



HAL
open science

Deux applications du chaos quantique: etude des fonctions d'ondes aleatoires via SLE et description de cavites dielectriques

R. Dubertrand

► **To cite this version:**

R. Dubertrand. Deux applications du chaos quantique: etude des fonctions d'ondes aleatoires via SLE et description de cavites dielectriques. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. Français. NNT: . tel-00343367

HAL Id: tel-00343367

<https://theses.hal.science/tel-00343367>

Submitted on 1 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris XI

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS XI
Spécialité : Physique

présentée par

Rémy DUBERTRAND

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Sujet :

Deux applications du chaos quantique : étude des fonctions d'ondes
aléatoires via SLE et description de cavités diélectriques

Soutenue devant le jury composé de :

M. Eugène BOGOMOLNY	Directeur de thèse
M. Dominique DELANDE	Rapporteur
M. Jonathan P. KEATING	Rapporteur
M. Henk HILHORST	Président du jury
M. André VOROS	Examineur

Remerciements

Cette thèse a commencé à l'automne 2005 dans des conditions particulières sur le plan personnel. Je voudrais insister sur les personnes qui l'ont rendue possible et agréable.

J'ai d'abord profité de l'atmosphère si particulière du LPTMS, à la fois stimulante et détendue, qui a largement contribué au bon déroulement de mes travaux. Je voudrais remercier plus particulièrement le directeur Stéphane Ouvry de m'avoir accueilli. J'ai aussi profité des présences précieuses et attentionnées de Denis Ullmo et Patricio Leboeuf. J'ai enfin pu profiter de discussions agréables et enrichissantes avec Satya Majumdar, Alberto Rosso et Dmitry Petrov. Je voudrais aussi remercier Martine Thouvenot et Claudine Le Vaou pour leurs conseils et leur patience devant mes problèmes administratifs (je leur dois de savoir comment utiliser un fax...) et Vincent Degat pour mes déboires informatiques. J'ai également une pensée pour Marie-Thérèse Commault, sa bienveillance et ses discussions toujours instructives. De manière plus générale, j'ai passé de nombreux bons moments au laboratoire grâce à l'ensemble de ses membres et des visiteurs que j'ai pus croiser.

Je voudrais ensuite remercier Oriol Bohigas pour sa constante bonne humeur et sa bienveillance. Son humour m'a détendu et sa sympathie m'a ému.

J'adresse une pensée toute particulière à Teimuraz Vekua et Revaz Ramazashvili pour les pauses thé quotidiennes que nous avons partagées. Elles ont été l'occasion de se divertir à travers leurs discussions intéressantes et riches.

Enfin je voudrais remercier mes collègues de bureau pour leur patience (je sais qu'il leur en a fallu!) : Gunnar Möller, Julien Randon-Furling et Maria Colome. Maria et Julien ont eu la lourde tâche de supporter mes traits d'humour et mes sauts d'humeur pendant deux ans et ont largement contribué à rendre l'ambiance dans le bureau chaleureuse.

Je voudrais ensuite remercier les collègues extérieurs avec qui j'ai eu la chance de discuter. Ma première pensée va à Uzy Smilansky de l'institut Weizmann en Israël. Son idée originale de « Nodal Week » m'a permis de rencontrer d'autres étudiants en chaos quantique et je garde un souvenir agréable de Christian Joas, Rami Band, Yehonatan Elon, Panos Karageorge, Amit Aronovitch, Ian Williams, Fabien Piotet. Je remercie également Jon Keating et Martin Sieber pour leurs discussions toujours instructives. Enfin je voudrais remercier les groupes expérimentaux avec qui j'ai pu discuter de propagation dans un diélectrique, notamment Fabrice Mortessagne, Valérie Doya, Charles Poli, Claire Michel, Maksim Miski-Oglu, Stefan Bittner et Pr. Akim Richter. La comparaison de nos résultats avec l'expérience a été possible grâce à la collaboration avec Mélanie Lebental, Nadia

Djellali et Joseph Zyss. Je remercie plus particulièrement Mélanie pour ses discussions fructueuses, pleines de patience. C'est grâce à elle et à la suite de son brillant travail de thèse à la fois théorique et expérimental que je me suis intéressé aux cavités diélectriques. Je voudrais aussi remercier Stéphane Nonnenmacher pour m'avoir expliqué le côté plus formel de l'étude des résonances. Enfin je voudrais remercier Jon Keating et Dominique Delande pour avoir accepté de rapporter cette thèse et Henk Hilhorst et André Voros pour avoir accepté de faire partie du jury de thèse.

Je voudrais adresser une pensée toute particulière à Charles Schmit que j'ai eue la chance de côtoyer pendant la première année de ma thèse. Je garde le souvenir ému d'un homme timide, brillant et abordable à la fois.

Sur un plan plus personnel, ce travail a été aussi rendu possible grâce à la compagnie constant d'amis bienveillants. Je voudrais d'abord adresser une pensée affectueuse à Xavier Barillier-Perthuisel. Son agréable compagnie a rythmé ces années et nos (fou-?)rires resteront de doux souvenirs. Je remercie également Émilie Passemar pour son amitié et son désordre légendaire.

D'un autre côté, il y a ceux des « coulisses ». Ma première pensée va à Laurent Gangloff. Notre voisinage a consisté en de si nombreuses soirées passées ensemble grâce à son hospitalité permanente. Je voudrais aussi remercier Victoria Wendling pour sa bonne humeur et ses conseils toujours avisés. Je remercie également les amis plus lointains mais toujours présents : Tony Bernis, Aurélien Beupertuis, Nathalie et Armand Baylet, Pierre Hosteins, Arnaud Goudichaud, Sébastien Soulan, Faustine Grossemy, Ramla Abdellatif.

Enfin des remerciements plus personnels vont à mes parents et mes soeurs pour leur présence, leur soutien indéfectible et leur affection.

Je voudrais enfin remercier la personne qui m'a le plus influencé pendant ces trois dernières années : Eugène Bogomolny. Il a témoigné d'une patience permanente pour répondre à mes questions incessantes et souvent répétées. Il a entretenu ma curiosité en me décrivant constamment des liens entre différents problèmes. Il m'a sans cesse guidé et encouragé dans l'apprentissage de nouveaux outils et concepts dans une atmosphère détendue et stimulante. Sa personnalité m'a aussi ému. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec lui pendant ces trois ans.

Table des matières

I	Formalisme et outils utilisés	5
1	Formalisme général	7
1.1	Mécanique classique	7
1.1.1	Définition lagrangienne d'un système physique	7
1.1.2	Passage au formalisme hamiltonien	7
1.1.3	Système intégrable	8
1.1.4	Système chaotique	9
1.1.5	Système intermédiaire	9
1.1.6	Définition d'un billard	10
1.2	Mécanique quantique	10
1.2.1	Définition à partir de la mécanique classique	10
1.2.2	Introduction à l'approche WKB. Illustration dans le cas 1D	11
1.3	Approche statistique	13
1.3.1	Généralités	13
1.3.2	Les problèmes d'échelle	13
1.4	Conjectures	14
2	Formule de trace	15
2.1	Introduction	15
2.2	Billard circulaire	16
2.2.1	Valeurs et fonctions propres du billard circulaire	16
2.2.2	Formule de trace	17
2.3	Formule de Gutzwiller	18
2.3.1	Approximation semiclassique de la fonction de Green	18
2.3.2	Formule de trace de Gutzwiller	19

II	SLE et ondes aléatoires	23
3	Brefs rappels historiques	25
3.1	Le modèle d'ondes aléatoires	25
3.2	Le modèle de percolation	27
3.2.1	Relation entre onde aléatoire et percolation	27
3.2.2	Critère de Harris	29
4	Introduction à SLE	33
4.1	Équation de Loewner	33
4.1.1	Description heuristique d'une courbe "à la" Loewner	33
4.1.2	Illustration de l'équation de Loewner : étude des cas simples	34
4.2	SLE et les modèles sur réseaux	36
4.2.1	Autres normalisations	38
4.3	Notre travail	40
4.3.1	Notre démarche	40
III	Chaos quantique et cavités diélectriques	43
5	Introduction	45
5.1	Lien avec l'expérience	45
5.2	Généralités sur les cavités diélectriques	46
5.2.1	Position du problème	46
5.2.2	Reflexion sur une paroi diélectrique. Lois de Fresnel	48
5.3	Analogie avec un problème de diffusion	50
5.4	Formule de trace	51
6	Disque diélectrique	53
6.1	Résonances et fonction de Green	53
6.2	Approximation semiclassique	55
6.2.1	Niveaux intérieurs confinés	55
6.2.2	Modes galleries	57
6.2.3	Niveaux extérieurs	58
6.3	Perturbation du disque	59
6.3.1	Étude perturbative via les conditions aux limites	61
6.3.2	Étude perturbative suivant la fonction de Green	62
6.3.3	Discussion	63
6.4	Formule de trace	65
6.4.1	Formule générale	65

6.4.2	Partie lisse. Termes de Weyl.	67
6.4.3	Partie oscillante. Somme sur les orbites périodiques classiques	70
7	Formule de trace : cas général	75
7.1	Généralités	75
7.1.1	Partie lisse	76
7.1.2	Partie oscillante	77
7.2	Le carré	78
7.2.1	Généralités. États antisymétriques.	78
7.2.2	Approximation semiclassique. Superscars pour les états antisymétriques.	79
7.2.3	Autres classes de symétrie	82
7.2.4	Formule de trace	82
7.3	Rectangle et Ellipse	86
7.4	Le pentagone	88
7.5	Le disque coupé	92
7.6	Le stade	94
7.6.1	Loi de Weyl	94
7.6.2	Orbites périodiques	96
IV	Articles	101
V	Appendices	161
A	Programme de Charles Schmit	163
A.1	Problématique	163
A.2	Utilisation du programme	166
A.3	Structure du programme	167
A.3.1	Notation et variables importantes	167
A.3.2	Recherche de niveaux	168
A.3.3	Calcul de la fonction d'onde associée	170
A.3.4	Quelques détails sur les sous-routines	170
B	Rappels de diffraction	175
B.1	Formulation du problème	175
B.2	Obstacle circulaire	176
B.3	Diffraction sur un demi-plan	177
B.3.1	La méthode des images sur une variété	177
B.3.2	Une application : coefficient de diffraction	178

B.3.3	Le problème pour généraliser	179
C	Fonction de Green du disque diélectrique	181
D	Coefficient for one orbit in the stadium	185
D.1	l_p and M_p	185
D.1.1	Orbits 1 and 2 : elongated circle's orbits	186
D.1.2	Orbit 3 : rhombus	186
D.1.3	Orbit 4	187
D.1.4	Orbit 5	187
D.1.5	Orbit 6	187
D.1.6	Orbit 7	188
D.2	R_p	188
D.3	μ_p	189

« Il est impossible de connaître et ce faisant, de conserver la beauté »
Yukio Mishima

Introduction

Depuis l'avènement de la mécanique quantique dans les années 1920, nous pouvons donner une description cohérente de nombreux phénomènes à l'échelle atomique. Si elle a engendré dès ses débuts de nombreuses critiques¹, elle est souvent considérée aujourd'hui comme un outil sophistiqué et performant. Techniquement elle nécessite la description de phénomènes ondulatoires qui vont parfois à l'encontre de notre intuition (les trous d'Young, le spin, . . .). Au cours de XXème siècle, les physiciens ont souvent recherché à les décrire dans des situations de plus en plus complexes. Il est toutefois fascinant de constater que le problème à une particule résiste encore à une compréhension complète dans certains cas.

Nous voulons exposer dans ce mémoire des exemples de tels problèmes à la suite des travaux novateurs de Balian et Bloch [1], Gutzwiller [2], Berry [3] dans les années 1970. Le problème, déjà soulevé par Einstein, cf. [4], demeure — comme toujours — assez simple à formuler : quel est l'analogie quantique d'un système classiquement non intégrable ? Les études standards de mécanique quantique portent en effet sur des systèmes classiquement intégrables (cf. définition dans la section 1.1.3) et éludent souvent le cas plus riche et bien plus complexe des autres systèmes qui, seuls, constituent des objets réels.

Il est courant aujourd'hui de regrouper ces problèmes autour de la quantification de systèmes non intégrables sous le terme de « chaos quantique »². Les objets d'étude sont dans la plupart des cas des billards bidimensionnels : une particule libre à l'intérieur d'un domaine borné. Depuis les années 1970, de nombreux outils ont été développés pour ces problèmes avec une *assez* grande précision. Nous donnerons un exemple dans la première partie de ce mémoire. Nous avons considéré les lignes nodales des fonctions d'ondes d'un système chaotique. En utilisant le modèle d'ondes aléatoires de Berry ([5], cf. aussi section 3.1) et celui de Bogomolny et Schmit ([6], cf. aussi section 3.2), nous avons pu donner une description de ces lignes en utilisant un outil de théorie conforme récemment développé par Schramm [7] à la suite des travaux de Loewner [8] : SLE.

Dans une seconde partie nous avons voulu utiliser les résultats connus sur les billards et les résultats obtenus par Mélanie Lebental [9] pour étudier les cavités diélectriques avec des techniques de chaos quantique (formule de trace, . . .).

¹dont une célèbre d'Albert Einstein : « Dieu ne joue pas aux dés ».

²Nous noterons que le terme plus général de chaos ondulatoire tend maintenant à le remplacer.

Nous avons voulu ainsi montrer le caractère fondamental et transversal du chaos quantique pour espérer motiver de nombreuses études futures.

Première partie

Formalisme et outils utilisés

Chapitre 1

Formalisme général

Le terme de « chaos quantique » désigne habituellement l'étude d'un système quantique dont l'analogie classique possède une dynamique chaotique. Il s'agit ici de préciser cette définition en décrivant le formalisme couramment utilisé lors de l'étude de tels systèmes.

1.1 Mécanique classique

1.1.1 Définition lagrangienne d'un système physique

Un système classique [10] est couramment décrit par des variables de configuration $q_j(t)$, $\dot{q}_j(t) = dq_j/dt$ et un Lagrangien $\mathcal{L}(\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}, t)$. Le nombre de variables $q_j(t)$ noté n est le nombre de degrés de liberté du système. Pour deux points $\vec{q}^{(i)}, \vec{q}^{(f)}$ de l'espace des configurations repérés par $q_j^{(i)}$ et $q_j^{(f)}$ on définit l'action :

$$R(\vec{q}^{(i)}, \vec{q}^{(f)}, t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}, t) dt ,$$

qui apparaît comme une fonctionnelle des fonctions $q_j(t)$ et $\dot{q}_j(t)$.

Les trajectoires dans l'espace des configurations que va suivre le système réel, sont données par le principe de moindre action qui conduit aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\forall j, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \quad (1.1)$$

1.1.2 Passage au formalisme hamiltonien

On utilise plus naturellement le formalisme hamiltonien (cf e.g. [11]) qui consiste à définir à partir des variables de configuration, des variables « conjuguées » aux positions notées désormais

$x_j(t)$:

$$p_j(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j}$$

L'évolution du système est alors étudiée dans l'espace des phases \mathcal{M} où les états du systèmes sont repérés par $(x_1(t), \dots, x_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$. Le Hamiltonien du système s'obtient par transformée de Legendre du Lagrangien :

$$\mathcal{H}(\{x_j(t), p_j(t)\}) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{x}_j - \mathcal{L} .$$

Les équations de mouvement sont à présent données par les équations de Hamilton :

$$\forall j, \quad \dot{x}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} .$$

J'introduis ici les crochets de Poisson :

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) ,$$

pour réécrire les équations de manière plus symétrique :

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \{\mathcal{H}, x_j\} \\ \dot{p}_j &= \{\mathcal{H}, p_j\} . \end{aligned}$$

Désormais, j'adopterai plutôt une notation vectorielle pour le vecteur position $\vec{x}(t)$ de composantes $x_j(t)$ et le vecteur impulsion $\vec{p}(t)$ de composantes $p_j(t)$. Dans toute la suite, nous nous limiterons à des systèmes autonomes :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 ,$$

ce qui assure que l'énergie totale E du système est une constante de mouvement. Rappelons qu'une quantité qui se conserve au cours du temps définit une intégrale première du mouvement.

Le formalisme hamiltonien permet d'étudier l'évolution d'un système physique et de caractériser sa dynamique. On distingue habituellement trois types de système selon leur dynamique.

1.1.3 Système intégrable

Les systèmes intégrables sont caractérisés par la présence de n intégrales premières de mouvement en involution (i.e. les crochets de Poisson entre deux intégrales I_1, I_2 s'annulent en tout point). L'espace des phases \mathcal{M} est assimilable au tore \mathbb{T}^n de dimension n .

1.1.4 Système chaotique

Nous insistons ici que, malgré son usage très répandu en physique, le mot « chaotique » ne renvoie à aucune propriété précise du système. On dispose de plusieurs caractérisations pour décrire les systèmes “irréguliers”¹ : c’est la hiérarchie ergodique, cf. e.g. [12] pour une introduction plus détaillée.

Un système est dit *ergodique* si, pour toute observable f et pour presque toute condition initiale, la moyenne temporelle de f est égale à la moyenne de f sur les conditions initiales². On le traduit mathématiquement par l’égalité :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\vec{x}(t), \vec{p}(t)) dt = \int_{\mathcal{M}} f(\vec{x}, \vec{p}) d\mu, \quad (1.2)$$

où $d\mu$ est la projection de la mesure de Liouville :

$$d\mu = \frac{\delta(E - H(\vec{x}, \vec{p})) d\vec{x}d\vec{p}}{\int_{\mathcal{M}} \delta(E - H(\vec{x}, \vec{p})) d\vec{x}d\vec{p}}.$$

La propriété (1.2) traduit le fait que les trajectoires de phases explorent en moyenne toute l’hypersurface d’équation $H(\vec{x}, \vec{p}) = E$.

Pour définir le degré suivant dans la hiérarchie ergodique, je vais temporairement utiliser une notation plus mathématique. Je note $T^t : x_0 \mapsto \vec{x}(t)$ le flot d’un système dynamique. Ce flot est dit *mélangeant* si, pour toutes observables f, g , on a l’égalité :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} f(T^t \vec{x}, \vec{p}) g(\vec{x}, \vec{p}) d\mu = \int_{\mathcal{M}} f(\vec{x}, \vec{p}) d\mu \int_{\mathcal{M}} g(\vec{x}, \vec{p}) d\mu \quad (1.3)$$

Cette propriété traduit qu’une région \mathcal{S} de \mathcal{M} même petite mais finie va se déformer dans \mathcal{M} et les trajectoires qui étaient voisines à $t = 0$ dans \mathcal{S} ont *chacune* une probabilité uniforme d’explorer n’importe quelle région de \mathcal{M} pour des temps assez longs.

Enfin, les degrés suivants du caractère chaotique d’un système nécessitent la définition d’outils qui ne seront pas utilisés ici. Nous retiendrons une caractérisation plus intuitive : un système est chaotique si l’exposant de Lyapunov est positif pour presque toutes ses orbites périodiques. Nous utiliserons (sauf mention contraire) cette dernière caractérisation pour définir un système chaotique. Notons enfin que le chaos considéré ici est déterministe.

1.1.5 Système intermédiaire

La plupart des systèmes physiques ne rentrent pas dans les deux cas extrêmes précédemment énoncés. Le cas générique est plutôt celui où, selon les conditions initiales, le système aura un comportement de type intégrable ou chaotique, d’où l’appellation « intermédiaire » pour ces systèmes.

¹J’emploie ce terme par opposition au cas précédent des systèmes intégrables.

²appelée parfois « moyenne d’ensemble ».

1.1.6 Définition d'un billard

Les billards sont des objets d'étude très répandus en chaos quantique. Un billard en mécanique classique est défini par la donnée d'un domaine compact sur une variété (la "table" du billard). On étudie alors le mouvement d'une particule libre à l'intérieur de ce domaine ; on suppose qu'à la frontière, la particule est réfléchié suivant les lois de l'optique géométrique. Suivant la forme du domaine et les conditions initiales, la particule va suivre une dynamique « régulière » (cas intégrable) ou pas (cas chaotique). De manière plus technique, le Hamiltonien s'écrit pour une particule de masse m dans un billard défini par un domaine \mathcal{D} du plan :

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{p}) &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \\ V(\vec{x}) &= \begin{cases} 0 & \vec{x} \in \mathcal{D} \\ +\infty & \vec{x} \notin \mathcal{D} \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 Mécanique quantique

1.2.1 Définition à partir de la mécanique classique

Le passage du classique au quantique se fait naturellement dans le cadre du formalisme hamiltonien via le principe de correspondance [13, 14]. Le Hamiltonien devient un opérateur agissant dans un espace de Hilbert. Il est défini à partir de règles de commutation qui entraînent les règles de correspondances³ :

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \hat{x} \\ \vec{p} &\rightarrow -i\hbar\nabla, \end{aligned}$$

où la dérivation est faite par rapport à \vec{x} .

La description d'un système repose sur la résolution de l'équation de Schrödinger pour trouver les fonctions d'ondes $\Psi(\vec{x}, t)$ décrivant les différents états possibles du système :

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{1.4}$$

Nous nous bornerons dans toute la suite à la recherche d'états stationnaires :

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\vec{x}),$$

de telle manière que le problème quantique devient un problème aux valeurs propres :

$$H\psi = E\psi. \tag{1.5}$$

³Nous adopterons, sauf mention contraire, la représentation position des états quantiques. De même on adoptera une représentation à la Schrödinger pour les observables et les états du systèmes.

Pour la plupart des cas étudiés ici, nous nous intéressons au cas d'une particule libre dans le plan de telle sorte que le problème aux valeurs propres de H se ramène à l'équation d'Helmholtz ($E = k^2$)⁴ :

$$(\Delta + k^2)\psi = 0 \quad (1.6)$$

Nous insistons sur le fait qu'en chaos quantique, ce problème aux valeurs propres pour un système à un corps est toujours le point de départ de l'étude. Nous allons voir qu'il a nécessité le développement de nombreux outils d'analyse. Dans toute la suite, nous nous placerons dans le régime dit « semiclassique ». Nous commencerons par préciser ce terme en se plaçant à 1D pour simplifier.

1.2.2 Introduction à l'approche WKB. Illustration dans le cas 1D

Il s'agit de décrire la démarche pour donner des expressions générales pour la fonction d'onde d'un système dans le régime de grand nombre quantique, cf. [13, 14]. Ce régime est généralement appelé « semiclassique » ou quasiclassique. Tout au long de ce paragraphe, j'adopterai les unités suivantes : $m = 1/2$, $c = 1$. Nous nous plaçons ici dans le cas unidimensionnel pour simplifier, beaucoup d'arguments décrits ici se généralisent en dimension supérieure.

Pour simplifier, nous considérons un système unidimensionnel avec un spectre discret (ce qui est toujours le cas pour un billard). L'équation de Schrödinger (1.5) se réécrit :

$$\hbar^2\psi'' + (E - V(x))\psi = 0, \quad (1.7)$$

où $\psi' = d\psi/dx$. Nous réécrivons (1.7) :

$$\hbar^2 y'' + \kappa(x)^2 y = 0 \quad (1.8)$$

En effectuant le changement de variable $z = y'/y$, (1.8) devient :

$$z' + z^2 + \frac{\kappa^2}{\hbar^2} = 0 \quad (1.9)$$

Le régime semiclassique est défini lorsque l'énergie E est telle que :

$$|\kappa(x)| \gg \hbar$$

L'approximation WKB [19–21] consiste alors à chercher une solution de (1.9) sous la forme d'une série de puissances de \hbar :

$$z(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n(x) \hbar^n$$

⁴Dorénavant, sauf mention contraire, on choisit les unités telles que $m = 1/2$ et $\hbar = c = 1$.

Chaque z_n peut être calculée par récurrence grâce à (1.9). Les termes dominants sont :

$$\begin{aligned} z_n &= 0 \text{ pour } n \leq -2 \\ z_{-1}^2 &= -\kappa^2 \\ z_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\kappa} \end{aligned}$$

Il faut noter que ce développement ne converge pratiquement jamais [22, 23]. Nous pouvons écrire les premiers termes du développement WKB :

$$z = \pm i \frac{\kappa}{\hbar} - \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\kappa} + \mathcal{O}(\hbar),$$

ce qui donne pour la solution de (1.8), à l'ordre le plus bas en \hbar , :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^x \kappa(t) dt} \left(1 + \mathcal{O}(\hbar) \right) \quad (1.10)$$

Nous obtenons la solution du problème initial (1.7) via l'identification :

$$\kappa(x) = \sqrt{E - V(x)}$$

Cette méthode nous permet de donner une formule générale pour la fonction d'onde à l'intérieur d'un puits à 1D :

$$\psi(x) = \frac{1}{(E - V(x))^{1/4}} \left(C_1 e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{E - V(t)} dt} + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{E - V(t)} dt} \right), \quad (1.11)$$

où x_0 est un point de la caustique où la méthode localement échoue.

Cette méthode peut être généralisée pour trouver la fonction d'onde hors du puits, passer en dimension supérieure, etc. Il est important de noter que l'approximation semiclassique n'est localement pas valable aux points de rebroussement (quand la vitesse de la particule classique change de signe).

Nous avons donné ici un exemple, à travers la méthode WKB, de formules générales pour décrire la fonction d'onde d'une particule quantique à l'intérieur d'un puits de potentiel dans le régime semiclassique. Ceci illustre le fait que nous pouvons, dans ce régime, formuler des approximations valables pour de nombreux systèmes physiques. Cette idée bien connue sera à nouveau exploitée dans le chapitre suivant lors de la définition des formules de trace. Pour terminer, nous décrirons un argument essentiel utilisé en chaos quantique : l'approche statistique. Il s'agit de voir comment le régime semiclassique permet une description *statistique* des systèmes physiques.

1.3 A propos de l'approche statistique

1.3.1 Généralités

Le chaos quantique a été développé en particulier suite aux travaux de Wigner [24, 25] pour décrire la dynamique d'un noyau complexe. Les niveaux d'énergie d'un tel système ne sont accessibles que numériquement et il s'agissait de les comparer aux graphes obtenues à partir d'expériences de diffusion. Lors des mesures des sections efficaces, les échelles d'énergies correspondaient au régime semiclassique : pour le thorium ^{232}Th , si on ordonne les niveaux E_n selon les valeurs croissantes : $E_1 \leq E_2 \leq E_3 \leq \dots$, on atteint 20 eV pour environ $n = 1\,000\,000$. Il est alors apparu plus efficace d'adopter un point de vue statistique. Les niveaux d'énergie sont considérés comme des variables aléatoires et nous allons chercher à calculer leurs propriétés statistiques (densité, fonctions de corrélation, ...). Ce problème nécessite une définition soigneuse de l'échelle à laquelle on se place.

1.3.2 Les problèmes d'échelle

Étant une suite de points répartis sur une droite, nous voulons définir des grandeurs qui vont permettre de caractériser cet ensemble de manière statistique. Nous allons voir que, dans ce type de problème, deux échelles de distance entre les points apparaissent. Désormais, en anticipant sur les applications de cette discussion, j'appellerai les points des « niveaux d'énergie ».

Le premier outil statistique important est la densité de niveaux. Sur un intervalle de largeur ΔE , on compte le nombre de niveaux présents (éventuellement avec leur dégénérescence) ΔN et on définit la densité moyenne de niveaux par :

$$\bar{d}(E) = \frac{\Delta N}{\Delta E}$$

La définition ici donne une valeur moyenne car la fonction ainsi définie peut fluctuer suivant l'intervalle initial considéré. Dès lors, comment distinguer les fluctuations locales de la densité de niveaux et les variations globales de la densité moyenne ?⁵

Nous pouvons voir que nous avons au moins deux échelles de description du spectre. Il est plus intuitif de raisonner avec des temps caractéristiques.

Pour un billard, nous avons une première échelle t_v , le temps de vol classique pour parcourir une distance L , longueur typique du billard. D'autre part, nous savons que la mécanique quantique décrit des phénomènes d'une durée au moins égale à t_H , temps de Heisenberg. Ces deux échelles de temps se retrouvent dans la description du spectre grâce à la dualité temps-énergie.

En prenant $\Delta E \gg \hbar/t_v$, nous décrirons le comportement de la densité moyenne de niveaux (appelé aussi partie lisse de $d(E)$), c'est le régime de Thomas-Fermi. Pour $\hbar/t_H \ll \Delta E \ll \hbar/t_v$ nous pouvons voir des oscillations de densité décrit par la théorie des orbites périodiques.

⁵Cette discussion se retrouve en théorie cinétique des gaz ou en mécanique des fluides où on introduit une échelle *mésoscopique*.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous placerons, sauf mention contraire, dans cette échelle d'énergie intermédiaire :

$$\delta \ll E \ll \frac{\hbar}{t_v}$$

Dans le paragraphe suivant, nous mentionnons les conjectures pour décrire localement (i.e. à l'échelle δ) le spectre d'un système quantique.

1.4 Les conjectures « locales » pour les spectres

Nous avons vu que l'approche statistique nécessite la définition d'échelles de variation des objet étudiés. La plus petite échelle pertinente est l'espacement entre les niveaux. Pour décrire les corrélations à cette échelle, on utilise une mise à l'échelle⁶ [28] telle que :

$$E_n \rightarrow e_n = \bar{N}(E_n) ,$$

où $\bar{N}(E)$ est le nombre moyen de niveaux inférieur à E . En particulier, l'espacement moyen entre ces nouveaux niveaux e_n est 1. Je mentionne ici deux résultats très importants pour caractériser les niveaux d'un système dans le cas intégrable (Berry et Tabor, 1977) et chaotique (Bohigas, Gianonni, Schmit, 1984).

La conjecture de Berry et Tabor [3] donne une image très précise pour les systèmes intégrables : les niveaux d'énergie se comportent comme des variables indépendantes, la distribution d'espacement entre deux niveaux par exemple suit la loi de Poisson.

La conjecture BGS [27] affirme à l'inverse que les fluctuations des niveaux d'énergie d'un système quantique dont l'analogie classique est chaotique sont les mêmes que celle des valeurs propres de matrices aléatoires d'un ensemble gaussien défini selon les symétries du système, cf. [25, 28] pour plus de détails. Ici, la distribution d'espacement entre deux valeurs propres voisines $p(s)$ s'annule en $s = 0$, ce qui se traduit par la répulsion de niveaux.

Le chaos quantique consiste à décrire un système quantique classiquement chaotique dans le régime semi-classique. Nous avons vu, en particulier, qu'une approche statistique est souvent utilisée, ce qui a permis d'énoncer des conjectures simples et élégantes pour décrire les niveaux d'énergie de ces systèmes. Sur une échelle de variation d'énergie plus grande, cette approche reste pertinente. Pour calculer la densité de niveaux, nous allons à présent considérer un outil particulièrement efficace et répandu : la formule de trace.

⁶de l'anglais « unfolding ».

Chapitre 2

Formule de trace

Nous présentons ici un outil performant pour le calcul des propriétés statistiques du spectre d'un système physique. Selon le chapitre précédent, nous allons à présent nous placer dans une échelle de variation typique intermédiaire : $\delta \ll E \ll \hbar/t_v$.

2.1 Introduction

Nous nous plaçons dans le cas plus simple où le spectre d'énergie est discret, nous pouvons alors trouver une base orthonormale de fonctions propres du Hamiltonien :

$$\begin{aligned} H\psi_n &= E_n\psi_n \\ \int \psi_m^*(\vec{x})\psi_n(\vec{x})d\vec{x} &= \delta_{n,m} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\int \psi_n^*(\vec{x})\psi_n(\vec{y})d\vec{x} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \tag{2.2}$$

Sous ces conditions, nous pouvons écrire (au moins formellement) la fonction de Green (2.3) :

$$G_{E+i\epsilon}(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_n \frac{\psi_n(\vec{x})\psi_n^*(\vec{x})}{E - E_n + i\epsilon}, \tag{2.3}$$

où la prescription $+i\epsilon$ avec $\epsilon > 0$ signifie qu'on considère la fonction de Green retardée. Rappelons qu'à la limite ϵ tend vers 0, la fonction de Green est la distribution vérifiant :

$$(E - H)G_E(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

L'expression (2.3) permet d'écrire en utilisant (2.1) et (2.2) :

$$-\frac{1}{\pi} \int \left[\lim_{|\vec{x}-\vec{y}|\rightarrow 0} \text{Im} G_{E+i\epsilon}(\vec{x}, \vec{y}) \right] d\vec{x} = \frac{\epsilon}{\pi} \sum_n \frac{1}{(E - E_n)^2 + \epsilon^2} \tag{2.4}$$

On reconnaît dans le second membre de (2.4) une représentation de la distribution de Dirac $\delta(x)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi} \sum_n \frac{1}{(E - E_n)^2 + \epsilon^2} = \sum_n \delta(E - E_n) = d(E)$$

Ce résultat s'écrit souvent sous la forme sibylline (2.5) :

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{D}} \text{Im } G_E(\vec{x}, \vec{x}) d\vec{x} \quad (2.5)$$

La formule (2.5) relie la "trace" de la fonction de Green (vue comme la somme sur les termes aux points coïncidents) à la densité de niveaux d'où le nom de formule de trace donnée à ce type de formule.

2.2 Exemple dans un cas intégrable : le billard circulaire

2.2.1 Valeurs et fonctions propres du billard circulaire

Il est commode de passer en coordonnées polaires (r, θ) . La frontière du billard a alors pour équation $r = R$. L'équation (1.6) se réécrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(r, \theta) + k^2 \psi(r, \theta) = 0$$

avec la condition $\psi(R, \theta) = 0$.

Rappelons que le problème est classiquement intégrable, les deux intégrales premières sont l'énergie $E = \vec{p}^2$ et le moment cinétique $L = R|\vec{p}| \sin \theta$ où \vec{p} est l'impulsion de la particule classique et θ son angle d'incidence lors d'une réflexion sur la paroi. Nous cherchons donc ψ sous une forme séparable :

$$\psi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$$

Les solutions s'écrivent directement à l'aide de fonctions de Bessel :

$$\psi_{m,n}(r, \theta) = J_m(k_n r) e^{\pm im\theta} \quad (2.6)$$

où les k_n sont fixés par la condition au bord : $z_{m,n} = k_n R$ est le n^e zéro de la fonction de Bessel d'indice m . On appelle communément n le nombre quantique radial, m le nombre quantique orbital, correspondant au moment cinétique. En effet les conditions de quantification EBK s'écrivent pour L : $L = m\hbar$ ce qui donne une relation semiclassique importante entre l'angle d'incidence et l'énergie :

$$\sin \theta = \frac{m}{kR} \quad (2.7)$$

2.2.2 Formule de trace

La densité d'états s'écrit :

$$d(E) = \sum_{\substack{-\infty < m < +\infty \\ n > 0}} \delta(E - E_{m,n}) \quad (2.8)$$

où $E_{m,n} = (\hbar z_{m,n}/R)^2$.

Cette formule est difficilement exploitable, on a souvent recours à une approximation des fonctions de Bessel. On se place dans la limite semiclassique $m \gg 1$: les états qui prédominent sont ceux qui vérifient $x = kR > |m|$. On utilise alors l'expression suivante valable pour x, m grands et $x > m$:

$$J_m(x) \propto \frac{1}{(x^2 - m^2)^{1/4}} \cos\left(\sqrt{x^2 - m^2} - m \arccos\left(\frac{m}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.9)$$

L'équation de définition des états propres est

$$\sqrt{(kR)^2 - m^2} - m \arccos\left(\frac{m}{kR}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

En prenant en compte la dégénérescence des niveaux, on peut donc se limiter à $m > 0$ en prenant n dans \mathbb{Z} . On a aussi supposé que $m < kR$ dans le régime semiclassique ; finalement $0 < m < kR$.

En utilisant l'identité :

$$\sum_i \delta(x - x_i) = \delta(f(x)) |f'(x)|,$$

où les x_i sont les zéros simples de f , nous obtenons :

$$d(E) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\substack{0 < m < kR \\ n \in \mathbb{Z}}} \delta\left(\sqrt{(kR)^2 - m^2} - m \arccos\left(\frac{m}{kR}\right) - \frac{3\pi}{4} - n\pi\right) \frac{\sqrt{(kR)^2 - m^2}}{2k^2}. \quad (2.10)$$

Cette formule peut être aussi dérivée en calculant la fonction de Green du billard circulaire puis en calculant la densité via (2.5) dans le régime semi-classique. La fonction de Green du billard circulaire est en effet ($E = k^2$) :

$$G_E(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4i\hbar^2} H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{y}|) - \frac{1}{4i\hbar^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{H_m^{(1)}(kR)}{J_m(kR)} J_m(kr) J_m(k\rho) e^{im(\theta - \varphi)}, \quad (2.11)$$

où (r, θ) et (ρ, φ) sont les coordonnées polaires respectives des points \vec{x} et \vec{y} . La trace de la fonction de Green s'écrit alors :

$$\int_{|\vec{x}| < R} G_{E+i\epsilon}(\vec{x}, \vec{x}) d\vec{x} = \frac{R^2}{2\hbar^2 k R} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{J'_m(kR)}{J_m(kR)}$$

avec $k = \sqrt{E + i\epsilon}$. En utilisant (2.9) et à la limite $\epsilon \rightarrow 0$, nous obtenons (2.10).

On utilise ensuite la formule de Poisson.

$$d(E) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} \iint_{\mathbb{R} \times [0; kR]} e^{2\pi i(np+mq)} \delta\left(\sqrt{(kR)^2 - m^2} - m \arccos\left(\frac{m}{kR}\right) - \frac{3\pi}{4} - n\pi\right) \frac{\sqrt{(kR)^2 - m^2}}{2k^2} dndm$$

En posant $m = kR \cos \varphi$, l'expression devient :

$$d(E) = \frac{R^2}{2\pi\hbar^2} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin^2 \varphi e^{2i\pi kR(q \cos \varphi + \frac{p}{\pi}(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)) - \frac{3ip\pi}{2}} \quad (2.12)$$

Nous devons ici séparer les termes lisses des termes oscillants :

$$d(E) = \bar{d}(E) + d^{(osc)}(E)$$

Le terme $p = q = 0$ participe à la partie lisse de la densité, nous l'ignorons ici pour évaluer la partie oscillante. Pour traiter le terme oscillant, l'intégrale est évaluée selon la méthode du col : le col est atteint en $\varphi = \pi q/p$. Comme $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, on restreint la somme à $p > 0$ et $0 < q < p/2$. Les termes $p < 0$ et $p/2 < q < 0$ donnent des termes complexes conjugués. On peut donc regrouper les termes par paires pour remettre en évidence le caractère réel de $d(E)$. L'intégrale devient :

$$d^{(osc)}(E) = \frac{R^2}{2\sqrt{\pi}\hbar^2} \sum_{\substack{p>0 \\ 0<q<p/2}} \frac{\sin^2\left(\frac{q\pi}{p}\right)}{\sqrt{kRp \sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}} \left(e^{2ikRp \sin\left(\frac{q\pi}{p}\right) - 3ip\pi/2 + i\pi/4} + \text{c.c.} \right)$$

En résumé, le résultat se met sous la forme :

$$d^{(osc)}(E) = \sum_{\substack{p>0 \\ 0<q<p/2}} \frac{\mathcal{A}_p}{\pi\hbar^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi k l_p}} \left(e^{ikl_p - 3ip\pi/2 + i\pi/4} + \text{c.c.} \right) \quad (2.13)$$

On a introduit les longueurs l_p des orbites périodiques et l'aire \mathcal{A}_p couverte par chaque famille d'orbites périodiques.

$$\begin{aligned} l_p &= 2pR \sin\left(\frac{\pi q}{p}\right) \\ \mathcal{A}_p &= \pi R^2 \sin^2\left(\frac{\pi q}{p}\right) \end{aligned}$$

2.3 Étude du cas chaotique : formule de Gutzwiller

2.3.1 Approximation semiclassique de la fonction de Green

Gutzwiller [2] a proposé une approche différente pour traiter le cas chaotique. Il a utilisé le formalisme de l'intégrale de chemin pour exprimer le propagateur d'une particule quantique évoluant

selon la densité lagrangienne \mathcal{L} :

$$K(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_2, t_2) = \int \mathcal{D}[\vec{x}(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, t) dt}$$

où l'intégrale est prise comme la limite d'une intégrale sur un réseau quand la maille du réseau tend vers 0 (cf. [16] pour une introduction plus détaillée). L'auteur propose de simplifier cette intégrale dans le régime semiclassique en approximant sa version discrétisée selon la méthode de la phase stationnaire. Puis, comme l'énergie du système se conserve, on peut relier la fonction de Green au propagateur :

$$G_E(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} K(\vec{x}, t | \vec{y}, 0) e^{iEt/\hbar}$$

En reportant le terme dominant trouvé pour le propagateur, la fonction s'écrit dans le régime semiclassique :

$$G_E(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{2\pi}{(2\pi i\hbar)^{3/2}} \sum_{\text{traj. class.}} \sqrt{\frac{1}{|\dot{x}_{//}|} \frac{1}{|\dot{y}_{//}|} \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial x_{\perp} \partial y_{\perp}} \right)} e^{iS(\vec{x}, \vec{y})/\hbar - i\frac{\nu\pi}{2}} \quad (2.14)$$

où la somme est prise sur toutes les trajectoires classiques reliant \vec{y} à \vec{x} . Pour chacune, $S(\vec{x}, \vec{y})$ désigne l'action classique et ν constitue le nombre de points où la matrice Hessienne de S devient singulière. Nous avons également utilisé un système de coordonnées tels qu'en tout point, $x_{//}$ désigne la coordonnée longitudinale tandis que x_{\perp} désigne la coordonnée transverse¹.

2.3.2 Formule de trace de Gutzwiller

Considérons à présent un billard chaotique bidimensionnel défini par le domaine \mathcal{D} . Nous utiliserons les deux formules (2.14) et (2.5) écrites avant :

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{\mathcal{D}} G_E(\vec{x}, \vec{x}) dx$$

$$G_E(\vec{x}_f, \vec{x}_i) = \frac{2\pi}{(2\pi i\hbar)^{3/2}} \sum_{\text{traj. class.}} \sqrt{\frac{1}{|\dot{x}_{i//}|} \frac{1}{|\dot{x}_{f//}|} \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial x_{i\perp} \partial x_{f\perp}} \right)} e^{i\frac{S}{\hbar}(\vec{x}_f, \vec{x}_i) - i\frac{\nu\pi}{2}}$$

Nous allons substituer la seconde expression dans la première. Il faut ici distinguer à nouveau la partie lisse de la partie oscillante suivant les trajectoires classiques que l'on considère entre deux points voisins. La partie lisse est la somme des trajectoires « courtes » reliant deux points voisins ;

¹Nous nous plaçons ici à 2D par anticipation. Dans le cas plus général, \vec{x}_{\perp} désigne l'ensemble des coordonnées transverses

on peut alors faire l'approximation d'une propagation libre. Cette approximation donne à l'ordre dominant, le premier terme de Weyl pour la partie lisse :

$$\bar{d}(E) \simeq \frac{\mathcal{A}}{4\pi\hbar^2}$$

Pour la partie oscillante, il faut prendre en compte les trajectoires « longues » :

$$d^{(osc)}(E) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sum_{\text{traj. class.}} \operatorname{Re} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{|\dot{x}_i|} \sqrt{-\frac{\partial^2 S}{\partial x_{i\perp} \partial x_{f\perp}}} e^{i\frac{S}{\hbar}(x_f, x_i) - i\frac{\nu\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} \right) \Big|_{x_f=x_i} dx \quad (2.15)$$

Remarquons que l'on s'intéresse aux trajectoires fermées, i.e. pour lesquelles $x_f = x_i$.

On va évaluer l'intégrale de (2.15) par la méthode du col. L'équation de col est :

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \vec{x}_f}(\vec{x}_f, \vec{x}_i) + \frac{\partial S}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}_f, \vec{x}_i) \right|_{\vec{x}_f=\vec{x}_i} = \vec{0}$$

On utilise

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{x}_f}(\vec{x}_f, \vec{x}_i) = \vec{p}_f, \quad \frac{\partial S}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}_f, \vec{x}_i) = -\vec{p}_i \quad (2.16)$$

Les orbites prépondérantes sont donc les trajectoires fermées et avec une impulsion continue, c'est-à-dire les orbites classiques périodiques. Dans le cas considéré d'un billard chaotique, ces orbites sont isolées. Nous allons voir le rôle crucial de leur caractère isolé.

Plaçons-nous au voisinage d'une orbite périodique. La variation de l'action au second ordre s'écrit, lorsque que l'on ne considère qu'une variation des coordonnées normales :

$$\delta S^{(2)} = \frac{1}{2} \delta y_i^2 \frac{\partial^2 S}{\partial y_i^2} + \delta y_i \delta y_f \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_f} + \frac{1}{2} \delta y_f^2 \frac{\partial^2 S}{\partial y_f^2} \quad (2.17)$$

S représente ici l'action d'une trajectoire classique **non** périodique au voisinage d'une orbite périodique.

Pour préciser ce terme, on introduit la matrice de monodromie qui est définie par :

$$\begin{pmatrix} y_f \\ p_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

En utilisant (2.16) et (2.18), nous pouvons relier les coefficients de la matrice de monodromie aux dérivées de S :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_f} = -\frac{1}{m_{12}}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y_i^2} = \frac{m_{11}}{m_{12}}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y_f^2} = \frac{m_{22}}{m_{12}}$$

(2.17) se réécrit ($\delta y_i = \delta y_f = \delta y$) :

$$\delta S^{(2)} = \delta y^2 \frac{m_{11} + m_{22} - 2}{2m_{12}}$$

Ceci nous permet de calculer l'intégrale dans (2.15) pour une orbite périodique : l'intégrale sur la composante longitudinale donne la période T_p de l'orbite. En notant S_p son action (classique), nous pouvons finalement écrire la contribution $d_p(E)$ dans la densité de niveaux pour un parcours d'une orbite périodique p :

$$d_p(E) = \frac{T_p}{\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{|m_{11} + m_{22} - 2|}} \cos\left(\frac{S_p}{\hbar} - \frac{\mu_p\pi}{2}\right)$$

La formule plus générale de Gutzwiller s'écrit en dimension arbitraire :

$$d^{(osc)}(E) = \sum_{\text{orb. pér. prim.}} \frac{T_p}{\pi\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\det(M_p^n - I)|}} \cos\left(\frac{nS_p}{\hbar} - \frac{n\mu_p\pi}{2}\right)$$

où la première somme porte sur les orbites périodiques primitives p du système, n est le nombre de fois que l'on parcourt chaque orbite p et M_p la matrice de monodromie au voisinage de l'orbite p .

Nous avons donné une courte description d'un outil très répandu en chaos quantique. Nous remarquons que, dans le régime semiclassique, les orbites périodiques du système classique permettent de décrire la densité de niveaux du système quantique [1].

Deuxième partie

**SLE et lignes nodales d'ondes
aléatoires**

Chapitre 3

Brefs rappels historiques

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, le problème principal en chaos quantique consiste souvent à résoudre le problème aux valeurs propres pour le hamiltonien.

De nombreuses conjectures ont été faites pour résoudre ce problème dans le régime semiclassique. Nous allons décrire ici comment le modèle de percolation de Bogomolny et Schmit a permis de décrire par une approche statistique les lignes nodales des fonctions d'ondes d'un système classiquement chaotique. Nous rappellerons d'abord les raisonnements qui ont permis d'établir cette description : nous détaillerons les arguments avancés par Berry en 1977 pour proposer son modèle d'ondes aléatoires. Puis nous décrirons les idées qui ont conduit Bogomolny et Schmit à introduire en 2002 le modèle de percolation.

3.1 Le modèle d'ondes aléatoires (Berry, 1977)

Il s'agit de reprendre ici le raisonnement suivi par Berry dans [5] pour introduire une description statistique des fonctions d'ondes d'un système chaotique.

Berry considère un état quantique $\psi(\vec{x})$ d'un système chaotique de dimension d . On peut lui associer la fonction de Wigner définie par :

$$\varphi(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{h^d} \int e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}/\hbar} \psi\left(\vec{x} - \frac{\vec{y}}{2}\right) \psi^*\left(\vec{x} + \frac{\vec{y}}{2}\right) d\vec{y},$$

et la fonction d'autocorrélation définie par :

$$C(\vec{X}, \vec{x}) = \frac{\int e^{i\vec{p}\cdot\vec{X}/\hbar} \varphi(\vec{x}, \vec{p}) d\vec{p}}{|\psi(\vec{x})|^2}. \quad (3.1)$$

Berry affirme ensuite que, dans le régime semiclassique,

– la fonction d'autocorrélation peut s'écrire à l'aide de fonctions de Bessel,

3.1. LE MODÈLE D'ONDES ALÉATOIRES CHAPITRE 3. BREFS RAPPELS HISTORIQUES

- les contributions à la fonction d'onde quantique provenant de différentes impulsions \vec{p} ne sont pas corrélées.

Sous ces hypothèses, une fonction d'onde peut être écrite comme une fonction aléatoire gaussienne. Par exemple, à 2D, cela s'écrit :

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} C_m \phi_m(r, \theta) \quad (3.2)$$

où $C_m = C_{-m}^*$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes identiquement distribuées, (ϕ_m) étant une base orthogonale réelle¹. On parle d'« ondes aléatoires » (“random waves”).

La deuxième hypothèse repose sur l'ergodicité du mouvement. La première nécessite plus de détails. Berry suppose que la fonction de Wigner d'un état quantique peut être remplacée par sa moyenne sur le domaine de l'espace des phases visité par une trajectoire typique. Suivant Berry [29] et Voros [30], il écrit cette approximation :

$$\varphi(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\delta(E - H(\vec{x}, \vec{p}))}{\int \delta(E - H(\vec{x}, \vec{p})) d\vec{x} d\vec{p}} \quad (3.3)$$

Reportant (3.3) dans (3.1), la fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$C(\vec{X}, \vec{x}) = \Gamma(d/2) \frac{J_{d/2-1}(|\vec{X}|/\lambda)}{(|\vec{X}|/\lambda)^{d/2-1}} \quad (3.4)$$

où J_q est fonction de Bessel d'ordre q , λ est la longueur d'onde de de Broglie semiclassique associée à la particule. Si le Hamiltonien classique est :

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

alors sa longueur d'onde de de Broglie sera :

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E - V(\vec{x}))}}$$

Signalons que ce célèbre modèle n'a été jamais été démenti par les nombreuses simulations numériques effectuées et qu'il est à l'origine de nombreuses avancées en chaos quantique. L'une d'elles concerne l'étude des lignes nodales de ces ondes aléatoires. L'étude des lignes nodales de fonctions d'ondes a été initiée par Smilansky et al. dans [31]. Dans le cas chaotique, Bogomolny & Schmit ont conjecturé [6] que ces lignes peuvent être reliées à un modèle de percolation au seuil critique ($p = p_c$).

¹ou vérifiant $\phi_{-m}^* = \phi_m$.

3.2 Le modèle de percolation pour les lignes nodales (Bogomolny et Schmit, 2002)

Nous allons à présent détailler le modèle de percolation introduit dans [6].

3.2.1 Relation entre onde aléatoire et percolation

Nous nous restreindrons désormais au cas de billards bidimensionnels plans et nous adopterons un système de coordonnées cartésiennes. La forme (3.2) permet de déterminer la densité moyenne de zéros le long d'une ligne. Je vais ici détailler le raisonnement pour la déterminer. À partir de la forme (3.2), nous définissons la densité de zéros le long d'une ligne $x = cste$, i.e. nous cherchons les points d'intersection des lignes nodales de (3.2) avec une ligne arbitrairement choisie. Nous supposons donc x fixé et cherchons la densité des zéros $y_j(x)$ de (3.2) :

$$\rho_x(y) \equiv \sum_j \delta(y - y_j) = \delta(\Psi) \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right| \quad (3.5)$$

On utilise ensuite les représentations suivantes :

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \quad |x| = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{i\beta x}}{\beta^2} d\beta$$

(3.5) se réécrit :

$$\rho_x(y) = \frac{1}{2\pi^2} \int d\alpha \int \frac{d\beta}{\beta^2} e^{i\alpha \sum_m c_m \phi_m - i \sum_m c_m (\alpha \phi_m + \beta \partial \phi_m / \partial y)}$$

On utilise ensuite que les c_m sont gaussiennes de variance σ^2 pour calculer la moyenne en utilisant :

$$\langle e^{i c_m z + i c_m^* z^*} \rangle = e^{-2|z|^2 \sigma^2}$$

On peut ainsi déterminer la densité moyenne le long d'une ligne :

$$\langle \rho_x(y) \rangle = \frac{\sqrt{4AD - B^2}}{2\pi A}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{m \geq 0} \epsilon_m |\phi_m(r, \theta)|^2 \\ B &= \sum_{m \geq 0} \epsilon_m \left(\phi_m(r, \theta) \frac{\partial \phi_m^*}{\partial y}(r, \theta) + \phi_m^*(r, \theta) \frac{\partial \phi_m}{\partial y}(r, \theta) \right) \\ D &= \sum_{m \geq 0} \epsilon_m \left| \frac{\partial \phi_m}{\partial y}(r, \theta) \right|^2 \end{aligned}$$

avec $\epsilon_0 = 1$ et $\epsilon_m = 2$ si $m \neq 0$.

Pour terminer il faut se placer dans une base précise, nous choisirons ici :

$$\phi_m(r, \theta) = J_{|m|}(kr)e^{im\theta} \quad (3.6)$$

Cela nous permet de donner une approximation pour $m, kr \gg 1$:

$$A \approx 1, \quad B \approx 0, \quad D \approx k^2/2 .$$

Nous obtenons finalement :

$$\langle \rho_x(y) \rangle = \frac{k}{\pi\sqrt{2}} \quad (3.7)$$

On peut vérifier que ce dernier résultat est indépendant de la base choisie.

La relation (3.7) est à la base du modèle de percolation : Bogomolny et Schmit ont supposé que les lignes nodales d'une fonction d'onde aléatoire vont couper une droite arbitrairement fixée en des points répartis selon (3.7). Comme la densité ne dépend pas en moyenne de la direction de la droite choisie, cela entraîne que les lignes nodales forment *en moyenne* un réseau carré. Le nombre de sites de ce réseau peut être relié à l'énergie associée à l'onde aléatoire grâce à (3.7), soit pour une boîte rectangulaire de taille L_x, L_y :

$$N = \rho_x L_x \rho_y L_y \approx \frac{\mathcal{A}}{2\pi^2} E = \frac{2}{\pi} \bar{N}(E) ,$$

où $\mathcal{A} = L_x L_y$ est l'aire du billard étudié.

Je vais à présent détailler comment construire un modèle de percolation de lien sur ce réseau. Par convention, je choisis de définir la percolation sur réseau carré comme le processus suivant : étant donné un réseau carré, nous choisissons de poser entre deux sites adjacents un lien avec une probabilité p .

Selon le modèle de percolation de Bogomolny et Schmit, la densité de lien peut être formellement définie par :

$$d_l(\vec{x}) = \frac{\text{sgn}\Psi(\vec{x}) + 1}{2} \quad (3.8)$$

où sgn est la fonction signe :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

À partir d'une fonction d'onde associée à une certaine énergie, i.e. d'un tirage d'une réalisation d'une onde aléatoire (3.2), nous pouvons définir une configuration du modèle de percolation : les zéros de Ψ forment les sites du réseau, la présence du lien est déterminé suivant le signe de Ψ entre deux liens.

Il reste à utiliser les résultats de la théorie de percolation pour déterminer le nombre moyen et la variance du nombre de domaines nodaux dans le billard [6]. Dans la limite du réseau infini ($N \gg 1$), le nombre de domaines est, à l'ordre dominant, une variable gaussienne dont la moyenne et la variance sont :

$$\bar{n} = \frac{3\sqrt{3} - 5}{2} N \quad (3.9)$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{9}{\pi} + 2\sqrt{3} - \frac{25}{4} \right) N \quad (3.10)$$

Notons que dans le modèle de percolation choisi, les probabilités de placer un lien entre deux paires de sites différentes sont indépendantes tandis qu'on a pour les fonctions d'ondes aléatoires suivant (3.4) avec $d = 2$:

$$\langle \Psi(\vec{x}_1) \Psi(\vec{x}_2) \rangle \simeq J_0(k|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|) \quad (3.11)$$

Ces corrélations peuvent être négligées en considérant la classe d'universalité de notre problème.

3.2.2 Critère de Harris

Il s'agit ici de voir si les corrélations dans le modèle d'ondes aléatoires de Berry sont pertinentes du point de vue du groupe de renormalisation. Nous allons utiliser le critère de Harris [32, 33]. Nous reproduisons ici le raisonnement exposé dans [34].

Du point de vue du modèle de percolation, le champ $\Psi(\vec{x})$ est lié à la densité de liens du réseau, cf. (3.8). La condition de criticalité se traduit par :

$$\langle d_l(\vec{x}) \rangle \equiv \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} d_l(\vec{x}) d\vec{x} = p^*$$

où p^* est la valeur critique de la probabilité d'avoir un lien entre deux sites, i.e. la valeur moyenne de la densité de liens entre deux sites ($p^* = 1/2$ pour un réseau carré bidimensionnel dans le problème **sans** corrélation). $\text{Vol}(\mathcal{A})$ désigne la mesure du volume du domaine \mathcal{A} . Dans notre cas de billards bidimensionnels, \mathcal{A} est le domaine définissant le billard et $\text{Vol}(\mathcal{A})$ son aire.

L'équation (3.11) indique que, dans le cas des ondes aléatoires, les probabilités d'avoir un lien entre deux paires de sites différents ne sont pas indépendantes. Pour examiner l'effet de ces corrélations, nous allons suivant Harris [32] subdiviser le domaine \mathcal{A} en blocs \mathcal{B}_ξ de taille ξ où ξ représente la longueur de corrélation du modèle. A l'intérieur de chaque bloc, nous pouvons définir une densité moyenne de lien :

$$p_b \equiv \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{B}_\xi)} \int_{\mathcal{B}_\xi} d_l(\vec{x}) d\vec{x}$$

Les p_b ainsi définis vont fluctuer selon les blocs, on décrit ces fluctuations par leur largeur typique :

$$\Delta^2 = \langle (p_b - p^*)^2 \rangle_b = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{A})^2} \iint_{\mathcal{A}^2} (d_l(\vec{x}_1) - p^*)(d_l(\vec{x}_2) - p^*) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \quad (3.12)$$

où $\langle \cdot \rangle_b$ désigne la moyenne calculée sur tous les blocs.

Le critère de Harris consiste à dire que les corrélations dans la densité de lien seront non pertinentes si ses fluctuations sont petites par rapport à l'écart à la moyenne :

$$\Delta \ll |p_b - p^*| \quad (3.13)$$

Cette condition peut se traduire plus simplement si l'on introduit la fonction de corrélation connexe à deux points de la densité :

$$R(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \langle (d_l(\vec{x}_1) - p^*)(d_l(\vec{x}_2) - p^*) \rangle$$

D'après la définition (3.8), les corrélations de densité sont celles de $\text{sgn}\Psi(\vec{x})$, qui peuvent être elles mêmes décrites en fonction de celles de $\Psi(\vec{x})$. Nous considérons plutôt dans la suite :

$$R_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \langle (\Psi(\vec{x}_1) - p^*)(\Psi(\vec{x}_2) - p^*) \rangle$$

Ici, $R_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ dépend seulement de la distance $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ entre les points considérés et on la note plutôt $R_2(r)$. Cette fonction permet alors d'estimer Δ plus précisément. On suppose généralement que \vec{x}_1 est fixé et l'intégrale dans (3.12) devient une intégrale simple :

$$\Delta^2 \approx \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} R_2(|\vec{x}|) d\vec{x} \quad (3.14)$$

En subdivisant le domaine en blocs de taille ξ , l'expression se réécrit (on suppose que les blocs sont des disques de rayon ξ pour simplifier) :

$$\Delta^2 \approx \frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi R_2(r) r dr$$

Il reste à caractériser les corrélations par la vitesse de décroissance de $R_2(r)$:

$$R_2(r) \sim r^{-\alpha}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

ce qui permet de déterminer :

$$\Delta^2 \approx \frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi r^{-\alpha+1} dr \approx \xi^{-\alpha}$$

Enfin, nous utilisons la définition de l'exposant critique ν associé à la longueur de corrélation ξ :

$$\xi \sim |p - p^*|^{-\nu},$$

pour réécrire le critère (3.13) sous la forme d'une inégalité sur les exposants critiques :

$$\Delta \sim |p - p^*|^{\nu\alpha/2} \ll |p - p^*| \quad \Rightarrow \quad \nu\alpha - 2 > 0$$

Nous rappelons que, pour la percolation sur réseau carré bidimensionnel, l'exposant critique associé à ξ est $4/3$:

$$\xi \sim |p - p^*|^{-4/3} \quad (3.15)$$

Suivant (3.11) $\alpha = 1/2$ et les corrélations semblent pertinentes. En fait, il faut ici remarquer que R_2 n'est pas positive et le passage de (3.12) à (3.14) n'est plus licite. En effet, Δ^2 étant positif, nous devons simplifier l'intégrale (3.12) plus soigneusement. Dans le cas des ondes aléatoires, nous pouvons utiliser la formule d'addition des fonctions de Bessel :

$$R_2(r) \simeq J_0(k|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(kr_1)J_m(kr_2)e^{im(\theta_1 - \theta_2)}$$

où (r_1, θ_1) et (r_2, θ_2) représentent les coordonnées polaires des \vec{x}_1 et \vec{x}_2 . En supposant pour simplifier que le domaine \mathcal{A} est un disque, l'intégration sur les angles va annuler toutes les termes avec $m \neq 0$. Il reste finalement :

$$\Delta^2 \approx \frac{1}{\xi^4} \left(\int_0^\xi J_0(kr)r dr \right)^2 \approx \left(\frac{J_1(k\xi)}{\xi} \right)^2 = \mathcal{O}(\xi^{-3})$$

À présent nous obtenons avec $\nu = 4/3$:

$$\Delta \sim |p_b - p^*|^2 \ll |p_b - p^*| \quad (3.16)$$

comme il faut.

Les corrélations dans le modèle de percolation pour les ondes aléatoires sont non pertinentes et les techniques utilisées pour obtenir la distribution de domaines nodaux des ondes aléatoires via la percolation sont justifiées.

Chapitre 4

Introduction à SLE

Suivant le paragraphe précédent, nous voudrions décrire les lignes nodales des ondes aléatoires (3.2). Ces lignes sont par définition auto-évitantes et selon le modèle de Bogomolny et Schmit, suivent les mêmes propriétés statistiques que les frontières d’amas de la percolation critique.

Les lignes auto-évitantes sont des objets complexes. Nous allons d’abord décrire la description originale d’une courbe auto-évitante du plan introduite par Loewner [8]. Puis nous donnerons les idées avancées par Schramm [7] pour généraliser cette méthode à des courbes critiques. Les courbes critiques de modèles sur réseaux obéissent en effet à d’autres symétries qu’il est souvent difficile de modéliser.

4.1 Équation de Loewner

4.1.1 Description heuristique d’une courbe “à la” Loewner

Considérons une courbe plane \mathcal{C} autoévitante dans le demi-plan supérieur \mathbb{H} . L’idée de Loewner consiste à décrire l’environnement¹ de \mathcal{C} quand on se déplace le long de \mathcal{C} . Pour être plus précis nous supposons que \mathcal{C} est lisse. Ici intervient que \mathcal{C} est autoévitante : son environnement est un ensemble simplement connexe. Suivant le théorème de Riemann il peut être transformée de manière conforme en un autre domaine simplement connexe, par exemple \mathbb{H} .

Imaginons que \mathcal{C} est un processus de croissance [35] : à chaque instant t la courbe croît dans \mathbb{H}^2 et son environnement reste simplement connexe. Loewner propose alors de considérer une famille de transformations conformes (g_t) qui transforme l’environnement de la portion de \mathcal{C} à t en \mathbb{H} . On peut montrer que cette famille d’applications conformes — correctement normalisées, obéit alors à

¹Nous appellerons environnement de la courbe la région $\mathbb{H} \setminus \mathcal{C}$, son complémentaire dans le demi-plan.

² t joue le rôle d’une abscisse curviligne de \mathcal{C} .

une équation particulièrement simple :

$$\begin{aligned} \frac{dg_t}{dt}(z) &= \frac{2}{g_t(z) - U(t)} \\ g_0(z) &= z \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $U(t)$ est une fonction de t à valeur réelle. Dans cette description toutes les caractéristiques de \mathcal{C} sont contenues dans $U(t)$.

Considérons l'exemple où \mathcal{C} est un segment vertical partant de l'origine. Nous paramétrons la courbe de manière suivante : l'extrémité du segment à l'instant t est le point d'affixe $2i\sqrt{t}$. Nous pouvons vérifier que la solution de (4.1) s'écrit :

$$g_t(z) = \sqrt{z^2 + 4t} \quad (4.2)$$

avec $U(t) = 0$. A chaque t l'action de g_t sur l'environnement « proche » de \mathcal{C} est illustré sur la figure 4.1. Nous avons souligné par des motifs comment est « déplié » le voisinage de \mathcal{C} .

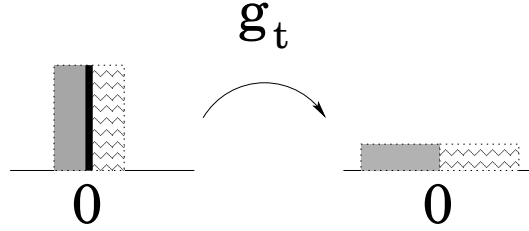


FIG. 4.1 – Transformation conforme de l'environnement d'un segment en le demi-plan tout entier

Plus généralement on peut montrer qu'à toute courbe lisse du demi-plan correspond une fonction *continue* $U(t)$ selon le formalisme de Loewner, appelée plus communément fonction de forçage. La courbe \mathcal{C} est désignée comme la trace de $U(t)$.

4.1.2 Illustration de l'équation de Loewner : étude des cas simples

L'équation (4.1) possède d'abord plusieurs symétries :

$$g_t(z), U(t) \text{ solution de (4.1)} \Rightarrow g_t(z - \alpha) + \alpha, U(t) + \alpha \text{ solution} \quad (4.3)$$

$$g_{\alpha^2 t}(\alpha z)/\alpha, U(\alpha^2 t)/\alpha \text{ solution} \quad (4.4)$$

Nous détaillons ensuite les cas simples à titre d'exemples, cf. aussi [36].

