



**HAL**  
open science

# Événements visuels de convexes et limites d'ombres

Julien Demouth

► **To cite this version:**

Julien Demouth. Événements visuels de convexes et limites d'ombres. Modélisation et simulation. Université Nancy II, 2008. Français. NNT: . tel-00342717

**HAL Id: tel-00342717**

**<https://theses.hal.science/tel-00342717>**

Submitted on 28 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Événements visuels de convexes et limites d'ombres

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 24 novembre 2008

pour l'obtention du

**Doctorat de l'université Nancy 2**  
(spécialité informatique)

par

Julien Demouth

### Composition du jury

*Président :* Guillaume Hanrot

*Rapporteurs :* Hervé Brönnimann  
Nicolas Holzschuch

*Examineurs :* Hazel Everett (directrice)  
Xavier Goaoc (co-directeur)  
Jean Ponce

Mis en page avec la classe thloria.

# Table des matières

## Résumé des contributions

### Chapitre 1

#### Introduction

1.1	Modèle de l'illumination globale . . . . .	1
1.1.1	Synthèse d'images réalistes . . . . .	1
1.1.2	Équation de rendu . . . . .	2
1.2	Approximation de la solution : lancer de rayons et radiosité . . . . .	3
1.2.1	Lancer de rayons et visibilité « point à point » . . . . .	3
1.2.2	Radiosité et visibilité « surface à surface » . . . . .	4
1.3	Ombres . . . . .	9
1.3.1	Rôle des ombres . . . . .	10
1.3.2	Limites d'ombres, discontinuités et radiosité . . . . .	10
1.3.3	Localisation des discontinuités . . . . .	11
1.3.4	Difficultés du calcul des ombres . . . . .	13
1.4	Résumé . . . . .	14

### Chapitre 2

#### Problématiques et contributions

2.1	Événements visuels d'ensembles convexes disjoints . . . . .	15
2.1.1	Divers cadres de définitions incompatibles . . . . .	15
2.1.2	L'objectif d'un cadre général et cohérent . . . . .	19
2.1.3	Approche . . . . .	19
2.1.4	Caractérisation géométrique des lieux d'événements visuels . . . . .	20
2.1.5	Intérêt des résultats . . . . .	20
2.2	Complexité des limites d'ombres . . . . .	21
2.2.1	Modèles de scènes . . . . .	22
2.2.2	Résultats obtenus . . . . .	22
2.2.3	Intérêt des résultats . . . . .	23
2.3	Calcul des limites d'ombres . . . . .	23
2.3.1	Construction de l'ossature du maillage de discontinuités . . . . .	24
2.3.2	Approche . . . . .	24

2.3.3 Résultats obtenus . . . . . 25

<p><b>Chapitre 3</b> <b>État de l’art</b></p>
---

3.1 Graphe d’aspects . . . . . 27

3.1.1 Caractéristiques fondamentales . . . . . 27

3.1.2 Polyèdres . . . . . 28

3.1.3 Ensembles lisses et lisses par morceaux . . . . . 30

3.2 Squelette de visibilité . . . . . 32

3.2.1 Encodage des événements visuels dans le squelette de visibilité . . . . . 32

3.2.2 Algorithmique . . . . . 33

3.2.3 Résultats de complexité . . . . . 35

3.2.4 Squelette de visibilité, complexe de visibilité et graphe d’aspects . . . . . 38

3.3 Synthèse d’ombres . . . . . 40

3.3.1 Lancer de rayons . . . . . 40

3.3.2 Maillage de discontinuités en radiosité . . . . . 41

3.3.3 Le temps réel et le calcul d’ombres . . . . . 43

<p><b>Chapitre 4</b> <b>�v�nements visuels d’ensembles convexes</b></p>
---

4.1 Introduction . . . . . 47

4.1.1 Terminologie . . . . . 48

4.1.2 Résultats . . . . . 50

4.2 Préliminaires . . . . . 51

4.2.1 Ordre d’intersection « rayon-objets » . . . . . 51

4.2.2 Déformation continue de la silhouette d’un objet . . . . . 52

4.2.3 Isolation des intersections propres de silhouettes . . . . . 54

4.2.4 Stabilité locale des intersections propres . . . . . 56

4.3 Structure du contour apparent d’une scène . . . . . 57

4.4 L’ensemble des points de vue dégénérés est nulle part dense . . . . . 57

4.4.1 Rayons bitangents limites . . . . . 58

4.4.2 Rayons tritangents . . . . . 61

4.5 Les points de vue non dégénérés sont stables . . . . . 66

4.5.1 Stabilité locale des jonctions . . . . . 67

4.5.2 Construction de l’isotopie . . . . . 67

4.5.3 Extension à la sphère des directions . . . . . 68

4.6 Instabilité des points de vues faiblement dégénérés . . . . . 70

4.6.1 Instabilité des points de vue faiblement dégénérés . . . . . 70

4.6.2 Stabilité d’un point de vue fortement dégénéré . . . . . 72

4.7 Conclusion . . . . . 73

---

<b>Chapitre 5</b> <b>Complexité des régions d'ombre et de pénombre</b>
---

5.1	Introduction . . . . .	75
5.2	Preliminaries . . . . .	77
5.3	The penumbra boundary . . . . .	78
5.4	Upper bounds . . . . .	80
5.4.1	The umbra cast by a segment light source . . . . .	80
5.4.2	The umbra cast by polygonal light sources . . . . .	83
5.5	Lower bounds . . . . .	84
5.5.1	The umbra cast by a segment light source . . . . .	84
5.5.2	The umbra cast by a polygonal light source . . . . .	90
5.6	Conclusion . . . . .	93

<b>Chapitre 6</b> <b>Contours d'ombres</b>
---

6.1	Bases théoriques : limites des régions ombrées . . . . .	96
6.1.1	Terminologie . . . . .	97
6.1.2	Germes des rayons d'événement visuel . . . . .	98
6.1.3	Limites lumière-pénombre et EV séparateurs . . . . .	101
6.1.4	Limites pénombre-ombre, EV non séparateurs et EEE . . . . .	102
6.1.5	Simplification de l'arrangement des limites potentielles . . . . .	102
6.2	Algorithme et détails d'implémentation . . . . .	105
6.2.1	Calcul du squelette de visibilité . . . . .	106
6.2.2	Extraction des limites d'ombre . . . . .	108
6.2.3	Simplification des arrangements de limites potentielles . . . . .	110
6.3	Complexité expérimentale des limites d'ombre . . . . .	112
6.3.1	Protocole expérimental . . . . .	112
6.3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	114
6.3.3	Conclusions . . . . .	115

<b>Chapitre 7</b> <b>Conclusion</b>
--

<b>Annexes</b>
----------------

<b>Annexe A Germes associés aux surfaces d'événements visuels</b>	<b>131</b>
A.1 Liens entre germes et limites d'ombre . . . . .	131
A.2 Types de germes . . . . .	131
<b>Annexe B Résultats expérimentaux</b>	<b>133</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>



# Résumé des contributions

Dans cette thèse, nous étudions les événements visuels. En particulier, nous nous intéressons au lien entre les lieux où ils se produisent et les contours d'ombres.

Dans un premier temps, nous proposons un travail théorique sur la définition d'une notion de vue dans une scène formée d'objets convexes qui fait la part belle aux silhouettes visibles des objets. Cette formulation est proche de celle adoptée dans le cas du graphe d'aspects sur les objets lisses et est directement liée au problème d'extraction des limites d'ombres. Dans cette même étude, nous posons l'équivalence entre deux vues de façon naturelle au moyen d'une application topologique simple (un homéomorphisme) : deux vues sont équivalentes si on y voit « les mêmes objets et qu'ils sont organisés de la même manière les uns envers les autres ». Pour conclure ces travaux, nous caractérisons géométriquement les lieux où se produisent les événements visuels et nous prouvons que ces points forment des ensembles nulle part denses. Le cadre que nous construisons est le premier qui permet de considérer à la fois des objets lisses et des objets polyédriques. C'est-à-dire, en quelque sorte, des modèles théoriques idéaux et leurs approximations pratiques sous la forme d'objets polyédriques simples (cf. chapitre 4).

Ensuite, nous démontrons des bornes théoriques sur la complexité des limites entre lumière et pénombre ainsi qu'entre ombre et pénombre. Ce sont les premières bornes non triviales. Plus précisément, pour un ensemble de  $k$  polyèdres convexes de complexité totale  $n$  éclairés par une source polygonale, nous exhibons une borne inférieure  $\Omega(n^2k^3 + nk^5)$  sur le nombre maximal de composantes connexes d'ombre et nous prouvons une borne supérieure  $O(n^3k^3)$  sur la complexité des limites « ombre-pénombre ». Ces bornes, accompagnées de toutes celles démontrées au chapitre 5, montrent que l'ombre d'une telle scène peut avoir une structure compliquée (cf. chapitre 5).

Finalement, nous utilisons nos résultats sur la caractérisation géométrique des événements visuels dans le contexte d'objets convexes pour proposer une méthode qui permet d'extraire les limites entre lumière et pénombre et entre ombre et pénombre dans une scène formée de polyèdres convexes éclairés par une source surfacique. C'est la première fois qu'une approche permet d'identifier un sur-ensemble restreint des limites entre ces trois grands types de régions. Du point de vue du passage à l'échelle, nos résultats sont à la fois décevants et porteurs d'espoir. Nous arrivons à réduire considérablement la taille des objets intermédiaires utilisés pour la construction des limites entre les régions (le squelette de visibilité, les arrangements, etc). Malheureusement, nous n'arrivons pas toujours à tirer partie de ces améliorations du point de vue du temps de calcul.

En conclusion, nous dirons que ces travaux proposent des réponses inédites à des questions dont la



plupart n'avaient pas de réponse. De plus, ils montrent que certaines voies considérées comme closes, car porteuses d'aucun espoir, peuvent apporter des indications intéressantes lorsqu'elles sont abordées sous des angles différents. Par exemple, nos travaux sur les maillages de discontinuités nous permettent de concevoir une méthode d'extraction des limites entre les régions d'ombre qui pourrait avoir un intérêt dans des cadres différents de l'informatique graphique. Nous pensons, entre autres, à modifier cette approche pour construire une technique d'approximation des contours d'ombre qui pourrait avoir un intérêt pratique (cf. chapitre 6) ou à l'utiliser pour la création d'un outil capable d'estimer la pertinence des ombres calculées par des algorithmes d'approximation.

# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce chapitre nous abordons l'un des grands problèmes de l'informatique graphique : le traitement des ombres pour la synthèse d'images réalistes. Tout particulièrement, nous y présentons l'approche de l'illumination globale dans laquelle intervient cette question.

Pour exposer les éléments sur lesquels porte notre travail, nous commencerons par énoncer l'équation de rendu qui décrit le modèle physique au cœur de l'illumination globale. Ensuite, nous introduirons les algorithmes de lancer de rayons et de radiosité : deux grandes méthodes qui permettent d'approcher la solution de cette équation. Finalement, après avoir établi le lien entre ombres et équation de rendu, nous verrons quelles sont les difficultés rencontrées par la méthode de la radiosité pour traiter ces ombres ainsi que les interrogations qui en découlent.

### 1.1 Modèle de l'illumination globale

#### 1.1.1 Synthèse d'images réalistes

Avant toute autre chose, posons le cadre de la synthèse d'images et définissons l'objectif d'un programme de rendu réaliste. Un utilisateur fournit la description d'une scène sous la forme d'une liste de formes géométriques auxquelles sont attribuées des caractéristiques physiques et visuelles (propriétés matérielles, textures, etc). Parmi ces objets, certains jouent le rôle de sources lumineuses. Le logiciel a pour but de « calculer » une image qui représente la scène, ainsi décrite, de la manière la « plus réaliste possible ». Notons qu'il est difficile de préciser de manière formelle ce qu'il faut considérer comme une « image réaliste ». Néanmoins, nous nous accorderons pour dire qu'une image est réaliste si elle se rapproche, à vue d' cil, de celle qui aurait pu être obtenue en photographiant la scène décrite.

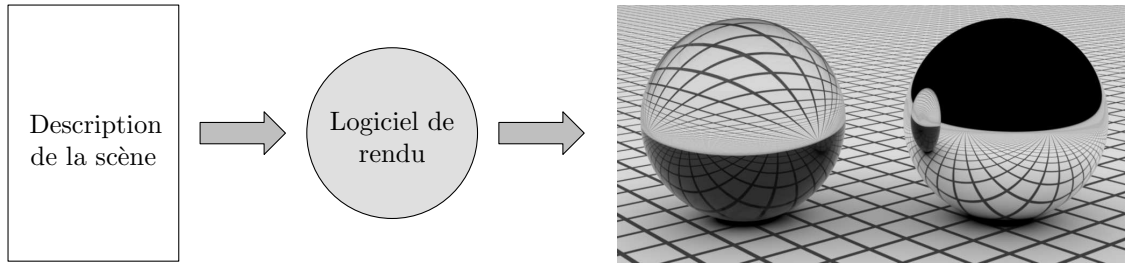


FIG. 1.1 – Description du fonctionnement très général d’un logiciel de rendu. L’image de droite est extraite de l’ouvrage de Pharr et Humphreys [91].

### 1.1.2 Équation de rendu

La détermination de la couleur de chaque point d’une scène est l’un des problèmes posés par le rendu réaliste. Il est répandu d’aborder cette question sous l’angle de l’*illumination globale* (*global illumination*) dont un exposé synthétique peut être trouvé dans l’ouvrage de Dutré, Bala et Bekaert [36]. Cette approche repose sur la simulation d’un modèle physique de la propagation de lumière pour obtenir une approximation des quantités chromatiques qui définissent une image réaliste. En particulier, le modèle qui est classiquement utilisé en synthèse d’images se décrit au travers de l’*équation de rendu* (*rendering equation*) de Kajiya [67]. Suivant cette formulation<sup>1</sup>, la quantité de lumière, ou *radiance* (*radiance*), qui quitte un point d’une surface de la scène est la somme entre la radiance émise par cette surface et la radiance, en provenance des autres surfaces, qui est réfléchiée par la surface considérée (figure 1.2).

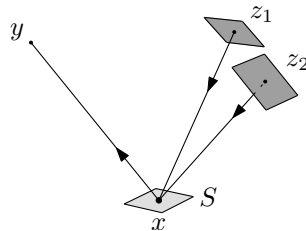


FIG. 1.2 – Modèle de la propagation lumineuse. La quantité de lumière, qui quitte la surface  $S$  depuis  $x$  vers  $y$ , est la somme entre la lumière émise par  $S$  depuis  $x$  vers  $y$  et l’intégrale des quantités de lumière reçues, depuis les autres surfaces de la scène, puis réfléchiées. Sur cette figure, nous avons représenté deux directions,  $z_1 \rightarrow x$  et  $z_2 \rightarrow x$ , de lumière arrivant en  $x$  qui engendrent des réflexions dans la direction  $x \rightarrow y$ .

Plus formellement, considérons une surface  $S_i$  prise parmi un ensemble de surfaces  $\mathcal{S}$ . Notons  $L(x \rightarrow y)$  la radiance quittant  $x \in S_i$  dans la direction de  $y$  et  $L_e(x \rightarrow y)$  la radiance émise par  $S_i$  au point  $x$  vers  $y$  (la surface  $S_i$  peut être une source lumineuse, c’est ce que traduit  $L_e$ ). Ce modèle est décrit par l’équation intégrale

$$\underbrace{L(x \rightarrow y)}_{\text{lumière quittant } x} = \underbrace{L_e(x \rightarrow y)}_{\text{lumière émise}} + \underbrace{\int_{z \in \mathcal{S}} f_r(z \rightarrow x, x \rightarrow y) L(z \rightarrow x) V(x, z) G(x, z) dz}_{\text{lumière réfléchiée}}, \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Les seconds chapitres des ouvrages [20] et [36] proposent une présentation adaptée à l’informatique graphique de la terminologie physique utilisée dans ce contexte.

où  $f_r(z \rightarrow x, x \rightarrow y)$  est une distribution qui indique le rapport entre la quantité de lumière arrivant en  $x$  depuis  $z$  et celle quittant  $x$  vers  $y$ . C'est au travers de cette fonction, appelée BPDF (*Bidirectional Scattering Distribution Function*), que sont traduites les propriétés matérielles des surfaces de la scène.  galement dans cette équation, l'application  $V$  est un prédicat binaire qui indique si deux points  $x$  et  $z$  sont mutuellement visibles :  $V(x, z)$  vaut 1 si  $x$  voit  $z$ , alors qu'il prend la valeur 0 dans le cas contraire. Finalement,  $G$  est un terme géométrique qui rend compte de l'atténuation de la puissance de la lumière lorsque  $z$  s'éloigne du zénith de  $x$  (figure 1.3).

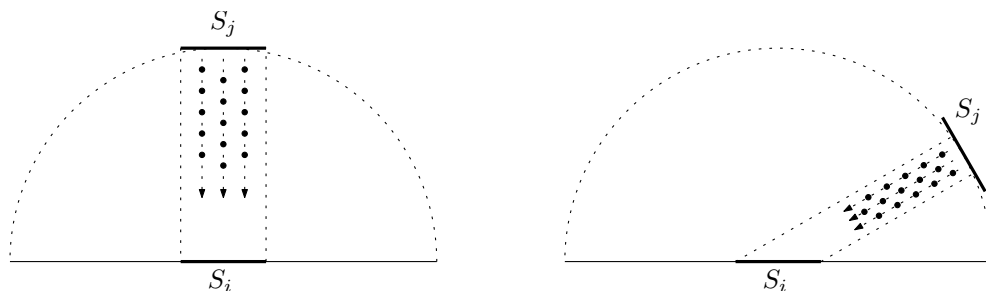


FIG. 1.3 – Importance de l'orientation entre les surfaces sur la quantité de lumière apportée par une source  $S_j$  à une surface  $S_i$ . Sur une période de temps donnée, la quantité de particules lumineuses (photons), qui se déplacent dans une direction donnée, et, qui traversent  $S_i$  diminue lorsque l'angle entre les normales aux surfaces  $S_i$  et  $S_j$  augmente. Or, cette quantité de photons détermine la quantité de lumière qui arrive en  $S_i$  depuis  $S_j$ . Sur ces deux schémas les aires des surfaces sont identiques (entre le dessin de gauche et celui de droite). L'angle entre les normales à  $S_i$  et  $S_j$  est nul sur le schéma de gauche alors qu'il est d'environ 60 degrés sur celui de droite. La portion de  $S_j$  qui émet des photons reçus par  $S_i$  est moindre sur le schéma de droite que sur celui de gauche. D'où l'atténuation de la quantité d'énergie reçue par  $S_i$  depuis  $S_j$  quand l'angle entre les normales augmente (en valeur absolue). Pour plus de détails, voir, par exemple, [20] ou [36].

## 1.2 Approximation de la solution : lancer de rayons et radiosité

En illumination globale, simuler la propagation lumineuse revient à résoudre l'équation intégrale (1.1). Malheureusement, la fonction de radiance, solution de cette équation, est une fonction d'un espace de dimension infinie qui ne peut pas être évaluée *exactement* (voir, par exemple, [20]). Nous sommes alors contraints de nous ramener à la recherche d'une *approximation* de la solution. Pour ce faire, deux grandes classes d'approches sont couramment appliquées au cadre de l'illumination globale : les méthodes Monte-Carlo et les méthodes par éléments finis.

### 1.2.1 Lancer de rayons et visibilité « point à point »

Bien que notre propos se porte principalement sur la méthode de radiosité, nous débutons par une digression. L'algorithme du *lancer de rayons* (*ray-tracing*) [123] considère un point de vue  $y$  (fixé par l'utilisateur) et cherche à évaluer la quantité  $L(x_i \rightarrow y)$  pour un ensemble  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  de  $n$  points engendrés aléatoirement<sup>2</sup> dans l'espace de la scène. Une première étape de l'algorithme est de

<sup>2</sup>En toute rigueur, ces points ne sont pas nécessairement engendrés aléatoirement mais les variantes déterministes du lancer de rayons produisent généralement des résultats de moins bonne qualité que leurs alternatives stochastiques (voir [91], par exemple).

construire l'échantillon de points en lesquels évaluer la fonction de radiance  $L$ . Pour cela, il crée un ensemble de directions qui définissent une famille de rayons émanant de  $y$  et passant par les pixels de l'image à synthétiser. Lorsque l'un de ces rayons « lancé dans la scène » rencontre un objet, le point d'intersection le plus proche de son origine est retenu comme un point de  $X$ . Ensuite, une fois que  $X$  a été engendré, l'algorithme considère chaque point  $x_i$  de  $X$  et tente de calculer une approximation de la quantité  $L(x_i \rightarrow y)$ . Il fait alors appel à un processus aléatoire (et récursif) qui détermine un ensemble de points  $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$  dans la scène et évalue la somme

$$\sum_{j=1}^m f_r(z_j \rightarrow x_i, x_i \rightarrow y) L(z_j \rightarrow x_i) V(x_i, z_j) G(x_i, z_j),$$

qui sous certaines conditions est une bonne approximation de  $L(x_i \rightarrow y)$ . Le fragment de code de la figure 1.4 est un exemple simple (et partiel) d'implémentation de l'algorithme du lancer de rayon. Notons, pour conclure cette parenthèse, que le lancer de rayons peut être vu comme une adaptation des méthodes Monte-Carlo à l'illumination globale (pour plus de détails sur cet algorithme et cette dernière remarque, il est possible de se référer aux ouvrages de Glassner [45] ou de Pharr et Humphreys [91]).

## 1.2.2 Radiosité et visibilité « surface à surface »

La *radiosité (radiosity)* [50], voir également [19] et [84], est une utilisation d'une méthode par éléments finis dans le contexte de l'illumination globale. Contrairement à la méthode de lancer de rayons, qui approche la fonction en un ensemble fini de points, son principe est de fournir une approximation de la solution d'une forme simplifiée de l'équation de rendu (équation (1.1)) par une combinaison linéaire exprimée dans un espace de dimension finie. D'un point de vue calculatoire, la recherche de la « meilleure » approximation est ramenée à la résolution d'un système linéaire. Nous présentons ici les grandes lignes de cette méthode et renvoyons aux ouvrages classiques de Cohen et Wallace [20] ou de Sillion et Puech [107] pour les détails supplémentaires.

### 1.2.2.1 Hypothèse des surfaces diffuses et équation de radiosité

L'une des clés des méthodes par éléments finis est la décomposition du domaine de définition de la fonction à approcher en un ensemble de fragments simples. À ce titre, il peut paraître naturel que la difficulté du problème augmente avec la dimension du domaine. Or, la radiance, solution de l'équation de rendu (1.1), est définie sur un domaine en quatre dimensions (deux dimensions pour chaque variable de position). Ceci fait dire à Heckbert que « *finite element methods are most appropriate for scenes containing only diffuse surfaces, since the radiance function is then a function of only two variables [...], and it can be easily discretized. Monte Carlo methods are usually used for general scenes, where the radiance function is a function of four variables [...] and finite element methods would be too cumbersome* » [59].

Dès lors, afin de limiter la dimension du domaine de définition de cette quantité et de permettre des implémentations « efficaces » de la radiosité, son utilisation est restreinte à des scènes formées de surfaces idéalement diffuses, c'est-à-dire à des surfaces qui réfléchissent la lumière de manière uniforme, sur l'ensemble des directions. Sous cette hypothèse, les termes  $f_r(z \rightarrow x, x \rightarrow y)$ ,  $L(x \rightarrow y)$  et  $L_e(x \rightarrow y)$ ,

```

// Calcule l'image projetée par la scène sur l'écran.
void generate_image (Screen screen, Scene scene)
{
    // Calcule la radiance pour chaque pixel de l'image.
    foreach (Pixel p in screen.pixels ())
    {
        Color incoming_radiance = BLACK;
        // Engendre des rayons passant par le pixel p.
        Rays rays = generate_random_rays (screen, p);
        // Estime la quantité de lumière apportée par chaque rayon.
        foreach (Ray r in rays)
            incoming_radiance += trace_ray (scene, r);
        // Fixe la couleur du pixel.
        screen.pixel (p) = incoming_radiance;
    }
}

// Détermine la couleur apportée suivant le rayon r.
Color trace_ray (Scene scene, Ray r, int depth = 0)
{
    // Lorsque la profondeur de la récursion atteint la limite il faut arrêter.
    if (depth >= MAX_DEPTH)
        return BLACK;

    // Détermine la première intersection de r avec un objet de la scène.
    Intersection first_intersection = scene.first_intersection (r);

    // S'il n'y a pas d'intersection, la quantité de lumière est nulle.
    if (first_intersection == NULL)
        return BLACK;

    // Prend en compte la quantité de lumière émise par l'objet intersecté.
    Color color = first_intersection.emitted_light ();

    // Approxime la radiance qui arrive directement depuis les sources lumineuses.
    foreach (Light l in scene.lights ())
    {
        Ray shadow_ray = generate_ray_to_light (first_intersection, l);
        color += trace_ray (scene, shadow_ray, MAX_DEPTH - 1);
    }

    // Approxime la radiance qui arrive depuis les autres surfaces.
    Rays rays = generate_random_rays (first_intersection, r);
    foreach (Ray ray in rays)
        color += trace_ray (scene, ray, depth + 1);

    return color;
}

```

FIG. 1.4 – Un fragment de pseudo-code qui décrit l'algorithme du lancer de rayons. La fonction `generate_image` calcule l'image projetée sur l'écran `screen` à partir de la description de la scène `scene`. La fonction `trace_ray` se charge de déterminer une approximation de la radiance arrivant en un point suivant la direction opposée à celle du rayon `r`.

qui apparaissent dans l'équation (1.1), sont ramenés à une unique dépendance en la position  $x$  et sont remplacés<sup>3</sup>, respectivement, par  $\rho(x)$ ,  $B(x)$  et  $E(x)$ . L'équation de rendu devient

$$B(x) = E(x) + \int_{z \in S} K(x, z)B(z)dz, \quad (1.2)$$

où  $B$  est une quantité en deux dimensions et où  $K$  est défini par :

$$K(x, z) = \rho(x)V(x, z)G(x, z).$$

Notons toutefois que cette hypothèse sur les propriétés réflexives des objets de la scène est particulièrement contraignante. Comme le disent Sillion et Puech, « *the assumption that all surfaces are ideal diffuse reflectors is rarely met in practice. Deviation from diffuse behavior is necessary for photorealistic image synthesis* » ([107], page 149). Bien que cela dépasse le cadre de cette thèse, remarquons que des approches ont été envisagées pour contourner cette limitation [66, 118, 51].

### 1.2.2.2 Choix de l'espace de dimension finie et maillage de la scène

La radiosité repose sur la décomposition des surfaces de la scène en éléments surfaciques simples et sur l'approximation de la solution de l'équation (1.2) sur chacun de ces éléments. La solution exacte de



FIG. 1.5 – Divers maillages d'une scène, tirés de [77]. Les éléments des maillages représentés sur la ligne supérieure sont des quadrilatères alors que ceux de la ligne inférieure sont des triangles.

<sup>3</sup>Cet exercice n'est pas uniquement une réécriture. Ces nouvelles quantités sont légèrement différentes des précédentes mais peuvent y être reliées par des formules physiques (voir par exemple les seconds chapitres des ouvrages [20] et [36]).

l'équation de radiosité est approchée (sur chaque élément) par une combinaison linéaire exprimée dans un espace fonctionnel de dimension finie. Pour un morceau de surface  $S_i$ , l'approximation est définie sous la forme

$$\tilde{B}_i(x) = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \phi_{ij}(x),$$

où ( $\phi_{i1}, \dots, \phi_{in}$ ) est une base de l'espace des fonctionnel restreint à  $S_i$ . Différents espaces de fonctions et d'éléments surfaciques ont été considérés en radiosité. Citons notamment les espaces de fonctions constantes [50, 84] ou les espaces d'ondelettes [51]. Par exemple, la fonction

$$c_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S_i, \\ 0 & \text{si } x \notin S_i, \end{cases} \quad (1.3)$$

est une base de l'espace des fonctions constantes alors que la figure 1.5 illustre divers maillages d'une scène.

Finalement, remarquons que de multiples combinaisons jouant sur la nature des fonctions de base et sur la forme des éléments du maillage peuvent être envisagées. Comme le font remarquer Sillion et Puech ([107], page 109), l'utilisation d'espaces de fonctions plus expressifs et d'éléments de maillage plus complexes nécessite le calcul de moins de facteurs de forme (voir section 1.2.2.4) mais plus difficiles à évaluer que lors du recours à des espaces fonctionnels simples.

### 1.2.2.3 Minimisation de l'erreur et extraction du système linéaire

Une fois posée la combinaison linéaire qui approche la solution de l'équation (1.2), la recherche de la « meilleure » solution approchée est ramenée à la résolution d'un système linéaire. Encore une fois, nous exposons la démarche générale et renvoyons aux textes cités précédemment pour les détails complémentaires.

L'objectif est de trouver l'approximation  $\tilde{B}$  qui minimise l'erreur  $|\tilde{B} - B|$ . Bien que nous ne sachions pas résoudre (exactement) cette différence, nous pouvons exprimer l'erreur d'approximation sous la forme

$$r(x) = \tilde{B}(x) - E(x) - \int_{z \in S} K(x, z) \tilde{B}(z) dz,$$

obtenue en substituant  $\tilde{B}$     $B$  dans l'équation (1.2). Minimiser l'erreur revient ainsi à « choisir » la fonction  $\tilde{B}$  pour laquelle la norme de la fonction résiduelle  $r$  est la plus proche de zéro.  valuer exactement la norme de la fonction  $r$  reste tout de même un problème à part entière et n'est pas réalisable informatiquement.

Pour contourner cette nouvelle difficulté, nous commençons par choisir un espace fonctionnel de dimension finie contenu dans l'espace auquel appartient  $r$ . La fonction  $\tilde{B}$  qui minimise l'erreur résiduelle se projette sur l'origine de cet espace. En notant  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  une base de l'espace de projection et  $\langle f, g \rangle$  le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_S f(x)g(x)dx,$$



la solution optimale vérifie la contrainte :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle \omega_i, r \rangle = 0. \quad (1.4)$$

Historiquement, divers espaces de projection ont été considérés. En particulier, la méthode de Galerkin, appliquée en radiosité par Heckbert et Winget [62] et par Zatz [128], suggère d'utiliser pour la projection l'espace de définition de l'approximation  $\tilde{B}$ , qui est engendré pour chaque surface du maillage  $S_i$  par la base  $(\phi_{i1}, \dots, \phi_{in})$ . La contrainte exprimée à l'équation (1.4) se transforme alors, pour chaque surface  $S_i$  et chaque fonction de base  $\phi_{ij}$ , en

$$\langle \phi_{ij}, r \rangle = \langle \phi_{ij}, \tilde{B} \rangle - \langle \phi_{ij}, E \rangle - \left\langle \phi_{ij}, \int_{z \in S} K(x, z) \tilde{B}(z) dz \right\rangle = 0,$$

et, après développement et mise en forme des produits scalaires, correspond au système linéaire

$$\beta_{ij} = E_{ij} + \sum_{k,l} K_{ijkl} \beta_{kl}, \quad (1.5)$$

où

$$E_{ij} = \int_S \phi_{ij}(x) E(x) dx \quad \text{et} \quad K_{ijkl} = \int_{S_i} \phi_{ij}(x) \int_{S_k} K(x, z) \phi_{kl}(z) dx dz.$$

Intuitivement, le terme  $E_{ij}$  est la quantité de lumière émise et projetée sur la fonction de base  $\phi_{ij}$ . Quant à  $\sum_{k,l} K_{ijkl} \beta_{kl}$ , c'est la somme des contributions provenant des autres surfaces de l'espace exprimée suivant la  $j$ -ème coordonnée de l'espace des fonctions. Finalement, le terme  $K_{ijkl}$ , qui est appelé *facteur de forme généralisé* (*generalized form factor*), traduit les interactions lumineuses entre les morceaux du maillage.

#### 1.2.2.4 Facteurs de forme

La définition du système linéaire qui permet la résolution de l'équation de radiosité repose sur l'évaluation du terme  $K_{ijkl}$ . Quand l'espace de projection est celui des fonctions constantes, ce terme correspond véritablement à la visibilité entre deux éléments du maillage de la scène : en exprimant  $K_{ijkl}$  au moyen de la base décrite à l'équation (1.3), nous obtenons

$$K_{ik} = \frac{1}{A_i} \int_{S_i} \int_{S_k} K(x, z) dx dz,$$

où  $A_i$  est l'aire de la surface  $S_i$  (figure 1.6).

La détermination d'un facteur de forme est un problème difficile qui fait intervenir des questions de visibilité entre des surfaces. Historiquement, plusieurs approches ont été proposées qui décrivent ces quantités par des formes closes (pour des configurations géométriques simples) ou qui en donnent des approximations au moyen de méthodes numériques. Par exemple, Schröder et Hanrahan proposent une expression close du facteur de forme entre deux polygones sans obstacles [104]. En ce qui concerne les méthodes numériques, l'une des plus célèbres techniques d'approximation est obtenue par la méthode de l'« hemicube » [19]. D'autres utilisent des projections entre surfaces [106] ou le lancer de rayons [81].

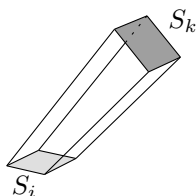


FIG. 1.6 – Interprétation géométrique du facteur de forme pour la radiosité sur l’espace des fonctions constantes.

Pour une vue d’ensemble des méthodes d’évaluation des facteurs de forme, nous renvoyons aux textes classiques et particulièrement à [20, figure 4.3, page 71].

Notons, pour élargir un peu le propos, que certaines approches en radiosité visent à éviter la question du calcul des facteurs de forme. Par exemple, Dutré, Bala et Bekaert présentent trois approches, au chapitre 6 de leur ouvrage [36], qui associent des méthodes de Monte-Carlo à la radiosité. Nous noterons également, pour insister sur la difficulté de l’évaluation des facteurs de forme, que les auteurs justifient, entre autres, le recours à ces stratégies hybrides par le fait que « *because the nasty problems of accurate form factor computation and their storage are avoided, Monte Carlo radiosity methods can handle much larger models in a reliable way* » ([36], page 152).

### 1.2.2.5 Résolution du système linéaire

Le système linéaire (1.5) comporte  $nN$  équations pour  $nN$  inconnues, où  $N$  est le nombre d’éléments du maillage et  $n$  est la dimension de l’espace des fonctions choisi pour projeter la solution de l’équation de radiosité. Ceci donne lieu à des systèmes extrêmement gros. Par exemple, Dutré et ses coauteurs affirment que « *the size of the linear systems that need to be solved can be very large (one equation per patch; 100,000 patches is quite common)* » ([36], page 157). Dès lors, la résolution de ce système par une simple méthode d’inversion de sa matrice n’est pas concevable pour des raisons de performances en temps et en espace mémoire. C’est pour pallier ces difficultés que les méthodes itératives ont été introduites. En particulier, les algorithmes de Gauss-Seidel et de Southwell sont parmi les plus utilisés (voir [20] ou [107]) dans le cadre de la radiosité.

Finalement, notons qu’en plus de leur avantage en terme de performances, les méthodes itératives permettent de construire la solution approchée de l’équation (1.2), et de produire une image, entre chaque itération. Il est donc possible de mettre un terme au processus itératif dès qu’une image d’une qualité suffisante à été engendrée.

## 1.3 Ombres

Nous nous tournons maintenant vers les contours d’ombre, thème central de cette thèse. Après avoir expliqué pourquoi elles méritent une attention toute particulière, nous nous concentrerons sur le lien qu’elles entretiennent avec l’équation de rendu. Finalement, nous aborderons la question de la caractérisation géométrique des ombres. Dans le reste de ce chapitre, nous disons qu’un point est dans l’*ombre* (*shadow*)

s'il existe un segment qui relie ce point à un point d'une source lumineuse et qui intersecte un objet (opaque et qui n'émet pas de lumière) de la scène.

### 1.3.1 Rôle des ombres

Pour obtenir une image réaliste, il est particulièrement important de simuler correctement les régions ombrées. Elles jouent un rôle prépondérant pour la compréhension humaine d'un environnement. La figure 1.7 ainsi que les articles [119] et [120] illustrent ce phénomène.

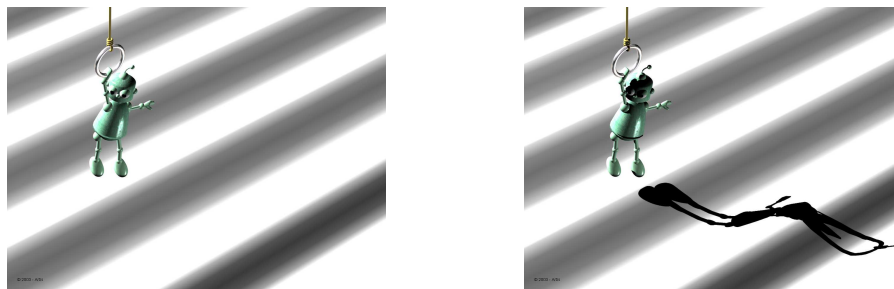


FIG. 1.7 – Importance de l'ombre pour la perception d'une scène. Sur l'image de gauche, sans ombre, il est difficile de positionner le personnage par rapport au sol et de déterminer la forme du sol. En revanche, sur celle de droite, sur laquelle l'ombre a été ajoutée, la position du robot ainsi que la nature ondulée du sol sont évidentes. Ces images sont extraites de [55].

Pour autant, nous pourrions dire que les ombres ne constituent pas des éléments particuliers pour le modèle d'illumination globale gouverné par l'équation de rendu. À vrai dire, une évaluation correcte de la fonction de radiance d'une scène entraîne une détermination parfaite des régions d'ombres. Malheureusement, l'approximation de la solution de l'équation de rendu introduit des erreurs qui peuvent constituer un problème : Rademacher et ses coauteurs [97] montrent que la qualité de la perception d'une image augmente avec la qualité des ombres. Dès lors, pour obtenir une image réaliste, nous ne pouvons pas nous contenter d'une grossière évaluation des zones ombrées. Il est primordial de minimiser les erreurs d'approximation au voisinage des régions d'ombres (quitte à se permettre une approximation plus grossière ailleurs). Or, les limites de ces régions, de même que certaines transitions en leur sein, se situent à des positions où se produisent des discontinuités dans la solution de l'équation de rendu (ou dans ses dérivées d'ordre 1 ou 2) [56, 76]. C'est un phénomène difficile à prendre en compte. En particulier, pour la méthode de radiosité.

### 1.3.2 Limites d'ombres, discontinuités et radiosité

Heckbert [56, 58, 57] et Lischinski, Tampieri et Greenberg [76] ont établi que des discontinuités dans la fonction de radiosité (ou dans ses dérivées) apparaissent aux bords des zones d'ombre ainsi qu'à l'intérieur de ces dernières. Or, la méthode de radiosité n'est pas, au premier abord, adaptée à la prise en compte de fortes variabilités dans la fonction à approcher. Cela provient de l'expression de la solution de l'équation comme une combinaison linéaire de fonctions simples. Les changements brusques sont durs à modéliser et de grosses erreurs d'approximation se forment au voisinage de ces discontinuités.

Pour palier ces difficultés, plusieurs méthodes ont été envisagées. Une première repose sur le raffinement du maillage pour les cellules qui ont une erreur trop élevée; à la condition qu'il soit faisable de quantifier les erreurs d'approximation sur un élément du maillage. C'est le principe de la *radiosité hiérarchique* (*hierarchical radiosity*) [53]. Par opposition à cette stratégie *a posteriori*, qui démarre d'un maillage grossier et qui le raffine dès qu'elle trouve une erreur supérieure à un certain seuil, il a été proposé une approche *a priori*. Il s'agit de localiser les points où se produisent les discontinuités et de s'en servir comme d'une ossature pour la construction du maillage des surfaces de la scène. C'est l'idée du *maillage de discontinuités* (*discontinuity meshing*) introduit, parallèlement, par Heckbert [56, 58, 57] et par Lischinski, Tampieri et Greenberg [76, 77]. Les images de la figure 1.8 illustrent la différence entre des rendus d'une même scène avec et sans maillage de discontinuités.

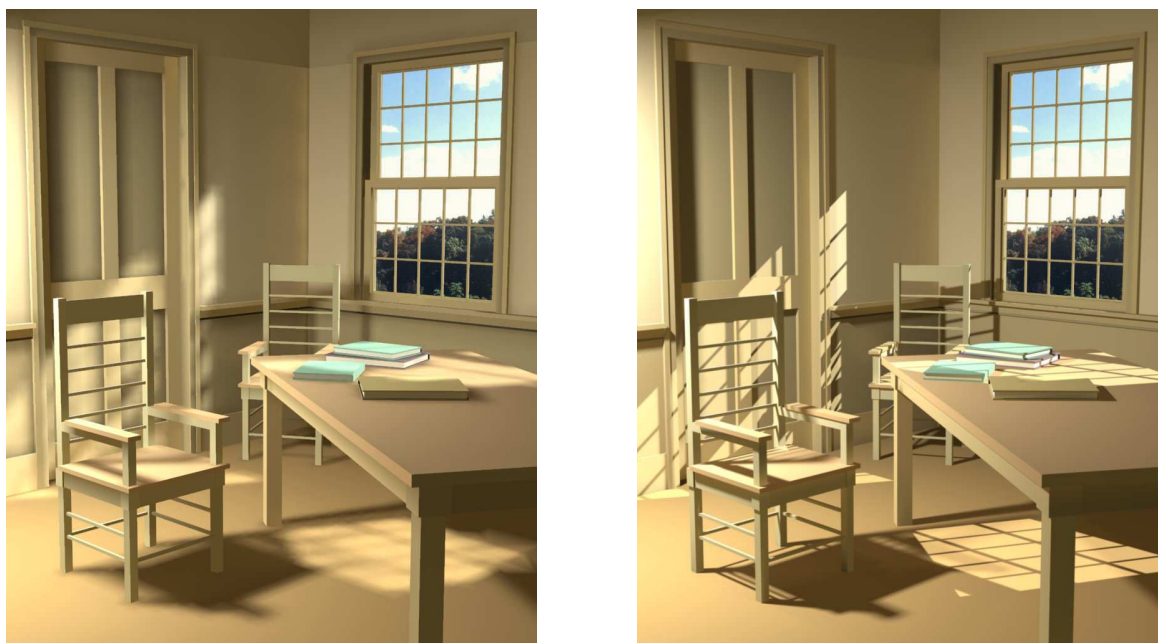


FIG. 1.8 – Ces deux images montrent la différence entre une scène rendue sans maillage de discontinuité (à gauche) et une scène rendue avec maillage de discontinuités (à droite). Un plus grand flou apparaît sur l'image de gauche. Ces images sont extraites de [77].

### 1.3.3 Localisation des discontinuités

L'algorithme du maillage de discontinuités repose sur une localisation de ces discontinuités. Dans ce but, il est indispensable de caractériser *géométriquement les lieux où elles se produisent*. Pour cela, revenons à l'équation de radiosité (équation (1.2)) :

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \int_{z \in S} B(z) V(x, z) G(x, z) dz.$$

En supposant que la fonction de radiance soit continue à la surface des sources lumineuses (citons Lischinski et ses coauteurs qui affirment : « *Let us assume, [...], that the radiance function across the source is smooth ( $C^\infty$ ), as is the case with primary sources* » [76]), le seul terme susceptible d'introduire des

discontinuités dans l'expression de la radiosité  $B$  est le prédicat de visibilité  $V$  (qui prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$ ). Les changements brusques dans la visibilité introduisent des discontinuités dans la fonction de radiosité.

Pour que les choses soient bien claires, prenons un exemple en deux dimensions (figure 1.9). Considérons un segment lumineux  $S$ , un segment récepteur  $R$  et un obstacle polygonal  $O$ . Nous nous intéressons à un point qui se déplace le long du segment  $R$ . Lorsqu'il se trouve en  $p$  (schéma de gauche de la figure 1.9), ce point ne reçoit aucune énergie lumineuse depuis  $S$ . Imaginons maintenant qu'il se déplace en direction du point  $q$  (schéma de droite). Quand le point atteint la position  $d$ , il commence à recevoir de l'énergie depuis la source  $S$  : la radiance reçue par le point passe subitement de 0 à une valeur  $L \neq 0$ . D'où la présence d'une discontinuité dans la dérivée première de la fonction de radiance.

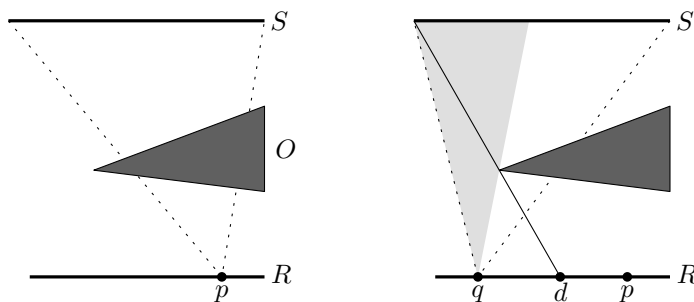


FIG. 1.9 – Illustration des sources de discontinuité dans l'équation de radiosité (en deux dimensions). La surface  $R$  est éclairée par la surface  $S$  en présence de l'objet  $O$ . Le point  $p$  est complètement caché de  $S$  par  $O$ . En revanche, les points  $d$  et  $q$  ont une vue, bien que partielle, de  $S$ .

Grossièrement, lorsqu'un point se déplace à la surface d'un objet, une discontinuité dans la fonction de radiosité se produit quand la vue, que ce point a des sources lumineuses, change qualitativement. Ce type de changement est appelée un *événement visuel* (*visual event*).

Historiquement, la notion d'événements visuels est apparue avec les travaux sur les graphes d'aspects menés par Koenderink et van Doorn [72, 71]. Intuitivement, ils traduisent une idée simple puisqu'ils correspondent aux instants où la vue d'un observateur, qui se déplace dans une scène, change. Néanmoins, ils posent de nombreuses questions à la fois pratiques et théoriques. Notamment, ils souffrent du manque d'un cadre « universel » de définition. En l'état actuel des recherches, il n'existe pas de cadre général dans lequel la vue (et l'équivalence entre les vues) d'une scène est clairement posée : en fonction de la nature des objets considérés, différentes définitions incompatibles sont proposées.

Pour construire le maillage de discontinuités, Heckbert, d'une part, et Lischinski et ses coauteurs, d'autre part, se basent sur une notion de vue introduite pour les polyèdres par Gigus et Malik [44]. De ce concept de vue (et de l'équivalence entre les vues) découle une caractérisation géométrique des lieux où se produisent les événements visuels : des surfaces engendrées par les sommets et les arêtes des polyèdres de la scène. Malheureusement, même pour des scènes de taille moyenne, voire faible, le nombre de ces surfaces est très important et implique la construction d'une ossature du maillage de discontinuités très grosse. Trop grosse ?

En considérant une configuration simplifiée où les polyèdres de la scène projettent des ombres sur un

plan, des bornes théoriques triviales peuvent être fournies sur la taille, dans le pire des cas, de l'ossature du maillage de discontinuités. Toutefois, aucune borne fine n'est connue pour cette structure. D'où, la première question qui motive notre travail :

**Question 1** – Quelles bornes peut-on obtenir sur la complexité du maillage de discontinuités ?

De plus, compte tenu de la remarque faite par Hart, Dutré et Greenberg : « *many of the resulting mesh elements do not affect the final image quality* » ([54], page 1), nous nous posons les questions suivantes :

**Question 2** – Une autre définition de la vue dans une scène polyédrique est-elle envisageable ?

**Question 3** – Quelles conséquences cette définition aurait-elle sur le calcul des ombres ?

### 1.3.4 Difficultés du calcul des ombres

Finalement, pour conclure cette introduction nous donnons un petit aperçu historique du calcul d'ombres en informatique graphique, en insistant sur la difficulté inhérente à cette tâche. Aux balbutiements de la discipline, les sources de lumière sont approchées par des sources « simples » et « idéales » : les sources ponctuelles, les sources directionnelles et les cônes de lumière (voir, par exemple, les ouvrages de Foley [42], de Shirley et de ses coauteurs [105] ou de Akenine-Möller et Haines [3]). Décider si un point est dans l'ombre d'une source de ce type se ramène à une requête de visibilité « point à point », qui se résout facilement.

Malheureusement, l'approximation des sources de lumière au moyen de sources idéales ne permet pas de simuler tous les types de scènes. Par exemple, Akenine-Möller et Haines énoncent que « *[those] shadows usually look less realistic and can sometimes be misinterpreted as actual geometric features, such as a crease in a surface* » ([3], page 250). Cette affirmation est confortée, notamment, par les travaux de Rademacher et de ses coauteurs cités précédemment [97].

Ce phénomène vient de ce que ces ombres, appelées *ombres dures* (*hard shadows*), engendrent des variations trop marquées dans les zones de pénombre. Pour une scène éclairée par  $k$  sources idéalisées, le nombre total de niveaux possibles d'ombrage est au plus  $2^k$  alors que dans une scène réelle les variations dans l'intensité des zones de pénombre, ont tendance à être continues. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des sources non idéalisées qui, de par leur nature surfacique, correspondent aux émetteurs qui se trouvent dans la nature. Celles-ci sont à l'origine des *ombres douces* (*soft shadows*). La figure 1.10 illustre la différence entre les deux types d'ombres.

Toutefois, la prise en compte des ombres douces est beaucoup plus ardue. Il est même admis que c'est l'un des problèmes les plus complexes en synthèse d'images. Par exemple, Soler et Sillion écrivent : « *the computation of soft shadows, i.e. shadows cast by extended light sources, is one of the most difficult challenges in rendering for computer graphics* » [108]. Cette différence de complexité vient de ce que nous avons deux problèmes profondément distincts. Dans le contexte de sources ponctuelles, déterminer si un point est dans l'ombre se ramène à un ensemble de requêtes de visibilité « point-à-point ». Au contraire,



FIG. 1.10 – Ces deux images ont été obtenues par illumination d'un même modèle. L'image de gauche est le résultat de l'éclairage par une source ponctuelle, l'ombre est donc dure. L'ombre de droite est engendrée par une source surfacique. Ces images sont extraites de [55].

pour des sources surfaciques, la question est plus subtile et met en jeu des questions de visibilité « surface à surface » qui ne sont pas encore résolues.

## 1.4 Résumé

La prise en compte des sources lumineuses surfaciques est nécessaire pour la simulation de certaines scènes réalistes. Malheureusement, ce type d'émetteurs pose des problèmes théoriques et pratiques. Dans le cadre de la radiativité, ces difficultés se manifestent au travers de discontinuités dans l'équation de radiativité, que l'algorithme a du mal à appréhender. La raison en est son incapacité à modéliser les grandes variations sur des éléments du maillage. L'une des stratégies possibles, pour régler ces complications, est de déterminer *a priori* les lieux où se produisent ces discontinuités et de se baser sur ceux-ci pour construire le maillage. L'extraction des positions de discontinuités repose sur une caractérisation géométrique de celles-ci par le biais des surfaces d'événements visuels. Dans cette thèse, nous abordons deux grandes questions. En premier lieu, nous tâchons de fournir une réponse théorique sur la taille de l'arrangement qui contraint le maillage de discontinuités. Le but est d'extraire des surfaces d'événements visuels, un sous-ensemble plus compact suffisant à la synthèse d'ombres réalistes.

## Chapitre 2

# Problématiques et contributions

### 2.1 Événements visuels d'ensembles convexes disjoints

Au chapitre d'introduction, nous avons soulevé l'un des principaux problèmes constatés du maillage de discontinuités : sa trop grande taille en mémoire. Nous avons également relevé que, selon certains spécialistes, ce phénomène pourrait être aggravé, voire expliqué, par la présence d'informations superflues. Nous nous demandons donc s'il ne serait pas possible d'adopter une définition alternative de la vue d'une scène qui aurait pour conséquences d'engendrer des surfaces d'événements visuels en moindre quantité et dont nous pourrions garantir la pertinence. Le maillage de discontinuités ainsi construit occuperait moins de place.

#### 2.1.1 Divers cadres de définitions incompatibles

Pour débiter, considérons le cas concret d'une scène composée de sphères. L'une d'elles est une source lumineuse. Nous souhaitons utiliser l'algorithme de radiosité pour synthétiser une image réaliste à partir de cette description. La première étape est de construire un maillage des sphères, par exemple, en calculant une triangulation de chacune de ces surfaces. Le maillage de la scène est ensuite reconstruit par l'algorithme de radiosité pour prendre en compte les surfaces d'événements visuels (EV et EEE) engendrées par les *triangles* qui décrivent les approximations polyédriques des objets (les sphères). C'est l'approche classique dite de maillage de discontinuités. D'un point de vue pratique, elle a le défaut de créer des subdivisions trop détaillées, qui occupent trop de place en mémoire et qui contiennent plus que les informations strictement nécessaires. Mais que se passerait-il si nous ne considérions que les surfaces<sup>4</sup> d'événements visuels engendrées par les *sphères* elles-mêmes ? Intuitivement, cela reviendrait à ne prendre en compte que les apparitions, disparitions et occultations partielles des sphères plutôt que des triangles qui les composent. En particulier, en se focalisant sur la source lumineuse, les surfaces d'événements visuels partitionneraient ainsi l'espace en trois grandes régions : celles depuis lesquelles il

---

<sup>4</sup>Nous verrons un peu plus loin que les lieux où se produisent des événements visuels dans une scène formée de sphères forment des surfaces.



est possible de voir l'intégralité de la source de lumière, celles depuis lesquelles seulement une portion de l'émetteur est visible et celles où l'observateur est intégralement caché de la source. Cette partition correspond à la définition classique des ombres douces engendrées par des sources surfaciques, c'est-à-dire la décomposition de l'ensemble des surfaces de la scène en zones de *lumière* (*full light*), de *pénombre* (*penumbra*) et d'*ombre* (*umbra*) (voir figure 2.1).

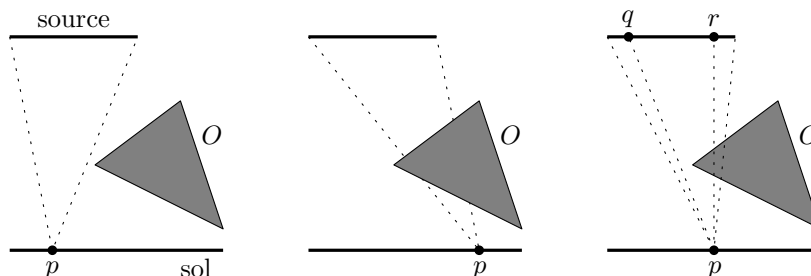


FIG. 2.1 – Les trois types de régions d'ombre. Le segment du haut est la source lumineuse alors que le triangle  $O$  est un objet bloquant. Sur le schéma de gauche, le point  $p$  est dans la lumière (aucun des segments entre  $p$  et la source n'intersecte  $O$ ). Au centre, il est dans l'ombre (tous les segments entre  $p$  et la source intersectent  $O$ ). À droite, il est dans la pénombre (le segment  $pq$  n'intersecte pas  $O$  alors que  $pr$  le fait).

Pour définir la nature des surfaces d'événements visuels dans le cas des sphères, intéressons-nous aux travaux qui portent sur la notion de vue d'une sphère et qui sont à l'origine du concept d'événements visuels. Historiquement, les événements visuels ont été introduits par Koenderink et van Doorn [72, 71] en même temps que la structure du *graphe d'aspects* (*aspect graph*). Ce sont dans les recherches sur le graphe d'aspects que nous trouvons l'un des problèmes que nous traitons dans cette thèse : l'absence d'un cadre général cohérent de définition de la vue d'une scène et des événements visuels qui s'y produisent.

### 2.1.1.1 Concept de graphe d'aspects

Commençons par présenter la structure du graphe d'aspects. Plaçons-nous dans le contexte de la vision par ordinateur et abordons le problème de faire reconnaître un objet  $O$  en trois dimensions par un programme informatique. L'approche à l'origine du graphe d'aspects est de définir une représentation « simple » de l'objet afin de la comparer avec une base de données contenant les descriptions (suivant la même représentation) de formes identifiées. Le but est d'établir une correspondance qui permette d'identifier  $O$ . Le graphe d'aspects est une représentation « simple » de  $O$ . Compte tenu de cet objectif, le principe de construction du graphe d'aspects est de considérer un ensemble de points de vues autour de l'objet  $O$  et d'établir une partition de cet ensemble en régions depuis lesquelles la *vue* de l'objet est toujours la *même*. Le graphe d'aspects, en lui-même, est la structure combinatoire qui associe un sommet à chacune des régions de cette partition des points de vue et qui lie deux sommets lorsqu'ils correspondent à des régions adjacentes.

Pour faire le lien entre le graphe d'aspects et les événements visuels, il suffit de penser à la partition des points de vue. Les événements visuels marquent les changements structuraux dans la vue qu'un observateur mobile a d'une scène (ou d'un objet). En d'autres termes, pour « passer » d'une région de la partition des points de vue à une autre, il faut transiter par le lieu d'un événement visuel. Il s'en suit que

les limites entre les régions, de la partition de l'espace des points de vues, sont formées par les points (les surfaces) où se produisent les événements visuels.

### 2.1.1.2 Deux cadres de définition : polyèdres et objets lisses

La partition de l'espace des points de vues est l'ensemble des classes de points ayant la *même vue* d'un objet. Pour entrer dans les détails, et préciser la définition du graphe d'aspects, il faudrait établir ce que nous entendons par ces notions de vue et d'équivalence entre les vues. Malheureusement, il n'existe pas de définition de ces concepts qui fasse abstraction de la nature des objets considérés (polyèdres, objets lisses, etc). Par conséquent, la caractérisation des événements visuels dépend toujours du cadre choisi. Pire, les définitions proposées dans les différents cadres sont incompatibles.

**Polyèdres.** Dans le contexte de polyèdres, Gigus et Malik [44], dont les travaux servent de base à de nombreux articles d'informatique graphique, définissent la vue d'un objet comme une structure combinatoire appelée *graphe de structure étiquetée d'image (labelled image structure graph)*. L'équivalence entre les vues est un isomorphisme entre graphes. Pour développer leur algorithme de construction du graphe d'aspects, ils présentent une description géométrique des lieux où se produisent les événements visuels engendrés par des polyèdres. Il en existe deux types : les surfaces d'événements visuels EV et les surfaces d'événements visuels EEE. Les surfaces EV sont des morceaux de plan qui sont engendrés par un sommet et une arête (schéma de gauche de la figure 2.2). Quant aux surfaces EEE, ce sont des morceaux de quadriques engendrés par trois arêtes (schéma de droite de la figure 2.2).

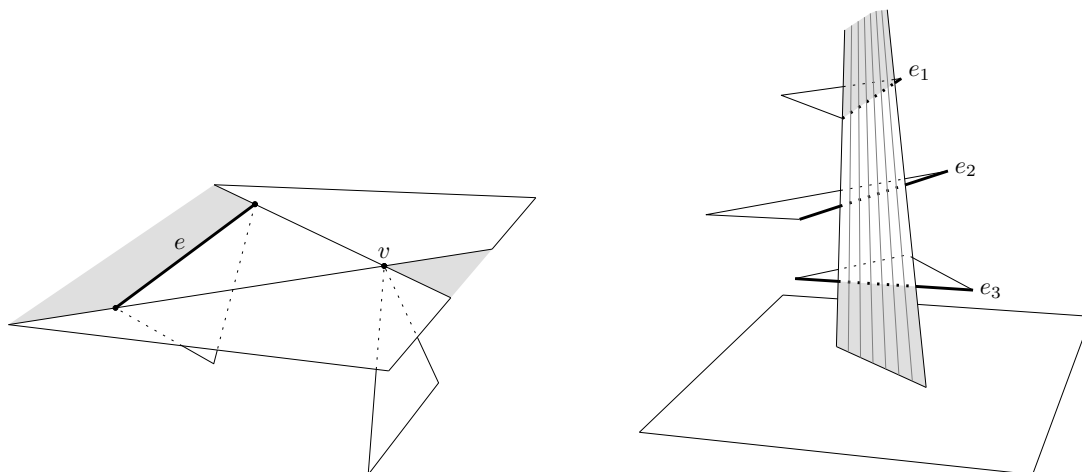


FIG. 2.2 – Lieux d'apparition des événements visuels de polyèdres. À gauche, une surface EV est la portion de plan engendrée par l'arête  $e$  et le sommet  $v$  (portion grisée). À droite, une surface EEE. C'est une portion d'une surface quadrique engendrée par trois arêtes.

**Objets lisses et lisses par morceaux.** Pour des surfaces lisses, la vue est définie comme une projection de l'espace ambiant vers celui des points de vues et l'équivalence entre les vues est une paire de

changements de coordonnées qui sont de classe  $C^\infty$ . La théorie des singularités, initiée par Whitney [122], définit un catalogue complet des événements visuels [5, 93]. Il existe cinq types de surfaces réglées sur lesquelles sont localisés les événements visuels produits par des surfaces lisses [68, 98, 99] et 19 pour des surfaces lisses par morceaux [98, 101]. Pour le cas particuliers d’objets convexes, il existe deux types de surfaces d’événements visuels : les surfaces  $T++T$  et les surfaces  $T+T+T$ . Les premières sont des ensembles de droites dans des plans tangents à deux objets (schéma de gauche de la figure 2.3) alors que les secondes sont des ensembles de droites tangentes à trois objets (schéma de droite de la figure 2.3).

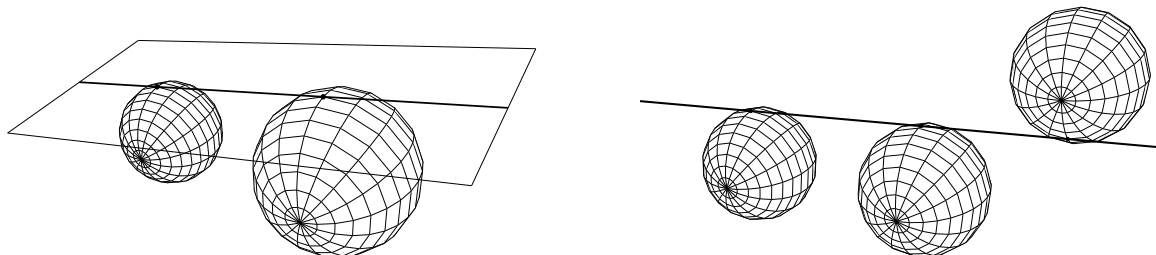


FIG. 2.3 – Droites d’événements visuels  $T++T$  et  $T+T+T$ . Une droite  $T++T$  (schéma de gauche) est une droite tangente aux deux objets qui est contenue dans un plan tangent commun à ces objets. Une droite  $T+T+T$  (schéma de droite) est une droite tangente à trois objets.

