Nouvelles techniques de déduction automatiques en logiques polyvalentes finies et infinies du premier ordre

Nicolas Zabel

THÈSE

présentée par

Nicolas Zabel

pour obtenir le titre de DOCTEUR

de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE
(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

en INFORMATIQUE

Nouvelles Techniques de Déduction Automatique en Logiques Polyvalentes Finies et Infinies du Premier Ordre

---

Date de soutenance : 21 avril 1993

Composition du jury :

Ricardo	Caferra	directeur
Luis	Fariñas del Cerro	rapporteur
Dov	Gabbay	examinateur
Ewa	Orłowska	rapporteur
Michaël	Rusinowitch	examinateur
Jean-Pierre	Verjus	president

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Informatique Fondamentale
et d'Intelligence Artificielle de l'IMAG

À ma mère

Remerciements

Je dois tout d'abord remercier Jean-Pierre Verjus, qui a bien voulu nous faire l'honneur de présider le jury.

Je tiens ensuite à remercier Luis Fariñas del Cerro et Ewa Orłowska, qui ont accepté le rôle difficile de rapporteur.

Je remercie particulièrement Dov Gabbay et Michaël Rusinowitch qui ont eu la gentillesse, en acceptant de faire partie du jury, d'apporter à ce travail le soutien de leur renommée.

Je désire également rendre hommage à Ricardo Caferra pour les constants encouragements et conseils prodigués tout au cours de ce travail. J'ai pu trouver en lui un ami et un modèle de chercheur exigeant et rigoureux, qu'il est difficile de suivre.

Finalement, je remercie Thierry Boy de la Tour et Ricardo Caferra, qui, par leur relecture et leurs remarques précises et pertinentes, ont grandement contribué à améliorer la qualité du texte, dans sa forme et son contenu. Leurs critiques amicales m'ont énormément aidé.

Que toutes les personnes de l'équipe ATINF trouvent ici également l'expression de ma gratitude.

Je désire remercier Philippe Jorrand, qui a su faire du LIFIA un lieu de travail extrêment chaleureux.

Introduction

Ces pages tentent de mettre en évidence certains traits caractéristiques des logiques polyvalentes [1] aussi bien du point de vue historique que technique pour mieux apprécier leur intérêt intrinsèque et le champ de leurs applications. Ceci s'impose, car l'utilité des logiques polyvalentes (c'est-à-dire ayant strictement plus de deux valeurs de vérité) a souvent été mise en cause (Cf.par exemple (SCOTT, 1976, URQUHART, 1986)).

C'est donc avec profit que l'on cherchera à comprendre les motivations des logiciens, philosophes, physiciens ou informaticiens qui les ont poussés à "construire" de nouvelles logiques ou à en expliquer la nécessité. Pour l'historique et les justifications philosophiques des logiques polyvalentes (quand il y en a une), on consultera par exemple (BACHELARD, 1940, CARNAP, 1966, GOGUEN, 1969, RESCHER, 1969, MOISIL, 1972, URQUHART, 1986, GOTTWALD, 1989). Évoquons brièvement les idées des "pères fondateurs" avant de définir convenablement ce que nous entendons par logique polyvalente et de détailler davantage les applications de ces logiques.

Antiquité

C'est à ARISTOTE que l'on reconnaît le mérite d'avoir été le premier à étudier le raisonnement en lui-même (indépendamment du "domaine d'application") et de l'avoir formalisé dans son étude systématique du syllogisme (Cf. la seconde partie de l'*Organon*, *De l'interpretation*). Le Stagirite est bien sûr également conscient des limites d'un mode de raisonnement se restreignant à deux valeurs de vérité; l'exemple caractéristique qu'il donne concerne les propositions dont la validité ne

[1] *polyvalent* traduit l'anglais *many-valued* et l'allemand *mehrwertig*; on trouve aussi les termes *plurivalent* ou *multi-valué*.

nous sera connue que dans le futur (LUKASIEWICZ, 1972, PATZIG, 1973).

Ici la logique n'apparaît pas comme *domaine de connaissance* ou comme *science*, mais simplement comme *outil d'investigation* qui permettra d'accéder à la science, et qui d'ailleurs n'est pas encore clairement distinguée de la théorie de la connaissance (HAMELIN, 1905).

Si l'on tente de caractériser la logique d'ARISTOTE, il faut mettre en évidence les points suivants (Cf. (BACHELARD, 1940, HAMELIN, 1905)):

- Un objet ne saurait être satisfait par un prédicat et sa négation (loi de non-contradiction)
- Si un objet n'est pas satisfait par un prédicat, alors cet objet satisfait la négation de ce prédicat (loi de tiers-exclu).

Cette logique cherche à fournir les outils permettant de raisonner juste et d'en convaincre autrui. Il s'agit de parvenir à un consensus et d'éviter les sophismes. BACHELARD (1940) va jusqu'à affirmer que la prépondérance écrasante de la logique bivalente s'explique du fait qu'elle soit issue de la pratique de la dialectique.

Les Mégariques se servaient des sophismes justement pour mettre en gêne leurs adversaires. En fait, vu les règles de la "dispute" ils pointèrent sur les problèmes d'une logique bivalente. Les arguments les plus cités de cette école éclipsée par ARISTOTE, sont (MULLER, 1988):

- le Tas de Sable ou le Chauve
- le Souverain
- Électre
- le Cornu

Les Pères Fondateurs

Mac Coll (1832–1909)

Dans son article très touffu, MACCOLL (1897) propose d'enrichir la logique "usuelle" par l'ajout d'une valeur de vérité supplémentaire. Pour illustrer la pertinence de son idée, il évoque des expressions avec des variables libres, qui suivant l'instanciation de ces variables considérée devient une tautologie ou non. Ainsi, $x+2=5$ ne reçoit ni la valeur "*vrai*" ni la valeur "*faux*", puisque l'expression obtenue en remplaçant x par une valeur numérique n est une expression valide de l'arithmétique, si et seulement si $n = 3$. En fait, dans cet exemple précis, la valeur de vérité supplémentaire ne fournit pas une solution convaincante. En effet, le système

$$\begin{cases} x+2=3 \\ x+1=3 \end{cases}$$

doit évidemment être évalué à "*faux*", si l'on désire préserver la correction, alors que l'équation

$$x - x + 1 = 1$$

doit être interprétée à "*vrai*". Le premier cas montre que la valeur de vérité d'une proposition composée ne dépend pas que de la valeur de vérité des ses constituants, mais d'autres informations (ici, la valeur que prend effectivement la variable x). Le second cas illustre que la troisième valeur de vérité ne tient pas compte de la théorie considérée (ici l'arithmétique). Une solution propre consisterait à définir la valeur de vérité d'une expression atomique A (son sens) comme l'ensemble des toutes les applications σ des variables libres vers les entiers telles qu'en substituant dans A les variables libres par leur image sous σ, on obtienne une expression valide de l'arithmétique. Les connecteurs logiques sont alors à interpréter comme des opérations ensemblistes. MORGAN (1975), par exemple, utilise une sémantique semblable pour les logiques polyvalentes du premier ordre (c'est-à-dire dans la théorie vide). Comme, dans ces deux cas, les ensembles de toutes les solutions d'une expression atomique sont des ensembles récursifs, il est effectivement possible de calculer la valeur de vérité d'une expression composée à partir de celles de ces constituants. [2] RUSSELL (1989) balaie la proposition de MAC COLL en argumentant que les expressions avec variables libres n'ont pas de valeur de vérité.

Il reste cependant que l'idée d'une tierce valeur de vérité qui exprime la possibilité apparaît naturellement.

Vasiliev (1880–1940)

Il a travaillé sur les logiques *non-aristotéliciennes* dans les années 1910–1913. Il cherchait à construire des théories déductives acceptables en tant que logiques, au même titre que la logique classique, dite aristotélicienne. Il était inspiré par la crise de la géométrie euclidienne, provoquée par les travaux de BOLYAI, LOBACHEVSKI et RIEMANN, montrant que des géométries étaient concevables, où le postulat d'EUCLIDE sur les parallèles qui ne se coupaient pas, n'était pas valable. Ceci montrait donc que ce que l'on a accepté comme "tombant sous le sens" pendant plus de deux milles ans, n'était en fait qu'un choix arbitraire (modélisant certes fidèlement la réalité). VASILIEV s'attèle dans ses articles à construire des syllogistiques distinctes de la syllogistique usuelle (n'ayant pas le même ensemble de théorèmes) tout en étant philosophiquement acceptables.

Il en vient à éliminer (ARRUDA, 1977)

- la loi du tiers-exclu: ",Demain, la bataille navale aura lieu.' ou ,Demain, la bataille navale n'aura pas lieu.'" n'est pas valide
- la loi de non-contradiction: aucun *objet* ne peut satisfaire un prédicat et sa négation
- la loi de non-autocontradiction: aucune *proposition* n'est toute à la fois vraie et fausse.

[2] Cette approche ne peut donc pas s'étendre à des théories indécidables, comme les inéquations diophantiennes.

VASILIEV décompose la logique en deux éléments (SMIRNOV, 1989) — c'est là sans doute l'aspect le plus intéressant de sa pensée —

- un noyau absolu, la *métalogique* qui règle notre *jugement* sur les données extérieures, (cette partie ne diffère pas de la logique aristotélicienne)
- la seconde composante dépend de l'*ontologie* que l'on accepte (par exemple: un objet a une essence unique, il ne peut satisfaire un prédicat et sa négation,...)

Cette décomposition rappelle celle de Kant, qui différencie la *logique transcendantale*, constituée des "règles de la pensée absolument nécessaires sans lesquelles il ne peut y avoir aucun usage de l'entendement" (BACHELARD, 1940) de la logique appliquée qui contient "les règles à suivre pour penser justement sur certaines espèces d'objets". On retrouve cette dichotomie de la logique dans les travaux de KIFER & LOZINSKII (1989), qui s'intéressent aux bases de données déductives qui peuvent contenir des inconsistances, mais également, *avec un décalage* dans le traitement des logiques polyvalentes en général, dans la mesure où la logique aristotélicienne sous-tend le méta-langage et forme la métalogique des logiques polyvalentes.

ARRUDA (1977) et SMIRNOV (1989) construisent chacun des systèmes formels qui traduiraient formellement les idées de VASILIEV. ARRUDA y voit également un précurseur des logiques paraconsistantes, c'est-à-dire des logiques absolument consistantes (ou non-triviales: il existe au moins une formule qui ne soit pas un théorème), mais non-consistantes pour la négation (des logiques qui contiennent des théorèmes de la forme $\neg A \wedge A$).

SMIRNOV (1989, pages 625–626) conteste ce point de vue, tout comme il refuse d'y voir simplement un précurseur des logiciens travaillant sur les systèmes polyvalents:

> "[...] the type of non-classical logics proposed by Vasiliev is original, not coinciding with many-valued, intuitionistic or para-consistent logics."

J. Łukasiewicz (1878–1956)

Il vient aux logiques polyvalentes en cherchant une exégèse formelle de la syllogistique d'ARISTOTE. Son dernier livre (ŁUKASIEWICZ, 1972), considéré comme le plus important, traite précisément de ce sujet. Il se consacre dans ses premières années à l'étude de la philosophie et de son histoire d'un point de vue logique (ŁUKASIEWICZ, 1972, page 5). Sa formation de philosophe se double de celle de mathématicien; toute sa vie, il cherchera à clarifier, formaliser les textes fondateurs de la logique occidentale (ARISTOTE et les stoïciens). Son interprétation des futurs contingents chez ARISTOTE (*De l'interprétation*, Chap. 9) l'amène à construire un système trivalent où la tierce valeur, ni vraie, ni fausse, doit rendre compte de l'idée de possibilité (PATZIG, 1973). L'analyse formelle des syllogismes modaux d'ARISTOTE le conduit à étudier d'autres logiques polyvalentes (voir par exemple (ŁUKASIEWICZ, 1972)).

Post

POST (1921) n'avance pas d'interprétations sémantiques lorsqu'il propose ses systèmes polyvalents, construits de façon systématique à partir des tables de vérité de la logique classique.

Une application très intéressante des logiques de POST a été proposée par RASIOWA (1974*b*) qui utilise les logiques de POST comme base à l'édification de logiques algorithmiques incluant des jeux d'instructions plus complets et autorisant l'utilisation de procédures récursives. RASIOWA affirme qu'en modifiant la logique sous-jacente de la logiques algorithmique, les variantes de la logique algorithmique ainsi définies sont conceptuellement plus simples que d'autres extensions permettant également de définir des procédures récursives. Certes du point de vue de la méthode, on peut être sceptique sur le fondé de renouveler au fondamentalement les bases du cadre de travail que forme la logique algorithmique, dès qu'une nouvelle construction syntaxique est ajoutée au langage de programmation employée. Cette nécessité apparaît cependant également dans les théories de la programmation, comme par exemple la sémantique dénotationnelle (STOY, 1977), où dès que l'on ajoute les instructions de sauts inconditionnels, il faut redéfinir la notion d'*état* d'un ordinateur. Certes la notion d'état est moins fondamentale que la logique.

Extension du Domaine des Logiques Polyvalentes

En fait, la définition de ce que recouvrent les logiques polyvalentes, est construite a *posteriori*, à partir des exemples traités par ces pères fondateurs. Le domaine reste hétéroclite sans base, ni finalité communes.

Dans son article de synthèse, URQUHART (1986) s'interroge sur ce qu'il convient d'appeler au juste une *logique polyvalente*. Il dégage les deux critères suivants:

- L'ensemble des valeurs de vérité est étendu à un ensemble plus compréhensif, fini ou infini. Les valeurs de vérité sont totalement ordonnées.

- La valeur de vérité d'une formule composée est une *fonction* des valeurs de vérité des sous-formules [3].

Notre approche est résolument une approche guidée par des soucis d'applications: nous ne nous intéresserons qu'aux logiques polyvalentes qui permettent de formaliser plus naturellement, avec plus de concision ou plus d'élégance certains aspects du raisonnement déductif humain, que ce soit celui d'un informaticien, d'un spécialiste de l' Intelligence Artificielle (IA) ou celui d'un simple mortel. Nous ne voyons à la suite de BACHELARD (1940) dans les logiques polyvalentes que des *logiques appliquées*. C'est pourquoi nous serons amenés à modifier le premier critère d'URQUHART, en considérant des logiques polyvalentes dont les valeurs de vérité forment un treillis, ou ne sont que *partiellement ordonnées* (Cf. CHAPITRE 6).

[3] RESCHER (1969) parle de *truth-functionality*, c'est-à-dire *véri-fonctionnalité* ou *compositionnalité*.

L'interprétation des Valeurs de Vérité

L'évolution des idées sur l'intérêt respectif des logiques polyvalentes chez l'un des pionniers comme LUKASIEWICZ montre bien que l'interprétation de ces valeurs de vérité supplémentaires (et leur choix) constitue un premier problème (LUKASIEWICZ, 1953) [4]:

> When I had discovered in 1920 a three-valued system of logic, I called the third value, which I denoted by 1/2 "possibility".[...] Later on, after having found my n-valued modal systems, I thought that only two of them may be of philosophical importance, viz. the 3-valued and the $\aleph_0$-valued system. For we can assume, I argued, that either possibility has no degree at all or that it has infinitely many degrees, as in the theory of probabilities, and the we have the $\aleph_0$-valued system. This opinion, as I see it today, was wrong. The L-modal logic is a 4-valued system with two values, 2 and 3, denoting possibility, but nevertheless both values represent one and the same possibility in two different shapes. [...]

Il n'y a pas de logique polyvalente "bonne" en soi, mais pour une "application" donnée, une logique convient mieux qu'une autre dans la mesure où elle permet d'*énoncer clairement, simplement et naturellement les propositions* et *les déductions.*

En Métamathématique

En métamathématique, les valeurs de vérité n'ont pas de sémantiques intuitives, les logiques polyvalentes constituent nonobstant un outil sophistiqué, élégant et puissant. Des exemples d'emploi de logiques polyvalentes sont fournis dans le livre d'ANDERSON & BELNAP (1975).

Généralement les logiques polyvalentes servent en métamathématique à prouver l'indépendance des axiomes et des règles d'inférence du système formel que l'on veut étudier (axiomatisation de logiques, de la théorie des ensembles de ZERMELO-FRÄNKEL, ...). En 1918, BERNAYS propose cette technique de preuve d'indépendance pour le cas propositionnel (Voir (BERNAYS, 1926) ou (HILBERT & BERNAYS, 1934–37, tome 1, pages 72–82)). C'est d'ailleurs la seule application des logiques polyvalentes que donne LUKASIEWICZ (1963). La généralisation aux théories axiomatisables dans la logique classique du premier ordre, s'est avérée fructueuse notamment dans l'étude de la théorie des ensembles de ZERMELO-FRÄNKEL en utilisant des modèles dont les valeurs de vérité forment une algèbre de BOOLE (Cf. (GOTTWALD, 1989, pages 271–298, et références), et aussi (URQUHART, 1986)).

[4] Voir la critique véhémente dans (HUGHES & CRESSWELL, 1968) des logiques modales de Lukasiewicz.

En Physique Quantique

La physique nucléaire et la théorie quantique ont bouleversé la représentation que l'on se faisait du monde des particules en appliquant la physique newtonnienne.

Du point de vue de la modélisation, l'hypothèse d'un observateur idéal omniscient et capable de tout mesurer n'est plus compatible avec les fondements de la physique nucléaire comtemporaine. L'inégalité de Heisenberg l'illustre. Elle stipule que la vitesse et la position d'une particule ne peuvent être connues conjointement avec une précision arbitraire. Plus la position est approchée finement, moins la vitesse pourra l'être. Quelque subtil que soit l'expérimentateur, aucune expérience ou mesure lui permettra de connaître simultanément et la position et la vitesse. Similairement, on ne peut mesurer à la fois le moment angulaire d'un électron suivant la direction x et la direction y. Cette impossibilité est due à la nature même des choses selon la théorie quantique et ce n'est donc plus seulement les moyens limités de l'observateur qui expliquent son ignorance. Incidemment la troisième valeur de vérité "*indéterminé*" obtient un statut absolument identique à "*vrai*" et à "*faux*". Par ailleurs, on ne peut plus affecter à la proposition : "*la particule* λ *se trouve à la position* $\langle x, y, z\rangle$ *à l'instant* t une valeur de vérité indépendamment des propositions assertées sur sa vitesse. Ainsi, la compositionnalité n'est plus acceptable.

En fait les propositions élémentaires transcrivant les faits observés ne s'expriment plus par une identification mais par la donnée d'une fonction que l'on peut grossièrement interpréter comme une distribution de probabilité. Ainsi la logique quantique ressemble-t-elle, par cet aspect à la logique probabiliste (voir pour le cas propositionnel (avec une généralisation immédiate au domaine n'ayant qu'un nombre fini et connu d'individus) (NILSSON, 1986) et pour un traitement plus complet (FAGIN *et al.*, 1988, FAGIN *et al.*, 1990, HALPERN, 1990); CARNAP (1966) analyse entre autre les rapports entre la physique et la logique probabiliste).

L'inadéquation de la logique classique pour raisonner conformément à la théorie quantique, est apparue très tôt (voir (BACHELARD, 1940) et (BIRKHOFF & VON NEUMANN, 1936)). REICHENBACH propose la modification la plus simple de la logique classique. Il ajoute une tierce valeur de vérité, qu'il lit "... ne peut être déterminé". BIRKHOFF & VON NEUMANN (1936) étudient plus particulièrement les treillis que forment les combinaisons de faits mesurés. Depuis ses travaux, la logique quantique s'est développée en un domaine indépendant.

En Informatique Fondamentale

Cette troisième valeur peut aussi simplement exprimer l'impossibilité de pouvoir attribuer l'une ou l'autre des valeurs classiques. Ceci apparaît naturellement en informatique fondamentale où le traitement des fonctions partielles rend l'introduction d'une valeur supplémentaire intéressante en vue de simplifier la formulation de propriétés portant sur les fonctions partielles (KLEENE, 1952) et sur les programmes, qui peuvent ne pas terminer (BARRINGER *et al.*, 1984). La logique algorithmique de SALWICKI permet également de raisonner sur les programmes. Il apparaît alors intéressant d'utiliser une logique polyvalente comme logique sous-jacente (RASIOWA, 1974*b*, RASIOWA, 1977, MIRKOWSKA, 1977*b*), car elle permet d'analyser les contenant des commandes CHOIX ou des étiquettes introduites par des LABEL, ainsi que des procédures récursives.

Les logiques polyvalentes pourront également être appelées à jouer un rôle plus important dans l'informatique distribuée (FITTING, 1988*b*), où à chaque processus est associé un lieu logique, régi par la logique classique, et où l'ensemble des processus est régi par la fusion des informations provenant de chaque processus — on comparera ceci avec PFALZGRAF (1991).

En Intelligence Artificielle

En Intelligence Artificielle, on s'intéresse souvent à la modélisation du raisonnement d'un agent pensant supposé imparfait (non-omniscient, éventuellement autocontradictoire, ...) et confronté à un monde, qui évolue. Tout ceci crée une situation radicalement différente de celle à laquelle la logique formelle nous a habitués. Les différents degrés de croyance de l'agent raisonnant fournissent les différentes valeurs de vérité et introduisent naturellement des logiques polyvalentes [5].

Par ailleurs, si l'agent raisonne dans un monde en évolution, le temps qu'il lui faut pour inférer, intervient également. Ceci explique l'attrait de la structure des treillis bidimensionnels définis par GINSBERG (1988): cette structure permet d'intégrer les deux aspects:

- différents degrés de connaissance/croyance
- évolution de la connaissance/croyance.

On peut construire de façon systématique des logiques polyvalentes simulant les logiques

- intuitionniste (GÖDEL, 1932, VAN DALEN, 1986),
- modales ou temporelles (GINSBERG, 1988),
- de la pertinence (ANDERSON & BELNAP, 1975),
- des raisonnements par défaut — avec certaines restrictions syntaxiques — (GINSBERG, 1988).

La valeur de vérité y est alors précisée par le contexte dans lequel on la considère (c'est-à-dire le monde possible, l'instant, la situation,...). Au moins dans le cas propositionnel, on y verra des logiques polyvalentes. Le traitement de la quantification est plus compliqué (hypothèse du domaine des individus constant).

[5] alternativement, et plus usuellement, on introduit des logiques épistémiques(KONOLIGE, 1987).

Les logiques polyvalentes sont un instrument logique très général. Quand une nouvelle logique ou un nouveau calcul est proposé, on recourait d'abord aux matrices (dont les éléments sont arbitraires) pour en donner une première sémantique. Une fois que les concepts fondamentaux de cette logique ont été clairement mis en évidence (mondes possibles,...), cette logique quitte le domaine de la *tératologie logique*, pour devenir une branche autonome de la logique.

Dans certains cas, la sémantique proposée est toutefois, si compliquée que les gens préfèrent, en connaissance de cause, continuer à utiliser les logiques polyvalentes. Ainsi, THISTLEWAITE *et al.* (1988, pages 71–89) traitent la logique de la pertinence **R** (DUNN, 1986) par des matrices logiques finies, dont l'ensemble des théorèmes contient (strictement) les théorèmes de **R**.

On peut facilement donner un sens aux valeurs de vérité dans les logiques trivalentes. Outre Vrai et Faux, on rajoute une valeur qui suivant le cas cas exprime la contingence [6] ou la contradiction [7].

Comme ces deux interprétations de la valeur de vérité supplémentaire ne sont pas incompatibles, il en résulte une logique à quatre valeurs (BELNAP, 1977), constituant l'exemple le plus simple de treillis bidimentionnel non-trivial (GINSBERG, 1988).

Un ensemble plus compréhensif de valeurs de vérité permet de nuancer le jugement que l'on porte sur une proposition, en lui attribuant non pas Vrai/Faux comme valeur mais un degré de croyance ou de confiance. Cet emploi des logiques polyvalentes pour naturel qu'il soit (GOGUEN, 1969), mène à des paradoxes comme dans la logique classique, si on prend un ensemble fini de valeurs de vérité (MOH SHAW-KWEI, 1954). L'emploi d'un ensemble infini reste problématique car l'ensemble des théorèmes n'est pas nécessairement récursivement énumérable (SCARPELLINI, 1962). C'est pourtant cette interprétation des valeurs de vérité que l'on retrouve dans les "mécanismes de combinaison d'évidence" des systèmes experts et dans la logique floue.

[6] "[...] conçu comme pouvant être ou ne pas être, à quelque égard et sous quelque réserve que ce soit" (LALANDE, 1988)

[7] "[...] qui réunit des éléments incompatibles (contraires ou contradictoires)" *ibid.*

Notations et Définitions Usuelles

0.1 Ensembles

Les notations ensemblistes standard sont récapitulées dans la TABLE 0.1 (Cf. (DEVLIN, 1979, FRAENKEL *et al.*, 1973) par exemple).

L'ensemble des parties d'un ensemble E c'est-à-dire de tous les sous-ensembles de E est noté 2^E. L'ensemble des parties finies c'est-à-dire des tous les sous-ensembles finis de E est noté 2^E_f. Si E est un ensemble, il est connu que $\langle 2^E, \cap, \cup, \overline{}, E, \emptyset\rangle$ forme un treillis booléen complet (GRÄTZER, 1979, PONASSE & CARREGA, 1979).

Les termes collection, famille sont pris comme des synonymes du terme *ensemble*.

Soient I un ensemble (d'indices), A un ensemble et $\mathcal{E} = \{E_i \subseteq A : i \in I\}$ une famille d'ensembles. $\bigcup_{i\in I} E_i$ (ou $\bigcup \{E_i : i \in I\}$) est l'ensemble des éléments contenus dans (au moins) un des E_i, $(i \in I)$; on convient que $\bigcup_{i\in\emptyset} E_i = \emptyset$.

$\bigcap_{i\in I} E_i$ (ou $\bigcap \{E_i : i \in I\}$) est l'ensemble des éléments contenus dans tous les E_i, $(i \in I)$; on convient que $\bigcap_{i\in\emptyset} E_i = A$.

Le produit cartésien $\prod_{i\in I} E_i$ est l'ensemble de toutes les applications f de I vers $\bigcup_{i\in I} E_i$ telles que pour tout $i \in I$ $f(i) \in E_i$.

Si $I = \{1, \dots, n\}$, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est une abréviation pour $\prod_{i\in I} E_i$, et ses éléments sont appelés des n-uplets, notés $\langle e_1, \dots, e_n\rangle$ $(e_i \in E_i$, pour $1 \leq i \leq n)$. De tels n-uplets sont abrégés $\vec{e}$, et e_i en dénotent les composantes.

0.2 Graphes et Arbres

DÉFINITION 0.2.1. *(Cf. (*BERGE, 1973*)) Un graphe orienté est un couple* $\langle E, V\rangle$ *où*

expression	sa signification
$\emptyset$	L'ensemble sans élément
$\{a_1, \ldots, a_n \ldots\}$	L'ensemble dont les éléments sont énumérés entre les accolades.
$\{a \in A : \phi(a)\}$	L'ensemble de tous les éléments de A vérifiant la propriété (ou le "prédicat") ϕ
$\{a : \phi(a)\}$	L'ensemble de tous les éléments de A vérifiant la propriété ϕ (le contexte fixe A)
$A \subseteq B$	B contient tous les éléments de A
$A = B$	$B \subseteq A$ et $A \subseteq B$
$A \subset B$	$A \subseteq B$, et $B \neq A$
$A \cap B$	L'ensemble de tous les éléments communs à A et à B
$A \cup B$	L'ensemble de tous les éléments de A ou de B
$A \setminus B$	L'ensemble de tous les éléments de A sauf ceux de B
$\overline{A}$	$E \setminus A$ où $A \subseteq E$ et le contexte fixe E.
$A - a$	Une abréviation pour $A \setminus \{a\}$
A, B	Une abréviation pour $A \cup B$
A, a	Une abréviation pour $A \cup \{a\}$, quand le contexte lève toute ambiguïté.
$\mathbb{N}_m$	L'ensemble des m premiers nombres naturels ($\{0, \ldots, m-1\}$)
$\# A$ ou $\|A\|$	Le nombre d'éléments de A (cardinalité de A)

Table 0.1: Notations ensemblistes utilisées

- *E est un ensemble dont les éléments sont appelés des* sommets
- *$V \subseteq E \times E$ dont les éléments sont appelés les* arêtes

Si e est un sommet de E, e' est un successeur *de e ssi $\langle e, e' \rangle \in V$; e est un* prédécesseur *de e' dans $\langle E, V \rangle$.*

Un chemin *dans $\langle E, V \rangle$ est une séquence $\langle e_0, v_1, \ldots, v_n, e_n \rangle$ avec pour tout $0 \leq i \leq n$ $e_i \in E$, et pour tout $1 \leq j \leq v_j \in V$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$, $v_k = \langle e_{k-1}, e_k \rangle$*

Un graphe colorié *est un couple $\langle G, f \rangle$ où*

- *$G = \langle E, V \rangle$ est un graphe,*
- *f est une application de E vers un ensemble arbitraire, dont les éléments sont les* marques *ou les* étiquettes *des sommets.*

On parle aussi de graphe étiqueté *au lieu de graphe colorié.* ◊

DÉFINITION 0.2.2. *Un* arbre orienté *est un graphe orienté $\langle E, V \rangle$ ayant un sommet r, appelé la* racine, *tel que pour tout sommet $e \in E$, il existe un unique chemin de r à e; s'il n'y a pas d'arêtes $\langle e, e' \rangle \in V$, cet unique chemin est appelé la* branche *de* feuille *e. Un arbre est* linéaire *s'il ne contient qu'une seule branche.* ◊

Dans la suite, on dira simplement arbre pour arbre orienté.

REMARQUE. On vérifie aisément qu'entre deux sommets d'un arbre il existe au plus un chemin, aussi ne précisera-t-on pas dans les séquences l'arête utilisée pour passer d'un sommet à l'autre dans un arbre.

DÉFINITION 0.2.3. *Un arbre $\langle E, V \rangle$ est à* branchement fini *si tout sommet de E n'a qu'un nombre fini de successeurs dans $\langle E, V \rangle$.* ◊

On dit que l'on *greffe* un sommet $e \notin E$ sur une branche B de feuille b, lorsque l'on construit l'arbre $\langle E \cup \{e\}, V \cup \langle b, e \rangle \rangle$ (pour une définition formelle, voir par exemple (GALLIER, 1986, page 25)).

REMARQUE. Un arbre orienté peut être vu de manière équivalente comme un *ensemble partiellement ordonné avec minimum* (ce minimun est la racine). Les branches en sont les sous-ensembles maximaux totalement ordonnés. Les feuilles en sont les éléments maximaux.

Un arbre est linéaire ssi la relation qui ordonne cet ensemble est totale.

REMARQUE. Il est commode d'identifier une branche et sa feuille: on parlera de la branche e, pour désigner l'unique branche de feuille e.

LEMME 0.2.1. *(lemme de* KÖNIG*) Tout arbre infini à branchement fini contient au moins une branche infinie.*

PREUVE. Cf. (SMULLYAN, 1968, KNUTH, 1969, FITTING, 1990). C.Q.F.D.

0.3 Systèmes de Dérivation

Les algorithmes seront décrits par des systèmes à base de règles; ils seront présentés de la manière suivante (GOOS, 1987, FLOYD, 1967):

DÉFINITION 0.3.1. *Un système de dérivation est un quadruplet* $\langle Q, R, I, S \rangle$ *où*

- Q *est un ensemble récursif, dont les éléments s'appellent des états*
- R *est un ensemble fini de règles; une règle est une fonction totale calculable* $\varrho : Q \to 2_f^Q$
- I *et* S *sont des sous-ensembles récursifs de* Q*. Les états de* I *sont les états initiaux; ceux de* S *sont les solutions.*

◊

DÉFINITION 0.3.2. *Soit* $\langle Q, R, I, S \rangle$ *un système de dérivation. On écrit* $q \mapsto u$ *quand* $q \notin S$ *et il existe une règle* $\varrho \in R$ *telle que* $u \in \varrho(q)$*. On note par* $\overset{+}{\mapsto}$ *la fermeture transitive et par* $\overset{*}{\mapsto}$ *la fermeture transitive et réflexive de* $\mapsto$*. Une dérivation est une séquence finie d'états* $q_0, \ldots, q_n$ *tels que pour* $1 \leq i \leq n$, $q_{i-1} \mapsto q_i$.

Soient $q, q' \in Q$, *et* $\varrho \in R$, *on dit que* ϱ *est applicable à* q *ssi* $\varrho(q) \neq \emptyset$*. Par contre,* q *est un état final ssi il n'existe pas de* $\varrho \in R$ *applicable à* q*. Si* $q \overset{*}{\mapsto} q'$, q' *est un état successeur de* q*. L'état* q' *est une solution de* q *ssi* $q \overset{*}{\mapsto} q' \in S$*; l'ensemble de toutes les solutions de* q *est noté* S_q*.* ◊

REMARQUE. La relation $\mapsto$ est une relation décidable.

Le contrôle

Soient $\langle Q, R, I, S \rangle$ un système de dérivation, $q_0 \in I$. Informellement, l'ensemble de tous les états considérés pour "trouver" une solution $q^* \in S_{q_0}$, y compris ceux considérés inutilement c'est-à-dire ceux qui n'inerviennent pas dans une dérivation (fixée) de $q \overset{*}{\mapsto} q^*$, est l'espace de recherche d'une dérivation de q^* à partir de q. La plupart du temps pour restreindre le nombre des règles applicables à un état q — donc la taille en nombre d'états de l'espace de recherche — on surimpose au système de dérivation un contrôle, qui élimine a priori des règles applicables à un état. La plupart des contrôles, que l'on rencontrera dans la suite, seront des contrôles réguliers: on ordonne partiellement l'ensemble des règles R, et on ne considère comme règles applicables à un état $q \in Q$ compte tenu du contrôle que les règles maximales parmi les règles applicables à q.

0.4 Fonctions

On note $f : E \rightarrow F$ une fonction f de E vers F, qui associe à un élément e de E un élément unique de F, noté $f(e)$. Le *domaine de* f, noté $dom(f)$, est l'ensemble de tous les éléments e de E, tels que $f(e)$ est défini. L'*image de* f, notée $im(f)$, est l'ensemble de tous les éléments g de F tel qu'il existe un élément e de $dom(E)$ dont $f(e)$ vaut g.

Si $dom(f) = E$, f est une *application* de E vers F. L'ensemble de toutes les applications de E vers F, est noté F^E. Soient I un ensemble d'indices, $\mathcal{E} = \{E_i : i \in I\}$, $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$. On suppose que pour tous $i, j \in I$ si $i \neq j$, alors $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Soient $f_i : E_i \rightarrow F_i$, pour $i \in I$ des fonctions quelconques de E_i vers F_i.

$$f : \begin{array}{lcl} \bigcup_{i\in I} E_i & \rightarrow & \bigcup_{i\in I} F_i \\ x & \mapsto & f_i(x) \quad \text{si } x \in E_i \end{array}$$

Une telle fonction f sera appelée une *fonction polymorphe de profil*:

$$f : \; E_i \; \rightarrow \; F_i \quad \text{pour tout } i \in I$$

Soient $A \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$ et $B \subseteq \bigcup_{i\in I} F_i$. La *restriction de* f *à* A, notée $f|_A$, est la fonction polymorphe définie par:

$$f|_A : \begin{array}{lcl} A & \rightarrow & \bigcup_{i\in I} F_i \\ x & \mapsto & f_i(x) \quad \text{si } x \in A \cap E_i \end{array}$$

De plus, $f(A) =_{df} im(f|_A)$.

L'image réciproque de f, notée f^{-1}, se définit par:

$$f^{-1} : \begin{array}{lcl} \bigcup_{i\in I} F_i & \rightarrow & \bigcup_{i\in I} 2^{E_i} \\ x & \mapsto & \bigcup_{i\in I} \{e \in E_i : f_i(e) = x\} \end{array}$$

Par ailleurs, $f^{-1}(B) =_{df} \bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)$.

0.5 Algèbres

Ces définitions sont empruntées à (GRÄTZER, 1979).

DÉFINITION 0.5.1. *Une signature* Σ *est un couple* $\langle \mathcal{A}_\Sigma, \alpha_\Sigma \rangle$.

- $\mathcal{A}_\Sigma$ *est un ensemble de symboles,*
- α_Σ *est une application de* $\mathcal{A}_\Sigma$ *vers les entiers naturels qui associe à chaque symbole son arité,*

Σ_n *dénote l'ensemble des symboles* n*-aires, c'est-à-dire* $\alpha_\Sigma^{-1}(n)$. *Les éléments de* Σ_0 *sont appelés des constantes.* $\Diamond$

DÉFINITION 0.5.2. *Soit Σ une signature. Une Σ-algèbre $\mathcal{A}lg$ est définie par la donnée des éléments suivants:*

- *Un ensemble $\mathcal{A}$ appelé support, ou domaine de $\mathcal{A}lg$*
- *Une application polymorphe $\Re$ qui associe à chaque symbole de fonction de Σ une application dans $\mathcal{A}$, de profil*

$$\Re : \Sigma_n \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{A}^n} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$\Diamond$

0.6 Termes

Si $\mathcal{W}$ est un ensemble de symboles, on note par $\mathcal{W}^*$ le monoïde libre engendré par $\mathcal{W}$, c'est-à-dire "l'ensemble de tous les mots écrits avec l'alphabet $\mathcal{W}$" (Cf. (LALEMENT, 1990, pour une définition rigoureuse)).

DÉFINITION 0.6.1. *L'ensemble des termes construits à partir de la signature Σ et de l'ensemble de variables $\mathcal{V}$, noté $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$, est le plus petit sous-ensemble du monoïde libre engendré par $\Sigma \cup \mathcal{V} \cup \{`,', `)', `('\}$ vérifiant:*

(T₁) $\Sigma_0 \cup \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$

(T₂) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $f \in \Sigma_n$, tous $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$, $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$, que l'on notera également $f\vec{t}$.*

On convient de $\mathcal{V} \cap \Sigma = \emptyset$. $\mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)$ est noté $\mathcal{G}(\Sigma)$, dont les éléments sont appelés les termes clos. $\Diamond$

DÉFINITION 0.6.2. *Le* symbole de tête *d'un terme t de $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ est défini par:*

$$\mathcal{H}ead(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \Sigma_0 \cup \mathcal{V} \\ f & \text{si } t = f\vec{t'} \end{cases}$$

$\Diamond$

DÉFINITION 0.6.3. *L'*ensemble des variables *d'un terme t de $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ est défini par:*

$$\mathcal{V}ar(t) = \begin{cases} \{t\} & \text{si } t \in \mathcal{V} \\ \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}ar(t_i) & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

$\Diamond$

DÉFINITION 0.6.4. *Une* position *est une séquence d'entiers naturels non-nuls. La position correspondant à la séquence de longueur nulle est notée Λ. La concaténation de deux séquences est notée par un point $(\cdot)$.*

Si p est une position et Q un ensemble de positions, $p \cdot Q =_{df} \{p \cdot q : q \in Q\}$. Si P, Q des ensembles de positions, $P \cdot Q =_{df} \bigcup_{p \in P} p \cdot Q$. $\Diamond$

Définition 0.6.5. *L'ensemble des positions d'un terme t, noté $\mathcal{P}os(t)$ est défini par:*

$$\mathcal{P}os(t) = \begin{cases} \{\Lambda\} & si\ t \in \mathcal{V} \cup \Sigma_0 \\ \{\Lambda\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} i \cdot \mathcal{P}os(t_i) & si\ t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

$\diamond$

Définition 0.6.6. *Le sous-terme à la position p d'un terme t de $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$, noté $t|_p$, est défini pour $p \in \mathcal{P}os(t)$ ainsi:*

$$t|_p = \begin{cases} t & si\ p = \Lambda \\ t_i|_q & si\ p = i \cdot q\ et\ t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

$\diamond$

Définition 0.6.7. *Le terme obtenu par remplacement dans t du terme de position $p \in \mathcal{P}os(t)$ par s, noté $t[s]_p$ (on suppose $p \in \mathcal{P}os(t)$) est le terme défini par:*

$$t[s]_p = \begin{cases} s & si\ p = \Lambda \\ f(t'_1, \dots, t'_n) & si\ t = f(t_1, \dots, t_n)\ et\ p = i \cdot q \\ & \text{où } t'_j = \begin{cases} t_i[s]_q & si\ j = i \\ t_j & sinon \end{cases} \end{cases}$$

$\diamond$

0.7 Substitutions

Définition 0.7.1. *Une substitution σ est une fonction d'un ensemble de variables au plus infini dénombrable $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ presque partout l'identité.*

$\mathcal{D}om(\sigma) =_{df} \{x \in \mathcal{V} : x \neq \sigma(x)\}$

$\mathcal{C}od(\sigma) =_{df} \{\sigma(x) : x \in \mathcal{D}om(\sigma)\}$

$\mathcal{V}Ran(\sigma) =_{df} \mathcal{V}ar(\mathcal{C}od(\sigma))$

On note par ι la substitution qui est la fonction identité. $\diamond$

Remarque. Soit σ de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$, on note $\hat{\sigma}$ l'extension homomorphe à $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ de σ. Ainsi pour $t \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$

$$\hat{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(t) & \text{si } t \in \mathcal{V} \\ f(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n)) & \text{si } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

On abrège $\hat{\sigma}(t)$ par $t\sigma$. Si σ est une bijection dans $\mathcal{V}$, σ est appelé un *renommage de variables*.

Remarque. Si t est un terme et σ, μ des substitutions, alors $t(\sigma \circ \mu)$ dénote $(t\mu)\sigma$.

DÉFINITION 0.7.2. *Un* unificateur *de* deux termes t *et* s *de* $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ *est une substitution* σ *telle que* $t\sigma = s\sigma$*;* s *et* t *sont dits* unifiables*. Un* unificateur le plus général de deux termes unifiables t *et* s *de* $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ *est une substitution* σ *telle que*

pour tout unificateur ρ *de* t *et* s*, il existe une substitution* λ *telle que* $\rho = \sigma \circ \lambda$
$\sigma = \sigma \circ \sigma$ *(*σ *est idempotente)* $\diamond$

REMARQUE. Il existe de nombreux algorithmes (par exemple dans (ROBINSON, 1965, HUET, 1976, JOUANNAUD & KIRCHNER, 1990)) qui prouvent en le calculant l'existence et l'unicité au renommage des variables près d'un unificateur le plus général de deux termes unifiables.

On étend la définition d'un unificateur (le plus général) de deux termes à deux vecteurs $\vec{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ et $\vec{t} = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ de même longueur et $\vec{s}\sigma = \vec{t}\sigma$ ssi pour tout $1 \leq i \leq n, s_i\sigma = t_i\sigma$.

On note par $\vec{t} \sqcap \vec{s}$ l'un quelconque des unificateurs les plus généraux de $\vec{s}$ et $\vec{t}$, si ces vecteurs sont unifiables; sinon $\vec{t} \sqcap \vec{s}$ n'est pas défini.

0.8 Formules Bien Formées

Les composantes de la définition de l'ensemble des formules bien formées sont

- les symboles logiques sont les éléments de $\Pi \cup \Upsilon$, où
  - Π est la signature logique (qui définit les connecteurs logiques)
  - Υ est l'ensemble des quantificateurs
- les symboles non-logiques sont les éléments de $\mathcal{V}_f \cup \Sigma \cup \Omega$, où
  - $\mathcal{V}_f$ est l'ensemble des *variables libres*
  - Σ est la signature fonctionnelle, qui définit les symboles fonctionnels
  - Ω est la signature des prédicats, qui contient les symboles de prédicats
- les symboles auxiliaires sont les *variables liées* dont l'ensemble est noté $\mathcal{V}_b$ et les quatre caractères typographiques: les parenthèses, la virgule et le point.

On convient qu'un symbole figure dans au plus l'un des ensembles (ou supports de signature) précédents. $\mathcal{V}_b$ et $\mathcal{V}_f$ sont supposés dans la suite infinis dénombrables; Π, Υ, Σ et Ω sont au plus infinis dénombrables; tous ces ensembles sont récursifs.

On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous ces symboles.

DÉFINITION 0.8.1. *L'ensemble* $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \Sigma, \Omega)$ *des* formules bien formées*, noté* $\mathcal{F}bf$ *ci-dessous, est le plus petit sous-ensemble du monoïde libre* $\mathcal{A}^*$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*:*

(F1) *pour tout* $P \in \Omega_n$ *et tous* $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}_f)$*,* $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}bf$

(F_2) *pour tout* $c \in \Pi_n$ *et toutes* $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}bf$, $c(F_1, \ldots, F_n) \in \mathcal{F}bf$, c *est le* connecteur principal *de* $c(F_1, \ldots, F_n)$*; les* sous-formules immédiates *de* $c(F_1, \ldots, F_n)$ *sont* $F_1, \ldots, F_n$*; ses* sous-formules *sont* $F_1, \ldots, F_n$ *et leurs sous-formules.*

(F_3) *pour tout* $Q \in \Upsilon$ *et toute* $F' \in \mathcal{F}bf$, $Qx \cdot F \in \mathcal{F}bf$, *où* F *est obtenue à partir de* F' *en remplaçant toutes les occurrences de* $v \in \mathcal{V}_f$ *dans* F' *par* $x \in \mathcal{V}_b$. *Un tel remplacement sera noté en mettant en évidence les occurrences de* v *dans* F' *par la notation* $F'(v)$ *et le remplacement sera indiqué par* $F = F'(x \backslash v)$ *ou de manière ambiguë par* $F = F'(x)$. F *est la* portée *ou la* sous-formule *de* $Qx \cdot F$ *et* Q *en est le* quantificateur principal.

Les éléments de Π_0 *sont appelés des* constantes logiques, *ceux de* Ω_0 *des* variables propositionnelles, *les éléments de* $\mathcal{F}bf$ *correspondant aux clauses* (F_1), (F_2) *et* (F_3) *sont appelés respectivement* propositions *(ou atomes)*, formules composées *et* quantifications. $\Diamond$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, l'ensemble des formules bien formées est écrit simplement $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}$, ou encore $\mathcal{F}bf$. Il est évident que l'ensemble des formules bien formées est primitif récursif.

Souvent, au lieu de $\natural(a, b)$, pour $\natural \in \Pi_2$, on écrira $a \natural b$ ou, s'il y a ambiguïté, $(a \natural b)$.

REMARQUE. On étend les notations $F|_p$, $F[t]_p$ et $F[G]_p$ aux formules. Par exemple, $Qx \cdot G(x)|_\Lambda = Qx \cdot G(x)$ et $Qx \cdot G(x)|_{i \cdot q} = G(x)|_q$ si $i = 1$ et indéfini sinon. On ne définit par ailleurs les expressions $F[t]_p$ et $F[G]_p$ que si $F|_p$ est respectivement un terme et une formule [8].

REMARQUE. Soit une substitution σ de $\mathcal{V}_f$ vers $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}_f)$. On note $\tilde{\sigma}$ l'extension homomorphe à $\mathcal{F}bf$ de σ. Ainsi pour $F \in \mathcal{F}bf$:

$$\tilde{\sigma}(F) = \begin{cases} P(\hat{\sigma}(t_1), \ldots, \hat{\sigma}(t_n)) & \text{si } F = P(t_1, \ldots, t_n) \\ c(\tilde{\sigma}(F_1), \ldots, \tilde{\sigma}(F_n)) & \text{si } F = c(F_1, \ldots, F_n) \\ Qx \cdot (\tilde{\sigma}(G)) & \text{si } F = Qx \cdot G \end{cases}$$

On abrège $\tilde{\sigma}(F)$ par $F\sigma$.

Il est commode d'introduire la fonction de conversion univoque (injective) suivante:

$$\dot{} : \begin{cases} \mathcal{V}_b & \rightarrow & \mathcal{V}_f \\ x & \mapsto & \dot{x} \end{cases}$$

[8]Si ces formules sont dans la portée d'une quantification $Qx \cdot H$, ce ne sont pas *stricto sensu* des formules bien formées, dès que la variable x y apparaît sans être dans la portée d'une quantification.

0.9 Sémantique de $\mathcal{F}bf$

Dans ce paragraphe, on définit la sémantique de $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \Sigma, \Omega)$, abrégé en $\mathcal{F}bf$.

DÉFINITION 0.9.1. *Une* Π, Υ*-matrice du premier ordre* $\langle \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, \mathfrak{D}\rangle$ *est un triplet dont*

- $\mathfrak{C}$ *est l'ensemble des valeurs de vérité; il y a au moins deux valeurs de vérité.*
- $\mathfrak{R}$ *est une application polymorphe qui, associant à chaque connecteur de* Π *et à chaque quantificateur de* Υ *une application dans* $\mathfrak{C}$*, a pour profil:*

$$\begin{array}{lll} \Pi_n & \rightarrow & \mathfrak{C}^{\mathfrak{C}^n} \quad \textit{pour tout entier naturel } n \in \mathbb{N} \\ \Upsilon & \rightarrow & \mathfrak{C}^{2^{\mathfrak{C}}} \end{array}$$

- $\mathfrak{D}$*, un sous-ensemble strict mais non vide de* $\mathfrak{C}$*, est l'ensemble des valeurs désignées*

Pour $X \in \Pi \cup \Upsilon$*, l'application* $\mathfrak{R}(X)$*, notée* $\mathfrak{R}_X$*, est appelée la sémantique de* X. $\Diamond$

Dans la suite de la section, $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, \mathfrak{D}\rangle$ et $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{C}', \mathfrak{R}', \mathfrak{D}'\rangle$ désigneront des Π, Υ-matrices du premier ordre.

DÉFINITION 0.9.2. *Soient* $\natural$ *la sémantique d'un connecteur de* Π $\P$ *la sémantique d'un quantificateur de* Υ, $a, b \in \mathfrak{C}$ *et* $A \subseteq \mathfrak{C}$:

$\natural$ *est une conjonction standard ssi* $a \natural b \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow a \in \mathfrak{D}$ *et* $b \in \mathfrak{D}$
$\natural$ *est une disjonction standard ssi* $a \natural b \notin \mathfrak{D} \Leftrightarrow a \notin \mathfrak{D}$ *et* $b \notin \mathfrak{D}$
$\natural$ *est une implication standard ssi* $a \natural b \notin \mathfrak{D} \Leftrightarrow a \in \mathfrak{D}$ *et* $b \notin \mathfrak{D}$
$\natural$ *est une négation standard ssi* $\natural a \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow a \notin \mathfrak{D}$
$\P$ *est une généralisation standard ssi* $\P A \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow A \subseteq \mathfrak{D}$
$\P$ *est une exemplification standard* $\P A \notin \mathfrak{D} \Leftrightarrow A \subseteq \mathfrak{C} \setminus D$ $\Diamond$

DÉFINITION 0.9.3. *Une interprétation* $\Im$ *de domaine du discours* $\mathcal{I}$ *est une application polymorphe qui attribue à chaque symbole non-logique (c'est-à-dire aux symboles de* $\Sigma, \Omega, \mathcal{V}_f$*) respectivement une application dans* $\mathcal{I}$*, une application de* $\mathcal{I}^n$ *vers* $\mathfrak{C}$ *ou vers un élément de* $\mathcal{I}$*. Le profil de* $\Im$ *est le suivant:*

$$\begin{array}{lll} \Sigma_n & \rightarrow & \mathcal{I}^{\mathcal{I}^n} \quad \textit{pour tout entier naturel } n \in \mathbb{N} \\ \Omega_n & \rightarrow & \mathfrak{C}^{\mathcal{I}^n} \\ \mathcal{V}_f & \rightarrow & \mathcal{I} \end{array}$$

Les éléments du domaine du discours sont appelés des individus. Soient $\Im$ *une interprétation,* $x \in \mathcal{V}_f$ *une variable libre et* $a \in \mathcal{I}$ *un individu. On note par* $\Im^a_x$ *l'interprétation qui ne diffère de* $\Im$ *qu'en* x *et* $\Im^a_x(x) = a$*. Pour plus de clarté,* $\Im(X)$ *est noté* $\Im_X$ *(où* $X \in \Sigma \cup \Omega \cup \mathcal{V}_f$*).* $\Diamond$

DÉFINITION 0.9.4. *(Voir aussi (*FITTING, 1990*)) Soit $\Im$ une Interprétation et soit $E \subseteq \Sigma \cup \Omega \cup \mathcal{V}_f$ $\Im'$ est une E-variante ssi $\forall X \in (\Sigma \cup \Omega \cup \mathcal{V}_f) \setminus E$, $\Im_X = \Im'_X$.* $\Diamond$

REMARQUE. Les extensions homomorphes de $\Im$ aux termes et aux formules sont notées respectivement $\hat{\Im}$ et $\tilde{\Im}$. Ainsi pour tout $t \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}_f)$ et toute $F \in \mathcal{F}bf$, on a:

$$\hat{\Im}(t) = \begin{cases} \Im_t & \text{si } t \in \mathcal{V}_f \cup \Sigma_0 \\ \Im_f(\hat{\Im}(t_1), \ldots, \hat{\Im}(t_n)) & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

$$\tilde{\Im}(F) = \begin{cases} \Im_P(\hat{\Im}(t_1), \ldots, \hat{\Im}(t_n)) & \text{si } F = P(t_1, \ldots, t_n) \\ \Re_c(\tilde{\Im}(F_1), \ldots, \tilde{\Im}(F_n)) & \text{si } F = c(F_1, \ldots, F_n) \\ \Re_Q(\{\widetilde{\Im^a_u}(G(u)) : a \in \mathcal{I}\}) & \text{si } F = Qx \cdot G(x) \text{ où } u \in \mathcal{V}_f \text{ et } u \\ & \text{n'apparaît pas dans } Qx \cdot G(x) \end{cases}$$

Avec un abus de notation, on ne distinguera plus dans la suite $\hat{\Im}$ et $\tilde{\Im}$ de $\Im$.

PROPOSITION 0.9.1. *Soient $\Im$ et $\Im'$ des E-variantes et F une formule bien formée. Si F ne contient aucun symbole de E, alors $\Im(F) = \Im'(F)$*

PREUVE. Par induction structurelle. C.Q.F.D.

DÉFINITION 0.9.5. *Une formule $F \in \mathcal{F}bf$ est* $\mathfrak{M}$-satisfaisable, *ssi il existe une interprétation $\Im$ telle que $\Im(F) \in \mathfrak{D}$. On note $\Im \models_{\mathfrak{M}} F$, ou $\Im \models F$, quand $\mathfrak{M}$ est fixé par le contexte. On dit également que $\Im$ ($\mathfrak{M}$-)satisfait F, ou que $\Im$ est un modèle de F.*

Une formule $F \in \mathcal{F}bf$ est $\mathfrak{M}$-valide *ou* $\mathfrak{M}$-tautologique *ssi pour toute interprétation $\Im$, $\Im \models F$*

Une formule $F \in \mathcal{F}bf$ est une conséquence logique $\mathfrak{M}$-valide *d'un* ensemble *$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}bf$ ssi pour toute interprétation $\Im$ satisfaisant toute $G \in \mathcal{G}$, $\Im \models F$, ce qu'on note $\mathcal{G} \models_{\mathfrak{M}} F$, ou $\mathcal{G} \models F$.* $\Diamond$

REMARQUE. Il existe principalement deux manières d'étendre la conséquence logique à un ensemble. Ainsi SCHRÖTER (1955*a*), SCHRÖTER (1958) distingue la conséquence logique au sens de BOLZANO, de celle au sens de GENTZEN. Pour $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}bf$, on dit que $\mathcal{F}$ est une conséquence logique au sens de BOLZANO de $\mathcal{G}$, en symbole $\mathcal{G} \models^{\mathfrak{B}} \mathcal{F}$, ssi pour toute interprétation $\Im$ satisfaisant toutes les formules G de $\mathcal{G}$ (c'est-à-dire $\Im \models G$), satisfait également toutes les formules F de $\mathcal{F}$. Par contre, $\mathcal{F}$ est une conséquence logique au sens de GENTZEN de $\mathcal{G}$, en symbole $\mathcal{G} \models^{\mathfrak{G}} \mathcal{F}$, ssi pour toute interprétation $\Im$ satisfaisant toutes les formules G de $\mathcal{G}$, satisfait au moins une formule F de $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 0.9.6. *Une interprétation dont le domaine du discours est $\mathcal{G}(\Sigma)$ est appelée une* interprétation de Herbrand.

$\mathcal{G}(\Sigma)$ *est l'*univers de Herbrand [9].

$\mathcal{A}(\Sigma,\Omega) =_{df} \left\{P\vec{t} : P \in \Omega_n \text{ et } \vec{t} \in \mathcal{G}(\Sigma)^n \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$ *est la* base de Herbrand. ◊

THÉORÈME 0.9.1. *$F \in \mathcal{F}bf$ est satisfaisable ssi F admet un modèle de Herbrand.*

PREUVE. Comme pour le cas classique, que l'on peut relire dans (GALLIER, 1986). C.Q.F.D.

DÉFINITION 0.9.7. *Une* logique *est un couple $\langle \mathcal{F}bf, \mathfrak{M}\rangle$.Elle est dite* finie *ssi le support $\mathfrak{M}$ l'est, autrement elle est dite* infinie. ◊

Cette définition est moins "fine" que celle proposée par (MESEGUER, 1989). Ce que Messeguer appelle *general logic* inclut dans sa définition outre la relation de conséquence logique son pendant syntaxique, la relation de dérivabilité (ou "assertabilité conditionnelle") introduite plus bas.

Deux logiques, définies à partir de la notion d'algèbre universelle, peuvent entretenir des rapports entre elles. Ces rapports sont formalisés par la notions de morphismes d'algèbres d'un type particuliers.

DÉFINITION 0.9.8. *Soient $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, \mathfrak{D}\rangle$ une Π, Υ-matrice du premier ordre et $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{C}', \mathfrak{R}', \mathfrak{D}'\rangle$ Π', Υ'-matrice du premier ordre. φ est un* morphisme de matrices, *ssi*

- *pour tout entier n, tout connecteur c de Π_n, $\varphi(c) \in \Pi'_n$*
- *pour tout quantificateur Q de Υ, $\varphi(Q) \in \Upsilon'$*
- *pour toute valeur désignée $d \in \mathfrak{D}$, $\varphi(d) \in \mathfrak{D}'$*

◊

REMARQUE. On étend de façon standard φ aux formules bien formées:

$$\tilde{\varphi}(F) = \begin{cases} P(t_1, \ldots, t_n) & \text{si } F = P(t_1, \ldots, t_n) \\ \varphi(c)(\tilde{\varphi}(F_1), \ldots, \tilde{\varphi}(F_n)) & \text{si } F = c(F_1, \ldots, F_n) \\ \varphi(Q)x \cdot (\tilde{\varphi}(G)) & \text{si } F = Qx \cdot G \end{cases}$$

On notera $\tilde{\varphi}(F)$ simplement $\varphi(F)$. Si F est une formule de $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \Sigma, \Omega)$, alors $\varphi(F)$ est dans $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \Sigma, \Omega)$.

PROPOSITION 0.9.2. *(Avec les notations de la* DÉFINITION *0.9.8) Soit F est une formule bien formée de $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \Sigma, \Omega)$.*

[9] *On suppose de $\Sigma_0 \neq \emptyset$.*

Si $\Im \models_{\mathfrak{M}} F$,

alors $\Im \models_{\mathfrak{M}'} F$

PREUVE. Elle se fait par induction structurelle sur F. Le point central de la preuve se sert essentiellement du fait que les valeurs désignées sont transformées en valeurs désignées par φ. C.Q.F.D.

REMARQUE. Si φ est une bijection, les deux matrices sont dites *isomorphes*. on note

$$\langle \mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}, \mathfrak{M} \rangle \simeq \langle \mathcal{F}bf_{\Pi',\Upsilon'}, \mathfrak{M}' \rangle$$

REMARQUE. Si une logique ne contient que des connecteurs et des quantificateurs *standard*, alors l'ensemble des conséquences valides est celui de "la logique classique" (Voir (TURQUETTE, 1965) et pour la logique floue (LEE, 1972)). Il ne faut pas perdre de vue que l'on n'est pas seulement intéressé à établir les conséquences valides $\mathcal{G} \models F$, mais aussi aux valeurs que peuvent prendre les formules de $\mathcal{G} \cup \{F\}$. Dans l'application citée (LEE, 1972), ces valeurs correspondent à des "degrés de conviction".

REMARQUE. Dans une série d'articles, (KALICKI, 1950*b*, KALICKI, 1950*a*, KALICKI, 1952), KALICKI a étudié le problème de l'isomorphisme de deux logiques. Dans (KALICKI, 1950*b*, KALICKI, 1950*a*), il prouve que l'isomorphisme de deux matrices finies est décidable. KALICKI (1952) prouve que le cas des matrices infinies est indécidable, même si ces matrices sont récursives (voir (KALICKI, 1952) pour plus de détails).

DÉFINITION 0.9.9. *Une matrice $\mathfrak{M}$ est dite normale ssi $\mathfrak{D}$ ne contient qu'un élément.* ◊

0.10 Formules Signées

DÉFINITION 0.10.1. *Soit $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, \mathfrak{D} \rangle$ une Π, Υ-matrice du premier ordre. Une formule signée est un couple $\langle v, F \rangle$ où $v \in \mathfrak{C}$ et $F \in \mathcal{F}bf$. On préfèrera noter ce couple $[v]\,F$. L'ensemble de toutes les formules signées est notée $\mathfrak{C} \times \mathcal{F}bf$.* ◊

Une interprétation $\Im$ de $\mathcal{F}bf$ satisfait (est un modèle pour) une formule signée $[v]\,F$ ssi $\Im(F) = v$. On note $\Im \models [v]\,F$, en surchargeant le symbole $\models$. Pour des ensembles de formules signées $\mathcal{F}, G$, on définit $\mathcal{G} \models \mathcal{F}$ ssi pour tout formule signée $[w]\,G \in \mathcal{G}$ $\Im \models [w]\,G$ implique qu'il existe $[v]\,F \in \mathcal{F}$ tel que $\Im \models [v]\,F$.

On notera que les valeurs désignées ne se distinguent plus des valeurs non-désignées.

0.11 Relation de Conséquence Abstraite

Il existe une autre voie pour définir une logique. Elle consiste à définir une *relation de conséquence abstraite*, qui est le pendant syntaxique de la relation de conséquence *logique*.

Dans cette section, S désigne un langage formel quelconque.

DÉFINITION 0.11.1. *(Voir (*SCOTT, 1974, URQUHART, 1986*)) Une relation de conséquence abstraite* $\vdash$ *est une relation de* $2^S_f \times 2^S_f$ *caractérisée par les trois propriétés qui suivent:*

(R) *Pour tous* $\Gamma, \Delta \in 2^S_f$, $\Gamma \vdash \Delta$ *si* $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

(M) *Pour tous* $\Gamma, \Delta \in 2^S_f$, *tous* $A, B \in \mathcal{F}bf$, *si* $\Gamma \vdash \Delta$, *alors* $\Gamma, A \vdash \Delta, B$

(T) *Pour tous* $\Gamma, \Delta \in^S_f$, *tout* $A \in \mathcal{F}bf$, *si* $\Gamma, A \vdash \Delta$ *et* $\Gamma \vdash \Delta, A$, *alors* $\Gamma \vdash \Delta$

(R), **(M)** *et* **(T)** *expriment respectivement la réflexivité, la monotonie et la transitivité (règle de coupure) de la relation* $\vdash$. $\Diamond$

REMARQUE. (TARSKI, 1930) définit la conséquence logique Cn pour S. Dans (TARSKI, 1930), Cn est une fonction de 2^S vers 2^S vérifiant les propriétés:

1. $|S| < \omega$: le langage S est au plus infini dénombrable.
2. pour tout $X \subseteq S$, $X \subseteq Cn(X)$: monotonie de Cn.
3. pour tout $X \subseteq S$, $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$: clôture de Cn.
4. pour tout $X \subseteq S$, $Cn(X) = \bigcup \left\{ Cn(Y) : Y \in 2^X_f \right\}$: compacité de Cn.

Dans (WÓJCICKI, 1988), on généralise la définition de TARSKI aux langages S tels que $|S| \geq \omega$ et aux relations de conséquence non-compactes (ou infinitaires).

PROPOSITION 0.11.1. *Soit* $\langle \mathcal{F}bf, \mathfrak{M} \rangle$ *une logique.* $\models^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{M}}$ *est une relation de conséquence dans* $\mathcal{F}bf$ *et dans* $\mathfrak{C} \times \mathcal{F}bf$.

PREUVE. La vérification en est immédiate. C.Q.F.D.

DÉFINITION 0.11.2. *Une règle d'inférence* RI *est une relation de* $S^n \times S$. *Pour* $\langle \langle F_1, \ldots, F_n \rangle, F \rangle \in RI$, $F_1, \ldots, F_n$ *sont les prémisses et* F *est la conclusion. Ce qu'on représente par:*

$$\begin{array}{c} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ \hline F \end{array} \qquad \textit{ou} \qquad \frac{F_1 \quad \cdots \quad F_n}{F}$$

Une règle d'inférence à conclusion multiple RIM est une relation de $S^n \times 2^{2^S}$. *Pour* $\langle\langle F_1, \ldots, F_n\rangle, \mathcal{F}\rangle \in RIM$, $F_1, \ldots, F_n$ *sont les prémisses* $\mathcal{F}$ *est l'ensemble des alternatives; les éléments de chaque alternative sont appelés les conclusions de cette alternative.*

$$\begin{array}{c} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ \hline \begin{array}{c|c|c} G_{1,1} & & G_{m,1} \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ G_{1,k_1} & & G_{m,k_m} \end{array} \end{array} \qquad \text{où } \mathcal{F} = \begin{array}{c} \{\{G_{1,1}, \cdots, G_{1,k_1}\}, \\ \cdots, \\ \{G_{m,1}, \cdots, G_{m,k_m}\}\} \end{array}$$

$\diamond$

On ne considère dans la suite que des règles d'inférence à conclusion multiple, n'ayant qu'un nombre fini d'alternatives dont chacune ne compte qu'un nombre fini de conclusions. Évidemment, les règles d'inférence (traditionnelles) ne sont qu'un cas particulier des règles d'inférence à conclusion multiple, mais compte tenu de leur importance, elles sont évoquées explicitement. Si la logique considérée contient une disjonction standard, toute règle d'inférence à conclusion multiple peut être reformulée comme une règle d'inférence traditionnelle (voir également (AVRON, 1991)).

On adapte facilement la définition d'un arbre de preuve (Cf. (KLEENE, 1987) par exemple) aux règles d'inférence à conclusion multiple (STACHNIAK & O'HEARN, 1990, SHOESMITH & SMILEY, 1971).

DÉFINITION 0.11.3. *Soient* $\mathcal{R}$ *un ensemble récursivement énumérable de règles d'inférence à conclusion multiple et* $\mathcal{G} \subseteq S$. *L'ensemble* $\mathcal{AD}(G)$ *des arbres de dérivation à partir de* $\mathcal{G}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est le plus petit ensemble d'arbres finis étiquetés contruits à l'aide d'une des deux règles suivantes:*

(AD$_1$) *L'arbre à un noeud étiqueté par* $\{G\} \subseteq \mathcal{G}$ *est dans* $\mathcal{AD}(G)$

(AD$_2$) *Si* f *est une feuille de* $T \in \mathcal{AD}(G)$
alors l'arbre obtenu en greffant un successeur n *à* f, *étiqueté par* $\{G\} \subseteq \mathcal{G}$ *est dans* $\mathcal{AD}(G)$.

(AD$_3$) *Si* f *est une feuille de* $T \in \mathcal{AD}(G)$
et si $\mathcal{F}$ *est la réunion de toutes les étiquettes des noeuds de la branche* f
et si $F_1 \ldots, F_n \in \mathcal{F}$
et si $A_1, \ldots, A_m \in 2^S_f$
et si $\langle\langle F_1 \ldots, F_n\rangle, \{A_1, \ldots, A_m\}\rangle \in RIM \in \mathcal{R}$
alors l'arbre obtenu en greffant m *successeurs* $n_1, \ldots, n_m$ *à* f, *étiquetés respectivement par* $\mathcal{F} \cup A_i$ $(1 \leq i \leq m)$ *est dans* $\mathcal{AD}(G)$.

Soient $\Gamma, \Delta \in 2^S_f$, *on définit la relation* $\vdash_{\mathcal{R}}$ *par* $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ *ssi il existe un arbre de dérivation* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathcal{AD}(\Gamma)$ *tel que toute branche de* $\mathcal{T}$ *contient au moins un noeud dont l'étiquette partage un élément avec* Δ.

Une formule $F \in S$ est dérivable à partir de $\mathcal{F} \subseteq S$ dans $\mathcal{R}$ ssi $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{R}} F$. Une formule dérivable à partir de $\emptyset$ est un théorème. Un axiome logique est une formule A telle que $\langle\langle\rangle, A\rangle \in RI \in \mathcal{R}$ $\lozenge$

Remarque. $\vdash_{\mathcal{R}}$ est une relation de conséquence abstraite. On l'appelle la relation de dérivabilité dans $\mathcal{R}$.

Définition 0.11.4. *Soit $\mathcal{R}$ un ensemble récursivement énumérable de règles d'inférence à conclusion multiple. Un calcul est un couple $\langle S, \mathcal{R}\rangle$.* $\lozenge$

Définition 0.11.5. *Soit $\langle \mathcal{F}bf, \mathfrak{M}\rangle$ une logique.*

Une règle d'inférence RI est correcte

ssi pour tout $\langle\langle F_1, \dots, F_n\rangle, F\rangle \in RI$, toute interprétation satisfaisant les prémisses $F_1, \dots, F_n$ satisfait également F.

Une règle d'inférence à conclusion multiple est correcte

ssi pour tout $\langle\langle F_1, \dots, F_n\rangle, \mathcal{F}\rangle \in RIM$ toute interprétation satisfaisant les prémisses $F_1, \dots, F_n$ satisfait toutes les conclusions d'au moins une alternative de $\mathcal{F}$.

$\lozenge$

Définition 0.11.6. *Soient $\langle \mathcal{F}bf, \mathcal{R}\rangle$ un calcul logique et $\mathfrak{M}$ une sémantique de $\mathcal{F}bf$. $\mathfrak{M}$ est une sémantique adéquate pour $\langle \mathcal{F}bf, \mathcal{R}\rangle$ ssi $\models_{\mathfrak{M}} = \vdash_{\mathcal{R}}$; $\langle \mathcal{F}bf, \mathcal{R}\rangle$ est un calcul ($\mathfrak{M}$-)correct ssi $\vdash_{\mathcal{R}} \subseteq \models_{\mathfrak{M}}$; c'est un calcul ($\mathfrak{M}$-)complet ssi $\models_{\mathfrak{M}} \subseteq \vdash_{\mathcal{R}}$.* $\lozenge$

La définition d'une logique retenue ici favorise l'aspect sémantique au détriment de son aspect syntaxique (systèmes axiomatiques de Hilbert-Frege,...). Ce parti est également pris, par exemple, par Rasiowa (1974*a*) qui part constamment d'une classe d'algèbres, contenant un connecteur du type implication, pour en donner une axiomatisation adéquate.

Il est vrai qu'historiquement des auteurs ont souvent proposé des systèmes axiomatiques sans en donner une sémantique adéquate (par exemple les logiques modales non-normales de Lewis et Lankford, dont (Kripke, 1965) fournit une sémantique en 1963 (Voir (Fitting, 1983) pour plus de détails), ou les logiques de la pertinence dont la structure algébrique sous-jacente n'est découverte que plus tard par Dunn)

On notera que ces logiques ont été très vivement contestées aussi longtemps qu'une sémantique adéquate leur faisait défaut (Cf. les critiques de Quine (1978) à propos des logiques modales).

Réciproquement, si l'on dispose d'une logique définie par une relation de conséquence ou une axiomatisation, on peut construire une sémantique en utilisant les algèbres de Lindenbaum. Toutefois cette technique ne fournit pas *la classe des algèbres caractéristiques pour cette logique* (algèbres de Boole pour la logique classique, espaces topologiques pour S_4,...).

Partie I

Calculs pour Logiques Polyvalentes Finies

Cette partie se consacre à l'étude des calculs analytiques pour les logiques fortement finies. WÓJCICKI (1988) appelle ainsi une logique dont les tautologies sont précisément celles communes à une famille *finie* de matrices logiques *finies*. Théoriquement, sans perte de généralité, il suffit de considérer une matrice finie unique, puisque la matrice produit construite à partir d'un nombre fini de matrices finies est également finie. En d'autres termes, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de vérité. (Pour traiter le problème de la déductibilité, il faut généraliser la notion de matrice, si l'on désire ramener les logiques fortement finies à une logique caratérisée par une matice unique (O'HEARN & STACHNIAK, 1992).) Les calculs de cette partie sont analytiques: la valeur de vérité d'un énoncé composé est déterminée exclusivement à partir de celle de ses constistituants. Ceci correspond donc bien à la définition kantienne de l'analycité. Ces calculs sont également analytiques au sens technique du terme (PFENNING, 1984), puisque les formules envisagées au cours d'une preuve (ou d'une réfutation) sont toutes des sous-formules des formules initiales.

Les calculs analytiques (pour la logique classique)

- des séquents de GENTZEN (1934)
- des tableaux sémantiques de BETH (1955)
- des tableaux analytiques de SMULLYAN (1968)

s'adaptent aux logiques polyvalentes des prédicats. Et le premier et dernier ont effectivement été étendus à ces logiques (voir [10] respectivement (SURMA, 1974, CARNIELLI, 1987) et (SCHRÖTER, 1955*a*, ROUSSEAU, 1967, TAKAHASHI, 1968, ROUSSEAU, 1970*b*, TAKAHASHI, 1970)).

Nous ne ferons pas une étude systématique et exhaustive de toutes ses approches! En fait, nous étudierons en détail les tableaux analytiques et montrerons comment les autres calculs s'y réduisent facilement et comment gagner d'un calcul correct et complet par tableaux analytiques, un calcul correct et complet par séquents.

Commençons par une brève présentation des tableaux analytiques, qui nous servira de calcul de référence. Puis, presqu'à titre anecdotique, nous évoquerons la variante organisationnelle des tableaux sémantiques que SMULLYAN (1968) simplifie en des tableaux analytiques. Finalement, nous retournons aux sources communes, aux calculs de GENTZEN (1934).

Présentation des Tableaux Analytiques

On peut résumer le calcul des tableaux analytiques (SMULLYAN, 1968, FITTING, 1990) en disant qu'il s'agit de la recherche systématique d'une interprétation qui évalue une formule F à une valeur non-désignée avec l'espoir de ne point en trouver. Ainsi établit-on que F valide. Ce calcul a été étendu aux logiques polyvalentes (à

[10] Il est existe une abondante littérature sur le sujet (Cf. (GOTTWALD, 1989)).

nombre fini de valeurs de vérité) par SURMA (1974) (repris dans (RINE, 1977)) pour le cas propositionnel, et par CARNIELLI (1987) pour les logiques polyvalentes des prédicats.

Le langage formel des tableaux analytiques est l'ensemble des formules signées. Énumérons succinctement les éléments constitutifs de ce type de calculs. Les règles d'inférence se décomposent en deux familles: les règles de décomposition, qui déduisent de la valeur de vérité d'une formule, les valeurs de ses sous-formules immédiates et les règles de clôture qui constatent qu'aucune interprétation ne peut satisfaire simultanément toutes ses prémisses. La première famille se subdivise naturellement suivant le symbole principal de la formule décomposée. Seule la seconde famille contient des règles d'inférences ayant plus d'une prémisse.

La règle des tableaux analytiques applicable à une formule composée signée

$$[v]\, c(F_1, \dots, F_n)$$

a pour conclusions toutes les alternatives qui assignent aux sous-formules $F_1, \dots,$ F_n les valeurs $v_1, \dots, v_n$ avec

$$\Re_c(v_1, \dots, v_n) = v.$$

SMULLYAN (1968) introduit une classification convenable des règles d'inférence. Comme à toute formule composée ne s'applique qu'une seule règle de décomposition et que par ailleurs ces règles n'ont qu'une seule prémisse, on classifie en même temps les formules. Nous l'étendons naturellement aux logiques polyvalentes, tout en l'illustrant à l'aide de la logique classique (où l'on note 0 pour *faux* et 1 pour *vrai*).

Les règles de décomposition propositionnelles se divisent en règles:

- de type α: ce sont des règles d'inférence à conclusion unique. Par exemple, pour $\rightarrow$ dénotant l'implication:

$$\frac{[0]\, F \rightarrow G}{[1]\, F} \qquad\qquad \frac{[0]\, F \rightarrow G}{[0]\, G}$$

- de type β: ce sont des règles d'inférence à conclusions multiples.

$$\frac{[1]\, F \rightarrow G}{[0]\, F \mid [1]\, G}$$

Les règles d'inférence pour les quantifications sont semblables. On étend au préalable la signature fonctionnelle Σ en adjoignant aux constantes un ensemble infini dénombrable $\mathcal{P}$, dont les éléments seront appelés des *paramètres*; cette expansion de Σ sera notée $\hat{\Sigma}$.

D'une quantification signée, $[v]\, Qx \cdot G(x)$, on peut déduire la valeur de vérité d'une instance de sa sous-formule immédiate. Pour qu'une interprétation $\Im$, de domaine $\mathcal{I}$, satisfasse $[v]\, Qx \cdot G(x)$, deux cas de figure sont possibles:

- il existe $\{w\} \in \Re_Q(v)$ tel que pour tout individu a, $\Im^u_a \models [w]\,G(u)$.
- il y a $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \in \Re_Q(v)$, $n \geq 2$ tel que
    - pour tout individu a, il existe $w \in W$ tel que $\Im^u_a \models [w]\,G(u)$ et
    - pour tout $w \in W$ il existe un individu a_w tel que $\Im^u_{a_w} \models [w]\,G(u)$. Comme ces individus a_w ne sont pas connus *a priori*, on introduit des noms "nouveaux" choisis dans $\mathcal{P}$ pour dénommer ces individus.

Les règles d'instanciation, qui décomposent les quantifications se partagent en règles

- de type γ: elles n'introduisent pas de nouveaux paramètres.

$$\frac{[1]\,\forall x.G(x)}{[1]\,G(t)}$$

t est un terme quelconque

- de type δ: ces règles-ci introduisent des nouveaux paramètres.

$$\frac{[0]\,\forall x.G(x)}{[0]\,G(a)}$$

Ainsi décrites, les règles ne sont pas les plus efficaces. En effet, la concision des preuves dans ce calcul dépend (évidemment) grandement de la définition retenue pour les règles de décomposition. Le CHAPITRE 1 propose une construction systématique des règles d'inférence minimisant le nombre des alternatives, le nombre des formules et des individus "nouveaux" introduits.

Certaines règles de clôture sont des cas particuliers des règles précédentes. Elles correspondent au cas où respectivement $\Re_c = \emptyset$ et $\Re_Q = \emptyset$. Si une telle règle de clôture s'applique à une formule $[v]\,F$, il ne peut exister d'interprétation $\Im$ satisfaisant $[v]\,F$. Pour avoir une présentation uniforme, nous introduisons le symbole $\times$ supposé ne faire partie d'aucune des signatures utilisées dans la définition de $\mathcal{F}bf$. Ainsi dérivera-t-on de $[v]\,F$ (par convention) $\times$.

Par exemple, pour $\perp$ dénotant la constante logique associée à 0 (c'est-à-dire $\Re_\perp = 0$):

$$\frac{[1]\,\perp}{\times}$$

Il reste une dernière règle de clôture à présenter, qui se justifie par le fait que toute interprétation n'affecte à une formule qu'une seule valeur de vérité.

$$\frac{\begin{array}{c}[1]\,F\\[0]\,F\end{array}}{\times}$$

Un *tableau analytique* est finalement un arbre de dérivation pour le système formel constitué des règles d'inférence précédentes (Cf. DÉFINITION 2.0.1). Une branche de cet arbre de dérivation est dite *close* ou *fermée* dès que $\times$ figure dans l'étiquette de l'un des nœuds de cette branche. Un tableau analytique est *clos* (ou *fermé*, nous utiliserons indifféremment l'un ou l'autre de ces termes) lorsque toutes ses branches sont closes.