– si \mathcal{C} est un segment incliné d'un angle $\pi\alpha$ par rapport à l'axe réel [37]

$$U(t) = 2 \frac{1 - 2\alpha}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}} \sqrt{t}$$

$$g_t(z) = \left(z + 2\sqrt{\frac{\alpha t}{1 - \alpha}} \right)^{1 - \alpha} \left(z - 2\sqrt{\frac{(1 - \alpha)t}{\alpha}} \right)^\alpha$$

– si \mathcal{C} est un arc de cercle [38] de 0 à $a \in \mathbb{H}$ paramétrisé tel que $t = (\operatorname{Re} a)^2/8 + (\operatorname{Im} a)^2/4$:

$$g_{a(t)}(z) = \frac{b^3}{\sqrt{b^2 + c^2} F_{a(t)}(z) - (b^2 + c^2)} + \frac{2b^3 + 3bc^2}{2(b^2 + c^2)} \quad (4.5)$$

$$F_{a(t)}(z) = \sqrt{\left(\frac{z}{1 - z/b}\right)^2 + c^2}$$

$$\text{où } b = \frac{|a|^2}{\operatorname{Re} a} \text{ et } c = \frac{|a|^2}{\operatorname{Im} a}$$

À titre d'illustration, nous donnons également les traces obtenues lorsque $U(t)$ est une fonction « simple ».

Le cas de la fonction constante a déjà été traité. Le cas où $U(t)$ est linéaire — nous prendrons $U(t) = t$ en vertu de (4.4), peut aussi être traité exactement. L'équation polaire pour \mathcal{C} est :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 2 - r(t)e^{-i\theta(t)} \\ 2 \ln r(t) - r(t) \cos \theta(t) &= 2 \ln 2 + t \\ r(t) &= 2 \frac{\theta(t)}{\sin \theta(t)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nous en déduisons que $\theta(t)$ est une fonction croissante de 0 à π .

En reportant dans (4.6) nous voyons que la trace admet la droite d'équation $y = 2\pi$ comme asymptote pour t grand, cf. fig.4.2.

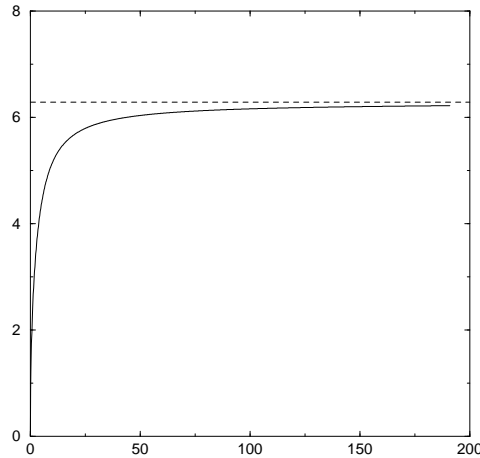


FIG. 4.2 – Trace lorsque $U(t) = t$

Un autre exemple instructif souvent mentionné est celui d'un forçage en racine carrée : $U(t) = 2\sqrt{k(1-t)}$ pour t entre 0 et 1. On peut alors montrer que, pour k entre 0 et 4, la trace converge

comme une spirale logarithmique au point d'affixe $\sqrt{k} + i\sqrt{4-k}$. Pour $k \geq 4$, la trace converge vers un point de l'axe réel, cf. fig.4.3.

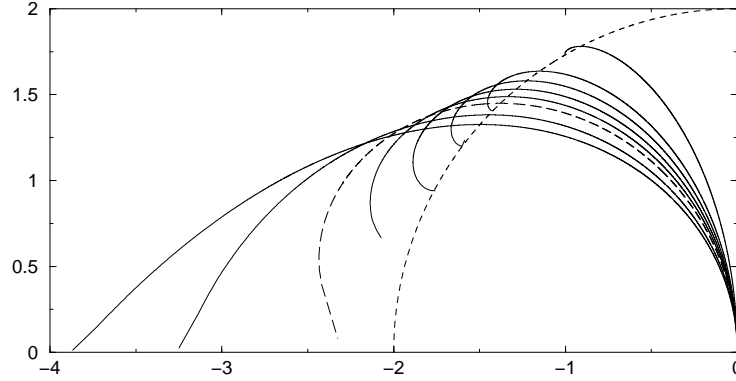


FIG. 4.3 – Traces lorsque $U(t) = 2\sqrt{k(1-t)} - 2\sqrt{k}$ pour $k = 1, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5, 6$

4.2 SLE : un outil pour les interfaces de modèles sur réseaux

Depuis les travaux de Schramm, cet outil permet aussi de décrire des courbes jouissant de propriétés de symétrie conforme. Le résultat central de Schramm peut être formulé de manière intuitive ainsi : soit une courbe plane, aléatoire, autoévitante, invariante conforme et dont les incréments sont statistiquement indépendants, la courbe peut être décrite par l'équation de Loewner (4.1) où le forçage est un mouvement brownien unidimensionnel :

$$\begin{aligned} U(t) &= \sqrt{\kappa} B_t \\ \langle B_t \rangle &= 0 \\ \langle B_t B_s \rangle &= |t - s|, \quad t, s > 0 \end{aligned}$$

où κ est une constante réelle arbitraire. L'ensemble statistique de courbes ainsi définies est appelé SLE_κ , cf. [39–41].

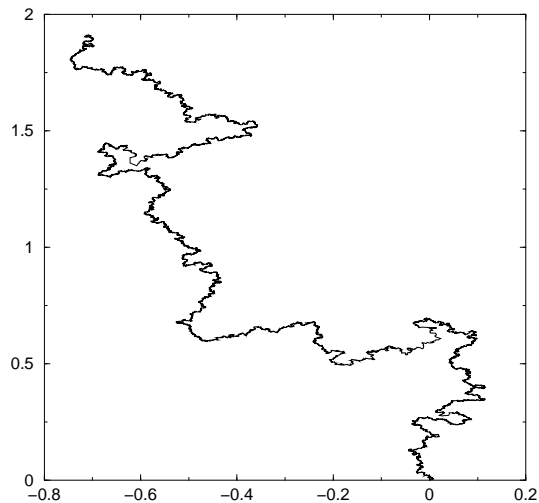
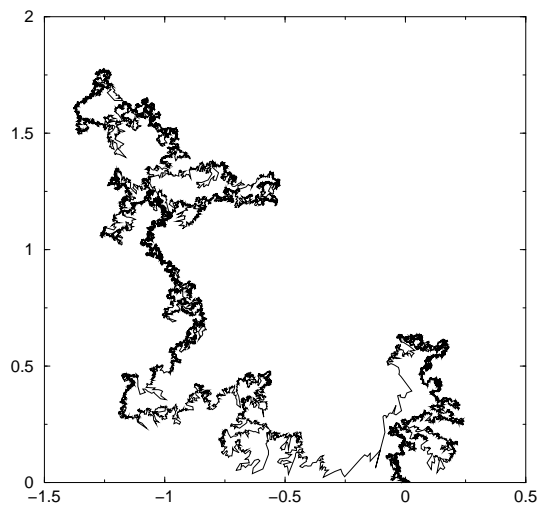
Physiquement κ mesure les fluctuations de $U(t)$ qui est maintenant une fonction non différentiable. Si les fluctuations sont petites, la trace sera une courbe lisse. Si elles deviennent plus importantes, la trace peut contenir des points d'auto-intersection³, d'autant plus nombreux que les fluctuations sont grandes. Nous avons illustré ces différents comportements sur la figure 4.4, 4.5 et 4.6.

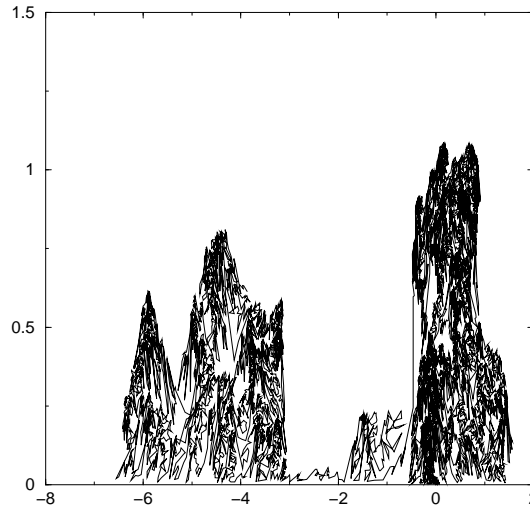
Habituellement les ensembles SLE_κ sont divisés en 3 phases :

- pour $0 \leq \kappa \leq 4$, la trace est une courbe simple du plan,

³Nous distinguons ici auto-intersection avec croisement. Dans le premier cas la courbe retouche une de ses portions sans la franchir.

- pour $4 < \kappa < 8$, la trace possède des points d'auto-intersection,
- pour $\kappa \geq 8$, elle remplit le plan de manière dense.

FIG. 4.4 – Exemple de trace de SLE_κ pour $\kappa = 2$ FIG. 4.5 – Exemple de trace de SLE_κ pour $\kappa = 6$

FIG. 4.6 – Exemple de trace de SLE_κ pour $\kappa = 25$

Suivant [39], SLE_κ est un modèle pour plusieurs modèles sur réseaux à la limite continue. Nous donnons quelques théorèmes :

- le modèle de marche aléatoire sans boucle (Loop Erased Random Walks, LERW) se ramène à SLE_2 ,
- le modèle de marche aléatoire auto-évitante (Self Avoiding Walk, SAW) peut être identifié à $SLE_{8/3}$,
- le marcheur harmonique (Harmonic Explorer) devient à la limite continue SLE_4 ,
- les frontières d’amas de percolation critique forment les traces de SLE_6 .

Signalons aussi ces conjectures :

- le modèle d’arbres couvrants uniformes (Uniform Spanning Trees, UST) semble relié à SLE_8 ,
- le modèle de Potts à q états pour $2 \leq q \leq 4$ semble relié à SLE_κ suivant la relation :

$$q = 2 + 2 \cos \frac{8\pi}{\kappa}, \quad 4 \leq \kappa \leq 8$$

Ces relations ont motivé de nombreux travaux qui ont permis de donner des démonstrations rigoureuses pour le calcul de quantités usuelles en physique (exposants critiques, dimension fractale, ...)

Pour notre étude, nous avons utilisé le résultat de Smirnov [42] qui établit que les frontières d’amas de percolation au seuil critique forment le même ensemble que SLE_6 .

4.2.1 Autres normalisations

Dans la discussion introductive autour de l’équation de Loewner, nous avons éludé les détails de la définition des transformations conformes de g_t . En particulier nous devons préciser une

condition de normalisation pour rendre l'application g_t unique. Nous rappelons qu'une application $g_t : \mathbb{H} \setminus \mathcal{C}_t \rightarrow \mathbb{H}$ peut toujours être composée avec un automorphisme de \mathbb{H} de la forme :

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où a, b, c, d sont des nombres réels vérifiant $ad - bc > 0$. Cette indétermination est levée en requérant que g_t laisse le point $z = \infty$ invariant :

$$\begin{aligned} g_t(z) &= z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \text{ quand } |z| \rightarrow \infty \\ \text{plus précisément} \quad g_t(z) &= z + \frac{2t}{z} + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nous mentionnons que le coefficient de $1/z$ dans (4.7) est traditionnellement appelé capacité de \mathcal{C} . C'est une quantité additive qui permet d'avoir la propriété suivante :

$$g_t \circ g_s = g_{t+s} \quad (4.8)$$

Cette propriété peut aussi être vue comme un choix de paramétrisation de \mathcal{C} . Nous avons décrit précédemment un processus de croissance où la courbe est construite à partir d'un point de la frontière. Elle relie ce point, pris par convention égal à 0, à un autre point (fixé) de la frontière (ici $z = \infty$). Ce choix de condition aux limites définit pour un forçage brownien le processus appelé « SLE cordal ». Nous mentionnons ici deux autres choix de conditions aux limites couramment utilisés.

SLE radial

Nous considérons ici une courbe qui croît d'un point de la frontière vers un point intérieur, cf. i.e. [40]. Il est alors usuel de se placer dans le disque unité \mathbb{D} . Le point limite de la trace est le centre 0. La normalisation choisie pour l'application conforme g_t est cette fois :

$$g_t(z) = e^t z + \dots, \quad |z| \rightarrow 0, \quad (4.9)$$

d'où on peut dériver l'équation de Loewner pour le cas radial :

$$\begin{aligned} \frac{dg_t}{dt}(z) &= -g_t(z) \frac{g_t(z) + U(t)}{g_t(z) - U(t)} \\ g_0(z) &= z \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le processus aléatoire SLE radial est défini lorsque le forçage est relié à un mouvement brownien B_t par :

$$U(t) = e^{i\sqrt{\kappa}B_t} \quad (4.11)$$

SLE dipolaire

Nous décrivons une variante de SLE cordal lorsque les conditions aux limites sont les suivantes : la trace relie un point x_0 de la frontière à un autre point de la frontière qui se trouve dans un intervalle fixé, e.g. l'intervalle entre deux points x_+ et x_- ne contenant pas x_0 . Le domaine choisi [43] est la bande \mathbb{S} définie par :

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Im } z < \pi\}$$

On prend alors $x_0 = 0$, $x_- = -\infty$ et $x_+ = +\infty$. La solution pour le segment vertical s'écrit :

$$g_t(z) = U_0 + 2 \operatorname{argch} \left(e^{t/2} \operatorname{ch} \left(\frac{z - U_0}{2} \right) \right)$$

L'équation de Loewner pour le cas dipolaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dg_t}{dt}(z) &= \frac{1}{\operatorname{th} \left(\frac{g_t(z) - U(t)}{2} \right)} \\ g_0(z) &= z \end{aligned} \tag{4.12}$$

Le processus aléatoire SLE dipolaire est défini lorsque

$$U(t) = \sqrt{\kappa} B_t$$

4.3 Notre travail

4.3.1 Notre démarche

Nous avons voulu relier deux résultats a priori très différents : le théorème de Smirnov liant SLE_6 et les frontières d'amas de percolation critique et le modèle de percolation de Bogomolny et Schmit pour les lignes nodales d'ondes aléatoires.

Nous avons déterminé numériquement la fonction de forçage correspondant à des lignes nodales d'ondes aléatoires pour un grand nombre de tirages. Pour simplifier, nous avons utilisé des ondes aléatoires de la forme (3.2) avec (3.6). Nous nous sommes placés dans les unités telles que $R = 2\sqrt{2}$ et $k = 100$, nous les avons tracées dans un domaine circulaire, nous décidons qu'elles se terminent lorsqu'elles touchent la frontière. La figure 4.7 montre un exemple d'une telle ligne. La figure 4.8 représente le forçage calculé pour la trace de la figure 4.7.

Le forçage est calculé en plusieurs étapes : la trace est lissée (la moyenne est calculée sur cinq points) puis réduite (un point sur cinq est retenu) pour diminuer le temps de calcul. À chaque itération, la courbe est transformée suivant (4.2) ou (4.5) suivant la position du premier point. Pour déterminer si le forçage est un mouvement brownien, nous avons tracé deux types de courbes : la moyenne et la variance d'une part, la distribution de U à t fixé d'autre part.

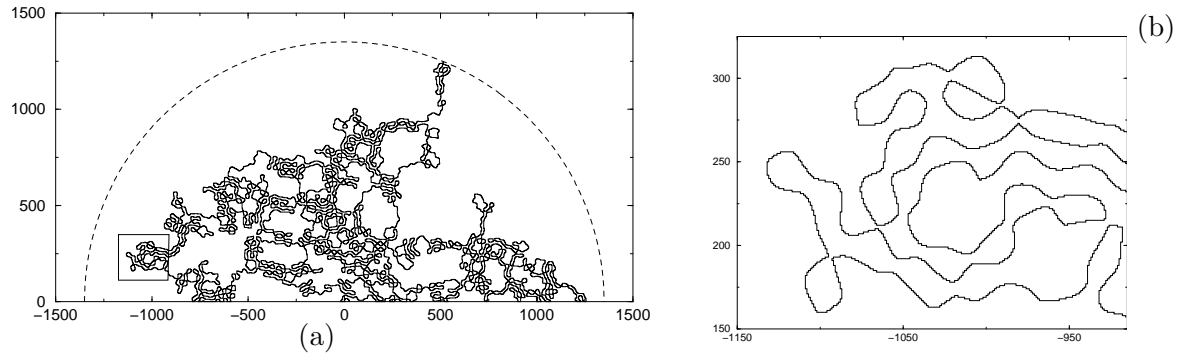


FIG. 4.7 – Exemple de ligne nodale d’onde aléatoire dans le cercle. (a) Ligne complète (b) Détail de (a)

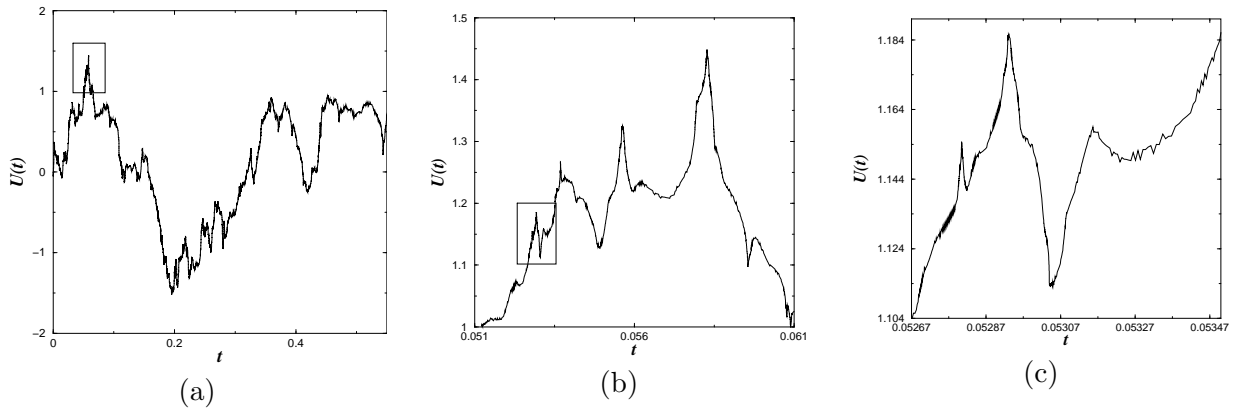


FIG. 4.8 – Forçage calculé à partir de la ligne de la figure 4.7. (a) Forçage complet, (b) Détail de (a), (c) Détail de (b)

Nous nous sommes aperçu que les effets de taille finie étaient importants et, pour les réduire, nous avons plutôt considéré le processus SLE dipolaire. La figure 4.9 donne un exemple d’une trace calculée dans \mathbb{S} . Nous avons alors pu vérifier que le forçage suivait un comportement brownien, comme il faut

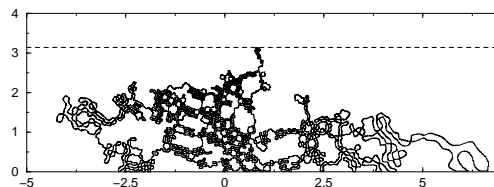


FIG. 4.9 – Graphe de la trace de la figure 4.7 dans \mathbb{S}

Dans notre papier, nous avons étudié les lignes nodales d'ondes aléatoires via l'approche SLE dipolaire. Nos résultats numériques sont en accord avec la prévision du modèle de percolation de Bogomolny et Schmit. Notre étude constitue une justification non triviale du lien entre deux objets a priori différents : les fonctions d'ondes d'un système chaotique et les mouvements browniens.

Troisième partie

Chaos quantique et cavités
diélectriques

Chapitre 5

Introduction

Nous avons vu au chapitre 1 qu'un billard est un système générique dans la mesure où il décrit la dynamique d'une particule dans un puits de potentiel infini. Des efforts récents ont été portés sur le cas plus réaliste où le puits de potentiel est fini. Une application importante est la description d'une onde dans une cavité diélectrique à l'intérieur d'un microrésonateur laser [46].

Ce type de problème apparaît comme une « généralisation » dans la mesure où on retrouve le problème initial du billard usuel en prenant la limite de grand indice $n \rightarrow +\infty$. Nous avons essayé d'utiliser les outils d'étude bien connus dans l'étude des billards pour l'étude des cavités diélectriques.

5.1 Lien avec l'expérience

Nous allons ici détailler les liens de cette partie de notre étude avec certains groupes expérimentaux. Le lecteur est convié à se reporter à [9] pour plus de détails.

L'étude de la dynamique d'une onde dans une cavité diélectrique trouve beaucoup d'applications dans la technologie dite « polymère ». Elle permet de réduire le coût de fabrication et une plus grande flexibilité par rapport à la technologie « semiconducteur ». Ce domaine est actuellement en essor comme en témoigne le nombre grandissant de groupes travaillant sur ce sujet. Nous citerons par exemple le groupe pionnier de D. Stone à l'université de Yale, [46], celui de J. Zyss à l'ENS Cachan, celui du Pr. T. Harayama au centre ATR à Kyoto en collaboration avec les travaux théoriques de M. Hentschel et J. Wiersig à Dresde en Allemagne. Enfin nous mentionnons les travaux de H. Cao à l'université de Chicago et de C.-M. Kim à l'université Pai-Chai en Corée du Sud.

Cette technologie vise principalement à fabriquer des microcavités emplies d'un matériau diélectrique et servant de résonateur laser. Elle est aussi utilisée pour la fabrication de capteurs ou en optoélectronique.

Notre collaboration avec le groupe de Cachan

Au cours de nos travaux, nous avons pu profiter de la collaboration de l'équipe de J. Zyss sous l'impulsion de Mélanie Lebental. Je vais tâcher de décrire plus précisément les principales caractéristiques de leur montage [9, 45]. Les cavités diélectriques sont obtenues en dopant du PMMA (plexiglas) avec un matériau actif, le DCM. L'épaisseur de ces cavités de l'ordre du micron tandis que les dimensions transverses sont plutôt de l'ordre de $100 \mu m$. Les molécules de DCM sont excitées par pompage optique (le laser de pompe émet des impulsions à $\lambda = 532 \text{ nm}$ pendant 10 ps à une fréquence de 10 Hz). Par effet laser, les molécules émettent une onde qui va se propager dans la cavité, cf. fig 5.1.

C'est précisément cette onde dont nous nous proposons de décrire la dynamique. Notons que, dans ce montage, l'indice diélectrique de la cavité est $n = 1.5$.

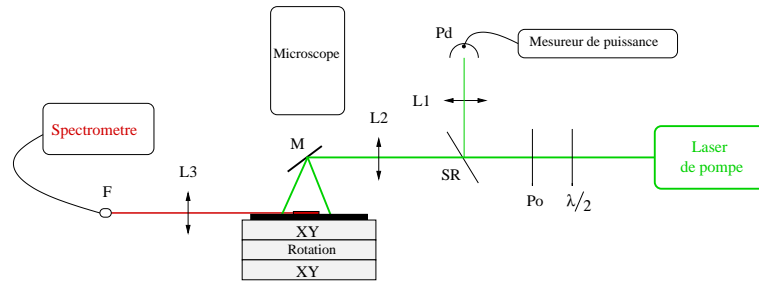


FIG. 5.1 – Dispositif expérimental utilisé à Cachan

Nous allons à présent décrire les travaux théoriques effectués afin de modéliser les résultats expérimentaux.

5.2 Généralités sur les cavités diélectriques

5.2.1 Position du problème

Nous allons établir les équations dans le plan à partir d'un problème tridimensionnel [47]. Nous considérons un cylindre infini de section arbitraire \mathcal{D} , rempli d'un matériau diélectrique d'indice n

- non magnétique ($\mu_r = 1$),
- parfaitement transparent (sans sources),
- homogène, isotrope, linéaire,
- non dispersif ($dn/dk = 0$).

Nous supposons dans toute la suite que les milieux où évolue l'onde étudiée sont de ce type. L'extérieur est rempli d'air d'indice 1. Les équations de Maxwell s'écrivent alors pour les champs

électrique $\vec{\mathcal{E}}$ et magnétique $\vec{\mathcal{B}}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}} = -\partial_t \vec{\mathcal{B}} \quad \text{div} \vec{\mathcal{D}} = 0 \quad (5.1)$$

$$\text{div} \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{H}} = \partial_t \vec{\mathcal{D}} \quad (5.2)$$

$$\text{avec } \vec{\mathcal{D}} = n^2 \vec{\mathcal{E}} \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{B}} \quad (5.3)$$

Rappelons que $\vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ sont communément appelés induction (ou déplacement) électrique et induction magnétique respectivement. Nous nous bornerons aux solutions stationnaires :

$$\vec{\mathcal{E}} = e^{-i\omega t} \vec{E} \quad \vec{\mathcal{D}} = e^{-i\omega t} \vec{D} \quad \vec{\mathcal{B}} = e^{-i\omega t} \vec{B} \quad \vec{\mathcal{H}} = e^{-i\omega t} \vec{H}$$

Désormais nous appellerons z la coordonnée suivant l'axe du cylindre. Nous allons effectuer ici une approximation très répandue. Il s'agit de transformer le problème vectoriel tridimensionnel en un problème scalaire bidimensionnel. En effet, comme la taille de la cavité selon z est supposée petite devant ses dimensions transverses, nous supposerons que les modes qui survivent dans la limite où la taille selon z tend vers 0 sont ceux indépendants de z dans le problème initial. Alors, si on se restreint aux solutions indépendantes de z , le problème devient séparable et les composantes longitudinales E_z et B_z des champs électriques et magnétiques jouent le rôle de potentiels. Les champs totaux s'obtiennent en coordonnées cartésiennes via les relations

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i}{n^2 k} \frac{\partial B_z}{\partial y} & B_x &= \frac{i}{k} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ E_y &= -\frac{i}{n^2 k} \frac{\partial B_z}{\partial x} & B_y &= \frac{i}{k} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ & & E_z &= E_z \\ & & B_z &= B_z \end{aligned}$$

Par linéarité de (5.1) et (5.2), nous pouvons séparer le problème en deux cas suivant que $E_z = 0$ ou $B_z = 0$ (ceci détermine la polarisation du champ). Le problème se réduit à trouver un champ scalaire dans le plan qui obéit aux équations suivantes ($k = \omega/c$ est la norme du vecteur d'onde) :

$$\begin{aligned} (\Delta + n^2 k^2) \Psi(\vec{x}) &= 0 & \vec{x} &\in \mathcal{D} \\ (\Delta + k^2) \Psi(\vec{x}) &= 0 & \vec{x} &\notin \mathcal{D} \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites qui dépendent de la polarisation. Nous définissons les polarisations de la manière suivante [47] :

- les modes transverse magnétique (TM) ou ondes E, lorsque $B_z = 0$ et $\Psi = E_z$
- les modes transverse électrique (TE) ou ondes H, lorsque $E_z = 0$ et $\Psi = B_z$

Les conditions aux limites se déduisent des conditions de continuité du champ à la frontière de \mathcal{D} :

- modes TM : $\Psi, \partial_t \Psi$ continues $\partial_n \Psi$ continue,
- modes TE : $\Psi, \partial_t \Psi$ continues $\partial_n \Psi / n(\vec{x})^2$ continue.

où $\partial_t \Psi$ et $\partial_n \Psi$ désignent respectivement les dérivées tangentielle et normale du champ Ψ . Nous avons en outre introduit la “fonction” indice $n(\vec{x})$ définie dans le plan par :

$$n(\vec{x}) = \begin{cases} n & \vec{x} \in \mathcal{D} \\ 1 & \vec{x} \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad (5.4)$$

Nous pouvons alors écrire l'équation vérifiée par le champ sous une forme plus synthétique :

$$(\Delta + n(\vec{x})^2 k^2) \Psi(\vec{x}) = 0 \quad (5.5)$$

Nous soulignons ici que, pour comparer à l'expérience, nous avons supposé que les modes qui vont être amplifiés par effet laser sont les résonances de la cavité passive. Cette approximation — brutale mais répandue — de l'effet laser ne sera pas discutée ici, cf. e.g. [48].

5.2.2 Reflexion sur une paroi diélectrique. Lois de Fresnel

Nous rappelons ici les expressions des coefficients de réflexion/transmission lors de la traversée d'une paroi diélectrique.

Le problème de la réflexion d'une onde plane sur une frontière séparant deux milieux d'indice diélectrique différent est très vieux et demeure encore étudié. Le cas le plus simple où une onde plane est réfléchi par un demi-plan a été résolu par Fresnel [49]. Il est remarquable que la généralisation à des ondes non planes ou à des parois courbes est beaucoup plus récente, cf. e.g. [50, 51].

Nous rappelons brièvement comment retrouver les lois de Fresnel. Considérons deux milieux diélectriques d'indice n_1 et n_2 occupant chacun une moitié de plan et séparés par une frontière rectiligne, cf. fig. 5.2. Soit une onde plane incidente dans le milieu d'indice n_1 . Elle atteint la frontière

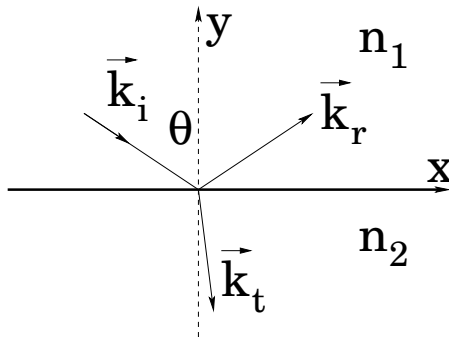


FIG. 5.2 – Reflexion d'une onde plane sur la frontière séparant deux milieux diélectriques

avec un angle d'incidence θ^1 . Une partie de l'onde est réfléchi dans le milieu 1, une autre est

¹L'angle est mesuré par convention par rapport à la normale à la frontière au point d'impact.

transmise dans le milieu 2. Conformément à la réduction du problème décrite plus haut, nous décrirons l'onde par un champ scalaire Ψ . L'onde est alors décrite dans le système de coordonnées local, cf fig. 5.2, par

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= e^{in_1 kx \sin \theta} (e^{-in_1 ky \cos \theta} + R e^{in_1 ky \cos \theta}) & y > 0 \\ \Psi(x, y) &= T e^{in_1 kx \sin \theta} e^{-iky \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} & y < 0\end{aligned}$$

Les coefficients R (resp. T) sont appelés coefficient de réflexion (resp. de transmission). Ils se calculent grâce aux conditions aux limites, suivant la polarisation du champ.

Le résultat du calcul donne les formules de Fresnel pour les modes TM :

$$R_{TM} = \frac{n_1 \cos \theta - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.6)$$

$$T_{TM} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.7)$$

et pour les modes TE :

$$R_{TE} = \frac{n_2^2 \cos \theta - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n_2^2 \cos \theta + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.8)$$

$$T_{TE} = \frac{2n_2^2 \cos \theta}{n_2^2 \cos \theta + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.9)$$

Dans notre étude, $n_1 = n > 1$ et $n_2 = 1$. Les formules de Fresnel se réécrivent pour les coefficients de réflexion :

$$R_{TM} = \frac{n \cos \theta - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \cos \theta + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.10)$$

$$R_{TE} = \frac{\cos \theta - n \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{\cos \theta + n \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.11)$$

Nous avons tracé le module des coefficients R_{TM} et R_{TE} sur la figure fig. 5.3. Nous retrouvons ici que, pour θ au delà de l'angle critique $\theta_c = \arcsin(1/n)$, le coefficient de réflexion est seulement un déphasage : il y a réflexion totale. Remarquons que, pour les modes TE, R_{TE} peut s'annuler : il y a transmission totale. L'angle correspondant est appelé angle de Brewster [52] et vaut ici :

$$\theta_b = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\right) \quad (5.12)$$

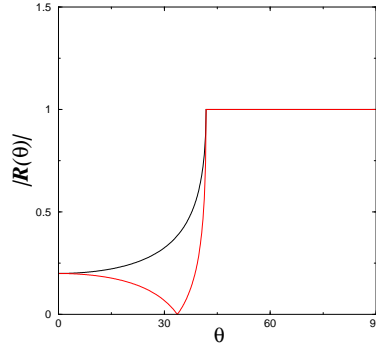


FIG. 5.3 – Variation du coefficient de reflexion en fonction de l’angle d’incidence pour $n = 1.5$. Modes TM et TE

5.3 Analogie avec un problème de diffusion

Nous utiliserons abondamment dans la suite une analogie qui consiste à considérer (5.5) comme l’équation de Schrödinger d’une particule quantique soumis au pseudo-potentiel suivant :

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} -(n^2 - 1)k^2 & \vec{x} \in \mathcal{D} \\ 0 & \vec{x} \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad (5.13)$$

Nous voyons ici que ce « potentiel »² ne possède pas de minimum : le spectre de la particule quantique associée est continu. Comme la particule peut sortir du puits, le problème peut être vu comme un problème de diffusion sur le potentiel (5.13). Nous pouvons définir d’une part la matrice S de diffusion. D’autre part, le spectre est ici mal défini : une manière heuristique de le caractériser est d’imaginer que notre cavité est placée dans une boîte de (très) grande taille. Le système global est fermé, admet un spectre discret. Nous définirons la densité de niveaux de la cavité lorsque on prend la limite d’une boîte de taille infinie. Il est usuel de définir la densité de niveaux « réduite », i.e. sa partie finie. Nous noterons encore $d(E)$ la densité de niveaux de la cavité. Pour extraire une partie finie, nous définissons la densité $d_0(E)$ de l’espace entier sans cavité et nous étudierons la densité de niveaux « réduite » définie par $d(E) - d_0(E)$. Par la suite, j’appellerai cette dernière quantité « densité de niveaux » en supposant, sauf précision, qu’on a retiré sa partie divergente.

Dans la limite de la cavité entourée par une boîte de taille de plus en plus grande, nous pouvons

²Dans toute la suite, je considérerai $V(\vec{x})$ comme un potentiel malgré sa dépendance en énergie.

utiliser la formule de Krein [53] qui relie la densité de niveaux à la matrice \mathbf{S} de diffusion :

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S} \quad (5.14)$$

Nous allons utiliser les résultats connus de la diffusion sur un potentiel et chercher à les généraliser pour notre cas où le potentiel dépend de l'énergie.

Comme le spectre est continu, nous allons chercher à étudier les états quasi-stationnaires (ou états quasi-discrets ou résonances). Ces états sont définis par la condition à l'infini

$$\Psi(\vec{x}) \propto e^{ik|\vec{x}|}, \quad (5.15)$$

i.e. il n'y a que des ondes sortantes loin de la cavité confinante. La condition (5.15) entraîne que les nombres d'ondes cherchées sont complexes. On écrit traditionnellement :

$$k^2 = E - i\frac{1}{2\tau} \quad (5.16)$$

où E est l'énergie de la résonance et τ de le temps de vie de la résonance, ici le temps passé à l'intérieur de la cavité confinante. Nous définissons habituellement le facteur de qualité d'une résonance par :

$$Q = \frac{\operatorname{Re} k^2}{2|\operatorname{Im} k^2|} = E\tau \quad (5.17)$$

Notons enfin que les états quasi-stationnaires ne sont pas bien définis d'un point de vue mathématique : les fonctions ne sont plus de carré sommable comme le montre (5.15). Elles forment une famille qui n'est ni orthogonale, ni complète.

5.4 Formule de trace

De manière similaire aux systèmes fermés, nous voulons relier la densité de niveaux à la trace de la fonction de Green (nous considérons ici formellement la densité de niveaux non réduite) :

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \int_{|\vec{x}| < A} \operatorname{Im} n(\vec{x})^2 G(\vec{x}, \vec{x}) d\vec{x} \quad (5.18)$$

Cette formule est la généralisation naturelle de (2.5). Notons que la présence du facteur $n(\vec{x})^2$ vient du fait que, pour ces problèmes de cavité diélectrique, le produit scalaire sur l'espace des états est

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} n(\vec{x})^2 \Psi_1^*(\vec{x}) \Psi_2(\vec{x}) d\vec{x} \quad (5.19)$$

comme on peut le voir à partir de (5.5).

Le système étant ouvert, la limite de (5.18) pour $A \rightarrow +\infty$ n'existe pas; conformément à la formule de Krein (5.14), seule la densité de niveaux réduite est bien définie, nous devons donc soustraire à $d(E)$ la densité de l'espace vide qui s'écrit formellement :

$$d_0(E) = -\frac{1}{\pi} \int_{|\vec{x}| < A} \text{Im } G_0(\vec{x}, \vec{x}) d\vec{x} , \quad (5.20)$$

où $G_0(\vec{x}, \vec{y})$ est la fonction de Green de l'espace vide soit, à 2D (cf. e.g. [17])

$$G_0(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{y}|)$$

Nous définirons dans la suite la formule de trace pour une cavité diélectrique par :

$$d(E) - d_0(E) = -\frac{1}{\pi} \int_{|\vec{x}| < A} \text{Im} \left(n(\vec{x})^2 G(\vec{x}, \vec{x}) - G_0(\vec{x}, \vec{x}) \right) d\vec{x} \quad (5.21)$$

Cette quantité est bien définie mathématiquement à la limite $A \rightarrow +\infty$. Nous donnerons plus bas une interprétation plus intuitive de cette définition à partir des résonances de la cavité.

Chapitre 6

Étude d'un cas intégrable : le disque

Nous allons ici décrire plus en détail le cas plus simple où le domaine confinant est un disque, cf. [54]. Ce modèle est particulièrement utile car il permet un traitement analytique. Nous supposons que la frontière a pour équation $r = R$ où r est le rayon polaire du point courant.

6.1 Solutions de l'équation de Schrödinger. Fonction de Green

Nous nous plaçons en coordonnées polaires.

$$\begin{aligned}(\Delta + n^2 k^2)\Psi &= 0 & r \leq R \\ (\Delta + k^2)\Psi &= 0 & r > R\end{aligned}\tag{6.1}$$

Les solutions de (6.1) suivant (5.15) s'écrivent immédiatement ($r = |\vec{x}|$) :

$$\Psi(\vec{x}) = \begin{cases} a_m J_m(nkr) e^{im\theta} & r \leq R \\ a_m H_m^{(1)}(kr) e^{im\theta} & r > R \end{cases}\tag{6.2}$$

où J_m (resp. $H_m^{(1)}$) est la fonction de Bessel (resp. fonction de Hankel du premier type) d'ordre m , la constante a_m est une constante de normalisation. Nous avons choisi la fonction de Hankel de premier type suivant son comportement asymptotique :

$$H_m^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz - i(2m+1)\pi/4} \quad |z| \gg 1$$

L'équation pour déterminer les résonances s'écrit à partir des conditions de continuité lors du passage de la frontière diélectrique. Les résonances sont les solutions de

$$S_m(kR) = 0 \quad \text{avec} \quad S_m(x) = \frac{n J_m'(nx)}{\nu J_m'(x)} - \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x)\tag{6.3}$$

où ν dépend de la polarisation du champ.

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{modes TM} \\ n^2 & \text{modes TE} \end{cases} \quad (6.4)$$

Nous avons calculé les premiers niveaux pour $n = 1.5$, cf. fig. 6.1. Nous remarquons que les résonances

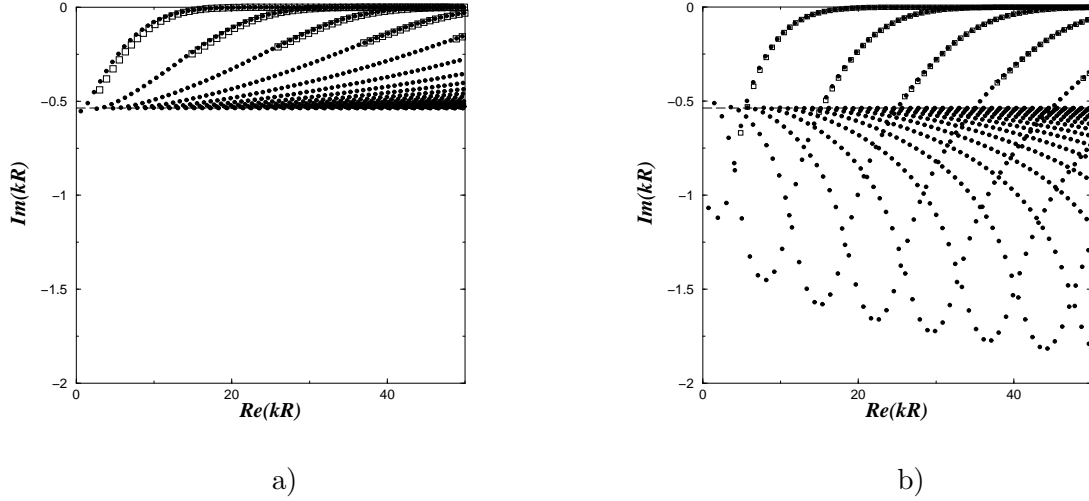


FIG. 6.1 – Résonances du cercle diélectrique pour $n = 1.5$. a) Modes TM. b) Modes TE. Les carrés représentent les approximations semiclassiques

sont réparties en branches, cela marque la conservation d'intégrales du mouvement et rappelle que ce système est intégrable. Dans le cas TM, nous pouvons aussi remarquer une borne inférieure pour $Im kR$. Ceci se justifie en considérant que pour le cercle, le diamètre est l'orbite la moins confinée, toute autre orbite a un temps de vie plus long. En utilisant (5.16), nous voyons que cela donne une borne inférieure à $Im kR$.

Pour trouver cette borne, nous écrivons la condition de quantification :

$$r^2 e^{2inkL} = 1, \quad (6.5)$$

où $L = 2R$ est la longueur du diamètre, r est le coefficient de Fresnel à une dimension :

$$r = \frac{n-1}{n+1} \quad (6.6)$$

Le calcul de l'inverse du temps de vie du diamètre donne :

$$Im kR = \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \equiv \gamma_{min}(n) \quad (6.7)$$

Pour $n = 1.5$, $\gamma_{min}(n) \simeq -0.536479$, ce qui correspond bien à la limite visible sur fig. 6.1a. Notons que ce raisonnement ne s'applique pas aux modes TE dû à la transmission totale lorsque l'angle d'incidence vaut l'angle de Brewster (5.12).

La figure fig. 6.2 montre un exemple d'état quasi-stationnaire du cercle. Nous avons choisi un état pair sous $\theta \rightarrow -\theta$.

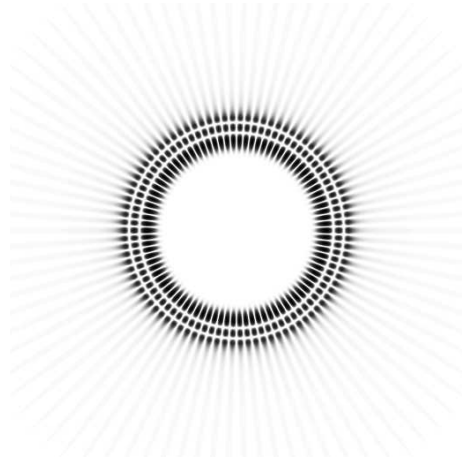


FIG. 6.2 – État quasi-stationnaire pair du cercle $m = 45$, $p = 2$.

Enfin la fonction de Green peut être écrite de manière analytique ici, le calcul est décrit dans l'appendice C.

6.2 Approximation semiclassique des résonances

6.2.1 Niveaux intérieurs confinés

Nous allons ici donner des formules approximatives pour les solutions de (6.3) dans le régime semiclassique. Remarquons d'abord que la formule (2.7) se généralise immédiatement au cas diélectrique :

$$\sin \theta = \frac{m}{nkR} \quad (6.8)$$

Nous voyons ainsi que les états confinés vérifient $m/n < kR < m$. Nous utilisons les approximations standards pour les fonctions de Bessel, cf. e.g. [80] :

$$H_m(x) \simeq -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\sqrt{m^2-x^2}}}{(m^2-x^2)^{1/4}} \left(\frac{m}{x} + \sqrt{\left(\frac{m}{x}\right)^2 - 1} \right)^m \quad m > x \quad (6.9)$$

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(x^2-m^2)^{1/4}} \cos \left(\sqrt{x^2-m^2} - m \arccos \frac{m}{x} - \frac{\pi}{4} \right) \quad x > m \quad (6.10)$$

Nous séparons dans (6.3) les parties réelle et imaginaire de kR . Suivant (6.10) et (6.9), l'équation pour $x = \text{Re } kR$ devient :

$$\sqrt{n^2x^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{nx} - \frac{\pi}{4} = \arctan \left(\nu \sqrt{\frac{m^2 - x^2}{n^2x^2 - m^2}} \right) + (p-1)\pi, \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (6.11)$$

Pour la partie imaginaire, nous supposons $y = \text{Im } kR$ assez petit pour faire un traitement perturbatif. D'après (1.6) :

$$n^2(k^2 - k^{*2})|\psi|^2 = \psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi$$

ce qui donne en intégrant sur la surface du disque ($kR = x + iy$) :

$$4 \frac{n^2}{R^2} ixy \int_{D_R} |\psi|^2 d\vec{r} = \int_{D_R} [\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi] d\vec{r} \quad (6.12)$$

Le membre de gauche se calcule via l'identité (6.13) vraie pour deux solutions $A_\nu(z), B_\nu(z)$ de l'équation de Bessel ($\nu \geq 0$).

$$\int_0^x A_\nu(t) B_\nu(t) t dt = \frac{x^2}{2} A'_\nu(x) B'_\nu(x) + \frac{x^2 - \nu^2}{2} A_\nu(x) B_\nu(x) \quad (6.13)$$

Soit ici :

$$\int_{D_R} |\Psi|^2 = \frac{\pi |a_m|^2}{n^2 k^2} \left(n^2 k^2 R^2 - m^2 + k^2 R^2 \left(n \frac{J'_m(nkR)}{J_m(nkR)} \right)^2 \right) J_m(nkR)^2$$

Nous utilisons la partie réelle de (6.3) et (6.9) :

$$n \frac{J'_m(nx)}{J_m(nx)} \simeq \text{Re} \left(\nu \frac{H'_m(x)}{H_m(x)} \right) \simeq -\nu \frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{x}$$

Finalement le membre de gauche de (6.12) s'écrit dans le régime semiclassique :

$$4 \frac{n^2}{R^2} ixy \int_{D_R} |\psi|^2 d\vec{r} = 4\pi ixy |a_m|^2 J_m(nx)^2 \left(n^2 - \nu^2 + \frac{m^2}{x^2} (\nu^2 - 1) \right)$$

Le membre de droite de (6.12) peut s'interpréter comme le flux de probabilité associé à la particule quantique¹. En utilisant la formule de Stokes, nous pouvons le réécrire :

$$\int_{D_R} [\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi] d\vec{r} = -8i |a_m|^2 \nu \left| \frac{J_m(nx)}{H_m(x)} \right|^2$$

¹Le flux se conserve à l'ordre dominant, lorsque k est réel.

Finalement la partie imaginaire des niveaux confinés s'écrit dans le régime semiclassique :

$$y \approx -\frac{2}{\pi x(n^2 - 1)|H_m^{(1)}(x)|^2} \zeta, \quad (6.14)$$

où

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{modes TM} \\ \frac{1}{(n^2 + 1)m^2/(n^2x^2) - 1} & \text{modes TE} \end{cases}$$

Réécrivons les formules (6.11) et (6.14) pour les niveaux confinés du cercle diélectrique dans le régime semiclassique ($x, m \gg 1, p \geq 1$) :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2x^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{nx} - \frac{\pi}{4} &= \arctan \left(\nu \sqrt{\frac{m^2 - x^2}{n^2x^2 - m^2}} \right) + (p - 1)\pi \\ y &\approx -\frac{2}{\pi x(n^2 - 1)|H_m^{(1)}(x)|^2} \zeta \end{aligned}$$

Nous avons utilisé ces formules pour comparer aux solutions exactes sur la figure fig. 6.1 en représentant les points correspondants aux approximations par des carrés. Nous remarquons en particulier que chaque branche correspond à une valeur fixée de p , nombre quantique radial.

6.2.2 Modes galleries

Pour les modes galleries ($x \sim m/n$), la formule (6.10) n'est plus valable, nous utilisons plutôt la formule de Langer :

$$J_m(x) = 3^{1/6} \sqrt{\frac{w - \arctan w}{w}} \left(\frac{2}{z}\right)^{1/3} \text{Ai} \left(-\left(\frac{3z}{2}\right)^{2/3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^{4/3}}\right), \quad (6.15)$$

avec

$$w = \sqrt{\frac{x^2}{m^2} - 1} \quad z = m(w - \arctan w).$$

$\text{Ai}(z)$ désigne la fonction d'Airy définie par :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \quad (6.16)$$

Nous avons suivi la même méthode que celle couramment utilisée pour donner une formule asymptotique pour les zéros de J_m , cf. [80] p.60. Nous donnons ici simplement le résultat :

$$x = \frac{m}{n} + \frac{\eta_p}{n} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} - \frac{1}{\nu \sqrt{n^2 - 1}} + \frac{3}{20} \frac{2^{1/3} \eta_p^2}{n m^{1/3}} + \frac{\eta_p n^2}{2^{1/3} \nu (n^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{2}{3\nu^2} - 1\right) \frac{1}{m^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right), \quad (6.17)$$

où $-\eta_p$ est le p^e zéro de la fonction d'Airy (6.16). Nous pouvons encore réécrire (6.17) sous la forme :

$$x = \frac{j_{m,n}}{n} - \frac{j_{m,n}}{\nu \sqrt{n^2 m^2 - j_{m,n}^2}} + o(1) ,$$

où $j_{m,n}$ est le n^e zéro de J_m .

Nous avons interpolé le reste de (6.17) pour les deux polarisations sur la figure fig. 6.3 suivant la formule :

$$R_m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m^{4/3}}$$

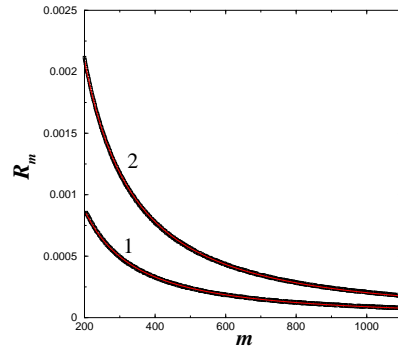


FIG. 6.3 – Interpolation du reste dans l'approximation semiclassique des modes galleries. 1 : modes TM. 2 : modes TE.

Nous voyons un bon accord avec notre formule en prenant :

$$\begin{aligned} a = -0.0318 \quad b = 1.212 & \quad \text{pour les modes TM} \\ a = -0.0999 \quad b = 3.038 & \quad \text{pour les modes TE} \end{aligned}$$

6.2.3 Niveaux extérieurs

Nous avons enfin étudié les niveaux extérieurs, au sens de la dualité introduit dans [61], analogues à ceux liés au problème « extérieur » de diffraction sur un obstacle circulaire, cf. annexe B.2. Ces niveaux sont situés au voisinage des zéros des fonctions de Hankel. Dans le régime semiclassique,

ces niveaux s'écrivent, cf. aussi [62] :

$$z = m + \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} \eta_p e^{-2i\pi/3} - \frac{i\nu}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{3\eta_p^2 e^{-4i\pi/3}}{5 \cdot 2^{5/3}} \frac{1}{m^{1/3}} \quad (6.18)$$

$$+ \frac{i\nu\eta_p e^{-2i\pi/3}}{2^{1/3}(n^2 - 1)^{3/2}} \left(1 - \frac{2}{3}\nu^2\right) \frac{1}{m^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right) \quad (6.19)$$

Nous pouvons également réécrire (6.19) sous la forme

$$z = h_{m,p} - \frac{i\nu h_{m,p}}{\sqrt{n^2 h_{m,p} - m^2}} + o(1) ,$$

$h_{m,n}$ désignant cette le n^e zéro de $H_m^{(1)}$. La figure 6.4 montre les quatre premières branches de ces modes pour les deux polarisations.

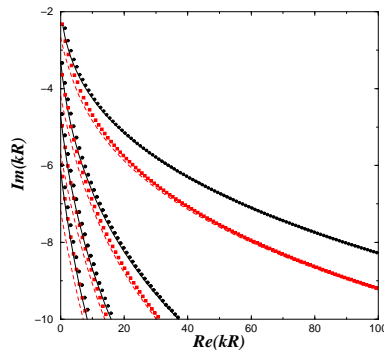


FIG. 6.4 – Niveaux extérieurs du disque diélectrique pour $n = 1.5$. Les lignes correspondent à la prévision (6.19).

Dans le régime semiclassique, les fonctions d'ondes associés à ces niveaux extérieurs sont exponentiellement petites à l'intérieur de la cavité : l'onde est principalement localisée à l'extérieur de la cavité.

6.3 Perturbation du disque

Nous allons décrire ici la méthode utilisée dans [57] pour étudier le spectre des résonances et les directions d'émissions lorsque l'on modifie *légèrement* la forme d'une cavité circulaire. Nous

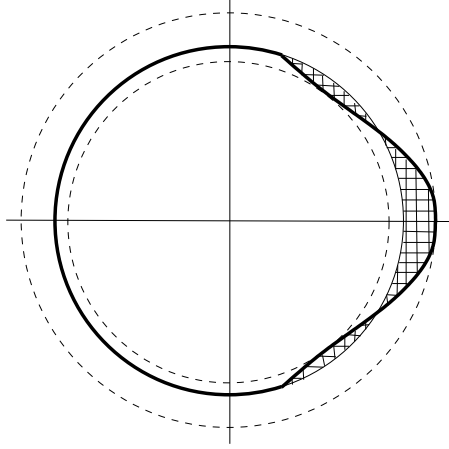


FIG. 6.5 – Exemple d’une cavité circulaire légèrement déformée. Les zones hachurées représentent les régions où $n(\vec{x})$ est différent du cas circulaire.

supposons à présent que la cavité diélectrique a une frontière d’équation en coordonnées polaires :

$$r = R + \lambda f(\theta) \quad (6.20)$$

La modification de forme est supposée petite, cf. fig. 6.5 :

$$|\lambda f(\theta)| \ll R. \quad (6.21)$$

Nous verrons plus bas que, si $\delta\mathcal{A}$ est la mesure de la région où $n(\vec{x})$ est différent de sa valeur pour le cercle (la zone hachurée dans fig. 6.5), alors le critère de validité de notre traitement perturbatif est

$$k^2 \delta\mathcal{A} \ll 1 \quad (6.22)$$

Sous ces conditions, nous allons donner des formules générales pour les quantités les plus pertinentes pour l’expérience : le décalage des résonances et les amplitudes d’interférences pour les fonctions d’ondes perturbées. Pour simplifier les calculs, nous avons seulement considéré des perturbations symétriques, i.e. $f(-\theta) = f(\theta)$, nos résultats pouvant être généralisés à une perturbation plus générale. Nous nous restreindrons en outre aux modes TM (la même méthode pouvant être suivie pour les modes TE). Nous allons à présent détailler les deux méthodes utilisées.

6.3.1 Étude perturbative via les conditions aux limites

Nous adaptons ici une méthode exposée dans [58, 59] en théorie exacte de la diffraction. Les conditions de continuité à la surface de la frontière diélectrique sont à présent :

$$\psi_1(R + \lambda f(\theta), \theta) = \psi_2(R + \lambda f(\theta), \theta) \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r}(R + \lambda f(\theta), \theta) = \frac{\partial \psi_2}{\partial r}(R + \lambda f(\theta), \theta) , \quad (6.24)$$

où ψ_1 (resp. ψ_2) est la fonction d'onde à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de la cavité.

La méthode consiste à développer (6.23), (6.24) en puissances de λ , considéré comme le petit paramètre ici.

Les équations de perturbation sont :

$$[\psi_1 - \psi_2](R, \theta) = -\lambda f(\theta) \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right] (R, \theta) - \frac{1}{2} \lambda^2 f^2(\theta) \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} \right] (R, \theta) + \dots \quad (6.25)$$

$$\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right] (R, \theta) = -\lambda f(\theta) \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} \right] (R, \theta) - \frac{1}{2} \lambda^2 f^2(\theta) \left[\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r^3} \right] (R, \theta) + \dots \quad (6.26)$$

Nous avons cherché des solutions sous la forme :

$$\Psi_1(r, \theta) = \frac{J_m(nkr)}{J_m(nx)} \cos(m\theta) + \sum_{p \neq m} a_p \frac{J_p(nkr)}{J_p(nx)} \cos(p\theta) , \quad (6.27)$$

$$\Psi_2(r, \theta) = (1 + b_m) \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(x)} \cos(m\theta) + \sum_{p \neq m} (a_p + b_p) \frac{H_p^{(1)}(kr)}{H_p^{(1)}(x)} \cos(p\theta) . \quad (6.28)$$

Enfin nous avons estimé le décalage des résonances sous la forme :

$$x = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots \quad (6.29)$$

où x_0 est la solution de (6.3).

Nous avons mené les calculs jusqu'au second ordre ; les résultats peuvent être écrits ainsi pour les amplitudes d'interférences :

$$\begin{aligned} a_p &= \lambda x_0 (n^2 - 1) \frac{1}{S_p(x_0)} \left[A_{pm} \right. \\ &+ \lambda \left(A_{pm} A_{mm} \left(\frac{x_0}{S_p} \frac{\partial S_p}{\partial x} - 1 \right) + \frac{1}{2} B_{pm} \left(1 + x_0 \left(\frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} + \frac{H_p^{(1)'}}{H_p^{(1)}} \right) \right) + x_0 (n^2 - 1) \sum_{k \neq m} \frac{A_{pk} A_{km}}{S_k(x_0)} \right] \\ &+ \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$b_p = \lambda^2 \frac{1}{2} x_0^2 (n^2 - 1) B_{pm} + \mathcal{O}(\lambda^3) , \quad (6.31)$$

et pour le décalage en énergie :

$$x = x_0 \left[1 - \lambda A_{mm} + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} (3A_{mm}^2 - B_{mm}) + x_0 (A_{mm}^2 - B_{mm}) \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x_0) - (n^2 - 1) x_0 \sum_{k \neq m} A_{mk} \frac{1}{S_k(x_0)} A_{km} \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (6.32)$$

Nous avons introduit dans ces formules les harmoniques de la déformation :

$$A_{pm} = \frac{\epsilon_p}{\pi R} \int_0^\pi f(\theta) \cos(p\theta) \cos(m\theta) d\theta \quad (6.33)$$

$$B_{pm} = \frac{\epsilon_p}{\pi R^2} \int_0^\pi f^2(\theta) \cos(p\theta) \cos(m\theta) d\theta \quad (6.34)$$

avec

$$\epsilon_p = \begin{cases} 2 & \text{pour } p \neq 0 \\ 1 & \text{pour } p = 0 \end{cases}. \quad (6.35)$$

6.3.2 Étude perturbative suivant la fonction de Green

Nous allons ici donner une méthode plus usuelle pour déterminer la série perturbative. Suivant (5.4) et (5.5), la fonction $n(\vec{x})$ caractérise la cavité déformée. Notons $n_0(\vec{x})$ la fonction indice pour le cercle :

$$n_0(\vec{x}) = \begin{cases} n & |\vec{x}| \leq R \\ 1 & |\vec{x}| > R \end{cases} \quad (6.36)$$

$\delta n(\vec{x}) = n(\vec{x}) - n_0(\vec{x})$ devient l'écart au cercle². L'équation (1.6) peut se réécrire :

$$(\Delta + n_0(\vec{x})^2 k^2) \psi(\vec{x}) = -\delta n(\vec{x}) k^2 \psi(\vec{x}),$$

le second membre étant vu comme une perturbation.

L'équation de perturbation est ici

$$\psi(\vec{x}) = -k^2 \int G(\vec{x}, \vec{y}) \delta n^2(\vec{y}) \psi(\vec{y}) d\vec{y} \quad (6.37)$$

En cherchant des solutions de la forme (6.27) et (6.28), on peut vérifier que l'on retrouve le même résultat que précédemment, cf. [57].

² $\delta \mathcal{A}$ défini plus haut est le support de $\delta n(\vec{x})$.

6.3.3 Discussion

Nous avons donné des formules générales pour une légère déformation d'une cavité circulaire diélectrique. Nous voulons ici discuter plus précisément dans quel cadre ces résultats sont applicables. Nous nous restreindrons aux modes confinés (i. e. à grand facteur de qualité).

Au premier ordre, les amplitudes d'interférences font intervenir les A_{pm} avec :

$$|A_{pm}| \leq 2 \int \left| \frac{f(\theta)}{R} \right| d\theta \text{ et } \int \left| \frac{f(\theta)}{R} \right| d\theta \sim \frac{\delta \mathcal{A}}{\pi R^2}$$

La série perturbative au premier ordre pour les fonctions d'ondes est de la forme, par exemple à l'intérieur :

$$\delta\psi \sim x_0(n^2 - 1) \sum_{p \neq m} \frac{A_{pm}}{S_p(x_0)} \frac{J_p(nkr)}{J_p(nx_0)} \cos(p\theta)$$

On peut donc estimer sa valeur typique par ($x = \text{Re } kR$) :

$$|\delta\psi| \sim 2(n^2 - 1)x \frac{\delta \mathcal{A}}{\pi R^2} \left| \left\langle \frac{1}{S_p(x)} \right\rangle \right|,$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne une somme sur $p \neq m$.

Pour évaluer la moyenne, nous allons utiliser la loi de Weyl : si $\bar{N}(E)$ est le nombre moyen de résonances telles que $\text{Re}(n^2 k^2) < E$, alors l'espacement moyen entre la partie réelle de deux résonances vaut $\delta = E/\bar{N}(E)$, et la moyenne est environ :

$$\left| \left\langle \frac{1}{S_p(x)} \right\rangle \right| \sim \left| \frac{1}{S'_p(x)\delta x} \right|$$

avec

$$S'_p(x) = -(n^2 - 1) - \frac{S_p(x)}{x} - S_p(x) \left(n \frac{J'_p(nx)}{J_p(nx)} + \frac{H_p^{(1)'}}{H_p^{(1)}}(x) \right)$$

On peut vérifier que seuls les p proches de m contribuent : $|S'_p(x)| \sim n^2 - 1$.

Pour calculer l'espacement moyen, nous utilisons le terme dominant de la loi de Weyl :

$$\bar{N}(E) = \frac{\mathcal{A}}{8\pi} n^2 k^2 + \mathcal{O}(k)$$

Nous voulons nous restreindre aux résonances vérifiant $m/n < x < m$: nous devons considérer la surface de l'espace des phases qu'ils occupent :

$$\mathcal{A}_c = \pi R^2 s_n$$

avec

$$s_n = 1 - \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

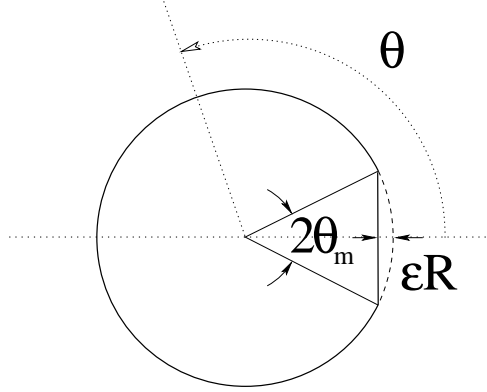


FIG. 6.6 – Schéma d'un disque coupé

L'espace moyen entre deux niveaux est donc :

$$\delta x \simeq \frac{4}{n^2 s_n x}$$

ce qui donne pour l'amplitude de la fonction d'onde perturbée :

$$|\delta\psi| \simeq s_n n^2 \frac{k^2 \delta\mathcal{A}}{2\pi} \quad (6.38)$$

qui redonne (6.22) à un facteur près. Physiquement, cela signifie que la longueur d'onde doit être au moins de l'ordre de la taille typique du domaine où la cavité a été perturbée.

Il est important de noter que cette estimation de S'_p est assez grossière : comme le disque est intégrable, nous savons que les parties réelles des états très bien confinés se comportent comme des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties [3]. Le spectre contient en particulier des niveaux quasi-dégénérés où $1/S_p$ n'est plus proche de sa valeur moyenne. Nous avons pris en compte cet effet en utilisant la méthode exposée dans [63].

Enfin nous avons pu comparer notre traitement perturbatif aux simulations numériques : nous avons choisi d'étudier un disque légèrement coupé, cf. fig. 6.6. La perturbation prend la forme :

$$f(\theta) = \begin{cases} R \left(1 - \frac{1-\epsilon}{\cos\theta}\right) & |\theta| < \theta_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.39)$$

avec $\theta_m = \arccos(1-\epsilon)$.

La figure 6.7 montre le spectre et l'intensité en champ lointain du disque coupé et les comparaisons avec les simulations. Sur la figure 6.7a, les cercles blancs vides représentent les résultats du calcul perturbatif tandis que les rouges pleins correspondent au calcul perturbatif. Nous pouvons

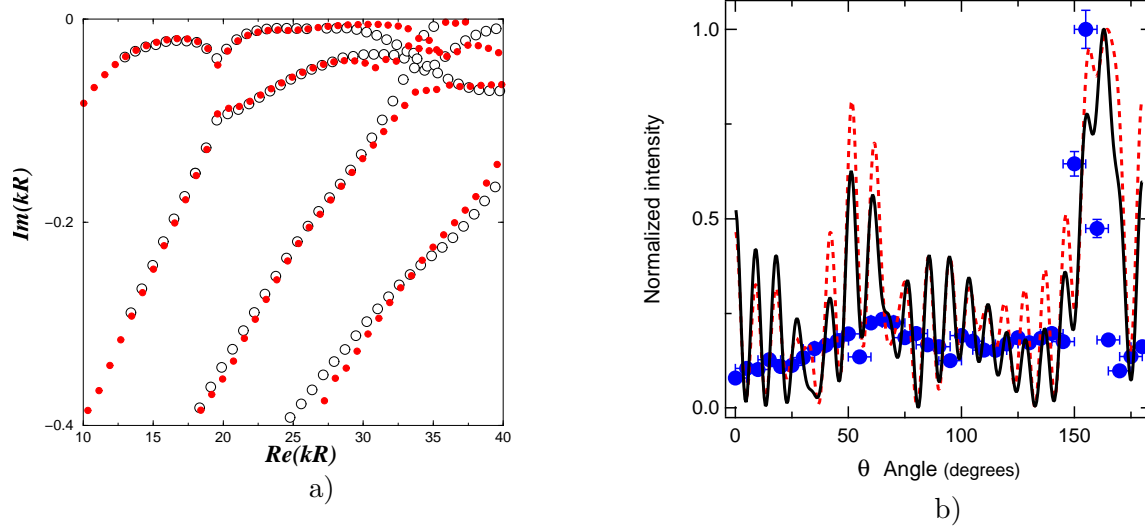


FIG. 6.7 – a) Résonances du cercle coupé pour $n = 1.5$ et $\epsilon = 0.05$. b) Intensité en champ lointain (cf. texte)

constater un bon accord. La figure 6.7b montre l'intensité en champ lointain. La ligne en traits pleins est le résultat de la résolution numérique directe, celle en traits pointillés vient du calcul perturbatif. Enfin les points bleus sont les résultats de mesures expérimentales effectuées à Cachan. Nous constatons là encore un bon accord avec les prévisions.

La figure 6.8 montre une comparaison entre la fonction d'onde issue de la résolution numérique et celle calculée par perturbation.