Ainsi, pour résumer, il n’existe pas de définition de vue (et de l’équivalence entre vues) qui ne dépende pas de la nature des objets considérés. Ceci implique l’absence d’une caractérisation globale des ensembles d’événements visuels valable pour une scène composée de divers types d’objets (un polyèdre et une sphère, par exemple). Par contre, ils prennent sens dans les divers cadres que sont les polyèdres, les objets lisses ou les objets lisses par morceaux.

### 2.1.1.3 Incompatibilité des surfaces d’événements visuels

En elle-même cette absence de définition générale n’est pas nécessairement un problème. Pourtant, il existe une raison pour être dérangé par ce manque d’universalité du cadre d’étude : l’incompatibilité entre les différentes définitions. Pour illustrer ce problème, revenons au cas de la scène formée de sphères. Les sphères, chacune définie par une unique équation algébrique, sont des objets lisses. D’après la classification pour les objets lisses et convexes, mentionnée ci-dessus, les événements visuels se produisent sur les surfaces  $T++T$  et  $T+T+T$ . Toutefois, suivant un angle plus pratique (par exemple, dans l’algorithme de radiosité), nous souhaitons plutôt manipuler des approximations de ces sphères sous la forme de polyèdres. D’après la classification établie dans ce cadre, les événements visuels apparaissent sur des surfaces  $EV$  et  $EEE$ . Or, si les surfaces  $EEE$  et  $T+T+T$  sont compatibles, les surfaces  $T++T$  sont en revanche beaucoup plus restrictives que leurs homologues  $EV$ . Elles imposent une contrainte sur l’existence d’un plan bitangent qui n’est pas présente dans le cas des surfaces d’événements  $EV$ . Nous avons ainsi une divergence sur la nature des surfaces d’événements visuels suivant que nous considérons des sphères ou des approximations polyédriques de ces sphères. C’est d’autant plus dommageable, qu’en faisant tendre les approximations polyédriques vers les sphères (en augmentant la précision du maillage), nous serions en droit d’attendre une convergence des surfaces d’événements visuels engendrées par les polyèdres et celles correspondant aux sphères.

### 2.1.2 L'objectif d'un cadre général et cohérent

Nous venons de voir que les événements visuels ne sont pas définis dans un cadre général qui engloberait « tous les objets ». De surcroît, il y a une absence de passerelles entre différents contextes qui sont pourtant complémentaires. Ceci nous pose problème lorsque nous considérons des sphères. Même en augmentant la précision du maillage d'une sphère pour le faire tendre vers la solution de l'équation algébrique qui décrit la sphère, les surfaces d'événements visuels divergent. Nous souhaiterions définir un cadre qui permette de créer le lien entre notre modèle théorique « idéal » (la scène de sphères) et son approximation « pratique » (la scène de polyèdres qui forment des maillages des sphères).

Plus généralement, un objectif vers lequel il serait souhaitable de tendre est une unification des cadres d'étude afin d'obtenir un lien incontestable entre modèles théoriques continus et représentations pratiques discrètes. C'est un objectif à long terme qui n'est pas propre au traitement des événements visuels. Néanmoins, dans la problématique des événements visuels, nous souhaiterions arriver à une formulation qui ne dépende plus de la classe des objets considérés mais, plutôt, à une définition sur des objets généraux. Du moins, dans un premier temps, nous voudrions obtenir une définition qui permette un passage entre les descriptions continues et discrètes.

### 2.1.3 Approche

Afin de créer un premier lien entre événements visuels d'objets continus et discrets, nous avons choisi de nous placer dans le cadre d'ensembles d'objets convexes et disjoints de  $\mathbb{R}^3$ . Nous justifions le choix des objets convexes et disjoints par trois grandes raisons. Premièrement, il ne faut pas s'en cacher, les objets convexes et disjoints sont plus simples à appréhender que des objets plus généraux. Pour illustrer ceci, il suffit de se référer à la classification des événements visuels d'objets lisses par morceaux. Pour des objets lisses par morceaux « quelconques » (en réalité, certaines contraintes sont ajoutées sur ces objets), il y a 19 types d'événements visuels alors que ce nombre chute à 2 lorsque la contrainte de convexité est ajoutée. Deuxièmement, un certain nombre d'objets généraux peuvent être décomposés au moyen de convexes non disjoints (en graphisme, par exemple, les maillages volumiques de tous types d'objets). Nous espérons donc qu'une meilleure compréhension du cas des ensembles convexes et disjoints sera une étape vers la prise en compte des objets convexes *non disjoints* puis, à terme, si les résultats obtenus sont satisfaisants, des objets généraux. Finalement, le contexte des objets convexes a une intersection non vide avec les différents cadres de description des événements visuels sans, pour autant, être contenu proprement dans aucun. En effet, l'exemple de la sphère le montre bien. Une sphère n'est pas un polyèdre mais son approximation (qui est également convexe) l'est. De même cette approximation polyédrique ne rentre pas dans la classification des objets lisses par morceaux<sup>5</sup> alors que la sphère y trouve sa place. Ce serait donc bien un premier lien entre cadres continus et discrets.

<sup>5</sup>Les contraintes qui permettent de poser le cadre des objets lisses par morceaux sont trop contraignantes [102]. De toute manière, nous souhaiterions traiter les approximations polyédriques d'objets lisses indépendamment de leurs maillages et, en particulier, sans tenir compte du nombre de sommets. Or, la notion de stabilité dans le cas des objets lisses par morceaux repose justement sur la prise en compte des singularités (donc des sommets) dans les contours apparents.

### 2.1.4 Caractérisation géométrique des lieux d'événements visuels

Au chapitre 4, nous proposons une définition de la vue d'une scène formée d'ensembles convexes et disjoints de  $\mathbb{R}^3$  ainsi qu'une formulation de l'équivalence entre les vues. Ces propositions mettent l'accent sur la prise en compte des contours visibles des objets et sont cohérentes avec notre envie de traduire les apparitions, disparitions et occultations partielles d'objets convexes. Ensuite, nous démontrons une caractérisation géométrique des lieux où se produisent ces événements visuels : les points qui appartiennent à des droites tangentes à deux objets dans un plan support commun à ceux-ci (droites T++T) ou qui se trouvent sur des droites tangentes à trois objets (droites T+T+T). De plus, nous démontrons, ce qui est préférable pour certaines applications, que l'ensemble des lieux d'événements visuels, c'est-à-dire des positions où se produisent des changements qualitatifs dans la vue d'un observateur mobile, est nulle part dense. Notons que dans l'idéal, il serait souhaitable de démontrer que ces lieux forment des surfaces (plus précisément, des unions dénombrables de surfaces) car cela permettrait de garantir une probabilité nulle de choisir aléatoirement un point de vue instable. Nous n'y arrivons pas dans le cas général mais nous franchissons une première étape dans cette direction. Finalement, remarquons que les lieux d'événements visuels sont des surfaces pour les polyèdres alors que la question est ouverte pour les objets lisses.

### 2.1.5 Intérêt des résultats

Ces résultats sont les premiers à établir un lien clair, dans l'étude des événements visuels, entre le contexte discret (des polyèdres) et le contexte continu (des objets lisses par morceaux). Ils posent les bases de résultats de passage à la limite<sup>6</sup>. C'est intéressant dans la mesure où il existe des implications dans des travaux de recherche actuels. Par exemple, la structure du squelette de visibilité introduite par Durand, Drettakis et Puech [33, 35] pour encoder les surfaces d'événements visuels, peut se définir sur des polyèdres (le cadre originel de sa définition) ou sur des sphères. La question est alors de savoir si en approximant de plus en plus finement les sphères par des polyèdres, nous obtenons un squelette de visibilité de polyèdres qui tend vers celui calculé sur les sphères. Réciproquement, est-ce que les résultats théoriques qui font état d'une complexité linéaire pour la taille du squelette dans le cas de sphères [26] sont utilisables dans le cas des polyèdres.

Un autre intérêt de nos résultats réside dans leur compatibilité avec les cadres plus restrictifs, mais habituels, de définition des événements visuels. En effet, pour des polyèdres convexes et disjoints, la définition des événements visuels EV et EEE par Gigus et Malik se retrouve dans nos résultats en considérant chacune des faces des polyèdres comme des objets propres. Au fond, cela n'est pas étonnant puisque nos résultats relèvent d'une compréhension des faces comme définissant un objet (un ensemble de faces prises comme un tout), alors que Gigus et Malik travaillent sur une intuition, au demeurant puissante, des interactions entre des « soupes » de polygones. De même, notre formulation des événements visuels, notamment pour les sphères, est compatible avec le cas des objets convexes et lisses par morceaux (où les événements visuels sont également les T++T et les T+T+T).

<sup>6</sup>Ces résultats ne sont pas présentés dans cette thèse.

## 2.2 Complexité des limites d’ombres

Pour notre seconde problématique, nous partons d’un constat simple : le manque d’efficacité constaté du maillage de discontinuités ne peut être ni infirmé ni corroboré par des résultats théoriques existants. En particulier, rien ne nous permet d’établir un lien entre l’inefficacité pratique et une complexité intrinsèque trop importante. Dans le cadre de notre première problématique, nous avons réfléchi à une formulation de la vue d’une scène qui correspondrait avec la définition classique des ombres engendrées par des sources surfaciques : la décomposition en zones de lumière, de pénombre et d’ombre. Ici, nous choisissons de travailler sur l’arrangement des limites entre ces trois types de régions. Nous pensons que cet ensemble de courbes forme une ossature pertinente du maillage de discontinuités.

Pour justifier le besoin d’une étude théorique, considérons une scène composée d’objets polyédriques de  $\mathbb{R}^3$  de complexité totale  $n$ . L’un de ces objets est une source lumineuse qui éclaire un plan représentant le sol (figure 2.4). Les autres polyèdres jouent le rôle d’obstacles et engendrent des ombres sur ce plan. Dans ce modèle, le nombre de surfaces d’événements visuels  $T++T$  est au pire  $O(n^2)$  alors que celui de surfaces  $T+T+T$  est  $O(n^3)$ . Par conséquent, la taille du maillage de discontinuités dans le plan du sol est dans le cas le pire :  $O(n^6)$  puisque la taille d’un arrangement de  $k$  courbes de complexité constante est au pire  $O(k^2)$ . Cette complexité est rédhibitoire pour une utilisation pratique mais relève d’une analyse triviale qui ne tient pas compte de la nature particulière de la source lumineuse ni des différentes limites entre les régions.

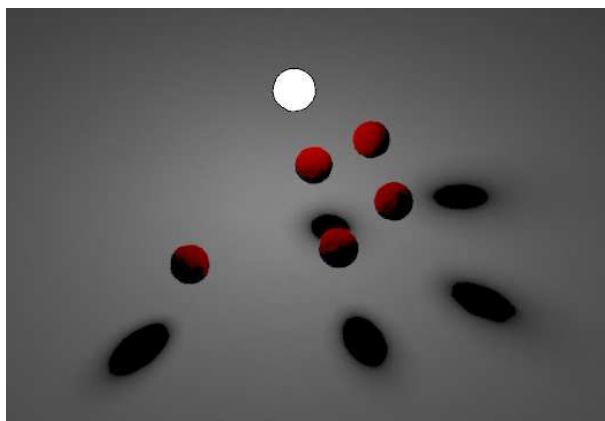


FIG. 2.4 – Image d’une scène composée de polyèdres dont l’un (en blanc) est une source lumineuse. Cette scène projette des ombres sur un plan représentant le sol.

Notre objectif est donc de présenter une analyse théorique du maillage de discontinuités. En particulier, nous souhaitons établir des bornes de complexité concernant la taille de cette structure. L’existence de bornes de faible complexité pourrait légitimer cette structure et motiver des recherches nouvelles à son sujet. À l’opposé, des bornes de forte complexité seraient des signes, voire des preuves, de son inadéquation avec la résolution pratique de la synthèse d’ombres.

### 2.2.1 Modèles de scènes

Reprenons la description de la scène précédente et détaillons la un petit peu. Nous nous plaçons dans le cadre de polyèdres convexes de  $\mathbb{R}^3$  où certains objets jouent le rôle de sources lumineuses et d'autres d'obstacles. Les ombres sont projetées sur un plan (qui symbolise le sol et qui, par facilité, est identifié avec le plan  $xOz$  du repère canonique de l'espace euclidien de dimension 3). Un point est dans la *lumière* (*full light*) si aucun des segments qui le lient à un point d'une source lumineuse n'intersecte d'obstacle de la scène (schéma de gauche de la figure 2.1). À l'opposé, il est dans l'*ombre* (*umbra*)<sup>7</sup> si tous les segments attachés à des points de surfaces lumineuses intersectent un obstacle (schéma central de la figure 2.1). Finalement, un point est dans la *pénombre* (*penumbra*) s'il n'est ni dans l'ombre, ni dans la lumière, c'est-à-dire qu'il existe deux points de surfaces lumineuses qui engendrent avec ce point un segment qui n'intersecte l'intérieur d'aucun bloqueur et un segment bloqué par un obstacle (schéma de droite de la figure 2.1).

### 2.2.2 Résultats obtenus

Nous considérons différents types de scènes, en commençant par les situations les plus simples afin de roder notre intuition. Premièrement, nous prenons le cas d'une scène formée de  $k$  polyèdres convexes et illuminée par un segment lumineux. Ensuite, nous considérons une scène contenant  $k$  polyèdres convexes qui peuvent tous être des sources lumineuses (le cas où les  $k$  polyèdres seraient des sources lumineuses n'est pas intéressant car il n'y aurait pas d'ombre). À chaque fois, la complexité totale des polyèdres est  $n$ . Nous démontrons les bornes supérieures, sur la complexité des composantes connexes d'ombres, ainsi que les bornes inférieures, sur le nombre maximum de composantes connexes d'ombre, qui sont résumées dans le tableau 2.1.

Type de scène	Minoration	Majoration
<b>Segment lumineux</b>		
2 triangles disjoints	4	$O(1)$
2 polyèdres convexes, épais et disjoints	$\Omega(n)$	$O(n)$
$k$ polyèdres convexes et disjoints	$\Omega(nk^2 + k^4)$	$O(nk^3)$
$k$ polyèdres convexes	$\Omega(nk^2 + k^4)$	$O(n^2k^2)$
<b>Source(s) polygonale(s)</b>		
	Source unique	$O(k)$ sources
$k$ polyèdres convexes	$\Omega(n^2k^3 + nk^5)$	$O(n^3k^3)$

TAB. 2.1 – Bornes inférieures sur le nombre maximum de composantes connexes et bornes supérieures sur la complexité des ombres projetées sur un plan par un segment lumineux ou des sources polygonales en présence de  $k$  polyèdres convexes de complexité totale  $O(n)$ . Rappelons qu'un polyèdre est  $\alpha$ -épais si le rapport entre le rayon de la petite sphère englobante et celui de la plus grande sphère inscrite dans l'objet est majoré par  $\alpha$ .

De plus, bien que le calcul des limites « ombre-pénombre » soit beaucoup plus complexes que celui des frontières entre pénombre et lumière, nous prouvons également des bornes sur la complexité des régions de pénombre. Ces résultats sont présentés au tableau 2.2.

<sup>7</sup>Remarquons que le terme ombre est le même que celui employé pour traduire *shadow*. Or, l'ombre (*shadow*) est l'union de la pénombre et de l'ombre (*umbra*). Nous tâcherons de faire en sorte que l'utilisation du mot ombre soit toujours claire.

Sources lumineuses	Borne inférieure	Borne supérieure
$O(1)$ polyèdres convexes de taille $m$	$\Omega(n\alpha(k) + km + k^2)$	$O(n\alpha(k) + km\alpha(k) + k^2)$
$O(k)$ polyèdres convexes de taille totale $O(n)$	$\Omega(nk + k^4)$	$O(nk\alpha(k) + k^4)$

TAB. 2.2 – Bornes sur la complexité de l'union des régions d'ombre et de pénombre projetées sur un plan par un ensemble de  $k$  polyèdres convexes dont certains sont des sources lumineuses.

### 2.2.3 Intérêt des résultats

Ces résultats sont les premiers à faire intervenir, dans les bornes de complexité sur le maillage de discontinuités, le nombre d'objets  $k$  ainsi que la complexité  $n$  des polyèdres. Ils montrent, comme nous pouvions le penser, que la complexité du maillage de discontinuités est moindre lorsque l'on tire partie des structures qui lient les faces des polyèdres de la scène (plutôt que de considérer les faces séparément). De plus, les bornes inférieures que nous démontrons ne sont ni triviales ni intuitives. En particulier, le cas des quatre composantes connexes d'ombre pour deux triangles éclairés par un segment lumineux est un exemple de résultat qui peut sembler surprenant. Cela traduit le fait que notre intuition (encore moins, notre compréhension) du problème n'est vraiment pas excellente.

Finalement, sous l'hypothèse que la structure n'aurait un intérêt que si sa complexité dans le pire des cas était au plus quadratique, nos résultats confirmeraient que le maillage de discontinuités est une structure trop lourde pour avoir un intérêt pratique. Y compris en restreignant son ossature aux limites « ombre-pénombre » et « lumière-pénombre ». Toutefois, comme souvent avec les bornes de complexité théorique dans le pire des cas, nous ne pouvons pas affirmer que la technique du maillage de discontinuités soit inexploitable en pratique. Malgré sa complexité théorique apparente. C'est d'autant plus vrai que les outils que nous utilisons pour démontrer les bornes théoriques ne sont pas forcément optimaux et que les bornes inférieures que nous construisons sont généralement pathologiques.

## 2.3 Calcul des limites d'ombres

Reprenons les deux premières problématiques que nous avons abordées. En premier lieu, nous avons construit une définition de la vue d'une scène qui est cohérente avec la décomposition en régions de lumière, pénombre et ombre. Pour cette notion de vue, nous avons établi une caractérisation géométrique des lieux d'événements visuels. Ceci étant, nous n'avons pas proposé de moyen d'extraire les limites « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre » à partir de l'ensemble des lieux d'événements visuels. D'où cette première question :

**Question** – Comment établir le lien entre événements visuels et les types de limites d'ombres ?

Dans un second temps, nous nous sommes basés sur l'idée que les limites « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre » jouaient un rôle crucial dans la construction des ombres. Mais :

**Question** – Les limites « ombre-pénombre » et « lumière-pénombre » suffisent-elles à synthétiser des ombres convaincantes ?



Finalement, comme nous l’avons remarqué, les bornes théoriques obtenues dans le pire des cas ne sont pas suffisantes pour rejeter la validité du maillage de discontinuités. Malgré ces nouvelles présomptions, de la complexité intrinsèque de la méthode du maillage de discontinuités, nous devons pousser plus en avant notre analyse pour atteindre notre objectif original. Il serait intéressant d’établir une analyse en moyenne de la complexité du maillage de discontinuités. Malheureusement, ces travaux sont beaucoup plus compliqués à mener que ceux dans le pire des cas. D’autant plus que faire une analyse en moyenne nécessite d’être capable de définir un modèle aléatoire décrivant les données du problème, c’est-à-dire les scènes typiquement traitées dans le cas du maillage de discontinuités. Or, la construction d’un modèle aléatoire de scènes réelles est un problème non résolu du domaine de la synthèse d’images (cf., par exemple, [16]). D’où cette dernière question :

**Question** – Une analyse expérimentale de la taille de l’arrangement des limites d’ombres confirmerait-elle les résultats théoriques ?

### 2.3.1 Construction de l’ossature du maillage de discontinuités

Durand, Drettakis et Puech [33, 34] proposent d’utiliser le squelette de visibilité pour l’extraction des courbes de discontinuités d’une scène composée de polyèdres. Leur approche souffre d’un coût en temps de calcul et en taille mémoire ainsi que d’une sensibilité aux imprécisions numériques qui la rendent inutilisable en pratique. Par exemple, ils rapportent, au sujet de l’utilisation du squelette de visibilité en radiosité, que « *two major limitations of this work can be identified, the first is high memory consumption and the second is numerical robustness problems of the algorithm used* » ([34], page 34). Pour autant, des travaux récents permettent de nuancer ce propos. Notamment, Goaoc a proposé un algorithme de calcul du squelette de visibilité qui opère en temps  $O(n^2k^2 \log n)$  [49] dans le cas d’une scène de complexité  $n$  formée par  $k$  polyèdres convexes disjoints. Les travaux de Brönnimann et ses coauteurs [14] peuvent servir à l’étendre aux polyèdres convexes non disjoints. Cet algorithme (en tout cas le balayage de l’espace pour extraire les nœuds du squelette) a été implémenté par Zhang et ses coauteurs [129]. Ils obtiennent une vérification expérimentale de la borne supérieure en  $O(n^2k^2 \log n)$  pour l’énumération de certains nœuds du squelette par l’algorithme proposé par Brönnimann *et al.*

### 2.3.2 Approche

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre de scènes formées de polyèdres convexes et disjoints de  $\mathbb{R}^3$  qui projettent des ombres sur un plan représentant le sol (figure 2.4, page 21). Le cœur de notre approche est de restreindre les courbes qui contraignent la construction du maillage de discontinuités aux limites entre les trois grands types de zones ombrées (ombre, pénombre et lumière). Dans un premier temps, nous démontrons qu’un sous-ensemble du squelette de visibilité de Durand, Drettakis et Puech est suffisant pour localiser ces courbes. Pour cela, nous caractérisons un ensemble de conditions nécessaires pour qu’une courbe soit une limite « lumière-pénombre » ou une limite « ombre-pénombre ». Ensuite, nous proposons une méthode pour extraire un ensemble de courbes qui contient les limites entre les régions ombrées. Finalement, nous présentons une validation expérimentale de notre approche.

### 2.3.3 Résultats obtenus

Pour des scènes aléatoires, le nombre de nœuds dans le squelette de visibilité que nous construisons est largement inférieur à celui des nœuds qui forment le squelette de Durand, Drettakis et Puech (jusqu'à 80%). De plus, la quantité de courbes que nous en extrayons pour contraindre le maillage de discontinuités est fortement moindre que celle utilisée dans l'approche classique du maillage de discontinuités. Finalement, les premières images que nous produisons laissent entrevoir des résultats visuellement intéressants.

Nous pensons que nos travaux apportent une première réponse à une remarque faite par Sillion et Puech en 1996 : « *although the essence of the algorithm is fairly simple, the complexity of the calculation often renders discontinuity meshing prohibitively expensive to use. In practice critical surfaces and curves should only be computed for a small number of significant events. Since there is no way to determine automatically whether the discontinuity associated with a given critical line will be visible in the rendered image, heuristics can be based on the predicted order of the discontinuities (favoring  $D^0$  and  $D^1$  discontinuities) and on the strength of the light source* » Sillion et Puech ([107], page 125) en caractérisant certaines discontinuités (les limites entre les régions d'ombre, pénombre et lumière) qui jouent un rôle dans l'image finale.



## Chapitre 3

# État de l'art

Les événements visuels sont le fil conducteur de ce chapitre. Tout d'abord, nous nous intéressons au graphe d'aspects qui est le cadre dans lequel ils sont apparus et dans lequel ils ont été abondamment étudiés. Ensuite, nous présentons certaines structures informatiques qui visent à encoder les surfaces d'événements visuels d'une scène. En particulier, nous étudions le squelette de visibilité. Finalement, nous nous focalisons sur le rôle des surfaces d'événements visuels dans les problématiques liées à la synthèse d'ombres.

### 3.1 Graphe d'aspects

#### 3.1.1 Caractéristiques fondamentales

Dans le contexte de la reconnaissance d'objets, l'objectif du graphe d'aspects est de proposer une représentation synthétique des différentes vues, appelées *aspects* (*aspects*), d'un objet à classifier. Prenons un objet en trois dimensions. Construire le graphe d'aspects revient à partitionner l'espace qui entoure l'objet en régions maximales depuis lesquelles la vue de celui-ci reste la même. À chaque région de l'espace partitionné, le graphe d'aspects associe un sommet et une représentation de la vue commune aux points de la région. Les sommets de régions limitrophes sont liés par une arête du graphe d'aspects. Ces liens sont appelés *événements visuels* (*visual events*) et correspondent à des changements structurels entre deux vues d'un même objet.

Cette esquisse du graphe d'aspects repose sur trois imprécisions. Premièrement, nous n'avons pas détaillé ce que nous entendions par « l'espace des points de vue qui entoure l'objet ». Ensuite, nous ne spécifions pas formellement ce qu'est la vue d'un objet. Finalement, nous ne posons pas de définition de l'équivalence entre deux vues. Pour définir et manipuler le graphe d'aspects, il est nécessaire de combler ces lacunes. De plus, il est intéressant, voire indispensable, de déterminer les types d'événements visuels qui apparaissent dans le graphe d'aspects et de caractériser les lieux où ils se produisent dans l'espace des points de vue.

En vision par ordinateur, il existe deux principaux (mais pas uniques) espaces de déplacement autour des objets à classifier. Le premier, le plus simple à manipuler, est une sphère qui englobe l'objet. Les points de vue se situent à la surface de cette sphère. L'objet est projeté sur un plan qui passe par le point de vue et dont la normale correspond à la direction formée par ce point de vue et le centre de la sphère. C'est la *projection orthographique* (*orthographic projection*). Le second espace de déplacement est l'ensemble des points réels (privé de l'objet). Intuitivement, le point de vue se trouve n'importe où autour de l'objet. L'objet est projeté à la surface d'une sphère imaginaire qui englobe le point de vue et le sépare strictement de l'objet. C'est la *projection perspective* (*perspective projection*).

### 3.1.2 Polyèdres

Comme nous l'avons dit, définir le graphe d'aspects c'est poser une définition de la notion de vue d'un objet et de l'équivalence entre les vues. Nous suivons ici ce schéma. Ensuite, nous nous intéressons aux événements visuels. Nous présentons les différents types de surfaces d'événements introduits par Gigus et Malik [44] puis nous introduisons les résultats de de Berg et ses coauteurs [78] concernant des bornes théoriques sur la complexité du graphe d'aspects. Finalement, nous abordons l'algorithmique de construction du graphe d'aspects.

**Vue.** La méthode la plus courante, dicit Bowyer et Dyer dans [12], pour définir la vue en deux dimensions d'un polyèdre est de recourir au *graphe de structure d'image* (*image structure graph*). Pour construire une représentation de l'aspect d'un objet depuis un point  $p$ , il suffit de déterminer l'arrangement des arêtes de l'objet visibles depuis ce point en respectant la projection liée à l'espace des points de vues. Le graphe de structure d'image est la structure combinatoire associée à cet arrangement. Remarquons qu'il est courant d'appeler les sommets de l'arrangement, dont le degré est supérieur ou égal à deux, des *jonctions* (*junctions*). Les schémas de la figure 3.1 représentent un objet (schéma de gauche) dont le graphe de structure d'image est celui indiqué sur le schéma central quand l'objet est considéré opaque et celui sur le schéma de droite quand il est transparent.

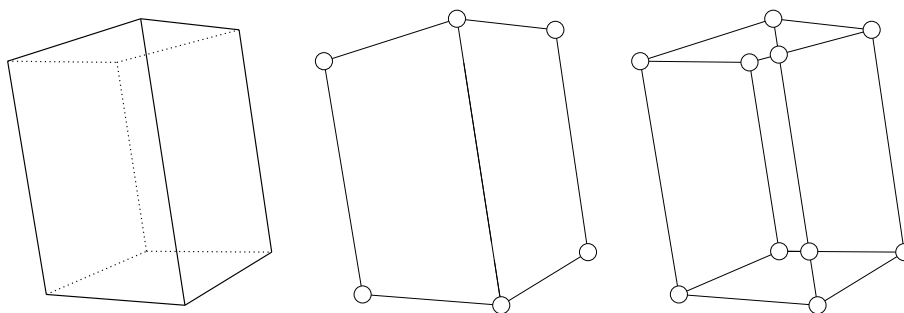


FIG. 3.1 – La figure de gauche montre un objet. Le schéma central est le graphe de structure d'image associé à l'aspect de l'objet considéré opaque alors que le schéma de droite montre un encodage de l'aspect de l'objet transparent.

En pratique, il est possible d'augmenter le graphe de structure en ajoutant des étiquettes aux sommets ou aux arcs. Par exemple, Gigus et Malik [44] ajoutent un marqueur aux arcs de leur graphe pour indiquer

si l'arête associée est à une jonction convexe ou concave entre deux faces de l'objet vu depuis  $p$ .

**Équivalence de vues.** Évaluer l'équivalence entre deux vues revient à comparer deux graphes de structure d'image. Cette opération est purement combinatoire et correspond à décider de l'existence d'un isomorphisme entre deux graphes étiquetés<sup>8</sup>. Ainsi, dans le contexte de polyèdres, la vue d'un objet depuis un point donné de l'espace, tout comme l'équivalence entre les vues, repose sur des considérations combinatoires.

**Événements visuels.** Au travers de leur recherche d'un algorithme pour le calcul du graphe d'aspects de polyèdres, Gigus et Malik [44] introduisent les deux types de surfaces d'événements visuels du cas polyédrique : les surfaces EV et EEE. Une surface EV est une portion de plan engendré par une arête  $e$  et un sommet  $v$  (schéma de gauche de la figure 3.2) alors qu'une surface EEE est un morceau de quadrique qui repose sur les trois arêtes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  (schéma de droite de la figure 3.2). Plus formellement, une surface EV, notée  $\langle e, v \rangle$ , engendrée (generated) par une arête  $e$  et un sommet  $v$ , est l'ensemble des points qui se trouvent de part et d'autre de  $e$  et  $v$  sur une droite transversale à  $e$  et qui passe par  $v$ . Une surface EEE, notée  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ , engendrée par les arêtes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  est l'ensemble des points qui se trouvent sur des droites transversales aux arêtes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  sans être entre les arêtes.

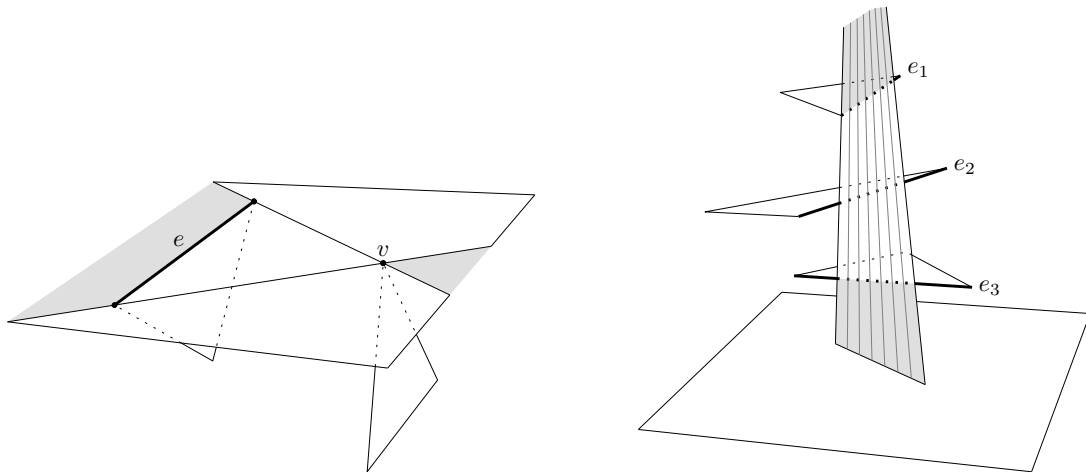


FIG. 3.2 – Lieux d'apparition des événements visuels de polyèdres. À gauche, une surface EV est la portion de plan engendrée par l'arête  $e$  et le sommet  $v$  (portion grisée). À droite, une surface EEE engendrée par les arêtes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ . C'est une portion d'une surface quadrique engendrée par trois arêtes.

**Complexité du graphe d'aspects.** Le nombre de surfaces d'événements EEE est majoré par  $O(n^3)$  alors que celui des surfaces EV l'est par  $O(n^2)$ . La complexité, dans le pire des cas, d'un arrangement de  $n$  arcs de courbes coniques est  $O(n^2)$  alors que celle d'un arrangement de  $n$  morceaux de surfaces quadriques est  $O(n^3)$ . Par conséquent, des bornes simples concernant la complexité, dans le pire des

<sup>8</sup>Le problème d'isomorphisme entre deux graphes non étiquetés reste ouvert en théorie de la complexité : personne ne sait dire s'il appartient à la classe P ni même s'il est NP-COMPLET. Quand les graphes sont étiquetés, cette question est décidable en temps polynomial.

cas, du graphe d'aspects d'un polyèdre de complexité  $n$  sont respectivement  $O(n^6)$  et  $O(n^9)$  pour les projections orthographique et perspective.

Les travaux de de Berg et de ses coauteurs [78] partent de l'idée selon laquelle toutes les surfaces d'événements EEE engendrées par une énumération complète des triplets d'arêtes ne participent pas à la partition de l'espace des points de vue. La borne  $O(n^3)$  sur le nombre de surfaces EEE serait pessimiste. De plus, deux surfaces d'événements EEE « valides » ne s'intersectent pas nécessairement. Les bornes  $O(n^2)$  et  $O(n^3)$  sur la complexité de l'arrangement seraient inappropriées dans ce cas. En effet, ils obtiennent les bornes supérieures, pour la complexité dans le pire des cas,  $O(n^4k^2)$  et  $O(n^6k^3)$  pour les projections orthographique et perspective quand les scènes considérées sont formées de  $k$  polyèdres convexes de complexité totale  $n$ . Ces bornes, comme l'ont démontré Aronov et ses coauteurs [6], sont effectivement atteintes.

**Approches algorithmiques.** Gigus et Malik [44], puis Gigus, Canny et Seidel [43], suggèrent d'énumérer les courbes d'événements visuels, sur la sphère des directions, engendrées par les paires arêtes-sommets (EV) et les triplets d'arêtes (EEE) de l'objet polyédrique. Puis, ils proposent de construire l'arrangement de ces courbes et, finalement, de déterminer un représentant pour chacune de ses cellules. La différence principale entre les deux approches est dans la gestion des occlusions. Gigus et Malik font abstraction de celles-ci pour construire une première version de l'arrangement sur la sphère des directions. Ensuite, l'arrangement est simplifié et les arêtes inconsistantes sont retirées. Gigus, Canny et Seidel ne prennent que les courbes correctes pour la construction de l'arrangement et évitent ainsi l'étape de simplification.

### 3.1.3 Ensembles lisses et lisses par morceaux

Une fois encore nous nous intéressons à la notion de vue et à celle d'équivalence entre les vues. Puis, nous nous concentrons sur les événements visuels.

**Vue et équivalence.** Le cadre des ensembles lisses et, plus généralement, des ensembles lisses par morceaux est plus compliqué. La vue d'un objet en un point  $p$  se définit comme la projection  $\pi_p$  qui associe à tout point  $q$  de l'objet, la direction qui passe par  $p$  et  $q$ . Deux vues  $f$  et  $g$  définies par des projections sont équivalentes s'il existe un couple de changements de coordonnées  $h$  et  $k$  de classe  $C^\infty$  telles que :

$$h \circ f = g \circ k.$$

De manière intuitive cela revient à dire que deux vues en  $p$  et  $q$  sont équivalentes s'il est possible, en appliquant des modifications  $C^\infty$  à l'objet et à sa projection en  $p$  d'obtenir la même projection qu'au point  $q$ .

**Théorie des singularités.** Le contour d'un objet lisse vu depuis un point quelconque est une courbe, du plan ou de la sphère des directions, qui peut, comme toute autre courbe plane, contenir des singularités. Pour *certaines* objets lisses<sup>9</sup>, la théorie des singularités, initiée par Whitney [122], décrit les singularités

---

<sup>9</sup>La théorie des singularités restreint son étude aux projections qui vérifie certaines conditions de généricité.

qui peuvent survenir sur le contour d'un objet vu depuis un point et étudie l'impact du déplacement de ce point de vue sur cette courbe [117, 5]. En particulier, une combinaison de travaux de Whitney [122] et de Mather [80] permet d'établir la stabilité du contour d'un objet lisse pour *presque tous* les points de vue. Un résultat similaire peut être établi sur la stabilité des contours de *certaines* objets lisses par morceaux, notamment, grâce aux travaux de Rieger [102] qui montrent que l'ensemble des points de vue instables est également de mesure nulle. Pour conclure ce bref paragraphe, notons que les objets algébriques lisses par morceaux n'entrent pas tous dans le cadre des résultats de la théorie des singularités car ils ne vérifient pas les conditions de définition de la théorie : « *il existe des sous-espaces ouverts et denses de l'espace des surfaces algébriques de faible degré pour lesquels la condition de projection-généricité est fautive* » ([87], page 70). La validité des résultats ne peut être obtenue qu'en imposant des contraintes très restrictives sur ces objets.

**Événements visuels.** Dans ces deux cadres, des classifications des lieux d'événements visuels ont été établies. Il existe cinq types de surfaces réglées sur lesquelles sont localisés les événements visuels produits par des surfaces lisses [68, 98, 99] et 19 pour des surfaces lisses par morceaux [98, 102]. Toutefois, il est à

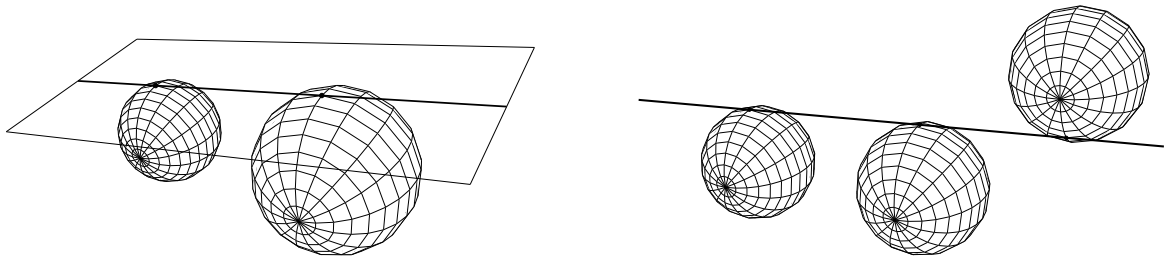


FIG. 3.3 – Droites d'événements visuels  $T++T$  et  $T+T+T$ .

noter que ce nombre d'événements visuels chute à deux pour des convexes lisses par morceaux. Ceux-ci se produisent lorsque le point d'observation se trouve sur une droite  $T++T$  ou une droite  $T+T+T$ . Suivant la terminologie adoptée dans l'article [90], cela revient à dire que les événements visuels  $T++T$  ont lieu quand l'observateur se place sur une droite tangente à deux objets convexes et contenue dans un plan qui leur est support (voir figure 3.3) ou dès que l'observateur est sur une droite tangente à trois objets. Ce cas est celui des événements  $T+T+T$  (voir figure 3.3). Il est évident qu'il apparaît ici une grande similitude avec le cas des polyèdres exposé précédemment puisque les événements  $T+T+T$  correspondent aux EEE. En revanche, il n'y a pas de réelle équivalence : les  $T++T$  sont des cas particuliers des EV. Ils imposent l'existence d'un plan bitangent supplémentaire.

**Complexité et approches algorithmiques.** Pour le cas d'un objet lisse défini par une équation algébrique *implicite* et observé sous la projection orthographique, Petitjean, Ponce et Kriegman [90, 86] proposent un algorithme numérique de construction du graphe d'aspects similaire à celui de Gigus et Malik. Ils déterminent les équations algébriques des courbes d'événements visuels sur la sphère des directions, calculent l'arrangement de ces courbes et « élisent » un représentant de la vue dans chacune des cellules. En utilisant une approche symbolique, Rieger [101] reprend le cas de la projection orthographique et l'étend à la projection perspective. Pour la projection orthographique et des objets lisses définis par des



surfaces algébriques *paramétrées*, Ponce et Kriegman [96] implémentent un algorithme numérique alors que Rieger propose une méthode symbolique [100]. En ce qui concerne le nombre d'aspects distincts d'un objet algébrique et lisse par morceaux formé de  $n$  surfaces de degré majoré par  $\delta$ , Petitjean démontre les bornes  $O(n^{12}\delta^{12})$  pour la projection orthographique et  $O(n^{18}\delta^{18})$  pour la projection perspective [88, 89]. Notons finalement, que Kriegman et Ponce [73] et Eggert and Bowyer [39] ont élaboré des méthodes de calcul du graphe d'aspects pour des solides de révolution vus suivant une projection orthographique et que Eggert [38] a étendu leur travail à la projection perspective.

## 3.2 Squelette de visibilité

Le graphe d'aspects est un outil pour la résolution du problème de classification d'objets. Il fait intervenir la partition de l'espace en région ayant la même vue. Dans les cas des polyèdres ou des objets lisses et lisses par morceaux, dont nous venons de parler, les limites entre les régions distinctes sont des surfaces composées de droites : des morceaux de plans et de surfaces réglées. Plantinga et Dyer [92] furent les premiers à proposer une structure pouvant encoder toutes ces surfaces réglées. Une autre approche est le *squelette de visibilité* (*visibility skeleton*) introduit par Durand, Drettakis et Puech [33].

### 3.2.1 Encodage des événements visuels dans le squelette de visibilité

Pour des polyèdres, et des définitions particulières de vue et d'équivalence entre les vues, Gigus et Malik ont exhibé deux types de surfaces d'événements visuels : les surfaces EV et EEE (cf. section 3.1.2). Chacune d'entre elles est délimitée par deux droites particulières qui n'ont plus aucun degré de liberté : les *droites transverses extrêmes* (*extremal stabbing lines*) [113]. Pour une surface EV, notée  $\langle e, v \rangle$ , ces droites peuvent être de deux sortes : les droites VV ou VEE. Une droite VV qui délimite cette surface passe par le sommet  $v$  et par l'une des extrémités de  $e$  alors qu'une droite VEE rencontre  $v$ , l'arête  $e$  et une tierce arête de la scène (schéma gauche de la figure 3.4). Pour la surface EEE, notée  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ , les droites extrêmes sont de type VEE ou EEEE. Une droite VEE passe par l'une des extrémités d'une des arêtes et rencontre les deux autres alors qu'une droite EEEE touche quatre arêtes dont les trois qui définissent  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  (schéma de droite de la figure 3.4). Il est courant de dire que ces droites sont *supportées* ou *engendrées* par les sommets ou arêtes qu'elles rencontrent.

Le squelette de visibilité, tel qu'il a été introduit par Durand et ses coauteurs [33], repose sur la notion de *segments libres maximaux* (*maximal free segments*). Pour faire simple, un segment est *libre* s'il n'intersecte transversalement (proprement) aucun objet entre ses deux extrémités alors qu'il est *maximal* s'il n'existe aucun segment libre qui le contienne intégralement. Dès lors, le squelette de visibilité peut être vu comme une structure combinatoire. Les sommets (ou nœuds) sont les segments libres maximaux qui appartiennent à des droites VV, VEE et EEEE et qui rencontrent les générateurs de ces droites. Un arc relie deux sommets dont les droites extrêmes associées délimitent une même surface d'événements visuels.

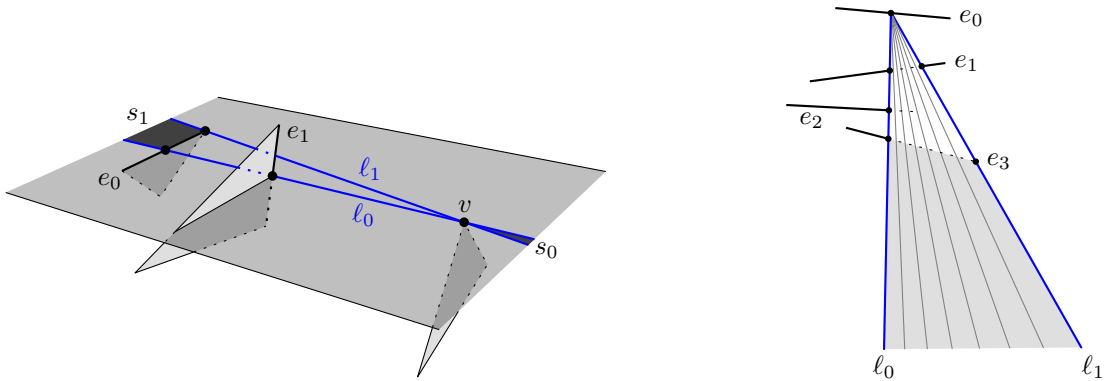


FIG. 3.4 – Sur le schéma de gauche  $l_0$  et  $l_1$  délimitent la surface EV supportée par  $e_0$  et  $v$ . La droite  $l_0$  est une droite VV alors que  $l_1$  est une droite VEE. Sur le schéma de droite, les droites  $l_0$  et  $l_1$  délimitent la surface EEE supportée par les arêtes  $e_0$ ,  $e_1$  et  $e_3$ . La droite  $l_0$  est une droite EEEE alors que  $l_1$  est une droite VEE.

### 3.2.2 Algorithmique

#### 3.2.2.1 Stratégies par la « force brute »

La première implémentation d'un algorithme de calcul du squelette de visibilité est décrite dans l'article de Durand, Drettakis et Puech [33]. Dans une scène composée de polyèdres convexes (« *our current implementation requires convex polyhedra as input* » [33]), leur programme énumère les droites support de segments libres maximaux en analysant « toutes » les combinaisons de sommets, arêtes et faces. Les segments non libres sont exclus au moyen d'un lancer de rayons (qui permet également de déterminer les extrémités des segments libres maximaux). Les arcs du squelette sont obtenus en reliant les nœuds engendrés par les mêmes éléments et en utilisant un catalogue de configurations possibles. L'utilisation d'heuristiques géométriques permet de rejeter certaines combinaisons de sommets, arêtes et faces et le calcul des droites supportant les nœuds EEEE est réduit à une approximation. Les auteurs rapportent, toutefois, que cette approximation n'est pas problématique : « *the [...] algorithm presented here seems to perform well in practice* » ([33], page 6). Il est à noter que Teller et Hohmeyer [116] décrivent une technique numérique (introduite par Teller [113]) pour le calcul des EEEE alors que Everett *et al.* [40] et Devillers *et al.* [27] présentent une étude des prédicats exacts pour le calcul des droites transversales.

Pour une scène composée de polyèdres de complexité totale  $n$ , cette approche a dans le pire des cas une complexité en temps  $\Theta(n^5)$  : il faut énumérer les quadruplets d'arêtes, en  $O(n^4)$ , puis tester la liberté du segment pour chaque configuration, en  $O(n)$ . Une étude expérimentale menée par Durand [31] fait état d'un temps de calcul de l'ordre de  $n^{2.5}$ .

Duguet et Drettakis [30] proposent un algorithme qui vise à résoudre le problème de robustesse aux imprécisions numériques de l'approche de Durand et ses coauteurs. Ils utilisent une arithmétique d'intervalle élémentaire pour introduire une tolérance aux dégénérescences géométriques. Leur implémentation, qui se limite à construire un sous-ensemble très restreint du squelette de visibilité, permet de calculer les ombres dans des scènes allant jusqu'à 100 000 polygones alors que Durand *et al.* doivent se contenter de 1 500 polygones (en raison, notamment, des instabilités numériques corrigées « à la main »).

```

// Le squelette a construire.
Skeleton skeleton;

// Calcule les nœuds VV du squelette.
foreach (Pair<Vertex> vv in scene.pair_of_vertices ())
    if (may_produce_vv_node (scene, vv))
        skeleton.add_node (compute_vv_node (scene, vv));

// Calcule les nœuds VEE du squelette.
foreach (Vertex v in scene.vertices ())
    foreach (Pair<Edge> ee in scene.pair_of_edges ())
        if (may_produce_vee_node (scene, v, ee))
            skeleton.add_node (compute_vee_node (scene, v, ee));

// Calcule les nœuds EEEE du squelette.
foreach (Triple<Edge> eee in scene.triple_of_edges ())
    if (may_produce_eeee_node (scene, eee))
        skeleton.add_node (compute_eeee_node (scene, eee));

// Reconstruction du squelette à partir de ces nœuds.
skeleton.rebuild_from_nodes ();

```

### 3.2.2.2 Stratégie par balayage

Afin de calculer le squelette de visibilité de manière plus efficace, Goaoc [49] propose un algorithme par balayage pour une scène de complexité totale  $n$  et composée de  $k$  polyèdres convexes disjoints. La complexité théorique de cette approche est  $O(n^2 k^2 \log n)$ . Brönnimann et ses coauteurs [14] étendent l'algorithme de calcul des nœuds du squelette aux polyèdres convexes non disjoints. Pour être complets, notons que Efrat et ses coauteurs [37] sont également à l'origine d'un algorithme par balayage qui permet d'extraire les droites transversales isolées parmi un ensemble de  $k$  polyèdres convexes de complexité totale  $n$ . Nous présentons la stratégie de balayage proposée dans [49] pour des polyèdres convexes disjoints et laissons le lecteur intéressé se référer à l'article [14] pour la prise en compte des intersections.

Considérons une scène de  $k$  polyèdres convexes disjoints placés en position générique : la scène ne contient ni triplet de sommets colinéaires, ni quadruplets de sommets, pris sur au moins deux polyèdres, qui soient coplanaires. Les polyèdres sont composés d'un total de  $n$  arêtes. Pour chaque arête  $e$ , l'algorithme balaie l'espace en faisant tourner un plan autour de celle-ci. Les positions extrêmes du plan de balayage associé à  $e$  sont les plans des deux faces qui lui sont incidentes (figure 3.5). Nous notons  $\pi_0$  la position initiale et  $\pi_1$  la position finale.

Chaque plan de balayage intersecte les polyèdres de la scène sous la forme de polygones du plan. Notons  $\pi_t$  le plan de balayage et  $P_t$  l'intersection du polyèdre  $P$  avec le plan  $\pi_t$ . Sous l'hypothèse de généricité de la scène, une arête d'un polyèdre  $P$  qui intersecte le plan de balayage  $\pi_t$  correspond à un

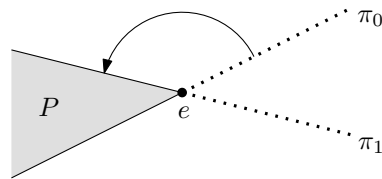


FIG. 3.5 – Position de balayage du plan autour de l’arête  $e$ . La scène est vue dans un plan normal à l’arête  $e$ , le triangle  $P$  correspond à la trace du polyèdre  $P$  dans ce plan. Le plan de balayage part de la position du plan  $\pi_0$  et tourne jusqu’à la position  $\pi_1$ .

sommet du polygone  $P_t$  alors qu’une face de  $P$  qui rencontre  $\pi_t$  engendre une arête de  $P_t$ . Un segment libre maximal du plan  $\pi_t$  est sur une surface EV s’il passe par un sommet de  $e$  et rencontre tangentiellement un sommet d’un polygone du plan (c’est-à-dire une arête du polyèdre associé). Le cas d’un segment libre maximal qui passe par  $e$  et un sommet d’un polyèdre est pris en compte lors du balayage autour des arêtes incidentes à ce sommet. Un segment libre maximal est sur une surface EEE s’il passe tangentiellement par deux sommets de deux polygones et s’il coupe  $e$  (figure 3.6).

À chaque plan de balayage, les segments libres maximaux peuvent être obtenus en construisant le squelette de visibilité 2D des polytopes. Bien entendu, pour des raisons de performances, l’algorithme construit le squelette de visibilité 2D dans le plan  $\pi_0$  puis maintient sa structure combinatoire au fur et à mesure du balayage. Durant ce processus, trois types d’événements (de balayage) peuvent se produire : les V-EVENTS, les F-EVENTS et les T-EVENTS. Un V-EVENT correspond à l’intersection du plan de balayage avec un sommet d’un polyèdre de la scène. Un F-EVENT se produit lorsqu’un segment maximal est contenu dans le plan d’une face d’un polyèdre autre que celui auquel appartient l’arête  $e$  (figure 3.7). Finalement, un T-EVENT se produit quand deux segments libres maximaux deviennent colinéaires (figure 3.8).

Les nœuds du squelette correspondent à certains événements de balayage. Lors d’un V-EVENT, le sommet et les extrémités de  $e$  engendrent jusqu’à deux nœuds VV (selon les occultations). Lors d’un T-EVENT deux types de nœuds peuvent être produits : (i) si le T-EVENT concerne une extrémité de  $e$  et deux polyèdres, un nœud VEE est créé (ii) si le T-EVENT fait intervenir trois polyèdres distincts et que le segment libre maximal (obtenu en réunissant les deux segments devenus colinéaires) intersecte  $e$ , un nœud EEEE apparaît. La reconstruction des arcs du squelette se fait simplement au fur et à mesure du balayage [14]. La figure 3.9 est le pseudo-code de cet algorithme.

### 3.2.3 Résultats de complexité

Les premiers résultats de complexité portant sur le squelette de visibilité font état d’une borne  $\Theta(n^4)$  sur sa taille [35] et d’un algorithme de construction qui s’exécute en temps  $\Theta(n^5)$  pour des scènes formées de  $n$  triangles [33]. D’un point de vue théorique, Brönnimann et ses coauteurs ont démontré que la taille du squelette de visibilité d’une scène de complexité  $n$  formée par  $k$  polyèdres convexes (non nécessairement disjoints) est  $\Theta(n^2k^2)$  [14] et ont proposé un algorithme de calcul du squelette qui opère en temps  $O(n^2k^2 \log n)$  [14, 49]. Remarquons que ce résultat peut être étendu à des polyèdres non convexes après une décomposition en éléments convexes de ceux-ci. Pour une scène de complexité  $n$  et formée de  $k$  polyèdres, il est raisonnable de s’interroger sur la complexité du squelette de visibilité lorsque tous les

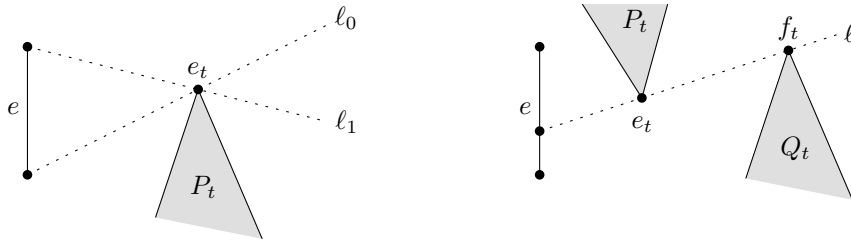


FIG. 3.6 – Segments libres maximaux appartenant à des surfaces d'événements visuels EV et EEE. Sur le schéma de gauche, les segments  $\ell_0$  et  $\ell_1$  passent par les sommets de  $e$  et le sommet  $e_t$  de  $P_t$  qui correspond à une arête du polyèdre  $P$ . Sur le schéma de droite, le segment  $\ell$  passe par les sommets  $e_t$  et  $f_t$  qui correspondent à des arêtes des polyèdres  $P$  et  $Q$ .

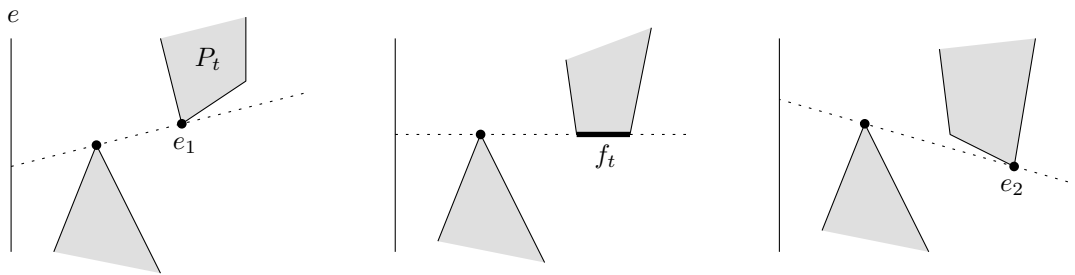


FIG. 3.7 – Un F-EVENT. Tous les schémas correspondent à ce qui se produit dans le plan de balayage  $\pi_t$ . Le schéma de gauche représente la configuration avant le F-EVENT : le segment libre maximal est supporté par l'arête  $e_1$  de  $P$ . Le schéma de droite illustre la situation après le F-EVENT où le segment libre maximal a changé de support. Le schéma central est le lieu du F-EVENT où le segment libre maximal devient coplanaire avec la face  $f$  de  $P$ .

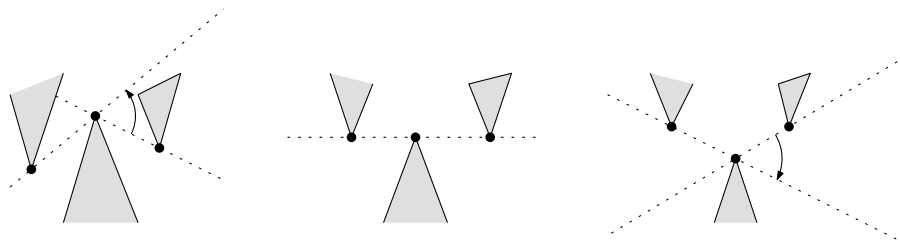


FIG. 3.8 – Un T-EVENT. Tous les schémas correspondent à ce qui se produit dans le plan de balayage  $\pi_t$ . Le schéma de gauche représente la configuration avant le T-EVENT : les segments libres maximaux sont ordonnés suivant l'ordre inverse des aiguilles d'une montre. Le schéma de droite illustre la situation après le T-EVENT où les segments sont triés suivant le sens des aiguilles d'une montre : il y a eu inversion de l'ordre. Le schéma central est le lieu du T-EVENT quand les segments sont alignés.

```

// Le squelette de visibilité 3D construit par l'algorithme.
Skeleton skeleton;

// Pour chaque arête de la scène on balaye l'espace.
foreach (Edge e in scene.edges ())
{
    // La liste des événements de balayage.
    PriorityQueue<Event> event_queue;

    // Les positions extrêmes du plan de balayage.
    Plane pi_0 = e.incident_face (0).plane ();
    Plane pi_1 = e.incident_face (1).plane ();

    // Calcule le squelette de visibilité 2D dans pi_0.
    scene.compute_2d_skeleton (pi_0);

    // Parcours des sommets de la scène et ajout des V-events.
    foreach (Vertex v in scene.vertices ())
    {
        if (vertex_between_two_planes (v, pi_0, pi_1) && !fully_occluded (e, v))
            event_queue.insert (new VEvent (v));
    }

    // Parcours des faces de la scène et ajout des F-events.
    foreach (Face f in scene.faces ())
    {
        if (face_intersects_edge (f, e))
            event_queue.insert (new FEvent (f));
    }

    // Traitement des événements.
    while (!event_queue.empty ())
    {
        // Analyse l'événement en tête de liste.
        Event event = event_queue.front ();

        // Un événement T-event s'est-il produit depuis le dernier événement?
        if (change_of_bitangent_order_around_vertex (scene, event))
            event_queue.insert (compute_t_event (scene, event));

        // Si aucun nouvel événement n'est apparu, on traite celui-ci.
        if (!event_queue.has_been_changed ())
            treat_event (skeleton, event_queue.pop_front ());
    }
}

```

FIG. 3.9 – Pseudo-code de l'algorithme de construction du squelette de visibilité par balayage.

objets sont de complexités similaires (c'est-à-dire  $n/k$ ). En considérant des polyèdres disjoints et en supposant que la taille de leur silhouette peut être bornée par  $O(\sqrt{n/k})$ , Glisse démontre une borne de  $O(n^{3/2}k^{5/2})$  sur la taille du squelette de visibilité [47, page 87]. De plus, il démontre que la taille *moyenne*, prise sur l'ensemble des points de vue, de la silhouette d'un polyèdre convexe de complexité  $n/k$  est majorée par  $O(\sqrt{n/k})$  [46], suggérant qu'il est raisonnable d'observer la borne  $O(n^{3/2}k^{5/2})$ . Finalement, il a également été prouvé que le squelette de visibilité de  $n$  sphères distribuées aléatoirement, suivant différentes distributions, a une taille moyenne linéaire en  $n$  et au plus quadratique pour d'autres modèles (triangles, polygones « épais » de complexité constante) [26]. D'un point de vue plus pratique, Durand [31] constate que la taille du squelette de visibilité est en moyenne  $n^{2.4}$  alors que Zhang et ses coauteurs [129] obtiennent une confirmation expérimentale de la borne supérieure en  $O(n^2k^2 \log n)$  pour la construction des nœuds VEE et EEEE par l'algorithme proposé par Brönnimann *et al.*

### 3.2.4 Squelette de visibilité, complexe de visibilité et graphe d'aspects

Nous clôturons cette section par une discussion sur le squelette de visibilité en trois dimensions. Nous constatons qu'il est courant de l'introduire par l'intermédiaire du *complexe de visibilité* (*visibility complex*) : le squelette de visibilité *serait* le 1-squelette du complexe de visibilité<sup>10</sup>. Nous reprenons ce cheminement en mettant l'accent sur l'une des faiblesses de cette approche : la perte du sens profond du squelette de visibilité.

#### 3.2.4.1 Cheminement classique vers le complexe de visibilité en trois dimensions

**Définition historique du complexe de visibilité du plan.** Plaçons-nous dans le plan et considérons un ensemble d'objets. Le complexe de visibilité est une structure introduite par Pocchiola et Vegter [95, 94] pour encoder la visibilité dans  $\mathbb{R}^2$ . Le principe est de se placer dans l'espace des rayons du plan et de définir une relation d'équivalence entre les rayons : deux rayons<sup>11</sup>  $(p, \vec{u})$  et  $(q, \vec{v})$  sont équivalents s'ils sont supportés par une même droite orientée et si le segment  $pq$  n'intersecte l'intérieur d'aucun objet de la scène (figure 3.10). Cette relation d'équivalence traduit l'invariance de la vue d'un rayon lorsqu'il s'approche ou s'éloigne (suivant une direction rectiligne) d'un objet sans rencontrer d'obstacle. Le complexe de visibilité de Pocchiola et Vegter est défini comme la partition de l'espace des rayons en classes d'équivalence engendrées par la relation ci-dessus. Autrement dit, le complexe de visibilité regroupe les rayons qui ont la même vue. C'est un objet mathématique qui possède une structure « élégante » de complexe cellulaire.