REMARQUE. L'introduction de $\times$ est inhabituelle. SMULLYAN (1968) marque les branches fermées dans le méta-langage, mais ne formalise pas ce point. Insistons sur le fait que $\times$ fait partie du méta-langage comme les formules signées, et que $\times$ n'est pas dans le domaine des interprétations. Il apparaît qu'ainsi, des (méta-)preuves formelles où l'on raisonne sur des sous-tableaux entièrement fermés, se mènent plus facilement. Et finalement, la vérification de la clôture d'une branche est une inférence (on décèle une contradiction dans le méta-langage) au même titre que celles effectuées en appliquant les règles de décomposition. Enfin, on peut comparer le rôle de $\times$ à celui de la clause vide $\Box$ dans le calcul par Résolution de ROBINSON (1965)).

Présentation des Tableaux Sémantiques

Dans sa construction du calcul des tableaux analytiques, SMULLYAN (1968) reprend une idée de BETH (1955) qui avait défini les tableaux sémantiques. Cette section esquisse la définition d'un calcul des tableaux sémantiques pour les logiques polyvalentes.

Originalement, BETH (1955) présentait les preuves en disposant pour chaque valeur de vérité d'une colonne. Pour établir qu'une formule est une tautologie, BETH procède par réfutation en vérifiant par analyse exhaustive des cas que le théorème supposé ne peut pas prendre de valeurs non-désignées. Les cas envisagés proviennent des diverses façons d'assigner aux sous-formules immédiates d'une formule F des valeurs telles que F prenne la valeur de la colonne dans laquelle elle est inscrite. Ces cas sont regroupés dans les alternatives de règles d'inférence à conclusions multiples qui décomposent les formules. Ce sont essentiellement les mêmes "inférences élémentaires" que celles effectuées dans les preuves par tableaux analytiques; seule la présentation des inférences est spécifique à chacun des deux calculs.

Au fur et à mesure que les formules sont décomposées, les colonnes sont subdivisées en entrées. Cette subdivision est la même pour chaque colonne, si bien qu'à chaque entrée d'une colonne correspond de façon biunivoque une entrée de toute autre colonne. On dira que toutes ces entrées, une exactement dans chaque colonne, *vont de pair*. Les *formules d'une entrée* sont toutes les formules écrites au-dessus de cette entrée.

Quand on applique à une formule F d'une entrée $\mathcal{E}$ de la colonne (associée à) w, une règle à conséquence multiple comptant n alternatives, les entrées allant de

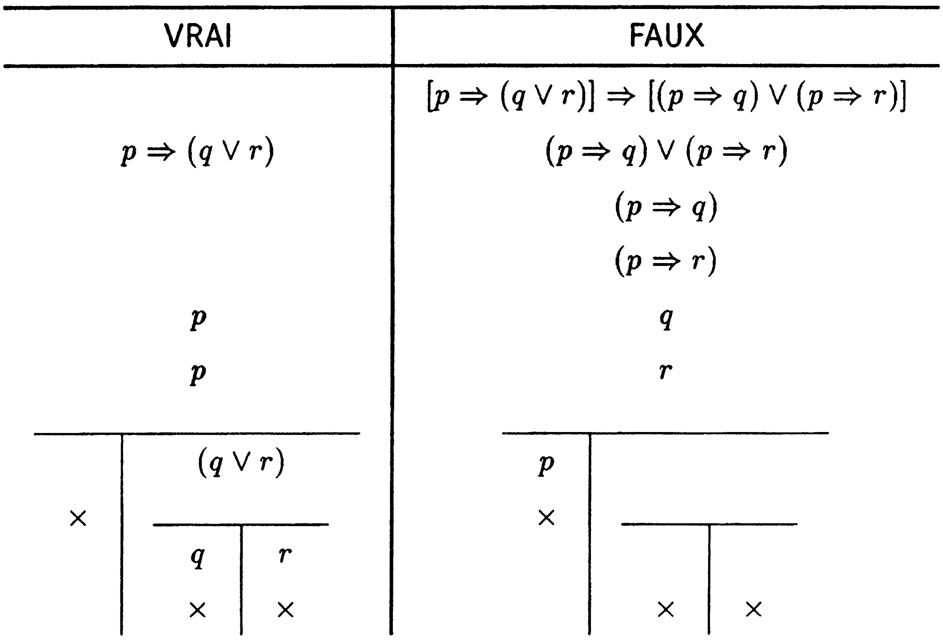

Figure 0.1: Exemple d'un tableau de BETH

pair avec $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ incluse) sont divisées en n entrées chacune. Pour tout $k \leq n$, les conclusions de la $k^{\text{ème}}$ alternative sont inscrites dans une et une seule des $k^{\text{ème}}$ entrées nouvellement créées.

On clôt toutes les entrées allant de pair dès qu'une formule est commune à deux d'entre elles. On ne décompose pas les formules d'une entrée close. Un tableau sémantique est clos lorsque toutes ses entrées sont closes.

On montre que pour toute formule F,

> F est une tautologie
>
> ssi il existe pour chaque valeur v non-désignée un tableau sémantique clos, où F est inscrit dans la colonne associée à v

Le plus simple est d'illustrer cette méthode par un exemple choisi dans la logique classique. On désire prouver que

$$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$$

est une tautologie de la logique classique (Cf. FIGURE 0.1).

On se convainc facilement à l'usage que pour des formules compliquées (c'est-à-dire dont les preuves partielles sont de très grands tableaux), il devient difficile de retrouver les entrées allant de pair et de vérifier qu'elles ne partagent pas de formules en commun. Il est beaucoup plus simple d'annoter les formules avec la valeur de vérité associée à la colonne de leur entrée. Par cette réorganisation, les tableaux gagnent en clarté. [11] C'est justement la transformation à opérer pour passer des tableaux sémantiques aux tableaux analytiques.

Présentation des Séquents

SMULLYAN (1968) montre aussi comment passer des tableaux analytiques aux tableaux par bloc, et de là aux séquents de Gentzen symétriques.

Soit $\mathcal{T}$ un tableau analytique. On construit à partir de $\mathcal{T}$ *un tableau par bloc* $\mathcal{T}'$ en procédant comme suit. $\mathcal{T}'$ ne diffère de $\mathcal{T}$ que par ses étiquettes. L'étiquette du nœud n dans $\mathcal{T}'$ est la réunion des étiquettes dans $\mathcal{T}$ de tous les nœuds m tels qu'il existe un chemin de longueur positive ou nulle de m à n.

Le langage formel est maintenant la famille de tous les ensembles de formules signées et de $\times$. Les règles d'inférence pour les tableaux par blocs se déduisent facilement de celles des tableaux analytiques. Pour décomposer une formule signée $[v]\,F$, au lieu d'avoir cette formule en prémisse d'une règle d'inférence d'alternatives $A_1,\ldots,A_m$, c'est un ensemble E de formules signées contenant $[v]\,F$ qui permet de dériver les alternatives $\{E \cup A_1\},\ldots, \{E \cup A_m\}$ [12]. Pour dériver $\times$, on modifie de façon analogue les prémisses. Les règles d'inférence ainsi construites sont correctes, puisque si une interprétation satisfait toutes les formules de l'ensemble en prémisse alors tous les éléments d'une des alternatives au moins sont satisfaisables. Et si la conclusion est $\times$, alors pour toute interprétation $\Im$, l'ensemble en prémisse n'est pas satisfait par $\Im$.

Définissons un *séquent* comme une application des valeurs de vérité vers les ensembles de formules. Si $\mathfrak{S}$ est telle application et v est une valeur de vérité, $\mathfrak{S}(v)$ est noté $\mathfrak{S}_v$. La satisfaisabilité d'un séquent est défini ainsi:

L'interprétation $\Im$ satisfait le séquent $\mathfrak{S}$

ssi il existe une formule $F \in \bigcup im(\mathfrak{S})$ telle que $F \notin \mathfrak{S}_{\Im(F)}$.

Ainsi toute étiquette d'un tableau par bloc est au fond un séquent. Toute règle de décomposition du calcul des tableaux par bloc est au fond une *règle d'introduction* (GENTZEN, 1934) du calcul des séquents, qui préserve la satisfaisabilité. Ainsi d'une règle du calcul des tableaux par bloc

$$\frac{E}{E \cup A_1 \;\;\Big|\;\; \cdots \;\;\Big|\;\; E \cup A_m}$$

[11] Signalons qu'une simplification semblable dans l'organisation des tableaux se retrouve dans le passage des calculs par tableaux (pour les logiques modales) de KRIPKE (1959) aux tableaux préfixés de FITTING (1983).

[12] Les alternatives, ainsi que les étiquettes des arbres de dérivation ont été définies comme des sous-ensembles du langage formel.

devient

$$\frac{\mathfrak{V}^1 \quad \cdots \quad \mathfrak{V}^m}{\mathfrak{V}}$$

où pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, pour toute valeur de vérité v, et toute formule F,

$$F \in \mathfrak{V}_v \text{ ssi } [v]F \in E$$
$$F \in \mathfrak{V}^i_v \text{ ssi } [v]F \in E \cup A_i$$

L'énoncé de la correction de cette règle est simplement une reformulation de la contraposée de l'énoncé de la correction de la règle des tableaux par blocs.

Les règles de clôture sont en fait les axiomes de ce calcul. Le séquent $\mathfrak{S}$ est un axiome si et seulement s'il a l'une des formes décrites ci-après:

- il existe $v, w \in \mathcal{C}$ telles que $\mathfrak{S}_v \cap \mathfrak{S}_w \neq \emptyset$,
- il existe $v \in \mathcal{C}$ et $F \in \mathfrak{S}_v$ de connecteur ou quantificateur principal s, telle que $v \notin im(\mathfrak{R}_s)$,

SCHRÖTER (1955*a*) définit très sommairement un calcul des séquents pour les logiques de Lukasiewicz ayant un nombre fini de valeurs de vérité, avec les règles que nous venons de donner. Dans la suite nous appellerons donc ce genre de calcul de Gentzen, *calcul des séquents de* SCHRÖTER.

La règle structurelle de l'*affaiblissement* (GENTZEN, 1934) est inutile compte tenu de la forme du premier schéma d'axiomes. Les règles structurelles de la *contraction*, et de l'*échange* (GENTZEN, 1934) sont également superflues vu que les images des valeurs de vérité d'un séquent sont des *ensembles*.

Pour retrouver la présentation standard des séquents de la logique classique, il suffit d'écrire $\mathfrak{S}_1 \Longrightarrow \mathfrak{S}_0$. Dans (GENTZEN, 1934, SMULLYAN, 1968), $\mathfrak{I}$ satisfait le séquent $\Delta \Longrightarrow \Gamma$ ssi $\mathfrak{I}$ évalue à 0 une des formules de Δ ou à 1 l'une des formules de Γ. Comme il n'y a que deux valeurs de vérité, cette définition-ci de la satisfaisabilité d'un séquent est bien équivalente à celle donnée pour les séquents de SCHRÖTER.

Comme pour les calculs des séquents de Gentzen des logiques classique et intuitionniste, la règle de la Coupure est admissible (GENTZEN, 1934): à partir de toute preuve dans le calcul des séquents avec la règle de la Coupure, on peut construire une preuve se privant de l'emploi de la règle de la Coupure.

Ici, la *règle de la Coupure* s'énonce ainsi, quand il y a n valeurs de vérité dans $\mathcal{C}$, appelées $0, \ldots, n-1$:

$$\frac{\mathfrak{U}^0 \quad \cdots \quad \mathfrak{U}^{n-1}}{\mathfrak{V}} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } w \in \mathcal{C},\ F \in \mathfrak{U}^w_w \\ \text{et } \mathfrak{V}_w = (\mathfrak{U}^w_w - F) \cup \bigcup_{v \neq w} \mathfrak{U}^v_w \end{array} \right.$$

F s'appelle la formule principale.

Finalement, on établit que pour toute formule F

F est une tautologie

ssi pour toute valeur de vérité non-désignée v, le séquent $\mathfrak{S}$ dont $\mathfrak{S}_v = \{F\}$ et $\mathfrak{S}_w = \emptyset$ pour $w \neq v$ est prouvable dans le calcul des séquents de SCHRÖTER.

Dans la définition de la satisfaisabilité d'un séquent de SCHRÖTER, la *non-appartenance* qui y figure semble peu naturelle. C'est sur ce point que diffèrent les séquents de SCHRÖTER des séquents de ROUSSEAU (1967) et TAKAHASHI (1968). En ce sens ces derniers généralisent plus fidèlement les séquents de GENTZEN (1934).

Un séquent de ROUSSEAU-TAKAHASHI $\mathfrak{S}$ est satisfait par $\mathfrak{I}$,

ssi il existe une formule F telle $F \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}(F)}$.

La construction des règles d'introduction pour ce calcul, à partir des règles d'introduction du calcul des séquents de SCHRÖTER sera détaillé dans la SOUS-SECTION 5.5.1. Ces règles sont *en quelque sorte duales* l'une de l'autre.

Les axiomes sont de l'une des formes ci-après:

- $(\{F\} \cup \mathfrak{S}_v)_{v \in \mathfrak{C}}$
- il existe $c \in \Pi_0$ avec $c \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}_c}$

De même, La règle de la Coupure est plus simple:

$$\frac{\mathfrak{U} \qquad \mathfrak{V}}{\mathfrak{W}} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } u, v \in \mathfrak{C}, \text{ et } F \in \mathfrak{U}_u \cap \mathfrak{V}_v \\ \text{tel que } u \neq v \\ \text{et } \mathfrak{W}_u = (\mathfrak{U}_u - F) \cup \mathfrak{V}_u \\ \text{et } \mathfrak{W}_v = \mathfrak{U}_v \cup (\mathfrak{V}_v - F) \\ \text{et } \mathfrak{W}_w = \mathfrak{U}_w \cup \mathfrak{V}_w \text{ sinon} \end{array} \right.$$

TAKAHASHI (1968) montre que la Coupure est une règle admissible de calcul des séquents de ROUSSEAU-TAKAHASHI.

On établit également pour les séquents de ROUSSEAU-TAKAHASHI que pour toute formule F

F est une tautologie

ssi le séquent $\mathfrak{S}$, dont $\mathfrak{S}_v = \{F\}$ pour $v \in \mathfrak{D}$ et $\mathfrak{S}_w = \emptyset$ sinon, est prouvable dans le calcul des séquents de ROUSSEAU-TAKAHASHI.

TAKAHASHI (1970) généralise l'étude commencée dans (TAKAHASHI, 1968) aux logiques continues. Ces logiques sont définies à partir d'un ensemble de valeurs de vérité qui forme un espace de Hausdorff compact; les connecteurs sont interprétés par des fonctions continues dans cet espace; les quantificateurs doivent être des fonctions continues des ensembles de valeurs de vérité vers les valeurs de vérité. Tout ensemble fini peut être muni d'une telle topologie, mais il existe également des logiques ayant un nombre infini de valeurs de vérité. Au lieu de raisonner avec les points de l'espace comme valeurs de vérité, on peut alors se servir des ouverts comme valeurs de vérité. En considérant des espaces avec un nombre fini de points, on retrouve la proposition de HÄHNLE (1991) d'utiliser les ensembles de valeurs de vérité comme signes dans un calcul par tableaux analytiques. Mais les considérations de HÄHNLE (1991) sont combinatoires et produisent des calculs "efficaces" pour une classe de logiques polyvalentes.

La restriction la plus sévère qu'impose le calcul des séquents de TAKAHASHI pour les logiques continues avec un ensemble de points infini est que l'ensemble de valeurs désignées $\mathcal{D}$ doit être un ouvert de la topologie considérée.

Chapitre 1

Des Matrices aux Règles d'Inférence

Ce chapitre décrit le passage d'une logique (avec un nombre fini de valeurs de vérité) à un calcul analytique comme le calcul des tableaux analytiques (SMULLYAN, 1968) ou comme le calcul des séquents de Gentzen (SZABÓ, 1969).

Nos propositions diffèrent en deux points des autres approches.

- l'aspect algorithmique est approfondi, au lieu de se contenter d'une description déclarative;
- les règles d'inférence proposées finalement sont conçues de manière à réduire le taux de branchement des tableaux (et à retarder par là l'explosion combinatoire) et à introduire dans le cas de l'application des règles de décomposition des quantificateurs, le moins de nouveaux individus possibles.

En un premier temps, nous évoquerons l'article de TAKAHASHI (1970) sur les systèmes de Gentzen pour les logiques continues ainsi que les autres travaux sur la définition de calculs analytiques pour les logiques à nombre fini de valeurs de vérité.

Les deux sections qui lui suivent se placent également dans ce cadre et mettent l'accent sur l'aspect algorithmique, négligé dans tous les travaux antérieurs.

1.1 Travaux Antérieurs

TAKAHASHI a d'abord regardé les logiques polyvalentes à nombre fini de valeurs de vérité. TAKAHASHI (1968) traite tant le cas propositionnel pour ces logiques, que la logique des prédicats où les quantificateurs sont $\forall$ et $\exists$, interprétés respectivement comme la borne supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de vérité que prennent toutes les instances de la quantification considérée.

TAKAHASHI définit des systèmes de Gentzen pour ces logiques. Les séquents, qu'il appelle des *matrices*, sont des ensembles de formules signées. Une interprétation satisfait un séquent ssi il existe une formule signée de ce séquent qui interprète une formule à son signe. Un séquent est valide ssi toute interprétation le satisfait. Pour chaque connecteur et toute valeur de vérité, il définit une règle de décomposition, comme on le fait en logique classique. En outre, ces calculs contiennent les règles structurelles usuelles. Les axiomes sont les séquents $\{[v]\, F : v \in \mathcal{C}\}$, où F est une formule et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des valeurs de vérité. Pour ces calculs, il prouve que la règle de la coupure peut être éliminée. Une preuve du théorème de compacité est donnée.

TAKAHASHI (1970), bâtissant sur les travaux de CHANG (1966) sur la théorie des modèles des logiques continues, détaille une méthode de définition de systèmes de Gentzen pour cette classe de logiques qui contient strictement les logiques finies, mais, cependant pas des logiques à nombre infini de valeurs de vérité comme, par exemple la logique intuitionniste. À la différence de son travail antérieur (TAKAHASHI, 1968), ce travail ne fait aucune hypothèse supplémentaire quant aux quantificateurs de la logique. Les résultats de (ROUSSEAU, 1967), pour les logiques à nombre fini de valeurs de vérité, sont analogues à ceux de (TAKAHASHI, 1968).

Ces deux auteurs définissent différemment les règles d'inférence pour décomposer les formules. En fait, ROUSSEAU prouve l'existence des règles de décomposition sans pour autant choisir effectivement une règle. TAKAHASHI se contente de la règle de décomposition la plus simple, équivalente à celle appelée R_{prim} dans la suite.

SURMA (1974) considère des calculs des tableaux analytiques inspirés par les travaux de SMULLYAN (1968) et ne traite que le cas propositionnel. Il définit d'une autre façon encore les règles d'inférence. Une alternative de la règle de décomposition de $[v]\, c(F_1, \ldots, F_n)$ est définie par l'existence d'une évaluation h qui interprète $c(F_1, \ldots, F_n)$ à la valeur v, les conclusions de l'alternative sont

$$\{[h(F_1)]\, F_1, \ldots, [h(F_n)]\, F_n\}\,.$$

Cette façon de définir une règle d'inférence est reprise par CARNIELLI (1987). À la différence du précédent, il s'intéresse au calcul des prédicats et à la réduction du nombre des alternatives. CARNIELLI (1987) expose une méthode systématique de définition de règles d'inférence à partir des matrices finies.

L'exposé qui suit présente une *construction* de ces règles d'inférence. Ces règles sont meilleures que celles de CARNIELLI, dont le propos, par ailleurs, n'était pas de fournir des règles *optimisées*.

1.2 Le Cas Propositionnel

Comme l'ensemble des valeurs de vérité $\mathcal{C}$ est fini, on peut calculer, pour toute valeur de vérité w, pour tout connecteur c de Π_n l'ensemble de tous les n-uplets $\vec{v}$ tels que $\Re_c(v_1, \ldots, v_n) = w$; cet ensemble est noté $\Re_c^{-1}(w)$.

Si $\Re_c^{-1}(w) \neq \emptyset$, on nomme $R_{prim}(w, c)$ la règle d'inférence (à conclusions multiples):

$$\frac{[w]\, c(F_1, \ldots, F_n)}{\begin{array}{c|c|c} & [v_{1,i}]\, F_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & [v_{n,i}]\, F_n & \end{array}}$$

où pour chaque solution $\vec{v_i} = \langle v_{1,i}, \ldots, v_{n,i} \rangle \in \Re_c^{-1}(w)$, il y a une alternative (mise en évidence par une colonne comme ci-dessus), sinon (c'est-à-dire $\Re_c^{-1}(w) = \emptyset$) $R_{prim}(w, c)$ désigne la règle d'inférence:

$$\frac{[w]\, c(F_1, \ldots, F_n)}{\times}$$

PROPOSITION 1.2.1. *Soient $[w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$ une formule signée et $\Im$ une interprétation.*
1. Si $\Im \models [w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$, alors $\Re_c^{-1}(w) \neq \emptyset$.
2. $\Im \models [w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$ ssi il existe $\vec{v} \in \Re_c^{-1}(w)$, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\Im \models [v_i]\, F_i$

PREUVE. 1. On procède par contraposition. $\langle \Im(F_1), \ldots, \Im(F_n) \rangle \notin \Re_c^{-1}(w) = \emptyset$, donc $\Im(c(F_1, \ldots, F_n)) \neq w$.
2. Si $\Im \models [w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$, alors $\langle \Im(F_1), \ldots, \Im(F_n) \rangle \in \Re_c^{-1}(w)$. Réciproquement, si $\Re_c(\vec{v}) = w$, alors $\Im \models [w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$. C.Q.F.D.

REMARQUE. En particulier, on a prouvé que $R_{prim}(w, c)$ est une règle d'inférence *correcte*.

1.2.1 Réduction du Nombre d'Alternatives

On peut donner une règle d'inférence équivalente à $R_{prim}(w, c)$ plus simple, si des arguments n'interviennent pas dans le calcul de la valeur de vérité de $\Re_c(v_1, \ldots, v_n)$, si, par exemple, $\forall v \in \mathcal{C}, \Re_c(v_1, \ldots, v_{n-1}, v) = w$. Les n alternatives de l'inférence décomposant $[w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$ contenant $[v_1]\, F_1, \ldots, [v_{n-1}]\, F_{n-1}$ peuvent alors être remplacées par une seule alternative constituée exactement ces $n - 1$ formules signées.

On note par $\star$ un symbole non encore utilisé et par $\mathcal{C}_\star =_{df} \mathcal{C} \cup \{\star\}$. Le "jocker" $\star$ est utilisé pour marquer les positions dans un n-uplet dont la valeur n'est pas pertinente dans le calcul de $\Re_c(v_1, \dots, v_n)$. Le n-uplet $\vec{v}$ *recouvre* le n-uplet $\vec{w}$ (ce qu'on note par $\vec{v} \trianglelefteq \vec{w}$) ssi pour tout $1 \leq i \leq n$, $v_i \neq w_i$ implique $v_i = \star$; $\vec{v}$ recouvre *strictement* $\vec{w}$ ssi $\vec{v}$ recouvre $\vec{w}$ et $\vec{v} \neq \vec{w}$ ($\vec{v} \lhd \vec{w}$). $\lhd$ est bien sûr une relation d'ordre. Si $\vec{u} \in \mathcal{C}_\star^n$, $v \in \mathcal{C}_\star$ et $1 \leq i \leq n$, $\vec{u}_v^i$ est le n-uplet qui ne diffère de $\vec{u}$ qu'en sa $i^{\text{ème}}$ composante qui vaut v, $\mid \vec{u} \mid$ est le nombre de composantes de $\vec{u}$ dans $\mathcal{C}$. On étend $\Re_c$ à une fonction partielle de domaine $\mathcal{C}_\star^n$, définie par:

$$\begin{array}{rccl} \Re_c^\star : & \mathcal{C}_\star^n & \rightarrow & \mathcal{C}_\star \\ & \langle v_1, \dots, v_n \rangle & \mapsto & w \\ & & & \text{ssi pour tout } u \in \mathcal{C}^n, \vec{u} \trianglerighteq \vec{v} \Rightarrow \Re_c(\vec{u}) = \vec{w} \end{array}$$

On définit $\mathrm{Ea}_c(w)$ et $\mathrm{Ema}_c(w)$, l'ensemble des éléments minimaux pour $\lhd$ de $\mathrm{Ea}_c(w)$, par:

$$\mathrm{Ea}_c(w) = \{\vec{v} \in \mathcal{C}_\star^n : \Re_c^\star(\vec{v}) \textit{ est défini et } \Re_c^\star(\vec{v}) = w\} = \Re_c^{\star-1}(w)$$

et

$$\mathrm{Ema}_c(w) = \{\vec{v} \in \mathrm{Ea}_c(w) : \forall \vec{u} \in \mathrm{Ea}_c(w), \vec{v} \not\lhd \vec{u}\}.$$

L'algorithme donné dans la FIGURE 1.1 prend en entrée $\Re_c^{-1}(w)$, et retourne $\mathrm{Ema}_c(w)$. Il s'agit d'une adaptation aux logiques polyvalentes de l'algorithme de QUINE (1952) et MCCLUSEY (1956) (voir aussi (WEGENER, 1987)). On trouve déjà une telle adaptation dans (CARVALLO, 1968) pour les logiques trivalentes. CARVALLO y étudie la minimisation de circuits trivalents (les trois états des portes logiques considérés sont '*ouvert*', '*fermé*' et '*transitoire*').

PROPOSITION 1.2.2. $CalEma(\Re_c^{-1}(w)) = Ema_c(w)$.

PREUVE. On établit pour cela la validité de l'invariant de boucle de *CalEma* (voir FIGURE 1.1). Les hypothèses en sont:

(H1) $\forall \vec{v} \in \Re_c^{-1}(w), \forall \vec{v'} \in \mathrm{Ema}_c(w), \exists \vec{u} \in MinTab \cup Alts, \vec{v'} \trianglelefteq \vec{v} \Rightarrow \vec{v'} \trianglelefteq \vec{u} \trianglelefteq \vec{v}$

(H2) $Alts \subseteq \mathrm{Ea}_c(w)$

(H3) $\forall \vec{u} \in Alts, \mid \vec{u} \mid = i$

(H4) $\forall \vec{u} \in Alts, \forall x \in \mathcal{C}, \forall j, u_j \in \mathcal{C} \wedge \vec{u}_x^j \in \mathrm{Ea}_c(w) \Rightarrow \vec{u}_x^j \in Alts$

(H5) $MinTab \subseteq \mathrm{Ema}_c(w)$

Il faut en déduire:

(C1) $\forall \vec{v} \in \Re_c^{-1}(w), \forall \vec{v'} \in \mathrm{Ema}_c(w), \exists \vec{u} \in MinTab \cup ExMin \cup Red, \vec{v'} \trianglelefteq \vec{v} \Rightarrow \vec{v'} \trianglelefteq \vec{u} \trianglelefteq \vec{v}$

(C2) $Red \subseteq \mathrm{Ea}_c(w)$

FONCTION $CalEma\,(Alts)$

DEBUT

|| **ASSERTION:** $Alts = \Re_c^{-1}(w)$ où $c \in \Pi$ et $w \in \mathcal{C}$

$MinTab \leftarrow \emptyset;$

$Red \leftarrow \emptyset;$

$i \leftarrow n;$

TANT QUE $Alts \neq \emptyset$ **FAIRE**

|| **INVARIANT:** $\forall \vec{v} \in \Re_c^{-1}(w), \forall \vec{v'} \in \mathrm{Ema}_c(w), \exists \vec{u} \in MinTab \cup Alts, \vec{v'} \trianglelefteq \vec{v} \Rightarrow$
$\vec{v'} \trianglelefteq \vec{u} \trianglelefteq \vec{v}$
$Alts \subseteq \mathrm{Ea}_c(w)$
$\forall \vec{u} \in Alts, |\,\vec{u}\,| = i$
$\forall \vec{u} \in Alts, \forall x \in \mathcal{C}, \forall j, u_j \in \mathcal{C} \wedge \vec{u}^j_x \in \mathrm{Ea}_c(w) \Rightarrow \vec{u}^j_x \in Alts$
$MinTab \subseteq \mathrm{Ema}_c(w)$

$Red \leftarrow \{\vec{v}^j_\star : \vec{v} \in Alts \wedge \exists j, \forall x \in \mathcal{C}, \exists \vec{u} \in Alts, u_j = x \wedge \vec{v}^j_\star = \vec{u}^j_\star\};$

$MinTab \leftarrow MinTab \cup \{\vec{v} \in Alts : \forall j, \vec{v}^j_\star \notin Red\};$

$i \leftarrow i - 1;$

$Alts \leftarrow Red$

FAIT;

RETOURNE $(MinTab)$

FIN

Figure 1.1: Calcul de $\mathrm{Ema}_c(w)$

(C$_3$) $\forall \vec{u} \in Red, |\,\vec{u}\,| = i - 1$

(C$_4$) $\forall \vec{u} \in Red, \forall x \in \mathcal{C}, \forall j, u_j \in \mathcal{C} \wedge \vec{u}^j_x \in \mathrm{Ea}_c(w) \Rightarrow \vec{u}^j_x \in Red$

(C$_5$) $MinTab \cup ExMin \subseteq \mathrm{Ema}_c(w)$

avec $ExMin = \{\vec{v} \in Alts : \forall j, \vec{v}^j_\star \notin Red\}$ et $ExRed = \{\vec{v} \in Alts : \exists j, \vec{v}^j_\star \in Red\}$. Notons que $Alts = ExRed \cup ExMin$.

1. Soient $\vec{v} \in \Re_c^{-1}(w)$ et $\vec{v'} \in \mathrm{Ema}_c(w)$ tels que $\vec{v'} \trianglelefteq \vec{v}$. Il existe $\vec{u} \in MinTab \cup Alts, \vec{v'} \trianglelefteq \vec{u} \trianglelefteq \vec{v}$. Comme $MinTab \cup ExMin \subseteq MinTab \cup Alts$, seul le cas $\vec{u} \notin MinTab \cup ExMin$ est à regarder de plus près: $\vec{u} \in Alts \setminus ExMin$ c'est-à-dire $\exists j, \vec{u}^j_\star \in Red$. Donc $\vec{u}$ n'est pas minimal pour $\triangleleft$ et on peut donc choisir j tel que $\vec{v'} \trianglelefteq \vec{u}^j_\star \triangleleft \vec{u} \trianglelefteq \vec{v}$. Et $\vec{u}^j_\star \in Red$. En effet, comme $\Re_c(\vec{u}^j_\star) = w$ (car $\Re_c(\vec{v'}) = w$) et que $\vec{u} \in Alts$, $\forall x \in \mathcal{C}, \vec{u}^j_x \in Alts$ (H$_4$).
2. Soit $\vec{u} \in Red$. Il y a donc un indice j tel que pour toute valeur de vérité x, un n-uplet $\vec{u}^j_x$ tel que $\Re_c(\vec{u}^j_x) = w$, donc $\Re_c(\vec{u}) = w$ et ainsi $\vec{u} \in \mathrm{Ea}_c(w)$.

3. Soit $\vec{u} \in Red$. Il existe donc $\vec{u'} \in Alts$ et j tels que $\vec{u'}^j_\star = \vec{u}$. Or $\mid \vec{u'} \mid = i$ (H3), $\mid \vec{u'} \mid = \mid \vec{u} \mid + 1$, donc $\mid \vec{u} \mid = i - 1$.
4. Soit $\vec{u} \in Red$. Soient y une valeur de vérité et k un indice tels que $u_k \in \mathcal{C}$ et $\vec{u}^k_y \in \mathrm{Ea}_c(w)$.
Comme $\vec{u} \in Red$, Il y a donc un indice j tel que pour toute valeur de vérité x,$\vec{u}^j_x \in Alts$. $(\vec{u}^j_x)^k_y \in \mathrm{Ea}_c(w)$ car $(\vec{u}^j_x)^k_y \rhd \vec{u}^k_y$ et $\vec{u}^k_y \in \mathrm{Ea}_c(w)$. Par application de (H4), $(\vec{u}^j_x)^k_y \in Alts$. Puisque $u_j \notin \mathcal{C}$, $j \neq k$ et ainsi $(\vec{u}^j_x)^k_y = \left(\vec{u}^k_y\right)^j_x$. Par ailleurs, tous ces $\left(\vec{u}^k_y\right)^j_x$ ne diffèrent qu'en leur j composante, qui décrit tout $\mathcal{C}$ donc $\left(\left(\vec{u}^k_y\right)^j_x\right)^j_\star = \vec{u}^k_y \in Red$.
5. Soit $\vec{u} \in ExMin$. Supposons qu'il existe $\vec{v} \in \mathrm{Ea}_c(w)$ tel que $\vec{v} \lhd \vec{u}$. Donc il existe un indice j tel que $\vec{v} \unlhd \vec{u}^j_\star$ et $\vec{u}^j_\star \in \mathrm{Ea}_c(w)$. Aussi $\forall x \in \mathcal{C}, \vec{u}^j_x \in \mathrm{Ea}_c(w)$ et donc $\forall x \in \mathcal{C}, \vec{u}^j_x \in Alts$, puisque $\vec{u} \in Alts$ donc $\vec{u}^j_\star \in Red$. D'où $\vec{u} \notin ExMin$!

L'invariant de boucle est valide. Par ailleurs, il est vrai en entrée de boucle. Si la procédure termine, on a donc prouvé qu'à la sortie de boucle, $MinTab \subseteq \mathrm{Ema}_c(w)$ (H5). Par ailleurs, (H1) implique $\forall \vec{v'} \in \mathrm{Ema}_c(w), \exists \vec{u} \in MinTab, \vec{v'} \unlhd \vec{u}$. Or, si deux éléments minimaux sont comparables, ils sont identiques et $\vec{u} \in \mathrm{Ema}_c(w)$. Donc $\forall \vec{v'} \in \mathrm{Ema}_c(w), \exists \vec{u} \in MinTab, \vec{v'} = \vec{u}$ c'est-à-dire $\mathrm{Ema}_c(w) \subseteq MinTab$.

De plus, la procédure termine, puisque i qui vaut en entrée de boucle n décroît strictement lors de chaque itération. C.Q.F.D.

On note par R^w_c la règle d'inférence déduite de $\mathrm{Ema}_c(w)$. Son unique prémisse est une formule signée $[w]\, c(F_1, \dots, F_n)$. Ses conclusions sont multiples et chaque alternative A correspond à un vecteur $\vec{v} \in \mathrm{Ema}_c(w)$; la formule signée $[v_i]\, F_i$ ($1 \leq i \leq n$) est un élément de A ssi $v_i \in \mathcal{C}$ (c'est-à-dire $v_i \neq \star$).

PROPOSITION 1.2.3. *R^w_c est une règle d'inférence correcte:*
Soient $[w]\, c(F_1, \dots, F_n)$ une formule signée et $\Im$ une interprétation.

$$\Im \models [w]\, c(F_1, \dots, F_n),$$

ssi il existe $\vec{v} \in \mathrm{Ema}_c(w)$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $v_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \Im \models [v_i]\, F_i$.

PREUVE. Puisque $\Im \models [w]\, c(F_1, \dots, F_n)$, $\langle \Im(F_1), \dots, \Im(F_n) \rangle \in \Re^{-1}_c(w)$. Il existe donc au moins un n-uplet $\vec{v} \in \mathrm{Ema}_c(w)$ tel que $\vec{v} \unlhd \langle \Im(F_1), \dots, \Im(F_n) \rangle$ (par définition de $\mathrm{Ema}_c(w)$).

Réciproquement, s'il existe $\vec{v} \in \mathrm{Ema}_c(w)$ tel que $\vec{v} \unlhd \langle \Im(F_1), \dots, \Im(F_n) \rangle$, alors $\Im \models [w]\, c(F_1, \dots, F_n)$. C.Q.F.D.

Dans (WEGENER, 1987), une évaluation grossière du coût de $CalEma$ est donnée pour la logique classique. On peut vérifier que le coût en temps de cet algorithme est en $O\left(N^{\frac{\log(k+1)}{\log k}} \times \log N\right)$ où $k = \# \mathcal{C}$ et $N = \#(\Re^{-1}_c(w))$.

1.2.2 Réduction Supplémentaire du Nombre d'Alternatives

Chaque formule signée de toute alternative est nécessaire pour préserver la correction de R_c^w. En ce sens R_c^w est minimale.

Mais la règle n'est pas *optimale*, car il se peut qu'une alternative ne soit pas necéssaire pour préserver la correction.

Par exemple, pour une logique à trois valeurs $\{0, 1, 2\}$, et un connecteur c (comme *conditionnelle*) dont une règle d'inférence correcte est:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \multicolumn{4}{c}{[2]\, c(F, F_0, F_1, F_2)} \\ \hline [0]\, F_0 & [0]\, F & [1]\, F & [2]\, F \\ [1]\, F_1 & [0]\, F_0 & [1]\, F_1 & [2]\, F_2 \\ [2]\, F_2 & & & \end{array}$$

La règle d'inférence précédente est exactement $\mathcal{R}_c^2$. Mais la règle d'inférence suivante est meilleure (et plus naturelle!) :

$$\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{[2]\, c(F, F_0, F_1, F_2)} \\ \hline [0]\, F & [1]\, F & [2]\, F \\ [0]\, F_0 & [1]\, F_1 & [2]\, F_2 \end{array}$$

Cet exemple illustre qu'il suffit de choisir un sous-ensemble de $\mathrm{Ema}_c(w)$ qui peut être calculé par un algorithme qui réduit le problème de ce choix à un problème de recouvrement.

Un *recouvrement* d'une famille $\mathcal{A}$ d'ensembles est une famille $\mathcal{A}'$ qui vérifie les conditions suivantes:

1. $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$
2. $\bigcup \mathcal{A}' = \bigcup \mathcal{A}$
3. aucune sous-famille stricte de $\mathcal{A}'$ ne vérifie le POINT 2.

Résoudre le *problème de recouvrement* pour $\mathcal{A}$ revient à donner tous les recouvrements de $\mathcal{A}$. Ce problème, réputé difficile [1], est ramené à un problème de taille moindre (voir par exemple (WEGENER, 1987))

- si pour $a \in A \in \mathcal{A}$, a ne figure que dans A, alors A fait partie de tout recouvrement de $\mathcal{A}$. On ajoute A à un recouvrement de $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ pour en faire un recouvrement de $\mathcal{A}$.

[1] peut-être NP-complet!

- On peut éliminer $a \in \bigcup \mathcal{A}$, s'il existe $a' \in \bigcup \mathcal{A}$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $a' \in A$ implique $a \in A$. On cherche un recouvrement de $\{A - a : A \in \mathcal{A}\}$. Pour en gagner un recouvrement de $\mathcal{A}$, on ajoute à tout ensemble du recouvrement qui contient a', l'élément a.

Quand les simplifications ci-dessus ne sont plus applicables, commence une recherche exhaustive des solutions, en retirant au fur et à mesure les ensembles choisis arbitrairement et leurs éléments, pour appliquer si possible les simplifications ci-dessus.

En considérant un élément de $\text{Ema}_c(w)$ comme l'ensemble de tous les n-uplets de $\mathfrak{R}_c^{-1}(w)$ qu'il recouvre, un *recouvrement* de $\text{Ema}_c(w)$ en est un sous-ensemble $\mathcal{E}ma$ tel que pour tout $\vec{v} \in \mathfrak{R}_c^{-1}(w)$, il existe un unique $\vec{v^*} \in \mathcal{E}ma$ tel que $\vec{v^*} \trianglelefteq \vec{v}$. L'algorithme ébauché ci-dessus peut aisément être reformulé en termes de $\trianglelefteq$ et de n-uplets.

On appellera $\mathcal{R}_c^w$ la règle d'inférence déduite d'un recouvrement $\mathcal{E}ma$.

PROPOSITION 1.2.4. *La règle d'inférence $\mathcal{R}_c^w$ est correcte.*
Soient $[w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$ une formule signée et $\Im$ une interprétation.

$$\Im \models [w]\, c(F_1, \ldots, F_n),$$

ssi il existe $\vec{v} \in \mathcal{E}ma$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $v_i \in \mathfrak{C} \Rightarrow \Im \models [v_i]\, F_i$.

PREUVE. Comme pour la Proposition 1.2.3.
Puisque $\Im \models [w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$, $\langle \Im(F_1), \ldots, \Im(F_n) \rangle \in \mathfrak{R}_c^{-1}(w)$. Il existe donc exactement un n-uplet $\vec{v} \in \mathcal{E}ma$ tel que $\vec{v} \trianglelefteq \langle \Im(F_1), \ldots, \Im(F_n) \rangle$ (par définition de $\mathcal{E}ma$).

Réciproquement, s'il existe $\vec{v} \in \mathcal{E}ma$ tel que $\vec{v} \trianglelefteq \langle \Im(F_1), \ldots, \Im(F_n) \rangle$, alors $\Im \models [w]\, c(F_1, \ldots, F_n)$. C.Q.F.D.

Quelque soit le recouvrement choisi, la solution est meilleure que la règle obtenue avec les définitions de CARNIELLI, qui compte *au moins* autant d'alternatives [2].

1.3 Le Cas des Quantificateurs

On présente ici deux versions des règles de décomposition des quantificateurs. La première suit de près la sémantique des quantificateurs et respecte la signature logique. La seconde se place dans une expansion de la signature logique, afin de pouvoir exprimer plus facilement de nouvelles règles. Seuls seront considérés des quantificateurs liants une seule variable (on ne traite pas de quantificateurs comme "au moins autant de x vérifiant ... que de y satisfaisant ...", comme dans par exemple (WESTERSTÅHL, 1989))

[2] dans l'exemple, CARNIELLI (1987) semble en tenir compte, mais dans la définition des règles d'inférence ce cas de figure ne peut être exprimé

$\Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v) = \emptyset$ signifie que la quantification $\mathrm{Q}\, x \cdot F(x)$ ne prend jamais la valeur v; ce cas est traité par une règle de clôture:

$$\frac{[v]\, \mathrm{Q}\, x \cdot F(x)}{\times}$$

Cette règle d'inférence est *correcte*:

PROPOSITION 1.3.1. *Soient $[v]\, Q x \cdot F(x)$ une formule signée et $\Im$ une interprétation, de domaine $\mathcal{I}$. Si $\Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v) = \emptyset$, alors $\Im \not\models [v]\, Q x \cdot F(x)$.*

PREUVE.

$$\begin{array}{ll} & \left\{\Im_a^{\pm}(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\} \notin \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v) = \emptyset, \\ \text{donc} & \Re_{\mathsf{Q}}\left(\left\{\Im_a^{\pm}(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\}\right) \neq v \\ \multicolumn{2}{l}{\text{c'est-à-dire } \Im \not\models [v]\, \mathrm{Q}\, x \cdot F(x).} \end{array}$$

C.Q.F.D.

Remarquons que $\emptyset \notin \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$, puisque le domaine du discours a été défini comme un ensemble non vide.

1.3.1 Un Ensemble de Règles Intuitives

Il suit les règles d'inférence proposées par CARNIELLI.

La Règle de Type $D\mathrm{Q}^v$

La contribution de chaque $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \in \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$ à $D\mathrm{Q}^v$ est une alternative.

$$\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{[v]\, \mathrm{Q}\, x \cdot F(x)} \\ \hline & [w_1]\, F(p_1) & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & [w_n]\, F(p_n) & \end{array}$$

avec $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ "inédits"

Un terme est dit *inédit* s'il n'apparaît pas dans le contexte (prémisse d'une règle d'inférence, ensemble de formules); on dira aussi qu'il est *étranger* au 'contexte'. Dans le cas contraire on dira qu'il est *connu* du 'contexte'. Par convention, une constante de Σ est connue de toute formule.

On appellera *choix de paramètres*, toute injection p (d'une partie) de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{P}$, notée en extension $(p_w)_{w \in \mathcal{C}}$.

On introduit pour chaque $w_i \in W$ un nouveau paramètre p_i, puisqu'on ne connaît pas a priori de terme t_i pour lequel $\Im(F(t_i)) = w_i$ quand $\Im(\mathrm{Q}\, x \cdot F(x)) = v$.

Plus précisément, la contribution de $W \in \mathfrak{R}_Q^{-1}(v)$ exprime qu'il existe dans $\mathfrak{R}_Q^{-1}(v)$ un ensemble contenant W.

Si W est un singleton, il est inutile d'introduire un nouveau nom, puisque tout terme t vérifie $\Im(F(t)) = w \in W$ à condition que $\Im(\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)) = v$. C'est précisément cette variante de $D\mathrm{Q}^v$, qu'utilise CARNIELLI (1987). Il laisse entendre que les règles de type $D\mathrm{Q}^v$ suffisent à assurer la complétude de son calcul des tableaux analytiques.

En indiquant le choix des paramètres, $D\mathrm{Q}^v$ est une relation fonctionnelle. Pour un choix de paramètres $(p_w)_{w \in C}$ étrangers à $\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)$, on abrègera l'ensemble des alternatives de cette inférence par $D\mathrm{Q}^v([v]\,\mathrm{Q}\,x \cdot F(x), (p_w)_{w \in C})$.

EXEMPLE 1.3.1. Considérons une logique à trois valeurs $\{0,1,2\}$, et définissons (en partie) le quantificateur Q par $\mathfrak{R}_Q^{-1}(0) = \{\{0,1\}\}$ et $\mathfrak{R}_Q^{-1}(2) = \{\{1,2\}\}$. Il est évident qu'il n'existe pas d'interprétation satisfaisant à la fois $[0]\,\mathrm{Q}x \cdot F(x)$ et $[2]\,\mathrm{Q}x \cdot F(x)$ (où F est un prédicat unaire, par exemple). Si on n'applique que $D\mathrm{Q}^0$ et $D\mathrm{Q}^2$, on ne pourra pas déduire de contradiction, puisque toutes les conclusions de ces deux règles d'inférence n'introduisent que des formules $F(a)$ avec a un paramètre n'apparaissant que dans cette seule formule (comparer avec (CARNIELLI, 1987)). $\Diamond$

Les Règles de Type $G\mathrm{Q}^W$

Supposons que $\Im(\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)) = v$. Il reste à s'assurer qu'il existe $W \in \mathfrak{R}_Q^{-1}(v)$ tel que pour tout $t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$, $\Im(F(t)) = w \in W$. C'est ce que vérifient les règles $G\mathrm{Q}^W$. Elles présupposent que l'ensemble W ait "déjà été choisi" par la règle $D\mathrm{Q}^v$.

$$\frac{\begin{array}{c}[v]\,\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)\\ [w_1]\,F(p_1)\\ \cdots\\ [w_n]\,F(p_n)\end{array}}{[w_1]\,F(t) \;\big|\; \cdots \;\big|\; [w_n]\,F(t)}$$

où $\{[w_i]\,F(p_i) : 1 \leq i \leq n\}$ est une alternative de $D\mathrm{Q}^v$ appliquée à $[v]\,\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)$, et $t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$

Cette règle peut prêter à controverse dans la mesure où elle utilise en prémisse des occurrences de formules plutôt que des formules. Si on regarde la méthode des tableaux analytiques comme l'énumération systématique des interprétations $\Im$ pour une signature fixée, $D\mathrm{Q}^v$ envisage exhaustivement tous les cas possibles pour que $\left\{\Im(F(t)) : t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})\right\}$ soit un élément de $\mathfrak{R}_Q^{-1}(v)$ (c'est-à-dire $\Im(\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)) = v$). En envisageant cas par cas les alternatives de $D\mathrm{Q}^v$, il reste à s'assurer que pour tout terme t, $\Im(F(t))$ est effectivement dans l'élément de $\mathfrak{R}_Q^{-1}(v)$ *caractérisant l'alternative de $D\mathrm{Q}^v$ considérée.*

On peut également se servir de *règles d'inférence locales* qui ont été introduites par SCHRÖDER-HEISTER (1984) pour étudier la logique intuitionniste. De façon analogue, on peut définir des *règles d'inférence à conclusions multiples locales*. Au lieu de définir *globalement* les règles GQ^W, à chaque alternative de DQ^v s'ajoute comme conclusion supplémentaire la règle d'inférence locale suivante:

$$\frac{[v]\,\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)}{[w_1]\,F(t) \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [w_n]\,F(t)} \quad \text{où } t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$$

Pour élégante qu'elle soit, cette solution est discutable (Cf. (AVRON, 1990)). Principalement, AVRON reproche à cette extension compliquée de la déduction naturelle en logique intuitionniste de n'être qu'une variante de ce calcul: toute règle d'inférence locale peut précisément être exprimée à l'aide de l'implication intuitionniste. Le second ensemble de règles propose une solution où l'introduction de règles d'inférence locales est pareillement superflue. La signature logique sera étendue de telle sorte qu'on pourra décrire par des formules et des règles d'inférence (globales) l'effet de règles d'inférence locales.

Si $W = \mathfrak{C}$, GQ^W devient triviale et peut être supprimée. La SOUS-SECTION 1.3.3 étudie de façon systématique ce genre de simplifications.

EXEMPLE 1.3.2. Soient le quantificateur $\exists$ d'une logique à trois valeurs: $\Re_\exists^{-1}(0) = \{\{0\}\}$, $\Re_\exists^{-1}(1) = \{\{1\}, \{0,1\}\}$ et $\Re_\exists^{-1}(2) = \{\{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$. La FIGURE 1.2 montre des règles d'inférence obtenues avec les définitions précédentes. $\diamond$

Correction des Règles de Type DQ^w et GQ^W

PROPOSITION 1.3.2. *Soient $[v]\,Q\,x \cdot F(x)$ une formule signée et $\Im$ une interprétation de domaine $\mathcal{I}$.*

$$\Im \models [v]\,Q\,x \cdot F(x)$$

ssi il existe $W \in \Re_Q^{-1}(v)$, tel que, pour tout choix de paramètres inédits $P_W = \{p_w : w \in W\}$, il existe $\Im'$, une P_W-variante de $\Im$, si bien que

1. $\Im' \models [w]\,F(p_w)$, $w \in W$
2. *pour tout $a \in \mathcal{I}$, il existe $w \in W$ pour lequel $\Im'^{\dot{x}}_a \models [w]\,F(\dot{x})$.*

PREUVE. Supposons $\Im \models [v]\,\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)$. Soient $W = \left\{\Im^{\dot{x}}_a(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\}$ et $P_W = \{p_w : w \in W\}$ un choix arbitraire de paramètres inédits. Un tel ensemble P_W existe toujours puisque $\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)$ ne compte qu'un nombre fini de symboles et que $\mathcal{P}$ est infini.

1. Par définition de W, pour tout $w \in W$, il existe $a_w \in \mathcal{I}$ tel que $\Im^{\dot{x}}_{a_w}(F(\dot{x})) = w$. Soit $\Im'$ la P_W-variante de $\Im$ telle que $\Im'_{p_w} = a_w$, $w \in W$. Donc, $\Im' \models [w]\,F(p_w)$.

$$D\exists^0 \quad \frac{[0]\,\exists x\cdot F(x)}{[0]\,F(p_0)} \qquad D\exists^1 \quad \frac{[1]\,\exists x\cdot F(x)}{\begin{array}{c|c} [0]\,F(p_0) & [1]\,F(p_1) \\ [1]\,F(p_1) & \end{array}} \qquad D\exists^2 \quad \frac{[2]\,\exists x\cdot F(x)}{\begin{array}{c|c|c} [0]\,F(p_0) & [1]\,F(p_1) & [2]\,F(p_2) \\ [1]\,F(p_1) & [2]\,F(p_2) & \\ [2]\,F(p_2) & & \end{array}}$$

où p_i sont des paramètres inédits

$$G\exists^{\{0\}} \quad \frac{\begin{array}{c}[0]\,\exists x\cdot F(x) \\ [0]\,F(p_0)\end{array}}{[0]\,F(t)} \qquad G\exists^{\{0,1\}} \quad \frac{\begin{array}{c}[1]\,\exists x\cdot F(x) \\ [0]\,F(p_0) \\ [1]\,F(p_1)\end{array}}{[0]\,F(t) \mid [1]\,F(t)} \qquad G\exists^{\{0,1,2\}} \quad \frac{\begin{array}{c}[2]\,\exists x\cdot F(x) \\ [2]\,F(p_0) \\ [2]\,F(p_1) \\ [2]\,F(p_2)\end{array}}{[0]\,F(t) \mid [1]\,F(t) \mid [2]\,F(t)}$$

où $[i]\,F(p_i)$ sont les prémisses d'une même application de $D\exists^j$ et t est un terme arbitraire de $\mathcal{G}(\hat{\Sigma})$.

Figure 1.2: Exemple de règles d'instanciation

2. Par ailleurs, comme $F(\dot{x})$ ne contient aucun des paramètres p_i,pour tout $a \in \mathcal{I}$, $\Im'^{\dot{x}}_{a}(F(\dot{x})) = \Im^{\dot{x}}_{a}(F(\dot{x}))$, donc il existe $w \in W$ tel que $\Im'^{\dot{x}}_{a} \models [w]\,F(\dot{x})$.

Réciproquement, s'il existe $\Im'$ et W comme décrits dans l'énoncé, alors

$$\left\{\Im'^{\dot{x}}_{a}(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\} = W \in \Re_{\mathrm{Q}}^{-1}(v).$$

Donc $\Im' \models [v]\,\mathrm{Q}\,x\cdot F(x)$. Il est clair que pour toute formule signée $[u]\,G$, qui ne contient aucun des paramètres p_w (Cf. PROPOSITION 0.9.1),

$$\Im' \models [u]\,G \text{ ssi } \Im \models [u]\,G, \text{ en particulier pour } [v]\,\mathrm{Q}\,x\cdot F(x).$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.3.1. *La règle DQ^v est correcte.*

PREUVE. Par application du POINT 1. de la PROPOSITION 1.3.2. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.3.2. *La règle d'inférence GQ^W est correcte.*

PREUVE. Par application du POINT 2. de la PROPOSITION 1.3.2. C.Q.F.D.

1.3.2 Un Choix de Règles plus Intéressant

Dans cette section un autre choix pour les règles d'inférence, réduisant le nombre des alternatives et introduisant moins de paramètres, est présenté. De plus, pour chaque quantification signée, il n'y aura qu'une seule règle d'inférence applicable.

Cette variante introduit de nouveaux quantificateurs. Les quantificateurs adjoints à Υ permettent de reformuler de façon naturelle les règles d'inférence $D\mathsf{Q}^v$ et $G\mathsf{Q}^W$. L'avantage tiré de cette variante est triple:

- les preuves de complétude deviendront plus simples,
- les preuves par tableaux traduisent plus fidèlement, et de manière purement logique, une implémentation d'un calcul des tableaux analytiques pour des logiques polyvalentes du premier ordre,
- des "optimisations" de cet ensemble de règles d'inférence apparaîtront plus naturellement.

Extension de la Signature Logique

Soient d une valeur désignée de $\mathfrak{C}$ et f une valeur non-désignée. [3] Pour chaque $W \in \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$, On définit le quantificateur $\P_W$ dont la sémantique est donnée par

$$\begin{array}{lll} 2^{\mathfrak{C}} \setminus \{\emptyset\} & \to & \mathfrak{C} \\ W' & \mapsto & d \text{ si } W' \subseteq W; \\ W' & \mapsto & f \text{ sinon.} \end{array}$$

En fait la dernière ligne de la définition ne servira pas, toute autre complétion conviendrait. L'ensemble de ces quantificateurs est appelé Υ'.

La Règle de Type DQ^v

La contribution de chaque $W = \{w_1, \dots, w_n\} \in \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$ à DQ^v est une alternative.

$$\mathsf{DQ}^v: \quad \frac{[v]\,\mathsf{Q}\,x \cdot F(x)}{\cdots \quad \left|\begin{array}{c} [w_1]\,F(p_1) \\ \vdots \\ [w_n]\,F(p_n) \\ [d]\,\P_W x \cdot F(x) \end{array}\right| \quad \cdots}$$

avec p_i des paramètres inédits.

[3] En fait seul intervient le fait que $d \neq f$.

Dans l'alternative correspondant à W, $\{[w_i]\, F(p_i) : 1 \leq i \leq n\}$ indique l'existence dans $\Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$ d'un ensemble contenant W (comme avant); $[d]\, ¶_W x \cdot F(x)$ impose à cet ensemble d'être inclus dans W, si bien que seul W convient.

Comme pour DQ^v, $\mathsf{DQ}^v([v]\,\mathsf{Q}\, x \cdot F(x), (p_w)_{w \in C})$ dénotera l'ensemble des alternatives de cette inférence avec le choix de paramètres $(p_w)_{w \in C}$, supposés étrangers à $\mathsf{Q}\, x \cdot F(x)$.

Les Règles de Type GQ^W

En ajoutant $[d]\, ¶_W x \cdot F(x)$ à l'alternative de W de DQ^W, il suffit de considérer les règles de type GQ^W pour les quantificateurs de Υ'. La règle $\mathsf{G}¶_W{}^W$ est définie par:

$$\frac{[d]\, ¶_W x \cdot F(x)}{[w_1]\, F(t) \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [w_n]\, F(t)}$$

$$\text{où } W = \{w_1, \ldots, w_n\} \text{ et } t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$$

Pour un terme $t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$, on dénotera $\mathsf{G}¶_W{}^W([d]\, ¶_W x \cdot F(x), t)$ l'ensemble des alternatives de la conclusion de $\mathsf{G}¶_W{}^W$.

$$\mathsf{D}\exists^2 \qquad \frac{[2]\, \exists x \cdot F(x)}{\begin{array}{c|c|c} [0]\, F(p_0) & [1]\, F(p_1) & [2]\, ¶_{\{2\}} x \cdot F(x) \\ [1]\, F(p_1) & [2]\, F(p_2) & \\ [2]\, F(p_2) & [2]\, ¶_{\{1,2\}} x \cdot F(x) & \\ [2]\, ¶_{\{0,1,2\}} x \cdot F(x) & & \end{array}}$$

$$\mathsf{G}¶_{\{0,1,2\}}^{\{0,1,2\}} \qquad \frac{[2]\, ¶_{\{0,1,2\}} x \cdot F(x)}{[0]\, F(t) \;\Big|\; [1]\, F(t) \;\Big|\; [2]\, F(t)}$$

où p_i sont des paramètres inédits et t un terme arbitraire de $\mathcal{G}(\hat{\Sigma})$.

Figure 1.3: Exemple de règles d'instanciation avant simplification

---

EXEMPLE 1.3.3. Soit le quantificateur existentiel $\exists$ de la logique à trois valeurs de l'EXEMPLE 1.3.2. On choisit ici $d = 2$. $\Re_{\exists}^{-1}(2) = \{\{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$. La FIGURE 1.3 montre des règles d'inférence obtenues avec les définitions précédentes. $\Diamond$

Correction des Règles de Type $\mathbf{DQ}^w$ et $\mathbf{GQ}^W$

PROPOSITION 1.3.3. *La règle DQ^v est correcte.*
Soient $[v]\, Q x \cdot F(x)$ une formule signée et $\Im$ une interprétation.

$$\Im \models [v]\, Q x \cdot F(x)$$

ssi il existe $W \in \Re_Q^{-1}(v)$ tel que pour tout choix de paramètres inédits $P_W = \{p_w : w \in W\}$, il existe $\Im'$, une P_W-variante de $\Im$, si bien que

1. $\Im' \models [w]\, F(p_w)$, $w \in W$
2. $\Im' \models [d]\, \P_W x \cdot F(x)$

PREUVE. Supposons $\Im \models [v]\, \mathrm{Q}\, x \cdot F(x)$. Soient $W = \left\{\Im_a^{\dot{x}}(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\}$ et P_W un choix de paramètres inédits. Un tel ensemble P_W existe puisque $\mathrm{Q}\, x \cdot F(x)$ ne contient qu'un nombre fini de symboles et que $\mathcal{P}$ est infini.

1. Par définition de W, il existe $a_w \in \mathcal{I}$ tel que $\Im_{a_w}^{\dot{x}}(F(\dot{x})) = w$, $w \in W$. Soit $\Im'$ la P_W-variante de $\Im$ telle que $\Im'_{p_w} = a_w$, $w \in W$. Donc, $\Im' \models [w]\, F(p_w)$.

2. $\P_W x \cdot F(x)$ ne contient aucun des paramètres de P_W.
Ainsi $\Im'(\P_W x \cdot F(x)) = \Im(\P_W x \cdot F(x))$.
Or, $\left\{\Im_a^{\dot{x}}(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\} = W$, donc $\Im'(\P_W x \cdot F(x)) = v$.

Réciproquement, s'il existe $\Im'$ et W comme décrits dans l'énoncé, alors le POINT 1. assure que $\left\{\Im'^{\dot{x}}_a(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\} \supseteq W$ et le POINT 2. $\left\{\Im'^{\dot{x}}_a(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\} \subseteq W$. Donc $\Im' \models [v]\, \mathrm{Q}\, x \cdot F(x)$. Comme aucun paramètre de P_W n'apparaît dans $\mathrm{Q}\, x \cdot F(x)$, $\Im \models [v]\, \mathrm{Q}\, x \cdot F(x)$.
C.Q.F.D.

PROPOSITION 1.3.4. *La règle $G\P_W{}^W$ est correcte.*
Soient $W \subseteq \mathfrak{C}$, $[d]\, \P_W x \cdot F(x)$ une formule signée et $\Im$ une interprétation.

$$\Im \models [d]\, \P_W x \cdot F(x)$$

ssi pour tout $t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$, il y a $w \in W$, $\Im \models [w]\, F(t)$.

PREUVE. Immédiat. C.Q.F.D.

Ainsi pour chaque quantificateur et pour chaque valeur de vérité, il y a une règle de type DQ^v. De plus pour chaque quantificateur introduit, il y a une règle de type GQ^v. Si Υ compte n éléments, et s'il y a k valeurs de vérité, on obtient $n \times k + 2 \times (2^k - 2)$ règles d'inférence traitant des quantifications. [4]

[4] Les règles $\mathrm{D}\P_W{}^v$, pour $v \neq d$, ne sert pas dans les réfutations de formules composées exclusivement de symboles appartenant à la signature logique initiale.

1.3.3 Simplifications en Présence de Sous-Treillis de $2^{\mathfrak{C}}$

On s'intéresse dans ce qui suit aux sous-treillis d'ensembles de valeurs de vérité de minimum I et de maximum S, que l'on note $\langle I, S\rangle$ tels que tout $W \subseteq \mathfrak{C}$ vérifie

$$(W \cap S) \cup I \in \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v).$$

PROPOSITION 1.3.5. *Soient $[v]\, Q x \cdot F(x)$ une formule signée, $\Im$ une interprétation de domaine $\mathcal{I}$ et $\langle I, S\rangle$ un sous-treillis tel que $\forall\, W \subseteq \mathfrak{C}, (W \cap S) \cup I \in \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

1. *il existe W, $I \subseteq W \subseteq S$, tel que pour tout choix de paramètres inédits $P_W = \{p_w : w \in W\}$, il existe $\Im'$, une P_W-variante de $\Im$, telle que*
   (a) $\Im' \models [w]\, F(p_w)$ $(w \in W)$
   (b) $\Im' \models [d]\, \P_W x \cdot F(x)$
2. *pour tout choix de paramètres inédits $P_I = \{p_w : w \in I\}$, il existe $\Im''$, une P_I-variante de $\Im$, telle que*
   (a) $\Im'' \models [w]\, F(p_w)$ $(w \in I)$
   (b) $\Im'' \models [d]\, \P_S x \cdot F(x)$

PREUVE. 1.*a* implique 2.*a*. Soit $\Im'''$ une $(P_W \setminus P_I)$-variante arbitraire de $\Im'$, $\Im''' \models [w']\, F(p_{w'})$ $(w' \in I)$. En particulier, pour $\Im''$, la $(P_W \setminus P_I)$-variante de $\Im'$ telle que pour tout $w \in W \setminus I$, $\Im''_{p_w} = \Im_{p_w}$. Ce qui prouve ce point.
1.*b* implique 2.*b*. $\Im'^{\dot{x}}_a \models [w]\, F(\dot{x})$ ssi $\Im^{\dot{x}}_a \models [w]\, F(\dot{x})$ ssi $\Im''^{\dot{x}}_a \models [w]\, F(\dot{x})$, puisque $F(\dot{x})$ ne contient pas de paramètres de P_W. Le résultat annoncé s'en suit, car $W \subseteq S$.

Réciproquement! Soit $W'' = \left\{\Im''^{\dot{x}}_a(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\} = \left\{\Im^{\dot{x}}_a(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\}$, puisque $F(\dot{x})$ ne contient aucun des paramètres p_w $(w \in I)$. Par la condition (2.a), $W'' \supseteq I$; par la condition (2.b), $W'' \subseteq S$. Comme $I \subseteq W'' \subseteq S$, $W'' \in \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$ donc $\Im \models [v]\, \mathsf{Q}\, x \cdot F(x)$. Avec la PROPOSITION 1.3.2, on déduit le résultat annoncé. C.Q.F.D.

Les COROLLAIRES 1.3.3 et 1.3.4 décrivent le cas des quantificateurs les plus communs dans les logiques polyvalentes (de type min et max où les valeurs de vérité sont un segment initial des entiers naturels non-nuls (ROSSER & TURQUETTE, 1952).
Si le maximum du sous-treillis $\langle I, S\rangle$ est $S = \mathfrak{C}$, la PROPOSITION 1.3.5 précédente se simplifie. Le résultat généralise la règle de type δ de la logique classique.

COROLLAIRE 1.3.3. *(avec les notations de la* PROPOSITION *1.3.5)*
Si $\langle I, \mathfrak{C}\rangle \subseteq \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:

1. *il existe W, $I \subseteq W \subseteq \mathfrak{C}$, tel que pour tout choix de paramètres inédits $P_W = \{p_w : w \in W\}$, il existe $\Im'$, une P_W-variante de $\Im$, telle que*

(a) $\Im' \models [w]\, F(p_w)$, *pour tout* $w \in W$

(b) $\Im' \models [d]\, \P_W x \cdot F(x)$

2. *pour tout choix de paramètres inédits* $P_I = \{p_w : w \in I\}$, *il existe* $\Im''$, *une* P_I*-variante de* $\Im$, *telle que* $\Im'' \models [w]\, F(p_w)$, $w \in I$

PREUVE. Immédiate. C.Q.F.D.

Comme l'ensemble vide n'est pas dans $\Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$, la simplification "duale" se formule différemment. Cette fois-ci, on généralise la règle de type γ de la logique classique.

COROLLAIRE 1.3.4. *(avec les notations de la* PROPOSITION *1.3.5)*
Si $\langle \emptyset, S\rangle \subseteq \Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v) \cup \{\emptyset\}$, *alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *il existe* W, $W \subseteq S$, *tel que pour tout choix* $P_W = \{p_w : w \in W\}$ *de paramètres inédits en bijection avec* W, *il y ait* $\Im'$, *une* P_W*-variante de* $\Im$, *telle que*

   (a) $\Im' \models [w]\, F(p_w)$, *pour tout* $w \in W$

   (b) $\Im' \models [d]\, \P_W x \cdot F(x)$

2. $\Im \models [d]\, \P_S\, x \cdot F(x)$

PREUVE. Immédiate. C.Q.F.D.

Pour résumer, supposons que $\Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$ contienne un treillis $\langle I, S\rangle$, non trivial (au moins deux éléments). Les k éléments de ce treillis sont:

$$W_i = \{w_{i,j} : 1 \leq j \leq m_i\} \text{ où } m_i \text{ est la cardinalité du } i^{\text{ème}} \text{ élément.}$$

Les éléments de I sont $\{\ell_1, \ldots, \ell_i\}$.

La PROPOSITION 1.3.5 permet ainsi de réduire et le nombre d'alternatives de DQ^v et (éventuellement) le nombre de règles d'inférence de type $\mathsf{G}\P_w{}^W$ $I \subseteq W \subseteq S$.

La FIGURE 1.4 montre la transformation de DQ^v en $\mathcal{D}\mathsf{Q}^v$.

En représentant ainsi pour chaque treillis $\langle I, S\rangle$ les alternatives qui correspondent aux éléments de $\langle I, S\rangle$ par I, on obtient une règle d'inférence avec moins d'alternatives, et qu'on appellera $\mathcal{D}\mathsf{Q}^v$.

Si maintenant il y a dans $\Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$ plusieurs treillis de même minimum I, disons $\langle I, S_1\rangle, \ldots, \langle I, S_{k'}\rangle$, on peut appliquer cette simplification pour chacun d'eux. Dans ce cas, $\mathcal{D}\mathsf{Q}^v$ prend l'allure indiquée en FIGURE 1.5

Finalement, pour définir les règles $\mathcal{D}\mathsf{Q}^v$, on procède ainsi: [5]

On détermine d'abord l'ensemble $\mathcal{V}$ de tous les treillis $\langle I, S\rangle$ inclus dans $\Re_{\mathsf{Q}}^{-1}(v)$. Puis, on choisit un recouvrement $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$. On préfèrera les recouvrements qui contiennent des sous-treillis qui permettent d'appliquer les COROLLAIRES 1.3.3 et 1.3.4.

[5] La construction n'est pas détaillée car elle est semblable au cas propositionnel.

$$\mathsf{DQ}^v: \quad \dfrac{[v]\,\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)}{\cdots \quad \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} [w_{1,1}]\,F(p_1) & & [w_{k,1}]\,F(p_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ [w_{1,m_1}]\,F(p_{m_1}) & & [w_{k,m_k}]\,F(p_{m_k}) \\ [d]\,\P_{W_1} x \cdot F(x) & & [d]\,\P_{W_k} x \cdot F(x) \end{array}}_{\text{comprenant les } k \text{ alternatives de } \langle I, S\rangle} \quad \cdots}$$

devient:

$$\mathcal{D}\mathsf{Q}^v: \quad \dfrac{[v]\,\mathrm{Q}\,x \cdot F(x)}{\cdots \quad \underbrace{\begin{array}{|c|} [\ell_1]\,F(p_1) \\ \vdots \\ [\ell_i]\,F(p_i) \\ [d]\,\P_{\mathrm{S}} x \cdot F(x) \end{array}}_{\substack{\text{remplace les } k \\ \text{alternatives de } \langle I, S\rangle}} \quad \cdots}$$

Figure 1.4: DQ^v comparé à $\mathcal{D}\mathsf{Q}^v$

EXEMPLE 1.3.4. L'EXEMPLE 1.3.2 est repris. Les règles d'inférence sont optimales. On note que

$\mathcal{D}\exists^0$ n'introduit plus de paramètres inutilement (COROLLAIRE 1.3.4).

$\mathcal{D}\exists^1$ n'introduit qu'un seul paramètre (PROPOSITION 1.3.5).

$\mathcal{D}\exists^1$ n'introduit qu'un seul paramètre (COROLLAIRE 1.3.3).

$\Diamond$

$\mathcal{D}\mathsf{Q}^v$:

$$\frac{[v]\,\mathsf{Q}\,x\cdot F(x)}{\ldots \quad \left|\begin{array}{c}[\ell_1]\,F(p_1)\\ \vdots \\ [\ell_i]\,F(p_i)\\ [d]\,\P_{S_1}x\cdot F(x)\end{array}\right| \quad \ldots \quad \left|\begin{array}{c}[\ell_1]\,F(p_1)\\ \vdots \\ [\ell_i]\,F(p_i)\\ [d]\,\P_{S_{k'}}x\cdot F(x)\end{array}\right| \quad \ldots}$$

Figure 1.5: $\mathcal{D}\mathsf{Q}^v$ quand plusieurs alternatives ont même minimum I

$$\mathcal{D}\exists^0 \quad \frac{[0]\,\exists x\cdot F(x)}{[2]\,\P_{\{0\}}x\cdot F(x)} \qquad \mathcal{D}\exists^1 \quad \frac{[1]\,\exists x\cdot F(x)}{\begin{array}{c}[1]\,F(p_1)\\ [2]\,\P_{\{0,1\}}x\cdot F(x)\end{array}} \qquad \mathcal{D}\exists^2 \quad \frac{[2]\,\exists x\cdot F(x)}{[2]\,F(p_2)}$$

$$\mathsf{G}\P^0_{\{0\}} \quad \frac{[2]\,\P_{\{0\}}x\cdot F(x)}{[0]\,F(t)} \qquad \mathsf{G}\P^{\{0,1\}}_{\{0,1\}} \quad \frac{[2]\,\P_{\{0,1\}}x\cdot F(x)}{[0]\,F(t)\mid[1]\,F(t)} \qquad \mathsf{G}\P^{\{0,1,2\}}_{\{0,1,2\}} \quad \text{supprimée}$$

p_i sont des paramètres et t un terme arbitraire de $\mathcal{G}(\hat{\Sigma})$.

Figure 1.6: Exemple de règles d'instanciation avec l'application des simplifications proposées

Chapitre 2

Calculs des Tableaux Analytiques

Pour une logique $\mathcal{L}$ dont l'ensemble des formules bien formées est $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}$ et la sémantique est $\mathfrak{M}$, on a pu, dans le chapitre précédent, construire une ou plusieurs règles de décomposition, ou de clôture, pour tout connecteur (propositionnel) $c \in \Pi$ et tout quantificateur $Q \in \Upsilon$. Il a paru avantageux d'introduire de nouveaux quantificateurs $\P_W$ avec $W \subset \mathfrak{C}$ qui imposent que toutes les instances de la quantification soient évaluées par une interprétation $\Im$ à une valeur de W, quand la quantification elle-même est évaluée à la valeur de vérité d par $\Im$. L'ensemble de tous ces quantificateurs supplémentaires est appelé Υ'. De plus, ces nouveaux quantificateurs permettent de ramener la satisfaisabilité d'un ensemble de formules signées ouvertes à celui d'un ensemble de formules signées fermées. Dans la suite, les calculs présentés traitent donc exclusivement de formules fermées sans perte de généralité.

Dans ce chapitre, un premier calcul des tableaux analytiques (CB) est défini et étudié, ainsi qu'une version (CA) tenant compte, elle, des simplifications des règles d'inférence présentées dans le chapitre précédent. Pour les preuves de complétude des calculs introduits ultérieurement, on se ramènera à CA voire à CB.

Fixons le vocabulaire communément employés pour les tableaux analytiques.

DÉFINITION 2.0.1. *Soit T un calcul des tableaux analytiques, Un* tableau analytique *est un arbre de dérivation de T dont seules les feuilles peuvent être étiquetées par des ensembles contenant le symbole $\times$.*

Une formule d'un sommet, d'une branche, d'un tableau analytique est une formule d'un ensemble qui étiquette respectivement ce sommet, un sommet de cette branche ou de ce tableau analytique.

Une branche B d'un tableau analytique est dite fermée, ssi l'étiquette de la feuille de B contient le symbole $\times$ sinon B est ouverte. Un tableau analytique est dit fermé, ssi toutes ses branches sont fermées, autrement il s'agit d'un tableau analytique ouvert. $\Diamond$

2.1 Le Calcul de Base: CB

DÉFINITION 2.1.1. *Le calcul des tableaux analytiques de base(CB) dont le langage formel est l'ensemble de toutes formules signées et du symbole $\times$, est constitué de toutes les règles d'inférence*

(R$_1$) *la règle de clôture:*

$$\frac{\begin{array}{c}[v]\,F\\ [w]\,F\end{array}}{\times} \quad \text{où } F \in \mathcal{F}bf \text{ et si } w \neq v$$

(R$_2$) R^v_c, *avec* $c \in \Pi$, *et* $v \in \mathcal{C}$

(R$_3$) $G\P_w{}^d$, *avec* $\P_w \in \Upsilon'$,

(R$_4$) DQ^v, *avec* $Q \in \Upsilon$, *et* $v \in \mathcal{C}$, *en se restreignant aux choix de paramètres* étrangers à la branche à *laquelle sont greffées les alternatives.*

(R$_5$) $D\P_w{}^v$, *avec* $\P_w \in \Upsilon'$, $v \in \mathcal{C}$, $v \neq d$, *et la même restriction sur les choix des paramètres.*

$\Diamond$

Cette dernière famille de règles d'inférence n'intervient pas dans les réfutations d'ensembles de formules signées construites exclusivement avec les symboles de la signature initiale.

Il est commode d'étendre la notation uniforme de SMULLYAN (1968) aux logiques polyvalentes.

- toute formule $[v]\,c(F_1, \ldots, F_n)$ telle que $\mathsf{R}^v_c([v]\,c(F_1, \ldots, F_n))$ compte une seule alternative dans sa conclusion est une formule de type α.
- toute formule $[v]\,c(F_1, \ldots, F_n)$ telle que $\mathsf{R}^v_c([v]\,c(F_1, \ldots, F_n))$ compte au moins deux alternatives dans sa conclusion est une formule de type β.
- toute formule de $[d]\,\P_w x \cdot F(x)$ avec $\P_w \in \Upsilon'$, est une formule de type γ.
- toute formule de $[v]\,Qx \cdot F(x)$ avec $Q \in \Upsilon$, est une formule de type δ.
- toute formule de $[v]\,\P_w x \cdot F(x)$ avec $\P_w \in \Upsilon'$ et $v \neq d$, est une formule de type δ.

2.1.1 Correction du Calcul CB

Dans le chapitre précédent, on a prouvé la correction des règles de décomposition.

Les "règles de clôture" sont également correctes, en ce sens qu'aucune interprétation ne satisfait simultanément toutes les prémisses d'une règle de clôture.

Nous vérifions que la correction de ces règles d'inférence implique bien la correction du calcul.

Puis nous prouvons la complétude de ce calcul.

La preuve de la correction consiste essentiellement à vérifier que si une interprétation $\Im$ satisfait un ensemble S de formules signées, alors il existe une branche de tout tableau de S qui est satisfaite par une variante de $\Im$ qui ne diffère de $\Im$ que par les valeurs assignées aux paramètres.

Au préalable, il faut vérifier que toute formule signée $[v]F$ qui ne contient pas un paramètre p est satisfaite par $\Im$ ssi elle est satisfaite par toute $\{p\}$-variante de $\Im$. C'est-à-dire que s'il existe une interprétation qui satisfait un ensemble S de formules signées dont une δ formule. Il existe une variante qui vérifie les formules d'une alternative de la règle d'inférence appliquée à cette δ formule, *ainsi que toutes les formules de S.*

LEMME 2.1.1. *Soient F une formule, p un paramètre étranger à F et $\Im$ une interprétation. Si $\Im$ satisfait F, alors toute $\{p\}$-variante de $\Im$ satisfait aussi F.*

PREUVE. Par induction structurelle sur F. C.Q.F.D.

THÉORÈME 2.1.1. *Le calcul CB est correct. Soit S un ensemble récursivement énumérable de formules signées. Si $S \vdash_{CB} \times$, alors S est insatisfaisable.*

PREUVE. On établit la contraposée. Soit $\Im$ une interprétation qui satisfait S. On montre par induction sur le nombre de nœuds des tableaux analytiques (ou sur la longueur d'une dérivation des tableaux à partir des tableaux avec un seul nœud), que toutes les formules (de S et) d'une branche sont satisfaites par une variante de $\Im$.

Soit $\mathcal{T}$ un tableau analytique. (La numérotation renvoie à la DÉFINITION 0.11.3.)

(AD$_1$) L'unique formule de $\mathcal{T}$ est satisfaite par $\Im$, car c'est une formule de S.

(AD$_2$) $\mathcal{T}$ résulte de l'ajout d'une formule signée de S à une branche d'un tableau $\mathcal{T}'$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{T}'$ contient une branche satisfaite par $\Im$. Si cette branche se retrouve telle quelle dans $\mathcal{T}$, le résultat est acquis; dans l'autre cas, comme le nœud supplémentaire est étiqueté par une formule que satisfait $\Im$, $\mathcal{T}$ contient également une branche dont toutes les formules sont satisfaites par $\Im$.