6.4 Formule de trace

Nous nous restreignons ici aux modes TM ($\nu = 1$).

6.4.1 Formule générale

Nous allons séparer le calcul à l'intérieur et à l'extérieur. La trace de la fonction de Green s'écrit à l'intérieur formellement ($x = kR$), cf. annexe C :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{2\pi x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{J_m(nkr)^2}{S_m(x) J_m(x)^2} + \frac{1}{4i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{J_m(nkr)}{J_m(nx)} \left(J_m(nx) H_m^{(1)}(nkr) - J_m(nkr) H_m^{(1)}(nx) \right)$$

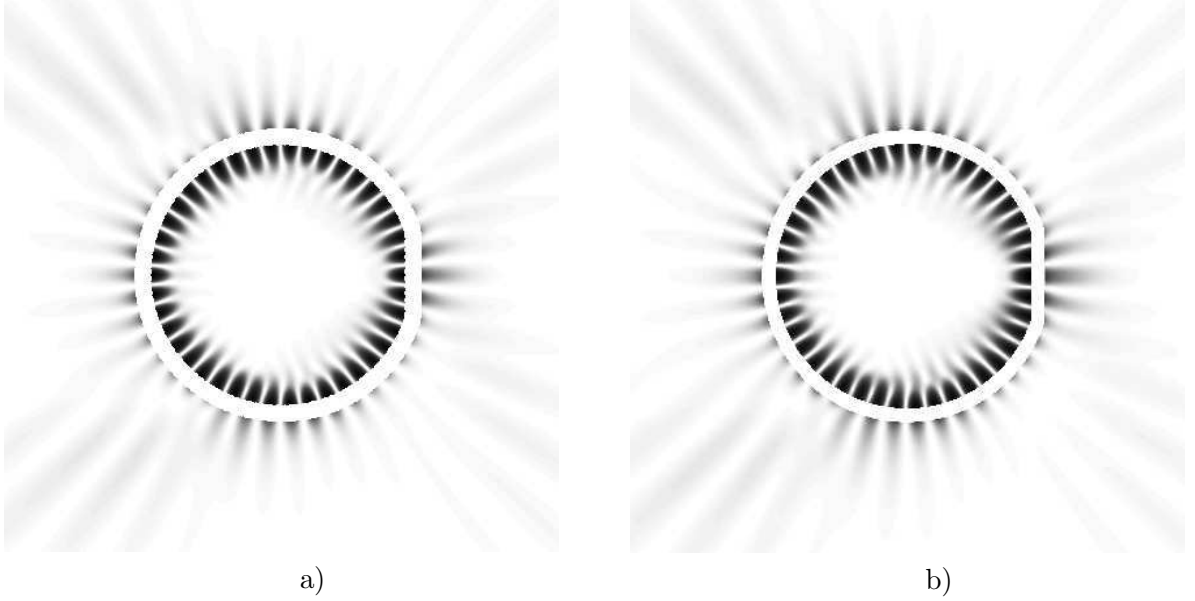


FIG. 6.8 – État quasi-stationnaire du disque coupé. a) obtenu par résolution numérique $kR = 16.655 - 0.0199i$. b) obtenu par perturbation $kR = 16.659 - 0.0191i$

En utilisant l'identité (6.13), la trace à l'intérieur s'écrit :

$$\int_{r < R} G(\vec{r}, \vec{r}) d\vec{r} = -\frac{R^2}{2x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{S_m(x)} \left(\frac{J'_m(nx)^2}{J_m(nx)^2} + 1 - \frac{m^2}{n^2 x^2} \right) - \frac{1}{n} \frac{J'_m(nx)}{J_m(nx)} \quad (6.40)$$

La fonction de Green à l'extérieur s'écrit :

$$G(\vec{r}, \vec{r}) = -\frac{1}{2\pi x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{H_m^{(1)}(kr)^2}{S_m(x) H_m^{(1)}(x)^2} + \frac{1}{4i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(x)} \left(H_m^{(1)}(x) J_m(kr) - J_m(x) H_m^{(1)}(kr) \right)$$

Lors du calcul de la trace, nous isolons la partie divergente :

$$\int_{R < r < A/k} G(\vec{r}, \vec{r}) d\vec{r} = \frac{R^2}{2x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{S_m(x)} \left(\frac{H_m^{(1)'}(x)^2}{H_m^{(1)}(x)^2} + 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) - \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} + f(A, x) \quad (6.41)$$

où

$$\begin{aligned} f(A, x) = & -\frac{1}{xk^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{S_m(x) H_m^{(1)}(x)^2} + \frac{\pi x}{2i} \frac{J_m(x)}{H_m^{(1)}(x)} \right) \left(\frac{A^2}{2} H_m^{(1)'}(A)^2 + \frac{A^2 - m^2}{2} H_m^{(1)}(A)^2 \right) \\ & + \frac{\pi}{2ik^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{A^2}{2} H_m^{(1)'}(A) J'_m(A) + \frac{A^2 - m^2}{2} H_m^{(1)}(A) J_m(A) \right) \end{aligned} \quad (6.42)$$

Nous pouvons vérifier que la partie divergente de (6.42) est la contribution venant de la fonction de Green libre $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$ (6.43) :

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (6.43)$$

$$\frac{\pi}{2ik^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{A^2}{2} H_m^{(1)'}(A) J_m'(A) + \frac{A^2 - m^2}{2} H_m^{(1)}(A) J_m(A) \right) = \int_{r < A/k} G_0(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}$$

En additionnant les parties intérieure et extérieure, nous obtenons l'expression particulièrement simple :

$$d(E) - d_0(E) = \frac{R^2}{2\pi k R} \operatorname{Im} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 - 1}{S_m(kR)} \quad (6.44)$$

Nous avons par ailleurs calculé la matrice \mathbf{S} suivant la méthode exposée dans [60] :

$$\mathbf{S}_m(k) = - \frac{H_m^{(2)}(kR)}{H_m^{(1)}(kR)} \frac{n \frac{J_m'(nkR)}{J_m}(nkR) - \frac{H_m^{(2)'}}{H_m^{(2)}}(kR)}{n \frac{J_m'(nkR)}{J_m}(nkR) - \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(kR)} \quad (6.45)$$

Nous vérifions alors :

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S} , \quad (6.46)$$

ce qui constitue la formule de Krein pour le disque diélectrique.

6.4.2 Partie lisse. Termes de Weyl.

Nous allons ici déduire les termes lisses de (6.44). Nous suivrons la méthode habituellement suivie dans l'étude des billards en passant provisoirement dans le plan complexe de E (cf. e.g. [55,56]). Nous donnerons plus de détail dans le chapitre suivant.

En utilisant (6.44) et (7.3) nous avons³ :

$$g(s) = \frac{1}{2s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 - 1}{\sigma_m(s)} ,$$

où

$$\sigma_m(s) = n \frac{I_m'(ns)}{I_m}(ns) - \frac{K_m'}{K_m}(s)$$

³Nous prenons dans ce paragraphe $R = 1$.

I_m (resp. K_m) représente la fonction de Bessel modifiée du premier type (resp. du troisième type), cf. [80]. Nous utilisons ensuite les développements asymptotiques suivants :

$$\frac{I'_m(s)}{I_m(s)} = \frac{\sqrt{m^2 + s^2}}{s} - \frac{s}{2(m^2 + s^2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad (6.47)$$

$$\frac{K'_m(s)}{K_m(s)} = -\frac{\sqrt{m^2 + s^2}}{s} - \frac{s}{2(m^2 + s^2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad (6.48)$$

Nous obtenons :

$$g(s) = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 - 1}{\sqrt{m^2 + n^2 s^2} + \sqrt{m^2 + s^2}} + \frac{1}{4} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{m^2 + n^2 s^2} - \sqrt{m^2 + s^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 s^2} + \sqrt{m^2 + s^2}} \left(\frac{n^2}{m^2 + n^2 s^2} - \frac{1}{m^2 + s^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)$$

Enfin la partie lisse de la densité de nombres d'ondes s'obtient via (7.5), soit ici :

$$\bar{d}(k) - \bar{d}_0(k) = (n^2 - 1) \frac{\mathcal{A}}{2\pi} k + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R(t) \left(\frac{n^2}{t^2 + n^2} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt, \quad (6.49)$$

où $R(t)$ est l'analogie du coefficient de Fresnel :

$$R(t) = \frac{\sqrt{t^2 + n^2} - \sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + n^2} + \sqrt{t^2 + 1}} \quad (6.50)$$

Il est plus usuel d'écrire la série de Weyl pour la densité de niveaux en utilisant l'identité :

$$d(E) - d_0(E) = \frac{d(k) - d_0(k)}{2k} \quad (6.51)$$

Nous nous intéresserons désormais à la seule contribution des résonances intérieures, pour retrouver en particulier la somme sur les niveaux du billard dans la limite $n \rightarrow +\infty$. Nous réécrivons (6.49) :

$$\bar{d}(E) - \bar{d}_0(E) = (n^2 - 1) \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + \left(r(n) - 1 \right) \frac{\mathcal{L}}{8\pi\sqrt{E}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{E}\right), \quad (6.52)$$

où le terme de longueur contient un terme dû aux réflexions dans le diélectrique :

$$r(n) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} R(t) \left(\frac{n^2}{t^2 + n^2} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \quad (6.53)$$

Nous avons extrait dans (6.52) la contribution des résonances intérieures du reste par anticipation sur la discussion ci-après dans le cas général.

Nous avons testé ce résultat en considérant la fonction de comptage :

$$\bar{N}(E) = \int_0^E \bar{d}(E') dE' \quad (6.54)$$

$\bar{N}(E)$ est le nombre de résonances intérieures d'énergie inférieure à E fixé.

Rappelons que, dans le cas des billards, la partie lisse est donnée par la série de Weyl :

$$\bar{N}(E) = \frac{\mathcal{A}}{4\pi}E + \frac{r}{8\pi\sqrt{E}} + \mathcal{O}(1) \quad (6.55)$$

où $r = \pm 1$ dépend des conditions aux bords. Nous étudierons plus en détails cette formule dans le chapitre suivant. Pour le cercle, nous avons simplement tracé la fonction de comptage des résonances (intérieures), comptées avec multiplicité et comparé à la prévision⁴ :

$$\bar{N}(k) = \frac{n^2\mathcal{A}}{4\pi}k^2 + \frac{r(n)}{4\pi}k + \mathcal{O}(1) \quad (6.56)$$

Le différence avec la prévision est tracée dans la figure fig. 6.9, pour deux indices $n = 1.5$ et $n = 2$.

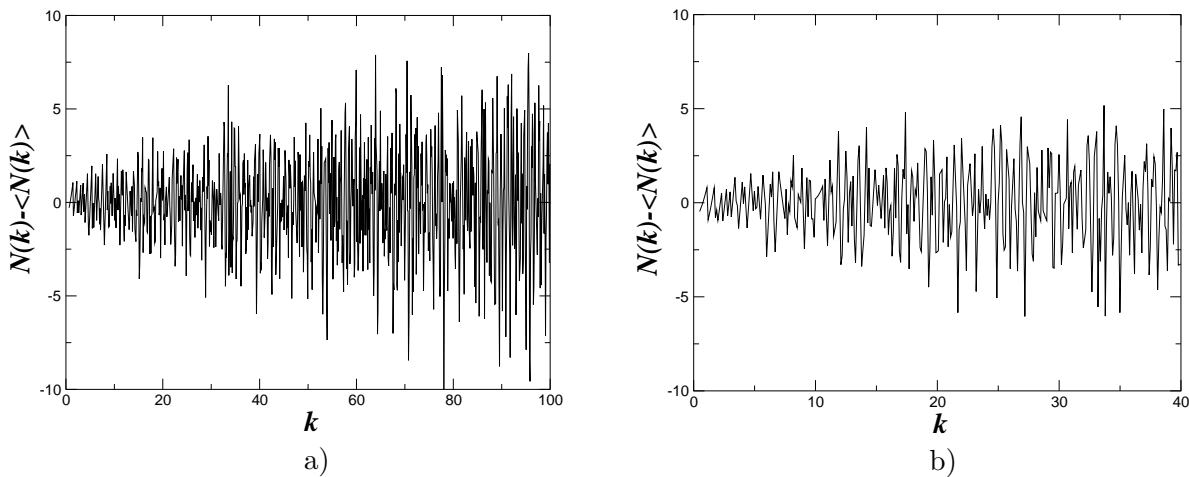


FIG. 6.9 – Différence entre $N(k)$ et sa valeur moyenne pour le cercle diélectrique. a) $n = 1.5$. b) $n = 2$.

L'interpolation de $\bar{N}(k)$ donne pour $n = 1.5$:

$$\bar{N}(k) = \frac{n^2}{4}k^2 + 0.5139k + 0.1518$$

ce qui correspond bien à la formule (6.56) pour le terme linéaire :

$$\frac{r(n)}{2} = 0.5125$$

⁴Nous repérons les résonances plutôt par leur nombre d'onde désormais.

Nous avons obtenu aussi un bon accord dans le cas $n = 2$, le fit est cette fois :

$$\bar{N}(k) = \frac{n^2}{4}k^2 + 0.5446k + 0.0336 ,$$

à comparer avec la prévision :

$$\frac{r(2)}{2} = 0.5420$$

6.4.3 Partie oscillante. Somme sur les orbites périodiques classiques

Je rappelle la formule exacte obtenue (6.44) :

$$d(E) - d_0(E) = \frac{R^2}{2\pi k R} \operatorname{Im} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 - 1}{S_m(kR)}$$

Nous noterons désormais $x = kR$ et nous nous placerons dans le régime semiclassique $x, m \gg 1$ et $m/n < x < m$.

$$\begin{aligned} n \frac{J'_m}{J_m}(nx) &\simeq -\frac{\sqrt{n^2 x^2 - m^2}}{x} \tan \phi_m(x) \\ \phi_m(x) &= \sqrt{n^2 x^2 - m^2} - m \arccos\left(\frac{m}{nx}\right) - \frac{\pi}{4} \\ \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x) &\simeq -\frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

Nous obtenons en reportant :

$$d(E) - d_0(E) = -(n^2 - 1) \frac{R^2}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{n^2 x^2 - m^2} \tan \phi_m(x) - \sqrt{m^2 - x^2}}$$

Nous choisissons la prescription : $x \rightarrow x + i\epsilon$ (correspondant à la fonction de Green retardée).

$$\phi_m(x + i\epsilon) \simeq \phi_m(x) + i\epsilon \frac{\sqrt{n^2 x^2 - m^2}}{x}$$

Nous pouvons alors développer $d(E) - d_0(E)$ en puissances de $e^{i\phi_m(x+i\epsilon)}$:

$$\begin{aligned}
 d(E) - d_0(E) &= -(n^2 - 1) \frac{R^2}{2\pi} \times \\
 \operatorname{Im} \sum_{m \in \mathbb{Z}} &\frac{1 - e^{2i\phi_m(x) - 2\epsilon\phi'_m}}{-\sqrt{m^2 - x^2} + i\sqrt{n^2x^2 - m^2} - (\sqrt{m^2 - x^2} + i\sqrt{n^2x^2 - m^2})e^{2i\phi_m(x) - 2\epsilon\phi'_m}} \\
 &= (n^2 - 1) \frac{R^2}{2\pi} \times \\
 \operatorname{Re} \sum_{m \in \mathbb{Z}} &\frac{1 - e^{2i\phi_m(x) - 2\epsilon\phi'_m}}{\left(\sqrt{n^2x^2 - m^2} + i\sqrt{m^2 - x^2}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{n^2x^2 - m^2} - i\sqrt{m^2 - x^2}}{\sqrt{n^2x^2 - m^2} + i\sqrt{m^2 - x^2}} e^{2i\phi_m(x) - 2\epsilon\phi'_m}\right)}
 \end{aligned}$$

Nous voyons apparaître le coefficient de Fresnel pour les modes TM :

$$r = \frac{\sqrt{n^2x^2 - m^2} - i\sqrt{m^2 - x^2}}{\sqrt{n^2x^2 - m^2} + i\sqrt{m^2 - x^2}} = e^{-2i\delta_m} \quad (6.57)$$

D'où

$$d(E) - d_0(E) = \sqrt{n^2 - 1} \frac{R^2}{2\pi x} \operatorname{Re} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\delta_m} \frac{1 + e^{2i\phi_m - 2\epsilon\phi'_m}}{1 - e^{2i\phi_m - 2\epsilon\phi'_m - 2i\delta_m}}$$

En utilisant

$$e^{2i\phi_m - 2\epsilon\phi'_m} = (e^{2i\phi_m - 2\epsilon\phi'_m - 2i\delta_m} - 1 + 1)e^{2i\delta_m},$$

nous pouvons réécrire

$$e^{-i\delta_m} \frac{1 + e^{2i\phi_m - 2\epsilon\phi'_m}}{1 - e^{2i\phi_m - 2\epsilon\phi'_m - 2i\delta_m}} = \frac{2 \cos \delta_m}{1 - e^{2i\phi_m - 2\epsilon\phi'_m - 2i\delta_m}} - e^{i\delta_m}$$

Nous obtenons finalement dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$d(E) - d_0(E) = \frac{R^2}{2\pi x^2} \sum_{m, p \in \mathbb{Z}} \sqrt{n^2x^2 - m^2} e^{2ip(\phi_m - \delta_m)} \quad (6.58)$$

Nous devons encore effectuer quelques transformations pour faire apparaître une somme sur les orbites classiques. Il reste en effet à écrire la formule de Poisson puis à calculer l'intégrale selon la méthode du col. Nous écrirons dans la suite P au lieu de p .

$$d(E) - d_0(E) = \frac{R^2}{2\pi x^2} \sum_{M, P \in \mathbb{Z}} \int e^{2\pi i M m} \sqrt{n^2x^2 - m^2} e^{2iP(\phi_m - \delta_m)} dm$$

Le terme $M = P = 0$ contribue à la partie lisse (cf. avant). Pour la partie oscillante, l'équation de col est :

$$M + \frac{P}{\pi} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial m} + \frac{\partial \delta_m}{\partial m} \right) = 0 \quad (6.59)$$

Dans le régime semiclassique, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_m}{\partial m} &= -\arccos\left(\frac{m}{nx}\right) = \mathcal{O}(1) , \\ \frac{\partial \delta_m}{\partial m} &= \frac{m}{\sqrt{(m^2 - x^2)(n^2x^2 - m^2)}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right) , \end{aligned}$$

soit $\frac{\partial \phi_m}{\partial m} \gg \frac{\partial \delta_m}{\partial m}$.

L'équation de col (6.59) peut donc se réécrire :

$$\frac{M\pi}{P} = \arccos\left(\frac{m}{nx}\right) ,$$

de telle manière que $PM > 0$ et $|P| > |M|$.

Nous définissons comme d'habitude la longueur des orbites périodiques et l'aire couverte par chaque famille d'orbites :

$$\begin{aligned} l_p &= 2PR \sin\left(\frac{\pi M}{P}\right) \\ \mathcal{A}_p &= \pi R^2 \sin^2\left(\frac{\pi M}{P}\right) \end{aligned} \quad (6.60)$$

La partie oscillante de la densité de niveaux s'écrit finalement :

$$d^{(osc)}(E) = \frac{n^{3/2}}{\pi} \sum_{\substack{P>0 \\ 0<M<P}} \frac{\mathcal{A}_p}{\sqrt{2\pi k l_p}} \left(r^P e^{i n k l_p - i P \pi / 2 + i \pi / 4} + \text{c.c.} \right) \quad (6.61)$$

Nous remarquons en particulier que cette formule inclut aussi les orbites classiques non confinées : r est alors réel plus petit que 1 et la contribution est plus petite que pour une orbite confinée. Il est intéressant de comparer la formule obtenue avec celle (2.13) obtenue pour le billard circulaire :

$$d^{(osc)}(E) = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{P>0 \\ 0<M<P/2}} \frac{\mathcal{A}_p}{\sqrt{2\pi k l_p}} \left(e^{i k l_p - 3i P \pi / 2 + i \pi / 4} + \text{c.c.} \right)$$

Nous voyons ainsi que, pour passer au cas diélectrique, les longueurs doivent être converties en longueur optique ($l_p \rightarrow n l_p$, $\mathcal{A}_p \rightarrow n^2 \mathcal{A}_p$). Le facteur de phase dû à la réflexion sur les bords dans le

cas du billard⁵ doit aussi être changé en le coefficient de Fresnel r pour tenir compte de la frontière diélectrique.

Nous avons voulu testé cette formule en calculant la densité d'orbites périodiques via la formule :

$$d(l) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikl} d(k) dk$$

Nous avons tracé sur la figure fig. 6.10 $|d(l)|^2$ en sommant sur toutes les résonances vérifiant $\text{Re } kR < 100$. Conformément à (6.61), nous pouvons voir que la courbe est piquée autour des longueurs (6.60) des orbites périodiques classiques du cercle.

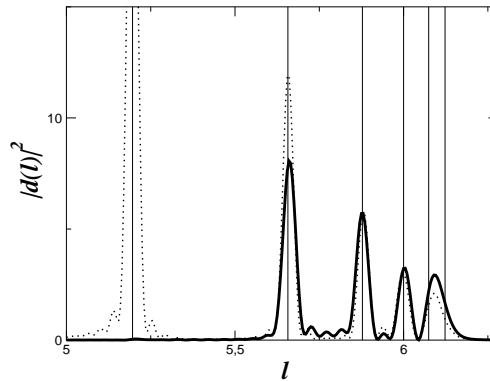


FIG. 6.10 – Densité d'orbites périodiques du cercle. La courbe en traits pointillés correspond au billard circulaire, celle en trait plein à une cavité diélectrique circulaire avec $n = 1.5$.

Dans le cas diélectrique, pour $n = 1.5$, l'orbite du triangle n'est pas confinée ce qui explique pourquoi la courbe n'est pas piquée autour de la longueur de cette orbite.

⁵-1 pour les conditions de Dirichlet, +1 pour Neumann.

Chapitre 7

Formule de trace pour une cavité diélectrique

À la suite de [9], nous voulons ici généraliser les résultats obtenus pour le cercle afin de proposer une formule de trace pour une cavité diélectrique de forme quelconque.

Nous allons donner une généralisation au cas diélectrique des formules de trace connues pour les billards. Nous montrerons ensuite comment ces formules s'accordent aux simulations numériques en considérant des cavités de régularité diverse. Nous exposerons d'abord une forme « régulière » : le carré. Nous mentionnerons ensuite une généralisation en considérant le rectangle et l'ellipse (intégrables dans le cas fermé, cf. e.g. [64] pour l'ellipse).

Nous étudierons ensuite le cas du pentagone pour estimer l'importance de la non-intégrabilité classique dans le cas polygonal.

Enfin nous terminerons par l'étude de deux systèmes chaotiques : le disque coupé et le stade de Bunimovitch.

7.1 Généralités

Il s'agit de généraliser les formules bien connues pour les billards à l'étude de cavités diélectriques. La première partie expose comment nous avons choisi les premiers termes de la série de Weyl. La seconde donne une généralisation de la partie oscillante, la somme sur les orbites périodiques classiques. Nous nous intéresserons exclusivement aux résonances intérieures. Nous décidons en particulier de définir la densité de niveaux d'une cavité diélectrique comme la somme sur les résonances intérieures :

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \sum_m \operatorname{Im} \frac{1}{E - E_m + i/\tau_m} \quad (7.1)$$

Nous supposons d'abord que la matrice \mathbf{S} de la cavité diélectrique peut s'écrire comme le produit de la matrice du problème (extérieur) de diffraction \mathbf{S}_D et d'un autre facteur \mathbf{S}_r . Nous pouvons le

vérifier dans le cas du cercle via (6.45) et (B.5). Selon la formule de Krein, nous aurons

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial E} \left(\ln \det \mathbf{S}_D + \ln \det \mathbf{S}_r \right) \quad (7.2)$$

Conformément à notre définition (7.1), nous voulons donner une estimation de la contribution venant de \mathbf{S}_r .

7.1.1 Partie lisse

Nous nous restreindrons ici aux modes TM.

Pour calculer la partie lisse de la densité, nous supposons que la matrice S possède la même structure analytique que pour un potentiel indépendant de l'énergie.

Rappelons qu'alors, cf. e. g. [13] chap. XVII §128, si on considère E comme une variable complexe, $\det S$ est une fonction analytique dans le plan privé de la demi-droite $\operatorname{Re} E \geq 0$. Elle admet éventuellement des zéros pour $\operatorname{Re} E < 0$, correspondant aux états liés du potentiel.

Ces considérations permettent de calculer la partie lisse en considérant un passage dans le plan complexe de E (cf. e.g. [56]). On définit d'abord :

$$g(s) = \int \left(n(\vec{x})^2 G_k(\vec{x}, \vec{x}) - G_{0,k}(\vec{x}, \vec{x}) \right) d\vec{x} \Big|_{k=is}, \quad (7.3)$$

où nous avons rappelé la dépendance des fonctions de Green en l'énergie (ou $k = \sqrt{E}$) du système. On cherche ensuite un développement asymptotique de $g(s)$ pour $|s|$ grand :

$$g(s) = -i(n^2 - 1) \frac{\mathcal{A}}{4\pi} + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \quad (7.4)$$

où \mathcal{A} désigne l'aire du domaine diélectrique confinant.

Nous en déduisons la partie lisse de la densité via la formule :

$$\bar{d}(k) - \bar{d}_0(k) = \frac{2k}{\pi} \operatorname{Im} g(-ik) \quad (7.5)$$

Notons que cette expansion est souvent appelée (premiers termes de) la série de Weyl. Nous avons ici considéré plutôt la densité de nombre d'onde, elle est reliée à la densité de niveaux par l'identité (6.51). Cette méthode nous a permis de calculer le terme de longueur dans le cas du disque.

Enfin nous en déduisons la contribution des résonances intérieures en utilisant :

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S}_D = -\frac{\mathcal{A}}{4\pi} - \frac{L}{8\pi\sqrt{E}} + \mathcal{O}(1)$$

Ceci nous permet d'écrire la série de Weyl pour le nombre de résonances intérieures dans le régime semiclassique :

$$\bar{N}(k) = \frac{n^2 \mathcal{A}}{4\pi} k^2 + \frac{r(n)L_1 + nrL_2}{4\pi} k + \mathcal{O}(1) \quad (7.6)$$

où $r(n)$ est selon (6.53) :

$$r(n) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} R(t) \left(\frac{n^2}{t^2 + n^2} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt$$

Nous avons aussi supposé que l'on impose les conditions aux bords diélectriques sur une partie de longueur L_1 de la frontière et les conditions de Dirichlet ($r = -1$) ou de Neumann ($r = +1$) sur une partie de longueur L_2 de la frontière de longueur totale $L = L_1 + L_2$.

7.1.2 Partie oscillante

Conformément à la discussion faite dans le cas du disque, nous proposons de généraliser la formule de trace pour une cavité diélectrique comme suit [65] :

- pour une famille d'orbites périodiques¹ :

$$d^{(osc)}(E) = \frac{1}{\pi} \sum_{ppo} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_p}{\sqrt{2\pi m k l_p}} \left(\langle R_p^m \rangle e^{imkl_p - im\mu_p\pi/2} + \text{c.c.} \right), \quad (7.7)$$

où l_p, μ_p sont respectivement la longueur et l'indice de Maslov d'une orbite primitive p . \mathcal{A}_p est l'aire couverte par la famille d'orbites périodiques, $\langle R_p \rangle$ est la moyenne sur la famille du produit des coefficients de réflexion.

- pour une orbite isolée :

$$d^{(osc)}(E) = \sum_{ppo} \frac{T_p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\det(M_p^m - 1)|^{1/2}} \left(R_p^m e^{imS_p - im\mu_p\pi/2} + \text{c.c.} \right), \quad (7.8)$$

où T_p, M_p, S_p, μ_p sont respectivement la période, la matrice de monodromie, l'action classique et l'indice de Maslov associée à une orbite p . R_p est encore le produit des coefficients de réflexion.

Nous avons choisi de vérifier les formules (7.7) et (7.8) en considérant la densité de longueur d'orbites périodiques définie par :

$$d(l) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikl} d(k) dk$$

Ainsi, nous pouvons prédire quelle orbite périodique va dominer le spectre de résonances.

¹*ppo* signifie une somme sur les orbites périodiques primitives, et c.c. signifie qu'on ajoute la partie complexe conjuguée.

7.2 Un exemple « régulier » : le carré

7.2.1 Généralités. États antisymétriques.

Nous allons ici supposer que la cavité confinante est un carré de côté a . Nous voulons résoudre (5.5) :

$$(\Delta + n(\vec{x})^2 k^2) \Psi(\vec{x}) = 0 ,$$

avec ici, en coordonnées cartésiennes :

$$n(\vec{x}) = \begin{cases} n & \max(|x|, |y|) \leq a/2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.9)$$

Nous rappelons ici que la diffraction d'une onde plane sur un coin diélectrique est encore un problème ouvert : nous n'avons pas de solution locale pour notre problème. Nous restreindrons notre étude aux modes TM. Nous pouvons aussi séparer le spectre en trois classes de symétrie suivant les réflexions selon les deux premières bissectrices : nous noterons dans la suite la symétrie d'une résonance $(--)$, $(++)$ ou $(+-)$ où le premier signe est $+$ si la fonction d'onde est symétrique par réflexion d'axe la première bissectrice, $-$ sinon. Le second signe renvoie à la réflexion d'axe la seconde bissectrice.

La figure fig. 7.1 montre le spectre de résonances pour un carré diélectrique. Nous pouvons remarquer que les résonances ont une structure similaire à celles du cercle, cf fig. 6.1a. Nous voyons en particulier que les parties imaginaires sont bornées par celle reliée au temps de vie de l'orbite « bouncing ball » :

$$\gamma(n) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n-1}{n+1} \right)$$

Ici $\gamma(1.5) \simeq -1.0730$.

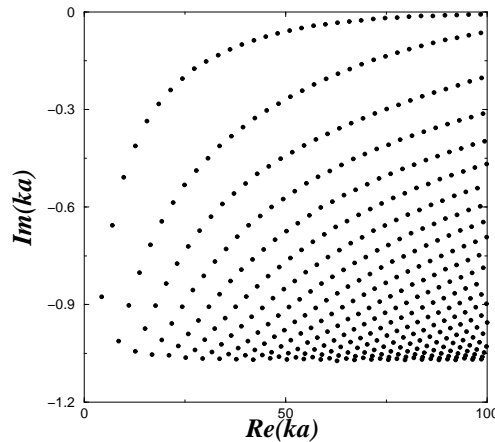


FIG. 7.1 – Résonances du carré diélectrique pour $n = 1.5$, symétrie $(--)$.

Sur la figure fig. 7.2 nous donnons un exemple d'états (--) quasi-stationnaires du carré.

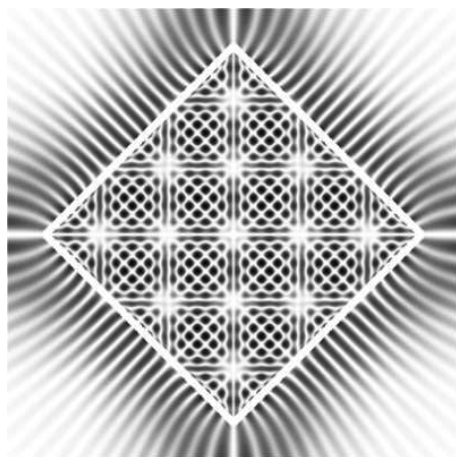


FIG. 7.2 – État (--) quasi stationnaire du carré pour $n = 1.5$, $ka = 69.1764 - 0.3270i$.

7.2.2 Approximation semiclassique. Superscars pour les états antisymétriques.

Nous allons utiliser le raisonnement défini dans [66] pour l'étude des billards polygonaux. Nous voulons approximer les fonctions d'ondes par des superscars. Nous supposons ici qu'un superscar est une superposition d'ondes planes. La méthode présentée ici fut celle suivie dans [67].

Ici, $n = 1.5$ ce qui correspond à un angle critique $\theta_c \sim 41.8^\circ$. La seule orbite courte confinée va être le carré inscrit ou diamant, cf. fig. 7.3.

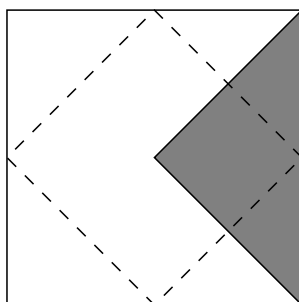


FIG. 7.3 – Orbite classique du diamant en trait pointillés. Zone ombragée : surface effective de calcul.

L'approximation des superscars consiste à supposer que la diffraction sur les coins du carré va entraîner que l'orbite diamant va dominer la dynamique de l'onde à l'intérieur. Pour tenir compte de

la symétrie, nous allons restreindre les calculs à une cellule élémentaire du point de vue des réflexions, cf. fig. 7.3. Dans cette cellule, l'onde le long de l'orbite diamant s'écrit à l'intérieur comme la somme de deux ondes pour tenir compte de la réflexion sur la frontière diélectrique, cf. fig. 7.4.

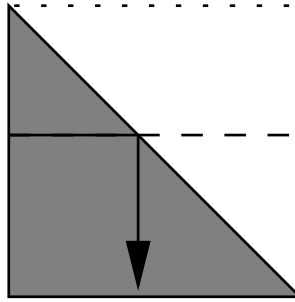


FIG. 7.4 – Onde dans la cellule

Nous considérons d'abord les états (—). Les conditions de quantification pour le vecteur d'onde suivant la méthode WKB peuvent être écrites :

$$n\vec{k} \cdot \vec{l}_p + 2\varphi = 2m\pi \quad (7.10)$$

où φ est la phase du coefficient de Fresnel lors de la réflexion sur la frontière diélectrique du carré, donc sur l'hypoténuse du triangle. En utilisant (5.10), nous avons :

$$\varphi = -2 \arctan \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta}$$

l_p désigne la longueur de l'orbite dans la cellule soit ici, $l_p = a\sqrt{2}$. Soit

$$k = \sqrt{2} \frac{\pi}{na} \left(m - \frac{\varphi}{\pi} \right)$$

Enfin, nous devons prendre en compte d'éventuelles oscillations transverses :

$$nk_{\perp} l_{\perp} = 2p\pi, \quad p \text{ entier} \quad (7.11)$$

où l_{\perp} est la largeur du canal formé par la famille d'orbites périodiques. On voit immédiatement sur la figure 7.4 que $l_{\perp} = a/\sqrt{2}$.

Finalement les énergies dues à la quantification de l'orbite dans le régime semiclassique diamant sont :

$$E_{m,p} = \frac{2\pi^2}{n^2 a^2} \left(\left(m - \frac{\varphi}{\pi} \right)^2 + p^2 \right) \quad (7.12)$$

Nous avons testé la formule (7.12) sur la figure fig. 7.5 en comparant les niveaux calculés numériquement à la formule :

$$k_{m,p}a = \frac{\sqrt{2\pi}}{n} \sqrt{\left(m - \frac{\varphi}{\pi}\right)^2 + p^2}$$

Nous avons interpolé le reste par

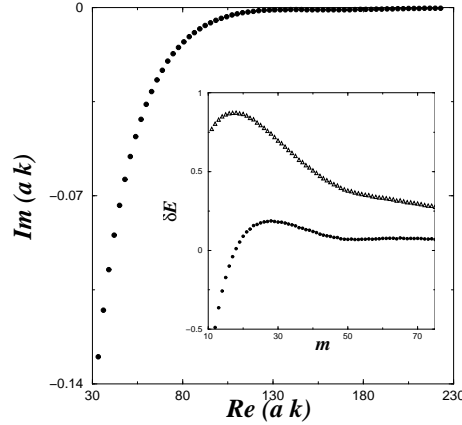


FIG. 7.5 – Approximation par un superscar des résonances du carré pour $p = 1$. Insert : la courbe du haut représente la différence entre la partie réelle et la prévision (7.12), celle du bas est l'interpolation suivant (7.13).

$$R_m = \frac{c}{m} \quad (7.13)$$

et nous obtenons $c = -6.9$, cf. fig. 7.5.

Ce modèle permet aussi de calculer les fonctions d'ondes : pour la classe $(--)$, la fonction d'onde doit s'annuler sur les diagonales du carré, ce qui entraîne que les fonctions superscars ont la forme :

$$\Psi_{m,p}^{(--)}(x, y) = \sin(nkx) \sin(nk_{\perp}y) + \sin(nk(l-y) + \varphi) \sin(nk_{\perp}(l-x)) \quad (7.14)$$

Nous avons également pu vérifier que (7.14) donnait une bonne approximation pour les états quasi-stationnaire, cf. fig. 7.6.

7.2.3 Autres classes de symétrie

Comme on peut le voir sur les figures 7.7 et 7.8, la structure régulière des résonances et des fonctions d'ondes se retrouve pour les autres classes de symétrie.

7.2.4 Formule de trace

Nous avons vérifié ici les formules (7.6) et (7.7) dans le cas du carré.

Loi de Weyl

Nous avons vérifiée la loi de Weyl pour les trois classes de symétrie, cf. fig. 7.9. Les résultats de nos interpolations sont² :

$$\begin{aligned} (--) \quad \bar{N}(k) &= \frac{n^2}{16\pi} k^2 - 0.0866k - 0.0456 \\ (++) \quad \bar{N}(k) &= \frac{n^2}{16\pi} k^2 + 0.2509k - 7.90125 \\ (-+) \quad \bar{N}(k) &= \frac{n^2}{16\pi} k^2 + 0.0819k - 5.0767 \end{aligned}$$

Les prévisions selon (7.6) s'écrivent pour le coefficient du terme linéaire a_1 :

$$\begin{aligned} (--) \quad a_1 &= \frac{r(1.5) - 1.5\sqrt{2}}{4\pi} a \simeq -0.0872a \\ (++) \quad a_1 &= \frac{r(1.5) + 1.5\sqrt{2}}{4\pi} a \simeq 0.2504a \\ (-+) \quad a_1 &= \frac{r(1.5)}{4\pi} a \simeq 0.0816a, \end{aligned}$$

où $r(n)$ est défini selon (6.53).

Nous constatons un bon accord avec nos prévisions.

Partie oscillante

Nous traçons ici la densité de niveaux sur la figure fig. 7.10. Nous pouvons constater que l'orbite du diamant est dans notre régime la principale orbite qui contribue à la dynamique : les lignes en traits pointillés marquent cette orbite et ses répétitions, $l = nl_p$, $n \geq 1$.

²Nous choisissons les unités telles que $a = 1$.

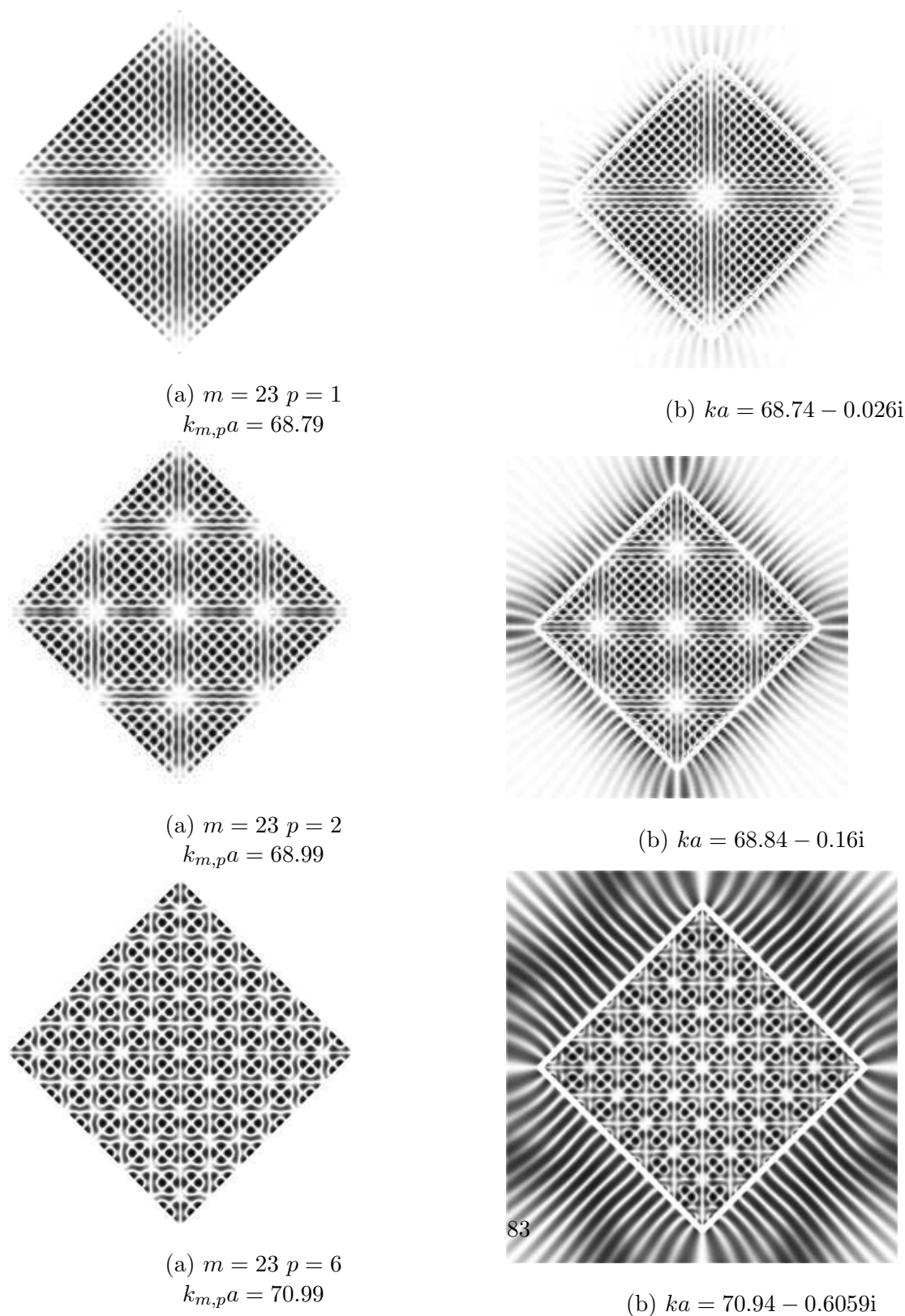


FIG. 7.6 – Approximation pour les états (--) du carré par des superscars.

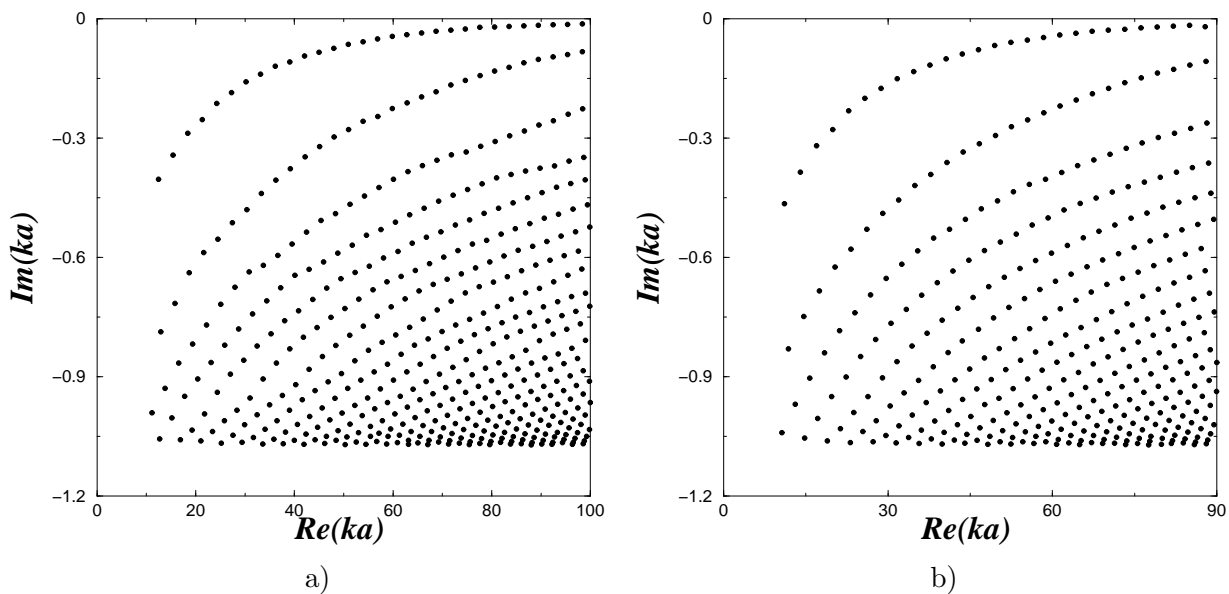


FIG. 7.7 – Résonances du carré diélectrique pour $n = 1.5$. a) Symétrie $(++)$. b) Symétrie $(+-)$.

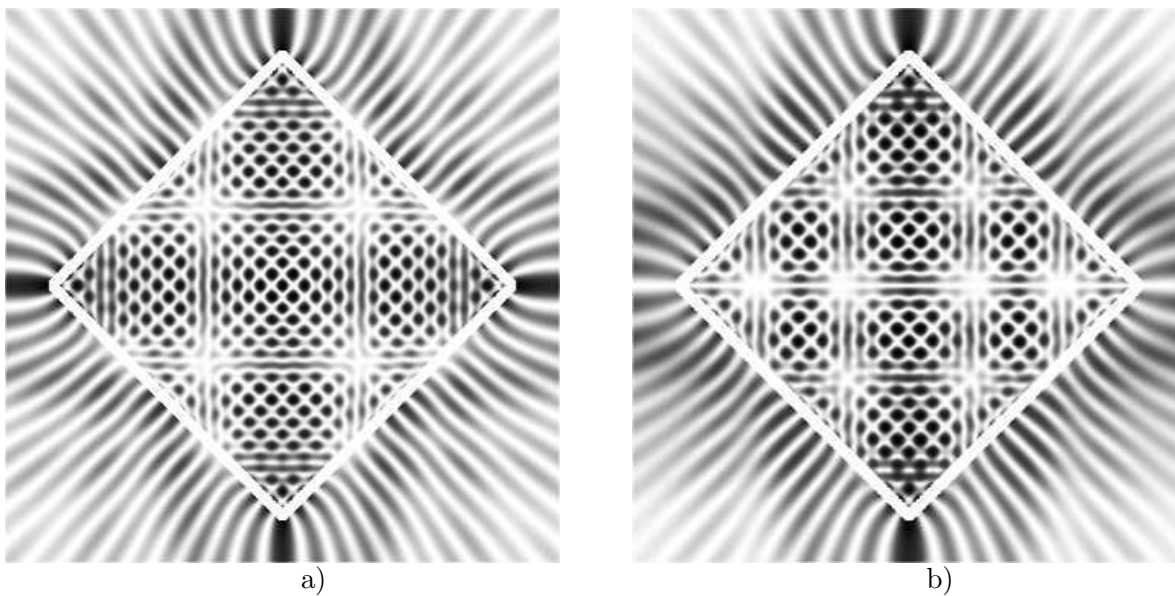


FIG. 7.8 – États quasi-stationnaires du carré diélectrique pour d'autres classes de symétrie. a) $(++)$ $ka = 60.06 - 0.40i$. b) $(+-)$ $ka = 55.80 - 0.42i$.

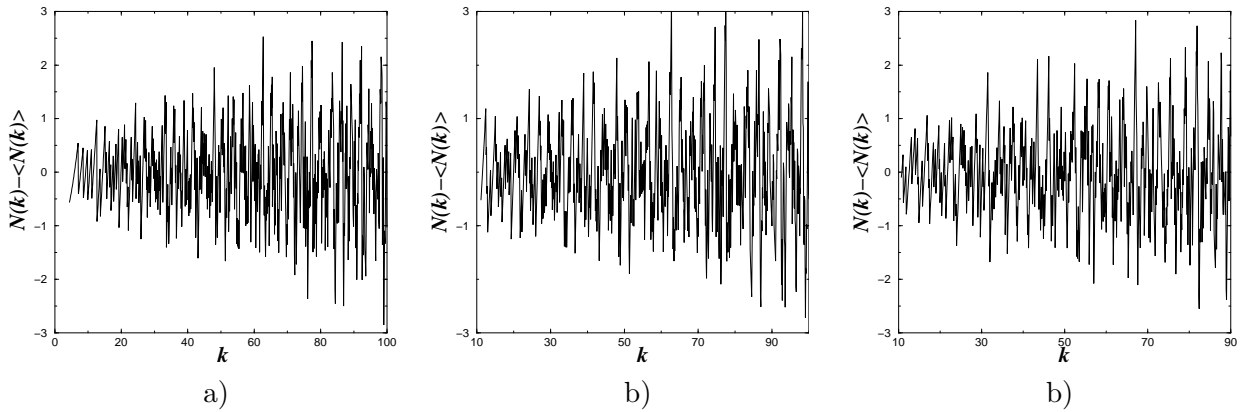


FIG. 7.9 – Graphes de $N(k) - \bar{N}(k)$ pour le carré diélectrique, $n = 1.5$. a) Symétrie (--). b) Symétrie (++). c) Symétrie (-+).

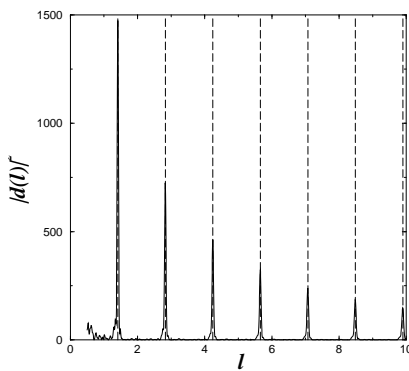


FIG. 7.10 – Densité d'orbites périodiques du carré diélectrique pour $n = 1.5$.

7.3 Le rectangle et l'ellipse

Nous avons voulu savoir si la régularité du spectre observée pour le cercle et le carré s'appliquait aussi aux cas plus généraux du rectangle et de l'ellipse. Nous avons considéré un rectangle où la longueur L et la largeur l vérifient $L/l = 2$. De même nous avons pris l'exemple de l'ellipse telle que les petit et grand axes b et a vérifient $a/b = 2$. Nous voyons encore une structure en branches sur les spectres calculés, cf. fig. 7.11. Nous pouvons encore remarquer que la partie imaginaire des résonances possède une borne inférieure donnée dans les deux cas par :

$$\begin{aligned}\gamma_{rectangle}(n) &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \\ \gamma_{ellipse}(n) &= \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n-1}{n+1} \right)\end{aligned}$$

Nous avons ajouté ces lignes sur la figure 7.11. Nous avons aussi ajouté sur le spectre du rectangle la ligne $y = \gamma_{rectangle}(n)/2$ qui correspond au temps de vie des orbites « bouncing ball » selon la direction de la longueur.

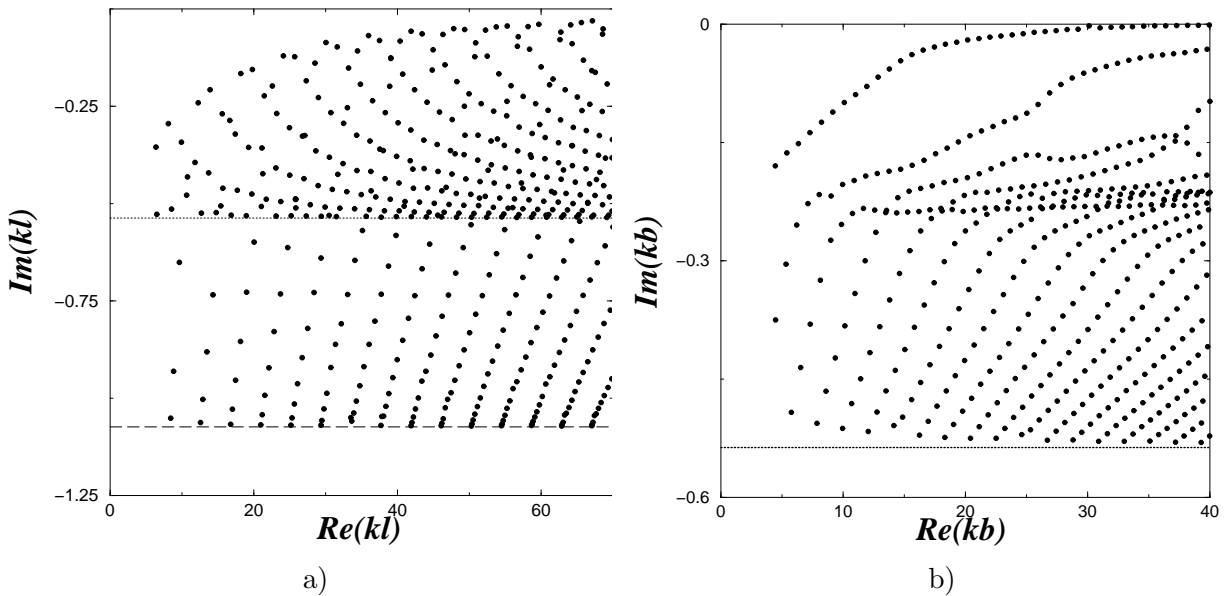


FIG. 7.11 – Spectres de résonances pour $n = 1.5$. a) Rectangle $L/l = 2$, symétrie $(++)$. b) Ellipse $a/b = 2$, symétrie $(--)$

Nous avons pu vérifier (7.6) dans le cas de l'ellipse, symétrie $(- -)^3$:

$$\bar{N}(k) = \frac{n^2}{16\pi} k^2 - 0.0866k - 0.0456 \quad (7.15)$$

Le coefficient du terme linéaire est cette fois :

$$a_1 = \frac{r(1.5)aE(e) - 1.5(a+b)}{4\pi} \simeq -0.0872b$$

où $E(k)$ est l'intégrale elliptique complète du second type [80] :

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin(t)^2} dt ,$$

et e est l'excentricité de l'ellipse :

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

³Nous choisissons les unités telles que $b = 1$.

7.4 Le pentagone

Nous avons suivi la même méthode que pour le carré pour étudier une cavité de forme pentagonale. La figure 7.12 montre le spectre calculé pour le pentagone. Nous nous sommes restreint à la classe de symétrie telle que la résonance est antisymétrique selon chaque médiane du pentagone. La ligne marquant la borne inférieure de la partie imaginaire correspond à l'orbite montré sur la figure 7.12b. En calculant son temps de vie nous obtenons :

$$\gamma_{\text{pentagone}}(n) = \frac{2}{nl} \ln R_{TM}, \quad l = 2R (\sin(2\pi/5) + \sin(\pi/5)) ,$$

où R_{TM} est le coefficient de Fresnel donné par (5.10) et évalué en $\theta = \pi/10$. Nous voyons que le

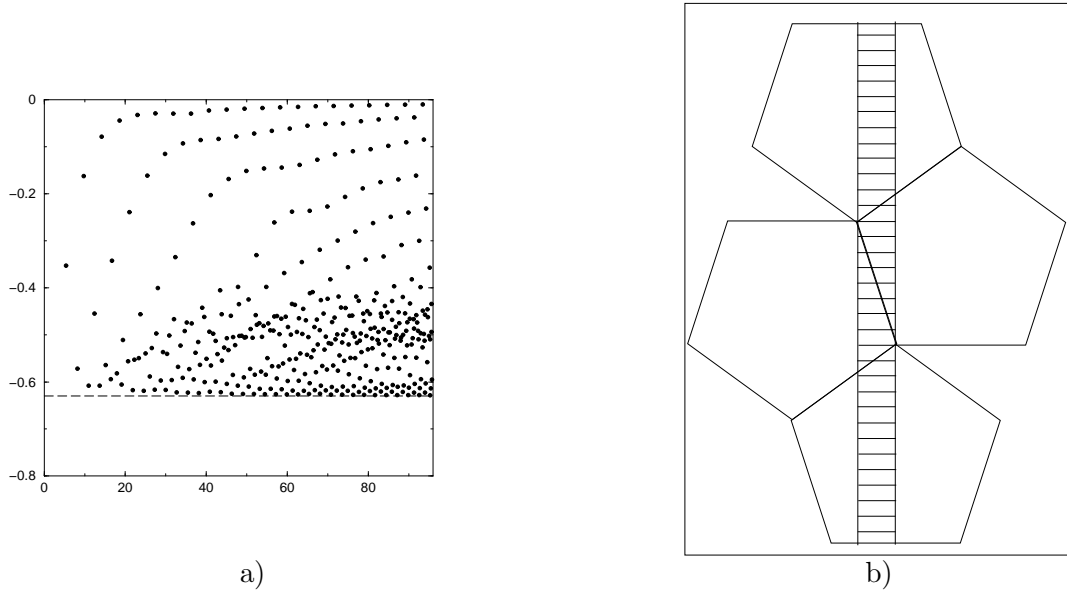


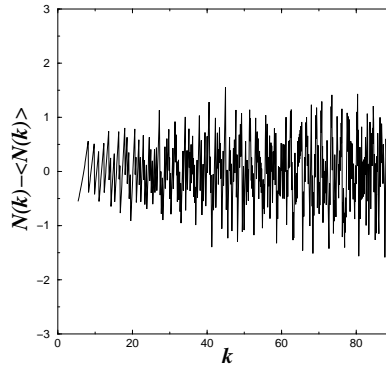
FIG. 7.12 – a) Spectre du pentagone diélectrique pour $n = 1.5$. R est le rayon du cercle circonscrit. b) Orbite au temps de vie le plus court.

spectre ne présente plus de structure globale en branches. Les états les plus confinés forment encore des branches, nous pouvons effectuer l'approximation de superscar pour l'onde à l'intérieur [67]. Pour les résonances à petit temps de vie, il n'y a plus de structure. Nous avons vérifié la validité de (7.6) dans ce cas-là, cf fig. 7.13.

L'interpolation donne⁴ :

$$\bar{N}(k) = \frac{n^2 R^2}{16\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) k^2 - 0.1681k + 0.1077$$

⁴Les unités sont telles que le rayon R du cercle circonscrit est 1.

FIG. 7.13 – $N(k) - \bar{N}(k)$ pour le pentagone diélectrique

La prévision pour le terme linéaire est :

$$a_1 = \frac{r(1.5) \sin \pi/5 - 1.5(1 + \cos \pi/5)}{4\pi} R \simeq -0.1680R$$

Nous montrons aussi à travers la figure fig. 7.14 la différence au niveau des fonctions d'ondes associées. Nous avons encore cherché si (7.7) donnait une prédiction satisfaisante des orbites dominants la dynamique. La figure 7.15a montre que l'orbite du pentagone inscrit, cf. 7.15b, est l'orbite dominante, $l_p = R \sin(2\pi/5)$: nous avons ajouté des lignes verticales pour $l = nl_p$, $n \geq 1$. Nous avons cependant constaté un écart avec le carré : les pics secondaires font apparaître des orbites diffractives dont nous ne savons pas estimer la contribution, cf. e.g. [68] pour le cas fermé. Nous montrons par exemple de telles orbites contribuant à la dynamique sur la figure fig. 7.16 avec

$$l_1 = \frac{\sqrt{130 + 22\sqrt{5}}}{2} R \simeq 6.69R ,$$

$$l_2 = \frac{\sqrt{210 + 38\sqrt{5}}}{2} R \simeq 8.58R .$$

Nous avons étudié jusqu'ici des formes régulières où les orbites sont en familles. Les exemples

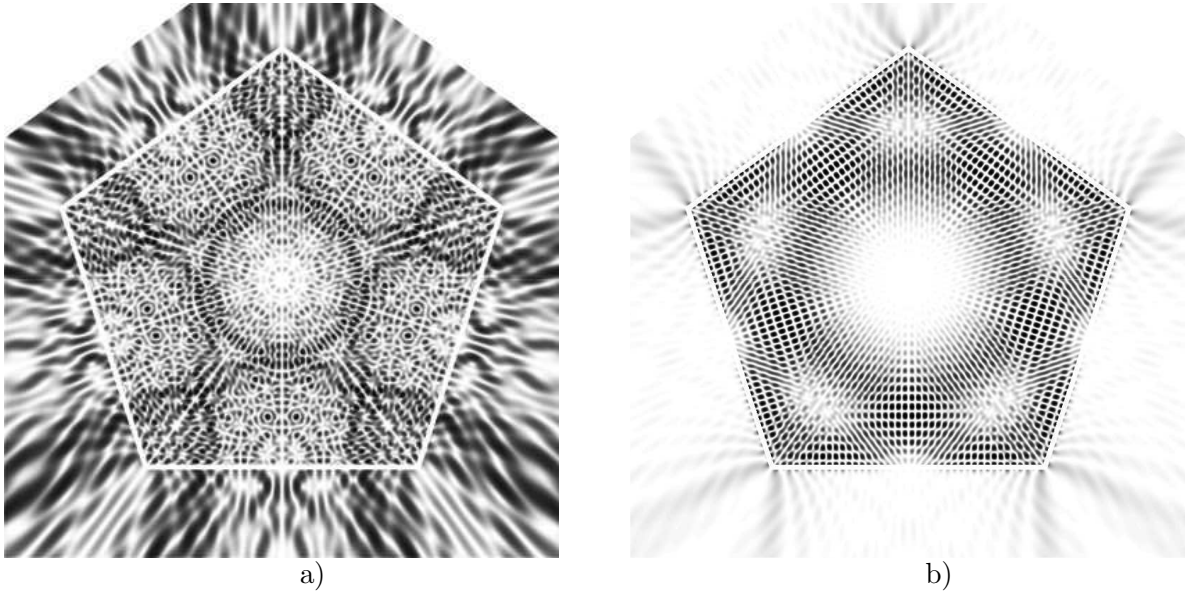


FIG. 7.14 – Exemple d'état quasi-stationnaire du pentagone. a) $kR = 89.062 - 0.453i$. b) $kR = 91.352 - 0.038i$.

intégrables classiquement montrent une forte régularité dans le spectre de résonances. Pour le pentagone, nous avons pu observer que la régularité ne s'applique qu'aux niveaux les plus confinés.

Nous allons à présent considérer deux cavités où la dynamique classique est chaotique. Nous voudrions voir si (7.8) permet de prévoir quelle orbite domine dans le spectre de résonances.

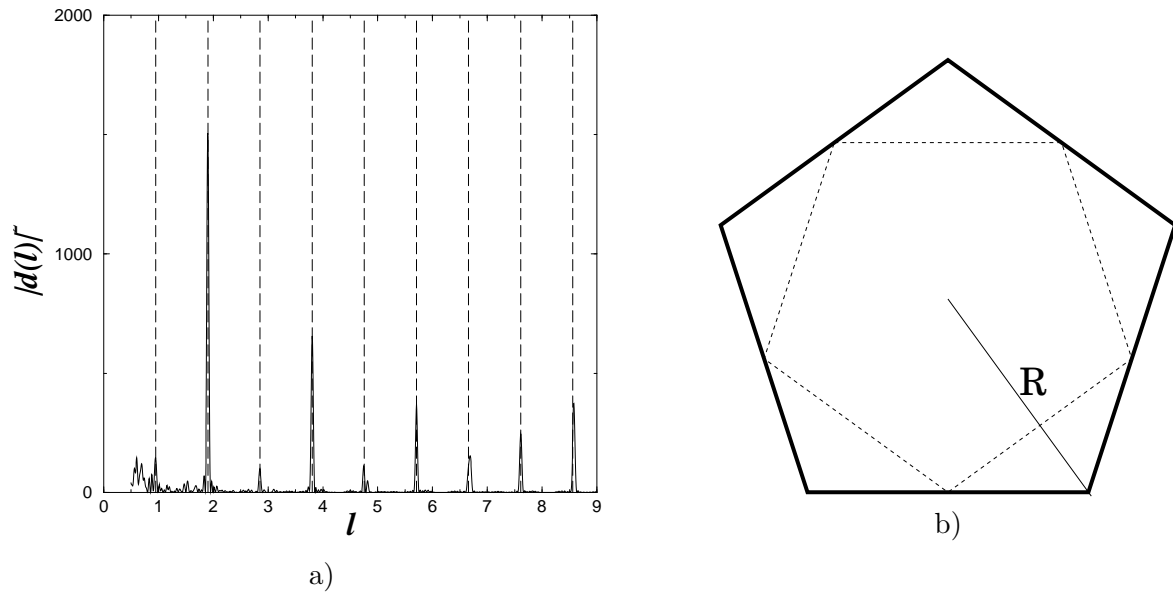


FIG. 7.15 – a) Densité d’orbites du pentagone diélectrique pour $n = 1.5$. b)Orbite dominant le spectre de résonances.

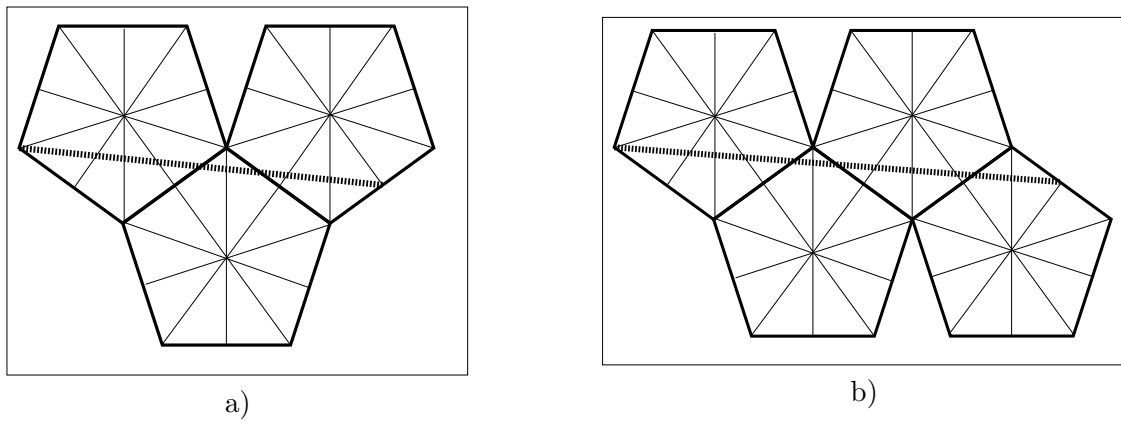


FIG. 7.16 – Exemples d’orbites diffractives du pentagone. a) $l = l_1$. b) $l = l_2$.