**Définition alternative.** La définition du complexe de visibilité de Pocchiola et Vegter est centrée sur les rayons. En se focalisant sur les droites qui les supportent, il est possible de définir le complexe de visibilité dans l'espace des segments libres maximaux (cf. section 3.2.1 pour une définition). Considérons un point  $p$  et une direction  $\vec{u}$ . Les deux rayons  $(p, \vec{u})$  et  $(p, -\vec{u})$  sont supportés par la même droite. Notons  $p_+$  le premier point d'intersection propre entre le rayon  $(p, \vec{u})$  et un objet de la scène. Par symétrie, le point  $p_-$  est la première intersection propre de  $(p, -\vec{u})$  avec la scène. Pour s'assurer de l'existence de ces

<sup>10</sup>Suivant la terminologie mathématique, le  $k$ -squelette de visibilité est le sous-ensemble du complexe de visibilité formé des faces de dimension au plus  $k$ .

<sup>11</sup>Nous notons  $(p, \vec{u})$  le rayon d'origine  $p$  et dirigé suivant  $\vec{u}$ .

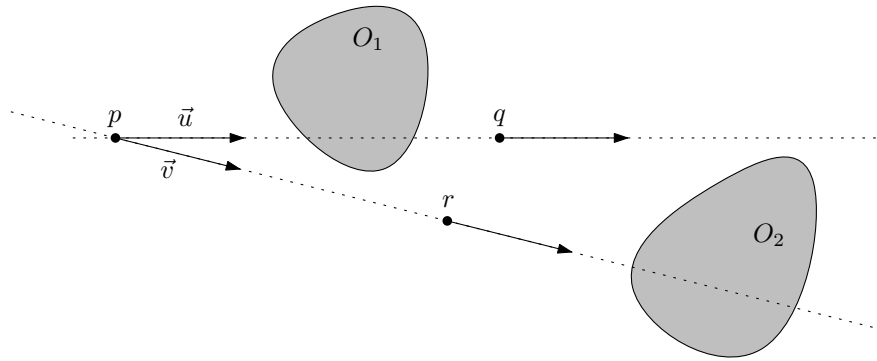


FIG. 3.10 – Définition de la relation d'équivalence entre les rayons pour le complexe de visibilité de Pocchiola et Vegter. Les rayons  $(p, \vec{u})$  et  $(p, \vec{v})$  ne sont pas supportés par la même droite donc ils ne sont pas équivalents. De même,  $(p, \vec{u})$  et  $(q, \vec{u})$  ne sont pas équivalents car  $pq$  intersecte l'intérieur de  $O_1$ . En revanche, les rayons  $(p, \vec{v})$  et  $(r, \vec{v})$  le sont.

points, nous pouvons ajouter un objet imaginaire qui englobe la scène. Tous les rayons partant d'un point du segment  $p_-p_+$  et dirigés suivant  $\vec{u}$  sont équivalents (pour la relation d'équivalence donnée ci-avant). Il en est de même pour ceux orientés suivant la direction  $-\vec{u}$ . Les rayons peuvent ainsi être regroupés sous la forme de segments libres maximaux et le complexe de visibilité défini sur cet espace (voir Goac [49] pour plus de détails).

**Définition du complexe de visibilité dans l'espace.** Partant de cette formulation alternative, Durand, Drettakis et Puech [35] introduisent le complexe de visibilité pour l'espace à trois dimensions : c'est la partition de l'espace des segments libres maximaux de  $\mathbb{R}^3$  en composantes connexes de segments reposant sur les mêmes objets.

### 3.2.4.2 Inadéquation du 1-squelette

En trois dimensions, il est commun de définir le squelette de visibilité comme le 1-squelette du complexe de visibilité. Malheureusement, suivant le cadre dans lequel nous nous plaçons (objets lisses, polyèdres, etc), la structure obtenue par cette formulation peut différer de celle présentée à la section 3.2.1 et ne permet plus d'encoder l'intégralité des surfaces d'événements visuels. Par exemple, prenons le cas de polyèdres convexes disjoints. Pour une définition donnée de la notion de vue (et d'équivalence de vues), nous démontrons au chapitre 4 que les événements visuels se produisent, entre autres, le long de droites  $T^{++T}$ . C'est-à-dire que des segments libres maximaux tangents à deux objets, dans un plan bitangent, sont les lieux d'événements visuels. Or, les faces de dimensions 0 et 1 du complexe de visibilité correspondent respectivement aux composantes de segments tangents à 3 et à 4 objets (la dimension de l'espace des segments libres maximaux de  $\mathbb{R}^3$  est 4, celle d'une face de segments tangents à  $k$  objets est  $4 - k$ , voir par exemple [35]). Le 1-squelette ne contient pas les surfaces d'événements  $T^{++T}$ .



### 3.2.4.3 Des graphes d'aspects, des squelettes de visibilité

Comme il est défini, le complexe de visibilité encode la vue *le long* d'un segment libre maximal alors que les travaux sur le graphe d'aspects montrent que les caractérisations des lieux des événements visuels sont parfois plus riches. Par exemple, savoir qu'un point se trouve à l'emplacement d'un événement visuel engendré par deux sphères est plus informatif que de savoir que ce point est sur un segment tangent aux deux objets : ce point appartient, en plus, à un plan bitangent aux sphères (cf. section 3.1.3). Être sur un segment où se produit un événement visuel, c'est, en quelque sorte, avoir des informations sur la vue *autour* de ce segment (par exemple, savoir que ces objets sont localement tangents). Considérer le squelette de visibilité comme un sous-ensemble du complexe de visibilité revient à ignorer ce supplément d'informations. Nous pensons donc que le squelette de visibilité devrait être considéré comme une représentation proche de la partition de l'espace des points de vue (la structure duale du graphe d'aspects) qui ferait abstraction du mode de projection et dont la taille serait réduite ; en raison de sa définition dans l'espace des segments libres maximaux plutôt que dans celui des points de vue. À ce titre, il va de soi que sa formulation devrait être « paramétrée » par les mêmes notions que celles qui servent à la définition du graphe d'aspects (vue et équivalence de vues, cf. section 3.1).

## 3.3 Synthèse d'ombres

Pour finir, nous en venons à la synthèse des ombres. Jusqu'à présent nous avons établi le lien entre les ombres et les événements visuels et nous avons illustré leur utilité dans le calcul du maillage de discontinuités. Dans cette section nous allons étudier le rôle que les événements visuels jouent dans les méthodes de rendu des ombres.

### 3.3.1 Lancer de rayons

Nous sommes intéressés par les méthodes de synthèse d'ombres liées à la radiosité. Toutefois, nous débutons notre tour d'horizon par un rapide survol des approches liées au lancer de rayons. Les algorithmes stochastiques de lancer de rayons calculent les régions d'ombre en utilisant une discrétisation des sources lumineuses et en traçant un rayon pour chaque point échantillonné à la surface des émetteurs [21]. Malheureusement, l'obtention d'une ombre visuellement convaincante nécessite bien souvent d'utiliser des centaines de rayons par pixel et requiert un temps de calcul important (voir, notamment, [91]). Pour pallier ces difficultés, au moins deux optiques complémentaires ont été envisagées dans le monde de l'informatique graphique : réduire le nombre de rayons tracés et accélérer le traitement de chacun d'entre eux. L'une des pistes les plus fructueuses est de tirer partie de la cohérence spatiale des scènes pour augmenter la rapidité et la pertinence de requêtes points à points : deux rayons très proches l'un de l'autre ont de « fortes chances » de se comporter de manière « similaire ». C'est pour exploiter cet avantage qu'Amanatides [4] ou Heckbert et Hanrahan [60] proposent d'utiliser des faisceaux de rayons plutôt que des rayons isolés. Une autre possibilité est de recourir à des indicateurs de pertinence pour le choix des rayons tracés. Par exemple, Nishita et Nakamae [83], Chin et Feiner [18], Tanaka et Takahashi [112] ou Laine et ses coauteurs [74] adaptent la méthode des volumes d'ombres, introduite par Crow [23],

pour esquisser les régions d'ombre et en déduire les pixels qui méritent une attention particulière. En effet, quand un point est complètement dans l'ombre d'une source ou qu'il peut la voir en intégralité, il est inutile de tracer de nombreux rayons vers celle-ci. En revanche, lorsqu'il n'a qu'une vue partielle de la source lumineuse, il est important d'utiliser de nombreux rayons pour estimer la proportion visible de la surface de l'émetteur.

### 3.3.2 Maillage de discontinuités en radiosité

Nous revenons à la méthode du maillage de discontinuités utilisée dans l'algorithme de radiosité. Dans un premier temps, nous étudions les différents types de discontinuités et nous décrivons les configurations géométriques qui les engendrent. Ensuite, nous présentons les approches algorithmiques pour construire le maillage de discontinuités.

#### 3.3.2.1 Nature des discontinuités

Commençons par introduire la terminologie de Heckbert [56]. Une fonction  $f$  a au moins une discontinuité  $D^k$  si elle est de classe  $C^{k-1}$  sans être de classe  $C^k$ . Une source surfacique qui émettrait de façon continue peut induire sur les objets des discontinuités  $D^0$ ,  $D^1$  ou  $D^2$ . Il est important de noter que : « *the lowest degree discontinuities generally cause the greatest error* » ([57], page 6). Il est également à remarquer que selon le principe de propagation des discontinuités, énoncé par Heckbert [57], les discontinuités sur la source se répercutent sur celles des surfaces éclairées au premier niveau, puis au second, et finalement de proche en proche. Lischinski, Tampieri et Greenberg [76, pages 6 à 9] illustrent les différents types de discontinuités et les configurations géométriques qui les engendrent.

**Discontinuités  $D^0$ .** Ces discontinuités apparaissent aux intersections entre les objets de la scène. Leur nombre est, dans le pire des cas,  $O(n^2)$  pour une scène de complexité  $n$ . Néanmoins, il est particulièrement important de prendre ces discontinuités en compte car elles induisent de remarquables changements dans la fonction de radiance.

**Discontinuités  $D^1$ .** D'après Stewart et Ghali [111], les discontinuités  $D^1$  apparaissent lorsque deux arêtes de polyèdres de la scène, dont l'une peut être sur la source, sont coplanaires et que le plan induit intersecte la source lumineuse. Elles sont également engendrées par le plan d'une face d'un polyèdre qui coupe la source. D'après Ghali et Stewart, il est important de les prendre en compte car elle correspondent, principalement dans le cas des arêtes coplanaires, à des artéfacts perceptibles sur l'image rendue ([111], première page). Pour faire le lien avec les travaux présentés dans cette thèse, restreignons cette remarque à des polyèdres convexes. Notons que dans le premier cas, où deux arêtes de polyèdres distincts sont coplanaires, cette discontinuité se produit pour des points d'une surface d'événements visuels T++T et peut correspondre à un passage entre une zone de pénombre et une zone d'ombre (voir chapitre 6). En revanche, dans le second cas, la limite ne se trouve sur aucune des surfaces d'événements visuels d'objets convexes mais se situe intégralement dans la pénombre.

**Discontinuité  $D^2$ .** Ce sont toutes les autres discontinuités. Elles se trouvent aux emplacements où se produisent les événements visuels EV, différents de ceux caractérisés par Stewart et Ghali, et les événements EEE.

### 3.3.2.2 Algorithmique du maillage de discontinuités

La méthode du maillage de discontinuités a été initiée par Heckbert [56]. Pour calculer ce maillage sur des scènes polyédriques, il est nécessaire de déterminer les événements EV et EEE. Historiquement, les premiers algorithmes de Heckbert et de Lischinski, Tampieri et Greenberg se cantonnent aux événements EV. C'est uniquement avec les travaux de Stewart et Ghali [109, 110] et de Drettakis et Fiume [28] que sont apparus les premiers algorithmes prenant en charge les surfaces d'événements visuels EEE.

**Événements EV.** Les approches développées, d'un côté, par Heckbert [56, 58, 57] et, de l'autre, par Lischinski, Tampieri et Greenberg [76] calculent les surfaces où se produisent les événements visuels EV impliquant la source lumineuse, puis déterminent les occlusions et construisent les arrangements des segments, non bloqués, sur les surfaces des objets. Quelques différences minimales de construction de l'arrangement et de test de visibilité existent entre ces deux approches.

**Événements EEE.** Les travaux de Teller [113, 114] fournissent une méthode pour calculer les surfaces d'événements EEE à l'aide d'une description des droites dans l'espace de Plücker (le rapport technique [116] présente une méthode pour calculer les droites transversales à quatre segments/droites). Pour le calcul du maillage de discontinuités, Stewart et Ghali [109, 110], d'une part, et Drettakis et Fiume [28], d'autre part, sont les premiers à proposer des méthodes qui incluent la construction des surfaces d'événements EEE. L'idée commune à ces articles est de calculer les surfaces d'événements visuels qui intersectent la source lumineuse. Une représentation, sous la forme de ce qu'ils appellent une projection arrière, de la vue de la source est stockée dans chacune des cellules de l'arrangement des courbes d'événements visuels sur les polygones récepteurs. La différence principale entre ces articles est l'accent mis par les auteurs sur l'aspect pratique de leur approche. Drettakis et Fiume hiérarchisent l'espace pour produire un algorithme qu'ils affirment être plus rapide, sur des cas réels, alors que Stewart et Ghali se concentrent sur la complexité théorique de leur approche. Notons, pour finir, que ces méthodes ont été utilisées dans des approches combinant maillage de discontinuités et radiosité hiérarchique [29, 77].

**Squelette de visibilité.** Durand, Drettakis et Puech [33, 34, 31] introduisent le squelette de visibilité pour encoder les surfaces d'événements visuels (cf. section 3.2.1). Dès lors, il leur est possible de calculer le maillage de discontinuités d'une scène, aussi bien que d'implémenter d'autres techniques liées à la radiosité et aux problèmes de visibilité en synthèse d'images. Par exemple, cette solution est une alternative à l'algorithme de Teller et Hanrahan [115] pour calculer la visibilité entre deux polygones (utilisée dans la méthode de radiosité hiérarchique de Hanrahan, Salzman et Aupperle [53]). En outre, cette capacité à dégager des informations précises sur la visibilité entre deux cellules du maillage de discontinuités est cruciale pour l'implémentation de la méthode d'optimisation à erreur bornée proposée par Lischinski *et al.* [75]. Duguet et Drettakis [30] raffinent la méthode de calcul des ombres de Durand *et al.* pour la

rendre plus résistante aux imprécisions numériques inhérentes aux problèmes géométriques.

### 3.3.3 Le temps réel et le calcul d'ombres

Jusqu'à maintenant nous avons abordé la synthèse des ombres dans le cadre de l'illumination globale (voir chapitre 1). En particulier, nous nous sommes intéressés au maillage de discontinuités. Pour élargir le propos, nous dédions cette section à la présentation des deux techniques principalement utilisées pour la génération des ombres dans le cas de l'informatique « temps-réel » : les volumes d'ombres et les cartes d'ombres. Avant de poursuivre, notons que l'article de Hasenfratz, Lapierre, Holzschuch et Sillion [55] et l'ouvrage d'Akenine-Möller et Haines [3] nous servent de références et contiennent des détails sur les méthodes que nous survolons ici.

#### 3.3.3.1 Les volumes d'ombres

Pour décrire la méthode des *volumes d'ombres* (*shadow volumes*) introduite par Crow [23] et adaptée aux cartes graphiques par Heidmann [63], considérons une scène éclairée par un point lumineux. Chaque objet définit, avec la source, un volume dans lequel tout point se trouve caché de la lumière (schéma de gauche de la figure 3.11). La première étape de l'algorithme est de construire ces volumes. Ensuite, lors de la phase de rendu, déterminer si un point  $p$  est à l'intérieur d'un volume d'ombre se fait en « traçant » un rayon entre le point de vue et  $p$ . Lorsque ce rayon intersecte une face d'un volume faisant face au point de vue, un compteur est incrémenté, alors qu'il est décrémenté quand le rayon traverse une face tournant le dos au point de vue. Quand le compteur a une valeur strictement positive, le point  $p$  est dans l'ombre d'un des objets (schéma de droite de la figure 3.11). Dans une utilisation « temps-réel », il est inutile

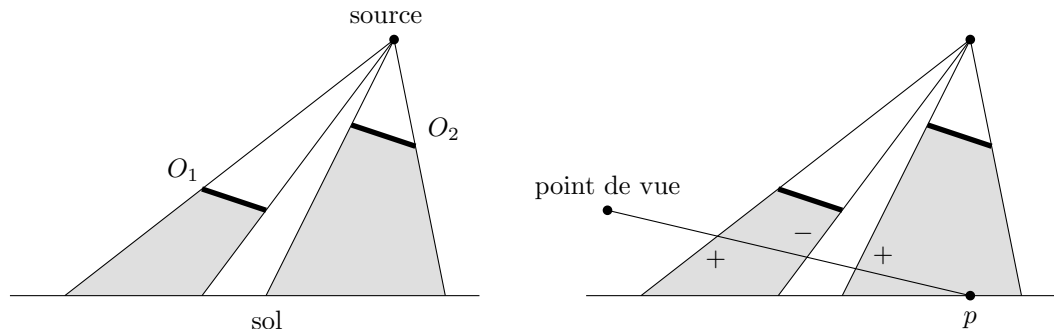


FIG. 3.11 – Le schéma de gauche montrent les volumes d'ombres (en grisé) engendrés par les objets  $O_1$  et  $O_2$ . Le schéma de droite illustre le procédé de lancer de rayon qui permet de déterminer que le point  $p$  est dans l'ombre. À chaque face d'un volume d'ombre tournée vers le point de vue, le compteur associé au point  $p$  est incrémenté alors qu'il est décrémenté pour chaque face « qui tourne le dos » au point de vue.

d'utiliser un lancer de rayon explicite. Cette méthode peut être implémentée sur les cartes graphiques modernes en faisant usage du « stencil-buffer » [69].

Pour étendre la technique des volumes d'ombres à des sources surfaciques, plusieurs approches sont envisageables. Par exemple, il est possible d'échantillonner les sources par des points lumineux et de combiner les volumes d'ombres. Autrement, Haines [52] propose d'utiliser ce qu'il appelle des « plateaux » qui

décrivent une heuristique pour atténuer les ombres dures et engendrer des transitions dans la pénombre. Une méthode reprise et améliorée par Wyman et Hansen [127]. Finalement, Akenine-Möller et Assarsson [2, 8, 9] introduisent ce qu'ils nomment les « *penumbra wedges* ». Chaque arête d'une silhouette d'un objet bloquant, vue depuis un point fixé de la source, définit un volume avec la source (schéma de gauche de la figure 3.12). Ces volumes sont déterminés par leur algorithme. Ensuite, ils calculent un volume d'ombres classique depuis le point fixé de la source. Les pixels qui se trouvent dans l'un des « *penumbra wedges* » précédemment construits sont modulés en fonction de leur position vis-à-vis du volume d'ombre (schéma de droite de la figure 3.12). Leur implémentation est entièrement réalisée au moyen des composants matériels des cartes graphiques.

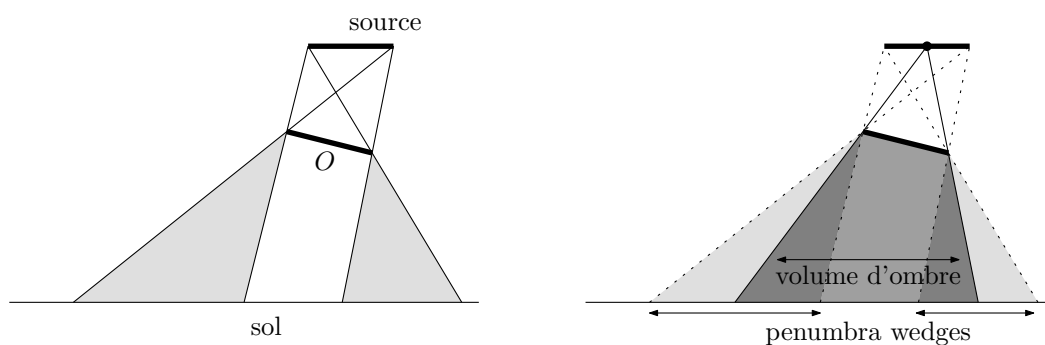


FIG. 3.12 – Le schéma de gauche montre les « *penumbra wedges* » (en grisé) engendrés par l'objet  $O$  et la source lumineuse. Le schéma de droite représente le volume d'ombre engendré par un point de la source et l'objet  $O$ . Les deux « *penumbra wedges* » représentés intersectent ce volume. L'éclaircissement des points de la scène est modifié en conséquence.

### 3.3.3.2 Les cartes d'ombres

La technique des *cartes d'ombres* (*shadow maps*) a été introduite par Williams [125] et est implémentée sur les cartes graphiques modernes [41]. Pour un point lumineux, la vue de la scène depuis la source est calculée et stockée dans la carte des ombres. Ensuite, l'algorithme classique de suppression des surfaces cachées (algorithme du « *z-buffer* ») est appliqué depuis le point de vue de l'observateur. Pour chaque pixel, la distance entre l'objet visible et la source est comparée à l'information correspondante dans la carte des ombres. Si l'objet visible (depuis l'observateur) est plus loin de la source que celui contenu dans la carte des ombres, ce premier est dans l'ombre et la couleur du pixel est modulée en fonction (figure 3.13).

Diverses méthodes ont été proposées pour adapter la technique des cartes d'ombres aux sources surfaciques. En premier lieu, Herf et Heckbert suggèrent [65, 61] d'échantillonner la source lumineuse par un ensemble de points et de calculer une carte des ombres en chacun de ces points. Pour chaque récepteur de la scène, les différentes cartes des ombres sont combinées dans une texture qui permet de simuler les ombres dans l'image finale. C'est également ce principe qui est repris et étendu dans la méthode d'Agrawala et ses coauteurs [1]. Ces approches peuvent produire des résultats de bonne qualité mais sont fortement dépendantes du nombre de points utilisés pour l'approximation de la source lumineuse. En particulier, il peut être coûteux d'obtenir de bons résultats. Afin de s'abstraire de cette complication, certains auteurs proposent des stratégies qui calculent une unique carte d'ombre (ou un faible nombre



FIG. 3.13 – La vue depuis le point lumineux est calculée et stockée dans la carte des ombres. La scène est ensuite rendue depuis le point de vue en prenant en considération les informations contenues dans la carte des ombres. Image extraite de [32].

de cartes) et qui font appel à des traitements des informations contenues dans la carte pour construire des approximations visuellement convaincantes des régions d'ombre. Par exemple, nous pouvons citer Heidrich, Brabec et Seidel [64], Brabec et Seidel [13] ou Soler et Sillion [108] (voir [55] pour de plus amples détails).



## Chapitre 4

# Événements visuels d'ensembles convexes

### 4.1 Introduction

Introduit dans le contexte de la vision par ordinateur, le *graphe d'aspects* [72, 71] est une représentation synthétique des différentes *vues*, appelées *aspects*, d'un objet à classifier. Construire le graphe d'aspects, c'est partitionner l'espace qui entoure un objet en régions maximales depuis lesquelles la vue de celui-ci reste *structurellement la même*. À chaque région de la partition, le graphe d'aspects associe un sommet et une représentation de la vue commune aux points de la région. Les sommets de régions limitrophes sont liés par une arête du graphe d'aspects. Ces liens sont appelés *événements visuels*. Ils correspondent à des changements structurels entre deux vues de l'objet.

Cette présentation simple du graphe d'aspects repose sur des concepts imprécis : qu'est-ce que la vue d'un objet depuis un point quelconque ? Comment peut-on définir l'équivalence entre deux vues ? Quelle est la nature des événements visuels ? Où se produisent-ils ? Définir formellement le graphe d'aspects impose de préciser chacun de ces points. De fait, le graphe d'aspects est une structure paramétrée par les notions de vue et d'équivalence entre les vues. Nous pourrions même parler de différents graphes d'aspects qui découlent de la manière dont sont posées ces deux notions. D'autant plus que ces deux définitions, de vue et d'équivalence des vues, conditionnent la nature des événements visuels et les lieux où ils se produisent. Historiquement, différentes études ont été proposées en fonction de la classe des objets considérés.

Dans le contexte de polyèdres, Gigus et Malik [44], dont les travaux servent de base à de nombreux articles en informatique graphique, définissent la vue d'un objet comme une structure combinatoire appelée *graphe de structure étiquetée d'image*. L'équivalence entre les vues est un isomorphisme entre graphes. Ils identifient deux types de surfaces où se produisent les événements visuels : les surfaces EV et les surfaces EEE.



Pour une classe restrictive de surfaces lisses, la théorie des singularités, initiée par Whitney [122], définit un catalogue complet des événements visuels [5, 93]. Elle repose sur l'étude des contours des objets. La vue est définie comme une projection de l'espace ambiant vers l'écran alors que l'équivalence entre les vues se traduit par l'existence d'une paire de changements de coordonnées de classe  $C^\infty$ . Il existe cinq types de surfaces réglées sur lesquelles sont localisés les événements visuels produits par des surfaces lisses [68, 98, 99] et 19 pour des surfaces lisses par morceaux [98, 101].

Malheureusement, ces différents cadres sont incompatibles. D'une part, en raison des contraintes drastiques sur les objets lisses considérés, la théorie des singularités ne permet pas de décrire les événements visuels des polyèdres pris comme des objets lisses par morceaux. D'autre part, les notions de vues sont fondamentalement différentes suivant les cadres. La vue d'un polyèdre est la description de toute sa structure combinatoire, indépendamment de sa silhouette, alors que celle d'un objet lisse est essentiellement le contour visible de cet objet. L'une des conséquences de cette incompatibilité se traduit pour le cas d'une sphère par l'existence de deux caractérisations distinctes des surfaces d'événements visuels suivant que la sphère est vue comme un objet lisse ou l'objet limite d'une suite de polyèdres qui la maille de plus en plus finement (cf. section 2.1, page 15).

Dans ce chapitre, nous étudions des objets convexes disjoints de  $\mathbb{R}^3$ . Nous proposons une définition de la vue d'un objet convexe basée sur sa silhouette visible. Deux vues identiques sont des vues topologiquement équivalentes (homéomorphes). Sous ces définitions, nous démontrons que les lieux d'événements visuels appartiennent à deux types de rayons : les rayons T++T et les rayons T+T+T. De plus, nous montrons que les ensembles de points dont sont issus ces rayons sont nulle part denses. Ces résultats sont intéressants dans le sens où ils présentent le premier cadre qui établit un lien entre les objets lisses et les polyèdres. De plus, nos définitions sont compatibles avec les cadres existants des objets lisses et des polyèdres. Pour ce dernier, il suffit de considérer les faces des polyèdres comme des objets indépendants.

### 4.1.1 Terminologie

Un *objet* est un ensemble convexe fermé de  $\mathbb{R}^3$ . La *dimension* d'un objet est celle de son enveloppe affine : 0 pour un point, 1 pour un segment, 2 pour un polygone, etc. Une *scène* est un ensemble fini d'objets deux à deux disjoints. Un *point de vue* est un point quelconque qui n'appartient à l'intérieur (éventuellement relatif) d'aucun objet.

**Plan support et rayon tangent.** Un plan est *support* à un objet  $X$  s'il intersecte  $X$  et délimite un demi-espace contenant l'objet. Le *rayon*  $(p, \vec{u})$  d'*origine*  $p$  et dirigé suivant la *direction*  $\vec{u}$  est l'ensemble des points :

$$(p, \vec{u}) = \left\{ p + t\vec{u} : t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Un rayon  $(p, \vec{u})$  qui intersecte un objet  $X$  est *tangent* à  $X$  s'il est contenu dans l'un de ses plans support, sinon il l'intersecte *transversalement*. Un rayon  $(p, \vec{u})$  intersecte un objet  $X$  *avant* un objet  $Y$  si la distance minimale entre  $p$  et  $(p, \vec{u}) \cap X$  est inférieure à la distance minimale entre  $p$  et  $(p, \vec{u}) \cap Y$ . Un rayon *voit* un objet  $X$  s'il rencontre  $X$  sans traverser un autre objet de la scène avant  $X$ . Un point  $p$  voit un objet  $X$  s'il existe un rayon depuis  $p$  qui voit  $X$ . Dans ce cas, l'objet  $X$  est *visible* depuis  $p$ . Un rayon qui est tangent

à deux objets  $X$  et  $Y$  (respectivement trois objets  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ) est *bitangent* à  $X$  et  $Y$  (respectivement *tritangent* à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ). Un rayon bitangent à  $X$  et  $Y$  contenu dans un plan support commun aux deux objets  $X$  et  $Y$  est dit *bitangent limite* à  $X$  et  $Y$ . Pour reprendre la notation introduite dans [90], un rayon bitangent limite est un rayon  $T++T$  alors qu'un rayon tritangent est un rayon  $T+T+T$ .

**Contours apparents.** La *silhouette* d'un objet  $X$  depuis  $p$ , notée  $silh_p(X)$ , est l'ensemble des directions des rayons issus de  $p$  qui sont tangents à  $X$ . La silhouette de chaque objet est une courbe convexe, éventuellement réduite à un arc de grand cercle ou à un point, de l'ensemble des directions  $\mathbb{S}^2$ . Le *contour apparent* d'un objet  $X$  depuis  $p$  est l'ensemble des directions des rayons issus de  $p$  qui sont tangents à  $X$  et qui voient cet objet. Par extension, le contour apparent d'une scène depuis  $p$  est l'union des contours apparents des objets depuis  $p$ . Nous le notons  $\Delta_p$ .

**Directions singulières et jonctions.** Considérons le contour apparent  $\Delta_p$  d'une scène observée depuis le point  $p$ . La direction  $\vec{u}$  est *régulière* si  $\Delta_p$  est rectifiable (homéomorphe à  $\mathbb{R}$ ) au voisinage de  $\vec{u}$ , autrement  $\vec{u}$  est *singulière* dans  $\Delta_p$ . Une *jonction*  $\vec{u}$  de  $\Delta_p$  est une direction singulière pour laquelle le rayon  $(p, \vec{u})$  intersecte au moins deux objets tangentiellement (figure 4.1). Le *degré* d'une jonction est le nombre d'arcs du contour apparent  $\Delta_p$  incidents à celle-ci (la figure 4.1 montre des jonctions de degrés 3 et 4). Nous notons  $deg(\vec{u})$  le degré de la jonction  $\vec{u}$ . Finalement, une *face* du contour apparent  $\Delta_p$  est l'adhérence d'une composante connexe de  $\mathbb{S}^2 \setminus \Delta_p$ .

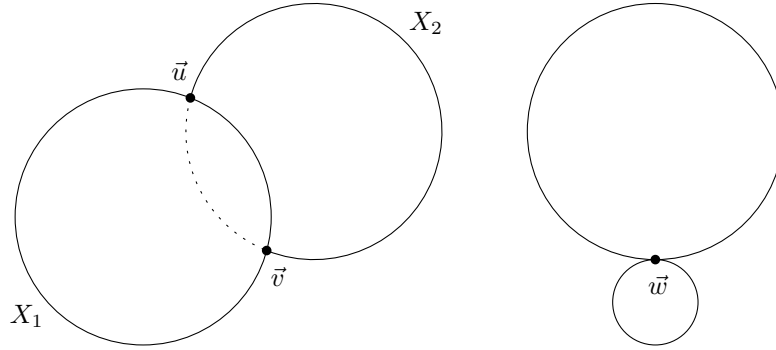


FIG. 4.1 – Contours apparents et jonctions. Les jonctions  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de degré 3 alors que  $\vec{w}$  est de degré 4. La portion en pointillés entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  appartient à la silhouette de  $X_2$  mais n'est pas un arc de son contour apparent. Tous les autres arcs font partie des contours apparents des objets.

**Points de vue dégénérés et fortement dégénérés.** Un point de vue  $p$  est *dégénéré* s'il vérifie au moins l'une des trois conditions :

- (i) il appartient à l'enveloppe affine d'un objet de dimension deux visible depuis  $p$ ,
- (ii) il est l'origine d'un rayon bitangent limite qui voit les deux objets auxquels il est tangent,
- (iii) il est l'origine d'un rayon tritangent qui voit les trois objets auxquels il est tangent.

Un point de vue dégénéré  $p$  est *fortement dégénéré* s'il est l'origine d'un rayon  $(p, \vec{u})$  bitangent limite et que la jonction  $\vec{u}$  est de degré 3 dans le contour apparent de la scène depuis  $p$ . Un point de vue dégénéré mais non fortement dégénéré est *faiblement dégénéré* (figure 4.2).

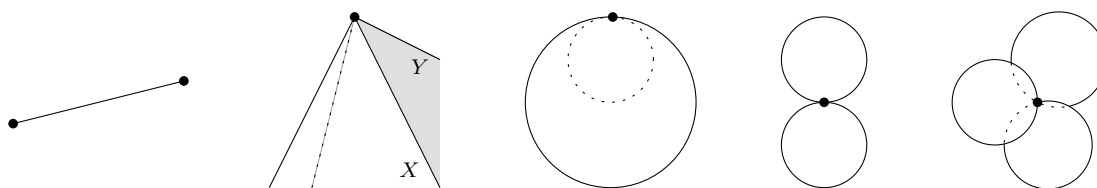


FIG. 4.2 – Contours apparents depuis des points de vue dégénérés (la zone grisée sur le second schéma ne fait pas à proprement parler du contour apparent mais permet de visualiser la géométrie du contour où l'objet  $X$  cache partiellement  $Y$  auquel appartient le segment en pointillés). De gauche à droite, les points  $\bullet$  sont : des points singuliers sur le premier schéma, une intersection entre les silhouettes des deux objets sur le troisième schéma et des jonctions sur les trois autres. Le premier point de vue vérifie la propriété (i), les trois suivants satisfont à la condition (ii) alors que le dernier respecte la propriété (iii). Notons que le point de vue associé au second schéma est fortement dégénéré alors que tous les autres sont faiblement dégénérés.

**Stabilité par homéomorphisme et événements visuels.** Deux contours apparents  $\Delta_p$  et  $\Delta_q$ , qui représentent respectivement les vues d'une même scène depuis les points  $p$  et  $q$ , sont *équivalents par homéomorphisme* s'il existe un homéomorphisme ambiant  $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  tel que  $h(\Delta_q) = \Delta_p$ . Un point de vue  $p$  est *stable par homéomorphisme* si, pour tout point  $q$  d'un voisinage de  $p$ , les contours apparents  $\Delta_p$  et  $\Delta_q$  sont équivalents par homéomorphisme, sinon il est *instable*. Les points de vue instable sont le *lieu des événements visuels*.

**Ensembles denses et nulle part denses.** Un ensemble  $E$  est *dense* dans un ensemble  $F$  si tout voisinage d'un point  $x$  de  $F$  contient un point de  $E$ . L'ensemble  $E$  est *nulle part dense* dans  $F$  si son complémentaire est un ouvert dense dans  $F$ .

### 4.1.2 Résultats

Notre premier résultat établit la connexion entre les points de vue faiblement dégénérés et les lieux d'événements visuels de la manière suivante :

**Théorème 1.** *Tout point de vue non dégénéré est stable (par homéomorphisme) alors que tout point de vue faiblement dégénéré est instable (par homéomorphisme).*

Autrement dit, ce théorème établit que les points de vue dégénérés correspondent essentiellement au lieu des événements visuels :

**Corollaire 2.** *Soient  $P_{faible}$  l'ensemble des points de vue faiblement dégénérés,  $P_{fort}$  celui des points fortement dégénérés et  $P_{EV}$  celui où se produisent les événements visuels, nous avons :*

$$P_{faible} \subseteq P_{EV} \subseteq P_{fort}.$$

Cette caractérisation est optimale au sens où il existe des points de vue fortement dégénérés qui sont stables pour notre définition d'équivalence (stabilité par homéomorphisme). Dans certaines applications, il est préférable que l'ensemble des lieux d'événements visuels, c'est-à-dire des positions où se produisent

des changements topologiques dans la vue d'un observateur mobile, soit essentiellement un ensemble de dimension deux. Nous démontrons que l'ensemble des lieux d'événements visuels est un fermé d'intérieur vide :

**Théorème 3.** *L'ensemble des points de vue dégénérés est nulle part dense.*

## 4.2 Préliminaires

### 4.2.1 Ordre d'intersection « rayon-objets »

Les intersections entre un rayon et un ensemble d'objets disjoints sont des segments (éventuellement des points) deux à deux disjoints. Un rayon induit un ordre sur les ensembles de segments qu'il contient. Deux rayons de même origine, qui intersectent deux objets  $X$  et  $Y$ , le font dans le même ordre :

**Lemme 4.** *Deux rayons, issus d'un même point et intersectant deux objets disjoints  $X$  et  $Y$ , rencontrent  $X$  et  $Y$  dans le même ordre.*

*Démonstration.* La figure 4.3 illustre cette démonstration. Considérons un point  $p$  quelconque et deux directions  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que les rayons  $(p, \vec{u})$  et  $(p, \vec{v})$  intersectent les objets  $X$  et  $Y$ . Les rayons  $(p, \vec{u})$  et  $(p, \vec{v})$  sont coplanaires. Le rayon  $(p, \vec{u})$  intersecte  $X$  en  $x_u$  et  $Y$  en  $y_u$  alors que  $(p, \vec{v})$  rencontre  $X$  en  $x_v$  et  $Y$  en  $y_v$ . Ces quatre points sont en position convexe et forment un quadrilatère  $Q$  dans le plan qui contient  $(p, \vec{u})$  et  $(p, \vec{v})$ . Supposons que  $(p, \vec{u})$  rencontre  $X$  avant  $Y$  alors que  $(p, \vec{v})$  intersecte  $Y$  avant  $X$ .

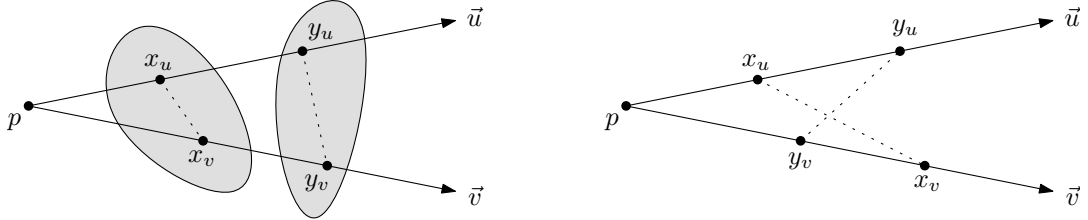


FIG. 4.3 – Sur le schéma de gauche, l'ordre d'intersection entre les rayons  $(p, \vec{u})$  et  $(p, \vec{v})$  et les objets  $X$  et  $Y$  est le même. Le schéma de droite illustre la contradiction obtenue en supposant que les rayons intersectent les objets dans un ordre différent : les objets  $X$  et  $Y$  s'intersectent.

Les segments  $x_u x_v$  et  $y_u y_v$  sont alors les diagonales du quadrilatère  $Q$ . Par conséquent,  $x_u x_v$  intersecte  $y_u y_v$ . Or,  $x_u x_v$  est contenu dans  $X$  alors que  $y_u y_v$  appartient à  $Y$  (par convexité de  $X$  et de  $Y$ ). Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle  $X$  et  $Y$  sont disjoints. D'où le résultat.  $\square$

Par conséquent, le système de rayons originaires d'un point  $p$  induit un ordre partiel sur les objets d'une scène. Nous le notons  $\prec_p$ . Deux ordres  $\prec_p$  et  $\prec_q$  ainsi définis sont *compatibles* s'ils coïncident pour toutes les paires d'éléments comparables suivant chacun des ordres.

**Lemme 5.** *Au voisinage d'un point  $p$ , tous les points induisent des ordres compatibles avec  $\prec_p$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un rayon  $(p, \vec{u})$  émanant de  $p$  qui intersecte  $X$  puis  $Y$ . Puisque  $X$  et  $Y$  sont convexes et fermés, ils peuvent être séparés strictement par un plan  $\pi_{XY}$  (le plan  $\pi_{XY}$  définit deux demi-espaces ouverts et disjoints dont l'un contient  $X$  et l'autre  $Y$ ). Du fait de la séparation stricte entre  $X$  et  $Y$ , le point  $p$  ne peut pas appartenir au plan  $\pi_{XY}$ . L'existence du rayon  $(p, \vec{u})$  qui intersecte  $X$  avant  $Y$  implique que  $p$  est du même côté de  $\pi_{XY}$  que  $X$ . De plus, il existe un voisinage  $P_{XY}$  de  $p$  contenu dans ce même demi-espace. Il s'en suit que tout rayon, qui quitte un point de  $P_{XY}$  et qui intersecte  $X$  et  $Y$ , rencontre  $X$  avant  $Y$ . L'intersection  $P$  de tous les voisinages  $P_{XY}$  de  $p$  définis pour des paires d'objets  $(X, Y)$  comparables par  $\prec_p$  est un voisinage de  $p$  qui induit des ordres compatibles avec  $\prec_p$  (le voisinage  $P$  n'est pas réduit au point  $p$  car l'ensemble des objets de la scène est fini). D'où le résultat.  $\square$

## 4.2.2 Déformation continue de la silhouette d'un objet

Considérons maintenant un objet  $X$  de dimension supérieure ou égale à deux et un point de vue  $p$  qui n'est pas dans l'enveloppe affine de  $X$  si ce dernier est de dimension deux. Nous démontrons qu'il est *toujours* possible de trouver un voisinage  $P$  du point de vue  $p$  dans lequel la silhouette de  $X$  se déforme continûment lorsque le point de vue se déplace dans  $P$ .

**Lemme 6.** *Soient  $X$  un objet de dimension supérieure ou égale à deux et  $p$  un point de vue tels que  $p$  n'appartienne pas à l'enveloppe affine de  $X$  si celui-ci est de dimension deux. Il existe un voisinage  $P$  de  $p$  et une application continue  $\varphi : P \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$  tels que, pour tout point  $q \in P$ , l'application partielle  $\varphi(q, \cdot)$  soit un homéomorphisme entre  $\mathbb{S}^1$  et la silhouette de  $X$  depuis  $q$ .*

Nous décomposons cette preuve en trois étapes. Dans un premier temps, nous construisons l'application  $\varphi$ . Ensuite, nous raisonnons sur des coupes de l'objet  $X$  dont nous démontrons localement la continuité. Finalement, nous combinons ces arguments pour conclure à la continuité de  $\varphi$ .

**Définition de  $\varphi$ .** Considérons une direction  $\vec{u}$  telle que le rayon  $(p, \vec{u})$  passe par un point de l'intérieur relatif de  $X$  et tel qu'il existe un plan  $\pi$  orthogonal à  $(p, \vec{u})$  qui sépare  $p$  de  $X$ . Notons  $P$  un voisinage de  $p$  qui (i) est séparé de  $X$  par  $\pi$  et (ii) tel que tout rayon partant d'un point de  $P$  dans la direction  $\vec{u}$  intersecte  $X$  transversalement (schéma de gauche de la figure 4.4). Depuis tout point  $q \in P$ , la silhouette  $silh_q(X)$  de  $X$  est une courbe convexe de  $\mathbb{S}^2$  qui est « prise en étau » entre la direction  $\vec{u}$  et le grand cercle  $\vec{u}^\perp$  des directions orthogonales à  $\vec{u}$  (schéma de droite de la figure 4.4). Pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$ , notons  $\vec{u}_t^\perp$  le point de  $\vec{u}^\perp$  suivant la paramétrisation naturelle du grand cercle  $\vec{u}^\perp$ . L'arc de géodésique (à la surface de  $\mathbb{S}^2$ ) entre  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_t^\perp$ , pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$ , intersecte la silhouette  $silh_q(X)$  en un unique point, noté  $\varphi(q, t)$ .

**Continuité des coupes de  $X$ .** Pour tout point  $q \in P$  et toute valeur  $t \in \mathbb{S}^1$ , nous notons  $\pi(q, t)$  le plan engendré par  $q$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_t^\perp$ , et muni du repère  $(q, \vec{u}, \vec{u}_t^\perp)$ . Nous démontrons maintenant que le bord des intersections entre  $\pi(q, t)$  et  $X$  varie continûment en fonction de  $q$  et  $t$ .

**Lemme 7.** *L'application qui à  $(q, t)$  fait correspondre le bord de  $\pi(q, t) \cap X$  est continue sur  $P \times \mathbb{S}^1$  pour la topologie induite par la distance de Hausdorff.*

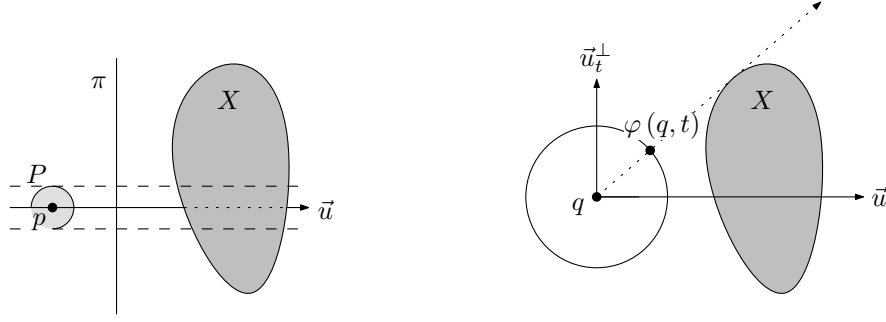


FIG. 4.4 – Définition de  $\varphi$ . Coupes en deux dimensions et représentées dans un plan passant par  $p$ . Sur le schéma de droite, le plan de coupe contient également la direction  $\vec{u}_t^\perp$ . Le point  $\varphi(q, t)$  est à l'intersection entre la géodésique qui relie  $\vec{u}$  à  $\vec{u}_t^\perp$  sur la sphère des directions. La direction en pointillés est l'unique direction de la silhouette  $\text{silh}_q(X)$  qui rencontre la géodésique de  $\vec{u}$  à  $\vec{u}_t^\perp$ .

*Démonstration.* Fixons  $q_0 \in P$  et  $t_0 \in \mathbb{S}^1$ . Notons  $X(q, t)$  la coupe de  $X$  par le plan  $\pi(q, t)$ , c'est-à-dire que  $X(q, t) = \pi(q, t) \cap X$ .

Tout d'abord, supposons que  $X$  soit un objet de dimension trois. Pour tout  $\epsilon > 0$ , nous appelons  $X_i$  et  $X_e$  les images du bord de  $X(q_0, t_0)$  par une homothétie dont le centre est un point intérieur à  $X(q_0, t_0)$  et de rapports respectifs  $1 - \epsilon$  et  $1 + \epsilon$  (figure 4.5). Puisque  $X_i$  est intégralement contenu dans l'intérieur de  $X$  et  $X_e$  est dans celui de son complémentaire, la distance de Hausdorff entre  $X_i \cup X_e$  et le bord de  $X$  est positive. Nous la notons  $\mu > 0$ . Le rayon de  $X$  est borné indépendamment de  $\epsilon$  et  $\mu = O(\epsilon)$ . Notons  $C_i$  et  $C_e$  les sommes de Minkowski de  $X_i$  et  $X_e$  avec une boule ouverte de diamètre  $\mu$  centrée en l'origine. Étant donné que  $C_i$  et  $C_e$  sont des ouverts et qu'ils intersectent  $\pi(q_0, t_0)$ , ils continuent d'intersecter  $\pi(q, t)$  pour tout voisinage suffisamment petit de  $(q_0, t_0)$ . Pour tout couple  $(q, t)$  ainsi défini, les coupes  $\pi(q, t) \cap C_i$  et  $\pi(q, t) \cap C_e$  se trouvent à une distance  $O(\epsilon)$  du bord de  $X(q_0, t_0)$  et entourent le bord de  $X(q, t)$ .

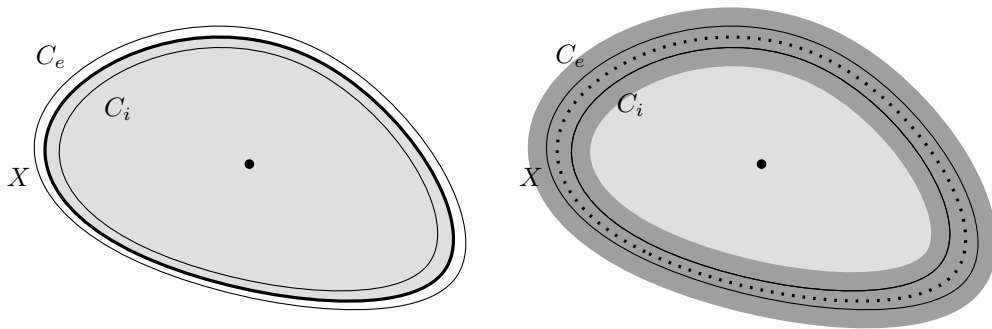


FIG. 4.5 – Définitions de  $X_i$ ,  $X_e$ ,  $C_i$  et  $C_e$ .

Lorsque  $X$  est de dimension deux, le même argument peut être employé à la condition de définir  $C_e$  comme la somme de Minkowski de  $X_e$  avec un disque ouvert de diamètre  $\mu$ , centré en l'origine, et contenu dans le plan contenant  $X$ . La trace de  $\pi(q_0, t_0)$  dans le plan de  $X$  est une droite qui intersecte  $C_e$ . Puisque ce dernier est ouvert, tout plan  $\pi(q, t)$  pour  $(q, t)$  suffisamment proche de  $(q_0, t_0)$  intersecte  $C_e$ . Le reste

de la preuve est obtenue par le même procédé que pour le cas tridimensionnel. D'où le résultat.  $\square$

*Preuve du lemme 6.* Dans le plan  $\pi(q, t)$  la trace du point  $q$  est fixée (puisque celui-ci est l'origine du repère) et, d'après le lemme 7, la trace du bord de  $X$  varie continûment au sens de la distance de Hausdorff. Or,  $\varphi(q, t)$  est la direction de la tangente à  $X$  orientée positivement par rapport à  $\vec{u}_t^\perp$  depuis  $q$  dans le plan  $\pi(q, t)$ , la continuité de  $\varphi$  s'en suit.  $\square$

### 4.2.3 Isolation des intersections propres de silhouettes

Prenons deux objets  $X$  et  $Y$  et une intersection  $\vec{u}$  entre leurs silhouettes depuis un point  $p$ . Il se peut qu'il n'existe aucun voisinage  $U$  de  $\vec{u}$  qui isole cette intersection des autres intersections entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis  $p$ . Par exemple, considérons une séquence strictement croissante de nombres réels  $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui a pour terme initial  $\theta_0 = 0$  et converge vers  $2\pi$ . Les enveloppes convexes respectives des points du cercle unitaire ayant pour coordonnées angulaires  $\theta_{2k}$  et  $\theta_{2k+1}$  sont deux polygones convexes dont les bords s'intersectent en un nombre infini (mais dénombrable) de points qui admettent  $(1, 0)$  comme point d'accumulation (figure 4.6). Or, il est possible de construire une scène dans laquelle, depuis un point de vue donné, de tels ensembles sont les silhouettes de deux objets disjoints.

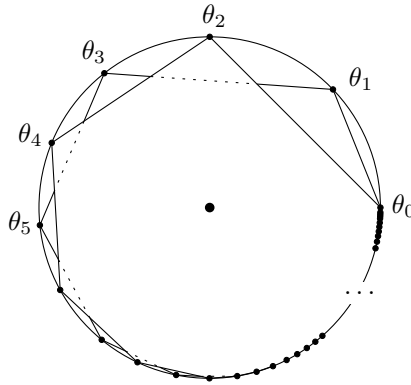


FIG. 4.6 – Exemple d'un point d'accumulation dans l'ensemble des intersections entre les silhouettes de deux objets.

Toutefois, nous démontrons que ce phénomène ne peut pas se produire si le rayon  $(p, \vec{u})$  n'est pas bitangent limite à  $X$  et  $Y$ . Pour débiter, nous prouvons un lemme technique : lorsqu'une suite de grands cercles intersectent une courbe convexe en deux points qui tendent vers un unique point commun, le grand cercle limite est support à la courbe en ce point. Ce résultat est également valide si la courbe est la silhouette d'un objet depuis un point de vue mobile.

**Lemme 8.** Soient  $X$  un objet de dimension supérieure ou égale à deux,  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de points et  $(\vec{n}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de directions. Supposons que  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers un point  $p$  qui n'est pas dans l'enveloppe affine de  $X$  quand celui-ci est de dimension deux, que  $(\vec{n}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  a une limite  $\vec{n}$  et que le grand cercle  $\vec{n}_i^\perp$  coupe la silhouette de  $X$  depuis  $p_i$  en deux directions distinctes  $\vec{u}_i$  et  $\vec{v}_i$  qui convergent vers une même et unique direction  $\vec{u}$ . Alors, le grand cercle  $\vec{n}^\perp$  est support en  $\vec{u}$  à la silhouette de  $X$  depuis  $p$ .

*Démonstration.* Étant donné que  $\vec{u}_i$  et  $\vec{n}_i$  sont des directions orthogonales, nous avons :

$$\langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle = \underbrace{\langle \vec{u}_i, \vec{n}_i \rangle}_0 + \langle \vec{u}_i, \vec{n} - \vec{n}_i \rangle = \langle \vec{u}_i, \vec{n} - \vec{n}_i \rangle.$$

Ainsi, le produit scalaire  $\langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle$  tend vers 0. Ceci implique, par continuité, que les directions  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont normales. De plus, en raison de la continuité de la déformation de la silhouette d'un objet lors du déplacement du point de vue (lemme 6), nous pouvons affirmer que  $\vec{u} \in \text{silh}_p(X)$ . Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que  $\vec{n}^\perp$  ne soit pas support à  $\text{silh}_p(X)$ . Vu que  $\text{silh}_p(X)$  traverse  $\vec{n}^\perp$  en  $\vec{u}$ , elle doit traverser ce grand cercle en un autre point  $\vec{v} \neq \vec{u}$ . Soient  $U$  et  $V$  deux voisinages disjoints et suffisamment petits de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$ . D'après le lemme de continuité de la déformation de  $\text{silh}_{q_i}(X)$  (lemme 6), il existe un voisinage de  $p$  dans lequel, pour tout point  $q_i$ , la courbe  $\text{silh}_{q_i}(X)$  intersecte  $\vec{n}^\perp$  dans  $U$  et dans  $V$ . Or, par hypothèse  $(\vec{u}_i)$  et  $(\vec{v}_i)$  tendent vers  $\vec{u}$ . Ceci implique qu'il existe un  $i$

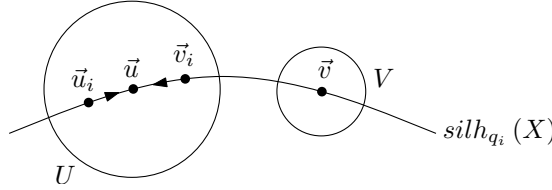


FIG. 4.7 – Les directions  $\vec{u}_i$  et  $\vec{v}_i$  appartiennent à  $U$  alors que  $\vec{v}$  est dans  $V$ .

suffisamment grand à partir duquel les deux directions  $\vec{u}_i$  et  $\vec{v}_i$ , avec  $\vec{u}_i \neq \vec{v}_i$ , sont contenues dans  $U$ . En conséquence, pour cette valeur de  $i$ ,  $\text{silh}_{q_i}(X)$  intersecte  $\vec{n}^\perp$  en trois points distincts (figure 4.7). Une contradiction qui implique le résultat.  $\square$

Nous pouvons maintenant montrer que toute intersection, entre deux silhouettes, qui ne se trouve pas sur un rayon bitangent limite peut être isolée des autres intersections entre les deux courbes.

**Lemme 9.** *Soit  $\vec{u}$  une intersection entre les silhouettes de deux objets  $X$  et  $Y$  depuis un point  $p$  telle que le rayon  $(p, \vec{u})$  ne soit pas bitangent limite à  $X$  et  $Y$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $\vec{u}$  qui ne contient aucune intersection distincte de  $\vec{u}$  entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis  $p$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il n'existe pas de voisinage de  $\vec{u}$  qui l'isole des autres intersections entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$ . Ainsi au voisinage de  $\vec{u}$ , il existe une infinité d'intersections entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis  $p$ . L'ensemble des intersections des silhouettes de  $X$  et  $Y$  est un ensemble compact. Par conséquent, il contient une suite  $(\vec{u}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui converge et dont les éléments sont deux à deux distincts. Soit  $(\vec{m}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de directions telles que  $\vec{m}_i$  soit normale au grand cercle passant par  $\vec{u}_{2i}$  et  $\vec{u}_{2i+1}$ . La compacité de  $\mathbb{S}^2$  implique qu'une sous-séquence de  $(\vec{m}_i)$  converge. Notons  $(\vec{n}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  cette séquence,  $\vec{n}$  sa limite et  $(\vec{v}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la sous-séquence de  $(\vec{u}_i)$  qui correspond à  $(\vec{n}_i)$ . Par construction,  $\vec{n}_i$  est la normale au grand cercle passant par  $\vec{v}_{2i}$  et  $\vec{v}_{2i+1}$ . En appliquant le lemme 8, avec  $p_i = p$ ,  $X = X$  et la suite  $(\vec{n}_i)$  que nous venons de définir, nous obtenons que le grand cercle  $\vec{n}^\perp$  de normale  $\vec{n}$  est support à la silhouette de  $X$  depuis  $p$  au point  $\vec{v} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \vec{v}_i$ . Le même argument s'applique à l'objet  $Y$ . Ainsi,  $(p, \vec{u})$  est un rayon bitangent limite à  $X$  et  $Y$ . Une contradiction qui implique le résultat.  $\square$



**Lemme 10.** *Soit  $p$  un point d'où n'est issu aucun rayon bitangent limite à deux objets disjoints  $X$  et  $Y$ . Il existe un nombre fini d'intersections entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis  $p$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une infinité d'intersections entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis  $p$ . L'ensemble des intersections des silhouettes de  $X$  et  $Y$  est un ensemble compact. Par conséquent, il existe une direction  $\vec{u}$  qui est un point d'accumulation de cet ensemble. D'après le lemme 9, c'est une contradiction avec le fait que  $p$  ne soit l'origine d'aucun rayon bitangent.  $\square$

#### 4.2.4 Stabilité locale des intersections propres

**Lemme 11.** *Soit  $\vec{u}$  une intersection entre les silhouettes de deux objets  $X$  et  $Y$  depuis un point  $p$  telle que le rayon  $(p, \vec{u})$  ne soit pas bitangent limite à  $X$  et  $Y$ . Pour tout voisinage suffisamment petit  $U$  de  $\vec{u}$ , il existe un voisinage  $P$  de  $p$  pour lequel, pour tout  $q \in P$ ,  $U$  contient une unique intersection entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis  $q$ .*

*Démonstration.* Étant donné que le rayon  $(p, \vec{u})$  n'est pas bitangent limite à  $X$  et  $Y$ , il existe un ouvert  $U$  qui contient  $\vec{u}$  et aucune autre intersection entre les silhouettes à  $X$  et  $Y$  depuis  $p$  (lemme 9). De plus, vu que ces silhouettes sont des courbes convexes, il est possible de choisir  $U$  de sorte que chacune d'entre elles intersecte le bord de  $U$  exactement deux fois.

Nous commençons par montrer l'existence d'une intersection, contenue dans  $U$ , entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis tout point  $q \in P$ . Les silhouettes de  $X$  et  $Y$  s'intersectent proprement (ne sont pas tangentes) en  $\vec{u}$  puisque  $(p, \vec{u})$  n'est pas bitangent limite à  $X$  et  $Y$ . Il s'en suit que ces silhouettes intersectent le bord de  $U$  en quatre points qui alternent. Lorsque le point de vue se déplace, et que  $U$  reste fixe, ces points d'intersection se déplacent continûment (d'après le lemme 6). Dès lors, au voisinage de  $p$ , ils continuent d'alterner le long du bord de  $U$  et les silhouettes de  $X$  et  $Y$  continuent de s'intersecter dans  $U$ .

Montrons maintenant que l'intersection entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  est unique dans  $U$ . Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe des points de vue arbitrairement proche de  $p$  depuis lesquels les silhouettes de  $X$  et  $Y$  s'intersectent en deux points distincts de  $U$ . Considérons les suites

$$(q_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad (\vec{u}_i)_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (\vec{v}_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

telles que, pour tout  $i$ , les directions  $\vec{u}_i$  et  $\vec{v}_i$  soient des intersections distinctes entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis le point  $q_i$ . Notons  $\vec{n}_i$  la direction normale au grand cercle qui passe par  $\vec{u}_i$  et  $\vec{v}_i$ . Par compacité, il existe une extraction commune  $\sigma$  telle que les séquences  $(q_{\sigma(i)})$ ,  $(\vec{u}_{\sigma(i)})$ ,  $(\vec{v}_{\sigma(i)})$  et  $(\vec{n}_{\sigma(i)})$  convergent. En particulier, la suite  $(q_{\sigma(i)})$  tend vers  $p$  alors que  $(\vec{u}_{\sigma(i)})$  et  $(\vec{v}_{\sigma(i)})$  ont pour limite  $\vec{u}$ . Ce second point s'explique par le fait que l'ensemble des rayons tangents à un convexe est fermé et que  $\vec{u}$  est la seule direction de  $U$  suivant laquelle un rayon issu de  $p$  est bitangent à  $X$  et  $Y$ . En appliquant le lemme 8, nous obtenons que les silhouettes de  $X$  et  $Y$  admettent un grand cercle support commun en  $\vec{u}$ . Une contradiction avec le fait que  $(p, \vec{u})$  n'est pas bitangent limite à  $X$  et  $Y$ . D'où le résultat.  $\square$

### 4.3 Structure du contour apparent d'une scène

Le contour apparent de deux objets  $X$  et  $Y$  depuis un point de vue dégénéré peut avoir un nombre infini de jonctions (comme le montre l'exemple précédent), des jonctions de degré supérieur à trois ou des faces non homéomorphes à des disques (éventuellement troués). Néanmoins, nous démontrons que le contour apparent d'une scène depuis un point de vue non dégénéré a une structure simple.

**Lemme 12.** *Le contour apparent d'une scène depuis un point de vue non dégénéré contient un nombre fini de jonctions, chacune de degré trois, et ses faces sont homéomorphes à des disques éventuellement troués.*

*Démonstration.* Tout d'abord, supposons que  $\Delta_p$  contienne une infinité de jonctions. Chaque jonction est la direction d'un rayon depuis  $p$  qui voit tangentiellement deux objets de la scène. Puisque le nombre d'objets est fini, il existe un ensemble infini de jonctions qui correspondent aux rayons voyant tangentiellement la même paire d'objets  $X$  et  $Y$ . D'après le lemme 10, c'est une contradiction avec le fait que  $p$  soit non dégénéré.

