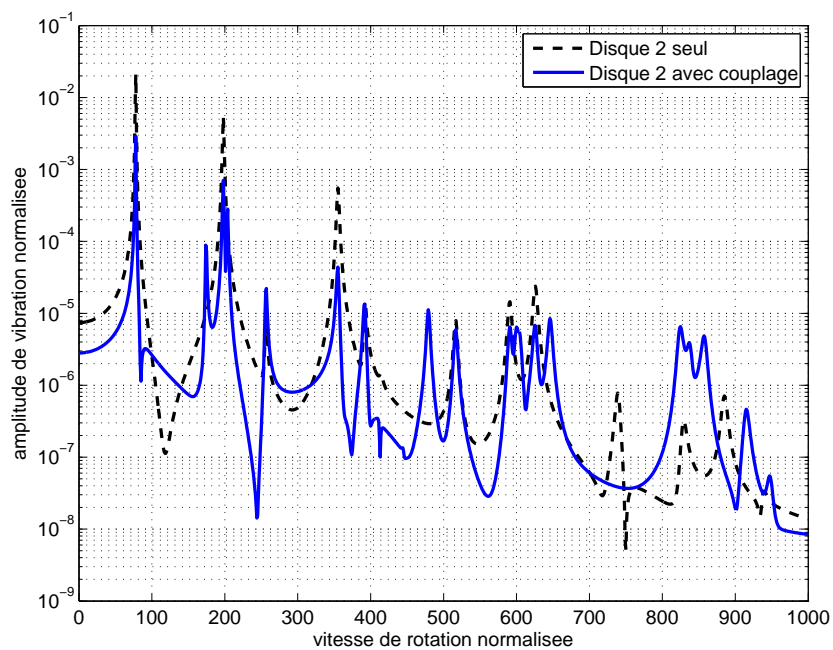
Nous avons vu depuis le début de ce chapitre l'importance que peut prendre une analyse multi-étage dans la conception des pièces tournantes d'une turbomachine. La méthode de *symétrie cyclique multi-étage* que nous avons proposée en section 4.2 permet de réaliser de telles analyses à partir d'une modélisation réduite à un secteur par étage et semble ainsi très bien adaptée, de par sa simplicité de mise en œuvre, sa précision et son faible coût numérique, à un processus de conception industriel.

Cependant, pour revenir au sujet principal de ce mémoire, la modélisation et l'analyse en dynamique non-linéaire de roues aubagées munies d'amortisseurs non-linéaires, nous avons cherché à étendre cette problématique au cas des systèmes multi-étages.

Dans un premier temps, on peut se contenter d'étendre les méthodes développées dans le cas mono-étage à des systèmes multi-étages. C'est particulièrement vrai pour la méthode d'analyse



(a) Étage 1



(b) Étage 2

FIG. 4.12 Réponses en fréquence avec ou sans couplage inter-étage

modale non-linéaire présentée en section 2.4 et illustrée dans le cas mono-étage en section 3.1 qui peut être utilisée directement en situation multi-étage.

En revanche, l'on s'intéresse au comportement en réponse forcée d'un système non-linéaire multi-étage, il peut sembler utile de considérer des excitations réalistes sur chaque étage. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 1 les pièces tournantes d'un rotor sont soumises chacune à des excitations synchrones générées par les parties fixes (en amont ou en aval). La périodicité spatiale (ou ordre) de ces excitations est liée au nombre d'obstacles dans le flux et leur fréquence est fonction de ce nombre d'obstacles et du régime. Par conséquent, lorsque l'on considère un système multi-étage dont chaque étage est excité à un ordre propre, l'excitation globale est multi-fréquentielle et multi-ordre (voir le dernier exemple de la section 4.4). Dans le cas d'un système linéaire, le traitement d'un tel problème peut se faire par superposition comme dans l'exemple numérique de la section 4.4. Le cas non-linéaire qui nous intéresse ici pose plus de difficultés et nécessite des méthodes adaptées.

#### 4.5.2 Réponse forcée multi-fréquentielle

Considérons toujours deux étages de structures cycliques respectivement composées de  $N_1$  et  $N_2$  secteurs élémentaires. Notons aussi  $\alpha_s$  la mesure angulaire du secteur élémentaire de l'étage  $s$ . Pour chaque étage  $s$  pris indépendamment (sans couplage), l'équation du mouvement s'écrit,

$$\mathbf{M}^s \ddot{\mathbf{u}}^{(s)}(t) + \mathbf{C}^s \dot{\mathbf{u}}^{(s)}(t) + \mathbf{K}^s \mathbf{u}^{(s)}(t) = \mathbf{f}^{(s)}(t) + \mathbf{p}^{(s)}(t) \quad (4.12)$$

où,  $\mathbf{M}^s$ ,  $\mathbf{C}^s$  et  $\mathbf{K}^s$  sont les matrices de masse, amortissement et raideur de l'étage complet ( $360^\circ$ ). Les vecteurs  $\mathbf{f}^{(s)}$  et  $\mathbf{p}^{(s)}$  correspondent respectivement aux forces non-linéaires de contact et aux termes d'excitation.

La distribution de force  $\mathbf{p}^{(s)}(t)$  sur chaque étage est périodique et de pulsation fondamentale  $\omega_s$  ( $s = 1, 2$ ) et tournante. Les fréquences fondamentales  $\omega_s$  sont *a priori* incommensurables et la réponse sera par conséquent quasi-périodique. Nous allons donc adopter un formalisme bi-fréquentiel pour représenter cette réponse.

**Remarque :** dans le cas d'un système multi-étage de roues aubagées de turbomachine, ces fréquences peuvent être commensurables dans le cas d'excitations d'ordre moteur et leur plus grand diviseur commun est un multiple du régime de rotation du moteur. Ce cas particulier peut être traité par la méthode que nous proposons mais pourrait aussi l'être par un formalisme mono-fréquentiel classique mais dont la fréquence fondamentale de vibration (le plus grand commun diviseur des fréquences d'excitation) ne correspond pas à la fréquence d'excitation. On voit bien que dans la deuxième solution, le nombre d'harmoniques temporelles à prendre en compte dans la décomposition de Fourier peut devenir très important surtout lorsque les ordres d'excitation sont grands. Le formalisme bi-fréquentiel, s'il semble plus complexe à mettre en œuvre, restera donc en général moins coûteux et plus direct puisque les fréquences fondamentales correspondent directement aux harmoniques principales.

### Formalisme *hyper-temps*

Le contenu spectral de l'excitation génère ici deux échelles de temps fondamentaux dans la dynamique du système :

$$\tau_1 = \omega_1 t \text{ et } \tau_2 = \omega_2 t \quad (4.13)$$

L'ensemble de ce deux échelles de temps forme une échelle de temps multi-dimensionnelle souvent appelée *hyper-temps* (Pusenjak et Oblak, 2004; Schilder et al., 2006) :

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1; \tau_2] \quad (4.14)$$

que l'on peut associer à une *base fréquentielle*,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1; \omega_2]$  de la solution quasi-périodique.

Pour toute variable temporelle notée (de façon générique)  $f$  (déplacements, forces, ...), nous définissons une fonction de l'hyper-temps souvent appelée *fonction tore* (Schilder et al., 2006) du domaine bi-dimensionnel temporel,

$$f(t) = f(\boldsymbol{\tau}) \quad (4.15)$$

Ces fonctions sont définies dans le domaine hyper-temps  $[0, 2\pi]^2$  et elles sont périodiques selon chaque échelles temporelles  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

Nous introduisons en plus l'opérateur différentiel dans le domaine hyper-temps,

$$\frac{df}{dt} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right\rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \rangle \quad (4.16)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire cartésien.

### Formulation multi-fréquentielle

Les fonctions quasi-périodiques de l'hyper-temps (déplacements, forces non-linéaires, ...) introduites par l'équation (4.15) sont périodiques selon chaque échelle de temps et peuvent donc être représentées par des séries de Fourier multi-dimensionnelles,

$$\mathbf{u}_{(s)}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{U}_{(s)}^{\mathbf{n},c} \cos\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau} \rangle + \mathbf{U}_{(s)}^{\mathbf{n},s} \sin\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau} \rangle \quad (4.17a)$$

avec

$$\mathbf{U}_{(s)}^{\mathbf{n},c} = \frac{1}{(\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} \mathbf{u}_{(s)}(\boldsymbol{\theta}) \cos\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta} \rangle d\boldsymbol{\theta} \quad (4.17b)$$

$$\mathbf{U}_{(s)}^{\mathbf{n},s} = \frac{1}{(\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} \mathbf{u}_{(s)}(\boldsymbol{\theta}) \sin\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta} \rangle d\boldsymbol{\theta} \quad (4.17c)$$

Le vecteur  $\mathbf{n} = [n_1, n_2]$  est l'indice « harmonique » bi-dimensionnel. De plus, afin d'éviter les redondances dans la série de Fourier de l'équation (4.17a), il faut restreindre les combinaisons selon la condition :

$$\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle \geq 0 \quad (4.18)$$

En introduisant les séries de Fourier (4.17a) dans l'équation du mouvement (4.12) et, en accord avec les relations d'orthogonalité suivantes,

$$\frac{1}{(\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} \cos\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\theta} \rangle \cos\langle \mathbf{l}, \boldsymbol{\theta} \rangle d\boldsymbol{\theta} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \quad (4.19a)$$

$$\frac{1}{(\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} \sin\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\theta} \rangle \sin\langle \mathbf{l}, \boldsymbol{\theta} \rangle d\boldsymbol{\theta} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \quad (4.19b)$$

$$\frac{1}{(\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} \sin\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\theta} \rangle \cos\langle \mathbf{l}, \boldsymbol{\theta} \rangle d\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (4.19c)$$

une procédure de Galerkin bi-dimensionnelle peut être appliquée ce qui donne pour chaque harmonique  $\mathbf{n}$ ,

– si  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{K}_s \mathbf{U}_{(s)}^0 = \mathbf{F}_{(s)}^0 + \mathbf{P}_{(s)}^0 \quad (4.20a)$$

– si  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_s - \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle^2 \mathbf{M}_s & \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{C}_s \\ -\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{C}_s & \mathbf{K}_s - \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle^2 \mathbf{M}_s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{(s)}^{\mathbf{n},c} \\ \mathbf{U}_{(s)}^{\mathbf{n},s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{(s)}^{\mathbf{n},c} \\ \mathbf{F}_{(s)}^{\mathbf{n},s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(s)}^{\mathbf{n},c} \\ \mathbf{P}_{(s)}^{\mathbf{n},s} \end{bmatrix} \quad (4.20b)$$

Nous allons ensuite introduire la réduction en symétrie cyclique multi-étage dans ce formalisme multi-fréquentiel et prendre en compte l'aspect tournant des excitations.

### Excitations tournantes multi-fréquentielles et symétrie cyclique

Chaque étage  $s$  est soumis à une excitation harmonique tournante de nombre d'onde  $k_s$  ( $s = 1, 2$ ) et périodique de fréquence  $\omega_s/2\pi$  si bien que nous pouvons écrire la relation de propagation suivante :

$$\mathbf{p}_{(s,j)}(\tau_s) = \mathbf{p}_{(s,0)}(\tau_s - k_s \theta_{s,j}) \quad (4.21)$$

dans laquelle,  $\theta_{s,j} = 2\pi j/N_s$ .

Dans le domaine hyper-temps, les fonctions sont périodiques selon toutes les échelles et la relation de propagation (4.21) peut être exprimée sous une forme bi-dimensionnelle,

$$\mathbf{p}_{(s,j)}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{p}_{(s,0)}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{k}\theta_{s,j}) \quad (4.22a)$$

où l'on définit le nombre d'onde bi-dimensionnel  $\mathbf{k} = [k_1; k_2]$  associé au déphasage inter-secteur bi-dimensionnel  $[2\pi k_1/N_s; 2\pi k_2/N_s]$ .

Ensuite, en supposant que l'ensemble des variables respecte la condition de symétrie cyclique, des relations similaires peuvent être écrites pour les déplacements :

$$\mathbf{u}_{(s,j)}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{u}_{(s,0)}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{k}\theta_{s,j}) \quad (4.22b)$$

et les forces non-linéaires :

$$\mathbf{f}_{(s,j)}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{f}_{(s,0)}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{k}\theta_{s,j}) \quad (4.22c)$$

Ces définitions sont similaires au cas mono-fréquentiel (section 2.1.3 du chapitre 2) si ce n'est leur caractère bi-dimensionnel.

Si l'on revient maintenant à la décomposition en séries de Fourier bi-dimensionnelles de l'équation (4.17a), nous avons pour le secteur de référence et pour l'harmonique d'indice  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{u}_{(s,0)}^{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{U}_{(s,0)}^{\mathbf{n},c} \cos\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau} \rangle + \mathbf{U}_{(s,0)}^{\mathbf{n},s} \sin\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau} \rangle \quad (4.23a)$$

et, compte tenu de la relation de propagation (4.22b), pour le secteur  $j$  :

$$\mathbf{u}_{(s,j)}^{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{U}_{(s,0)}^{\mathbf{n},c} \cos\langle \mathbf{n}, (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{k}\theta_{s,j}) \rangle + \mathbf{U}_{(s,0)}^{\mathbf{n},s} \sin\langle \mathbf{n}, (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{k}\theta_{s,j}) \rangle \quad (4.23b)$$

Ainsi comme dans le cas mono-fréquentiel (section 2.1.3), les composantes cycliques (ou fréquentielles) du secteur  $j$  de l'étage  $s$  peuvent s'écrire en fonction de celle du secteur 0 à l'aide de la relation (4.23b).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{(s,j)}^{n,c} \\ \mathbf{U}_{(s,j)}^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{k}\theta_{s,j} \rangle & -\sin\langle \mathbf{n}, \mathbf{k}\theta_{s,j} \rangle \\ \sin\langle \mathbf{n}, \mathbf{k}\theta_{s,j} \rangle & \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{k}\theta_{s,j} \rangle \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c} \\ \mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Si chaque dimension possède son propre nombre d'onde  $k_s$ , l'harmonique d'indice  $\mathbf{n}$  est une composante cyclique dont le nombre d'onde est défini selon le produit scalaire,

$$n(\mathbf{k}) = \langle \mathbf{k}, \mathbf{n} \rangle = k_1 n_1 + k_2 n_2 \quad (4.25)$$

La relation (4.24) nous permet comme dans le cas mono-fréquentiel, d'exprimer le problème fréquentiel selon l'harmonique d'indice  $\mathbf{n}$  (équation (4.20)) en terme de composantes cycliques définies sur le secteur de référence :

– si  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{K}_{s,0} \mathbf{U}_{(s,0)}^{\mathbf{0}} = \mathbf{F}_{(s,0)}^{\mathbf{0}} + \mathbf{P}_{(s,0)}^{\mathbf{0}} \quad (4.26a)$$

– si  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{s,0} - \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle^2 \mathbf{M}_{s,0} & \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{C}_{s,0} \\ -\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{C}_{s,0} & \mathbf{K}_{s,0} - \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle^2 \mathbf{M}_{s,0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c} \\ \mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{(s,0)}^{n,c} \\ \mathbf{F}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(s,0)}^{n,c} \\ \mathbf{P}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} \quad (4.26b)$$

auquel il faut bien sûr adjoindre les contraintes de symétrie cyclique :

– pour  $\mathbf{n}$  tel que  $n(\mathbf{k}) = 0 \pmod{N_s}$

$$\begin{bmatrix} g\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c} \\ g\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c} \\ d\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} \quad (4.27a)$$

– pour  $\mathbf{n}$  tel que  $n(\mathbf{k}) \neq 0 \pmod{N_s/2}$ , si  $N_s$  est pair ; et pour  $n(\mathbf{k}) \neq 0$  sinon,

$$\begin{bmatrix} g\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c} \\ g\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{k}\alpha_s \rangle & -\sin\langle \mathbf{n}, \mathbf{k}\alpha_s \rangle \\ \sin\langle \mathbf{n}, \mathbf{k}\alpha_s \rangle & \cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{k}\alpha_s \rangle \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c} \\ d\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} \quad (4.27b)$$

– pour  $\mathbf{n}$  tel que  $n(\mathbf{k}) = N_s/2 \pmod{N_s/2}$ , si  $N_s$  est pair,

$$\begin{bmatrix} g\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c} \\ g\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c} \\ d\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s} \end{bmatrix} \quad (4.27c)$$

### Réduction en symétrie cyclique multi-étage

Nous venons de montrer que le problème dynamique multi-fréquentiel et multi-harmonique défini sur un étage peut être exprimé en symétrie cyclique, c'est à dire sur un secteur de référence et pour un nombre d'onde qui dépend des ordres de l'excitation  $\mathbf{k}$  et de l'indice harmonique  $\mathbf{n}$  selon la relation (4.25). Il reste maintenant à définir le couplage inter-étage.

Pour cela, nous allons naturellement intégrer les résultats de la méthode de symétrie cyclique multi-étage présentée au début de ce chapitre à la formulation multi-fréquentielle en symétrie cyclique précédente.

Considérons par exemple les harmoniques d'indice  $n$  de la réponse des secteurs 1 et 2 décrites par les composantes cycliques  $\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,c}$  et  $\mathbf{U}_{(s,0)}^{n,s}$  ( $s = 1, 2$ ) sur le secteur de référence et caractérisée par le nombre d'onde composé et défini en fonction de l'indice harmonique et de l'ordre de l'excitation selon la relation (4.25). Le couplage entre ces deux composantes sur la frontière inter-étage se fait à l'aide de la relation :

$$\mathcal{B}_{n(k)} \begin{bmatrix} b\mathbf{U}_{(1,0)}^{n,c} \\ b\mathbf{U}_{(1,0)}^{n,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\mathbf{U}_{(2,0)}^{n,c} \\ b\mathbf{U}_{(2,0)}^{n,s} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

similaire à l'équation (4.5) mais pour des notations réelles de la symétrie cyclique.

L'ensemble des relations (4.26), (4.27) et (4.28) définissent complètement le problème dynamique multi-fréquentiel, multi-harmonique en symétrie cyclique multi-étage. Pour la résolution numérique, un solveur de type Newton est employé et le calcul des termes non-linéaires dans le domaine multi-fréquentiel est similaire au cas mono-fréquentiel si ce n'est qu'une transformée de Fourier multi-dimensionnelle doit être utilisée.