(AD$_3$) $\mathcal{T}$ est obtenu par ajout des alternatives $A_1, \ldots, A_m$ d'une règle d'inférence, appliquée à une formule signée $[v]\,F$, à un tableau $\mathcal{T}'$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{T}'$ contient une branche B satisfaite par $\Im$. Si B est également une branche de $\mathcal{T}$, alors le résultat est trivial. Dans le cas contraire, B est étendue en m branches $B \cup A_i$ $(1 \leq i \leq m)$. Nous distinguons deux cas.
Cette extension n'utilise pas la règle $\mathsf{D}Q^v$ Comme toutes les règles d'inférence du calcul CB sont correctes, et que $[v]\,F$ est une formule satisfaite par $\Im$ (puisque F est dans B) l'une des alternatives $A_1, \ldots, A_m$ au moins est satisfaite par $\Im$.
L'extension utilise la règle $\mathsf{D}Q^v$ et l'applique en se servant du choix de paramètres étrangers $(p_w)_{w \in \mathcal{C}}$. Comme F est satisfaite par $\Im$, la correction de $\mathsf{D}Q^v$ assure l'existence d'une $\{p_w : w \in \mathcal{C}\}$-variante de $\Im$ satisfaisant au moins une alternative de la conclusion de cette inférence. La PROPOSITION 0.9.1 garantit que cette variante satisfait également toutes les formules signées de B (puisque ces paramètres sont étrangers à toute formule de B).

C.Q.F.D.

2.2 Complétude du Calcul CB

DÉFINITION 2.2.1. *Un ensemble de formules* récursivement énumérable S *est dit consistant pour les tableaux analytiques ssi il n'existe pas de tableaux analytiques fermés pour cet ensemble* S. $\Diamond$

Les ensembles de Hintikka ont été introduits par HINTIKKA (1955). Dans l'article, consacré à la quantification dans la logique du premier ordre, seule une logique *pure*, c'est-à-dire sans symboles fonctionnels (ni constantes) est étudiée, aussi peut-on parler de U-formules, qui sont des formules du premier ordre où les variables libres sont remplacées par des individus pris dans un univers du discours arbitraire U. En fait, dans la suite on ne s'intéresse qu'à des interprétations syntaxiques.

DÉFINITION 2.2.2. *Un ensemble de Hintikka* $\mathcal{H}$ *est un ensemble formules signées vérifiant les clauses où* $P \in \Omega, c \in \Pi, Q \in \Upsilon, ¶_W \in \Upsilon'$ *avec* $W \subseteq \mathcal{C}$, $v, d \in \mathcal{C}$:

(HI$_1$) *si* $[v]\,P\vec{s}, [w]\,P\vec{s} \in \mathcal{H}$ *alors* $w = v$

(HI$_2$) *si* $[v]\,c \in \mathcal{H}$, *alors* $\Re_c = v$ [1]

(HI$_3$) *si* $[v]\,c(F_1, \ldots, F_n) \in \mathcal{H}$ *alors il existe* $A \in R^v_c([v]\,c(F_1, \ldots, F_n))$ *tel que* $A \subseteq \mathcal{H}$

(HI$_4$) *si* $[d]\,¶_W x \cdot F(x) \in \mathcal{H}$, *alors pour tout terme* t, *connu de* $\mathcal{H}$, *il existe* $w \in W$ *tel que* $[w]\,F(t) \in \mathcal{H}$

---

[1] *ceci est un cas particulier, du cas suivant.*

(HI$_5$) *si* $[v]\, Qx \cdot F(x)$ *est une formule de type* δ *de* $\mathcal{H}$*, alors il existe un choix de termes* $(t_w)_{w \in C}$ *et une alternative* A *de* $DQ^v([v]\, Qx \cdot F(x), (t_w)_{w \in C})^2$ *telle que* $A \subseteq \mathcal{H}$

◊

Cette définition diffère de celle de FITTING (1990) qui instancie les γ formules dans $\mathcal{H}$ avec tous les termes sans variables. Elle se rapproche davantage de celle de HINTIKKA (1955), qui au contraire n'instancie les γ U-formules qu'avec des individus connus de $\mathcal{H}$.

2.2.1 Lemme de Hintikka

DÉFINITION 2.2.3. *Soient* $[v]\, F$, $[w]\, G$ *des formules signées.* $[w]\, G$ *est une* presque-sous-formule immédiate *de* $[v]\, F$*, en symboles* $[v]\, F \rightsquigarrow [w]\, G$*, ssi l'une des clauses suivantes est satisfaite:*

- F *est de la forme* $c(F_1, \ldots, F_n)$ *et* G *est l'un des arguments de* F*.*
- $v = d$*,* F *est de la forme* $\P x \cdot F'(x)$ $(\P \in \Upsilon')$ *et* G *de la forme* $F'(t)$*,* $t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$*.*
- $w = d$*,* F *est de la forme* $Qx \cdot F'(x)$ $(Q \in \Upsilon)$ *et* G *de la forme* $\P x \cdot F'(x)$*, avec* $\P \in \Upsilon'$*.*
- F*,* G *sont de la forme* $\P x \cdot F'(x)$*, avec* $\P \in \Upsilon'$ *et* $v \neq w = d$*.*

$[w]\, G$ *est une* presque-sous-formule *de* $[v]\, F$ *ssi* $\langle [v]\, F, [w]\, G \rangle$ *est dans la fermeture réflexive et transitive de* $\rightsquigarrow$ *(ce que l'on note par* $[v]\, F \rightsquigarrow^* [w]\, G$*).* ◊

REMARQUE. SMULLYAN (1968) introduit dans sa version des tableaux analytiques pour formules non signées la notion de *sous-formule faible*. G est une sous-formule faible de F si G est une sous-formule de F ou si G est la négation d'une sous-formule de F. Bien que ce calcul introduise des formules qui ne soient pas des sous-formules du théorème F à démontrer (Cf. la règle DQ^v), le calcul CB est analytique, en ce sens que, pour chaque formule, différente de F dans la preuve, on peut donner la sous-formule de F dont elle est une presque-sous-formule immédiate.

D'ailleurs CB satisfait à la propriété de la *presque-sous-formule*, c'est-à-dire toute formule en conclusion d'une inférence est une presque-sous-formule de sa prémisse (les règles de clôture ne comptent pas, puisque $\times$ n'est pas une formule mais simplement une marque du méta-langage intégrée dans le calcul).

PROPOSITION 2.2.1. $\rightsquigarrow^*$ *est une relation d'ordre nœtherienne.*

[2] *il y a ici un abus dans la notation:* $DQ^v(—, (t_w)_{w \in C})$ *n'a été définie et prouvée correcte que pour* $(t_w)_{w \in C} \subset \mathcal{P}$.

PREUVE. On définit la fonction *taille* des formules signées vers les entiers positifs non-nuls. Pour une formule signée F quelconque, $\#_c(F)$ et $\#_q(F)$ désignent respectivement le nombre de connecteurs logiques d'arité non-nulle dans F et le nombre de quantificateurs.

$$\mathit{taille}([v]\,F) = \begin{cases} \#_c(F) + 2 \times \#_q(F) - 1 & \text{si } F \text{ est une } \gamma \text{ formule} \\ \#_c(F) + 2 \times \#_q(F) & \text{sinon} \end{cases}$$

On s'assure que, si $[v]\,F \rightsquigarrow^* [w]\,G$, alors $\mathit{taille}([v]\,F) \geq \mathit{taille}([w]\,G)$. Donc $\rightsquigarrow^*$ est un ordre nœtherien, comme l'est $\geq$ dans $\mathbb{N}$. C.Q.F.D.

LEMME 2.2.1. *(de Hintikka) Tout ensemble de Hintikka $\mathcal{H}$ est satisfaisable.*

PREUVE. (Cf. (FITTING, 1990, prop. 3.5.2 et prop. 5.5.2)) Les clauses (HI_1) et (HI_2) garantissent l'existence d'une interprétation de Herbrand $\Im$, qui satisfait tous les atomes signés de $\mathcal{H}$. On vérifie par induction nœtherienne (la relation d'ordre considérée est $\rightsquigarrow^+$) que $\Im$ est un modèle de $\mathcal{H}$ grâce aux clauses (HI_3), (HI_4) et (HI_5).

Soient $\mathcal{D}$ l'ensemble des termes connus de $\mathcal{H}$ et $a \in \mathcal{D}$. L'interprétation $\Im$ évalue tout terme t de $\mathcal{D}$ par lui-même; les autres termes de $\mathcal{G}(\hat{\Sigma})$ sont interprétés de sorte à se ramener à $\mathcal{D}$. Pour tout $t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$, $\Im(t) \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$ et:

$$\Im(t) = \begin{cases} t' = f(\Im(t_1), \ldots, \Im(t_n)) & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ et } t' \in \mathcal{D} \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que pour $t \in \mathcal{D}$, $\Im(t) = t$. Si $P(t_1, \ldots, t_n)$ est un atome,

$$\Im(P)(\Im(t_1), \ldots, \Im(t_n)) = w, \text{ quand } [w]\,P(\Im(t_1), \ldots, \Im(t_n)) \in \mathcal{H}.$$

$\Im$ n'est pas complètement défini de la sorte, mais la valeur de vérité affectée par $\Im$ à ces atomes n'intervient pas dans l'évaluation des formules de $\mathcal{H}$ On achève la définition de $\Im$ de façon arbitraire.

Cas de base. Tous les éléments minimaux de $\mathcal{H}$ sont satisfaits par $\Im$.

Pas d'induction. Soit $[v]\,F \in \mathcal{H}$. Supposons que toute presque-sous-formule de $[v]\,F$, incluse dans $\mathcal{H}$, soit satisfaite par $\Im$.

F est de la forme $c(F_1, \ldots, F_n)$. Comme $[v]\,F \in \mathcal{H}$, il existe une alternative $A \in \mathsf{R}^v_c([v]\,F)$ telle que $A \subseteq \mathcal{H}$ (HI_3). Pour tout $[w]\,G \in A$, comme $[v]\,F \rightsquigarrow [w]\,G$, $[w]\,G$ est satisfaite par $\Im$. La PROPOSITION 1.2.3 (seconde partie de l'énoncé) permet d'en conclure que $[v]\,F$ est satisfaite par $\Im$.

$[v]\,F$ est de la forme $[d]\,¶_W x \cdot F'(x)$, avec $W \subset \mathfrak{C}$ et $¶_W \in \Upsilon'$. Comme $[v]\,F \in \mathcal{H}$, pour tout terme $t \in \mathcal{D}$, il existe $w \in W$ tel que $[w]\,F'(t) \in \mathcal{H}$ (HI_4). Puisque $[d]\,¶_W x \cdot F'(x) \rightsquigarrow [w]\,F'(t)$, par application de l'hypothèse, $\Im^u_t \models [w]\,F'(u)$.

Pour tout terme $t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma}) \setminus \mathcal{D}$, $t' = \Im(t) \in \mathcal{D}$ et donc $\Im^u_{t'}(F(u)) = \Im(F(t'))$ est une valeur de vérité de W. Donc $\left\{\Im^u_{\Im(t)} F(u) : t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})\right\} \subseteq W$. De la PROPOSITION 1.3.4, on déduit $\Im \models [d]\, ¶_W x \cdot F'(x)$.

F est une δ formule de la forme $Qx \cdot F'(x)$. Comme $[v]\, F \in \mathcal{H}$, il existe un choix de termes $(t_w)_{w \in C}$, et une alternative $A \in \mathsf{D}Q^v([v]\, F, (t_w)_{w \in C})$ telle que $A \subseteq \mathcal{H}$. Pour tout $[w]\, G \in A$, $[w]\, G$ est une presque sous fomule de $[v]\, F$, donc par hypothèse d'induction, $[w]\, G$ est satisfaite par $\Im$ (HI_5). De la PROPOSITION 1.3.3, on déduit $\Im \models [v]\, Qx \cdot F'(x)$. C.Q.F.D.

Les propriétés de consistance analytiques dont la définition suit ont été introduites par SMULLYAN (1968). Elles permettent de lier élégamment les notions sémantiques aux notions syntaxiques. ANDREWS (1986, §25.) mène ces preuves pour les langages du premier ordre non-dénombrables.

DÉFINITION 2.2.4. *On appelle* propriété de consistance analytique *toute famille* $\mathcal{P}ca$ *d'ensembles de formules signées telle que* $S \in \mathcal{P}ca$ *ssi* S *satisfait les conditions suivantes:*

(PCA_1) *si* $[v]\, P\vec{s}, [w]\, P\vec{s} \in S$, *alors* $w = v$

(PCA_2) *si* $[v]\, c \in S$, *alors* $\Re_c = v$

(PCA_3) *si* $[v]\, c(F_1, \ldots, F_n) \in S$, *alors il existe* $A \in R^v_c([v]\, c(F_1, \ldots, F_n))$ *telle que* $A \cup S \in \mathcal{P}ca$

(PCA_4) *si* $[d]\, ¶_W x \cdot F(x) \in S$ *avec* $¶_W \in \Upsilon'$, *alors pour tout terme* t *connu de* S, *il existe* $w \in W$ *telle que* $S \cup \{[w]\, F(t)\} \in \mathcal{P}ca$

(PCA_5) *si* $[v]\, Qx \cdot F(x) \in S$ *est de type* δ, *pour tout choix de paramètres* $(p_w)_{w \in C}$ *étrangers à* S, *une alternative* A *de* $DQ^v([v]\, Qx \cdot F(x), (p_w)_{w \in C})$ *vérifie* $A \cup S \in \mathcal{P}ca$

◊

ANDREWS (1986) définit une propriété de consistance analytique comme étant en plus une famille fermée pour l'inclusion. Le lemme d'extension suivant montre que cette restriction est inessentielle.

2.2.2 Lemme d'Extension et Principe Unifiant de Smullyan

La complétude de CB est un corollaire du *principe unifiant* de SMULLYAN (1968, Theorem 1, p. 67). Ce principe relie propriétés de consistance analytique et satisfaisabilité.

Pour assurer l'*existence* dans une propriété de consistance analytique d'éléments maximaux, cette propriété de consistance analytique doit être *de caractère fini* (Cf. (FITTING, 1990), par exemple).

DÉFINITION 2.2.5. *Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est de* caractère fini *si, et seulement si, pour tout ensemble A de formules, $A \in \mathcal{F}$ ssi tout sous-ensemble fini B de A est dans $\mathcal{F}$.* $\Diamond$

Ces éléments maximaux sont en fait des ensembles de Hintikka. La dernière étape vérifie que l'ensemble de tous les ensembles finis n'ayant pas de tableaux fermés est une propriété de consistance analytique.

Tout d'abord, toute propriété de consistance analytique s'étend en une propriété de consistance analytique de caractère fini.

Le nom d'un paramètre n'a aucune importance. Des ensembles de formules ne différant que par le nom des paramètres qui y appparaissent, décrivent exactement le même état des faits.

DÉFINITION 2.2.6. *Un* renommage de paramètres *est une "substitution" dont domaine et codomaine sont inclus dans l'ensemble des paramètres $\mathcal{P}$. L'ensemble de tous ces renommages est noté $\mathcal{R}en(\mathcal{P})$.* $\Diamond$

En quelque sorte, les paramètres sont considérés comme des variables. Comme pour une substitution de variables, on confond un renommage de paramètres avec son extension homomorphe respectivement aux termes, aux formules et aux ensembles de formules.

LEMME 2.2.2. *Soit $\mathcal{A}$ une propriété de consistance analytique d'ensembles de formules signées.*

- $\mathcal{A}' = \{S' : \exists\pi \in \mathcal{R}en(\mathcal{P}), S'\pi \subseteq S \in \mathcal{A}\}$ *est une propriété de consistance analytique fermée pour l'inclusion.*
- $\mathcal{A}'' = \left\{S' : 2_f^{S'} \subseteq \mathcal{A}'\right\}$ *est une propriété de consistance analytique de caractère fini.*

PREUVE. La vérification en est immédiate et ne diffère guère des cas classique (FITTING, 1990), modal ou intuitionniste (FITTING, 1983).

Montrons que $\mathcal{A}'$ est une propriété de consistance analytique. Soit $S' \in \mathcal{A}'$. Vérifions que S' satisfait aux cinq points caractérisant un élément d'une propriété de consistance analytique. (La numérotation reprend celle de la DÉFINITION 2.2.4.) Soit π un renommage de paramètres tel que $S'\pi \subseteq S$. Sans perte de généralité, on peut supposer que le "domaine" de π est inclus dans l'ensemble des paramètres de S'.

(PCA₁) Soient $[v]P\vec{s}, [w]P\vec{s} \in S'$. Donc $[v]P\vec{s}\pi, [w]P\vec{s}\pi \in S \in \mathcal{P}ca$. Donc $w = v$.

(PCA₂) Soit $[v]c \in S'$, donc $[v]c \in S \in \mathcal{P}ca$, d'où $\Re_c = v$

(PCA$_3$) Soit $[v]\,c(F_1,\ldots,F_n) \in S'$. Donc $[v]\,c(F_1,\ldots,F_n)\pi \in S \in \mathcal{P}ca$ si bien qu'il existe $A \in \mathsf{R}_c^v([v]\,c(F_1,\ldots,F_n)\pi)$ telle que $A \cup S \in \mathcal{P}ca$. Soit B l'alternative de $\mathsf{R}_c^v([v]\,c(F_1,\ldots,F_n))$ telle que $B\pi = A$. $S'\pi \cup B\pi \subseteq S \cup A \in \mathcal{P}ca$ (car $S \in \mathcal{P}ca$).

(PCA$_4$) Soit $[d]\,¶_W x \cdot F(x) \in S'$ avec $¶_W \in \Upsilon'$.
Comme $[d]\,¶_W x \cdot F(x)\pi \in S \in \mathcal{P}ca$, pour tout terme $t \in \mathcal{G}(\hat{\Sigma})$, il existe $w \in W$ telle que $S \cup \{[w](F(t))\pi\} \in \mathcal{P}ca$. Ainsi, $S'\pi \cup \{[w]\,F(t)\}\,\pi \subseteq S \cup \{[w](F(t))\pi\}$.

(PCA$_5$) Soit $[v]\,Qx \cdot F(x) \in S'$ une δ formule. Comme $[v]\,Qx \cdot F(x) \in S \in \mathcal{P}ca$, pour un choix arbitraire de paramètres $(p_w)_{w \in C}$ étrangers à S, il existe $A \in \mathsf{D}Q^v([v]\,Qx \cdot F(x), (p_w)_{w \in C})$ telle que $A \cup S \in \mathcal{P}ca$. Soient $(q_w)_{w \in C}$ un choix arbitraire de paramètres étrangers à S' et τ le renommage de paramètres suivant:

$$\tau(p) = \begin{cases} p_v & \text{si } p = q_v \\ \pi(p) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est immédiat que $S'\tau = S'\pi$ car aucun q_v n'apparaît dans S'. Soit B l'alternative de $\mathsf{D}Q^v([v]\,Qx \cdot F(x), (q_w)_{w \in C})$ telle que $B\tau = A$. Et finalement, $S'\tau \cup B\tau \subseteq S \cup A \in \mathcal{P}ca$ (car $S \in \mathcal{P}ca$).

Il est est clair que $\mathcal{A}'$ est fermé pour l'inclusion.

Pour prouver que $\mathcal{A}''$ est une propriété de consistance analytique de caractère fini, on procède de manière analogue. C.Q.F.D.

Théorème 2.2.1. *(de l'existence d'un modèle) Soient S un ensemble de formules signées de $\mathcal{C} \times \mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \Sigma, \Omega)$, $\mathcal{P}$ un ensemble de paramètres infini dénombrable et $\mathcal{P}ca$ une propriété de consistance analytique. Si $S \in \mathcal{P}ca$, alors S est satisfaisable.*

Preuve. On étend $\mathcal{P}ca$ à une propriété de consistance analytique de caractère fini (*a fortiori* fermée pour l'inclusion). On la note $\widetilde{\mathcal{P}ca}$. Soit $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ une énumération de $\mathcal{C} \times \mathcal{F}bf$. On construit une chaîne croissante $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\widetilde{\mathcal{P}ca}$ dont les membres sont:

$$\begin{cases} S_0 = S \\ S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{X_n\} & \text{si } X_n \text{ n'est pas une } \delta \text{ formule} \\ & \text{et si } S_n \cup \{X_n\} \in \widetilde{\mathcal{P}ca} \\ S_n \cup \{X_n\} \cup A & \text{si } X_n \text{ est une } \delta \text{ formule} \\ & \text{et si } A \in \mathsf{D}Q^v(X_n, (p_w)_{w \in C}) \text{ avec} \\ & (p_w)_{w \in C} \text{ étrangers à } S_n \cup \{X_n\} \\ & \text{et si } S_n \cup \{X_n\} \cup A \in \widetilde{\mathcal{P}ca} \\ S_n & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Dans S_n, il n'y a qu'un nombre fini de paramètres ($S = S_0$ n'en contenant pas et chaque X_n n'en contenant qu'un nombre fini de paramètres); il existe donc toujours un choix de paramètres étrangers à $S_n \cup \{X_n\}$.

Soit $\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Évidemment $S \in \mathcal{H}$. Et comme $\widetilde{\mathcal{P}ca}$ est de caractère fini, $\mathcal{H} \in \widetilde{\mathcal{P}ca}$, puisque tout sous-ensemble Y fini de $\mathcal{H}$ est inclus dans un S_k pour un $k \in \mathbb{N}$, et que $S_k \in \widetilde{\mathcal{P}ca}$, $Y \in \widetilde{\mathcal{P}ca}$.

On vérifie que $\mathcal{H}$ est maximal dans $\widetilde{\mathcal{P}ca}$ pour l'inclusion. Supposons qu'il existe $K \in \widetilde{\mathcal{P}ca}$, tel que $\mathcal{H} \subset K$. Soit $X_k \in K \setminus \mathcal{H}$. Comme $X_k \notin \mathcal{H}$, $S_k \cup \{X_k\} \notin \widetilde{\mathcal{P}ca}$, mais, par ailleurs comme $\widetilde{\mathcal{P}ca}$ est fermée pour l'inclusion, et que $S_k \cup \{X_k\} \subseteq K$ (car $S_k \in \mathcal{H}$) $S_k \cup \{X_k\} \in \widetilde{\mathcal{P}ca}$. D'où la contradiction. [3]

Il reste à vérifier point par point (Cf. DÉFINITION 2.2.2) que $\mathcal{H}$ est un ensemble de Hintikka.

(HI$_1$) est vérifié par S_n, $n \geq 0$, donc également par la limite $\mathcal{H}$.

(HI$_2$) similaire au cas précédent.

(HI$_3$) Soit $[v]\,c(F_1, \ldots, F_n) \in \mathcal{H}$. Supposons que pour toute alternative A de $\mathsf{R}_c^v([v]\,c(F_1, \ldots, F_n))$, $\mathcal{H} \neq \mathcal{H} \cup A$. Comme $\mathcal{H}$ est un élément de $\widetilde{\mathcal{P}ca}$, il existe $A_0 \in \mathsf{R}_c^v([v]\,c(F_1, \ldots, F_n))$ tel que $\mathcal{H} \cup A_0 \in \widetilde{\mathcal{P}ca}$. Ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{H}$, donc il existe $A_0 \in \mathcal{R}_c^v([v]\,c(F_1, \ldots, F_n))$ tel que $\mathcal{H} = \mathcal{H} \cup A_0$.

(HI$_4$) Soit $[d]\,\P_W x \cdot F(x) \in \mathcal{H}$. Supposons que pour un terme t et tout $w \in W$, $[w]\,F(t) \notin \mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H} \in \widetilde{\mathcal{P}ca}$, il existe $w_0 \in W$ telle que $\mathcal{H} \cup [w]\,F(t) \in \widetilde{\mathcal{P}ca}$. On conclut comme dans le cas précédent.

(HI$_5$) Soient $[v]\,Qx \cdot F(x) \in \mathcal{H}$, une formule de type δ, et n son rang dans l'énumération $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ Dans S_{n+1} il existe une alternative A de $\mathsf{D}Q^v$ appliquée à $[v]\,Qx \cdot F(x)$, avec $(p_w)_{w \in C}$ étrangers à $S_n \cup \{X_n\}$. Donc $A \subseteq \mathcal{H}$.

Il a fallu inclure dans la construction de S_{n+1} l'alternative A, car $\mathcal{H}$ peut être un ensemble infini et plus rien ne garantit donc encore l'existence d'un choix de paramètres étrangers à $\mathcal{H}$. Cette construction correspond à la variante de la preuve de la complétude de la logique classique du premier ordre présentée dans (SMULLYAN, 1968, Chapitre X, § 2.)

Donc $\mathcal{H}$ est un ensemble de Hintikka, qui est forcément satisfaisable d'après le LEMME 2.2.1. Comme $S \in \mathcal{H}$, S est également satisfaisable. C.Q.F.D.

REMARQUE. Le théorème précédent reste valable pour les ensembles S récursivement énumérables, si $\mathcal{P}$ contient un nombre infini paramètres étrangers à S.

[3] Au lieu de vérifier directement l'appartenance de $\mathcal{H}$ à $\widetilde{\mathcal{P}ca}$ et sa maximalité, on aurait pu appliquer le lemme de Tukey (SMULLYAN, 1968, p. 38).

2.2.3 Complétude du Calcul CB

THÉORÈME 2.2.2. *La famille $\mathcal{T}ac$ de tous les ensembles finis (de formules signées) consistants pour les tableaux analytiques (de CB) est une propriété de consistance analytique.*

PREUVE. (Comparer à (FITTING, 1990, lemme 6.4.2, p. 132))
Soit $S \in \mathcal{T}ac$. (La numérotation renvoie à la DÉFINITION 2.2.4.)

(PCA$_1$) Soit $[v]P\vec{s}, [w]P\vec{s} \in S$, alors $w = v$. (puisque S est supposé être consistant pour les tableaux analytiques).

(PCA$_2$) Soit $[v]c \in S$, alors $\Re_c = v$ (*idem*).

(PCA$_3$) Soit $[v]c(F_1, \ldots, F_n) \in S \in \mathcal{T}ac$. Supposons un instant que pour tout $A \in \mathsf{R}_c^v(c(F_1, \ldots, F_n))$ $S \cup A \notin \mathcal{T}ac$. Appelons les k alternatives dans $\mathsf{R}_c^v(c(F_1, \ldots, F_n))$ $A_1, \ldots, A_k$. Pour $S \cup A_j$ $(1 \leq j \leq k)$ il existe un tableau analytique fermé $\mathcal{T}_j$. On les fusionne pour obtenir un tableau fermé de S: la racine de ce tableau est étiquetée par $\{[v]c(F_1, \ldots, F_n)\}$. Ses k successeurs sont étiquetés par $A_1, \ldots, A_k$. Le sous-tableau qui "succède" à A_j $(1 \leq j \leq k)$ est précisément le tableau fermé $\mathcal{T}_j$.

(PCA$_4$) Soit $[d]\,¶_W x \cdot F(x) \in S$ avec $¶_W \in \Upsilon'$. Supposons qu'il existe un terme t connu de S tel que pour tout $w \in W$, $S \cup \{[w]F(t)\} \notin \mathcal{T}ac$. Donc pour tout w il existe un tableau fermé, réfutant $S \cup \{[w]F(t)\}$. Comme précédemment, on en déduit un tableau fermé, réfutant S.

(PCA$_5$) Soit $[v]Qx \cdot F(x) \in S$. Supposons que pour un choix de paramètres $(p_w)_{w \in C}$ étrangers à S [4], pour tout $A \in \mathsf{D}Q^v([v]Qx \cdot F(x), (p_w)_{w \in C})$ $A \cup S \notin \mathcal{T}ac$. Considérons comme avant le tableau dont la racine est étiquetée par $[v]Qx \cdot F(x)$ et appliquons $\mathsf{D}Q^v$ à cette formule. Comme chaque branche peut être prolongée par un sous-tableau fermé, le tableau ainsi obtenu est fermé.

$\mathcal{T}ac$ est une propriété de consistance analytique. Elle peut être étendue à une propriété de consistance analytique de caractère fini, c'est-à-dire que la famille de tous les ensembles consistants pour tableaux analytiques est une propriété de consistance analytique. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 2.2.1. *Le calcul des tableaux analytiques est complet c'est-à-dire tout ensemble consistant pour les tableaux analytiques est satisfaisable.*

PREUVE. Immédiate puisque $\mathcal{T}ac$ est une propriété de consistance analytique. C.Q.F.D.

La méthode des propriétés de consistance analytique présente l'avantage de ne pas faire référence à une "stratégie systématique" pour laquelle toute branche infinie serait un ensemble de Hintikka (Cf. (SMULLYAN, 1968, Chapitre 5, § 3.)).

[4] Un tel choix existe puisque S est fini.

2.2.4 Théorème de Compacité de Logiques Polyvalentes

Les logiques polyvalentes à nombre fini de valeurs de vérité sont des logiques *compactes*.

DÉFINITION 2.2.7. *Une logique est* compacte *ssi*
tout ensemble S de formules signées est satisfaisable ssi tout sous-ensemble de S l'est également. ◊

THÉORÈME 2.2.3. *Soit $\mathcal{L}$ une logique à nombre fini de valeurs de vérité. $\mathcal{L}$ est une logique compacte.*

PREUVE. Voir (GOTTWALD, 1989) pour une preuve sémantique. Mais on peut également adapter très simplement l'argument de (SMULLYAN, 1968).
Considérons la famille $\mathcal{G}$ de tous les ensembles E de formules signées telles que:
∘ $\mathcal{P}$ contient un ensemble infini de paramètres étrangers à E;
∘ tout sous-ensemble fini E est satisfaisable.
On vérifie que $\mathcal{G}$ est une propriété de consistance analytique. C.Q.F.D.

2.3 Le Calcul CB Amélioré CA

DÉFINITION 2.3.1. *Le calcul des tableaux analytiques amélioré (CA) dont le langage formel est l'ensemble de toutes formules signées et du symbole $\times$, est constitué de toutes les règles d'inférence*

(R$_1$) *la règle de clôture:*

$$\frac{\begin{array}{c}[v]\,F\\ [w]\,F\end{array}}{\times} \quad \text{où } F \in \mathcal{F}bf \text{ et si } w \neq v$$

(R$_2$) $\mathcal{R}_c^v$, avec $c \in \Pi$, *et* $v \in \mathcal{C}$

(R$_3$) $\mathcal{G}\P_w{}^d$, *avec* $\P_w \in \Upsilon'$,

(R$_4$) $\mathcal{D}Q^v$, *avec* $Q \in \Upsilon$, *et* $v \in \mathcal{C}$, *en se restreignant aux choix de paramètres étrangers à la branche sur laquelle sont greffées les conclusions.*

(R$_5$) $\mathcal{D}\P_w{}^v$, *avec* $\P_w \in \Upsilon'$, $v \in \mathcal{C}$, $v \neq d$, *et la même restriction sur les choix des paramètres.*

La relation $\Vdash\!\!\!-\!\!<_{CA}$ *entre tableaux analytiques dans CA est définie comme la relation* $\Vdash\!\!\!-\!\!<_{CB}$. ◊

2.3.1 Correction du Calcul CA

THÉORÈME 2.3.1. *Le calcul CA est correct. Soit S un ensemble récursivement énumérable de formules signées. Si $S \vdash_{CA} \times$, alors S est insatisfaisable.*

PREUVE. Analogue à la preuve du THÉORÈME 2.1.1. C.Q.F.D.

2.4 Complétude du Calcul CA

Comme pour le calcul de base on prouve que l'ensemble des tableaux finis est une propriété de consistance analytique.

LEMME 2.4.1. *Soient $[v]\,Qx \cdot F(x)$ une formule signée, $\mathcal{F}$ un ensemble fini de formules signées et $\langle I, S\rangle$ un sous-treillis inclus dans $\Re_Q^{-1}(v)$.*

si pour tout $(p_w)_{w \in C}$ étrangers à $\mathcal{F} \cup \{[v]\,Qx \cdot F(x)\}$ et pour tout ensemble W, $I \subseteq W \subseteq S$,

$$\mathcal{F}, [d]\,¶_W x \cdot F(x), \{[w]\,F(p_w) : w \in W\} \vdash_{CA} \times$$

alors $$\mathcal{F}, [d]\,¶_S x \cdot F(x), \{[w]\,F(p_w) : w \in I\} \vdash_{CA} \times$$

PREUVE. On prouve par induction, l'hypothèse (H_W):

Pour tout $(p_w)_{w \in C}$ étrangers à $\mathcal{F} \cup \{[v]\,Qx \cdot F(x)\}$ et pour tout ensemble W', $W \subseteq W' \subseteq S$, $\mathcal{F}, [d]\,¶_S x \cdot F(x), \{[w]\,F(p_w) : w \in W'\} \vdash_{CA} \times$

Pour $W = S$, l'énoncé est trivial (c'est l'une des conditions d'application de ce lemme).

Supposons (H_W) acquis pour tout W', $W \subset W' \subseteq S$. Soit $v \in S \setminus W$. Pour tout $v' \in S \setminus W$, appliquons l'hypothèse d'induction à $W \cup \{v'\}$ avec le choix de paramètres $(q_w)_{w \in C}$ où

$$q_w = \begin{cases} p_{v'} & \text{si } w = v \\ p_v & \text{si } w = v' \\ p_w & \text{sinon} \end{cases}$$

Il en résulte l'expression $(D_{v'})$:

$$\mathcal{F}, [d]\,¶_S x \cdot F(x), \{[w]\,F(p_w) : w \in W\}\,, [v']\,F(p_v) \vdash_{CA} \times$$

Par définition de $¶_S$, $\qquad [d]\,¶_S x \cdot F(x) \vdash_{CA} \{[w]\,F(p_v) : w \in S\}$

En appliquant "en cascade" des coupures entre cette expression et les expressions $(D_{v'})$, $v' \in S \setminus W$, on aboutit à:

$$\mathcal{F}, [d]\,¶_S x \cdot F(x), \{[w]\,F(p_w) : w \in W\} \vdash_{CA} \times$$

Finalement, pour $W = I$, on obtient le résultat annoncé. C.Q.F.D.

Comme $\vdash_{CA}$ est une relation de conséquence abstraite, il a été possible d'exprimer très facilement la "chirurgie sur les preuves" (par tableaux) à laquelle il a fallu recourir pour prouver ce lemme. Dans ce cadre, la règle de la coupure ne représente rien de plus que la réutilisation de *preuves partielles.*

THÉORÈME 2.4.1. *La famille $\mathcal{T}ac'$ de tous les ensembles finis (de formules signées) consistants pour les tableaux analytiques (dans CA) est une propriété de consistance analytique.*

PREUVE. Soit $S \in \mathcal{T}ac'$. On vérifie que S satisfait les conditions des propriétés de consistance analytique (la numérotation suit celle de la DÉFINITION 2.2.4).

(PCA$_1$) Voir THÉORÈME 2.2.2.

(PCA$_2$) *idem.*

(PCA$_3$) Soit $[v]\, c(F_1, \dots, F_n) \in S$. Supposons un instant que pour tout $A \in \mathsf{R}^v_c(c(F_1, \dots, F_n))$ $S \cup A \notin \mathcal{T}ac'$. Pour tout A, il existe un tableau analytique de $S \cup A$ fermé. Comme $\mathcal{R}^v_c(c(F_1, \dots, F_n)) \subseteq \mathsf{R}^v_c(c(F_1, \dots, F_n))$. On en déduit facilement un tableau de S fermé. D'où une contradiction avec l'appartenance de S à $\mathcal{T}ac'$.

(PCA$_4$) comme dans THÉORÈME 2.2.2.

(PCA$_5$) Soit $[v]\, Qx \cdot F(x) \in S$. Supposons que pour un choix de paramètres $(p_w)_{w \in C}$ étrangers à S, pour tout $A \in \mathsf{D}Q^v([v]\, Qx \cdot F(x), (p_w)_{w \in C})$ $A \cup S \notin \mathcal{T}ac'$. Considérons l'inférence $\mathcal{D}Q^v([v]\, Qx \cdot F(x), (p_w)_{w \in C})$. Pour chaque alternative, qui correspond à un sous-treillis $\langle I, U \rangle$ inclus dans $\mathfrak{R}^{-1}_{\mathsf{Q}}(v)$, on construit un tableau dans CA fermé. Par hypothèse, pour tout W tel que $I \subseteq W \subseteq U$, il existe un tableau dans CA fermé. c'est-à-dire

$$S, [d]\, \P_W x \cdot F(x), \{[w]\, F(p_w) : w \in W\} \vdash_{CA} \times$$

Par application du LEMME 2.4.1, on obtient:

$$S, [d]\, \P_U x \cdot F(x), \{[w]\, F(p_w) : w \in I\} \vdash_{CA} \times$$

Ce qui signifie qu'il existe un sous-tableau dans le calcul CA qui ferme l'alternative du treillis $\langle I, U \rangle$. La construction précédente est valable pour toute alternative et ainsi on peut exhiber un tableau fermé de S. Ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle S n'a pas de tableaux dans CA fermés.

$\mathcal{T}ac'$ est une propriété de consistance analytique. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 2.4.1. *Le calcul CA est complet c'est-à-dire tout ensemble consistant pour les tableaux analytiques est satisfaisable.*

PREUVE. Immédiate puisque $\mathcal{T}ac'$ est une propriété de consistance analytique. C.Q.F.D.

Chapitre 3

Skolemisation Paresseuse

Pour la logique classique, il est connu, que toute formule est équivalente à une formule en forme normale prénexe (aucune quantification ne figure parmi les arguments d'un connecteur) et que les quantifications existentielles peuvent être éliminées en remplaçant les variables liées avec des quantificateurs existentiels par des termes. Cette dernière étape qui préserve la satisfaisabilité est appelée la skolemisation. Cette transformation peut être amendée de sorte à ne pas nécessiter la mise sous prénexe au préalable. Il est intéressant de skolemiser les formules dont on désire vérifier par réfutation qu'il s'agit de théorèmes, car il ne reste plus que des quantifications universelles. Ce genre de formules se prêtent mieux à la démonstration automatique, qui se sert usuellement de l'unification pour déterminer les instances à considérer pour mettre en évidence la contradiction inhérente à la négation du théorème putatif.

En présence d'équivalences et *en utilisant les transformations traditionnelles*, la skolemisation est de coût exponentiel, puisqu'il faut "linéariser" la formule avant d'introduire les fonctions de Skolem (Cf. (BOY DE LA TOUR, 1991)). Le coût exponentiel est évité dans la logique classique en utilisant les transformations élaborées par BOY DE LA TOUR (1991).

Pour les logiques polyvalentes, il n'est pas toujours possible de mettre sous forme normale de Skolem les formules (voir le chapitre sur la mise sous forme clausale pour les logiques de (ROSSER & TURQUETTE, 1952)).

Dans le cadre des tableaux analytiques, la skolemisation paresseuse ouvre la porte à l'utilisation des tableaux avec unification pour des formules quelconques, car les paramètres sont remplacés par des termes, qui tiennent compte des liens entre ces termes et ceux introduits précédemment dans la preuve par tableau. En déduction automatique, cette idée est déjà exploitée par PRAWITZ (1960). Dans sa procédure de preuve, il introduit au fur et à mesure de nouvelles variables libres. Celles-ci sont rendues égales ("unifiées") en tenant compte des dépendances. Pour une alternative, voir (REEVES, 1987), qui utilise des graphes de dépendance, pour construire des interprétations dont le domaine du discours est les n premiers entiers naturels ($n > 0$). BIBEL (1987, § IV.8) étudie avec soin cette possibilité. Ici nous sommes confrontés à une difficulté supplémentaire. En effet, dans le cas traité par BIBEL, toutes les positions de tous les connecteurs sont soit isotones soit antitones. Nous ne faisons pas cette hypothèse.

FITTING (1988*a*) évite la mise sous forme normale de Skolem (qui ne préserve pas la satisfaisabilité dans les logiques modales). Il introduit pour chaque nouvelle application d'une règle de type δ un *nouveau symbole fonctionnel* (ce qui n'est pas encore de la skolemisation [1]). Les arguments du terme introduit sont *toutes* les variables libres du tableau. Cette approche se justifie d'une part, par la simplicité de preuves qui établissent correction et complétude, qui ne varient guère de celles pour les tableaux utilisant les paramètres, et d'autre part par la possibilité de présenter des tableaux avec unification.

BHATTA & KARNICK (1991) utilisent une technique analogue, et calculent les dépendances entre variables existentielles et les variables universelles dans le cadre de la résolution non-clausale de MURRAY (1982).

Le démonstrateur par tableaux d'ATINF inclut depuis 1988/89, une telle technique.

À la fin de ce chapitre, nous disposerons donc de calculs n'utilisant plus de paramètres, permettant ainsi l'utilisation de variables libres remplacées plus tard (au cours d'une réfutation) par unification à des termes pour fermer les branches. Le chapitre suivant présentera justement de tels calculs.

3.1 Représentation de Formules

DÉFINITION 3.1.1. *Soient* $[v]\, Q\, x \cdot F(x, u_1, \ldots, u_n)$, *une formule signée dont les variables libres sont* $u_1, \ldots, u_n$ *(on écrira plus brièvement* $[v]\, Q\, x \cdot F(x, \vec{u})$*) et* θ *une substitution dont le domaine comprend* $\{u_1, \ldots, u_n\}$. *Le couple* $\langle [v]\, Q\, x \cdot F(x, \vec{u}), \theta\rangle$, *noté* $[v]\, Q\, x \cdot F(x, \vec{u})_\theta$, *est une représentation de la formule signée* $[v]\, Q\, x \cdot F(x, \vec{u}\theta)$.
$\Diamond$

Dans la suite de ce chapitre, on se restreint aux substitutions θ de base. Quand le contexte ne prête pas à équivoque, on parlera de formule signée en pensant à

[1] FITTING n'utilise d'ailleurs pas ce terme

la représentation de la formule signée. Ainsi, quand on instancie $[v]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u}\theta)$ avec le terme de base t, on peut représenter cette instance soit par $F(t, \vec{u})_\theta$, soit par $F(\dot{x}, \vec{u})_{\theta \circ \{\dot{x} \mapsto t\}}$, qui dénote la même chose. Cependant, en procédant ainsi, on pourra *conserver la trace des termes choisis pour instancier* une quantification. Nous nous en servirons pour déterminer la liste des arguments des fonctions de Skolem introduites (paresseusement) au cours de la preuve.

Le langage formel des calculs des tableaux considérés ne sont plus les formules signées, mais les représentations de formule. Si T est un calcul des tableaux analytiques agissant sur des formules signées, on appellera également T la variante qui manipule des représentations de formule. On étend le domaine (et l'image) des règles d'inférence, vues comme des fonctions dans $\mathcal{F}bf$ aux ensembles de représentations de formules de telle sorte que les alternatives en conclusion soient également des ensembles de représentations de formules. Cette extension est précisée dans la liste ci-après.

Pour les deux calculs introduits jusqu'à présent, les modifications se résument aux points suivants

(R_1) la règle de clôture devient

$$\frac{\begin{array}{c}[v]\,F_\sigma\\ [w]\,G_\theta\end{array}}{\times} \quad \text{si } F\sigma = G\theta \text{ et si } w \neq v$$

(R_2) les alternatives de $\mathsf{R}^v_c([v]\,c(F_1, \dots, F_n)_\theta)$ ainsi que de $\mathcal{R}^v_c([v]\,c(F_1, \dots, F_n)_\theta)$, avec $c \in \Pi$, et $v \in \mathcal{C}$ sont incluses dans $\{[w]\,F_{i_\theta} : 1 \leq i \leq n, w \in \mathcal{C}\}$.

(R_3) Pour les quantifications de type γ $[d]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta$ les alternatives de la conclusion de $\mathsf{G}\P_w{}^d$ appliquée à $[d]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta$ contiennent une représentation du genre $[w]\,F(\dot{x}, \vec{u})_{\theta \circ \{\dot{x} \mapsto t\}}$.

(R_4) Soit $[v]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta$ une formule de type δ. Si $[w]\,F(p_w, \vec{u}\theta)$ figure dans la conclusion de $\mathsf{D}Q^v$ou de $\mathcal{D}Q^v$, cette formule sera représentée par $[w]\,F(p_w, \vec{u})_\theta$. De même, pour $w \neq d[w]\,\P\,x \cdot F(x, \vec{u}\theta)$ sera représentée par $[w]\,\P\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta$.

La distinction faite dans le traitement de l'instanciation des formules de type δ et des formules de type γ est arbitraire. Toutefois ce choix permet l'introduction de fonctions de Skolem d'arité moindre.

Les notions introduites pour les formules signées sont étendues aux représentations de formules. En particulier, une interprétation $[v]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta$ satisfait $\Im$ ssi $\Im$ satisfait $[v]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u}\theta)$ (ssi $\Im^{\vec{u}}_{\Im \circ \theta(\vec{u})}$ satisfait $[v]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u})$).

L'utilisation de cette représentation de formules permet dans les règles de type δ de se servir non de paramètres ou de termes dont le symbole de tête est nouveau (FITTING, 1990), mais des termes de Skolem définis dans la section suivante.

3.2 Définition et Correction de la Skolemisation Paresseuse

3.2.1 Définition des Symboles de Skolem

On étend la signature fonctionnelle Σ, par l'ajout d'un nombre infini dénombrable de symboles nouveaux, d'arité n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La signature obtenue est appelée Σ^1. À son tour Σ^1 est étendue comme l'a été $\Sigma^0 = \Sigma$. Ainsi, une séquence d'extensions $\Sigma^0, \ldots, \Sigma^n, \ldots$ est construite. On note $\check{\Sigma} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$.

Pour chaque formule $F = Q\, x \cdot F'(x, \vec{u})$ de type δ dont toutes les variables libres figurent parmi $u_1, \ldots, u_n$, on introduit des symboles de fonction n-aires, éléments de $\check{\Sigma} \setminus \Sigma$, que l'on appelle *symboles de Skolem* associés à F. Comme F ne contient qu'un nombre fini de symboles, on peut convenir que les symboles de Skolem de F n'apparaissent pas dans F elle-même.

Appelons $\mathcal{F}bf_n^m$, l'ensemble de toutes les formules de $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \Sigma^m, \Omega)$ contenant au plus n variables libres différentes. Il est clair que

$$\bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}bf_n^m = \mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \check{\Sigma}, \Omega).$$

L'application $\mathcal{S}ko$ est une injection de $\mathcal{C} \times \mathcal{F}bf$ vers $\check{\Sigma}$, son profil est:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{F}bf_n^m & \longmapsto & \Sigma^{n+1} \\ \langle w, F \rangle & \longrightarrow & \mathcal{S}ko(w, F) \end{array}$$

$\mathcal{S}ko(w, F)$ est un symbole de Skolem. Formellement on peut voir une image de $\mathcal{S}ko$, comme un symbole "composé" de la liste des arguments de $\mathcal{S}ko$. Cette définition des symboles de Skolem, un peu lourde, permet de réutiliser le symbole de Skolem (s'il y a par exemple plusieurs occurrences de la même quantification dans l'ensemble de formules signées dont on désire établir l'insatisfaisabilité.).

L'extension $\check{\Sigma}$ contient tous ces symboles en plus de ceux de Σ. Comme l'ensemble de toutes les quantifications signées $[v]\, Q\, x \cdot F(x, u_1, \ldots, u_n)$, $\check{\Sigma}$ est un ensemble primitif récursif. Aussi, $\mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \check{\Sigma}, \Omega)$ est-il également un ensemble primitif récursif.

Pour faire la part du codage de l'essentiel, signalons qu'il suffit que $\check{\Sigma}$ contienne pour chaque arité une infinité dénombrable de symboles. L'injection $\mathcal{S}ko$ permet simplement d'énoncer plus brièvement les propriétés.

3.2.2 Correction de la Skolemisation Paresseuse

La skolemisation paresseuse préserve la satisfaisabilité. Le reste de la section se consacre à prouver ce fait.

Soient f et f' deux symboles fonctionnels distincts de $\check{\Sigma}$, d'arité respective m et n, $t_0 = f\vec{t}$ et $t_0' = f'\vec{t'}$ deux termes de $\mathcal{G}(\check{\Sigma})$, tels que t_0 n'est pas un sous-terme de

t_0' et vice versa. La construction qui suit, échange *jusqu'à un certain point* le rôle de t_0 et t_0'.

Le morphisme de termes γ est défini par:

$$\begin{array}{llcll}
\gamma(f): & \mathcal{G}(\check{\Sigma})^m & \to & \mathcal{G}(\check{\Sigma}) & \\
& \langle s_1,\dots,s_m\rangle & \mapsto & t_0' & \text{si } \langle s_1,\dots,s_m\rangle = \vec{t} \\
& \langle s_1,\dots,s_m\rangle & \mapsto & f(s_1,\dots,s_m) & \text{sinon}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll}
\gamma(f'): & \mathcal{G}(\check{\Sigma})^n & \to & \mathcal{G}(\check{\Sigma}) & \\
& \langle s_1,\dots,s_n\rangle & \mapsto & t_0 & \text{si } \langle s_1,\dots,s_m\rangle = \vec{t'} \\
& \langle s_1,\dots,s_n\rangle & \mapsto & f'(s_1,\dots,s_n) & \text{sinon}
\end{array}$$

Pour tout autre symbole fonctionnel g de $\check{\Sigma}$, $\gamma(g)\vec{t} = g\vec{t}$.

On considère une constante comme une fonction d'arité nulle, dont la liste des arguments est l'unique séquence vide $\langle\rangle$. Cette convention permet de ne pas distinguer explicitement les cas m ou n nuls.

Comme d'habitude, on définit l'extension de γ aux termes par

$$\Gamma\, g(s_1,\dots,s_m) = \gamma(g)(\Gamma(s_1),\dots,\Gamma(s_m)).$$

Pour alléger les notations, les parenthèses seront omises là où cela facilitera une lecture rapide. On écrira

$$\Gamma\, g(s_1,\dots,s_m) = \gamma\, g(\Gamma\, s_1,\dots,\Gamma\, s_m).$$

Plus simplement on écrira:

$$\Gamma\, g\vec{s} = \gamma\, g(\Gamma\, \vec{s}).$$

LEMME 3.2.1. *Pour tout terme sans variables s qui ne contient ni t_0, ni t_0',*

$$\Gamma\, s = s.$$

Dans tout terme s sans variables, Γ remplace toutes les occurrences de t_0 et de t_0' respectivement par t_0' et t_0.

PREUVE. Les deux affirmations se vérifient par induction structurelle sur les termes. Le premier point est trivial à vérifier. La preuve du second s'organise ainsi.

Cas de base. Si s est une constante, différente de t_0 et de t_0', $\Gamma\, s = \gamma\, s = s$.

Si $s = t_0$, $\Gamma\, t_0 = t_0'$. Le cas $s = t_0'$ est analogue.

Pas d'induction. Soit $s = g\vec{s}$. On distingue les cas suivants.

$g \neq f$ et $g \neq f'$. Comme $\gamma\, g = g$, $\Gamma\, g\vec{s} = g(\Gamma\, \vec{s})$. Par application de l'hypothèse d'induction, les composantes du vecteur $\Gamma\, \vec{s}$ sont obtenues en remplaçant les occurrences de t_0 et de t_0' respectivement par t_0' et t_0. Comme le symbole de tête de s n'est ni f ni f', $f\,\Gamma\, \vec{s}$ n'est ni t_0 et ni t_0'. L'hypothèse d'induction est donc vérifiée dans ce cas.

$s = t_0$. $\Gamma\, t_0 = t'_0$.

$g = f$ et $s \neq t_0$. $\Gamma\, s = \gamma\, f\, \Gamma\, \vec{s}$. Distinguons trois cas. Le terme s ne contient aucune occurrence de t_0 ou de t'_0. Donc $\Gamma\, s = s$.

Le terme s contient strictement une occurrence de t'_0. Comme l'hypothèse d'induction s'applique à chaque composante de $\vec{s}$, $\Gamma\, \vec{s}$ contient donc une occurrence de t_0. Donc $\Gamma\, \vec{s} \neq \vec{t}$ et $\Gamma\, s = f(\Gamma\, \vec{s})$. Par hypothèse d'induction $\Gamma\, \vec{s}$ est obtenu à partir de $\vec{s}$ en substituant toutes les occurrences de t_0 et de t'_0 par t'_0 et de t_0 respectivement.

Le terme s contient strictement une occurrence de t_0. $\Gamma\, s = \gamma\, f(\Gamma\, \vec{s})$. L'une des composantes de $\Gamma\, \vec{s}$ contient une occurrence de t'_0, car l'hypothèse d'induction s'applique à chaque composante de $\vec{s}$. Or, par hypothèse t'_0 n'est pas un sous-terme de t_0. Ainsi, $\Gamma\, \vec{s} \neq \vec{t}$. Donc $\Gamma\, s = \gamma\, f(\Gamma\, \vec{s}) = f(\Gamma\, \vec{s})$.

Les cas où le symbole de tête de s est f' sont symétriques aux quatre cas qui précèdent. C.Q.F.D.

On étend de façon usuelle γ en Γ aux termes avec variables et aux formules.

Soient $\Im$ une interprétation de Herbrand et $\Im'$ l'interprétation qui évalue tout terme t par $\Gamma\, t$ et qui interprète tout atome de base $P\vec{s}$ par $\Im(P\,\Gamma(\vec{s}))$.

LEMME 3.2.2. *Pour toute formule sans variables (libres ou liées)* $\Im'(H) = \Im(\Gamma\, H)$.

PREUVE. Immédiate. C.Q.F.D.

Soient θ une substitution de base et $\tilde{\theta}$ son extension aux formules. [2]

On note par $\Im'_\theta$ et $\Im_\theta$, les variantes respectivement de $\Im'$ et de $\Im$ qui interprètent toute variable libre z de $\mathcal{D}om(\theta)$ par $\theta(z)$.

LEMME 3.2.3. *Soient s un terme et H une formule sans quantificateurs.*

$$\Im'_\theta(s) = \Im'(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\; s) \text{ et } \Im'_\theta(H) = \Im'(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\; H)$$

PREUVE. Nous ne reproduisons que la preuve par induction sur les termes; le cas des formules ne cache aucune surprise.

Cas de base. Le terme s est l'une des variables libres de $\mathcal{D}om(\theta)$,$\Im'_\theta(s) = \theta(s)$ et de l'autre côté, $\Im'(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\; s) = \gamma(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\; s)$ par définition de $\Im'$. Or, comme s est une variable, $\Gamma(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\; s) = \Gamma(\Gamma \circ \theta\, s)$, mais $\Gamma \circ \Gamma \circ \theta\,(s) = \theta(s)$, car $\Gamma \circ \Gamma = \iota$.

Le cas contraire est trivial puisque $\widetilde{\Gamma \circ \theta}\; s = s$ et $\Im'_\theta(s) = \Im'(s)$.

Pas d'induction. Le terme s est de la forme $g(s_1, \ldots, s_n)$.

$$\begin{array}{lcll}
\Im'_\theta(g(s_1,\ldots,s_n)) & = & \gamma(g)(\Im'_\theta(s_1),\ldots,\Im'_\theta(s_n)) & \text{par définition de } \Im'_\theta \\
 & = & \gamma(g)(\Im'(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\; s_1),\ldots,\Im'(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\; s_n)) & \text{par hyp. d'induction} \\
 & = & \Im'(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\, s) & \text{par définition de } \Im'
\end{array}$$

[2] $\widetilde{\Gamma \circ \theta} \neq \Gamma \circ \tilde{\theta}$: il est plus prudent de distinguer la substitution de ses extensions. En effet, si on prend pour $\theta = \{x \mapsto f(a), y \mapsto b\}$, $t_0 = f(a)$ et $t'_0 = g(b)$, alors $\Gamma \circ \theta = \{x \mapsto g(b), y \mapsto b\}$, et $g(b) = \widetilde{\Gamma \circ \theta}\, g(y) \neq \Gamma \circ \tilde{\theta}\, g(y) = f(a)$.

L'induction sur les formules est analogue. C.Q.F.D.

Dans la suite, on dira qu'une formule G et une substitution θ satisfont à la propriété $(*)$ ssi

$(*)$ Si x est une variable liée de G, alors $\dot{x}$ n'est pas dans le domaine de θ;
Pour tout sous-terme s non-variable de G, $\widetilde{\theta}\, s \neq t_0$ et $\widetilde{\theta}\, s \neq t'_0$

LEMME 3.2.4. *Si G et θ satisfont à $(*)$, alors $\Gamma \circ \widetilde{\theta}(G) = \widetilde{\Gamma \circ \theta}\, G$.*

PREUVE. Vérification par induction. C.Q.F.D.

LEMME 3.2.5. *Si G et θ satisfont à $(*)$, alors $\Im'_\theta(G) = \Im_\theta(G)$.*

PREUVE. On procède par induction structurelle.
Cas de base. G ne contient pas de quantificateurs.

$$\begin{array}{rcll}
\Im'_\theta(G) & = & \Im'(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\ G) & \text{LEMME 3.2.3} \\
& = & \Im(\Gamma(\widetilde{\Gamma \circ \theta}\ G)) & \text{par définition de } \Im' \\
& = & \Im(\Gamma \circ \Gamma \circ \widetilde{\theta} G) & \text{LEMME 3.2.4} \\
& = & \Im(\widetilde{\theta}\ G) & \text{car } \Gamma \circ \Gamma = \iota \\
& = & \Im_\theta(G) &
\end{array}$$

Pas d'induction. Soit $Qx \cdot G(x)$, une quantification. Pour tout terme de base t et toute substitution θ (dont le domaine ne comprend pas la variable libre $\dot{x}$, car θ satisfait à $(*)$), on note par θ_t la substitution $\sigma = \theta \circ \{\dot{x} \mapsto t\}$.

$$\begin{array}{lrcll}
& \Im'_{\theta_t}(G(\dot{x})) & = & \Im_{\theta_t}(G(\dot{x})) & \text{Par hyp. d'induction} \\
\text{Donc} & \left\{\Im'_{\theta_t}(G(\dot{x})) : t \in \mathcal{G}(\check{\Sigma})\right\} & = & \left\{\Im_{\theta_t}(G(\dot{x})) : t \in \mathcal{G}(\check{\Sigma})\right\} & \\
\text{Donc} & \Re_Q\left(\left\{\Im'_{\theta_t}(G(\dot{x})) : t \in \mathcal{G}(\check{\Sigma})\right\}\right) & = & \Re_Q\left(\left\{\Im_{\theta_t}(G(\dot{x})) : t \in \mathcal{G}(\check{\Sigma})\right\}\right) & \\
\text{D'où} & \Im'_\theta(Qx \cdot G(x)) & = & \Im_\theta(Qx \cdot G(x)) &
\end{array}$$

Soient $c(G_1, \ldots, G_n)$ et θ une substitution de domaine les variables libres de $c(G_1, \ldots, G_n)$.

$$\begin{array}{lrcll}
& \Im'_\theta(G_i) & = & \Im_\theta(G_i) & \text{Par hyp. d'induction} \\
\text{Donc} & \Im'_\theta(c(G_1, \ldots, G_n)) & = & \Im_\theta(c(G_1, \ldots, G_n)) &
\end{array}$$

Donc pour tout couple G et θ satisfaisant à $(*)$, $\Im'_\theta(G) = \Im_\theta(G)$. C.Q.F.D.

Nous rassemblons les lemmes précédents pour ramener la correction de la version skolemisée des règles de type δ à celle utilisant des paramètres étrangers.

PROPOSITION 3.2.1. *Soient $F(\dot{x},\vec{u})$ une formule arbitraire et θ une substitution de base de domaine l'ensemble des composantes de $\vec{u}$, telle que $t_1,\ldots,t_m,t'_1,\ldots,t'_n$ soient des éléments du codomaine $Cod(\theta)$. Soient t et t' les termes dont tous les arguments sont des variables de $\mathcal{D}om(\theta)$, dont les instances $t\theta$ et $t'\theta$ valent respectivement t_0 et t'_0.*

Si $F(\dot{x},\vec{u})$ et θ satisfont à $(*)$, alors $\Im'_\theta(F(\dot{x}\setminus t',\vec{u})) = \Im_\theta(F(\dot{x}\setminus t,\vec{u}))$.

PREUVE. On remarquera tout d'abord $\gamma\circ\theta = \theta$ et $\widetilde{\Gamma\circ\theta}\, t' = t'_0 = \Gamma\, t_0$. Soit σ la substitution $\theta\circ\{\dot{x}\mapsto t_0\}$.

$$\begin{array}{rcll} \Im'_\theta(F(\dot{x}\setminus t',\vec{u})) & = & \Im'(F(\dot{x}\setminus \widetilde{\Gamma\circ\theta}\, t', \widetilde{\Gamma\circ\theta}\, \vec{u})) & \text{LEMME 3.2.3} \\ & = & \Im'_\sigma(F(\dot{x},\vec{u})) & \text{car } \widetilde{\Gamma\circ\theta}\, t' = \widetilde{\Gamma\circ\sigma}\, \dot{x} \\ & = & \Im_\sigma(F(\dot{x},\vec{u})) & \text{LEMME 3.2.5} \\ & = & \Im_\theta(F(\dot{x}\setminus t,\vec{u})) & \end{array}$$

C.Q.F.D.

Cette proposition sera utilisée pour des fonctions f et f' de même arité (PROPOSITION 3.4.3, justification de la réutilisation de fonction de Skolem), et f une constante (PROPOSITION 3.3.1, justification du remplacement des paramètres par des termes).

Cette construction permet donc de remplacer un calcul se servant de paramètres par une version skolemisée, à condition que les règles de type δ soient des règles d'inférence à conclusion multiple, dont chaque alternative (en nombre fini) n'introduit qu'un nombre fini de paramètres. La construction proposée est indépendante de la cardinalité de l'ensemble des valeurs de vérité.

3.3 Les Calculs des Tableaux Analytiques CB et CA Skolemisés: CS et CAS

Les versions skolemisées des calculs CB et CA sont appelées respectivement CS et CAS. Par version skolemisée, nous entendons un calcul où les règles de type δ ont été modifiées. À la place de paramètres étrangers, on instancie avec des termes de Skolem.

Soit $[v]\,Q\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta$ une formule de type δ. On choisit pour l'application de $\mathsf{D}Q^v$ et de $\mathcal{D}Q^v$ comme termes $(t_w)_{w\in\mathsf{C}}$: $(f_w\vec{u})_{w\in\mathfrak{C}}$ où $f_w = \mathcal{S}ko(w, Q\,x\cdot F(x,\vec{u}))$. Le choix des termes fait pour instancier ces formules de type δ sera sous-entendu.

PROPOSITION 3.3.1. *Soient $[v]\,Q\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta$ une représentation d'une formule de type δ, $w\in\mathfrak{C}$, W un ensemble de valeurs de vérité, $(p_w)_{w\in\mathsf{C}}$ un choix de paramètres étrangers à $[v]\,Q\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta$ et $\Im$ une interprétation.*

$\Im \models [v]\,Q\,x\cdot F(x,\vec{u})_\tau$

ssi il existe $W \in \Re_Q^{-1}(v)$ et une interprétation $\Im'$ vérifiant

1. $\Im' \models [w]\, F(x \setminus f_w\vec{u}, \vec{u})_\theta,\ w \in W$
2. *Pour toute représentation de formule G_τ et tout sous-terme s non variable de $[v']\, G_\tau$, $s\tau \neq p_w$ et $s\tau \neq f_w\vec{u}\theta$, $\Im' \models [v']\, G_\tau$ ssi $\Im \models [v']\, G_\tau$*

PREUVE. On note par t_w le terme $(f_w\vec{u})\,\theta$, $w \in W$. La PROPOSITION 1.3.2 affirme l'existence d'une interprétation $\Im''$ telle que $\Im'' \models [w]\, F(x \setminus p_w, \vec{u})_\theta$ $w \in W$ et pour toute formule G_τ à laquelle les paramètres $(p_w)_{w\in C}$ sont étrangers à $G\tau$, $\Im'' \models [v']\, G\tau$ ssi $\Im \models [v']\, G\tau$. Il existe évidemment une interprétation de Herbrand $\Im_0$ vérifiant les mêmes propriétés. On construit à partir de $\Im_0$ une interprétation $\Im'$, qui coïncide avec $\Im_0$ sauf en $(f_w\vec{u}\theta)_{w\in W}$ et en $(p_w)_{w\in W}$.

Tout d'abord, soit $w_1, \dots, w_n$ une énumération de W arbitraire. Construisons une séquence $\Im_i$ d'interprétations de Herbrand vérifiant:

1. $\Im_i \models [w_j]\, F(x \setminus f_{w_j}\vec{u}, \vec{u})_\theta$, $j \leq i$
2. Pour toute représentation de formule $[v']\, G_\tau$ et tout sous-terme s non variable de G_τ, $s\,\tau \neq p_w$ et $s\tau \neq f_w\vec{u}\,\theta$, $\Im_i \models [v']\, G_\tau$ ssi $\Im_0 \models [v']\, G_\tau$.

$\Im_0$ vérifie les propriétés ci-dessus. Montrons que, si l'on a pu construire $\Im_i$, alors on peut définir $\Im_{i+1}$.

Par application de la PROPOSITION 3.2.1 (avec $t'_0 = f_{w_{i+1}}\vec{u}$ et $t_0 = p_{w_{i+1}}$ et $\Im$ est ici $\Im_i$), $\Im'_{i,\theta} \models [w_{i+1}]\, F(x \setminus t_{w_{i+1}}, \vec{u})$. De plus $\widetilde{\Gamma \circ \theta} = \widetilde{\theta}$, car $p_{w_{i+1}}$ est un paramètre inédit, qui ne peut donc pas figurer dans la prémisse de la règle de type δ, et t'_0 ne figure pas dans $Cod(\theta)$, puisque ce terme est strictement plus grand que chaque terme dans le codomaine de θ. Donc

$$\Im'_i \models [w_{i+1}]\, F(x \setminus t_{w_{i+1}}, \vec{u})_\theta.$$

Comme G et τ satisfont à la condition $(*)$, $\Im'_{i,\tau}(G) = \Im_{i,\tau}(G)$ et comme pour toute variable libre z de G, $\Gamma \circ \tau(z) = \tau(z)$, $\Im'_i(G_\tau) = \Im_i(G_\tau) = \Im_0(G_\tau)$.

En lisant pour G et τ, respectivement $F(x \setminus t_{w_j}, \vec{u})$, $j < i$, et θ, on affirme $\Im'_i(F(x \setminus t_{w_j}, \vec{u})_\theta) = \Im_0(F(x \setminus t_{w_j}, \vec{u})_\theta)$

On appelle $\Im_{i+1}$ l'interprétation de Herbrand équivalente à $\Im'_i$. La réciproque est triviale. C.Q.F.D.

DÉFINITION 3.3.1. *Soit F une formule d'un nœud n d'un tableau analytique $\mathcal{T}$. Une occurrence d'un terme de Skolem t de F est critique dans $\mathcal{T}$ ssi t n'est "utilisé" par aucune inférence de type δ entre n et la racine et, de plus, au moins un nœud descendant de n est étiqueté par une alternative d'une inférence de type δ "utilisant" t.* ◊

En d'autres termes, on utilise un terme de Skolem (c'est-à-dire en gros un paramètre) avant que celui n'ait été introduit par la règle de type δ.

À un tel cas de figure, un coût $\kappa_t(n)$ est associé. Si N' est l'ensemble des nœuds descendants de n étiquetés par une alternative d'une inférence de type δ "utilisant" t, $\kappa_t(n)$ est défini par $\Sigma_{n' \in N'} \operatorname{long}(n, n')$ où $\operatorname{long}(n, n')$ est la longueur du chemin de n à n'. Le coût global d'un nœud n est défini comme la somme des coûts $\kappa_t(n)$ pour tous les termes de Skolem apparaissant dans les formules de (l'étiquette de) n; on le note $\kappa(n)$.

On peut assouplir en logique classique la règle de type δ tout en conservant la correction de la règle d'inférence (SMULLYAN, 1968, Chapitre 7, § 4). Quand la logique traitée inclut des règles de type γ qui sont réellement à conclusion multiple (au moins deux alternatives), cet assouplissement reste correcte, mais les conséquences sont plus folkloriques. Il se peut qu'avant de définir le sens du terme de Skolem (ce que font finalement les règles de type δ), une "instance critique" emprunte la mauvaise branche. On aboutit au cas de figure catastrophique où toutes les formules d'une branche sont satisfaites par une interprétation, mais aucune alternative de l'inférence définissant le terme de Skolem. L'exemple suivant fixe les idées.

EXEMPLE 3.3.1. La logique considérée a trois valeurs (ici $d = 2$). Sa signature logique contient le quantificateur Q dont $\Re_{\mathsf{Q}}(2) = \{\{2\}\}$. Une constante de Skolem a est utilisée de façon critique:

$$\begin{array}{rl|l}
1. & \multicolumn{2}{c}{[2]\, ¶_{\{1,2\}}\, x \cdot F(x)} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{[2]\, \mathsf{Q}\, x \cdot F(x)} \\
\hline
3. & [1]\, F(a) & [2]\, F(a) \\
4. & [2]\, F(a) &
\end{array}$$

La ligne 3. correspond à une γ inférence avec $[2]\, ¶_{\{1,2\}}\, x \cdot F(x)$. La ligne 4. introduit enfin la constante de Skolem a. La branche de gauche peut être développé en un tableau fermé. Dans celle de droite en y appliquant les règles de type δ avec la contrainte que le terme est *nouveau dans le tableau* (ce qu'imposent SMULLYAN et FITTING), on utilisera donc un nouveau paramètre, l'application de la règle de type γ avec a ne sera d'aucune utilité dans le tableau fermé, s'il existe. En explorant d'abord la branche de droite, le problème ne se serait pas posé. Ceci suggère que la restriction de n'employer que des instances sans termes critiques n'est pas essentielle.

En logique classique, ce cas de figure ne se produit pas, si bien que cet assouplissement de la règle de type δ peut donner des réfutations plus courtes. $\Diamond$

Temporairement, on ne considère que des tableaux sans termes critiques. À la fin de la section, on prouvera que s'il existe un tableau fermé, il en existe également un sans termes de Skolem critiques. Dans la section établissant la complétude de ces calculs, on prouvera qu'en restreignant les inférences de type γ aux termes déjà connus d'une branche, on obtient des tableaux sans termes critiques.

3.3.1 Correction du Calcul CS

COROLLAIRE 3.3.1. *La version skolemisée de* DQ^v *est une règle d'inférence correcte. Soient* $F = [v]\,Q\,x \cdot F'(x,\vec{u})_\theta$ *une formule de type* δ, $(f_w)_{w \in C}$ *les symboles de Skolem associés à* F *et* $\mathcal{F}$ *un ensemble de formules signées auxquelles les termes* $f_w\vec{u}\theta$ *sont étrangers.*

Une interprétation satisfait conjointement F *et* $\mathcal{F}$

ssi une interprétation satisfait conjointement une alternative A *de la version skolemisée de* $\mathsf{DQ}^v(F)$ *et* $\mathcal{F}$.

PREUVE. En utilisant la PROPOSITION 3.3.1. C.Q.F.D.

THÉORÈME 3.3.1. *CS est un calcul correct.*

PREUVE. Elle s'articule comme celle du THÉORÈME 2.1.1. On établit la contraposée. Soit $\Im$ une interprétation qui satisfait S. On montre par induction sur le nombre de nœuds des tableaux analytiques, que toutes les formules de S et d'une branche sont satisfaites par une variante de $\Im$.

Soit $\mathcal{T}$ un tableau analytique. Seul est détaillé le cas où $\mathcal{T}$ est obtenu à partir d'un tableau $\mathcal{T}'$ par greffe sur une feuille e de $\mathcal{T}'$ des alternatives d'une inférence de type δ. Par hypothèse d'induction, une interprétation $\Im$ satisfait une branche de $\mathcal{T}'$. Si cette branche ne contient pas e, elle se retrouve inchangée dans $\mathcal{T}$ et le résultat est acquis. Dans l'autre cas, le COROLLAIRE 3.3.1 garantit l'existence d'une variante qui satisfait également toutes les formules signées de B et de S, en plus d'une alternative de la version skolemisée de DQ^v. C.Q.F.D.

3.3.2 Correction du Calcul CAS

COROLLAIRE 3.3.2. *La version skolemisée de* $\mathcal{DQ}^v$ *est une règle d'inférence correcte. Soient* $F = [v]\,Q\,x \cdot F'(x,\vec{u})_\theta$ *une formule de type* δ, $(f_w)_{w \in C}$ *les symboles de Skolem associés à* F *et* $\mathcal{F}$ *un ensemble de formules signées auxquelles les termes* $f_w\vec{u}\theta$ *sont étrangers.*

Une interprétation satisfait conjointement F *et* $\mathcal{F}$.

ssi une interprétation satisfait conjointement une alternative A *de la version skolemisée de* $\mathcal{DQ}^v(F)$ *et*$\mathcal{F}$.

PREUVE. En utilisant la PROPOSITION 3.3.1. C.Q.F.D.

THÉORÈME 3.3.2. *CAS est un calcul correct.*

PREUVE. Comme pour le THÉORÈME 3.3.1. C.Q.F.D.

3.3.3 Réduction aux Tableaux sans Termes Critiques

THÉORÈME 3.3.3. *S'il existe un tableau fermé, il en existe un sans termes de Skolem critiques.*

PREUVE. La preuve se fait par double induction. On montre que pour tout tableau de hauteur $h+1$ de racine Λ, il en existe un de hauteur $h+1$ de coût strictement inférieur à $\kappa(\Lambda)$. Ce qu'on prouve en servant du fait qu'il existe pour tout tableau de hauteur h un tableau de même hauteur sans terme critique. C.Q.F.D.

Le fait d'être connu de la branche (condition à l'application des règles de type γ) ne s'étend pas aisément aux tableaux à variables libres étudiés au chapitre suivant. Le théorème précédent garantit la correction d'un tableau où les règles de type γ ne satisfont pas à cette contrainte, puisque l'on peut toujours restructuré ce tableau en un autre dont les applications des règles de type γ sont restreintes aux termes connus de la branche.

3.4 Une Variante des Propriétés de Consistance Analytique

Le but étant d'éliminer l'introduction des paramètres dans les règles de type δ, nous modifierons la DÉFINITION 2.2.4.

Dans les versions avec paramètres, on imposait aux paramètres des règles de type δ d'être étrangers à la branche. Dans la version skolemisée, on impose de façon duale aux termes servant dans l'instanciation des règles de type γ d'être connus de la branche.

DÉFINITION 3.4.1. *On appelle* propriété de consistance analytique de Skolem *toute famille $\mathcal{P}ca$ d'ensembles de formules signées telle que $S \in \mathcal{P}ca$ ssi S satisfait les conditions suivantes:*

(PCA'$_1$) *si $[v]\,P\vec{s}_\sigma, [w]\,P\vec{t}_\theta \in S$, et si $\vec{s}\sigma = \vec{t}\theta$, alors $w = v$*

(PCA'$_2$) *si $[v]\,c_\theta \in S$, alors $\Re_c = v$*

(PCA'$_3$) *si $[v]\,c(F_1, \ldots, F_n)_\theta \in S$, alors $A \cup S \in \mathcal{P}ca$, où A est une une alternative de l'inférence $R_c^v([v]\,c(F_1, \ldots, F_n)_\theta)$*

(PCA'$_4$) *si $[d]\,\P_w\, x \cdot F(x, \vec{u})_\theta \in S$ avec $\P_w \in \Upsilon'$, alors pour tout terme t connu de S, il existe $w \in W$ telle que $S \cup \left\{F(\dot{x}, \vec{u})_{\theta\circ\{\dot{x}\mapsto t\}}\right\} \in \mathcal{P}ca$*

(PCA'$_5$) *si $[v]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta \in S$ est une formule de type δ, alors une alternative A de la version skolemisée de $DQ^v([v]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta)$ vérifie $A \cup S \in \mathcal{P}ca$*

$\Diamond$

Le THÉORÈME 2.2.1 de l'existence d'un modèle reste valable pour cette définition d'une propriété de consistance analytique.

LEMME 3.4.1. *Toute propriété de consistance analytique de Skolem s'étend en une propriété de consistance analytique de Skolem de caractère fini.*

PREUVE. Analogue au LEMME 2.2.2. Le cas des formules de type δ ne présente pas de difficultés, car on choisit les termes $(t_w)_{w \in \mathcal{C}}$ indépendamment de l'ensemble S. C.Q.F.D.

THÉORÈME 3.4.1. *(de l'existence d'un modèle) Soient S un ensemble de formules signées de $\mathcal{C} \times \mathcal{F}bf_{\Pi,\Upsilon}(\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_b, \Sigma, \Omega)$, $\check{\Sigma}$ l'expansion de Σ, comme définie plus haut et $\mathcal{P}ca$ une propriété de consistance analytique. Si $S \in \mathcal{P}ca$, alors S est satisfaisable.*

PREUVE. $\underline{\mathcal{P}ca}$ peut être étendu en une propriété de consistance analytique de caractère fini $\widetilde{\mathcal{P}ca}$. Par application du lemme de TUKEY (voir par exemple (SMULLYAN, 1968, p. 37) pour une preuve du lemme dans le cas où $\bigcup \mathcal{P}ca$ est dénombrable), il existe un élément maximal $\mathcal{H}$ dans $\widetilde{\mathcal{P}ca}$, *contenant* S. On vérifie immédiatement que $\mathcal{H}$ est un ensemble de Hintikka (DÉFINITION 2.2.2) donc satisfaisable. A fortiori S l'est. C.Q.F.D.

3.4.1 Complétude des Calculs CS et CAS

Dans la suite de la section, k désigne une fonction de Skolem associée à une quantification $Q\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta$, $\mathcal{S}ko(w, Q\,x \cdot F(x, \vec{u}))$; S un ensemble de formules qui ne contient pas d'occurrences du symbole k; B une branche d'un tableau (fini) de S.

Avant de commencer avec les preuves de complétude, on établit que tout tableau dont les γ inférences n'utilisent que des termes connus de la branche à laquelle les alternatives de la conclusion sont ajoutées, ne contiennent pas de paramètres critiques. Ainsi la restriction mise sur les tableaux dans la preuve de la correction, n'induit pas la perte de la complétude.

LEMME 3.4.2. *Soient B une branche d'un tableau analytique (sans termes critiques), $[v']\,G_\tau$ une formule de B. Si G contient une occurrence de $k\vec{u}$, alors G est une sous-formule de $Q\,x \cdot F(x, \vec{u})$.*

Si τ contient une occurrence de $k\vec{u}$, alors $[v]\,Q\,x \cdot F(x, \vec{u})_\theta$est dans B.

PREUVE. Par induction sur la longueur de la branche B. On se sert du fait que l'on instancie dans les règles de type γ qu'avec des termes connus de la branche B. C.Q.F.D.

THÉORÈME 3.4.2. *La famille $\mathcal{S}ac$ de tous les ensembles finis (de formules signées) consistants pour les tableaux analytiques (dans CS) est une propriété de consistance analytique.*

PREUVE. La preuve de la PROPOSITION 2.2.2 peut être reprise *verbatim* en replaçant la DÉFINITION 2.2.4 par la DÉFINITION 3.4.1. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.4.1. *CS est un calcul complet.*

PREUVE. $\mathcal{S}ac$ est une propriété de consistance analytique. C.Q.F.D.

Pour que la preuve du THÉORÈME 2.4.1 puisse être reprise, il suffit de prouver la version skolemisée du LEMME 2.4.1.

LEMME 3.4.3. *Soient* $[v]\,Q\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta$ *une formule de type* δ, $\mathcal{F}$ *un ensemble fini de formules signées,* $\langle I,S\rangle$ *un sous-treillis inclus dans* $\Re_Q^{-1}(v)$ *et* $(f_w)_{w\in C}$ *les symboles de Skolem associés à* $[v]\,Q\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta$.

si pour tout $w\in S$, $f_w\vec{u}\theta$ *est étranger à* $\mathcal{F}\cup\{[v]\,Q\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta\}$

et si pour tout ensemble W, $I\subseteq W\subseteq S$,

$$\mathcal{F},[d]\,\P_W\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta,\{[w]\,F(x\setminus f_w\vec{u},\vec{u})_\theta : w\in W\}\vdash_{CA}\times$$

alors $$\mathcal{F},[d]\,\P_S\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta,\{[w]\,F(x\setminus f_w\vec{u},\vec{u})_\theta : w\in I\}\vdash_{CA}\times$$

PREUVE. La preuve du LEMME 2.4.1 peut être reprise, la PROPOSITION 3.2.1 justifiant le passage de l'hypothèse de l'énoncé

$$\mathcal{F},[d]\,\P_W\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta,\{[w]\,F(x\setminus f_w\vec{u},\vec{u})_\theta : w\in W\},[v']\,F(x\setminus f_{v'}\vec{u},\vec{u})_\theta\vdash_{CA}\times$$

à $\mathcal{F},[d]\,\P_W\,x\cdot F(x,\vec{u})_\theta,\{[w]\,F(x\setminus f_w\vec{u},\vec{u})_\theta : w\in W\},[v']\,F(x\setminus f_v\vec{u},\vec{u})_\theta\vdash_{CA}\times$

où $v,v'\in S\setminus W$. C.Q.F.D.