Chaque jonction du contour apparent  $\Delta_p$  de la scène correspond à un rayon qui voit tangentiellement exactement deux objets puisque  $p$  est non dégénéré. Considérons la jonction  $\vec{u}$ . Au voisinage de  $\vec{u}$ , chacun des ensembles  $\text{silh}_p(X) \setminus \{\vec{u}\}$  et  $\text{silh}_p(Y) \setminus \{\vec{u}\}$  est formé de deux arcs. Puisque  $X \prec_p Y$ , les deux arcs de  $\text{silh}_p(X)$  sont localement contenus dans le contour apparent  $\Delta_p$ . Étant donné que  $p$  est non dégénéré, il n'existe pas de grand cercle qui soit à la fois support à  $\text{silh}_p(X)$  et à  $\text{silh}_p(Y)$  en  $\vec{u}$ . Ces courbes sont convexes et s'intersectent donc proprement en  $\vec{u}$ . De plus, l'un des deux arcs de  $\text{silh}_p(Y)$  correspond à des rayons qui intersectent  $X$  proprement. Vu que  $X \prec_p Y$ , ceci implique que cet arc n'est pas (localement) dans le contour apparent  $\Delta_p$ . Par conséquent, le degré de  $\vec{u}$  est trois.

Soient  $F$  une face de  $\Delta_p$  et  $\vec{v}$  un point de  $F$ . Si  $\vec{v}$  n'appartient pas au contour apparent de la scène  $\Delta_p$ , alors il se trouve à l'intérieur de  $\mathbb{S}^2 \setminus \Delta_p$ . Or,  $\mathbb{S}^2 \setminus \Delta_p$  est un ouvert. La face  $F$  est donc localement homéomorphe au plan autour de  $p$ . Si  $\vec{v}$  est un point régulier de  $\Delta_p$  (c'est-à-dire que  $\Delta_p$  est rectifiable au voisinage de  $\vec{v}$ ), le contour  $\Delta_p$  est une courbe convexe et  $F$  est homéomorphe à un demi-plan. Finalement, si  $\vec{v}$  est une jonction de  $\Delta_p$ , alors  $\vec{v}$  est de degré 3 et découpe la sphère des directions, au voisinage de  $\vec{v}$ , en trois secteurs dont l'un au moins est contenu dans  $F$  (par définition de  $F$ ). Si les trois secteurs sont contenus dans  $F$ , la face est homéomorphe au plan au voisinage de  $\vec{v}$ . Si au plus deux secteurs sont dans la face, au voisinage de  $\vec{v}$ , la face est homéomorphe à un demi-plan. Ainsi,  $F$  est soit homéomorphe à un plan, soit homéomorphe à un demi-plan au voisinage de tous ses points. Par conséquent,  $F$  est une sous-variété (à bords) du plan<sup>12</sup> [70, théorème 4.17].  $\square$

### 4.4 L'ensemble des points de vue dégénérés est nulle part dense

Nous nous intéressons à l'ensemble des points de vue dégénérés et nous démontrons que cet ensemble est nulle part dense.

<sup>12</sup>Nous supposons que la scène n'est pas vide.

### 4.4.1 Rayons bitangents limites

Considérons une paire d'objets  $X$  et  $Y$ . Nous commençons par démontrer que l'ensemble des points d'où partent des rayons bitangents limites à  $X$  et  $Y$  est nulle part dense.

**Lemme 13.** *L'ensemble des origines de rayons bitangents limites à deux objets disjoints est nulle part dense.*

*Démonstration.* La preuve de ce résultat est une conséquence immédiate des lemmes 14 et 15. □

#### 4.4.1.1 Rayons bitangents limites dans des plans séparateurs

Un rayon bitangent limite à  $X$  et  $Y$  est dit *séparateur* s'il appartient à un plan support commun à  $X$  et  $Y$  qui les sépare.

**Lemme 14.** *L'ensemble des origines de rayons bitangents limites séparateurs à deux objets disjoints est nulle part dense.*

*Démonstration.* Soient  $X$  et  $Y$  deux objets disjoints,  $(p, \vec{u})$  un rayon tangent à  $X$  avant  $Y$  et  $H$  un plan qui contient  $(p, \vec{u})$  et sépare  $X$  de  $Y$ . Notons  $H_Y$  le demi-espace ouvert délimité par  $H$  dont l'adhérence contient  $Y$ . Pour tout point  $q \in H_Y$ , considérons  $C_q$  l'enveloppe convexe de  $q$  et  $Y$ . L'intersection entre  $H$  et  $C_q$  est contenue dans  $Y$ . Il s'en suit que l'intersection entre  $C_q$  et  $X$  ne peut être que vide. Ainsi, il n'existe pas de rayon issu d'un point de  $H_Y$  qui intersecte  $X$  avant  $Y$ . Étant donné qu'il existe des points de  $H_Y$  arbitrairement proches de  $p$ , celui-ci n'est pas dans l'intérieur de l'ensemble  $P_{XY}$  des origines de rayons bitangents limites à  $X$  et  $Y$  qui rencontrent  $X$  avant  $Y$ . L'ensemble  $P_{XY}$  est donc d'intérieur vide. En appliquant le même argument, on obtient que  $P_{YX}$ , l'ensemble des origines de rayons bitangents limites à  $X$  et  $Y$  qui rencontrent  $Y$  avant  $X$ , est également d'intérieur vide. Étant donné que  $P_{XY}$  et

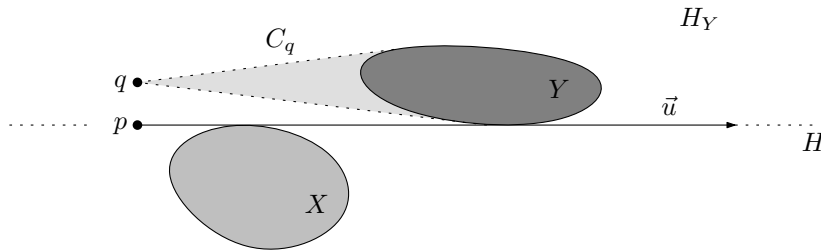


FIG. 4.8 – L'enveloppe convexe  $C_q$  engendrée par  $q$  et  $Y$  est intégralement contenue dans le demi-espace  $H_Y$ .

$P_{YX}$  sont deux ensembles fermés d'intérieur vide, leur union est également fermée et d'intérieur vide. Par conséquent, cet ensemble est nulle part dense. D'où le résultat. □

#### 4.4.1.2 Rayons bitangents limites dans des plans non séparateurs

Le même résultat est obtenu pour les rayons bitangents limites dans des plans non séparateurs bien que cela soit plus complexe.

**Lemme 15.** *L'ensemble des origines de rayons bitangents limites non séparateurs à deux objets disjoints est nulle part dense.*

**Préliminaires techniques.** Rappelons qu'en tout point du bord d'un objet convexe, il existe un plan support. Dans le cas où ce plan est unique, nous disons que le point est *régulier*, sinon il est *singulier*. L'ensemble des points réguliers du bord  $\partial X$  d'un objet convexe  $X$  est un ouvert dense dans  $\partial X$  (voir, par exemple, [11]). Si  $p$  est un point régulier du bord  $\partial X$  d'un convexe  $X$ , nous notons  $H_p(X)$  le plan support à  $X$  en  $p$  et  $\vec{n}_p(X)$  sa normale qui pointe vers l'extérieur de  $X$ . Nous commençons par démontrer le lemme technique suivant :

**Lemme 16.** *Soit  $p$  un point régulier du bord de  $X$ . Les applications  $q \mapsto H_q(X)$  et  $q \mapsto \vec{n}_q(X)$ , qui associent à un point son plan support et sa normale, sont continues en  $p$ .*

*Démonstration.* Supposons que l'application  $q \mapsto \vec{n}_q(X)$  ne soit pas continue en  $p$ . Dès lors, il existe  $\epsilon > 0$  et une suite de points  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow p$  tels que l'angle entre  $\vec{n}_{p_i}(X)$  et  $\vec{n}_p(X)$  soit supérieur à  $\epsilon$ . Par compacité de  $\mathbb{S}^2$ , nous extrayons une sous-suite convergente de  $(\vec{n}_{p_i}(X))_{i \in \mathbb{N}}$ . Notons  $\vec{n}$  cette limite. Par définition, pour tout point  $p_i$ , le plan de normale  $\vec{n}_{p_i}(X)$  est support à  $X$  en  $p_i$ . Il s'en suit que le plan défini à la limite, passant par  $p$  et de normale  $\vec{n}$ , est un plan support à  $X$  en  $p$ . Or, par hypothèse,  $\vec{n}$  est différente de  $\vec{n}_p(X)$ . Il y a donc deux plans support distincts en  $p$ . Une contradiction avec la régularité de  $p$  qui implique que l'application  $q \mapsto \vec{n}_q(X)$  est continue.

Maintenant, posons  $H_q(X) = (\vec{n}_q(X), d_q)$ . La quantité  $d_q$  vérifie l'égalité

$$d_q = \max_{x \in X} \{\vec{Ox} \cdot \vec{n}_q(X)\}.$$

Or, la continuité de l'application  $q \mapsto \vec{n}_q(X)$  en  $p$  implique celle de  $q \mapsto d_q$ . Finalement, l'application  $q \mapsto H_q(X)$  est continue. D'où le résultat.  $\square$

Nous pouvons maintenant montrer que l'ensemble des origines de rayons bitangents limites non séparateurs à deux objets disjoints est nulle part dense.

*Démonstration du lemme 15.* Notons  $C$  l'enveloppe convexe de  $X \cup Y$ . Supposons que  $C$  soit d'intérieur non vide – sans quoi le résultat est immédiat. Considérons  $\pi$  un plan séparant strictement  $X$  de  $Y$  et  $\kappa$  la courbe  $\pi \cap \partial C$ . Remarquons que toute droite support à un rayon bitangent limite non séparateur coupe la courbe  $\kappa$  en un point  $p$ .

*Points singuliers de  $\kappa$ .* Puisque  $\pi$  sépare  $X$  de  $Y$ , il y a une bijection entre les plans support à  $C$  en  $p$  et les droites support à  $\kappa$ , vue comme courbe de  $\pi$ , en  $p$ . Les points singuliers de  $C$  sur  $\kappa$  sont donc les points singuliers de  $\kappa$ . Si deux droites bitangentes passent par  $p \in \kappa$ , ce point est intérieur à un quadrilatère plan contenu dans le bord  $\partial C$ . Par conséquent, il existe un unique plan support à  $C$  en  $p$ . Il passe donc exactement un plan bitangent par point singulier de  $p$ . Comme une courbe convexe du plan a un nombre au plus dénombrable de points singuliers, l'union de ces plans bitangents rencontrant  $\kappa$  en un point singulier est d'intérieur vide.

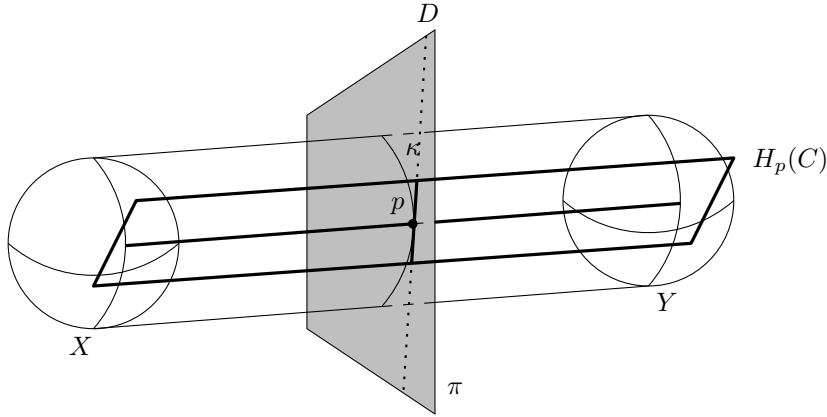


FIG. 4.9 – Bijection entre le plan support  $H_p(C)$  à  $\partial C$  et la droite support à  $\kappa$  en  $p$ . La droite  $D$  de  $\pi$  est support à  $\kappa$  en  $p$ .

*Points réguliers de  $\kappa$ .* Notons  $H_p(C)$  le plan support à  $C$  en un point régulier  $p$  de  $\kappa$ . Puisque  $\pi \cap H_p(C)$  est une droite support à  $\kappa$ , l'intersection  $\kappa \cap H_p(C)$  est soit un point, soit un intervalle d'intérieur non vide du plan  $\pi$ .

Il y a un nombre au plus dénombrable d'intervalles de points. De plus, toute paire de points dans un intervalle donné a même plan support. Par conséquent, l'ensemble des origines de rayons bitangents dont l'intersection avec  $\kappa$  appartient à un intervalle de points est une union dénombrable de plans. Il est donc d'intérieur vide. Revenons donc au cas où l'intersection de  $\kappa \cap H_p(C)$  est réduite à un point isolé. Par un point régulier isolé  $p$  passe exactement une droite bitangente. Notons  $\vec{u}_p$  sa direction (orientée de  $X$  vers  $Y$ ). Montrons tout d'abord que  $p \mapsto \vec{u}_p$  est continue en tout point régulier. Par l'absurde, supposons qu'il existe  $\epsilon > 0$  et une suite  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui tende vers  $p$  et telle que l'angle entre  $\vec{u}_{p_i}$  et  $\vec{u}_p$  soit supérieur à  $\epsilon$ . Par compacité de  $\mathbb{S}^2$ , la suite  $(\vec{u}_{p_i})$  contient une sous-suite convergente. Notons  $\vec{u}$  cette limite. Ainsi, il existe une sous-suite :

$$(p_{\sigma(i)}) \rightarrow p \quad \text{avec} \quad (\vec{u}_{p_{\sigma(i)}}) \rightarrow \vec{u} \neq \vec{u}_p.$$

Puisque le rayon  $(p_{\sigma(i)}, \vec{u}_{p_{\sigma(i)}})$  appartient au plan  $H_{p_{\sigma(i)}}$ , nous avons, par continuité de l'application  $q \mapsto H_q$  en un point régulier (lemme 16), que le rayon  $(p, \vec{u})$  appartient à  $H_p$ . Pour tout  $j$ , la droite passant par  $p_j$  de vecteur directeur  $\vec{u}_{p_j}$  intersecte  $X$  et  $Y$ . Or, ces objets sont fermés. Nous en déduisons que la droite passant par  $p$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  rencontre  $X$  et  $Y$ . Cette droite étant contenue dans  $H_p$ , elle est bitangente dans un plan non séparateur et deux droites bitangentes passent par  $p$ . Une contradiction avec la régularité de  $p$ . D'où la continuité de  $q \mapsto \vec{u}_q$  en tout point régulier.

Soient  $R_\kappa$  l'ensemble des points réguliers (isolés) de  $\kappa$  et  $D_\kappa$  l'ensemble des droites bitangentes rencontrant  $R_\kappa$ . La fonction  $\psi : D_\kappa \rightarrow R_\kappa$ , qui associe à une droite son intersection avec  $\kappa$ , est bijective et continue. De plus, la continuité de l'application  $q \mapsto \vec{u}_q$  (démontrée ci-dessus) implique la continuité de  $\psi^{-1}$ . L'application  $\psi$  est donc un homéomorphisme. Par conséquent, l'union des droites de  $D_\kappa$  intersectant un intervalle de  $R_\kappa$  est d'intérieur vide. Comme  $R_\kappa$  est le complémentaire dans  $\kappa$  d'un nombre dénombrable de points singuliers et d'intervalles de points réguliers, il se décompose en un nombre au plus dénombrable d'intervalles. L'union des droites de  $D_\kappa$  (les droites bitangentes rencontrant  $\kappa$  en un point régulier) est donc l'union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles d'intérieurs vides et est

donc d'intérieur vide. □

### 4.4.2 Rayons tritangents

Nous prouvons que l'ensemble des origines de rayons tritangents est nulle part dense. Pour cela, nous commençons par le cas des origines de rayons qui ne sont pas sur des rayons bitangents limites.

**Préliminaires techniques.** Avant tout, nous présentons un lemme technique. Prenons un objet  $X$  et un rayon  $(p, \vec{u})$  tangent à  $X$ . Soit  $\vec{n}$  une direction normale à  $\vec{u}$  telle que le plan  $H_{\vec{n}}$  contenant  $(p, \vec{u})$  et  $\vec{n}$  intersecte  $X$  sans le contenir ni en être un plan support. Supposons que  $\vec{n}$  pointe dans la direction du demi-plan ouvert de  $H_{\vec{n}}$  délimité par  $(p, \vec{u})$  et ne contenant pas  $X \cap H_{\vec{n}}$  (figure 4.10). Pour le paramètre  $t \in ]-\pi, \pi[$ , notons  $H_{\vec{n}}(t)$  l'image de  $H_{\vec{n}}$  par la rotation d'angle  $t$  et d'axe  $p + \mathbb{R}\vec{n}$ . Nous disons qu'un rayon de  $H_{\vec{n}}(t)$  dont l'origine est sur  $p + \mathbb{R}\vec{n}$  rencontre  $X$  par le dessus si  $\vec{n}$  pointe vers le demi-plan de  $H_{\vec{n}}(t)$  délimité par la droite support au rayon qui ne rencontre pas  $X \cap H_{\vec{n}}(t)$ .

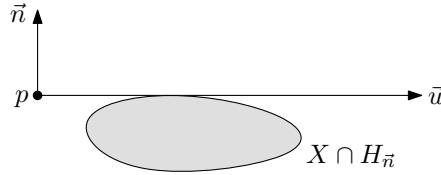


FIG. 4.10 – La direction  $\vec{n}$  pointe vers le demi-plan de  $H_{\vec{n}}$ , délimité par la droite support à  $(p, \vec{u})$ , qui ne contient pas  $X \cap H_{\vec{n}}$ . Le rayon  $(p, \vec{u})$  rencontre l'objet  $X$  par le dessus.

**Lemme 17.** *Il existe un voisinage  $N$  de  $\vec{n}$  pour lequel il existe  $\epsilon > 0$  tel que, quelques soient  $\vec{m} \in N$  et  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ , tout rayon dans  $H_{\vec{m}}(t)$ , issu d'un point du segment  $[p - \epsilon\vec{m}, p + \epsilon\vec{m}]$ , dont la direction fait un angle au plus  $\epsilon$  avec  $\vec{u}$  et tangent à  $X$ , rencontre  $X$  par le dessus.*

*Démonstration.* Dans un premier temps, supposons que  $X$  soit un objet tridimensionnel. Puisque le plan  $H_{\vec{n}}$  n'est pas support à  $X$ , il existe une boule ouverte  $B$  contenue dans  $X$  dont le centre appartient à  $H_{\vec{n}}$ . Vu que  $(p, \vec{u})$  est tangent à  $X$ , nous pouvons supposer que le projeté orthogonal  $c$  du centre de  $B$  sur la droite support de  $(p, \vec{u})$  appartient au rayon. Soient  $\pi$  un plan orthogonal à  $\vec{n}$  qui sépare strictement  $B$  du rayon  $(p, \vec{u})$  et  $q$  le symétrique de  $p$  par rapport à  $c$ . Considérons deux boules ouvertes  $B_p$  et  $B_q$ , centrées respectivement en  $p$  et  $q$ , qui sont séparées de  $B$  par le plan  $\pi$  (schéma de gauche de la figure 4.11). Aucun rayon qui part de  $B_p$  et traverse  $B_q$  n'intersecte  $B$  (autrement il devrait couper  $\pi$  en deux points distincts). Il existe  $\epsilon_0 > 0$  pour lequel tout rayon issu d'un point à une distance au plus  $\epsilon_0$  de  $p$  et dont la direction fait un angle au plus  $\epsilon_0$  avec  $\vec{u}$  intersecte  $B_p$  et  $B_q$ . Notons  $R$  ce voisinage de  $(p, \vec{u})$ .

Soit  $N$  un voisinage fermé de  $\vec{n}$  tel que, pour tout  $\vec{m} \in N$ , le produit scalaire  $\langle \vec{n}, \vec{m} \rangle$  soit strictement positif et le plan  $H_{\vec{m}}$  intersecte  $B$ . Il existe  $\epsilon_1 > 0$  pour lequel, quelque soit  $\vec{m} \in N$ , il existe une boule ouverte  $B_{\vec{m}} \subset B$  de rayon  $\epsilon_1$  dont le centre appartient au plan  $H_{\vec{m}}$  (schéma de droite de la figure 4.11). Fixons  $\epsilon_2 > 0$  tel que les images de  $H_{\vec{n}}$  par les rotations d'axe  $p + \mathbb{R}\vec{n}$  et d'angles  $-\epsilon_2$  et  $\epsilon_2$  intersectent la boule  $B_{\vec{n}}$ . Notons que, pour tous  $\vec{m} \in N$  et  $t \in ]-\epsilon_2, \epsilon_2[$ , l'intersection entre le plan  $H_{\vec{m}}(t)$  et  $B_{\vec{m}}$  n'est pas vide.

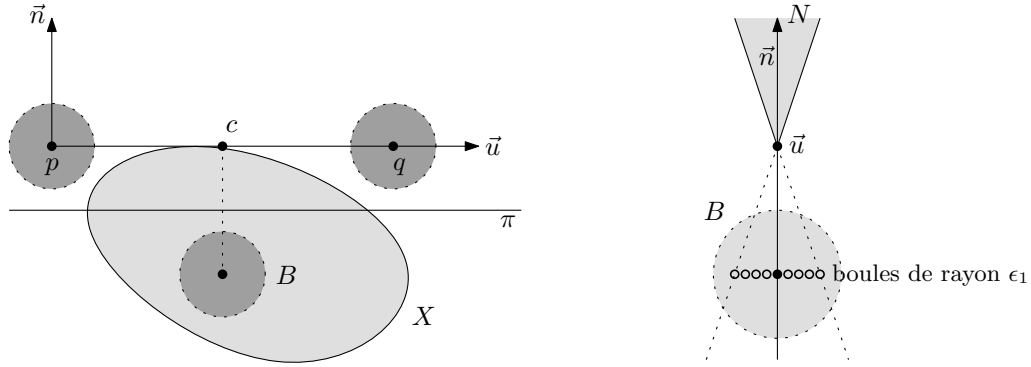


FIG. 4.11 – Le schéma de gauche montre les deux boules  $B_p$  et  $B_q$ . Il existe un voisinage de  $(p, \vec{u})$  composé de rayons issus de  $B_p$  et qui intersectent  $B_q$ . Le schéma de droite montre que pour toute direction  $\vec{m}$  de  $N$ , il existe une boule de rayon  $\epsilon_1$  centrée en un point de  $H_{\vec{m}}$  et contenue dans  $B$ . Ce schéma représente la situation dans le plan normal à  $\vec{u}$  au centre de la boule  $B$ .

Pour finir, fixons  $\epsilon = \min(\epsilon_0, \epsilon_2)$ . Quelques soient  $\vec{m} \in N$  et  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ , tout rayon appartenant à l'intersection entre  $R$  et le plan  $H_{\vec{m}}(t)$  est au dessus de  $B_{\vec{m}}$  dans  $H_{\vec{m}}(t)$ . Il s'en suit que si ce rayon est tangent à  $X$ , alors il est au dessus de  $X$  dans  $H_{\vec{m}}(t)$ .

Dans le cas où  $X$  est un objet de dimension deux, le même argument peut être appliqué en considérant un disque  $D$  ouvert dans  $X$ . D'où le résultat.  $\square$

**Lemme 18.** *Soit  $(p, \vec{u})$  un rayon tangent à  $X, Y$  et  $Z$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $\vec{u}$  tel qu'il existe un ouvert arbitrairement proche de  $p$  depuis lequel ne part aucun rayon tritangent à  $X, Y$  et  $Z$  suivant une direction de  $U$ .*

*Démonstration.* Soient  $X, Y$  et  $Z$  les trois objets rencontrés par le rayon  $(p, \vec{u})$  et soient  $\pi_X, \pi_Y$  et  $\pi_Z$  trois plans supports en  $\vec{u}$  respectivement à  $X, Y$  et  $Z$  tels que  $(p, \vec{u})$  appartienne à chacun de ces plans. Ces trois plans partagent l'espace en six sextants distincts (le rayon  $(p, \vec{u})$  n'est pas bitangent limite). Chacun des objets rencontre exactement trois régions consécutives : d'une part chaque objet est contenu dans un demi-espace délimité par son plan support, d'autre part, chaque objet doit traverser les deux plans différents de son plan support (le rayon  $(p, \vec{u})$  n'est pas bitangent limite). Dans chaque région, d'après le lemme 4, les objets sont triés par ordre d'intersection avec les rayons issus de  $p$  (par convention, l'ordre est  $X, Y$  puis  $Z$ ). Il y a huit combinaisons possibles. En éliminant les symétries, nous nous ramenons aux quatre cas représentés à la figure 4.12. Pour chaque cas, nous construisons un ouvert arbitrairement proche de  $p$  depuis lequel n'est issu aucun rayon tangent à  $X, Y$  et  $Z$ .

*Premier cas :* Ce cas correspond au schéma en haut à gauche de la figure 4.12 où  $S_\infty$  correspond au sextant qui n'intersecte aucun objet et  $S_{XYZ}$  à celui qui intersecte les trois objets. Notons  $\vec{n}$  une normale à  $\vec{u}$  dirigée vers  $S_\infty$  comme indiqué sur le schéma de la figure 4.13. Notons  $\pi$  le plan passant par  $p$  et contenant les directions  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$ . Remarquons que  $\pi$  peut être choisi tel qu'il ne soit support à aucun des trois objets puisqu'il intersecte  $S_{XYZ}$ .

Dans le plan  $\pi$ , les trois objets sont en dessous du rayon  $(p, \vec{u})$ . D'après le lemme 17, pour chacun des trois objets, il existe un voisinage  $N$  de  $\vec{n}$  pour lequel il existe  $\epsilon > 0$  tel que, quelque soit  $\vec{m} \in N$ , tout

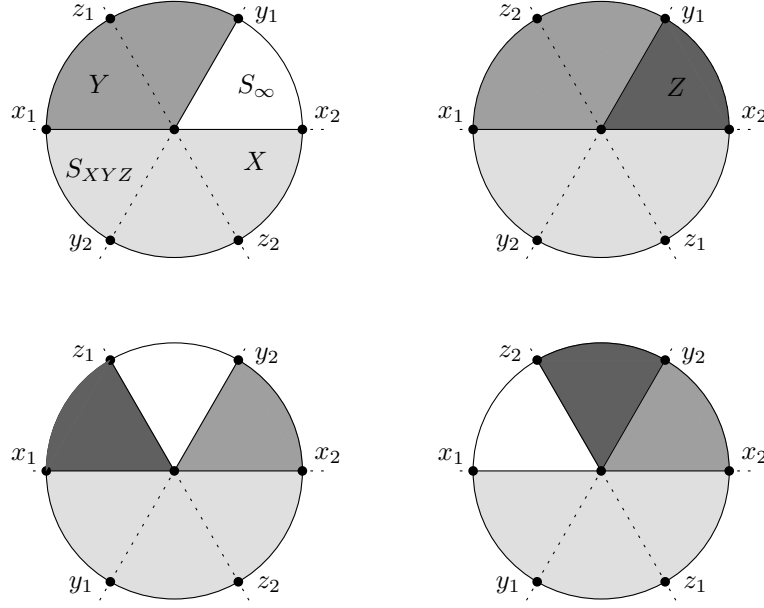


FIG. 4.12 – Ensembles des contours apparents engendrés par trois objets  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Les couleurs correspondent au premier objet pouvant être intersecté par le rayon issu  $p$  et contenu dans ce sextant (la couleur la plus claire correspond à  $X$ , la plus foncée est associée à  $Z$  alors que le blanc correspond indifféremment à l'infini ou à un quatrième objet rencontré transversalement).

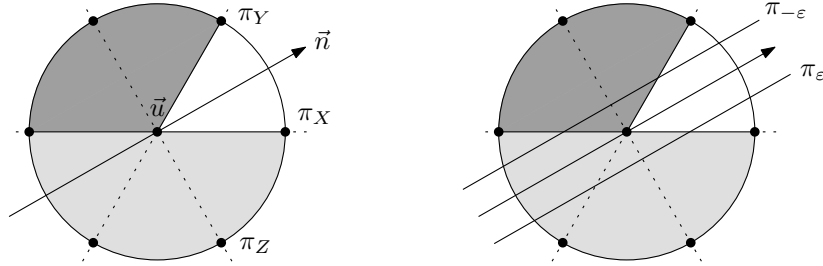


FIG. 4.13 – Le schéma de gauche montre le choix de la direction  $\vec{n}$ . Quant au schéma de droite, il représente les coupes par les plans  $\pi_{-\epsilon}$  et  $\pi_{+\epsilon}$ .

rayon issu d'un point du segment  $[p - \epsilon\vec{m}, p + \epsilon\vec{m}]$ , suivant une direction qui fait un angle au plus  $\epsilon$  avec  $\vec{u}$  et tangent à l'objet, soit tangent à cet objet par le dessus. Prenons le minimum des  $\epsilon$  et l'intersection des trois voisinages de  $\vec{n}$ .

Pour tout  $\vec{m} \in N$ , notons  $\pi_{-\epsilon}$  et  $\pi_{+\epsilon}$  les plans images du plan contenant  $p$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{m}$  par rotation d'angles  $-\epsilon$  et  $+\epsilon$  autour de l'axe  $p + \mathbb{R}\vec{m}$ . Les intersections de ces plans avec la sphère des directions sont représentées sur le schéma de droite de la figure 4.13. Ces deux plans intersectent  $\pi_X$ ,  $\pi_Y$  et  $\pi_Z$  comme indiqué sur les schémas inférieurs de la figure 4.14. Or, pour qu'une tangente partant de  $q \in [p - \epsilon\vec{m}, p + \epsilon\vec{m}]$  et laissant les objets du même côté puisse exister, il faudrait dans chacun de ces plans qu'elle intersecte deux fois une même droite ( $\pi_X$  pour  $\pi_{-\epsilon}$  et  $\pi_Y$  pour  $\pi_{+\epsilon}$ ). C'est impossible et cela démontre qu'il n'existe localement pas de tangente à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  depuis tout point  $q$  arbitrairement proche de  $p$  dans la direction  $\vec{m} \in N$ .



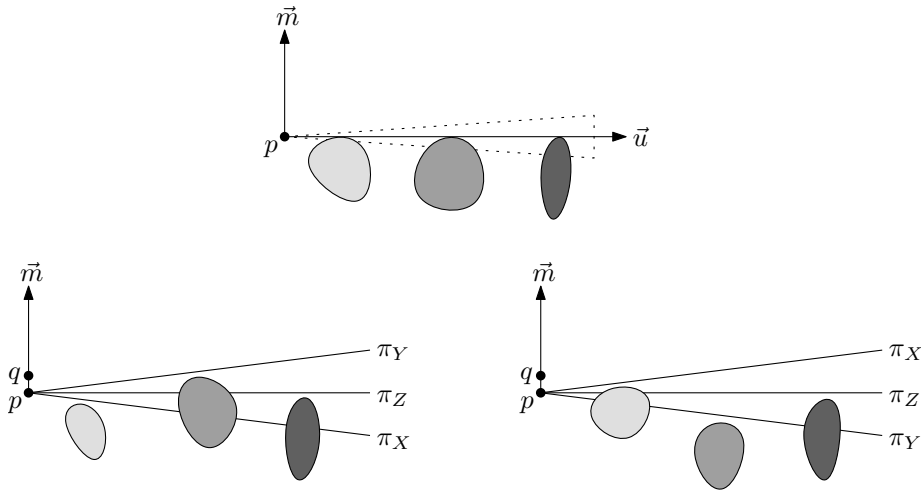


FIG. 4.14 – Balayage par des plans obtenus par rotation autour de l'axe  $p + \mathbb{R}m$ . Le schéma supérieur est une coupe de la scène par le plan  $\pi$ . Le schéma inférieur gauche est celui d'une coupe dans le plan  $\pi_{-\epsilon}$  alors que celui de droite est une coupe dans le plan  $\pi_{+\epsilon}$ .

Nous procédons maintenant de manière similaire pour extraire une direction qui convienne dans chacun des autres cas.

*Autres cas :* Dans le second cas, nous considérons l'ensemble des directions orientées vers le sextant qui intersecte uniquement l'objet  $Z$ . Pour le troisième, nous choisissons l'ensemble des directions orientées vers l'unique sextant qui n'intersecte aucun objet. Finalement, dans le dernier cas nous utilisons l'ensemble des directions orientées vers le sextant qui intersecte uniquement  $X$  (voir figure 4.15). Mis ensembles ces quatre cas démontrent le résultat de ce lemme.  $\square$

**Lemme 19.** *L'ensemble des origines de rayons tangents à trois objets disjoints sans être les origines de rayons bitangents limites à deux d'entre eux est d'intérieur vide.*

*Démonstration.* Considérons les trois objets disjoints  $X, Y$  et  $Z$  et supposons que l'ensemble des origines de rayons tritangents à  $X, Y$  et  $Z$  ne soit pas d'intérieur vide. Soit  $B$  une boule ouverte incluse dans cet ensemble. Puisque, pour chaque paire d'objets  $(X, Y), (X, Z)$  ou  $(Y, Z)$ , l'ensemble des origines de rayons bitangents limites est nulle part dense (lemme 13), nous pouvons supposer que  $B$  n'intersecte aucun des ensembles dont sont issus des rayons bitangents limites à ces objets. Par conséquent, depuis chaque point  $p \in B$ , il existe un nombre fini de rayons bitangents à deux des trois objets (lemme 10). De plus, quitte à restreindre  $B$ , la stabilité locale des intersections entre les silhouettes de deux objets (lemme 11), garantit que le nombre de rayons bitangents aux deux premiers objets est le même depuis tout point de  $B$ .

Choisissons un point quelconque  $p$  de  $B$ . Notons  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  les directions des bitangentes aux deux premiers objets depuis  $p$  et  $V_1, \dots, V_k$  des voisinages de ces directions qui les isolent les unes des autres. En raison de la stabilité des intersections entre paires de silhouettes (lemme 11), il existe un voisinage  $P$  depuis lequel la bitangente aux deux premiers objets reste unique dans chaque  $V_i$  lors du déplacement du point de vue dans  $P$  (quitte à réduire les  $V_i$ ).

Nous construisons un procédé itératif qui permet d'exhiber un point de  $P$  depuis lequel ne part aucun

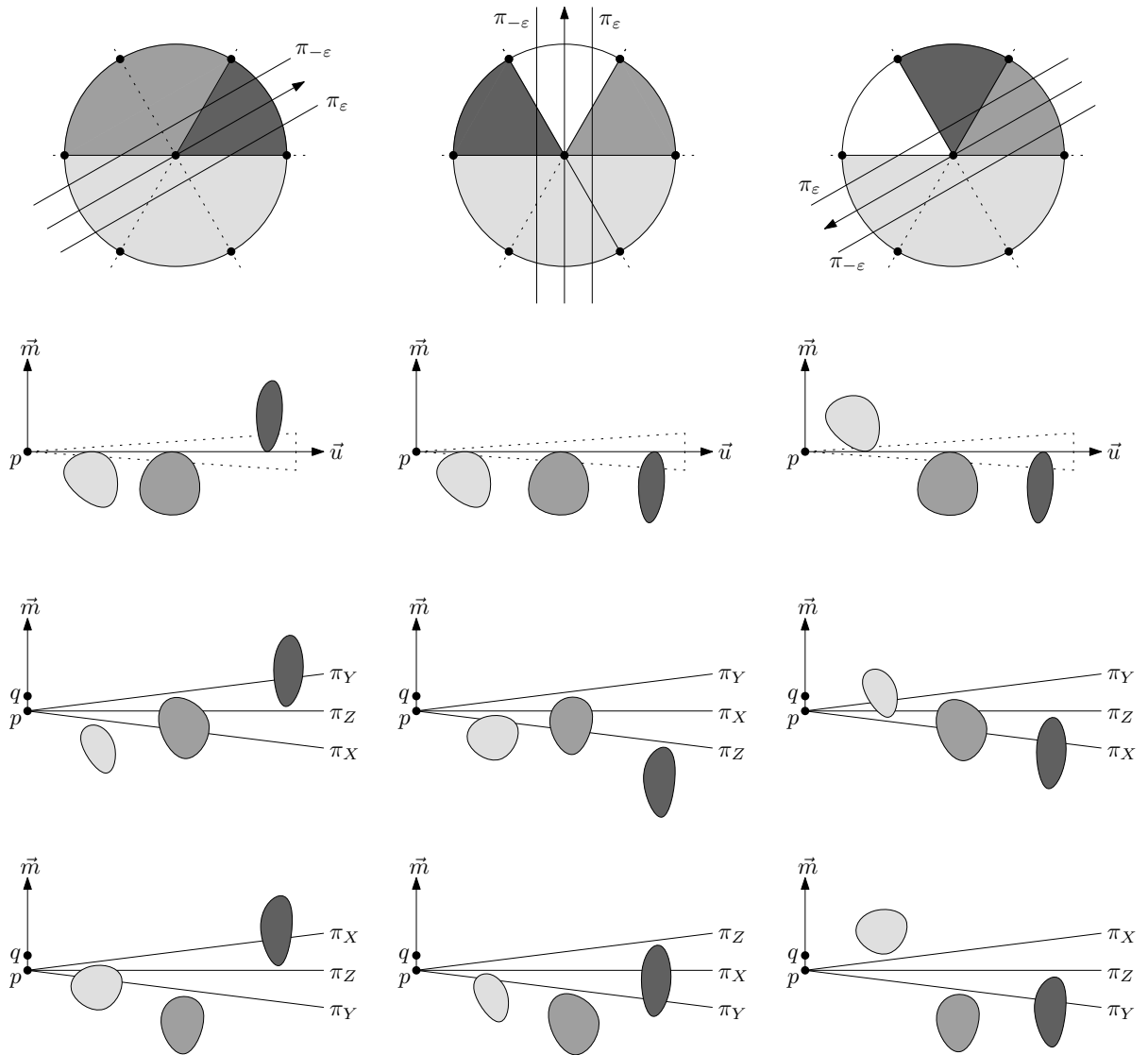


FIG. 4.15 – Chaque colonne correspond à une configuration. Le schéma supérieur indique les position de la direction  $\vec{n}$  ainsi que des plans  $\pi_{-\epsilon}$  et  $\pi_{+\epsilon}$ . Les trois schémas inférieurs sont les coupes de la scène dans les plans contenant  $p$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{m}$ ,  $\pi_{-\epsilon}$  et  $\pi_{+\epsilon}$  (dans cet ordre).

rayon tritangent à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Supposons que  $\vec{u}_1$  soit la direction d'un rayon tritangent à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . En raison de l'instabilité locale des jonctions T+T+T (lemme 18), pour tout voisinage suffisamment petit  $U_1 \subset V_1$  de  $\vec{u}_1$ , il existe une boule  $B_1$  arbitrairement proche de  $p$  depuis laquelle aucun des rayons dirigés suivant une direction de  $U_1$  n'est tritangent à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Puisque  $B_1$  peut être choisie arbitrairement proche de  $p$ , nous prenons une boule qui satisfait à la propriété  $B_1 \subset P$ . Dès lors, il n'existe pas de rayon T+T+T issu d'un point de  $B_1$  et dirigé suivant une direction de  $U_1$ . De plus, tout rayon bitangent (*a fortiori* tout rayon T+T+T) est cantonné à un unique voisinage  $V_j$ , pour  $1 < j \leq k$ . Par conséquent, le nombre de rayons T+T+T depuis chaque point de  $B_1$  est au plus  $k - 1$ .

À l'étape  $i > 1$  de ce processus, nous considérons la direction  $\vec{u}_i$  et son voisinage  $V_i$ . Pour un point quelconque  $p_i$  de  $B_{i-1}$ , nous construisons la boule  $B_i \subset B_{i-1}$  et le voisinage  $U_i \subset V_i$  tels qu'aucun des rayons de  $B_i \times U_i$  ne soit tritangent à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Aucun rayon tritangent n'émane d'un point de  $B_i$  suivant une direction prise dans  $U_1, \dots, U_i$ . De plus, chaque rayon bitangent est isolé dans un voisinage  $V_j$ , pour  $i < j \leq k$ . Par conséquent, il y a au plus  $k - i$  rayons tritangents à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  issus d'un même point de  $B_i$ .

Ainsi, la boule  $B_k \subset P$  contient exclusivement des points depuis lesquels ne sont issus aucuns rayons tritangents à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Dès lors, pour tout voisinage  $P$  de  $p$ , il est possible d'extraire un point n'appartenant à aucun rayon T+T+T. Une contradiction qui implique le résultat.  $\square$

**Lemme 20.** *L'ensemble des origines de rayons tangents à trois objets disjoints est nulle part dense.*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{T}$  l'ensemble des origines de rayons tangents à trois objets disjoints et  $\mathcal{B}$  celui des rayons bitangents limites à deux de ces objets. L'ensemble  $\mathcal{B}$  est nulle part dense (lemme 13). Il s'en suit que  $\mathcal{B}$  est d'intérieur vide. De plus,  $\mathcal{T} \setminus \mathcal{B}$  est d'intérieur vide (lemme 19). Par conséquent,  $\mathcal{T}$ , qui est l'union de deux ensembles d'intérieurs vides, est d'intérieur vide. Puisque  $\mathcal{T}$  est fermé, il est nulle part dense.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.* La scène comporte un nombre fini d'objets. Ainsi, l'union des enveloppes affines des objets de dimension deux est une union finie de plans qui est, bien évidemment, nulle part dense. Par conséquent, l'ensemble des points dégénérés est un sous-ensemble de l'union de trois ensembles nulle part denses : l'ensemble des origines de rayons bitangents limites (lemme 13), l'ensemble des origines de rayons tritangents (lemme 20) et l'ensemble des enveloppes affines d'objets bidimensionnels. C'est donc un ensemble nulle part dense.  $\square$

## 4.5 Les points de vue non dégénérés sont stables

Dans cette section, nous établissons la stabilité par homéomorphisme des points non dégénérés. Nous considérons un point non dégénéré quelconque  $p$  et le contour apparent depuis  $p$ . La preuve se décompose en trois grandes étapes. Dans un premier temps, nous montrons que dans tout voisinage suffisamment petit  $P$  de  $p$ , il est possible de construire, pour chaque point  $q \in P$ , une bijection entre les jonctions de  $\Delta_p$  et de  $\Delta_q$ . Ensuite, en utilisant la continuité des déformations des silhouettes des objets, nous étendons

cette bijection en une isotopie de  $\Delta_p$  vers  $\Delta_q$ . Finalement, nous utilisons cette isotopie pour construire un homéomorphisme entre les contours apparents plongés dans la la sphère des directions.

#### 4.5.1 Stabilité locale des jonctions

**Lemme 21.** *Soient  $p$  un point de vue non dégénéré et  $\vec{u}$  une jonction du contour apparent depuis  $p$ . Pour tout voisinage suffisamment petit  $U$  de  $\vec{u}$ , il existe un voisinage  $P$  de  $p$  tel que le contour apparent depuis tout point  $q \in P$  contienne une unique jonction dans  $U$ .*

*Démonstration.* Étant donné que  $p$  est un point de vue non dégénéré, le rayon  $(p, \vec{u})$  est tangent à exactement deux objets visibles  $X$  et  $Y$  (dans cet ordre) puis traverse éventuellement d'autres objets après  $Y$ . Les objets sont fermés. Ainsi, si  $(p, \vec{u})$  ne rencontre aucun objet après  $Y$ , il existe un voisinage  $R$  de  $(p, \vec{u})$  tel qu'aucun rayon de  $R$  n'intersecte d'objet autre que  $X$  ou  $Y$ . Sinon, soit  $Z$  le premier objet intersecté transversalement par  $(p, \vec{u})$ . Il existe un voisinage  $R$  de  $(p, \vec{u})$  tel que tout rayon de  $R$  traverse  $X, Y$  ou  $Z$  avant de rencontrer un autre objet. Suivant le lemme 11, il existe un voisinage  $P$  de  $p$  tel que, quelque soit  $q \in P$ , l'ensemble  $U$  contienne une unique intersection entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  depuis  $q$ . Notons que les voisinages  $U$  et  $P$  sont éventuellement restreints afin que  $P \times U$  soit contenu dans  $R$ . D'après le lemme de stabilité des ordres d'intersection (lemme 5), pour tout point  $q \in P$ , l'intersection entre les silhouettes de  $X$  et  $Y$  est visible et est une jonction de  $\Delta_q$ . De plus, puisque par construction  $P \times U \subset R$ , aucune autre intersection entre des silhouettes d'objets différents de  $X$  et  $Y$  n'est visible depuis  $q$ . D'où le résultat.  $\square$

#### 4.5.2 Construction de l'isotopie

Nous démontrons le lemme 22 qui garantit l'existence d'un voisinage  $P$  de  $p$  dans lequel il est possible de définir une isotopie entre les contours apparents. Pour schématiser la construction, nous partons du contour apparent depuis  $p$ . Il contient un nombre fini de jonctions et celles-ci restent stables dans  $P$ . Pour tout point  $q$  dans  $P$ , il suffit de faire la correspondance entre les jonctions de  $\Delta_p$  et celles de  $\Delta_q$ . De plus, quitte à restreindre à nouveau  $P$ , les arcs qui joignent ces jonctions se déforment continûment. C'est ainsi que nous étendons cette correspondance en une application continue qui en tout point  $q$  de  $P$  est un homéomorphisme entre  $\Delta_p$  et  $\Delta_q$ .

**Lemme 22.** *Soit  $p$  un point de vue non dégénéré. Pour tout voisinage suffisamment petit  $P$  de  $p$ , il existe une application continue  $\varphi : P \times \Delta_p \rightarrow \mathbb{S}^2$  telle que, pour tout point  $q \in P$ , l'application partielle  $\varphi(q, \cdot)$  soit un homéomorphisme entre  $\Delta_p$  et le contour apparent depuis  $q$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 12, le contour apparent  $\Delta_p$  contient un nombre fini de jonctions. Nous les notons  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ . Pour chaque  $\vec{u}_i$ , considérons un voisinage suffisamment petit  $U_i$  qui l'isole des autres jonctions. D'après le lemme 21, pour tout  $i$ , il existe un voisinage  $P_i$  de  $p$  tel que le contour apparent  $\Delta_q$  depuis n'importe quel  $q \in P_i$  contienne une unique jonction dans  $U_i$ . L'intersection  $P$  des  $P_i$  (en nombre fini) est un voisinage de  $p$ . L'application  $\varphi$  restreinte à  $P \times \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est la bijection qui, pour tout couple  $(q, i)$ , envoie la jonction de  $\Delta_p$  dans  $U_i$  sur la jonction de  $\Delta_q$  dans  $U_i$ .

Nous montrons comment étendre  $\varphi$  aux arcs. Considérons les arcs de  $\Delta_p$  qui sont délimités par deux jonctions. Soient  $\alpha$  l'arc d'extrémités  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$  et  $U_i$  et  $U_j$  les voisinages respectifs de ces deux jonctions. Pour tout point  $q \in P$ , l'application  $\varphi$  envoie  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$  sur  $\varphi(q, \vec{u}_i) \in U_i$  et  $\varphi(q, \vec{u}_j) \in U_j$ . Maintenant, quitte à restreindre chacun des voisinages  $U_k$  (et par conséquent  $P$ ), nous pouvons supposer que l'arc  $\alpha$  ne touche aucun bords des  $U_k$  autre que  $U_i$  et  $U_j$ . D'après le lemme de continuité de la déformation des silhouettes (lemme 6) et quitte à réduire  $P$ , nous pouvons affirmer que la déformation de  $\alpha$  (lors d'un déplacement dans  $P$ ) continue de ne rencontrer aucun des bords des  $U_k$ . Ainsi, l'arc  $\alpha$  (qui se déforme continûment) relie les jonctions  $\varphi(q, \vec{u}_i)$  et  $\varphi(q, \vec{u}_j)$  pour tout  $q \in P$ . L'application  $\varphi$  s'étend donc continûment aux arcs simples du contour apparent. Quant aux contours fermés (qui ne contiennent aucune jonction), l'extension de  $\varphi$  découle de la déformation continue des silhouettes. D'où le résultat.  $\square$

### 4.5.3 Extension à la sphère des directions

Dans cette section, nous étendons l'isotopie entre les contours apparents définie à la section précédente en un homéomorphisme de la sphère des directions vers elle-même.

**Lemme 23.** *Soit  $p$  un point de vue non dégénéré. Il existe un voisinage  $P$  de  $p$  tel que, pour tout  $q \in P$ , il existe un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  dans elle-même qui envoie le contour apparent depuis  $p$  sur le contour apparent depuis  $q$ .*

*Démonstration.* Notons  $P$  le voisinage de  $p$  et  $\phi$  l'application donnée par le lemme 22. Soit  $q \in P$ , nous notons  $\psi$  l'homéomorphisme  $\phi(q, \cdot)$  entre le contour apparent depuis  $p$  et celui depuis  $q$ . Nous montrons que  $\psi$  s'étend à la sphère des directions  $\mathbb{S}^2$ .

Soient  $F_p$  une face du contour apparent depuis  $p$  et  $F_q$  la face correspondante dans le contour apparent depuis  $q$ . Puisque  $\phi$  induit une isotopie entre l'identité de  $\Delta_p$  et  $\psi$ , la face  $F_q$  est bien définie et possède la même topologie que  $F_p$  : un disque ouvert  $D_k$  avec  $k$  trous (lemme 12). Nous montrons que  $\psi$  s'étend en un homéomorphisme de  $F_p$  vers  $F_q$  par récurrence sur  $k$ .

*Cas  $k = 0$ .* Soient  $r_p : F_p \rightarrow D_0$  et  $r_q : F_q \rightarrow D_0$  deux homéomorphismes. L'application  $\tau = r_q \circ \psi \circ r_p^{-1}$  est un homéomorphisme du bord (de l'adhérence<sup>13</sup>) de  $D_0$  dans lui-même qui peut être étendu en un homéomorphisme de  $D_0$  (figure 4.16). Si  $\tau^*$  correspond à cette extension, alors  $r_q^{-1} \circ \tau^* \circ r_p$  étend  $\psi$  en un homéomorphisme entre les faces  $F_p$  et  $F_q$ .

*Cas  $k = 1$ .* Les faces  $F_p$  et  $F_q$  sont toutes deux délimitées par deux courbes fermées. Soient  $r_p : F_p \rightarrow D_1$  et  $r_q : F_q \rightarrow D_1$  deux homéomorphismes. L'application  $\tau = r_q \circ \psi \circ r_p^{-1}$  est un homéomorphisme du bord de  $D_1$  dans lui-même. Même s'il existe un homéomorphisme  $\eta$  de  $D_1$  dans lui-même qui échange les deux courbes fermées composant le bord de  $D_1$ , nous pouvons supposer, quitte à échanger  $r_q$  et  $\eta \circ r_q$ , que  $\tau$  envoie chaque courbe du bord de  $D_1$  sur elle-même. Étant donné que  $\psi$  est isotope à l'identité sur le bord de  $F_p$ , les restrictions  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de  $\tau$  à chaque courbe du bord de  $D_1$  sont isotopes à l'identité. Par conséquent, nous pouvons étendre  $\tau$  à l'intérieur de  $D_1$  en utilisant l'isotopie entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$  (figure 4.17). En notant  $\tau^*$  cette extension, l'application  $r_q^{-1} \circ \tau^* \circ r_p$  étend  $\psi$  en un homéomorphisme entre  $F_p$  et  $F_q$ .

<sup>13</sup>Dans cette preuve, nous parlons du bord de l'ouvert  $D_k$ . Il faut bien sûr lire le bord de l'adhérence de  $D_k$ .

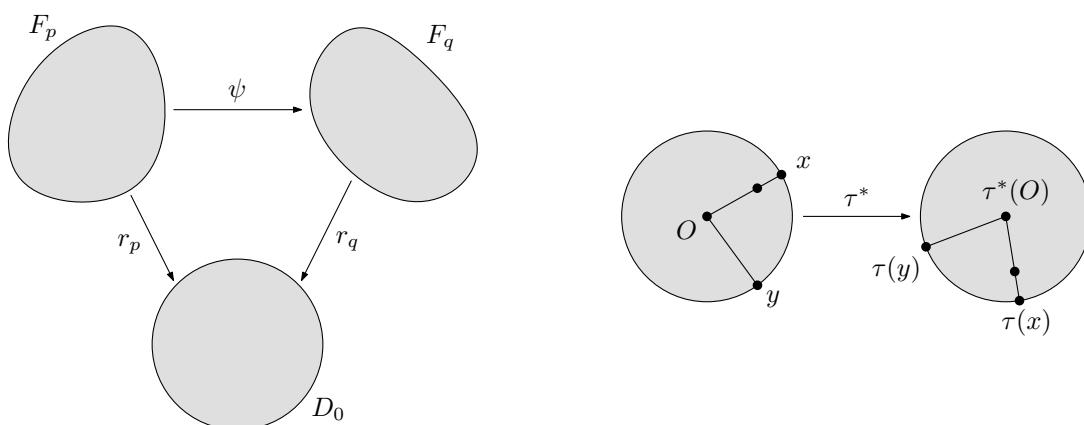


FIG. 4.16 – Extension de  $\psi$  en un homéomorphisme de  $F_p$  vers  $F_q$ . L'application  $\tau$  envoie les points  $x$  et  $y$  du bord de  $D_0$  sur  $\tau(x)$  et  $\tau(y)$ . L'extension  $\tau^*$  de  $\tau$  envoie le centre  $O$  de  $D_0$  sur lui-même. Le point  $x(t)$  du rayon  $Ox$  est envoyé sur  $\tau^*(x(t))$  de  $O\tau(x)$ .

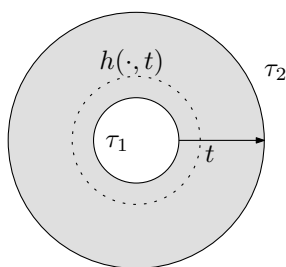


FIG. 4.17 – Extension de  $\psi$  en un homéomorphisme de  $F_p$  vers  $F_q$ . Le disque  $D_1$  est décomposé en une famille de disques concentriques paramétrés par  $[0, 1]$  depuis  $\tau_1$  vers  $\tau_2$ . L'application  $\tau^*$  est construite à partir de l'isotopie  $h : \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

*Induction pour  $k > 2$ .* Pour  $k \geq 2$ , il n'est pas évident qu'il existe deux applications  $r_p : F_p \rightarrow D_k$  et  $r_q : F_q \rightarrow D_k$  qui envoient les courbes (du bord) associées par  $\psi$  sur la même courbe du bord de  $D_k$ . Nous pouvons, toutefois, procéder par récurrence de la façon suivante : choisir deux points  $a$  et  $b$  sur la même composante du bord de  $F_p$  avec la propriété que  $a, b, \psi(a)$  et  $\psi(b)$  soient des points réguliers des contours apparents depuis respectivement  $p$  et  $q$ . Soit  $\gamma$  une courbe simple entre  $a$  et  $b$  qui reste dans l'intérieur de  $F_p$  et sépare une courbe du bord  $L$  des autres (à l'exception de la portion du bord entre  $a$  et  $b$ ). De manière similaire, soit  $\gamma'$  une courbe simple de l'intérieur de  $F_q$  qui joint  $\psi(a)$  à  $\psi(b)$  et qui sépare  $\psi(L)$  des autres courbes du bord de  $F_q$ . Par construction, nous orientons  $\gamma$  et  $\gamma'$  de sorte que  $L$  et  $\psi(L)$  soient à droite des arcs orientés allant de  $a$  vers  $b$  et de  $\psi(a)$  vers  $\psi(b)$  (figure 4.18). Nous étendons  $\psi$  en un homéomorphisme de  $\gamma \cup \partial F_p$  vers  $\gamma' \cup \partial F_q$ . Ensuite,  $F_p$  et  $F_q$  sont séparées en deux faces. Puisque les jonctions introduites sont de degré 3, chaque face créée est homéomorphe à un disque  $D_m$ . Étant donné que  $L$  et l'autre courbe du bord sont dans des faces différentes, nous avons  $m < k$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence, nous démontrons le résultat.  $\square$

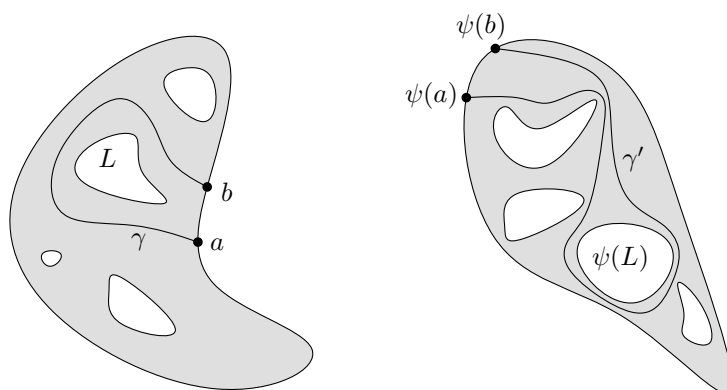


FIG. 4.18 – L'étape d'induction : les faces  $F_p$  et  $F_q$  sont décomposées en un anneau et une face avec un trou de moins.

## 4.6 Instabilité des points de vues faiblement dégénérés

Dans cette section, nous démontrons l'instabilité des points de vue faiblement dégénérés. De plus, nous présentons un exemple qui montre que ce résultat ne peut être étendu à tous les points de vue dégénérés.

### 4.6.1 Instabilité des points de vue faiblement dégénérés

**Lemme 24.** *Soit  $p$  un point de vue faiblement dégénéré, il existe un point  $q$  arbitrairement proche de  $p$  tel que les contours apparents depuis  $p$  et  $q$  ne soient pas homéomorphes.*

*Démonstration.* Tout d'abord, observons que si  $\Delta_p$  contient soit une infinité de jonctions, soit des jonctions de degré 4, le résultat est immédiat. En effet, d'après le théorème 3, il existe un point  $q$  arbitrairement proche de  $p$  tel que  $q$  ne soit pas dégénéré. Le contour apparent depuis  $q$  contient un nombre fini de jonctions, chacune de degré 3 (lemme 12). Dans les deux cas, il s'en suit que les contours  $\Delta_p$  et  $\Delta_q$  ne sont pas homéomorphes.

Maintenant, montrons que depuis tout point d'un voisinage de  $p$ , les contours apparents contiennent au moins autant de jonctions de degré 3 que  $\Delta_p$ . Soit  $k$  le nombre de jonctions de degré 3 dans  $\Delta_p$  et soient  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  ces jonctions. Pour  $1 \leq i \leq k$ , notons  $X_i$  et  $Y_i$  les deux premiers objets intersectés par le rayon  $(p, \vec{u}_i)$ . Quelque soit  $1 \leq i \leq k$ , il existe un voisinage  $U_i$  de  $\vec{u}_i$  et un voisinage  $P_i$  de  $p$  tels que,  $U_i$  isole  $\vec{u}_i$  des autres jonctions de  $\Delta_p$  et, pour chaque point  $q$  de  $P_i$ , le dessin  $\Delta_q$  contienne une jonction de degré 3 entre les contours apparents de  $X_i$  et  $Y_i$  dans  $U_i$ . En effet, puisque le rayon  $(p, \vec{u})$  n'est pas bitangent limite à  $X_i$  et  $Y_i$ , ce résultat découle des lemmes 11 et 4. Remarquons que ces jonctions sont deux à deux distinctes. Ainsi,  $\Delta_q$  contient au moins  $k$  jonctions de degré 3.

Supposons maintenant que l'une des jonctions de degré 3 de  $\Delta_p$  soit une jonction  $\tau+\tau+\tau$ . Soient  $\vec{u}$  cette jonction et  $X, Y$  et  $Z$  les objets tangents à  $(p, \vec{u})$  dans cet ordre. Remarquons que la jonction entre  $X$  et  $Y$  continue d'exister au voisinage de  $p$ . Pour chacun des deux types de jonction  $\tau+\tau+\tau$  de

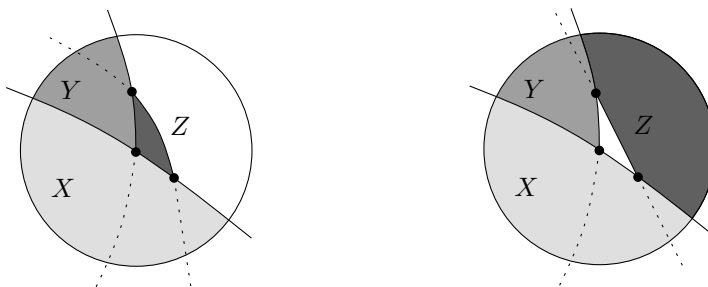


FIG. 4.19 – Depuis tout point  $q$  arbitrairement proche de  $p$ , il existe une jonction entre les contours apparents de  $X$  et  $Z$  depuis  $q$ .

degré 3, en reprenant l'argument développé dans la preuve du lemme 18, nous construisons un rayon arbitrairement proche de  $(p, \vec{u})$  qui est bitangent à  $X$  et  $Z$  sans toucher  $Y$  (figure 4.19). Puisque ce rayon est arbitrairement proche de  $(p, \vec{u})$ , il est séparé de toute autre jonction entre  $X$  et  $Z$ . Dès lors, le contour  $\Delta_q$  contient au moins  $k + 1$  jonctions de degré 3 et n'est donc pas homéomorphe à  $\Delta_p$ .