### 4.5.3 Applications

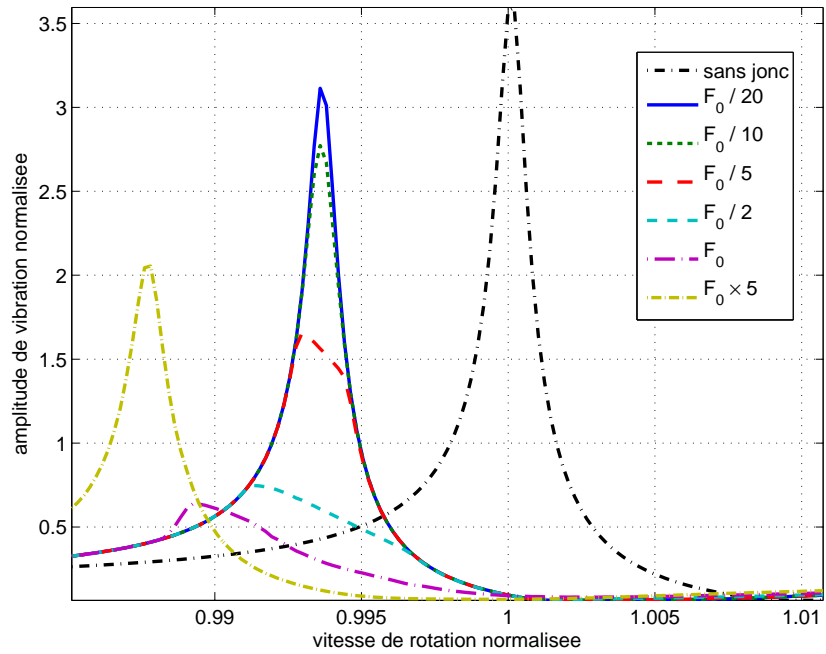
En application, nous considérons le système de deux étages de Disques Aubagés Monoblocs de compresseur HP représenté en figure 4.9 et déjà étudié (dans un cas linéaire) précédemment. Rappelons que l'étage 1 comporte 36 secteurs et l'étage 2 60 secteurs. Nous considérons ici que chaque étage est muni d'un jonc et qu'une distribution de forces tournantes s'applique sur chacun d'eux avec des ordres différents. Sur l'étage 1, l'ordre d'excitation est 3 et sur l'étage 2, il est de 4.

**Remarque sur la mise en œuvre numérique :** la manipulation des modèles est ici assez similaire aux exemples du chapitre 3. La principale différence réside dans la construction du modèle réduit. En effet, la méthode de symétrie cyclique multi-étage n'étant pas encore implémentées dans un code éléments-finis du commerce, la construction du modèle réduit (de Craig-Bampton) bi-étage a été réalisée en trois étapes. Chaque étage a d'abord été réduit indépendamment (par une méthode de Craig-Bampton en symétrie cyclique mono-étage) en conservant les nœuds non-linéaires, un nœud d'observation mais aussi les nœuds de l'interface inter-étage. Ensuite, ces deux modèles réduits ont été assemblés à l'aide de la méthode de réduction en symétrie cyclique multi-étage (compatibilité des déplacements en base physique à l'interface). Enfin, une seconde condensation a été réalisée pour éliminer les degrés de liberté de l'interface inter-étage, inutiles dans les calculs non-linéaires. Cette seconde réduction est une condensation statique de Guyan.

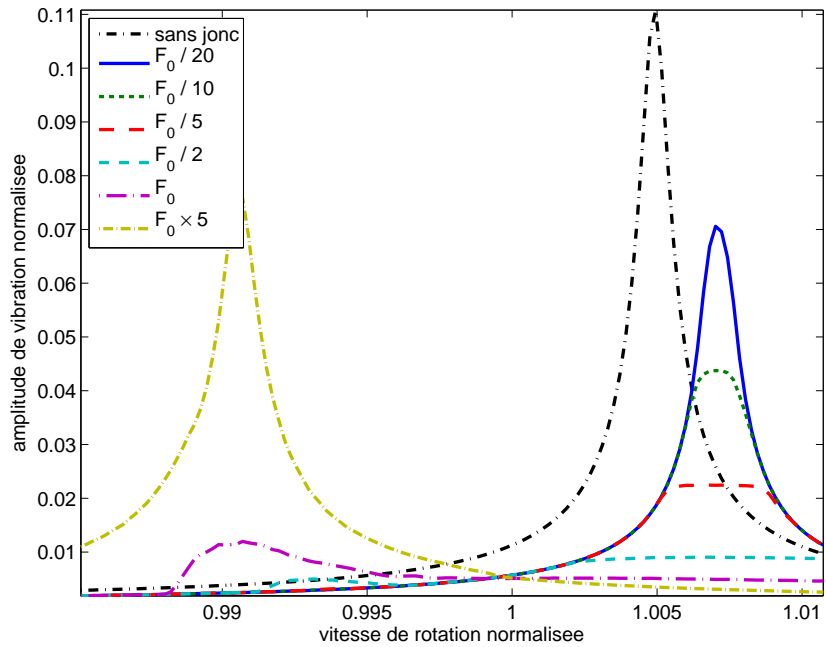
### Réponses en fréquence

Les figures 4.13 et 4.14 regroupent les courbes de réponses en fréquence sur les aubes (du secteur de référence) de chaque étage et pour chacun des ordres d'excitation. Si ces ordres sont représentés séparément, rappelons que la réponse globale est la somme des deux contributions et qu'ils sont calculés simultanément par résolution du système non-linéaire bi-fréquentiel.

Les différentes couleurs correspondent à des niveaux d'excitation différents. On retrouve des comportements typiques des résultats d'amortissement par frottement tels que ceux présentés au chapitre 3. Les courbes de résonance sont encadrées (horizontalement) par les cas asymptotiques



(a)



(b)

FIG. 4.13 Réponse fréquentielle du premier étage selon les ordres 3 (a) et 4 (b)



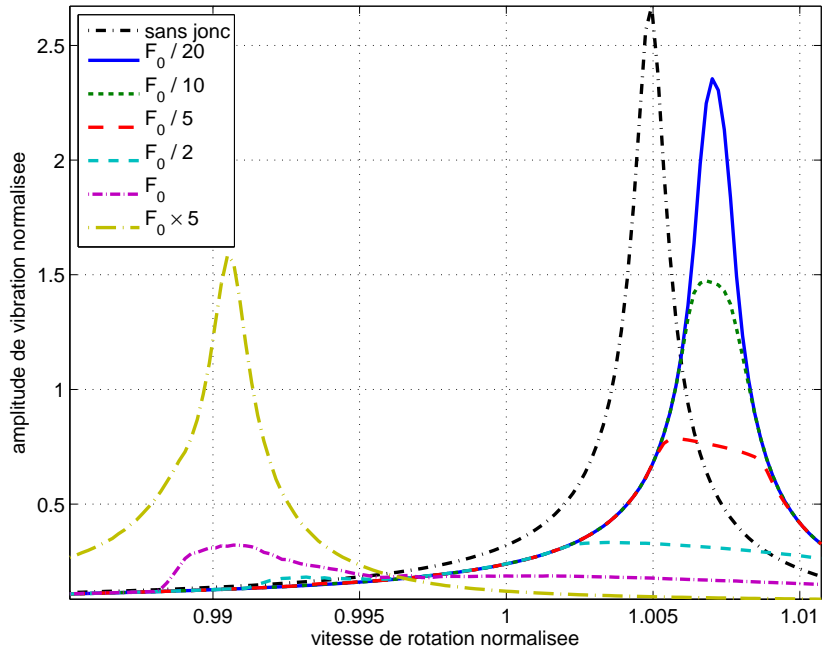
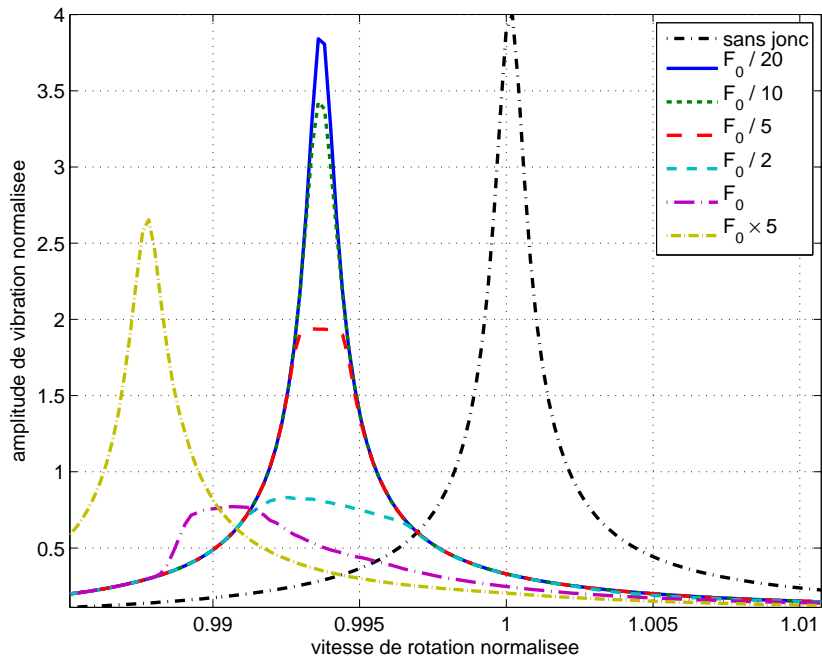


FIG. 4.14 Réponse fréquentielle du deuxième étage selon les ordres 3 (a) et 4 (b)

correspondant aux frotteurs adhérents ou glissants et mettent en évidence un optimum pour un niveau d'excitation donné qui minimise les niveaux vibratoires.

D'autre part, on notera que les pics de résonance pour les ordres 3 (figures 4.13a et 4.14a) et 4 (figures 4.13b et 4.14b) sont séparés dans le cas linéaire (pointillés) et pour les faibles niveaux d'excitation. En revanche, lorsque ce niveau augmente, les réponses, qui deviennent plus non-linéaires, tendent à « fusionner » et les deux pics convergent vers une fréquence de résonance commune (aux alentours de 0,99 sur les figures 4.13 et 4.14 pour le niveau d'excitation  $F_0$  par exemple). Enfin, pour des niveaux importants d'excitation, les pics se séparent à nouveau. Dans la zone de « fusion » – qui, par ailleurs, correspond à la zone d'amortissement optimal – on peut s'attendre à un comportement dynamique multi-fréquentiel.

### Analyse temporelle

Nous nous intéressons donc maintenant au comportement temporel et en particulier dans la zone où les résonances coïncident. Nous prendrons comme exemple les variations de la force de frottement que nous analyserons pour deux configurations d'excitation (fréquence et niveau). La première correspond à une force de  $F_0/5$  repérable sur les figures 4.13 et 4.14 pour laquelle les résonances sont assez pointues et proches du comportement linéaire. La force de frottement extraite du calcul fréquentiel pour une fréquence (adimensionnelle) de l'ordre de 1 est représentée dans les domaines hyper-temps et multi-fréquentiel sur les figures 4.15. En figure 4.15a, nous distinguons clairement les phases adhérentes ou glissantes témoignant d'un comportement fortement non-linéaire (localement tout du moins) mais la dynamique reste cependant confinée sur une échelle de temps. Ceci se confirme dans la représentation multi-fréquentielle de la figure 4.15b dans laquelle seules les composantes de l'indice  $k_1$  ont une amplitude significative avec d'autre part une nette prédominance de la première harmonique. Dans cette configuration, la dynamique est donc clairement mono-fréquentielle, selon la première fréquence et la réponse est par conséquent périodique.

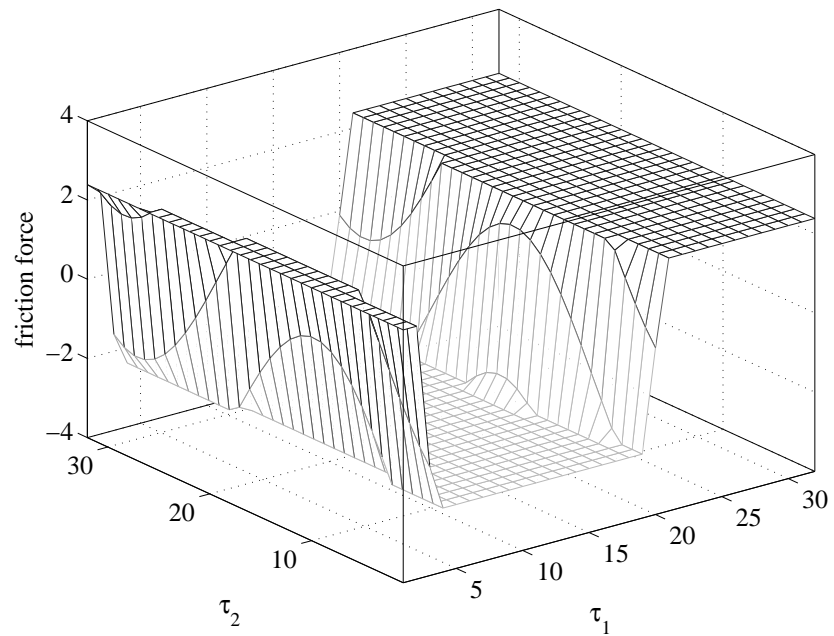
La seconde configuration correspond à une excitation de niveau  $F_0$  sur les figures 4.13 et 4.14 et nous nous intéressons à la résonance aux environs de la fréquence 0,99. Les évolutions temporelle et fréquentielle de la force de frottement sont représentées en figures 4.16. La dynamique est ici clairement multi-fréquentielle ce qui signifie que la réponse est quasi-périodique. En comparaison avec les figures 4.15, la force de frottement représentée en figure 4.16a présente des variations selon les deux dimensions de l'hyper-temps et comme précédemment les régions d'adhérence et glissement sont clairement identifiables. Il en est de même pour la représentation multi-fréquentielle et l'on peut identifier les couples d'harmoniques principales : (0,1), (1,0), (3,0), (0,3), (2,1) et (1,2). On remarquera qu'il s'agit principalement d'harmoniques impaires ( $k_1 + k_2 = 2k + 1$ ) ce qui est typique des systèmes frottants en dynamique puisque la force de frottement (loi de Coulomb) est impaire par rapport à la vitesse relative des objets en contact. Cette deuxième configuration légitime pleinement l'emploi d'une analyse multi-fréquentielle et hyper-temps.

## 4.6 Conclusions

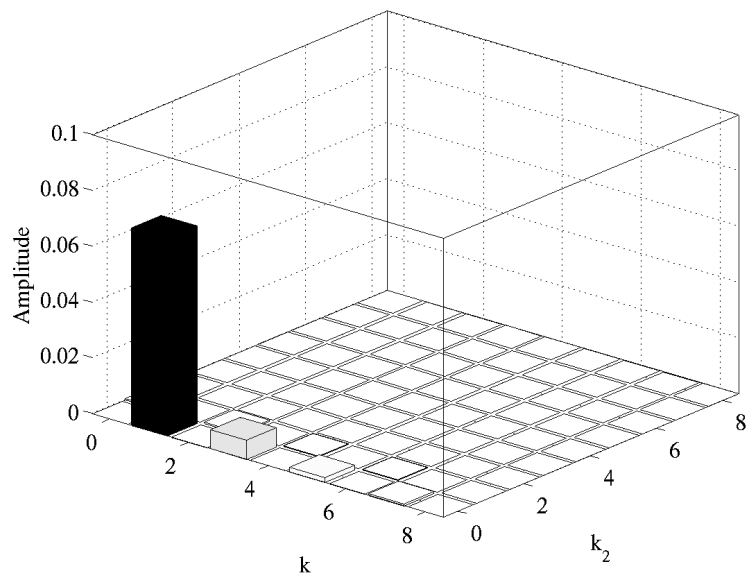
Dans ce chapitre, nous avons abordé la problématique de la modélisation et de l'analyse dynamique des ensembles multi-étages de roues aubagées. Tout d'abord d'un point de vue linéaire, nous

avons proposé une extension de la méthode de réduction en symétrie cyclique utilisée en situation mono-étage. La méthode de *symétrie cyclique multi-étage* que nous proposons permet d'une part de restreindre la modélisation à un secteur élémentaire pour chaque étage et d'autre part de séparer les analyses selon les nombres de diamètres nodaux comme dans le cas mono-étage. Les coûts de modélisation et de calcul sont du même ordre que pour des analyses éléments-finis en symétrie cyclique classique et la précision des résultats est très satisfaisante. Enfin, la simplicité de mise en œuvre et les performances de cette approche ont conduit à une intégration rapide dans les processus de conception au sein du bureau d'études de Snecma. En perspective, il semblerait utile d'approfondir les aspects mathématiques de la méthode de symétrie cyclique multi-étage et d'en poser plus clairement les limites.

Dans un second temps, nous avons étudié la dynamique en régime forcé d'un ensemble multi-étage de roues aubagées équipées de joncs de friction. Pour cela, une approche de balance harmonique multi-dimensionnelle (couplée à la symétrie cyclique multi-étage) a été proposée. Les résultats ont mis en évidence des phénomènes intéressants tels que des régimes quasi-périodiques.



(a)



(b)

FIG. 4.15 Évolution de la force de frottement à  $f \approx 1$ ; domaines hyper-temps (a) et multi-fréquentiel (b)

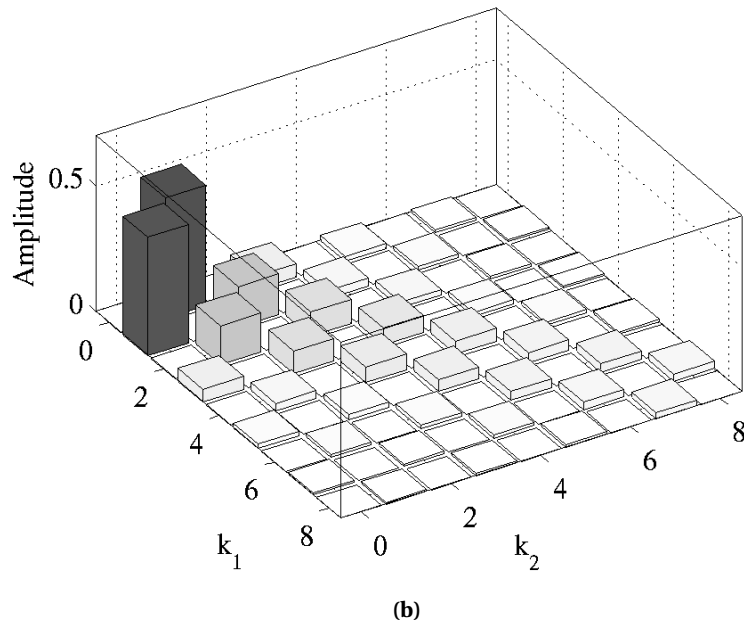
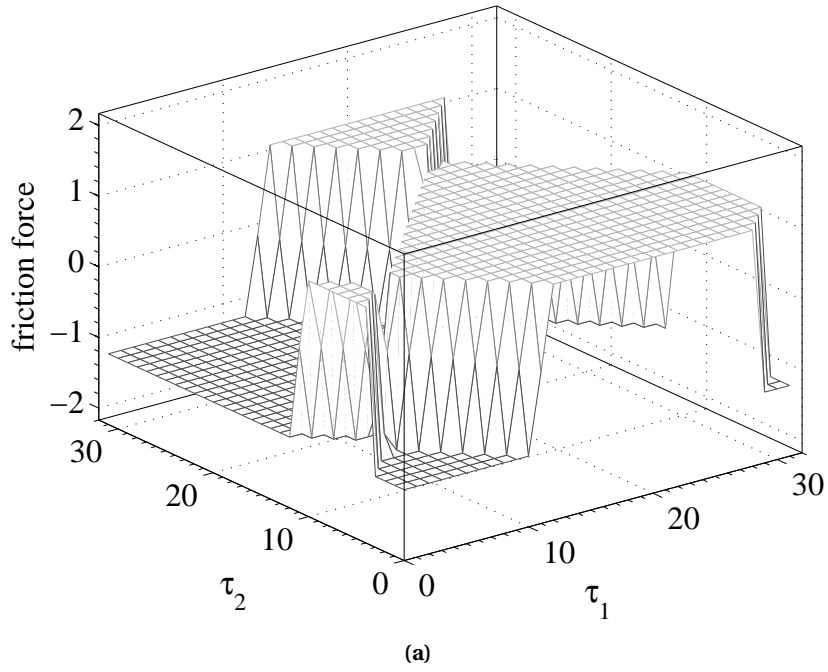


FIG. 4.16 Évolution de la force de frottement à  $f \approx 0,99$ ; domaines hyper-temps (a) et multi-fréquentiel (b); dynamique multi-fréquentielle

# Étude expérimentale de l'amortissement par joncs de friction

*Ce dernier chapitre est dédié à la présentation d'une étude expérimentale visant à caractériser l'amortissement d'un Disque Aubagé Monobloc industriel par des joncs de friction. Le dispositif expérimental, les moyens de mesures et d'excitation dont le développement a constitué une part importante de cette étude seront décrits en détails. Ensuite, les premiers résultats de la campagne d'essais seront présentés et une corrélation partielle avec les modélisations précédemment présentées sera proposée.*

## 5.1 Objectifs de l'étude expérimentale

### 5.1.1 Contexte et problématique

Les phénomènes mis en jeu lors de l'utilisation de technologies d'amortissement par frottement sont d'une complexité et d'une variabilité importantes. Par conséquent, les études expérimentales restent bien souvent indispensables d'une part pour la compréhension des phénomènes mais aussi pour la validation et la calibration des outils de simulation. Dans le domaine des turbomachines, la grande majorité des études que l'on peut trouver dans la littérature porte sur les frotteurs sous plate-forme utilisés dans les assemblages aubes-disque traditionnels (voir chapitre 1). Ces caractérisations sont généralement réalisées en isolant une structure (parfois de géométrie simplifiée) sur des machines dédiées et dans un environnement maîtrisé. Par exemple, nous pouvons citer deux études menées respectivement par l'ECL (Charleux et al., 2006) et par l'Imperial College (Sever et al., 2007) visant à caractériser l'effet du frottement en pied d'aube pour la première et l'efficacité d'amortisseurs sous plates-formes pour la seconde. Ces études sont basées sur des essais en rotation et sous vide dans le but de s'affranchir des effets aérodynamiques.