THÉORÈME 3.4.3. *La famille* $\mathcal{S}ac'$ *de tous les ensembles finis (de formules signées) consistants pour les tableaux analytiques (dans CAS) est une propriété de consistance analytique.*

PREUVE. On reprend la preuve du THÉORÈME 2.4.1. Le seul point délicat est l'équivalent du LEMME 2.4.1, qu'énonce la LEMME 3.4.3. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.4.2. *CAS est un calcul complet.*

PREUVE. $\mathcal{S}ac'$ est une propriété de consistance analytique. C.Q.F.D.

Chapitre 4

Unification dans les tableaux analytiques

Le chapitre précédent a présenté les calculs CS et CAS utilisant des termes de Skolem au lieu de paramètres. Dans ce chapitre, les instances choisies dans les règles de type γ ne sont pas devinées ou énumérées systématiquement, mais calculées par unification.

4.1 Tableaux à variables libres

DÉFINITION 4.1.1. *Un* tableau à variables libres *est un tableau analytique $\mathcal{T}$ dont les formules contiennent éventuellement des variables libres.* $\diamondsuit$

Les calculs CS et CAS du chapitre précédent sont adaptés aux tableaux à variables libres. Ces adaptations sont appelées respectivement CSU et CASU.

DÉFINITION 4.1.2. *Le langage formel du* calcul des tableaux analytiques avec skolemisation et unification *(CSU) est l'ensemble de toutes formules signées et du symbole $\times$. Les seules règles d'inférence applicables à un tableau à variables libres $\mathcal{T}$ sont:*

(R_1) *la règle de clôture atomique,*

$$\frac{\begin{array}{c}[v]\,P\vec{t}\\ [w]\,P\vec{s}\end{array}}{\times}$$

En supposant vérifiées les conditions:

- $P \in \Omega$
- $v \neq w$
- *Soient* $\langle [v_i]\,P_i\vec{s_i}, [w_i]\,P_i\vec{t_i}\rangle$, $1 \leq i \leq n$, *les prémisses des* n *applications de la règle de clôture atomique dans* $\mathcal{T}$. $\theta_{\mathcal{T}} = \sqcap_{i=1}^{n}(\vec{s_i} \sqcap \vec{t_i})$ *est défini.*
- $\vec{t}\theta_{\mathcal{T}} \sqcap \vec{s}\theta_{\mathcal{T}}$ *est défini.*

(R_2) R_c^v, *avec* $c \in \Pi$, *et* $v \in \mathcal{C}$,

(R_3) $G\P_w{}^d$, *avec* $\P_w \in \Upsilon'$, *le terme utilisé pour instancier étant une variable libre de* $\mathcal{V}_f$ *étrangère aux formules du tableau* $\mathcal{T}$ *et au codomaine de* $\theta_{\mathcal{T}}$

(R_4) DQ^v, *version skolemisée, avec* $Q \in \Upsilon$ *et* $v \in \mathcal{C}$, *ou avec* $Q \in \Upsilon'$, *et* $v \in \mathcal{C} \setminus \{d\}$.

$\Diamond$

Comme CB, CSU est commode pour les preuves de correction et complétude. Le calcul amélioré avec skolemisation et unification, CASU, qui se sert des règles $\mathcal{R}_c^v$ et $\mathcal{D}Q^v$, à la place de R_c^v et DQ^v, est plus approprié à la déduction automatique.

4.2 Correction des calculs CSU et CASU

Si τ est une substitution et $\mathcal{T}$ un tableau analytique, $\mathcal{T}\tau$ dénote l'arbre isomorphe à $\mathcal{T}$ obtenu en appliquant τ à chaque formule des étiquettes de $\mathcal{T}$.

PROPOSITION 4.2.1. *Soient* $\mathcal{T}$ *un tableau à variables libres et* τ *une substitution de base dont le domaine est* $Cod(\theta)$.

Si $\mathcal{T}$ *est dans CSU ou CASU, alors* $\mathcal{T}(\tau \circ \theta)$ *est respectivement dans CS et CAS.*

PREUVE. Par induction sur le nombre de nœuds dans $\mathcal{T}$. C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.2.1. *Les calculs CSU et CASU sont corrects. Soit* S *un ensemble de formules signées fermées. Si* $S \vdash_{CSU} \times$ *ou* $S \vdash_{CASU} \times$ *alors* S *est insatisfaisable.*

PREUVE. (Comparer à (FITTING, 1990, § 7.7)) Soit T l'un des calculs CS et CAS. Si $S \vdash_{\mathsf{TU}} \times$, il existe un tableau à variables libres fermé $\mathcal{T}$. Soit τ une substitution de base de domaine $Cod(\theta)$. Par application de la PROPOSITION 4.2.1, $\mathcal{T}(\tau \circ \theta_{\mathcal{T}})$ est un tableau de T. Donc $S \vdash_{\mathsf{T}} \times$, donc S est insatisfaisable. C.Q.F.D.

4.3 Complétude des calculs CSU et CASU

Pour établir la complétude réfutationnelle de CSU et CASU, on peut modifier les définitions d'une propriété de consistance analytique de Skolem, et d'un ensemble de Hintikka, afin d'y inclure le traitement des variables libres.

Altenativement il est possible de définir une application des tableaux fermés de CS et CAS vers les tableaux fermés respectivement de CSU et de CASU. Dans la suite, c'est cette méthode-ci qui est détaillée.

PROPOSITION 4.3.1. *S'il existe dans CS ou CAS un tableau fermé, il en existe n'utilisant la règle de clôture que sur des formules atomiques.*

PREUVE. Comme $\vdash_{\mathsf{CS}}$ et $\vdash_{\mathsf{CAS}}$ sont des relations de conséquence abstraite, il suffit de prouver le résultat pour les tableaux constitués d'un seul nœud étiqueté par $\{[v]\,F, [w]\,F\}$, avec $w \neq v$. On procède par induction structurelle sur F. C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.3.1. *Soient T l'un des calculs CS et CAS et S un ensemble de formules signées fermées. Si $S \vdash_T \times$, alors $S \vdash_{TU} \times$.*

PREUVE. (Comparer à (FITTING, 1990, § 7.8)) Si $S \vdash_{\mathsf{T}} \times$, il existe un tableau fermé $\mathcal{T}$ dans T, qui n'applique la règle de clôture qu'à des formules atomiques. Tout tableau fermé étant fini, il n'existe qu'un nombre fini n d'applications de la règle de clôture atomique. Soient $\langle [v_i]\, P_i\vec{s}_{i\theta_i}, [w_i]\, P_i\vec{t}_{i\tau_i}\rangle$, les ensembles de prémisses de ces n clôtures atomiques. Pour tout $\sigma, \sigma' \in \{\theta_i, \tau_i : 1 \leq i \leq n\}$ et tout $z \in \mathcal{D}om(\sigma) \cap \mathcal{D}om(\sigma')$, $\sigma(z) = \sigma'(z)$. Soit $\sigma_0 = \theta_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \theta_n \circ \tau_n$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\vec{s}_i\sigma_0 = \vec{t}_i\sigma_0$. Donc $\theta_{\mathcal{T}}$ est défini, et ainsi le tableau dans T obtenu en "oubliant" dans les représentations de formules les substitutions est un tableau à variables libres dans TU. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 4.3.1. *Soient T l'un des calculs CS et CAS et S un ensemble de formules signées fermées. Si S est insatisfaisable, alors $S \vdash_{TU} \times$.*

PREUVE. Soit T l'un des calculs CS et CAS. Si S est insatisfaisable, alors $S \vdash_T \times$. Avec le THÉORÈME 4.3.1, $S \vdash_{\mathsf{TU}} \times$. C.Q.F.D.

4.4 Description de l'implémentation

Nous avons concrétisé le calcul CASU par un démonstrateur par tableaux, intégré dans l'atelier d'inférence ATINF. Nous ne parlerons que de ce démonstrateur et tairons son intégration à ATINF; cet aspect est incidemment développé dans (CAFERRA *et al.*, 1991). Signalons qu'une autre version de ce démonstrateur est intégré au système de vérification de programmes TATZELWURM (KÄUFL & ZABEL, 1990*a*, KÄUFL & ZABEL, 1990*b*) et qu'il a été au début conçu pour les logiques classiques.

Ce démonstrateur, écrit en COMMON LISP (il est donc portable), est installé sur des micro-VAX et des stations de travail SUN.

Ses principales caractéristiques sont:

- *interactivité.* L'utilisateur peut interrompre à tout moment la recherche d'une réfutation, donner des indications et revenir à un mode automatique.

- *architecture de tableau noir.* Cette structure classique est inspirée par l'organisation logicielle du système HEARSAY II, pour la compréhension automatique de la parole. Au cours du processus de compréhension, les différents modules ont accès à un tableau noir où sont inscrites les données et les faits déduits par d'autres modules, et les suggestions,... La structure est très ouverte: pour ajouter un module, il suffit de lui donner accès au tableau noir. De tels systèmes sont très facilement extensibles, mais l'efficacité est sacrifiée, puisque un module ne sait pas d'où vient ce qui est écrit sur le tableau noir, ni *a priori* si ce qui a été ajouté au tableau noir le concerne.

- *flexibilité.* Initialement conçu pour la logique classique le démonstrateur a été étendu à des logiques intuitionniste, modales et temporelles (DEMRI, 1990), et bien sûr aux logiques polyvalentes.

Pour le décrire plus précisément, procédons en deux étapes. Nous exposons d'abord les traits relevant des calculs propositionnels, puis nous dirons comment les quantifications, ainsi que l'égalité bivalente, sont traitées.

4.4.1 Calculs Propositionnels

Les formules sont représentées par un graphe acyclique orienté (DAG) dont chaque sommet contient les informations relatives à une formule (identificateur, connecteur ou symbole de prédicat,...) et dont les arcs issus d'un même sommet pointent vers les sous-formules immédiates de la formule représentée par ce sommet. Les sommets peuvent également être annotées de propriétés. Celles-ci peuvent être mémorisées, calculées comme dans les langages orientés objets (par exemple FLAVOR).

Les inférences introduisent un autre graphe orienté, dont les sommets sont les inférences et les séquences finies de formules (signées). Les arcs partent d'une séquence de formules vers une inférence (c'est la partie prémisse de l'inférence) ou d'une inférence vers une séquence de formules (ce qui correspond à une alternative de l'inférence). Ce graphe est construit au cours de la recherche d'une réfutation. Il représente de manière compacte un tableau analytique. MILLER (1987), qui ne considère que des connecteurs linéaires, obtient en suivant cette ligne une représentation plus compacte, car il n'a pas besoin d'introduire les sommets de type inférence. Cette hypothèse ne peut plus être faite pour les logiques polyvalentes.

La recherche d'une réfutation s'organise comme dans PROLOG par une recherche en profondeur d'abord: on décompose les formules d'une même branche tant qu'aucune fermeture n'a été décelée et qu'il subsiste des formules que l'on peut encore décomposer (dès qu'il y a des quantificateurs, il est possible qu'une branche puisse être développée à l'infini).

Les formules à décomposer sont choisies de manière à réduire la largeur du tableau et le nombre d'objets introduits (pour les quantificateurs). Il est possible de se servir d'une fonction qui pondère les formules et de travailler en priorité avec les formules de poids le plus faible.

Il est également possible d'indiquer syntaxiquement l'ordre dans lequel les alternatives doivent être envisagées dans la stratégie profondeur d'abord.

Il inclut le *condensing* de OPPACHER & SUEN (1986) et la *factorisation* de WRIGHTSON & COLDWELL (1989).

Le condensing reprend pour les tableaux la règle de l'*affaiblissement* du calcul des séquents de Gentzen. Ainsi des tableaux en cours de construction peuvent être simplifiés en en retirant les inférences qui n'ont contribué à aucune fermeture.

La factorisation est l'introduction de la règle de la Coupure en en restreignant l'application aux sous-formules des membres du séquent dont on désire prouver la validité. Ce mécanisme permet de réutiliser des sous-tableaux, du moment que sur la branche se trouvent les mêmes formules que celles qui ont contribué à la fermeture de toutes les branches d'un autre sous-tableau.

4.4.2 Traitement de la Quantification et de l'Égalité

Les particularités du traitement des logiques du permier ordre se résument aux points suivants:

- partage de structure.
- traitement uniforme de l'égalité et de l'unification.

Dans un travail classique, BOYER & MOORE (1972) ont proposé un partage de structure pour la Résolution, qui au lieu de recopier les littéraux des prémisses pour former la conclusion, mémorise toutes les informations nécessaires pour recalculer la résolvante. Ici le partage de structures est beaucoup plus simple à mettre en œuvre, à cause de la propriété de la sous-formule que vérifient les tableaux analytiques. Toute formule dans un tableau est décrite par un pointeur sur la sous-formule de l'énoncé, une liste de substitution des variables libres de cette sous-formules par des termes et un signe.

L'égalité est traitée uniquement entre termes sans variables; les travaux de POPPELSTONE (1967) et de REEVES (1987) font la même hypothèse. Les classes d'équivalence induites par les égalités sur une branche sont représentées par des arbres dont les feuilles sont des termes et les nœuds intermédiaires des classes d'une relation d'équivalence plus fine. On conserve ainsi les classes d'équivalence et une preuve de l'égalité de deux termes d'une même classe d'équivalence. Ces classes sont gérées par des algorithmes d'*union-find* de TARJAN. Ainsi en présence d'égalités il faut instancier les quantifications avec des termes sans variables (diverses stratégies pour choisir ces termes sont mises à la disposition de l'utilisateur). Une extension envisagée consistera à combiner le démonstrateur avec un outil opérationnel d'ATINF qui résout les problèmes d'E-unification (unification dans des théories équationnelles) (DELSART, 1992) en l'étendant à l'unification rigide de GALLIER *et al.* (1990).

L'unification est intégrée en considérant l'unificateur le plus général de deux littéraux comme une conjonction d'équations (forme résolue d'un problème d'unification) ajoutée à la racine du tableau. Dans ce cas (où nous ne considérons pas encore l'égalité) les quantifications sont instanciées par des variables libres. L'ensemble des termes d'un tableau étant représenté, comme les formules par un graphe orienté acyclique, l'algorithme d'unification travaille sur des DAGs de termes. Ceci permet d'utiliser un algorithme d'unification comme celui de HUET (1976) qui est presque linéaire. De même, au lieu de skolemiser "explicitement" on se sert d'un graphe de dépendance (PRAWITZ, 1960, REEVES, 1987).

Pour assurer la complétude toutes les combinaisons entre littéraux unifiables doivent être envisagées: un mécanisme de retour en arrière doit être prévu. Comme par défaut on se sert d'une stratégie en profondeur d'abord il faut borner le nombre d'applications de l'instanciation d'une quantification de type γ. On annote simplement chaque variable liée d'une borne. (voir (FITTING, 1988*a*) qui utilise la même borne pour toutes quantifications). Le théorème de HERBRAND (par exemple (ANDREWS, 1986)) garantit la complétude pour un choix adéquat des bornes (en pratique on augmente au fur et à mesure la valeur des bornes: *iterative deepening* par (FITTING, 1988*a*)).

Chapitre 5

Un Calcul de Résolution et Paramodulation

La Résolution (ROBINSON, 1965) est l'un des calculs les plus souvent utilisés pour mécaniser le raisonnement. Pour certains, seule la Résolution permet d'obtenir des systèmes de déduction automatique efficaces. (Des succès patents de systèmes de déduction automatique n'utilisant pas la Résolution (voir par exemple (STICKEL, 1985, STICKEL, 1988)) prouvent, combien cette vision est simpliste.) Rapidement ce calcul a été amendé pour traiter aussi l'égalité comme un prédicat prédéfini. C'est ainsi que ROBINSON & WOS (1968) ont proposé la règle de Paramodulation, qui remplace une occurrence d'un terme par un terme qui lui serait égal. Il est vrai que le format très simple des calculs clausals (une liste de littéraux) permet des indexations très astucieuses et efficaces (cf. (CHAMINADE, 1991) par exemple) et la mise en œuvre de stratégies très nombreuses et très étudiées (et employées) (CHANG & LEE, 1973, LOVELAND, 1978, WALTHER, 1986). La plupart de ces stratégies s'avèrent être complètes également pour ce nouveau calcul (BAAZ & FERMÜLLER, 1992), quand on se restreint à la Résolution.

Nous étudions d'abord la mise sous forme clausale des formules dans une logique semblable à celle de ROSSER & TURQUETTE (1952), dont la sémantique et une axiomatisation sont rappelées. Avant de définir le calcul de Résolution et Paramodulation, on généralise la notion d'arbre sémantique de SLAGLE (1967). Le calcul introduit est prouvé correct et complet. Une discussion d'autres calculs de la même veine clôt le chapitre.

5.1 La Logique de Rosser et Turquette — les Extensions de Morgan

ROSSER & TURQUETTE (1952) ont proposé une logique polyvalente à M valeurs de vérité, pour le cas propositionnel et du premier ordre, appelée dans la suite $\mathcal{L}_{RT}$. Dans leur système les connecteurs primitifs sont $J_1, \ldots, J_M, \Rightarrow$ et $\forall$; la seule règle d'inférence, outre la substitutivité est le Modus Ponens. Cette base de connecteurs complète est bien adaptée à l'utilisation d'un système de Hilbert. MORGAN (1975) complète ce langage par l'égalité (absolue) $\doteq$ et la similarité (ou égalité graduelle) $\approx$

5.1.1 Syntaxe du Langage

Le langage est pourvu de

- connecteurs unaires $J_1, \ldots, J_M$
- connecteurs binaires $\Rightarrow$
- quantificateurs $\forall$
- prédicats "spéciaux" $\doteq, \approx$

Il ne contient pas de constantes logiques. Ces connecteurs constituent une base complète. On convient que $\Rightarrow$ est associatif à droite c'est-à-dire $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ abrège $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

5.1.2 Sémantique du Langage

La sémantique de ces connecteurs est résumée dans la FIGURE 5.1.

DÉFINITION 5.1.1. *Une interprétation $\Im$ de domaine $\mathcal{I}$ est une* E–interprétation, *ssi les conditions suivantes sont satisfaites:*

- *(bivalence de l'égalité) pour tous individus a et b, soit $\Im_{\doteq}(a,b) = 1$ soit $\Im_{\doteq}(a,b) = 0$*
- *(réflexivité) pour tout individu a, $\Im_{\doteq}(a,a) = 1$*
- *(substitutivité)* [1] *pour tous individus a, b et tout prédicat n–aire P, tout n–uplet d'individus $\vec{s}$ et tout position p, $1 \leq p \leq n$ si $\Im_{\doteq}(a,b) = 1$, alors $\Im_P(\vec{s}[a]_p) = \Im_P(\vec{s}[b]_p)$.*

[1] *On appelle cette propriété aussi indiscernabilité des identiques; c'est la réciproque de la loi de Leibniz qui stipule l'identité des indiscernables.*

- le support de l'algèbre est $\mathfrak{C} = \left\{0, \frac{1}{M-1} \dots, \frac{M-2}{M-1}, 1\right\}$
- l'ensemble des valeurs désignées $\mathfrak{D}$ est $\left\{\frac{M-S}{M-1}, \dots, 1\right\}$
- $\Re_{\Rightarrow}: \begin{array}{ccll} \mathfrak{C}\times\mathfrak{C} & \to & \mathfrak{C} & \\ \langle i,j\rangle & \mapsto & 1 & \text{si } j > i \\ \langle i,j\rangle & \mapsto & j+1-i & \text{sinon} \end{array}$
- Pour $0 \leq k \leq m$, $\Re_{J_k}: \begin{array}{ccll} \mathfrak{C} & \to & \mathfrak{C} & \\ n & \mapsto & 1 & \text{si } n = \frac{M-k}{M-1} \\ n & \mapsto & 0 & \text{sinon} \end{array}$

  On introduit par définition:
- $\Re_{\wedge} = \min$
- $\Re_{\vee} = \max$

On complète cette matrice en considérant les quantificateurs comme des "généralisations" de la conjonction et de la disjonction.

- $\Re_{\forall} = \min$, qui est le quantificateur de base.
- $\Re_{\exists} = \sup$

Figure 5.1: Sémantique de la Logique $\mathcal{L}_{RT}$

$\Diamond$

DÉFINITION 5.1.2. *Une interprétation $\Im$ est une $\approx$–interprétation, ssi les conditions suivantes sont satisfaites:*

- *(réflexivité) pour tout individu a, $\Im_{\approx}(a,a) = 1$*
- *(symétrie) pour tous individus a et b, $\Im_{\approx}(a,b) = \Im_{\approx}(b,a)$*
- *(Les termes similaires sont presque indiscernables)*

$$1 - \Im_{\approx}(a,b) \geq \max\{|\Im(P)(\vec{s}[a]_p) - \Im(P)(\vec{s}[b]_p)| : a,b \in \mathcal{I}, \vec{s} \in \mathcal{I}^n, P \in \Omega_n, 1 \leq p \leq n\}.$$

$\Diamond$

Le dernier point de cette définition est un peu chiffré! En pratique, cela implique qu'en remplaçant dans un littéral un argument par un terme "similaire", on peut approcher la valeur de vérité de ce nouveau littéral. Par exemple: admettons que $M = 10$, $\Im(a \approx b) = \frac{2}{9}$ et que $\Im(P(a)) = \frac{5}{9}$, le dernier point "*Les termes similaires sont presque indiscernables*" impose que $\frac{5-2}{9} \leq \Im(P(b)) \leq \frac{5+2}{9}$ Si $\Im(R(a,a)) = \frac{5}{9}$, on aura $\frac{5-2}{9} \leq \Im(R(a,b)) \leq \frac{5+2}{9}$ et $\frac{3-2}{9} \leq \Im(R(b,b)) \leq \frac{7+2}{9}$. Réciproquement, si, par exemple, $\Im(P(a)) = \frac{5}{9}$ et $\Im(P(c)) = \frac{8}{9}$ alors $\Im(a \approx c) \neq \frac{2}{9}$ puisque le contraire permet de déduire $\frac{5-2}{9} \leq \Im(P(c)) \leq \frac{5+2}{9}$, ce qui conduit à une inconsistance. En fait on voit que $1 - \Im(a \approx c) \geq \frac{|8-5|}{9}$ est la condition la plus faible pour ne pas conduire à une inconsistance.

5.1.3 $\approx$–interprétations et Métriques sur les Individus

La relation de similarité n'étant pas fréquemment utilisée, nous donnons quelques propriétés permettant de mieux l'appréhender

DÉFINITION 5.1.3. *Soit $\Im$ une $\approx$-interprétation de domaine $\mathcal{I}$. $\Im$ est une $\approx$-interprétation standard ssi pour tous $a, b \in \mathcal{I}$, $\Im(a \approx b) = 1 \Leftrightarrow \Im(a) = \Im(b)$.* $\Diamond$

En d'autres termes, les indiscernables sont identiques. On s'assure facilement que pour toute $\approx$–interprétation $\Im$ il existe une $\approx$–interprétation standard $\Im'$ telle que pour toute formule F, $\Im(F) = \Im'(F)$. (Comme pour les E-interprétations standard de la logique classique, le domaine de $\Im'$ peut alors être simplement l'ensemble quotient $\mathcal{I}/\equiv$ où $a \equiv b$ ssi $\Im(a \approx b) = 1$. Il reste alors à vérifier que les relations $\Im(P)/\equiv$ pour $P \in \Omega$ et les applications $\Im(f)/\equiv$, pour $f \in \Sigma$ sont bien définies.)

DÉFINITION 5.1.4. *Soit $\Im$ une $\approx$-interprétation standard de domaine $\mathcal{I}$. Nous définissons $d_\Im$ par:*

$$\begin{array}{rccl} d_\Im : & \mathcal{I} \times \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathfrak{C} \\ & \langle a, b \rangle & \longmapsto & 1 - \Im(a \approx b) \end{array}$$

$\Diamond$

THÉORÈME 5.1.1. *$d_\Im$ est une distance dans $\mathcal{I}$.*

Elle sera appelée *distance entre individus induite par* $\Im$

PREUVE. Soient a, b, c des individus de $\mathcal{I}$. Comme d'habitude, nous définissons la somme de deux valeurs de vérité a et b,$a + b$ comme la valeur de vérité dénotant le nombre rationnel $\min(1, a + b)$.

$d_\Im(a,a) = 0$: évident puisque $\Im(a \approx a) = 1$ (réflexivité de $\approx$). Si $d_\Im(a,b) = 0$, alors $a = b$ car $\Im$ est une $\approx$–interprétation standard.

$d_\Im(a,b) = d_\Im(b,a)$: résulte de la symétrie de $\approx$.

$d_\Im(a,c) \leq d_\Im(a,b) + d_\Im(b,c)$: résulte de $1 - \Im(a \approx b) \geq |\Im(a \approx c) - \Im(b \approx c)|$ (“*les individus similaires sont presque indiscernables*” c'est-à-dire $d_\Im(a,b) \geq |d_\Im(a,c) - d_\Im(b,c)|$.) C.Q.F.D.

Pour $M = 3$, $\approx$ a une sémantique naturelle, si on lit $\frac{1}{2}$ comme *inconnu*. Soit $\Im$ une $\approx$–interprétation standard de domaine $\mathcal{I}$ qui contient a et b.

Donc: $\Im(a \approx b) = 1$ ssi $a = b$

Soient a' and b' des termes arbitraires tels que $\Im(a') = a$ et $\Im(b') = b$. [2] Si a et b peuvent être discernés dans $\Im$, c'est-à-dire s'il existe un atome $P\vec{s}$ tel que $\Im(P\vec{s}[a']_p) = 1$ et $\Im(P\vec{s}[b']_p) = 0$ où $p \in \mathcal{P}os(P\vec{s}) \setminus \{\Lambda\}$, alors $1 - \Im(a \approx b) \geq 1$, c'est-à-dire $\Im(a \approx b) = 0$. En d'autres termes, dès que l'on ne sait pas si a et b sont discernables, $\Im(a \approx b) = \frac{1}{2}$.

DÉFINITION 5.1.5. *Soient $\langle E, d\rangle$ et $\langle F, d'\rangle$ des espaces métriques et $f : E^n \longrightarrow F$ une application. Nous dirons que f est* non divergente en son i^{me} argument *ssi pour tout $\langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle \in E^{n+1}$ $d'(f(a_1 \ldots a_i \ldots a_n), f(a_1 \ldots b \ldots a_n)) \leq d(a_i, b)$.*

f est appelée non divergente *ssi f est non divergente en chacun de ses arguments.* $\Diamond$

Si on définit la distance entre les valeurs de vérité v et w comme la valeur absolue de la différence entre v et w (notée $|v - w|$), la condition "les termes similaires sont presque indiscernables" dit qu'une $\approx$–interprétation standard associe les prédicats à des applications non divergentes.

En fait cette condition force également d'interpréter les fonctions par des applications non divergentes, comme en s'en rend compte en l'appliquant à des atomes en $\approx$, $f \in \Sigma_n$ et $a_1, \ldots, a_n, a, b \in \mathcal{G}(\Sigma)$:

$$1 - \Im(a \approx b) \geq |\Im(f(\ldots a \ldots) \approx f(\ldots a \ldots)) - \Im(f(\ldots a \ldots) \approx f(\ldots b \ldots))| \tag{5.1}$$
$$\geq |1 - \Im(f(\ldots a \ldots) \approx f(\ldots b \ldots))| \tag{5.2}$$
$$d_\Im(a, b) \geq d_\Im(f(\ldots a \ldots), f(\ldots b \ldots)) \tag{5.3}$$

La réciproque est également valide.

THÉORÈME 5.1.2. *Soit d une distance, évaluée dans $\mathcal{C}$ entre les individus de $\mathcal{I}$, si $\Im$ est une interprétation de domaine $\mathcal{I}$, telle que:*

- *$\Im(a \approx b) = 1 - d(a, b)$ et*
- *tout symbole de fonction et de prédicat est interprété comme une application non divergente par $\Im$,*

alors $\Im$ est une $\approx$–interprétation standard.

PREUVE. La réflexivité et la symétrie de $\approx$ sont vérifiées grâce au premier point. La condition "les termes similaires sont presque indiscernables" est d'abord prouvée pour le cas où P est $\approx$, puis dans le cas général. Les deux preuves se font par induction sur la longueur de la position p. Elles utilisent les inéquations (5.1–5.3) données ci-dessus. C.Q.F.D.

Cette brève étude a montré ce que sont réellement les $\approx$–interprétations.

SCHÉMAS D'AXIOMES IMPLICATIFS:

$$F \Rightarrow G \Rightarrow F$$
$$(F \Rightarrow G \Rightarrow H) \Rightarrow (G \Rightarrow F \Rightarrow H)$$
$$(F \Rightarrow G) \Rightarrow ((G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$$

SCHÉMAS D'AXIOMES DU PREMIER ORDRE:

$$\forall x \cdot F(x) \Rightarrow F(t)$$

avec t un terme de $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}_f)$

$$(\forall x \cdot (F \Rightarrow G(x))) \Rightarrow (F \Rightarrow \forall x \cdot G(x))$$

(où x n'apparaît pas libre dans F)

AUTRES SCHÉMAS D'AXIOMES:

$$(J_k(P) \Rightarrow J_k(P) \Rightarrow Q) \Rightarrow (J_k(P) \Rightarrow Q)$$
$$(J_1(P) \Rightarrow \ldots \Rightarrow J_M(P) \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$
$$J_k(P) \Rightarrow P \text{ où } 1 \leq k \leq S$$

RÈGLES D'INFÉRENCE

Modus ponens

$$\frac{F \qquad F \Rightarrow G}{\mathrm{G}}$$

Généralisation

$$\frac{F \Rightarrow G(\dot{x})}{F \Rightarrow \forall x \cdot G(x)}$$

Figure 5.2: Axiomatisation de Logique de ROSSER et TURQUETTE

- $\forall x(J_1(x \doteq x))$
- $\forall \vec{x}, y, z(y \doteq z \Rightarrow J_k(P\vec{x}[y]_p) \Rightarrow J_k(P\vec{x}[z]_p))$ où $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $1 \leq p \leq n$

Figure 5.3: Schémas d'Axiomes pour l'Égalité Absolue

- $\forall x J_1(x \approx x)$
- $\forall x, y J_k(x \approx y) \Rightarrow J_k(y \approx x)$
- $\forall \vec{x}, y, z(J_{k'}(y \approx z) \Rightarrow J_k(P\vec{x}[y]_p) \Rightarrow \bigvee_{k''=max(1,k-(k'-1))}^{min(M,k+(k'-1))} J_{k''}(P\vec{x}[z]_p))$ où $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $1 \leq p \leq n$ et $F \vee G$ abrège $(F \Rightarrow G) \Rightarrow G$

Figure 5.4: Schémas d'Axiomes pour la Similarité

5.1.4 Axiomatisation de la Logique $\mathcal{L}_{RT}$

La FIGURE 5.2 donne les schémas d'axiomes propositionnels et du premier ordre ainsi que les règles d'inférence pour la logique $\mathcal{L}_{RT}$. On appelle ce système de Hilbert H_{RT}. Les axiomes pour l'égalité de Morgan (FIGURE 5.3) et de la similarité (FIGURE 5.4) diffèrent de celles de Morgan: cet auteur n'impose à $\vee$ que d'être un connecteur de type disjonction, ici $\vee$ est défini à partir des connecteurs de base (en posant $F \vee G$ $(F \Rightarrow G) \Rightarrow G)$)

ROSSER & TURQUETTE (1952) ont également envisagé l'extension à d'autres connecteurs et quantificateurs. Ceci se fait aisément puisque les connecteurs traités et le quantificateur $\forall$ constitue une base complète. Les tables de vérité de ces nouveaux connecteurs sont décrits par des axiomes (de même pour les quantificateurs).

THÉORÈME 5.1.3. *(Correction) Tout théorème de H_{RT} est une tautologie de $\mathcal{L}_{RT}$.*

PREUVE. Voir (ROSSER & TURQUETTE, 1952, GOTTWALD, 1989). C.Q.F.D.

THÉORÈME 5.1.4. *(Complétude) Toute tautologie de $\mathcal{L}_{RT}$ est un théorème de H_{RT}.*

PREUVE. Voir (ROSSER & TURQUETTE, 1952, GOTTWALD, 1989). C.Q.F.D.

[2]On peut toujours se ramener à une interprétation telle que tous les individus soient dénotés par au moins un terme.

5.1.5 Logique Considérée dans la Suite

La logique considérée dans cette section et les suivantes est une logique très semblable à la logique de (ROSSER & TURQUETTE, 1952). Elle ne diffère que dans le choix des connecteurs de base:

- J_1,...,J_M comme dans $\mathcal{L}_{RT}$
- $\vee$ une disjonction standard
- $\wedge$ une conjonction standard
- les quantificateurs $\exists$ et $\forall$

Bref, $\Pi_1 = \{J_1, \ldots, J_M\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \Pi_n = \{\wedge, \vee\}$, $\Upsilon = \{\exists, \forall\}$.

5.2 Mise sous Forme Normale des Formules

MORGAN (1976) montre que l'on peut mettre toute formule sous forme clausale. C'est-à-dire que toute formule peut être transformée tout en préservant la satisfaisabilité en une conjonction de formules fermées de la forme

$$\forall x_1, \ldots, x_n \cdot (J_{k_1}(A_1) \vee \ldots \vee J_{k_n}(A_n))$$

où les A_i sont des atomes. Une formule de ce genre est appelée une *clause*. Conformément à l'usage, le préfixe $\forall x_1, \ldots, x_n$ sera omis. Une clause sans variables est également appelée une *clause close*. Une *instance* d'une *clause* C est la clause obtenue en remplaçant simultanément les variables de C par leur image respective sous une substitution σ. On note $C\sigma$ cette instance.

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ sont associatifs et commutatifs, si bien que l'on ne distingue pas les formules qui sont identiques modulo AC (voir FIGURE 5.5). Pour plus de clarté, on procède en quatre étapes:

- la mise sous forme normale J_k (voir FIGURE 5.6)
- la mise sous forme prénexe (voir FIGURE 5.7)
- la skolemisation (voir FIGURE 5.9)
- la mise sous forme clausale (voir FIGURE 5.8)

LEMME 5.2.1. *Soient $F, G \in \mathcal{F}bf$, et soit $\Im$ une interprétation. Si $F =_{AC} G$, alors $\Im(F) = \Im(G)$.*

PREUVE. Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ sont interprétés respectivement par min et max. la vérification en est donc élémentaire. C.Q.F.D.

$$
\begin{array}{llllll}
(F \wedge G) \wedge H & =_{AC} & F \wedge (G \wedge H) & F \wedge (G \wedge H) & =_{AC} & (F \wedge G) \wedge H \\
(F \vee G) \vee H & =_{AC} & F \vee (G \vee H) & F \vee (G \vee H) & =_{AC} & (F \vee G) \vee H \\
F \wedge G & =_{AC} & G \wedge F & F \vee G & =_{AC} & G \vee F
\end{array}
$$

Figure 5.5: Relation d'Égalité entre les Formules Utilisée

5.2.1 Mise sous Forme Normale J_k

DÉFINITION 5.2.1. *Nous dirons qu'une formule F est en forme normale J_k ssi*

- *F est un littéral c'est-à-dire de la forme ℓ ou $J_k(\ell)$, ℓ étant une proposition,*
- *F est de la forme $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $\exists x F'$ ou $\forall x F'$, F_1, F_2, F' sont en forme normale J_k.*

$\Diamond$

En fait c'est l'analogue de la forme normale négative pour la logique classique, mais à la différence du cas classique, où le coût de la transformation est linéaire si les connecteurs sont $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, true, false\}$, la mise sous forme normale J_k est exponentielle (si la logique compte au moins trois valeurs).

$$
\begin{array}{lll}
F \wedge F & \mapsto & F \\
F \vee F & \mapsto & F \\
J_k(F \vee G) & \mapsto & [J_k(F) \wedge \bigvee_{i=k}^{M} J_i(G)] \vee [J_k(G) \wedge \bigvee_{i=k}^{M} J_i(F)] \\
J_k(F \wedge G) & \mapsto & [J_k(F) \wedge \bigvee_{i=1}^{k} J_i(G)] \vee [J_k(G) \wedge \bigvee_{i=1}^{k} J_i(F)] \\
J_M(J_k(F)) & \mapsto & \bigvee_{k' \neq k} J_{k'}(F) \\
J_1(J_k(F)) & \mapsto & J_k(F) \\
J_{k'}(J_k(F)) & \mapsto & \perp \\
 & & \text{où } 1 \neq k' \neq M \\
J_k(\exists x F) & \mapsto & (\exists x J_k(F)) \wedge \forall x (\bigvee_{i=1}^{k} J_i(F)) \\
J_k(\forall x F) & \mapsto & (\forall x J_k(F)) \wedge \forall x (\bigvee_{i=k}^{M} J_i(F))
\end{array}
$$

Figure 5.6: Règles de Transformation pour la Mise sous Forme Normale J_k

Puisque les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ sont monotones (comme dans le cas classique), le *prenexing*, qui vise à obtenir une formule telle qu'aucune quantification ne soit sous-formule d'une formule dont le connecteur principal est $\wedge$, $\vee$ ou J_k, suit les mêmes règles que le *prenexing* en logique classique (voir FIGURE 5.7).

D'ailleurs les raffinements tels que l' "*antiprenexing*" (ou "*miniscoping*") sont également possibles; ils permettraient d'obtenir une forme normale de Skolem, dont l'arité des symboles de Skolem est minimisée.

$$\begin{array}{rcl}\exists x F(x) \vee G & \mapsto & \exists x'(F(x') \vee G) \\ \exists x F(x) \wedge G & \mapsto & \exists x'(F(x') \wedge G) \\ \forall x F(x) \vee G & \mapsto & \forall x'(F(x') \vee G) \\ \forall x F(x) \wedge G & \mapsto & \forall x'(F(x') \wedge G)\end{array}$$

Figure 5.7: Règles de Transformation pour le Prenexing

$$\begin{array}{lcl}F \wedge F & \mapsto & F \\ F \vee F & \mapsto & F \\ F \vee (G \wedge H) & \mapsto & (F \vee G) \wedge (F \vee H)\end{array}$$

Figure 5.8: Règles de Transformation pour la Mise sous Forme Clausale

LEMME 5.2.2. *Les règles des* FIGURES *5.6, 5.7 et 5.8 préservent les modèles: Soient $F, G \in \mathcal{F}bf$, $\Im$ une interprétation. Si $F \mapsto G$, $\Im(F) = \Im(G)$.*

PREUVE. On vérifie que pour toutes les règles de transformation des FIGURES 5.6, 5.7 et 5.8 préservent les valeurs de vérité. C.Q.F.D.

THÉORÈME 5.2.1. *Soit $F \in \mathcal{F}bf$, il existe une séquence finie de transformations $F \mapsto \cdots \mapsto F^*$, telle que F^* est en forme normale conjontive (c'est-à-dire une formule en forme prénexe dont la matrice est une conjonction dont chaque membre est une disjonction de littéraux ou de formule du type $J_k(\ell)$, ℓ étant une proposition).*

PREUVE. Par induction structurelle sur F. C.Q.F.D.

5.2.2 Skolemisation

Comme dans le cas de la logique classique les quantificateurs existentiels peuvent être éliminés sans perdre la satisfaisabilité. Dans une interprétation $\Im$ sur un univers du discours $\mathcal{I}$, $\exists x F(x)$ est évalué à $\max_{a \in \mathcal{I}}(\Im_a^x(F(x)))$. Comme le nombre de valeurs de vérité est fini, le maximum est atteint par l'un des objets de $\mathcal{I}$.

Dans la FIGURE 5.9, on suppose les formules en forme normale J_k. Elles sont annotées par les variables libres et les variables des quantifications dans la portée desquels ces formules se trouvent. On suppose que la signature ne contient pas les symboles f_x.

$$
\begin{array}{lll}
\ell_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} & \mapsto & \ell \\
J_k(\ell)_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} & \mapsto & J_k(\ell) \\
(F \wedge G)_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} & \mapsto & F_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} \wedge G_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} \\
(F \vee G)_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} & \mapsto & F_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} \vee G_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} \\
(\forall x F)_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} & \mapsto & \forall x F_{\langle x_1,\dots,x_n,x\rangle} \\
(\exists x F(x))_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle} & \mapsto & F[f_x(x_1,\dots,x_n)]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}
\end{array}
$$

Figure 5.9: Règles de Transformation pour la Skolemisation

DÉFINITION 5.2.2. *Soit $\leq$ un ordre sur $\mathcal{F}bf$. Une position p d'une formule ϕ est dite* isotone *ssi pour toutes formules F et G, si $F \leq G$ alors $\phi[F]_p \leq \phi[G]_p$; elle est dite* antitone *ssi pour toutes formules F et G, si $F \leq G$ alors $\phi[G]_p \leq \phi[F]_p$. On note $Iso_{\leq}(F)$ et $Ant_{\leq}(F)$ l'ensemble de toutes les positions respectivement isotones et antitones de F.* $\Diamond$

On peut calculer l'ensemble des positions isotones et antitones à partir des positions isotones et antitones des connecteurs et des quantificateurs. Pour un connecteur (ou un quantificateur) c, on les note respectivement $Iso_{\leq}(c)$ et $Ant_{\leq}(c)$. Par une induction mutuelle très simple, on prouve que les règles de calcul de la FIGURE 5.10 sont correctes.

$$
\begin{array}{lll}
Iso_{\leq}(\ell) & = & \{\Lambda\} \quad \ell \text{ étant une proposition} \\
Ant_{\leq}(\ell) & = & \emptyset \\
Iso_{\leq}(c(F_1,\dots,F_n)) & = & \{\Lambda\} \quad \cup\{p\cdot q : p \in Iso_{\leq}(c) \ et \ q \in Iso_{\leq}(F_p)\} \\
 & & \qquad\quad \cup\{p\cdot q : p \in Ant_{\leq}(c) \ et \ q \in Ant_{\leq}(F_p)\} \\
Ant_{\leq}(c(F_1,\dots,F_n)) & = & \{p\cdot q : p \in Ant_{\leq}(c) \ et \ q \in Iso_{\leq}(F_p)\} \\
 & & \cup\{p\cdot q : p \in Iso_{\leq}(c) \ et \ q \in Ant_{\leq}(F_p)\} \\
 & & \qquad\quad \text{où } c \text{ est un connecteur } n\text{-aire} \\
Iso_{\leq}(Qx\cdot F(x)) & = & \{\Lambda\} \quad \cup\{p\cdot q : p \in Iso_{\leq}(Q) \ et \ q \in Iso_{\leq}(F(x))\} \\
 & & \qquad\quad \cup\{p\cdot q : p \in Ant_{\leq}(Q) \ et \ q \in Ant_{\leq}(F(x))\} \\
Ant_{\leq}(Qx\cdot F(x)) & = & \{p\cdot q : p \in Ant_{\leq}(Q) \ et \ q \in Iso_{\leq}(F(x))\}\cup \\
 & & \cup\{p\cdot q : p \in Iso_{\leq}(Q) \ et \ q \in Ant_{\leq}(F(x))\} \\
 & & \qquad\quad \text{où } Q \text{ est un quantificateur}
\end{array}
$$

Figure 5.10: Calcul de $Iso_{\leq}$ et $Ant_{\leq}$

Cette notion ne servira que pour l'ordre sur les formules défini ainsi: $F \leq G$ ssi dans toute interprétation $\Im$, $\Im(F) \leq \Im(G)$ où $\leq$ est l'ordre sur les valeurs de vérité.

LEMME 5.2.3. *Soient $F \in \mathcal{F}bf$, telle que $\exists x F'(x)$ soit la sous-formule de position*

p de F, dont les variables libres, sont $\vec{w}$ et $\Im$ une interprétation. Si $p \in Iso_{\leq}(F)$ alors $\Im \models F$ ssi il existe une expansion $\Im'$ de $\Im$ telle que $\Im' \models F[F'(x/f_x\vec{w})]_p$, f_x étant un symbole fonctionnel qui n'est pas dans la signature Σ.

PREUVE. Notons par $\mathcal{I}$, le domaine du discours de $\Im$. Soit $\vec{c}$ un n–uplet dans $\mathcal{I}^n$, $v_0 = \Im^{\vec{y}}_{\vec{c}}(\exists x F'[x])$ et $A_{\vec{c}} = \{a \in \mathcal{I} : v_0 = \Im^{\vec{y}x}_{\vec{c}a}(F'(x))\}$. Cet ensemble est non vide car l'ensemble des valeurs de vérité est fini et totalement ordonné. On en choisit un, qu'on appellera $\chi_{\vec{c}}$.

"Construisons" $\Im'$. D'abord le symbole fonctionnel n–aire f_x est ajouté à la signature. $\Im'$ ne diffère de $\Im$ qu'en f_x et

$$\Im'(f_x) : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}^n & \rightarrow & \mathcal{I} \\ \vec{c} & \mapsto & \chi_{\vec{c}} \end{array}$$

Il est clair que $\Im'^{\vec{w}}_{\vec{c}}(\exists x F'(x)) = \Im'^{\vec{w}}_{\vec{c}}(F'(x/f_x\vec{w}))$.
Donc $\Im(F) = \Im'(F) = \Im'(F[F'(x/f_x\vec{w})]_p)$.
Donc si $\Im \models F$ alors $\Im' \models F[F'(x/f_x\vec{w})]_p$.

Réciproquement, soit $\Im'$ une expansion de $\Im$ dont la signature contient f_x.

$$\begin{array}{lcll} F'(x/f_x\vec{w}) & \leq & \exists x F'(x) & \text{Par définition de } \exists \\ F[F'(x/f_x\vec{w})]_p & \leq & F & p \in Iso_{\leq}(F) \end{array}$$

Donc si $\Im' \models F[F'(x/f_x\vec{w})]_p$ alors a fortiori $\Im' \models F$, comme $\Im'$ et $\Im$ ne diffèrent qu'en f_x, qui n'apparaît pas dans F, $\Im \models F$. C.Q.F.D.

REMARQUE. Le lemme précédent également est valable pour $p \in Ant_{\leq}(F)$ et $F|_p = \forall x F'(x)$.

THÉORÈME 5.2.2. *Soient F une formule en forme normale J_k, dont les variables libres sont $w_1, \ldots, w_n$ et $\Im$ une interprétation. Soit F^* la forme normale de $F_{(w_1,\ldots,w_n)}$ dans le système de réécriture de la* FIGURE *5.7. Il existe une expansion $\Im^*$ de $\Im$ telle que $\Im \models F$ ssi $\Im^* \models F^*$.*

PREUVE. Immédiat avec le lemme précédent. C.Q.F.D.

REMARQUE. On ne se sert dans la preuve que de deux arguments:

- Les connecteurs qui contiennent des existentiels comme sous-formules sont isotones. Le but de la mise sous forme normale J_k est précisément d'obtenir une formule équivalente qui satisfasse cette condition.
- Tout ensemble de valeurs de vérité a un élément maximum.

Après ces étapes de normalisation, on dispose d'une formule en forme clausale, satisfaisable si la formule de départ l'est.

5.3 Arbres Sémantiques

Cette partie resitue les travaux de RUSINOWITCH sur la Résolution et Paramodulation ordonnées dans le cadre des logiques polyvalentes. Les lemmes repris ont été formulés par cet auteur pour la logique classique, mais ils sont directement "transposables" aux logiques polyvalentes à *nombre fini* de valeurs de vérité, puisque ces arbres sémantiques sont encore des arbres à branchement fini (ceci sert dans le fait que l'on ne considère que des preuves de longueur *finie*) et que ces logiques sont *extensionnelles*.

5.3.1 Interprétations Partielles

Dans la suite, l'énumération de la base de Herbrand est fixée par un ordre total satisfaisant des propriétés supplémentaires qui permettent de relever les arguments des clauses closes (sans variables) au cas des clauses avec variables.

DÉFINITION 5.3.1. *Un ordre $<$ est appelé un CSO (complete simplification ordering) ssi les conditions suivantes sont remplies:*

- *l'ordre $<$ est total $\mathcal{G}(\Sigma)$ et $\mathcal{A}(\Sigma, \Omega)$*
- *l'ordre $<$ bien fondé*
- *l'ordre $<$ est stable par instanciation (c'est-à-dire si $v, w \in \mathcal{G}(\Sigma) \cup \mathcal{A}(\Sigma, \Omega)$ et θ est une substitution et si $v < w$, alors $v\theta < w\theta$)*
- *l'ordre $<$ est monotone (c'est-à-dire si $s, t \in \mathcal{G}(\Sigma)$ et $w \in \mathcal{G}(\Sigma) \cup \mathcal{A}(\Sigma, \Omega)$ et si $s < t$ alors $w[s] < w[t]$)*
- *l'ordre $<$ a la propriété du sous-terme*
  - *si s est un sous-terme strict de u, alors $s < u$*
  - *si s est un sous-terme strict de w et si w n'est ni atome en $\doteq$ ni un atome en $\approx$, alors $s \doteq t < s \approx t$, $s \doteq t < w$ et $s \approx t < w$*
  - *si s est un sous-terme de a ou de b, alors $s \doteq t < a \doteq b$ et $s \approx t < a \approx b$*

$\Diamond$

RUSINOWITCH (1987) discute le choix des CSO et justifie les propriétés requises.

DÉFINITION 5.3.2. *(d'après RUSINOWITCH (1987)) Soit $<$ un CSO sur la base de Herbrand $\mathcal{A}(\Sigma, \Omega)$ dont la suite des atomes est $\{A_i\}_{i<\lambda}$, λ étant son ordinalité. étant donné A_α, nous notons W_α le segment initial $\{A_i : i < \alpha\}$ Une application $\Im$ de W_α dans $\left\{0, \frac{1}{M-1} \dots, \frac{M-2}{M-1}, 1\right\}$, est une E-interprétation partielle sur W_α, ssi les conditions suivantes sont satisfaites:*

- *(bivalence de l'égalité) pour tous individus a et b, si $(a \doteq b) \in W_\alpha$, soit $\Im(a \doteq b) = 1$ soit $\Im(a \doteq b) = 0$*

- *(réflexivité) pour tout terme a, si* $(a \doteq a) \in W_\alpha$, $\Im(a \doteq a) = 1$
- *(substitutivité) pour tous termes a, b et tout prédicat* $P \in \Omega_n$, *et tout n–uplet de termes* $\vec{s}$,
  si $(a \doteq b), P\vec{s}[a]_p, P\vec{s}[b]_p \in W_\alpha$, *et* $\Im(a \doteq b) = 1$, *alors* $\Im(P\vec{s}[a]_p) = \Im(P\vec{s}[b]_p)$.

$\Im$ *est une* $\approx$*–interprétation partielle sur* W_α *ssi*

- *(réflexivité) pour tout terme a, si* $(a \approx a) \in W_\alpha$, $\Im(a \approx a) = 1$
- *(Les termes similaires sont presque indiscernables) pour tous termes a, b et tout prédicat* $P \in \Omega_n$, *et tout n–uplet de termes* $\vec{s}$,
  si $(a \approx b), P\vec{s}[a]_p, P\vec{s}[b]_p \in W_\alpha$, *alors* $1 - \Im(a \approx b) \geq |\Im(P\vec{s}[a]_p) - \Im(P\vec{s}[b]_p)|$.

Une interprétation est une interprétation partielle définie sur W_λ. ◊

DÉFINITION 5.3.3. *(d'après* RUSINOWITCH *(1987, pages 40–41)) Soit* $\Im$ *une E–interprétation partielle sur D, et* $<$ *un CSO sur la base de Herbrand. Soient deux atomes* $w[s]_p$ *et* $w[t]_p$. *On dit que* $w[s]_p$ *se* $\Im$*–réduit en* $w[t]_p$, *si* $s \doteq t \in D$, $s > t$, $\Im(s = t) = 1$. $\Im$ *force la valeur de vérité de* $w[s]_p$ *à celle de* $w[t]_p$.

Si $\Im$ *est une* $\approx$*–interprétation,* $w[s]_p$ *se* $\Im$*–réduit en* $w[t]_p$, *si* $s \approx t \in D$, $s > t$, $\Im(s \approx t) > \Im(w[s]_p)$ *ou* $\Im(w[s]_p) + \Im(s \approx t) > 1$. [3] *En d'autres termes,* $\Im$ *limite les valeurs de vérité assignables à* $w[s]_p$ *dans toute extension de* $\Im$. ◊

5.3.2 Arbres E–sémantiques et ≈–sémantiques

DÉFINITION 5.3.4. *Un arbre E–sémantique (≈–sémantique) transfini est l'ensemble de toutes les E–interprétations (respectivement ≈–interprétations) partielles ordonné par la relation de plongement des applications notée* $\triangleleft$. ◊

On représente les arbres sémantiques comme des arbres ordonnés; l'extension affectant 0 à tous les atomes du domaine est la branche la plus à droite de l'arbre sémantique.

Les propriétés suivantes sont mises en évidence dans (RUSINOWITCH, 1987, page 42):

- $\triangleleft$ est une relation d'ordre bien fondée.
- Si $\Im$ est une interprétation sur $W_{\alpha+1}$, alors $\Im|_{W_\alpha}$ est le prédécesseur de $\Im$ pour l'ordre de $\triangleleft$.

DÉFINITION 5.3.5. *Soit S un ensemble de clauses. L'arbre sémantique consistant de S, noté* $MCT(S)$, *est le sous-arbre maximal d'un arbre E–sémantique (≈–sémantique) transfini de S tel que:*

[3] *Les deux dernières conditions sont déduites de* $1 - \Im(s \approx t) \geq |\Im(w[s]_p) - \Im(w[t]_p)|$

si pour tout c de S et tout nœud $\Im$ de $MCT(S)$ et toute substitution close σ de domaine $\mathcal{V}ar(c)$, $\Im(c\sigma) = 1$, quand $\Im(c\sigma)$ est défini.

On fixe la terminologie suivante:

- *si un nœud $\Im$ de l'arbre sémantique falsifie une clause c de S, mais aucun $\triangleleft$-prédécesseur de $\Im$ ne falsifie de clause de S, $\Im$ est un* nœud d'échec.
- *un nœud de $MCT(S)$ est un* nœud de déduction *si tous ses $\triangleleft$-successeurs sont des nœuds d'échec.*
- *une* suite croissante *de nœuds d'un arbre sémantique est un ensemble totalement $\triangleleft$-ordonné $\{\Im_i\}_{i<\alpha}$ $(\alpha < \lambda)$ d'interprétations partielles.*

$\lozenge$

On prouve que le lemme suivant (RUSINOWITCH, 1987, page 44) reste valable pour les arbres sémantiques consistants polyvalents:

LEMME 5.3.1. *La limite d'une suite croissante de $MCT(S)$ appartient à $MCT(S)$.*

PREUVE. Supposons qu'il existe une instance close C d'une clause de S falsifiée par cette limite. Puisque C est finie et que la relation $<$ est totale sur les objets sans variables, il y a un plus grand littéral dans C. Appelons le A_α. α est un ordinal successeur. C'est pourquoi il y a un élément de la suite qui falsifie également C, ce qui est contradiction avec l'affirmation que cet élément appartient à $MCT(S)$. C.Q.F.D.

5.4 Un Calcul par Résolution et Paramodulation Ordonnées: $\mathcal{O}RP_M$

MORGAN (1976) étudie un calcul de type Résolution pour les logiques polyvalentes à nombre fini de valeurs de vérité telles que les définissent dans ROSSER & TURQUETTE (1952). Dans la suite on fait référence aux notations de la description de ces logiques donnée en annexe.

On peut mettre toute formule de ce calcul sous forme normale conjonctive (MORGAN, 1976), en utilisant l'algorithme décrit par les règles de réécriture de la SECTION 5.2.

Pour prouver que F est un théorème, c'est-à-dire que F ne prend que des valeurs désignées, on établit que $\bigvee_{k=S+1}^{M} J_k(F)$ ne peut être satisfaite. On pourrait également établir que pour tout k, $S < k \leq M$, $J_k(F)$ est insatisfaisable, car $\vee$ est une disjonction standard. On partitionne ainsi de manière naturelle le problème initial en des tâches indépendantes.

Les clauses obtenues à partir de $J_k(F)$ (ou de $\bigvee_{k=S+1}^{M} J_k(F)$) par les transformations précédentes, ne peuvent prendre que la valeur 0 ou 1, puisque tout littéral est de la forme $J_k(\ell)$ En fait, seules les restrictions de $\forall$, $\wedge$ et $\vee$ à $\{0,1\}$ interviennent, et de plus ces restrictions correspondent aux connecteurs de la logique classique. le caractère polyvalent de la logique ne s'observe plus que sur les formules atomiques. La correction des règles d'inférence du calcul que l'on va proposer utilise ce fait essentiel. Aussi le calcul de Résolution et Paramodulation qui suit est très proche du cas classique. Comme pour la logique classique, les stratégies de Résolution et Paramodulation Ordonnées (SLAGLE, 1967, JOYNER, 1976, RUSINOWITCH, 1987) réduisent efficacement la taille de l'espace de recherche d'une réfutation. Les arguments de complétude et même de correction pour la Résolution et Paramodulation sans restriction se déduisent très facilement ceux de la Résolution et Paramodulation Ordonnées. Nous ne présenterons donc que cette dernière.

L'égalité traitée sera la similarité de MORGAN (1975), plus générale que l'égalité absolue. Puisque en ajoutant l'axiome $\forall x, y \cdot (J_1(x \approx y) \vee J_M(x \approx y))$, la relation de similarité devient l'égalité bivalente. Alternativement, on peut simplifier avant de commencer la réfutation, les clauses en éliminant les atomes $J_k(s \approx t)$ pour $1 < k < M$. On convient que $\approx$ et $=$ sont des prédicats symétriques, c'est-à-dire qu'on ne distingue pas $a \approx b$ de $b \approx a$, etc.

5.4.1 Définition du Calcul $\mathcal{O}RP_M$

DÉFINITION 5.4.1. *Le langage du calcul $\mathcal{O}RP_M$ est celui des clauses. Un ensemble de clauses s'entend comme une conjonction implicite (éventuellement infinie) de clauses. Soit $<$ un CSO sur la base de Herbrand $\mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$.*

Ce calcul est composé des règles d'inférence suivantes:

- *la recopie.*

$$\frac{C}{C\sigma}$$

où σ est telle que $\mathcal{V}ar(C) = \mathcal{D}om(\sigma)$ et $\mathcal{V}\mathcal{R}an(\sigma)$ ne contienne que des variables non encore utilisées

Cette opération peut être réalisée car on a supposé infini l'ensemble des variables. De plus, dans la présentation des autres règles, ce pas de recopie aura été réalisé de telle sorte que les prémisses ne partagent pas de variables. On note la conclusion de cette inférence REC(C,σ).

- *la Résolution binaire.*

$$\frac{J_i(\ell\vec{s}) \vee C \quad J_j(\ell\vec{t}) \vee C'}{C\sigma \vee C'\sigma}$$

où

- $i \neq j$
- *$\sigma = \vec{s} \sqcap \vec{t}$ est défini*
- *pour tout atome A de $C\sigma$ ou de $C'\sigma$, $\ell\vec{s}\sigma \not\leq A$*
- *Pour tout $i' \leq i$, $J_{i'}(\ell\vec{s}\sigma) \notin C\sigma$*
- *Pour tout $j' \leq j$, $J_{j'}(\ell\vec{t}\sigma) \notin C'\sigma$*

La conclusion est désignée par O-RES$(J_i(\ell\vec{s}) \vee C, J_i(\ell\vec{s}), J_j(\ell\vec{t}) \vee C', J_j(\ell\vec{t}), \sigma)$.

- *la factorisation binaire.*

$$\frac{J_i(\ell\vec{s}) \vee J_i(\ell\vec{t}) \vee C}{J_i(\ell\vec{s}\sigma) \vee C\sigma}$$ où

- o $\sigma = \vec{s} \sqcap \vec{t}$ *est défini*
- o *pour tout atome A de $C\sigma$ $\ell\vec{s}\sigma \not\leq A$*

la conclusion est désignée par O-FACT$(J_i(\ell\vec{s}) \vee J_i(\ell\vec{t}) \vee C, J_i(\ell\vec{s}), J_i(\ell\vec{t}), \sigma)$.

- *la paramodulation.*

$$\frac{J_i(s \approx s') \vee C \quad J_j(\ell\vec{t}) \vee C'}{\bigvee_{k=max(1,j-i+1)}^{min(M,j+i-1)} J_k(\ell\vec{t}[s']_p)\sigma \vee C\sigma \vee C'\sigma}$$

où

- o $\sigma = s \sqcap \ell\vec{t}|_p$ *est défini*
- o $s\sigma \not\leq s'\sigma$
- o *Pour tout atome A de $C\sigma$, $(s\sigma \approx s'\sigma) \not\leq A$*
- o *Pour tout $i' \leq i$, $J_{i'}(s\sigma \approx s'\sigma) \notin C\sigma$*
- o *Pour tout atome A de $C'\sigma$, $A \not\leq \ell\vec{t}\sigma$*
- o *Pour tout $j' \leq j$, $J_{j'}(\ell\vec{t}\sigma) \notin C'\sigma$*

O-PAR$(J_j(\ell\vec{t}) \vee C', J_j(\ell\vec{t}), p, J_i(s \approx s') \vee C, J_i(s \approx s'), \sigma)$ *dénote la clause ainsi déduite*

- *la réflexivité négative*

$$\frac{J_i(s \approx t) \vee C}{C\sigma}$$

où

- o $\sigma = s \sqcap t$ *est défini*
- o $i \neq 1$
- o *Pour tout atome A de $C\sigma$, $(s\sigma \approx t\sigma) \not\leq A$*
- o *Pour tout $i' \leq i$, $J_{i'}(s\sigma \approx t\sigma) \notin C\sigma$*

La conclusion est notée O-REFL$(J_i(s \approx t) \vee C, J_i(s \approx t), \sigma)$

On appelle $\mathcal{O}RP_M^\circ$ la restriction de $\mathcal{O}RP_M$ à des clauses closes; $\mathcal{O}RP_M^1(S)$ désigne l'ensemble obtenu à partir de S en ajoutant à S les conclusions de toutes les inférences de $\mathcal{O}RP_M$ dont les prémisses sont des clauses de S, on convient que $\mathcal{O}RP_M^0(S) =_{df} S$. Pour tout $n > 1$, on pose $\mathcal{O}RP_M^{n+1}(S) =_{df} \mathcal{O}RP_M^1(\mathcal{O}RP_M^n(S))$ et $\mathcal{O}RP_M(S) =_{df} \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{O}RP_M^n(S)$ $\diamond$

On considère REC, O-FAC, O-RES, O-PAR, O-REFL comme des fonctions partielles, n'étant définies que pour des arguments remplissant les conditions supplémentaires (σ étant bien un unificateur le plus général,...). Il est possible de se passer de la *réflexivité négative* en ajoutant à l'ensemble de clauses la clause unitaire $x = x$, dans $\mathcal{O}RP_M$. Ici, il faudrait ajouter $J_1(x \approx x)$.

La règle de Paramodulation est un peu surprenante. L'inférence rend la connaissance de la valeur de vérité du littéral dans lequel on vient de faire le remplacement floue: on peut simplement déduire la disjonction

$$\bigvee_{|k-j|<i} J_k(\ell\vec{t}[s']_p)\sigma$$

au lieu de

$$J_j(\ell\vec{t}[s']_p)\sigma$$

que l'on aurait pu déduire avec l'égalité absolue.

Pour voir ce qu'il se passe, considérons un instant l'inférence suivante:

$$\frac{J_i(a \approx b) \quad J_j(b \approx c)}{\bigvee_{|k-j|<i} J_k(a \approx c)}$$

Au fond elle exprime rien d'autre que l'inégalité triangulaire $d_{\Im}(a,c) \leq d_{\Im}(a,b) + d_{\Im}(b,c)$.

Paramoduler dans un argument d'un atome en $\approx$ est finalement un raisonnement basé sur l'inégalité triangulaire Paramoduler dans une position plus profonde d'un atome en $\approx$ ou dans un atome dont le prédicat n'est pas $\approx$, est un raisonnement reposant sur le fait que les fonctions et les prédicats sont interprétés par des applications non divergentes.

5.4.2 Correction de $\mathcal{O}RP_M$

LEMME 5.4.1. REC, O-FAC, O-RES, O-PAR, O-REFL *sont des règles correctes de* $\mathcal{O}RP_M$.

PREUVE. Exactement comme pour le cas classique. Soit $\Im$ une $\approx$–interprétation arbitraire, dont le domaine du discours est $\mathcal{I}$. Si $\Im$ ne satisfait pas toutes les prémisses, l' inférence est trivialement correcte, ce qui suit ne s'intéresse donc qu'à une interprétation satisfaisant les prémisses. Soient $\vec{x}$ les variables, au nombre de n, de $\mathcal{V}Ran(\sigma) \cup \mathcal{V}ar(C\sigma) \cup \mathcal{V}ar(C'\sigma)$ et $\vec{c}$ un n–uplet d'éléments de $\mathcal{I}$. On note $\Im'$, $\Im^{\vec{x}}_{\vec{c}}$.

- *la recopie.* Elle est évidemment correcte.
- *la Résolution.* Envisageons trois cas:
  - $\Im'(J_i(\ell\vec{s}\sigma)) = 1$. Donc $\Im'(J_j(\ell\vec{t}\sigma)) = 0$, d'où $\Im'(C'\sigma) = 1$
  - $\Im'(J_j(\ell\vec{t}\sigma)) = 1$. Donc $\Im'(J_i(\ell\vec{s}\sigma)) = 0$, d'où $\Im'(C\sigma) = 1$
  - $\Im'(J_i(\ell\vec{s}\sigma)) \neq 1$ et $\Im'(J_j(\ell\vec{t}\sigma)) \neq 1$. Donc $\Im'(J_i(\ell\vec{s}\sigma)) = \Im'(J_j(\ell\vec{t}\sigma)) = 0$, d'où$\Im'(C'\sigma) = \Im'(C\sigma) = 1$.

  A fortiori $\Im'(C\sigma \vee C'\sigma) = 1$. Et ceci pour tout n–uplet $\vec{c}$. Donc $\Im \models C\sigma \vee C'\sigma$
- *la Factorisation.* $\Im'(J_i(\ell\vec{s}\sigma))$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.
  - Si $\Im'(J_i(\ell\vec{s}\sigma)) = 0$, alors $\Im'(C\sigma) = 1$, puisque la prémisse est supposée satisfaite dans $\Im$ et n'est composée que de littéraux de la forme $J_k(\ell)$.
  - Si $\Im'(J_i(\ell\vec{s}\sigma)) = 1$, alors la conclusion est satisfaite dans $\Im$.

  Donc $\Im'(J_i(\ell\vec{s}\sigma)) \vee C\sigma$. Ce raisonnement tient pour tout $\vec{c}$, donc $\Im \models J_i(\ell\vec{s}\sigma) \vee C\sigma$.

- *la Paramodulation.* Le cas $\Im'(C\sigma \vee C'\sigma) = 1$ est immédiat; il ne reste que le cas $\Im'(C\sigma) = \Im'(C'\sigma) = 0$ Donc $\Im'(J_i(s\sigma \approx s'\sigma)) = \Im'(J_j(\ell\vec{t}\sigma)) = 1$. Comme $\Im'$ est une $\approx$-interprétation, 1 - $\Im'(s\sigma \approx s'\sigma) \geq |\Im'(\ell\vec{t}\sigma) - \Im'(\ell\vec{t}[s']_p\sigma)|$, donc, en posant $K = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq M, |k-j| < i\}$ $\Im'(\bigvee_{k\in K} J_k(\ell\vec{t}[s']_p\sigma)) = 1$, a fortiori $\Im'(\bigvee_{k\in K} J_k(\ell\vec{t}[s']_p\sigma) \vee C\sigma \vee C'\sigma) = 1$. Ceci est vrai pour tout choix de $\vec{c}$, donc $\Im \models \bigvee_{k\in K} J_k(\ell\vec{t}[s']_p\sigma) \vee C\sigma \vee C'\sigma$.
- *la Réflexivité Négative.* Supposons de plus $\Im'(C\sigma) = 0$ donc $\Im'(J_i(s\sigma \approx t\sigma)) = 1$, mais comme $s\sigma = t\sigma$, $\Im'(s\sigma \approx t\sigma) = 1$, d'où une contradiction. Donc $\Im'(C\sigma) = 1$, et comme précédemment, $\Im \models C\sigma$.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 5.4.1. *(Correction) $\mathcal{ORP}_M$ est un calcul correct: Si un ensemble de clauses S est satisfaisable dans un $\approx$-modèle, alors la clause vide (notée $\square$) ne peut être dérivée.*

PREUVE. Soit $\Im$ une $\approx$-interprétation de S. On prouve la contraposée. De la correction des règles d'inférence, on déduit que si une clause dérivée n'est pas satisfaite dans l'interprétation, alors l'une des prémisses n'y est pas satisfaite.

Supposons qu'il existe une dérivation de $c \in \mathcal{ORP}_M^{n+1}(S)$, telle que $\Im \not\models c$. Comme toutes les règles d'inférence sont correctes, l'une des prémisses est falsifiée par $\Im$ donc il existe $c' \in \mathcal{ORP}_M^n(S)$, telle que $\Im \not\models c'$. Donc il existe $c_0 \in \mathcal{ORP}_M{}^{\emptyset} = S$ telle que $\Im \not\models c_0$ c'est-à-dire $\Im \not\models S$. Ce raisonnement est valable pour toute $\approx$-interprétation. Donc S est$\approx$-insatisfaisable. C.Q.F.D.

REMARQUE. Les contraintes imposées par le CSO n'ont évidemment pas servi dans la preuve précédente. En fait, c'est la correction de la Résolution et Paramodulation sans restriction qui a été prouvée.

5.4.3 Complétude de $\mathcal{ORP}_M$

LEMME 5.4.2. *Soient S un ensemble de clauses sans variables et $\Im$ un nœud d'un arbre sémantique comptant k successeurs. Il existe alors un entier i tel que ces nœuds successeurs soient étiquetés par $J_{i+1}(\ell),\ldots,J_{i+k}(\ell)$.*

PREUVE. Si $s > t, s \approx t, B < \ell$ sont tels que $\ell|_p = s$ et $B|_p = t$ pour une position $p \in \mathcal{P}os(\ell) \cap \mathcal{P}os(B)$, et $\ell[t]_p = B$ et B $\Im$-réduise ℓ en se servant de $s \approx t$, alors toute $\approx$-interprétation $\Im'$ étendant $\Im$:

$$\Im(B) - sm \leq \Im'(\ell) \leq sm + \Im(B)$$

où $sm = 1 - \Im(s \approx t)$, et soit $0 < \Im(B) - sm$ soit $sm + \Im(B) < 1$. Considérons l'ensemble $\mathcal{R}$ de toutes les paires d'atomes $s \approx t, B < \ell$ qui $\Im$-réduisent ℓ

$$\max_{(s\approx t, B)\in\mathcal{R}} (\Im(B) + \Im(s \approx t)) - 1 \leq \Im'(\ell) \leq \min_{(s\approx t, B)\in\mathcal{R}} (\Im(s \approx t) - \Im(B)) + 1$$

Notons que puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de vérité, un sous-ensemble fini de $\mathcal{R}$ (avec au plus $M - k$ éléments) suffit pour atteindre ces bornes. Ces inégalités reformulent simplement le résultat annoncé. C.Q.F.D.

LEMME 5.4.3. *Soient S un ensemble de clauses sans variables et $\Im$ un nœud de déduction d'un arbre sémantique, dont les k successeurs sont étiquetés par $J_{i+1}(\ell),\dots,J_{i+k}(\ell)$. On note $\Im_1,\dots,\Im_k$ les extensions correspondantes de $\Im$. Il existe alors des clauses $C_1,\dots,C_k$ dans $\mathcal{O}RP_M(S)$ falsifiées respectivement par $\Im_1,\dots,\Im_k$, telles que aucun des $J_{i+1}(\ell),\dots,J_{i+k}(\ell)$ ne figure dans aucune des clauses $C_1,\dots,C_k$.*

PREUVE. Comme $\Im_1,\dots,\Im_k$ sont des nœuds d'échec, il existe $C'_{i+1},\dots,C'_{i+k}$ dans $\mathcal{O}RP_M(S)$, telles que pour $i \leq j \leq i + k$ $\Im_j \not\models C'_j$ On élimine les $J_{i+1}(\ell),\dots,J_{i+k}(\ell)$ par un algorithme ressemblant à l'élimination de Gauss.

Soient j le plus petit indice dans $\{i+1,\dots,i+k\}$ tels que $J_j(\ell)$ figure dans une des $C'_i,\dots,C'_{i+k}$, et $C'_{j'}$ la clause de plus petit indice qui contient $J_j(\ell)$. De plus, puisque $\Im_j$ est un nœud d'échec, C'_j ne contient pas le littéral $J_j(\ell)$. Soit n le petit entier tel que $J_n(\ell)$ soit dans C'_j. Par ailleurs, par construction, aucune des $C'_{i+1},\dots,C'_{i+k}$ ne contient de littéral de type $J_p(\ell)$ d'indice p plus petit que j.

On remplace la clause C'_m par une clause C''_m qui prouve également que $\Im_m$ est nœud d'échec, mais qui de plus ne contient pas $J_j(\ell)$.

- si $n > i + k$, on élimine les $J_j(\ell)$ par Résolution Ordonnée. Pour m dans $\{i+1,\dots,i+k\}$, $C''_m = \text{O-RES}(C'_m, J_j(\ell), C'_j, J_n(\ell), \iota)$ [4] si $J_j(\ell) \in C'_m$, sinon $C''_m = C'_m$.
- sinon si $J_j(\ell)$ figure dans C'_n, on remplace C'_n et C'_j par leur résolvante ordonnée qui ne contient ni $J_j(\ell)$, ni $J_n(\ell)$. $C''_n = C''_j = \text{O-RES}(C'_n, J_j(\ell), C'_j, J_n(\ell), \iota)$, et pour $m \in \{i+1,\dots,i+k\} \setminus \{n,j\}$, $C''_m = C'_m$.
- sinon on remplace C'_j par C'_n qui ne contient ni $J_j(\ell)$, ni $J_n(\ell)$. $C''_j = C'_n$, et pour $m \in \{i+1,\dots,i+k\} \setminus \{j\}$, $C''_m = C'_m$.

On vérifie facilement que C''_m est bien définie et falsifiée par $\Im_m$ (pour tout $i+1 \leq m \leq i+k$).

De plus le nombre des occurrences de $J_j(\ell)$ a strictement décru. On réitère la procédure jusqu'à l'élimination de $J_{i+k}(\ell)$. La preuve de la terminaison de l'itération est immédiate. C.Q.F.D.

[4] On rappelle que ι désigne la substitution de domaine vide, c'est-à-dire l'identité.

THÉORÈME 5.4.2. *Si S est un ensemble de clauses sans variables insatisfaisable, alors $MCT(\mathcal{O}RP_M(S)) = \emptyset$.*

PREUVE. Le schéma de la preuve est le même que dans (RUSINOWITCH, 1987): on procède par l'absurde, en supposant $MCT(\mathcal{O}RP_M(S)) \neq \emptyset$ et on construit une suite non-vide croissante d'interprétations. Mais on ne peut supposer que l'élément le plus grand de cette suite soit un nœud de déduction dans l'arbre sémantique, sans avoir à constater aussitôt qu'il s'agit en fait d'un nœud d'échec qui ne fait donc pas partie de $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$.

Les arguments de détails sont spécifiques à la relation de similarité $\approx$ et au calcul $\mathcal{O}RP_M$. Ici encore $\{A_i\}_{i<\alpha}$ désigne la base de Herbrand ordonnée par un CSO. On construit la suite de nœuds $\{\Im_\alpha : \alpha \leq \lambda\}$ dans $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$, et on montre que cette suite est vide. Considérons la branche la plus à droite dans $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$, plus précisément, cette branche est construite ainsi:

Si $\alpha = 0$, $\Im_\alpha = \emptyset$.

Si α est un ordinal successeur, de prédécesseur κ: Si $\Im_\kappa$ n'a pas de successeur dans l'arbre sémantique, alors la suite est achevée, sinon $\Im_\alpha$ est l'$\approx$-interprétation la plus à droite parmi les $\triangleleft$-successeurs de $\Im_\kappa$ dans $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$ (on choisit l'interprétation qui affecte à A_κ la plus petite valeur de vérité).

Si α est un ordinal limite, $\Im_\alpha(A_i) = \Im_{i+1}(A_i)$ pour $i < \alpha$. Étant limite d'une suite croissante de $\approx$-interprétations, $\Im_\alpha$ est une $\approx$-interprétation. Par le LEMME 5.3.1 de clôture, $\Im_\alpha$ est dans $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$.

La suite n'est pas vide car $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$ ne l'est pas (par hypothèse). $\alpha < \lambda$ car S est insatisfaisable. Notons l'ultime élément $\Im_\alpha$ de cette cette suite simplement $\Im$.

Nous distinguons trois cas et supposons que $\Im$ soit un nœud de déduction. On peut alors prouver que $\Im$ est un nœud d'échec, ce qui est bien entendu absurde.

- $A_\alpha = (a \approx a)$. Comme $\Im(a \approx a) = 1$ et que $\Im$ est un nœud de déduction, il existe dans $\mathcal{O}RP_M(S)$ une clause de la forme $J_i(a \approx a) \vee C$ avec $i > 1$, i étant le plus petit tel indice dans cette clause. O-REFL$(J_i(a \approx a) \vee C, J_i(a \approx a), \iota)$ est alors également dans $\mathcal{O}RP_M(S)$. Si cette nouvelle clause contient des occurrences de A_α, on réapplique l'argument précédent avec cette nouvelle clause. Ainsi fait-on décroître strictement le nombre d'occurrences de A_α. Finalement la clause dérivée ne contient plus aucune occurrence de A_α. C'est donc que $\Im$ est un nœud d'échec, ce qui contredit l'appartenance de $\Im$ à $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$.

- $\Im$ a exactement M $\triangleleft$-successeurs dans $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$. Il existe alors dans $\mathcal{O}RP_M(S)$ une clause dont tous les littéraux sont strictement plus petits que A_α et que falsifie $\Im$ (LEMME 5.4.3). Dans ce cas on aboutit donc la même contradiction qu'au cas précédent.

- $\Im$ a strictement moins de M $\triangleleft$-successeurs dans $MCT(\mathcal{O}RP_M(S))$. C'est-à-dire que A_α est $\Im$-réductible. Convenons que les successeurs de de $\Im$ soient

étiquetés par $J_{i+1}(A_\alpha),\ldots,J_{i+k}(A_\alpha)$. Il existe dans $ORP_M(S)$ une clause C ne contenant aucun des $J_{i+1}(A_\alpha),\ldots,J_{i+k}(A_\alpha)$, et falsifiée par $\Im$ (LEMME 5.4.3). Si C ne contenait pas de littéral de $J_1(A_\alpha),\ldots,J_i(A_\alpha)$, $J_{i+k+1}(A_\alpha),\ldots,J_M(A_\alpha)$, alors C serait également falsifiée par $\Im$, qui serait ainsi un nœud d'échec et donc pas un élément de $MCT(ORP_M(S))$.
Soit $J_j(A_\alpha)$ le littéral de C de plus petit indice et d'atome A_α. Comme A_α ne peut pas prendre la valeur de vérité $\frac{M-j}{M-1}$ dans une extension de $\Im$, il existe $s \approx t < A_\alpha$, et $B < A_\alpha$ comme décrits dans LEMME 5.4.2 (en gardant la signification des notations de ce lemme), tels que de plus $j < \Im(B) - sm$ or $j > sm + \Im(B)$.
Évidemment $sm < 1$ (autrement B ne $\Im$-réduirait pas A_α avec $s \approx t$). Soit γ tel que $A_\gamma = (s \approx t)$ $(\gamma < \alpha)$. Considérons un instant les successeurs de $\Im|_{W_\gamma}$. Puisque la branche que nous suivons était la plus à droite, tous les successeurs $\Im'$ de $\Im|_{W_\gamma}$ avec $\Im'(s \approx t) < 1 - sm$ sont des nœuds d'échec.
En vertu du LEMME 5.4.3, il existe dans $ORP_M(S)$ une clause D falsifiant tous ces nœuds d'échec. D contient au moins un littéral $J_m(s \approx t)$ avec $\frac{M-m}{M-1} \leq 1 - sm$ (autrement $\Im$ n'appartiendrait pas à $MCT(ORP_M(S))$). Soit n le plus petit tel indice dans D. Comme $C, D \in ORP_M(S)$, $C' =$ O-PAR$(C, J_j(A_\alpha), p, D, J_n(s \approx t), \iota) \in ORP_M(S)$.
Si C' contient des occurrences de A_α, nous réutilisons le même argument, mais avec C' à la place de C. Puisqu'à chaque pas de cette itération de le nombre d'occurrences de A_α décroît strictement, au bout du compte nous avons obtenu une clause sans atome A_α, C'' falsifiée par $\Im$. Nous concluons comme dans les autres cas.