Finalement, supposons que  $\Delta_p$  ne contienne pas de jonction  $T+T+T$ . Il s'en suit que  $\Delta_p$  contient une direction  $\vec{u}$  telle que  $(p, \vec{u})$  soit bitangent limite. Le cas où  $\vec{u}$  est l'extrémité de deux segments est trivial. Supposons que ce ne soit pas le cas,  $Y$  est donc localement caché par  $X$  (cf. schéma trois de la figure 4.2, page 50). Soient  $X$  et  $Y$  les deux premiers objets tangents à  $(p, \vec{u})$ . La direction  $\vec{u}$  appartient à une composante connexe d'intersection entre les silhouettes  $silh_p(X)$  et  $silh_p(Y)$ . Si  $silh_p(X)$  et  $silh_p(Y)$  coïncident, il existe un point  $q$  arbitrairement proche de  $p$  depuis lequel  $silh_q(X)$  et  $silh_q(Y)$  se rencontrent à une intersection de degré 3 (schéma de gauche de la figure 4.20). Sinon, nous pouvons

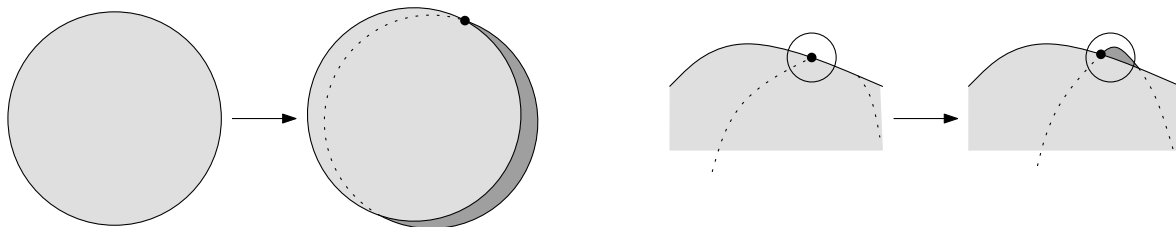


FIG. 4.20 – Depuis tout point  $q$  arbitrairement proche de  $p$ , il existe une jonction de degré 3 entre les contours apparents de  $X$  et  $Y$  depuis  $q$ .

supposer que  $\vec{u}$  est l'une des extrémités de cette composante (le rayon  $(p, \vec{u})$  n'intersecte aucun objet avant  $X$  et  $Y$  puisque dans le cas contraire il y aurait une jonction  $T+T+T$ ). La direction  $\vec{u}$  peut être isolée des autres jonctions de  $\Delta_p$ . Or, il existe un rayon  $(q, \vec{v})$  arbitrairement proche de  $(p, \vec{u})$  tel que  $silh_q(X)$  et  $silh_q(Y)$  s'intersectent en une jonction de degré 3 (schéma de droite de la figure 4.20). Dans ces deux cas, le contour apparent  $\Delta_q$  contient au moins  $k + 1$  jonctions de degré 3. Par conséquent, les contours  $\Delta_p$  et  $\Delta_q$  ne sont pas homéomorphes.  $\square$

En combinant ce résultat avec la stabilité des points de vues non dégénérés, nous pouvons démontrer le théorème 1.



*Démonstration du théorème 1.* L'homéomorphisme construit au lemme 23 démontre que les points de vue non dégénérés sont stables alors que le lemme 24 garantit l'instabilité des points de vue faiblement dégénérés. D'où le résultat.  $\square$

### 4.6.2 Stabilité d'un point de vue fortement dégénéré

Pour finir, nous présentons une configuration dans laquelle la vue est stable malgré la présence d'un rayon T++T et une configuration instable. C'est la raison qui nous pousse à différencier les points de vue faiblement dégénérés, pour lesquels nous avons démontré l'instabilité (lemme 24), des points de vue fortement dégénérés qui n'induisent pas toujours une instabilité dans la vue.

**Lemme 25.** *Il existe des points de vue fortement dégénérés qui sont stables et d'autres qui sont instables.*

*Démonstration.* Commençons par construire un point de vue stable. Prenons deux cubes  $X$  et  $Y$  de sorte que les deux faces supérieures de  $X$  et  $Y$  soient coplanaires. Soient  $p$  un point de vue dans ce plan et  $(p, \vec{u})$  un rayon qui intersecte les deux faces (schéma de gauche de la figure 4.21). Deux vues de la scène sont

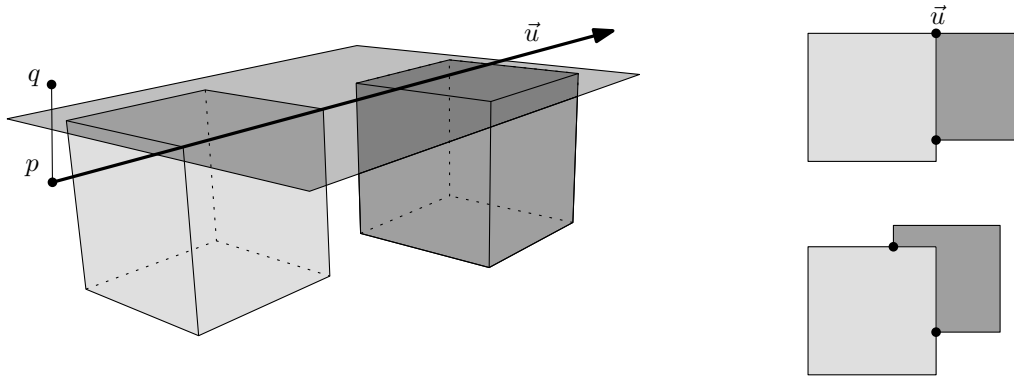


FIG. 4.21 – Une configuration géométrique dans laquelle la vue depuis  $p$  est stable alors que le rayon  $(p, \vec{u})$  est un rayon T++T. Sur le schéma de droite, la vue supérieure est celle depuis  $p$  alors que la inférieure est celle depuis le point  $q$ .

montrées sur le schéma de droite de la figure 4.21. La vue supérieure est celle depuis  $p$  alors que la vue inférieure est obtenue depuis le point  $q$  (situé au dessus du plan bitangent). Ces deux contours apparents sont homéomorphes. De plus, il est facile de voir que depuis tout point d'un voisinage suffisamment petit de  $p$ , nous obtenons un contour apparent homéomorphe à  $\Delta_p$ . Ceci garantit la stabilité de la vue au voisinage de  $p$ .

Construisons maintenant un point de vu fortement dégénéré instable. Considérons un plan et deux triangles tels que le sommet supérieur de chaque triangle soit dans ce plan. Prenons un point sur la droite définie par ces deux sommets et tel que le contour apparent contienne une jonction de degré 3 (figure 4.22). La vue depuis  $p$  et la vue depuis  $q$  ne sont pas homéomorphes.  $\square$

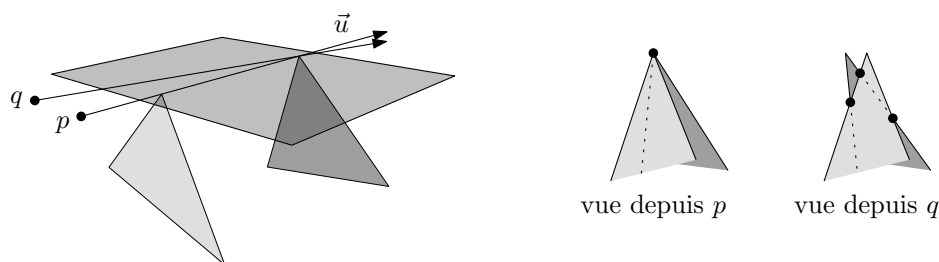


FIG. 4.22 – Une configuration géométrique dans laquelle la vue depuis  $p$  est instable alors que le rayon  $(p, \vec{u})$  est un rayon T++T. Sur le schéma de droite, les deux vues sont différentes.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une définition de la vue d’une scène formée d’ensembles convexes et disjoints de  $\mathbb{R}^3$  ainsi qu’une formulation de l’équivalence entre les vues. Ces propositions mettent l’accent sur la prise en compte des contours visibles des objets et sont cohérentes avec notre envie de traduire les apparitions, disparitions et occultations partielles d’objets convexes. Ensuite, nous avons démontré une caractérisation géométrique des lieux où se produisent ces événements visuels : les points qui appartiennent à des droites tangentes à deux objets dans un plan support commun à ceux-ci (droites T++T) ou qui se trouvent sur des droites tangentes à trois objets (droites T+T+T).

Ces résultats sont les premiers à établir un lien clair, dans l’étude des événements visuels, entre le contexte discret (des polyèdres) et le contexte continu (des objets lisses par morceaux). Ils posent les bases de résultats de passage à la limite. C’est intéressant dans la mesure où il existe des implications dans des travaux de recherche actuels. Par exemple, la structure du squelette de visibilité introduite par Durand, Drettakis et Puech [33, 35] pour encoder les surfaces d’événements visuels, peut se définir sur des polyèdres (le cadre originel de sa définition) ou sur des sphères. La question est alors de savoir si en effectuant une approximation de plus en plus finement les sphères par des polyèdres, nous obtenons un squelette de visibilité de polyèdres qui tend vers celui calculé sur les sphères. Réciproquement, est-ce que les résultats théoriques qui font état d’une complexité linéaire pour la taille du squelette dans le cas de sphères [26] sont utilisables dans le cas des polyèdres.

Un autre intérêt de nos résultats réside dans leur compatibilité avec les cadres plus restrictifs, mais habituels, de définition des événements visuels. En effet, pour des polyèdres convexes et disjoints, la définition des événements visuels EV et EEE par Gigus et Malik se retrouve dans nos résultats en considérant chacune des faces des polyèdres comme des objets propres. Au fond, cela n’est pas étonnant puisque nos résultats relèvent d’une compréhension des faces comme définissant un objet (un ensemble de faces prises comme un tout), alors que Gigus et Malik travaillent sur une intuition, au demeurant puissante, des interactions entre des « soupes » de polygones. De même, notre formulation des événements visuels, notamment pour les sphères, est compatible avec le cas des objets convexes et lisses par morceaux (où les événements visuels sont également les T++T et les T+T+T).

Finalement, un certain nombre d’objets généraux peuvent être décomposés au moyen de convexes non disjoints (en graphisme, par exemple, les maillages volumiques de tous types d’objets). Nous espérons donc qu’une meilleure compréhension du cas des ensembles convexes et disjoints sera une étape vers la

prise en compte des objets convexes *non disjoints* puis, à terme, si les résultats obtenus sont satisfaisants, des objets généraux.

## Chapitre 5

# Complexité des régions d'ombre et de pénombre

Ce chapitre est une transcription, légèrement remaniée, d'un travail effectué avec Olivier Devillers, Hazel Everett, Marc Glisse, Sylvain Lazard et Raimund Seidel [24]<sup>14</sup>.

### 5.1 Introduction

Les ombres jouent un rôle central dans la perception des profondeurs et des agencements géométriques [79, 119]. Malheureusement, le calcul réaliste et efficace des ombres est un problème ardu, et ce particulièrement dans le cas de sources lumineuses non ponctuelles. Une grande variété d'approches ont été considérées pour le rendu d'ombres (voir, par exemple, les travaux de synthèse [32, 126]) et de nombreuses méthodes font un usage intensif des composants matériels pour le traitement graphique (voir l'article de synthèse [55]).

Type de scène	Minoration	Majoration
<b>Segment lumineux</b>		
2 triangles disjoints	4	$O(1)$
2 polyèdres convexes, épais et disjoints	$\Omega(n)$	$O(n)$
$k$ polyèdres convexes et disjoints	$\Omega(nk^2 + k^4)$	$O(nk^3)$
$k$ polyèdres convexes	$\Omega(nk^2 + k^4)$	$O(n^2k^2)$
<b>Source(s) polygonale(s)</b>		
	Source unique	$O(k)$ sources
$k$ polyèdres convexes	$\Omega(n^2k^3 + nk^5)$	$O(n^3k^3)$

TAB. 5.1 – Bornes inférieures sur le nombre maximum de composantes connexes et bornes supérieures sur la complexité des ombres projetées sur un plan par un segment lumineux ou des sources polygonales en présence de  $k$  polyèdres convexes de complexité totale  $O(n)$ .

<sup>14</sup> Les travaux de recherche sur cet article ont été initiés lors du séminaire : *Fifth McGill-INRIA Workshop on Computational Geometry in Computer Graphics* qui s'est tenu du 4 au 10 février 2006 au *Bellairs Research Institute of McGill University in Holetown, St. James, Barbados, West Indies*.

Sources lumineuses	Borne inférieure	Borne supérieure
$O(1)$ polyèdres convexes de taille $m$	$\Omega(n\alpha(k) + km + k^2)$	$O(n\alpha(k) + km\alpha(k) + k^2)$
$O(k)$ polyèdres convexes de taille totale $O(n)$	$\Omega(nk + k^4)$	$O(nk\alpha(k) + k^4)$

 TAB. 5.2 – Bornes sur la complexité de l'union des régions d'ombre et de pénombre projetées sur un plan par un ensemble de  $k$  polyèdres convexes dont certains sont des sources lumineuses.

Un point est dans l'*ombre* s'il ne voit aucune portion d'aucune source de lumière ; il est dans la *lumière* s'il voit intégralement toutes les sources lumineuses ; sinon, il est dans la *pénombre*. Alors que la limite entre la pénombre et la lumière est plutôt bien appréhendée (voir la section 5.3), il en est autrement pour la limite de l'ombre. Néanmoins, il s'est développée une littérature importante concernant le calcul explicite de ces limites d'ombres ; voir, par exemple [28, 33, 34, 35, 57, 83, 110, 113].

Dans ce chapitre nous démontrons diverses bornes, résumées dans les tableaux 5.1 et 5.2, concernant la complexité de l'ombre et de la pénombre projetées sur un plan fixe par un segment lumineux ou des sources convexes et polygonales, en présence d'obstacles convexes et pouvant être polygonaux ou polyédriques dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce chapitre, et sauf mention contraire, les objets de la scène (sources lumineuses et obstacles) sont supposés deux à deux disjoints dans le cas des bornes inférieures et peuvent, en revanche, s'intersecter pour les bornes supérieures. Nous montrons, en particulier, qu'un unique segment lumineux peut projeter, en présence de deux triangles, quatre composantes d'ombre. Nous démontrons que l'ombre définie par un segment lumineux et deux obstacles convexes et « épais » de complexité totale  $n$  peut avoir pas moins de  $\Omega(n)$  composantes connexes. Nous démontrons également une borne inférieure  $\Omega(nk^2 + k^4)$  concernant le nombre maximum de composantes connexes de l'ombre et une borne supérieure, dans le pire des cas,  $O(n^2k^2)$  (resp.,  $O(nk^3)$ ) sur la complexité de l'ombre dans une scène formée d'un segment lumineux et de  $k$  polyèdres convexes pouvant s'intersecter (resp., polyèdres convexes disjoints) de complexité totale  $n$ . Finalement, nous prouvons que l'ombre projetée sur un plan par une source polygonale et  $k$  obstacles convexes peut avoir  $\Omega(n^2k^3 + nk^5)$  composantes connexes et a, dans le pire des cas, une complexité  $O(n^3k^3)$ . Ce sont les premières bornes concernant la taille de l'ombre en fonction de  $k$  et de  $n$ .

Notre travail peut être relié à celui sur le graphe d'aspects. En termes de complexité, de Berg et ses coauteurs [78] ont démontré qu'une scène constituée de  $k$  polyèdres convexes de complexité totale  $n$  possède, au plus,  $O(n^4k^2)$  vues orthographiques distinctes et, au plus,  $O(n^6k^3)$  vues perspectives. Ces bornes, comme l'ont démontré Aronov et ses coauteurs [6], sont effectivement atteintes. Ici, notre travail limite l'espace des points de vue au plan des ombres (un plan fixé) et ne considère que les vues qui mettent en jeu des sources de lumière.

Ces résultats sont surprenants dans le sens où ils montrent que l'ombre projetée par un unique segment lumineux peut avoir de nombreuses composantes connexes. Le fait que l'ombre est quatre composantes connexes dans le cas où les obstacles sont deux triangles est une grande surprise. Nos bornes inférieures de  $\Omega(nk^2 + k^4)$  et  $\Omega(n^2k^3 + nk^5)$  sur le nombre maximum de composantes connexes, pour  $k$  polyèdres convexes de complexité  $n$ , sont plutôt pathologiques puisque les obstacles sont très longs et très fins. Toutefois, nous présentons également un exemple qui montre une borne inférieure  $\Omega(n)$  sur ce nombre maximum de composantes connexes dans une scène formée de deux polyèdres convexes « épais »

(éventuellement dégénérés à deux polygones convexes « épais ») de complexité  $n$ . En ce qui concerne les bornes supérieures  $O(nk^3)$ ,  $O(n^2k^2)$  et  $O(n^3k^3)$ , bien qu'elles ne soient pas *a priori* optimales, elles représentent une amélioration substantielle des bornes précédemment connues : les bornes triviales  $O(n^4)$  et  $O(n^6)$ . Finalement, il est intéressant de mettre l'accent sur le fait que même pour les cas les plus simples de sources non ponctuelles, obtenir des bornes optimales sur la complexité des régions d'ombre et en comprendre la structure est un problème ambitieux et non trivial.

De plus, ils montrent que l'ombre, qui est délimitée par des arcs de coniques, est intrinsèquement plus complexe que la frontière entre les régions de lumière et de pénombre qui est composée par des segments de droites et pour laquelle nous démontrons que la complexité dans le pire des cas est  $\Omega(nk + k^4)$  et  $O(nk\alpha(k) + k^4)$ , où  $\alpha(k)$  correspond au pseudo-inverse de la fonction d'Ackermann ; de plus, lorsqu'il n'y a que  $O(1)$  sources lumineuses de complexité totale  $m$ , la complexité dans le pire des cas de la frontière entre lumière et pénombre est majorée par  $\Omega(n\alpha(k) + km + k^2)$  et  $O(n\alpha(k) + km\alpha(k) + k^2)$ .

Ce chapitre s'organise comme suit. La prochaine section introduit les notations et définitions. Nous présentons à la section 5.3 les bornes inférieures et quasi optimales sur la complexité de la limite entre la lumière et la pénombre projetée sur un plan par un source polygonale en présence de polyèdres convexes obstacles. Nous démontrons, à la section 5.4, les bornes supérieures sur la complexité de l'ombre et, à la section 5.5, les bornes inférieures sur le nombre maximum de composantes connexes d'ombres. Finalement, nous concluons à la section 5.6.

## 5.2 Preliminaries

Let  $s$  be a line segment and  $p$  a point. We denote by  $\langle s, p \rangle$  the set of line transversals to  $s$  and  $p$ , *i.e.*, the set of lines through  $p$  and intersecting  $s$ . Similarly, for any triple of segments  $s_1$ ,  $s_2$  and  $s_3$ , we denote by  $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle$  its set of line transversals. It is a well-known fact that  $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle$  consists of lines belonging to the same regulus of a ruled quadric surface (see *e.g.* [103]). More precisely, the line transversals lie on a hyperboloid of one sheet when the three segments are pairwise skew and not all parallel to the same plane. If the segments are pairwise skew and all parallel to the same plane, then the line transversals lie on a hyperbolic paraboloid. Otherwise, they lie in one or two planes. Hence any set of transversals, whether  $\langle s, p \rangle$  or  $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ , forms patches of a quadric (possibly degenerating to one or two planes). Moreover, the set of transversals consists of at most three patches, or more formally, at most three connected components in line space [15]. Slightly abusing the notation, we let  $\langle s, p \rangle$  and  $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle$  denote not just sets of lines but also the patches of surfaces in  $\mathbb{R}^3$ .

Let  $\mathcal{P}$  be a finite set of convex polygons or convex polyhedra in  $\mathbb{R}^3$  with  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$  identified as *light sources*. The elements of  $\mathcal{P}$  are called the *objects* of the scenes and the objects in  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{L}$  are called the *obstacles*. A surface  $\sigma = \langle e, v \rangle$  is called an *EV-surface* if there exist two distinct objects  $P, Q \in \mathcal{P}$  so that  $e$  is an edge of  $P$ ,  $v$  a vertex of  $Q$  and  $\sigma$  intersects a light source. A surface  $\sigma = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  is called an *EEE-surface* if there exist three distinct objects  $P, Q, R \in \mathcal{P}$  so that  $e_1, e_2$  and  $e_3$  are respective edges of  $P, Q$  and  $R$  and  $\sigma$  intersects a light source. It is interesting to notice that our definition of EV and EEE surfaces is more restrictive than the common one [12], in the sense that it only considers a surface as a EV or EEE surface if it intersects a light source.

Any plane  $\Pi$  intersects an EV-surface or an EEE-surface in a set of arcs of a conic (each possibly empty or possibly a line segment).

Here we are interested in the arcs of conics that correspond to boundaries between shadow regions on the *shadow plane*  $\Pi$ . In particular, we are interested in arcs in  $\Pi$ , called *shadow boundaries*, resulting from the intersection between  $\Pi$  and maximal free line segments<sup>15</sup> that intersect a light source and are supported by a line which is on an EV or EEE surface. The shadow boundaries define an arrangement on  $\Pi$  which we call the *shadow arrangement*.

A point  $p$  is in the umbra if, for every point  $q$  on a light source, the segment  $pq$  intersects an object from  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{L}$ . Similarly,  $p$  is in full light if for any point  $q$  on a light source, the segment  $pq$  does not intersect any object from  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{L}$ . Otherwise,  $p$  is in the penumbra.

We will make extensive use of the fact that the effective boundaries of the umbra and penumbra consist of arcs of the shadow arrangement (see, for example, [57]). Notice that not all arcs of the shadow arrangement are on the umbra or penumbra boundaries; some arcs correspond to other lighting discontinuities.

Throughout this paper, we consider the regions of umbra and penumbra on a plane cast by a segment light source or polygonal light source(s) in the presence of convex polygons or convex polyhedra.

### 5.3 The penumbra boundary

We prove here bounds on the complexity of the common boundary of the penumbra and the full light cast on a plane by a set of  $k$  convex polyhedra of total complexity  $n$ , some of which are light sources. We refer to the union of the umbra and penumbra as the *shadow region*. We can assume without loss of generality that the light sources do not intersect the interior of the obstacles since, otherwise, the shadow region is trivially the whole plane. We first recall some straightforward and well-known properties of the shadow region.

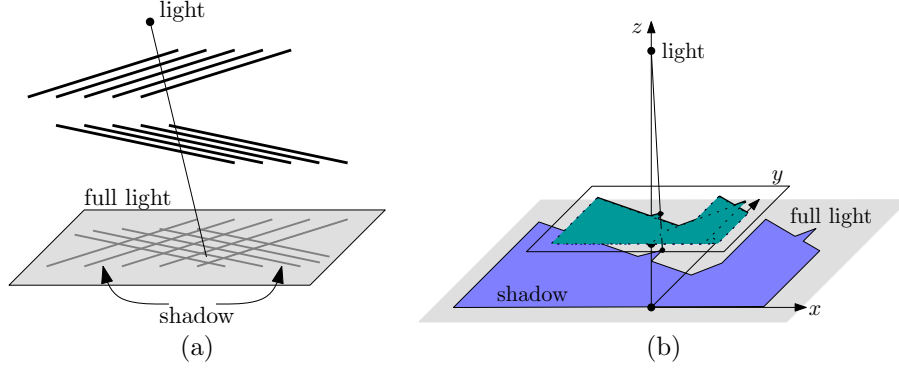
**Property 1.** The shadow region cast by a light source on a plane in the presence of obstacles is the union of all the shadow regions cast by each obstacle.

**Property 2.** The shadow region cast on a plane  $\Pi$  by a convex polygonal light source  $S$  in the presence of one convex polyhedron  $P$  is the intersection of halfplanes in  $\Pi$ . Each halfplane is defined as the intersection of  $\Pi$  with a (closed) halfspace (i) that contains  $P$ , (ii) whose interior does not intersect  $S$ , and (iii) that is bounded by a plane tangent to  $P$  and  $S$  and containing an edge of one of them. In other words, each halfspace is bounded by a plane separating  $P$  from  $S$  and containing an EV-surface which is tangent to  $P$  and  $S$ .

Note that these two properties imply that the boundary of the shadow region is only composed of line

---

<sup>15</sup>A line segment  $e$  is said to be *free with respect to an object*  $X$  if and only if  $e$  is an edge of a three-dimensional polyhedron whose interior does not intersect  $X$ ; a segment  $e$  is said to be *free* if it is free with respect to all the objects of the scene. A *maximal* free line segment is a free line segment that is maximal under inclusion. As a consequence, each endpoint of a maximal free segment is either at infinity or lies on some object.

FIG. 5.1 –  $\Omega(k^2)$  and  $\Omega(k\alpha(k))$  lower bounds.

segments induced by EV-surfaces.

**Théorème 26.** *The complexity of the shadow region cast on a plane by a set of  $k$  convex polyhedra of total complexity  $n$ , some of which are light sources, is, in the worst case, in  $\Omega(nk + k^4)$  and  $O(nk\alpha(k) + k^4)$ , where  $\alpha(k)$  denotes the pseudo-inverse of the Ackermann function. If there are only  $O(1)$  light sources of total complexity  $m$ , then the complexity of the shadow region is in  $\Omega(n\alpha(k) + km + k^2)$  and  $O(n\alpha(k) + km\alpha(k) + k^2)$ .*

*Démonstration.* By Property 2, the shadow cast on a plane  $\Pi$  by a polygonal light source in the presence of one convex polyhedron is a convex polygon. Furthermore, if the light source has  $m$  edges and the polyhedron has  $n_i$  edges, the shadow region in  $\Pi$  has  $O(n_i + m)$  edges. By Property 1, the shadow region in the presence of  $k$  convex polyhedra of total complexity  $n$  is thus the union of  $k$  convex polygons of total complexity  $O(n + km)$ , which has complexity  $O((n + km)\alpha(k) + k^2)$  [7]. The same bounds hold if there are  $O(1)$  light sources of total complexity  $m$ . Similarly, if  $O(k)$  of the convex polyhedra of the scene are light sources, of total complexity  $n$ , the shadow region is the union of  $O(k^2)$  convex polygons of total complexity  $O(nk)$ , which has complexity  $O(nk\alpha(k) + k^4)$ .

For the proof of the lower bounds, we consider the following collection of examples – which are adapted from lower bounds in [7]. In all constructions the shadow plane  $\Pi$  is the plane  $z = 0$ .

**$\Omega(k^2)$  and  $\Omega(k^4)$  examples.** Refer to Figure 5.1. We consider a point light source at a height  $z$  (large enough) and a grid consisting of  $k$  thin horizontal and parallel rectangles at height  $z = 1$  together with  $k$  other thin horizontal and parallel rectangles at height  $z = 2$ . They form a grid of shadow on plane  $\Pi$  which has size  $\Omega(k^2)$ . Replacing the point light source by  $k$  point light sources very close to each other gives, similarly, a shadow region of complexity  $\Omega(k^4)$ .

**$\Omega(k\alpha(k))$  example.** Refer to Figure 5.1. Again, the light source is a point with large positive  $z$ -coordinate. We consider a set of  $k$  line segments in plane  $z = 1$  (with positive  $y$  coordinates) having, in that plane, an upper envelope of size  $\Omega(k\alpha(k))$ [124]. We transform each line segment into a trapezoid linking it to its projection on the  $y = 0$  line (in plane  $z = 1$ ). We get a set of trapezoids whose shadow, in plane  $z = 0$ , for a point light source at large enough  $z$  is basically the upper envelope of the segments. Note that the



trapezoids can easily be made disjoint by placing them in different horizontal planes very close to plane  $z = 1$ .

**$\Omega(n\alpha(k))$  example.** Refer to Figure 5.2. First modify the above  $\Omega(k\alpha(k))$  example such that the left “vertical” side of each trapezoid has slope  $\gamma$  and the right “vertical” side has slope  $-\gamma$ , for some  $\gamma$  large enough. Now, by some suitable scaling, we make all slopes of the vertical walls strictly smaller than  $\frac{k\pi}{n}$  (in absolute value). Assemble  $\frac{n}{k}$  copies of the previous construction into a large regular  $\frac{n}{k}$ -gon where each side is, in fact, an upper envelope of complexity  $\Omega(k\alpha(k))$ . Finally, this construction can be seen as  $k$  convex  $3\frac{n}{k}$ -gons by connecting all of the  $\frac{n}{k}$  copies of the same trapezoid by extending their walls.

This set of  $k$  convex  $3\frac{n}{k}$ -gons, embedded in different horizontal planes close to the  $z = 1$  plane, engender, in the presence of a point light source at large enough  $z$ , shadows of complexity  $n\alpha(k)$ .

**$\Omega(mk)$  example.** Refer to Figure 5.3. We use a horizontal  $m$ -gon as light source and a thin rectangle as obstacle. Then the shadow has size  $\Omega(m)$ . Using multiple copies of the obstacle such that the different shadows are disjoint easily gives an  $\Omega(mk)$  example.  $\square$

There is still a small gap between the  $\Omega(nk + k^4)$  lower bound and the  $O(nk\alpha(k) + k^4)$  upper bound and between the  $\Omega(k^2 + mk + n\alpha(k))$  lower bound and the  $O(k^2 + mk\alpha(k) + n\alpha(k))$  upper bound.

## 5.4 Upper bounds

In this section we prove the following two upper bounds on the complexity of the umbra cast on a plane by a segment light source or polygonal light source(s).

**Théorème 27.** *The complexity of the umbra cast on a plane by one segment light source in the presence of  $k$  convex polyhedra of total complexity  $n$  is  $O(n^2k^2)$  if the polyhedra may intersect and  $O(nk^3)$  otherwise.*

**Théorème 28.** *The complexity of the umbra cast on a plane by a set of  $k$  (possibly intersecting) convex polyhedra of total complexity  $n$ , some of which are light sources, is  $O(n^3k^3)$ .*

We first recall a technical lemma from [78].

**Lemme 29** ([78, Lemma 2.1]). *Given a collection of  $p$  arcs of conics in the plane  $\Pi$  such that any vertical line in  $\Pi$  intersects at most  $q$  arcs,<sup>16</sup> the maximum complexity of the arrangement of the plane induced by these curves is  $\Theta(pq)$ .*

### 5.4.1 The umbra cast by a segment light source

We will actually prove an upper bound on the complexity of the shadow arrangement which yields the same bound for the complexity of the umbra. Notice that, in the case of a single segment light source,

---

<sup>16</sup>Lemma 2.1 in [78] is stated with Jordan arcs that pairwise intersect at most a constant number of times and such that any vertical line intersects the arcs in a total of at most  $q$  points. This can trivially be extended to (possibly vertical) conic arcs such that any vertical line intersects at most  $q$  arcs.

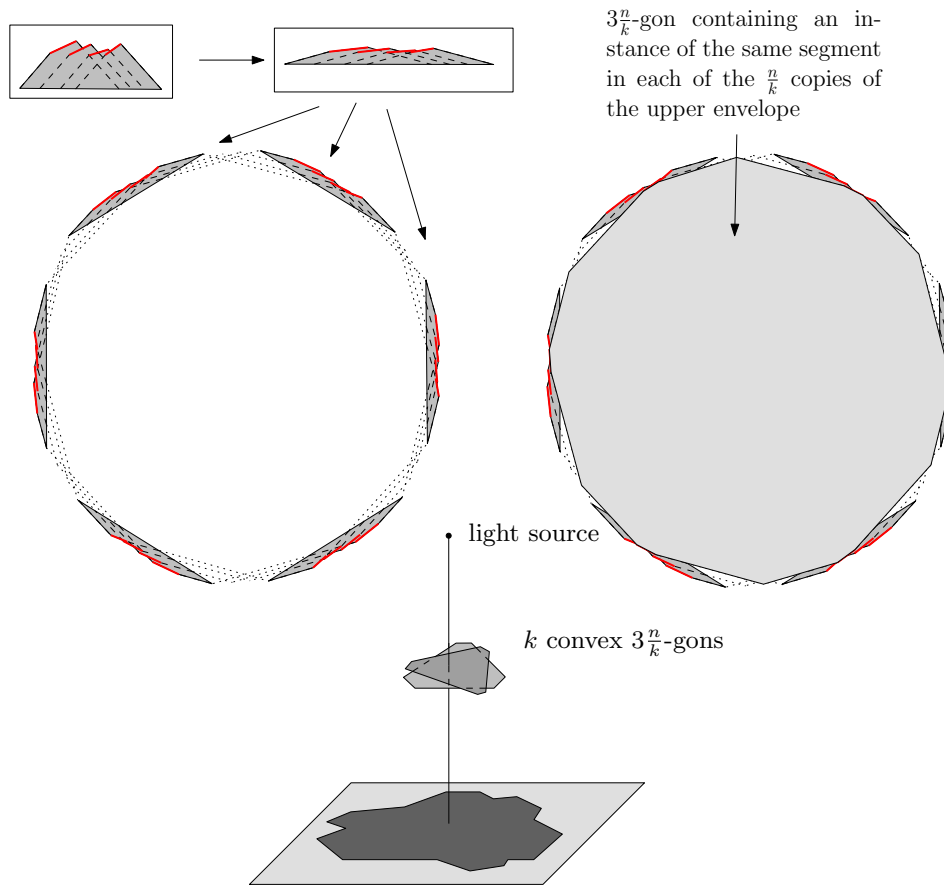


FIG. 5.2 –  $\Omega(n\alpha(k))$  lower bound.

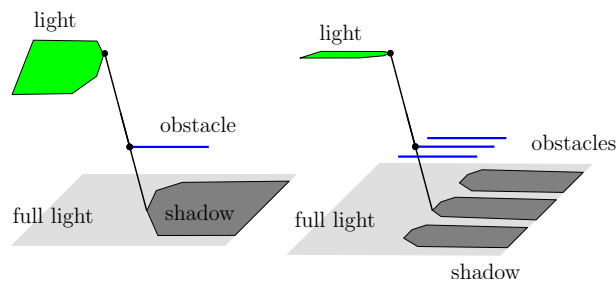


FIG. 5.3 –  $\Omega(mk)$  lower bound.

the  $EEE$ -surfaces  $\sigma = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  that contribute to the shadow arrangement are such that one of  $e_1, e_2$  or  $e_3$  is the segment light source. Similarly, when considering  $EV$ -surfaces  $\sigma = \langle e, v \rangle$  either  $e$  is the segment light source or  $v$  is one of its endpoints.

To prove Theorem 27 we consider a plane rotating about the line supporting the segment light source. First, if the segment light source,  $s$ , is not parallel to the shadow plane  $\Pi$ , we apply a projective transformation to the scene, sending to infinity the point of intersection between the line containing  $s$  and plane  $\Pi$ ; this does not change the complexity of the shadow arrangement. We can thus assume in the rest of

this section that the segment light source is parallel to  $\Pi$ . The sweep plane, denoted  $\pi$ , intersects the shadow plane in a line parallel to  $s$ ; we will say that, throughout the sweep, this line moves from left to right.

In this proof we consider an arrangement  $A$  of arcs of conics in  $\Pi$  which contains the shadow arrangement. We will establish an upper bound of  $O(nk^3)$  on the complexity of  $A$  which will yield the bound of Theorem 27. The arrangement  $A$  is defined as the arrangement of the potential shadow boundaries; a *potential shadow boundary* is an arc of conic defined as the intersection of  $\Pi$  with (i) those lines that are transversal to the light source  $s$ , and the edges  $e_1$  and  $e_2$  of two other convex polyhedra and that do not intersect the interior of these convex polyhedra (the connected components of these lines form patches of EEE-surfaces) and (ii) those lines that are transversal to a vertex and an edge of two convex polyhedra, one of which is the segment light source, and that do not intersect the interior of these convex polyhedra (the connected components of these lines form patches of EV-surfaces).

We now count the number of crossings between an instance of the sweep plane  $\pi$  and the potential shadow boundaries.

**Lemme 30.** *Plane  $\pi$  properly intersects at most  $O(nk)$  potential shadow boundaries if the obstacles of the scene may intersect and  $O(k^2)$  otherwise.*

*Démonstration.* The potential shadow boundaries are defined as the intersection with  $\Pi$  of lines  $\ell$  which are (i) transversal to the segment light source  $s$  and tangent to two convex polyhedra, (ii) transversal to an endpoint of  $s$  and tangent to another convex polyhedron, or (iii) transversal to  $s$  and to a convex polyhedron vertex.

An instance  $\pi$  of the sweep plane never properly intersects an arc of type (iii) (since such an arc is either included in  $\pi$  or does not intersect it). Now, if  $\pi$  intersects an arc of one of the other two types, then  $\pi$  contains the corresponding line  $\ell$ , which is tangent to two polygons of  $\mathcal{P} \cap \pi$ . If the  $k$  convex polygons may intersect (resp., are pairwise disjoint), there are  $O(nk)$  (resp.,  $O(k^2)$ ) lines in  $\pi$  that are tangent to two polygons of  $\mathcal{P} \cap \pi$ , hence the result.  $\square$

*Proof of Theorem 27.* We consider an orthogonal frame in plane  $\Pi$  whose *vertical* axis is parallel to the segment light source  $s$ ; the other axis is called *horizontal*.

We bound the number of potential shadow boundaries. Each arc corresponds either to a patch of an EV or EEE surface. Consider first the EV-surfaces. Since either the edge or the vertex is on the light source, there are at most  $O(n)$  such surfaces.

Now consider the arcs generated by EEE-surfaces. Let  $n_i$  be the number of vertices of convex polyhedron  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . The number of EEE-surfaces involving the light source and edges from convex polyhedra  $P_i$  and  $P_j$  is  $O(n_i + n_j)$  [14, Corollary 2.6]. Then,  $\sum_{1 \leq i < j \leq k} O(n_i + n_j) = O(nk)$ .

There are at most  $O(nk)$  potential shadow boundaries and a vertical line intersects at most  $O(nk)$  or  $O(k^2)$  such arcs depending on whether the obstacles intersects (Lemma 30). Thus Lemma 29 gives an upper bound of  $O(n^2k^2)$  or  $O(nk^3)$  on the complexity of the arrangement  $A$ . The total complexity of the shadow arrangement, and thus of the umbra, is thus  $O(n^2k^2)$  if the obstacles may intersect and  $O(nk^3)$

otherwise. □

Note that the upper bound of Theorem 27 is not known to be tight. However, we prove, in Lemma 36, that this is a tight bound on the complexity of the arrangement  $A$ .

### 5.4.2 The umbra cast by polygonal light sources

To prove Theorem 28 we consider an arrangement  $B$  of arcs of conics that, as in the previous section, contains the shadow arrangement. This arrangement  $B$  is defined as the arrangement of potential shadow boundaries where, in this section, potential shadow boundaries are the intersections of  $\Pi$  with (i) the lines that are transversal to a vertex and an edge of two convex polyhedra and that do not intersect the interior of these convex polyhedra (the connected components of these lines form patches of EV-surfaces) (ii) the lines that are transversal to edges of three convex polyhedra and that do not intersect the interior of these convex polyhedra (the connected components of these lines form patches of EEE-surfaces). Notice that  $B$  may contain arcs generated by surfaces that do not intersect the light sources or possibly by surfaces that intersect the interior of other convex polyhedra in the scene. We will establish a  $O(n^3k^3)$  upper bound on the complexity of  $B$  which yields the same bound for the complexity of the umbra.

We start with the following lemma (see also [37]).

**Lemme 31.** *Any line  $L$  in  $\Pi$  properly intersects at most  $O(nk^2)$  potential shadow boundaries.*

*Démonstration.* An intersection point between  $L$  and a potential shadow boundary corresponds to a line transversal which belongs to an EV or EEE surface. Consider first EV-surfaces. The line transversal lies in a plane which contains  $L$  and a vertex, say  $v$ , of one of the convex polyhedra. There exist  $O(n)$  such planes and in each of them there are at most  $O(k)$  lines through  $v$  that are tangent to a convex polyhedron (since we only consider proper intersections between  $L$  and the potential shadow boundaries). Thus there are at most  $O(nk)$  points on  $L$  and potential shadow boundaries which correspond to lines in EV-surfaces.

Now we consider EEE-surfaces. Let  $n_i$  be the number of vertices of convex polyhedron  $P_i$ , for  $1 \leq i \leq k$ . The number of EEE-surfaces generated by three edges of convex polyhedra  $P_i$ ,  $P_j$  and  $P_l$ , not intersecting the interior of  $P_i$ ,  $P_j$  and  $P_l$ , and that intersect  $L$  is  $O(n_i + n_j + n_l)$  [14, Main Lemma]. Since  $\sum_{1 \leq i < j < l \leq k} O(n_i + n_j + n_l) = O(nk^2)$ , there are at most  $O(nk + nk^2) = O(nk^2)$  potential shadow boundaries which intersect the line  $L$  on  $\Pi$ . □

*Proof of Theorem 28.* Here, we introduce an arbitrary coordinate frame  $Oxy$  in the plane  $\Pi$ . We call  $Ox$  the horizontal axis and  $Oy$  the vertical axis. We first break all conic arcs into maximal horizontally monotone pieces. This increases the number of arcs only by a constant factor.

As in the proof of Theorem 27, we bound the number of potential shadow boundaries. Let  $n_i$  be the number of vertices of convex polyhedron  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  and  $e$  an edge. The number of EEE-surfaces pertinent to  $B$  and involving  $e$  and edges from convex polyhedra  $P_i$  and  $P_j$  is  $O(n_i + n_j)$  [14, Corollary 2.6]. Thus, for each edge  $e$ , there are, at most,  $\sum_{1 \leq i < j \leq k} O(n_i + n_j) = O(nk)$  EEE-surfaces having  $e$  as

a generating segment. Furthermore, the number of EV-surfaces involving edge  $e$  or one of its vertices is  $O(n)$ . Since there exist  $n$  edges, the total number of potential shadow boundaries is therefore  $O(n^2k)$ .

In conclusion, there are at most  $O(n^2k)$  potential shadow boundaries and a vertical line intersects at most  $O(nk^2)$  such arcs (Lemma 31). Thus Lemma 29 gives an upper bound of  $O(n^3k^3)$  on the complexity of the arrangement  $B$ . The total complexity of the shadow arrangement, and thus of the umbra, is then  $O(n^3k^3)$ .  $\square$

## 5.5 Lower bounds

In this section we present several lower bounds on the complexity of the umbra.

### 5.5.1 The umbra cast by a segment light source

Here we concentrate on the umbra cast by a segment light source in the presence of various configurations of obstacles.

**Théorème 32.** *A segment light source and two triangles may cast, on a plane, four connected components of umbra.*

*Démonstration.* Consider the following scene consisting of a segment light source,  $s$ , two triangles,  $T_1$  and  $T_2$ , and a shadow plane,  $\Pi$ , the horizontal plane of equation  $z = 0$ ; see Figure 5.4(a) and (b).

Figure 5.5(a) shows a superset of the shadow arrangement generated by this configuration (the arran-

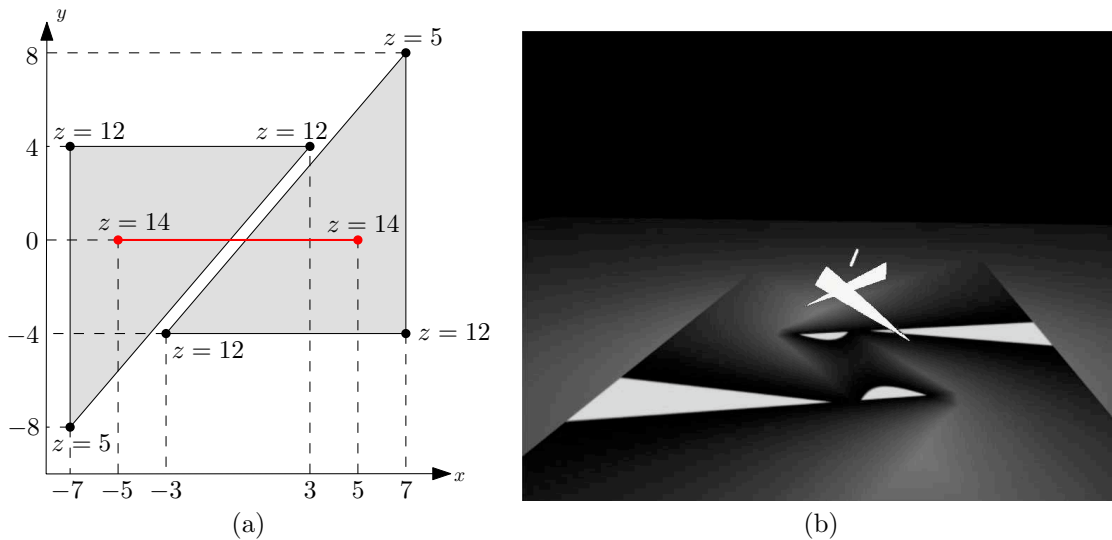


FIG. 5.4 – (a) Two triangles and a segment light source (viewed from above) that cast 4 connected components of umbra on the plane  $z = 0$ . (b) The scene rendered with the ray tracer `OpenRT` (the umbra is in light grey); courtesy of Andreas Dietrich.

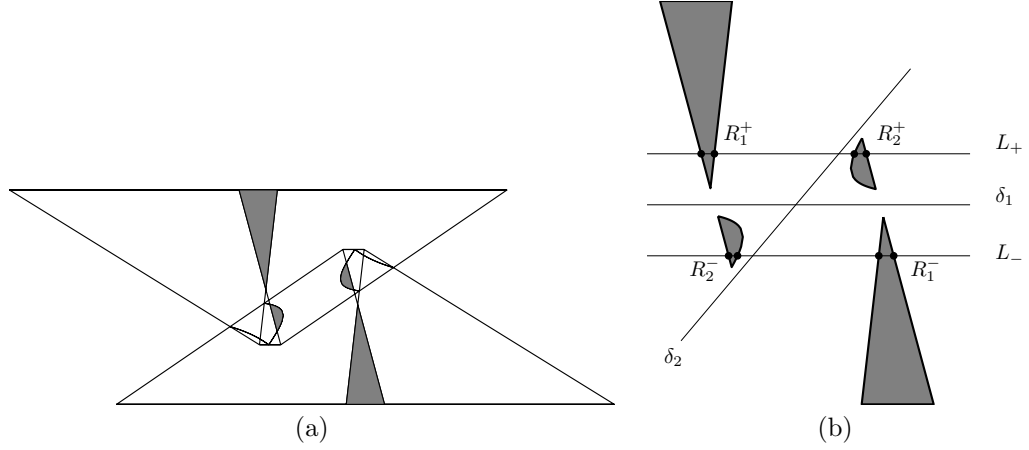


FIG. 5.5 – (a) Superset of the shadow arrangement on plane  $\Pi$ . The four shaded regions are the regions of umbra. (b) The four connected components of umbra and the four lines used in the proof of Theorem 32.

gement  $A$  defined in Section 5.4). Although it can be shown that the four shaded regions in the figure are exactly the umbra, we will simply argue here that there are at least four connected components. We do this by exhibiting four segments in the umbra and then arguing that they are each in different connected components.

The idea is to consider a series of planes rotating about the segment light source and the intersections of those planes with the two triangles and the shadow plane; Figure 5.6 shows such a sequence. We then examine the umbra in those planes by considering the relevant bitangents.

Let  $P_+$  be one such plane (containing  $s$ ) and going through the point  $(0, 7, 0)$  and  $L_+$  the intersection of  $P_+$  and  $\Pi$ . Figure 5.6(b) shows the segment  $s$ , the intersections between  $P_+$  and the two triangles  $T_1$  and  $T_2$ ,  $L_+$  and four bitangents that together define the umbra on  $L_+$ . Consider the two segments  $R_1^+$  and  $R_2^+$  as shown in Figure 5.6(b). It is easy to see, by examining the bitangents, that  $R_1^+$  and  $R_2^+$  are in the umbra. Hence there are two segments of umbra on the line  $L_+$ . We obtain two other segments,  $R_1^-$  and  $R_2^-$ , by taking the symmetric plane  $P_-$  with respect to the  $xz$ -plane (through point  $(0, -7, 0)$  and whose intersections with the scene is shown on Figure 5.6(d)).

Now, we show that the four segments  $R_1^+$ ,  $R_1^-$ ,  $R_2^+$  and  $R_2^-$  lie in different connected components of umbra. In order to prove this result, we exhibit two lines on  $\Pi$  which contain no point in the umbra and separate the four segments as shown in Figure 5.5(b).

First consider the plane  $y = 0$  containing the light segment  $s$  and orthogonal to the shadow plane  $\Pi$ . This plane intersects  $\Pi$  in a line,  $\delta_1$ , as shown in Figure 5.5(b), and separates  $R_1^+$  and  $R_2^+$  from  $R_1^-$  and  $R_2^-$  since  $P_+$  and  $P_-$  are symmetric about the plane  $y = 0$ . To show that  $\delta_1$  contains no point of the umbra, consider the intersection of the  $y = 0$  plane with the segment  $s$  and the two triangles  $T_1$  and  $T_2$ ; see Figure 5.6(c). A study of the bitangents reveals that no point of  $\delta_1$  lies in the umbra.

Now consider the plane orthogonal to  $\Pi$ , parallel to the two triangle hypotenuses and going through the midpoint of  $s$ . Let  $\delta_2$  be the intersection of this plane with  $\Pi$ ; see Figure 5.5(b). Elementary computations show that the line  $\delta_2$  separates  $R_1^+$  and  $R_2^-$  from  $R_1^-$  and  $R_2^+$ . There can be no point of the umbra on  $\delta_2$

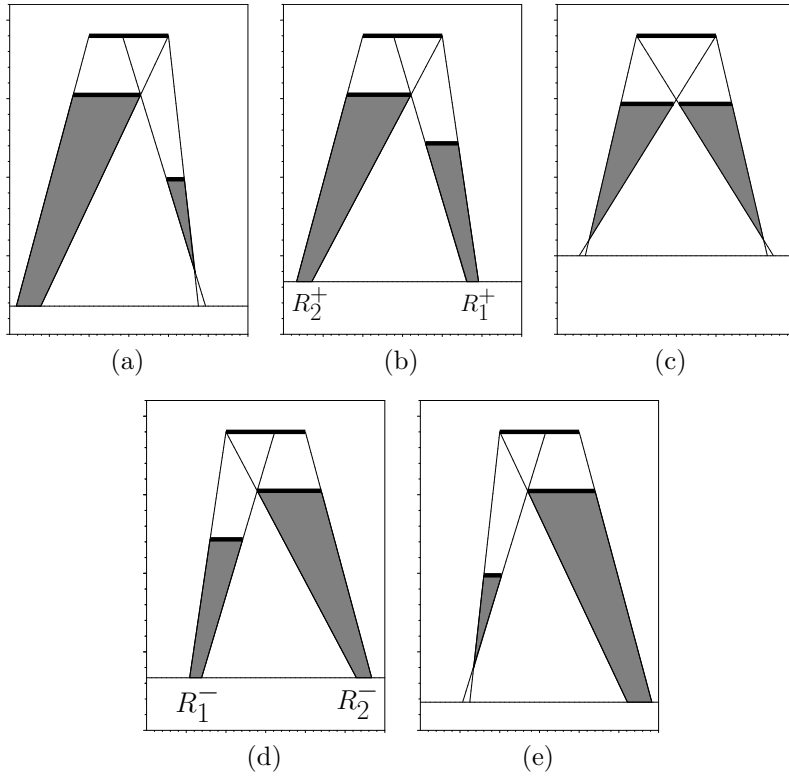


FIG. 5.6 – Views in the sweep plane with bitangents that define the umbra. The number of components of umbra in the intersection of the sweep plane and the plane  $z = 0$  is : (a) one (sweep plane through  $(0, 10, 0)$ ), (b) two (sweep plane  $P_+$  through  $(0, 7, 0)$ ), (c) zero (sweep plane  $y = 0$ ), (d) two (sweep plane  $P_-$  through  $(0, -7, 0)$ ), (e) one (sweep plane through  $(0, -10, 0)$ ).

since the plane intersects the light source but not the triangles (see Figure 5.4(a)). This completes the proof.  $\square$

Note that the line supporting  $s$  and the lines supporting the triangle hypotenuses are pairwise skew and not all parallel to a common plane. Thus the corresponding EEE-surface is a hyperboloid of one sheet which intersects  $\Pi$  in a hyperbola. We determine the equation of this hyperbolic curve to be  $41y^2 - 52xy + 928 = 0$ . This curve admits two asymptotes which contain no point in the umbra and which separate the connected components of umbra. One of these asymptotes is  $\delta_1$  and we could have chosen the other to be  $\delta_2$ .

Note also that in our example, the light source is parallel to the shadow plane, and there are also many symmetries. None of this is critical; the example can be perturbed and the result still holds.

We now prove a lower bound for fat convex polyhedra, that is, convex polyhedra whose aspect ratios are bounded from below by a positive constant when  $n$  goes to infinity.

**Théorème 33.** *The umbra cast on a plane by one segment light source in the presence of two fat disjoint convex polyhedra of total complexity  $n$  can have  $\Omega(n)$  connected components.*

*Démonstration.* Our lower-bound example consists of one segment light source  $s_1$ , a convex polyhedron

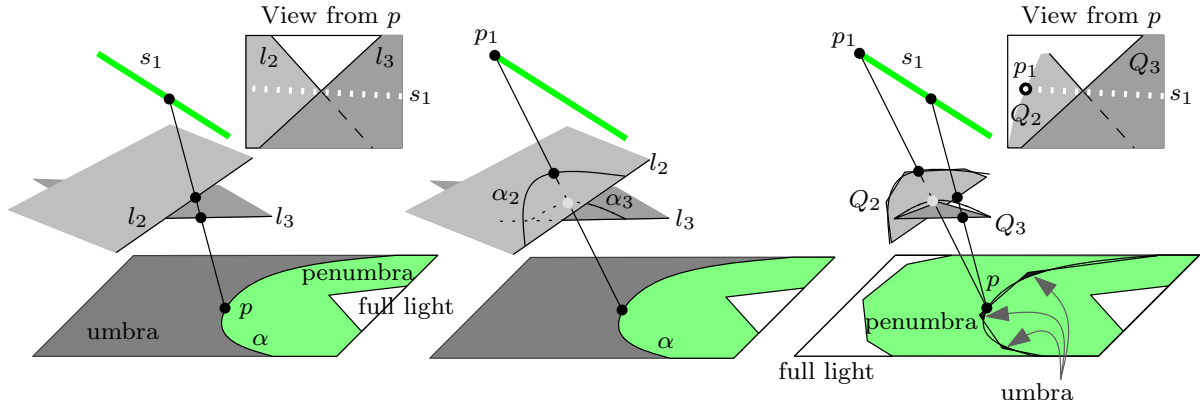


FIG. 5.7 –  $\Omega(n)$  lower bound.

$Q_2$  of size  $O(n)$ , and another convex polyhedron,  $Q_3$ , of constant size. Refer to Figure 5.7.

First we consider three non-parallel segments  $s_1$ ,  $l_2$  and  $l_3$  all parallel to the shadow plane  $\Pi$ . Let  $\sigma = \langle s_1, l_2, l_3 \rangle$  be the quadric patch(es) consisting of the lines stabbing  $s_1$ ,  $l_2$  and  $l_3$ . In the shadow plane  $\Pi$ , by adding suitable halfplanes  $P_2$  and  $P_3$  as obstacles limited by the lines supporting  $l_2$  and  $l_3$ , we obtain  $\alpha$ , a single conic arc of  $\sigma \cap \Pi$ , bounding the umbra where the umbra is on the concave side of  $\alpha$  (Figure 5.7-left).

We now consider  $p_1$ , one of the endpoints of  $s_1$ , and curves  $\alpha_2, \alpha_3$ , the intersections of planes  $P_2, P_3$  with the cone of apex  $p_1$  and base  $\alpha$  (Figure 5.7-center), respectively.

Next, we reduce the obstacles  $P_2$  and  $P_3$  to convex polygons  $Q_2$  and  $Q_3$  by bounding them by a polygonal approximation of  $\alpha_2$  and  $\alpha_3$  such that  $Q_3$  remains within (*i.e.*, on the convex side of)  $\alpha_3$  and  $Q_2$  intersects  $\alpha_2$   $n$  times (Figure 5.7-right). The umbra cast by  $s_1$  on  $\Pi$  in the presence of  $Q_2$  and  $Q_3$  then consists of  $n$  connected components that are the intersection of the concave region outside  $\alpha$  and the convex polygon that is the intersection of the cone of apex  $p_1$  and base  $Q_2$  with the plane  $\Pi$ .

Note that the polygons  $Q_2$  and  $Q_3$  are fat, that is, they have bounded positive aspect ratio when  $n$  goes to infinity, since  $Q_2$  consists of a segment and of an approximation of a conic and  $Q_3$  is of constant size. Finally, polygons  $Q_2$  and  $Q_3$  can be trivially transformed into fat convex polyhedra without changing the umbra.  $\square$

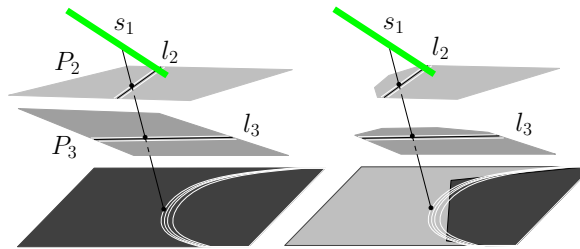


FIG. 5.8 –  $\Omega(nk^2)$  lower bound.



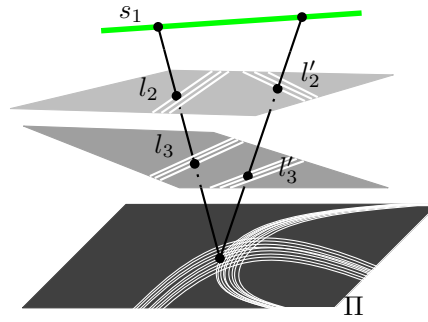


FIG. 5.9 –  $\Omega(k^4)$  lower bound.

**Théorème 34.** *The umbra cast on a plane by one segment light source in the presence of  $k$  disjoint convex polyhedra of total complexity  $n$  can have  $\Omega(nk^2)$  connected components.*

*Démonstration.* Consider three non-parallel segments  $s_1, l_2$ , and  $l_3$  all parallel to the shadow plane  $\Pi$  and planes  $P_2 \supset l_2$  and  $P_3 \supset l_3$  parallel to  $\Pi$ , refer to Figure 5.8. The surface  $\langle s_1, l_2, l_3 \rangle$  intersects  $\Pi$  in a conic arc  $\alpha$ .

Now consider the following setup :  $s_1$  is the light source ;  $P_2$  has  $k$  narrow rectangular holes (or slits) parallel and arbitrary close to  $l_2$  ; similarly  $P_3$  has  $k$  slits parallel and arbitrary close to  $l_3$ . (A plane with  $k$  such slits can be modelled by  $O(k)$  rectangles). Each pair of slits,  $s_2$  from  $P_2$  and  $s_3$  from  $P_3$ , together with the light source  $s_1$  induce a piece of penumbra in  $\Pi$  that is essentially a thickened copy of the conic arc  $\alpha$ .

We thus get that the umbra covers the whole plane  $\Pi$  except for  $k^2$  curves of penumbra that are all close to  $\alpha$  (see Figure 5.8-left).

Finally, we trim the two planes  $P_2$  and  $P_3$ , creating an  $n$ -sided convex polygon on  $\Pi$  such that the region outside this polygon is in light or penumbra and each edge intersects all the  $k^2$  curves. The umbra then consists of  $O(nk^2)$  regions inside the convex polygon and between the  $k^2$  conics (see Figure 5.8-right). Note that the  $O(k)$  convex obstacles can each be transformed into a convex polyhedron by the addition of a single vertex without changing the umbra.  $\square$

**Théorème 35.** *The umbra cast on a plane by a segment light source in the presence of  $k$  disjoint convex polyhedra can have  $\Omega(k^4)$  connected components.*

*Démonstration.* Refer to Figure 5.9. As in the previous lower-bound example, we create  $k^2$  curves of penumbra using parallel thin holes. Making a second set of thin holes in each plane, we create a second family of curves of light and penumbra intersecting the first one. The umbra is now the complement of the union of these two sets of curves and it consists of  $\Omega(k^4)$  connected components.  $\square$

We now present a lower bound on the maximum complexity of the arrangement  $A$ , introduced in Section 5.4.1, which proves (together with the proof of Theorem 27) that the worst-case complexity of

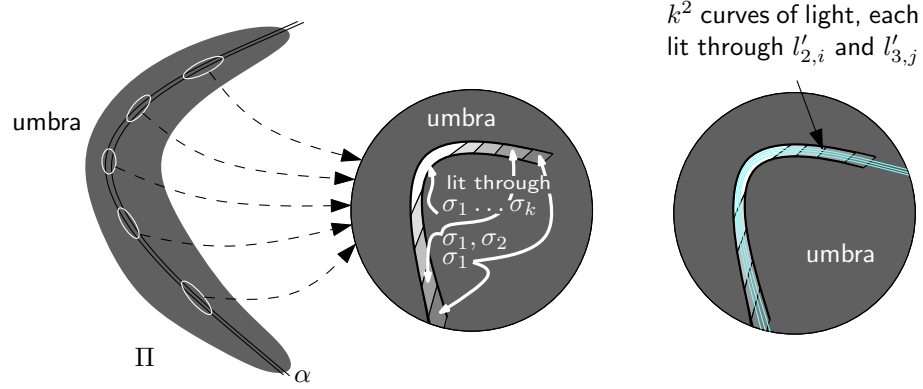


FIG. 5.10 –  $\Omega(nk^3)$  lower bound on the complexity of arrangement  $A$ .

this arrangement is  $\Theta(nk^3)$ .

**Lemme 36.** *The arrangement  $A$  cast by one segment light source in the presence of  $k$  convex obstacles of total complexity  $n$  can have an complexity  $\Omega(nk^3)$ .*

*Démonstration.* The proof is obtained by using large obstacles with small holes so that the shadow plane  $\Pi$  is almost completely in umbra with small curves of penumbra drawn by rays going through these holes. Such obstacles with small holes can be created using several convex polygons.

We consider a conic  $\alpha$  drawn in  $\Pi$  and a line  $l_1$  (containing the light source) intersecting  $\Pi$  in a point of  $\alpha$ .

Let  $x_1 = \alpha \cap l_1$  ( $x_1$  is at infinity if  $l_1$  is parallel to  $\Pi$ ) and  $x_2, x_3, x_4, x_5$  be four other points on  $\alpha$  and  $x_6, x_7$  be two other points on  $l_1$ , then any quadric through these seven points contains  $\alpha$  and  $l_1$ . Since a quadric is defined by nine points, by choosing the two other points in a different manner we can construct different quadrics containing  $l_1$  and  $\alpha$ .

First we construct a set of quadric surfaces,  $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_k$ , close together. On  $\sigma_i$  we choose two lines  $l_{2,i}$  and  $l_{3,i}$ , such that all the lines  $l_{h,i}$  for all  $i$  and a given  $h$  are close together. Then we can construct a (non-convex) polyhedral obstacle of size  $O(k)$  with thin holes around lines  $l_{h,i}$  for  $h = 2, 3; 1 \leq i \leq k$ . We consider a plane  $P$  above, and parallel to,  $\Pi$  that intersects the quadrics  $\sigma_i$  in a family of conics  $\beta_i$  that are close together. We can construct in plane  $P$  a convex  $n$ -gon  $Q$  that intersects all these conics  $n$  times each.