Le cadre du projet de caractérisation des joncs de friction qui nous intéresse ici est plus ambitieux. En particulier, la structure d'étude, un Disque Aubagé Monobloc industriel, est plus complexe et cette complexité se répercute sur l'ensemble de la machine ; par exemple, des moyens d'excitations et de mesure ont été spécifiquement développés.

### 5.1.2 Présentation de la structure d'étude et du champ d'investigation

Cette campagne d'essais a donc pour objet la caractérisation de l'amortissement par joncs de friction d'un disque aubagé. La structure d'étude est un Disque Aubagé Monobloc de compresseur HP issu d'un démonstrateur de moteur civil et fourni par Snecma. Cette structure nous avait par ailleurs servi d'exemple industriel au chapitre 3 (figure 3.8a). Elle n'était à l'origine pas munie de gorges pour l'implantation de joncs de friction et a donc fait l'objet de retouches. Plusieurs zones d'implantation potentielles de joncs (gorges) ont donc été définies ; certaines pouvant accueillir des joncs de dimensions différentes. Un nouveau maillage, représenté en figure 5.1a, a été réalisé pour tenir compte de ces modifications géométriques. Le disque possède trois zones d'implantation des joncs et, pour deux d'entre elles, deux dimensions de joncs sont possibles. Les joncs, fournis par Snecma, sont réalisés dans un alliage à base Nickel revêtu d'un matériau auto-lubrifiant à sec.

On peut distinguer deux objectifs principaux dans cette étude. Le premier, principalement expérimental, consiste à étudier l'efficacité des joncs de friction en fonction des différents paramètres. Les paramètres principaux, dont il s'agit de caractériser l'influence, sont la vitesse de rotation et l'excitation en termes de fréquence, de forme et d'amplitude. Pour cela, un certain nombre de modes ont été identifiés (d'après des simulations numériques) comme potentiellement intéressants vis à vis de l'amortissement par joncs de friction. Les résultats présentés dans ce chapitre, qui correspondent aux premiers résultats de cette étude, sont focalisés sur le troisième mode à quatre diamètres nodaux. La déformée modale de ce mode, calculé à une vitesse de rotation de 1000 tours par minutes, est représentée en figure 5.1b. On notera en particulier la participation relativement importante du disque dans le mouvement global, ce qui laisse présager d'une bonne efficacité des joncs de friction. En figures 5.1c et 5.1d, nous présentons aussi les champs de déformation dans les deux directions principales pour ce mode cible ; les valeurs de déformation correspondent à un niveau de déplacement normé à 1 mm sur le degrés de liberté ayant le plus grand déplacement. Ici, le maximum de déplacement est obtenu en tête d'aube, au niveau du bord d'attaque et dans la direction axiale (Z).

D'autre part, du point de vue expérimental, d'autres aspects pourront faire l'objet d'une attention particulière comme par exemple le comportement en endurance ou encore l'usure des pièces.

Le deuxième objectif de cette étude concerne, en plus de ces aspects expérimentaux, une composante numérique. Il s'agit en effet d'utiliser les résultats d'essais et éventuellement les études d'influence dans le but de calibrer et de valider, dans une certaine mesure, les outils de simulation développés dans le cadre de ce travail de thèse. La calibration des modèles numériques et des résultats de simulation à partir d'essais expérimentaux n'est pas une chose facile, surtout lorsque l'on s'intéresse à des structures complexes présentant des non-linéarités. Dans ce chapitre, une comparaison partielle des résultats expérimentaux et des résultats de simulations numériques sera proposée. Nous nous attacherons principalement aux aspects qualitatifs et phénoménologiques.



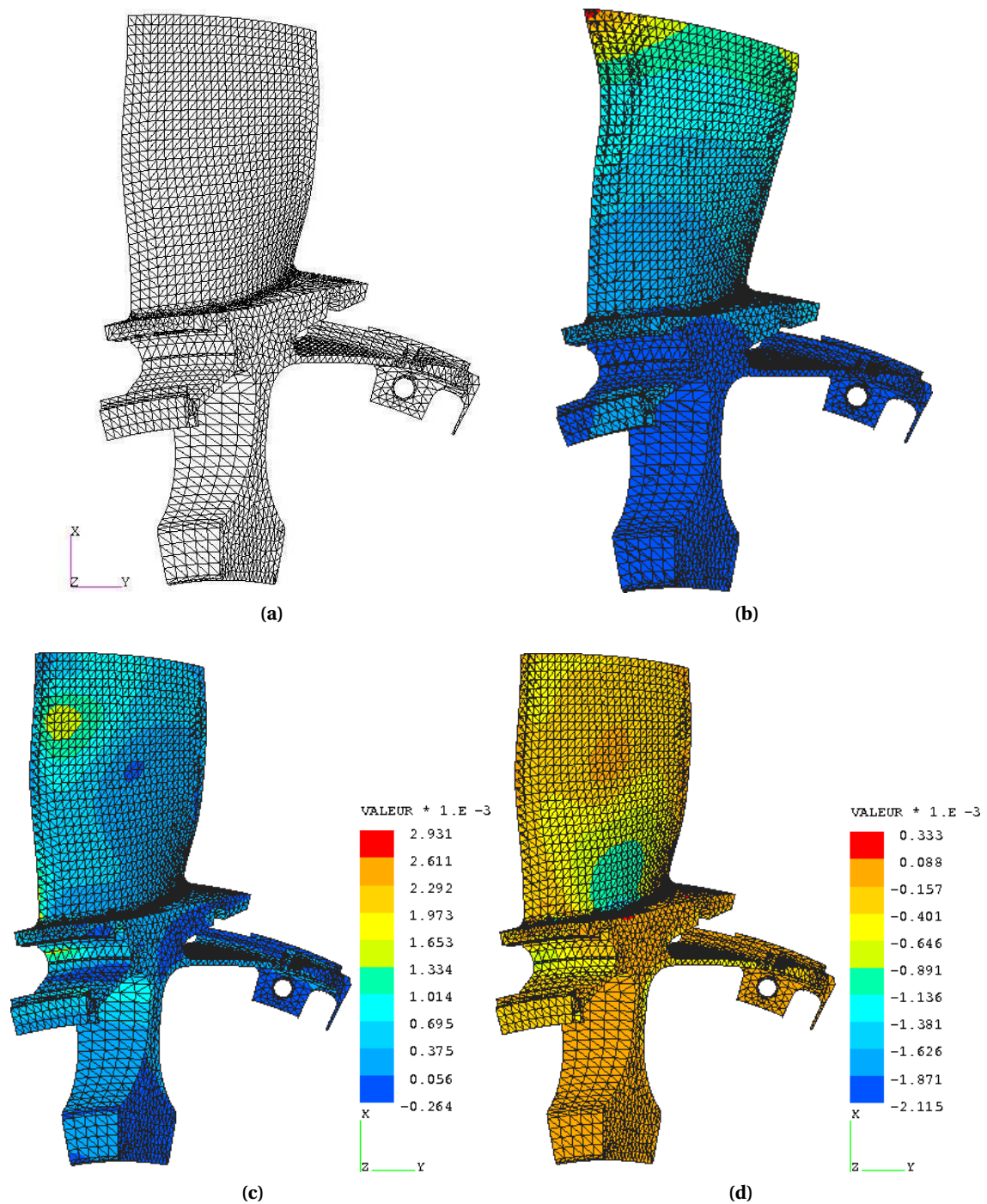


FIG. 5.1 Structure d'étude : (a) maillage d'un secteur, (b) déformée modale, (c) et (d) champ de déformation dans les directions principales du 3ème mode à 4 diamètres.



## 5.2 Méthodes expérimentales

### 5.2.1 Description générale du banc d'essais

Le Disque Aubagé Monobloc de cette étude a été adapté sur le banc de friction en rotation sous vide de la « Plate-forme Machines Tournantes » du LTDS/D2S à l'École Centrale de Lyon sur lequel ont été précédemment effectuées des campagnes d'essais de caractérisation du frottement en pied d'aube et de frotteurs sous plates-formes.

Ce banc permet d'étudier un disque en rotation dans une chambre à vide afin de s'affranchir des effets aérodynamiques. Une photographie de ce banc est proposée en figure 5.2. Le montage a donc

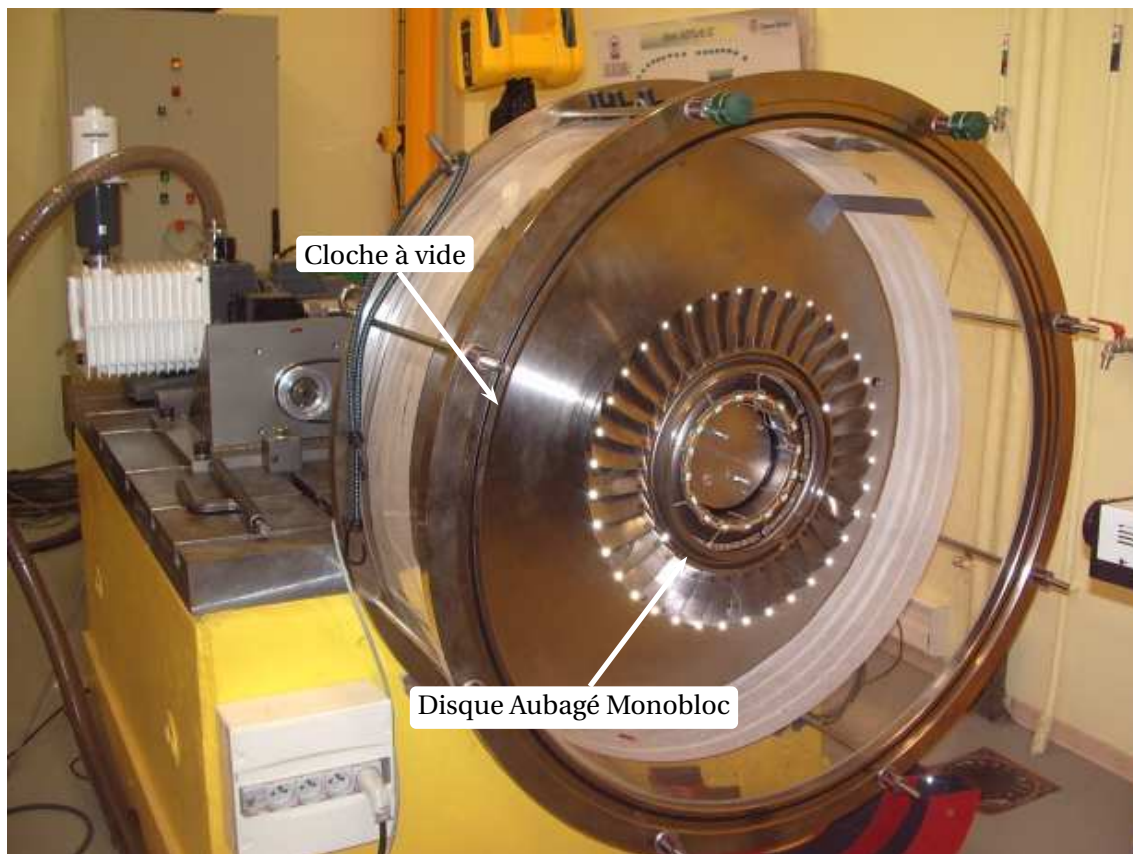
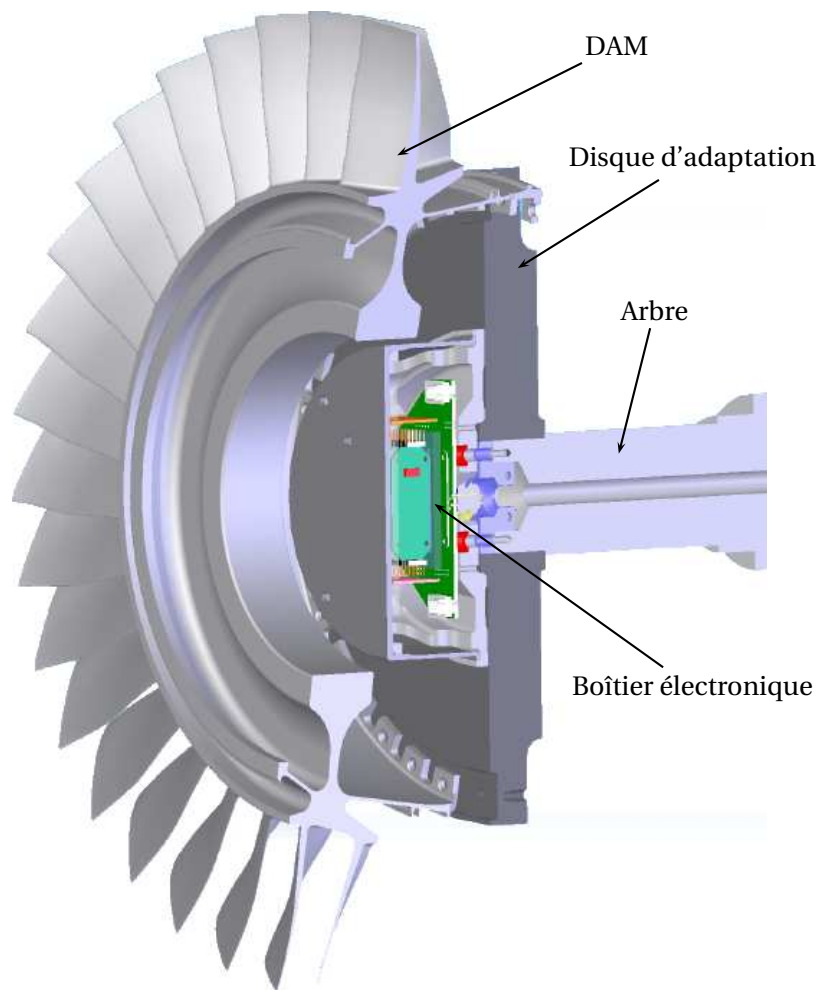


FIG. 5.2 Banc d'essais

été modifié pour intégrer un Disque Aubagé Monobloc et plusieurs améliorations ont été apportées. Un système de télémétrie pour l'acquisition des données de mesure en rotation a été intégré et les possibilités d'excitation ont été étendues. D'autre part, un disque d'adaptation permettant la fixation du Disque Aubagé Monobloc sur l'arbre existant ainsi que celle du boîtier de mesure a été rajouté (voir figure 5.3). La conception de ce disque a fait l'objet d'un compromis de façon à minimiser son influence sur la dynamique du disque aubagé pour les modes cibles tout en minimisant



**FIG. 5.3** CAO du montage expérimental comprenant le DAM, le disque de liaison, le boîtier électronique et l'arbre.

sa masse. En effet, une masse ajoutée trop importante aurait abaissé la première vitesse critique de l'arbre et ainsi limité la plage de vitesse de fonctionnement de la machine.

### 5.2.2 Caractéristiques du dispositif d'excitation

L'excitation du DAM en rotation est assurée par des actionneurs piézoélectriques (plaques céramiques de dimension  $30 \times 10 \times 1$  mm équipées de relais) positionnés au niveau de la toile du disque sur la circonférence (figure 5.4).