7.5 Le disque coupé

Nous voulons à présent étudier le cas où la cavité diélectrique est un disque coupé, cf. fig. 6.6. Comme cette cavité est symétrique, nous considérerons seulement la classe $(-)$, antisymétrique selon l'axe horizontal. Nous avons étudié quelles orbites devaient dominer en fonction du paramètre de coupure ϵ . Nous nous restreindrons ici aux premières occurrences d'orbites. Selon (7.8), le coefficient d'une orbite l_p donnée dans la formule de trace est :

$$|c_{p,1}|^2 = \frac{T_p^2}{\pi^2} \frac{|R_p|^2}{|\det(M_p - 1)|}. \quad (7.16)$$

Le graphe 7.17 montre les variations de $|c_{p,1}|^2$ en fonction de ϵ . Pour une petite coupure, les

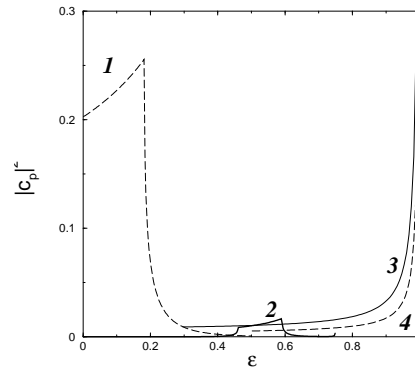


FIG. 7.17 – Amplitude d'orbites périodiques du disque coupé en fonction de la coupure.

orbites déformées du cercle dominant la dynamique, cf. fig. 7.18a, la courbe 1 dans fig. 7.17 désigne le quadrilatère inscrit. Pour $0.4 \leq \epsilon \leq 0.6$, l'orbite de fig. 7.18b domine la dynamique, cf. la courbe 2 dans fig. 7.17. Enfin, pour ϵ proche de 1, les orbites allongées du demi-cercle deviennent dominants, les courbes 3 et 4 dans fig. 7.17 correspondent aux orbites de fig. 7.18c. Nous avons comparé ces prévisions avec le calcul de $d(l)$ issu du calcul des résonances, cf. fig. 7.19.

Pour $\epsilon = 0.1$, nous voyons que le pic dominant vient principalement de l'orbite diamant et sa version déformée, cf. fig. 7.18a. Nous avons placé des orbites en traits pleins et pointillés respectivement sur la figure 7.19a. Les deux autres pics proviennent de la contribution des autres orbites déformées du cercle, cf. fig. 7.18a.

Pour $\epsilon = 0.59$, les trois orbites longues qui dominant la dynamique sont les deux orbites de la figure fig. 7.18c ($l \simeq 3.65R$ et $l \simeq 3.82R$) et l'orbite de la figure fig. 7.18b ($l \simeq 7.42R$).

Pour $\epsilon = 0.8$, les deux pics dominants la densité d'orbites périodiques sont ceux correspondants aux orbites allongées du demi-cercle, cf fig. 7.18c, $l_1 = n \sin(\pi/n)$ pour $n = 2, 3$. Nous avons également

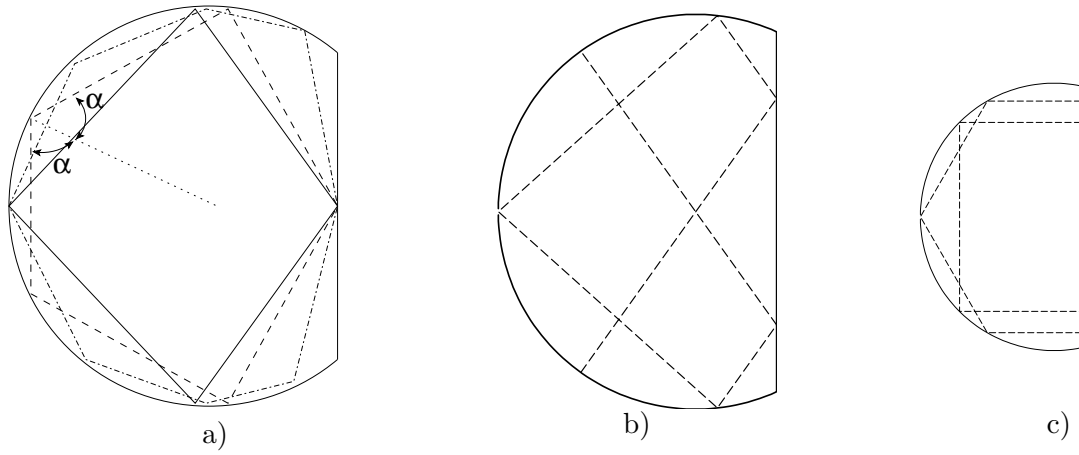


FIG. 7.18 – Exemples d’orbites périodiques du disque coupé. a) Orbites déformées du cercle. b) Orbite avec passage au centre. c) Orbites allongées du demi-cercle.

constaté la contribution d’autres orbites, cf. fig. 7.20, pour les pics secondaires. Ces orbites sont diffractives et nécessitent un traitement plus soigneux.

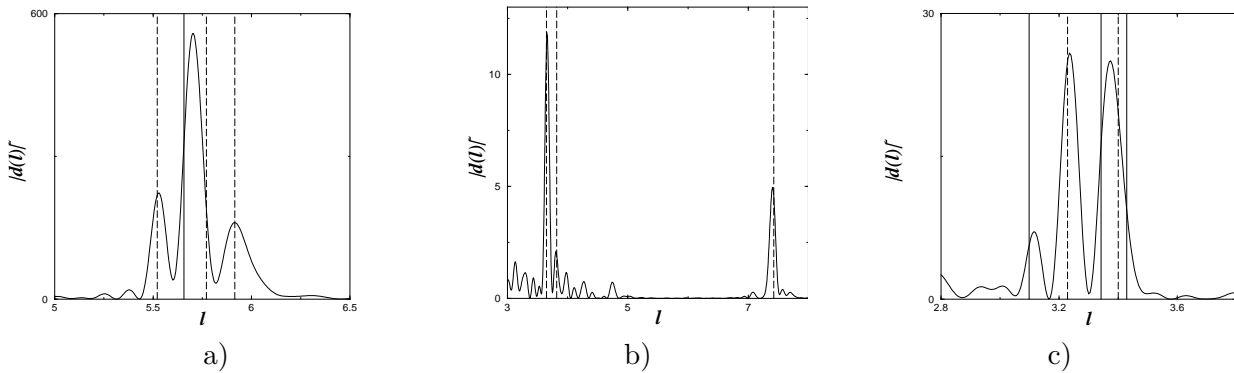
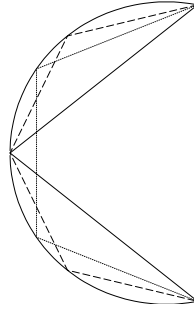


FIG. 7.19 – Densité d’orbites périodiques du disque coupé pour $n = 1.5$. a) $\epsilon = 0.1$. b) $\epsilon = 0.59$. c) $\epsilon = 0.8$.

En conclusion, nous avons pu voir que la formule (7.8) donne des résultats cohérents avec les simulations numériques dans le cas du disque coupé.

Nous donnons un dernier exemple dans le cas plus commun où la cavité diélectrique est un stade de Bunimovitch.

FIG. 7.20 – Orbites diffractives du disque coupé pour $\epsilon = 0.8$.

7.6 Le stade

Nous avons enfin étudié une cavité en forme de stade de Bunimovitch. Cette forme est très couramment utilisée en chaos quantique comme l'archétype d'un système chaotique.

Nous définissons encore 4 classes de symétrie suivant que l'état est symétrique suivant l'axe horizontal (premier signe +) ou vertical (second signe +), cf. fig. 7.21.

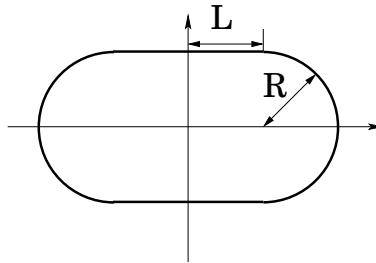


FIG. 7.21 – Définition et notation du stade de Bunimovitch

Nous allons étudier quels sont les orbites dominant le spectre de résonances lorsque le paramètre $a = L/R$ varie.

7.6.1 Loi de Weyl

Nous avons d'abord considéré le cas $a = 1$, le plus chaotique, cf. e.g. [9]. La figure 7.22 donne un exemple de spectre de résonance pour la classe $(--)$. La borne inférieure de la partie imaginaire correspond cette fois à :

$$\gamma_{stade}(n) = \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n-1}{n+1} \right)$$

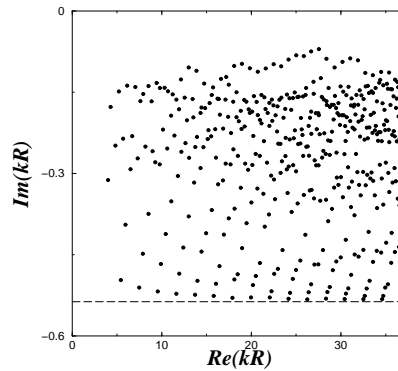


FIG. 7.22 – Résonances d’une cavité en forme de stade, $n = 1.5$, $a = 1$, symétrie $(--)$.

Étant donné le caractère générique de la dynamique chaotique classique, de nombreuses études ont été menées pour compter les résonances. Nous mentionnons en particulier un résultat sur les applications quantiques qui correspondent aux billards avec un trou sur la frontière. Le nombre moyen de résonances est donnée par la loi de Weyl fractale [69–71] :

$$\bar{N}(k) \equiv \left\{ k_n / \text{Im } k_n \geq -C \text{ et } \text{Re } k_n \leq k \right\} \propto k^{1+d} \quad (7.17)$$

où d est la dimension de Hausdorff du repousseur lié aux trajectoires classiques piégées.

Pour notre problème, nous avons trouvé un bon accord avec (7.6), ce qui souligne la particularité des systèmes diélectriques, cf. aussi [72]. Nous donnons sur la figure 7.23 le reste de l’interpolation pour les résonances $(--)$ du stade lorsque $a = 1$. L’interpolation donne⁵ :

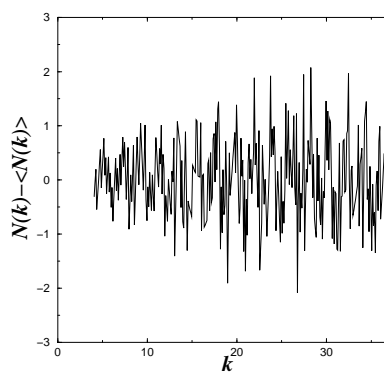


FIG. 7.23 – Interpolation du nombre de résonances pour le stade diélectrique $n = 1.5$.

$$\bar{N}(k) = \frac{n^2}{4\pi} \left(a + \frac{\pi}{4} \right) k^2 - .145k - 4.0424 \quad (7.18)$$

La prévision selon (7.6) pour le terme linéaire est :

$$a_1 = \frac{1}{4\pi} \left[r(1.5) \left(a + \frac{\pi}{2} \right) - 1.5(2 + a) \right] R \simeq -.148R$$

Nous voyons un bon accord avec nos prévisions.

7.6.2 Orbites périodiques

Pour vérifier (7.8), nous avons étudié quelles orbites dominent le spectre de résonances lorsque a varie. Nous avons encore utilisé (7.16) puis comparé aux résultats des calculs de spectre.

La figure 7.24 montre les amplitudes des pics correspondants aux orbites du tableau 7.1. Nous avons remarqué une différence notable avec les prévisions de 7.24a dûe à la courbure de la frontière, cf. 7.24b.

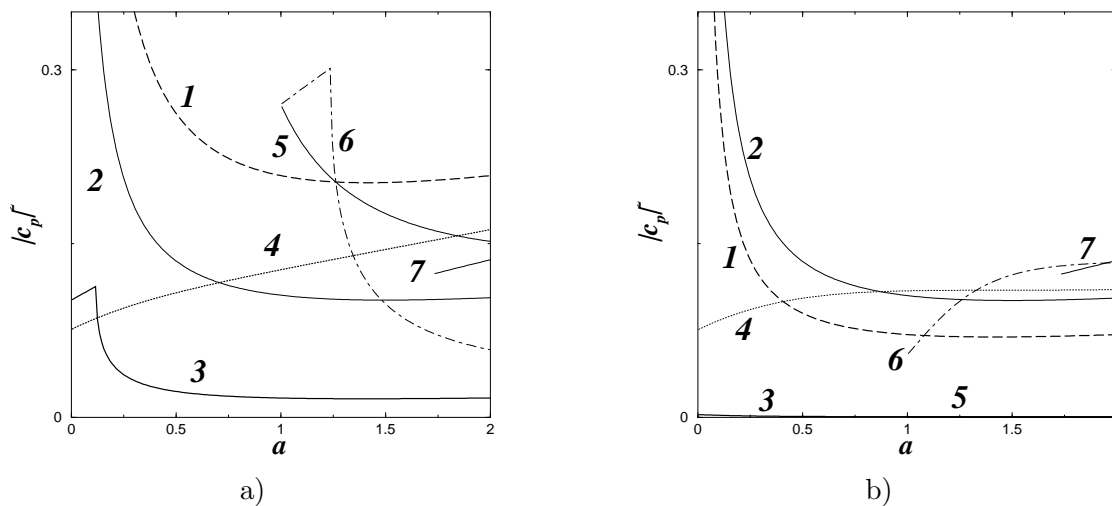
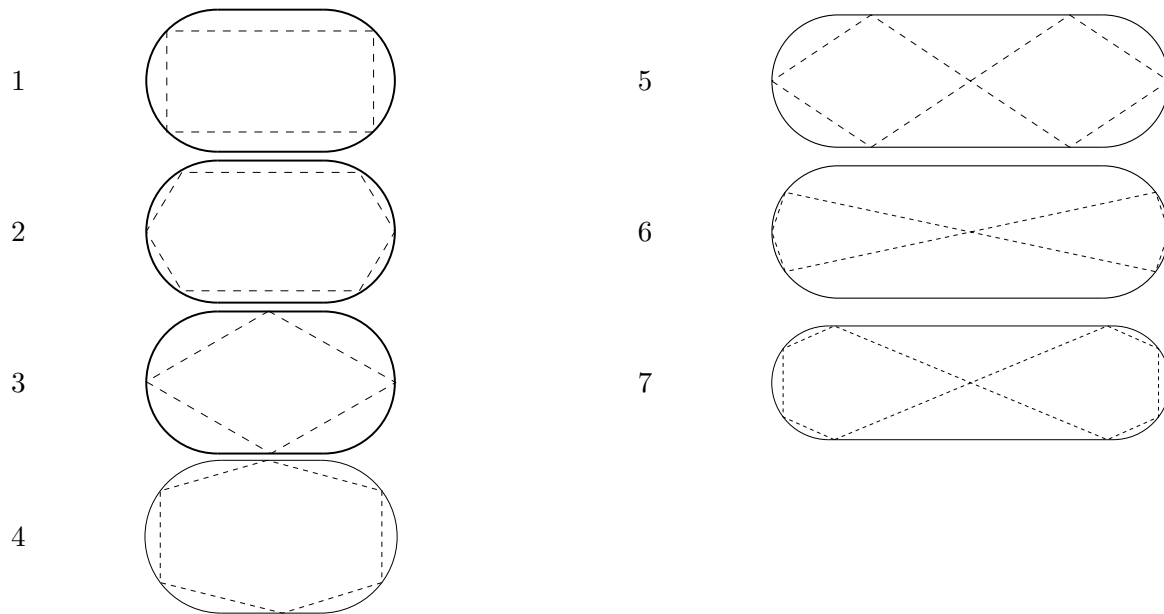


FIG. 7.24 – Amplitudes d'orbites pour la classe (---) du stade diélectrique. Les orbites sont montrés dans le tableau 7.1. a) Régime semi-classique. b) Modification due à la courbure.

Nous donnons les résultats pour la densité d'orbites dans les figures 7.25 et 7.26. Nous avons remarqué que nos résultats nécessitent certaines corrections à la prévision (7.8). La formule (7.8) s'applique en effet dans le régime semiclassique $kR \gg 1$. Dans notre cas, $kR \leq 50$ et nous devons prendre en compte deux corrections en particulier : le changement du coefficient de réflexion dû à la courbure et l'interférence entre orbites lors du calcul de $|d(l)|$.

⁵Nous choisissons les unités telles que $R = 1$.



TAB. 7.1 – Exemple d’orbites périodiques du stade.

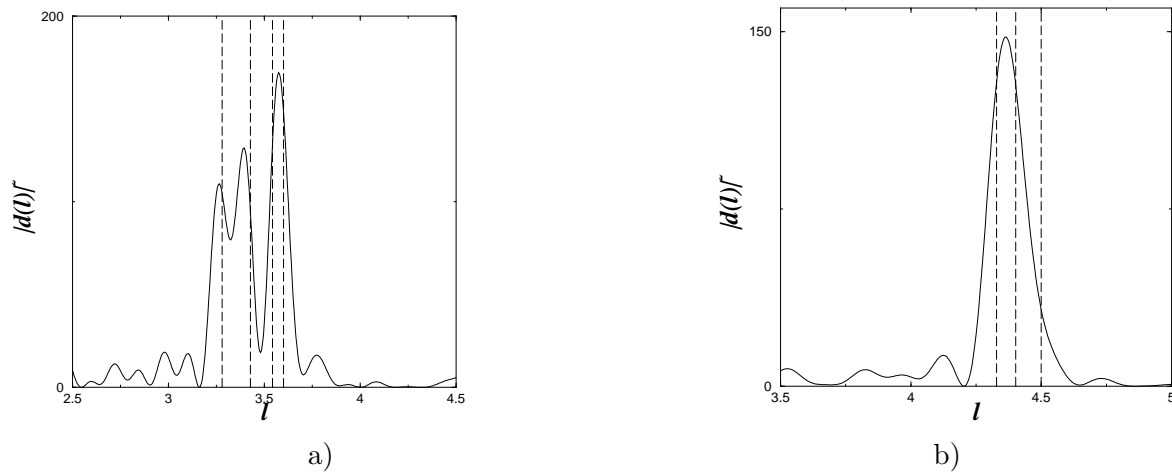


FIG. 7.25 – Densité d’orbites périodiques du stade pour $n = 1.5$. a) $a = 0.3$. b) $a = 0.75$.

Correction du coefficient de reflexion dû à la courbure

Lorsque une onde franchit une frontière diélectrique courbe avec une longueur d’onde de l’ordre du rayon de courbure, les formules (5.10) et (5.11) doivent être modifiées, cf. aussi [62]. En faisant

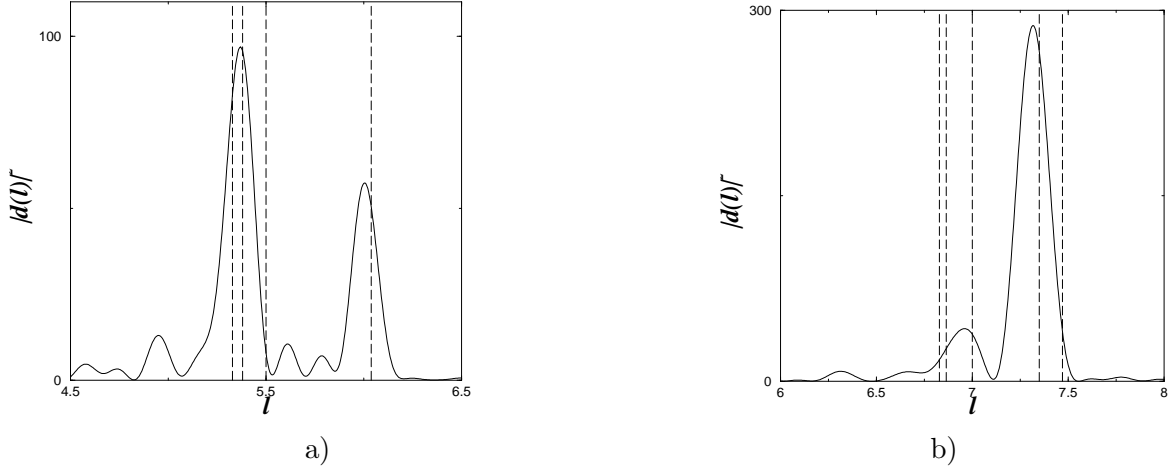


FIG. 7.26 – Densité d’orbites périodiques du stade pour $n = 1.5$. a) $a = 1.25$. b) $a = 2$.

l’approximation que, localement, la frontière est un cercle, nous pouvons utiliser (6.3) et (6.10) :

$$R_{TM}^{(c)} = \frac{\sqrt{n^2 - \frac{m^2}{x^2}} + i \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x)}{\sqrt{n^2 - \frac{m^2}{x^2}} - i \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x)} \quad (7.19)$$

Nous pouvons vérifier que l’expression redonne bien le résultat de Fresnel lorsque $m \gg x$ en utilisant (6.9). Le graphe fig. 7.27 montre la différence de variation de $|R_{TM}|$ lorsque l’on prend en compte la courbure. Comme prévu, l’écart est maximal au voisinage de l’angle critique ($x \sim m$) où (6.9) n’est plus valide. En prenant en compte ces corrections, nous avons pu remarquer de grandes différences, cf. fig. 7.24a et b, dans les amplitudes de chaque orbite.

Interférence entre orbites

Lors du calcul de $|d(l)|^2$, nous avons considéré dans (7.8) seulement les termes diagonaux dans le régime semiclassique. Nous allons détailler comment écrire les premiers termes correctifs. Réécrivons la contribution de deux orbites l_1, l_2 :

$$d_{1,2}(l) = \int_{K_1}^{K_2} e^{-ikl} \left(c_1 e^{ikl_1} + c_2 e^{ikl_2} \right) dk \quad (7.20)$$

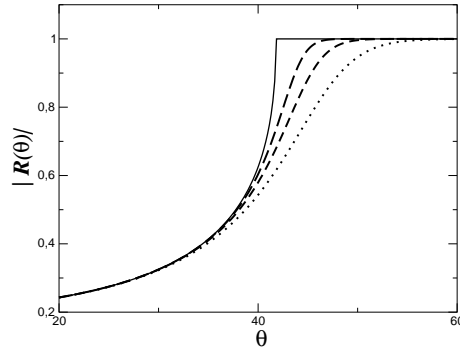


FIG. 7.27 – Module du coefficient de réflexion avec correction dû à la courbure. Trait plein : $|R_{TM}|$ pour frontière plane. Autres courbes : $|R_{TM}^{(c)}|$ $kR = 100, 50, 25$.

Nous soulignons ici que, le calcul des résonances étant numérique, nous n'avons qu'une partie finie du spectre de résonance. Pour le stade, nous avons plus précisément :

$a = L/R$	$K_1 R$	$K_2 R$
0.3	15	48
0.75	12	40
1.25	11	35
2	9	30

(7.21)

En réécrivant $d_{1,2}(l)$ de manière plus explicite :

$$d_{1,2}(l) = c_1 e^{i \frac{K_2(l-l_1)}{2}} \frac{\sin K_2(l-l_1)/2}{(l-l_1)/2} + c_2 e^{i \frac{K_2(l-l_2)}{2}} \frac{\sin K_2(l-l_2)/2}{(l-l_2)/2} - c_1 e^{i \frac{K_1(l-l_1)}{2}} \frac{\sin K_1(l-l_1)/2}{(l-l_1)/2} - c_2 e^{i \frac{K_1(l-l_2)}{2}} \frac{\sin K_1(l-l_2)/2}{(l-l_2)/2},$$

nous pouvons reprendre les arguments bien connus en optique : si $K_2(l_2 - l_1) \gg 1$, alors les deux pics en $l = l_1$ et $l = l_2$ seront résolus, dans le cas inverse $K_2(l_2 - l_1) \sim 1$, il n'y aura qu'un seul pic de densité en $l \simeq (l_1 + l_2)/2$.

Nous avons indiqué dans le tableau 7.22 les orbites qui contribuent le plus à la densité selon les graphes fig. 7.25, 7.26. Nous pouvons voir un accord raisonnable avec les prévisions de la figure

7.24b.

a	orbit
0.3	1 ($l \simeq 3.43$)
	2 ($l = 3.6$)
	3 ($l \simeq 3.28$)
	4 ($l \simeq 3.54$)
0.75	1 ($l \simeq 4.33$)
	4 ($l \simeq 4.4$)
	2 ($l = 4.5$)
1.25	1 ($l \simeq 5.33$)
	4 ($l \simeq 5.38$)
	2 ($l \simeq 5.5$)
	6 ($l \simeq 6.04$)
2	1 ($l \simeq 6.83$)
	2 ($l = 7$)
	4 ($l \simeq 6.86$)
	6 ($l \simeq 7.35$)
	7 ($l \simeq 7.47$)

(7.22)

Nous donnons dans l'appendice D des détails pour calculer les coefficients c_p .

À la suite de [9], nous avons donné dans ce chapitre une généralisation de la formule de trace aux cavités diélectriques. Nous avons ensuite vérifié que nos formules s'accordaient bien pour des formes lisses ou non de cavités. En prenant en compte des corrections au pur régime semiclassique, nous avons pu prédire quelles orbites classiques dominent la densité du résonances de ces systèmes.

Quatrième partie

Articles

SLE description of the nodal lines of random wavefunctions

E Bogomolny, R Dubertrand and C Schmit¹

CNRS, Université Paris-Sud, UMR 8626, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, 91405 Orsay, France

E-mail: remy.dubertrand@lptms.u-psud.fr

Received 7 September 2006, in final form 23 October 2006

Published 20 December 2006

Online at stacks.iop.org/JPhysA/40/381

Abstract

The nodal lines of random wavefunctions are investigated. We demonstrate numerically that they are well approximated by the so-called SLE₆ curves which describe the continuum limit of the percolation cluster boundaries. This result gives additional support to the recent conjecture that the nodal domains of random (and chaotic) wavefunctions in the semi-classical limit are adequately described by the critical percolation theory. It is also shown that using the dipolar variant of SLE reduces significantly finite size effects.

PACS numbers: 05.45.Mt, 03.65.Sq, 64.60.Ak

1. Introduction

In 1977 Berry conjectured [1] that the wavefunctions of chaotic quantum systems can statistically be described by Gaussian random functions with a spectrum computed from the ergodic average.

For example, the wavefunctions for two-dimensional billiards without magnetic field $\Psi(\vec{x})$ have to obey the equation

$$(\Delta + k^2)\Psi(\vec{x}) = 0 \quad (1)$$

and, say, the Dirichlet boundary conditions.

From general considerations it follows that such functions can be represented as a formal sum over elementary solutions of (1), e.g.,

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_{|m|}(kr) e^{im\theta}, \quad (2)$$

where $J_m(x)$ are usual Bessel functions and $C_{-m} = C_m^*$.

¹ Deceased.

The Berry conjecture signifies that for chaotic billiards such as the stadium billiard, real and imaginary parts of coefficients C_m with non-negative m are independent identically distributed Gaussian random variables with zero mean and variance computed from the normalization.

The beauty of this profound conjecture lies first of all in its simplicity and generality. On the other hand, it represents chaotic wavefunctions as completely structureless and ‘uninteresting’ objects which to some extent was the reason of relatively few investigations of the chaotic wavefunctions.

In 2002 Smilansky *et al* [2] stimulated a renewal of interest in this problem. Instead of considering the coefficients of an expansion as in (2) these authors looked for the nodal domains of wavefunctions, i.e. the regions where a function has a definite sign. They have also observed that for chaotic wavefunctions the nodal domains have a rich unexpected structure worth investigating in detail.

In [3] on physical grounds it was conjectured that the nodal domains of random wavefunctions (and, consequently, of chaotic wavefunctions) can be adequately described by a critical percolation model (see, e.g. [6]). Due to the universality of the critical percolation it is unessential what special percolation model is considered. All of them lead to the same critical exponents as well as to other universal quantities. In [3] it was checked numerically that many predictions of the critical percolation model, such as the number of connected domains, their area distribution, cluster fractal dimensions etc agree very well with corresponding quantities computed from the nodal domains of random (and chaotic) wavefunctions. In [4] it was demonstrated that the level domains (the regions where a function is bigger than a certain non-zero value) are well described by a non-critical percolation model. These and other investigations strongly suggest that the critical percolation model is applicable for the description of the nodal domains of random and chaotic wavefunctions. Though it sounds physically quite natural and can be confirmed by a careful application of Harris’ criterion [4], a rigorous mathematical proof was not yet found and further numerical verifications are desirable.

The purpose of this paper is to check another prediction of the percolation model namely that the boundaries of the percolation clusters are described by what is called SLE_6 curves (see below). This statement was proved in 2001 for the critical percolation on the triangular lattice by Smirnov [7] and it is widely accepted that it remains true for all critical percolation models. For the nodal domains of random functions it leads to the conclusion that the nodal lines (curves where a function is zero) have to be also described by SLE_6 curves.

The plan of the paper is the following. In section 2 for completeness we give an informal introduction to the SLE curves. This name is attributed to two-dimensional self-avoiding curves generated by a one-dimensional Brownian motion with zero mean and the variance linear in time with a coefficient of proportionality equal to a real positive number κ . In 2000 Schramm proved that if a random self-avoiding curve is in a certain sense conformally invariant then it belongs to SLE curves with a certain value of κ . Smirnov’s result [7] means that the percolation boundaries are generated by the Brownian motion with $\kappa = 6$. In section 3 we present the results of direct numerical calculations of corresponding Brownian-like generating curves for the nodal lines of random wavefunctions and found that they are well described by SLE_6 . The inevitable drawback of numerical calculations is that one always deals with curves of finite size. But the theorem about the relation between the percolation boundaries and SLE_6 is valid only for infinite curves. To decrease such a finite size effect we use in section 4 a different version of SLE called dipolar SLE [10]. In this approach one first conformally transforms a given region into, say, an infinite band and then uses a suitably modified SLE equation. By this method we numerically demonstrate that the nodal lines

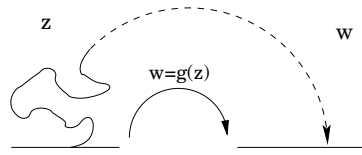


Figure 1. Loewner's evolution. The upper half plane of the variable z with a cutoff along a simple curve is transformed by a conformal map $w = g(z)$ to the whole upper half plane of the variable w . The tip of the curve is mapped to a real point ξ .

of random wavefunctions agree well with the SLE_6 description thus once more confirming the conjectural relation between the critical percolation and the nodal domains of random wavefunctions. In the appendix the numerical algorithms used in calculations are shortly discussed.

To a certain degree our work was stimulated by [5] where it was numerically checked that the nodal lines of the vorticity field in two-dimensional turbulence are close to SLE_6 curves. In the recent publication [11] Keating, Marklof and Williams have demonstrated that the nodal lines for a perturbed cat map are well described by SLE_6 . They also performed [12] numerical calculations for the nodal lines of random wavefunctions which lead to the same conclusions. Our results are in complete agreement with their findings.

2. Schramm–Loewner evolution

The purpose of this section is to give a very informal discussion of SLE curves. For simplicity we stress in most cases only physical ideas. Precise mathematical definitions and profound theorems can be found, e.g., in review articles [13–16] and references therein.

Two-dimensional self-avoiding curves appear naturally in many physically important problems. But analytically imposing the condition of self-avoiding is not easy. In 1923 Loewner proposed [8] to describe such curves by conformal transformations which map a domain with a simple (i.e., without self-intersections) curve growing from the boundary to another domain without the curve. In the simplest setting one considers the upper half plane \mathbb{H} with a simple curve \mathcal{C} and looks for a conformal map which transforms the upper half plane minus the curve, $\mathbb{H} \setminus \mathcal{C}$, to \mathbb{H} itself (see figure 1).

The main point of this approach is the well-known Riemann mapping theorem according to which any simply connected region (other than the whole plane and the plane without a point) can be conformally mapped to another simply connected region and, inversely, if one applies a conformal transformation to a simply connected region the result will be also a simply connected region.

Such conformal transformations are not unique and depend on three free parameters. For example, the upper half plane \mathbb{H} is transformed to itself by a three-parameter group of fractional transformations

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3)$$

with real a, b, c, d .

To fix uniquely the conformal map $g(z)$ in situations as in figure 1 it is convenient to impose the so-called hydrodynamic normalization by fixing the behaviour of the map at infinity:

$$g(z) = z + \frac{2t}{z} + \dots \quad \text{when} \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

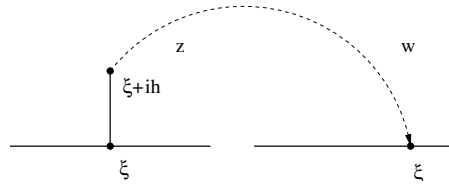


Figure 2. Transformation of a vertical slit to the upper half plane by map (6).

The coefficient $2t$ is a characteristic of the initial region called capacity (in \mathbb{H} from infinity). For simplicity in what follow we refer to parameter t as to capacity omitting the traditional factor of 2. To stress its importance we shall denote the map $g(z)$ with asymptotic (4) by $g_t(z)$ showing explicitly the dependence of t .

Directly from (4) it follows that the capacity of successive application of two transformations with capacities s and t is the sum of these capacities. Loosely, it can be written as

$$g_t(g_s) = g_{t+s}. \quad (5)$$

This additive property deserves to call t ‘conformal time’ and permits to use the capacity to parametrize a growing curve.

The simplest example is a vertical slit growing in the upper half plane. If (ξ, h) are coordinates of the tip of the slit, $\gamma = \xi + ih$ (see, figure 2) the transformation

$$w(z) = \xi + \sqrt{(z - \xi)^2 + 4t} \quad (6)$$

with $t = h^2/4$ maps the upper half plane of z with the slit to the upper half plane of w without the slit and $h = \sqrt{4t}$ is the equation of the growing slit parametrized by the capacity.

Interpreting t as the time permits to derive the Loewner equation for any simple growing curve (below we follow closely [15]).

Assume that γ_t denotes the tip of a simple curve starting from the real axis (γ_0 is real) and parametrized by its capacity, t . Let $g_t(z)$ be a conformal map which transforms the upper half plane minus this curve as in figure 1 to the upper half plane. In particular, it maps the tip of the curve to a real point $\xi_t = g_t(\gamma_t)$.

From (5) it follows that the evolution for time $t + \delta t$ can be considered as the evolution for the time t and then for a further short time δt

$$g_{t+\delta t}(z) = g_{\delta t}(g_t(z)). \quad (7)$$

For small δt any line can approximately be considered as a vertical slit growing from a real point ξ_t which is the image of the tip under $g_t(z)$ (cf appendix). Now (6) states that

$$g_{\delta t}(z) \xrightarrow{\delta t \rightarrow 0} z + \frac{2\delta t}{z - \xi_t}. \quad (8)$$

Combining last two equations one concludes that $g_t(z)$ as a function of t obeys the following differential equation called Loewner’s equation:

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - \xi_t} \quad (9)$$

which has to be equipped with the initial condition

$$g_0(z) = z. \quad (10)$$

The function ξ_t is called the ‘driving’ or ‘forcing’ function. The curve itself is called the ‘trace’ and can formally be obtained from (cf [17, 18])

$$\gamma_t = g_t^{-1}(\xi_t). \quad (11)$$

The advantage of Loewner's equation (9) is that for any smooth (differentiable) function ξ_t it generates a two-dimensional self-avoiding curve.

The next important step was done by Schramm. In 2000 he proved [9] that two-dimensional random self-avoiding curves with conformal invariant measure (obeying certain technical conditions) are in Loewner's formalism generated by the one-dimensional Brownian motion with zero mean and the variance linear in t :

$$\xi_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad \langle B_t \rangle = 0, \quad \langle B_t B_s \rangle = \min(t, s). \quad (12)$$

Such curves only depend on one real positive parameter κ and are called stochastic (or Schramm) Loewner evolution curves or shortly SLE $_{\kappa}$ curves.

As Brownian curves are not differentiable, SLE $_{\kappa}$ curves may have self-touching points. Depending on the value of κ such curves are divided into three phases (see, e.g. [15]). For $0 < \kappa \leq 4$ the traces are simple curves, for $4 < \kappa < 8$ they can have double points or hit the real axis, and for $\kappa \geq 8$ they fill the entire domain.

SLE is a very powerful tool to study rigorously the scaling (continuum) limit of different discrete models (see [13–16]). The most important for us is the Smirnov's result [7]: the boundaries of clusters in the critical percolation (on a triangular lattice) converge in the continuum limit to the traces of SLE $_6$. As the nodal domains of random wavefunctions are conjectured to be described by critical percolation [3] it means that the nodal lines of random wavefunctions in this limit have to be also described by SLE $_6$ curves. The verification of this statement is the main purpose of this work.

3. The nodal lines of random wavefunctions

The nodal lines are the lines where a real function of two variables is zero, $\Psi(x, y) = 0$. They can, in principle, be computed numerically for any function $\Psi(x, y)$.

To calculate nodal lines for random wavefunctions (2) we proceed as follows (cf [3]). First one generates independent complex random coefficients C_m with the Gaussian distribution

$$P(C) = \frac{1}{2\pi} \exp(-|C|^2/2), \quad (13)$$

for $m = 0, \dots, M_{\max}$ and put $C_{-m} = C_m^*$. The value of M_{\max} is chosen of the order of kR where k is the momentum and R is the size of the region. Bessel function with $m > M_{\max}$ are small inside the region considered and can safely be neglected. For calculations below we choose the half-circular region with area equal 4π (i.e. $R = 2\sqrt{2}$) and $k = 100$. The region was divided into square lattice of the size $a = \lambda/30$ where $\lambda = 2\pi/k$ is the wavelength associated with k . Then for each realization of random coefficients one computes in all vertices of this lattice the sign of function (2).

As usual we consider nodal lines as a part of the dual lattice formed by straight lines passing through the middles of original edges which connect two vertices of opposite signs. Assume that function (2) is positive at the origin of the half-circle. We follow the real axis in the right direction till the first sign change is recorded. Then the nodal line grows along the dual lattice in such a way that the positive region remains always in the left. When a nodal line enters a square formed by four close-by vertices of the initial lattice this prescription determines uniquely in what direction it goes out.

For random wavefunctions (2) the nodal lines are quite complicated. An example of a nodal line is presented in figure 3. In this and similar pictures all distances are measured in the units of $1000a$ where $a = \lambda/30$ is the chosen lattice size. In these units the radius of the half-circle is $R = 3\sqrt{2}/\pi \approx 1.35$ for $k = 100$.

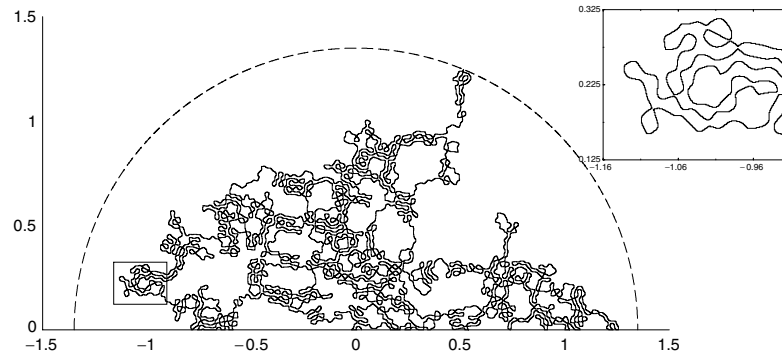


Figure 3. A nodal line of a random wavefunction. The dashed line indicates the absorbing half-circle. *Inset:* magnification of the indicated rectangular region.

To demonstrate the complexity and self-avoiding character of such a curve, its small portion enclosed by a rectangle is enlarged in the inset of this figure.

As all pictures of nodal lines are necessarily finite, one has to decide what to do when a nodal line hits the boundary. There are two main types of boundaries: reflecting and absorbing. If a growing line touches a reflecting boundary it follows the boundary in the increasing direction till the next appearance of the sign change and then continues along a new nodal line. This can be achieved automatically by imposing the sign of the function outside the boundary. If a boundary is absorbing, one simply stops any line which hits it. In figure 3 the horizontal line is a reflecting boundary but the half-circle indicated by the dashed line is an absorbing one. Different lines stop in different moments and have different number of points. The curve of figure 3 is one of the largest. It contains 65 150 points. Typical nodal line have near 18 000 points and we have computed approximately 2300 of them. To accelerate the calculations one may find the signs of random function (2) not at all lattice points but only locally in the vicinity of the growing nodal line.

In general, the properties of SLE_κ curves inside a region do depend on chosen boundary conditions. But for SLE_6 lines it is proved (see, e.g. [15]) that they have the so-called locality property, i.e., they feel the boundaries only when they hit them. So it seems that boundary conditions are unessential for the investigation of properties of the percolation cluster interfaces and, as conjectured, of the nodal lines of random wavefunctions. Nevertheless, we show in the next section that the statistical characteristics of the driving functions are sensitive to the choice of boundary conditions. The main point is that the standard Brownian description (12) is applicable only when all curves with ‘time’ t are taken into account. But one can argue that for any finite region there exist curves which during ‘time’ t go outside the region and return back. Boundary conditions will inevitably change these curves modifying their statistical properties.

Having generated a line as in figure 3, the next step is to find the conformal map which transforms it to the upper half plane. There are many good algorithms which permit us to do it numerically (see [19] and references therein). We used the so-called geodesic algorithm [19] in which a small segment of a line to be mapped is approximated by an arc of a geodesic circle perpendicular to the real axis and passing through the tip of the segment (see the appendix). This algorithm is quite stable and is easy to implement.

In figure 4 we plot the forcing function which corresponds to the nodal line of figure 3. Fine details of this function are given in figure 5. Note that, though nodal lines can be very

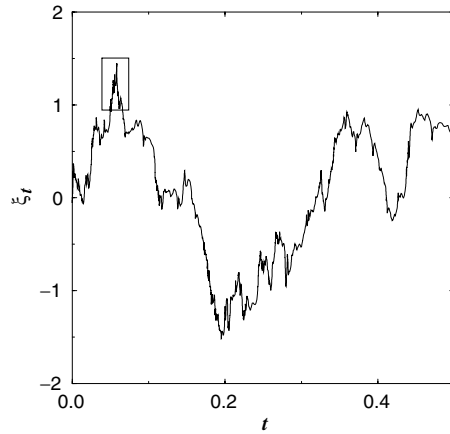


Figure 4. Forcing function corresponding to the nodal line of figure 3.

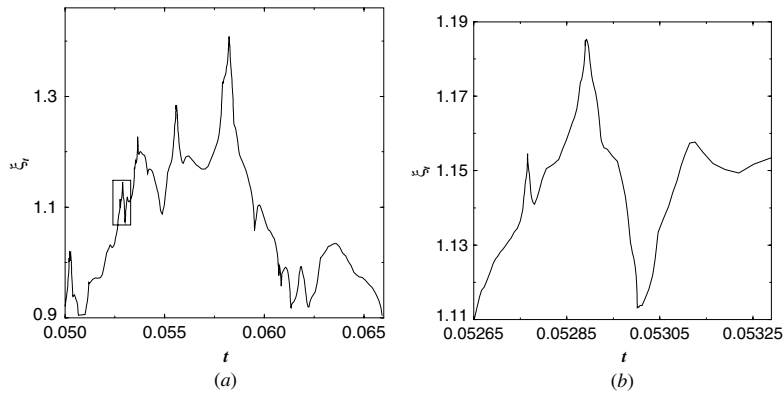


Figure 5. (a) Magnification of the small rectangular region in figure 4. (b) Magnification of the rectangular region in (a).

large (cf figure 3), their capacity (or maximal t for the forcing function) in the considered geometry is finite. It is the consequence of the general inequality for the capacity of a domain (a hull) (see, e.g. [14])

$$t < \frac{1}{2}R^2, \quad (14)$$

where R is the radius of the smallest half-circle centred on the real axis that contains the domain. In our case $R \approx 1.35$ and so for all curves $t < 0.91$.

We have numerically computed $N = 2248$ different realizations of the random wavefunction (2) with $k = 100$. For each realization we have found the nodal line starting from the origin and stopping when it hits the half-circle as in figure 3.

The corresponding forcing functions, $\xi_t(j)$ with $j = 1, \dots, N$, were calculated using the geodesic algorithm. Nodal lines were computed with quite high precision of the order of $\lambda/30$. This was necessary to be sure that all complicated meanders of nodal lines are resolved. We check that to achieve an accuracy comparable with inevitable statistical errors (see below), calculations of forcing functions can be done using only 1/5 of the total number of points

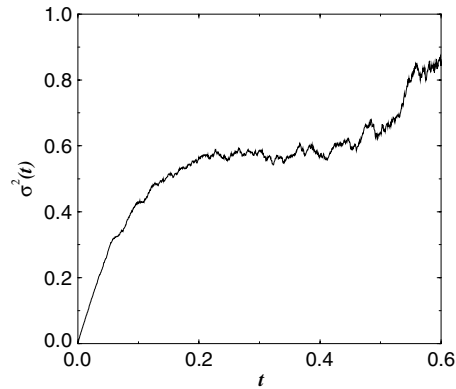


Figure 6. Variance of forcing functions for random waves inside the half-circle.

which considerably decreases the calculation time. So finally we calculate approximately 2300 different forcing functions and a typical function contains 3500 ± 100 points.

To compare these functions with Brownian curves predicted by SLE we calculated the mean value $\bar{\xi}_t$ and the variance $\sigma^2(t)$ for each t from the usual relations

$$\bar{\xi}_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_t(j), \quad \sigma^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\xi_t(j) - \bar{\xi}_t)^2. \quad (15)$$

According to the strict SLE₆ predictions (12) one should have $\bar{\xi} = 0$ and $\sigma^2 = 6t$. But for finite number of realizations of the Brownian motion curves one has statistical corrections to these values. In particular, one obtains the following estimates for the variance of SLE_κ within one standard deviation:

$$\sigma^2(t) \approx \left(\kappa \pm \kappa \sqrt{\frac{2}{N}} \right) t, \quad (16)$$

where N is the number of independent realizations. For the used value of N and $\kappa = 6$ it corresponds to 6 ± 0.18 . Therefore, all obtained values of the slope in this interval do not contradict the SLE₆ prediction.

In figure 6 the calculated dependence $\sigma^2(t)$ is plotted versus t . It is clearly seen that contrary to the SLE expectation it is not linear. As we mentioned above this is not surprising as the linear behaviour is predicted only for infinite curves. Curves closed to boundaries which are absent in SLE (like the half-circle in figure 3) require a special treatment which we will discuss in the next section. For short time, when most of the curves do not feel the boundary, the variance is close to be linear.

In figure 7 the variance and the mean value are presented in a small interval of t where $\sigma^2(t)$ is approximately linear. The solid line in this figure is the best quadratic fit to the variance

$$y = -0.003 + 6.05t - 10.0t^2. \quad (17)$$

The most important for us is the value of the linear term, 6.05. It is quite close to the pure percolation value $\kappa = 6$. The mean value of the forcing functions (≈ 0) also agrees with the SLE value. Different fits to the data give slightly different values of coefficients. But in all cases the slope of the linear term is within the confidence interval 6 ± 0.18 (cf (16)) thus in accordance with SLE₆ expectation.

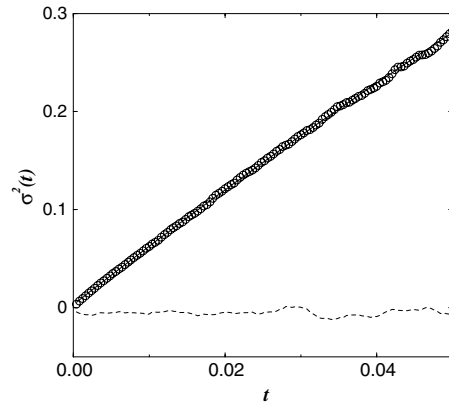


Figure 7. Variance (circles) and mean value (dashed line) in a short range. Solid line is the best quadratic fit (17).

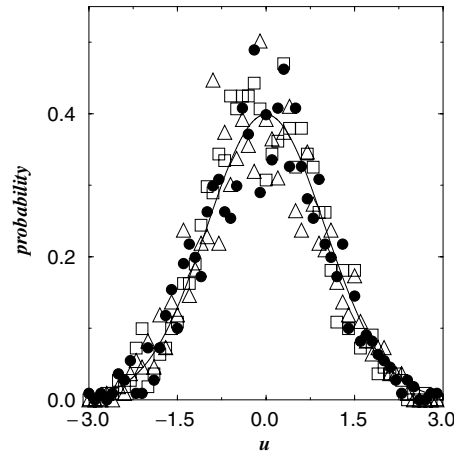


Figure 8. Probability law for random wave forcing functions. The abscissa axis is, as it follows for SLE₆, $u = \xi_t/\sqrt{6t}$. The solid line is the standard Gaussian $P(u) = e^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi}$. The points indicated by \bullet , \triangle and \square correspond to, respectively, $t = 0.02, 0.04$ and 0.06 .

Another important prediction of the SLE₆ description of the percolation model is that the distribution of values of ξ_t with fixed t has to be Gaussian with variance $6t$. In figure 8 this distribution is presented for different values of t . When the abscissa axis is rescaled by $\sqrt{6t}$ all data are quite close to the Gaussian curve with unit variance. Similar results were obtained when instead of the half-circle we consider nodal lines inside a rectangle.

The agreement of our results with SLE₆ predictions confirms that the nodal lines of random wavefunctions are well described by the percolation model, as was conjectured in [4].

4. Dipolar SLE

Though the results of the previous section are in a good agreement with SLE₆, let us notice two facts. First, the approximately linear increase of the variance with time is observed only

for a very small time interval. Second, even within this interval a quadratic term in t exists and is quite large (cf (17)). So, strictly speaking, the variance is a nonlinear function of t which contradicts the SLE. We have mentioned that these drawbacks are related with inevitable finite size effects. In this section we discuss this subject in more detail and show that both of them can be considerably reduced by using another variant of SLE.

First of all we note that there exist lines with arbitrary small capacity which can go arbitrarily far from the origin. The simplest way of seeing this phenomenon is to use the exact solution for the conformal map of the slit forming an angle $\pi\alpha$ with the real axis (see e.g. [18]). From this solution one concludes that for $\alpha \rightarrow 0$ $t \rightarrow \alpha L^2/4$ where L is the length of the slit. Therefore straight lines with very small angle of inclination may go arbitrarily far for arbitrarily small time. Many lines close to the real axis also have this property.

The existence of such lines escaping very quickly demonstrates that for arbitrarily small time boundaries are important. Even for $t \rightarrow 0$ there are curves which go outside any finite region. These are the curves which will be modified by imposed boundary conditions.

This situation is quite analogous to the Brownian motion in a finite interval. It is well known (see e.g. [20]) that the probability for a one-dimensional Brownian particle starting from x_0 to arrive at the point x at time t in the whole space is given by the Green function of the diffusion equation

$$G_0(x, x_0; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2Dt}\right), \quad (18)$$

where D is a diffusion coefficient. Standard relations $\langle x \rangle = x_0$ and $\langle (x - x_0)^2 \rangle = Dt$ which are analogue of (12) are simple consequences of this expression.

For the Brownian motion inside a finite interval the above probability depends on the boundary conditions. There are two main types of boundary conditions: reflecting and absorbing. When a particle hits a reflecting boundary it reflects back, when it touches an absorbing boundary it stops. It is known (see, e.g. [20]) within the formalism of the diffusion equation that a reflecting boundary gives rise to the Neumann boundary condition and an absorbing one corresponds to the Dirichlet condition. When both boundaries of an interval of length h are of the same type one gets that the Green function of this interval is

$$G_{\pm}(x, x_0; t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (G_0(x + 2mh, x_0; t) \pm G_0(-x + (2m + 1)h, x_0; t)). \quad (19)$$

Here + (respectively $-$) denote Neumann (respectively Dirichlet) boundary conditions imposed at points $\pm h/2$.

In figure 9 the mean variance

$$\sigma^2(t) = \int_{-h/2}^{h/2} (x - \bar{x})^2 G_{\pm}(x, x_0; t) dx \quad (20)$$

is plotted as a function of t for the case $x_0 = 0$ and $D = 1$. It is clearly seen that the long time behaviour is nonlinear and depends on the boundary conditions. The variance is linear in t only for very small t . It is the slope at the origin which corresponds to the true diffraction coefficient.

This figure is quite similar to figure 6 for the variance of forcing functions where the linear behaviour was observed only for very small $t < 0.05$ (cf figure 7). We estimated that in the best case this interval of t corresponds to, roughly speaking, only 1/4 of the total curve length. Even for this tiny interval the existence of a large quadratic term does not permit to perform the clear-cut comparison with SLE.

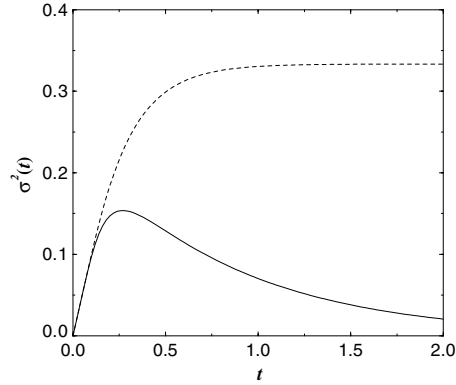


Figure 9. Variance for the one-dimensional Brownian motion with absorbing boundaries (solid line) and reflecting ones (dashed line).

To take into account larger parts of the curves and to check the linear Brownian-type behaviour for a longer time interval it is necessary to construct formulae similar to (19) for SLE.

The simplest case corresponds to the reflecting boundary conditions. In this setting one considers a region and random curves (nodal lines) which start at one fixed point, z_0 , of the boundary and end at another fixed boundary point, z_1 . For the nodal lines this can be achieved, e.g., by imposing that one boundary arc from z_0 to z_1 is positive and the other is negative. This type of processes is called chordal SLE (see, e.g. [15]). By definition, it can be reduced to the standard SLE from 0 to infinity (cf (9)) by a conformal transformation which transforms the given region to the upper half plane in such a way that the point z_0 is mapped to the origin and the point z_1 to infinity.

Here, we would like to use a different variant of SLE which corresponds to a region with two boundary arcs restricted by points z_+ and z_- . One arc is assumed to be a reflecting boundary and the other is an absorbing boundary. The random curves emerge from the point z_0 on the reflecting boundary and are stopped when they hit the absorbing arc. By a conformal transformation our region can be transformed to the standard strip \mathbb{S} ,

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Im } z < \pi\}, \quad (21)$$

in such a way that points z_- , z_+ and z_0 are mapped to $-\infty$, $+\infty$ and 0, respectively.

In [10] it was shown that the SLE_κ process which joins 0 to a point of the line $\text{Im } z = \pi$ is described by the following Loewner-type equation:

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{\tanh(g_t(z) - \xi_t)}, \quad (22)$$

where $g_0(z) = z$ and the forcing function, ξ_t , is as above the standard Brownian motion (12) with variance κt .

To construct the dipolar SLE numerically from the data used in the previous section we first transform the nodal lines inside the half-circle, as in figure 3, to the standard strip (21) by the following transformation:

$$F(z) = \ln[(L+z)^2/(L-z)^2], \quad (23)$$

where L is the circle radius.

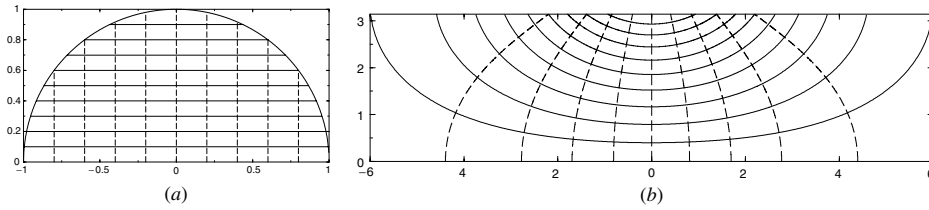


Figure 10. (a) Rectangular lattice inside the half-circle. (b) Its image under the map (23).

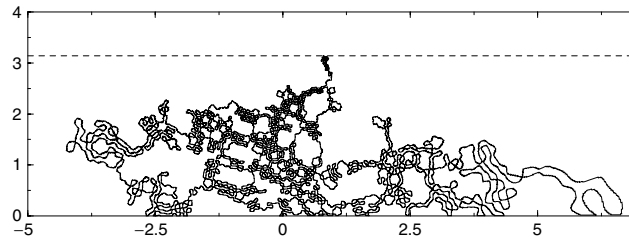


Figure 11. Image of the nodal line of figure 3 under the map (23). The dashed line is the absorbing boundary.

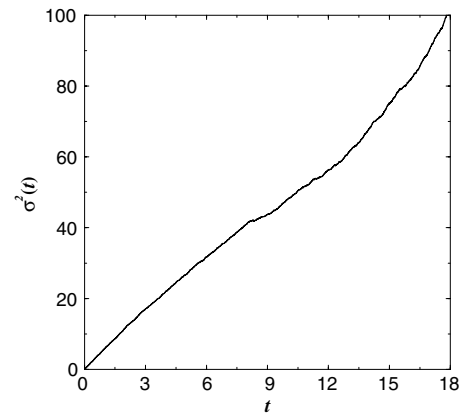


Figure 12. Variance of forcing functions for the nodal lines inside the strip.

To visualize this mapping we present the images of a rectangular lattice inside the half-circle in figure 10. Note the strong deformations of the regions close to the absorbing boundary.

The first step of calculations consists in the transformation of every nodal lines inside the half-circle to lines inside the chosen strip (21). Such an example is illustrated in figure 11.

Then it is necessary to find the dipolar conformal transformation which maps the strip with a line to the strip itself (cf (22)). In the appendix a simple algorithm for such a mapping is briefly discussed. Using it we compute numerically the forcing function, ξ_t for each nodal line and calculate its statistical properties. In figure 12 the variance (15) is plotted for all curves and in figure 13 the region of linear increase of $\sigma^2(t)$ is magnified. The solid line in this figure indicates the best quadratic fit

$$y = 5.92t - 0.103t^2. \quad (24)$$

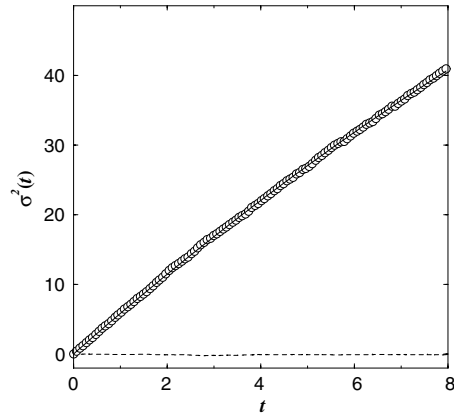


Figure 13. Variance (circles) and mean value (dashed line) for 2252 realizations inside the strip. Solid line: the best fit (24).

The coefficient 5.92 is to compare with the percolation theory value for this number of points: 6 ± 0.18 . Different fits (with a constant term and (or) a cubic term) lead to the same conclusion. Other statistical characteristics are also in a good agreement with the SLE_6 predictions.

Contrary to (17) the quadratic term in (24) is small. We check that it is mainly related to discretization errors and it decreases when more points along a curve are taken into account. The nonlinear behaviour of the variance in figure 12 for large t is connected with large errors due to the stretching of lines close to the boundary as is obvious from figures 10 and 11.

The difference in scales in figure 7 for chordal SLE and in figure 13 for dipolar SLE is mostly related with different definition of ‘time’ in both approaches. Nevertheless, the interval $t < 8$ in figure 13 where the variance is linear in t is effectively much larger (i.e., contains more points of driving functions) than the corresponding interval $t < 0.05$ in figure 7. We have checked that the former includes approximately 92% of the typical curve length as compared to 25% for the latter. It means that the dipolar SLE_6 is a good description of the nodal lines practically for the entire nodal lines. Exceptions are small line parts close to the absorbing boundary which require better approximations.

We have also investigated nodal lines inside a rectangle $[-L/2; L/2] \times [0; l]$ which can be conformally mapped into the strip (21) by the following transformation

$$F(z) = -\ln[(\wp(z + L/2) - \wp(L))/(\wp(L/2) - \wp(L))], \quad (25)$$

where $\wp(z)$ is the Weierstrass elliptic function with periods $2L$ and $2il$ (see e.g. [21]).

The results in this case are similar to the ones above and all agree well with the percolation model.

5. Conclusions

In summary, we investigate the nodal lines of two-dimensional random wavefunctions by numerically computing one-dimensional forcing functions of Loewner’s evolution. We demonstrate that the later are well described by a Brownian motion with zero mean and variance growing linearly in time. The coefficient of proportionality is close to the value 6 predicted by the percolation model. Our results give an additional support to the conjecture that the nodal domains of random wavefunctions in the scaling limit are described by the critical percolation.

We consider and compare the chordal and dipolar variants of SLE. In both cases the slopes of the variance are of comparable accuracy and within statistical incertanties are in agreement with SLE_6 . But for the dipolar case the interval where the variance is linear in time is not only considerably larger than for the chordal one but also all nonlinear terms are practically absent, which is not the case for the chordal SLE. It demonstrates that using the dipolar SLE reduces significantly finite size effects.

Acknowledgments

The authors are very thankful to J Keating and I Williams for useful discussions and, in particular, for pointing out an error in the calculations. One of the authors, EB, is grateful to G Falkovich for the discussion of the paper [5] prior the publication and to D Bernard for clarifying discussions about SLE.

Appendix

Consider a simple curve which starts on the real axis and grows inside a region of the upper half plane. The goal of the numerical algorithms below is to find a forcing function in (9) corresponding to a conformal map which transforms the region cut along the curve into the region itself.

Let $(x_0, 0)$ be coordinates of the first point of the curve which we assume belongs to the abscissa axis and let (x_1, y_1) be coordinates of the next point closest to the first. The simplest numerical method consists of assuming that the forcing function is a piecewise constant function. The map with a constant forcing function $\delta\xi$ for $0 < t \leq \delta t$ is given by (6) as

$$g_t(z) = \delta\xi + \sqrt{(z - \delta\xi)^2 + 4\delta t}. \quad (\text{A.1})$$

The parameters $\delta\xi$ and δt are obtained from the condition that the top of the slit coincides with the point $\delta z = x_1 - x_0 + iy_1$, which yields

$$\delta\xi = \text{Re } \delta z, \quad \delta t = \frac{1}{4}(\text{Im } \delta z)^2. \quad (\text{A.2})$$

Then we transform all points of the curve except the first one by (A.1) with these values of parameters and renumber the resulting points. One repeats this process till the whole curve will be transformed. In [17] it is proved that such an algorithm converges for sufficiently small δt_j and δx_j .

In section 3 we used the more refined geodesic algorithm [19] in which one approximates a small part of the curve between two points, 0 and δz , by the geodesic arc (a circle perpendicular to the real axis) passing through these points. Normalizing the map given in [19] such as to obey the convention (4) one gets the expression

$$g_t(z) = \frac{b^3}{\sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{(bz/(b-z))^2 + c^2 - b^2 - c^2}} + \frac{2b^3 + 3bc^2}{2(b^2 + c^2)}, \quad (\text{A.3})$$

where

$$b = \frac{|\delta z|^2}{\text{Re } \delta z}, \quad c = \frac{|\delta z|^2}{\text{Im } \delta z}. \quad (\text{A.4})$$

Direct calculations give that the time corresponding to δz and the value of the forcing function in this point are

$$\delta t = \frac{1}{4}(\text{Im } \delta z)^2 + \frac{1}{8}(\text{Re } \delta z)^2 \quad (\text{A.5})$$

and

$$\delta\xi_t = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \delta z. \quad (\text{A.6})$$

When a point moves along a geodesic circle of diameter b the forcing function changes as follows:

$$\xi_t = \frac{12t}{b + \sqrt{b^2 - 8t}} \quad (\text{A.7})$$

and is practically linear for short time. Equations (A.3)–(A.6) define the geodesic algorithm.

To do some computations following dipolar SLE in section 4 we use a piecewise constant approximation for the forcing function in (22). In this case one has the exact solution [10]

$$\cosh\left(\frac{1}{2}(g_t(z) - \delta\xi)\right) = e^{\delta t/2} \cosh\left(\frac{1}{2}(z - \delta\xi)\right). \quad (\text{A.8})$$

Finding δt and $\delta\xi$ from the condition that the curve tip coincides with δz one obtains

$$\delta\xi = \operatorname{Re} \delta z, \quad \exp\left(-\frac{1}{2}\delta t\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Im} \delta z\right). \quad (\text{A.9})$$

These expressions are the dipolar analogue of equations (A.2) and they permit to construct the simplest algorithm of numerical calculations for the dipolar case.

References

- [1] Berry M V 1977 Regular and irregular semi-classical wavefunctions *J. Phys. A: Math. Gen.* **10** 2083
- [2] Blum G, Gnutzmann S and Smilansky U 2002 Nodal domains statistics: a criterion for quantum chaos *Phys. Rev. Lett.* **88** 114101
- [3] Bogomolny E and Schmit C 2002 Percolation model for nodal domains of chaotic wave functions *Phys. Rev. Lett.* **88** 114102
- [4] Bogomolny E and Schmit C 2006 Random wave functions and percolation (in preparation)
- [5] Bernard D, Boffetta G, Celani A and Falkovich G 2006 Conformal invariance in turbulence *Nature* **2** 124
- [6] Stauffer D and Aharony A 1994 *Introduction to Percolation Theory* (London: Taylor and Francis)
- [7] Smirnov S 2001 Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits *Acad. Sci., Paris I* **333** 239
- [8] Löwner K 1923 Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I *Math. Ann.* **89** 103
- [9] Schramm O 2000 Scaling limits of loops-erased random walks and uniform spanning trees *Isr. J. Math.* **118** 221
- [10] Bauer M, Bernard D and Houdayer J 2005 Dipolar stochastic Loewner evolution *J. Stat. Mech.* **P03001**
- [11] Keating J P, Marklof J and Williams I G 2006 Nodal domain statistics for quantum maps, percolation and stochastic Loewner evolution *Phys. Rev. Lett.* **97** 034101
- [12] Keating J P and Williams I G 2006 private communication
- [13] Lawler G F 2001 An introduction to the stochastic Loewner evolution *Proceedings of Conference on Random Walks* (Vienna: Erwin Schrodinger Institute)
- [14] Kager W and Nienhuis B 2004 A guide to stochastic Löwner evolution and its applications *J. Stat. Phys.* **115** 1149
- [15] Cardy J 2005 SLE for theoretical physicists *Ann. Phys.* **318** 81
- [16] Werner W 2004 *Random Planar Curves and Schramm–Loewner Evolution (Lectures Notes in Mathematics vol 1840)* p 107
- [17] Bauer R O 2003 Discrete Loewner evolution (*Preprint math.PR/0303119*)
- [18] Kennedy T 2005 A fast algorithm for simulating the chordal Schramm–Loewner evolution (*Preprint math.PR/0508002*)
- [19] Marshall D and Rohde S 2005 Convergence of the Zipper algorithm for conformal mapping <http://www.math.washington.edu/~marshall/preprints/zipper.pdf>
- [20] Feller W 1968 *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (New York: Wiley)
- [21] Erdélyi A 1955 *Higher Transcendental Functions* vol 3 (New York: Mc Graw-Hill)

Inferring periodic orbits from spectra of simply shaped microlasers

M. Lebental,^{1,2,*} N. Djellali,¹ C. Arnaud,¹ J.-S. Lauret,¹ J. Zyss,¹ R. Dubertrand,² C. Schmit,^{2,†} and E. Bogomolny²

¹CNRS, Ecole Normale Supérieure de Cachan, UMR 8537, Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire, 94235 Cachan, France

²CNRS, Université Paris Sud, UMR 8626, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, 91405 Orsay, France

(Received 3 April 2007; published 31 August 2007)

Dielectric microcavities are widely used as laser resonators and characterizations of their spectra are of interest for various applications. We experimentally investigate microlasers of simple shapes (Fabry-Perot, square, pentagon, and disk). Their lasing spectra consist mainly of almost equidistant peaks and the distance between peaks reveals the length of a quantized periodic orbit. To measure this length with a good precision, it is necessary to take into account different sources of refractive index dispersion. Our experimental and numerical results agree with the superscar model describing the formation of long-lived states in polygonal cavities. The limitations of the two-dimensional approximation are briefly discussed in connection with microdisks.