Before the introduction of  $Q$ , the picture in  $\Pi$  is a slab of penumbra around  $\alpha$ . Adding  $Q$  cuts this penumbra into  $n$  pieces, and, in each piece, there are  $k$  different intensities. Indeed, let  $p_0$  be a point in one of these pieces on  $\alpha$  and such that all the  $k$  transversals through  $p_0$  and the three line segments  $l_1, l_{2,i}$ , and  $l_{3,i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , are non-obstructed. If we move a point  $p$  along  $\alpha$  and away from  $p_0$  these transversals through  $p$  get obstructed one after another by  $Q$  until they are all obstructed, *i.e.*, until  $p$  is in the umbra (see Figure 5.10 left and center). This defines  $\Omega(nk)$  regions of penumbra of different intensities of light around  $\alpha$ .

Now, we choose a completely different quadric  $\sigma'$  far from the  $\sigma_i$  but still containing  $\alpha$  and  $l_1$ . Thus,

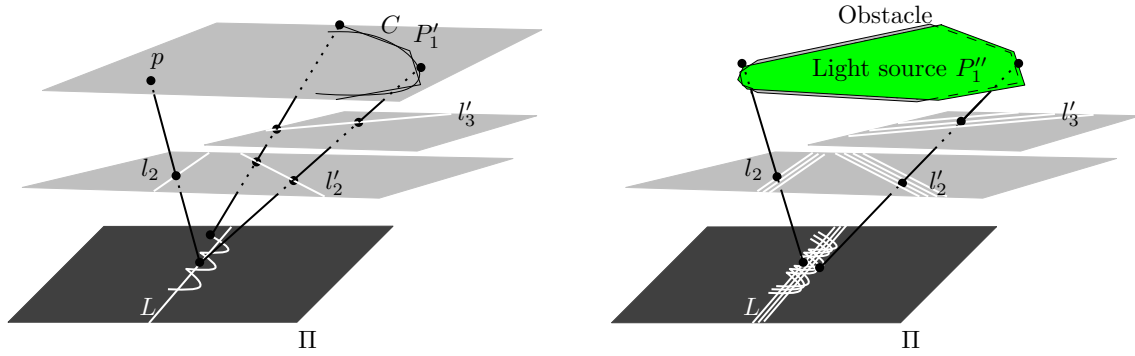


FIG. 5.11 –  $\Omega(n^2k^3)$  lower bound.

we can choose two lines  $l'_2$  and  $l'_3$  in the same regulus as  $l_1$  and arrange obstacles to light  $\Pi$  through thin holes around  $l'_2$  and  $l'_3$ . The area lit through these holes is also a small area around  $\alpha$ . We can arrange things such that this area is much thinner than the previous one, and thus we get a thin curve of penumbra which crosses all the  $\Omega(nk)$  regions we have described above. Now, making  $k$  holes  $l'_{2,i}$  around  $l'_2$  and  $k$  holes  $l'_{3,j}$  around  $l'_3$  we transform this thin penumbra curve into  $k^2$  “parallel” curves making the size of the arrangement  $\Omega(nk^3)$ .  $\square$

### 5.5.2 The umbra cast by a polygonal light source

Note that the lower bound of  $\Omega(nk^2 + k^4)$  of Section 5.5.1 for a segment light source can easily be modified into a lower bound of  $\Omega(nk^3 + k^6)$  in the case of a polygonal light source (by adding a third plane with  $O(k)$  slits and a big polygonal light source). We present here a lower bound of  $\Omega(n^2k^3 + nk^5)$  on the complexity of the umbra cast by a polygonal light source in the presence of  $k$  polygonal obstacles.

**Théorème 37.** *The umbra cast on a plane by one polygonal light source in the presence of  $k$  disjoint convex polyhedra of total complexity  $n$  can have  $\Omega(n^2k^3)$  connected components.*

*Démonstration.* Refer to Figure 5.11. Let  $p$  be a point and  $P_1$  a small  $n$ -gon light source very close to  $p$ . Add an  $n$ -gon obstacle very close to the light source so that the light source behaves like  $n$  point light sources (when viewed from the correct side).

Now consider a plane obstacle with  $k$  thin holes parallel to a line  $l_2$ . This creates  $nk$  parallel thin lines of light on the shadow plane that can be made arbitrarily close to a line  $L$  (by having the  $k$  thin holes sufficiently close to each other and the  $n$  point light sources sufficiently close to each other). Note that by duplicating this construction (and thus with two polygonal light sources which behave as  $2n$  point light sources) we get an arrangement of  $2nk$  lines of light with  $n^2k^2$  connected components of umbra.

Now consider two lines  $l'_2$  and  $l'_3$ . The set of line transversals to  $l'_2$ ,  $l'_3$  and  $L$  is a quadric. Cut this quadric by a plane and approximate (a piece  $C$  of) the resulting conic by a convex polyline with  $n$  vertices,  $P'_1$ . The set of transversals to this polyline with  $l'_2$  and  $l'_3$  defines a curve on the shadow plane that cuts  $L$  in  $O(n)$  points. We define a light source as the convex hull of  $P'_1$  and put an obstacle very close to it so that the light source behaves as if the polyline  $P'_1$  was the light source (when viewed from the right

region). Now, replacing  $l'_2$  and  $l'_3$  by two plane obstacles with  $\Omega(k)$  thin holes close and parallel to  $l'_2$  and  $l'_3$ , respectively, we get  $\Omega(k^2)$  curves of light, each of which intersects  $\Omega(n)$  times each of the  $nk$  lines of light close to  $L$ . This gives  $\Omega(n^2k^3)$  connected components of umbra.

Note that the two light sources  $P_1$  and  $P'_1$  can be merged into one by considering  $P''_1$  in the same plane as  $P_1$ , by noticing that there are enough degrees of freedom on  $l'_2$  and  $l'_3$  so that the convex hull of  $P_1$  and an arc of the conic contains  $C$  on its boundary.  $\square$

**Théorème 38.** *The umbra cast on a plane by one polygonal light source in the presence of  $k$  disjoint convex polyhedra of total complexity  $n$  can have  $\Omega(nk^5)$  connected components.*

*Démonstration.* Refer to Figure 5.12. Consider three horizontal pairwise skew lines  $l_1, l_2, l_3$  that lie above a horizontal plane  $\Pi$ . Their set of line transversals forms a patch of quadric in  $\mathbb{R}^3$ . Let  $C$  be the conic defined as the intersection of this quadric with  $\Pi$ . Replace each of the  $l_i$  by a plane obstacle and  $k$  thin holes close to  $l_i$  and place a large (horizontal) light source  $S$  above these plane obstacles.

Consider now an  $n$ -gon  $P$  that intersects  $C$  at  $O(n)$  points. Let  $s_4$  and  $s_5$  be two intersecting horizontal segments. Let  $P'$  be the  $n$ -gon symmetric to  $P$  with respect to the point of intersection between  $s_4$  and  $s_5$ . We consider  $P'$  as a light source and put an obstacle very close to it so that it behaves as a one-dimensional polygonal light source when viewed from  $C$ . This induces on the shadow plane a polyline of light that intersects  $C$  at  $O(n)$  points.

Now perturb segments  $s_4$  and  $s_5$  so that they do not intersect and replace them by (horizontal) plane obstacles with  $k$  thin holes close and parallel to  $s_4$  and  $s_5$ , respectively. We hence get  $k^2$  curves of light, each of which consists of  $O(n)$  conic arcs that each intersects  $C$ ; hence each of these  $k^2$  curves of light intersects  $C$  at  $O(n)$  points. By choosing the holes near  $l_1, l_2$  and  $l_3$  sufficiently close to each other, respectively, each of the  $k^2$  curves of light close to  $P$  intersects  $O(n)$  times each of the  $k^3$  curves of light close to  $C$ . We hence get  $O(nk^5)$  connected components of umbra.  $\square$

We finally present a lower bound on the complexity of the arrangement  $B$ , introduced in Section 5.4.2,

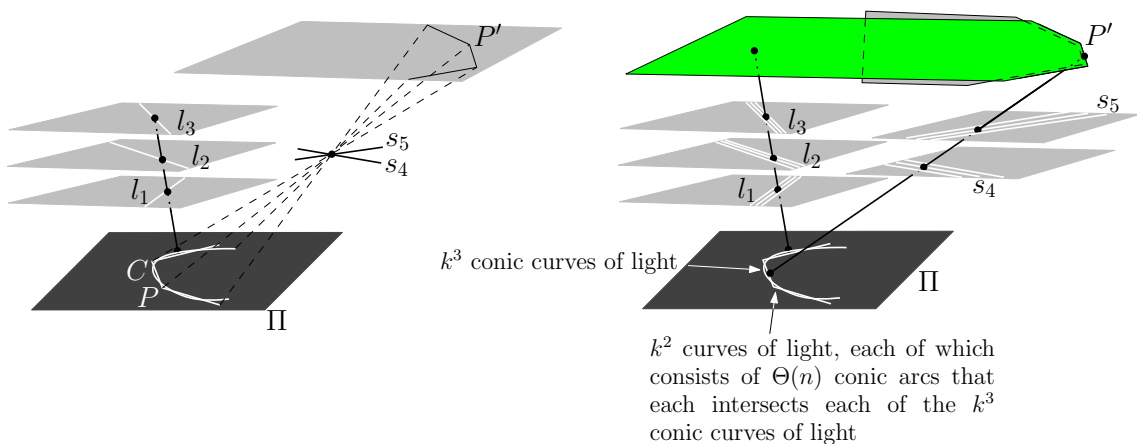
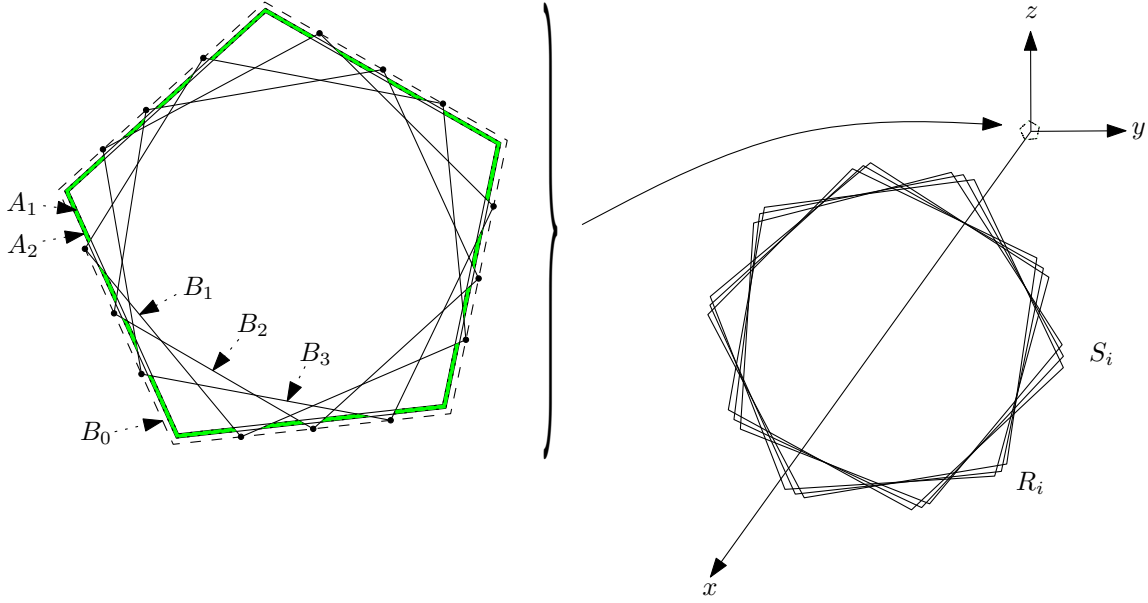


FIG. 5.12 –  $\Omega(nk^5)$  lower bound.


 FIG. 5.13 –  $\Omega(n^3k^3)$  lower bound on the complexity of arrangement  $B$ .

which proves (together with the proof of Theorem 28) that the complexity of this arrangement is  $\Theta(n^3k^3)$ . Recall that arrangement  $B$  contains, by construction, all the curves that correspond to limit of umbra and, more generally, all the curves where the derivative of the light intensity is discontinuous. Note, however, that this arrangement also contains arcs that increase its complexity and that are not relevant to light simulation (for instance, the arcs generated by surfaces that do not intersect the light sources or by surfaces that intersect the interior of other polyhedra in the scene).

**Lemme 39.** *The arrangement  $B$  cast by polygonal light sources in the presence of  $k$  convex obstacles of total complexity  $n$  can have a complexity  $\Omega(n^3k^3)$ .*

*Démonstration.* Suppose, for simplicity, that  $n$  and  $k$  are such that  $\frac{n}{k}$  and  $\frac{k}{4}$  are integers. We first consider a construction of two families of  $\frac{k}{4}$  polygons each, as introduced in [14]; see Figure 5.13. Consider a  $\frac{n}{k}$ -regular polygon  $A_1$  in the plane  $x = 0$ . Next we consider a copy,  $B_0$ , of  $A_1$  scaled by a factor of  $(1 + \varepsilon)$ , and on each edge of  $B_0$  we place  $\frac{k}{4}$  points. Polygon  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq \frac{k}{4}$ , is constructed by taking the  $i^{\text{th}}$  point on each edge of  $B_0$ . If  $\varepsilon$  is small enough, the intersection points of  $A_1$  and  $B_i$  are outside the other polygons  $B_j$  for  $1 \leq j \leq \frac{k}{4}$  and  $i \neq j$ . Now the  $A_i$ , for  $2 \leq i \leq \frac{k}{4}$ , are constructed as copies of  $A_1$  scaled by a factor  $1 + \frac{i}{k}\varepsilon$ . Finally, we translate slightly all these polygons so that they do not lie in plane  $x = 0$ . Namely, the  $A_i$  are translated by  $i\varepsilon$  in the negative  $x$  direction and the  $B_i$  are translated by  $i\varepsilon$  in the positive  $x$  direction.

We consider all these polygons as obstacles except for the  $A_i$ ,  $i$  even, which we consider as light sources. Furthermore, we scale down all these polygons so that the scene behaves like  $\Theta(nk)$  almost point light sources that are arbitrarily close to each others (viewed from the correct side). On the other hand, consider a translated copy,  $R_0$ , of  $B_0$  in the plane, say  $x = 10$ . In that plane, let  $S_0$  be a rotated copy of  $R_0$  so that they intersect  $2\frac{n}{k}$  times. Consider now two families of polygons  $R_i$  and  $S_i$  that are  $\frac{k}{4}$  arbitrarily

close copies of  $R_0$  and of  $S_0$ , respectively, and translate them slightly outside of the plane  $x = 10$  so that no two polygons intersect.

We consider the arrangement  $B$  on plane, say  $x = 20$ , induced by these polygons. Let  $\mathcal{E}$  be the set of pairs of edges, one from a  $A_i$  and one from a  $B_j$  that bound one of the almost point light sources (*i.e.*, any two edges that intersect in projection on the plane  $x = 0$ ).

Consider two edges  $r_k$  and  $s_\ell$  of  $R_k$  and  $S_\ell$ , respectively, that intersect in projection on the plane  $x = 10$ . Any pair of edges in  $\mathcal{E}$  defines with  $r_k$  an arc of the arrangement  $B$  and, similarly, any (possibly different) pair of edges in  $\mathcal{E}$  defines with  $s_\ell$  another arc of  $B$ ; furthermore, two such arcs intersect by construction (since the two arcs are, roughly speaking, the umbra of two intersecting segments cast by two arbitrarily close point light sources). There are  $\Theta(k^2)$  choices of pairs of  $R_k$  and  $S_\ell$ ,  $\frac{n}{k}$  choices of edge  $r_k$  on  $R_k$  and 2 choices of segment  $s_\ell$  on  $S_\ell$ ; hence, there are  $\Theta(nk)$  choices of pairs of edges  $r_k$  and  $s_\ell$ . Since  $\mathcal{E}$  consists of  $\Theta(nk)$  pairs of edges, the arrangement  $B$  contains  $\Omega(n^3k^3)$  distinct pairs of intersecting arcs, that is,  $\Omega(n^3k^3)$  vertices. Note finally that all the polygons  $A_i$ ,  $B_j$ ,  $R_k$  and  $S_\ell$  can be easily transformed into pairwise disjoint very thin convex polyhedra.  $\square$

As mentioned above, the arrangement  $B$  contains the arrangement,  $B'$ , of the curves where the derivative of the light intensity is discontinuous, but it also contains a number of arcs that increase its complexity and that are not relevant to light simulation. The best lower bound we know on the size of  $B'$  is  $\Omega(n^3k^2 + n^2k^4)$ . To prove that it can have size  $\Omega(n^2k^4)$ , we use the same construction as in Theorem 37 (Figure 5.11) and simply replace the two polygons that behave like  $n$  point light sources by the construction presented in the proof of Lemma 39 (Figure 5.13) that behaves like  $nk$  point light sources. Note that this bound does not apply to the boundary of the umbra because the construction does not perfectly emulate  $nk$  point light sources and the thin strips of light (close to line  $L$  in Figure 5.11) on the shadow plane overlap. To prove that  $B'$  can have size  $\Omega(n^3k^2)$ , we consider a point light source and a polygon of size  $n/4$ . We then duplicate this construction elsewhere, so that the shadows created by the polygons and their associated point light sources are two polygons in the shadow plane that intersect  $n/2$  times (twice per edge). We finally replace each point light source by the construction presented in the proof of Lemma 39 that behaves like  $nk$  point light sources.

## 5.6 Conclusion

The purpose of this paper is to establish the complexity of the boundaries between the umbra, penumbra and fully-lit regions on a plane in a polyhedral scene consisting of  $k$  convex objects of total complexity  $n$ .

The results presented here constitute a first step toward understanding the intrinsic structure and complexity of the umbra in this setting. We have proved that if the light is reduced to one line segment, then the umbra may have as many as  $\Omega(nk^2 + k^4)$  connected components and has worst-case complexity  $O(nk^3)$ . We have also shown that a polygonal light source could generate an umbra with as many as  $\Omega(n^2k^3 + nk^5)$  connected components and worst-case complexity  $O(n^3k^3)$ . In both cases these components of umbra are delimited by arcs of conics. These results prove that the umbra is intrinsically much more

intricate than the boundary between full light and penumbra which is bounded by line segments and has complexity  $O(n\alpha(k) + km\alpha(k) + k^2)$ , where  $m$  is the complexity of the light source.

Our upper bounds, in fact, apply to the complexity of the arrangement of the curves where the derivative of the light intensity is discontinuous. These arrangements clearly include the boundary of the umbra, but also a lot of curves inside the penumbra that are not relevant to the umbra. Furthermore, our upper bound,  $O(nk^3)$ , on the complexity of these arrangements is tight for a segment light source. For polygonal light sources, our upper and lower bounds,  $O(n^3k^3)$  and  $\Omega(n^3k^2 + n^2k^4)$ , on the complexity of these arrangements are not tight but they are tighter than for the complexity of the umbra. This perhaps explains why our bounds on the complexity of the umbra are not tight. Notice, however, that we do have tight bounds for small  $n$  ( $n = O(k)$ ) and, in the case of segment light source, for small  $k$  ( $k = O(1)$ ).

## Acknowledgments

Many thanks to Jeff Erickson for useful discussions during the early stages of this work. We also like to thank the anonymous referees for their valuable comments.

## Chapitre 6

# Contours d’ombres

Dans le cadre de la méthode de radiosité, la première étape de la construction d’un maillage de discontinuités [57, 76] est la localisation des courbes (à la surface des objets) où se produisent des discontinuités dans la solution de l’équation de rendu (cf. section 1.3.2, page 10). Durand, Drettakis et Puech [33, 34] proposent d’utiliser le squelette de visibilité pour l’extraction de ces courbes. Malheureusement, la construction et le stockage de cette structure, tout comme ceux du maillage de discontinuités, souffrent d’un coût en temps de calcul et en taille mémoire qui les rendent inutilisables en pratique. Toutefois, plusieurs nuances peuvent être apportées à ce constat. D’une part, des travaux récents proposent des résultats encourageants sur la taille du squelette de visibilité et développent une algorithmique moins coûteuse que celle utilisée par Durand et ses coauteurs (cf. section 3.2.3, page 35). D’autre part, des spécialistes d’informatique graphique rapportent que de nombreuses discontinuités, prises en compte pour la construction du maillage, ont un impact mineur sur la qualité de l’image engendrée par l’algorithme de radiosité. Citons Hart, Dutré et Greenberg : « *many of the resulting mesh elements do not affect the final image quality.* » ([54], page 1). Ce maillage pourrait ainsi être simplifié sans nuire au résultat final.

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre de scènes formées de polyèdres convexes et disjoints de  $\mathbb{R}^3$  qui projettent des ombres sur un plan représentant le sol (figure 6.1). Le cœur de notre approche est de restreindre les courbes qui contraignent la construction du maillage de discontinuités aux limites entre les trois grands types de zones ombrées (ombre, pénombre et lumière). Dans un premier temps, nous démontrons qu’un sous-ensemble du squelette de visibilité de Durand, Drettakis et Puech est suffisant pour localiser ces courbes. Pour cela, nous caractérisons un ensemble de conditions nécessaires pour qu’une courbe soit une limite « lumière-pénombre » ou une limite « ombre-pénombre ». Ensuite, nous proposons une méthode pour extraire un ensemble restreint de courbes qui contient les limites entre les régions ombrées. Finalement, nous présentons une validation expérimentale de notre méthode.

Notre approche repose sur l’intuition suivante : la différence d’éclairement entre deux cellules adjacentes du maillage de discontinuités est faible, voire négligeable, lorsque les vues d’une même source lumineuse polyédrique depuis ces deux cellules ne diffèrent que par l’apparition (ou la disparition) d’une face de la source. Ce principe est d’autant plus marqué que le ratio entre la surface de la face et celle de la source est faible. Ainsi, deux cellules peuvent être regroupées si elles voient les mêmes *objets* bien



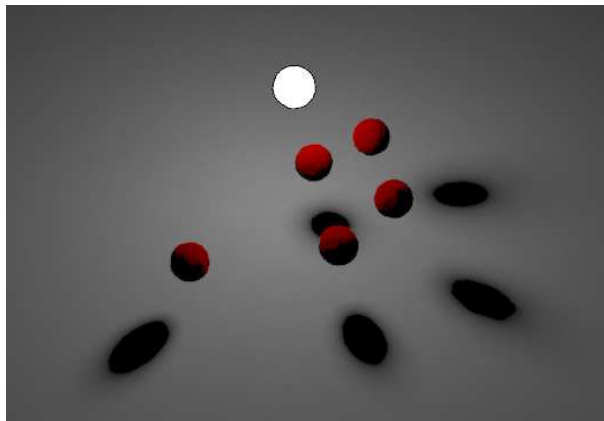


FIG. 6.1 – Image d'une scène composée de polyèdres dont l'un (en blanc) est une source lumineuse. Cette scène projette des ombres sur un plan représentant le sol.

qu'elles n'en voient pas les mêmes *faces*. Les résultats théoriques présentés au chapitre 4 formalisent cette idée et permettent de définir le squelette de visibilité pour les objets plutôt que pour les ensembles de triangles qui les composent. Le nombre de nœuds dans le squelette de visibilité que nous construisons est significativement inférieur à celui des nœuds qui forment le squelette de Durand, Drettakis et Puech (jusqu'à 80%). De plus, la quantité de courbes que nous en extrayons pour contraindre le maillage de discontinuités est largement moindre que dans l'approche classique. Finalement, les premières images que nous produisons laissent entrevoir des résultats visuellement intéressants.

## 6.1 Bases théoriques : limites des régions ombrées

Nous commençons par établir le lien entre les lieux de certains événements visuels et les limites d'ombres dans une scène éclairée par une *unique* source lumineuse. Ces résultats sont plus simples à présenter pour une unique source lumineuse mais s'étendent facilement au cas de plusieurs sources. Pour une scène éclairée par plusieurs sources, les zones d'ombres sont les intersections des régions d'ombre de chaque source (un point est dans l'ombre s'il est dans l'ombre de *toutes* les sources) alors que les zones de pénombre sont les unions des portions de pénombre de chacune des sources (un point est dans la pénombre s'il est dans la pénombre d'*au moins* une source).

Commençons par rappeler une « évidence ». Un point qui appartient à une région totalement éclairée voit l'intégralité de la source lumineuse. Lorsque ce point se déplace, il entre dans une zone de pénombre dès lors qu'un objet vient se « placer devant » la source. C'est un événement visuel. De même, un point qui se déplace dans l'ombre quitte cette région pour entrer dans la pénombre lorsque la source de lumière devient (partiellement) visible. Ici encore, un événement visuel se produit. Ainsi, tous les points (du plan) qui forment les limites « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre » sont des points où se produisent des événements visuels particuliers.

Au chapitre 4, nous avons proposé de prendre en compte la silhouette visible d'un objet pour définir la vue depuis un point quelconque. Les transitions entre lumière et pénombre ainsi qu'entre ombre et

pénombre correspondent à des événements visuels : dans le premier cas, la silhouette de la source lumineuse passe de « totalement visible » à « partiellement visible » alors que dans le second elle passe d'« invisible » à « visible ». Pour cette définition de vue, nous avons démontré que les événements visuels se produisent en deux types de points : les points d'où partent des rayons tangents à deux objets dans un plan support à ces objets (rayons T++T) et les points d'où sont issus des rayons tangents à trois objets (rayons T+T+T). Cette caractérisation n'est pas parfaite dans la mesure où nous avons démontré qu'il existe certains points d'où sont issus des rayons T++T qui ne sont pas le lieu d'événements visuels. Malheureusement, nous ne connaissons pas de caractérisation plus précise de ces lieux d'événements visuels. Pour autant, nous verrons que ces ensembles de surfaces d'événements visuels sont suffisants pour nos besoins et contiennent substantiellement moins d'éléments que ceux introduits par Gigus et Malik [44].

Dans le cadre de polyèdres convexes et disjoints, les ensembles de points où se produisent les événements visuels se décrivent simplement : ce sont des surfaces. Les origines de rayons T++T appartiennent à des portions de plans qui sont tangents à deux polyèdres distincts en un sommet et une arête (respectivement) : les surfaces EV bitangentes. Les origines de rayons T+T+T forment, quant à elles, des portions de surfaces quadriques tangentes à des triplets d'arêtes : les surfaces EEE. Les surfaces EV bitangentes sont délimitées par des droites extrêmes de type VV (supportées par deux sommets) ou VEE (un sommet et deux arêtes) alors que les surfaces EEE le sont par des droites VEE et EEEE (quatre arêtes) comme illustré sur les schémas de la figure 6.2.

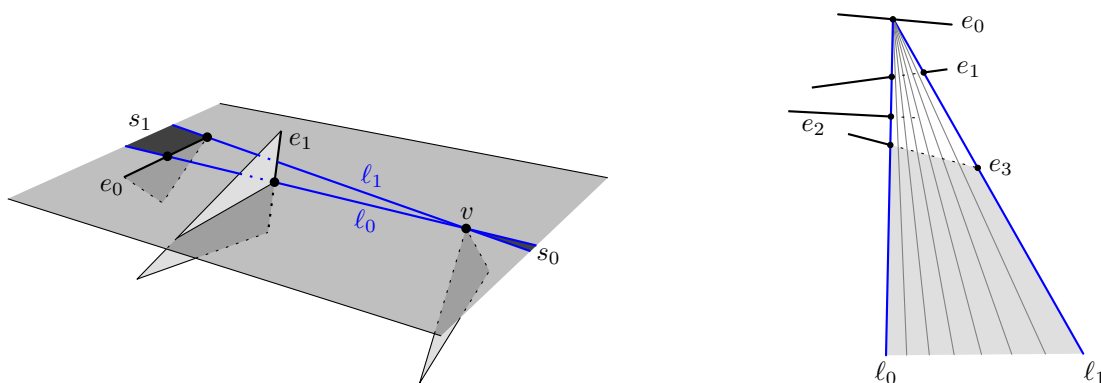


FIG. 6.2 – Sur le schéma de gauche  $l_0$  et  $l_1$  délimitent les surfaces EV  $s_0$  et  $s_1$  supportées par  $e_0$  et  $v$  (cf. section 6.1.1). La droite  $l_0$  est une droite VV alors que  $l_1$  est une droite VEE engendrée par  $v$ ,  $e_0$  et  $e_1$ . Sur le schéma de droite, les droites  $l_0$  et  $l_1$  délimitent la surface EEE supportée par les arêtes  $e_0$ ,  $e_1$  et  $e_3$ . La droite  $l_0$  est une droite EEEE alors que  $l_1$  est une droite VEE.

### 6.1.1 Terminologie

Nous reprenons la terminologie introduite au chapitre 4. Un plan est *support* à un objet  $X$  s'il intersecte  $X$  et qu'il délimite un demi-espace contenant l'objet. Le *rayon*  $(p, \vec{u})$  d'*origine*  $p$  et dirigé suivant la *direction*  $\vec{u}$  est l'ensemble des points :

$$(p, \vec{u}) = \left\{ p + t\vec{u} : t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Un rayon  $(p, \vec{u})$  qui intersecte un objet  $X$  est *tangent* à  $X$  s'il est contenu dans l'un de ses plans support, sinon il l'intersecte *transversalement*. Un rayon  $(p, \vec{u})$  intersecte un objet  $X$  *avant* un objet  $Y$  si la distance minimale entre  $p$  et  $(p, \vec{u}) \cap X$  est inférieure à la distance minimale entre  $p$  et  $(p, \vec{u}) \cap Y$ . Un rayon *voit* un objet  $X$  s'il intersecte  $X$  sans intersecter transversalement un autre objet de la scène avant  $X$ . Un point  $p$  voit un objet  $X$  s'il existe un rayon depuis  $p$  qui voit  $X$ . Dans ce cas, l'objet  $X$  est *visible* depuis  $p$ . Un rayon qui est tangent à deux objets  $X$  et  $Y$  (respectivement trois objets  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ) est *bitangent* à  $X$  et  $Y$  (respectivement *tritangent* à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ). Un rayon bitangent à  $X$  et  $Y$  contenu dans un plan support commun aux deux objets  $X$  et  $Y$  est dit *bitangent limite* à  $X$  et  $Y$ . Pour reprendre la notation introduite dans [90], un rayon bitangent limite est un rayon  $T++T$  alors qu'un rayon tritangent est un rayon  $T+T+T$ .

**Contours apparents.** La *silhouette* d'un objet  $X$  depuis  $p$  est l'ensemble des directions des rayons émanant de  $p$  qui sont tangents à  $X$ . La silhouette de chaque objet est une courbe convexe, éventuellement réduite à un arc de grand cercle ou à un point, de l'ensemble des directions  $\mathbb{S}^2$ . Le *contour apparent* d'un objet  $X$  depuis  $p$  est l'ensemble des directions des rayons quittant  $p$  qui sont tangents à  $X$  et qui voient cet objet. Par extension, le contour apparent d'une scène depuis  $p$  est l'union des contours apparents des objets de la scène vus depuis  $p$ .

**Événements visuels.** Une *famille de rayons critiques*  $EV$  *bitangents engendrée* par  $e$  et  $v$  est une composante connexe de rayons qui passent par  $e$  et  $v$ , voient les objets contenant  $e$  et  $v$  et voient un même objet transversalement. Une *famille de rayons critiques*  $EEE$  *engendrée* par  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  est une composante connexe de rayons rencontrant les arêtes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ , voyant les objets contenant  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  et voyant un même objet transversalement. Remarquons qu'il se peut que les rayons qui forment une famille de rayons critiques n'intersectent pas d'objet transversalement. L'ensemble des points d'où sont issus les rayons d'une même famille de rayons critiques est une *surface d'événements visuels* (figure 6.3).

### 6.1.2 Germes des rayons d'événement visuel

Nous souhaitons déterminer les limites entre les différentes régions ombrées dans le plan  $z = 0$  sous l'hypothèse que tous les objets de la scène sont dans le demi-espace  $z > 0$ . Nous savons que tout point d'une limite entre deux régions est le lieu d'au moins un événement visuel. Pour chacun de ces points  $p$ , nous nous intéressons au contour apparent depuis  $p$ . En particulier, nous considérons les rayons  $T++T$  et  $T+T+T$  issus de  $p$ .

Prenons un rayon  $(p, \vec{u})$  et supposons qu'il soit  $T++T$  ou  $T+T+T$ . La direction  $\vec{u}$  correspond à l'intersection des silhouettes depuis  $p$  d'au moins deux objets. Il existe un voisinage  $U$  de  $\vec{u}$  qui isole cette intersection des autres intersections entre les silhouettes des objets de la scène puisque le nombre d'intersections entre les silhouettes de deux polyèdres de complexité finie est fini. Le *germe* du rayon  $(p, \vec{u})$  est la portion du contour apparent depuis  $p$  restreint à  $U$ . Pour les rayons intérieurs aux familles de rayons critiques  $EV$  et  $EEE$ , il en existe 8 types représentés aux figures 6.4 et 6.5 (cf. chapitre 4 pour plus de détails). Les germes correspondant aux rayons extrêmes de type  $VV$ ,  $VEE$  ou  $EEEE$  ne sont pas représentés car ils ne jouent pas de rôle particulier dans l'extraction des limites d'ombre (seuls comptent les « sous-germes »  $EV$  et  $EEE$  qu'ils contiennent). Notons que ces germes sont plus compliqués. Finalement,

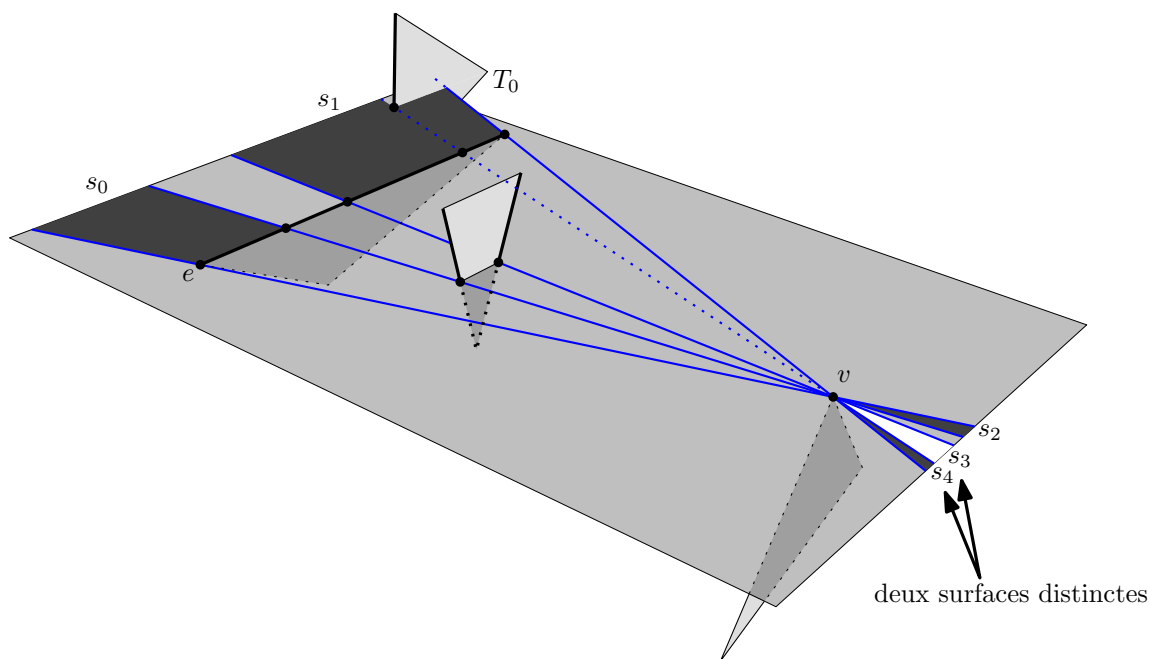


FIG. 6.3 – Les régions  $s_0$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  et  $s_4$  sont cinq surfaces d'événements visuels engendrées par l'arête  $e$  et le sommet  $v$ . Il est important de remarquer que  $s_3$  et  $s_4$  sont deux surfaces différentes car les rayons critiques associés qui passent par  $v$  puis  $e$  ne rencontrent pas le même objet transversalement. Les rayons depuis  $s_4$  intersectent  $T_0$  alors que ceux depuis  $s_3$  ne le font pas.

pour simplifier l'exposé, nous nommons ces germes comme indiqué aux figures 6.4 et 6.5 (pour les germes EEE, l'objet noté  $\infty$  n'est pas nécessairement situé à l'infini, ce peut être l'objet supportant l'extrémité du segment libre maximal tangent à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ).

**Équivalence des germes d'une famille de rayons critiques.** Soient  $\sigma$  une famille de rayons critiques et  $(p, \vec{u})$  un rayon appartenant à  $\sigma$  tels que  $(p, \vec{u})$  soit  $T++T$  sans être tritangent ou  $T+T+T$  sans être quadritangent (le rayon  $(p, \vec{u})$  n'est pas de type  $VV$ ,  $VEE$  ou  $EEEE$ ). Nous commençons par démontrer que tous les rayons critiques de  $\sigma$  ont des germes équivalents, c'est-à-dire des germes homéomorphes au germe de  $(p, \vec{u})$ .

**Lemme 40.** *L'ensemble des rayons critiques  $T++T$  non tritangents ou  $T+T+T$  non quadritangents de  $\sigma$  ont un germe homéomorphe à celui de  $(p, \vec{u})$ .*

*Démonstration.* Soit  $(q, \vec{v})$  un rayon critique de  $\sigma$ . Démontrons que les germes associés à  $(p, \vec{u})$  et  $(q, \vec{v})$  sont homéomorphes. Considérons les silhouettes des objets en  $p$  dans la direction  $\vec{u}$ . Comme illustré à la classification de la page 100, nous avons trois segments qui s'intersectent en un même point (la direction  $\vec{u}$ ). Leurs extrémités varient continûment (d'après le lemme de continuité de la silhouette, lemme 6 du chapitre 4) et ils s'intersectent toujours en un point commun. Les contours apparents formés par les silhouettes sont donc homéomorphes. Il suffit d'ajouter que l'ordre des objets est préservé (lemme 4 du chapitre 4). D'où le résultat.  $\square$

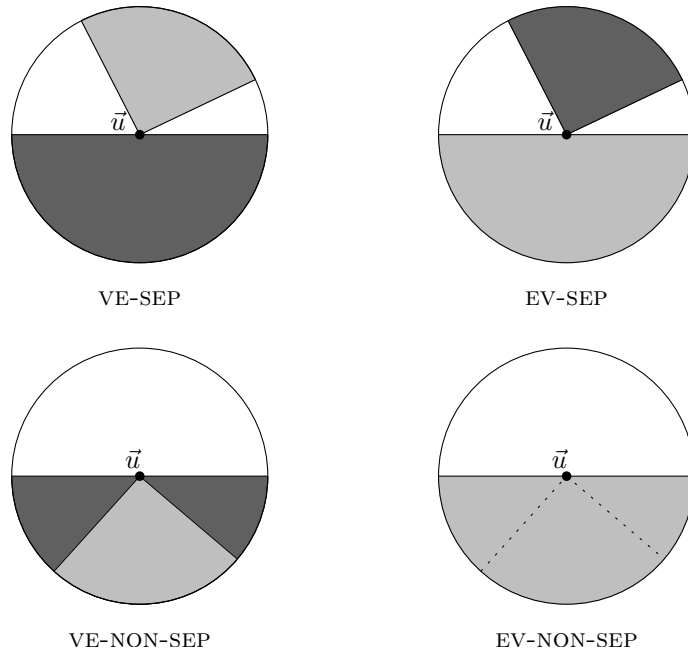


FIG. 6.4 – Les différents types de germes EV. Les deux schémas de la ligne supérieure représentent les germes de rayons séparateurs alors que ceux de la ligne inférieure sont les germes des rayons non séparateurs. Le premier objet intersecté (tangentiellement) par le rayon  $(p, \vec{u})$  est l'objet grisé le plus clair.

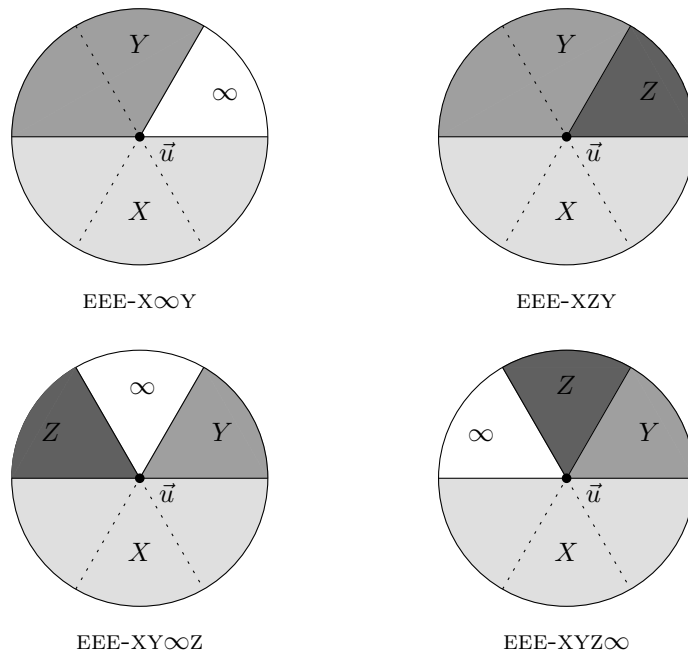


FIG. 6.5 – Les différents types de germes EEE. Le code couleur correspond à l'ordre d'intersection des objets par le rayon  $(p, \vec{u})$  (l'objet grisé le plus clair est le premier rencontré alors que le plus foncé est le dernier objet touché tangentiellement).

**Types des familles de rayons critiques et des surfaces d'événements visuels.** Étant donné que les rayons, qui appartiennent à l'intérieur d'une même famille de rayons critiques, ont des germes équivalents, nous appelons *famille de rayons critiques de type X* une famille dont les rayons ont le germe  $X$ . Une *surface d'événements visuels de type X* est une surface d'événements visuels associée à une famille de rayons critiques de type  $X$ .

### 6.1.3 Limites lumière-pénombre et EV séparateurs

Nous caractérisons les germes qui sont associés aux rayons qui peuvent engendrer des limites entre lumière et pénombre :

**Théorème 41.** *La limite « lumière-pénombre » est induite par les surfaces d'événements visuels EV-SEP et VE-SEP tangentes à la source lumineuse.*

*Démonstration.* Supposons que le point  $p$  soit l'origine d'un rayon  $(p, \vec{u})$  qui soit un rayon T+T+T. Nous construisons un voisinage (sur le sol)  $P$  de  $p$  ne contenant que des points qui ont une vue partielle de la source. Notons  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  les trois objets intersectés tangentiellement par le rayon  $(p, \vec{u})$  et  $S$  la source lumineuse. Nous supposons que  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont triés suivant leur ordre d'intersection avec le rayon  $(p, \vec{u})$ . Remarquons qu'il est possible que  $Y$  et  $S$  ou  $Z$  et  $S$  soient confondus.

Démontrons d'abord l'existence d'un ouvert  $U$  de  $S^2$  arbitrairement proche de  $\vec{u}$  tel que, pour toute direction  $\vec{v} \in U$ , le rayon  $(p, \vec{v})$  intersecte proprement un objet ( $X$ ,  $Y$  ou  $Z$ ) puis la source  $S$ . Soit  $S$  est confondue avec  $Y$  ou  $Z$ . Auquel cas, puisque les silhouettes de  $X$  et  $S$  depuis  $p$  séparent l'espace en quatre secteurs localement autour de  $\vec{u}$ , il existe un ensemble de directions formant avec  $p$  des rayons qui traversent les deux objets. Soit la source  $S$  est différente de ces trois objets. Il suffit alors de remarquer que le rayon  $(p, \vec{u})$  rencontre transversalement  $S$ . Il existe donc un voisinage de la direction  $\vec{u}$  dans lequel toutes les directions définissent avec  $p$  des rayons qui intersectent transversalement  $S$ . Puisque  $(p, \vec{u})$  est tangent aux objets fermés  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , il existe un ensemble ouvert dans ce voisinage de  $\vec{u}$  qui ne contient que des directions de rayons qui coupent transversalement l'un des objets.

Pour conclure ce cas, il suffit de remarquer qu'au chapitre 4, nous avons prouvé que les silhouettes des objets  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  et  $S$  se déplacent continûment (lemme 6). Ainsi, il existe un voisinage  $P$  de  $p$  dans lequel le rayon dirigé suivant  $\vec{v}$  depuis n'importe quel point  $q$  de  $P$  intersecte transversalement un premier objet puis la source. Par conséquent, aucun des points de  $P$  ne voit totalement la source lumineuse.

Le même argument est applicable au cas d'un point  $p$  depuis lequel est issu un rayon T++T séparateur non tangent à la source lumineuse ou un rayon T++T non séparateur. D'où le résultat.  $\square$

*Remarque.* Nous venons de démontrer que depuis un point d'une limite « lumière-pénombre » ne sont issus que des rayons EV-SEP ou VE-SEP tangents à la source lumineuse. En revanche, la réciproque n'est pas vraie (cf. théorème 43, ci-après).

### 6.1.4 Limites pénombre-ombre, EV non séparateurs et EEE

Nous caractérisons les germes qui sont associés aux rayons qui peuvent engendrer des limites entre ombre et pénombre :

**Théorème 42.** *La limite « ombre-pénombre » est induite par les surfaces d'événements visuels EV-NON-SEP tangentes à la source lumineuse, les surfaces EEE- $X\infty Y$  tangentes à la source lumineuse et les surfaces EEE- $XZY$ .*

*Démonstration.* Soit  $U$  un voisinage de  $\vec{u}$ . Supposons que  $p$  soit l'origine d'un rayon  $T+T+T$ , noté  $(p, \vec{u})$ , dont le germe contient quatre régions. Notons  $X, Y$  et  $Z$  les trois objets intersectés tangentiellement par le rayon  $(p, \vec{u})$  et  $S$  la source lumineuse. Nous supposons que  $X, Y$  et  $Z$  sont triés suivant leur ordre d'intersection avec le rayon  $(p, \vec{u})$ . Remarquons qu'il est possible que  $Y$  et  $S$  ou  $Z$  et  $S$  soient confondus.

Il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{S}^2$  arbitrairement proche de  $\vec{u}$  tel que, pour toute direction  $\vec{v} \in U$ , le rayon  $(p, \vec{v})$  intersecte uniquement la source  $S$  (figure 6.6). Choisissons une direction  $\vec{v} \in U$ . Au chapitre 4, nous avons démontré que les silhouettes des objets  $X, Y, Z$  et  $S$  se déplacent continûment (lemme 6). Ainsi, pour tout voisinage suffisamment petit  $V$  de  $\vec{v}$ , il existe un voisinage  $P$  de  $p$  depuis lequel tout rayon dirigé suivant l'une des directions de  $V$  intersecte uniquement  $S$ . En conséquence, aucun point de  $P$  n'est totalement dans l'ombre de la source lumineuse.

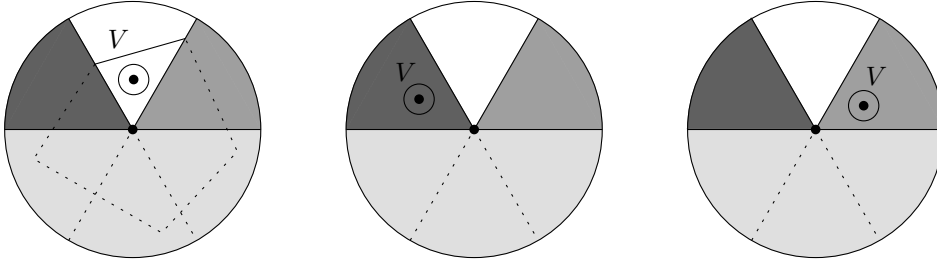


FIG. 6.6 – Les directions  $\vec{v}$  et les voisinages  $V$  de  $\vec{v}$  pour l'un des deux germes de rayon EEE ayant quatre régions. Le choix de  $\vec{v}$  varie en fonction de la source lumineuse. Sur le schéma de gauche, la source est différente de  $Y$  et de  $Z$ , au centre la source est  $Z$  alors qu'à droite c'est l'objet  $Y$ .

Le même argument est applicable au cas où le point  $p$  est l'origine d'un rayon  $T++T$  séparateur, d'un rayon  $VE$ -NON-SEP, d'un rayon  $EV$ -NON-SEP non tangent à la source ou d'un rayon  $EEE$ - $X\infty Y$  non tangent à la source  $S$ . D'où le résultat.  $\square$

*Remarque.* Nous venons de démontrer que depuis un point d'une limite « ombre-pénombre » ne sont issus que des rayons  $EV$ -NON-SEP tangents à la source lumineuse, des rayons  $EEE$ - $X\infty Y$  tangents à la source ou des rayons  $EEE$ - $XZY$ . En revanche, la réciproque n'est pas vraie (cf. théorème 45, ci-après).

### 6.1.5 Simplification de l'arrangement des limites potentielles

Chaque surface d'événements visuels de type  $EV$  ou  $EEE$  intersecte le plan en un segment ou en une portion de conique. En particulier, les courbes qui correspondent aux surfaces d'événements visuels

décrites dans les théorèmes 41 et 42 forment un sur-ensemble des limites « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre ». Les courbes induites par les surfaces d'événements visuels de type EV séparateur tangentes à la source lumineuse sont appelées *limites « lumière-pénombre » potentielles*. Quant aux courbes induites par les surfaces d'événements visuels de type EV-NON-SEP tangentes à la source lumineuse, les surfaces d'événements visuels  $EEE-X\infty Y$  tangentes à la source lumineuse et les surfaces d'événements visuels  $EEE-XZY$ , elles sont appelées *limites « ombre-pénombre » potentielles*. Notons  $A$  l'arrangement de ces courbes. Afin de réduire la taille du sur-ensemble des limites entre les régions ombrées, nous démontrons aux théorèmes 43 et 45 qu'il est possible d'éliminer certains arcs de  $A$ .

**Théorème 43.** *Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux limites « lumière-pénombre » potentielles. Si  $c_1$  et  $c_2$  s'intersectent en un point  $p$  de leurs intérieurs respectifs, deux des arcs incidents à  $p$  n'appartiennent pas à des limites « lumière-pénombre ».*

*Démonstration.* Supposons que  $c_1$  et  $c_2$  soient des limites « lumière-pénombre ». Chaque courbe sépare localement le plan en deux régions dont l'une uniquement est une région de lumière (puisque chacune des courbes sépare lumière et pénombre). Considérons  $c_1$ . La courbe  $c_2$  l'intersecte proprement en  $p$ . Dès lors,

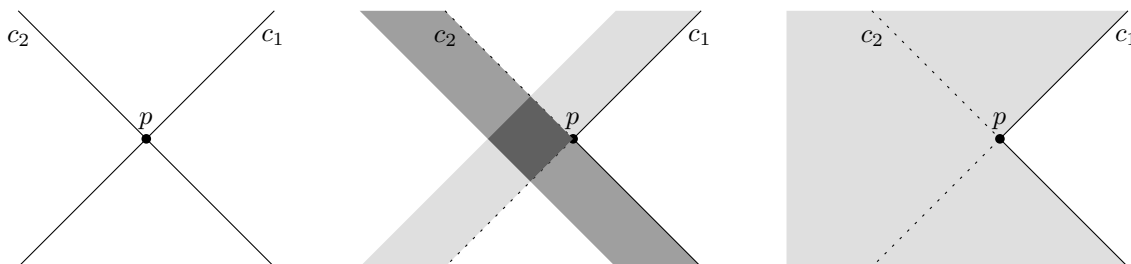


FIG. 6.7 – Deux courbes d'événements visuels  $c_1$  et  $c_2$  s'intersectent en  $p$ . Sur la figure de droite, les zones grisées représentent des régions de pénombre. Les deux arcs en pointillés sur la figure de droite ne peuvent être des limites entre lumière et pénombre puisqu'ils sont intégralement dans la pénombre.

l'un des deux arcs de  $c_2$  est localement contenu dans la région engendrée par  $c_1$  qui n'est pas une région de lumière. Il s'en suit que cet arc de  $c_2$  ne sépare pas une région de lumière d'une zone de pénombre (figure 6.7). Ce n'est donc pas une limite « lumière-pénombre ». Le même argument démontre que l'un des arcs de  $c_1$  n'est pas une limite « lumière-pénombre ». D'où le résultat.  $\square$

Il existe une grande différence entre le cas des limites « lumière-pénombre » et celui des limites « ombre-pénombre ». Un point du sol est dans la pénombre engendrée par un ensemble de bloqueurs si et seulement s'il est dans la pénombre projetée par au moins un de ces objets. En revanche, un point du sol peut-être dans l'ombre créée par l'union des obstacles sans être dans l'ombre engendrée par chaque objet pris à part. C'est ce phénomène qui oblige à prendre en compte les germes EEE pour la détermination des limites « ombre-pénombre » alors que seuls des surfaces de type EV sont à l'origine des limites « lumière-pénombre ».

**Lemme 44.** *Soit  $(p, \vec{u})$  un rayon d'une famille de rayons critiques  $\sigma$  qui engendre une limite « ombre-pénombre » potentielle. Il existe un rayon  $(q, \vec{v})$  arbitrairement proche de  $(p, \vec{u})$  qui intersecte la source sans intersecter l'un des générateurs de  $\sigma$ .*



*Démonstration.* Les rayons associés à la famille de rayons critiques qui engendre la limite potentielle sont tous du même type (lemme 40). D'après le théorème 42, ils sont du type  $EEE-X\infty Y$  ou du type  $EEE-XZY$  ou du type  $EV-NON-SEP$  engendré par la source lumineuse. Étudions chacune des trois situations.

Commençons par le cas où  $(p, \vec{u})$  est un rayon  $EV-NON-SEP$  tangent à la source lumineuse. Le point  $p$  appartient à un segment qui sépare localement le plan en deux régions. Le plan qui contient le rayon  $(p, \vec{u})$  et le segment  $EV$  intersecte la source lumineuse en un point (ce point peut appartenir à un segment d'intersections). Tout rayon  $(q, \vec{v})$  dirigé vers ce point d'intersection et émanant d'un point  $q$  situé dans le demi-espace ne contenant pas les générateurs de l'événement visuel intersecte uniquement la source (schéma de gauche de la figure 6.8).

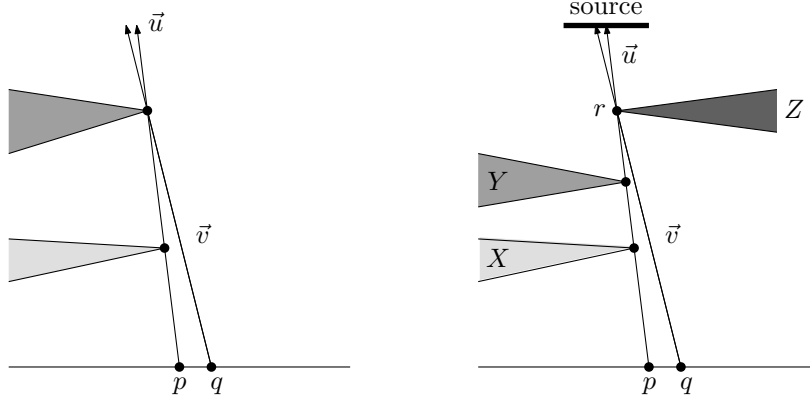


FIG. 6.8 – Sur le schéma de gauche, le rayon qui part de  $q$  suivant la direction  $\vec{v}$  rencontre la source lumineuse sans intersecter d'autre objet. C'est le cas de tous les rayons qui prennent origine dans le même demi-espace que  $(q, \vec{v})$ . Sur le schéma de droite, le rayon  $(q, \vec{v})$  intersecte la source lumineuse sans croiser d'objet.

Intéressons-nous au cas où  $(p, \vec{u})$  est un rayon  $EEE-X\infty Y$ . L'objet  $Z$  est la source lumineuse. Les arêtes support  $e_X, e_Y$  et  $e_Z$  ( $e_X$  appartient à  $X, e_Y$  à  $Y$  et  $e_Z$  à  $Z$ ) définissent respectivement avec le rayon  $(p, \vec{u})$  trois plans qui séparent l'espace en six sextants. L'un de ces sextants n'intersecte aucun des objets. Dès lors, le rayon émanant d'un point de ce sextant (dans le plan  $z = 0$ ) et dirigé vers le point d'intersection de  $(p, \vec{u})$  avec  $e_Z$  rencontre la source  $Z$  sans toucher  $X$  ou  $Y$ . L'origine de ce rayon peut être choisie arbitrairement proche de  $p$ . De plus, l'angle entre les deux rayons converge vers 0 lorsque le point tend vers  $p$ . Les deux rayons peuvent donc être rendus arbitrairement proches.

Finalement, considérons le cas où  $(p, \vec{u})$  est un rayon  $EEE-XZY$ . La source lumineuse est l'objet  $\infty$ . Le rayon rencontre tangentiellement  $X, Y$  puis  $Z$  avant d'intersecter transversalement  $\infty$ . Les trois mêmes plans découpent l'espace en six sextants dont l'un intersecte uniquement  $Z$ . Notons  $S$  ce sextant. De plus, il existe un plan qui sépare  $Z$  de  $X$  et un plan qui sépare  $Z$  de  $Y$ . Ces deux plans coupent  $(p, \vec{u})$  en un point (chacun) situé avant (plus proche de  $p$  que) l'intersection entre le rayon et  $Z$  (schéma de droite de la figure 6.8). Notons  $r$  ce point. Tout rayon qui émane du sextant  $S$  et qui passe par le point  $r$  évite les objets  $X, Y$  et  $Z$ . Étant donné que  $(p, \vec{u})$  rencontre  $\infty$  transversalement, il existe un point  $q$  arbitrairement proche de  $p$  dans  $S$  depuis lequel le rayon dirigé de  $q$  vers  $r$  intersecte la source sans rencontrer l'un des supports de  $(p, \vec{u})$ . D'où le résultat.  $\square$

**Théorème 45.** Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux courbes d'événements visuels potentiellement limitées entre ombre et pénombre et qui s'intersectent en un point  $p$  de leurs intérieurs respectifs. Deux des arcs incidents à  $p$

n'appartiennent pas à des limites « ombre-pénombre ».

*Démonstration.* Chaque courbe sépare localement le plan en deux régions dont l'une uniquement est localement une région d'ombre (puisque chacune des courbes sépare ombre et pénombre). Considérons la courbe  $c_1$ . D'après le lemme 44, il existe, pour tout rayon  $(p, \vec{u})$ , un rayon  $(q, \vec{v})$  arbitrairement proche de  $(p, \vec{u})$  qui intersecte la source lumineuse  $S$  sans rencontrer l'un des générateurs (source lumineuse exceptée) de  $c_1$ . Il nous faut démontrer que  $(q, \vec{v})$  ne touche pas l'un des générateurs de  $c_2$  avant  $S$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $(q, \vec{v})$  intersecte l'un des générateurs de  $c_2$ . Puisque  $(q, \vec{v})$  peut être choisi arbitrairement proche de  $(p, \vec{u})$  et que les objets sont fermés, cela implique que  $(p, \vec{u})$  rencontre ce générateur. Notons  $X$  ce générateur. Supposons que  $(p, \vec{u})$  traverse  $X$ . D'après la stabilité des ordres d'intersections (chapitre 4, lemme 4),  $(p, \vec{u})$  rencontre  $X$  avant la source, puisque  $(q, \vec{v})$  rencontre ces objets dans cet ordre. Ceci implique une contradiction avec le type de germe associé avec  $(p, \vec{u})$ . Supposons donc que  $(p, \vec{u})$  soit engendré par  $X$ . Puisque  $c_2$  ne peut être engendrée par les mêmes éléments que  $c_1$ , le rayon  $(p, \vec{u})$  est donc de type VV, VEE ou EEEE. Ceci contredit le fait que  $p$  appartienne à l'intérieur de  $c_1$  et de  $c_2$ . Nous avons démontré que les objets générateurs de  $c_2$  ne bloquent pas les rayons qui éclairent la

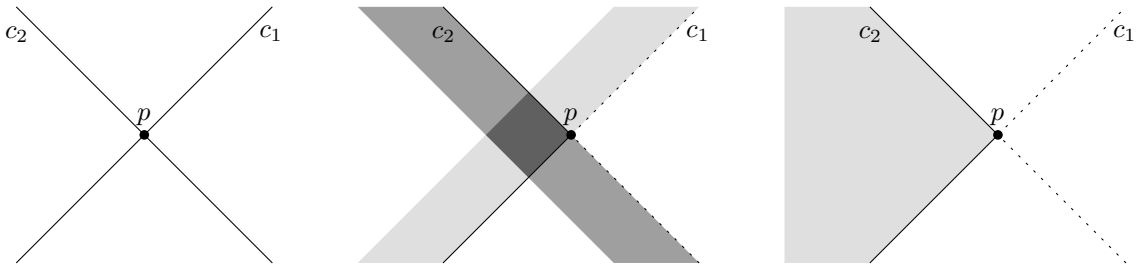


FIG. 6.9 – Deux courbes d'événements visuels  $c_1$  et  $c_2$  s'intersectent en  $p$ . Sur la figure de droite, les zones grisées représentent des régions d'ombre. Les deux arcs en pointillés sur la figure de droite ne peuvent être des limites entre l'ombre et la pénombre puisqu'ils sont intégralement dans la pénombre.

zone de pénombre attachée à  $c_1$ . Le même argument permet de prouver le résultat symétrique. D'où le résultat.  $\square$

## 6.2 Algorithme et détails d'implémentation

Nous avons implémenté les méthodes d'extraction des limites entre les régions ombragées présentées dans nos travaux. Pour schématiser, les calculs effectués par notre programme se décomposent en trois grandes phases (figure 6.10). Dans un premier temps, nous construisons le squelette de visibilité de la scène. Ensuite, nous annotons les arcs du squelette par des germes qui nous permettent de construire les arrangements des courbes qui sont potentiellement des limites entre régions ombrées. Finalement, nous appliquons les simplifications des arrangements décrites à la section 6.1.5.