Le choix de cette implantation répond à plusieurs contraintes :

- les niveaux de déformation pour les modes considérés sont quasiment maximaux dans cette zone ce qui assure une efficacité maximale de l'excitation piézo-électrique en terme de transfert des efforts ;
- la perturbation de la dynamique des aubes, qui nous intéresse principalement, est minime ;

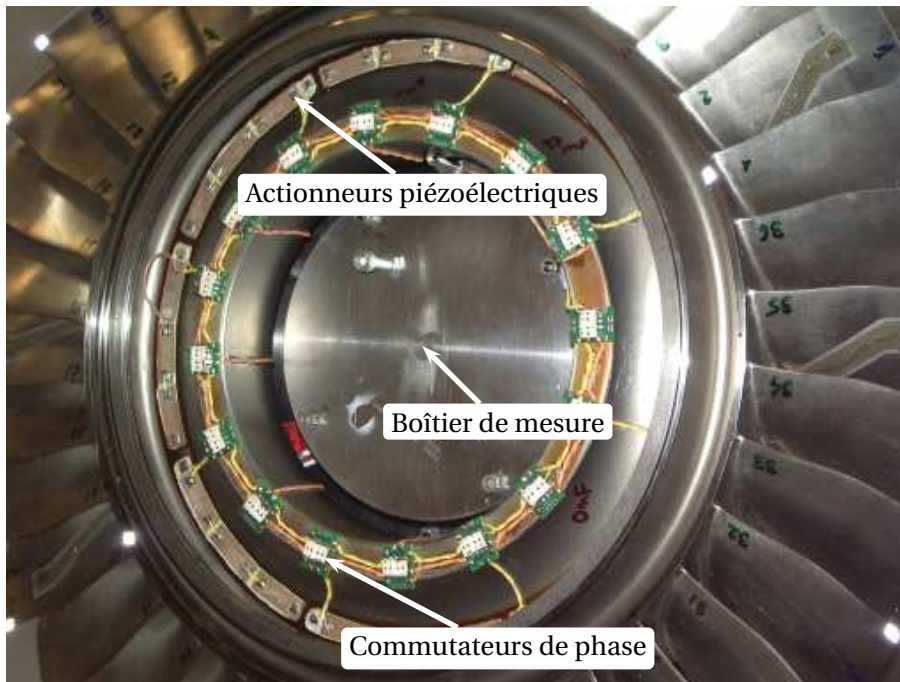


FIG. 5.4 Détails du dispositif d'excitation implanté sur le Disque Aubagé Monobloc

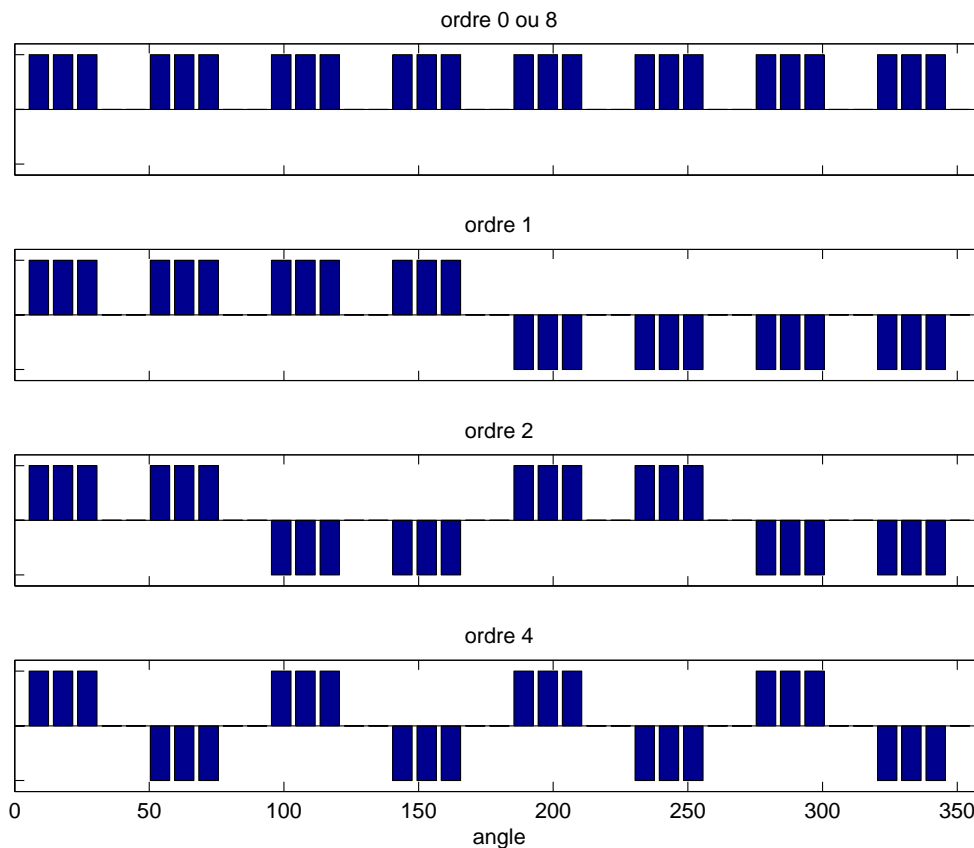
- la surface (couronne) est plane ce qui facilite le collage des plaques céramiques et assure une bonne efficacité de celles-ci.

Au niveau de la couche de colle isolante (de type Epoxy), une couche conductrice a été intégrée afin d'appliquer la différence de potentiel électrique entre les électrodes des plaques céramiques.

Ces actionneurs sont en huit groupes de trois sur chaque face du disque. Ils ont des polarités orientées de façon identique et sont connectés en parallèle au sein d'un même groupe ; ils sont donc sujets à une même elongation pour une tension donnée. Entre chaque groupe, un commutateur de phase électronique est introduit ce qui permet de faire varier la distribution spatiale de l'excitation. Ces commutateurs sont déportés au niveau de la base du disque comme le montre la figure 5.4. Les déphasages possibles sont 0 ou  $\pi$ . L'excitation globale est périodique selon la circonférence et les différentes combinaisons de déphasage permettent de faire varier son nombre de diamètres (ou ordre) :

- lorsque tous les groupes sont en phase, la période de l'excitation est de  $\pi/4$ , on a donc potentiellement une excitation à 0 ou 8 diamètres nodaux ;
- lorsque qu'on introduit un déphasage de  $\pi$  tous les quatre groupes, la période est de  $2\pi$  et l'excitation est à 1 diamètre nodal ;
- avec un déphasage de  $\pi$  tous les deux groupes, l'excitation est à 2 diamètres nodaux (période  $\pi$ ) ;
- enfin, en déphasant tous les groupes, on obtient une excitation à 4 diamètres nodaux et de période  $\pi/2$ .

La figure 5.5 résume ces possibilités.



**FIG. 5.5** Illustration des différentes distributions d'excitation réalisables par les déphasages entre les groupes d'actionneurs.

D'autre part, le dispositif d'excitation permet de réaliser des excitations fixes et tournantes dans le repère tournant. En effet, les faces amont et aval sont équipées d'actionneurs piézoélectriques qui génèrent indépendamment une excitation fixe périodique selon la circonférence et avec un nombre d'onde que l'on peut faire varier comme nous venons de le voir. Pour générer une excitation tournante, il faut combiner les deux faces d'excitation et contrôler les phases de leur alimentation temporelle. Physiquement, les deux séries de plaques piézoélectriques (faces amont et aval) sont décalées d'un angle de  $\pi/8$ . Lorsqu'elles sont alimentées en quadrature temporelle, l'excitation globale est tournante car constituée de deux contributions fixes en quadrature spatiale et temporelle. Le déphasage spatial choisi étant fixe, pour des raisons évidentes de montage, il est optimal pour les excitations à quatre diamètres nodaux (qui ont été privilégiées) mais ne l'est pas pour les excitations à un ou deux diamètres nodaux (présence d'une composante fixe).

### 5.2.3 Instrumentation

La mesure est réalisée au moyen de douze jauges de déformation disposées sur le disque au-bagé. Huit d'entre elles sont sur les pales (voir figure 5.6) et les quatre restantes sont sur la partie

supérieure de la jante du disque. Les choix de l'orientation et de la position des jauges ont fait l'objet d'un compromis de façon à maximiser les déformations mesurées pour tous les modes cibles. L'acquisition des données est assurée par télémétrie. De plus la calibration du dispositif de mesure



FIG. 5.6 Position des jauges sur les pales

(détaillée plus loin) a été réalisée par corrélation avec des mesures par vélocimétrie laser. Enfin, d'autres mesures relatives aux conditions de l'environnement expérimental sont également effectuées ; on mesure ainsi la vitesse de rotation, la pression dans l'enceinte, la température et les niveaux vibratoires sur les paliers de l'arbre.

### 5.3 Résultats expérimentaux

Les résultats présentés dans ce chapitre sont les premiers obtenus lors de la campagne d'essais, pendant la phase de déverminage, et sont donc partiels. En particulier, seul l'un des modes cibles, le troisième mode à quatre diamètres nodaux, est étudié et seul un jonc a été utilisé. L'excitation est fixe à quatre diamètres nodaux et les vitesses d'étude restent inférieures à 2000 tr/min.

#### 5.3.1 Calibration des données de mesure

Afin de pouvoir comparer plus facilement les résultats expérimentaux à ceux d'une modélisation numérique et d'envisager une corrélation, nous avons choisi de calibrer les données expérimentales issues des jauges de déformation. Une analyse modale expérimentale de la structure (montée sur le banc) et à l'arrêt a ainsi été faite. Les mesures ont été réalisées simultanément à

l'aide d'un vibromètre laser, pointant successivement sur chaque pale, au sommet du bord d'attaque et selon la direction axiale (Z), et des jauges de déformation équipant les pales n° 2, 29, 20 et 11 (repérées en rouge sur les figures 5.7). Les caractéristiques modales identifiées sont regroupées

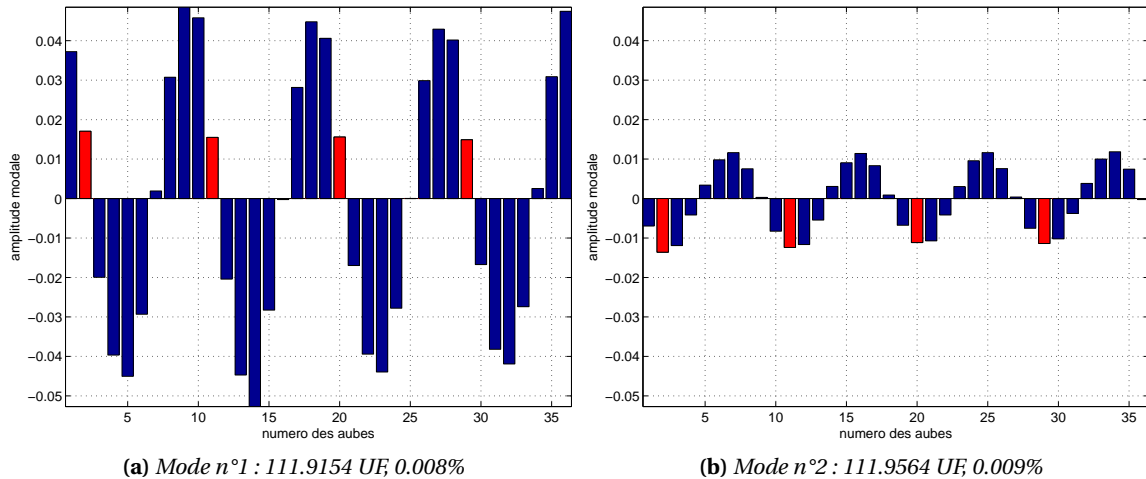


FIG. 5.7 Modes à 4 diamètres nodaux identifiés; voies de mesure de vélocimétrie.

en figure 5.7 (les fréquences sont normalisées et données en *Unités de Fréquence*). On constate tout d'abord que ce mode est très peu désaccordé; le taux de désaccordage étant d'environ 0,04%. Néanmoins, les deux résonances se distinguent sur les réponses fréquentielles puisque les taux d'amortissement de ces deux modes sont très faibles (0,01% en moyenne).

À l'aide de cette identification, il est maintenant possible de déterminer le facteur de calibration entre les déformations mesurées sur les pales instrumentées et le niveau maximum de déformation sur l'aube qui participe le plus : ce rapport vaut 0,32 pour le premier mode et 0,96 pour le second. Cette donnée est importante pour la corrélation avec les analyses modales non-linéaires (issues des simulations numériques) qui fournissent l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude maximale sur l'ensemble des aubes. Ensuite, nous pouvons aussi déterminer le transfert entre les déplacements en tête de pale, dans la direction axiale (déduits des mesures laser) et les déformations mesurées par les jauges; d'après les résultats modaux, ce rapport est en moyenne  $0,5\mu\text{m}/\mu\text{def}$  sur les quatre pales instrumentées. D'après le calcul, les jauges de pales sont quasiment orientées selon la première direction principale de déformation sur ce mode et il semble donc que cette valeur de transfert soit en accord avec celles issues de l'analyse éléments-finis linéaire (figures 5.1c et 5.1d).

Ces deux rapports, qui relie d'une part la déformation des pales instrumentées au maximum de déformation sur l'ensemble des pales pour chaque mode et d'autre part le déplacement sur en tête de pale à la déformation sur cette même pale, seront supposés constants par la suite. Nous négligerons ainsi les effets de la vitesse de rotation, du frottement ou du niveau d'excitation sur ces facteurs; cette hypothèse pouvant être vérifiée *a posteriori* numériquement.



### 5.3.2 Essais préliminaires et validation des données mesurées

À la suite du montage du banc, les premiers essais expérimentaux sont dédiés à la vérification du bon fonctionnement de ce dernier ainsi que de ces composants. D'autre part, plusieurs essais sont aussi nécessaires pour vérifier la validité des données mesurées.

Par exemple, la linéarité du système (sans jonc) a été vérifiée en comparant les réponses fréquentielles pour différents niveaux d'excitation. En figure 5.8, deux réponses en fréquence au voisinage d'une résonance du système en rotation sont représentées pour deux niveaux d'excitation. On constate une très bonne linéarité du système (structure, excitation, mesure, ...) puisque les réponses sont quasiment identiques.

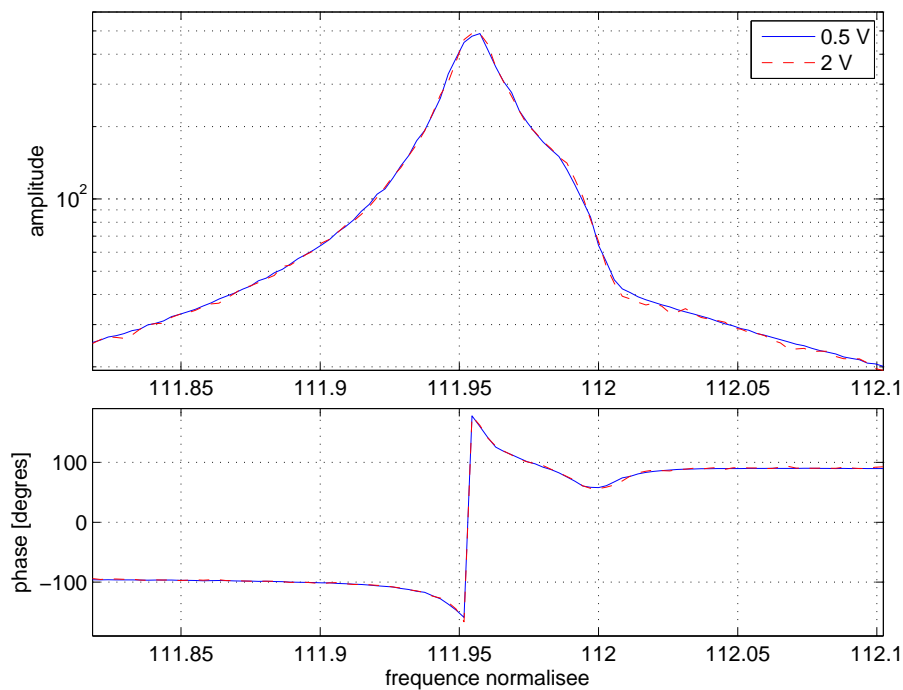
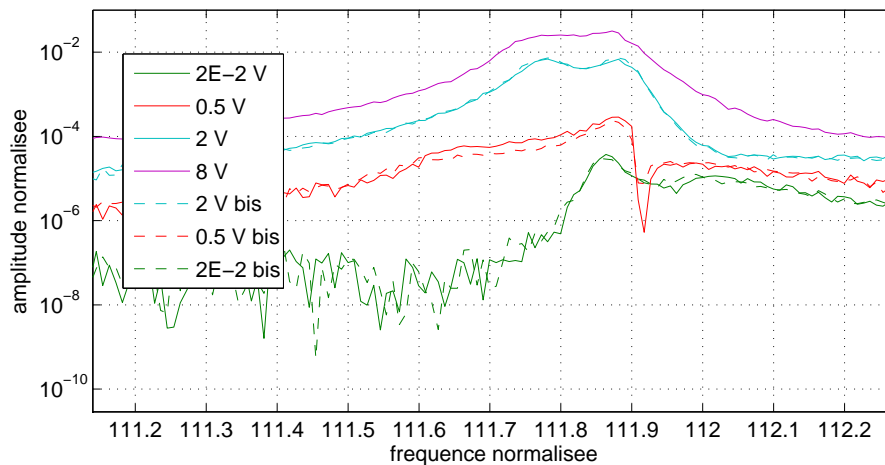


FIG. 5.8 Vérification de la linéarité du système ; FRF pour différents niveaux d'excitation

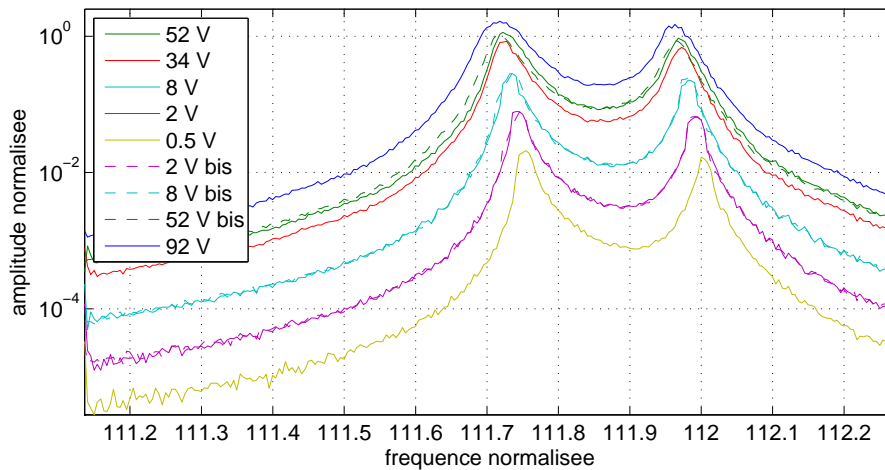
D'autre part, concernant les aspects non-linéaires qui nous intéressent ici principalement, nous avons cherché à vérifier la reproductibilité des essais. Cet aspect est primordiale quant à la validité des résultats d'essais mais il s'agit souvent de la première difficulté à surmonter lorsque l'on réalise des essais sur des systèmes non-linéaires et plus particulièrement en présence de non-linéarités de type frottement ou contact. On peut par exemple citer les travaux de Sever et al. (2007) qui ont mis en évidence la difficulté d'obtenir cette reproductibilité. Ils ont observé en particulier une usure imprévue des pièces en contact et des régimes parfois non-stabilisés. De façon plus générale, la dynamique des systèmes frottants expérimentaux dépend souvent de l'historique des chargements ce qui peut générer des phases transitoires pseudo-stabilisées de durée importante. Parmi les paramètres responsables de cette variabilité, on peut aussi citer les conditions de montage, la non-uniformité des pressions de contact aux interfaces ou encore la présence d'impuretés au niveau des

contacts.

Pour vérifier ce point, nous nous intéressons à la résonance du troisième mode à quatre diamètres nodaux du DAM muni d'un jonc situé sous la plate-forme amont du disque. On se place à un régime donné, plusieurs niveaux d'excitation sont appliqués successivement et il s'agit de vérifier que les réponses sont indépendantes de l'historique. L'excitation est un sinus balayé en fréquence (dans le sens croissant ici) et dont le niveau évolue par paliers de façon cyclique en augmentant puis en diminuant (ou l'inverse). Les figures 5.9 montrent des réponses obtenues pour ce type d'essai et pour différents régimes de rotation :



(a)



(b)

**FIG. 5.9** Montée - descente en niveau d'excitation en présence d'un jonc ; (a) à 1000 tr/min et (b) à 2000 tr/min.

- en figure 5.9a, il s'agit d'un essai à 1000 tr/min pour niveau d'excitation augmentant de 0,02 V à 8 V puis diminuant jusqu'à 0,02 V (comme l'indique la légende) ;



- la figure 5.9b correspond à un essai à 2000 tr/min pour un niveau d'excitation d'abord diminuant de 52 V à 0,5 V puis augmentant jusqu'à 92 V.