Il faut en conclure que $MCT(ORP_M(S))$ est vide. C.Q.F.D.

REMARQUE. Cette preuve est intéressante, car on en dérive facilement des stratégies puissantes comme la Résolution ordonnée, stratégie du support (après adaptation des arguments), ... (Cf. (BAAZ & FERMÜLLER, 1992)).

COROLLAIRE 5.4.1. *(Complétude de base) Si S est un ensemble de clauses sans variables insatisfaisable,* $\Box \in ORP_M(S)$, *c'est-à-dire* ORP°_M *est un calcul complet.*

PREUVE. $MCT(ORP_M(S))$ est vide donc $\Box \in ORP_M(S)$. C.Q.F.D.

Les arguments de relèvement sont ceux du cas classique (voir, par exemple (RUSINOWITCH, 1987)).

LEMME 5.4.4. *Soient* $C' : J_k(\ell\vec{s_0}) \vee \ldots \vee J_k(\ell\vec{s_n}) \vee C$ *une clause et* θ *une substitution de base de domaine les variables de* C'.

Si $\vec{s_0}\theta = \ldots = \vec{s_n}\theta$

et si *pour tout littéral* $J_i(A)$ *de* C, $\ell\vec{s_0}\theta > A\theta$ *ou* $\ell\vec{s_0}\theta = A\theta$ *et* $i \neq k$

alors *il existe substitution* σ *telle que* $J_k(\ell\vec{s_0})\sigma \vee C\sigma$ *se déduise de* C' *en* n *pas de* O-FAC *et que*

$$\begin{cases} \vec{s_0}\sigma\theta = \vec{s_0}\theta \\ C\sigma\theta = C\theta \end{cases}$$

LEMME 5.4.5. *Soient* $C' : J_i(\ell\vec{s}) \vee C$ *et* $D' : J_j(\ell\vec{t}) \vee D$ *deux clauses ne partageant pas de variables et* μ, θ *des substitutions closes de domaine l'ensemble des variables de* C' *et* D' *respectivement.*

Si $\vec{s}\mu = \vec{t}\theta$

et si *les atomes de* $C\mu$ *(respectivement* $D\theta$*) sont strictement plus petits que* $\ell\vec{s}\mu$ *(respectivement* $\ell\vec{t}\theta$*)*

alors *il existe une substitution de base* τ *telle que*

$$\text{O-RES}(C', J_i(\ell\vec{s}), D', J_j(\ell\vec{t}), \vec{s} \sqcap \vec{t})\tau = \text{O-RES}(C'\mu, J_i(\ell\vec{s})\mu, D'\theta, J_j(\ell\vec{t})\theta, \iota)$$

LEMME 5.4.6. *Soient* $C' : J_i(s \approx s') \vee C$ *et* $D' : J_j(\ell\vec{t}) \vee D$ *deux clauses ne partageant pas de variables,* p *une position de* $\ell\vec{t}$ *et* μ, θ *des substitutions closes de domaine l'ensemble des variables de* C' *et* D' *respectivement.*

Si $s\mu = \ell\vec{t}]_p\theta$

et si $s\mu > s'\mu$

et si *les atomes de* $D\theta$ *(respectivement* $C\mu$*) sont strictement plus petits que* $\ell\vec{t}\theta$ *(respectivement* $s\mu \approx s'\mu$*)*

et si *pour tout* $i' \leq i$, $J_{i'}(s\mu \approx s'\mu)$ *ne figure pas dans* $C\mu$

et si *Pour tout* $j' \leq j$, $J_{j'}(\ell\vec{t}\theta)$ *ne figure pas dans* $D\theta$

alors *il existe une substitution de base* τ *telle que*

$$\text{O-PAR}(D', J_j(\ell\vec{t}), p, C', J_i(s \approx s'), s \sqcap \ell\vec{t}]_p)\tau = \text{O-PAR}(D'\theta, J_j(\ell\vec{t}\theta), p, C'\mu, J_i(s\mu \approx s'\mu), \iota)$$

THÉORÈME 5.4.3. *(Complétude) Si* S *est un ensemble de clauses insatisfaisable,* $\square \in \mathcal{O}RP_M(S)$*, c'est-à-dire* $\mathcal{O}RP_M$ *est un calcul complet.*

PREUVE. En appliquant le COROLLAIRE 5.4.1 à l'ensemble de toutes les instances sans variables des clauses de S, qui est également insatisfaisable, on obtient une dérivation de la clause vide. Les lemmes de relèvement permettent de construire à partir de cette dérivation, une réfutation en utilisant que des clauses de S et les règles d'inférence de $\mathcal{O}RP_M$. C.Q.F.D.

Table 5.1: Dualité Tableaux Analytiques et Résolution

Tableaux	Résolution
Forme Normale Disjonctive	Forme Normale Conjonctive
branche	clause
tableau	ensemble de clauses

5.5 Autres Calculs de Résolution

Il n'existe à notre connaissance pas de travaux qui proposent un traitement de l'égalité graduelle par la paramodulation. Cependant, des auteurs ont proposés des calculs de Résolution pour les logiques polyvalentes finies. Le premier a été MORGAN (1976) pour une logique semblable à celle de ROSSER & TURQUETTE (1952). Nous en avons déjà parlé. Les connecteurs J_k ne sont en fait rien d'autres que l'équivalent des signes des formules dans les tableaux. Cette constatation se retrouve dans (BAAZ & FERMÜLLER, 1992), et leur permet de traiter une gamme plus large de logiques. Apparemment, du moins puisqu'il est toujours possible d'introduire les connecteurs d'une logique dans la logique de ROSSER & TURQUETTE (1952) par définition, et de chercher une réfutation dans cette nouvelle logique. La SOUS-SECTION 5.5.1 replace ce travail dans un contexte plus vaste et le compare aux autres travaux sur les logiques polyvalentes.

La SOUS-SECTION 5.5.2 parle d'un autre calcul par Résolution, qui ne nécessite pas de forme normale particulière, la Résolution non-clausale (STACHNIAK, 1992, O'HEARN & STACHNIAK, 1992).

D'autres calculs encore ont été étendus au cas des logiques polyvalentes finies (MURRAY & ROSENTHAL, 1991).

5.5.1 Résolution selon Fitting pour Logiques Polyvalentes

FITTING (1990) parle des Tableaux et de la Résolution pour la logique classique en mettant en avant la dualité entre ces deux approches (voir TABLE 5.1). En fait, ce que FITTING appelle Résolution est au fond très proche d'un système de Gentzen avec Coupure dont l'application est restreinte aux formules atomiques. CHAMINADE (1991) adopte également cette perspective et en appronfondit l'intérêt pour la déduction automatique.

FITTING trace ce parallèle pour les formules non signées; on peut tout aussi bien travailler avec des formules signées. Cette ligne directrice a aussi été suivie par BAAZ

& FERMÜLLER (1992), qui définissent un calcul de Résolution. Ils considèrent des formules signées et décomposent les formules en appliquant des règles semblables à R_{prim} du CHAPITRE 1.

Une clause étendue (car elle contient éventuellement des formules non atomiques) de BAAZ & FERMÜLLER (1992) est satisfaite par une interprétation $\Im$ ssi il existe une formule signée dans cette clause que $\Im$ évalue à son signe: une clause au sens de BAAZ & FERMÜLLER (1992) est en fait un séquent de TAKAHASHI-ROUSSEAU. Les règles de décomposition, appelées règles de traduction (*translation rules*), suggérées sont celles de TAKAHASHI (1968). Des règles d'inférence plus efficaces peuvent être trouvées par des considérations similaires à celles du CHAPITRE 1. Si pour les tableaux on a cherché à obtenir une disjonction de conjonctions de conditions sur les valeurs de vérité des sous-formules, pour les séquents de TAKAHASHI-ROUSSEAU (et pour la Résolution) il faut chercher une conjonction de disjonctions.

Illustrons notre propos sur l'exemple d'un connecteur binaire c, et supposons que par la méthode exposée dans le CHAPITRE 1, on ait pu prouver la correction de la règle de décomposition suivante:

Soient $\Im$ une interprétation, w une valeur de vérité et F, G des formules, $A, B \subseteq \mathcal{C}$ et $D \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$

$\Im \models [w]\, c(F, G)$

ssi il existe $u \in A$, telle que $\Im \models [u]\, F$
ou il existe $v \in B$, telle que $\Im \models [v]\, G$
ou il existe $\langle u, v\rangle \in D$ tel que $\Im \models [u]\, F$ et $\Im \models [v]\, G$

On en déduit immédiatement, en distribuant les disjonctions sur les conjonctions:

$\Im \models [w]\, c(F, G)$

ssi il existe $u \in A$, telle que $\Im \models [u]\, F$
ou il existe $v \in B$, telle que $\Im \models [v]\, G$
ou pour tous $D_1, D_2 \subseteq D$ tels que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et $D_1 \cup D_2 = D$, il existe $\langle u, v\rangle \in D_1$ tel que $\Im \models [u]\, F$ ou il existe $\langle u, v\rangle \in D_2$ tel que $\Im \models [v]\, G$

Ce qui justifie les règles de décomposition des clauses:

De $C \cup \{[w]\, c(F, G)\}$

on déduit les clauses C_{D_1, D_2}:

$$C \cup \{[u]\, F : u \in A \cup D_1'\} \cup \{[v]\, G : v \in B \cup D_2''\}$$

où D_1' est la projection de D_1 sur la première composante et D_2'' la projection de D_2 sur la seconde composante.

Les règles ainsi obtenues sont correctes et permettent de construire un calcul complet. Mais on peut se servir des résultats du CHAPITRE 1 pour définir des règles minimales en nombre de clauses. Au lieu d'utiliser les algorithmes en entrée $\Re_c^{-1}(w)$, on prend l'ensemble complémentaire $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \setminus \Re_c^{-1}(w)$.

Il en résulte (il faudrait le prouver):

$\Im \not\models [w]\, c(F, G)$

ssi il existe $u \in A'$, telle que $\Im \models [u]\, F$
ou il existe $v \in B'$, telle que $\Im \models [v]\, G$
ou il existe $\langle u, v\rangle \in D'$ tel que $\Im \models [u]\, F$ et $\Im \models [v]\, G$

où $A', B' \subset \mathcal{C}$ et $D' \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, avec $A' \cup B' \cup D'$ est de cardinalité minimale.

Par une transformation élémentaire,

$\Im \models [w]\, c(F, G)$

ssi pour tout $u \in A'$ $\Im \not\models [u]\, F$
et pour tout $v \in B'$ $\Im \not\models [v]\, G$
et pour tout $\langle u, v\rangle \in D'$ $\Im \not\models [u]\, F$ ou $\Im \not\models [v]\, G$

Ce qui justifie, à son tour, les règles de décomposition des clauses:

De $C \cup \{[w]\, c(F, G)\}$

on déduit les clauses

$C_{A'} : C \cup \{[u']\, F : u' \in \mathcal{C} \setminus A'\}$
et $C_{B'} : C \cup \{[v']\, G : v' \in \mathcal{C} \setminus B'\}$
et pour tout $\langle u, v\rangle \in D'$ $C_{\langle u,v\rangle} : C \cup \{[u']\, F, [v']\, G : u \neq u', v \neq v'\}$

Ces règles sont meilleures que celles données dans (BAAZ & FERMÜLLER, 1992). La variante de la skolemisation qu'ils y proposent et la proposition de FITTING (1990) souffrent des mêmes défauts. De nouveaux symboles de fonctions, d'arité importante, sont introduits à chaque décomposition d'un quantificateur. La proposition faite dans le CHAPITRE 3 pour les tableaux analytiques peut être adaptée à ce calcul.

5.5.2 Résolution Non Clausale

STACHNIAK & O'HEARN (1990) proposent un système de Résolution non-clausale propositionnelle étendant le cas classique (dû à MANNA & WALDINGER (1986) et à MURRAY (1982)) au cas d'une logique $\mathcal{L}$ *fortement finie*. BHATTA & KARNICK (1991) ont repris ces travaux sur la Résolution non-clausale pour la logique classique en n'imposant plus de restrictions sur les formules considérées (qui peuvent contenir des quantificateurs et des équivalences).

Il n'est pas sûr que $\mathcal{L}$ contienne des constantes logiques correspondant aux valeurs de vérité de $\mathcal{L}$ (comme *true* et *false* dans la logique classique). Toutefois comme la logique est *fortement finie*, chaque valeur de vérité peut être "représentée" dans le langage objet par une formule (un peu comme $\neg(p \Rightarrow p)$ pour *false* en logique classique). De plus, il existe un algorithme qui à partir des tables de vérité de $\mathcal{L}$ construit de telles formules (STACHNIAK & O'HEARN, 1990). Soit Ver un ensemble de formules propositionnelles qu'une interprétation évalue à des valeurs de vérité deux à deux distinctes et telle que chaque valeur de vérité soit représentée une et seule fois.

Ce calcul est correct et complet (STACHNIAK & O'HEARN, 1990). Il comporte trois types de règles d'inférence énumérés ci-après:

- La résolution non-clausale :

$$\frac{\begin{array}{c}F(p)\\G(p)\end{array}}{F(p/true) \mid G(p/false)}$$

  est généralisée en:

$$\frac{\begin{array}{c}F_1(p)\\\cdots\\F_n(p)\end{array}}{F_1(p/v_1) \mid \cdots \mid F_n(p/v_n)} \quad \text{où } Ver = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

- la simplification qui remplace des sous-formules composées exclusivement d'éléments de Ver par une formule de Ver
- l'élimination des contradictions

La Résolution non-clausale peut également être reformulée dans un système de Gentzen avec Coupure sur les formules atomiques. La règle de Résolution non-clausale peut être vue comme une règle dérivée de la Coupure et des règles d'introduction de connecteurs. Les règles de simplification peuvent être définies à partir des règles d'élimination de connecteurs. Les règles d'élimination des contradictions correspondent à des axiomes.

Stachniak et O'HEARN proposent des stratégies complètes et compatibles (stratégie du support et "du test de la polarité").

Si la logique contient une disjonction standard $\vee$. (si elle n'est pas associative, on convient qu'elle est associative à gauche c'est-à-dire $(F \vee G) \vee H$ abrège $F \vee G \vee H$), La résolution non-clausale peut être exprimée par un ensemble de règles d'inférence à conclusion unique, et s'écrit alors plus simplement:

$$\frac{\begin{array}{c}F_1(p)\\\cdots\\F_n(p)\end{array}}{F_1(p/v_1) \vee \cdots \vee F_n(p/v_n)} \quad \text{où } Ver = \{v_1, \cdots v_n\}$$

Dans (STACHNIAK, 1990), on envisage des règles de simplification *faibles*, qui préservent la satisfaisabilité, mais pas nécessairement les valeurs de vérité. La famille des logiques que l'on peut alors traiter par résolution est donc plus large.

Dans (O'HEARN & STACHNIAK, 1992), la Résolution non-clausale est généralisée au premier ordre. Plus précisément, on considère des formules avec variables libres, sans quantificateurs.

Chapitre 6

Logiques de Treillis

Nous considérons principalement dans ce travail des logiques polyvalentes, dont l'ensemble des valeurs de vérité n'est pas muni d'une structure particulière. Quand le choix d'un ensemble plus compréhensif de valeurs de vérité est fait, il est rare que les valeurs de vérité ne soient pas liées sémantiquement entre elles de manière intéressante.

L'exemple le plus naturel d'un ensemble de valeurs de vérité muni d'une structure a été donné par BELNAP (1977). Ce ne sont pas des propositions de théories mathématiques qui l'intéresse, mais des énoncés qui dépendent d'une connaissance empirique. Ceux-ci peuvent être assertés (**t**), ou rejetés (**f**), mais il se peut aussi qu'il soit impossible de s'avancer sur la vérité ou la fausseté de l'énoncé ($\perp$), ou au contraire il est concevable que des arguments permettent d'affirmer *et* de rejeter l'énoncé ($\top$). Ces quatre cas de figure correspondent à la vérité, la fausseté, l'indétermination et la surdétermination.

Il est évident que cet ensemble de quatre valeurs de vérité forme un treillis distributif. Conjonction et disjonction correspondent à des opérations naturelles sur ce treillis: la conjonction s'identifie au maximum, la disjonction au minimum. La négation transforme **t** en **f** et vice versa; elle laisse invariants $\top$ et $\perp$.

Ce chapitre présente les logiques de treillis et de treillis bidimensionnels. Un premier type de logiques a été présenté par ROSE (1951) sur l'exemple d'un treillis à cinq valeurs. Il y montre que la méthode d'axiomatisation bien connue de ROSSER

& TURQUETTE (1952) convient aussi aux logiques partiellement ordonnées.

La seconde proposition est beaucoup plus récente et vient, à notre connaissance de GINSBERG (1988). GINSBERG désire modéliser le raisonnement d'un agent non-omniscient, et éventuellement incohérent. Il ordonne les valeurs de vérité suivant deux ordres distincts. Le premier correspond à la véracité d'un énoncé. Le second aux éléments de connaissance utilisés pour établir cette formule; l'utilisation presque exclusivement en Mathématique de la logique formelle a occulté l'intérêt de ce genre de comparaisons entre valeurs de vérité.

La dernière section propose un calcul par Résolution et un calcul des tableaux analytiques pour les logiques annotées, où seuls les atomes sont évalués dans le treillis; l'évaluation des formules composées reste bivalente.

Dans ce chapitre, les valeurs de vérité forment un treillis de maximum $\top$ et de minimum $\perp$. Les valeurs de vérité seront nommées $a, b, c, \ldots$ avec indice le cas échéant. $\top$ correspond à la plus grande valeur de vérité et $\perp$ à la plus petite; les autres valeurs sont appelées *intermédiaires*.

6.1 Logique de Treillis de Rose

ROSE (1951) montre qu'il est possible de donner une base complète de connecteurs, ainsi qu'une axiomatisation FIGURE 6.2 complète semblable à celle de ROSSER & TURQUETTE (1952).

La disjonction et la conjonction correspondent à des opérations de treillis (la borne supérieure et la borne inférieure). L'implication et la négation sont indépendantes du treillis considéré. L'implication est $\top$ si la prémisse ne vaut pas $\top$ ou si la conclusion vaut $\top$. La négation transforme $\top$ en $\perp$ et les autres éléments en $\top$.

Il existe cependant aussi des connecteurs unaires qui sont réellement polyvalents comme $\overline{\wedge}_a$ avec a une valeur de vérité intermédiaire, qui est échange $\top$ et a et associe toute autre valeur de vérité à elle-même. Réunis en une base, ces connecteurs permettent de décrire toutes les fonctions dans le treillis comme une formule bien formée.

ROSE (1951) prouve que toute fonction propositionnelle peut être exprimée comme une formule bien formée composée des connecteurs $\Rightarrow$, $\ominus$, $\overline{\wedge}_a$ (complétude vérifonctionnelle). Remarquons que ces connecteurs ne tiennent pas compte du treillis considéré et qu'ils ne correspondent pas à des opérations naturelles sur un treillis.

Il donne également la preuve de la complétude forte de $\mathsf{RH}_{\mathcal{T}}$: En ajoutant aux les axiomes de $\mathsf{HR}_{\mathcal{T}}$ une formule non tautologique, on obtient un système trivial, c'est-à-dire dont toutes les formules sont des théorèmes.

Si les connecteurs sont arbitraires, la structure de treillis ne permet pas d'obtenir de "meilleurs" calculs que ceux obtenus en "oubliant" la structure de treillis c'est-à-dire en utilisant les méthodes des chapitres précédents.

- le support de l'algèbre est noté $\mathcal{T}$. Il est fini, partiellement ordonné, la relation d'ordre s'appelle $\leq$ (et on note $\geq$ la relation inverse). Il y a un minimum ($\bot$) et un maximum ($\top$).
- le seul élément désigné est $\top$.
- $\Re_{\Rightarrow}$: $\begin{array}{lcll} \mathcal{T}\times\mathcal{T} & \rightarrow & \mathcal{T} & \\ \langle a,\top\rangle & \mapsto & \top & \text{si } i \leq j \\ \langle\top,a\rangle & \mapsto & a & \text{sinon} \end{array}$
- $\Re_{\ominus}$: $\begin{array}{lcl} \mathcal{T} & \rightarrow & \mathcal{T} \\ a & \mapsto & \Re_{\Rightarrow}(a,\bot) \end{array}$
- pour toute valeur intermédiaire a, $\Re_{\bar{\wedge}_a}$: $\begin{array}{lcll} \mathcal{T} & \rightarrow & \mathcal{T} & \\ a & \mapsto & \top & \\ \top & \mapsto & a & \\ b & \mapsto & b & \text{sinon} \end{array}$

  Les connecteurs suivants sont introduits par définition.
- $\Re_{\oplus}$: $\begin{array}{lcl} \mathcal{T}\times\mathcal{T} & \rightarrow & \mathcal{T} \\ \langle a,b\rangle & \mapsto & \Re_{\Rightarrow}(\Re_{\Rightarrow}(a,b),b) \end{array}$
- $\Re_{\odot}$: $\begin{array}{lcl} \mathcal{T}\times\mathcal{T} & \rightarrow & \mathcal{T} \\ \langle a,b\rangle & \mapsto & \Re_{\ominus}(\Re_{\oplus}(\Re_{\ominus}(a),\Re_{\ominus}(b))) \end{array}$

  donc ce connecteur est bivalent, et ne prend la valeur $\top$ que lorsque les deux arguments valent $\top$.
- pour toute valeur intermédiaire a, $\Re_{\mathsf{J}_a}$: $\begin{array}{lcll} \mathcal{T} & \rightarrow & \mathcal{T} & \\ a & \mapsto & \top & \\ b & \mapsto & \bot & \text{sinon} \end{array}$

Figure 6.1: Sémantique de la Logique de ROSE

SCHÉMAS D'AXIOMES

$$(F \Rightarrow G) \Rightarrow [(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow (F \Rightarrow H)]$$
$$(\ominus F \Rightarrow F) \Rightarrow F$$
$$F \Rightarrow (\ominus F \Rightarrow G)$$
$$(\mathsf{J}_a\, F) \Rightarrow \ominus F \qquad \text{où } a \neq \top$$
$$(\mathsf{J}_u\, F) \Rightarrow [\mathsf{J}_v(\bar{\wedge}_i\, F)] \qquad \text{où } \Re_{\bar{\wedge}_i}(u) = v$$
$$[\mathsf{J}_\top\, F \odot \mathsf{J}_u\, G] \Rightarrow \mathsf{J}_u(F \Rightarrow G) \quad \text{où } u \neq \top$$
$$\mathsf{J}_\top\, F \Rightarrow \mathsf{J}_\bot(\ominus F)$$

RÈGLES D'INFÉRENCE

Modus ponens

$$\frac{F \qquad F \Rightarrow G}{G}$$

Figure 6.2: Axiomatisation de la Logique de ROSE (Système $\mathsf{HR}_{\mathcal{T}}$)

6.2 La logique à quatre valeurs de Belnap

BELNAP (1977) se propose de définir un mécanisme d'interrogation de bases de données qui puisse répondre en présence d'inconsistances. Les données sont représentées par des propositions. Le système est capable de repérer des inconsistances en répondant qu'il y a une surdétermination. On ne cherche pas à fournir des indices qui permettraient de lever la surdétermination. Ainsi est évité le *ex falso quodlibet sequitur*, principe par lequel d'hypothèses fausses, s'en suit ce que l'on désire. Soulignons que la surdétermination est épistémique et non ontologique. Cette approche ne convient que si ce sont des énoncés élémentaires ou leurs négations qui servent de données.

Cette logique à quatre valeurs de vérité correspond à la logique des *first degree entailments* dans (ANDERSON & BELNAP, 1975), discutées également dans (DUNN, 1986, § 4.3–4.4). Elle ne considère que des formules qui ne contiennent pas d'implications imbriquées.

Quand on désire pouvoir exprimer qu'un énoncé composé est vrai sans se compromettre sur la valeur de vérité des sous-formules, c'est-à-dire quand on veut pouvoir fournir des données non-atomiques à l'ordinateur, BELNAP propose de ne pas considérer une évaluation unique, mais toute une famille d'évaluations.

6.3 Les treillis bidimensionnels de Ginsberg

Dans la logique à quatre valeurs, BELNAP (1977) considère deux ordres partiels différents sur les valeurs de vérité. Le premier définit ce qu'il appelle le *treillis d'approximation*. Une valeur vérité u est plus grande qu'une valeur v ssi u correspond à une augmentation de l'information par rapport à v. Cet ordre s'appelle *ordre de la connaissance*; on le note $\leq_k$. $\top$ y est plus grand que **t** et **f**. Le second correspond à un accroissement de la vérité, là **t** est plus grand que $\top$. Cet ordre s'appelle l'*ordre de vérité*.

L'idée de BELNAP a été généralisée par GINSBERG (1988) à des treillis comptant plus d'éléments que les valeurs $\perp$, $\top$, **t** et **f** [1] présents dans tout treillis bidimensionnel non-trivial.

L'idée directrice de GINSBERG est pouvoir *qualifier* des déductions faites dans la logique classique par des étiquettes qui en rappellent le contexte. Quand on travaille dans la logique implicite (*default logic*), on marquera une formule déduite, entre autres de lois implicites (*defaults*), de la valeur de vérité *vraie par défaut*. Ainsi pourra-t-on distinguer les formules déduites se servant exclusivement de faits énoncés, de celles qui sont établies en recourant à des lois implicites, et qui pourraient être rejetées au vu de nouveaux faits explicites. En particulier, la signature logique qu'il considère implicitement dans (GINSBERG, 1988), est la signature de la logique classique avec conjonction ($\wedge$), disjonction ($\vee$), implication ($\Rightarrow$) et négation

[1] GINSBERG note $\perp$, u et $\top$, $\perp$.

($\neg$). Comme d'habitude, l'implication est définie à partir de la disjonction et de la négation.

o

DÉFINITION 6.3.1. *Un* treillis bidimensionnel *est un sextuplet* $\langle \mathcal{B}, \wedge, \vee, \otimes, \oplus, \neg \rangle$ *tel que*

- $\langle \mathcal{B}, \wedge, \vee \rangle$, $\langle \mathcal{B}, \otimes, \oplus \rangle$ *sont des treillis*
- $\neg$ *est une isomorphisme de treillis involutif, tel que*

$$\langle \mathcal{B}, \wedge, \vee \rangle \rightarrow \langle \mathcal{B}, \vee, \wedge \rangle$$

$$\langle \mathcal{B}, \otimes, \oplus \rangle \rightarrow \langle \mathcal{B}, \otimes, \oplus \rangle$$

Les symboles $\perp$ *et* $\top$ *dénotent le minimum et le maximum de* $\langle \mathcal{B}, \wedge, \vee \rangle$ *respectivement. Ceux de* $\langle \mathcal{B}, \otimes, \oplus \rangle$ *sont notés* $\mathbf{f}$ *et* $\mathbf{t}$.

L'ordre induit dans $\langle \mathcal{B}, \wedge, \vee \rangle$ *se note* $\leq_t$; *celui de* $\langle \mathcal{B}, \otimes, \oplus \rangle$ $\leq_k$. ◊

Dans (GINSBERG, 1988), seuls $\wedge, \vee, \neg$ ont des pendants syntaxiques.

GINSBERG définit pour des ensembles de formules évaluées dans un treillis bidimensionnel, une notion analogue à celle de fermeture déductive d'un ensemble de formules (TARSKI, 1930). Seulement comme les formules ne sont plus évaluées soit à vrai, soit à faux, il ne suffit plus de donner les formules acceptées comme vraies dans cette théorie, encore faut-il préciser "à quel degré" elles sont vraies.

DÉFINITION 6.3.2. *Une* interprétation ψ de GINSBERG *est une application de* $\mathcal{F}bf$ *vers* $\mathcal{B}$.

Une interprétation ψ de GINSBERG fermée *est une application de* $\mathcal{F}bf$ *vers* $\mathcal{B}$ *satisfaisant en outre aux conditions suivantes:*

- *pour tous* $F, G \in \mathcal{F}bf$ *si* $F \models G$, *alors* $\psi(F) \leq_t \psi(G)$
- *pour tout* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}bf$, $\psi(\bigwedge \mathcal{F}) \geq_k \bigwedge \{\psi(F) : F \in \mathcal{F}\}$
- *pour tout* $F \in \mathcal{F}bf$, $\psi(\neg F) \geq_k \neg \psi(F)$

◊

Cette double définition prête à controverse. D'abord une interprétation de $\mathcal{F}bf$ n'est plus définie comme un morphisme de $\mathcal{F}bf$ dans le treillis bidimensionnel $\mathcal{B}$, mais comme une application arbitraire de $\mathcal{F}bf$ vers $\mathcal{B}$.

Une théorie est alors simplement représentée comme une interprétation de GINSBERG. Si on se replace dans le cadre de la logique classique, une interprétation de GINSBERG $\Im$ devient simplement la fonction caractéristique des formules d'une théorie $\mathcal{T}$ en tant que sous-ensemble de $\mathcal{F}bf$(c'est-à-dire $\Im(F) = \mathbf{t}$ ssi $F \in \mathcal{T}$).

Dans le cadre plus général des treillis bidimensionnels, la fermeture déductive d'une théorie s'exprime en termes d'interprétations de GINSBERG fermées.

Dans la définition d'une telle interprétation, on se sert de la relation de conséquence logique de la logique classique pour définir cette nouvelle notion polyvalente. En fait, pour GINSBERG, les faits sont ou ne sont pas, ce qui n'est pas bivalent, c'est seulement la confiance que l'on accorde à ce qui est supposé être le cas. Par ailleurs, cette définition n'est pas constructive.

REMARQUE. Dans le cadre de la logique floue, PAVELKA (1979*a*) propose les notions de théories et de conséquence L-floues (L désignant un treillis complet, l'ordre induit correspondant à $\leq_t$) voisines de celles d'interprétations de GINSBERG et d'interprétations de GINSBERG fermées.

GINSBERG (1988) donne plusieurs exemples où une sémantique matricielle dont les valeurs de vérité forment un treillis bidimensionnel, apparaît naturellement.

Les Treillis Bidimensionnels à Base de Mondes Possibles

Le point de départ est un ensemble dont les éléments sont appelés des mondes possibles. Une valeur de vérité associée à une formule F est un couple $\langle \mathcal{W}^+, \mathcal{W}^- \rangle$ d'ensembles de mondes possibles. Le premier terme de ce couple donne l'ensemble des mondes dans lesquels F est évaluée à vrai; le second terme donne l'ensemble des mondes dans lesquels F est évaluée à faux. DUNN (1986) appelle un tel couple une polarité. Cette double information n'est redondante que dans le cas où toute formule est, dans tout monde, évaluée soit à vrai, soit à faux.

Cette construction est standard, quand on a affaire à une algèbre quasi-booléenne. Une algèbre $\langle \mathfrak{A}, \top, \vee, \wedge, \sim \rangle$ est *quasi-booléenne* ssi $\langle \mathfrak{A}, \top, \vee, \wedge \rangle$ est un treillis distributif de maximum $\top$ et $\sim$ est un isomorphisme involutif de $\langle \mathfrak{A}, \vee, \wedge \rangle$ vers $\langle \mathfrak{A}, \wedge, \vee \rangle$. Des algèbres avec des propriétés supplémentaires apparaissent dans le contexte des logiques de la pertinence (DUNN, 1986) et de la fausseté constructive (logique de NELSON (1949)) (RASIOWA, 1974*a*, par exemple), puisque la négation que l'on inclut dans ces logiques est la négation classique involutive.

Les Logiques Implicites

Nous les avons déjà évoquées. Ce formalisme a été proposé par REITER (1980) pour structurer les représentations des connaissances, quand on mène des raisonnements révisables. En effet, outre les faits constatés, dans la vie de tous les jours, on raisonne également en se servant de lois implicites, appelées des défauts dans la littérature. Ces lois permettent de raisonner non pas avec des faits avérés ou déduits, mais également en s'appuyant sur des suppositions que l'on a pas pu (encore) réfutées. GINSBERG propose en fait de qualifier différemment la valeur de vérité attribuée à une formule suivant qu'il s'agit de faits observés (ou déductibles dans la logique classique uniquement à partir de faits observés) ou que la détermination de la valeur de vérité de la formule utilise des lois implicites. Dans le premier cas, la formule est vraie ou fausse (ou les deux); dans le second, la formule est vraie ou fausse par défaut (ou surdéterminée par défaut). Si maintenant de nouveaux faits permettent d'affirmer par exemple une formule *vraie par défaut*, en se servant exclusivement de faits observés, alors on attribue à la formule la valeur de vérité *vrai*. La logique de BELNAP est l'exemple fondamental des algèbres quasi-booléennes.

Systèmes de Maintenance de la Consistance Basés sur des Hypothèses (ATMS)

Une valeur de vérité est ici un couple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{F} \rangle$ de familles d'ensembles d'hypothèses. Chaque ensemble d'hypothèses de $\mathcal{V}$ est un ensemble de formules suffisant à déduire (dans la logique classique) la formule F étiquetée par $\langle \mathcal{V}, \mathcal{F} \rangle$. De même, chaque ensemble d'hypothèses de $\mathcal{F}$ suffit pour construire une réfutation dans la logique classique de F.

Intervalles

Au lieu de donner à une formule une valeur de vérité *vrai* ou *faux*, on lui attribue un degré de confiance pris dans un ensemble $\mathcal{E} \subseteq [0,1]$. Celui n'est pas nécessairement une valeur numérique déterminée mais peut raisonnablement être indiqué par un intervalle, sous-ensemble de $\mathcal{E}$. Les valeurs de vérité sont prises dans $\mathcal{B} = \{\mathcal{E} \cap [a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. On ne définit pas un treillis bidimensionnel car $\langle \mathcal{B}, \otimes, \oplus \rangle$ n'est qu'un inf-demi-treillis (il y a autant d'éléments maximaux dans $\langle \mathcal{B}, \otimes, \oplus \rangle$ qu'il y a de valeurs dans $\mathcal{E}$). FITTING (1991) généralise cette approche en considérant un ensemble de degrés de confiance non pas totalement ordonné, mais muni plus généralement d'une structure de treillis complet (et distributif).

FITTING (1988*a*) se sert de treillis bidimensionnels pour donner une sémantique de point fixe à des programmes en logique avec négation, où les valeurs de vérité sont choisies dans une algèbre de Heyting. Les treillis bidimensionnels utilisés sont des généralisations du treillis bidimensionnel de la logique à quatre valeurs de BELNAP.

6.4 Logiques avec Annotations

Dans cette section, les valeurs de vérité forment également un treillis. Mais, seuls les atomes peuvent être interprétés à des valeurs de vérité intermédiaires de ce treillis, alors que les formules composées sont bivalentes. En fait, ces logiques sont une formalisation du métalangage; le langage lui-même n'étant composé que de faits (formules) atomiques ou de la négation de tels faits.

L'ensemble des formules bien formées ne contient que des formules dont les sous-formules atomiques sont *annotées*. Ainsi tout atome d'une formule bien formée est l'argument d'un connecteur unaire $(\text{—} : \mu)$ où μ est une valeur de vérité dans

$\mathcal{T}$. Il peut être possible de définir une négation $\sim$ dans le treillis. Par ailleurs les connecteurs et les quantificateurs sont ceux de la logique classique.

Dans les logiques avec annotations, deux types de négation apparaissent naturellement. La première appelée *négation ontologique* et notée $\neg$, correspond à la négation de la logique classique (celle du métalangage en fait). La seconde, appelée *négation épistémique* et notée $\sim$, associe à toute valeur de vérité de $\mathcal{T}$ une valeur de vérité qui correspond à un état de faits *opposé*.

Comme dans la logique à quatre valeurs de vérité de BELNAP, on considérait que le monde n'était décrit que par des formules atomiques (éventuellement niées). C'est le cas de figure le plus courant dans les bases de données déductives. Les formules atomiques qui décrivent les faits sont pondérées par une valeur de vérité, lue comme un indice de confidence, une probabilité, etc. Les formules composées correspondent à des expressions du métalangage dont les sous-formules atomiques sont des faits.

Dans les logiques annotées ces expressions deviennent précisément éléments du langage lui-même. L'utilisation la plus courante des logiques annotées étant les bases de données déductives, BLAIR & SUBRAHMANIAN (1989), SUBRAHMANIAN (1992), KIFER & SUBRAHMANIAN (1992) considèrent plus précisément le cas où les formules sont des clauses de Horn [2]. Ils généralisent la logique en permettant d'annoter les atomes par des variables que l'on peut lier à des valeurs de vérité et à des termes dont les symboles de fonctions correspondent à des fonctions monotones dans $\mathcal{T}$ choisies arbitrairement. Seul l'atome non nié d'une clause de Horn peut être annoté par un terme. Nous n'évoquerons que le cas où les atomes sont annotés par des constantes, mais où les formules traitées sont des formules bien formées arbitraires.

Soit $\Im$ une interprétation de domaine $\mathcal{I}$. La relation de satisfaction $\models$ est définie ainsi (KIFER & LOZINSKII, 1989):

$\Im \models (\ell : \mu)$ ssi $\Im(\ell) \geq \mu$

$\Im \models F \wedge G$ ssi $\Im \models F$ et $\Im \models G$

$\Im \models F \vee G$ ssi $\Im \models F$ ou $\Im \models G$

$\Im \models F \Rightarrow G$ ssi $\Im \models G$ ou $\Im \not\models F$

$\Im \models \forall x \cdot F(x)$ ssi pour individu $a \in \mathcal{I}$, $\Im^{a}_{\dot{x}} \models F(\dot{x})$

$\Im \models \exists x \cdot F(x)$ ssi il existe $a \in \mathcal{I}$ tel que $\Im^{a}_{\dot{x}} \models F(\dot{x})$

$\Im \models \neg F$ ssi $\Im \not\models F$

$\Im \models \sim (\ell : \mu)$ ssi $\Im \models (\ell : \sim \mu)$

L'occurrence de droite de $\sim$ est un isomorphisme de treillis de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$ involutif.

[2] une clause de Horn correspond à la fermeture universelle d'une implication dont l'antécédent est une conjonction finie d'atomes annotés et le conséquent un atome annoté.

F, G sont des formules bien formées ℓ est un atome u une variable libre. En somme, les faits sont interprétés dans un treillis, alors que le raisonnement sur ces faits est mené dans la logique classique. En nous basant sur la définition de la relation $\models$, nous avons défini un calcul des tableaux analytiques correct et complet qui établit la validité d'une formule annotée. Nous en reparlerons plus en détail après avoir présenté un calcul par Résolution Ordonnée.

Un Calcul par Résolution Ordonnée

KIFER & LOZINSKII (1989) et DA COSTA *et al.* (1990) proposent chacun un calcul par Résolution permettant d'établir l'insatisfaisabilité d'un ensemble de clauses.

Le treillis fini considéré est noté $\langle \mathcal{T}, \dot{\sqcup}, \dot{\sqcap} \rangle$ dont le minimum est $\perp$. On rappelle que $\sqcap$ dénote l'unificateur le plus général de deux vecteurs de termes de même longueur.

Ce calcul est composé essentiellement [3] des règles d'inférence suivantes:

- la recopie.

$$\frac{C}{C\sigma} \quad \text{où } \sigma \text{ est telle que } \mathcal{V}ar(C) = \mathcal{D}om(\sigma) \text{ et } \mathcal{V}\mathcal{R}an(\sigma) \text{ ne contienne que des variables non encore utilisées}$$

  Cette opération peut être réalisée car on a supposé infini l'ensemble des variables. De plus, dans la présentation des autres règles, ce pas de recopie aura été réalisé de telle sorte que les prémisses ne partagent pas de variables.

- la Résolution binaire.

$$\frac{(\ell\vec{s}:\mu) \vee C \quad \neg(\ell\vec{t}:\rho) \vee C'}{C\sigma \vee C'\sigma} \quad \text{où} \quad \circ\ \mu \geq \rho \quad \circ\ \sigma = \vec{s} \sqcap \vec{t} \text{ est défini}$$

- la Factorisation binaire.

$$\frac{(\ell\vec{s}:\mu) \vee (\ell\vec{t}:\mu) \vee C}{(\ell\vec{s}\sigma:\mu) \vee C\sigma} \quad \text{où } \sigma = \vec{s} \sqcap \vec{t} \text{ est défini}$$

$$\frac{\neg(\ell\vec{s}:\rho) \vee \neg(\ell\vec{t}:\rho) \vee C}{\neg(\ell\vec{s}\sigma:\rho) \vee C\sigma} \quad \text{où } \sigma = \vec{s} \sqcap \vec{t} \text{ est défini}$$

- la Réduction binaire

$$\frac{(\ell\vec{s}:\mu) \vee C \quad (\ell\vec{t}:\rho) \vee C'}{(\ell\vec{s}\sigma:\nu) \vee C\sigma \vee C'\sigma} \quad \text{où} \quad \circ\ \nu = \mu \dot{\sqcup} \rho \quad \circ\ \sigma = \vec{s} \sqcap \vec{t} \text{ est défini}$$

[3] Nous modifions légèrement la présentation pour plus d'uniformité dans notre exposé.

• l'Élimination

$$\frac{\neg(\ell : \bot) \vee C}{C}$$

La Réduction binaire et l'Élimination sont nécessaires pour garantir la complétude réfutationnelle (KIFER & LOZINSKII, 1989).

On remarque que si un ensemble de clauses S ne contient pas de littéraux $\neg(\ell\vec{t} : \bot)$, la règle d'Élimination ne s'applique à aucune clause déduite de S: il suffit de l'appliquer aux clauses de S.

De nombreuses stratégies définies pour la Résolution en logique classique peuvent être repensées pour les logiques annotées.

Parmi les plus intéressantes, on compte les stratégies d'ordonnancement (RUSINOWITCH, 1987, par exemple). Dans (ZABEL, 1993), on prouve la correction et la complétude d'une telle stratégie en présence de règles généralisant la Factorisation:

• la Factorisation binaire généralisée,

$$\frac{\neg(\ell : \rho) \vee \neg(\ell : \tau) \vee C}{\neg(\ell : \rho) \vee C} \quad \text{où} \quad \circ\ \rho \geq \tau \quad \circ\ \sigma = \vec{s} \sqcap \vec{t}$$

$$\frac{(\ell : \mu) \vee (\ell : \nu) \vee C}{(\ell : \mu) \vee C} \quad \text{où} \quad \circ\ \mu \leq \nu \quad \circ\ \sigma = \vec{s} \sqcap \vec{t}$$

En particulier, on montre qu'il suffit d'appliquer la Réduction binaire que sur les littéraux maximaux $(\ell : \mu)$ des clauses qui ne contiennent pas de littéraux du type $\neg(\ell : \rho)$.

DA COSTA *et al.* (1990) proposent une stratégie inspirée de la stratégie *linéaire* (CHANG & LEE, 1973, par exemple), dont ils prouvent la complétude. Pour cela, il leur faut introduire une nouvelle règle d'inférence,

• la Décomposition,

$$\frac{\neg(\ell : \mu) \vee C}{\neg(\ell : \mu_1) \vee \neg(\ell : \mu_2) \vee C} \quad \text{où } \mu = \mu_1 \dot{\cup} \mu_2$$

$$\frac{(\ell : \mu) \vee C}{(\ell : \mu_1) \vee C} \quad \text{où } \mu = \mu_1 \dot{\cup} \mu_2$$

Dans le cadre de la Résolution en logique classique, cette stratégie justifie la correction et la complétude d'un interpréteur PROLOG. Pour la logique classique, on peut montrer que dans le cas de clauses de Horn, il est inutile d'appliquer la Factorisation quand on se sert de la stratégie linéaire. Une telle étude n'a à notre connaissance pas encore été faite pour les programmes en logiques annotées.

Calcul des Tableaux Analytiques pour les Logiques Annotées

Nous définissons dans cette sous-section un calcul des tableaux, appelé CLA, pour les logiques traitées dans la sous-section précédente par Résolution.

Le langage formel est:

$$\{\mu \Vdash\!\!- \ell, \mu -\!\!\Vert \ell : \mu \in \mathcal{T}, \ell \in \mathcal{A}(\Omega, \Sigma)\} \cup \{[F]\ G, [T]\ G : G \in \mathcal{F}bf\} \cup \{\times\}$$

où $\mathcal{F}bf$ est l'ensemble des formules introduites en début de section.

Les règles de décomposition concernant les connecteurs classiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, sont les mêmes qu'en logique classique.

Les atomes annotés sont décomposés en appliquant les règles:

$$\frac{[T]\ (A : \mu)}{\mu \Vdash\!\!- \ell} \qquad \frac{[F]\ (A : \mu)}{\mu -\!\!\Vert \ell}$$

Par ailleurs, il faut ajouter deux règles correspondant à la Réduction et à l'Élimination:

$$\frac{\begin{array}{c}\mu \Vdash\!\!- A \\ \nu \Vdash\!\!- A\end{array}}{\mu \dot{\sqcup} \nu \Vdash\!\!- A} \qquad \frac{\bot -\!\!\Vert A}{\times}$$

La règle de clôture devient:

$$\frac{\begin{array}{c}\mu \Vdash\!\!- A \\ \rho -\!\!\Vert A\end{array}}{\times} \quad \text{si } \rho \leq \mu$$

La notion de satisfaction est étendue ainsi aux formules signées:

- $\Im$ satisfait $\mu \Vdash\!\!- A$ ssi $\Im \models (A : \mu)$ ssi $\Im(A) \geq \mu$,
- $\Im$ satisfait $\rho -\!\!\Vert A$ ssi $\Im \not\models (A : \rho)$ ssi $\Im(A) \not\geq \rho$,
- $\Im$ satisfait $[T]\ G$ ssi $\Im \models G$,
- $\Im$ satisfait $[F]\ G$ ssi $\Im \not\models G$

THÉORÈME 6.4.1. *(correction) Toutes les règles d'inférence de CLA sont correctes. Le calcul CLA est correct.*

PREUVE. Les règles de décomposition suivent de près la définition même de satisfaction, de même pour la règle d'Élimination, aussi la correction en est-elle immédiate.

La règle de Réduction est correcte: $\Im$ satisfait $\mu \Vdash\!\!- A$ et $\nu \Vdash\!\!- A$, c'est-à-dire $\Im(A) \geq \mu$ et $\Im(A) \geq \nu$. $\Im(A) \geq \mu \dot{\sqcup} \nu$, donc $\Im$ satisfait $\mu \dot{\sqcup} \nu \Vdash\!\!- A$.

La règle de clôture l'est aussi: Supposons que $\Im$ satisfasse $\mu\Vdash\!\!-A$ et $\rho\!-\!\!\Vdash A$, avec $\rho \leq \mu$. $\Im(A) \geq \mu$ donc $\Im(A) \geq \rho$, mais ceci contredit $\Im \not\models (A : \rho)$.

La vérification de la correction se fait par induction sur la taille des tableaux fermés de CLA.

C.Q.F.D.

Pour prouver la complétude, on procède comme dans les chapitres précédents. On définit de manière adéquate la notion d'ensemble de Hintikka pour les logiques annotées. Puis on passe à la définition des propriétés de consistance analytique, que l'on étend à des propriétés de consistance analytique de caractère fini, dont les éléments maximaux sont des ensembles de Hintikka tels qu'ils ont été définis pour les logiques annotées. On aura ainsi prouvé le théorème de l'existence d'un modèle. La dernière étape consiste à prouver que la famille des ensembles récursivement énumérables de formules signées qui sont réfutables par tableaux de CLA est une propriété de consistance analytique. Nous n'affirmerons donc que le théorème suivant.

THÉORÈME 6.4.2. *(complétude réfutationnelle) Le calcul CLA est réfutationnellement complet.*

Partie II

Calculs pour des Logiques Polyvalentes Infinies

Chapitre 7

Logique Superintuitionniste

Ce chapitre présente la logique superintuitioniste LC de DUMMETT (1959), qui reprend les principales caractéristiques de la logique intuitionniste, en y rajoutant l'axiome (paradoxal) $p \Rightarrow q \vee q \Rightarrow p$, qui ordonne les valeurs de vérité linéairement. L'étude en est très succincte pour éviter les redites avec les logiques de Post à m valeurs de vérité, qui sont une expansion de la logique superintuitionniste à m valeurs de vérité ($m \leq \omega$) (RASIOWA, 1973, ORŁOWSKA, 1980).

Nous resituons d'abord la logique superintuitionniste dans le contexte historique, en partant de GÖDEL pour aboutir aux axiomatisations de DUMMETT et de HORN.

LC peut être décrite par une sémantique des mondes possibles (comme la logique intuitionniste). Chaque monde assigne en quelque sorte à toute formule l'une des deux valeurs de vérité, 'vrai' ou 'ne peut être établi'.

Dans le cadre d'un atelier d'inférence, l'étude de l'automatisation de logiques intermédiaires se justifie par le fait que ces logiques, plus simples, permettent de clarifier des problèmes qui se posent dans les logiques qu'elles étendent (ici en l'occurrence la logique intuitionniste).

7.1 Définition de la logique superintuitionniste

GÖDEL (1932) montre qu'il n'existe pas de matrices caractéristiques de la logique intuitionniste finies. Ce résultat est établi en exhibant une séquence de logiques polyvalentes, avec un nombre croissant de valeurs de vérité, dont la suite des ensembles des tautologies, ordonnée suivant le nombre croissant de valeurs de vérité décroît strictement et dont pourtant chaque ensemble des tautologies contient les théorèmes de la logique intuitionniste et est inclus dans l'ensemble des théorèmes de la logique classique. Cette séquence, appelée dans la suite $(\mathsf{LC}_m)_{m\leq\omega}$, a été axiomatisée par DUMMETT (1959) et constitue une extension de la logique intuitionniste. (HORN (1969) a repris le travail de DUMMETT et l'a étendu au premier ordre avec l'hypothèse du domaine constant.)

GÖDEL utilise ensuite une séquence de formules $(G_n)_{n<\omega}$

$$G_n : \qquad \dot{\bigvee}_{0\leq i\leq n}\dot{\bigvee}_{0\leq j<i}[(F_i \dot{\Rightarrow} F_j)\dot{\wedge}(F_j \dot{\Rightarrow} F_i)]$$

si bien que G_n ne soit une tautologie que dans LC_m, $n > m$. L'informaticien attentif aura reconnu dans F_i une chaussette et dans les valeurs de vérité de LC_m, des tiroirs; l'angliciste respectivement des pigeons et leur pigeonnier trop étroit.

Par ailleurs, HORN (1969) donne également une caractérisation algébrique de LC; il introduit une sous-classe d'algèbres de Heyting, les L-algèbres, dont il montre qu'elles sont isomorphes au produit cartésien d'algèbres de Heyting linéaires (voir l'ANNEXE A sur les algèbres pour s'orienter dans ce maquis d'algèbres).

L'axiomatisation de la logique intuitionniste retenue est celle de KLEENE (1952); elle diffère de HORN (1969). L'axiome du domaine constant, appelé dans la FIGURE 7.1 axiome de HORN, a été proposé, dans le cadre de la logique intuitionniste, pour la première fois par GÖRNEMANN (1971), qui prouve la complétude de son axiomatisation de la logique intuitionniste avec domaine constant (voir (VAN DALEN, 1986), par exemple). Au passage, ceci montre l'intérêt pratique des logiques intermédiaires (ici de LC) pour laquelle HORN propose cet axiome deux années plutôt et prouve la complétude par rapport aux L-algèbres. La FIGURE 7.1 donne une axiomatique de LC du premier ordre (avec hypothèse du domaine constant). Pour obtenir à partir de l'axiomatisation de LC, une axiomatisation de LC_m, $m < \omega$, il suffit de ajouter comme axiome la formule G_{m+1} définie plus haut (voir (GÖDEL, 1932, GOTTWALD, 1989)).

La définition des matrices de LC_m[1], que présente GÖDEL (1932) pour tout nombre fini de valeurs de vérité et DUMMETT (1959) pour $m = \omega$, est reproduite dans la FIGURE 7.2. Cette matrice n'est pas une algèbre de Heyting, mais une algèbre de Bouwer, et isomorphe en tant que telle à une algèbre de Heyting. La matrice que donne ROSE (1953), prouvée isomorphe à la matrice de la FIGURE 7.2 dans (DUMMETT, 1959), est une algèbre de Heyting.

DUMMETT montre la complétude du système *propositionnel* de la FIGURE 7.1 par rapport à la sémantique de la FIGURE 7.2; HORN se consacre à prouver la complétude pour le système du premier ordre par rapport aux L-algèbres (HORN, 1969).

Plus exactement le théorème suivant y est prouvé.

[1]Avec un abus dans la notation, on confond la matrice et la logique induite.

THÉORÈME 7.1.1. *Soit F une formule. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) F est dérivable du système de Hilbert de la FIGURE *7.1*

(ii) F est $\mathfrak{A}$-valide dans toute chaîne $\mathfrak{A}$ de valeurs de vérité

(iii) F est $[0,1]$-valide

(iv) F est $\mathbb{Q} \cap [0,1]$-valide

(v) F est $\mathfrak{A}$-valide dans toute chaîne dénombrable $\mathfrak{A}$ de valeurs de vérité

PREUVE. Voir (HORN, 1969, Theorem 3.8). C.Q.F.D.

ORŁOWSKA (1980) s'intéresse plus particulièrement aux formules LC_ω-valide. Dans cet article, cette logique est appelée la *logique intermédiaire de* HORN (voir (HORN, 1969, § 5)).

L'avantage de la matrice de la FIGURE 7.2 est de fournir une "justification" à grâce à une sémantique des mondes possibles.

7.2 Sémantique de Kripke pour LC

Comme LC est une logique intermédiaire entre la logique classique et la logique intuitionniste, il est possible de développer une sémantique des mondes possibles, semblable à celle de la logique intuitionniste (KRIPKE, 1963, VAN DALEN, 1986). Dans la suite, nous nous restreignons également à la logique de HORN, c'est-à-dire que nous imposons $m \leq \omega$.

DÉFINITION 7.2.1. *Un LC_m-repère de Kripke est un couple $\langle(\Im_i)_{i<m}, \Vdash\!\!-\rangle$ où*

- $m \leq \omega$,
- $(\Im_i)_{i<m}$ *une suite d'interprétations de même domaine d'individus $\mathcal{I}$ telles que:*
  - *(Hypothèse du domaine constant) pour tous $i,j < m$, $X \in \Sigma \cup \mathcal{V}_f$, $\Im_i(X) = \Im_j(X)$*
  - *(Bivalence) pour tous $i < m$, $n \in IN$, $P \in \Omega_n$, $\Im_i(P)$ est une application de $\mathcal{I}^n \to \{0,1\}$*[2]
  - *(Monotonie) pour tous $i < j < m$, $n \in IN$, $P \in \Omega_n$,*

$$\{\vec{a} \in \mathcal{I}^n : \Im_{i,P}(\vec{a}) = 1\} \subseteq \{\vec{a} \in \mathcal{I}^n : \Im_{j,P}(\vec{a}) = 1\}$$

  - *(Définition inductive d'une évaluation)*
    (F1) $\Im_i(F_1 \dot{\wedge} F_2) = 1$ *ssi* $\Im_i(F_1) = \Im_i(F_2) = 1$,
    (F2) $\Im_i(F_1 \dot{\vee} F_2) = 1$ *ssi* $\Im_i(F_1) = 1$ *ou* $\Im_i(F_2) = 1$,
    (F3) $\Im_i(F_1 \dot{\Rightarrow} F_2) = 1$ *ssi pour tout* $j \geq i$, $\Im_j(F_2) = 1$, *quand* $\Im_j(F_1) = 1$,

---

[2] *On lira 'vrai' pour 1, et 'ne peut être prouvé' pour 0; voir par exemple (*WÓJCICKI, 1988*)*

(F₄) $\Im_i(\neg F) = 1$ *ssi pour tout* $j \geq i$, $\Im_j(F) = 0$,
(F₅) $\Im_i(\forall x \cdot F(x)) = 1$ *ssi pour tout* $a \in \mathcal{I}$, $\Im_{i\,a}^{\,\dot{x}}(F(\dot{x})) = 1$,
(F₆) $\Im_i(\exists x \cdot F(x)) = 1$ *ssi il existe* $a \in \mathcal{I}$ *tel que* $\Im_{i\,a}^{\,\dot{x}}(F(\dot{x})) = 1$.

- $\Vdash$ *est une relation de* $\mathbb{N}_m \times \mathcal{F}bf$, *appelée* relation de forcing, *telle que pour tout* $i < m$, *et toute formule* F, $i \Vdash F$ *ssi* $\Im_i(F) = 1$.

Une formule F *est satisfaite par ce repère de Kripke ssi* $0 \Vdash F$. ◊

On définit de même une *relation de rejet* $\dashv\vert$, telle que $i \dashv\vert F$ ssi $\Im_i(F) = 0$.

PROPOSITION 7.2.1. *Pour tout* $i \leq j < m$ *et toute formule* F,
si $i \Vdash F$, *alors* $j \Vdash F$;
si $j \dashv\vert F$, *alors* $i \dashv\vert F$.

PREUVE. Pour F atomique, c'est une conséquence immédiate de la condition de *Monotonicité* de la DÉFINITION 7.2.1. Par une simple induction structurelle, on prouve les résultats annoncés. C.Q.F.D.

Pour mettre clairement en lumière le lien entre la sémantique des mondes possibles et les matrices de DUMMETT, il est judicieux d'introduire un monde supplémentaire.

DÉFINITION 7.2.2. *Un* LC_m*-repère de Kripke étendu* $\langle (\Im_i)_{i<m}, \Im_m, \Vdash \rangle$ *est un triplet où*

- $\langle (\Im_i)_{i<m}, \Vdash \rangle$ *est un* LC_m*-repère de Kripke,*
- $\Vdash$ *est étendue à* $\mathbb{N}_{m+1} \times \mathcal{F}bf$ *de sorte que* $m \Vdash F$ *ssi pour tout* $i < m$, $i \dashv\vert F$,
- $\Im_m$ *est l'unique interprétation telle que pour tout* F, $m \Vdash F$ *ssi* $\Im_m(F) = 1$

Une formule est satisfaite par le LC_m*-repère de Kripke étendu, ssi elle l'est par* $\langle (\Im_i)_{i<m}, \Vdash \rangle$. ◊

Le monde ultime qui vient d'être ajouté est l'intersection de la suite décroissante des ensembles des formules rejetées dans un monde ultérieur. Pour une formule F rejetée dans le monde i, $i < m$, seules deux situations peuvent se produire: un monde successeur j, $i < j < m$, force F ou tout monde antérieur à m rejette F. Ainsi, les LC_m-repères de Kripke étendus permettent d'éliminer la relation $\dashv\vert$. De plus, on procède comme dans le cas des logique polyvalentes avec un nombre fini de valeurs de vérité, à une extension de la signature fonctionnelle, en rajoutant un nombre infini dénombrable de constantes inédites (des paramètres). On note ici également par $\widehat{\Sigma}$ la nouvelle signature fonctionnelle.

PROPOSITION 7.2.2. *Dans un* LC_m*-repère de Kripke étendu* $\langle (\Im_i)_{i<m}, \Im_m, \Vdash \rangle$, *la relation* $\Vdash$ *vérifie:*

(FE$_1$) *pour tout* $i \leq m$ *et tout atome* A *de* $\mathcal{F}bf$, $i \Vdash A$ *ssi* $\Im_i(A) = 1$,

(FE$_2$) *pour tout* $i < m, i \Vdash F_1 \dot\wedge F_2$ *ssi* $i \Vdash F_1$ *et* $i \Vdash F_2$,

(FE$_3$) *pour tout* $i < m, i \Vdash F_1 \dot\vee F_2$ *ssi* $i \Vdash F_1$ *ou* $i \Vdash F_2$,

(FE$_4$) *pour tout* $i < m, i \Vdash F_1 \dot\Rightarrow F_2$ *ssi pour tout* j *tel que* $i \leq j < m$ *et* $j \Vdash F_1$, $j \Vdash F_2$,
En particulier, $0 \Vdash F_1 \dot\Rightarrow F_2$ *ssi pour tout* $j \leq m$ $j \Vdash F_2$, *quand* $j \Vdash F_1$,

(FE$_5$) *pour tout* $i < m, i \Vdash \dot\neg F_1$ *ssi* $m \Vdash F_1$,

(FE$_6$) *pour tout* $i < m, i \Vdash \forall x \cdot F(x)$ *ssi pour tout terme* t $i \Vdash F(t)$,

(FE$_7$) *pour tout* $i < m, i \Vdash \exists x \cdot F(x)$ *ssi pour un paramètre inédit* a $i \Vdash F(a)$.

(FE'$_1$) $m \Vdash F_1 \dot\wedge F_2$ *ssi* $m \Vdash F_1$ *ou* $m \Vdash F_2$,

(FE'$_2$) $m \Vdash F_1 \dot\vee F_2$ *ssi* $m \Vdash F_1$ *et* $m \Vdash F_2$,

(FE'$_3$) $m \Vdash F_1 \dot\Rightarrow F_2$ *ssi* $m \Vdash F_2$ *et il existe* $i < m$ *tel que* $i \Vdash F_1$,

(FE'$_4$) $m \Vdash \dot\neg F_1$ *ssi il existe* $i < m$ *tel que* $i \Vdash F_1$,

(FE'$_5$) $m \Vdash \forall x \cdot F(x)$ *ssi pour tout* $i < m$, *il est un paramètre inédit* a $i \dashV F(a)$,

(FE'$_6$) $m \Vdash \exists x \cdot F(x)$ *ssi pour tout terme* t $m \Vdash F(t)$.

PREUVE. Les points (FE$_1$)-(FE$_7$) sont à peu près la reprise des points (F$_1$)-(F$_7$) de la DÉFINITION 7.2.2. En fait, il n'y a que le cas $i = m$ du point (FE$_1$) à prouver; les autres cas correspondent à la DÉFINITION 7.2.1 d'un LC_m-repère de Kripke.

Pour tout atome A, $m \Vdash A$ ssi pour tout $i < m$ $i \dashV A$ ssi pour tout $i < m$ $\Im_i(A) = 0$ ssi $\Im_m(A) = 1$.

(FE'$_1$) $m \Vdash F_1 \dot\wedge F_2$ ssi pour tout $i < m$, $i \dashV F_1 \dot\wedge F_2$. Supposons qu'il ait un indice $j < m$ tel que $j \Vdash F_1$ et $j \Vdash F_2$. Alors $j \Vdash F_1 \dot\wedge F_2$, d'où une contradiction. Réciproquement, si $m \Vdash F_k$ ($k = 1$ ou $k = 2$), pour tout $i < m$ $i \dashV F_k$ donc également $i \dashV F_1 \dot\wedge F_2$, c'est-à-dire $m \Vdash F_1 \dot\wedge F_2$.

(FE'$_2$) analogue au cas précédent.

(FE'$_3$) $m \Vdash F_1 \dot\Rightarrow F_2$ ssi pour tout $i < m$, $i \dashV F_1 \dot\Rightarrow F_2$ ssi pour tout $i < m$ il existe j tel que $j < m$, $j \geq i$, $j \dashV F_2$ et $j \Vdash F_1$.
Donc, il existe $i < m$ tel que $i \Vdash F_1$. Par ailleurs s'il existait un indice $i < m$ tel que $i \Vdash F_2$, alors il n'existerait pas d'indice $j \geq i$ (et $j < m$) tel que $j \dashV F_2$. Donc pour tout indice $i < m$ $i \dashV F_2$ c'est-à-dire $m \Vdash F_2$.
La converse est triviale.

(FE'$_4$) $m \Vdash \dot\neg F_1$ ssi pour tout $i < m$, $i \dashV \dot\neg F_1$ ssi il existe $j < m$ tel que $j \Vdash F_1$.

Le cas des quantificateurs est analogue à celui de la conjonction et de la disjonction. C.Q.F.D.

Une LC_m-interprétation est une application dont l'image est incluse dans $\mathbb{N}_{m+1}$.

PROPOSITION 7.2.3. *Soit F une formule de $\mathcal{F}bf$*

Il existe un LC_m-repère de Kripke $\langle(\Im_i)_{i<m}, \Im_m, \Vdash\!\!-\rangle$ satisfaisant F ssi il existe une LC_m-interprétation $\Im$ telle que $\Im(F) = 0$

PREUVE. À partir du LC_m-repère de Kripke étendu $\langle(\Im_i)_{i<m}, \Im_m, \Vdash\!\!-\rangle$, on définit la LC-interprétation $\Im$, qui associe à tout atome A de $\mathcal{F}bf$:

$$\Im(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Im_0(A) = 1 \\ i & \text{si } \Im_{i-1}(A) = 0 \text{ et } \Im_i(A) = 1 \\ m & \text{sinon (c'est-à-dire } \Im_m(A) = 1) \end{cases}$$

On montre que pour toute formule F de $\mathcal{F}bf$

$$\Im(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \Vdash\!\!- F \\ i & \text{si } i-1 -\!\!\!\!\dashv\!| F \text{ et } i \Vdash\!\!- F \\ m & \text{sinon (c'est-à-dire } m \Vdash\!\!- F) \end{cases}$$

Cette affirmation est vérifiée par induction structurelle.

Réciproquement, étant donnée une LC_m-interprétation, $\Im$ on construit un LC_m-repère de Kripke étendu en définissant pour $i < m$, $\Im_i(A) = 1$ ssi $\Im(A) \leq i$ et $\Im_m(A) = 1$ ssi $\Im(A) = m$.

On vérifie par induction structurelle que l'on définit bien ainsi un LC_m-repère de Kripke étendu.

Ce qui établit le résultat annoncé puisque dans les deux constructions, pour toute formule F, $0 \Vdash\!\!- F$ ssi $\Im(F) = 0$. C.Q.F.D.

7.3 Conclusion

Ce chapitre a présenté la logique LC, en évitant les détails et la définition de calculs adaptés aux exigences de la déduction automatique. Le chapitre suivant, consacré aux logiques de Post, construit des calculs des tableaux sémantiques basés sur l'interprétation de Kripke donné pour LC. Ce chapitre donne également un isomorphisme entre LC_m et la logique de Post ayant le même nombre de valeurs de vérité. Ainsi, pour établir qu'une formule est un théorème de LC_m, il suffit de le prouver dans P_m, $m \leq \omega$.

SCHÉMAS D'AXIOMES DE LA LOGIQUE INTUITIONNISTE:

$$F \Rightarrow (G \Rightarrow F)$$
$$(F \Rightarrow G) \Rightarrow [(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow (F \Rightarrow H)]$$
$$F \Rightarrow (G \Rightarrow F \dot{\wedge} G)$$
$$F \dot{\wedge} G \Rightarrow F \qquad F \dot{\wedge} G \Rightarrow G$$
$$G \Rightarrow F \dot{\vee} G \qquad F \Rightarrow F \dot{\vee} G$$
$$(F \Rightarrow H) \Rightarrow [(G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \dot{\vee} G \Rightarrow H)]$$
$$(F \Rightarrow G) \Rightarrow [(F \Rightarrow \dot{\neg} G) \Rightarrow \dot{\neg} F]$$
$$F \Rightarrow (\dot{\neg} F \Rightarrow G)$$
$$F(t) \Rightarrow \exists x \cdot F(x)$$
$$\forall x \cdot F(x) \Rightarrow F(t)$$

SCHÉMA D'AXIOMES DE DUMMETT:

$$(F \Rightarrow G) \dot{\vee} (G \Rightarrow F)$$

SCHÉMA D'AXIOMES DE HORN:

$$[\forall x \cdot (F \dot{\vee} G(x))] \Rightarrow (F \dot{\vee} \forall x \cdot G(x))$$

RÈGLES D'INFÉRENCE:

Modus ponens

$$\frac{F \qquad F \Rightarrow G}{G}$$

Généralisation

$$\frac{F \Rightarrow G(\dot{x})}{F \Rightarrow \forall x \cdot G(x)}$$

Particularisation

$$\frac{F(\dot{x}) \Rightarrow G}{\exists x \cdot F(x) \Rightarrow G}$$

Avec les conventions d'usage t est un terme arbitraire de $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}_f,)$ et $\dot{x} \in \mathcal{V}_f$.

Figure 7.1: Axiomatisation de LC du Premier Ordre

- le support de l'algèbre est $\mathbb{N}_{m+1} = \{n : n \leq m\}$.
- le seul élément désigné est 0.
- $\Re_{\dot\wedge} = \max$
- $\Re_{\dot\vee} = \min$
- $\Re_{\dot\Rightarrow}$:
$$\begin{array}{ccccl} \mathbb{N}_{m+1} \times \mathbb{N}_{m+1} & \longrightarrow & \mathbb{N}_{m+1} & & \\ \langle i, j \rangle & \longmapsto & 0 & & \text{si } i \leq j \\ \langle i, j \rangle & \longmapsto & j & & \text{sinon} \end{array}$$
- $\Re_{\dot\neg}$:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_{m+1} & \longrightarrow & \mathbb{N}_{m+1} \\ n & \longmapsto & \Re_{\dot\Rightarrow}(n, m) = \begin{cases} m & \text{si } n < m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On complète cette matrice en considérant les quantificateurs comme des "généralisations" de la conjonction et de la disjonction.

- $\Re_{\forall} = \max$
- $\Re_{\exists} = \min$

Figure 7.2: Matrice de LC_m du Premier Ordre

Chapitre 8

Logiques de Post

Ce chapitre étudie des calculs pour les logiques de Post finies et infinie, notées dans la suite P_m, avec $m \leq \omega$. Tout d'abord la matrice qui définit ces logiques est donnée; le pouvoir d'expression de ces logiques est circonscrit.

Une première étude des logiques de Post d'ordre fini est rapportée par exemple dans (RASIOWA, 1974*a*). Ces résultats ont conduit RASIOWA (1973) à généraliser l'axiomatisation de (RASIOWA, 1974*a*) à la logique de Post d'ordre sup ω. Cette axiomatisation montre qu'il est nécessaire d'utiliser une ω-règle pour assurer la complétude (c'est là la principale originalité de P_ω).

Pour compléter l'étude sémantique faite dans la première section, nous définissons ici une sémantique des mondes possibles à la KRIPKE, en nous servant des rapports liant la logique de Post à la logique superintuitionniste de DUMMETT; c'est cette sémantique qui éclairera la plupart des calculs étudiés en détail dans la suite du chapitre.

Avant de s'attacher à l'automatisation de ces logiques par des calculs par tableaux analytiques, nous évoquerons les autres calculs décrits dans la littérature, outre le système de Hilbert de RASIOWA, déjà évoqué dans la page historique de la première section, les systèmes de ORLOWSKA: son système par résolution et son système de Gentzen.

Les calculs par tableaux qui nous occuperont dans le reste du chapitre peuvent être vus comme des sophistications du système de Gentzen. Pourtant deux traits distinctifs font que ces calculs sont *plus adaptés à la déduction automatique*:

- ils manipulent explicitement et symboliquement les valeurs de vérité
- l'énumération de l'univers de Herbrand est remplacé par l'unification.

En fait, nous commencerons par un calcul de base que nous enrichirons en y incorporant, la skolemisation, le raisonnement sur les valeurs de vérité, traitées comme des contraintes sur les entiers et finalement l'unification.

En guise de conclusion, nous citons les applications de la logique de Post que l'on trouve dans la littérature et qui ont justifié l'intérêt particulier témoigné à cette logique polyvalente.

8.1 Définition des Logiques de Post

Les logiques de Post se distinguent par le nombre de valeurs vérité; la sémantique des connecteurs est très voisine. C'est pourquoi lorsqu'il n'y a pas de risques de confusions, nous parlerons de *la* logique de Post en voulant désigner toutes les logiques de cette séquence de logique.

La logique de Post (généralisée) s'obtient à partir de LC en ajoutant des connecteurs logiques identifiant "nommément" le monde de la sémantique de Kripke présentée pour LC. Dans la suite, les logiques de Post telles que POST (1921) les a introduites, ne sont évoquées que dans le soucis de l'exhausitivité. La modification traitée ici celle donnée par exemple dans RASIOWA (1974*a*), qui en crédite ROUSSEAU (1970*a*); elle permet de mettre mieux en évidence la structure algébrique de ces logiques.

La signature logique des logiques de Post se compose des symboles

- $\dot{\wedge}$, $\dot{\vee}$, $\dot{\Rightarrow}$ sont ses connecteurs binaires,
- $\dot{\neg}$, $(\mathsf{D}_{1+i})_{i\in\omega}$ ses connecteurs unaires,
- $\mathsf{e}_\omega = \top$, $\mathsf{e}_0 = \bot$,$(\mathsf{e}_i)_{i\in\omega}$ ses constantes logiques
- $\forall$, $\exists$ ses quantificateurs.

La logique de Post qui contient tous ces symboles est appelée d'ordre sup ω. La logique de Post d'ordre $m+1 \leq \omega$, notée dans la suite P_m, ne contient pas les symboles D_{1+n} pour tout entier naturel $n \geq m$ et e_n pour tout entier naturel $n > m$ et compte $m+1$ valeurs de vérité. P_1 est la logique classique Les sémantiques des connecteurs des logiques de Post sont données dans la Figure 8.1.

Comme pour LC, on nomme P_m également la matrice caractéristique de P_m.

La proposition suivante fait le lien entre logiques de Post et les algèbres de même nom.

PROPOSITION 8.1.1. *L'algèbre définie dans la Figure 8.1 est une algèbre de Post*

- le support de l'algèbre est $\mathcal{P}_m = \{n : n < m\} \cup \{\omega\}$; les valeurs de vérité sont ordonnées suivant l'ordre naturel des ordinaux.
- le seul élément désigné est ω.
- $\Re_{\dot{\wedge}} = \min$
- $\Re_{\dot{\vee}} = \max$
- $$\begin{array}{llllll} \Re_{\dot{\Rightarrow}} : & \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m & \rightarrow & \mathcal{P}_m & \\ & \langle i,j \rangle & \mapsto & \omega & \text{si } i \leq j \\ & \langle i,j \rangle & \mapsto & j & \text{sinon} \end{array}$$
- la négation est introduite par définition:
  $$\begin{array}{llll} \Re_{\dot{\neg}} : & \mathcal{P}_m & \rightarrow & \mathcal{P}_m \\ & n & \mapsto & \Re_{\dot{\Rightarrow}}(n,0) = \begin{cases} \omega & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
- Pour $0 < i < 1 + m$, $$\begin{array}{llllll} \Re_{\mathsf{D}_i} : & \mathcal{P}_m & \rightarrow & \mathcal{P}_m & \\ & n & \mapsto & \omega & \text{si } n \leq i \\ & n & \mapsto & 0 & \text{sinon} \end{array}$$
  Ces connecteurs unaires ressemblent à des projections dans le monde d'indice i.
- Pour $i \in \mathcal{P}_m$, $\Re_{\mathbf{e}_i} = i$.

On complète cette matrice en considérant les quantificateurs comme des "généralisations" de la conjonction et de la disjonction.

- $\Re_{\forall} = \min$
- $\Re_{\exists} = \sup$

Figure 8.1: Sémantique de la logique de POST d'ordre $m + 1$

PREUVE. Vérification immédiate. Voir (RASIOWA, 1974*a*, RASIOWA, 1973) qui utilisent ces algèbres de Post particulières dans la preuve de complétude du calcul de Hilbert HP_m, présenté plus bas. C.Q.F.D.

Le "nom" donné aux valeurs de vérité est celui de (RASIOWA, 1973). Avec ce choix, on constate facilement que la matrice de P_m est une sous-matrice de P_{1+m}.

Pour tout $m < \omega$, P_m est une extension de LC_m:

PROPOSITION 8.1.2. *Soit $m < \omega$. Notons par $\Re'_c$ et $\Re''_c$ la sémantique de $c \in \{\dot\neg, \dot\vee, \dot\wedge, \dot\Rightarrow, \forall, \exists\}$ dans les matrices des Figures 7.2 et 8.1 respectivement. Les deux matrices*

$$\langle \mathbb{N}_{m+1}, \{0\}, \Re'_{\dot\neg}, \Re'_{\dot\vee}, \Re'_{\dot\wedge}, \Re'_{\dot\Rightarrow}, \Re'_{\forall}, \Re'_{\exists}\rangle \; et \langle \mathcal{P}_m, \{\omega\}, \Re''_{\dot\neg}, \Re''_{\dot\vee}, \Re''_{\dot\wedge}, \Re''_{\dot\Rightarrow}, \Re''_{\forall}, \Re''_{\exists}\rangle$$

sont isomorphes.

PREUVE. On vérifie facilement que pour $c \in \{\dot\neg, \dot\vee, \dot\wedge, \dot\Rightarrow, \forall, \exists\}$, $\rho_m(\Re'_c) = \Re''_c$ et $\rho_m(\Re''_c) = \Re'_c$ où ρ_m est défini par:

$$\begin{array}{llcll} \rho_m : & \mathbb{N}_{m+1} & \longrightarrow & \mathcal{P}_m & \\ & i & \longmapsto & m-i & \text{si } i > 0 \\ & 0 & \longmapsto & \omega & \end{array}$$

C.Q.F.D.

Il s'en suit que toute LC_m-tautologie est une P_m-tautologie ($m \leq \omega$). C'est pourquoi nous n'avons pas développé un calcul spécifique pour LC_m.

Une P_m-interprétation est une interprétation dont l'ensemble des valeurs de vérité est $\mathcal{P}_m$.

8.1.1 Variantes Sémantiques

Dans leur formulation originale, les connecteurs primitifs sont $\prime$ et $\dot\vee$; tous les autres connecteurs sont introduits par définition. Dans la logique de Post généralisée, la négation est celle de LC. Ceci est la sémantique de la négation qu'utilise RASIOWA (1974*a*), elle diffère de la formulation originale, qui identifie la négation avec la fonction successeur, ce qui fournit la définition suivante (voir (RESCHER, 1969)):

$$\begin{array}{lccc} \Re_\prime : & \sup \omega & \longrightarrow & \sup \omega \\ & n & \longmapsto & n' = n+1 \\ & \omega & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Ce n'est là qu'une généralisation du cas considéré explicitement par POST (1921), pour $m < \omega$:

$$\begin{array}{lccc} \Re_\prime : & \mathbb{N}_{m+1} & \longrightarrow & \mathbb{N}_{m+1} \\ & n & \longmapsto & n+1 \pmod m \end{array}$$

Avec cette définition de la négation, POST (1921) prouve que $/$ et $\dot{\vee}$ constituent une base complète (c'est-à-dire que toute fonction dans $\mathcal{P}_m$ peut être décrite par une formule propositionnelle (voir (POST, 1921) pour $m < \omega$).

Les logiques de Post généralisées sont également complètes.

Définissons δ_i de la sorte.

$$\begin{aligned}
&\delta_0\, F = \dot{\neg}\mathsf{D}_1\, F\\
&\delta_i\, F = \dot{\neg}\mathsf{D}_{i+1}\, F \dot{\wedge} \mathsf{D}_i\, F\\
&\delta_\omega\, F = \mathsf{D}_m\, F
\end{aligned}$$

Ainsi toute application n-aire f dans $\mathcal{P}_m$, pour $m < \omega$, peut être exprimée par la formule F:

$$\bigvee_{\vec{w}\in\mathcal{P}_m{}^n} \mathsf{e}_{f\vec{w}} \dot{\wedge} \delta_{w_1}(p_1) \dot{\wedge} \cdots \dot{\wedge} \delta_{w_n}(p_n)$$

Soit $\Im$ une interprétation.

$$f(\Im(p_1), \ldots, \Im(p_n)) = \Im(F)$$

En ce qui concerne P_ω, on n'a pas cette complétude, puisque l'ensemble des applications dans $\mathcal{P}_\omega$ n'est pas dénombrable.