**Cadre technique.** Notre code est écrit en C++ et utilise les bibliothèques GMP [48], CORE [22] et CGAL [17]. Il permet de lire des scènes de polyèdres décrits dans le format OFF. Tous les calculs sont effectués avec un noyau CGAL exact (*Cartesian*) basé sur un type de nombre exact (*Lazy\_exact\_nt* paramétré

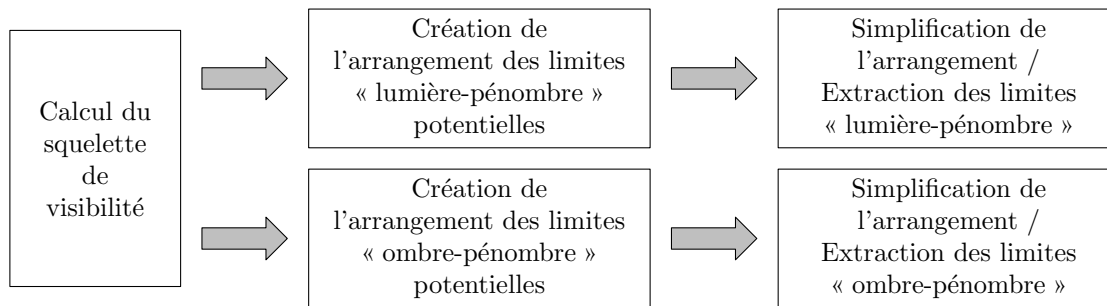


FIG. 6.10 – L'algorithme de calcul des limites « pénombre-lumière » et « ombre-pénombre ».

par la classe `Expr` de `CORE`). De plus amples détails sur la bibliothèque `CGAL` sont disponibles dans la documentation. Les portions de code qui travaillent sur des arrangements reposent sur le module de calcul d'arrangements de coniques de `CGAL` développé à l'Université de Tel-Aviv [121].

## 6.2.1 Calcul du squelette de visibilité

Nous renvoyons à la section 3.2.2 (page 33) pour une présentation des approches classiques de construction du squelette de visibilité.

### 6.2.1.1 Algorithme de construction du squelette de visibilité

Pour construire le squelette de visibilité, nous employons une méthode hybride. Les nœuds du squelette sont calculés par l'algorithme de balayage de Brönnimann *et al.* [14]. Au fur et à mesure de leur construction, les nœuds sont enregistrés et triés le long des arêtes des polytopes. Pour reconstruire les arcs du squelette de visibilité, notre algorithme analyse chaque nœud et relâche une contrainte sur l'un de ses supports. L'objectif est alors de trouver le nœud de mêmes supports qui se trouve le plus près de celui en cours de traitement (figure 6.11).

```

// Le squelette à construire.
Skeleton skeleton;

// Calcule les nœuds du squelette.
scene.compute_skeleton_nodes (skeleton);

// Construit les arcs du squelette.
scene.compute_skeleton_arcs (skeleton);
  
```

FIG. 6.11 – L'algorithme de calcul du squelette de visibilité.

### 6.2.1.2 Détails d'implémentation

**Calcul des nœuds.** Nous avons utilisé l'implémentation de Zhang [129] qui permet de calculer les nœuds VEE et EEEE du squelette de visibilité par l'algorithme de balayage proposé dans [14]. Les nœuds VV sont déterminés au moyen d'une approche similaire à celle de Durand, Drettakis et Puech [33] (c'est-à-dire par énumération des configurations possibles et par lancer de rayons). Chaque nœud correspond à une instance de la classe `Node` qui contient la liste de ses supports (donnée membre `supports_`) ainsi que les polyèdres qui se trouvent à ses extrémités (`source_` et `target_`).

```
class Node
{
    std::vector<Intersection> supports_;
    // La première extrémité du segment (peut valoir NULL).
    Intersection source_;
    // La seconde extrémité du segment (peut valoir NULL).
    Intersection target_;
};
```

La classe `Intersection`, combinée à ses sous-classes, stocke les informations liées à l'intersection d'un segment avec un sommet (classe `IntersectionV`), une arête (classe `IntersectionE`) ou une face (classe `IntersectionF`) d'un polyèdre de la scène. En particulier, elle contient le lieu du contact (`point_`) et établit un lien avec le polyèdre (`polytope_`) qui supporte l'élément intersecté.

```
class Intersection
{
    Polytope polytope_;
    // Le point d'intersection.
    Point point_;
};

class IntersectionV : public Intersection
{
    Vertex vertex_;
};

class IntersectionE : public Intersection
{
    Edge edge_;
};

class IntersectionF : public Intersection
{
    Face face_;
};
```

De plus, les objets représentant des nœuds VV et VEE contiennent une donnée supplémentaire qui encode la vue du rayon depuis le plan du sol orienté vers les valeurs positives de  $z$  et dirigé suivant le segment associé au nœud<sup>17</sup>. C'est la donnée membre `view_` (qui vaut `NULL` pour les nœuds EEEE) qui est une instance de la classe `View`. Pour un nœud  $N$ , la vue du rayon  $(p, \vec{u})$  est une liste d'arêtes dans le plan passant par  $p$  et de normale  $\vec{u}$  : les projections des arêtes de la silhouette des faces incidentes aux supports de  $N$ . Dès lors, grâce à une instance de la classe `View`, il est possible de déterminer si un nœud VV est susceptible d'engendrer un arc EV bitangent.

```
node.view ().is_in_bitangent_plane ();
```

**Reconstruction de la structure combinatoire.** Nous commençons par les nœuds VV. Pour l'exemple, considérons le nœud  $N$ . La donnée `view_` permet de retrouver les *deux* arêtes incidentes à chaque sommet qui sont susceptibles de définir un arc EV bitangent. Relaxons la contrainte sur le premier sommet (la gestion du second sommet est identique). Pour chacune des arêtes incidentes à ce sommet (et pouvant engendrer un arc bitangent), l'algorithme analyse les nœuds VV et VEE afin de déterminer celui qui partage les mêmes supports et délimite un même arc EV avec  $N$ . Bien entendu, le traitement utilise le tri des nœuds le long des arêtes pour réduire le nombre d'éléments analysés.

```
void relax_vertex_from_vv_node (Node node, Vertex v)
{
    Edge e = node.view ().prev_edge (v);
    foreach (Node n in e.nodes_from (v))
        if (n.share_supports (node))
            create_ev_arc (e, v, node, n);
    e = node.view ().next_edge (v);
    ...
}
```

En suivant un principe similaire, l'algorithme traite ensuite les nœuds VEE qui peuvent délimiter des arcs EV et EEE. Finalement, il conclut par les nœuds EEEE et construit les derniers arcs EEE.

## 6.2.2 Extraction des limites d'ombre

### 6.2.2.1 Algorithme

Afin d'extraire les limites entre les régions de lumière et de pénombre ainsi qu'entre celles de pénombre et d'ombre, nous décomposons les familles de rayons critiques (associées aux arcs du squelette) en composantes connexes de rayons émanant du sol et intersectant les générateurs des familles de rayons critiques

<sup>17</sup>Lors de la génération de nos scènes, nous éliminons les scènes qui contiennent un nœud VV ou VEE parallèle au sol. Sur des données aléatoires, ce cas est extrêmement rare.

dans le même ordre. Ensuite, nous déterminons les germes qui correspondent aux composantes connexes de rayons. Finalement, nous extrayons les courbes d'intersection entre le plan  $z = 0$  et les surfaces correspondant aux composantes connexes de rayons marquées par des germes intéressants (cf. section 6.1.2) et construisons l'arrangement de ces courbes (figure 6.12).

```
// Décompose les arcs en composantes connexes de rayons.
foreach (Arc a in skeleton.arcs ())
    a.decompose_in_connected_components_of_rays ();

// Arrangement des limites « lumière-pénombre » potentielles.
Arrangement penumbra;

// Insertions des courbes dans l'arrangement
foreach (Connected_components_of_rays cc in skeleton.connected_components_of_rays ())
    if (cc.is_potential_penumbra_boundary ())
        penumbra.insert (cc.intersection_with_ground ());

// Arrangement des limites « ombre-pénombre » potentielles.
Arrangement umbra;

// Insertions des courbes dans l'arrangement
foreach (Connected_components_of_rays cc in skeleton.connected_components_of_rays ())
    if (cc.is_potential_umbra_boundary ())
        umbra.insert (cc.intersection_with_ground ());
```

FIG. 6.12 – Construction des arrangements de limites potentielles.

### 6.2.2.2 Détails d'implémentation

**Composantes connexes de rayons EV.** Les intersections entre les surfaces EV et le plan sont des segments ou des demi-droites. Considérons l'arc  $\alpha$  engendré par un sommet  $v$  et une arête  $e = (p, q)$ . En général,  $\alpha$  engendre un segment délimité par les intersections des droites  $vp$  et  $vq$  avec le plan du sol (schéma de gauche de la figure 6.13). Toutefois, il est important de remarquer que lorsque les rayons supportés par les droites  $vp$  et  $vq$  (et qui émanent du sol dans la direction des valeurs positives de  $z$ ) rencontrent  $v$  et  $e$  dans un ordre différent, l'intersection de la surface EV avec le plan se décompose en deux composantes connexes (schéma de droite de la figure 6.13). Dans ce cas, ce sont deux demi-droites qui appartiennent à l'intersection du plan engendré par  $v$  et  $e$  avec le sol<sup>18</sup> et qui sont délimitées par les points d'intersection des droites  $vp$  et  $vq$  avec le plan  $z = 0$ .

**Courbes du plans engendrées par des arcs EEE.** Les intersections entre les surfaces EEE et le plan du sol sont des morceaux de coniques qui résultent de l'intersection entre un plan et des morceaux de quadriques. Brönnimann et ses coauteurs [15] ont démontré que le nombre de composantes connexes de droites tangentes à trois segments de  $\mathbb{R}^3$  est compris entre 0 et 3. Ces composantes sont délimitées par des droites qui passent chacune par l'une des extrémités d'un des trois segments. Dans notre implémentation, nous commençons par construire ces composantes. Pour chaque extrémité, nous trouvons la droite qui

<sup>18</sup>Rappelons que dans notre implémentation, nous avons exclu les scènes pour lesquelles le plan engendré par  $v$  et  $e$  est parallèle au sol. Les deux plans s'intersectent donc en une droite.

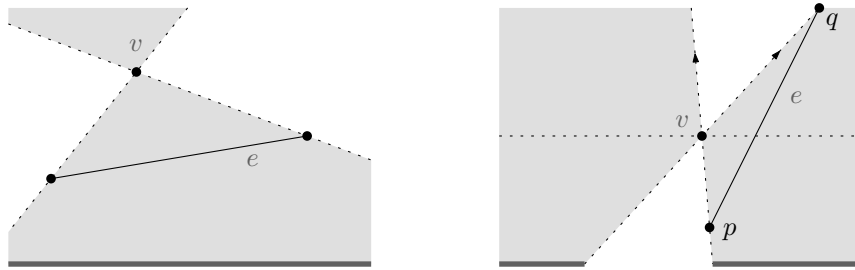


FIG. 6.13 – Exemples de différentes configurations de composantes d'intersections (représentées par les segments épais de couleur gris foncé) entre les surfaces EV et le plan du sol. Le schéma de droite montre le cas où il existe deux composantes connexes d'intersections.

est tangente aux trois segments. Nous trions, le long d'un des trois segments, les six droites obtenues et établissons les composantes connexes de droites tritangentes. Ensuite, l'intersection de chacune des composantes avec le sol est construite. Une composante connexe engendre au moins un morceau de conique du plan. Si les deux droites extrêmes de la composante rencontrent les trois segments dans le même ordre, il n'y a qu'un morceau de conique qui correspond à la composante sinon il en existe deux ou plus (figure 6.14). Lorsque les deux droites extrêmes rencontrent les arêtes dans un ordre différent, nous procédons à une recherche dichotomique pour extraire deux droites dans la composante qui intersectent les arêtes dans le même ordre que les extrémités.

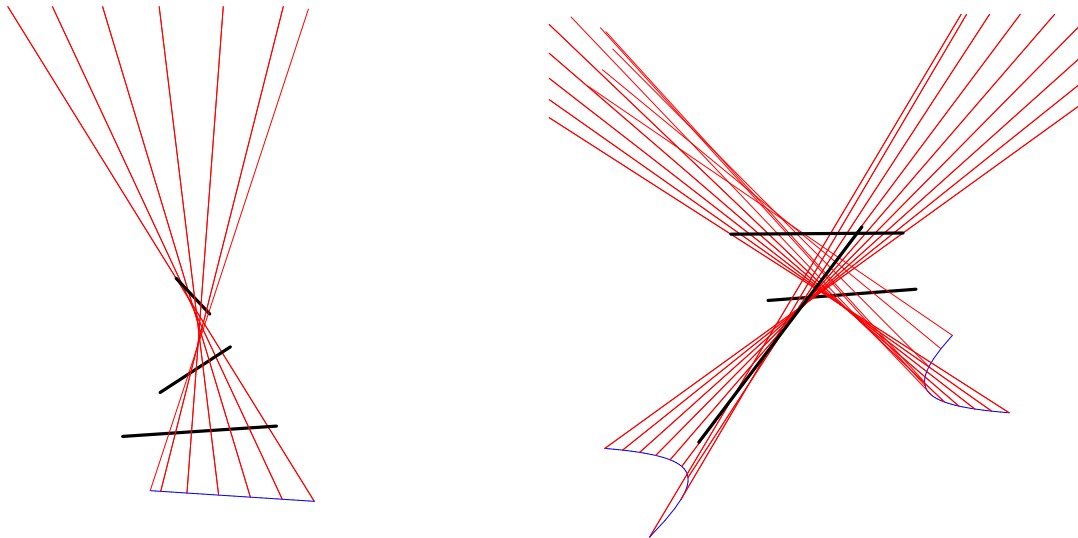


FIG. 6.14 – Exemples de différentes configurations d'intersections (en bleu) entre les surfaces EEE et le plan du sol. Le schéma de droite montre un cas où il existe deux composantes connexes d'intersections.

### 6.2.3 Simplification des arrangements de limites potentielles

**Construction des limites « lumière-pénombre ».** Une fois que toutes les courbes ont été insérées dans l'arrangement, nous le simplifions en exploitant le critère présenté au théorème 43. Finalement, chacune des faces de pénombre est marquée. Par construction, les régions potentielles de pénombre sont

sur la droite des arcs orientés. Une face de pénombre est une face qui se trouve à droite de tous les arcs qui la bordent. Le pseudo-code de la figure 6.15 effectue ce calcul.

```
// Simplification de l'arrangement.
foreach (Vertex v in arrangement.vertices ())
    if (v.degree () == 4)
        simplify_penumbra_vertex (arrangement, v);

// Marquage des faces de pénombre.
foreach (Face f in arrangement.faces ())
    if (is_penumbra_face (f))
        mark_penumbra_face (f);
```

FIG. 6.15 – Pseudo-code de la construction des limites « lumière-pénombre ».

**Construction des limites « ombre-pénombre ».** Les courbes potentielles sont orientées de sorte que la région potentielle d'ombre se trouve à droite de la courbe. Ensuite, nous appliquons la stratégie présentée au théorème 45 qui permet d'exhiber les limites entre ombre et pénombre. Finalement, les faces d'ombre sont marquées. Notons que lorsque nous considérons plusieurs sources lumineuses, nous construisons l'arrangement d'ombre de *chaque* source avant de les superposer (grâce à la fonction `CGAL::overlay`). Les marqueurs de faces sont des champs de bits, une face de la superposition est dans l'ombre si tous les bits sont activés. La figure 6.16 illustre les simplifications faites aux limites potentielles de « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre ».

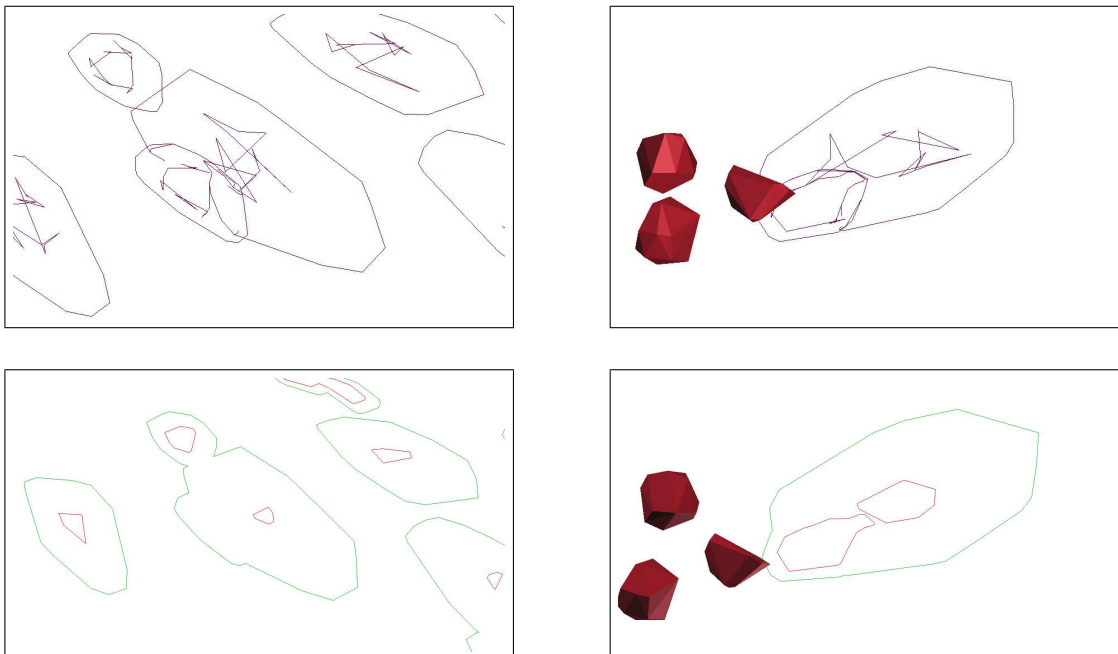


FIG. 6.16 – Portions agrandies extraites des images présentées à la figure 6.24. La ligne supérieure montre deux parties de l'arrangement contenant les limites potentielles d'ombre et de pénombre alors que la ligne inférieure contient les mêmes extraits de l'arrangement obtenus après simplification.



## 6.3 Complexité expérimentale des limites d'ombre

Dans cette section, nous présentons les résultats de notre validation pratique : après avoir décrit le protocole expérimental, nous analysons les données récoltées. Pour plus de détails, l'annexe B regroupe des données complémentaires.

### 6.3.1 Protocole expérimental

Nous avons testé notre implémentation sur des scènes aléatoires composées de polyèdres convexes disjoints qui sont des approximations, plus ou moins précises, de sphères. En particulier, nous considérons trois types de scènes.

#### 6.3.1.1 Modèles de scènes

**Sphères aléatoires.** Nous avons construit des sphères disjointes réparties aléatoirement dans un cube. Le rayon de chaque sphère a été fixé à 5 alors que l'arête du cube est de 300. Notons que la taille du cube est fixe et que, par conséquent, la densité de la scène augmente avec le nombre d'objets. Pour étudier l'influence du nombre d'objets  $k$  et de points utilisés  $p$  pour les mailler, nous avons créé dix scènes pour  $k = 10, 30, 50$ . Pour  $k = 10$ , le nombre de points  $p$  varie de 4 à 256 par sphère suivant une progression géométrique de raison 2. Pour  $k = 30$ , il varie de 4 à 128 alors que pour  $k = 50$ ,  $p$  va de 4 à 64. Pour une sphère échantillonnée avec  $p$  points, il faut  $2n - 4$  triangles pour construire la triangulation de cette surface.

**Cube.** La scène dite du « cube » est composée de polyèdres regroupés par tranches. Nous prenons la droite verticale qui passe par l'origine et un ensemble de carrés horizontaux, de même côté et dont les centres appartiennent à la droite. Pour chaque carré, nous engendrons dix sphères disjointes dont les centres sont positionnés sur ces carrés. Pour limiter le risque de dégénérescences, la coordonnée  $z$  de chaque centre est légèrement décalée de façon aléatoire (figure 6.17). Comme pour les scènes aléatoires décrites ci-dessus, chaque sphère est maillée avec plus ou moins de précision. Chaque scène est éclairée par une ou plusieurs sources lumineuses situées au dessus des obstacles (vis-à-vis du sol). La figure 6.28 (cf. page 127) est un exemple de scène de ce type. Nous présentons des résultats pour  $k = 30, 50$  sphères maillées avec  $p = 8, 16, 32$  points et pour une ou deux sources.

**Sapin.** La scène du « sapin » est formée d'une source lumineuse qui éclaire des polyèdres répartis sur des cercles empilés (figure 6.27, page 126). Sa description est similaire à celle du cube sauf que les sphères sont engendrées le long de cercles dont le rayon diminue lorsque la coordonnée  $z$  augmente.

**Remarques sur les temps de calcul.** Notre implémentation est décomposée en plusieurs programmes indépendants. Ces différents programmes lisent leurs données et écrivent leurs résultats dans des fichiers textes (*i.e.*, non binaires). Le temps de calcul pour la scène des sphères avec  $k = 10$  et  $p = 256$  est

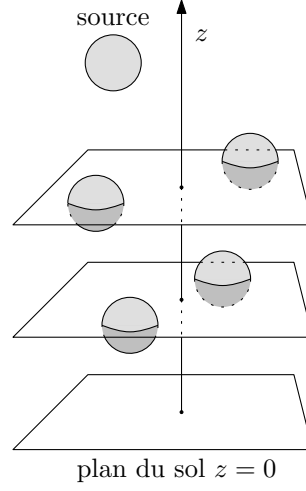


FIG. 6.17 – La scène du cube. Les sphères sont placées sur les carrés en appliquant un léger décalage de la coordonnée  $z$ .

d'environ 25 minutes alors qu'il est de l'ordre de 1 heure 30 minutes pour  $k = 50$  et  $p = 32$ . Pour la scène du cube, éclairée par deux sources, le temps de calcul est proche de 57 minutes pour  $k = 30$  et  $p = 32$  et il atteint 1 heure 49 minutes pour  $k = 50$  et  $p = 16$ .

### 6.3.1.2 Mesures effectuées

Nous avons construit trois indicateurs dont nous mesurons les valeurs pour les scènes décrites ci-avant et qui nous permettent d'évaluer la pertinence de notre approche.

**Complexité du squelette de visibilité.** Nous mesurons la complexité du squelette de visibilité qui encode les surfaces d'événements visuels définies au chapitre 4 (les surfaces d'événements EV bitangents et EEE). La complexité du squelette (simplifié), notée  $C_{SS}$ , se mesure au nombre de nœuds qui le composent :

$$C_{SS} = \text{nombre VV bitangents} + \text{nombre VEE} + \text{nombre EEEE}.$$

Pour comparer ces résultats, nous mesurons la complexité du squelette de visibilité défini par Durand, Drettakis et Puech [33], notée  $C_S$ , et définie par :

$$C_S = \text{nombre VV} + \text{nombre VEE} + \text{nombre EEEE}.$$

Le gain obtenu en considérant le squelette de visibilité simplifié (qui ne contient que des VV bitangents) est :

$$\text{gain}_1 = \frac{C_S - C_{SS}}{C_S}.$$

**Nombres de composantes connexes de rayons.** Nous mesurons le nombre de composantes connexes de rayons qui servent à engendrer des limites potentielles « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre »,

c'est-à-dire les composantes connexes associées aux germes donnés dans les théorèmes 41 et 42. Cet indicateur est comparé au nombre total de composantes connexes de rayons qui sont associées aux arcs du squelette de visibilité :

$$gain_2 = \frac{\text{nombre total de composantes} - \text{nombre de composantes utiles}}{\text{nombre total de composantes}}.$$

**Complexités des arrangements.** Nous mesurons et comparons les complexités des arrangements de limites potentielles et les arrangements finals (obtenus après simplification). Pour chacun des arrangements, la complexité s'exprime comme la somme des nombres de sommets, arêtes et faces :

$$\text{complexité} = \text{nombre de sommets} + \text{nombre d'arêtes} + \text{nombre de faces}.$$

Le gain est défini par :

$$gain_3 = \frac{\text{complexité avant simplification} - \text{complexité après simplification}}{\text{complexité avant simplification}}.$$

## 6.3.2 Résultats expérimentaux

### 6.3.2.1 Complexité du squelette

Ces résultats correspondent aux graphiques de la figure 6.18. Pour chacun des modèles de scènes que nous considérons, nous relevons un gain significatif (sur la complexité) obtenu en considérant le squelette de visibilité ne contenant que les nœuds vv bitangents plutôt que le squelette de visibilité de Durand, Drettakis et Puech. Ce gain augmente avec le nombre de points par objet et semble faiblement impacté par le nombre d'objets. Par exemple, pour les scènes de sphères aléatoires, il atteint 50% à partir de  $p = 16$  et dépasse 75% dès  $p = 64$  (quelque soit  $k$ ). La nature des scènes semble avoir un léger impact sur ce gain : il est de 65.46% pour les sphères ( $k = 30$ ,  $p = 32$ ) alors qu'il est de 60.10% pour le cube (avec les mêmes valeurs de  $k$  et  $p$ ). Nous pouvons l'expliquer par le fait que le squelette de la scène du cube contient une plus faible proportion de nœuds vv, et donc que l'« économie » des nœuds vv non bitangents a un impact légèrement moindre. Finalement, pour conclure, notons que ces gains portent sur des grandes quantités de nœuds : la complexité  $C_S$  vaut environ 290 000 alors que  $C_{SS}$  atteint une valeur de près de 50 000 pour  $k = 30$  et  $p = 128$  (scène des sphères).

### 6.3.2.2 Nombre de composantes connexes de rayons

Nous nous reportons aux graphiques de la figure 6.20. En mesurant le nombre de composantes connexes de rayons contenues dans le squelette de visibilité (tel que nous le définissons), nous constatons qu'il peut y en avoir jusqu'à 70 000 (scène des sphères aléatoires pour  $k = 50$  et  $p = 32$ ). Le gain obtenu en appliquant les critères de sélection des germes (présentés aux théorèmes 41 et 42) dépasse 85% pour toutes les scènes. Il augmente avec le nombre d'objets (il dépasse 97% pour les scènes de sphères avec  $k = 50$ ) et dépend peu du nombre de points  $p$  ou de sources lumineuses. Une très légère différence de

l'ordre de 2 à 3% apparaît entre les scènes de sphères et celles du cube : pour  $k = 30$ , nous avons environ 95% de gains pour les sphères et 92% pour le cube.

### 6.3.2.3 Complexité des arrangements

Cette discussion repose sur les données représentées sur les graphiques des figures 6.22 et 6.23. Le gain obtenu par la simplification des limites de pénombre est moindre que celui obtenu par la simplification des limites d'ombre. Pour les scènes de sphères aléatoires, nous obtenons au plus 10% de gain pour la simplification de la pénombre alors que le gain pour l'ombre est aux environs de 70%. Ces taux sont relativement stables par rapport à  $p$ . L'indicateur de gain sur la pénombre semble augmenter avec les valeurs de  $k$  : il vaut 3% pour  $k = 10$  et 8% pour  $k = 50$ . En revanche, pour la scène du cube, si le gain sur l'ombre reste autour de 70%, il est de plus de 20% pour la pénombre. Dans ce type de scènes, ces deux indicateurs croissent avec le nombre d'objets  $k$ , le nombre de points  $p$  et le nombre de sources lumineuses. Notons que les arrangements ont des tailles qui atteignent 5 000 avant simplification et environ 1 000 après élagage pour la scène du cube éclairée par deux sources avec  $k = 50$  et  $p = 16$ .

### 6.3.2.4 Limites d'ombres

Dans le cas d'une scène de sphères, les résultats obtenus sont visuellement convaincants. L'image inférieure de la figure 6.24 montre les limites entre les régions de lumière, de pénombre et d'ombre obtenues par notre implémentation pour une scène de 50 sphères échantillonnées avec 16 points. Les images de la figure 6.25 sont les résultats obtenus en utilisant un lanceur de rayons pour faire la synthèse de cette scène. Les images de la figure 6.16 (page 111) présentent des portions agrandies des arrangements de pénombre et d'ombre ainsi que les limites obtenues après simplification. Il en est de même pour une scène formée de quatre triangles (figure 6.26), ainsi que celles du sapin (figure 6.27) et du cube (figure 6.28) où les régions d'ombre et de pénombre ont une géométrie beaucoup plus complexe. Notons finalement que lorsque nous classifions des régions du plan au moyen d'un « ray-tracer », nous avons parfois une divergence avec notre implémentation en raison de l'incapacité de l'outil de lancer de rayons de « trouver » certains rayons qui voient la source lumineuse.

### 6.3.3 Conclusions

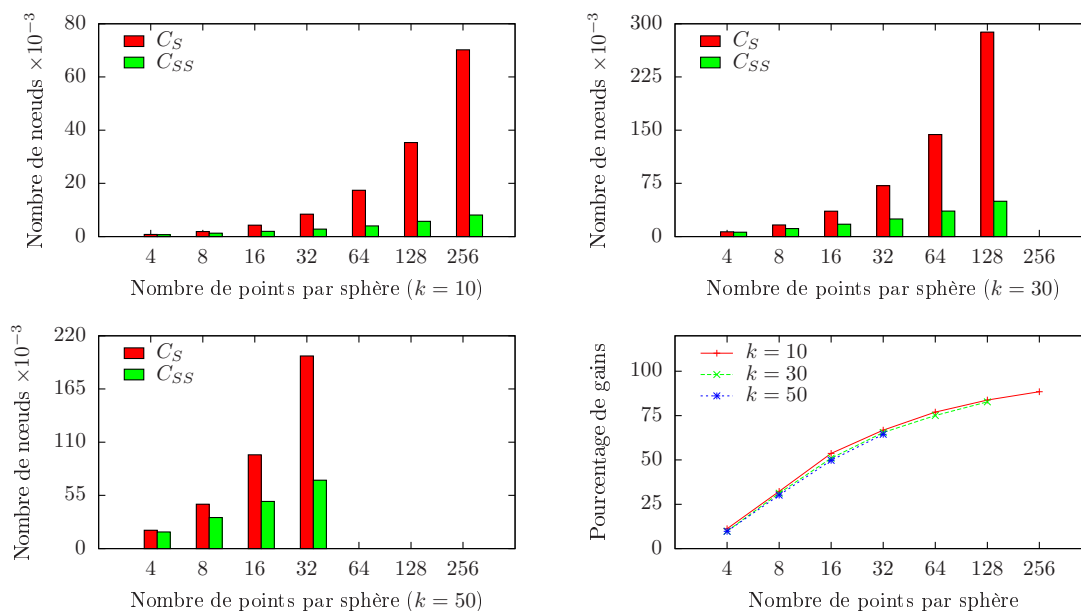
Le premier élément qui ressort de ces résultats est que nous sommes capables d'extraire des courbes qui correspondent, sur ces exemples, aux limites « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre ». C'est la première fois qu'une approche offre ce type de résultats. De plus, notre approche permet de réduire les tailles des objets manipulés. Plus précisément, notre étude des événements visuels qui conduit à une formulation alternative du complexe de visibilité permet de diminuer la complexité de cette structure par près de 80%. Ainsi, le fait d'ajouter la contrainte de bitangence à pour conséquence de faire dépendre la quantité de nœuds vv de la taille de la silhouette des objets (des travaux expérimentaux constatent que la taille moyenne de la silhouette d'un objet de complexité  $n$  est de l'ordre de  $\sqrt{n}$  [82] ce que confirment des recherches théoriques ; cf. Glisse [46]) plutôt que de la taille des objets eux-mêmes. Ensuite, la sélection

des courbes en utilisant les informations fournies par les germes donne des résultats intéressants puisque les gains dépassent 90%. Finalement, l'étape de simplification permet une nouvelle fois d'observer une amélioration de la taille de l'arrangement. Tout particulièrement, le gain peut atteindre 70% pour les limites d'ombres.

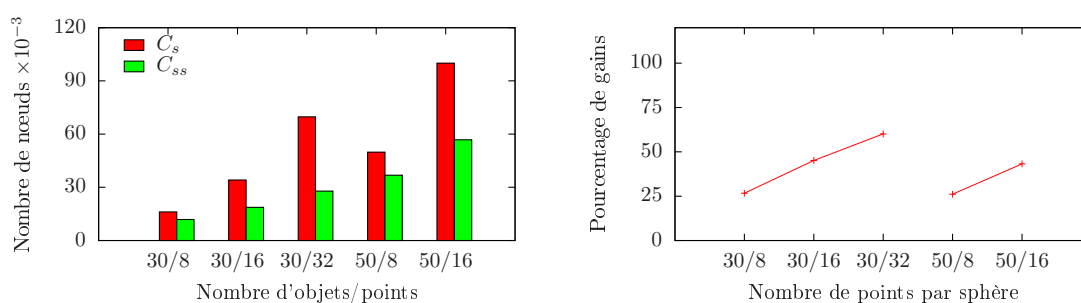
Toutefois, notre travail contient certaines limitations. Les scènes considérées sont de petite taille et ont une structure particulière (objets convexes disjoints) qui n'est pas nécessairement celle recherchée dans le monde de l'informatique graphique. Nous sommes limités par un facteur majeur : la construction du squelette de visibilité. L'énumération de tous les nœuds est particulièrement coûteuse. Cependant, nous constatons que la proportion de segments libres maximaux qui intersectent la source lumineuse est extrêmement faible (entre 5 et 10% pour toutes nos scènes). Être capable de construire les nœuds pertinents du squelette de visibilité (sans une énumération complète) pourrait ainsi être une alternative intéressante. Ceci étant aucun algorithme ne le permet à ce jour et de gros doutes peuvent être émis sur le fait que cela soit possible : la question de savoir si l'on peut décider de la visibilité entre deux objets en un temps sous quartique est un problème ouvert depuis plus de vingt ans.

Pour autant, nous pensons que ce travail offre également des perspectives. En particulier, nous constatons qu'il existe un unique germe qui peut être impliqué dans les contours d'ombre et qui ne correspond pas à des rayons tangents à la source lumineuse : le germe  $EEE-XZY$ . En faisant abstraction de ce germe, il serait envisageable d'utiliser l'algorithme de balayage autour des arêtes des sources lumineuses pour produire un sous-ensemble du squelette de visibilité qui contiendrait une approximation des courbes que nous produisons. Cette approche est d'autant plus raisonnable que le squelette de visibilité encoderait une partition de l'espace similaire à celle obtenue par la technique des volumes d'ombres (une méthode qui a fait ses preuves, cf. chapitre 3). Au contraire des volumes d'ombres, cette décomposition ferait abstraction de certaines surfaces EV (les EV qui ne sont pas bitangents) et contiendrait des surfaces supplémentaires : des surfaces de type  $EEE$  autres que  $EEE-XZY$ .

## Sphères



## Cube (une source lumineuse)



## Cube (deux sources lumineuses)

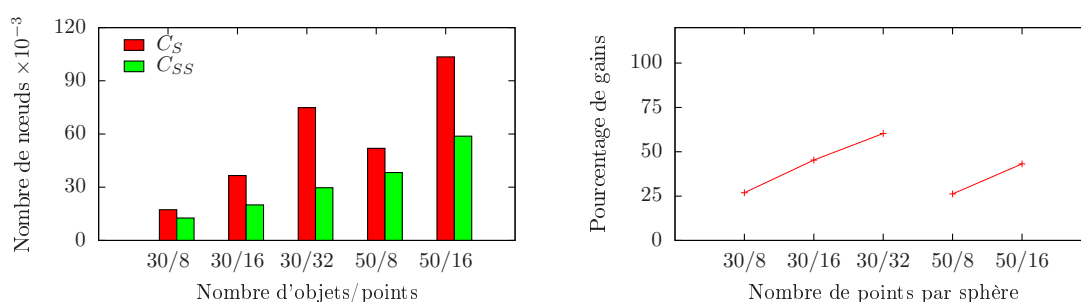
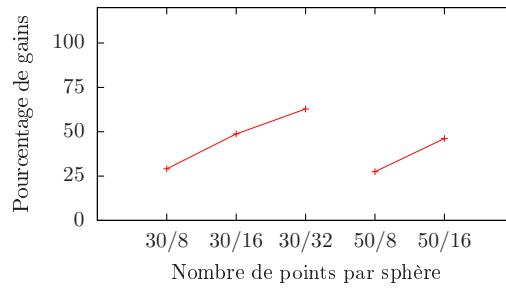
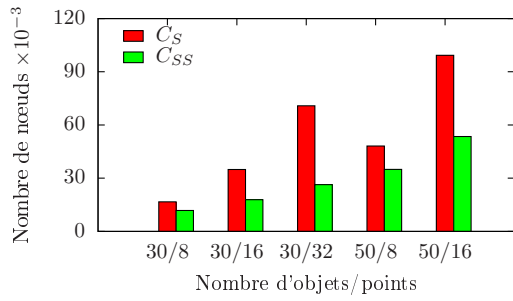


FIG. 6.18 – Complexités du squelette de visibilité défini par Durand, Drettakis et Puech ( $C_S$ ) et du squelette tel que nous le définissons ( $C_{SS}$ ). Les diagrammes en bâtons représentent les valeurs des complexités alors que les courbes indiquent les gains à considérer notre définition du squelette de visibilité ( $gain_1$ ).

**Sapin (une source lumineuse)**



**Sapin (deux sources lumineuses)**

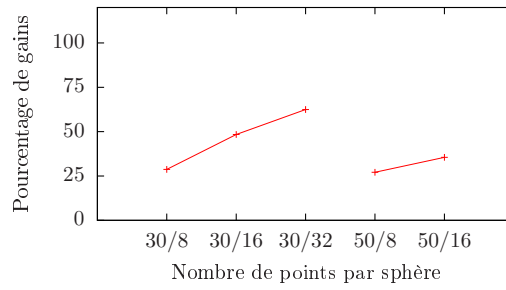
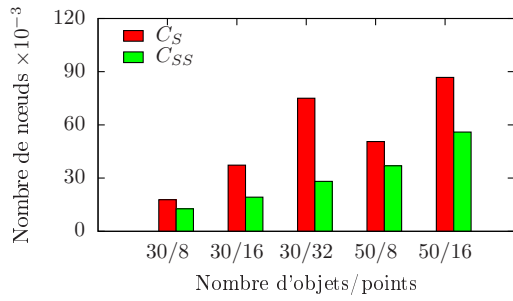
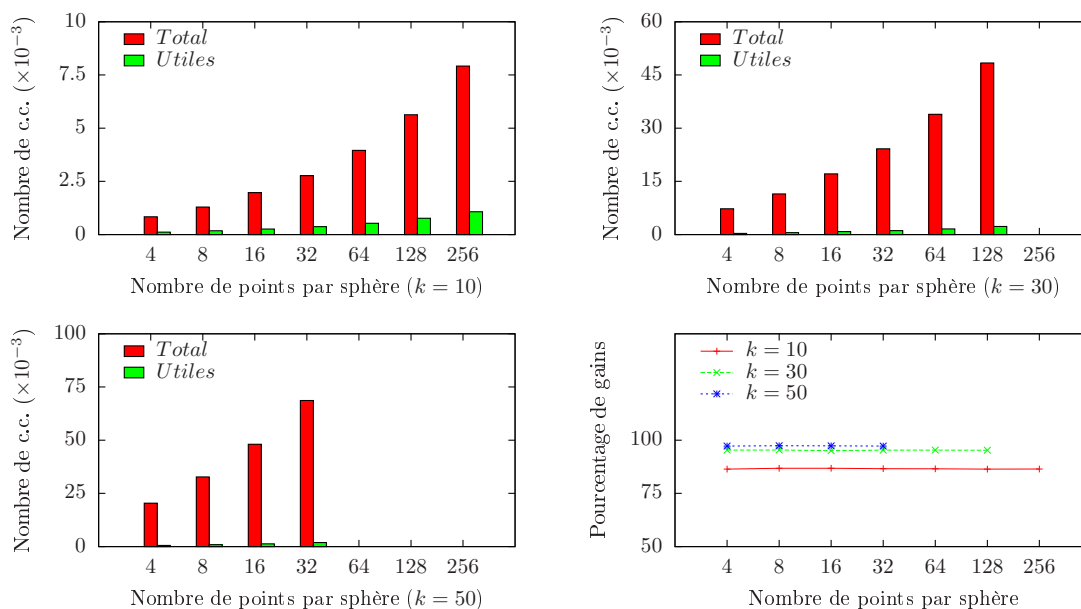
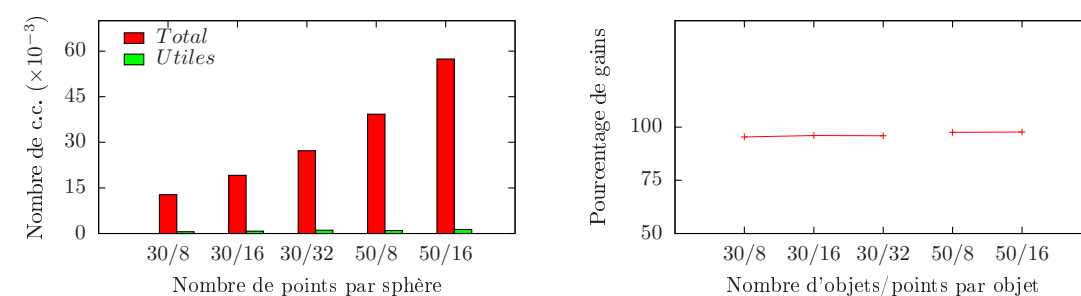


FIG. 6.19 – Complexités des squelettes de visibilité (suite).

## Sphères



## Cube (une source lumineuse)



## Cube (deux sources lumineuses)

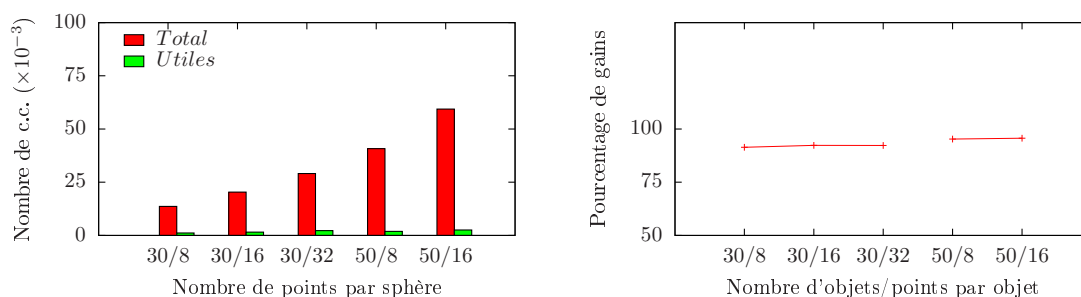
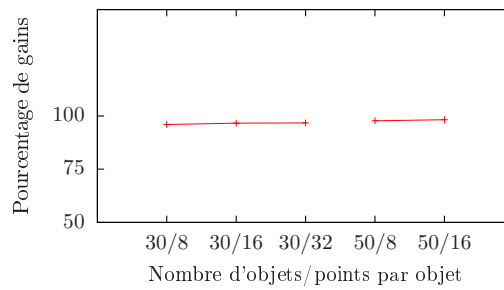
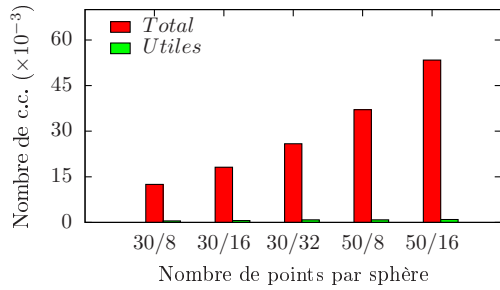


FIG. 6.20 – Nombre total de composantes connexes de rayons et nombre de composantes connexes utiles (diagrammes en bâtons). Les gains obtenus en ne considérant que les composantes utiles sont représentés par courbes ( $gain_2$ ).



**Sapin (une source lumineuse)**



**Sapin (deux sources lumineuses)**

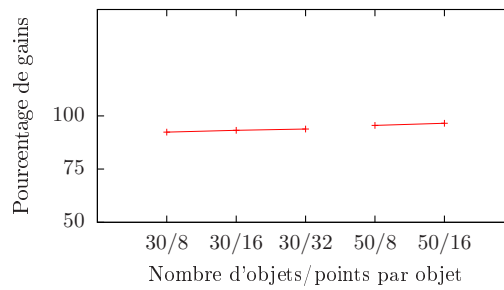
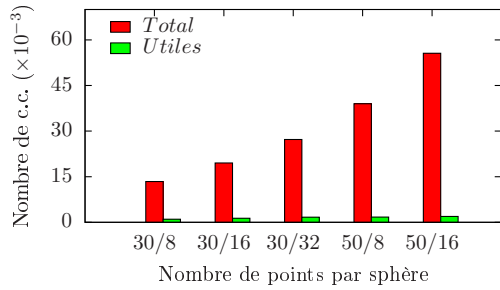


FIG. 6.21 – Nombre total de composantes connexes de rayons et nombre de composantes connexes utiles (suite).

## Sphères

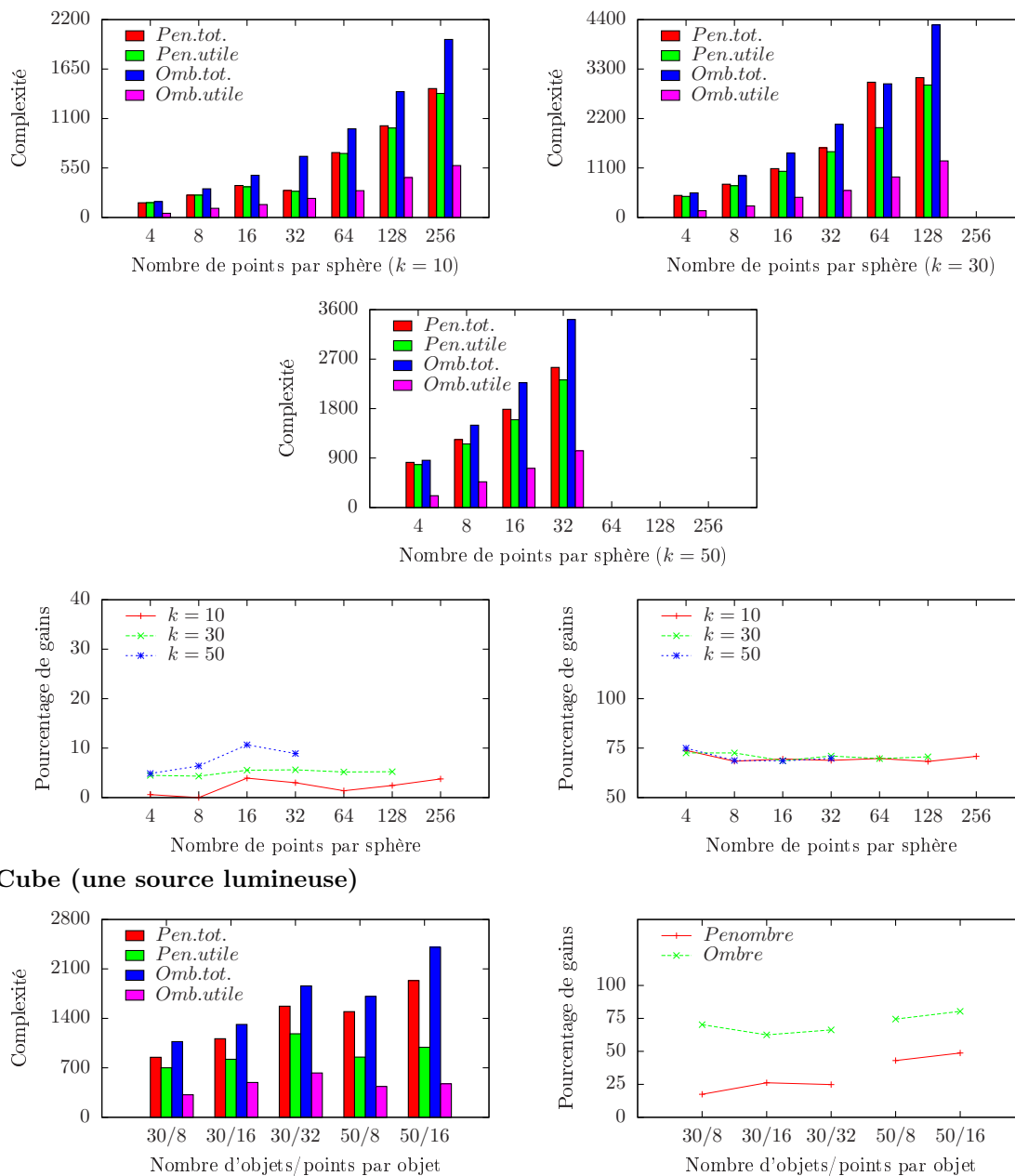
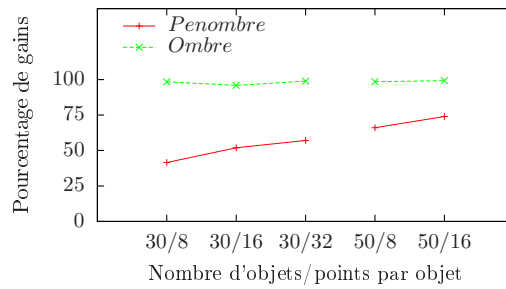
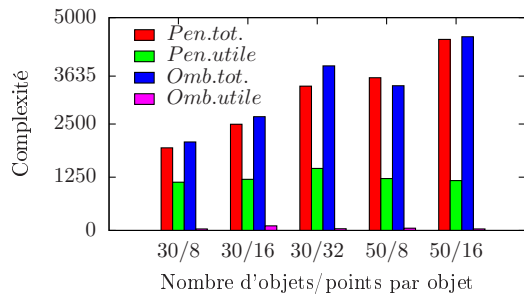
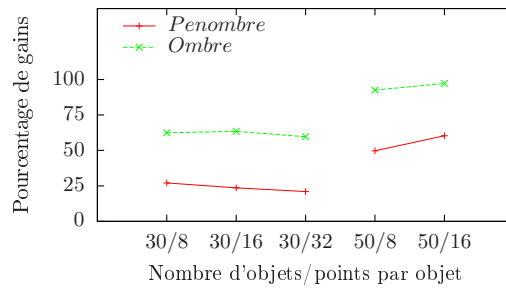
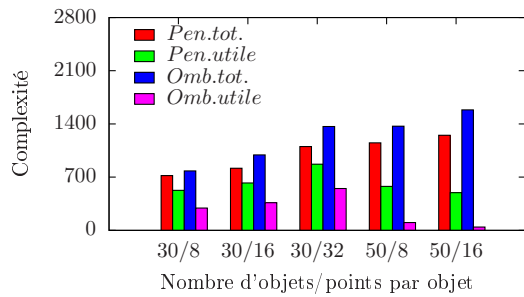


FIG. 6.22 – Complexité des arrangements de pénombre et d'ombre. La complexité d'un arrangement est la somme entre les nombres de sommets, arêtes et faces. Les diagrammes en bâtons représentent les quantités dans les arrangements avant simplification (*Pen.tot./Omb.tots*) et après simplification (*Pen.utile/Omb.utile*). Les courbes indiquent le pourcentage de gains obtenus en ne gardant que les courbes utiles de ces arrangements ( $gain_3$ ).

**Cube (deux sources lumineuses)**



**Sapin (une source lumineuse)**



**Sapin (deux sources lumineuses)**

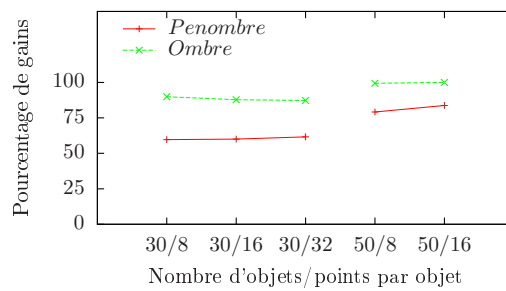
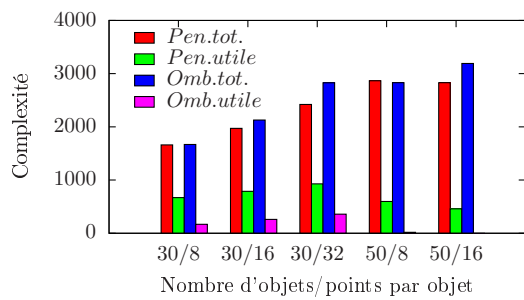


FIG. 6.23 – Complexité des arrangements de pénombre et d'ombre (suite).

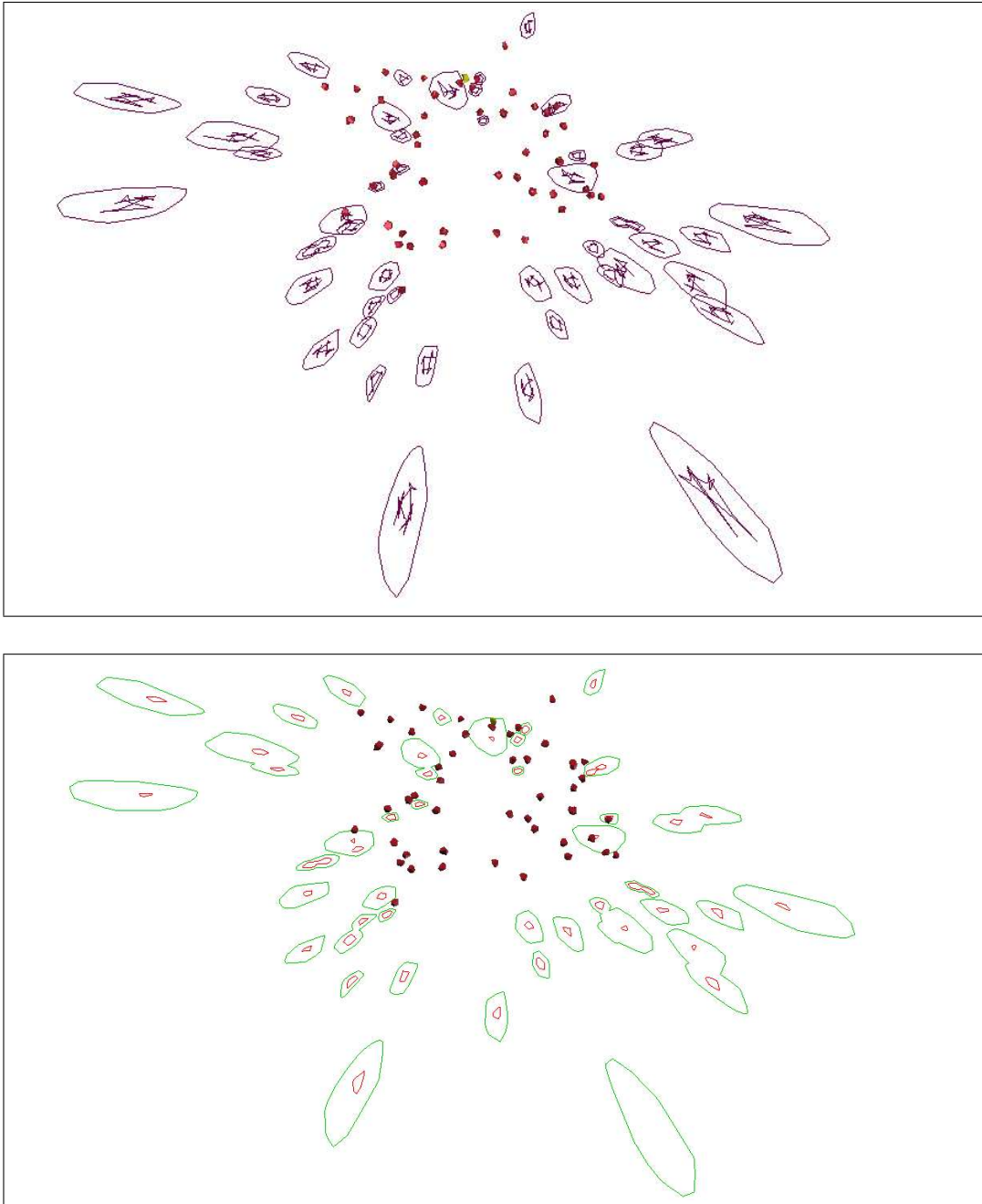


FIG. 6.24 – Une scène composée de 50 polyèdres et d'une source lumineuse. Les polyèdres sont obtenus en prenant 16 (28 triangles) points aléatoires sur des sphères. L'image du haut montre tous les courbes d'événements visuels alors que celle du bas indique les limites « lumière-pénombre » (en vert) et « ombre-pénombre » (en rouge) de cette scène.

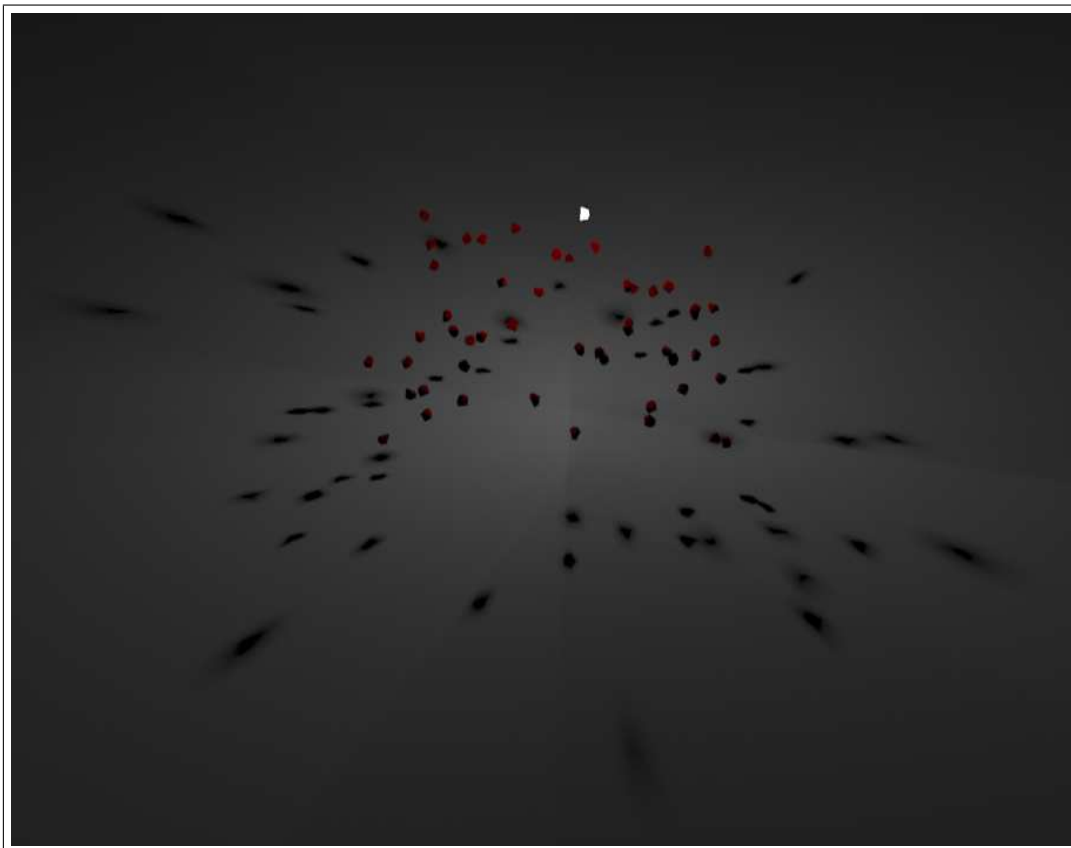
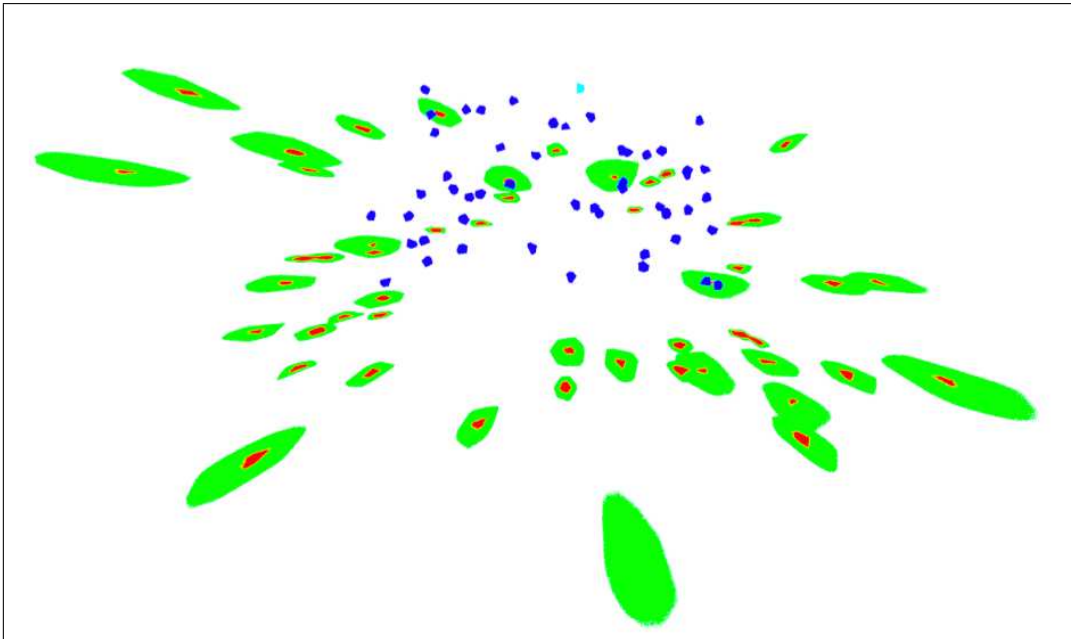


FIG. 6.25 – La scène de la figure 6.24 rendue par lancer de rayons. Sur l'image du haut, les régions en rouge correspondent aux zones identifiées comme étant dans l'ombre par le lancer de rayons alors que les régions en vert forment la pénombre.