En comparant les premières réponses, représentées en traits pleins, obtenues dans la phase montante en figure 5.9a (respectivement descendante en figure 5.9b) aux secondes, notées « bis » et en pointillés, obtenues en phase descendante en figure 5.9a (respectivement montante en figure 5.9b), on constate qu'elles sont très proches. La reproductibilité des mesures est donc satisfaisante sur cet exemple. On remarquera, par ailleurs, la présence de deux pics au voisinage de la résonance du mode cible. Ceci est lié aux effets du désaccordage de la structure. En pratique, il s'avèrera cependant nécessaire de réaliser au moins un premier cycle tel que ceux que nous venons de présenter afin d'assurer la mise en place de l'interface de contact en position nominale.

### 5.3.3 Essais en rotation avec jonc

Après ces vérifications qui nous confortent quant à la validité et la qualité des données expérimentales, nous allons, dans ce paragraphe, présenter et commenter quelques résultats d'études paramétriques expérimentales. Toujours sur le mode cible à quatre diamètres nodaux, nous avons réalisé des essais avec un jonc (situé sous la plate-forme amont du disque) de diamètre 3 mm pour plusieurs vitesses de rotation et pour chacune d'elles pour plusieurs niveaux d'excitation.

L'excitation est un sinus dont la fréquence varie (après un certain délai permettant l'obtention d'un régime périodique) pour balayer la plage de fréquence au voisinage du mode. Sa distribution spatiale est à quatre diamètres et seule la face amont (visible en face du banc) est active. Il s'agit donc d'une excitation fixe dans le repère tournant. Les jauges dont nous avons récupéré le signal sont situées sur les pales n° 2, 20, 29 et 11. Sur les figures 5.7, les déplacements de ces pales sont représentés en rouge.

Pour le premier exemple, en figure 5.10, les réponses des quatre jauges sont tracées pour différents niveaux d'excitation (associés aux différentes couleurs). On constate que les réponses des jauges à un même niveau d'excitation sont équivalentes ce qui est en accord avec les déformées modales identifiées à l'arrêt et sans jonc (figures 5.7b). Les écarts, de l'ordre de 10% au maximum, peuvent s'expliquer par le désaccordage mais aussi par les erreurs et les dispersions de mesure. Compte tenu de cette constatation, seules les réponses d'une de ces jauges seront dans la suite présentées. D'autre part, on notera, comme précédemment, la présence de deux pics de résonance associés aux deux modes à quatre diamètres nodaux orthogonaux. Rappelons que l'écart fréquentiel entre les pics est dû au désaccordage. Une identification des déformées modales (réalisée à l'arrêt) a montré que l'excitation amont excitait principalement le premier mode (le plus bas en fréquence) ; le second mode étant en quadrature spatiale (déphasage angulaire de  $\pi/8$ ) par rapport à ce dernier. Il semblerait donc naturel que le premier mode réponde plus que le second, ce qui ne semble pas être le cas d'après ces mesures. Ceci est dû à la position des jauges qui sont proches des ventres de ce second mode comme le montrent les déformées modales identifiées représentées en figures 5.7. Pour obtenir les participations réelles de ces deux modes à la dynamique de la roue complète, il conviendrait d'appliquer les facteurs de calibration entre les déformations mesurées et les déformations maximales sur l'ensemble des aubes pour chaque mode. Ceci sera dans la suite réalisé lors de l'identification des paramètres modaux.

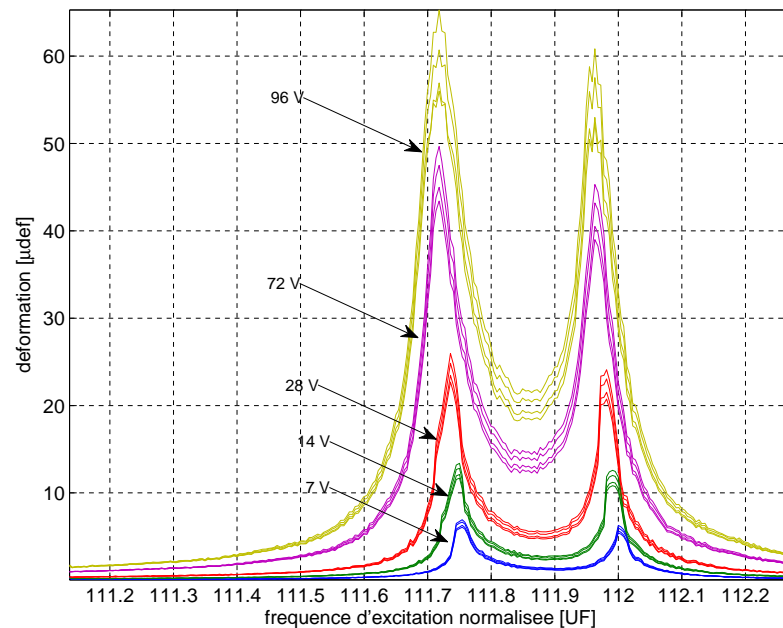


FIG. 5.10 Réponses expérimentales de toutes les jauges pour différents niveaux d'excitation à  $\Omega = 2000$  tr/min

### 5.3.4 Influence de la vitesse de rotation et du niveau d'excitation

Le premier exemple correspond à une vitesse de rotation de 2000 tr/min avec une amplitude d'excitation variant de 10 à 100 V environ. Les figures 5.11 regroupent les réponses (en micro-déformation) mesurées à l'aide d'une des jauges et la souplesse dynamique, c'est à dire, la réponse normée par l'excitation. L'effet non-linéaire est clairement visible, en particulier sur les souplesses dynamiques. La chute des niveaux vibratoires est de l'ordre de 30% pour l'intensité d'excitation maximale, par rapport au niveau à la réponse la moins amortie. On constate un décalage des fréquences de résonance vers les basses fréquences lorsque l'amplitude d'excitation augmente, ce qui est caractéristique des systèmes amortis par frottement. Les deux pics, associés aux deux modes orthogonaux, sont toujours présents et il semble, dans ce cas, que l'effet du jonc soit sensiblement équivalent pour ces deux modes. En effet, les décalages de leur fréquence de résonance et les chutes de niveaux lorsque l'amplitude d'excitation augmente sont du même ordre pour les deux pics. On notera cependant que l'écart entre les deux pics (ici mesuré pour le niveau d'excitation le plus faible) a sensiblement augmenté par rapport à celui dû au désaccordage et mesuré sans jonc. Cet effet pourrait être dû à la segmentation du jonc qui introduit une dissymétrie supplémentaire dans le système.

Sur le second exemple, à 1500 tr/min (figure 5.12), les effets non-linéaires sont plus importants. Il y a toujours une baisse des fréquences de résonance et les amplitudes sont plus fortement atténuées que dans le cas précédent lorsque le niveau d'excitation est important. D'autre part, l'effet d'augmentation de l'écart entre leur fréquence de résonance, observé précédemment, se confirme.

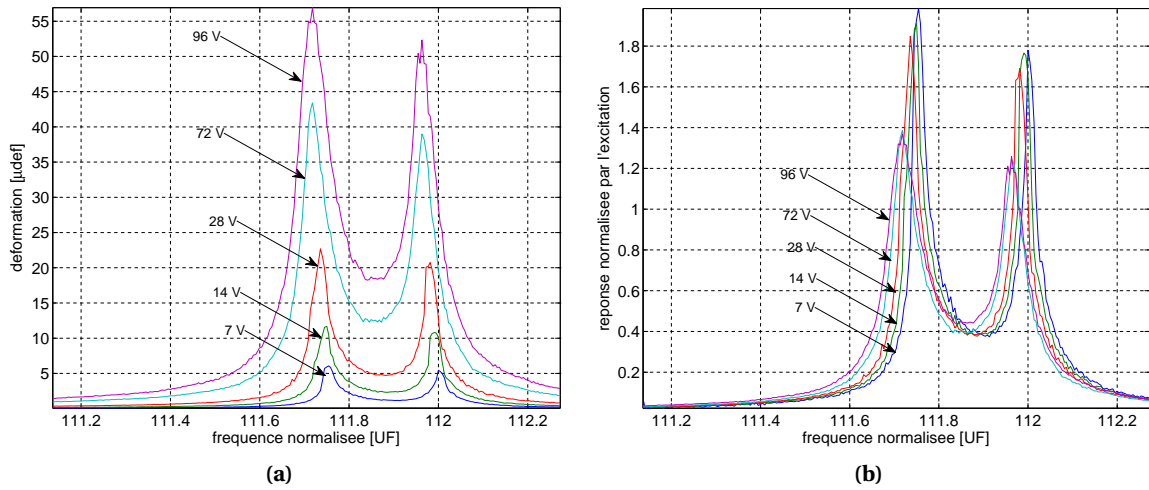


FIG. 5.11 Réponses expérimentales à  $\Omega = 2000$  tr/min pour différents niveaux d'excitation (en V); (a) niveaux de déformation, (b) réponse normalisée par l'excitation.

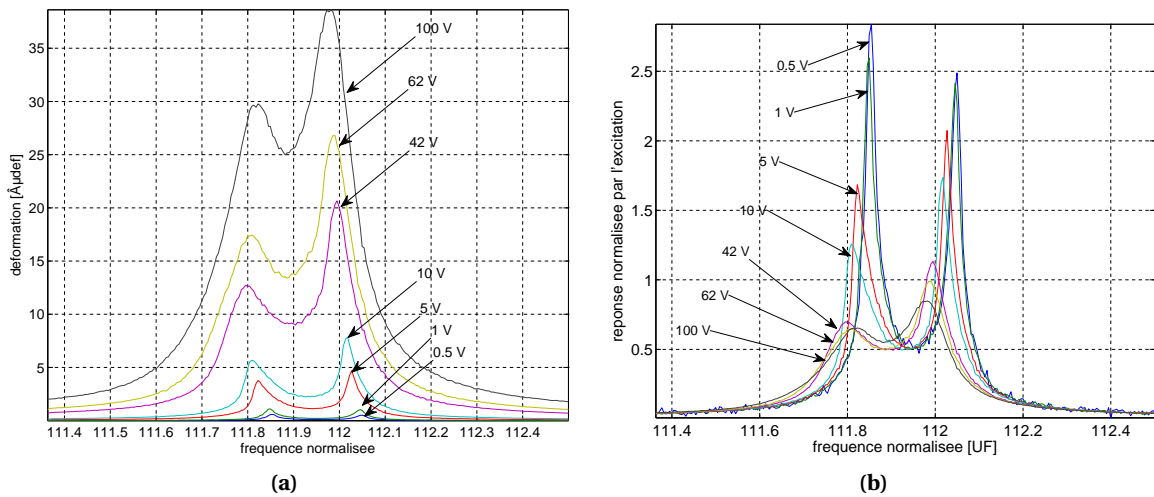
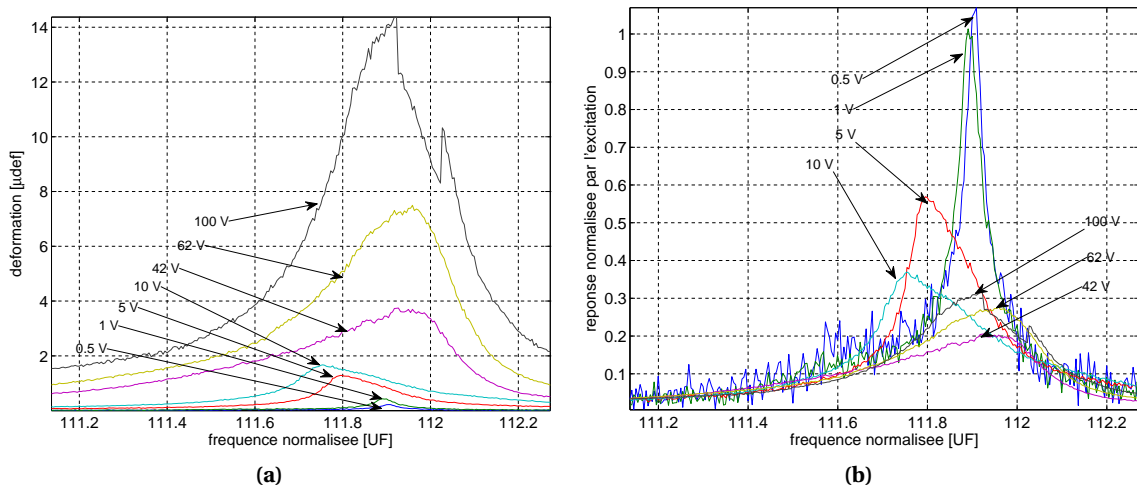


FIG. 5.12 Réponses expérimentales à  $\Omega = 1500$  tr/min pour différents niveaux d'excitation (en V); (a) niveaux de déformation, (b) réponse normalisée par l'excitation.

Cependant, l'effet sur les amplitudes de réponse est ici plus important sur le premier pic que sur le second.

Le dernier exemple concerne une vitesse plus faible encore (1000 tr/min) et les réponses représentées en figure 5.13 diffèrent notablement des deux exemples précédents. En premier lieu, elles



**FIG. 5.13** Réponses expérimentales à  $\Omega = 1000$  tr/min pour différents niveaux d'excitation (en V); (a) niveaux de déformation, (b) réponse normalisée par l'excitation.

ne font apparaître qu'un seul pic quel que soit le niveau d'excitation. Lorsque ce dernier est faible, la fréquence de résonance est proche de celle du premier pic des résultats précédents. Pour des niveaux intermédiaires (entre 0,5 V et 10 V), le décalage en basses fréquences de ce pic est aussi plus important que dans les cas précédents. Enfin, pour des forts niveaux d'excitation (de 40 V à 100 V), le comportement dynamique du système semble changé de façon radicale. En particulier, les fréquences de résonance, après avoir diminué, augmentent avec le niveau d'excitation et la dernière courbe (à 100 V) fait apparaître deux sauts reproductibles après la résonance.

### 5.3.5 Efficacité des joncs de friction

Ces trois exemples illustrent déjà l'efficacité de l'amortissement par joncs de friction. Ceci est particulièrement notable sur les courbes de souplesse dynamique où les chutes de niveaux vibratoires, lorsque l'intensité de l'excitation augmente, sont clairement visibles. Par exemple, sur la figure 5.12b, l'atténuation entre la réponse à 0,48 V et celle à 100 V est de l'ordre de 75%.

Pour synthétiser ces résultats, nous proposons, en figure 5.14, un graphique montrant l'efficacité de ce dispositif d'amortissement par frottement. Il s'agit de représenter, pour les différents essais, l'évolution de la souplesse dynamique maximale (notée  $X/F$ ), pour les modes 1 et 2, en fonction du niveau d'excitation normalisé par rapport à l'effort centrifuge ( $N \sim \Omega^2$ ). On observe une phénoménologie typique des systèmes amortis par frottement puisque l'amplitude de la réponse normalisée par l'excitation est importante pour des valeurs faibles du rapport force sur vitesse de

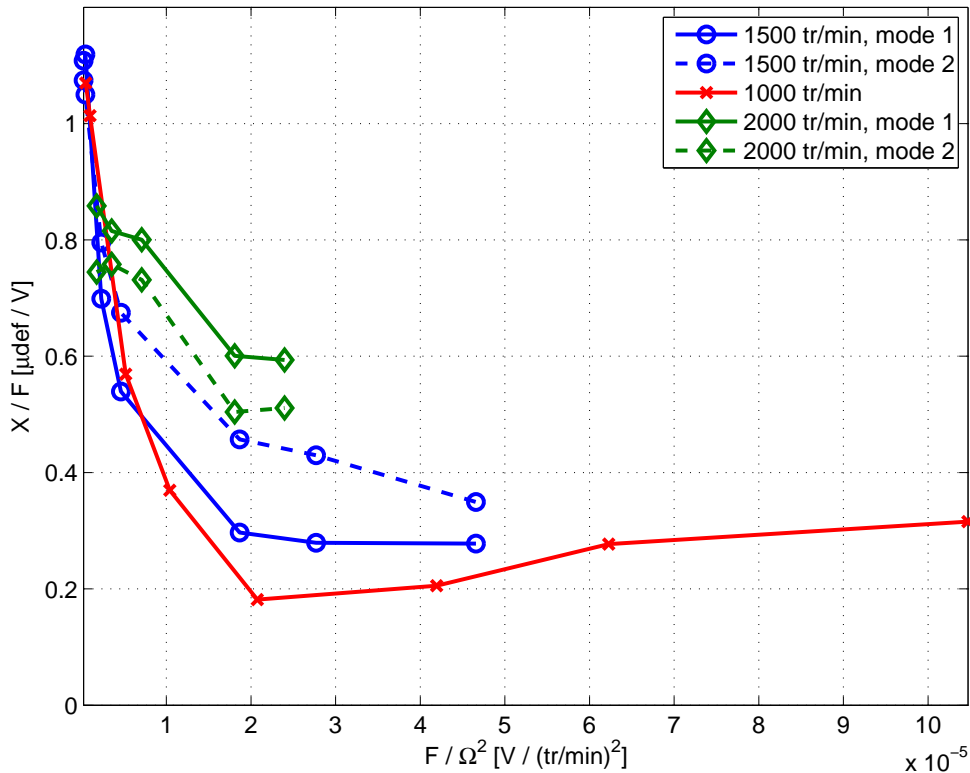


FIG. 5.14 Diagramme d'efficacité des jongs de friction pour plusieurs vitesses de rotation

rotation et diminue lorsque ce dernier augmente. On retrouve bien que l'amortissement par jongs de friction est optimal lorsque le rapport niveau d'excitation sur la force centrifuge est important.

Enfin, les résultats à 1000 tr/min (figure 5.13) illustrent bien la richesse et la complexité des phénomènes dynamiques que l'on peut observer sur ce type de systèmes. Il semble qu'un effet non-linéaire, autre que le frottement, fasse son apparition pour des faibles vitesses de rotation et des forts niveaux d'excitation. On pourra penser par exemple à des phénomènes de décollement locaux du jonc et à des chocs. Cette hypothèse semble plausible bien que non vérifiable à ce stade de l'étude. On comprendra ainsi que les comparaisons avec la modélisation qui seront présentées plus loin ne permettent pas (encore) d'expliquer tous ces phénomènes...

## 5.4 Comparaison avec la modélisation

Dans cette section, les résultats expérimentaux obtenus et présentés précédemment sont comparés avec les prédictions des modélisations numériques. Ces résultats de corrélation sont partiels et n'incluent quasiment pas de recalage. D'autre part, les comparaisons sont effectuées sur des paramètres modaux (fréquences propres et taux d'amortissement) principalement. Une corrélation en réponse forcée pourrait par ailleurs être envisagée mais nécessite une modélisation assez précise des excitations, ce qui n'a pas été réalisé à ce stade de l'étude.