DOI: 10.1103/PhysRevA.76.023830

PACS number(s): 42.55.Sa, 05.45.Mt, 03.65.Sq, 42.60.Da

I. INTRODUCTION

Two-dimensional microresonators and microlasers are being developed as building blocks for optical telecommunications [1,2]. Furthermore, they are of interest as sensors for chemical or biological applications [2–4] as well as billiard toy models for quantum chaos [5,6]. Towards fundamental and applied considerations, their spectrum is one of the main features. It was used, for instance, to experimentally recover some information about the refractive index [7] or geometrical parameters [8].

In this paper we focus on cavities much larger than the wavelength and propose to account for spectra in terms of periodic orbit families. Cavities of the simplest and most currently used shapes were investigated: the Fabry-Perot resonator, polygonal cavities such as square and pentagon, and circular cavities.

Our experiments are based on quasi-two-dimensional organic microlasers [9]. The relatively straightforward fabrication process ensures good quality and reproducibility as well as versatility in shapes and sizes (see Fig. 1). The experimental and theoretical approaches developed in this paper can be easily extended to more complicated boundary shapes. Moreover, this method is useful towards other kinds of microresonators, as it depends only on cavity shape and refractive index.

The paper is organized as follows. In Sec. II a description of the two-dimensional model is provided together with its advantages and limitations. In Sec. III microlasers in the form of a long stripe are investigated as Fabry-Perot resonators to test the method and evaluate its experimental precision. This protocol is then further applied to polygonal cavities. In Sec. IV the case of square cavities is discussed whereas in Sec. V dielectric pentagonal cavities are investigated. The theoretical predictions based on a superscar model are compared to experiments as well as numerical

simulations and a good agreement is found. Finally, in Sec. VI the case of several coexisting orbits is briefly dealt with on the example of circular cavities.

II. PRELIMINARIES

Dielectric microcavities are quasi-two-dimensional objects whose thickness is of the order of the wavelength but

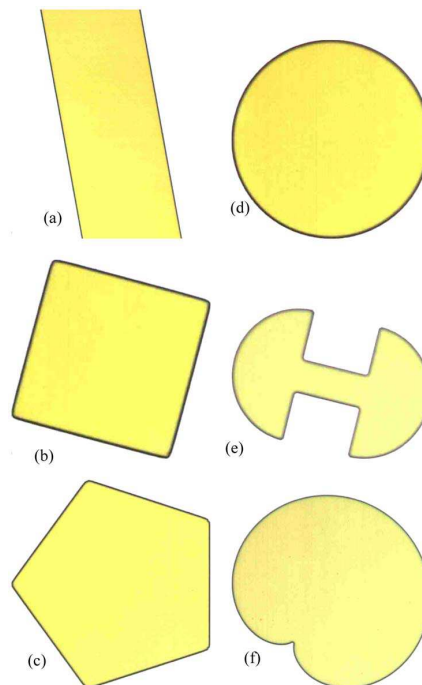


FIG. 1. (Color online) Optical microscope photographs of some organic microlasers: stripe (partial view, used as Fabry-Perot resonator), square, pentagon, disk, quasistadium, and cardioid. Typical dimension: 100 μm .

*Electronic address: lebental@lpm.ens-cachan.fr

†Deceased.

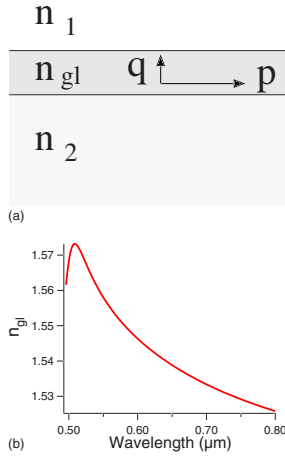


FIG. 2. (Color online) (a) Notations for refractive indexes and propagation wave numbers. From top to bottom, the layers of our samples [9] are the air ($n_1=1$), a polymer (PMMA) doped with a laser dye (DCM) ($n_{gl}=1.54$), and another polymer (SOG) ($n_2=1.42$) or silica ($n_2=1.45$). (b) Refractive index of the gain layer vs the wavelength inferred from ellipsometric measurements.

with much bigger plane dimensions (see Fig. 1). Although such cavities have been investigated for a long time both with and without lasing, their theoretical description is not quite satisfactory. In particular, the authors are not aware of true three-dimensional studies of high-excited electromagnetic fields even for passive cavities. Usually one uses a two-dimensional approximation but its validity is not under control.

Within such approximation fields inside the cavity and close to its two-dimensional boundary are treated differently. In the bulk, one considers electromagnetic fields as propagating inside an infinite dielectric slab (gain layer) with refractive index n_{gl} surrounded by medias with refractive indices n_1 and n_2 smaller than n_{gl} . In our experiments, the gain layer is made of a polymer (PMMA) doped with a laser dye (DCM) and sandwiched between the air and a polymer (SOG) layer [see Fig. 2(a) and [9]]. It is well known (see, e.g., [10] or [11]) that in such geometry there exist a finite number of propagating modes confined inside the slab by total internal reflection. The allowed values of transverse momentum inside the slab, q , are determined from the standard relation

$$e^{2ihq} r_1 r_2 = 1, \quad (1)$$

where h is the slab thickness and $r_{1,2}$ are the Fresnel reflection coefficients on the two horizontal interfaces. For total internal reflection

$$r_i = \exp(-2i\delta_i), \quad (2)$$

where

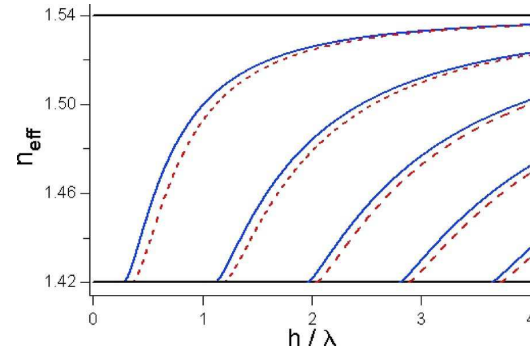


FIG. 3. (Color online) Effective refractive index vs the thickness over wavelength variable calculated from Eq. (4). The refractive indices are assumed to be constant: 1 for air, 1.42 for SOG, and 1.54 for the gain layer (horizontal black lines). The TE polarization is plotted with solid blue lines and TM polarization with dotted red lines. Integer l [see Eq. (4)] increases from left to right starting from $l=0$.

$$\delta_i = \arctan\left(\nu_i \frac{\sqrt{n_{gl}^2 \sin^2 \theta - n_i^2}}{n_{gl} \cos \theta}\right). \quad (3)$$

Here θ is the angle between the direction of wave propagation inside the slab and the normal to the interface. The ν_i parameter is 1 [respectively $(n_{gl}/n_i)^2$] when the magnetic field (respectively the electric field) is perpendicular to the slab plane. The first and second cases correspond respectively to TE and TM polarizations.

Denoting the longitudinal momentum, $p=n_{gl}k \sin \theta$, as $p=n_{eff}k$, the effective refractive index n_{eff} is determined from the following dispersion relation:

$$2\pi \frac{h}{\lambda} \sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2} = \arctan\left(\nu_1 \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_1^2}}{\sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2}}\right) + \arctan\left(\nu_2 \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_2^2}}{\sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2}}\right) + l\pi, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

This equation has only a finite number of propagating solutions which can easily be obtained numerically. Figure 3 presents possible propagating modes for our experimental setting $n_1=1$ (air), $n_2=1.42$ (SOG) [12], and $n_{gl}=1.54$ deduced from ellipsometric measurements [see Fig. 2(b)] in the observation range.

The Maxwell equations for waves propagating inside the slab are thus reduced to the two-dimensional scalar Helmholtz equation:

$$(\Delta + n_{eff}^2 k^2) \Psi_{in}(x, y) = 0. \quad (5)$$

Ψ represents the field perpendicular to the slab, i.e., the electric field for TM and the magnetic field for TE polarization [13].

This equation adequately describes the wave propagation inside the cavity. But when one of these propagating modes hits the cavity boundary, it can partially escape from the

cavity and partially be reflected inside it. To describe correctly different components of electromagnetic fields near the boundary, the full solution of the three-dimensional vectorial Maxwell equations is required, which to the authors knowledge has not yet been addressed in this context. Even the much simpler case of scalar scattering by a half plane plate with a small but finite thickness is reduced only to numerical solution of the Wiener-Hopf-type equation [14].

To avoid these complications, one usually considers that the fields can be separated into TE and TM polarization and obey the scalar Helmholtz equations (5),

$$(\Delta + n_{in,out}^2 k^2) \Psi_{in,out}(x,y) = 0, \quad (6)$$

where n_{in} is the n_{eff} effective index inferred from Eq. (4) and n_{out} is the refractive index of the surrounding media, usually air so $n_{out}=1$. This system of two-dimensional equations is closed by imposing the following boundary conditions:

$$\Psi_{in}|_B = \Psi_{out}|_B, \quad \nu_{in} \frac{\partial \Psi_{in}}{\partial \vec{\tau}} \Big|_B = \nu_{out} \frac{\partial \Psi_{out}}{\partial \vec{\tau}} \Big|_B. \quad (7)$$

Here $\vec{\tau}$ indicates the direction normal to the boundary and ν depends on the polarization. When the electric (respectively magnetic) field is perpendicular to the cavity plane, called TM polarization (respectively TE polarization), $\nu_{in,out}=1$ (respectively $\nu_{in,out}=1/n_{in,out}^2$). Notice that these definitions of ν are not the same for horizontal and vertical interfaces.

We consider this standard two-dimensional approach keeping in mind that waves propagating close to the boundary (whispering gallery modes) may deviate significantly from two-dimensional predictions. In particular leakage through the third dimension could modify the lifetime estimation of quasistationary states.

Our polymer cavities are doped with a laser dye and uniformly pumped one by one from above [9], so that the pumping process induces no mode selection. The complete description of such lasing cavities requires the solution of the nonlinear Maxwell-Bloch equations (see, e.g., [15–17] and references therein). For clarity, we accept here a simplified point of view (see, e.g., [1], Sec. 24) according to which true lasing modes can be represented as a linear combination of the passive modes which may lase (i.e., for which gain exceeds losses),

$$\Psi_{lasing} = \sum_m C_m \Psi_m. \quad (8)$$

From physical considerations, it is natural to consider the Ψ_m modes as the quasistationary states of the passive cavity. Though this choice leads to well-known difficulties (see, e.g., [1]) it is widely noticed and accepted at least for modes with small losses (cf. [16–18]).

For each individual lasing mode, the C_m coefficients could be determined only after the solution of the full Maxwell-Bloch equations. But due to the statistical nature of fluorescence the lasing effect starts randomly and independently during each pump pulse. So it is quite natural to average over many pump pulses. Then the mean spectrum exhibits peaks at frequencies of all possible lasing modes. The experimental

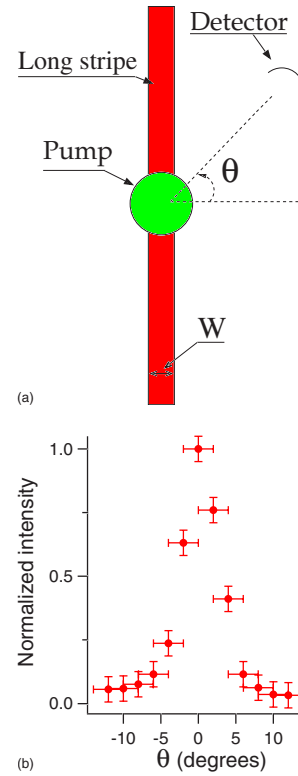


FIG. 4. (Color online) (a) Diagram summarizing the main features of the Fabry-Perot experiment. (b) Detected intensity vs θ angle for a Fabry-Perot experiment.

data studied in this paper are recorded after integration over 30 pump pulses and agree with this simple statistical model. More refined verifications are in progress.

III. FABRY-PEROT RESONATOR

The Fabry-Perot configuration is useful for the calibration control of further spectral experiments due to the nonambiguous single periodic orbit family which sustains the laser effect.

A long stripe can be considered to a good approximation as a Fabry-Perot resonator. In fact, the pumping area is very small compared to the length [see Fig. 4(a)] and the material is slightly absorbing, so that reflections at far extremities can be neglected. Moreover, the pumping area is larger than the width of the stripe, thus the gain is uniformly distributed over the section. For a Fabry-Perot cavity, the emission is expected along both $\theta=0$ and $\theta=\pi$ directions [see Fig. 4(a) for notations]. Figure 4(b) shows that this directional emission is observed experimentally which confirms the validity of our setup.

The experimental spectrum averaged over 30 pump pulses is made up of almost regularly spaced peaks [see Fig. 5(a)] which is typically expected for a Fabry-Perot resonator. In fact, due to coherent effects, the k wave numbers of quasi-bound states of a passive Fabry-Perot cavity are determined

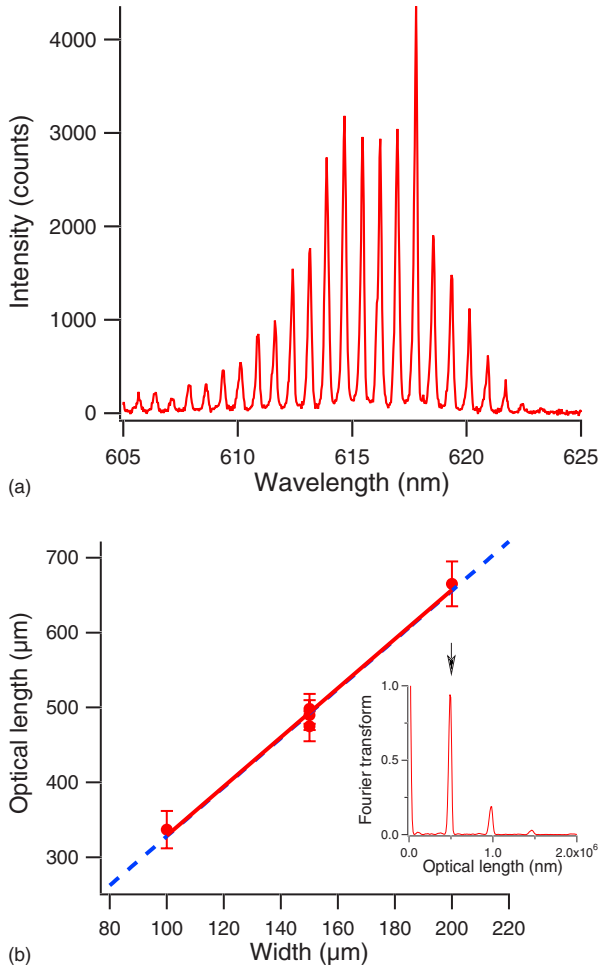


FIG. 5. (Color online) (a) Experimental spectrum of a Fabry-Perot resonator with $W = 150 \mu\text{m}$. (b) Optical length vs Fabry-Perot width W . The experiments (red points) are linearly fitted by the solid red line. The dashed blue line corresponds to the theoretical prediction without any adjusted parameter. Inset: Normalized Fourier transform of the spectrum in (a) expressed as intensity vs wave number.

from the quantization condition along the only periodic orbit of $L = 2W$ length as for Eq. (1):

$$r^2 e^{iLk n_{eff}(k)} = 1, \quad (9)$$

where r is the Fresnel reflection coefficient and n_{eff} is the effective refractive index (4). The solutions of this equation are complex numbers: the imaginary part corresponds to the width of the resonance and the real part (called k_m afterwards) gives the position of a peak in the spectrum and verifies

$$Lk_m n_{eff}(k_m) = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

With $\delta k_m = k_{m+1} - k_m$ assumed to be small, the distance between adjacent peaks is constrained by

$$\delta k_m \left(n_{eff}(k_m) + k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m) \right) L = 2\pi. \quad (11)$$

We call

$$n_{full} = n_{eff}(k_m) + k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m) \quad (12)$$

the full effective refractive index. It is a sum over two terms: one corresponding to the phase velocity, $n_{eff}(k_m)$, and the other one to the group velocity, $k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m)$. If n_{full} is considered as a constant over the observation range, which is true with a good accuracy, δk can be retrieved from the experimental spectrum. For instance, the Fourier transform of the spectrum (intensity vs k) is made up of regularly spaced peaks [Fig. 5(b) inset], with the first one (indicated with an arrow) centered at the optical length ($L n_{full}$) and the others at its harmonics. So the geometrical length of the periodic orbit can be experimentally inferred from the knowledge of n_{full} which is independently determined as described below. For the Fabry-Perot resonator, the geometrical length is known to be $2W$, thus allowing us to check the experimental precision. The relative statistical errors on the W width is estimated to be less than 3%. The error bars in Fig. 5(b) are related to the first peak width of the Fourier transform and are less than 5% of the optical length.

The full effective refractive index n_{full} is independently inferred from ellipsometric measurement [Fig. 2(b)] and standard effective index derivation described in the previous section. Depending on the parameter h/λ (thickness over wavelength), one or several modes are allowed to propagate. Our samples are designed such as only one TE and TM modes exist with n_{eff} effective refractive index according to Eq. (4).

In Fig. 3 the refractive index of the gain layer, n_{gl} , is assumed to be constant: $n_{gl} = 1.54$ in the middle of the experimental window, λ varying from 0.58 to 0.65 μm . From Eq. (4) a $n_{eff} = 1.50$ is obtained in the observation range with a $h = 0.6\text{-}\mu\text{m}$ thickness, and corresponds to the phase velocity term. The group velocity term $k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m)$ is made up of two dispersion contributions: one from the effective index (about 4%) and the other from the gain medium (about 7%). The dependance of n_{gl} with the wavelength is determined with the GES 5 SOPRA ellipsometer from a regression with the WINELLI II software (correlation coefficient: 0.9988) and plotted in Fig. 2(b). Taking into account all contributions (that means calculating the effective refractive index with a dispersed n_{gl}), the n_{full} full effective refractive index is evaluated to be 1.645 ± 0.008 in the observation range. So the group velocity term made up of the two types of refractive index dispersion contribute for 10% to the full effective index, which is significant compared to our experimental precision. The n_{full} index depends only smoothly on polarization (TE or TM), and on the h thickness, which is measured with a surface profilometer Veeco (Dektak³ST). Thus the samples are designed with thickness 0.6 μm and the precision is reported on the full effective index which is assumed to be 1.64 with a relative precision of about 1% throughout this work.

Considering all of these parameters, we obtain a satisfactory agreement between measured and calculated optical lengths, which further improves when taking into account several Fabry-Perot cavities with different widths as shown on Fig. 5(b). The excellent reproducibility (time to time and sample to sample) is an additional confirmation of accuracy and validity. With these Fabry-Perot resonators, we have demonstrated a spectral method to recover the geometrical length of a periodic orbit which can now be confidently applied to different shapes of microcavities.

IV. SQUARE MICROCAVITY

In the context of this paper square-shaped microcavities present a double advantage. First, they are increasingly used in optical telecommunications [2,19]. Second, the precision and validity of the parameters used above can be tested independently since there is only one totally confined periodic orbit family. In fact the refractive index is quite low (about 1.5), so the diamond [see Fig. 6(b), top inset] is the only short-period orbit without refraction loss [i.e., all reflection angles at the boundary are larger than the critical angle $\chi_c = \arcsin(1/n) \approx 42^\circ$].

In a square-shaped cavity light escapes mainly at the corners due to diffraction. Thus the quality design of corners is critical for the directionality of emission but not for the spectrum. Indeed for a reasonably well designed squared microcavity (see Fig. 1), no displacement of the spectrum peaks is detectable by changing the θ observation angle. The spectra used in this paper are thus recorded in the direction of maximal intensity.

Figure 6(a) presents a typical spectrum of a square-shaped microcavity. The peaks are narrower than in the Fabry-Perot resonator spectrum, indicating a better confinement, as well as regularly spaced, revealing a single periodic orbit. Data processing is performed exactly as presented in the previous section: for each cavity the Fourier transform of the spectrum is calculated [Fig. 6(b), bottom inset] and the position of its first peak is located at the optical length. Figure 6(b) summarizes the results for about 20 different microsquares, namely the optical length inferred from the Fourier transform vs the a square side width. These experimental results are fitted by the solid red line. The dotted blue line corresponds to an *a priori* slope given by n_{full} (1.64) times the geometrical length of the diamond periodic orbit ($L = 2\sqrt{2}a$). The excellent agreement confirms that the diamond periodic orbit family provides a dominant contribution to the quantization of dielectric square resonator.

This result is far from obvious as square dielectric cavities are not integrable. At first glance the observed dominance of one short-period orbit can be understood from general considerations based on trace formulas which are a standard tool in semiclassical quantization of closed multidimensional systems (see, e.g., [20,21] and references therein). In general, trace formulas express the density of states (and other quantities as well) as a sum over classical periodic orbits. For two-dimensional closed cavities

$$d(k) \equiv \sum_n \delta(k - k_n) \approx \sum_p c_p e^{ikL_p - i\mu_p} + c.c., \quad (13)$$

where k is the wave number and k_n are the eigenvalues of a closed cavity. The summation on the right part is performed

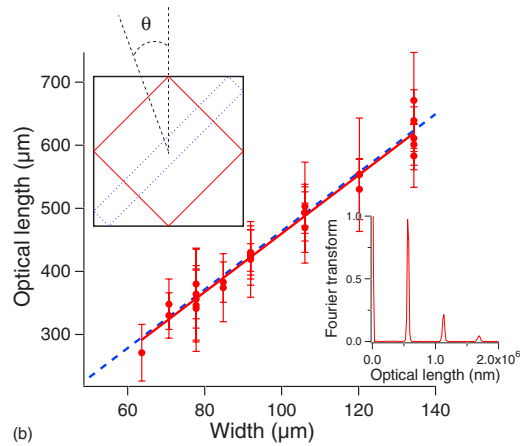
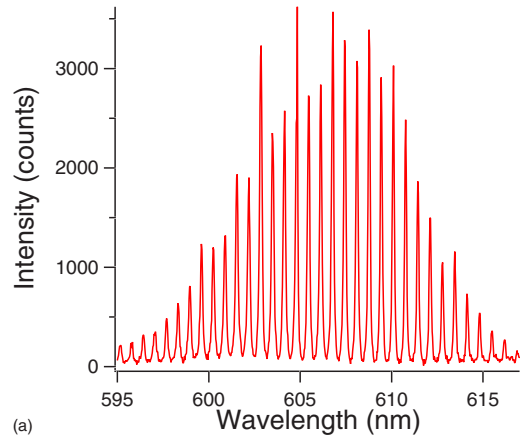


FIG. 6. (Color online) (a) Experimental spectrum of a square-shaped microlaser of 135- μm side width. (b) Optical length vs a square side width. The experiments (red points) are linearly fitted by the solid red line. The dashed blue line corresponds to the theoretical prediction (diamond periodic orbit) without any adjusted parameter. Top inset: Two representations of the diamond periodic orbit. Bottom inset: Normalized Fourier transform of the spectrum in (a) expressed as intensity vs wave number.

over all periodic orbits labeled by p . L_p is the length of the p periodic orbit, μ_p is a certain phase accumulated from reflection on boundaries and caustics, and amplitude c_p can be computed from classical mechanics. In general, for integrable and pseudointegrable systems (e.g., polygonal billiards) classical periodic orbits form continuous periodic orbit families and in two dimensions

$$c_p \sim \frac{A_p}{\sqrt{L_p}}, \quad (14)$$

where A_p is the geometrical area covered by a periodic orbit family (see the example of circular cavities in Sec. VI).

Nonclassical contributions from diffractive orbits and different types of creeping waves (in particular, lateral waves [21]) are individually smaller by a certain power of $1/k$ and

are negligible in the semiclassical limit $k \rightarrow \infty$ compared to periodic orbits.

There exist no true bound states for open systems. One can only compute the spectrum of complex eigenfrequencies of quasistationary states. The real parts of such eigenvalues give the positions of resonances and their imaginary parts measure the losses due to the leakage from the cavity.

For such systems it is quite natural to assume that the density of quasistationary states

$$d(k) \equiv \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\text{Im}(k_n)}{[k - \text{Re}(k_n)]^2 + \text{Im}(k_n)^2} \quad (15)$$

can be written in a form similar to Eq. (13) but the contribution of each periodic orbit has to be multiplied by the product of all reflection coefficients along this orbit (as it was done in a slightly different problem in [21]),

$$d(k) \approx \sum_p c_p \left[\prod_{j=1}^{N_p} r_p^{(j)} \right] e^{ikL_p - i\mu_p} + \text{c.c.} \quad (16)$$

Here N_p is the number of reflections at the boundary and $r_p^{(j)}$ is the value of reflection coefficient corresponding to the j th reflection for the p periodic orbit.

When the incident angle is larger than the critical angle the modulus of the reflection coefficient equals 1 [see Eq. (2)], but if a periodic orbit hits a piece of boundary with an angle smaller than the critical angle, then $|r_p| < 1$ thus reducing the contribution to the trace formula for open dielectric cavities is given by short-period orbits ($c_p \propto 1/\sqrt{L_p}$) which are confined by total internal reflection. For a square cavity with $n=1.5$ the diamond orbit is the only confined short-period orbit which explains our experimental observation of its dominance.

Nevertheless, this reasoning is incomplete because the summation of contributions of one periodic orbit and its repetitions in polygonal cavities does not produce a complex pole which is the characteristic of quasistationary states.

In order to better understand the situation, we have performed numerical simulations for passive square cavities in a two-dimensional approximation with TM polarization (see Sec. II and [22]). Due to symmetries, the quasistationary eigenstates can be classified according to different parities with respect to the square diagonals. In Fig. 7(a), the imaginary parts of wave numbers are plotted vs their real part for states antisymmetric according to the diagonals (that means obeying the Dirichlet boundary conditions along the diagonals) and called here (- -) states.

These quasistationary states are clearly organized in families. This effect is more pronounced when wave functions corresponding to each family are calculated. For instance, wave functions for the three lowest families with (- -) symmetry are presented in the top of Fig. 8. The other members of these families have similar patterns. The existence of such families was first noted in [23] for hexagonal dielectric cavities, then further detailed in [22].

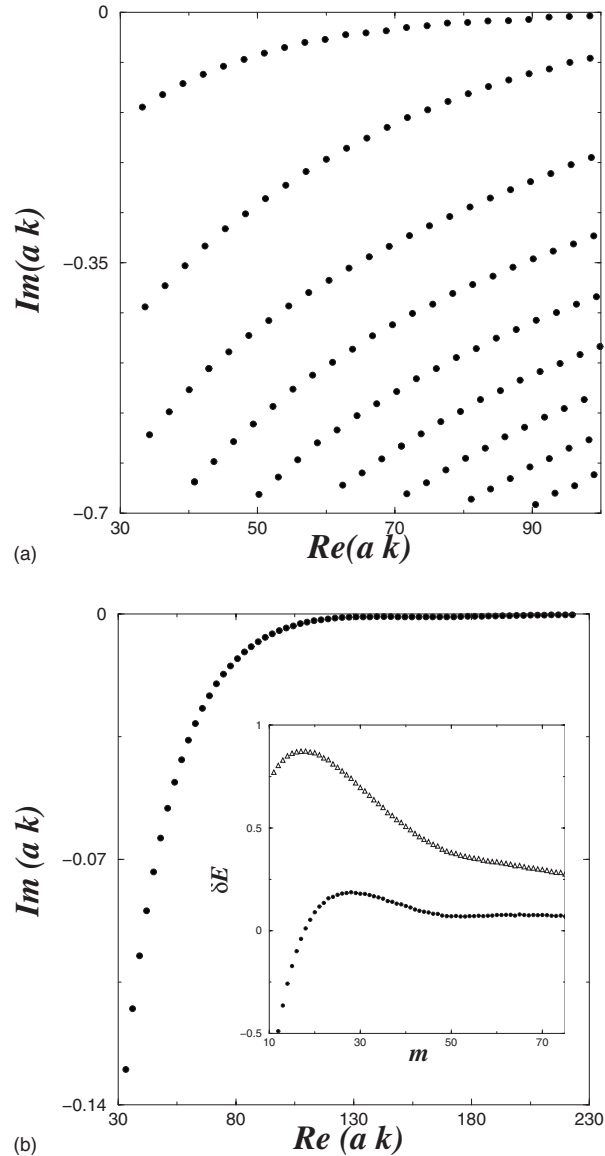


FIG. 7. (a) Imaginary parts vs real parts of the wave numbers of quasistationary states with (- -) symmetry for a dielectric square resonator with $n_{eff}=1.5$ surrounded by air with $n=1$. (b) The same as in (a) but for the states with the smallest modulus of the imaginary part (the most confined states). Inset. Empty triangles: the difference (20) between the real part of these wave numbers and the asymptotic expression. Filled circles: the same but when the correction term (21) is taken into account.

One can argue that the origin of such families is analogous to the formation of superscar states in pseudointegrable billiards discussed in [24] and observed experimentally in microwave experiments in [25]. In general, periodic orbits of polygonal cavities form continuous families which can be considered as propagating inside straight channels obtained by unfolding classical motion. These channels (hatched area Fig. 9) are restricted by straight lines passing through cavity

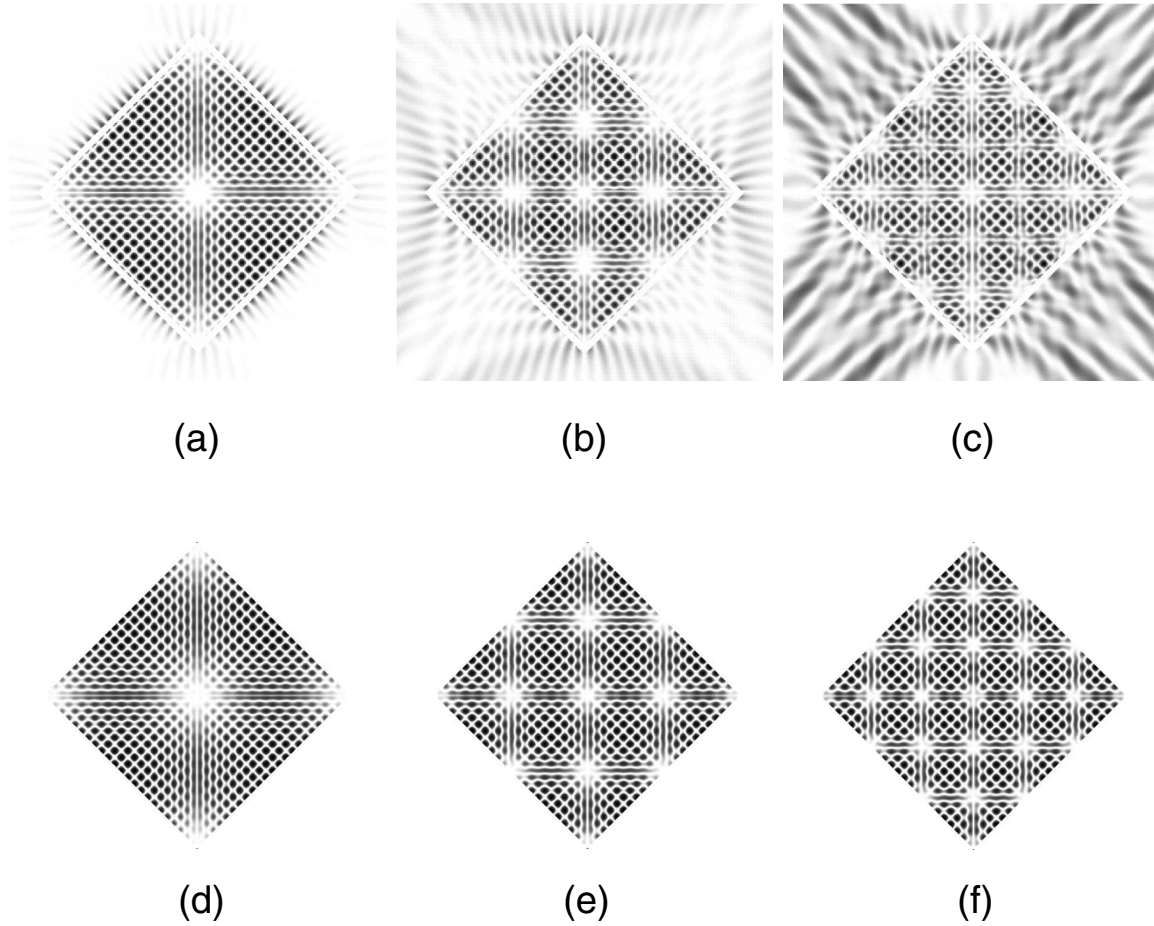


FIG. 8. (Top) Squared modulus of wave functions with $-$ symmetry calculated with numerical simulations. (a) $ak=68.74-0.026i$, (b) $ak=68.84-0.16i$, (c) $ak=69.18-0.33i$. (Bottom) Squared modulus of wave functions calculated with the superscar model ($-$) and corresponding to the parameters of the top pictures.

corners. In [24] it was demonstrated that strong quantum-mechanical diffraction on these singular corners forces wave functions in the semiclassical limit to obey simple boundary conditions on these (fictitious) channel boundaries. More precisely it was shown that for billiard problems Ψ on these boundaries take values of the order of $\mathcal{O}(1/\sqrt{k}) \rightarrow 0$ when

$k \rightarrow \infty$. This result was obtained by using the exact solution for the scattering on periodic array of half planes. No such results are known for dielectric problems. Nevertheless, it seems natural from semiclassical considerations that a similar phenomenon should appear for dielectric polygonal cavities as well.

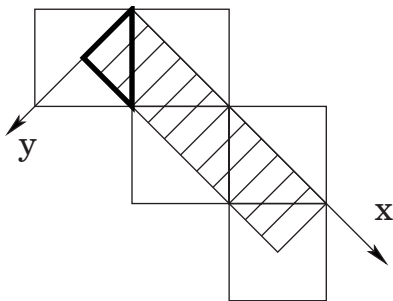


FIG. 9. Unfolding of the diamond periodic orbit. Thick lines indicate the initial triangle.

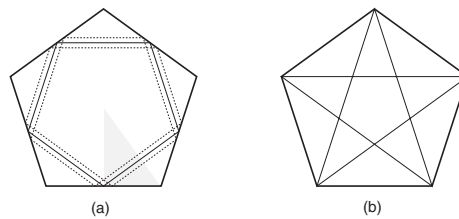


FIG. 10. (a) Wave numbers for a pentagonal cavity. a is the side length of the cavity. The three most confined families are indicated by solid, dashed, and long-dashed lines. (b) The difference (28) between the real part of quasienergies and superscar expression (25) for the three indicated families in (a).

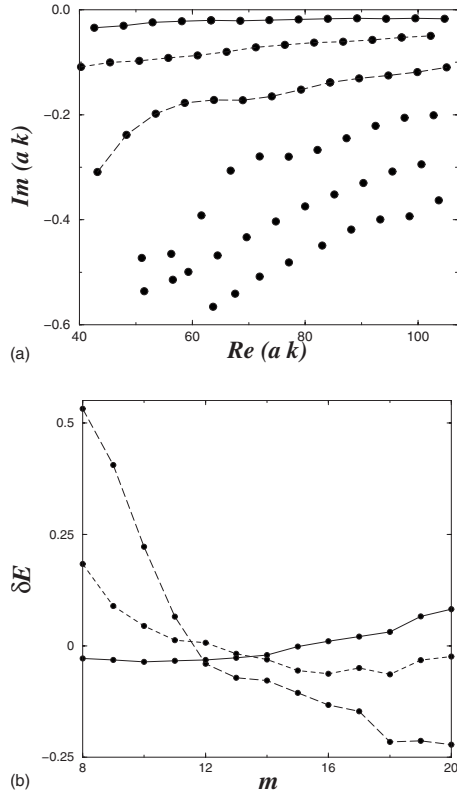


FIG. 11. (a) Wave numbers for a pentagonal cavity. a is the side length of the cavity. The three most confined families are indicated by solid, dashed, and long-dashed lines. (b) The difference between the real part of quasi-energies and superscar expression for the three indicated families in (a).

Within such framework, a superscar state can be constructed explicitly as follows. After unfolding (see Fig. 9), a periodic orbit channel has the form of a rectangle. Its length equals the periodic orbit length and its width is determined by the positions of the closest singular corners. The unfolded superscar state corresponds to a simple plane wave propagating inside the rectangle taking into account all phase changes. It cancels at the fictitious boundaries parallel to the x direction and is periodic along this direction with a periodicity imposed by the chosen symmetry class. This procedure sets the wave number of the state and the true wave function is obtained by folding back this superscar state.

Superscar wave functions with $(- -)$ symmetry associated with the diamond orbit (see Fig. 9) are expressed as follows:

$$\Psi_{m,p}^{(- -)}(x,y) = \sin(\kappa_m^{(-)}x) \sin\left(\frac{2\pi}{l}py\right) + \sin(\kappa_m^{(-)}x' - 2\delta) \sin\left(\frac{2\pi}{l}py'\right), \quad (17)$$

where x' and y' are coordinates symmetric with respect to the square side. In coordinates as in Fig. 9,

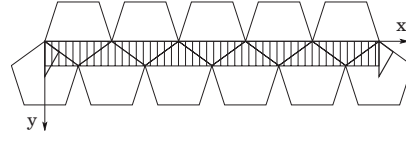


FIG. 12. Unfolding of the five-star periodic orbit for a pentagonal cavity. Thick lines indicate the initial triangle.

$$x' = y, \quad y' = x.$$

In Eq. (17) m and p are integers with $p=1,2,\dots$, and $m \gg 1$. $l = \sqrt{2}a$ is half of the diamond periodic orbit length [26], δ is the phase of the reflection coefficient defined by $r = \exp(-2i\delta)$. For simplicity, we ignore slight changes of the reflection coefficient for different plane waves in the functions above. So δ is given by Eq. (3) with $\nu=1$ for TM polarization and $\theta = \pi/4$, and $\kappa_m^{(-)}$ is the momentum defined by

$$\kappa_m^{(-)}l - 4\delta = 2\pi m. \quad (18)$$

This construction conducts to the following expression for the real part of the wave numbers [27]:

$$\begin{aligned} n_{eff}l \operatorname{Re}(k_{m,p}) &= 2\pi \sqrt{\left(m + \frac{2}{\pi}\delta\right)^2 + p^2} \\ &= 2\pi \left(m + \frac{2}{\pi}\delta\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

To check the accuracy of the above formulas we plot in the bottom of Fig. 8 scar wave functions (17) with the same parameters as those in the top of Fig. 8. The latter were computed numerically by direct solving the Helmholtz equations (6) but the former looks very similar which supports the validity of the superscar model.

The real part of the wave numbers is tested too. In Fig. 7(b) the lowest loss states (with the smallest modulus of the imaginary part) with $(- -)$ symmetry are presented over a larger interval than in Fig. 7(a). The real parts of these states are compared to superscar predictions (19) with $p=1$, leading to a good agreement. To detect small deviations from the theoretical formula, we plot in the inset of Fig. 7(b) the difference between a quantity inferred from numerical simulations and its superscar prediction from Eq. (19),

$$\delta E = \left(\frac{nl}{2\pi} \operatorname{Re} k\right)^2 - \left[\left(m + \frac{2}{\pi}\delta\right)^2 + p^2\right]. \quad (20)$$

From this curve it follows that this difference tends to zero with m increasing, thus confirming the existence of the term proportional to p^2 . By fitting this difference with the simplest expression

$$\delta E = \frac{c}{m} \quad (21)$$

we find that $c \approx -6.9$. By subtracting this correction term from the difference (20), one gets the curve indicated with filled circles in the inset of Fig. 7(b). The result is one order of magnitude smaller than the difference itself.

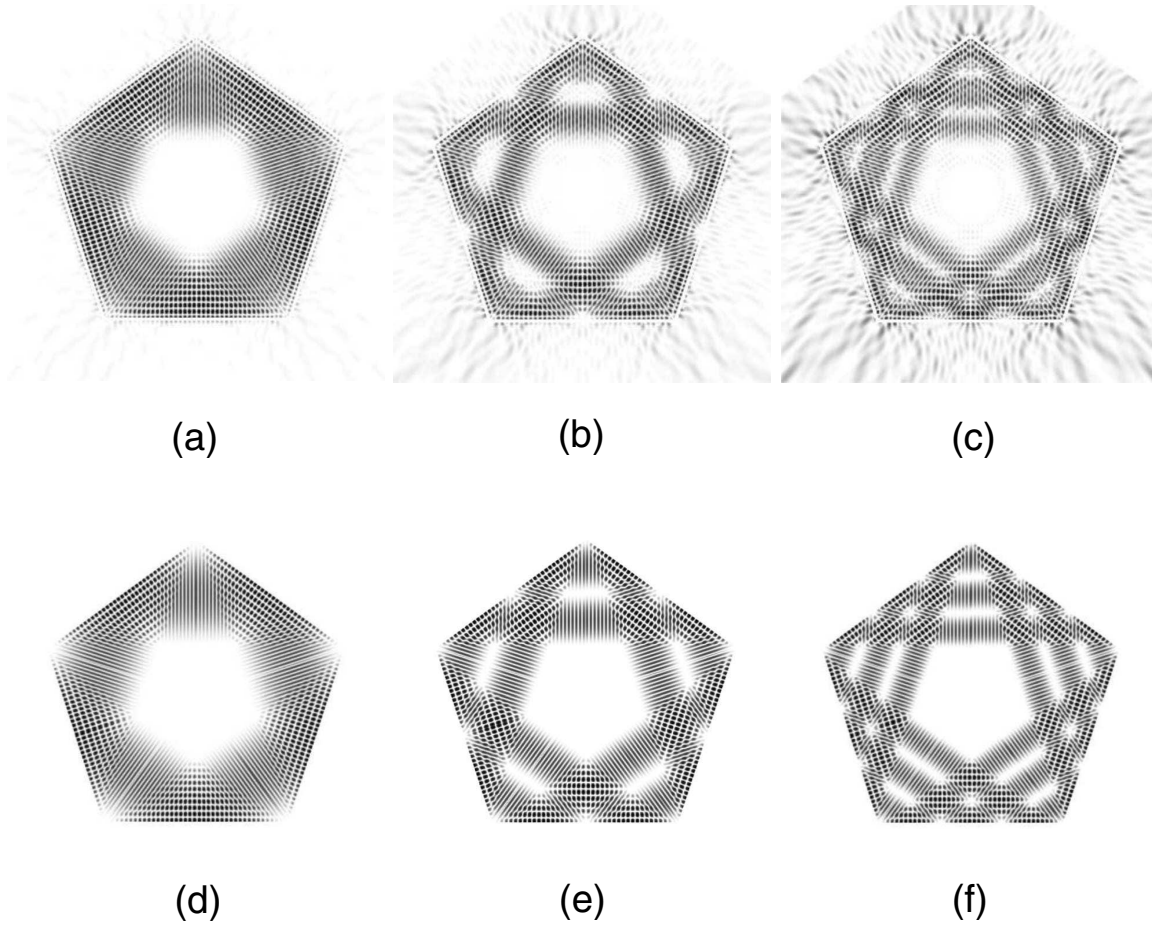


FIG. 13. (Top) Squared modulus of wave functions for pentagonal cavity with (- -) symmetry calculated with numerical simulations. (a) $ak=104.7-0.017i$, (b) $ak=102.2-0.05i$, (c) $ak=105.0-0.12i$. (Bottom) Squared modulus of wave functions calculated within the superscar model and corresponding to the parameters of the top pictures.

All these calculations confirm that the real parts of resonance wave numbers for square dielectric cavities are well reproduced in the semiclassical limit by the above superscar formula (19) and our experimental results can be considered as an implicit experimental confirmation of this statement.

V. PENTAGONAL MICROCAVITY

The trace formula and superscar model arguments can be generalized to all polygonal cavities. The pentagonal resonator provides a new interesting test. In fact, due to the odd number of sides, the inscribed pentagonal orbit [indicated by solid line in Fig. 10(a)] is isolated. The shortest confined periodic orbit family is twice longer. It is represented with a dashed line in Fig. 10(a) and can be mapped onto the five-pointed star orbit drawn in Fig. 10(b) by continuous deformation. In this section we compare the predictions of the superscar model for this periodic orbit family with numerical simulations and experiments.

Due to the C_{5v} symmetry, pentagonal cavities sustain ten

symmetry classes corresponding to the rotations by $2\pi/5$ and the inversion with respect to one of the symmetry axis. We have studied numerically one symmetry class in which wave functions obey the Dirichlet boundary conditions along two sides of a right triangle with angle $\pi/5$ [see Fig. 10(a) in gray]. The results of these computations are presented in Fig. 11.

As for the square cavity, lowest loss states are organized in families. The wave functions of the three lowest loss families are plotted in the top of Fig. 13 and their superscar structure is obvious.

The computation of pure superscar states can be performed as in the previous section. The five-pointed star periodic orbit channel is shown in Fig. 12. In this case boundary conditions along horizontal boundaries of periodic orbit channel are not known. By analogy with superscar formation in polygonal billiards [24], we impose that wave functions tend to zero along these boundaries when $k \rightarrow \infty$.

Therefore a superscar wave function propagating inside this channel takes the form

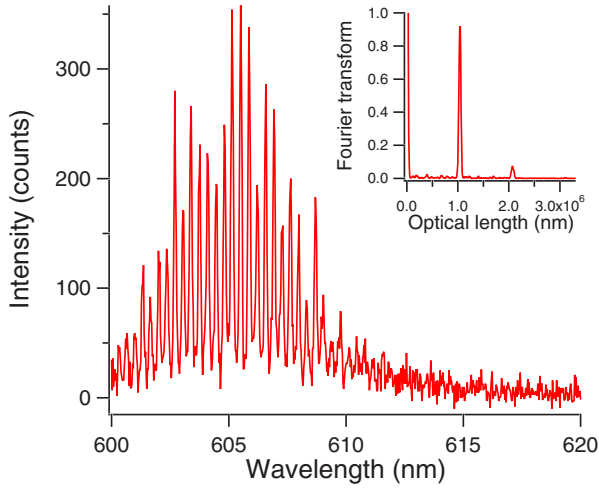


FIG. 14. (Color online) Experimental spectrum of a pentagonal microlaser of 80- μm side length. Inset: Normalized Fourier transform of the spectrum expressed as intensity vs wave number.

$$\Psi_{\text{scar}}(x,y) = \exp(i\kappa x) \sin\left(\frac{\pi}{w}py\right) \Theta(y) \Theta(w-y), \quad (22)$$

where w is the width of the channel [for the five-pointed star orbit $w = a \sin(\pi/5)$ where a is the length of the pentagon side]. $\Theta(x)$ is the Heavyside function introduced here to stress that superscar functions are zero (or small) outside the periodic orbit channel.

The quantized values of the longitudinal momentum κ are obtained by imposing that the function (22) is periodic along the channel when all phases due to the reflection with the cavity boundaries are taken into account

$$\kappa L = 2\pi \left(M + \frac{10}{\pi} \delta \right). \quad (23)$$

Here M is an integer and L is the total periodic orbit length. For the five-pointed star orbit (see Fig. 10)

$$L = 10a \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \quad (24)$$

and δ is the phase of the reflection coefficient given by Eq. (3) with $\nu=1$ (for TM polarization) and $\theta=3\pi/10$. For these states the real part of the wave number is the following:

$$nL \text{Re } k = 2\pi \left(M + \frac{10}{\pi} \delta \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right). \quad (25)$$

Wave functions inside the cavity are obtained by folding back the scar function (22) and choosing the correct representation of the chosen symmetry class. When Dirichlet boundary conditions are imposed along two sides of a right triangle passing through the center of the pentagon (see Fig. 12) $M=5(2m)$ if p is odd and $M=5(2m-1)$ if p is even. Then, the wave function inside the triangle is the sum of two terms,

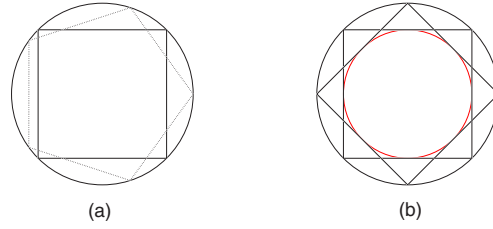


FIG. 15. (Color online) (a) Two examples of periodic orbits: the square and the pentagon. (b) Two representations of the square periodic orbit and the caustic of this family in red (inner circle).

$$\begin{aligned} \Psi_{m,p}(x,y) = & \sin(\kappa_m x) \sin\left(\frac{\pi}{w}py\right) \Theta(y) \Theta(w-y) \\ & + \sin(\kappa x' - 2\delta) \sin\left(\frac{\pi}{w}py'\right) \Theta(y') \Theta(w-y'), \end{aligned} \quad (26)$$

where the longitudinal momentum is

$$\kappa_m \frac{L}{10} = 2\pi \left(m + \frac{1}{\pi} \delta - \xi \right) \quad (27)$$

with $\xi=0$ for odd p and $\xi=1/2$ for even p . x' and y' in Eq. (26) are coordinates of the point symmetric of (x,y) with respect to the inversion on the edge of the pentagon. In the coordinate system when the pentagon edge passes through the origin (as in Fig. 12)

$$x' = x \cos 2\phi + y \sin 2\phi, \quad y' = x \sin 2\phi - y \cos 2\phi,$$

and $\phi = \pi/5$ is the inclination angle of the pentagon side with respect to the abscissa axis. Wave functions obtained with this construction are presented in the bottom of Fig. 13. They correspond to the first, second, and third perpendicular excitations of the five-star periodic orbit family ($p=1, 2$, and 3).

To check the agreement between numerically computed real parts of the wave numbers and the superscar prediction (25) and (27), we plot in Fig. 11(b) the following difference:

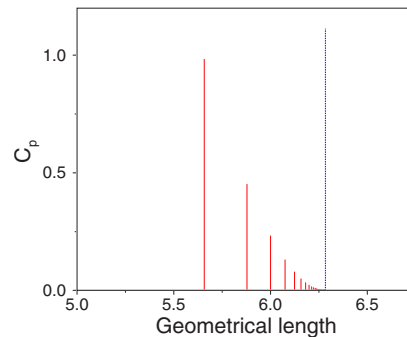


FIG. 16. (Color online) Vertical red sticks: c_p coefficient for polygons confine by total internal reflection (square, pentagon, hexagon, etc.). The dotted blue line indicates the position of the perimeter.

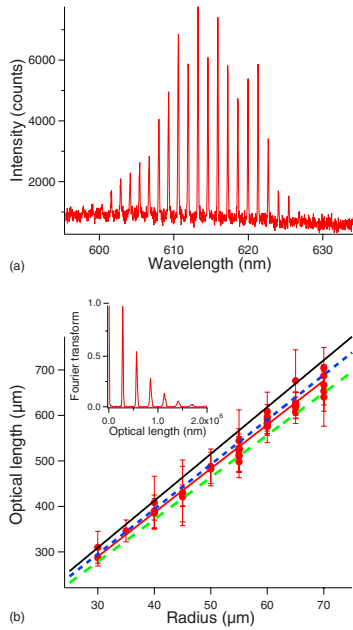


FIG. 17. (Color online) (a) Experimental spectrum of a micro-disk of 30- μm radius. (b) Optical length vs. radius. The experiments (red points) are linearly fitted by the solid red line. The other lines correspond to the theoretical predictions without any adjusted parameters: the dashed green line to the square, the dotted blue line to the hexagon, and the solid black line to the perimeter. Inset: Normalized Fourier transform of the spectrum in (a) expressed as intensity vs. wave number.

$$\delta E = \left(\frac{a \cos}{2\pi} \operatorname{Re} ka_{nm} \right)^2 - \left[\left(m + \frac{1}{\pi} \delta - \xi \right)^2 + \left(\frac{l}{2 \tan \delta} \right)^2 \zeta \right]. \quad (28)$$

For pure scar states $\zeta = p^2$. As our numerical simulations have not reached the semiclassical limit (see scales in Figs. 7 and 11), we found it convenient to fit numerically the ζ constant. The best fit gives $\zeta \approx 0.44, 2.33,$ and 5.51 for the three most confined families (for pure scar functions this constant is 1, 4, 9, respectively). The agreement is quite good with a relative accuracy of the order of 10^{-4} [see Fig. 11(b)]. Irrespective of the precise value of ζ the total optical length nL is given by Eq. (25) and leads to an experimental prediction twice longer than the optical length of the inscribed pentagon, which is an isolated periodic orbit and thus cannot base superscar wave functions.

Comparison with experiments confirms the superscar nature of the most confined states for pentagonal resonators. In fact, the spectrum and its Fourier transform in Fig. 14 correspond to a pentagonal microlaser with side $a = 80 \mu\text{m}$, and show a periodic orbit with optical length $1040 \pm 30 \mu\text{m}$ to be compared with the five-star optical length $n_{\text{full}} 10a \cos(\pi/5) = 1061 \mu\text{m}$. The agreement is better than 2%.

This result is reproducible for cavities with the same size. Other sizes have been tested as well. For smaller cavities, the five-pointed star orbit is not identifiable due to lack of gain,

whereas for bigger ones it is visible but mixed with nonconfined periodic orbits. This effect, not specific to pentagons, can be assigned to the contribution of different periodic orbit families which become important when the lasing gain exceeds the refractive losses. We will describe this phenomenon in a future publication [28].

The good agreement of numerical simulations and experiments with superscar predictions gives an additional credit to the validity of this approach even for nontrivial configurations.

VI. MICRODISKS

Microdisk cavities are the simplest and most widely used microresonators. In the context of this work, they are of interest because of the coexistence of several periodic orbit families with close lengths. For low index cavities ($n \sim 1.5$) each regular polygon trajectory with more than four sides is confined by total internal reflection.

In the two-dimensional approximation passive circular cavities are integrable and the spectrum of quasistationary states can be computed from an explicit quantization condition,

$$n \frac{J'_m(nkR)}{J_m(nkR)} = \nu \frac{H_m^{(1)'}(kR)}{H_m^{(1)}(kR)}. \quad (29)$$

Here R is the radius of the disk, n is the refractive index of the cavity, and $\nu = 1$ (respectively $\nu = n^2$) for the TM (respectively TE) polarization. For each angular quantum number m , an infinite sequence of solutions, $k_{m,q}$, is deduced from Eq. (29). They are labeled by the q radial quantum number.

For large $|k|$ the $k_{m,l}$ wave numbers are obtained from a semiclassical expression (see, e.g., [29]) and the density of quasistationary states Eq. (15) can be proved to be rewritten as a sum over periodic orbit families. The derivation of this trace formula assumes only the semiclassical approximation ($|k|R \gg 1$) and can be done in a way similar to that of the billiard case (see, e.g., [30]), leading to an expression closed to Eq. (16),

$$d(k) \propto \sum_p \frac{A_p}{\sqrt{L_p}} |r_p|^{N_p} \cos \left[nL_p k - N_p \left(2\delta_p + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (30)$$

Here the p index specifies a periodic orbit family. This formula depends on periodic orbit parameters: the number of bounces on the boundary, N_p , the incident angle on the boundary, χ_p , the length, $L_p = 2N_p R \cos(\chi_p)$, and the area covered by periodic orbit family, $A_p = \pi R^2 \cos^2(\chi_p)$, which is the area included between the caustic and the boundary [see Fig. 15]. $2\delta_p$ is the phase of the reflection coefficient at each bounce on the boundary [see Eq. (3)] and $|r_p|$ is its modulus.

For orbits confined by total internal reflection δ_p does not depend on kR in the semiclassical limit, and r_p is exponentially close to 1 [29,31]. From Eq. (30) it follows that each periodic orbit is singled out by a weighing coefficient $c_p = \frac{A_p}{\sqrt{L_p}} |r_p|^{N_p}$. Considering the experimental values $|k|R \sim 1000$, $|r_p|$ can be approximated to unity with a good accu-

racy for confined periodic orbits, and thus $c_p = \frac{A_p}{\sqrt{L_p}}$ depends only on geometrical quantities. Figure 16 shows the evolution of c_p for polygons when the number of sides is increasing. As the critical angle is close to 45° , the diameter and triangle periodic orbits are not confined and the dominating contribution comes from the square periodic orbit. So we can reasonably conclude that the spectrum (15) of a passive two-dimensional microdisk is dominated by the square periodic orbit.

The experimental method described in the previous sections has been applied to disk-shaped microcavities. A typical experimental spectrum is shown in Fig. 17(a). The first peak of its Fourier transform has a finite width coming from the experimental conditions (discretization, noise, etc.) and the contributions of several periodic orbits. This width is represented as error bars on the graph of Fig. 17(b). The continuous red line fitting the experimental data is surrounded by the dashed green line and the dotted blue line corresponding to the optical length of the square and hexagon, respectively, calculated with $n_{full}=1.64$ as in the previous sections. The perimeter (continuous black line) overlaps with a large part of the error bars which evidences its contribution to the spectrum, but it is not close to experimental data.

These experimental results seem in good agreement with the above theoretical predictions. But actually these resonances, usually called whispering gallery modes, are living close to the boundary. Thus both roughness and three-dimensional effects must be taken into account. At this stage it is difficult to evaluate and to measure correctly such contributions for each periodic orbit. For microdisks with a small thickness (about $0.4 \mu\text{m}$) and designed with lower roughness, the results are more or less similar to those presented in Fig. 17(b).

VII. CONCLUSION

We demonstrate experimentally that the length of the dominant periodic orbit can be recovered from the spectra of microlasers with simple shapes. Taking into account different dispersion corrections to the effective refractive index, a good agreement with theoretical predictions has been evidenced first for the Fabry-Perot resonator. Then we have tested polygonal cavities both with experiments and numerical simulations, and a good agreement for the real parts of wave numbers has been obtained even for the nontrivial configuration of the pentagonal cavity.

The observed dominance of confined short-period orbits is, in general, a consequence of the trace formula and the formation of long-lived states in polygonal cavities is related to strong diffraction on cavity corners. Finally, the study of microdisks highlights the case of several orbits and the influence of roughness and three-dimensional effect.

Our study opens the way to a systematic exploration of spectral properties by varying the shape of the boundary. In increasing the experimental precision even tiny details of trace formulas will be accessible. The improvement of the etching quality will suppress the leakage due to surface roughness and lead to a measure of the diffractive mode losses which should depend on symmetry classes. From the point of view of technology, it will allow a better prediction of the resonator design depending on the applications. From a more fundamental physics viewpoint, it may contribute to a better understanding of open dielectric billiards.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to S. Brasselet, R. Hierle, J. Lau-tru, C. T. Nguyen, and J.-J. Vachon for experimental and technological support and to C.-M. Kim, O. Bohigas, N. Sandeau, J. Szeftel, and E. Richalot for fruitful discussions.

-
- [1] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Mill Valley, CA, 1986).
 - [2] *Optical Microcavities*, edited by K. Vahala (World Scientific, Singapore, 2005).
 - [3] E. Krioukov, D. J. W. Klunder, A. Driessen, J. Greve, and C. Otto, *Opt. Lett.* **27**, 512 (2002).
 - [4] A. M. Armani and K. J. Vahala, *Opt. Lett.* **31**, 1896 (2006).
 - [5] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco, and A. Y. Cho, *Science* **280**, 1556 (1998).
 - [6] M. Lebental, J.-S. Lauret, J. Zyss, C. Schmit, and E. Bogomolny, *Phys. Rev. A* **75**, 033806 (2007).
 - [7] R. C. Polson, G. Levina, and Z. V. Vardeny, *Appl. Phys. Lett.* **76**, 3858 (2000).
 - [8] D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala, *Nature* (London) **421**, 925 (2003).
 - [9] M. Lebental, J.-S. Lauret, R. Hierle, and J. Zyss, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 031108 (2006).
 - [10] C. Vassallo, *Optical Waveguide Concepts* (Elsevier, Amsterdam, 1991).
 - [11] P. K. Tien, *Appl. Opt.* **10**, 2395 (1971).
 - [12] For some samples, the underlying layer is silica with refractive index $n_2=1.45$, so n_{eff} is slightly different.
 - [13] This definition is consistent all over the paper. In the literature, these names are sometimes permuted.
 - [14] D. S. Jones, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **217**, 153 (1953).
 - [15] T. Harayama, P. Davis, and K. S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 063901 (2003).
 - [16] H. E. Türeci, A. D. Stone, and B. Collier, *Phys. Rev. A* **74**, 043822 (2006).
 - [17] H. E. Türeci, A. D. Stone, and Li Ge, e-print arXiv:cond-mat/0610229.
 - [18] S. Shinohara, T. Harayama, H. E. Türeci, and A. D. Stone, *Phys. Rev. A* **74**, 033820 (2006).
 - [19] C. Y. Fong and A. Poon, *Opt. Express* **12**, 4864 (2004).
 - [20] *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches Summer School Lectures LII, edited by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1991).
 - [21] R. Blümel, T. M. Antonsen, Jr., B. Georgeot, E. Ott, and R. E. Prange, *Phys. Rev. E* **53**, 3284 (1996).

- [22] J. Wiersig, Phys. Rev. A **67**, 023807 (2003).
- [23] I. Braun, G. Ihlein, F. Laeri, J. U. Nöckel, G. Schulz-Ekloff, F. Schüth, U. Vietze, O. Weiß, and D. Wöhrle, Appl. Phys. B: Lasers Opt. **70**, 335 (2000).
- [24] E. Bogomolny and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **92**, 244102 (2004).
- [25] E. Bogomolny, B. Dietz, T. Friedrich, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **97**, 254102 (2006).
- [26] For a given symmetry class, the length entering the quantization condition may be a part of the total periodic orbit length.
- [27] The estimation of the imaginary parts of these states as well as the field distribution outside the cavity is beyond the scope of this paper and will be discussed elsewhere.
- [28] M. Lebental, N. Djellali, J.-S. Lauret, J. Zyss, R. Dubertrand, C. Schmit, and E. Bogomolny (to be published).
- [29] J. Nöckel, Ph.D. dissertation, Yale University, 1997.
- [30] M. Brack and R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Addison-Wesley, Reading MA, 1997).
- [31] H. Schomerus and M. Hentschel, Phys. Rev. Lett. **96**, 243903 (2006).

Circular dielectric cavity and its deformations

R. Dubertrand,^{1,*} E. Bogomolny,¹ N. Djellali,² M. Lebental,^{1,2} and C. Schmit^{1,†}

¹Université Paris Sud, CNRS UMR 8626, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, 91405 Orsay, France

²Ecole Normale Supérieure de Cachan, CNRS UMR 8537, Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire, 94235 Cachan, France

(Received 30 August 2007; published 9 January 2008)

The construction of perturbation series for slightly deformed dielectric circular cavity is discussed in detail. The obtained formulas are checked on the example of cut disks. A good agreement is found with direct numerical simulations and far-field experiments.

DOI: 10.1103/PhysRevA.77.013804

PACS number(s): 42.55.Sa, 03.65.Sq

I. INTRODUCTION

Dielectric microcavities are now widely used as microresonators and microlasers in different physical, chemical, and biological applications (see, e.g., [1,2] and references therein). The principal object of these studies is the optical emission from thin dielectric microcavities of different shapes [3]. Schematically such cavity can be represented as a cylinder whose height is small in comparison with its transverse dimensions (see Fig. 1). If the refractive index of the cavity is n_1 and the cavity is surrounded by a material with the refractive index $n_2 < n_1$ (we assume that the permeabilities in both media are the same) the time-independent Maxwell's equations take the form (see, e.g., [4])

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_j &= 0, \quad \vec{\nabla} \cdot n_j^2 \vec{E}_j = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_j &= -in_j^2 k \vec{E}_j, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_j = ik \vec{B}_j, \end{aligned} \quad (1)$$

where the subscript $j=1$ ($j=2$) denotes points inside (outside) the cavity and k is the wave vector in the vacuum. These equations have to be completed by the boundary conditions which follow from the continuity of normal \vec{B}_ν and $n^2 \vec{E}_\nu$ and tangential \vec{E}_τ and \vec{B}_τ components

$$n_1^2 \vec{E}_{1\nu} = n_2^2 \vec{E}_{2\nu}, \quad \vec{B}_{1\nu} = \vec{B}_{2\nu}, \quad \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}, \quad \vec{B}_{1\tau} = \vec{B}_{2\tau}.$$

In the true cylindrical geometry, the z dependence of electromagnetic fields is pure exponential: $\sim e^{iqz}$. Then the above Maxwell equations can be reduced to the two-dimensional Helmholtz equations for the electric field, E_{jz} , and the magnetic field B_{jz} along the axis of the cylinder

$$(\Delta + \tilde{n}_j^2 k^2) E_{jz}(x, y) = 0, \quad (\Delta + \tilde{n}_j^2 k^2) B_{jz}(x, y) = 0 \quad (2)$$

with the following boundary conditions

$$E_{1z} = E_{2z}, \quad B_{1z} = B_{2z}, \quad \frac{\partial E_{1z}}{\partial \tau} = \frac{\partial E_{2z}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial B_{1z}}{\partial \tau} = \frac{\partial B_{2z}}{\partial \tau},$$

and

$$\frac{1}{\tilde{n}_1^2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \nu} - \frac{1}{\tilde{n}_2^2} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \nu} = \frac{q(n_2^2 - n_1^2)}{k \tilde{n}_1^2 \tilde{n}_2^2} \frac{\partial E_z}{\partial \tau},$$

$$\frac{n_1^2}{\tilde{n}_1^2} \frac{\partial E_{1z}}{\partial \nu} - \frac{n_2^2}{\tilde{n}_2^2} \frac{\partial E_{2z}}{\partial \nu} = \frac{q(n_2^2 - n_1^2)}{k \tilde{n}_1^2 \tilde{n}_2^2} \frac{\partial B_z}{\partial \tau}. \quad (3)$$

Here $\tilde{n}_j^2 = n_j^2 - q^2/k^2$ plays the role of the effective two-dimensional (in the x - y plane) refractive index.