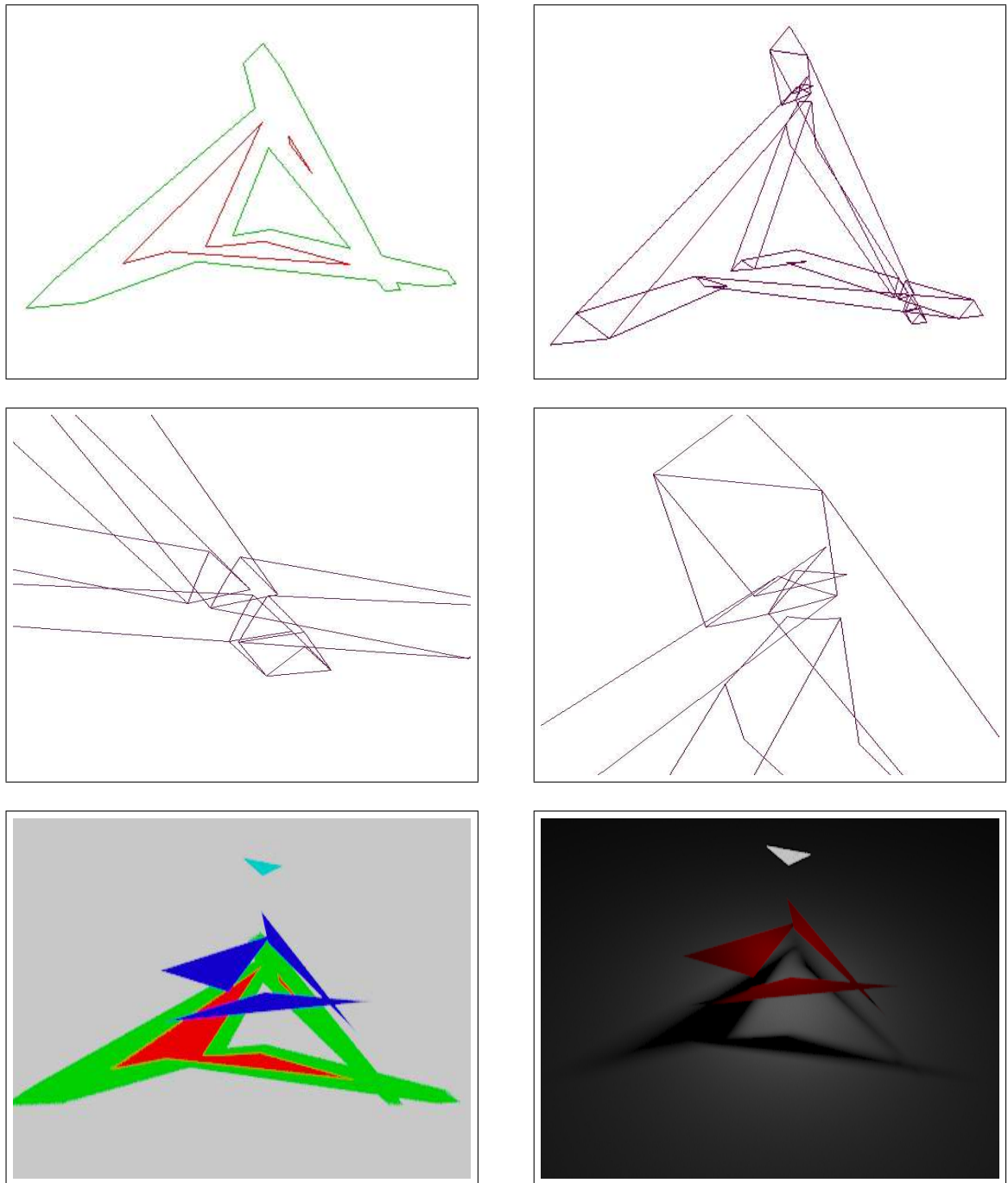


FIG. 6.26 – Une scène formée par quatre triangles dont l'un est source de lumière. Les images de la ligne supérieure montrent les limites entre les régions d'ombre (à gauche) et les courbes d'événements visuels (à droite). La ligne centrale contient des portions grossies de l'arrangement des courbes d'événements visuels. La ligne inférieure contient des images de la scène obtenue grâce à un lancer de rayons. L'image inférieure gauche est la décomposition en régions de lumière (gris), pénombre (vert) et ombre (rouge).

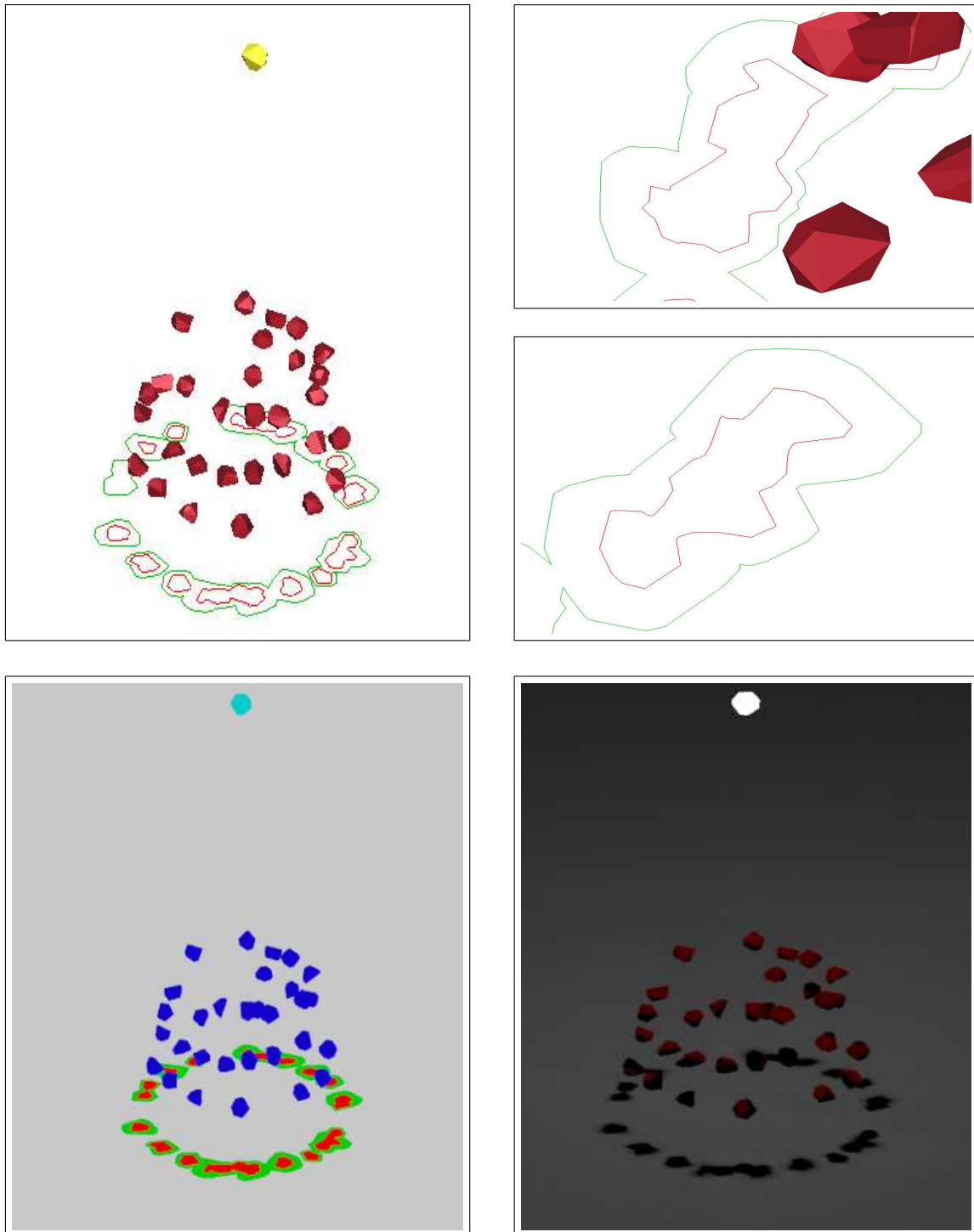


FIG. 6.27 – Une scène formée par trente polyèdres éclairés par une source lumineuse. L'image supérieure gauche montre les limites entre les régions d'ombre dont deux parties sont grossies sur la droite. La ligne inférieure contient des images de la scène obtenue grâce à un lancer de rayons. L'image inférieure gauche est la décomposition en régions de lumière (gris), pénombre (vert) et ombre (rouge). Il est intéressant de remarquer que certaines des régions sont, à tort, classifiées comme des régions d'ombre par le « ray-tracer » alors que la source est bien visible depuis ces points.

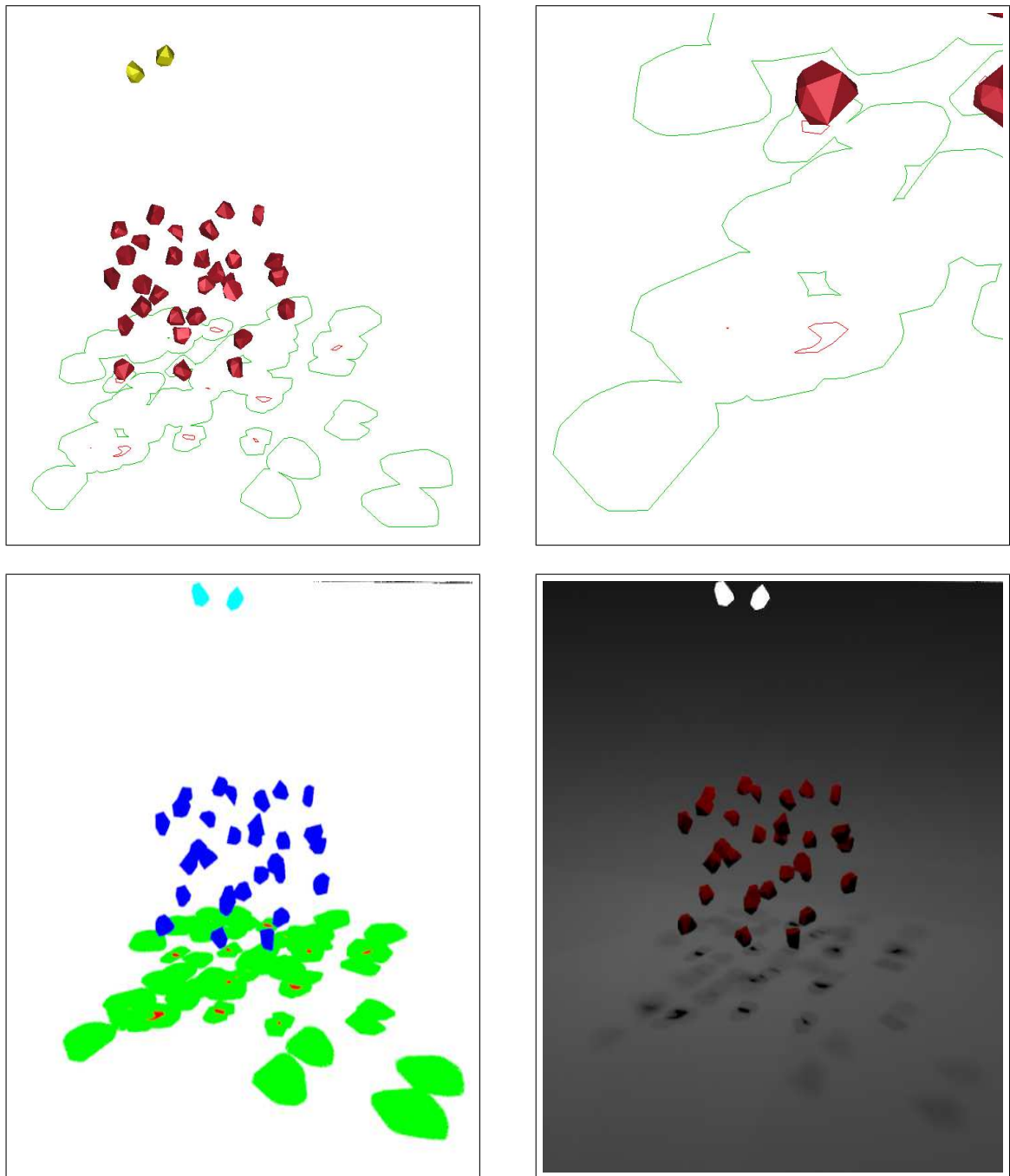


FIG. 6.28 – Une scène formée par trente polyèdres éclairés par deux sources lumineuses. Les images de la ligne supérieure montrent les limites entre les régions d'ombre. La ligne inférieure contient des images de la scène obtenue grâce à un lancer de rayons. L'image inférieure gauche est la décomposition en régions de lumière (gris), pénombre (vert) et ombre (rouge).





## Chapitre 7

# Conclusion

La synthèse des ombres est considérée comme une question difficile en informatique graphique. Aujourd’hui, aucune solution efficace ne permet de calculer exactement ces régions. Dans cette thèse, nous avons abordé ce problème sous un angle nouveau. Une approche qui nous permet de dégager des résultats encourageants.

**Une nouvelle optique prometteuse.** Les méthodes classiques liées au maillage de discontinuités partent toutes d’un même catalogue de surfaces où se produisent les événements visuels : la classification de Gigus et Malik [44]. Cette caractérisation des lieux d’événements visuels repose sur une définition précise de la vue d’un objet : la combinatoire de sa projection sur un écran. Nous nous sommes demandés si c’était réellement la notion ad-hoc pour le calcul des ombres. Nous proposons donc une définition de la vue qui fait la part belle à la silhouette des objets et qui exploite la structure de la « soupe de triangles » qui forme les polyèdres. Elle est plus proche de celle utilisée dans la théorie du graphe d’aspects d’objets lisses. Mais plus que ces détails techniques, nous insistons sur le fait que nous avons obtenu des résultats intéressants en revenant au cœur de la question : comment définir une notion de vue qui corresponde à nos besoins ? Et, ensuite, en menant une étude de ces événements visuels qui nous offre des bases algorithmiques. Nous pensons que cette approche est porteuse d’espoir. Premièrement, nous sommes capables, même si c’est dans un cadre simplifié, d’extraire un ensemble restreint de courbes qui englobent les limites entre les différentes régions d’ombre alors que c’était jusqu’alors impossible. Cela présente des intérêts pratiques. Deuxièmement, ces travaux peuvent être étendus à différents types de polyèdres en levant la contrainte de convexité. Les travaux de Batog [10] en sont un exemple prometteur.

**Un défi pour le calcul exact des ombres.** Nous avons des doutes sur l’intérêt pratique de la solution algorithmique proposée dans cette thèse. En particulier, les tailles de scènes que nous sommes en mesure de traiter sont loin d’atteindre les critères réalistes des méthodes d’informatique graphique. Cette incapacité vient-elle de notre implémentation ? Bien que cela puisse jouer, nous pensons que l’essence du problème se trouve dans l’algorithmique du squelette de visibilité. Nos résultats montrent qu’un gain considérable pourrait être obtenu en ne considérant que les portions de cette structure qui intersectent les sources

lumineuses. C'est le défi d'une construction du squelette de visibilité à la demande. Malheureusement, cette question pourrait être équivalente à décider de la visibilité entre deux objets. Or, savoir si cela est faisable en un temps sous quartique est un problème ouvert depuis plus de vingt ans (cf. [85, problème 7.7.1(f)], par exemple).

**Des pistes pour l'approximation.** Nous pensons que ce travail offre des perspectives de méthodes approchées. Par exemple, nous constatons qu'un seul des germes impliqués dans les contours d'ombre ne correspond pas à des rayons tangents à la source lumineuse : le germe  $EEE-XZY$ . En faisant abstraction de ce germe, il serait envisageable d'utiliser l'algorithme de balayage autour des arêtes des sources lumineuses pour produire un sous-ensemble du squelette de visibilité qui contiendrait une approximation des courbes que nous produisons. Cette approche est d'autant plus raisonnable que le squelette de visibilité encoderait une partition de l'espace similaire à celle obtenue par la technique des volumes d'ombres (une méthode qui a fait ses preuves, cf. chapitre 3). Au contraire des volumes d'ombres, cette décomposition ferait abstraction de certaines surfaces EV (les EV qui ne sont pas bitangents) et contiendrait des surfaces supplémentaires : des surfaces de type EEE autres que  $EEE-XZY$ .

# Annexe A

## Germes associés aux surfaces d'événements visuels

Dans cette annexe, nous récapitulons les germes, présentés au chapitre 6, qui marquent les surfaces d'événements visuels. Pour chacun de ces germes, nous indiquons si les arcs associés jouent un rôle dans les limites « lumière-pénombre » ou « ombre-pénombre ».

### A.1 Liens entre germes et limites d'ombre

	Limite potentielle « lumière-pénombre »	Limite potentielle « ombre-pénombre »
<b>Germes EV</b>		
EV-SEP	Oui, si le sommet est sur une source	Non
VE-SEP	Oui, si l'arête est sur une source	Non
EV-NON-SEP	Non	Oui, si le sommet est sur une source
VE-NON-SEP	Non	Non
<b>Germes EEE</b>		
EEE-X $\infty$ Y	Non	Oui, si l'arête $e_Z$ est sur une source
EEE-XZY	Non	Oui, si le rayon $(p, \vec{u})$ traverse une source
EEE-XY $\infty$ Z	Non	Non
EEE-XYZ $\infty$	Non	Non

TAB. A.1 – Les germes définis pour le rayon  $(p, \vec{u})$  qui appartient à une surface d'événements visuels. L'arête  $e_Z$  (première ligne du tableau des germes EEE) est l'arête du troisième objet rencontré par  $(p, \vec{u})$ .

### A.2 Types de germes

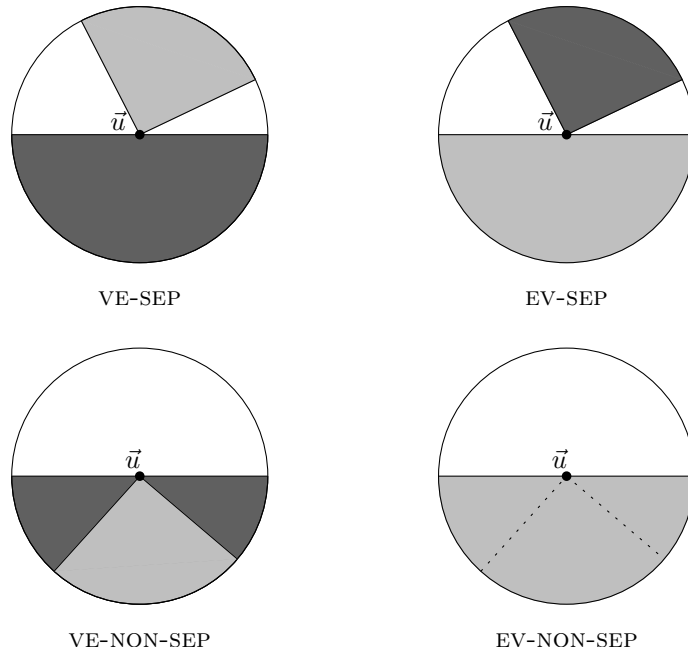


FIG. A.1 – Les différents types de germes EV. Les deux schémas de la ligne supérieure représentent des germes d'événements visuels séparateurs alors que ceux de la ligne inférieure sont des germes d'événements visuels non séparateurs. Le premier objet intersecté (tangentiellment) par le rayon  $(p, \vec{u})$  est l'objet le plus clair.

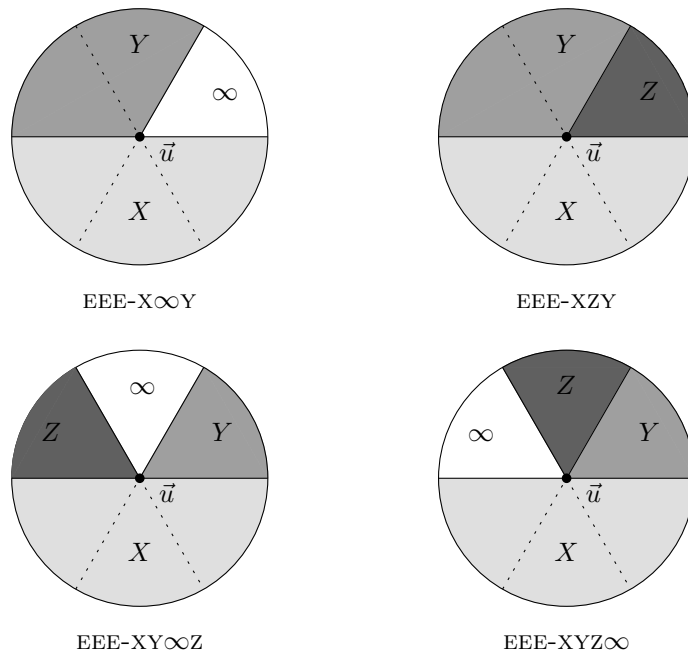


FIG. A.2 – Les différents types de germes EEE. Le code couleur correspond à l'ordre d'intersection des objets par le rayon  $(p, \vec{u})$  (l'objet le plus clair est le premier rencontré alors que le plus foncé est le dernier objet touché tangentiellment).

## Annexe B

# Résultats expérimentaux

Cette annexe contient des résultats complémentaires concernant les expérimentations menées dans le cadre de nos travaux. Le tableau [B.1](#) regroupe les données sur le nombre de nœuds du squelette de visibilité. Les tableaux [B.2](#) et [B.3](#) présentent les complexités des arrangements « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre ». Finalement, les tableaux [B.4](#) et [B.5](#) rassemblent les impacts des différents types de germes sur les limites « lumière-pénombre » et « ombre-pénombre ».

Nœuds du squelette de visibilité											
$p$	Nœuds vv					Nœuds VEE			Nœuds EEEE		
	Total	T++T	Gain	Lum.	Gain		Lum.	Gain		Lum.	Gain
<b>Une source et 10 obstacles</b>											
4	800	710	11.25 %	129	81.83 %	6	0	100.00 %	0	0	-
8	1849	1243	32.77 %	233	81.26 %	29	3	89.66 %	1	0.2	80.00 %
16	4206	1907	54.66 %	340	82.17 %	71	9	87.32 %	3	0	100.00 %
32	8310	2690	67.63 %	488	81.86 %	98	6	93.88 %	8	0.4	95.00 %
64	17290	3872	77.61 %	707	81.74 %	128	0	100.00 %	9	0	100.00 %
128	35113	5500	84.34 %	1010	81.64 %	225	20	91.11 %	13	2.2	83.18 %
256	69908	7769	88.89 %	1422	81.70 %	302	23	92.38 %	15	1	93.33 %
<b>Une source et 30 obstacles</b>											
4	6413	5752	10.30 %	374	94.50 %	338	8	97.63 %	9	0	100.00 %
8	15596	10467	32.89 %	683	94.48 %	801	28	96.50 %	34	2.2	93.53 %
16	33939	15715	53.70 %	1032	94.43 %	1697	39	97.70 %	103	3.4	96.70 %
32	69097	22157	67.93 %	1492	94.27 %	2444	42	98.28 %	171	4.3	97.49 %
64	140679	32696	76.76 %	2078	94.64 %	3052	129	95.77 %	159	5.3	96.67 %
128	283200	44742	84.20 %	3019	94.26 %	4741	72	98.48 %	272	6.0	97.79 %
<b>Une source et 50 obstacles</b>											
4	17664	15814	10.47 %	613	96.12 %	1306	12	99.08 %	41	0	100.00 %
8	42010	28163	32.96 %	1129	96.00 %	3737	40	98.93 %	191	0.8	99.58 %
16	89680	41385	53.85 %	1658	96.00 %	6935	125	98.20 %	407	11	97.30 %
32	188214	59812	68.22 %	2401	96.00 %	10348	212	97.95 %	592	8	98.65 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>											
8	13796	9488	31.23 %	718	92.43 %	2080	131	93.70 %	273	5	98.17 %
16	29308	13901	52.57 %	921	93.37 %	4265	179	95.80 %	560	7	98.75 %
32	61818	19887	67.83 %	1434	92.79 %	6882	284	95.87 %	1066	27	97.47 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>											
8	39335	26857	31.72 %	852	96.83 %	7037	794	88.72 %	1050	88	91.62 %
16	80251	38772	51.69 %	1028	97.35 %	12531	1305	89.59 %	2186	179	91.81 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>											
8	14843	10186	31.38 %	1418	86.08 %	2187	238	89.12 %	279	11	96.06 %
16	31479	14891	52.70 %	1913	87.15 %	4536	453	90.01 %	588	36	93.88 %
32	66453	21319	67.92 %	2875	86.51 %	7342	749	89.80 %	1085	47	95.67 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>											
8	41065	27720	32.50 %	1749	93.69 %	8022	1812	77.41 %	1185	231	80.51 %
16	83172	39807	52.14 %	2106	94.71 %	13819	2635	80.93 %	2314	316	86.34 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>											
8	14983	10135	32.26 %	538	94.69 %	1477	306	79.28 %	211	19	91.00 %
16	31899	14887	53.33 %	717	95.18 %	2583	338	86.91 %	405	26	93.58 %
32	65538	21164	67.71 %	1064	94.97 %	4409	575	86.96 %	761	39	94.88 %
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>											
8	40087	26857	33.00 %	852	96.83 %	7037	794	88.72 %	1050	88	91.62 %
16	84576	38772	54.16 %	1028	97.35 %	12531	1305	89.59 %	2186	179	91.81 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>											
8	15824	10699	32.39 %	1108	89.64 %	1787	617	65.47 %	231	39	83.12 %
16	33794	15741	53.42 %	1577	89.98 %	3092	848	72.57 %	442	63	85.75 %
32	69233	22302	67.79 %	2216	90.06 %	5031	1208	75.99 %	794	73	90.81 %
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>											
8	41424	27720	33.08 %	1749	93.69 %	8022	1812	77.41 %	1185	231	80.51 %
16	86774	39807	54.13 %	2106	94.71 %	13819	2635	80.93 %	2314	316	86.34 %

TAB. B.1 – La colonne de gauche ( $p$ ) indique le nombre de points utilisés pour échantillonner les sphères. Les deux colonnes suivantes contiennent la quantité de nœuds vv dans la scène et de nœuds vv bitangents utilisés pour construire le squelette de visibilité. La quatrième colonne est le gain obtenu en utilisant la contrainte de bitangence. Les deux suivantes contiennent la quantité de nœuds vv bitangents qui intersectent la source et le gain obtenu à ne sélectionner que des nœuds vv bitangents qui intersectent la source (par rapport à l'ensemble des vv bitangents). Les six dernières colonnes regroupent le nombre de nœuds VEE (respectivement EEEE), le nombre de nœuds VEE (respectivement EEEE) qui rencontrent la source lumineuse et le gain obtenu en ne considérant que ces derniers.

Arrangement « lumière-pénombre »									
$p$	Sommets			Arêtes			Faces		
	Pot.	Lim.	Gain	Pot.	Lim.	Gain	Pot.	Lim.	Gain
<b>Une source et 10 obstacles</b>									
4	76	76	0.00 %	77	76	1.30 %	10.2	9.8	3.92 %
8	119	119	0.00 %	119	119	0.00 %	10	10	0.00 %
16	172	166	3.49 %	173	166	4.05 %	10.4	9.2	1.54 %
32	245	241	1.63 %	245	241	1.63 %	10	9.6	4.00 %
64	356	351	1.40 %	356	351	1.40 %	10.4	9.6	7.69 %
128	504	493	2.18 %	506	493	2.57 %	10.4	9.4	9.62 %
256	711	685	3.66 %	712	685	3.79 %	10.4	9	13.46 %
<b>Une source et 30 obstacles</b>									
4	229	220	3.93 %	231	220	4.76 %	30	28	6.67 %
8	354	340	3.95 %	355	340	4.23 %	30	27	10.00 %
16	527	499	5.33 %	528	499	5.49 %	30	27	10.00 %
32	756	718	5.03 %	761	718	5.65 %	32	26	18.75 %
64	1038	986	5.01 %	1040	986	5.19 %	29	26	10.34 %
128	1535	1460	4.89 %	1541	1460	5.26 %	33	26	21.21 %
<b>Une source et 50 obstacles</b>									
4	382	368	3.66 %	388	368	5.15 %	52	46	11.54 %
8	588	557	5.27 %	596	557	6.54 %	52	43	17.31 %
16	866	779	10.05 %	872	779	10.67 %	50	39	22.00 %
32	1249	1140	8.73 %	1251	1140	8.87 %	49	42	14.29 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>									
8	407	340	19.71 %	412	340	21.18 %	29	20	31.03 %
16	532	403	24.25 %	544	403	25.92 %	35	14	60.00 %
32	759	584	23.06 %	775	584	24.65 %	35	13	62.86 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>									
8	710	419	40.99 %	727	419	42.37 %	57	13	77.19 %
16	941	491	47.82 %	941	491	47.82 %	52	9	82.69 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	882	557	36.85 %	957	557	41.80 %	100	19	81.00 %
16	1155	594	48.57 %	1234	594	51.86 %	106	12	88.68 %
32	1589	723	54.50 %	1683	723	57.04 %	118	9	92.37 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	1566	597	61.88 %	1775	597	66.37 %	246	23	90.65 %
16	2004	575	71.31 %	2219	575	74.09 %	264	20	92.42 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>									
8	354	257	27.40 %	352	257	29.99 %	15	12	20.00 %
16	404	306	32.02 %	398	306	23.11 %	15	12	20.00 %
32	545	430	21.10 %	543	430	20.81 %	14	11	21.43 %
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>									
8	565	287	49.20 %	563	287	49.02 %	24	5	79.17 %
16	627	247	60.61 %	606	247	59.24 %	18	2	88.89 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	769	330	57.09 %	818	330	59.66 %	73	10	86.30 %
16	937	391	58.27 %	972	391	59.77 %	62	6	90.32 %
32	1157	462	60.07 %	1204	462	61.63 %	61	5	91.80 %
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	1306	294	77.49 %	1410	294	79.15 %	151	10	93.38 %
16	1348	229	83.01 %	1383	229	83.44 %	99	2	97.98 %

TAB. B.2 – Complexité moyenne de l'arrangement des limites « lumière-pénombre ». Les colonnes *Pot.* indiquent le nombre d'éléments dans l'arrangement des limites potentielles alors que *Lim.* donnent le nombre d'éléments retenus dans l'arrangement final. Le gain est le rapport entre le nombre de courbes non retenues et le nombre total de courbes.



Arrangement « ombre-pénombre »									
$p$	Sommets			Arêtes			Faces		
	Pot.	Lim.	Gain	Pot.	Lim.	Gain	Pot.	Lim.	Gain
<b>Une source et 10 obstacles</b>									
4	88	20	77.27 %	81	20	75.31 %	6.8	5.6	17.65 %
8	150	46	69.33 %	154	46	70.13 %	15	9	40.00 %
16	219	67	69.40 %	229	67	70.74 %	21	9.6	54.29 %
32	316	101	68.04 %	334	101	70.12 %	30	9.8	67.33 %
64	453	144	68.21 %	487	144	70.43 %	45	10	77.78 %
128	649	217	66.56 %	693	217	68.69 %	57	9.8	82.81 %
256	911	284	68.83 %	983	284	71.11 %	85	9.6	88.71 %
<b>Une source et 30 obstacles</b>									
4	271	66	75.65 %	254	66	74.02 %	22	18	18.18 %
8	439	116	73.58 %	447	116	74.05 %	43	23	46.51 %
16	668	210	68.56 %	700	210	70.00 %	64	29	54.69 %
32	957	286	70.11 %	1019	286	71.93 %	95	28	70.53 %
64	1372	436	68.22 %	1470	436	70.34 %	131	29	77.86 %
128	1962	614	68.71 %	2122	614	71.07 %	198	30	84.85 %
<b>Une source et 50 obstacles</b>									
4	430	94	78.14 %	395	94	76.20 %	34	27	20.59 %
8	704	213	69.74 %	724	213	70.58 %	70	42	40.00 %
16	1071	334	68.81 %	1109	334	69.88 %	92	46	50.00 %
32	1595	493	69.09 %	1684	493	70.72 %	142	47	66.90 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>									
8	510	148	70.98 %	520	148	71.54 %	41	23	43.90 %
16	631	234	62.92 %	642	234	63.55 %	40	25	37.50 %
32	900	302	66.44 %	914	302	66.96 %	44	23	47.73 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>									
8	809	202	75.03 %	830	202	75.66 %	72	33	54.17 %
16	1140	223	80.44 %	1178	223	81.07 %	89	28	68.54 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	997	16	98.40 %	1017	16	98.43 %	82	2	97.56 %
16	1287	51	96.04 %	1306	51	96.09 %	77	7	90.91 %
32	1873	19	98.98 %	1899	19	99.00 %	92	3	96.74 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	1616	24	98.51 %	1649	24	98.54 %	132	5	96.21 %
16	2176	16	99.26 %	2222	16	99.28 %	150	2	98.67 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>									
8	382	141	63.09 %	381	141	62.99 %	18	11	38.89 %
16	490	176	64.08 %	485	176	63.71 %	17	10	41.18 %
32	677	270	60.11 %	673	270	59.88 %	16	10	37.50 %
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>									
8	686	48	93.00 %	663	48	92.76 %	20	6	70.00 %
16	799	21	97.37 %	769	21	97.27 %	16	2	87.50 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	821	79	90.38 %	811	79	90.26 %	35	10	71.43 %
16	1057	125	88.17 %	1038	125	87.96 %	32	10	68.75 %
32	1399	174	87.56 %	1387	174	87.45 %	40	12	70.00 %
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	1420	8	99.44 %	1361	8	99.41 %	47	2	95.74 %
16	1606	0	100.00 %	1545	0	100.00 %	38	0	100.00 %

TAB. B.3 – Complexité moyenne de l'arrangement des limites « ombre-pénombre ». Les colonnes *Pot.* indiquent le nombre d'éléments dans l'arrangement des limites potentielles alors que *Lim.* donnent le nombre d'éléments retenus dans l'arrangement final. Le gain est le rapport entre le nombre de courbes non retenues et le nombre total de courbes.

<b>Composantes connexes de rayons de pénombre</b>						
<i>p</i>	EV			VE		
	Pot.	Lim.	Gain	Pot.	Lim.	Gain
<b>Une source et 10 obstacles</b>						
4	38	38	0.00 %	38	37	2.63 %
8	60	59	1.67 %	59	58	1.70 %
16	86	84	2.33 %	84	82	2.38 %
32	125	124	0.80 %	118	117	0.85 %
64	179	177	1.12 %	175	174	0.57 %
128	257	251	2.32 %	246	242	1.63 %
256	357	346	3.08 %	351	340	3.13 %
<b>Une source et 30 obstacles</b>						
4	114	112	1.75 %	109	108	0.92 %
8	174	171	1.72 %	172	169	1.74 %
16	257	248	3.50 %	259	250	3.47 %
32	374	360	3.73 %	369	357	3.25 %
64	524	503	4.01 %	503	483	3.98 %
128	769	736	4.29 %	756	724	4.23 %
<b>Une source et 50 obstacles</b>						
4	188	185	1.60 %	184	181	1.63 %
8	288	281	2.43 %	281	275	2.14 %
16	428	403	5.84 %	403	376	6.70 %
32	640	606	5.31 %	575	534	7.13 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>						
8	177	162	8.47 %	195	177	9.23 %
16	253	218	13.83 %	223	183	17.94 %
32	345	299	13.33 %	354	285	19.49 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>						
8	291	213	26.80 %	296	203	31.42 %
16	390	248	36.41 %	391	242	38.11 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>						
8	369	291	21.14 %	372	258	30.65 %
16	502	317	36.85 %	474	274	42.19 %
32	680	380	44.12 %	713	343	51.89 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>						
8	587	315	46.34 %	588	276	53.06 %
16	786	308	60.81 %	735	263	64.22 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>						
8	162	143	11.73 %	126	114	9.52 %
16	202	181	10.40 %	140	125	10.71 %
32	261	229	12.26 %	214	201	6.07 %
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>						
8	234	164	29.91 %	181	119	34.25 %
16	248	135	45.56 %	202	112	44.55 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>						
8	329	191	41.95 %	255	136	46.67 %
16	422	232	45.02 %	334	159	52.40 %
32	510	261	48.82 %	464	210	54.74 %
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>						
8	470	162	65.53 %	408	125	69.36 %
16	498	124	75.10 %	429	105	75.52 %

TAB. B.4 – Répartition moyenne des morceaux de coniques, en fonction du germe associé, dans l'arrangement des limites « lumière-pénombre ». Les colonnes *Pot.* indiquent le nombre d'éléments dans l'arrangement des limites potentielles alors que *Lim.* donnent le nombre d'éléments retenus dans l'arrangement final. Le gain est le rapport entre le nombre de courbes non retenues et le nombre total de courbes.

Composantes connexes de rayons d'ombre									
$p$	EV			EEE-XOY			EEE-XZY		
	Pot.	Lim.	Gain	Pot.	Lim.	Gain	Pot.	Lim.	Gain
<b>Une source et 10 obstacles</b>									
4	38	20	47.37 %	0	0	-	0	0	-
8	60	46	23.33 %	0	0	-	0	0	-
16	87	66	24.14 %	3	1	66.66 %	0	0	-
32	124	100	19.35 %	2	0.6	70.00 %	0	0	-
64	176	144	18.18 %	0	0	-	0	0	-
128	258	214	17.05 %	4	3	25.00 %	0	0	-
256	358	284	20.67 %	5	0.4	92.00 %	0	0	-
<b>Une source et 30 obstacles</b>									
4	114	64	43.86 %	2.2	1.6	27.27 %	0	0	-
8	175	112	36.00 %	6.8	3.8	44.12 %	0	0	-
16	263	204	19.37 %	9.8	5.5	43.88 %	0.5	0.5	0.00 %
32	369	284	13.04 %	11.5	2.2	80.87 %	0	0	-
64	527	424	19.54 %	26.7	12.7	52.43 %	0	0	-
128	736	597	18.89 %	22	17	22.73 %	0	0	-
<b>Une source et 50 obstacles</b>									
4	188	93	50.53 %	3.4	1.2	75.71 %	0	0	-
8	286	211	26.22 %	8.5	2.5	70.59 %	0	0	-
16	427	317	25.76 %	35.5	14.5	59.15 %	0	0	-
32	616	466	24.35 %	64	27	57.81 %	0	0	-
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>									
8	178	128	28.09 %	36	19	47.22 %	0	0	-
16	242	211	12.81 %	40	23	42.50 %	0	0	-
32	345	273	20.87 %	59	29	50.85 %	0	0	-
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>									
8	285	160	43.86 %	89	40	55.06 %	0	0	-
16	377	190	49.60 %	148	32	78.38 %	7	0	100.00 %
<b>Scène du cube <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	362	14	96.13 %	77	2	97.40 %	0	0	-
16	493	39	92.09 %	98	12	87.76 %	1	0	100.00 %
32	701	19	97.29 %	133	0	100.00 %	3	0	100.00 %
<b>Scène du cube <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	439	22	94.99 %	129	2	98.45 %	0	0	-
16	560	14	97.50 %	146	2	98.63 %	3	0	100.00 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (une source lumineuse)</b>									
8	153	105	31.37 %	52	35	32.69 %	0	0	-
16	201	137	31.84 %	58	39	32.76 %	0	0	-
32	267	198	25.84 %	88	71	19.32 %	0	0	-
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (une source lumineuse)</b>									
8	242	35	85.54 %	123	13	89.43 %	6	0	100.00 %
16	277	14	94.95 %	163	7	95.71 %	10	0	100.00 %
<b>Scène du sapin <math>k = 30</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	324	62	80.86 %	109	17	84.40 %	2	0	100.00 %
16	423	94	77.78 %	116	31	73.28 %	0	0	-
32	463	131	71.71 %	161	41	74.53 %	0	0	-
<b>Scène du sapin <math>k = 50</math> (deux sources lumineuses)</b>									
8	488	8	98.36 %	258	0	100.00 %	17	0	100.00 %
16	549	0	100.00 %	339	0	100.00 %	19	0	100.00 %

TAB. B.5 – Répartition moyenne des morceaux de coniques, en fonction du germe associé, dans l'arrangement des limites « ombre-pénombre ». Les colonnes *Pot.* indiquent le nombre d'éléments dans l'arrangement des limites potentielles alors que *Lim.* donnent le nombre d'éléments retenus dans l'arrangement final. Le gain est le rapport entre le nombre de courbes non retenues et le nombre total de courbes.

# Bibliographie

- [1] M. Agrawala, R. Ramamoorthi, A. Heirich, and L. Moll. Efficient image-based methods for rendering soft shadows. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 2000*, pages 375–384. ACM Press, 2000.
- [2] T. Akenine-Möller and U. Assarsson. Approximate soft shadows on arbitrary surfaces using penumbra wedges. In *Proceedings of the 13th Eurographics Workshop on Rendering*, pages 297–305, 2002.
- [3] T. Akenine-Möller and E. Haines. *Real-Time Rendering*. AK Peters, Ltd., 2002.
- [4] J. Amanatides. Ray tracing with cones. In *Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 84)*, pages 129–135, 1984.
- [5] V. I. Arnol'd. Singularities of smooth mappings. *Russian Mathematical Surveys*, 23(1) :1–43, 1969.
- [6] B. Aronov, H. Brönnimann, D. Halperin, and R. Schifffenbauer. On the number of views of polyhedral scenes. In *Proceedings of the Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry (JCDCG 2000)*, pages 81–90, 2001.
- [7] B. Aronov and M. Sharir. The common exterior of convex polygons in the plane. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 8 :139–149, 1997.
- [8] U. Assarsson and T. Akenine-Möller. A geometry-based soft shadow volume algorithm using graphics hardware. *ACM Transactions on Graphics*, 22(3) :511–520, 2003.
- [9] U. Assarsson, M. Dougherty, M. Mounier, and T. Akenine-Möller. An optimized soft shadow volume algorithm with real-time performance. *Graphics Hardware*, 2003.
- [10] G. Batog. Événements visuels de polyèdres. Master's thesis, MPRI, ENS Cachan, 2008.
- [11] M. Berger. Convexity. *American Mathematical Monthly*, 97 :650–678, 1990.
- [12] K.W. Bowyer and C.R. Dyer. Aspect graphs : An introduction and survey of recent results. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 2 :315–328, 1990.
- [13] S. Brabec and H-P. Seidel. Single sample soft shadows using depth maps. *Graphics Interface*, 2002.
- [14] H. Brönnimann, O. Devillers, V. Dujmović, H. Everett, M. Glisse, X. Goaoc, S. Lazard, H.-S. Na, and S. Whitesides. Lines and free line segments tangent to arbitrary three-dimensional convex polyhedra. *SIAM Journal on Computing*, 37(2) :522–551, 2007.
- [15] H. Brönnimann, H. Everett, S. Lazard, F. Sottile, and S. Whitesides. Transversals to line segments in three-dimensional space. *Discrete and Computational Geometry*, 34(3) :381–390, 2005.
- [16] F. Cazals and M. Sbert. Some integral geometry tools to estimate the complexity of 3D scenes. Technical Report RR-3204, INRIA, 1997.

- [17] CGAL, Computational Geometry Algorithms Library. <http://www.cgal.org>.
- [18] N. Chin and S. Feiner. Fast object-precision shadow generation for area light sources using BSP trees. In *1992 Symposium on Interactive 3D Graphics*, pages 21–30, Cambridge, Massachusetts, March 1992.
- [19] M. F. Cohen and D. P. Greenberg. The hemi-cube : a radiosity solution for complex environments. In *Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 85)*, pages 31–40. ACM Press, 1985.
- [20] M. F. Cohen and J. R. Wallace. *Radiosity and Realistic Image Synthesis*. Academic Press, 1993.
- [21] R. L. Cook, T. Porter, and L. Carpenter. Distributed ray tracing. In *Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 84)*, pages 137–145. ACM Press, 1984.
- [22] CORE number library. <http://cs.nyu.edu/exact/core-pages>.
- [23] F. C. Crow. Shadow algorithms for computer graphics. *Computer Graphics*, 11(2) :242–248, 1977.
- [24] J. Demouth, O. Devillers, H. Everett, M. Glisse, S. Lazard, and R. Seidel. On the complexity of umbra and penumbra. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 2008. To appear.
- [25] J. Demouth, O. Devillers, M. Glisse, and X. Goaoc. Helly-type theorems for approximate covering. *Discrete and Computational Geometry*, 2008. To appear.
- [26] O. Devillers, V. Dujmovic, H. Everett, X. Goaoc, S. Lazard, H.-S. Na, and S. Petitjean. The expected number of 3D visibility events is linear. *SIAM Journal on Computing*, 32(6) :1586–1620, 2003.
- [27] O. Devillers, M. Glisse, and S. Lazard. Predicates for 3D visibility. In *SCG '08 : Proceedings of the 24th Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 174–181, 2008.
- [28] G. Drettakis and E. Fiume. A fast shadow algorithm for area light sources using backprojection. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 94*, pages 223–230. ACM Press, 1994.
- [29] G. Drettakis and F. Sillion. Accurate visibility and meshing calculations for hierarchical radiosity. In *Rendering Techniques 96*, pages 269–279, 1996.
- [30] F. Duguet and G. Drettakis. Robust epsilon visibility. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 2002*, pages 567–575. ACM Press, 2002.
- [31] F. Durand. *Visibility, Analysis and Applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1999.
- [32] F. Durand. A multidisciplinary survey of visibility, 2000. ACM SIGGRAPH course notes, Visibility, Problems, Techniques, and Applications.
- [33] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. The visibility skeleton : a powerful and efficient multi-purpose global visibility tool. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 97*, pages 89–100. ACM Press, 1997.
- [34] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. Fast and accurate hierarchical radiosity using global visibility. *ACM Transactions on Graphics*, 18(2) :128–170, 1999.
- [35] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. The 3D visibility complex. *ACM Transactions on Graphics*, 21(2) :176–206, 2002.
- [36] P. Dutré, K. Bala, and P. Bekaert. *Advanced Global Illumination*. AK Peters, Ltd., 2006.

- 
- [37] A. Efrat, L.J. Guibas, O.A. Hall-Holt, and L. Zhang. On incremental rendering of silhouette maps of a polyhedral scene. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 38(3) :129–138, 2007.
- [38] D. W. Eggert. *Aspect Graphs of Solids of Revolution*. PhD thesis, University of South Florida, 1992.
- [39] D. W. Eggert and K. W. Bowyer. Computing the orthographic projection aspect graph of solids of revolution. *Pattern Recognition Letters*, 11(11) :751–763, 1990.
- [40] H. Everett, S. Lazard, B. Lenhart, J. Redburn, and L. Zhang. On the degree of standard geometric predicates for line transversals in 3D. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 2007. To appear.
- [41] C. Everitt, A. Rege, and C. Cebenoyan. Hardware shadow mapping. [http://developer.nvidia.com/object/hwshadowmap\\_paper.html](http://developer.nvidia.com/object/hwshadowmap_paper.html).
- [42] J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, and J. F. Hughes. *Computer Graphics : Principles and Practice*. Addison-Wesley, 1990.
- [43] Z. Gigus, J. Canny, and R. Seidel. Efficiently computing and representing aspect graphs of polyhedral objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6) :542–551, 1991.
- [44] Z. Gigus and J. Malik. Computing the aspect graph for line drawings of polyhedral objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(2) :113–122, 1990.
- [45] A. Glassner. *An Introduction to Ray Tracing*. Morgan Kaufmann, 1989.
- [46] M. Glisse. An upper bound on the average size of silhouettes. In *SCG '06 : Proceedings of the 22nd Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 105–111, 2006.
- [47] M. Glisse. *Combinatoire des droites et segments pour la visibilité 3D*. PhD thesis, Université Nancy 2, October 2007.
- [48] GMP, GNU multiple precision arithmetic library. <http://www.gmplib.org>.
- [49] X. Goaoc. *Structures de visibilité globales : taille, calcul et dégénérescences*. PhD thesis, Université Nancy 2, May 2004.
- [50] C. Goral, K. Torrance, D. Greenberg, and B. Battaile. Modeling the interaction of light between diffuse surfaces. *Computer Graphics*, 18(3) :213–222, 1984.
- [51] S. J. Gortler, P. Schröder, M. F. Cohen, and P. Hanrahan. Wavelet radiosity. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 93*, pages 221–230. ACM Press, 1993.
- [52] E. Haines. Soft planar shadows using plateaus. *Journal of Graphics Tools*, 6(1) :19–27, 2001.
- [53] P. Hanrahan, D. Salzman, and L. Aupperle. A rapid hierarchical radiosity algorithm. *Computer Graphics*, 25(4) :197–206, 1991.
- [54] D. Hart, P. Dutré, and D. P. Greenberg. Direct illumination with lazy visibility evaluation. In *Proceedings of the ACM SIGGRAPH 99*, pages 147–154. ACM Press, 1999.
- [55] J-M. Hasenfratz, M. Lapierre, N. Holzschuch, and F. Sillion. A survey of real-time soft shadows algorithms. In *Eurographics*, 2003.
- [56] P. S. Heckbert. *Simulating Global Illumination Using Adaptive Meshing*. PhD thesis, Departement of EECS, UC Berkeley, California, June 1991.

- [57] P. S. Heckbert. Discontinuity meshing for radiosity. In *Proceedings of the Third Eurographics Workshop on Rendering*, pages 203–215, May 1992.
- [58] P. S. Heckbert. Radiosity in flatland. *Computer Graphics*, 11(3) :181–192, 1992.
- [59] P. S. Heckbert. Finite element methods for radiosity. In *ACM SIGGRAPH '93 Course Notes - Global Illumination*, pages 1–7. ACM Press, 1993.
- [60] P. S. Heckbert and P. Hanrahan. Beam tracing polygonal objects. In *Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 84)*, pages 119–127, 1984.
- [61] P. S. Heckbert and M. Herf. Simulating soft shadows with graphics hardware. Technical Report CMU-CS-97-104, Carnegie Mellon University, 1997.
- [62] P. S. Heckbert and J. Winget. Finite elements methods for global illumination. Technical Report UCB/CSD 91/643, University of California, Berkeley, 1991.
- [63] T. Heidmann. Real shadows, real time. *Iris Universe*, 8 :23–31, 1991.
- [64] W. Heidrich, S. Brabec, and H-P. Seidel. Soft shadow maps for linear lights. In *Rendering Techniques '00*, pages 269–280, June 2000.
- [65] M. Herf. Efficient generation of soft shadow textures. Technical Report CMU-CS-97-138, Carnegie Mellon University, 1997.
- [66] D. S. Immel, M. F. Cohen, and D. P. Greenberg. A radiosity method for non-diffuse environments. *Computer Graphics*, 20(4) :133–142, 1986.
- [67] J. T. Kajiya. The rendering equation. In *Computer Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH 86)*, pages 143–150. ACM Press, 1986.
- [68] Y. Kergosien. La famille des projections orthogonales d'une surface et ses singularités. *C. R. Académie des Sciences de Paris*, 292 :929–932, 1981.
- [69] M. J. Kilgard. Improving shadows and reflections via the stencil buffer, 1999. NVIDIA White Paper.
- [70] L. C. Kinsey. *Topology of Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1993.
- [71] J. J. Koenderink and A. J. van Doorn. The internal representation of solid shape with respect to vision. *Biological Cybernetics*, 32 :211–216, 1979.
- [72] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn. The singularities of the visual mapping. *Biological Cybernetics*, 24 :51–59, 1976.
- [73] D. Kriegman and J. Ponce. Computing exact aspect graphs of curved objects : Solid of revolution. *International Journal of Computer Vision*, 5(2) :119–135, 1990.
- [74] S. Laine, T. Aila, U. Assarsson, J. Lehtinen, and T. Akenine-Möller. Soft shadow volumes for ray tracing. *ACM Transactions on Graphics*, 24 :1156–1165, 2005. 3.
- [75] D. Lischinski, B. Smits, and D. P. Greenberg. Bounds and error estimates for radiosity. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 94*, pages 67–74. ACM Press, 1994.
- [76] D. Lischinski, F. Tampieri, and D. P. Greenberg. A discontinuity meshing algorithm for accurate radiosity. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(6) :25–39, 1992.
- [77] D. Lischinski, F. Tampieri, and D. P. Greenberg. Combining hierarchical radiosity and discontinuity meshing. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 93*, pages 199–208. ACM Press, 1993.

- 
- [78] M. Overmars M. de Berg, D. Halperin and M. van Kreveld. Sparse arrangements and the number of views of polyhedral scenes. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 7 :175–195, 1997.
- [79] P. Mamassian, D. C. Knill, and D. Kersten. The perception of cast shadows. *Trends in Cognitive Sciences*, 2(8) :288–295, 1998.
- [80] J. N. Mather. Generic projections. *Annals of Mathematics*, 98 :226–245, 1973.
- [81] G. M. Maxwell, M. J. Bailey, and V. W. Goldschmidt. Calculations of the radiation configuration factor using ray casting. *Computer-Aided Design*, 18(7) :371–379, 1986.
- [82] M. McGuire. Observations on the silhouette sizes. *Graphics Tools*, 9(1) :1–12, 2004.
- [83] T. Nishita and E. Nakamae. Half-tone representation of 3D objects illuminated by area sources or polyhedron sources. In *IEEE Computer Society's 7th International Computer Software and Applications Conference (COMPSAC '83)*, pages 237–242, 1983.
- [84] T. Nishita and E. Nakamae. Continuous tone representation of 3D objects taking account of shadows and interreflection. In *Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 85)*, pages 23–30. ACM Press, 1985.
- [85] J. Pach and M. Sharir. Combinatorial geometry and its algorithmic applications : The alcala lectures, 2006. Lecture notes, Alcala, Spain, August-September. Revised version in preparation for Amer. Math. Soc. Press.
- [86] S. Petitjean. Computing exact aspect graphs of curved objects bounded by smooth algebraic surfaces. Master's thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1992.
- [87] S. Petitjean. *Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires : application aux graphes d'aspects d'objets courbes*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1995.
- [88] S. Petitjean. The number of views of piecewise-smooth algebraic objects. In *Proceedings of the Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Lecture Notes on Computer Science*, volume 900, pages 571–582, 1995.
- [89] S. Petitjean. The enumerative geometry of projective algebraic surfaces and the complexity of aspect graphs. *International Journal of Computer Vision*, 19(3) :1–27, 1996.
- [90] S. Petitjean, J. Ponce, and D. J. Kriegman. Computing exact aspect graphs of curved objects : Algebraic surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 9(3) :231–255, 1992.
- [91] M. Pharr and G. Humphreys. *Physically Based Rendering : From Theory to Implementation*. Morgan Kaufmann, 2004.
- [92] H. Plantinga and C. R. Dyer. Visibility, occlusion, and the aspect graph. *International Journal of Computer Vision*, 5(2) :137–160, 1990.
- [93] O. A. Platonova. Singularities of the mutual disposition of a surface and a line. *Russian Mathematical Surveys*, 36(1) :248–249, 1981.
- [94] M. Pocchiola and G. Vegter. Topologically sweeping visibility complexes via pseudo-triangulations. *Discrete and Computational Geometry*, 16(4) :419–453, 1996.
- [95] M. Pocchiola and G. Vegter. The visibility complex. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 6(3) :279–308, 1996.



- [96] J. Ponce and D. Kriegman. Computing exact aspect graphs of curved objects : Parametric patches. In *Proceedings of the AAAI National Conference on Artificial Intelligence*, pages 1074–1079, 1990.
- [97] P. Rademacher, J. Lengyel, E. Cutrell, and T. Whitted. Measuring the perception of visual realism in images. In *Proceedings of the 12th Eurographics Workshop on Rendering Techniques*, pages 235–248. Springer-Verlag, 2001.
- [98] J. H. Rieger. On the classification of views of piecewise-smooth objects. *Image and Vision Computing*, 5(2) :91–97, 1987.
- [99] J. H. Rieger. The geometry of view space of opaque objects bounded by smooth surfaces. *Artificial Intelligence (1-2)*, 44 :1–40, 1990.
- [100] J. H. Rieger. Global bifurcation sets and stable projections of nonsingular algebraic surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 7(3) :171–194, 1992.
- [101] J. H. Rieger. Computing view graphs of algebraic surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, 16(3) :259–272, 1993.
- [102] J. H. Rieger. On the complexity and computation of view graph of piecewise-smooth algebraic surfaces. Technical Report FBI-HH-M-228/93, Universität Hamburg, 1993.
- [103] G. Salmon. *Analytic Geometry of Three Dimensions*. Cambridge, 1978.
- [104] P. Schröder and P. Hanrahan. A closed form expression for the form factor between two polygons. Technical Report Tech. Rep. CS-404-93, Princeton University, 1993.
- [105] P. Shirley, M. Ashikhmin, M. Gleicher, S. Marschner, E. Reinhard, K. Sung, W. Thompson, and P. Willemsen. *Fundamentals of Computer Graphics, Second Edition*. AK Peters, Ltd., 2005.
- [106] F. Sillion and C. Puech. A general two-pass method integrating specular and diffuse reflection. In *Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 89)*, pages 335–344. ACM Press, 1989.
- [107] F. Sillion and C. Puech. *Radiosity and Global Illumination*. Morgan Kaufmann, 1994.
- [108] C. Soler and F. Sillion. Fast calculation of soft shadow textures using convolution. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 98*, pages 321–332. ACM Press, 1998.
- [109] A. J. Stewart and S. Ghali. An output sensitive algorithm for the computation of shadow boundaries. In *Fifth Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 291–296, 1993.
- [110] A. J. Stewart and S. Ghali. Fast computation of shadow boundaries using spatial coherence and backprojections. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 94*, pages 231–238. ACM Press, 1994.
- [111] A. J. Stewart and S. Ghali. A complete treatment of D1 discontinuities in a discontinuity mesh. In *GI 96 : Proceedings of Graphics Interface 96*, pages 122–131. Canadian Information Processing Society, 1996.
- [112] T. Tanaka and T. Takahashi. Fast analytic shading and shadowing for area light sources. *Computer Graphics Forum*, 16(3) :231–240, 1997.
- [113] S. J. Teller. Computing the antipenumbra of an area light source. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 92*, pages 139–148. ACM Press, 1992.
- [114] S. J. Teller. *Visibility Computations in Densely Occluded Polyhedral Environments*. PhD thesis, UC Berkeley, California, 1993.
- [115] S. J. Teller and P. M. Hanrahan. Global visibility algorithms for illumination computations. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 93*, pages 239–246. ACM Press, 1993.

- 
- [116] S. J. Teller and M. E. Hohmeyer. Computing the lines piercing four lines. Technical report, University of California, Berkeley, 2000.
- [117] R. Thom. Les singularités des applications différentiables. *Annales Institut Fournier*, 6 :43–87, 1956.
- [118] J. R. Wallace, M. F. Cohen, and D. P. Greenberg. A two-pass solution to the rendering equation : A synthesis of ray tracing and radiosity methods. *Computer Graphics*, 21(4) :311–320, 1987.
- [119] L. R. Wanger. The effect of shadow quality on the perception of spatial relationships in computer generated images. *Computer Graphics*, 25(2) :39–42, 1992.
- [120] L. R. Wanger, J. A. Fewerda, and D. P. Greenberg. Perceiving spatial relationships in computer-generated images. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(3) :44–58, 1992.
- [121] R. Wein, E. Fogel, B. Zukerman, and D. Halperin. 2D Arrangements. In CGAL Editorial Board, editor, *CGAL User and Reference Manual*. 3.3 edition, 2007.
- [122] H. Whitney. On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. mappings of the plane onto the plane. *Annals of Mathematics*, 62(3) :374–410, 1955.
- [123] T. Whitted. An improved illumination model for shaded display. *Communication of the ACM*, 23(6) :343–349, 1980.
- [124] A. Wiernik and M. Sharir. Planar realizations of nonlinear Davenport-Schinzel sequences by segments. *Discrete and Computational Geometry*, 3 :15–47, 1988.
- [125] L. Williams. Casting curved shadows on curved surfaces. In *Computer Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 78)*, pages 270–274. ACM Press, 1978.
- [126] A. Woo, P. Poulin, and A. Fournier. A survey of shadow algorithms. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 10(6) :13–32, 1990.
- [127] C. Wyman and C. Hansen. Penumbra maps : Approximate soft shadows in real-time. In *Rendering Techniques 2003 (14th Eurographics Symposium on Rendering)*. ACM Press, 2003.
- [128] H. R. Zatz. Galerkin radiosity : a higher order solution method for global illumination. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 93*, pages 213–220. ACM Press, 1993.
- [129] L. Zhang, H. Everett, S. Lazard, C. Weibel, and S. Whitesides. On the size of the 3D visibility skeleton : Experimental results. In *Proceedings of the Sixteenth Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2008)*, 2008. To appear.



## Résumé

Pour le calcul d'ombres en informatique graphique, il est courant de s'intéresser à la *vue* qu'un observateur a d'une scène géométrique. En particulier, il est important de caractériser les changements structurels, appelés *événements visuels*, qui se produisent dans cette vue lorsque l'observateur se déplace. En se basant sur la définition combinatoire de la vue proposée par Gigus et Malik et la classification des événements visuels qui en découle, de nombreux travaux se heurtent à des problèmes de complexité en temps et en espace. C'est notamment le cas de la méthode du maillage de discontinuités. Nous suggérons donc une approche nouvelle qui repose sur la remise en cause de cette notion de vue.

Pour un ensemble d'objets convexes disjoints, nous proposons une définition topologique de la vue qui fait la part belle aux silhouettes visibles des objets de la scène et nous caractérisons géométriquement les lieux où se produisent les événements visuels. Nous utilisons cette caractérisation pour proposer une méthode qui permet d'extraire les limites entre lumière et pénombre et entre ombre et pénombre dans une scène éclairée par des sources surfaciques. Nous arrivons ainsi à réduire considérablement la taille des objets intermédiaires utilisés pour la construction des limites entre les régions.

De plus, nous démontrons les premières bornes théoriques non triviales sur la complexité des limites entre lumière et pénombre ainsi qu'entre ombre et pénombre.

**Mots-clés:** Géométrie algorithmique, informatique graphique, événements visuels, synthèse d'ombres.

## Abstract

To compute shadows in computer graphics, it is common to be interested in the *view* of a geometric scene by an observer. Particularly, it is important to characterize the structural changes, called *visual events*, taking place in the view when the observer moves. Based on the combinatorial definition of view introduced by Gigus and Malik and the associated classification of visual events, many studies suffer from time and space complexity problems. For example, it is the case of discontinuity meshing. Thus, we suggest a new approach which relies on a questioning about this notion of view.

For a set of pairwise disjoint convex objects, we propose a topological definition of view emphasizing the visible silhouettes of objects in the scene and we geometrically characterize the locus where those visual events take place. We use this characterization to propose a method to extract boundaries between full light and penumbra and between penumbra and umbra in a scene lit by area light sources. We manage to strongly reduce the size of intermediate objects in use to build the limits between those regions.

Furthermore, we prove the first non trivial theoretical bounds on the complexity of the limits between full-light and penumbra and between penumbra and umbra.

**Keywords:** Computational geometry, computer graphics, visual events, shadow computation