### 5.4.1 Modèle linéaire

Dans un premier temps, nous avons évalué la corrélation entre le modèle éléments-finis qui servira de base aux simulations non-linéaires et les résultats d'une analyse modale expérimentale. Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, le modèle du DAM dont nous disposons initialement a dû être modifié afin d'y intégrer les gorges pour les joncs. Ce nouveau modèle, figure 5.1a, s'avère assez bien représentatif de la dynamique du disque aubagé comme le montre la figure 5.15 où les fréquences propres calculées et identifiées expérimentalement sont comparées. On notera quand même des écarts, parfois significatifs, à certains nombres de diamètres entre les calculs et la mesure. Ceci est principalement dû au fait que le disque d'adaptation (voir figure 5.3) n'a pas été modélisé dans cette première étude. En revanche, pour le mode cible (troisième mode à 4 diamètres nodaux) qui nous intéresse ici (et pour les autres) la corrélation est très bonne puisque l'écart en fréquence est d'environ 0,02%. Ce résultat confirme en particulier la bonne conception du disque

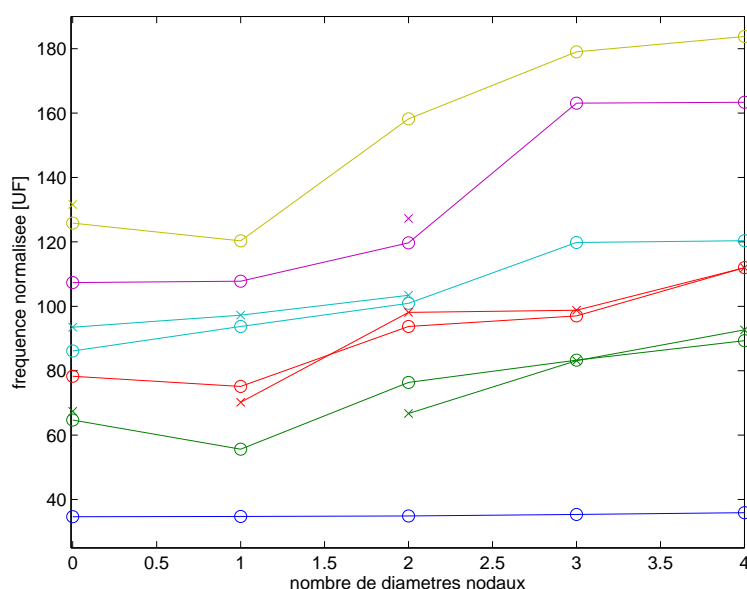


FIG. 5.15 Comparaison des fréquences propres calculées et mesurées ; (—○—) calculs, (—×—) essais.

d'adaptation dont l'influence est minimale sur les modes cibles.

### 5.4.2 Identification expérimentale des paramètres modaux

Pour cette comparaison avec la modélisation, nous nous sommes principalement intéressés aux paramètres modaux (fréquence propre et taux d'amortissement). Pour cela, il a fallu identifier ces paramètres à partir des résultats expérimentaux en réponse forcée. Ceci constitue déjà une difficulté en soit puisque, le système étant non-linéaire, son identification nécessite en toute rigueur des méthodes adaptées. De nombreuses méthodes existent dans la littérature pour l'identification des systèmes non-linéaires (Kerschen et al., 2006). Un certain nombre d'entre elles porte sur la construction d'un modèle mathématique représentatif du système non-linéaire à partir de don-

nées expérimentales ; c'est par exemple le cas des méthodes basées sur des expansions en séries temporelles de Wiener ou de Volterra (Worden et Tomlinson, 2001) ou encore les modèles de type NARMAX (Billings et Tsang, 1989a,b). Notre objectif étant ici plutôt l'identification de données modales dans le but de comparer ces dernières à une modélisation existante, les méthodes d'*analyse modale expérimentale* apparaissent plus appropriées. Basées sur une description de type *modes non-linéaires*, plusieurs approches ont été proposées pour l'identification de paramètres modaux à partir de réponses forcées sur les systèmes non-linéaires (Setio et al., 1992b,a; Chong et Imregun, 2001; Gibert, 2003).

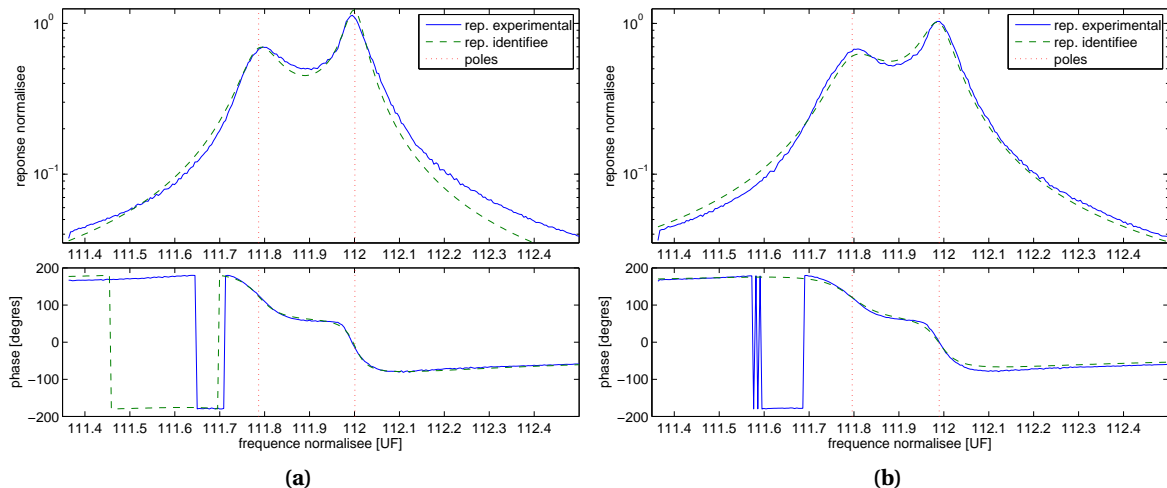
Dans notre cas, l'une des difficultés liées à cette identification est la présence de deux modes très proches du fait du désaccordage. Ici, pour des questions de délais, nous avons choisi de nous contenter d'une identification modale à l'aide d'un lissage sur un modèle de réponse en fréquence en modes complexes :

$$h(\omega) = \sum_{k=1}^N \left( \frac{R_k}{-\lambda_k + i\omega} + \frac{R_k^*}{-\lambda_k^* + i\omega} \right) + E - \frac{F}{\omega^2} \quad (5.1)$$

où :

- N est le nombre de modes identifiés,
- $R_k$  et  $R_k^*$  correspondent au résidu complexe et à son conjugué, pour le mode  $k$ ,
- $\lambda_k$  et  $\lambda_k^*$  correspondent au pôle complexe et à son conjugué, pour le mode  $k$ ,
- E et F sont les termes résiduels en basses et hautes fréquences.

Les figures 5.16 montrent deux résultats d'identification sur les essais à 1500 tr/min et comparent les souplesses dynamiques mesurées et synthétisées à partir des pôles identifiés. On constate que, mal-



**FIG. 5.16** Exemple d'identification modale sur des FRF non-linéaires,  $\Omega = 1500$  tr/min, (a)  $U_{ex} = 42$  V, jauge  $n^{\circ}3$  et (b)  $U_{ex} = 62$  V, jauge  $n^{\circ}2$ .

gré l'utilisation d'une méthode d'identification linéaire sur ces mesures non-linéaires, les réponses en fréquence semblent globalement bien identifiées. Pour chaque essai, les pôles et les résidus des réponses en fréquence sont ainsi identifiés. À partir des résidus, nous pouvons en déduire les parti-



ceptions modales pour chaque résonance dans la réponse du système. Dans la suite, les évolutions de ces paramètres modaux identifiés en fonction des participations modales seront comparées à celle des paramètres modaux obtenus numériquement en fonction de l'amplitude modale.

Conscients des limites d'une telle approche pour le problème qui nous intéresse, nous interpréterons néanmoins les résultats obtenus avec précaution ; en particulier, la dispersion des résultats d'évaluation des taux d'amortissement peut être significative.

### 5.4.3 Estimation des paramètres de contact

Les simulations numériques, auxquelles nous comparons les résultats expérimentaux, sont réalisées à l'aide de la méthode des modes non-linéaires complexes en balance multi-harmonique. Le nombre d'harmoniques est de trois ce qui constitue, ici, un bon compromis entre précision et temps de calcul. Dans cette modélisation, un certain nombre de paramètres doivent être définis. En particulier, il faut choisir une valeur du coefficient de frottement et, selon les modèles de contact et de frottement choisis, il faut aussi choisir des valeurs de paramètres de contact (les raideurs tangentes et normales en particulier).

Le coefficient de frottement est une donnée difficile à quantifier et qui nécessite généralement une identification expérimentale dédiée. De plus, c'est un paramètre d'une variabilité importante en fonction de la température, de la pression de contact, des vitesses de glissement ou encore des états de surface. Ce coefficient de frottement a été caractérisé par ailleurs au moyen d'essais expérimentaux réalisés sur des échantillons des deux matériaux en contact et dans des conditions de glissement important (plusieurs centaines de microns). Ces essais ont montré une augmentation importante du coefficient de frottement en fonction du nombre de cycles et ont mis en évidence une usure prématurée du revêtement du jonc. Cependant, avant usure et à température ambiante, le coefficient est de l'ordre de 0,2 à 0,3. Dans nos applications dynamiques, nous avons considéré ces deux valeurs pour nos comparaisons. En effet, étant donné que d'une part, les ordres de grandeur des déplacements relatifs sont assez différents en dynamique (quelques centièmes de microns) et que d'autre part, aucun glissement d'ensemble n'a été observé ici, il est probable que ce phénomène d'usure prématurée n'apparaisse que plus tardivement. De récents travaux en tribologie semblent appuyer cette hypothèse ; Paulin (2006) a en effet montré que l'usure reste constante au delà d'une période de stabilisation transitoire (de l'ordre de 2000 cycles) si les glissements sont partiels et en l'absence d'impact.

Concernant la modélisation du contact, nous avons utilisé dans la direction normale un modèle de contact unilatéral élastique (pénalité) et dans la direction tangentielle, un modèle de glissement élastique (pénalité). Dans ces deux modèles, des raideurs de contact doivent être choisies. La raideur dans la direction normale a peu d'influence sur les résultats pourvu qu'elle ne soit pas trop faible. Concernant la raideur tangentielle, nous avons choisi de fixer plutôt une valeur de glissement élastique pour une certaine valeur de la force de contact tangentielle. Ainsi, étant donnée,  $\delta_s$ , le taux de glissement élastique, la raideur tangente se définit selon la relation suivante :

$$k_t = 0,8 \frac{F_m}{\delta_s l} \quad (5.2)$$

où  $F_m$  est la force limite de Coulomb (qui dépend du coefficient de frottement et de la vitesse de rotation) et  $l$  est la longueur moyenne des éléments dans la zone de contact. Le facteur 0,8 qui








apparaît dans la relation (5.2) permet ainsi de fixer l'amplitude du glissement élastique,  $\delta_s l$ , pour 80% de la force limite de Coulomb. Dans les applications numériques,  $\delta_s$  sera fixée à  $10^{-5}$  sachant que la distance entre les nœuds est de l'ordre de 5 mm.

#### 5.4.4 Corrélation des paramètres modaux

La procédure d'identification modale que nous avons présentée au paragraphe 5.4.2 nous donne l'évolution des paramètres modaux, fréquences propres et taux d'amortissement, en fonction de l'amplitude de vibration. À ces résultats, nous comparons, pour les essais en rotation présentés au paragraphe 5.3.3 de la section précédente, ceux de simulations numériques réalisées à l'aide de la méthode des modes complexes non-linéaires en balance harmonique. Compte tenu de l'incertitude sur ce paramètre, plusieurs valeurs du coefficient de frottement sont présentés pour les résultats numériques. Enfin, le taux d'amortissement moyen identifié précédemment sur la structure à l'arrêt a été introduit dans les modélisations. Les figures 5.17 et 5.18 regroupent ces résultats et le tableau 5.1 donne la légende de ces figures.

Concernant les essais à 1000 tr/min, dont les résultats expérimentaux ont été présentés en figure 5.13, nous n'avons pas obtenu de résultat satisfaisant lors de l'identification des paramètres modaux à l'aide du lissage fréquentiel utilisé pour les autres essais. En effet, comme nous l'avons souligné précédemment, pour ce point de fonctionnement, le système semble avoir un comportement sensiblement différent de ceux des essais précédents (possibilité de décollements locaux et d'impacts). Par conséquent, la comparaison avec la modélisation ne sera pas présentée.

	mode 1 expérimental
	mode 2 expérimental
	modélisation, $\mu=0,2$
	modélisation, $\mu=0,3$
	modélisation, $\mu=0,4$

TAB. 5.1 Légende des figures 5.17 et 5.18

La figure 5.17 montre la corrélation avec les résultats d'essais à 1500 tr/min. À cette vitesse relativement faible, le jonc a la possibilité de glisser (pour les niveaux d'excitation envisagés) et les effets de l'amortissement par frottement sont donc notables, en témoigne la courbe d'évolution du taux d'amortissement en fonction du niveau d'excitation. On remarque tout d'abord que les résultats des simulations numériques sont du même ordre de grandeur, en terme d'amortissement (le critère dimensionnant), que ceux de l'expérience. Il semble que la modélisation numérique sous-estime légèrement les taux d'amortissement obtenus expérimentalement mais cette observation est à mesurer au regard des éventuelles erreurs lors de l'estimation des paramètres modaux expérimentaux. Ensuite, la plage de variation du coefficient de frottement que nous nous sommes fixés semble correcte au regard de ces résultats. Avec ce modèle, une valeur comprise entre 0,3 et 0,4 permet de représenter assez correctement l'évolution des paramètres modaux. On remarquera cependant que la forme de la courbe d'évolution de l'amortissement n'est pas toujours bien représentée par la modélisation. En particulier, la pente à l'origine du glissement est trop abrupte par rapport aux résultats expérimentaux. Ceci peut être attribué à la discrétisation inhérente au modèle qui ne

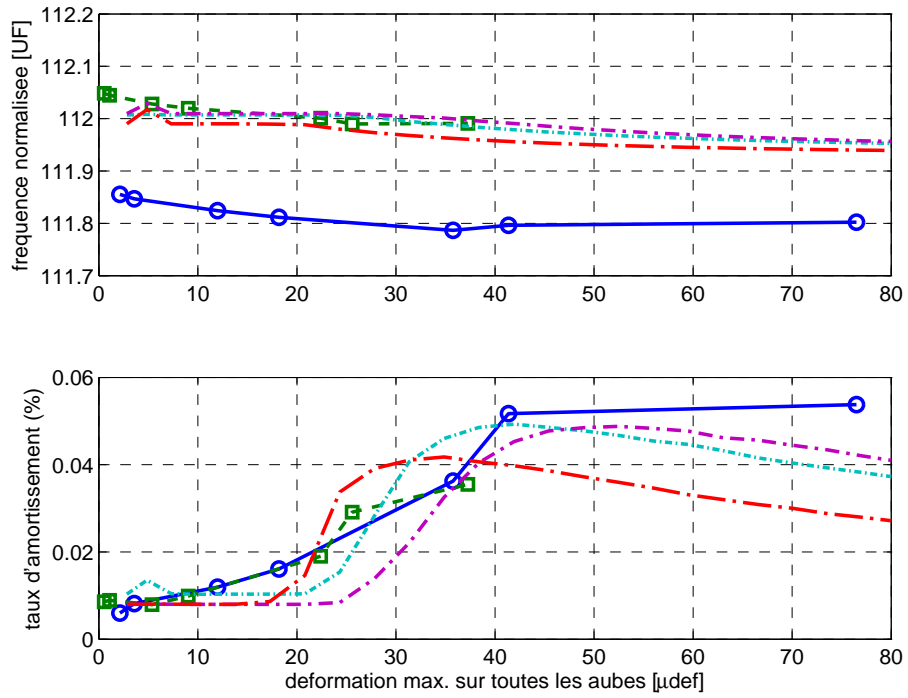


FIG. 5.17 Comparaison calcul / essais à 1500 tr/min

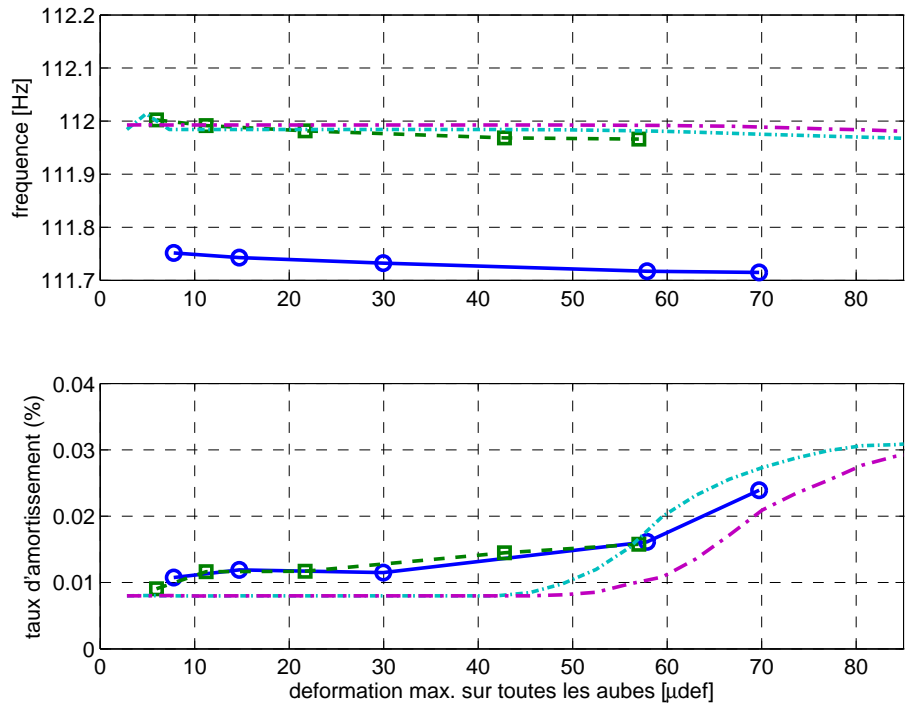


FIG. 5.18 Comparaison calcul / essais à 2000 tr/min

permet pas une représentation des phénomènes de micro-glissements. L'utilisation d'un modèle de type Bouc-Wen, présenté au chapitre 2, pourrait permettre de palier cette incohérence.

La figure 5.18 concerne les essais réalisés à 2000 tr/min. Comme nous l'avons noté lors de l'analyse des réponses mesurées, les effets de l'amortissement par frottement sont moins importants. Là encore, les tendances semblent bien reproduites et les remarques précédentes quant aux limites de la modélisation s'appliquent ici encore.

## 5.5 Conclusions

L'étude présentée dans ce chapitre porte sur la caractérisation expérimentale de l'amortissement par joncs de friction. La première partie de cette étude a été dédiée à la conception d'une machine d'essais adaptée à cette problématique. Cette phase de conception a, en particulier, consisté à adapter un banc d'essais, permettant des mesures en rotation sous vide, présent à l'ECL. La structure d'étude, un disque aubagé monobloc de compresseur HP fourni par Snecma, a donc été intégrée à cet ensemble existant. Des moyens d'essais et des méthodes expérimentales spécifiques ont été développés.

Les premiers résultats expérimentaux de cette étude ont été présentés dans ce chapitre. Ils montrent d'une part un bon fonctionnement du dispositif expérimental et une bonne qualité des résultats de mesure. D'autre part, ils mettent d'ores et déjà en évidence les principaux aspects phénoménologiques de l'amortissement par frottement. Dans les gammes de fonctionnement du banc d'essais, l'efficacité de ce dispositif d'amortissement est avérée et le comportement du système est assez conforme à la phénoménologie attendue.