Terminons ce paragraphe sur les fonctions de vérité définissables dans les logiques de Post, en signalant que les connecteurs ne sont pas indépendants: dans toute interprétation $\dot{\neg}F$ et $F \dot{\Rightarrow} \mathsf{e}_0$ prennent la même valeur de vérité.

GOTTWALD (1989) donne comme définition pour l'implication dans la logique de Post d'ordre m (où $m-1$ remplace ω):

$$\begin{array}{lllll}
\mathfrak{R}_{\dot{\Rightarrow}}: & \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m & \to & \mathbb{N}_m & \\
& \langle i,j\rangle & \mapsto & m-1 & \text{si } i \leq j\\
& \langle i,j\rangle & \mapsto & j & \text{si } i \text{ est une valeur désignée et } i > j\\
& \langle i,j\rangle & \mapsto & m-1+j-i & \text{si } i \text{ n'est pas une valeur désignée et } i > j
\end{array}$$

Nous ne considérerons pas cette implication, construite à partir des implications telles qu'elles apparaissent dans LC_m et dans la logique de Lukasiewicz à $m+1$ valeurs de vérité. GOTTWALD (1989) ne justifie pas l'intérêt de ce connecteur éclectique.

Dans (POST, 1921, §16), POST évoque un plongement dans la logique classique qui est essentiellement ce que formalisent les repères de Kripke propositionnels dont la définition, pour le premier ordre est donnée dans la section suivante.

8.1.2 Axiomatisation de P_m

Pour achever ce tour d'horizon historique très sommaire, nous indiquons une axiomatisation complète de P_m, $m \leq \omega$, due à RASIOWA (1973). Son axiomatisation est reproduite en Figure 8.2. Ce système de Hilbert est appelé dans la suite HP_m [1] (RASIOWA, 1973) généralise plusieurs résultats qui avaient déjà été obtenus pour les

[1] ORLOWSKA (1976) nomme ce calcul *logique de* RASIOWA.

SCHÉMAS D'AXIOMES DE LA LOGIQUE INTUITIONNISTE:

$$F \Rightarrow (G \Rightarrow F)$$
$$(F \Rightarrow G) \Rightarrow [(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow (F \Rightarrow H)]$$
$$F \dot{\wedge} G \Rightarrow F \qquad F \dot{\wedge} G \Rightarrow G$$
$$(F \Rightarrow H) \Rightarrow [(G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \dot{\vee} G \Rightarrow H)]$$
$$(F \Rightarrow G) \Rightarrow [(F \Rightarrow \dot{\neg} G) \Rightarrow \dot{\neg} F] \qquad F \Rightarrow (\dot{\neg} F \Rightarrow G)$$
$$F(t) \Rightarrow \exists x \cdot F(x) \qquad \forall x \cdot F(x) \Rightarrow F(t)$$

avec t un terme de $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}_f)$

AUTRES SCHÉMAS D'AXIOMES (pour tous i, j, j', $1 \leq i, j < 1 + m$, $0 \leq j' < m$):

$$\mathsf{D}_i(F \dot{\wedge} G) \Rightarrow \mathsf{D}_i\, F \dot{\wedge} \mathsf{D}_i\, G \qquad \mathsf{D}_i\, F \dot{\wedge} \mathsf{D}_i\, G \Rightarrow \mathsf{D}_i(F \dot{\wedge} G)$$
$$\mathsf{D}_i(F \dot{\vee} G) \Rightarrow \mathsf{D}_i\, F \dot{\vee} \mathsf{D}_i\, G \qquad \mathsf{D}_i\, F \dot{\vee} \mathsf{D}_i\, G \Rightarrow \mathsf{D}_i(F \dot{\vee} G)$$
$$\mathsf{D}_i(F \Rightarrow G) \Rightarrow (\dot{\bigwedge}_{k=1}^{i} \mathsf{D}_k\, F \Rightarrow \mathsf{D}_k\, G) \qquad (\dot{\bigwedge}_{k=1}^{i} \mathsf{D}_k\, F \Rightarrow \mathsf{D}_k\, G) \Rightarrow \mathsf{D}_i(F \Rightarrow G)$$
$$\mathsf{D}_i\, \mathsf{D}_j\, F \Rightarrow \mathsf{D}_j\, F \qquad \mathsf{D}_j\, F \Rightarrow \mathsf{D}_i\, \mathsf{D}_j\, F$$
$$\mathsf{D}_i\, \dot{\neg} F \Rightarrow \dot{\neg} \mathsf{D}_1\, F \qquad \mathsf{D}_{i+1}\, F \Rightarrow \mathsf{D}_i\, F$$
$$\mathsf{D}_1\, F \dot{\vee} \dot{\neg} \mathsf{D}_1\, F$$
$$\mathsf{D}_i\, \mathsf{e}_j \qquad \text{ssi } i \leq j$$
$$\dot{\neg} \mathsf{D}_i\, \mathsf{e}_{j'} \qquad \text{ssi } i > j'$$
$$\mathsf{e}_\omega$$
$$\mathsf{D}_i\, F \dot{\wedge} \mathsf{e}_i \Rightarrow F$$

RÈGLES D'INFÉRENCE

Modus ponens

$$\frac{F \qquad F \Rightarrow G}{\mathrm{G}}$$

Généralisation

$$\frac{F \Rightarrow G(\dot{x})}{F \Rightarrow \forall x \cdot G(x)}$$

Particularisation

$$\frac{F(\dot{x}) \Rightarrow G}{\exists x \cdot F(x) \Rightarrow G}$$

Introduction de D_i

Pour tout $i < m$

$$\frac{F}{\mathsf{D}_i\, F}$$

Élimination de D_i

$$\frac{(\mathsf{D}_i\, F)_{i<m}}{F}$$

Figure 8.2: Axiomatisation de la logique de POST d'ordre $m + 1$ (système HP_m)

logiques de Post d'ordre fini (RASIOWA, 1974a). RASIOWA (1973) montre également que son calcul est complet, c'est-à-dire tout énoncé vrai dans toute algèbre de Post d'ordre sup ω peut être prouvé dans HP_ω.

THÉORÈME 8.1.1. *(Correction de HP_m) Tout théorème de HP_m est une tautologie de P_m.*

PREUVE. On vérifie que tout axiome de HP_m est une tautologie de P_m. De même, les règles d'inférence sont des conséquences logiques (de P_m). C.Q.F.D.

THÉORÈME 8.1.2. *(Complétude de HP_m, (RASIOWA, 1973)) Toute tautologie de P_m est une théorème de HP_m.*

PREUVE. Une preuve algébrique est donnée de la contraposée dans (RASIOWA, 1973):

Soit F un non-théorème de HP_m.

- On construit l'algèbre de Lindenbaum $\mathcal{A}$ de HP_m, et on vérifie que c'est une algèbre de Post.
- On montre qu'il existe un filtre principal $\mathcal{F}$ ne contenant pas F.
- L'algèbre quotient $\mathcal{A}/\mathcal{F}$ est isomorphe à P_ω, et F et e_ω ne sont pas équivalents (puisque $\mathcal{A} \neq \mathcal{F}$).

C.Q.F.D.

REMARQUE. Les axiomes de DUMMETT et de HORN sont des tautologies de P_m, et par conséquent des théorèmes de HP_m. Comme ces axiomes ne sont pas des théorèmes intuitionnistes, toute preuve de ces énoncés dans HP_m, utilise nécessairement des axiomes comprenant d'autres connecteurs que $\dot{\Rightarrow}, \dot{\vee}, \dot{\wedge}, \dot{\neg}, \forall, \exists$. Le système HP_ω n'est donc pas une bonne axiomatisation, au sens où l'entendent ANDERSON & BELNAP (1975). Comme signalé dans (RASIOWA, 1973), toute formule de $\mathsf{LC}_m, m \leq \omega$ est un théorème de LC_m ssi elle est un théorème de HP_m.

8.2 Sémantique de Kripke pour P_m

Les repères de Kripke pour la logique de Post sont en quelque sorte *miroir* de ceux de la DÉFINITION 7.2.2.

DÉFINITION 8.2.1. *Un* repère de Kripke pour la logique de Post *est un triplet $\langle (\Im_i)_{i<m}, \Im_\omega, \Vdash\!\!- \rangle$ qui vérifie en plus:*

- *$m \leq \omega$, on note par $\mathcal{P}_m$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : n < m\} \cup \{\omega\}$*

- $(\Im_i)_{i<m}$ *une suite d'interprétations de même domaine d'individus* $\mathcal{I}$ *telles que:*
  - *(Hypothèse du domaine constant) pour tous* $i, j \in \mathcal{P}_m$, $X \in \Sigma \cup \mathcal{V}_f$, $\Im_i(X) = \Im_j(X)$
  - *(Bivalence) pour tous* $i \in \mathcal{P}_m$, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \Omega_n$, $\Im_i(P)$ *est une application de* $\mathcal{I}^n \to \{0,1\}$
  - *(Monotonie) pour tous* $i < j \in \mathcal{P}_m$, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \Omega_n$,
  $$\{\vec{a} \in \mathcal{I}^n : \Im_{i,P}(\vec{a}) = 0\} \subseteq \{\vec{a} \in \mathcal{I}^n : \Im_{j,P}(\vec{a}) = 0\}$$
  - *(Définition inductive de l'évaluation) pour tout* $i \in \mathcal{P}_m$
    (I₁) $\Im_i(F_1 \dot{\wedge} F_2) = 1$ *ssi* $\Im_i(F_1) = \Im_i(F_2) = 1$,
    (I₂) $\Im_i(F_1 \dot{\vee} F_2) = 1$ *ssi* $\Im_i(F_1) = 1$ *ou* $\Im_i(F_2) = 1$,
    (I₃) $\Im_i(F_1 \dot{\Rightarrow} F_2) = 1$ *ssi pour tout* $j \leq i$, $\Im_j(F_2) = 1$, *quand* $\Im_j(F_1) = 1$,
    (I₄) $\Im_i(\forall x \cdot F(x)) = 1$ *ssi pour tout* $a \in \mathcal{I}$, $\Im_{i}{}^{\dot{x}}_{a}(F(\dot{x})) = 1$,
    (I₅) $\Im_i(\exists x \cdot F(x)) = 1$ *ssi il existe* $a \in \mathcal{I}$ *tel que* $\Im_{i}{}^{\dot{x}}_{a}(F(\dot{x})) = 1$,
    (I₆) *pour tout* $j < m$, $\Im_i(D_{j+1}\, F) = 1$ *ssi* $\Im_j(F) = 1$,
    (I₇) $\Im_i(e_{j+1}) = 1$ *ssi* $j \geq i$.
    $\Im_i(e_0) = 0$
- *pour tout* $i \in \mathcal{P}_m$ *et toute formule* F, $i \Vdash F$ *ssi* $\Im_i(F) = 1$ *et* $i \dashv\!\!| F$ *ssi* $\Im_i(F) = 0$.

Une formule F *est satisfaite par ce repère de Kripke ssi* $\Im_\omega(F) = 1$. ◇

On étend la DÉFINITION 0.9.4 d'une variante d'une interprétation, aux repères de Kripke:

Soit X un sous-ensemble récursif de $\widehat{\Sigma}$, un P_m-repère de Kripke $\langle(\Im_i)_{i<m}, \Im_\omega, \Vdash\rangle$ est une X-variante d'un P_m-repère de Kripke $\langle(\Im'_i)_{i<m}, \Im'_\omega, \Vdash'\rangle$ ssi pour tout $i \in \mathcal{P}_m$, $\Im'_i$ est une X-variante de $\Im_i$.

PROPOSITION 8.2.1. *Soit* F *une formule de* $\mathcal{F}bf$

Il existe un P_m*-repère de Kripke* $\langle(\Im_i)_{i<m}, \Im_\omega, \Vdash\rangle$ *satisfaisant* F

ssi il existe une P_m*-interprétation* $\widehat{\Im}$ *telle que* $\widehat{\Im}(F) = \omega$.

PREUVE. À partir du P_m-repère de Kripke $\langle(\Im_i)_{i<m}, \Im_\omega, \Vdash\rangle$, on définit la P_m-interprétation $\widehat{\Im}$, qui associe à tout atome A de $\mathcal{F}bf$:

$$\widehat{\Im}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Im_0(A) = 0 \\ i+1 & \text{si } \Im_i(A) = 1 \text{ et } \Im_{i+1}(A) = 0 \\ \omega & \text{sinon (c'est-à-dire } \Im_\omega(A) = 1) \end{cases}$$

On montre que pour toute formule F de $\mathcal{F}bf$

$$\widehat{\Im}(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Im_0(F) = 0 \\ i+1 & \text{si } \Im_i(F) = 1 \text{ et } \Im_{i+1}(F) = 0 \\ \omega & \text{sinon (c'est-à-dire } \Im_\omega(F) = 1) \end{cases}$$

Cette affirmation est vérifiée par induction structurelle.

Cas atomique. L'hypothèse d'induction est vérifiée par construction.

Cas $F_1 \dot\wedge F_2$. $\widehat{\Im}(F_1 \dot\wedge F_2) = \min(\widehat{\Im}(F_1), \widehat{\Im}(F_2)) = i$.
On distingue trois cas:
$i = 0$. Donc $\widehat{\Im}(F_k) = 0$ pour $k = 1$ ou $k = 2$ et par conséquent $\Im_0(F_k) = \Im_0(F_1 \dot\wedge F_2) = 0$.
$0 < i < m$. Donc $\widehat{\Im}(F_k) = 0$ pour $k = 1$ ou $k = 2$ et ainsi $\Im_i(F_k) = \Im_i(F_1 \dot\wedge F_2) = 0$. De plus, $\Im_{i-1}(F_1) = \Im_{i-1}(F_2) = 1$ donc $\Im_{i-1}(F_1 \dot\wedge F_2) = 1$.
$i = \omega$. $\Im_\omega(F_1) = \Im_\omega(F_2) = 1$ donc $\Im_\omega(F_1 \dot\wedge F_2) = 1$

Cas $F_1 \dot\vee F_2$. Analogue au cas précédent.

Cas $F_1 \dot\Rightarrow F_2$. On distingue trois cas.
$\widehat{\Im}(F_1 \dot\Rightarrow F_2) = \omega$. D'après la table de vérité $\Re_{\dot\Rightarrow}$, $\widehat{\Im}(F_1) \leq \widehat{\Im}(F_2)$. L'hypothèse d'induction, permet d'en déduire que tout monde qui force la prémisse, force de même la conclusion.
$\widehat{\Im}(F_1 \dot\Rightarrow F_2) = i + 1 < m$ ssi $\widehat{\Im}(F_1) > \widehat{\Im}(F_2) = i + 1$ ssi $\Im_i(F_1) = \Im_i(F_1) = 1$, $\Im_{i+1}(F_2) = 0$ et $\Im_{i+1}(F_1) = 1$ ssi $\Im_{i+1}(F_1 \dot\Rightarrow F_2) = 0$ et $\Im_i(F_1 \dot\Rightarrow F_2) = 1$.
$\widehat{\Im}(F_1 \dot\Rightarrow F_2) = 0$ ssi $\widehat{\Im}(F_2) > \widehat{\Im}(F_1) = 0$ ssi $\Im_0(F_2) = 1$ et $\Im_0(F_1) = 0$ ssi $\Im_0(F_1 \dot\Rightarrow F_2) = 0$.

Cas $\dot\neg F$. Ici nous distinguons deux cas.
$\widehat{\Im}(\dot\neg F) = 0$ ssi $\widehat{\Im}(F) > 0$ ssi $\Im_0(F) = 1$ ssi $\Im_0(\dot\neg F) = 0$.
$\widehat{\Im}(\dot\neg F) = \omega$ ssi $\widehat{\Im}(F) = 0$ ssi pour tout $i < m$, $\Im_i(F) = 0$ ssi pour tout $i < m$, $\Im_i(\dot\neg F) = 1$ ssi $\Im_\omega(F) = 1$.

Cas $\mathsf{D}_j\, F$. Ici nous distinguons deux cas.
$\widehat{\Im}(\mathsf{D}_j\, F) = 0$ ssi $\widehat{\Im}(F) < j$ ssi $\Im_{j-1}(F) = 0$ ssi $\Im_0(\mathsf{D}_j\, F) = 0$.
$\widehat{\Im}(\mathsf{D}_j\, F) = \omega$ ssi $\widehat{\Im}(F) = j$ ssi $\Im_{j-1}(F) = 1$ et $\Im_j(F) = 0$ ssi pour tout $k < m$ $\Im_m(\mathsf{D}_j\, F) = 1$ ssi $\Im_\omega(F) = 1$.

Cas $\forall x \cdot F(x)$. Nous distinguons deux cas, et notons par i la valeur de vérité de la quantification, désignée par Qf. $\mathcal{I}$ désigne le domaine des individus de l'interprétation $\Im$
$i < m$. Donc $\widehat{\Im}(\mathrm{Qf}) = \min\left\{\widehat{\Im}^{\dot x}_a(F(\dot x)) : a \in \mathcal{I}\right\} = i$ et par conséquent il existe un individu b tel que $\widehat{\Im}^{\dot x}_b(F(\dot x)) = i$.
Distinguons le sous-cas $i = 0$. Ainsi, $\Im_{0}{}^{\dot x}_b(F_k) = 0$ et conséquemment
$\Im_0(\mathrm{Qf}) = \min\left\{\Im_{0}{}^{\dot x}_a(F(\dot x)) : a \in \mathcal{I}\right\} = 0$.
Reste le sous-cas complémentaire $i > 0$. On a
$\Im_i(\mathrm{Qf}) = \min\left\{\Im_{i}{}^{\dot x}_a(F(\dot x)) : a \in \mathcal{I}\right\} = 0$.
Mais, par ailleurs, $\Im_{i-1}(\mathrm{Qf}) = \min\left\{\Im_{i-1}{}^{\dot x}_a(F(\dot x)) : a \in \mathcal{I}\right\} = 1$, car pour tout individu a, $\widehat{\Im}^{\dot x}_a(F(\dot x)) > i - 1$
$i = \omega$. Donc pour tout individu a, $\widehat{\Im}^{\dot x}_a(F(\dot x)) = \omega$, ainsi pour tout indice $i < m$ et tout a, $\Im_{i}{}^{\dot x}_a(F(\dot x)) = 1$. En d'autres termes, pour tout indice $i < m$, $\Im_i(\mathrm{Qf}) = 1$ et, plus brièvement, $\Im_\omega(\mathrm{Qf}) = 1$.

Cas $\exists x \cdot F(x)$. Nous ne détaillons que le cas où la quantification vaut ω; les cas $i = 0$ et $0 < i < m$ étant analogues aux cas $i = \omega$ et $0 < i < m$ de la quantification universelle.
$i = \omega$. $\widehat{\Im}(\mathrm{Qf}) = \sup\left\{\widehat{\Im}^{\dot{x}}_{a}(F(\dot{x})) : a \in \mathcal{I}\right\} = \omega$. Donc il existe une suite d'individus $(a_i)_{i<m}$ telle que pour tout $i < m$, $\widehat{\Im}^{\dot{x}}_{a_i}(F(\dot{x})) > i$. [2] Donc pour tout $i < m$, $\Im_{i}{}^{\dot{x}}_{a_i}(F(\dot{x})) = 1$, d'où $\Im_i(\mathrm{Qf}) = 1$. C'est-à-dire $\Im_\omega(\mathrm{Qf}) = 1$.

Réciproquement, étant donnée une P_m-interprétation, $\widehat{\Im}$ de domaine $\mathcal{I}$, on construit un P_m-repère de Kripke en interprétant les symboles fonctionnels et les variables libres comme dans $\widehat{\Im}$ et en définissant pour tout $i < m$, et tout prédicat n-aire R,

$$\begin{array}{rcll} \Im_i(R) : \mathcal{I}^n & \rightarrow & \mathcal{I} & \\ \vec{a} & \mapsto & 1 & \text{si } \widehat{\Im}_R(\vec{a}) > i \\ \vec{a} & \mapsto & 0 & \text{sinon} \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \Im_\omega(R) : \mathcal{I}^n & \rightarrow & \mathcal{I} & \\ \vec{a} & \mapsto & 1 & \text{si } \widehat{\Im}_R(\vec{a}) = \omega \\ \vec{a} & \mapsto & 0 & \text{sinon} \end{array}$$

On vérifie par induction structurelle que l'on définit bien ainsi un P_m-repère de Kripke.

Ce qui établit le résultat annoncé puisque dans les deux constructions, pour toute formule F, $\Im_\omega(F) = 1$ ssi $\widehat{\Im}(F) = \omega$.

Dans la suite nous nous servirons de cette équivalence, en passant à discrétion, d'un P_m-repère de Kripke à une P_m-interprétation et vice-versa. C.Q.F.D.

Visions alternatives de la sémantique de Kripke

On peut retrouver la sémantique de Kripke donnée plus haut en considérant le théorème de représentation énoncé dans RASIOWA (1974*b*) (Voir par exemple (RASIOWA, 1974*a*, § VII.1) pour le cas $m < \omega$).

Toute algèbre de Post $\mathcal{P}$ d'ordre sup ω est isomorphe à une (sous-)algèbre de Post $\mathcal{P}'$ dont les éléments sont les n-uplets $\vec{a}$ dont les composantes sont éléments d'une algèbre de Boole et $a_1 \geq \ldots \geq a_i \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$.

Dans (DAHN, 1974), la classe des repères de Kripke caractéristique pour les logiques de Post propositionnelles finies est définie en considérant une sous-classe des repères de Kripke pour la logique intuitionniste (les mondes étant *partiellement* ordonnés). L'étude de DAHN (1974) a l'inconvénient de ne pas faire clairement apparaître que ces repères de Kripke sont tous des LC_m-repères de Kripke. Dans (MAKSIMOVA & VAKARELOV, 1974), une sémantique de Kripke similaire à la précédente est définie pour $\mathsf{P}_\omega$du premier ordre.

[2]pour m fini, il en résulte qu'il existe un individu a tel que $\widehat{\Im}^{\dot{x}}_{a}(F(\dot{x})) = \omega$; si $m = \omega$ il n'en n'est pas nécessairement ainsi.

8.3 Calcul par Résolution

ORŁOWSKA (1978) présente en détail un calcul par résolution pour la logique de Post d'ordre sup ω des prédicats du premier ordre. ORŁOWSKA (1980) entreprend une étude plus vaste et propose à titre d'exemple d'une *Resolution logic* un calcul par résolution pour la logique de Post d'ordre sup ω. ORŁOWSKA y étudie de façon générique les logiques non-classiques que l'on peut, d'une manière ou d'une autre, traiter par des systèmes par résolution. ORŁOWSKA (1985) reprend l'étude des logiques de Post d'ordre fini des prédicats du premier ordre par un calcul par résolution.

Comme pour la logique classique, la mise sous forme clausale constitue un *goulot d'étranglement* à l'applicabilité de la résolution. [3] En effet cette transformation nécessite des règles de transformation du genre:

$$[\mathsf{D}_i(\alpha \dot{\Rightarrow} \beta) \dot{\Rightarrow} \gamma] \Leftrightarrow [(\mathsf{D}_1\, \alpha \dot{\vee} \gamma) \dot{\wedge} (\mathsf{D}_2\, \alpha \dot{\vee} (\mathsf{D}_1\, \beta \dot{\Rightarrow} \mathsf{e}_0) \dot{\vee} \gamma) \dot{\wedge} \cdots \dot{\wedge} (\mathsf{D}_i\, \alpha \dot{\vee} (\mathsf{D}_{i-1}\, \beta \dot{\Rightarrow} \mathsf{e}_0) \dot{\vee} \gamma) \dot{\wedge} ((\mathsf{D}_i\, \beta \dot{\Rightarrow} \mathsf{e}_0) \dot{\vee} \gamma)]$$

Comme la logique classique peut-être "plongée" dans les logiques de Post, ces calculs devraient hériter des problèmes d'inefficacité (en termes de longueur d'une plus courte réfutation) de la résolution (HAKEN, 1985)).

Les deux versions du système par Résolution (ORŁOWSKA, 1978, ORŁOWSKA, 1980) diffèrent essentiellement en un point. La présentation dans (ORŁOWSKA, 1980) est simplifiée en constatant que pour établir qu'une formule F soit insatisfaisable, il faut et il suffit que $\{\mathsf{D}_i\, F : 1 \leq i < \omega\}$ soit insatisfaisable (voir (ORŁOWSKA, 1980, page 340)).

La première version (ORŁOWSKA, 1978) du calcul n'utilise pas ce passage aux D_i-formules. Il s'ensuit que les formules indécomposables sont plus compliquées ainsi que la notion de formule indécomposable complémentaire.

Ces calculs n'utilisent pas d'ω-règle. En effet, la résolution est un *calcul par réfutation*. Or, si une formule est réfutable dans P_ω, elle l'est déjà dans P_m, pour un entier m et cette logique-ci ne contient pas d'ω-règle. Signalons finalement que la preuve de la complétude réfutationnelle est obtenue par une adaptation des arbres sémantiques de KOWALSKI & HAYES (1969). Dans la seconde version du calcul, la base de Herbrand est l'ensemble de tous les atomes clos préfixés par un D_i. Comme $\mathsf{D}_i\, F$ et $\dot{\neg}\mathsf{D}_i\, F$ sont incompatibles, on peut alors construire un arbre binaire dont toutes les branches sont de longueur inférieure ou égale à ω, chaque branche transfinie définissant un modèle pour l'ensemble de clauses. Pour P_ω, la principale différence d'avec KOWALSKI & HAYES (1969) est que l'ordre induit par l'énumération exhaustive de la base de Herbrand n'est pas monotone pour la substitution, etc si bien qu'il n'en résulte pas une stratégie d'ordonnancement. Il serait intéressant d'améliorer ce calcul par la méthode des arbres sémantiques transfinis de RUSINOWITCH (1987).

[3] Il serait intéressant d'étudier dans quelle mesure la mise sous forme clausale proposée par BOY DE LA TOUR (1991), BOY DE LA TOUR (1992) est applicable.

Pour le traitement des logiques de Post d'ordre fini, l'idée de ORŁOWSKA (1980) est une ***traduction astucieuse*** dans un calcul classique d'un calcul d'une logique non-classique.

(OHLBACH, 1990) ne traite pas des logiques de Post. L'idée développée est d'axiomatiser les propriétés des repères de Kripke explicitement dans une logique sortée avec polymorphisme. Ceci est faisable également pour les logiques de Post, vue comme un fragment d'une logique de la datation [4].

8.4 Système de Gentzen

Avant de construire le système par résolution décrit dans (ORŁOWSKA, 1976, ORŁOWSKA, 1980), et commenté dans la section précédente, Orłowska avait défini un système de Gentzen suivant les mêmes lignes.

Les règles de décomposition qu'il faut utiliser sont beaucoup plus compliquées que dans les cas classique, modal ou intuitionniste. Les formules indécomposables sont en effet non pas des formules atomiques, mais des formules composées de jusqu'à cinq implications. Ces formules élémentaires *codent* sans faire intervenir d'arithmétique ou de raisonnements sous contrainte, une comparaison des valeurs de vérité (dans tout modèle des formules initiales). Qu'une formule α a une valeur de vérité strictement inférieure à une formule β, s'exprime naturellement par $\alpha \Rrightarrow \beta$, l'affirmation opposée, s'exprime par $(\alpha \Rrightarrow \beta) \Rrightarrow \beta$[5].

Les règles d'inférence du système de Gentzen décomposent les formules composées en formules indécomposables qui expriment l'ordre entre les valeurs de vérité assignées aux atomes. Par exemple, la règle $\Rrightarrow(\dot{\vee})$ du groupe II de (ORŁOWSKA, 1976, page 436) s'énonce (α, β, γ sont des formules bien formées, et Γ_1, Γ_2 sont des séquences finies de formules bien formées):

$$\frac{\Gamma_1, (\alpha \Rrightarrow (\beta \dot{\vee} \gamma)), \Gamma_2}{\Gamma_1, (\alpha \Rrightarrow \beta), (\alpha \Rrightarrow \gamma), \Gamma_2}$$

Cette règle partage avec les autres règles qui décomposent les formules dont le connecteur principal est une implication ($\rightarrow$ ou $\Rrightarrow$), l'inconvénient de *dupliquer l'argument* qui n'est pas décomposé (dans la règle d'inférence citée en exemple, α). Ceci augmente évidemment les risques d'une explosion combinatoire précoce. Les calculs (par tableaux analytiques) avec formules signées évitent par l'introduction du signe justement la duplication des arguments.

Notons que le taux de branchement de certaines règles d'inférence est fini mais non borné. Remarquons que dans la construction d'un arbre de preuve dans ce

---

[4] GARDIES (1978) distingue logique *temporelle* et logique de la *datation*: la seconde faisant apparaître *explicitement* les instants, alors que la première ne permet que de *comparer* deux instants, deux durées sans les "quantifier".

[5] ORLOWSKA utilise pour $\Rrightarrow$ le symbole $\rightarrow$;$\alpha \Rrightarrow \beta$ y abrège $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$.

système de Gentzen, les formules déduites de la formule principale, sont plus petites que la formule principale pour un ordre nœthérien compliqué. Cette propriété, plus faible que la propriété de la sous-formule, suffit toutefois pour reconnaître que ce système est une procédure de décision pour la logique de Post propositionnelle.

Les séquents indécomposables, les axiomes du système, reformulent les tautologies clausales de $\langle \omega, < \rangle$. Dans le calcul CPA_m, on effectue en fait un raisonnement dans cette théorie, au lieu de prendre l'ensemble de ses théorèmes.

8.5 Le Calcul par Tableaux Analytiques CPB°_m

À partir de la sémantique de Kripke définie plus haut, on construit un calcul des tableaux analytiques préfixés ressemblant à ceux de WALLEN (1987). Cette méthode de WALLEN a été par la suite approfondie plus en détail et adaptée aux calculs par résolution par HERZIG (1989) et OHLBACH (1988).

On procède comme dans le cas des logiques polyvalentes avec un nombre fini de valeurs de vérité, à une extension de la signature fonctionnelle, en lui ajoutant un nombre infini dénombrable de constantes inédites (des paramètres). On note ici également par $\widehat{\Sigma}$ la nouvelle signature fonctionnelle.

Cette section présente en détail un calcul par tableaux analytiques, très simple. Toutefois, il n'est pas intéressant pour la déduction automatique à cause des nombreuses redondances qu'il introduit. C'est pourquoi ce calcul sera abandonné au profit de CPB_m, amélioré par la suite en CPA_m. Ce calcul introduira un raisonnement symbolique sur les indices des connecteurs unaires et des constantes logiques; ce raisonnement fera appel à des techniques de recherche opérationnelle, dont l'efficacité est avérée. Finalement, la dernière version inclut la skolemisation paresseuse et l'unification sur les termes d'individus.

La définition d'un calcul des tableaux analytiques pour les logiques de Post est similaire à la définition du calcul CB du CHAPITRE 2. Les notations et les définitions introduites pour ce calcul, sont reprises ou adaptées tacitement au cas présent.

DÉFINITION 8.5.1. *Le calcul des tableaux analytiques de Post (CPB°_m) est défini ainsi:*

les signes des formules sont les éléments de l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{ i \Vdash\!\!- : i \in \mathcal{P}_m \} \cup \{ i -\!\!\dashv\!\shortparallel : i \in \mathcal{P}_m \} \, ;$$

le langage est l'ensemble de toutes formules signées et du symbole $\times$ (pour "marquer" les branches inconsistantes);

les règles d'inférence sont données dans les FIGURES *8.3 à 8.6.* $\Diamond$

Un paramètre est défini comme *inédit* si et seulement s'il est *étranger à la branche* à laquelle est greffée l'unique conclusion de la règle d'inférence.

$$\text{CBP}_1 : \frac{i' \Vdash F \dot\wedge G}{\begin{array}{c} i' \Vdash F \\ i' \Vdash G \end{array}} \qquad \text{CBP}_2 : \frac{i' \dashV F \dot\wedge G}{i' \dashV F \;\Big|\; i' \dashV G}$$

$$\text{CBP}_3 : \frac{i' \Vdash F \dot\vee G}{i' \Vdash F \;\Big|\; i' \Vdash G} \qquad \text{CBP}_4 : \frac{i' \dashV F \dot\vee G}{\begin{array}{c} i' \dashV F \\ i' \dashV G \end{array}}$$

$$\text{CBP}_5 : \frac{i' \Vdash \mathsf{D}_{j+1}\, F}{j \Vdash F} \qquad \text{CBP}_6 : \frac{i' \dashV \mathsf{D}_{j+1}\, F}{j \dashV F}$$

$$\text{CBP}_7 : \frac{i' \Vdash \dot\neg F}{0 \dashV F} \qquad \text{CBP}_8 : \frac{i' \dashV \dot\neg F}{0 \Vdash F}$$

Figure 8.3: Règles d'Inférence propositionnelles de CPB°_m et CPB_m

Pour tout terme t	Pour tout paramètre inédit a
$\text{CBP}_9 : \dfrac{i'' \Vdash \forall x \cdot F(x)}{i'' \Vdash F(t)}$	$\text{CBP}_{10} : \dfrac{i'' \dashV \forall x \cdot F(x)}{i'' \dashV F(a)}$
$\text{CBP}_{11} : \dfrac{i'' \dashV \exists x \cdot F(x)}{i'' \dashV F(t)}$	$\text{CBP}_{12} : \dfrac{i'' \Vdash \exists x \cdot F(x)}{i'' \Vdash F(a)}$

Figure 8.4: Quantifications dans CPB°_m et CPB_m

Pour tout $j \leq i$

$$\mathrm{CBP}_{13} : \begin{array}{c} i \Vdash \mathsf{e}_j \\ \hline \times \end{array}$$

pour tout $j > i$

$$\mathrm{CBP}_{14} : \begin{array}{c} i \dashV \mathsf{e}_j \\ \hline \times \end{array}$$

Pour tout $j < m$

$$\mathrm{CBP}_{15} : \begin{array}{c} \omega \Vdash \mathsf{e}_j \\ \hline \times \end{array}$$

$$\mathrm{CBP}_{16} : \begin{array}{c} \omega \dashV \mathsf{e}_\omega \\ \hline \times \end{array}$$

Avec $i \leq j < m$

$$\mathrm{CBP}_{17} : \begin{array}{c} j \Vdash F \qquad i \dashV F \\ \hline\hline \times \end{array}$$

Figure 8.5: Règles de clôture de CPB°_m et CPB_m

Pour tout $j < \min(1 + i', m)$

$$\mathrm{CBP}_{18} : \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{i' \Vdash F \Rightarrow G} \\ \hline j \dashV F & j \Vdash G \end{array}$$

Pour tout $j < \min(i', m)$

$$\mathrm{CBP}_{19} : \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{i' \dashV F \Rightarrow G} \\ \hline 0 \Vdash F & j + 1 \Vdash F \\ j \dashV G & i' \dashV G \end{array}$$

Pour tout $j < \omega$
et tout paramètre inédit a

$$\mathrm{CBP}_{20} : \begin{array}{c} \omega \Vdash \exists x \cdot F(x) \\ \hline j \Vdash F(a) \end{array}$$

Figure 8.6: Règles propres à CPB°_m

Il existe k, $0 \leq k < \min(i', m)$

$$\mathrm{CBP}_{21} : \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{i' \Vdash F \Rightarrow G} \\ \hline\hline 0 \dashV F & i' \Vdash G & \begin{array}{c} k \Vdash G \\ k + 1 \dashV F \end{array} \end{array}$$

Il existe k, $0 \leq k < \min(1 + i', m)$

$$\mathrm{CBP}_{22} : \begin{array}{c} i' \dashV F \Rightarrow G \\ \hline\hline k \Vdash F \\ k \dashV G \end{array}$$

Pour tout paramètre inédit a

$$\mathrm{CBP}_{23} : \begin{array}{c} \omega \Vdash \exists x \cdot F(x) \\ \hline \omega \Vdash F(a) \end{array}$$

Figure 8.7: Règles propres à CPB_m

Un ensemble de formules signées est *CPB°_m-inconsistant* (ou *CPB_m-inconsistant*) ssi il existe un tableau dans CPB°_m et respectivement CPB_m de profondeur finie dont toutes les branches sont fermées.

Dans les FIGURES 8.3 à 8.6, on convient que i, j, k dénotent des valeurs de vérité inférieures à m et i', j' n'importe quel élément de $\mathcal{P}_m$.

Une interprétation intuitive des signes peut être donnée en termes de repères de Kripke et de P_m-interprétations:

$i \Vdash F$	$\hat{\Im}(F) > i$	$\Im_i(F) = 1$	$\omega \Vdash F$	$\hat{\Im}(F) = \omega$	$\Im_\omega(F) = 1$
$i \mathrel{-\!\!\|} F$	$\hat{\Im}(F) \leq i$	$\Im_i(F) = 0$	$\omega \mathrel{-\!\!\|} F$	$\hat{\Im}(F) < \omega$	$\Im_\omega(F) = 0$

On en déduit immédiatement la correspondance suivante entre *presque toutes* les formules signées et formules non signées:

$i \Vdash F$	$\mathsf{D}_{1+i}\, F$	$\omega \Vdash F$	$\bigwedge\{\mathsf{D}_{1+i}\, F : i < m\}$
$i \mathrel{-\!\!\|} F$	$\dot\neg \mathsf{D}_{1+i}\, F$	$\omega \mathrel{-\!\!\|} F$	$\bigvee\{\dot\neg \mathsf{D}_{1+i}\, F : i < m\}$

L'expression $\bigvee\{\dot\neg \mathsf{D}_{1+i}\, F : i < m\}$ n'est en fait qu'une formule pour $m < \omega$.

8.5.1 Correction du Calcul CPB°_m

La proposition suivante énonce la correction des règles d'inférence énumérées dans les FIGURES 8.3 à 8.6, ainsi que des règles de décomposition de l'implication de la FIGURE 8.7.

PROPOSITION 8.5.1. *Soit $\langle(\Im_i)_{i<m}, \Im_\omega, \Vdash\rangle$ un P_m-repère de Kripke, la relation $\Vdash$ vérifie, pour tous $i, j < m$, $i', j' \in \mathcal{P}_m$ et $F, F_1, F_2, F(\dot{x}) \in \mathcal{F}bf$:*

(FI$_1$) *$i \Vdash F$ ou $i \mathrel{-\!\!\|} F$*

(FI$_2$) *$i \Vdash F$ ssi pour tout $j \leq i$, $j \Vdash F$, et $i \mathrel{-\!\!\|} F$ ssi pour tout $j \geq i$, $j \mathrel{-\!\!\|} F$,*

(FI$_3$) *$i' \Vdash F_1 \dot\wedge F_2$ ssi $i' \Vdash F_1$ et $i' \Vdash F_2$,*

(FI$_4$) *$i' \Vdash F_1 \dot\vee F_2$ ssi $i' \Vdash F_1$ ou $i' \Vdash F_2$,*

(FI$_5$) *$i' \Vdash \dot\neg F$ ssi $0 \mathrel{-\!\!\|} F$,*

(FI$_6$) *$i' \Vdash D_{j+1}\, F$ ssi $j \Vdash F$,*

(FI$_7$) *$i \Vdash e_j$ ssi $i < j$,*

(FI$_8$) *$\omega \Vdash e_j$ ssi $j = \omega$,*

(FI$_9$) *$i' \Vdash \forall x \cdot F(x)$ ssi pour tout terme t, $i' \Vdash F(\dot{x} \setminus t)$,*

(FI$_{10}$) *$i \Vdash \exists x \cdot F(x)$ ssi pour un terme a, $i \Vdash F(\dot{x} \setminus a)$,*
$\omega \Vdash \exists x \cdot F(x)$ ssi pour tout $i < m$, il est un terme a, $i \Vdash F(\dot{x} \setminus a)$,

(FI$_{11}$) *$i' \Vdash F_1 \dot\Rightarrow F_2$ ssi pour tout j tel que $j < \min(i', m)$ et $j \Vdash F_1$, $j \Vdash F_2$,*

(FI$_{12}$) *$i' \mathrel{-\!\!\|} F_1 \dot\Rightarrow F_2$ ssi pour tout j tel que $j < \min(1 + i', m)$, soit $0 \Vdash F_1$ et $j \mathrel{-\!\!\|} F_2$, soit $i \mathrel{-\!\!\|} F_1$ $j + 1 \Vdash F_2$,*

(FI_{13}) $i' \Vdash\!\!- F_1 \Rightarrow F_2$ *ssi soit* $0 -\!\!\Vdash F_1$, *soit* $i' \Vdash\!\!- F_2$, *soit il est* j *tel que* $j < i'$ *et* $j < m$ *et* $j+1 -\!\!\Vdash F_1$, $j \Vdash\!\!- F_2$,

(FI_{14}) $i' -\!\!\Vdash F_1 \Rightarrow F_2$ *ssi il est* j *tel que* $j < i'$ *et* $j < m$ *et* $j -\!\!\Vdash F_2$, $j \Vdash\!\!- F_1$,

PREUVE.

(FI_1) est trivial, mais permet de diviser le nombre de cas de près de la moitié.

(FI_2) Pour F atomique, c'est une conséquence immédiate de la condition de *Monotonie* de la DÉFINITION 8.2.1. Par une induction structurelle, on prouve le résultat pour F arbitraire.

(FI_3)–(FI_{10}) En se servant la sémantique matricielle de P_m, et de la PROPOSITION 8.2.1. Nous ne détaillerons que le cas de l'implication.

(FI_{11}) *Cas* $\widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) < m$.

	$i' \Vdash\!\!- F_1 \Rightarrow F_2$	
ssi	$\widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) > i'$	en utilisant la PROPOSITION 8.2.1
ssi	$i' < \widehat{\Im}(F_2) < \widehat{\Im}(F_1) < m$	hypothèse et $\Re_{\Rightarrow}$
ssi	$i' \Vdash\!\!- F_2$ et il existe $k < m$ tel que $k -\!\!\Vdash F_2$ et $k \Vdash\!\!- F_1$	

Donc, $i' \Vdash\!\!- F_1 \Rightarrow F_2$ implique a fortiori pour tout j tel que $j \leq i'$ et $j < m$ et $j \Vdash\!\!- F_1$, $j \Vdash\!\!- F_2$. Réciproquement, partons de la dernière des équivalences ci-dessus. Comme $\widehat{\Im}(F_2) \leq \widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2)$ (il suffit de s'en assurer avec la sémantique matricielle de $\Rightarrow$) et $i' \Vdash\!\!- F_2$ (c'est-à-dire $\widehat{\Im}(F_2) > i'$), $i' \Vdash\!\!- F_1 \Rightarrow F_2$.

Cas $\widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) = \omega$.

	$\omega \Vdash\!\!- F_1 \Rightarrow F_2$	
ssi	$\widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) = \omega$	en utilisant la PROPOSITION 8.2.1
ssi	$\widehat{\Im}(F_1) \leq \widehat{\Im}(F_2)$	Cf. $\Re_{\Rightarrow}$
ssi	pour tout $k < m$, si $k \Vdash\!\!- F_1$, alors $k \Vdash\!\!- F_2$	

La deuxième version (voir également FIGURE 8.7) pour la décomposition de l'implication est moins naturelle, néanmoins elle sera très pratique dans la mise en œuvre d'une automatisation plus efficace.

(FI_{13}) *Cas* $\widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) < m$.

	$i' \Vdash\!\!- F_1 \Rightarrow F_2$	
$\leadsto$	$\widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) > i'$	PROPOSITION 8.2.1
$\leadsto$	$i' < \widehat{\Im}(F_2)$	car ici $\widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) = \widehat{\Im}(F_2)$
$\leadsto$	$i' \Vdash\!\!- F_1$	for $i' < \widehat{\Im}(F_2) < \widehat{\Im}(F_1) < m$

Donc, dans ce cas, $i' \Vdash\!\!- F_1 \Rightarrow F_2$ implique $i' \Vdash\!\!- F_1$, qui est une des alternatives du conséquent.

Réciproquement, partons de la dernière des équivalences ci-dessus. $\widehat{\Im}(F_2) \leq \widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2)$; il suffit de s'en assurer avec la sémantique matricielle de $\Rightarrow$ et $i' \Vdash\!\!- F_2$ (c'est-à-dire $\widehat{\Im}(F_2) > i'$), $i' \Vdash\!\!- F_1 \Rightarrow F_2$.

Cas $\widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) = \omega$.

$$\begin{array}{ll} & \omega \Vdash F_1 \Rightarrow F_2 \\ \leadsto & \widehat{\Im}(F_1 \Rightarrow F_2) = \omega \quad \text{en utilisant la PROPOSITION 8.2.1} \\ \leadsto & \widehat{\Im}(F_1) \leq \widehat{\Im}(F_2) \quad \text{Cf. } \Re_{\Rightarrow} \end{array}$$

Nous distinguons trois cas suivant la valeur de $\widehat{\Im}(F_2)$.
Cas $\widehat{\Im}(F_2) = 0$. Forcément, $\widehat{\Im}(F_1) = 0$, c'est-à-dire $0 \dashVv F_1$.
Cas $0 < k+1 = \widehat{\Im}(F_2) < m$. On a alors $k+1 \dashVv F_1$ et $k \Vdash F_1$.
Cas $\widehat{\Im}(F_2) = \omega$. C'est l'une des alternatives du conséquent.

Réciproquement, On vérifie que l'une quelconque des trois alternatives implique l'antécédent. C.Q.F.D.

Pour vérifier la correction des règles d'inférence qui ne sont pas énumérées dans la proposition qui précède, il suffit de nier un des cas traités et de se servir de la clause (FI_1) pour éliminer les négations.

Dans (FI_{10}) et dans la négation de (FI_9), un terme "bien choisi" est introduit. La proposition suivante montre qu'il suffit de choisir un paramètre inédit arbitraire pour instancier ces quantifications.

PROPOSITION 8.5.2. *Soient* $\underline{\Im} : \langle (\Im_i)_{i<m}, \Im_\omega, \Vdash \rangle$ *un* P_m*-repère de Kripke,* a *et* b *des paramètre arbitraires, Pour tous* $i < m$ *et* $i' \in \mathcal{P}_m$ *et* $F, F(\dot{x}) \in \mathcal{F}bf$*, Si ni* F*, ni* $F(\dot{x})$ *ne contiennent les paramètres* a *et* b*, alors il existe une* $\{a\}$*-variante de* $\underline{\Im}$*,* $\underline{\Im}' : \langle (\Im'_i)_{i<m}, \Im'_\omega, \Vdash' \rangle$ *telle que les propositions suivantes sont vraies:*

(FFI_1) $i' \Vdash F$ *ssi* $i' \Vdash' F$,

(FFI_2) *si* $i' \dashVv \forall x \cdot F(x)$, *alors* $i' \dashVv' F(\dot{x} \setminus a)$,

(FFI_3) *si* $i \Vdash \exists x \cdot F(x)$, *alors* $i \Vdash' F(\dot{x} \setminus a)$,

(FFI_4) *si* $\omega \Vdash \exists x \cdot F(x)$, *alors pour tout* $j < m$, *il existe une* $\{b\}$*-variante de* $\underline{\Im}$, $\langle (\Im''_i)_{i<m}, \Im''_\omega, \Vdash'' \rangle$ *telle que* $i \Vdash'' F(\dot{x} \setminus b)$.

PREUVE. Pour le premier point, on travaille avec les P_m-interprétations associées à $\underline{\Im}$ et $\underline{\Im}'$. La PROPOSITION 0.9.1 prouve que ces interprétations évaluent F à une même valeur de vérité; les P_m-repères de Kripke correspondant donc également.

Si $i' \dashVv \forall x \cdot F(x)$, alors il existe un terme t tel que $i' \dashVv F(t)$. On définit alors la $\{a\}$-variante de $\underline{\Im}$, en posant $\Im'(a) = \Im(t)$. Ainsi $i' \dashVv' F(\dot{x} \setminus a)$.

Les deux autres points se montrent de manière analogue. C.Q.F.D.

8.5.2 Complétude du Calcul CPB°_m

Cette sous-section prouve la complétude réfutationnelle de CPB°_m. Comme ce calcul ne comporte pas d'ω-règles, la preuve de la complétude ne diffère pas beaucoup de celle des logiques à nombre fini de valeurs de vérité.

On définit un ensemble de Hintikka, qui diffère essentiellement du cas des logiques finies, en ce que des formules avec des signes différents peuvent apparaître dans l'ensemble de Hintikka. On définit alors les propriétés de consistance analytique et le lemme de l'existence d'un modèle qui l'accompagne, est prouvé comme à l'accoutumée.

DÉFINITION 8.5.2. *Un ensemble de Hintikka de* CPB°_m $\mathcal{H}$ *est un ensemble formules signées vérifiant les clauses où* $P \in \Omega$, $i, k \in \mathcal{P}_m$ *et* $j < m$:

(HIP$_1$) *Les cas de base sont:*
si $i \Vdash e_k \in \mathcal{H}$, *alors* $i < k < m$ *ou* $i = k = \omega$
si $i \dashV e_k \in \mathcal{H}$, *alors* $k \leq i < m$ *ou* $k < i = \omega$
si $k \Vdash P\vec{s}, i \dashV P\vec{s} \in \mathcal{H}$ *alors* $i > k$

(HIP$_2$) *La décomposition de formules dont le connecteur principal est unaire, impose:*
si $i \Vdash D_{j+1}\, F \in \mathcal{H}$, *alors* $j \Vdash F \in \mathcal{H}$
si $i \dashV D_{j+1}\, F \in \mathcal{H}$, *alors* $j \dashV F \in \mathcal{H}$
si $i \Vdash \dot\neg F \in \mathcal{H}$, *alors* $0 \dashV F \in \mathcal{H}$
si $i \dashV \dot\neg F \in \mathcal{H}$, *alors* $0 \Vdash F \in \mathcal{H}$

(HIP$_3$) *Les formules de type* α *sont:*
si $i \Vdash F \dot\wedge G \in \mathcal{H}$, *alors* $i \Vdash F, i \Vdash G \in \mathcal{H}$
si $i \dashV F \dot\vee G \in \mathcal{H}$, *alors* $i \dashV F, i \dashV G \in \mathcal{H}$

(HIP$_4$) *Les formules de type* β *sont:*
si $i \dashV F \dot\wedge G \in \mathcal{H}$, *alors* $i \dashV F \in \mathcal{H}$ *ou* $i \dashV G \in \mathcal{H}$
si $i \Vdash F \dot\vee G \in \mathcal{H}$, *alors* $i \Vdash F \in \mathcal{H}$ *ou* $i \Vdash G \in \mathcal{H}$

(HIP$_5$) *L'implication se comporte comme l'implication stricte en logique modale (mais "tournée" dans l'autre sens)* FITTING (1972) *les appelle des* ν*-formules:*
si $i \Vdash F \dot\Rightarrow G \in \mathcal{H}$, *alors pour tout* $j < \min(1 + i, m)$, $j \dashV F \in \mathcal{H}$ *ou* $j \Vdash G \in \mathcal{H}$,

(HIP$_6$) *Voici le cas des* π*-formules (voir (*FITTING, 1972*))*
si $i \dashV F \dot\Rightarrow G \in \mathcal{H}$, *alors pour tout* $j < \min(i, m)$, $0 \Vdash F, j \dashV G \in \mathcal{H}$ *ou* $i \dashV G, 1 + j \Vdash F \in \mathcal{H}$,

(HIP$_7$) *Le cas des* γ*-formules:*
si $i \Vdash \forall x \cdot F(x) \in \mathcal{H}$, *alors pour tout terme* t, *connu de* $\mathcal{H}$, $i \Vdash F(t) \in \mathcal{H}$
si $i \dashV \exists x \cdot F(x) \in \mathcal{H}$, *alors pour tout terme* t, *connu de* $\mathcal{H}$, $i \dashV F(t) \in \mathcal{H}$

(HIP$_8$) *Le cas des* δ*-formules:*
si $i < m$ *et* $i \Vdash \exists x \cdot F(x) \in \mathcal{H}$, *alors il est un terme* t, $i \Vdash F(t) \in \mathcal{H}$
si $\omega \Vdash \exists x \cdot F(x) \in \mathcal{H}$, *alors pour tout* $i < m$, *il est un terme* t, $i \Vdash F(t) \in \mathcal{H}$
si $i \dashV \forall x \cdot F(x) \in \mathcal{H}$, *alors il est un terme* t, $i \dashV F(t) \in \mathcal{H}$

$\Diamond$

LEMME 8.5.1. *(lemme de Hintikka pour* CPB°_m*) Tout ensemble de Hintikka de* CPB°_m $\mathcal{H}$ *est satisfaisable dans un* P_m*-repère de Kripke* $\underline{\Im} : \langle (\Im_i)_{i<m}, \Im_\omega, \Vdash \rangle$.

PREUVE. Le P_m-repère de Kripke que l'on va construire interprète les termes par eux-mêmes (interprétation de Herbrand).

Tout d'abord, nous constatons que toute constante logique signée $i \Vdash \mathsf{e}_k$ ou $i \dashV \mathsf{e}_k$ qui figure dans $\mathcal{H}$, n'est incompatible avec aucun P_m-repère de Kripke.

Nous définissons pour un littéral arbitraire ℓ de $\mathcal{F}bf$, sa valeur de vérité dans chaque interprétation $\Im_i$, $i < m$ de la sorte: soient $L_0 = \{k \dashv\!\Vert \ell \in \mathcal{H} : k \in \mathcal{P}_m\}$ et $L_1 = \{k \Vert\!\vdash \ell \in \mathcal{H} : k \in \mathcal{P}_m\}$.

Supposons L_0 non vide. Évidemment $i = \min L_0$ est alors bien défini. Et on pose:

$$\Im_k(\ell) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par ce choix tout occurrence de ℓ dans une formule signée atomique est satisfaite par $\underline{\Im}$. En effet, pour toute formule signée $k \Vert\!\vdash \ell \in L_1$, $k < i$, car $\mathcal{H}$ est un ensemble de Hintikka. Par construction alors $\Im_k(\ell) = 1$. D'autre part, pour tout $k \dashv\!\Vert \ell \in L_0$, on a bien $\Im_k(\ell) = 0$, car $k \geq i$.

Maintenant si L_0 est vide, on pose simplement pour tout $k < m$ $\Im_k(\ell) = 1$ et donc aussi $\Im_\omega(\ell) = 1$.

Le P_m-repère de Kripke ainsi construit satisfait toutes les formules signées atomiques dans $\mathcal{H}$. Par induction structurelle, on s'assure que toute formule signée est également satisfaite par $\underline{\Im}$.

Le cas le plus compliqué est celui des implications rejetées, $i \dashv\!\Vert F \Rightarrow G$.

Rappelons: si $i \dashv\!\Vert F \Rightarrow G \in \mathcal{H}$, alors pour tout $j < \min(i, m)$, $0 \Vert\!\vdash F, j \dashv\!\Vert G \in \mathcal{H}$ ou $i \dashv\!\Vert G, 1 + j \Vert\!\vdash F \in \mathcal{H}$.

Supposons $i < m$. Donc soit $i \dashv\!\Vert G \in \mathcal{H}$, soit $0 \Vert\!\vdash F \in \mathcal{H}$. Dans le premier cas, soit k le plus petit ordinal tel que $k \dashv\!\Vert G \in \mathcal{H}$. Si $k = 0$, alors $\Im_0(G) = 0$ et $\Im_0(F) = 1$ (hypothèse d'induction), d'où $\Im_0(F \Rightarrow G) = 0$ d'où $\Im_i(F \Rightarrow G) = 0$. Sinon $k \Vert\!\vdash F \in \mathcal{H}$, puisque $k - 1 \dashv\!\Vert G \notin \mathcal{H}$. Donc par application de l'hypothèse d'induction $\Im_k(G) = 0$ et $\Im_k(F) = 1$, d'où $\Im_k(F \Rightarrow G) = 0$ et *a fortiori* $\Im_i(F \Rightarrow G) = 0$.

Pour $i = \omega$. Supposons que $\omega \dashv\!\Vert G \in \mathcal{H}$. En appliquant l'hypothèse d'induction, on en déduit que soit $\Im_0(G) = 0$ soit qu'il existe $k < m$ tel que $\Im_{k-1}(G) = 1$ et$\Im_k(G) = 0$. Du premier cas, il découle que $\Im_0(F \Rightarrow G) = 0$, donc $\Im_\omega(F \Rightarrow G) = 0$ (car $\Im_0(F) = 1$). Autrement, soit $0 \Vert\!\vdash F, k - 1 \dashv\!\Vert G \in \mathcal{H}$, soit $i \dashv\!\Vert G, k \Vert\!\vdash F \in \mathcal{H}$. Si $k - 1 \dashv\!\Vert G \in \mathcal{H}$, par hypothèse d'induction, $\Im_{k-1}(G) = 0$. Or on a supposé que k était le plus petit tel indice. Donc $k \Vert\!\vdash F \in \mathcal{H}$. Par application de l'hypothèse d'induction et un calcul élémentaire on en déduit que $\Im_i(F \Rightarrow G) = 0$.

Supposons maintenant que $\omega \dashv\!\Vert G \notin \mathcal{H}$. Donc pour tout $j < m$, $0 \Vert\!\vdash F, j \dashv\!\Vert G \in \mathcal{H}$. D'où $\Im_0(G) = 0$ et $\Im_0(F) = 1$ (hypothèse d'induction), et finalement ici aussi, $\Im_i(F \Rightarrow G) = 0$. C.Q.F.D.

Comme toujours ces ensembles de Hintikka sont les éléments maximaux des propriétés de consistance analytique pour CPB°_m.

DÉFINITION 8.5.3. *On appelle* CPB°_m-propriété de consistance analytique *toute famille $\mathcal{P}ca$ d'ensembles de formules signées telle que $S \in \mathcal{P}ca$ ssi S satisfait les conditions suivantes:*

(PCA_1) *Les cas de base sont:*
si $i \Vert\!\vdash e_k \in S$, alors $i < k < m$ ou $i = k = \omega$

si $i \dashv\!\Vdash e_k \in S$, *alors* $k \leq i < m$ *ou* $k < i = \omega$
si $i \Vdash\!\vdash P\vec{s}, j \dashv\!\Vdash P\vec{s} \in S$ *alors* $j > i$

(PCA2) *Cas des formules unaires:*
si $i \Vdash\!\vdash D_{j+1} F \in S$, *alors* $\{j \Vdash\!\vdash F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
si $i \dashv\!\Vdash D_{j+1} F \in S$, *alors* $\{j \dashv\!\Vdash F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
si $i \Vdash\!\vdash \dot{\neg} F \in S$, *alors* $\{0 \dashv\!\Vdash F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
si $i \dashv\!\Vdash \dot{\neg} F \in S$, *alors* $\{0 \Vdash\!\vdash F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$

(PCA3) *Cas des α-formules:*
si $i \Vdash\!\vdash F \dot{\wedge} G \in S$, *alors* $\{i \Vdash\!\vdash F, i \Vdash\!\vdash G\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
si $i \dashv\!\Vdash F \dot{\vee} G \in S$, *alors* $\{i \dashv\!\Vdash F, i \dashv\!\Vdash G\} \cup S \in \mathcal{P}ca$

(PCA4) *Cas des β-formules:*
si $i \dashv\!\Vdash F \dot{\wedge} G \in S$, *alors* $\{i \dashv\!\Vdash F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$ *ou* $\{i \dashv\!\Vdash G\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
si $i \Vdash\!\vdash F \dot{\vee} G \in S$, *alors* $\{i \Vdash\!\vdash F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$ *ou* $\{i \Vdash\!\vdash G\} \cup S \in \mathcal{P}ca$

(PCA5) *Cas des ν-formules:*
si $i \Vdash\!\vdash F \dot{\Rightarrow} G \in S$, *alors pour tout* $j < \min(1+i, m)$[6], *ou* $\{j \dashv\!\Vdash F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
ou $\{j \Vdash\!\vdash G\} \cup S \in \mathcal{P}ca$.

(PCA6) *Cas des π-formules:*
si $i \dashv\!\Vdash F \dot{\Rightarrow} G \in S$, *alors pour tout* $j < \min(i, m)$, *ou* $\{0 \Vdash\!\vdash F, j \dashv\!\Vdash G\} \cup S \in \mathcal{P}ca$,
ou $\{i \dashv\!\Vdash G, 1+j \Vdash\!\vdash F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$.

(PCA7) *Cas des γ-formules:*
si $i \Vdash\!\vdash \forall x \cdot F(x) \in S$, *alors pour tout terme* t, *connu de* S, $\{i \Vdash\!\vdash F(t)\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
si $i \dashv\!\Vdash \exists x \cdot F(x) \in S$, *alors pour tout terme* t, *connu de* S, $\{i \dashv\!\Vdash F(t)\} \cup S \in \mathcal{P}ca$

(PCA8) *Cas des δ-formules:*
si $i < m$ *et* $i \Vdash\!\vdash \exists x \cdot F(x) \in S$, *alors pour tout paramètre* a *étranger à* S, $\{i \Vdash\!\vdash F(a)\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
si $\omega \Vdash\!\vdash \exists x \cdot F(x) \in S$, *alors pour tout* $i < m$ *et tout paramètre* a *étranger à* S,

$$\{i \Vdash\!\vdash F(a)\} \cup S \in \mathcal{P}ca$$

si $i \dashv\!\Vdash \forall x \cdot F(x) \in S$, *alors pour tout paramètre* a *étranger à* S, $\{i \dashv\!\Vdash F(a)\} \cup S \in \mathcal{P}ca$

$\Diamond$

On vérifie que les lemmes d'extension (LEMME 2.2.2, page 68) restent valables pour cette nouvelle définition de consistance analytique.

LEMME 8.5.2. *Soit $\mathcal{A}$ une CPB°_{m}-propriété de consistance analytique.*

$\mathcal{A}' = \{S' : \exists \pi \in \mathcal{R}en(\mathcal{P}), \exists S \in \mathcal{A}, S'\pi \subseteq S\}$ *est une CPB°_{m}-propriété de consistance analytique fermée pour l'inclusion.*

$\mathcal{A}'' = \left\{S' : \forall S'' \in 2^{S'}_{f}, \exists S \in \mathcal{A}', S'' \subseteq S\right\}$ *est une CPB°_{m}-propriété de consistance analytique de caractère fini.*

PREUVE. Vérification immédiate. C.Q.F.D.

Ainsi le THÉORÈME 2.2.1, page 69, de l'existence d'un modèle reste valable dans ce nouveau contexte.

[6] *dans le cas $m = \omega$, l'inéquation s'écrit plus simplement $k < 1 + i$*

THÉORÈME 8.5.1. *(Existence d'un modèle.) Tout membre d'une CPB°_{m}-propriété de consistance analytique est satisfaisable.*

PREUVE. Comme pour le THÉORÈME 2.2.1. C.Q.F.D.

PROPOSITION 8.5.3. *L'ensemble $\mathcal{P}ac$ de tous ensembles de formules signées CPB°_{m}-consistants est une propriété de consistance analytique.*

PREUVE. Elle ressemble au COROLLAIRE 2.4.1 de la page 74. C.Q.F.D.

THÉORÈME 8.5.2. *(Complétude réfutationnelle de CPB°_{m}). Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de formules signées. Si $\mathcal{F}$ est insatisfaisable, alors $\mathcal{F}$ est CPB°_{m}-inconsistant.*

PREUVE. On procède par contraposition, et on applique la PROPOSITION 8.5.3 et le THÉORÈME 8.5.1 C.Q.F.D.

Pour établir que F est un théorème de CPB°_{m}, on cherche "simplement" à construire un tableau fermé pour ω—$\|F$. Du théorème précédent découle immédiatement le théorème de compacité pour les logiques de Post.

Le calcul CPB°_{m} est très simple dans la mesure où il ressemble beaucoup à un calcul pour une logique ayant un nombre fini de valeurs de vérité. Il ne contient pas d'ω-règle, ni ne nécessite la construction de plusieurs réfutations. Le théorème de compacité (voir (RASIOWA, 1974*b*, et références)) s'y prouve très aisément.

PROPOSITION 8.5.4. *(Compacité des logiques de Post) Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de formules signées. Si $\mathcal{F}$ est insatisfaisable, alors il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ insatisfaisable.*

PREUVE. En fait, seul le cas $m = \omega$ est à prouver, puisque toute logique à nombre fini de valeurs de vérité est compacte (voir (GOTTWALD, 1989)). $\mathcal{F}$ est insatisfaisable. Donc il existe un tableau de taille finie fermé pour $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les formules de $\mathcal{F}$ introduites dans ce tableau fermé. Comme ce tableau est fini, $\mathcal{G}$ l'est aussi. Par ailleurs, par construction $\mathcal{G}$ est CPB°_{m}-inconsistant. Donc $\mathcal{G}$ est insatisfaisable (correction de CPB°_{m}). C.Q.F.D.

PROPOSITION 8.5.5. *Soient S un ensemble de formules signées et $i\|$—F une formule.*

Si $S \cup \{i\|$—$F\}$ est CPB°_{m}-inconsistant, alors pour tout $j > i$, $S \cup \{j\|$—$F\}$ est CPB°_{m}-inconsistant.

Si $S \cup \{i$—$\|F\}$ est CPB°_{m}-inconsistant, alors pour tout $j < i$, $S \cup \{j$—$\|F\}$ est CPB°_{m}-inconsistant.

Preuve. La preuve se fait par triple induction, sur le nombre de quantificateurs dans F, la taille de F et la taille d'un des plus petits tableaux fermés de $S \cup \{i \Vdash F\}$ (respectivement $S \cup \{i \mathrel{\dashv\!\vert} F\}$). C.Q.F.D.

Cependant dans la mise en oeuvre de cette procédure de preuve, on se rend compte que de nombreuses redondances sont introduites par les règles de décomposition de l'implication. Par exemple, la séquence suivante est possible:

<table>
<tr><td colspan="8" align="center">$2 \Vdash F \Rightarrow G$</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">$0 \mathrel{\dashv\!\vert} F$</td><td colspan="4" align="center">$0 \Vdash G$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$1 \mathrel{\dashv\!\vert} F$</td><td colspan="2" align="center">$1 \Vdash G$</td><td colspan="2" align="center">$1 \mathrel{\dashv\!\vert} F$</td><td colspan="2" align="center">$1 \Vdash G$</td></tr>
<tr><td>$2 \mathrel{\dashv\!\vert} F$</td><td>$2 \Vdash G$</td><td>$2 \mathrel{\dashv\!\vert} F$</td><td>$2 \Vdash G$</td><td>$2 \mathrel{\dashv\!\vert} F$</td><td>$2 \Vdash G$</td><td>$2 \mathrel{\dashv\!\vert} F$</td><td>$2 \Vdash G$</td></tr>
</table>

En fait, dans le sous-tableau de racine $0 \mathrel{\dashv\!\vert} F$ $1 \mathrel{\dashv\!\vert} F$ et $2 \mathrel{\dashv\!\vert} F$ sont inutiles (Cf. la Proposition 8.5.5). De même que sur la branche la plus à droite, $0 \Vdash G$ et $1 \Vdash G$. Dans les autres branches il y a une des trois formules qui est redondante avec l'une des deux autres (utiliser également la Proposition 8.5.5).

Si on remplace les règles de décomposition de l'implication par celles de la Figure 8.7, ces redondances sont évitées. Toutefois, ces règles d'inférence ont un taux de branchement non-borné (en fait, on introduit deux ω-règles).

8.6 Le Calcul par Tableaux Analytiques CPB_m

Ce calcul remplace les règles de la Figure 8.6 par celles de la Figure 8.7. Il évite ainsi de mettre plusieurs fois une même formule avec des signes différents sur une branche.

Définition 8.6.1. *Le calcul des tableaux analytiques de Post (CPB_m) est identique à CPB°_m, sauf que les règles de décomposition de l'implication et de la quantification existentielle précédée du signe $\omega \Vdash$ sont substituées par celles de la* Figure *8.7.* ◊

Les preuves de correction et de complétude réfutationnelle sont faites en se ramenant au calcul CPB°_m. On adapte la définition d'une CPB°_m-propriété de consistance analytique au cas présent.

Définition 8.6.2. *Une famille $\mathcal{P}ca$ d'ensembles de formules signées est une CPB_m-propriété de consistance analytique ssi tout membre S de $\mathcal{P}ca$ satisfait les conditions suivantes:*

(Pca'$_1$)–(Pca'$_4$) et (Pca'$_7$) *comme le numéro correspondant dans la* Définition *8.5.3*

(Pca'$_5$) *Cas des ν-formules:*
si $i \Vdash F \Rightarrow G \in S$, alors $\{0 \mathrel{\dashv\!\vert} F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$, ou $\{i \Vdash G\} \cup S \in \mathcal{P}ca$ ou il existe $k < \min(i, m)$, $\{k \Vdash G, k+1 \mathrel{\dashv\!\vert} F\} \cup S \in \mathcal{P}ca$

(PCA'$_6$) *Cas des π-formules:*
si i—$\Vdash F \Rightarrow G \in S$, alors il est un $k < \min(1+i, m)$, $\{k\Vdash\!\!— F, k—\!\!\Vdash G\} \cup S \in \mathcal{P}ca$

(PCA'$_8$) *Cas des δ-formules:*
si $i\Vdash\!\!— \exists x \cdot F(x) \in S$, alors pour tout paramètre a étranger à S, $\{i\Vdash\!\!— F(a)\} \cup S \in \mathcal{P}ca$
si $i—\!\!\Vdash \forall x \cdot F(x) \in S$, alors pour tout paramètre a étranger à S, $\{i—\!\!\Vdash F(a)\} \cup S \in \mathcal{P}ca$

$\diamond$

8.6.1 Correction du Calcul CPB$_m$

La difficulté dans la preuve de la correction vient de la règle de décomposition de δ-formules du type $\omega\Vdash\!\!— \exists x \cdot F(x)$ En effet, $\Re_\exists = \sup$ et si la borne supérieure d'un ensemble vaut ω, il se peut que cette borne ω ne soit pas atteinte. Ainsi, on ne peut pas prouver l'existence d'un terme t tel que $\omega\Vdash\!\!— F(t)$, quand $\omega\Vdash\!\!— \exists x \cdot F(x)$.

Les schémas de preuve de la correction d'une règle d'inférence courants ne s'appliquent donc pas ici.

On va prouver que si $S \cup \{\omega\Vdash\!\!— \exists x \cdot F(x)\}$ est satisfaisable, alors $S \cup \{\omega\Vdash\!\!— F(t)\}$ est satisfaisable. La satisfaisabilité est préservée, mais non les modèles.

On montre pour cela que toute CPB$^\circ_m$-propriété de consistance analytique s'étend en une CPB$_m$-propriété de consistance analytique, qui est également une CPB$^\circ_m$-propriété de consistance analytique.

LEMME 8.6.1. *Soit $\mathcal{A}$ une CPB$^\circ_m$-propriété de consistance analytique. On définit les familles $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ par les équations:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}' & = & \mathcal{A} \\ & \cup & \{S \cup \{i\Vdash\!\!— F\} : \exists k > i, S \cup \{k\Vdash\!\!— F\} \in \mathcal{A}\} \\ & \cup & \{S \cup \{i—\!\!\Vdash F\} : \exists k < i, S \cup \{k—\!\!\Vdash F\} \in \mathcal{A}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}'' & = & \mathcal{A}' \\ & \cup & \{S \cup \{\omega\Vdash\!\!— F\} : \forall k < m, S \cup \{k\Vdash\!\!— F\} \in \mathcal{A}'\} \\ & \cup & \{S \cup \{\omega—\!\!\Vdash F\} : \exists k < m, S \cup \{k\Vdash\!\!— F\} \in \mathcal{A}'\} \end{array}$$

Les familles $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ sont des CPB$^\circ_m$-propriétés de consistance analytique.

PREUVE. La vérification pour $\mathcal{A}'$ est semblable à celle pour $\mathcal{A}''$. Nous n'esquissons que la seconde. Seuls sont intéressants les cas où $\{\omega\Vdash\!\!— F\} \in S'' \in \mathcal{A}'' \setminus \mathcal{A}'$; Pour les autres cas le résultat est trivialement acquis, puisque $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}''$. Posons $S' = S'' \setminus \{\omega\Vdash\!\!— F\}$.

Si F est de la forme $G\dot{\vee}H$. Si $m < \omega$, $S' \cup \{m-1\Vdash\!\!— F\} \in \mathcal{A}'$, donc soit $S' \cup \{m-1\Vdash\!\!— G\} \in \mathcal{A}'$, soit $S' \cup \{m-1\Vdash\!\!— H\} \in \mathcal{A}'$. Si la première alternative est le cas, alors pour tout $j < m$, $S' \cup \{j\Vdash\!\!— G\} \in \mathcal{A}'$, donc $S' \cup \{\omega\Vdash\!\!— G\} \in \mathcal{A}''$, sinon (par le même raisonnement) $S' \cup \{\omega\Vdash\!\!— H\} \in \mathcal{A}''$.

Pour $m = \omega$. L'un des deux ensembles

$$\{k\Vdash\!\!— G : S' \cup \{k\Vdash\!\!— G\} \in \mathcal{A}'\} \text{ et } \{k\Vdash\!\!— H : S' \cup \{k\Vdash\!\!— H\} \in \mathcal{A}'\}$$

est infini. S'il n'en était pas ainsi, i, le plus petit élément de $\mathcal{P}_m$ qui ne figure pas dans les signes de l'un de ces deux ensembles, serait bien défini et fini. Mais, comme $S' \cup \{i \Vdash\!\!- F\} \in \mathcal{A}'$, et que $\mathcal{A}'$ est bien une CPB°_m-propriété de consistance analytique, soit $S' \cup \{i \Vdash\!\!- G\} \in \mathcal{A}'$, soit $S' \cup \{i \Vdash\!\!- H\} \in \mathcal{A}'$, d'où une contradiction. Sans perte de généralité, disons que c'est $\{k \Vdash\!\!- G : S' \cup \{k \Vdash\!\!- G\} \in \mathcal{A}'\}$ est infini. Donc pour tout $j < \omega$, il existe un k tel que $S' \cup \{k \Vdash\!\!- G\} \in \mathcal{A}'$. Donc $S' \cup \{j \Vdash\!\!- G\} \in \mathcal{A}'$. Finalement, $S' \cup \{\omega \Vdash\!\!- G\} \in \mathcal{A}''$.

La vérification des autres cas se fait de manière similaire. C.Q.F.D.

REMARQUE. En l'appliquant à la famille des ensembles de formules CPB°_m-consistants, cette proposition donne une preuve non-constructive du LEMME 8.5.5.

PROPOSITION 8.6.1. *Toute CPB°_m-propriété de consistance analytique $\mathcal{A}$ peut être étendue en une CPB_m-propriété de consistance analytique, qui est aussi une CPB°_m-propriété de consistance analytique.*

PREUVE. D'abord, $\mathcal{A}$ est étendue en $\mathcal{A}''$ comme indiqué dans LEMME 8.6.1. $\mathcal{A}''$ est alors étendue en une CPB°_m-propriété de consistance analytique de caractère fini $\mathcal{B}$ (LEMME 8.5.2). En reprenant les notations du LEMME 8.6.1, on vérifie que $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \mathcal{B}''$. Il reste à prouver que $\mathcal{B}$ est aussi une CPB_m-propriété de consistance analytique.

Les deux définitions ne divergent que sur les implications et les δ-formules.

Soient S un ensemble fini de $\mathcal{B}$, et $i' \Vdash\!\!- F \Rightarrow G \in S$.

Pour tout $j < \min(1 + i', m)$, il existe $S_j \in \mathcal{B}$ avec $S_j = S \cup \{j -\!\!\Vdash F\}$ ou $S_j = S \cup \{j \Vdash\!\!- G\}$. Comme $\mathcal{B}$ est de caractère fini, $\bigcup \{S_j : j < \min(1 + i', m)\} \in \mathcal{B}$. Si $0 -\!\!\Vdash F \in S_0$, la clause (PCA_5) est prouvé. Soit k le plus petit indice tel que S_k contienne $k -\!\!\Vdash F$. Supposons que k existe et soit plus grand que 1 (le cas 0 est déjà traité). Par construction S_{k-1} contient $k - 1 \Vdash\!\!- G$. Puisque $\mathcal{B}$ est de caractère fini, $S_{k-1} \cup S_k \in \mathcal{B}$, et ainsi, dans ce cas également, on a prouvé que la clause (PCA_5) est satisfaite. Si k n'existe pas, alors pour tout $j < \min(1 + i', m)$, $S_j = S \cup \{j \Vdash\!\!- G\}$. Si $i' < m$, alors $i' \Vdash\!\!- G \in S_{i'} \in \mathcal{B}$, sinon, comme $\mathcal{B} = \mathcal{B}''$, $S \cup \{\omega \Vdash\!\!- G\} \in \mathcal{B}$. Dans tous les cas de figure, la clause (PCA'_5) est prouvé. La vérification des implications rejetées se fait de la même manière.

Soit $i' \Vdash\!\!- \exists x \cdot F(x) \in S$. Si $i' < \omega$, pour tout paramètre a étranger à S, $S \cup \{i' \Vdash\!\!- F(a)\} \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}''$ est CPB°_m-propriété). Si $i' = \omega$, alors pour tout $j < m$ et tout paramètre a étranger à S, $S \cup \{j \Vdash\!\!- F(a)\} \in \mathcal{B}$. Donc pour tout paramètre a étranger à S et tout $j < m$, $S \cup \{j \Vdash\!\!- F(a)\} \in \mathcal{B}$, donc par construction, $S \cup \{\omega \Vdash\!\!- F(a)\} \in \mathcal{B}$. C.Q.F.D.

LEMME 8.6.2. *Tout élément d'une CPB_m-propriété de consistance analytique est un ensemble CPB_m-consistant.*

PREUVE. Soit $\mathcal{F}$ un élément de cette propriété de consistance analytique. La contraposée est prouvée par une induction élémentaire sur la taille d'un des plus petits tableaux fermés de $\mathcal{F}$. C.Q.F.D.

THÉORÈME 8.6.1. *(Correction de CPB$_m$) Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de formules signées. Si $\mathcal{F}$ est CPB$_m$-inconsistant, alors $\mathcal{F}$ est insatisfaisable.*

PREUVE.

	$\mathcal{F}$ est satisfaisable	
donc	$\mathcal{F}$ est CPB$^{\circ}_m$-consistant	contraposée de THÉORÈME 8.5.2
donc	$\mathcal{F}$ est dans une CPB$_m$-propriété	PROPOSITION 8.6.1
donc	$\mathcal{F}$ est CPB$_m$-consistant	LEMME 8.6.2

C.Q.F.D.

8.6.2 Complétude du Calcul CPB$_m$

La complétude de CPB$_m$ peut être prouvée directement en suivant le même plan que pour CPB$^{\circ}_m$. Alternativement, il suffit de prouver que si on dispose une CPB$_m$-propriété de consistance analytique, alors on peut construire une CPB$^{\circ}_m$-propriété de consistance analytique, qui étend la première, dont tous les membres sont donc satisfaisables. Nous optons pour le second plan.

LEMME 8.6.3. *La famille des ensembles CPB$_m$-consistants est une CPB$_m$-propriété de consistance analytique.*

PREUVE. Comme pour la PROPOSITION 8.5.3. C.Q.F.D.

Cette propriété s'étend en une CPB$^{\circ}_m$-propriété de consistance analytique (dont tout élément est satisfaisable):

LEMME 8.6.4. *Soit $\mathcal{A}$ une CPB$_m$-propriété de consistance analytique. La famille*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' = & \quad \mathcal{A} \\ & \cup \ \{S \cup \{i \Vdash\!\!- F\} : \exists k > i, S \cup \{k \Vdash\!\!- F\} \in \mathcal{A}\} \\ & \cup \ \{S \cup \{i -\!\!\Vdash F\} : \exists k < i, S \cup \{k -\!\!\Vdash F\} \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

est une CPB$_m$-propriété de consistance analytique et une CPB$^{\circ}_m$-propriété de consistance analytique.

PREUVE. Comme pour LEMME 8.6.1. C.Q.F.D.

THÉORÈME 8.6.2. *(Complétude réfutationnelle de CPB_m) Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de formules signées.*

Si $\mathcal{F}$ est insatisfaisable, alors $\mathcal{F}$ est CPB_m-inconsistant.