When fields are independent on z (i.e., $q=0$) boundary conditions (3) do not mix B_z and E_z and the two polarizations are decoupled. They are called transverse electric (TE) field when $E_z=0$ and transverse magnetic (TM) field when $B_z=0$. Both cases are described by the scalar equations

$$(\Delta + \tilde{n}_j^2 k^2) \Psi_j(x, y) = 0, \quad (4)$$

where $\Psi(x, y)$ stands for electric (TM) or magnetic (TE) fields with the following conditions on the interface between both media: $\Psi_1 = \Psi_2$ and

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \nu} \quad \text{for TM polarization,} \quad (5)$$

$$\frac{1}{n_1^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu} = \frac{1}{n_2^2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \nu} \quad \text{for TE polarization.} \quad (6)$$

These equations are, strictly speaking, valid only for an infinite cylinder but they are widely used for a thin dielectric cavities by introducing the effective refractive index corresponding to the propagation of confined modes in the bulk of the cavity (see, e.g., [5]). In practice, it reduces to small changes in the refractive indices (which nevertheless is of importance for careful comparison with experiment [6]). For simplicity, we will consider below two-dimensional equations (4) as the exact ones.

Only in very limited cases, these equations can be solved analytically. The most known case is the circular cavity (the

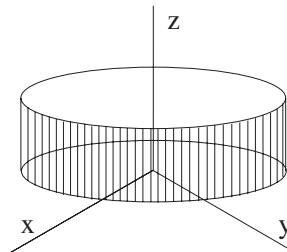


FIG. 1. Schematic representation of a dielectric cavity.

*remy.dubertrand@lptms.u-psud.fr

†Deceased.

disk) where variables are separated in polar coordinates. For other cavity shapes tedious numerical simulations are necessary.

The purpose of this paper is to develop perturbation series for quasistationary spectrum and corresponding wave functions for general cavities which are small deformations of the disk. The obtained formulas are valid when an expansion parameter is small enough. The simplicity, the generality, and the physical transparency of the results make such approach of importance for technological and experimental applications.

The plan of the paper is the following. In Sec. II the calculation of quasistationary states for a circular cavity is reviewed for completeness. Special attention is given to certain properties rarely mentioned in the literature. The construction of perturbation series for eigenvalues and eigenfunctions of small perturbations of circular cavity boundary is discussed in Sec. III. The conditions of applicability of perturbation expansions are discussed in Sec. IV. The obtained general formulas are then applied to the case of cut disks in Sec. V. Some technical details are collected in the Appendixes.

II. DIELECTRIC DISK

Let us consider a two-dimensional circular cavity of radius R made of a material with $n > 1$ refractive index. The region outside the cavity is assumed to be the air with a refractive index of one. The two-dimensional equations (4) for this cavity are

$$\begin{aligned} (\Delta + n^2 k^2) \Psi &= 0 \quad \text{when } r \leq R, \\ (\Delta + k^2) \Psi &= 0 \quad \text{when } r > R. \end{aligned} \quad (7)$$

These equations describe the propagation of the electromagnetic field inside a dielectric cavity. They can also be considered as a quantum problem for a particle moving in the following "potential":

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} -(n^2 - 1)k^2, & r \leq R \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

and throughout this paper we will often refer to this analogy using vocabulary related to the quantum problem.

There is no true bound states for dielectric cavities. The physical origin of the existence of long lived quasibound states is the total internal reflection of rays with the incidence angle bigger than the critical angle

$$\theta_c = \arcsin \frac{1}{n}. \quad (8)$$

To investigate quasibound states one imposes outgoing boundary condition at infinity, namely, we require that far from the cavity there exist only outgoing waves

$$\Psi(\vec{x}) \propto e^{ik|\vec{x}|} \quad \text{when } |\vec{x}| \rightarrow \infty,$$

where \vec{x} lies in the cavity plane.

In cylindrical coordinates (r, θ) , the general form of the solutions is the following:

$$\Psi(r, \theta) = \begin{cases} a_m J_m(nkr) e^{im\theta}, & r \leq R \\ b_m H_m^{(1)}(kr) e^{im\theta}, & r > R, \end{cases} \quad (9)$$

where $m=0, 1, \dots$ is an integer (the azimuthal quantum number) related to the orbital momentum. $J_m(x)$ [$H_m^{(1)}(x)$] stands for the Bessel function (the Hankel function of the first kind) of order m . Due to rotational symmetry, eigenvalues with $m \neq 0$ are doubly degenerated.

By imposing the boundary conditions (5) or (6) one gets the quantization condition

$$\frac{n J'_m(nkR)}{\nu J'_m(nkR)} = \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(kR), \quad (10)$$

where

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{for TM polarization} \\ n^2 & \text{for TE polarization.} \end{cases} \quad (11)$$

The quasistationary eigenvalues of this problem depend on azimuthal quantum number m and on other quantum number p related with radial momentum: $k=k_{mp}$. They are complex numbers

$$k = k_r + ik_i, \quad (12)$$

where k_r determines the position of a resonance and $k_i < 0$ is related with its lifetime.

In Fig. 2 we plot solutions of Eq. (10) obtained numerically for a circular cavity with refractive index $n=1.5$. Points are organized in families corresponding to different values of radial quantum number p . The dotted line in these figures indicates the classical lifetime of modes with fixed m and $k \rightarrow \infty$. Physically these modes correspond to waves propagating along the diameter whose lifetime is given by

$$\text{Im}(kR) = \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \approx -0.53648. \quad (13)$$

In the semiclassical limit and for $\text{Im}(kR) \ll \text{Re}(kR)$ simple approximate formulas can be obtained from the standard approximation of the Bessel and Hankel functions [7] when $m < z$,

$$J_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(z^2 - m^2)^{1/4}} \cos \left(\sqrt{z^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{z} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (14)$$

and when $m > z$,

$$H_m^{(1)}(z) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\sqrt{m^2 - z^2}}}{(m^2 - z^2)^{1/4}} \left[\frac{m}{z} + \sqrt{\left(\frac{m}{z} \right)^2 - 1} \right]^m. \quad (15)$$

Denoting $u = \text{Re}(kR)$ and $v = \text{Im}(kR)$ and assuming that $v \ll u$, $u \gg 1$, and $m/n < u < m$ one gets (see, e.g., [8]) that the

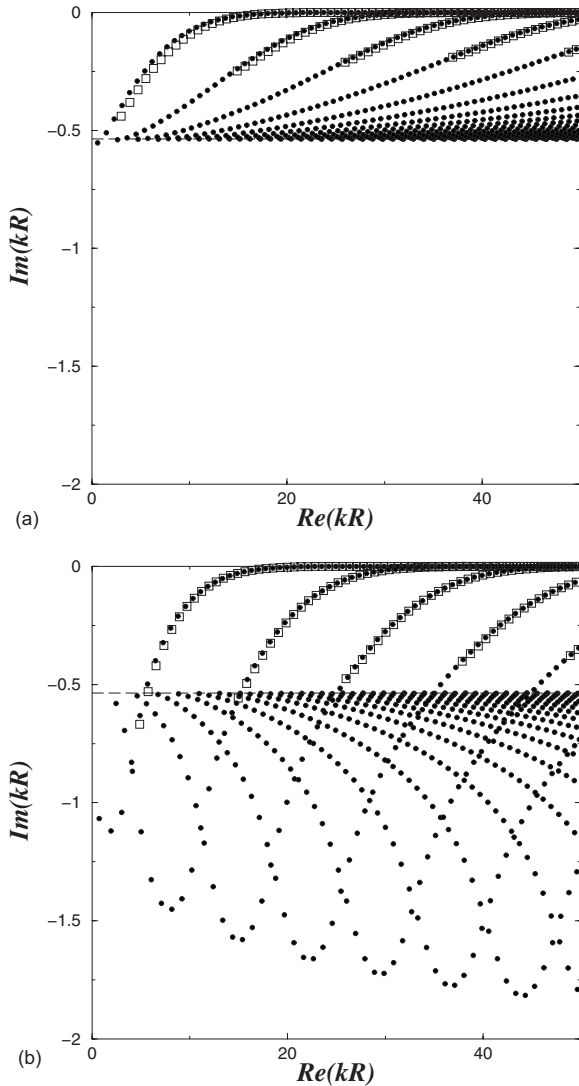


FIG. 2. Quasistationary eigenvalues for a circular cavity with $n=1.5$. (a) TM polarization; (b) TE polarization. Filled circles are deduced from direct numerical resolution of Eq. (10), while open squares indicate semiclassical approximation for these eigenvalues based on Eqs. (16) and (17) when $|kR| < m < n|kR|$.

real part of Eq. (10) can be transformed to the following form

$$\begin{aligned} & \sqrt{n^2 u^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{nu} - \frac{\pi}{4} \\ & = \arctan \nu \sqrt{\frac{m^2 - u^2}{n^2 u^2 - m^2}} + (p-1)\pi, \end{aligned} \quad (16)$$

where the integer $p=1, 2, \dots$ is the radial quantum number and ν is defined in Eq. (11). The imaginary part of Eq. (10) is then reduced to

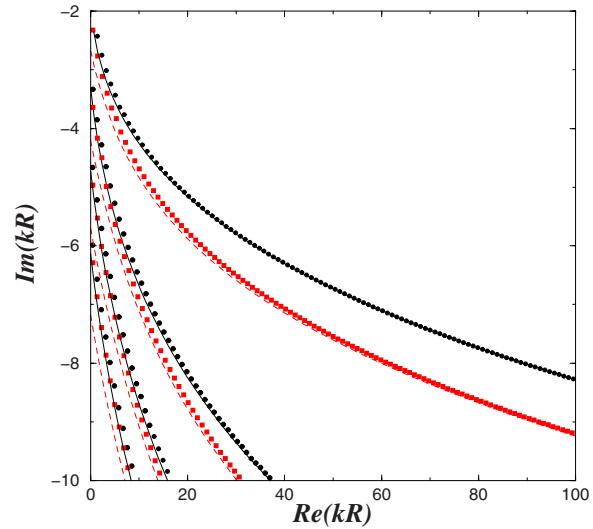


FIG. 3. (Color online) Additional branches of quasistationary eigenvalues for a circular cavity with $n=1.5$. Circles indicate the TM modes and squares show the position of the TE modes. Solid and dashed lines represent the asymptotic result (19) for respectively the TM and the TE modes.

$$v \approx -\frac{2}{\pi u(n^2 - 1)|H_m^{(1)}(u)|^2} \zeta, \quad (17)$$

where $\zeta=1$ for TM waves and $\zeta=n^2 u^2/[m^2(n^2+1)-n^2 u^2]$ for TE waves. When u and m are large, v is exponentially small as it follows from Eq. (15).

The above equations cannot be applied for the most confined levels (similar to the “whispering gallery” modes in closed billiards) for which nu is close to m . In Appendix A it is shown that the real part of such quasi-stationary eigenvalues with $O(m^{-1})$ precision is given by the following expression

$$\begin{aligned} x_{m,p} = & \frac{m}{n} + \frac{\eta_p}{n} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} - \frac{1}{\nu \sqrt{n^2 - 1}} + \frac{3\eta_p^2}{20n} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/3} \\ & + \frac{n^2 \eta_p}{2\nu(n^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{2}{3\nu^2} - 1\right) \left(\frac{2}{m}\right)^{2/3}, \end{aligned} \quad (18)$$

where η_p is the modulus of the p th zero of the Airy function (A2).

A more careful study of Eq. (10) reveals that there exist other branches of eigenvalues with large imaginary part not visible in Fig. 2. Some of them are indicated in Fig. 3. These states can be called external whispering gallery modes as their wave functions are practically zero inside the circle. So they are of minor importance for our purposes. They can also be identified with above-barrier resonances. In Appendix A it is shown that in the semiclassical limit these states are related with the complex zeros of the Hankel functions and they are well described asymptotically [with $O(m^{-1})$ error] as follows:

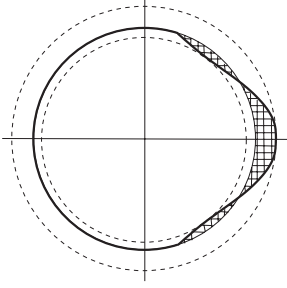


FIG. 4. Example of a deformed circular cavity. Shaded areas represent the regions where the refractive index differs from the one of the circular cavity.

$$x_{m,p} = m + \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} \eta_p e^{-2i\pi/3} - \frac{iv}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{3e^{-4i\pi/3} \eta_p^2}{20} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/3} + \frac{iv\eta_p e^{-2i\pi/3}}{2(n^2-1)^{3/2}} \left(1 - \frac{2}{3}v^2\right) \left(\frac{2}{m}\right)^{2/3}, \quad (19)$$

with the same η_p as in Eq. (18).

Similar equations have been obtained in [9].

III. PERTURBATION TREATMENT OF DEFORMED CIRCULAR CAVITIES

In the previous section we have considered the case of a dielectric circular cavity. It is one of the rare cases of integrable dielectric cavities in two dimensions. The purpose of this section is to develop a perturbation treatment for a general cavity shape which is a small deformation of the circle (see Fig. 4). We consider a cavity whose boundary is defined as

$$r = R + \lambda f(\theta) \quad (20)$$

in the polar coordinates (r, θ) . Here λ is a formal small parameter aiming at arranging perturbation series.

Our main assumption is that the deformation function $\lambda f(\theta)$ is small,

$$|\lambda f(\theta)| \ll R. \quad (21)$$

Of course, for the quantum mechanical perturbation theory this condition is not enough. It is quite natural (and will be demonstrated below) that the criterion of applicability of the quantum perturbation theory is, roughly,

$$\delta a k^2 \ll 1, \quad (22)$$

where δa is the area where perturbation “potential” δn^2 is nonzero (represented by dashed regions in Fig. 4).

To construct the perturbation series for the quasistationary states, we use two complementary methods. In Sec. III A we adapt the method proposed in [10,11] for diffraction problems. The main idea of this method is to impose the required boundary conditions (5) or (6) not along the true boundary of the cavity but on the circle $r=R$. Under the assumption (22) this task can be achieved by perturbation series in λ . In Sec.

III B we use a more standard method based on the direct perturbation solution of the required equations using the Green function of the circular dielectric cavity. Both methods lead to the same series but they stress different points and may be useful in different situations.

For clarity we consider only the TM polarization where the field and its normal derivative are continuous on the dielectric interface. For the TE polarization the calculations are more tedious but follow the same steps. To simplify the discussion we assume that the deformation function $f(\theta)$ is symmetric: $f(-\theta)=f(\theta)$ (as in Fig. 4). In this case the quasistationary eigenfunctions are either symmetric or antisymmetric with respect to this inversion. Then in polar coordinates, they can be expanded either in $\cos(p\theta)$ or $\sin(p\theta)$ series. The general case of nonsymmetric cavities is analogous to the case of degenerate perturbation series and can be treated correspondingly.

A. Boundary shift

The condition of continuity of the wave function at the dielectric interface states

$$\Psi_1[R + \lambda f(\theta), \theta] = \Psi_2[R + \lambda f(\theta), \theta], \quad (23)$$

where subscripts 1 and 2 refer respectively to wave function inside and outside the cavity. Expanding formally $\Psi_{1,2}$ into powers of λ one gets

$$[\Psi_1 - \Psi_2](R, \theta) = -\lambda f(\theta) \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right](R, \theta) - \frac{1}{2} \lambda^2 f^2(\theta) \times \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} \right](R, \theta) + \dots \quad (24)$$

For the TM polarization the conditions (5) imply that the derivatives of the wave functions inside and outside the cavity along any direction are the same. Choosing the radial direction, one gets the second boundary condition

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}[R + \lambda f(\theta), \theta] = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}[R + \lambda f(\theta), \theta], \quad (25)$$

which can be expanded over λ as follows:

$$\left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right](R, \theta) = -\lambda f(\theta) \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} \right](R, \theta) - \frac{1}{2} \lambda^2 f^2(\theta) \left[\frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial r^3} - \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial r^3} \right](R, \theta) + \dots \quad (26)$$

We find it convenient to look for the solutions of Eqs. (24) and (26) in the following form:

$$\Psi_1(r, \theta) = \frac{J_m(nkr)}{J_m(nx)} \cos(m\theta) + \sum_{p \neq m} a_p \frac{J_p(nkr)}{J_p(nx)} \cos(p\theta), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, \theta) = & (1 + b_m) \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(x)} \cos(m\theta) \\ & + \sum_{p \neq m} (a_p + b_p) \frac{H_p^{(1)}(kr)}{H_p^{(1)}(x)} \cos(p\theta). \end{aligned} \quad (28)$$

Here, and for all which follows, x stands for kR . These expressions correspond to symmetric eigenfunctions. For anti-symmetric functions all $\cos(\dots)$ have to be substituted by $\sin(\dots)$.

From Eqs. (24) and (26) one concludes that the unknown coefficients a_p , and b_p have the following expansions:

$$a_p = \lambda \alpha_p + \lambda^2 \beta_p + \dots, \quad b_p = \lambda^2 \gamma_p + \dots. \quad (29)$$

Correspondingly, the quasistationary eigenvalue, $kR \equiv x$, can be represented as the following series

$$x = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots. \quad (30)$$

Here x_0 is the complex solution of Eq. (10) which we rewrite in the form

$$S_m(x_0) = 0 \quad (31)$$

introducing for a further use the notation for all m and x ,

$$S_m(x) = n \frac{J'_m(nx)}{J_m(nx)} - \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x). \quad (32)$$

The explicit construction of these perturbation series is presented in Appendix B. The results are the following. The perturbed eigenvalue (30) is

$$\begin{aligned} x = x_0 \left[1 - \lambda A_{mm} + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} (3A_{mm}^2 - B_{mm}) + x_0 (A_{mm}^2 - B_{mm}) \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x_0) - (n^2 - 1) x_0 \sum_{k \neq m} A_{mk} \frac{1}{S_k(x_0)} A_{km} \right) \right] + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (33)$$

The coefficients of the quasistationary eigenfunction (27) and (28) are

$$\begin{aligned} a_p = \lambda x_0 (n^2 - 1) \frac{1}{S_p(x_0)} \left(A_{pm} + \lambda \left\{ A_{pm} A_{mm} \left(\frac{x_0}{S_p} \frac{\partial S_p}{\partial x} - 1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} B_{pm} \left[1 + x_0 \left(\frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} + \frac{H_p^{(1)'}}{H_p^{(1)}} \right) \right] + x_0 (n^2 - 1) \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{k \neq m} A_{pk} \frac{1}{S_k(x_0)} A_{km} \right\} \right) + O(\lambda^3) \end{aligned} \quad (34)$$

and

$$b_p = \lambda^2 \frac{1}{2} x_0^2 (n^2 - 1) B_{pm} + O(\lambda^3). \quad (35)$$

In these formulas A_{mm} and B_{mm} are the Fourier harmonics of the perturbation function $f(\theta)$ and its square, given by Eqs. (B5) and (B10), respectively. The above expressions are quite similar to usual perturbation series and $S_p(x_0)$ plays the role of the energy denominator. In Eq. (34) and in the fol-

lowing we may omit the argument of the function when it is equal to x_0 .

It is instructive to calculate the imaginary part of the perturbed level from the knowledge of the first order terms only. Assuming that $\text{Im}(x_0) \ll \text{Re}(x_0)$ and using the Wronskian relation (see, e.g., [7], 7.11.34)

$$H_m^{(1)'}(x) H_m^{(2)}(x) - H_m^{(2)'}(x) H_m^{(1)}(x) = \frac{4i}{\pi x} \quad (36)$$

one gets from Eq. (33)

$$\text{Im}(x) = \text{Im}(x_0) (1 + \rho) - \lambda^2 \frac{2x_0(n^2 - 1)}{\pi} \sum_{p \neq m} \frac{A_{mp}^2}{|S_p H_p^{(1)}|^2}, \quad (37)$$

where [assuming that $m > x_0$ so $H_m^{(1)'}/H_m^{(1)}$ is real, cf. Eq. (15)]

$$\begin{aligned} \rho = -\lambda A_{mm} + \lambda^2 \left[\frac{1}{2} (3A_{mm}^2 - B_{mm}) \right. \\ \left. + x_0 (A_{mm}^2 - B_{mm}) \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x_0) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Expression (37) without the ρ correction [which is multiplied by $\text{Im}(x_0)$ and so negligible for well-confined levels] can be independently calculated from the following general considerations. From Eq. (7) it follows that inside the cavity

$$n^2 (k^2 - k^{*2}) \int_V |\Psi(\vec{x})|^2 d\vec{x} = J, \quad (39)$$

where

$$J = \int_B \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial \nu} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial \nu} \Psi^* \right) d\vec{\sigma}. \quad (40)$$

In the first integral the integration is performed over the volume of the cavity, V , while the second integral is taken over the boundary of the cavity, B . ν is the coordinate normal to the cavity boundary and J represents the current through the boundary. For the TM polarization, it equals the current at infinity.

From Eqs. (28) and (34) it follows that the field outside the cavity in the first order of the perturbative expansion is

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, \theta) = & \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(x)} \cos(m\theta) + \lambda (n^2 - 1) x_0 \\ & \times \sum_{p \neq m} A_{pm} \frac{H_p^{(1)}(kr)}{S_p H_p^{(1)}} \cos(p\theta). \end{aligned}$$

The first order term proportional to $\cos(m\theta)$ is taken into account by calculating $H_m^{(1)}(x)$ instead of $H_m^{(1)}(x_0)$. The current can be directly calculated from Eq. (36) or from the asymptotic of the Hankel functions. Then the current can be written, neglecting first order variation for the $\cos(m\theta)$ term:

$$J = 4i \left[\frac{1}{|H_m^{(1)}|^2} + \lambda^2 (n^2 - 1)^2 x_0^2 \sum_{p \neq m} \frac{A_{pm}^2}{|S_p H_m^{(1)}|^2} \right]. \quad (41)$$

To calculate the integral over the cavity volume in the leading order, the nonperturbed function can be used inside the cavity. Then the integration over the circle $r=R$ leads to

$$\int_V |\Psi(\vec{x})|^2 d\vec{x} \approx \frac{\pi}{J_m^2(nx_0)} \int_0^R J_m^2(nkr) r dr. \quad (42)$$

The last integral is (see [7], 7.14.1)

$$\int_0^R J_m^2(nkr) r dr = \frac{R^2}{2} \left[J_m'^2(nkR) + J_m^2(nkR) \left(1 - \frac{m^2}{(nkR)^2} \right) \right].$$

From the eigenvalue equation (10) and the asymptotic (15), it follows that

$$n \frac{J_m'(nkR)}{J_m(nkR)} \approx -\sqrt{m^2/x^2 - 1}.$$

Therefore,

$$\int_0^R J_m^2(nkr) r dr \approx J_m^2(nx_0) \frac{(n^2 - 1)R^2}{2n^2}. \quad (43)$$

Combining these equations leads to

$$\text{Im } x = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{(n^2 - 1)x_0 |H_m^{(1)}|^2} + \lambda^2 (n^2 - 1)x_0 \sum_{p \neq m} \frac{A_{pm}^2}{|S_p H_m^{(1)}|^2} \right]. \quad (44)$$

According to Eq. (17) the first term of this expression is the imaginary part of the unperturbed quasistationary eigenvalue [assuming that $\text{Im}(x_0) \ll \text{Re}(x_0)$] and one gets Eq. (37) using only the first order corrections. The missing terms are proportional to the imaginary part of the unperturbed level and can safely be neglected for the well confined levels.

These calculations clearly demonstrate that the deformation of the cavity leads to the scattering of the initial well confined wave function with $\text{Re}(kR) < m < n \text{Re}(kR)$ into all possible states with different p momenta. Among these states, some are very little confined or not confined at all. These states with $p < \text{Re}(kR)$ give the dominant contribution to the lifetime of perturbation eigenstates. Such scattering picture becomes more clear in the Green function approach discussed in Sec. III B.

The important quantity for applications is the far-field emission. It is calculated using the coefficients a_p (34) and b_p (35) in Eq. (28) and substituting its asymptotic for $H_p^{(1)}(kr)$:

$$H_p^{(1)}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi p/2 - \pi/4)}. \quad (45)$$

Then one gets

$$\Psi_2(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} F(\theta), \quad (46)$$

where

$$F(\theta) = (1 + b_m) \frac{e^{-i\pi m/2}}{H_m^{(1)}(x)} \cos(m\theta) + \sum_{p \neq m} (a_p + b_p) \frac{e^{-i\pi p/2}}{H_p^{(1)}(x)} \cos(p\theta). \quad (47)$$

The boundary shift method discussed in this section is a simple and straightforward approach to perturbation series expansions for dielectric cavities. As it is based on Eqs. (23)–(26), it first shrinks to zero the regions where the refractive index differs from its value for the circular cavity. Consequently, the calculation of the field distribution in these regions remains unclear. Besides the direct continuation of perturbation series (34) inside these regions diverges. To clarify this point, we discuss in the next section a different method without such a drawback.

B. Green function method

Fields in two-dimensional dielectric cavities obey the Helmholtz equations (2) which can be written as one equation in the whole space for TM polarization

$$[\Delta + k^2 n^2(\vec{x})] \Psi(\vec{x}) = 0 \quad (48)$$

with position dependent “potential” $n^2(\vec{x})$. For perturbed cavity (20)

$$n^2(\vec{x}) = n_0^2(\vec{x}) + \delta n^2(\vec{x}) \quad (49)$$

where $n_0^2(\vec{x})$ is the “potential” for the pure circular cavity

$$n_0^2(\vec{x}) = \begin{cases} n^2 & \text{when } |\vec{x}| < R \\ 1 & \text{when } |\vec{x}| > R, \end{cases} \quad (50)$$

and the perturbation $\delta n^2(\vec{x})$ is equal to

$$\begin{aligned} & (n^2 - 1) && \text{when } f(\theta) > 0 \text{ and } R < |\vec{x}| < R + \lambda f(\theta), \\ & -(n^2 - 1) && \text{when } f(\theta) < 0 \text{ and } R + \lambda f(\theta) < |\vec{x}| < R, \\ & 0 && \text{in all other cases.} \end{aligned} \quad (51)$$

Hence the integral of $\delta n^2(\vec{x})$ with an arbitrary function $F(\vec{x}) \equiv F(r, \theta)$ can be calculated as follows:

$$\int \delta n^2(\vec{x}) F(\vec{x}) d\vec{x} = (n^2 - 1) \int d\theta \int_R^{R + \lambda f(\theta)} F(r, \theta) r dr. \quad (52)$$

Equation (48) with “potential” (49) can be rewritten in the form

$$[\Delta_{\vec{x}} + k^2 n_0^2(\vec{x})] \Psi(\vec{x}) = -k^2 \delta n^2(\vec{x}) \Psi(\vec{x}). \quad (53)$$

Then its formal solution is given by the following integral equation

$$\Psi(\vec{x}) = -k^2 \int G(\vec{x}, \vec{y}) \delta n^2(\vec{y}) \Psi(\vec{y}) d\vec{y}, \quad (54)$$

where $G(\vec{x}, \vec{y})$ is the Green function of the equation for the dielectric circular cavity which describes the field produced

at point \vec{x} by the delta-function source situated at point \vec{y} . The explicit expressions of this function are presented in Appendix C.

It is convenient to divide the \vec{x} plane into three circular regions $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, and $r > R_2$ where

$$\begin{aligned} R_1 &= \min_{\theta} [R, R + \lambda f(\theta)], \\ R_2 &= \max_{\theta} [R, R + \lambda f(\theta)]. \end{aligned} \quad (55)$$

The boundaries of these regions are indicated by dashed circles in Fig. 4. Notice that the deformation ‘‘potential’’ $\delta n^2(\vec{x})$ is nonzero only in the second region $R_1 < r < R_2$. Due to singular character of the Green function (cf. Appendix C), wave functions inside each region are represented by different expressions.

Let (r, θ) be the polar coordinates of point \vec{x} . For simplicity we assume for a moment that $f(\theta) \leq 0$. Using Eq. (C10), Eq. (54) in the region $r < R_1$ can be rewritten in the form

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_p \frac{J_p(nkr)}{J_p(nx)} \cos(p\theta) \hat{L}_p[\Psi], \quad (56)$$

where $\hat{L}_p[\Psi]$ is the following integral operator:

$$\begin{aligned} \hat{L}_p[\Psi] &= \frac{x^2(n^2 - 1)}{R^2} \int d\phi \cos(p\phi) \\ &\times \int_R^{R+\lambda f(\phi)} \rho d\rho \left[\frac{J_p(nk\rho)}{2\pi x S_p(x) J_p(nx)} \right. \\ &\left. + \frac{i}{4} [H_p^{(1)}(kn\rho) J_p(nx) - H_p^{(1)}(nx) J_p(kn\rho)] \right] \\ &\times \Psi(\rho, \phi). \end{aligned} \quad (57)$$

Assuming that we are looking for corrections to a quasistationary state of the nonperturbed circular cavity with the momentum equal to m , one concludes that the quantized eigenenergies are fixed by the condition that the perturbation terms do not change zeroth order function (see, e.g., [14]), i.e.,

$$\hat{L}_m[\Psi] = 1 \quad (58)$$

which can be transformed into

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{x^2(n^2 - 1)}{R^2} \int d\phi \cos(p\phi) \\ &\times \int_R^{R+\lambda f(\phi)} \Psi(\rho, \phi) \rho d\rho \left[\frac{J_m(nk\rho)}{2\pi x J_m(nx)} + \frac{i S_m(x)}{4} \right. \\ &\left. \times [H_m^{(1)}(kn\rho) J_m(nx) - H_m^{(1)}(nx) J_m(kn\rho)] \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

To perform the perturbation iteration of Eqs. (56) and (59), integrals like the following must be calculated:

$$V_{pm} \equiv \frac{1}{J_m(nx)} \hat{L}_p[J_m(kn\rho) \cos(m\phi)]. \quad (60)$$

For small λ the integral over ρ can be computed by expanding the integrand into a series of $\delta r = \rho - R$,

$$\int_R^{R+\lambda f(\phi)} F(\rho) d\rho \approx \lambda f(\phi) F(R) + \frac{1}{2} \lambda^2 f^2(\phi) F'(R) + \dots \quad (61)$$

Notice that this method is valid only outside the second region $R_1 < r < R_2$ which shrinks to zero when $\lambda \rightarrow 0$ [cf. Eq. (55)]. In such a manner, it leads to

$$V_{pm} = x^2(n^2 - 1) (\lambda V_{pm}^{(1)} + \lambda^2 V_{pm}^{(2)}), \quad (62)$$

where

$$V_{pm}^{(1)} = \frac{1}{x S_p(x)} A_{pm} \quad (63)$$

and

$$V_{pm}^{(2)} = \frac{B_{pm}}{2x S_p(x)} \left[1 + x \left(\frac{H_p^{(1)'}(x)}{H_p^{(1)}(x)} + \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \right) - 2x S_m(x) \right]. \quad (64)$$

Here A_{pm} and B_{pm} are defined in Eqs. (B5) and (B10).

The second order terms can also be expressed through V_{mp} :

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}) &= \frac{J_m(knr)}{J_m(nx)} \cos(m\theta) + \sum_{p \neq m} \frac{J_p(knr)}{J_p(nx)} \cos(p\theta) \\ &\times \left[V_{pm} + \sum_{k \neq m} V_{pk} V_{km} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

The quantization condition (58) in the second order states that

$$V_{mm} + \sum_{k \neq m} V_{mk} V_{km} = 1, \quad (66)$$

which can be expressed as

$$\begin{aligned} S_m(x) &= x^2(n^2 - 1) \left(\lambda A_{mm} + \frac{1}{2} \lambda^2 \left[1 + 2x \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \right] B_{mm} \right) \\ &+ \lambda^2 x^2 (n^2 - 1)^2 \sum_{k \neq m} \frac{A_{mk} A_{km}}{S_k(x)}. \end{aligned} \quad (67)$$

Writing as in the previous section $x = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2$ where x_0 is a zero of $S_m(x)$ and using Eq. (B1), one obtains the same series as Eq. (33). Other expansions up to the second order also coincide with the ones presented in Sec. III A.

To calculate the higher terms of the perturbation expansion, the wave function must be known in the regions where the perturbation ‘‘potential’’ $\delta n^2(\vec{x})$ is nonzero. But exactly in these regions the Green function differs from the one used in Eq. (57). In other words, a method must be found for the continuation of the wave functions defined in the first region $r < R_1$ (or in the third one $r > R_2$) into the second region $R_1 < r < R_2$.

The straightforward way of such a continuation is to use explicit formulas for the Green function in the second region and to perform the necessary calculations. As the radial derivative of the Green function is discontinuous, delta-function contributions will appear in certain domains when calculating the integrals as in Eq. (61). One can check that this singular contribution appears in the bulk only in the third order in λ in agreement with Eqs. (33) and (34).

The expansion of wave functions into series of the Bessel functions (56), in general, diverges when $r > R_1$ and the Green function method gives the correct continuation inside this region. Another equivalent method consists in a local expansion of wave function into power series in small deviation from the boundary of convergence. As the value of the function and its radial derivative are assumed to be known along this boundary ($r = R_1$ in our case) the knowledge of the wave equation inside and outside the cavity determines uniquely the wave function in the both regions.

IV. APPLICABILITY OF PERTURBATION SERIES

In the previous section the formal construction of perturbation series has been performed for quasibound states in slightly deformed dielectric cavities. The purpose of this section is to discuss in detail the conditions of validity of such an expansion.

From Eq. (B5) it follows that the coefficients A_{pm} obey the inequality

$$|A_{pm}| \leq 2\xi, \quad (68)$$

where ξ stands for

$$\xi = \int \left| \frac{f(\theta)}{R} \right| d\theta \approx \frac{\delta a}{\pi R^2}. \quad (69)$$

Here δa is the surface where the perturbation ‘‘potential’’ δn^2 is nonzero and πR^2 is the full area of the unperturbed circle. The last equality is valid when Eq. (21) is fulfilled which we always assume.

Consequently, the perturbation formulas can be applied providing

$$\xi(n^2 - 1)u \left\langle \left| \frac{1}{S_p(u)} \right| \right\rangle \ll 1, \quad (70)$$

where $\langle F_p \rangle$ indicates the typical value of F_p and u stands for $\text{Re}(kR)$ at a first approximation.

The usual arguments to estimate this quantity for large x_0 are the following. In the strict semiclassical approximation, states with a corresponding incident angle larger than the critical angle have a very small imaginary part and are practically true bound states. For closed circular cavities, the mean number of states (counting doublets only once) is given by the Weyl law

$$N(E_j < n^2 k^2) = \frac{An^2}{8\pi} k^2 + O(k), \quad (71)$$

where $A = \pi R^2$ is the full billiard area and n is the refractive index. The latter appears because by definition inside the

cavity the energy is $E = n^2 k^2$. For a dielectric circular cavity with radius R , the condition that the incidence angle is larger than the critical angle leads to the following effective area [12]

$$A_{\text{eff}}(n) = \pi R^2 s_n, \quad (72)$$

where

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{2}{R^2} \int_{R/n}^R \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R}{nr} \right) r dr \\ &= \frac{4}{\pi n^2 x} \int_x^{nx} \sqrt{x^2 n^2 - m^2} dm \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Here the first integral (73) corresponds to the straightforward calculation of phase-space volume such that the incident angle is larger than the critical one and the second integral (74) is obtained from Eq. (16) taking into account that $x < m < nx$. For $n = 1.5$, $s_n \approx 0.22$.

Consequently, the typical distance between two eigenstates is

$$\delta x \sim \frac{4}{n^2 s_n x}. \quad (75)$$

The eigenmomenta of nonconfining eigenstates have imaginary parts of the order of unity [cf. Eq. (13)] and will be ignored.

As $S_m(x_0) = 0$, we estimate that for $p \neq m$

$$\left\langle \frac{1}{S_p} \right\rangle \sim \left| \frac{1}{S'_p \delta x} \right|. \quad (76)$$

Using Eq. (B1) one finds that this value is of the order of

$$\left\langle \frac{1}{S_p} \right\rangle \sim Cx, \quad (77)$$

where constant $C \sim 0.25 n^2 s_n / (n^2 - 1)$. With Eq. (70) it leads to the conclusion that for typical S_p the criterion of applicability of perturbation series is

$$s_n \frac{\delta a}{8\pi} k^2 n^2 \ll 1, \quad (78)$$

which up to a numerical factor agrees with Eq. (22).

But this statement is valid only in the mean. If there exist quasi-degeneracies of the nonperturbed spectrum [i.e., there exist p for which $1/S_p(x)$ is considerably larger than the estimate (77)] then the standard perturbation treatment requires modifications. As circular cavities are integrable, the real parts of the strongly confined modes are statistically distributed as the Poisson sequences [15] and they do have a large number of quasidegeneracies even for small k . For instance, these are double quasicoincidences for the dielectric circular cavity with $n = 1.5$,

$$x_{14,2} = 16.7170 - 0.03895i, \quad x_{11,4} = 16.6976 - 0.4695i,$$

$$x_{15,3} = 17.5042 - 0.37540i, \quad x_{12,4} = 17.5232 - 0.4612i,$$

$$x_{17,4} = 21.5715 - 0.41621i, \quad x_{14,5} = 21.5106 - 0.4712i,$$

$$x_{25,1} = 19.4799 - 0.00254i, \quad x_{21,2} = 19.4830 - 0.1211i.$$

We notice also a triple quasicoincidence

$$x_{46,1} = 34.3110 - 2.2206 \times 10^{-6}i,$$

$$x_{41,2} = 34.3167 - 0.001982i,$$

$$x_{37,3} = 34.317 - 0.06408i. \quad (79)$$

The existence of these quasidegeneracies means that the perturbation series require modifications close to these values of kR for any small deformations of a circular cavity with $n = 1.5$.

Double quasidegeneracy is the simplest case because there is only one eigenvalue of the dielectric circle, with quantum number, say p , whose eigenvalue is close to the eigenvalue x_0 corresponding to the quantum number m . In such a situation, instead of the zeroth order equation (31), the system of the following two equations must be considered

$$\begin{aligned} S_m[x_0(1 + \delta x)]a_1 &= M_{11}a_1 + M_{12}a_2, \\ S_p[x_0(1 + \delta x)]a_2 &= M_{21}a_1 + M_{22}a_2, \end{aligned} \quad (80)$$

where in the leading order $M_{ij} = x_0(n^2 - 1)A_{ij}$.

Expanding the S_p functions and using the dominant order (B1) for S'_p , the system (80) can be transformed into

$$\begin{aligned} (s_1 - \delta x)a_1 &= A_{12}a_2, \\ (s_2 - \delta x)a_2 &= A_{21}a_1 \end{aligned} \quad (81)$$

where

$$s_1 = \frac{S_m(x_0)}{x_0(n^2 - 1)} - A_{11}, \quad s_2 = \frac{S_p(x_0)}{x_0(n^2 - 1)} - A_{22}. \quad (82)$$

Our usual choice is $S_m(x_0) = 0$ but for symmetry we do not impose it. The compatibility of the system (81) leads to the equation

$$\begin{vmatrix} \delta x - s_1 & A_{12} \\ A_{21} & \delta x - s_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (83)$$

Its solution which tends to s_1 when $A_{12}A_{21} \rightarrow 0$ is

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2) + \frac{1}{2}(s_1 - s_2) \sqrt{1 + \frac{4A_{12}A_{21}}{(s_1 - s_2)^2}} \\ &= s_1 - \frac{A_{12}A_{21}}{s_2 - s_1} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4A_{12}A_{21}/(s_1 - s_2)^2}}. \end{aligned} \quad (84)$$

When $A_{12}A_{21}/(s_1 - s_2)^2$ is small, δx in Eq. (84) tends to the usual contribution of the second order (33). Therefore, in this approximation, expression (33) may be used for all p except the one which is quasidegenerate with x_0 . For this later one, the whole expression (84) (without s_1) has to be used. A useful approximation proposed in [16] consists in taking the

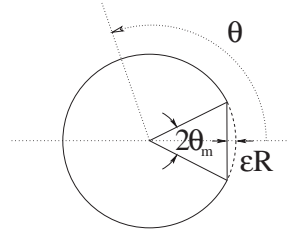


FIG. 5. Cut disk cavity. ϵR is the distance between the cut and the circular boundary.

modification (84) for all the nondegenerate levels which reduces the numerical calculations.

As the circular billiard is integrable, the probability of having three and more quasidegeneracies is not negligible [cf. Eq. (79)]. The necessary modifications can be performed for any number of levels but the resulting formulas become cumbersome. In Appendix D we present the formulas for three quasidegenerate levels.

V. CUT DISK

As a specific example, we consider a deformation of the circular cavity which is useful for experimental and technological points of view [17]. Namely, a circle is cut over a straight line (see Fig. 5). Such a deformation is characterized by the parameter $\epsilon \ll 1$ which determines the distance from the cut to the circular boundary. This shape corresponds to the following choice of the deformation function $f(\theta)$

$$f(\theta) = R \left(1 - \frac{1 - \epsilon}{\cos \theta} \right) \approx R \left(\epsilon - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\epsilon \theta^2}{2} - \frac{5\theta^4}{24} \right), \quad (85)$$

when $|\theta| < \theta_m$ and $f(\theta) = 0$ for other values of θ . Here θ_m is the small angle

$$\theta_m = \arccos(1 - \epsilon) \approx \sqrt{2\epsilon} + \frac{\sqrt{2}}{12}\epsilon^{3/2}. \quad (86)$$

Using the formulas discussed in the preceding sections, we compute all the necessary quantities and compare them with the results of the direct numerical simulations based on a boundary element representation similar to the one discussed in [13].

The spectrum of quasi-bound states for a cut disk with $\epsilon = 0.05$ is plotted in Fig. 6. To get a good agreement in the region $\text{Re}(kR) \approx 15 - 20$, it is necessary to take into account double quasidegeneracies and, in the region close to $\text{Re}(kR) = 35$, triple degeneracy (79) has been considered. The agreement is quite good even in the region of large kR where many families intersect.

Two wave functions of this cut disk are plotted in Fig. 7. The first one is obtained by direct numerical simulations and the second one corresponds to the perturbation expansion. Even tiny details are well reproduced by perturbation computations. In the direct numerical simulations, the wave functions are reconstructed from the knowledge of the boundary currents. This procedure requires the integration of the Han-

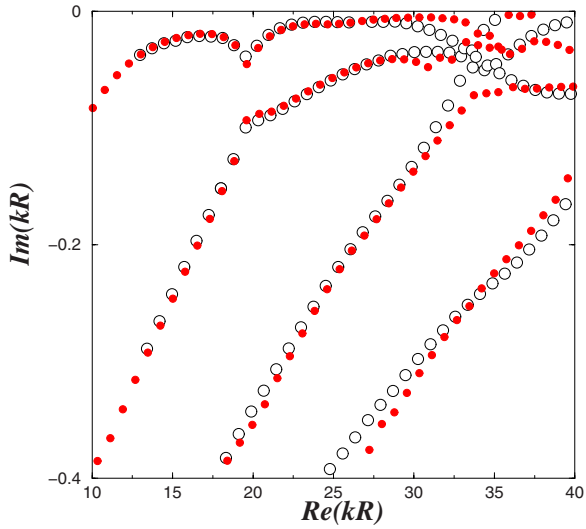


FIG. 6. (Color online) Comparison between perturbation and numerical spectra for the cut disk with $\epsilon=0.05$. Open circles are results of the direct numerical simulations and full circles correspond to the perturbation expansion (33).

kel function, $H_0^{(1)}$ [13]. As this function has a logarithmic singularity, a small region around the cavity boundary has been removed to reduce numerical errors. It explains the white region in Fig. 7(a). For an easier comparison, the same region has been removed also from the perturbation result in Fig. 7(b).

Finally, in Fig. 8, the far-field emission pattern computed numerically for the cut disk is compared with the same deduced from the perturbation series (47). Both are normalized to unit maximum. Once more a good agreement is found. The approximate positions of the main peaks in the far-field pattern correspond to the diffracted rays emanated from the discontinuities of the cut disk boundaries and reflected at the critical angle (8) on the circular boundary (see Fig. 9). If $(\theta_1, \theta_2, \dots)$ and $(\theta'_1, \theta'_2, \dots)$ are the directions of two such refracted rays one gets from geometrical considerations

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi}{2} + 2\theta_c - \theta_m, & \theta'_1 &= \frac{3\pi}{2} - 2\theta_c - \theta_m, \\ \theta_2 &= 4\theta_c - \theta_m - \frac{\pi}{2}, & \theta'_2 &= 4\theta_c + \theta_m - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (87)$$

Here θ_c is the critical angle (8) and θ_m is defined in Eq. (86). For $\epsilon=0.05$ and $n=1.5$, $\theta_1 \approx 155.4^\circ$, $\theta'_1 \approx 168.2^\circ$, $\theta_2 \approx 59^\circ$, and $\theta'_2 \approx 95.4^\circ$ which agrees with Fig. 8.

To complete this study, far-field experiments have been carried out according to the set-up described in [18]. The cavities are made of a layer of polymethylmethacrylate (PMMA) doped by 4-dicyanomethylene-2-methyl-6-(4-dimethylaminostyryl)-4H-pyran (DCM, 5% in weight) on a silica on silicon wafer. To obtain a good resolution of the shape even for such a small cut as $\epsilon=0.05$, cavities are defined with electron beam lithography (Leica EBPG 5000+)

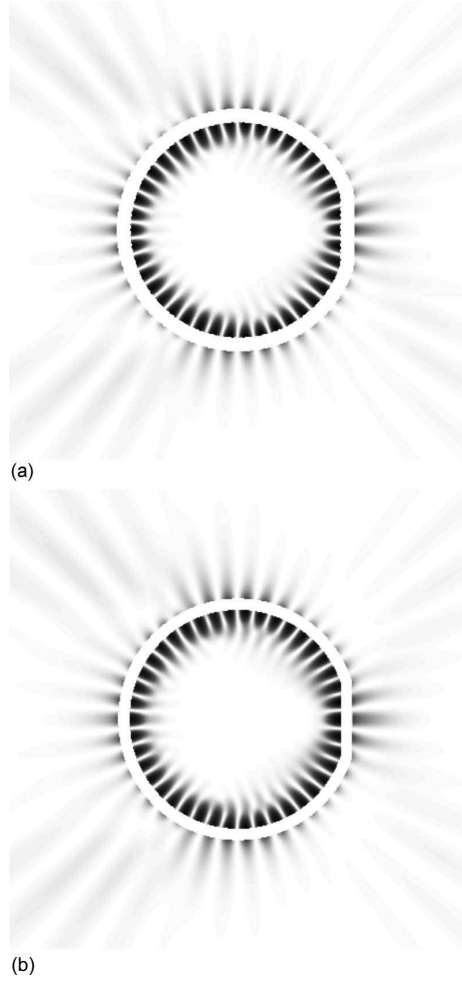


FIG. 7. (a) Modulus square of the wave function for the cut disk with $\epsilon=0.05$ obtained by direct numerical simulations corresponding to quasistationary eigenmomentum $kR=16.655-0.0199i$. (b) The same but calculated within perturbation expansion with $m=21$ and $p=0$. The corresponding eigenmomentum is $kR=16.659-0.0191i$. The high intensity regions are indicated in black.

by C. Ulysse (Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, CNRS-UPR20). A scanning electron microscope image of such a cavity is shown in Fig. 10. As specified in [18], the cavities are uniformly pumped one by one from the top at 532 nm with a pulsed doubled Nd:YAG laser. The light emitted from the cavity is collected in its plane with a lens leading to a 10° apex angle aperture. The directions of emission are symmetrical about the 0° axis according to the obvious symmetry of the cut-disk shape. In Fig. 8, the intensity detected in the far field is plotted versus the θ angle with points. The position of the maximal peak around 160° is reproducible from cavity to cavity with $\epsilon=0.05$ and agrees with both numerical and perturbation approaches.

The example of the cut disk clearly demonstrates the usefulness of the perturbation method presented in this paper for deformed circular cavities.

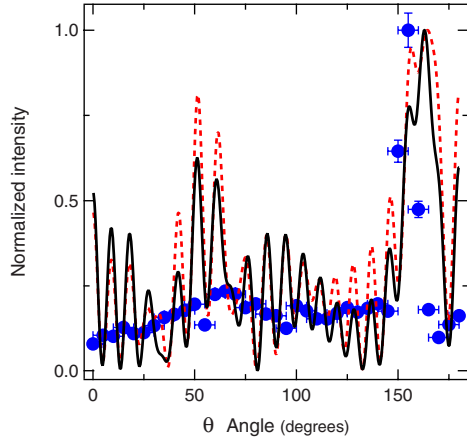


FIG. 8. (Color online) Far-field emission pattern, $|F(\theta)|^2$, for the same state as in Fig. 7. Results from direct numerical simulations are plotted in solid line, while the dashed line indicates the perturbation result (47). The points correspond to experimental results with $\epsilon=0.05$ and $R=60 \mu\text{m}$.

VI. CONCLUSION

We considered in detail the construction of perturbation series for deformed dielectric circular cavities. The obtained formulas can be applied for the calculation of the spectrum and the wave functions as well as other characteristics of these dielectric cavities (e.g., far-field emission patterns). We checked these formulas on the example of the cut disk which is of interest from an experimental point of view. Cavities of other shapes (e.g., spiral [19]) can be considered analogously. This method can also be used to calculate the influence of a small boundary roughness on the emission properties of circular cavities.

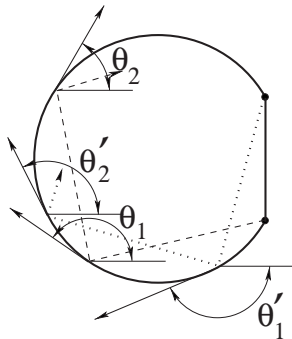


FIG. 9. Dashed and dotted lines: Two main diffracted rays responsible for dominant peaks in the far-field pattern of a dielectric cut disk. All rays hit the circular boundary with an angle equal the critical angle (8).

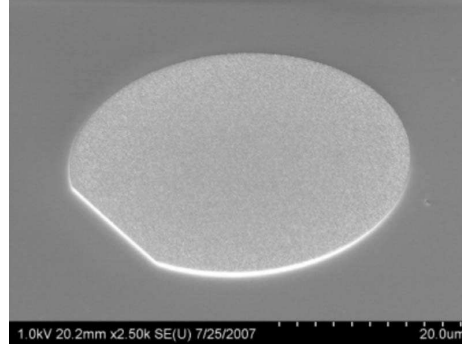


FIG. 10. Scanning electron microscope image of a cut disk etched with an electron beam.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to J.-S. Laurent and J. Zyss for fruitful discussions, to D. Bouche for pointing out Ref. [11], to H. Schomerus for pointing out Ref. [9], and to G. Faini and C. Ulysse (Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, CNRS-UPR20) for technical support.

APPENDIX A: WHISPERING GALLERY MODES

The purpose of this appendix is to calculate the asymptotic of quasistationary eigenvalues for a fixed radial quantum number p and a large azimuthal quantum number $m \rightarrow \infty$.

These resonances are well confined, so let us first find the corresponding asymptotic expression for zeros of Bessel functions $J_m(x_m)=0$. To achieve this task it is convenient to use Langer’s formulas (see, e.g., [7], 7.13.4) which are valid with $O(m^{-4/3})$ accuracy

$$J_m(x) = T(w)[J_{1/3}(z)\cos(\pi/6) - Y_{1/3}(z)\sin(\pi/6)],$$

$$Y_m(x) = T(w)[J_{1/3}(z)\cos(\pi/6) + Y_{1/3}(z)\sin(\pi/6)],$$

where $T(w)=w^{-1/2}[w - \arctan(w)]^{1/2}$, $w=(x^2/m^2 - 1)^{1/2}$, and $z=m[w - \arctan(w)]$.

The combination of the Bessel functions is expressed as follows

$$J_{1/3}(z)\cos(\pi/6) - Y_{1/3}(z)\sin(\pi/6) = 3^{1/6}2^{1/3}z^{-1/3}\text{Ai}[-(3z/2)^{2/3}], \tag{A1}$$

where $\text{Ai}(x)$ is the Airy function

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + tx\right) dt. \tag{A2}$$

Therefore, in the intermediate region when z is fixed and $m \gg 1$, the zeros of the J_m Bessel function correspond to

$$z = \frac{2}{3} \eta_p^{3/2}, \tag{A3}$$

where η_p are the modulus of the zeros of the Airy function $\text{Ai}(-\eta_p)=0$ ($\eta_1 \approx 2.338$, $\eta_2 \approx 4.088$, and $\eta_3 \approx 5.521$). Finally,

the Bessel function zeros have the following expansion

$$x_m = m + \alpha m^{1/3} + \beta m^{-1/3} + O(m^{-1}), \quad (\text{A4})$$

where

$$\alpha = 2^{-1/3} \eta_p, \quad \beta = \frac{3}{2^{5/3} 5} \eta_p^2. \quad (\text{A5})$$

For $p=1$ this expression agrees numerically with the one given in [7], Sec. 7.9.

The whispering gallery zeros of Bessel functions (A4) permit us to calculate explicitly the whispering gallery modes for the dielectric disk. Indeed we are interested in the solutions of equation

$$\frac{n J_m'(nx)}{\nu J_m'(nx)} = \frac{H_m^{(1)'}}{H_m} (x) \quad (\text{A6})$$

in the region xn close to m , which means

$$xn = x_m + \delta x \quad (\text{A7})$$

with $\delta x \ll x_m$. The expansion of the right-hand side of Eq. (A6) leads to

$$\frac{H_m^{(1)'}}{H_m} \left(\frac{x_m}{n} \right) = -\sqrt{n^2 - 1} + \frac{\alpha n^2}{m^{2/3} \sqrt{n^2 - 1}} + O(m^{-1}). \quad (\text{A8})$$

In the left-hand side of Eq. (A6), both numerator and denominator can be expanded into powers of δx taking into account that $J_m(x_m) = 0$

$$\frac{J_m'(x_m + \delta x)}{J_m(x_m + \delta x)} \approx \frac{J_m' + \delta x J_m'' + (\delta x)^2 J_m''' / 2}{\delta x J_m' + (\delta x)^2 J_m'' / 2 + (\delta x)^3 J_m''' / 6} (x_m). \quad (\text{A9})$$

Using the Bessel equation

$$J_m''(z) + \frac{1}{z} J_m'(z) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m(z) = 0 \quad (\text{A10})$$

one can check that all but one derivatives $J_m^{(k)}/J_m'(x_m)$ are at most $O(m^{-1})$ and can be neglected. The only exception is

$$\frac{J_m'''}{J_m'} (x_m) = -\frac{2\alpha}{m^{2/3}} + O(m^{-1}). \quad (\text{A11})$$

Finally, expansion (A9) takes the form

$$\frac{J_m'(x_m + \delta x)}{J_m(x_m + \delta x)} = \frac{1}{\delta x} - \delta x \frac{2\alpha}{3m^{2/3}} + O(m^{-1}). \quad (\text{A12})$$

Combining this equation with Eqs. (A6) and (A8) one obtains

$$\delta x = -\frac{n}{\nu \sqrt{n^2 - 1}} + \frac{\alpha n^3}{m^{2/3} \nu (n^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{2}{3\nu^2} - 1 \right) + O(m^{-1}). \quad (\text{A13})$$

These formulas lead to Eq. (18).

Other “whispering gallery” modes correspond to x close to m . With the same notations as above, Langer’s formula can be written for the Hankel function

$$H_m^{(1)}(x) = T(w) e^{i\pi/6} H_{1/3}^{(1)}(z) + O(m^{-4/3}). \quad (\text{A14})$$

The zeros of $H_{1/3}(z)$ exist only when $z = r e^{-i\pi}$ with real r . From formula [7] 7.11.42, it follows that

$$H_\nu^{(1)}(r e^{i\pi}) = -\frac{\sin \pi(m-1)\nu}{\sin \pi\nu} H_\nu^{(1)}(r) + e^{-i\pi\nu} \frac{\sin \pi m \nu}{\sin \pi\nu} H_\nu^{(2)}(r). \quad (\text{A15})$$

In this way, we get

$$H_{1/3}^{(1)}(r e^{-i\pi}) = 2e^{-i\pi/6} [J_{1/3}(r) \cos(\pi/6) - Y_{1/3}(r) \sin(\pi/6)]. \quad (\text{A16})$$

This is the same combination of the Bessel functions as Eq. (A1) for $J_m(x)$. Therefore, the first complex zeros of the Hankel function, $H_m^{(1)}(\tilde{x}_m)$, have a form similar to Eq. (A4)

$$\tilde{x}_m = m + \tilde{\alpha} m^{1/3} + \tilde{\beta} m^{-1/3} + O(m^{-1}), \quad (\text{A17})$$

where $\tilde{\alpha} = e^{-2\pi i/3} \alpha$ and $\tilde{\beta} = e^{-4\pi i/3} \beta$ with the same α and β as in Eq. (A5).

The next step is to find the asymptotic of $J_m(nx)$ for complex $x = \tilde{x}_m$. As

$$\text{Im}(\tilde{x}_m) = -2^{-1/3} \sin(2\pi/3) \eta_p m^{1/3} + O(m^{-1/3}), \quad (\text{A18})$$

it tends to $-\infty$ with increasing of m . Therefore, from Eq. (14) it follows that, instead of the $\cos(\dots)$ term, only the positive exponent has to be taken into account. Then the left-hand side of Eq. (A6) leads to

$$\begin{aligned} \frac{J_m'(n\tilde{x}_m)}{J_m(n\tilde{x}_m)} &= i \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2 \tilde{x}_m^2}} + O(m^{-1}) \\ &= i \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}}{(n^2 - 1)m^{2/3}} \right) + O(m^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

As $H_m^{(1)}(z)$ also obeys Eq. (A10) one obtains the same expansion as Eq. (A12)

$$\frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(\tilde{x}_m + \delta x) = \frac{1}{\delta x} - \delta x \frac{2\tilde{\alpha}}{3m^{2/3}} + O(m^{-1}). \quad (\text{A20})$$

Equations (A19) and (A20) lead to the following value of δx with $O(m^{-1})$ accuracy

$$\delta x = -\frac{i\nu}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{i\nu\tilde{\alpha}}{m^{2/3} \sqrt{n^2 - 1}} \left(1 - \frac{2\nu^2}{3} \right). \quad (\text{A21})$$

Collecting these equations we get Eq. (19).

APPENDIX B: CONSTRUCTION OF PERTURBATION SERIES

From Eqs. (24)–(28), the following relations are valid at the circle $r=R$:

$$\Psi_1 - \Psi_2 = -\lambda^2 \sum_p \gamma_p \cos(p\theta) + O(\lambda^3),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = & k \left[S_m(x) \cos(m\theta) + \lambda \sum_{p \neq m} (\alpha_p + \lambda \beta_p) \right. \\ & \times S_p(x) \cos(p\theta) + \lambda^2 \sum_p \gamma_p \frac{H_p^{(1)'}}{H_p^{(1)}}(x_0) \\ & \left. \times \cos(p\theta) \right] + O(\lambda^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} = & -\frac{k}{R} \left[S_m(x) + x(n^2 - 1) \right] \cos(m\theta) \\ & + \lambda \sum_{p \neq m} \alpha_p [S_p(x_0) + x_0(n^2 - 1)] \cos(p\theta) \\ & + O(\lambda^2), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial r^3} - \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial r^3} = & \left[k S_m(x_0) \left(\frac{m^2 + 2}{R^2} - k^2 n^2 \right) - k^3 (n^2 - 1) \right. \\ & \left. \times \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x_0) + k^2 \frac{n^2 - 1}{R} \right] \cos(m\theta) + O(\lambda). \end{aligned}$$

In the zeroth order $S_m(x_0) = 0$. Expanding $S_m(x)$ with x as in Eq. (30) into a series in λ , one gets

$$\begin{aligned} S_m(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2) = & \lambda x_1 \frac{\partial S_m}{\partial x} + \lambda^2 \left(x_2 \frac{\partial S_m}{\partial x} + \frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial^2 S_m}{\partial x^2} \right) \\ & + O(\lambda^2), \end{aligned}$$

where all derivatives of S_m are taken at $x = x_0$. These derivatives are deduced from the Bessel equation (A10)

$$\frac{\partial S_m}{\partial x}(x) = -(n^2 - 1) - \frac{1}{x} S_m(x) - S_m(x) \left(S_m(x) + 2 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x) \right).$$

In particular, when $x = x_0$,

$$\frac{\partial S_m}{\partial x}(x_0) = -(n^2 - 1),$$

$$\frac{\partial^2 S_m}{\partial x^2}(x_0) = (n^2 - 1) \left(\frac{1}{x_0} + 2 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x_0) \right). \quad (\text{B1})$$

In the λ first order, it leads to

$$\begin{aligned} -x_1(n^2 - 1) \cos(m\theta) + \sum_{p \neq m} \alpha_p S_p(x_0) \cos(p\theta) \\ = \frac{f(\theta)}{R} x_0 (n^2 - 1) \cos(m\theta). \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Coefficients α_p and the first eigenvalue correction, x_1 , are determined by comparison of the Fourier harmonics in both sides of Eq. (B2)

$$\alpha_p = (n^2 - 1) \frac{x_0}{S_p(x_0)} A_{pm} \quad (\text{B3})$$

and

$$x_1 = -x_0 A_{mm}, \quad (\text{B4})$$

where A_{pm} are the Fourier harmonics of the deformation function

$$A_{pm} = \frac{\epsilon_p}{\pi R} \int_0^\pi f(\theta) \cos(p\theta) \cos(m\theta) d\theta. \quad (\text{B5})$$

Here

$$\epsilon_p = \begin{cases} 2 & \text{for } p \neq 0 \\ 1 & \text{for } p = 0. \end{cases} \quad (\text{B6})$$

In the λ second order, it leads to the following two equations:

$$\sum_p \gamma_p \cos(p\theta) = \frac{1}{2} x_0^2 (n^2 - 1) \frac{f^2(\theta)}{R^2} \cos(m\theta) \quad (\text{B7})$$

and

$$\begin{aligned} \left\{ (n^2 - 1) \left[-x_2 + \frac{1}{2x_0} x_1^2 \left(1 + 2x_0 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} \right) \right] + \gamma_m \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} \right\} \cos(m\theta) \\ + \sum_{p \neq m} \left[x_1 \alpha_p \frac{\partial S_p}{\partial x} + \beta_p S_p + \gamma_p \frac{H_p^{(1)'}}{H_p^{(1)}} \right] \cos(p\theta) \\ = \frac{f(\theta)}{R} \sum_{p \neq m} \alpha_p [S_p + x_0(n^2 - 1)] \cos(p\theta) - \frac{f^2(\theta)}{2R^2} x_0 (n^2 - 1) \\ \times \left(1 - x_0 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} \right) \cos(m\theta). \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

Using Eq. (B2), the right-hand side of Eq. (B8) can be rewritten as

$$\begin{aligned} (n^2 - 1) \frac{f(\theta)}{R} \left(x_0 \sum_{p \neq m} \alpha_p \cos(p\theta) + x_1 \cos(m\theta) \right) \\ + (n^2 - 1) \frac{f^2(\theta)}{2R^2} x_0 \left(1 + x_0 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} \right) \cos(m\theta). \end{aligned}$$

Unknown coefficients can be determined by equating the Fourier harmonics in both parts of Eqs. (B7) and (B8). From Eq. (B7) it follows that for all p

$$\gamma_p = \frac{1}{2} x_0^2 (n^2 - 1) B_{pm}, \quad (\text{B9})$$

where B_{pm} represents the Fourier harmonics of the square of the deformation function

$$B_{pm} = \frac{\epsilon_p}{\pi R^2} \int_0^\pi f^2(\theta) \cos(p\theta) \cos(m\theta) d\theta. \quad (\text{B10})$$

For $p \neq m$ Eq. (B8) gives

$$\begin{aligned} \beta_p S_p + x_1 \alpha_p \frac{\partial S_p}{\partial x} + \gamma_p \frac{H_p^{(1)'}}{H_p^{(1)}} = (n^2 - 1) \left[x_1 A_{pm} + x_0 \sum_{k \neq m} \alpha_k A_{pk} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} x_0 \left(1 + x_0 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} \right) B_{pm} \right]. \end{aligned}$$

The m th harmonic of the same equation determines the sec-

ond correction to the quasistationary eigenvalue

$$x_2 = \frac{1}{2x_0} x_1^2 \left(1 + 2x_0 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} \right) + \frac{\gamma_m H_m^{(1)'}}{(n^2 - 1)H_m^{(1)}} - \frac{1}{2} x_0 \left(1 + x_0 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} \right) B_{mm} - x_0 \sum_{k \neq m} \alpha_k A_{mk} - x_1 A_{mm}.$$

Rearranging these equations and using the first order results and Eq. (B9), one gets

$$x_2 = x_0 \left[\frac{1}{2} (3A_{mm}^2 - B_{mm}) + x_0 \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} (A_{mm}^2 - B_{mm}) - \sum_{k \neq m} \alpha_k A_{m,k} \right] \quad (\text{B11})$$

and

$$\beta_p = x_0 \frac{n^2 - 1}{S_p} \left\{ A_{pm} A_{mm} \left(\frac{x_0}{S_p} \frac{\partial S_p}{\partial x} - 1 \right) + \frac{1}{2} B_{pm} \left[1 + x_0 \left(\frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}} + \frac{H_p^{(1)'}}{H_p^{(1)}} \right) \right] + \sum_{k \neq m} \alpha_k A_{pk} \right\}. \quad (\text{B12})$$

APPENDIX C: GREEN FUNCTION FOR THE DIELECTRIC CIRCULAR CAVITY

The Green function of the dielectric Helmholtz equation for the circular cavity, $G(\vec{x}, \vec{y})$, is defined as the solution of the following equation

$$[\Delta_{\vec{x}} + n_0^2(\vec{x})k^2]G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{C1})$$

where n_0^2 is the potential for the circular cavity defined in Eq. (50).

Let us first consider the case when the \vec{y} source point is inside the circle. In this case, when the \vec{x} point is inside the cavity, the advanced Green function has the form

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m J_m(nkr) e^{im(\theta-\phi)} + \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kn|\vec{x} - \vec{y}|) \quad (\text{C2})$$

and when the \vec{x} point is outside the circle

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(kr) e^{im(\theta-\phi)}. \quad (\text{C3})$$

Here and below we assume that points \vec{x} and \vec{y} have polar coordinates (r, θ) and (ρ, ϕ) , respectively.

Constants A_m and B_m are calculated from the boundary conditions on the interface using the expansion [7] 7.15.29 of $H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{y}|)$,

$$H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{y}|) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) H_m^{(1)}(k\rho) e^{im(\theta-\phi)} \quad (\text{C4})$$

when $r < \rho$ and

$$H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{y}|) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m^{(1)}(kr) J_m(k\rho) e^{im(\theta-\phi)} \quad (\text{C5})$$

when $r > \rho$.