Enfin, ces résultats expérimentaux ont été confrontés à ceux de simulations numériques réalisées à partir d'une modélisation éléments-finis du disque aubagé. Nous avons comparé l'évolution des caractéristiques modales, fréquences propres et taux d'amortissement, identifiées sur les réponses expérimentales à celles obtenues numériquement. Nous avons étudié l'influence du coefficient de frottement, qui constitue l'une des principales inconnues de notre problème, et la corrélation s'avère satisfaisante pour une valeur identique de ce coefficient pour différents essais en rotation. Ce résultat montre une bonne représentativité et une certaine robustesse de nos modélisations vis-à-vis de l'expérience.

Un travail significatif reste encore à faire sur ces aspects expérimentaux et ainsi que sur la corrélation avec la modélisation afin de valider complètement les outils de simulation que nous avons proposé dans le cadre de cette thèse. Du point de vue expérimental, d'autres conditions d'excitation devront être testées pour l'étude d'autres modes en particulier à différents nombres de diamètres nodaux et différentes fréquences. Le dispositif d'excitation tournante devra être mis en œuvre afin d'évaluer ses effets sur la dynamique du système ainsi que sur l'amortissement par friction. D'autres vitesses de rotation devront être testées ainsi que l'implantation d'autres joncs (positions et dimensions). Enfin, on pourra s'intéresser aux phénomènes de glissement d'ensemble d'un jonc dans sa gorge qui sont susceptibles d'apparaître dans des phases transitoires de fonctionnement ou encore en régime établi sous excitation tournante et lors de pertes de contact.

Une seconde voie de progrès pourra être envisagée concernant l'identification du système non-linéaire. On pourra, en particulier, introduire des méthodes d'identification modale non-linéaires

de façon à améliorer l'estimation des paramètres modaux. Du point de vue de la modélisation, il s'agira tout d'abord de confirmer les résultats de corrélation que nous avons déjà obtenus sur ces autres configurations expérimentales. Une corrélation en réponse forcée, avec au préalable une modélisation de l'excitation, pourra être envisagée. Le calcul des déformations pourrait aussi être intégré dans les simulations afin de s'affranchir des facteurs de calibration. Ensuite, la modélisation pourra être enrichie afin de mieux représenter les phénomènes observés. Il semble en effet indispensable d'améliorer la représentation de l'interface de contact et l'une des voies de progrès principales semble être l'introduction de modèles représentatifs des phénomènes de micro-glissements (modèle de Bouc-Wen). Les effets du frottement statique pourront aussi être étudiés. On pourra enfin penser à introduire une modélisation du désaccordage ou encore à étudier les effets de décollements locaux et d'impacts au niveau de la zone de contact.



## Conclusions et perspectives

Ce mémoire présente les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse sur la problématique de la conception mécanique et de la maîtrise des niveaux vibratoires des roues aubagées de turbomachines. D'une façon générale, les contributions de ce travail à ces thématiques se situent à la fois sur les plans phénoménologique et méthodologique. La majorité des travaux se caractérise par une synthèse de ces deux aspects, l'un étant souvent alimenté par l'autre, ce qui, comme nous l'avons souligné au début de ce mémoire, est caractéristique de la recherche dans le domaine des turbomachines. Nous pouvons maintenant établir une synthèse du travail réalisé et proposer des perspectives sur les différents aspects scientifiques présentés dans ce mémoire.

Le chapitre 1 nous a permis de présenter la problématique centrale de ce travail qu'est la dynamique des roues aubagées. Différents aspects scientifiques et technologiques ont été évoqués afin d'introduire le contexte de cette étude et de poser le cadre des outils méthodologiques utilisés dans celle-ci. On retiendra par exemple la description des phénomènes vibratoires, en particulier d'origine aéroélastique, qui y est proposée et qui met en évidence les orientations présentes et futures des pratiques de conception ainsi que leurs limites. L'une des difficultés qui a été soulevé concerne le problème du calcul des réponses aéroélastiques (de type flottement, en particulier) en présence de non-linéarités structurales. Ceci a constitué une motivation pour le développement de la méthode des *modes non-linéaires complexes*, présentée au chapitre 2, et qui, dans une certaine mesure, répond à cette problématique.

Cette approche originale s'inspire des méthodes fréquentielles existantes, qui sont présentées dans ce chapitre, et permet de réaliser des analyses modales de systèmes dissipatifs non-linéaires. Le formalisme employé s'inspire par ailleurs de celui des modes complexes linéaires. Bien qu'elle n'y soit pas restreinte, cette approche est particulièrement adaptée au dimensionnement d'amortisseurs non-linéaires. Nous avons mentionné, en particulier, la possibilité qu'elle offre de traiter des problèmes de stabilité aéroélastique d'une structure présentant des non-linéarités. Il est désormais possible d'une part de déterminer la stabilité d'un tel système mais aussi de prédire les niveaux vibratoires dans les zones instables (cycles limites). Ce dernier point ouvre des perspectives intéressantes pour la conception des turbomachines modernes. En effet, si les pratiques actuelles préconisent plutôt un fonctionnement des machines dans des zones de stabilité et souvent avec une certaine marge de sécurité, l'extension des domaines de fonctionnement à des régions d'instabilité est envisagée afin d'augmenter les performances. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir prédire et maîtriser les niveaux vibratoires dans ces nouveaux domaines, ce que nous proposons de faire à l'aide d'amortisseurs non-linéaires et de l'analyse en modes non-linéaires complexes. Une

des perspectives envisagées est l'intégration, à cette analyse, d'un couplage aéroélastique.

Une autre problématique qui préoccupe aujourd'hui de plus en plus les motoristes est la prédiction des durées de vie en service des structures et en particulier au niveau des interfaces de contact. Une autre perspective à envisager serait donc l'intégration de paramètres relatifs à la phénoménologie du contact dans cette méthode d'analyse modale. En particulier, il serait intéressant d'étudier les effets de l'usure d'un point de vue modal. Ainsi, lors de la conception des structures, on pourrait prédire, en plus des paramètres modaux classiques (fréquence propre et taux d'amortissement), l'usure d'un point de vue dynamique et par conséquent privilégier une conception plutôt qu'une autre vis-à-vis de ce critère.

Enfin, à plus long terme, ces méthodes d'analyse modale non-linéaire pourraient être utilisées en dehors du cadre stricte de la conception. Par exemple, on pourrait envisager d'intégrer ces méthodes à des fonctions de surveillance en fonctionnement (*monitoring*) afin de détecter les effets de phénomènes dangereux pour l'intégrité du moteur (de type usure, ou fissuration) sur les paramètres modaux en prévention d'éventuelles défaillances.

D'autre part, dans le contexte de la simulation des structures à symétrie cyclique et plus particulièrement des roues aubagées monoblocs, nous avons mis en évidence les limites des modélisations actuelles pour traiter le problème des phénomènes vibratoires multi-étages. Ceci nous a conduit à développer une approche de modélisation en *symétrie cyclique multi-étage*. Cette méthode, présentée au chapitre 4, constitue probablement la contribution la plus importante d'un point de vue industriel. Elle se place à la fois en rupture par rapport à l'état de l'art des méthodes de simulation des ensembles multi-étages de roues aubagées et en continuité par rapport à la modélisation classique en symétrie cyclique mono-étage. Si les bases du cadre mathématique sont clairement définies, il reste néanmoins à déterminer les limites de cette méthode dont la précision est surprenante bien que son caractère approché soit indéniable.

Cette étude a d'ailleurs donné lieu à un développement majeur dans un code éléments-finis du commerce et ouvre la voie à de nouvelles perspectives dans la conception des rotors de turbomachines. L'une de ces perspectives est bien entendu la possibilité de prédire les phénomènes dynamiques multi-étages au plus tôt des processus de conception. À plus long terme, on pourrait aussi envisager que les conceptions, qui se feraient ainsi sur l'ensemble du rotor, intègrent des critères d'optimisation globaux.

L'étude des deux types d'amortisseurs non-linéaires présentée au chapitre 3 a apporté une contribution principalement phénoménologique et, dans une moindre mesure, sur les aspects liés à la modélisation. L'étude que nous avons menée sur le pompage énergétique constitue une contribution intéressante et originale à une thématique qui fait l'objet de nombreuses recherches actuellement. En particulier, l'étude de non-linéarités hystérétiques et surtout ayant une caractéristique dissipative non négligeable ouvre des perspectives intéressantes en termes d'applications. Il reste néanmoins à concrétiser technologiquement cette étude afin de porter à maturation ce concept de pompage énergétique et de le faire passer de son caractère aujourd'hui plutôt académique à des applications pratiques sur des structures industrielles.

Toujours dans ce chapitre 3, les méthodes non-linéaires présentées au chapitre précédent ont été appliquées avec succès à des structures complexes industrielles ce qui démontre leur capacité à

traiter des systèmes de taille importante. L'étude phénoménologique de l'amortissement par joncs de friction présente, d'un point de vue théorique, les possibilités et les limites de cette technologie. L'une des perspectives envisagées concerne l'étude des glissements d'ensemble qui peuvent potentiellement survenir en fonctionnement. Ceci nécessite un effort de modélisation supplémentaire mais présente un intérêt non négligeable puisque de tels phénomènes, s'ils se produisent, pourraient engendrer une usure prématurée de ces amortisseurs.

L'étude expérimentale, présentée au chapitre 5, complète ce travail puisqu'elle nous a permis d'une part de caractériser expérimentalement l'efficacité de l'amortissement par joncs de friction et d'autre part de confronter les outils de simulation numérique développés dans cette thèse par rapport à l'expérience. Le développement de la machine d'essais a constitué une part importante du travail. Les premiers résultats montrent d'une part un bon fonctionnement du banc d'essais ainsi qu'une phénoménologie conforme à ce que l'on pouvait attendre. D'autre part, la comparaison avec les modélisations, même si elle est partielle et incomplète, est encourageante. Un travail important reste néanmoins à faire aussi bien sur le plan expérimental que théorique pour compléter cette étude. Expérimentalement, un certain nombre de configurations d'essais (excitation tournante, gamme de vitesse plus importante, autres modes cibles,...) reste à tester. Il semble aussi que des études plus précises de caractérisation des interfaces de contact soient nécessaires. D'un point de vue numérique, une meilleure description de cette interface de contact (en particulier des phénomènes de micro-glissement) de même qu'un recalage du modèle permettraient sans doute une meilleure corrélation avec les résultats expérimentaux.





# Bibliographie

- AGARD Manual on aeroelasticity in axial-flow turbomachines. Vol. 1 : Unsteady turbomachinery aerodynamics*, M.F. Platzer & F.O. Carta édition, 1987. 8
- AGARD Manual on aeroelasticity in axial-flow turbomachines. Vol. 2 : Structural dynamics and aeroelasticity*, M.F. Platzer & F.O. Carta édition, 1988. 8, 9
- M. Baumgartner, F. Kameier et J. Hourmouziadis. Non-engine order blade vibration in a high pressure compressor. *Proceedings of Twelfth International Symposium on Airbreathing Engines*, Melbourne, Australia, 1995. 10
- M. Berthillier, C. Dupont, R. Mondal et J. J. Barrau. Blades forced response analysis with friction dampers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120:468–474, 1998. doi:[10.1115/1.2893853](https://doi.org/10.1115/1.2893853). 29, 44, 73
- S. Billings et K. M. Tsang. Spectral analysis for nonlinear systems, part i : Parametric nonlinear spectral analysis. *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, 3:319–339, 1989a. doi:[10.1016/0888-3270\(89\)90041-1](https://doi.org/10.1016/0888-3270(89)90041-1). 162
- S. Billings et K. M. Tsang. Spectral analysis for nonlinear systems, part ii : Interpretation of nonlinear frequency response functions. *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, 3:341–359, 1989b. doi:[10.1016/0888-3270\(89\)90042-3](https://doi.org/10.1016/0888-3270(89)90042-3). 162
- R. Bladh, M. P. Castanier et C. Pierre. Component-mode based reduced order modelling techniques for mistuned bladed disks - part 1 : Theoretical models. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123:89–108, 2001. doi:[10.1115/1.1338947](https://doi.org/10.1115/1.1338947). 26
- R. Bladh, M. P. Castanier et C. Pierre. Effects of multistage coupling and disk flexibility on mistuned bladed disk dynamics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125:121–130, 2003. doi:[10.1115/1.1498267](https://doi.org/10.1115/1.1498267). 120
- R. Bouc. Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis. *Proceedings of the 4th Conference on Non-Linear Oscillation*, Prague, Czechoslovakia, 1981. 44
- T. M. Cameron et J. H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56:149–154, 1989. 41

- J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag, New York, 1981. 55
- M. P. Castanier et C. Pierre. Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. *AIAA Journal*, 40(10):2077–2086, 2002. 27, 33
- D. Charleux. *Étude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006. 47, 68
- D. Charleux, C. Gibert, F. Thouverez et J. Dupeux. Numerical and experimental study of friction damping in blade attachments of rotating bladed disks. *International Journal of Rotating Machinery*, 2006. doi:10.1155/IJRM/2006/71302. Article ID 71302, 13 pages. 29, 73, 145
- J. J. Chen, B. D. Yang et C. H. Menq. Periodic forced response of structures having three-dimensional frictional constraints. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4):775–792, 2000. doi:10.1006/jsvi.1999.2397. 29
- Y. H. Chong et M. Imregun. Development and application of a nonlinear modal analysis technique for mdof systems. *Journal of Vibration and Control*, 7(2):167–179, 2001. doi:10.1177/107754630100700202. 162
- G. Csaba. Forced response analysis in time and frequency domains of a tuned bladed disk with friction dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 214(3):395–412, 1998. doi:10.1006/jsvi.1997.1513. 29, 73
- J. E. Dennis, Jr et R. B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM, 1996. 38
- K. P. Duffy. Durability of the self-tuning impact damper in rotating turbine blades. *9th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference*, Pinehurst, NC, USA, 2004. 30, 32
- D. M. Feiner et J. H. Griffin. Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model – part i : Theory. *Journal of Turbomachinery*, 126(1):150–158, 2004a. doi:10.1115/1.1643913. 26
- D. M. Feiner et J. H. Griffin. Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model – part ii : Application. *Journal of Turbomachinery*, 126(1):159–165, 2004b. doi:10.1115/1.1643914. 26
- J. Färm. Evaluation of wheel dampers on an intercity train. *Journal of Sound and Vibration*, 267: 739–747, 2003. doi:10.1016/S0022-460X(03)00737-5. 30
- O. V. Gendelman, D. V. Gorlov, L. I. Manevitch et A. I. Musienko. Dynamics of coupled linear and essentially nonlinear oscillators with substantially different masses. *Journal of Sound and Vibration*, 286:1–19, 2005. doi:10.1016/j.jsv.2004.09.021. 98
- O. V. Gendelman, E. Gourdon et C. H. Lamarque. Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 294:651–662, 2006. doi:10.1016/j.jsv.2005.11.031. 112

- O. V. Gendelman et Y. Starosvetsky. Quasi-periodic response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink under periodic forcing. *Journal of Applied Mechanics*, 74:325–331, 2007. doi:[10.1115/1.2198546](https://doi.org/10.1115/1.2198546). 112
- C. Gibert. *Analyse modale non-linéaire expérimentale*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2001. 55
- C. Gibert. Fitting measured frequency response using non-linear modes. *Mechanical systems and signal processing*, 17(1):211–218, 2003. doi:[10.1006/mssp.2002.1562](https://doi.org/10.1006/mssp.2002.1562). 162
- J. H. Griffin. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils. *Journal of Engineering for Power*, 102:329–333, 1980. 29
- J. H. Griffin. A review of friction damping of turbine blade vibration. *International Journal of Turbo and Jet Engines*, 7:297–307, 1990. 73
- J. Guckenheimer et P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York : Springer, 1983. 36
- J. Guillen et C. Pierre. An efficient, hybrid, frequency-time domain method for the dynamics of large-scale dry-friction damped structural systems. *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*, Dordrecht, Netherlands, 1999. 29, 45
- K. C. Hall, R. E. Kielb et J. P. Thomas. *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics And Aeroelasticity of Turbomachines*. Springer, 2006. 8, 9, 119
- K. C. Hall, J. P. Thomas et W. S. Clark. Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique. *AIAA Journal*, 40:879–886, 2002. 25, 97
- R. Henry. Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires. *Journal de Mécanique Appliquée*, 4(1):61–82, 1980. 11
- J. A. Judge, C. Pierre et S. L. Ceccio. Mistuning identification in bladed disks. *Proceedings of International Conference on Structural Dynamics Modeling*, Madeira Island, Portugal, 2002. 26
- G. Kerschen, D. M. McFarland, J. J. Kowtko, Y. S. Lee, L. A. Bergman et A. F. Vakakis. Experimental demonstration of transient resonance capture in a system of two coupled oscillators with essential stiffness nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5):822–838, 2007. doi:[10.1016/j.jsv.2006.07.029](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.07.029). 98
- G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis et J. C. Golinval. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(3):505–592, 2006. doi:[10.1016/j.ymsp.2005.04.008](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2005.04.008). 161
- R. E. Kielb, J. W. Barter, J. P. Thomas et K. C. Hall. Blade excitation by aerodynamic instabilities – a compressor blade study. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, Atlanta, Georgia, USA, 2003. 10
- C. Lalanne. *Mechanical vibration & shock. Volume IV, Fatigue damage*. Hermes Penton Science, 1999. 19

- D. Laxalde. Étude de l'amortissement par frottement des structures tournantes. Rapport de stage ingénieur, Snecma Moteurs, 2003. 74
- D. Laxalde, J. J. Sinou, F. Thouverez et J. P. Lombard. Qualitative analysis of forced response of blisks with friction ring dampers. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 26(4):676–687, 2007. doi:10.1016/j.euromechsol.2006.10.002. 75, 80, 82
- D. Laxalde, F. Thouverez et J.-J. Sinou. Dynamics of a linear oscillator connected to a small strongly non-linear hysteretic absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(8):969–978, 2006a. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2006.09.002. 36, 55
- D. Laxalde, F. Thouverez, J. J. Sinou et J. P. Lombard. Forced response analysis of blisks with friction ring dampers. *Proceedings of IFToMM – 7-th International Conference on Rotor Dynamics*, Vienna, Austria, 2006b. 45
- M. Legrand, S. Roques, C. Pierre, B. Peseux et P. Cartraud. n-dimensional harmonic balance method extended to non-explicit nonlinearities. *European Journal of Computational Mechanics*, 15(1-2-3):269–280, 2006. doi:10.3166/remn.15.269-280. 10
- N. Lesaffre, J.-J. Sinou et F. Thouverez. Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5):1005–1032, 2007. doi:10.1016/j.jsv.2006.08.027. 10
- J. P. Lombard, J. Dupeux, C. Dupont, F. Garcin et S. Baumhauer. Mistuning phenomena on bladed disk : Industrial methods and applications. *Proceedings of ASME – Turbo Expo*, Barcelona, Spain, 2006. 27, 33
- A. Lyapunov. *The General Problem of the Stability of Motion*. Princeton University Press, 1947. 54
- J. G. Marshall et M. Imregun. A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications. *Journal of Fluids and Structures*, 10:237–267, 1996. doi:10.1006/jfls.1996.0015. 8, 24, 25
- R. M. Mathison, M. G. Dunn, M. N. Weaver et A. Dushko. Measurement of air film damping effectiveness. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, Vienna, Austria, 2004. 29
- C. H. Menq, J. Bielak et J. H. Griffin. The influence of microslip on vibratory response, part I : a new microslip model. *Journal of Sound and Vibration*, 107(2):279–293, 1986a. doi:10.1016/0022-460X(86)90238-5. 29
- C. H. Menq, J. Bielak et J. H. Griffin. The influence of microslip on vibratory response, part II : a comparison with experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 107(2):295–307, 1986b. doi:10.1016/0022-460X(86)90239-7. 29
- M. P. Mignolet, A. J. Rivas-Guerra et J. P. Delor. Identification of mistuning characteristics of bladed disks from free response data—part i. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(2): 395–404, 2001. doi:10.1115/1.1338949. 26