PREUVE. Par contraposition. Si $\mathcal{F}$ est CPB_m-consistant, alors $\mathcal{F}$ est membre d'une CPB°_m-propriété de consistance analytique, donc avec le THÉORÈME 8.5.1, on en déduit la satisfaisabilité de $\mathcal{F}$. C.Q.F.D.

REMARQUE. Comme le calcul contient, pour $m = \omega$, implicitement des ω-règles, par exemple:

$$\frac{\text{il existe } k < \omega\text{:} \quad \omega \dashv\!\!| F \Rightarrow G}{\begin{array}{c} k |\!\!\vdash F \\ k \dashv\!\!| G \end{array}}$$

Un tableau peut contenir des nœuds avec ω successeurs, le théorème de compacité ne s'en suit pas immédiatement (bien que la logique de Post d'ordre sup ω soit compacte. La situation ressemble (mais en beaucoup plus simple, CPB°_m existe!), à ce qui se passe en logique infinitaire, où l'on peut prouver le théorème de l'existence d'un modèle également par des propriété de consistance analytique (voir (KEISLER, 1971)).

Ainsi, si un ensemble de formules est insatisfaisable, il existe un tableau de profondeur finie fermé dans CPB_m; mais il n'est pas dit que l'on puisse le construire en un temps fini.

Par contre, une observation attentive des règles d'inférence montre que si un ensemble de formules signées ne contient pas les signes '$\omega \dashv\!\!|$' '$\omega |\!\!\vdash$', alors aucune règle d'inférence ne le fait apparaître.

Comme ORŁOWSKA (1980) (pour la résolution), on obtient une procédure de semi-décision en organisant la réfutation ainsi:

Pour établir que F est un théorème de CPB_m, on vérifie que pour tout $i < m$ tel que $i \dashv\!\!| F$ a un tableau fermé. (Ce tableau est nécessairement de taille finie.) Comme $i \dashv\!\!| F$ est alors insatisfaisable (correction de CPB°_m), toute interprétation évalue F à une valeur de vérité strictement supérieure à i.

8.7 Skolemisation

Pour utiliser aisément l'unification, il faut pouvoir skolemiser. Comme la skolemisation concerne les individus, il est plus simple de se servir de P_m-interprétations.

ORŁOWSKA (1976) a montré que la logique de Post admettait une mise sous forme prénexe et que les formules du type $\mathsf{D}_i F$ pouvaient être skolemisées. Nous abordons la skolemisation différemment. Le cas des logiques de Post d'ordre fini ne pose pas de problèmes. En se servant de la PROPOSITION 8.7.4, on conclut sur le cas de la logique de Post d'ordre sup ω.

8.7.1 Skolemisation dans les Logiques de Post d'Ordre Fini

Dans la DÉFINITION 5.2.2, nous avons introduit les termes de *position isotone* et *antitone*. Dans les logiques de Post, tous les connecteurs sont monotones. Ainsi toute position est soit isotone soit antitone.

PROPOSITION 8.7.1. *Pour tout connecteur, toute position est soit isotone soit antitone.*

PREUVE. La table suivante indique pour chaque connecteur, pour toutes ses positions, si celles-ci sont isotones ($\nearrow$) ou antitones ($\searrow$).

Connecteur	$\dot{\wedge}$	$\dot{\vee}$	$\dot{\Rightarrow}$	$\dot{\neg}$	D_i	$\forall$	$\exists$
Profil	$\nearrow\nearrow$	$\nearrow\nearrow$	$\searrow\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Vérifions les cas D_{1+i} et $\exists$. Montrons que pour toute interprétation $\Im$, si $\Im(F) \leq \Im(G)$, alors $\Im(\mathsf{D}_{1+i}\, F) \leq \Im(\mathsf{D}_{1+i}\, G)$.

Trois cas de figures. Si $\Im(F) \leq \Im(G) \leq i$, alors $\Im(\mathsf{D}_{1+i}\, F) = \Im(\mathsf{D}_{1+i}\, G) = 0$. Si $\Im(F) \leq i < \Im(G)$, alors $0 = \Im(\mathsf{D}_{1+i}\, F) < \Im(\mathsf{D}_{1+i}\, G) = \omega$. Si $i < \Im(F) \leq \Im(G)$, alors $\Im(\mathsf{D}_{1+i}\, F) = \Im(\mathsf{D}_{1+i}\, G) = \omega$.

Montrons que pour toute interprétation $\Im$, si pour toute $\{\dot{x}\}$-variante $\Im'$ de $\Im$, $\Im'(F(\dot{x})) \leq \Im'(G(\dot{x}))$, alors $\Im(\forall x \cdot F(x)) \leq \Im(\forall x \cdot G(x))$.

Comme $\inf \{\Im'(F(\dot{x})) : \Im'\ \{\dot{x}\}\text{-variante de } \Im\} = \Im(\forall x \cdot F(x))$ et $\Im(\forall x \cdot F(x)) = \Im'(\forall x \cdot F(x))$ (Cf. PROPOSITION 0.9.1), $\Im'(\forall x \cdot F(x)) \leq \Im'(G(\dot{x}))$, d'où le résultat. C.Q.F.D.

À cause de la monotonie de tous les éléments de la signature logique, une skolemisation paresseuse, bien que possible, est inutile; on peut skolemiser la formule, sans avoir à la mettre au préalable sous une forme normale, *avant* de rechercher (par exemple) une réfutation par tableaux.

LEMME 8.7.1. *Soient $\hat{\Im}$ une P_m-interprétation de domaine $\mathcal{I}$, F une formule fermée de $\mathcal{F}bf$, p une position de F, $\vec{x} : \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ le vecteur des variables dont la portée contient la position p, f un symbole de fonction n-aire n'apparaissant pas dans Σ.*

Lorsque p est une position isotone de F et que $F|_p$ est $\exists x \cdot G(x)$,

$$\hat{\Im}(F) = \omega,$$

ssi il existe une expansion $\hat{\Im}'$ de $\hat{\Im}$, vérifiant $\hat{\Im}'(F[G(f\vec{x})]_p) = \omega$.

Quand p est une position antitone et que $F|_p$ est $\forall x \cdot G(x)$,

$$\hat{\Im}(F) = \omega,$$

ssi il existe une expansion $\widehat{\Im}'$ de $\widehat{\Im}$, vérifiant $\widehat{\Im}'(F[G(f\vec{x})]_p) = \omega$.

PREUVE. On ne vérifie que la première équivalence, la seconde reprend les mêmes arguments.

Supposons que $\widehat{\Im}(F) = \omega$. Pour définir entièrement $\widehat{\Im}'$, il suffit de préciser l'interprétation du symbole fonctionnel f.

$$\begin{array}{llll} \widehat{\Im}'(f): & \mathcal{I}^n & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ & \vec{c} & \longmapsto & a \quad \text{tel que } \widehat{\Im}^{\vec{x},\dot{x}}_{\vec{c},a}(G(\dot{x})) = \widehat{\Im}^{\vec{x}}_{\vec{c}}(\exists x \cdot G(x)) \end{array}$$

Comme le nombre de valeurs de vérité est fini et que ces valeurs de vérité forment une chaîne (avec l'ordre naturel des ordinaux), le maximum est bien atteint par un individu de $\mathcal{I}$. Ceci garantit la bonne définition de l'application $\widehat{\Im}'(f)$. Par construction, pour tout n-uplet d'individus $\vec{c}$, $\widehat{\Im}'^{\vec{x}}_{\vec{c}}(G(f\vec{x})) = \widehat{\Im}^{\vec{x}}_{\vec{c}}(\exists x \cdot G(x))$ et donc $\widehat{\Im}(F) = \widehat{\Im}'(F[G(f\vec{x})]_p)$.

La réciproque! $\widehat{\Im}'(F[G(f\vec{x})]_p) = \omega$.

$$\begin{array}{lcll} \widehat{\Im}'^{\vec{x}}_{\vec{c}}(G(f\vec{x})) & \leq & \widehat{\Im}'^{\vec{x}}_{\vec{c}}(\exists x \cdot G(x)) & \text{Par définition de } \exists\text{: } \Re_\exists = \max \\ \widehat{\Im}'(F[G(f\vec{x})]_p) & \leq & \widehat{\Im}'(F) & \text{puisque } p \text{ est isotone} \end{array}$$

Finalement, comme F ne contient pas le symbole f, $\widehat{\Im}'(F) = \widehat{\Im}(F) = \omega$. C.Q.F.D.

Le symbole f est appelé symbole de fonction de Skolem. Par skolemisation "top-down" (c'est-à-dire en éliminant les quantifications existentielles isotones et universelles antitones les plus proches de la racine de l'arbre de la formule en premier), on introduit des fonctions de Skolem dont l'arité est plus petite que par skolemisation "bottom-up" (stratégie inverse). On appelle *skolemisée* d'une formule F la formule obtenue par skolemisation "top-down" de F.

On vérifie qu'après avoir skolemisé une formule, aucun paramètre n'est introduit dans une réfutation par tableau, car les règles de décompostion correspondantes ne s'appliquent pas.

PROPOSITION 8.7.2. *Soient F est une formule non-signée, et G une occurrence de sous-formule en une position isotone (respectivement antitone) de F, $k, k' \in \mathcal{P}_m$. Tout tableau de CBP_m de $k \Vdash\!\!\!- F$ ne peut pas contenir $k' -\!\!\!\!\dashv\!\!| G$ (respectivement $k' \Vdash\!\!\!- G$).*

De même, tout tableau de CBP_m de $k -\!\!\!\!\dashv\!\!| F$ ne peut pas contenir $k' \Vdash\!\!\!- G$ (respectivement $k' -\!\!\!\!\dashv\!\!| G$).

PREUVE. Par induction structurelle sur F, on établit *mutuellement* les deux cas ($k \Vdash\!\!\!- F$ et $k -\!\!\!\!\dashv\!\!| F$). C.Q.F.D.

PROPOSITION 8.7.3. *Soit F une formule de $\mathcal{F}bf$.*

F est P_m-insatisfaisable,
ssi la skolemisée F' de F l'est.

PREUVE. Par induction sur le nombre de positions antitones de quantifications universelles et de positions isotones de quantifications existentielles, et par application du LEMME 8.7.2. C.Q.F.D.

8.7.2 Skolemisation dans la Logique de Post d'Ordre sup ω

La séquence des logiques de Post d'ordre croissant vérifie une propriété que l'on peut rapprocher de la *propriété des repères finis* des logiques modales les plus utilisées (voir (HUGHES & CRESSWELL, 1984, Chapter 8). Cette propriété dit essentiellement que pour vérifier qu'une formule (ou un ensemble fini de formules) est P_ω-insatisfaisable, il suffit de s'assurer qu'il est insatisfaisable pour une logique de Post d'ordre fini.

PROPOSITION 8.7.4. *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble* fini *de formules signées.*

$\mathcal{F}$ est P_ω-insatisfaisable
ssi il existe $n < \omega$ tel que $\mathcal{F}$ soit P_n-insatisfaisable.

PREUVE. $\mathcal{F}$ est P_ω-insatisfaisable, donc $\mathsf{CPB}^\circ_\omega$-inconsistant. Il existe donc un tableau fini fermé pour $\mathcal{F}$. Soit k le plus grand indice ou la plus grande valeur de vérité (dans un signe) dans ce tableau fermé. $\mathcal{F}$ est CPB°_{k+1}-inconsistant, donc P_{k+1}-insatisfaisable. C.Q.F.D.

PROPOSITION 8.7.5. *Soit F une formule de $\mathcal{F}bf$.*

F est P_ω-insatisfaisable,
ssi la skolemisée F' de F l'est.

PREUVE.

	F est P_ω-insatisfaisable	
donc	il existe $n < \omega$ tel que F soit P_n-insatifaisable	PROPOSITION 8.7.4
donc	F' est P_n-insatifaisable	PROPOSITION 8.7.3
donc	F' est P_ω-insatisfaisable	PROPOSITION 8.7.4

La réciproque s'établit de la même manière. C.Q.F.D.

Ainsi pour prouver la correction de la skolemisation, on s'est servi de sa correction dans les logiques à nombre fini de valeurs de vérité; le fait que P_ω soit la "limite" de $(\mathsf{P}_{m_i})_{i<\omega}$ a permis d'étendre le fait au cas infini. Cette technique est très générale et peut par exemple s'appliquer à la séquence des logiques de Lukasiewicz.

8.8 Calcul avec Contraintes

D'un point de vue pratique, les règles d'inférence pour les ν-formules (par exemple) dans CPB°_m sont coûteuses, car elles obligent potentiellement de remettre plusieurs fois sur la même branche les sous-formules avec des signes différents (mais non incompatibles).

Dans CPB_m, on obvie à cela en se servant de la formulation alternative des règles de décomposition des implications données en FIGURE 8.7. Il en résulte un calcul dont certaines règles d'inférence ont un nombre non-borné d'alternatives. En gérant *symboliquement* les signes, ce problème disparaîtra.

Le calcul développé dans cette section, décompose le raisonnement en deux parties distinctes: le raisonnement dans la logique de Post et le raisonnement sur les indices.

Dans la suite, $\mathcal{A}_f$ désigne un ensemble infini dénombrable de variables libres, appelées *variables arithmétiques*. La signature pour la théorie de l'ordre est $\langle 0, \omega, s, \prec \rangle$, où o et ω sont des constantes (elles désignent respectivement les nombres ordinaux 0 et ω), s est un symbole unaire (pour la fonction "successeur"), et $\prec$ désigne la relation d'ordre ... *est strictement inférieur à* ... Si $k \in \mathcal{A}_f$ et $i < m$, l'expression $i + k$ (et $k + i$) est une abréviation pour le terme $s^i(k)$, en convenant que $s^0(k)$ n'est autre que k, $s^1(k)$, $s(k)$, $s^{i+1}(k)$, $s(s^i(k))$ et i, $s^i(0)$. On peut poser $s(\omega) = \omega$. Comme d'habitude on préfèrera la notation plus usuelle de $i + k$, etc. On définit pour $i, j < m$,

$$i \dot{-} j =_{df} \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j < m \\ i - j & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la suite, pour réduire le nombre des cas, on considèrera tacitement (et avec un abus dans la notation) que le cas $i + k$ subsume le cas $i + 0$. Cette confusion ne prêtera pas à équivoque.

Maintenant les signes sont les éléments de

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}_f} = \{i + k \Vdash, i + k \dashVv, i \Vdash, i \dashVv, \omega \Vdash, \omega \dashVv : k \in \mathcal{A}_f, i < m\}.$$

Dans toute la suite, on respecte les conventions résumées dans la table:

symbole	désigne des éléments de...
k	$\mathcal{A}_f$
i	$\mathcal{P}_m \setminus \{\omega\}$
i''	$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_m \cup \{i + k : 0 \leq i < m, k \in \mathcal{A}_f\}$
i'	$\mathcal{Q} \setminus \{\omega\}$

L'ensemble $\mathcal{E}$ de toutes les contraintes élémentaires est alors:

$$\{i \prec j, i + k \prec j + k', i \prec j + k', i + k \prec j, i + k \prec j, i + k \prec m : i, j < m, k, k' \in \mathcal{A}_f\}$$

$\mathcal{E}$ ne contient pas ω en partie gauche, ni de termes du genre $\omega + k$, si bien qu'il faudra distinguer quelques fois les règles de décomposition pour $\omega \Vdash$— ou ω—$\dashv\!\|$. Si τ est une application de $\mathcal{A}_f$ vers $\mathcal{A}_f$ ou vers sup ω, on étend τ aux formules signées et aux ensembles de formules signées de façon standard: $\tau(s^i(k)\Vdash\!\!-F)$, noté plus simplement $\tau(i+k)\Vdash\!\!-F$ où $\tau s^i(k)\Vdash\!\!-F$, vaut par définition $s^i(\tau k)\Vdash\!\!-F$ et si $\mathcal{F}$ est un ensemble de formules signées, $\tau(\mathcal{F})$ est défini par $\{s^i(\tau k)\Vdash\!\!-F : s^i(k)\Vdash\!\!-F \in \mathcal{F}\}$

L'égalité entre deux expressions arithmétiques est vue comme une abréviation pour $a \preceq b$ ssi $a \prec 1 + b$, et $a = b$ ssi $b \preceq a$ et $a \preceq b$. Bien que $\preceq$ et $=$ ne soient pas des symboles primitifs, on s'en servira (comme abréviation) dans la suite.

REMARQUE. Que la notation arithmétique ne fasse pas leurre: la théorie de l'ordre utilisée est beaucoup plus faible que l'arithmétique de Presburger. On ne considère ici que la conjonction (implicite) d'un ensemble de comparaisons dont chaque membre contient au plus une variable libre. Il n'y a pas de quantificateurs. Des solutions pour le traitement informatique de l'arithmétique de Presburger sont étudiées dans (KÄUFL, 1988), qui discute également les travaux antérieurs de COOPER et de BLEDSOE (1975).

L'approche ressemble également à la résolution de contraintes symboliques entre termes ordonnés par des *lexicographic path orderings* (LPO) étudiés en premier dans (COMON, 1990) et généralisés aux LPO avec statut dans (JOUANNAUD & OKADA, 1991). La décidabilité du fragment existentiel est prouvé dans (COMON, 1990).

Ces deux rapprochements proposent chacun une solution au traitement des expressions sur les indices. Toutefois, pour générales qu'elles soient, nous gagnerons à utiliser une solution *ad hoc* qui tirera profit du fait que dans chaque membre de la comparaison, il n'y a au plus qu'une seule variable.

8.8.1 Calcul par Tableaux Analytiques Améliorés CPA$_m$

Ce calcul est meilleur que CPB$_m$: il tient compte *symboliquement* de la contrainte d'ordre O et utilise des signes avec variables arithmétiques.

DÉFINITION 8.8.1. *Le calcul des tableaux analytiques de Post amélioré (CPA$_m$) dont le langage formel est défini ainsi:*

les signes des formules sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_f}$;

le langage est l'ensemble de toutes formules signées, l'ensemble $\mathcal{E}$ et du symbole $\times$;

les règles d'inférence sont données dans les FIGURES *8.8 à 8.12.*

$$\mathrm{CPA}_1 : \frac{i'' \Vdash F \dot\wedge G}{\begin{array}{c} i'' \Vdash F \\ i'' \Vdash G \end{array}} \qquad \mathrm{CPA}_2 : \frac{i'' \dashV F \dot\wedge G}{i'' \dashV F \;\Big|\; i'' \dashV G}$$

$$\mathrm{CPA}_3 : \frac{i'' \Vdash F \dot\vee G}{i'' \Vdash F \;\Big|\; i'' \Vdash G} \qquad \mathrm{CPA}_4 : \frac{i'' \dashV F \dot\vee G}{\begin{array}{c} i'' \dashV F \\ i'' \dashV G \end{array}}$$

$$\mathrm{CPA}_5 : \frac{i'' \Vdash \mathsf{D}_{j+1}\, F}{j \Vdash F} \qquad \mathrm{CPA}_6 : \frac{i'' \dashV \mathsf{D}_{j+1}\, F}{j \dashV F}$$

$$\mathrm{CPA}_7 : \frac{i'' \Vdash \dot\neg F}{0 \dashV F} \qquad \mathrm{CPA}_8 : \frac{i'' \dashV \dot\neg F}{0 \Vdash F}$$

$$\mathrm{CPA}_9 : \frac{i' \Vdash \mathsf{e}_j}{i' \prec j} \qquad \mathrm{CPA}_{10} : \frac{i' \dashV \mathsf{e}_j}{j \preceq i'}$$

Figure 8.8: Règles propositionnelles de CPA_m

$$\mathrm{CPA}_{11} : \frac{i' \Vdash F \dot\Rightarrow G}{0 \dashV F \;\Big|\; i' \Vdash G \;\Big|\; \begin{array}{c} 0 \preceq k \\ k \prec i' \\ k \Vdash G \\ k+1 \dashV F \end{array}} \qquad \mathrm{CPA}_{12} : \frac{i' \dashV F \dot\Rightarrow G}{\begin{array}{c} 0 \preceq k \\ k \preceq i' \\ k \Vdash F \\ k \dashV G \end{array}}$$

$$\mathrm{CPA}_{13} : \frac{\omega \Vdash F \dot\Rightarrow G}{0 \dashV F \;\Big|\; \omega \Vdash G \;\Big|\; \begin{array}{c} 0 \preceq k \\ k \prec m \\ k \Vdash G \\ k+1 \dashV F \end{array}} \qquad \mathrm{CPA}_{14} : \frac{\omega \dashV F \dot\Rightarrow G}{\begin{array}{c} 0 \preceq k \\ k \prec m \\ k \Vdash F \\ k \dashV G \end{array}}$$

Figure 8.9: Règles pour l'implication de CPA_m

Pour tout terme t

$$\text{CPA}_{15} : \frac{i'' \Vdash \forall x \cdot F(x)}{i'' \Vdash F(t)}$$

$$\text{CPA}_{17} : \frac{i'' \mathrel{\dashv\!|}\, \exists x \cdot F(x)}{i'' \mathrel{\dashv\!|}\, F(t)}$$

Pour tout paramètre inédit a

$$\text{CPA}_{16} : \begin{array}{c} i'' \mathrel{\dashv\!|}\, \forall x \cdot F(x) \\ \hline\hline i'' \mathrel{\dashv\!|}\, F(a) \end{array}$$

$$\text{CPA}_{18} : \begin{array}{c} i'' \Vdash \exists x \cdot F(x) \\ \hline\hline i'' \Vdash F(a) \end{array}$$

Figure 8.10: Règles pour les quantifications dans CPA_m

$$\text{CPA}_{19} : \frac{\omega \Vdash \mathsf{e}_j}{\times} \qquad \text{CPA}_{20} : \frac{\omega \mathrel{\dashv\!|}\, \mathsf{e}_\omega}{\times}$$

$$\text{CPA}_{21} : \frac{i' \Vdash F \qquad j' \mathrel{\dashv\!|}\, F}{i' \prec j'} \qquad \text{CPA}_{22} : \frac{\omega \Vdash F \qquad j'' \mathrel{\dashv\!|}\, F}{\times}$$

Figure 8.11: Règles de clôture de CPA_m

$$\text{CPA}_{23} : \frac{i'' \prec 0}{\times} \qquad \text{CPA}_{24} : \frac{i + k \prec k}{\times}$$

$$\text{CPA}_{25} : \begin{array}{c} i + k \prec j + k' \\ \hline\hline i \mathbin{\dot{-}} j + k \prec j \mathbin{\dot{-}} i + k' \end{array}$$

si $1 + i + j \geq m$

$$\text{CPA}_{26} : \frac{k + i \prec k' \qquad j + k' \prec k''}{\times}$$

$$\text{CPA}_{27} : \frac{i + k \prec k' \qquad k' \prec 1 + j + k''}{i \mathbin{\dot{-}} j + k \prec j \mathbin{\dot{-}} i + k''}$$

$$\text{CPA}_{28} : \frac{k \prec 1 + i + k' \qquad j + k' \prec k''}{j \mathbin{\dot{-}} i + k \prec i \mathbin{\dot{-}} j + k''}$$

si $1 + i + j < m$

$$\text{CPA}_{29} : \frac{k + i \prec k' \qquad j + k' \prec k''}{1 + i + j + k \prec k''}$$

si $i + j < m$

$$\text{CPA}_{30} : \frac{k \prec 1 + i + k' \qquad k' \prec j + k''}{k \prec i + j + k''}$$

Figure 8.12: Règles de CPA_m sur les contraintes

Pour établir l'inconsistance conjointe d'un ensemble de formules signées S et d'un sous-ensemble O de $\mathcal{E}$, il faut utiliser les règles d'introduction suivantes:

$$\frac{}{\begin{array}{c} i' \Vdash F \\ 0 \preceq i' \\ i' \prec m \end{array}} \qquad \frac{}{\begin{array}{c} i' \Dashv F \\ 0 \preceq i' \\ i' \prec m \end{array}}$$

Si $i' \Vdash F$ (respectivement $i' \Dashv F$) est une formule signée de S

$$\frac{}{\omega \Vdash F} \qquad \frac{}{\omega \Dashv F}$$

Si $\omega \Vdash F$ (respectivement $\omega \Dashv F$) est une formule signée de S

$$\frac{}{\begin{array}{c} j' \prec m \\ i' \prec j' \end{array}}$$

Si $i' \prec j'$ est une contrainte de O

$$\frac{}{i' \prec m}$$

Si $i' \prec \omega$ est une contrainte de O

$\Diamond$

On dira qu'un paramètre, une variable arithmétique sont *inédits* (plus précisément: à une branche $\mathcal{B}$) si et seulement s'ils ne figurent dans aucune formule signée ni dans aucune contrainte de $\mathcal{B}$.

À chaque branche correspond une *contrainte d'ordre associée* O, qui est l'ensemble de toutes les contraintes d'ordre introduites dans la branche.

Les règles d'inférence concernant les formules signées et les contraintes sont visualisées dans les FIGURES 8.8 à 8.12. On n'a pas cherché à différencier les inférences concernant O et S; une formule signée, contenant soit $\Vdash$ soit $\Dashv$, mais jamais $\prec$, ne peut pas être donc typographiquement confondue avec une contrainte.

REMARQUE. On peut également envisager un calcul où le raisonnement sur les contraintes (FIGURE 8.12) n'est plus réintroduit dans le tableau. En effet, dans le calcul le plus simple, il suffit de savoir que O est satisfaisable. Cependant dès que l'on désire ajouter des raffinements tels le *condensing* ou la *factorisation*, présentés dans le CHAPITRE 4, il faut également connaître une preuve de l'insatisfaisabilité de O. C'est pourquoi nous maintenons dès le début un jeu de règles d'inférence complet pour vérifier l'insatisfaisabilité, que l'on aura par ailleurs pu détecter par une procédure *ad hoc*, efficace.

REMARQUE. Avant de continuer l'étude de ce calcul, comparons PCA_m à CSU. Si l'on oublie un instant le coût de la vérification d'une contrainte d'ordre, on peut affirmer que la situation est *plus simple* que pour les calculs intégrant l'unification. On pourrait dans un calcul incorporant l'unification, associer à chaque branche un problème équationnel (COMON & LESCANNE, 1989). Dans ce cas, il ne suffit pas que chaque problème équationnel soit satisfaisable, mais il faut qu'ils le soient simultanément (voir (CAFERRA & ZABEL, 1993)). Ceci n'est pas le cas avec les contraintes d'ordre, *il suffit qu'une branche ait une contrainte satisfaisable*, pour avoir un modèle. Dans l'autre cas tous les problèmes devaient être satisfaits, afin que toutes les branches soient bien fermées, et qu'il y ait donc aucun modèle.

8.8.2 Correction de CPA_m

PROPOSITION 8.8.1. *Si les prémisses des règles de la* FIGURE *8.12 sont des contraintes de $\mathcal{E}$, alors la conclusion est également une contrainte de $\mathcal{E}$. Si les prémisses sont satisfaisables dans $\langle \mathcal{P}_m, < \rangle$, alors la conclusion l'est aussi.*

PREUVE. Immédiat. C.Q.F.D.

THÉORÈME 8.8.1. *(Correction) Soit τ une instanciation arbitraire des variables arithmétiques. Pour toute instance d'une règle d'inférence des* FIGURES *8.8 à 8.12, si la ou les prémisses sont satisfaites par une interprétation $\Im$, alors il existe une instanciation τ' qui ne diffère de τ que par les valeurs que prennent les variables arithmétiques inédites, telle que les instances sous τ' des formules signées d'une alternative au moins soient toutes satisfaites par une variante de $\Im$, qui ne se distingue de $\Im$ que par la valeurs d'éventuels paramètres inédits.*

PREUVE. Par instanciation, les règles de décomposition de formules signées deviennent des règles correctes du calcul CPB_m. C.Q.F.D.

8.8.3 Complétude de CPA_m

DÉFINITION 8.8.2. *(Comparer avec la* DÉFINITION *8.6.2) On appelle* propriété de consistance analytique sous contraintes d'ordre *toute famille $\mathcal{P}ca$ d'ensembles de formules signées et de contraintes élémentaire de $\mathcal{E}$ telle que $S \cup O \in \mathcal{P}ca$, où S est un ensemble de formules signées et O un ensemble de contraintes élémentaires ssi*

- *S et O satisfont à:*
  si $j < m$ et $i + k \Vdash e_j \in S$, alors $S \cup O \cup \{i + k \prec j\} \in \mathcal{P}ca$
  si $j < m$ et $i + k \mathrel{{-}\!\!\Vert} e_j \in S$, alors $S \cup O \cup \{j \preceq i + k\} \in \mathcal{P}ca$
  si $i + k \Vdash P\vec{s} \in S$ ou $i + k \mathrel{{-}\!\!\Vert} P\vec{s} \in S$, alors $S \cup O \cup \{i + k \prec m\} \in \mathcal{P}ca$
  si $i + k \Vdash P\vec{s}, j + k' \mathrel{{-}\!\!\Vert} P\vec{s} \in S$ alors $S \cup O \cup \{j + k' \prec i + k\} \in \mathcal{P}ca$
- *S satisfait les conditions suivantes:*

(PCA$_1$) *Cas de base:*
si $\omega \Vdash e_j \in S$, alors $j = \omega$
si $\omega \mathrel{{-}\!\!\Vert} e_j \in S$, alors $j < m$
si $\omega \Vdash P\vec{s} \in S$, alors $k + j \mathrel{{-}\!\!\Vert} P\vec{s}, \omega \mathrel{{-}\!\!\Vert} P\vec{s} \notin S$

les conditions (PCA$_2$)-(PCA$_4$) *et* (PCA$_7$)-(PCA$_8$) *sont celles du numéro correspondant dans la* DÉFINITION *8.6.2, à condition de lire* $i \in \mathcal{Q}$ *et non* $i \in \mathcal{P}_m$

(PCA$_5$) *Cas des* ν*-formules:*
si $i < m$, $i + k \Vdash\!\!- F \Rightarrow G \in S$, *alors*
soit $S \cup \{0 \dashv\!\Vdash F\} \cup O \in \mathcal{P}ca$, *soit* $S \cup \{i + k \Vdash\!\!- G\} \cup O \in \mathcal{P}ca$
soit pour toute variable libre k' *de* $\mathcal{A}_f$ *étrangère à* O,

$$S \cup \{k' \Vdash\!\!- F, k'+1 \dashv\!\Vdash G\} \cup O \cup \{0 \preceq k', k' \prec i + k\} \in \mathcal{P}ca$$

si $\omega \Vdash\!\!- F \Rightarrow G \in S$, *alors*
soit $S \cup \{0 \dashv\!\Vdash F\} \cup O \in \mathcal{P}ca$, *soit* $S \cup \{\omega \Vdash\!\!- G\} \cup O \in \mathcal{P}ca$
soit pour toute variable libre k' *de* $\mathcal{A}_f$ *étrangère à* O,

$$S \cup \{k' \Vdash\!\!- F, k'+1 \dashv\!\Vdash G\} \cup O \cup \{0 \preceq k', k' \prec m\} \in \mathcal{P}ca$$

(PCA$_6$) *Cas des* π*-formules:*
si $i < m$, $i \dashv\!\Vdash F \Rightarrow G \in S$, *alors pour toute variable libre* k' *de* $\mathcal{A}_f$ *étrangère à* O,

$$S \cup \{k' \Vdash\!\!- F, k' \dashv\!\Vdash G\} \cup O \cup \{0 \preceq k', k' \preceq i\} \in \mathcal{P}ca$$

si $\omega \dashv\!\Vdash F \Rightarrow G \in S$, *alors pour toute variable libre* k' *de* $\mathcal{A}_f$ *étrangère à* O,

$$S \cup \{k' \Vdash\!\!- F, k' \dashv\!\Vdash G\} \cup O \cup \{0 \preceq k', k' \prec m\} \in \mathcal{P}ca$$

- *O satisfait aux conditions suivantes:*

(PCAO$_1$) *Cas de base:*
$i' \prec 0, i + k \prec k, m + j' \prec i' \notin O$

(PCAO$_2$) *Simplification par la constante:*
si $i + k \prec j + k' \in O$, *alors* $S \cup O \cup \{i \dot{-} j + k \prec j \dot{-} i + k'\} \in \mathcal{P}ca$

(PCAO$_3$) *Transitivité:*
si $i + k \prec k', k' \preceq j + k'' \in O$, *alors* $S \cup O \cup \{i \dot{-} j + k \prec j \dot{-} i + k''\} \in \mathcal{P}ca$
si $i + j < m$ *et si* $k \preceq i + k', k' \prec j + k'' \in O$, *alors* $S \cup O \cup \{k \prec i + j + k''\} \in \mathcal{P}ca$
si $i + k \prec k', j + k' \prec k'' \in O$, *alors* $1 + i + j < m$ *et* $S \cup O \cup \{1 + i + j + k \prec k''\} \in \mathcal{P}ca$
si $k \preceq i + k', j + k' \prec k'' \in O$, *alors* $S \cup O \cup \{j \dot{-} i + k \prec i \dot{-} j + k''\} \in \mathcal{P}ca$

L'unique élément d'une propriété de consistance analytique qui est un singleton est appelé ensemble de Hintikka *de* CPA_m. ◊

Avec cette définition[7], il est clair que tout élément maximal d'une propriété de consistance analytique est un ensemble de Hintikka de CPA_m.

PROPOSITION 8.8.2. *Tout élément maximal d'une propriété de consistance analytique sous contraintes est un ensemble de Hintikka de* CPA_m.

PREUVE. Vérification immédiate. C.Q.F.D.

[7]Cette définition ne diffère que dans sa formulation de celle que l'on trouve usuellement; elle évite de redonner explicitement deux fois une liste de clauses qui ne diffère que de quelques accents.

Lemmes d'Extension

On vérifie que les lemmes d'extension (renommage, caractère fini) restent valables, ainsi que le lemme de Hintikka pour CPA_m.

Comme on a défini $\mathcal{R}en(\mathcal{P})$, l'ensemble de tous les renommages de paramètres, de domaine fini ou infini, on définit également $\mathcal{R}en(\mathcal{A}_f)$, l'ensemble de tous les renommages de variables arithmétiques.

LEMME 8.8.1. *Soit $\mathcal{A}$ une propriété de consistance analytique sous contraintes d'ordre.*

$\mathcal{A}' = \{SO' : \exists\pi \in \mathcal{R}en(\mathcal{P}), \exists\tau \in \mathcal{R}en(\mathcal{A}_f), \exists SO \in \mathcal{A}, SO'\pi\tau \subseteq SO\}$ *est une propriété de consistance analytique fermée pour l'inclusion.*

$\mathcal{A}'' = \left\{SO' : \forall SO'' \in 2_f^{SO'}, \exists SO \in \mathcal{A}', SO'' \subseteq SO\right\}$ *est une propriété de consistance analytique de caractère fini.*

PREUVE. La preuve ne diffère guère du cas fini. C.Q.F.D.

Nous commençons la preuve de ce qu'on appelle le lemme de Hintikka: tout ensemble de Hintikka de CPA_m est satisfaisable.

Nous structurons l'argumentation en un lemme et une proposition. Le lemme prouve que l'ensemble des contraintes O dans un ensemble de Hintikka est satisfaisable dans $\langle \mathcal{P}_m, < \rangle$, $m \leq \omega$.

La proposition se sert de la satisfaisabilité de O pour substituer aux variables arithmétiques dans les signes des formules de S une solution arbitraire de O. On peut alors se ramener aux CPB_m-propriétés de consistance analytique, pour établir la satisfaisabilité de S.

LEMME 8.8.2. *Soit $S \cup O$ un ensemble de Hintikka de CPA_m, $m \leq \omega$. O est satisfaisable dans $\langle \mathcal{P}_m, < \rangle$.*

PREUVE. On définit pour toute variable k apparaissant dans $S \cup O$ les deux ordinaux:

$$\overline{k} = \min\{i : k \prec i \in O\} \qquad \text{et} \qquad \underline{k} = \begin{cases} 0 & \text{si pour tout } i < m, i \prec k \notin O \\ \sup\ \{1 + i : i \prec k \in O\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme pour tout k, il existe un i, $i + k \prec m \in O$, $\overline{k}$ est bien défini.

D'abord vérifions que pour tout k qui figure dans une inéquation de O:

$\overline{k} > 0$. Supposons $\overline{k} = 0$, alors $k \prec 0 \in O$, ce qui contraire à la définition de O.

$\underline{k} < m$. Supposons le contraire. Il existe donc pour tout entier $i < m$ une inéquation $j \prec k$ telle que $j > i$. Donc k n'a pas de solution dans m, ce qui contredit $k \prec m \in O$. En fait, on peut définir plus simplement $\underline{k}$ par $\max\{0, 1 + i : i \prec k \in O\}$.

Si $0 < \underline{k} < m$, alors $\underline{k} < \overline{k}$. Par définition, $\underline{k} \prec k, k \prec \overline{k} \in O$, par transitivité, on obtient $\underline{k} \prec \overline{k} \in O$. Supposons que $\overline{k} \leq \underline{k}$. En appliquant la simplification par la constante, on a alors $\underline{k} - \overline{k} \prec 0 \in O$, ce qui est absurde; d'où le résultat annoncé.

En affectant à toute variable k qui figure dans O la valeur $\underline{k}$, toutes les inéquations de O sont satisfaites:

Il est clair que si $i \prec k \in O$, $i < \underline{k}$ et que si $k \prec i \in O$, $\underline{k} < \overline{k} \leq i$. Il reste à vérifier que toute inéquation de la forme $k \prec k' + i$ est satisfaite.

On procède par analyse des cas. Le cas $\underline{k} = 0$ est trivial. Si $\underline{k} \neq 0$, l'inéquation $\underline{k} - 1 \prec k$ est dans O. Par transitivité, $\underline{k} \prec k' + i$, car $\underline{k} \prec k' + i$ y figure également. Si maintenant $\underline{k} < i$, l'inéquation $k \prec k' + i$ est satisfaite. Il reste à s'assurer que dans l'autre cas, il en va de même. Par simplification de la constante i, $\underline{k} - i \prec k'$ figure aussi dans O. Donc $\underline{k'} > \underline{k} - i$, par définition de $\underline{k'}$. Et finalement $\underline{k'} + i > \underline{k}$.

Les vérifications des autres cas sont similaires à celui qui vient d'être traité. C.Q.F.D.

LEMME 8.8.3. *Soient $S \cup O$ un ensemble de Hintikka de CPA_m et τ une solution de O.*

τS est satisfaisable.

PREUVE. On vérifie que $\{\tau S\}$ est une CPB_m-propriété de consistance analytique. Donc τS est satisfaisable. C.Q.F.D.

Théorème de l'Existence d'un Modèle

THÉORÈME 8.8.2. *Tout élément d'une propriété de consistance analytique sous contraintes d'ordre est satisfaisable.*

PREUVE. Toute propriété de consistance analytique peut être étendue à une propriété de consistance analytique de caractère fini. Par application du lemme de TUCKEY, tout élément S de la propriété de consistance analytique peut être étendue en un élément maximal dans cette propriété. Le lemme de Hintikka établit la satisfaisabilité des éléments maximaux d'une propriété de consistance analytique, ce qui implique la satisfaisabilité de S. C.Q.F.D.

PROPOSITION 8.8.3. *La famille des ensembles consistant pour les tableaux finis du calcul CPA_m $\mathcal{P}capa$ est une propriété de consistance analytique sous contraintes d'ordre.*

PREUVE. C'est une analyse des cas exhaustive. La vérification des points (PCAO) est triviale.

Faisons à titre d'exemple, la vérification pour les ν-formules: les arguments utilisés apparaissent de l'étude du cas des β-formules et des π-formules. Les autres cas sont analogues.

Soit i'—$\|F{\Rightarrow}G \in S$ avec $i' \in \mathcal{P}_m \cup \{k+i : 0 \leq i < m, k \in \mathcal{A}_f\}$, $S \cup O \in \mathcal{P}capa$. Supposons que $\langle S \cup \{0$—$\|F\}, O\rangle \notin \mathcal{P}capa$, $\langle S \cup \{i'\|$—$G\}, O\rangle \notin \mathcal{P}capa$, $\langle S \cup \{k\|$—$G, k+1$—$\|F\}, O \cup \{0 \preceq k, k \prec i'\}\rangle \notin \mathcal{P}capa$.

Donc pour chacun de ces cas, il y a un tableau fini fermé, mais alors il existe un tableau fermé pour $S \cup O$ qui ne peut donc pas être dans $\mathcal{P}capa$.[8] C.Q.F.D.

COROLLAIRE 8.8.1. *du* THÉORÈME *8.8.2. Tout ensemble consistant pour les tableaux finis du calcul CPA_m est satisfaisable.*

PREUVE. C.Q.F.D.

8.8.4 Vérification Rapide de la Satisfaisabilité de O

Dans la preuve du théorème de l'existence d'un modèle, l'application des règles d'inférence énoncées dans les clauses PCAO conduit en pratique rapidement à des espaces de recherche très grands. (Le raisonnement en présence de l'axiome de la transitivité est très difficile à gérer — voir (STICKEL, 1985).) Cette sous-section propose un algorithme calculant une solution de O *en temps polynômial.*

Tout d'abord, on suppose que O a été simplifié de sorte qu'on ne puisse plus utiliser de simplification par une constante ou une variable. C'est-à-dire que dans toute inéquation la variable à gauche est différente de la variable du membre de droite (il peut ne pas avoir de variable à gauche ou à droite) et qu'il n'y a de constante que dans un deux membres au plus. En fait, on ne peut plus appliqué à *la simplification par la constante.* Un tel ensemble de contraintes est dit *normalisé.*

L'ensemble d'inéquations ainsi obtenu est équivalent à l'ensemble initial, et par les règles d'inférence de la FIGURE 8.12 tout ensemble de contraintes O peut être étendu en un ensemble $O \cup O'$ où O' est un ensemble de contraintes normalisé équivalent à O.

L'ensemble O est traduit en termes de graphe par la correspondance détaillée dans la Table 8.1. Les sommets du graphe construit sont o et les variables de $\mathcal{A}_f$. La valeur d'une arête, sa *longueur*, entre deux variables k et k' est le nombre minimal d'unités qu'il doit y avoir entre k et k' pour satisfaire à cette inéquation. L'ensemble des sommets est noté S, celui des arêtes A, la longueur d'une arête $k \cdot k'$ est notée $\ell(k \cdot k')$, le graphe par $\langle S, A, \ell\rangle$. [9]

---

[8] L'argumentation reste plus simple que dans (FITTING, 1990): la raison est que nous imposons une condition moins restrictive, à savoir que les paramètres doivent être étrangers *à la branche* et non *à tout le tableau*; cette très petite différence fait que le cas des β-formules est beaucoup plus simple. FITTING (1990) est obligé de renommer dans les sous-tableaux pour que des paramètres étrangers dans chaque sous-tableau pris séparément, soient substitués à des paramètres étrangers à l'ensemble du tableau.

[9] La notation $k \cdot k'$ est ambiguë, puisqu'il peut y avoir plusieurs arêtes entre k et k', mais en fait seule l'arête de plus petite longueur est pertinente.

À un ensemble O, correspond donc un unique tel graphe, dont les sommets sont les variables dans O et la constante 0, et dont les arêtes sont la traduction d'une inéquation dans O. La transitivité s'exprime graphiquement par un chemin entre deux sommets; la minimalité de 0 par l'absence de chemins de longueur strictement négative d'une variable à 0.

Table 8.1: Correspondance entre le graphe et les inéquations

Inéquation	Arête dans le graphe	Inéquation	Arête dans le graphe
$j \prec k$	$o \xrightarrow{-1-j} k$	$j \preceq k$	$o \xrightarrow{-j} k$
$k \prec j$	$k \xrightarrow{-1+j} o$	$k \preceq j$	$k \xrightarrow{+j} o$
$j + k' \prec k$	$k' \xrightarrow{-1-j} k$	$j + k' \preceq k$	$k' \xrightarrow{-j} k$
$k \prec j + k'$	$k' \xrightarrow{-1+j} k$	$k \preceq j + k'$	$k' \xrightarrow{+j} k$

On appelle *circuit absorbant* (voir par exemple (SAKAROWITCH, 1984)) est une séquence d'arêtes

$$k_1 \cdot k_2, \ldots, k_i \cdot k_{i+1}, k_{i+1} \cdot k_{i+2}, \ldots, k_n \cdot k_1$$

de longueur respective $\ell_1, \ldots, \ell_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \ell_i < 0$.

LEMME 8.8.4. *Soit un chemin C d'extrémités a et z et de longueur L dans $\langle S, A, \ell \rangle$.*

- *si $L < 0$, alors $-L + a \preceq z$ est déductible de O,*
- *si $L > 0$, alors $a \preceq L + z$ est déductible de O,*
- *si $L = 0$, alors $a \preceq z$ est déductible de O.*

PREUVE. On procède par induction sur le nombre d'arêtes d'un chemin pour prouver que si la longueur de ce chemin

$$k_1 \cdot k_2, \ldots, k_i \cdot k_{i+1}, \ldots, k_n \cdot k_{n+1}$$

est L alors $-L + k_1) \preceq k_{n+1}$ est déductible de O si $L < 0$ et $k_1 \preceq L + k_{n+1}$ est déductible de O si $L \geq 0$. C.Q.F.D.

LEMME 8.8.5. *Si $\langle S, A, \ell \rangle$ contient un circuit absorbant, alors O est insatisfaisable.*

PREUVE. Si $L < 0$ et $k_1 = k_{n+1}$, $-L + k_1) \preceq k_1$ est déductible de O, ce qui est faux, donc O est insatisfaisable. C.Q.F.D.

LEMME 8.8.6. *Si $\langle S, A, \ell \rangle$ contient un chemin de longueur strictement négative vers 0, alors O est insatisfaisable.*

PREUVE. En effet, en notant par a l'origine de ce chemin, on peut en déduire que $1 - L + a \prec 0$, or si $1 - L > 0$, $a \preceq -L + a$ donc, également dans ce cas, $a \prec 0$, mais 0 est le minimum. Donc O est insatisfaisable. C.Q.F.D.

Les deux lemmes précédents établissent la correction de cette traduction; il faut maintenant montrer que toute solution du problème d'ordonnancement est une solution de O.

Pour résoudre ce problème d'ordonnancement, on calcule les chemins de plus courte longueur entre deux sommets quelconques du graphe. Le calcul de ces distances se fera par l'algorithme de DANTZIG. Parmi les nombreux autres algorithmes qui calculent les plus courtes distances dans un graphe, notamment (voir (SAKAROWITCH, 1984) pour une discussion et une comparaison plus détaillée):

- l'algorithme de BELLMAN, qui ne fournit de résultats corrects qu'en l'absence de circuits, ce que l'on ne peut pas supposer ici.
- l'algorithme de DIJKSTRA qui ne fonctionne que pour des distances positives ou nulles (l'algorithme gère les circuits non absorbant). Ici des longueurs peuvent être négatives, il ne convient donc pas davantage.
- une adaptation du simplexe traite le cas général; cet algorithme convient; toutefois l'algorithme de DANTZIG, applicable dans le même contexte, fournit de meilleurs résultats sur des problèmes de petite taille.

Algorithme de Dantzig

L'algorithme de DANTZIG représente le graphe par une matrice dont l'entrée $L(i,j)$ est initialement la longueur de la plus courte arête allant de i à j. S'il n' y a pas d'arêtes de i vers j, on pose $L(i,j) = \infty$.

Au cours de l'algorithme, on produit une matrice L^* de même taille dont l'entrée $L^*(i,j)$ représente finalement la longueur du plus court chemin allant de i à j.

Si le graphe contient un circuit absorbant, alors $L^*(i,i) < 0$. S'il existe un chemin de longueur négative vers 0, alors $L^*(i,0) < 0$. [10] Dès qu'une telle configuration est construite, l'algorithme s'arrête, car il n'y a pas de solutions.

L'algorithme de DANTZIG est justifié dans (SAKAROWITCH, 1984, pages 65–66).

LEMME 8.8.7. *Soit O un ensemble de contraintes, tel que pour toute variable arithmétique k apparaissant dans O, $0 \preceq k, k \prec m \in O$.*

Si O a des solutions dans $\langle \mathcal{P}_m, < \rangle$, alors convert(O) (voir FIGURE *8.13) retourne la matrice d'incidence L.*

[10] Ce cas est particulier au problème qui nous occupe. Son traitement ne diffère pas de celui des circuits absorbants.

```
FONCTION convert (O)

|| ENTREE: O   est un ensemble de contraintes
||             k_1, ..., k_n est une enumeration de toutes les variables dans O
||             On convient que k_0 est 0
|| SORTIE: O'  sous-graphe de O des plus courtes arêtes
||         L   matrice correspondante
DEBUT
 O' ← ∅;
 POUR i DE 0 A n FAIRE
  POUR i' DE 0 A n FAIRE
   E ← {1 − j : k_{i'} + j ≺ k_i ∈ O} ∪ {1 + j : k_{i'} ≺ k_i + j ∈ O};
   SI E = ∅
   ALORS L(i, i') ← +∞
   SINON
    L(i, i') ← min E;
    SI min E < 0
    ALORS O' ← O' ∪ {k_{i'} − min E + 1 ≺ k_i}
    SINON O' ← O' ∪ {k_{i'} ≺ k_i + min E − 1}
    FINSI
   FINSI;
   SI i = i' ET SI L(i, i') < 0
   ALORS
    RETOURNE ("O est insatisfaisable")
   FINSI;
   SI i' = 0 ET SI L(i, i') < 0
   ALORS
    RETOURNE ("O est insatisfaisable")
   FINSI
  FAIT
 FAIT
 RETOURNE (O' & L)
FIN
```

Figure 8.13: Traduction d'un ensemble de contraintes en une matrice d'incidence

```
FONCTION Dantzig (L)
‖ ENTREE: L   est la matrice d'entrees 0..n des plus courtes arêtes.
‖ SORTIE: L*  la matrice des plus courtes longueurs
‖         A*  la matrice des plus courts chemins
DEBUT
 ‖ ASSERTION: ⟨L, O'⟩ ← Convert(O)
 L*(0,0) = 0;
 POUR i DE 1 A n FAIRE
  ‖ INVARIANT: ∀a,b < i, A*(a,b) = b ⇒ k_a ≺ k_b + 1 + L*(a,b) ∈ O'
  ‖            ∀a,b < i, ∃c, A*(a,b) = c ∧ c ≠ b
  ‖            ⇒ O' ⊢ k_a ≺ k_c + 1 + L*(a,c) ∧ O' ⊢ k_c ≺ k_b + 1 + L*(c,b)
  POUR i' DE 0 A i − 1 FAIRE
   L*(i,i') ← min{L(i,j) + L*(j,i') : j < i − 1};
   A*(i,i') ← min{j : L(i,j) + L*(j,i') = L*(i,i'), j < i − 1};
   L*(i',i) ← min{L(i',j) + L*(j,i) : j < i − 1};
   A*(i',i) ← min{j : L(i',j) + L*(j,i) = L*(i',i), j < i − 1}
  FAIT;
  POUR i' DE 0 A i − 1 FAIRE
   POUR i'' DE 0 A i − 1 FAIRE
    ℓ ← min{L*(i',j) + L*(j,i'') : j < i − 1};
    SI i'' = 0 ET SI ℓ < 0
    ALORS
     RETOURNE ("L n'a pas de solutions" & i & 0)
    SINON SI ℓ < L*(i',i'')
    ALORS
     A*(i',i'') ← min{j : L*(i',j) + L*(j,i'') = ℓ, j < i − 1};
     L*(i',i'') ← ℓ
    FINSI
   FAIT
  FAIT;
  SI min{L*(i,j) + L*(j,i) : j < i − 1} < 0
  ALORS
   RETOURNE ("L n'a pas de solutions" & i & j)
  SINON L*(i',i) ← 0
  FINSI
 FAIT;
 RETOURNE (L* & A*)
FIN
```

Figure 8.14: Algorithme de DANTZIG modifié

PREUVE. Immédiat. C.Q.F.D.

LEMME 8.8.8. *Toute solution du problème d'ordonnancement défini par L que calcule l'algorithme de* DANTZIG *(*FIGURE *8.14) fournit une solution de O.*

PREUVE. Si L a une solution L^* telle que pour tout k_j, $L^*(j,0) \geq 0$, alors on en extrait une solution de O en posant $\underline{k_j} \leftarrow L^*(j,0)$. Cette solution est précisément celle dont on s'est servi pour prouver la satisfaisabilité de O d'un ensemble de Hintikka. C.Q.F.D.

On n'obtient pas toutes les solutions, mais une solution nous suffit puisque une branche est fermée dès que O est insatisfaisable. Par ailleurs, l'algorithme de DANTZIG présente l'intérêt supplémentaire d'être incrémental: pour n sommets le coût est en $O(n^3)$, si un sommet et une arête au moins sont rajoutés au problème la mise à jour coûte $O(n^2)$ opérations arithmétiques élémentaires.

Les algorithmes des FIGURES 8.13 et 8.14 permettent non seulement d'affirmer l'insatisfaisabilité de O, l'invariant de boucle de la FIGURE 8.14 indique aussi, comment extraire de A^* une preuve de l'insatisfaisabilité de O utilisant les règles d'inférence de CPA_m (FIGURE 8.12).

8.8.5 Incorporation de l'Unification

Comme les logiques de Post sont toutes compactes, l'incorporation de l'unification ne pose pas de problèmes supplémentaires par rapport à ceux résolus dans le CHAPITRE 4.

En effet, d'une manière générale, le théorème de compacité permet d'affirmer qu'un nombre fini d'instances suffisent pour trouver un tableau fermé avec unification.

La définition du calcul CPAU_m qui établit l'insatisfaisabilité d'une formule skolemisée en utilisant des instances des quantifications avec des variables libres unifiées éventuellement par les règles de clôture à des termes, ressemble beaucoup à celle du calcul CASU du CHAPITRE 4. La seule différence est qu'une branche n'est pas fermée quand deux atomes sont unifiés, mais une contrainte supplémentaire est rajoutée à O.

8.9 Application de la Logique de Post à la Logique Algorithmique

En utilisant la logique de Post comme logique *sous-jacente* de la logique algorithmique de SALWICKI, on peut exprimer naturellement des propriétés de programmes incluant des commandes CASE (ou CHOIX) et GOTO (ou ALLERA) (RASIOWA, 1974*b*).

Il faut ajouter que l'utilisation de la logique de Post comme logique sous-jacente n'est pas essentielle, dans la mesure où la logique algorithmique développée à partir de la logique du premier ordre classique suffit très souvent.

Le développement qui suit, reprend les idées de RASIOWA (1974*b*) et de MIRKOWSKA (1977*a*). (PETERMANN, 1990) a également été consulté. La logique algorithmique permet d'étudier les propriétés des programmes écrits dans des langages de programmation d'ordinateurs séquentiels dont toute instruction a l'une des formes suivantes:

- l'*affectation généralisée* $x_1 := t_1 \| \ldots \| x_n := t_n \| p_1 := F_1 \| \ldots \| p_{n'} := F_{n'}$. x_i sont des variables d'individus, t_i des termes, p_j sont des variables propositionnelles et F_j des formules. C'est la seule instruction de base. Comme les programmes peuvent contenir des variables propositionnelles (par exemple dans l'instruction conditionnelle), il existe des variables d'individus et des variables propositionnelles, prises respectivement dans $\mathcal{V}_f$ et $\mathcal{W}_f$. Évidemment, ces deux ensembles sont disjoints. Les substitutions sont définies sur $\mathcal{V}_f \cup \mathcal{W}_f$ et associent aux variables d'individus des termes ou des individus et aux variables propositionnelles des formules ou des valeurs de vérité.

- la *composition d'instructions* $\mathit{inst}_1 ; \mathit{inst}_2$. avec inst_k, $k = 1, 2$ des instructions. On convient que ; est associatif à gauche (c'est-à-dire $\mathit{inst}_1 ; \mathit{inst}_2 ; \mathit{inst}_3$ est la composition de $\mathit{inst}_1 ; \mathit{inst}_2$ et de inst_3). inst^i abrège $\underbrace{\mathit{inst} ; \ldots ; \mathit{inst}}_{i \text{ fois}}$.

- l'*instruction conditionnelle* SI F ALORS inst_{Vrai} SINON inst_{Faux}. F est une formule et inst_{Vrai} et inst_{Faux} sont des instructions,

- l'*itération* TANT QUE F FAIRE inst FAIT. F est une formule et inst une instruction.

Les propriétés sur les programmes sont exprimées par des formules de la logique classique des prédicats sans quantificateurs. Les termes sont interprétés par des individus, les formules par des valeurs de vérité, les instructions par des fonctions (partielles) dans l'ensemble des états de la mémoire de l'ordinateurs. Ces états sont modélisés par des substitutions. Une variable y (d'individus ou propositionnelle) dans le domaine d'une telle substitution σ modélise à son tour une adresse dans la mémoire, dont le contenu correspond à la valeur de $\sigma(y)$.

La sémantique de la logique algorithmique est donnée dans la FIGURE 8.15. Si $\Im$ est dénote une interprétation et si σ une substitution qui associe aux variables libres des individus ou des valeurs de vérité, $\Im_\sigma$ est la $\mathcal{D}om(\sigma)$-variante de $\Im$ telle que pour toute variables y de $\mathcal{D}om(\sigma)$, $\Im_\sigma(y) = \sigma(y)$. Les termes sont enrichis par une nouvelle construction. $\mathit{inst}\, t$ est un terme où inst est une instruction et t un terme, les formules par $\mathit{inst}\, F$, $\bigwedge \mathit{inst}\, F$ et $\bigvee \mathit{inst}\, F$. Si inst est une instruction, $\Im(\mathit{inst})$ est la fonction qui interprète inst dans $\Im$, pour faciliter la lecture, on l'écrit $[\![\mathit{inst}]\!]$

- pour tout σ $[\![x_1 := t_1 \| \dots \| x_n := t_n \| p_1 := F_1 \| \dots \| p_{n'} := F_{n'}]\!]\sigma =$
$\sigma \circ \{x_i \leftarrow \Im_\sigma(t_i), p_j \leftarrow \Im_\sigma(F_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n'\}$

- pour tout σ

$$[\![\text{inst}_1 ; \text{inst}_2]\!](\sigma) = [\![\text{inst}_2]\!] \circ [\![\text{inst}_1]\!](\sigma)$$

- pour tout σ

$$[\![\text{SI } F \text{ ALORS inst}_{Vrai} \text{ SINON inst}_{Faux}]\!](\sigma) = \begin{cases} [\![\text{inst}_{Vrai}]\!](\sigma) & \text{si } \Im_\sigma(F) = 1 \\ [\![\text{inst}_{Faux}]\!](\sigma) & \text{sinon} \end{cases}$$

- pour tout σ

$$[\![\text{TANT QUE } F \text{ FAIRE inst FAIT}]\!](\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \Im_\sigma(F) = 0 \\ [\![\text{inst}^{i+1}]\!](\sigma) & \text{si } \begin{cases} \forall 1 \leq j \leq i, \Im_{[\![\text{inst}^j]\!](\sigma)}(F) = 1 \\ \Im_{[\![\text{inst}^{i+1}]\!](\sigma)}(F) = 0 \end{cases} \\ \text{indéfini} & \text{sinon} \end{cases}$$

Des termes peuvent ne pas être définis (par exemple inst t si inst boucle).

- pour tout σ, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \Sigma_n$, et tous termes $t_1, \dots, t_n$,

$$\Im_\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = \begin{cases} \Im_\sigma(f)(\Im_\sigma(t_1), \dots, \Im_\sigma(t_n)) & \text{si tous les arguments sont définis} \\ \text{indéfini} & \text{sinon} \end{cases}$$

- pour tout σ

$$\Im_\sigma(\text{inst}\, t) = \begin{cases} \Im_{[\![\text{inst}]\!](\sigma)}(t) & \text{si } [\![\text{inst}]\!](\sigma) \text{ est défini} \\ \text{indéfini} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi inst t est la valeur de t après l'execution de inst.

- pour tout σ, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \Sigma_n$, et tous termes $t_1, \dots, t_n$,

$$\Im_\sigma(P(t_1, \dots, t_n)) = \begin{cases} \Im_\sigma(P)(\Im_\sigma(t_1), \dots, \Im_\sigma(t_n)) & \text{si tous les arguments sont définis} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- pour tout σ

$$\Im_\sigma(\text{inst}\, F) = \begin{cases} \Im_{[\![\text{inst}]\!](\sigma)}(F) & \text{si } [\![\text{inst}]\!](\sigma) \text{ est défini} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi inst F est la valeur de F après l'execution de inst. Les prédicats restent bivalents: la logique considérée est la logique classique avec des fonctions partielles.

- pour tout σ

$$\Im_\sigma(\bigwedge \text{inst}\, F) = \min\left\{\Im_{[\![\text{inst}^i]\!](\sigma)}(F) : i \in \mathbb{N}\right\}$$

- pour tout σ

$$\Im_\sigma(\bigvee \text{inst}\, F) = \max\left\{\Im_{[\![\text{inst}^i]\!](\sigma)}(F) : i \in \mathbb{N}\right\}$$

Figure 8.15: Sémantique de la logique algorithmique

Si on introduit dans le langage de programmation, une instruction de type CASE où la condition distingue un nombre fini de cas s'excluant mutuellement, il est naturel d'étendre la logique à une logique polyvalente. En fait on utilise simultanément toutes les logiques P_m, $m < \omega$. Chaque prédicat n-aire est interprété par une fonction des n-uplets vers $\mathcal{P}_m$, où m est appelé l'ordre de P et ne dépend, comme l'arité, que du symbole de prédicat. On note par Ω^m la signature des symboles de prédicats évalués dans $\mathcal{P}_m$. Toutes ces signatures sont supposées disjointes. L'ensemble des formules bien formées de cette logique hybride est $\bigcup_{m\leq\omega} \mathcal{F}bf(\Sigma, \Omega^m)$.

Si F est une formule de $\mathcal{F}bf(\Sigma, \Omega^m)$ alors

$$\texttt{CHOIX}\ F\ \texttt{FAIRE}\ \mathit{inst}_\omega, \mathit{inst}_{m-1}, \ldots, \mathit{inst}_0\ \texttt{FAIT}$$

est une instruction correcte, qui demande l'exécution de inst_i quand F est évaluée à i.

Rasiowa (1974*b*) discute également la possibilité d'inclure des sauts inconditionnels et des étiquettes. Elle illustre son propos à l'aide d'un langage très rudimentaire inspiré des automates *push-down*.

Les structures de contrôle du langage de programmation qu'elle utilise simulent le fonctionnement des automates *push-down*.

Un tel automate se décompose en deux parties:

- un ensemble d'états (substitutions de variables d'individus et propositionnelles et d'étiquettes) Les étiquettes rendent compte de ce l'on connaît des langages de programmation non-structurés et marquent une portion de code, accessible par un saut inconditionnel.

  Les étiquettes sont interprétées par des valeurs de vérité de façon non ambiguë: Chaque valeur de vérité désigne au plus une seule étiquette.

- un jeu fini d'instructions (le programme); chaque instruction est identifiée par une étiquette et modifie l'état courant.

Plus exactement un automate *push-down* est un quadruplet $\langle W, L, \iota, \mathcal{J}\rangle$ dont

- W est l'ensemble des états de la mémoire des données
- L est l'ensemble des étiquettes.
- $\iota \in L$ est l'étiquette (de l'instruction) initiale. ε est le mot vide du monoïde libre L^* engendré par L. Si $e \in L$, $e \cdot L^* = \{e \cdot u : u \in L^*\}$.
- $\mathcal{J}$ associe à toute étiquette e une paire de fonctions partielles, l'une r_e dans W (l'action associée à e), l'autre f_e dans L^* (le contrôle). Le domaine de f_e est $e \cdot L^*$ et $f_e(e \cdot u) = u_e \cdot u$ où $u_e \in L^*$.

L'état de l'automate est défini comme étant un couple de $W \times L^*$. Les mots de L^* sont des *séquences de calculs*. La séquence de calcul courante de l'automate est gérée comme une pile d'appel à des instructions plus élémentaires. Quand elle vaut $e \cdot u$, l'instruction $\mathcal{J}_e$ est exécutée, c'est-à-dire la mémoire passe de l'état $w \in W$ à $r_e(w) \in W$ et la séquence de calculs courante devient $u_e \cdot u$.

Quand il n'y a plus d'appels à exécuter (c'est-à-dire si la séquence de calculs courante est ε), l'état final est atteint. Comme toute instruction a une étiquette qui l'identifie de façon univoque, la chaîne de dérivation

$$\langle e \cdot u, w \rangle \longmapsto \langle f_e(e \cdot u), r_e(e \cdot u) \rangle \longmapsto \ldots \longmapsto \langle \varepsilon, w' \rangle$$

est entièrement fixé par la donnée de l'état $\langle e \cdot u, w \rangle$ (le langage de programmation est déterministe).

Dans le langage de programmation que propose RASIOWA (1974*b*), on prend les valeurs de vérité comme noms des étiquettes et la pile système (c'est-à-dire la séquence des calculs) est simulée par des substitutions de domaine $\{a_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ et de codomaine les valeurs de vérité. On considère que les substitutions μ telles qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ (propre à chaque substitution), vérifiant pour tout entier $n \geq N_0$, $\mu(a_n) = \mathrm{e}_0$ (les substitutions valent presque partout e_0).

La substitution μ correspond à la séquence de calculs $\mu(a_1) \cdot \ldots \cdot \mu(a_k)$ où k est le plus petit entier tel que pour tout entier n strictement plus grand que k $\mu(a_n) = \mathrm{e}_0$.

Comme instructions primitives s'ajoutent les affectations d'étiquettes qui correspondent à une manipulation de la séquence de calculs courante dans un automate *push-down*.

- $a_1 := \mathrm{e}_{k_1} \| \ldots \| a_n := \mathrm{e}_{k_n} \| a_{n+1} := a_2$ qui correspond à l'empilement du mot $\mathrm{e}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}_{k_n}$
- $a_1 := a_2$ qui dépile l'étiquette en sommet de pile
- $a_1 := \mathrm{e}_0$ qui vide la pile
- [] la substitution vide qui ne modifie pas la pile

La syntaxe ci-dessus ne traduit pas fidèlement l'intention. Les instructions précédentes transforme une substitution μ en une substitution μ':

- $\begin{cases} \mu'(a_i) = \mathrm{e}_{k_i} & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ \mu'(a_{i+n}) = \mu(a_i) & \text{pour tout } i \geq 1 \end{cases}$
- $\mu'(a_i) = \mu(a_{i+1})$ pour tout $i \geq 1$
- $\mu'(a_i) = \mathrm{e}_0$ pour tout $i \geq 1$
- $\mu' = \mu$

Nous resterons fidèles à la présentation de RASIOWA, même si en proposant des primitives de gestion de pile à la place des substitutions, la syntaxe exprimerait mieux l'intention.

Un état est maintenant une paire de substitutions $\langle\mu,\sigma\rangle$ où μ est une substitution d'étiquettes (contrôle) et σ une substitution de variables d'individus ou propositionnelles (données).

Le langage s'enrichit de deux instructions de base.

- les *superviseurs* $\delta_k\, a_n$ de sémantique $[\![\delta_k\, a_n]\!]\,(\mu,\sigma) = \begin{cases} \langle\mu,\sigma\rangle & \text{si } \mu(a_n) = \mathsf{e}_k \\ \text{indéfini} & \text{sinon} \end{cases}$

  On appelle *instruction d'ordre* 1 une expression de la forme $\delta_k\, a_n; \mathtt{inst}$ où $\mathtt{inst}$ ne contient pas de superviseurs.

- les *procédures d'ordre* 1 $\mathrm{o}^*[\mathtt{inst}_{k_1 t}\, \mathtt{inst}_{k_1} \ldots \mathtt{inst}_{k_n}\, \mathtt{inst}_t]$ où les instructions entre les crochets sont des instructions d'ordre 1, d'étiquettes deux à deux distinctes. $\mathtt{inst}_{k_1 t}$ est le préambule de la procédure et $\mathtt{inst}_t$ en est l'épilogue. Le préambule empile l'adresse (étiquette) de l'épilogue e_t puis l'adresse de la première instruction e_{k_1}. En fait il s'agit d'une astuce qui permet de reconnaître la fin d'une séquence de calcul correspondant à la procédure $\mathsf{e}_{k_1 t}$. La sémantique formelle en est:

$$[\![\mathtt{inst}]\!]\,(\mu^0,\sigma^0) = \begin{cases} \langle\mu^{\ell+1},\sigma^{\ell+1}\rangle & \text{où} \begin{cases} \langle\mu^1,\sigma^1\rangle = [\![\mathtt{inst}_{k_1 t}]\!]\,(\mu^0,\sigma^0) \text{ est défini} \\ \langle\mu^{i+1},\sigma^{i+1}\rangle = [\![\mathtt{inst}_{k_j}]\!]\,(\mu^i,\sigma^i) \text{ est défini} \\ \quad \text{pour tout } i < \ell \text{ et un } j \in \{k_1,\ldots,k_n\} \\ \langle\mu^{\ell+1},\sigma^{\ell+1}\rangle = [\![\mathtt{inst}_t]\!]\,(\mu^\ell,\sigma^\ell) \text{ est défini} \end{cases} \\ \text{indéfini} & \text{sinon (l'un des } \langle\mu^i,\sigma^i\rangle\ (i \leq \ell+1) \text{ n'est pas défini.)} \end{cases}$$

Ces langages de programmation restent très rudimentaires; leur principal point faible vient de ce qu'ils ne permettent pas de programmer des procédures avec variables locales et paramètres d'appel. Malgré la simplicité de ce cadre de travail, il est possible d'exprimer des propriétés de correction partielle et de terminaison. RASIOWA (1974*b*) donne une liste plus complète des résultats qui ont pu être obtenus grâce à la logique algorithmique sup ω-valente. HAREL (1984) et PETERMANN (1990) comparent brièvement la logique algorithmique à la logique dynamique.

8.10 Un exemple de Preuve dans le Calcul CPA

La FIGURE 8.16 détaille la preuve de $(p{\Rightarrow}q){\Rightarrow}[(q{\Rightarrow}r){\Rightarrow}(p{\Rightarrow}r)]$ dans CPA_ω.

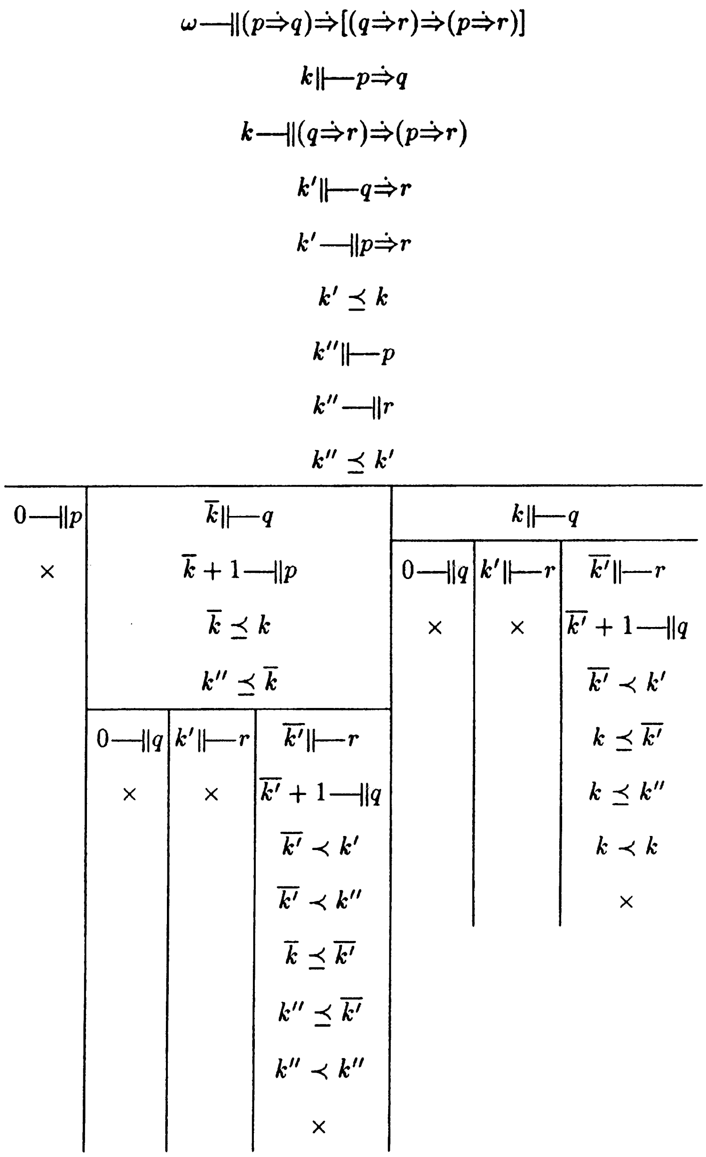

Figure 8.16: Exemple de Preuve dans CPA_ω

Chapitre 9

Logiques de Łukasiewicz

Ce dernier chapitre présente les logiques de Łukasiewicz ainsi que des calculs et des sémantiques qui ont été proposés dans la littérature. La situation est plus compliquée que dans les chapitres précédents, car il ne peut exister de calculs complets pour la logique de Lukasiewicz infinie du premier ordre.

9.1 Historique des logiques de Łukasiewicz

En cherchant à justifier de façon rigoureuse le développement d'ARISTOTE (*De l'interprétation*, chap. 9) sur les *futurs contingents*, sujet au centre de nombreuses polémiques parmi les philosophes scolastiques, et plus généralement sur les syllogismes modaux, ŁUKASIEWICZ (1920) [1] construit une logique trivalente. La tierce valeur de vérité est attribuée aux propositions ni vraies, ni fausses, au moment où elles sont énoncées. Cet article ne donne que la sémantique de la logique trivalente de Lukasiewicz et constate que certaines figures de raisonnement de la logique aristotélicienne doivent être abandonnées. En fait, un *calcul logique* n'y est pas défini.

[1] Dans sa préface à (BORKOWSKI, 1970), SLUPECKI note que la première mention publique de LUKASIEWICZ de logiques non-aristotéliciennes date de son discours académique de 1918. Dans cette allocution, LUKASIEWICZ raconte également les motivations qui l'ont convaincu à poursuivre ses recherches dans ce domaine.

LUKASIEWICZ & TARSKI (1930) généralisent cette logique en une séquence de logiques dont le nombre de valeurs de vérité est croissant et même infini.

9.1.1 Sémantique

- le support de l'algèbre est

$$\mathcal{P}_m = \begin{cases} \left\{\frac{n}{m-1} : n \in \mathbb{N}, n < m\right\} & \text{pour } m < \omega \\ \left\{\frac{n}{k} : n, k \in \mathbb{N}, n \leq k, 1 < k\right\} & \text{pour } m = \omega \\ \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r \leq 1\} & \text{pour } m = \infty \end{cases}$$

Les valeurs de vérité sont considérées comme des fractions (ainsi par exemple $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$) ou des réels et ordonnées suivant l'ordre usuel.

- le seul élément désigné est 1, sauf mention explicite.

- $\Re_{\dot\Rightarrow} : \begin{array}{lcll} \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m & \rightarrow & \mathcal{P}_m & \\ \langle i, j \rangle & \mapsto & 1 & \text{si } i \leq j \\ \langle i, j \rangle & \mapsto & 1 - i + j & \text{sinon} \end{array}$

- $\Re_{\dot\neg} : \begin{array}{lcl} \mathcal{P}_m & \rightarrow & \mathcal{P}_m \\ i & \mapsto & 1 - i = \Re_{\dot\Rightarrow}(i, 0) \end{array}$

- $\Re_{\dot\vee} = \sup$

- $\Re_{\dot\wedge} = \inf$

Figure 9.1: Sémantique de la logique de LUKASIEWICZ d'ordre m

La FIGURE 9.1 donne la sémantique des connecteurs des logiques de Lukasiewicz. Il est commode d'utiliser comme valeurs de vérité des fractions ou des nombres réels à cause de la négation et l'implication, qui se définissent alors simplement. Il est également possible de prendre comme connecteurs de base l'implication et la constante faux $\perp$, dont la valeur de vérité associée est bien sûr 0. La négation se définirait alors par $F \dot\Rightarrow \perp$. Si on étend la signature logique aux connecteurs de ROSSER & TURQUETTE (1952) J_k, qui identifie la $k^{\text{ème}}$ plus petite valeur de vérité, on obtient exactement la logique étudiée de façon exemplaire dans (ROSSER & TURQUETTE, 1952). (GOTTWALD, 1989) montre que ces connecteurs peuvent être introduits par définition dans les logiques de Lukasiewicz.

9.1.2 Connecteurs Introduits par Définition

À partir de ces connecteurs de base, on définit usuellement d'autres connecteurs:

$$F \dot\vee G =_{df} (F \dot\Rightarrow G) \dot\Rightarrow G$$

$$F \dot\wedge G =_{df} \dot\neg(\dot\neg F \dot\vee \dot\neg G)$$

Les connecteurs, dont la sémantique suit, sont introduits par définition:

- $\Re_{\dot\wedge} = \min$
- $\Re_{\dot\vee} = \max$
- $\Re_{\dot\Leftrightarrow} : \begin{array}{lcl} \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathcal{P}_m \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & 1 - |i-j| \end{array}$
- $\Re_{\odot} : \begin{array}{lcll} \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathcal{P}_m & \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & 0 & \text{si } i+j \leq 1 \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & i+j-1 & \text{sinon} \end{array}$
- $\Re_{\oplus} : \begin{array}{lcll} \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathcal{P}_m & \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & 1 & \text{si } i+j \geq 1 \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & i+j & \text{sinon} \end{array}$
- Pour tout entier $n \geq 1$
  $\Re_{{}^n\dot\Rightarrow} : \begin{array}{lcll} \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathcal{P}_m & \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & 1 & \text{si } n \times i \leq n-1+j \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & n \times (1-i)+j & \text{sinon} \end{array}$
- Pour tout entier $n \geq 1$
  $\Re_{{}^n\odot} : \begin{array}{lcll} \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathcal{P}_m & \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & 0 & \text{si } n \times i+j \leq n \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & j-n \times (1-i) & \text{sinon} \end{array}$
- Pour tout entier $n \geq 1$
  $\Re_{{}^n\oplus} : \begin{array}{lcll} \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathcal{P}_m & \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & 1 & \text{si } n \times i+j \geq 1 \\ \langle i,j \rangle & \longmapsto & n \times i+j & \text{sinon} \end{array}$

Figure 9.2: Sémantique des connecteurs introduits par définition dans L_m

Notations employées:	$\dot\neg$	$\dot\Rightarrow$	$\dot\wedge$	$\dot\vee$	$\odot$	$\oplus$
Notations polonaises:	N	C	K	A	L	B

Table 9.1: Rappel des Notations Polonaises pour les Logiques de Lukasiewicz

$$F \dot{\Leftrightarrow} G =_{df} (F \dot{\Rightarrow} G) \dot{\wedge} (G \dot{\Rightarrow} F)$$

$$F \odot G =_{df} \dot{\neg}(F \dot{\Rightarrow} \dot{\neg} G)$$

$$F \oplus G =_{df} \dot{\neg} F \dot{\Rightarrow} G$$

$$F^{k+1} \dot{\Rightarrow} G =_{df} F \dot{\Rightarrow} (F^k \dot{\Rightarrow} G) \text{ pour } k \geq 0$$
$$F^1 \dot{\Rightarrow} G =_{df} F \dot{\Rightarrow} G$$

$$F^{k+1} \odot G =_{df} F \odot (F^k \odot G) \text{ pour } k \geq 0$$
$$F^1 \odot G =_{df} F \odot G$$

$$F^{k+1} \oplus G =_{df} F \oplus (F^k \oplus G) \text{ pour } k \geq 0$$
$$F^1 \oplus G =_{df} F \oplus G$$

Les deux premiers sont la disjonction et la conjonction faibles; les deux derniers la disjonction et la conjonction fortes. Les notations originales sont rappelées dans la Table 9.1. Le choix de la plupart des mnémoniques est clair (*N*égation, *C*onséquence, *A*lternative, *K*onjonction); pour les versions fortes de la disjonction et de la conjonction, on a pris la lettre qui suit dans l'alphabet à la mnémonique choisie pour la version faible (c'est-à-dire B et L).