For the TM polarization the Green function and its normal derivative at circle boundary are continuous. That leads to the following system of equations (with $x = kR$):

$$A_m J_m(nx) + \frac{1}{4i} J_m(nk\rho) H_m^{(1)}(nx) = B_m H_m^{(1)}(x),$$

$$n A_m J_m'(nx) + \frac{n}{4i} J_m'(nk\rho) H_m^{(1)'}(nx) = B_m H_m^{(1)'}(x).$$

Its solutions are

$$A_m = -\frac{H_m^{(1)}(x)}{2\pi x \Delta_m J_m(nx)} J_m(kn\rho) - \frac{H_m^{(1)}(nx)}{4i J_m(nx)} J_m(kn\rho),$$

$$B_m = -\frac{1}{2\pi x \Delta_m} J_m(kn\rho),$$

where

$$\Delta_m = n J_m'(nx) H_m^{(1)}(x) - J_m(nx) H_m^{(1)'}(x) \equiv J_m(nx) H_m^{(1)}(x) S_m(x). \quad (\text{C6})$$

In deriving these expressions, the Wronskian ([7], 7.11.29) has been used

$$J_\nu(x) H_\nu^{(1)'}(x) - J_\nu'(x) H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}. \quad (\text{C7})$$

For the \vec{y} source point outside the circle, when \vec{x} is inside the cavity, then

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_m(nkr) e^{im(\theta-\phi)} \quad (\text{C8})$$

and when \vec{x} is outside the circle, then

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m H_m^{(1)}(kr) e^{im(\theta-\phi)} + \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{y}|). \quad (\text{C9})$$

Constants C_m and D_m are computed exactly as A_m and B_m :

$$C_m = -\frac{1}{2\pi x \Delta_m} H_m^{(1)}(k\rho),$$

$$D_m = -\frac{J_m(nx)}{2\pi x \Delta_m H_m^{(1)}(x)} H_m^{(1)}(k\rho) - \frac{J_m(x)}{4i H_m^{(1)}(x)} H_m^{(1)}(k\rho).$$

The final expressions of the Green function follow from the above formulas.

When the \vec{y} source point is inside the circle, the plane is divided into three parts: (1) $r < \rho$, (2) $\rho < r < R$, and (3) $R < r$. Denoting the Green function in these regions by the corresponding numbers, it can be written as

$$G_j(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{p=0}^{\infty} g_p^{(j)}(r, \rho) \cos[p(\theta - \phi)], \quad (\text{C10})$$

where

$$g_p^{(1)}(r, \rho) = -\frac{1}{2\pi x} \epsilon_p \frac{J_p(nkr)J_p(nk\rho)}{J_p^2(nx)S_p(x)} + \frac{1}{4i} \epsilon_p \frac{J_p(knr)}{J_p(nx)} \\ \times [H_p^{(1)}(kn\rho)J_p(nx) - H_p^{(1)}(nx)J_p(kn\rho)],$$

$$g_p^{(2)}(r, \rho) = -\frac{1}{2\pi x} \epsilon_p \frac{J_p(nkr)J_p(nk\rho)}{J_p^2(nx)S_p(x)} + \frac{1}{4i} \epsilon_p \frac{J_p(kn\rho)}{J_p(nx)} \\ \times [H_p^{(1)}(knr)J_p(nx) - H_p^{(1)}(nx)J_p(knr)],$$

$$g_p^{(3)}(r, \rho) = -\frac{1}{2\pi x} \epsilon_p \frac{J_p(nk\rho)H_p^{(1)}(kr)}{J_p(nx)H_p^{(1)}(x)S_p(x)},$$

where ϵ_p was defined in Eq. (B6).

When point \vec{y} is outside the circle, the plane is divided into three different regions: (1) $r < R$, (2) $R < r < \rho$, and (3) $\rho < r$. With the same notation as above, the Green function can be written

$$\tilde{G}_j(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}_p^{(j)}(r, \rho) \cos[p(\theta - \phi)], \quad (\text{C11})$$

where

$$\tilde{g}_p^{(1)}(r, \rho) = -\frac{1}{2\pi x} \epsilon_p \frac{J_p(nkr)H_p^{(1)}(k\rho)}{J_p(nx)H_p^{(1)}(x)S_p(x)},$$

$$\tilde{g}_p^{(2)}(r, \rho) = -\frac{1}{2\pi x} \epsilon_p \frac{H_p^{(1)}(kr)H_p^{(1)}(k\rho)}{H_p^{(1)2}(x)S_p(x)} + \frac{1}{4i} \epsilon_p \frac{H_p^{(1)}(k\rho)}{H_p^{(1)}(x)} \\ \times [H_p^{(1)}(x)J_p(kr) - H_p^{(1)}(kr)J_p(x)],$$

$$\tilde{g}_p^{(3)}(r, \rho) = -\frac{1}{2\pi x} \epsilon_p \frac{H_p^{(1)}(kr)H_p^{(1)}(k\rho)}{H_p^{(1)2}(x)S_p(x)} + \frac{1}{4i} \epsilon_p \frac{H_p^{(1)}(kr)}{H_p^{(1)}(x)} \\ \times [H_p^{(1)}(x)J_p(k\rho) - H_p^{(1)}(k\rho)J_p(x)].$$

Notice that $G_1(\vec{x}, \vec{y}) = G_2(\vec{y}, \vec{x})$, $G_3(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{G}_1(\vec{y}, \vec{x})$, and $\tilde{G}_2(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{G}_3(\vec{y}, \vec{x})$. It means that in all cases the Green function is symmetric: $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ as it should be (see, e.g., [14]).

APPENDIX D: THREE DEGENERATE LEVELS

For three quasidegenerate levels, instead of Eq. (83) one gets the 3×3 determinant

$$\begin{vmatrix} \delta x - s_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \delta x - s_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \delta x - s_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{D1})$$

which leads to the cubic equation

$$(\delta x)^3 - \sigma_1(\delta x)^2 + (\sigma_2 - \alpha)\delta x - \sigma_3 + \beta = 0. \quad (\text{D2})$$

Here σ_i are the elementary symmetric functions of s_i ,

$\sigma_1 = s_1 + s_2 + s_3$, $\sigma_2 = s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1$, $\sigma_3 = s_1s_2s_3$,
and (because $A_{ij} = A_{ji}$)

$$\alpha = A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2,$$

$$\beta = 2A_{12}A_{23}A_{31} + s_1A_{23}^2 + s_2A_{31}^2 + s_3A_{12}^2.$$

To solve Eq. (D2), the next steps are standard. The substitution

$$\delta x = y + \frac{1}{3}\sigma_1 \quad (\text{D3})$$

transforms Eq. (D2) to the reduced form

$$y^3 + py + q = 0, \quad (\text{D4})$$

where

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_1^2 + \sigma_2 - \alpha, q = -\frac{2}{27}\sigma_1^3 + \frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 + \delta, \quad (\text{D5})$$

with $\delta = \beta - \frac{1}{3}\sigma_1\alpha$. Finally after the transformation

$$y = z - \frac{p}{3z}, \quad (\text{D6})$$

one gets the equation $z^3 - p^3/27z^3 + q = 0$ which is a quadratic equation in variable

$$w = z^3. \quad (\text{D7})$$

Its solution is

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (\text{D8})$$

Equations (D3) and (D6)–(D8) give the well known solution of the cubic equation (D2). The question is how to choose a branch which tends to s_1 when $A_{ij} \rightarrow 0$. The discriminant of this equation is

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = d + \varepsilon, \quad (\text{D9})$$

where

$$d = \frac{1}{4} \left(-\frac{2}{27}\sigma_1^3 + \frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_1^2 \right)^3$$

and

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\delta^2 + \frac{1}{2}\delta \left(-\frac{2}{27}\sigma_1^3 + \frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 \right) - \frac{1}{27}\alpha^3 \\ + \frac{1}{9}\alpha^2 \left(\sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_1^2 \right) - \frac{1}{9}\alpha \left(\sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_1^2 \right)^2.$$

Using the identity

$$d = -\frac{1}{108} [(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_3 - s_1)]^2,$$

the expression (D8) can be transformed into

$$w = w_0 - \frac{1}{2}\delta + \frac{i}{6\sqrt{3}}(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_3 - s_1) \left[\sqrt{1 - \frac{108\varepsilon}{[(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_3 - s_1)]^2}} - 1 \right],$$

where

$$w_0 = \frac{1}{27}\sigma_1^3 - \frac{1}{6}\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_3 + \frac{i}{6\sqrt{3}}(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_3 - s_1) = \frac{1}{27}(s_1 + s_2e^{-2\pi i/3} + s_3e^{2\pi i/3})^3.$$

Finally the root of the cubic equation (D2) which tends to s_1 when $A_{ij} \rightarrow 0$ is

$$z = \frac{1}{3}s \left[1 - \frac{27\delta}{2s^3} + \frac{3\sqrt{3}i}{2s^3}(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_3 - s_1) \left(\sqrt{1 - \frac{108\varepsilon}{[(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_3 - s_1)]^2}} - 1 \right) \right]^{1/3},$$

where $s = s_1 + s_2e^{-2\pi i/3} + s_3e^{2\pi i/3}$.

-
- [1] *Optical Microcavities*, edited by K. Vahala (World Scientific, Singapore, 2005).
- [2] E. Krioukov, D. J. W. Klunder, A. Driessen, J. Greve, and C. Otto, *Opt. Lett.* **27**, 512 (2002).
- [3] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco, and A. Y. Cho, *Science* **280**, 1556 (1998).
- [4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1962).
- [5] C. Vassallo, *Optical Waveguide Concepts* (Eslevier, Amsterdam, 1991).
- [6] M. Lebental, N. Djellali, C. Arnaud, J.-S. Lauret, J. Zyss, R. Dubertrand, C. Schmit, and E. Bogomolny, *Phys. Rev. A* (to be published).
- [7] A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, New York, 1955), Vol. 3.
- [8] J. Nöckel, Ph.D. dissertation, Yale University, 1997 (unpublished).
- [9] M. Hentschel and H. Schomerus, *Phys. Rev. E* **65**, 045603(R) (2002).
- [10] C. Yeh, *Phys. Rev.* **135**, A1193 (1964).
- [11] L. Kaminitzky and J. Keller, *SIAM J. Appl. Math.* **22**, 109 (1972).
- [12] I. Braun, G. Ihlein, F. Laeri, J. U. Nöckel, G. Schulz-Ekloff, F. Schüth, U. Vietze, O. Weis, and D. Wöhrle, *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **70**, 335 (2000).
- [13] J. Wiersig, *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* **5**, 53 (2003); *Phys. Rev. A* **67**, 023807 (2003).
- [14] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. II.
- [15] M. V. Berry and M. Tabor, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **356**, 375 (1977).
- [16] S. Tomsovic and D. Ullmo, *Phys. Rev. E* **50**, 145 (1994).
- [17] V. Doya, O. Legrand, F. Mortessagne, and C. Miniatura, *Phys. Rev. E* **65**, 056223 (2002).
- [18] M. Lebental, J.-S. Lauret, R. Hierle, and J. Zyss, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 031108 (2006).
- [19] S.-Y. Lee, S. Rim, J.-W. Ryu, T.-Y. Kwon, M. Choi, and C.-M. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 164102 (2004).

Trace formula for dielectric cavities : I. General properties

E. Bogomolny, R. Dubertrand, and C. Schmit
Université Paris-Sud, CNRS, UMR 8626, Laboratoire de Physique
*Théorique et Modèles Statistiques, 91405 Orsay Cedex, France**
 (Dated: October 22, 2008)

The construction of the trace formula for open dielectric cavities is examined in detail. Using the Krein formula it is shown that the sum over cavity resonances can be written as a sum over classical periodic orbits for the motion inside the cavity. The contribution of each periodic orbit is the product of the two factors. The first is the same as in the standard trace formula and the second is connected with the product of reflection coefficients for all points of reflection with the cavity boundary. Two asymptotic terms of the smooth resonance counting function related with the area and the perimeter of a convex cavity are derived. The coefficient of the perimeter term differs from the one for closed cavities due to unusual high-energy asymptotics of the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the cavity. Corrections to the leading semi-classical formula are briefly discussed. Obtained formulas agree well with numerical calculations for circular dielectric cavities.

PACS numbers: 42.55.Sa, 05.45.Mt, 03.65.Sq

I. INTRODUCTION

Only a limited number of quantum models permits exact analytical solutions. All others require either numerical or approximate approaches. One of the most useful approximation and widely used for non-integrable multi-dimensional quantum systems is the semiclassical one based on different types of trace formulas developed in the early 70's [1–4].

A general trace formula relates two different objects. Its left-hand side is the density of discrete energy levels, E_m , of a quantum system

$$d_{\text{quantum}}(E) = \sum_m \delta(E - E_m). \quad (1)$$

The right-hand side of the trace formula is the sum of two contributions

$$d_{\text{semi-classical}}(E) = \bar{d}(E) + d^{(\text{osc})}(E). \quad (2)$$

The first term, $\bar{d}(E)$, is the smooth part of level density given by a series of the Weyl terms (see e.g. [1] and references therein). By definition, $\bar{d}(E) = d\bar{N}(E)/dE$ where $\bar{N}(E)$ is the mean number of levels with energies $E_n \leq E$ called also the smooth counting function. For two-dimensional billiards leading contributions to $\bar{N}(E)$ are the following

$$\bar{N}(E) = \frac{Ak^2}{4\pi} + r \frac{Lk}{4\pi} + \mathcal{O}(1) \quad (3)$$

where $k = \sqrt{E}$ is the momentum, A is the area of the billiard cavity, and L is its perimeter. r in this formula is related with chosen boundary conditions. For example, $r = \pm 1$ for, respectively, the Neumann and the Dirichlet conditions.

The second term in (2), $d^{(\text{osc})}(E)$, is the oscillating (or the fluctuating) part of the level density given in the leading order by the sum over classical periodic orbits

$$d^{(\text{osc})}(E) = \sum_{\text{periodic orbits}} d_p(E) + \text{c.c.} \quad (4)$$

where $d_p(E)$ is the contribution of a given periodic orbit

$$d_p(E) = c_p e^{iS_p(E)/\hbar}. \quad (5)$$

Here $S_p(E)$ is the classical action along the periodic orbit (for billiards $S_p(E) = kl_p$ with l_p being the length of the periodic orbit) and the prefactor c_p can be computed from classical characteristics of the given periodic orbit (see below (24) and (25)). The trace formula is the statement that

$$d_{\text{quantum}}(E) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} d_{\text{semi-classical}}(E). \quad (6)$$

In an overwhelming majority of cases the trace formulas were applied to closed quantum systems with discrete energy levels. Though it is known (see e.g. [5]) that the trace formula and its modifications can also be applied for open quantum systems, only a small number of examples has been considered so far [6].

This is the first of a series of papers whose purpose is to demonstrate the usefulness of the application of trace formulas to open quantum systems, in particular, to dielectric cavities where a bounded domain is filled with a dielectric material with refractive index $n > 1$ while the exterior is a media with refractive index 1. The increasing interest to the investigation of such models to a large extent is related with their potential importance as resonators in micro-lasers [7, 8] and the experimental possibilities of observing geometrical characteristics of the cavity from their lasing spectra [9, 10]. The construction of trace formulas for dielectric cavities has been briefly discussed in [10]. We also mention that for open chaotic resonators a variant of a trace formula has been developed in [11].

*Electronic address: remy.dubertrand@lptms.u-psud.fr

Open systems, in general, have no discrete spectrum. So it is not immediately clear what should be the left-hand side (the spectral part) of the trace formula. In Section II we discuss the Krein formula [12] which is the main theoretical tool for open systems. This formula relates the excess density of states for an open cavity with the derivative over energy of the determinant of the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the cavity. From the Krein formula it follows that the spectral part of the trace formula consists of the sum over all complex poles of the \mathbf{S} -matrix widely called resonances or quasi-stationary states.

The right-hand side of the trace formula should include a smooth part and a sum over periodic orbits (cf. (2)). The general formalism like the multiple scattering approach, used by Balian and Bloch in their construction of the trace formula for closed cavities [1], is not yet fully developed for dielectric cavities. The main difference of dielectric cavities from closed ones is that for the later one knows boundary conditions on the cavity boundary but for the former boundary conditions are fixed only at infinity. Due to this fact the resulting integral equation (13) includes the integration over the cavity volume and not over its boundary as for the closed case which complicates the general construction. In Section III the form of leading periodic orbit contributions is fixed from physical considerations.

To get more insight to this problem, in Section IV a simple example of integrable circular dielectric cavity is considered in detail. Despite the calculations are straightforward, they permit us to calculate in Section V the smooth part of the counting resonance function and in Section VI the periodic orbit contributions. In Section VII we consider main corrections to the asymptotic results and, in particular, demonstrate how the Goos-Hänchen shift [13] manifests in the trace formula. All obtained formulas agree well with numerical calculations.

Though these results were obtained, strictly speaking, only for circular dielectric cavities, all main steps leading to them are quite general and we conjecture that they remain valid for dielectric cavities of arbitrary shape. The detailed comparison of the derived trace formulas with numerical calculations for cavities of different shapes is postponed for a future publication [14].

II. KREIN FORMULA

Throughout this paper we focus on a planar two-dimensional domain \mathcal{D} . The wave equations widely used for such dielectric cavities are the following (see e.g. [15])

$$\begin{aligned} (\Delta + n^2 E)\Psi(\vec{x}) &= 0 \text{ when } \vec{x} \in \mathcal{D}, \\ (\Delta + E)\Psi(\vec{x}) &= 0 \text{ when } \vec{x} \notin \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (7)$$

In electromagnetism we rather consider the wavenumber $k = \sqrt{E}$, which is related to the frequency ω of the wave through $k = \omega/c$, c being the speed of light in the vacuum. For simplicity we shall suppose that the wave

function, $\Psi(\vec{x})$, and its normal derivative are continuous along the boundary of \mathcal{D} . In electrodynamics these boundary conditions correspond to transverse magnetic (TM) modes inside an infinite dielectric cylinder with cross section \mathcal{D} [15]. Transverse electric (TE) modes may be treated similarly and will be considered elsewhere.

We stress that Eqs. (7) describe correctly electromagnetic fields only for an infinite dielectric cylinder. For a real 3-dimensional cavity with a small height, h , they have to be modified. The authors are not aware of the full 3-dimensional treatment of such problems. The usual approach consists to consider the refractive index, n , in these equations not as a constant but as an effective refraction index, $n = n_{eff}(kh)$, for the motion inside a 2 dimensional dielectric slab (see e.g. [16] and references therein) but errors of a such approximation are not known at present.

The possibility of using such cavities as resonators is related with the phenomenon of the total internal reflection. It is known (see e.g. [15]) that if the TM plane wave inside the cavity is reflected from a straight boundary, the (Fresnel) coefficient of reflection has the following form

$$R(\theta) = \begin{cases} \frac{n \cos \theta - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \cos \theta + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}, & \text{when } |\theta| < \theta_c \\ \frac{n \cos \theta - i\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta + i\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}, & \text{when } |\theta| > \theta_c \end{cases}. \quad (8)$$

Here θ is the angle between the direction of the incoming wave and the normal to the boundary and the critical angle

$$\theta_c = \arcsin 1/n. \quad (9)$$

When $|\theta| > \theta_c$ $|R(\theta)| = 1$ and the wave is completely reflected from the boundary which may lead to formation of long-lived states. We mention that this expression becomes less efficient for curved boundary close to the critical angle (see e.g. [17]).

Eq. (7) admits only continuous spectrum and its properly renormalized eigenvalue density, $d(E)$, has to be a smooth function of energy, contrary to closed systems where the level density is a sum of delta's peaks (cf. (1)). It is convenient to rewrite (7) as the Schrödinger equation with a potential

$$(\Delta + E)\Psi(\vec{x}) = -\lambda V(\vec{x})\Psi(\vec{x}) \quad (10)$$

where the coupling constant

$$\lambda = E(n^2 - 1) \quad (11)$$

and the potential $V(\vec{x})$ is non-zero only inside the cavity

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{when } \vec{x} \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{when } \vec{x} \notin \mathcal{D} \end{cases}. \quad (12)$$

Except of unusual dependence of the coupling constant on the energy this equation describes the motion in a

finite-range potential so standard methods (see e.g. [18]) can be applied to analyze it. In particular, its solution corresponding to the continuous spectrum is defined by the following integral equation (see also [19])

$$\Psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} - \lambda \int_D G_0(k|\vec{x} - \vec{y}|) \Psi(\vec{y}) d\vec{y} \quad (13)$$

where \vec{k} is the momentum vector of the incoming wave with coordinates $k(\cos \theta, \sin \theta)$, $G_0(k|\vec{x} - \vec{y}|)$ is the free Green function of the left-hand side of (10)

$$G_0(z) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(z), \quad (14)$$

and $H_0^{(1)}(z)$ is the Hankel function of the first order.

This equation may serve as a starting point of the multiple scattering method similar to the one discussed in [1]. The important difference between these two cases is that the integration in (13) is performed over the whole cavity volume which complicates the iteration procedure. Nevertheless, Eq. (13) has the standard form of the Fredholm equation and its solutions are well defined similar to the usual case when coupling constant λ is independent of energy. In particular, from (13) it follows that the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the cavity has the form

$$\mathbf{S}(\theta, \theta') = \delta(\theta - \theta') + \frac{i\lambda}{4\pi} f(\theta, \theta') \quad (15)$$

where θ and θ' are the angles determining the directions of, respectively, incoming and outgoing waves and

$$f(\theta, \theta') = \int_D e^{-i\vec{k}'\vec{y}} \Psi(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (16)$$

Here \vec{k}' is the momentum of the outgoing wave with coordinates $k(\cos \theta', \sin \theta')$.

The importance of the \mathbf{S} -matrix lies in the fact that the excess density of states for open systems can conveniently be written through it by using the Krein formula (see [12] and [20, 21]). This formula relates the density of states of two operators: the first with a short-range potential, $d(E)$, and the second without it, $d_0(E)$. In physical terms it reads

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S}(E) \quad (17)$$

where $\det \mathbf{S}(E)$ is the determinant of the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the potential. For clarity in Appendix A a physical 'derivation' of this formula is given in the simplest case of one-dimensional systems.

It is also known (see e.g. [18], sect. 12, and [22, 23]) that function $\det \mathbf{S}(E)$ for the scattering on a finite-range potential is a meromorphic function in the complex $k \equiv \sqrt{E}$ plane with (in even-dimensional spaces) a cut along the negative k -axis

$$\det \mathbf{S}(E) = e^{if(k)} \prod_m \frac{k - k_m^*}{k - k_m} \quad (18)$$

where k_m with $\text{Im } k_m < 0$ denote the positions of the poles of the \mathbf{S} -matrix on the second sheet of energy surface and the product is taken over all such poles. (Terms which ensure the convergence of this infinite product are not written explicitly). Here $f(k)$ is a certain function without singularities in the cut complex plane related with the asymptotics of the \mathbf{S} -matrix when $E \rightarrow \infty$. Due to the symmetry $k \rightarrow -k$ of (7), if k_m is a pole, $-k_m^*$ will also be a pole which is implicitly assumed in (18).

Therefore, the left-hand side of (17) can be written as the sum over all poles of the \mathbf{S} -matrix

$$\begin{aligned} d(E) - d_0(E) &= g(E) - \frac{1}{2\pi k} \sum_m \text{Im} \frac{1}{k - k_m} \\ &= g(E) - \frac{1}{\pi} \sum_m \text{Im} \frac{1}{E - E_m} \end{aligned} \quad (19)$$

where $E_m = k_m^2$ and $g(E) = f'(k)/2\pi$. In mathematical literature such formulas are known as Poisson formulas (see [23] and references therein).

From (19) it is clear that poles of the \mathbf{S} -matrix, especially those close to the real axis, play an important role in $d(E)$ as they produce peaks in the otherwise smooth background.

The positions of these poles, called also resonances or quasi-stationary states, are in principle determined from Eq. (7) by an analytic continuation of the \mathbf{S} -matrix from the real axis to the complex plane, in a similar way as in [24]. Another way is to impose the outgoing radiation conditions (see e.g. [18])

$$\Psi(\vec{x}) \propto e^{ik|\vec{x}|} \quad \text{when } |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (20)$$

These conditions select a well defined set of complex eigenvalues E_m whose imaginary parts correspond to the resonance lifetime τ_m , $\text{Im } E_m = -1/2\tau_m$.

These arguments demonstrate that the spectral part of the trace formula (the analog of (1)) may be written as the sum over all poles (= resonances) of the \mathbf{S} -matrix

$$\begin{aligned} d_{\text{quantum}}(E) &= -\frac{1}{\pi} \sum_m \frac{\text{Im } E_m}{(E - \text{Re } E_m)^2 + (\text{Im } E_m)^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi k} \sum_m \frac{\text{Im } k_m}{(k - \text{Re } k_m)^2 + (\text{Im } k_m)^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

When $\text{Im } E_m \rightarrow 0$ one recovers the usual δ -function contribution.

III. GENERAL PROPERTIES OF TRACE FORMULAS FOR DIELECTRIC CAVITIES

To find the right-hand side of trace formula one has to express it through the Green function. In this section we will only consider the real continuous spectrum of Eq. (7) and eigenfunctions associated with it. We will not deal with functions associated with the resonances defined by boundary condition (20). A minor difference

with the usual case of closed systems consists in the fact that the eigenfunctions are orthogonal not with respect to the standard scalar product $\int \Psi_{E_1}^*(\vec{r})\Psi_{E_2}(\vec{r})d\vec{r}$ but to a modified one

$$\int n^2(\vec{r})\Psi_{E'}^*(\vec{r})\Psi_{E''}(\vec{r})d\vec{r} = \delta(E' - E'') \quad (22)$$

where the integration is performed over the whole space. Here $n(\vec{r}) = n$ for points inside the cavity and $n(\vec{r}) = 1$ outside it. This relation can easily be checked from the main equation (7).

This modification leads to the following formal relation between the density of states and the trace of the Green function (cf. e.g. [1])

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \int n^2(\vec{r}) \text{Im} G_E(\vec{r}, \vec{r}) d\vec{r} \quad (23)$$

where the integration is extended to the whole space.

Exactly as for closed systems (see e.g. [1-3]), the dominant contribution to the fluctuating part of the density of states comes from classical periodic orbits. When saddle point is considered, it is clear that the only information that a trajectory may have about a boundary is contained in the reflection coefficient from this boundary. Therefore, the principal difference with the closed systems is that the contribution of a given periodic orbit has to be multiplied by the product of reflection coefficients (8) for all bounces with the cavity boundary (which we called the total reflection coefficient) and the later can be less than unity.

These simple arguments demonstrate that for dielectric cavities the dominant contribution of a periodic orbit to the density of states when $k \rightarrow \infty$ has the following form

- For an isolated primitive periodic orbit p repeated r times

$$d_p(E) = \frac{n l_p}{\pi k |\det(M_p^r - 1)|^{1/2}} R_p^r e^{i[rnk l_p - r\mu_p \pi/2]} \quad (24)$$

where l_p , M_p , μ_p , R_p are, respectively, the length, the monodromy matrix, the Maslov index, and the total reflexion coefficient for the chosen primitive periodic orbit.

- For a primitive periodic orbit family

$$d_p(E) = \frac{n^3/2 \mathcal{A}_p}{\pi \sqrt{2\pi r k l_p}} \langle R_p^r \rangle e^{i[rnk l_p - r\mu_p \pi/2 + \pi/4]} \quad (25)$$

where \mathcal{A}_p is the area covered by periodic orbit family, $\langle R_p^r \rangle$ is the mean over family value of the total reflection coefficient, and all other notations are as above.

The dependence on n of the prefactors in these formulas is related with the fact that inside the cavity the momentum equals nk .

Now we have all ingredients of the trace formula for dielectric cavities except the smooth (Weyl) terms (3). It is clear that its value depends on how many \mathbf{S} -matrix resonances are included in the right-hand side of the trace formula (21). Energy eigenvalues of closed systems are real and they all have to be included. For open systems resonance energies are complex and a natural approach is to take into account only resonances whose imaginary part is restricted, e.g. $-\text{Im} k_m < \gamma$. Other resonances (if any) have to be considered as a smooth background. This separation of poles is, to a large extent, arbitrary which manifests in the fact that the smooth part of the resonance density will be now a function of γ whose calculation is a difficult problem.

For 2-dimensional open chaotic billiard problems with holes there exist strong arguments [25, 26] that the leading term of the Weyl law is non-trivial

$$\bar{N}(E) \sim C(\gamma) k^\nu \quad (26)$$

where $\nu < 2$ is related with the fractal dimension of the trapped set of classical orbits.

For open dielectric cavities arguments leading to (26) can not be directly applied and it appears [27] that in this case standard estimates (3) with different constants are valid. In general, there exist two types of resonances whose behavior is different when the system is somehow "closed". The first (sometimes called Feshbach or internal resonances) are resonances which tends to eigenvalues of the corresponding closed system and the second ones (called shape or outer resonances) are those whose imaginary part remains non-zero when a system is closed. The both types of resonances exist for dielectric cavities (see e.g. [16]). In all cases with convex shaped cavities considered by us these two groups of resonances are well separated and there exists a clearly defined value of γ_{\max} such that all first type resonances have $-\text{Im} k_m < \gamma_{\max}$. It does not contradict [24] where a Fractal Weyl law was argued to be a good description of a part of the resonance spectrum with small imaginary part. In the next section we shall argue that when all these resonances are taken into account the smooth counting function $\bar{N}(E)$ defined as the mean number of resonances with $\text{Re} E_n < E \equiv k^2$ and $-\text{Im} k_m < \gamma_{\max}$ is similar to (3) but with following modifications

$$\bar{N}(E) = \frac{An^2 k^2}{4\pi} + \tilde{r}(n) \frac{Lk}{4\pi} + \mathcal{O}(1) \quad (27)$$

where A and L are, as above, the area and the perimeter of the cavity but $\tilde{r}(n)$ is

$$\tilde{r}(n) = 1 + \frac{n^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + n^2} R(t) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} R(t) \quad (28)$$

and

$$R(t) = \frac{\sqrt{t^2 + n^2} - \sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + n^2} + \sqrt{t^2 + 1}}. \quad (29)$$

The function $r(n)$ can be expressed through elliptic integrals. It is monotonic function of n starting from 1 for $n = 1$ and tending to $n(4/\pi - 1)$ for large n .

Finally, the trace formula for dielectric cavities has the following form

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \sum_{-\text{Im } k_m < \gamma_{\max}} \frac{\text{Im } k_m}{(k - \text{Re } k_m)^2 + (\text{Im } k_m)^2} \\ & = 2k\{\bar{d}(E) + \sum_p [d_p(E) + d_p^*(E)]\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Here $d_p(E)$ for isolated periodic orbits is given by (24) and for periodic orbits from a family it is defined in (25). The factor $2k$ in the right-hand side is introduced as we found it more convenient to work with the density of states as a function of momentum.

To see the effect of periodic orbit it is usual to multiply the both sides of the trace formula (30) by a test function, e.g. by e^{-iknl} , and integrate over k in a certain window $k_1 < k < k_2$ which includes many resonances. The dominant contribution in the left-hand side of this formula is the sum over resonances whose momentum is restricted $k_1 < \text{Re } k < k_2$ and $0 < -\text{Im } k_m < \gamma_{\max}$

$$\sum_m e^{-ik_m n l} \simeq \sum_p I_p(l) \quad (31)$$

where the summation is done over periodic orbits, p , and it is implicitly assumed that term with $p = 0$ corresponds to the smooth part of the trace formula. Here I_p denotes the integral the individual periodic orbit contribution given by (24) or (25)

$$I_p(l) = \int_{k_1}^{k_2} e^{-iknl} d_p(E) 2k dk \quad (32)$$

which is strongly peaked at the periodic orbits length. Eq. (31) is called the length density.

Periodic orbits are not the only contributions to the trace formula. For polygonal cavities important contributions are given by diffractive orbits which go through singularities of the boundary (see e.g. [28] and references therein). Usually their individual contribution is smaller than those of periodic orbits. The careful calculation of such corrections requires the knowledge of the diffraction coefficient on dielectric singularities which is not available analytically. We shall also not discuss here creeping orbits (see e.g. [29] and references therein) corresponding to the external motion along cavity boundary as they are responsible only for shape resonances and their contributions are small.

IV. CIRCULAR CAVITY

The circular dielectric cavity is one example of a two-dimensional cavity with an explicit analytical solution and it is instructive to illustrate the above general formulas in this simple case.

The Green function $G(\vec{r}, \vec{r}', E)$ for this problem has been written e.g. in [16]. From that formulas it follows that inside the circular cavity with radius R the Green function $G(\vec{r}, \vec{r}, E)$ with $r < R$ has the form

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}) &= -\frac{1}{2\pi x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{J_m^2(nkr)}{s_m(x) J_m^2(x)} \\ &+ \frac{1}{4i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{J_m(nkr)}{J_m(nx)} g_{in}(r) \end{aligned} \quad (33)$$

where

$$g_{in}(r) = J_m(nx) H_m^{(1)}(nkr) - J_m(nkr) H_m^{(1)}(nx), \quad (34)$$

and outside it (when $r > R$) it is

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}) &= -\frac{1}{2\pi x} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{H_m^{(1)2}(kr)}{s_m(x) H_m^{(1)2}(x)} \\ &+ \frac{1}{4i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(x)} g_{out}(r) \end{aligned} \quad (35)$$

with

$$g_{out}(r) = H_m^{(1)}(x) J_m(kr) - J_m(x) H_m^{(1)}(kr). \quad (36)$$

Here $x \equiv kR$, $J_m(z)$ (resp. $H_m^{(1)}(z)$) stands for the Bessel function (resp. the Hankel function of the first kind), and

$$s_m(x) = n \frac{J'_m(nx)}{J_m(nx)} - \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x). \quad (37)$$

Quantities $s_m(x)$ are of special importance as the positions of resonances, $x_m \equiv k_m R$, are determined by their complex zeros (see e.g. [16])

$$s_m(x_m) = 0. \quad (38)$$

Using the formula [30]

$$\begin{aligned} \int_0^x A_\nu(t) B_\nu(t) t dt &= \frac{x^2}{2} A'_\nu(x) B'_\nu(x) \\ &+ \frac{x^2 - \nu^2}{2} A_\nu(x) B_\nu(x) \end{aligned} \quad (39)$$

valid for any two Bessel functions $A_\nu(z)$ and $B_\nu(z)$ of the same arguments and performing straightforward calculations one gets

$$d(E) - d_0(E) = \frac{R^2(n^2 - 1)}{2\pi x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{Im} \frac{1}{s_m(x)} \quad (40)$$

where $d(E)$ is formally

$$d(E) = 2\pi \left[n^2 \int_0^R + \int_R^A \right] \text{Im} G(\vec{r}, \vec{r}) r dr \quad (41)$$

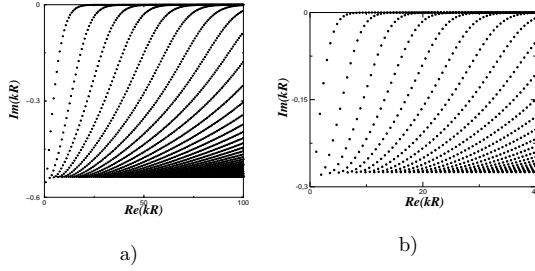


FIG. 1: a) Resonance spectrum for the dielectric circular cavity with $n = 1.5$ and $\text{Re } kR < 100$. b) The same but for $n = 2$ and $\text{Re } kR < 40$.

and

$$d_0(E) = 2\pi \int_0^A \text{Im } G_0(\vec{r}, \vec{r}') r dr \quad (42)$$

with the free Green function

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|). \quad (43)$$

In the above formulas it is assumed that the cut-off $A \gg R$ and the limit $A \rightarrow \infty$ is taken after the subtraction $d(E) - d_0(E)$.

The calculation of the \mathbf{S} -matrix for the circular dielectric cavity is also well known [31] and one finds

$$\mathbf{S}_m(E) = -\frac{H_m^{(2)}(x)s_m(x)^*}{H_m^{(1)}(x)s_m(x)} \quad (44)$$

with $s_m(x)$ are defined in (37). It is straightforward to check that (40) can be written in the form

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S}(E) \quad (45)$$

which is the Krein formula (17) for the dielectric disk.

In Figs. 1a) and b) we present numerically computed from (38) positions of complex momenta of quasi-bound states for dielectric circular cavities with $n = 1.5$ and $n = 2$. Clearly, resonances in this case are organized in families corresponding to conserved quantum numbers of radial and angular momenta (see e.g. [16]). Let notice that for large $\text{Re } kR$ imaginary parts of all resonances obey the inequality

$$-\text{Im } kR \leq \gamma_{\max}(n) \quad (46)$$

where

$$\gamma_{\max}(n) = \frac{1}{2n} \ln \frac{n+1}{n-1}. \quad (47)$$

$\gamma_{\max}(1.5) \approx .5365$ and $\gamma_{\max}(2) \approx .2765$ in a very good agreement with Fig. 1a) and b). This bound corresponds to the imaginary part of zeros of $s_m(x)$ with $m = 0$ and

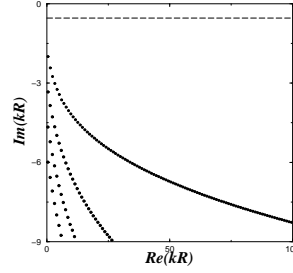


FIG. 2: Outer (shape) resonances for the dielectric circular cavity with $n = 1.5$. Dashed line indicates the lowest bound (47) for imaginary parts of resonances in Fig. 1a)

large x and can be proved from semiclassical approximation to (37). Physically, it is natural that all the states have a leakage smaller than a particle moving along the diameter of the circle.

As was mentioned above, the resonances in Figs. 1a) and b) are not the only existing quasi-bound states of the dielectric disk. It is known (see e.g. [16]) that functions $s_m(x)$ have another series of zeros corresponding to the shape (or outer) resonances, $\tilde{x}_{m,p}$, also depending on 2 quantum numbers m and p . At Fig. 2 some of these resonances are plotted. Notice the difference in the vertical scale of this figure in comparison with Figs. 1a) and b). All resonances at Fig. 1a) are situated above the dashed line in Fig. 2. In [16] it was shown that positions of these outer resonances are described asymptotically by the equation

$$\frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(\tilde{x}_{m,p}) = i\sqrt{n^2 - \frac{m^2}{\tilde{x}_{m,p}^2}}. \quad (48)$$

Its solutions with the smallest modulus of the imaginary part have $\tilde{x}_{m,p} \approx m$ and are close to complex zeros of the Hankel function in the denominator of this equation. In [16] it is shown that in this case

$$\tilde{x}_{m,p} = z_{m,p} - \frac{i}{\sqrt{n^2 - m^2/z_{m,p}^2}} + \mathcal{O}(\text{Im } z_{m,p}/\text{Re } z_{m,p}) \quad (49)$$

where $z_{m,p}$ is a complex zero of $H_m^{(1)}(z)$ function. It is known [30] that at the principal Riemann sheet of $H_m^{(1)}(z)$ cut along the negative part of the real axis such zeros have negative imaginary parts, lie symmetrically with respect to the imaginary axis, and for integer m there is $[m/2]$ zeros with positive real part. These Hankel zeros with the lowest imaginary part can asymptotically be computed by the expansion (see e.g. [16])

$$z_{m,p} = m + \eta_p \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} e^{-2\pi i/3} + \mathcal{O}(\eta_p^2/m^{1/3}) \quad (50)$$

and η_p is the modulus of the p^{th} zero of the Airy function ($p = 1, 2, \dots$). With a good precision these Airy zeros are

described by the semiclassical formula

$$\frac{2}{3}n_p^{3/2} \approx \pi(p - \frac{1}{4}) \quad (51)$$

which works well even for small p . In general, shape resonances of dielectric circular cavity are situated at $\mathcal{O}(1)$ distances from shape resonances of circular cavity with Dirichlet boundary conditions.

From the above arguments it follows that the additional resonances have quite large imaginary parts and are located below the curve

$$-\text{Im} x < \text{const} |\text{Re} x|^{1/3} \quad (52)$$

so they are well separated from the main resonances obeying (46). This bound has been proved [32], [33] for the scattering on any smooth (C^∞) convex cavity provided no trapping orbits exist. If the cavity boundary is not smooth only the weaker bound is known [34]

$$-\text{Im} x < \text{const} \log |\text{Re} x|. \quad (53)$$

V. WEYL'S LAW

The circular cavity is useful to find the Weyl law (28) for the smooth part of the counting function. As usual (see e.g. [35]), it can be extracted by considering pure imaginary values of momentum $k = is$ and calculating the asymptotics of the Bessel functions from the known formulas (see e.g. [30]). In this manner one gets

$$is_m(is) = \sqrt{\frac{m^2}{s^2} + n^2} + \sqrt{\frac{m^2}{s^2} + 1} \quad (54)$$

$$- \frac{n^2 s}{2(m^2 + n^2 s^2)} + \frac{s}{2(m^2 + s^2)} + \mathcal{O}(s^{-2}).$$

Changing the summation over m in (40) into the integration from $-\infty$ to ∞ one obtains that two main terms of the smooth part of the right hand side of (40) have the following form

$$\langle \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S}(E) \rangle = \frac{A}{4\pi} (n^2 - 1) + [r(n) - 1] \frac{L}{8\pi k} + \mathcal{O}(k^{-3}) \quad (55)$$

where $r(n)$ is defined in (28).

But this formula gives the asymptotic behavior of the determinant of the full \mathbf{S} -matrix which is not necessarily related directly with cavity resonances. According to (44) the \mathbf{S} -matrix for the dielectric circular cavity is the product of 2 factors

$$\mathbf{S}_m(E) = \mathbf{S}_m^{(0)}(E) \mathbf{S}_m^{(1)}(E) \quad (56)$$

where

$$\mathbf{S}_m^{(0)}(E) = -\frac{H_m^{(2)}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \quad (57)$$

and

$$\mathbf{S}_m^{(1)}(E) = \frac{s_m^*(x)}{s_m(x)}. \quad (58)$$

It is easy to check that the $\mathbf{S}^{(0)}$ -matrix is the \mathbf{S} -matrix for the scattering on a circular disk with the Dirichlet boundary conditions whose asymptotic behavior is known (see e.g. [35] and references therein)

$$\langle \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S}^{(0)}(E) \rangle = -\frac{A}{4\pi} - \frac{L}{8\pi k} + \mathcal{O}(k^{-3}). \quad (59)$$

The matrix element $\mathbf{S}_m^{(1)}(E)$ is the ratio of 2 functions: $s_m(x)$ defined in (37) and its complex conjugate. It is convenient to rewrite it as the ratio of two other functions

$$\mathbf{S}_m^{(1)}(E) = \frac{F_m^*(x)}{F_m(x)} \quad (60)$$

where

$$F_m(x) = \left[n J_m'(nx) - J_m(nx) \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \right] x^{m-1}. \quad (61)$$

The factor x^{m-1} is introduced to insure that $F_m(x)$ tends to a constant independent on x when $m \rightarrow \infty$.

The function $F_m(x)$ has 2 groups of zeros (cf. (38)). The first includes all usual resonances which obeys the inequality (46) and the second consists of additional resonances (shape resonances) with large imaginary part (52). But it has also a series of poles coming from zeros of the Hankel function $H_m^{(1)}(x)$. According to (49) the position of shape resonances in two leading orders differs from the corresponding zero of the Hankel function only by a finite shift. From the bound (52) it follows also that for a finite $\gamma > 0$ there is only a finite number of additional resonances whose imaginary part obeys the inequality $\text{Im} k < -\gamma$.

These two arguments demonstrate that with a big precision additional resonances and poles of the Hankel functions corresponding to shape resonances of the external Dirichlet problem cancel each other. It means that function $F_m(x)$ can be considered as having effectively only resonances with small imaginary parts. Consequently, the mean value of $(\ln \det \mathbf{S}^{(1)})'$ gives the average value of the counting function of resonances. From (56) it follows that the later equals to the difference between (55) and (59)

$$\langle \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S}^{(1)}(E) \rangle \quad (62)$$

$$= \langle \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S}(E) \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial E} \ln \det \mathbf{S}^{(0)}(E) \rangle$$

which finally leads to the asymptotics (27). A careful separation of the internal and external resonances in higher order corrections remains an open problem.

The fact that in order to find the smooth part of the resonance counting function for a dielectric cavity in the

leading order one has to divide the determinant of the \mathbf{S} -matrix for the scattering on this cavity by the determinant of the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the same cavity but with the Dirichlet boundary condition may physically be argued as follows. In the semiclassical limit a small part of a smooth boundary can be considered as a straight segment. Resonances inside the cavity can be determined from the knowledge of the reflection coefficient from this part of the boundary as it is done in the Appendix A. It is easy to see that the \mathbf{S} -matrix corresponding to the reflection from outside the cavity differs just by a sign from the reflection coefficient inside the cavity. But the \mathbf{S} -matrix equals -1 is exactly the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the cavity with the Dirichlet boundary conditions which explains the above statement.

For a symmetric cavity it is convenient to split resonances according to their symmetry representations. Often it is equivalent to consider a smaller cavity where certain boundaries are true dielectric boundaries but on other parts of the boundary one may have in the simplest cases either Dirichlet or Neumann boundary conditions. Now the total boundary contribution to the mean counting function can be written as follows

$$\frac{1}{4\pi} (n(L_N - L_D) + r(n)L_0) k. \quad (63)$$

Here L_N and L_D are the lengths of the boundary parts with respectively Neumann and Dirichlet boundary conditions and L_0 is the length of the true dielectric interface.

The knowledge of the spectrum for dielectric disk (cf. Fig. 1) permits us to check the derived formula for the mean counting function. First we count how many resonances exist with real part less than a fixed value, $\text{Re } k_m < k$. These resonances have to be taken into account with their multiplicities. For the circular cavity states with $m \neq 0$ are double degenerated and states with $m = 0$ are simple. Then the resulting curves are fit by a polynomial of second degree with the highest term equals $n^2 A k^2 / 4\pi$. As for $R = 1$, $A = \pi$ and $L = 2\pi$, one gets the following fits:

- For $n = 1.5$:

$$\bar{N}(k) = \frac{2.25}{4} k^2 + .5139k + .1518. \quad (64)$$

- For $n = 2$:

$$\bar{N}(k) = k^2 + .5446k + .034. \quad (65)$$

The quality of the fits can be seen from Fig. 3 where the differences between numerically calculated counting functions and the above fits are plotted. The theoretical prediction for the coefficient of the linear in k term is $\tilde{r}(n)/2$ where $\tilde{r}(n)$ is defined in (28). Numerically one finds that these coefficients should be equal to **.5125** for $n = 1.5$ and to **.5420** for $n = 2$ in a good agreement with the above numerical fits.

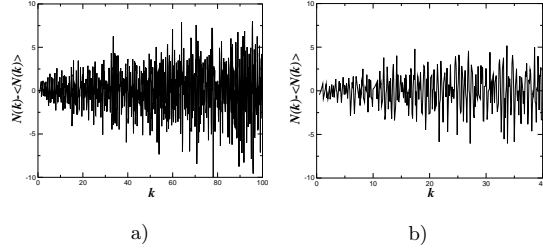


FIG. 3: Difference between the exact counting functions of resonances of circular cavity with unit radius and their quadratic fits (64) and (65): (a) for $n = 1.5$, (b) for $n = 2$.

VI. PERIODIC ORBIT CONTRIBUTION

To get oscillating contributions to the trace formula for a circular cavity we start from the expression (40). Expressing the Bessel function in (37) through the Hankel functions of the first and the second kinds $J_m(x) = (H_m^{(1)}(x) + H_m^{(2)}(x))/2$ and performing straightforward transformations of $s_m(x)$ in (37) one gets a formal series for the density of states

$$d(E) - d_0(E) = \frac{R^2}{2\pi x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{Im} \left[\frac{n^2 - 1}{B_m(x)} + \frac{4i}{\pi x} \sum_{r=1}^{\infty} P_m(x) [R_m^{(e)}(x)]^r E_m^r(x) \right]. \quad (66)$$

Using the Poisson summation formula, the sum over m can be substituted by the integration over m and the summation over a conjugate integer M

$$d(E) - d_0(E) = \frac{R^2}{4\pi i x} \sum_{M=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dm e^{2\pi i M m} \times \left[\frac{n^2 - 1}{B_m(x)} + \frac{4i}{\pi x} \sum_{r=1}^{\infty} P_m(x) [R_m^{(e)}(x)]^r E_m^r(x) \right] + \text{c.c.} \quad (67)$$

Here the following notations have been introduced

$$E_m(x) = \frac{H_m^{(1)}(x)}{H_m^{(2)}(x)}, \quad (68)$$

$$R_m^{(e)}(x) = -\frac{A_m(x)}{B_m(x)}, \quad (69)$$

$$A_m(x) = n \frac{H_m^{(1)'}(nx)}{H_m^{(1)}(nx)} - \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)}, \quad (70)$$

$$B_m(x) = n \frac{H_m^{(2)'}(nx)}{H_m^{(2)}(nx)} - \frac{H_m^{(2)'}(x)}{H_m^{(2)}(x)}, \quad (71)$$

and

$$P_m(x) = (n^2 - 1) \left(H_m^{(1)}(nx) H_m^{(2)}(nx) A_m(x) B_m(x) \right)^{-1}. \quad (72)$$

No approximation has been done in Eq. (67) and it can serve as a starting point for derivations of dominant terms and corrections to them. In the semiclassical limit $x \rightarrow \infty$ it can be simplified by using standard asymptotics of the Hankel function [30]

$$H_m^{(1)}(x) \simeq \frac{\sqrt{2/\pi}}{(x^2 - m^2)^{1/4}} e^{i\phi_m(x)} \times \left[1 - \frac{b_1(x)}{\sqrt{x^2 - m^2}} + \mathcal{O}(x^{-2}) \right] \quad (73)$$

where

$$\phi_m(x) = \sqrt{n^2 x^2 - m^2} - m \arccos\left(\frac{m}{nx}\right) - \frac{\pi}{4} \quad (74)$$

and

$$b_1(x) = \frac{1}{8} - \frac{5}{24}(1 - x^2/m^2)^{-1}. \quad (75)$$

In this manner one concludes that, when $x \rightarrow \infty$ and $|m| < nx$, $E_m(x) \rightarrow e^{2i\phi_m(x)}$, $P_m(x) \rightarrow \sqrt{n^2 - m^2/x^2}$, and

$$R_m^{(e)}(x) \rightarrow R_m(x) = \frac{\sqrt{n^2 - m^2/x^2} - \sqrt{1 - m^2/x^2}}{\sqrt{n^2 - m^2/x^2} + \sqrt{1 - m^2/x^2}}. \quad (76)$$

From these equations it follows that the dominant periodic orbit contribution is

$$d^{(osc)}(E) = \frac{R^2}{4\pi x} \sum_{M=-\infty}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \times \int_{-\infty}^{\infty} dm \sqrt{n^2 - \frac{m^2}{x^2}} R_m^r(x) e^{iS_{M,r}(m)} + c.c. \quad (77)$$

where the action (the phase of the exponent)

$$S_{M,r}(m) = 2\pi Mm + 2r\phi_m(x). \quad (78)$$

The last step, as usual, consists in the computation of the integral over m by the stationary phase method. The saddle point value of $m = m_{sp}$ is determined from the equation

$$\frac{\partial}{\partial m} S_{M,r}(m) = 0 \quad (79)$$

whose solution

$$m_{sp} = nx \cos \theta_{M,r} \quad (80)$$

with

$$\theta_{M,r} = \pi \frac{M}{r} \quad (81)$$

corresponds geometrically to the periodic orbit of the circular cavity in the shape of regular polygon with r vertices going around the center $M < r$ times. If M and r are co-prime integers the periodic orbit is primitive. Otherwise, it corresponds to a primitive periodic orbit repeated d times where d is the largest common factor of M and r .

The action (78) can be expanded into a series of deviation from from the saddle point value $m = m_{sp} + \delta m$. One gets

$$S_{M,r}(m_{sp} + \delta m) = nkl_p - \frac{\pi}{2}r + \frac{g_2}{2}\delta m^2 + \mathcal{O}(\delta m^3) \quad (82)$$

where l_p is the periodic orbit length

$$l_p = 2rR \sin \theta_{M,r} \quad (83)$$

and g_2 is the second derivative of the action computed at the saddle point

$$g_2 = \frac{2r}{nx \sin \theta_{M,r}}. \quad (84)$$

Computing the integral over m by the saddle point approximation one gets the expected result (25)

$$d^{(osc)}(E) = \frac{n^{3/2}}{\pi} \sum_{M,r} \frac{\mathcal{A}_p}{\sqrt{2\pi k l_p}} R_p^r e^{i[nkl_p - r\pi/2 + \pi/4]} + c.c. \quad (85)$$

where

$$\mathcal{A}_p = \pi R^2 \sin^2 \theta_{M,r} \quad (86)$$

is the area occupied by the considered periodic orbit family and R_p is the Fresnel reflection coefficient (8) calculated at the incidence angle

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_{M,r}. \quad (87)$$

As classical motion inside a circle conserves the angle with the boundary, the mean value in (25) equals the product of reflection coefficients in all incident points.

At Fig. 4a) the length density (i.e. the Fourier transform of the trace formula (31)) is presented for the circular dielectric cavity with the refraction coefficient equal to 1.5. The vertical solid lines indicate the lengths of simplest periodic orbits. From the left to the right these lines correspond to, respectively, triangle, square, pentagon, hexagon, heptagon, and octagon. For clarity the dotted line at this figure represents the length density for the closed circular cavity with the Dirichlet boundary conditions. As expected the both models have peaks at periodic orbit lengths but their amplitudes are different. In particular, as for $n = 1.5$ the critical angle is of the order of 42° , triangular periodic orbit is not confined and the corresponding peak for dielectric cavity is practically invisible. Others peaks have similar heights.

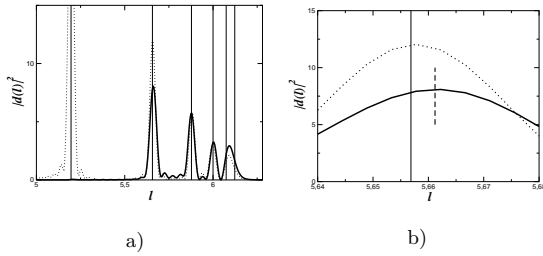


FIG. 4: (a) Solid line: length density for dielectric circular cavity with $n = 1.5$ and $R = 1$. Dotted line: the same but for circular cavity with the Dirichlet boundary conditions. (b) Goos-Hänchen shift associated with the square periodic orbit. Solid line corresponds to the dielectric disk and the dotted line represents the circular closed cavity. Small vertical line indicates the maximum of length spectrum for dielectric disk.

VII. CORRECTIONS TO ASYMPTOTIC REGIME

According to (25) the contribution of a periodic orbit for an open dielectric cavity differs from a closed cavity only by the value of the total reflection coefficient. Thus, when all incidence angles for a periodic orbit are greater than the critical angle (9), the modulus of its contribution to the trace formula has to be the same as for the closed cavity. The curves at Fig. 4 have been normalized in such a way that their peaks at pentagonal periodic orbit are the same heights. But then the amplitudes corresponding to the square orbit are clearly different (dielectric cavity peak is of the order of 0.7 of the close cavity peak) which contradicts the above prediction.

Other important corrections are the so-called Goos-Hänchen shift [13], [36, 37] which manifests itself as a slight difference of a visible length from its geometric length for an orbit reflected from a dielectric interface and the Fresnel filtering [38], which manifests itself as a slight shift of the angle of emission near the critical angle for a dielectric boundary. At Fig. 4b) a region of Fig. 4a) close to the maximum of the length density around the square periodic orbit is magnified. The peak of the close cavity represented by dotted line is, as expected, centered at the geometric length of this orbit ($l = 4\sqrt{2}R \simeq 5.6568$ for $R = 1$). But the peak associated with the dielectric circular cavity is clearly shifted to the right. Numerically, this shift is small and for the considered interval of momentum it is of the order of $0.004R$.

The reason of these discrepancies is related with the fact that asymptotics of the Hankel function (73) is not valid when m is close to x (see e.g. [30]). The uniform approximation for large m and all x is more complicated and is given e.g. by the Langer formula [30]

$$H_m^{(1)}(x) = \left(1 - \frac{\arctan \omega}{\omega}\right)^{1/2} H_{1/3}^{(1)}(z) e^{i\pi/6} + \mathcal{O}(m^{-4/3}) \quad (88)$$

where $z = m(\omega - \arctan \omega)$ and $\omega = \sqrt{x^2/m^2 - 1}$.

Non-uniform character of this expression is clearly seen from the following asymptotics useful for further estimations

$$\frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \Big|_{x=m} = \frac{\alpha}{m^{1/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right), \quad (89)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \Big|_{x=m} = \frac{\alpha^2}{m^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^{4/3}}\right) \quad (90)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} \frac{H_m^{(1)'}(x)}{H_m^{(1)}(x)} \Big|_{x=m} = \frac{2\alpha^3 - 2}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^{5/3}}\right) \quad (91)$$

where $\alpha = 2^{-2/3} 3^{5/6} \pi^{-1} \Gamma^2(2/3) e^{2\pi i/3} \simeq -4.592 + .7954i$.

To calculate carefully higher order corrections to the trace formula (85) is not an easy task. The main difficulty lies in the fact that the stationary phase method on which trace formulas are based on cannot, strictly speaking, be applied when a periodic orbit has incident angles close to the critical one. The point is that in the stationary phase method it is implicitly assumed that non-exponential terms are changed much slowly than the action in the exponent. This is the case for the usual billiard systems where the whole perturbation series for the trace formula has been constructed [39], [40].

But as follows from (88) for dielectric cavities exact reflection coefficient (69) near the critical angle changes at a scale of $\delta\tilde{m} \sim x^{1/3}$ but the action changes at a different scale of the order of $\delta\tilde{m} \sim x^{1/2}$.

When $x \rightarrow \infty$ the former is much smaller than the latter and the stationary phase method when a trajectory hits a boundary with angle close to the critical one can not be justified. To avoid this difficulty one can use the Langer approximation (88) in the transitional region and tabulate the integrals without other approximations. We will not perform these computations here. Instead, we compare the saddle point result with numerically calculated integral for the square and pentagonal periodic orbits. For refractive index $n = 1.5$ incident angles of the square periodic orbit are close to the critical angle but for the pentagonal orbit they are far apart and the difference of these two cases will give the accuracy of the pure saddle point results.

From (67) it follows that the full contribution of a periodic orbit with fixed numbers M and r is given by the integral

$$d_p(E) = e^{i[nkl_p - r\pi/2 + \pi/4]} J_{M,r}(x) \quad (92)$$

where

$$J_{M,r}(x) = \frac{R^2}{\pi^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) [R_m^{(e)}(x)]^r E_m^r(x) \times e^{-i[nkl_p - r\pi/2 + \pi/4]} dm \quad (93)$$

In the pure stationary phase approximation integral (93) equals

$$J_{M,r}^{(sp)}(x) = \frac{R^2}{\pi^2 x^2} P_{m_{sp}}(x) [R_{m_{sp}}^{(e)}(x)]^r \sqrt{\frac{2\pi}{g_2}} \quad (94)$$

which in the semiclassical limit tends to

$$J_{M,r}^{(scl)}(x) = \frac{n^{3/2} \mathcal{A}_p}{\pi \sqrt{2\pi k l_p}} R_p^r \quad (95)$$

as in (85).

At the first sight it seems that a better approximation consists in the calculation of the prefactor (72) and the reflection coefficient (69) in (94) directly at the saddle point (80) without the asymptotic formula (73). Roughly speaking, this is equivalent to use for the reflection on a curved surface instead of the Fresnel diffraction coefficient (8) valid for an infinite plane interface the reflection coefficient (69) computed at the saddle point value of the incidence angle θ as in (87). When this angle is close to the critical angle from (69) one gets

$$R_m(\theta, x) = \frac{n \cos \theta + i H_m^{(1)'}(x)/H_m^{(1)}(x)}{n \cos \theta - i H_m^{(1)'}(x)/H_m^{(1)}(x)} \quad (96)$$

where the value of the angular momenta $m = m(\theta)$ is related with angle θ as it follows from the saddle point relation (80)

$$m(\theta) = n x \sin \theta. \quad (97)$$

This type of modification first has been proposed in [37].

Nevertheless, we found that this approximation numerically is not better than the simple semiclassical formula (95). This is because the effective reflection coefficient (96) changes too quickly close to critical angle. Therefore, when a region which gives a dominant contribution to the integral (93) is close but not equal to the saddle point in the exponent, expression (94) differs considerably from the correct one. For this reason we prefer to compare numerical values of the integral (93) not with (94) but with simpler expression (95).

At Fig. 5 the results of numerical calculations of the integral (93) for square and pentagonal periodic orbits are presented. At Fig. 5a) the square of the modulus of this integral divided by the semiclassical expression (95) is given. As expected, contribution of the pentagonal periodic orbit is well described by semiclassical formula. But the contribution of the square periodic orbit differs considerably from the asymptotic result which explains quantitatively the observed differences of the square orbit heights for closed and dielectric cavities seen at Fig. 4.

The computed corrections permit also to explain the analog of the Goos-Hänchen shift observed at Fig. 4b). Let us write the periodic orbit contribution in the form

$$d_p(E) = |d_p(E)| e^{i[kn l_p - r\pi/2 + \pi/4 + \Psi_p(x)]} \quad (98)$$

where the phase $\Psi_p(x)$ comes from the integral (93).

To compute the length spectrum one has to calculate the Fourier harmonics of this expression (32). The shift of the peak position, $\Delta l = l - l_p$ can be estimated from the saddle point in the exponent

$$n \frac{\Delta l}{R} = \frac{\partial \Psi_p(x)}{\partial x}. \quad (99)$$

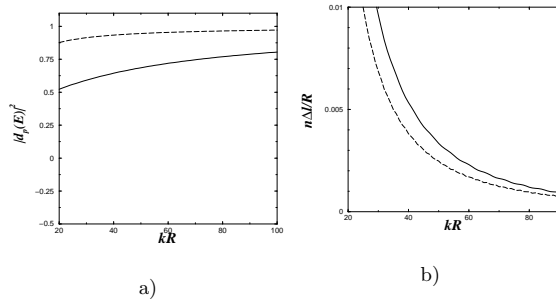


FIG. 5: (a) Modulus square of the integral (93) divided by its semiclassical expression (95). Solid line indicates the contribution of the square periodic orbit. Dashed line is the contribution of pentagonal orbit. (b) The derivatives of the phase of the same integral: solid and dashed lines correspond respectively to the square and pentagonal orbits.

At Fig. 5b) the value of this derivative computed numerically from the knowledge of (93) is plotted for the square and pentagonal orbits. For the square orbit its value is larger than for pentagonal one and is of the same order as the observed shift in Fig. 4b). As we are looking for a very small effect, mutual influence of different periodic orbits has to be taken into account when a precise determination of the Goos-Hänchen shift is required.

VIII. CONCLUSION

The goal of the paper is the construction of the trace formula for open dielectric cavities. By using the Krein formula it was demonstrated that such trace formula can be written in the form (30)

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\pi} \sum_m \frac{\text{Im } E_m}{(k - \text{Re } E_m)^2 + (\text{Im } E_m)^2} \\ & = \bar{d}(E) + \sum_p (d_p(E) + d_p^*(E)) \end{aligned} \quad (100)$$

where in the left-hand side the sum is taken over all internal resonances and in the right-hand side the summation includes all periodic orbits for the free motion inside the cavity. The term $\bar{d}(E)$ is the mean density of these resonances given by the derivative of (27). Its two main terms are

$$\bar{d}(E) = \frac{An^2}{4\pi} + \tilde{r}(n) \frac{L}{8\pi k} \quad (101)$$

where $k = \sqrt{E}$, A and L are the area and the perimeter of the cavity, and $\tilde{r}(n)$ is as follows

$$\tilde{r}(n) = 1 + \frac{n^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + n^2} R(t) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} R(t) \quad (102)$$

where $R(t)$ is the reflection coefficient at imaginary momentum defined in (29). Terms related with $R(t)$ correspond to the reflections from inside and outside the boundary but 1 in (102) appears due to the necessity of removing the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the cavity with the Dirichlet boundary conditions.

The contribution from a particular periodic orbit, $d_p(E)$, to the trace formula (100) differs from the same closed billiard only by the product over Fresnel reflection coefficients (8) computed at all reflection points as in (24) for isolated orbits or their average over a periodic orbit family as in (25).

We have discussed also corrections to the above asymptotic semiclassical formulas. Due to rapid changes of the reflection coefficient close to the critical angle corrections for dielectric cavities are larger than for closed cavities. In particular, higher order corrections permit to estimate the analog of the Goos-Hänchen shift for the peak position in dielectric cavity length density.

Obtained formulas were compared with numerical calculation of resonances for the circular dielectric cavity and in all cases a good agreement was observed.

Acknowledgments

The authors are grateful to M. Lebental whose experimental results stimulate the interest to the study of dielectric cavities. It is a pleasure to thank M. Hentschel, S. Nonnenmacher, U. Smilansky, M. Zworski and J. Wiersig for numerous useful discussions.

Appendix A: Krein formula for one dimensional systems

To illustrate the Krein formula in the simplest case of a one-dimensional system consider a particle moving along the positive half-axis in a potential without bound states. For simplicity, assume that (i) $\psi(0) = 0$ and (ii) the potential is zero for distances larger than a . The corresponding quantum problem has only continuous spectrum. To get artificially the discrete spectrum let us impose that at some large distance $R \gg a$ the wave function obeys

$$\psi(R) = 0. \quad (\text{A1})$$

Eigenfunctions of a such system at large distances $x > a$ have the form of plane waves

$$\psi(x) \propto \sin(kx + \delta(E)), \quad (\text{A2})$$

where $k = \sqrt{E}$ and the phase shift $\delta(E)$ contains all information about the potential.