- Y. V. Mikhlin et S. N. Reshetnikova. Dynamical interaction of an elastic system and essentially non-linear absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 283:91–120, 2005. doi:[10.1016/j.jsv.2004.03.061](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.03.061). 98
- S. Nacivet. *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2002. 29, 47
- S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez et L. Jézéquel. A dynamic lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265:201–219, 2003. doi:[10.1016/S0022-460X\(02\)01447-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01447-5). 46
- A. H. Nayfeh et B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley series in nonlinear science, 1995. 68, 70
- A. H. Nayfeh et D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, 1979. 36, 100
- M. A. Niemotka et J. C. Ziegert. Optimal design of split ring dampers for gas turbine engines. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, 1993. 30, 73, 74
- H. Olsson, K. J. Astrom, C. C. de Wit, M. Gafvert et P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 4(3):176–195, 1998. 44
- C. Padova, J. Barton, M. G. Dunn et S. Manwaring. Experimental results from controlled blade tip/shroud rubs at engine speed. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, numéro GT2006-90049, Barcelona, Spain, 2006. 10
- C. Paulin. *Étude de l'endommagement du contact multicouche aube/disque sous chargement de fretting : Impact des sollicitations variables et de la dimension du contact*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2006. 163
- S. Pernot, E. Gourdon, C. H. Lamarque, M. Gloeckner et T. Griessmann. Experimental dynamics of a four-storey building coupled with a nonlinear energy sink. *ENOC*, Eindhoven, Netherlands, 2005. 98
- E. P. Petrov. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 125(2):364, 2003. doi:[10.1115/1.1539868](https://doi.org/10.1115/1.1539868). 29, 73
- E. P. Petrov. A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 126:175–183, 2004. doi:[10.1115/1.1644558](https://doi.org/10.1115/1.1644558). 38
- E. P. Petrov et D. J. Ewins. Models of friction damping with variable normal load for time-domain analysis of vibrations. *Proceedings of ISMA - Volume 1*, Leuven, Belgium, 2002. 44, 45
- F Pichot, D. Laxalde, J.-J. Sinou, F. Thouverez et J.-P. Lombard. Mistuning identification for industrial blisks based on the best achievable eigenvector. *Computers & Structures*, 84(29-30):2033–2049, 2006. doi:[10.1016/j.compstruc.2006.08.022](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.08.022). 26

- O. Poudou et C. Pierre. Hybrid frequency-time domain methods for the analysis of complex structural systems with dry friction damping. *Proceedings of 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Conferences*, Norfolk, Virginia, USA, 2003. 29, 38, 45, 73
- R. R. Pusenjak et M. M. Oblak. Incremental harmonic balance method with multiple time variables for dynamical systems with cubic non-linearities. *International journal for numerical methods in engineering*, 59:255–292, 2004. doi:10.1002/nme.875. 135
- R. Rand. A direct method for nonlinear normal modes. *International journal of Non-linear Mechanics*, 9:363–368, 1974. doi:10.1016/0020-7462(74)90021-3. 54
- R. M. Rosenberg. The normal modes of nonlinear n-degrees-of-freedom systems. *Journal of applied Mechanics*, 30:595–611, 1962. 54
- K. Y. Sanliturk, D. J. Ewins et A. B. Stanbridge. Underplatform dampers for turbine blades : Theoretical modelling, analysis and comparison with experimental data. *Journal of Engineering fo Gas Turbines and Power*, 123:919–929, 2001. doi:10.1115/1.1385830. 29
- F. Schilder, W. Vogt, S. Schreiber et H. M. Osinga. Fourier methods for quasi-periodic oscillations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(5):629–671, 2006. doi:10.1002/nme.1632. 37, 67, 135
- E. Seinturier, J. P. Lombard, M. Dumas, C. Dupont, V. Sharma et J. Dupeux. Forced response prediction methodology for the design of hp compressors bladed disks. *Proceedings of ASME – Turbo Expo*, numéro GT2004-53372, Vienna, Austria, 2004. 24
- S. Setio, H. D. Setio et L. Jézéquel. A method of non-linear modal identification from frequency response tests. *Journal of Sound and Vibration*, 158(3):497–515, 1992a. doi:10.1016/0022-460X(92)90421-S. 162
- S. Setio, H.D. Setio et L. Jézéquel. Modal analysis of nonlinear multi-degree-of-freedom structure. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 7(2):75–94, 1992b. 162
- I. A. Sever, E. P. Petrov et D. J. Ewins. Experimental and numerical investigation of rotating bladed disk forced response using under-platform friction dampers. *Proceedings of ASME turbo Expo*, Montréal, Canada, 2007. 145, 154
- S. W. Shaw et C. Pierre. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1):170–173, 1991. doi:10.1016/0022-460X(91)90412-D. 55
- S. W. Shaw et C. Pierre. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3):319–347, 1994. doi:10.1006/jsvi.1994.1021. 54
- S. H. Song, M. P. Castanier et C. Pierre. Multi-stage modeling of turbine engine rotor vibration. *Proceedings of ASME IDETC/CIE*, Long Beach, CA, USA, 2005. 120
- A. V. Srinivasan. Vibrations of bladed disks assemblies : A selected survey. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106(2):165–168, 1984. 26



- A. Sternchuss et E. Balmès. Réductions de modèles de rotors de turbomachines. *Actes du 8-ème colloque national en calcul des structures*, Giens, France, 2007. 120
- M. A. Swikert et R. L. Johnson. Friction and wear under fretting conditions of materials for use as wire friction dampers of compressor blade vibration. Rapport technique, 1968. 29
- W. Szemplinska-Stupnicka. *The behaviour of nonlinear vibrating systems, Vols I and II*. Kluwer Academic Publishers, 1990. 37, 55
- W. Szemplinska-Stupnicka. "Non-linear normal modes" and the generalized Ritz method in the problems of vibrations of non-linear elastic continuous systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 18(2):149–165, 1983. doi:10.1016/0020-7462(83)90042-2. 54, 55
- J. Szwedowicz, C. Gibert, T. P. Sommer et R. Kellerer. Numerical and experimental damping assessment of a thin-walled friction damper in the rotating set-up with high pressure turbine blades. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, Barcelona, Spain, 2006. 46
- J. Szwedowicz, T. Secall-Wimmel et P. D'Enck-Kerst. Damping performance of axial turbine stages with loosely assembled friction bolts : the non-linear dynamic assessment, part ii. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, Montréal, Canada, 2007a. 29
- J. Szwedowicz, T. Secall-Wimmel, P. D'Enck-Kerst, A. Sonnenschein, D. Regnery et M. Westfahl. Scaling concept for axial turbine stages with loosely assembled friction bolts : the linear dynamic assessment, part i. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, Montréal, Canada, 2007b. 29
- D. L. Thomas. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1):81–102, 1979. doi:10.1002/nme.1620140107. 11, 17
- I. G. Tokar', A. P. Zinkovskii et V. V. Matveev. On the problem of improvement of the damping ability of rotor blades of contemporary gas-turbine engines. *Strength of Materials*, 35(4):368–375, 2003. doi:10.1023/A:1025838324211. 29
- A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, O. Gendelman et L. Bergman. Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments. *Journal of Sound and Vibration*, 264:559–577, 2003. doi:10.1016/S0022-460X(02)01207-5. 36, 98
- A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Pilichuk et A. A. Zevin. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley series in nonlinear science, 1996. 54
- A. F. Vakakis et R. H. Rand. Non-linear dynamics of a system of coupled oscillators with essential stiffness non-linearities. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39:1079–1091, 2004. doi:10.1016/S0020-7462(03)00098-2. 98
- R. Valid et R. Ohayon. Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques. *La recherche aérospatiale*, 4:251–263, 1985. 11
- G. von Groll et D. J. Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 214(2):223–233, 2001. doi:10.1006/jsvi.2000.3298. 68



- J. H. Wang et W. K. Chen. Investigation of the vibration of a blade with friction damper by hbm. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 115:294–299, 1993. doi:[10.1115/1.2906708](https://doi.org/10.1115/1.2906708). 29
- S. T. Wei et C. Pierre. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part 1 : Free vibrations. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110:429–437, 1988a. 26
- S. T. Wei et C. Pierre. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part 2 : Forced vibrations. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110:439–449, 1988b. 26
- Y. K. Wen. Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 102(2):249–263, 1976. 44
- J. Wildheim. Excitation of rotating circumferentially periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 75(3):397–416, 1981. doi:[10.1016/0022-460X\(81\)90386-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90386-2). 11
- S. J. Wildheim. Excitation of rotationally periodic structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46:878–882, 1979. 11, 22
- C. W. Wong, Y. Q. Ni et S. L. Lau. Steady-state oscillation of hysteretic differential model. part 1 : Response analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 120:2271–2298, 1994a. doi:[10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1994\)120:11\(2271\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120:11(2271)). 46
- C. W. Wong, Y. Q. Ni et S. L. Lau. Steady-state oscillation of hysteretic differential model. part 2 : Performance analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 120:2299–2325, 1994b. doi:[10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1994\)120:11\(2299\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120:11(2299)). 46
- K. Worden et G. R. Tomlinson. *Nonlinearity in Structural Dynamics : Detection, Identification and Modelling*. Institute of Physics Publishing, 2001. 107, 162
- B. D. Yang et C. H. Menq. Modelling friction contact and its application to design of shroud contact. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119:958–963, 1997. doi:[10.1115/1.2817082](https://doi.org/10.1115/1.2817082). 29
- B. D. Yang et C. H. Menq. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading : part 1 – stick-slip contact kinematics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 120:410–417, 1998a. doi:[10.1115/1.2818138](https://doi.org/10.1115/1.2818138). 29
- B. D. Yang et C. H. Menq. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading : Part 2 – prediction of forced response and experimental verification. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 120:418–423, 1998b. doi:[10.1115/1.2818139](https://doi.org/10.1115/1.2818139). 29
- M. T. Yang et J. H. Griffin. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123:893–900, 2001. doi:[10.1115/1.1385197](https://doi.org/10.1115/1.1385197). 26

## Table des figures

1.1	Le moteur <i>CFM56-7</i> . . . . .	6
1.2	Architecture d'un compresseur axial . . . . .	7
1.3	Disque Aubagé Monobloc de compresseur HP . . . . .	8
1.4	Illustration des frontières d'un secteur sur une géométrie cyclique simple. . . . .	14
1.5	Exemples de modes à diamètres nodaux non dégénérés . . . . .	16
1.6	Exemples de modes à diamètres nodaux dégénérés . . . . .	17
1.7	Courbe de Wöhler . . . . .	20
1.8	Diagramme de Haigh . . . . .	21
1.9	Exemple de diagramme fréquences / nombre de diamètres nodaux . . . . .	22
1.10	Exemple de diagramme de Campbell . . . . .	23
1.11	Exemple de diagramme zig-zag . . . . .	23
1.12	Évolution du facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage . . . . .	26
1.13	Exemples de structures monoblocs . . . . .	28
1.14	Frottement en pied d'aube et frotteurs sous plate-forme . . . . .	30
1.15	Implantations des joncs de friction . . . . .	31
1.16	Géométrie des joncs de friction . . . . .	31
1.17	Amortisseurs de type « doigts », brevet Boeing . . . . .	32
1.18	Amortisseurs par chocs . . . . .	32
2.1	Lois de contact . . . . .	43
2.2	Lois de frottement . . . . .	44
2.3	Élément de contact frottant nœud à nœud . . . . .	45
2.4	Influence de la modélisation du frottement sur les paramètres modaux . . . . .	47
2.5	Organigramme de la procédure de calcul des Lagrangiens dynamiques . . . . .	50
2.6	Optimisation du nombre d'harmoniques à précision constante . . . . .	53
2.7	Trajectoire d'un mode normal non-linéaire . . . . .	54
2.8	Oscillateur à deux degrés de liberté avec frotteur . . . . .	56
2.9	Loi de frottement régularisée par tangente hyperbolique . . . . .	57
2.10	Trajectoires des modes complexes non-linéaires . . . . .	58
2.11	Valeurs propres (sans amortissement structural) . . . . .	62
2.12	Cycles limites pour différentes amplitudes modales . . . . .	63
2.13	Valeurs propres (amortissement négatif) . . . . .	64
2.14	Prédiction de stabilité . . . . .	65

2.15	Corrélation Réponses en fréquence / Modes Non-linéaires . . . . .	67
2.16	Bifurcation de Hopf . . . . .	71
3.1	Répartition des contraintes à l'interface disque - jonc . . . . .	74
3.2	Comparaison de l'approche quasi-statique avec une approche éléments-finis en balance harmonique . . . . .	75
3.3	Modèle phénoménologique et situation modale . . . . .	76
3.4	Modèle phénoménologie : influence du couplage aube-disque . . . . .	78
3.5	Ligne de nœuds retenus d'un maillage éléments-finis au niveau d'une gorge de jonc . . . . .	79
3.6	Modélisation des joncs . . . . .	79
3.7	Contact cylindre-gorge . . . . .	81
3.8	DAM de compresseur HP ; modèle et situation modale . . . . .	82
3.9	Premier mode de torsion . . . . .	83
3.10	Influence du couplage aube/disque . . . . .	84
3.11	Troisième mode à quatre diamètres nodaux ; deuxième mode de flexion (2F). . . . .	85
3.12	Réponses en fréquence pour différentes valeurs de l'épaisseur du jonc . . . . .	85
3.13	Optimisation multi-modes : FRF . . . . .	87
3.14	Optimisation en fonction du niveau d'excitation : FRF . . . . .	89
3.15	Disque de turbine de turbo-pompe à hydrogène . . . . .	91
3.16	Résultats d'analyse modale non-linéaire . . . . .	92
3.17	Analyse modale non-linéaire : influence du coefficient de frottement . . . . .	93
3.18	Analyse modale non-linéaire : influence de l'épaisseur du jonc . . . . .	94
3.19	Analyse modale non-linéaire : influence des inerties de flexion du jonc . . . . .	95
3.20	Analyse modale non-linéaire : influence du module d'Young du jonc . . . . .	96
3.21	Cycles d'hystérésis, modèle de Bouc-Wen . . . . .	99
3.22	Exemple n°1 - $\gamma = 10^{-3}$ . . . . .	101
3.23	Exemple n°2 - $\gamma = 0.5$ . . . . .	102
3.24	Exemple 1 : modes non-linéaires . . . . .	104
3.25	Exemple 2 : modes non-linéaires . . . . .	106
3.26	Réponse transitoire, $\mathcal{H}_0 = 15$ – Oscillateur principal . . . . .	108
3.27	Réponse transitoire, $\mathcal{H}_0 = 15$ – Absorbteur . . . . .	109
3.28	Réponse transitoire, $\mathcal{H}_0 = 60$ – Oscillateur principal . . . . .	110
3.29	Réponse transitoire, $\mathcal{H}_0 = 60$ – Absorbteur . . . . .	111
3.30	Réponse forcée – Excitation faible . . . . .	113
3.31	Réponse forcée – Excitation forte . . . . .	114
3.32	Comparaison des réponses en fréquences par intégration et balance harmonique . . . . .	115
3.33	Réponses temporelles et sections de Poincaré, $f = 3,82\text{Hz}$ . . . . .	116
3.34	Réponses temporelles et sections de Poincaré, $f = 3,94\text{Hz}$ . . . . .	117
3.35	Réponses temporelles et sections de Poincaré, $f = 3,90\text{Hz}$ . . . . .	118
4.1	Exemple d'architecture multi-étage. . . . .	121
4.2	Représentation matricielle du facteur de couplage entre nombres d'onde . . . . .	122
4.3	Illustration de l'équivalence des nombres d'onde . . . . .	123

4.4	Maillage de deux structures cycliques simples . . . . .	125
4.5	Corrélation en fréquences propres . . . . .	126
4.6	Mode à cinq diamètres nodaux à 6147Hz . . . . .	126
4.7	Mode à un diamètre nodal à 4824Hz . . . . .	127
4.8	Corrélation en réponses forcées . . . . .	128
4.9	Modèles éléments-finis de 2 secteurs de compresseurs HP . . . . .	129
4.10	Influence du couplage inter-étage : diagramme fréquences / diamètres nodaux . . . . .	130
4.11	Exemples de déformées modales multi-étages . . . . .	131
4.12	Réponses en fréquence avec ou sans couplage inter-étage . . . . .	133
4.13	Réponse fréquentielle du premier étage . . . . .	139
4.14	Réponse fréquentielle du deuxième étage . . . . .	140
4.15	Évolution de la force de frottement à $f \approx 1$ . . . . .	143
4.16	Évolution de la force de frottement à $f \approx 0,99$ . . . . .	144
5.1	Structure d'étude et mode cible . . . . .	147
5.2	Banc d'essais . . . . .	148
5.3	CAO du montage expérimental comprenant le DAM, le disque de liaison, le boîtier électronique et l'arbre. . . . .	149
5.4	Détails du dispositif d'excitation implanté sur le Disque Aubagé Monobloc . . . . .	150
5.5	Illustration des différentes distributions d'excitation réalisables par les déphasages entre les groupes d'actionneurs. . . . .	151
5.6	Position des jauges sur les pales . . . . .	152
5.7	Modes à 4 diamètres nodaux identifiés ; voies de mesure de vélocimétrie. . . . .	153
5.8	Vérification de la linéarité du système ; FRF pour différents niveaux d'excitation . . . . .	154
5.9	Montée - descente en niveau d'excitation en présence d'un jonc . . . . .	155
5.10	Réponses expérimentales de toutes les jauges pour différents niveaux d'excitation à $\Omega = 2000$ tr/min . . . . .	157
5.11	Réponses expérimentales à $\Omega = 2000$ tr/min . . . . .	158
5.12	Réponses expérimentales à $\Omega = 1500$ tr/min . . . . .	158
5.13	Réponses expérimentales à $\Omega = 1000$ tr/min . . . . .	159
5.14	Diagramme d'efficacité des joncs de friction pour plusieurs vitesses de rotation . . . . .	160
5.15	Comparaison des fréquences propres calculées et mesurées . . . . .	161
5.16	Exemple d'identification modale sur des FRF non-linéaires . . . . .	162
5.17	Comparaison calcul / essais à 1500 tr/min . . . . .	165
5.18	Comparaison calcul / essais à 2000 tr/min . . . . .	165