Au vu de la sémantique, on observe que la négation est involutive; la conjonction et la disjonction faibles sont idempotentes. Les conjonctions et les disjonctions sont commutatives et associatives. Les connecteurs faibles sont duaux (c'est-à-dire $F \dot{\wedge} G$ et $\dot{\neg}(\dot{\neg} F \dot{\vee} \dot{\neg} G)$ ont même valeur de vérité dans toute interprétation) et sont distributifs l'un par rapport à l'autre.

Les connecteurs forts sont également duaux, mais ne sont pas distributifs l'un par rapport à l'autre. En effet, fixons arbitrairement les valeurs de vérité v et v' dans $\mathcal{P}_m$ et considérons les fonctions de $\mathcal{I}_{\dot{\Rightarrow}}$, $\mathcal{I}_{\odot}$ et $\mathcal{I}_{\oplus}$, qui dépendent de v et v':

$$\mathcal{I}_{\dot{\Rightarrow}} : \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathcal{P}_m \\ n & \mapsto & \Re^n{}_{\dot{\Rightarrow}}(v, v') \end{array} \qquad \mathcal{I}_{\odot} : \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathcal{P}_m \\ n & \mapsto & \Re^n{}_{\odot}(v, v') \end{array} \qquad \mathcal{I}_{\oplus} : \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathcal{P}_m \\ n & \mapsto & \Re^n{}_{\oplus}(v, v') \end{array}$$

On voit que la réitération d'un argument de la conjonction forte rend l'énoncé "moins vrai"; dans le cas de la disjonction forte la réitération au contraire, rend la proposition "plus vraie". De plus, pour $m \leq \omega$, si v est non nul, alors $\mathcal{I}_{\dot{\Rightarrow}}$, $\mathcal{I}_{\odot}$ et $\mathcal{I}_{\oplus}$ sont strictement monotones et il existe un entier n tel que pour tout $k > n$, $\mathcal{I}_{\dot{\Rightarrow}}(k) = 1$, $\mathcal{I}_{\odot}(k) = 1$ et $\mathcal{I}_{\oplus}(k) = 0$. Cette propriété de $\mathcal{I}_{\dot{\Rightarrow}}$ permet de prouver une version affaiblie du métathéorème de la déduction.

9.1.3 Incomplétude Vérifonctionnelle

Une inspection rapide de la FIGURE 9.1 montre que pour la sémantique de tout connecteur, si les arguments sont soit 0 soit 1, alors l'image vaut également 0 ou

1. Les connecteurs sont construits comme des généralisations des connecteurs de la logique classique. (En particulier, L_2 est la logique classique.) Il est donc évident que toutes les applications dans $\mathcal{P}_m$ ne peuvent être décrites par une formule de la logique L_m. Ceci a déjà été constaté par SŁUPECKI (1936) pour le cas trivalent. SŁUPECKI a ajouté à la logique trivalente de Lukasiewicz une fonction unaire qui prend toujours la valeur tierce (c'est donc en fait la constante logique qui est associée à la valeur de vérité $\frac{1}{2}$). Il complète l'axiomatisation de la logique de Lukasiewicz, par deux axiomes énonçant que la négation de cette constante est équivalente à cette constante.

ROSE & ROSSER (1958) prouvent le même résultat dans le cas où le nombre de valeurs de vérité est arbitraire mais fini. Ils établissent qu'il suffit d'ajouter à la signature logique la constante correspondant à la valeur de vérité $\frac{m-2}{m-1}$, pour garantir la complétude vérifonctionnelle. La section suivante rappelle les principales axiomatisations proposées pour les logiques de Lukasiewicz à nombre fini de valeurs de vérité.

MC NAUGHTON (1951) étudie le cas de logique de Lukasiewicz à nombre infini de valeurs vérité et caractérise les applications dans $\mathcal{P}_\infty$ qui peuvent se définir par une formule bien formée:

PROPOSITION 9.1.1. *Soit f une application de $[0,1]^n$ vers $[0,1]$.*

Il existe une formule bien formée F, composée exclusivement des variables propositionnelles $p_1, \dots, p_n$, de L_∞ telle que pour toute interprétation $\Im$, $\Im(F) = f(\Im(p_1), \dots, \Im(p_n))$

ssi f vérifie les deux conditions:

- *f est continue*
- *il y a un nombre fini de polynômes distincts $\lambda_1, \dots \lambda_\mu$, chacun de la forme $\lambda_j = b_j + m_{1j} \times x_1 + \dots + m_{nj} \times x_n$, à coefficients entiers tels que pour tout n-uplet $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in [0,1]^n$, il existe un indice j pour lequel $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_j(x_1, \dots, x_n)$*

PREUVE. Voir (MC NAUGHTON, 1951) et, pour une preuve constructive, (MUNDICI, 1992). C.Q.F.D.

COROLLAIRE 9.1.1. *L_∞ et L_ω ont même ensemble de tautologies.*

PREUVE. $\mathrm{Taut}(L_\infty) \subseteq \mathrm{Taut}(L_\omega)$, puisque $\mathcal{P}_\infty \supset \mathcal{P}_\omega$.

Réciproquement, supposons que $F \in \mathrm{Taut}(L_\omega)$. Soient $p_1, \dots, p_n$ les variables propositionnelles de F. Soit $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in [0,1]^n$. Comme $[0,1]^n$ est la fermeture de $\mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n$, il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de n-uplets de rationnels de l'intervalle $[0,1]$ convergeant vers $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Comme F est une tautologie de Taut(L_ω) et en vertu de la proposition précédente, et en remarquant que la sémantique des connecteurs de L_ω est une restriction de leur sémantique respective dans L_∞, $f(u_{k,1}, \dots, u_{k,n}) = 1$. Puisque f est une fonction continue par morceau, $f(x_1, \dots, x_n) = 1$. Donc, F est une tautologie de L_∞. C.Q.F.D.

C'est pourquoi dans la suite on ne distinguera plus les deux logiques, on l'appellera simplement $L_\aleph$.

Les liens entre les ensembles des tautologies des logiques de LUKASIEWICZ finies et infinies sont clarifiées par l'énoncé suivant

THÉORÈME 9.1.1. *Soient n, m deux entiers naturels plus grands que 2.*

- $\mathcal{P}_m \subseteq \mathcal{P}_n$ *ssi* $Taut(L_m) \supseteq Taut(L_m)$
- $\mathcal{P}_m \subseteq \mathcal{P}_n$ *ssi* $m-1$ *divise* $n-1$
- $Taut(L_m) \not\subseteq Taut(L_{m+1})$
- $Taut(L_{m+2}) \not\subseteq Taut(L_{m+1})$
- $Taut(L_\infty) = \bigcap_{m=2}^{\infty} Taut(L_m)$

PREUVE. Voir par exemple (GOTTWALD, 1989, pp. 94 et suiv.). C.Q.F.D.

Plongement dans une Logique Modale

Pour les logiques de Post par exemple, une sémantique des mondes possibles a permis, nous semble-t-il, de clarifier les rapports avec la logique classique. Il est possible de plonger les logiques de Lukasiewicz dans des logiques modales définies par une famille de modèles minimaux (CHELLAS, 1980, par exemple).

DÉFINITION 9.1.1. *Un modèle minimal est un triplet $\langle W, N, P\rangle$, où:*

- *W est un ensemble, l'ensemble des mondes possibles*
- N: $\begin{array}{ccc} W & \rightarrow & 2^{2^W} \\ w & \mapsto & N_w \end{array}$
- P: $\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \rightarrow & 2^W \\ q & \mapsto & P_q \end{array}$

◊

Une variable propositionnelle q est vraie dans un monde w ssi $w \in P_q$. La valeur de vérité dans un monde w d'une conjonction, d'une disjonction ou d'une négation est définie à partir de la valeur de vérité de ses arguments de manière usuelle. Une formule $\Box F$ est vraie dans le monde w ssi l'ensemble M de tous les mondes de W

où F est vraie, est un élément de N_w. $\diamond F$ est une abréviation pour $\neg\Box\neg F$. Quand le contexte fixe le modèle minimal, on note par $w \Vdash F$ le fait que la formule F est vraie dans le monde w, le cas de figure contraire est noté $w \dashV F$.

Cette sémantique pour les logiques modales est réllement plus générale que celles des repères de Kripke: certaines logiques n'ont pas de sémantiques de Kripke, mais admettent une sémantique des modèles minimaux. Par contre, tout repère de Kripke peut être décrit par un modèle minimal.

Pour $n > 1$, on définit $\mathcal{M}_n$, la classe de modèles minimaux dont l'ensemble des mondes possibles et la "fonction de nécessitation" N sont respectivement:

- $W_n = \{1, \dots, n-1\}$
- $N: \begin{array}{lcl} W_n & \to & 2^{2^{W_n}} \\ k & \mapsto & N_k = \{V \subseteq W_n : k \leq \# V\} \end{array}$

GÖDEL (1933) a montré qu'il était possible de traduire la logique intuitionniste en logique modale S_4. La version de la fonction de traduction donnée dans (VAN DALEN, 1986) permet également de traduire les formules de la logique de Lukasiewicz L_n ($\mathcal{F}bf_{\mathrm{L}}$) vers les formules de la logique modale caractérisée par la classe de modèles minimaux de $\mathcal{M}_n$ ($\mathcal{F}bf_{\Box}$).

$$\begin{array}{llll} \cdot^\circ: & \mathcal{F}bf_{\mathrm{L}} & \to & \mathcal{F}bf_{\Box} & \\ & A^\circ & \mapsto & \Box A & \text{pour } A \in \Omega_0 \\ & (G \dot\wedge H)^\circ & \mapsto & G^\circ \wedge H^\circ & \\ & (G \dot\vee H)^\circ & \mapsto & G^\circ \vee H^\circ & \\ & (G \dot\Rightarrow H)^\circ & \mapsto & \Box(G^\circ \Rightarrow H^\circ) & \\ & (\dot\neg G)^\circ & \mapsto & \Box\neg G^\circ & \end{array}$$

Compte tenu de la classe de modèles minimaux considérée, $\Box G$ est vraie dans le monde k ssi G est vraie dans au moins k mondes différents. La nécessitation revient en fait à opérer à un décalage vers la gauche des **t** (et vers la droite des **f**). Comme la conjonction et la disjonction sont isotones, il est inutile de nécessiter respectivement la conjonction et la disjonction de la traduction de leurs arguments.

PROPOSITION 9.1.2. *Soit G une formule de $\mathcal{F}bf_{\mathrm{L}}$.*

G est une tautologie de L_n.

ssi G° est une tautologie de la logique modale caractérisée par la classe de modèles minimaux $\mathcal{M}_n$.

PREUVE. Partant d'une interprétation $\Im_{\mathrm{L}}$ de $\mathcal{F}bf_{\mathrm{L}}$, on définit un modèle minimal $\langle W, N, P\rangle$ de $\mathcal{F}bf_{\Box}$ dans $\mathcal{M}_n$ tel que pour tout atome A de Ω_0,

$$P_A = \left\{k : \frac{k}{n-1} \leq \Im_{\mathrm{L}}(A)\right\}.$$

Réciproquement, à partir d'un modèle minimal $\langle W, N, P\rangle$, on construit une interprétation $\Im_{\mathrm{L}}$ de $\mathcal{F}bf_{\mathrm{L}}$ dans la logique L_n dont pour tout atome A, $\Im_{\mathrm{L}}(A) = \# P_A$.

On prouve par induction structurelle:

$\Im_L(F) = \frac{k}{n-1} \in \mathcal{P}_n$
ssi pour tout $k' \in W$, $k' \leq k$ ssi $k' \Vdash F^\circ$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 9.1.2. *Soit G une formule de $\mathcal{F}bf_L$.*

G est une tautologie de L_ω.

ssi G° est une tautologie de la logique modale caractérisée par la classe de modèles minimaux $\bigcup\{\mathcal{M}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

PREUVE. Avec la proposition précédente et la PROPOSITION 9.1.1. C.Q.F.D.

On peut voir cette sémantique comme un cas particulier de la généralisation des modèles minimaux de HERZIG & OHLBACH (1991), introduite pour le raisonnement en présence d'incertitudes quantifiées. Ce rapprochement est intéressant. D'abord, il montre clairement pourquoi les logiques de Lukasiewicz ne peuvent pas être considérées comme des logiques probabilistes. On peut voir chaque monde dans un modèle minimal, comme un cas de figure à considérer dans le dénombrement des cas où une formule est vraie. Mais on ne peut pas mener jusqu'au bout cette comparaison, car l'implication et la négation mélangent l'information sur les mondes, par exemple si F est vraie dans le monde 1 et fausse dans le monde 2, $\dot{\neg}F$ sera également vraie dans le monde 1.

9.2 Systèmes de Hilbert

Comme remarquée par GOTTWALD (1989), la possibilité de définir les connecteurs J_k à partir de $\dot{\neg}$ et $\dot{\Rightarrow}$, suffit pour être en mesure d'appliquer la méthode d'axiomatisation décrite dans (ROSSER & TURQUETTE, 1952). Des axiomatisations plus transparentes ont été proposées.

Les systèmes de Hilbert des logiques propositionnelles de Lukasiewicz sont étudiés principalement dans

- (WAJSBERG, 1931) qui donne une axiomatisation complète de la logique trivalente.
- (ŁUKASIEWICZ & TARSKI, 1930) qui est une étude synthétique des systèmes formels de la séquence des logiques de Lukasiewicz, incluant la définition d'un système formel définissant la quantification sur les propositions.
- (ŁUKASIEWICZ, 1930) qui discute la signification philosophique de la séquence de ces logiques, notamment lorsque l'on définit la possibilité dans ces systèmes.

SCHÉMAS D'AXIOMES

(L_1) $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$ — Affaiblissement

(L_2) $(p\Rightarrow q)\Rightarrow[(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)]$ — Transitivité de l'Implication
ou *loi du syllogisme conditionnel*

(L_3) $(\neg p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow(q\Rightarrow p)$ — Contraposition Classique

(L_4) $[(p\Rightarrow\neg p)\Rightarrow p)\Rightarrow p]$ — "quart-exclu"
c'est-à-dire $(p\Rightarrow\neg p)\dot{\vee}p$

RÈGLES D'INFÉRENCE

Modus ponens

$$\frac{F \quad F\Rightarrow G}{G}$$

Figure 9.3: Axiomatisation de L_3 (système HL_3)

Outre le Modus Ponens et les schémas d'axiomes (L_1) et (L_2) de HL_3, on considère les SCHÉMAS D'AXIOMES ci-après:

($L^+_{3,1}$) $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow q]\Rightarrow[(q\Rightarrow p)\Rightarrow p]$ — Commutativité de $\dot{\vee}$
c'est-à-dire $(p\dot{\vee}q)\Rightarrow(q\dot{\vee}p)$

($L^+_{3,2}$) $[((p\Rightarrow q)\Rightarrow q)\Rightarrow((q\Rightarrow p)\Rightarrow p)]\Rightarrow((q\Rightarrow p)\Rightarrow p)$ — Linéarité
c'est-à-dire $(p\Rightarrow q)\dot{\vee}(q\Rightarrow p)$

($L^+_{3,3}$) $[(p\Rightarrow(p\Rightarrow q))\Rightarrow p]\Rightarrow p$ — "quart-exclu".
c'est-à-dire $(p\Rightarrow(p\Rightarrow q))\dot{\vee}p$

Figure 9.4: Axiomatisation du fragment positif de L_3 (système RHL_3)

- (ROSE & ROSSER, 1958) qui étudie essentiellement des systèmes formels apparentés aux logiques de Lukasiewicz. En particulier, ils prouvent la complétude du système de Hilbert proposé par LUKASIEWICZ & TARSKI (1930) pour axiomatiser la logique $L_{\aleph}$ [2].

Logique Trivalente

Le système de Hilbert défini par WAJSBERG (1931) a été le premier système formel d'une logique polyvalente. Ce système, appelé HL_3, est donné en FIGURE 9.3.

Les trois premiers schémas d'axiomes du système HL_3 sont valides dans la logique classique. Le premier peut être lu comme l'affaiblissement de l'antécédent. Le second code le syllogisme hypothétique ou conditionnel. Le troisième correspond la contraposition classique.

Le quatrième schéma d'axiomes peut être lu comme une généralisation du prin-

[2] WÓJCICKI (1988) rapporte qu'en 1935, WAJSBERG disposait déjà d'une preuve de complétude.

cipe du tiers-exclu: pour toute interprétation fixée, soit p est interprété à la valeur désignée, soit $p \dot{\Rightarrow} \dot{\neg} p$. De manière équivalente, soit p prend la valeur désignée, soit une valeur non-désignée, et si p prend une valeur non-désignée, celle-ci est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$. On peut donc l'appeler principe du quart-exclu.

Le système HL_3 n'est pas une extension conservative du fragment positif. Pour obtenir une axiomatisation complète du fragment positif, ROSE (1956) (où le cas m arbitraire mais fini est traité) [3], et indépendamment MC CALL & MEYER (1966), remplacent les axiomes de la FIGURE 9.3 contenant une négation par les trois axiomes de la FIGURE 9.4.

On notera que $Ł_4$, reformulé avec $\perp$ à la place de la négation: $(p \dot{\Rightarrow} (p \dot{\Rightarrow} \perp)) \dot{\vee} p$, est une instance de $Ł^{+}_{2,3}$.

AVRON (1991) propose le système AHL_3 de la FIGURE 9.5. Il a l'avantage d'être une bonne axiomatisation de $Ł_3$.

9.2.1 Les Hyperséquents d'Avron

Le calcul des hyperséquents d'AVRON (1991), appelé AGL_3 et détaillé dans la FIGURE 9.6 est une généralisation du calcul de séquents de Gentzen. On reprendra donc la terminologie usuelle des calculs de Gentzen sans en étendre explicitement les définitions.

Les hyperséquents sont des multi-ensembles finis de séquents finis. Un tel objet est valide si l'un des séquents qui le compose l'est. Un séquent est valide ssi pour toute interprétation $\Im$

une formule de la partie antécédent (c'est-à-dire la liste en partie gauche de $\Longrightarrow$ du séquent) est évaluée à 0 par $\Im$

ou une formule de la partie conséquent est évaluée à 1 par $\Im$

ou deux occurrences de formules sont évaluées à $\frac{1}{2}$ par $\Im$

Ce calcul est correct et complet pour la logique $Ł_3$.

Il semble "raisonnable" dans la mesure où le Règle de la Coupure (**T**) peut être éliminée. Toutefois, du point de vue de la déduction automatique, la *Règle du Mélange* est très difficile à gérer.

Logiques Finies

ROSE (1956) affirme que, pour obtenir une axiomatisation du fragment positif de $Ł_m$ ($m \geq 2$), qui est noté $Ł^{+}_{m}$, il suffit de remplacer l'axiome $Ł^{+}_{2,3}$ par

$(Ł^{+}_{m,3})$ $(p^{m-1} \dot{\Rightarrow} q) \dot{\Rightarrow} p] \dot{\Rightarrow} p$ "Axiome" de ROSE.
c'est-à-dire $(p^{m-1} \dot{\Rightarrow} q) \dot{\vee} p$

[3] Voir plus loin la discussion sur l'axiomatisation des logiques de Lukasiewicz finies.

SCHÉMAS D'AXIOMES

(I1)	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	affaiblissement
(I2)	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$	Transitivité de l'implication
(I3)	$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$	Commutativité de l'antécédent
(I4)	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow p]$ c'est-à-dire $(p \dot\vee q) \Rightarrow (q \dot\vee p)$	Commutativité de $\dot\vee$
(I5)	$[[[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p] \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ c'est-à-dire $p \dot\vee (p \Rightarrow q) \dot\vee (q \Rightarrow r)$ valeurs de vérité	Définition du nombre de
(C1)	$p \dot\wedge q \Rightarrow p$	Élimination de $\dot\wedge$
(C2)	$p \dot\wedge q \Rightarrow q$	Élimination de $\dot\wedge$
(C3)	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \dot\wedge r)]$	Introduction de $\dot\wedge$
(D1)	$p \Rightarrow q \dot\vee p$	Introduction de $\dot\vee$
(D2)	$p \Rightarrow q \dot\vee p$	Introduction de $\dot\vee$
(D3)	$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \dot\vee q \Rightarrow r)]$	Élimination de $\dot\vee$
(N1)	$(\dot\neg p \Rightarrow \dot\neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	Contraposition classique

RÈGLE D'INFÉRENCE

Modus ponens

Figure 9.5: Axiomatisation de L_3 (système AHL_3)

Schémas d'Axiomes:

$$p \Longrightarrow p \qquad \text{(Identité)}$$

Règles d'Inférence Structurelles Externes:

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G} \mid \mathcal{H}} \qquad \text{(Affaiblissement externe)}$$

$$\frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \text{(Contraction externe)}$$

$$\frac{\mathcal{G} \mid \Gamma_1 \Longrightarrow \Delta_1 \mid \Gamma_2 \Longrightarrow \Delta_2}{\mathcal{G} \mid \Gamma_2 \Longrightarrow \Delta_2 \mid \Gamma_1 \Longrightarrow \Delta_1} \qquad \text{(Échange externe)}$$

Règles d'Inférence Structurelles Internes:

— Pas de contraction interne —

$$\frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid A, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, A} \qquad \text{(Affaiblissement interne)}$$

$$\frac{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Longrightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\mathcal{G} \mid \Gamma_1 \Longrightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2} \qquad \text{(Échange interne)}$$

$$\frac{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \qquad \mathcal{G} \mid \Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma_3' \Longrightarrow \Delta_1', \Delta_2', \Delta_3'}{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, \Gamma_1' \Longrightarrow \Delta_1, \Delta_1' \mid \Gamma_2, \Gamma_2' \Longrightarrow \Delta_2, \Delta_2' \mid \Gamma_3, \Gamma_3' \Longrightarrow \Delta_3, \Delta_3'} \text{(Mélange)}$$

Règles d'Inférence Logiques:

$$\frac{\mathcal{G} \mid A, B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid A \dot{\wedge} B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, A \qquad \mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, A \dot{\wedge} B}$$

$$\frac{\mathcal{G} \mid A, \Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad \mathcal{G} \mid B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid A \dot{\vee} B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, A, B}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, A \dot{\vee} B}$$

$$\frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, A \qquad \mathcal{G} \mid B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid A \dot{\Rightarrow} B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\mathcal{G} \mid A, \Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, A \dot{\Rightarrow} B}$$

$$\frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, A}{\mathcal{G} \mid \dot{\neg} A, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\mathcal{G} \mid A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Longrightarrow \Delta, \dot{\neg} A}$$

Figure 9.6: Calcul des Hyperséquents pour L_3 (Système AGL_3)

SCHÉMAS D'AXIOMES

(L_{m1})	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	Affaiblissement de l'antécédent
(L_{m2})	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$	Transitivité de l'implication
(L_{m3})	$(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	Contraposition classique
(L_{m4})	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow p]$ c'est-à-dire $(p \dot{\vee} q) \Rightarrow (q \dot{\vee} p)$	Commutativité de la disjonction
(L_{m5})	$\sum_{i=1}^{m} p \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} p$	

(L_{m6}) $\sum_{i=1}^{m-1}(\prod_{j=1}^{n} p \oplus (\neg p \odot \sum_{j=1}^{n-1} p))$, pour chaque n dont $n-1$ et $m-1$ sont relativement premiers.

RÈGLE D'INFÉRENCE
Modus ponens

Figure 9.7: Axiomatisation de L_m (système HL_m)

Ce schéma d'axiomes dit en fait que la plus grande valeur non-désignée est inférieure ou égale à $\frac{m-2}{m-1}$. Le système qui en résulte est appelé RHL_m.

On se convainc facilement que $\mathrm{L}^{+}_{m,3}$ est une tautologie de L^{+}_{n}, pour tout $n \leq m$. Tout théorème de RHL_m est également un théorème de RHL_n pour tout $n \leq m$, car $\mathrm{L}^{+}_{m,3}$ est une instance de $\mathrm{L}^{+}_{n,3}$.

L'axiomatique ainsi construite définit l'ensemble de théorèmes, $\bigcap_{2 \leq n \leq m} \mathrm{Th}(\mathrm{L}^{+}_{n})$. Or, pour toute logique de Lukasiewicz d'ordre fini et supérieur à 3 (c'est-à-dire pour $3 \leq m < \omega$),

$$\bigcap_{2 \leq n \leq m} \mathrm{Th}(\mathrm{L}^{+}_{n}) \neq \mathrm{Th}(\mathrm{L}^{+}_{m})$$

tout comme

$$\bigcap_{2 \leq n \leq m} \mathrm{Th}(\mathrm{L}_{n}) \neq \mathrm{Th}(\mathrm{L}_{m}).$$

SCHRÖTER (1955*b*) propose un système pour L_m, qui comme le système RHL_m n'est pas complet.

GRIGOLIA (1975) part d'un point de vue algébrique et définit une sous-classe de MV-algèbres qui correspondent aux logiques de Lukasiewicz d'ordre fini (plus exactement à leur algèbre de Lindenbaum). La FIGURE 9.7 reproduit cette axiomatisation, où $\sum_{i=1}^{k} p_i$ et $\prod_{i=1}^{k} p_i$ sont des abréviations respectivement pour $p_1 \oplus \ldots \oplus p_k$ et $p_1 \odot \ldots \odot p_k$.

Logiques Infinies

En ne faisant pas cas des deux derniers axiomes de la FIGURE 9.7 on obtient une axiomatisation correcte de L_∞. LUKASIEWICZ & TARSKI (1930) ont conjecturé que cette axiomatisation était complète; ceci n'a été établi que par ROSE & ROSSER (1958).

9.3 Logiques de Łukasiewicz Finies

Les logiques de Lukasiewicz d'ordre fini peuvent évidemment être abordées par les méthodes déductives de la Partie consacrée aux logiques polyvalentes d'ordre finies. Il existe néanmoins des approches spécifiques aux logiques de Lukasiewicz finies, comme la méthode des valuations de SCOTT (1974), plus récemment, pour les logiques de Lukasiewicz finies les systèmes polycontexturaux (PFALZGRAF, 1991).

9.4 Logique de Łukasiewicz Infinies

9.4.1 Décidabilité de la Logique Propositionnelle

Le pendant algébrique des logiques de Lukasiewicz étant les MV-algèbres introduites par CHANG (1958). Ce sont essentiellement des groupes abéliens ordonnés avec maximum. On peut prouver les tautologies de la logique propositionnelle de Lukasiewicz $L_{\aleph}$ dans la logique du premier ordre en utilisant explicitement les axiomes des groupes abéliens avec maximum. La théorie de ces groupes est décidable (GOTTWALD, 1989, et références), on obtient donc une procédure de décision pour $L_{\aleph}$.

9.4.2 Impact de la Désignation sur l'Ensemble des Théorèmes

L'axiomatisation de la logique de Lukasiewicz du premier ordre ayant un nombre infini de valeurs de vérité $L^*_{\aleph}$, longtemps été un problème ouvert. C'est à SCARPELLINI (1962) que revient le mérite d'avoir apporté une contribution décisive. L'impossibilité d'axiomatiser $L^*_{\aleph}$, prouvé par SCARPELLINI (1962), rend intéressant les réponses partielles positives antérieures.

Une première solution partielle a été apportée par RUTLEDGE (1960). Cet auteur prouve que l'ensemble des théorèmes qui ne contiennent que des prédicats monadiques est récursivement énumérable. L'argument central de l'article est que toute formule du fragment monadique de la logique de Lukasiewicz du premier ordre, qui n'est pas une tautologie de $LM_{\aleph}$, n'est pas une tautologie de LM^*_m, la logique monadique de Lukasiewicz à m valeurs de vérité, pour un certain entier m en d'autres termes:

$$F \notin \mathrm{Th}(LM^*_{\aleph}) \text{ ssi il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } F \notin \mathrm{Th}(LM^*_m)$$

RUTLEDGE (1960) généralise donc le résultat que ŁUKASIEWICZ & TARSKI (1930) établissent pour le cas propositionnel. RAGAZ (1983) montre que $\mathrm{Th}(LM^*_{\aleph})$ est indécidable contrairement au cas classique.

HAY (1963) ne considère pas que le fragment monadique, mais tout l'ensemble des formules bien formées et propose le système de Hilbert $HaL^*_{\aleph}$, reproduit en FIGURE 9.8 [4], pour lequel elle prouve une forme affaiblie de complétude.

[4] En fait nous donnons la reformulation du système de HAY (1963) par BELLUCE & CHANG (1963).

On ajoute au système $HL^*_{\aleph}$ les SCHÉMAS D'AXIOMES suivants:

Q1 $\exists x \cdot F(x) \odot \exists x \cdot F(x) \Leftrightarrow \exists x \cdot [F(x) \odot F(x)]$

Q2 $\exists x \cdot F(x) \oplus \exists x \cdot F(x) \Leftrightarrow \exists x \cdot [F(x) \oplus F(x)]$

Q3 $F(y) \Rightarrow \exists x \cdot F(x)$

Q4 $\exists x \cdot F(x) \Rightarrow \exists x' \cdot F(x')$

Q5 $[\forall x \cdot (F(x) \Rightarrow G)] \Rightarrow [(\exists x \cdot F(x)) \Rightarrow G]$

Q6 $[\exists x \cdot (G \Rightarrow F(x))] \Leftrightarrow [G \Rightarrow (\exists x \cdot F(x))]$

ainsi que la RÈGLE D'INFÉRENCE:

Généralisation

$$\frac{F(y)}{\forall x \cdot F(x)}$$

où x, x' sont des variables liées, y une variable libre, G ne contient pas d'occurrence de x;

Figure 9.8: Axiomatisation de $L^*_{\aleph}$ (système $HaL^*_{\aleph}$)

THÉORÈME 9.4.1. *(complétude faible de* HAY*).*
Soit F une formule bien formée de $L^*_{\aleph}$.

si F est une tautologie de $L^*_{\aleph}$

alors pour tout entier n, $\vdash_{HaL} F \oplus \prod_{i=1}^{n} F$

PREUVE. Voir HAY (1963). C.Q.F.D.

BELLUCE & CHANG (1963) reprennent ce système et donnent d'autres théorèmes de complétude, où la notion de validité se réfère aux MV-algèbres linéaires.

DÉFINITION 9.4.1. *Une formule bien formée F est* fortement valide *ssi dans toute* MV*-algèbre totalement ordonnée $\mathcal{A}$, de maximum $\top$ et pour toute interprétation $\Im$ des propositions dans $\mathcal{A}$ et dont le domaine des individus est $\mathcal{I}$, $\Im(F) = \top$.* $\Diamond$

THÉORÈME 9.4.2. *(complétude forte de* BELLUCE *et* CHANG*)*
Soit F une formule bien formée de $L^*_{\aleph}$.

si F est fortement valide,

alors $\vdash_{HaL} F$

PREUVE. Voir (BELLUCE & CHANG, 1963) C.Q.F.D.

En fait, il n'existe pas d'axiomatisation dont l'ensemble des théorèmes coïncide avec l'ensemble des tautologies de $L^*_{\aleph}$ car:

THÉORÈME 9.4.3. *L'ensemble des tautologies de la logique $L^*_\aleph$ n'est pas récursivement énumérable.*

PREUVE. Voir SCARPELLINI (1962). Il associe à toute formule F de la logique classique une formule F' telle que F soit satisfaisable dans un domaine fini ssi il existe une interprétation dans $L^*_\aleph$ qui évalue F' à une valeur non-nulle. La preuve fait alors appel au résultat de TRAHTENBROT, qui établit que l'ensemble des formules satisfaisables dans un domaine fini n'est pas récursivement énumérable. C.Q.F.D.

Par ailleurs, BELLUCE (1964) traite de logiques de Łukasiewicz dont l'ensemble des valeurs désignées est un intervalle de maximum 1. Il appelle *réel faiblement récursif* tout réel $0 \leq r \leq 1$ que l'on peut définir à partir de deux fonctions *récursives* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n \leq q_n \neq 0$, en posant

$$r = \inf \{p_n/q_n : n \in \mathbb{N}\}$$

et prouve que l'ensemble des formules bien formées qui dans toute interprétation prennent une valeur *strictement* supérieure à r, est récursivement énumérable ssi r est un réel faiblement récursif.

De plus si r n'est pas un réel faiblement récursif, alors l'ensemble des formules bien formées qui dans toute interprétation prennent une valeur supérieure *ou égale* à r, n'est pas récursivement énumérable, ce qui généralise le résultat de SCARPELLINI (1962).

9.5 Logique de Łukasiewicz et Raisonnement avec l'Incertain

Si la logique classique "est bien adaptée" au domaine des mathématiques, il est permis d'être plus réservé dans la cadre du raisonnement dans la vie courante. Malgré tout ne perdons pas de vue:

> "[...], one must not expect too much of fuzzy sets and logic. Ordinary set theory and logic have been of greatest importance in providing a convenient language for mathematical thought. They have not made the exercice of creative intelligence unnecessary either in mathematics or its applications. Similarly we should not expect more of fuzzy sets and logic than that they facilitate the development and study of models in the inexact sciences, and they be an interesting area for pure mathematical investigations."
>
> (GOGUEN, 1969, p. 337)

Dans la logique classique, un individu *est* ou *n'est pas* dans l'extension d'un prédicat (monadique). Cette rigidité n'est pas naturelle, et conduit à des paradoxes (dans une acception intuitive du mot), comme le paradoxe, dit *du tas de sable* ou *du* *chauve*, formulé par EUBULIDES qui les appelle respectivement *sorites* et *falakros* (MULLER, 1988).

Ce paradoxe s'énonce ainsi:

> Si on ajoute un grain à ce qui n'est pas un tas de sable, ce ne sera toujours pas un tas de sable. Un grain de sable n'est pas un tas de sable. On peut donc ajouter grain après grain, ce ne sera toujours pas un tas de table. Pourtant, un tas de sable est constitué d'un nombre fini de grains de sable.

Traduit dans le langage de l'arithmétique linéaire (ou de Presburger), ce texte devient:

$$\neg P(1)$$
$$\forall n \cdot (\neg P(n) \Rightarrow \neg P(n+1))$$
$$P(N)$$

Où N est un entier naturel très grand. Les trois formules sont insatisfaisables simultanément. Le paradoxe *du chauve* met à nu la même faiblesse de la logique classique. GOGUEN (1969) propose une solution à ce genre de paradoxes.

Son idée exploite les ensembles flous de ZADEH. Au lieu d'interpréter l'extension d'un prédicat P comme un ensemble usuel (c'est-à-dire dont l'image de sa fonction caractéristique est un sous-ensemble de $\{0, 1\}$), l'extension est interprétée par un ensemble flou (c'est-à-dire dont la fonction caractéristique a pour image un élément quelconque de l'intervalle fermé $[0, 1]$). Plus l'image associée à un n-uplet est grande, plus il est vrai que cet n-uplet vérifie la relation décrite par le prédicat P; on appellera donc cette image *degré de certitude*. Ainsi, dans l'exemple du tas de sable, l'extension de P associe à n un degré de certitude d'autant plus grand, que n l'est aussi.

Le point essentiel est la combinaison des propositions en formules bien formées. Pour éviter le paradoxe du tas, il faut que, de $\neg P(n)$ vrai avec un degré de certitude α et $\neg P(n) \Rightarrow \neg P(n+1)$ avec un degré β, on ne puisse en déduire $\neg P(n+1)$ qu'à un degré de certitude strictement inférieurs à α et β, si α et β sont strictement inférieur à 1. Parmi tous les choix possibles, deux sont naturels (PAVELKA, 1979*b*):

- $\alpha \times \beta$
- $\alpha + \beta - 1$

Le premier choix nous oriente vers une lecture probabiliste, le degré de vérité attribué correspondant au degré de vérité associé à la conjonction de deux états *indépendants*. Le second donne la logique de Lukasiewicz. Un développement plus complet sur la logique floue termine le livre de GOTTWALD (1989).

LUKASIEWICZ & TARSKI (1930) terminent leur article:

> "En conclusion, nous voudrions ajouter qu'étant la plus simple des théories déductives, le calcul propositionnel convient particulièrement aux investigations métamathématiques. Ce calcul doit être considéré comme un laboratoire dans lequel on peut découvrir des méthodes métamathématiques et construire des concepts métamathématiques qui seront ensuite appliqués à des systèmes mathématiques plus complexes."

Fournir un outil qui facilite cette expérimentation est justement le but d'un atelier d'inférence, comme ATINF (BOY DE LA TOUR *et al.*, 1988, CAFERRA *et al.*, 1991).

Conclusion et Travail Futur

Dans la première partie de ce travail nous avons étudié systématiquement les logiques polyvalentes finies. Nous avons proposés des calculs des tableaux analytiques utilisant la skolemisation et l'unification. Nous avons montré comment étendre cette approche aux logiques à base de treillis. Parallèlement nous avons proposé un calcul par Résolution et Paramodulation.

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéréssés aux logiques polyvalentes infinies des prédiats du premier ordre. Il nous a alors fallu abandonner une approche systématique. Nous avons envisagé deux exemples typiques: les logiques de Post et de Łukasiewicz.

Les principaux résultats rapportés dans ce travail peuvent être récapitulés aux points suivants :

- une étude systématique des logiques finies, nous avons notamment proposé une nouvelle forme de skolemisation
- un calcul de Résolution–Paramodulation Ordonnées, pour une relation généralisant l'égalité bivalente avec une stratégie très sélective
- un calcul par tableaux analytiques pour les logiques de Post se basant sur une sémantique des mondes possibles.

Ce mémoire ne rend pas compte de toute notre activité de recherche. Nous avons en particulier travaillé sur la recherche simultanée de réfutations et de modèles dans la logique classique du premier ordre (CAFERRA & ZABEL, 1992, CAFERRA & ZABEL, 1993, CAFERRA *et al.*, 199⋆).

Sur la base de ce qui a été fait, de nombreuses continuations peuvent être envisagées. Indiquons les plus intéressantes,

- Nous améliorerons les implémentations faites notamment en tirant partie d'autres outils d'ATINF résolvant très efficacement des tâches spécifiques (problèmes équationnels, E-unification, unification rigide,...)

- La sémantique des mondes possibles pour les logiques de Post ou de Lukasiewicz, indique que les liens entre logiques polyvalentes et logique classique sont plus complexes que l'ajout de quelques valeurs de vérité. Il existe de nombreuses sémantiques qui ramènent les logiques polyvalentes aux logiques classiques, comme nous avons pu nous en convaincre dans le chapitre sur les logiques de Lukasiewicz. Pour les logiques de Post nous avons pu vérifier que cette approche menait à un calcul plus adapté pour la déduction automatique. Il est intéressant de voir quelles sémantiques sont adaptées aux autres logiques polyvalentes.

- Un autre domaine que nous comptons approfondir c'est la recherche de modèles ou de contre-exemples dans les calculs analytiques où les modèles sont exprimés avec d'autres formalismes que des formules du premier ordre avec contraintes.

- Les logiques paraconsistantes regagnent en intérêt à cause de leurs applications en bases de données distribuées. Là, il est capital de raisonner rapidement en présence de données contradictoires et d'obtenir des réponses fiables (c'est-à-dire sans avoir à vérifier si la preuve n'utilise pas une forme ou une autre du *ex falso quodlibet sequitur*). On est prêt à accepter alors que des approximations de logiques paraconsistantes compliquées contiennent des paradoxes ou des principes indésirés, du moment que ces faiblesses n'apparaissent pas dans l'utilisation effective de l'outil de déduction. Ces approximations peuvent justement être des logiques polyvalentes.

- Certains des calculs définis dans ce travail n'ont pas encore été implémentés. La réalisation d'un démonstrateur pour ces logiques n'est plus qu'un problème d'intégration, puisque nous disposons déjà de modules implémentant une procédure de décision pour l'arithmétique de Presburger.

Annexe A

Le point de Vue Algébrique

Ce chapitre rappelle les définitions des algèbres de Post et des MV–algèbres qui permettent de construire une theorie des Modèles respectivement pour les logiques polyvalentes de POST et de LUKASIEWICZ.

A.1 Les algèbres de Heyting

DÉFINITION A.1.1. *Une algèbre de Heyting* $\mathcal{P} = \langle P, \top, \Rightarrow, \vee, \wedge, \neg \rangle$ *est une algèbre abstraite, qui est un treillis dont*

- $\leq$ *denote la relation d'ordre induite, tel que pour tout* a *de* P, $a \leq \top$,
- $\top$ *est un symbole de constante,*
- $\neg$ *un symbole unaire,*
- $\Rightarrow, \vee, \wedge$ *les symboles binaires qui vérifient les propriétés suivantes:*

  (H_1) $\neg\top = \neg(a \Rightarrow a)$, $\neg\top$ *est noté* $\perp$.

  (H_2) $\neg a = a \Rightarrow \perp$

  (H_3) $a \leq \neg\neg a$ [1]

  (H_4) $(a \Rightarrow b) \leq (\neg b \Rightarrow \neg a)$

[1] *si pour tout* $a \in Pa = \neg\neg a$ *le treillis est une algèbre de Boole.*

◊

A.2 Les algèbres de Post

DÉFINITION A.2.1. *Une algèbre de Post*

$$\mathcal{P} = \langle P, \top, \Rightarrow, \vee, \wedge, \neg, (D_{i+1})_{i<m}, (e_i)_{i\leq m} \rangle$$

(m est un ordinal tel que $2 \leq m \leq \omega$) est une algèbre abstraite dont

- $\top, (e_i)_{i<m}$ *sont des symboles de constantes*
- $\neg, (D_{i+1})_{i<m}$ *sont des symboles unaires*
- $\Rightarrow, \vee, \wedge$ *les symboles binaires*

qui vérifient les propriétés suivantes:

(P1) $\langle P, \top, \Rightarrow, \vee, \wedge, \neg \rangle$ *est une algèbre de Heyting*
Pour tout i, j, pour tout couple $\langle a, b \rangle \in P^2$ les propriétés suivantes sont vérifiées:

(P2) $D_i(a \vee b) = D_i(a) \vee D_i(b)$.

(P3) $D_i(a \wedge b) = D_i(a) \wedge D_i(b)$.

(P4) $D_i(a \Rightarrow b) = \bigwedge_{j=1}^{i} D_j(a) \Rightarrow D_j(b)$.

(P5) $D_i(\neg a) = \neg D_1(a)$.

(P6) $D_i(D_j(a)) = D_j(a)$.

(P7) *si $j \leq i$, alors $D_j(a) \leq D_i(a)$.*

(P8) $e_\omega = \top$.

(P9) $D_i(e_j) = \begin{cases} \top & \text{si } i \leq j \\ \perp & \text{si } i > j \end{cases}$

(P10) $a = \bigvee_{i=1}^{m} D_i(a) \wedge e_i$.

(P11) $D_1(a) \vee \neg D_1(a) = \top$.

◊

A.3 Les mv–algèbres de C. C. Chang

DÉFINITION A.3.1. *Une algèbre de Post $\mathcal{A} = \langle A, +, ., -, \perp, \top \rangle$ est une algèbre abstraite dont*

- $\top, \perp$ *sont des symboles constants (0–aire),*
- *- un symbole unaire (on le note aussi $\neg$),*

- $+,.$ des symboles binaires qui vérifient les propriétés suivantes:

(Ax_1) $x + y = y + x$

(Ax_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(Ax_3) $x + \overline{x} = \top$

(Ax_4) $x + 1 = 1$

(Ax_5) $x + 0 = x$

(Ax_6) $\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}$

(Ax_7) $x = \overline{\overline{x}}$

(Ax_8) $\overline{\bot} = \top$

(Ax'_1) $x.y = y.x$

(Ax'_2) $(x.y).z = x.(y.z)$

(Ax'_3) $x.\overline{x} = \top$

(Ax'_4) $x.1 = 1$

(Ax'_5) $x.0 = x$

(Ax'_6) $\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$

On introduit les notations suivantes: $x \vee y = (x.\overline{y}) + y$, $x \wedge y = (x + \overline{y}).y$

(Ax_9) $x \vee y = y \vee x$

(Ax_{10}) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(Ax_{11}) $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$

(Ax'_9) $x \wedge y = y \wedge x$

(Ax'_{10}) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(Ax'_{11}) $x.(y \vee z) = (x.y) \vee (x.z)$

$\Diamond$

Bibliographie

ALAN ROSS ANDERSON & NUEL D. BELNAP JR (1975). *Entailment — the logic of relevance and necessity*. Princeton University Press.

PETER B. ANDREWS (1986). *An introduction to mathematical logic and type theory: to truth through proof*. Academic Press.

AYDA I. ARRUDA (1977). On the imaginary logic of N. A. Vasil'év. *In* A. I. ARRUDA, N. C. A. DA COSTA & R. CHUAQUI, *éds*, *Non Classical logics, model theory and computability*, pp. 3–24. North Holland.

ARNON AVRON (1990). Gentzenizing SCHRÖDER-HEISTER's Natural Extension of Natural Deduction. *Notre-Dame Journal of Formal Logic*, **31**(1), 127–135. Cf. (SCHRÖDER-HEISTER, 1984).

ARNON AVRON (1991). Simple Consequence Relations. *Information and Computation*, **92**, 105–139.

MATTHIAS BAAZ & CHRISTIAN FERMÜLLER (1992). Resolutionn for Many-Valued Logics. *In* A. VORONKOV, *éd.*, *Logic Programming and Automated Reasoning*, *t.* 624 *de Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 107–118, St. Petersburg, Russia. Springer-Verlag.

GASTON BACHELARD (1940). *La philosophie du non*. Presses Universitaires de France.

H. BARRINGER, J. H. CHENG & C. B. JONES (1984). A logic Covering undefinedness in Program Proofs. *Acta Informatica*, **21**(3), 251–269.

L. P. BELLUCE (1964). Further results on infinite valued predicate logic. *Journal of Symbolic Logic*, **29**(2), 69–78.

L. P. BELLUCE & C. C. CHANG (1963). A weak completeness theorem for infinite valued first-order logic. *Journal of Symbolic Logic*, **28**(1), 43–50.

NUELS D. BELNAP JR (1977). A useful four-valued logic. *In* J. M. DUNN & G. EPSTEIN, *éds*, *Modern Uses of Multiple Valued Logic*, pp. 8–37. Reidel.

CLAUDE BERGE (1973). *Graphes et Hypergraphes*. Dunod.

KAREL BERKA & LOTHAR KREISER (1986). *Logik-Texte Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*. Akademie-Verlag, vierte, erweiterte auflage edition.

PAUL BERNAYS (1926). Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der „Principia Mathematica". *Mathematische Zeitschrift*, **25**, 305–320.

E. W. BETH (1955). Semantic Entailment and formal derivability. *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afd. Letterkunde*, **18**(13), 309–342.

K.S.H.S.R. Bhatta & Harish Karnick (1991). A resolution rule for well-formed formulae. *Theoretical Computer Science*, **81**(2), 223–235.

Wolfgang Bibel (1987). *Automated theorem proving*. Vieweg, second edition.

G. Birkhoff & J. von Neumann (1936). The Logic of Quantum Mechanics. *Annals of Mathematics*, **37**, 823–843.

Howard A. Blair & V. S. Subrahmanian (1989). Paraconsistent Logic Programming. *Theoretical Computer Science*, **68**, 135–154.

Woodrow W. Bledsoe (1975). A new method for proving certain Presburger formulas. *In Proceedings of the* 4^{th} *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 15–21.

L. Borkowski, *éd.* (1970). *Jan Lukasiewicz, selected Works*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North Holland.

Thierry Boy de la Tour (1991). *Optimisations par renommage dans la méthode de résolution*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.

Thierry Boy de la Tour (1992). An Optimality Result for Clause Form Translation. *Journal of Symbolic Computation*, **14**, 283–301.

Thierry Boy de la Tour, Ricardo Caferra & Gilles Chaminade (1988). Some Tools for an Inference Laboratory (Atinf). *In* E. Lusk & R. Overbeek, *éds*, *Proceedings of the* 9^{th} *Conference on Automated Deduction*, *t.* 310 *de Lecture Notes in Computer Science*, pp. 744–745, Argonne, Illinois, USA, May. Springer-Verlag.

R. S. Boyer & J. S. Moore (1972). The Sharing of Structure in Theorem Proving Programs. *In* B. Meltzer & D. Michie, *éds*, *Machine Intelligence*, *t.* 7, pp. 101–116. Edimburgh University Press.

Ricardo Caferra, Michel Herment & Nicolas Zabel (1991). User-oriented theorem proving with the Atinf graphic proof editor. *In* (Jorrand & Kelemen, 1991), pp. 2–10.

Ricardo Caferra, Thomas Käufl & Nicolas Zabel (199⋆). A Technique for verifying and correcting Programs. soumis à un congrès international.

Ricardo Caferra & Nicolas Zabel (1990*a*). An application of many-valued logic to decide propositional S_5 formulae : a strategy designed for a parameterized tableaux-based theorem prover. *In* Ph. Jorrand & V. Sgurev, *éds*, *Artificial Intelligence — Methodology Systems Application (AIMSA '90)*, pp. 23–32. North Holland.

Ricardo Caferra & Nicolas Zabel (1990*b*). Extending resolution for model construction. *In* J. van Eijck, *éd.*, *Proceedings of Logics in AI — JELIA '90*, pp. 153–169, Amsterdam. Springer Lectures Notes in Artificial Intelligence, volume 478.

Ricardo Caferra & Nicolas Zabel (1990c). Une extension des tableaux sémantiques utilisant les problèmes équationnels pour guider la recherche de modèles et de réfutations. *In Actes 3ème Journées Nationales PRC-GRD Intelligence Artificielle*, pp. 213–222. Éd. Hèrmes.

Ricardo Caferra & Nicolas Zabel (1992). A method for simultaneous Search for refutations and models by equational Constraint solving. *Journal of Symbolic Computation*, **13**, 613–641.

Ricardo Caferra & Nicolas Zabel (1993). Building Models by Using Tableaux Extended by Equational Problems. *Journal of Logic and Computation*, **3**(1).

Rudolf Carnap (1966). *Philosophical Foundations of Physics*. Basic Books, Inc., New York.

Walter A. Carnielli (1987). Systematization of finite many valued logics through the method of tableaux. *Journal of Symbolic Logic*, **52**(2), 473–493.

Michel Carvallo (1968). *Logique à trois valeurs, Logique à seuil*. Dunod.

Gilles Chaminade (1991). *Intégration et implémentation de mécanismes de déduction naturelle dans les démonstrateurs utilisant la résolution*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.

C. C. Chang (1958). Algebraic Analysis of many valued logics. *Transactions of the American Mathematical Society*, **88**, 467–490.

CHEN CHUNG CHANG (1966). *Continuous model theory*. Princeton University Press. volume 58 of Annals of mathemetics studies.

CHIN-LIANG CHANG & RICHARD CHAR-TUNG LEE (1973). *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Academic Press, New York.

BRIAN F. CHELLAS (1980). *Modal Logic*. Cambridge University Press.

HUBERT COMON (1990). solving Inequation in Term Algebras. *In Proceedings of the* 6^{th} *Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 62–69. extended abstract.

HUBERT COMON & PIERRE LESCANNE (1989). Equational problem and disunification. *Journal of Symbolic Computation*, **7**, 371–425.

NEWTON C. A. DA COSTA, LAWRENCE J. HENSCHEN, JAMES J. LU & V. S. SUBRAHMANIAN (1990). Automatic theorem proving in Paraconsistent Logics: Theory and implementations. *In* MARK E. STICKEL, *éd.*, *Proceedings of the* 10^{th} *Conference on Automated Deduction*, *t.* 449 *de Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 72–85. Springer-Verlag.

B. DAHN (1974). KRIPKE-style semantics for some many-valued propositional Calculi. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. série des sciences math., astr. et phys.*, **xxii**(2), 99–102.

STÉPHANE DEMRI (1990). Extension des Démonstrateurs pour la logique classique à des logiques non-classiques. Rapport de DEA, Institut National Polytechnique de Grenoble. sept. 1990.

KEITH J. DEVLIN (1979). *Fundamentals of Contemporary set theory*. Springer-Verlag.

MICHAEL DUMMETT (1959). A propositional calculus with denumerable matrix. *Journal of Symbolic Logic*, **24**(2), 97–106.

J. M. DUNN & G. EPSTEIN, *éds* (1975). *Proceedings of the IEEE Symposium on many-valued logics*, Bloomington, Long Beach.

MICHAEL J. DUNN (1986). Relevance Logic. *In* (GABBAY & GÜNTHNER, 1986), chapter III.3, pp. 71–116.

RONALD FAGIN, JOSEPH Y. HALPERN & NIMROD MEGIDDO (1988). A Logic for Reasoning about probabilities. *In Proceedings of the* 3^{th} *Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 410–421.

RONALD FAGIN, JOSEPH Y. HALPERN & NIMROD MEGIDDO (1990). A Logic for Reasoning about probabilities. *Information and Computation*, **87**, 78–128.

MELVIN FITTING (1972). Tableau methods of proof for modal logic. *Notre-Dame Journal of Formal Logic*, **13**(2), 237–247.

MELVIN FITTING (1983). *Proof methods for Modal and Intuitionistic Logics*. *t.* 169 *de Synthese Library*. North Holland.

MELVIN FITTING (1988*a*). First Order Modal Tableaux. *Journal of Automated Reasoning*, **4**, 191–213.

MELVIN FITTING (1988*b*). Logic programming on a topological bilattice. *Fundamenta Informaticæ*, **11**, 209–218.

MELVIN FITTING (1990). *First Order Logic and Automated theorem Proving*. Springer-Verlag.

MELVIN FITTING (1991). Many-valued Modal Logics. *Fundamenta Informaticæ*, **XV**, 235–254.

R. W. FLOYD (1967). Nondeterministic Algorithms. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **14**(4), 636–644.

ABRAHAM A. FRAENKEL, YEHOSHUA BAR-HILLEL & AZRIEL LEWY (1973). *Foundations of set theory*. *t.* 67 *de Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North Holland.

DOV GABBAY & FRANZ GÜNTHNER, *éds* (1986). *Handbook of Philosophical Logic, vol. III: Alternatives of classical logic*. *t.* 166 *de Synthese Library*. Reidel.

JEAN GALLIER, PALIAH NARENDRAN, DAVID PLAISTED & WAYNE SNYDER (1990). Ridig E-unification: NP-completeness and Applications to Equational Matings. *Information and Computation*, **87**, 129–195.

JEAN H. GALLIER (1986). *Logic for Computer Science*. Harper & Row.

JEAN-LOUIS GARDIES (1978). *La logique du temps*. Collection Sup. Presses Universitaires de France.

GERHARD GENTZEN (1934). Untersuchungen über das logische Schließen. *Mathematische Zeitschrift*, **39**, 176–210.

MATTHEW L. GINSBERG (1988). Multivalued logics: a uniform Approach to Reasonning in Artificial Intelligence. *Computing Intelligence*, **4**, 265–316.

KURT GÖDEL (1932). Zum intuitionistichen Aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, **69**, 65–66. *in* (BERKA & KREISER, 1986).

KURT GÖDEL (1933). Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkaküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, **4**, 39–40. *in* (BERKA & KREISER, 1986).

JOSEPH A. GOGUEN (1969). The logics of inexact concepts. *Synthese*, **19**, 325–373.

G. GOOS (1987). Programmiermethoden der Künstlichen Intelligenz. manuscript.

S. GÖRNEMANN (1971). A logic stronger than intuitionism. *Journal of Symbolic Logic*, **36**, 249–261.

SIEGFRIED GOTTWALD (1989). *Mehrwertige Logik — Eine Einfürung in Theorie und Praxis*. Akademie-Verlag, Berlin.

GRÄTZER (1979). *Universal Algebra*. van Nostrand, second edition.

R. GRIGOLIA (1975). On the algebra corresponding to the n-valued Lukasiewicz-Tarski Logical Systems. *In* (DUNN & EPSTEIN, 1975), pp. 234–239.

REINER HÄHNLE (1991). Uniform Notation of tableau rules for multiple valued logics. *In Proceedings of the International Symposium on Multiple Valued Logics*, Victoria.

REINER HÄHNLE (199⋆). *Automated Theorem Proving in Multiple Valued Logics*. Oxford University Press. to appear.

ARMIN HAKEN (1985). The intractability of resolution. *Theoretical Computer Science*, **39**, 297–308.

JOSEPH Y. HALPERN (1990). An analysis of first-order Logics of probability. *Artificial Intelligence*, **46**, 331–350.

OCTAVE HAMELIN (1905). *Le système d'Aristote*. Vrin.

DAVID HAREL (1984). Dynamic Logic. *In* DOV GABBAY & FRANZ GÜNTHNER, *éds*, *Handbook of Philosophical Logic, vol. II: Extensions of classical logic, t.* 164 *de Synthese Library*, chapter II.10, pp. 497–604. Reidel.

LOUISE SCHMIR HAY (1963). axiomatization of the infinite-valued predicate calculus. *Journal of Symbolic Logic*, **29**(1), 77–86.

ANDREAS HERZIG (1989). *Raisonnement Automatique en Logique Modale et algorithmes d'Unification*. Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse.

ANDREAS HERZIG & HANS-JÜRGEN OHLBACH (1991). Parameter Structures. *In IJCAI'91*, Sydney.

DAVID HILBERT & PAUL BERNAYS (1934◁37). *Grundlagen der Mathematik, 2 Bde.*. Springer-Verlag.

K. J. J. HINTIKKA (1955). Two papers on symbolic logic. *Acta Philosophica Fennica*, **viii**.

ALFRED HORN (1969). Logic with truth values in a linearly ordered Heyting algebra. *Journal of Symbolic Logic*, **34**(3), 395–408.

GÉRARD HUET (1976). *Résolution d'équations dans les langages d'ordre 1,2,...,ω*. Thèse d'état, Universtité de Paris VII.

G. E. HUGHES & M. J. CRESSWELL (1968). *An introduction to Modal Logic*. Methuen.

G. E. HUGHES & M. J. CRESSWELL (1984). *A Companion to Modal Logic*. Methuen.

PH. JORRAND & J. KELEMEN, *éds* (1991). *Proceedings of Fundamentals of Artificial Intelligence Research (FAIR '91), t.* 535 *de Lecture Notes in Artificial Intelligence*, Bratislava, Czechoslovakia. Springer-Verlag.

JEAN-PIERRE JOUANNAUD & CLAUDE KIRCHNER (1990). Solving Equations in Abstract Algebras : A Rule-Based Survey of Unification. *In* JEAN-LOUIS LASSEZ & GORDON PLOTKIN, éds, *Computational Logic : Essays in honor of Alan Robinson*. MIT-Press.

JEAN-PIERRE JOUANNAUD & MITSUHIRO OKADA (1991). Satisfiability of systems of ordinal notations with subterm property is decidable. *In Proceedings of ICALP '91*.

WILLIAM H. JOYNER (1976). Resolution strategies as decision procedures. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **23**(3), 398–417.

THOMAS KÄUFL & NICOLAS ZABEL (1990*a*). Cooperation of decision procedures in a tableau-based theorem prover. *Revue d'Intelligence Artificielle. Special issue on Automated Deduction*, **4**(3), 99–125.

THOMAS KÄUFL & NICOLAS ZABEL (1990*b*). The theorem prover of the Program Verifier *Tatzelwurm*. *In* MARK E. STICKEL, éd., *Proceedings of the* 10^{th} *Conference on Automated Deduction*, *t.* 449 de *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 657–658. Springer-Verlag. System Presentation.

JAN KALICKI (1950*a*). Note on truth-tables. *Journal of Symbolic Logic*, **15**(3), 174–181.

JAN KALICKI (1950*b*). A test for the existence of tautologies according to many-valued truth-tables. *Journal of Symbolic Logic*, **15**(3), 182–184.

J. KALICKI (1952). On comparison of finite algebras. *Proceedings of the Amercan Mathematical Society*, **3**, 36–40.

THOMAS KÄUFL (1988). *Vereinfachung logischer Formeln in einem Vorbeweiser*. PhD thesis, Universität Karlsruhe.

H. JEROME KEISLER (1971). *Model theory for infinitary logic*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North Holland.

MICHAEL KIFER & ELIEZER L. LOZINSKII (1989). RI: A Logic for Reasoning with Inconsistency. *In Proceedings of the* 4^{th} *Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 253–262.

MICHAEL KIFER & V. S. SUBRAHMANIAN (1992). Theory of generalized annotated logic programming and its applications. *Journal of Logic Programming*, **12**, 335–367.

STEPHEN COLE KLEENE (1952). *Introduction to metamathematics*. North Holland.

STEPHEN C. KLEENE (1987). *Logique Mathematique*. Éditions Jacques Gabay.

DONALD ERWIN KNUTH (1969). *The art of computer programming, 3 vol.*. Addison-Wesley.

KURT KONOLIGE (1987). *A deduction Model of Belief*. Research Notes in Artificial Intelligence. Pitman London.

R. KOWALSKI & P. J. HAYES (1969). Semantic Trees in Automatic Theorem-Proving. *In* MELTZER & MICHIE, éds, *Machine Intelligence*, *t.* 4, pp. 87–101. Edinburgh University Press.

SAÜL KRIPKE (1959). A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, **24**(1), 1–14.

SAÜL KRIPKE (1963). Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, **16**, 83–94.

SAÜL KRIPKE (1965). Semantical analysis of modal logic II. Non-normal modal propositional calculi. *In* J. W. ADDISON, LEON HENKIN & ALFRED TARSKI, éds, *The Theory of models — Proceedings of the 1963 International symposium at Berkeley*, pp. 206–220. North Holland.

ANDRÉ LALANDE (1988). *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Presses Universiaires de France, 16ᵉ edition.

RENÉ LALEMENT (1990). *Logique, réduction, résolution*. Études et recherche en informatique. Masson.

RICHARD C. T. LEE (1972). Fuzzy Logic and the Resolution Principle. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **19**(1), 109–119.

DONALD W. LOVELAND (1978). *Automatic Theorem Proving: a logical basis*. *t.* 6 de *Fundamental Studies in Computer Science*. North Holland.

JAN ŁUKASIEWICZ (1920). On three-valued logic. *Ruch Filozoficzny*, 5, 170–171. *In* (BORKOWSKI, 1970, pp. 87–88).

JAN ŁUKASIEWICZ (1930). Philosophische Bermerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalkül. *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl.* III, **23**, 51–77.

JAN ŁUKASIEWICZ (1953). A system of modal logic. *Journal of Computing Systems*, **1**, 111–131.

JAN ŁUKASIEWICZ (1963). *Elements of mathematical logic*. Pergamon Press, second edition.

JAN ŁUKASIEWICZ (1972). *La syllogistique d'Aristote dans la perspective de la logique formelle moderne*. Armand Colin. Présenté et traduit par Françoise Caujolle-Zaslawsky.

JAN ŁUKASIEWICZ & ALFRED TARSKI (1930). Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl.* III, **23**, 1–21. *In* (BORKOWSKI, 1970, TARSKI, 1972).

HUGH MACCOLL (1897). Symbolic Reasoning II. *Mind, new series*, **6**, 493–510.

L. MAKSIMOVA & D. VAKARELOV (1974). Semantics for ω^+-valued Predicate Calculi. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. série des sciences math., astr. et phys.*, xxii(8), 765–771.

ZOHAR MANNA & RICHARD WALDINGER (1986). Special relation in automated deduction. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **33**(1), 1–59.

STORRS MC CALL & ROBERT K. MEYER (1966). Pure three valued ŁUKASIEWISZian implication. *Journal of Symbolic Logic*, **31**(3), 399–405.

ROBERT MC NAUGHTON (1951). A theorem about infinite-valued sentential logic. *Journal of Symbolic Logic*, **16**(1), 1–13.

MCCLUSEY (1956). Minimization of boolean functions. *Bell Syst. Techn. J.*, **35**, 1417–1444. cité dans (WEGENER, 1987).

JOSÉ MESEGUER (1989). General Logics. *In* H. D. EBBINGHAUS, J. FERNANDEZ-PRIDA, M. GARRIDO & M. RODRIQUEZ-ARTALEJO, *éds*, *Logic Colloquium '87*, pp. 275–329, 20–25.07.87, Granada. North Holland.

DALE MILLER (1987). A compact representation of Proofs. *Studia Logica*, **4**, 347–370.

GRAŻYNA MIRKOWSKA (1977*a*). Algorithmic Logic and its applications in the theory of programs, I. *Fundamenta Informaticæ*, **i**, 1–17.

GRAŻYNA MIRKOWSKA (1977*b*). Algorithmic Logic and its applications in the theory of programs, II. *Fundamenta Informaticæ*, **i**, 147–165.

MOH SHAW-KWEI (1954). Logical Paradoxes for many-valued systems. *Journal of Symbolic Logic*, **19**(1), 137–140.

GREGOIRE C. MOISIL (1972). *Essais sur les logiques non-chrisippiennes*. Éditions de l'Académie des Sciences de la République Socialiste de Roumanie.

CHARLES MORGAN (1975). Similarity as a theory of graded equality for a class of many-valued predicate calculi. *In* (DUNN & EPSTEIN, 1975), pp. 436–449.

CHARLES MORGAN (1976). A resolution principle for a class of many valued logics. *Logique et Analyse*, **74–76**, 311–339.

ROBERT MULLER (1988). *Introduction à la pensée des Mégariques*. Vrin, Ousia.

DANIELE MUNDICI (1992). Normal Forms in infinite-valued logic: the cas of one variable. *In* E. BÖRGER, G. JÄGER, H. KLEINE BÜNING & M. M. RICHTER, *éds*, *Computer Science Logic*, *t.* 626 *de Lecture Notes in Computer Science*, pp. 272–277, Berne, Switzerland, October 7–11, 1991. Springer-Verlag.

NEIL V. MURRAY (1982). Completely non-clausal theorem proving. *Artificial Intelligence*, **18**, 67–85.

NEIL V. MURRAY & ERIK ROSENTHAL (1991). Resolution and Path Dissolution in Multiple Valued Logics. Technical Report 91-2, State University N. Y. at Albany.

DAVID NELSON (1949). Constructible Falsity. *Journal of Symbolic Logic*, **14**(1), 16–26.

NILS J. NILSSON (1986). Probabilistic Logic. *Artificial Intelligence*, **28**, 71–87.

PETER W O'HEARN & ZBIGNIEW STACHNIAK (1992). A resolution framework for finitely-valued First-Order Logics. *Journal of Symbolic Computation*, **13**, 235–254.

HANS-JÜRGEN OHLBACH (1988). A resolution calculus for modal logics. *In* E. LUSK & R. OVERBEEK, *éds, Proceedings of the* 9^{th} *Conference on Automated Deduction*, *t.* 310 *de Lecture Notes in Computer Science*, pp. 499–516. Springer-Verlag.

HANS-JÜRGEN OHLBACH (1990). Semantics based Translation Methods. Technical Report SR-90-11, Universität Kaiserslautern.

F. OPPACHER & E. SUEN (1986). Controlling deduction with proof condensation and heuristics. *In Proceedings of the* 8^{th} *Conference on Automated Deduction*, Lecture Notes in Computer Science, pp. 384–393. Springer-Verlag.

EWA ORLOWSKA (1976). The Gentzen Style Axiomatisation of ω^+-valued Logic. *Studia Logica*, **35**(4), 433–445.

EWA ORLOWSKA (1978). The resolution principle for ω^+-valued logic. *Fundamenta Informaticæ*, **II**(1), 1–15.

EWA ORLOWSKA (1980). The resolution systems and their applications II. *Fundamenta Informaticæ*, **III**(3), 333–362.

EWA ORLOWSKA (1985). Mechanical Proof Methods for Post Logics. *Logique et Analyse*, **110-111**, 173–192.

G. PATZIG (1973). ARISTOTLE, LUKASIEWISZ and the origins of many-valued Logics. *In* P. SUPPES, L. HENKIN, A. JOJA & G. MOISIL, *éds*, *Logic, Methodology and Philosophy of Sciences IV*, pp. 921–929, Bucarest, 1971. North Holland.

JAN PAVELKA (1979*a*). On fuzzy logic, I. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **25**, 45–52.

JAN PAVELKA (1979*b*). On fuzzy logic, II. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **25**, 119–134.

UWE PETERMANN (1990). Algorithmische Logik. *In* LOTHAR KREISER, SIEGFRIED GOTTWALD & WERNER STELZNER, *éds*, *Nichtklassische Logik*, chapter 7, pp. 293–326. Akademie-Verlag.

JOACHIM PFALZGRAF (1991). On logical Fiberings and Polycontextural Systems. *In* (JORRAND & KELEMEN, 1991), pp. 170–184.

FRANK PFENNING (1984). Analtyic and Non-analytic Proofs. *In* R. E. SHOSTAK, *éd.*, *Proceedings of the* 7^{th} *Conference on Automated Deduction*, *t.* 170 *de Lecture Notes in Computer Science*, pp. 394–413, Napa, California, USA. May, 14–16. Springer-Verlag.

DANIEL PONASSE & JEAN-CLAUDE CARREGA (1979). *Algèbre et topologie booléennes*. Masson.

R. J. POPPELSTONE (1967). Beth-tree methods in automatic theorem proving. *In Machine Intelligence*, *t.* 1, pp. 31–46. Oliver and Boyd.

EMIL L. POST (1921). Introduction to a general theory of elementary propositions. *Journal of American Mathematics*, **43**, 163–185.

DAG PRAWITZ (1960). An improved proof procedure. *Theoria*, **26**, 102–139.

W. V. O. QUINE (1952). The problems of simplifying truth functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **61**, 521–531.

W. V. O. QUINE (1978). *Le mot et la chose*. Flammarion.

MATHIAS RAGAZ (1983). Die Unentscheidbarkeit der einstelligen unendlichwertigen Prädikatenlogik. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, **23**, 129–139.

H. RASIOWA (1973). On generalized Post algebras of order ω^+ and ω^+-valued predicate caculi. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. série des sciences math., astr. et phys.*, **XXI**(3), 209–219.

HELENA RASIOWA (1974*a*). *An algebraic Approach of non Classical Logics*. North Holland.

HELENA RASIOWA (1974*b*). Many-valued algorithmic logic. *In* A. DOLD & B. ECKMAN, *éds*, *⊨ ISILC Logic Conference*, *t.* 499 *de Lecture Notes in Mathematics*, pp. 543–567. Springer-Verlag.

H[ELENA] RASIOWA (1977). Many-Valued Algorithmic Logic as a Tool to Investigate Programs. *In* J. M. DUNN & G. EPSTEIN, *éds*, *Modern Uses of Many-valued Logic*, pp. 77–102. Reidel.

STEVE REEVES (1987). Semantic tableaux as framework for Automated Theorem-Proving. *In Proceedings of the 1987 AISB Conference*, pp. 125–139.

R. REITER (1980). A logic for default reasonning. *Artificial Intelligence*, **13**(1–2), 81–131.

NICHOLAS RESCHER (1969). *Many-valued Logics*. Mc Graw-Hill.

DAVID RINE, *éd.* (1977). *Computer Sciences and Many-valued Logics. Theory and applications*. North Holland.

G. A. ROBINSON & L. WOS (1968). Paramodulation and Theorem Proving in First Order Theories with Equality. *In* B. MELTZER & D. MICHIE, *éds*, *Machine Intelligence*, *t.* 4, pp. 135–150. Edinburgh University Press.

JAMES A. ROBINSON (1965). A Machine Oriented Logic Based on the Resolution Principle. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **12**, 23–41.

ALAN ROSE (1951). Systems of logic whose truth-values from lattices. *Math. Annalen*, **123**, 152–165.

ALAN ROSE (1956). Formalisation du calcul propositionnel implicatif à m valeurs de Lukasiewicz. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **256**, 1263–1265.

ALAN ROSE & J. BARKLEY ROSSER (1958). Fragments of many-valued statement calculi. *Transactions of the American Mathematical Society*, **87**, 1–53.

GENE F. ROSE (1953). Propositional calculus and realizability. *Transactions of the American Mathematical Society*, **75**, 1–19.

J. BARKLEY ROSSER & ATWELL R. TURQUETTE (1952). *Many-valued Logics*. North Holland.

G. ROUSSEAU (1967). Sequents in many-valued logic I. *Fundamenta Mathematicæ*, **60**, 23–33.

G. ROUSSEAU (1970*a*). Post algebras and pseudo-Post algebras. *Fundamenta Mathematicæ*, **67**, 133–145.

G. ROUSSEAU (1970*b*). Sequents in many-valued logic II. *Fundamenta Mathematicæ*, **67**, 125–131.

MICHAËL RUSINOWITCH (1987). *Démonstration automatique par des techniques de réécriture*. Thèse d'état, Nancy-1 France. also available as textbook (Inter Editions, Paris 1989).

BERTRAND RUSSELL (1989). *Écrits de logique philosophique*. Presses Universitaires de France. traduit par J. M. Roy.

JOSEPH D. RUTLEDGE (1960). On the definition of an inifinitely many-valued predicate calculus. *Journal of Symbolic Logic*, **25**(3), 212–216.

MICHEL SAKAROWITCH (1984). *Optimisation combinatoire. Méthodes mathématiques et algorithmiques (2 vol.)*. Hermann.

BRUNO SCARPELLINI (1962). Die Nichtaxiomatisierbarkeit des unendlichwertigen Prädikatenkalküls von Lukasiewicz. *Journal of Symbolic Logic*, **27**(2), 159–170.

P. SCHRÖDER-HEISTER (1984). A Natural Extension of Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic*, **49**, 1284–1299.

KARL SCHRÖTER (1955*a*). Methoden zur Axiomatisierung beliebiger Aussagen- und Prädikatenkalküle. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **1**, 241–251.

K. SCHRÖTER (1955*b*). Theorie des logischen Schließens I. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **1**, 37–86.

K. SCHRÖTER (1958). Theorie des logischen Schließens II. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **4**, 10–65.

DANA SCOTT (1974). Completeness and axiomatizability in many-valued logics. *In* LEON HENKIN *et al.*, *éds*, *Proceedings of the* TARSKI *symposium*, *Symposia Pure Mathematics 25*, pp. 411–435, Providence.

DANA SCOTT (1976). Does Many-Valued Logic Have Any Use? *In* S. KÖRNER, *éd.*, *Philosophy of Logic*, pp. 64–95. Blackwell. Followed by comments of T. J. Smiley, J. P. Cleave and R. Giles.

D. J. SHOESMITH & T.J. SMILEY (1971). Deductibility and many-valuedness. *Journal of Symbolic Logic*, **36**(4), 610–622.

JAMES R. SLAGLE (1967). Automatic Theorem Proving with Renamable and Semantic Resolution. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **14**(4), 687–697.

J. SLUPECKI (1936). Der volle dreiwertige Aussagenkalkül. *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl.* III, **29**, 9–11. *In* (BERKA & KREISER, 1986, pp. 152–153).

V. A. SMIRNOV (1989). The logical ideas of N. A. VASILIEV and modern logic. *In* JENS ERIK FENSTAD, IVAN T. FROLOV & RISTO HILPINEN, *éds*, *Logic, Methodology and Philosophy of Science* VIII, pp. 625–640, 17–22.08.87, Moscou. North Holland.

RAYMOND M. SMULLYAN (1968). *First Order Logic*. Springer-Verlag.

ZBIGNIEW STACHNIAK (1990). Resolution proof systems with weak transformation Rules. *In* SHUNRO WANABE & MORIO NAGATA, *éds*, *Proceedings of the international symposium on symbolic and algebraic computation*, pp. 38–43, Tokyo. acm Press.

ZBIGNIEW STACHNIAK (1992). Resolution Approximatioin of First-Order Logics. *Information and Computation*, **96**, 225–244.

ZBIGNIEW STACHNIAK & PETER O'HEARN (1990). Resolution in the domain of strongly finite logics. *Fundamenta Informaticæ*, **XIII**, 333–351.

MARK E. STICKEL (1985). Automated Deduction by Theory Resolution. *Journal of Automated Reasoning*, **1**(4), 333–355.

MARK E. STICKEL (1988). A Prolog Technology Theorem Prover: Implementation by an Extended Prolog Compiler. *Journal of Automated Reasoning*, **4**.

JOSEPH E. STOY (1977). *The Scott-Strachey approach to programming language theory*. MIT Press.

V. S. SUBRAHMANIAN (1992). Paraconsistent disjunctive deductive databases. *Theoretical Computer Science*, **93**, 115–141.

STANISLAW J. SURMA (1974). An algorithm for axiomatizing every finite logic. *Reports on Mathematical Logics*, pp. 57–62.

M. E. SZABÓ, *éd.* (1969). *The collected works of Gerhard Gentzen*. North Holland.

MOTO-O TAKAHASHI (1968). Many-valued logics of extended Gentzen style I. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, section A*, **9**(231), 271–292.

MOTO-O TAKAHASHI (1970). Many-valued logics of extended Gentzen style II. *Journal of Symbolic Logic*, **35**, 493–528.

ALFRED TARSKI (1930). Über einige fundamentale Begriffe der Metamethematik. *Monatshefte der Mathematik und der Physik*, **37**, 361–404. *In* (TARSKI, 1972, pp. 67–117).

ALFRED TARSKI (1972). *Logique, sémantique, métamathématique 1923–1944, tome premier*. Armand Colin.

PAUL B THISTLEWAITE, MICHAEL A. MCROBBIE & ROBERT K. MEYER (1988). *Automated Theorem Proving in Non Classical Logics*. Pitman, London.

RAY TURNER (1986). *Logiques pour l'intelligence Artificielle*. Masson.

ATWELL R. TURQUETTE (1965). Review of Burton Dreben's "*Relation of m-valued Quantificational Logic to 2-valued Quantificational Logic*", Summaries of Talks Presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, Cornell University, Princeton, 1960. *Journal of Symbolic Logic*, **30**, 375–376.

ALASDAIR URQUHART (1986). Many-valued Logic. *In* (GABBAY & GÜNTHNER, 1986), chapter III.2, pp. 71–116.

DIRK VAN DALEN (1986). Intuitionistic Logic. *In* (GABBAY & GÜNTHNER, 1986), chapter III.4, pp. 225–240.

M. WAJSBERG (1931). Aksjomatyzacja trówartosciowego rachunku zdán. *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl.* III, 24, 126–148. *In* (BERKA & KREISER, 1986, pp. 150–152).

LINCOLN A. WALLEN (1987). Matrix proof methods for modal logics. *In Proceedings of the* 10^{th} *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 917–923.

CHRISTOPH WALTHER (1986). *A many-sorted calculus based on resolution and paramodulation*. Research Notes in Artificial Intelligence. Pitman London.

INGO WEGENER (1987). *The complexity of boolean functions*. Teubner-Wiley Series in Computer Sciences. Teubner & Wiley.

DAG WESTERSTÅHL (1989). Quantifiers in formal and natural languages. *In* DOV GABBAY & FRANZ GÜNTHNER, *éds, Handbook of Philosophical Logic, vol. IV, t.* 169 *de Synthese Library*, chapter IV.1, pp. 1–131. Reidel.

RYSZARD WÓJCICKI (1988). *Theory of logical calculi. t.* 199 *de Synthese Library*. Kluwer.

GRAHAM WRIGHTSON & JO COLDWELL (1989). Truncating Analytic Tableaux. Technical Report UNARP–89–3, University of Newcastel, Australia, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science.

NICOLAS ZABEL. Constrained based theorem Proving in Post Logics. *In* ÉRIC DOMENJOUD & CLAUDE KIRCHNER, *éds, Proceedings of CCL'92, at Val d'Ajol*. Rapport de Recherche CRIN.

NICOLAS ZABEL (199*). Analytic Tableaux for finite and infinite Post Logics. soumis à un congrès international.

NICOLAS ZABEL (1992*a*). Deciding Fragments of FOL within an extended Tableau Method. *In* BERTRAM FRONHÖFER, RAINER HÄHNLE & THOMAS KÄUFL, *éds, Theorem Proving with analytic Tableaux and related Methods*, Lautenbach, March 18–20. Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme, Interner Bericht 8/92.

NICOLAS ZABEL (1992*b*). An Ordered Resolution and Paramodulation Calculus for Finite Many-Valued Logics. *In* D. PEARCE & G. WAGNER, *éds, Logics in AI — Proceedings of JELIA '92, t.* 633 *de Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 304–318, Berlin. Springer-Verlag.

NICOLAS ZABEL (1993). Stratégies de Résolution pour les Logiques Annotées. Technical report, Laboratoire d'Intelligence Artificielle et d'Informatique Fondamentale. à paraître.

NICOLAS ZABEL (199*x*). Lazy Skolemization in Many-Valued Logics. soumis à une revue internationale.

Index

Sommaire