Eigenmomenta, k_m , of this system are determined from the condition (A1) and they read

$$k_m R + \delta(E) = \pi m \quad (\text{A3})$$

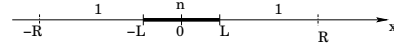


FIG. 6: 1-dimensional dielectric cavity. Refractive indices are indicated above the axis.

where integer m counts the number of states. By definition, the density of states, $d(E)$, is the number of states within an interval dE

$$d(E) \equiv \frac{dm}{dE} = \frac{R}{2\pi\sqrt{E}} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial\delta(E)}{\partial E}. \quad (\text{A4})$$

But the function (A2) with $\delta(E) = 0$ is the eigenfunction of the free problem without the potential. Therefore, the first term in the last equation describes the free density of states

$$d_0(E) = \frac{R}{2\pi\sqrt{E}}. \quad (\text{A5})$$

The excess density due to the presence of the potential is the difference between the level density with the potential and without it. From (A4) it follows that

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial\delta(E)}{\partial E}. \quad (\text{A6})$$

Instead of the phase shift it is instructive to introduce the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the potential defined as the ratio of the amplitude of the outgoing wave to the amplitude of the incoming wave. For the function (A2) one has

$$\mathbf{S}(E) = -e^{2i\delta(E)}. \quad (\text{A7})$$

Therefore, the excess density of states reads

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \ln \mathbf{S}(E)}{\partial E}, \quad (\text{A8})$$

which is the 1-dimensional version of the Krein formula (17).

It is also straightforward to compute explicitly all necessary quantities for a 1-dimensional dielectric cavity [10]. Consider a dielectric segment of size L with the refractive index n in a media with the refractive index 1 as at Fig. 6. After imposing condition (A1) one gets that the density of states $d(E)$ has to be determined from the formula

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \int_0^R \text{Im } n^2(x) G(x, x) dx \quad (\text{A9})$$

where $n(x) = n$ inside the cavity and $n(x) = 1$ outside it, and $G(x, y)$ is the Green function of our problem [10]. Using

$$d_0(E) = -\frac{1}{\pi} \int_0^R \text{Im } G_k^{(0)}(x, x) dx = \frac{R}{2\pi k} \quad (\text{A10})$$

where $G^{(0)}(x, y) = e^{ik|x-y|}/2ik$ is the free Green function after some calculations one finds that for antisymmetric states when $R \rightarrow \infty$

$$d(E) - d_0(E) = -\frac{L}{2\pi k} + \frac{nL}{2\pi k} \frac{1-r^2}{|1+re^{2inkL}|^2} \quad (\text{A11})$$

where r is the Fresnel reflection coefficient from dielectric boundary

$$r = \frac{n-1}{n+1}. \quad (\text{A12})$$

Correspondingly, the \mathbf{S} -matrix for antisymmetric states is

$$\mathbf{S}(E) = -e^{2i(n-1)kL} \frac{1+re^{-2inkL}}{1+re^{2inkL}}, \quad (\text{A13})$$

which, of course, agrees with 1-dimensional Krein formula (A8). This \mathbf{S} -matrix has an infinite number of poles (or resonances) corresponding to the solutions of the equation $1+re^{2ink_mL} = 0$ or explicitly

$$k_m = \frac{\pi}{nL} \left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{2nL} \ln \frac{n+1}{n-1} \quad (\text{A14})$$

where m is an integer.

Using the identity

$$\frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos(x)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-r)^{|j|} e^{ijx} \quad (\text{A15})$$

valid for $|r| < 1$ one can rewrite (A11) as the trace formula for resonances in the considered simplest case

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}k_m}{(k - \text{Re}k_m)^2 + (\text{Im}k_m)^2} \\ &= \frac{nL}{2\pi k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-r)^{|j|} e^{2ijnLk}. \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

The term with $j = 0$ in this equation corresponds to the mean density of resonances and terms with $j \neq 0$ describe the contributions from the unique primitive periodic orbit and its repetitions.

Notice that the transition from the Krein formula (A11) to the trace formula (A16) is done by removing from the \mathbf{S} -matrix (A13) the factor $\mathbf{S}_0(E) = -e^{-2ikL}$ which is exactly the \mathbf{S} -matrix for the scattering on the same cavity but with the Dirichlet boundary condition at the right end of the cavity $x = L$. This is the same phenomenon as for the circular dielectric cavity discussed in Section 3.

-
- [1] R. Balian, C. Bloch, Ann. Phys. **60**, 401 (1970); Ann. Phys. **64**, 271 (1971); Ann. Phys. **69**, 76 (1972)
- [2] M. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971)
- [3] M. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer (1990)
- [4] M. V. Berry, M. Tabor, Proc. Roy. Soc. Lond. **349**, 101 (1976)
- [5] P. Gaspard, *Chaos, scattering and statistical mechanics*, Cambridge University Press (1998)
- [6] P. Cvitanovic and B. Eckhardt, Phys. Rev. Lett. **63**, 823 (1989)
- [7] J.U. Nöckel and A.D. Stone, Nature **385**, 45 (1997)
- [8] C. Gmachl, F. Capasso, E.E. Narimanov, J.U. Nöckel, A.D. Stone, J. Faist, D.L. Sivco, and A.Y. Cho, Science **280**, 1556 (1998)
- [9] M. Lebental, N. Djellali, C. Arnaud, J.-S. Lauret, J. Zyss, R. Dubertrand, C. Schmit, E. Bogomolny, Phys. Rev. A, **76**, 023830 (2007)
- [10] M. Lebental, *Quantum chaos and organic microlasers*, PhD thesis, University of Paris-Sud, Orsay (2007)
- [11] T. Fukushima, T. Harayama, J. Wiersig, Phys. Rev. A, **73**, 023816 (2006)
- [12] M.G. Krein, Matem. Sbornik **33**, 597 (1953); Dokl. Akad. Nauk, SSR **144**, 268 (1962); English trans. in Soviet Math. Dokl. **3** (1962)
- [13] F. Goos and H. Hänchen, Ann. Physik **426**, 333 (1947); K. Artmann, Ann. Physik **437**, 209 (1948); Ann. Physik **443**, 270 (1950)
- [14] E. Bogomolny et al. *Trace formula for dielectric cavities: II. Polygonal and chaotic cavities*, in preparation (2008)
- [15] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3rd ed., Wiley, New York, 1998
- [16] R. Dubertrand, E. Bogomolny, N. Djellali, M. Lebental and C. Schmit, Phys. Rev. A, **77**, 013804 (2008)
- [17] L. B. Felsen, N. Marcuvitz, *Radiation and scattering of waves*, IEEE Press Series, New York (1994)
- [18] R.G. Newton, *Scattering theory of waves and particles*, Second ed., Springer-Verlag, New York (1982)
- [19] A.D. Rawlins, IMA J. Appl. Math. **19**, 231 (1977)
- [20] I.M. Lifshitz, Uspekhi Mat. Nauk, **7**, 171 (1952)
- [21] M.Sh. Birman and D.R. Yafaev, Algebra i analiziz, **4**, 833 (1992); English transl. in St. Petersburg Math. J. **4**, 833 (1993)
- [22] M. Zworski, Asian J. Math. **2**, 609 (1998)
- [23] M. Zworski, Séminaire E.D.P. 1996-1997, École Polytechnique, XIII-1-XIII-12
- [24] J. Main, J. Wiersig, Phys. Rev. E, **77**, 036205 (2008)
- [25] J. Sjöstrand and M. Zworski, Journal of AMS, **4**, 723 (1991)
- [26] W. Lu, S. Sridhar, and M. Zworski, Phys. Rev. Lett. **91**, 154101 (2003)
- [27] S. Nonnenmacher and E. Schenck, ArXiv: 0803.1075 [nlin-CD].
- [28] E. Bogomolny, N. Pavloff, and C. Schmit, Phys. Rev. E

- 61**, 3689 (2000)
- [29] G. Vattay, A. Wirzba, and P.E. Rosenqvist, Phys. Rev. Lett. **73**, 2304 (1994)
- [30] *Higher transcendental functions*, A. Erdelyi Ed., Vol. II, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955)
- [31] P. Debije, Physik. Zeitschrift **22**,9, 775 (1908).
- [32] T. Harge et G. Lebeau, Invent. Math. **118**, 161 (1994)
- [33] J. Sjöstrand and M. Zworski, Arxiv för Matematik **33**, 135 (1995)
- [34] A. Martinez, Ann. Henri Poincaré **4**, 739 (2002)
- [35] U. Smilansky and I. Ussishkin, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 2587 (1996)
- [36] H.M. Lai, F.C. Cheng, and W.K. Tang, J. Opt. Soc. Am. A, **3**, 550 (1986)
- [37] M. Hentschel and H. Schomerus, Phys. Rev. E **65**, 045603 (2002)
- [38] H. E. Tureci, A. D. Stone, Opt. Lett., **27**, 7 (2002)
- [39] P. Gaspard and D. Alonso, Phys. Rev. A **47**, R3468 (1993)
- [40] G. Vattay and P.E. Rosenqvist, Phys. Rev. Lett. **76**, 335 (1996)

Cinquième partie

Appendices

Annexe A

Commentaire du programme de Charles Schmit

Je commente dans cette note les programmes rédigés par Charles Schmit pour la recherche de résonances et le tracé d'états quasi-stationnaires associés à une cavité diélectrique plane bidimensionnelle. Je remercie Charles Poli pour son aide dans la lecture des programmes.

Charles les a rédigés lors de sa collaboration avec Mélanie Lebental entre l'automne 2004 et la fin du printemps 2006. Après de nombreuses et célèbres simulations numériques pour l'étude des billards, Charles a développé ces programmes pour comparer aux résultats expérimentaux. D'un point de vue fondamental ces programmes ont nécessité une généralisation non triviale : il s'agit ici de rechercher des zéros **complexes** d'un déterminant. En outre, les fonctions que l'on veut modéliser ont, dans le cas diélectrique, un support non compact. La méthode suivie est couramment appelée méthode des éléments de frontière ("BEM" pour Boundary Element Method), [73].

A.1 Problématique

Il s'agit de modéliser la dynamique d'une onde à l'intérieur d'une cavité diélectrique. Nous supposons qu'un domaine \mathcal{D} du plan est rempli d'un matériau diélectrique d'indice optique n . L'extérieur est l'air d'indice 1. Nous appellerons \mathcal{C} la frontière de \mathcal{D} .

Pour modéliser la dynamique d'une onde électromagnétique dans cette cavité, il convient d'abord d'estimer la densité d'états (ou de modes) du système. Comme nous l'avons vu précédemment, la densité d'états est donnée suivant la formule de Krein (5.14) par une somme sur les pôles de la matrice S de diffusion.

Il s'agit donc de développer un programme permettant de localiser ces pôles et de tracer l'intensité du champ associé à chacun de ces modes. Nous nous restreignons dans toute la suite à des états stationnaires.

Nous voulons résoudre l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} (\Delta + n^2 k^2)\psi(\vec{x}) = 0 & \vec{x} \in \mathcal{D} \\ (\Delta + k^2)\psi(\vec{x}) = 0 & \vec{x} \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec la condition à l'infini :

$$\psi(\vec{x}) \propto e^{ik|\vec{x}|}, \quad |\vec{x}| \rightarrow +\infty$$

Nous utilisons les résultats de la théorie du potentiel pour exprimer $\psi(\vec{x})$ à l'extérieur comme une convolution entre la fonction de Green et une densité sur la frontière \mathcal{C} :

$$\psi(\vec{x}) = \oint_{\mathcal{C}} G_{ext}(\vec{x}, \vec{y}) \mu_e(\vec{y}) d\vec{y},$$

où la fonction de Green est définie par :

$$(\Delta + k^2)G_{ext}(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \vec{x} \notin \mathcal{D}. \quad (\text{A.2})$$

Rappelons que la solution de (A.2) s'exprime pour les conditions à l'infini voulues :

$$G_{ext}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k(|\vec{x} - \vec{y}|)) \quad (\text{A.3})$$

On écrit de même la fonction d'onde intérieure sous la forme

$$\psi(\vec{x}) = \oint_{\mathcal{C}} G_{int}(\vec{x}, \vec{y}) \mu_i(\vec{y}) d\vec{y}$$

La fonction de Green à l'intérieur peut a priori être représentée par une fonction de Neumann et une fonction de Bessel :

$$G_{int}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} Y_0(nk(|\vec{x} - \vec{y}|)) + \alpha J_0(nk(|\vec{x} - \vec{y}|)),$$

où α est un complexe quelconque. Pour une plus grande stabilité des calculs, Charles a choisi $\alpha = 1/4i$:

$$G_{int}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(nk(|\vec{x} - \vec{y}|)) \quad (\text{A.4})$$

Il reste à déterminer les densités μ_i, μ_e sur la frontière. Celles-ci s'obtiennent en écrivant les conditions de continuité de ψ lors de la traversée de la frontière. Nous avons ainsi réduit le problème à un système d'équations intégrales :

$$\begin{cases} \oint_{\mathcal{C}} G_{int}(\vec{x}, \vec{y}) \mu_i(\vec{y}) d\vec{y} & = & \oint_{\mathcal{C}} G_{ext}(\vec{x}, \vec{y}) \mu_e(\vec{y}) d\vec{y} \\ \nu \frac{\partial}{\partial n} \oint_{\mathcal{C}} G_{int}(\vec{x}, \vec{y}) \mu_i(\vec{y}) d\vec{y} & = & \frac{\partial}{\partial n} \oint_{\mathcal{C}} G_{ext}(\vec{x}, \vec{y}) \mu_e(\vec{y}) d\vec{y} \end{cases} \quad \vec{x} \in \mathcal{C} \quad (\text{A.5})$$

où ν dépend du mode étudié, cf. (6.4).

Nous rappelons que la fonction de Green présente toujours une divergence quand $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow 0$ ce qui nous donne ici :

$$\frac{\partial}{\partial n} \oint_C G_{int}(\vec{x}, \vec{y}) \mu(\vec{y}) d\vec{y} = \frac{1}{2} \mu(\vec{x}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\vec{y} - \vec{x}| > \epsilon} \frac{\partial G_{int}}{\partial n}(\vec{x}, \vec{y}) \mu(\vec{y}) d\vec{y}$$

Le programme de Charles va résoudre une version discrétisée de (A.5) dans le cas des modes TM $\nu = 1$.

Enfin dans tous les cas étudiés, la cavité possède plusieurs axes de symétrie. Afin de diminuer le temps de calcul, Charles a toujours choisi une classe de symétrie donnée. Le domaine où est effectivement calculé la fonction d'onde est ainsi réduit.

Discrétisation du problème

Pour résoudre le problème, on discrétise l'espace en un réseau de maille h_x et h_y . Les intégrales deviennent des sommes de Riemann et le problème prend une forme matricielle. Si la frontière est discrétisée en \mathbf{dim} points (x_j) , on définit un vecteur μ de taille $2\mathbf{dim}$:

$$\mu_j = \begin{cases} \mu_i(x_j) & 1 \leq j \leq \mathbf{dim} \\ -\mu_e(x_{j-\mathbf{dim}}) & \mathbf{dim} + 1 \leq j \leq 2\mathbf{dim} \end{cases}$$

Le système (A.5) se met alors sous la forme :

$$\mathbf{a}\mu = 0 ,$$

où la matrice \mathbf{a} est définie par blocs :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_{ii} &= \left(\frac{H_0^{(1)}}{4i} (nk \frac{ds}{2\pi}) + \sigma_{\pm} \frac{H_0^{(1)}}{4i} (nkr_{i,i}^-) \right) ds \\
 A_{ij} &= \left(\frac{H_0^{(1)}}{4i} (nkr_{i,j}^+) + \sigma_{\pm} \frac{H_0^{(1)}}{4i} (nkr_{i,j}^-) \right) ds \\
 B_{ii} &= \left(\frac{H_0^{(1)}}{4i} (k \frac{ds}{2\pi}) + \sigma_{\pm} \frac{H_0^{(1)}}{4i} (kr_{i,i}^-) \right) ds \\
 B_{ij} &= \left(\frac{H_0^{(1)}}{4i} (kr_{i,j}^+) + \sigma_{\pm} \frac{H_0^{(1)}}{4i} (kr_{i,j}^-) \right) ds \\
 C_{ii} &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{R_i}{4\pi} + nk\sigma_{\pm}\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}_{i,i}^-}{|r_{i,i}^-|} \frac{H_1^{(1)}}{4i} (nkr_{i,i}^-) \right) ds \\
 C_{ij} &= nk \left(\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}_{i,j}^+}{|r_{i,j}^+|} \frac{H_1^{(1)}}{4i} (nkr_{i,j}^+) + \sigma_{\pm}\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}_{i,j}^-}{|r_{i,j}^-|} \frac{H_1^{(1)}}{4i} (nkr_{i,j}^-) \right) ds \\
 D_{ii} &= -\frac{1}{2} + \left(-\frac{R_i}{4\pi} + k\sigma_{\pm}\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}_{i,i}^-}{|r_{i,i}^-|} \frac{H_1^{(1)}}{4i} (kr_{i,i}^-) \right) ds \\
 D_{ij} &= k \left(\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}_{i,j}^+}{|r_{i,j}^+|} \frac{H_1^{(1)}}{4i} (kr_{i,j}^+) + \sigma_{\pm}\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}_{i,j}^-}{|r_{i,j}^-|} \frac{H_1^{(1)}}{4i} (kr_{i,j}^-) \right) ds
 \end{aligned}$$

où ds est la distance entre deux points de la frontière, $\sigma_{\pm} = \pm 1$ dépend de la symétrie choisie.

Le problème revient donc à chercher les nombres complexes $k_n = \sqrt{E_n}$ tels que le déterminant de \mathbf{a} , noté $\Delta(E)$, soit nul. Dans ce cas, le vecteur propre μ associé à la valeur propre 0 permet de tracer la fonction d'onde associée.

A.2 Utilisation du programme

La recherche de résonances nécessite deux programmes issus de la compilation de deux codes sources : `gbillc.f` et `zeronn.f`. Le tracé des résonances associées est effectué après la compilation d'un troisième code source `psin.f`.

Les applications compilées à partir d'un code FORTRAN seront désignées par le même nom mais avec l'extension `.exe` au lieu de `.f`. Par exemple nous supposons que nous disposons de l'application `gbillc.exe` après compilation du fichier `gbillc.f`.

Dans le code `gbillc.f`, l'utilisateur spécifie le domaine dans lequel il recherche des résonances. Pour simplifier, ce domaine est un pavé inclus dans le quart de plan complexe $\text{Re } E > 0, \text{Im } E < 0$: `[einf,esup] × [-dem,0]`. Il suffit en fait de déterminer la largeur de ce pavé sur l'axe réel, sa

largeur sur l'axe imaginaire étant fixée. Ce pavé est ensuite discrétisé selon un maillage défini par l'utilisateur.

Le programme `gbillc.exe` calcule et tabule le déterminant $\Delta(E)$ de la matrice du système (A.6). Les résultats sont rangés dans le fichier `det.dat` en quatre colonnes : $\text{Re } E$, $\text{Re } \Delta(E)$, $\text{Im } \Delta(E)$, $\ln |\Delta(E)|^2$.

Le programme `zeronn.exe` lit le fichier `det.dat` et recherche les minima de $\Delta(E)$. Après interpolation locale, il en déduit les résonances et les inscrit dans le fichier `zero.dat`. Ce fichier contient dans sa première ligne les paramètres de calcul : dimension de la cavité, indice optique, classe de symétrie choisie,...

Puis les résonances E_n sont rangées en quatre colonnes : le numéro, $\text{Re } E_n$, $\text{Im } E_n$ et un quatrième paramètre qui doit être inférieur à 1.

Pour le tracé des fonctions d'ondes associées aux résonances, l'application `psin.exe` lit `zero.dat` puis, pour chaque résonance, inscrit :

- dans un fichier `mu` les valeurs de $\mu(x)$ calculés sur la frontière en 3 colonnes : $\text{Re } \mu(x_i)$, $\text{Im } \mu(x_i)$, $|\mu(x_i)|^2$,
- dans un fichier `intens` les valeurs de la fonction d'onde $\psi(x)$ en champ lointain, i.e. le rayon polaire $\rho = |x|$ est fixé ($\rho \gg 1$) et on étudie la dépendance en fonction de l'angle polaire θ . Les données sont rangées dans quatre colonnes : θ , $\text{Re } \psi(\rho, \theta)$, $\text{Im } \psi(\rho, \theta)$ et $|\psi(\rho, \theta)|^2$,
- dans un fichier `psi.pgm` les valeurs de la fonction d'onde à l'intérieur et au voisinage de la cavité sous la forme d'une image numérique.

A.3 Structure du programme

A.3.1 Notation et variables importantes

Charles a adapté son programme à plusieurs formes de cavité. Nous choisirons pour les exemples le cas du disque coupé.

- `r0` : dimension typique de la cavité (rayon du cercle,...)
- `r1` : longueur de la frontière
- `[einf, esup]` : intervalle sur l'axe réel où on va chercher des niveaux
- `[emin, emax]` : intervalle sur l'axe réel où l'on recherche un niveau
- `nbp=2dim` : nombre de points pris pour discrétiser la frontière (pair pour symétrie et ≤ 400 pour temps de calcul)
- `he` : maille du réseau dans la direction de l'axe réel des énergies. On prend `he= 0.1/n2`.
- `hei` : maille du réseau dans la direction de l'axe imaginaire des énergies. On prend `hei= 0.01`.

A.3.2 Recherche de niveaux

Déroulement du programme principal

Le programme se place dans l'échelle de longueur telle que l'aire de la cavité soit $4\pi^1$, il faut donc calculer l'aire du billard et la longueur de sa frontière **r1 dans cette échelle**.

L'appel éventuel de la subroutine **rectif1(r1)** calcule les tableaux des coordonnées $(x(i),y(i))$ des points de la frontière, des vecteurs normaux à la frontière en ces points $(nx(i),ny(i))$ et de la courbure de la frontière en ces points **R(i)** avec une grande précision (6 000 points).

Charles se restreignait à la cellule fondamentale du point de vue des symétries pour diminuer le temps de calcul. La variable **isx** = ± 1 détermine la classe de symétrie : **isx**=1 si la dérivée normale de ψ s'annule le long des axes de symétrie, **isx**=-1 si ψ s'annule le long des axes de symétrie. Pour plusieurs formes de cavités (carré, stade,...), il y a deux générateurs des symétries axiales de la cavité. On définit alors une seconde variable **isy** de manière similaire. L'ensemble des facteurs de symétrie est stocké dans le tableau **phas(i)** de taille 2 ou 4, typiquement.

L'appel de la subroutine **tablh** charge en mémoire le (gros) fichier **tablh.dat** qui contient les valeurs des fonctions de Hankel $H_0^{(1)}$ et $H_1^{(1)}$ sur un réseau carré de taille 20000×40 de maille h_x, h_y ainsi que leurs 3 premières dérivées selon les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{b0}(iy,ix) &= \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(z) & z &= ix*hx - i hy*iy \\
 \text{b1}(iy,ix) &= \frac{1}{4i} \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial x}(z) & \text{b2}(iy,ix) &= \frac{1}{4i} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial x^2}(z) \\
 \text{b3}(iy,ix) &= \frac{1}{4i} \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H_0^{(1)}}{\partial x^3}(z) \\
 \text{c0}(iy,ix) &= \frac{1}{4i} H_1^{(1)}(z) & \text{c1}(iy,ix) &= \frac{1}{4i} \frac{\partial H_1^{(1)}}{\partial x}(z) \\
 \text{c2}(iy,ix) &= \frac{1}{4i} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_1^{(1)}}{\partial x^2}(z) & \text{c3}(iy,ix) &= \frac{1}{4i} \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H_1^{(1)}}{\partial x^3}(z)
 \end{aligned}$$

On va subdiviser [**einf**,**esup**] en sous-intervalles [**emin**,**emax**]. On initialise en prenant **emin=einf**.

Tabulation de $\Delta(E)$ dans une "tranche" : On suppose **emin** connue. On cherche **emax** telle qu'il y ait « peu » de niveaux de partie réelle dans [**emin**,**emax**]. Pour calculer **emax**, Charles calcule la longueur d'onde à l'intérieur

$$\text{lam} = \frac{2\pi}{n\sqrt{emin}}$$

¹Cette échelle a ceci de pratique que pour un billard, selon la loi de Weyl dans le régime semi-classique, le nombre $N(E)$ de niveaux inférieurs à E est E , e.g. le niveau d'énergie 1500.23 est le 1500e

On en déduit le nombre **nbp** « raisonnable »² de points sur la frontière pour calculer le niveau :

$$\text{nbp} = \left[\frac{rl}{lam/4} \right]$$

où $[x]$ est la partie entière de x . **emax** est alors définie par

$$\text{emax} = \left(\frac{2\pi}{n \frac{4rl}{\text{nbp}+1}} \right)^2$$

Autrement dit **emax** est choisie telle que **emax-emin** corresponde à une longueur égale à **lam/4**.

Il faut aussi déterminer des bornes de variation sur l'axe imaginaire. Pour cela, on utilise le seuil (en partie imaginaire) s qu'on a imposé lors de la tabulation des fonctions de Hankel, soit $s = 40h_y$ ici. On a encore besoin de la longueur L de la corde maximale reliant deux points de la frontière. La recherche en énergie se fera alors selon l'axe imaginaire dans l'intervalle

$$\text{dem} = -\frac{2s\sqrt{\text{emin}}}{nL}$$

On a donc obtenu un pavé $[\text{emin}, \text{emax}] \times [-\text{dem}, 0]$ que l'on va discrétiser en un réseau carré de taille $(\text{emax}-\text{emin})/\text{he}$ selon l'axe réel et $\text{idem}=\text{dem}/\text{hei}$ selon l'axe imaginaire.

L'appel de la subroutine **table** définit les tableaux **xi, yi, nxi, nyi, hsi, Ri** de taille inférieure $\text{nbp}=2\text{dim}$ à ($\text{nbp} \leq 400$) où sont stockés respectivement l'abscisse, l'ordonnée des points de la frontière, l'abscisse et l'ordonnée de la direction normale et la courbure en ces points.

On calcule en chaque point du réseau la matrice **a** par blocs via la subroutine **mat**.

La subroutine **piv(d)** calcule et renvoie dans **d**= $\Delta(E)$ le déterminant de **a**. La méthode de calcul est celle du pivot de Gauss pour trigonaliser la matrice.

On passe à l'intervalle suivant en posant :

$$\text{emin} = \text{emax} - 2\text{he} ,$$

ce qui termine la boucle.

Localisation des zéros

Il reste à localiser les zéros en étudiant les variations de $\Delta(E)$ dans le domaine. L'application **zeronn.exe** lit la valeur de $\Delta(E)$ en chaque point $E = i\text{e } \text{he}-j\text{e } \text{hei}$. Charles recherche plutôt les minima de $\ln |\Delta(E)|^2$ en recherchant les points du réseau où $\ln |\Delta(E)|^2$ est plus petit que la valeur

²On introduit un nombre minimal **nbpmi**

de ses plus proches voisins. Lorsqu'un tel point $E = E_r + iE_i$ est trouvé, on calcule en ce point :

$$\begin{aligned} \text{ca} &= \frac{\partial \Delta}{\partial E_r} & \text{cb} &= \frac{\partial \Delta}{\partial E_i} \\ \text{cc} &= \frac{\partial^2 \Delta}{\partial E_r^2} & \text{cd} &= \frac{\partial^2 \Delta}{\partial E_i^2} \\ \text{ce} &= \frac{\partial^2 \Delta}{\partial E_r \partial E_i} \end{aligned}$$

Enfin une interpolation locale est effectuée sur un réseau de mailles $h_x = h_e/10$ et $h_y = h_{ei}/10$ pour préciser le résultat : on cherche dans le sous-réseau l'incrément δE pour s'approcher du minimum local :

$$\Delta(E + \delta E) = \Delta(E) + \frac{\delta E}{2}(\text{ca} + i\text{cb}) + \frac{\delta E^2}{6}(\text{cc} - \text{cd} + i\text{ce})$$

Lorsqu'un niveau est trouvé on stocke dans `zero.dat` suivant 4 colonnes contenant son numéro $\text{Re } E + \delta E$, $\text{Im } E + \delta E$ et $\Delta(E + \delta E)/\Delta(E)$. En particulier, si ce dernier rapport vaut 1, cela signifie la plupart du temps que l'interpolation locale n'a pas abouti, le zéro est celui du billard métallique correspondant avec une partie imaginaire arbitraire et fautive. Un moyen de le vérifier est de changer les paramètres `he` et `hei`.

A.3.3 Calcul de la fonction d'onde associée

L'application `psin.exe` sert enfin à calculer la fonction d'onde associée à chaque résonance. On lit d'abord chaque niveau stocké dans le fichier `zero.dat`. Au voisinage de chacun, $\Delta(E)$ est à nouveau calculé. Les sous-routines `test(dm,d0,dp,dpp,itest)` et `search(ei,he,dm,d0,dp,dpp,d,nbz,zr,zi)` vérifient si le zéro n'est pas un zéro du billard. À la fin s'ajoute l'appel de la sous-routine `psi(i)` qui calcule la fonction d'onde à l'intérieur et l'intensité en champ lointain.

A.3.4 Quelques détails sur les sous-routines

`mat`

La fonction de cette sous-routine est de calculer la matrice `a` définie selon (A.6). Nous signalons l'importance des variables `dmin` et `dmax` qui contrôlent la possibilité du calcul. Étant donné que l'espace est discrétisé, il y a une longueur minimale dans notre modélisation, elle est donnée par `hx`, le pas de calcul utilisé lors de la tabulation des fonctions de Hankel. Soit `ds` la distance entre deux points de la frontière. Les nombres d'ondes $k = \text{Re } \sqrt{E}$ accessibles doivent dépasser une valeur minimale :

$$\frac{kds}{2\pi} > 2hx$$

De même, les valeurs de $H_0^{(1)}(z)$ sont calculées pour $\text{Re } z \leq 20\,000\text{hx}$. Si L est la longueur de la corde maximale reliant des points de la frontière, on peut écrire une borne supérieure sur le domaine de vecteur d'onde accessible :

$$2nkL < 20000\text{hx}$$

test(dm,d0,dp,dpp,itest)

Cette procédure renvoie **itest=1** si on a un minimum local, 0 sinon. **d0** représente la valeur du déterminant au point courant. Je vais noter

$$\begin{aligned} \text{d0} & \quad \Delta(E) \\ \text{dm} & \quad \Delta(E - \epsilon) \\ \text{dp} & \quad \Delta(E + \epsilon) \\ \text{dpp} & \quad \Delta(E + 2\epsilon) \end{aligned}$$

On va développer la fonction $\Delta(E)$ au voisinage **réel** du point courant, i.e. les dérivées sont par rapport à $\text{Re } E$,

$$\begin{aligned} \text{aa0} & \quad 1 \\ \text{aa1} & \quad \epsilon \Delta'(E) / \Delta(E) \\ \text{aa2} & \quad \epsilon^2 \Delta''(E) / 2\Delta(E) \\ \text{aa3} & \quad \epsilon^3 \Delta'''(E) / 6\Delta(E) \end{aligned}$$

où ϵ (appelé **rx**) augmente de -0.1 à 1.1 et on regarde comment varie le module au carré de $\text{fc} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$ lorsqu'augmente **rx**. Si $|\text{fc}|^2$ décroît, **itest=1** sinon la solution n'est pas retenue.

search(ei,he,dm,d0,dp,dpp,d,nbz,zr,zi)

On reprend les mêmes notations que pour **test()** avec $d = \Delta(E + \epsilon/2)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{aa0} & \quad 1 \\ \text{aa1} & \quad \epsilon/2 \Delta'(E) / \Delta(E) \\ \text{aa2} & \quad (\epsilon/2)^2 \Delta''(E) / 2\Delta(E) \\ \text{aa3} & \quad (\epsilon/2)^3 \Delta'''(E) / 6\Delta(E) \\ \text{aa4} & \quad (\epsilon/2)^4 \Delta^{(4)}(E) / 24\Delta(E) \end{aligned}$$

Ici **rx** (i.e. ϵ) augmente de -1.2 à 1.2 . Si $|\text{fc}|^2$ décroît, on a un minimum d'abscisse **rxm** sur l'axe local des énergies.

sort(n,a)

La matrice **a** est fixée. On permute les colonnes d'une matrice **m** déjà définie par valeur décroissante des coefficients diagonaux de **a**.

diag(n,a,xi)

Cette subroutine trigonalise la matrice **a** de taille **n** en effectuant des rotations complexes. En effectuant les mêmes rotations à la matrice identité, on obtient la matrice **m** des vecteurs propres. Un appel à la subroutine **sort(n,a)** permet de sélectionner celui associé à la valeur propre 0.

tabul(itab,mu)

Dans la fenêtre $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$, on calcule la densité aux points du réseau de taille **nbx** selon x et **nby** selon y ce qui donne à l'intérieur de la cavité :

$$\text{psi}[ix][iy] = \left| \sum_{\text{ifr}=1}^{\text{nbp}/2} \text{hsi}[\text{ifr}]\mu[\text{ifr}] \left(\frac{H_0^{(1)}}{4i} (nkr_{ix,iy}^+) + e^{i\sigma\pi} \frac{H_0^{(1)}}{4i} (nkr_{ix,iy}^-) \right) \right|^2 \quad (\text{A.7})$$

où $r_{ix,iy}^+$ est la distance du point courant avec le point M_{ifr} de la partie supérieure de la frontière — coordonnées de M_{ifr} : $(x[\text{ifr}], y[\text{ifr}])$, $r_{ix,iy}^-$ est la distance avec de symétrique de M_{ifr} par rapport à l'axe des abscisses.

Les valeurs sont dilatées/translatées pour être converties en pixels, i.e. entier entre 0 et 255, dans le fichier image.

psi(itab)

On a défini la matrice **a** de taille **ndim**×**ndim** dans la subroutine **mat** puis on calcule la matrice **ab** (hermitienne) :

$$\text{ab}_{j,k} = \sum_{i=1}^{\text{ndim}} \text{a}_{i,j}^* \text{a}_{i,k} \quad (\text{A.8})$$

En notations plus intuitives :

$$\text{ab} = \text{a}^\dagger \text{a}$$

L'avantage de cette transformation est qu'on obtient une matrice hermitienne (les valeurs propres sont reliées par $\lambda_{ab} = |\lambda_a|^2$).

La subroutine **diag(ndim,ab,mu)** diagonalise **ab** et renvoie le vecteur propre associé à sa plus petite valeur propre qui est 0 car **a** a été calculée en k tel qu'elle soit singulière.

Enfin, la subroutine **asympt** calcule l'intensité en champ lointain et **tabul** inscrit les valeurs de la densité $|\psi|^2$ associée au niveau trouvé, dans une image **pgm**. **itab** représente le numéro de la valeur propre trouvée.

tablh

Charles tabule la valeur des fonctions de Hankel $H_0^{(1)}$ et $H_1^{(1)}$ en $z = x + iy$ avec $0 \leq x \leq 500$ et $-1 \leq y \leq 0$. Le domaine de variation est divisé en un réseau de taille $20\,000 \times 40$.

Les fonctions de Hankel sont calculées par une somme de Riemann via les formules suivantes redoutablement performantes :

$$\frac{1}{4i}H_0^{(1)}(z) = -\frac{e^{iz}}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{i}{\text{cht}}\right) e^{-z(\text{cht}-1/\text{cht})} dt \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{4i}H_1^{(1)}(z) = -\frac{e^{iz}}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(\text{cht} - \frac{i}{\text{ch}^2 t}\right) e^{-z(\text{cht}-1/\text{cht})} dt \quad (\text{A.10})$$

Puis on stocke les 3 premières dérivées pour pouvoir interpoler en une valeur différente des points du réseau. Je rappelle qu'on obtient les dérivées via les formules suivantes :

$$H_0^{(1)'}(z) = -H_1^{(1)}(z)$$

$$H_0^{(1)''}(z) = \frac{H_1^{(1)}(z)}{z} - H_0^{(1)}(z)$$

$$H_0^{(1)'''}(z) = -\frac{2}{z^2}H_1^{(1)}(z) + H_1^{(1)}(z)$$

$$H_1^{(1)'}(z) = -\frac{H_1^{(1)}(z)}{z} + H_0^{(1)}(z)$$

$$H_1^{(1)''}(z) = \left(\frac{2}{z^2} - 1\right)H_1^{(1)}(z) - \frac{H_0^{(1)}(z)}{z}$$

$$H_1^{(1)'''}(z) = \left(-\frac{6}{z^3} + \frac{2}{z}\right)H_1^{(1)}(z) + \left(\frac{3}{z^2} - 1\right)H_0^{(1)}(z)$$

A.3. STRUCTURE DU PROGRAMME ANNEXE A. PROGRAMME DE CHARLES SCHMIT

Annexe B

Rappels de théorie exacte de la diffraction

Je voudrais ici rappeler comment on peut obtenir une solution exacte décrivant la diffraction d'une onde sur un obstacle opaque, cf [74–76] pour plus de détails et [77] pour une étude plus technique des solutions “à la” Sommerfeld.

Nous nous placerons exclusivement à 2D dans ce paragraphe.

B.1 Formulation du problème

On définit un obstacle dans le plan par un domaine \mathcal{D} de frontière \mathcal{C} . La théorie de la diffraction cherche à décrire comment une onde dont l'angle d'incidence est θ_i est diffractée par \mathcal{D} . Nous insistons ici sur le fait que *ce problème n'est soluble que dans deux cas* : l'obstacle circulaire et l'obstacle en forme de coin. Nous insisterons sur ce dernier cas en décrivant la démarche suivie par Sommerfeld.

Le problème initial tridimensionnel est d'abord ramené à un problème scalaire bidimensionnel en distinguant les polarisations du champ électromagnétique.

L'équation que l'on cherche à résoudre est :

$$(\Delta + k^2)\psi = 0 \tag{B.1}$$

avec les conditions aux limites suivantes (r, θ sont les coordonnées polaires du point \vec{x}) :

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= 0, \vec{x} \in \mathcal{C} \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) &= 0 \end{aligned}$$

où $\phi(r, \theta)$ est l'onde diffractée :

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \psi - \psi_i & \text{dans la zone éclairée} \\ \psi & \text{dans la zone d'ombre} \end{cases}$$

Les zones éclairées et d'ombre dépendent de l'obstacle et sont définies via l'optique géométrique : la zone éclairée est la région du plan accessible par les rayons incidents, la zone d'ombre étant le domaine restant. ψ_i est le champ qui décrit l'onde incidente. Ces conditions aux limites signifient que, loin de l'obstacle, le champ est la somme d'ondes émergentes et, dans la zone éclairée, de l'onde incidente.

Nous décrirons désormais l'onde incidente par :

$$\psi_i = e^{ikr \cos(\theta - \theta_i)}$$

B.2 Le cas simple : diffraction sur un obstacle circulaire

Dans le cas d'un obstacle circulaire, que l'on prendra centré en 0 et de rayon R , la solution est directement accessible car le problème est séparable. On connaît la fonction de Green et les résonances associées aux pôles de la matrice S .

Il est commode de chercher une solution de la forme :

$$\psi = \psi_i + \psi_d$$

où ψ_d va décrire l'onde diffractée. Par linéarité, ψ_d obéit également à l'équation (B.1) avec la contrainte qu'à l'infini, on n'a que des ondes émergentes :

$$\psi_d(\vec{x}) \propto e^{ik|\vec{x}|}, |\vec{x}| \gg 1 \quad (\text{B.2})$$

L'idée consiste à développer $\psi_d(\vec{x})$ en série de Fourier et la raccorder à l'onde incidente au bord de l'obstacle. La solution générale de l'équation de (B.1) vérifiant (B.2) est :

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{m \geq 0} a_m H_m^{(1)}(kr) \cos(m\theta) \quad (\text{B.3})$$

On décompose ensuite l'onde incidente sur cette même base en utilisant l'identité :

$$e^{ikr \cos \theta} = J_0(kr) + 2 \sum_{m \geq 1} i^m J_m(kr) \cos(m\theta)$$

Notons que, par symétrie, nous pouvons nous ramener toujours au cas $\theta_i = \pi$. Il reste à déterminer les a_m avec la condition en $r = R$. L'expression finale s'écrit :

$$\psi(r, \theta) = J_0(kr) - J_0(kR) \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)}(kR)} + 2 \sum_{m \geq 1} (-i)^m \left(J_m(kr) - J_m(kR) \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(kR)} \right) \cos(m\theta)$$

On utilise ensuite l'identité

$$J_m(kr) = \frac{1}{2} \left(H_m^{(1)}(kr) + H_m^{(2)}(kr) \right),$$

pour écrire le résultat sous une forme plus intuitive :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m \geq 0} \epsilon_m \frac{(-i)^m}{2} \left(H_m^{(2)}(kr) - \frac{H_m^{(2)}(kR)}{H_m^{(1)}(kR)} H_m^{(1)}(kr) \right) \cos(m\theta) \quad (\text{B.4})$$

où ϵ_m est défini selon (6.35).

Nous donnons un exemple d'une telle solution dans la figure B.2.

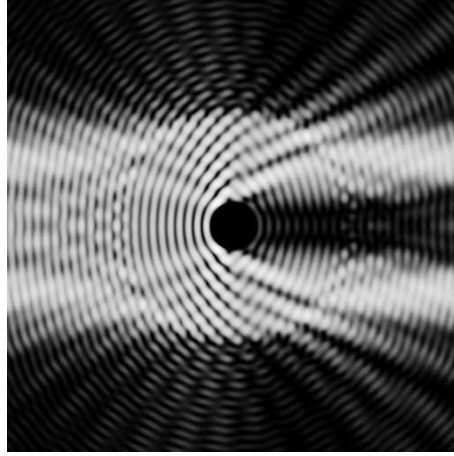


FIG. B.1 – Intensité du champ diffracté à travers un disque opaque ($kR = 8$). L'onde incidente est plane de vecteur d'onde horizontal de la gauche vers la droite ($\theta_i = \pi$).

Nous avons pu donner ici une solution exacte car, pour ce problème très précis, on peut décomposer l'onde incidente et l'onde diffractée dans **la même base** de fonctions angulaires. Nous allons à présent décrire le cas de la diffraction par un demi-plan qui nécessite une approche nouvelle.

La formule (B.4) permet aussi de calculer la matrice \mathbf{S} de diffusion pour ce problème : pour chaque valeur de m , l'onde incidente (resp. sortante) est $H_m^{(2)}(kr)$ (resp. $H_m^{(1)}(kr)$). La matrice \mathbf{S} est diagonale et sa valeur dans le canal m vaut :

$$s_m = -\frac{H_m^{(2)}(kR)}{H_m^{(1)}(kR)} \quad (\text{B.5})$$

B.3 Le cas moins simple du demi-plan : dérivation à la Sommerfeld

B.3.1 La méthode des images sur une variété

Dans le cas de la diffraction sur un coin, nous n'avons plus de base adaptée.

Sommerfeld propose alors de résoudre l'équation (B.1) sur une variété à deux feuillets, le premier pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$, le second pour $-2\pi \leq \theta \leq -\pi$ et $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Comme le comportement de notre solution est fixé à l'infini, la solution sur la variété existe et est unique. Je l'appelle $U(r, \theta)$. Il reste à appliquer la méthode des images pour obtenir la solution de notre problème dans l'espace réel en fonction de U :

$$\psi(r, \theta) = U(r, \theta - \theta_i) - U(r, \theta + \theta_i) \quad (\text{B.6})$$

La fonction ainsi définie est en particulier bien monovaluée comme il faut. Pour trouver une expression de U , Sommerfeld utilise le fait que toutes les fonctions de la forme $e^{ikr \cos(\theta-\beta)}$ sont solutions de (B.1). Par linéarité, l'expression suivante sera encore solution :

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{e^{i\beta}}{e^{i\beta} - e^{i\theta_i}} e^{ikr \cos(\theta-\beta)} d\beta ,$$

où C est un contour entourant θ_i . Cette forme est choisie pour former une fonction 2π -périodique possédant un pôle simple en $\theta = \theta_i$ de résidu 1. Pour obtenir une fonction définie sur une variété à 2 feuillets, Sommerfeld propose de doubler la période sans changer le comportement au pôle :

$$U(r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{e^{i\beta/2}}{e^{i\beta/2} - e^{i\theta_i/2}} e^{ikr \cos(\theta-\beta)} d\beta ,$$

Enfin, on peut faire de multiples transformation pour simplifier cette expression. Le résultat donne :

$$U(r, \theta) = e^{-ikr \cos \theta} F\left(-\sqrt{2kr} \cos(\theta/2)\right) \quad F(x) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{it^2} dt \quad (\text{B.7})$$

B.3.2 Une application : coefficient de diffraction

On peut utiliser les résultats (B.6) et (B.7) pour trouver une approximation de ψ pour $kr \gg 1$, i.e. à la limite de l'optique géométrique. J'exprime d'abord F comme une combinaison des intégrales de Fresnel :

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} (C(x) + iS(x))$$

où les fonctions $C(x)$ et $S(x)$ sont les intégrales de Fresnel :

$$\begin{aligned} C(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} + \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{2\pi x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ S(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} - \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{2\pi x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

On obtient donc pour $x \gg 1$:

$$F(x) = \frac{e^{ix^2+i\pi/4}}{2\sqrt{\pi x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) ,$$

que l'on reporte dans (B.6) :

$$\psi(r, \theta) \simeq \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{8\pi kr}} \mathcal{D}(\theta_i, \theta) \quad (\text{B.8})$$

où on a défini le coefficient de diffraction :

$$\mathcal{D}(\theta_i, \theta) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta + \theta_i}{2}\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta - \theta_i}{2}\right)} \quad (\text{B.9})$$

En particulier, ce coefficient diverge le long des frontières optiques d'équation $\theta = \pi \pm \theta_i$.

B.3.3 Le problème pour généraliser

Cette méthode est a priori généralisable pour un coin d'ouverture α arbitraire. Pauli [78] donne en particulier la relation entre le nombre n de feuilletts de la variété à considérer et l'angle d'ouverture α :

$$n = 2 - \frac{\alpha}{\pi}$$

En particulier dans le cas où α est commensurable avec π : $\alpha = p\pi/q$, on doit considérer au plus q feuilletts. La relation donnant U est alors :

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi n} \int_C \frac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{i\theta_i/n}} e^{ikr \cos(\theta-\beta)} d\beta, \quad (\text{B.10})$$

Le problème est que cette intégrale ne peut pas être exprimée à partir de fonctions « élémentaires » connues. Pauli [78] donne une méthode pour développer la solution définie à partir de (B.10) pour $kr \gg 1$ en série.

Annexe C

Fonction de Green de la cavité diélectrique circulaire

Il s'agit de donner l'expression analytique de la fonction de Green pour une cavité diélectrique circulaire. Nous cherchons donc la solution de

$$(\Delta + n(\vec{r}_1)^2 k^2)G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (\text{C.1})$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad \text{continue pour } r_1 = R \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial G}{\partial r_1} \quad \text{continue pour } r_1 = R \quad (\text{C.3})$$

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto e^{ikr_1} \quad \text{pour } r_1 \rightarrow +\infty \quad (\text{C.4})$$

Il est commode de chercher une solution à l'intérieur ($r_1 < R$) sous la forme :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(nk|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m J_m(nkr_1) e^{im\theta_1} ,$$

et, de même, à l'extérieur,

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m H_m^{(1)}(kr_1) e^{im\theta_1} .$$

En particulier, nous voyons que cette forme vérifie directement (C.4). Nous allons utiliser (C.2) et (C.3) pour déterminer les a_m et b_m .

Nous rappelons la formule d'addition, cf. e.g. [80] :

$$H_0^{(1)}(k|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(kr_1) H_m^{(1)}(kr_2) e^{im(\theta_1 - \theta_2)} \quad r_1 < r_2$$

La fonction de Green à l'intérieur se réécrit pour $r_2 < R$ et $r_1 \rightarrow R$:

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(a_m J_m(nkr_1) + \frac{H_m^{(1)}(nkr_1) J_m(nkr_2) e^{-im\theta_2}}{4i} \right) e^{im\theta_1} .$$

(C.2) entraîne que, pour tout m ,

$$a_m J_m(nx) + \frac{H_m^{(1)}(nx) J_m(nx) e^{-im\theta_2}}{4i} = b_m H_m^{(1)}(x)$$

En raisonnant de même pour la dérivée radiale, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a_m J_m(nx) + H_m^{(1)}(nx) J_m(kr_2) \frac{e^{-im\theta_2}}{4i} & = b_m H_m^{(1)}(x) \\ na_m J'_m(nx) + nH_m^{(1)'}(nx) J_m(kr_2) \frac{e^{-im\theta_2}}{4i} & = b_m H_m^{(1)'}(x) \end{cases}$$

Nous adopterons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} S_m(x) &= n \frac{J'_m}{J_m}(nx) - \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(x) \\ \Delta_m(x) &= J_m(nx) H_m^{(1)}(x) S_m(x) \end{aligned}$$

pour exprimer les solutions du système :

$$\begin{cases} a_m &= -\frac{nH_m^{(1)'}(nx)H_m^{(1)}(x) - H_m^{(1)}(nx)H_m^{(1)'}(x)}{4i\Delta_m(x)} J_m(kr_2) e^{-im\theta_2} \\ b_m &= -\frac{nJ'_m(nx)J_m(x) - J_m(nx)J'_m(x)}{4i\Delta_m(x)} H_m^{(1)}(kr_2) e^{-im\theta_2} \end{cases}$$

Nous pouvons écrire finalement la fonction de Green pour une cavité diélectrique circulaire sous

la forme :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{m \in \mathbb{Z}} -\frac{nH_m^{(1)'}(nx)H_m^{(1)}(x) - H_m^{(1)}(nx)H_m^{(1)'}(x)}{4i\Delta_m(x)} J_m(nkr_1)J_m(nkr_2)e^{im(\theta_1-\theta_2)} \\ \quad + \frac{1}{4i}H_0^{(1)}(nk|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) & r_1, r_2 < R \\ \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} -\frac{1}{2\pi x\Delta_m(x)} H_m^{(1)}(kr_1)J_m(nkr_2)e^{im(\theta_1-\theta_2)} & r_2 < R < r_1 \\ \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} -\frac{1}{2\pi x\Delta_m(x)} J_m(nkr_1)H_m^{(1)}(kr_2)e^{im(\theta_1-\theta_2)} & r_1 < R < r_2 \\ \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} -\frac{nJ_m'(nx)J_m(x) - J_m(nx)J_m'(x)}{4i\Delta_m(x)} H_m^{(1)}(kr_1)H_m^{(1)}(kr_2)e^{im(\theta_1-\theta_2)} \\ \quad + \frac{1}{4i}H_0^{(1)}(k|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) & r_1, r_2 > R \end{array} \right.$$

Annexe D

Contribution of one orbit in the length density of the stadium

We will give more details about the way we computed the amplitude of a periodic orbit in the length density for a stadium via (7.16). Let us recall that $a = L/R$ is the ratio between the half length L of the rectilinear part and R the radius of the curved parts. We will restrict ourselves to the $(--)$ symmetry class.

D.1 Length and monodromy matrix

We remind the reader that the monodromy matrix for plane two-dimensionnal billiards are (p is the norm of the impulse vector, equal to one usually) :

- for a free propagation along a segment with length l :

$$T(l) = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

- for a reflection on a rectilinear boundary :

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

- for a reflection with an incidence angle θ on a curved boundary whose local curvature radius is ρ :

$$R_\rho(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2p}{\rho \cos \theta} & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

We have $R_\infty(\theta) = R$ for all θ .

D.1.1 Orbits 1 and 2 : elongated circle's orbits

As $a < 1$ the “circle's orbits” dominate. Their length depending on the number of sides m supposed to be even and greater than 1, is given by (D.4).

$$l_m = 2R \left(m \sin \frac{\pi}{m} + 2a \right) \quad (\text{D.4})$$

In order to obtain the monodromy matrix, we define rather l , which is the elongated side of the polygon :

$$l = 2R \left(\sin \frac{\pi}{m} + 2a \right)$$

The monodromy matrix is then :

$$M_m = \left[\left(R_R \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} \right) T \left(2R \sin \frac{\pi}{m} \right) \right)^{m/2-1} R_R \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} \right) T(l) \right]^2$$

The trace of the monodromy matrix is then :

$$\begin{aligned} \text{tr}M_4 &= 2 + 32\sqrt{2}a + 128a^2 \\ \text{tr}M_6 &= 2 + 24a \end{aligned}$$

D.1.2 Orbit 3 : rhombus

We can have the rhombus whose length is given by (D.5) :

$$l = 4R\sqrt{1 + (1+a)^2} \quad (\text{D.5})$$

The monodromy matrix is also simple in that case :

$$M = [R_R(\alpha)T(l/4)RT(l/4)]^2 ,$$

where α is the incidence angle when hitting the curved boundary,

$$\alpha = \arctan \left(\frac{1}{1+a} \right)$$

The trace can also be written exactly here :

$$\text{tr}M_2 = -\frac{4}{1+a} - 4(1+a) - 2$$

D.1.3 Orbit 4

We compute the length and the monodromy matrix for the orbit 4 in Tab 7.22. The closure equation for the angle is :

$$-\frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{a + \sin \alpha}$$

Then we define two segment lengths :

$$\begin{aligned} l_1 &= 2R \cos \alpha , \\ l_2 &= R \frac{1 - \cos \alpha}{\sin(2\alpha - \pi/2)} , \end{aligned}$$

so as to compute the length and the monodromy matrix :

$$\begin{aligned} l &= 2l_1 + 4l_2 \\ M &= [RT(l_2)R_R(\alpha)T(l_1)R_R(\alpha)T(l_2)]^2 \end{aligned}$$

We did not obtain a simple formula for the trace in that case.

D.1.4 Orbit 5

For orbit 5 in Tab. 7.22, the computation is very similar to the rhombus case :

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{2}{1+a}\right) \\ l &= 4R\sqrt{4+(1+a)^2} \\ M &= [T(l/2)R_R(\alpha)] \\ \text{tr}M &= 4\sqrt{(1+4(1+a)^2)(4+(1+a)^2)} - 2 \end{aligned}$$

D.1.5 Orbit 6

As $a > 1$ we can have symmetric orbits with one self-crossing. For the orbit 5 in Tab. 7.22, the closure equation let us define two lengths

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} &= a \\ l_1 &= 4L \cos \alpha \\ l_2 &= 2R \cos \alpha \end{aligned}$$

in order to write the length and the monodromy matrix of this orbit :

$$\begin{aligned} l &= 2l_1 + 2l_2 \\ M &= \left[[R_R(\alpha)T(l_1)]^2 R_R(\alpha)T(l_2) \right] \\ \text{tr}M &= 98 - 480a + 576a^2 \end{aligned}$$

This orbit becomes dominant as a increases, see Fig. 7.24.

D.1.6 Orbit 7

Eventually we show how to compute the length and the monodromy matrix for the orbit 7 in Tab. 7.22, which is very similar to the case of orbit 4. The closure equation is now :

$$-\frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{2 - \cos \alpha}{a + \sin \alpha}$$

There is here one geometric constraint for the orbit to exist :

$$a + \tan 2\alpha > 0$$

Then we define two segment lengths :

$$\begin{aligned} l_1 &= 2R \cos \alpha , \\ l_2 &= R \frac{2 - \cos \alpha}{\sin(2\alpha - \pi/2)} , \end{aligned}$$

so as to compute the length and the monodromy matrix :

$$\begin{aligned} l &= 2(l_1 + l_2) \\ M &= [R_R(\alpha)T(2l_1)R_R(\alpha)T(2l_2)] \end{aligned}$$

Here again we did not find a simple formula for the trace of M .

D.2 Reflexion coefficients

We used usual formula for the reflexion coefficient. We used Fresnel formula (5.10) in fig. 7.24a and (7.19) in fig. 7.24b.

D.3 Maslov index

In order to compute interference, we had to compute carefully the phase of c_p . It especially required to know the Maslov index. We followed here the way of computed μ_p exposed in [79] that we will sum up in the following way.

On the one hand we count the number of zeros of the off-diagonal coefficient $m_{12}(x)$ of the monodromy matrix as a function of the curvilinear coordinate x along the orbit. Let call it σ .

On the other hand we define η through the following rule :

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{\text{tr}M - 2}{m_{12}} < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

We obtained Maslov index μ_p via :

$$\mu_p = \sigma + \eta$$

We sum up our results for the orbits shown in Tab.7.22 in the following table :

Orbits	σ	η	Maslov index
1	2	0	2
2	3	0	3
3	1	0	1
4	2	0	2
5	2	1	3
6	1	0	1
7	2	0	2

We checked that the index does not change when a varies from 0 to 2.

Bibliographie

- [1] R. Balian, C. Bloch, *Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain*, Ann. Phys. **60**, 401 (1970), Ann. Phys. **64**, 271 (1971), Ann. Phys. **69**, 76 (1972)
- [2] M. C. Gutzwiller, *Phase-integral approximation in momentum space and the bound states of an atom*, J. Math. Phys., **8**, 10, 1979, (1967)
- [3] M. V. Berry, M. Tabor, *Level clustering in the regular spectrum*, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **356**, 375, (1977)
- [4] I. C. Percival, *Semiclassical theory of bound states*, Adv. Chem. Phys., **36**, 1 (1977)
- [5] M. V. Berry, *Regular and irregular semiclassical wavefunctions*. J Phys. A : Math. and Gen. **10** No. 10, 2083 (1977)
- [6] E. Bogomolny, C. Schmit, *Percolation model for nodal domains of chaotic wave functions*, Phys. Rev. Lett., **88**, 114102, (2002)
- [7] O. Schramm, *Scaling limits of loops-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math., **118**, 221, (2000)
- [8] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, I. Math. Ann., **89**, 103 (1923)
- [9] M. Lebental, *Chaos quantique et micro-lasers organiques*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris XI (2007)
- [10] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer (1997)
- [11] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (1959)
- [12] D. Ullmo, *Manifestations quantiques de structures dans l'espace des phases classique*, Thèse de l'université Paris 7, (1992)
- [13] L. Landau, E. Lifschitz, *Physique Théorique, tome 3 : Mécanique Quantique*, 3e éd., éd. Mir (1975)
- [14] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, éd Dunod, (1994)
- [15] L. Schwartz, *Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, (1965)
- [16] R. P. Feynmann, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path integrals*, Mc Graw-Hill, (1965)

- [17] E. Bogomolny, *Quantum and Arithmetical Chaos*, cours du centre de physique des Houches in *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry*, Springer, (2006)
- [18] M. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, (1990)
- [19] G. Wentzel, *Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik*, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, **38**, 518 (1926)
- [20] H. Kramers, *Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung*, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, **39**, 828 (1926)
- [21] L. Brillouin, *La mécanique ondulatoire de Schrödinger, une méthode générale de résolution par approximations successives*, *CR Acad. Sci.*, **183**, 24 (1926)
- [22] A. Voros, *The return of the quartic oscillator. The complex WKB method*, *Ann. de l'I.H.P.*, **A39**, 211 (1983)
- [23] E. Bogomolny, *Higher order terms of the semiclassical expansion in quantum mechanics*, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **40**, 582 (1984)
- [24] C. E. Porter, *Statistical theories of spectra : fluctuations*, *Academ. Press N.Y.* (1965)
- [25] O. Bohigas, *Random Matrix Theory and Chaotics Dynamics*, in *Les Houches Session LII, Chaos et Physique Quantique*, North Holland (1989)
- [26] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, (1991)
- [27] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, C. Schmit, *Characterization of chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Law*, *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1 (1984)
- [28] M. L. Mehta, *Random Matrices*, *Academic Press*, (1967)
- [29] M. V. Berry, *Semiclassical mechanics in phase space : a study of Wigner's function*, *Phil. Trans. of Roy. Soc. Lond. A*, **287**, 1343, 237 (1977)
- [30] A. Voros, *Semiclassical approximation*, *Ann. de l'I.H.P. A*, **24**, 31 (1976)
- [31] G. Blum, S. Gnutzmann, U. Smilansky, *Nodal domain statistics : a criterion for quantum chaos*, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 114101 (2002)
- [32] A. B. Harris, *Effects of random defects on the critical behaviour of Ising model*, *J. Phys. C : Solid State Phys.*, **7**, 1671, (1974)
- [33] A. Weinrib, *Long-range correlated percolation*, *Phys. Rev. B*, **29**, 387 (1984)
- [34] E. Bogomolny, C. Schmit, *Random wave function and percolation*, *J. Phys. A*, **40**, 14033 (2007)
- [35] I. A. Gruzberg, L. P. Kadanoff, *The Loewner equation : maps and shapes*, *J. Stat. Phys.*, **114**, 1183 (2004)
- [36] W. Kager, B. Nienhuis, L. P. Kadanoff, *Exact solutions of the Loewner evolutions*, *J. Stat. Phys.*, **115** (2004)
- [37] T. Kennedy, *A fast algorithm for simulating the chordal Schramm-Loewner evolution*, *J. Stat. Phys.*, **127**, 1125 (2007)

- [38] D. E. Marshall, S. Rohde, *Convergence of the Zipper algorithm for conformal mapping*, arxiv :math/0605532, (2005)
- [39] W. Kager, B. Nienhuis, *A guide to Stochastic Löwner Evolution and its applications*, J. Stat. Phys., **115**, 1149, (2004)
- [40] W. Werner, *Random planar curves and Schramm- Loewner evolution*, Notes from Saint-Flour summer school, (2002)
- [41] J. Cardy, *SLE for theoretical physicists*, Ann. Phys., **318**, 81, (2005)
- [42] S. Smirnov, *Critical percolation in the plane : Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits*, C.R. Acad. Sci. Paris I Math., **333**, 239 (2001)
- [43] M. Bauer, D. Bernard, J. Houdayer, *Dipolar stochastic Loewner evolutions*, J. Stat. Phys., P03001, (2005)
- [44] G. N. Watson, *Theory of Bessel Function*, Cambridge Univ. Press, 2nd edition, (1962)
- [45] M. Lebental, J.-S. Lauret, R. Hierle, J. Zyss, *Highly directional stadium-shaped polymer microlasers*, Appl. Phys. Lett., **88**, 031108 (2006)
- [46] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nockel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco, A. Y. Cho, *High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators*, Science, **280**, 1556 (1998)
- [47] Jackson, *Électrodynamique classique*, Dunod
- [48] H. E. Tureci, A. D. Stone, B. Collier, *Self-consistent multimode lasing theory for complex or random lasing media*, Phys. Rev. A, **74**, 043822 (2006)
- [49] A. Fresnel, *Annales de Physique et de Chimie*, t. XVII (1821)
- [50] A. D. Rawlins, *Diffraction by, or diffusion into, a penetrable wedge*, Proc. Roy. Soc. London A, **455**, 2655 (1999)
- [51] G. Gouesbet, G. Grehan, *Sur la généralisation de la théorie de Lorenz-Mie*, J. Optics(Paris), **13**, 97 (1982)
- [52] D. Brewster, *On the Laws Which Regulate the Polarisation of Light by Reflexion from Transparent Bodies*, Phil. Trans. Roy. Soc., **105**, 125 (1815)
- [53] M. S. Birman, A. B. Pushnitski, *Spectral shift function, amazing and multifaceted*, Inter. equ. oper. theory, **30**, 191 (1998)
- [54] E. Bogomolny, R. Dubertrand, C. Schmit, *Trace formula for dielectric cavities I : Circle*, arxiv.nlin.0808.2374
- [55] M. V. Berry, C. J. Howls, *High orders of the Weyl expansion for quantum billiards : resurgence of periodic orbits, and the Stokes phenomenon*, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **447**, 527 (1994)
- [56] U. Smilansky, I. Ussishkin, *The smooth spectral counting function and the total phase shift for quantum billiards*, J. Phys. A, **29**, 2587 (1997)

- [57] R. Dubertrand, E. Bogomolny, N. Djellali, M. Lebental, C. Schmit, *Circular dielectric cavity and its deformation*, Phys. Rev. A, **77**, 013804 (2008)
- [58] C. Yeh, *Perturbation Approach to the Diffraction of Electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric obstacles*, Phys. Rev. **135**, A1193 (1964).
- [59] L. Kaminetzky and J. Keller, SIAM J. Appl. Math. **22**, 109 (1972).
- [60] M. Brack, R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics*, Addison-Wesley, (1997)
- [61] U. Smilansky, *Mesoscopic Quantum Physics*, CR de l'École d'été de Physique théorique des Houches, éd North-Holland Amsterdam (1994)
- [62] M. Hentschel, H. Schomerus, *Fresnel laws at curved dielectric interfaces of microresonators*, Phys. Rev. E, **65**, 045603(R) (2002)
- [63] S. Tomsovic and D. Ullmo, *Chaos assisted tunneling*, Phys. Rev. E **50**, 145 (1994)
- [64] M. Sieber, *Semiclassical transition from an elliptical to an oval billiard*, J. Phys. A, **30**, 4563 (1997)
- [65] E. Bogomolny, R. Dubertrand, C. Schmit, N. Djellali, M. Lebental, J. Zyss, *Trace formula for dielectric cavities II : General case*, to be published
- [66] E. Bogomolny, C. Schmit, *Structure of wave functions of pseudointegrable billiards*, Phys. Rev. Lett. **92**, 244102 (2004)
- [67] M. Lebental, N. Djellali, C. Arnaud, J.-S. Lauret, J. Zyss, R. Dubertrand, C. Schmit, E. Bogomolny, *Inferring periodic orbits from spectra of simple shaped micro-lasers*, Phys. Rev. A, **76**, 023830 (2007)
- [68] E. Bogomolny, N. Pavloff, C. Schmit, *Diffraction corrections in the trace formula for polygonal billiards*, Phys. Rev. E, **61**, 3689 (2000)
- [69] J. Sjöstrand, M. Zworski, *Lower bounds on the number of scattering poles*, Comm. in Part. Diff. Eq., 1993
- [70] W. T. Lu, S. Sridhar, M. Zworski, *Fractal Weyl law for chaotic open systems*, Phys. Rev. Lett. **91**, 154101 (2003)
- [71] S. Nonnenmacher, M. Zworski, *Fractal Weyl law in discrete models of chaotic scattering*, J. Phys. A : Math. and Gen. **38**, 10683 (2005)
- [72] S. Nonnenmacher, E. Schenk, *Resonance distribution in open chaotic systems*, arxiv.nlin.0803.1075 (2008)
- [73] J. Wiersig, *Boundary element method for resonances in dielectric cavities*, J. Optics A : Pure and Applied optics, **5**, 53 (2003)
- [74] A. Sommerfeld, *Optics*, N.Y. Acad. Press Pub., (1954)
- [75] A. Sommerfeld, *Mathematical Theory of Diffraction*, Birkhäuser, (2004)
- [76] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed., Pergamon Press, (1980)

-
- [77] B. Budaev, *Diffraction by wedges*, Pitman Research Notes in Math. Series, Longman Scientific & Technical, (1995)
- [78] W. Pauli, *On asymptotics series for functions in the theory of diffraction of light*, Phys. Rev., **54**, (1938)
- [79] E. Bogomolny, *Smoothed wave function of chaotic quantum systems*, Physica D, **31**, 169 (1988)
- [80] A. Erdélyi, *Higher transcendental functions*, vol. 2, Bateman Project, Mc Graw-Hill (1953)